Capítulo 4

Los Números Negativos en el *Tratado Elemental* de José Mariano Vallejo

Alexander Maz Machado
Departamento de Matemáticas
Universidad de Córdoba

Luis Rico Romero
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

José Mariano Vallejo es sin lugar a dudas el más destacado matemático español de la primera mitad del siglo XIX. En el capítulo 1 se ha señalado cómo aprovecha cada una de las distintas etapas de su vida para adquirir conocimientos tanto matemáticos como de otras ciencias, para posteriormente incorporarlos en sus diversas obras.

Es el típico representante del hombre ilustrado cuya formación esta influida por las reformas educativas y sociales impulsadas por la dinastía Borbón. Su formación matemática la inicia en la Facultad de Filosofía y Artes de la Universidad de Granada y la continua luego en Sección de Arquitectura de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando en Madrid. Allí tiene acceso a la copiosa biblioteca de la Real Academia donde figuraban algunas de las obras matemáticas más importantes de la época, entre ellas estaba los *Elementos de Matemáticas* de Benito Bails que recopilaban lo mas novedoso de las matemáticas publicado en la segunda mitad del siglo XVIII (Maz, 2005).

.

El uso y estudio de todas esta fuentes bibliográficas permitieron a Vallejo adquirir una sólida formación matemática la que le permito más adelante emprender la labor de escribir libros para la enseñanza de las matemáticas al más alto nivel, en un principio estas obras estaban destinadas a la preparación de los militares en sus respectivas Academias y posteriormente fueron promocionadas para la enseñanza en las Indias y las propias universidades españolas.

Por lo tanto, Vallejo ha influido en la formación de varias generaciones de académicos y hombres de ciencia tanto por sus obras publicadas como por las propuestas educativas impulsadas desde los distintos cargos gubernamentales que desempeñó.

LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Los números negativos representan un magnifico ejemplo de la evolución de las ideas y conceptos matemáticos. A lo largo de la historia prestigiosos matemáticos han expresado su parecer y tomado posiciones respecto a este objeto matemático.

La aceptación de los números negativos en el mundo matemático fue lenta y pausada. A partir del siglo XVII los autores de textos matemáticos fueron contribuyendo a esto mediante le reconocimiento de algunas propiedades o características o tan sólo aceptando una repuesta negativa como solución a una ecuación algebraica, tal es el caso de Girard quien en 1629 en su *Invention novelle en àlgebre* se preguntaba ¿por qué esas soluciones imposibles? Y escribía al respecto:

> Je résponds pour trois choses, pour la certitude de la règle genérale, et qu´il n´y a point d´autres solutions, et pour son utilité (citado por Dhombres et al., 1987; p. 108).

Kant también se ocupó de los números negativos, en 1763 publicó un ensayo titulado *Las magnitudes negativas,* donde comienza por establecer dos tipos de oposición: la lógica, basada en el principio de contradicción y la real, en la que dos predicados se oponen, el uno suprime lo que ha sido puesto por el otro pero la consecuencia es algo inteligible. Afirma que el cero es la nada, que en un caso es la negación lógica de una afirmación, mientras que en el otro es resultado de una carencia o ausencia, derivada de la oposición de predicados. La confusión entre estos dos significados de cero da lugar a algunas contradiciones y justifica el rechazo a que las cantidades negativas "sean menores que nada":

> El concepto de las magnitudes negativas ha estado largo tiempo en uso en las matemáticas, donde ha gozado de gran prestigio. No obstante, la idea que de él se hacían la mayoría y las explicaciones que daban, son extrañas y contradictorias, si bien no se derivó de ahí incorrección alguna en su aplicación, debido a que las reglas especiales sustituyeron a la definición y aseguraron el uso.(Kant, 1763/ 1992, p. 120).

El mundo académico de la época es bastante reacio a aceptar plenamente a los números negativos como parte del corpus matemático, basta recordar los planteamientos de D´Alambert, quien en su artículo *Negatif* de la *Enciclopedia* (1751) expresa sus reservas respecto a las cantidades negativas, entre otras razones porque considera que la complejidad del concepto presenta dificultades no resueltas o no suficientemente aclaradas. Una de estas dificultades consiste en establecer que su valor es menor que cero: "Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avançer une chose qui ne se peut pas concevoir" (D´Alambert, 1782, p. 299). Otra de las dificultades que señala, se presenta cuando se toma como cantidad negativa una cantidad positiva, pero *en una falsa posición* respecto del cálculo, ya que se presentan como sumandos en vez de como sustraendos. De ahí concluye que no se pueden aceptar las cantidades negativas de manera aislada, pues éstas deben definirse siempre en relación con las cantidades positivas. En este sistema conjunto que reclama D'Alambert, tienen sentido las reglas de los signos para las operaciones. También afirma que el significado real de las soluciones negativas de las ecuaciones es debido a que *"ces racines reviennent positives par de légers changemens dans la solution"* (p. 300).

En la discusión sobre la relación de orden D'Alambert expresa cierta confusión, propia de la época, ya que establece que el paso del positivo al negativo se hace siempre pasando por cero o por infinito, y esto lo justifica estudiando los modos en que cambia el signo de una función analítica, que se puede producir bien mediante un corte con el eje de abcisas o bien mediante el paso por una asíntota vertical de orden impar. La relación de orden entre cantidades positivas y negativas muestra para este autor una de sus limitaciones.

Posteriormente Lacorix en el tomo II del *Curso completo elemental de matemáticas puras* retoma los planteamientos de D´Alambert pero con una mayor radicalidad:

> Recapitulando cuanto hemos expuesto tocante á las que llamamos cantidades negativas, diremos que en realidad son una expresiones absurdas de los resultados de sustracciones impracticables; que como tales son indicios seguros de alguna incompatibilidad que hay en la propuesta de la cuestión, de la cual hayan dimanado; por consiguiente nos dan á conocer que no es posible resolver la cuestión sin que antes se rectifique alguna de sus condiciones haciendo sustractiva alguna cantidad que antes se habia supuesto aditiva, ó al contrario; y últimamente, que se puede venir en conocimiento del modo de ejecutar esta rectificación considerando á las expresiones realmente absurdas –6; –8; –a; –b; &c., como si fuesen verdaderos símbolos de cantidades y haciendo uso de las reglas anteriormente establecidas de los signos en las operaciones que nos propongamos ejecutar con aquellas expresiones (Lacorix, 1837, p. 137).

El mismo Lacroix en esta obra también explica los motivos para la aceptación de los negativos; no sin dejar de subrayar el rechazo que suponen:

> Luego que se observó que la aplicación de las reglas de los signos á estas cantidades absurdas procedentes de cuestiones imposibles producía resultados verdaderos, fueron miradas aquellas expresiones como una cierta especie de verdaderas cantidades; se las designó con el nombre de cantidades negativas; se las sometió á todas las operaciones de cálculo; y se dijo que si la soluciones negativas indicaban un error en la propuesta de la cuestión, el Álgebra las corregía. (Lacorix, 1837, p. 133).

Carnot en *Geométrie de position* reinterpreta las cuestiones algebraicas relacionadas con los negativos planteando una geometría de posición en términos de correlaciones entre líneas de sentidos contrarios. Planteó que admitir la cantidad al sentido contrario del positivo traería consigo:

> Une multitude de paradoxes, ou plutôt d´absurdités palpables, par exemple –3 serait moindre que 2, cepedant $(-3)^2$ serait plus grand que $(2)^2$; c´est-à-dire qu´entre ces deux quantités inégales 2 et –3, le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, et réciproquement, ce qui choque toutes les idées claires qu´on peut se

former de la quantité (Geométrie de position, 1803, citado por Dhombres et al., 1987; pp. 111-112).

También Euler en *Vollständige Anleitung zur Álgebra* (1770), acepta las cantidades negativas y justifica su construcción de forma análoga a los positivos, sólo que, en lugar de incrementos, utiliza sustracciones sucesivas de unidades:

> But if, instead of continuing this series by successive aditions, we continued it in the opposite direction, by perpetually substracting unity we should have the following series of negative numbers: 0,-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10, and so on to infinity (Euler, 1840; p. 5)

Además los considera números enteros y define la regla de los signos; también considera su existencia como entidades independientes. Euler propone una justificación algebraica formal de los números negativos basada en procedimientos aritméticos. Euler comprende la naturaleza abstracta de los números negativos; pero aun no dispone del aparato y de la estructura algebraica moderna para formalizarlos axiomáticamente, como actualmente se les acepta.

Finalmente, es Herman Hankel (1839-1873) quien reconoce y legitima los números negativos como entidades independientes con una estructura algebraica propia, en su obra *Theorie der complexen Zahlensysteme* (1867), otorgándoles estatus de números enteros. Hankel afirmaba que las leyes de composición no son propiedades de los números, sino que estas leyes, que se establecen por definición, crean el correspondiente campo numérico (Wussing, 1998); así que, apoyándose en la ley de composición interna y las leyes de cálculo, estableció el principio de permanencia de las leyes formales, que dice:

> Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der aritmética universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einader auch gleich bleiden, wenn die Zeichen authöre, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen (Hankel, 1867; p. 11).

Esta construcción del sistema numérico tiene un carácter genético, pues parte de la ampliación de un campo numérico a otro y, en cada ampliación, las leyes válidas en uno se trasladan también al nuevo campo ampliado; de esta forma las leyes y operaciones válidas para las cantidades positivas también lo son para las negativas.

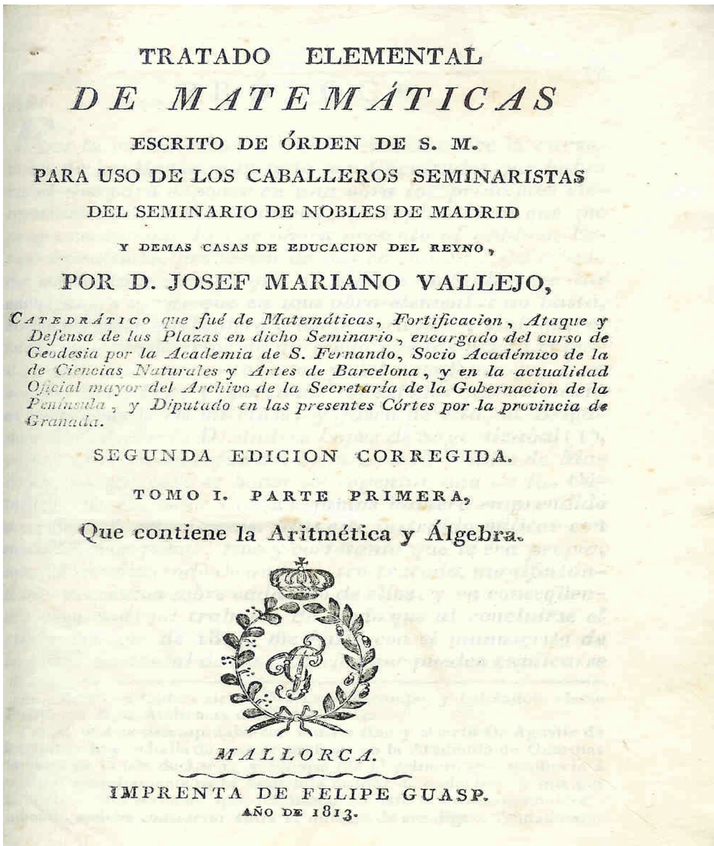
LOS NÚMEROS NEGATIVOS EN EL TRATADO ELEMENTAL

Como hemos visto, no es hasta 1867 cuando Hankel formalizas los números negativos. Por lo tanto interesa conocer el tratamiento y las ideas que Vallejo presenta sobre el número negativo en el *Tratado elemental*, en un momento en que aún no se habían aceptado totalmente como números enteros.

Durante la explicación y presentación de los contenidos de la aritmética no se consideran las cantidades negativas, pues éstas no eran necesarias ya que en los planteamientos se utilizan palabras para describir algunas situaciones en el desarrollo de ejercicios. Así que es en el campo del álgebra en el que se consideran las cantidades negativas, pues en ella sí satisfacen correctamente las cuestiones en el mismo modo en que han sido planteadas. Parece que esto puede ser influencia de la afirmación de Euler (1797, p. B2) “In Algebra then we confider only numbers wich represent quantities, without regarding the different kinds of quantity”.De tal manera que en el álgebra se pueden abordar los números que representen cantidades sin importar la naturaleza o cualidad de ellas.

Los números negativos son presentados en el texto en el inicio del Álgebra (pp. 184-186). Se explica que hay dos tipos de cantidades: las positivas y las negativas; luego procede a realizar problemas con los que ejemplifica tales cantidades

> Acerca de las cantidades negativas se han dicho muchos desatinos; porque se les ha llamado cantidades falsas, y se ha dicho que no existían, etc.; pero en la idea de cantidad negativa no entra otra sino la de conspirar al fin contrario al que el calculador se propone, debiendo advertirse que una misma cantidad puede ser positiva en una cuestión y negativa en otra (Vallejo 1813, p. 163).



TRATADO ELEMENTAL
DE MATEMÁTICAS
ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.
PARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS
DEL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID
Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REYNO,
POR D. JOSEF MARIANO VALLEJO,
Catedrático que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Seminario, encargado del curso de Geodesia por la Academia de S. Fernando, Socio Académico de la de Ciencias Naturales y Artes de Barcelona, y en la actualidad Oficial mayor del Archivo de la Secretaría de la Gobernacion de la Península, y Diputado en las presentes Córtes por la provincia de Granada.
SEGUNDA EDICION CORREGIDA.
TOMO I. PARTE PRIMERA,
Que contiene la Aritmética y Álgebra.
MALLORCA.
IMPRENTA DE FELIPE GUASP.
AÑO DE 1813.

Al indicar que es un desatino llamarlas falsas, implícitamente está aceptando su existencia y no considera ningún motivo para rechazarlas, siempre que mantengan su propio significado, que consiste en actuar en contra de la intención del calculador, de manera que una misma cantidad "puede ser positiva en una cuestión y negativa en otra" (p. 183).

Vallejo no incluye representaciones gráficas para ilustrar las cantidades enteras o negativas o, incluso, los números enteros. Desecha considerar a las cantidades negativas como falsas, las interpreta como entes contarios que conspiran contra los intereses de quien realiza las operaciones y las presenta de la siguiente manera:

> A las cantidades, que conspiran al fin que se propone el calculador, se les da el nombre de cantidades positivas, y á las que conspiran á un fin opuesto el de negativas (Vallejo 1813, p. 163).

En el *Tratado* se reflexiona acerca de lo que significa que una cantidad sea menor que cero, algo muy común en la época (Maz, 2005):

> Si al resolver esta cuestión encontrásemos que el resultado era cero, diriamos que el sugeto ni ahorraba ni se empeñaba; y comparando el resultado anterior con este en que sale cero, vemos que es mas ventajoso para el sugeto ahorrar cero que ahorrar –150; por esta causa se ha dicho que las cantidades negativas eran menores que cero ; en lo cual no se ha procedido con el mayor acierto, puesto que formándonos nosotros la idéa de cero, ó de la nada cuyo símbolo es, prescindiendo de todo lo que hay, para poder decir que hay nada; despues de haber prescindido de todo lo que hay, no se puede prescindir de mas, y por lo mismo no se puede formar idéa de una cosa que sea ménos que nada. No obstante, esta expresión abreviada de que se usa para dar á conocer que una cantidad de esta especie reunida con otra de especie contraria, la disminuye en tanto cuanto ella vale; luego esto equivale á ménos que á haberle añadido nada ó cero (Vallejo, 1813, p. 167).

Éste fragmento presenta tres reflexiones: la primera tiene que ver con la interpretación de las cantidades negativas como menores que cero; la segunda idea hace una discusión sobre esto, enfatizando que no se puede quitar algo de donde ya se ha quitado todo; la tercera reflexión orienta hacia un nuevo significado: dar a conocer que al juntarla con otra contraria tiene un efecto menor que agregarle nada. De nuevo la interpretación de negatividad es la misma que hace Kant, con la igual dificultad para entender cómo es posible restar de cero.

El siguiente párrafo se orienta a discutir el significado tradicional de cantidad negativa menor que nada. En el párrafo siguiente discute y demuestra la relación $-a<0$:

> Tambien ha conducido á esto el que, suponiendo que se pueda comparar una cantidad negativa con cero, resulta que el valor de aquella es menor que cero; porque sea por ejemplo $-a$: si el valor de esta cantidad, comparado con nada ó cero no es menor, será igual ó mayor; si fuese igual, y supusiésemos que $-a=0$, como si á cosas iguales se añaden iguales, los resultados serán iguales, tendrémos, añadiéndoles 3a á ambas, que $3a - a = 0 + 3a$; pero $3a - a$ es 2a, porque podemos considerar á $-a$ como una unidad cualquiera, y quitando de tres veces esta unidad una vez esta unidad, nos resultará dos veces esta unidad ó 2a; y como $0 +3a$ es 3a, tendrémos que $2a = 3a$; pero como esto es un absurdo, porque dos unidades ó cosas cualesquiera no pueden equivaler á tres de las mismas, tendremos que el supuesto que nos ha conducido á él tambien lo será; luego no puede ser $-a = 0$.
>
> Tampoco puede ser $-a >0$, porque en este caso añadiendo á ambas expresiones 3a, tendríamos: $3a - a > 0 + 3a$, ó $2a > 3a$, absurdo tambien manifiesto; luego tampoco se puede suponer que $-a > 0$, luego será forzosamente $-a < 0$. (Vallejo, 1813, p. 167).

Vallejo utiliza el principio o ley de tricotomía sin ninguna duda en la anterior demostración, usando implícitamente la idea de que toda cantidad positiva es mayor que una negativa; esta demostración es algebraica y es la primera ocasión en que trabaja con expresiones literales. A partir de aquí se abandona el carácter relativo de las expresiones negativas que ha sostenido en la página 164, cuando afirmaba: “Luego esto de cantidades positivas y negativas solo es relativo al fin que se propone el calculador”.

Justifica que las cantidades negativas son *menores que nada* a través de una demostración. Realiza un planteamiento mediante una reducción al absurdo, concluyendo que matemáticamente una cantidad negativa, en efecto, es menor que cero. A partir de ahora, una de las características de las cantidades negativas es que *son menores que cero*.

Para él, una cantidad no es positiva ni negativa en sí misma, sino que depende de la circunstancia en la que se le considere. Las cantidades negativas surgen de los cálculos aritméticos. En el siguiente párrafo se indica la relatividad del carácter positivo o negativo de una cantidad:

> Luego esto de cantidades positivas y negativas solo es relativo al fin que se propone el calculador; y la cantidad que en una qüestion sea positiva, en la qüestion opuesta será negativa (Vallejo, 1813, p. 164).

Al indicar que es un desatino llamarlas falsas, implícitamente está aceptando su existencia y no considera ningún motivo para rechazarlas, siempre que mantengan su propio significado, que consiste en actuar en contra de la intención del calculador, de manera que una misma cantidad “puede ser positiva en una cuestión y negativa en otra”. La presentación de Vallejo vincula las cantidades negativas con las operaciones aritméticas y con la interpretación de los datos y resultados en la resolución de problemas; esta idea la ejemplifica con la comparación entre el cálculo del tiempo que tarda un estanque en llenarse o en vaciarse, así como con la comparación entre las ganancias y pérdidas de un mismo sujeto. Y continúa afirmando lo siguiente:

> Como las cantidades positivas conspiran al fin que se propone el calculador, tratan de aumentar el resultado que se busca, y por lo mismo se señalan estas cantidades con el signo +, que es el de aumento ó adicion, y como las cantidades negativas conspiran al fin opuesto al que se propone el calculador, tratan de disminuir el resultado que se busca, y por lo mismo se señalan con el signo –; de manera que de aquí en adelante no podremos escribir una cantidad sin poner el signo que le corresponde para indicar su naturaleza. Sin embargo, cuando es el signo + el que lleva una cantidad, se suprime; de modo que a es lo mismo que +a; pero cuando de ningun modo se puede omitir el signo es quando es menos ó –; de manera que en –a no se puede dejar de poner el signo –, pues entonces no se expresaría que en qualquiera qüestion donde debía entrar la a, había de conspirar á disminuir el resultado en todo el valor que ella tuviese. (p. 164, segunda edición).

Cuando la cantidad es negativa es indispensable identificarla mediante el signo menos (–), lo cual no es necesario si la cantidad positiva o está aislada; asimismo afirma que las cantidades negativas indican disminución.

Los fenómenos utilizados por Vallejo en los ejemplos que presenta para ilustrar las cantidades negativas en el *Tratado,* corresponden a situaciones cotidianas y reales. Se muestran diversas cantidades adjetivadas o cantidades relativas mediante expresiones como: ahorrar, empeñar, llenar y salir, entre otras; sin embargo en todas las situaciones presentadas las cantidades negativas indican acciones contrarias a las positivas: vaciar, gastar y empeñar. Respecto a la noción de orden en los negativos, se presenta lo siguiente:

> Figurémonos ahora que ajustamos las cuentas á otro sugeto, y encontramos que se

> empeña en 300 ducados cada año; si queremos comparar la situación de estos dos sugetos, con el fin de averiguar el que mas se empeña, diremos que este último: porque es mucho mayor 300 ducados que 150 ducados que sacábamos antes. Pero si suponemos la qüestión resuelta por Álgebra, con el fin de buscar el ahorro de este sugeto, encontraríamos que su ahorro anual sería -300 ducados; y si quisiéramos comparar ese ahorro con el anterior, que era -150, no diríamos que -300 sea mayor ahorro que -150, sino al contrario; porque en un sentido absoluto, si buscamos cual de los dos ahorra mas, y encontramos que ninguno ahorra, el que tiene el estado mas ventajoso es aquel que menos se empeña. Por esta causa, cuando se compara el valor absoluto de dos cantidades negativas, se dice que es mayor aquella que tiene menos unidades ó que tiene menor valor numérico, esto es, que $-2a > -3a$. (Vallejo, 1813, pp. 167-168).

En la primera parte del párrafo realiza una comparación de cantidades relativas. La segunda presenta el orden entre las cantidades negativas y vemos reflejado el orden de los números enteros en las cantidades negativas. A continuación realiza una demostración por reducción al absurdo de la relación de orden establecida entre cantidades negativas.

Vallejo plantea que el orden queda establecido según el fin al que conspira el que realiza los cálculos, es decir, si comparamos deudas o ahorros. No se aprecia una prioridad por establecer un orden, sólo cuando indica qué se puede suponer, resuelve la situación por medio del álgebra.

Afirma que una cantidad no es positiva o negativa por sí misma, sino que lo es en relación a las circunstancias en que se considera; los negativos no son considerados en la Aritmética puesto que estas cantidades no son necesarias para solucionar las cuestiones que allí se plantean. Por esta razón se tratan en el Álgebra.

La regla de los signos se justifica mediante la noción intuitiva de cantidad negativa que se expresa mediante el signo menos: “el cual conspira al fin contrario del que calcula” (p. 163). Vallejo generaliza la regla por medio de expresiones algebraicas: el signo menos que antecede una cantidad indica que deberá tomarse tal cantidad en forma contraria.

Vallejo cita y presenta las demostraciones formales de Lapplace, Euler, Bois-Bertrand y Hutton, que muestran diversos modos de argumentar la regla, haciendo uso de otras definiciones y propiedades. Deja claro que hay otras demostraciones posibles, pero la noción de cantidad negativa le resulta suficiente para justificar la regla de los signos.

También se encuentran evidencias de asignaciones arbitrarias o indeterminadas para los números negativos como números naturales relativos tal como los define González Marí (1995), así encontramos afirmaciones como *“una misma cantidad puede* ser positiva en una cuestión y negativa en otra” y “como los gastos conspiran al fin opuesto, serán las negativas.*”* (Vallejo, 1813, p.164). Así mismo esto se evidencia al explicarse la sustracción cuando indica *“*[...] y como $-a$ y $+a$ se destruyen queda por resta $+b$*”* (p. 164) deja claro que esta proponiendo una idea de opuestos aditivos, pero en el sentido de anulación uno de otro.

CONCLUSIONES

Vallejo al considerar reales a los negativos se aleja del pensamiento matemático de principios de siglo que recurría a Descartes para señalar estas cantidades como falsas, por lo tanto su posición es un tanto moderna; tampoco suscribe las afirmaciones de D'Alambert o de Lacroix, que las adjetivan de absurdas y tratan de prescindir de ellas.

Cuando utiliza números negativos, está manipulando o utilizando cantidades adjetivadas o números naturales relativos para explicar la idea de cantidad negativa. Además son inexistentes las representaciones gráficas en el texto.

En El *Tratado Elemental* vallejo afirma que una cantidad no es positiva o negativa por sí misma, sino que lo es en relación a las circunstancias en que se considera; los negativos no son considerados en la Aritmética puesto que estas cantidades no son necesarias para solucionar las cuestiones que allí se plantean. Por esta razón se tratan en el Álgebra.

Los negativos son presentados mediante fenómenos contables (rentas, gastos), físicos (llenado y vaciado de recipientes) y algebraicos (ecuaciones). Se trata de ejemplos de magnitudes negativas, fundadas en una relación de oposición de predicados positivos que se anulan cuando se contemplan sobre un mismo sujeto.

Es un autor de transición en cuanto al tratamiento, consideración e interpretación de los números negativos. Cuando trabaja en Aritmética lo hace con números naturales relativos, a los que intenta quitar toda su carga conflictiva insistiendo en la relatividad de las cantidades a las que representan "según conspira al fin del que calcula o a un fin contrario". Cuando se sitúa en el campo del Álgebra trabaja con números enteros, sin ninguna vacilación, si bien ejemplifica con cantidades relativas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

D´Alambert, J. (1782). Article Négatif. En D. Diderot (Ed.): *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers / par une Société des gens de lettres; quant à la partie mathématique, par M. D'Alembert;* tome XVI. A Berne et a Lausanne: chez les Sociétés Typographiques.

Dhombres, J., Dahan-Dalmedico, A., Bkouche, R., Houzel, C. y Guillemot, M. (1987). *Mathematiques au fil des âges.* París: Gauthier-Villars.

Euler, L. (1797). *Algebra.* Translated from the french with tre critical and historical notes of M. Bernoulli. To wich are added the additions of : De La Grange. Vol 1. London: Printed for J. Johnson, St Paul´s Church-Yard

González Marí, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen zahlen und ihrefunctionen.* Leipzig: Leopold Voss.

Kant, E. (1992). Ensayo para introducir las magnitudes negativas en la filosofía. En Kant, E. *Opúsculos de filosofía natural*. Madrid: Alianza.

Lacroix, S. F. (1837). *Curso completo elemental de matemáticas puras*. Tomo II. Quinta edición. Traducido por José Rebollo Morales. Madrid: Imprenta Nacional.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral, Universidad de Granada: Granada.

Vallejo, J. M. (1813). *Tratado elemental de matemática. Escrito de órden de S.M. para uso de los Caballeros Seminaristas del Seminario de Nobles de Madrid y demas casas de educación del Reino. Tomo I. Parte primera que contiene la Aritmética y Álgebra.* Segunda edición corregida. Mallorca: Imprenta de Felipe Guasp.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.