



UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Tesis Doctoral

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS DE PRIMARIA

Carmen Gloria Aguayo Arriagada

Granada, 2018

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Carmen Gloria Aguayo Arriagada
ISBN: 978-84-1306-064-4
URI: <http://hdl.handle.net/10481/54625>



UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Tesis Doctoral

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS DE PRIMARIA

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección del Doctor Pablo Flores Martínez y del Doctor Antonio Javier Moreno Verdejo, ambos del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que presenta Carmen Gloria Aguayo Arriagada para optar al grado de Doctor en el programa de Doctorado de Ciencias de la Educación.

Fdo. Carmen Gloria Aguayo Arriagada

V^oB^o de los Directores

Fdo. Pablo Flores Martínez
Verdejo

Fdo. Antonio Javier Moreno

El trabajo de tesis doctoral se realizó dentro del Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada, del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM-193), en la línea de investigación Formación del Profesorado de Matemáticas. En el marco del proyecto CODAME (Competencia Didáctica del Profesor y Aprendizaje de conceptos matemáticos escolares), financiado por el Programa Sectorial de Promoción General del Conocimiento (EDU2015-70565-P).

La autora fue becaria del Programa BECAS CHILE de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) del Gobierno de Chile. Beca CONICYT PFCHA 72150396.

A mis padres y mi hija

Agradecimientos

“EL AGRADECIMIENTO ES LA MEMORIA DEL CORAZÓN” Lao Tsé

Quiero expresar mis agradecimientos a todas aquellas personas que contribuyeron a que esta tesis doctoral sea una realidad, son muchos los que durante todo este proceso estuvieron muy cerca dándome su apoyo incondicional.

A mis tutores Pablo y Antonio, por permitirme trabajar con ellos y compartir su sabiduría en todo momento, no solo en el ámbito académico si no también personal. Gracias por su paciencia, tiempo de dedicación, palabras de ánimo y sobre todo por confiar en mí.

A todos los integrantes del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que desde un principio, en mi participación en una pasantía, ya hace 10 años, me incentivaron a través de su sapiencia a conocer este mundo tan interesante de la Didáctica de la Matemática, que luego continuó con el máster. Muchas gracias a todos.

A la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) del Gobierno de Chile, por la beca otorgada para seguir mis estudios.

A toda mi familia, que a pesar de estar lejos siempre los sentí muy cerca, dándome ánimo y apoyándome en todo momento. A mis padres quienes son mi ejemplo de lucha y tesón para salir adelante con todo. A mi hija quien es mi pilar y motivación principal, esto es por ustedes, los quiero muchísimo.

A todos mis amigos por su ayuda incondicional, sin ellos este camino hubiera sido mucho más difícil, en especial a Juan, Eder, Rommy, Danilo y Felipe que siempre estuvieron ahí para tenderme una mano y ayudarme en lo que fuese necesario, muchas gracias por su tiempo.

A aquellos que estuvieron presentes cuando comencé este proceso y me incentivaron a seguir adelante, Ely, Marlene, Ángel, José Antonio, muchas gracias.

Son muchas las personas que durante este tiempo he conocido, Rodolfo, Guisse, Karen, Nico, Don Rafa, Señora Ana, Raquel, Carlos, entre muchos otros. El compartir momentos de celebración, despedidas, fiestas y paseos han contribuido en esa compañía que es necesaria. Especialmente a ti, Cecilio quien la vida se encargó de ponerte en mi camino en el momento justo, gracias por tu apoyo.

Finalmente,

“GRACIAS A LA VIDA QUE ME HA DADO TANTO” (Violeta Parra)

Tabla de contenidos

Presentación.....	18
Capítulo 1. Planteamiento de la investigación	23
1.1 Área problemática.....	24
1.1.1. Formación inicial en educación matemática de maestros de primaria.....	26
1.1.2. Tareas de formación	31
1.1.3. Contenido matemática: La división en primaria	44
1.2. El problema de investigación.....	49
1.2.1. Pertinencia de la investigación.....	50
1.2.2. Líneas de investigación en las que se enmarca el estudio.....	51
1.2.3. Objetivo general y específico de la investigación.....	51
Capítulo 2. Marco de referencia de la investigación.....	56
2.1. El análisis didáctico como modelo de formación	56
2.1.1. Conocimientos matemáticos del maestro de primaria	57
2.1.2. Modelos de formación.....	62
2.1.3. Modelo del grupo de investigación Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico (PNA) de la Universidad de Granada.....	66
2.2. El análisis didáctico como herramienta para la planificación de unidades didáctica	70
2.2.1. Análisis de contenido	71
2.2.2. Análisis cognitivo.....	75
2.2.3. Análisis de instrucción	79
2.3. El análisis didáctico como metodología de investigación	80
Capítulo 3. Metodología	86
3.1. Tipo de investigación.....	86
3.2. Investigación de diseño.....	86
3.3. Contexto y sujetos.....	88
3.4. Descripción del experimento de enseñanza	89
3.4.1. Fase de diseño	89
3.4.2. Fase de experimentación	93
3.5. Tratamiento de los datos recogidos para el análisis.....	105
3.5.1. Instrumentos de análisis	106
3.5.2. Preparación para el análisis de los datos	106

3.5.3. Variables de análisis	107
Capítulo 4. Resultados	114
4.1. Estudio de la fase 1. Descripción de las producciones del análisis de contenido y cognitivo	114
4.1.1. Descripción del trabajo de análisis de contenido	115
4.1.2. Descripción del trabajo de análisis cognitivo.....	125
4.2. Estudio de la fase 2. Comparación entre los trabajos de análisis de contenido y cognitivos en el segundo ciclo del experimento de enseñanza y los elaborados para el trabajo final del curso	133
4.2.1. Comparación de los Análisis de Contenido	134
4.2.2. Comparación de los Análisis Cognitivo.....	141
4.3. Estudio de la Fase 3. Elementos del Análisis Didáctico en las sesiones de la unidad didáctica	148
4.3.1. Análisis de Contenido	148
4.3.2. Análisis Cognitivo.....	161
Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones	172
5.1. Conclusiones del estudio retrospectivo.....	172
5.1.1. Análisis de contenido	172
5.1.2. Análisis cognitivo.....	174
5.2. Conclusiones sobre los objetivos de investigación.....	177
5.3. Limitaciones del estudio	178
5.4. Perspectivas para el avance de la investigación.....	179
Referencias	180
Índice de anexos digitales.....	194

Índice de Figura

Capítulo 1

<i>Figura 1.1.</i>	El proceso de planificación	36
<i>Figura 1.2.</i>	Ubicación de la investigación en relación a los elementos definidos	49

Capítulo 2

<i>Figura 2.1.</i>	Elementos de relación con el análisis didáctico	56
<i>Figura 2.2.</i>	Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza MKT	58
<i>Figura 2.3.</i>	El cuarteto del conocimiento (The knowledge quartet – KQ)	59
<i>Figura 2.4.</i>	Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge – MTSK)	60
<i>Figura 2.5.</i>	Proceso cíclico del Análisis Didáctico	68
<i>Figura 2.6.</i>	Proceso de desarrollo la asignatura “Diseño y desarrollo del currículo de matemática en Educación Primaria.....	70
<i>Figura 2.7.</i>	Dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar	71
<i>Figura 2.8.</i>	Representación gráfica de la operación de la división en un libro de texto	73
<i>Figura 2.9.</i>	Esquema del análisis cognitivo	76
<i>Figura 2.10.</i>	Componentes de la noción de objetivo	78
<i>Figura 2.11.</i>	Fases en el análisis didáctico	81
<i>Figura 2.12.</i>	Fases en el análisis didáctico del ámbito investigativo	82

Capítulo 3

<i>Figura 3.1.</i>	Estructura de una investigación de diseño	87
<i>Figura 3.2.</i>	Estructura general del experimento de enseñanza	91
<i>Figura 3.3.</i>	Esquema de la fase de experimentación del experimento de enseñanza	93
<i>Figura 3.4.</i>	Estructura del análisis de los datos	107

Capítulo 4

<i>Figura 4.1.</i>	Relación entre experimento de enseñanza, fases en el análisis didáctico y fases de análisis retrospectivo de datos	114
<i>Figura 4.2.</i>	Ejemplo del sistema de representación gráfico para el foco conceptual resta sucesiva	118
<i>Figura 4.3.</i>	Tabla de doble entrada con modelos de sistemas de representación del grupo G3	119
<i>Figura 4.4.</i>	Modelo del sistema de representación gráfico del grupo G4 ...	120
<i>Figura 4.5.</i>	Modelos gráficos del grupo G5	121
<i>Figura 4.6.</i>	Ejemplo de tipo de problema del grupo G3	123
<i>Figura 4.7.</i>	Fragmento de tabla sobre limitaciones del grupo G6	133
<i>Figura 4.8.</i>	Tabla del contexto curricular del grupo G5	136

<i>Figura 4.9.</i>	Sistema de representación gráfico grupo G2	138
<i>Figura 4.10.</i>	Ejemplo de tipo de problema del grupo G4	140
<i>Figura 4.11.</i>	Ejemplo de focos conceptuales expuestos antes del desarrollo de la sesión del grupo G4	149
<i>Figura 4.12.</i>	Ejemplo de tarea en la sesión 6 del grupo G1	149
<i>Figura 4.13.</i>	Ejemplo de tarea de la sesión 6 del grupo G4	152
<i>Figura 4.14.</i>	Ejemplo de tarea del grupo G5	153
<i>Figura 4.15.</i>	Tarea de la sesión 1 del grupo G1	154
<i>Figura 4.16.</i>	Ejemplo de sistema de representación gráfico del grupo G1	155
<i>Figura 4.17.</i>	Ejemplo de representación gráfica del grupo G2	156
<i>Figura 4.18.</i>	Ejemplo de representación gráfica y simbólica del grupo G3	157
<i>Figura 4.19.</i>	Ejemplo de representación gráfica del grupo G4	158
<i>Figura 4. 20.</i>	Ejemplo de problema grupo G5	159

Índice de Tablas

Capítulo 1

Tabla 1.1.	<i>Aspectos, variables y dimensiones con las que organizan las respuestas</i>	43
Tabla 1.2.	<i>Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa</i>	45

Capítulo 2

Tabla 2.1.	<i>Actividades propuestas en diferentes momentos metodológicos</i> ...	65
Tabla 2.2.	<i>Relación del análisis didáctico con las asignaturas del Grado de Educación Primaria</i>	69
Tabla 2.3.	<i>Niveles de objetivos en el currículo</i>	77

Capítulo 3

Tabla 3.1.	<i>Nombre de los grupos en el informe y temas que desarrollaron</i>	89
Tabla 3.2.	<i>Planificación general de los ciclos del experimento de enseñanza.</i>	92
Tabla 3.3.	<i>Variables de análisis</i>	108

Capítulo 4

Tabla 4.1.1.	<i>Cantidad de verbos y su relación con los objetivos</i>	129
Tabla 4.1.2.	<i>Caracterización cognitiva de los verbos empleados para las capacidades por cada grupo</i>	129
Tabla 4.1.3.	<i>Variables de especificidad conceptual. Términos claves y frecuencias</i>	130
Tabla 4.1.4.	<i>Coincidencia de los elementos del contenido en los objetivos planteados en el análisis cognitivo</i>	131
Tabla 4.2.1.	<i>Estructura conceptual de análisis de contenido durante la fase 2.</i>	135
Tabla 4.2.2.	<i>Recuento de verbos que expresan las capacidades en los objetivos planteados por cada grupo</i>	145
Tabla 4.2.3.	<i>Frecuencias de verbos cognitivos, de instrucción y las coincidencias de ambos en un mismo objetivo</i>	145
Tabla 4.2.4.	<i>Comparación de los elementos de capacidad en la fase 1 y fase 2</i>	145
Tabla 4.2.5.	<i>Variables de especificidad conceptual. Términos claves y frecuencias</i>	146
Tabla 4.2.6.	<i>Comparación de los elementos del contenido en la fase 1 y 2</i>	147
Tabla 4.2.7.	<i>Coincidencia de los elementos del contenido en los objetivos planteados en la unidad didáctica</i>	147
Tabla 4.3.1.	<i>Cantidades de objetivos y verbos que expresan capacidades</i>	166
Tabla 4.3.2.	<i>Cantidad de verbos según la clasificación cognitiva</i>	166
Tabla 4.3.3.	<i>Comparación de los elementos de capacidad en la fase 1, y fase 2 y fase 3</i>	167
Tabla 4.3.4.	<i>Variables de especificidad conceptual. Términos clave y frecuencias</i>	167
Tabla 4.3.5.	<i>Porcentaje de cada uno de los elementos del contenido en las tres fases de análisis de datos</i>	168

Tabla 4.3.6.	<i>Coincidencia de los elementos del contenido en los objetivos planteados en las sesiones de la unidad didáctica</i>	168
Tabla 4.3.7.	<i>Porcentaje de presencia de las situaciones en el total de objetivos planteados por todos los grupos en las tres fases</i>	169

Presentación

La línea de investigación sobre la Formación de Profesores de Matemáticas se preocupa de varios aspectos que tienen que ver con el desarrollo profesional y uno de ellos es la formación inicial, si bien existen muchas investigaciones en esta área, es importante ir delimitando los temas de interés. En esta investigación nos enmarcamos en la formación inicial de maestros de primaria y más específico en los modelos de formación, es decir, nos interesa saber cómo se están formando los futuros maestros de primaria para poder detectar cómo desarrollan su conocimiento al poner en juego un modelo específico de formación.

Para efecto de esta investigación, nos centramos en examinar un grupo de estudiantes para maestros del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada, en la asignatura “Diseño y desarrollo del currículum de Matemáticas en la Educación Primaria”, en donde se les proporcionan herramientas para la planificación de unidades didácticas, con base en el Análisis Didáctico. Por lo tanto, nos interesa examinar cómo los futuros maestros toman en cuenta los elementos tratados durante la instrucción para ponerlos en juego cuando planifican una unidad didáctica sobre el contenido matemático de la división de naturales, siendo este nuestro objetivo general de investigación.

Este estudio se realiza dentro del Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en la línea de trabajo “Formación de Profesores de Matemática”.

Estructuramos el escrito en cinco capítulos. En el capítulo 1 profundizamos sobre la formación inicial de maestros de primaria en el área de matemática, las tareas de formación, ahondando en la planificación y la formulación de objetivos, siendo este último un tema que realzamos. También justificamos la elección de trabajar con el contenido matemático escolar de la división, concretando de esta forma nuestras áreas problemáticas. Se continúa con el problema de investigación, la pertinencia del estudio, el estado de la cuestión para finalizar con el objetivo general y sus respectivos objetivos específicos.

El capítulo 2 se enfoca en el “Análisis Didáctico”, que comenzó con los trabajos de Rico (1997a, 1997b) y es hoy en día un referente teórico dentro del grupo de investigación en donde se enmarca este trabajo. Por consiguiente, nos centraremos en este marco teórico visto desde tres perspectivas: modelo de formación, herramienta de planificación y como metodología de investigación.

Al explicar el análisis didáctico como modelo de formación, entendiendo este como un proceso en el que se ejecutan acciones para desarrollar el conocimiento de futuros maestros, se hizo necesario profundizar sobre cuál es ese conocimiento, en consecuencia, hicimos una revisión sobre diferentes modelos del conocimiento planteado por grupos de investigación que definen qué debe saber un profesor de matemáticas. Seguido de esto, nos interesó conocer otros modelos de formación, para finalmente centrarnos en ver cómo

el grupo de investigación «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico», articula, diseña y propone un proceso de instrucción basado en la profundización matemática y didáctica de los contenidos escolares, desde una perspectiva funcional, es decir, para contribuir al desarrollo de una las capacidades esenciales de un profesor, como es planificar. Todo esto engloba las ideas que definen al análisis didáctico.

El análisis didáctico como herramienta para planificar unidades didácticas, está compuesto de cuatro análisis, el conjunto de ellos permite a los maestros tener una visión global de un tema matemático, desde el conocimiento profundo del contenido matemático (análisis de contenido), el conocimiento de los aspectos cognitivos relativos al aprendizaje de dicho contenido (análisis cognitivo), el conocimiento de la enseñanza del contenido (análisis de instrucción) y la evaluación de los aprendizajes y de la acción llevada a cabo (análisis evaluativo). Los tres primeros servirán para planificar unidades didácticas y por ende crear secuencias de tareas matemáticas escolares. En el capítulo 2, todo este proceso lo vamos ejemplificando con el contenido matemático escolar de la división de números naturales.

Finalmente, en este capítulo apreciamos cómo el análisis didáctico contribuyen como metodología de investigación, por una parte para que los investigadores profundicen didácticamente el contenido matemático escolar a enseñar, pero también cómo los elementos de dicho análisis ayudan a definir y precisar categorías e indicadores para aproximarse a la comprensión de las concepciones que tienen los futuros maestros de primaria sobre los componentes que se han trabajado en el curso, para planificar unidades didácticas.

En el capítulo 3 exponemos la fundamentación y procedimientos metodológicos que sustentan nuestra investigación. Nos decantamos por el paradigma de la investigación de diseño, describiendo en detalle las etapas que sigue un experimento de enseñanza, lo que da lugar al estudio empírico de nuestra investigación. Además, caracterizamos la investigación a partir de los siguientes elementos: fuentes e instrumentos de recogidas de datos, el tratamiento de estos y el análisis y la codificación de la información.

El capítulo 4 presenta y describe los resultados del análisis de las producciones que elaboraron los futuros maestros durante el proceso de instrucción, las cuales fueron: el análisis de contenido, el análisis cognitivo y la unidad didáctica del tema matemático escolar la división de naturales. El modo en que llevamos a cabo dicho análisis se organizó en fases. En la primera describimos y analizamos los dos primeros trabajos, en la segunda se hizo un análisis comparativo entre estos mismos apartados de la unidad didáctica y las dos primeras producciones. Y en la tercera fase se analizó cada una de las sesiones de la unidad didáctica, identificando los elementos que se tomaron en cuenta de los análisis de contenido y cognitivo en las tareas matemáticas diseñadas.

Los resultados del análisis permiten caracterizar las concepciones que tienen los futuros maestros de primaria sobre los elementos trabajados durante el curso para planificar unidades didácticas; por medio del análisis retrospectivo que implica el experimento de enseñanza validamos la conjetura planteada al inicio del diseño de estudio.

En el capítulo 5 exponemos las conclusiones referentes al estudio y examinamos el logro de los objetivos de la investigación. En resumen hemos apreciado que los futuros

maestros logran profundizar en los significados del contenido de la división y en los aspectos cognitivos respecto al aprendizaje de dicho contenido, pero estos conocimientos que adquieren en la instrucción, no se ven plasmados en su totalidad en la planificación de unidades didácticas. Interpretamos que el análisis didáctico les proporciona herramientas a los estudiantes para maestros, permitiéndoles tener un mayor abanico de conocimientos, lo que les ayudará a enfrentar situaciones en su labor docente, pero sólo algunos de sus elementos repercuten en el diseño de unas tareas matemáticas escolares que, si bien pretenden en gran medida alcanzar objetivos derivados de dicho análisis, se ven dificultadas por prácticas habituales centradas en procedimientos, más que en comprensión.

Los resultados enfocados en la unidad didáctica, ponen de manifiesto que el contenido de la división y las tareas son los elementos más relevantes para los futuros maestros al planear un proceso de enseñanza y aprendizaje; proponen tareas más enriquecidas a partir de las referencias de los libros de textos.

Se cierra el capítulo enunciando las limitaciones del estudio y las perspectivas para el avance de la investigación.

El escrito finaliza con las referencias empleadas en el desarrollo del estudio y los anexos se adjuntan en un disco compacto.

Capítulo 1

Planteamiento de la investigación

Índice del capítulo

- 1.1 Área problemática
 - 1.1.1 Formación inicial en educación matemática de maestros de primaria
 - 1.1.2 Tareas de formación
 - 1.1.2.1 Planificación de unidades didácticas
 - 1.1.2.2 Planteamiento de objetivos
 - 1.1.3 Contenido matemático: La división en primaria
- 1.2 El problema de investigación
 - 1.2.1 Pertinencia de la investigación
 - 1.2.2 Líneas de investigación en las que se enmarca el estudio
 - 1.2.3 Objetivo general y específico de la investigación

Planteamiento de la investigación

“Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos” es el cuarto objetivo de la resolución aprobada por la Asamblea General de la ONU el 25 de septiembre de 2015, Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible. De este objetivo se especifican 10 metas, entre las cuales queremos destacar:

1) De aquí a 2030, asegurar que todas las niñas y todos los niños terminen la enseñanza primaria y secundaria, que ha de ser gratuita, equitativa y de calidad y producir resultados de aprendizajes pertinentes y efectivos.

2) De aquí a 2030, aumentar considerablemente la oferta de docentes cualificados, incluso mediante la cooperación internacional para la formación de docentes en los países en desarrollo, especialmente los países menos adelantados y los pequeños estados insulares en desarrollo. (ONU, 2015)

Estos planteamientos muestra la preocupación constante a nivel mundial sobre la educación y los nuevos desafíos que involucran a todos los agentes que participan en esta. Al analizar estos objetivos nos damos cuenta de que el profesor juega un rol bastante importante para su desarrollo. Por un lado se incentiva la formación profesional de calidad que está estrechamente relacionada con las posibilidades de brindar oportunidades de aprendizaje que generen resultados pertinentes y efectivos. Ahora bien, si durante los próximos 15 años se pretenden lograr estos objetivos, no podemos dejar de lado a las nuevas generaciones de profesores que deberían tener una formación inicial encaminada y enfocada hacia dicho fin.

Nuestra investigación va en esta línea ya que nos centraremos en la formación inicial de maestros de primaria en el área de matemática, enfatizando la influencia del proceso formativo para la planificación de unidades didácticas sobre contenidos específicos del currículo, donde se pueden ver reflejadas oportunidades de aprendizaje de calidad. A continuación presentamos el área problemática, profundizando en cada uno de los temas que nos competen. También explicaremos el problema y la pertinencia de la investigación, para finalizar con los objetivos que nos planteamos.

1.1 Área problemática

Actualmente la Didáctica de la Matemática está consolidada como disciplina científica, Rico y Sierra (2000) expresan que es la que se ocupa de “indagar metódica y sistemáticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas así como los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos” (p. 80). Rico (2012) hace mención a que las investigaciones en Didáctica de la Matemática no solo cubren los estudios realizados en el aula, basándose en el trabajo y experiencia de los

profesores en ejercicio para respaldar el desarrollo del currículo, sino que abarcan una gran variedad de temas que se han delimitado en tres campos:

“Un primer campo, el curricular, se centra en la transmisión del conocimiento y en su evaluación, es decir, estudia los problemas derivados de la enseñanza, aprendizaje y valoración de las matemáticas en el medio escolar.

Un segundo campo, el profesional, contempla la formación, preparación, actuación y desarrollo de quienes asumen la responsabilidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El tercer campo, el científico, considera la actividad de fundamentación, teorización y experimentación que permite interpretar, predecir y actuar sobre los fenómenos derivados de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. (p. 54).

El área problemática de esta investigación se centra en el segundo campo, que se ha afianzado en los últimos años como línea de investigación, debido a su creciente interés y actividad investigativa. Diferentes trabajos plantean la diversidad de problemáticas que subyacen de la formación de profesores de matemática (Cardeñoso, Flores y Azcarate, 2001; Gómez, 2005; Gutiérrez, 2009; Rico 2012; Sánchez, 2011). Dicha situación es avalada por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática, quienes en el 15th ICMI Study de 2005 se centraron en la Educación Profesional y el Desarrollo de Maestros de Matemáticas. También diferentes congresos internacionales ponen en la palestra esta línea de investigación (ICME, PME, CERME, CIBEM). Recientes publicaciones de impacto son los cuatro tomos del "International Handbook of Mathematics Teacher Education" (Jaworski y Wood, 2008; Sullivan y Wood, 2008; Tirosh y Wood, 2008; Krainer y Wood, 2008). En cada uno se plantean temas que están relacionados con la formación de profesores de matemáticas, partiendo del conocimiento del profesor y desarrollo de la enseñanza, seguido de las herramientas y procesos en la formación, para finalizar con el educador de maestros de matemática.

A nivel nacional la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) establece dentro de sus grupos de trabajo aquel que se interesa por el Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas, que junto con diferentes grupos de investigación de Universidades españolas (Alicante, Huelva, Sevilla, Granada, Barcelona, ...) aportan evidencias empíricas y teóricas, como se aprecia en las ponencias de Sánchez, Bosch y Gascón, Civil y Oliveira, (SEIEM de Santander, 2009), de Llinares, Flores, Azcárate y Ponte en (SEIEM de Coruña, 2004), Sánchez, (SEIEM Huelva, 2001), entre otras.

Lo señalado anteriormente evidencia que hasta la fecha existe una gran cantidad de investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas. Sánchez (2011) hace una revisión de la literatura más influyente en los últimos años en este campo, dividiendo sus aportes en tres categorías:

“(a) preocupaciones de investigación, que son aquellas áreas de interés que se están investigando actualmente; (b) conceptos teóricos, que son aquellos conceptos más utilizados en esta línea de investigación; y (c) nuevas tendencias, que son las nuevas áreas emergentes que se están investigando” (p.133).

Dentro de la primera categoría los temas que son más recurrentes en las investigaciones actuales son: creencias, opiniones y concepciones de los maestros, prácticas de los maestros, conocimientos y habilidades de los maestros y la relación entre la teoría y la práctica. En cuanto a las nuevas tendencias Sánchez manifiesta que los temas son: la formación "on line" de profesores de matemática, el diseño y el papel de las tareas en la formación de docentes de matemáticas, la formación y el desarrollo de formadores de maestros de matemáticas y justicia social en la investigación de la educación docente en matemáticas.

Nuestra investigación se enmarca en la línea de formación de profesores de matemática y nos centraremos en unos de los nuevos temas emergentes, "el diseño y el papel de las tareas en la formación de docentes de matemáticas", específicamente en el contexto de la formación inicial de maestros de primaria.

1.1.1. Formación inicial en educación matemática de maestros de primaria.

La educación matemática en los niveles de primaria siempre se ha visto cuestionada por los resultados obtenidos en diferentes pruebas estandarizadas las cuales miden las habilidades y conocimientos de los estudiantes en este nivel educativo. En el ámbito internacional, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) desde el año 2000 comenzó con la aplicación de la prueba PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes) que se enfoca en la evaluación del rendimiento del estudiante en lectura, matemáticas y ciencias. También la Asociación Internacional para la Evaluación (IEA), desde 1995, comenzó con la aplicación de la prueba TIMSS (Tendencias en el Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias), si bien ambas pruebas miden cosas diferentes, TIMSS se basa en el currículo centrándose en los contenidos y PISA avalúa categorías de contenido que van más allá del currículo, enfatizando la aplicación de habilidades en problemas de la vida real, ambas han ayudado a los diferentes países donde se aplican, a hacer un análisis de sus resultados para identificar las falencias en sus sistemas educativas y más específicamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En España, en el año 2009 se aplicó la evaluación general de diagnóstico en 4º grado de primaria, siendo uno de sus objetivos obtener datos representativos del grado de desarrollo de las competencias básicas en diferentes áreas, entre ellas las matemáticas.

Los resultados de las evaluaciones mencionadas no han sido los deseados y ponen de manifiesto deficiencias de los alumnos de primaria. Este panorama ha hecho centrar la atención en los maestros, siendo uno de los agentes más influyentes en la formación de los alumnos y los que generan las oportunidades para aprender matemáticas (Blanco, 2002; Even y Ball, 2009). La relación entre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas puede verse influenciado por varios factores, siendo uno de ellos la escasa y deficiente preparación del profesorado de Primaria en el área de Matemáticas (Rico, 2000). Esto ha llevado a muchos investigadores a centrar su preocupación en el conocimiento de los futuros maestros y su estrecha relación con las oportunidades de aprendizaje que se genera en la formación inicial. Es así que en el ICMI 15 (2005) uno de los focos de atención fue el describir las características que tienen los programas y planes de estudio de las instituciones a cargo de este proceso en diferentes países. Gómez (2005) hace un resumen de los trabajos presentados concluyendo que "existe una gran variedad de contextos, modelos y esquemas para la formación de profesores de matemática en el mundo" (p.

247), pero existe una preocupación común que apunta a la relación e integración entre los conocimientos matemáticos, pedagógicos y didácticos.

Esta problemática se pone en evidencia en el año 2008 con el primer estudio internacional comparativo Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M) llevado a cabo por la Asociación Internacional para la Evaluación (IEA), donde se examinó cómo diferentes países preparan a sus maestros para enseñar matemáticas en las escuelas primarias y secundarias, reuniendo información sobre las características de las instituciones de educación docente, los programas y los planes de estudio, y también sobre el conocimiento y creencias de los futuros maestros sobre las matemáticas y el aprendizaje de las matemáticas.

España centró su participación en la formación inicial de maestros de Primaria y las características de los programas y planes de formación que fueron analizados estaban bajo el amparo de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) aprobada en 1990. Por lo tanto, los resultados del estudio TEDS-M sirvieron para valorar lo que se estaba haciendo hasta la fecha y para tomar decisiones sobre los diseños de los nuevos programas de formación (Rico, Gómez y Cañadas, 2014), ya que en el momento de la aplicación de dicho estudio las universidades españolas se encontraban en un proceso de cambio que se venía gestando desde el año 1999, con la firma de la Declaración de Bolonia, que ratificaba la importancia de un desarrollo armónico de un Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), que debía estar establecido para el 2010 (García y Lorente, 2014).

Toda esta situación, desde los resultados del estudio TEDS-M hasta los nuevos programas y planes de estudio para la formación inicial de los maestros de primaria, es un referente importante en nuestra investigación, puesto que nos permite tener un panorama de la evolución de dicha formación en los últimos 20 años en España. Es importante destacar que si bien los resultados del estudio TEDS-M en relación a los programas y planes de formación permitieron tener una visión de qué se estaba haciendo en las instituciones encargadas de este proceso, cómo era su organización y cuáles eran sus enfoques, a modo general se evidenció la diversidad existente entre los diferentes países participantes. Un aporte importante del estudio TEDS-M es el estímulo a que los diferentes países hagan sus propios análisis a nivel nacional.

En el caso de España, Rico, Gómez y Cañadas (2014) se basaron en estos datos para describir la estructura y el contenido de los programas académicos de formación de maestros de primaria en educación matemática, de las 48 instituciones participantes. Manifiestan que:

“los programas españoles de formación inicial de maestros para la enseñanza de las matemáticas, si bien son diferentes entre las instituciones, mantienen una estructura curricular común que se observa en los diferentes niveles analizados. Los resultados de este estudio evidencian la necesidad de poner mayor énfasis en la formación inicial sobre didáctica de la matemática y sobre matemáticas escolares” (p. 36).

Esta situación que se daba en la formación inicial de maestros de primaria bajo la LOGSE era evidenciada con anterioridad en diversos momentos. En la investigación de Abraira y colaboradores (1997), se analizaron los planes de estudio de sesenta y nueve Centros de

Formación Inicial de Maestros, calculando una media de 13,5 créditos troncales y obligatorios en asignaturas relacionadas con las Matemáticas, “lo que resulta un 6,4% de los créditos totales” (Blanco, 2001, p. 178). En el seminario "The training and performance of primary teachers in mathematics education", organizado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, en Madrid en octubre 1999, con participación de expertos en la formación de profesores de primaria de diferentes países europeos (Alemania, Holanda, Hungría, Suecia y España), cada uno de los cuales presentó un balance de cómo se llevaba a cabo la formación en esos países. en el caso de España el encargado de presentar la situación fue Luis Rico, haciendo mención que la duración de los estudios para profesores de primaria era de 3 años, existían cuatro titulaciones para ser maestros de primaria, una general y tres de especialidad (Lengua Extranjera, Educación Física y Educación Musical), lo que hacía que las disciplinas psicopedagógicas tuvieran mayor presencia en comparación con las que se refieren a la enseñanza y aprendizaje de las materias del currículo de primaria (Matemáticas, Lengua, Sociales y Plástica), por lo que en “la titulación de maestro de primaria general la formación en matemática y su didáctica apenas alcanzaba el 8% de la carga lectiva total, mientras que en el resto de las especialidades solo era del 2%” (Rico, 2000, p. 50).

Todos los antecedentes mencionados anteriormente ponían en evidencia la necesidad de hacer cambios y los mismos autores, expertos en educación matemática, denunciaban la deficiencia con que se estaban formando los futuros maestros en esta área, lo que repercutía directamente en el sistema escolar, ya que estos profesionales eran los que enseñarían matemática a los niños de primaria, y son los formados en estos planes los que actualmente siguen enseñando en las escuelas.

En la actualidad, luego de la incorporación al EEES de las universidades españolas, los nuevos programas y planes de formación, que empezaron a entrar en vigor en el año académico 2007-2008, buscaban unificar una estructura común (Grado, Máster y Doctorado) y una equivalencia en la medición académica, el Sistema Europeo de Transferencia de Créditos (ECTS), permite la movilidad de los estudiantes en toda la Unión Europea (Luzón et al., 2009). En el caso de los estudios de formación de Maestros su estructura se unifica en dos títulos: Grado de Educación Primaria y Grado de Educación Infantil.

Los cambios más significativos de la titulación de magisterio, centrándonos en el Grado de Educación Primaria son (siguiendo la descripción de García y Lorente, 2014):

- El aumento de un año académico, por lo que su duración ahora es de 4 años.
- El aumento a 240 créditos que se deben cursar obligatoriamente para la obtención del título, los cuales se distribuyen según se refleja en la tabla 1.1 del anexo 1. Estos nuevos créditos equivalen a 25 horas entre lecciones magistrales, ejercicios prácticos y tutorías.
- La exigencia de tener una acreditación del nivel B1 de una lengua extranjera para la obtención del título.
- Se incluyen las menciones que son módulos de especialización, incluidas dentro de la optatividad, pero el alumno que no desee optar a una mención podrá escoger materias optativas de distintas menciones.

Luego de estas modificaciones en el Grado de Maestro de Primaria, no se han desarrollado investigaciones a gran escala que aporten datos empíricos que nos permitan tener un panorama de la presencia y calidad de las matemáticas en estos nuevos programas de formación inicial. Encontramos un estudio comparativo a modo general de la formación inicial del profesorado en educación primaria y secundaria en Alemania, España, Finlandia, Francia y Reino Unido, realizado por Rebolledo (2015), quien analiza diferentes aspectos (modelo de formación; centros responsables de la formación; duración de los estudios; forma de acceso y requisitos previos; contenido curricular; formación práctica; y evaluación y acreditación de las enseñanzas) para tener un panorama europeo en relación a la formación inicial docente, luego de la puesta en marcha de la EEES. Concluye este estudio señalando que a pesar de los ideales formativos homogeneizadores, siguen existiendo diferencias en la formación inicial. Por ejemplo,

“en todos los países estudiados observamos algún tipo de formación práctica, aunque sus características varían en función de su planteamiento. Pueden ser prácticas institucionales, en el sentido de que constituyen una fase en el marco de los estudios universitarios, o, los cada vez más extendidos, períodos de prácticas para la iniciación a la profesión” (p.145).

Nuestra investigación está enmarcada en este contexto, ya que los sujetos que estudiamos se encontraban cursando el nuevo programa y planes de estudio del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada, por lo que consideramos interesante hacer mención a un trabajo realizado por Segovia y Roa (2018), donde analizan la evolución del contenido curricular de magisterio específicamente en el área de Didáctica de la matemática, describiendo las asignaturas de los planes de estudio de 1971 y 1991 llevadas a cabo por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, las cuales constituyen antecedentes de las actuales en el Grado en Educación Primaria. Mencionan que dicha evolución es debido a tres factores importantes: la experiencia docente del profesorado en esos planes durante más de cuarenta años, la investigación en el área que se desarrolla también durante esos años y la reflexión teórica que hacen esos profesores, fruto de la experiencia y la investigación y que queda plasmada en la publicación de multiplicidad de trabajos y especialmente en la edición de libros de texto para los maestros en formación.

Esta situación mencionada por Segovia y Roa (2018) se ve reflejada en la estructura del nuevo plan de estudios para el Grado en Educación primaria de la Universidad de Granada, que sigue las normativas establecidas en la ORDEN ECI/3857/2007, de 27 de Diciembre. Las materias de formación básica, obligatoria y optativas (estas últimas correspondientes a las menciones) tienen un total de 190 créditos y el practicum y trabajo de fin de grado los otros 50 créditos, para completar los 240 que se mostraron en la tabla 1.1 del anexo 1. Haciendo una revisión general de esta estructura, centrándonos en la carga lectiva que corresponde a los 190 créditos, la Universidad de Granada establece un módulo dentro de lo que atañe a la formación didáctico-disciplinar, llamado Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas que contempla en los tres primeros años las materias obligatorias de: Bases Matemáticas en la Educación Primaria, Enseñanza y Aprendizaje de la Matemáticas en la Educación Primaria y Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en la Educación Primaria, que completan un total de 22 créditos. En las materias optativas, una de las menciones que se ofertan en dicha universidad es

Profundización en el currículo básico, con una materia en Competencias matemáticas en Educación Primaria, de 6 créditos.

Esto nos permite poder establecer una comparación parcial y específica de la realidad actual de la Universidad de Granada en cuanto a la formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria, ya dentro de la EEES, con los datos mencionados anteriormente por Rico (2000), en la que apreciamos que hoy en día, del total de la carga lectiva de 190 créditos, 28 están destinados al área de Didáctica de la Matemática, que corresponde a un 14,7% del total, lo que significa un aumento de casi un 7 % en relación a lo mencionado por Rico (8% de la carga lectiva total), de los planes de formación anteriores.

Hasta el momento, basándonos en lo que plantean Cardeñoso, Flores y Azcarate (2001) sobre los problemas que afronta y los niveles en que se puede concretar la línea de investigación *Formación y Desarrollo de los profesores de Matemática*, nos hemos centrado en evidenciar algunos trabajos de los últimos años en una de sus aristas, que se refiere a los programas y planes de formación inicial (en nuestro caso de maestros de primaria), debido a que son la base donde se organizan las oportunidades de aprendizaje para desarrollar el conocimiento profesional de los futuros maestros, que es el centro de interés de nuestra investigación.

Antes de profundizar en las oportunidades de aprendizaje vistas como tareas de formación que detallaremos en el siguiente apartado, nos interesa indagar en la relación de los programas y planes de formación inicial con la adquisición del conocimiento de la matemática y su didáctica de los futuros maestros, planteándonos la siguiente pregunta: ¿Contribuye realmente lo que están haciendo las instituciones encargadas de la formación inicial de maestros de primaria en el área de matemática a que estos profesionales alcancen una preparación adecuada para enseñar a los niños? Para dar respuesta, nuevamente debido a su importancia, nos vamos a basar en los resultados del estudio TEDS-M, centrándonos en el tercer sub-estudio que muestran el nivel relativo de los conocimientos adquiridos por los futuros profesores de educación primaria españoles al final de su formación (recordar que España participó solamente en este nivel educativo).

Los resultados sobre el conocimiento matemático y didáctico de los 17 países participantes, presentados en el informe internacional de TEDS-M (Tatto et al., 2012), y en el informe nacional (INEE, 2012), se muestran agrupados en los cuatro grupos que se establecieron según el tipo de programa de formación inicial, quedando España en el grupo 2 (profesor generalista y alumnos hasta 12 años). En relación a una media internacional de 500 puntos, España obtuvo 481 en conocimiento matemático y 492 en conocimiento didáctico, siendo dentro de su grupo el país con segundo puntaje más bajo en ambos conocimientos. Utilizando estos resultados y teniendo como antecedentes los datos presentados anteriormente sobre los programas y planes de formación inicial en España al momento de aplicar la prueba, podríamos considerar que las instituciones encargadas de la formación inicial de maestros de primaria están contribuyendo de manera poco fiable al desarrollo de los conocimientos matemáticos y didácticos, por lo que estos profesionales al terminar la carrera se enfrenta a las salas de clases con bases deficientes para enseñar matemática a los niños. Lo que nos hace pensar que todo lo que venimos referenciado se transforma en un círculo vicioso, empezando por la *deficiencia*

de la matemática y su didáctica en la formación inicial, lo que contribuye a un *deficiente* conocimiento de los futuros maestros finalizando con los *deficientes* resultados de los alumnos de primaria en matemática.

Cabe destacar que con los resultados obtenidos en este tercer sub-estudio sucede lo mismo que en el sub-estudio de los planes de formación, puesto que ambos permiten tener una visión general de España en relación con los otros países participantes, pero su valor agregado es que se pueden hacer análisis internos y más detallados de la realidad nacional. Para el caso del conocimiento matemático y didáctico podemos mencionar los trabajos realizados por Gómez, Gutiérrez-Gutiérrez y Rico (Gutiérrez, Gómez y Rico, 2012; Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014; Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, 2014; Gutiérrez-Gutiérrez, Rico y Gómez, 2015; Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, 2016), Carrillo (2014), Sanz y Martín (2014). Estos trabajos concluyen de modo general, que el conocimiento matemático de los futuros maestros españoles varía según los contenidos en los distintos ciclos de los niveles educativos, por ejemplo, “manifestaron limitaciones para contenidos escolares correspondientes al primer ciclo de secundaria, en particular para el trabajo con los conceptos razón/proporción/porcentaje y la traducción de operaciones con fracciones sencillas en problemas verbales” (Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014, p. 108). En el caso del conocimiento didáctico existen carencias en cuanto al reconocimiento de los errores de los alumnos, modos de representaciones gráficas en el proceso de enseñanza y aprendizaje o reflexión sobre el contenido de las matemáticas escolares y su aplicación a la enseñanza (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, 2014).

Relacionando lo mencionado anteriormente sobre formación inicial y conocimiento en educación matemática, hemos encontrado investigaciones, tanto a nivel nacional como internacionales, en diferentes bases de datos (Scopus, ERIC, Scielo, Google académico, Redalyc) que ratifican la importancia investigativa sobre este tema. Debido a la gran cantidad de investigaciones encontradas, nos centramos en aquellas que trabajan con futuros maestros de primaria sobre el desarrollo, entendimiento, descripción o concepciones de su conocimiento, presentándolas en la tabla 1.2, del anexo 1, organizada por autores, tema de conocimiento, contenido matemático e instrumentos analizados.

Esta muestra de antecedentes evidencia que la línea de investigación sobre la formación de profesores de matemáticas es un tema de interés que sigue latente y en el que se están haciendo esfuerzos por buscar las mejores formas de entender *qué* debe saber un futuro maestro para enseñar matemática y *cómo* se debe desarrollar ese conocimiento en su formación inicial. De los trabajos mencionados queremos destacar la tesis doctoral de Wilson (2010), quien trabaja con futuros maestros de primaria en la planificación de la enseñanza de las matemáticas dentro de un modelo de formación, situación que se asemeja a nuestra investigación en las variables que considera, que detallaremos a continuación, como son las tareas formativas y la planificación de unidades didácticas.

1.1.2. Tareas de formación

El diseño y el papel de las tareas en la formación de docentes de matemáticas es un tema emergente dentro de la línea de investigación de formación de profesores (Sánchez, 2011). Uno de los tomos del pasado handbook sobre el profesor de matemáticas se dedica a las herramientas de formación (Tirosch y Woods, 2008), especialmente los casos, las

tareas y las investigaciones. También el libro *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (Clarke, Grevholm, y Millman, 2009) se centró en cómo las tareas son claves en la formación inicial y continua de profesores de matemática. Al hacer la revisión de las diferentes investigaciones que ahí se plasman podemos identificar que no existen modelos únicos de tareas formativas. Por ejemplo Lieberman (2009) describe un ciclo de estudio de lecciones utilizado para ayudar a los maestros en el diseño crítico de tareas para hacer que las matemáticas sean más significativas para sus estudiantes. Por otra parte, Spanneberg (2009) se basa en el uso de “teaching portfolios” donde los estudiantes recopilan sus trabajos (planes de clase, análisis de la propia enseñanza, entre otros), viéndolo como una herramienta reflexiva para desarrollar el crecimiento profesional y mejorar las prácticas en el aula.

Silver, Clark, Ghouseini, Charalambous y Sealy (2007) también describen un ciclo de tareas de aprendizaje profesional para desarrollar conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), en el que utilizan materiales de la práctica (tareas matemáticas escolares, videos o registros narrativos de episodios de enseñanza en clase, etc.), comenzando con una actividad en la cual los maestros resuelven ellos mismos un problema de matemáticas para luego hacer diferentes tipos de análisis. Los autores señalan que la utilización de este tipo de materiales como base de las tareas de aprendizaje profesional “integra y entreteje varios dominios del conocimiento pertinente a la enseñanza: matemáticas, didáctica y pensamiento del estudiante ”(p.266).

Siguiendo la línea de los autores anterior, Beckmann, et al. (2004) tratan sobre la importancia de integrar los materiales de matemáticas escolares en los cursos de niveles universitarios, planteando tareas matemáticas escolares (sobre probabilidad, patrones y recursiones y geometría) para promover el planteamiento de conjeturas, el razonamiento y la prueba. Los autores concluyen que estas tareas formativas permiten a los futuros maestros adquirir una comprensión más profunda y conectada del contenido matemático.

Apreciar el papel de las tareas matemáticas escolares en la enseñanza (Doyle, 1988), identificando sus componentes de manera crítica (Watson y Mason, 2007), lleva a Liljedahl, Chernoff y Zazkis (2007) a proponer un proceso de selección y mejoramiento de las tareas que consta de cuatro fases: análisis predictivo, ensayo, análisis reflexivo y fase de ajuste. Este proceso suministra componentes de las tareas formativas profesionales.

En estos últimos documentos apreciamos que las tareas son vistas bajo dos perspectivas: como tarea matemática escolar (TME), base para el aprendizaje de los alumnos (Doyle, 1988) y tarea formativa profesional (TFP), que se utiliza en la formación de profesores. Por tanto es necesario hacer la distinción entre ambas (Tirosh y Woods, 2008), diferenciadas por los agentes a quien están dirigidas y los sistemas educativos en que se plantean.

Cuando nos referimos a las tareas matemáticas escolares nos basamos en la definición de Stein y Smith (1998, p. 268), para los que “una tarea se define como un segmento de la actividad de clase que se dedica al desarrollo de una idea matemática particular”, siendo esta el “principal vehículo para suministrar a los escolares oportunidades de aprendizaje” (Lupiáñez, 2013, p. 96). Ahora bien, esto también se puede aplicar cuando los profesores o futuros profesores son los que tienen que aprender las matemáticas. La diferencia está

en que no basta a estos profesionales con saber matemática para enseñar matemáticas. Por tanto, cuando una tarea matemática escolar se aplica en la formación de docentes tiene propósitos más ambiciosos, ya que no sólo enfatiza el contenido matemático, sino que a su vez incorpora cuestiones de didáctica de la matemática (Liljedahl, Chernoff, Zazkis, 2007).

Considerando la relación entre tareas matemáticas escolares y tareas formativas, subyace lo que entendemos como *tareas matemáticas profesionales (TFP)*, definiéndolas como todas las acciones instructivas estructuradas, referidas a un contenido matemático, que establecen demandas matemáticas y la gestión e interacción prevista (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018).

Watson y Mason (2007) consideran que las tareas matemáticas de formación comparten mucho de las tareas matemáticas escolares, señalando además que:

(...) la tarea genera actividad con la que aflora la oportunidad para encontrar conceptos matemáticos, ideas, estrategias y para usar y desarrollar pensamiento matemático y formas de interrogarse [...], la enseñanza incluye la selección, modificación, diseño, secuenciación, instalación, observación y evaluación de tareas (p. 12).

Centrándonos en las TFP, se hace evidente su importancia investigativa al aparecer el tercer número especial de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education* (volumen 10, número 4-6, diciembre 2007) dedicado a ellas. Es el primer número de la citada revista para el que se realizó una convocatoria, que recibió 111 trabajos. Evidentemente no se podían incluir todos en el número, por lo que los editores invitados (Orit Zaslavsky, Anne Watson y John Mason) hicieron una selección representativa para describir el campo de las tareas relacionadas con las matemáticas para la formación de profesores de matemáticas (Jaworski, 2007).

Watson y Mason (2007), en un intento de sintetizar los trabajos que fueron evaluados para esta edición de JMTE, ejemplifican tres formas para trabajar las tareas:

“utilizar tareas para comprender el conocimiento matemático de los alumnos; utilizar tareas para desarrollar la propia conciencia matemática de los docentes, ya sea repensando sus puntos de vista de las matemáticas o reviviendo el aprendizaje de nuevos contenidos matemáticos; utilizar tareas para pensar cómo las diferentes formas de enseñanza ofrecen diferentes posibilidades de aprendizaje matemático” (p. 212).

En nuestra investigación presentaremos en el capítulo 2 algunas tareas que se utilizan en el Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada, específicamente en la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemática en Educación Primaria. Estas tareas están basadas en un modelo de formación que se sustenta en el Análisis Didáctico, otro de los referentes teóricos que abordaremos en el próximo capítulo. De la secuencia de tareas matemáticas formativas que los futuros maestros de primaria tienen que llevar a cabo, la última es la planificación de una unidad didáctica, lo que resume y los prepara para su futura actuación docente, por lo que no es sencillo, ya que deben de tomar en cuenta aspectos matemáticos, didácticos y pedagógicos para diseñar una secuencia de tareas matemáticas escolares.

1.1.2.1 Planificación de unidades didácticas

La planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje es una de los desempeños esenciales que debe realizar cualquier profesor. En educación matemática, debido a la complejidad de su enseñanza, el profesor no puede llevar a cabo una enseñanza eficaz solo con el conocimiento de los contenidos de las matemáticas escolares, también debe profundizar en cómo aprenden los estudiantes, cuáles son las mejores estrategias didácticas, cuáles son las directrices que establecen los currículos oficiales, cuál es la mejor forma de evaluar el conocimiento de sus estudiantes, por nombrar algunas de las cuestiones que los profesores deben tener presente al enfrentarse al aula. Por lo tanto, para llevar a cabo su labor profesional el profesor tiene que realizar una planificación sustancial (Roche et al, 2014).

La importancia de la planificación ha sido avalada por múltiples investigaciones desde dos perspectivas: 1) Contribuye a un mejor aprendizaje de los estudiantes (Fernández y Cannon, 2005; Warren, 2000; Brown, 2009; Roche, Clarke, Clarke y Sullivan, 2014; Stein y Smith, 2011), y 2) Contribuye en el desarrollo profesional de los profesores. Sullivan et al (2012), en la primera, señalan que hay una conexión directa entre la planificación y la enseñanza, ya que los profesores pueden ayudar más a sus alumnos cuando tienen ideas claras de lo que se pretende que se aprenda. Mutton, Hagger y Burn (2011), desde la segunda, indican que “a través de la planificación los docentes son capaces de aprender sobre la enseñanza y a través de la enseñanza pueden aprender sobre planificación” (p. 399).

En la literatura revisada se pudo observar una gran variedad de expresiones a la hora de hablar de planificación, unidades didácticas, lecciones, etc. Fernández y Cannon (2005) distinguen entre planificación y preparación, definiendo “la planificación como el proceso que se preocupa de saber qué y cómo enseñar, mientras que la preparación implica la organización que incluye obtener y/o diseñar materiales y la configuración de la clase y los espacios de trabajo” (p. 485). Desde este punto de vista nosotros entenderemos la planificación como el proceso de organización de las decisiones que toman los profesores para llevar a cabo la instrucción, por lo tanto, creemos que cuando un profesor planifica lo que está haciendo es preparando la instrucción. Esta planificación puede ser a un nivel macro, como las planificaciones anuales, semestrales o trimestrales, que permiten tener una visión a largo plazo de los objetivos y contenidos que se quieren lograr en un periodo y contexto determinado. Por ejemplo, un profesor puede hacer una planificación anual de matemáticas para 3º de primaria, determinando los objetivos que quiere que sus alumnos alcancen a final de año, también organizará los contenidos para saber el tiempo que le dedicará a cada uno, así como las tareas que realizará para lograr el aprendizaje. Esta planificación macro está influenciada por los currículos oficiales.

Las planificaciones a nivel micro serían las unidades didácticas, en las cuales el profesor determina un contenido específico, establece objetivos también más específicos y distribuye el tiempo, pero ahora de cada foco conceptual que tiene relación con el contenido matemático que va a enseñar, para planificar lo que serían cada una de las sesiones de instrucción. En estas unidades debe decidir los elementos aún más específicos como las metas, el contenido, las tareas, los recursos y materiales y la forma de gestionar la clase. Este tipo de planificación micro es la más utilizada en la investigación y es llamada planificación de lecciones (Roche et al, 2014; Shen et al, 2007; Yildirim, 2003).

Lo importante de la planificación es manifestado por los mismos profesores en varias investigaciones, en las que aprecian que la consideran una tarea importante, necesaria pero compleja (Fernandez y Cannon, 2005; Li, Chen y Kulm, 2009; Warren, 2000; Yildirim, 2003). Pero también aparecen críticas de los profesores a la planificación, argumentando la falta de tiempo, el exceso de detalles de los modelos que se emplean, la escasa relación con lo que realmente pasa en la práctica, entre otras razones. Situaciones que tienen como consecuencia que muchos profesores vean la planificación como un proceso sin utilidad y solo como un trámite administrativo para cumplir con exigencias (Bailey, 2015; De Pro, 1999; Yildirim, 2003).

También salen a luz otros aspectos que están relacionados con la planificación, como es la influencia que tienen diferentes materiales curriculares y los distintos modelos que se han adoptado a lo largo de los años. Con respecto a los materiales curriculares, en la mayoría de las investigaciones se indica que los libros de textos y los manuales para profesores son los documentos curriculares más utilizados a la hora de establecer los contenidos y las tareas de las planificaciones (Azcarate, Serrado y Cardeñoso, 2004; Bailey, 2015; McCutcheon, 1980). Los currículos oficiales que establecen los ministerios o entidades a cargo, sirven para fijar los objetivos de aprendizaje. Algunos investigadores encontraron que los profesores expertos hacen menos uso de los materiales curriculares que los profesores principiantes (Bush, 1986; Leinhardt, 1983; Livingston y Borko, 1990), ya que cuentan con un repertorio de conocimiento de la enseñanza gracias a su experiencia (Ding y Carlson, 2013). Es importante señalar que investigaciones recientes apuntan que en la formación inicial se sugiere el uso de materiales curriculares educativos, ya que pueden apoyar el desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza como también al conocimiento curricular de los futuros maestros (Drake y Land, 2012; Drake, Land y Tyminski, 2014). Este punto de vista es compartido por Rico (2015), quien menciona que el currículo de matemática es una de las nociones centrales para la formación inicial de maestros.

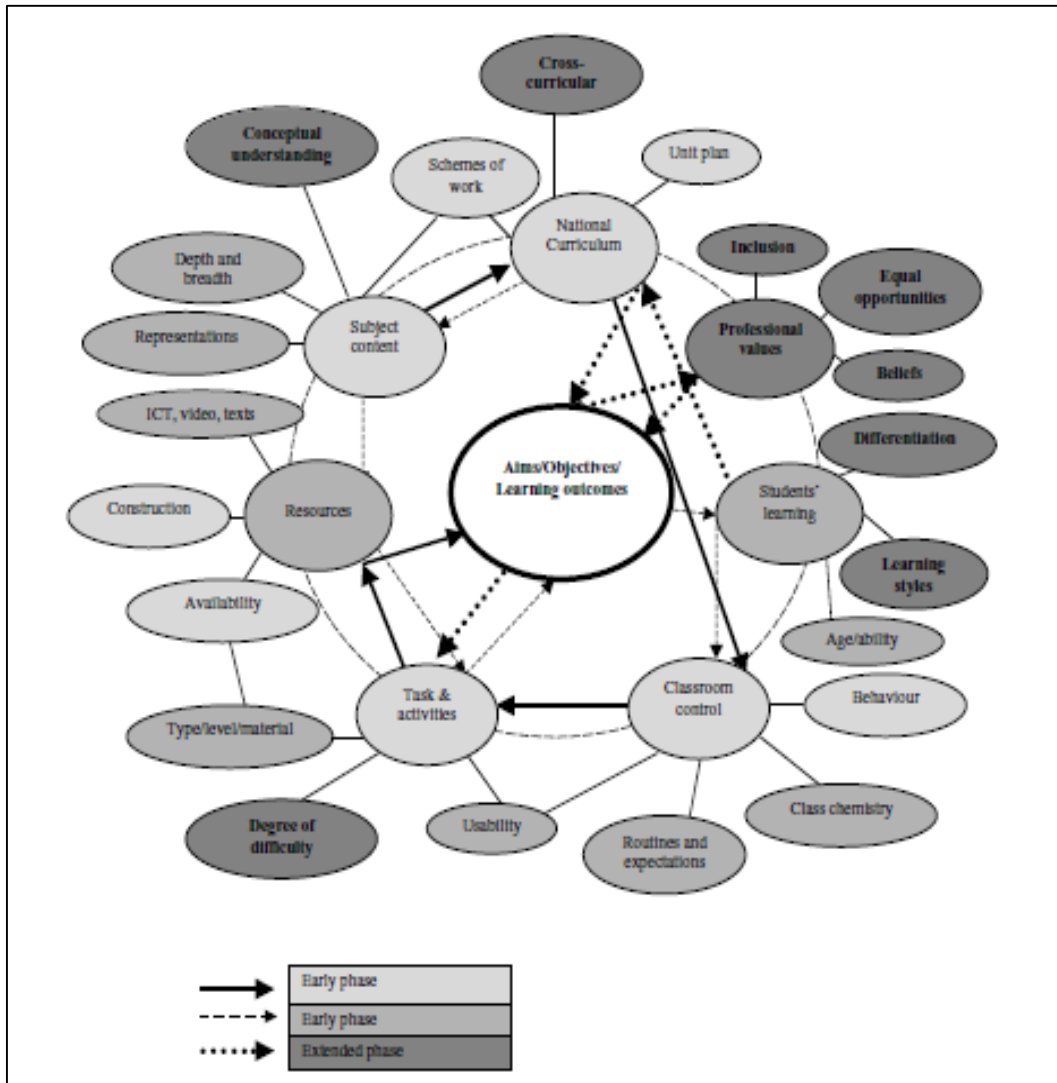


Figura 1.1. El proceso de planificación

Fuente: John (2006, p. 491)

En cuanto a los modelos de planificación, el primero y más influyente ha sido el que Tyler (1949) llamó *modelo racional o lineal*, que consta de cuatro pasos: (1) establecer los objetivos, (2) seleccionar actividades o tareas de aprendizaje, (3) organizar esas tareas en un orden apropiado e (4) indicar los procedimientos de evaluación (Yildirim, 2003). John (2006) plantea que “este modelo hace tener una visión limitada de la enseñanza y el aprendizaje, así como un enfoque restringido para aprender a enseñar” (p. 483), por lo que destaca el *modelo naturalista* (basado en los trabajos de Stenhouse 1975 y Egan 1992), el cual “comienza con las actividades y las ideas que emergen de ellas para luego asignar los objetivos que son vistos con elementos emergentes más que predeterminados” (p. 488).

Este mismo autor plantea un *modelo dialógico* el cual no establece un orden fijo, pero el núcleo central son los objetivos y en torno a ellos se encuentran otros elementos, como el contenido temático, plan de estudio, control del aula, tareas y actividades, entre otras, que son aspectos fundamentales de la planificación. A su vez cada uno de ellos está subdividido en otros elementos, como se muestra en la figura 1.1.

El autor destaca que las ventajas de este modelo son que “fomenta una interacción constante con el contexto y sus entidades, y subraya el hecho de que la enseñanza, el aprendizaje, los recursos, las tareas, las herramientas, el contexto y los objetivos están interconectados en lugar de separados” (p. 492), reconociendo que el proceso de planificación se irá modificando a medida que los profesores adquieran más experiencia.

En los modelos de planificación que se pueden encontrar en la literatura, se pueden apreciar elementos comunes (los objetivos, el contenido, las tareas), cambiando la prioridad que le dan los profesores a cada uno de estos elementos generando así una gran variedad en la forma de planificar (Roche et al, 2014).

En las investigaciones que revisamos nos pudimos dar cuenta que la gran mayoría está interesada en conocer cuáles son los elementos que toman en cuenta los profesores a la hora de planificar, basándose tanto en profesores en ejercicio (expertos y novatos) como en profesores en formación inicial. En cuanto a los profesores en servicio, la mayoría de las investigaciones coinciden que los elementos que primero se toman en cuenta a la hora de planificar son los contenidos y actividades, dándole menos importancia al planteamiento de objetivos de aprendizaje y evaluación (Kilpatrick et al, 2001; Reys et al, 2010; Taylor, 1970; Yildirim, 2003). Estos resultados se contraponen con aquellas investigaciones que se han realizado con profesores chinos y japoneses, donde el método de *estudio de clases* (Fernandez & Yoshida, 2004) les permite llevar a cabo una planificación más reflexiva y colaborativa, siendo los factores más influyentes el estudio, los libros de texto, comprender a los estudiantes y los métodos de enseñanza (Fernandez y Yoshida, 2004; Li, 2009; Shen et al, 2007).

Varios autores han resaltado que la experiencia es la clave de la planificación, por lo tanto el propósito y la forma puede ir cambiando con la práctica (John, 2006; McCutcheon 1980; Roche et al, 2014; Warren, 2000; Yildirim, 2003). Los profesores más experimentados le dedican menos tiempo y sus planificaciones son menos extensas, argumentando que una planificación muy rigurosa se contradice con la flexibilidad del aula (Fernández y Cannon, 2005). Otra característica de los profesores con experiencia es que sus planificaciones diarias (secciones o lecciones) se producen mentalmente, siendo estas más extensas que las escritas (Roche et al, 2014; Superfine, 2008). Estos aspectos cambian cuando los profesores son principiantes. John (2006) menciona que “los principiantes describen que su planificación requiere mucho tiempo, ya que tienen dificultades para comprender la abundancia de decisiones que deben tomar” (p.489). Esta problemática se puede aminorar con el desarrollo de planificaciones colectivas-reflexivas donde los profesores con más experiencia puedan compartir sus conocimientos, siendo el método de estudio de clases un modelo de planificación que contribuye en la instrucción desde tres perspectivas: cambios en el conocimiento de los docentes y sus creencias; cambios en la comunidad profesional y cambios en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Lewis, Perry y Murata, 2006; Stein y Smith, 2011).

Centrándonos en las investigaciones con profesores en formación inicial, que es nuestro centro de interés, pudimos observar que en los últimos años ha sido un tema de gran prioridad, puesto que la planificación en la formación inicial se ve como un modelo que contribuye al desarrollo profesional de “los futuros docentes, permitiéndoles tomar decisiones sobre los contenidos, los objetivos, la selección y secuencia de las actividades

o la evaluación de los procesos educativos” (Jaén y Banet, 2003, p. 57). Por esta razón en los cursos de formación inicial se dedica un tiempo considerable a planificar la enseñanza.

John (2006), en su trabajo *Lesson planning and the student teacher: rethinking the dominant model*, reconoce la utilidad del modelo dominante (racional o lineal) propuesto por Tyler en 1949, en la formación inicial de futuros profesores, pero a su vez hace una crítica del mismo basada en tres puntos: (1) es recomendable comenzar aprendiendo a planificar de forma racional antes de construir modelos de lecciones más complejas, sin embargo es bueno que aprendan a manejar las variables del aula desde el principio, teniendo en cuenta que la planificación debe ser flexible y práctica; (2) se cree que deben seguir el modelo que establece el currículo oficial, pero se sabe que la enseñanza en el aula es bastante más compleja de la que muestran los legisladores; (3) para remediar la escasa conexión que hay entre la escuela y las instituciones de educación superior, un modelo unificado crea una relación que ayuda a los formadores, pero genera una falsa igualdad en términos de experiencia con los futuros profesores y (4) se puede deducir que el uso de dicho modelo refuerza una sensación de control al ser más fácil de guiar, evaluar y dirigir el proceso de enseñanza, haciendo que la planificación de lecciones se base en la predicción, pese a que las respuestas de los estudiantes hacen que sea más cambiante la dinámica de enseñanza en el aula.

Por lo tanto, el mismo autor plantea el *modelo dialógico* de planificación (que explicamos anteriormente con figura 1.1), enfatizando que en la formación inicial el futuro profesor debe saber realmente qué es la planificación de la lección y su relación con la enseñanza, sirviendo este modelo como: (1) una herramienta descriptiva para ver las complejidad del proceso de planificación; (2) comprender la relación entre la gestión del aula, el contenido y el currículo. Estas acciones harían que los futuros profesores en un comienzo se ciñeran a trabajar solamente con estos componentes, pero podría cambiar, agregando más componentes, si se les presentan planes de lecciones modelos o series de ejemplos.

Otros autores que presentan un modelo de planificación que puede ser utilizado en la formación inicial son O’ Donnell y Taylor (2006), quienes proponen un formato de planificación multicolumna que es parte de los estudios de clase, el cual enfatiza que “los profesores enfrenten el contenido, examinándolo desde varios ángulos; usar el conocimiento estratégico para negociar situaciones problemáticas de enseñanza y analizar las acciones de los estudiantes; y, sobre todo, reflexionar sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje” (p. 272). Este proceso ayuda a que los futuros profesores se centren en cómo aprenden los alumnos y desarrollen técnicas críticas para formular preguntas que faciliten el aprendizaje.

La mayoría de las investigaciones en planificación en la formación inicial, se basan en entrevistas a los futuros maestros sobre los elementos que toman en cuenta a la hora de planificar (Sullivan et al., 2012), y pocas hacen un análisis de las propias planificación de lecciones. Sobre las que examinan las planificaciones, queremos destacar a modo de ejemplo el reciente trabajo de Wilson (2016), quien presenta el estudio de caso de una futura profesora que planificó una lección de matemáticas, dentro de un estudio más amplio que tiene como objetivo identificar los problemas a los que se enfrentan los futuros profesores cuando preparan y enseñan prácticas de matemáticas.

La autora destaca que la tarea de planificación resulta compleja de afrontar en los cursos de formación, puesto que los futuros profesores están comenzando a aprender sobre el currículo de matemática y el contenido para la enseñanza, situación que los limita, por lo que, a la hora de tomar decisiones para planificar, confían en el currículo y en el conocimiento del contenido matemático (MCK) desarrollado en los cursos y la práctica (Ball et al., 2008). Pero a su vez hace mención que el MCK de los futuros maestros es débil y les falta comprensión conceptual de los contenidos matemáticos que van a enseñar, de tal modo que el proceso de planificación les puede ayudar a desarrollar dichos conocimientos.

Wilson (2016), describe cómo Ann, una futura maestra en su primer año en un curso de formación inicial, desarrolló su conocimiento matemático sobre el tema de medición (específicamente la conversión de medidas de longitud, peso y capacidad) en la planificación de tres lecciones durante su primera práctica. Lo primero que le llamó la atención a la investigadora fueron unas notas en las que la futura maestra tenía desarrollado el contenido que iba a enseñar, que, junto a las tres planificaciones y una entrevista, fueron los instrumentos que le suministraron datos que se analizaron.

En los resultados se evidencia que Ann, antes de comenzar con la planificación de las lecciones, tenía que aprender el contenido, por lo que empezó con una búsqueda por internet, registrando en sus notas todo aquello que le llamara la atención y le ayudaba a entender cómo hacer conversiones de una unidad de medida a otra. Al analizar las tres lecciones, la investigadora pudo observar que en las tres lecciones se expresaba los mismos contenidos y objetivos. La futura maestra reconoció que buscó en los planes de estudio del Ministerio de Educación de Nueva Zelanda un objetivo que abordara el contenido. Respecto al desarrollo de la lección incluyó ejemplos tanto verbales como visuales de lo que estaba registrado en sus notas.

Todo esto llevó a la autora a concluir, por un lado la importancia del MCK como un conocimiento necesario para enseñar matemática, confirmando lo dicho por Ball et al. (2008), y por otro, la oportunidad que les da a los futuros maestros el proceso de planificación para profundizar sobre el contenido matemático antes de enseñarlo, que también es señalado por otros autores (e.j., Roche et al, 2014).

Todos los antecedentes expuestos reafirman lo que establece Rico et al., (2008),

“la planificación es una de las competencias profesionales clave para el profesor... demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos...para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades” (p. 8).

Para ello “las competencias de dominio del conocimiento disciplinar, diseño y planificación, comunicación y argumentación y gestión del aprendizaje, son centrales en la formación inicial del profesor de matemáticas, singularmente para la formación del maestro de primaria” (Rico, 2015, p. 34).

En el grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada, dentro del Departamento de Didáctica de la Matemática el grupo de investigación FQM 193, Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico y Algebraico, toma como base estas

competencias, planteando un modelo de formación para profundizar en las matemáticas y su didáctica desde una perspectiva funcional, siendo uno de sus objetivos “poner a los estudiantes para profesor en contacto con lecturas y resultados alcanzados en las didácticas de los temas matemáticos. Hacer que lo refleje profundizando en el significado de los contenidos matemáticos, para comprenderlos y programar su enseñanza” (Flores, Moreno y Del Rio, 2016, p. 141).

Este proceso de formación inicial se implementa tomando como base los trabajos de Rico (1997a, 1997b) sobre los Organizadores del Currículo, establecidos como dimensiones para reflexionar sobre la planificación de clases. Los organizadores generan el Análisis Didáctico (Rico, 2015), que se constituye una herramienta para el diseño, implementación y evaluación de la enseñanza y aprendizaje de un tema de matemática. También el análisis didáctico se ha venido utilizando como metodología de investigación, ya sea para profundizar en el concepto matemático que se está investigando y de esta manera sentar bases conceptuales, o bien como categorías de análisis para conceptualizar el conocimiento profesional de los profesores (Rojas, Flores y Ramos, 2013). Estos dos ámbitos del Análisis Didáctico se desarrollaran con más detalle en el capítulo dos por ser nuestro marco de referencia.

Es importante destacar que el marco del Análisis Didáctico en el contexto de programas de formación inicial (secundaria y primaria) orientado al diseño de unidades didácticas y también como metodología de investigación, se ha trabajado en diferentes tesis doctorales dentro del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada lo que avala su importancia y transcendencia. En la tabla 1.3, del anexo 1, mencionamos algunos de los trabajos que han tratado ambas dimensiones, destacando el año, el doctorando, los tutores que dirigieron la tesis, el título de la tesis y si el Análisis Didáctico fue utilizado como herramienta formativa o investigativa.

1.1.2.2. Planteamiento de objetivos

En el apartado anterior sobre planificación de unidades didácticas varios autores mencionan que uno de los elementos que los profesores le dan menos importancia es el planteamiento de objetivos, lo que se contradice con otras investigaciones que enfatizan la claridad que debe tener el profesor al momento de pensar en el aprendizaje específico de un contenido matemático sobre lo que el alumno debe aprender, es decir la intención de aprendizaje u objetivo (Hattie, 2012). El mismo autor hace mención que una planificación es eficaz cuando el proceso comienza por establecer objetivos desafiantes y a partir de estos estructurar las tareas que apunten a lograr dichos objetivos, ya que la tarea solamente no garantiza el aprendizaje de los estudiantes (Sullivan, Clarke y Clarke, 2013). Por lo tanto, tener claro los objetivos es fundamental como elemento transversal que ayuda a los profesores desde tomar decisiones desde la creación de tareas hasta el desarrollo de buenas evaluaciones. En la instrucción también favorece el proceso de aprendizaje que el profesor sea capaz de comunicar claramente a sus alumnos los objetivos de aprendizaje que se deben lograr, ya que permite una visualización tanto para el alumno como para el profesor sobre el nivel de logro de dichos objetivos (Hattie, 2012).

En los modelos de planificación también se ve reflejada la importancia del objetivo. En el modelo Tyler (1949) se comienza con la especificación de los objetivos. Para el modelo que plantea John (2006), el objetivo es el elemento central (ver figura 1.1) que ayuda en

la toma de decisiones de los otros elementos que tienen que estar presentes a la hora de hacer la planificación de la enseñanza de un contenido específico. De ello se sigue que definir los objetivos con precisión al planificar, incorporando aspectos concretos de desempeño, favorece mejorar el aprendizaje más que definir objetivos más generales (Schunk, 1996).

La dificultad de la formulación de objetivos por parte del profesor se evidencia en algunas investigaciones (e.j., DeLong, Winter y Yackel, 2005; Santos, Ortigão y Aguiar, 2014). Como nuestro interés está en la formación inicial de maestros de matemática nos centramos en buscar investigaciones que nos ayuden a responder las preguntas ¿Cuál es la noción de objetivo de los futuros maestros y cómo formulan dichos objetivos? Encontramos tres trabajos que queremos destacar, ya que se enmarcan en programas de formación inicial que tiene como base los elementos del análisis didáctico como herramienta para la planificación de unidades didácticas. González y Gómez (2008) se centran en caracterizar el aprendizaje de un grupo de futuros profesores de matemática de secundaria sobre las dimensiones del análisis didáctico, entre ellas la noción de objetivo, utilizando tres dimensiones para referirse al papel que le atribuyen en sus planificaciones: significado, uso técnico y uso práctico, que se plantean como un esquema lineal de incorporación y uso en su aprendizaje. Concluyen que la noción de objetivo no sigue esta secuencia, por el contrario, los estudiantes establecen una gran variedad de relaciones entre las tres formas de uso, situación que conlleva que sea de gran complejidad el proceso de incorporación, uso y transformación de la noción de objetivo desde su significado al uso práctico.

En la misma línea Lupiáñez y Rico (2010) analizan el proceso de aprendizaje de un grupo de futuros profesores de matemática de secundaria al establecer objetivos específicos de un tema matemático, detallando por un lado la cantidad de objetivos que construyeron, así como las modificaciones que hicieron de los mismos en cada una de las tres etapas del proceso formativo, que denominaron: *estado inicial, de cambio y transformación y un estado final*. Tras analizar todas las producciones logran determinar regularidades, como que aumentó la cantidad de objetivos entre la etapa inicial y final, y entre las etapas intermedias comienzan con cambios importantes en la mayoría de los enunciados de los objetivos, logrando una estabilidad al final de esta etapa. Concluyen que este proceso muestra distintas facetas de cómo los futuros profesores alcanzan un dominio técnico y práctico de los objetivos sobre el aprendizaje escolar de las matemáticas. También ratifican, al igual que González y Gómez (2008), la complejidad y la naturaleza dinámica del proceso de aprendizaje de los futuros profesores de matemática.

Queremos destacar que el trabajo de Lupiáñez y Rico (2010) está enmarcado dentro de la tesis doctoral del primer autor (Lupiáñez, 2009), en la cual, uno de los análisis que hace examina la precisión y riqueza de los objetivos que plantean los sujetos involucrados en el estudio. A modo general, Lupiáñez (2009) destaca entre los conocimientos y capacidades que lograron desarrollar satisfactoriamente los futuros profesores de matemático: “(1) Describir y analizar principios y expectativas del aprendizaje de las matemáticas según los diferentes niveles que propone el currículo; (2) Delimitar y ejemplificar la noción de objetivo específico” (p. 481). Mientras que aprecia que “no lograron desarrollar la capacidad de aplicar el anunciado de los objetivos y la selección de competencias en el diseño de tareas de evaluación” (p. 482).

El tercer trabajo es el realizado por Ruiz-Hidalgo et al. (2017), quienes examinan el conocimiento didáctico a través de cómo expresan objetivos de una tarea matemática escolar (*representa 2/3*), los futuros maestros en el último curso del grado de Educación Primaria. Para establecer las categorías de análisis se basaron en los tres componentes de un objetivo específico que plantean Rico y Lupiáñez (2008), capacidades, contenido y contexto. En cuanto al contenido se fijaron subcategorías (nivel cognitivo, representaciones y sentidos). También identificaron el tipo de agente, para diferenciar si eran objetivos de aprendizaje (el agente es el alumno) u objetivos de enseñanza (el agente es el profesor). En las conclusiones los autores aprecian que los futuros maestros elaboran una redacción formal de los objetivos, incluyendo aspectos generales, utilizando la capacidad que estaba explícita en la tarea o incorporando capacidades genéricas poco precisas. Algunos de estos futuros maestros muestran dificultades al diferenciar entre objetivos de aprendizajes y de enseñanza, reflejando todo esto la poca relación que pueden establecer entre lo que “técnica y teóricamente se considera un objetivo de aprendizaje matemático” (p. 444).

Por nuestra parte, en un trabajo previo para profundizar sobre este tema, realizamos una investigación llamada *Concepto de objetivo de una tarea matemática de futuros maestros* (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018), basado en la misma asignatura en que se enmarca esta tesis doctoral (Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemática en Educación Primaria), pero en el módulo que tenía como tarea formativa analizar una tarea matemática escolar llamada "el bricolaje". Es importante destacar que parte de los sujetos que participaron en este trabajo son están involucrados en esta tesis. Analizamos las producciones de los estudiantes con la intención de examinar cómo identificaban y qué significaba para ellos la meta de la tarea (el objetivo pretendido con ella), como uno de los elementos que tenían que concretar al hacer el análisis de dicha tarea.

La revisión bibliográfica nos permitió hacer la distinción entre tareas matemáticas escolares (TME) y tareas de formación, apreciando que una TME puede ser parte de una tarea formativa, como es el caso en este trabajo. Otro aspecto que definimos luego de la revisión bibliográfica fue el de meta y objetivo, puesto que se utiliza indistintamente por algunos autores. Basándonos en los Niveles de Objetivos en el currículo, de Rico y Lupiáñez (2008), quienes establecen que se generan distintas finalidades según el ámbito: etapa, curso o tema, siendo en este último donde se establecen los objetivos específicos, que se identifican como “*aquellos que trabajan unos determinados y precisos contenidos, requieren de unas capacidades para atender a unas tareas y se identifican por ciertas conductas que el estudiante debe manifestar*” (Flores y Lupiáñez, 2016, p. 184). Apoyándonos en esta definición en este trabajo consideramos la meta como un objetivo específico.

Para hacer el análisis de los datos tomamos en cuenta aspectos, variables y dimensiones como se muestra en la tabla 1.1.

Tabla 1.1. Aspectos, variables y dimensiones con las que organizan las respuestas

Aspectos	Variables	Categorías/Dimensiones
1) Formulación de objetivo		Objetivo de instrucción Objetivo de aprendizaje
2) Elementos del objetivo	2.1. Aspecto cognitivo, capacidad	Capacidades que delimitan
	2.2. Aspecto cultural, contenido	Elementos de la estructura que aparecen Formas de representación Aspectos fenomenológicos
	2.3. Aspecto práctico, situaciones	Situaciones

Fuente: Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno (2018)

Analizamos un total de 35 producciones, seleccionando el apartado donde se especificaba la meta de la tarea, que descompusimos en unidades de análisis al realizar un análisis de contenido del texto, para asociarlas a las categorías que teníamos establecidas. Pudimos apreciar que la mayoría de los grupos planteaban más de un meta, con las siguientes apreciaciones:

- Todas las metas estaban planteadas como objetivos de aprendizaje.
- En la variable capacidad surgieron subcategorías que, a través de los verbos, nos permitieron diferenciar tres tipos de capacidades, según se refieran a la dimensión cognitiva, al contenido o a la instrucción; examinando coincidencias apreciamos que tenían mayor presencia aquellos objetivos donde se nombraban capacidades cognitivas y de instrucción.
- También encontramos coincidencias en las dimensiones para analizar el contenido, teniendo mayor frecuencia aquellos objetivos que hacían mención a uno o varios contenidos, nombraban algún sistema de representación y establecían un sentido o significado de las fracciones.
- En cuanto a las situaciones, a pesar que la tarea del bricolaje está contextualizada, la mayoría de las producciones no menciona ninguna situación, algunos hicieron mención de una situación personal y los menos a una situación laboral, según las definiciones de PISA.

Los resultados nos llevaron a concluir, por una parte, que los futuros maestros involucrados en este estudio, si bien tienen las nociones sobre los elementos didácticos necesarios para plantear la meta de una TME, no todos llegan a una descripción detallada de la misma. En cuanto a la interpretación que le dan a la meta, la mayoría lo hace como objetivo de aprendizaje con centro de interés en el alumno, enfatizando las capacidades determinadas por un proceso cognitivo y el contenido que se debe adquirir. Si bien no pudimos establecer unos perfiles claros, diferenciamos una escasa cantidad de grupos (4) que satisfacen las tres componentes consideradas para la construcción de un objetivo, ya que estos grupos plantean capacidades que apuntan a procesos cognitivos, de contenido y de instrucción, haciendo mención a los elementos del contenido (contenido, sistemas de representación y sentido), para finalmente establecer la funcionalidad en una situación, preferentemente personal o laboral (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018).

Todos los trabajos aquí mencionados ratifican la dificultad que conlleva formular objetivos, por lo que se debe seguir trabajando en la formación inicial y continua de los

profesores, para desarrollar esta competencia, que es específica de la profesión docente (Hibert, Morris y Glass, 2003).

1.1.3. Contenido matemática: La división en primaria

En el proceso formativo que se encuentra enmarcada esta investigación los futuros maestros de primaria llevan a cabo la tarea de planificación de una unidad didáctica sobre un tema matemático concreto. Se realiza un trabajo en grupos donde a cada uno se le fija un contenido específico. En el año académico 2015-2016 en que llevamos a cabo la recolección de los datos de esta tesis doctoral, se conformaron un total de 18 grupos y los contenidos trabajados fueron: números y sistemas de numeración, unidades de medida, figuras planas, gráficos estadísticos, la división y la divisibilidad.

Nuestro interés se centró en los seis grupos que trabajaron con la división en diferentes niveles educativos (2º, 3º, 4º y 5º de primaria). La motivación que nos llevó a seleccionar este contenido matemático parte de un interés y preocupación personal, ya que en los años de mi labor docente observaba la dificultad que tenían mis alumnos al trabajar con la división, siendo una situación recurrente año a año, por lo tanto siempre me cuestioné si el problema radicaba en mi forma de enseñar. Esto llevó a que, en esta etapa de desarrollo profesional, me interesara por hacer una revisión de las investigaciones sobre este tema, en la que se ratificó la necesidad de profundización, ya que existe un acuerdo en que la división, tanto en lo conceptual como procedimental, es la operación que conlleva más dificultades en los niños de primaria, en comparación con las otras operaciones básicas (Anghileri y Beishuizcn, 1998; Castro, 2008; Ivars y Fernández, 2016; Li y Silver, 2000).

Las dificultades de los escolares sobre la división están ampliamente investigadas y parte de su problemática radica en la desconexión entre el concepto y el procedimiento que se lleva a cabo para obtener el cociente (algoritmo). Tradicionalmente en educación primaria, cuando se trabaja con la división, el énfasis se centra en el algoritmo, que conlleva dificultades porque requiere un conocimiento previo de las otras operaciones, adición, sustracción y especialmente la multiplicación, de manera coordinada, junto con la estimación (Anghileri y Beishuizcn, 1998; Anghileri, 2001). Otro aspecto que se evidencia en las investigaciones es que el algoritmo tradicional confunde a los estudiantes porque no se relaciona con experiencias cotidianas asociadas con la agrupación o la repartición, por lo tanto, se puede aprender y memorizar los pasos para resolver el algoritmo de la división y obtener respuestas correctas pero sin comprender su significado (Fan y Bokhove, 2014; Leung, Wong y Pang, 2006). Es por ello que se recomienda que la enseñanza y aprendizaje de la división y las demás operaciones aritméticas “estén acompañadas de situaciones contextualizadas, en las que las operaciones respondan a acciones” (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández Plaza, 2015, p. 219).

En las situaciones de estructura multiplicativa, Vergnaud (1983) estableció la idea de campo conceptual como un conjunto de problemas que, para su desarrollo, es necesario establecer relaciones entre sus conceptos, procedimientos y diferentes representaciones, creando así la categorización de los problemas de estructura multiplicativa, que posteriormente otros autores han continuado organizando (Greer, 1992, Schmidt y Weiser, 1995). En la tabla 1.2 mostramos una clasificación resumen de Ivars y Fernández (2016).

Tabla 1.2. *Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa*

Categoría	Operación	Incógnita
Isomorfismo de medida	Multiplicación	Total de objetos
	División Partitiva	Número de objetos por grupo
	División medida	Número de grupos
Comparación Multiplicativa	Multiplicación	Una medida (cantidad comparada)
	División	Una medida (cantidad referente)
Un único espacio de medidas	División	Un escalar
Producto de medidas	Multiplicación	Medida producto (cantidad compuesta. Se conocen las 2 medidas elementales o componentes)
	División	Una medida elemental (una de las componentes)

Fuente: Ivars y Fernández (2016, p. 4)

Una vez establecida estas categorías otras investigaciones se han interesado por conocer las estrategias que emplean los alumnos de Educación Primaria para resolver este tipo de problemas, para así también poder determinar los niveles de dificultad de dichos problemas.

En cuanto a los niveles de dificultad, centrándonos en los problemas que conllevan división, han sido los más estudiados los de isomorfismo de medida, coincidiendo en que los partitivos son más sencillos que los de medida (Bell, Fischbein y Greer, 1984; Correa et al., 1998; Nesher, 1992). Respecto a los problemas de comparación multiplicativa, en un estudio con niños de 10 a 12 años se concluyó que eran más complejos aquellos en que se debe hallar la cantidad referente o escalar (Castro, 1995). Por último, los problemas de producto de medida o producto cartesiano son los que presentan mayor dificultad para niños de primaria (Nesher, 1992).

En una investigación reciente de Ivars y Fernández (2016), quienes se interesaron por estudiar los problemas de estructura multiplicativa a lo largo de toda la Educación Primaria, al analizar sus resultados según el porcentaje de éxito en cada ciclo educativo, pudieron hacer una jerarquía para establecer una clasificación de estos problemas por niveles de dificultad, que van desde el nivel 1 (los más sencillos) al nivel 5 (los más complejos). La descripción de estos niveles según el tipo de problema coincide con los resultados que mencionamos anteriormente, es decir: nivel 1, los problemas de isomorfismo de medidas multiplicativas y división partitiva; nivel 2, problemas de isomorfismo de medida de división de medida y los de comparación de multiplicación; nivel 3, problemas de comparación de división con incógnita el referente; nivel 4, problemas de comparación de división con incógnita el escalar y los problemas de producto de medidas de división, y nivel 5, los problemas de producto de medida de multiplicación.

En este mismo estudio (Ivars y Fernández, 2016) también analizaron las estrategias correctas e incorrectas que utilizaron los alumnos de todos los ciclos de Educación Primaria, obteniendo como resultados que en los primeros curso (1º y 2º de primaria) se emplearon estrategias de modelización y de conteo para dar respuestas a los problemas

de división partitiva y de medida, situación que se manifiesta en el estudio de Li y Silver (2000), en donde a niños pequeños que no tenían el conocimiento del algoritmo se le planteaban problemas de división con resto, teniendo bastante éxito en su resolución. Este hecho cambia a partir del tercer curso de primaria, en que comienzan a dejar de lado estas estrategias para centrarse en la utilización del algoritmo para todos los tipos de problemas. Igualmente en estos niveles sigue habiendo presencia de estrategias incorrectas como por ejemplo, la selección inadecuada del algoritmo que corresponde para resolver un determinado problema.

En esta misma línea Downton (2009) analiza las estrategias de alumnos de tercer grado para resolver problemas de división partitiva y de medida con diferentes estructuras semánticas, llegando a la conclusión que es necesario vincular las relaciones entre la multiplicación y la división por ser operaciones recíprocas. Todo lo planteado anteriormente nos hace confirmar lo que plantean Fan y Bokhove (2014), que “el problema no está en los mismos algoritmos, sino en cómo enseñarlos de manera efectiva y más aun cognitivamente” (p. 491).

La enseñanza de la división conlleva desafíos para los profesores (Bicknell, Young-Loveridge y Nguyen, 2016), se debe organizar y planificar siendo conscientes de que hay que lograr comprensión conceptual, tratando de evitar lo que se ha venido haciendo tradicionalmente al enseñar la estructura multiplicativa, es decir, dedicar la atención al aprendizaje mecánico de los algoritmos de multiplicación y división, cada vez con más cifras. Pero es en este punto donde se genera otro problema, difícilmente se generarán procesos de enseñanza y aprendizaje que favorezcan la superación de los errores y dificultades que se presentan en la Educación primaria si los profesores en ejercicio y los futuros profesores tienen algunas de las dificultades que se han detectado en los estudiantes.

Por este motivo nos interesamos en buscar investigaciones que se centraran en la formación de profesores, para apreciar las dificultades del conocimiento de los futuros profesores sobre la división. La tabla 1.4, del anexo 1, muestra los estudios que encontramos, identificando año, autor, conjunto numérico trabajado y propósitos. Luego detallaremos algunas de estas investigaciones y una síntesis de sus resultados.

Graeber, Tirosh y Glover (1989) en su estudio intentaron determinar si los profesores en formación seleccionaban la operación correcta cuando se les presentaban problemas verbales de multiplicación y división, siendo los de multiplicación de suma repetida y para la división partitiva y cuotitiva. También se les presentaron otro grupo de problemas donde se cambiaron el ámbito numérico de los datos, es decir, algunos fueron con números decimales y en otros el divisor era mayor que el dividendo. Es importante destacar que replican una investigación realizada con escolares (Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985). Por lo tanto, también se quería apreciar si estos futuros profesores tenían otros conceptos erróneos aparte de los presentados por los escolares del estudio previo.

Centrándonos solamente en los resultados para los problemas verbales de división, los puntajes más altos de aciertos fueron en los del modelo partitivo y en tres de los problemas con modelo cuotitivo, los otros dos que correspondían a este modelo tuvieron un puntaje más bajo, situación que los autores justificaron por la dificultad del contexto. En cambio aquellos problemas donde se cambió el ámbito numérico fueron los más difíciles,

revelando las entrevistas algunos conceptos erróneos, como son las afirmaciones de los futuros profesores de que el divisor debe ser más pequeño que el dividendo y el divisor debe ser un número entero. La comparación de estos resultados con el estudio previo llevan a los autores a concluir que, al igual que los escolares, los profesores en formación están influenciados por los mismo modelos de problemas verbales y sus concepciones erróneas son bastantes similares.

Ball (1990) trabajó con futuros profesores de primaria y secundaria al iniciar el primer curso de su formación, examinando el conocimiento de la división con fracciones, división por cero y ecuaciones algebraicas que incluyan divisiones. Se analizó el dominio matemático (corrección de las operaciones) y la naturaleza de la justificación al explicar o generar representaciones, obteniendo como conclusión que el conocimiento de los futuros profesores parece fundamentarse más en la memorización de procedimientos que en la comprensión conceptual. La mayoría de los sujetos podía resolver por ejemplo una división de fracciones pero tenían dificultades para explicar su significado. Otra conclusión fue que el conocimiento de los futuros maestros es fragmentado, ya que no establecieron relaciones entre los tres casos de la división.

Simon (1993) se interesó en comprender dos aspectos de la división en futuros maestros, por un lado la relación entre conocimiento conceptual y procedimental y el conocimiento de las unidades. Nos centraremos en destacar aquellos resultados sobre el primer aspecto, ya que el conocimiento de las unidades está basado en tareas sobre la división de decimales y fracciones. Los resultados evidencian que los profesores en formación tienen un conocimiento apropiado de los símbolos y algoritmo de la división, pero presentan una debilidad conceptual, situación que el autor considera que afecta al desarrollo conceptual de otras partes de la matemática que las requieren, como la combinatoria, probabilidad, estadística y relaciones funcionales, indicando que esta desconexión entre los conceptos y procedimientos

“es probable que haga que los futuros maestros carezcan no solo del entendimiento sino también de una visión del tipo de comprensión que es posible y apropiada en el estudio de la división y tal vez en las matemáticas en general” (p. 252).

En base a estos resultados, Simon sugiere algunas cuestiones que se le deben dar mayor énfasis en la formación matemática de futuros maestros de primaria, como es la necesidad de “facilitar la creación de conexiones cognitivas mucho más que impartir información adicional y también dar la oportunidad de comprender los conceptos que subyacen a las matemáticas que enseñarán y la relación de estos conceptos con los algoritmos que dominaron previamente” (p. 252).

En un estudio más reciente Márquez, Callejo y Fernández (2011) se centran en los problemas de división medida, para caracterizar cómo, maestros en formación, analizan e interpretan las soluciones dadas por alumnos de 6^a de primaria a este tipo de problemas. Se aplicaron dos cuestionarios, el primero con dos problemas que tenían características similares pues las magnitudes eran discretas y había que añadir una unidad al cociente para dar una respuesta correcta. En el segundo cuestionario se presentaban cuatro soluciones dadas por estudiantes (basadas en el algoritmo y otros métodos alternativos) de los mismos problemas del cuestionario 1. Las respuestas del cuestionario 1 se categorizaron en: resolución correcta, regular e incorrecta de los futuros maestros y el

cuestionario 2 en: puntuaciones que le dan a cada una de las soluciones de los alumnos, pudiendo ser 1 (si la consideraba correcta), 0,5 (si la consideraba regular) y 0 (si la consideraba incorrecta).

Al analizar los resultados los investigadores lograron establecer perfiles para cada uno de los problemas, pero a modo general apreciaron que la mayoría de los futuros maestros que resolvieron ambos problemas correctamente, tendían a considerar correcta la solución que correspondía al uso del algoritmo, aunque no supieran interpretar los datos. Aquellos futuros maestros que dieron respuestas regulares o incorrectas a los problemas y supieron interpretar las respuestas dadas por los estudiantes de 6° de primaria, en general valoraban más las respuestas basadas en los algoritmos de la división que en otros métodos alternativos.

A modo de síntesis y teniendo presente los antecedentes expuestos en este apartado, los autores de esta tesis doctoral realizamos un trabajo previo para indagar sobre el desarrollo del conocimiento de los futuros maestros de primaria, estudiantes de la Universidad de Granada de la asignatura “Diseño y desarrollo del currículo de Matemáticas en la Educación primaria”. Parte de las tareas que deben desarrollar los futuros maestros en esta asignatura, son realizar un análisis de contenido y la planificación de una unidad didáctica. En este estudio focalizamos la atención sobre los sistemas de representación detectados en el análisis de contenido y la unidad didáctica por 6 grupos que trabajaron el contenido matemático de la división, así como también en los sistemas de representación que aparecen en los libros de textos. Esta triangulación (análisis de contenido – unidad didáctica – libros de textos) es interesante, porque nos ayuda a entender cómo los futuros maestros ponen en juego en su planificación lo adquirido durante la instrucción (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2017, p. 258). Es importante destacar que estos sujetos son los mismos que se estudian en esta tesis doctoral.

Comenzamos por revisar los sistemas de representación detectados en el análisis de contenido, apreciando que casi todos los grupos presentaban los sistemas de representación físico, gráfico y simbólico, con una variedad de modelos (modelos lineales, configuraciones, puntual, etc.). Luego analizamos las tareas que habían diseñado para todas las sesiones de sus unidades didácticas (entre 6 y 8 por grupo). Apreciamos que el énfasis se le da al sistema de representación gráfico, que todos los grupos lo empleaban en varias sesiones; el sistema físico, a pesar que también estaba presente en todos los grupos, tenía menos presencia en los últimos niveles educativos (4° y 5° de primaria); y por último, el sistema de representación simbólico no se trabajaba en los dos primeros grupos que corresponde de 2° de primaria. En la revisión que hicimos de los libros de textos, de la editorial SM proyecto Savia de Andalucía, en cada uno de los niveles de los grupos (2°, 3°, 4° y 5° de Primaria), pudimos apreciar que en cuanto se va subiendo de nivel educativo se van dejando de lado los sistemas de representación gráfico y físico. También observamos que en los dos primeros niveles (2° y 3°), si bien se usan los tres sistemas de representación, el físico solo se propone en las tareas tipo taller.

La comparación de dichos resultados nos hace concluir que: (1) Existe una preocupación de los futuros maestros por adquirir nuevos conocimientos al hacer una revisión de diferentes fuentes de información para el análisis de contenido, (2) Los sistemas de representación que aparecen en las tareas planificadas en las sesiones de las unidades

didácticas, son más pobres y tradicionales que los expuestos en el análisis de contenido, situación que podemos interpretar desde un punto de vista positivo ya que los futuros maestros tendrán para su futura labor docente una amplia gama de conocimientos, y (3) Los libros de texto ejercen una evidente influencia en la planificación, por lo que hay una coherencia significativa. Todo esto nos lleva a considerar que el proceso que llevan a cabo estos futuros maestros muestra una conexión entre los conocimientos adquiridos en su formación y lo que plasman en la planificación de la unidad didáctica, hecho que nos da algunas ideas sobre cómo van desarrollando el conocimiento profesional los maestros de Primaria (Rico, 2015), mostrando que es un proceso complejo y que necesariamente tiene que haber relación entre los componentes del conocimiento del contenido matemático escolar y el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares, apuntando a su funcionalidad (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2017).

1.2. El problema de investigación.

“Lo que un profesor sabe es una de las influencias más importantes sobre lo que se hace en las aulas y, finalmente, sobre lo que aprenden los alumnos” (Fennema y Franke, 1992, p.147). Si bien este saber está influenciado por muchos aspectos, en educación matemática es necesario adquirir el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares, los cuales requieren de una preparación que se da en la formación inicial cuando los futuros profesores comienzan su profesorado formativo. Por lo tanto, es de interés estudiar el modelo de formación inicial que ayudara a los futuros profesores a adquirir los conocimientos necesarios para enseñar matemática. Estudiar este proceso con futuros maestros de primaria nos mostrará así mismo cómo ponen en juego una de las competencias claves como es la planificación de unidades didácticas (Rico y Lipiáñez, 2008).

Para efectos de esta investigación, nos centraremos en comprender el conocimiento que ponen en juego un grupo de futuros maestros de primaria a la hora de planificar una unidad didáctica sobre la división, tras recibir la instrucción que emplea el análisis didáctico como herramienta que les ayudará en esta tarea formativa, dentro de un modelo de formación inicial funcional. La figura 1.2 sintetiza los elementos que fundamentan el problema de investigación.

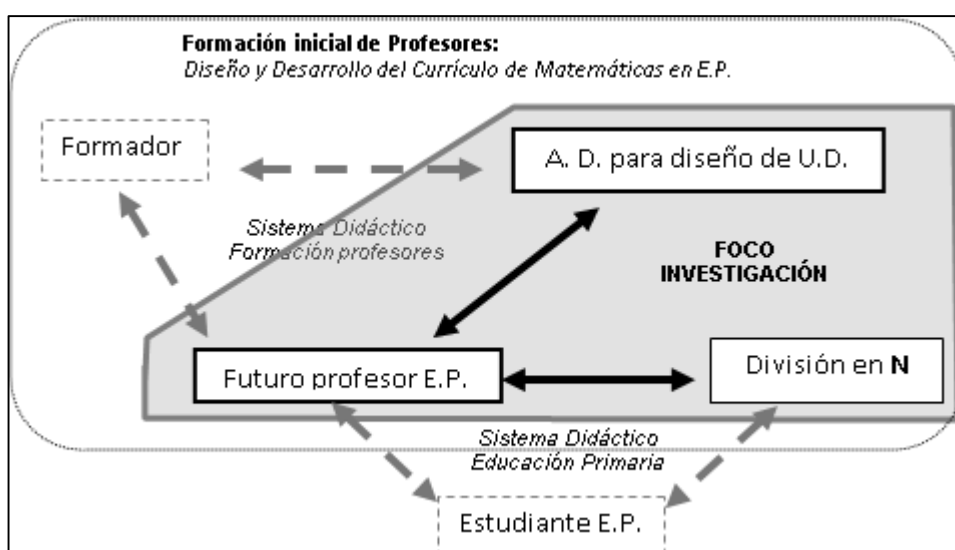


Figura 1.2. Ubicación de la investigación en relación a los elementos definidos

Estudiar este proceso durante y tras la formación, describiendo aspectos que se relacionan y tienen gran importancia para el futuro profesional, como es la realización del análisis didáctico de la división, nos mostrará cuál es la concepción que tienen los futuros maestros sobre este elemento, y el papel que le asignan en relación a la planificación de unidades didácticas, lo que podemos emplear para apreciar cómo abordarlo en la formación inicial.

Hemos elegido un contenido importante y que es básico en la Educación Primaria, la división, que se comienza a introducir en 2º de primaria y, si bien se llega a una formalización global en 5º, su naturaleza hace que se siga aplicando a lo largo de todos los niveles educativos. Es por ello que una de las finalidades de la formación matemática en el grado de maestro de Educación Primaria, en la Universidad de Granada (Flores, 2018), es que los futuros maestros de primaria aprendan a planificar su enseñanza, tras profundizar en el conocimiento conceptual (del contenido) y didáctico del contenido, para generar un aprendizaje significativo en sus alumnos.

1.2.1. Pertinencia de la investigación

A lo largo de este capítulo ha quedado constancia de la relevancia de estudiar la formación inicial de matemática de futuros maestros de primaria, concretamente apreciar cómo las tareas formativas del programa de formación contribuyen a la adquisición de competencias como es la planificación de unidades didácticas. Las revisiones realizadas de la literatura de investigación han puesto de manifiesto la larga trayectoria de diferentes investigadores que también se han interesado por los elementos que fundamentan nuestra investigación.

En cuanto a estudios sobre formación de maestros de primaria en el área de matemáticas, se ha establecido una línea de investigación, que lleva a examinar las tareas matemáticas y las tareas formativas, que aparecen reflejadas en investigaciones y en handbook específicos de este tema. Asimismo, es amplia la bibliografía sobre la planificación de unidades didácticas, implementando diferentes modelos que están estrechamente relacionados con la importancia del planteamiento de objetivos. Finalmente, si bien hemos apreciado que la división es un contenido matemático que está ampliamente investigado desde la perspectiva de los alumnos, es necesario ampliar los estudios con los profesores en formación, para encontrar evidencias sobre la descripción y análisis de los elementos de una unidad didáctica con el contenido de la división a lo largo de la Educación Primaria.

Todo lo mencionado hace interesante y pertinente llevar a cabo nuestra investigación. Hemos de agregar a esto que, desde el punto de vista del análisis didáctico como herramienta para planificar unidades didácticas y como modelo de formación, es pertinente para la línea de formación de profesores dentro del grupo "FQM-193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, debido a la importancia de dar fundamentos de cómo se aprecia el análisis didáctico en la formación inicial de maestro de primaria. El proyecto CODAME, actualmente en curso, está empleando el análisis didáctico como recurso para apreciar el significado que los futuros profesores asignan a los elementos curriculares. Este estudio continúa los trabajos previos en que se ha examinado cómo lo interpretan desde una perspectiva funcional, cómo el

estudiante lo aplica para planificar una unidad didáctica, pero con profesores de secundaria (Gómez, 2007b; Lupiáñez, 2009). Nuestra investigación es la primera que se hace en esta línea, pero con futuros maestros de primaria.

1.2.2. Líneas de investigación en las que se enmarca el estudio.

Teniendo como perspectiva que toda investigación se enmarca dentro de comunidades de personas las cuales se enfocan en definir, regular y normalizar las prácticas que se efectúan dentro de la Educación Matemática (Rojas, 2014), este trabajo es parte de la línea de investigación “Formación y Desarrollo de los Profesores de Matemática” (Cardeñoso et al., 2001), siendo uno de sus temas de interés los programas y planes de formación inicial. Nuestra investigación se centra y parte desde la funcionalidad de un programa de formación, interesándonos las dimensiones que se plantean en él para desarrollar el conocimiento en futuros maestros de primaria.

El estudio se realiza dentro del grupo investigación (FQM193) “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada, en la línea de trabajo “Formación de Profesores de Matemática”. Un foco importante que se ha venido trabajando son las concepciones de los futuros maestros de primaria, por ejemplo sobre el concepto de objetivo (Ruiz-Hidalgo et al., 2017) en donde nuestro trabajo también aportará a su desarrollo. Por otra parte, un elemento que ha sido desarrollado por el grupo partiendo de los trabajos de Luis Rico (Rico, 1997a; 1997b) es el análisis didáctico, siendo este la base de nuestro marco conceptual visto desde tres aristas: (1) como herramienta para la planificación de unidades didácticas, (2) como modelo de formación inicial con un enfoque funcional y (3) como metodología de investigación, que desarrollaremos en el capítulo 2. Estos tres enfoques se ponen de manifiesto en diversas publicaciones del grupo de investigación, especialmente sobre el análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), sus elementos para educación primaria (Flores y Rico, 2015 y Segovia y Rico, 2011), y educación secundaria (Rico y Moreno, 2016). El análisis didáctico se constituye también en metodología de investigación (Rojas, Flores y Ramos, 2013).

Respecto al análisis didáctico como herramienta para la planificación de unidades didácticas, este permite a los futuros maestros profundizar en el conocimiento del contenido matemática y en el conocimiento didáctico a la hora de diseñar el aprendizaje. En este trabajo nos hemos basado en las fases de profundización y diseño que establecen Rojas, Flores y Ramos (2013), las cuales detallaremos en el siguiente capítulo.

1.2.3. Objetivo general y específico de la investigación.

Nos planteamos como objetivo general: Examinar la forma en que los estudiantes para maestros durante la asignatura “Diseño y desarrollo del currículo de Matemáticas en la Educación Primaria”, ponen en juego los elementos del análisis didáctico para la planificación de unidades didácticas sobre la división. Desglosándose en tres objetivos específicos:

1. Describir la forma cómo interpretan los elementos del análisis didáctico al realizar el análisis de contenido y cognitivo, durante la fase de profundización.
2. Describir la forma en que aplican los elementos del análisis didáctico para planificar unidades didácticas en la fase de diseño.

3. Analizar cómo evoluciona la interpretación y aplicación que hacen de los elementos del análisis didáctico, desde la fase de profundización a la de diseño.

Capítulo 2

Marco de referencia de la investigación

Índice de capítulo

2.1 El análisis didáctico como modelo de formación

2.1.1 Conocimientos matemáticos del maestro de primaria

2.1.2 Modelos de formación

2.1.3 Modelo del grupo de investigación Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico (PNA) de la Universidad de Granada

- Asignatura Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemática en Educación Primaria

2.2 El análisis didáctico como herramienta para la planificación de unidades didácticas

2.2.1 Análisis de contenido

- Estructura conceptual

- Sistemas de representación

- Fenomenología

2.2.2 Análisis cognitivo

- Limitaciones de aprendizaje

- Expectativas de aprendizaje

- Oportunidades de aprendizaje

2.2.3 Análisis de instrucción

2.3 El análisis didáctico como metodología de investigación

Marco de referencia de la investigación

El marco conceptual considera el análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), ya que nuestra investigación está centrada en un programa de formación. Específicamente, analizaremos lo que ocurre en una asignatura de tercer curso del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada la cual tiene un enfoque funcional en el que se trabajan herramientas a los futuros maestros de primaria para la planificación de unidades didácticas.

Iniciamos este capítulo presentando los principales elementos del Análisis Didáctico como *modelo de formación*. Luego profundizaremos en los componentes de dicho análisis para establecer relaciones entre sus elementos y profundizar en un contenido matemático específico, la división entre números naturales, como una *herramienta para la planificación* de unidades didácticas. Finalmente describiremos su utilidad como *metodología de investigación*. Esta relación de los elementos del Análisis Didáctico, lo presentamos en la figura 2.1.

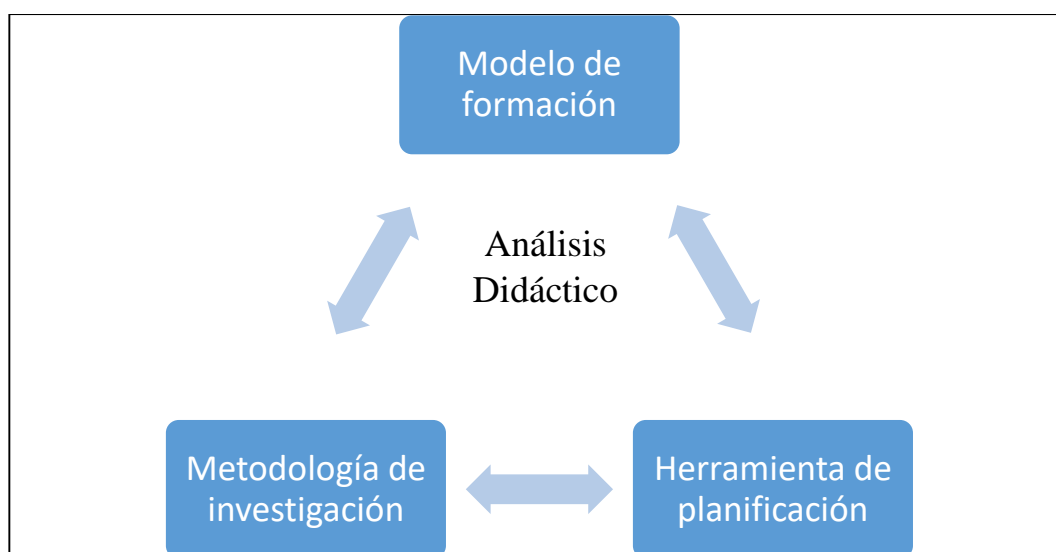


Figura 2.1. Elementos de relación con el análisis didáctico
Fuente: Elaboración propia

2.1. El análisis didáctico como modelo de formación

La formación inicial que se debe llevar a cabo para preparar a los futuros maestros del Grado de Educación Primaria no es una tarea fácil, ya que estos son profesionales generalistas, es decir maestros que en las escuelas deben enseñar diferentes asignaturas (Matemáticas, Lengua, Ciencias Sociales y Naturales, entre otras). Esta situación conlleva a que la Facultad de Educación encargada de su formación deba estructurar un plan que englobe todos los conocimientos necesarios en cada una de estas áreas mencionadas. Por

tanto nos formulamos la siguiente pregunta: ¿En la formación inicial de maestros de primaria se logran desarrollar todos los conocimientos que se deben poner en juego para enseñar a alumnos de Educación Primaria?

El dar respuesta a esta cuestión es un tema demasiado amplio, por esta razón en nuestra investigación nos vamos a centrar en la formación inicial del área de matemática, y en el capítulo primero pusimos en evidencia la importancia de investigar en esta línea. Para comenzar a profundizar sobre el modelo de formación que se plantea en la Universidad de Granada es necesario primero establecer cuáles son los conocimientos que debe aprender un futuro maestro para enseñar matemáticas escolares.

2.1.1. Conocimientos matemáticos del maestro de primaria

Una de las preocupaciones de investigación en la línea de formación de profesores de matemática se han centrado durante varios años en caracterizar el conocimiento que deben tener o bien adquirir los futuros profesores (Sánchez, 2011), llegando a establecer modelos para estructurar el conocimiento matemático, didáctico, curricular, entre otros. En las década de los 80 las ideas de Shulman fueron pioneras en este tema y marcaron un referente importante para investigaciones posteriores. Shulman (1986) enfatiza sobre la condición específica del conocimiento del contenido para la enseñanza, proponiendo tres categorías del conocimiento del contenido:

1. Conocimiento del contenido a enseñar, que tiene que ver con la comprensión de los elementos del conocimiento de la materia y cómo estos se pueden explicar, por lo que el autor lo define como el conjunto y organización del conocimiento de la materia en la mente del profesor.
2. Conocimiento curricular: se refiere al conocimiento necesario que debe tener el profesor para presentar el contenido, es decir, a los materiales de la instrucción apropiados para enseñar.
3. Conocimiento didáctico del contenido: Se describe como “la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza” (Shulman, 1986, p.9). En otras palabras, el conocimiento de la enseñanza de la materia que relaciona los conocimientos mencionados anteriormente, incluyendo otros aspectos, como el conocimiento de las características cognitivas de los alumnos en relación al contenido y la selección de objetivos educativos que se pueden alcanzar, entre otros.

Otros grupos de investigación estructuran las ideas de Shulman para generar nuevos modelos del conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas. Es el caso de Ball y sus colaboradores de la Universidad de Michigan (Ball, Thames y Phelps, 2008), que elaboran el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), en español, Conocimiento Matemático para la Enseñanza, que lo definen como “el conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos” (Hill, Ball et al., 2008, p. 374). Arrancando de las ideas de Shulman, dividen los dos grandes dominios (el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido), en subdominio, como se muestra en la figura 2.2.

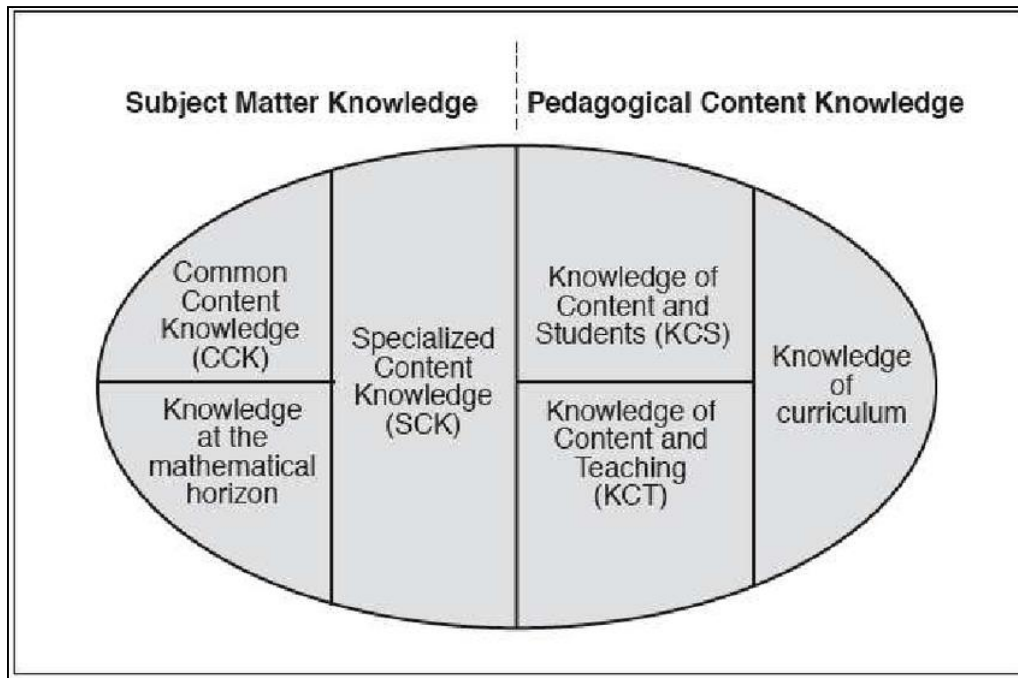


Figura 2.2. Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza MKT.
Fuente Hill, Ball et al., (2008)

El conocimiento del contenido comprende tres subdominios de conocimiento:

- a) El conocimiento común del contenido, definido como el “conocimiento matemático y habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza” (Ball et al., 2008, p.399), o sea el conocimiento de matemáticas básica que puede saber cualquier persona, pero que en el caso de los profesores les permite resolver problemas, resolver operaciones y aplicar definiciones y propiedades.
- b) El conocimiento especializado del contenido referido al “conocimiento matemático y habilidad exclusiva para la enseñanza” (Ball et al., 2008, pp.400-401). El profesor debe tener un manejo de situaciones particulares del contenido que le ayude en el desarrollo de la instrucción del mismo, como por ejemplo, explicaciones matemáticas intuitivas, problemas relativos al mismo, etc.
- c) El conocimiento del horizonte matemático, definido como “el conocimiento que tiene el docente de cómo están relacionados los temas matemáticos incluidos en el currículo” (Ball et al., 2008, p.403). Es el conocimiento que debe saber un profesor sobre las relaciones que tiene un tema matemático de manera transversal a lo largo de todos los niveles educativos.

El conocimiento didáctico del contenido está compuesto por tres subdominios de conocimiento:

- a) El conocimiento del contenido y de los estudiantes, definido como el “conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular” (Hill, Ball et al., 2008, p.375). Es decir, es el conocimiento que pone en juego el profesor cuando al enseñar un tema matemático también toma en cuenta el conocimiento previo de los alumnos, las dificultades a las que se puede enfrentar con dicho tema y de qué manera lo puede aprender mejor.

- b) El conocimiento del contenido y la enseñanza, declarado como “el conocimiento que combina el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático” (Ball et al., 2008, p. 401). El profesor teniendo en cuenta las posibilidades y limitaciones de aprendizaje de los alumnos sobre un tema matemático, debe saber que estrategias se deben desarrollar en el aula para favorecer el aprendizaje.
- c) El conocimiento del currículo, que “alude al conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes” (Rojas, 2014, p. 52).

Otro modelo de conocimiento que nos interesa destacar, porque surge en la formación inicial de profesores de Educación Primaria y cómo el conocimiento de los contenidos matemáticos se manifiestan tanto en los procesos de planificación como en la enseñanza, es el denominado Cuarteto de Conocimiento (The Knowledge Quartet – KQ). Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) ponen su foco de atención en la reflexión sobre la relación del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido en matemáticas, definiendo cuatro dimensiones del conocimiento (*Foundation, Transformation, Connection* y *Contingency*, figura 2.3):

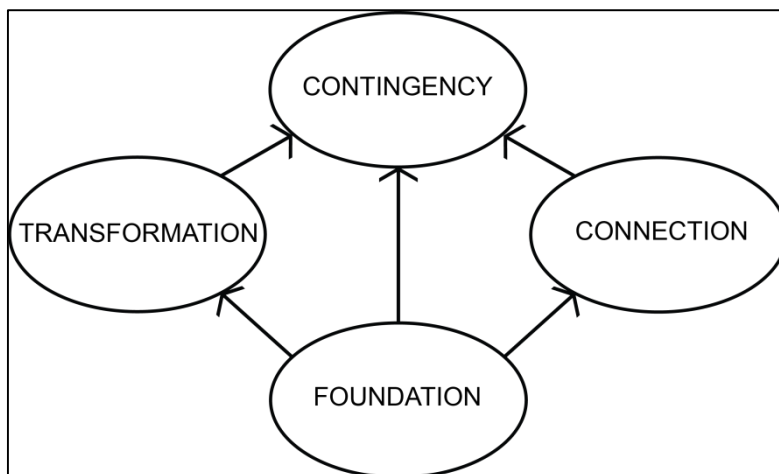


Figura 2.3. El cuarteto del conocimiento (The knowledge quartet – KQ)
Fuente: Rowland, Huckstep y Thwaites (2005)

- a) Fundamento, que se refiere tanto al conocimiento matemático y didáctico, como a las creencias sobre estos conocimientos, provenientes de antes y durante el proceso de formación.
- b) Transformaciones, la manera cómo se emplea el conocimiento de partida, para llevar a cabo la enseñanza, considerando la capacidad de aprender matemática de los alumnos, esto llevado a cabo en la planificación.
- c) Posteriormente el profesor establece conexión entre la planificación y enseñanza, conectando el conocimiento del contenido que se pondrá en juego en cada uno de los diseños.
- d) Por último, el profesor manifiesta contingencia, cuando su conocimiento le permite reaccionar ante aquellas situaciones importantes que se dan en el aula de matemática por las ideas repentinas de los alumnos y que ponen a prueba la habilidad del profesor para darles respuesta. El profesor debe estar preparado para

afrontarlas, y la calidad de sus reacciones dependerá de su dominio del conocimiento profesional.

Por otra parte, el grupo de investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, liderado por José Carrillo, ha reformulado el modelo MKT enfatizando todo el conocimiento del profesor de matemática como especializado (Rojas, 2014), surgiendo así el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – MTSK) que, al igual que el modelo MKT, está dividido en dos grandes dominios: conocimiento del contenido matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK), pero se diferencian en los subdominios específicos, como se muestra en la figura 2.4.

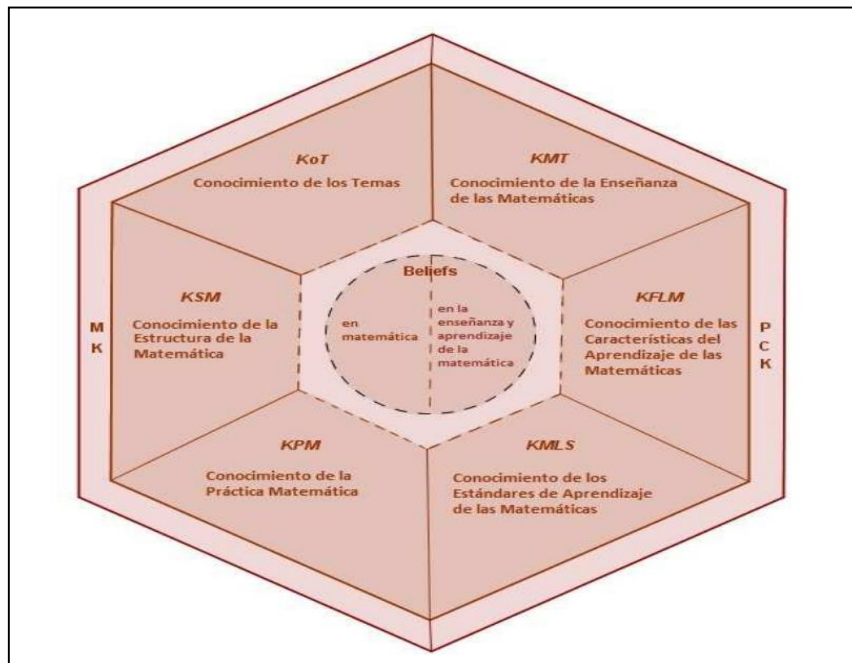


Figura 2.4. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – MTSK),
Fuente: Carrillo et al., (2013)

El conocimiento del contenido matemático (MK¹) está estructurado por tres subdominios de conocimiento:

- a) El conocimiento de los temas (KoT) es el conocimiento de las matemáticas escolares pero sin dejar de lado el de la matemática como disciplina, por lo tanto también se relaciona con el conocimiento de los significados asociados al contenido, los fenómenos que le dan sentido, las aplicaciones del contenido, las definiciones e imágenes de un concepto, las propiedades y su fundamentación, las representaciones del contenido y de los procedimientos (Flores-Medrano et al., 2016). Se trata por lo tanto, de conocer el contenido con una mayor profundidad que el que corresponde a un nivel educativo concreto.

¹ Las siglas corresponde a la denominación en inglés

- b) El conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) se entiende como el conocimiento del profesor sobre las relaciones de contenidos matemáticos, por lo que no solo se deben incluir los conceptos como elementos aislados, “sino integrados en un sistema de conexiones, que permitirá al profesor comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar ciertos conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas” (Montes et al. 2013, p. 405).
- c) El conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM), es el conocimiento del modo de proceder en matemáticas, entendiendo la práctica como el hacer matemáticas, ligado a saber cómo se piensa en matemática. Flores-Medrano et al. (2016) lo ejemplifican con el “conocimiento de cómo se define en matemáticas, la diferencia entre una demostración, una prueba y una comprobación, el valor en ésta de los ejemplos y en el planteamiento de una conjetura, de distintos tipos de demostraciones y su campo de acción” (p. 212).

El conocimiento didáctico del contenido matemático (PCK) engloba los fundamentos del currículo con aspectos de la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático, estando compuesto por tres subdominios del conocimiento:

- a) El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), es el conocimiento que se corresponde con el aprendizaje específico de los temas matemáticos, por lo que el profesor debe saber cómo aprenden los alumnos dichos temas. Para esto se incluye el conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes de los distintos temas, los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada tema, o el lenguaje habitualmente usado por los estudiantes en relación con el tema tratado en clase (Montes et al., 2013).
- b) El conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), es el conjunto de conocimientos que el profesor tiene que saber de cómo se puede o debe llevar a cabo la enseñanza, para esto se tienen que conocer diferentes estrategias para potenciar el desarrollo de capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales, así también como el conocimiento de recursos o materiales, como por ejemplo la adecuada selección de ejemplos en un libro de texto (Montes et al., 2013).
- c) El conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS) engloba los conocimientos sobre lo que indica el currículo de lo que se debe aprender en cada nivel, también es importante que el profesor conozca más allá de su entorno institucional los objetivos y estándares que manifiestan los expertos, por ejemplo el NCTM. Finalmente es necesario el conocimiento de los resultados de distintas investigaciones en el área de didáctica de la matemática.

Como se muestra en la figura 2.4 el modelo MTSK sitúa las creencias del profesor en matemática y en su enseñanza y aprendizaje, en el centro del esquema, ya que estas influyen en su conocimiento en cada uno de los subdominios. Pero como manifiestan Flores-Medrano et al. (2016) “las concepciones representan una predisposición a través de las acciones y que no pueden ser directamente observadas o medidas, solamente inferidas. Al igual que el resto de elementos en el modelo, las concepciones son consideradas con fines analíticos” (p. 214).

Todos los modelos del conocimiento que presentamos, junto con otros (Ponte y Oliveira, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Silverman y Thompson, 2008) ponen en evidencia la dificultad de caracterizar la relación entre los conocimientos que deben tener los profesores de matemática. Por ende, lo que debe aprender un futuro maestro de matemática en su formación inicial es también un tema complejo. En nuestra investigación para ayudar a clarificar los diferentes conocimientos que se requieren para formar profesores y tal como lo percibe el grupo de investigación Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico, FQ193 (PNA) de la Universidad de Granada donde se enmarca nuestro trabajo, nos basaremos en la denominación que plantea Rico (2015): *conocimiento del contenido matemático escolar y conocimiento didáctico de las matemáticas escolares*, estando estos relacionados directamente con el modelo de formación centrado en el análisis didáctico, que describimos más adelante.

Estos dos dominios que plantea Rico arrancan de la diferenciación que realizan los trabajos de Shulman (1986), considerando que están estrechamente relacionados y se ponen en juego al desarrollar cada uno de los análisis (contenido, cognitivo, instrucción y evaluativo) que incluye el análisis didáctico. Lo que lleva a que se tenga una visión integral de ambos conocimientos. Se concreta que el conocimiento sobre un contenido matemático específico, se establece en base a tres componentes de significado: definición – representación - sentido, derivado del análisis de contenido. Pero este conocimiento a su vez forma parte del conocimiento didáctico de las matemáticas escolar que Rico define como el conjunto de conocimientos teóricos, técnicos y prácticos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. En resumen, “el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares sobre un contenido consta del conocimiento sobre su contenido, del conocimiento sobre su aprendizaje, del conocimiento sobre su enseñanza y del conocimiento sobre su evaluación” (Rico, 2015, p. 35), por lo tanto, es mediante el análisis didáctico que se construyen el conocimiento profesional sobre las matemáticas escolares. Más adelante cuando describamos el análisis didáctico como modelo de formación mostraremos dicha relación (conocimiento-análisis didáctico).

2.1.2. Modelos de formación

Grossman, Hammerness y McDonald (2009) desde un punto de vista general, manifiestan que los planes de estudio de la formación docente se han dividido históricamente en cursos de fundamentos, que están destinados a impartir “herramientas conceptuales”, como principios, marcos o pautas que los maestros usan para guiar sus decisiones sobre la enseñanza y el aprendizaje, donde también se pueden incluir teorías generales aplicables, tales como el constructivismo; y cursos de métodos, diseñados para ayudar a los futuros docentes a desarrollar estrategias y herramientas para la enseñanza, proporcionándoles “herramientas prácticas”, como tipo de prácticas y estrategias que los docentes pueden implementar en las aulas (p. 274).

Hoy en día los esfuerzos que se hacen para estructurar los planes de formación inicial es integrar ambos enfoques en donde los futuros docentes se les enseñan métodos para enseñar materias concretas basándose en la teoría y en la investigación. Pero esto no es suficiente, como manifiesta Lampert (2005):

“aprender sobre un método o aprender a justificar un método no es lo mismo que aprender a hacer el método en una clase con estudiantes, del mismo modo que aprender

sobre el piano y la teoría musical no es aprender a tocar el piano, se requiere tener las manos en el instrumento y sentir que se 'actúa' en el desempeño... Debido a que la enseñanza se da en una interacción educativa, aprender a enseñar requiere establecer relaciones con los alumnos para permitirles aprender el contenido” (p. 36).

Esto pone de manifiesto que al diseñar una asignatura dentro de un plan de formación inicial para docentes se tienen que tomar en cuenta varios aspectos, por una parte lo que se enseña pero también cómo se enseña. Esto en su conjunto es lo que entendemos con un modelo de formación. Al centrarnos en este tema comenzamos planteándonos: ¿qué materias y contenidos son necesarios en la formación inicial para que un futuro maestro de primaria enseñe matemática? y, ¿cuáles son las metodologías más adecuadas que se deben llevar a cabo en la instrucción para ayudar a los futuros maestros de primaria a desarrollar el conocimiento necesario para que enseñen matemática? Luego de hacer una revisión bibliográfica sobre los modelos de formación nos dimos cuenta que la respuesta a estos cuestionamientos no es trivial, ya que existen diferentes grupos de investigación que hacen propuestas con fundamentos teóricos, justificando y avalando modelos de formación desde diferentes perspectivas (Font, 2002).

De los documentos encontrados, algunos eran investigaciones que ponían en juego un modelo de formación para luego analizar resultados, tanto en formación docente general (Grossman y Thompson, 2008; Grossman, Hammerness, McDonald y Ronfeldt, 2008; Grossman, Compton, Igra, Ronfeldt, Shahan y Williamson, 2009), como en el área de matemática (Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras, 2013; Earnest y Amador, en prensa; Ghouseini y Herbst, 2014). Los otros documentos encontrados son artículos de divulgación, en donde se dan a conocer modelos de formación y sus bases teóricas, siendo algunos de formación docente (Grossman, Wilson y Shulman, 2005; Grossman, Hammerness y McDonald, 2009; Grossman y McDonald, 2008) y la gran mayoría se centraban en el área de matemática. Estos últimos, que son de nuestra área de interés los resumimos en la tabla 2.1, del anexo 2.

De todos los modelos de formación presentados en la tabla 2.1, del anexo 2, profundizaremos en algunos de ellos, puesto que su área de interés es la formación inicial de maestros de primaria, que corresponde a nuestro contexto de investigación. Por lo tanto, nos interesa ver qué se está haciendo en otros grupos de investigación.

El grupo de investigación y formación didáctica de la Universidad de Alicante liderado por Salvador Llinares desde hace un tiempo viene investigando sobre la formación inicial de profesores de matemática. Parten de la base que la formación de maestros es un proceso de inmersión en una comunidad establecida por la enseñanza de las matemáticas como una práctica que debe ser comprendida y aprendida, con tareas donde los futuros maestros para realizarlas deben desarrollar habilidades como:

- Diagnosticar - dotar de significado a las producciones de los alumnos-,
- Planificar –determinar planes de acción-,
- Evaluar – tomar decisiones sobre cómo, dónde, y qué hacer con la información-,
- Gestionar debates – formular preguntas que permitan vincular concepciones previas con lo nuevo, subrayar y valorar las diferentes aportaciones -. (Llinares, 2004, p. 3)

Por lo tanto, las tareas que se ponen en juego están diseñadas en entornos de aprendizaje donde se ponen en evidencia los procesos de aprendizaje matemático de alumnos de primaria a través de videos permitiendo a los futuros maestros construir conocimiento y desarrollar al mismo tiempo formas de generarlo apoyándose en el aprendizaje de “ver, interpretar, escucha y diseñar perspectivas de acción vinculadas a la práctica” (Linares, 2004, p. 5).

Por otra parte, Martín Socas del departamento de análisis matemático de la Universidad de la Laguna, en su artículo “Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas” (Socas, 2011) presenta un modelo de formación para futuros profesores de primaria en el área de matemática, apuntando a que esta debe considerar:

“múltiples aspectos que van, desde la toma en consideración de los conocimientos y experiencias previas del estudiante para profesor y su influencia para una formación efectiva, hasta las condiciones de trabajo del profesor y su papel en el sistema educativo y en la sociedad” (p.203).

Su propuesta se basa en una perspectiva global, en el marco de la resolución de problemas propios de la profesión. Es así como han desarrollado una metodología que considera tres sistemas de actividades básicas: (1) Organizar el contenido matemático para enseñarlo, (2) Analizar e interpretar las producciones de los alumnos y (3) Gestionar el contenido matemático en el aula. En función de estas actividades, se busca desarrollar los conocimientos y competencias que el profesor necesita para enseñar matemáticas en primaria.

Cardeñoso y Azcárate (2002) integrantes del grupo de investigación “Desarrollo Profesional del Docente” de la Universidad de Cádiz trabajan un modelo de formación basado en Ámbitos de Investigación Profesional (A.I.P.), el cual definen como el “conjunto de problemas e ideas relacionadas con algún aspecto de la función docente y de la práctica educativa, susceptibles de ser objeto de estudio en procesos formativos” (p. 187).

Al vincular esta idea al diseño de intervenciones en la formación inicial de maestros plantean la necesidad de diferenciar lo que ellos llaman “Momentos Metodológicos”, los cuales tienen propósitos específicos y buscan desarrollar determinados conocimientos, y capacidades de los futuros maestros. Cada uno de estos momentos metodológicos se concreta con diferentes tipos de actividades, que presentamos en la tabla 2.1 (Cardeñoso y Azcárate, 2002, p. 189-190).

Tabla 2.1. *Actividades propuestas en diferentes momentos metodológicos.*

Momentos Metodológicos	Tipos de actividades
Un diagnóstico inicial de las situaciones escolares que permite formular problemas prácticos de partida. Su finalidad es la expresión y toma de conciencia del saber y práctica personal	Actividades para detectar y formular los problemas prácticos
Búsqueda y análisis de información en torno a dichos problemas que permita el contraste entre compañeros, con diversas fuentes de información, estudios e investigaciones y con la realidad	Actividades que permitan detectar las ideas de los profesores y sus obstáculos asociados
Diseño, desarrollo y/o seguimiento del proyecto a experimentar	Actividades que faciliten el contraste y movilización de las ideas, promoviendo su argumentación
Elaboración de conclusiones y propuesta de modificación del proyecto	Actividades de experimentación curricular propiamente dicha
Metarreflexión sobre el proceso formativo que nos puede llevar a la estructuración de un nuevo saber y una nueva práctica profesional	Actividades que favorezcan la reflexión y elaboración de las ideas

Fuente: Elaboración propia

El conocer diferentes modelos de formación y sus fundamentos teóricos nos hace ver que existe una gran variedad de perspectivas para enfrentar la formación inicial de maestros de primaria en el área de matemática. Pudimos apreciar que un tema central para el desarrollo profesional es la práctica, la cual en algunos casos puede ser vista como la acción concreta donde el futuro maestros se relaciona directamente con el entorno educativo (colegio-aula-alumno-currículo), o bien como una práctica más de laboratorio, donde se lleva la realidad del aula (profesor-alumno-currículo) al contexto de una clase en la facultad de educación. Cualquiera de ambas situaciones hacen que los futuros maestros, como dice Font (2002) “tengan que desdoblarse, por una parte son alumnos que aprenden, mientras que por otra parte han de pensar como un maestro” (p. 7).

Todo este proceso que se lleva a cabo en la formación inicial no es una tarea fácil, por lo que cuesta pensar que los conocimientos, habilidades y competencias que de tener un maestro para enseñar matemáticas a alumnos de Educación Primaria sea concretado en la Universidad, por lo tanto las investigaciones ponen en evidencia que si se diseñan adecuadamente modelos de formación que trabajen herramientas para generar una actitud crítica hacia la propia práctica, los futuros maestros a lo largo de los años de experiencia podrán afrontar de mejor manera su labor profesional (Castro et al., 2014).

A pesar del esfuerzo por investigar sobre modelos de formación inicial, esta es una línea de investigación relativamente joven (Darling-Hammond y Bransford, 2005; Grossman y McDonald, 2008), se hace necesario recopilar más evidencias sobre cómo las diferentes metodología y tareas formativas ayudan a los futuros maestro a entender la enseñanza de las matemáticas. En este contexto describiremos a continuación la perspectiva y fundamentos teóricos que se llevan a cabo en la Universidad de Granada en el grado de Educación Primaria.

2.1.3. Modelo del grupo de investigación Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico (PNA) de la Universidad de Granada

En el capítulo 1 hicimos mención a lo planteado por Gómez (2005), quien al resumir los trabajos presentados en el ICMI 15 aprecia la variedad de contextos, modelos y esquemas para la formación de profesores de matemática, realizando la preocupación por relacionar e integrar los conocimientos matemáticos y didácticos en dichos modelos. Centrándonos en la Universidad de Granada en el grado de Educación Primaria, también en el capítulo 1 hicimos una descripción general en cuanto a la cantidad de créditos (22) que deben cursar los futuros maestros en el área de matemática y su didáctica, estando estructurados en 3 asignaturas. El diseño de estos cursos se encuentra a cargo del departamento de Didáctica de la Matemática, en donde el grupo de investigación Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico, FQ193 (PNA) percibe la formación inicial desde una perspectiva funcional, integrando el conocimiento, habilidades y actitudes de los estudiantes para maestro en la acción que se lleva a cabo en el contexto de aprendizaje de las matemáticas en las aulas de Educación Primaria (Gómez y González, 2008).

Según esta visión, el grupo PNA se plantea que el conocimiento de los futuros maestro se puede desarrollar en base al análisis y la descripción de las actividades necesarias para planificar, gestionar y evaluar una lección de matemática (Gómez y González, 2008), puesto que se considera que:

“la planificación requiere delimitar y precisar los contenidos y sus significados, prever el tipo de aprendizaje que se quiere alcanzar, diseñar un plan de actuación para el logro de los aprendizajes esperados y establecer un sistema de evaluación sobre el alcance de dichos logros” (Rico, 2015, p. 28).

Este enfoque sobre la planificación como una competencia a desarrollar en la formación inicial derivan de los trabajos de Rico (1997a, 1997b), quien estableció cuatro dimensiones del currículo (cultural/conceptual, cognitiva, ética/formativa y social) sobre las que se debe reflexionar al planificar. El análisis de dichas dimensiones se concretan en los organizadores del currículo, con los cuales el profesor aprecia el significado de un contenido matemático, a partir de las dimensiones curriculares que lo sustentan: “la dimensión cultural/conceptual, que se relaciona con el organizador contenido; la dimensión cognitiva, con el organizador cognitivo; la dimensión ética o formativa, con el organizador instrucción; y la dimensión social, con el organizador actuación/evaluación” (Rojas, 2014, p. 74).

Todos estos organizadores engloban lo que Rico (1997a) establece como Análisis Didáctico, el cual considera como una herramienta que le permite al profesor organizar su actividad de enseñanza sobre un tema matemático, facilitándole así el diseño de unidades didácticas. Para llevar a cabo esta tarea se definen cuatro análisis sobre la enseñanza del contenido que se relacionan con las dimensiones del currículo. La dimensión cultural/conceptual se concreta en el contenido matemático a enseñar, para lo que el profesor necesita realizar un *análisis del contenido*. Pero además tiene que preocuparse del alumno, sus posibilidades y obstáculos de aprendizaje, realizando un *análisis cognitivo*. La actuación del profesor refleja la dimensión ética o formativa, que requiere *analizar la instrucción*, para determinar tareas que procuren el aprendizaje pretendido. Por último, el profesor tiene que dar cuenta a la sociedad de su enseñanza,

realizando el *análisis evaluativo*, para valorar tanto los logros como el proceso (Flores, 2018).

Es así que el Análisis Didáctico está estructurado en cuatro tipos de análisis: Contenido, Cognitivo, de Instrucción y de Actuación. El análisis de contenido conforma la revisión y organización de los conceptos y procedimiento de un contenido matemático escolar, el modo como estos se pueden representar y finalmente la organización de los fenómenos y problemas a los que puede dar respuesta. El análisis cognitivo se centra en el aprendizaje de un tema matemático y sirve para concretar las expectativas y previsiones de los profesores sobre ese aprendizaje, las limitaciones que pueden interferir en el aprendizaje y por último, la organización de las tareas vistas como generadoras de oportunidades de aprendizaje. El análisis de instrucción es el momento donde el profesor selecciona, diseña y secuencia las tareas que se llevarán a cabo en la instrucción, delimitando también los materiales y recursos como la gestión del aula, todo esto concretado en la unidad didáctica. Finalmente, el análisis de actuación tiene un componente evaluativo, ya que se lleva a cabo una vez se implemente la unidad didáctica, pudiendo obtener información para generar modificaciones en la unidad didáctica.

El resumen del análisis didáctico, como lo muestra la figura 2.5 es un proceso cíclico, en donde cada análisis que se va desarrollando permite sentar las bases para el siguiente.

Por lo tanto, el grupo PNA teniendo una visión funcional y una fundamentación teórica en base al análisis didáctico diseña su modelo de formación inicial en el Grado de Educación Primaria, con la intención de enfatizar el papel profesional de los futuros maestros. En consecuencia se plantean tres principios:

- Favorecer la comprensión de los conceptos matemáticos,
- Poner al estudiante para profesor en contacto con lecturas y resultados alcanzados en las didácticas de los temas matemáticos,
- Hacer que lo refleje profundizando en el significado de los contenidos matemáticos para comprenderla y para diseñar sesiones de clase encaminadas a lograr su aprendizaje (Aguayo-Arriagada, 2014).

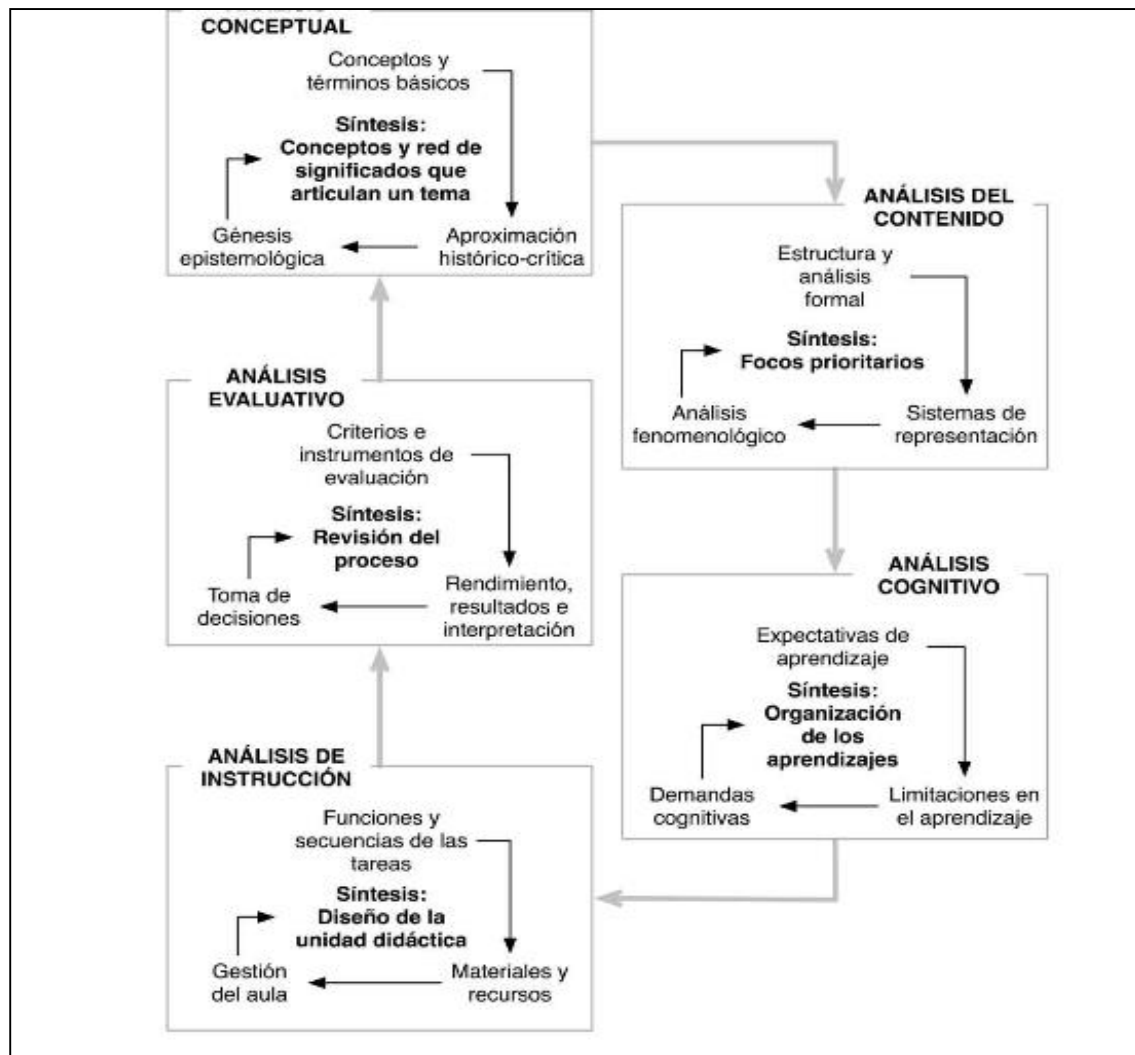


Figura 2.5. Proceso cíclico del Análisis Didáctico.
Fuente, Lupiáñez, (2013)

Para llevar a cabo todas estas ideas y como mencionamos en el apartado sobre conocimientos, el modelo de formación de la UGR en el área de matemática para la Educación Primaria se basa en el desarrollo de los dos dominios del conocimiento planteados por Rico (2015), quien los denomina *conocimiento del contenido matemático escolar* y *conocimiento didáctico de las matemáticas escolares*, los cuales se ponen en juego cuando los futuros maestros realizan el análisis didáctico. La estructura de esta relación (conocimiento y análisis didáctico) se organizan secuencialmente en los diferentes años del Grado de Educación Primaria en tres asignaturas: (1) Bases Matemáticas para la Educación Primaria, (2) Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria y (3) Diseño y desarrollo del Currículo de Matemática en Educación Primaria. En esta última nos centraremos y describiremos por ser nuestro contexto de investigación, pero en la tabla 2.2 mostramos el curso en donde se desarrolla cada asignatura y el tipo de análisis que se lleva a cabo, pudiendo observar que el esquema de formación inicial tiene un ordenamiento lógico en base al análisis didáctico.

Tabla 2.2. Relación del análisis didáctico con las asignaturas del Grado de Educación Primaria.

Curso	Asignatura	Tipo de análisis
Primero (primer semestre)	Bases matemáticas para la Educación Primaria	Análisis de contenido
Segundo (segundo semestre)	Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria	Análisis cognitivo
Tercero (segundo semestre)	Diseño y desarrollo del Currículo de Matemática en Educación Primaria	Análisis de contenido, Análisis cognitivo y Análisis de instrucción

Fuente: Elaboración propia

Asignatura Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemática en Educación Primaria

Como se puede ver en la tabla 2.2 cuando los futuros maestros llegan al tercer curso tienen las nociones sobre el análisis de contenido y cognitivo que trabajaron en las dos asignaturas anteriores. Por lo tanto, uno de los objetivos que se plantean para esta nueva asignatura es “Diseñar y fundamentar una unidad didáctica para un tema específico de las matemáticas de Educación primaria”². Para cumplir dicho objetivo, primero se asigna un tema matemático de Educación Primaria para un nivel específico, por ejemplo los grupos que analizamos en esta investigación trabajaron el contenido de la división en segundo, tercero, cuarto y quinto de Primaria respectivamente.

Ya sabiendo el tema y en qué nivel se deben centrar, los estudiantes para maestros comienzan con el desarrollo del análisis de contenido, debiendo ejecutar diferentes tareas (análisis del currículo, revisión de libros de matemáticas para maestros, entre otras) que le ayudan a establecer la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología, permitiendo la profundización sobre el contenido matemático y de esa manera desarrollar su conocimiento del contenido matemático escolar. Una vez concluido este análisis, dan inicio al análisis cognitivo, en donde comienzan con una revisión de textos específicos de didáctica para establecer las dificultades y errores que pueden tener los escolares sobre el contenido matemático en que se está trabajando. Seguido, inician el enunciado y organización de las expectativas de aprendizaje (objetivos) y finalmente haciendo una revisión de libros de textos y de información en internet, dan comienzo a la selección o creación de tareas, las cuales deberán analizar para apreciar sus cualidades educativas y su relación con teorías del aprendizaje (Flores, 2018).

Con el análisis cognitivo acabado, llegan al proceso final que es donde deben secuenciar las diferentes tareas, teniendo en cuenta el tiempo, gestión de aula y materiales para ir armando cada sesión de su unidad didáctica (análisis de instrucción), que luego deberán presentar a sus compañeros y al profesor de la asignatura para recibir críticas constructivas. Todo este proceso apoya a los futuros maestros en su familiarización con el conocimiento didáctico de las matemáticas necesario para planificar la enseñanza de

² Guía docente de la asignatura.

<http://grados.ugr.es/primaria/pages/infoacademica/43maestroeducacionprimariaverificado>

un contenido matemático. En la figura 2.6 mostramos a modo de resumen el proceso que se lleva a cabo en esta asignatura.

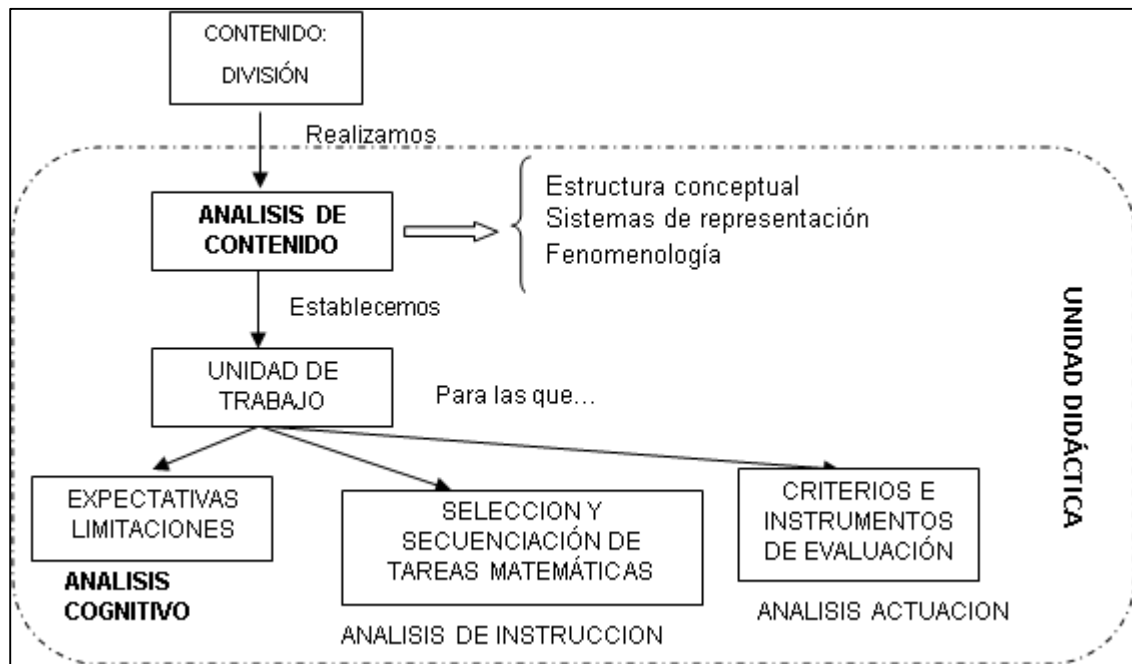


Figura 2.6. Proceso de desarrollo la asignatura “Diseño y desarrollo del currículo de matemática en Educación Primaria
Fuente: Adaptación de Flores (2018)

Es importante destacar, que el análisis de actuación no se lleva a cabo en este proceso formativo, ya que no se da el espacio para que la unidad didáctica diseñada se lleve a la práctica. En este apartado no exponemos los detalles metodológicos de la asignatura, que se describen en el capítulo 3.

2.2. El análisis didáctico como herramienta para la planificación de unidades didáctica

Como fundamentamos en el apartado anterior el análisis didáctico es un elemento clave en la formación inicial de maestros de la Universidad de Granada, ya que los ayuda a desarrollar el conocimiento necesario que deberán poner en juego cuando enseñen matemáticas a alumnos de Educación Primaria, basado en una de las competencias profesionales como es la planificación de unidades didácticas. Si bien durante la formación los estudiantes para maestros no hacen la unidad didáctica de cada uno de los temas que deberán enseñar en la escuela, si se entregan las herramientas para que puedan continuar haciendo análisis didácticos de cada tema matemático a lo largo de su carrera profesional.

En este apartado describiremos el análisis didáctico como esa herramienta para abordar el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje sobre un tema específico de las matemáticas que conforman el currículo (Lupiáñez, 2013), llegando a la programación de una unidad didáctica. Durante este proceso se deben tener en cuenta varios elementos que tienen una secuencia progresiva, es decir comenzar con la estructura conceptual de un tema específico permite luego establecer sus sistemas de representación y sus fenómenos

(contextos, situaciones y problemas), teniendo esto como base se puede continuar avanzado en la búsqueda de cuáles son las dificultades y errores más recurrentes al trabajar con el tema. Considerando lo anterior se pueden establecer los objetivos de aprendizaje que se pretenden lograr. Hasta aquí ya se tiene un panorama bastante claro para comenzar con la búsqueda o creación de tareas que apunten al logro de dichos objetivos. Al tener ya un conjunto de tareas estas se deben secuenciar teniendo en cuenta aspectos como el tiempo en que se quieren llevar a cabo las tareas, los materiales necesarios con los que se deben disponer y la forma en cómo se va a organizar la instrucción (gestión del aula).

La descripción que haremos de todo este proceso será con el tema matemático de la división que fue el que desarrollaron los grupos de estudiantes para maestros que se analizan en esta investigación. Para esto, primero hicimos nosotros un análisis de contenido y cognitivo, que mostraremos a continuación, permitiéndonos tener información sobre la división. Nos limitamos a la fase de profundización del análisis didáctico (Rojas, Flores y Ramos, 2013), pero además mostraremos elementos que contribuyen a su instrucción, como materiales y recursos.

2.2.1. Análisis de contenido

El análisis de contenido se centra en analizar, describir y establecer los diferentes significados involucrados en un tema matemático, que a partir del triángulo semántico de Frege (referencia- signo – sentido), Rico (1997a) establece tres dimensiones para expresar el significado de los contenidos de las matemáticas escolares, como muestra la figura 2.7

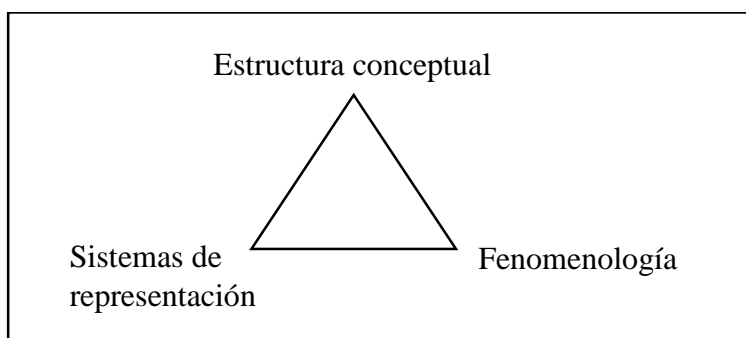


Figura 2.7. Dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar.
Fuente: Gómez (2007a, p 27).

Por lo tanto, el análisis de contenido se estructura en base a estas tres dimensiones (Lupiáñez, 2013):

- La estructura conceptual tiene en cuenta las relaciones de los conceptos y procedimientos involucrados en el contenido estudiado, considerando su estructura matemática y las que configuran tales conceptos y procedimientos.
- Los sistemas de representación muestran las diferentes maneras en que se puede representar el contenido y su relación con otros conceptos y procedimientos.

- La fenomenología delimita aquellas situaciones donde tiene uso el concepto matemático involucrado, en las que este muestra su funcionalidad.

Estructura conceptual

Para establecer las relaciones entre conceptos y procedimientos de la división de números naturales se requiere examinar los focos conceptuales, que son aquellas “agrupaciones específicas de conceptos, procedimientos y relaciones que adquieren importancia especial pues expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos” (Luapiáñez, 2013, p. 86). Para fijar los focos conceptuales es necesario comenzar con la revisión del currículo. Analizamos el Decreto de Educación Primaria de la Junta de Andalucía (2007), el cual define los contenidos en diferentes bloques (1. Procesos, métodos y actitudes matemáticas, 2. Números, 3. Medidas, 4. Geometría, 5. Estadística y Probabilidad) y separados en los tres ciclos de Educación Primaria. Revisamos en cada ciclo y bloque todos los contenidos que estuvieran relacionados con la división, obteniendo con resultado lo que presentamos en la tabla 2.2, del anexo 2.

Al determinar que los contenidos relacionados con el tema de la división aparecen en los tres ciclos de primaria, nos vamos a centrar en el segundo ciclo para caracterizar y ejemplificar algunos de los componentes de la estructura conceptual de este tema.

Para concretar la estructura conceptual de un contenido matemático este se puede organizar en dos bloques: conceptual y procedimental (Rico, 1995a). Dentro del bloque conceptual se distinguen tres niveles de conocimiento: hechos, conceptos y estructuras conceptuales; y en el bloque procedimental también se consideran tres niveles: destrezas, razonamientos y estrategias. La definición de cada uno de estos niveles se presenta en la tabla 2.3, del anexo 2.

Para el caso del contenido de la división en primaria la tabla 2.4 del anexo 2 ejemplifica su organización, tomando en cuenta las definiciones de la tabla 2.3 del anexo 2.

Al hacer la clasificación de los dos bloques de un contenido matemático, es importante establecer cuáles son aquellos conceptos que engloban a todos los contenidos trabajados, definiendo así los conceptos prioritarios. Para el caso de la división en el segundo ciclo de primaria estos son:

- Significados de la división: partitiva y cuotitiva
- Tipos de División: exacta e inexacta
- División como operación inversa de la multiplicación
- Algoritmo de la división
- Propiedades de la división
- Elementos de la división

Sistemas de representación

Los sistemas de representación son el “conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permiten representar una estructura matemática” (Castro y Castro, 1997, p.103), por lo que de esta manera un concepto y sus relaciones con otros conceptos se pueden representar de distintos modos. Pero es necesario tener presente que según como sea la representación de un concepto esta actúa como un medio que permite una aproximación a la comprensión del concepto y no es el concepto en sí mismo. Por ejemplo para el caso

de la división $\frac{a}{b}$ puede ser la representación simbólica de una división pero también la de una fracción, en cambio $a \div b$ siempre será un modo de representar simbólicamente a una división porque el símbolo \div es exclusivo para esta operación.

Las representaciones en el ámbito de la enseñanza son esenciales ya que permiten establecer relaciones entre los conceptos matemáticos y los modelos del mundo real, así también como a expresar ideas y a organizar el pensamiento, es por esto que existen distintos tipos de representaciones. En la enseñanza primaria las representaciones suelen ocuparse para explicar el significado de un concepto y su procedimiento de cálculo, en el caso de la división es común encontrar en libros de textos actividades que usan el sistema de representación gráfica, como muestra la figura 2.8, para introducir el cálculo.

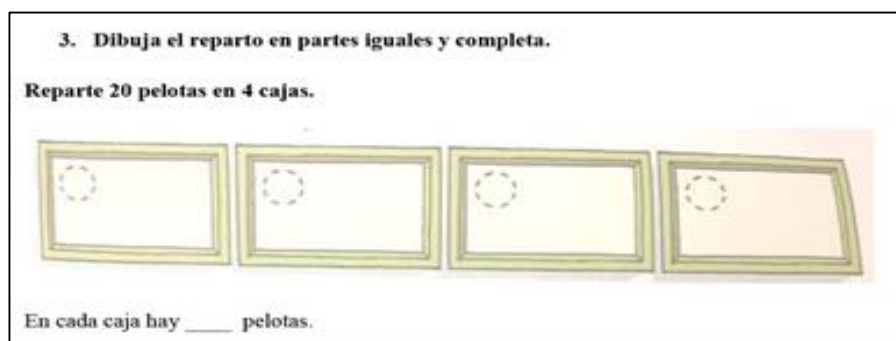


Figura 2.8. Representación gráfica de la operación de la división en un libro de texto.

Fuente: Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno (2017)

Partiendo de la idea de que una enseñanza basada en la comprensión tiene que utilizar y relacionar diferentes sistemas de representación, algunos autores sugieren que el aprendizaje de los contenidos se debe secuenciar en base a los diferentes sistemas de representación, comenzando por el uso de material manipulativo, para seguir con dibujos o figuras y terminar con los símbolos (Hodges, Cady y Collins, 2008; Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza, 2015).

Por consiguiente, para la enseñanza de los números naturales y sus operaciones Lupiáñez (2016) destaca cuatro sistemas de representación: simbólico, verbal, gráfico y físico.

- El sistema de representación simbólico se refiere a los sistemas estructurados de grafismos que se usan para expresar los números y sus operaciones.
- El sistema de representación verbal explicita los términos y la sintaxis con que expresamos verbalmente números, operaciones, relaciones y prioridades.
- El sistema de representación gráfico aparece al representar la cantidad y relaciones mediante imágenes gráficas, como los números en la recta numérica, patrones y configuraciones puntuales en dos y tres dimensiones, u organizaciones visuales, como las tablas numéricas.
- El sistema de representación físico se plasma, en la aritmética, en recursos y materiales manipulativos que representan cantidades y permiten realizar acciones. El ábaco, las Regletas o los Bloques Multibase permiten representar y operar con números naturales, mostrando sus relaciones estructurales (op.cit. 127-128).

En base a esta clasificación en la tabla 2.5, del anexo 2, ejemplificamos cada sistema de representación con el tema de la división.

Un aspecto importante al trabajar con sistemas de representación, es la necesidad de emplear más de una representación, pudiendo ser esto con representaciones dentro de un mismo sistema, por ejemplo al trabajar la división con representaciones físicas se pueden usar tanto las regletas Cuisenaire como el ábaco. Como también la conversión entre sistemas de representación, ejemplo cuando se pide representa gráficamente la división (como se mostró en la figura 2.8) y luego esto representarlo simbólicamente ($20 \div 4 = 5$).

Fenomenología

El análisis fenomenológico de un concepto matemático busca determinar “la necesidad de conocer e identificar el sentido de un concepto para completar el dominio de sus significado” (Ruiz-Hidalgo, 2016, p. 140), para esto se comienza por demarcar las situaciones que muestran la funcionalidad de los conceptos matemáticos y cómo estos planteados como tareas matemáticas abarcan los aspectos del mundo real del individuo en el cual está situado. Los problemas y cuestiones matemáticas están enmarcados en una situación que puede estar relacionada con diferentes entornos, es por esto que para clarificar una tarea el Proyecto PISA propone cuatro tipos de situaciones: personales, laborales, sociales y científicas.

- Situaciones personales: son aquellas donde los problemas se enfocan sobre actividades cotidianas de los escolares, ya sea en primera persona o en su vida familiar.
- Situaciones laborales o escolares: son aquellas situaciones centradas en el mundo del trabajo... Permite considerar desde trabajos no especializados hasta trabajos de alto nivel de cualificación. Por este motivo, en este apartado se incluyen situaciones referidas al entorno educativo.
- Situaciones sociales: son aquellas que se refieren a la comunidad local, nacional o global, en las que se observan determinados aspectos del entorno.
- Situaciones científicas: que se relacionan con la aplicación de las matemáticas al mundo natural y responde a cuestiones relacionadas con la ciencia y la tecnología (Ruiz-Hidalgo, 2016, pp. 146-148).

En el caso de la división al ser una operación aritmética básica se puede reconocer en las cuatro situaciones.

Otro elemento del análisis fenomenológico de un concepto y estructura matemática es su contexto, el cual se reconoce porque da respuesta a cuestiones como ¿para qué se usan estos conceptos? y ¿qué tipo de problemas usan estas nociones? Así también, un contexto apunta a explicitar funciones del concepto matemático, por ejemplo uno de los contextos del concepto de división es repartir.

Por último, para establecer el sentido de un concepto o estructura matemática es necesario identificar los fenómenos de donde surge el concepto y a los que organiza, por lo tanto, los fenómenos “constituyen un medio de representación y organización” (Segovia y Rico, 2001, p. 89).

Para la división, estos fenómenos reciben el nombre de problemas de estructura multiplicativa. Los enunciados de estos problemas presentan una relación entre tres cantidades (dos de ellas conocidas y una desconocida). Según el significado de su contextualización se han identificado tres grandes clases de problemas (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2011):

- Problemas de proporcionalidad simple o isomorfismo de medidas: en este tipo de problemas encontramos tres clases según sea la cantidad incógnita: a) si la cantidad desconocida representa la cantidad total de elementos, encontraremos la respuesta con una multiplicación, b) si la cantidad desconocida son los grupos, encontramos la respuesta con una división y generalmente se relaciona con la estrategia de la sustracción reiterada; y c) del mismo modo, si la cantidad desconocida son los elementos de cada grupo, encontramos la respuesta con una división y su resolución tiene mayor sentido con un reparto equitativo. El segundo caso recibe el nombre de división cuotitiva y la tercera división partitiva.
- Problemas de producto cartesiano: se basan en la formación de pares ordenados si se trabaja con cantidades continuas y en magnitudes si se trabaja con cantidades discontinuas.
- Problemas de comparación multiplicativa: en ellos interviene una cantidad referente, una cantidad comparada y un escalar que cuantifica dicha comparación. Existe una variación de este tipo de problemas cuándo la comparación se hace en términos de igualdad. Se relaciona con las frases “veces más”, “veces menos” o “veces tanto como”. (Aguayo-Arriagada, Piñeiro, Flores, 2016, p. 289)

A modo de síntesis presentamos la tabla 2.6, del anexo 2, en la que exponemos un ejemplo de tipo de problema y establecemos su contexto y situación.

2.2.2. Análisis cognitivo

El análisis cognitivo es la segunda fase del análisis didáctico y es el momento donde se trabajan diferentes aspectos sobre el aprendizaje de los alumnos (cognición) siendo estos muy necesarios a la hora de planificar una unidad didáctica. Al tener como base los significados del concepto trabajado en el análisis de contenido (de la división) ya se puede comenzar a explorar cuáles son las dificultades que pueden tener los alumnos cuando trabajan con el tema matemático es cuestión, luego de esto ya se puede comenzar a definir lo que se espera que aprendan los alumnos y teniendo en cuenta estos dos aspectos comienza el proceso de búsqueda o bien creación de tareas, las cuales deben tener coherencia con los aspectos trabajados anteriormente, es decir, tareas que ayuden a superar las dificultades y que apunten al cumplimiento de las expectativas.

Por consiguiente, el análisis didáctico se basa en la articulación de un proceso sucesivo para lograr parte de la organización de la enseñanza, como se muestra en la figura 2.9.

Limitaciones de aprendizaje

Al planificar una unidad didáctica sobre la división es importante tener en consideración cuáles son aquellas situaciones que pueden limitar o entorpecer el aprendizaje de los alumnos al trabajar con este contenido matemático. Estas limitaciones se concretan en los posibles errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje. En la

formación inicial este aspecto es muy importante, ya que los futuros maestros no cuentan con la experiencia sobre la enseñanza de este tema, por lo que no han vivenciado cuáles pueden ser las dificultades de los alumnos, es por esto que en su formación se les debe dar las oportunidades para investigar resultados de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático, o sea, se relacionen con la investigación educativa (Rico, 1997c).

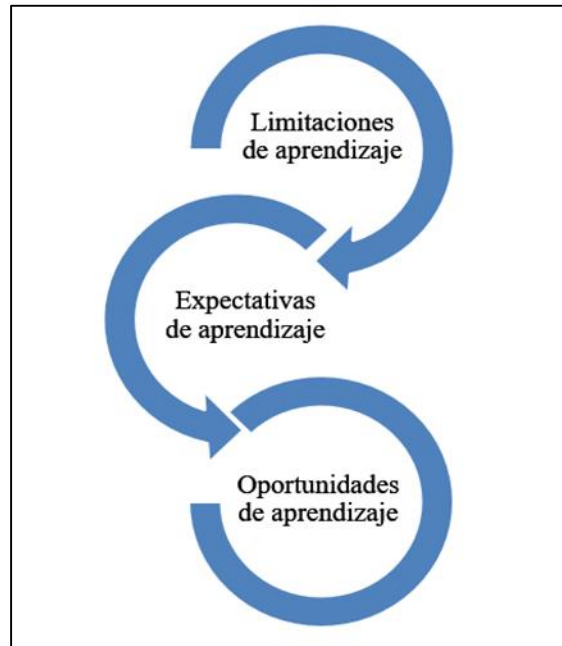


Figura 2.9. Esquema del análisis cognitivo
Fuente: Elaboración propia

En matemáticas las dificultades de aprendizaje apuntan a enunciados generales que se van puntualizando de distintas formas sobre los temas de estudio (González, Gómez y Lupiáñez, 2010). Existen diferentes dificultades, por una parte aquellas que se relacionan a la complejidad de los contenidos matemáticos, otras que tienen que ver con los procesos de pensamiento al estudiar matemática, también aquellas que involucran los procesos de enseñanza, entre otras. En el análisis cognitivo se le da énfasis a la profundización en las dificultades que tienen relación con la propia naturaleza de los conceptos matemáticos como también aquellas que crean dificultad a los estudiantes. Estas dificultades generan en los alumnos errores en sus respuestas e interpretaciones (Socas, 1997).

Por lo tanto, es necesario saber cuáles son las dificultades de aprendizaje para poder apreciar e interpretar los errores que son manifestaciones más específicas y se producen en las respuestas que dan los alumnos a tareas, es decir son “conocimiento deficiente e incompleto” (Rico, 1995b, p.69). Pero los errores no pueden limitarse a ser vistos como una manifestación a evitar, sino que pueden ser fuente de nuevos aprendizajes, convenientemente tratados.

En el capítulo 1 hicimos mención al acuerdo unificado por varios autores de que la división en comparación con las otras operaciones básica, implica mayores dificultades

lo que conlleva a varios errores en los escolares. En Flores et al. (2015) trabajan la división como parte de la de la estructura multiplicativa y presentan una agrupación de sus dificultades en tres categorías “a) dificultades ligadas a la complejidad matemática y procedimental..., b) dificultades semánticas debidas a obstáculos del lenguaje, en este caso la ruptura entre las expresiones simbólicas de las operaciones y las acciones que comportan...c) dificultades relacionadas con la enseñanza (p. 227).

Basándonos en estas categorías presentamos en la tabla 2.7 del anexo 2 algunas dificultades, las cuales iremos asociando a errores que conlleva, pero centrándonos solamente en la división. Es importante señalar que en la última categoría los errores son debido a una enseñanza inadecuada.

Expectativas de aprendizaje

En el análisis didáctico se establece la noción de “expectativas de aprendizaje para denominar, de manera general, aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los escolares” (Lupiáñez, 2013, p.90). Estas en el currículo se concretan en dos niveles: objetivos específicos y competencias.

En el capítulo 1 fundamentamos la importancia que tienen los objetivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pero entendemos que esto comienza en un nivel más macro, es decir, en el sistema educativo los objetivos ya vienen planteados por los documentos curriculares para Educación Primaria, en donde primero se establecen objetivo generales por área de conocimiento (matemática, lenguaje, ciencias naturales, etc.) y luego se especifican por niveles académicos (primer ciclo, segundo ciclo y tercer ciclo). Teniendo esto como base, cada centro escolar en sus diferentes departamentos didácticos concreta los objetivos para cada curso en sus planificaciones de las materias, para terminar fijando los objetivos específicos para cada tema. Estos niveles de concreción de los objetivos en el currículo lo describe Rico y Lupiáñez (2008) como se muestra en la tabla 2.3.

Tabla 2.3. *Niveles de objetivos en el currículo*

Ámbito	Objetivos	Describen
Etapa	Generales de área	Resultados generales de toda una etapa o ciclo educativo.
Curso	De curso (criterios de evaluación)	Resultados esperados de seguir un programa, afectan a una asignatura.
Tema	Específicos	Resultados esperados de un tema concreto, afectan a una unidad temática.

Fuente: Flores y Lupiáñez, (2016, p. 182)

Bajo la perspectiva del análisis didáctico el nivel de concreción de las expectativas de aprendizaje tiene relación con los objetivos específicos, ya que estos se establecen en función de la relación entre los contenidos de un tema matemático y las tareas. Por lo tanto, Lupiáñez (2013) menciona que:

“Mediante el termino objetivo específico nos referimos a los niveles concretos de expectativas de aprendizaje, que se expresan como capacidades y se muestran

mediante conductas observables, relativos a un tema concreto y referido a tareas de una complejidad determinada sobre ese tema” (p. 91).

Esta definición de objetivo específico permite determinar tres componentes para analizar y trabajar con esta noción, como se caracterizan en la figura 2.10.



Figura 2.10. Componentes de la noción de objetivo.
Fuente: Rico y Lupiáñez (2008, p. 68)

En este trabajo de investigación los objetivos específicos han sido un tema de interés, ya que, dentro del curso donde se realizó la toma de datos nos enfocamos en entregar herramientas para que los futuros maestros enunciaran sus propios objetivos específicos con la noción de meta frente a una tarea matemática. En el capítulo 1, fundamentamos la relevancia que le damos a este elemento dentro de la planificación de unidades didácticas, como también damos un conocer un trabajo (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018), en el cual definimos categorías para determinar la noción de objetivo que tienen los futuros maestros, que posteriormente aplicamos en esta investigación y sus resultados se describen en el capítulo 4.

Las competencias por su parte, se definen como los “procesos cognitivos que el alumno es capaz de llevar a cabo a partir de sus conocimientos y destrezas” (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 71), estos procesos se establecen para ser desarrollados a largo plazo, ya que requieren el logro de diversos objetivos específicos que comprenden tanto conocimiento como aplicación de ciertas capacidades matemáticas. En el marco de PISA 2012 (OECD, 2013) las competencias matemáticas se engloban en 8: Pensar y razonar (PR), Argumentar y Justificar (AJ), Comunicar (C), Modelizar (M), Resolver Problemas (RP), Representar (R), Lenguaje Simbólico (LS), Herramientas Tecnológicas (HT).

Dentro del análisis cognitivo un aspecto importante es que los profesores establezcan la relación entre los objetivos específicos y las competencias, para tener claridad sobre qué competencias se están desarrollando cuando se plantean las expectativas de aprendizaje que se quiere que logren los alumnos. Para ejemplificar esta situación con el caso de la división, centrándonos en los focos conceptuales del análisis de contenido, planteamos

algunos objetivos específicos y su relación con las competencias como se muestra en la tabla 2.8 del anexo 2.

Oportunidades de aprendizaje

El último elemento del análisis cognitivo son las oportunidades de aprendizaje, las cuales dentro del análisis didáctico son vista como tareas que brinda un profesor a sus alumnos para provocar que se produzca aprendizaje, ya que “las tareas son demandas cognitivas que movilizan conocimiento para su empleo” (Lupiáñez, 2013, p.97). En la formación inicial cuando un futuro maestro llega a este punto del análisis didáctico, es cuando comienza una búsqueda en internet, libros para maestros, libros de textos, entre otros, para encontrar tareas o bien ideas para construir nuevas tareas, las cuales apunten por una parte a lograr los objetivos específicos propuestos como también a superar las dificultades y errores.

La importancia que tienen las tareas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, que comentamos en el capítulo 1, es debido a que son el “principal vehículo para suministrar a los escolares oportunidades de aprendizaje” (Lupiáñez, 2013, p. 96). Bajo esta perspectiva las tareas tienen un protagonismo dentro del análisis didáctico, ya que en estas se van a ver reflejadas todo los componentes trabajados anteriormente (estructura conceptual, sistemas de representación, fenomenología, limitaciones y expectativas de aprendizaje).

Para ejemplificar las oportunidades de aprendizaje que se pueden encontrar para el contenido de la división, en la tabla 2.9 del anexo 2 damos algunos ejemplos de recursos que se pueden encontrar en internet para trabajar con dicho tema.

2.2.3. Análisis de instrucción

Todo el proceso que hemos descrito anteriormente (análisis de contenido y análisis cognitivo), llega a su fase final con el análisis de instrucción, el cual se “centra en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando” (Lupiáñez, 2013, p. 98). Este proceso ya se comenzó en el análisis de cognitivo, cuando se tienen que delimitar las oportunidades de aprendizaje, por lo tanto, cuando el profesor ya tiene un conjunto de tareas o bien ideas que tienen relación con las expectativas de aprendizaje y con las limitaciones sobre un contenido matemático específico, comienza el procedimiento de “analizar y seleccionar las tareas disponibles para el diseño de las actividades de aprendizaje” (Gómez, 2007a, p. 76).

La planificación de una unidad didáctica (que también fundamentamos en el capítulo 1) es un proceso complejo, puesto que se deben tomar en consideración varios aspectos que pueden ir por ejemplo, desde la significatividad hasta el nivel de demanda cognitiva. Es decir, un futuro maestro cuando selecciona o crea una tarea debe pensar ¿qué tan motivadora o interesante es esta tarea?, ¿qué tan fácil o difícil puede llegar a ser esta tarea? Claramente este proceso es más complejo en la formación inicial, porque los futuros maestros no están trabajando para un grupo concreto de alumnos, en cambio cuando este lo lleva a cabo un profesor en ejercicio, ya conoce a sus alumnos y sabe lo que los puede motivar y qué tan elevado puede ser el nivel de la tarea.

De manera general, los componentes a considerar dentro del análisis de instrucción son:

- El estudio de las variables y análisis de las funciones de las tareas matemáticas escolares, los distintos tipos de tarea y secuenciación de las tareas seleccionadas.
- Los materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas.
- La organización y gestión del trabajo en el aula. (Moreno y Ramírez-Uclés, 2016, p. 243)

De estos componentes, por ejemplo, para la planificación de una unidad didáctica sobre división se pueden tomar en consideración algunos materiales y recursos como, las regletas de Cuisenaire, como modelo de medida que permite trabajar la división de números pequeños. El ábaco, que al descomponer los números permite darle sentido a la operación de la división. La calculadora, que permite indagar y estudiar el resto de una división inexacta (Flores et al., 2016).

2.3. El análisis didáctico como metodología de investigación

Como mencionamos en los apartados anteriores de este capítulo, el análisis didáctico ha sentado las bases de los trabajos realizados por el grupo de investigación “FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada, visto como una herramienta para la planificación de unidades didácticas y al mismo tiempo como fundamento para la organización de las asignaturas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas trabajadas en el Grado de Educación Primaria de dicha Universidad. Aparte de estos dos enfoques, el análisis didáctico ha servido como metodología de investigación, por una parte para que los investigadores profundicen en el contenido matemático que se está investigando, como también para establecer las dimensiones de análisis dentro la investigación.

En el grupo de investigación destacamos dos trabajos que se han realizado (Rojas, Flores y Ramos, 2013; Rojas, 2014), los cuales nos ayudan a apreciar el análisis didáctico como método de investigación. Los trabajos de Rojas, Flores y Ramos (2013) llamado “El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica” y la tesis doctoral de Rojas (2014) “Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos”, establecen relaciones entre modelos de conocimiento y el análisis didáctico, permitiendo así construir indicadores para identificar el conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de un contenido matemático escolar, en los dos casos con profesores en ejercicio.

El análisis didáctico se ha empleado con fines investigativos. En la investigación de Rojas (2014) al trabajar el análisis didáctico con la dualidad de ser formativo e investigativo, la autora distinguió tres fases: (a) fase de profundización, (b) fase de diseño o toma de decisiones, y (c) fase de actuación y evaluación, como se ilustran en la Figura 2.11.

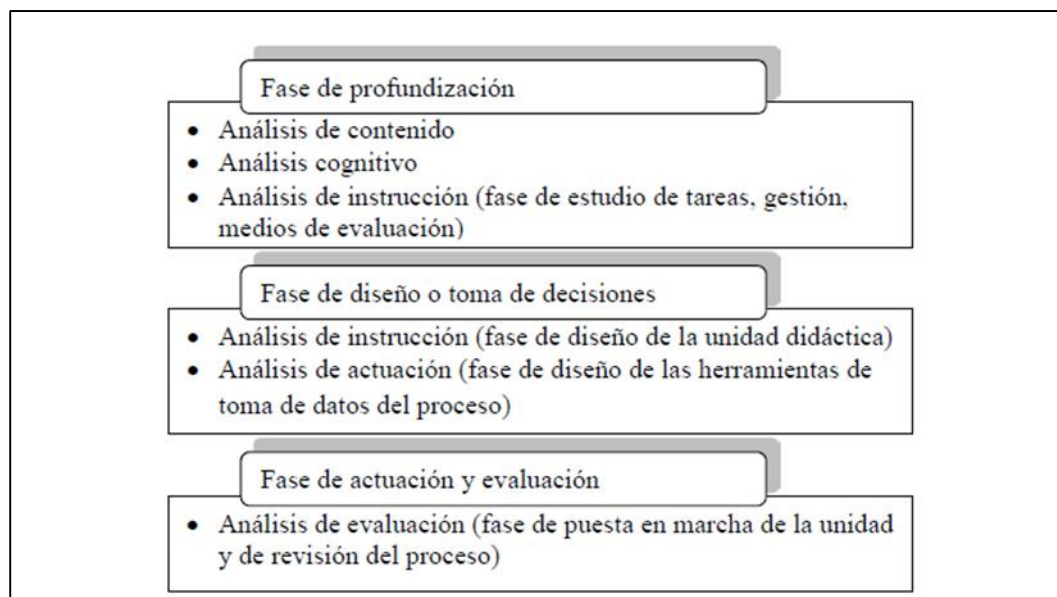


Figura 2.11. Fases en el análisis didáctico

Fuente: Rojas (2014, p. 77)

Estas tres fases, se dan en los dos ámbitos, formativo e investigativo, por lo que Rojas (2014) menciona:

“Debemos distinguir dos situaciones distintas respecto al empleo del análisis didáctico, según la intención y el sujeto que realiza el análisis didáctico, es decir, el análisis que lleva al profesor a determinar su actuación, y aquel que realiza el investigador para tener referentes que le permitan apreciar las cualidades de la actuación del profesor”(p. 78).

Para clarificar cada una de las fases en el análisis didáctico con los fines investigativos, en el estudio de Rojas (2014), describe la fase de profundización como aquella en que el investigador realiza los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción, en este caso de los números racionales, permitiéndole profundizar en el tema matemático. Luego, en la fase de diseño o toma de decisiones, construye las herramientas que le permitirán llevar a cabo el proceso de toma de datos, siendo aquí donde se establecieron las relaciones con el modelo del conocimiento MTSK y el análisis didáctico, pudiendo así construir las categorías y sus respectivos indicadores para observar la práctica del profesor. Finalmente en la fase de actuación y evaluación, el investigador revisa el proceso en el cual el profesor lleva a cabo la unidad didáctica.

En nuestra investigación, al aplicar también el análisis didáctico con fines formativos e investigativos, nos basamos en la idea de dividir el análisis didáctico en fases de aplicación, como muestra la figura 2.11, pero como las intenciones y sujetos son distintos cambian los procesos que se llevan a cabo en cada fase.

En la fase de profundización visto desde el ámbito formativo los futuros maestros profundizan en el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares al planificar una unidad didáctica del tema de la división, desarrollando el análisis de contenido y el análisis cognitivo. En cuanto al ámbito investigativo la intención es analizar el desarrollo del proceso formativo de los futuros maestros para ver cómo ponen en juego algunos componentes del análisis didáctico cuando planifican la unidad didáctica del tema

matemático de la división. Para esto los investigadores profundizan al desarrollar primero una descripción de los análisis de contenido y cognitivo de los futuros maestros, pero luego también se hace una profundización al comparar estos análisis con los planteados en la unidad didáctica. Es importante señalar que en esta fase los investigadores también hicieron un análisis didáctico parcial, es decir, se ejemplificaron algunos elementos del análisis de contenido y cognitivo (como hemos mencionado en el apartado 2.2 de este capítulo) permitiéndonos profundizar en el contenido matemático de la división.

En la fase de diseño o toma de decisiones el ámbito formativo tiene la intención que los futuros maestros planifiquen la unidad didáctica, desarrollando de esta manera el análisis de instrucción. En cambio, el ámbito investigativo tiene la intención de relacionar los análisis realizados por los futuros maestros (contenido y cognitivo) con cada una de las sesiones de la unidad didáctica, para esto los investigadores deciden tomar en cuenta los elementos del análisis de contenido (estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología) y las expectativas de aprendizaje del análisis cognitivo para ver la cómo estos elementos se ponen en juego en cada una de las sesiones de la unidad didáctica.

La fase de actuación y evaluación no se desarrolla en nuestra investigación, puesto que, los futuros maestros no llevan a la práctica su unidad didáctica y los investigadores no tienen la intención de evaluar el proceso formativo. Teniendo en consideración lo descrito en cada una de las fases, la figura 2.12 resume el proceso que hemos seguido en cada fase apuntando a establecer el análisis didáctico como metodología de investigación.

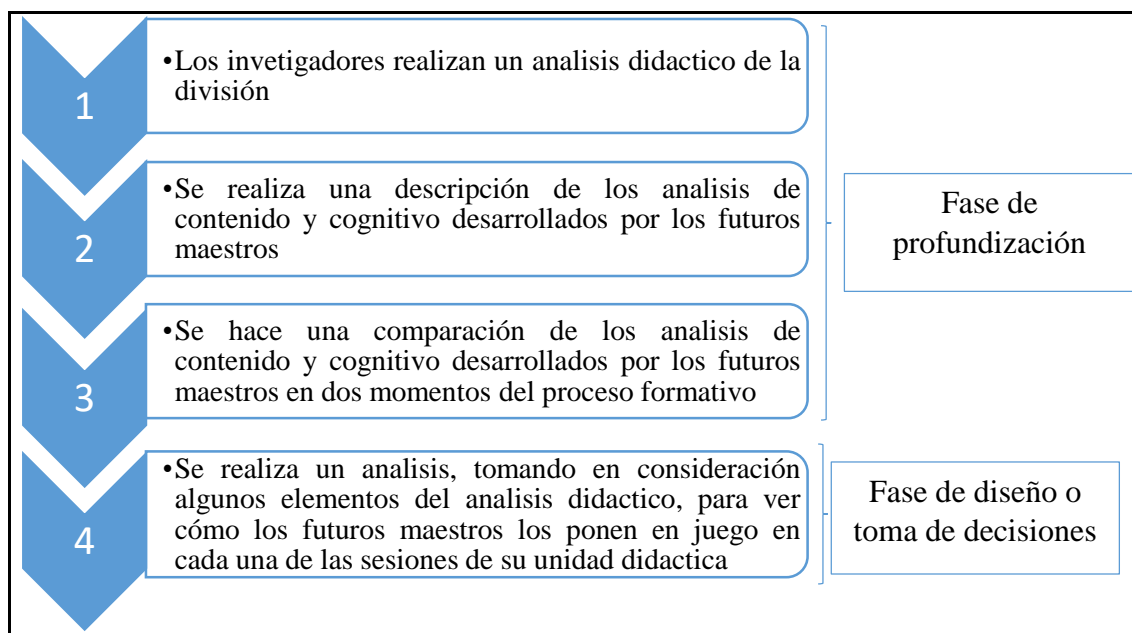


Figura 2.12. Fases en el análisis didáctico del ámbito investigativo

Fuente: Elaboración propia

Capítulo 3

Metodología

Índice del capítulo

3.1 Tipo de investigación

3.2 Investigación de diseño

3.3 Contexto y sujetos

3.4 Descripción del experimento de enseñanza

3.4.1 Fase de diseño

a) Preparación del experimento de enseñanza

b) Diseño del experimento de enseñanza

3.4.2 Fase de experimentación

- Ciclo 1: Enseñanza de las matemáticas en Primaria

- Ciclo 2: Análisis didáctico para profundizar el contenido matemático

- Ciclo 3: Unidades didácticas

3.5 Tratamiento de los datos recogidos para el análisis

3.5.1 Instrumentos de análisis

3.5.2 Preparación para el análisis de los datos

3.5.3 Variables de análisis

Metodología

En este capítulo, describimos el diseño metodológico de la investigación, profundizando en el enfoque de investigación respecto al paradigma de la investigación de diseño y de los experimentos de enseñanza, los cuales sustentan el diseño del estudio empírico. Asimismo, explicamos aquellos elementos que caracterizan la investigación: (a) fuentes e instrumentos de recogida de datos, (b) el tratamiento de estos y el análisis, y (c) codificación de la información.

3.1. Tipo de investigación

Con el propósito de describir e identificar los elementos del análisis didáctico que ponen en juego futuros maestros durante una asignatura en su formación inicial, usamos métodos cualitativos vinculados al paradigma interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 210). En tanto, nuestra investigación se configura como un experimento de enseñanza basado en el paradigma de la investigación de diseño, la cual en el campo de la Educación Matemática ha sido reconocido por su potencial para comprender los fenómenos del aprendizaje y la enseñanza (Molina et al, 2011), considerando la complejidad de la realidad educativa, y las relaciones entre la teoría y el plan de instrucción diseñado; el análisis preliminar otorga explicación y aporte teórico contextualizado al estudio (Cobb y Gravemeijer, 2008).

3.2. Investigación de diseño

La investigación de diseño va más allá de generar modelos eficaces de innovación; su meta es generar modelos explicativos, aportando en la identificación y claridad de las decisiones que se adoptan en el proceso de diseño. Este diseño tiene las siguientes características:

- Establece una correspondencia entre instrucción e investigación.
- Fundamenta el análisis y explicación de las intervenciones en el conocimiento disciplinario y en una teoría del aprendizaje.
- Se establecen la configuración de la investigación y el desarrollo del diseño en un ciclo continuo, las cuales implican dos niveles de análisis, el primero preliminar, de los datos colectados en la intervención y el final, el análisis retrospectivo de toda la información recabada, al término de todo el desarrollo del diseño (Molina et al. 2011).

En la investigación de diseño la validez y confiabilidad resulta de los instrumentos y método que garantizan las relaciones entre el diseño, el desarrollo y los resultados esperados. La valoración de la calidad de los estudios de diseño se logra mediante: a) la fiabilidad, alcanzada mediante el análisis sistemático y consistente del diseño, b) la réplica, es la posibilidad favorable de reproducción en contextos similares, c) la generalización, que implica obtener resultados semejantes en otros contextos y d) su

utilidad, es la posibilidad de adaptar, comprobar y modificar la instrucción (Castellanos, Flores y Moreno, 2017).

La estructura general de una investigación de diseño se puede ver reflejada en la figura 3.1.

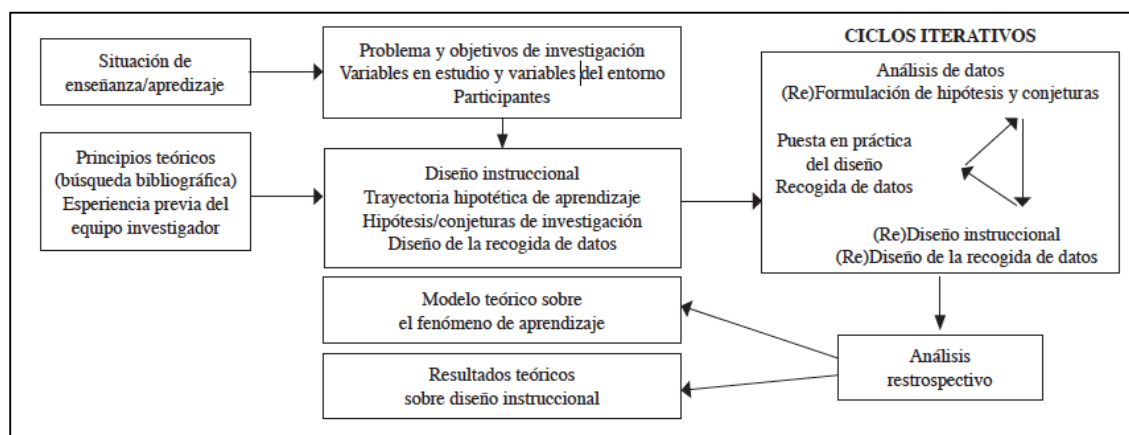


Figura 3.1. Estructura de una investigación de diseño

Fuente: Molina et al., (2011)

Los estudios más frecuentes en la investigación de diseño, son los experimentos de enseñanza, los cuales son estudios de naturaleza cualitativa que están basados en el diseño de la instrucción, orientados hacia dos perspectivas, por una parte la práctica con el interés en comprender secuencias particulares de enseñanza y por otro a la teoría, con el propósito de validar o bien generar teorías desde la implementación y estudios de diseño (Cobb et al., 2003).

Un aspecto característico de los experimentos de enseñanza, es que, en la secuencia de episodios de enseñanza intervienen: un docente que tienen el rol también de investigador, los alumnos y observadores que son parte del equipo de investigación (Steffe y Thompson, 2000). Además, la participación del investigador-docente se encuentra determinada y delimitada por los objetivos de la investigación (Kelly y Lesh, 2000).

Para implementar un experimento de enseñanza, Cobb y Gravemeijer (2008) distinguen tres fases:

- 1) Preparación del experimento: es el momento en donde se diseña la instrucción, en coherencia con los objetivos de la investigación.
- 2) Experimentación: corresponde al proceso de las intervenciones en el aula y a “las sucesivas iteraciones del ciclo de tres pasos: 2.1) diseño y formulación de hipótesis; 2.2) intervención en el aula y recogida de datos; y 2.3) análisis de los datos y revisión y reformulación de hipótesis” (Molina et al., 2011, p. 79).
- 3) Análisis retrospectivo: momento en que se analizan los datos a partir de los propósitos de la investigación.

Todos estos antecedentes fundamentan que nuestra investigación se enmarque en el paradigma de investigación de diseño y que el estudio empírico se concrete con el desarrollo del experimento de enseñanza, el cual describiremos a continuación, para luego en el capítulo 4 presentar el estudio retrospectivo.

3.3. Contexto y sujetos

Antes de describir el experimento de enseñanza es necesario explicar el contexto de la investigación. Se trata de la titulación de Grado de maestros para Educación Primaria de la Universidad de Granada. Está organizada en 4 años de dos semestres cada uno. Dentro de la malla curricular las asignaturas que tienen que ver con matemática y su didáctica están a cargo del departamento de Didáctica de la Matemática de dicha Universidad. Se distribuyen de la siguiente manera: en el primer año durante el primer semestre se imparte la asignatura “Bases matemáticas en la Educación Primaria”; en el segundo semestre del segundo año “Enseñanza y aprendizaje de la matemática en la Educación Primaria” y en el segundo semestre del tercer año “Diseño y desarrollo del currículo de matemática en la Educación Primaria”. Estas tres asignaturas tienen como línea metodológica aportar a los futuros maestros herramientas funcionales para desarrollar, tanto el conocimiento de las matemáticas escolares como el conocimiento didáctico, basándose en el Análisis Didáctico.

Nuestra investigación se lleva a cabo en la asignatura del tercer año que tiene como principal finalidad que los estudiantes profundicen y apliquen su conocimiento de las Matemáticas y de las principales dimensiones que aborda la Didáctica de la Matemática, para diseñar, fundamentar y defender una unidad didáctica sobre algún tema específico de las matemáticas de Educación Primaria³. Algunas características importantes a destacar en esta asignatura son:

- Consta de dos momentos formativos, uno teórico y el otro práctico.
- Se fomenta el trabajo en grupo, promoviendo la reflexión y discusión.
- La asistencia a clase es esencial, especialmente en la parte práctica.
- Existe el complemento de las tutorías presenciales y el Tablón de Docencia.

Se recomienda tener aprobada la asignatura “Bases Matemáticas para la Educación Primaria” de primer curso y haber cursado “Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria” de segundo curso del Grado.

El experimento de enseñanza se llevó a cabo en el año académico 2015-2016, con un total de 71 estudiantes matriculados, los cuales se organizaron en grupos que se mantenían durante el desarrollo de toda la asignatura. Se conformaron un total de 18 grupos, 17 de cuatro integrantes cada uno y 1 grupo de tres. De forma aleatoria se le asignó a cada grupo un tema matemático escolar, siendo estos: Números y sistemas de numeración, unidades de medida, figuras planas, gráficos estadísticos y la división de números naturales. Este último tema es el contenido matemático de interés de esta investigación (la cual justificamos en el capítulo 1). Se le asignó a un total de 6 grupos, distribuidos de la siguiente forma:

- Dos grupos trabajaron la iniciación a la división en primer ciclo de primaria en 2º curso.
- Dos grupos trabajaron la división en segundo ciclo de primaria en 3º curso.
- Un grupo trabajo la división en segundo ciclo de primaria en 4º curso.
- Un grupo trabajo la división en tercer ciclo de primaria en 5º curso

³ Guía docente de la asignatura.

<http://grados.ugr.es/primaria/pages/infoacademica/43maestroeducacionprimariaverificado>

La numeración que se le dio a los grupos para el análisis de los datos y los temas que le correspondieron aparece en la tabla 3.1.

Tabla 3.1. *Nombre de los grupos en el informe y temas que desarrollaron*

G1	Iniciación a la división en primer ciclo de primaria en 2º curso
G2	
G3	La división en segundo ciclo de primaria en 3º curso
G4	
G5	La división en segundo ciclo de primaria en 4º curso
G6	La división en tercer ciclo de primaria en 5º curso

Algunas características importantes de destacar de los sujetos con los que trabajamos son:

- En el primer semestre de este tercer curso realizaron su primer Prácticum, es decir su primer acercamiento a la realidad de una sala de clase, aunque su rol era de observar la enseñanza y el rol del profesor.
- El grupo G5 es el único grupo que está compuesto por estudiantes que no están matriculados en el grado de Educación Primaria, son estudiantes del Grado en Matemáticas de la Universidad de Granada, siendo esta asignatura optativa para ellos.

Bajo este contexto y con estos sujetos se comenzó con la preparación del experimento de enseñanza, la cual estaba a cargo del equipo de investigación, compuesto por el docente que impartía la asignatura, el cual cumplía una doble función (docente-investigador) y dos investigadores observadores, entre los cuales se encuentra la autora de esta tesis.

3.4. Descripción del experimento de enseñanza

En este apartado haremos la descripción del experimento de enseñanza que llevamos a cabo en esta investigación, siguiendo las fases que plantean Cobb y Gravemeijer (2008): (1) Fase de diseño, (2) Fase de experimentación y (3) Fase de análisis retrospectivo. A continuación, describimos las dos primeras fases y en el capítulo 4 nos centraremos en la fase 3.

3.4.1. Fase de diseño

El proceso que seguimos en esta fase lo vamos a separar en dos momentos: a) preparación y b) diseño.

a) Preparación del experimento de enseñanza.

La preparación de nuestro experimento de enseñanza se inicia con el análisis de la guía docente de la asignatura “Diseño y desarrollo del currículo de matemática en la Educación Primaria”, donde se hace mención a las competencias generales y específicas que se pretenden desarrollar, siendo estas:

- Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

- Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
- Diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad y que atiendan a la igualdad de género, a la equidad y al respeto a los derechos humanos que conformen los valores de la formación ciudadana.
- Reflexionar sobre las prácticas de aula para innovar y mejorar la labor docente. Adquirir hábitos y destrezas para el aprendizaje autónomo y cooperativo y promoverlo entre los estudiantes.
- Conocer y aplicar en las aulas las tecnologías de la información y de la comunicación en la enseñanza de las matemáticas.
- Comprender la función, las posibilidades y los límites de la educación matemática en la sociedad actual y las competencias fundamentales que afectan a los colegios de educación primaria y a sus profesionales.
- Conocer el currículo escolar de matemáticas.
- Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.
- Desarrollar y evaluar contenidos matemáticos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

Estas competencias se resumen en la competencia de planificación de los futuros maestros para los que se plantean los siguientes objetivos:

- Identificar y caracterizar la estructura básica de los documentos curriculares vigentes en España y en la Junta de Andalucía, reconociendo finalidades, competencias, contenidos, directrices metodológicas y criterios de evaluación.
- Comparar de manera crítica los principales descriptores de propuestas curriculares de diferentes países.
- Concretar y organizar la secuencia de temas de matemáticas en los diferentes ciclos de Educación Primaria.
- Determinar y relacionar los principales contenidos y procedimientos vinculados a diferentes temas de matemáticas.
- Recopilar y estructurar información relativa a los temas de matemáticas de Educación primaria según diferentes herramientas (sistemas de representación, fenomenología, expectativas, errores y dificultades, etc.).
- Diseñar y secuenciar tareas matemáticas de acuerdo a unos contenidos específicos, a determinadas expectativas de aprendizaje y a los materiales y recursos disponibles.
- Identificar criterios e instrumentos para evaluar el aprendizaje escolar en matemáticas y el desarrollo de la competencia básica de matemáticas.
- Diseñar y organizar actividades matemáticas que motiven y promuevan el aprendizaje de todos los estudiantes, de acuerdo a los requerimientos de la sociedad actual.
- Analizar y valorar la organización y el contenido de diferentes libros de texto, destacando potencialidades y carencias.
- Diseñar y fundamentar una unidad didáctica para un tema específico de las matemáticas de Educación Primaria.

El temario de la asignatura tiene dos partes claramente diferenciadas, una teórica y otra práctica. Luego de su revisión se hizo una reestructuración del temario, donde se agruparon los contenidos en 3 grandes temas:

Tema 1. Formación general: Enseñanza de las matemáticas en primaria. Contenidos: Enseñanza de las matemáticas, resolución de problemas y tareas matemáticas escolares.

Tema 2. Análisis Didáctico para profundizar el contenido matemático. Contenidos: Análisis de contenido y Análisis cognitivo.

Tema 3. Unidades didácticas. Contenidos: Análisis de instrucción y Elaboración de la unidad didáctica.

Al tener clara la nueva estructura de contenidos se plantea el diseño del experimento de enseñanza, en tres ciclos, uno para cada tema, como se muestra en la figura 3.2.

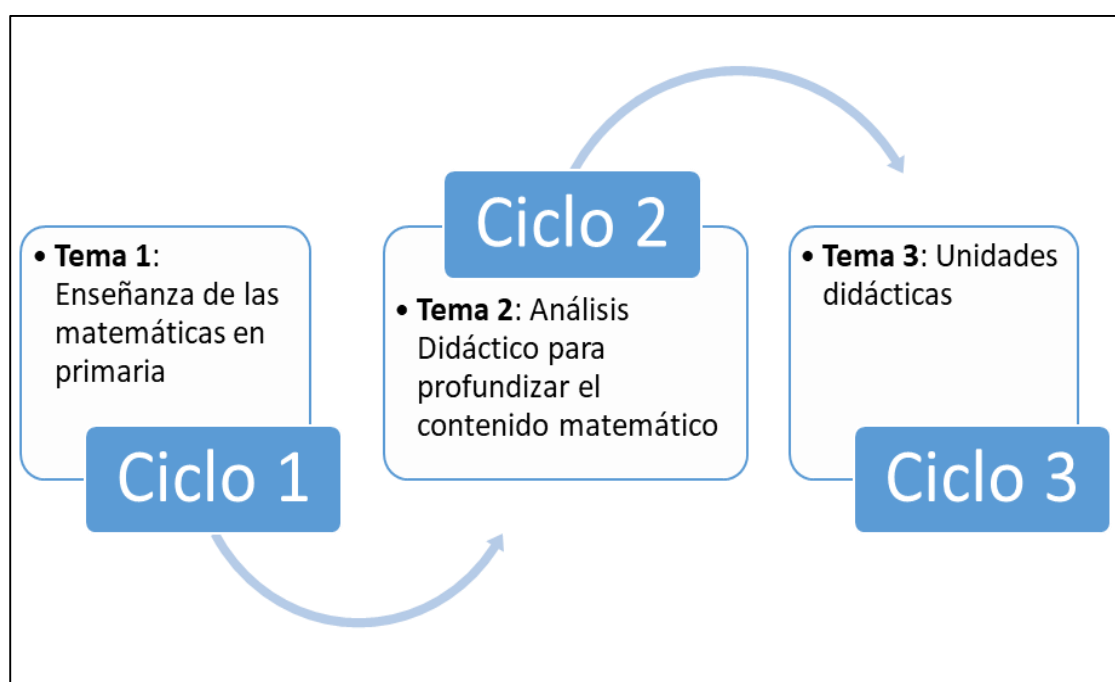


Figura 3.2. Estructura general del experimento de enseñanza

b) Diseño del experimento de enseñanza

El diseño del experimento de enseñanza se inició con una planificación general de cada ciclo, especificando los contenidos y objetivos, como se muestra en la tabla 3.2.

Tabla 3.2. *Planificación general de los ciclos del experimento de enseñanza*

Ciclo 1	
Contenidos	Objetivo
<ul style="list-style-type: none"> • Enseñanza de las matemáticas • Resolución de problemas • Tareas matemáticas escolares. 	<ul style="list-style-type: none"> • Disponer de herramientas para apreciar qué se entiende por enseñanza de las matemáticas, y para hacerla acorde con las directrices curriculares
Ciclo 2	
Contenidos	Objetivos
<p>a) Análisis de contenido</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conceptos (currículo, libros texto, libros matemáticas para maestros) • Significados (libros matemáticas para maestros) • Formas de representar (matemáticas para maestros y libros texto) <p>b) Análisis cognitivo</p> <ul style="list-style-type: none"> • Objetivos [concepto, formas de definirlos, sentido matemático] (currículo, psicología cognitiva –interpretación cognitiva de contenidos-, didáctica de las matemáticas para maestros) • Limitaciones [dificultades y errores] (didáctica de las matemáticas para maestros, psicología del aprendizaje matemático) 	<ul style="list-style-type: none"> • Profundizar en significado de los conceptos matemáticos • Aplicar ideas cognitivas generales sobre el aprendizaje de los contenidos matemáticos • Crear inventario de contenidos y objetivos, y seleccionar de acuerdo con criterios de encaminarse a desarrollar el sentido matemático
Ciclo 3	
Contenidos	Objetivos
<p>a) Análisis de instrucción</p> <ul style="list-style-type: none"> • oportunidades de aprendizaje, tareas matemáticas, • materiales y recursos • secuencia de tareas, papel de las tareas (Didáctica de las matemáticas para maestros, libros de profesor y de texto) <p>b) Elaboración de la Unidad Didáctica, selección y síntesis de informaciones anteriores</p> <ul style="list-style-type: none"> • Diseño de unidad didáctica a partir del inventario de elementos anteriores [Contenidos organizados cognitivamente; objetivos formulados y seleccionados, en relación a focos de contenidos, relación con sentido matemático; secuencia completa de tareas] • Síntesis de aportes anteriores, coherencia de la unidad 	<ul style="list-style-type: none"> • Seleccionar con fundamento los elementos de la unidad didáctica • Estudiar y justificar la coherencia de la unidad

Al tener la planificación general del experimento de enseñanza son planteamos la siguiente conjetura:

La enseñanza predominantemente práctica y funcional de las herramientas del Análisis Didáctico llevarán a los estudiantes a disponer de herramientas para profundizar en el significado conceptual y didáctico del contenido matemático, y a tomar decisiones para diseñar unidades didácticas que estén fundamentadas y puedan justificar en relación a las exigencias curriculares.

Seguido de esto, se comenzó con la planificación de cada una de las sesiones formativas por ciclo, en donde se especificaron los objetivos y se describió el proceso formativo.

Esto se hizo con los 3 ciclos, por lo tanto, cada uno cuenta con un diseño original. Para seguir la dinámica de los experimentos de enseñanza, al final de cada ciclo se hizo una revisión y análisis de los objetivos que se habían planteado, y de cómo había sido el proceso de instrucción, con el objeto de hacer cambios en los ciclos siguientes para adaptarse mejor a los objetivos generales, Al final de cada ciclo hicimos una reunión del equipo investigador con esta función.

En este sentido, el diseño original del ciclo 1 se implementó tal cual como se planificó, a diferencia de los diseños originales del ciclo 2 y 3, los cuales se reestructuraron a consecuencia del análisis final de cada ciclo anterior. El diseño original del ciclo 2 y del ciclo 3 se puede ver en el anexo 3, apartados 3.1 y 3.2.

Es importante destacar, que si bien cada ciclo estaba diseñado para los grupos de estudiantes que trabajaron con el contenido matemático de la división, el diseño fue aplicado al total de grupos que trabajaron con otros temas matemáticos.

A continuación, comenzamos con la descripción de la fase 2 del experimento de enseñanza.

3.4.2. Fase de experimentación

En esta segunda fase de nuestro experimento de enseñanza describiremos cómo se implementó cada ciclo, es decir, cómo se efectuaron las intervenciones en el aula de cada una de las sesiones que previamente se diseñaron (fase 1). También respetando el proceso que plantea Molina et al. (2011) para esta fase, al final de cada ciclo presentamos el análisis y las modificaciones que consideramos pertinentes para los ciclos posteriores.

En la figura 3.3 resumimos todo el proceso que se llevó a cabo en esta segunda fase.

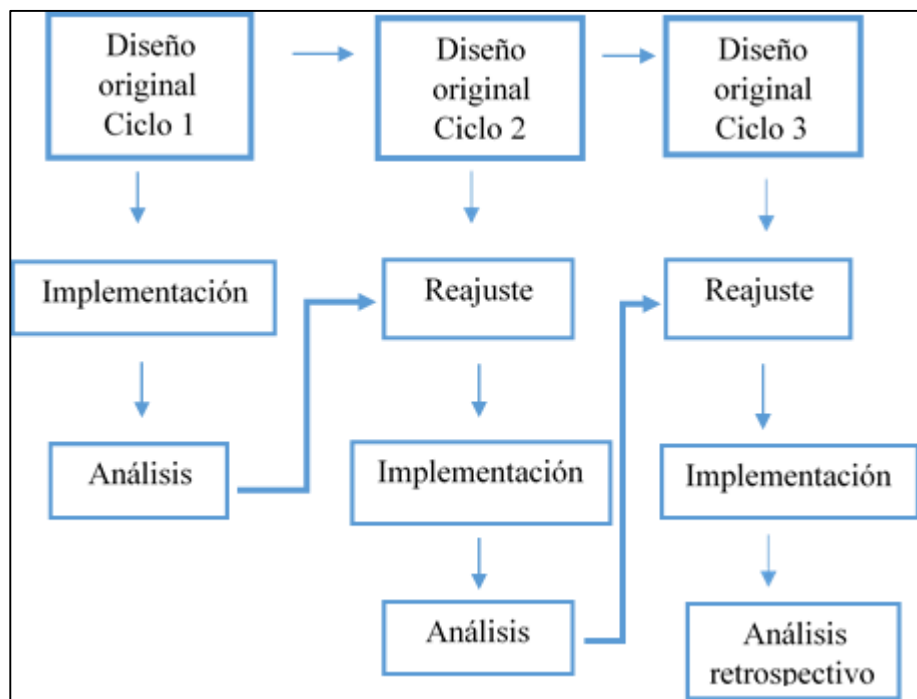


Figura 3.3. Esquema de la fase de experimentación del experimento de enseñanza
Fuente: Elaboración propia

Ciclo 1: Enseñanza de las matemáticas en Primaria

Este primer ciclo tiene que ver con aspectos generales sobre la enseñanza de las matemáticas, la resolución de problemas y las tareas matemáticas escolares. Es importante destacar que durante el desarrollo de este ciclo el libro guía para las sesiones teóricas y prácticas, es “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación primaria” (Flores y Rico, 2015). El ciclo quedo conformado por un total de 9 sesiones, de las cuales 5 son teóricas y 4 son seminarios.

Sesión 1 (teoría)

Objetivos formativos: Que los alumnos

- 1) Expliciten algunas características sobre cómo entienden la enseñanza de las matemáticas
- 2) Identifiquen características que propone el currículo de matemáticas de Primaria sobre la enseñanza de las matemáticas

Proceso formativo:

Se da comienzo a la asignatura con la presentación de las ideas generales sobre la metodología de trabajo, recursos disponibles, horarios y criterios de evaluación. Quedan conformados los grupos de trabajo y designado el tema matemático que cada grupo trabajará a lo largo del curso para finalmente planificar una unidad didáctica.

Tras la presentación, se profundiza sobre la enseñanza de la matemática en primaria, planteándoles la pregunta ¿Cómo se enseña matemática en primaria? De manera individual tratan de responder pensando en lo que observaron en las prácticas. Posteriormente se agrupan para compartir sus experiencias y se termina haciendo una puesta en común sobre aspectos comunes y destacables. En esta actividad llamó la atención que el docente tenía que insistir en que se hicieran comentarios sobre algún aspecto que sobresaliera de lo común, un solo estudiante comentó sobre la aplicación del método ABN.

A continuación se proyectan unas historietas de Francesco Tonucci “Frato” (1983) relacionadas con operaciones aritméticas y se les pide identificar elementos, preguntando: ¿Qué pasa en la historieta? ¿Qué parecido y diferencias se aprecian de lo visto en prácticas? ¿Qué alternativas se podrían proponer? Todo esto se discute con toda la clase, aunque la participación de los estudiantes no es masiva.

La siguiente actividad se realiza en parejas, se deben leer y elaborar una síntesis de las ideas sobre cómo se propone que se realice la enseñanza de las matemáticas, en las indicaciones metodológicas del Decreto de Educación Primaria de la Junta de Andalucía (2007). Se finaliza con el contraste entre ideas previas, apreciaciones y sugerencias de formación para abordar lo que se les pide en la ley.

El docente cierra la sesión exponiendo a modo de resumen las dimensiones sobre qué matemáticas se deben enseñar: Matemáticas funcionales, para desempeñarse en una sociedad; aprender matemáticas en Primaria que ayuden a ejercer un papel ciudadano; enseñar a partir de las actividades prácticas, haciendo, debatiendo, todo esto con la finalidad de hacer alumnos matemáticamente competentes.

Sesión 2 (teoría)

Objetivos formativos: Que los estudiantes

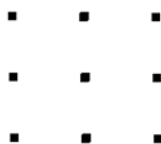
- 1) Comprendan el concepto de problema y lo diferencien de otras actividades matemáticas
- 2) Identifiquen y sepan aplicar algunos heurísticos (estrategias) para resolver problemas matemáticos
- 3) Relacionen los problemas con las directrices sobre la enseñanza del Decreto de Educación Primaria de la Junta de Andalucía (2007).

Proceso formativo:

Se introduce el tema de la resolución de problemas, para determinar que a lo largo de la sesión se trabajaran sobre lo que es un problema, estrategias para resolverlos y cómo se lleva a cabo la instrucción basándose en la resolución de problemas.

En la primera actividad se les proponen los siguientes problemas:

A) Unir los nueve puntos con SOLO CUATRO RECTAS, sin levantar el lápiz del papel



B) En la escuela hay 415 niños y 35 maestros que van de excursión. ¿Cuántos autobuses hay que alquilar de 60 plazas cada uno?

C) Los árboles producen oxígeno: ¿Cuántos árboles tiene que haber en el parque para proporcionar oxígeno a los habitantes de las casas cercanas?

Se les da un tiempo para que los resuelvan, pensando que deben identificar los procedimientos y responder a la pregunta: ¿Alguno de ellos es un problema? Luego se hace una puesta en común, finalizando el docente con las características de los problemas y la diferenciación entre ejercicios, problemas y enigmas.

Para reforzar lo anterior, en la segunda actividad se les presentan 3 tareas matemáticas escolares y los estudiantes deben resolverlas e identificar para qué sujetos sería un problema, ejercicio o bien enigma. Posteriormente el docente muestra algunos ejemplos sobre diferencias entre ejercicios y problemas. Luego de esto, se comienza con el tema sobre estrategias de resolución de problemas y se les presentan las siguientes: (1) Ensayo y error; (2) Hacer un dibujo; (3) Búsqueda de un patrón y (4) otras: Simplificar el problema y partir de problema resuelto. Se fueron desarrollando cada una de las estrategias con ejemplos.

El tercer aspecto a tratar en esta sesión fue la resolución de problemas en la instrucción, en donde se diferencia la enseñanza A TRAVÉS de la resolución de problemas, PARA la resolución de problemas y SOBRE la resolución de problemas. Como actividad, en parejas se les pide que reflexionen sobre qué diferencia encuentran entre estos tres enfoques, para luego hacer una lectura del capítulo 4 “Matemática y resolución de problemas” (Castro y Ruiz-Hidalgo, 2015) del libro guía, y finalmente identificar en el currículo cómo se plantean estos tres enfoques.

Sesión 3 (Seminario)

Objetivos formativos:

- 1) Diferenciar entre ejercicio, problema y enigma dentro de las tareas matemáticas.
- 2) Conocer estrategias para resolver problemas
- 3) Identificar qué papel desempeña la resolución de problemas en el currículo de matemáticas de primaria.

Proceso formativo:

Al ser el primer seminario se dan algunas indicaciones generales sobre la metodología de trabajo, explicando que los trabajos en seminarios son prácticos y se deben desarrollar en ese espacio, por lo tanto, la asistencia es obligatoria. También que los seminarios finalizan con la entrega de un trabajo escrito y deben respetar los tiempos de entrega.

El trabajo práctico inicia con la lectura de la guía de la práctica, en la que se plantea un problema para realizar dos actividades:

- 1) Resuelve la situación. Indica justificadamente todas las estrategias que habéis utilizado, o que se pueden utilizar, para la resolución.
- 2) A partir de estudiar qué se entiende por problema en matemáticas y las vías de enseñanza y resolución de problemas, indica razonadamente cómo se completaría la situación para realizar una enseñanza SOBRE y A TRAVÉS de la resolución de problemas.

En esta primera sesión pudimos observar que los estudiantes trabajan con mucho entusiasmo, el problema que se les propuso fue muy motivador para ellos, por lo que le dedicaron mucho tiempo y aportaron diferentes estrategias para resolverlo.

Sesión 4 (teoría)

Objetivos formativos: Que los estudiantes

- 1) Comprendan el concepto de tarea matemáticas escolar
- 2) Identifiquen las partes de una tarea
- 3) Comprendan los criterios para analizar la coherencia, significatividad y complejidad de una tarea

Proceso formativo:

Se inicia el tema que trata sobre las tareas matemáticas escolares. La primera actividad consiste en que los estudiantes identifiquen tareas apreciadas en las prácticas. Se hace una puesta en común para clarificar el concepto de tarea matemática. En la segunda actividad se les pide leer el capítulo 3 “Enseñar las matemáticas escolares” (Gómez y Romero, 2015) del libro guía, para luego contrastar con las recomendaciones metodológicas de algunos documentos oficiales, con objeto de apreciar cuál es la opción dominante en ellos.

La tercera actividad consistió en hacer un análisis para identificar qué conocimientos previos se requieren para realizar las actividades planteadas en libros de texto, y en qué consisten estas actividades. Los estudiantes tienen dificultades para identificar cada uno de estos elementos.

A continuación, el docente emplea las fracciones, específicamente en 4º de primaria, para identificar cuáles son los conocimientos previos que aparecen en el currículo en el año

anterior, así como los contenidos, criterios de evaluación, estándares de evaluación, objetivos y metas del currículo de dicho curso.

Finalmente, el docente presenta los elementos para analizar tareas, dándole énfasis a la meta y formulación. Se presentan apartados de lecciones de libros de texto de primaria como tareas, para identificar sus elementos, apreciando la dificultad que tienen los estudiantes para establecer cuál es la meta de una tarea.

Sesión 5 (seminario)

Objetivos formativos:

- 1) Comprender el concepto de tarea matemática escolar e identificar sus componentes
- 2) Identificar las tareas matemáticas escolares que definen la enseñanza de las matemáticas en educación Primaria

Proceso formativo:

Se comienza repitiendo los elementos de las tareas matemáticas escolares, y visionando un vídeo de clase (el titulado “entiendo lo que estás pensando”⁴), para que los estudiantes identifiquen las partes de las tareas matemáticas puestas en juego en el fragmento visionado. Luego se realiza la lectura y explicación de la guía de la práctica 2, que trata sobre la tarea matemática escolar “El bricolaje”, diseñada para el aprendizaje del concepto de fracción en 4º curso de Primaria. Los estudiantes deben resolver la tarea planteada siguiendo el ritmo marcado por el profesor.

El trabajo a entregar será un informe en donde los estudiantes describen y analizan la tarea matemática escolar “El bricolaje”, estudiando su pertinencia para la enseñanza de las fracciones en 4º de primaria.

Sesión 6 (teoría)

Objetivos formativos: Que los estudiantes

- 1) Analicen la coherencia de las partes de una tarea matemática escolar
- 2) Mejoren tareas matemáticas escolares para hacerlas más coherentes y significativas.

Proceso formativo:

Se inicia recordando los elementos para analizar una tarea matemática escolar, y las apreciaciones que permiten diferenciar ejercicios de problemas, tratados en las clases anteriores. Posteriormente se comienza a plantear la diferencia en complejidad cognitiva de las tareas, utilizando los niveles de PISA (reproducción, conexión y reflexión), apoyándolos en la lectura de un documento sobre este tema.

Para practicar, se pide a los estudiantes que busquen ejemplos de tareas en las cuales se puedan apreciar diferentes niveles de complejidad. A continuación, el docente plantea estrategias para modificar una tarea con vistas a mejorar su complejidad y su adecuación a la meta prevista. Posteriormente se le entregan tareas de libros de textos que deben

⁴ Forma parte del proyecto CRICED_JICA, de la Universidad de Tsukuba, localizable en: <https://www.youtube.com/watch?v=NGZ0pFseMbe>

modificar para adaptarlas a los criterios entregados. En esta última actividad el docente tuvo que dar un apoyo constante, debido a las dificultades que manifestaban los estudiantes.

El cierre de la sesión fue con la presentación de un resumen sobre los temas tratados, por parte del docente.

Sesión 7 (seminario)

Objetivo formativo:

- 1) Estudiar la pertinencia de tareas para el logro de objetivos de aprendizaje.

Proceso formativo:

Este seminario es la continuación del desarrollado la semana anterior, en el que los estudiantes resolvieron la tarea matemática “el bricolaje”. En esta segunda parte se le da énfasis al análisis y descripción de la tarea propuesta. Un aspecto importante que se llevó a cabo en esta sesión fue el realce a la meta como uno de los elementos importantes que se debe tener en cuenta al analizar una tarea, por lo tanto, el docente una y otras vez recordaba en qué consistía plantear una meta adecuada.

Sesión 8 (teoría)

Objetivos formativos: Que los estudiantes

- 1) Comprendan la idea de tarea matemática escolar e identificar su papel en la enseñanza.
- 2) Analizar tareas matemáticas de enseñanza según diferentes variables.
- 3) Examinar elementos que influyen en la gestión del aula de matemáticas.

Proceso formativo:

En esta sesión, nuevamente basándose en la experiencia que han tenido durante las prácticas de enseñanza, se les pide a los estudiantes que recuerden y describan tareas matemáticas escolares que observaron, identificando en ellas, la forma en que se presentaron, qué hizo el maestro y qué hicieron los alumnos. Se hace una puesta en común, que tiene poca participación.

Teniendo en cuenta el análisis anterior se plantea la modificación de las tareas para que se adapten mejor a los objetivos previstos y sean más significativas.

Sesión 9 (seminario)

Objetivo formativo:

- 1) Describir, analizar y modificar tareas matemáticas escolares

Proceso formativo:

En este seminario se continúa trabajando con el tema de las tareas matemáticas escolares y se comienza proyectando un video de una clase de matemática de Educación Primaria grabada en un centro educativo de México, sobre las fracciones en sexto grado. Los grupos deben: distinguir los elementos de la tarea que se ponen en juego, analizar la tarea teniendo en cuenta los descriptores trabajados en clases anteriores y sobre todo, proponer modificaciones para hacer la enseñanza más significativa.

Análisis y evaluación del ciclo 1

En la primera reunión, al final del primer ciclo pudimos ver que se implementó como se había planificado, atendiendo a los objetivos, al proceso formativo y en los tiempos establecidos, teniendo en cuenta, como mencionamos anteriormente, que al ser el primer ciclo del experimento de enseñanza se desarrolló sin hacer ninguna modificación a lo planificado. Al analizar más allá del cumplimiento de los objetivos, nos llamó la atención la actitud de los alumnos durante las sesiones, si bien mostraban interés en la mayoría de los trabajos, observamos que necesitaban una confirmación constante de lo que tenían que hacer, a pesar que las instrucciones eran bastante claras y concretas. Esta situación hacía que en cada una de las tareas planteadas, los alumnos continuamente preguntaran: ¿Y qué tenemos que poner aquí? Interpretamos que esta conducta demuestra inseguridad o falta de capacidad de autonomía en el trabajo. Dicha situación nos hizo pensar que esto se podía deber a la falta de conocimientos básicos sobre temas matemáticos y su didáctica, lo que nos llevó hacer un reajuste en la planificación del segundo ciclo.

Ciclo 2: Análisis didáctico para profundizar el contenido matemático

En este segundo ciclo se da inicio al tema del Análisis Didáctico, presentado como una herramienta, que a través de la profundización del contenido matemático ayuda a la planificación de unidades didácticas.

Luego de hacer el análisis del ciclo 1, consideramos que era necesario hacer modificaciones en este ciclo 2. Si bien los contenidos se mantuvieron, decidimos dar mayor énfasis y dedicación de tiempo a cada uno de los elementos del análisis de contenido y del análisis cognitivo. Debido a esto se cambiaron los objetivos y algunos procesos formativos de las sesiones (diseño original del ciclo 2 en anexo 3.1). Dichas modificaciones se ajustaron a las fechas preestablecidas para el desarrollo de la asignatura, por lo que se mantuvieron las 8 sesiones, de las cuales 4 son de teoría y 4 de práctica (seminario).

Sesión 1. (teoría)

Objetivos formativos: Que los alumnos

- 1) Internalicen la importancia de planificar la enseñanza de la matemática
- 2) Internalicen el significado de estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología.
- 3) Diferencien cognitivamente los contenidos, entre términos, conceptos y procedimientos.
- 4) Identifiquen en el currículo los conceptos que están relacionados con su tema matemático.

Proceso formativo:

Se inicia la sesión planteando preguntas que deben discutir en parejas sobre la importancia de la planificación de una clase y con respecto a esto, qué fue lo que ellos vieron en la

práctica. Se pone en común para llegar a ideas generales de la importancia de planificar la enseñanza de las matemáticas.

A continuación el docente presenta el análisis didáctico como una herramienta funcional y facilitadora al momento de planificar.

Para iniciar el análisis de contenido, primero se indaga qué entienden los alumnos por contenido matemático. Luego se da la explicación en qué consiste el análisis de contenido (con sus 3 organizadores del currículo), enfatizando siempre en la ayuda de estos para organizar la planificación de una unidad didáctica.

Se les plantea un trabajo en parejas para buscar en el currículo los conceptos que se presentan en relación a su tema matemático en los niveles educativos que les corresponde, identificando cuáles son los focos conceptuales. En este momento el docente tuvo que brindar mucho apoyo, debido a la dificultad de los estudiantes en centrarse en aquellos contenidos que le correspondían. Se aprecia que los estudiantes consideran como contenidos tanto los elementos que corresponden a su estructura conceptual, como los aprendizajes que se espera que logren. A esta confusión colabora la formulación de los contenidos en el currículo, en el que se incluyen tanto los referentes matemáticos como los aprendizajes previstos, sean estos de carácter matemático o general.

La diferenciación cognitiva de contenidos se presenta mediante ejemplos en que se discriminan aprendizajes memorísticos de repetición, de los procedimientos y su mecánica, y los conceptos, siempre concretado en el tema de las fracciones. Los alumnos buscan una asociación entre procedimientos y algoritmos, dejando los conceptos para todos los demás aspectos del contenido.

Sesión 2. (seminario)

Objetivos formativos: Que los estudiantes

- 1) Realicen la estructura conceptual de su tema matemático.

Procesos formativos:

Cada grupo comienza a establecer la estructura conceptual de su tema matemático, teniendo en cuenta los focos conceptuales (trabajo de la clase anterior), más de la revisión de diferentes libros de textos para integrar otros conceptos y terminar haciendo un mapa conceptual. En vista del trabajo que realizaron, nos pudimos dar cuenta que les fue de gran ayuda el trabajar en la búsqueda de contenidos con los libros de texto.

Sesión 3. (teoría)

Objetivos formativos: Que los estudiantes

- 1) Comprendan e identifiquen los diferentes sistemas de representación.
- 2) Comprendan e identifiquen el análisis fenomenológico.

Procesos formativos:

Se presentan a modo de ejemplo, los diferentes sistemas de representación y la fenomenología del contenido matemático de las fracciones por parte del docente. Luego en grupos deben comenzar con el desarrollo de estos dos organizadores del currículo con

su tema, apoyándose en el libro guía y en libros de texto. Aquí, también pudimos observar que nuevamente el trabajar y poder identificar estos elementos en el libro de texto les facilitaba el trabajo.

Sesión 4. (seminario)

Objetivos formativos: Que los estudiantes:

- 1) Desarrollen el análisis de contenido de su tema matemático.

Procesos formativos:

En este seminario los alumnos deben terminar por completo el análisis de contenido, para lo que se hizo indispensable el apoyo docente. También se les pidió que reestructuraran el mapa conceptual, que solamente recogía los conceptos, agregando y relacionando los otros elementos del análisis de contenido.

Sesión 5. (teoría)

Objetivos formativos: Que los estudiantes:

- 1) Internalicen en qué consiste hacer un análisis cognitivo de un tema matemático.
- 2) Determinen los objetivos específicos de su tema matemático.

Procesos formativos:

La sesión se inicia con la presentación del análisis cognitivo y sus tres elementos (expectativas de aprendizaje, limitaciones en el aprendizaje y oportunidades de aprendizaje). En esta sesión se pone el énfasis sobre las expectativas de aprendizaje, dejando en claro la diferencia entre objetivos generales (los cuales pueden ser sacados del currículo oficial), objetivos específicos (que derivan de los focos conceptuales para determinar qué es lo que se quiere lograr en la unidad didáctica) y meta (siendo lo que se espera que aprendan los alumnos con una determinada tarea matemática). Cada grupo comienza avanzar en el planteamiento de los objetivos específicos de su tema matemático.

Sesión 6. (seminario)

Objetivos formativos: Que los alumnos:

- 1) Determinen los objetivos específicos de su tema matemático.
- 2) Diferencien objetivos según categorías cognitivas
- 3) Identifiquen las limitaciones en el aprendizaje de su tema matemático.
- 4) Diferencien en las limitaciones las dificultades y los errores.

Procesos formativos:

Se continúa con el trabajo de la clase anterior, para dejar delimitados los objetivos específicos y se da comienzo con la búsqueda de información sobre dificultades y errores de su tema matemático, basándose en el libro guía como en otras referencias. Es importante que en este punto los alumnos puedan hacer la relación de lo visto en investigaciones con sus propias dificultades y errores, o bien lo que pudieron observar en las prácticas.

Sesión 7. (teoría)

Objetivos formativos: Que los alumnos:

- 1) Relacionen los objetivos específicos y las limitaciones del aprendizaje con la selección o elaboración de tareas matemáticas escolares.

Procesos formativos:

A través de ejemplos se presentan tareas matemáticas escolares, donde nuevamente se retoma la importancia de desarrollar la tarea para luego hacer su análisis (ciclo 1). Pero ahora enfocado en mostrar la coherencia entre el logro de la meta y a su vez del objetivo específico, así como la ayuda para superar alguno de los errores y dificultades. Esta triangulación es importante que los alumnos la internalicen para la planificación de su unidad didáctica.

En base a esto, durante esta sección los estudiantes completan en primer lugar el mapa conceptual de su tema, pero ahora relacionando también las dificultades. Luego de esto se comienzan con el trabajo de buscar tareas para su contenido que apunten al logro de sus objetivos y a superar las dificultades que ya han trabajado.

Sesión 8. (seminario)

Objetivos formativos: Que los alumnos:

- 1) Desarrollen el análisis cognitivo.

Procesos formativos:

En esta última sesión de seminario para terminar el ciclo 2, es el momento donde los grupos finalizan su análisis cognitivo llevando una selección de tareas o bien creando tareas que apunten a la superación de sus objetivos específicos y limitaciones del aprendizaje, ya con miras a la planificación de la unidad didáctica. Pudimos observar que dicha búsqueda se basó en la revisión de libros de texto y en internet. Como en todas las sesiones de seminario, el apoyo constante del docente como guía es determinante, continuando apreciando que los estudiantes hacen muchas consultas para confirmar si las tareas son adecuadas.

Análisis y revisión del 2 ciclo.

Al hacer el análisis de la implementación del segundo ciclo consideramos que fue muy apropiado dar mayor énfasis en cada uno de los elementos del análisis de contenido y cognitivo, permitiendo de esta manera que los estudiantes dedicaran más tiempo y profundización a cada uno. También la ayuda constante del docente en cada uno de los momentos de la elaboración de sus producciones fue de mucha importancia. Consideramos que finalmente los trabajos quedaron bastante completos pudiendo llegar a estar relaciones entre cada apartado y de esa manera finalizar el ciclo con un mapa conceptuales de su tema matemático, donde integraron los conceptos, los sistemas de representación y los errores y dificultades.

En cuanto a la participación y actitud de los estudiantes, si bien en las clases teóricas eran bastante tímidos y siempre los mismos alumnos los que intervenían en las puestas en común, en los seminarios se les vio trabajar con mucho interés y hacer muchas consultas al docente.

Ciclo 3: Unidades didácticas

Este último ciclo es donde los estudiantes para maestros tienen que realizar la planificación de la unidad didáctica, organizando la secuenciación de objetivos y tareas. Para esto deberán tomar en cuenta los trabajos desarrollados en el ciclo 2. Esta idea de trabajo para el ciclo 3 está planteada desde el diseño original (anexo 3.2), pero luego de analizar el ciclo 2 y quedando muy satisfechos con los resultados, se propusieron cambios para este tercer ciclo. Manteniéndonos en la línea de dar mayor énfasis y tiempo, en este caso nos centramos en la selección de contenidos, objetivos, tareas y materiales para cada sesión de la unidad didáctica.

La nueva planificación del ciclo 3 se mantuvo en 11 sesiones, para respetar los tiempos establecidos de la asignatura, pero es importante destacar que en este ciclo como se muestra a continuación, la mayoría de las sesiones fueron prácticas y el rol del docente-investigador fue clave por su constante apoyo a cada uno de los grupos.

Sesión 1. (seminario)

Objetivos formativos:

- 1) Seleccionar los contenidos que se desarrollaran en la UD
- 2) Diferenciar cognitivamente estos contenidos
- 3) Seleccionar y argumentar del análisis de contenido y cognitivo, cuales son los elementos más relevantes a considerar según los contenidos seleccionados

Proceso formativo:

Cada grupo para comenzar con su unidad didáctica, tiene que hacer una revisión de los análisis de contenido y cognitivo realizados hasta el momento, específicamente de su mapa conceptual, contando para ello con el apoyo de libros de textos escolares, los cuales le permitirán hacerse una idea de cómo se presenta su tema. En esta sesión deben dejar determinado cuáles son los contenidos que van a trabajar y qué elementos deben tener más en consideración para planificar la unidad didáctica. También deben acordar el tiempo de duración de dicha unidad, es decir, cuántas sesiones van a necesitar. Esta última parte del trabajo no se les hizo fácil y el docente tenía que hacerles ver la importancia de planificar los tiempos acordes con la cantidad de contenidos que se van a trabajar en una sesión.

Sesión 2. (teoría)

Objetivos formativos:

- 1) Identificar la utilidad que se le pueden dar a los materiales manipulativos para el trabajo de su tema matemático.
- 2) Manipular diferentes materiales didácticos para la creación de tareas de su tema matemático.

Proceso formativo:

El tema central a trabajar en esta sesión fueron los materiales manipulativos y su importancia para la adquisición o entendimiento de conceptos matemáticos. Primero el docente les presentó una gran variedad de materiales para trabajar diferentes temas

matemáticos, luego se les dio un tiempo para que los manipularan y los probaran. Seguido de esto, se les plantea que seleccionaran aquellos que les podían servir para trabajar en su unidad didáctica y determinar de qué manera les podía ser útil, para que fueran pensando en cómo ir planteando tareas con dicho material.

En esta sesión los estudiantes trabajaron con mucho entusiasmo y muy asombrados de la utilidad de algunos materiales manipulativos que no conocían.

Sesión 3. (seminario)

Objetivos Formativos:

- 1) Crear tareas significativas para la introducción de su tema.

Profeso formativo:

Se propone en clase una secuencia de aprendizaje basado en la situación didáctica de Brousseau, "carrera a 20". Los estudiantes se involucran en la resolución. Posteriormente se les pide que identifiquen el contenido matemático que se pretende enseñar, y los elementos de dicha tarea. Se analizan características de la misma, llegando a la idea de tarea significativa, que debe arrancar de un problema, planteando un reto que los alumnos puedan afrontar con sus conocimientos previos, llevándolos a realizar acciones que, mediante la comunicación y consenso, debe llevar a apreciar en qué grado resuelve el problema planteado. La lectura de un texto permite concretar qué se entiende por enseñanza significativa. A continuación, los grupos tienen que buscar situaciones para planificar una tarea que sea significativa para su unidad didáctica. Llamó la atención que la mayoría de los grupos fueron muy creativos con las tareas que planteaban, como también el énfasis que le daban a la contextualización de la misma. Se aprecia que para los estudiantes significatividad se identifica especialmente con contextualización de las tareas, atendiendo en menos medida a las otras dimensiones.

Sesión 4. (teoría/seminario)

Objetivos formativos:

- 1) Seleccionar y modificar tareas de su tema, teniendo en cuenta el análisis de las mismas.
- 2) Identificar y conocer algunas herramientas tecnológicas.

Proceso formativo:

Cada grupo comienza con la selección de tareas (de libros de textos o encontradas en internet) para analizarlas, el docente les recuerda cuáles son los elementos más relevantes del análisis, para que de esta manera puedan ser modificadas e introducidas en su unidad didáctica.

En una segunda parte de esta sesión, el docente da a conocer diferentes herramientas tecnológicas que les pueden servir como tareas para la unidad didáctica, como son: videos, juegos o software educativos.

Sesión 5. (seminario)

Objetivo formativo:

- 1) Ordenar tareas para dar una secuencia lógica a la unidad didáctica.

Proceso formativo:

Los grupos inician el seminario ordenando las tareas seleccionadas en la clase anterior para ir armando la secuencia de su unidad didáctica. Como en todos los seminarios anteriores la mayoría de los grupos pide el apoyo del docente para aclarar dudas, en casi todos los casos sobre la pertinencia de las tareas, lo que demuestra que no fue un trabajo fácil de desarrollar.

Sesión 6. (seminario)

Objetivo formativo:

- 1) Conocer e identificar la importancia de tareas con carácter evaluativo.

Proceso formativo:

El docente comienza la sesión explicando la importancia de que una sesión de clases tenga un inicio, desarrollo y cierre, siendo en este cierre donde se pueden plantear tareas para evaluar lo trabajado en la sesión.

Luego de esto, los grupos siguen trabajando en la secuenciación de las tareas para la unidad didáctica.

Sesión 7 y 8. (seminarios)

En estas dos sesiones los grupos deben concluir con su unidad didáctica, en donde el docente siempre mantuvo el apoyo y guía para lo que los grupos necesitaran. Aquí pudimos apreciar que la mayoría de los grupos estaban muy satisfechos con el trabajo que están realizando, pues estaban muy motivados con las diferentes tareas que plantearon para cada sesión.

Por otra parte, en estas sesiones nos pudimos dar cuenta de las mayores dificultades al momento de ir cerrando las unidades didácticas de la mayoría de los grupos y de las cuales no eran muy conscientes, por ejemplo: la determinación del tiempo para cada sesión, la especificación de los contenidos y objetivos en cada sesión. Esto nos demostró que los estudiantes se centraban más en que las tareas fuesen significativas y motivadoras para los niños, que establecer relaciones de estas con los objetivos.

Sesión 9, 10 y 11.

Estas últimas tres sesiones correspondían a la presentación por grupos de su unidad didáctica al resto de la clase. Si bien por la escasez de tiempo no se podía hacer una presentación detallada de todo lo planificado, se presentaban las ideas generales con ejemplos de algunas tareas. Lo que nos llamó la atención es que al final de cada presentación los comentarios de los compañeros fueron muy escasos, poco argumentados, y superficiales.

En este tercer ciclo, como se muestra en la figura 3.3 se hace un análisis retrospectivo, el cual será la tercera fase del experimento de enseñanza

3.5. Tratamiento de los datos recogidos para el análisis

En este apartado detallamos los instrumentos que se analizaron y el proceso para realizar el análisis de los datos.

3.5.1. Instrumentos de análisis

Dentro de los ciclos que se llevaron a cabo en el experimento de enseñanza, fueron varios los trabajos que desarrollaron los alumnos. En nuestra investigación nos interesamos por apreciar cómo llevaron a cabo el análisis didáctico, diferenciando dos aspectos, cómo lo desarrollaron en el curso de la elaboración del análisis de contenido y cognitivo del tema que les correspondió, y cómo se reflejan estos análisis en las propuestas de enseñanza que planifican en la unidad didáctica.

Para apreciar el papel que los estudiantes atribuyen de manera práctica al análisis didáctico, los trabajos seleccionados para ser analizados fueron: el análisis de contenido, el análisis cognitivo y la unidad didáctica, los cuales se realizaron en los ciclos 2 y 3 respectivamente.

La selección de estas producciones se justifica y relaciona con el objetivo general que nos planteamos en nuestra investigación, ya que nos permitirán apreciar cómo los futuros maestros ponen en juego los elementos del análisis didáctico al planificar una unidad didáctica. A su vez, estos trabajos nos facilitarán la concreción de los objetivos específicos, los cuales tienen que ver con la descripción y análisis de todo el proceso del análisis didáctico (análisis de contenido, análisis cognitivo y unidad didáctica).

En total se recolectaron un total de 18 producciones realizadas por los futuros maestros, 6 correspondían a los análisis de contenido, 6 a los análisis cognitivos y finalmente las 6 unidades didácticas.

3.5.2. Preparación para el análisis de los datos

Una vez recolectados los datos, y en correspondencia con los objetivos específicos que nos planteamos en esta investigación, planificamos un análisis de los datos que abarca tres fases. En la primera fase hicimos una descripción de los trabajos del análisis de contenido y cognitivo, que nos sirvió para identificar cómo los futuros maestros interpretaban los elementos de dichos análisis.

En la producción de la unidad didáctica que los estudiantes para maestros entregaron al final de la asignatura, tenían que incluir el análisis de contenido y cognitivo. Pero al hacer una primera revisión de este último trabajo, nos dimos cuenta que algunos grupos repetían los trabajos realizados anteriormente, mientras que otros habían modificado, por lo que consideramos necesario e interesante hacer una descripción comparativa del análisis de contenido y cognitivo en estos dos momentos. Esta descripción es la que denominamos fase 2 del análisis de los datos.

Al tener definida la descripción final de los análisis de contenido y cognitivo de las fases anteriores, en la tercera fase nos planteamos identificar, la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología (componentes del análisis de contenido), en cada una de las sesiones planificadas. Esto nos permitió estudiar la coherencia con lo que habían planteado anteriormente. Para el análisis cognitivo, en esta fase nos centramos solamente en las expectativas de aprendizaje que fueron planteadas al inicio de cada sesión.

Esta secuencia de descripciones y análisis finalmente nos permitirá establecer las concepciones que tienen los futuros maestros sobre el aprendizaje y las tareas matemáticas escolares. En la figura 3.4 graficamos este proceso de análisis de datos.

Es importante destacar que todo este proceso de descripción y análisis se hizo específicamente para cada grupo, pero al final se hicieron apreciaciones generales.

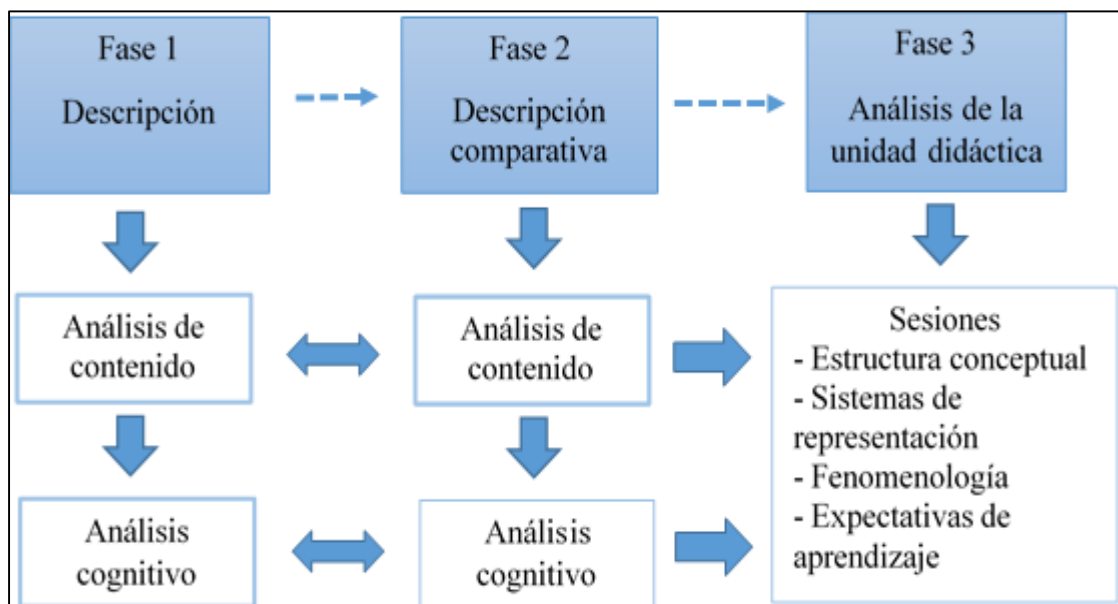


Figura 3.4. Estructura del análisis de los datos
Fuente: Elaboración propia

3.5.3. Variables de análisis

En cada una de las fases, si bien la descripción y el análisis se basó en los componentes del análisis de contenido y cognitivo, descritos en el marco teórico, al momento de analizar los datos se tomaron en cuenta diferentes variables que nos sirvieron para describir y analizar las producciones de los futuros maestros.

En la tabla 3.3 aparecen las variables de análisis empleadas para el apartado del análisis de contenido y cognitivo en todas las fases.

Se puede apreciar que las variables de análisis están centradas en el análisis didáctico, el cual está definido en el capítulo 2.

Empleamos las tres dimensiones del significado semántico del contenido (estructura, signo y significado), para apreciar cómo lo reflejan en sus análisis de contenido.

Tabla 3.3. *Variables de análisis*

Análisis de contenido	Variables	Categorías
Estructura conceptual	- Elementos curriculares empleados	- Apartado del Currículo / legislación, libros de texto
	- Conceptos que destacan	- Elementos matemáticos (elementos división, operaciones, propiedades, etc.)
	- Organización cognitiva de los contenidos	- Diferencian cognitivamente contenidos / no diferencian
Sistemas de representación	- Sistemas de representación que tomaron en cuenta	Sistemas físicos, gráficos, simbólicos, riqueza de sistemas Explican los sistemas / No Ponen ejemplos / no
	- Explicaciones que aportan	
	- Ejemplos	
Fenomenología	- Términos y modos de uso y cómo se relacionan con la estructura conceptual	- Términos relacionados con la división según libro de texto, cuáles destacan de cada elemento de la estructura
	- Tipos de problemas	- Tipos de problemas multiplicativos afrontados (proporcionalidad -reparto y cuotición-, producto cartesiano, comparación)
Análisis cognitivo	Variables	Categorías
Expectativas de aprendizaje	- Formulación del objetivo: - Elementos del objetivo: .Capacidades: . Estructura conceptual: contenido, sistemas de representación, sentido . Situación:	- Intenciones de enseñanza o aprendizajes previstos - Cognitivas, contenido, instrucción - (Categorías expresadas en A. Contenido) - Personal, laboral, social y científica
Limitaciones	- Diferencia entre dificultades y errores - Estructura de las limitaciones	- Si / No diferencian - Organizan limitaciones

Fuente, creación propia y Aguayo, Flores y Moreno, (2018).

Para analizar los objetivos diferenciamos en primer lugar la forma en que se plantean los objetivos específicos y examina cómo se redacta dicho objetivo, a través de dos categorías: se redacta en forma de intención del profesor, centrado en sus expectativas de acción (objetivo de instrucción); o bien el objetivo refleja el aprendizaje que espera del alumno, señalando cuál es ese aprendizaje (objetivo de aprendizaje).

Siguiendo a Flores y Lupiáñez (2017), distinguimos en un objetivo tres componentes, la capacidad que se pretende desarrollar, el contenido matemático implicado y la situación en que se pone en juego la capacidad y el contenido. Por tanto, en las expectativas se vuelven a emplear las dimensiones del análisis de contenido.

En relación a la capacidad, en un trabajo anterior (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018), establecimos:

“Los objetivos de aprendizaje sobre un tópico concreto se suelen enunciar en términos de capacidades (Rico y Lupiáñez, 2008). Un individuo ha desarrollado una cierta capacidad cuando puede resolver tareas que la requieren. Por lo tanto, las capacidades se caracterizan por ser específicas a un tema concreto; pueden incluir o involucrar otras capacidades; y están vinculadas a tipos de tareas.

La selección de capacidades puede enfatizar aprendizajes de carácter mecánico (términos, convenios, destrezas), pero también abarcar la comprensión (conceptos, principios, procedimientos), o la aplicación funcional de estos aprendizajes a una situación nueva en la que tiene sentido (competencia)”.

En ese momento no establecimos categorías previas, pero cuando se realizó el análisis nos dimos cuenta que en los objetivos se podían identificar diferentes verbos que apuntan al desarrollo de una capacidad. Por lo tanto, se organizaron los verbos, en base a las dimensiones de la capacidad que plantean Rico y Lupiáñez (2008), según los cuales la capacidad se compone de tres dimensiones, el contenido, la acción instructiva y el aspecto cognitivo.

En consecuencia,

“Consideramos que la formulación de la capacidad se dirige hacia el vértice cognitivo cuando apunta a una capacidad cognitiva general (aprender, comprender, etc.). Los verbos de acción que se refieren a acciones generales, que suelen estar relacionadas con las actividades propuestas en la tarea (instrucción). Por último, los verbos de contenido aluden a una capacidad específica referida al aprendizaje de algún aspecto del contenido matemático” (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018).

La última definición de los verbos de contenido para esta investigación cambió porque el contenido era distinto, en la caso de la división las capacidades específicas de este tema son: dividir y repartir.

En relación a los contenidos aparecidos en los objetivos, ya en Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno (2018) establecimos que en un objetivo se deben tomar en cuenta los significados de un contenido matemático escolar, según lo establece Rico (1997b) estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Por consiguiente, la dimensión estructura conceptual, sin categorías previas, identifica todos aquellos conceptos matemáticos que se planteaban en las metas. La dimensión sistemas de representación se organiza por los diferentes sistemas, desde el más intuitivo (representación física), al más abstracto (simbólico), pasando por los icónicos (gráfico). La dimensión fenomenológica cubre los diferentes significados que tiene el concepto.

En el caso de esta investigación, el sentido que relacionamos con la división es el de, partitiva o cuotitiva.

En el trabajo previo que hemos venido comentado, consideramos importante apreciar si en los objetivos que plateaban los futuros maestros hacían alusión a algún tipo de situación. Para esto, seguimos el marco del estudio PISA 2012 y empleamos las cuatro categorías, identificando situaciones personales, laborales, sociales y científicas. Las situaciones personales apuntan a las actividades cotidianas y familiares de los escolares; las laborales se centran en el mundo del trabajo; las sociales se refieren a las situaciones locales, nacionales o globales de determinados aspectos del entorno y las situaciones científicas se relacionan con aspectos de la ciencia y tecnología (Ruiz-Hidalgo, 2016).

Un aspecto importante que permite establecer diferencia entre fases es la forma en que se examinan las producciones de los estudiantes. En la fase 2, si bien se sigue trabajando con los componentes del análisis de contenido y cognitivo teniendo presentes las variables de la tabla 3.2, nos centramos en identificar cuáles fueron las modificaciones que los estudiantes para maestros hicieron entre los trabajos de la fase 1, para convertir en análisis de contenido y el cognitivo del tema que antecede a la unidad didáctica. Es decir, nos fijamos en qué elementos quitaron, cuáles agregaron o bien cuáles modificaron. En el caso de las expectativas de aprendizaje volvimos emplear las mismas categorías de análisis utilizadas en la fase 1.

En la fase 3 vuelve a cambiar el foco de atención, al analizar cómo se reflejan las componentes del análisis de contenido y las expectativas de aprendizaje, del análisis cognitivo en los objetivos que proponen para su unidad didáctica, y en las tareas que describen el proceso de enseñanza con el que se implementará la unidad didáctica. En cuanto a la estructura conceptual, identificamos cuáles eran los conceptos que se trabajaban; en el caso de los sistemas de representación, se analizaron todas las tareas planteadas en cada sesión para determinar el sistema de representación que se estaba incentivando, y finalmente para la fenomenología identificamos en cada sesión los términos y usos, y los tipos de problemas planteados en las tareas planificadas. Para el caso de las expectativas de aprendizaje continuamos trabajando con las categorías que caracterizan un objetivo específico.

Capítulo 4

Resultados

Índice del capítulo

4.1 Estudio de la fase 1. Descripción de las producciones del análisis de contenido y cognitivo

4.1.1 Descripción del trabajo de análisis de contenido

4.1.2 Descripción del trabajo de análisis cognitivo

4.2 Estudio fase 2. Comparación entre los trabajos de análisis de contenido y cognitivo en el segundo ciclo del experimento de enseñanza y los elaborados para el trabajo final del curso

4.2.1 Comparación de los análisis de contenido

4.2.2 Comparación de los análisis cognitivos

4.3 Estudio de la fase 3. Elementos del análisis didáctico en las sesiones de la unidad didáctica

4.3.1 Análisis de contenido

4.3.2 Análisis cognitivo

Resultados

Este capítulo describe el análisis retrospectivo realizado al final de los tres ciclos considerados en el experimento de enseñanza. Recordemos que el proceso de análisis se organizó en tres fases, la primera estudia las producciones realizadas durante el curso, en la fase de profundización del análisis didáctico, es decir, cuando los estudiantes realizan el análisis de contenido y el análisis cognitivo de un tema encargado por el profesor. La segunda estudia la comparación de los análisis de contenido y cognitivo entre la fase de profundización y diseño, y por último la fase 3, estudia la coherencia de los elementos de los análisis puestos en juego en cada una de las sesiones de la unidad didáctica. Para clarificar dicho proceso relacionado con el experimento de enseñanza y con las fases en el análisis didáctico, se presenta la figura 4.1.

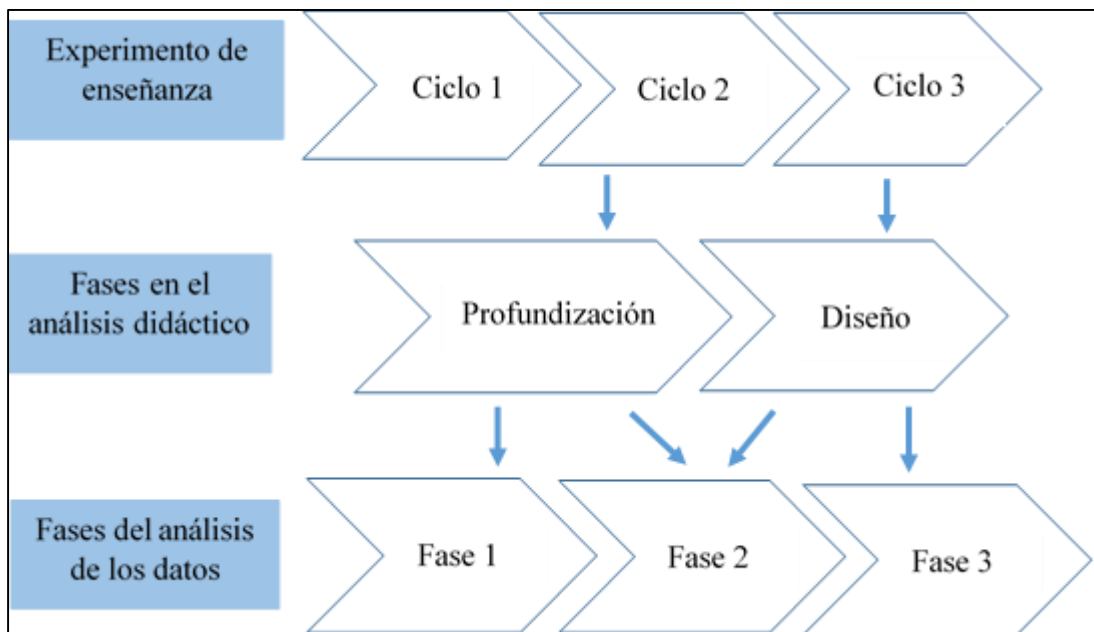


Figura 4.1. Relación entre experimento de enseñanza, fases en el análisis didáctico y fases de análisis retrospectivo de datos

Fuente: Elaboración propia

4.1. Estudio de la fase 1. Descripción de las producciones del análisis de contenido y cognitivo

En el segundo ciclo del experimento de enseñanza la instrucción se focaliza en profundizar sobre el contenido matemático, planteando que esto es necesario para luego decidir qué tareas de enseñanza se propondrán. Esta profundización consiste en hacer los análisis de contenido y cognitivo de la división, enmarcados dentro de lo que es el análisis didáctico como herramienta funcional para la planificación de unidades didácticas. El

proceso de instrucción se completa con la realización en seminarios de prácticas, de los dos análisis señalados.

Los 6 grupos que forman parte de nuestra investigación entregaron dos trabajos al final del ciclo: el análisis de contenido y el análisis cognitivo de las divisiones, aludiendo al nivel educativo que les correspondía.

En esta primera fase del análisis de los datos buscamos hacer una descripción de estos trabajos, partiendo de que en clase se desarrolló un trabajo minucioso de cada análisis (contenido y cognitivo), como se muestra en la descripción del experimento de enseñanza. En este estudio retrospectivo identificamos los diferentes elementos que los estudiantes tomaron en cuenta.

4.1.1. Descripción del trabajo de análisis de contenido

El análisis de contenido tiene como organizadores tres elementos: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. En la descripción que haremos a continuación se revisan cada uno de los apartados.

a) Estructura conceptual

En este apartado el análisis didáctico establece la necesidad de describir los distintos conceptos que engloban un tema matemático escolar, para poder definir cuáles son los focos conceptuales, que serán tratados en una unidad didáctica.

Para describir la estructura conceptual que planteó cada grupo veremos: (1) los elementos curriculares que toman en cuenta, (2) los focos conceptuales que establecen y (3) la forma en que organizan cognitivamente los contenidos seleccionados (conceptual, procedimental y actitudinal).

La tabla 4.1.1 del anexo 4 muestra lo planteado por los diferentes grupos, lo que nos permite hacer las siguientes apreciaciones:

G1. Este grupo trabaja la división en 2° de primaria. Revisan el currículo, incluyéndolo en el trabajo como se puede ver en la tabla 4.1.1 del anexo 4. Definen que en este nivel no se trabaja específicamente el concepto de división, pero rescatan algunos conceptos del currículo que les ayudan para introducir este contenido. Fijan sus focos conceptuales que son: resta, mitades, dobles y series numéricas.

Presentan todos los contenidos, sin diferenciar aspectos cognitivos.

G2. Trabajan la división en 2° de primaria. Hacen una revisión del currículo y copian textualmente el apartado donde se pueden apreciar algunos conceptos que sirven para introducir la división., Al establecer los focos conceptuales, del currículo solamente se quedan con el concepto de mitad e incluyen los siguientes: Reparto, División, Dividendo, Divisor, Cociente, Resto. Se trata de una alusión a la división, que si bien no aparece en el currículo para este nivel, algunos libros de texto si la incluyen.

Este es el único grupo (como se puede ver en la tabla 4.1.1 del anexo 4) que establece la diferencia cognitiva entre conceptos y procedimientos, haciendo alusión a contenidos procedimentales (repartir, desarrollar, calcular, resolver).

G3. Este grupo trabaja la división en 3° de primaria. Hacen una revisión bastante detallada del currículo, revisando no solamente el segundo ciclo de primaria, sino también el anterior para determinar los conocimientos previos. En cuanto a los focos conceptuales, establecen tres puntos: (1) Concepto de división., (2) Importancia de la división en la vida cotidiana. (Resolución de problemas) y (3) Cálculo mental. En el primero incluyen una gran cantidad de contenidos: términos de la división, tipos de división: exacta y entera, división partitiva (reparto) y cuotitiva (resta sucesiva), procedimiento de la división, prueba de la división, división como operación inversa, propiedad del resto (resto parcial, resto final), división entre un número de dos cifras, división entre un número de tres cifras, ceros en el cociente, división entre 10, 100 o 1000 y operaciones combinadas.

Al comparar lo que extraen del currículo y sus focos conceptuales, nos damos cuenta que este grupo va más allá de los contenidos que aparecen en el currículo, situación que se puede deber a la revisión de los libros de textos de dicho nivel educativo, que, como se describe en el capítulo tres, formaban parte de los materiales curriculares que debían consultar.

No hacen diferenciación cognitiva de los contenidos.

G4. Trabajan la división en 4° de primaria. Sin hacer alusión al currículo, presentan una lista con los siguientes focos conceptuales: operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división); la división como reparto; tipos de división (exacta y entera); términos de la división (dividendo, divisor, cociente y resto); prueba de la división, resolución de problemas; tipos de problemas (partición o distribución, extracción o cuotición, reducción - cociente escalar - y cociente cartesiano); y cálculo mental. Al igual que el grupo anterior, este listado podría estar influenciado por la revisión de libros de textos.

No llevan a cabo la clasificación cognitiva de los contenidos.

G5. Este grupo trabaja la división en 4° de primaria. Aunque no citan lo que establece el currículo en este nivel educativo, presentan una lista muy detallada de focos conceptuales relacionados con la división, como se observa en la tabla 4.1.1 del anexo 4.

Es importante destacar que este grupo está conformado por cuatro estudiantes de la carrera del Grado de Matemática, lo que puede explicar la gran cantidad de contenidos seleccionados, pudiendo establecer relaciones conceptuales sobre un tema matemático, pero sin llegar a concretar en focos conceptuales específicos del nivel educativo en el que están trabajando.

No hacen la distinción cognitiva de los contenidos.

G6. Trabajan la división en 5° de primaria. Aunque no aluden al currículo se puede observar en su lista de focos conceptuales, que algunos están copiados textualmente del mismo (por ejemplo: “Significado de las operaciones de multiplicar y dividir y su utilidad en la vida cotidiana. Expresión matemática oral y escrita de las operaciones y el cálculo: suma, resta, multiplicación y división”). Los focos conceptuales que establecen son: tipos de división y sus propiedades, equivalencias fundamentales y divisor con tres cifras.

No hacen la clasificación cognitiva de los contenidos.

A partir de las apreciaciones anteriores podemos hacer los siguientes comentarios generales:

- Como se detalló en los procesos formativos del experimento de enseñanza (capítulo 3) todos los grupos trabajaron haciendo una revisión del currículo, pero al describir lo que detallan en sus producciones, observamos que solo la mitad de los grupos (G1, G2 y G3) pone de manifiesto esta revisión.
- Todos los grupos establecen focos conceptuales. El grupo G1 fue el único que se limitó a lo que establece el currículo, los demás grupos ampliaron sus listado, pudiendo estar influenciados por la revisión de los libros de textos (parte del proceso de instrucción).
- En los dos pares de grupos que trabajan en el mismo nivel educativo se pueden observar coincidencia en sus focos conceptuales. Los grupos G1 y G2 que trabajan en 2° de primaria, solamente coinciden en el concepto de mitad, que el grupo G2 amplía con nuevos focos conceptuales, suponemos que inspirados en algunos libros de texto de este nivel, que incluyen la división como tal. En el caso de los grupos 4 y 5 que trabajan con 4° de primaria, observamos que hay coincidencia de algunos focos conceptuales, como: términos de la división, prueba de la división y tipos de problemas. A pesar que ambos grupos no aluden a la revisión del currículo, el grupo 4 se ajusta más al mismo para el nivel educativo que están trabajando. El grupo 5 establece relaciones de la división con otros contenidos que se dan en niveles superiores.
- Por último, apreciamos la poca relevancia que tiene para casi todos los grupos (5 de 6) el realizar la clasificación cognitiva de los contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales), pese a que esta distinción se trabaja en la asignatura en que nos situamos y en otras de formación pedagógica general y otras didácticas específicas.

b) Sistemas de representación

El carácter abstracto de los conceptos matemáticos hace necesario recurrir a diversas formas de representarlos. El maestro tiene que ser consciente de la existencia de diversas formas de representación, y tenerlos presentes para profundizar en el significado de los conceptos matemáticos, por lo que, en el análisis de contenido de un tema matemático específico es necesario establecer cuáles sistemas de representación y de qué manera aportan al entendimiento de dicho tema. En el apartado del libro de texto del curso (Lupiáñez, 2016) se destacan cuatro sistemas de representación de un contenido: simbólico, verbal, gráfico y físico. Los estudiantes para maestros en este apartado debían hacer un listado de sistemas de representación y modelos que se utilizan para representar los elementos matemáticos en el tema de la división.

Al revisar y hacer la descripción de estos elementos en las producciones de los futuros maestros nos enfocamos en ver: (1) cuáles fueron los sistemas de representación que tomaron en cuenta, (2) qué modelos mencionan, (3) si proponen ejemplos de los sistemas y modelos y (4) la forma en que explican los sistemas de representación. De esta forma apreciamos cómo relacionan el tema de la división con los diferentes sistemas de representación.

La tabla 4.1.2, del anexo 4 muestra lo elaborado por los diferentes grupos, permitiéndonos hacer las siguientes apreciaciones sobre la forma en que han recogido el organizador "sistemas de representación", en su análisis de contenido:

G1. Este grupo se basó en los contenidos que determinaron en la estructura conceptual (resta sucesiva, mitades, dobles y series numéricas), presentando el sistema de representación simbólico/verbal y gráfico para la resta sucesiva y la expresión de mitades. En el caso de dobles y series numéricas solo identifican el sistema de representación simbólico/verbal.

No presentan modelos. Utilizan como ejemplos imágenes de libros de texto y en base a estas dan una pequeña explicación de lo que el profesor debe explicar a los niños, como se muestra en la figura 4.2.



Figura 4.2. Ejemplo del sistema de representación gráfico para el foco conceptual resta sucesiva

Destacamos el detalle con el que identifican sistemas de representación de todos los focos establecidos en la estructura conceptual. Pero a la vez observamos que dan importancia al sistema simbólico, especialmente al verbal, y que no aparecen representaciones físicas pese al nivel académico en que están trabajando.

G2. Hacen referencia a tres tipos de sistemas de representación (físico, gráfico y simbólico), y para cada uno de ellos ponen un ejemplo. Para la representación física mencionan el material multibase y explican cómo se utiliza para resolver un problema. En el caso de la representación gráfica muestran dos imágenes de libros de texto y explican que los alumnos deben resolver completando los dibujos. Finalmente el sistema de representación simbólico lo reflejan mediante la imagen del algoritmo de la división explicando que: *“Son los símbolos que se utilizan en la representación de la estructura de la división”*.

No hacen alusión a los modelos. Limitan los sistemas de representación con el foco conceptual de la división, sin apreciarse representaciones sobre los otros focos conceptuales (reparto, mitad, división, dividendo, divisor, cociente, resto).

G3. Este grupo hace mención al sistema de representación gráfico, utilizando un ejemplo numérico de la división *“dividir 6 entre 4”*, para lo que muestran una imagen, explicando detalladamente los pasos a seguir por el alumno. También presentan una tabla de doble entrada con ejemplos gráficos de modelos discreto (de conjunto), lineal y de área, para la resta repetida y el reparto, sin dar explicación, como se muestra en la figura 4.3 (fragmento de la tabla).

Significado	Resta repetida	Reparto
Modelo	(4 está contenido 3 veces en 12)	(12 puede repartirse en 4 partes iguales con 3 en cada parte)
Discreto o de conjunto		
	3 columnas o filas con 4 objetos	4 columnas o filas con 3 objetos
Lineal		
De área	3 columnas (o filas) con 4 filas (o columnas)	4 columnas (o filas) con 3 filas (o columnas)

Figura 4.3. Tabla de doble entrada con modelos y sistemas de representación del grupo G3

Apreciamos la importancia que conceden al sistema de representación gráfico, presentando algunos modelos, pero no hay alusión a otras formas de representar. Se basan solo en uno de los focos conceptuales “el concepto de la división”, en las dos formas: como resta repetida y reparto.

G4. Hacen una descripción bastante detallada de tres sistemas de representación: físico, gráfico y simbólico. En cuanto al sistema de representación físico primero describen un material manipulativo y su función para la adquisición del concepto de división, diferenciando que hay materiales específicos para el aprendizaje de las matemáticas, como regletas y material multibase, así como materiales cercanos al entorno del alumno, como lápices, monedas, etc. Luego explican la función general del ábaco y cómo sirve de ayuda para trabajar la división. Finalmente hacen mención al modelo de medida, utilizando como ejemplo las regletas de Cuissenaire, explicando cómo se realiza con ellas la división.

En el caso del sistema de representación gráfico comienzan ejemplificando la posibilidad de representar los bloques multibase de manera gráfica, en papel, mostrando una imagen de cómo se realiza la división $143:3$. Luego presentan los modelos cardinal, lineal, configuración puntual, funcional y operación inversa, cada uno acompañado de una imagen y explicando su utilidad para realizar la división. Este grupo presenta el modelo funcional de la división y operación inversa, como muestra la figura 4.4, ambos dentro del sistema de representación simbólico.

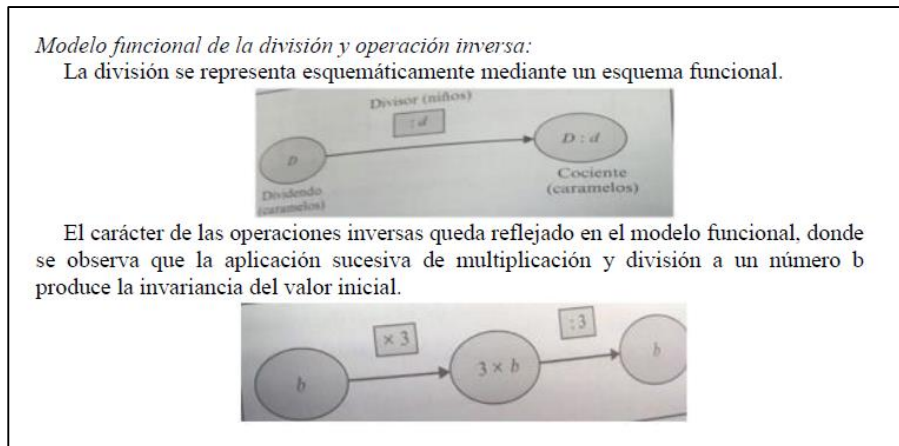


Figura 4.4. Modelo del sistema de representación gráfico del grupo G4

Diferencian el sistema de representación simbólico verbal del numérico. Para el primero explican que para la división hay que considerar una serie de conceptos como *dividir*, *repartir*, *X entre Y*, *compartir*, *mitad*, etc. En el sistema numérico diferencian entre modelo numérico, en el que se utilizan únicamente símbolos (números) y lo ejemplifican con una imagen de libro de texto para la división como resta reiterada, y el algoritmo de la división, que muestran mediante un diagrama, que ejemplifican con una imagen del modelo de caja. Finalmente aluden a dos representaciones simbólicas de la división, $42:6$ ó $42/6$.

Es destacable en este grupo lo detallado de cada una de sus explicaciones y que todo lo relacionan con uno de sus focos conceptuales, la división como reparto. Esta distinción tan pormenorizada les lleva a considerar el sistema de representación verbal como parte del sistema de representación simbólico.

G 5. Este grupo hace una clasificación de los sistemas de representación presentando los modelos gráfico, simbólico y físico. Dentro del modelo gráfico incluyen el discreto o de conjunto, el lineal y el de área, ejemplificando cada uno con una imagen de la división $6:2$, como se muestra en la figura 4.5.

En el modelo simbólico indican que “hay diferentes maneras de expresar la división según su contexto y pueden ser: $6/2 = 6:2 = 6\div 2$ ”. Por último el modelo físico lo basan solamente en el material multibase, que presentan realizando la división $6\div 2$, que describen: “Físicamente podemos enseñar a realizar la operación de división mediante bloques multibase. Esto lo haremos antes de enseñar el algoritmo de la división. El ejemplo que estamos manejando se realizaría como sigue: Cogemos una barra formada por 6 bloques y comprobamos que 2 barras de 3 bloques cada una tienen la misma longitud que nuestra barra inicial, por lo que $6/2=3$ ”.

Observamos que se centran en la forma de representar el procedimiento de obtener el cociente de la división, sin aparecer los otros focos conceptuales seleccionados por el grupo.

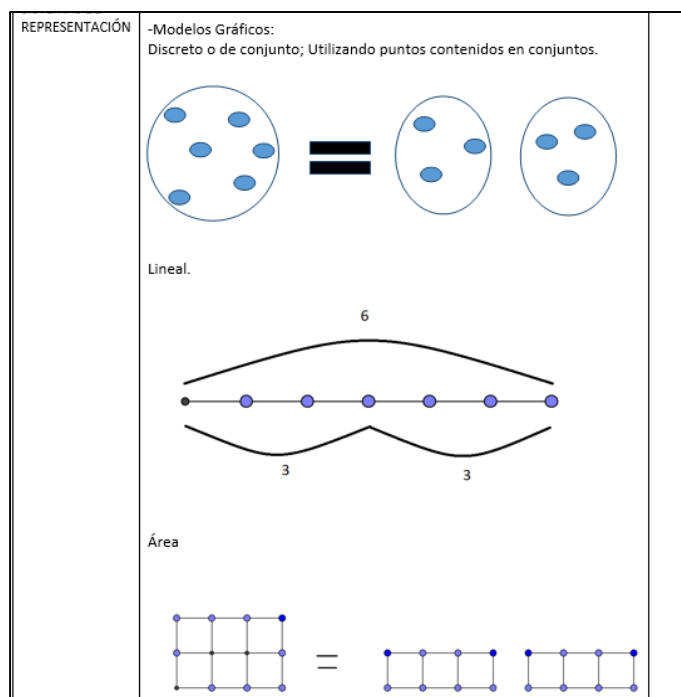


Figura 4.5. Modelos gráficos del grupo G5

G6. Este grupo presenta por separado los sistemas de representación nombrando y los modelos. En el primero explica: “Los sistemas de representación que se utilizan son: (1) Representación física: se divide entre materiales de su entorno y materiales específicos para la didáctica, (2) Representación gráfica: recta numérica y (3) Representación simbólica: verbales y numéricas”.

En el listado de modelos mencionan: lineal, cardinal, de medida, numérico, de razón aritmética y funcional. Este último es el único que relacionan explícitamente con la división, expresando: “Modelos funcionales: se trata de todos aquellos casos en los que la división aparece con carácter de función u operador”. En todos los otros modelos hacen una breve explicación de su funcionalidad en un contexto general, por ejemplo: “Modelos lineales: son modelos de recuento, en los que se utiliza la línea numérica”.

En este grupo destaca la amplitud de la descripción de los sistemas de representación y los modelos, aunque, como mencionamos anteriormente, solamente en un caso hacen la relación con el procedimiento de la división, uno de sus focos conceptuales.

Como resumen de las apreciaciones de cada grupo, observamos que:

- Todos los grupos hacen mención al sistema de representación gráfico, la diferencia se da en el grado de precisión de las explicaciones, en la presentación de ejemplos y en los tipos de modelos que detallan. Por ejemplo el grupo G4 presenta una gran variedad de modelos relacionándolos con la división. En cambio el grupo G6, que también presenta varios modelos, apenas establece relaciones con el tema matemático que se está trabajando.
- Cinco grupos hacen referencia al sistema simbólico. Tres grupos (G1, G4 y G6) incluyen aquí el sistema de representación verbal, y tres grupos (G2, G4 y G5) se enfocan solamente en el procedimiento para realizar la división.

- En cuanto al sistema de representación físico, lo mencionan cuatro grupos. El G2 y G5 se enfocan solamente en el material multibase. El grupo G6 solo da una explicación genérica (“se divide entre materiales de su entorno y materiales específicos para la didáctica”), mientras que el grupo G4 presenta más variedad (ábaco, regletas de Cuissenaire y materiales del entorno).
- En relación a los modelos, destacamos: (1) que los grupos G3, G4 y G5 presentan modelos asociados solamente al sistema de representación gráfico, coincidiendo en el modelo lineal. (2) Los grupos G5 y G6 no separan de manera clara los sistemas de representación y los modelos, ya que utilizan los términos de manera poco precisa, por ejemplo el grupo G5 menciona el “modelo físico” y el G6, “modelo numérico”.
- Respecto a la relación entre los sistemas de representación y los focos conceptuales, apreciamos que solamente el grupo G1 buscó todos los posibles sistemas de representación para cada foco conceptual. Los grupos G2, G3, G4 y G5 se centraron en formas de representar el procedimiento de realizar la división.

c) Fenomenología

La fenomenología se entiende como el estudio de los sentidos y usos que se le dan en diversos ámbitos al contenido matemático del que se realiza el análisis de contenido. En nuestro caso, se trata de identificar la estructura semántica de los problemas aritméticos que dieron origen y dan sentido a la división.

Al hacer la descripción de este apartado nos centraremos en identificar dos aspectos que identifican los diferentes grupos en su análisis de contenido: (1) los términos y modos de uso que señalan, entendiendo que para identificar el sentido de un concepto existen términos asociados a este que se pueden identificar en diversos contextos y cómo son usados, (2) los tipos semánticos de problemas relacionados con el concepto de división (Castro y Ruiz-Hidalgo, 2011).

Recogemos en la tabla 4.1.3 del anexo 4, la forma en que cada grupo identifica la fenomenología de la división. A continuación resumimos lo expuesto por los grupos.

G1. Este grupo se basa en los cuatro focos conceptuales que determinaron en la estructura conceptual (resta sucesiva, mitades, dobles, series numéricas), pero centrándose solamente en los modos de usos. Para los conceptos de resta sucesiva y mitades plantean situaciones que se pueden dar en la vida cotidiana, por ejemplo: “Si en una familia hay 4 personas y repartimos un pack de 4 yogures, vamos dando 1 a cada uno (resta sucesiva) hasta que se reparten los 4”. En cambio para los conceptos de doble y serie numérica, hacen referencia a cómo se les pueden explicar dichos conceptos a los niños en la escuela, ejemplo: “En este caso se le enseñaría al alumno que cuando multiplica un número por 2 se hace el doble. Y si el número final se divide entre dos se hace la mitad. Es decir justo lo inverso”.

Todo lo que mencionan en este apartado lo obtienen de la revisión de libros de textos del nivel educativo correspondiente, situación que ellos mismos manifiestan.

No hacen mención a los tipos semánticos de problemas de división.

G2. Comienzan señalando que, tras la revisión de libros de textos de 2° de primaria, pudieron determinar que el sentido que se le da al concepto de división se basa en los usos de la división como resta sucesiva, como reparto y para el cálculo de mitades. Para todos estos casos muestran imágenes con ejemplos de libros de texto. Observaron que en uno de los libros de textos revisados se trabaja directamente el algoritmo de la división, exponiendo también la imagen del libro de texto.

Aprecian que los tipos de problemas que presentan los libros de textos son los de isomorfismo de medida con incógnita en tasas, atribuyendo que son los más simples y presentando ejemplos e imágenes.

G3. Este grupo comienza enfatizando la importancia de que los alumnos entiendan dónde está presente el concepto de división en la vida cotidiana, pero no ejemplifican con situaciones, solo concretan un listado con los tipos de problemas más frecuentes que se pueden encontrar: Problemas de división partitiva, división cuotitiva, producto cartesiano, razón, comparación multiplicativa y relación entre parte y todo. Para cada uno de ellos dan una breve explicación y presentan un ejemplo, como muestra la figura 4.6.

<ul style="list-style-type: none">• Problemas de división partitiva: Es el caso en el que se realiza un reparto equitativo de la cantidad inicial. <p>Ejemplo: <i>Voy a hacer un torneo de fútbol sala, y quiero hacer 16 equipos. Si tengo 112 jugadores, ¿Cuántos jugadores debo poner en cada equipo?</i></p>
--

Figura 4.6. Ejemplo de tipo de problema del grupo G3

G4. Este grupo no hace alusión a los modos de uso de la división. Comienzan planteando que “para enseñar una operación implica abordar los diversos problemas que se relacionan con ella, en la división deben incluirse problemas multiplicativos”. A continuación hacen mención a los problemas de reparto, partición, organizadores rectangulares, series proporcionales y de interacción. A continuación presentan un ejemplo: “Un alumno tiene una bolsa con 125 caramelos y quiere repartirlos entre sus 20 amigos ¿Cuántos caramelos corresponden a cada uno?”, y hacen una detallada descripción de los pasos que se deben realizar para resolverlo. Luego presentan un listado de diferentes problemas, en la que mencionan varios tipos, pero se enfocan solamente en los de isomorfismo de medida y producto cartesiano. Terminan incluyendo el algoritmo tradicional de la división (12.357: 43). Aparece por tanto una presentación confusa entre los significados y los procedimientos de cálculo.

G5. Presentan un listado con diferentes modos de uso, incluyendo a su vez ejemplos de problemas en cada uno. Las situaciones que plantean son: reparto exacto, reparto no exacto y agrupar. Luego mencionan: “A veces en la vida cotidiana utilizamos el resto pero de distinta manera: Tenemos 12 niños y que lo queremos dividir en clase de 5. Cuantos niños me sobran o cuantas clases necesito para que ningún niño se quede sin clase”. Terminan planteando que la división también se emplea “a la hora de partir un mismo objeto”, ejemplo: “Cuando hacemos una tarta y queremos partirla en porciones de igual tamaño”, con lo que incluyen la idea de fracción en la división.

G6. Presentan solamente un listado con los diferentes modos de usos (resta sucesiva, repartir, partir, operar, distribuciones rectangulares, problemas con el resto). En el caso de los fenómenos presentan un listado de clases de problemas, clasificados en: proporcionalidad simple, comparación y producto cartesiano, que luego diferencian en subtipos, sin ejemplificar. En los de proporcionalidad simple nombran los problemas de división partitiva y división cuotitiva. En los problemas de comparación incluyen tres: comparación de disminución con comparado desconocido, comparación de disminución con referente desconocido y comparación de disminución con escalar desconocido. Por último en los de producto cartesiano, incluyen los problemas de las situaciones combinatorias.

Luego de la descripción de todos los grupos, podemos observar que:

- En cuanto a los modos de usos, 4 de los 6 grupos (G1, G2, G5 y G6) hacen referencia a este elemento de la fenomenología, y a pesar que no todos trabajan en el mismo nivel educativo, se repiten los sentidos y modo de uso de la división como resta sucesiva y reparto. Esta situación puede deberse a que son los sentidos mayoritariamente recogidos en los libros de texto (Aguayo-Arriagada, Piñeiro y Flores, 2016) (los grupos G1 y G2 son los únicos que lo explicitan). Los grupos G1 y G2, que trabajan en el mismo nivel educativo, también hacen mención al concepto de mitad, como modo de uso para introducir la división en 2° de Primaria.
- Respecto a los tipos de problemas, cinco grupos (G2, G3, G4, G5 y G6) hacen mención a este aspecto. Teniendo en cuenta la clasificación que hacen Castro y Ruiz-Hidalgo (2011), podemos observar que los cinco grupos hacen mención a los problemas de isomorfismo de medida, centrándose en los de la división partitiva y cuotitiva. Tres grupos (G3, G4 y G6) mencionan los problemas de producto cartesiano y solo dos grupos (G3 y G6) aluden a los problemas de comparación multiplicativa. Todos estos grupos ejemplifican cada uno de los tipos de problemas que proponen, menos el grupo G6 que solo los menciona.

Con la fenomenología se termina el análisis de contenido. Considerando el trabajo completo de análisis de contenido de los grupos, destacamos dos situaciones puntuales:

- El grupo G1 realiza el análisis a partir de los contenidos extraídos del currículo. La estructura conceptual determinó sus focos conceptuales que fueron utilizados posteriormente para establecer los sistemas de representación y la fenomenología, lo que muestra que este grupo tomó en cuenta la revisión del currículo para luego profundizar en el contenido matemático escolar.
- El grupo G5 hizo un listado bastante detallado de contenidos relacionados con la división en el apartado de estructura conceptual, situación que se puede deber a la formación específica en el Grado de Matemática de los componentes. Sin embargo, los apartados relativos a sistemas de representación y fenomenología son muy concisos, lo que nos hace pensar que prevalece la organización estructural sobre los elementos representacionales y de sentido.

4.1.2. Descripción del trabajo de análisis cognitivo.

El análisis cognitivo está enfocado a examinar el aprendizaje del contenido matemático, teniendo en cuenta tres elementos: expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y oportunidades de aprendizaje.

En el segundo ciclo del experimento de enseñanza se trabajó en clase teórica y se promovió durante los seminarios que los estudiantes para maestros realizaran un análisis cognitivo, centrándose en las expectativas y limitaciones de aprendizaje, correspondientes al contenido matemático de cada grupo. A continuación describimos los elementos que han incluido cada grupo en estos elementos del análisis didáctico.

a) Expectativas de aprendizaje

El desarrollo del análisis de contenido previo al análisis cognitivo permite determinar los focos conceptuales que se van a tomar en cuenta para planificar la unidad didáctica, así como los sistemas de representación y la fenomenología, elementos que se deben tomar en cuenta para plantear las expectativas de aprendizaje que se quieren lograr sobre un contenido matemático escolar. Teniendo esto como base, se inicia el análisis cognitivo con la revisión de los documentos oficiales, en los que se plantean los fines generales del área de matemática según el nivel educativo. Los estudiantes tienen que partir de estas informaciones para concretar las expectativas de aprendizaje del tema de división, en forma de objetivos específicos (Flores y Lupiáñez, 2016).

En el proceso formativo se les pidió a los grupos hacer un listado de objetivos específicos de su tema. Para hacer la descripción de las producciones de los estudiantes, en este apartado empleamos las mismas dimensiones que utilizamos en el trabajo realizado anteriormente (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018), teniendo en consideración los diferentes aspectos, variables y categorías (tabla 3.3 del capítulo 3). Estas son: 1) Formulación del objetivo (si está formulado como intención del profesor, o como aprendizaje del alumno), 2) elementos del objetivo: 2.1: capacidades (verbo de capacidad empleado, según sean cognitivas, de contenido, o de instrucción), 2.2: estructura conceptual (contenido, sistema de representación y sentido, variables presentadas en el análisis de contenido), y 2.3: situación (personal, laboral, social y científica). Todas estas nos permiten hacer una caracterización precisa de los objetivos específicos.

En la tabla 4.1.4, del anexo 4, primero mostramos el listado de objetivos que presentaron cada grupo. Luego, realizamos el análisis de los mismos, detallado en la tabla 4.1.5 del anexo 4, para finalmente hacer los siguientes comentarios por grupo:

G1. Todos sus objetivos son planteados con una funcionalidad de aprendizaje (objetivos de aprendizaje) explicitando cuál es ese aprendizaje. En cuanto a los verbos que utilizan para establecer las capacidades, en tres de sus objetivos podemos identificar capacidades cognitivas (relacionar, identificar y saber) y en cuatro capacidades de instrucción (calcular, elaborar, representar y generar). Se basan en los contenidos determinados como focos conceptuales (mitad, dobles y series numéricas), dejando de lado el de resta sucesiva pero incluyen el de reparto y estimaciones. En tres de sus objetivos se explicita la utilización de sistemas de representación física, gráfica y simbólica. En cuanto a la fenomenología, en 4 de los 7 objetivos planteados hacen referencia al sentido partitiva de la división. Por último, solamente en un objetivo identifican una situación personal.

Por ejemplo, en su primer objetivo “Calcular la mitad y el doble mediante acciones de repartos de objetos cotidianos con sus compañeros”, podemos determinar que es un objetivo de aprendizaje; el verbo “calcular” alude a una capacidad de instrucción; el contenido es doble y mitades; al mencionar “reparto de objetos cotidianos” se entiende como representación física y como el sentido partitivo de la división. Finalmente, la situación personal se relaciona cuando mencionan “con sus compañeros”.

G2. Este grupo plantea objetivos de aprendizaje, solamente en uno de ellos pudimos observar que no especifican cuál es el aprendizaje, por lo que podríamos decir que es de instrucción (“Usar material físico-manipulativo”). De un total de 8 objetivos, 5 expresan verbos que aluden a capacidades cognitivas (identificar, comprender, interpretar, distinguir, relacionar) y 3 a capacidades de acciones específicas (diseñar, calcular, usar). En los contenidos planteados en sus objetivos, con respecto a sus focos conceptuales, el único que incluyen es el de resta sucesiva, los demás son los expuestos en la estructura conceptual del análisis de contenido. Solo en 2 de sus objetivos especifican el uso de sistemas de representación gráfico y físico, a pesar que en el trabajo de análisis de contenido también hacían mención al sistema simbólico. En cuanto, al sentido de la división, en tres objetivos plantean el sentido partitivo y en uno de ellos coincide el cuotitivo. En ningún caso hacen alusión a algún tipo de situación.

Un ejemplo de lo observado, es el caso del objetivo “Distinguir y comprender los diferentes elementos de la división”. Es un objetivo de aprendizaje; “distinguir y comprender” aluden a capacidades cognitivas; contenido, elementos de la división. No se puede establecer relación con los sistemas de representación, el sentido y la situación.

G3. Presentan una lista con 13 objetivos específicos de aprendizaje, uno de ellos es “Resuelve problemas”, que determinamos con objetivo de aprendizaje, ya que “resuelve” es una capacidad de instrucción, y consideramos “problemas” como contenido. En cuanto a las capacidades que se manifiestan en los verbos, utilizaron en 6 objetivos capacidades cognitivas (entender, comprender, conocer, diferenciar, integrar, saber) y en 7 de instrucción (realizar, adquirir, utilizar, aplicar, calcular, elaborar, resolver). Los contenidos que se ponen de manifiesto en estos objetivos son algunos de los que aparecen en la estructura conceptual desarrollada anteriormente (tabla 4.1.1 del anexo 4), pero dejan de lado la división como operación inversa, las propiedades del resto, la división de un número de tres cifras, los ceros en el cociente, las divisiones entre 10, 100 ó 1000, las operaciones combinadas, el producto cartesiano y el cálculo mental. Manifiestan solamente en dos objetivos de manera explícita el uso de sistemas de representación física y simbólica, a pesar que en el análisis de contenido hacen una descripción bastante detallada del sistema de representación gráfico. En el análisis fenomenológico presentan un listado de varios tipos de problemas y al plantear sus objetivos específicos solamente en uno especifican el sentido de división partitiva y cuotitiva. En dos objetivos hacen alusión a situaciones personales, refiriéndose a la vida cotidiana.

Para ejemplificar el proceso de análisis, vemos la descripción de uno de sus objetivos: “Realizar la división con material físico”, que es un objetivo de aprendizaje; la capacidad “realizar” es de instrucción; la división es el contenido; indican el sistema de representación físico; no aluden al sentido ni a la situación.

G4. Primero mencionar que este grupo presenta un listado de objetivos clasificados en conceptuales y procedimentales, como se puede observar en la tabla 4.1.4 del anexo 4. Determinan un total de 13 objetivos, que en cuanto a su formulación son todos objetivos de aprendizaje. En 9 objetivos expresan verbos de capacidades cognitivas (conocer, elegir -en dos objetivos-, contrastar, crear, relacionar, reflexionar, diferenciar, analizar) y 5 capacidades de instrucción (aplicar -en 3 objetivos-, usar, resolver). En este grupo se da el caso que en un objetivo emplea dos verbos (crear y aplicar). En cuanto a los contenidos, de aquellos que establecieron como focos conceptuales en la estructura conceptual, no hacen mención a la prueba de la división y el cálculo mental. En cambio, en 9 de sus objetivos enfatizan la resolución de problemas como contenido, pero en ningún caso especifican el sentido, a pesar que, tanto en el análisis fenomenológico como en la estructura conceptual detallan los tipos de problemas. Esta situación también se da en la categoría sistemas de representación, ya que en el análisis de contenido hicieron una descripción bastante minuciosa de varios sistemas de representación y modelos, pero en los objetivos no hacen alusión a este elemento.

Finalmente, en relación a las situaciones, en un solo objetivo plantean una situación de la vida cotidiana. Por ejemplo, el objetivo “Resolver problemas sencillos de la vida cotidiana utilizando la división”, es planteado como un objetivo de aprendizaje; “resolver” la determinamos como una capacidad de instrucción; el contenido que se menciona es la división y los problemas; no se alude a los sistemas de representación ni al sentido; la situación se establece como personal, ya que expresan “la vida cotidiana”.

G5. Este grupo clasifica sus objetivos según el tipo cognitivo de los contenidos en hechos, conceptos y procedimientos. Por ejemplo el objetivo “Relacione la división como inversa de la multiplicación”, lo clasifica como hecho. Presentan un total de 12 objetivos que están formulados como objetivos de aprendizaje. En cuanto a las capacidades, en 10 de sus 12 objetivos plantean capacidades cognitivas, en la mayoría de los casos (7) establecen dos verbos por objetivo, por lo tanto, los verbos que aluden a capacidades cognitivas son: relacione (4), entienda, interprete (3), distinga (3), comprenda (3), identifica, memorice (2) (el número entre paréntesis es la cantidad de veces que se repite ese verbo). En relación a las capacidades de instrucción, solo en tres objetivos se mencionan estos verbos y son: plantea (2), resuelva, enuncie. En este grupo también se da el caso de que en un objetivo se expresan los dos tipos de capacidades (relacione y enuncie).

Este grupo se destacó en la estructura conceptual por hacer un listado bastante extenso de sus focos conceptuales, como se puede ver en la tabla 4.1.1 del anexo 4. En los contenidos que plantean en sus objetivos podemos observar, que cubren los focos conceptuales identificados, solo dejan de lado los números primos y compuestos. También llama la atención que, si bien en los objetivos se mencionan los problemas como contenido, no se hace distinción en los tipos de problemas, a pesar que en su listado de focos conceptuales si detallan la clasificación de estos. Los elementos de sistema de representación y sentido no se ponen de manifiesto en los objetivos específicos, a pesar que estos fueron tomados en cuenta en el trabajo de análisis de contenido (por ejemplo, en la estructura conceptual presentan un listado con los diferentes tipos de problemas para la división). Tampoco se hace mención a ninguna situación.

Un ejemplo de este análisis lo hacemos con el objetivo “Entienda e interprete las propiedades de la división”, que está planteado como objetivo de aprendizaje; los verbos “entienda e interprete” lo relacionamos con capacidades cognitivas; el contenido son las propiedades de la división y no se pueden identificar sistemas de representación, sentido ni situación.

G6. Presentan un listado de 15 objetivos, todos formulados como objetivos de aprendizaje. El total de verbos que utilizan son 17, de los cuales 7 corresponden a capacidades cognitivas (comprende (2), identifica (2), detecta, conoce, interpreta) y 10 a capacidades de instrucción (reproduce, maneja, realiza, usa (2), opera, aplica (2), utiliza). Se dan 2 casos en donde en un mismo objetivo se emplean ambos tipos de verbos (identifica y usa, detecta y usa). En relación a los contenidos que ponen de manifiesto en los verbos pudimos identificar que aparecen los contenidos "términos de la división", "estimaciones" y "representaciones numéricas", que no estaban en el listado de sus focos conceptuales. En el caso contrario, hay focos conceptuales establecidos en la estructura conceptual que no son tomados en cuenta en los objetivos: relación entre fracciones y números decimales y aplicación a la ordenación de fracciones.

Solamente en un objetivo se hace mención al sistema de representación simbólico y verbal, en otro se menciona pero no se alude a ninguno en específico. Los sentidos de división partitiva y cuotitiva se mencionan en un solo objetivo: "Diferenciar entre división cuotitiva y partitiva", que parece corresponder más con aprendizaje del profesor que con aprendizaje escolar. Finalmente sólo dos objetivos presentan situaciones personales, ya que aluden a la vida cotidiana.

Tras describir los objetivos de cada grupo, realizamos a continuación unos comentarios generales para cada una de las categorías que analizamos, teniendo en cuenta la totalidad de objetivos (68) planteados por los diferentes grupos.

Formulación del objetivo

Del total de objetivos redactados por los grupos, casi todos (67) se plantean con una intención de aprendizaje del alumno y señalan cuáles son esos aprendizajes, es decir son objetivos de aprendizaje. Solamente se da un caso (grupo G4) que propone un objetivo de aprendizaje que no especifica el contenido (Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos). En cuanto a los objetivos de instrucción, se da en un solo el caso (grupo G2) y es: “Usar material físico-manipulativo”, observamos que describe una acción por lo que la interpretamos como una intención del profesor.

Elementos del objetivo.

Capacidad

Al igual que en Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno (2018) se tomaron todos los verbos utilizados por los diferentes grupos en sus objetivos, para clasificarlos en capacidades cognitivas, contenido e instrucción. Los verbos de contenido del tema de división apuntan a capacidades como: dividir, separar, repartir.

Cada grupo plantea diferente cantidad de objetivos, en algunos casos utilizando más de un verbo por objetivo. La tabla 4.1.1 muestra la cantidad de objetivos y de verbos utilizados por grupo.

Tabla 4.1.1. *Cantidad de verbos y su relación con los objetivos*

Grupos	Cantidad de objetivos	Cantidad de verbos
G1	7	7
G2	8	10
G3	13	13
G4	13	14
G5	12	21
G6	15	17
Total	68	82

Podemos observar que solamente los grupos G2, G4, G5 y G6 emplean más de un verbo en algunos de sus objetivos específicos. Ahora nos interesa establecer la frecuencia de los tipos de verbos utilizados por cada grupo, como también la cantidad de veces que se utilizan dichos verbos en un solo objetivo. Lo resumimos en la tabla 4.1.2.

El 60% de los verbos corresponden al desarrollo de capacidades cognitivas, el 40% corresponde a verbos que hacen referencia a capacidades de instrucción y se dan 4 casos donde coincide en un mismo objetivo ambos tipos de verbos. Es decir, podemos observar y confirmar que los futuros maestros de primaria al momento de plantear objetivos específicos enfatizan las capacidades cognitivas, seguidas de las de instrucción, sin aparecer capacidades de las que hemos considerado de contenido.

Tabla 4.1.2. *Caracterización cognitiva de los verbos empleados para las capacidades por cada grupo*

Grupos	Verbos Cognitivos	Verbos de Instrucción	Coincidencia
G1	3	4	0
G2	7	3	0
G3	6	7	0
G4	9	5	1
G5	17	4	1
G6	7	10	2
Total	49	33	4

Contenido

Dentro de esta variable nos interesa poder determinar la frecuencia de cada una de las tres dimensiones de un contenido matemático: estructura conceptual de la división, sistema de representación y fenomenología, permitiéndonos poder establecer qué elementos del significado de los contenidos matemáticos se mencionan. La tabla 4.1.3 muestra la frecuencia de cada una de las dimensiones. Teniendo en cuenta que hay un total de 68 objetivos, es importante mencionar que los totales que aparecen en cada una de las dimensiones no tienen correspondencia con el total de objetivos, puesto que algunos grupos en un mismo objetivo hacen referencia a varios contenidos, sistemas de representación o fenomenología.

A continuación destacamos algunas apreciaciones de cada una de las dimensiones.

Del total de objetivos, en la mayoría (96%) se plantea al menos un contenido en relación a la división, destacando que los que tienen mayor frecuencia son: los problemas (no se especifica ni el tipo ni la operación), los problemas de división, algoritmo de la división, mitad, reparto, división, operaciones, elementos de la división y tipos de división. Solamente en 3 objetivos no se hace mención a los contenidos (“Usar material físico-manipulativo”, “Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos” y “Interpretar representaciones gráficas”).

El 12% del total de objetivos hace mención a algún tipo de sistemas de representación, lo que quiere decir que en la mayoría (88%) de los objetivos que plantean los futuros maestros no toman en consideración este elemento. Es importante destacar que solamente en un objetivo se pudo apreciar la coincidencia de la representación simbólica numérica y verbal (Reproduce de forma oral y escrita el cálculo de la división).

Por último, en cuanto al sentido y modos de usos podemos observar que la mayoría (87%) de los objetivos planteados no hace referencia a esta dimensión. Por otra parte, las tres veces que se menciona la división cuotitiva se hace de forma conjunta con la partitiva dentro del mismo objetivo, lo que quiere decir que solamente un en 13% de los objetivos se toma en cuenta el sentido.

Tabla 4.1.3. *Variables de especificidad conceptual. Términos claves y frecuencias.*

Contenidos matemáticos	Sistemas de representación	Sentidos y modos de uso
Mitad: 6	No indican: 60	No menciona: 59
Doble: 2		
Series numéricas: 1	Físico: 3	Partitiva: 9
Reparto: 6	Gráfico: 2	
División: 6	Simbólico: 3	Coutitiva: 3
Estimaciones: 2	Verbal: 1	
Elementos de la división: 5		
Resta sucesiva: 1		
Tipos de división: 5		
Algoritmo de la división: 7		
Prueba de la división: 2		
Problemas de división: 9		
Operaciones: 6		
División con más de una cifra: 2		
Problemas: 9		
Cálculo mental: 1		
Función del resto: 1		
División como inmerso de la multiplicación: 2		
Propiedades de la división: 2		
Divisor/múltiplo/mcm/mcd: 2		
Relaciones numéricas: 1		
Representaciones numéricas: 1		
No menciona: 3		
Total: En 65 objetivos se mencionan contenidos y en 3 no se menciona	Total: En 9 objetivos se citan SR y en 60 no citan SR	Total: En 12 objetivos se mencionan y en 59 no

Una vez visto cada uno de los elementos que le dan significado a un contenido matemático, es interesante poder establecer la coincidencia que se da de estos elementos dentro de un mismo objetivo específico (como se hizo en Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018). En este trabajo pudimos establecer seis coincidencias, como muestra la tabla 4.1.4.

El mayor porcentaje (77%) del total de objetivos establecen el contenido como único elemento del significado, en un porcentaje menor (9%) toman en cuenta el contenido y el sentido haciendo alusión a la división partitiva. También se observa que solo un 4% del total de los objetivos determina los tres elementos, como por ejemplo el grupo G1 en su objetivo “Representar repartos por medio de representaciones gráficas”, en donde el contenido es el reparto, el sistema de representación es gráfico y el sentido es partitivo.

Tabla 4.1.4. *Coincidencia de los elementos del contenido en los objetivos planteados en el análisis cognitivo.*

Componentes del contenido	Frecuencia
Contenido, sistema representación y sentido	3 (4%)
Contenido y sistema representación	4 (6%)
contenido y sentido	6 (9%)
Solo Contenido	52 (77%)
Solo Sistema de representación	2 (3%)
Ninguno	1 (1%)
Total	68 (100%)

Situaciones

Basándonos en las categorías de PISA podemos observar que en solamente 6 del total de 68 objetivos establece una situación personal, aludiendo a la vida cotidiana, ejemplo de esto es uno de los objetivos del grupo G3: “Integrar la división a la vida diaria”. El resto de los objetivos (62) no mencionan nada con respecto a este elemento.

b) Limitaciones de aprendizaje

Uno de los aspectos que los maestros deben tomar en cuenta a la hora de planificar una unidad didáctica es saber cuáles son las posibles dificultades y errores que los alumnos tienen con respecto a un contenido matemático, porque de esa manera pueden establecer tareas que apunten a superar dichos obstáculos. Por lo tanto, el análisis cognitivo fija como uno de sus elementos las dificultades y errores.

El contenido matemático escolar de la división está implicado dentro de la estructura multiplicativa, por lo tanto no vamos a basar en las categorías que establecen Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza (2015) para agrupar las dificultades y errores que los diferentes grupos mencionan en su trabajo de análisis cognitivo.

Como categorías de análisis de las limitaciones, tal como se cita en la tabla 3.3, del capítulo 3, empleamos dos: 1) si diferencian dificultades de errores y 2) si dan estructura al listado de limitaciones.

En la tabla 4.1.6, del anexo 4 copiamos la forma en que los grupos reflejan las limitaciones de aprendizaje en su análisis cognitivo. Examinando la tabla podemos resumir la forma en que cada grupo ha considerado este organizador:

G1: Diferencian entre dificultades y errores. Se basan en las dificultades señaladas en el libro de texto recomendado (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza, 2015), pero sólo dos de ellas las consideran asociadas a su tema, que se centra en la introducción de

la división, las cuales son: dificultades asociadas al lenguaje matemático y dificultades en la comprensión del término “mitad”. En el apartado de errores se centran más en explicar la dificultad, que delimitar los errores específicos que están asociados a dicha dificultad, por ejemplo en un caso mencionan como error: “El alumno presenta dificultades para asociar el concepto de mitad con la división entre 2”. En esta situación, podemos observar que utilizan preferentemente el término dificultad, pero aluden a errores. Un aspecto a destacar de este grupo es que para cada dificultad y error, hace mención a un ejemplo (“Ejemplo: Un alumno sabe repartir 8 lápices entre 2 estuches pero no sabe que esto es la mitad”).

G2: El grupo presenta una tabla de limitaciones, diferenciando entre dificultades y errores. Todo lo que se expone es extraído del libro de texto (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza, 2015), haciendo bien la diferenciación entre dificultades y errores, como se puede observar en la tabla 4.1.6 del anexo 4.

G3: Este grupo establece la diferenciación entre dificultades y errores, si bien se inspiran en el libro de texto (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza, 2015) hacen una selección de dificultades más específicas, como son: "dificultad al introducir el nuevo procedimiento, dificultad en la realización del algoritmo de la caja, dificultad de comprensión e identificación de los términos y dificultad en el verbo de acción para realizar la operación". Luego, como se puede observar en la tabla 4.1.6 del anexo 4, señalan algunos errores asociados a cada una de las dificultades.

G4: Organizan las dificultades en dos tipos: en torno a la división y en relación a la consecución de problemas. Para cada una de ellas presentan una tabla diferenciando las dificultades y errores; aunque copian algunas partes del libro de texto (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza, 2015), hacen una clasificación bastante detallada de las dificultades, tanto para la división como para los problemas, asociando un error para cada una de estas, como se puede observar en la tabla 4.1.6 del anexo 4.

G5: Este grupo comienza mencionando: “Lo primero que tenemos que diferenciar es el concepto de error con el de dificultad”, luego presentan un listado de dificultades con la clasificación que establece Flores, Castro-Rodríguez y Fernández Plaza (2015), pero en ningún caso hacen alusión a errores, por lo tanto reflejan la diferencia más de nombre que de concepto. El listado que presentan, como se puede ver en la tabla 4.1.6 del anexo 4, es una copia extensa de libro de texto.

G6: Presentan una tabla donde relacionan las expectativas de aprendizaje con las limitaciones. En relación a estas últimas solo mencionan cinco limitaciones, a pesar de que el listado de expectativas es mayor, como se muestra en la figura 4.7, la cual es un fragmento de dicha tabla.

Expectativas de aprendizaje	Limitaciones
Comprende el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana.	Restas de números grandes, normalmente de 2 cifras, y que debe realizar de forma mental.
Reproduce de forma oral y escrita el cálculo de la división.	Dejar restos intermedios iguales o mayores que el divisor y omitir ceros en el cociente.
Interpreta la división como operación inversa a la multiplicación.	Los errores en la tabla de multiplicar dan lugar a errores de todo tipo en el algoritmo de la división.
Identifica los tipos de división y sus propiedades.	Los errores y dificultades que el alumno tenga en la resta y el producto se van a reproducir en la división con mayor fuerza y, así mismo, la lentitud en el automatismo de las citadas operaciones va a constituir, con mucha frecuencia, una fuente de error en la división.
Comprende el algoritmo de la división.	Dificultad de elegir la operación adecuada para resolver un problema simple de división.
Aplica en contextos reales la división para repartir y para agrupar.	

Figura 4.7. Fragmento de tabla sobre limitaciones del grupo G6

Como se puede observar, emplean los términos dificultad y error, aunque la formulación de las mismas se identifica con errores. Las limitaciones son especialmente debidas a la complejidad de las operaciones, con solo una semántica.

Una vez descrito el apartado de limitaciones de aprendizaje de cada grupo, como elemento del análisis cognitivo, pudimos observar que la mayoría de los grupos (cinco de seis) se basó en el libro de texto que tenían de referencia, haciendo la diferenciación entre dificultades y errores. Pero dicha diferenciación no está bien definida en todos los casos, consideramos que solamente el grupo G2 logra hacer una buena distinción entre dificultades y los errores derivados de dichas dificultades.

Con respecto a las categorías que establecen Flores, Castro-Rodríguez y Fernández Plaza (2015) para determinar las dificultades y errores en el aprendizaje de las operaciones multiplicativas, cinco grupos se basaron en ellas, pero los grupos G1, G2, G3 y G4 hacen un listado de dificultades más específico para las divisiones, las cuales tienen que ver las categorías "dificultades relativas a las complejidades de las operaciones multiplicativas y a dificultades semánticas". En general, las dificultades y errores de los grupos aparecen redactadas de manera que reflejan limitaciones apreciadas en la literatura recomendada (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández Plaza, 2015), junto con apreciaciones particulares, derivadas de sus experiencias de enseñanza, estas últimas formuladas en términos más particulares.

4.2. Estudio de la fase 2. Comparación entre los trabajos de análisis de contenido y cognitivos en el segundo ciclo del experimento de enseñanza y los elaborados para el trabajo final del curso

En el experimento de enseñanza describimos el proceso que se llevó a cabo en la formación inicial de maestros de primaria, donde se puede apreciar que se estructuró el curso en tres grandes temas que dieron pie a cada uno de los ciclos. En el segundo ciclo se trabajó el análisis de contenido y el análisis cognitivo del tema matemático escolar,

división de naturales. El resultado de este ciclo fueron las producciones de los estudiantes de ambos análisis, las cuales fueron descritas y analizadas en la fase 1 del análisis de datos.

En esta segunda fase del análisis de los datos, queremos hacer una comparación, puesto que en la unidad didáctica entregada al final del tercer ciclo del experimento de enseñanza, se tenían que incluir nuevas versiones de los análisis de contenido y cognitivo que faciliten el diseño de las sesiones. Como mencionamos en el capítulo 3, en una primera revisión general de estas últimas producciones nos dimos cuenta que en el apartado de los análisis (contenido y cognitivo) se habían generado algunos cambios con respecto a los descritos en la fase anterior. En consecuencia nuestro interés en esta segunda fase de análisis de datos es analizar con más profundidad cuáles fueron dichos cambios, en los tres elementos del análisis de contenido (estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología) y en los dos del análisis cognitivo (expectativas de aprendizaje y limitaciones).

4.2.1. Comparación de los Análisis de Contenido

Presentamos la comparación de los análisis de contenido, abarcando las tres componentes de significado de un contenido matemático: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

a) Estructura Conceptual

En la tabla 4.2.1 del anexo 4 se muestra la estructura conceptual aportada por cada grupo en ambos trabajos, es decir, en el primer análisis de contenido y este en la unidad didáctica. Al igual que en la fase 1 para describir la estructura conceptual nos fijaremos en: (1) si toman en cuenta los elementos curriculares, (2) los focos conceptuales que establecen y (3) si organizan cognitivamente los conceptos (conceptual, procedimental y actitudinal). Basándonos en las variables de estudio de la fase 1 organizamos la información en la tabla resumen 4.2.1. Esta tabla nos permitió observar si mantienen o modifican los elementos que describen la estructura conceptual.

A partir de la tabla 4.2.1 podemos realizar las siguientes apreciaciones por cada grupo:

G1. Mantienen lo encontrado en el documento oficial con respecto al tema de división en primer ciclo educativo. En cuanto a su listado de focos conceptuales, mantienen los mismos (resta sucesiva, mitades y dobles y series numéricas) pero agregan en la unidad didáctica el concepto de "reparto". Nuevamente no hacen distinción de la organización cognitiva.

Tabla 4.2.1. Estructura conceptual de análisis de contenido durante la fase 2.

GRUPOS		Estructura conceptual en Fase 2			
		Elementos curriculares	Focos conceptuales	Organización cognitiva	Comparación
G1.	2° primaria (B03)	Contenido Decreto (fin general)	2.11 Resta (resta sucesiva) Mitades y dobles Series numéricas	Sólo indica conceptos	Añaden como foco conceptual el reparto
G2.	2° primaria (B08)	Contenido Decreto	2.11 Reparto (repartir), Agrupamiento (agrupar) Mitad, División (elementos) Desarrollar, Calcular, Resolver	Separan conceptos (sustantivo) y procedimientos (verbos)	Añade concepto Agrupamiento y procedimiento Agrupar
G3.	3° de Primaria (B02)	Contenidos formulados por ellos	Concepto división, Términos, Tipos de división: -Exacta y Entera; Partitiva y Cuotitiva. Procedimiento de división. Prueba de la división. División operación inversa. Propiedad resto División de dos cifras, tres cifras. Ceros en cociente. División entre 10, 100 o 1000. Operaciones combinadas Producto cartesiano Cálculo mental.	No diferencian	Eliminan alusiones al Decreto, se mantienen en los contenidos seleccionados y formulados por ellos, agrupados en 3: 1. Concepto división, 2. Importancia división y 3. Cálculo mental
G4.	4° primaria (B07)	No aluden a Decreto.	Operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. Tipos: exacta/entera. Términos división, Prueba Resolución de problemas. Tipos problemas Cálculo mental.	No diferencian	Repiten, eliminando "división como reparto"
G5.	4° primaria (B18)	Extraen elementos de la tabla de Decreto: Significado, expresión, utilización, propiedades, estrategias iniciales, utilización algoritmo división	Términos Operación inversa. Clases: exacta/no exacta; reparto/cuotitiva. Propiedades división. Problemas, resolubles por división, multiplicando por inverso. Algoritmo división (casos) Propiedades resto Prueba	No diferencian	Cambio importante en forma de presentar el texto y la selección. Eliminan apartado de divisibilidad. Reordenan, apareciendo primero conceptos, luego problemas y por último algoritmo, clasificado por complejidad creciente
G6.	5° primaria (B14)	Contenidos decreto, sin indicar número, pero reduciendo los seleccionados	Estrategias dividir. Utilización división para repartir/agrupar e inversa a multiplicación. Significado operaciones y utilidad Tipos división y propiedades. Automatización algoritmos. Uso para resolver problemas. Divisor con tres cifras.	No diferencian	Seleccionan y reordenan señalados en fase 1. Continúan mezclando definiciones en forma de intenciones con contenidos, manteniendo los básicos: tipos y propiedades, automatizar algoritmos y aplicar a problemas

G2. Este grupo mantiene el apartado del currículo. En su listado de focos conceptuales, en la unidad didáctica agregan en los conceptos el "agrupamiento" y en los procedimientos el "agrupar". Por lo que mantiene la distinción de la organización cognitiva en conceptos y procedimientos.

G3. En el trabajo final de la unidad didáctica eliminan todo lo relacionado con el currículo y se centran solamente en el listado de focos conceptuales, el cual se mantiene igual que en el trabajo de análisis de contenido, en donde los agrupan en tres bloques: (1) concepto división, (2) importancia de la división y (3) cálculo mental. Finalmente, tampoco hacen la distinción de la organización cognitiva.

G4. Este grupo no hacen alusión al currículo tampoco en el trabajo de la unidad didáctica, al igual que en el primer análisis de contenido. En cuanto a su listado de focos conceptuales del análisis de contenido, el único cambio que se pudo observar en la unidad didáctica fue la eliminación de “la división como reparto”. Una vez más no hacen distinción de la organización cognitiva.

G5. En este grupo se observan cambios significativos entre los dos trabajos. El primer cambio consiste en que comienzan agregando en la unidad didáctica un apartado denominado “Contexto Curricular”, justificando que en los documentos oficiales españoles no encontraron ningún bloque dedicado explícitamente a la división, por lo que en el bloque de números buscaron y pudieron reconocer algunos elementos sobre su tema matemático. Lo presentan en una tabla con los contenidos, criterios de evaluación y objetivos del área para la etapa (copiados textualmente del documento oficial), como se muestra en la figura 4.8.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	OBJETIVOS DEL ÁREA PARA LA ETAPA
<ul style="list-style-type: none"> -Significado de la división y utilidad en la vida cotidiana. -Expresión matemática oral y escrita de la división -Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar, como operación inversa a la multiplicación. -Propiedades de la división. -Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones sencillas. -Utilización de los algoritmos estándar de división por una cifra . 	<ul style="list-style-type: none"> -Realizar operaciones utilizando los algoritmos adecuados al nivel, aplicando sus propiedades y utilizando estrategias personales y procedimientos según la naturaleza del cálculo que se vaya a realizar (algoritmos, escritos, cálculos mental, tanteo, estimación, calculadora) , en situaciones de resolución de problemas. 	<ul style="list-style-type: none"> -Plantear y resolver de manera individual o en grupo problemas extraídos de la vida cotidiana. -Usar los números en distintos contextos, identificar las relaciones básicas entre ellos, las diferentes formas de representarlas. -Utilizar los medios tecnológicos, en todo el proceso de aprendizaje, tanto en el cálculo como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones diversas

Figura 4.8. Tabla del contexto curricular del grupo G5

El segundo cambio afecta al listado de focos conceptuales, en el que se eliminan del primer trabajo de análisis de contenido los conceptos de "división partitiva" o “de reparto” y "división cuotitiva" o “resta repetida”, también todo lo referente a los "problemas de

estructura multiplicativa" y los focos conceptuales relacionados con la divisibilidad (estos cambios se pueden observar destacados en la tabla 4.2.1 del anexo 4).

Luego reorganizan los focos conceptuales expuestos en el trabajo de la unidad didáctica, apareciendo primero los conceptos, luego problemas, seguido del algoritmo clasificado por complejidad creciente ("dividendo de varias cifras y divisor de una cifra, dividendo de varias cifras y divisor de dos cifras, divisiones con ceros en el cociente y dividendo de varias cifras y divisor de tres cifras", todo estos como nuevos focos conceptuales) y finalmente también agregan las "propiedades del resto".

En cuanto a la organización cognitiva de los contenidos, siguen sin hacer distinción.

G6. Este grupo al igual que en la fase 1, no hace mención al currículo, pero se puede observar que algunos de sus focos conceptuales reproducen parte del contenido del decreto, por ejemplo: "Significado de las operaciones de multiplicar y dividir y su utilidad en la vida cotidiana". Respecto a su listado de focos conceptuales mantienen en la unidad didáctica: "Tipos de división y sus propiedades, automatización de los algoritmos y divisor con tres cifras". Igualmente mantienen y agregan definiciones en forma de intenciones mezcladas con contenidos, por ejemplo: "Utilización de operaciones de división en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas". Pudimos observar que del primer trabajo de análisis de contenido eliminan algunos focos conceptuales definidos en forma de intenciones, los cuales no estaban especificados para el contenido matemático de la división, ejemplo: "Expresión matemática oral y escrita de las operaciones y el cálculo: suma, resta, multiplicación y división". Por lo tanto, este grupo trataron de ser más concretos para su contenido matemático en los cambios que realizaron en la unidad didáctica.

Finalmente, al igual que en la fase 1 no hacen diferenciación de la organización cognitiva de los contenidos.

Después de comparar la estructura conceptual de cada uno de los grupos en relación a sus dos trabajos de análisis de contenido, podemos observar que en general hicieron cambios. En algunos casos estos cambios son muy simples, como los grupos G1 y G2 que añaden en la unidad didáctica un solo foco conceptual y el grupo G4 que en la unidad didáctica elimina uno. En cambio sí se pudieron apreciar transformaciones importantes en los grupos G5 y G6, los cuales en la unidad didáctica se preocuparon por concretar más su listado de focos conceptuales, ajustándose por una parte al contenido matemático de la división y a al nivel educativo que les correspondía (el grupo G5 a 4º de primaria y el grupo G6 a 5º). Estas situaciones de cambios (simples o más profundas) las podemos interpretar como que al ir aproximándose más a la planificación de la unidad didáctica, es decir, a la secuenciación de cada una de las sesiones, todos los grupos intentaron ajustar sus focos conceptuales (ya sea añadiendo o eliminando) a lo que consideraban que pondrían en juego en las sesiones. Esta situación la confirmaremos en el análisis de la fase 3.

b) Sistemas de Representación

En análisis de los datos de la fase 1 describimos los sistemas de representación y modelos que detallaron los grupos, también si hacían mención a ejemplos o explicaciones. Ahora nos interesa comparar si estos mismos aspectos son tomados en cuenta, con o sin

modificaciones antes de la planificación de las sesiones de la unidad didáctica. La tabla 4.2.2., del anexo 4 recoge todo lo relacionado con los sistemas de representación descritos por los diferentes grupos en los dos momentos, en el primer trabajo de análisis de contenido y en el análisis de contenido incluido en la unidad didáctica. De dicha tabla extraemos las siguientes apreciaciones de cada grupo:

G1. En el apartado de estructura conceptual del segundo análisis de contenido (de la unidad didáctica) pudimos observar que este grupo añade el foco conceptual "reparto", situación que se repite en el apartado de sistemas de representación. Este grupo manteniendo el mismo formato que en el primer trabajo, es decir, tomando en cuenta todos sus focos conceptuales, explica o coloca ejemplos de los sistemas de representación. En la unidad didáctica podemos observar que incorpora el sistema de representación físico para los conceptos de mitad, resta sucesiva y doble, dejando de lado el de reparto y series numéricas.

G2. Este grupo hace una única modificación en la unidad didáctica, eliminar el sistema de representación simbólico. Por lo tanto, mantiene el sistema de representación físico, aludiendo solamente al material bloques multibase, explicando a través de un problema ("Roberto tiene que repartir 12 naranjas entre 3 niños usando los bloques multibase ¿Cuántas naranjas recibe cada niño?"). También mantienen el sistema de representación gráfico, haciendo mención a lo que plantean los libros de texto, como se muestra en la figura 4.9.

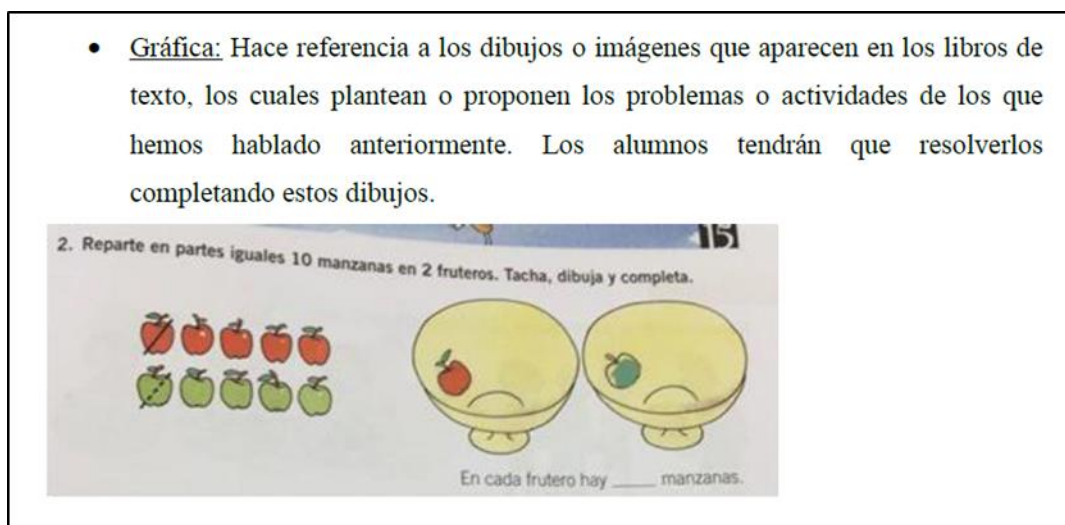


Figura 4.9. Sistema de representación gráfico grupo G2

G3. En este grupo se observan cambios significativos en la unidad didáctica. En el primer trabajo de análisis de contenido se presentaban distintos modelos de la representación gráfica para los focos conceptuales resta repetida y reparto, de los cuales para el segundo trabajo en la unidad didáctica eliminan los modelos discretos o de conjunto y el modelo de área. Por lo tanto, dejan el sistema de representación gráfico y su modelo lineal, para los mismos foco conceptuales y añaden el sistema de representación simbólico (enfaticando en el algoritmo de la división) y el sistema físico, mencionando: "Consiste en las primeras representaciones que se realizan las cuales sirven para adquirir la

comprensión del proceso de la división, es la adquisición de este nuevo concepto. Realizarlo de manera física otorga significatividad al hecho realizado ya que al manipular el material con el que se trabaja se comprende mejor lo que se hace. Se puede realizar con diferentes materiales y cada uno tiene un matiz distinto”. Cada uno de los sistemas de representación que presentan lo hacen a través de ejemplos y dando una breve explicación.

G4. En la fase 1 describimos como este grupo hace una presentación detallada de los sistemas de representación físico, gráfico y simbólico, presentando modelos, ejemplos y explicaciones. En el segundo trabajo incluido en la unidad didáctica no se observa ningún cambio, mantienen lo mismo del primer trabajo.

G5. Este grupo sigue manteniendo los modelos gráfico y simbólico, tal cual los presentaron en el primer trabajo de análisis de contenido. Los cambios se observan en el modelo físico que aparte del material multibase, añaden el ábaco horizontal y el ábaco vertical, explicando cómo se utilizan por medio de un ejemplo ($6 \div 2$), con los dos significados de la división (partitiva y cuotitiva).

G6. En el segundo análisis de contenido incluido en la unidad didáctica, este grupo sigue haciendo la distinción entre sistemas de representación y modelos. En los sistemas de representación mantienen los mismos (físico, gráfico y simbólico) sin explicación ni ejemplos. En cuanto a los modelos mantiene los lineales, cardinales, numéricos, de razón aritmética, funcionales y elimina el modelo de medida. Hacen una explicación muy simple, por ejemplo: “Modelos funcionales: se trata de todos aquellos casos en los que la división aparece con carácter de función u operador”.

De manera general podemos ver que en el trabajo de cinco de los seis grupos existe alguna modificación, ya sea que agregan nuevos sistemas de representación o bien eliminan algunos. Los cambios más significativos se pudieron observar en el grupo G3 que modifica lo presentado en el primer trabajo como también añaden nuevos sistemas de representación. Aunque esta situación, al igual que en la estructura conceptual, se puede interpretar por la diferencia de perspectiva cuando están más próximos a decidir lo que realmente les puede servir, en función de la utilidad que le dan a los focos conceptuales que se pretenden trabajar, cabría esperar que este cambio generara también una mayor precisión en formas de representar los contenidos. Esto se aprecia por ejemplo en el grupo G1 que trabaja la introducción a la división en 2º de Primaria, si bien en el primer trabajo no mencionó el sistema de representación físico, en su análisis de contenido dentro de la unidad didáctica si lo incluye, lo que nos hace pensar que han pensado que para introducir un nuevo contenido matemático escolar (la iniciación a la división en primer ciclo) es necesario comenzar con material manipulativo.

c) Fenomenología

La tabla 4.2.3 del anexo 4 muestra de manera conjunta el apartado de fenomenología en el primer trabajo de análisis de contenido y el apartado del mismo ya en la unidad didáctica. De esta revisión comparativa extraemos las siguientes apreciaciones relativas a cada grupo:

G1. En el primer análisis de contenido este grupo se centró en sus focos conceptuales para presentar los modos de usos de cada uno de ellos, en ningún caso hizo mención a los tipos

de problemas. En el segundo trabajo, ya en la unidad didáctica, mantienen la misma idea, pero como en el apartado de estructura conceptual vimos que añadieron el foco conceptual "reparto", dentro de la fenomenología también lo incluyen. Una situación que nos llama la atención es que para ejemplificar los modos de usos de este nuevo foco conceptual, utilizan el mismo ejemplo que en el primer trabajo utilizaron para el foco conceptual de "resta repetida". Por lo tanto, añaden un nuevo ejemplo para la resta repetida ("nos vamos de acampada y tenemos que hacer grupos de tres para dormir en tiendas de campaña. Si somos 24 alumnos en clase, ¿Cuántas tiendas de campañas necesitamos?") Y también para mitades.

En cuanto a los focos conceptuales de dobles y series numéricas, se mantienen exactamente igual.

G2. Este grupo hace una reducción bastante significativa en el segundo análisis de contenido dentro de la unidad didáctica. Si bien en el primer trabajo no hicieron mención a los tipos de problemas, si comenzaron presentando algunos para luego finalizar con ejemplos extraídos de libros de textos sobre el sentido y modo de uso que se le da a la división (resta sucesiva, reparto y cálculos simples de mitades). En contraste, en el segundo análisis de contenido solo presentan un listado con los mismos modos de usos mencionados anteriormente, esta vez sin ejemplos.

G3. En el primer trabajo de análisis de contenido no hacen mención a los modos de usos, pero presentan un listado de tipos de problemas con ejemplos. Ahora en el segundo trabajo, también se centran en los tipos de problemas, pero eliminan los problemas de razón y de relación entre la parte y el todo.

G4. En este grupo se observan cambios significativos, puesto que en el primer trabajo de análisis de contenido, si bien no hacen la distinción entre modos de usos y fenómenos, presentan un listado bastante extenso y con ejemplos de los significados de la división y los distintos tipos de problemas (haciendo mención a los niveles de dificultad). Ahora en el análisis de contenido incluido en la unidad didáctica podemos observar un listado más reducido de tipos de problemas (reparto, extracción, cociente cartesiano y reducción) cada uno con una explicación y ejemplo (véase figura 4.10).

- Extracción:
 En este sentido la división se trata de una resta sucesiva, para averiguar cuántas veces se puede restar un número d a otro número D hasta agotar la cantidad dada.
 Ejemplo: Se reparten por igual 240 pasajeros entre varios autobuses. Si cada autobús puede transportar 60 pasajeros, ¿cuántos autobuses se necesitan?

Figura 4.10. Ejemplo de tipo de problema del grupo G4

En cuanto, a los modos de usos en el segundo trabajo hacen mención que los niños “desarrollan operaciones de división de forma natural, es decir, en el entorno familiar. Éstos aprenden a tomar turnos y a dividir equitativamente, como por ejemplo poner la mesa, ya que debe repartir por igual los cubiertos”. También, aluden que “actualmente, se define el concepto de división como la operación inversa a la multiplicación. A los alumnos de Primaria se les presenta la división como el reparto entre partes iguales o

como la acción que consiste en encontrar cuántas veces está contenido un número en otro”.

G5. Este grupo no hace modificaciones, mantiene las mismas situaciones (reparto exacto, reparto no exacto, agrupar, utilización del resto y repartir), cada uno con un ejemplo y nuevamente sin hacer mención a los tipos de problemas.

G6. En el primer trabajo de análisis de contenido presentan un listado con los modos de usos y tipos de problemas que se dan en la división (sin ejemplos ni explicaciones), situación que se mantiene igual en el segundo trabajo.

En esta comparación de la fenomenología, al igual que en los otros elementos del análisis de contenido, se puede observar que la mayoría de los grupos (cuatro de seis) hacen algunas modificaciones. En el caso de los grupos G2 y G4, estas fueron importantes. Los grupos G1 y G3 hicieron cambios menores y los grupos G5 y G6 mantuvieron lo mismo en ambos trabajos.

Al tener un panorama de la fenomenología en ambos trabajos y teniendo en cuenta que nos interesamos en ver si hacían mención al sentido y modo de uso de la división, como también a la clasificación de problemas (Castro y Ruiz-Hidalgo, 2011), podemos apreciar que en cuanto a estos últimos la mitad de los grupos (G3, G4 y G6) plantea los tipos de problemas que se pueden dar en la división (isomorfismo de medida, producto cartesiano y comparación multiplicativa), siendo el grupo G6 el único en no dar ejemplos. En cuanto al sentido y modo de uso, los grupos G1, G2, G5 y G6 hacen referencia a este elemento. El grupo G4 es el único que hace mención en el primer trabajo pero en el segundo trabajo elimina este apartado. El grupo G6 nombra los sentidos y modos de uso y los tipos de problemas.

La comparación de ambos análisis de contenido, teniendo en cuenta que el segundo ya forma parte de la unidad didáctica, nos hace apreciar que los grupos realizaron cambios en casi todos los elementos del análisis, por una parte para concretar más sobre el tema de división según el nivel educativo que les correspondía y por otra para agregar elementos que no habían sido tomados en cuenta y podían ser utilizados en la unidad didáctica. Esta situación nos hace pensar, antes de analizar las tareas previstas para cada una de las sesiones, que el proceso de análisis didáctico como una herramienta funcional para la planificación de unidades didácticas de un tema de las matemáticas escolares, va ganando en significatividad en cuanto se aproxima a la planificación, ya que durante su desarrollo en el proceso formativo hace que los estudiantes realicen modificaciones para darle mayor utilidad.

4.2.2. Comparación de los Análisis Cognitivo

Uno de los focos importantes en nuestra investigación deriva del análisis cognitivo, por eso el interés de poder hacer la comparación del primer trabajo que elaboraron los futuros maestros con el apartado de este análisis ya en la unidad didáctica. Examinamos las expectativas de aprendizaje para poder apreciar las modificaciones que hicieron al plantear los objetivos específicos en un momento más cercano a la planificación de las sesiones de su unidad didáctica. Igualmente describimos las modificaciones en las limitaciones de aprendizaje.

a) Expectativas de aprendizaje

La tabla 4.2.4, del anexo 4, muestra los objetivos específicos que se plantean en el primer trabajo de análisis cognitivo (que ya fueron analizados en la fase 1) y los que mencionan en el apartado correspondiente a dicho análisis pero dentro del trabajo final (unidad didáctica). Esta tabla se ha analizado para ver las diferencias existentes entre ambos trabajos, es decir, apreciar si han eliminado, añadido o bien cambiado la formulación de sus objetivos específicos, pudiendo obtener las siguientes apreciaciones relativas a cada grupo.

G1. En el primer análisis cognitivo plantean siete objetivos específicos que se mantienen igual en el segundo trabajo.

G2. Este grupo hizo cambios significativos en sus objetivos específicos, tomando en cuenta los objetivos planteados en el primer análisis cognitivo con respecto al segundo, los cambios fueron los siguientes:

- El objetivo O.1. "Identificar y comprender el concepto de reparto" lo modificaron, manteniendo el foco conceptual reparto, pero agregando sistemas de representación, planteando dos nuevos objetivos específicos: O.6. "Comprender el concepto de reparto usando material físico-manipulativo". O.7. "Interpretar el reparto a través de representaciones gráficas".
- El objetivo O.2. "Interpretar representaciones gráficas" lo eliminaron, pero se puede observar que en dos de los nuevos objetivos (O.4 "Interpretar el agrupamiento a través de representaciones gráficas" y O.7 "Interpretar el reparto a través de representaciones gráficas") añaden las representaciones gráficas acompañadas de un foco conceptual.
- Se elimina el objetivo O.8. "Usar material físico-manipulativo", pero el nuevo objetivo O.3 "Comprender el concepto de agrupamiento usando material físico-manipulativo", mantiene el uso de material físico y se le agrega la comprensión de un foco conceptual.
- El objetivo O.4. "Distinguir y comprender los diferentes elementos de la división" cambia al objetivo O.9. "Conocer los diferentes elementos de la división", donde se observa una modificación en cuanto a las capacidades que se quieren lograr.
- El objetivo O.5. "Relacionar el concepto de reparto y resta sucesiva" cambia al objetivo O.5. "Relacionar el concepto de agrupamiento y resta sucesiva", con un cambio de focos conceptuales (de reparto a agrupamiento).
- Los objetivos O.3, O.6 y O.7 del primer análisis cognitivo se mantienen igual en el segundo trabajo, solo cambiando el orden (ahora son O.8, O.1 y O.2).

G3. Este grupo solamente elimina el objetivo 5 ("Diferenciar entre división cuotitiva y partitiva") del primer análisis cognitivo, el resto de los objetivos específicos se mantiene igual, en el segundo trabajo.

G4. En ambos trabajos se mantienen los mismos objetivos y la clasificación de ellos en conceptuales y procedimentales.

G5. En este grupo se pueden observar varios cambios, la mayoría es de ubicación, es decir se mantienen los mismos objetivos pero los reordenan según la clasificación de hechos,

conceptos y procedimientos que ya habían hecho en el primer trabajo. Las modificaciones son principalmente para ajustar a las categorías cognitivas, concretándose en:

- En el apartado de hechos mantienen solamente objetivo el O8: "Enuncie y relacione los distintos tipos de problemas de división".
- En el apartado de conceptos incluyen el objetivo O1: "Relacione la división como inversa de la multiplicación", que en el primer trabajo estaba en hechos.
- Los objetivos O5: "Comprenda y memorice el algoritmo de la división" y O10: "Interprete y memorice la comprobación del resultado de la división", que antes eran los que se mencionaban en procedimientos, se agregan también a conceptos.
- Se eliminan de la clasificación conceptos los objetivos O11: "Relacione y comprenda los términos de divisor, múltiplo, mcm, mcd" y O12: "Relacione y distinga entre los conceptos de división y divisor", puesto que estos fueron focos conceptuales que también se eliminaron de la estructura conceptual del primer trabajo de análisis de contenido.. Así también, como en el segundo trabajo de análisis de contenido se añade el foco conceptual propiedades del resto, en los objetivos conceptuales se agrega un nuevo objetivo específico (O11: "Entienda e interpreta la propiedad del resto").
- En el apartado de procedimientos se incluyen los objetivos O6: "Plantea un problema que se resuelva utilizando la operación de división" y O7: "Plantea y resuelva un problema con el inverso", que son eliminados de los hechos.

G6. En este grupo se pueden observar cambios para mejorar precisión, incluyendo clasificaciones y alteraciones verbales:

- Mantienen la mayoría de los objetivos, como se puede observar en la tabla 4.2.4 del anexo 4, pero los clasifican en conceptuales y procedimentales.
- Cambian la forma verbal de sus objetivos, ahora están expresados en infinitivos, por ejemplo, el objetivo "Aplica el algoritmo de la división" cambia por "Aplicar el algoritmo de la división".
- Eliminan del primer trabajo los objetivos 11: "Opera mediante estimaciones cuando la situación lo precisa", 13: "Realiza cálculos numéricos por diferentes procedimientos", 14: "Conoce distintas representaciones de los números y usa la más adecuada" y 15: "Maneja diversos procedimientos para resolver un problema aritmético".
- Agregan un nuevo objetivo a la clasificación de procedimentales, 9: "Aplicar diferentes estrategias para las realizar las divisiones".

De manera general podemos observar que tres grupos (G2, G5 y G6) son los que hacen cambios más significativos en su segunda lista de expectativas de aprendizaje planteados dentro del trabajo final de la unidad didáctica. El grupo G3 solamente elimina un objetivo, y los grupos G1 y G4 no hacen ningún cambio.

Al hacer la comparación de ambos trabajos podemos observar que, a pesar de los cambios, predomina en la mayoría de los grupos mantener los mismos objetivos que habían planteado en un principio. La creación de nuevos objetivos se aprecia en el grupo G2, poniéndose de manifiesto una preocupación por crear nuevos objetivos que apuntan a capacidades cognitivas y a establecer con más precisión el contenido y los sistemas de

representación. También en los grupos G3, G5 y G6 se observa que eliminaron algunos objetivos y los dos últimos grupos crearon un nuevo objetivo.

Como mencionamos anteriormente las expectativas de aprendizaje son un foco de interés en nuestra investigación, por esa razón en la fase 1 analizamos todos los objetivos específicos que plantearon los diferentes grupos basándonos en las categorías utilizadas en Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno (2018), con objeto de poder caracterizarlos y de esa manera acercarnos a la concepción de objetivo que tienen los futuros maestros de primaria. Para tener el panorama general, llevamos a cabo un análisis más pormenorizado. Para ello realizamos una tabla por grupo (tablas 4.2.5 del anexo 4), donde se ponen de manifiesto las diferentes modificaciones de cada uno. Los nuevos objetivos son agregados a continuación de los planteados en el primer análisis y los que están difuminados son los que no se tomaron en cuenta en el apartado de la unidad didáctica.

A continuación haremos igual que en la fase 1, el análisis de la forma en que están formulados los objetivos y de sus elementos, para determinar las modificaciones en la caracterización de los objetivos específicos (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018).

Formulación del objetivo

En esta segunda fase se plantearon un total de 64 objetivos, todos formulados con una intención de aprendizaje del alumno, lo que quiere decir que son objetivos de aprendizaje. En un solo caso (grupo G4) se plantea un objetivo de aprendizaje sin que se precise el contenido ("Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos"), siendo el mismo caso de la fase 1. En cambio, pudimos observar que el caso que se presentó en la fase 1 del grupo G2, que formuló un objetivo de instrucción ("Usar material físico-manipulativo"), en esta fase fue reformulado en dos objetivos de aprendizaje: "Comprender el concepto de agrupamiento usando material físico-manipulativo" y "Comprender el concepto de reparto usando material físico-manipulativo".

Elementos del objetivo

Capacidad

Al tomar en cuenta todas las capacidades que plantean los grupos en forma de verbos, es importante establecer una relación con la cantidad de objetivos, como se presenta en la tabla 4.2.2.

Podemos observar que los tres primeros grupos utilizan la misma cantidad de verbos que de objetivos, lo que quiere decir que para cada objetivo plantean una sola capacidad. En cambio, los tres últimos grupos plantean más de una capacidad en algunos de sus objetivos.

Tabla 4.2.2. *Recuento de verbos que expresan las capacidades en los objetivos planteados por cada grupo*

Grupos	Cantidad de objetivos	Cantidad de verbos
G1	7	7
G2	9	9
G3	12	12
G4	13	14
G5	11	19
G6	12	14
Total	64	75

La tabla 4.2.3 muestra la frecuencia por grupo de los tipos de verbos utilizados y la coincidencia en utilizar en un mismo objetivo ambos tipos de verbos.

Tabla 4.2.3. *Frecuencias de verbos cognitivos, de instrucción y las coincidencias de ambos en un mismo objetivo*

Grupos	Verbos Cognitivos	Verbos de Instrucción	Coincidencia
G1	3	4	0
G2	7	2	0
G3	6	6	0
G4	9	5	1
G5	15	4	1
G6	6	8	2
Total	46	29	4

Al clasificar la totalidad de verbos según las categorías de capacidades (cognitiva, contenido e instrucción) tenemos los siguientes resultados: El 61% de los verbos apuntan al desarrollo de capacidades cognitivas. El 39% corresponde a verbos que hacen referencia a capacidades de instrucción. En 4 casos (grupos G4, G5 y G6) se da la coincidencia que en un mismo objetivo se enuncien capacidades cognitivas y de instrucción. En ningún caso aparecen capacidades de las que hemos considerado de contenido.

En esta segunda fase se puede confirmar que los futuros maestros priorizan en sus objetivos el desarrollo de capacidades cognitivas.

Para ver las diferencias entre la fase 1 y 2, con respecto al elemento de capacidades, resumimos los resultados en la tabla 4.2.4.

Tabla 4.2.4. *Comparación de los elementos de capacidad en la fase 1 y fase 2*

Elementos/ fases	Fase 1	Fase 2
Cantidad total de objetivos	68	64
Cantidad total de verbos	82	75
Total de verbos cognitivos	49	46
Total de verbos de instrucción	33	29
Total de coincidencias	4	4

Al observar esta tabla, nos podemos dar cuenta de que en general entre la fase 1 y 2 existen diferencias escasas, y que al bajar en la fase 2 la cantidad de objetivos plateados, bajó también la cantidad de verbos, pero confirmando que los futuros maestros apuntan más al desarrollo de capacidades cognitivas. Se mantienen la cantidad de objetivos en donde coinciden verbos cognitivos y de instrucción, elaborados por los mismos grupos.

Contenido

En la fase 1 se identificó la frecuencia con la que cada grupo aludía a la estructura conceptual del contenido matemático, a los sistemas de representación y al sentido, en los objetivos. En esta segunda fase vamos a tomar como base el mismo desglose para observar si hay modificaciones. La tabla 4.2.5 resume la cantidad de veces que se alude a los elementos que determinan el contenido, en el total de los grupos.

Tabla 4.2.5. *Variables de especificidad conceptual. Términos claves y frecuencias.*

Estructura conceptual de los Contenidos matemáticos	Sistemas de representación	Sentidos y modos de uso
Mitad: 6	No indican: 54	No menciona: 58
Doble: 2		
Series numéricas: 1	Físico: 4	Partitiva: 6
Reparto: 6	Gráfico: 3	
División: 7	Simbólico: 3	Coutitiva: 1
Estimaciones: 1	Verbal: 1	
Elementos de la división: 5		
Resta sucesiva: 1		
Tipos de división: 4		
Algoritmo de la división: 9		
Prueba de la división: 2		
Problemas de división: 10		
Operaciones: 4		
División con más de una cifra: 2		
Problemas: 7		
Cálculo mental: 1		
Función del resto: 2		
División como inmerso de la multiplicación: 2		
Propiedades de la división: 2		
Relaciones numéricas: 1		
Agrupamiento: 3		
Estrategias para dividir: 1		
No menciona: 1		
Total: En 63 objetivos se mencionan contenidos y en 1 no se menciona	Total: En 10 objetivos se citan SR y en 54 no citan SR	Total: En 6 objetivos se mencionan y en 58 no

Al observar esta tabla nos damos cuenta que, al redactar sus objetivos los futuros maestros siguen enfatizando la estructura conceptual de los contenidos matemáticos, dándole menos importancia a los sistemas de representación y escasamente se toma en cuenta el sentido del concepto de división.

Al comparar el total (en porcentaje) de los elementos del contenido tomados en cuenta al momento de redactar objetivos específicos en la fase 1 y 2, podemos observar que la estructura conceptual es prioritaria para expresar los contenidos matemáticos, que aumentó la especificación de los sistemas de representación pero bajó la determinación del sentido de la división. Como muestra la tabla 4.2.6.

Tabla 4.2.6. *Comparación de los elementos del contenido en la fase 1 y 2*

Fases/ elementos del contenido	Contenido matemático	Sistemas de representación	Sentido
Fase 1	96%	12%	13%
Fase 2	98%	16%	9%

La tabla 4.2.7 muestra lo que ocurrió en esta segunda fase, al establecer la coincidencia de los tres componentes del contenido, en el conjunto de los objetivos de todos los grupos.

Tabla 4.2.7. *Coincidencia de los elementos del contenido en los objetivos planteados en la unidad didáctica*

Componentes del contenido	frecuencia
Estructura conceptual, sistema representación y sentido	3 (5%)
Estructura conceptual y sistema representación	7 (11%)
Estructura conceptual y sentido	3 (5%)
Estructura conceptual	50 (78%)
Ninguno	1 (1%)
Total	64 (100%)

Se confirma que lo que prevalece para los estudiantes es el la estructura conceptual del contenido matemático (78%), situación que también se dio con casi igual porcentaje en la fase 1 (77%). Si bien la coincidencia de aquellos grupos que establecen la estructura conceptual del contenido junto con los sistemas de representación en esta fase 2 es bastante bajo (11%), se observa un aumento con respecto a la fase 1, en la cual su frecuencia fue de un 6%. En cambio, en la segunda fase con respecto a la primera, bajo de un 9% a un 5% los objetivos que coinciden en la estructura conceptual y el sentido.

Situaciones

En esta fase solamente 3 de los 64 objetivos planteados por todos los grupos, hace mención a una situación personal, según las categorías de PISA. En comparación con la fase 1, disminuyó a la mitad la cantidad de grupos que hacen alusión a la situación en que se puede contextualizar el contenido de división.

b) Limitaciones de aprendizaje

En la tabla 4.2.6 del anexo 4 aparecen las limitaciones expresadas por cada grupo y que incorporaron al Análisis Cognitivo que antecede a la Unidad Didáctica. Dos de ellos aluden también a las limitaciones en la introducción de la Unidad Didáctica, pero sólo uno reduce las señaladas anteriormente para apreciar cuáles corresponden específicamente a las sesiones de clase programadas. En ningún caso aparece alusión a limitaciones en la descripción de las sesiones de clase.

Apreciando lo expresado por cada grupo, y comparando con lo aportado en el Análisis Cognitivo de la fase 1, extraemos que los grupos G1, G2, G3 y G5, repiten literalmente lo expresado en la fase 1. El G4 repite la selección realizada, pero corrige la expresión de los errores, de manera que sea más fácil de interpretar, además de evitar errores léxicos. El grupo G6 añade dificultades, separándolas de las limitaciones presentadas en la fase 1, que las identifican como errores, y que se apoyan en experiencias de enseñanza, más que

en textos. Para las dificultades han utilizado la tabla de complejidad de los problemas multiplicativos (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández Plaza; 2015).

4.3. Estudio de la Fase 3. Elementos del Análisis Didáctico en las sesiones de la unidad didáctica

El proceso que utilizamos para analizar los datos se estructuró en 3 fases, en la primera hicimos la descripción de los análisis de contenido y cognitivo desarrollado en los trabajos de los diferentes grupos, identificando en cada uno de ellos los componentes que los estructuran. En la segunda fase, teniendo el trabajo final presentado por los futuros maestros, en el que antes de la planificación de la unidad didáctica vuelven a realizar los análisis de contenido y cognitivo, hicimos una comparación de estos con las producciones de la primera fase, apreciando las modificaciones que se hicieron.

Ahora en esta tercera fase nos interesa examinar los elementos del análisis de contenido (estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología) y las expectativas de aprendizaje (objetivos específicos) del análisis cognitivo que se pusieron en juego en cada una de las sesiones planificadas dentro de la unidad didáctica. Es importante mencionar que nuestra investigación se lleva a cabo en un proceso de formación (descrito en el experimento de enseñanza), por lo que nos interesa analizar el desarrollo del conocimiento de los futuros maestros. Para ello, en esta última fase se considerarán los elementos tomados en cuenta del análisis de contenido y cognitivo expuesto en la fase 2, planteados en la primera parte de la unidad didáctica, y se relacionan con la forma en que se reflejan en la misma unidad.

Se analizarán cada una de las sesiones planificadas, 6 de los grupos G1 y G2, y 8 de los grupos G3, G4, G5 y G6. Dicho análisis se hizo para observar:

1. Los elementos del análisis de contenido que se ponen en juego, es decir los focos conceptuales, los sistemas de representación y el sentido y uso de la división que se ponen en juego, permitiéndonos ver la relación de estos en cada una de las sesiones, para determinar la utilidad que ha aportado profundizar en un contenido matemático escolar en la planificación de unidades didácticas.
2. Los objetivos específicos expuestos al comienzo de cada sesión y su relación con los establecidos en el análisis cognitivo, analizando y comparando su estructura, para determinar la concepción de objetivo de los futuros maestros de primaria.

4.3.1. Análisis de Contenido

En esta fase describimos cómo se ven reflejados los elementos del análisis de contenido: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología en cada una de las sesiones de la unidad didáctica de cada grupo.

a) Estructura conceptual

En esta última fase de análisis nos vamos a centrar en ver los focos conceptuales que se toman en cuenta en cada una de las sesiones planificadas por los diferentes grupos. Para esto organizamos en una tabla la estructura conceptual de cada grupo en la que se muestra este elemento en tres momentos: (1) los focos conceptuales en el análisis de contenido incluido en la unidad didáctica (por ejemplo, los focos descritos por el grupo G4 en la

figura 4.11); (2) los focos conceptuales expuestos por cada grupo antes de empezar a describir el desarrollo de cada sesión (cinco de los seis grupos -G1, G2, G3, G4 y G6-, los incluyen de manera similar a como lo hace el grupo G4, según refleja la figura 4.11, el grupo G5 los menciona antes de cada tarea) y (3) los focos conceptuales que se trabajan en las tareas planteadas en cada sesión, para lo que se analizaron cada una de ellas (Véase la tabla 4.3.1 del anexo 4).

Sesión 1.

Contenidos:

- Realización de operaciones básicas.
- Tipos de división: exacta y entera.
- Resolución de problemas.
- Tipos de problemas y su función con respecto a la división: partición o distribución.

Figura 4.11. Ejemplo de focos conceptuales expuestos antes del desarrollo de la sesión del grupo G4

G1. Podemos observar que este grupo, de todos los focos conceptuales que plantean en el análisis de contenido, el único que trabaja parcialmente es el de "dobles", que lo plantean como "divisiones como inverso de la multiplicación", situación que no se ve reflejado en las tareas. También se aprecian incongruencias en algunas sesiones, entre aquellos focos conceptuales que proponen antes de las sesiones con los desarrollados en las tareas. Por ejemplo en la sesión 6 establecen que el contenido a trabajar será "Series numéricas de números sencillos", pero al analizar las tareas nos damos cuenta que también se trabajan los focos conceptuales "dobles", "mitades", "reparto" y "resta sucesiva". Como se puede ver en la figura 4.12.

2. Resuelve:

➤ Si tengo 10 libros y me he leído la mitad, ¿Cuántos libros he leído?

Solución: _____.

➤ Si mi hermano se ha leído el doble que yo, ¿Cuántos libros ha leído él?

Solución: _____.

Figura 4.12. Ejemplo de tarea en la sesión 6 del grupo G1

G2. Como se puede observar en la tabla 4.3.1 del anexo 4, este grupo trabaja y expone en sus sesiones todos los focos conceptuales planteados en el análisis de contenido y los establecidos antes del desarrollo de cada sesión. Las principales situaciones planteadas fueron:

- (1) En la sesión 3, si bien se describe que durante el desarrollo los niños deberán ir agrupando, al final se plantea introducir el concepto de resta sucesiva, diciendo: “A continuación introduciremos el concepto de resta sucesiva utilizando uno de los problemas anteriores como ejemplo. Le mostraremos a los alumnos que el proceso de agrupamiento que han realizado anteriormente no es más que restar al total un mismo número varias veces. Con el objetivo de profundizar el concepto de resta sucesiva, les proporcionaremos a los alumnos una ficha que deberán realizar”. Por lo tanto, este foco conceptual se incluye en esta sesión pero no está mencionado en ninguno de los listados de focos conceptuales.
- (2) Los elementos de la división aparecen como focos conceptuales en el análisis de contenido y antes del desarrollo de la sesión 6, pero al hacer el análisis de dicha sesión, nos damos cuenta que estos no son trabajados, aunque están mencionados por el profesor como una alternativa. Se describe esta situación de la siguiente manera: “Toda esta unidad didáctica la hemos realizado con el objetivo de introducir a los alumnos en el mundo de la división sin necesidad de hacer el algoritmo propio de la división, pero vemos interesante, en el caso de que sea posible, mostrarles a los alumnos cuáles son los diferentes elementos de la división. Si es necesario el maestro lo hará mediante un ejemplo: Si Juan tiene 20 caramelos y quiere repartirlos entre 2 amigos. ¿Cuántos caramelos le dará a cada uno? El maestro le explicará que el total de caramelos que queremos repartir es el dividendo, también le dirá que el divisor es el número de personas entre las que se reparte y en este caso el cociente será el número de caramelos que Juan le dará a cada amigo”.

G3. En este grupo es donde observamos mayor grado de desacuerdo entre la lista de focos conceptuales del análisis de contenido y lo trabajado en cada una de las sesiones. De un total de 15 focos, 9 no son abordados en las tareas planificadas para las sesiones ("tipos de división: exacta y entera, división como operación inversa, Propiedad del resto. División entre un número de dos cifras. División entre un número de tres cifras, ceros en el cociente, división entre 10, 100 o 1000, operaciones combinadas, producto cartesiano: factor y producto desconocido"). Hicimos una revisión para determinar si en algunas de las tareas igualmente se trabajaban algunos de estos contenidos, por ejemplo "divisiones entre número de tres cifras" y no apreciamos que se requiera para resolver ninguno de los problemas que se plantean, tampoco se crean tareas para enseñarla, ni se requiere en los ejercicios propuestos.

No todos los contenidos que se plantean antes de las sesiones son desarrollados durante las mismas. Por ejemplo en la S4 definen como uno de los contenidos a trabajar "Tipos de división: exacta y entera"; en las tareas planteadas y en la formulación del contenido los tipos de división no son mencionados, ya que en esta sesión solo se centran en los elementos de la división y la resolución de problemas. Este grupo, en varias de las sesiones y en la lista de contenidos del análisis cognitivo, hace mención a la importancia

de la división en la vida cotidiana (como contenido), que sólo se puede apreciar por trabajar la resolución de problemas contextualizados.

G4. En este grupo apreciamos que todos los focos conceptuales (figura 4.11) del análisis de contenido y los que mencionan antes del desarrollo de cada sesión, son trabajados en las sesiones. Es interesante resaltar que el análisis de cada tarea revela que la mayoría están centradas en la resolución de problemas. La metodología planteada en cada una de las sesiones cubre diversas etapas que muestran una estructura de la enseñanza basada en el modelo trabajado en clase de teoría, que comienza con trabajo de alumnos, para terminar realizando una puesta en común al final de la sesión y luego el profesor cierra formalizando el contenido, haciendo mención a los focos conceptuales.

Por ejemplo, en la sesión 6 los contenidos que mencionan antes de su desarrollo son: "resolución de problemas, tipos de problemas y su función con respecto a la división: cociente cartesiano y tipos de división: exacta y entera". Y el desarrollo de la sesión es: (1) se les presenta una gráfica (figura 4.13) que deben interpretar y razonar para ver el tipo de problema. (2) "Tras su interpretación, los alumnos se dividirán en grupos de cinco personas y realizarán un problema según los datos expuestos en el esquema". (3) "Buscar otras opciones. Tras la creación de los problemas, cada grupo leerá su problema y se procederá a debatir las siguientes cuestiones ¿Se pueden buscar otras alternativas para este problema? ¿A partir de este problema creado, podrías realizar otro del mismo estilo? Justifica tu respuesta y crea un problema similar que posea del mismo modo una representación gráfica". (4) "Contraste de resultados. A partir de las creaciones elaboradas por los grupos, se procederá a apreciar de forma conjunta cuáles son las opciones más acertadas. ¿Modificarías la propuesta de algún grupo? ¿Algún grupo ha utilizado un tipo de problema distinto? ¿Sería correcto emplear otro tipo de problema? Justifica tu respuesta". (5) "Puesta en común. El grupo seleccionado, ha de explicar qué diferencias ha observado en relación a sus propios compañeros y mencionar los errores del propio grupo. Tras las cuestiones realizadas con anterioridad, el alumno debe atender a: a. Reflexión sobre la gráfica. b. Concretar el tipo de problema que se está trabajando. c. ¿El resto desempeña un papel importante o carece de importancia? Finalmente, se recordará el problema de producto cartesiano".

Con este ejemplo, podemos apreciar que se trabaja la resolución de problemas, específicamente de producto cartesiano. En relación al foco conceptual "tipos de división", podríamos interpretar que viene atendido con la pregunta "¿El resto desempeña un papel importante o carece de importancia?", para que se haga mención a la división exacta o inexacta.

➤ **Tarea matemática escolar “Los helados de sabores”.**

1. Interpreta la gráfica y razona qué tipo de problema se nos presenta.

Figura 4.13. Ejemplo de tarea de la sesión 6 del grupo G4

G5. Al hacer la comparación de los focos conceptuales planteados en el análisis de contenido con lo trabajado en cada una de las sesiones, pudimos apreciar que este grupo deja de lado el foco "escritura y planteamiento de un problema", que sólo se atiende utilizando alguna división y problemas que se resuelven multiplicando por el inverso, para ver que se obtiene el mismo resultado. Es importante señalar la coherencia y precisión de este grupo para trabajar los otros focos conceptuales en las sesiones. Mencionamos anteriormente que este grupo no establece un apartado de contenidos, antes del desarrollo de las sesiones, como lo hicieron los otros grupos, sin embargo menciona los focos conceptuales antes de cada tarea. Por lo tanto se puede observar claramente la coherencia, tal como muestra el ejemplo en la figura 4.14.

Con esta tarea podemos apreciar que se atiende a trabajar la división exacta, posteriormente presentan otro ejemplo con la explicación de la división no exacta. Una situación que se da únicamente en este grupo es que plantean un apartado de actividades para casa, al final de cada sesión, con ejercicios donde se refuerza lo trabajado en cada sesión. Por ejemplo en esta sesión las actividades son: "1) Juan tiene 24 lápices. ¿De cuántas formas distintas puede repartir los 24 lápices de forma que dicho reparto sea exacto? 2) Enuncia un problema de división con los siguientes datos y resuélvelo. ¿Es una división exacta? 7 balones = 150 euros".


2ª Sesión (División exacta y no exacta).

Ejemplo: Una profesora quiere repartir 24 lápices entre sus 4 alumnos a partes iguales. ¿Cuántos lápices recibirá cada alumno?

$$\begin{array}{r} 24 \quad | \quad 4 \\ \hline 0 \quad 6 \end{array}$$

La profesora reparte 24 lápices entre sus 4 alumnos, dándole 6 a cada uno y no le sobra ninguno, o lo que es lo mismo, el resto es 0.

A las divisiones en las que el resto es cero se denominan “divisiones exactas”.



Observamos que hay 6 grupos con 4 lápices cada uno, es decir, todos los grupos tienen el mismo número de lápices.

Figura 4.14. Ejemplo de tarea del grupo G5

G6. Los focos conceptuales del análisis de contenido se pueden ver reflejados a lo largo del desarrollo de las ocho sesiones planificadas, como se puede ver en la tabla 4.3.1 del anexo 4. En cuanto a los contenidos que se plantean antes del desarrollo de las sesiones se pueden observar algunas discrepancias. En la sesión 3, en la que el contenido señalado es “Automatización de los algoritmos” se trabaja en toda la sesión la explicación y aplicación del método ABN. En la sesión 5, en la que el contenido es “Tipos de división y sus propiedades y Divisor con tres cifras”, lo único que se puede apreciar es la resolución de problemas de división, donde el divisor es de tres cifras, pero no se hace alusión en ningún momento a los tipos de división y tampoco a las propiedades. Finalmente, en la sesión 8 se establece que el contenido es “Cálculo mental” y en el desarrollo se explica que los niños jugarán al dominó que ellos mismos elaboraron, pero no se menciona cómo son las operaciones, ni cómo se ayudará a que los alumnos aprendan a realizar cálculos mentales.

Después de hacer este análisis comparativo entre los tres momentos que se plantean en la tabla 4.3.1 del anexo 4, podríamos decir que:

- De los focos conceptuales planteados en el análisis de contenido, la mitad de los grupos (G2, G4 y G6) los trabaja en su totalidad en las sesiones planificadas. En cambio otros tres grupos (G1, G3 y G5) deja de lado algunos de ellos.
- De los focos conceptuales expuestos antes del desarrollo de las sesiones, cuatro de los seis grupos (G1, G2, G4, y G5) atienden a todos ellos en la sesiones, mientras que los grupos G3 y G6 omiten algunos de ellos.
- En el desarrollo de las sesiones, solamente dos grupos (G1 y G2) añaden nuevos focos conceptuales.


Estas situaciones aportan algunas evidencias del cumplimiento parcial de nuestra conjetura, que apunta a que el análisis didáctico como herramienta para la planificación de unidades didácticas ayuda a los futuros maestros a profundizar en el significado conceptual y didáctico del contenido matemático de la división a la hora de tomar decisiones para diseñar unidades didácticas.

b) Sistemas de representación

Con respecto a este elemento del análisis de contenido, en la fase 2 pudimos observar que algunos grupos hicieron modificaciones entre el análisis de contenido realizado en el primer trabajo y el incluido en la unidad didáctica, ya sea porque agregan nuevos sistemas de representación o bien eliminan algunos. Esto lo interpretamos como que sintieron la necesidad de ir acotando en función de la utilidad que le dan a los sistemas de representación en la planificación de su unidad didáctica.

En esta tercera fase nos interesa ver cuáles de esos sistemas de representación se reflejan realmente en cada una de las sesiones planificadas por los grupos. Para ello comenzamos por hacer una revisión de los elementos que se mencionan antes del desarrollo de cada sesión, encontrándonos que solamente 3 grupos (G1, G2, G3) hacen mención y especifican los materiales o recursos que se utilizaran (como ejemplos de representaciones físicas). Posteriormente hicimos un análisis minucioso de todo el desarrollo (tareas y formulación) de cada sesión, pudiendo identificar qué tipo de sistema de representación se estaba trabajando. Ejemplo de esto se muestra en la figura 4.15, donde identificamos la alusión al sistema de representación físico:

1. Tenemos que hacer un bizcocho de esta forma (utilizando 4 cubos [multilink](#)):



- Una vez hecho el bizcocho, llega una clienta y nos dice que le encanta el bizcocho pero necesitaría el doble para un cumpleaños. Haz el bizcocho que pide la clienta. ¿Cuántos cubos [multilink](#) has utilizado?
- El cumpleaños ha salido muy bien y la clienta viene a pedirnos la receta. Nosotros solo tenemos la receta del primer bizcocho, a partir de ésta, elabora tú la receta del bizcocho que hiciste para el cumpleaños.

Figura 4.15. Tarea de la sesión 1 del grupo G1

La tabla 4.3.2 en el anexo 4, muestra la comparación entre los sistemas de representación expuestos en el análisis de contenido incluido en la unidad didáctica y los puestos en juego en cada una de las sesiones. En cuanto a los materiales y recursos mencionados a priori por tres grupos, no se incluyen en dicha tabla, puesto que se confirmó su utilización en las sesiones, por lo tanto los incluimos dentro de la sesión y del sistema de representación que correspondía. Por ejemplo, el grupo G2 antes del desarrollo de la sesión 1 mencionó como recurso “canicas, garbanzos y botes de pajitas”, confirmándose en el desarrollo de dicha sesión que utilizarían ese material, por lo que, en la tabla 4.3.2

del anexo 4, se puede ver que en la sesión 1 se establece el sistema de representación físico.

Resumimos la forma en que cada grupo emplea los sistemas de representación en las sesiones de clase programada, en las siguientes apreciaciones:

G1. Este grupo, utiliza todos los sistemas de representación planteados en el análisis de contenido (simbólico/verbal, gráfico y físico) en las tareas propuestas en las sesiones. El sistema de representación simbólico se trabaja en cinco de las seis sesiones. En todas se alterna con el sistema de representación gráfico o físico. Así por ejemplo, en la sesión 3 la tarea consiste en resolver unos problemas, los cuales, si bien deben solucionarse numéricamente, también los hacen con material manipulativo. Se considera que el sistema de representación verbal es simbólico, tal como mencionamos en la fase 1 de análisis.

El sistema de representación gráfico se utiliza en cuatro sesiones, por ejemplo en la sesión 4 se les pide a los niños que dibujen para obtener el resultado, como se muestra en la figura 4.16.

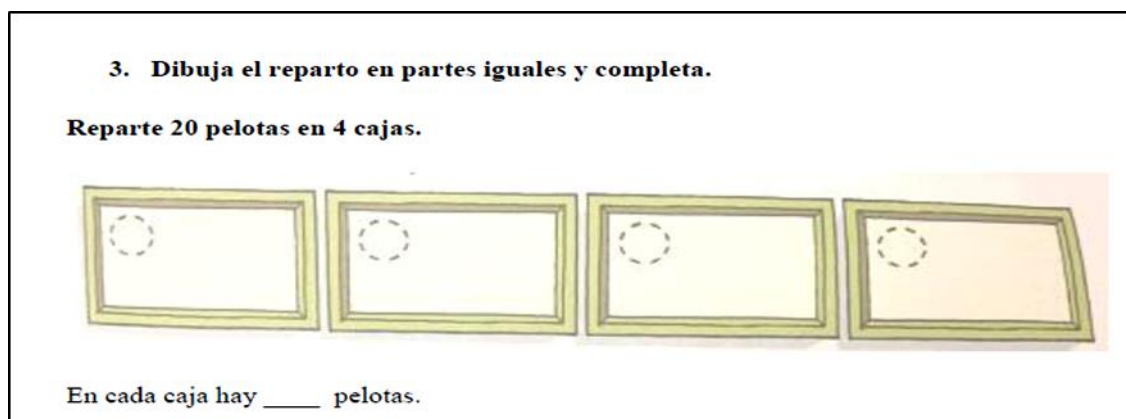


Figura 4.16. Ejemplo de sistema de representación gráfico del grupo G1

El sistema de representación físico que se utiliza en las tres primeras sesiones son materiales didácticos (cubos multilink, regletas Cuissenaire y material multibase). En las sesiones 4 y 6 se plantea su uso de forma alternativa, es decir, si es necesario para los alumnos, y en la sesión 5, al plantear una actividad lúdica, se proponen diferentes recursos (bolas de ping pong, cucharas de plástico, cubos de agua, cinturón de velcro, bolas numeradas, pañuelos numerados).

G2. En el análisis de contenido incluido en la unidad didáctica, este grupo hace mención solo a los sistemas de representación físico y gráfico. Al analizar las seis sesiones planificadas pudimos observar que el sistema de representación físico es trabajado en la totalidad de las sesiones, en las tres primeras se utilizan solamente recursos (canicas, garbanzos, botes de pajitas, frutas), en las sesiones 4 y 5 se plantea el uso de material didáctico, como los bloques multibase, que fue el único mencionado en el análisis de contenido. En estas sesiones se incluye también la tabla de división. La sesión 6 es una actividad lúdica, que utiliza recursos (pañuelos, pelotas y cestas).

El sistema de representación gráfico es trabajado en dos sesiones (3 y 5), en las que se sugiere que realicen el reparto o la resta mediante su acción sobre un dibujo, o bien que lo hagan sobre una gráfica dada, como se muestra en la figura 4.17.



Figura 4.17. Ejemplo de representación gráfica del grupo G2

La sesión 5 está compuesta de tres tareas. En la primera se realiza una ficha de problemas que se debe resolver utilizando la representación gráfica (figura 4.17). En la segunda tarea el profesor le pide a los alumnos que enuncien problemas, indicándose que: “Una vez que los alumnos hayan realizado su problema y escrito en un folio u hoja de cuaderno, se lo darán al profesor y este los mezclará y los repartirá al azar, de modo que cada alumno tendrá un problema distinto al que ha realizado. Una vez que todos los alumnos hayan resuelto el que les ha tocado, el maestro elegirá a cinco o seis alumnos o alumnas, al azar, para que salgan a la pizarra y expliquen a sus compañeros como lo han hecho. Además, se puede elegir a otro alumno o alumna para que a su vez, realice el mismo problema que ha explicado su compañero con el material multibase o con la tabla de la división”. Esta situación nos hace interpretar que han previsto que la resolución de los problemas, si no se dan instrucciones específicas, se realice simbólicamente. Observamos que este sistema de representación se incluye en esta sesión, a pesar de haber sido mencionado en el primer análisis de contenido (fase 1) pero eliminado en el segundo (fase 2).

G3. En el análisis de contenido incluido en la unidad didáctica, este grupo menciona cuatro sistemas de representación (gráfica, lineal, simbólica y física), en las sesiones 1 y 2 se trabaja con recursos físicos (canicas, lápices, cajas, bolsas, tapones de colores y estuches), en la 3 y 5 con material didáctico, la primera con la caja MacKinder y la segunda material multibase. En esta misma sesión 5 se propone que tras trabajar con el material multibase, el profesor relacione la representación gráfica y simbólica con las acciones realizadas con el material didáctico, como se muestra en la figura 4.18.

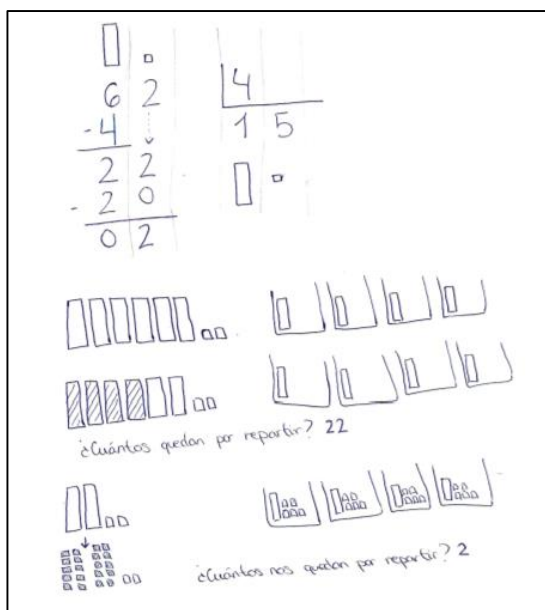


Figura 4.18. Ejemplo de representación gráfica y simbólica del grupo G3

Esta representación que aparece en la figura 4.18, se trabaja posteriormente en la sesión 6, siendo la única forma de usar el sistema de representación gráfico.

El sistema de representación simbólico se trabaja en cinco sesiones. En la 4 completando una tabla con los datos de unos problemas. En la 5 y 6, como muestra la figura 4.18, en la 7 resolviendo problemas y en la 8 a través de un juego, en el que deben resolver divisiones.

El sistema de representación lineal no es tomado en cuenta en ninguna de las sesiones de la unidad didáctica.

G4. Este grupo incluye en el análisis de contenido de la unidad didáctica los sistemas de representación físico, gráfico y simbólico con diferentes ejemplos o modelos. Al hacer el análisis de las tareas de cada sesión observamos que, si bien se trabajan todos los sistemas de representación, no se incluyen todos los ejemplos y sobretodo los modelos mencionados en el sistema de representación gráfico (material multibase, modelo cardinal, modelos lineales, configuración puntual, modelo funcional de la división y operación inversa). Solo en tres sesiones se trabaja con gráficas, en las cuales, en dos de ellas (3 y 6) se muestra una representación gráfica y los alumnos deben enunciar problemas (como se muestra en la figura 4.19). El sistema de representación físico es utilizado en cuatro sesiones (1, 2, 5 y 7), solamente en la segunda sesión se usa material didáctico (ábaco), en las demás se utilizan recursos (cuencas de collares, recortables, pegatinas). Por último, el sistema simbólico es trabajado en cinco de las ocho sesiones, enfocado en el algoritmo de la división al resolver problemas.

1. A través de esta representación gráfica formula un problema de división teniendo en cuenta el papel del resto.

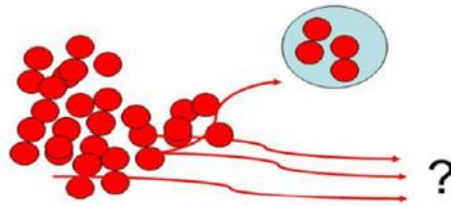


Figura 4.19. Ejemplo de representación gráfica del grupo G4

G5. Los sistemas de representación mencionados en el análisis de contenido de la unidad didáctica son: gráfico (discreto o de conjunto, lineal, área), simbólico y físico (material multibase, ábaco horizontal y vertical). No todos estos se ven plasmados en la unidad didáctica. El mayor énfasis se le da al sistema de representación simbólico, trabajado en la totalidad de las sesiones (8). El sistema físico se observa en dos sesiones, en la primera con el ábaco horizontal y en la última con el material multibase, pero solo empleado por el profesor para mostrar con un ejemplo la propiedad de que el resto debe ser menor que el divisor. El sistema de representación gráfico no se incluye en la planificación de la unidad didáctica.

G6. Este grupo hace mención en el análisis de contenido a los sistemas de representación físico, simbólico y gráfico, también nombran diferentes modelos (lineales, cardinales, numéricos, de razón aritmética, funcionales). Después de analizar las sesiones nos percatamos que ninguno de los modelos mencionados es trabajado, como tampoco el sistema de representación gráfico. Se observa un énfasis en el trabajo con el sistema simbólico, presente en las ocho sesiones, y el sistema físico, que se refleja en la primera sesión con el uso del material multibase y en la última con un juego de dominó confeccionado por los propios alumnos.

En la sesión 4, en la que antes del desarrollo se enuncian diversos recursos (tarjetas con operaciones, sobres, material multibase, platos, lápiz, goma, cuaderno y pizarra), observamos al analizar la formulación, que sólo se alude al uso de las tarjetas con operaciones que el alumno debe resolver.

Una vez realizado el análisis por grupo, apreciamos que 3 grupos (G1, G2 y G3) toman más en cuenta lo planteado en el análisis de contenido en las planificaciones de sus sesiones, mientras que los otros tres (G4, G5 y G6) hay menos coherencia entre su planificación y lo planteado en el análisis de contenido. En este último expresan una variedad de ejemplos o modelos para cada uno de los sistemas de representación, pero luego en las sesiones se centran solo en algunas, como hacen por ejemplo los grupos G5 y G6 con el sistema de representación simbólica.

De lo analizado también pudimos observar que los grupos de niveles más pequeños se preocupan por utilizar diferentes sistemas de representación para los conceptos trabajados; en cambio los grupos de niveles educativos superiores se basan en el uso del sistema de representación simbólico, situación que puede estar influenciada por que en 4º y 5º de primaria ya se incluye el algoritmo de la división.

c) Fenomenología

En la fase 2 pudimos observar que solamente algunos grupos hacen cambios para concretar el uso de los diferentes conceptos de la división así como los tipos de problemas que se pueden trabajar. Ahora bien para poder identificar este elemento del análisis de contenido en cada una de las sesiones nos centramos en ver: (1) si las situaciones que se plantean están contextualizadas y (2) el tipo de problema que se propone, según la clasificación que proponen Castro y Ruíz-Hidalgo (2011). Con respecto a estos últimos se tomaron en cuenta todos los problemas presentes en las sesiones, ya sean para ejemplificar como para resolver. Por ejemplo el grupo G5 comienza algunas de sus sesiones planteando un problema a modo de ejemplo para introducir el contenido que se trabajará posteriormente, como muestra la figura 4.20.

4º Sesión (Algoritmo de la división: dividendo de varias cifras y divisor de una cifra).

Ejemplo: Un equipo de fútbol tiene 126 equipaciones de la categoría alevín en tres equipos diferentes (Alevín A, Alevín B, Alevín C). ¿Cuántas equipaciones hay en cada equipo si están distribuidas de manera equitativa?

Para resolverlo hacemos la división 126:3

Al no poder repartir 1 entre 3, tomamos 12 decenas.

$$\begin{array}{r} 126 \quad | \quad 3 \\ -12 \quad 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Vemos que no sobra ninguna decena por lo que no tenemos que añadir ninguna unidad a las 6 que nos quedan.

$$\begin{array}{r} 126 \quad | \quad 3 \\ -12 \quad 42 \\ \hline 06 \\ -6 \\ \hline 0 \end{array}$$

No sobra ninguna unidad.

Solución: En cada equipo hay 42 equipaciones.

Figura 4.20. Ejemplo de problema grupo G5

En la tabla 4.3.3 del anexo 4 mostramos la comparación general de la fenomenología en el análisis de contenido de la unidad didáctica y lo observado en cada una de las sesiones. Para establecer los tipos de problemas que tienen mayor frecuencia, presentamos en la tabla 4.3.4 del anexo 4 los problemas que plantean cada grupo en sus sesiones y la clasificación que corresponde. Resumimos a continuación las apreciaciones sobre fenomenología empleadas por cada grupo en las sesiones de clase:

G1. Este grupo en el análisis de contenido presentó diferentes ejemplos de situaciones donde se pueden presentar los focos conceptuales que determinaron en su estructura conceptual. Luego del análisis podemos observar que en la mitad de las sesiones (3) plantean situaciones contextualizadas. Por ejemplo en la tercera sesión trabajan el reparto y resta sucesiva en el contexto de una excursión del curso. Solamente en la sesión 2 y en algunas actividades de la sesión 6 no se contextualiza (la sesión 5 son juegos lúdicos). En cuanto a los tipos de problemas, este grupo en el análisis de contenido no hace alusión a

este tema, pero podemos apreciar que de las seis sesiones planificadas, en cinco de ellas se proponen un total de 17 problemas, siendo la mayoría (13) del tipo partitivo y cuatitvo.

G2. En el análisis de contenido de la unidad didáctica, este grupo establece tres modos de usos de la división ("resta sucesiva, concepto de la división como reparto y cálculos simples de mitades"). En las seis sesiones se aprecia el trabajo de dichos usos y en todos los casos dentro de un contexto de la vida cotidiana. Por ejemplo, en tres sesiones se enfocan en la creación de una frutería. Con respecto a los tipos de problemas, este grupo en el análisis de contenido no hace mención, pero al analizar las sesiones, en cinco de seis se trabajan con resolución de problemas, planteando un total de 21 problemas, 10 de isomorfismo de medida partitivo y 10 cuatitvo.

G3. Este grupo en el análisis de contenido identificó los diferentes tipos de problemas que se pueden trabajar con la división. Al analizar las sesiones nos percatamos que la mayoría son de división partitiva (9), seguido de división cuotitiva (5) y solamente uno de comparación multiplicativa, dejando de lado los de producto cartesiano.

Si bien este grupo en el análisis de contenido no hace mención al sentido y modos de usos, pudimos observar que en cinco sesiones hay una preocupación por establecer un contexto al comienzo de esta, por ejemplo la sesión 7 se engloba en la preparación de una visita a la Alhambra.

G4. En la fase 2 de análisis, observamos cómo este grupo hace una reducción de los aspectos que toma en cuenta de la fenomenología, dejando solamente en el análisis de contenido de la unidad didáctica, los tipos de problemas. Al analizar las sesiones, se plantean un total de 13 problemas, de los cuales, 6 son de división cuotitiva, 3 de producto cartesiano y 3 de comparación multiplicativa. Son el único grupo que no incluye problemas de división partitiva. Es importante destacar que este grupo en dos de sus sesiones (3 y 6) trabaja la invención de problemas del tipo producto cartesiano, división cuotitiva y partitiva.

En cuanto al sentido y modos de usos, si bien no hacen mención, en siete de sus ocho sesiones planificadas comienzan estableciendo un contexto que se mantiene a lo largo de la sesión. Por ejemplo, la sesión 1 la denominan "Los zapatos", la 2 "Dulce tentación" y así con las demás, menos la última que no está contextualizada.

G5. Este grupo en el análisis de contenido de la unidad didáctica establece que la división se puede presentar en distintas situaciones y al analizar cada una de sus sesiones observamos que se centran solo en problemas de división partitiva (12) y división cuotitiva (4). En ninguno caso se hace mención a las diferentes maneras en que se puede utilizar el resto, situación que plantea en el análisis de contenido. Con respecto a la contextualización en seis de sus ocho sesiones la utilizan solamente para introducir el contenido (como se puede ver en la figura 4.20), en las sesiones 5 y 6 inician directamente con el algoritmo.

G6. Este grupo en el análisis de contenido presenta una lista de los tipos de problemas ("división partitiva, división cuotitiva, de comparación: comparación de disminución con el comparado desconocido, comparación de disminución con el referente desconocido, comparación de disminución con el escalar desconocido, de producto cartesiano y situaciones combinatorias") y los usos de la división ("resta sucesiva, repartir, partir,

operar, distribuciones rectangulares, problemas con el resto"). En el análisis de las sesiones, en cuanto, a los usos de la división solo se contextualizan utilizando el sentido de resta sucesiva y reparto.

Con respecto a los tipos de problemas, se plantean un total de 15, centrándose su mayoría en división partitiva (6) y cuotitiva (8), solamente pudimos apreciar uno de producto cartesiano, dejando de lado los de comparación multiplicativa.

Al finalizar con la descripción de cada grupo, podemos apreciar que en las unidades didácticas se refleja la preocupación de los futuros maestros de contextualizar las tareas que proponen a los alumnos, aunque en su mayoría se centran en dos significados de la división, como reparto o agrupamiento, lo que lleva a plantear en general problemas partitivos y cuotitivos. Esta situación puede estar influenciada por la revisión de libros de textos, en los que estos son los únicos propuestos (Aguayo-Arriagada et al., 2016).

Englobando los tres elementos del análisis de contenido y al hacer el análisis descriptivo y comparativo de las producciones de todo el proceso formativo de los futuros maestro de primaria involucrados en esta investigación, podemos evidenciar que el profundizar en los componentes de un contenido matemático, como son: su estructura conceptual, los diferentes sistemas como se pueden representar, los distintos significados que puede tener en la vida cotidiana, acompañado esto de la revisión de los documentos curriculares, libros de textos y manuales para profesores, hace que los futuros maestros tengan herramientas para planificar unidades didácticas justificadas en base al conocimiento del contenido de las matemáticas escolares y su didáctica, lo que puede contribuir a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

4.3.2. Análisis Cognitivo

En esta tercera fase del análisis cognitivo solo nos centraremos en las expectativas de aprendizaje, para comparar con profundidad los objetivos que se plantean en cada sesión con lo que se habían expuesto en el segundo análisis cognitivo. Por cuestiones de tiempo dejamos para un estudio posterior analizar las limitaciones de aprendizaje, contrastando las formuladas en el análisis cognitivo con las afrontadas en las tareas de cada sesión.

a) Expectativas de aprendizaje

En la fase 1 pudimos analizar las expectativas de aprendizaje planteadas como objetivos específicos. En la fase 2 pudimos apreciar la evolución en la formulación de dichos objetivos en la unidad didáctica, manifestándose algunas modificaciones. Ahora queremos compararlas con los objetivos de cada una de las sesiones, permitiéndonos tener un panorama de los objetivos durante todo el proceso formativo, para llegar a entender cuál es la concepción que tienen los futuros maestros de los objetivos como elemento base al iniciar la planificación de unidades didácticas, identificando los elementos que son más relevante para estos estudiantes cuando redactan los objetivos.

La tabla 4.3.5 del anexo 4, muestra los objetivos planteados en tres momentos: (1) en el análisis cognitivo de la unidad didáctica (analizados en la fase 2), (2) los que se plantean antes de la descripción de las sesión, es decir, en la fase de profundización de su unidad didáctica y (3) los objetivos para cada sesión. Es importante destacar que los grupos G5 y G6 no plantean objetivos al justificar su unidad didáctica (2), mientras que el grupo G6 es el único que propone una meta por sesión, además de los objetivos de cada sesión.

Un primer análisis para establecer la relación de los objetivos de la unidad didáctica con los planteados anteriormente en el análisis cognitivo nos permite ver que los grupos G1, G2, G3 y G4 realizan cambios en los objetivos en los dos momentos. El único grupo que mantuvo los mismos objetivos fue el G2, los demás eliminaron o bien cambiaron algunos de sus objetivos del análisis cognitivo con respecto a los objetivos planteados antes del desarrollo de las sesiones. Estos cambios fueron:

- El grupo G1 eliminó el objetivo “Saber realizar estimaciones mediante procedimientos sencillos”, aunque luego aparece mencionado en dos sesiones de la unidad didáctica.
- El grupo G3 elimina dos objetivos (“Utilizar la prueba de la división para comprobar dichas divisiones y Saber dividir entre un número de más de una cifra”), y completa “Resuelve problemas” señalando “Resolver problemas de división”. Además agrega un nuevo objetivo “Iniciarse en el algoritmo de la división”.
- El grupo G4 elimina cuatro objetivos (“Aplicar algoritmos de cálculo correspondiente a la suma, resta, multiplicación y división; Usar cálculos mentales para la resolución de problemas; Resolver problemas sencillos de la vida cotidiana utilizando la división; Aplicar pasos previos para resolver un problema”) y precisa “Elegir los cálculos correctos para realizar un problema” señalando “Elegir los cálculos y algoritmos correctos para realizar un problema”.

El segundo análisis que hicimos consistió en estudiar la relación que hay entre los últimos objetivos planteados (antes del desarrollo de la unidad didáctica) con los que se mencionaban en cada una de las sesiones. Los grupos G1, G2, G3 y G4 formularon objetivos antes de presentar las actividades de la unidad didáctica, pero los grupos G5 y G6 no los presentaron, así que tomamos los objetivos del análisis cognitivo. Nos centramos en dos aspectos para hacer dicho análisis: (1) identificar las modificaciones en la formulación de los objetivos y (2) establecer la cantidad de veces que se plantea cada objetivo en las sesiones. A partir de estos aspectos exponemos las siguientes apreciaciones por grupo:

G1. Se observan cambios importantes en los objetivos de las sesiones planificadas, con respecto a los que se plantearon antes de estas, como se puede observar en la tabla 4.3.5 del anexo 4. El detalle de estos cambios es:

- El objetivo 1 (amarillo) se simplifica, se deja solamente en “calcular mitades y dobles”, y es utilizado en 4 de las 6 sesiones.
- El objetivo 2 (rojo) también se simplifica, se deja como “elaborar series numéricas con mitades” y es trabajado en las dos últimas sesiones.
- El objetivo 3 (violeta) se simplifica en “representar gráficamente repartos” y se ve presente en dos sesiones.
- El objetivo 4 (verde) se mantiene igual y se trabaja en 3 sesiones.
- El objetivo 5 (celeste) es eliminado, pero en dos sesiones se agrega un nuevo objetivo “relacionar el concepto de doble y mitad” que está relacionado con él.
- El objetivo 6 no es tomado en cuenta en las sesiones.
- En las sesiones 5 y 6 plantean un nuevo objetivo “Representar físicamente repartos”.

- En las sesiones 3 y 4 hacen mención al objetivo 7 que había sido planteado en el análisis cognitivo pero eliminado antes del desarrollo de las sesiones.

G2. Como se puede observar en la tabla 4.3.4 del anexo 4, los objetivos que se plantean en cada sesión son los mismos planteados anteriormente, por lo que hacemos hincapié en la cantidad de veces que cada objetivo está presente en las sesiones:

- Los objetivos 1 y 2 son trabajados en 3 sesiones.
- Los objetivos 3, 4 y 5 son trabajados en una única y misma sesión.
- El objetivo 6 es trabajado en 3 sesiones.
- El objetivo 7 y 8 son trabajado en una misma sesión.
- El objetivo 9 se trabaja en una sesión.

G3. Entre los objetivos planteados en cada sesión y los mencionados anteriormente no se observa ningún cambio, por lo que nos interesa ver la cantidad de veces que se menciona cada objetivo:

- Los objetivos 2, 3 y 4 son trabajados en 5 de las 8 sesiones.
- Los objetivos 1 y 5 son trabajados en 4 sesiones.
- Los objetivos 6 y 7 se trabajan en 3 sesiones.
- El objetivo 9 aparece en 2 sesiones.
- Los objetivos 8, 10 y 11 se trabajan en una sesión.

Llama la atención la cantidad de objetivos propuestos por este grupo en cada sesión, así como la secuencia en que se presenta. Por ejemplo, en la sesión 3 se plantea el objetivo “entender el concepto de división”, pero en las dos sesiones anteriores se menciona el objetivo “adquirir el procedimiento de la división”, lo que muestra que los estudiantes pretenden que se adquiriera el procedimiento antes entender el concepto.

G4. Se mantienen iguales los objetivos mencionados antes de las sesiones y los que se plantean en las sesiones, llama la atención el énfasis que le dan a algunos objetivos. Por ejemplo el objetivo 1 está propuesto en todas las sesiones. Detallamos la frecuencia a continuación:

- El objetivo 1 se trabaja en todas las sesiones (8).
- El objetivo 2 solamente se menciona en la sesión 8, llamando la atención que se trabaje el algoritmo de la división en todas las sesiones anteriores, pero es en la última en la que se propone relacionar sus términos.
- Los objetivos 3 y 6 se trabajan desde la sesión 1 a la 7.
- El objetivo 4 se propone en 6 de las 8 sesiones.
- Los objetivos 5 y 8 se establecen en 2 sesiones.
- El objetivo 7 aparece en la mitad de las sesiones (4).

También en este grupo llama la atención la cantidad de objetivos por sesiones.

G5. Un aspecto que vamos a considerar de este grupo, es que al final de las 8 sesiones plantean una actividad de refuerzo, en la cual proponen objetivos que también analizaremos. Como mencionamos, contrastamos los objetivos que se plantean en el análisis cognitivo y en las sesiones. Se producen cambios importantes entre estos dos

momentos, como se puede apreciar en la tabla 4.3.4 del anexo 4 y que describimos a continuación:

- No se toman en cuenta los objetivos O4, O8 y O7 planteados en el análisis cognitivo, el resto son modificados o bien se añaden nuevos objetivos en las sesiones, manteniendo el contenido matemático.
- El objetivo O1 “Relacione la división como inversa de la multiplicación” se cambia por “Ver que la división exacta es una operación inversa de la multiplicación” en la sesión 1.
- El objetivo O2 “Entienda e interpreta las propiedades de la división” cambia en la S3 por “Saber las distintas propiedades que tiene la división”, agregando dos objetivos nuevos en relación a este contenido “Conocer el manejo de dichas propiedades a la hora de realiza divisiones” y “Saber identificarlas en un enunciado de un problema”.
- El objetivo O3 “Distinga entre división exacta y no exacta”, cambia en la sesión 2 y en la actividad de refuerzo por “Distinguir una división exacta de una división no exacta”.
- El objetivo O5 “Comprenda y memorice el algoritmo de la división” cambia en las sesiones 4, 5, 6, 7 y en la actividad de refuerzo por “Conocer y saber aplicar el algoritmo de la división en el caso indicado”.
- En el objetivo O9 se realiza un cambio de capacidad, de comprender (“Comprende e identifica los términos de la división”) a conocer (“Conocer e identificar los términos de la división”), en la sesión 1.
- El objetivo O10 que tenía relación con la prueba de la división “Intérprete y memorice la comprobación del resultado de la división” cambia en la sesión 8 y en la actividad de refuerzo a “Conocer y entender la prueba de la división”. También en la sesión 8 se agregan dos objetivos en relación a este contenido “Saber si una división está bien realizada” y “Saber hacer una división si te falta alguno de los componentes de la prueba de la división”.
- El objetivo O11 “Entienda e interpreta la propiedad del resto” cambia en la sesión 8 a “Conocer y entender la propiedad del resto”, pero se agrega un nuevo objetivo en relación a este contenido, “Relacionar el término de exactitud con el resto de la división”, que se incluye en la sesión 2 y en la actividad de refuerzo.
- El objetivo O6 “Plantea un problema que se resuelva utilizando la operación de división” cambia en las sesiones 4,5, 6 y 7 a “Saber enunciar un problema del tipo de división indicada”.

Como podemos apreciar todos los cambios realizados afectan a las capacidades que se quiere que los alumnos desarrollen (verbos), manteniendo iguales los contenidos. Parece que este grupo quiere precisar las capacidades cuando afronta el diseño de las sesiones.

G6. Este grupo estableció metas en cada una de las sesiones, tras señalar objetivos específicos. Para su análisis examinamos primero la relación entre los objetivos planteados en el análisis cognitivo y los de las sesiones, pudiendo apreciar que:

- Los objetivos 3, 5 y 6 no son tomados en cuenta en las sesiones.
- El resto de los objetivos se mantienen iguales.

- La frecuencia de los objetivos en cada una de las sesiones es: El O1 se menciona en la S1 y S7; el O2 en la S4 y S5; el O4 en la S2; el O7 en la S6; el O8 en las S4, S5 y S8; el O9 en las S1, S2, S3, S4, S5; el O10 en la S6; el O11 en la S4 y el O12 en las S4 y S5.
- En la S7 se agrega un nuevo objetivo “Aplicar la estimación en la resolución de problemas”.

En segundo lugar estudiamos la relación entre las metas establecidas al inicio de cada sesión, con cada uno de los objetivos específicos de la misma sesión. A modo general, como se observa en la tabla 4.3.4 del anexo 4 observamos que:

- En 5 de las 8 sesiones se plantea una sola meta y en 3 se hace mención a más de una meta.
- Si bien, las metas planteadas no son iguales en su redacción a los objetivos, en 6 de las 8 sesiones si se refieren a los contenidos que se establecen en los objetivos. Por ejemplo, en la sesión 1, una de las metas es “Dividir con material multibase”, y uno de los objetivos es “Aplicar diferentes estrategias para realizar las divisiones”.
- En las metas y objetivos de las sesiones 6 y 8 se pudo apreciar una discrepancia entre los contenidos a los que se refieren. Por ejemplo, en la sesión 8 la meta es “Automatización del algoritmo de la división” y el objetivo es “Utilizar estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos mentales con divisiones”.

Tras realizar los análisis de los trabajos de este grupo destacamos, por una parte, la cantidad de objetivos que se plantean por sesiones, y, por otra interpretamos que las metas que plantean tratan de concretar el uso de sistemas de representación y las capacidades que se quiere que desarrollen los alumnos.

Finalizado el análisis de cada uno de los grupos entre los diferentes momentos en donde se plantean objetivos específicos, llevamos a cabo en esta tercera fase el mismo análisis que se realizó en las fases anteriores, empleando para ello las categorías de análisis utilizadas en las fases anteriores. En las tablas 4.3.6 del anexo 4 reflejamos el análisis de los objetivos de cada grupo.

A continuación describimos los objetivos atendiendo a las dimensiones contempladas en las fases anteriores: formulación del objetivo, y sus componentes (capacidad, contenido y situación).

Formulación del objetivo

Todos los objetivos planteados por los diferentes grupos en la Unidad Didáctica están formulados con una intención de aprendizaje del alumno (objetivos de aprendizaje). Se repite, al igual que en la fase 1 y 2, un objetivo del grupo G4 que no hacen alusión al aprendizaje esperado (“Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos”).

Elementos del objetivo.

Capacidad

Al igual que en las fases anteriores primero estudiamos la relación entre la cantidad de objetivos y la cantidad de verbos utilizados, tal como se refleja en la tabla 4.3.1.

Tabla 4.3.1. *Cantidades de objetivos y verbos que expresan capacidades*

Grupos	Cantidad de objetivos	Cantidad de verbos
G1	7	7
G2	9	9
G3	11	11
G4	8	9
G5	13	19
G6	10	12
Total	58	67

Establecer esta relación nos sirve para saber si los grupos fijan el desarrollo de una o más capacidades al plantearse un objetivo. Podemos observar que los tres últimos grupos plantan en algunos de sus objetivos más de una capacidad.

Hemos realizado una comparación de los resultados en cantidad de objetivos y cantidad de verbos, de esta fase, con lo que sucedió en las fases anteriores. Podemos observar que en la unidad didáctica se ha producido una disminución, tanto de los objetivos como de los verbos: en la fase 1 se enunciaron 68 objetivos con 81 verbos; en la fase 2, 64 objetivos con 75 verbos y finalmente en la fase 3, un total de 58 objetivos con 67 verbos. Podemos interpretar que los futuros maestros tienen necesidad de ir concretando el aprendizaje que quieren desarrollar en sus alumnos, conforme se acerca la construcción de la secuencia de actividades de la unidad didáctica.

La tabla 4.3.2 muestra la frecuencia por grupo de los tipos de verbos utilizados y la coincidencia en utilizar en un mismo objetivo diversos tipos de verbos.

Tabla 4.3.2. *Cantidad de verbos según la clasificación cognitiva*

Grupos	Verbos Cognitivos	Verbos de Instrucción	Coincidencia
G1	3	4	0
G2	6	3	0
G3	5	6	0
G4	8	1	1
G5	17	2	1
G6	4	8	2
Total	43	24	4

Con respecto al tipo de capacidades, en esta fase podemos observar que un 64% de los verbos son verbos cognitivos, los 36% restantes son verbos que apuntan a capacidades de instrucción. Estos resultados se mantienen bastante parecidos en las tres fases, como se aprecia en la tabla resumen 4.3.3.

Tabla 4.3.3. *Comparación de los elementos de capacidad en la fase 1, fase 2 y fase 3*

Elementos/ fases	Fase 1	Fase 2	Fase 3
Cantidad total de objetivos	68	64	58
Cantidad total de verbos	82	75	67
Total de verbos cognitivos	49	46	43
Total de verbos de instrucción	33	29	24
Total de coincidencias	4	4	4

Finalmente podemos decir, que al también en esta última fase del proceso instructivo de los futuros maestros, siguen priorizando el desarrollo de capacidades cognitivas. Lo que se mantiene igual, es la coincidencia de utilizar en un mismo objetivo ambos tipos de verbos, especialmente por algunos grupos.

Contenidos

En la tabla 4.3.4 aparecen las componentes de los contenidos, realizando el mismo desglose de las fases 1 y 2.

Tabla 4.3.4. *Variables de especificidad conceptual. Términos clave y frecuencias*

Estructura conceptual de los Contenidos matemáticos	Sistemas de representación	Sentidos y modos de uso
Mitad: 6	No indican: 50	No menciona: 54
Doble: 2		
Series numéricas: 2	Físico: 4	Partitiva: 4
Reparto: 6	Gráfico: 3	
División: 6	Simbólico/verbal: 1	
Estimaciones: 2		
Elementos de la división: 5		
Resta sucesiva: 1		
Tipos de división: 4		
Algoritmo de la división: 8		
Prueba de la división: 3		
Problemas de división: 8		
Operaciones: 2		
Problemas: 4		
Función del resto: 3		
División como inmerso de la multiplicación: 1		
Propiedades de la división: 4		
Relaciones numéricas: 1		
Agrupamiento: 3		
Estrategias para dividir: 1		
No menciona: 1		
Total: En 57 objetivos se mencionan contenidos y en 1 no se menciona	Total: En 8 objetivos se citan SR y en 50 no citan SR	Total: En 4 objetivos se mencionan y en 54 no

Podemos observar en esta tabla que nuevamente que aparecen diferencias apreciables entre cada elemento, siendo la estructura conceptual la que mayor presencia tiene en los objetivos que se plantean, apenas tomando en cuenta los sistemas de representación y el

sentido, repitiendo de manera similar a lo ocurrido en las fases 1 y 2. En la tabla 4.3.5 mostramos el porcentaje de cada uno de los elementos del contenido que se tomaron en cuenta al momento de plantear los objetivos, en los diferentes momentos del proceso formativo.

Tabla 4.3.5. *Porcentaje de cada uno de los elementos del contenido en las tres fases de análisis de datos*

Fase 1			Fase 2			Fase 3		
Estructur a	S.R	Sentid o	Estructur a	S.R	Sentid o	Estructur a	S.R	Sentid o
96%	12%	13%	98%	16%	9%	98%	14%	7%

Se observa que aumenta y se mantienen con mayor presencia los contenidos, al plantear los objetivos en los diferentes momentos del proceso formativo, no ocurriendo lo mismo con los sistemas de representación, que varían en cada fase de manera menos sistemática. Finalmente, apreciamos una disminución en la consideración del sentido, sufriendo una baja porcentual importante entre las fases.

A continuación estudiamos la cantidad de objetivos que tomaron en cuenta los tres elementos del contenido, que reflejamos en la tabla 4.3.6.

Tabla 4.3.6. *Coincidencia de los elementos del contenido en los objetivos planteados en las sesiones de la unidad didáctica.*

Componentes del contenido	Frecuencia
Estructura conceptual, sistema representación y sentido	2 (3%)
Estructura conceptual y sistema representación	6 (11%)
Estructura conceptual y sentido	2 (3%)
Estructura conceptual	47 (81%)
Ninguno	1 (2%)
Total	58 (100%)

Los resultados de la tabla 4.3.6 confirman nuevamente la importancia que le dan los futuros maestros a establecer la estructura conceptual del contenido en la formulación de los objetivos, teniendo una presencia bastante disminuida los sistemas de representación y el sentido. Dicha situación (que es similar en todas las fases) nos lleva a interpretar que los futuros maestros en el proceso de enseñanza y aprendizaje se preocupan más del foco estructural del contenido, que de sus significados y representaciones.

Situaciones

Contextualizar las situaciones en que se presenta la división, podría ser bastante simple, ya que es una de las operaciones que encontramos diariamente en la vida cotidiana, con lo que podrían formularse objetivos en situaciones personales (según las categorías de PISA). Sólo en 3 de los 58 objetivos que plantearon los grupos, se hace mención a la situación: el grupo G3 en dos de sus objetivos establece una situación personal, mientras que el grupo G6 en uno de sus objetivos, ambos haciendo alusión a situaciones de la vida cotidiana.

Al comparar los resultados de las tres fases (como muestra la tabla 4.3.7), se observa que hay una disminución de casi la mitad de los casos que toman en cuenta la contextualización del contenido. Llama la atención este resultado, ya que al hacer la revisión del currículo, podrían apreciar el énfasis que concede a que el contenido este contextualizado para que el aprendizaje sea significativo para los alumnos.

Tabla 4.3.7. Porcentaje de presencia de las situaciones en el total de objetivos planteados por todos los grupos en las tres fases

Fase 1	Fase 2	Fase 3
9%	5%	5%

Tras finalizar el tercer análisis y teniendo en cuenta lo mencionado al principio de este apartado, resumimos a continuación los resultados correspondientes a los elementos que se han examinado (Utilidad de realizar el análisis de contenido para diseñar unidades didácticas, cuál es la concepción de objetivo y como interpretan la planificación de unidades didácticas).

En cuanto a la utilidad de profundizar en el significado del contenido matemático escolar para la planificación de las unidades didácticas, mediante la realización del análisis de contenido, podemos decir que los futuros maestros se centran más en la estructura conceptual al determinar los focos conceptuales y de esa manera fijar los contenidos que se trabajarán en las tareas que componen sus unidades didácticas.

Con respecto a cuál es la concepción de objetivo que tienen los futuros maestros, consideramos que lo entienden como el elemento que establece qué deben aprender los alumnos al desarrollar una tarea.

Todo lo anterior nos permite establecer que los futuros maestros involucrados en este estudio consideran que la planificación de unidades didácticas se centra en determinar una secuencia de tareas que apuntan, en este caso, al entendimiento del concepto de división en los primeros niveles educativos, para posteriormente enfatizar la automatización del algoritmo, en el tercer ciclo de la Educación Primaria.

Finalmente, toda la descripción y análisis que se hizo en este capítulo, que corresponde a la tercera fase del experimento de enseñanza (análisis retrospectivo), nos permite revisar la conjetura que nos planteamos en el diseño del experimento, que fue:

"La enseñanza predominantemente práctica y funcional de las herramientas del Análisis Didáctico llevarán a los estudiantes a disponer de herramientas para profundizar en el significado conceptual y didáctico del contenido matemático, y a tomar decisiones para diseñar unidades didácticas que estén fundamentadas y puedan justificar en relación a las exigencias curriculares".

Hemos encontrado ciertas evidencias de que la herramienta del análisis didáctico empleada en la formación inicial de maestros, permite a los futuros maestros profundizar sobre el significado conceptual y didáctico del contenido matemático, pero que cuando se toman decisiones para diseñar unidades didácticas, dicha profundización es solo parcialmente utilizada, tal como que se ve reflejada en la fase 3 del análisis de los datos.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

Índice del capítulo

5.1 Conclusiones del estudio retrospectivo

5.1.1 Análisis de contenido

- Estructura conceptual
- Sistemas de representación
- Fenomenología

5.1.2 Análisis cognitivo

- Expectativas de aprendizaje
- Limitaciones de aprendizaje

5.2 Conclusiones sobre los objetivos de la investigación

5.3 Limitaciones del estudio

5.4 Perspectivas para el avance de la investigación

Conclusiones y recomendaciones

La preocupación principal de esta investigación es comprender cómo se desarrolla el conocimiento de los futuros maestros de primaria en su formación inicial y ver cómo esta contribuye a dicho desarrollo. Para esto nos hemos propuesto describir y analizar las producciones de los estudiantes para maestros en la instrucción de una asignatura del Grado de Primaria de la Universidad de Granada, en donde, con base al análisis didáctico como herramienta para planificar unidades didácticas, se organizó un experimento de enseñanza. El diseño fue estructurado cuidadosamente para cerciorarnos de la internalización de cada uno de los elementos del análisis didáctico.

En este capítulo presentamos primero las conclusiones que llegamos tras el estudio retrospectivo (capítulo 4), luego nos centraremos en ver en qué grado se lograron los objetivos, para finalizar indicando algunas limitaciones apreciadas en el transcurso del estudio así como posibles líneas para continuar la investigación.

5.1. Conclusiones del estudio retrospectivo

En el capítulo 4 se hizo el análisis retrospectivo del estudio, que se organizó en tres fases, en cada una se describieron y analizaron diferentes producciones de los grupos que trabajaron durante la instrucción, todos ellos tomando como tema matemático la división de números naturales en diferentes niveles educativos de Primaria.

A continuación se detallan las conclusiones para cada uno de los elementos del análisis didáctico, tomando en cuenta todas las producciones que entregaron los futuros maestros, con lo que describimos cómo fue el desarrollo de cada elemento a lo largo de la instrucción.

5.1.1. Análisis de contenido

Estructura conceptual

Los futuros maestros involucrados en este estudio cumplieron con el requerimiento de hacer una revisión del currículo, al establecer los contenidos que se trabajarían posteriormente en la unidad didáctica, pero observamos que estos se fueron delimitando influenciados por la revisión de los libros de textos.

A partir de estos elementos, en general los grupos tomaron en cuenta los contenidos, acotando los focos de contenido que, en su mayoría, son trabajados en las sesiones, tal como se pudo observar en las diferentes tareas que planteaban. Por lo tanto, la estructura conceptual como uno de los elementos del análisis didáctico es considerada por los futuros maestros al momento de planificar sus unidades didácticas.

Basándonos en la investigación de Wilson (2016) quien observó que el conocimiento del contenido matemático (MCK) de los futuros maestros de Australia era débil y falto de comprensión conceptual, el proceso de planificación les ayuda a desarrollar dicho conocimiento. En nuestra investigación hemos encontrado que los individuos estudiados,

se apoyan excesivamente en la revisión de libros de textos, para identificar los contenidos relacionados con la división, sirviéndole de ayuda para profundizar, reforzar y recordar dichos contenidos.

Sistemas de representación

Al ser la división, la operación básica que presenta mayor dificultad en su proceso de enseñanza y aprendizaje (Castro, 2008; Ivars y Fernández, 2016; Li y Silver, 2000), este componente del análisis de contenido tiene mucha importancia, ya que la idea de una enseñanza basada en la comprensión tiene que utilizar y relacionar diferentes sistemas de representación para aportar una mayor comprensión del concepto y de su procedimiento (Rico, 2009).

Luego del análisis del proceso de instrucción hasta llegar a la unidad didáctica, pudimos determinar que los futuros maestros en un comienzo se preocupan por identificar los distintos sistemas de representación que aparecen en la literatura, permitiendo esto que tengan un amplio abanico de conocimientos, situación que destacamos favorablemente. Pero cuando analizamos las sesiones de la unidad didáctica se puede ver una reducción importante de los sistemas de representación que plantean para ser trabajados en las tareas. De esta situación ya nos habíamos percatado en Aguayo-Arriagada et al., (2016), en el que realizamos el análisis de los libros de textos de 2° a 5° de Primaria. Esta triangulación nos permite concluir que la influencia de los libros de textos hace que los futuros maestros diseñen tareas en las que se utilizan sistemas de representación más tradicionales (simbólico y gráfico). También hemos apreciado que mientras se va avanzando en el nivel educativo se van dejando de lado los sistemas de representación más concretos.

Fenomenología

Que la enseñanza de un contenido matemático debe ser contextualizada es un aspecto al que se le ha dado mucha importancia, partiendo desde el currículo. Es necesario que los estudiantes de primaria aprendan matemática sabiendo cómo se presenta en diversos contextos y de qué manera puede tener utilidad. En este sentido la fenomenología de un contenido matemático aporta información relevante para tomar en cuenta al momento de planificar.

Los futuros maestros de esta investigación en su primera producción hacen una profundización bastante exhaustiva en cuanto a los modos de usos de la división y sus tipos de problemas. En el avance hacia la unidad didáctica notamos que hay una delimitación más de los usos que de los tipos de problemas. Finalmente en cada una de las sesiones pudimos observar que la mayoría de los grupos se centra en el concepto de división como reparto y agrupamiento lo que lleva a que se propongan en general problemas partitivos y cuotitivos. Esta situación coincide con los resultados de otras investigaciones (Arikan y Unal, 2016; Márquez, Callejo y Fernández, 2011), siendo estos los tipos de problemas más trabajados por su bajo nivel de dificultad. Por otra parte, este resultado también es influenciado por el planteamiento que se trabaja en los libros de texto (Aguayo-Arriagada, Piñeiro y Flores, 2016).

Al tener una visión general de los tres elementos del análisis de contenido podríamos decir que los futuros maestros al realizar el primer análisis de contenido mostraron una

preocupación por profundizar en base a la revisión de diferentes materiales curriculares (decretos, manuales de formación, libros de textos, etc.). Pero al llegar a la planificación de la unidad didáctica apreciamos una delimitación influenciada por prácticas que se reflejan en los libros de textos, siendo más notoria en los elementos, sistemas de representación y fenomenología. Esta situación coincide con otras investigaciones que plantean que los libros de textos son uno de los materiales curriculares más utilizados por los profesores a la hora de establecer los contenidos y tareas de las planificaciones (McCutcheon, 1980; Bailey, 2005; Azcarate, Serrado y Cardeñoso, 2004). Los libros de textos, que son utilizados como herramienta de apoyo en la formación inicial, ayudan a pensar en la creación y elaboración de sus planificaciones (Nicol y Crespo, 2006).

5.1.2. Análisis cognitivo

Expectativas de aprendizaje

Las expectativas de aprendizaje vistas como el planteamiento de objetivos específicos al momento de planificar una unidad didáctica, son elementos que resaltamos y profundizamos en esta investigación. En el trabajo previo (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018) establecimos categorías de análisis para determinar la concepción de futuros maestros sobre los objetivos. Utilizamos dichas categorías para llevar a cabo en esta investigación un análisis de los objetivos que plantean los grupos en los diferentes momentos del proceso formativo. En el capítulo 4 detallamos los resultados en cada una de las producciones de los futuros maestros y al final hicimos una comparación, la cual, nos permite ver la evolución de las diferentes dimensiones de los objetivos a lo largo de la instrucción.

Durante todo el proceso de instrucción se mantuvieron las características de los objetivos. Predomina la formulación de objetivos enfocándose en el aprendizaje que se espera del alumno (objetivos de aprendizaje). En cuanto a las capacidades que se identifican en los objetivos, se observa una mayor presencia de aquellos verbos de apuntan al desarrollo de capacidades que tienen que ver con el aspecto cognitivo (comprender, relacionar, entender, interpretar, etc.), correspondiente en promedio de las tres fases de análisis a un 62%. El resto, un 38%, son verbos que apuntan a una capacidad de instrucción (calcular, resolver, usar, etc.). Estos resultados coinciden con los obtenidos en Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno (2017) puesto que estos tipos de verbos son los más utilizados por los futuros maestros. También hay coincidencia con los resultados obtenidos por Ruiz-Hidalgo et al., (2017), pero en los verbos relacionados con capacidades cognitivas, ya que en nuestra investigación no se observa el uso de verbos que estuvieran vinculados con las capacidades implicadas directamente con el contenido.

En cuanto al aspecto cultural, la dimensión que tiene mayor presencia es el foco de contenido de la estructura conceptual, en promedio el 97% de los objetivos hace alusión a contenidos relacionados con la división (los problemas de división, el algoritmo, el concepto de división, reparto, etc.). La mención a los sistemas de representación es bastante menor (promedio 14%) y se mantiene constante durante toda la instrucción, teniendo mayor frecuencia los sistemas de representación físico y gráfico. Respecto al sentido de la división (partitiva o cuotitiva), es un elemento que si bien, en los primeros objetivos tuvo alguna presencia (13%) disminuyó considerablemente en los objetivos que se plantaron en la unidad didáctica (7%). Finalmente, el contexto o situación en donde se

van a poner en juego los contenidos de la división, también tiene muy poca presencia a lo largo de toda la instrucción, en promedio de las tres fases donde se analizaron los objetivos, este corresponde a un 6%.

Todo esto nos hace concluir que los futuros maestros involucrados en esta investigación tienen una concepción de los objetivos como un elemento que establece solamente **QUÉ** debe aprender el alumno.

Teniendo en cuenta todas las dimensiones que se analizan de los objetivos, se observan diferencias con respecto a la investigación previa (Aguayo-Arriagada, Flores y Moreno, 2018), probablemente ligadas al reactivo empleado en una y otra. En el primer estudio observamos que la mayoría de los grupos coincide al mencionar los tres tipos de capacidades en un mismo objetivo, situación que difiere totalmente con esta investigación. También hay diferencias en relación a los focos de contenido, sistemas de representación y sentido, que en el primer trabajo reflejan más de la mitad de los grupos, así como la situación, que la específica casi también la mitad de los grupos.

Estas diferencias pueden estar influidas porque los contextos al momento de plantear objetivos eran distintos. En Aguayo et al. (2018) se analizaba una tarea matemática escolar dada (que incluye la demanda matemática y la forma de gestión en el aula), mientras que en esta investigación estaban planificando una unidad didáctica. Lo que nos hace pensar que para los futuros maestros es más fácil redactar objetivos específicos de manera más completa cuando se focalizan en examinar una tarea, que cuando realizan el proceso inverso, es decir, primero plantear el objetivo para luego diseñar la tarea. Esta situación confirma que el planteamiento de objetivos no es una labor sencilla, y al relacionarla como un proceso dentro de la planificación de unidades didácticas, coincidiendo con lo que mencionan algunos autores (Kilpatrick et al, 2001; Reys et al, 2010), según los cuales es más fácil para los maestros establecer primero el contenido, luego las actividades y teniendo esto, plantear los objetivos.

Parte de otro estudio relacionado con la formulación de objetivos específicos, es el realizado por Lupiáñez (2009), si bien es con futuros profesores de secundaria. Encontramos ciertas discrepancia en resultados, ya que el autor constató en su investigación cómo los futuros profesores de matemática a lo largo de su proceso de instrucción iban “precisando y enriqueciendo sus objetivos mediante la concreción e incremento de capacidades enunciadas y de la consideración de aspectos conceptuales y procedimentales de las nociones matemáticas involucradas” (p. 474). Situación que no se pudo observar con nuestros estudiantes para maestro, en los que apreciamos que se mantiene la forma de enunciar los objetivos a lo largo del proceso de instrucción. Coincidimos al apreciar la poca relevancia que tiene enunciar una situación o contexto al redactar objetivos específicos.

Finalmente consideramos que completaría este análisis examinar en qué grado las actividades propuestas están encaminadas a lograr desarrollar las capacidades señaladas en los objetivos específicos. Este análisis queda pendiente, a través de un análisis de tareas, similar al realizado en Aguayo-Arriagada (2014).

Limitaciones de aprendizaje

El poder establecer cuáles son las dificultades y errores del proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico, conlleva por una parte a que los futuros maestros tengan un acercamiento a investigaciones sobre didáctica de la matemática, o basarse en las señaladas en los manuales de formación. Tener claridad sobre limitaciones de aprendizaje permite hacer una planificación más cuidadosa para afrontarlas en la enseñanza.

Luego del análisis de este elemento (descrito en el capítulo 4, en la fase 1 y 2) podemos establecer que fue el que menos modificaciones sufrió en el desarrollo del proceso de instrucción. En un primer momento los estudiantes para maestros hicieron una revisión de la bibliografía, centrándose en el libro de texto guía (Flores et al., 2015). Luego en la unidad didáctica no se aprecia preocupación por delimitar cuáles eran las dificultades y errores que tomarían en cuenta para el desarrollo de sus sesiones, simplemente se volvieron a repetir las anteriores.

Una vez comparada la formulación de limitaciones, se requeriría realizar un análisis de las tareas para apreciar en qué grado se recoge alguna limitación de aprendizaje, aunque esta no se cite expresamente por los futuros profesores.

A partir de la visión general que hemos apreciado sobre la forma en que los estudiantes utilizan los elementos del análisis didáctico, podemos examinar la conjetura que nos planteamos al diseñar el experimento de enseñanza, para determinar en qué grado ha quedado confirmada. Conjeturamos que: *La enseñanza predominantemente práctica y funcional de las herramientas del Análisis Didáctico llevarán a los estudiantes a disponer de herramientas para profundizar en el significado conceptual y didáctico del contenido matemático, y a tomar decisiones para diseñar unidades didácticas que estén fundamentadas y puedan justificar en relación a las exigencias curriculares.*

La confirmación de dicha conjetura la dividimos en apreciar los dos aspectos contemplados. En primer lugar examinamos si ha generado en los estudiantes para maestro "disponer de herramientas para profundizar en el significado conceptual y didáctico del contenido matemático escolar". Tanto las apreciaciones realizadas durante la impartición del curso, durante los tres ciclos de experimento de enseñanza planteados, como los resultados obtenidos en el análisis retrospectivo nos hacen considerar que el análisis didáctico ha contribuido a que los futuros maestros hagan revisiones de diferentes fuentes de información (libros de texto, currículo, internet, manuales para profesores, etc.) para enriquecer y organizar la estructura conceptual de la división, mediante los elementos que derivan de aplicar las herramientas trabajadas (delimitación de los focos de contenido, sistemas de representación, fenomenología).

Para examinar la segunda parte, hemos analizado el momento en el que los futuros maestros toman decisiones al diseñar unidades didácticas. Si bien durante el experimento de enseñanza pudimos identificar los reactivos que se suministraron para lograr esta incorporación, la actuación particular de los grupos de trabajo, para elaborar los documentos que hemos examinado en el análisis retrospectivo, nos hace apreciar que la profundización realizada anteriormente es puesta en juego parcialmente, situación que se ve reflejada con más claridad en los elementos de sistemas de representación y

fenomenología, así como en la identificación de capacidades preferentemente generales, aunque correspondan a aspectos cognitivos y de instrucción, en los objetivos.

5.2. Conclusiones sobre los objetivos de investigación

En este apartado detallamos el grado y modo en que se ha dado cumplimiento a los objetivos, teniendo en cuenta que como objetivo general nos planteamos examinar la forma en que los estudiantes para maestros durante la asignatura “Diseño y desarrollo del currículo de Matemáticas en la Educación Primaria”, ponen en juego los elementos del análisis didáctico para la planificación de unidades didácticas sobre la división. Para llevar a cabo dicho objetivo sugerimos tres objetivos específicos:

1. Describir la forma cómo interpretan los elementos del análisis didáctico al realizar el análisis de contenido y cognitivo, durante la fase de profundización.

En el capítulo 3 describimos el desarrollo del experimento de enseñanza, mostrando que en el ciclo 2 se implementó la instrucción en la que, tras presentar las herramientas que permiten hacer estos análisis, se promovió, desde los seminarios prácticos, que a los futuros maestros desarrollaran los análisis de contenido y cognitivo de su tema matemático escolar, correspondiendo a la fase de profundización del análisis didáctico. Este proceso concluyó con las dos producciones correspondientes al análisis de contenido y cognitivo, que posteriormente en el capítulo 4 se han descrito dentro del análisis retrospectivo, específicamente en la fase 1 de análisis. Por lo tanto podemos considerar logrado el primer objetivo específico, con las conclusiones del análisis retrospectivo mencionadas anteriormente, donde detallamos cada uno de los elementos de estos dos análisis (contenido y cognitivo).

2. Describir la forma en que aplican los elementos del análisis didáctico para planificar unidades didácticas en la fase de diseño.

Este objetivo específico se llevó a cabo con la fase 3 del análisis retrospectivo de los datos, en donde analizamos cada una de las sesiones de las unidades didácticas de los distintos grupos, enfocándonos en ir detallando cómo cada uno de los elementos del análisis didáctico que se tomaron en cuenta (estructura conceptual, sistema de representación, fenomenología y expectativas de aprendizaje) estaban presentes en sus planificaciones. Para ello se elaboraron unas dimensiones que permitieron estudiar cada uno de estos aspectos. A modo de conclusión podríamos decir que todos estos elementos se pudieron apreciar en la unidad didáctica, pero con distinto grado de profundización; consideramos que la estructura conceptual fue la que más se tomó en cuenta, ya que la mayoría de los focos conceptuales que se determinaron en el análisis de contenido previo, fueron considerados en la unidad didáctica, a diferencia de los sistemas de representación y fenomenología.

3. Analizar cómo evoluciona la interpretación y aplicación que hacen de los elementos del análisis didáctico, desde la fase de profundización a la de diseño.

Durante el experimento de enseñanza hemos ido apreciando las interpretaciones parciales que realizan los estudiantes durante el proceso formativo. En el capítulo 3 hemos resumido algunas apreciaciones sobre cómo se pusieron de manifiesto, los aspectos que resaltamos, así como las conclusiones de cada ciclo, que repercutieron en cambios en las

planificaciones del siguiente ciclo. El análisis retrospectivo ha tenido una idea secuencial, se dividió en tres fases para ir describiendo interpretaciones y formas de aplicar las herramientas de los análisis de contenido y cognitivo, durante diversos momentos. Posteriormente se examinaron las producciones de los estudiantes del análisis de contenido y cognitivo para luego finalizar en la unidad didáctica. La descripción sistemática realizada en el capítulo 4 nos ha llevado a concretar este objetivo.

Finalmente la concreción de los tres objetivos específicos nos permite poder establecer el logro de nuestro objetivo general “Examinar la forma en que los estudiantes para maestros durante la asignatura Diseño y desarrollo del currículo de Matemáticas en la Educación Primaria, ponen en juego los elementos del análisis didáctico para la planificación de unidades didácticas sobre la división”.

El trabajo realizado se inscribe en los intereses investigadores del grupo de investigación FQM-193, Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérica, específicamente para estudiar la formación inicial de profesores en el área de matemáticas, en procesos funcionales que utilizan las herramientas del análisis didáctico (Rico y Moreno, 2016), para organizar la formación. Sus objetivos se inscriben en el proyecto CODAME (Competencia Didáctica del Profesor y Aprendizaje de conceptos matemáticos escolares), financiado por el Programa Sectorial de Promoción General del Conocimiento (EDU2015-70565-P). En esta línea nos reafirmamos en la utilidad del análisis didáctico en la formación inicial, siguiendo los trabajos ya realizados en el grupo (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009), y los análisis de la formación basada en el mismo (Castro-Rodríguez, 2015; Flores, 2013; Ruiz-Hidalgo et al., 2017).

5.3. Limitaciones del estudio

En esta apartado indicaremos algunos aspectos que pueden considerarse como limitaciones de este trabajo de investigación.

Como mencionamos y describimos en el capítulo 3, nos basamos en el paradigma de la investigación de diseño, mediante el diseño e implementación de un experimento de enseñanza. Este tipo de metodología sigue considerándose relativamente nueva en el área de la didáctica de la matemática, por lo que se vuelven a poner de manifiesto los puntos fuertes y débiles. Coincidiendo con lo que menciona Molina (2006) su principal fortaleza es la aproximación entre la teoría educativa y la situación en que se desarrolla la práctica, en este caso, la de formar profesores en el área de matemáticas. Y en cuanto a las limitaciones, en nuestro caso las más evidentes fueron: la falta de generalidad y la cantidad de datos y por lo tanto de variables que emergen de los distintos momentos donde se hacen análisis (al término de cada ciclo y en el mismo análisis retrospectivo).

Efectivamente los resultados aluden a un grupo específico de futuros maestros de la Universidad de Granada. La elección de dicho grupo ha sido por conveniencia (grupo del que era formador un director de este trabajo). La diversidad en la composición de los grupos, en la que, como se ha detallado, hemos contado con un grupo formado por estudiantes del grado de matemáticas, que ha generado una unidad didáctica con diferencias claras respecto a la de sus compañeros, refuerza la dificultad de generalización de estudios como el presente.

La amplitud de los trabajos que han sido objeto del análisis retrospectivo ha dificultado llevar a cabo nuevos análisis, como los referidos a examinar las tareas previstas por los futuros maestros, que nos habría permitido apreciar en qué grado queda reflejada la profundización alcanzada en los análisis de contenido y cognitivo, en sus actuaciones previstas.

Teniendo en cuenta, lo mencionado por Molina (2006) con respecto a una de las limitaciones de la investigación de diseño, como es la gran cantidad de datos que se generan, una forma de paliarse es “delimitando estrechamente el foco de la investigación y reduciendo, de este modo, los aspectos a considerar en la diversidad y cantidad de información recogida” (p. 478). En nuestra investigación nos centramos en delimitar los focos de investigación como también los instrumentos de análisis, pero igualmente nos vimos en la necesidad durante el proceso de ir precisando los elementos de análisis, por ejemplo, en el análisis cognitivo las limitaciones de aprendizaje no se llegaron a analizar en la unidad didáctica.

5.4. Perspectivas para el avance de la investigación

En relación a los resultados evaluados y las conclusiones derivadas de estos, sugerimos las siguientes líneas futuras de investigación:

- Terminar el análisis de las limitaciones de aprendizaje puestas en juego en la unidad didáctica, lo cual permitiría también hacer un análisis más profundo de cada una de las tareas, tomando en cuenta los elementos que la describen y las dimensiones de análisis que plantean Gómez y Romero (2015), las cuales ya aplicamos en un trabajo previo (Aguayo-Arriagada, 2014).
- Replicar el estudio en situaciones en que los estudiantes tengan la oportunidad de poder llevar a la práctica la planificación realizada, al menos una sesión de las unidades didácticas planificadas, permitiendo esto a los futuros maestros poder hacer un análisis de su propia planificación, contribuyendo a afianzar sus conocimientos teniendo en cuenta los aspectos que son importantes a la hora de trabajar en el aula.

Todas estas líneas ofrecerán la posibilidad de avanzar en la mejora de la formación de profesores y maestros de matemáticas y en las propuestas de sistemas formativos.

Referencias

- Abraira, C., Blanco, L., Gómez, M. y Martín, M. (1997). Análisis de los planes de estudio del título de Maestro de la especialidad de Educación Primaria. En C. Abraira y M. de Francisco (Eds.), *Actas del II Simposio sobre el currículum en la formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las matemáticas* (15-24). León, España: Universidad de León.
- Aguayo-Arriagada, C. G. (2014). *El análisis de tareas en la formación inicial de maestros de primaria* (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España.
- Aguayo-Arriagada, C. G., Flores, P. y Moreno, A. (2017). El uso de sistemas de representación en la formación inicial de maestros de primaria. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Eds.), *Actas de VIII Congreso Iberoamericano de Matemática Educativa* (pp. 225-266). Madrid, España: FESPM.
- Aguayo-Arriagada, C. G., Flores, P., y Moreno, A. (2018). Concepto de objetivo de una tarea matemática de futuros maestros. *Bolema* v.32, n. 62, 990-1011.
- Aguayo-Arriagada, C. G., Piñeiro, J. L. y Flores, P. (2016). La introducción a la división en educación primaria. Un análisis comparativo. En F. España (Ed.), *XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Matemáticas ni más ni menos* (pp. 283-296). Jerez de la frontera, España: Thales.
- Anghileri, J. y Beishuizcn, M. (1998). Counting, chunking and the division algorithm. *Mathematics in School*, 27(1), 2-4.
- Anghileri, J. (2001). Development of division strategies for year 5 pupils in ten English schools. *British Educational Research Journal*, 27(1), 85-103.
- Azcárate, P., Serrado, A. y Cardeñoso, J. M. (2004). Las fuentes de información como recurso para la planificación. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática VIII* (pp. 165-172). A Coruña, España: SEIEM.
- Bailey, J. (2015). The challenge of supporting a beginning teacher to plan in primary mathematics. En M. Marshman, V. Geiger y A. Bennison (Eds.), *Proceedings of the 38th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 69-76). Sunshine Coast, Australia: MERGA.
- Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Beckmann, C. E., Wells, P. J., Gabrosek, J., Billings, E. H., Aboufadel, E. F., Curtiss, P., Dickinson, W., et al. (2004). Enhancing the mathematical understanding of

- prospective teachers: Using standards-based, grades K-12 activities. En R. R. Rubenstein y G. W. Bright (Eds.), *Perspectives on the teaching of mathematics* (pp. 151-163). Reston, VA: NCTM.
- Bell, A., Fischbein, E. y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic: The effect of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 129-147.
- Bicknell, B., Young-Loveridge, J. y Nguyen, N. (2016). A design study to develop young children's understanding of multiplication and division. *Mathematics Education Research Journal*, 28(4), 567-583.
- Blanco, L. (2001). La formación matemática del profesorado de primaria. *Suma*, 38, 31-38.
- Blanco, L. (2002). Educación matemática y formación inicial del profesorado de Primaria, Secundaria y Bachillerato. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 43, 173-179.
- Brown, M. W. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. En J. T. Remillard, B. Herbel-Eisenmann y G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17-36). Nueva York, NY: Routledge.
- Bush, W. S. (1986). Preservice teachers' sources of decisions in teaching secondary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 21-30.
- Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P. (2002). Una estrategia de formación de maestros de matemáticas, basada en el ámbito de investigación profesional (AIP). En L. C. Contreras y L. J. Blanco (Coord.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente* (181-224). Badajoz, España: Universidad de Extremadura.
- Cardeñoso, J., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada, España: Universidad de Granada.
- Carrillo, J. (2014). El conocimiento de los estudiantes para maestro (TEDS-M España) desde la perspectiva de su especialización. En M. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 115-123). Salamanca, España: SIEM.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Ankara, Turquía: Middle East Technical University.
- Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2017). Reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre problemas profesionales relacionados con la enseñanza del álgebra escolar. *Bolema*, 31(57), 408-429.

- Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca, España: SEIEM.
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada, España: Comares.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz, España: SEIEM.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *Educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Castro, E. y Ruíz-Hidalgo, J. F. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestro de educación primaria* (pp. 99-122). Madrid, España: Pirámide.
- Castro, E. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 89-105). Madrid, España: Pirámide.
- Clarke, B., Grevholm, B. y Millman, R. (2009). *Tasks in primary mathematics teacher education. Purpose, use and exemplars*. Nueva York, NY: Springer.
- Climent, N., Romero-Cortés, J. M., Carrillo, J., Muñoz, M. C. y Contreras, L. C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula? *RELIME*, 16(1), 5-12.
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Correa, J., Nunes, T. y Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, 90(2), 321-329.
- Darling-Hammond, L. y Bransford, J. (2005). *Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do*. San Francisco, CA: Jossey-Bass Educational Series.
- De Pro, A. (1999). Planificación de unidades didácticas por los profesores: análisis de tipos de actividades de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 411-429.

- DeLong, M., Winter, D. y Yackel, C. (2005). Student learning objectives and mathematics teaching. *PRIMUS*, 15(3), 226-258.
- Ding, M. y Carlson, M. A. (2013). Elementary teachers' learning to construct high quality mathematics lesson plans. *Elementary School Journal*, 113(3), 359-385.
- Downton, A. (2009). A study of comparative performance on partitive and quotitive division in solving division word problems. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 465-472). Thessaloniki, Grecia: PME.
- Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23(2), 167-180.
- Drake, C., Land, T. J. y Tyminski, A. M. (2014). Using educative curriculum materials to support the development of prospective teachers' knowledge. *Educational Researcher*, 43(3), 154-162.
- Drake, C. y Land, T. J. (2012, abril). Elementary pre-service teachers noticing and learning from educative curriculum materials. Documento presentado a la conferencia anual del National Council of Teacher of Mathematics.
- Earnest, D. y Amador, J.M. (en prensa). Lesson planimation: Preservice elementary teachers' interactions with mathematics curricula. *Journal of Mathematics Teacher Education*.
- Egan, K. (1992) *Imagination in teaching and learning*. Chicago, IL:University of Chicago Press.
- Even, R. y Ball, D. L. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI study*. Nueva York, NY: Springer.
- Fan, L. y Bokhove, C. (2014). Rethinking the role of algorithms in school mathematics: A conceptual model with focus on cognitive development. *ZDM*, 46(3), 481-492.
- Fennema, E. y Franke, L. M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). Nueva York, NY: Macmillan.
- Fernandez, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach for improving teaching and learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fernandez, C., y Cannon, J. (2005). What Japanese and U.S. teachers think about when constructing mathematics lessons: A preliminary investigation. *Elementary School Journal*, 105(5), 481-498.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. y Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.
- Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L.C., Muñoz-Catalán, M. C. y Liñán, M. M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del

- profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Bolema*, 30(54), 204- 221.
- Flores, P. (2018). ¿Por qué multiplicar en cruz? Formación inicial de profesores de primaria en el área de Matemáticas. *UNION: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 53, 9-29.
- Flores, P., Castro-Rodríguez, E. y Fernández-Plaza, J. A. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 205-229). Madrid, España: Pirámide.
- Flores, P. y Lupiáñez, J. L. (2016). Expectativas de aprendizaje. En L. Rico, A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 177-189). Madrid, España: Pirámide.
- Flores, P., Moreno, A., y Del Río, A. (2016). El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de primaria, en el área de matemática. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luís Rico* (pp. 141-151). Granada, España: Comares.
- Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. Madrid, España: Pirámide.
- Font, V. (2002) Una propuesta dialógica sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros de educación primaria. En G. A. Perafán y A. Adúriz-Bravo (Comp.), *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas contemporáneas* (pp. 117-126). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional-Colciencias-Gaía.
- García, E. y Lorente, R. (2014). Grado en maestro de educación primaria: Motivaciones y preferencias en la elección de mención. *Aula de encuentro*, 1(16), 113-119.
- Ghousseini, H. y Herbst, P. (2014). Pedagogies of practice and opportunities to learn about classroom mathematics discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(1), 1-25.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135.
- Gómez, P. (2005). Diversidad en la formación de profesores de matemáticas: en la búsqueda de un núcleo común. *Revista EMA*, 10(1), 242-293.
- Gómez, P. (2007a). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas. En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

- Gómez, P. (2007b). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Gómez, P. y González, M. J. (2008, julio). Mathematics knowledge for teaching within a functional perspective of preservice teacher training. Comunicación presentada en el Topic Study Group 27 del ICME 11. Monterrey, México.
- Gómez, P. y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de primaria. Resultados del estudio TEDS-M. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 99-114). Salamanca, España: SEIEM.
- Gómez, P. y Romero, I. (2015). Enseñar las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 61-87). Madrid, España: Pirámide.
- González, M. J. y Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 425-434). Badajoz, España: SEIEM.
- González, M. J., Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2010). *Análisis cognitivo. Apuntes de MAD*. (documento no publicado). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Graeber, A. O., Tirosh, D. y Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 95-102.
- Greer, B. (1992) Multiplication and division as models of situation. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). Nueva York, NY: Macmillan.
- Grossman, P. y Thompson, C. (2008). Learning from curriculum materials: Scaffolds for new teachers? *Teaching and Teacher Education*, 24(8), 2014-2026.
- Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. y Williamson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record*, 111(9), 2055-2100.
- Grossman, P., Hammerness, K. y McDonald, M. (2009). Redefining teaching, reimagining teacher education. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 15(2), 273-289.
- Grossman, P., Hammerness, K. M., McDonald, M. y Ronfeldt, M. (2008). Constructing coherence: Structural predictors of perceptions of coherence in NYC teacher education programs. *Journal of Teacher Education*, 59(4), 273-287.
- Grossman, P. y McDonald, M. (2008). Back to the future: Directions for research in teaching and teacher education. *American Educational Research Journal*, 45(1), 184-205.

- Grossman, P., Wilson, S. y Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-24.
- Gutiérrez, Á. (2009). Perspectiva de la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Investigación en la Escuela*, 69, 61-72.
- Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2012). Conocimiento en Didáctica de la Matemática de estudiantes españoles de Magisterio en TEDS-M. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 341-351). Jaén, España: SEIEM.
- Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2014). Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de Magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación*, 26(2), 265-297.
- Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2016). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. *Educación XXI*, 19(1), 135-158.
- Gutiérrez-Gutiérrez, A., Rico, L. y Gómez, P. (2015). Conocimiento didáctico sobre números y operaciones: una comparación internacional. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 13(1), 47-72.
- Hattie, J. (2012). *Visible learning for teachers: Maximizing impact on learning*. Nueva York, NY: Routledge.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México, DF: McGraw-Hill.
- Hibert, J., Morris, A. K. y Glass, B. (2003). Teaching to learn to teach: An “experiment” model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(3), 201-222.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hodges, T., Cady, J. y Collins, L. (2008). Fraction representation: The not-so common denominator among textbooks. *Mathematics teaching in the middle school*, 14(2), 78-84.
- Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) (2012). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid, España: Autor.
- Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Revista Educación Matemática*, 28(1), 9-38.
- Jaén, M. y Banet, E. (2003). Formación inicial de profesores de secundaria: dificultades para aprender a planificar y desarrollar las actividades de enseñanza en aulas de

- secundaria. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 17(1), 51-78.
- Jaworski, B. (2007). Tasks: a fitting end to an era. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 201-204.
- Jaworski, B. y Wood, T. (2008). *The mathematics teacher educator as a developing professional*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- John, P. (2006). Lesson planning and the student teacher: Re-thinking the dominant model. *Journal of Curriculum Studies*, 38(4), 483-498.
- Junta de Andalucía (2007). Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. BOJA, 252, 5-36.
- Kelly, A.E., y Lesh, R.A. (2000). *Research design in mathematics and science education*. Nueva Jersey, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academies Press.
- Krainer, K. y Wood, T. (2008). *Participants in mathematics teacher education*. Rotterdam Holanda: Sense Publishers.
- Lampert, M. (2005, abril). *Preparing teachers for ambitious instructional practice: Learning to listen and to construct an appropriate response*. Documento presentado en la reunión anual de la American Educational Research Association. Montreal, Canadá.
- Leinhardt, G. (1983, abril). *Routines in expert math teachers' thoughts and actions*. Documento presentado en la conferencia anual del American Educational Research Association, Montreal, Canadá.
- Leung, I., Wong, R. y Pang, W. (2006). *Departing from the traditional long division algorithm: an experimental study*. Documento presentado al 29º Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia. Camberra, Australia.
- Lewis, C., Perry, R. y Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational Researcher*, 35(3), 3-14.
- Li, Y., Chen, X. y Kulm, G. (2009). Mathematics teachers' practices and thinking in lesson plan development: A case for teaching fraction division. *ZDM*, 41(6), 717-731.
- Li, Y. y Silver, E. A. (2000). Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 19(2), 233-246.
- Lieberman, J. (2009). Using lesson study to develop an appreciation of and competence in task design. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education: Purpose, use and exemplars. Mathematics teacher education 4*. Nueva York, NY: Springer.

- Liljedahl, P., Chernoff, E. y Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 239-249.
- Livingston, C. y Borko, H. (1990). High school mathematics review lesson: Expert-novice distinctions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(5), 372-387.
- Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en la educación primaria. *UNO, Revista de Didáctica de la Matemática*, 36, 93-115.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Lupiáñez, J. L. (2013). Artículos académicos para análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-101). Granada, España: Comares.
- Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 119-136). Madrid, España: Pirámide.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2010). Aprendizaje de futuros profesores sobre el enunciado de objetivos específicos para las matemáticas escolares. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 409-421). Lleida, España: SEIEM.
- Luzón, A., Sevilla, D. y Torres, M. (2009). El proceso de Bolonia: significado, objetivos y controversias. *Revista de la Asociación de Inspectores de Educación en España*, 10, 1-11.
- Márquez, M., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2011). Cómo estudiantes para maestro interpretan soluciones de alumnos de primaria a problemas de división con resto. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 417-428). Ciudad Real, España: SEIEM.
- McCutcheon, G. (1980). How do elementary school teachers plan? The nature of planning and influences on it. *The Elementary School Journal*, 81(1), 4-23.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada .
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.

- Montes, M. A., Aguilar, A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MSTK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194). Ankara, Turquía: Middle East Technical University.
- Moreno, A. y Ramírez-Uclés, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y L. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-255). Madrid, España: Pirámide.
- Mutton, T., Hagger, H. y Burn, K. (2011). Learning to plan, planning to learn: The developing expertise of beginning teachers. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 17(4), 399-416.
- Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrop (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 189-219). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associate.
- O' Donnell, B. y Taylor, A. (2006). A lesson plan as professional development? You've got to be kidding! *Teaching Children Mathematics*, 13(5), 272-278.
- OECD (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid, España: Autor.
- ONU (2015). *Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible. Resolución aprobada por la Asamblea General el 25 de septiembre de 2015*. Nueva York, NY: Autor
- Ponte, J. P. y Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista da Educação*, 11(2), 145-163.
- Rebolledo, T. (2015). La formación inicial del profesorado de educación primaria y secundaria en Alemania, España, Finlandia, Francia y Reino Unido. Estudio comparado. *Revista Española de Educación Comparada*, 25, 129-148.
- Reys, B. J., Reys, R. E. y Rubenstein, R. (2010). *Mathematics curriculum: Issues, trends, and future directions*. Reston, VA: NCTM.
- Rico, L. (1995a). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *EMA*, 1, 4-24.
- Rico, L. (1995b). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.
- Rico, L. (1997a). *Educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, España: Ice - Horsori
- Rico, L. (1997b). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid, España: Síntesis.

- Rico, L. (1997c). Los organizadores del currículo en matemáticas. En L. Rico (Ed.), *Educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: Horsori.
- Rico, L. (2000). Formación y desempeño práctico en educación matemática de los profesores de primaria. *Suma*, 34, 45-51.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
- Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*, (pp. 21-40). Madrid, España: Pirámide.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.
- Rico, L. y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid, España: Pirámide.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, 58, 7-23.
- Rico, L. y Sierra, M. (2000). Didáctica de la Matemática e Investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI* (pp. 77-131). Huelva, España: Hergué.
- Roche, A., Clarke, D. M., Clarke, D. J. y Sullivan, P. (2014). Primary teachers' written unit plans in mathematics and their perceptions of essential elements of these. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 853-870.
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Rojas, N., Flores, P. y Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp. 191-208). Granada, España: Comares.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.

- Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modo de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*, (pp. 139-152). Madrid, España: Pirámide.
- Ruiz-Hidalgo, J. F., Lupiáñez, J. L., Castro-Rodríguez, E., Rico, L., Fernández-Plaza, J. A., Flores, P. y Segovia, I. (2017). Conocimiento didáctico de maestros en formación sobre objetivos de aprendizaje. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 437-446). Zaragoza, España: SEIEM.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.
- Santos, M. C., Ortigão, M. y Aguiar, G. S. (2014) Construção do currículo de matemática: como os professores dos anos iniciais compreendem o que deve ser ensinado? *BOLEMA*, 28(49), 638-661.
- Sanz, I., y Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 67-81). Salamanca, España: SEIEM.
- Schmidt, S. y Weiser, W. (1995). Semantic structures of one-step word problems involving multiplication or division. *Educational Studies in Mathematics*, 28(1), pp. 55-72.
- Schunk, D.H. (1996). Goal and self-evaluative influences during children's cognitive skill learning. *American Educational Research Journal*, 33(2), 359-382.
- Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid, España: Síntesis.
- Segovia, I. y Rico, L. (2011). *Matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Pirámide.
- Segovia, I. y Roa, R. (2018). Evolución del contenido del currículo de los estudios de magisterio en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. En P. Flores, J. L. Lupiáñez y I. Segovia (Eds.), *Enseñar Matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz*. (pp. 157-185). Granada, España: Atrio.
- Shen, J., Poppink, S., Cui, Y. y Fan, G. (2007). Lesson planning: A practice of professional responsibility and development. *Educational horizons*, 85(4), 248-260.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Silver, E. A., Clark, L. M., Ghouseini, H. N., Charalambous, C. Y., & Sealy, J. T. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 261-277.

- Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(6), 499-511.
- Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 233-254.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-15). Barcelona, España: Horsori.
- Socas, M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 199-224.
- Spanneberg R. (2009) The mathematics teaching portfolio: A reflective tool for developing professional growth and improving classroom practices. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education*. Mathematics Teacher Education (volumen 4). Boston, MA: Springer.
- Steffe, L. P. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly, (Eds.), *Research design in mathematics and science education*, (pp.267-306). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275.
- Stein, M. K. y Smith, M. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: NCTM.
- Stenhouse, L. A. (1975). *An introduction to curriculum research and development*. Londres, Reino Unido: Heinemann.
- Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (Eds.) (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Nueva York, NY: Springer.
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, D., Gould, P., Leigh-Lancaster, D. y Lewis, G. (2012). Insights into ways that teachers plan their mathematics teaching. En J. Dindyal, L. P. Cheng y S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons. Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 696–703). Singapur: MERGA.
- Sullivan, P. y Wood, T. (2008). *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Superfine, A. C., (2008). Planning for mathematics instruction: A model of experienced teachers' planning processes in the context of a reform mathematics curriculum. *The Mathematics Educator*. 18(2), 11-22.
- Tatto, M. T., Sharon, J. S., Senk, L., Ingvarson, L. y Rowley, G. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics*

- (*TEDS-M*). Amsterdam, Países Bajos: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Taylor, P. H. (1970) *How teachers plan their courses*. Windsor, Reino Unido: NFER.
- Tirosh, D. y Woods, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 2). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Tonucci, F. (1983). *Con ojos de niño*. Barcelona: Barcanova.
- Tyler, R. W. (1949). *Basic principles of curriculum and instruction*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Vergnaud, G. (1983) Multiplicative structures,. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Nueva York, NY: Academic Press.
- Warren, L. L. (2000). Teacher planning: A literature review. *Educational Research Quarterly*, 24(2), 37-55.
- Watson, A. y Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 205-215.
- Watson, A., Ohtano, M., Ainley, J., Frant, J.B., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P. Thompson, D. y Yang, Y. (2013) Introduction. En C. Margolinas (Eds.), *Task Design in Mathematics Education*. Proceedings of ICMI Study 22. (pp. 9-16). Oxford, Reino Unido.
- Wilson, S. (2010). *Knowledge for teaching mathematics in a primary school: Perspectives of pre-service teachers*. (Tesis doctoral). University of Canterbury, Nueva Zelanda.
- Wilson, S. (2016). Developing mathematics content knowledge for teaching: One pre-service teacher and her planning. En B. White, M. Chinnappan y S. Trenholm (Eds.), *Opening up mathematics education research. Proceedings of the Mathematics Education Research Groups of Australasia* (pp. 624-631). Adelaide, Australia: MERGA.
- Yildirim, A. (2003). Instructional planning in a centralized school system: Lessons of a study among primary school teachers in Turkey. *International Review of Education*, 49(5), 525-543

Índice de anexos digitales

Los siguientes anexos están incluidos en el disco compacto que acompañan a este trabajo.

Anexo 1

Tabla 1.1. Distribución de créditos del grado de maestro en Educación Primaria

Tabla 1.2. Investigaciones el conocimiento y la formación inicial de futuros maestros de primaria.

Tabla 1.3. Tesis Doctorales que han utilizado como marco de referencia el análisis didáctica en la última década.

Tabla 1.4. Investigaciones en formación de profesores sobre divisiones

Anexo 2

Tabla 2.1. Documentos sobre modelos de formación, y resumen de los modelos propuestos

Tabla 2.2. Estructura conceptual de la división en el currículo

Tabla 2.3. Definición de los niveles de conocimiento de la estructura conceptual

Tabla 2.4. Estructura conceptual de la división

Tabla 2.5. Ejemplificación de los sistemas de representación de la división

Tabla 2.6. Ejemplificación de los elementos de sentido de la división

Tabla 2.7. Errores y dificultades de la división

Tabla 2.8. Relación entre objetivos específicos y competencias

Tabla 2.9. Ejemplificación de recursos de internet para trabajar la división

Anexo 3

Tabla 3.1. Diseño original del Ciclo 2

Tabla 3.2. Diseño original del Ciclo 3

Anexo 4.

Tabla 4.1.1. Elementos utilizados por los grupos estudiados, en la estructura conceptual de sus análisis de contenido. Durante la fase 1.

Tabla 4.1.2. Elementos utilizados por los grupos estudiados, en el organizador "Sistemas de representación", en sus análisis de contenido, durante la fase 1.

Tabla 4.1.3. Elementos utilizados por los grupos estudiados, en el organizador "fenomenología", en sus análisis de contenido, durante la fase 1.

Tabla 4.1.4. Expectativas de aprendizaje planteadas por cada grupo, durante la fase 1.

Tabla 4.1.5. Análisis de los componentes destacados en los objetivos planteados por los grupos, en su Análisis Cognitivo de la fase 1

Tabla 4.1.6. Elementos utilizados por los grupos estudiados, en el organizador "Limitaciones de aprendizaje", en sus análisis cognitivo, durante la fase 1.

Tabla 4.2.1. Comparación entre la estructura conceptual planteada por cada grupo en el Análisis de Contenido y la que aparece en la Unidad Didáctica. Fase 2

Tabla 4.2.2. Sistemas de Representación detectados por los diferentes grupos en el trabajo durante el curso y en la Unidad Didáctica. Fase 2

Tabla 4.2.3. Fenomenología en el primer trabajo de Análisis de Contenido y en la Unidad Didáctica. Fase 2

Tabla 4.2.4. Objetivos específicos que se plantean en el primer trabajo de análisis cognitivo y los que mencionan en la Unidad Didáctica. Fase 2

Tabla 4.2.5. Tablas de Caracterización de los objetivos de cada grupo, comparando los citados en la Unidad Didáctica y en los trabajos previos. Fase 2

Tabla 4.2.6. Limitaciones de aprendizaje en la Unidad Didáctica

Tabla 4.3.1. Estructura conceptual de los contenidos en la introducción de la Unidad Didáctica y en las sesiones de clase. Fase 3

Tabla 4.3.2. Sistemas de representación en el análisis de contenido de la unidad didáctica y en las sesiones de la Unidad Didáctica

Tabla 4.3.3. Fenomenología en el análisis de contenido y en las sesiones de la Unidad Didáctica

Tabla 4.3.4. Clasificación de los problemas planteados por los diferentes grupos en las sesiones de la unidad didáctica

Tabla 4.3.5. Objetivos de cada grupo en tres momentos de la Unidad Didáctica: en el Análisis Cognitivo, al comienzo de la Unidad Didáctica y en las sesiones de clase

Tabla 4.3.6. Tablas de Caracterización de los objetivos de cada grupo en las sesiones de clase. Fase 3

Índice de anexos digitales

Anexo 1	3
Tabla 1.1. <i>Distribución de créditos del grado de maestro en Educación Primaria</i>	3
Tabla 1.2. <i>Investigaciones el conocimiento y la formación inicial de futuros maestros de primaria</i>	4
Tabla 1.3. <i>Tesis Doctorales que han utilizado como marco de referencia el análisis didáctica en la última década</i>	7
Tabla 1.4. <i>Investigaciones en formación de profesores sobre divisiones</i>	9
Anexo 2	11
Tabla 2.1. <i>Documentos sobre modelos de formación, y resumen de los modelos propuestos</i>	11
Tabla 2.2. <i>Estructura conceptual de la división en el currículo</i>	14
Tabla 2.3. <i>Definición de los niveles de conocimiento de la estructura conceptual</i>	15
Tabla 2.4. <i>Estructura conceptual de la división</i>	16
Tabla 2.5. <i>Ejemplificación de los sistemas de representación de la división</i>	17
Tabla 2.6. <i>Ejemplificación de los elementos de sentido de la división</i>	17
Tabla 2.7. <i>Errores y dificultades de la división</i>	18
Tabla 2.8. <i>Relación entre objetivos específicos y competencias</i>	19
Tabla 2.9. <i>Ejemplificación de recursos de internet para trabajar la división</i>	19
Anexo 3	20
Tabla 3.1. <i>Diseño original del Ciclo 2</i>	20
Tabla 3.2. <i>Diseño original del Ciclo 3</i>	23
Anexo 4	25
Tabla 4.1.1. <i>Elementos utilizados por los grupos estudiados, en la estructura conceptual de sus análisis de contenido. Durante la fase 1</i>	25
Tabla 4.1.2. <i>Elementos utilizados por los grupos estudiados, en el organizador "Sistemas de representación", en sus análisis de contenido, durante la fase 1</i>	28
Tabla 4.1.3. <i>Elementos utilizados por los grupos estudiados, en el organizador "fenomenología", en sus análisis de contenido, durante la fase 1</i>	30
Tabla 4.1.4. <i>Expectativas de aprendizaje planteadas por cada grupo, durante la fase 1</i>	34
Tabla 4.1.5. <i>Análisis de los componentes destacados en los objetivos planteados por los grupos, en su Análisis Cognitivo de la fase 1</i>	36

Tabla 4.1.6. <i>Elementos utilizados por los grupos estudiados, en el organizador "Limitaciones de aprendizaje", en sus análisis cognitivo, durante la fase 1.....</i>	41
Tabla 4.2.1. <i>Comparación entre la estructura conceptual planteada por cada grupo en el Análisis de Contenido y la que aparece en la Unidad Didáctica. Fase 2</i>	45
Tabla 4.2.2. <i>Sistemas de Representación detectados por los diferentes grupos en el trabajo durante el curso y en la Unidad Didáctica. Fase 2</i>	49
Tabla 4.2.3. <i>Fenomenología en el primer trabajo de Análisis de Contenido y en la Unidad Didáctica. Fase 2</i>	50
Tabla 4.2.4. <i>Objetivos específicos que se plantean en el primer trabajo de análisis cognitivo y los que mencionan en la Unidad Didáctica. Fase 2</i>	53
Tabla 4.2.5. <i>Tablas de Caracterización de los objetivos de cada grupo, comparando los citados en la Unidad Didáctica y en los trabajos previos. Fase 2</i>	56
Tabla 4.2.6. <i>Limitaciones de aprendizaje en la Unidad Didáctica</i>	62
Tabla 4.3.1. <i>Estructura conceptual de los contenidos en la introducción de la Unidad Didáctica y en las sesiones de clase. Fase 3</i>	66
Tabla 4.3.2. <i>Sistemas de representación en el análisis de contenido de la unidad didáctica y en las sesiones de la unidad didáctica</i>	70
Tabla 4.3.3. <i>Fenomenología en el análisis de contenido y en las sesiones de la Unidad Didáctica.....</i>	71
Tabla 4.3.4. <i>Clasificación de los problemas planteados por los diferentes grupos en las sesiones de la unidad didáctica.....</i>	73
Tabla 4.3.5. <i>Objetivos de cada grupo en tres momentos de la unidad didáctica: en el análisis cognitivo, al comienzo de la unidad didáctica y en las sesiones de clase</i>	83
Tabla 4.3.6. <i>Tablas de Caracterización de los objetivos de cada grupo en las sesiones de clase. Fase 3.....</i>	89
Referencias	95

Anexo 1

Tabla 1.1. *Distribución de créditos del grado de maestro en Educación Primaria*

Tipo de materia	Créditos
Formación Básica	50
Formación Didáctica Disciplinar	110
Prácticas y Trabajo de Fin de Grado	50
Optatividad y menciones	30
TOTAL	240

Fuente: García y Lorente (2014, p. 106)

Tabla 1.2. *Investigaciones el conocimiento y la formación inicial de futuros maestros de primaria.*

Autores - año	Tema de conocimiento	Contenido matemático	Instrumentos analizados
Castro Rodríguez, Rico, y Gómez (2015)	Conocimiento didáctico del contenido	Concepto parte-todo de las fracciones	Tarea formativa, donde se les pedía a los estudiantes redactar un texto argumentativo de unas imágenes
Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán, Contreras (2013)	Concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas Conocimiento matemático para la enseñanza	Concepto de división	Reflexiones de análisis de vídeo de sesiones de clase de Educación Primaria
Mallart, Font y Malaspina (2016)	Concepciones del conocimiento matemático y didáctico	Procesos de creación y resolución de problemas de geometría plana del último ciclo de primaria	1. cuestionario sobre lo que es un buen problema, plantear y resolver dos problemas Geométricos 2. Reflexión sobre los resultados del cuestionario, para nuevamente plantear y resolver problemas
Stacey, Helme, Steinle, Baturó, Irwin y Bana (2001)	Conocimiento del contenido y el contenido pedagógico	Numeración decimal	Prueba donde la tarea era marcar el número más grande con pares de números decimales. Al finalizar el examen, se les pidió que marcaran los elementos de comparación que probablemente serían difíciles para los estudiantes y que explicaran por escrito donde puede estar la dificultad.

Autores - año	Tema de conocimiento	Contenido matemático	Instrumentos analizados
Callejo, Fernández y Márquez (2013)	Conocimiento especializado del contenido, según el modelo MKT	Resolución problemas de división de fracciones	Tareas de formación, resolver problemas de división (cuotitiva) e interpretar las estrategias y los errores de los estudiantes frente a este tipo de problemas
Sáenz (2007)	Conocimiento funcional de las matemáticas	Capacidad general de resolución de problemas	Una prueba de matemáticas y una prueba de solución de problemas de algunos de los ítems ocupados en PISA 2003. La contestación a un cuestionario sobre variables afectivas y actitudinales en relación con el estudio de las matemáticas
Wilson (2010)	Comprensión del contenido como de la pedagogía requerida para enseñar matemáticas y su desarrollo	No se especifica	Cuestionarios, el primero una hoja de evaluación de necesidades y el segundo sobre la planificación a largo plazo. Entrevistas a grupos focales, sobre planificación a largo plazo
Martínez y Nortes (2017)	Conocimiento de las matemáticas escolares	Contenidos de matemática de primaria en general	Prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) de 2013. Prueba de Matemáticas del Procedimiento selectivo para el ingreso en el Cuerpo de Maestros y para la adquisición de nuevas especialidades de 2013. Cuestionario de Actitudes de Auzmendi (1992)

Autores - año	Tema de conocimiento	Contenido matemático	Instrumentos analizados
Heaton y Mickelson (2002)	Desarrollo del conocimiento de contenido estadístico y pedagógico	Aplicación del proceso de investigación estadística propia y con los niños.	<p>1. Primero se les pidió que plantearan preguntas, identificaran variables, planearan y llevaran a cabo la recopilación de datos, resumieran los datos, informaran los hallazgos y recomendaran cambios en la práctica de la enseñanza.</p> <p>2. Desarrollaron y enseñaron una unidad de investigación estadística con niños en un sitio de prácticas</p>
Gómez-Torres, Batanero, Díaz, Contreras (2016)	Evaluar el conocimiento del contenido	Contenido de probabilidad	Cuestionario basado en las pautas curriculares y los libros de texto de la escuela primaria en España
Muñoz-Catalán y Carrillo (2007)	Características de los conocimientos de contenidos conceptuales y procedimentales elementales	Bloque de números	Análisis de tres problemas

Tabla 1.3. *Tesis Doctorales que han utilizado como marco de referencia el análisis didáctica en la última década.*

Año	Autor	Directores	Titulo	Análisis Didáctico	
				Formativa	Investigativa
2002	Bedoya, Evelio	Gutiérrez, José Rico, Luis	Formación inicial de profesores de matemáticas. Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras	x	
2002	Ortiz, José	Castro, Enrique Rico, Luis	Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación	x	
2007	Gómez, Pedro	Rico, Luis	Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria	x	x
2007	Cañadas, María Consuelo	Castro, Encarnación Castro, Enrique	Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas		x
2009	Lupiañez, José Luís	Rico, Luis	Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria	x	x
2012	Ramírez, Rafael	Castro, Enrique Flores, Pablo	Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático		x
2012	Valverde, Ana	Castro, Encarnación	Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria	x	x

Año	Autor	Directores	Titulo	Análisis Didáctico	
				Formativa	Investigativa
2012	Picado, Miguel	Gómez, Bernardo Rico, Luis	El sistema métrico decimal en los libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo xix (1849-1892)		x
2014	Ramos, Elisabeth	Flores, Pablo Da ponte, Joao	Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra, en un curso de formación continua	x	x
2014	Arias, Marlene	Gómez, Pedro	Actuación de los tutores y su relación con el proceso de aprendizaje de los profesores de matemáticas en un programa de formación	x	x
2014	Rojas, Nielka	Carrillo, José Flores, Pablo	Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos		x
2014	Caraballo, Rosa	Lupiáñez, José Luis Rico, Luis	Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica. Una experiencia con profesores		x
2015	Castro, Elena	Gómez, Pedro Rico, Luis	Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros	x	x
2015	Fernández, José Antonio	Castro, Enrique Rico, Luís Ruiz, Juan Francisco	Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto		x
2016	López, Ángel	Cañadas, María Consuelo Castro, Encarnación	Significados de la relación de divisibilidad de maestros en formación manifestados en el desarrollo de un modelo de enseñanza	x	x

Tabla 1.4. *Investigaciones en formación de profesores sobre divisiones*

Año	Autor	Conjunto numérico	Propósito del estudio
1990	Ball	División de fracciones, división por cero, ecuaciones con división	Examinar el conocimiento y comprensión conceptual de futuros profesores de primaria y secundaria
2011	Márquez, Callejo y Fernández.	z	Caracterizar cómo estudiantes para maestro analizan e interpretan soluciones dadas por alumnos de 6° curso de Primaria a problemas de división-medida en los que es preciso interpretar el resto de la división
2009	Leinonen y Pehkonen	z	Desarrollar un método de enseñanza para promover las habilidades de los futuros profesores sobre la división
2016	Arikan y Unal	z	Investigar la contextualización de los futuros profesores de matemáticas durante la resolución y planteamiento de problemas
2007	Rizvi y Lawson	Z y división de fracciones	Determinar el conocimiento de los futuros profesores sobre el concepto de división, representando división de números enteros y fracciones
1993	Simon	Z y división de fracciones	Investigar el conocimiento de los futuros maestros sobre la división, basándose en dos aspectos de la comprensión de la división: la conexión entre el conocimiento procedimental y conceptual y el conocimiento de las unidades.

Año	Autor	Conjunto numérico	Propósito del estudio
2000	Tirosh	División de fracciones	Promover el desarrollo del conocimiento de la materia por parte de los futuros maestros de primaria de la división de fracciones, así como su conocimiento de la naturaleza y las fuentes probables de conceptos erróneos comunes que tienen los niños.
2010	Kaasila, Pehkonen y Hellinen	z	Comprensión de la división de los futuros profesores de primaria y de los estudiantes de secundaria superior, especialmente su comprensión conceptual, razonamiento adaptativo y fluidez de procedimiento
1989	Graeber, Tirosh y Glover	Q	Explorar si los futuros maestros de primaria tienen los mismos conceptos erróneos sobre problemas verbales de multiplicación y división que los alumnos.

Anexo 2

Tabla 2.1. *Documentos sobre modelos de formación, y resumen de los modelos propuestos*

Autores/Año	Modelo de formación
Kazemi, Lampert y Ghouseini (2007)	Se basan en un conjunto de actividades de enseñanza, estructuradas y diseñadas estratégicamente para que pueden ayudar a los futuros docentes aprender a enseñar con <i>ambición</i> , lo cual permite relacionar el aprendizaje del contenido, la pedagogía y el pensamiento de los niños con el objetivo de involucrar a todos los estudiantes en una enseñanza de matemáticas auténtica y rigurosa.
Lampert, Beasley, Ghouseini, Kazemi y Franke (2010)	Presentan las actividades que están trabajando en la formación inicial construidas a partir de lo que Leinhardt y Steele (2005) llaman "rutinas de intercambio" las cuales guiarán la planificación y actuación de los futuros maestros, ayudándolos a aprender cómo presentar una actividad, administrar materiales y la participación estudiantil.
Azcárate (2000)	Ejemplifica un modelo formativo dirigido a la formación didáctica-matemática de los futuros maestros donde se les presentan problemas de carácter profesional, para promover un proceso de indagación, reflexión y estudio por parte de los futuros maestros en el que se sientan realmente implicados e interesados, pieza clave para el desarrollo profesional.
Cardeñoso y Azcárate (2002)	Presentan un modelo basado en los ámbitos de investigación profesional (AIP) las cuales reconocen como el conjunto de problemas e ideas relacionadas con algún aspecto de la función docente y de la práctica educativa, susceptible de ser objeto de estudio en procesos formativos.

Autores/Año	Modelo de formación
Castro, Mengual, Prat, Albarracín, Gorgorió (2014)	Si bien esta comunicación no presenta un modelo de formación en particular si dan a conocer el concepto Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) como aquel conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de Matemáticas y de Didáctica de las Matemáticas del Grado en Educación Primaria, el cual fundamentado con otros modelos de conocimiento abren una puerta a nuevas investigaciones.
Climent y Carrillo (2002)	Presentan una propuesta de formación ejemplificándola con actividades matemáticas en donde los futuros maestros la analizan tomando datos del desarrollo de tal actividad en educación primaria. En este análisis consideran tanto aspectos de su aprendizaje, del aprendizaje de los alumnos y de la maestra, como características propias de la enseñanza.
Font (2002)	Se explica una propuesta de formación matemática que integre el contenido matemático con el contenido pedagógico. Siguiendo el punto de vista dialógico (Habermas 1987), se propone que la mejor manera de conseguir el doble objetivo de ayudar a los futuros maestros, tanto en su construcción de los objetos matemáticos como en su reflexión didáctica, es que el profesor de la asignatura Didáctica de las Matemáticas realice un discurso en el aula en tercera, segunda y primera persona.
García (2005)	Se dan a conocer algunas aportaciones que proporcionan una formación completa y adecuada a futuros profesionales de la enseñanza de las matemáticas y se presenta la propuesta de modelo de formación que conlleva una manera de entender el proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas y una manera de hacer operativas esas ideas teóricas en un contexto “significativos” para el estudiante para profesor, mediante un proceso por el que adquiere un conocimiento y una manera de razonar como un experto.

Autores/Año	Modelo de formación
Gómez, González y Romero (2014)	Se ejemplifica en un contexto de programas de formación permanente de matemática de secundaria la idea de camino de aprendizaje de una tarea para caracterizar un objetivo de aprendizaje. Se muestra la utilidad de este tipo de caracterización en dos aspectos de la práctica del profesor de matemáticas: el análisis de la contribución de una tarea y una secuencia de tareas al logro de un objetivo de aprendizaje; y la recolección y análisis de información para la evaluación del aprendizaje.
Llinares (2004)	Presenta un modelo de qué y cómo aprenden los estudiantes para maestros de los diseños de casos, integrando material textual y videos, centrado en el aprendizaje matemático de los alumnos de primaria, en base a la reflexión.
Valls, Callejo y Llinares (2008)	Se presenta una manera de entender el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje en la formación de profesores que tiene en cuenta las dialécticas entre el diseñador-formador, un modelo de aprendizaje del profesor, y los estudiantes para profesor. Se usan ciclos de experimentos de enseñanza.
Socas (2011)	Se describen tareas para la formación inicial de maestros de primaria que ayudarán a desarrollar competencias profesionales para estos profesores que les permitan propiciar una enseñanza efectiva de las matemáticas.

Tabla 2.2. Estructura conceptual de la división en el currículo

Primer ciclo	
Bloque Números	2.11. Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades de números sencillos , series numéricas, para la búsqueda del complemento de un número y para resolver problemas de sumas y restas.
Segundo Ciclo	
Bloque Procesos, métodos y actitudes matemáticas	1.1. Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen una o varias de las cuatro operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.
Bloque números	<p>2.8. Significado de las operaciones de multiplicar y dividir y su utilidad en la vida cotidiana. Expresión matemática oral y escrita de las operaciones y el cálculo: suma, resta, multiplicación y división.</p> <p>2.10. Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar, como operación inversa a la multiplicación.</p> <p>2.11. Propiedades de las operaciones y relaciones entre ellas utilizando números naturales.</p> <p>2.18. Utilización de los algoritmos estándar de sumas, restas, multiplicación por dos cifras y división por una cifra, aplicándolos en su práctica diaria. Identificación y uso de los términos de las operaciones básicas.</p>

Tercer Ciclo

Bloque Procesos, métodos y actitudes matemáticas	1.1. Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen una o varias de las cuatro operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.
Bloque números	2.22. Utilización de operaciones de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. Automatización de los algoritmos.

Tabla 2.3. *Definición de los nivel de conocimiento de la estructura conceptual*

Bloque conceptual	Bloque procedimental
Los hechos son unidades de información que constituyen un nivel básico de complejidad conceptual. Dentro de los hechos numéricos pueden diferenciarse los términos, notaciones, convenios y resultados (Lupiáñez, 2009).	Las destrezas implican tener dominio de los hechos y los procedimientos como son la transformación de una expresión simbólica en otra.
Los conceptos representan la relación de un grupo de hechos, admiten una serie de relaciones entre ellos y tienen distintas representaciones (Rojas, 2014).	“Los razonamientos suponen un conocimiento de los conceptos y de su extensión, basadas en relaciones de conexión, inferencia o implicación” (Lupiáñez, 2009, p. 41)
Las estructuras conceptuales “son sistemas interconectados de conceptos juntos con sus relaciones, en que cada uno de los conceptos que las forman queda caracterizado por esas relaciones que mantiene con el resto” (Lupiáñez, 2014, p. 40)	Las estrategias operan en la estructura conceptual, considerando las relaciones, los conceptos y los sistemas de representación, esto implica cualquier tipo de procedimiento o reglas que llevan a resolver una situación o responder preguntas (Rojas, 2014, p. 17).

Tabla 2.4. Estructura conceptual de la división

Campo conceptual		
Hechos	Conceptos	Estructura
En la división de naturales el dividendo debe ser mayor que el divisor. Si el resto es cero, es una división exacta. Si el resto es distinto de cero, es una división inexacta.	Partitiva, cuotitiva, exacta, inexacta, inversa de la multiplicación, algoritmo, dividendo, divisor, cociente, resto, propiedades	a y b , con $b \neq 0$, $a \div b$ es el único número natural c , si existe, tal que $b \times c = a$; es decir, $a \div b = c$ equivale a $a = b \times c$
Campo Procedimental		
Destrezas	Razonamiento	Estrategias
Identificar los elementos de la división Calculo del algoritmo de la división. Calculo de la comprobación de la división.	Deductivo: demostrar las propiedades Inductivo: extraer regularidades numéricas.	Resolver problemas en diversos contextos. Elaborar estrategia para el cálculo mental. Uso de diferentes sistemas de representación. Estimar resultados. Empleo de la calculadora para comprobar, comparar y realizar cálculos.

Tabla 2.5. *Ejemplificación de los sistemas de representación de la división*

Simbólico	$6 \div 2$, $6/2$, $6:2$
Verbal	<p>Seis dividido en dos</p> <p>Cuántas veces cabe dos en seis</p> <p>Qué número multiplicado por 2 me da 6</p>
Gráfico	<p style="text-align: center;">$12 \div 4 = 3$</p> <p style="text-align: center;">Tres veces cuatro, exactamente</p>
Físico	<p>Ábaco</p> <p>Bloque multibase</p> <p>Regletas de Cuisenaire</p>

Tabla 2.6. *Ejemplificación de los elementos de sentido de la división*

Fenómeno	Contexto	Situación
El maestro quiere repartir de forma equitativa una bolsa de 60 caramelos entre los 20 niños de una clase ¿A cómo tocan?	Repartir	Situación laboral / escolar

Tabla 2.7. *Errores y dificultades de la división*

Dificultades y errores relativos a la complejidad de la operación	
El cociente de la división está expresado en una unidad diferente.	No consideran la unidad dar el resultado.
El tamaño del dividendo y del divisor.	Dejar restos intermedios iguales o mayores que el divisor y omitir ceros en el cociente.
Tamaño relativo de la primera cifra del dividendo y el divisor.	Restas de números grandes, normalmente, de dos cifras y que debe realizar de forma mental.
La presencia de ceros.	Los errores en la tabla de multiplicar dan lugar a errores de todo tipo en el algoritmo de la división.
Dificultades semánticas debido a obstáculos por el lenguaje y sus errores	
El verbo repartir se convierte en un referente de la división.	Cuando leen un problema de división que no dice “repartir”, no saben qué hacer.
Atribuir propiedades de la multiplicación a la división.	Aplicar la propiedad conmutativa a la división.
Comprender que el 0 no puede ocupar el papel del divisor.	
Comprender el procedimiento del algoritmo de la división.	
Dificultades relacionadas con la enseñanza y sus errores	
La enseñanza realza el procedimiento separándolo del significado de la operación	Considerar que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor y no a una unidad del divisor.
	Memorizar el algoritmo de la división.

Fuente: Flores et al. (2015); Roa (2001).

Tabla 2.8. *Relación entre objetivos específicos y competencias*

Objetivos específicos	Competencias							
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1. Conocer y utilizar el concepto de división como reparto y como partición en situaciones de la vida cotidiana.	X				X		X	
2. Conocer y comprender el nombre de los términos de una división.	X						X	
3. Identificar y justificar cuando una división es exactas y cuando una división es inexactas.	X	X					X	
4. Comprender el algoritmo de la división utilizando material manipulativo en situaciones de la vida cotidiana.	X				X	X	X	

Tabla 2.9. *Ejemplificación de recursos de internet para trabajar la división*

Recurso	Descripción
Divisiones con Educanave	Desde esta página proponen cinco grupos de juegos clasificados según el objetivo: división con ceros, por una cifra, por dos o más cifras, u otras categorías más genéricas de juegos y problemas sobre divisiones. https://www.educanave.com/primaria/matematicas/division.htm
Smartick	Aunque es un servicio de pago, tiene abiertos algunos ejercicios de introducción a las divisiones que pueden resultar muy interesantes como primera toma de contacto, para ir afianzando el conocimiento sobre cómo dividir. https://www.smartick.es/matematicas/exercise.html?resource=concepto-de-la-division
Divisiones, paso a paso	Es un programa donde se introducen los valores del dividendo y divisor, para luego ir avanzando en las cuentas necesarias para resolver la división paso a paso. https://www.matematicasonline.es/flash/divisiones/division1.html
Juegos del Método Singapur	La web Olesur ha recopilado algunos problemas que pueden servir a introducirse en el aprendizaje de las matemáticas a través de la metodología Singapur. http://www.olesur.com/educacion/problemas-abn-desktop.asp

Fuente: <https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/divisiones-enprimaria/21356.html>

Anexo 3

Tabla 3.1. *Diseño original del Ciclo 2*

Ciclo 2. Diseño

Se diseñaron un total de 8 sesiones, 4 teóricas y 4 prácticas (aquí se presentan la planificación de 4 sesiones, porque al final de cada una está el seminario que se llevara a cabo)

Sesión 1 (teoría/seminario).

Objetivos formativos: Que los alumnos

1. Aprecien la necesidad de comprender los conceptos matemáticos que van a enseñar, y de dar sentido a dichos conceptos
2. Realicen el análisis de contenido, determinando la estructura conceptual

Procesos formativos: Presentación de idea general del análisis didáctico, relación con la enseñanza significativa (argumento: para proponer un aprendizaje significativo se requiere conocer situaciones de la vida cotidiana o científica en la que se utilizan los conceptos matemáticos a enseñar; por tanto hay que hacer un análisis de en qué situaciones se aplican los conceptos matemáticos; el análisis comienza por diferenciar los elementos que componen el concepto, distinguiendo qué queremos que comprendan, qué pretendemos que sepan resolver y aplicar).

Descripción del análisis de contenido a través de la terna semántica (concepto, significado, representación), ejemplificándolo en las fracciones.

Cada cual debe escribir en una sola frase (una línea), el contenido matemático que ha visto enseñar en prácticas. Posteriormente se lo pasa al vecino, quien debe interpretar de qué se trata. Puesta en común, para detectar qué entienden por contenido matemático. Formalización de contenido matemático (RAE: Tabla de materias, a modo de índice; Componente del signo lingüístico referido al significado, en oposición al plano de la expresión; Moliner: asunto, substancia o fondo de un escrito, discurso – enseñanza-).

[Libro secundaria: Por contenido matemático escolar se entiende un conjunto de conceptos, procedimientos, estructuras y actitudes que los responsables del currículo escogen y organizan, que los profesores comunican y enseñan, para que los escolares aprendan acerca de un tópico matemático escolar determinado y lo utilicen.]

Identificación de procesos para detectar los conceptos de un contenido matemático, a partir de dos documentos: Decreto andaluz de educación primaria matemáticas, libros de texto de Matemáticas del curso previsto, el anterior y posterior.

BOJA:

a) En mapa de desempeño (p. 229 a 247), identificar parte del bloque, apreciando cómo evoluciona a partir de los ciclos, apreciando los criterios de evaluación. Quedarse con el criterio correspondiente al ciclo que les toque.

b) Apartado desarrollo curricular, buscar los criterios seleccionados, según el ciclo correspondiente, y extraer los contenidos que se tratan, los apartados que abarca dicho contenido.

Completar después con lo que aparezca en los libros de texto, e incluso con lo que aparezca en el libro de Matemáticas para maestros de primaria.

Seminario 1: Identificación de estructuras conceptuales del contenido a enseñar. (Importante, traer libros de texto del curso). Seguir las indicaciones anteriores.

Sesión 2 (teoría/seminario)

Objetivos formativos: Que los estudiantes

1. Aprecien la diferencia entre un concepto, su forma de representarlo y su aplicación.
-

2. Identifiquen formas de representar los conceptos, las situaciones en que se aplican y los significados que adquiere.

3. Organicen la información sobre el análisis de contenido de su tema.

Procesos formativos: Pedir que interpreten una situación en que el alumno confunde la forma de representar con el concepto, o mezcla formas de representar entre sí (“debajo de mi mesa hay un perro muerto...”)

Ejemplificar con formas de representación de las fracciones (recordando las tratadas en las tareas examinadas en el tema anterior). Mostrar cómo se obtienen formas de representar en libros de texto y en el libro de matemáticas para maestros.

Interpretar una situación en que se utilice concepto con diversos significados (división de perros, paño, etc., para problemas de división). Mostrar cómo se obtienen significados de concepto de fracción y de operaciones aditivas con fracciones, en libro de matemáticas para maestro.

Organizar la información del análisis de contenido completo.

Seminario 2: Identificar formas de representación y significados de los conceptos de su tema (libros de texto, matemáticas para maestros). Organización de la información de las dos prácticas, en un único análisis de contenido.

Sesión 3 (teoría/seminario)

Objetivos formativos: Que los estudiantes

1. Refuercen la idea de objetivo de aprendizaje.

2. Formulen objetivos de aprendizaje a partir de objetivos del área, criterios de evaluación, estándares de evaluación, caracterización cognitiva de contenidos, y sentido matemático.

3. Regulen los objetivos definidos a partir de la competencia matemática.

Proceso formativo: [Racionalidad de la enseñanza] Recuerdo de las finalidades de aprendizaje de las tareas estudiadas en el tema anterior (metas de las tareas). Concepto que tienen de objetivo de aprendizaje.

[Objetivos de enseñanza para aprender con sentido, necesidad de definir objetivos de aprendizaje]: Diferenciación de enseñanza hacia aprendizaje de destrezas de enseñanza hacia aprendizaje de conceptos (fracciones). Idea de sentido matemático como aprendizaje equilibrado que permite comprender el uso de aspectos matemáticos más que el aprendizaje memorístico de destrezas que ellos mismos han olvidado.

[Definición de objetivos de aprendizaje]. Obtención de finalidades de aprendizaje en el decreto del BOJA (Objetivos del área de matemáticas, forma en que se concretan en criterios y estándares de evaluación. Concepto de objetivo como logro de estudiantes, enunciado en forma de acción). Forma de definirlo, a partir del análisis cognitivo de contenidos (conceptos y procedimientos), mediante verbos de acción.

Formulación de objetivos

Análisis de objetivos, en relación a currículo y a sentido matemático

Resultado: objetivos formulados correctamente, seleccionados adecuadamente, para cubrir la idea de que aprendan con sentido, teniendo en cuenta las indicaciones del decreto.

Seminario 3: Análisis cognitivo, definición de objetivos de aprendizaje. Identificación de finalidades de aprendizaje previstas en decreto. Identificación de aspectos cognitivos de los contenidos seleccionados. Formulación de objetivos de aprendizaje del contenido. Análisis de en qué grado contribuyen a lo previsto en currículo y a idea de sentido matemático.

Sesión 4 (teoría/seminario)

Objetivos formativos: Que los estudiantes

1. Identifiquen aspectos que limitan el aprendizaje.

-
2. Diferencien dificultades de errores.
 3. Identifiquen e interpreten dificultades y errores en el aprendizaje de su tema
 4. Organicen la información cognitiva del tema, encerrando además la de contenido, elaborando mapas conceptuales.

Procesos formativos: Preguntar por recuerdos de limitaciones de aprendizaje observados en las prácticas o en su aprendizaje matemático, referido a algún concepto. Separación de idea de dificultad de un concepto matemático y de error de aprendizaje de dicho concepto. Recuerdo de errores apreciados durante las prácticas.

Forma de encontrar dificultades y errores en las fuentes, libro de texto. Forma de interpretar lo enunciado en el libro, adaptación a su tema. Otras fuentes.

Mapa conceptual del contenido, incluyendo el análisis de contenido y el cognitivo.

Forma de elaborar el mapa, focos principales, aspectos del contenido, aspectos cognitivos, relación entre partes.

Seminario 4: Análisis cognitivo, limitaciones de aprendizaje. Organización final del análisis cognitivo. Elaboración de un mapa conceptual sobre el análisis de contenido y cognitivo.

Tabla 3.2. *Diseño original del Ciclo 3*

Ciclo 3. Diseño

Se diseñaron un total de 11 sesiones, entre teóricas y prácticas, aunque en este último ciclo la mayoría de las sesiones son prácticas, ya que se trabaja en la planificación de las unidades didácticas y sus presentaciones

Sesión 1 (Práctica)

Objetivos formativos:

- Seleccionar fundamentadamente los elementos de la unidad didáctica (contenidos –incluyendo significados que van a tratar-; objetivos y limitaciones)
- Buscar y seleccionar materiales y recursos didácticos para su UD

Proceso formativo: Selección de contenidos, objetivos y limitaciones de la unidad, y búsqueda de materiales para la enseñanza del tema.

Sesión 2 (teoría)

Objetivo Formativo: Busquen y seleccionen materiales y recursos didácticos para su UD.

Proceso formativo: Estimular el empleo de materiales, a partir de proponer una actividad que se resuelva mejor empleando algún recurso. Segunda parte de la sesión dedicada a que compartan materiales y recursos, tanto en el interior de cada grupo como entre grupos de temas próximos. Deben traer a clase información sobre recursos y materiales para la enseñanza de su tema. Profesor le hace recomendaciones sobre nuevos materiales, específicamente materiales informáticos.

Sesión 3 (seminario)

Objetivos formativos:

- Busquen y seleccionen materiales y recursos didácticos para su UD.
- Identifiquen, analicen, seleccionen e inventen tareas matemáticas escolares para la UD.

Proceso formativo: buscar materiales para la enseñanza de su tema, complementarlos con tareas que utilizan estos materiales. Comienzan a buscar tareas en libros de texto y similares.

Sesión 4 (teoría)

Objetivo formativo: Identifiquen, analicen, seleccionen e inventen tareas matemáticas escolares para la UD.

Proceso formativo: Deben traer a clase libros de texto para extraer tareas matemáticas escolares. La clase comienza con recuerdos de lo realizado en la primera parte del curso, examinar tareas matemáticas escolares (recordar variables para definir las), analizar su pertinencia y significatividad. Profesor hace recomendaciones sobre forma de cambiar tareas de evaluación, para hacerlas más significativas.

Sesión 5 (seminario)

Objetivo formativo: Identifiquen, analicen, seleccionen e inventen tareas matemáticas escolares para la UD.

Proceso formativo: buscar tareas para la enseñanza de su tema, examinar los elementos de dichas tareas, su pertinencia y significatividad.

Sesión 6 (teoría)

Objetivos formativos:

- Determinen la duración de su UD y la distribuyan por sesiones, seleccionando las tareas que se harán en cada sesión.
- Estudien y justifiquen la coherencia de la unidad.

Proceso formativo: Breve presentación de criterios para establecer duración. Recordar algunas ideas para hacer tareas más significativas.

Sesión 7 (seminario)

Objetivo formativo:

- Determinen la duración de su UD y la distribuyan por sesiones, seleccionando las tareas que se harán en cada sesión.
- Estudien y justifiquen la coherencia de la unidad.

Proceso formativo: Completar secuencia de tareas para cubrir la duración de la UD.
Elaboración del informe final.

Sesión 8 (teoría)

Objetivo formativo: Estudien y justifiquen la coherencia de la unidad.

Proceso formativo: Breve presentación de criterios para apreciar cualidades de UD.
Revisión de su UD. (Entrega de UD hasta hoy por la noche, entrega de presentación, hasta mañana por la mañana).

Sesión 9

Primeras presentaciones, 6 durante 20 minutos. Los estudiantes del grupo deben presentar entre todos. Los demás hacen una valoración de dicha unidad, extrayendo los elementos fuertes y los débiles, siempre de manera técnica.

Sesión 10

Segunda tanda de presentaciones, 7 durante 20 minutos. Los estudiantes del grupo deben presentar entre todos. Los demás hacen una valoración de dicha unidad, extrayendo los elementos fuertes y los débiles, siempre de manera técnica.

Sesión 11

Tercera y última tanda de presentaciones, 5 durante 20 minutos. Los estudiantes del grupo deben presentar entre todos. Los demás hacen una valoración de dicha unidad, extrayendo los elementos fuertes y los débiles, siempre de manera técnica. Valoración final de la asignatura, apreciando aspectos positivos y negativos de la misma.
Indicaciones para el examen final de la asignatura.

Anexo 4.

Tabla 4.1.1. Elementos utilizados por los grupos estudiados, en la estructura conceptual de sus análisis de contenido. Durante la fase 1.

Grupos	currículo	Focos conceptuales	Clasificación de conceptos
G1 2° primaria	Hemos encontrado un único contenido adecuado en relación con el tema de “Inicio a la división”, extraído de la Orden de 17 de Marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (BOJA). 2.11 Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades de números sencillos, series numéricas, para la búsqueda del complemento de un número y para resolver problemas de sumas y restas. De este contenido solamente nos quedaríamos con la parte en la que se tratan los conceptos de resta (resta sucesiva), mitades y dobles de números sencillos (puesto que la división se identifica como lo inverso a la multiplicación) y series numéricas.	Resta (resta sucesiva) Mitades Dobles (División como inverso a la multiplicación) Series Numéricas	
G2 2° primaria	2.11. Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades de números sencillos, series numéricas, para la búsqueda del complemento de un número y para resolver problemas de sumas y restas.	<u>Conceptos</u> Reparto Mitad División Dividendo Divisor Cociente Resto <u>Procedimientos</u> Repartir Desarrollar Calcular Resolver	Conceptos y Procedimientos
G3 3° primaria	Contenidos matemáticos del BOJA, relacionados con el tema de la división. Conocimientos previos- (Primer ciclo). 2.11. Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades de números sencillos, series numéricas. Conocimientos que deben ser adquiridos entre los dos curso- (Segundo ciclo).	<u>Contenidos propios del tema de la división con respecto al segundo ciclo:</u> 1. Concepto de división. 1.1 Términos de la división. 1.2 Tipos de división: Exacta y Entera. 1.3 División partitiva (reparto) y cuotitiva (resta sucesiva). 1.4 Procedimiento de la división. 1.5 Prueba de la división. 1.6 División como operación inversa.	

Grupos	currículo	Focos conceptuales	Clasificación de conceptos
	<p>2.8. Significado de las operaciones dividir y su utilidad en la vida cotidiana. Expresión matemática oral y escrita de las operaciones y el cálculo: suma, resta, multiplicación y división.</p> <p>2.10. Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar, como operación inversa a la multiplicación.</p> <p>2.13. Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones sencillas: representaciones gráficas, repetición de medidas, repartos de dinero, juegos...</p> <p>Conocimientos finales de etapa- (Segundo ciclo).</p> <p>2.18. Propiedades de las operaciones. Jerarquía y relaciones entre ellas. Uso de paréntesis.</p> <p>2.20. Elaboración y utilización de estrategias personales y académicas de cálculo mental Relacionadas con números naturales.</p> <p>2.21. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos mentales.</p> <p>2.22. Utilización de operaciones de división con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. Automatización de los algoritmos.</p> <p>2.26. Obtención de todos los divisores de cualquier número menor que 100.</p>	<p>1.7 Propiedad del resto (resto parcial, resto final).</p> <p>1.8 División entre un número de dos cifras.</p> <p>1.9 División entre un número de tres cifras.</p> <p>1.10. Ceros en el cociente.</p> <p>1.11. División entre 10, 100 o 1000.</p> <p>1.12 Operaciones combinadas</p> <p>1.13. Producto cartesiano: factor y producto desconocido.</p> <p>2. Importancia de la división en la vida cotidiana. (Resolución de problemas).</p> <p>3. Cálculo mental.</p>	
G4 4° primaria		<p><u>Contenidos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. - La división como reparto. - Tipos de división: exacta y entera. - Términos de la división: dividendo, divisor, cociente y resto. - Prueba de la división. - Resolución de problemas. - Tipos de problemas: partición o distribución, extracción o cuotición, reducción (cociente escalar) y cociente cartesiano. - Cálculo mental. 	
G5 4° primaria		<p><u>Contenidos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> -La división como operación inversa de la multiplicación. -Propiedades de la división. -La división exacta y la división no exacta (Reparto exacto y no exacto). -División partitiva o “de reparto” y división cuotitiva o “resta repetida”. -Escritura y planteamiento de un problema, que se resuelva utilizando alguna división. 	

Grupos	currículo	Focos conceptuales	Clasificación de conceptos
G6 5° primaria		<ul style="list-style-type: none"> -Problemas que se resuelvan multiplicando por el inverso, para ver que se obtiene el mismo resultado. -Problemas de estructura multiplicativa: <ul style="list-style-type: none"> .Proporcionalidad simple. .Comparación multiplicativa. .Igualación. .Producto Cartesiano. .Producto de medidas. .Problemas de más de una etapa. -Algoritmo de la división (Algoritmo extendido de Euclides). -Términos de la división: Dividendo (D), Divisor (d), Cociente \textcircled{Q} y Resto \textcircled{R}. -Prueba de la división como comprobación ($D=d \cdot C + R$). -Definición de divisor y múltiplo. -Factorización: Mínimo común múltiplo, Máximo común divisor. -Números primos y números compuestos. -Diferencias entre las nociones de división y divisor (“a” divide a “b” \rightarrow no es igual que “a” dividido por “b”). 	
		<p><u>Contenidos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> -Significado de las operaciones de multiplicar y dividir y su utilidad en la vida cotidiana. Expresión matemática oral y escrita de las operaciones y el cálculo: suma, resta, multiplicación y división. -Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar, como operación inversa a la multiplicación. -Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con multiplicaciones y divisiones por una cifra, aplicándolos en su práctica diaria. Identificación y uso de los términos de las operaciones básicas. -Tipos de división y sus propiedades. -Relación entre fracción y número decimal, aplicación a la ordenación de fracciones. -Utilización de operaciones de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. Automatización de los algoritmos. -Equivalencias fundamentales. -Divisor con tres cifras. 	

Tabla 4.1.2. Elementos utilizados por los grupos estudiados, en el organizador "Sistemas de representación", en sus análisis de contenido, durante la fase 1.

grupos	nivel	s.r	modelos	ejemplo	explicación
G1	2°	Simbólica/verbal Gráfica	no	si	De los contenidos a trabajar explica cada uno con los s.r. En el caso de dobles y series numéricas solo explica el s.r simbólico/verbal
G2	2°	Física Grafica Simbólica	no	material multibase imágenes de libros de texto la estructura del algoritmo e imágenes de libros de texto	Si, con un problema Si, que es la grafica Si, símbolos para la estructura de la división
G3	3°		Discreto o de conjunto Lineal De área	Si, con un ejemplo numérico muestran la representación gráfica para cada modelo, solo ocupando el concepto de resta repetida y reparto Un ejemplo numérico de división, muestran imágenes de la grafica	Para los modelos no dan explicación Dan un explicación detallada de los pasos a seguir
G4	4°	Físico Grafico	Modelo de medida	Ábaco regletas de Cuissenaire	Explicación de la función con respecto a la división Que el material multibase se puede representar gráficamente En que consiste
			Modelo cardinal	Imagen/ejemplo numérico división	Utilidad para la división
			Modelos lineales	Imagen de recta numérica	Utilidad para la división
			Configuración puntual	Imagen	Utilidad para la división
			Modelo funcional de la división y operación inversa	Imagen	Utilidad para la división

grupos	nivel	s.r	modelos	ejemplo	explicación
			Modelo numérico	No	Hace mención a los conceptos que se deben manejar
		Simbólico/verbal			Resta reiterada
				Imagen	Significado de lo que expresa el algoritmo
		Simbólico/numérico		Algoritmo de la división, imagen y ejemplo numérico	
G5	4°	Modelos Gráficos	Discreto o de conjunto	Imagen de cada uno	Se explica la división de 6:2 con la imagen para cada uno
			Lineal		No
			Área		
		Modelo simbólico		Diferentes maneras en que se expresa la división	
		Modelo Físico		Material Multibase	Pasos con el material con el ejemplo numérico anterior
G6	5°	Física		materiales de su entorno y materiales específicos para la didáctica	No
				recta numérica verbales y numéricas	
		Gráfica		no	
		Simbólica			
			Lineales		Explican en lo que consiste cada modelo a modo general, en el único que se centran en la división es en el modelo funcional
			Cardinales		
			De medida		
			Numéricos		
			De razón aritmética		
			Funcionales		

Tabla 4.1.3. Elementos utilizados por los grupos estudiados, en el organizador "fenomenología", en sus análisis de contenido, durante la fase 1.

Grupos	nivel	Modos de usos	fenómenos	observaciones
G1	2°	<p>Resta (resta sucesiva)</p> <p>Otro ejercicio igual sería con las maletas, repartirlas por igual en 2 carros</p> <p>Este concepto lo vemos día a día por ejemplo, a la hora del postre. Si en una familia hay 4 personas y repartimos un pack de 4 yogures, vamos dando 1 a cada uno (resta sucesiva) hasta que se reparten los 4.</p> <p>Mitades</p> <p>Esto ocurre por ejemplo, en una situación cotidiana de dos niños/as en el patio del colegio parten su torta por la mitad para compartirla, al igual que pasa en este ejercicio repartiendo las aceitunas.</p> <p>Aquí podemos encontrar otro ejemplo del concepto de mitad pero en forma de problema. En el que el alumno/a deberá haber aprendido el concepto de mitad sabiendo que tiene que repartir los 18 bañadores entre 2.</p> <p>Dobles (División como inverso a la multiplicación)</p> <p>En este caso se le enseñaría al alumno que cuando multiplica un número por 2 se hace el doble. Y si el número final se divide entre dos se hace la mitad. Es decir justo lo inverso.</p> <p>Series Numéricas</p> <p>Para entender mejor este concepto abstracto se le puede explicar al niño el concepto de serie como conjunto de cosas (números) una detrás de otra, en cierto orden. Como ejemplo de una actividad en la que él alumnos ha de realizar un ejercicio continuando una serie numérica en la que utiliza la división sería</p>		Expresan que hacen una revisión de libros de textos de 2° de primaria
G2	2°	<p>Sentido o Significado:</p> <p>El sentido que le podemos dar a la mayoría de los problemas y actividades que hemos encontrado en la consulta de varios libros de texto de 2° de Ed. Primaria son:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Uso de la resta sucesiva. -Concepto de la división como reparto. -Cálculos simples de mitades. <p>Únicamente en una de las consultas hemos encontrado una excepción, en la que se trabaja directamente el algoritmo de la división. En este caso, como vemos, una división de una cantidad inicial (16 galletas) entre dos partes (dos niños). El sentido que podemos darle es el uso de la división como una operación para resolver la situación que se nos plantea</p>	<p>Problemas:</p> <p>Tipos de problemas de isomorfismo de medidas con incógnita en tasas. Estos tipos de problemas tienen un orden de enseñanza de tipo 1, dado que estos son los menos complejos.</p>	Expresan que revisan libros de textos de 2° de primaria Presentan ejemplos de problemas e imágenes de libros de texto

Grupos	nivel	Modos de usos	fenómenos	observaciones
G3	3°		<ul style="list-style-type: none"> •Problemas de división partitiva: Es el caso en el que se realiza un reparto equitativo de la cantidad inicial. •Problemas de división cuotitiva: Es el caso en el que tenemos que realizar repetidas restas sucesivas. •Problemas de producto cartesiano: cuando se parten de dos variables para dar un resultado conjunto. •Problemas de razón: En esta se trabaja la proporcionalidad. •Problemas de comparación multiplicativa: Se produce cuando necesitamos partir algunos objetos. •Problemas de relación entre parte y todo: donde aparecen el concepto de fracción como relación parte todo. 	Presentan un ejemplo de cada tipo de problema
G4	4°		<p>Sentido y usos.</p> <p>Enseñar una operación implica generalmente abordar los diversos problemas que se resuelven o se relacionan con ella. En la división, ha de incluirse lo problemas multiplicativos. Por tanto, para abordar la variedad de problemas propios de la división durante el segundo ciclo de Primaria del alumno, es preciso trabajar con problemas de reparto, partición, organizaciones rectangulares y series proporcionales. La nueva novedad del segundo ciclo son los problemas de interacción. Por consiguiente será estrictamente necesario plantear las primeras situaciones de modo cercano y sencillo para que el alumnado lo comprenda sin dificultades aparentes.</p> <p>Supongamos que partimos de los siguientes problemas:</p> <p>1. Un alumno tiene una bolsa con 125 caramelos y quiere repartirlos entre sus 20 amigos ¿Cuántos caramelos corresponden a cada uno?</p> <p>En este tipo de división el reparto se realiza colocando un objeto en cada una de sus partes, a continuación otro y así sucesivamente hasta que se agotan los elementos a repartir. ¿Cuántos objetos hay en cada parte?</p> <p>2. Se reparten por igual 240 pasajeros entre varios autobuses. Si cada autobús transporta 60 pasajeros, ¿cuántos autobuses se necesitan?</p> <p>Se trata de una resta sucesiva y tenemos que averiguar cuántas veces se puede restar un n° d a otro N° D. ¿Cuántos subconjuntos podré formar? Debemos descomponer el</p>	

Grupos	nivel	Modos de usos	fenómenos	observaciones
			<p>dividendo en partes de igual tamaño y, en principio, conocemos el tamaño de sus partes pero no su número.</p> <p>3. En un baile hay dos chicos y algunas chicas. Si se pueden formar seis parejas distintas entre ellos. ¿Cuántas chicas hay en el baile? $6/2 = 3$ chicas</p> <p>Hay dos conjuntos a y b en los cuales conocemos los elementos totales de un conjunto y el número de combinaciones posibles pero no conocemos los elementos del segundo. La división es una operación que nos permite resolver los elementos que hay en el segundo conjunto, es decir, la otra cantidad que se combina. Dada una cantidad (dividendo) y el número de combinaciones (divisor), se pregunta por la otra cantidad que se combina (cociente). Este tipo de problema es el producto Cartesiano.</p> <p>4. El volumen de un globo se reduce a la tercera parte de su tamaño inicial. Si inicialmente tiene un volumen de 6 dm^3. ¿Qué volumen tiene al final?</p> <p>Este proceso de reducción implica una única cantidad que decrece la misma cantidad a lo largo de un periodo de tiempo (o un número de veces)</p> <p>Los intentos de los niños de llegar al resultado mediante sumas, restas o multiplicaciones se plasman en algoritmos de división más largos que el convencional, pero también más transparentes.</p> <p>5. Tengo 50 euros guardados para viajar a Roma y gasto 3 euros por día. ¿Para cuántos días me alcanza? ¿Cuánto dinero necesito para que me alcance para un día más? Si parto del 100 y cuento de 7 en 7 hacia atrás, ¿a qué número llego?</p> <p>Los problemas de interacciones son el modelo más complejos de la división. La interacción abarca situaciones, en las que el alumno ha de plantear diversos resultados para plantear de forma correcta el cociente y el resto que sea pertinente (exacto o entero). Este tipo de problema, es una herramienta altamente eficaz para resolver otro tipo de problemas multiplicativos en el tercer ciclo.</p> <p>6. División: $12.357 : 43$</p> <p>Para comenzar, se procederá a ensayar multiplicaciones para anticipar la cantidad de cifras del cociente. Así se podrá deducir si el cociente es mayor o menor.</p>	

Grupos	nivel	Modos de usos	fenómenos	observaciones
			- Algoritmo convencional: Desde este último algoritmo, será posible realizar las vinculaciones con el algoritmo convencional, que va pasando por las mismas cifras, pero reemplazando las cantidades globales (200, 80, 7) por una sola cifra (2, 8, 7) que tiene valor posicional.	
G5	4°	Situaciones y fenómenos -Situaciones de reparto exacto, donde se manifieste la división partitiva -Situaciones de reparto no exacto, es decir, aquellas en el que al realizar la división el resto es distinto de cero. -Agrupar, saber el número de grupos en el que puedo organizar un conjunto dependiendo del número de elementos de cada grupo. (Resta repetida, división cuotitiva). -A veces en la vida cotidiana utilizamos el resto pero de distinta manera: Tenemos 12 niños y que lo queremos dividir en clase de 5. Cuántos niños me sobran o cuántas clases necesito para que ningún niño se quede sin clase. -No solo a la hora de repartir usamos la división si no a la hora de partir un mismo objeto la utilizamos: Cuando hacemos una tarta y queremos partirla en porciones de igual tamaño.		Dan ejemplos de problemas
G6	5°	Usos -Resta sucesiva -Repartir -Partir -Operar -Distribuciones rectangulares -Problemas con el resto	Situaciones y fenómenos -De proporcionalidad simple: el contexto más familiar de la división es el de reparto. Dentro de la división nos encontramos con: •División partitiva (Reparto reiterado de unidades simples y reparto reiterado de grupos de objetos) •División cuotitiva (Medida y substracción repetida) -De comparación. •Comparación de disminución con el comparado desconocido. •Comparación de disminución con el referente desconocido. •Comparación de disminución con el escalar desconocido. -De producto cartesiano. •Situaciones combinatorias.	

Tabla 4.1.4. *Expectativas de aprendizaje planteadas por cada grupo, durante la fase 1.*

GRUPOS	EXPECTATIVAS
G1. 2º primaria	<p>G1.1- Calcular la mitad y el doble mediante acciones de repartos de objetos cotidianos con sus compañeros.</p> <p>G1.2- Elaborar series numéricas de números pequeños utilizando mitades.</p> <p>G1.3- Representar repartos por medio de representaciones gráficas.</p> <p>G1.4- Relacionar repartos entre dos y mitades.</p> <p>G1.5- Generar situaciones en las que se relacionen los conceptos de doble y mitad.</p> <p>G1.6- Identificar el símbolo de la división para saber explicar el reparto que realiza.</p> <p>G1.7- Saber realizar estimaciones mediante procedimientos sencillos.</p>
G2. 2º primaria	<p>Los objetivos específicos que queremos alcanzar en el inicio de la división son los siguientes:</p> <p>G2.1: O.1. Identificar y comprender el concepto de reparto.</p> <p>G2.2: O.2. Interpretar representaciones gráficas.</p> <p>G2.3: O.3. Diseñar problemas de reparto.</p> <p>G2.4: O.4. Distinguir y comprender los diferentes elementos de la división.</p> <p>G2.5: O.5. Relacionar el concepto de reparto y resta sucesiva.</p> <p>G2.6: O.6. Calcular mitades de números sencillos.</p> <p>G2.7: O.7. Identificar la mitad de una serie de elementos.</p> <p>G2.8: O.8. Usar material físico-manipulativo.</p>
G3. 3º primaria	<p>¿Qué quiero que aprendan? Objetivos:</p> <p>G3.1: Realizar la división con material físico</p> <p>G3.2: Entender el concepto de división</p> <p>G3.3: Comprender los términos de la división</p> <p>G3.4: Conocer los tipos de división: exacta y entera</p> <p>G3.5: Diferenciar entre división cuotitiva y partitiva</p> <p>G3.6: Adquirir el procedimiento de la división</p> <p>G3.7: Utilizar la prueba de la división para comprobar dichas divisiones</p> <p>G3.8: Aplicar la división a problemas cotidianos</p> <p>G3.9: Resuelve problemas</p> <p>G3.10: Integrar la división a la vida diaria</p> <p>G3.11: Calcular de manera mental con distintos tipos de operaciones</p> <p>G3.12: Elabora problemas de división de forma autónoma</p> <p>G3.13: Saber dividir entre un número de más de una cifra</p>
G4. 4º primaria	<p>Los objetivos establecidos en relación a los contenidos referentes a los problemas de divisiones enteras, se dividen exclusivamente en objetivos conceptuales y procedimentales.</p> <p>Conceptuales</p> <p>G4.1: 2. Conocer los distintos usos y tipos de la división.</p> <p>G4.2: 10. Elegir los cálculos correctos para realizar un problema</p> <p>G4.3: 11. Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos</p> <p>G4.4: 12. Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas</p> <p>Procedimentales</p> <p>G4.5: 1. Aplicar algoritmos de cálculo correspondiente a la suma, resta, multiplicación y división.</p> <p>G4.6: 3. Relacionar los términos de la división.</p> <p>G4.7: 4. Usar cálculos mentales para la resolución de problemas.</p> <p>G4.8: 5. Resolver problemas sencillos de la vida cotidiana utilizando la división.</p> <p>G4.9: 6. Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema.</p> <p>G4.10: 7. Diferenciar problemas de una y dos etapas.</p> <p>G4.11: 8. Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera.</p> <p>G4.12: 9. Aplicar pasos previos para resolver un problema.</p> <p>G4.13: 10. Elegir los cálculos correctos para realizar un problema.</p> <p>G4.14: 11. Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.</p> <p>G4.15: 12. Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas.</p>
G5. 4º primaria	<p>Hechos:</p> <p>G5.1: O1: Relacione la división como inversa de la multiplicación.</p> <p>G5.2: O6: Plantea un problema que se resuelva utilizando la operación de división.</p> <p>G5.3: O7: Plantea y resuelva un problema con el inverso.</p> <p>G5.4: O8: Enuncie y relacione los distintos tipos de problemas de división.</p> <p>Conceptos:</p> <p>G5.6: O2: Entienda e interprete las propiedades de la división.</p> <p>G5.7: O3: Distinga entre división exacta y no exacta.</p> <p>G5.8: O4: Distingue e interprete los dos tipos de división.</p>

G6. 5° primaria

G5.9: O9: Comprenda e identifica los términos de la división.
G5.10: O11: Relacione y comprenda los términos de divisor, múltiplo, mcm, mcd.
G5.11: O12: Relacione y distinga entre los conceptos de división y divisor.
Procedimientos:
G5.12: O5: Comprenda y memorice el algoritmo de la división.
G5.13: O10: Interprete y memorice la comprobación del resultado de la división.

Expectativas de aprendizaje

G6.1: Comprende el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana.
G6.2: Reproduce de forma oral y escrita el cálculo de la división.
G6.3: Interpreta la división como operación inversa a la multiplicación.
G6.4: Identifica los tipos de división y sus propiedades.
G6.5: Comprende el algoritmo de la división.
G6.6: Aplica en contextos reales la división para repartir y para agrupar.
G6.7: Identifica y usa los términos de la división.
G6.8: Utiliza estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones.
G6.9: Aplica el algoritmo de la división.
G6.10: Opera con divisores de tres cifras.
G6.11: Opera mediante estimaciones cuando la situación lo precisa.
G6.12: Detecta y usa relaciones numéricas.
G6.13: Realiza cálculos numéricos por diferentes procedimientos.
G6.14: Conoce distintas representaciones de los números y usa la más adecuada.
G6.15: Maneja diversos procedimientos para resolver un problema aritmético.

Tabla 4.1.5. Análisis de los componentes destacados en los objetivos planteados por los grupos, en su Análisis Cognitivo de la fase 1

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G1	Calcular la mitad y el doble mediante acciones de repartos de objetos cotidianos con sus compañeros.	aprendizaje			Calcular	Mitad/doble	físico	partitiva	personal
	Elaborar series numéricas de números pequeños utilizando mitades.	aprendizaje			Elaborar	Series numéricas/mitades			
	Representar repartos por medio de representaciones gráficas.	aprendizaje			Representar	reparto	Gráfica	partitiva	
	Relacionar repartos entre dos y mitades.	aprendizaje	Relacionar			Reparto/mitades		partitiva	
	Generar situaciones en las que se relacionen los conceptos de doble y mitad.	aprendizaje			Generar	Doble/mitad			
	Identificar el símbolo de la división para saber explicar el reparto que realiza.	aprendizaje	Identificar			División/reparto	simbólica	partitiva	
	Saber realizar estimaciones mediante procedimientos sencillos.	aprendizaje	Saber			estimaciones			
G2	Identificar y comprender el concepto de reparto.	aprendizaje	Identificar/ comprender			reparto		partitiva	
	Interpretar representaciones gráficas.	aprendizaje	Interpretar				gráfica		
	Diseñar problemas de reparto.	aprendizaje			Diseñar	reparto		partitiva	
	Distinguir y comprender los diferentes elementos de la división.	aprendizaje	Distinguir/ comprender			Elementos de la división			
	Relacionar el concepto de reparto y resta sucesiva.	aprendizaje	Relacionar			Reparto/ resta sucesiva		Partitiva/ cuotitiva	
	Calcular mitades de números sencillos.	aprendizaje			Calcular	Mitades			
	Identificar la mitad de una serie de elementos.	aprendizaje	Identificar			Mitades			
Usar material físico-manipulativo.	Instrucción			Usar		Físico			

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G3	Realizar la división con material físico	aprendizaje			Realizar	División	Físico		
	Entender el concepto de división	aprendizaje	Entender			División			
	Comprender los términos de la división	aprendizaje	Comprender			Términos de la división			
	Conocer los tipos de división: exacta y entera	aprendizaje	Conocer			Tipos de división			
	Diferenciar entre división cuotitiva y partitiva	aprendizaje	Diferenciar			División cuotitiva y partitiva		Partitiva/ cuotitiva	
	Adquirir el procedimiento de la división	aprendizaje			Adquirir	Algoritmo de división			
	Utilizar la prueba de la división para comprobar dichas divisiones	aprendizaje			Utilizar	Prueba de la división			
	Aplicar la división a problemas cotidianos	aprendizaje			Aplicar	Problemas de división		Personal	
	Integrar la división a la vida diaria	aprendizaje	Integrar			División		Personal	
	Calcular de manera mental con distintos tipos de operaciones	aprendizaje			Calcular	operaciones			
	Elabora problemas de división de forma autónoma	aprendizaje			Elaborar	Problemas de división			
	Saber dividir entre un número de más de una cifra	aprendizaje	Saber			Dividir con n° de más de una cifra	Simbólico		
Resuelve problemas	aprendizaje			Resuelve	Problemas				
G4	Conocer los distintos usos y tipos de la división.	aprendizaje	Conocer			Usos y tipos de división			
	Elegir los cálculos correctos para realizar un problema	aprendizaje	Elegir			Cálculos/ problemas			
	Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos	aprendizaje	Contrastar						
	Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas	aprendizaje	Crear		Aplicar	Algoritmo de la división/ problemas			
	Aplicar algoritmos de cálculo correspondiente a la suma, resta, multiplicación y división.	aprendizaje			Aplicar	Suma/ resta/ multiplicación/ división			

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido		Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	
G4	Relacionar los términos de la división.	aprendizaje	Relacionar			Términos de la división		Personal
	Usar cálculos mentales para la resolución de problemas.	aprendizaje			Usar	Cálculo mental/ problemas		
	Resolver problemas sencillos de la vida cotidiana utilizando la división.	aprendizaje			Resolver	División/ problemas		
	Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema.	aprendizaje	Reflexionar			Problema		
	Diferenciar problemas de una y dos etapas.	aprendizaje	Diferenciar			Problemas de una y dos etapas		
	Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera.	aprendizaje	Analizar			Funciones del resto/ problemas de división		
	Aplicar pasos previos para resolver un problema.	aprendizaje			Aplicar	Problemas		
Elegir los cálculos correctos para realizar un problema.	aprendizaje	Elegir			Cálculos/ problemas			
G5	Relacione la división como inversa de la multiplicación.	aprendizaje	Relacione			División como inversa de la multiplicación		
	Plantea un problema que se resuelva utilizando la operación de división.	aprendizaje			Plantea	Operación de división/ problema		
	Plantea y resuelva un problema con el inverso.	aprendizaje			Plantea/ Resuelva	Problema con el inverso		
	Enuncie y relacione los distintos tipos de problemas de división.	aprendizaje	Relacione		Enuncie	Problemas de división		
	Entienda e interprete las propiedades de la división.	aprendizaje	Entienda/ interprete			Propiedades de la división		
	Distinga entre división exacta y no exacta.	aprendizaje	Distinga			División exacta y no exacta		
	Distingue e interprete los dos tipos de división.	aprendizaje	Distinga/ interprete			Tipos de división		
Comprenda e identifica los términos de la división.	aprendizaje	Comprenda/ Identifica			Términos de la división			

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G5	Relacione y comprenda los términos de divisor, múltiplo, mcm, mcd.	aprendizaje	Relacione/ comprenda			Divisor/ múltiplo/ mcm/ mcd			
	Relacione y distinga entre los conceptos de división y divisor.	aprendizaje	Relacione/ distinga			División/ divisor			
	Comprenda y memorice el algoritmo de la división.	aprendizaje	Comprenda Memorice			Algoritmo de la división			
	Interprete y memorice la comprobación del resultado de la división.	aprendizaje	Interprete Memorice			Comprobación de la división			
G6	Comprende el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana.	aprendizaje	Comprende			Significado de la división/ Problemas		Personal	
	Identifica los tipos de división y sus propiedades.	aprendizaje	Identifica			Tipos de división/ propiedades de la división			
	Comprende el algoritmo de la división.	aprendizaje	Comprende			Algoritmo de la división			
	Aplica en contextos reales la división para repartir y para agrupar.	aprendizaje			Aplica	División		Partitiva/ cuotitiva	
	Identifica y usa los términos de la división.	aprendizaje	Identifica		usa	Términos de la división			
	Utiliza estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones.	aprendizaje			Utiliza	Cálculos con divisiones			
	Aplica el algoritmo de la división.	aprendizaje			Aplica	Algoritmo de la división			
	Opera con divisores de tres cifras.	aprendizaje			Opera	Divisiones con divisores de tres cifras			
Opera mediante estimaciones cuando la situación lo precisa.	aprendizaje			Opera	Estimaciones				
Detecta y usa relaciones numéricas.	aprendizaje	Detecta		usa	Relaciones numéricas				

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G6	Realiza cálculos numéricos por diferentes procedimientos.	aprendizaje			Realiza	Cálculos numéricos			
	Conoce distintas representaciones de los números y usa la más adecuada.	aprendizaje	Conoce			Representaciones numéricas	No específica		
	Maneja diversos procedimientos para resolver un problema aritmético.	aprendizaje			Maneja	Problemas aritméticos			
	Reproduce de forma oral y escrita el cálculo de la división.	aprendizaje			Reproduce	Cálculo de la división	Simbólico/verbal		
	Interpreta la división como operación inversa a la multiplicación.	aprendizaje	Interpreta			División como inversa a la multiplicación			

Tabla 4.1.6. Elementos utilizados por los grupos estudiados, en el organizador "Limitaciones de aprendizaje", en sus análisis cognitivo, durante la fase 1.

grupos	Dificultades	Errores	Observaciones
G1	3. Dificultades asociadas al lenguaje matemático	El uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, tratándose de un conflicto de precisión a la hora de expresarse oralmente.	Señalan dificultades de los tres tipos indicados en Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza (2015). De ellas solo consideran que dos tienen relación con su tema en el ciclo correspondiente.
	4. Dificultades en la comprensión del término "mitad".	El alumno presenta dificultades para asociar el concepto de mitad con la división entre 2. La lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos, como es el símbolo de la división.	
G2	Diferente papel que desempeñan los términos "dividendo" y "divisor" de las operaciones de la división. En la estructura de la división, el cociente está expresado en unidades diferentes. No siempre hay una correspondencia clara entre los verbos de acción y las operaciones multiplicativas. El verbo "repartir" se convierte en un referente de la división a la que no siempre corresponde. Las propiedades de las operaciones Comportamiento singular del 0 y 1 en la división	Los alumnos memorizan que el dividendo siempre es el número mayor y el divisor el número menor. Los alumnos no consideran unidades al dar los resultados o lo expresan de las mismas unidades que el dividendo y divisor Los alumnos pueden confundir el concepto de "repartir" con el de "partir", siendo diferentes verbos que implican diferentes acciones. Los alumnos también pueden repartir de forma no equitativa. Los alumnos atribuyen las propiedades de la multiplicación a la división. - Los alumnos pueden cometer errores a la hora de dividir una cantidad entre 0 porque piensan que si tienen 10 caramelos y lo dividen entre 0 amigos, ellos siguen teniendo 10 caramelos y plantan como resultado un 10, sin tener en cuenta el poder anulador del 0 en la división. Los alumnos, en el caso del 1, pueden confundir su papel en las estructuras aditivas con el papel que desempeña en las estructuras multiplicativas, es decir, el 1 siempre suma en las estructuras aditivas, sin embargo en las estructuras multiplicativas, su papel es neutro, ni suma ni resta. -Los alumnos pueden confundir problemas multiplicativos con problemas aditivos.	Reproduce dificultades y errores reflejadas en libro de texto (Flores et al., 2015), seleccionando algunas

grupos	Dificultades	Errores	Observaciones
	Existencia de múltiples verbos para el concepto de división	Los alumnos pueden considerar que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor, no a cada unidad del divisor. -Memorizar el procedimiento algorítmico de las operaciones, pero no siempre se puede identificar qué operación es la que corresponde.	
G3	Dificultad al introducir el nuevo procedimiento	Error al aplicar propiedades de otros temas a la división Error al dejar el resto como un número mayor que el dividendo	Se inspiran en libro de texto, seleccionando algunas dificultades y señalando varios errores de cada una de ellas.
	Dificultad en la realización del algoritmo de la caja	Error en la realización de la operación de derecha a izquierda Error en el valor del posicionamiento de la cifras	
	Dificultad de comprensión e identificación de los términos	Error en no saber reconocer cual es el divisor y dividendo Error al aplicar propiedades de otros temas a la división Error de asociar ciertos verbos a la operación de dividir cuando no lo es	
	Dificultad en el verbo de acción para realizar la operación		
G4	Dificultad del propio algoritmo de la división	La división posee conduce a error ya que se lleva a cabo de izquierda a derecha mientras que todos los demás se ejecutan de derecha a izquierda, aporta dos resultados (cociente y resto) mientras que en los otros se busca un solo resultado. Fallos de suma, resta o multiplicación, olvidar “llevar” o estimaciones incorrectas.	Organizan las dificultades en dos tipos: en torno a la división y en relación a la consecución de problemas. Dentro estas clases copian literalmente partes del libro de texto.
	Problemas con las operaciones básicas al dividir	Colocar los datos en el lugar incorrecto y crear combinaciones propias de las reglas.	
	Dificultad en el orden de los pasos y en la colocación de los datos en el algoritmo	Los errores son generados principalmente por desconocer las relaciones numéricas entre dividendo, divisor, cociente y resto.	
	Dificultad en la identificación de las relaciones numéricas	Para los escolares es difícil comprender la singularidad de 0 de no poder ocupar el papel de divisor. El manejo de 0 como sinónimo de acción aditiva neutra les lleva a pensar que realiza el mismo papel en la división, por lo que repartir entre 0 es igual a dejar invariantes en el dividendo.	
	Dificultad para comprender la distinción del 0 y el 1 en las divisiones	Por otra parte el 1 por cualquier número da el mismo resultado.	
	Dificultad de comprensión lectora en matemáticas	El principal error a destacar, es que el verbo repartir se convierte en un referente de la división que no siempre corresponde.	

grupos	Dificultades	Errores	Observaciones
	Dificultad en el razonamiento y la elección del mismo	No verifica el razonamiento y operaciones realizadas, aplica las propiedades a operaciones que no las verifican	
	Ordena de forma ilógica los datos del problema	Toma los datos de manera arbitraria y operan con ellos sin sistematización alguna.	
	Dificultad en el recuento	Errores comunes de suma, resta, multiplicación y división. Explicación poco coherente del problema	
	Dificultades para resolver el problema oralmente	Considerar que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor, no a cada unidad del divisor.	
	Dificultades en la ejecución del problema		
G5	Dificultad relativas a la complejidad de las operaciones multiplicativas	La complejidad de las operaciones multiplicativas es mayor que la de las aditivas, esta complejidad aparece por ejemplo cuando introducimos los problemas de aritmética ya que no es tan fácil entenderlo para los alumnos como si se trata de una operación de reparto o resta repetida. Por ejemplo al utilizar los términos de “tantas veces”, “mitad”, “tercera parte”. - La diversidad de los problemas lleva a los alumnos a tener dificultad a la hora de entender cuándo se debe utilizar operaciones aditivas o multiplicativas para resolverlos. Ya que tenemos más problemas multiplicativos (resta repetida, comparar, repartir) que aditivos y presentan mayor dificultad. - Dificultad a la hora de identificar los términos de la división (dividendo, divisor, cociente y resto) – Dificultad para considerar las unidades a la hora de dar el resultado	Copia extensa del libro de texto, en la que han incluido como errores algunas apreciaciones que corresponden a dificultades.
	Dificultades semánticas debidas a obstáculos por el lenguaje	- Las principales dificultades semánticas proceden de que no siempre hay una correspondencia clara entre los verbos de acción y las operaciones multiplicativas. El verbo “repartir” se convierte en un referente de la división a la que no siempre corresponde. - Dificultades de tipo estructural. Esto quiere decir que el alumno atribuye propiedades a la división que no son correctas, pues confunde las propiedades de la división con las propiedades de la multiplicación. - Dificultad significativa del 0 y el 1 en la división. Los alumnos tienen dificultad para comprender que el 0 no puede ocupar el papel de divisor y que siempre que ocupa	

grupos	Dificultades	Errores	Observaciones
Dificultades relacionadas con la enseñanza	<p>el papel de dividendo el resultado es 0. Para el 1, a los escolares les resulta difícil entender que “algo entre 1 es ese algo”.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Los alumnos son capaces de memorizar fácilmente el algoritmo de la división pero no llegan a comprender el significado de dicho procedimiento ni a identificar los problemas los cuales se han de resolver mediante dicho algoritmo. - Confundir problemas multiplicativos con problemas aditivos. - Considerar que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor, no a cada unidad del divisor. 		
G6	<p>Restas de números grandes, normalmente de 2 cifras, y que debe realizar de forma mental. Dejar restos intermedios iguales o mayores que el divisor y omitir ceros en el cociente. Los errores en la tabla de multiplicar dan lugar a errores de todo tipo en el algoritmo de la división. Los errores y dificultades que el alumno tenga en la resta y el producto se van a reproducir en la división con mayor fuerza y, así mismo, la lentitud en el automatismo de las citadas operaciones va a constituir, con mucha frecuencia, una fuente de error en la división. Dificultad de elegir la operación adecuada para resolver un problema simple de división.</p>		<p>Una sola lista de limitaciones, al margen de las señaladas en los documentos recomendados</p>

Tabla 4.2.1. Comparación entre la estructura conceptual planteada por cada grupo en el Análisis de Contenido y la que aparece en la Unidad Didáctica. Fase 2

Grupos	Estructura conceptual en el análisis de contenido	Estructura conceptual en la unidad didáctica
G1	<p>Hemos encontrado un único contenido adecuado en relación con el tema de “Inicio a la división”, extraído de la Orden de 17 de Marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (BOJA).</p> <p>2.11 Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades de números sencillos, series numéricas, para la búsqueda del complemento de un número y para resolver problemas de sumas y restas. De este contenido solamente nos quedaríamos con la parte en la que se tratan los conceptos de resta (resta sucesiva), mitades y dobles de números sencillos (puesto que la división se identifica como lo inverso a la multiplicación) y series numéricas.</p> <p>Podemos decir que este es el único contenido adecuado para el desarrollo de nuestra unidad puesto que se habla de dobles y mitades de números sencillos y series numéricas siendo el comienzo para una buena introducción al aprendizaje de la división en segundo de Educación Primaria.</p> <p>Conceptos a tratar: Resta (resta sucesiva) Mitades Dobles (División como inverso a la multiplicación) Series Numéricas</p>	<p>Podemos decir que este es el único contenido adecuado para el desarrollo de nuestra unidad puesto que se habla de dobles y mitades de números sencillos y series numéricas siendo el comienzo para una buena introducción al aprendizaje de la división en segundo de Educación Primaria.</p> <p>2.11 Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades de números sencillos, series numéricas, para la búsqueda del complemento de un número y para resolver problemas de sumas y restas. De este contenido solamente nos quedaríamos con la parte en la que se tratan los conceptos de resta (resta sucesiva), mitades y dobles de números sencillos (puesto que la división se identifica como lo inverso a la multiplicación) y series numéricas.</p> <p>Conceptos a tratar: Reparto Mitades Resta sucesiva Dobles (divisiones como inverso de la multiplicación) Series numéricas</p>
G2	<p><u>Contenido</u></p> <p>2.11. Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades de números sencillos, series numéricas, para la búsqueda del complemento de un número y para resolver problemas de sumas y restas.</p> <p><u>Conceptos</u> Reparto Mitad División Dividendo Divisor Cociente Resto</p> <p><u>Procedimientos</u> Repartir Desarrollar Calcular Resolver</p>	<p><u>Contenido</u></p> <p>2.11. Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades de números sencillos, series numéricas, para la búsqueda del complemento de un número y para resolver problemas de sumas y restas.</p> <p><u>Conceptos</u> Reparto Mitad División Dividendo Divisor Cociente Resto</p> <p>Agrupamiento <u>Procedimientos</u> Repartir Desarrollar Calcular</p>

Grupos	Estructura conceptual en el análisis de contenido	Estructura conceptual en la unidad didáctica
G3	<p>Contenidos matemáticos del BOJA, relacionados con el tema de la división. Conocimientos previos- (Primer ciclo). 2.11. Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades de números sencillos, series numéricas. Conocimientos que deben ser adquiridos entre los dos curso- (Segundo ciclo). 2.8. Significado de las operaciones dividir y su utilidad en la vida cotidiana. Expresión matemática oral y escrita de las operaciones y el cálculo: suma, resta, multiplicación y división. 2.10. Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar, como operación inversa a la multiplicación. 2.13. Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones sencillas: representaciones gráficas, repetición de medidas, repartos de dinero, juegos... Conocimientos finales de etapa- (Segundo ciclo). 2.18. Propiedades de las operaciones. Jerarquía y relaciones entre ellas. Uso de paréntesis. 2.20. Elaboración y utilización de estrategias personales y académicas de cálculo mental Relacionadas con números naturales. 2.21. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos mentales. 2.22. Utilización de operaciones de división con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. Automatización de los algoritmos. 2.26. Obtención de todos los divisores de cualquier número menor que 100. <u>Contenidos propios del tema de la división con respecto al segundo ciclo:</u> 1. Concepto de división. 1.1 Términos de la división. 1.2 Tipos de división: Exacta y Entera. 1.3 División partitiva (reparto) y cuotitiva (resta sucesiva). 1.4 Procedimiento de la división. 1.5. Prueba de la división. 1.6 División como operación inversa. 1.7 Propiedad del resto (resto parcial, resto final). 1.8 División entre un número de dos cifras. 1.9 División entre un número de tres cifras. 1.10. Ceros en el cociente. 1.11. División entre 10, 100 o 1000. 1.12 Operaciones combinadas</p>	<p>Resolver Agrupar <u>Contenidos propios del tema de la división con respecto al segundo ciclo:</u> 1. Concepto de división. 1.1 Términos de la división. 1.2 Tipos de división: Exacta y Entera. 1.3 División partitiva (reparto) y cuotitiva (resta sucesiva). 1.4 Procedimiento de la división. 1.5. Prueba de la división. 1.6 División como operación inversa. 1.7 Propiedad del resto (resto parcial, resto final). 1.8 División entre un número de dos cifras. 1.9 División entre un número de tres cifras. 1.10. Ceros en el cociente. 1.11. División entre 10, 100 o 1000. 1.12 Operaciones combinadas 1.13. Producto cartesiano: factor y producto desconocido. 2. Importancia de la división en la vida cotidiana. (Resolución de problemas). 3. Cálculo mental.</p>

Grupos	Estructura conceptual en el análisis de contenido	Estructura conceptual en la unidad didáctica
G4	<p>1.13. Producto cartesiano: factor y producto desconocido. 2. Importancia de la división en la vida cotidiana. (Resolución de problemas). 3. Cálculo mental.</p> <p><u>Contenidos</u> - Operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. - La división como reparto. - Tipos de división: exacta y entera. - Términos de la división: dividendo, divisor, cociente y resto. - Prueba de la división. - Resolución de problemas. - Tipos de problemas: partición o distribución, extracción o cuotición, reducción (cociente escalar) y cociente cartesiano. - Cálculo mental.</p>	<p><u>Contenidos.</u> 1. Operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. 2. Tipos de división: exacta y entera. 3. Términos de la división: dividendo, divisor, cociente y resto. 4. Prueba de la división. 5. Resolución de problemas. 6. Tipos de problemas: partición o distribución, extracción o cuotición, reducción (cociente escalar) y cociente cartesiano. 7. Cálculo mental.</p>
G5	<p><u>Contenidos</u> -La división como operación inversa de la multiplicación. -Propiedades de la división. -La división exacta y la división no exacta (Reparto exacto y no exacto). -División partitiva o “de reparto” y división cuotitiva o “resta repetida”. -Escritura y planteamiento de un problema, que se resuelva utilizando alguna división. -Problemas que se resuelvan multiplicando por el inverso, para ver que se obtiene el mismo resultado. -Problemas de estructura multiplicativa: .Proporcionalidad simple. .Comparación multiplicativa. .Igualación. .Producto Cartesiano. .Producto de medidas. .Problemas de más de una etapa. -Algoritmo de la división (Algoritmo extendido de Euclides). -Términos de la división: Dividendo (D), Divisor (d), Cociente @ y Resto @. -Prueba de la división como comprobación ($D=d \cdot C + R$). -Definición de divisor y múltiplo. -Factorización: Mínimo común múltiplo, Máximo común divisor. -Números primos y números compuestos. -Diferencias entre las nociones de división y divisor (“a” divide a “b” \rightarrow no es igual que “a” dividido por “b”).</p>	<p>Apartado de “contexto Curricular”, se presenta una tabla con contenidos, criterios de evaluación y objetivos del área para la etapa. Los contenidos son: -Significado de la división y utilidad en la vida cotidiana -Expresión matemática oral y escrita de la división -Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar, como operación inversa a la multiplicación. -Propiedades de la división -Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones sencillas -Utilización de los algoritmos estándar de la división por una cifra</p> <p><u>Contenidos</u> -Términos de la división: Dividendo (D), divisor (d), Cociente y Resto -La división como operación inversa de la multiplicación -La división exacta y la división no exacta (reparto exacto y no exacto) -Propiedades de la división -Escritura y planteamiento de un problema, que se resuelva utilizando alguna división -Problemas que se resuelven multiplicando por el inverso, para ver que se obtiene el mismo resultado -Algoritmo de la división: Dividendo de varias cifras y divisor de una cifra Dividendo de varias cifras y divisor de dos cifras Divisiones con ceros en el cociente Dividendo de varias cifras y divisor de tres cifras -Propiedades del resto</p>

Grupos	Estructura conceptual en el análisis de contenido	Estructura conceptual en la unidad didáctica
G6	<p><u>Contenidos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> -Significado de las operaciones de multiplicar y dividir y su utilidad en la vida cotidiana. -Expresión matemática oral y escrita de las operaciones y el cálculo: suma, resta, multiplicación y división. -Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar, como operación inversa a la multiplicación. -Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con multiplicaciones y divisiones por una cifra, aplicándolos en su práctica diaria. - Identificación y uso de los términos de las operaciones básicas. -Tipos de división y sus propiedades. -Relación entre fracción y número decimal, aplicación a la ordenación de fracciones. -Utilización de operaciones de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. -Automatización de los algoritmos. -Equivalencias fundamentales. -Divisor con tres cifras. 	<p>-Prueba de la división como comprobación</p> <hr/> <p><u>Contenidos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> -Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones por dos o tres cifras, aplicándolos en su práctica diaria. -Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar, como operación inversa a la multiplicación. -Significado de las operaciones de multiplicar y dividir y su utilidad en la vida cotidiana. -Tipos de división y sus propiedades. -Automatización de los algoritmos. -Utilización de operaciones de división en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. -Divisor con tres cifras.

Tabla 4.2.2. *Sistemas de Representación detectados por los diferentes grupos en el trabajo durante el curso y en la Unidad Didáctica. Fase 2*

Grupos	SR en el primer trabajo de AC	SR en el apartado de AC de la UD
G1	<u>Resta (resta sucesiva)</u> Sistemas de representación simbólica – verbal Sistemas de representación Gráfica <u>Mitades</u> Sistemas de representación simbólica – verbal Sistemas de representación Gráfica <u>Dobles (División como inverso a la multiplicación)</u> Sistemas de representación simbólica – verbal <u>Series Numéricas</u> Sistemas de representación simbólica – verbal	<u>Reparto</u> Sistemas de representación simbólica/verbal y gráfica <u>Mitades</u> Sistemas de representación simbólica/verbal, gráfico y físico <u>Resta sucesiva</u> Sistemas de representación simbólica/verbal, gráfico y físico <u>Dobles (División como inverso a la multiplicación)</u> Sistemas de representación simbólica/verbal, gráfico y físico <u>Series Numéricas</u> Sistemas de representación simbólica/verbal
G2	Físicas: bloques multibase Gráfica Simbólica	Física-manipulativa: bloques multibase Gráfica
G3	<u>Resta repetida y Reparto:</u> Modelo Discreto o de conjunto Modelo Lineal Modelo De área Representación Gráfica	<u>Representación gráfica:</u> Resta repetida, Resta como reparto <u>Representación lineal:</u> como resta repetida y como reparto <u>Representación simbólica</u> <u>Representación física</u>
G4	Físicos: Materiales manipulativos: Ábaco, Modelo de medida (regletas) Gráficos: Material multibase, Modelo cardinal, Modelos lineales, Configuración puntual, Modelo funcional de la división y operación inversa. Simbólicos: Verbal, Numérica: Modelo numérico, Algoritmo de la división.	Físicos: Material manipulativo familiar, Ábaco, Regleta de Cuisenaire Gráficos: Material multibase, Modelo cardinal, Modelos lineales, Configuración puntual, Modelo funcional de la división y operación inversa Simbólicos: Verbal, Numérica: Modelo numérico, Algoritmo de la división
G5	Modelos Gráficos: Discreto o de conjunto, Lineal, Área Modelo simbólico Modelo Físico: Material Multibase	Modelos Gráficos: Discreto o de conjunto, lineal, área Modelo simbólico Modelo Físico: Material Multibase, Ábaco horizontal, Ábaco vertical
G6	Representación física: se divide entre materiales de su entorno y materiales específicos para la didáctica. Representación gráfica: recta numérica. Representación simbólica: verbales y numéricas. Modelos: lineales, cardinales, de medida , numéricos, de razón aritmética, funcionales	Representación física: se divide entre materiales de su entorno y materiales específicos para la didáctica. Representación gráfica: recta numérica. Representación simbólica: verbales y numéricas. Modelos: lineales, cardinales, numéricos, de razón aritmética, funcionales

Tabla 4.2.3. Fenomenología en el primer trabajo de Análisis de Contenido y en la Unidad Didáctica. Fase 2

Grupos	Fenomenología en el AC	Fenomenología en el apartado de AC de la UD
G1	<p><u>Resta (resta sucesiva)</u> Este concepto lo vemos día a día por ejemplo, a la hora del postre. Si en una familia hay 4 personas y repartimos un pack de 4 yogures, vamos dando 1 a cada uno (resta sucesiva) hasta que se reparten los 4.</p> <p><u>Mitades</u> Aquí podemos encontrar otro ejemplo del concepto de mitad pero en forma de problema. En el que el alumno/a deberá haber aprendido el concepto de mitad sabiendo que tiene que repartir los 18 bañadores entre 2.</p> <p><u>Dobles (División como inverso a la multiplicación)</u> En este caso se le enseñaría al alumno que cuando multiplica un número por 2 se hace el doble. Y si el número final se divide entre dos se hace la mitad. Es decir justo lo inverso.</p> <p><u>Series Numéricas</u> Para entender mejor este concepto abstracto se le puede explicar al niño el concepto de serie como conjunto de cosas (números) una detrás de otra, en cierto orden.</p>	<p><u>Reparto</u> Se muestran los mismos ejemplos de la <u>resta sucesiva</u></p> <p><u>Mitades</u> Ejemplo de la vida cotidiana, en el recreo repartir una torta entre dos. <u>Resta sucesiva</u> El mismo ejemplo del yogures y se agrega una de tiendas de campaña</p> <p><u>Dobles (División como inverso a la multiplicación)</u> Se mantiene el mismo ejemplo</p> <p><u>Series numéricas</u> Se mantiene lo mismo</p>
G2	<p><u>Problemas</u> Tras analizar diferentes libros de 2º de Primaria, hemos encontrado que la mayoría de ellos utilizan tipos de problemas de isomorfismo de medidas con incógnita en tasas. Estos tipos de problemas tienen un orden de enseñanza de tipo 1, dado que estos son los menos complejos. Por ejemplo: -Juan tiene 12 lápices y tiene que repartirlos en partes iguales en 3 botes, ¿Cuántos lápices van en cada bote? ¿Sobra alguno? -María reparte en partes iguales 24 rosquillas entre sus 3 nietos, ¿Cuántas rosquillas dará a cada nieto?</p> <p><u>Sentido o Significado</u> El sentido que le podemos dar a la mayoría de los problemas y actividades que hemos encontrado en la consulta de varios libros de texto de 2º de Ed. Primaria son: -Uso de la resta sucesiva. -Concepto de la división como reparto. -Cálculos simples de mitades.</p>	<p>El sentido que le podemos dar a la mayoría de los problemas y actividades que hemos encontrado en la consulta de varios libros de texto de 2º de Ed. Primaria son:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Uso de la resta sucesiva. • Concepto de la división como reparto. • Cálculos simples de mitades.
G3	<p>Significado: Para adquirir los conocimientos sobre la división, consideramos importante que los alumnos conozcan, lo relevante y presente que tenemos en nuestra vida cotidiana la división. Para ellos hemos realizado el siguiente listado con algunos de los problemas más frecuentes que podemos encontrar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemas de división partitiva • Problemas de división cuotitiva • Problemas de producto cartesiano • Problemas de razón 	<p>Significado: Para adquirir los conocimientos sobre la división, consideramos importante que los alumnos conozcan, lo relevante y presente que tenemos en nuestra vida cotidiana la división. Para ellos hemos realizado el siguiente listado con algunos de los problemas más frecuentes que podemos encontrar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemas de división partitiva • Problemas de división cuotitiva • Problemas de producto cartesiano

Grupos	Fenomenología en el AC	Fenomenología en el apartado de AC de la UD
	<ul style="list-style-type: none"> • Problemas de comparación multiplicativa • Problemas de relación entre parte y todo 	<ul style="list-style-type: none"> • Problemas de comparación multiplicativa
G4	<p>Sentido y usos. Enseñar una operación implica generalmente abordar los diversos problemas que se resuelven o se relacionan con ella. En la división, ha de incluirse lo problemas multiplicativos. Por tanto, para abordar la variedad de problemas propios de la división durante el segundo ciclo de Primaria del alumno, es preciso trabajar con problemas de reparto, partición, organizaciones rectangulares y series proporcionales.</p> <p>La nueva novedad del segundo ciclo son los problemas de interacción.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. reparto 2. resta sucesiva 3. producto Cartesiano. 4. reducción <p>5. interacciones 6. El encuadramiento del cociente da la posibilidad de “acortar” al máximo el algoritmo desplegado 7. Algoritmo convencional</p>	<p>Se ha de distinguir que la división se puede presentar en las siguientes aplicaciones: reparto, partición o distribución; extracción o cuotición; reducción; y cociente cartesiano.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Reparto 2. Extracción 3. Cociente cartesiano 4. Reducción
G5	<p>Situaciones y fenómenos</p> <ul style="list-style-type: none"> - Situaciones de reparto exacto, donde se manifieste la división partitiva como por - Situaciones de reparto no exacto, es decir, aquellas en el que al realizar la división el resto es distinto de cero. - Agrupar, saber el número de grupos en el que puedo organizar un conjunto dependiendo del número de elementos de cada grupo. (Resta repetida, división cuotitiva). - A veces en la vida cotidiana utilizamos el resto pero de distinta manera: Tenemos 12 niños y que lo queremos dividir en clase de 5. Cuantos niños me sobran o cuantas clases necesito para que ningún niño se quede sin clase. - No solo a la hora de repartir usamos la división si no a la hora de partir un mismo objeto la utilizamos: Cuando hacemos una tarta y queremos partirla en porciones de igual tamaño. 	<ul style="list-style-type: none"> - Situaciones de reparto exacto, donde se manifieste la división partitiva. - Situaciones de reparto no exacto, es decir, aquellas en el que al realizar la división el resto es distinto de cero. - Agrupar, saber el número de grupos en el que puedo organizar un conjunto dependiendo del número de elementos de cada grupo. (Resta repetida, división cuotitiva). - A veces en la vida cotidiana utilizamos el resto pero de distinta manera - No solo a la hora de repartir usamos la división si no a la hora de partir un mismo objeto la utilizamos
G6	<p><u>Usos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Resta sucesiva - Repartir - Partir - Operar - Distribuciones rectangulares - Problemas con el resto 	<p><u>Usos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Resta sucesiva Repartir Partir Operar Distribuciones rectangulares Problemas con el resto

Grupos	Fenomenología en el AC	Fenomenología en el apartado de AC de la UD
	<p><u>Situaciones y fenómenos</u></p> <p>-De proporcionalidad simple: el contexto más familiar de la división es el de reparto. Dentro de la división nos encontramos con:</p> <ul style="list-style-type: none"> •División partitiva (Reparto reiterado de unidades simples y reparto reiterado de grupos de objetos) •División cuotitiva (Medida y sustracción repetida) <p>-De comparación.</p> <ul style="list-style-type: none"> •Comparación de disminución con el comparado desconocido. •Comparación de disminución con el referente desconocido. •Comparación de disminución con el escalar desconocido. <p>-De producto cartesiano.</p> <ul style="list-style-type: none"> •Situaciones combinatorias. 	<p><u>Situaciones y fenómenos</u></p> <p>De proporcionalidad simple: el contexto más familiar de la división es el de reparto. Dentro de la división nos encontramos con:</p> <p>División partitiva (Reparto reiterado de unidades simples y reparto reiterado de grupos de objetos)</p> <p>División cuotitiva (Medida y sustracción repetida)</p> <p>De comparación</p> <p>Comparación de disminución con el comparado desconocido.</p> <p>Comparación de disminución con el referente desconocido.</p> <p>Comparación de disminución con el escalar desconocido.</p> <p>De producto cartesiano.</p> <p>Situaciones combinatorias.</p>

Tabla 4.2.4. *Objetivos específicos que se plantean en el primer trabajo de análisis cognitivo y los que mencionan en la Unidad Didáctica. Fase 2*

Grupos	Obj. Del A. Cognitivo	Obj. Del A. cognitivo en la UD
G1	<ol style="list-style-type: none"> 1. Calcular la mitad y el doble mediante acciones de repartos de objetos cotidianos con sus compañeros. 2. Elaborar series numéricas de números pequeños utilizando mitades. 3. Representar repartos por medio de representaciones gráficas. 4. Relacionar repartos entre dos y mitades. 5. Generar situaciones en las que se relacionen los conceptos de doble y mitad. 6. Identificar el símbolo de la división para saber explicar el reparto que realiza. 7. Saber realizar estimaciones mediante procedimientos sencillos. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Calcular la mitad y el doble mediante acciones de repartos de objetos cotidianos con sus compañeros. 2. Elaborar series numéricas de números pequeños utilizando mitades. 3. Representar repartos por medio de representaciones gráficas. 4. Relacionar repartos entre dos y mitades. 5. Generar situaciones en las que se relacionen los conceptos de doble y mitad. 6. Identificar el símbolo de la división para saber explicar el reparto que realiza. 7. Saber realizar estimaciones mediante procedimientos sencillos.
G2	<ol style="list-style-type: none"> O.1. Identificar y comprender el concepto de reparto. O.2. Interpretar representaciones gráficas. O.3. Diseñar problemas de reparto. O.4. Distinguir y comprender los diferentes elementos de la división. O.5. Relacionar el concepto de reparto y resta sucesiva. O.6. Calcular mitades de números sencillos. O.7. Identificar la mitad de una serie de elementos. O.8. Usar material físico-manipulativo. 	<ol style="list-style-type: none"> O.1. Identificar la mitad de una serie de elementos. O.2. Calcular mitades de números sencillos. O.3. Comprender el concepto de agrupamiento usando material físico-manipulativo. O.4. Interpretar el agrupamiento a través de representaciones gráficas. O.5. Relacionar el concepto de agrupamiento y resta sucesiva. O.6. Comprender el concepto de reparto usando material físico-manipulativo. O.7. Interpretar el reparto a través de representaciones gráficas. O.8. Diseñar problemas de reparto. O.9. Conocer los diferentes elementos de la división.
G3	<ol style="list-style-type: none"> 1. Realizar la división con material físico 2. Entender el concepto de división 3. Comprender los términos de la división 4. Conocer los tipos de división: exacta y entera 5. Diferenciar entre división cuotitiva y partitiva 6. Adquirir el procedimiento de la división 7. Utilizar la prueba de la división para comprobar dichas divisiones 8. Aplicar la división a problemas cotidianos 9. Resuelve problemas 10. Integrar la división a la vida diaria 11. Calcular de manera mental con distintos tipos de operaciones 12. Elabora problemas de división de forma autónoma 13. Saber dividir entre un número de más de una cifra 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Realizar la división con material físico 2. Entender el concepto de división 3. Comprender los términos de la división 4. Conocer los tipos de división: exacta y entera 5. Adquirir el procedimiento de la división 6. Utilizar la prueba de la división para comprobar dichas divisiones 7. Aplicar la división a problemas cotidianos 8. Resuelve problemas 9. Integrar la división a la vida diaria 10. Calcular de manera mental con distintos tipos de operaciones 11. Elabora problemas de división de forma autónoma 13. Saber dividir entre un número de más de una cifra
G4	<p>Conceptuales</p> <ol style="list-style-type: none"> 2. Conocer los distintos usos y tipos de la división. 10. Elegir los cálculos correctos para realizar un problema 11. Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos 12. Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas 	<p>Conceptuales</p> <ol style="list-style-type: none"> 2. Conocer los distintos usos y tipos de la división. 10. Elegir los cálculos correctos para realizar un problema. 11. Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos. 12. Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas.

Grupos	Obj. Del A. Cognitivo	Obj. Del A. cognitivo en la UD
	<u>Procedimentales</u> 1. Aplicar algoritmos de cálculo correspondiente a la suma, resta, multiplicación y división. 3. Relacionar los términos de la división. 4. Usar cálculos mentales para la resolución de problemas. 5. Resolver problemas sencillos de la vida cotidiana utilizando la división. 6. Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema. 7. Diferenciar problemas de una y dos etapas. 8. Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera. 9. Aplicar pasos previos para resolver un problema. 10. Elegir los cálculos correctos para realizar un problema. 11. Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos. 12. Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas.	<u>Procedimentales</u> 1. Aplicar algoritmos de cálculo correspondiente a la suma, resta, multiplicación y división. 3. Relacionar los términos de la división. 4. Usar cálculos mentales para la resolución de problemas. 5. Resolver problemas sencillos de la vida cotidiana utilizando la división. 6. Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema. 7. Diferenciar problemas de una y dos etapas. 8. Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera. 9. Aplicar pasos previos para resolver un problema. 10. Elegir los cálculos correctos para realizar un problema. 11. Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos. 12. Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas.
G5	<u>Hechos:</u> O1: Relacione la división como inversa de la multiplicación. O6: Plantea un problema que se resuelva utilizando la operación de división. O7: Plantea y resuelva un problema con el inverso. O8: Enuncie y relacione los distintos tipos de problemas de división. <u>Conceptos:</u> O2: Entienda e interprete las propiedades de la división. O3: Distinga entre división exacta y no exacta. O4: Distingue e interprete los dos tipos de división. O9: Comprenda e identifica los términos de la división. O11: Relacione y comprenda los términos de divisor, múltiplo, mcm, md. O12: Relacione y distinga entre los conceptos de división y divisor. <u>Procedimientos:</u> O5: Comprenda y memorice el algoritmo de la división. O10: Interprete y memorice la comprobación del resultado de la división.	<u>Hechos:</u> O8: Enuncie y relacione los distintos tipos de problemas de división. <u>Conceptos:</u> O1: Relacione la división como inversa de la multiplicación. O2: Entienda e interprete las propiedades de la división. O3: Distinga entre división exacta y no exacta. O4: Distingue e interprete los dos tipos de división. O5: Comprenda y memorice el algoritmo de la división. O9: Comprenda e identifica los términos de la división. O10: Interprete y memorice la comprobación del resultado de la división. O11: Entienda e interprete la propiedad del resto. <u>Procedimientos:</u> O5: Comprenda y memorice el algoritmo de la división. O6: Plantea un problema que se resuelva utilizando la operación de división. O7: Plantea y resuelva un problema con el inverso. O10: Interprete y memorice la comprobación del resultado de la división.
G6	1. Comprende el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana. 2. Reproduce de forma oral y escrita el cálculo de la división. 3. Interpreta la división como operación inversa a la multiplicación. 4. Identifica los tipos de división y sus propiedades. 5. Comprende el algoritmo de la división. 6. Aplica en contextos reales la división para repartir y para agrupar. 7. Identifica y usa los términos de la división.	<u>Objetivos conceptuales</u> 1. Comprender el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana. 2. Reproducir de forma oral y escrita el cálculo de la división. 3. Interpretar la división como operación inversa a la multiplicación. 4. Identificar los tipos de división y sus propiedades. 5. Comprender el algoritmo de la división. <u>Objetivos procedimentales</u>

Grupos	Obj. Del A. Cognitivo	Obj. Del A. cognitivo en la UD
	8. Utiliza estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones. 9. Aplica el algoritmo de la división. 10. Opera con divisores de tres cifras. 11. Opera mediante estimaciones cuando la situación lo precisa. 12. Detecta y usa relaciones numéricas. 13. Realiza cálculos numéricos por diferentes procedimientos. 14. Conoce distintas representaciones de los números y usa la más adecuada. 15. Maneja diversos procedimientos para resolver un problema aritmético.	6. Aplicar en contextos reales la división para repartir y para agrupar. 7. Identificar y usa los términos de la división. 8. Utilizar estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos mentales con divisiones. 9. Aplicar diferentes estrategias para las realizar las divisiones. 10. Aplicar el algoritmo de la división. 11. Operar con divisores de tres cifras. 12. Detectar y usar relaciones numéricas.

Tabla 4.2.5. *Tablas de Caracterización de los objetivos de cada grupo, comparando los citados en la Unidad Didáctica y en los trabajos previos. Fase 2*

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G1	Calcular la mitad y el doble mediante acciones de repartos de objetos cotidianos con sus compañeros.	aprendizaje			Calcular	Mitad/doble	físico	partitiva	personal
	Elaborar series numéricas de números pequeños utilizando mitades.	aprendizaje			Elaborar	Series numéricas/mitades			
	Representar repartos por medio de representaciones gráficas.	aprendizaje			Representar	reparto	Gráfica	partitiva	
	Relacionar repartos entre dos y mitades.	aprendizaje	Relacionar			Reparto/mitades		partitiva	
	Generar situaciones en las que se relacionen los conceptos de doble y mitad.	aprendizaje			Generar	Doble/mitad			
	Identificar el símbolo de la división para saber explicar el reparto que realiza.	aprendizaje	Identificar			División/reparto	simbólica	partitiva	
Saber realizar estimaciones mediante procedimientos sencillos.	aprendizaje	Saber			estimaciones				

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido		Situación	
			cog	cont	inst	contenido	SR		sentido
G2	Identificar y comprender el concepto de reparto.	aprendizaje	Identificar/ comprender			reparto		partitiva	
	Interpretar representaciones gráficas.	aprendizaje	Interpretar				gráfica		
	Diseñar problemas de reparto.	aprendizaje		Diseñar		reparto		partitiva	
	Distinguir y comprender los diferentes elementos de la división.	aprendizaje	Distinguir/ comprender			Elementos de la división			
	Relacionar el concepto de reparto y resta sucesiva.	aprendizaje	Relacionar			Reparto/ resta sucesiva		Partitiva/ cuotitiva	
	Calcular mitades de números sencillos.	aprendizaje		Calcular		Mitades			
	Identificar la mitad de una serie de elementos.	aprendizaje	Identificar			Mitades			
	Usar material físico-manipulativo.	Instrucción			Usar		Físico		
	Objetivos del análisis cognitivo de la unidad didáctica								
		Comprender el concepto de agrupamiento usando material físico-manipulativo.	aprendizaje	comprender			agrupamiento		físico
	Interpretar el agrupamiento a través de representaciones gráficas.	aprendizaje	interpretar			agrupamiento		gráfica	
	Relacionar el concepto de agrupamiento y resta sucesiva.	aprendizaje	relacionar			Agrupamiento/ resta sucesiva			
	Comprender el concepto de reparto usando material físico-manipulativo.	aprendizaje	Comprender			reparto		físico	
	Interpretar el reparto a través de representaciones gráficas.	aprendizaje	interpretar			reparto		gráfica	
	Conocer los diferentes elementos de la división	aprendizaje	conocer			Elementos de la división			

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido		Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	
G3	Realizar la división con material físico	aprendizaje			Realizar	División	Físico	
	Entender el concepto de división	aprendizaje	Entender			División		
	Comprender los términos de la división	aprendizaje	Comprender			Términos de la división		
	Conocer los tipos de división: exacta y entera	aprendizaje	Conocer			Tipos de división		
	Diferenciar entre división cuotitiva y partitiva	aprendizaje	Diferenciar			División cuotitiva y partitiva		Partitiva/ cuotitiva
	Adquirir el procedimiento de la división	aprendizaje	Adquirir			Algoritmo de división		
	Utilizar la prueba de la división para comprobar dichas divisiones	aprendizaje			Utilizar	Prueba de la división		
	Aplicar la división a problemas cotidianos	aprendizaje			Aplicar	Problemas de división		Personal
	Integrar la división a la vida diaria	aprendizaje	Integrar			División		Personal
	Calcular de manera mental con distintos tipos de operaciones	aprendizaje			Calcular	operaciones		
Elabora problemas de división de forma autónoma	aprendizaje			Elaborar	Problemas de división			
Saber dividir entre un número de más de una cifra	aprendizaje	Saber			Dividir con nº de más de una cifra	Simbólico		
Resuelve problemas	aprendizaje			Resuelve	Problemas			

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G4	Conocer los distintos usos y tipos de la división.	aprendizaje	Conocer			Usos y tipos de división			
	Elegir los cálculos correctos para realizar un problema	aprendizaje	Elegir			Cálculos/ problemas			
	Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos	aprendizaje	Contrastar						
	Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas	aprendizaje	Crear		Aplicar	Algoritmo de la división/ problemas			
	Aplicar algoritmos de cálculo correspondiente a la suma, resta, multiplicación y división.	aprendizaje			Aplicar	Suma/ resta/ multiplicación/ división			
	Relacionar los términos de la división.	aprendizaje	Relacionar			Términos de la división			
	Usar cálculos mentales para la resolución de problemas.	aprendizaje			Usar	Cálculo mental/ problemas			
	Resolver problemas sencillos de la vida cotidiana utilizando la división.	aprendizaje			Resolver	División/ problemas			Personal
	Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema.	aprendizaje	Reflexionar			Problema			
	Diferenciar problemas de una y dos etapas.	aprendizaje	Diferenciar			Problemas de una y dos etapas			
	Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera.	aprendizaje	Analizar			Funciones del resto/ problemas de división			
	Aplicar pasos previos para resolver un problema.	aprendizaje			Aplicar	Problemas			
	Elegir los cálculos correctos para realizar un problema.	aprendizaje	Elegir			Cálculos/ problemas			

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido		Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	
G5	Relacione la división como inversa de la multiplicación.	aprendizaje	Relacione			División como inversa de la multiplicación		
	Plantea un problema que se resuelva utilizando la operación de división.	aprendizaje			Plantea	Operación de división/ problema		
	Plantea y resuelva un problema con el inverso.	aprendizaje			Plantea/ Resuelva	Problema con el inverso		
	Enuncie y relacione los distintos tipos de problemas de división.	aprendizaje	Relacione		Enuncie	Problemas de división		
	Entienda e interpreta las propiedades de la división.	aprendizaje	Entienda/ interprete			Propiedades de la división		
	Distinga entre división exacta y no exacta.	aprendizaje	Distinga			División exacta y no exacta		
	Distingue e interprete los dos tipos de división.	aprendizaje	Distinga/ interprete			Tipos de división		
	Comprenda e identifica los términos de la división.	aprendizaje	Comprenda/Identifica			Términos de la división		
	Relacione y comprenda los términos de divisor, múltiplo, mcm, med.	aprendizaje	Relacione/ comprenda			Divisor/ múltiplo/ mcm/ med		
	Relacione y distinga entre los conceptos de división y divisor.	aprendizaje	Relacione/ distinga			División/ divisor		
	Comprenda y memorice el algoritmo de la división.	aprendizaje	Comprenda/ Memorice			Algoritmo de la división		
Interprete y memorice la comprobación del resultado de la división.	aprendizaje	Interprete/ Memorice			Comprobación de la división			
Objetivos del análisis cognitivo de la unidad didáctica								
	Entienda e interpreta la propiedad del resto.	aprendizaje	Entienda/ interpreta			Propiedad del resto		

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G6	Comprende el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana.	aprendizaje	Comprende			Significado de la división/ Problemas			Personal
	Identifica los tipos de división y sus propiedades.	aprendizaje	Identifica			Tipos de división/ propiedades de la división			
	Comprende el algoritmo de la división.	aprendizaje	Comprende			Algoritmo de la división			
	Aplica en contextos reales la división para repartir y para agrupar.	aprendizaje			Aplica	División		Partitiva/ cuotitiva	Personal
	Identifica y usa los términos de la división.	aprendizaje	Identifica		usa	Términos de la división			
	Utiliza estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones.	aprendizaje			Utiliza	Cálculos con divisiones			
	Aplica el algoritmo de la división.	aprendizaje			Aplica	Algoritmo de la división			
	Opera con divisores de tres cifras.	aprendizaje			Opera	Divisiones con divisores de tres cifras			
	Opera mediante estimaciones cuando la situación lo precisa.	aprendizaje			Opera	Estimaciones			
	Detecta y usa relaciones numéricas.	aprendizaje	Detecta		usa	Relaciones numéricas			
	Realiza cálculos numéricos por diferentes procedimientos.	aprendizaje			Realiza	Cálculos numéricos			
	Conoce distintas representaciones de los números y usa la más adecuada.	aprendizaje	Conoce			Representaciones numéricas	No específica		
	Maneja diversos procedimientos para resolver un problema aritmético.	aprendizaje			Maneja	Problemas aritméticos			
	Reproduce de forma oral y escrita el cálculo de la división.	aprendizaje			Reproduce	Cálculo de la división	Simbólico/ verbal		
	Interpreta la división como operación inversa a la multiplicación.	aprendizaje	Interpreta			División como inversa a la multiplicación			
Objetivos del análisis cognitivo de la unidad didáctica									
	Aplicar diferentes estrategias para las realizar las divisiones.	aprendizaje			aplicar	Estrategias para las divisiones			

Tabla 4.2.6. *Limitaciones de aprendizaje en la Unidad Didáctica*

grupos	Dificultades	Errores	Observaciones
G1	3. Dificultades asociadas al lenguaje matemático	El uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, tratándose de un conflicto de precisión a la hora de expresarse oralmente.	Repiten literalmente lo expresado en el Análisis Cognitivo previo (fase 1). Sólo se alude a ellas en análisis cognitivo de UD
	4. Dificultades en la comprensión del término “mitad”.	El alumno presenta dificultades para asociar el concepto de mitad con la división entre 2. La lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos, como es el símbolo de la división.	
G2	Diferente papel que desempeñan los términos “dividendo” y “divisor” de las operaciones de la división.	Los alumnos memorizan que el dividendo siempre es el número mayor y el divisor el número menor.	Repiten las expresadas en la fase 1. Aparecen exactamente las mismas en el Análisis Cognitivo y en la introducción de la UD
	En la estructura de la división, el cociente está expresado en unidades diferentes.	Los alumnos no consideran unidades al dar los resultados o lo expresan de las mismas unidades que el dividendo y divisor	
	No siempre hay una correspondencia clara entre los verbos de acción y las operaciones multiplicativas. El verbo “repartir” se convierte en un referente de la división a la que no siempre corresponde.	Los alumnos pueden confundir el concepto de “repartir” con el de “partir”, siendo diferentes verbos que implican diferentes acciones. Los alumnos también pueden repartir de forma no equitativa.	
	Las propiedades de las operaciones	Los alumnos atribuyen las propiedades de la multiplicación a la división.	
	Comportamiento singular del 0 y 1 en la división	- Los alumnos pueden cometer errores a la hora de dividir una cantidad entre 0 porque piensan que si tienen 10 caramelos y lo dividen entre 0 amigos, ellos siguen teniendo 10 caramelos y plantan como resultado un 10, sin tener en cuenta el poder anulador del 0 en la división. Los alumnos, en el caso del 1, pueden confundir su papel en las estructuras aditivas con el papel que desempeña en las estructuras multiplicativas, es decir, el 1 siempre suma en las estructuras aditivas, sin embargo en las multiplicativas, su papel es neutro, ni suma ni resta.	
		-Los alumnos pueden confundir problemas multiplicativos con problemas aditivos.	

grupos	Dificultades	Errores	Observaciones
	Existencia de múltiples verbos para el concepto de división	Los alumnos pueden considerar que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor, no a cada unidad del divisor. -Memorizar el procedimiento algorítmico de las operaciones, pero no siempre se puede identificar qué operación es la que corresponde.	
G3	Dificultad al introducir el nuevo procedimiento Dificultad en la realización del algoritmo de la caja Dificultad de comprensión e identificación de los términos Dificultad en el verbo de acción para realizar la operación	Error al aplicar propiedades de otros temas a la división Error al dejar el resto como un número mayor que el dividendo Error en la realización de la operación de derecha a izquierda Error en el valor del posicionamiento de la cifras Error en no saber reconocer cual es el divisor y dividendo Error al aplicar propiedades de otros temas a la división Error de asociar ciertos verbos a la operación de dividir cuando no lo es	Mantienen exactamente el de la fase 1. Sólo aparece en Análisis Cognitivo de UD.
G4	Dificultad del propio algoritmo de la división Problemas con las operaciones básicas al dividir Dificultad en el orden de los pasos y en la colocación de los datos en el algoritmo Dificultad en la identificación de las relaciones numéricas Dificultad para comprender la distinción del 0 y el 1 en las divisiones Dificultad de comprensión lectora en matemáticas	La división usualmente conlleva a error porque se lleva a cabo de izquierda a derecha mientras que todos los demás se ejecutan de derecha a izquierda, aporta dos resultados (cociente y resto) mientras que en los otros se busca un solo resultado. Los alumnos cometen fallos elementales de suma, resta o multiplicación, olvidar "llevar" o estimaciones incorrectas. Los escolares sitúan los datos propios de la división de forma incorrecta, creando combinaciones propias para resolver el propio algoritmo. Los errores son generados principalmente por desconocer las relaciones numéricas entre dividendo, divisor, cociente y resto. Para los escolares es difícil comprender por qué el 0 no puede ocupar el papel de divisor. Así mismo, piensan que este número no varía, es decir, que repartir entre 0 es igual a dejar invariantes en el dividendo. Por otra parte, el 1 por cualquier número da el mismo resultado.	Mantiene las ideas expresadas en fase 1, pero corrige expresión haciéndola más clara de lectura.

grupos	Dificultades	Errores	Observaciones
G4	Dificultad en el razonamiento y la elección del mismo	El principal error a destacar, es que el verbo repartir se convierte en un referente de la división que no siempre corresponde.	
	Ordena de forma ilógica los datos del problema	El alumnado, no sabe explicar con certeza el porqué de las operaciones realizadas y la propia elección del mismo.	
	Dificultad en el recuento	Toma los datos de manera injustificada y operan con ellos sin orden alguno	
	Dificultades para resolver el problema oralmente	El estudiante realiza errores comunes de suma, resta, multiplicación y división. Explicación poco coherente del problema, ya que no verifica su razonamiento, las operaciones realizadas y no analiza si hay otras posibles soluciones	
	Dificultades en la ejecución del problema	Considerar que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor, no a cada unidad del divisor.	
G5	Dificultad relativas a la complejidad de las operaciones multiplicativas	La complejidad de las operaciones multiplicativas es mayor que la de las aditivas, esta complejidad aparece por ejemplo cuando introducimos los problemas de aritmética ya que no es tan fácil entenderlo para los alumnos como si se trata de una operación de reparto o resta repetida. Por ejemplo al utilizar los términos de “tantas veces”, “mitad”, “tercera parte”. - La diversidad de los problemas lleva a los alumnos a tener dificultad a la hora de entender cuándo se debe utilizar operaciones aditivas o multiplicativas para resolverlos. Ya que tenemos más problemas multiplicativos (resta repetida, comparar, repartir) que aditivos y presentan mayor dificultad. - Dificultad a la hora de identificar los términos de la división (dividendo, divisor, cociente y resto) – Dificultad para considerar las unidades a la hora de dar el resultado - Las principales dificultades semánticas proceden de que no siempre hay una correspondencia clara entre los verbos de acción y las operaciones multiplicativas. El verbo “repartir” se convierte en un referente de la división a la que no siempre corresponde.	Repite exactamente lo expresado en la fase 1, apareciendo solo en Análisis Cognitivo de la UD.

grupos	Dificultades	Errores	Observaciones
	Dificultades semánticas debidas a obstáculos por el lenguaje	- Dificultades de tipo estructural. Esto quiere decir que el alumno atribuye propiedades a la división que no son correctas, pues confunde las propiedades de la división con las propiedades de la multiplicación. - Dificultad significativa del 0 y el 1 en la división. Los alumnos tienen dificultad para comprender que el 0 no puede ocupar el papel de divisor y que siempre que ocupa el papel de dividendo el resultado es 0. Para el 1, a los escolares les resulta difícil entender que “algo entre 1 es ese algo”.	
	Dificultades relacionadas con la enseñanza	Los alumnos son capaces de memorizar fácilmente el algoritmo de la división pero no llegan a comprender el significado de dicho procedimiento ni a identificar los problemas los cuales se han de resolver mediante dicho algoritmo. - Confundir problemas multiplicativos con problemas aditivos. - Considerar que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor, no a cada unidad del divisor.	
G6	<p>1. Las dificultades de elegir la operación adecuada para resolver un problema simple de división varía de una categoría semántica a otra. La tasa de éxitos es mayor en los problemas de proporcionalidad simple, seguida de los problemas de comparación, siendo los problemas de producto cartesiano los que presentan una mayor dificultad.</p> <p>2. En los problemas de comparación hay diferencias importantes de dificultad entre los problemas de comparado desconocido y los problemas de escalar desconocido o referente desconocido: los problemas de comparado desconocido tienen un índice de dificultad menor que los otros dos.</p> <p>3. En las operaciones inversas, resta y división, las dificultades aumentan debido a que tienen menos posibilidades de automatización y se necesita de un proceso lógico que no es posible suplir con la mera automatización</p>	<p>Dejar restos intermedios iguales o mayores que el divisor y omitir ceros en el cociente.</p> <p>Restas de números grandes, normalmente de 2 cifras, y que debe realizarse de forma mental.</p> <p>Los errores y dificultades que el alumno tenga en la resta y el producto se van a reproducir en la división con mayor fuerza y, así mismo, la lentitud en el automatismo de las citadas operaciones va a constituir, con mucha frecuencia, una fuente de error en la división.</p> <p>Los errores en la tabla de multiplicar dan lugar a errores de todo tipo en el algoritmo de la división.</p>	Han identificado dificultades en la tabla que aparece en el libro de texto sobre el orden de dificultad de los problemas multiplicativos. Mantienen los errores descritos en la fase 1, evitando aludir en ellos a dificultades. En introducción de UD aparecen algunos de los errores señalados en el Análisis Cognitivo.

Tabla 4.3.1. Estructura conceptual de los contenidos en la introducción de la Unidad Didáctica y en las sesiones de clase. Fase 3

Grupos	Focos conceptuales en el análisis de contenido de la Unidad Didáctica	Focos conceptuales establecidos antes del desarrollo de las sesiones	Focos conceptuales trabajados en las tareas																		
G1	<p>Reparto</p> <p>Mitades</p> <p>Resta sucesiva</p> <p>Dobles (divisiones como inverso de la multiplicación)</p> <p>Series numéricas</p>	<p>S1. Dobles y mitades de números sencillos</p> <p>S2. Dobles y mitades de números sencillos</p> <p>S3. Repartos y resta sucesiva</p> <p>S4. Repartos y resta sucesiva</p> <p>S5. Series numéricas de números sencillos</p> <p>S6. Series numéricas de números sencillos</p>	<p>S1. Dobles y mitades</p> <p>S2. Dobles, mitades y reparto</p> <p>S3. Reparto y resta sucesiva</p> <p>S4. Reparto y resta sucesiva</p> <p>S5. Series numéricas, dobles y mitades</p> <p>S6. Series numéricas, dobles, mitades, reparto y resta sucesiva</p>																		
G2	<table border="0"> <tr> <td><u>Conceptos</u></td> <td><u>Procedimientos</u></td> </tr> <tr> <td>Reparto</td> <td>Repartir</td> </tr> <tr> <td>Mitad</td> <td>Desarrollar</td> </tr> <tr> <td>División</td> <td>Calcular</td> </tr> <tr> <td>Dividendo</td> <td>Resolver</td> </tr> <tr> <td>Divisor</td> <td>Agrupar</td> </tr> <tr> <td>Cociente</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Resto</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Agrupamiento</td> <td></td> </tr> </table>	<u>Conceptos</u>	<u>Procedimientos</u>	Reparto	Repartir	Mitad	Desarrollar	División	Calcular	Dividendo	Resolver	Divisor	Agrupar	Cociente		Resto		Agrupamiento		<p>S1. Mitades</p> <p>S2. Mitades</p> <p>S3. Agrupamiento</p> <p>S4. Reparto</p> <p>S5. Reparto</p> <p>S6. Elementos de la división. Repaso de Mitades. Repaso de Agrupamientos. Repaso de Reparto</p>	<p>S1. Mitades</p> <p>S2. Mitades</p> <p>S3. Agrupamiento y resta sucesiva</p> <p>S4. Reparto</p> <p>S5. Reparto</p> <p>S6. Elementos de la división, mitades, agrupamiento y reparto</p>
<u>Conceptos</u>	<u>Procedimientos</u>																				
Reparto	Repartir																				
Mitad	Desarrollar																				
División	Calcular																				
Dividendo	Resolver																				
Divisor	Agrupar																				
Cociente																					
Resto																					
Agrupamiento																					
G3	<p>1. Concepto de división.</p> <p>1.1 Términos de la división.</p> <p>1.2 Tipos de división: Exacta y Entera.</p> <p>1.3 División partitiva (reparto) y cuotitiva (resta sucesiva).</p> <p>1.4 Procedimiento de la división.</p> <p>1.5. Prueba de la división.</p> <p>1.6. División como operación inversa.</p> <p>1.7 Propiedad del resto (resto parcial, resto final).</p> <p>1.8 División entre un número de dos cifras.</p> <p>1.9 División entre un número de tres cifras.</p> <p>1.10. Ceros en el cociente.</p> <p>1.11. División entre 10, 100 o 1000.</p> <p>1.12 Operaciones combinadas</p> <p>1.13. Producto cartesiano: factor y producto desconocido.</p> <p>2. Importancia de la división en la vida cotidiana. (Resolución de problemas).</p>	<p>S1. Procedimiento de la división. Importancia de la división en la vida cotidiana</p> <p>S2. Procedimiento de la división. Importancia de la división en la vida cotidiana</p> <p>S3. Términos de la división</p> <p>S4. Términos de la división. Tipos de división: exacta y entera</p> <p>S5. Procedimiento de la división. Realización del algoritmo. Importancia de la división en la vida cotidiana</p> <p>S6. Procedimiento de la división. Prueba de la división.</p> <p>División como operación inversa. Realización del algoritmo</p> <p>S7. Procedimiento de la división. Realización del algoritmo. Importancia de la división en la vida cotidiana</p> <p>S8. Términos de la división. Importancia de la división en la vida cotidiana. Cálculo mental</p>	<p>S1. Procedimiento de la división como agrupamiento y como reparto, resolución de problemas contextualizados</p> <p>S2. Procedimiento de la división, resolución de problemas contextualizados, algoritmo de la división</p> <p>S3. Términos de la división</p> <p>S4. Términos de la división y algoritmo de la división</p> <p>S5. Procedimiento de la división, realización del algoritmo y resolución de problemas contextualizados</p> <p>S6. Procedimiento de la división, prueba de la división, realización del algoritmo</p> <p>S7. Procedimiento de la división, realización del algoritmo y resolución de problemas contextualizados</p> <p>S8. Términos de la división, resolución de problemas y cálculo mental</p>																		

Grupos	Focos conceptuales en el análisis de contenido de la Unidad Didáctica	Focos cobceptuales establecidos antes del desarrollo de las sesiones	Focos conceptuales trabajados en las tareas
G4	<p>3. Cálculo mental.</p> <p>1. Operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división.</p> <p>2. Tipos de división: exacta y entera.</p> <p>3. Términos de la división: dividendo, divisor, cociente y resto.</p> <p>4. Prueba de la división.</p> <p>5. Resolución de problemas.</p> <p>6. Tipos de problemas: partición o distribución, extracción o cuotición, reducción (cociente escalar) y cociente cartesiano.</p> <p>7. Cálculo mental.</p>	<p>S1. Realización de operaciones básicas. Tipos de división: exacta y entera. Resolución de problemas. Tipos de problemas y su función con respecto a la división: partición o distribución.</p> <p>S2. Operaciones básicas. Tipo de división: exacta y entera. Resolución de problemas. Tipos de problemas y su función con respecto a la división: extracción o cuotición.</p> <p>S3. Realización de operaciones básicas. Tipos de división: exacta y entera. Resolución de problemas. Tipos de problemas y su función con respecto a la división: partición o distribución y extracción o cuotición.</p> <p>S4. Realización de operaciones básicas. Tipos de división: exacta y entera. Resolución de problemas. Tipos de problemas y su función con respecto a la división: partición y cuotición. Prueba de la división.</p> <p>S5. Resolución de problemas. Tipos de problemas y su función con respecto a la división: cociente cartesiano. Tipos de división: exacta y entera.</p> <p>S6. Resolución de problemas. Tipos de problemas y su función con respecto a la división: cociente cartesiano. Tipos de división: exacta y entera.</p> <p>S7. Resolución de problemas. Tipos de problemas y su función con respecto a la división: reducción (cociente escalar). Tipos de división: exacta y entera.</p> <p>S8. Tipos de división: exacta y entera. Términos de la división: dividendo, divisor, cociente y resto. Prueba de la división. Operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. Cálculo mental.</p>	<p>S1. Realización de operaciones básicas, tipos de división: exacta y entera, resolución de problemas</p> <p>S2. Resolución de problemas, tipos de problemas y su función con respecto a la división: extracción o cuotición</p> <p>S3. Creación de problemas</p> <p>S4. Resolución de problemas, tipos de problemas y su función con respecto a la división: partición y cuotición, prueba de la división.</p> <p>S5. Resolución de problemas, tipos de problemas y su función con respecto a la división: cociente cartesiano</p> <p>S6. Resolución de problemas, tipos de problemas y su función con respecto a la división: cociente cartesiano</p> <p>S7. Resolución de problemas, tipos de problemas y su función con respecto a la división: reducción (cociente escalar), tipos de división: exacta y entera.</p> <p>S8. Prueba de la división, operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división, cálculo mental.</p>
G5	<p>-Términos de la división: Dividendo (D), divisor (d), Cociente y Resto</p> <p>-La división como operación inversa de la multiplicación</p>	<p>S1. Términos de la división y la división como operación inversa de la multiplicación</p> <p>S2. División exacta y no exacta</p> <p>S3. Propiedades de la división</p>	<p>S1. Términos de la división y la división como operación inversa de la multiplicación</p> <p>S2. División exacta y no exacta</p> <p>S3. Propiedades de la división</p>

Grupos	Focos conceptuales en el análisis de contenido de la Unidad Didáctica	Focos cobceptuales establecidos antes del desarrollo de las sesiones	Focos conceptuales trabajados en las tareas
	<ul style="list-style-type: none"> -La división exacta y la división no exacta (reparto exacto y no exacto) -Propiedades de la división -Escritura y planteamiento de un problema, que se resuelva utilizando alguna división -Problemas que se resuelven multiplicando por el inverso, para ver que se obtiene el mismo resultado -Algoritmo de la división: Dividendo de varias cifras y divisor de una cifra Dividendo de varias cifras y divisor de dos cifras Divisiones con ceros en el cociente Dividendo de varias cifras y divisor de tres cifras -Propiedades del resto -Prueba de la división como comprobación 	<ul style="list-style-type: none"> S4. Algoritmo de la división: dividendo de varias cifras y divisor de una cifra S5. Algoritmo de la división: dividendo de varias cifras y divisor de dos cifras S6. Algoritmo de la división: divisiones con ceros en el cociente S7. Algoritmo de la división: dividendo de varias cifras y divisor de tres cifras S8. Propiedad del resto y prueba de la división 	<ul style="list-style-type: none"> S4. Algoritmo de la división: dividendo de varias cifras y divisor de una cifra S5. Algoritmo de la división: dividendo de varias cifras y divisor de dos cifras S6. Algoritmo de la división: divisiones con ceros en el cociente S7. Algoritmo de la división: dividendo de varias cifras y divisor de tres cifras S8. Propiedad del resto y prueba de la división
G6	<ul style="list-style-type: none"> -Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones por dos o tres cifras, aplicándolos en su práctica diaria. -Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar, como operación inversa a la multiplicación. -Significado de las operaciones de multiplicar y dividir y su utilidad en la vida cotidiana. -Tipos de división y sus propiedades. -Automatización de los algoritmos. -Utilización de operaciones de división en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. -Divisor con tres cifras. 	<ul style="list-style-type: none"> S1. Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones por dos o tres cifras, aplicándolos en su práctica diaria. Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar. S2. Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar. Utilización de estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones, aplicándolos en su práctica diaria. S3. Automatización de los algoritmos. S4. Tipos de división y sus propiedades. Divisor con tres cifras. S5. Tipos de división y sus propiedades. Divisor con tres cifras. S6. Comprende el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Identifica los tipos de división. Aplica el algoritmo de la división. S7. Significado de las operaciones de dividir y su utilidad en la vida cotidiana. Utilización de 	<ul style="list-style-type: none"> S1. Estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones por dos o tres cifras, aplicándolos en su práctica diaria. Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar. S2. Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar. Utilización de estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones, aplicándolos en su práctica diaria. S3. Método ABN S4. Tipos de división y sus propiedades. Divisor con tres cifras. S5. Divisor con tres cifras. S6. Identifica los tipos de división. Aplica el algoritmo de la división. S7. Utilización de operaciones de división en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas S8. Juego del domino, pero no se sabe si las operaciones serán para resolverlas mentalmente

Grupos	Focos conceptuales en el análisis de contenido de la Unidad Didáctica	Focos cobceptuales establecidos antes del desarrollo de las sesiones	Focos conceptuales trabajados en las tareas
		operaciones de división en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. S8. Cálculo mental.	

Tabla 4.3.2. *Sistemas de representación en el análisis de contenido de la unidad didáctica y en las sesiones de la unidad didáctica*

Grupos	Sistemas de representación en el AC de la UD	Sistemas de representación en las sesiones de la UD
G1	Sistemas de representación simbólica – verbal Sistemas de representación Gráfica Sistema de representación físico	S1. Simbólico, físico, grafico S2. Simbólico, físico, grafico S3. Simbólico, físico S4. Simbólico, físico (como alternativo), grafico S5. Físico (materiales para juegos en el patio) S6. Simbólico, físico (como alternativo), grafico
G2	Física-manipulativa: bloques multibase Gráfica	S1. Físico (elementos de la vida cotidiana) S2. Físico (frutas) S3. Físico, grafico S4. Físico (material didáctico) S5. Físico (frutas), grafico, simbólico (cuando resuelven problemas no se especifica) S6. Físico (materiales para juegos en el patio)
G3	Representación gráfica Representación lineal Representación simbólica Representación física	S1. Físico (material de la vida cotidiana) S2. Físico (material de la vida cotidiana) S3. Físico (material didáctico) S4. Simbólico S5. Físico (material didáctico), Gráfico, Simbólico S6. Simbólico, gráfica S7. Simbólico S8. Simbólico
G4	Físicos: Material manipulativo familiar, Ábaco, Regleta de Cuisenaire Gráficos: Material multibase, Modelo cardinal, Modelos lineales, Configuración puntual, Modelo funcional de la división y operación inversa Simbólicos: Verbal, Numérica: Modelo numérico, Algoritmo de la división	S1. Físico (material de la vida cotidiana) S2. Físico (material didáctico) S3. Gráfica S4. Simbólico S5. Gráfica, simbólico, físico S6. Gráfica, simbólico S7. Físico (material de la vida cotidiana), simbólico S8. Simbólico
G5	Modelos Gráficos: Discreto o de conjunto, lineal, área Modelo simbólico Modelo Físico: Material Multibase, Ábaco horizontal, Ábaco vertical	S1. Simbólico, físico (material didáctico) S2. Simbólico S3. Simbólico S4. Simbólico S5. Simbólico S6. Simbólico S7. Simbólico S8. Simbólico, físico (material didáctico, pero solo para dar una explicación)
G6	Representación física: se divide entre materiales de su entorno y materiales específicos para la didáctica. Representación gráfica: recta numérica. Representación simbólica: verbales y numéricas. Modelos: lineales, cardinales, numéricos, de razón aritmética, funcionales	S1. Físico (material didáctico), simbólico S2. Simbólico S3. Simbólico S4. Simbólico S5. Simbólico S6. Simbólico S7. Simbólico S8. Simbólico, físico (dominó)

Tabla 4.3.3. *Fenomenología en el análisis de contenido y en las sesiones de la Unidad Didáctica*

Grupos	Fenomenología en el AC de la UD	Fenomenología en la sesiones de la UD
G1	<ul style="list-style-type: none"> • Reparto • Mitades • Resta sucesiva • Dobles (División como inverso a la multiplicación) • Series numéricas 	<p>S1. Mitades y dobles (se contextualiza todo con una pastelería)</p> <p>S2. Mitades y dobles (sin contextualización)</p> <p>S3. Reparto y resta sucesiva (contextualizado en un paseo de curso)</p> <p>S4. Reparto y resta sucesiva (contextualizados, 3 de reparto y 1 de resta)</p> <p>S5. Series numéricas (se hacen juegos para trabajar solo series numéricas de dobles y mitades)</p> <p>S6. Se hace un repaso de todos los conceptos trabajados, algunos contextualizados otros no.</p>
G2	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de la resta sucesiva. • Concepto de la división como reparto. • Cálculos simples de mitades. 	<p>S1. Mitades (contextualizando con materiales de la vida cotidiana se les pide buscar las mitades de ciertas cantidades)</p> <p>S2. Mitades (los mismos alumnos se van dividiendo en mitades y también buscan las mitades de las frutas)</p> <p>S3. Uso de la resta sucesiva, con problemas relacionados con las frutas</p> <p>S4. Concepto de la división como reparto (con problemas contextualizados)</p> <p>S5. Guía de trabajo con problemas de resta sucesiva y agrupamiento</p> <p>S6. Juegos en el patio, para reforzar el concepto de mitad y agrupamiento</p>
G3	<ul style="list-style-type: none"> • Problemas de división partitiva • Problemas de división cuotitiva • Problemas de producto cartesiano • Problemas de comparación multiplicativa 	<p>S1. Problemas de división partitiva (3) y Problemas de división cuotitiva (3), 2 mal redactado</p> <p>S2. Problemas de división partitiva (3) y Problemas de división cuotitiva (3), 2 mal redactado (son los mismos de la sesión anterior)</p> <p>S3. No se especifican los problemas, se trabaja los elementos de la división</p> <p>S4. Problemas de división partitiva (3) y Problemas de división cuotitiva (1)</p> <p>S5. Problemas de división partitiva, solamente 2, pero ambos están mal redactados, le faltan datos</p> <p>S6. Problemas de división partitiva (1, mal redactado), Problemas de división cuotitiva (2, uno con un ámbito numérico muy grande), Problemas de comparación multiplicativa (1)</p> <p>S7. Problemas de división partitiva (1) y Problemas de división cuotitiva (1)</p> <p>S8. Un juego donde deben resolver problemas pero no se especifican</p>
G4	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reparto 2. Extracción o cuotición 3. Cociente cartesiano 4. Reducción 	<p>S1. Extracción o cuotición (2)</p> <p>S2. Extracción o cuotición (2)</p> <p>S3. Reparto y cuotación, se presenta una representación gráfica de cada una para que los alumnos creen problemas</p> <p>S4. Extracción o cuotición (2)</p> <p>S5. Cociente cartesiano (2)</p> <p>S6. Cociente cartesiano, se da una gráfica y los alumnos tienen que crear problemas</p> <p>S7. Reducción (2)</p> <p>S8. Se les da una igualdad y los alumnos inventan problemas</p>
G5	<ul style="list-style-type: none"> - Situaciones de reparto exacto y no exacto - Agrupar (Resta repetida, división cuotitiva). - A veces en la vida cotidiana utilizamos el resto pero de distinta manera 	<p>S1. Agrupar (2)</p> <p>S2. Reparto (2, solo como ejemplos que utiliza el profesor)</p>

Grupos	Fenomenología en el AC de la UD	Fenomenología en la sesiones de la UD
	- No solo a la hora de repartir usamos la división si no a la hora de partir un mismo objeto la utilizamos	S3. No se trabaja ningún tipo de problema solo ejercicios S4. Reparto (1, solo como ejemplo que utiliza el profesor) S5. Reparto (1) S6. Reparto (1) S7. Reparto (1 solo como ejemplo que utiliza el profesor y 1 para ejercita) S8. Reparto (1 solo como ejemplo que utiliza el profesor) y Agrupar (1)
G6	<u>Usos</u> Resta sucesiva Repartir Partir Operar Distribuciones rectangulares Problemas con el resto <u>Situaciones y fenómenos</u> División partitiva (Reparto reiterado de unidades simples y reparto reiterado de grupos de objetos) División cuotitiva (Medida y sustracción repetida) De comparación Comparación de disminución con el comparado desconocido. Comparación de disminución con el referente desconocido. Comparación de disminución con el escalar desconocido. De producto cartesiano. Situaciones combinatorias.	S1. División cuotitiva (2) S2. División cuotitiva (3) S3. División cuotitiva (2) y División partitiva (1) S4. Se trabaja solo el algoritmo S5. División partitiva (3) S6. División cuotitiva (2) y División partitiva (1) S7. División cuotitiva (1) y División partitiva (1), para trabajar la estimación S8. Solo se trabajan ejercicios

La siguiente tabla muestra todos los problemas que plantean los diferentes grupos en sus sesiones, ya sea que deben resolver los alumnos o bien que el profesor utiliza como ejemplo para explicar un contenido. Cada uno de estos los clasificaremos según lo establecido, en la siguiente leyenda:

1. Isomorfismo de medida
 - a) Partitivos
 - b) cuatitivos.
2. Producto cartesiano.
3. Comparación multiplicativa.
4. Problemas que están mal redactados.

Tabla 4.3.4. Clasificación de los problemas planteados por los diferentes grupos en las sesiones de la unidad didáctica

Grupos	Problemas	Clasificación				
		1 a	1 b	2	3	4
G1	1) Es el cumpleaños de los maestros Pablo y Carmen, pero sólo tenemos una tarta y no hay ingredientes para hacer otra igual. ¿Qué podemos hacer para que los dos tengan la misma cantidad de tarta?					x
	2) Julián tiene 14 cómics. Si le regala la mitad a su hermana, ¿Cuántos cómics tendrá cada uno?				x	
	Sabiendo que nuestra clase es de 24 alumnos		x			
	3) ¿Cuántas tiendas de campaña necesitamos, si en cada una de ellas vamos 4 compañeros?					
	4) Durante la merienda la monitora tiene solo 48 galletas y quiere que las repartamos entre todos por igual. ¿Cuántas galletas podremos comernos cada uno?	x				
	5) Al llegar al campamento, la monitora nos reparte las toallas que serán necesarias para la hora del aseo durante todo el fin de semana. Nos ha dado 72 toallas para toda la clase, ¿cuántas toallas tendremos cada uno?	x				
6) En el cuarto de baño, solo hay 4 duchas disponibles, por tanto, tenemos que ir en grupos de 4 a ducharnos. ¿Cuántos turnos haremos?		x				

Grupos	Problemas	Clasificación			
		1	2	3	4
		a	b		
	7) Tenemos que hacernos la cena y hemos pensado hacer una pizza para cada grupo de 4, es decir, hay 6 grupos de 4. Disponemos de: 12 botes de tomate, 18 Lonchas de jamón, 6 paquetes de queso rallado. Si todos queremos tener el mismo número de ingredientes: ¿Cuántos botes de tomate necesita cada uno?, ¿Cuántas lonchas de jamón?, ¿Cuántos paquetes de queso rallado?	x			
	8) Llega la hora de irnos y nos avisan de que se han equivocado en la oficina y no tenemos autobús de vuelta. Tienen que recogernos los papás y solo pueden venir 6. Para que vayamos el mismo número de niños en cada coche, ¿cuántos nos iremos juntos en cada uno?	x			
	9) Aitana ha preparado unas palmeritas para repartir entre sus tres amigos a partes iguales. Dibuja las palmeritas que le tocará a cada uno y completa	x			
	10) Reparte 20 pelotas en 4 cajas, ¿Cuántas pelotas hay en cada caja?	x			
	11) Irene ha hecho 21 bolitas de arcilla, ¿puede hacer grupos de 3 bonitas y que no sobren?		x		
	12) Si tengo 10 libros y me he leído la mitad, ¿Cuántos libros he leído? Si mi hermano se ha leído el doble que yo, ¿Cuántos libros ha leído él?			x	
	13) A Alberto le han dado 28 días de vacaciones. Su hermana tiene la mitad, ¿cuántos días de vacaciones tiene su hermana?			x	
	14) Imagina que te han comprado veinte globos para el día de tu cumpleaños, y estáis cuatro amigos. ¿Cómo repartirías los globos entre cada uno para que todos tengáis el mismo número de los mismos?	x			
	15) Alicia quiere repartir los 24 vestidos de sus muñecas entre los 3 armarios de juguete que tiene, de manera que cada uno tenga el mismo número de vestidos. ¿Cuántos vestidos colocará en cada armario?	x			
	16) Hay 12 paquetes, en cada vagón pongo 4 paquetes. Este tren lleva un total de paquetes (se muestra la imagen de un tren con 3 vagones)		x		

Grupos	Problemas	Clasificación			
		1	2	3	4
		a	b		
	17) Hay 12 paquetes, en cada vagón pongo 3 paquetes. Este tren lleva un total de paquetes (se muestra la imagen de un tres con 4 vagones)		x		
G2	Los alumnos estarán sentados por grupos, en el centro de las mesas estará su respectiva caja de frutas con 28 piezas cada grupo (8 naranjas, 8 kiwis, 8 plátanos y 4 manzanas)		x		
	1) Cada uno de nosotros come 2 frutas al día, ¿Cuántos días tendremos para comer?				
	2) Si la familia de María come a la semana 4 naranjas, 4 kiwis, 4 plátanos y 2 manzanas, ¿Cuántas semanas tienen para comer?		x		
	3) Queremos hacer grupos de 4 piezas de fruta, ¿Cuántos grupos podríamos hacer sin que sobre ninguna?	x			
	4) Si Pablo come 2 kiwis cada martes ¿Cuántos martes tardaría en comer todos los kiwis que hay en la caja?		x		
	5) Imaginad que sois frutereros, tenéis 28 frutas y cada hora un cliente os compra 4 frutas, ¿En cuántas horas venderás todas las frutas?		x		
	6) Roberto sirve 28 frutas a sus amigos, si cada amigo se come 2 frutas, ¿A cuántos amigos le sirve?		x		
	7) Si cada día se pudren 4 frutas, ¿En cuántos días se queda el frutero sin frutas?		x		
	8) ¿Podemos repartir 10 lápices en dos estuches, de forma que haya la misma cantidad en ambos?	x			
	9) ¿Podemos repartir nuestras 24 mochilas entre 6 personas?	x			
	10) ¿Creéis que es posible repartir 24 caramelos entre 24 alumnos? ¿Y 18 caramelos entre 24 personas?	x			
	11) Para pintar las paredes de color amarillo han usado 21 litros. ¿Cuánto ha usado Luis, su padre y su madre?				x
	12) Siete amigos tienen 28 juguetes para compartir por igual. ¿Cuántos juguetes recibirá cada uno?	x			

Grupos	Problemas	Clasificación			
		1	2	3	4
		a	b		
	13) Si tengo 54 chuches y quiero repartirlas en 9 bolsas. ¿Cuántas chuches tendrá cada bolsa?	x			
	14) Alfonso quiere repartir 33€ entre sus 3 amigos. ¿Cuántos € le dará a cada amigo?	x			
	15) Para su fiesta de cumpleaños Gema ha comprado 32 bolsas de patatas. Si a la fiesta van 8 personas, ¿Cuántas bolsas de patatas le dará a cada persona?	x			
	16) Si Carlos tiene 20 estampas de futbol repetidas y quiere repartírselas a sus 4 amigos. ¿Cuántas estampas le dará a cada uno?	x			
	17) Si Juan tiene 20 caramelos y quiere repartirlos entre 2 amigos. ¿Cuántos caramelos le dará a cada uno?	x			
	18) Carmen tiene 12 lápices de colores y a cada amigo le da dos. ¿A cuántos amigos les dio lápices?		x		
	19) Héctor tiene 24 animales de peluche. Juega con 6 peluches cada semana. ¿Durante cuantas semanas juega con sus peluches sin repetirlos?		x		
	20) Jorge quiere enseñar 16 modelos de aviones. ¿Necesitará más estanterías si coloca 8 aviones en cada estantería o si pone 4 en cada estantería? (se muestra una imagen con 2 estanterías)		x		
	21) Romero y Julieta tienen 16 revistas cada uno. Romero lee 4 revistas al mes. Julieta lee 2 al mes. ¿Quién terminara antes de leer todas las revistas? ¿Cuántos meses tardará cada uno?		x		
G3	1) Luisa tiene 60 canicas y dispone de 5 cajas, si en cada caja tiene que haber la misma cantidad de canicas, ¿cuántas canicas crees que habrá en cada caja?	x			
	2) Tengo 18 canicas y las tengo que meter en 3 bolsas, ¿cuántas canicas tendré que poner en cada bolsa?	x			
	3) Un grupo de 4 amigos tiene 16 canicas, si todos los amigos tienen el mismo número de canicas ¿cuántas canicas tiene cada uno?	x			
	4) Tengo 20 tapones de cuatro colores diferentes, si en cada caja tengo la misma cantidad de tapones, ¿cuántos tapones de cada color hay en cada una de las cajas?	x			

Grupos	Problemas	Clasificación			
		1	2	3	4
		a	b		
	5) Tenemos 12 estuches y queremos repartir 140 lápices en cada uno, ¿cuántos lápices tendremos que poner en cada uno?	x			
	6) De excursión por las tiendas de Granada hemos recogido 80 tapones, las hemos clasificado en cajas, en cada una hemos puesto 5 tapones, ¿cuántos tapones hay en cada caja?	x			
	7) Felipe realiza collares con canicas, si pone 8 canicas en cada collar, ¿cuántas canicas necesitará para gastar las 96 canicas que tiene?		x		
	8) Shaima es recolectora de lápices, si tiene 33 lápices y cada día su padre le da 3 lápices, ¿cuántos días le han dado lápices?		x		
	9) Luisa compró 60 lápices y cada caja tiene 12 lápices, ¿cuántas cajas ha comprado?		x		
	10) Un niño tiene 50 lápices, en cada estuche ha puesto 10 lápices, ¿cuántos estuches ha necesitado?		x		
	11) Para la fiesta de mi cumpleaños voy a invitar a 7 amigos, si quiero hacer bolsas con caramelos para dárselas a ellos y en total tengo 8 paquetes y 2 caramelos sueltos, ¿cuántos caramelos tendrá cada bolsa?, ¿sobra algún caramelo?	x			
	12) Mi primo me ha pedido que le haga lo mismo para su fiesta de cumpleaños. Va a invitar a 8 amigos y tiene 9 paquetes y 8 caramelos sueltos. ¿Cuántos tendrá en cada bolsa?, ¿sobra algún caramelo?	x			
	13) De excursión por el campo, recogimos 80 flores, que utilizamos para hacer ramos. Si en cada ramo pusimos 4 flores, ¿cuántos ramos crees que hicimos? Comprueba que lo que has pensado es correcto a través de la operación.		x		
	14) Para ir al pueblo de Marta el billete de autobús cuesta 36 euros, si para ir al pueblo de Luis el billete cuesta tres veces menos ¿cuánto dinero costará el billete para el pueblo de Luis?				x
	15) Juan ha gastado 120 euros en ir al cine, si lo han acompañado 3 amigos más, ¿cuánto dinero se ha gastado por persona?	x			

Grupos	Problemas	Clasificación			
		1	2	3	4
		a	b		
	16) Se reparten por igual 240 pasajeros entre varios autobuses. Si cada autobús transporta 60 pasajeros, ¿cuántos autobuses se necesitan?		x		
G4	<p>Tu mamá te ha dado en total 20 cuencas grandes, 17 cuencas medianas y 14 cuencas pequeñas.Quieres ahorrar dinero para comprarte unos zapatos y has pensado en hacer collares y pulseras.</p> <p>1) Tu madre te ha propuesto hacer pulseras con 4 cuencas medianas cada una y collares con 5 cuencas grandes cada uno. Tu tía te ha propuesto hacer pulseras con 3 cuencas pequeñas cada una y collares con 5 cuencas medianas cada uno. ¿Cuántos collares y pulseras puedes hacer en cada opción? ¿Te sobran cuencas en alguna de las opciones?</p> <p>2) Has mirado en tiendas y el precio de los zapatos es de 18 euros. Quieres vender los collares por 2 euros, y las pulseras por 1 euro. ¿Cuánto dinero obtendrías con esas ventas? ¿Podrías comprar los zapatos con alguna de las opciones?</p> <p>Hoy, la pastelería “La dulce tentación” ha de realizar un gran pedido para el restaurante “Delicias”. El pastelero tiene un gran problema:</p> <p>3) Luis ha fabricado 97 pasteles y para llevarlos al restaurante necesita ponerlos en cajas de una docena, ¿Cuántas cajas tendrá que preparar para llevar el pedido? ¿Completa todas las cajas de pasteles?</p> <p>4) Cuando Luis llega al restaurante, le entrega el pedido a Marcos, que tiene que hacerse cargo de 30 mesas. Tras la cena, el chef reparte los 97 pasteles. Si quiere entregar a cada mesa 12 pasteles, y le ha sobrado 1. ¿Para cuántas mesas ha tenido?</p> <p>5) Si se entrega en cada mesa 5 pasteles ¿Para cuántas mesas ha tenido?</p> <p>En la familia somos 34 primos y vamos a ir a casa de la abuela a comer.</p> <p>6) Si en cada coche vamos 5 personas ¿Cuántos coches hemos necesitado? ¿Cuántas plazas sobran?</p>		x		
		x			
			x		
				x	
					x

Grupos	Problemas	Clasificación			
		1	2	3	4
		a	b		
	7) Cuando llegamos a la casa, nos situamos en sus tres mesas de 8 sillas cada una, ¿Podríamos comer todos en el mismo turno? ¿Cuántas sillas deberían tener cada mesa? ¿Alguien comería en el siguiente turno?		x		
	El viernes próximo, los alumnos de 4ºB van a realizar un baile de fin de curso. Los familiares asistirán al evento para ver bailar a sus hijos en los distintos géneros. Esta noticia sorprendió tanto a los alumnos, que decidieron prepararlo todo al detalle.			x	
	8) Los niños de 4ºB del centro “Virgen de las nieves”, decidieron ponerse de acuerdo con las parejas de baile. En el baile habrá dos chicos y algunas chicas. Si se pueden formar seis parejas (chico- chica) distintas entre ellos. ¿Cuántas chicas hay en el baile?				
	9) Si en el siguiente baile deben entrar tres chicas más, ¿Cuántas parejas podríamos formar?			x	
	10) El martes previo al baile, el grupo de 4ºB decidió ponerse de acuerdo en la temática de la vestimenta. Los estudiantes acordaron combinar de veinte formas distintas camisas y pantalones. Si hay 6 camisas, ¿Cuántos pantalones hay? ¿Cuántos pantalones son necesarios? ¿Sobran pantalones?			x	
	María ha llevado 30 pegatinas al colegio para hacer una manualidad. 7 compañeros de su clase no han traído cuencas y María se las ha prestado.				x
	11) Si le da a sus 3 amigas la tercera parte de sus pegatinas. ¿Cuántas pegatinas le da a cada una? ¿Cuántas pegatinas le quedan?				
	12) Posteriormente de lo que le queda le da la mitad a los otros cuatro compañeros. ¿Cuántas pegatinas le da a cada uno? ¿Cuántas pegatinas le quedan?				x
	24				
	13) El profesor le ha dicho a María que tiene que hacer una mariposa, utilizando en cada ala una cuarta parte de las pegatinas que tiene. ¿Le ha quedado alguna pegatina a María?				x
G5	1) El padre de María le compró una caja de 75 bolitas para hacer pulseras, María necesita 8 bolitas para hacer cada pulsera. ¿Cuántas pulseras completas puede hacer María con las bolitas de la caja?		x		

Grupos	Problemas	Clasificación			
		1	2	3	4
		a	b		
	2) Ismael tiene 12 cromos y su madre le compra 4 cromos cada semana que tiene un examen. ¿Cuántas semanas ha tenido Ismael exámenes?		x		
	3) Una profesora quiere repartir 24 lápices entre sus 4 alumnos a partes iguales. ¿Cuántos lápices recibirá cada alumno?	x			
	4) Pablo quiere repartir 23 golosinas en dos bolsas que contengan el mismo número de golosinas.	x			
	5) Juan tiene 24 lápices. ¿De cuántas formas distintas puede repartir los 24 lápices de forma que dicho reparto sea exacto?	x			
	6) Un equipo de fútbol tiene 126 equipaciones de la categoría alevín en tres equipos diferentes (Alevín A, Alevín B, Alevín C). ¿Cuántas equipaciones hay en cada equipo si están distribuidas de manera equitativa?	x			
	7) Si una frutería tiene 3 cajas vacías y dispone de 358 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene que poner en cada caja para que tenga las mismas? ¿Le sobra alguna?	x			
	8) Justina quiere recorrer 10.325 km en dos meses. ¿Cuántos km deberá de recorrer cada día si todos los días recorre el mismo número de km?	x			
	9) Carlos ha organizado una fiesta de cumpleaños. Para la fiesta, Carlos ha comprado refrescos, globos, pizza y bolsas de golosinas. En la factura se les ha olvidado rellenar el precio por unidad. Averigua el precio por unidad de cada artículo. (se muestra una tabla con la cantidad de artículos y el precio total)	x			
	10) Un repartidor de refrescos quiere repartir 1.398 refrescos entre 23 restaurantes distintos. ¿Cuántos refrescos debe de dejar en cada restaurante, si en cada restaurante deja el mismo número de éstos?	x			
	11) Esteban compra un tractor por 72.525 € y lo paga en 72 plazos mensuales. ¿Cuánto tiene que pagar Esteban cada mes?	x			
	12) Un agricultor que tiene 269 olivos, compra 3.228 Kg de abono para sus olivos. ¿Cuánto abono podrá echar en cada olivo, con el abono que compró, si quiere que todos los olivos tengan la misma cantidad de abono?	x			

Grupos	Problemas	Clasificación			
		1	2	3	4
		a	b		
	13) En una excursión al Parque de las Ciencias hay 132 alumnos de la clase de matemáticas, el profesor compra 125 camisetas para regalar a los alumnos. ¿Puede el profesor dar una camiseta a cada alumno?	x			
	14) Manuel tiene 23 cromos y quiere repartirlos en 3 montones para jugar. Quiere que los montones tengan el mismo número de cromos. ¿Cuántos cromos habrá en cada montón? ¿Cuántos cromos les sobrarán?	x			
	15) Raúl tiene 47 manzanas que colocar en bolsas de 6 manzanas. ¿Le pueden sobrar 7 manzanas? ¿Por qué? ¿Cuál sería el reparto correcto?		x		
	16) Si tenemos 34 caramelos y a cada niño le damos 6 caramelos y nos sobran 4 caramelos. ¿Cuántos niños han participado en el reparto? ¿Por qué?		x		
G6	1) Me han dado 100 fotocopias de la autorización para una excursión y yo he sacado 50 más de unas actividades que quiero hacer con vosotros. Os tengo que dar 3 folios de la excursión y 2 de las actividades a cada uno. Si sois 23 alumnos, ¿hay folios para todos? ¿Me sobran o me faltan? ¿Cuántos?		x		
	2) Una floristería quiere hacer ramos de una docena de rosas con 252 rosas que tiene en la tienda. ¿Cuántos ramos de rosas hará? ¿Sobran rosas?		x		
	3) En el almacén del colegio hay 200 bolis, en aula de profesores 50 y en la clase hay 6. Si tenemos que dar 3 bolígrafos por persona, ¿A cuántas personas podemos dárselos?		x		
	4) Un panadero ha hecho 4.104 rosquillas. Para su venta las envasa en cajas de 6 docenas. ¿Cuántas cajas puede llenar?		x		
	5) Una empresa transporta 83 empleados en coches de empresa de 4 plazas. ¿Cuántos coches necesita? ¿Van todos llenos?		x		
	6) Nicolás pertenece a un grupo de 50 voluntarios que ha organizado una campaña llamada “operación kilo”. Tienen que repartir 5.190 kilos de comida en diferentes lugares. ¿Cuántos kilos repartirá cada uno aproximadamente?	x			
	7) Sara ha recogido del campo de su abuela 250 naranjas, y quiere repartirlos a sus 28 compañeros de clase el día de la fruta, ¿cuántas naranjas tendrá cada uno?	x			

Grupos	Problemas	Clasificación			
		1	2	3	4
		a	b		
	8) Una fuente ha arrojado 450 litros de agua en un cuarto de hora. ¿Cuántas garrafas de 10 litros llena en un minuto?	x			
	9) Alejandro es piloto de avión. En cada viaje recorre 976 km y viaja a una velocidad media de 425 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda en hacer su recorrido?		x		
	10) En un almacén de placas hay en total 525 colocadas en 100 estantes. Sabiendo que en cada estante hay el mismo número de placas, calcula cuántas placas hay en cada estante.	x			
	11) En la temporada de la fresa, los trabajadores recogen en total 650 kilos de fresa. Si en el mercado hemos obtenido unas ganancias de 1950 euros, ¿a cuánto hemos vendido el kilo?	x			
	12) Tengo 200 euros, y necesito cada día 5 euros para comer. ¿Para cuántos días me alcanzará este dinero?		x		
	13) Juan tiene 12 caramelos, quiere colocarlos en hileras de cuatro ¿Cuántas hileras puede hacer?			x	
	14) Imagina que vas al kiosko con tus dos amigos, tenéis 1€ entre los tres y queréis comprar chicles, que cuestan 7 céntimos. Haciendo uso de la estimación, ¿Cuántos chicles podréis comprar aproximadamente?		x		
	15) En un campo se han recogido 935 naranjas y las han colocado en 30 bolsas. ¿Cuántas naranjas hay aproximadamente en cada bolsa?	x			

Tabla 4.3.5. *Objetivos de cada grupo en tres momentos de la unidad didáctica: en el análisis cognitivo, al comienzo de la unidad didáctica y en las sesiones de clase*

Grupos	Obj. En el análisis cognitivo de la UD	Obj. Antes de las sesiones	Obj. De las sesiones
G1	<ol style="list-style-type: none"> 1. Calcular la mitad y el doble mediante acciones de repartos de objetos cotidianos con sus compañeros. 2. Elaborar series numéricas de números pequeños utilizando mitades. 3. Representar repartos por medio de representaciones gráficas. 4. Relacionar repartos entre dos y mitades. 5. Generar situaciones en las que se relacionen los conceptos de doble y mitad. 6. Identificar el símbolo de la división para saber explicar el reparto que realiza. 7. Saber realizar estimaciones mediante procedimientos sencillos. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Calcular la mitad y el doble mediante acciones de repartos de objetos cotidianos con sus compañeros. 2. Elaborar series numéricas de números pequeños utilizando mitades. 3. Representar repartos por medio de representaciones gráficas. 4. Relacionar repartos entre dos y mitades. 5. Generar situaciones en las que se relacionen los conceptos de doble y mitad. 6. Identificar el símbolo de la división para saber explicar el reparto que realiza. 	<ol style="list-style-type: none"> S1. Calcular mitades y dobles Relacionar repartos entre 2 y mitades Relacionar los conceptos de doble y mitad. S2. Calcular mitades y dobles Relacionar repartos entre 2 y mitades Relacionar los conceptos de doble y mitad. S3. Representar gráficamente repartos Relacionar repartos entre 2 y mitades Saber realizar estimaciones mediante procedimientos sencillos. S4. Representar gráficamente repartos Relacionar repartos entre 2 y mitades Saber realizar estimaciones mediante procedimientos sencillos. S5. Calcular mitades y dobles Elaborar series numéricas con mitades Representar físicamente repartos. S6. Calcular mitades y dobles Elaborar series numéricas con mitades Representar físicamente repartos.
G2	<ol style="list-style-type: none"> O.1. Identificar la mitad de una serie de elementos. O.2. Calcular mitades de números sencillos. O.3. Comprender el concepto de agrupamiento usando material físico-manipulativo. O.4. Interpretar el agrupamiento a través de representaciones gráficas. O.5. Relacionar el concepto de agrupamiento y resta sucesiva. O.6. Comprender el concepto de reparto usando material físico-manipulativo. O.7. Interpretar el reparto a través de representaciones gráficas. O.8. Diseñar problemas de reparto. O.9. Conocer los diferentes elementos de la división 	<ol style="list-style-type: none"> O.1. Identificar la mitad de una serie de elementos. O.2. Calcular mitades de números sencillos. O.3. Comprender el concepto de agrupamiento usando material físico-manipulativo. O.4. Interpretar el agrupamiento a través de representaciones gráficas. O.5. Relacionar el concepto de agrupamiento y resta sucesiva. O.6. Comprender el concepto de reparto usando material físico-manipulativo. O.7. Interpretar el reparto a través de representaciones gráficas. O.8. Diseñar problemas de reparto. O.9. Conocer los diferentes elementos de la división 	<ol style="list-style-type: none"> S1. Identificar la mitad de una serie de elementos Calcular mitades de números sencillos S2. Identificar la mitad de una serie de elementos Calcular mitades de números sencillos S3. Comprender el concepto de agrupamiento usando material físico-manipulativo. Interpretar el agrupamiento a través de representaciones gráficas. Relacionar el concepto de agrupamiento y resta sucesiva. S4. Comprender el concepto de reparto usando material físico-manipulativo. S5. Comprender el concepto de reparto usando material físico-manipulativo. Interpretar el reparto a través de representaciones gráficas.

Grupos	Obj. En el análisis cognitivo de la UD	Obj. Antes de las sesiones	Obj. De las sesiones
G3	<ol style="list-style-type: none"> 1. Realizar la división con material físico 2. Entender el concepto de división 3. Comprender los términos de la división 4. Conocer los tipos de división: exacta y entera 5. Adquirir el procedimiento de la división 6. Utilizar la prueba de la división para comprobar dichas divisiones 7. Aplicar la división a problemas cotidianos 8. <i>Resuelve problemas</i> 9. Integrar la división a la vida diaria 10. Calcular de manera mental con distintos tipos de operaciones 11. Elabora problemas de división de forma autónoma 12. Saber dividir entre un número de más de una cifra 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Realizar la división con material físico 2. Adquirir el procedimiento de la división 3. Aplicar la división a problemas cotidianos 4. <i>Resolver problemas de división</i> 5. Integrar la división a la vida diaria 6. Entender el concepto de la división 7. Comprender los términos de la división 8. Conocer los tipos de división: exacta y entera 9. <i>Iniciarse en el algoritmo de la división</i> 10. Elaborar problemas de división de forma autónoma 11. Calcular mentalmente distintos tipos de operaciones 	<p>Diseñar problemas de reparto.</p> <p>S6. Conocer los diferentes elementos de la división</p> <p>Identificar la mitad de una serie de elementos.</p> <p>Calcular mitades de números sencillos.</p> <p>Comprender el concepto de reparto usando material físico-manipulativo.</p> <p>S1. Realizar la división con material físico</p> <p>Adquirir el procedimiento de la división</p> <p>Aplicar la división a problemas cotidianos</p> <p>Resolver problemas de división</p> <p>Integrar la división a la vida diaria</p> <p>S2. Realizar la división con material físico</p> <p>Adquirir el procedimiento de la división</p> <p>Aplicar la división a problemas cotidianos</p> <p>Resolver problemas de división</p> <p>Integrar la división a la vida diaria</p> <p>S3. Entender el concepto de la división</p> <p>Comprender los términos de la división</p> <p>S4. Entender el concepto de la división</p> <p>Comprender los términos de la división</p> <p>Conocer los tipos de división: exacta y entera</p> <p>S5. -Realizar la división con material físico</p> <p>Adquirir el procedimiento de la división</p> <p>Aplicar la división a problemas cotidianos</p> <p>Resolver problemas de división</p> <p>Integrar la división a la vida diaria</p> <p>S6. Realizar la división con material físico</p> <p>Adquirir el procedimiento de la división</p> <p>Iniciarse en el algoritmo de la división</p> <p>S7. Adquirir el procedimiento de la división</p> <p>Iniciarse en el algoritmo</p> <p>Aplicar la división a problemas cotidianos</p> <p>Resolver problemas de división</p> <p>Integrar la división a la vida diaria</p> <p>Elaborar problemas de división de forma autónoma</p> <p>S8. Entender el concepto de la división</p> <p>Comprender los términos de la división</p> <p>Aplicar la división a problemas cotidianos</p> <p>Resolver problemas de división</p>

Grupos	Obj. En el análisis cognitivo de la UD	Obj. Antes de las sesiones	Obj. De las sesiones
G4	<p><u>Conceptuales</u></p> <p>2. Conocer los distintos usos y tipos de la división.</p> <p>10. Elegir los cálculos correctos para realizar un problema.</p> <p>11. Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.</p> <p>12. Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas.</p> <p><u>Procedimentales</u></p> <p>1. Aplicar algoritmos de cálculo correspondiente a la suma, resta, multiplicación y división.</p> <p>3. Relacionar los términos de la división.</p> <p>4. Usar cálculos mentales para la resolución de problemas.</p> <p>5. Resolver problemas sencillos de la vida cotidiana utilizando la división.</p> <p>6. Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema.</p> <p>7. Diferenciar problemas de una y dos etapas.</p> <p>8. Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera.</p> <p>9. Aplicar pasos previos para resolver un problema.</p> <p>10. Elegir los cálculos correctos para realizar un problema.</p> <p>11. Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.</p> <p>12. Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas.</p>	<p>1. Conocer los distintos usos y tipos de la división (C).</p> <p>2. Relacionar los términos de la división (P).</p> <p>3. Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera (P).</p> <p>4. Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema (P).</p> <p>5. Diferenciar problemas de una y dos etapas (P).</p> <p>6. Elegir los cálculos y algoritmos correctos para realizar un problema (P y C).</p> <p>7. Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos (P y C).</p> <p>8. Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas (P y C).</p>	<p>Calcular mentalmente distintos tipos de operaciones</p> <p>S1. •Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera.</p> <p>•Reflexionar ante el contenido del problema.</p> <p>•Elegir los cálculos y algoritmos correctos para realizar un problema.</p> <p>•Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.</p> <p>•Conocer los distintos usos y tipos de la división.</p> <p>S2. •Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera.</p> <p>•Reflexionar ante el contenido del problema.</p> <p>•Elegir los cálculos y los algoritmos correctos para realizar un problema.</p> <p>•Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.</p> <p>•Conocer los distintos usos y tipos de la división.</p> <p>S3. •Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera.</p> <p>•Elegir los cálculos y algoritmos correctos para realizar un problema.</p> <p>•Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.</p> <p>•Conocer los distintos usos y tipos de la división.</p> <p>•Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas.</p> <p>S4. •Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera.</p> <p>•Elegir los cálculos y algoritmos correctos para realizar un problema.</p> <p>•Reflexionar ante el contenido del problema</p> <p>•Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.</p> <p>•Conocer los distintos usos y tipos de la división.</p> <p>S5. •Conocer los distintos usos y tipos de la división.</p>

Grupos	Obj. En el análisis cognitivo de la UD	Obj. Antes de las sesiones	Obj. De las sesiones
			<ul style="list-style-type: none"> •Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera. •Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema. •Elegir los cálculos y algoritmos correctos para realizar un problema. •Diferenciar problemas de una y dos etapas. <p>S6. •Conocer los distintos usos y tipos de la división.</p> <ul style="list-style-type: none"> •Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera. •Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema. •Elegir los cálculos y algoritmos correctos para realizar un problema. •Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas. <p>S7. •Conocer los distintos usos y tipos de la división.</p> <ul style="list-style-type: none"> •Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera. •Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema. •Elegir los cálculos y algoritmos correctos para realizar un problema. •Diferenciar problemas de una y dos etapas. <p>S8. •Conocer los distintos usos y tipos de la división.</p> <ul style="list-style-type: none"> •Relacionar los términos de la división.
G5	<p>Hechos:</p> <p>O8: Enuncie y relacione los distintos tipos de problemas de división.</p> <p>Conceptos:</p> <p>O1: Relacione la división como inversa de la multiplicación.</p> <p>O2: Entienda e interprete las propiedades de la división.</p> <p>O3: Distinga entre división exacta y no exacta.</p> <p>O4: Distingue e interprete los dos tipos de división.</p> <p>O5: Comprenda y memorice el algoritmo de la división.</p>		<p>S1. -Conocer e identificar los términos de la división.</p> <p>-Ver que la división exacta es una operación inversa de la multiplicación.</p> <p>S2. -Distinguir una división exacta de una división no exacta.</p> <p>-Relacionar el término de exactitud con el resto de la división.</p> <p>S3. -Saber las distintas propiedades que tiene la división.</p> <p>-Conocer el manejo de dichas propiedades a la hora de realiza divisiones.</p> <p>-Saber identificarlas en un enunciado de un problema.</p>

Grupos	Obj. En el análisis cognitivo de la UD	Obj. Antes de las sesiones	Obj. De las sesiones
	<p>O9: Comprenda e identifica los términos de la división.</p> <p>O10: Interprete y memorice la comprobación del resultado de la división.</p> <p>O11: Entienda e interprete la propiedad del resto.</p> <p>Procedimientos:</p> <p>O5: Comprenda y memorice el algoritmo de la división.</p> <p>O6: Plantea un problema que se resuelva utilizando la operación de división.</p> <p>O7: Plantea y resuelva un problema con el inverso.</p> <p>O10: Interprete y memorice la comprobación del resultado de la división.</p>		<p>S4. -Conocer y saber aplicar el algoritmo de la división en el caso indicado.</p> <p>-Saber enunciar un problema del tipo de división indicada.</p> <p>S5. -Conocer y saber aplicar el algoritmo de la división en el caso indicado.</p> <p>-Saber enunciar un problema del tipo de división indicada.</p> <p>S6. -Conocer y saber aplicar el algoritmo de la división en el caso indicado.</p> <p>-Saber enunciar un problema del tipo de división indicada.</p> <p>S7. -Conocer y saber aplicar el algoritmo de la división en el caso indicado.</p> <p>-Saber enunciar un problema del tipo de división indicada.</p> <p>S8. -Conocer y entender la propiedad del resto.</p> <p>-Conocer y entender la prueba de la división.</p> <p>-Saber si una división está bien realizada.</p> <p>-Saber hacer una división si te falta alguno de los componentes de la prueba de la división.</p> <p>Actividad de refuerzo.</p> <p>-Distinguir una división exacta de una división no exacta.</p> <p>-Relacionar el término de exactitud con el resto de la división.</p> <p>-Conocer y saber aplicar el algoritmo de la división.</p> <p>-Conocer y entender la prueba de la división.</p> <p>-Saber si una división está bien realizada.</p>
G6	<p><u>Objetivos conceptuales</u></p> <p>1. Comprender el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana.</p> <p>2. Reproducir de forma oral y escrita el cálculo de la división.</p> <p>3. Interpretar la división como operación inversa a la multiplicación.</p> <p>4. Identificar los tipos de división y sus propiedades.</p> <p>5. Comprender el algoritmo de la división.</p>	<p>S1. Meta: Dividir con material multibase. Comprender el porqué del algoritmo de la división.</p> <p>S2. Metas: Conocer de un nuevo método para dividir</p> <p>S3. Metas: Comprender y aplicar el método ABN para dividir.</p>	<p>S1. -Comprender el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana.</p> <p>-Aplicar diferentes estrategias para realizar las divisiones.</p> <p>S2. -Identificar los tipos de división y sus propiedades.</p> <p>-Aplicar diferentes estrategias para las realizar las divisiones.</p> <p>S3. -Aplicar diferentes estrategias para realizar las divisiones.</p>

Grupos	Obj. En el análisis cognitivo de la UD	Obj. Antes de las sesiones	Obj. De las sesiones
	<p>Objetivos procedimentales</p> <p>6. Aplicar en contextos reales la división para repartir y para agrupar.</p> <p>7. Identificar y usa los términos de la división.</p> <p>8. Utilizar estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos mentales con divisiones.</p> <p>9. Aplicar diferentes estrategias para las realizar las divisiones.</p> <p>10. Aplicar el algoritmo de la división.</p> <p>11. Operar con divisores de tres cifras.</p> <p>12. Detectar y usar relaciones numéricas.</p>	<p>S4. Meta: Identificación del tipo de división, cálculo mental, utilización del material multibase y capacidad de clasificación para agrupar los resultados.</p> <p>S5. Meta: Resolver problemas con divisiones no exactas usando diversos materiales.</p> <p>S6. Meta: Que el alumnado sea capaz de adquirir los diversos métodos de resolución de problemas de división por sus propios medios.</p> <p>S7. Meta: Comprender la utilidad de la división en la vida cotidiana. Trabajar con la estimación.</p> <p>S8. Meta: Automatización del algoritmo de la división.</p>	<p>S4. -Operar con divisores de tres cifras.</p> <p>-Utilizar estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos mentales con divisiones.</p> <p>-Aplicar diferentes estrategias para las realizar las divisiones.</p> <p>-Reproducir de forma oral y escrita el cálculo de la división.</p> <p>-Detectar y usar relaciones numéricas.</p> <p>S5. -Operar con divisores de tres cifras.</p> <p>- Utilizar estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos mentales con divisiones.</p> <p>-Aplicar diferentes estrategias para las realizar las divisiones.</p> <p>-Reproducir de forma oral y escrita el cálculo de la división.</p> <p>-Detectar y usar relaciones numéricas.</p> <p>S6. -Identificar y usar los términos de la división.</p> <p>-Aplicar el algoritmo de la división</p> <p>S7. -Comprender el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana.</p> <p>-Aplicar la estimación en la resolución de problemas.</p> <p>S8. Utilizar estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos mentales con divisiones.</p>

Tabla 4.3.6. *Tablas de Caracterización de los objetivos de cada grupo en las sesiones de clase. Fase 3*

	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G1	Relacionar repartos entre dos y mitades.	aprendizaje	Relacionar			Reparto/mitades		partitiva	
	Saber realizar estimaciones mediante procedimientos sencillos.	aprendizaje	Saber			estimaciones			
	Calcular mitades y dobles	aprendizaje			Calcular	Mitades/ dobles			
	Representar gráficamente repartos	aprendizaje			Representar	Reparto	gráfica	partitiva	
	Elaborar series numéricas con mitades	aprendizaje			Elaborar	Series numéricas/ mitades			
	Relacionar los conceptos de doble y mitad	aprendizaje	Relacionar			Doble/ mitad			
	Representar físicamente repartos	aprendizaje		Representar		Reparto	Físico	partitiva	
	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G2	Diseñar problemas de reparto.	aprendizaje			Diseñar	reparto		partitiva	
	Calcular mitades de números sencillos.	aprendizaje			Calcular	Mitades			
	Identificar la mitad de una serie de elementos.	aprendizaje	Identificar			Mitades			
	Comprender el concepto de agrupamiento usando material físico-manipulativo.	aprendizaje	comprender			agrupamiento	físico		
	Interpretar el agrupamiento a través de representaciones gráficas.	aprendizaje	interpretar			agrupamiento	gráfica		
	Relacionar el concepto de agrupamiento y resta sucesiva.	aprendizaje	relacionar			Agrupamiento/ resta sucesiva			
	Comprender el concepto de reparto usando material físico-manipulativo.	aprendizaje	Comprender			reparto	físico		
	Interpretar el reparto a través de representaciones gráficas.	aprendizaje	interpretar			reparto	gráfica		
	Conocer los diferentes elementos de la división	aprendizaje	conocer			Elementos de la división			

	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G3	Realizar la división con material físico	aprendizaje			Realizar	División	Físico		
	Entender el concepto de división	aprendizaje	Entender			División			
	Comprender los términos de la división	aprendizaje	Comprender			Términos de la división			
	Conocer los tipos de división: exacta y entera	aprendizaje	Conocer			Tipos de división			
	Adquirir el procedimiento de la división	aprendizaje	Adquirir			Algoritmo de división			
	Aplicar la división a problemas cotidianos	aprendizaje			Aplicar	Problemas de división		Personal	
	Integrar la división a la vida diaria	aprendizaje	Integrar			División		Personal	
	Calcular de manera mental con distintos tipos de operaciones	aprendizaje			Calcular	operaciones			
	Elabora problemas de división de forma autónoma	aprendizaje			Elaborar	Problemas de división			
	Resolver problemas de división	aprendizaje			Resolver	Problemas de división			
Iniciarse en el algoritmo de la división	aprendizaje			Iniciarse	Algoritmo de la división				

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido		Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	
G4	Conocer los distintos usos y tipos de la división.	aprendizaje	Conocer			Usos y tipos de división		
	Contrastar si se puede llegar a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos	aprendizaje	Contrastar					
	Aplicar el algoritmo de la división para crear nuevos problemas	aprendizaje	Crear		Aplicar	Algoritmo de la división/ problemas		
	Relacionar los términos de la división.	aprendizaje	Relacionar			Términos de la división		
	Reflexionar ante el contenido del enunciado de un problema.	aprendizaje	Reflexionar			Problema		
	Diferenciar problemas de una y dos etapas.	aprendizaje	Diferenciar			Problemas de una y dos etapas		
	Analizar las diversas funciones del resto, en función de los problemas de división entera.	aprendizaje	Analizar			Funciones del resto/ problemas de división		
Elegir los cálculos y algoritmos correctos para realizar un problema	aprendizaje	Elegir			Cálculos/ algoritmos / problemas			

	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G5	Distinguir una división exacta de una división no exacta.	aprendizaje	Distinga			División exacta y no exacta			
	Conocer y entender la propiedad del resto.	aprendizaje	Entienda/ interpreta			Propiedad del resto			
	Conocer e identificar los términos de la división	aprendizaje	Conocer/ Identificar			Términos de la división			
	Ver que la división exacta es una operación inversa de la multiplicación	aprendizaje			Ver	División como operación inversa a la multiplicación			
	Saber las distintas propiedades que tiene la división	aprendizaje	Saber			Propiedades de la división			
	Conocer el manejo de dichas propiedades a la hora de realiza divisiones	aprendizaje	Conocer			Propiedades de la división/ divisiones			
	Saber identificarlas en un enunciado de un problema (<i>propiedades</i>)	aprendizaje	Saber/ Identificarlas			Propiedades de la división/ problemas			
	Conocer y saber aplicar el algoritmo de la división en el caso indicado	aprendizaje	Conocer/ saber			Algoritmo de la división			
	Saber enunciar un problema del tipo de división indicada	aprendizaje	Saber			Problemas de división			
	Conocer y entender la prueba de la división	aprendizaje	Conocer/ entender			Prueba de la división			
	Relacionar el término de exactitud con el resto de la división	aprendizaje	Relacionar			Exactitud/ resto de la división			
	Saber si una división está bien realizada	aprendizaje	Saber			Prueba de la división			
	Saber hacer una división si te falta alguno de los componentes de la prueba de la división	aprendizaje	Saber		Hacer	Prueba de la división sin un componente			

grupos	Obj	Tipo de Obj	Capacidades			Contenido			Situación
			cog	cont	inst	contenido	SR	sentido	
G6	Comprender el significado de la división y su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana.	aprendizaje	Comprender			Significado de la división/ Problemas			Personal
	Identificar los tipos de división y sus propiedades.	aprendizaje	Identificar			Tipos de división/ propiedades de la división			
	Identificar y usar los términos de la división.	aprendizaje	Identificar		usar	Términos de la división			
	Utilizar estrategias iniciales para la comprensión y realización de cálculos con divisiones.	aprendizaje			Utilizar	Cálculos con divisiones			
	Aplicar el algoritmo de la división.	aprendizaje			Aplicar	Algoritmo de la división			
	Operar con divisores de tres cifras.	aprendizaje			Operar	Divisiones con divisores de tres cifras			
	Detectar y usar relaciones numéricas.	aprendizaje	Detectar		usar	Relaciones numéricas			
	Reproducir de forma oral y escrita el cálculo de la división.	aprendizaje			Reproducir	Cálculo de la división	Simbólico/ verbal		
	Aplicar diferentes estrategias para las realizar las divisiones.	aprendizaje			aplicar	Estrategias para las divisiones			
	Aplicar la estimación en la resolución de problemas	aprendizaje			aplicar	Estimación/ resolución de problemas			
Metas agregadas en las sesiones									
	Dividir con material multibase	aprendizaje		Dividir		División	Físico		
	Comprender el porqué del algoritmo de la división	aprendizaje	Comprender			Algoritmo de la división			
	Conocer de un nuevo método para dividir	aprendizaje	Conocer			Método para dividir			
	Comprender y aplicar el método ABN para dividir	aprendizaje	Comprender		aplicar	Método ABN para dividir			
	Identificación del tipo de división	aprendizaje	Identificar			Tipo de división			
	cálculo mental					Cálculo mental			
	utilización del material multibase						Físico		
	capacidad de clasificación para agrupar los resultados								

Resolver problemas con divisiones no exactas usando diversos materiales	aprendizaje		Resolver	Divisiones no exactas	físico	
Que el alumnado sea capaz de adquirir los diversos métodos de resolución de problemas de división por sus propios medios.	aprendizaje		Adquirir	Métodos de resolución de problemas de división		
Comprender la utilidad de la división en la vida cotidiana.	aprendizaje	comprender		Utilidad de la división		Personal
Trabajar con la estimación.	aprendizaje		Trabajar	Estimación		
Automatización del algoritmo de la división.	aprendizaje		Automatizar	Algoritmo de la división		

Referencias

- Arias, M. (2014). *Actuación de los tutores y su relación con el proceso de aprendizaje de los profesores de matemáticas en un programa de formación* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Arikan, E., y Unal, H. (2016). An examination of preservice mathematics teachers' realistic approaches with division with remainder (dwr) problems. *Uluslararası Sosyal ve Eğitim Bilimleri Dergisi*, 3 (5), 1-12. DOI: 10.20860/ijoses.11860
- Azcárate, P. (2000). Los futuros maestros ante el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas: un estudio de caso. *Investigación en la Escuela*, 42, 45-54.
- Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.
- Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas. Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Callejo, M. L., Fernández, C. & Márquez, M. (2013). Pre-service primary teachers' knowledge for teaching of quotitive division word problems. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 145-152). Kiel, Germany: PME.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Carballo, R. (2014). *Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica. Una experiencia con profesores* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Cardenoso, J.M. y Azcárate, P. (2002). Una estrategia de formación de maestros de matemáticas, basada en los ámbitos de investigación profesional (AIP). En de Contreras, LC y Blanco, L (Coords.) *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas*. pp. 181-226. Cáceres: Servicio publicaciones de la Universidad Extremadura.
- Castro Rodríguez, E., Rico, L., & Gómez, P. (2015). La enseñanza inicial del concepto de fracción por maestros en formación. Contextos Educativos. *Revista de Educación*, 0(18), 9-23.
- Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca, España: SEIEM.

- Castro, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Climent, N. y Carrillo, J. (2002). Una propuesta para la formación inicial de maestros. Ejemplificación: Los triángulos, una situación de Primaria. *Revista EMA Investigación e innovación en educación matemática*, 7(2), 171-205.
- Climent, N., Romero-Cortés, J. M., Carrillo, J., Muñoz, M. C. y Contreras, L. C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula? *RELIME*, 16(1), 5-12
- Fernández, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Font, V. (2002) Una propuesta dialógica sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros de educación primaria. En G. A. Perafán y A. Adúriz-Bravo (Comp.), *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas contemporáneas* (pp. 117-126). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional-Colciencias-Gaía.
- García, E. y Lorente, R. (2014). Grado en maestro de educación primaria: Motivaciones y preferencias en la elección de mención. *Aula de encuentro*, 1(16), 113-119.
- García, M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación matemática*, 17 (2), 153-166.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Gómez, P., González, M. J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 18(3), 319-338.
- Gómez-Torres, E., Batanero, C., Díaz, C. & Contreras, J. M. (2016). Developing a questionnaire to assess the probability content knowledge of prospective primary school teachers. *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 197- 215.
- Graeber, A. O., Tirosh, D. y Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 95-102.
- Heaton, R. M., y Mickelson, W. T. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 35-59.
- Kaasila, R., Pehkonen, E., y Hellinen, A. (2010). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of división and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 247-261.
- Kazemi, E., Lampert, M., y Ghouseini, H. (2007). *Conceptualizing and using routines of practice in mathematics teaching to advance professional education*. Chicago: Spencer Foundation.

- Lampert, M., Beasley, H., Ghouseini, H., Kazemi, E., y Franke, M. (2010). Using designed instructional activities to enable novices to manage ambitious mathematics teaching. In M. K. Stein & L. Kucan (Eds.), *Instructional explanations in the discipline* (pp. 129-141). New York, NY: Springer.
- Leinonen, J. y Pehkonen, E. (2009). Teaching for understanding in division: A case of elementary teacher students. En: J. Novotná & H. Moraová (eds.), *The development of mathematical understanding, Proceedings of International Symposium Elementary Maths Teaching*. Praha: Charles University.
- Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en la educación primaria. *UNO, Revista de Didáctica de la Matemática*, 36, 93-115.
- López, Á. (2016). *Significados de la relación de divisibilidad de maestros en formación manifestados en el desarrollo de un modelo de enseñanza* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Mallart, A.; Font, V. y Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos*, 152(38).
- Márquez, M., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2011). Cómo estudiantes para maestro interpretan soluciones de alumnos de primaria a problemas de división con resto. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 417-428). Ciudad Real, España: SEIEM.
- Martínez, R. y Nortés, A. (2017). Matemáticas escolares en futuros maestros: un estudio necesario. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 21(1), 368-386.
- Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (2007). Conocimiento numérico de futuros maestros. *Educación matemática*, 19(1), 5-25.
- Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Picado, M. (2012). *El sistema métrico decimal en los libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo xix (1849-1892)* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Ramos, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra, en un curso de formación continua* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Rizvi, N.F. y Lawson, M.J. (2007). Prospective teachers' knowledge: Concept of division. *International Education Journal*, 8(2), 377-392.

- Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis. Madrid.
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Sáenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(3), 355–366.
- Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 233-254.
- Socas, M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 199-224.
- Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturu, A., Irwin, K. & Bana, J. (2001). Pre-service teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration, *Journal of Mathematics Teacher Education* 4, pp. 205–225.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.
- Valls, J., Callejo, M.L. y Llinares, S. (2008). Dialécticas en el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro en el área de Didáctica de la matemática. *Publicaciones*, 38, 89-103.
- Valverde, A. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Wilson, S. (2010). *Knowledge for teaching mathematics in a primary school: Perspectives of pre-service teachers*. (Tesis doctoral). University of Canterbury, Nueva Zelanda.