

Tit Proa. 24/131

T  
16  
95



DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA Y DEL COSMOS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA

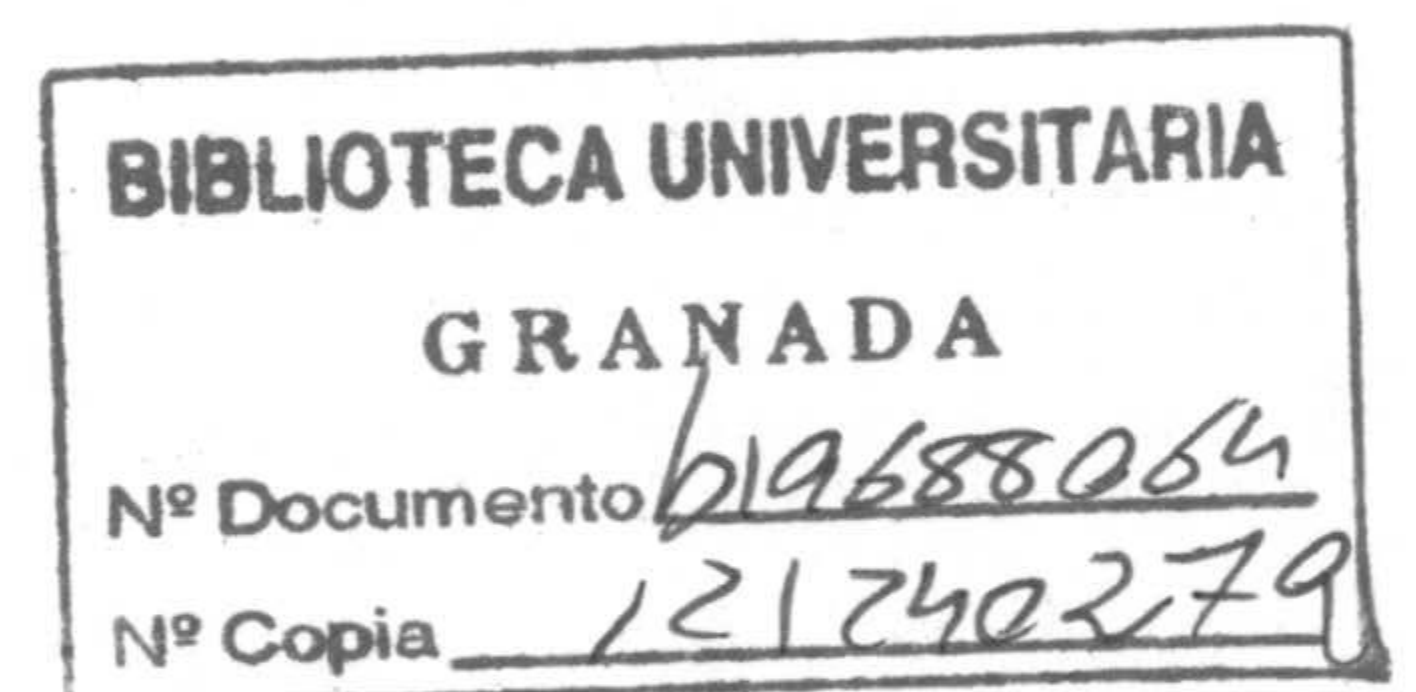
INSTITUTO DE ASTROFÍSICA DE ANDALUCÍA  
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

EXTENSIONES DEL ÁLGEBRA DE DIFEOMORFISMOS  
Y  
GRAVEDAD CUÁNTICA



TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR  
JOSÉ LUIS JARAMILLO MARTÍN

GRANADA 2002







INSTITUTO DE ASTROFÍSICA DE ANDALUCÍA  
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

EXTENSIONES DEL ÁLGEBRA DE DIFEOMORFISMOS  
Y  
GRAVEDAD CUÁNTICA

JOSÉ LUIS JARAMILLO MARTÍN

Tesis doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA

2002

**EXTENSIONES DEL ÁLGEBRA DE DIFEOMORFISMOS  
Y  
GRAVEDAD CUÁNTICA**

Visado en Granada a 16 de septiembre de 2002.

Director de la Tesis:

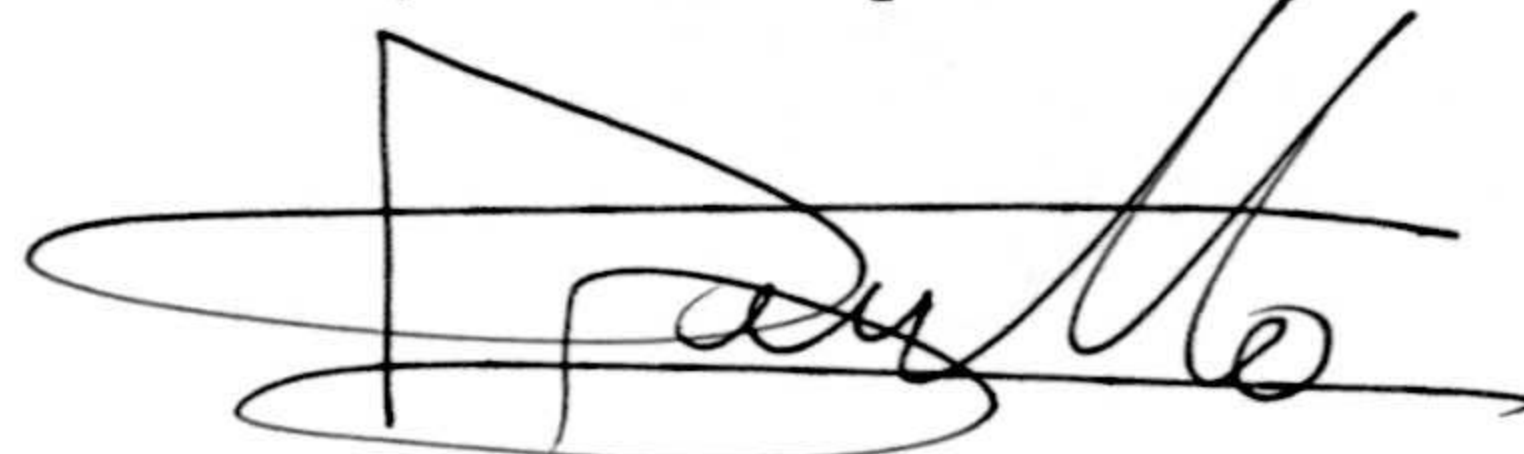
Dr. D. Víctor Aldaya Valverde.  
Investigador Científico del C.S.I.C.

Tutor:

Dr. D. Fernando Cornet Sánchez del Águila.  
Profesor Titular del Departamento de Física Teórica y del Cosmos.  
Universidad de Granada.

Memoria presentada para optar al grado de  
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS.

Granada, a 16 de septiembre de 2002.



Fdo. José Luis Jaramillo Martín.  
Licenciado en Ciencias Físicas.



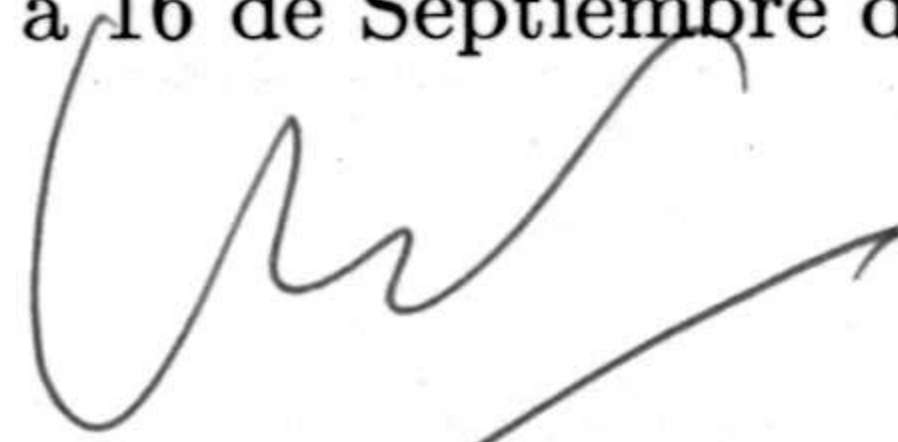
VÍCTOR ALDAYA VALVERDE, Investigador Científico del Consejo Superior de Investigaciones Científicas en el Instituto de Astrofísica de Andalucía y en el Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional de la Universidad de Granada.

CERTIFICO:

Que la presente memoria "**Extensiones del álgebra de difeomorfismos y gravedad cuántica**", ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Astronomía Extragaláctica del Instituto de Astrofísica de Andalucía (CSIC) y en el Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional de la Universidad de Granada, así como, durante un período superior a tres meses, en el Departamento de Física de la Universidad de Gales en Swansea (Reino Unido) y en el Departamento de Matemáticas del Queen Mary and Westfield College de la Universidad de Londres (Reino Unido), y que constituye la Tesis doctoral de José Luis Jaramillo Martín.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Granada la referida Tesis.

Granada, a 16 de Septiembre de 2002.



Fdo. Víctor Aldaya Valverde



## Agradecimientos

Deseo, en primer lugar, expresar mi agradecimiento a mi director de Tesis, Víctor Aldaya Valverde. En lo científico, por su dirección, confianza y respeto, mostrándome un ejemplo de valentía en Ciencia y compromiso con los propios principios. Sin duda alguna, de no haber compartido conmigo su comprensión de la Física, mi visión de la misma sería hoy mucho más pobre y monocromática. En lo humano, que hago extensivo a su familia, agradezco su cercanía, sincera y palpable.

Quiero agradecer el apoyo que, en distintos estadios de este trabajo, me han brindado Manuel Calixto Molina, Julio Guerrero García y Carlos Barceló Serón, por orden cronológico. Su ayuda ha sido clave en el desarrollo de esta Tesis. Su amistad, fundamental.

Agradezco a todo el personal del Instituto de Astrofísica de Andalucía (CSIC) por la ayuda ofrecida, el ambiente creado en este centro y, en algunos casos, su paciencia.

También deseo agradecer al Profesor A.P. Balachandran (Syracuse University), al Profesor S.H. Majid (Queen Mary and Westfield College) y al departamento de Física de la Universidad de Gales en Swansea, por su cálida acogida durante las estancias en sus respectivos centros.

Agradezco al Ministerio de Educación y Ciencia por la concesión de la beca que me ha permitido realizar este trabajo.

Por último, deseo mostrar un profundo agradecimiento a todos y cada uno de los que, de una manera u otra, han participado en esta etapa, compartiendo los momentos alegres y convirtiendo los duros en algo especial. Vosotros sabéis quiénes sois y yo lo que habéis aguantado. Gracias.  $\aleph_2, q_i$ .



*A mi padre*



## Summary

This work attempts to reformulate the relationship between space-time dynamics and Quantum Theory in terms of the revision of two basic physical notions: symmetry and anomalies. Even though a categorical reason for the absence of a harmonious synthesis between General Relativity and Quantum Theory cannot be easily stated, the difficulty to reconciliate their respective conceptual foundations, along with the lack of an unambiguous common mathematical description, lay at the core of this fundamental problem. We propose symmetry as the key notion providing, firstly, the conceptual link between both theories and, secondly, the necessary common mathematical framework to describe them. The rationale for such a claim is two-fold since, on the one hand, the depth of the connection between symmetry and Quantum Theory is firmly established and, on the other hand, symmetry itself can be used to construct the dynamics of certain elementary systems. Despite standard Gravity seems not to admit such a description, this work explores the possibility that fundamental degrees of freedom describing Gravity at the Quantum level arise from symmetry grounds.

The methodology used to explore this general goal is provided by the formalism of the Group Approach to Quantization (GAQ), which makes explicit the previous role of symmetry as the source of both the physical dynamics and the quantum description.

A definite proposal involves the choice of the adequate starting Lie group. Metrics, or similar notions at the same structural level, do not offer intuition on such a convenient choice. This fact suggests to search at a more basic underlying level, where the emergence of symmetry could be more apparent. Differential structure stands as a good candidate for such a role and in fact diffeomorphisms, i.e. transformations leaving this differential structure invariant, constitute a symmetry rich enough so as to generate a class of non-trivial dynamics. Therefore, we shall select diffeomorphism group, or more accurately diffeomorphism algebra, as our starting symmetry. This choice has the strong appeal of representing the fundamental symmetry of General Relativity but also poses the apparent contradiction of trying to derive dynamics from a classically gauge group, presumed devoid of dynamical content.

The necessary revision in GAQ of the concept of *anomaly*, i.e. the quantum breakdown of a classical symmetry, offers a way out of this situation. In general terms, the analysis of anomalies in GAQ suggests the replacement of the initial Lie group with an (ideally maximal) central extension of it, to be considered as the true starting point for the description of the dynamics. These central extensions are responsible for the existence of the dynamics in GAQ. In this manner, a group initially devoid of dynamics is substituted by a suitable centrally extended version which provides a set of quantum physical degrees of freedom.

Our specific objectives can be classified in three related though independent levels: *i) structural or technical*, aiming at constructing new dynamical models out of the extended diffeomorphism algebra and its action on other infinite-dimensional Lie structures, *ii) conceptual*, which refers to the development of physical interpretations linking the previous mathematical models with gravitational scenarios (we shall explicitly distinguish between *fundamental* and *phenomenological* theories) and *iii) the formulation of a model for the space-time structure at the quantum level.*



The work is structured in two well differentiated parts. The first one is devoted to the exposition of the fundamentals of GAQ, meanwhile the second deals with the discussion of physical systems derived from the diffeomorphism algebra.

GAQ constitutes a development of two different sets of ideas and techniques: Geometrical Quantization and the symplectic mechanics on Coadjoint Orbits. Simultaneously, it entails the generalization of time-dependent mechanics.

The purpose of Geometrical Quantization is that of eliminating the ambiguities in the algorithm of Canonical Quantization, by endowing it with a sound mathematical basis laying on intrinsic geometrical tools. Two steps can be distinguished in this process. The first one, *prequantization*, constructs a faithful unitary representation of the Lie algebra of classical observables and introduces the concept of Quantum Manifold, consequence of the need to extend the phase space with a new parameter directly related with quantum mechanical  $U(1)$  invariance. The second step, *quantization*, accomplishes the irreducibility by using the notion of *polarization*.

The coadjoint action of a group on its coalgebra allows the natural construction of symplectic manifolds on which hamiltonian dynamics can be described. Therefore, physical degrees of freedom in these systems are completely characterized by a symmetry structure. A crucial point for the contact with the quantization program is the identification of certain cohomological notions as simultaneous classification tools of these symplectic spaces and central extensions of Lie groups.

Group Approach to Quantization synthetizes and extends both developments above, thus making concrete the role of symmetry as a link between dynamics and its quantum description. Constructed on a  $U(1)$ -centrally extended Lie group, supplemented with the so-called *quantization form*  $\Theta$ , GAQ does not necessarily represent the *quantization* of a previously devised classical theory, but constitutes the direct formulation of the quantum dynamics of a system characterized by a fundamental symmetry. A quantum theory in this context means a unitary and irreducible representation of the Lie algebra (a Lie group indeed) of physical observables building the fundamental symmetry. Group cohomology plays the basic role of determining the physical degrees of freedom as well as the generators of dynamical evolution. A detailed analysis shows that some trivial cocycles contain dynamical information. These coboundaries are called *pseudo-cocycles* and introduce the relevant notion of *pseudo-cohomology* as a refinement of standard group cohomology. Therefore, degrees of freedom are not fixed *ab initio*, but are dynamically determined by the symmetry. This non-standard procedure entails non-trivial consequences on traditional concepts such as anomalies and gauge symmetries, whose characterization is revisited in this language.

A group is called *anomalous* if it does not admit a complete first-order polarization. In that case, some of the classically non-symplectic generators behave as true degrees of freedom at a quantum level, enlarging the solution space of the theory. A reduction can be accomplished by resorting to higher-order polarizations which are associated with certain critical values of the central extensions, thus making contact with the standard approach to anomalies. This is our rationale for the search of new degrees of freedom out of those symmetries presumedly devoid of dynamical content.

With regards to a gauge symmetry associated with a local group, the necessity in GAQ of including the latter into a total extended group containing all physical information, leads to the subtle intertwining between physical and gauge modes. As a consequence, a transfer of dynamical content occurs between them, spoiling the clean distinction of gauge modes in the initial explicit parameters of the group.



The analysis of the physical dynamics derived from diffeomorphism algebra is developed in three stages.

We firstly study the problem in a simplified scenario modelled on low-dimensional space-time structures where the mathematical tools, mainly the Virasoro and Kac-Moody algebras, have been intensively studied. Therefore we can address the essentially physical issues in a more straightforward manner, allowing to make a first evaluation of our goals. In particular, we intent to formulate a dynamics from the Virasoro algebra in such a way that the space-time notion itself is not introduced from the very beginning, but is derived from the quantum theory. The motivation for using the Virasoro algebra as the fundamental symmetry leans upon simplicity reasons together with the existence of the Polyakov's action of induced two-dimensional quantum gravity, which offers a definite point of contact between the mathematical formalism and a gravitational interpretation. The directly quantum model is built on a unitary and irreducible representation of the Virasoro algebra in such a way that a space-time structure is only recovered for certain critical combinations of the central extension parameters. For these critical values, the Virasoro representation space is reduced under a certain  $SL(2, \mathbb{R})$  subgroup and an individual space-time is associated with each one of these subrepresentations. The model presents an ensemble of space-times which are mixed by the action of dynamical (non-gauge) diffeomorphisms, the way in which Gravity shows up. The contact with more standard gravity interpretations is accomplished by the development of a semi-classical formalism which permits the recovery of a corrected Polyakov's action in the classical limit.

In a second step, new degrees of freedom, which we refer as *matter* ones, are included in the model by the incorporation of a  $SU(1, 1)$  Kac-Moody algebra which supports a natural action of the Virasoro algebra. The implementation of the space-time structure entails an anomalous realization of the symmetry which is handled by means of a higher-order polarization developed in terms of the Sugawara construction of the Virasoro modes. In particular, Virasoro generators display an *intrinsic* component (true degrees of freedom) and an *orbital* one (in terms of the Kac-Moody modes), in complete analogy with the intrinsic spin and orbital components in the total angular momentum of a particle. As a consequence of dealing with a non-compact Kac-Moody algebra, negative-normed states spoil the unitarity of the representation. The elimination of these states results from the combined analysis of globality conditions and the imposition of the orbital part of the Virasoro generators as constraints. This suggests an interesting mechanism in which part of the diffeomorphism generator is gauge and another part represents a genuine physical degree of freedom.

This low-dimensional model accomplishes satisfactorily the structural objective. Even though the conceptual one is also achieved, due to the contact with induced two-dimensional gravity, some actual predictions would be desirable in order to compensate the speculative character of the quantum description. Simultaneously, the principle of deriving all physics from strict symmetry principles is not strong enough in these particular models, so as to decide among the different raised possibilities. Some *ad hoc* information must be included, something specially critical in the formalization of the relationship between an irreducible representation of  $SL(2, \mathbb{R})$  and a space-time support. A variety of possibilities, ranging from certain homogeneous spaces of  $SL(2, \mathbb{R})$  to non-commutative algebras associated with the representation, are explored. A consistent choice is adopted implying a renounce to the literal *reconstruction* of the space-time structure, our last and most ambitious objective. The most important feature of these models is the emergence of quantum physical degrees



of freedom, absent at the classical level.

In a second stage, we undertake the study of diffeomorphism algebra in realistic space-time dimensions. The problem is simplified by truncating the infinite degrees of freedom of the diffeomorphism algebra by restricting ourselves to the analysis of a finite subalgebra. In fact, the study is developed in an indirect way where the role of diffeomorphism is not obvious in the initial presentation. We attempt to develop a common scenario for dynamics associated with internal and space-time local groups, where diffeomorphisms only emerge at a final stage of the analysis. Besides, the discussion is restricted to the semi-classical motion of a particle inside background fields.

Two strategies are simultaneously used. The first one works with the realization of the relevant symmetry on the movement space of Cartan dynamics, meanwhile the second one dwells on the semi-classical formalism of GAQ. The need for simultaneously extending the supporting representation space and the symmetry in order to convert the *semi-invariance* of the free particle under the Galilei group into strict invariance, illustrates the general mechanism: the introduction of new parameters in the theory (background fields, central extensions...) as a consequence of the imposition of definite conditions formulated on symmetry grounds.

The application of these strategies to a local  $U(1)$  symmetry, with origin in quantum phase invariance of the free particle, provides a satisfactory description of the motion of a particle inside an electromagnetic field, which is compatible with the minimal coupling principle. The point of contact with the diffeomorphism algebra occurs in the more complicated case of local translations, point of depart of certain treatments of Gravity as a gauge theory modelled on a local gauge group. This demands the use of the most algorithmic of the strategies at our disposal, i.e. GAQ. The application of it to a certain simplified perturbative context leads in fact to the recovery of geodesic motion of the particle in a linearized metric field. Considering the central extension as primitive and previous to any local symmetry, the mere introduction of a gravitational field entails the presence of an electromagnetic field and the appearance of mixing terms between both background interactions. This last phenomenon implies interesting physical consequences, mainly the semi-classical violation of the equivalence principle and a potential violation of CPT symmetry.

The final stage of our work studies the dynamics derived from the diffeomorphism algebra in realistic space-time dimensions, with all infinite-dimensional degrees of freedom taken into account, representing an attempt towards the generalization and convergence of the two lines of research previously posed.

Regarding the purely structural generalization of the model based on the Virasoro algebra, we look for the construction of a representation of an extended diffeomorphism algebra in realistic dimensions. In this case, non-trivial central extensions do not exist and therefore pseudo-cohomology proves to be essential. Simultaneously we must resort to non-central extensions (we shall restrict ourselves to tensorial ones) in order to enrich the dynamics. At an interpretative level, we lose the bridge with the gravitational physics provided by Polyakov's action, and this will demand the inclusion of new inputs in order to construct a truly physical theory. The difficulties in extending the analysis of the space-time developed in the simplified low-dimensional case, make us to postpone the actual reconstruction of this structure in realistic dimensions.

Concerning the mixing of interactions, we address the study of the intrinsic dynamics of the field degrees of freedom. The difficulties in a first tentative attempt to generalize the



work developed in the case of particle dynamics, force us to review the treatment of local gauge symmetry in the context of GAQ. This leads to an understanding of the analysis of diffeomorphism dynamics in this context, as part of a bigger yet-to-be-completed theory.

In concrete terms, both lines converge on the construction of a maximum weight representation of diffeomorphism algebra, non-centrally extended by a new vector-like field and acting on a current algebra associated to a rigid  $U(1)$ . This construction has an intrinsic mathematical interest and, most importantly, fully accomplishes the structural goal. The physical idea underlining our mathematical model is the description of a set of degrees of freedom obtained as an anomalous quantum realization of a symmetry with classical gauge character. However, and in spite of our original motivations, it does not seem rich enough so as to construct a *complete* gravitational theory, since there is no obvious way to recover the fundamental gravitational degrees of freedom and their associated dynamics. It seems more appropriate to study some partial but relevant aspects of quantum gravitational physics, either as fundamental or phenomenological theories where some structure must be added in an *ad hoc*, and therefore not unique, manner. Some non-trivial physical models are provided, where the issues of the breakdown of quantum diffeomorphism invariance as well as the mixing with internal symmetries, are raised. Some potential experimental consequences, such as the presence of extra fields corresponding to non-central extensions or the existence of corrections (in particular, particle masses) to non-gravitational propagators, are suggested.

In general terms, we can say that the *structural* goal has been accomplished with the different mathematical constructions we have developed, both in the two-dimensional case and, particularly, in realistic space-time dimensions. The evaluation of the *conceptual* goal is more subtle since, on the one hand, we have endowed the devised supporting formalisms with a genuine gravitational interpretation but, on the other hand, those interpretations are constrained to particular scenarios and specific aspects of the gravitational problem, without developing a complete theory of the fundamental gravitational degrees of freedom. We must consider the accomplishment of this objective as a partial success. Regarding the third and last goal, the recovery of a space-time structure is delayed until the fundamental gravitational degrees of freedom have been properly described. Even though this last objective has not been achieved in strict sense, it has proven to be a continuous motivation throughout.







# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Planteamiento del problema e hipótesis fundamentales . . . . .	1
1.1.1	La simetría, nexo conceptual . . . . .	1
1.1.2	Anomalías y elección de la simetría de partida . . . . .	3
1.2	Objetivos . . . . .	6
1.3	Estructura del trabajo . . . . .	7
<b>I</b>	<b>Formalismo técnico</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Antecedentes a la Cuantización Sobre Grupos</b>	<b>13</b>
2.1	Cuantización Geométrica . . . . .	13
2.1.1	Motivación. Cuantización Canónica . . . . .	13
2.1.2	Descripción técnica . . . . .	15
2.2	Geometría simpléctica desde la simetría . . . . .	22
2.2.1	Órbitas coadjuntas . . . . .	22
2.2.2	Cohomología . . . . .	24
2.3	Dinámica <i>à la Cartan</i> . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Cuantización Sobre Grupos</b>	<b>35</b>
3.1	Estructura del grupo $\tilde{G}$ . . . . .	35
3.1.1	Elementos de análisis sobre un grupo . . . . .	36
3.1.2	1-forma de cuantización $\Theta$ . . . . .	38
3.1.3	Pseudo-extensiones . . . . .	40
3.2	Dinámica . . . . .	42
3.2.1	Teoría semiclásica . . . . .	43
3.2.2	Teoría Cuántica. Anomalías . . . . .	45
3.3	Grupos y álgebras de dimensión infinita. Exponenciación . . . . .	50
3.3.1	Ley de grupo formal . . . . .	51
3.3.2	Campbell-Hausdorff . . . . .	51
3.4	Ejemplos . . . . .	52
3.4.1	Partícula libre galileana . . . . .	53
3.4.2	Oscilador armónico . . . . .	54
3.4.3	Grupo de Schrödinger. Simplín . . . . .	55
3.5	Ventajas e inconvenientes . . . . .	57



<b>II</b>	<b>Álgebras de difeomorfismos y Gravedad</b>	<b>59</b>
<b>4</b>	<b>Dimensiones espacio-temporales bajas</b>	<b>61</b>
4.1	Antecedentes. Grupo de Virasoro . . . . .	61
4.2	Tratamiento en CSG del grupo de Virasoro . . . . .	63
4.2.1	Grupo de Virasoro . . . . .	64
4.2.2	Formalismo clásico . . . . .	67
4.2.3	Modelo físico . . . . .	71
4.2.4	Noción de espacio-tiempo . . . . .	81
4.3	Añadiendo nuevos campos. Materia . . . . .	90
4.3.1	Introducción . . . . .	90
4.3.2	Elementos generales y formalismo semiclásico . . . . .	92
4.3.3	Modelo cuántico . . . . .	97
4.4	Discusión y Conclusiones . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Simetrías locales y difeomorfismos</b>	<b>109</b>
5.1	Introducción . . . . .	109
5.1.1	Partícula libre galileana: invariancia estricta y estudio semiclásico . . . . .	110
5.2	Electromagnetismo à la Cartan . . . . .	113
5.2.1	Acoplamiento mínimo . . . . .	113
5.2.2	Reformulación del principio . . . . .	114
5.2.3	Partícula en un campo electromagnético . . . . .	115
5.2.4	Movimiento de una partícula en un potencial . . . . .	118
5.3	Electromagnetismo en el formalismo de CSG . . . . .	119
5.4	Traslaciones locales y Gravedad . . . . .	123
5.4.1	Conexión con los difeomorfismos . . . . .	125
5.4.2	Obtención del álgebra de Lie . . . . .	125
5.4.3	Exponenciación y dinámica . . . . .	128
5.4.4	Límite no relativista . . . . .	135
5.5	Discusión y conclusiones . . . . .	137
<b>6</b>	<b>Dimensiones espacio-temporales realistas</b>	<b>139</b>
6.1	Generalización de ideas y estructuras previas . . . . .	139
6.2	Extensiones del álgebra de difeomorfismos . . . . .	140
6.2.1	Nuevos generadores. Álgebras de corrientes . . . . .	144
6.3	Mezcla de interacciones . . . . .	145
6.3.1	Generalización ingenua de electro-gravedad . . . . .	146
6.3.2	Teorías gauge locales en CSG . . . . .	150
6.4	Modelo dinámico asociado a difeomorfismos . . . . .	155
6.4.1	Formalismo semiclásico . . . . .	157
6.4.2	Análisis cuántico . . . . .	158
6.5	Interpretaciones . . . . .	162
6.5.1	Análisis general . . . . .	162
6.5.2	Varios ejemplos . . . . .	165
6.6	Discusión y conclusiones . . . . .	175



<b>7</b>	<b>Discusiones finales</b>	<b>177</b>
7.1	Resultados y objetivos generales . . . . .	177
7.1.1	Objetivo estructural . . . . .	177
7.1.2	Objetivo conceptual . . . . .	178
7.1.3	Estructura del espacio-tiempo . . . . .	180
7.2	Perspectivas futuras . . . . .	181
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>183</b>
<b>A</b>	<b>Estructuras matemáticas importantes</b>	<b>187</b>
A.1	Fibrados principales . . . . .	187
A.2	Cohomología de grupos y álgebras de Lie . . . . .	188
<b>B</b>	<b>Reducción de <math>\mathcal{H}_{(c,c)}</math></b>	<b>191</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Planteamiento del problema e hipótesis fundamentales

El estudio de la relación entre dinámica espacio-temporal y Teoría Cuántica constituye el marco en el que se encuadra la presente memoria.

La visión del espacio-tiempo como una estructura sujeta a evolución dinámica tiene su origen en la descripción de la Gravedad ofrecida por la Relatividad General. La ausencia de un tratamiento satisfactorio de la misma consistente con las nociones cuánticas, tras siete décadas de intensos esfuerzos, sitúa esta cuestión como uno de los problemas abiertos básicos de la Física Fundamental. Por tanto, resulta difícil desestimar cualquier esfuerzo orientado hacia su resolución o que, en un sentido opuesto pero igualmente válido, ayude a clarificar si se trata de un problema mal planteado en sus actuales términos.

Podemos ir más lejos para sugerir que, en el punto en que se encuentra hoy la discusión, cierta heterodoxia que conlleve un replanteamiento de principios físicos básicos, o de la descripción técnica soporte, probablemente constituye una actitud necesaria. En este sentido, este trabajo debe ser entendido como una reflexión a nivel de fundamentos en torno a la relación entre espacio-tiempo y Teoría Cuántica, relación que se reformula en términos de la revisión de dos conceptos básicos en Física: la noción de *simetría*, en primer lugar, la noción de *anomalía*, en segundo.

#### 1.1.1 La simetría, nexo conceptual

Aunque no resulta fácil determinar una razón categórica para la carencia de una síntesis armónica entre Relatividad General y Mecánica Cuántica, buena parte de la dificultad radica en la construcción de ambas teorías de forma independiente tratando de resolver problemas de muy distinta naturaleza. Como consecuencia, los principios conceptuales que las soportan no resultan fácilmente reconciliables y los formalismos matemáticos que las describen son muy diferentes. Es más, cada una de ellas por separado admite formulaciones diversas, de manera que uno más bien encuentra dos *familias* de teorías. Este punto puede no ser un problema para cada una de ellas en su dominio de aplicación, pero ciertamente dificulta su comparación. En definitiva, necesitamos un elemento que nos sirva de puente entre ambas, tanto a nivel conceptual como técnico. Tal papel lo va a jugar en nuestro tratamiento la noción de simetría, esto es, el conjunto de transformaciones que dejan invariantes los objetos



que caracterizan a un sistema dado <sup>1</sup>.

El doble papel de la simetría como útil herramienta en la resolución de problemas técnicos, por un lado, y como guía en la construcción de la dinámica de un sistema físico, por otro, es un rasgo que impregna todas las ramas de la Física. En ambas facetas la simetría tiene un carácter auxiliar actuando sobre estructuras previamente definidas. El espíritu de la presente revisión consiste en elevar el concepto de simetría a principio dinámico *fundamental*. Esto es, desde un punto de vista conceptual entenderemos que la simetría codifica el contenido físico de un sistema, mientras que desde la perspectiva estructural la descripción técnica del sistema debe derivarse de la propia simetría.

Obviamente tal visión de la simetría supone una concepción fuertemente reduccionista de la Física. Si bien esto facilita la función sintética que aquí precisamos, el precio a pagar es una aplicabilidad restringida de nuestras técnicas a sistemas de naturaleza elemental. Por supuesto, no tenemos ninguna garantía de que un tratamiento cuántico de la Gravedad pueda acomodarse a tal reducción en términos de simetrías. Descubrirlo constituye exactamente la motivación para este trabajo.

Aunque no constituye su caracterización más general, en esta memoria nos limitaremos a estudiar aquellas simetrías definidas en términos de álgebras y grupos de Lie. Comentamos algo más el mencionado papel de nexo conceptual de estas estructuras:

*i) Teoría Cuántica y simetría*

La relación entre formalismo cuántico y simetría constituye un capítulo fascinante de la Física moderna. Si bien el manejo de conceptos y técnicas de teoría de grupos y de sus representaciones lineales es constante en todo el formalismo cuántico, es en el proceso de cuantización *canónica* de un sistema clásico, donde la profundidad de la relación se manifiesta con toda nitidez. Efectivamente, tal descripción cuántica pasa por la construcción de una representación unitaria e irreducible de una subálgebra del álgebra de Poisson de los observables clásicos. Éste es esencialmente el punto que explotaremos en este trabajo.

*ii) Dinámica y simetría*

Existe una clase de sistemas cuya estructura dinámica está caracterizada por las órbitas de un grupo sobre su coálgebra. Una revisión radical de la dinámica consiste en afirmar que los sistemas elementales vienen descritos por tales formulaciones. En este sentido, si bien la Gravedad (clásica) no admite aparentemente tal tipo de tratamiento (salvo para casos muy especiales que comentaremos en el Capítulo 4), cabe preguntarse si los grados de libertad responsables de la misma en el régimen cuántico son susceptibles de aceptar tal descripción.

Este papel de la simetría como nexo entre la formulación cuántica y la descripción de la dinámica de sistemas fundamentales se sintetiza y concreta en nuestro principal elemento de análisis, el formalismo de la Cuantización Sobre Grupos (CSG) ([AA82, ARN89] y Capítulo 3). Si bien éste puede entenderse como una potente y elegante técnica para enhebrar cuantización y dinámica, su papel trasciende el de una mera herramienta, revelándose como guía conceptual y obligando a una revisión de nociones físicas básicas.

<sup>1</sup>Es muy importante clarificar desde el principio que esta concepción es más general que la visión de la simetría como el conjunto de transformaciones que dejan invariante un determinado hamiltoniano, terminología habitual en otros contextos.



En el caso de que el carácter reduccionista aquí sugerido resulte excesivo, uno puede aceptar la estrategia basada en el uso de la simetría, entendiéndola como un principio metodológico bien definido que permite explorar un terreno donde los puntos de apoyo no son en absoluto obvios.

### 1.1.2 Anomalías y elección de la simetría de partida

Tras adoptar la simetría como pilar fundamental, debemos elegir el grupo de partida para la construcción de la dinámica. En este punto necesitamos recurrir a las descripciones estándar de la Gravedad para intuir la simetría adecuada. Sin embargo, como hemos señalado antes, tales descripciones no admiten una formulación clara en términos de una simetría.

Una posibilidad consiste en partir el álgebra de Poisson definida sobre el espacio de soluciones de la Relatividad General, para después añadir el resto de las simetrías relevantes, como la invariancia bajo difeomorfismos, tratando de cerrar una estructura de Lie. A pesar del interés de esta solución, podemos señalar los siguientes problemas:

- a) Dificultad técnica para la descripción del espacio de las soluciones de la Relatividad General o de sus variantes.
- b) La solución se asemeja *demasiado* a los tratamientos tradicionales, de escaso éxito. Funciona para los casos de teorías de Yang-Mills [ACN97, CA99], pero en éstos el análisis estándar ya es extraordinariamente fructífero.
- c) Posibilidad de que las métricas, o estructuras del mismo nivel, no representen los grados de libertad fundamentales del sistema (como por ejemplo en teorías tipo cuerdas o enfoques como el de [Ja95], donde las ecuaciones de Einstein aparecen como una ecuación de estado) .

Una segunda opción consiste en explorar esta última idea, c), buscando los grados de libertad fundamentales en una estructura más básica que la métrica, donde la noción de simetría emerja con mayor claridad. Tal papel lo puede jugar la estructura diferencial, donde la invariancia bajo difeomorfismos constituye una simetría suficientemente rica para ofrecer resultados no triviales. El grupo de difeomorfismos, o más propiamente el álgebra de difeomorfismos, va a constituir la simetría de partida para nuestros modelos.

Tal elección conlleva a su vez ciertos problemas conceptuales:

1. Si utilizamos los difeomorfismos como el punto de partida de la CSG debemos ser capaces de extraer la dinámica a partir de los mismos. Sin embargo, en las teorías convencionales los difeomorfismos constituyen una simetría gauge <sup>2</sup>, esto es, codifican precisamente aquellos grados de libertad no dinámicos. Esto constituye una aparente contradicción explícita que ha de ser entendida antes de proseguir.
2. La propia elección de los difeomorfismos como punto de partida implica en sí misma la aceptación de una considerable cantidad de estructura previa, cuya justificación por primeros principios no es obvia. Podría ocurrir que nociones como punto espacio-temporal, topología o estructura diferenciable no tuvieran un *status* fundamental, como se mantiene en [Is95, Is02], necesitándose entonces una estructura más básica.

<sup>2</sup>Si bien aceptamos de manera general esta afirmación estándar, debemos aclarar que se trata de un enunciado vago cuyo contenido preciso se concreta de forma diversa en cada uno de los programas que estudian la Gravedad, encontrando a veces planteamientos sorprendentemente dispares.



3. La teoría que construyamos va a tener carácter *topológico*. Como tal, no resulta obvio cómo dotarla de significado gravitatorio sin añadir cierta estructura adicional.

Con el fin de abordar estas dificultades, introducimos en este punto el segundo concepto clave en nuestro tratamiento, la noción de anomalía.

Tal concepto está subordinado al de simetría, pues precisa del mismo para su propia definición. En efecto, se entiende por anomalía la violación a nivel cuántico de una simetría existente a nivel clásico. En el caso de teorías con un grupo de gauge local, generalmente se considera que las denominadas anomalías *locales*, en las que la simetría gauge en cuestión se encuentra en la componente conexas con la identidad, se corresponden con teorías no consistentes. La razón fundamental reside en la pérdida de renormalizabilidad y unitariedad de la teoría ([We95], por ejemplo). La cancelación de la anomalía para cierto valor crítico del parámetro que la caracteriza se convierte en este contexto en un criterio *positivo* de gran valor en la selección de la teoría físicamente correcta. Sirvan como ejemplo la restricción del contenido fermiónico de las representaciones del modelo estándar de partículas elementales, o la determinación de la dimensión espacio-temporal y el grupo de simetrías interno en teoría de cuerdas [CL84, GSW87, Pol98].

No obstante, el concepto queda profundamente revisado en CSG. En efecto, al partir directamente de una simetría (cuántica), no existe necesariamente una contrapartida clásica susceptible de ser violada a nivel cuántico. En la necesaria reformulación del concepto de anomalía, ésta pasa a desempeñar un papel clave en la construcción de una representación unitaria e irreducible de la simetría básica. Lejos de representar un obstáculo en el proceso de cuantización, la anomalía resulta fundamental para la consistencia cuántica del modelo. Sin entrar en detalles, que serán discutidos al presentar la formulación técnica en el Capítulo 3, podemos decir que la principal consecuencia de este tratamiento de la anomalía es la introducción natural de nuevos grados de libertad físicos en la teoría, no intuidos a nivel clásico. Abusando del lenguaje, el espacio de las fases cuántico es más grande que el esperado clásicamente. En ciertas condiciones críticas, este espacio de las fases ampliado se reduce anómalamente, desapareciendo los nuevos grados de libertad (ver Figura 1.1). Este caso corresponde a la cancelación crítica a la que antes aludíamos en el tratamiento estándar y supone el nexo entre ambas visiones.

En definitiva, la importancia del concepto de anomalía en nuestro caso radica precisamente en esa capacidad de generar nuevos grados de libertad a nivel cuántico, sin contrapartida clásica. Esto confiere sentido a la búsqueda de dinámica a partir de grupos que, como el de los difeomorfismos, carecen en principio de contenido dinámico.

Como elementos de interés para tomar a los difeomorfismos como punto de partida, podemos señalar:

1. Constituye un punto de partida técnicamente manejable, que trata una simetría sin duda relevante en el contexto gravitatorio. Si bien la auténtica simetría de partida podría resultar más amplia, muy probablemente incluirá a los difeomorfismos o una deformación suya, bien de forma *inyectiva* (como subgrupo) o *proyectiva* (como cociente). Por tanto, la importancia de estudiar su realización cuántica no debe ser desestimada. En particular, si los grados de libertad fundamentales no se pueden derivar de esta simetría, el estudio de las representaciones del grupo de difeomorfismos ayudaría a entender la imposición a nivel cuántico de las ligaduras asociados a unos difeomorfismos gauge.
2. El estudio de los difeomorfismos deformados (extendidos) podría interpretarse como



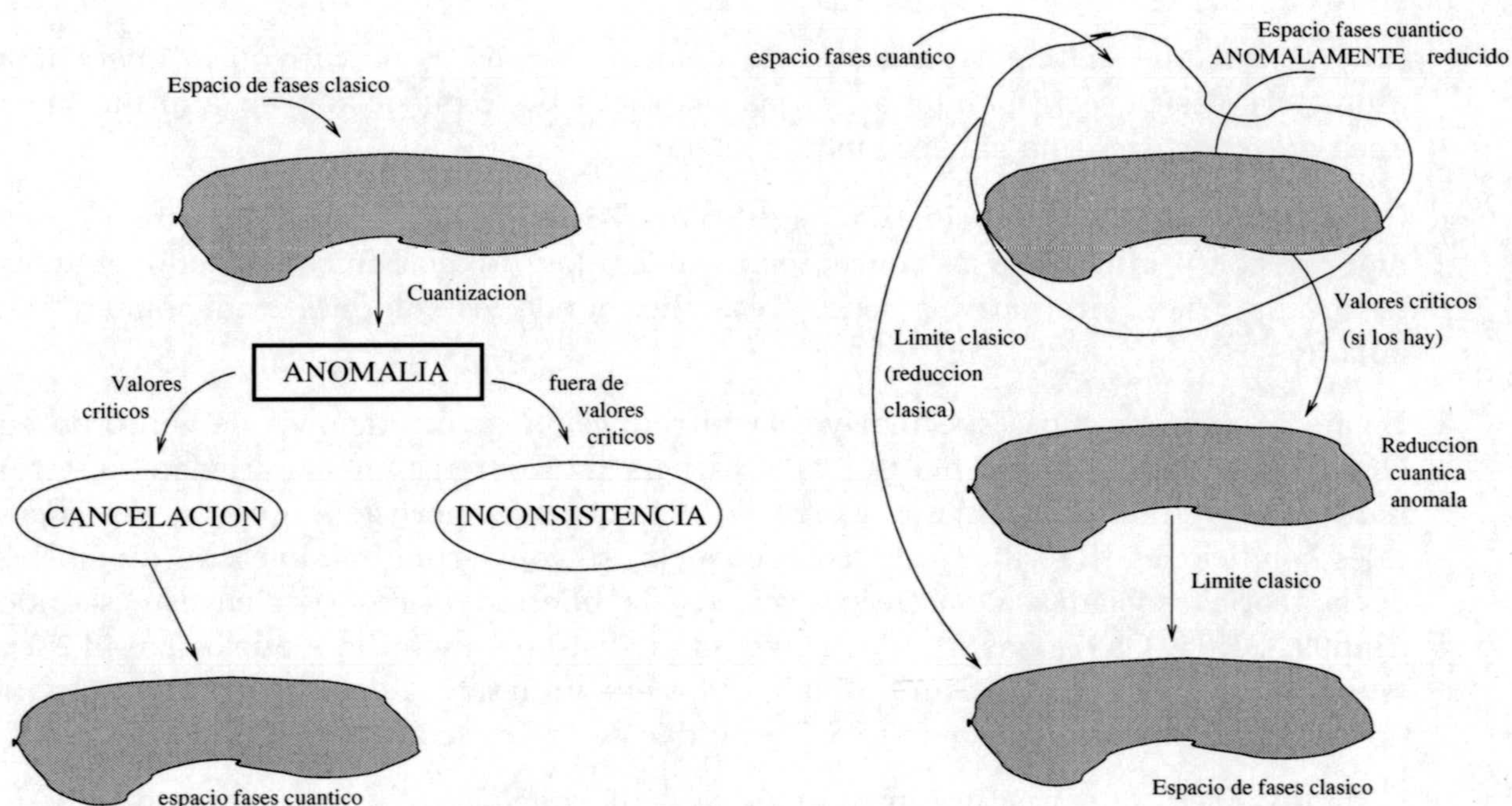


Figura 1.1: En el enfoque estándar, izquierda, el tamaño del espacio de las fases clásico y cuántico (en el caso anómalo) es el mismo, mientras que en CSG, derecha, el cuántico es en general mayor y sólo coincide con el clásico en la reducción anómala. Nótese la diferencia de énfasis en el carácter clásico o cuántico del punto de partida en ambos enfoques.

la contrapartida algebraica de una imagen física donde la propia estructura soporte espacio-temporal pierde su carácter de variedad diferenciable en el régimen cuántico, dejando los difeomorfismos de tener sentido estricto como tales para ser sustituidos, de forma efectiva o fundamental, por los nuevos generadores extendidos. En particular, su imagen como transformaciones gauge pierde nitidez, permitiendo considerar la emergencia de grados de libertad físicos.

3. Ahondando en este último punto y en términos muy vagos, la pérdida de carácter gauge de los difeomorfismos en el régimen cuántico implicaría la existencia de variedades diferenciales consideradas como equivalentes bajo la relación *ser difeomorfo a*, pero cuyas versiones cuánticas deberían ser consideradas como estructuras distinguibles. Esto exigiría la existencia una relación de equivalencia más fina para clasificar lo que podríamos llamar *variedades cuánticas* y la consiguiente aparición de nuevos *números cuánticos* para distinguirlas. En particular, esto conlleva la existencia de más variedades cuánticas que clásicas. Toda Esta especulación recibe cierto sustento de una aproximación a la geometría que parte del estudio del álgebra  $C^*$  de funciones definidas sobre una variedad. Cuando tal álgebra es conmutativa, la geometría soporte es una variedad clásica (en rigor, topológica). Si el álgebra es no conmutativa estamos ante una geometría no conmutativa [Co94]. Si partimos del álgebra conmutativa asociada a una variedad clásica y la deformamos añadiendo nuevos términos no conmutativos,  $O(\hbar)$ ,

$$(f * g)(x) = f(x)g(x) + O(\hbar)$$



cabe pensar que matemáticamente esta deformación no es única, con lo que a una geometría clásica corresponderían varias cuánticas. Esto puede apoyar la intuición en unos *difeomorfismos* no gauges cuánticamente.

4. Conceptualmente, la adopción de los difeomorfismos como punto de partida, supone una revisión profunda de los conceptos involucrados. Como hemos indicado, el aporte de una visión alternativa puede ofrecer luz donde los enfoques tradicionales han fallado.
5. En un contexto menos especulativo, la introducción de condiciones de contorno en Gravedad (como por ejemplo por la presencia de fronteras en la variedad soporte) induce la pérdida del carácter gauge de algunos difeomorfismos que no preservan tales condiciones [RT74]. Como consecuencia, se convierten en simetrías dinámicas de la teoría asociadas a auténticos grados de libertad físicos (ver en este sentido [Ban99, BH86, Ca97, Ca98]). Por tanto, el análisis abstracto de modelos basados en (subálgebras de) difeomorfismos dinámicos, tiene un interés intrínseco para el estudio de este tipo de situaciones en teorías estándar de la Gravedad.

En definitiva, será la estructura grupo-teórica de la simetría total la que se encargue de determinar qué es gauge y qué no lo es, así como la existencia o no de anomalías.

## 1.2 Objetivos

El tono de la anterior sección resulta necesariamente general, no sólo por su función como planteamiento del problema, sino por su estructuración en torno a una revisión de conceptos fundamentales de la Física, tan sólo someramente apuntados y cuyo esclarecimiento precisa de la descripción técnica de los siguientes capítulos. Esta sección trata de ser un contrapunto, ofreciendo un enunciado específico de los objetivos perseguidos en este trabajo.

Una teoría física la podemos entender como un formalismo matemático más una interpretación del mismo. Nos referiremos al primero como nivel *estructural*, mientras que a la interpretación la consideraremos el nivel *conceptual*. A su vez, y nuevamente simplificando mucho, la teoría en sí la podemos contemplar desde una perspectiva *instrumentalista*, esto es, un algoritmo que prescribe cómo relacionar datos y predicciones, o desde una perspectiva *realista*, que conlleva cierta aspiración a describir en *qué* consiste la naturaleza del fenómeno físico.

Conscientes de la ingenuidad de tal clasificación, que ignora la flexibilidad de las teorías, utilizaremos las anteriores categorías para clasificar nuestros objetivos en distintos niveles. Así, distinguiremos en primer lugar un objetivo estructural y otro conceptual. Asumidos éstos, y en el convencimiento de que en el actual estado de la Física una aproximación instrumentalista al espacio-tiempo no tiene mucho sentido, abordaremos la descripción de la estructura espacio-temporal en sí. Nuestros objetivos específicos son:

1. *Estructural*. Estudio de grupos y álgebras de Lie infinito-dimensionales con un interés potencial en fenómenos gravitatorios. En particular se estudiará, mediante la técnica de CSG, la construcción de modelos matemáticos correspondientes a una dinámica cuántica utilizando como punto de partida el álgebra de difeomorfismos ampliada mediante extensiones centrales y no centrales, así como mediante su acción (semidirecta) sobre otras álgebras. Este primer objetivo tiene por tanto un carácter eminentemente técnico.



2. *Conceptual*. Elaboración de interpretaciones que de hecho relacionen los anteriores modelos con escenarios gravitatorios. Análisis de la idoneidad de la noción de simetría, y en particular de los difeomorfismos, como pilar fundamental de la construcción.

Distinguiremos entre dos tipos de interpretaciones: *fundamentales* y *efectivas*. Entenderemos que las primeras aspiran a interpretar los objetos dentro de su propio marco conceptual sin necesidad de recurrir a estructuras más básicas. Mientras mantengan este espíritu las consideraremos como tales, aun cuando se puedan ver como un caso especial o límite de una teoría más general<sup>3</sup>. Por contra, las interpretaciones efectivas asumirán *explícitamente* en su formulación la necesidad de una teoría de un nivel más básico para dotar de sentido a alguno de sus objetos<sup>4</sup>. Por supuesto, la mayoría de las teorías físicas manifiestan rasgos de ambas interpretaciones, de forma que estas últimas sólo representan los extremos opuestos de un espectro completo.

3. *Estructura del espacio-tiempo*. Formulación de un modelo para la estructura del espacio-tiempo a nivel cuántico.

Éste constituye sin duda nuestro objetivo último y más ambicioso. Lo distinguimos como un objetivo en sí, ya que tal y como hemos formulado los objetivos 1 y 2, la consecución de los mismos no resulta indefectiblemente en una teoría completa, pudiendo limitarse a una descripción cuántica pero parcial de *ciertos* fenómenos gravitatorios. Por tanto, 1 y 2 constituyen condiciones necesarias pero no suficientes para la descripción de la estructura espacio-temporal.

### 1.3 Estructura del trabajo

La presente memoria se articula en dos partes bien diferenciadas<sup>5</sup>. La primera, que comprende los Capítulos 2 y 3, tiene como objetivo la presentación y motivación del formalismo de la CSG. Una vez dotados de esta técnica, la segunda parte aborda los objetivos planteados en la Sección 1.2, lo cual se desarrolla en los capítulos 4, 5, 6 y 7.

La CSG sintetiza las ideas y técnicas presentes en dos desarrollos previos: la Cuantización Geométrica, por un lado, y la mecánica simpléctica sobre órbitas coadjuntas, por otro. Simultáneamente, supone una generalización de la mecánica dependiente del tiempo en su tratamiento mediante estructuras de contacto *à la Cartan*. El objetivo del Capítulo 2 es realizar una presentación de estos antecedentes para ganar intuición sobre los planteamientos de la CSG. El Capítulo consta de tres Secciones, comenzando con la descripción de la Cuantización Geométrica. Tras motivarla como un intento de eliminar los problemas de la cuantización canónica mediante la matematización del algoritmo que la define, se presentan

<sup>3</sup>Un ejemplo de esta situación lo constituye la Teoría de la Gravitación de Newton, que por su espíritu sería una teoría fundamental aunque se pueda ver como un límite de la Relatividad General.

<sup>4</sup>Ejemplo de tal teoría son los pares de Cooper en superconductividad.

<sup>5</sup>Sin duda, la opción de introducir una parte *cero* adicional, que planteara los distintos enfoques (tradicionales) en el estudio de la interrelación entre espacio-tiempo, gravedad y teoría cuántica, presenta un indudable atractivo que además proporcionaría una adecuada perspectiva para evaluar los logros de nuestro estudio. Sin embargo, cualquier intento serio en este sentido, conlleva una tarea de tal envergadura y complejidad que no hacen de una memoria como la presente el lugar adecuado para su exposición. Por tanto, debemos limitarnos a referir al lector a alguno de los estudios sobre el tema presentes en la literatura [Al89, Ro98, Ro99, Ro00, Is95].



las dos fases de su tratamiento técnico. En la primera, *precuantización*, se introduce un conjunto de objetos geométricos (intrínsecos) que permiten caracterizar formalmente la noción de cuantización, culminando en una representación unitaria y fiel del álgebra de Poisson de los observables clásicos, que se conoce como cuantización de Bohr. Sin embargo, tal representación resulta reducible, no cumpliendo el programa de la cuantización canónica. La segunda fase, denominada propiamente *cuantización*, introduce el concepto de polarización como herramienta destinada a reducir la representación. La sección termina enumerando los problemas no resueltos por la Cuantización Geométrica.

La siguiente Sección introduce la noción de acción coadjunta de un grupo sobre su coálgebra como medio para definir una dinámica a partir de un grupo de Lie. Las correspondientes órbitas admiten una estructura simpléctica natural que permite el desarrollo de una mecánica hamiltoniana. El uso de técnicas cohomológicas permite relacionar la clasificación de determinadas deformaciones de la acción coadjunta con el problema de las extensiones centrales del grupo que genera la dinámica. Éste constituye un punto fundamental para el ulterior desarrollo de la CSG.

Por último, se realiza una breve presentación de la descripción de Cartan de la dinámica dependiente del tiempo mediante el empleo de estructuras de contacto. La forma de Poincaré-Cartan y el tratamiento de los invariantes Noether constituyen los elementos fundamentales que se generalizarán al tratamiento de CSG.

En el Capítulo 3 se discute el formalismo de la CSG, presentando los principales elementos estructurales de la construcción. En primer lugar se repasan nociones básicas relativas al cálculo diferencial sobre grupos de Lie, adaptándolas al caso de grupos centralmente extendidos. La selección de una 1-forma de conexión en dicho grupo resulta clave en la introducción de la dinámica, permitiendo la conexión explícita con los distintos desarrollos de la sección anterior. La falta de canonicidad de tal conexión conduce a la introducción del concepto de *pseudo-extensión*, fundamental en todos nuestros modelos posteriores.

La siguiente Sección presenta la derivación explícita de la dinámica, tanto a nivel (semi)clásico como cuántico. El tratamiento (semi)clásico se realiza tanto desde la perspectiva hamiltoniana como de Cartan, presentando especial interés la discusión de los invariantes Noether en este segundo caso. La versión cuántica sigue el modelo de la Cuantización Geométrica, con sus dos fases de precuantización y de reducción. Por su especial relevancia conceptual, se presta especial atención a la caracterización de la noción de anomalía, así como a la invariancia gauge y las ligaduras.

La mayor parte de las álgebras y grupos de Lie que trataremos serán de dimensión infinita, por lo que dedicamos una Sección al problema puramente técnico, pero importante, de la exponenciación de tales álgebras de Lie a una ley de grupo finita. Las últimas dos secciones presentan una serie de ejemplos que ilustran las ideas básicas, para después discutir los *pros* y los *contras* de este formalismo.

En el Capítulo 4 se realiza el primer acercamiento a la dinámica de los difeomorfismos, limitándonos a dimensiones espacio-temporales bajas ( $1 + 1$ ) donde las simetrías relevantes están bien estudiadas. Tras recordar la relación ya establecida entre la gravedad bidimensional de Polyakov y el grupo de Virasoro, utilizamos éste último para construir un modelo que trata de derivar la propia estructura espacio-temporal a partir de la teoría cuántica. En un primer paso, se repasa la estructura del grupo de Virasoro dentro del formalismo de CSG. Previamente a la descripción del modelo en sí, se prepara el límite clásico mediante



la exposición del formalismo semiclásico. La construcción del modelo físico pasa por la selección de una representación unitaria e irreducible del grupo de Virasoro. El punto más relevante en la interpretación física lo constituye la relación establecida entre la noción de espacio-tiempo y cada una de las subrepresentaciones de  $SO(1, 2)$  que aparecen en el espacio de Hilbert total. El límite clásico hace uso del formalismo semiclásico proporcionando una acción que recupera la de Polyakov con un término correctivo. Con el objetivo de aclarar la relación entre espacio-tiempo y las representaciones de  $SO(1, 2)$ , se exploran en una Sección distintos escenarios posibles que van desde ciertos espacios homogéneos soporte de dichas representaciones a construcciones basadas en álgebras  $C^*$ .

A continuación se introducen en el modelo nuevos grados de libertad, susceptibles de ser interpretados como algún tipo de materia. Motivados fundamentalmente por razones de sencillez técnica, elegimos un álgebra de Kac-Moody sobre la que actúa el álgebra de Virasoro, para repetir después exactamente los mismos pasos seguidos para Virasoro puro. Como novedad respecto a éste, la contracción de Inönü-Wigner aparece como un mecanismo que proporciona la posibilidad de desacoplar los nuevos modos en ciertos regímenes. Por último se analizan los logros y problemas del modelo.

El material de este Capítulo se desarrolla en las referencias [AJ00a, AJ00b, AJ00b, JA99].

El Capítulo 5 se separa de la línea general al abandonar, en principio, el grupo de difeomorfismos como punto de partida para la dinámica. La discusión parte de la descripción de la partícula libre para después incorporar nueva estructura e interacciones mediante la imposición de distintas condiciones sobre la simetría del sistema. Hay que esperar hasta el final del desarrollo para vislumbrar la convergencia con el enfoque de los difeomorfismos. Todo el desarrollo se realiza en el régimen (semi)clásico, simultaneando el tratamiento de la simetría en el contexto de la dinámica de Cartan con los elementos semiclásicos de la CSG.

La necesidad, en el caso de la partícula libre galileana, de ampliar su espacio de movimientos con objeto de convertir su *semi-invariancia* bajo la acción de Galileo en invariancia estricta, ilustra el mecanismo general: la introducción de nuevos parámetros en la teoría como resultado de la imposición de condiciones derivadas de la simetría.

Esta idea se aplica al estudio del movimiento de una partícula en el seno de un campo electromagnético. Tras recordar el mecanismo estándar de *acoplamiento mínimo* que introduce el potencial vector en la dinámica, reformulamos dicho principio de forma acorde con nuestro enfoque. Tras presentar la manera de hacer *local* un grupo rígido, el mecanismo se particulariza al término central de Galileo (o Poincaré) extendido, obteniéndose así un  $U(1)(x)$ . El acoplamiento mínimo se consigue ahora imponiendo que este grupo local deje invariante la dinámica, lo cual requiere la simultánea ampliación del espacio de realización y la modificación de la forma de Poincaré-Cartan. La consistencia del procedimiento se comprueba al recuperar las ecuaciones de Lorentz. Este tratamiento se repite para el caso de un campo potencial.

La discusión de la dinámica de la partícula en un campo electromagnético se retoma desde la perspectiva de la CSG. Partiendo del grupo local previamente construido, se aplica su tratamiento semiclásico, que generaliza al de Cartan pero que resulta más algorítmico, recuperándose de nuevo las ecuaciones de Lorentz.

Las anteriores discusiones culminan en el estudio del movimiento de una partícula en el seno de un campo gravitatorio, para lo cual hacemos local el subgrupo de las translaciones, punto en el que surge entonces la conexión con el grupo de los difeomorfismos. El aumento significativo de la complejidad técnica nos lleva a elegir el procedimiento más sistemático,



esto es, la CSG. El  $U(1)$  de la extensión central se hace automáticamente local al hacer locales las translaciones, con lo que la introducción de un campo gravitatorio en este tratamiento conlleva la aparición de un campo electromagnético, junto con la mezcla potencial entre ambos. Éste último punto sugiere una vía para estudiar el problema de la mezcla de interacciones.

El material de este Capítulo se desarrolla en [AJGa, AJGb].

El Capítulo 6 recoge las ideas de los capítulos anteriores y las desarrolla en un contexto más amplio haciendo uso del álgebra completa de difeomorfismos en dimensión espacio-temporal realista. Se dedica una sección a la descripción técnica de las extensiones tensoriales no centrales del álgebra, las cuales enriquecen la dinámica. A continuación se introducen nuevos generadores mediante la incorporación de las álgebra de corrientes, sobre las que los difeomorfismos actúan de manera natural.

Con estos elementos técnicos, se vuelve al problema de la mezcla de interacciones planteado al final del Capítulo anterior, comenzando con un ejemplo que representa una generalización tentativa del álgebra subyacente en esa mezcla. Este punto ilustra la necesidad de complementar los argumentos puramente formales con otro tipo de motivaciones a la hora de elegir las estructuras básicas de partida. Ante esta situación, se realiza un repaso del tratamiento en CSG de las teorías de campos con una simetría gauge local, con el fin de encuadrar el papel del álgebra de los difeomorfismos en este problema.

En la siguiente Sección se presenta la descripción técnica, tanto clásica como cuántica, de un modelo construido a partir de un álgebra de difeomorfismos extendida no centralmente y que actúa sobre un álgebra de corrientes de  $U(1)$ , constituyendo el principal resultado del Capítulo. A continuación se discute la conexión del formalismo previo con la física gravitacional, considerando distintas interpretaciones correspondientes a enfoques físicos de muy distinta naturaleza, que abarcan desde concepciones de naturaleza fundamental hasta tratamientos fenomenológicos. Finalmente acabamos con una discusión esencialmente técnica de los modelos físicos presentes en el Capítulo.

El material de este Capítulo se desarrolla en [AJ02, JA02].

El Capítulo 7 completa las discusiones parciales presentes al final de cada Capítulo con un análisis más global, evaluando por separado la consecución de cada uno de los objetivos planteados en la Sección 1.2, tra lo cual se perfilan las posibles líneas de investigación futuras. Por último, en el Capítulo 8 se presentan las conclusiones finales.

Conscientes de la dificultad que entraña el carácter no estándar de formalismo empleado, en el que a menudo el significado de los términos no coincide de forma exacta con el utilizado en buena parte de la literatura o donde familiares conceptos físicos aparecen profundamente revisados, en términos generales hemos optado por una presentación que no evita volver a conceptos ya introducidos, aun a riesgo de resultar repetitiva.



Parte I

**Formalismo técnico**







## Capítulo 2

# Antecedentes a la Cuantización Sobre Grupos

En este Capítulo se introducen las ideas precursoras de la Cuantización Sobre Grupos (CSG). En primer lugar se formula la Cuantización Geométrica (CG), discutiendo su motivación, desarrollo técnico y problemas básicos. Su mayor interés para nosotros reside en la introducción de técnicas geométricas en el contexto de la cuantización. Especialmente relevantes resultan la noción de variedad cuántica, construida como un fibrado principal con el espacio de las fases clásico como base y el  $U(1)$  de la Mecánica Cuántica como grupo estructural, el tratamiento de las funciones de onda del espacio de Hilbert como funciones  $U(1)$ -equivariantes sobre la variedad cuántica y el concepto de polarización como herramienta para obtener la irreducibilidad de dicho espacio de representación. En segundo lugar se presenta la estructura simpléctica de las órbitas coadjuntas de un grupo sobre su coálgebra. El punto más importante lo constituye la identificación de determinadas nociones cohomológicas como elemento clasificador de las estructuras simplécticas en cuestión, apareciendo asimismo como nexo clave con las extensiones centrales de grupos. En tercer y último lugar se señalan los elementos de la dinámica dependiente del tiempo, *à la Cartan*, cuya generalización jugará un papel relevante en el tratamiento de la CSG.

### 2.1 Cuantización Geométrica

En esta sección desarrollamos una descripción general básica de la CG, centrándonos en sus aspectos estructurales, puesto que muchas de las nociones que encontraremos en la CSG están ya definidas en este contexto. En cuanto a los aspectos puramente técnicos, presentamos los enunciados de los resultados más relevantes, omitiendo sus demostraciones para las cuales remitimos al lector a la bibliografía [Wo91, AM78, Sn80, GS84, So70]. Aclaramos que el seguimiento exhaustivo de estos detalles técnicos no resulta fundamental para la comprensión del conjunto de esta memoria, aunque desde luego facilitan la intuición sobre las estrategias con que abordaremos los problemas en la segunda parte de la Tesis.

#### 2.1.1 Motivación. Cuantización Canónica

A diferencia de la CSG, que como veremos plantea un cambio conceptual en los fundamentos físicos de partida, la CG debe ser entendida literalmente como un método de cuantización, tal y como su nombre sugiere. Por tanto, la existencia de un sistema clásico cuya dinámica



se quiere describir en el régimen cuántico es un requisito previo en este tratamiento. Se puede decir que en este sentido sigue *fielmente* el espíritu de la denominada interpretación de Copenhage de la Mecánica Cuántica, según la cual las predicciones físicas de la teoría cuántica deben estar formuladas en términos de conceptos clásicos.

Podemos ser más precisos en la caracterización del sistema clásico de partida. En efecto, la CG surge con la intención de resolver ciertos problemas asociados a la denominada cuantización canónica, donde el sistema clásico correspondiente admite una descripción hamiltoniana [Go69, AM78, Gol92].

Con el fin de motivar estos problemas, presentamos un repaso elemental de las ideas de la cuantización canónica [GP89]. En una descripción clásica hamiltoniana, los estados del sistema físico están representados por puntos en el espacio de las fases o de *soluciones*. Este espacio tiene una estructura geométrica dada por el par  $(P, \omega)$ , donde  $P$  es una variedad diferenciable de dimensión par (para sistemas con un número finito de grados de libertad) y  $\omega$  es la denominada forma simpléctica, una 2-forma cerrada sobre  $P$ . Los observables clásicos están representados por funciones reales  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  y están dotados de una estructura de álgebra de Lie a través del corchete de Poisson, definido en términos de la forma simpléctica. Para ello a cada observable  $f$  se le asocia un campo vectorial  $X_f$ , denominado *campo hamiltoniano*, que viene determinado por la expresión  $i_{X_f}\omega = -df$ . El corchete de Poisson se define como

$$\{f, g\} \equiv \omega(X_f, X_g) \quad (2.1)$$

e indica el ritmo de cambio de  $g$  a lo largo de las trayectorias generadas por  $X_f$  (ecuaciones de Hamilton). Seleccionando la denominada función hamiltoniana  $H$  entre el conjunto de los observables clásicos, la dinámica del sistema queda caracterizada por la terna  $(P, \omega, H)$ .

En términos muy generales, la cuantización del sistema se obtiene sustituyendo  $(P, \omega)$  por un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , cuyos vectores representan los estados del sistema. Más exactamente, un estado está caracterizado por una clase de equivalencia de vectores normalizados que se diferencian a lo sumo por una fase, origen de la invariancia de fase  $U(1)$  de la Mecánica Cuántica. los observables cuánticos se introducen considerando cierta subálgebra del álgebra total de Poisson clásica y asociando a cada función en la misma un operador hermítico en  $\mathcal{H}$ . El conmutador derivado del producto asociativo entre operadores dota a este conjunto de una estructura de Lie natural de manera que, de acuerdo con la condiciones cuánticas de Dirac [Di25], la aplicación  $f \mapsto \hat{f}$  debe ser un isomorfismo de álgebras de Lie. Otro requisito básico es que los operadores actúen de forma irreducible sobre el espacio de representación de la cuantización.

En su versión más elemental (ver por ejemplo [Is84, AT94] para otras más elaboradas) la cuantización canónica lleva a cabo este programa aprovechando el teorema de Darboux en variedades simplécticas, que garantiza la existencia (local) de un sistema de coordenadas  $(q^i, p_i)$  donde la forma simpléctica se escribe  $\omega = dq^i \wedge dp_i$  y en particular el corchete de Poisson adquiere la forma *canónica*  $\{q^i, p_j\} = \delta_j^i$ . De hecho, esta técnica de cuantización normalmente es efectiva en aquellas variedades simplécticas dadas por un espacio cotangente  $T^*C$ , donde  $C$  es el espacio de configuración del sistema. Tal espacio,  $T^*C$ , admite una estructura simpléctica canónica, donde las cartas locales  $(q^i)$  sobre  $C$  inducen coordenadas canónicas  $(q^i, p_i)$  en  $T^*C$  de forma directa. La prescripción de la cuantización canónica consiste en construir el espacio de Hilbert como  $\mathcal{H} = L^2(C, \mu)$ , esto es, el espacio de funciones complejas  $\Psi(q)$  de cuadrado integrable sobre  $C$ , con un producto escalar dado por una medida de integración  $d\mu(q)$  físicamente apropiada [Wo91]:  $\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_C \Psi^*(q) \Phi(q) d\mu(q)$ .



El operador asociado al observable clásico  $f(q^i, p_i)$  viene dado por la sustitución formal  $\hat{f} = f(\hat{q}^i, \hat{p}_i)$  donde:

$$\begin{aligned}\hat{q}^i \Psi(q) &= q^i \Psi(q) \\ \hat{p}_i \Psi(q) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i} \Psi(q)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Este procedimiento, usado conjuntamente con la intuición física, ha dado muy buenos resultados en el estudio de distintos sistemas relativamente simples. Sin embargo, presenta carencias que se hacen evidentes e inevitables al tratar casos más complejos. Entre estos defectos podemos señalar:

- a) El resultado de la cuantización depende críticamente de las coordenadas elegidas.
- b) Ambigüedad en la construcción de los observables cuánticos, como consecuencia de problemas de ordenación asociados a la no conmutatividad de los operadores  $\hat{q}^i$  y  $\hat{p}_i$  (origen de los denominados *teoremas no-go* de cuantización de Groënwald y Van Hove; ver por ejemplo [GS84]).
- c) La prescripción formal para la construcción de operadores cuánticos deja indeterminado el dominio de los mismos.
- d) El procedimiento no funciona en general al tratar variedades simplécticas con topología no trivial y en particular sistemas con ligaduras o con grados de libertad *internos*.
- e) Un sistema físico admite en general distintas *representaciones* en su cuantización (de Schrödinger, de Bargmann-Fock...) sin que el algoritmo presente un tratamiento unificado de las mismas.

La CG trata de eliminar las dificultades y ambigüedades inherentes a las reglas de la cuantización canónica, reformulando el algoritmo de cuantización para dotarlo de solidez matemática. El objetivo no es introducir ideas físicas nuevas, sino elaborar un análisis de las estructuras de las teorías clásicas y cuánticas, de forma que sus analogías y correspondencias queden definidas de forma precisa, sistematizada y unificada. La profundización en el conocimiento de la estructura de la Mecánica Clásica como consecuencia de la aplicación de las técnicas de Geometría Diferencial moderna [AM78, Ar78, MR94, Go69], sin duda supone un estímulo en el uso de ideas eminentemente geométricas (por contraposición a otros enfoques más algebraicos) para la matematización del algoritmo de cuantización. El uso de métodos geométricos intrínsecos ofrece, por un lado, una cuantización independiente de coordenadas específicas y por otro, un tratamiento unificado de las distintas representaciones que aparecían previamente. Aunque puede resultar técnicamente complicado, la aplicación de las técnicas geométricas permite un tratamiento bien definido de los sistemas con espacio de las fases topológicamente no triviales. Por otra parte, proporciona un vínculo no trivial con la teoría matemática de representaciones de grupos de Lie [Kir76].

### 2.1.2 Descripción técnica

La CG opera en dos etapas. La primera, denominada *precuantización* culmina satisfactoriamente con la representación de los observables clásicos como operadores hermíticos en



un espacio de Hilbert. Sin embargo tal construcción, equivalente a la cuantización de Bohr-Sommerfeld [Wo91], falla en el requerimiento de irreducibilidad, siendo necesario un proceso de *reducción*. Éste es el objeto de la segunda fase, denominada propiamente *cuantización*.

### 2.1.2.a Precuantización

Antes de ofrecer la descripción formal, perfilamos la idea básica. El espacio de Hilbert se intenta construir a partir de las funciones (complejas) definidas sobre el espacio de las fases clásico. Aprovechando las identidades,  $X_{\alpha f} = \alpha X_f$ ,  $X_{f+g} = X_f + X_g$ ,  $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ , que definen un homomorfismo entre los observables clásicos y los campos de vectores hamiltonianos, se trata de representar los operadores cuánticos mediante estos campos vectoriales:  $\hat{f} \equiv X_f$ . Sin embargo, este homomorfismo de álgebras tiene núcleo no trivial, de manera que el operador asociado a las funciones constantes se anula:  $i_{X_a}\omega = -da = 0 \Rightarrow X_a = 0$ , siendo  $a$  constante and  $\omega$  no degenerada. En coordenadas,

$$(X_a)^i \omega_{ij} = 0 \quad , \quad \omega_{ij} \text{ no degenerada} \Rightarrow (X_a)^i = 0 \quad \forall i \quad . \quad (2.3)$$

Esto es crítico para la realización de las reglas de conmutación de los observables básicos  $q$  y  $p$ , que no se trasladan al caso cuántico. El esfuerzo por construir adecuados operadores centrales asociados a los observables clásicos constantes, conduce a la sustitución de la geometría simpléctica del espacio de las fases por otra estructura más general como punto de partida. En términos poco precisos, la variedad simpléctica se *extiende* mediante la introducción una nueva variable íntimamente relacionada con la invariancia de fase de la Mecánica Cuántica y cuyo fin es dar cuenta de los términos centrales.

Procedemos ahora propiamente a la descripción técnica, simplemente enunciando las definiciones y teoremas básicos.

**Definición 2.1.1** (*variedad cuántica*). *Se denomina variedad cuántica  $Q$  a una variedad de dimensión  $2n + 1$  tal que:*

1. *Existe una 1-forma  $\Theta$  tal que el par  $(Q, \Theta)$  define una estructura de contacto exacta. Caracterizaciones equivalentes de este concepto son:*
  - i)  $\Theta \wedge (d\Theta)^n$  define un volumen sobre  $Q$ .
  - ii)  $\dim(\ker\Theta \cap \ker d\Theta) = 0$ .
  - iii)  $\exists!$  campo vectorial  $X_\Theta$ , tal que,  $i_{X_\Theta}\Theta = 1$ ,  $i_{X_\Theta}d\Theta = 0$ .
2. *Existe una acción  $\zeta_Q$  del grupo  $U(1)$  sobre  $Q$ , libre de puntos fijos, cuyo generador infinitesimal  $\Xi$  coincide con  $X_\Theta$ .*

A partir de esta definición, se puede derivar la siguiente formulación equivalente:

**Proposición 2.1.1** *Una variedad cuántica es un fibrado principal  $Q(P, U(1))$ , con base la variedad  $P$  y grupo estructural  $U(1)$ , dotado de una 1-forma de conexión  $\Theta$ , tal que su 2-forma de curvatura  $\Omega = d\Theta$  define sobre la base  $P \sim Q/U(1)$  una estructura simpléctica.*

Esta caracterización nos permite aprovechar la potencia del lenguaje de fibrados (Apéndice A) al tiempo que se generalizará de forma más directa en el caso de CSG. Usando coordenadas locales canónicas  $(q^i, p_j)$  en  $P$ , podemos inducir en  $Q$  las coordenadas locales  $(q^i, p_j, \zeta = e^{i\phi})$ , en las que escribimos,

$$\Theta = p_i dq^i + \frac{dz}{iz} \quad , \quad \Xi = i \left( \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad . \quad (2.4)$$



Concretamos ahora lo que entendemos por cuantización en este contexto.

**Definición 2.1.2** (cuantización). Diremos que una variedad simpléctica  $(P, \omega)$  es cuantizable si existe una variedad cuántica  $Q(P, U(1))$  con 1-forma de conexión  $\Theta$  tal que  $\pi^*\omega = d\Theta$ , donde  $\pi$  es la proyección natural del fibrado principal. Decimos que  $Q(P, U(1); \Theta)$  es una cuantización de  $(P, \omega)$ .

Notamos que la condición sobre  $\omega$  no la hace una 2-forma exacta. Tan sólo es *exacta* su *pull-back* a la variedad cuántica <sup>1</sup>. Debemos mencionar que también es posible caracterizar la cuantización de una variedad simpléctica en términos de un fibrado vectorial con fibra la recta compleja  $\mathbb{C}$  [Wo91, EMRV99]. Sin embargo, el tratamiento en términos de un fibrado principal constituye un mejor punto de partida para su generalización en la CSG.

Una vez formalizada la noción de cuantización de una variedad simpléctica, enunciamos un teorema que caracteriza su existencia <sup>2</sup>:

**Teorema 2.1.1** (de existencia). Sea  $(P, \omega)$  una variedad simpléctica. La condición necesaria y suficiente para que exista una cuantización  $Q(P, U(1); \Theta)$  es que  $\omega$  sea de clase de cohomología de De Rham entera, es decir,  $[\omega] \in H^2(P, \mathbb{Z})$ .

El lenguaje de fibrados nos permite dar una caracterización simple de la noción de cuantizaciones equivalentes de una variedad simpléctica.

**Definición 2.1.3** (cuantomorfismo). Dadas dos variedades cuánticas  $Q(P, U(1); \Theta)$  y  $Q'(P', U(1); \Theta')$ , se define un cuantomorfismo entre ambas como un isomorfismo de fibrados principales  $F : Q \rightarrow Q'$  que respeta la forma de conexión. Esto es:

- i)  $F(\zeta_Q m) = \zeta_{Q'} F(m)$ ,  $\forall \zeta \in U(1)$ ,  $\forall m \in Q$  (condición de  $U(1)$ -función).
- ii)  $F^*\Theta' = \Theta$ .

La condición i) nos dice que  $F$  lleva puntos de una misma fibra de  $Q$  en puntos de la misma fibra en  $Q'$ , con lo que define una aplicación *proyectada* entre las bases,  $f : P \rightarrow P'$ , cumpliéndose el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{F} & Q' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ P & \xrightarrow{f} & P' \end{array}$$

Dos cuantizaciones de  $(P, \omega)$  se dice que son equivalentes cuando existe un cuantomorfismo  $F$  entre ellas con  $f = Id_P$ .

Por completitud, enunciamos un teorema de clasificación de las posibles cuantizaciones de una variedad simpléctica.

**Teorema 2.1.2** (de clasificación). Las distintas cuantizaciones de una variedad simpléctica  $(P, \omega)$  están parametrizadas por los elementos de  $H^1(P, U(1))$ .

<sup>1</sup>Esta idea de hacer *exacto* un objeto mediante la ampliación del espacio soporte volverá a aparecer a lo largo del trabajo, especialmente en el Capítulo 4 a propósito de la *semi-invariancia* y la *invariancia estricta*.

<sup>2</sup>En el Apartado 3.1.3 veremos una aplicación de este teorema al estudiar la convergencia de dos aproximaciones al concepto de *pseudo-extensión*.



Una vez que hemos introducido la estructura de variedad cuántica, estamos en condiciones de construir el espacio de Hilbert de las funciones onda.

**Definición 2.1.4** (*espacio de funciones de onda*). Dada la variedad cuántica  $Q(P, U(1); \Theta)$ , definimos el espacio de funciones de onda  $\mathcal{H}(Q)$  del sistema físico asociado, como el espacio vectorial de las  $U(1)$ -funciones con soporte en  $Q$  y valores en  $\mathbb{C}$ .

Esto es,

$$\begin{aligned} \Psi & : Q \rightarrow \mathbb{C} \\ \Psi(\zeta_Q q) & = \zeta_C \Psi(q), \quad \forall q \in Q, \quad \forall \zeta \in U(1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $\zeta_Q$  denota la acción de  $U(1)$  sobre  $Q$  y  $\zeta_C$  es una representación de  $U(1)$  sobre los complejos. Esta condición de  $U(1)$ -función, que indica un comportamiento de función homogénea de primer grado sobre la variable  $\zeta$  para las funciones de onda, puede expresarse infinitesimalmente como:

$$\Xi \Psi = i \Psi \quad , \quad (2.6)$$

donde  $\Xi$  es el generador infinitesimal de la acción de  $U(1)$  (ver Definición 2.1.1).

La condición de  $U(1)$ -función sobre  $\Psi$  es fundamental para introducir el producto escalar entre funciones, pues a partir de dos funciones  $\Psi(q)$  y  $\Phi(q)$  podemos construir el producto  $(\Psi^* \Phi)(q)$  que es una función constante a lo largo de la fibra ( $\Psi(\zeta_Q q)^* \Phi(\zeta_Q q) = \zeta_C^* \zeta_C \Psi(q)^* \Phi(q) = \Psi(q)^* \Phi(q)$ ), con lo que está bien definido sobre la variedad simpléctica cociente  $P = Q/U(1)$ .

**Definición 2.1.5** (*producto escalar*). Dadas dos funciones de onda  $\Psi$  y  $\Phi$ , definimos su producto escalar como:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle \equiv \int_P \omega^n \Psi(q)^* \Phi(q), \quad (2.7)$$

donde  $\omega^n$  es la medida canónica de Liouville sobre la variedad simpléctica (en coordenadas locales  $\omega^n = dq^1 \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp_n$ ).

Disponiendo de un espacio de representación, procedemos a construir los operadores asociados a los observables clásicos, esto es, a las funciones sobre el espacio  $P$ . En nuestro primer intento para construir tales operadores, hacíamos uso de los campos hamiltonianos, que constituyen de hecho simetrías infinitesimales de la estructura simpléctica que caracterizaba la geometría del sistema (*simplectomorfismos* infinitesimales). Ahora hemos sustituido esta estructura por una más general, y en el espíritu del anterior intento, vamos a usar los generadores infinitesimales asociados a los *cuantomorfismos*. De hecho, el proceso de precuantización está diseñado de manera que suponga una modificación mínima de la estructura geométrica capaz de dotar a los campos hamiltonianos iniciales con una componente adicional en la nueva variable, con el objeto de solucionar el problema de la realización de las funciones constantes.

Dada la variedad cuántica  $Q(P, U(1); \Theta)$ , la expresión infinitesimal de la invariancia de su estructura bajo un cuantomorfismo  $F$  (versión infinitesimal de *ii*) en Definición 2.1.3), viene dada por

$$L_{\tilde{X}} \Theta = 0 \quad , \quad (2.8)$$



donde  $\tilde{X}$ <sup>3</sup> es el campo vectorial (completo) que genera infinitesimalmente a  $F$ . Llamamos a  $\tilde{X}$  un *cuantomorfismo infinitesimal*. Una caracterización de estos campos, fundamental para su conexión con los observables clásicos es la siguiente:

**Proposición 2.1.2** *Una condición necesaria y suficiente para que  $\tilde{X}$  sea un cuantomorfismo infinitesimal es que exista una función real  $f$  definida sobre el cociente  $P = Q/U(1)$  que cumpla:*

$$i_{\tilde{X}}\Theta = f \quad , \quad i_{\tilde{X}}d\Theta = -df \quad . \quad (2.9)$$

En efecto,  $f = i_{\tilde{X}}\Theta$  está bien definida sobre el cociente ya que  $L_{\Xi}f = L_{\Xi}(i_{\tilde{X}}\Theta) = 0$ , por lo tanto cae a la variedad simpléctica  $(P, \omega = \pi^*d\Theta)$ .

Con esta caracterización, podemos asociar a cada función  $f$  de  $\mathcal{F}(P)$  un cuantomorfismo infinitesimal  $\tilde{X}_f$ . De hecho la solución ( $\pi$ -proyectable) es única y tiene la forma

$$\tilde{X}_f = X_f + (f - i_{X_f}\Theta)\Xi \quad , \quad (2.10)$$

siendo  $X_f$  el campo hamiltoniano sobre  $P$  definido unívocamente por  $f$  ( $i_{X_f}d\Theta = i_{X_f}\omega = -df$ , ver Apartado 2.1.1). En las coordenadas locales introducidas antes,

$$\tilde{X}_f = \overbrace{\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}}^{X_f} + \left( f - p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \Xi \quad . \quad (2.11)$$

Comprobamos que el cuantomorfismo que hemos construido modifica al campo hamiltoniano simplemente añadiendo una componente en la nueva variable. Este término extra es clave puesto que para funciones constantes,  $f = cte$ , tenemos  $\tilde{X}_f = f\Xi$ .

Podemos finalmente definir los operadores asociados a los observables clásicos con acción sobre el espacio  $\mathcal{H}(Q)$ .

**Definición 2.1.6** (*operador cuántico*). *Dado un observable clásico  $f$  definimos el operador lineal precuantizado  $\hat{f} : \mathcal{H}(Q) \rightarrow \mathbb{C}$  como,*

$$\hat{f}\Psi \equiv -i\tilde{X}_f\Psi = (-iX_f + (f - i_{X_f}\Theta))\Psi \quad (2.12)$$

La primera fase de *precuantización* culmina en el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.3** *La aplicación  $\hat{\cdot} : f \mapsto \hat{f}$  cumple:*

- i)  $\hat{f}$  es un operador hermítico con el producto escalar introducido previamente.
- ii)  $\hat{\cdot}$  es un homomorfismo de álgebras de Lie:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)^{\hat{\cdot}} &= \alpha \hat{f} + \beta \hat{g} \\ [\hat{f}, \hat{g}] &= (\{f, g\})^{\hat{\cdot}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{iii) } \hat{1} = Id \quad .$$

<sup>3</sup>Los objetos correspondientes a espacios extendidos por la variable central, se denotarán con una tilde.



### 2.1.2.b Cuantización

A pesar de la limpieza geométrica desarrollada en la prequantización, ésta no culmina con el objetivo de *matematizar* el algoritmo de la cuantización canónica. La razón es que el espacio de representación resulta *demasiado grande*. En términos simples, las funciones de onda dependen tanto de las  $q$ 's como de las  $p$ 's del espacio de las fases, cuando deberían depender sólo de la mitad de ellas,  $q$ 's,  $p$ 's o una combinación adecuada <sup>4</sup>. En cualquier caso, la razón física para eliminar la mitad de las variables no está basada en argumentos matemáticos generales sino en el análisis de la aplicación de la técnica a ejemplos concretos [Wo91].

En definitiva, necesitamos elaborar una etapa más en la construcción del sistema cuántico, a la que llamaremos propiamente *cuantización*, en la que debemos construir un espacio de representación a partir de  $\mathcal{H}(Q)$ , cuyas funciones sólo dependan de la mitad de las variables del espacio de las fases. Para fijar ideas, pensemos de nuevo en el ejemplo simple de una variedad simpléctica con estructura de espacio cotangente,  $T^*C$ . Supongamos que  $C$  admite un sistema de coordenadas global  $(q^i)$  tal que  $(q^i, p_j)$  son las coordenadas sobre  $T^*C$ . Para construir en este caso un espacio de funciones de onda  $\Psi$  que sólo dependan, por ejemplo, de  $q^i$  podemos imponer un conjunto de condiciones diferenciales sobre dichas funciones que eliminen su dependencia en las variables  $p_j$ , esto es,  $\frac{\partial}{\partial p_j} \Psi(q^i, p_j) = 0$ . A este conjunto de operadores diferenciales que se imponen como condiciones sobre las funciones de onda para reducir el espacio de representación, lo denominaremos *polarización* <sup>5</sup>.

Por supuesto, el ejemplo presentado resulta muy especial y siguiendo el espíritu de la CG habrá que extraer las líneas básicas del procedimiento y formularlas en un lenguaje geométrico independiente de coordenadas. Los pasos fundamentales en el ejemplo anterior son dos: en primer lugar, la identificación de una subvariedad en el espacio de las fases que se comporte como un espacio de configuración y, en segundo lugar, la eliminación de la dependencia de las funciones de onda en las coordenadas de esa subvariedad mediante la imposición de un conjunto de condiciones diferenciales (polarización).

La noción geométrica correspondiente a la subvariedad  $C$  es lo que se conoce como subvariedad *lagrangiana*.

**Definición 2.1.7** (*subvariedad lagrangiana*). Dada una variedad simpléctica  $(P, \omega)$ , una subvariedad cerrada  $L$  de  $P$  es lagrangiana si se cumple:

- i)  $\omega(X, Y) = 0, \forall X, Y \in TL$  (condición de isotropía).
- ii)  $L$  es maximal, esto es,  $\dim(L) = \frac{1}{2} \dim(P)$ .

La condición i) nos dice que  $L$  no incluye simultáneamente  $q$ 's y  $p$ 's y la segunda, ii), que incluye todas las  $p$ 's (por ejemplo).

El siguiente paso consiste en eliminar la dependencia de las funciones de onda sobre las coordenadas de las subvariedades lagrangianas recién introducidas. Para ello, formalizamos la noción de *polarización* mencionada antes. Aquí sólo consideraremos el caso de *polarizaciones reales* por las que entendemos foliaciones de la variedad simpléctica  $P$  donde las hojas

<sup>4</sup>Las realizaciones de los operadores  $\hat{q}^i$  y  $\hat{p}_i$  en el caso  $T^*\mathbb{R}^N$  con  $\Theta = p_i dq^i$  dejan invariantes el subespacio de funciones que sólo dependen de  $q$ . Es decir,  $\hat{q}^i$  y  $\hat{p}_i$  no actúan de manera irreducible, con lo que o bien toda la representación es reducible, o existirán observables cuánticos que no podrán escribirse en función de  $\hat{q}^i$  y  $\hat{p}_i$ , indicando la aparición de nuevos grados de libertad.

<sup>5</sup>En general, una polarización será un conjunto de  $n$  condiciones independientes que eliminen la dependencia en  $n$  variables del espacio de las fases que no estén relacionadas canónicamente entre sí, de forma que parametrizen una subvariedad que podamos identificar con un *espacio de configuración*.



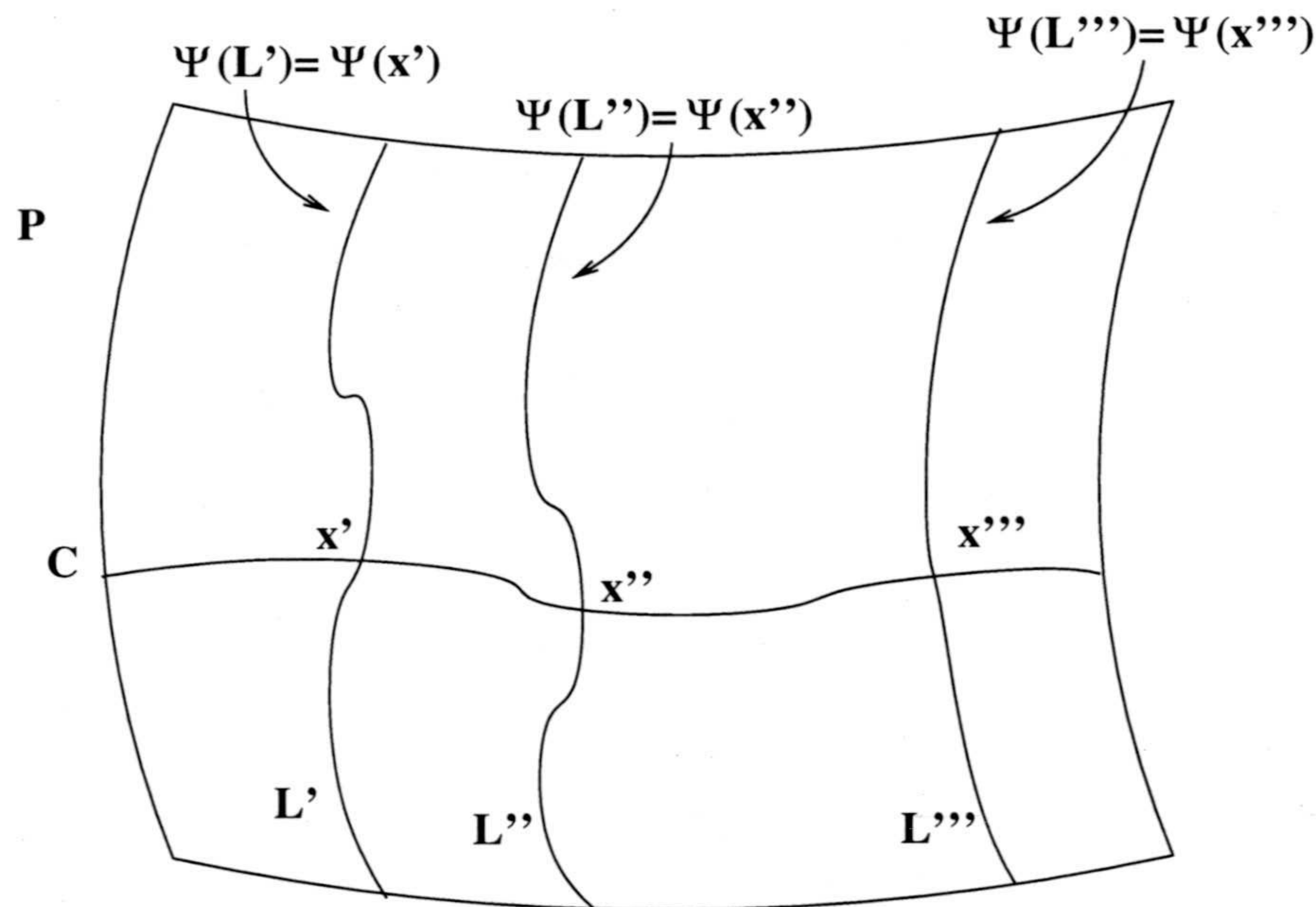


Figura 2.1: Las subvariedades lagrangianas  $L', L'', L''' \dots$  representan una foliación de la variedad simpléctica  $P$ , definiendo una polarización. La reducción se consigue imponiendo que las funciones de onda  $\Psi$  sean constantes sobre cada una de estas subvariedades, de manera que sus únicos argumentos sean los puntos  $x$  del *espacio de configuración*  $C$ .

son subvariedades lagrangianas. La eliminación de la dependencia en las variables de las variedades lagrangianas se obtendrá imponiendo que las funciones de onda sean constantes sobre cada una de las hojas lagrangianas (ver Figura 2.1).

Usando el teorema de Frobenius, podemos dar una caracterización más eficaz en términos de campos vectoriales, de la siguiente forma:

**Definición 2.1.8** (*polarización*). Dada una variedad simpléctica  $(P, \omega)$ , se define una polarización real  $\mathcal{P}$  como un conjunto de  $\frac{1}{2} \dim(P)$  campos de vectores sobre  $P$  independientes y en involución ( $[X, Y] \subset \mathcal{P}, \forall X, Y \in \mathcal{P}$ ), cuyas subvariedades integrales son lagrangianas ( $\omega(X, Y) = 0, \forall X, Y \in \mathcal{P}$ ).

Nuestra intención es utilizar estos campos de vectores como condiciones diferenciales sobre las funciones de onda. Para ello queda un último detalle. Aunque la información de las funciones de onda en  $\mathcal{H}(Q)$  está contenida en su dependencia sobre las coordenadas del cociente  $Q/U(1)$ , estrictamente son funciones definidas sobre todo  $Q$ . Debemos, por tanto *levantar* los campos en  $\mathcal{P}$  definidos sobre  $P$ , a campos sobre  $Q$ . Para ello usamos la conexión  $\Theta$  de  $Q$  que nos da una noción de horizontalidad en el fibrado. Así, dado un campo  $X$  en  $\mathcal{P}$  definimos su *levantado* por  $\Theta$ ,  $\hat{X} \in TQ$  como el único campo vectorial que cumple,

$$\left. \begin{aligned} \pi^T \circ \hat{X} &= X \circ \pi \quad (\pi - \text{proyectable a } X) \\ i_{\hat{X}} \Theta &= 0 \quad \text{condición de horizontalidad} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{X} = X - i_X \Theta \Xi \quad (2.14)$$

Las variedades integrales asociadas a  $\hat{X}$  ( $\forall X \in \mathcal{P}$ ) se denominan *variedades de Planck* y de hecho se podrían haber caracterizado directamente como subvariedades cerradas de  $Q$ , de dimensión  $\frac{1}{2}(\dim(Q) - 1)$ , sobre las que se anula  $\Theta$ .

Ya estamos en condiciones de definir el espacio de Hilbert de la teoría cuántica.



**Definición 2.1.9** (condiciones de polarización). Se define el espacio de Hilbert polarizado,  $\mathcal{H}$ , como el subespacio vectorial de  $\mathcal{H}(Q)$  constituido por las funciones  $\Psi$  que satisfacen:

$$\hat{X}\Psi = 0, \quad \forall X \in \mathcal{P} . \quad (2.15)$$

Los operadores cuánticos se definen como la restricción de los operadores precuánticos a  $\mathcal{H}$ . En el caso de que podamos encontrar campos hamiltonianos  $X_{f^j}$  que generen  $\mathcal{P}$ , tendremos la relación (ver (2.12) y (2.14))

$$\hat{X}_{f^j}\Psi = (\tilde{X}_{f^j} - if^j\Xi)\Psi , \quad (2.16)$$

que en particular implica que los operadores  $\hat{f}^j$  conmutan sobre el espacio polarizado  $\mathcal{H}$ , como consecuencia del carácter involutivo de los campos de vectores  $\tilde{X}_{f^j}$  y sus condiciones de polarización, definiendo lo que se denomina un Conjunto Completo de Observables Compatibles [GP89]. La condición de polarización se convierte en

$$\hat{X}_{f^j}\Psi = 0 \Rightarrow \hat{f}^j\Psi = f^j\Psi , \quad (2.17)$$

que es la ecuación de autovalores de los operadores.

### 2.1.2.c Problemas de la Cuantización Geométrica

Los problemas de la CG están asociados a la segunda fase de su programa, a la cuantización propiamente. Podemos señalar:

- i) La búsqueda de una polarización no es un proceso algorítmico y puede conllevar gran complejidad técnica.
- ii) Los operadores físicos relevantes que se desean cuantizar, y en particular el hamiltoniano que fija la evolución dinámica, no siempre respetan la polarización. Esto significa que no están bien definidas en el espacio reducido.
- iii) Problemas con la unitariedad en la representación reducida (en este contexto aparecen las *semi-formas* como intento de solución).

## 2.2 Geometría simpléctica desde la simetría

### 2.2.1 Órbitas coadjuntas

#### 2.2.1.a Acción coadjunta

En este apartado construimos un conjunto de estructuras simplécticas completamente definidas en términos de un grupo de Lie, el cual actúa de forma natural como grupo de simetrías de las mismas. La construcción se desarrolla a partir de la acción coadjunta del grupo sobre su coálgebra [MR94].

Como paso previo a la definición de la acción coadjunta, introducimos la acción del grupo  $G$  sobre sí mismo mediante los denominados automorfismos internos (conjugación)

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, a) &\mapsto gag^{-1} \equiv \text{Conj}_g(a) \quad g, a \in G \end{aligned} \quad (2.18)$$



que definen una representación (no lineal) de  $G$  sobre sí mismo, que denotaremos por  $Conj$ :

$$\begin{aligned} Conj : G &\rightarrow Aut(G) \\ g &\mapsto Conj_g : G \rightarrow G \end{aligned} \quad (2.19)$$

A partir de esta representación, y usando el isomorfismo entre el espacio tangente del grupo en el elemento neutro ( $T_e G$ ) y su álgebra de Lie ( $\mathcal{G}$ ), podemos definir la representación *lineal* adjunta de  $G$  sobre  $\mathcal{G}$  tomando, para cada  $g$ , la diferencial de  $Conj_g$  en el elemento neutro:

$$\begin{aligned} Ad : G &\rightarrow Aut(\mathcal{G}) \\ g &\mapsto Ad g \equiv [Conj_g]^T(e) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Usando las translaciones por la izquierda y la derecha en el grupo (ver Capítulo 3) podemos expresar:

$$Ad g(X) = (R_{g^{-1}}^T L_g^T)(e) \cdot X, \quad X \in \mathcal{G} \quad (2.21)$$

Cuando el grupo  $G$  es un grupo lineal, las translaciones izquierdas y derechas son aplicaciones lineales y por tanto coinciden con su diferencial. En este caso podemos escribir:

$$Ad g(X) = gXg^{-1}, \quad X \in \mathcal{G} \quad (2.22)$$

Si linealizamos sobre la variable  $g$ , obtenemos la versión infinitesimal de la representación adjunta, que define la acción del álgebra  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{G}$ . Esto es, evaluando en el elemento neutro la diferencial respecto a  $g$  de cada aplicación lineal  $Ad g$ , obtenemos la correspondiente representación lineal  $Ad^T(e) \equiv ad : \mathcal{G} \rightarrow End(\mathcal{G})$ , cuya forma explícita es  $ad X(Y) = [X, Y]$ .

Una vez que disponemos de estas acciones lineales sobre  $\mathcal{G}$ , nuestro interés se centra en las correspondientes aplicaciones transpuestas definidas sobre el espacio vectorial dual, la *coálgebra*  $\mathcal{G}^*$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}^* & \xleftarrow{(Ad g)^t} & \mathcal{G}^* \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{Ad g} & \mathcal{G} \end{array} \quad (2.23)$$

Definimos así la denominada acción o representación *coadjunta* del grupo  $G$  en su coálgebra, que denotaremos

$$Coad g \equiv (Ad g^{-1})^t, \quad (2.24)$$

y cuya acción explícita viene dada por:  $Coad g(\mu)(X) \equiv \mu(Adg^{-1}(X))$ ,  $\mu \in \mathcal{G}^*$ ,  $X \in \mathcal{G}$ . Análogamente, se define la representación coadjunta del álgebra  $\mathcal{G}$  sobre la coálgebra  $\mathcal{G}^*$ :  $coad X(\mu)(Y) = \mu(adX(Y)) = \mu([X, Y])$ .

### 2.2.1.b Órbitas coadjuntas

Las órbitas a través de los elementos  $\mu \in \mathcal{G}^*$  bajo la acción coadjunta de  $G$ , proporcionan los espacios soporte de las estructuras simplécticas que nos interesan aquí,

$$Orb(\mu) = \{\nu \in \mathcal{G}^*, \text{ tales que } \nu = Coad g(\mu) \text{ para algún } g \in G\} \quad (2.25)$$

Aunque  $Orb(\mu)$  tiene estructura de variedad diferenciable, no es necesariamente una sub-variedad de  $\mathcal{G}^*$  [MR94]. En cualquier caso, al ser una variedad sobre la que  $G$  actúa de



forma transitiva por construcción, tenemos que  $Orb(\mu) \approx G/G_\mu$ , donde  $G_\mu$  es el subgrupo de isotropía de  $\mu$ :  $G_\mu = \{g \in G, \text{tales que } Coad\ g(\mu) = \mu\}$ .

El primer paso para estudiar una estructura diferenciable sobre estas variedades  $Orb(\mu)$  es determinar la forma de sus vectores tangentes en términos de elementos de  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}^*$ . Para ello disponemos de la caracterización:

**Lema 2.2.1** *Un vector  $X \in T_\nu \mathcal{G}^*$  es tangente a  $Orb(\mu)$  en  $\nu$  si y sólo si existe un elemento  $X_G \in \mathcal{G}$  que cumple <sup>6</sup>,*

$$X = coad\ X_G(\nu) \quad . \quad (2.26)$$

Usando esta caracterización, presentamos el siguiente teorema que es el resultado fundamental de esta construcción y que permite definir, punto a punto, una forma simpléctica sobre  $Orb(\mu)$ .

**Teorema 2.2.4** *La órbita coadjunta  $Orb(\mu) \subset \mathcal{G}^*$  posee una forma simpléctica  $\omega$  (una 2-forma cerrada) que viene dada punto a punto por la expresión:*

$$\omega_\nu(X, Y) = \nu([X_G, Y_G]), \quad \nu \in Orb(\mu), \quad X, Y \in T_\nu Orb(\mu) \quad . \quad (2.27)$$

## 2.2.2 Cohomología

En este apartado se amplía el estudio realizado en el Apartado anterior, entrando en juego nociones cohomológicas (ver Apéndice A) que permiten enlazar con el problema de las extensiones centrales de grupos. Nuevamente los detalles técnicos no son fundamentales para la comprensión general de esta memoria.

### 2.2.2.a Cohomología simpléctica

Exploramos la posibilidad de obtener nuevas estructuras simplécticas a partir de un grupo deformando la acción coadjunta sobre la coálgebra. En particular, añadimos un término  $\gamma : G \rightarrow \mathcal{G}^*$  a la acción coadjunta (la motivación para esto puede estudiarse en el contexto de la aplicación momento asociada a acciones canónicas de un grupo sobre una variedad simpléctica [So70]), definiendo una nueva acción de  $G$  sobre  $\mathcal{G}^*$

$$Coad_\gamma g(\mu) \equiv Coadg(\mu) + \gamma(g) \quad . \quad (2.28)$$

Imponiendo que  $Coad_\gamma g$  defina realmente una acción (izquierda), esto es  $Coad_\gamma g'g(\mu) = Coad_\gamma g'(Coad_\gamma g(\mu))$ , obtenemos la condición sobre  $\gamma(g)$ :

$$\gamma(g'g) = Coadg'(\gamma(g)) + \gamma(g') \quad , \quad (2.29)$$

que caracteriza a  $\gamma$  como un 1-cociclo (ver Apéndice A) de la cohomología de  $G$  sobre  $\mathcal{G}^*$  asociada a la acción coadjunta. Por una razón técnica asociada a la posibilidad de definir una forma simpléctica sobre las órbitas de la acción deformada  $Coad_\gamma$ , impondremos sobre  $\gamma$  una condición extra exigiéndole a su diferencial en el elemento neutro una condición de antisimetría:

$$\begin{aligned} \gamma^T(e)(X, Y) &\equiv \gamma^T(e) \cdot X(Y) \\ \gamma^T(e)(X, Y) &= -\gamma^T(e)(Y, X) \quad \forall X, Y \in \mathcal{G} \quad . \end{aligned} \quad (2.30)$$

<sup>6</sup>Se está identificando  $\mathcal{G}^*$  y  $T_\nu \mathcal{G}^*$ , por tratarse de un espacio lineal



Introducíamos estas deformaciones de la acción coadjunta con el fin de obtener nuevas variedades simplécticas correspondientes a las órbitas deformadas. Sin embargo, aunque los distintos cociclos  $\gamma$  proporcionan tales deformaciones, no todas ellas generan órbitas de un nuevo *tipo*. Concretamente, existen distintas funciones  $\gamma$  cuyas respectivas acciones  $Coad_\gamma$  tienen asociadas, esencialmente, el mismo conjunto de órbitas en  $\mathcal{G}^*$ . En este sentido, tales funciones  $\gamma$  son equivalentes.

En particular, cada punto  $\mu_0$  de la coálgebra permite definir una función  $\Delta_{\mu_0} : G \rightarrow \mathcal{G}^*$

$$\Delta_{\mu_0} = Coad g(\mu_0) - \mu_0 \quad , \quad g \in G, \mu_0 \in \mathcal{G}^* \quad , \quad (2.31)$$

que cumple la condición de cociclo, con lo que deforma consistentemente a la acción coadjunta. Sin embargo, observando la actuación de esta nueva acción  $Coad_{\Delta_{\mu_0}}$

$$Coad_{\Delta_{\mu_0}} g(\mu) = Coad g(\mu) + Coad g(\mu_0) - \mu_0 = Coad g(\mu + \mu_0) - \mu_0 \quad , \quad (2.32)$$

vemos que el *conjunto* de órbitas que define (al barrer todos los  $\mu \in \mathcal{G}^*$ ) es el mismo que el obtenido a partir de la coadjunta, salvo que están trasladadas en la coálgebra. En general, dos cociclos  $\gamma'$  y  $\gamma$  que se diferencien por una función  $\Delta_{\mu_0}$  definen las mismas órbitas. La función  $\Delta_{\mu_0}$  tiene en este sentido un contenido trivial y de hecho es un *coborde* (ver Apéndice A) en el contexto cohomológico que mencionábamos arriba. En definitiva, las distintas familias de órbitas que se pueden obtener a partir de las acciones deformadas (2.28) vienen clasificadas por el conjunto de cociclos (2.29) módulo los cobordes (2.31), cociente que define la denominada cohomología simpléctica  $H_S(G, \mathcal{G}^*)$ .

Antes de construir propiamente las estructuras simplécticas, introducimos las versiones infinitesimales de las anteriores acciones deformadas. Tomando la diferencial de  $Coad_\gamma g$  en el elemento neutro, definimos la acción  $coad_\Gamma$  de  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{G}^*$ :  $coad_\Gamma X(\mu) \equiv coad X(\mu) + \Gamma(X)$ , donde  $\Gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^*$  viene dada por  $\Gamma(X) = \gamma^T(e) \cdot X$ ,  $X \in \mathcal{G}$ . Las condiciones de cociclo de  $\gamma$  conllevan las siguientes condiciones sobre su diferencial

$$\begin{aligned} (2.29) \quad \Rightarrow \quad \Gamma([X, Y]) &= coad X(\Gamma(Y)) - coad Y(\Gamma(X)) & (2.33) \\ \Gamma(X, Y) &\equiv \Gamma(X)(Y) \text{ cumple } \Gamma(X, Y) = -\Gamma(Y, X) \quad . \end{aligned}$$

De la primera condición se puede derivar la ligadura

$$\Gamma([X, Y], Z) + \Gamma([Y, Z], X) + \Gamma([Z, X], Y) = 0 \quad , \quad (2.34)$$

clave en lo que sigue. Análogamente, la contrapartida infinitesimal de la condición de coborde se obtiene tomando las diferenciales en (2.31).  $\Gamma'$  y  $\Gamma$  son *equivalentes* si:

$$\Gamma'(X, Y) = \Gamma(X, Y) + \mu_0[X, Y] \quad . \quad (2.35)$$

Las condiciones infinitesimales recién introducidas caracterizan de hecho los cociclos y cobordes asociados al álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  (Apéndice A), definiendo el grupo de cohomología  $H_S(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ , satisfaciéndose el isomorfismo:  $H_S(G, \mathcal{G}^*) \approx H_S(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ .

Para definir la estructura simpléctica sobre las órbitas

$$Orb_\gamma(\mu) = \{\nu \in \mathcal{G}^* \text{ tales que } \nu = Coad_\gamma g(\mu) \text{ para algún } g \in G\} \quad , \quad (2.36)$$

seguimos los mismos pasos que en el caso de las órbitas coadjuntas.



**Lema 2.2.2** *Un vector  $X \in T_\nu \mathcal{G}^*$  es tangente a  $Orb_\gamma(\mu)$  en  $\nu$  si y sólo si existe un elemento  $X_G \in \mathcal{G}$  que cumple,*

$$X = \text{coad}_\gamma X_G(\nu) + \Gamma(X) \quad . \quad (2.37)$$

El siguiente teorema constuye la forma simpléctica sobre  $Orb_\gamma(\mu)$ .

**Teorema 2.2.5** *La órbita  $Orb_\gamma(\mu) \subset \mathcal{G}^*$  posee una forma simpléctica  $\omega$  que viene dada punto a punto por la expresión:*

$$\omega_\nu(X, Y) = \nu([X_G, Y_G]) + \Gamma(X, Y), \quad \nu \in Orb_\gamma(\mu), X, Y \in T_\nu Orb_\gamma(\mu) \quad . \quad (2.38)$$

Por último, debemos recordar que nuestro objetivo original en esta Sección era la construcción de variedades simplécticas directamente asociadas a una estructura de grupo, sobre las que poder definir una dinámica. Una observación elemental pero fundamental en tal discusión, es recalcar el hecho de que la elección de un elemento  $[\gamma]$  de  $H_S(G, \mathcal{G}^*)$  no fija una variedad simpléctica, sino una familia de ellas (*deformaciones* de órbitas coadjuntas). Esto es, fijado un representante  $\gamma$ , para cada elemento  $\mu_0 \in \mathcal{G}^*$  que genere una órbita distinta tendremos una variedad simpléctica diferente. De forma equivalente, podemos mantener fijo ese  $\mu_0 \in \mathcal{G}^*$  y variar el representante de la clase  $[\gamma]$  añadiendo a  $\gamma$  distintos cobordes (generados por elementos  $\mu \in \mathcal{G}^*$ ) de forma que se recuperen las distintas variedades simplécticas. Por tanto,  $H_S(G, \mathcal{G}^*)$  no es la construcción que clasifica los objetos que nos interesan, las variedades simplécticas, por lo que necesitamos una versión refinada de esta cohomología. El estudio de este punto será el objeto del Apartado 3.1.3.

### 2.2.2.b Extensiones centrales de álgebras y grupos.

Una vez que hemos visto introducido a partir de un grupo  $G$  un conjunto de variedades simplécticas sobre las que desarrollar dinámicas clásicas, las correspondientes dinámicas cuánticas las podríamos construir aplicando la técnicas de Cuantización Geométrica. Partiendo de las variedades simplécticas  $G/G_\mu$  construiríamos variedades cuánticas añadiendo una nueva variable y una acción del grupo  $U(1)$ . Ésta es esencialmente la técnica desarrollada por Kirillov para construir las representaciones de un grupo  $G$  [Kir76]. Sin embargo, podemos estudiar la posibilidad de invertir el orden, añadiendo *primero* el  $U(1)$  directamente al grupo  $G$  para tomar posteriormente el cociente que recupera la variedad cuántica. Este enfoque, si bien en este punto puede parecer arbitrario, no sólo sistematiza el algoritmo sino que es eficaz en situaciones en que la aproximación de Kirillov-Kostant falla (*órbitas anómalas* [ABLN92]).

La manera de añadir una nueva variable de forma que se mantenga una estructura de grupo se formaliza mediante la noción de extensión de un grupo  $G$  por otro grupo  $H$ .

**Definición 2.2.10** *Decimos que un grupo  $\tilde{G}$  es una extensión de  $G$  por  $H$ , si  $H$  es un subgrupo normal (invariante) de  $\tilde{G}$  y tenemos que  $G = \tilde{G}/H$ .*

Notamos que  $G$  no tiene que ser un subgrupo de  $\tilde{G}$ , sólo  $H$  lo es en general.

En nuestro caso, queremos extender un grupo  $G$  por el grupo  $U(1)$  de invariancia de fase de la Mecánica Cuántica, en el mismo espíritu en el que construíamos la prequantización de una variedad simpléctica. Es más, puesto que el generador infinitesimal del  $U(1)$ , que también denotaremos por  $\Xi$ , va a jugar el papel de término central en el álgebra de operadores



cuánticos, la extensión de  $G$  por  $U(1)$  que buscamos es central. Esto es, los elementos de  $U(1) \subset \tilde{G}$  conmutan con cualquier elemento en  $\tilde{G}$ .

La relación entre las extensiones centrales de grupos (y álgebras) y la Mecánica Cuántica es bien conocida [Mich64, Ha89]. Baste decir que el problema de la clasificación de las posibles representaciones proyectivas de un grupo, que son las significativas en Mecánica Cuántica, es equivalente al de clasificar sus extensiones centrales por  $U(1)$ . En nuestro tratamiento, la conexión es si cabe más íntima puesto que los *conjuntos* de variedades simplécticas estudiados en el apartado anterior, están en relación uno a uno con las posibles extensiones centrales no equivalentes de ese grupo.

Si bien el tratamiento más sistemático de extensiones de grupos (y álgebras) se formula en términos de secuencias espectrales exactas y por tanto en el contexto de álgebra homológica [HS70], en nuestra discusión el lenguaje de fibrados principales resulta más adecuado, puesto que permite una conexión directa con el formalismo de Cuantización Geométrica. En estos términos, el grupo extendido  $\tilde{G}$  es simplemente un grupo con estructura de fibrado principal con base  $G$  y grupo estructural  $U(1)$ :  $\tilde{G}(G, U(1))$ . La única sutileza es que la acción de  $U(1)$  sobre  $\tilde{G}$  la tomaremos como una acción izquierda.

Para estudiar las posibles extensiones centrales, empezamos considerando una trivialización local (ver apéndice A)  $\Phi : (\pi^{-1}(V) \subset \tilde{V}) \rightarrow V \times U(1)$  tal que  $U \subset G$  contenga a la identidad  $e$  de  $G$ . Consideramos asimismo una sección  $\sigma : V \rightarrow \tilde{G}$ , ( $\pi(\sigma(g)) = g$ ), de manera que para cualquier elemento en la fibra de  $g$  ( $\pi^{-1}(g)$ ), que tendrá la forma  $\zeta\sigma(g)$ , se pueda escribir  $\Phi(\zeta\sigma(g)) = (\zeta, g)$ . De hecho, le exigimos a la sección que  $\sigma(e) = \tilde{e}$ , identidad en  $\tilde{G}$  (*sección normalizada*).

El hecho de que  $U(1)$  sea un subgrupo invariante de  $\tilde{G}$  (de hecho es central) garantiza que  $G = \tilde{G}/U(1)$  tenga estructura de grupo y en particular que se cumpla  $\pi(\sigma(g')\sigma(g)) = \pi(\sigma(g'g))$  (el producto no depende del representante elegido en la fibra). Por tanto, existe un elemento  $\omega(g', g) \in U(1)$ , que depende tanto de la estructura de grupo del fibrado  $\tilde{G}$  como de la sección  $\sigma$  que estamos considerando, que cumple

$$\sigma(g')\sigma(g) = \omega(g', g)\sigma(g'g) \quad , \quad (2.39)$$

y en particular se satisface,  $\omega(g', e) = \omega(e, g) = e \in U(1)$ . A estas funciones se les denomina *factores locales* (ver Figura 2.2).

Considerando los elementos  $\tilde{g} = \zeta\sigma(g)$ ,  $\tilde{g}' = \zeta'\sigma(g')$  y  $\tilde{g}'' = \zeta''\sigma(g'')$ , la ley de grupo  $\tilde{g}'' = \tilde{g}' * \tilde{g}$  se escribe:

$$\zeta''\sigma(g'') = \zeta'\sigma(g')\zeta\sigma(g) = \zeta'\zeta\sigma(g')\sigma(g) = \zeta'\zeta\omega(g', g)\sigma(g'g) \quad (2.40)$$

y tomando la carta  $\Phi$ ,

$$(\zeta'', g'') = (\zeta'\zeta\omega(g', g), g'g) \quad . \quad (2.41)$$

Si parametrizamos usando los denominados *exponentes locales* [Ba54],  $\zeta = e^{i\varphi}$ ,  $\omega(g', g) = e^{i\xi(g', g)}$  la ley de grupo se escribe:

$$(\varphi'', g'') = (\varphi' + \varphi + \xi(g', g), g'g) \quad . \quad (2.42)$$

Por supuesto, tanto los factores como los exponentes locales, deben ser consistentes con la ley de grupo. La asociatividad les impone, respectivamente, las condiciones

$$\begin{aligned} \omega(g'', g')\omega(g''g', g) &= \omega(g'', g'g)\omega(g', g) \\ \xi(g'', g') + \xi(g''g', g) &= \xi(g'', g'g) + \xi(g', g) \end{aligned} \quad (2.43)$$



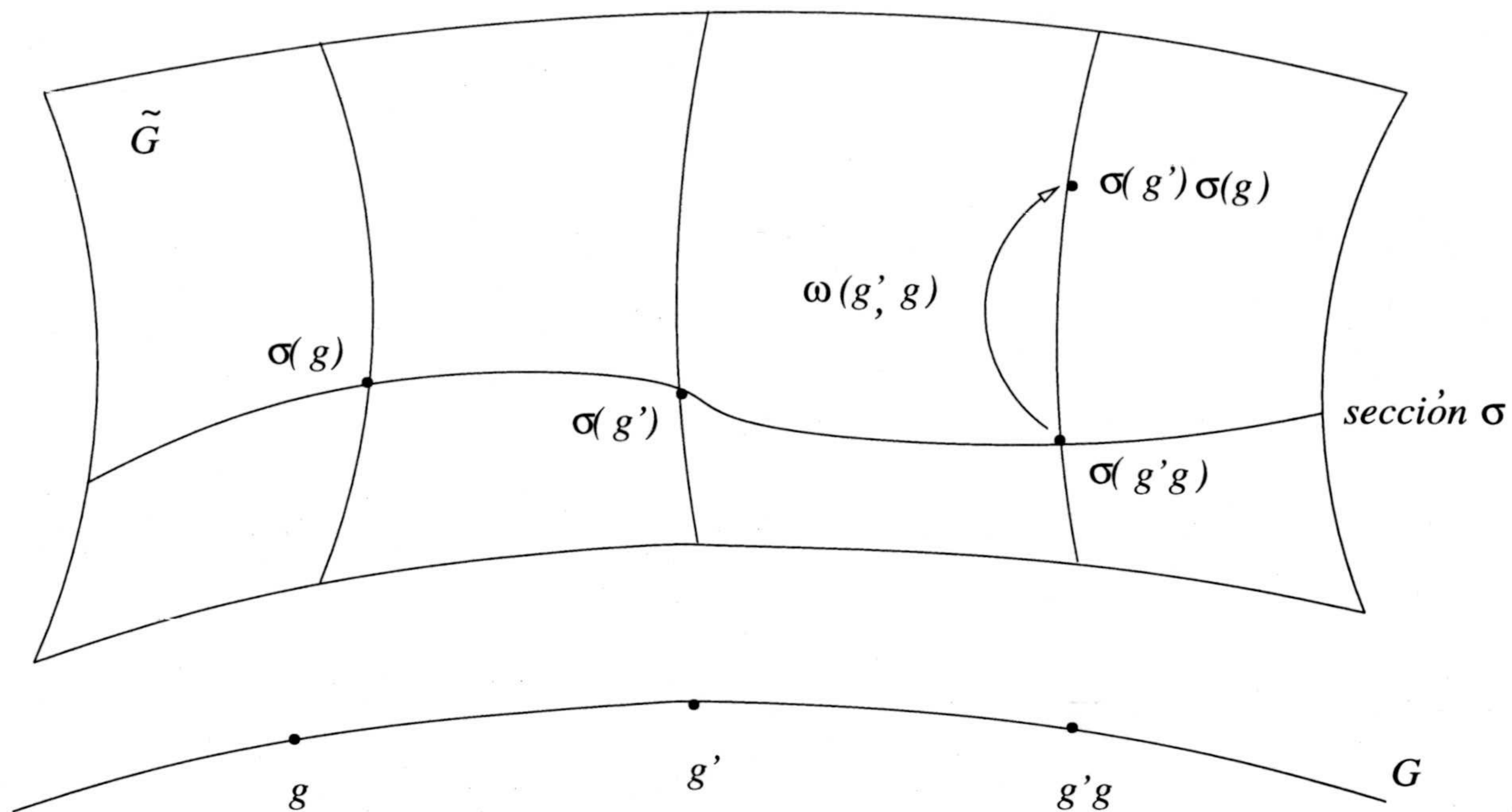


Figura 2.2: Secciones y factores locales.

que constituyen las condiciones de 2-cociclo en la cohomología  $H^2(G, U(1))$  (Apéndice A). Por supuesto, la estructura de grupo no debe depender de la sección que hemos escogido. Por tanto, si tomamos otra sección  $\sigma' : G \rightarrow \tilde{G}$  normalizada,  $\sigma'(e) = \tilde{e}$ , para cada  $g$  tenemos un  $\chi(g) \in U(1)$  tal que

$$\sigma'(g) = \chi(g)\sigma(g) \quad . \quad (2.44)$$

Esto implica una relación entre los respectivos factores locales

$$\omega'(g', g) = \chi^{-1}(g'g)\chi(g')\chi(g)\omega(g', g) \quad , \quad (2.45)$$

e introduciendo  $\eta : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\chi(g) = e^{i\eta(g)}$ , entre los exponentes locales

$$\xi'(g', g) = \xi(g', g) + \eta(g') + \eta(g) - \eta(g'g) \quad . \quad (2.46)$$

De esta forma, dos cociclos cuya diferencia venga dada por una función,

$$\xi_{cob}(g', g) = \eta(g') + \eta(g) - \eta(g'g) \quad (2.47)$$

definen la misma ley de grupo en  $\tilde{G}$  y diremos que son equivalentes. A  $\xi_{cob}(g', g)$ , que de hecho satisface la condición de 2-cociclo, lo denominaremos *coborde* o cociclo trivial. El conjunto de los 2-cociclos módulo esta relación de equivalencia define la cohomología  $H^2(G, U(1))$  que clasifica las posibles extensiones centrales de un grupo  $G$  por el grupo  $U(1)$ . Esto resuelve la cuestión que planteábamos a comienzos del apartado.

Para establecer el nexo con el Apartado anterior, resulta cómodo considerar el problema a nivel infinitesimal. Partiendo del álgebra  $\mathcal{G}$  asociada al grupo  $G$  y caracterizada por los conmutadores en una determinada base

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k \quad , \quad (2.48)$$



estudiamos las posibles formas de añadir un nuevo generador  $X_{central}$ , definiendo una nueva álgebra  $\tilde{\mathcal{G}}$  caracterizada por,

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= C_{ij}^k X_k + \alpha_{ij} X_{central} \\ [X_{central}, X_i] &= 0, \quad \forall X_i \in \mathcal{G} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dos extensiones  $\tilde{\mathcal{G}}$  y  $\tilde{\mathcal{G}}'$  serán equivalentes si existe un isomorfismo de álgebras de Lie entre ellas. Si bien podemos estudiar la extensión de álgebras de Lie mediante el uso de técnicas cohomológicas, resolviendo el problema de su clasificación en términos del grupo de cohomología  $H^2(\mathcal{G}, U(1))$  (Apéndice A), tomamos una vía más directa que aprovecha los resultados presentados del grupo y hace uso del siguiente teorema.

**Teorema 2.2.6** *Sea  $G$  un grupo de Lie conexo y simplemente conexo. El problema de su extensión central por  $U(1)$  es equivalente al de la extensión central de su álgebra de Lie por  $\mathbb{R}$ , existiendo una relación uno a uno entre las respectivas clases de equivalencia de extensiones. Esto es,  $H^2(G, U(1)) \approx H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ .*

Usando los generadores infinitesimales de la acción derecha del grupo extendido definida por la ley (2.42),  $\tilde{X}_i^L$ , definimos una base del álgebra  $\tilde{\mathcal{G}}$  que nos permite identificar directamente la naturaleza y relaciones de equivalencia de los  $\alpha_{ij}$ . La forma de estos generadores es (ver Apartado 3.1.1)

$$\tilde{X}_i^L = X_i^L + \left. \frac{\partial \xi(g', g)}{\partial g^i} \right|_{\substack{g'=g \\ g=e}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.50)$$

$$X_{central} = \tilde{X}_\varphi^L = \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.51)$$

Los términos  $\alpha_{ij}$  se corresponden con  $C_{i,j}^\varphi$  y su expresión en función de  $\xi(g', g)$  es

$$\alpha_{ij} = C_{i,j}^\varphi = \left( \frac{\partial^2 \xi(g', g)}{\partial g^i \partial g^j} - \frac{\partial^2 \xi(g', g)}{\partial g'^j \partial g^i} \right) \Big|_{\substack{g'=e \\ g=e}} \quad (2.52)$$

Estos valores  $\alpha_{ij}$  permiten definir, por linealidad, una aplicación bilineal antisimétrica  $\alpha$ :

$$\alpha : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(X_i, X_j) = \alpha_{ij} = C_{ij}^\varphi \quad (2.53)$$

Una de las relaciones de Jacobi en  $\tilde{\mathcal{G}}$ ,

$$C_{ij}^l C_{lk}^\varphi + C_{jk}^l C_{li}^\varphi + C_{ki}^l C_{lj}^\varphi = 0 \quad (2.54)$$

impone condiciones sobre la aplicación  $\alpha$ ,

$$\alpha([X, Y], Z) + \alpha([Y, Z], X) + \alpha([Z, X], Y) = 0 \quad (2.55)$$

que define un 2-cociclo de la cohomología  $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ . De hecho la relación de Jacobi, y por tanto la condición de 2-cociclo, no es más que la expresión infinitesimal de la asociatividad de la ley de grupo, que era a su vez la condición de 2-cociclo en la cohomología del grupo  $G$  (2.43). La equivalencia de extensiones del álgebra la estudiamos como la versión infinitesimal de la equivalencia de extensiones en el grupo. Si consideramos un cociclo  $\xi'(g', g)$  equivalente



a  $\xi(g', g)$ , de manera que el coborde definido por su diferencia está generado por la función  $\eta(g)$

$$\xi_{cob}(g', g) = \eta(g') + \eta(g) - \eta(g'g) \quad , \quad (2.56)$$

podemos ver que las nuevas constantes  $\alpha'_{ij}$  se relacionan con las anteriores,  $\alpha_{ij}$ , según

$$\alpha'_{ij} = C'^{\varphi}_{ij} = C^{\varphi}_{ij} - \left. \frac{\partial \eta(g)}{\partial g^l} \right|_{g=e} C^l_{ij} = \alpha_{ij} - \mu_{0l} C^l_{ij} \quad , \quad (2.57)$$

donde  $\mu_{0l} = \left. \frac{\partial \eta(g)}{\partial g^l} \right|_{g=e}$ , que define un  $\mu_0 \in \mathcal{G}^*$  mediante  $\mu_0(X_i) = \mu_{0i}$ , ( $X_i \in \mathcal{G}$ ). A partir de  $\mu_0$  definimos  $\alpha_{cob} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\alpha_{cob}(X_i, X_j) = \mu_0([X_i, X_j]) \quad . \quad (2.58)$$

Gracias a la identidad de Jacobi en  $\mathcal{G}$ ,  $\alpha_{cob}$  es de hecho un cociclo (cumple (2.55)) y por tanto un coborde en la cohomología  $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ , con lo que dos extensiones centrales de  $\mathcal{G}$  dadas por  $\alpha'$  y  $\alpha$  son equivalentes si y sólo si existe un  $\mu_0 \in \mathcal{G}^*$  tal que

$$\alpha'(X_i, X_j) = \alpha(X_i, X_j) - \mu_0([X_i, X_j]) \quad . \quad (2.59)$$

Llegados a este punto, vemos que las condiciones (2.55) y (2.59) que definen  $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$  (y por tanto  $H^2(G, U(1))$  bajo las condiciones adecuadas) son las mismas (2.34) y (2.35) que caracterizan la cohomología simpléctica  $H_S(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ , por lo que estos dos objetos son isomorfos  $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R}) \approx H_S(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ . Concluimos que el problema de la clasificación de las posibles extensiones centrales es equivalente al de la construcción de familias de variedades simplécticas como deformaciones (afines) de órbitas coadjuntas asociadas a  $G$ .

Esto supone una convergencia no trivial entre dos problemas conceptualmente diferentes: la construcción de dinámicas clásicas hamiltonianas a partir de un grupo, por un lado, y la descripción de sistemas cuánticos en el espíritu de las técnicas de Cuantización Geométrica pero explotando la estructura de grupo, por otro.

### 2.3 Dinámica à la Cartan

En la caracterización de la dinámica clásica de un sistema físico como primer paso en el proceso de cuantización, hemos partido del denominado espacio de las fases modelado sobre una variedad simpléctica cuyos puntos representan estados del sistema. Sin embargo, a menudo resulta conveniente trabajar a un nivel intermedio, donde la evolución temporal no haya sido eliminada y la variedad de soluciones no sea explícita. Es más, por lo general los mecanismos mediante los cuales se introduce una dinámica (por ejemplo, en un enfoque lagrangiano), no proporcionan directamente la variedad de soluciones clásica. La determinación de la misma resulta a menudo un problema de difícil resolución. Todo esto nos sugiere la necesidad de introducir un marco más flexible que la mecánica simpléctica, que permita el tratamiento de la dinámica clásica de un sistema con una dependencia explícita del tiempo.

Las denominadas *estructuras de contacto*, que ya han aparecido en la definición de las *variedades cuánticas*, cumplen tal función. De hecho, éstas son las estructuras naturales al tratar con sistemas dependientes del tiempo [AM78]. Restringiéndonos al caso de dimensión finita, tenemos la siguiente definición que generaliza en parte la Definición 2.1.1:



**Definición 2.3.11** Dada una variedad  $\mathcal{C}$  de dimensión  $2n + 1$ , se entiende por forma de contacto una 2-forma  $\omega$  cerrada, i.e.  $d\omega = 0$  de rango máximo ( $2n$ ). Al par  $(\mathcal{C}, \omega)$  se le denomina variedad de contacto. Si existe una 1-forma  $\Theta$  ( $\Theta(m) \neq 0, \forall m \in \mathcal{C}$ ) tal que  $\omega = d\Theta$ , decimos que  $(\mathcal{C}, \Theta)$  es una variedad de contacto exacta (ésta es la estructura involucrada en las variedades cuánticas).

Disponemos también de una noción de coordenadas canónicas dadas por el teorema de Darboux:

**Teorema 2.3.7** Sea  $(\mathcal{C}, \omega)$  una variedad de contacto. Entonces en el entorno  $U$  de cualquier punto  $m \in \mathcal{C}$  existe un sistema de coordenadas donde  $\omega$  se escribe:

$$\omega|_U = dp_i \wedge dq^i \quad (2.60)$$

Para el caso de una variedad de contacto exacta,  $(\mathcal{C}, \Theta)$ , existe un sistema de coordenadas donde  $\Theta|_U = p_i dq^i - dt$ . Un caso particular de especial interés para nosotros es la construcción de una estructura de contacto a partir de una estructura simpléctica  $(P, \omega)$ .

**Proposición 2.3.3** Sea una variedad simpléctica  $(P, \omega)$  y una función  $H : \mathbb{R} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces la 2-forma

$$\omega_H = \pi^* \omega - dh \wedge dt \quad (2.61)$$

donde  $\pi : \mathbb{R} \times P \rightarrow P$  es la proyección natural, define una estructura de contacto  $(\mathbb{R} \times P, \omega_H)$ . Si  $\omega$  es exacta,  $\omega = d\Lambda$ , entonces  $\Theta_{PC} = \pi^* \Lambda - H dt$  define una estructura de contacto exacta.

La forma  $\Theta_{PC}$  se denomina 1-forma de Poincaré-Cartan, y va a jugar un papel muy relevante en los posteriores desarrollos. A  $\mathbb{R} \times P$  se le denomina espacio de movimientos.

Resulta interesante relacionar la forma  $\Theta_{PC}$  con la función lagrangiana  $L$  del sistema. Dado un espacio de configuración  $C$ , tal función está definida sobre  $\mathbb{R} \times TC$ <sup>7</sup>, parametrizado localmente por  $(t, q^i, \dot{q}^j)$ . Para pasar de la formulación hamiltoniana sobre  $\mathbb{R} \times T^*C$  a la lagrangiana, hacemos uso de la transformación de Legendre, cuya inversa viene definida en coordenadas locales por  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ , de forma que  $L = p_i \dot{q}^i - H$ . El pull-back de  $\Theta_{PC}$  bajo esta transformación se escribe

$$\Theta_{PC} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} (dq^i - \dot{q}^i dt) + L dt, \quad (2.62)$$

donde  $\theta^i = dq^i - \dot{q}^i dt$  se denominan formas de estructura. Éstas se anulan al ser evaluadas sobre las denominadas extensiones jet de las curvas sobre  $C$ , caracterizadas por  $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$ . Por tanto, sobre las soluciones  $s$  del sistema,  $\Theta_{PC}$  coincide con  $L dt$  y la acción se escribe

$$S = \int L dt = \int \Theta_{PC}|_s. \quad (2.63)$$

Volviendo al tratamiento en términos de  $\Theta_{PC}$ , las ecuaciones dinámicas vienen caracterizadas por la siguiente proposición.

<sup>7</sup>Este espacio también se denota como  $J^1(E)$ , con  $E = \mathbb{R} \times C$ , denominado primer fibrado jet. El tratamiento en términos de fibrados jet es especialmente apropiado en la formulación variacional de la mecánica.



**Proposición 2.3.4** (de Cartan). Sea  $(P, \omega)$  y  $H : \mathbb{R} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ . Existe un único campo de vectores  $\bar{X}_H$  tal que:

- a)  $i_{\bar{X}_H} \omega_H = 0$  ( $\bar{X}_H \in \text{Ker } \omega_H$ )
- b)  $dt(\bar{X}_H) = 1$

En el caso exacto,  $\omega_H = d\Theta_{PC}$ ,

- a)  $i_{\bar{X}_H} d\Theta_H = 0$
- b)  $dt(\bar{X}_H) = 1$  .

La condición b) fija la normalización del campo vectorial en el núcleo de  $\omega_H$ . De hecho, si  $H$  sólo es función sobre  $P$ ,  $\bar{X}_H$  tiene la forma

$$\bar{X}_H = X_H + \frac{\partial}{\partial t} , \quad (2.64)$$

donde  $X_H$  es el campo hamiltoniano asociado a  $H$ .

Las ecuaciones del movimiento vienen dadas por el sistema dinámico definido por el campo vectorial  $\bar{X}_H$ . En las coordenadas de Darboux, este campo se escribe:  $\bar{X}_H = \bar{X}_H^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{X}_{Hi} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t}$ , con lo que

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{d\lambda} = \bar{X}_H^i \\ \frac{dp_i}{d\lambda} = \bar{X}_{Hi} \\ \frac{dt}{d\lambda} = 1 \end{cases} .$$

La condición  $i_{\bar{X}_H} \omega_H = 0$  en estas coordenadas fija la forma de  $\bar{X}_H$ , proporcionando finalmente las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \\ \frac{dt}{d\lambda} = 1 \end{cases} .$$

El análisis de la simetría en la dinámica de los sistemas físicos, constituye un punto fundamental para nosotros. En el caso de estructuras de contacto exactas, observamos en la proposición de Cartan que si añadimos una diferencial exacta  $df$  a la 1-forma de Poincaré-Cartan, las ecuaciones de movimiento no se alteran.

Por tanto, una transformación deja invariante la dinámica de un sistema, esto es constituye una simetría, si induce una variación de la forma de Poincaré-Cartan nula salvo una diferencial total. Infinitesimalmente

$$L_X \Theta = df_X , \quad (2.65)$$

donde  $X$  es el generador infinitesimal de la transformación.

En el caso de que  $f_X \neq 0$  se dice que la forma de Poincaré-Cartan es *semi-invariante*, lo cual es suficiente para obtener la invariancia de la dinámica, entendiendo por ésta las ecuaciones del movimiento (ver Apartado 5.1.1 para una discusión del concepto de semi-invariancia).

Para presentar el teorema de Noether en este lenguaje, nos situamos en el contexto de una variedad de contacto definida por  $(\mathbb{R} \times T^*(C), \Theta_{PC})$ , con  $H : \mathbb{R} \times T^*(C) \rightarrow \mathbb{R}$ , y enunciamos el siguiente lema previo:



**Lema 2.3.3** *Sea  $Y$  un campo vectorial sobre  $\mathbb{R} \times T^*(C)$  y  $s : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times T^*(C)$  una curva sobre  $\mathbb{R} \times T^*(C)$ . Entonces,*

$$i_Y d\Theta_{PC}|_s = 0 \text{ para todo campo vectorial } Y \iff s \text{ es solución de } \bar{X}_H .$$

Este lema, además de constituir un nexo con la formulación variacional de la mecánica, permite formular los invariantes Noether de forma directa:

**Teorema 2.3.8** *(de Noether). Sea el campo vectorial  $Y$  sobre  $\mathbb{R} \times T^*(C)$  una simetría del sistema dinámico  $(\mathbb{R} \times T^*(C), \Theta_{PC})$ , esto es,*

$$L_Y \Theta_{PC} = df_Y . \quad (2.66)$$

Entonces,

$$d(i_Y \Theta_{PC} - f_Y)|_s = 0, \quad \forall s \text{ solución de } \bar{X}_H . \quad (2.67)$$

La función  $i_Y \Theta_{PC} - f_Y$  se denomina *invariante Noether*, puesto que es constante a lo largo de las trayectorias del sistema físico.







## Capítulo 3

# Cuantización Sobre Grupos

En este Capítulo se presenta la Cuantización Sobre Grupos (CSG), formalismo en el que la simetría aparece como nexo explícito entre la dinámica de un sistema y su descripción cuántica. Entendiendo esta última como una representación unitaria e irreducible de un conjunto de operadores que cierran un álgebra de Lie, la CSG se construye a partir de un grupo de Lie con estructura de extensión central, complementado con una 1-forma de conexión construida a partir del propio grupo. La cohomología de grupos juega el papel de guía tanto en la identificación de los grados de libertad físicos como en la determinación de los generadores de la evolución dinámica, lo cual permite reproducir cada una de las estructuras del capítulo anterior, tanto (semi)clásicas como de cuantización. Sin embargo la CSG va más allá, permitiendo una formulación directamente cuántica de la dinámica, donde el espacio de Hilbert se construye sobre las funciones complejas definidas sobre el grupo, de manera que la acción de los operadores se obtiene a partir de la representación regular. La estructura de grupo resulta fundamental en el proceso de reducción de la representación suponiendo un avance fundamental en el tratamiento del problema de las polarizaciones. La necesidad de revisar nociones fundamentales como son las anomalías o la invariancia gauge, representa una indudable aportación conceptual de la CSG que creemos que trasciende el marco de la misma.

### 3.1 Estructura del grupo $\tilde{G}$

Nuestro punto de partida lo constituye la idea introducida a comienzos del Subapartado 2.2.2.b. Allí se planteaba la posibilidad de abordar el tratamiento cuántico de una dinámica modelada a partir de una simetría, utilizando un grupo de Lie centralmente extendido como soporte fundamental.

Para llevar a cabo tal formulación de la dinámica resulta necesario completar la estructura matemática con un elemento más. Al disponer de una estructura de fibrado (ver Subapartado 2.2.2.b), un grupo de Lie centralmente extendido por  $U(1)$  posee una noción natural de *verticalidad*. Sin embargo, carece de una noción de *horizontalidad* lo cual es imprescindible para *levantar* los objetos de  $G$  a  $\tilde{G}$ . Con este fin se introduce una conexión en el fibrado principal  $\tilde{G}(G, U(1))$ , es decir, una 1-forma sobre  $\tilde{G}$  con valores en el álgebra de Lie de  $U(1)$ . Esta conexión, que denotamos por  $\Theta$  y denominamos *1-forma de cuantización*, es el objeto que generaliza la conexión de las variedades cuánticas en CG o la 1-forma de Poincaré-Cartan en la dinámica dependiente del tiempo. Además, como veremos en el Apartado 3.1.3, es asimismo fundamental para el tratamiento de las órbitas coadjuntas en



este lenguaje.

Antes de introducir de forma explícita esta  $\Theta$ , necesitamos presentar rápidamente ciertos elementos básicos del cálculo sobre grupos de Lie que vamos a usar extensivamente en todo el trabajo.

### 3.1.1 Elementos de análisis sobre un grupo

#### 3.1.1.a Acciones izquierda y derecha

A partir de la ley de producto de un grupo  $G$ , formalmente expresada por  $g'' = g' * g^{-1}$ , podemos definir directamente dos acciones del grupo sobre sí mismo. Para ello fijamos uno de los dos elementos que entran en el producto, dejando el otro variable. Explícitamente:

$$\begin{aligned} L : G &\rightarrow \text{Diff}(G) \\ g &\mapsto L_g, \quad L_g(a) = ga \quad \forall g, a \in G \\ R : G &\rightarrow \text{Diff}(G) \\ g &\mapsto R_g, \quad R_g(a) = ag \quad \forall g, a \in G. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Denominamos a  $L$  translación izquierda y  $R$  translación derecha. Efectivamente, ambas aplicaciones definen acciones sobre el grupo:  $L$  una acción *izquierda* ( $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$ ) y  $R$  una acción *derecha* ( $R_{gg'} = L_{g'} \circ L_g$ ). Estas acciones trivialmente conmutan,  $R \circ L = L \circ R$ , lo que resultará fundamental al discutir las polarizaciones.

#### 3.1.1.b Campos invariantes izquierdos y derechos

Tomando como coordenadas locales un conjunto de funciones  $\{g^i\}$  (siendo  $i$  un índice apropiado en el grupo), los campos vectoriales que constituyen los generadores infinitesimales de las translaciones izquierdas y derechas son <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} X_k^R(g) &= \left. \frac{\partial g^{''i}(g', g)}{\partial g'^k} \right|_{\substack{g'=e \\ g=g}} \frac{\partial}{\partial g^i} \text{ generadores de la acción izquierda} \\ X_k^L(g) &= \left. \frac{\partial g^{''i}(g', g)}{\partial g^k} \right|_{\substack{g'=g \\ g=e}} \frac{\partial}{\partial g^i} \text{ generadores de la acción derecha.} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tanto los campos izquierdos como los derechos realizan una representación fiel del álgebra de Lie,

$$[X_i^L, X_j^L] = C_{ij}^k X_k^L$$

<sup>1</sup>En adelante omitiremos el símbolo  $*$  y escribiremos simplemente  $g'' = g'g$ .

<sup>2</sup>La justificación de la aparente contradicción en la notación  $(L, R)$  es que los generadores de la acción izquierda son de hecho campos invariantes por la derecha,  $(R_a)_* X_k^R = X_k^R$ , y a ello se refiere el superíndice  $R$ . Análogamente los generadores de la acción derecha son invariantes por la izquierda,  $(L_a)_* X_k^L = X_k^L$ . Estos comportamientos se derivan directamente reexpresando los campos de vectores en términos de las aplicaciones tangentes de las translaciones

$$\begin{aligned} X_k^R(g) &= \left( R_g^T(e) \right)_k^i \frac{\partial}{\partial g^i} \\ X_k^L(g) &= \left( L_g^T(e) \right)_k^i \frac{\partial}{\partial g^i}, \end{aligned}$$

y aplicando el hecho de que las translaciones son acciones del grupo.



$$\begin{aligned} [X_i^R, X_j^R] &= -C_{ij}^k X_k^R \\ [X_i^L, X_j^R] &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

representando la última línea la expresión infinitesimal de la conmutación trivial entre ambas translaciones. Por último recordamos que, por constituir los vectores  $\frac{\partial}{\partial g^i} (= X_i^R|_e = X_i^L|_e)$  una base en  $T_e(G)$ , las expresiones (3.2) definen un isomorfismo entre el espacio vectorial de los vectores invariantes y  $T_e(G)$ , que induce en este último un producto de Lie, que lo hace isomorfo a  $\mathcal{G}$ <sup>3</sup>.

### 3.1.1.c Formas invariantes. 1-forma canónica

Además de una base del álgebra de Lie, los campos de vectores  $X_i^L$  ( $X_i^R$ ) constituyen una base de  $TG$  como módulo sobre el anillo de las funciones definidas sobre el grupo. Las relaciones de dualidad

$$\begin{aligned} \theta^{L(i)}(X_j^L) &= \delta_j^i \\ \theta^{R(i)}(X_j^R) &= \delta_j^i \end{aligned} \quad (3.4)$$

definen en  $T^*G$  las correspondientes bases de 1-formas,  $\theta^{L(i)}$  y  $\theta^{R(i)}$ , que también resultan ser invariantes izquierdas y derechas, respectivamente. La expresión explícita de las mismas es:

$$\begin{aligned} \theta^{L(k)}(g) &= \left. \frac{\partial g''^k(g', g)}{\partial g'^i} \right|_{\substack{g'=g \\ g=g^{-1}}} dg^i \\ \theta^{R(k)}(g) &= \left. \frac{\partial g''^k(g', g)}{\partial g^i} \right|_{\substack{g=g \\ g'=g^{-1}}} dg^i \end{aligned} \quad (3.5)$$

Al igual que los campos de vectores invariantes, las 1-formas duales también codifican la información del álgebra de Lie, lo que se hace explícito en las denominadas ecuaciones de Maurer-Cartan

$$d\theta^{R(k)} = -\frac{1}{2} C_{ij}^k \theta^{R(i)} \wedge \theta^{R(j)} \quad (3.6)$$

y con el signo opuesto para las derechas, siendo expresiones equivalentes a (3.3).

A partir de las formas invariantes podemos definir de manera canónica (salvo un factor constante) un volumen invariante izquierdo (derecho) en el grupo. A esta forma se le llama medida de Haar izquierda (derecha) sobre  $G$ , y viene dada por:

$$\mu^{L(R)}(g) = \theta^{L(R)(1)}(g) \wedge \dots \wedge \theta^{L(R)(n)}(g) \quad (n = \dim(G)) \quad (3.7)$$

Para ciertos grupos (denominados *unimodulares*) ambas medidas, izquierda y derecha, coinciden. La siguiente definición introduce la denominada forma canónica de un grupo.

**Definición 3.1.12** Se denomina forma canónica de un grupo de Lie a la 1-forma  $\theta$  sobre  $G$  con valores en  $\mathcal{G}$ , definida por

$$\theta(g)(X(g)) = X(e) \in \mathcal{G} \quad , \quad X \in TG \quad (3.8)$$

<sup>3</sup>En otras aproximaciones se sigue el camino inverso, se construye  $\mathcal{G}$  sobre  $T_e(G)$  y después se usan las translaciones para inducir su estructura sobre el espacio vectorial de los vectores invariantes.



Resulta ser,

$$\theta = \theta^{L(i)} \otimes e_i , \quad (3.9)$$

donde  $\{e_i\}$  es una base del álgebra de Lie.

### 3.1.1.d Campos de vectores y 1-formas en el grupo

Por su utilidad, escribimos los campos vectoriales izquierdos y derechos así como las 1-formas duales de un grupo  $\tilde{G}$ , que extiende centralmente por  $U(1)$  a un grupo  $G$ , con ley de multiplicación

$$\begin{aligned} g'' &= g'g \quad g \in G \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta e^{i\xi(g',g)} . \end{aligned} \quad (3.10)$$

La expresión de estos objetos viene dada por

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i^L &= X_i^L + \frac{\partial \xi(g',g)}{\partial g^i} \Big|_{g=e, g'=g} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \tilde{X}_i^R &= X_i^R + \frac{\partial \xi(g',g)}{\partial g^i} \Big|_{g'=e, g=g} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \tilde{X}_\zeta^L &= \tilde{X}_\zeta^R = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 2Re \left( i\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \equiv \Xi \\ \tilde{\theta}^{L(i)} &= \theta^{L(i)} \quad \tilde{\theta}^{R(i)} = \theta^{R(i)} \\ \tilde{\theta}^{L(\zeta)} &= \frac{d\zeta}{i\zeta} + \frac{\partial \xi(g',g)}{\partial g^i} \Big|_{g'=g^{-1}, g=g} dg^i \\ \tilde{\theta}^{R(\zeta)} &= \frac{d\zeta}{i\zeta} + \frac{\partial \xi(g',g)}{\partial g^i} \Big|_{g=g^{-1}, g'=g'} dg^i . \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.1.2 1-forma de cuantización $\Theta$

Una vez presentados los elementos generales básicos del análisis sobre un grupo de Lie, estamos en condiciones de introducir el elemento que falta para la completa formulación de la CSG, la 1-forma de conexión denominada *de cuantización*.

**Definición 3.1.13** (*1-forma de cuantización*). Denominamos 1-forma de cuantización, y denotamos por  $\Theta$ , a la 1-forma de conexión en el fibrado principal  $\tilde{G}(G, U(1))$  definida por  $\tilde{\theta}^{L(\zeta)}$ . Por supuesto, esta  $\Theta$  satisface  $\Theta(X_i^L) = 0$ ,  $\Theta(\Xi) = 1$ , siendo por tanto dual a  $\Xi$ .

$\Theta$  contiene toda la información necesaria para construir la dinámica a partir de la ley de grupo. Para motivarlo, observamos que las ecuaciones de Maurer-Cartan implican

$$d\Theta = d\tilde{\theta}^{L(\zeta)} = C_{ij}^\varphi \theta^{L^i} \wedge \theta^{L^j} , \quad (3.12)$$

con lo que en la forma pre-simpléctica generalizada  $d\Theta$  (su núcleo tiene dimensión mayor que uno en general), el cociclo de la extensión del álgebra de Lie definido por  $C_{ij}^\varphi$ , establece los pares conjugados que a la postre determinarán el espacio de las fases. Para formalizar esta idea adecuadamente es necesario introducir la noción de módulo característico de  $\Theta$ .



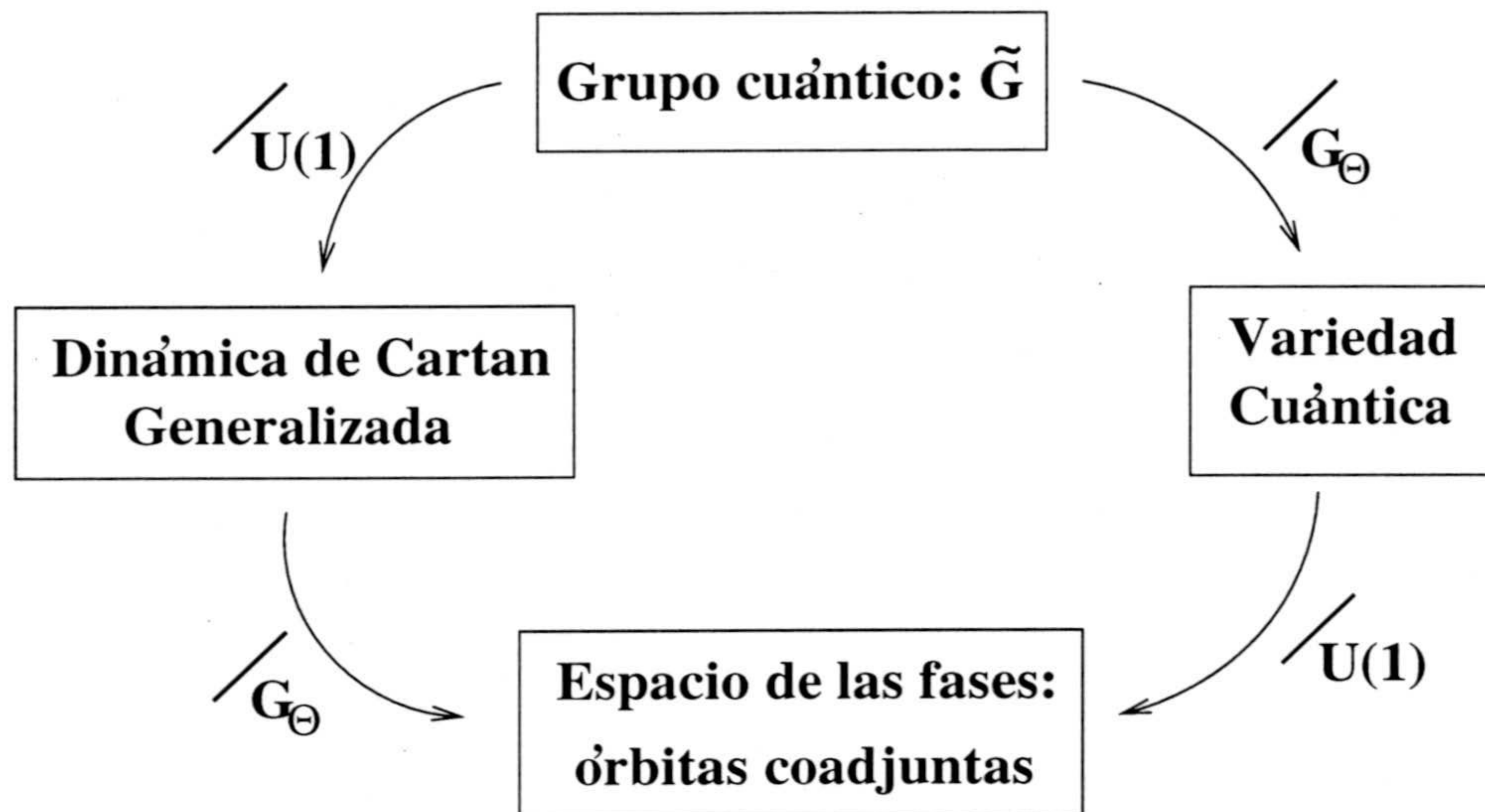


Figura 3.1: A partir del grupo extendido  $\tilde{G}$ , y tomando sucesivos cocientes, recuperamos cada una de las estructuras básicas discutidas en el Capítulo 2.

**Definición 3.1.14** (*módulo característico*). Denominamos *módulo característico*, y lo denotamos como  $\mathcal{G}_\Theta$ , al módulo generado por los campos de vectores izquierdos incluidos en  $\text{Ker } \Theta \cap \text{Ker } d\Theta$ .

La condición de inclusión de  $\mathcal{G}_\Theta$  en  $\text{Ker } \Theta$  permite excluir de  $\mathcal{G}_\Theta$  al generador vertical central de la acción de  $U(1)$ , mientras que la de  $\text{Ker } d\Theta$  elimina a aquellos generadores que no tienen variables conjugadas. Por tanto  $\mathcal{G}_\Theta$  está constituido por los generadores *horizontales* que no generan el espacio de las fases.

La relación de la CSG con las distintas estructuras presentadas en el Capítulo anterior se establece considerando distintos cocientes del grupo  $\tilde{G}$ , que permiten analizar los respectivos sentidos en los que constituye una generalización.

- i) Si tomamos cociente por el grupo central  $U(1)$ , (localmente) la forma  $\Theta_{PC} = \Theta - \frac{d\zeta}{i\zeta}$  sobre  $G = \tilde{G}/U(1)$  constituye una generalización de la forma de Poincaré-Cartan de la dinámica dependiente del tiempo formulada en la Sección 2.3. En este caso el núcleo de  $d\Theta_{PC}$  está formado por los generadores en  $\mathcal{G}_\Theta$ , que por tanto deben entenderse como ecuaciones generalizadas del movimiento. Ésta será la estrategia para establecer la dinámica a nivel semi-clásico en el Capítulo 5.
- ii) Si por contra tomamos cociente por  $\mathcal{G}_\Theta$ , la estructura que nos queda es la de una variedad cuántica [AA82], esto es, el objeto básico de la Cuantización Geométrica de la Sección 2.1.
- iii) Si, por último, sobre la anterior variedad cuántica tomamos cociente por  $U(1)$ , recuperamos una estructura simpléctica, que de hecho es simplectomorfa a las órbitas coadjuntas del grupo extendido (y que coinciden con las órbitas coadjuntas deformadas del grupo sin extender, Sección 2.2).

Un punto fundamental referente a la 1-forma de cuantización es que si bien su definición como la componente  $\zeta$  de la 1-forma canónica sobre el grupo resulta natural, esto no



significa que sea canónica. Es decir, la estructura de grupo no fija una única forma de cuantización. La razón básica es que en un espacio vectorial (sin estructura adicional) no existe una noción canónica del dual de un vector, teniendo sólo sentido la noción de base dual canónica. Por tanto, la forma *dual* de un vector dado, depende de los vectores que se usen para completar una base a partir del mismo. Esta falta de canonicidad la podemos ver explícitamente de dos formas:

- a) Si en la ley de grupo redefinimos el parámetro de la extensión central,  $\zeta \rightarrow e^{i\lambda(g)}\zeta$ , y volvemos a calcular la  $\Theta = \tilde{\theta}^{L(\zeta)}$  en las nuevas coordenadas, encontramos (comparar con la expresión de (3.11))

$$\Theta = \frac{d\zeta}{i\zeta} + \frac{\partial\xi(g',g)}{\partial g^i} \Big|_{\substack{g'=g^{-1} \\ g=g}} dg^i + \lambda_i^0 \theta^{L^i} - d\lambda, \quad (3.13)$$

con  $\lambda_i^0 = \frac{\partial\lambda(g)}{\partial g^i} \Big|_{g=e}$ . La función  $\lambda(g)$  es el generador de un coborde del grupo sin extender (ver Subapartado 2.2.2.b). Podemos decir que la elección de un representante del cociclo empleado para construir la extensión  $\tilde{G}$  del grupo  $G$ , necesariamente lleva implícita la elección de un coborde. Si bien la ley de grupo no es sensible a esto, las  $\Theta$ 's y por tanto las dinámicas asociadas, son distintas. No obstante, observamos que un cambio de variables que sólo involucre a las variables del grupo sin extender  $G$ , no altera la  $\Theta$ .

- b) Si nuestro punto de partida es un álgebra de Lie centralmente extendida expresada en cierta base  $\{X_i\}$ , sabemos (ver nuevamente Subapartado 2.2.2.b) que un cambio lineal en la base que involucre al generador central conlleva un cambio en el cociclo de extensión que se corresponde con un coborde. Al exponenciar a una ley de grupo finita, la estructura grupo-teórica es independiente de la base empleada para el álgebra de Lie, pero el representante del cociclo sí se ve alterado y por tanto, como acabamos de ver, la  $\Theta$  depende de la base del álgebra de Lie que usemos como punto de partida. Mencionamos este enfoque, porque ésta va a ser la situación más común encontrada en esta memoria y por tanto debemos tener presente que un cambio de base en el álgebra (extendida) de partida no es completamente inocuo.

Debemos terminar esta sección señalando que esta falta de canonicidad no se traduce en ambigüedad, sino que por el contrario introduce una riqueza en el formalismo como se muestra en la siguiente sección.

### 3.1.3 Pseudo-extensiones

Este punto constituye uno de los más importantes del formalismo de CSG en lo que se refiere a este trabajo, pues proporciona la clave para introducir o enriquecer la dinámica en todos los sistemas que estudiaremos.

En primer lugar debemos recordar la convergencia que encontrábamos en el capítulo anterior al estudiar dos problemas conceptualmente distintos:

1. La clasificación por  $H_S(G, \mathcal{G}^*)$  de las familias de variedades simplécticas asociadas a una estructura de Lie y construidas a partir de la acción coadjunta.
2. La clasificación de las extensiones centrales no equivalentes de un grupo en términos de  $H^2(G, U(1))$ .



La convergencia se concretaba en el isomorfismo  $H_S(G, \mathcal{G}^*) \approx H^2(G, U(1))$ , realizado bajo las condiciones adecuadas. Sin embargo, estas clasificaciones no son lo suficientemente finas para discernir entre los distintos casos que necesitamos considerar. Así, en lo que se refiere al primer punto, lo que realmente nos interesa es la clasificación de las órbitas simplécticas en sí, no las familias. Respecto al segundo punto, como hemos visto en el Apartado anterior la descripción de la dinámica precisa que la ley del grupo extendido sea completada con la introducción de una forma de conexión en el fibrado. Aunque la dinámica se formula en términos de objetos grupo-teóricos, no queda completamente caracterizada por la identificación de las extensiones no equivalentes. Necesitamos, por tanto, introducir una noción que refine los objetos cohomológicos introducidos. Nuevamente encontramos convergencia entre ambos enfoques.

### 3.1.3.a $H^2(G, U(1))$

Comenzamos por el segundo punto, la clasificación de las 1-formas de cuantización no equivalentes. En la Sección anterior vimos cómo a partir de un cociclo  $\xi(g', g)$  dado éramos capaces de introducir una 1-forma de cuantización  $\Theta$ . También vimos que si al cociclo le añadimos el coborde  $\xi_\lambda(g', g) = \lambda(g'g) - \lambda(g') - \lambda(g)$  generado por la función sobre el grupo  $\lambda(g)$ , la 1-forma se ve modificada y la nueva  $\Theta'$  se escribe,

$$\Theta' = \Theta + \Theta_\lambda \quad (3.14)$$

con

$$\Theta_\lambda = \lambda_i^0 \theta^{L(i)} - d\lambda \quad , \quad (3.15)$$

donde  $\lambda^0$  es el gradiente de  $\lambda(g)$  en la identidad del grupo, esto es, pertenece a  $(T_e G)^* = \mathcal{G}^*$ . Olvidamos momentáneamente la forma en la que  $\lambda^0$  ha aparecido y nos centramos en el análisis de las estructuras definidas por (3.14) y (3.15). Es más, para mayor claridad nos limitamos a la clase trivial de cohomología de  $H^2(G, U(1))$ , por lo que podemos hacer  $\Theta = 0$ . En este caso, aplicando a (3.15) las ecuaciones de Maurer-Cartan obtenemos

$$d\Theta_\lambda = \frac{1}{2} \lambda_i^0 C_{jk}^i \theta^{L(i)} \wedge \theta^{L(k)} \quad , \quad (3.16)$$

que define una forma pre-simpléctica. La variedad simpléctica propiamente dicha se obtiene tomando cociente por los campos de vectores en el módulo característico,  $\mathcal{G}_{\Theta_\lambda}$ , cuyas componentes  $X^i$  en una base de vectores invariantes satisfacen,  $X^j \lambda_i^0 C_{jk}^i = 0$ . Estas también son las condiciones que satisfacen los campos de vectores que generan el grupo de isotropía de  $\lambda^0 \in \mathcal{G}^*$  bajo la acción coadjunta,  $G_{\lambda^0}$ , con lo que la variedad cociente tiene la forma,  $\tilde{G}/(G_{\Theta_\lambda} \otimes U(1)) \approx G/G_{\lambda^0}$ . Para clasificar los distintos cocientes debemos identificar los  $\lambda^0$  en  $\mathcal{G}^*$  que dan lugar a la misma estructura simpléctica. Para ello observamos que  $d\Theta_{Coad\ g(\lambda^0)} = (Coad\ g)^* d\Theta_{\lambda^0}$ , con lo que dos vectores en la coálgebra relacionados mediante la acción coadjunta dan lugar a estructuras simplectomorfas,  $G_{\lambda^0}$  y  $G_{Coad\ g(\lambda^0)}$ , donde el simplectomorfismo viene dado por la propia acción coadjunta. Esto es, aquellos  $\lambda(g)$  cuyos  $\lambda^0$  asociados estén en la misma órbita de la acción coadjunta dan lugar a  $\Theta_\lambda$ 's equivalentes.

Sin embargo, no todo  $\lambda^0$  se puede obtener como gradiente de la función generatriz  $\lambda$  de un coborde. En efecto, debemos imponer que  $\lambda^0$  sea exponenciable a una función sobre el grupo (condición de globalidad), lo cual implica que la forma simpléctica sobre la variedad cociente ha de ser de clase entera [AG01].



En definitiva, para clasificar la dinámica en CSG es necesario considerar subclases de las clases de equivalencia que definen los cociclos de  $H^2(G, U(1))$ , de manera que dos cobordes son equivalentes si sus gradientes en el elemento neutro pertenecen a la misma órbita coadjunta.

### 3.1.3.b $H_S(G, \mathcal{G}^*)$

Desde esta perspectiva, la conexión de los vectores de la coálgebra con la subclasificación de las estructuras que nos interesan es mucho más directa.  $H_S(G, \mathcal{G}^*)$  clasifica las familias de órbitas ligadas a deformaciones de la acción coadjunta.

Para obtener las órbitas en sí, fijamos un representante de la clase,  $\gamma$ , y un vector de  $\mathcal{G}^*$  sobre el que calcular las órbitas, por ejemplo el 0. Añadiendo a  $\gamma$  los cobordes  $\Delta_\mu$  generados por los distintos  $\mu \in \mathcal{G}^*$ , obtenemos todas las posibles órbitas. La cuestión se reduce a clasificar qué  $\Delta_\mu$ 's generan las mismas órbitas. Para la clase trivial,  $\Delta_\mu$  y  $\Delta_{\mu'}$  generan la misma órbita si  $\mu' = \text{Coad } h(\mu)$  para algún  $h \in G$ . Por tanto, los cobordes que dan la misma dinámica están clasificados por vectores  $\mu \in \mathcal{G}^*$  en la misma órbita coadjunta, recuperándose el resultado del punto anterior. La diferencia con éste es la ausencia de una condición de integralidad sobre la órbita coadjunta. La razón es que éste es un tratamiento clásico. Si queremos usar estas variedades como punto de partida para la cuantización, usando Cuantización Geométrica, entonces debemos imponer la condición de integralidad (Teorema 2.1.1), alcanzando pleno acuerdo con el otro tratamiento.

Denominamos *pseudo-cohomología* al conjunto de elementos, que denominaremos *pseudo-cociclos*, responsables de las anteriores clasificaciones refinadas. La terminología surge de forma natural al estar caracterizados por clases de equivalencia de cobordes en la cohomología  $H^2(G, U(1)) \approx H_S(G, \mathcal{G}^*)$ . Estos elementos deben considerarse en pie de igualdad con los auténticos cociclos en lo que a generación de dinámica se refiere y de hecho esta pseudo-cohomología resulta fundamental para dotar de dinámica a grupos con cohomología trivial, como es el caso de los grupos semisimples o del grupo de Poincaré. También resulta un elemento clave para la correcta formulación dinámica en álgebras de dimensión infinita [Mick86].

Por último, mencionamos que la idea de introducir subclases en  $H^2(G, U(1))$  aparece por primera vez en [Sa61] al observar que en un proceso de contracción de Inönü-Wigner, ciertos cobordes  $\xi_\lambda$  del grupo sin contraer pasan a ser cociclos no triviales del grupo contraído, constituyendo la contracción del grupo de Poincaré al grupo de Galileo un buen ejemplo. Por otra parte, en el caso de grupos semisimples, la pseudo-cohomología también se relaciona con la *cohomología de Čech* de las fibraciones generalizadas de Hopf por el subgrupo de Cartan  $H, G \rightarrow G/H$  [AN87].

## 3.2 Dinámica

La aspiración fundamental de la CSG es la extracción de toda la física a partir de la estructura del grupo de partida, de manera que la dinámica se pueda desarrollar en un contexto directamente cuántico. No obstante, el formalismo es lo suficientemente rico como para proporcionar simultáneamente una descripción semiclásica. Algunos parámetros del grupo se dispondrán en pares para constituir el espacio de las fases, representando los grados de libertad físicos del sistema, mientras que otros parámetros del grupo serán responsables de



generar y caracterizar la evolución dinámica. A los primeros los llamaremos variables *básicas* o *simplécticas* mientras que a los segundos los denominaremos simplemente *de evolución*.

La guía para distinguir entre ambos tipos de variables será la (pseudo-)cohomología del grupo, jugando el módulo característico un papel fundamental en este contexto. En particular, al tratar de identificar los parámetros correspondientes al espacio-tiempo a partir de la estructura del grupo, éstos aparecerán asociados a generadores que se encuentren dentro del módulo característico. Al considerar la mecánica de una partícula, este espacio-tiempo se reduce simplemente al tiempo, mientras que en un tratamiento de campos se corresponde propiamente con el espacio-tiempo completo.

La actuación del grupo  $\tilde{G}$  como simetría del sistema dinámico, tanto en la descripción cuántica como en la semiclásica, se realizará por convención mediante su acción izquierda, lo que a nivel infinitesimal se traduce en la acción de los generadores invariantes derechos  $\tilde{X}_i^R$ . Ésta es la razón por la que hemos elegido la 1-forma de cuantización, que contiene la información dinámica del sistema, como una forma invariante por la izquierda (Definición 3.1.13).

### 3.2.1 Teoría semiclásica

#### 3.2.1.a Dinámica a la Cartan

##### 1. Ecuaciones del movimiento

Como hemos visto en el Apartado 3.1.2,  $\tilde{G}$  generaliza la estructura de contacto de la dinámica de Cartan. Esta generalización tiene dos niveles.

El primero de ellos está caracterizado por el cociente  $\tilde{G}/U(1)$ , que volvemos a llamar *espacio de los movimientos*, y por la forma  $\Theta$  sobre este cociente (localmente  $\Theta_{PC} = \Theta - \frac{d\zeta}{i\zeta}$ ), que generaliza directamente la forma de Poincaré-Cartan de la dinámica. El núcleo de  $d\Theta$  está ahora formado por todos los campos en el módulo característico  $\mathcal{G}_\Theta$ , cuyos campos de vectores deben entenderse como generadores de ecuaciones del movimiento generalizadas (como decíamos en el Apartado 3.1.2). El espacio de las fases soporte es por tanto,  $\tilde{G}/(G_\Theta \otimes U(1))$ . De hecho, las condiciones que caracterizan a un vector  $X$  en el módulo característico

$$i_X \Theta = 0 \quad , \quad i_X d\Theta = 0 \quad , \quad (3.17)$$

constituyen, salvo normalización, una generalización directa de las las ecuaciones del movimiento en la Proposición 2.3.4 (la primera condición es simplemente una condición de horizontalidad sobre  $X$ ). Este tratamiento será especialmente importante en el análisis de la dinámica en el Capítulo 5.

Si no tomamos cociente por  $U(1)$ , manteniendo  $\mathcal{G}_\Theta$  como los generadores de las ecuaciones movimiento, encontramos un segundo nivel de generalización. En este caso  $\tilde{G}$  representa un espacio de los movimientos *extendido*<sup>4</sup>, de forma que las ecuaciones del movimiento hacen evolucionar el parámetro central originando una descripción semiclásica tipo Cartan. En el caso de una dinámica asociada a órbitas cerradas en el espacio de las fases, y dado el carácter compacto de  $U(1)$ , la integrabilidad de la

<sup>4</sup>Salvo en el Capítulo 6, al hablar de ampliaciones de espacios por nuevos parámetros, reservaremos el adjetivo *extendido* para referirnos específicamente a ampliaciones por una variable asociada a un generador central.



evolución de esta componente vertical en las ecuaciones del movimiento es equivalente a las condiciones de cuantización de Bohr-Sommerfeld de la precuántica.

## 2. Invariantes Noether

Especialmente importante a lo largo de todo el trabajo será la versión del teorema de Noether en esta generalización del tratamiento de Cartan. La 1-forma  $\Theta$  es estrictamente invariante bajo la simetría del sistema. De hecho, como veremos en el Capítulo 5, la eliminación de la semi-invariancia de la forma de Poincaré-Cartan está íntimamente ligada a la extensión central de la simetría. En nuestro caso, la invariancia exacta se sigue simplemente de haber escogido la  $\Theta$  como una forma invariante izquierda. Esto hace que la función  $f_Y$  del teorema de Noether de la Sección 2.3 se anule, con lo que tenemos,

**Teorema 3.2.9** (de Noether). *Las funciones  $i_{X_j^R}\Theta$  son constantes a lo largo de las trayectorias del movimiento, esto es,  $L_{X_c^L}(i_{X_j^R}\Theta) = 0$ , para todo  $X_j^R$  invariante derecho y para todo  $X_c^L$  en  $\mathcal{G}_\Theta$ .*

A estas funciones las denotaremos por  $\mathcal{N}_j \equiv i_{X_j^R}\Theta$  y las llamaremos invariantes Noether. Los invariantes Noether correspondientes a las variables básicas son funciones independientes entre sí y parametrizan la variedad de soluciones. Por tanto, los invariantes Noether correspondientes a las variables de evolución (los grados de libertad del módulo característico) que también tienen soporte en la variedad de soluciones, han de poder escribirse en términos de los invariantes Noether básicos. Este punto va a resultar fundamental para la interpretación física de nuestros modelos.

## 3. Acción

Aprovechando la relación de la forma  $\Theta$  con la de Poincaré-Cartan y por tanto con el formalismo lagrangiano (ver Sección 2.3), podemos construir una acción  $S$  para el sistema, como

$$S = \int \Theta|_{\text{trayectorias}} \quad (3.18)$$

### 3.2.1.b Dinámica hamiltoniana

Tomando cociente por las ecuaciones del movimiento y por el generador central recuperamos el espacio de las fases o de soluciones del sistema físico. La estructura simpléctica está determinada por  $d\Theta$ , que cae al cociente, y la dinámica está generada por la versión derecha de los campos en el módulo característico. Efectivamente, estos últimos son campos localmente hamiltonianos de  $d\Theta$ , por ser generadores infinitesimales de la acción izquierda, que dejan invariante la forma  $\Theta$ . Localmente  $i_{X_i^R}d\Theta = df_i$ <sup>5</sup>, lo que nos proporciona la función hamiltoniana (local) correspondiente.

Si sólo tomamos cociente por el módulo característico, el espacio resultante tiene estructura de variedad cuántica, con 1-forma de contacto dada por la caída al cociente de la 1-forma de cuantización  $\Theta$ . Lo denominamos espacio de las fases *extendido*. Volvemos

<sup>5</sup>Lo que se deriva de  $d(i_{X_i^R}d\Theta) = 0$  y del lema de Poincaré.



a tener una descripción semiclásica del sistema pero esta vez en un contexto hamiltoniano. Las versiones derechas de los campos en el módulo característico siguen siendo los generadores de la dinámica, y nuevamente encontramos una evolución sobre el parámetro central responsable de la cuantización de Bohr-Sommerfeld.

### 3.2.2 Teoría Cuántica. Anomalías

El objetivo técnico fundamental de la CSG es la construcción de una representación unitaria e irreducible de los generadores que constituyen el álgebra de Lie de partida. Tal meta caracteriza en sí lo que entendemos por teoría cuántica en este contexto.

El hecho de trabajar sobre un grupo proporciona de forma natural dos versiones del álgebra de interés, la derecha y la izquierda. Por convención hemos elegido el álgebra derecha para representar los operadores físicos. El desarrollo técnico sigue las líneas generales definidas por la Cuantización Geométrica.

#### 3.2.2.a Precuantización

##### *Espacio de representación*

Siguiendo el ejemplo de la CG, donde las funciones de onda se construyen a partir de las funciones complejas definidas sobre la variedad cuántica  $Q$ , en CSG elegimos el espacio de representación sobre el conjunto de las funciones complejas definidas en el grupo extendido  $\tilde{G}$ , que es la variedad que generaliza a  $Q$ .

Aprovechando la estructura de fibrado principal con grupo estructural  $U(1)$ , se impone a las funciones de onda una dependencia homogénea de primer grado en la variable  $\zeta$ , correspondiente al término central. Esto es, como en CG, exigimos la condición de  $U(1)$ -función

$$\begin{aligned}\Psi(\zeta * g) &= \zeta \Psi(g) \\ \Xi \Psi &= i \Psi .\end{aligned}\tag{3.19}$$

A este espacio de funciones lo denotamos  $\mathcal{H}(\tilde{G})$ .

##### *Representación regular*

La acción de los generadores invariantes derechos se traduce a nivel finito en la acción izquierda sobre el grupo, realizada sobre las funciones de onda por:

$$\begin{aligned}g : \Psi &\rightarrow \Psi_g \\ \Psi_g(h) &= \Psi(g * h) \quad \forall g, h \in \tilde{G} .\end{aligned}\tag{3.20}$$

Esto define la denominada representación regular del grupo<sup>6</sup>. Tal representación es unitaria si utilizamos la medida de Haar (3.7) para definir el producto escalar entre funciones de onda.

##### *Reducibilidad*

La representación regular de un grupo resulta altamente reducible. Una manera formal de ver esto consiste en observar que los campos invariantes izquierdos, cuya acción es no trivial sobre las funciones de onda, conmutan con los generadores de la representación, por ser éstos derechos. El lema de Schur nos garantiza que la representación es reducible.

<sup>6</sup>Esto no es literal, puesto que hemos impuesto una condición de  $U(1)$ -función.



Una forma más física de verlo es el argumento que usábamos en el caso de la CG. Nuestra pretensión es que las funciones de onda sólo tengan soporte en la mitad de las variables que parametrizan el espacio de las fases. Como hemos visto en la sección anterior, tales espacios tienen estructura de cociente,  $\tilde{G}/(G_\Theta \otimes U(1))$ , con lo que formalmente las funciones de onda dependen (localmente) de las variables  $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n, \lambda^1, \dots, \lambda^m, \zeta)$ , donde la dependencia en  $\zeta$  está fijada por la  $U(1)$ -equivariancia,  $\lambda^i$  son las variables del módulo característico y  $x^i$  y  $p_j$  parametrizan formalmente la variedad simpléctica. Las funciones de onda deberían depender sólo de las  $x$ 's o de las  $p$ 's, o de una mezcla de ellas. Necesitamos por tanto imponer condiciones sobre las funciones de onda para eliminar la dependencia que no nos interesa.

### 3.2.2.b Reducción. Polarizaciones

Uno de los problemas básicos de la CG estaba ligado a la identificación de una polarización adecuada. Esto es, la imposición de un conjunto de condiciones capaces de eliminar los suficientes grados de libertad de la representación, simultáneamente compatible con la acción de los operadores físicos.

Uno de los principales atractivos de la CSG es que podemos usar los campos invariantes izquierdos, que conmutan con los derechos y por tanto respetan la representación, para construir la polarización. Ésta es una ventaja directa del hecho de trabajar sobre un grupo. En términos intuitivos, una polarización  $\mathcal{P}$  consiste en un conjunto de campos invariantes izquierdos que imponen un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales como condiciones sobre las funciones de onda  $\Psi$ ,

$$\tilde{X}_i^L \Psi = 0 \quad , \quad \forall \tilde{X}_i^L \in \mathcal{P} \quad . \quad (3.21)$$

La idea es que  $\mathcal{P}$  incluya a los campos izquierdos del módulo característico y a la mitad de los simplécticos en su versión izquierda, excluyendo al tiempo al generador central. A estos campos se les exige que cierren álgebra (que estén en involución) lo que permite aplicar el teorema de Frobenius y garantizar la integrabilidad. En términos formales, esto se expresa en la siguiente definición.

**Definición 3.2.15** *Una polarización de primer orden,  $\mathcal{P}$ , es una subálgebra horizontal maximal izquierda.*

La condición de horizontalidad simplemente significa que la polarización está en  $\ker \Theta$  y que es isótropa (ver Definición 2.1.7) respecto a la forma pre-simpléctica  $d\Theta$ . Aunque, como hemos dicho, idealmente una polarización debe contener al módulo característico, esto no siempre es posible. Diremos que la polarización es *regular*, o *completa*, cuando de hecho incluya a todo el módulo característico. La consecuencia más importante en este caso, es que los operadores derechos correspondientes a los parámetros en el módulo característico, se escriben en términos del resto de los generadores (simplécticos) al considerar la acción sobre las funciones de onda polarizadas. Diremos que la polarización es *simpléctica*, o *lagrangiana*, cuando contenga a uno de los generadores de todos y cada uno de los pares conjugados.

Debemos señalar que polarizaciones distintas conducen, en general, a representaciones no equivalentes, y por tanto a sistemas físicos diferentes. Esto significa que, en rigor, el sistema físico no viene completamente caracterizado por la ley de grupo y la elección de la 1-forma de cuantización, sino que hay que especificar la polarización.



Por último, a pesar de que el objetivo de la polarización es obtener la irreducibilidad de la representación, ésta no está garantizada y es algo que hay que comprobar a posteriori. De hecho, en los sistemas que encontraremos en este trabajo se aprovechará la presencia de un (único) estado de peso máximo en las representaciones para garantizar la irreducibilidad, tomando como espacio de representación las órbitas del grupo a través de ese estado. Otra forma de obtener la irreducibilidad es mediante la imposición de condiciones de polarización adicionales construidas con operadores diferenciales de orden superior presentes en el álgebra envolvente de la versión izquierda del álgebra de Lie. Esto conduce al concepto de polarización de orden superior.

### 3.2.2.c Anomalías. Polarizaciones orden superior

La noción estándar de anomalía surge en teorías donde una determinada simetría presente a nivel clásico no se realiza a nivel cuántico, o lo hace en una versión deformada. En CSG, donde no se parte de un sistema clásico que se somete a un mecanismo de cuantización, el concepto de anomalía debe ser necesariamente revisado. Esto nos va a conducir a un tratamiento de la cuestión que en cierto modo es el inverso al estándar. Podemos presentar dos acercamientos duales a las anomalías en CSG (ver Figura 1.1).

#### a) Conservación del número de grados de libertad

Como hemos dicho antes, la existencia de una polarización completa garantiza que los operadores que actúan sobre las funciones de onda polarizadas se escriban en términos de los generadores básicos. Sin embargo, la propia existencia de una polarización completa no está garantizada para un grupo de Lie dado.

**Definición 3.2.16** *Llamaremos anómalo a un grupo que no admite ninguna polarización de primer orden completa.*

En este caso, la representación polarizada no es irreducible para todos los valores de las extensiones centrales. Como indicábamos antes, una solución consiste en añadir nuevas condiciones de polarización mediante el uso de operadores de orden superior.

**Definición 3.2.17** *Denominamos polarización de orden superior,  $\mathcal{P}^{HO}$ , a una subálgebra maximal del álgebra envolvente izquierda que excluye al generador central y que contiene una polarización de primer orden (no completa).*

En general, la existencia de una polarización de orden superior sólo ocurre para determinados valores de las extensiones centrales que caracterizan a la representación.

A continuación presentamos la estructura genérica de un grupo anómalo. Formalmente, las coordenadas del grupo serán del tipo  $(x^+, x^-, \epsilon^+, \epsilon^-, \epsilon^0)$ , donde  $x^+$  y  $x^-$  son combinaciones de las variables simplécticas  $x$  y  $p$ , de manera que los conmutadores de los generadores son del tipo:

$$\begin{aligned} [\tilde{X}_{x^+}, \tilde{X}_{x^-}] &= a\tilde{X}_{\epsilon^0} + b\Xi \\ [\tilde{X}_{\epsilon^+}, \tilde{X}_{x^-}] &\sim \tilde{X}_{x^+}, \quad [\tilde{X}_{\epsilon^-}, \tilde{X}_{x^+}] \sim \tilde{X}_{x^-} \\ [\tilde{X}_{\epsilon^+}, \tilde{X}_{\epsilon^-}] &= \tilde{X}_{\epsilon^0}. \end{aligned} \tag{3.22}$$



Esto es, el subgrupo  $(\epsilon^+, \epsilon^-, \epsilon^0)$  rota el espacio  $(x^+, x^-)$  mediante una acción no diagonal. Los generadores correspondientes forman parte del módulo característico, pero no pueden incluirse simultáneamente en una polarización, ya que esto implicaría la inclusión del término central en la misma. Como máximo podemos incluir en la polarización  $\mathcal{P}^\pm = \{\tilde{X}_{x^\pm}, \tilde{X}_{\epsilon^0}, \tilde{X}_{\epsilon^\pm}\}$ , que es una polarización no completa. Como consecuencia  $\tilde{X}_{\epsilon^\pm}$  no se pueden expresar en términos de los generadores  $\tilde{X}_{x^\pm}$ . De hecho, todo ocurre como si  $\epsilon^+$  y  $\epsilon^-$  fueran realmente variables básicas, auténticos grados de libertad físicos, lo cual nos sugiere *modificar* su conmutador de partida para que aparezca un término central:

$$[\tilde{X}_{\epsilon^+}, \tilde{X}_{\epsilon^-}] = \tilde{X}_{\epsilon^0} + c\xi . \quad (3.23)$$

En este enfoque, en el que la prioridad es mantener los mismos grados de libertad que en el sistema inicial, la razón subyacente para realizar esta extensión es que la existencia de la necesaria polarización de orden superior exige, en general, un valor no nulo de los parámetros  $c$ . En concreto, éstos deben tomar unos valores críticos, que denominamos *cuánticos* y que dependen del resto de los términos centrales:  $c = c(b)$ .

Vemos que para poder dar una representación irreducible de los grados de libertad originales nos vemos obligados a deformar la simetría mediante un término central. Éste es el punto de contacto con el tratamiento estándar de las anomalías. En este sentido, la anomalía no sólo no es una obstrucción para el proceso de cuantización sino que resulta clave para su consistencia.

b) *Reducción anómala del número de grados de libertad*

La resolución anterior del problema de la reducibilidad sugiere otro enfoque conceptualmente opuesto, en el que desde el principio extendemos centralmente el conmutador  $[\tilde{X}_{\epsilon^+}, \tilde{X}_{\epsilon^-}]$ . En este caso  $\epsilon^+$  y  $\epsilon^-$  son variables básicas en pie de igualdad con  $x^+$  y  $x^-$ , desde el comienzo. La polarización  $\mathcal{P}^\pm$  en este caso es completa, puesto que  $\tilde{X}_{\epsilon^+}$  y  $\tilde{X}_{\epsilon^-}$  ya no se encuentran en el módulo característico. Disponemos en principio de una representación irreducible asociada a un sistema físico que presenta más grados de libertad que el que discutíamos en la visión anterior de la anomalía. Esto es, el espacio de las fases físico experimenta un aumento de tamaño. La manera en que se manifiesta la anomalía en este enfoque es mediante la existencia de un valor crítico de la extensión central  $c = c(b)$ , el valor *cuántico*, para el que la representación se hace reducible, admitiendo condiciones de polarización adicionales (las de la discusión anterior) obtenidas con operadores de orden superior. Como comentábamos antes, la existencia de una polarización completa no es garantía de irreducibilidad, ya que puede aparecer una anomalía. Este segundo enfoque es más general, puesto que incluye al primero mediante la *condensación* experimentada en el valor crítico, al tiempo que permite la exploración matemáticamente consistente de sistemas con grados de libertad adicionales que podemos llamar anómalos y que son esencialmente cuánticos.

En definitiva, esta discusión aconseja que la CSG utilice como punto de partida la simetría maximalmente extendida, para que después la propia estructura grupo-teórica se encargue de decidir cuáles son las representaciones que se reducen anómalamente para los valores críticos de las extensiones <sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Consistentemente, en ausencia de anomalía estos valores resultan ser cero.



Finalmente, y por completitud, incluso si una simetría no es anómala, esto es si admite una polarización completa de primer orden, el uso de otras polarizaciones de orden superior puede resultar de interés para la obtención de nuevas representaciones (tal vez equivalentes) del sistema. Un buen ejemplo de esto lo constituye el tratamiento de la partícula libre en el espacio de configuración [ABLN92].

### 3.2.2.d Grados de libertad gauge. Ligaduras

#### *Transformaciones Gauge*

Una transformación de simetría es *gauge* si deja invariante punto a punto la variedad de soluciones del sistema físico. En CSG esta noción se caracteriza, equivalentemente, de la siguiente manera:

**Definición 3.2.18** *Un campo derecho  $\tilde{X}_g^R$  es generador de una simetría gauge si su invariante Noether se anula,  $i_{\tilde{X}_g^R}\Theta = 0$ . A la subálgebra generada por los campos gauge la denominamos subálgebra de gauge,  $\mathcal{G}_{gauge}$ .*

Como consecuencia directa de la relación  $i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X$ , tenemos:

**Proposición 3.2.5**  *$\mathcal{G}_{gauge}$  es un ideal de  $\mathcal{G}$ .*

Para ver que los campos en  $\mathcal{G}_{gauge}$  se corresponden con la noción estándar de simetría gauge, notamos que de su caracterización ( $i_{\tilde{X}_g^R}\Theta = 0$ ) y por ser generadores derechos que dejan invariante la  $\Theta$  ( $L_{\tilde{X}_g^R}\Theta = 0$ ), se deriva  $i_{\tilde{X}_g^R}d\Theta = 0$ . Por tanto,  $\mathcal{G}_{gauge} \subset \mathcal{G}_\Theta$ . En consecuencia, los campos de gauge se escriben en términos de los generadores en el módulo característico:

$$\tilde{X}_g^R = \sum a^i \tilde{X}_i^L, \quad \tilde{X}_i^L \in \mathcal{G}_\Theta. \quad (3.24)$$

Por tanto, a nivel clásico los campos  $\tilde{X}_g^R$  se trivializan en el espacio de las fases, puesto que tomamos cociente por ellos. Simplemente el hecho de que su invariante Noether sea nulo ya es suficiente para mostrar su carácter gauge [BCJ94].

Cuánticamente, la acción de los campos de gauge sobre las funciones de onda polarizadas es trivial, por escribirse en términos de la polarización (siempre que no haya anomalía).

#### *Ligaduras*

Los conceptos de simetría gauge y de ligaduras en un sistema están fuertemente relacionados [HT92]. En particular, la presencia de una simetría gauge conlleva la presencia de una ligadura en el sistema, mientras que por su parte, una ligadura de primera clase actúa como generador de una simetría gauge. El concepto de ligadura es en cualquier caso más general que el de simetría gauge.

Aquí vamos a presentar brevemente la manera en que las ligaduras son manejadas en el tratamiento puramente cuántico de la CSG, algo que cobrará importancia al discutir los sistemas con simetría gauge local en el Capítulo 6.

Asumimos que las ligaduras cierran un subgrupo  $\tilde{T} \subset \tilde{G}$ . A tal grupo  $\tilde{T}$  se le exige,

1.  $\tilde{G}$  debe tener estructura de fibrado principal con grupo estructural  $\tilde{T}$ .



2. El propio  $\tilde{T}$  debe tener una estructura de fibrado principal con grupo estructural  $U(1)$ , esto es,  $\tilde{T}$  tiene estructura de grupo de cuantización donde el  $U(1)$  es el mismo que el que confiere a  $\tilde{G}$  estructura de grupo cuántico.

Las ligaduras se construyen imponiendo una condición de  $\tilde{T}$ -equivariancia sobre las funciones polarizadas

$$\begin{aligned}\Psi(t * g) &= D_{\tilde{T}}(t)\Psi(g) \\ X_t^R \Psi &= d_{\tilde{T}}(t)\Psi \ ,\end{aligned}\tag{3.25}$$

con  $D_{\tilde{T}}$  una representación de  $\tilde{T}$  y  $d_{\tilde{T}}$  su diferencial. Puesto que las ligaduras se realizan con campos derechos, ahora carecemos de la ventaja que en el caso de las condiciones de polarización ofrecía la conmutatividad entre los campos derechos e izquierdos. Llamaremos operadores *buenos* a aquellos que respetan las condiciones de polarización. Una condición suficiente es:

$$[X_{bueno}, \tilde{T}] \subset \text{Ker} d_{\tilde{T}} \ .\tag{3.26}$$

Por último, puede ocurrir que la condición de  $\tilde{T}$ -función dada por la representación irreducible  $d_{\tilde{T}}$  sea incompatible con la condición de  $U(1)$ -función. Esto aparece como consecuencia de la existencia de variables conjugadas en  $\tilde{T}$ , y en tal caso sólo podemos imponer como ligadura una subálgebra de polarización. Se dice que se ha producido una anomalía en el grupo de gauge, siendo este fenómeno el correspondiente a una ligadura de segunda clase. Este punto será fundamental en el análisis de la mezcla de interacciones a nivel de campos en el Capítulo 6.

### 3.3 Grupos y álgebras de dimensión infinita. Exponenciación

Las simetrías más interesantes que van a aparecer en esta memoria, en particular el grupo de difeomorfismos que representa su eje central, constituyen ejemplos de álgebras y grupos de Lie de dimensión infinita. Tales objetos se definen de la misma manera que en el caso finito-dimensional, pero modelados sobre variedades diferenciables de dimensión infinita, de las que heredan una considerable carga de complicación matemática. En esta memoria adoptaremos una actitud *ingenua*, ignorando estas sutilezas subyacentes. La justificación para ello es que manejaremos siempre expresiones explícitas donde las posibles ambigüedades se pueden afrontar directamente. Para tratamientos más formales nos remitimos a [Miln84, PS86, Mick89].

El álgebra de Lie del grupo de difeomorfismos de una variedad  $M$  se puede identificar con el espacio de los campos de vectores diferenciables sobre ese espacio  $M$ ,  $Vect(M)$ , pues constituyen de hecho generadores infinitesimales de difeomorfismos. Sin embargo, en este caso la relación entre el álgebra y el grupo de Lie no es tan nítida como en dimensión finita. En efecto, la aplicación exponencial del álgebra a un entorno de la identidad en el grupo no es una biyección para los difeomorfismos, siendo sólo inyectiva. Es más, en rigor  $M$  debe ser compacto para definir globalmente los difeomorfismos. Nosotros nos limitaremos a trabajar con difeomorfismos alcanzables por la exponencial y *locales*, en el sentido de ser no triviales sólo en una subvariedad compacta y no sensibles a la topología global de  $M$  (en definitiva, esencialmente estaremos trabajando a nivel de álgebra de Lie).



El punto de partida para el formalismo de CSG es una ley de grupo. En los casos en que dispongamos de una representación fiel del grupo, bastará con componer dos transformaciones e imponer asociatividad para obtener dicha ley (tal será el caso de Galileo extendido por  $U(1)$  local en el Capítulo 5). Sin embargo, por lo general partiremos de un álgebra de Lie que por tanto será necesario exponenciar. A continuación damos dos técnicas de carácter perturbativo que serán usadas sistemáticamente (no sólo para dimensión infinita).

### 3.3.1 Ley de grupo formal

Utilizando la teoría de grupos formales [Se65] se puede desarrollar un método [AN90] para calcular perturbativamente la ley de grupo local en un caso arbitrario (ley de grupo del recubridor universal). Denotando los parámetros del grupo por  $g^i$ , siendo  $i$  un índice apropiado, realizamos un desarrollo formal de la ley de composición  $g''^k = F^k(g', g)$

$$g''^k = g'^k + g^k + B_{i,j}^k g'^i g'^j + \frac{1}{2!} B_{ij,l}^k g'^i g'^j g'^l + \frac{1}{2!} B_{i,jl}^k g'^i g'^j g'^l + \dots \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{3!} B_{ijl,m}^k g'^i g'^j g'^l g'^m + \frac{1}{3!} B_{i,jlm}^k g'^i g'^j g'^l g'^m + \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} B_{ij,lm}^k g'^i g'^j g'^l g'^m + \dots ,$$

que se convierte en ley de grupo si se le impone la condición de asociatividad:

$$F(g'', F(g', g)) = F(F(g'', g'), g), \quad \forall g'', g', g . \quad (3.28)$$

El álgebra de Lie determina la estructura del grupo formal de forma que las constantes  $B_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_m}^k$  vienen expresadas en términos de las constantes de estructura  $C_{ij}^k$ , que a su vez están fijadas por:

$$B_{i,j}^k - B_{j,i}^k = C_{ij}^k .$$

Imponiendo la asociatividad orden a orden en las potencias de los parámetros del grupo, se encuentran sucesivas condiciones de consistencia. A tercer orden,

$$B_{i,jl}^k - B_{ij,l}^k = B_{p,l}^k B_{i,j}^p - B_{i,p}^k B_{j,l}^p , \quad (3.29)$$

y a cuarto orden,

$$B_{i,jlm}^k - B_{ij,lm}^k = B_{p,lm}^k B_{i,j}^p - B_{i,p}^k B_{j,lm}^p - B_{i,mp}^k B_{j,l}^p - B_{i,lp}^k B_{j,m}^p \quad (3.30)$$

$$B_{ij,lm}^k - B_{ijl,m}^k = B_{p,m}^k B_{ij,l}^p + B_{pj,m}^k B_{i,l}^p + B_{pi,m}^k B_{j,l}^p - B_{ij,p}^k B_{l,m}^p .$$

La expresión a orden  $n$  puede encontrarse en [AN90]. Las anteriores igualdades constituyen un sistema de ecuaciones indeterminado, de manera que la expresión de las  $B_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_m}^k$  no queda fijada. Existe por tanto cierta ambigüedad, o más bien libertad, en la forma explícita de la ley de grupo que resulta eliminada suplementando las anteriores ecuaciones con un criterio o regla consistente sobre las  $B_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_m}^k$ . Estas distintas elecciones corresponden a isomorfismos del grupo, por lo que son esencialmente inocuas.

### 3.3.2 Campbell-Hausdorff

Sean  $X_i$  los generadores el álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ , con conmutadores  $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$ . Usamos la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [Mill72] para introducir coordenadas en el grupo local  $G$  exponenciado a partir de  $\mathcal{G}$ . Hasta tercer orden, tal fórmula es:

$$e^X e^Y = e^{X+Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]) + \dots} \quad X, Y \in \mathcal{G} . \quad (3.31)$$



Desarrollando en la base  $\{X_i\}$ , definimos las coordenadas  $\lambda^i(g)$  para  $g$  en  $G$  por

$$g = e^{\lambda^i(g)X_i} , \quad (3.32)$$

de forma que,

$$\begin{aligned} e^{\lambda''(g'')^i X_i} &= g'' = g' g = e^{\lambda^i(g)X_i} e^{\lambda^j(g)X_j} = \\ &= e^{\lambda^i X_i + \lambda^j X_j + \frac{1}{2} \lambda^i \lambda^j [X_i, X_j] + \frac{1}{12} \lambda^i \lambda^j \lambda^k [X_i, [X_j, X_k]] + \frac{1}{12} \lambda^i \lambda^j \lambda^k [X_i, [X_j, X_k]] + \dots} , \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde en el segundo renglón no hacemos explícito el argumento de  $\lambda^i$ . Realizando la identificación de variables

$$\lambda''^p = \lambda'^p + \lambda^p + \frac{1}{2} C_{ij}^p \lambda^i \lambda^j + \frac{1}{12} C_{im}^p C_{jk}^m \lambda^i \lambda^j \lambda^k + \frac{1}{12} C_{im}^p C_{jk}^m \lambda^i \lambda^j \lambda^k + \dots . \quad (3.34)$$

Podemos calcular sistemáticamente campos de vectores izquierdos y derechos:

$$\begin{aligned} X_q^L &= \left. \frac{\partial \lambda''^p(\lambda', \lambda)}{\partial \lambda^q} \right|_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda'=\lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda^p} = \frac{\partial}{\partial \lambda^q} + \frac{1}{2} C_{iq}^p \lambda^i \frac{\partial}{\partial \lambda^p} + \frac{1}{12} C_{im}^p C_{jq}^m \lambda^i \lambda^j \frac{\partial}{\partial \lambda^p} + \dots \quad (3.35) \\ X_q^R &= \left. \frac{\partial \lambda''^p(\lambda', \lambda)}{\partial \lambda'^q} \right|_{\substack{\lambda'=0 \\ \lambda=\lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda^p} = \frac{\partial}{\partial \lambda^q} + \frac{1}{2} C_{qi}^p \lambda^i \frac{\partial}{\partial \lambda^p} + \frac{1}{12} C_{im}^p C_{jq}^m \lambda^i \lambda^j \frac{\partial}{\partial \lambda^p} + \dots . \end{aligned}$$

Para las formas invariantes izquierdas  $\theta^{L(k)}$ , tenemos:

$$\theta^{L(k)} = \left. \frac{\partial \lambda''^k(\lambda', \lambda)}{\partial \lambda^q} \right|_{\substack{\lambda=\lambda \\ \lambda'=\lambda^{-1}}} d\lambda^q . \quad (3.36)$$

Usando el hecho de que en estas coordenadas,  $\lambda^i(g^{-1}) = -\lambda^i(g)$ , encontramos

$$\theta^{L(p)} = d\lambda^p + \frac{1}{2} C_{qi}^p \lambda^i d\lambda^q + \frac{1}{6} C_{im}^p C_{jq}^m \lambda^i \lambda^j d\lambda^q + \dots . \quad (3.37)$$

La expresión de los invariantes Noether es

$$i_{X_q^R} \theta^{L(p)} = \theta^{L(p)}(X_q^R) = \delta_q^p + C_{qi}^p \lambda^i + \frac{1}{2} C_{im}^p C_{jq}^m \lambda^i \lambda^j + \dots , \quad (3.38)$$

y la de la forma simpléctica

$$\omega = d\theta^{L(p)} = \frac{1}{2} C_{qi}^p d\lambda^i \wedge d\lambda^q + \frac{1}{6} (C_{im}^p C_{jq}^m + C_{jm}^p C_{iq}^m) \lambda^j d\lambda^i \wedge d\lambda^q + \dots . \quad (3.39)$$

### 3.4 Ejemplos

Presentamos tres ejemplos que ilustran distintos aspectos de la CSG. El primero, la partícula libre galileana, es puramente cinemático representando el ejemplo más sencillo y en cierto modo paradigmático. El segundo, el oscilador armónico, ilustra la inclusión de dinámica en el sistema mientras que el último, el grupo de Schrödinger, constituye el sistema más sencillo con una anomalía.



### 3.4.1 Partícula libre galileana

Partimos del grupo de Galileo extendido (por simplicidad omitimos rotaciones y trabajamos de hecho en dimensión  $1 + 1$ ):

$$\begin{cases} t'' = t' + t \\ x'' = x' + x + v't \\ v'' = v' + v \\ \zeta'' = \zeta' \zeta e^{i\frac{m}{\hbar}(x'v + t(v'v + \frac{1}{2}v'^2))} \end{cases} \quad (3.40)$$

Los campos de vectores toman la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^L &= \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m}{2\hbar} v'^2 \Xi & \tilde{X}_t^R &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \tilde{X}_x^L &= \frac{\partial}{\partial x} & \tilde{X}_x^R &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m}{\hbar} v \Xi \\ \tilde{X}_v^L &= \frac{\partial}{\partial v} + \frac{m}{\hbar} x \Xi & \tilde{X}_v^R &= \frac{\partial}{\partial v} + t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m}{\hbar} vt \Xi \\ \tilde{X}_\zeta^L &= X_\zeta^R \equiv \Xi = i\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (3.41)$$

La 1-forma de cuantización se expresa

$$\Theta = -\frac{m}{\hbar} x dv - \frac{m}{2\hbar} v'^2 dt + \frac{d\zeta}{i\zeta}, \quad (3.42)$$

de manera que el módulo característico viene dado por

$$\mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_t^L \rangle \quad (3.43)$$

Damos un ejemplo de cómo caer a la variedad cuántica tomando cociente por  $\mathcal{G}_\Theta$ . Para ello resolvemos el sistema dinámico definido por  $\tilde{X}_t^L$ :

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dv}{ds} = v, \quad \frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{d\zeta}{ds} = \frac{m}{2\hbar} v'^2 (i\zeta) \quad (3.44)$$

cuya solución es:

$$t = s, \quad x = \frac{P}{m}s + K, \quad v = V_0 \equiv \frac{P}{m}, \quad \zeta = ze^{i(\frac{P^2}{2\hbar})s} \quad (3.45)$$

Las variables  $K, P, z$  parametrizan el cociente  $Q/\mathcal{G}_\Theta$ , donde la forma de contacto es:

$$\Theta = -KdP + \frac{dz}{iz} \quad (3.46)$$

En cuanto a la cuantización contemplamos dos posibilidades:

a) *Polarización de primer orden. Representación de momentos*

Elegimos la polarización

$$\mathcal{P} = \langle \tilde{X}_t^L, \tilde{X}_x^L \rangle \quad (3.47)$$

La segunda de las condiciones de polarización nos dice

$$\tilde{X}_x^L \Psi = \frac{\partial}{\partial x} \Psi = 0 \Rightarrow \Psi \neq \Psi(x), \quad (3.48)$$

que junto a la condición de  $U(1)$ -función nos da la dependencia  $\Psi(x, p, t, \zeta) = \zeta \Phi(p, t)$ . La primera condición proporciona entonces la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{P^2}{2m} \Phi \quad (3.49)$$



## b) Polarización de orden superior. Representación de posiciones

No existe una polarización de primer orden que elimine la dependencia en el momento  $p$ . Debemos recurrir a una polarización de orden superior, sin que esto signifique que estamos ante un caso anómalo. Tal polarización viene dada por:

$$\mathcal{P}^{HO} = \langle \tilde{X}_v^L, \tilde{X}_t^L - (\frac{i\hbar}{2m}) \tilde{X}_x^L \tilde{X}_x^L \rangle . \quad (3.50)$$

La primera condición

$$\left( \frac{\partial}{\partial v} + \frac{imx}{\hbar} \right) \Psi = 0 , \quad (3.51)$$

junto con la condición de  $U(1)$ -función nos da la forma,  $\Psi(x, v, t, \zeta) = \zeta e^{-\frac{im}{\hbar}vx} \Phi(x, t)$ , sobre la que la segunda la segunda condición de  $\mathcal{P}^{HO}$  define la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} . \quad (3.52)$$

## 3.4.2 Oscilador armónico

Presentamos ahora un ejemplo de sistema con interacción. Para ello partimos del grupo dinámico (obtenido a partir de la evolución hamiltoniana del sistema en su variedad de soluciones clásica):

$$\begin{cases} t'' = t' + t \\ x'' = x' \cos(\omega t) + x + v' \sin(\omega t) \\ v'' = v' \cos(\omega t) + v \sin(\omega t) \\ \zeta'' = \zeta' \zeta e^{\frac{im}{2\hbar} (x'v \cos(\omega t) - v'x \cos(\omega t) + (\frac{v'v}{\omega} + \omega x'x) \sin(\omega t))} \end{cases} \quad (3.53)$$

En este ejemplo estamos especialmente interesados en mostrar los aspectos específicamente dinámicos (por contraposición a cinemáticos). Tras calcular los campos izquierdos y derechos, la 1-forma de cuantización toma la forma

$$\Theta = \frac{m}{2} (vdx - xdv) - \left( \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) dt + \frac{d\zeta}{i\zeta}, \quad (3.54)$$

y nuevamente en este caso,  $\mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_t^L \rangle$ . Si bien existe una polarización de primer orden,  $\mathcal{P} = \langle \tilde{X}_t^L, \tilde{X}_x^L + \frac{i}{m} \tilde{X}_v^L \rangle$  que conduce a la representación de estados coherentes del oscilador (de Bargmann-Fock-Segal), vamos a optar de nuevo por una polarización de orden superior que nos da la representación estándar de posiciones. Nuevamente,

$$\mathcal{P}^{HO} = \langle \tilde{X}_v^L, \tilde{X}_t^L - (\frac{i\hbar}{2m}) \tilde{X}_x^L \tilde{X}_x^L \rangle . \quad (3.55)$$

La primera condición literalmente coincide con la del caso de la partícula libre, con lo que junto con la condición de  $U(1)$ -función vuelve a imponer  $\Psi(x, v, t, \zeta) = \zeta e^{-\frac{im}{\hbar}vx} \Phi(x, t)$ . La aplicación de la segunda condición nos conduce a la ecuación de Schrödinger, que este caso resulta:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \Phi . \quad (3.56)$$



### 3.4.3 Grupo de Schrödinger. Simplín

Por último presentamos un sistema que exhibe una anomalía y que tiene interés en óptica cuántica no lineal [Yu76]. Para ello partimos del denominado grupo de Schrödinger [ABLN92] (en dimensión 3), asociado a la subálgebra de Poisson generada por las funciones  $\{\mathbf{x}, \mathbf{p}, \frac{1}{2}\mathbf{x}^2, \frac{1}{2}\mathbf{p}^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{x} \times \mathbf{p}\}$ . Resulta cómodo realizar el cambio de variables,

$$\mathbf{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} + i\mathbf{p}) \quad , \quad \mathbf{a}^* \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - i\mathbf{p}) \quad (3.57)$$

donde  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}^*$  parametrizan  $\mathbb{C}^3$ . Asimismo, notamos que  $\{\frac{1}{2}\mathbf{x}^2, \frac{1}{2}\mathbf{p}^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}\}$  cierra un álgebra  $sl(2, \mathbb{R}) \approx su(1, 1)$  y  $\{\mathbf{x} \times \mathbf{p}\}$  un álgebra  $so(3) \approx su(2)$ . La simetría es la del oscilador armónico con rotaciones  $\{\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{x} \times \mathbf{p}, \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\}$ , a la que le hemos añadido dos nuevos generadores que cierran un  $sl(2, \mathbb{R})$  con el hamiltoniano.

El grupo  $SU(2)$  lo podemos parametrizar por matrices

$$U = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha\alpha^*}} \begin{pmatrix} \eta & \alpha\eta \\ -\alpha^*\eta^* & \eta^* \end{pmatrix} \quad , \quad \eta \in U(1), \alpha, \alpha^* \in S^2 \quad , \quad (3.58)$$

y el  $SU(1, 1)$  por

$$\bar{U} = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*}} \begin{pmatrix} \bar{\eta} & \bar{\alpha}\bar{\eta} \\ \bar{\alpha}^*\bar{\eta}^* & \bar{\eta}^* \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\eta} \in U(1), \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^* \in D^2 \quad , \quad (3.59)$$

donde  $D^2$  es el disco bidimensional unidad. Hacemos explícitas las respectivas acciones de estos grupos sobre  $\mathbb{C}^3$  inducidas por el álgebra de Poisson. En el caso de  $SU(2)$ , construyendo la matriz hermítica sin traza  $A$  a partir de  $\mathbf{a}$

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_3 & a_1 + ia_2 \\ a_1 - ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \quad , \quad (3.60)$$

la acción de  $SU(2)$  viene dada por

$$A' = UAU^{-1} \quad , \quad (3.61)$$

que induce una rotación  $\mathbf{a}' = R\mathbf{a}$  y análogamente sobre  $\mathbf{a}^*$ . Estas rotaciones son por tanto diagonales respecto a  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}^*$ . En cambio, la acción de  $SU(1, 1)$ , dada por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{a}^{*'} \end{pmatrix} = \bar{U} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

es no diagonal, lo que resulta clave para la aparición de la anomalía. La ley de grupo viene dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{a}'' \\ \mathbf{a}^{*''} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^* \end{pmatrix} + \bar{U}^{-1} \begin{pmatrix} R^{-1}\mathbf{a}' \\ R^{-1}\mathbf{a}^{*'} \end{pmatrix} \\ \bar{U}'' &= \bar{U}'\bar{U} \\ U'' &= U'U \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta \exp \left( \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{a}\mathbf{a}^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{U}^{-1} \begin{pmatrix} R^{-1}\mathbf{a}' \\ R^{-1}\mathbf{a}^{*'} \end{pmatrix} \right] (\eta''\eta'^{-1}\eta^{-1})^{2s} (\bar{\eta}''\bar{\eta}'^{-1}\bar{\eta}^{-1})^{2\bar{s}} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$



y a partir de ella calculamos los campos izquierdos, derechos y la forma de cuantización.

El caso clásico correspondiente al espacio de las fases de partida está asociado a  $s = \bar{s} = 0$ . Fuera de estos valores,  $s \neq 0 \neq \bar{s}$ , las variables  $\alpha$  y  $\alpha'$  por un lado, y  $\bar{\alpha}$  y  $\bar{\alpha}'$  por otro, se hacen pares conjugados, aportando nuevos grados de libertad al sistema ( $s$  corresponde al espín y  $\bar{s}$  a otro grado de libertad interno, denominado *simplín*).

Este sistema es anómalo. Lo vemos desde las dos perspectivas expuestas en el Subapartado 3.2.2.c.

- a) Si queremos mantener el número de grados de libertad, comenzamos de forma natural analizando la situación  $s = \bar{s} = 0$ . En este caso, el módulo característico es como esperamos  $SU(2) \otimes SU(1, 1)$ :

$$\mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_\alpha^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L, \tilde{X}_{\bar{\eta}}^L, \tilde{X}_{\bar{\alpha}}^L, \tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^L \rangle . \quad (3.64)$$

Si bien podemos encontrar polarizaciones que incluyan a todo  $SU(2)$ , no existe ninguna polarización (simpléctica) que incluya a todo  $SU(1, 1)$ . Esto es consecuencia del carácter no diagonal de la acción de  $SU(1, 1)$  sobre  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ . Efectivamente, si incluimos todo  $SU(1, 1)$  en la polarización, basta la presencia de uno sólo de los dos elementos del par conjugado  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ , para que el otro y por tanto el término central estén también incluidos por la exigencia de cerrar álgebra. Se pierde, por tanto, la propiedad de horizontalidad.

Ante la imposibilidad de obtener una polarización de primer orden, buscamos una de orden superior en el álgebra envolvente izquierda. Esto es de hecho posible pero exige un valor no nulo para  $\bar{s}$  (en concreto  $\bar{s} = -\frac{3}{4}$ ). En tal caso, podemos construir la polarización de orden superior

$$\mathcal{P}^{HO} = \langle \tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_\alpha^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L, \tilde{X}_{\bar{\eta}}^L, \tilde{X}_{\bar{\alpha}}^L, \tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^L - \frac{1}{2} \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^L \cdot \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L, \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L \rangle . \quad (3.65)$$

El número de grados de libertad se mantiene igual al del caso clásico, pero implicando un valor cuántico no nulo de la anomalía  $\bar{s} = -\frac{3}{4}$  (la parte de espín es no anómala puesto que su valor *cuántico* es cero si clásicamente era cero).

- b) Si asumimos que  $(\alpha, \alpha^*)$  y  $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*)$  son nuevos grados de libertad, de forma que  $s$  y  $\bar{s}$  son de partida no nulos, el módulo característico es

$$\mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_{\bar{\eta}}^L \rangle , \quad (3.66)$$

con un espacio de las fases dado por  $\mathbb{C}^3 \times S^2 \times D^2$ . Una polarización completa de primer orden es:

$$\mathcal{P} = \langle \tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_{\bar{\eta}}^L, \tilde{X}_\alpha^L, \tilde{X}_{\bar{\alpha}}^L, \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L \rangle . \quad (3.67)$$

Sin embargo, la anomalía reaparece, porque para  $s = 0, \bar{s} = -\frac{3}{4}$  la representación asociada se hace reducible. En efecto, nuevas condiciones pueden ser impuestas de forma consistente sobre las funciones de onda polarizadas (las que aparecían en la  $\mathcal{P}^{HO}$  de (3.65)), reduciéndose el espacio de representación. Se produce por tanto el mencionado proceso de *condensación* del espacio soporte de la representación:  $\mathbb{C}^3 \times S^2 \times D^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ .



### 3.5 Ventajas e inconvenientes

Como logros de la técnica de CSG, podemos señalar:

- a) Proporciona un acercamiento directamente cuántico a la dinámica de un sistemas físico. En consecuencia, no debe ser considerado propiamente como una *cuantización* (aunque puede ser empleado como tal), lo cual presenta un profundo interés desde el punto de vista conceptual.
- b) Soluciona problemas técnicos como los asociados a las polarizaciones en la Cuantización Geométrica y las ambigüedades involucradas en los problemas de ordenación.
- c) Proporciona la descripción de sistemas elementales que pueden usarse como soluciones exactas a partir de las cuales estudiar otros sistemas como perturbaciones.
- d) Supone revisiones conceptuales de nociones básicas, como el papel de la simetría en los sistemas físicos, y fundamentalmente el concepto de anomalía, sugiriendo la posibilidad de aparición de nuevos grados de libertad en el régimen cuántico.
- e) Toda la construcción se caracteriza por un manejo explícito de los objetos en ella involucrados. Así, las funciones de onda, los campos de vectores, etcétera, presentan formas funcionales concretas, por contraposición a otras construcciones formales o simbólicas.

En cuanto a los inconvenientes que presenta, mencionamos:

- a) Dificultad para encontrar, desde un punto de vista físico, el grupo inicial relevante para un problema dado. En este sentido, es más útil como mecanismo de asociación de una dinámica cuántica a grupos de Lie ya clasificados.
- b) Aplicabilidad restringida, puesto que no todo sistema físico se puede formular en este lenguaje, al menos de forma relativamente directa. En particular, este problema se plantea a la hora de introducir interacciones definidas por potenciales arbitrarios.
- c) Problemas en la interpretación física de los distintos objetos involucrados, en aquellos casos en los que el punto de partida es un grupo abstracto.







Parte II

Álgebras de difeomorfismos y  
Gravedad







## Capítulo 4

# Dimensiones espacio-temporales bajas

En este Capítulo se realiza el primer acercamiento a una dinámica formulada en términos de un grupo de difeomorfismos. En particular, se pretende derivar la propia noción de espacio-tiempo a partir del modelo cuántico, evitando su introducción desde un principio. Este primer intento se desarrolla en dimensiones bajas, concretamente utilizando el álgebra de Virasoro, por razones de sencillez técnica y por la existencia de la denominada acción de Polyakov, que representa un puente con aspectos gravitatorios bidimensionales. Precisamente el contacto con este último punto motiva el desarrollo del formalismo semiclásico. El modelo propiamente cuántico trabaja con una representación unitaria e irreducible del álgebra de Virasoro y asocia un espacio-tiempo a cada una de las representaciones irreducibles de  $SO(1, 2)$ , subálgebra que constituye el módulo característico debido a una elección crítica de los parámetros de extensión central. El modelo presenta por tanto una colectividad de espacio-tiempos que son *mezclados* por difeomorfismos dinámicos. La ampliación del álgebra de Virasoro mediante su acción sobre un álgebra  $SU(1, 1)$  de Kac-Moody, introduce nuevos grados de libertad en el modelo a los que nos referiremos formalmente como *materia*. El papel de las pseudo-extensiones resulta crucial para el tratamiento de ciertos aspectos globales en la representación, críticos para la obtención de la unitariedad. El análisis de los logros y dificultades de este primer ensayo permite la evaluación de las estrategias a seguir en contextos más realistas.

### 4.1 Antecedentes. Grupo de Virasoro

Como hemos comentado en el Capítulo 1, la aspiración de formular la dinámica de un sistema en términos de una simetría fundamental resulta en principio demasiado fuerte en el caso de los tratamientos estándar de la Gravedad. No obstante, en el caso bidimensional existe un modelo gravitatorio cuya dinámica está íntimamente asociada a una simetría subyacente. Tal sistema, conocido como gravedad inducida de Polyakov, surge en el contexto de la descripción cuántica de la teoría de cuerdas fuera del valor crítico de la anomalía [Po81], con una acción dada por

$$S = \int \sqrt{g}(R\Box^{-1}R + \Lambda) . \quad (4.1)$$



Aunque se trata de una acción no local, en ciertos gauges admite una forma local [Po87], si bien incorporando derivadas de orden superior de los campos. En particular, podemos escoger unas coordenadas tipo cono de luz en las que la métrica se escribe

$$ds^2 = \partial_- F dx^- dx^+ , \quad (4.2)$$

y donde la acción toma la forma,

$$S = -\frac{1}{48\pi} \left( \int d^2x \frac{\partial_+ F}{\partial_- F} \left( \frac{\partial_-^3 F}{\partial_- F} - 2 \frac{(\partial_-^2 F)^2}{(\partial_- F)^2} \right) \right) . \quad (4.3)$$

Esta última acción define el denominado modelo gravitacional de Wess-Zumino-Novikov-Witten. La relevancia para nosotros de este modelo radica en el papel jugado por el grupo de Virasoro. Introducimos muy brevemente [GO86] a este último en su realización como difeomorfismos de la circunferencia  $S^1$ , que por un lado supone su presentación más sencilla y por otro es la relevante en la discusión de la acción de Polyakov (para tratamientos con un mayor grado de rigor, ver por ejemplo [PS86]).

Los elementos del grupo de Virasoro vienen dados por los difeomorfismos  $\xi : S^1 \rightarrow S^1$ , con la ley de producto definida por la composición de aplicaciones:

$$(\xi_1 * \xi_2)(x) \equiv (\xi_1 \circ \xi_2)(x) = \xi_1(\xi_2(x)) , \quad x \in S^1 . \quad (4.4)$$

Nos interesa especialmente su caracterización a nivel de álgebra de Lie, que como sabemos se corresponde con los campos diferenciables sobre  $S^1$  (generadores infinitesimales de difeomorfismos, ver Sección 3.3). Parametrizando los difeomorfismos por una función  $\epsilon(x)$ ,

$$\xi(x) = x e^{-i\epsilon(x)} , \quad (4.5)$$

los generadores infinitesimales vienen dados por

$$X_\xi = ix\epsilon(x) \frac{d}{dx} , \quad (4.6)$$

y expandiendo  $\epsilon(x)$  en una serie de Laurent

$$\epsilon(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \epsilon_{-n} x^n , \quad (4.7)$$

podemos introducir los elementos  $L_n$  de una base para el álgebra

$$X_\xi = -i \sum_{-\infty}^{\infty} \epsilon_{-n} L_n , \quad (4.8)$$

donde los generadores

$$L_n \equiv -x^{n+1} \frac{d}{dx} , \quad (4.9)$$

cierran el álgebra,

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} . \quad (4.10)$$



Realmente el álgebra asociada al modelo de Polyakov, y que con propiedad se denomina álgebra de Virasoro, corresponde a la extensión central de (4.10), fijada al imponer antisimetría y la identidad de Jacobi (ver siguiente Sección).

En definitiva, en [AS89] se muestra como la acción (4.3) está relacionada con el potencial local de la forma simpléctica natural construida en ciertas órbitas coadjuntas del grupo de Virasoro de la forma  $Diff(S^1)/U(1)$  (para un estudio más completo del conjunto de las órbitas coadjuntas de Virasoro ver [Wit88]). Este enfoque sin duda arroja luz sobre la naturaleza geométrica de las estructuras involucradas en la acción de Polyakov. Sin embargo, la relación no es absolutamente directa, pues precisa de una identificación no trivial de coordenadas:  $(x \rightarrow x^-, t \rightarrow x^+)$ , donde  $x$  es la coordenada sobre  $S^1$ ,  $t$  es un parámetro asociado con el subgrupo  $U(1)$  del cociente que define la órbita coadjunta y  $x^+$  y  $x^-$  son las variables como de luz del gauge conforme de la métrica. Lo mismo ocurre en el tratamiento del grupo de Virasoro en CSG, que da lugar a lo que propiamente se denomina *modelo de Virasoro* [ANN91].

A pesar de esto, la conexión entre dinámica gravitatoria y grupo subyacente (de difeomorfismos, por añadidura) es lo suficientemente fuerte en este caso como para constituir un punto de partida para nuestros análisis.

## 4.2 Tratamiento en CSG del grupo de Virasoro

Como hemos dicho, a pesar de la importancia conceptual y clarificadora que supone la identificación del grupo de Virasoro como elemento subyacente en la estructura de la gravedad de Polyakov, el establecimiento explícito de esta relación precisa de la identificación *ad hoc* de las variables que constituyen la medida de integración en el modelo de Virasoro, como coordenadas del cono de luz:  $x^+, x^-$ . En particular, la noción de espacio-tiempo es externa al grupo de Virasoro.

Por supuesto, el problema de dotar de interpretación física a los elementos del formalismo matemático es común a todas las teorías físicas. Sin embargo, en tratamientos que parten explícitamente de una estructura abstracta como es el caso de las dinámicas derivadas de un grupo, la cuestión es especialmente importante y puede convertirse en un punto débil de la teoría.

En este caso concreto, creemos que la identificación de variables efectuada no está suficientemente motivada, introduciéndose cierto grado de arbitrariedad. El esfuerzo por reducir esta ambigüedad nos lleva a plantearnos la construcción de un modelo físico a partir del grupo de Virasoro donde se minimice la información externa a la propia estructura del grupo. En particular, se trata de recuperar el espacio-tiempo como concepto derivado a partir del grupo. En particular, nuestra aproximación será directamente cuántica sin una noción *a priori* de espacio-tiempo. Éste será un objeto definido cuánticamente y sólo *a posteriori* recuperará su carácter clásico.

Los objetivos de este modelo son por tanto:

1. Construcción de un modelo en dimensiones espacio-temporales bajas donde los difeomorfismos infinitesimales adquieran carácter dinámico <sup>1</sup> (que se corresponde con el

<sup>1</sup>Si bien, el estudio de una dinámica asociada a los difeomorfismos en un espacio-tiempo de dimensión dos sugiere utilizar como simetría de partida todo el álgebra de los difeomorfismos bidimensionales, el ejemplo de la gravedad de Polyakov ilustra cómo se puede obtener una dinámica de interés donde sólo una subálgebra, Virasoro, adquiere dinámica. En este modelo nos ceñimos a esta subálgebra, entendiendo que no constituye



objetivo estructural del Apartado 1.2).

2. Obtención de la noción de espacio-tiempo como un concepto derivado dentro de la teoría.

Aunque se trata de objetivos conceptualmente independientes, sus respectivas consecuciones van a estar profundamente entrelazadas, pues la búsqueda de una noción de espacio-tiempo va resultar crítica en la determinación de los parámetros del modelo.

### 4.2.1 Grupo de Virasoro

Comenzamos con una presentación de los elementos fundamentales que necesitamos para elaborar la dinámica asociada al grupo de Virasoro. Al carecer de una noción espacio-temporal inicial, trabajamos con el grupo de Virasoro tomado como grupo abstracto, según las prescripciones de la CSG.

El punto de partida viene dado por el álgebra (4.10):

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} . \quad (4.11)$$

Para construir la dinámica consideramos las extensiones centrales de este álgebra, que decidirán el contenido dinámico de los parámetros del grupo asociados a los generadores. Esto conduce propiamente al álgebra de Virasoro:

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = (n - m)\hat{L}_{n+m} + \frac{1}{12}(cn^3 - c'n)\delta_{n,-m} , \quad (4.12)$$

donde  $c$  es un parámetro que corresponde a una extensión central no trivial, mientras que  $c'$  está asociado a una pseudo-extensión del álgebra que, como hemos visto, contiene información no trivial sobre la dinámica (Apartado 3.1.3.).

El siguiente paso consiste en exponenciar el álgebra para obtener una ley de composición para el grupo. Al tratarse de un álgebra de Lie de dimensión infinita, hacemos uso de las técnicas presentadas en los Apartados 3.3.1 y 3.3.2, respectivamente.

#### 4.2.1.a Coordenadas canónicas

La ley de grupo en estas coordenadas viene dada por [AN90, AN91]:

$$l''^m = l^m + l'^m + ip l'^p l^{m-p} + \frac{(ip)^2}{2!} l'^p l'^n l^{m-n-p} + \dots + \sum_{n_1 + \dots + n_j + p = m} \frac{(ip)^j}{j!} l'^p l^{n_1} \dots l^{n_j} + \dots$$

$$\varphi'' = \varphi' + \varphi + \xi_c(g', g) - \frac{c'}{24} \xi_{cob}(g', g) \quad (4.13)$$

$$\xi_{cob}(g', g) = l^{0''} - l^{0'} - l^0 ,$$

(para la forma explícita de  $\xi_c(g', g)$ , ver [AN90, AN91]). A lo largo del texto, los símbolos de suma sólo aparecerán en aquellos casos en los que exista una condición (ligadura) sobre los índices. En el resto de los casos se entiende un criterio de suma sobre índices repetidos. A pesar del carácter perturbativo del método, el resultado es exacto.

---

la dinámica más general en dimensión dos (ver Capítulo 6).



A partir de esta ley de grupo, calculamos los campos vectoriales invariantes por la izquierda,  $\tilde{X}_{lk}^L$ , y por la derecha,  $\tilde{X}_{lk}^R$ . Las expresiones son, respectivamente

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{lk}^L &= \frac{\partial}{\partial l^k} + i(m-k)l^{m-k} \frac{\partial}{\partial l^m} \\ &- \frac{c}{24} k^2 \left\{ (-i)(-k)l^{-k} + \dots + \frac{(-i)^j}{j!} \sum_{n_1+\dots+n_j=-m} n_1 \dots n_j l^{n_1} \dots l^{n_j} + \dots \right\} \Xi \\ &- \frac{c'}{24} i(-k)l^{-k} \Xi, \end{aligned} \quad (4.14)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{lk}^R &= \frac{\partial}{\partial l^k} + ikl^{m-k} \frac{\partial}{\partial l^m} + \frac{(ik)^2}{2!} l^n l^{m-n-k} \frac{\partial}{\partial l^m} + \dots + \frac{(ik)^j}{j!} \sum_{n_1+\dots+n_j=m-k} l^{n_1} \dots l^{n_j} \frac{\partial}{\partial l^m} \\ &+ \dots + \frac{c}{24} \left\{ (-i)k^2(-k)l^{-k} + \frac{(-i)^2}{2!} k^2 \sum_{n_1+n_2=-k} (n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2) l^{n_1} l^{n_2} + \dots \right. \\ &+ \left. \frac{(-i)^j}{j!} k^2 \sum_{n_1+\dots+n_j=-k} P^{(j)}(n_1, \dots, n_j) l^{n_1} \dots l^{n_j} + \dots \right\} \Xi \\ &- \frac{c}{24} \left\{ ikl^{-k} + \frac{(ik)^2}{2!} l^{n_1} l^{-k-n_1} + \dots + \frac{(ik)^j}{j!} \sum_{n_1+\dots+n_j=-k} l^{n_1} \dots l^{n_j} + \dots \right\} \Xi \\ \tilde{X}_{\zeta}^R &= i\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - i\zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \equiv \Xi. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La 1-forma de cuantización  $\Theta$  se obtiene por dualidad con los campos izquierdos ( $\Theta(\Xi) = 1$ ,  $\Theta(\tilde{X}_{ln}^L) = 0$ ). Partiendo de la forma general para  $\Theta$

$$\Theta = \Theta_n dl^n + d\varphi, \quad (4.16)$$

e imponiendo las condiciones de dualidad, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{i}{24} (cn^2 - c') n l^{-n} dl^n + \sum_{\substack{k=2 \\ n_1+\dots+n_k=-n}} \frac{(-i)^k}{24} [cn_1^2 - c' \\ &+ cn^2 \sum_{m=2}^k \frac{1}{m!} n_1 \dots n_k l^{n_1} \dots l^{n_k} dl^n + d\varphi. \end{aligned} \quad (4.17)$$

#### 4.2.1.b Coordenadas Campbell-Hausdorff

En este caso, el resultado es puramente perturbativo, a tercer orden en la ley de grupo (que es el primero no trivial). De los conmutadores que definen el álgebra obtenemos las constantes de estructura para el álgebra de Virasoro

$$\begin{aligned} C_{mn}^k &= (m-n)\delta_{m+n}^k; C_{\varphi n}^k = C_{m\varphi}^k = C_{\varphi n}^{\varphi} = C_{m\varphi}^{\varphi} = 0 \\ C_{mn}^{\varphi} &= (cm^3 - c'm)\delta_{m+n} \quad (m, n, k \in \mathbb{Z}, \varphi \text{ etiqueta del parámetro central}). \end{aligned}$$



A partir de aquí obtenemos la ley de grupo (ver Apartado 3.3.2), cuyas variables denotamos con una barra ( $\bar{l}^n$ ) para distinguirlas de la parametrización anterior

$$\begin{aligned}\bar{l}''^p &= \bar{l}^p + \bar{l}'^p + \frac{1}{2}(m-n)\delta_{m+n}^p \bar{l}'^m \bar{l}^n + \frac{1}{12}(m-n-k)(n-k)\delta_{m+n+k}^p \bar{l}'^m \bar{l}'^n \bar{l}^k \\ &+ \frac{1}{12}(m-n-k)(n-k)\delta_{m+n+k}^p \bar{l}'^m \bar{l}^n \bar{l}'^k + \dots \\ \varphi'' &= \varphi + \varphi' + \frac{1}{2}(cm^3 - c'm)\delta_{m+n}^0 \bar{l}'^m \bar{l}^n + \frac{1}{12}(cm^3 - c'm)(n-k)\delta_{m+n+k}^0 \bar{l}'^m \bar{l}'^n \bar{l}^k \\ &+ \frac{1}{12}(cm^3 - c'm)(n-k)\delta_{m+n+k}^0 \bar{l}'^m \bar{l}^n \bar{l}'^k + \dots\end{aligned}$$

y los campos de vectores izquierdos y derechos:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_q^L &= \frac{\partial}{\partial \bar{l}^q} + \left[ \frac{1}{2}(m-q)\delta_m^{p-q} \bar{l}'^m + \frac{1}{12}(m-n-q)(n-q)\delta_{m+n}^{p-q} \bar{l}'^m \bar{l}^n + \dots \right] \frac{\partial}{\partial \bar{l}^p} \\ &+ \left[ \frac{1}{2}(cm^3 - c'm)\delta_m^{-q} \bar{l}'^m + \frac{1}{12}(cm^3 - c'm)(n-q)\delta_{m+n}^{-q} \bar{l}'^m \bar{l}^n + \dots \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \tilde{X}_q^R &= \frac{\partial}{\partial \bar{l}^q} + \left[ \frac{1}{2}(q-n)\delta_n^{p-q} \bar{l}'^n + \frac{1}{12}(m-n-q)(n-q)\delta_{m+n}^{p-q} \bar{l}'^m \bar{l}^n + \dots \right] \frac{\partial}{\partial \bar{l}^p} \\ &+ \left[ \frac{1}{2}(cq^3 - c'q)\delta_n^{-q} \bar{l}'^n + \frac{1}{12}(cm^3 - c'm)(n-q)\delta_{m+n}^{-q} \bar{l}'^m \bar{l}^n + \dots \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \tilde{X}_\varphi^L &= \tilde{X}_\varphi^R = \frac{\partial}{\partial \varphi} .\end{aligned}$$

Por último, la uno-forma de cuantización se escribe

$$\Theta = d\varphi + \frac{1}{2}(cq^3 - c'q)\bar{l}'^{-q} d\bar{l}^q + \frac{1}{6}(cm^3 - c'm)(n-q)\delta_{m+n}^{-q} \bar{l}'^m \bar{l}^n d\bar{l}^q + \dots$$

#### 4.2.1.c Módulo característico

Especialmente importante en la búsqueda de la noción de espacio-tiempo es la estructura de la subálgebra característica  $\mathcal{G}_\Theta$ , que coincide con el núcleo del cociclo del álgebra de Lie (ver [ABLN92]). Dependiendo de los valores de  $c$  y  $c'$  encontramos:

$$\begin{aligned}i) \quad \frac{c'}{c} \neq r^2, r \in \mathbb{Z}, &\Rightarrow \mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_{l^0}^L \rangle \\ ii) \quad \frac{c'}{c} = r^2, r \in \mathbb{Z}, &\Rightarrow \mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_{l^{-r}}^L, \tilde{X}_{l^0}^L, \tilde{X}_{l^r}^L \rangle \approx sl^{(r)}(2, \mathbb{R}) .\end{aligned}\tag{4.18}$$

Una vez que disponemos de los elementos del grupo de Virasoro necesarios para construir la dinámica, un paso fundamental para la construcción del modelo consiste en determinar la estrategia de obtención de la noción de espacio-tiempo. Aunque en nuestro tratamiento la naturaleza del sistema físico es directamente cuántica, y por tanto la discusión sobre la manera específica en la que emerge el espacio-tiempo debe esperar de hecho a la construcción de la teoría cuántica, el formalismo general de CSG sí impone ciertas restricciones sobre el modelo si queremos que éste albergue la posibilidad de contener dicha estructura espacio-temporal. En efecto, como hemos señalado a comienzos de la Sección 3.2, en el formalismo de CSG la noción de espacio-tiempo ha de buscarse dentro del subgrupo correspondiente al módulo característico  $\mathcal{G}_\Theta$ .



A la vista de (4.19), y dado que estamos buscando la construcción de un modelo sobre un espacio-tiempo bidimensional, vemos que debemos escoger <sup>2</sup> el caso *ii*), con  $c' = cr^2$ . Aunque ahora no es evidente (ver Subapartado 4.2.3.a), el requisito de unitariedad e irreducibilidad de la representación cuántica exige de hecho  $r = 1$ . Por tanto, la primera conclusión del modelo es la ligadura  $c = c'$  entre los parámetros de extensión, como condición necesaria para la existencia de una noción espacio-temporal.

Sin embargo, debemos notar que la dinámica está perfectamente bien definida para otros valores  $c \neq c'$  (siempre que la teoría sea unitaria), aunque sin una noción de espacio-tiempo como tal. Por tanto, el espacio-tiempo aparece ligado a una clase de modelos caracterizados por ciertos valores críticos de las extensiones centrales, dentro de un conjunto más amplio de sistemas físicos bien definidos, donde tal noción no tiene sentido.

### 4.2.2 Formalismo clásico

Antes de desarrollar el tratamiento cuántico y por tanto establecer el modelo físico en sí, en esta sección presentamos una discusión del formalismo (semi)clásico asociado, ciñéndonos esencialmente al caso crítico  $c = c'$ . Debemos enfatizar que sólo haremos uso de las siguientes consideraciones clásicas una vez que hayamos tomado el límite clásico de la teoría, y con el objeto de identificar la física subyacente.

Comenzamos escribiendo las ecuaciones de evolución de los parámetros  $l^n$  del grupo bajo la acción de los generadores en el módulo característico,  $\tilde{X}_{l^{-1}}^L, \tilde{X}_{l^0}^L, \tilde{X}_{l^1}^L$ , cuyos flujos constituyen las ecuaciones del movimiento generalizadas (Apartado 3.2.1). Bajo esta evolución, los parámetros  $l^n$  se convierten en funciones definidas sobre la superficie integral de dichos campos vectoriales, que de hecho cierran álgebra satisfaciendo las condiciones del teorema de Frobenius. Por tanto, los parámetros  $l^n$  constituyen campos definidos sobre una variedad homeomorfa a  $SL(2, \mathbb{R}) \approx SO(1, 2)$ . Las variables  $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{-1}$ , correspondientes a los parámetros de los generadores  $\tilde{X}_{l^0}^L, \tilde{X}_{l^1}^L$  y  $\tilde{X}_{l^{-1}}^L$  respectivamente, proporcionan un sistema de coordenadas local de forma que podemos escribir sobre las trayectorias  $l^n = l^n(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_{-1})$ . El sistema dinámico en cuestión está definido por

$$\frac{\partial l^n}{\partial \tilde{\lambda}_0} = (\tilde{X}_{l^0}^L)^{l^n}, \quad \frac{\partial l^n}{\partial \tilde{\lambda}_1} = (\tilde{X}_{l^1}^L)^{l^n}, \quad \frac{\partial l^n}{\partial \tilde{\lambda}_{-1}} = (\tilde{X}_{l^{-1}}^L)^{l^n}, \quad (4.19)$$

donde  $(\tilde{X}_{l^i}^L)^{l^n}$  es la componente  $l^n$  del campo  $\tilde{X}_{l^i}^L$  (esto es,  $\tilde{X}_{l^i}^L(l^n)$ ).

Para escribir estas ecuaciones explícitamente, hacemos uso de la parametrización del grupo de Virasoro en el Subapartado 4.2.1.a, ya que en ellas los campos involucrados están calculados de forma exacta. A partir de los términos no centrales de  $\tilde{X}_{l^n}^L$  (o simplemente a partir del campo no *extendido*  $X_{l^n}^L$ ) en (4.14) obtenemos las expresiones

$$\begin{aligned} \frac{\partial l^m}{\partial \tilde{\lambda}_0} &= iml^m \quad \text{para } m \neq 0, & \frac{\partial l^0}{\partial \tilde{\lambda}_0} &= 1 \\ \frac{\partial l^m}{\partial \tilde{\lambda}_1} &= i(m-1)l^{m-1} \quad \text{para } m \neq 1, & \frac{\partial l^1}{\partial \tilde{\lambda}_1} &= 1 \\ \frac{\partial l^m}{\partial \tilde{\lambda}_{-1}} &= i(m+1)l^{m+1} \quad \text{para } m \neq -1, & \frac{\partial l^{-1}}{\partial \tilde{\lambda}_{-1}} &= 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

<sup>2</sup>En el caso *i*)  $\mathcal{G}_\Theta$  tiene un único parámetro por lo que resulta demasiado *pequeño* para albergar un espacio-tiempo bidimensional.



Estas ecuaciones se pueden resolver explícitamente. La solución puede expresarse:

$$\begin{aligned}
l_n &= \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} i^{s+m} \binom{n-1}{m} \binom{s+n-m}{n-m} \lambda_{-1}^s \lambda_1^m \mathcal{L}_{n-m+s} - \frac{i}{n} (i\lambda_1)^n \right] e^{in\lambda_0}, \quad n \geq 2 \\
&\equiv l_n(\lambda_1, \lambda_{-1}) e^{in\lambda_0} \\
l_1 &= \left( \lambda_1 + \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \binom{m+1}{1} \mathcal{L}_{m+1} (-i\lambda_{-1})^m \right) e^{i\lambda_0} \equiv l_1(\lambda_1, \lambda_{-1}) e^{i\lambda_0} \quad (4.21) \\
l_0 &= \lambda_0 + Re \left[ \sum_0^{\infty} (-)^m \left( \sum_{s=0}^{m-2} \binom{m-1}{s} \mathcal{L}_{-m+s} (i\lambda_{-1})^s + \frac{i}{m} (-i\lambda_{-1})^m \right) (i\lambda_1)^m \right] \\
&\equiv \lambda_0 + \lambda_0(\lambda_1, \lambda_{-1}),
\end{aligned}$$

donde  $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0$ ,  $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 e^{i\lambda_0}$ ,  $\tilde{\lambda}_{-1} = \lambda_{-1} e^{-i\lambda_0}$  (las expresiones para los otros valores de  $n$  se obtienen por conjugación). Las constantes de integración  $\mathcal{L}_n$  ( $|n| \geq 2$ ), parametrizan la variedad de soluciones. De hecho podemos hacer  $\mathcal{L}_{|n| \leq 2} = 0$ .

#### 4.2.2.a Invariantes Noether

Especial interés tiene la presentación de los invariantes Noether,  $\mathcal{N}_j \equiv i_{X_{l_j}^L} \Theta$ . En primer lugar, aquéllos con  $|n| \geq 2$ , asociados a generadores *básicos*, también parametrizan el espacio de las fases. En segundo lugar, los invariantes Noether correspondientes a generadores en el módulo característico, y que son de hecho funciones bien definidas sobre la variedad de soluciones por ser constantes a lo largo de las trayectorias clásicas, deben poder ser escritos en función de los básicos. Esto proporciona expresiones *tipo Sugawara* a nivel clásico, que tendrán gran relevancia en posteriores discusiones.

Este último punto podemos ilustrarlo explícitamente trabajando al primer orden no trivial, tercero en la ley de grupo y por tanto segundo en campos de vectores (derechos) y en la 1-forma de cuantización. Escribiendo dichos objetos a este orden (en el caso general  $c \neq c'$ ), tenemos

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{i}{24} (cn^2 - c') n l^{-n} dl^n + \frac{(-i)^2}{24} \sum_{n_1+n_2=-k} (cn_1^2 - c' + \frac{cn^2}{2}) n_1 n_2 l^{n_1} l^{n_2} dl^n \quad (4.22) \\
&+ d\varphi + \dots
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{l^k}^R &= \frac{\partial}{\partial l^k} + ikl^{m-k} \frac{\partial}{\partial l^m} + \left[ \frac{ic}{24} k^3 l^{-k} \right. \\
&\left. - \frac{c}{24} k^2 \sum_{n_1+n_2=-k} \frac{1}{2} (n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2) l^{n_1} l^{n_2} - \frac{ic'}{24} ikl^{-k} + \frac{c'}{24} \sum_{n_1+n_2=-k} \frac{k^2}{2} l^{n_1} l^{n_2} \right] \Xi + \dots
\end{aligned} \quad (4.23)$$

Contrayéndolos, obtenemos los invariantes Noether

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_k = i_{\tilde{X}_{l^k}^R} \Theta &= \frac{i}{12} (ck^2 - c') kl^{-k} - \frac{1}{24} \sum_{n_1+n_2=-k} \left[ (cn_1^2 - c' + c \frac{k^2}{2}) n_1 n_2 \right. \\
&\left. - (cn_1^2 - c') n_1 k + \frac{ck^2}{2} (n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2) - c' \frac{k^2}{2} \right] l^{n_1} l^{n_2} + \dots
\end{aligned} \quad (4.24)$$



Particularizamos la expresión anterior para los invariantes Noether no básicos. En primer lugar, para  $\mathcal{N}_0$ , obtenemos:

$$\mathcal{N}_0 = i_{X_{l^0}^R} \Theta = \frac{1}{24} (cn^2 - c') n^2 l^n l^{-n} + \dots \quad (4.25)$$

Observamos que no sólo el término lineal desaparece, sino que además se aprecia explícitamente que la estructura del coeficiente del término cuadrático (para  $c = c'$ ) garantiza la ausencia de dependencia en  $l^n$ , con  $n = \{-1, 0, 1\}$ , condiciones necesarias para poder escribir  $\mathcal{N}_0$  exclusivamente en términos de los invariantes básicos, como veremos inmediatamente. Para  $\mathcal{N}_1$  tenemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 = i_{X_{l^1}^R} \Theta &= -\frac{1}{24} \left[ -(cn^2 - c' + \frac{c}{2})n(n+1) - (cn^2 - c')n + \frac{c}{2}(n^2 + (n+1)^2 \right. \\ &\quad \left. - n(n+1)) - \frac{c'}{2} \right] l^n l^{-n-1} + \dots \quad (4.26) \end{aligned}$$

También podemos comprobar, aunque aquí no es tan obvio, que para  $n = \{0, -1, 1, -2\}$  y  $c = c'$  el polinomio en  $n$  que actúa como coeficiente del término cuadrático en los parámetros del grupo, se anula. Por tanto, los términos  $l^n$  con esos valores de  $n$  no contribuyen, permitiendo nuevamente la expresión en términos de los invariantes Noether básicos. Por último, para  $\mathcal{N}_{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{-1} = i_{X_{l^{-1}}^R} \Theta &= -\frac{1}{24} \left[ -(cn^2 - c' + \frac{c}{2})n(n-1) + (cn^2 - c')n + \frac{c}{2}(n^2 + (n-1)^2 \right. \\ &\quad \left. - n(n-1)) - \frac{c'}{2} \right] l^n l^{1-n} + \dots \quad (4.27) \end{aligned}$$

y análogamente, para  $n = \{0, -1, 1, 2\}$  y  $c = c'$ , los términos  $l^n$  no contribuyen.

La expresión de los invariantes Noether no básicos en términos de los básicos al primer orden no trivial se obtiene invirtiendo la expresión de  $l^k$  para  $|n| \geq 2$  al orden más bajo

$$l^k = \frac{12}{i(ck^2 - c')k} \mathcal{N}_{-k} + \dots, \quad |k| \geq 2, \quad (4.28)$$

y sustituyéndola en las expresiones correspondientes. Fijando definitivamente  $c = c'$ , simplificando factores comunes y haciendo explícita la sumatoria con los valores sobre los que corre, encontramos las expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 &= \frac{6}{c} \sum_{n \neq 0, \pm 1} \frac{1}{(n^2 - 1)} \mathcal{N}_{-n} \mathcal{N}_n + \dots \\ \mathcal{N}_1 &= \frac{6}{c} \sum_{n \neq 0, \pm 1, -2} \frac{1}{n(n+1)} \mathcal{N}_{-n} \mathcal{N}_{n+1} + \dots \\ \mathcal{N}_{-1} &= \frac{6}{c} \sum_{n \neq 0, \pm 1, 2} \frac{1}{n(n-1)} \mathcal{N}_{-n} \mathcal{N}_{n-1} + \dots \quad (4.29) \end{aligned}$$

Una comprobación no trivial de la consistencia de los resultados presentados, es la obtención de esta expresión (4.29) de los invariantes Noether correspondientes a generadores en el módulo característico en términos de los básicos, usando otra parametrización del grupo. Si bien la expresión de los invariantes Noether en términos de las variables del grupo



depende de la parametrización escogida, las expresiones en términos de otros invariantes Noether sólo depende de la base de los campos vectoriales invariantes (esto es, de la base del álgebra de Lie) usada. En particular, podemos usar las coordenadas *Campbell-Hausdorff* para realizar el cálculo de los invariantes Noether ( $\mathcal{N}_i$ ) a segundo orden.

En estas coordenadas la expresión de los  $\mathcal{N}_i$  es:

$$\mathcal{N}_q = i_{X_q^R} \Theta = \frac{1}{12} \left[ (cq^3 - c'q)l^{-q} + \frac{1}{2}(ci^3 - c'i)(j - q)\delta_{i+j}^{-q} l^i l^j \right] + \dots \quad (4.30)$$

de manera que al hacer  $c = c'$ , podemos escribir  $\mathcal{N}_{-1}, \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1$  en términos del resto de los invariantes Noether. Invirtiendo para los términos  $|q| \geq 2$

$$l^{-q} = \frac{12}{cq^3 - c'q} \left[ \mathcal{N}_q - \frac{1}{24}(ci^3 - c'i)(j - q)\delta_{i+j}^{-q} l^i l^j + \dots \right],$$

encontramos, por ejemplo para  $\mathcal{N}_1$ ,  $c = c'$

$$\mathcal{N}_1 = \frac{6}{c} \sum_{j \neq 0, \pm 1, -2} \frac{1}{j(j+1)} \mathcal{N}_{j+1} \mathcal{N}_{-j} + \dots$$

que coincide con el resultado encontrado con el otro sistema de coordenadas.

#### 4.2.2.b Espacio de configuración

La parametrización previa del espacio de las fases con  $\mathcal{N}_n$  (o  $\mathcal{L}_n$  en (4.21)), heredada del uso de las variables  $l^n$  como coordenadas en el grupo, corresponde a una descripción tipo *momentos*. A la hora de establecer conexiones y comparaciones con las teorías de campos comentadas en la Sección 4.1, resulta conveniente disponer de un tratamiento adaptado a lo que podemos llamar espacio de *configuración*. Al no disponer de un espacio-tiempo explícito, no podemos hacer uso de una base de funciones sobre el mismo para construir propiamente una inversa de una transformación de Fourier. Pero usando las soluciones a las ecuaciones del movimiento generalizadas (4.21), podemos definir a partir de los  $l^n$  la función sobre  $SO(1, 2) \approx SL(2, \mathbb{R})$

$$F(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) = \sum_n l_n(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1), \quad (4.31)$$

que es formalmente paralela a una expansión de Fourier de un campo,  $\phi(x, t) = \sum_k A_k e^{ikx - kot}$ , de forma que las constantes  $\mathcal{L}_n$  juegan el papel de las constantes  $A_k$ 's y las funciones que acompañan a las  $\mathcal{L}_n$ 's juegan el papel de las ondas planas. Explícitamente, con cierto abuso del lenguaje en la notación de  $l_n(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1)$  y  $l_n(\lambda_{-1}, \lambda_1)$ , encontramos

$$\begin{aligned} F(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) &= \sum_n l_n(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) = & (4.32) \\ &= \lambda_0 + \text{Re} \left[ \sum_0^\infty (-)^m \left( \sum_{s=0}^{m-2} \binom{m-1}{s} \mathcal{L}_{-m+s} (i\lambda_{-1})^s + \frac{i}{m} (-i\lambda_{-1})^m \right) (i\lambda_1)^m \right] \\ &+ \left[ \sum_{n>0} \sum_{s=0}^\infty \sum_{m=0}^{n-2} i^{s+m} \binom{n-1}{m} \binom{s+n-m}{n-m} \lambda_{-1}^s \lambda_1^m \mathcal{L}_{n-m+s} - \frac{i}{n} (i\lambda_1)^n \right] e^{in\lambda_0} \\ &+ \left[ \sum_{n>0} \sum_{s=0}^\infty \sum_{m=0}^{n-2} (-i)^{s+m} \binom{n-1}{m} \binom{s+n-m}{n-m} \lambda_1^s \lambda_{-1}^m \mathcal{L}_{-n+m-s} + \frac{i}{n} (-i\lambda_{-1})^n \right] e^{-in\lambda_0} \\ &\equiv \lambda_0 + \sum_n l_n(\lambda_{-1}, \lambda_1) e^{in\lambda_0} \end{aligned}$$



A la luz de la discusión de la próxima sección, nos interesa realizar el cambio de variables

$$\begin{cases} u &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_{-1}) \\ v &= \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_{-1}) \\ \lambda &= \lambda_0, \end{cases} \quad (4.33)$$

con lo que tenemos,

$$F(u, v, \lambda) = \lambda + \sum_n l_n(u, v) e^{in\lambda}. \quad (4.34)$$

### 4.2.3 Modelo físico

A continuación presentamos propiamente el modelo físico construido a partir del álgebra de Virasoro separando la exposición en tres bloques: formalismo matemático, interpretación física y límite clásico, siendo en este último punto donde haremos uso de los elementos presentados en la Sección previa.

#### 4.2.3.a Formalismo matemático

Como hemos insistido a lo largo del Capítulo, el sistema físico tiene un carácter directamente cuántico. Esto está ligado al hecho de estar modelado sobre una representación unitaria e irreducible del álgebra de partida. Por tanto, nuestro primer problema es el análisis de las representaciones unitarias e irreducibles del álgebra de Virasoro. Este problema está estudiado en [Ka79, FQS84, Wit88, AN90, AN91]. En particular las dos últimas referencias lo discuten en el contexto de la CSG, exposición que seguiremos aquí. Siendo éste un problema matemático no ligado necesariamente al problema de identificación de una noción de espacio-tiempo, trataremos el caso general en que puede darse  $c \neq c'$ .

Como vimos en el Capítulo 3, el espacio de representación está constituido por las  $U(1)$ -funciones complejas definidas sobre el grupo de Virasoro extendido, siendo reducible bajo la acción de los generadores del álgebra representados por los campos invariantes derechos. La reducción se realiza en principio imponiendo las condiciones de polarización. Dependiendo de los valores de  $c$  y  $c'$  podemos distinguir tres casos distintos:  $\frac{c'}{c} \neq r^2$  con  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $c = c'$  y  $\frac{c'}{c} = r^2$  con  $r \in \mathbb{Z}, r \neq 1$ .

En el último caso no existe una polarización que sea completa, esto es, que incluya a todo el módulo característico ( $\langle \tilde{X}_{l-r}^L, \tilde{X}_{l_0}^L, \tilde{X}_{l_r}^L \rangle$ ) y al mismo tiempo sea simpléctica, esto es, incluyendo uno y sólo uno de los generadores asociados a cada par dinámico. En los dos primeros casos sí existen tales polarizaciones completas y simplécticas<sup>3</sup>, por lo que por sencillez nos limitaremos a ellas. Encontramos las siguientes polarizaciones,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \langle \tilde{X}_{l^n \leq 0}^L \rangle \quad \text{para } \frac{c'}{c} \neq r^2 \\ \mathcal{P}^{(1)} &= \langle \tilde{X}_{l^n \leq 1}^L \rangle \quad \text{para } c = c', \end{aligned} \quad (4.35)$$

con ecuaciones de polarización asociadas,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{l^n \leq 0}^L \Psi &= 0 & \text{si } c \neq c' \quad (\tilde{X}_{l^n}^L \in \mathcal{P}) \\ \tilde{X}_{l^n \leq 1}^L \Psi &= 0 & \text{si } c = c' \quad (\tilde{X}_{l^n}^L \in \mathcal{P}^{(1)}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

<sup>3</sup>A su vez, en el primer caso la representación regular en general no puede ser reducida totalmente mediante el uso de polarizaciones de primer orden. A esto se añade, como veremos más adelante, que este caso presenta problemas asociados a la unitariedad.



De hecho podríamos trabajar únicamente con el caso  $c \neq c'$ , puesto que el otro se puede obtener a partir de él haciendo formalmente  $c = c'$  en las expresiones al final de los cálculos.

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene el espacio de Hilbert de representación [AN90, AN91]<sup>4</sup>. Como hemos dicho, los operadores del álgebra de Virasoro están representados por los generadores derechos. Para recuperar estrictamente las relaciones de conmutación redefinimos los generadores:

$$\hat{L}_{n \neq 0} \equiv i\tilde{X}_{ln}^R, \quad \hat{L}_0 \equiv i\tilde{X}_{l0}^R, \quad \hat{I} \equiv i\Xi. \quad (4.37)$$

Sin embargo a diferencia de lo que ocurre en el caso semisimple compacto en dimensión finita, las representaciones polarizadas no son necesariamente irreducibles. Como veíamos en el Apartado 3.2.2, este problema se puede solucionar incluyendo condiciones de polarización adicionales de orden superior construidas a partir del álgebra envolvente [AN91]. Sin embargo, en principio existe una forma alternativa para conseguir la irreducibilidad, al tiempo que permite evitar el manejo de las expresiones explícitas de campos y funciones de onda en la representación. Esto se debe al hecho (también mostrado en [AN91]), de que en las representaciones polarizadas, sean reducibles o no, existe un único estado  $|0\rangle$  que llamaremos *vacío*, que cumple las condiciones de peso máximo o de vacío

$$\hat{L}_n |0\rangle = 0 \quad \begin{cases} \forall n \geq 0 & \text{para } c \neq c' \\ \forall n \geq -1 & \text{para } c = c' \end{cases}. \quad (4.38)$$

Esto garantiza que el espacio lineal generado por la órbita del grupo a través de este estado, no sólo es invariante sino que además es irreducible. Esto es, podemos trabajar con una representación irreducible de peso máximo construida todavía sobre funciones explícitas. Desde un punto de vista práctico podemos cambiar de enfoque adoptando otro equivalente donde en lugar de trabajar con las representaciones explícitas, trataremos con una construcción formal del espacio de representación, que denotaremos por  $\mathcal{H}_{(c,c')}$ , entendido como la envolvente lineal de los estados construidos a partir de un estado de vacío (único)  $|0\rangle$ . Esto es, nuestros espacios formales de representación tienen la forma:

$$\mathcal{H}_{(c,c')} \equiv \langle \hat{L}_{n_j} \dots \hat{L}_{n_1} |0\rangle \rangle \quad \begin{cases} n \leq -1 & j = 1, 2, 3, \dots & \text{para } c \neq c' \\ n \leq -2 & j = 1, 2, 3, \dots & \text{para } c = c'. \end{cases} \quad (4.39)$$

El producto escalar en este espacio viene dado por la condición de normalización del vacío,  $\langle 0|0\rangle = 1$ , y la definición de operador adjunto,  $(\hat{L}_n)^\dagger = \hat{L}_{-n}$ .

No todos los pares  $(c, c')$  tienen asociadas representaciones unitarias, condición necesaria para utilizarlos como soporte de un modelo de carácter cuántico. Por otra parte, la construcción de las representaciones a partir de estados formales, conlleva la aparición de estados nulos<sup>5</sup>, que en las representaciones explícitas se anulan de forma exacta. La presencia de estos estados implica la reducibilidad de la representación formal. Esto se soluciona tomando cociente por estos estados nulos, lo que constituye la aproximación de módulos de Verma a la construcción de las representaciones.

En definitiva, podemos sintetizar la discusión anterior haciendo explícitos los valores de los parámetros  $c$  y  $c'$ <sup>6</sup> para los cuales se obtiene unitariedad e irreducibilidad [Ka79, FF82,

<sup>4</sup>En rigor, las ecuaciones resueltas allí representan una versión *dual* de las que tratamos nosotros, puesto que hemos cambiado izquierda por derecha en la ley de grupo.

<sup>5</sup>Estados que satisfacen las condiciones de vacío y que por tanto funcionan como vectores de peso máximo.

<sup>6</sup>En la literatura, las representaciones irreducibles de Virasoro suelen estar parametrizadas en términos del par  $(c, h)$ , donde  $c$  es la extensión central y  $h$  el valor esperado en el vacío del operador  $\hat{L}_0$ . Aquí preferimos usar la parametrización que hace explícita la pseudo-extensión  $c'$ , mejor adaptada a nuestro análisis. Para pasar de una a otra simplemente hacemos  $h = (c - c')/24$ .



Th84, FMS97, ID89, AN90, AN91].

i) Valores de  $c$  y  $c'$  que hacen unitaria la representaciones:

a)  $c \geq 1$ , con  $\frac{c-c'}{24} \geq 0$

b)  $0 < c < 1$  con

$$\begin{cases} c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)} \\ \frac{c-c'}{24} &= \frac{[(m+1)r-ms]^2-1}{4m(m+1)} \end{cases} \quad (4.40)$$

y  $1 \leq s \leq r \leq m-1$  y  $m, r, s$  enteros con  $m \geq 2$ . El resto de los pares  $(c, c')$  conducen a representaciones no unitarias.

ii) Valores de  $c$  y  $c'$  para representaciones reducibles:

$$\begin{cases} c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)} \\ \frac{c-c'}{24} &= \frac{[(m+1)r-ms]^2-1}{4m(m+1)} \end{cases} \quad (4.41)$$

donde  $r, s \in \mathbb{Z}^+$  y  $m \in \mathbb{R}^+$ . Por tanto, para  $c > 1$ , tenemos siempre representaciones irreducibles.

Esto completa nuestro breve repaso de la teoría de representaciones del álgebra de Virasoro. Las representaciones de interés para que nuestro modelo físico pueda incluir una estructura espacio-temporal se obtienen imponiendo  $c = c'$ , de forma que  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R}) \approx SO(1, 2)$  aparece en el álgebra característica. Podemos distinguir dos tipos de operadores,

a) Operadores *simplécticos* (a los que nos referiremos como *gravitatorios*):  $\hat{L}_n$ ,  $|n| \geq 2$ .

b) Operadores *de evolución* (que denotaremos como *espacio-temporales*):  $\hat{L}_n$ ,  $|n| \leq 1$ .

Con el objeto de simplificar la construcción matemática del modelo de dinámica cuántica *gravitatoria*, nos centraremos en el caso  $c > 1$ . Veremos después que esta condición también se ve apoyada por la aparición de ciertas escalas de longitud en la interpretación que haremos de modelo (ver Subapartado 4.2.3.c). En cualquier caso, la combinación de las condiciones  $c > 1$  y  $c = c'$ , garantiza la unitariedad e irreducibilidad de las representaciones, al tiempo que dejan la puerta abierta para la discusión sobre la aparición de una noción espacio-temporal.

#### *Realización del espacio-tiempo*

Para comenzar el estudio de la realización de la noción espacio-temporal, y teniendo en cuenta que este concepto está intrínsecamente ligado a la estructura del subgrupo  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , nos planteamos el problema de describir la representación de todo el álgebra desde el punto de vista de este subgrupo. Esto se consigue reduciendo la representación total de Virasoro  $\mathcal{H}_{(c,c)}$  bajo  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ .

La unitariedad de la representación total de Virasoro es heredada por las subrepresentaciones de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  contenidas en la misma, y por tratarse de un grupo no compacto, resultan ser de dimensión infinita. Es más, estas subrepresentaciones de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  son de peso máximo, consecuencia de la construcción de la representación de Virasoro como una órbita sobre el vacío, y corresponden de hecho a la serie discreta de  $SL(2, \mathbb{R})$  (ver [La75] para una discusión de las representaciones de  $SL(2, \mathbb{R})$ ).



Comentamos la naturaleza general del resultado (los detalles técnicos pueden verse en el Apéndice B). En cada nivel de la representación del grupo de Virasoro <sup>7</sup>, existen  $(D^N - D^{N-1})$  vectores de peso máximo de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , donde  $D^N$  es la dimensión del nivel  $N$ , que está dada por el número de particiones de  $N$  en las que no aparece el 1. Por ejemplo, para  $N = 4$ , la partición  $(2, 2)$  está permitida mientras que la partición  $(3, 1)$  no lo está. A partir de cada uno de estos vectores de peso máximo, podemos construir una representación irreducible que denotaremos por  $R^{(N)}$ , caracterizada por un índice de Bargmann  $N$  y un Casimir  $N(N - 1)$ . Podemos escribir explícitamente la reducción del espacio de Hilbert original, resultando:

$$\mathcal{H}_{(c,c)} = \bigoplus_N (D^{(N)} - D^{(N-1)}) R^{(N)} . \quad (4.42)$$

Estas representaciones irreducibles de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  son ortogonales entre sí (ver Apéndice B), bajo el producto escalar de Virasoro ( $\hat{L}_n = \hat{L}_{-n}^\dagger$ ,  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ ), permitiendo la construcción de proyectores ortogonales sobre cada una de las subrepresentaciones y por tanto una interpretación cuántica estándar de los estados. También notamos que la degeneración de  $R^{(N)}$ ,  $(D^{(N)} - D^{(N-1)})$ , crece con  $N$ .

A continuación damos algunos ejemplos de representaciones de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , correspondientes a los valores más bajos de  $N$  (ver también Figura 4.1). Para ello, buscamos los estados de peso máximo de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  en el nivel  $N$  de Virasoro, considerando la combinación lineal más general de estados de Virasoro en ese nivel  $N$  y simplemente determinando los coeficientes para los cuales el vector es aniquilado por  $\hat{L}_1$  (existen  $(D^{(N)} - D^{(N-1)})$  soluciones, que es la dimensión del núcleo de  $\hat{L}_1$  restringido al nivel  $N$ ). Denotamos estos estados de peso máximo en el nivel  $N$  como  $|N, n = 0, i\rangle$ , donde  $i$  es el índice de degeneración de  $R^{(N)}$ . Los estados excitados de la correspondiente representación de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  se obtienen aplicando el operador  $\hat{L}_{-1}$  sucesivamente sobre el vacío correspondiente:  $|N, n, i\rangle = (\hat{L}_{-1})^n |N, 0, i\rangle$ .

- Para  $N = 1$ , no hay estados en la representación de Virasoro, como consecuencia de  $c = c'$ , y por tanto no hay representaciones de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  con  $N = 1$ .
- Para  $N = 2$ , únicamente tenemos un vector  $\hat{L}_{-2} |0\rangle$ , donde  $|0\rangle$  es el vacío de Virasoro. Este estado es de hecho aniquilado, como debe ocurrir, por  $\hat{L}_1$ . Los estados excitados son:

$$|N = 2, n\rangle = C_{2,n} (\hat{L}_{-1})^n \hat{L}_{-2} |0\rangle, \quad (4.43)$$

donde  $C_{2,n}$  es una constante de normalización.

- Para  $N = 3$ ,  $(D^{(3)} - D^{(2)}) = 1 - 1 = 0$ , y por tanto no hay vacío de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ .
- Para  $N = 4$ , el único vacío y los correspondientes estados excitados son:

$$|N = 4, n\rangle = C_{4,n} (\hat{L}_{-1})^n \left( -\frac{3}{5} \hat{L}_{-4} + \hat{L}_{-2} \hat{L}_{-2} \right) |0\rangle. \quad (4.44)$$

- Para  $N = 5$ , como para  $N = 3$ , no hay vacío.

<sup>7</sup>Se denomina nivel de la representación del grupo de Virasoro al espacio de dimensión finita de autovectores de  $\hat{L}_0$  con autovalor  $N$ .



- Para  $N = 6$ , tenemos los siguientes vacíos (elegidos como ortogonales mediante un proceso de Gram-Schmidt):

$$\begin{aligned}
 |N = 6, n = 0, 1\rangle &= C_{6,0,1} \left( \frac{-1}{7} \hat{L}_{-6} - \frac{8}{5} \hat{L}_{-4} \hat{L}_{-2} + \hat{L}_{-3} \hat{L}_{-3} \right) |0\rangle \text{ and} \quad (4.45) \\
 |N = 6, n = 0, 2\rangle &= C_{6,0,2} \left( \frac{1183-6080c}{-18646+20160c} \hat{L}_{-6} + \frac{28013+211680c}{74584-80640c} \hat{L}_{-4} \hat{L}_{-2} \right. \\
 &\quad \left. + \hat{L}_3 \hat{L}_3 + \frac{10365+22400c}{-18646+20160c} \hat{L}_{-2} \hat{L}_{-2} \hat{L}_{-2} \right) |0\rangle.
 \end{aligned}$$

que generan las correspondientes representaciones.

La descomposición de la representación de Virasoro bajo  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , nos permite enunciar la forma en la que la noción de espacio-tiempo es modelada en el formalismo matemático.

*Proponemos que cada representación irreducible de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  tiene asociada una geometría espacio-temporal individual.*

Postergamos una discusión más detallada sobre la manera de formalizar esta relación entre una representación dada y su geometría correspondiente, limitándonos aquí a apuntar que el espacio-tiempo está constituido por aquel espacio homogéneo de  $SO(1, 2) \approx SL(2, \mathbb{R})$  que actúa como soporte de las funciones complejas que expanden el espacio de representación en cuestión. Como veremos en el Subapartado 4.2.4.a, para el caso de la serie discreta de  $SL(2, \mathbb{R})$ , que es la que aparece en la reducción, tal espacio viene dado por  $AdS^2$ .

La discusión anterior sobre la reducción de la representación sólo es válida para  $c > 1$ , puesto que en ella se hace uso implícitamente de la ausencia de vectores nulos en la representación de Virasoro. Aunque para las representaciones unitarias e irreducibles con  $c \leq 1$  podríamos plantear el problema de reducir la representación, tal reducción sería considerablemente más complicada, haciendo más difícil el problema de la identificación de los espacio-tiempos correspondientes. Desde la perspectiva de las funciones polarizadas, el hecho de que la irreducibilidad en estos casos se obtenga mediante el empleo de polarizaciones de orden superior, también introduce complicaciones a la hora de identificar el espacio soporte de las funciones de onda y por tanto de la variedad buscada. En cualquier caso, estas situaciones no van a aparecer en nuestro modelo.

En definitiva, para cada representación de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  tenemos un espacio-tiempo y, por tanto, encontramos una colección de espacio-tiempos que se realizan *simultáneamente* en la teoría.

#### 4.2.3.b Interpretación física

Un punto de carácter preliminar pero importante para la interpretación física, es la asignación de dimensiones físicas a los distintos elementos que aparecen en el modelo.

A la vista de las relaciones de conmutación del álgebra de Virasoro (4.12), observamos que la dimensión de los números enteros que en ella aparecen es, por consistencia, la misma que la de los generadores  $\hat{L}_n$ . Tal dimensión la podemos determinar si, con la ayuda de las ecuaciones de movimiento generalizadas, identificamos clásicamente los parámetros del grupo (o más correctamente los parámetros asociados a estos generadores infinitesimales) con variables con dimensión de longitud  $[L]$ . Por tanto, la dimensión de generadores  $\hat{L}_n$  y enteros  $n$  es  $[L]^{-1}$ , que implica a su vez que  $c$  tiene dimensiones de  $[L]$  y  $c'$  de  $[L]^{-1}$ .



Es importante redefinir los enteros para que sean de naturaleza adimensional, esto es, puramente números. Si éste no es el caso, no podemos dotar de auténtico sentido físico a expresiones matemáticamente bien definidas como  $\frac{c'}{c} = r^2$  ó  $c > 1$ . Necesitamos introducir una escala para decidir si un entero es grande o no. Incorporamos una escala de longitud,  $a$ , al modelo y la empleamos para redefinir los enteros,  $n \rightarrow \frac{1}{a}n$ , en todas las expresiones anteriores. Esto no se ha hecho previamente con el objeto de no crear confusión con los tratamientos del álgebra de Virasoro existentes en la literatura.

En consecuencia, el modelo dispone de tres constantes con dimensiones de longitud:  $c$ ,  $\frac{1}{c}$  y  $a$ . Sin embargo, en el caso crítico para el que surge la noción de espacio-tiempo, estas constantes no son independientes debido a la condición  $c = c'a^2$ , que es la versión dimensionalmente correcta de la expresión  $c = c'$  una vez que el análisis dimensional ha entrado en juego. Elegiremos, por ejemplo,  $c$  y  $a$  como las constantes independientes. Al discutir el límite clásico veremos que tiene sentido relacionar  $c$  con una noción de distancia *grande* y  $a$  con una distancia *pequeña*, de forma que el cociente adimensional  $\frac{a}{c}$  se comporta como el parámetro de expansión en un desarrollo perturbativo, jugando el papel de *constante de Planck* en el modelo. Esta constante  $\frac{a}{c}$  puede usarse para reescalar los operadores en la teoría como es usual en Mecánica Cuántica:

$$\hat{H}_n = \frac{a}{c} \hat{L}_n . \quad (4.46)$$

Con estos elementos estamos en condiciones de asignar una interpretación física a los distintos objetos del modelo.

#### *Estados y operadores en una representación de $SL(2, \mathbb{R})$*

Como hemos dicho en la sección anterior, cada representación de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  tiene asociado un espacio-tiempo. Fijada una de estas representaciones, esto es, dado un espacio-tiempo en concreto, interpretamos *cada* vector de esa representación como un estado de *todo* ese espacio-tiempo.

En cuanto a la interpretación de los operadores de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , notamos que los vectores  $|N, n, i\rangle$  que definen una base en cada representación son autoestados del operador  $\hat{H}_0$ . Este último, restringido a una representación dada, puede ser interpretado como un operador de energía de ese espacio-tiempo. De hecho la expresión de  $\hat{L}_0$  en términos de las variables básicas  $\hat{L}_n$  ( $|n| \geq 2$ ) es una generalización de la energía del oscilador armónico y presenta semejanza con la construcción de Sugawara del hamiltoniano en teorías conformes de campos. Por tanto el vector de peso máximo de la representación,  $|N, 0, i\rangle$ , constituye el estado fundamental del correspondiente espacio-tiempo, mientras que la acción del operador  $\hat{H}_{-1}$  mueve al espacio-tiempo a estados excitados:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0((\hat{H}_{-1})^n |N, 0\rangle) &= \frac{a}{c} \frac{(N+n)}{a} (\hat{H}_{-1})^n |N, 0\rangle \\ \text{Energía}(n) &= \frac{N+n}{c} . \end{aligned} \quad (4.47)$$

Utilizamos el término *Universo* para referirnos a toda la representación de Virasoro, o físicamente al conjunto de todos los espacio-tiempos. El vacío de la representación de Virasoro,  $|0\rangle$ , se interpreta como el vacío físico de todo el *Universo*, estado en el que ni siquiera tenemos una estructura espacio-temporal. La energía de este vacío es cero, algo razonable para un estado que representa la ausencia de todo, pero la razón no es trivial: es una consecuencia de que  $c$  y  $c'$  satisfagan la condición crítica  $c = c'a^2$ .



*Noción métrica*

Hasta ahora, hemos estado usando el término espacio-tiempo para referirnos al soporte asociado a cada representación de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ . Sin embargo, tal terminología no es muy precisa, pues a lo sumo lo que hemos hecho es asociar una variedad diferenciable a la representación, pero sin ninguna noción métrica, algo fundamental para poder hablar propiamente de estructura espacio-temporal. Puesto que queremos minimizar la incorporación de elementos externos al formalismo, y dado que en el contexto de nuestro modelo la única métrica que puede ser construida de una manera natural es la de Killing de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , usaremos esta métrica como objeto clave en este punto. La estructura espacio-temporal sobre el hiperboloide de una hoja, que es la topología de los espacios homogéneos asociados a las representaciones aquí consideradas, estará inducida por la forma de Killing de todo el grupo  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ . Esta métrica resulta ser la del espacio de Anti de Sitter  $AdS^2$ , debido a que el generador que asociamos con la componente temporal  $\hat{L}_0$ , es de carácter compacto y estamos tratando con las representaciones de peso máximo de la serie discreta (Subapartado 4.2.4.a). La métrica queda fijada salvo un factor global, el *radio* de Anti de Sitter, que debería ser una distancia caracterizada completamente por la representación de Virasoro con la que estamos trabajando, esto es por  $c$ , y por la representación particular de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ ,  $N$ , asociada al espacio-tiempo en cuestión. Una distancia que cumple tales requisitos viene dada por la raíz cuadrada del inverso del Casimir de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , expresado en términos de  $\hat{H}_0, \hat{H}_1, \hat{H}_{-1}$ . Esto es:

$$\frac{1}{R^2} \equiv \hat{H}_0^2 - \frac{1}{2}(\hat{H}_1\hat{H}_{-1} + \hat{H}_{-1}\hat{H}_1) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \frac{N(N-1)}{a^2} = \frac{N(N-1)}{c^2}. \quad (4.48)$$

En un sistema local de coordenadas, podemos expresar la métrica sobre  $AdS^2$  como (ver (4.76))

$$ds^2 = -dv^2 - d\lambda^2 + du^2 \quad (4.49)$$

$$v^2 + \lambda^2 - u^2 = \frac{c^2}{N(N-1)},$$

donde las variables  $u$  y  $v$  son las combinaciones lineales de  $\lambda^1$  y  $\lambda^{-1}$ , que presentamos en la Sección anterior. Ahora podemos hablar propiamente de espacio-tiempos de Anti de Sitter.

*Operadores simplécticos*

Hasta ahora nos hemos ocupado de los generadores del subgrupo  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , que proporcionan un conjunto de espacio-tiempos de Anti de Sitter con *radios*  $\frac{c}{\sqrt{N(N-1)}}$ , asociados a cada representación  $R^{(N)}$  de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ . Sobre ellos, los generadores  $\hat{H}_{-1}$  actúan creando estados excitados que son desexcitados por  $\hat{H}_1$ . Por tanto, hasta el momento no hay ninguna relación entre las distintas representaciones de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , esto es, entre los distintos espacio-tiempos que aparecen en la teoría. Consideremos ahora los modos  $\hat{H}_n$  ( $|n| \geq 2$ ) a los que hemos denominado *gravitatorios*. Estos generadores no respetan las representaciones de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , puesto que no conmutan con sus generadores, sino que las mezclan. Por tanto su efecto es el de transformar un estado de un espacio tiempo definido, en una combinación lineal de estados correspondientes a diferentes espacio-tiempos. Esto es, si comenzamos con un estado correspondiente a un espacio-tiempo de radio  $R$ , después de la acción de estos modos *dinámicos* el vector que describe el estado de espacio-tiempo es una superposición



de estados en espacio-tiempos con distinto *radio*. Haciendo uso de la ortogonalidad de las distintas subrepresentaciones de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , podemos definir la probabilidad de que el estado en cuestión tenga un radio dado simplemente aplicando el proyector ortogonal sobre la representación adecuada.

*Discusión general. Difeomorfismos e invariancia gauge*

La esencia de nuestro modelo de gravedad cuántica la podemos expresar diciendo que el *Universo* no está descrito mediante un único espacio-tiempo (representación de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ ), sino por toda una colección de ellos. Un estado de ese *Universo* viene dado por una superposición de espacio-tiempos con diferentes *radios* (estados en diferentes representaciones de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ ). No tiene sentido hablar del *radio* del *Universo*, sólo de la probabilidad de que el Universo tenga un radio dado. El efecto de la *gravedad* es el de cambiar la distribución en *radios* del *Universo*. De hecho, los operadores  $\hat{H}_{n \geq 2}$  tienen el efecto de mover la distribución hacia valores más pequeños de los radios, mientras que  $\hat{H}_{n \leq 2}$  producen *radios* mayores<sup>8</sup>. Sobre un espacio-tiempo dado, los operadores  $\hat{H}_{|n|=1}$  producen excitaciones de todo el espacio-tiempo, pero no cambian el radio del *Universo*<sup>9</sup>.

Una vez que disponemos de una noción de espacio-tiempo, tiene sentido plantear la realización del álgebra de Virasoro, como generadores infinitesimales de algunos de los difeomorfismos de ese espacio-tiempo. De este modo, los operadores de la teoría pueden verse como la versión cuántica de los cambios de sistema de referencia generales no lineales, considerados de forma estándar como transformaciones *gauge* en la teoría, esto es, sin contenido dinámico. Sin embargo, en nuestro modelo dichos operadores cuánticos generan auténticos cambios dinámicos puesto que tienen una acción no trivial sobre el espacio de Hilbert del sistema físico, esto es, la variedad cuántica de soluciones. Por ejemplo, el operador  $\hat{H}_2$  lleva el estado  $|N = 4, n = 0\rangle \equiv (-\frac{3}{5}\hat{L}_{-4} + \hat{L}_{-2}\hat{L}_{-2})|0\rangle$ , que representa el estado fundamental de un espacio-tiempo de  $AdS^2$  de *radio*  $\frac{c}{\sqrt{3.4}}$  al estado fundamental de otro espacio-tiempo, ahora de *radio*  $\frac{c}{\sqrt{1.2}}$ . Sólo en el límite  $c \rightarrow \infty$ , el límite clásico como veremos en el siguiente punto, no somos capaces de distinguir entre ambos radios, y podemos plantearnos si tal transformación es *gauge*.

Los operadores energía y radio (inverso del Casimir) permiten distinguir distintos espacio-tiempos (salvo una degeneración para representaciones equivalentes de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ ). Sin embargo, en el límite  $c \rightarrow \infty$  encontramos que, para cada espacio-tiempo, la energía del estado fundamental tiende a cero ( $Energía|N, 0\rangle \rightarrow 0$ ), y el radio diverge ( $R = \frac{c}{\sqrt{N(N-1)}} \rightarrow \infty$ ). Por tanto, en este límite los espacio-tiempos son físicamente indistinguibles y tiene sentido identificarlos, existiendo un único espacio-tiempo en dicho límite. Esto implica la pérdida de contenido dinámico de los modos  $\hat{L}_n$ , de manera que recuperamos la naturaleza *gauge* de estos difeomorfismos, pero sólo en el límite clásico. El espacio de soluciones bajo

<sup>8</sup>Debemos enfatizar que, como consecuencia del hecho de estar trabajando con representaciones de peso máximo, el efecto neto de los modos dinámicos es el decrecimiento del radio promedio del *Universo*, puesto que los  $\hat{H}_{n \geq 2}$  acaban aniquilando un estado dado del *Universo*, no siendo éste el caso de los  $\hat{H}_{n \leq 2}$ .

<sup>9</sup>Desde un punto de vista efectivo, podrían interpretarse como la presencia de una partícula, o más bien de un *agujero* (véase el modelo fenomenológico en 6.5.2.b), moviéndose libremente sobre el  $AdS^2$  sin excitar, esto es, el estado fundamental de la representación en cuestión. De hecho, podemos incluso asociar una noción de masa  $m = m(N)$  a esa *partícula*, que puede determinarse identificando nuestros estados de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  con los que aparecen en [Fr74, AIS78, ABGN96], donde las funciones de onda que describen el movimiento de una partícula sobre un espacio de Anti de Sitter constituyen una representación irreducible de  $SL(2, \mathbb{R})$  con índice dado por  $N = \frac{cR}{m\hbar}$  (en esta expresión  $c$  es la velocidad de la luz,  $\hbar$  es la constante de Planck estándar y  $R$  es el radio de Anti de Sitter).



las ligaduras de difeomorfismos se correspondería con un espacio de fases con un grado de libertad. Esta situación es bastante estándar en otras aproximaciones a la gravedad bidimensional, donde las ligaduras de difeomorfismos son impuestas antes de cuantizar [Mik92, NNA93].

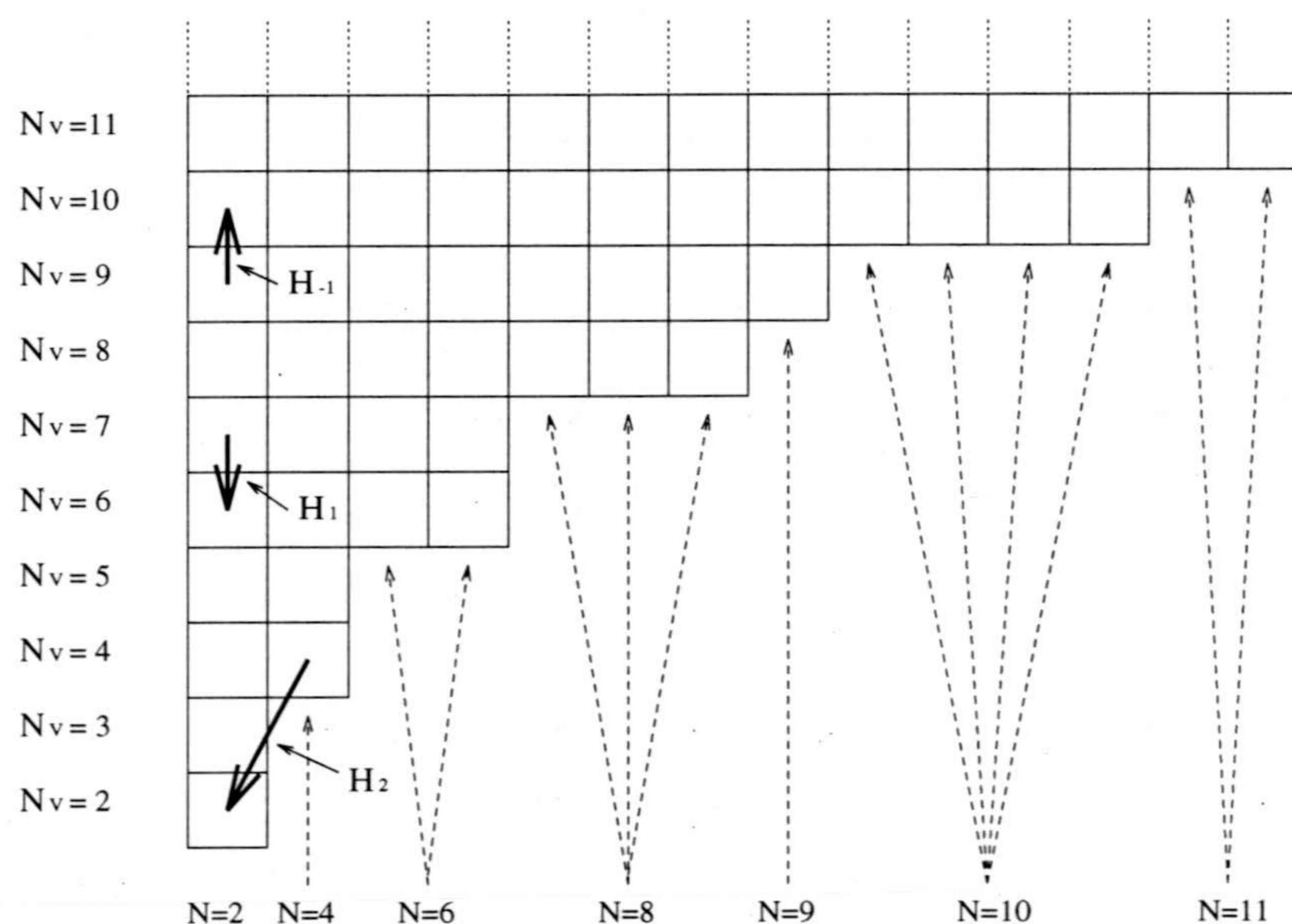


Figura 4.1: Estructura de  $\mathcal{H}_{(c,c)}$  donde cada cuadro debe interpretarse como un vector individual. Las filas representan niveles  $N_V$  de Virasoro mientras que las columnas corresponden a representaciones de  $SL(2, \mathbb{R})$  con índice dado por  $N$ . Se ejemplifica la acción de  $\hat{H}_{-1}$  y  $\hat{H}_1$  sobre una representación de  $SL(2, \mathbb{R})$  dada ( $N = 2$ ), así como la mezcla de representaciones de  $SL(2, \mathbb{R})$  por  $\hat{H}_n, |n| \geq 2$ .

#### 4.2.3.c El límite clásico

Consideremos ahora el límite semiclásico, con el objeto de justificar las afirmaciones hechas sobre las constantes del modelo, así como para establecer el punto de conexión con los tratamientos presentados en la Sección 4.1.

Como se muestra en [Wit88], usando los corchetes de Poisson clásicos del modelo, se puede argumentar que la región semiclásica de cuantización para el grupo de Virasoro corresponde a  $c \rightarrow \infty$ . El análisis de las representaciones del álgebra que hemos presentado en el Subapartado 4.2.3.a también está en esta línea pues, como hemos visto, la aparición de estados nulos (asociados a representaciones más *cuánticas*) ocurre para  $c < 1$ , presentando los valores de  $c$  grandes un comportamiento más regular. Por tanto, la constante de Planck en el modelo resulta proporcional a  $\frac{1}{c}$  (ó  $\frac{a}{c}$  al introducir dimensiones y la constante  $a$ ). Como consecuencia, en la región semiclásica  $\frac{a}{c} \rightarrow 0$  la distancia  $a$  resulta mucho más pequeña que  $c$ . Es la consistencia con el límite clásico la razón que justifica la elección de  $c$  como constante asociada a una distancia fundamental grande (en definitiva a la noción de *radio* de cada espacio-tiempo) y  $a$  a una pequeña. La condición que caracteriza a la clase de representaciones de Virasoro que estamos estudiando,  $c > 1$  ( $c > a$ ), garantiza que  $c$  sea



siempre mayor que  $a$ . Por consiguiente, distancias *grandes* y *pequeñas* son nociones bien definidas en el sentido de que no se cruzan una con otra. Esto deja de ser válido en el régimen cuántico severo  $c < 1$  ( $c < a$ ).

Puesto que los *radios* de los espacio-tiempos vienen dados por  $\frac{c}{\sqrt{N(N-1)}}$ , la región semiclásica del sistema se corresponde con espacios de  $AdS^2$  de *radio* grande. La curvatura de la métrica sobre el hiperboloide, al ser inversamente proporcional al cuadrado del *radio*, se hace muy pequeña, con lo que nos aproximamos a un espacio-tiempo de Minkowski. En términos vagos, podemos decir que en la región semiclásica, la *constante cosmológica* tiende a cero en la región semiclásica [HE73, We72], al ser proporcional a la curvatura.

Desarrollamos el límite clásico con más detalle y lo comparamos con el formalismo semiclásico descrito en el Apartado 4.2.2, con el objeto de identificar el contenido físico de la teoría en este límite fenomenológico.

Cuánticamente, la dinámica se describe por la acción de los modos  $\hat{L}_n$  ( $|n| \geq 2$ ). Su efecto es el de mezclar los estados de espacio-tiempos que poseen *radios* distintos en general, afectando por tanto a cierta noción cuántica de *distancia*. En la descripción de espacio de configuración, la dinámica está codificada en el operador  $\hat{F}$  asociado al campo  $F$ , obtenido al reemplazar las constantes  $\mathcal{L}_n$  con los correspondientes operadores cuánticos  $\hat{L}_n$  en la expresión de  $F(\lambda, u, v)$ . En el límite clásico, donde existe un único espacio-tiempo como hemos indicado previamente, el resultado fenomenológico de las transformaciones dinámicas debe ser relacionado con la introducción de cambios en la correspondiente noción clásica de *distancia*. En una teoría clásica, el objeto que modela tales cambios en la distancia es un campo tensorial métrico dinámico. Por tanto, en el límite  $c \rightarrow \infty$  de esta teoría, resulta razonable asumir que el campo  $F(\lambda, u, v)$  está asociado a la parte dinámica de la métrica. De forma más precisa, proponemos que el tensor métrico adopta la forma

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}_{din} , \quad (4.50)$$

donde  $\eta^{\mu\nu}$  es la métrica de fondo heredada de la métrica rígida de  $AdS^2$  en cada uno de los espacio-tiempos coexistentes en la teoría cuántica y  $g^{\mu\nu}_{din}$  es la parte dinámica, que ha de ser expresada en términos del campo clásico  $F(\lambda, u, v)$ . Para determinar la forma explícita de  $g^{\mu\nu}_{din}$ , recurrimos a la formulación clásica desarrollada en la parte final del Apartado 4.2.2. En primer lugar, imponemos a los parámetros de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  la ligadura que permite trabajar sobre un espacio de  $AdS^2$  de *radio*  $R$ , lo cual constituye el análogo clásico a la restricción a subrepresentaciones de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  en la teoría cuántica mediante la imposición de la ligadura del Casimir. A partir de la expresión (4.34), obtenemos

$$\begin{aligned} F_{AdS}(u, \lambda) &\equiv \int dv \delta(v^2 + \lambda^2 - u^2 - R^2) F(u, v, \lambda) = \\ &= \int dv \delta(v^2 + \lambda^2 - u^2 - R^2) \left( \lambda + \sum_n l_n(u, v) e^{in\lambda} \right) . \end{aligned}$$

Esta ligadura impone a  $v$  la forma

$$v = \sqrt{R^2 - \lambda^2 + u^2} = R \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2 + \left(\frac{u}{R}\right)^2} , \quad (4.51)$$

que, en el límite clásico  $R \rightarrow \infty$ , se simplifica a  $v \sim R$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} l_n(u, v) &\sim l_n(u, R \rightarrow \infty) = l_n(u) \\ F_{AdS}^{R \rightarrow \infty}(u, \lambda) &= \lambda + \sum_n l_n(u) e^{in\lambda} \equiv F(u, \lambda) \end{aligned} \quad (4.52)$$



Esta expresión puede invertirse directamente, recuperando la expresión de [ANN91] para los  $l_n$ , interpretados allí como modos de Fourier de los difeomorfismos de  $S^1$ . A partir de esta expresión y de la forma explícita de  $\Theta$ , obtenemos la expresión para la acción del campo  $F(u, \lambda)$ :

$$S = \int \Theta = -\frac{c}{48\pi} \left( \int dud\lambda \frac{\partial_u F}{\partial_\lambda F} \left( \frac{\partial_\lambda^3 F}{\partial_\lambda F} - 2 \frac{(\partial_\lambda^2 F)^2}{(\partial_\lambda F)^2} \right) + \int dud\lambda \frac{\partial_u F}{\partial_\lambda F} (\partial_\lambda F - 1) \right) . \quad (4.53)$$

Llegados a este punto, reconocemos la forma de la acción de Polyakov con un término correctivo. El papel de las variables del cono de luz,  $x^-$  y  $x^+$ , lo juegan  $\lambda$  y  $u$ , respectivamente. Si repetimos en orden inverso los desarrollos de la referencia [Po87], podemos identificar la expresión anterior como la acción para una métrica dinámica de la forma

$$ds_{dyn}^2 = \partial_\lambda F d\lambda du . \quad (4.54)$$

Por tanto, la forma completa de la métrica en el límite clásico es:

$$ds^2 = ds_{AdS(R \gg 1)}^2 + \partial_\lambda F d\lambda du . \quad (4.55)$$

Podemos ver explícitamente que, debido a la presencia del término de fondo, la naturaleza de  $\lambda$  y  $u$  no es la de variables tipo cono de luz, sino más bien de tiempo y espacio, lo cual es dictado por la métrica de  $AdS^2$ . Sólo en el régimen ( $c \rightarrow \infty$ ,  $|\partial_\lambda F| \gg 1$ ) el término de fondo puede ser despreciado y podemos recobrar propiamente la acción de Polyakov. Este tipo de términos correctivos también han sido encontrados en la literatura en aproximaciones propiamente de órbitas coadjuntas, [NP92], donde se interpretan como un campo externo  $U$ , mientras que en nuestro caso resulta fundamental para la consistencia de la noción espacio-temporal en el modelo.

#### 4.2.4 Noción de espacio-tiempo

Un punto crítico en nuestra aproximación al espacio-tiempo como noción derivada de un conjunto de simetrías, es la obtención de la estructura espacio-temporal a partir de una representación irreducible de lo que podríamos llamar grupo *cinemático* (módulo característico).

En este Apartado obviamos la discusión *física* y nos centramos en los aspectos matemáticos. Específicamente, queremos definir formalmente una correspondencia que a cada representación le asigne sin ambigüedad un espacio-tiempo.

##### 4.2.4.a Soporte de la clase de representaciones

La idea intuitiva que subyace en este enfoque se ilustra mejor en el caso compacto y consiste en asociar a una representación irreducible de  $SO(3)$ , el espacio  $S^2 = SO(3)/SO(2)$  como variedad soporte. Si los estados de la representación en cuestión van a estar vinculados a características de un espacio-tiempo, tiene sentido pensar en ellos como funciones con soporte en esa geometría. Esto es lo que ocurre con los estados de las representaciones irreducibles de  $SO(3)$  al escribirlos como armónicos esféricos sobre  $S^2$ . En rigor, una única representación irreducible no necesita toda la esfera  $S^2$ , estando esta última asociada a todo el conjunto (clase) de las representaciones irreducibles de  $SO(3)$ , que de hecho constituyen una base de las funciones sobre la esfera.



Los grupos no compactos, como nuestro  $SO(1,2)$ , presentan distintas *clases* de representaciones cada una de las cuales tiene su propio espacio soporte. En definitiva, vamos a escoger como espacio-tiempo asociado a una representación dada del grupo característico  $G_\Theta$ , al espacio homogéneo de  $G_\Theta$  que constituye el soporte para la clase de representaciones a la que pertenece nuestra representación en cuestión y tal que  $G_\Theta$  actúe como grupo de isometrías sobre él.

Obviamente no podemos entender esto como una *derivación* de la estructura espacio-temporal a partir de la simetría, pero sí como una elección consistente que establece la correspondencia bien definida que buscábamos.

#### *Serie discreta degenerada de los grupos $SO(p, q)$*

Las representaciones de la serie discreta de  $SL(2, \mathbb{R}) \approx SO(1, 2)$  que estamos manejando en nuestro problema son un caso especial de las representaciones discretas máximamente degeneradas de la serie principal de  $SO(p, q)$  [RLN66, LNR66, LNR67, Mu67, KMS67]. Ante la posibilidad de que este estudio se pueda ampliar a dimensiones superiores, vamos a situarnos en el caso general  $SO(p, q)$ .

Para poder realizar las representaciones unitarias e irreducibles de un grupo  $G$  sobre el espacio de Hilbert de las funciones definidas sobre un espacio homogéneo  $M = G/H$ , el número de operadores invariantes que caracterizan dichas representaciones irreducibles por sus autovalores, debe coincidir con el *rango* del espacio  $M$  [He78]. Las representaciones máximamente degeneradas, caracterizadas por un único operador invariante, son por tanto representaciones en un espacio de Hilbert de funciones cuyo dominio es un espacio homogéneo de rango 1. En un espacio homogéneo de rango 1 el operador invariante es el operador de *Laplace-Beltrami*

$$\Delta(M) = \frac{1}{\sqrt{g(M)}} \partial_\alpha g^{\alpha\beta}(M) \sqrt{g(M)} \partial_\beta \quad , \quad (4.56)$$

siendo  $g_{\alpha\beta}$  la métrica sobre el mismo. Para poder realizar la identificación del espacio adecuado a partir de una representación dada, debemos ser capaces de reconstruir esa representación sobre las funciones del espacio en cuestión. La construcción de la representación sigue los siguientes pasos:

*i)* Elección de un sistema de coordenadas donde  $\Delta(M)$  sea diagonal.

*ii)* Solución del problema de autovalores

$$\Delta(X)\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda \quad . \quad (4.57)$$

*iii)* Prueba de la irreducibilidad y unitariedad de la representación.

Empezamos considerando posibles candidatos a espacios homogéneos soporte. Si tomamos para los espacios  $M$  un subgrupo  $H$  compacto maximal, tenemos los espacios de rango  $k$

$$M_k = SO_0(p, q) / (SO_0(p) \times SO_0(q)) \quad , \quad (4.58)$$

con  $k = \min(p, q)$ . Por tanto, sólo para el caso  $p$  ó  $q$  igual a 1, podemos encontrar un espacio adecuado de rango 1. Vamos a buscar otros espacios homogéneos más generales



(que incluirán este caso) tomando cociente por subgrupos no compactos. Los espacios que encontramos de rango 1 son:

$$\begin{aligned} M_+^{p+q-1} &= SO_0(p, q)/SO_0(p-1, q) \\ M_-^{p+q-1} &= SO_0(p, q)/SO_0(p, q-1) \\ M_0^{p+q-1} &= SO_0(p, q)/(T^{p+q-2} \otimes_s SO_0(p-1, q-1)) . \end{aligned} \quad (4.59)$$

Modelos para dichos espacios cociente (esto es, espacios con la misma dimensión en los que  $SO(p, q)$  actúa de forma transitiva con el mismo subgrupo de isotropía) vienen dados por las variedades algebraicas en  $\mathbb{R}^{p+q}$ :

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} , \quad (4.60)$$

donde,

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow M_+^{p+q-1} \approx H_q^p \\ -1 &\rightarrow M_-^{p+q-1} \approx H_p^q \\ 0 &\rightarrow M_0^{p+q-1} \approx C_q^p . \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ignoramos el caso crítico del cono  $C_q^p$ . Para los otros espacios, elegimos coordenadas biarmónicas [RLN66] e inducimos la métrica a partir de la de Minkowski en  $\mathbb{R}^{p+q}$ . Estudiamos distintos casos según los valores de  $p$  y  $q$ .

1. *Caso* ( $p \geq q > 2$ ). El operador de Laplace-Beltrami se escribe

$$\begin{aligned} \Delta(H_q^p) &= -(\cosh^{p-1}\theta \sinh^{q-1}\theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \cosh^{p-1}\theta \sinh^{q-1}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\Delta(S^{p-1})}{\cosh^2\theta} \\ &\quad - \frac{\Delta(S^{q-1})}{\sinh^2\theta} , \end{aligned} \quad (4.62)$$

donde  $\Delta(S^{p-1})$  y  $\Delta(S^{q-1})$  corresponden a los operadores de Laplace-Beltrami de los subgrupos compactos  $SO(p)$  y  $SO(q)$ , respectivamente.

Proponemos una solución  $\Psi$  en variables separadas, como producto de autofunciones de  $\Delta(S^{p-1})$  y  $\Delta(S^{q-1})$  y de la función  $\psi_{l_{\{\frac{p}{2}\}}, \tilde{l}_{\{\frac{q}{2}\}}}^\lambda(\theta)$ . Se obtiene entonces la ecuación

$$\begin{aligned} \left[ -(\cosh^{p-1}\theta \sinh^{q-1}\theta)^{-1} \frac{d}{d\theta} \cosh^{p-1}\theta \sinh^{q-1}\theta \frac{d}{d\theta} - \frac{l_{\{\frac{p}{2}\}}(l_{\{\frac{p}{2}\}} + p - 2)}{\cosh^2\theta} \right. \\ \left. + \frac{\tilde{l}_{\{\frac{q}{2}\}}(\tilde{l}_{\{\frac{q}{2}\}} + q - 2)}{\cosh^2\theta} - \lambda \right] \psi_{l_{\{\frac{p}{2}\}}, \tilde{l}_{\{\frac{q}{2}\}}}^\lambda(\theta) = 0 , \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde  $l_{\{\frac{p}{2}\}}(l_{\{\frac{p}{2}\}} + p - 2)$  y  $\tilde{l}_{\{\frac{q}{2}\}}(\tilde{l}_{\{\frac{q}{2}\}} + q - 2)$  son los autovalores de los operadores  $\Delta(S^{p-1})$  y  $\Delta(S^{q-1})$  con  $l_{\{\frac{p}{2}\}}$  y  $\tilde{l}_{\{\frac{q}{2}\}}$  enteros no negativos para  $p > 2$  y  $q > 2$ .

La serie discreta existe si podemos encontrar soluciones a la ecuación anterior que sean de cuadrado integrable con respecto a la medida  $d\mu(\theta) = \cosh^{p-1}\theta \sinh^{q-1}\theta d\theta$ . Esta solución existe y el espectro (discreto) del operador  $\Delta(H_q^p)$  es

$$\lambda = -L(L + p + q - 2) \quad (4.64)$$



con,

$$L = l_{\{\frac{p}{2}\}} - \tilde{l}_{\{\frac{q}{2}\}} - q - 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La acción sobre las funciones viene dada por,

$$T_g \Psi(\Omega) = \Psi(g^{-1}\Omega) \quad , \quad (4.65)$$

donde  $\Omega$  parametriza  $H_q^p$ . Identificando  $H_q^p$  como espacio homogéneo, la representación así construida no es otra que la representación inducida en  $SO(p, q)$  a partir de la representación trivial de  $SO(p-1, q)$ .

Tenemos una serie discreta, pero todos los operadores compactos tienen un espectro que no está acotado ni inferior ni superiormente, ya que  $l_{\{\frac{p}{2}\}}$  y  $\tilde{l}_{\{\frac{q}{2}\}}$  crecen indefinidamente.

Por lo tanto estas representaciones (con  $p \geq q > 2$ ) no pueden tener un operador acotado inferiormente que generalice al  $\hat{L}_0$  que encontramos en el  $SL(2, \mathbb{R})$  de Virasoro. Debemos buscar en los otros valores de  $p$  y  $q$ .

2. *Caso  $q = 2$ .* Para el caso  $SO(p, 2)$ , tenemos dos opciones:

2.a  $H_p^2 = SO(p, 2)/SO(p, 1)$

2.b  $H_2^p = SO(p, 2)/SO(p-1, 2)$

En el caso 2.a el operador de Laplace-Beltrami tiene la forma

$$\begin{aligned} \Delta(H_p^2) &= -(\cosh\theta \sinh^{p-1}\theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial\theta} \cosh\theta \sinh^{p-1}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + (\cosh^2\theta)^{-1} \frac{\partial^2}{(\partial\tilde{\varphi}^1)^2} \\ &- \frac{\Delta(S^{p-1})}{\sinh^2\theta} \end{aligned} \quad (4.66)$$

La ecuación de autovalores ahora es

$$\begin{aligned} &[-(\cosh\theta \sinh^{p-1}\theta)^{-1} \frac{d}{d\theta} \cosh\theta \sinh^{p-1}\theta \frac{d}{d\theta} - \frac{(\tilde{m}_1)^2}{\cosh^2\theta} \\ &+ \frac{l_{\{\frac{p}{2}\}}(l_{\{\frac{p}{2}\}} + p - 2)}{\cosh^2\theta} - \lambda] \psi_{\tilde{m}_1, l_{\{\frac{q}{2}\}}}^\lambda(\theta) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.67)$$

y tiene solución discreta con autovalores,

$$\begin{aligned} \lambda &= -L(L+p) \\ L &= |\tilde{m}_1| - |l_{\{\frac{q}{2}\}}| - 2n - p \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.68)$$

En una representación dada,  $L$  está fijo y la ecuación anterior nos da la ligadura

$$|\tilde{m}_1| \geq L + p \quad . \quad (4.69)$$

Dado que los generadores de  $SO(p, q)$  sólo pueden cambiar el número cuántico  $\tilde{m}_1$  de uno en uno, tenemos dos representaciones discretas unitariamente no equivalentes:

$$\begin{aligned} D_+^L(H_p^2) &: \quad \tilde{m}_1 \geq L + p \\ D_-^L(H_p^2) &: \quad \tilde{m}_1 \leq -(L + p) \end{aligned} \quad (4.70)$$



En estas representaciones el espectro del operador compacto en  $SO(2)$  está acotado inferior (o superiormente). Exactamente como en nuestro caso de interés  $SO(1, 2)$ .

El caso 2.b se puede construir de la misma forma, pero si  $p > 2$ ,  $l_{\{\frac{p}{2}\}}$  juega el papel de  $\tilde{m}_1$  en (4.69) y sólo hay una serie no acotada, puesto que  $l_{\{\frac{p}{2}\}}$  es un entero no negativo. Si  $p = 2$ , tenemos  $l_1 = \tilde{m}_1$  y encontramos nuevamente dos series discretas unitariamente no equivalentes.

3. Caso  $p \geq q = 1$ .

Nuevamente, para  $SO(p, 1)$ , tenemos (en principio) dos opciones:

3.a  $H_1^p = SO(p, 1)/SO(p - 1, 1)$

3.b  $H_p^1 = SO(p, 1)/SO(p)$

En el caso a) el operador de Laplace-Beltrami toma la forma

$$\Delta(H_1^p) = \frac{-1}{\cosh^{p-1}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \cosh^{p-1} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\Delta(S^{p-1})}{\cosh^2\theta}, \quad \theta \in (-\infty, \infty), \quad (4.71)$$

que conduce a la ecuación de autovalores

$$\left[ \frac{-1}{\cosh^{p-1}\theta} \frac{d}{d\theta} \cosh^{p-1} \frac{d}{d\theta} - \frac{l_{\{\frac{p}{2}\}}(l_{\{\frac{p}{2}\}} + p - 2)}{\cosh^2\theta} - \lambda \right] \psi_{l_{\{\frac{p}{2}\}}}^\lambda(\theta) = 0, \quad (4.72)$$

proporcionado de nuevo un espectro discreto. Para  $p > 2$  estas representaciones no están acotadas, pero para  $p = 2$  tenemos series que sí lo están, coincidiendo exactamente con nuestro modelo.

En cuanto al caso b), el operador de Laplace-Beltrami

$$\Delta(H_p^1) = \frac{-1}{\sinh^{p-1}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sinh^{p-1} \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\Delta(S^{p-1})}{\sinh^2\theta}, \quad \theta \in [0, \infty), \quad (4.73)$$

no tiene espectro discreto.

Vemos por tanto, que el único grupo y la única clase de representaciones de las discutidas que admiten un operador compacto (con espectro discreto) y acotado inferiormente es  $SO(p, 2)$  con funciones sobre  $SO(p, 2)/SO(p, 1)$  (caso 2.a y 3.a con  $p = 2$ , que realmente es un caso particular del anterior de 2.a). Sólo en este caso podemos encontrar una generalización de las representaciones de  $SL(2, \mathbb{R})$  que aparecen al descomponer la representación de Virasoro. Queda así identificado el espacio cociente de interés en nuestro problema. A continuación establecemos la relación con los espacios de Anti de Sitter.

*Espacios de de Sitter y Anti de Sitter*

Para definir estos espacios tenemos dos opciones:

- a) Definir una variedad algebraica en  $\mathbb{R}^{p+q}$  y especificar una métrica plana lorentziana  $\eta$  sobre ese  $\mathbb{R}^{p+q}$  (de forma que el grupo de isometrías de  $\eta$  actúe de forma transitiva en la variedad algebraica), a partir de la cual poder inducir una métrica sobre la variedad algebraica.
- b) Como espacio homogéneo  $M = G/H$ , con la métrica inducida a partir de la del grupo.



Para *de Sitter* la primera opción sería:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 &= 1 \\ \eta &= (+, +, \dots, +, -) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Para ver cuál sería el grupo  $G$ , consideramos el grupo de isometrías de  $\eta$ :  $G = SO(p, 1)$ . La elección de  $H$  debe ser consistente con una métrica lorentziana en el cociente. En este caso:  $H = SO(p-1, 1)$ . Luego  $dS^p = SO(p, 1)/SO(p-1, 1)$ .

En cuanto a *Anti de Sitter* tenemos

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{p-1}^2 - x_p^2 - x_{p+1}^2 &= -1 \\ \eta &= (+, +, \dots, +, -, -) \end{aligned} \quad (4.75)$$

que podemos escribir (renombrando las coordenadas)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - \dots - x_{p-1}^2 - x_p^2 - x_{p+1}^2 &= 1 \\ \eta &= (-, -, +, \dots, +) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Tenemos que  $G = SO(2, p-1)$ . En este caso,  $H$  es  $SO(1, p-1)$ . Así,  $AdS^p = SO(2, p-1)/SO(1, p-1) = SO(p-1, 2)/SO(p-1, 1)$ , exactamente los espacios homogéneos encontrados antes.

El caso  $p = 2$ , el de interés para nosotros, es crítico y presenta ambigüedad

$$\begin{aligned} dS^2 &= SO(2, 1)/SO(1, 1) \\ AdS^2 &= SO(1, 2)/SO(1, 1) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Topológicamente son el mismo espacio y de hecho sólo se diferencian métricamente por la elección de qué es espacio y qué es tiempo, en particular por su carácter compacto. Puesto que por un lado, en nuestro modelo el generador temporal  $\hat{L}_0$  es compacto y por otro lado, las generalizaciones a dimensiones superiores corresponden al caso  $SO(p, 2)/SO(p-1, 2) = AdS^{p-1}$ , determinamos que el espacio-tiempo de nuestro modelo es  $AdS^2$ .

#### 4.2.4.b Otras aproximaciones. Álgebras $C^*$

Este enfoque tiene la ventaja de contar con un sólido andamiaje matemático que no sólo permitiría definir formalmente la correspondencia buscada, sino en un sentido muy preciso reconstruir la estructura espacio-temporal. En términos generales, la idea parte del lema de Urysohn [Ru66] que afirma que para un espacio localmente compacto  $M$ , el conjunto de funciones complejas continuas  $\mathcal{C}(M)$  determina unívocamente la topología de  $M$ . La involución dada por la conjugación  $f \mapsto f^*$  dota a este conjunto  $\mathcal{C}(M)$  de una estructura de álgebra  $C^*$  conmutativa con unidad (para ver una caracterización genérica de estas álgebras  $C^*$  ver [Co94]).

En general, la *reconstrucción* topológica descansa en el resultado que afirma que a partir de toda álgebra  $C^*$  conmutativa con unidad  $A$ , se puede construir un espacio  $M$  tal que  $A$  es isomorfa al álgebra  $C^*$  de las funciones continuas sobre  $M$ , esto es,  $A \approx \mathcal{C}(M)$ .

El resultado no sólo afirma la existencia de este espacio  $M$  sino que además prescribe como construirlo (si bien en términos bastante abstractos) por lo que en principio tiene carácter constructivo.



La base de la geometría no conmutativa consiste en partir de un álgebra  $C^*$  no conmutativa, tomarla como *álgebra de funciones* de un *espacio no conmutativo* y adaptar las técnicas clásicas a este caso no abeliano.

Para adoptar esta perspectiva debemos ser capaces, por tanto, de definir un álgebra  $C^*$  a partir de los elementos disponibles en la representación. A continuación presentamos varios intentos, aunque ninguno de ellos resulta satisfactorio.

### Álgebra conmutativa

Una forma de introducir tal álgebra  $C^*$  es como el álgebra generada por las funciones  $\Psi(x)$  del espacio de representación de  $SL(2, \mathbb{R})$

$$(\Psi * \Phi)(x) = \Psi(x)\Phi(x) \quad . \quad (4.78)$$

Para grupos compactos puede dar los resultados *esperados*, pero no parece funcionar para el caso no compacto. En efecto, si consideramos el caso de  $SU(2)$ , a partir de una representación de espín  $l$  dado, somos capaces de generar todos los armónicos esféricos por productos sucesivos y su posterior reducción, gracias a la serie de Clebsch-Gordan

$$l \otimes l = \bigoplus_{j=|l-l|=0}^{l+l=2l} j \quad , \quad (4.79)$$

con lo que disponemos de una base de las funciones sobre la esfera  $S^2$ . Por el contrario, para el caso no compacto  $SL(2, \mathbb{R}) \approx SU(1, 1)$ , concretamente para nuestras representaciones de la serie discreta, la serie de Clebsch-Gordan es [HB66, KMS67, Mu67]

$$\begin{aligned} i \otimes j &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} (i + j + k) \\ l \otimes l &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} (2l + k) \end{aligned} \quad (4.80)$$

con lo que a partir de una representación dada no se pueden reconstruir todas las funciones que constituyen la base necesaria para expandir las funciones que reconstruyen el álgebra  $C^*$  del hiperboloide.

### Álgebra no conmutativa

No resulta obvio cómo elegir de forma natural un álgebra  $C^*$  no conmutativa en nuestro contexto. Presentamos varias posibilidades que hemos barajado.

#### i) Álgebra de convolución.

Sobre las funciones con soporte en el grupo, se puede definir de forma natural un producto no conmutativo asociativo, mediante la convolución

$$(f_1 * f_2)(g) \equiv \int d\mu(\tau) f_1(g) f_2(g^{-1}\tau) \quad , \quad (4.81)$$



donde  $d\mu(\tau)$  es la medida invariante en el grupo. La motivación de este producto puede verse al considerar lo que se conoce como *group algebra*, que está generada por linealidad a partir de los elementos

$$F = \int d\mu(g) f(g)g \quad (\text{combinación lineal formal de elementos del grupo}) \quad , \quad (4.82)$$

con producto,

$$F_1 * F_2 = \int d\mu(g) f_1(g)g \int d\mu(s) f_2(s)s = \int d\mu(g) (f_1 * f_2)(g)\tau \quad , \quad (4.83)$$

con lo que el producto de convolución es simplemente el producto de la *group algebra*.

El problema de este producto es que no está definido canónicamente sobre los espacios homogéneos del grupo  $G$  ( $M = G/H$ ), que son los que nos interesan, porque en su definición se hace uso explícito de las propiedades de grupo en los argumentos de las funciones. Esto limita, en principio, la aplicabilidad de esta estrategia a nuestro caso.

ii) Álgebra de operadores redefinidos á la Madore.

Ésta es la estrategia seguida en la formulación de Madore [Mad92a, Mad92b] de la *fuzzy-esfera*. Los operadores posición conmutativos se sustituyen por un álgebra de Lie no abeliana redefinida con un parámetro que permite recuperar el carácter conmutativo en cierto límite continuo.

En nuestro caso, para construir el álgebra  $C^*$ , en primer lugar definimos los operadores de posición a partir de los generadores de  $sl(2, \mathbb{R})$ . Los generadores en la representación  $R^{(N)}$  se multiplican por una constante dimensional  $k^{(N)}$  con el objeto de obtener coordenadas espacio-temporales dimensionalmente apropiadas

$$\begin{aligned} x_i^{(N)} &= k^{(N)} L_i^{(N)} \quad i = \{-1, 0, 1\} \\ \text{donde } L_i^{(N)} &= \hat{L}_i |_{R^{(N)}} \quad . \end{aligned} \quad (4.84)$$

Puesto que las tomamos a estos generadores como funciones *coordenadas* de cierto *espacio* no conmutativo, tiene sentido considerar las funciones que constituyen el álgebra  $C^*$  como polinomios en estas variables, o si se prefiere, como los operadores en el álgebra envolvente generada por  $x_i^{(N)}$ . Sobre una representación irreducible dada, el operador Casimir impone una ligadura entre los operadores que definen las *coordenadas*

$$cte = g^{jk} x_j^{(N)} x_k^{(N)} = k^{(N)2} N(N-1) \quad , \quad (4.85)$$

donde  $g^{jk}$  es la métrica de Killing de  $sl(2, \mathbb{R})$ . El álgebra  $C^*$  viene dada por tanto por

$$C^* - algebra = Env(\langle x_{-1}^{(i)}, x_0^{(i)}, x_1^{(i)} \rangle) / Casimir \quad . \quad (4.86)$$

Como puede verse a partir de los conmutadores entre las *coordenadas* espacio-temporales, ( $[x_i^{(N)}, x_j^{(N)}] = k^{(N)} C_{ij}^k x_k^{(N)}$ ), ésta es un álgebra  $C^*$  no conmutativa que da lugar por tanto a una geometría no conmutativa. Los puntos son reemplazados por estados en la representación de  $sl(2, \mathbb{R})$ , definiendo de acuerdo con la ligadura del Casimir lo que podemos denominar un *fuzzy-hiperboloides*. Para una mejor comprensión de estos



puntos *difusos*, es útil echar un vistazo a las relaciones de indeterminación, bajo las cuales el espacio-tiempo se divide en celdas:

$$\Delta x_i^{(N)} \Delta x_j^{(N)} \geq |k^{(N)}|^2 = \frac{R^2}{\sqrt{N(N-1)}} . \quad (4.87)$$

De hecho, un modelo de dinámica espacio-temporal puede ser asociado a esta construcción [JA99].

El problema con este enfoque, es que para nosotros los generadores de la representación tienen carácter de momentos, y la redefinición como operadores posición resulta artificial y fuertemente *ad hoc*. Creemos, por tanto, que no es el camino más adecuado.

iii) *Producto*  $- *$  a partir de estados coherentes generalizados de un grupo.

Un *producto*  $- *$  es un producto asociativo no conmutativo que contiene un parámetro  $\lambda$  que permite definir el límite del continuo ( $\lambda \rightarrow 0$ )<sup>10</sup>

$$(f * g)(x) \rightarrow f(x)g(x) , \quad (\lambda \rightarrow 0) . \quad (4.88)$$

Para nosotros está especialmente bien adaptado un enfoque basado en de una estructura grupo-teórica<sup>11</sup>.

Dado un grupo  $G$  y una representación unitaria e irreducible suya,  $D_J$ , sobre un espacio vectorial  $\mathcal{H}_J$ , consideramos un vector fijo  $|\psi\rangle$  de  $\mathcal{H}_J$ . Se denomina *estado coherente generalizado* a los vectores de la forma

$$|g\rangle = D_J(g) |\psi\rangle . \quad (4.89)$$

Podemos definir los subgrupos  $H_0$  y  $H$  de  $G$ :

$$\begin{aligned} H_0 &= \{g \in G / D_J(g) |\psi\rangle = |\psi\rangle\} \\ H &= \{g \in G / D_J(g) |\psi\rangle = e^{i\alpha} |\psi\rangle\} . \end{aligned} \quad (4.90)$$

Los vectores en la órbita por el grupo de  $|\psi\rangle$  están etiquetados por coordenadas en el espacio homogéneo  $M = G/H_0$ . A partir de cada vector  $|g\rangle$  podemos definir el proyector:

$$P_\psi(g) \equiv |g\rangle\langle g| . \quad (4.91)$$

Debemos notar que el grupo de isotropía de  $P_\psi(g)$  coincide con  $H$ , en general mayor que  $H_0$ .

Con estos elementos, estamos en condiciones de definir la aplicación  $\rho_\psi$ , del conjunto de operadores lineales en  $\mathcal{H}_J$ , esto es  $Lin(\mathcal{H}_J, \mathcal{H}_J)$ , al de las funciones de  $M = G/H$ ,  $\mathcal{C}(G/H)$ :

$$\begin{aligned} \rho_\psi : Lin(\mathcal{H}_J, \mathcal{H}_J) &\rightarrow \mathcal{C}(G/H) \\ \hat{A} &\mapsto A(g) \equiv Tr[P_\psi(g)\hat{A}] . \end{aligned} \quad (4.92)$$

<sup>10</sup>En realidad también se le pide que  $(f * g)(x) - (g * f)(x) \rightarrow i\lambda\{f, g\}$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ) con la idea de recuperar una estructura de Poisson. Ejemplos de *producto*  $- *$  en esta línea son los de Moyal [Moy49] y Kontsevich [Ko97].

<sup>11</sup>Debemos agradecer en este punto las discusiones con el Profesor A.P. Balachadran.



Una vez que contamos con esta aplicación, podemos inducir un producto no conmutativo y asociativo (*producto*  $*$ ) en aquellas funciones de  $\mathcal{C}(G/H)$  que están en  $Im(\rho_\psi)$ , a partir del producto asociativo en  $Lin(\mathcal{H}_{\mathcal{J}}, \mathcal{H}_{\mathcal{J}})$  e imponiendo que  $\rho_\psi$  sea un homomorfismo de álgebras

$$(A * B)(x) \equiv \rho_\psi(\hat{A}\hat{B}) = Tr[P_\psi(g)\hat{A}\hat{B}] \quad . \quad (4.93)$$

Para que este producto esté bien definido, debemos ser capaces de reconstruir el operador  $\hat{A}$  a partir de sus elementos de matriz diagonales:  $\langle g | \hat{A} | g \rangle = Tr(P_\psi(g)\hat{A})$ . Esto se consigue si la aplicación  $\rho_\psi$  no sólo es un homomorfismo sino también un isomorfismo. Esto es,  $\rho_\psi$  ha de ser inyectiva. Si el vector inicial  $|\psi\rangle$  es tal que la aplicación  $\rho_\psi$  tiene núcleo, no se puede definir un *producto*  $*$  inducido en  $\mathcal{C}(G/H)$ .

Un desarrollo de las condiciones necesarias y suficientes para que esto sea posible en el caso de proyectores de rango 1, que es el caso que nos interesa, puede encontrarse en [MACS00] en el contexto de lo que se conoce como *representación coherente diagonal*. En nuestro caso estas condiciones no se satisfacen debido nuevamente a la estructura de la serie de Clebsch-Gordan (4.80) en la serie discreta de  $SL(2, \mathbb{R})$ , con lo que ésta tampoco es una vía apropiada para la construcción de una estructura espacio-temporal.

## 4.3 Añadiendo nuevos campos. Materia

### 4.3.1 Introducción

El principal objeto de esta sección, es el estudio del acoplamiento al modelo previo de nuevos grados de libertad susceptibles de ser interpretados como *materia*. Siendo la simetría nuestra guía fundamental, la intuición sobre la manera de incorporar estos nuevos modos descansa sobre una base algebraica. En particular, estamos interesados en buscar una estructura de Lie que contenga como subálgebra al álgebra de Virasoro, de tal forma que el modelo de gravedad *pura* de la Sección 4.2 quede naturalmente incorporado y que el acoplamiento entre los difeomorfismos y los nuevos modos sea no trivial. No es ni mucho menos obvio que la ampliación del álgebra original preserve el crítico mecanismo por el que emerge la estructura espacio-temporal.

Aunque el enfoque abstracto que aquí seguimos tiene la ventaja de permitir una formulación clara de la estructura matemática del sistema físico, nuevamente surge el serio problema de la interpretación física. No tenemos otra alternativa que ofrecer una interpretación *a posteriori* del modelo en función de la realización concreta del sistema. En cierto sentido, cualquier teoría de carácter *fundamental*, entendiendo por tal calificativo su carácter opuesto al de teoría *efectiva*, debe afrontar y resolver este problema.

El álgebra más sencilla que cumple los anteriores requisitos es un álgebra de Lie afín de Kac-Moody, bajo la acción natural del grupo de Virasoro. Ésta es la elección que realizamos aquí. Dada un álgebra de Lie finita  $\mathcal{G}$  definida por los conmutadores

$$[J^a, J^b] = C_c^{ab} J^c \quad , \quad (4.94)$$

el álgebra de Kac-Moody correspondiente viene dada por:

$$\begin{aligned} [J_n^a, J_m^b] &= C_c^{ab} J_{n+m}^c + \alpha n Kil(J^a, J^b) \delta_{n+m,0} \hat{I} \\ [J_n^a, \hat{I}] &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.95)$$



donde  $Kil(\cdot, \cdot)$  denota la métrica de Killing del álgebra finita. Si bien estas relaciones de conmutación pueden introducirse siguiendo un tratamiento abstracto (como una generalización de las álgebras de Lie semisimples, formuladas en términos de la matriz de Cartan y las relaciones de *Serre* [FMS97]), también se pueden derivar siguiendo el enfoque más intuitivo de los grupos de lazos ([GO86], por ejemplo) que por añadidura las relacionan de forma directa con el grupo de Virasoro.

Dado el grupo  $G$  con álgebra de Lie (4.94), podemos dotar de estructura de grupo,  $LG$ , al conjunto de las aplicaciones  $\gamma : S^1 \rightarrow G$  con ley de grupo  $*$  dada, punto a punto, por el producto  $\cdot$  en el grupo rígido. Esto es:

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(x) = \gamma_1(x) \cdot \gamma_2(x) \quad , \quad x \in S^1 \quad . \quad (4.96)$$

Usando la base de  $\mathcal{G}$  empleada en (4.94), podemos escribir un elemento en la componente conexa de la identidad de  $LG$  como  $\gamma(x) = e^{-iJ^a\theta_a(x)}$ . Si expandimos  $\theta_a(x)$  en serie de Laurent

$$\theta_a(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \theta_a^{-n} x^n \quad , \quad (4.97)$$

vemos que los generadores del álgebra de Lie de  $LG$  vienen dados por

$$J_n^a \equiv J^a x^n \quad . \quad (4.98)$$

En particular, de ahí se derivan las reglas de conmutación de dicha álgebra infinito-dimensional

$$[J_n^a, J_m^b] = C_c^{ab} J_{n+m}^c \quad . \quad (4.99)$$

Las extensiones centrales de (4.95) se pueden fijar nuevamente imponiendo antisimetría y la identidad de Jacobi.

En esta realización, la acción de los modos de Virasoro (vistos como difeomorfismos de  $S^1$ ) sobre el álgebra de Kac-Moody resulta natural. Efectivamente, a nivel de grupo un difeomorfismo  $\xi$  actúa sobre  $\gamma \in LG$  reparametrizando la variedad  $S^1$

$$\begin{aligned} \xi : LG &\rightarrow LG & (4.100) \\ \gamma &\mapsto \gamma_\xi \quad , \quad \gamma_\xi(x) = \gamma(\xi^{-1}x) \quad . \end{aligned}$$

Infinitesimalmente, la acción se calcula directamente usando las representaciones (4.9) y (4.98)

$$[L_m, J_n^a] = -n J_{m+n}^a \quad . \quad (4.101)$$

Con estos elementos, y motivados por el análisis en [JN96] de la gravedad bidimensional donde los campos de *materia* toman sus valores sobre un espacio cociente de un grupo no compacto de dimensión finita, escogemos el álgebra afín de un grupo finito no compacto para introducir los nuevos modos. De nuevo, por cuestiones de simplicidad en el tratamiento matemático, nuestra elección es la más sencilla, esto es, el álgebra de Kac-Moody de  $SU(1, 1)$ <sup>12</sup>.

<sup>12</sup>Esta simetría también ha sido considerada en otros contextos para modelos de dinámica gravitatoria, como por ejemplo agujeros negros [Wit91].



Así, si denotamos el generador de Cartan de  $SU(1,1)$  por  $\hat{\Phi}$  y a los generadores *escalera* asociados a la raíz simple por  $\hat{Z}$  y  $\hat{Z}^*$ , entonces el álgebra de partida de nuestro sistema físico es:

$$\begin{aligned}
[\hat{Z}_n, \hat{Z}_m^*] &= -2i\hat{\Phi}_{n+m} - 2\left(\alpha n + \frac{K}{2}\right)\delta_{n+m}\hat{I} \\
[\hat{\Phi}_n, \hat{Z}_m] &= i\hat{Z}_{n+m}, \quad [\hat{\Phi}_n, \hat{Z}_m^*] = -i\hat{Z}_{n+m}^* \\
[\hat{\Phi}_n, \hat{\Phi}_m] &= \alpha n\delta_{n+m}\hat{I} \\
[\hat{L}_n, \hat{Z}_m] &= -m\hat{Z}_{n+m}, \quad [\hat{L}_n, \hat{Z}_m^*] = -m\hat{Z}_{n+m}^* \\
[\hat{L}_n, \hat{\Phi}_m] &= -m\hat{\Phi}_{n+m} + im\frac{K}{2}\delta_{n+m}\hat{I} \\
[\hat{L}_n, \hat{L}_m] &= (n-m)\hat{L}_{n+m} + \frac{1}{12}(cn^3 - c'n)\delta_{n+m}\hat{I} \\
[\hat{I}, \dots] &= 0.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Este álgebra ya presenta las (pseudo-)extensiones centrales necesarias como primer paso en la construcción de la dinámica.

Para el desarrollo de esta sección seguimos una estructura paralela a la presentada en la Sección 4.2. Comenzamos introduciendo los elementos básicos necesarios para construir la dinámica y presentando una descripción del formalismo semiclásico. Continuamos con la formulación del modelo en sí mediante la construcción de la teoría cuántica, para acabar con la interpretación física correspondiente.

### 4.3.2 Elementos generales y formalismo semiclásico

Puesto que las extensiones del álgebra ya están presentes en las relaciones (4.102), nuestro primer paso es directamente la exponenciación del álgebra. En este caso, en el sector puramente de Kac-Moody, nos limitaremos a un desarrollo perturbativo al orden más bajo no trivial, tercer orden en la ley de grupo. Para obtener la ley de grupo utilizaremos una aproximación mixta. La parte no central de Kac-Moody la obtendremos partiendo de la ley de  $SU(1,1)$  rígido, y reemplazando los parámetros de este grupo por una expansión en serie de Laurent como se sugiere en el Apartado 4.3.1. Para la parte central de esta subálgebra, así como para la acción de Virasoro sobre la misma, empleamos nuevamente la ley de grupo formal presentada en el Apartado 3.3.1. La ley de Virasoro no se ve alterada y coincide con la de las secciones anteriores.

La ley de  $SU(1,1)$  que usamos como punto de partida es:

$$\begin{aligned}
z'' &= z\eta'^{-2} + \kappa z' + \frac{2z'}{1+\kappa'}[z^*{}'z\eta'^{-2} + z^*z'\eta'^2] \\
z^{*''} &= z^*\eta'^2 + \kappa z^*{}' + \frac{2z^*{}'}{1+\kappa'}[z'z^*\eta'^2 + zz^*{}'\eta'^{-2}] \\
\eta'' &= \sqrt{\frac{2}{1+\kappa''}} \left[ \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} \sqrt{\frac{1+\kappa'}{2}} \eta\eta' + \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}} \sqrt{\frac{2}{1+\kappa'}} z^*{}'z\eta^*{}'\eta \right],
\end{aligned} \tag{4.103}$$

donde

$$\begin{aligned}
\kappa &= \sqrt{1+2zz^*} ; \quad \kappa'' = \kappa\kappa' + zz^*{}'\eta'^{-2} + z^*z'\eta'^2 \\
\eta &= e^{i\phi}.
\end{aligned}$$



Partiendo de esta ley y siguiendo la estrategia indicada arriba encontramos

$$\begin{aligned}
z^{n''} &= z^n + A_k^n(l)z^{k'} - iA_k^m(l)z^{n-m}\phi^k + A_k^m(l)A_l^p(l)(z^{n-m-p}z^{k'}z^{*l'} + z^{*n-m-p}z^{k'}z^{l'}) \\
&\quad - \frac{1}{2}z^{n-m-p}\phi^{k'}\phi^{l'} + 2A_l^p(l)z^{n-m-p}z^{*m}z^{l'} + \dots \\
z^{*n''} &= z^{*n} + A_k^n(l)z^{*k'} + iA_k^m(l)z^{*n-m}\phi^k + A_k^m(l)A_l^p(l)(z^{*n-m-p}z^{*k'}z^{l'} + z^{n-m-p}z^{*k'}z^{*l'}) \\
&\quad - \frac{1}{2}z^{*n-m-p}\phi^{k'}\phi^{l'} + 2A_l^p(l)z^{*n-m-p}z^mz^{*l'} + \dots \\
\phi^{n''} &= \phi^n + A_k^n(l)\phi^k - iA_k^m(l)(z^{n-m}z^{*k'} - z^{*n-m}z^{k'}) - A_k^m(l)A_l^p(l)(z^{n-m-p}z^{*k'} \\
&\quad + z^{*n-m-p}z^{k'})\phi^l + \dots \\
l''^m &= l^m + l'^m + ipl'^pl^{m-p} + \frac{(ip)^2}{2!}l'^pl^n l^{m-n-p} + \dots + \sum_{n^1+\dots+n^j+p=m} \frac{(ip)^j}{j!}l'^pl^{n^1}\dots l^{n^j} + \dots \\
\varphi'' &= \varphi + \varphi' + \frac{K}{2}\xi_{cobKM} + \alpha\xi_{KM} + \frac{c}{24}\xi_{Vir} - \frac{c'}{24}\xi_{cobVir} ,
\end{aligned} \tag{4.104}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_n^k(l) &= \delta_n^k + (in)l^{k-n} + \sum_{r=2} \sum_{n+m_1+\dots+m_r=k} \frac{(in)^r}{r!}l^{m_1}\dots l^{m_r} \\
\xi_{KM} &= \frac{-1}{2}[inA_k^{-n}(l)(2z^n z^{*k'} + 2z^{*n}z^{k'} - \phi^n\phi^{k'}) - iA_k^m(l)A_k^{-n-m}(l)i(n-m)(z^n z^{*k'}\phi^{l'} \\
&\quad - z^{*n}z^{k'}\phi^{l'}) - iA_k^{-n-m}(l)in(z^{*m}\phi^n z^{k'} - z^m\phi^n z^{*k'})] + \dots \\
\xi_{Vir} &= -[(-i)(-n)n^2l^{-n'}l^n + \frac{(-i)^2}{2!}n_1n_2(n_1+n_2)^2l^{n_1'}l^{n_2'}l^{-n_1-n_2} \\
&\quad - \frac{i^2}{2!}(n_1+n_2)^2(n_1^2+n_2^2+n_1n_2)l^{-n_1-n_2'}l^{n_1}l^{n_2} + \dots] \\
\xi_{cobKM} &= \phi^{0''} - \phi^{0'} - \phi^0 \\
\xi_{cobVir} &= l^{0''} - l^{0'} - l^0 .
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Con la ley de grupo escrita de forma explícita, calculamos los campos invariantes por la izquierda y por la derecha, obteniendo

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{z^r}^L &= \frac{\partial}{\partial z^r} - i\phi^{n-r}\frac{\partial}{\partial z^n} + z^{n-p-r}z^{*p}\frac{\partial}{\partial z^n} - \frac{1}{2}\phi^{n-p-r}\phi^p\frac{\partial}{\partial z^n} + z^{*n-p-r}z^{*p}\frac{\partial}{\partial z^{*n}} \\
&\quad - iz^{*n-r}\frac{\partial}{\partial \phi^n} - z^{*n-p-r}\phi^p\frac{\partial}{\partial \phi^n} + \dots + \left[-i\left(\frac{K}{2} + \alpha r\right)z^{*-r} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{K}{2} + \frac{\alpha}{2}(r-m)\right)z^{*m}\phi^{-m-r} + \dots\right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\tilde{X}_{z^{*r}}^L &= \frac{\partial}{\partial z^{*r}} + i\phi^{n-r}\frac{\partial}{\partial z^{*n}} + z^{*n-p-r}z^p\frac{\partial}{\partial z^{*n}} - \frac{1}{2}\phi^{n-p-r}\phi^p\frac{\partial}{\partial z^{*n}} + z^{n-p-r}z^p\frac{\partial}{\partial z^{*n}} \\
&\quad + iz^{n-r}\frac{\partial}{\partial \phi^n} - z^{n-p-r}\phi^p\frac{\partial}{\partial \phi^n} + \dots + \left[i\left(\frac{K}{2} - \alpha r\right)z^{-r} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{K}{2} - \frac{\alpha}{2}(r-m)\right)z^m\phi^{-m-r} + \dots\right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\tilde{X}_{\phi^r}^L &= \frac{\partial}{\partial \phi^r} + \left(\frac{\alpha}{2}ir\phi^{-r} + \dots\right)\frac{\partial}{\partial \varphi}
\end{aligned} \tag{4.106}$$



$$\begin{aligned}\tilde{X}_{lr}^L &= \tilde{X}_{lr}^{L\text{Vir}} + i(n-r)z^{n-r}\frac{\partial}{\partial z^n} + i(n-r)z^{*n-r}\frac{\partial}{\partial z^{*n}} + i(n-r)\phi^{n-r}\frac{\partial}{\partial \phi^n} + \frac{K}{2}r\phi^{-r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \Xi &= \tilde{X}_\varphi^L = \frac{\partial}{\partial \varphi},\end{aligned}$$

para los campos izquierdos, y

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{z^r}^R &= A_r^n(l)\frac{\partial}{\partial z^n} + 2A_r^p(l)z^{n-m-p}z^{*m}\frac{\partial}{\partial z^n} + iA_r^m(l)z^{*n-m}\frac{\partial}{\partial \phi^n} + \dots \\ &+ \left[ i\left(\frac{K}{2} - \alpha n\right)A_r^{-n}(l)z^{*n} - \frac{\alpha}{2}nA_r^{-n-m}(l)z^{*m}\phi^n + \dots \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \tilde{X}_{z^{*r}}^R &= A_r^n(l)\frac{\partial}{\partial z^{*n}} + 2A_r^p(l)z^{*n-m-p}z^m\frac{\partial}{\partial z^{*n}} - iA_r^m(l)z^{n-m}\frac{\partial}{\partial \phi^n} + \dots \\ &+ \left[ -i\left(\frac{K}{2} + \alpha n\right)A_r^{-n}(l)z^n + \frac{\alpha}{2}nA_r^{-n-m}(l)z^m\phi^n + \dots \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \tilde{X}_{\phi^r}^R &= A_r^n(l)\frac{\partial}{\partial \phi^n} - iA_r^m(l)z^{n-m}\frac{\partial}{\partial z^n} + iA_r^m(l)z^{*n-m}\frac{\partial}{\partial z^{*n}} \\ &+ \left( \frac{\alpha}{2}nA_r^{-n}(l)\phi^n + \frac{K}{2}(rl^{-r} - \frac{r^2}{2}l^n l^{-r-n} + \dots) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \tilde{X}_{lr}^R &= \tilde{X}_{lr}^{R\text{Vir}} = \frac{\partial}{\partial l} + irl^{m-r}\frac{\partial}{\partial l^m} + \left[ \frac{ic}{24}r^3l^{-r} - \frac{c}{24}r^2 \sum_{n_1+n_2=-r} (n_1^2 + n_2^2 + n_1n_2)l^{n_1}l^{n_2} \right. \\ &\left. - \frac{ic'}{24}rl^{-r} + \frac{c'}{24} \sum_{n_1+n_2=-r} \frac{r^2}{2}l^{n_1}l^{n_2} + \dots \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \Xi &= \tilde{X}_\varphi^R = \frac{\partial}{\partial \varphi},\end{aligned}\tag{4.107}$$

para los derechos, donde  $\tilde{X}_{lr}^{L\text{Vir}}$  y  $\tilde{X}_{lr}^{R\text{Vir}}$  son las expresiones del caso de gravedad pura en (4.14) y (4.15). Para obtener la uno-forma de cuantización imponemos de nuevo dualidad con los campos izquierdos ( $\Theta(\tilde{X}_{z^r}^L) = \Theta(\tilde{X}_{z^{*r}}^L) = \Theta(\tilde{X}_{\phi^r}^L) = \Theta(\tilde{X}_{lr}^L) = 0$  y  $\Theta(\Xi) = 1$ ) resultando en la expresión

$$\begin{aligned}\Theta &= \Theta^{KM} + \Theta^{\text{Vir}} + \Theta^{\text{Int}} + d\varphi \\ \Theta^{KM} &= \frac{-i\alpha}{2}r\phi^{-r}d\phi^r + \left[ i\left(\frac{K}{2} + \alpha r\right)z^{*-r} + \alpha(n+r)z^{*n}\phi^{-n-r} + \dots \right] dz^r + \left[ i\left(\frac{-K}{2} + \alpha r\right)z^{-r} \right. \\ &\left. - \alpha(n+r)z^n\phi^{n-r} + \dots \right] dz^{*r} \\ \Theta^{\text{Vir}} &= \frac{i}{24}(cn^2 - c')nl^{-n}dl^n \\ &+ \sum_{\substack{k=2 \\ n_1+\dots+n_k=-n}} \frac{(-i)^k}{24} \left[ cn_1^2 - c' + cn^2 \sum_{m=2}^k \frac{1}{m!} \right] n_1 \dots n_k l^{n_1} \dots l^{n_k} dl^n \\ \Theta^{\text{Int}} &= \sum_{\substack{j=0 \\ n_1+\dots+n_j+k=-r}} (-i)^j f^k(z^r, z^{*r}, \phi^r) n_1 \dots n_j dl^r,\end{aligned}\tag{4.108}$$

donde

$$f^k(z^r, z^{*r}, \phi^r) = -\frac{K}{2}k\phi^k - i\alpha(n+k)nz^{-n+k}z^{*n} - \frac{iK}{2}(n+k)z^{n+k}z^{*-n}$$



$$\begin{aligned}
& - i\alpha(n+k)nz^{*-n+k}z^n + \frac{iK}{2}(n+k)z^{*n+k}z^{-n} + \frac{i\alpha}{2}n(n+k)\phi^{-n}\phi^{n+k} \\
& + \alpha nmz^n\phi^m z^{*k-n-m} - \alpha nmz^{*n}\phi^m z^{k-n-m} + \dots \quad . \quad (4.109)
\end{aligned}$$

Tanto para la teoría cuántica como para la clásica, la identificación del álgebra característica  $\mathcal{G}_\Theta (= Ker\Theta \cap Ker d\Theta)$ , resulta un punto crucial. A la vista de las relaciones (4.102) observamos que la composición de  $\mathcal{G}_\Theta$  presenta una amplia gama de posibilidades en función de los valores que tomen las constantes de extensión central  $c$  y  $\alpha$  y de pseudo-extensión  $c'$  y  $K$ . Estudiaremos una elección específica de los parámetros que se ajuste a nuestros objetivos. En concreto, queremos encontrar dentro del módulo característico un  $sl(2, \mathbb{R})$  que pertenezca a una subálgebra de Virasoro del álgebra total, con el objeto de poder construir una noción espacio-temporal como en la Sección anterior. Esto puede conseguirse en principio imponiendo  $c = c' - 3\frac{K^2}{\alpha}$ . En este caso la combinación lineal  $\tilde{X}_{l^i}^L = \tilde{X}_{l^i}^L + \frac{K}{2\alpha}\tilde{X}_{\phi^i}^L$  ( $i \in \{-1, 0, 1\}$ ) que cierra un  $sl(2, \mathbb{R})$ , entra en  $\mathcal{G}_\Theta$ . Sin embargo, veremos en la realización cuántica del modelo que el problema es más sutil debido a la aparición de una anomalía, en el sentido del Subapartado 3.2.2.c. Además imponemos  $\frac{K}{2\alpha} \notin \mathbb{Z}$  para no perder grados dinámicos de libertad asociados los campos físico de *materia*<sup>13</sup> En estas condiciones, tenemos

$$\mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_{\phi^0}^L, \tilde{X}_{l^{-1}}^L, \tilde{X}_{l^0}^L, \tilde{X}_{l^1}^L \rangle \quad . \quad (4.110)$$

La combinación lineal que permite la identificación del  $sl(2, \mathbb{R})$  dentro de  $\mathcal{G}_\Theta$  sugiere la posibilidad de generalizar tal cambio de variables al resto de los modos de Virasoro,

$$\tilde{X}_{l^n}^L \rightarrow \tilde{X}_{l^n}^L = \tilde{X}_{l^n}^L + \frac{K}{2\alpha}\tilde{X}_{\phi^n}^L \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad . \quad (4.111)$$

que de hecho cierran nuevamente un álgebra de Virasoro,  $\overline{Vir}$ , si bien con otra constante de extensión central:

$$\left[ \tilde{X}_{l^n}^L, \tilde{X}_{l^m}^L \right] = i(n-m)\tilde{X}_{l^{n+m}}^L + \frac{i}{12}(cn^3 - (c' - 3\frac{K^2}{\alpha})n)\delta_{n+m}\Xi \quad . \quad (4.112)$$

Las relaciones de conmutación que sólo involucran a los modos de Kac-Moody quedan inalteradas, pero la acción de  $\overline{Vir}$  sobre dichos modos toman la forma,

$$\begin{aligned}
\left[ \tilde{X}_{l^n}^L, \tilde{X}_{z_m}^L \right] &= -i\left(m + \frac{K}{2\alpha}\right)\tilde{X}_{z_{n+m}}^L, \quad \left[ \tilde{X}_{l^n}^L, \tilde{X}_{z_m^*}^L \right] = -i\left(m - \frac{K}{2\alpha}\right)\tilde{X}_{z_{n+m}^*}^L \\
\left[ \tilde{X}_{l^n}^L, \tilde{X}_{\phi_m}^L \right] &= -im\tilde{X}_{\phi_{n+m}}^L \quad . \quad (4.113)
\end{aligned}$$

Esta base resulta más adecuada para el análisis de la polarización que haremos en el siguiente Apartado.

Las ecuaciones clásicas del movimiento vienen dadas por el sistema dinámico definido en términos de los campos de vectores en  $\mathcal{G}_\Theta$ , que dictan la evolución de los parámetros en el grupo. En la forma explícita de los campos vectoriales izquierdos involucrados, observamos que los parámetros del grupo no extendido son invariantes bajo la acción de  $\tilde{X}_{\phi^i}^L$ , con lo que

<sup>13</sup>Si se cumple,  $\frac{K}{2\alpha} = n \in \mathbb{Z}$ , entonces un  $SU(1, 1)$  de materia va al módulo característico.



lo podemos ignorar en las ecuaciones del movimiento. De esta manera, la evolución queda parametrizada únicamente por el subgrupo  $SL(2, \mathbb{R})$  *espacio-temporal*:

$$\frac{\partial g_i^n}{\partial \tilde{\lambda}_0} = (\tilde{X}_{l^0}^L)g_i^n, \quad \frac{\partial g_i^n}{\partial \tilde{\lambda}_1} = (\tilde{X}_{l^1}^L)g_i^n, \quad \frac{\partial g_i^n}{\partial \tilde{\lambda}_{-1}} = (\tilde{X}_{l^{-1}}^L)g_i^n, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (4.114)$$

donde  $g_1^n = z^n, g_2^n = z^{*n}, g_3^n = \phi^n, g_4^n = l^n$  y  $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1$  y  $\tilde{\lambda}_{-1}$  son los parámetros de los campos vectoriales  $\tilde{X}_{l^0}^L, \tilde{X}_{l^1}^L$  y  $\tilde{X}_{l^{-1}}^L$ , respectivamente. Las siguientes ecuaciones explícitas de movimiento son *exactas*, a pesar del desarrollo del subgrupo de Kac-Moody sólo hasta tercer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i^m}{\partial \tilde{\lambda}_0} &= img_i^m, \quad \frac{\partial g_i^m}{\partial \tilde{\lambda}_1} = i(m-1)g_i^{m-1}, \quad \frac{\partial g_i^m}{\partial \tilde{\lambda}_{-1}} = i(m+1)g_i^{m+1}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ \frac{\partial l^m}{\partial \tilde{\lambda}_0} &= iml^m \quad \text{para } m \neq 0, \quad \frac{\partial l^0}{\partial \tilde{\lambda}_0} = 1 \\ \frac{\partial l^m}{\partial \tilde{\lambda}_1} &= i(m-1)l^{m-1} \quad \text{para } m \neq 1, \quad \frac{\partial l^1}{\partial \tilde{\lambda}_1} = 1 \\ \frac{\partial l^m}{\partial \tilde{\lambda}_{-1}} &= i(m+1)l^{m+1} \quad \text{para } m \neq -1, \quad \frac{\partial l^{-1}}{\partial \tilde{\lambda}_{-1}} = 1. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Estas ecuaciones tienen la misma forma que las encontradas en el Apartado 4.2.2, de manera que pueden ser resueltas exactamente, presentando la estructura general

$$\begin{aligned} g_i^n(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) &= g_i^n(\lambda_{-1}, \lambda_1)e^{in\lambda_0}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ l^n(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) &= l^n(\lambda_{-1}, \lambda_1)e^{in\lambda_0}, \quad n \neq 0; \quad l^0 = \lambda_0, \end{aligned} \quad (4.116)$$

donde  $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0, \tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 e^{i\lambda_0}, \tilde{\lambda}_{-1} = \lambda_{-1} e^{-i\lambda_0}$ .

Nuevamente, la variedad simpléctica que caracteriza al sistema físico clásico se obtiene tomando el cociente del grupo (no extendido) por las ecuaciones de movimiento. La forma simpléctica está definida por  $d\Theta$ , que cae al cociente. Como sabemos, este espacio de las fases se puede parametrizar por los invariantes Noether asociados a aquellos parámetros del grupo cuyos campos vectoriales izquierdos no están el módulo característico (*básicos* o *simplécticos*). Damos expresiones explícitas para los invariantes Noether hasta segundo orden

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{z^r} &= i_{\tilde{X}_{z^r}^R} \Theta = 2i\left(\frac{K}{2} + \alpha r\right)z^{*-r} + 2\alpha(m+r)z^{*m}\phi^{-m-r} - 2r\left(\frac{K}{2} + \alpha n\right)l^{n-r}z^{-n} + \dots \\ \mathcal{N}_{z^{*r}} &= i_{\tilde{X}_{z^{*r}}^R} \Theta = -2i\left(\frac{K}{2} - \alpha r\right)z^{-r} - 2\alpha(m+r)z^m\phi^{-m-r} - 2r\left(\frac{K}{2} - \alpha n\right)l^{n-r}z^{*-n} + \dots \\ \mathcal{N}_{\phi^r} &= i_{\tilde{X}_{\phi^r}^R} \Theta = -i\alpha r\phi^{-r} - \frac{K}{2}r l^{-r} + z^{m-r}z^{*-m} \left[ \left(\frac{K}{2} + \alpha m\right) - \left(\frac{-K}{2} + \alpha(r-m)\right) \right] \\ &\quad + \alpha n r \phi^{-n} l^{n-r} - \frac{K r^2}{2} l^n l^{-r-n} + \dots \\ \mathcal{N}_{l^r} &= i_{\tilde{X}_{l^r}^R} \Theta = \mathcal{N}_{l^r}^{Vir} - \frac{K}{2}r\phi^{-r} + \frac{i\alpha}{2}n(-n-r)[\phi^n\phi^{-n-r} - 4z^{-n-r}z^{*n}] \\ &\quad - \frac{K i}{2}(2n+r)z^{-n-r}z^{*n} - \frac{K}{2}n(2r-n)\phi^n l^{-r-n} + \dots, \end{aligned} \quad (4.117)$$

donde, de nuevo, el superíndice *Vir* denota que la expresión del objeto se corresponde con la del Apartado 4.2.2. La descripción tipo espacio de configuración, mejor adaptada mejor



para la comparación con el formalismo lagrangiano, se obtiene tras definir los campos

$$\begin{aligned}
F_z(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) &\equiv \sum_n z^n(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) = \sum_n z^n(\lambda_{-1}, \lambda_1) e^{in\lambda_0} \\
F_{z^*}(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) &\equiv \sum_n z^{*n}(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) = \sum_n z^{*n}(\lambda_{-1}, \lambda_1) e^{in\lambda_0} \\
F_\phi(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) &\equiv \sum_n \phi^n(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) = \sum_n \phi^n(\lambda_{-1}, \lambda_1) e^{in\lambda_0} \\
F_l(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) &\equiv \sum_n l^n(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 + \sum_{n \neq 0} l^n(\lambda_{-1}, \lambda_1) e^{in\lambda_0} \quad ,
\end{aligned} \tag{4.118}$$

donde la solución de las ecuaciones del movimiento (4.116) se emplea en la segunda igualdad.

La estructura espacio-temporal del modelo volverá a surgir como resultado del análisis cuántico del sistema, de una manera absolutamente análoga a la de la Sección 4.2. En el límite clásico, existe un único espacio-tiempo con geometría de  $AdS^2$ , cuyo *radio* de hecho diverge,  $R \rightarrow \infty$ . Después de realizar el cambio de variables  $u = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_{-1})$ ,  $v = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_{-1})$ ,  $\lambda = \lambda_0$  e imponer la ligadura motivada por el Casimir, que obliga a los campos de la descripción de configuración a estar definidos sobre dicho espacio de  $AdS^2$ , encontramos:

$$\begin{aligned}
F_{g_i}(u, \lambda) &\equiv F_{g_i}^{R \rightarrow \infty}{}_{AdS}(u, \lambda) = \sum_n g_i^n(u) e^{in\lambda} \quad , \quad i \in \{1, 2, 3\} \\
F_l(u, \lambda) &\equiv F_l^{R \rightarrow \infty}{}_{AdS}(u, \lambda) = \lambda + \sum_n l^n(u) e^{in\lambda} \quad .
\end{aligned} \tag{4.119}$$

En este límite es fácil expresar las variables  $g_i^n$ 's en términos de  $F_{g_i}(u, \lambda)$ , con lo que podemos escribir  $\Theta$  en el espacio de configuración y a partir de ella la acción,  $S = \int \Theta$ :

$$S = S^{KM} + S^{Vir} + S^{Int} \quad ,$$

donde  $S^{KM}$  es la acción para el Kac-Moody de  $SU(1, 1)$  puro. Aquí sólo está evaluado de forma perturbativa hasta segundo orden. Puesto que no vamos a hacer uso posterior del formalismo lagrangiano, la expresión explícita no es de interés. Simplemente notamos que a orden más bajo los modos de Kac-Moody se comportan como campos escalares libres, que se acoplan a orden superiores.  $S^{Vir}$  es la acción de Polyakov corregida que encontramos previamente y  $S^{Int}$  es un término de interacción que acopla los grados de libertad gravitacionales procedentes del álgebra de Virasoro con los nuevos modos de Kac-Moody. La estructura de este término es

$$S^{Int} = \int dud\lambda \frac{\mathcal{F}(F_z, F_{z^*}, F_\phi) \partial_u F_l}{\partial_\lambda F_l} \quad , \tag{4.120}$$

donde  $\mathcal{F}(F_z, F_{z^*}, F_\phi)$  es un funcional que recoge toda la dependencia en los campos de materia. Vemos que surge de forma natural un término de interacción entre los modos gravitacionales y los incorporados en este modelo ampliado.

### 4.3.3 Modelo cuántico

Como sabemos, la realización cuántica del modelo físico consiste en la construcción de una representación unitaria e irreducible del álgebra de partida. Separamos la discusión sobre la irreducibilidad y la unitariedad.



### 4.3.3.a Reducción

Partiendo de la representación regular, altamente reducible, imponemos las condiciones de polarización sobre las funciones de onda. Recordamos que la polarización  $\mathcal{P}$  es una subálgebra horizontal maximal que incluye a la subálgebra característica. Esto es, incluye  $\mathcal{G}_\Theta$  y un modo de cada par conjugado de los grados de libertad físicos.

Antes de proceder a la construcción explícita, redefinimos los generadores del álgebra con el objeto de recuperar exactamente los conmutadores (4.102):

$$\begin{aligned} \hat{L}_n &\equiv i\tilde{X}_{l^n}^R, \quad \hat{I} \equiv i\Xi, \quad \hat{G}_n^i \equiv \tilde{X}_{g_i^n}^R \\ \text{y } \hat{G}_n^1 &\equiv \hat{Z}_n, \quad \hat{G}_n^2 \equiv \hat{Z}_n^*, \quad \hat{G}_n^3 \equiv \hat{\Phi}_n. \end{aligned} \quad (4.121)$$

#### *Polarización y anomalía*

Si bien no es un rasgo exclusivo de los grupos de dimensión infinita, en estos últimos es muy frecuente la aparición de polarizaciones no equivalentes que dan origen a sistemas físicos distintos, esto es, donde las dinámicas son diferentes. En este caso, la presencia del subgrupo de Kac-Moody, introduce dos polarizaciones no equivalentes en la discusión. Centrémonos en este subgrupo e ignoremos el de Virasoro por un momento. Considerando el  $\mathcal{G}_\Theta$  que hemos elegido en (4.110), encontramos dos posibilidades:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{KM}^N &= \langle \tilde{X}_{\phi^n \leq 0}^L, \tilde{X}_{z^r}^L \rangle \\ \mathcal{P}_{KM}^S &= \langle \tilde{X}_{\phi^n \leq 0}^L, \tilde{X}_{z^p \leq 0}^L, \tilde{X}_{z^{*q} < 0}^L \rangle. \end{aligned} \quad (4.122)$$

El primer caso,  $\mathcal{P}_{KM}^N$ , que recibe el nombre de polarización *natural*, está caracterizado por la presencia de todos los generadores asociados con las raíces negativas (o positivas) del álgebra semisimple rígida, mientras que en el segundo caso,  $\mathcal{P}_{KM}^S$ , denominado *estándar*, coexisten operadores asociados con todas las raíces del álgebra finita [AN87]. En este modelo sólo consideraremos el segundo caso, dado que la unitariedad obliga a  $\alpha$  a ser cero en la polarización natural (ver después), lo cual es una condición demasiado severa y hace menos interesante la dinámica en este contexto, si bien es cierto que puede ser usada para describir ciertos modelos gravitacionales (gravedad afín [AKN91]).

De forma ingenua, esperaríamos que la inclusión de los modos de Virasoro no alterara significativamente la construcción de una polarización *tipo estándar* asociada a nuestra  $\mathcal{G}_\Theta$ . Un buen candidato para la polarización de todo el grupo sería la unión de los dos casos bien estudiados por separado (Kac-Moody y Virasoro),  $\mathcal{P}^S = \mathcal{P}_{KM}^S \cup \mathcal{P}_{Vir}^S$ . De hecho, éste sería el caso si el único modo de Virasoro en  $\mathcal{G}_\Theta$  fuera  $\tilde{X}_{l^0}^L$  o si el parámetro  $K$  fuera cero. La primera posibilidad debe ser rechazada dado que nuestro objetivo es generalizar el modelo de gravedad pura, para el que la presencia de un  $sl(2, \mathbb{R})$  procedente de la subálgebra de Virasoro, resulta el ingrediente fundamental de la noción de espacio-tiempo. La segunda opción también debe rechazarse por motivos de unitariedad, como veremos después.

Desafortunadamente,  $\mathcal{P}_{KM}^S$  no es invariante-izquierda bajo la acción de  $\mathcal{P}_{Vir}^S$ . De hecho, el conmutador  $[\tilde{X}_{l^1}^L, \tilde{X}_{z^0}^L]$  es proporcional a  $\tilde{X}_{z^1}^L$ , puesto que  $K \neq 0$ , generador que está ausente de la subálgebra  $\mathcal{P}_{KM}^S$ . Y lo que es más grave, no hay ninguna polarización completa que contenga a toda la subálgebra característica. Para ser precisos, se puede construir una polarización completa para  $\frac{K}{2\alpha} = -1$ , pero la representación que resulta no es exponenciable al grupo, según las condiciones que derivaremos en el siguiente punto. Es esta misma



condición de globalidad la que excluye las polarizaciones completas de *tipo natural* para  $\alpha \neq 0$ . Ésta es una patología algebraica, intrínseca, que no puede ser soslayada.

Denominamos a esta situación un anomalía- $SL(2, \mathbb{R})$ , para distinguirla del caso más usual encontrado en teorías conformes de campo, donde toda la subálgebra de Virasoro está desprovista de contenido dinámico, debiendo entrar en el módulo característico y por tanto en la polarización, pero donde la construcción de tal polarización completa resulta imposible. A ésta se le conoce como *anomalía conforme*.

#### *Polarización de orden superior*

Como hemos comentado en el Subapartado 3.2.2.c, un procedimiento bien establecido para tratar los casos en los que la subálgebra característica completa no puede incluirse dentro de la polarización consiste en corregir los operadores en  $\mathcal{G}_\Theta$  con operadores de orden superior dentro del álgebra envolvente izquierda, dando lugar a una polarización de orden superior.

En el Apartado 3.4.3 hemos mostrado el ejemplo físico más simple en el que funciona este tipo de solución, el caso del grupo de Schrödinger. Como vimos allí, la simetría de este problema es, salvo rotaciones, la del grupo del oscilador armónico  $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{H})$  con dos generadores extra  $\hat{l}_{-1}, \hat{l}_1$  que cierran con  $\hat{H} \equiv \hat{l}_0$  un álgebra  $SL(2, \mathbb{R})$ , y que constituyen la subálgebra característica. Esta simetría es intrínsecamente anómala, dado que no existe una polarización de primer orden que incluya todo  $SL(2, \mathbb{R})$ . Recurriendo al álgebra envolvente, se puede construir otro  $SL(2, \mathbb{R})$  de la forma  $\frac{(\hat{a})^2}{2}, \hat{a}\hat{a}^\dagger, \frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{2}$ , de manera que la diferencia con el  $SL(2, \mathbb{R})$  de primer orden puede ser incluida en la polarización, resolviendo por tanto el problema de la reducción. Para que la reducción tenga lugar, el  $SL(2, \mathbb{R})$  lineal debe extenderse por un valor crítico (el valor cuántico de la anomalía).

Siguiendo el mismo razonamiento en nuestro caso, buscamos nuevos operadores en el álgebra envolvente izquierda. Inspirándonos en el ejemplo anterior y en los modelos de Wess-Zumino-Witten ([FMS97], por ejemplo), los operadores de Sugawara izquierdos en la subálgebra envolvente cuadrática de Kac-Moody constituyen una opción natural. Las expresiones para las formas invariantes izquierdas y derechas de estos generadores  $((\tilde{X}_{l^n}^{Sug})^{L,R})$ , análogas a  $\frac{(\hat{a})^2}{2}, \hat{a}\hat{a}^\dagger, \frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{2}$ , las escribimos en términos de los generadores no pseudo-extendidos,  $X_{NP}^{L,R} \equiv \tilde{X}_{g_i^n}^{L,R} - \frac{K}{2}\delta_{n,0}\delta_{i,3}\Xi$ , con objeto de hacer uso de las expresiones estándar, resultando,

$$(\tilde{X}_{l^n}^{Sug})^{L,R} \equiv \frac{1}{2\alpha} : \sum_m k^{ij} X_{NP}^{L,R} g_i^n X_{NP}^{L,R} g_j^{n-m} : \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad , \quad (4.123)$$

donde  $::$  denota la ordenación *normal* usual y  $k^{ij}$  es la métrica de Killing del grupo rígido. Las relaciones de conmutación, de la versión izquierda, con los campos vectoriales invariantes izquierdos son:

$$\begin{aligned} [(\tilde{X}_{l^n}^{Sug})^L, (\tilde{X}_{l^m}^{Sug})^L] &= i(n-m)(\tilde{X}_{l^{n+m}}^{Sug})^L + \frac{i}{12}c^{Sug}n^3\delta_{n+m}\Xi \\ [(\tilde{X}_{l^n}^{Sug})^L, \tilde{X}_{g_i^m}^L] &= -im\tilde{X}_{g_i^{n+m}}^L \\ [\tilde{X}_{l^n}^L, (\tilde{X}_{l^m}^{Sug})^L] &= i(n-m)(\tilde{X}_{l^{n+m}}^{Sug})^L + \frac{i}{12}c^{Sug}n^3\delta_{n+m}\Xi \quad . \end{aligned} \quad (4.124)$$

Los operadores de Sugawara cierran un álgebra de Virasoro con  $c^{Sug} = \frac{\alpha \dim(G)}{-g+\alpha}$ , donde  $g$  es



el número de Coxeter dual [FMS97]<sup>14</sup>. Notamos que estos operadores cierran propiamente un álgebra con los de primer orden, caso que no tendría que darse necesariamente.

Los nuevos generadores se usan para corregir el álgebra característica de primer orden en términos de la diferencia de las subálgebras de Virasoro de primer y segundo orden. Definimos así lo que vamos a llamar generadores *intrínsecos* de Virasoro:  $(\tilde{X}_{l^n}^I)^L \equiv \tilde{X}_{l^n}^L - (\tilde{X}_{l^n}^{Sug})^L$ . Por analogía con el momento angular, podemos pensar que los modos de Virasoro originales se refieren a unos modos dinámicos (análogos al momento angular *total*) que se pueden escribir como una suma de modos *intrínsecos* (momento angular intrínseco o de espín) y de términos (*orbitales*) que se escriben como expresiones cuadráticas de otros grados de libertad (momento angular orbital).

Estrictamente, sólo necesitaríamos corregir el generador  $\tilde{X}_{l^1}^L$ , pero el análisis es más sencillo si extendemos esta corrección a toda la subálgebra de Virasoro. La relaciones de conmutación para los generadores de Virasoro intrínsecos,  $(\tilde{X}_{l^n}^I)^L$ , con ellos mismos y con los modos de Kac-Moody son

$$\begin{aligned} [(\tilde{X}_{l^n}^I)^L, (\tilde{X}_{l^m}^I)^L] &= i(n-m)(\tilde{X}_{l^{n+m}}^I)^L + \frac{i}{12}[(c - c^{Sug})n^3 - c'n]\delta_{n+m}\hat{I} \quad (4.125) \\ [(\tilde{X}_{l^n}^I)^L, \hat{X}_{g_i^m}] &= 0 \quad , \end{aligned}$$

y, por tanto, el grupo de Virasoro corregido no muestra la acción no diagonal *fatal* en la polarización de Kac-Moody. Este detalle nos permite construir una polarización como la simple unión de la de Kac-Moody y la del Virasoro intrínseco, de forma que la subálgebra característica, anómala o corregida, está presente dentro de la polarización:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{KM}^S \cup \langle (\tilde{X}_{l^n \leq 1}^I)^L \rangle \quad . \quad (4.126)$$

En paralelo a (4.121) definimos,  $\hat{L}_n^I \equiv i(\tilde{X}_{l^n}^I)^R$  y  $\hat{L}_n^{Sug} \equiv i(\tilde{X}_{l^n}^{Sug})^R$ . Para obtener la irreducibilidad de la representación, (formalmente) construimos el espacio de representación a partir de la órbita a través del vacío  $|0\rangle$ . La representación se hace de peso máximo, de forma que los operadores de aniquilación que definen la condición de vacío vienen dados por la versión derecha de los operadores en el álgebra característica y por los compañeros conjugados en el sentido dinámico al resto de los vectores en la polarización.

$$\begin{aligned} \hat{G}_{n_i}^i |0\rangle &= 0 \quad (n_i \geq 0 \text{ si } i \in \{1, 3\}, n_2 > 1, p_j \leq -2) \quad (4.127) \\ \hat{L}_p^I |0\rangle &= 0 \quad (\text{si } p \geq -1) \quad . \end{aligned}$$

El resto de los generadores derechos son de creación. Por tanto, los vectores en el espacio de representación están en la envolvente lineal de los estados

$$|\Psi\rangle = \prod_{i \in \{1,2,3\}} \hat{G}_{n_i}^i \dots \hat{G}_{n_i}^i \hat{L}_{p_1}^I \dots \hat{L}_{p_j}^I |0\rangle \quad (n_i \leq -1 \text{ si } i \in \{1, 3\}, n_2 \leq 0, p_j \leq -2) \quad , \quad (4.128)$$

donde  $|0\rangle$  es el estado de vacío.

### 4.3.3.b Unitariedad

#### *Exponenciabilidad*

<sup>14</sup>Los conmutadores segundo y tercero han sido calculados clásicamente y las extensiones centrales se han fijado por consistencia con las identidades de Jacobi.



Previamente al problema de la unitariedad, debemos considerar un punto íntimamente relacionado. No todas las representaciones del álgebra son exponenciables a representaciones del grupo: existen condiciones de globalidad. En nuestro caso, cuando nos restringimos a los subgrupos generados por  $\langle \tilde{X}_{z^q}^L, \tilde{X}_{z^{*q}}^L, \tilde{X}_{\phi^0}^L, \frac{\partial}{\partial \varphi} \rangle$ , que dan lugar a  $SU(1,1) \otimes U(1)$  y consideramos la polarización dada por  $\langle \tilde{X}_{z^q}^L, \tilde{X}_{z^{*q}}^L, \tilde{X}_{\phi^0}^L \rangle \cap \mathcal{P}_{KM}^S = \langle \tilde{X}_{z^q}^L, \tilde{X}_{\phi^0}^L \rangle$ , la exponenciabilidad global de los funciones de onda obliga a que el valor de la pseudo-extensión,  $\frac{K}{2} + \alpha n$ , satisfaga las siguientes igualdades <sup>15</sup>

$$\begin{aligned} n \leq 0 & \quad , \quad \frac{K}{2} + \alpha n \leq -\frac{1}{2} \\ n > 0 & \quad , \quad \frac{K}{2} + \alpha n \geq \frac{1}{2} \quad , \end{aligned} \quad (4.129)$$

que implica las condiciones

$$\alpha \geq 0 \quad ; \quad -\frac{1}{2} \geq \frac{K}{2} \geq -\frac{1}{2}(2\alpha - 1) . . \quad (4.130)$$

Por tanto, en nuestro esquema, la globalidad fija el signo del parámetro de extensión central  $\alpha$  (que hubiese sido el opuesto para  $SU(2)$ , donde las igualdades cambian de signo) y proporciona una restricción *natural* a los valores permitidos de  $K$  en función del valor de  $\alpha$ . La segunda condición es análoga a la regla encontrada en las representaciones de  $SU(2)$  de Kac-Moody. Un análisis general de las condiciones de globalidad para extensiones centrales de grupos de Kac-Moody compactos se puede encontrar en [Mick86, PS86].

#### *Estados de norma negativa*

Para discutir la cuestión de la unitariedad en sí, debemos introducir un producto escalar en el espacio de representación. La forma usual de llevar esto a cabo en CSG es mediante el uso de la medida invariante sobre el grupo. Ésta es una cuestión delicada en grupos finitos no compactos, si bien puede solucionarse de manera simple. Sin embargo, en el caso de grupo de dimensión infinita el problema es más grave. Podemos abordar una forma alternativa y consistente, la empleada en el caso de Virasoro, fijando la norma del estado de vacío ( $\langle 0|0 \rangle = 1$ ) y escogiendo una regla para adjudicar los adjuntos a los operadores en la representación.

A la hora de decidir la elección de los operadores adjuntos, imponemos consistencia con el subgrupo rígido  $SU(1,1)$ , para el cual el producto escalar puede ser introducido de forma no ambigua. Concretamente, y debido a la manera en que hemos realizado la pseudo-extensión de Kac-Moody, la representación escogida para el subgrupo rígido está asociada con la serie discreta de  $SU(1,1) \approx SL(2, \mathbb{R})$ . Como puede verse a partir de la construcción explícita de de esta representación [Gu95], encontramos

$$\hat{Z}^\dagger = -\hat{Z}^* \quad , \quad \hat{\Phi}^\dagger = -\hat{\Phi} \quad , \quad (4.131)$$

que hace unitaria la representación de  $SU(1,1)$ . Transladamos estas relaciones al caso de Kac-Moody de la forma siguiente:

$$(\hat{Z}_n)^\dagger = -\hat{Z}_{-n}^* \quad , \quad (\hat{\Phi}_n)^\dagger = -\hat{\Phi}_{-n} \quad . \quad (4.132)$$

<sup>15</sup>Es una condición inducida por la exponenciabilidad del grupo rígido.



Para los modos de Virasoro, como en el Subapartado 4.2.3.a, imponemos  $(\hat{L}_n)^\dagger = \hat{L}_{-n}$ . Con esto queda definida la regla de asignación de operadores adjuntos que fija nuestro producto escalar.

Si consideramos las combinaciones lineales

$$\begin{aligned}\hat{J}_n^1 &= \frac{1}{2}(\hat{Z}_n + \hat{Z}_n^*) , & (\hat{J}_n^1)^\dagger &= -\hat{J}_{-n}^1 \\ \hat{J}_n^2 &= \frac{1}{2}(\hat{Z}_n - \hat{Z}_n^*) , & (\hat{J}_n^2)^\dagger &= \hat{J}_{-n}^2 \\ \hat{J}_n^3 &= \hat{\Phi}_n , & (\hat{J}_n^3)^\dagger &= -\hat{J}_{-n}^3 ,\end{aligned}\tag{4.133}$$

sus conmutadores

$$\begin{aligned}[\hat{J}_n^1, \hat{J}_m^1] &= -\alpha n \delta_{n+m} \hat{I} \\ [\hat{J}_n^2, \hat{J}_m^2] &= \alpha n \delta_{n+m} \hat{I} \\ [\hat{J}_n^3, \hat{J}_m^3] &= \alpha n \delta_{n+m} \hat{I} ,\end{aligned}\tag{4.134}$$

y tenemos en cuenta el signo positivo de  $\alpha$ , encontramos que  $\hat{J}_n^1$  y  $\hat{J}_n^2$  generan estados de norma positiva, mientras que los estados generados por  $\hat{J}_n^3$  tienen norma negativa.

Por tanto, la consistencia con la representaciones del  $SU(1, 1)$  rígido conlleva la existencia de estados de norma negativa en el modelo, lo cual echa a perder la unitariedad de la teoría. La presencia de estos estados en grupos de Kac-Moody no compactos es un rasgo bien conocido [Bar96, Bar94, DLP89, Ga91, BRFW89].

De acuerdo con el punto de vista estándar, estos estados deben ser eliminados del espacio de Hilbert a la hora de definir el espacio físico de representación. En el caso de la cuerda bosónica se encuentra la misma situación, pero la invariancia bajo reparametrización de la denominada *world-sheet* obliga a que los modos de Virasoro (realizados como una construcción de Sugawara) actúen trivialmente sobre el espacio de Hilbert físico. Esta ligadura es suficiente para eliminar los estados de norma negativa (teorema *no-ghost* [GSW87]). Para motivar tal ligadura, aquí no podemos recurrir a la invariancia *gauge* de un sistema físico clásico previo, inexistente en nuestro caso. Todo lo que podemos aducir en nuestra aproximación es consistencia matemática.

En esta línea, los operadores de Kac-Moody relacionados con el Casimir del grupo rígido pueden ser buenos candidatos, como se sugiere en [BRFW89]. En el caso de  $SU(1, 1)$ , donde el único Casimir es cuadrático, estos operadores se corresponden con el álgebra de Virasoro constituida por la construcción de Sugawara. Nuestra propuesta es hacer uso de estos operadores Virasoro-Sugawara para eliminar los estados no físicos. Éste es un problema bien estudiado en el contexto de la cuerda bosónica propagándose en un espacio-tiempo curvo. Como resultado de este estudio se concluye que estas ligaduras de Virasoro no son suficientes para eliminar los vectores de norma negativa en el caso de Kac Moody de  $SU(1, 1) (\approx SL(2, \mathbb{R}))$ . Esto es, en este caso, no existe teorema *no-ghost*.

En [Bar96] se proponen varias soluciones al problema que finalmente son descartadas por distintas razones. Sin embargo, la primera solución allí propuesta presenta gran interés para nuestro caso. Ésta consiste en restringir los valores del índice  $K$  de las posibles representaciones de  $SL(2, \mathbb{R})$  que aparecen en la de Kac-Moody acotándolo por el parámetro de extensión central  $\alpha$ . Esta acotación es precisamente nuestra segunda condición en (4.130). Esta posibilidad era descartada en [Bar96] por no resultar una condición natural en un



modelo de cuerdas, dado que a nivel cuántico elimina algunas excitaciones que están presentes en la teoría clásica, pero nosotros no tenemos una razón física para descartar esta condición. Es más, resulta necesaria en nuestro caso para que la representación sea exponencial al grupo. Por tanto, en nuestra construcción la globalidad es un elemento clave en la eliminación de los estados de norma negativa y por consiguiente en la realización de la unitariedad.

Podemos resumir las consideraciones previas acerca del papel de las ligaduras en la eliminación de los estados de norma negativa del espacio de Hilbert, escribiendo

$$\begin{aligned} \hat{L}_n^{Sug} |\Psi\rangle &= 0, n \leq 0, \quad \hat{L}_n^{Sug} |\Psi\rangle \sim |\Psi\rangle, n > 0 \\ -\frac{1}{2} &\geq \frac{K}{2} \geq -\frac{1}{2}(2\alpha - 1), \end{aligned} \quad (4.135)$$

donde  $\sim$  indica que dos estados deben ser identificados, tomando el cociente en el espacio de representación ( $\hat{L}_n^{Sug} |\Psi\rangle, n > 0$  es un estado *espúreo*). La ligadura  $\hat{L}_0^{Sug}$ <sup>16</sup>, junto a la cota sobre  $K$ , establece un límite superior a los posibles estados excitados que aparecen en el modelo.

#### 4.3.3.c Contracción de Inönü-Wigner

Como es bien sabido, existe una construcción matemática, concebida por Inönü y Wigner [IW56], que permite derivar un álgebra de Lie no semisimple y algunas de sus representaciones, a partir del caso de un álgebra semisimple; es el proceso denominado *contracción*. Para el caso de álgebras de Lie afines estas contracciones han sido estudiadas en [Maj93, Mo95]. En términos poco precisos, el efecto de esta contracción puede verse como un *decrecimiento* en el grado de no linealidad de ciertos modos. Por tanto, la dinámica de estos modos se hace más lineal, lo cual puede verse como un *suavizado* de la interacción asociada. Este mecanismo puede presentar cierto interés en la discusión del límite clásico.

Recordemos brevemente los fundamentos de la contracción de Inönü-Wigner. Para que la contracción sea posible, el álgebra original debe admitir una descomposición

$$\mathcal{G} = V_1 + V_2, \quad (4.136)$$

tal que si  $\{X^\alpha\}, \alpha = \{1, \dots, \dim(V_1)\}$  y  $\{X^i\}, i = \{1, \dots, \dim(V_2)\}$  constituyen una base de  $\mathcal{G}$ , entonces las constantes de estructura del álgebra de Lie,  $C^{\alpha\beta}_i$  deben anularse. En este caso, contraemos respecto a  $V_1$ , redefiniendo los generadores en  $V_2$  con un parámetro multiplicativo  $\lambda$  que hacemos tender a cero ( $\lambda \rightarrow 0$ ). Después de tomar este límite, la subálgebra  $V_1$  queda inalterada, pero los generadores  $V_2$  sufren una *linealización*. La estructura del álgebra resultante es:

$$\begin{aligned} [X^\alpha, X^\beta] &= C^{\alpha\beta}_\gamma X^\gamma \\ [X^\alpha, X^i] &= C^{\alpha i}_j X^j \\ [X^i, X^j] &= 0. \end{aligned} \quad (4.137)$$

<sup>16</sup>Una importante sutileza de la ligadura impuesta por  $\hat{L}_0^{Sug}$  es que obliga a que un estado excitado de nivel  $K$  del sector de Kac-Moody esté construido a partir de un estado de vacío con un valor muy concreto del Casimir del grupo rígido  $SU(1, 1)$ . Para mantener la posibilidad de diferentes niveles de excitación para los modos de materia, así como la noción de un vacío auténtico de la teoría, estamos obligados a considerar una suma directa de representaciones irreducibles construidas a partir del auténtico vacío  $|0\rangle$  y mezcladas por operadores *externos* que juegan el mismo papel que los operadores posición en teoría de cuerdas generando translaciones en el espacio de momentos (operadores vértice). No insistiremos más en este punto, dado que tal grado de detalle en la descripción del espacio de Hilbert de Kac-Moody no es crucial en el punto en el que nos encontramos.



En nuestro caso, existe de hecho tal subálgebra  $V_1$ , que está generada por los operadores asociados con la subálgebra de Cartan rígida y los modos de Virasoro:  $\langle \hat{\Phi}_0, \hat{Z}_0, \hat{Z}_0^*, \hat{L}_n \rangle$ .

Contrayendo con respecto a esta subálgebra, encontramos

$$\begin{aligned}
 [\hat{Z}_n, \hat{Z}_m^*] &= 0 \\
 [\hat{\Phi}_n, \hat{Z}_m] &= i\hat{Z}_{n+m}, \quad [\hat{\Phi}_n, \hat{Z}_m^*] = -i\hat{Z}_{n+m}^* \\
 [\hat{\Phi}_n, \hat{\Phi}_m] &= \alpha n \delta_{n+m} \hat{I} \\
 [\hat{L}_n, \hat{Z}_m] &= -m\hat{Z}_{n+m}, \quad [\hat{L}_n, \hat{Z}_m^*] = -m\hat{Z}_{n+m}^* \\
 [\hat{L}_n, \hat{\Phi}_m] &= -m\hat{\Phi}_{n+m} + im \frac{K}{2} \delta_{n+m} \hat{I} \\
 [\hat{L}_n, \hat{L}_m] &= (n-m)\hat{L}_{n+m} + \frac{1}{12}(cn^3 - c'n)\delta_{n+m} \hat{I} \quad .
 \end{aligned} \tag{4.138}$$

En este límite, los modos  $z_n$  y  $z_m^*$  pierden su carácter dinámico y los grados de libertad físicos relacionados con ellos desaparecen. Por otra parte, los modos asociados con el generador de Cartan no son físicos (tenían norma negativa), de manera que los únicos grados de libertad físicos después de la contracción son los de Virasoro.

Es muy importante llamar la atención sobre el hecho de que si los modos de Virasoro no estuvieran presentes en el modelo, podríamos asociar un contenido dinámico a los modos contraídos, como una traza de la pseudo-extensión  $K$ . En tal caso, tras la contracción de Inönü-Wigner, la extensión central de Kac-Moody desaparece, pero la pseudo-extensión se convertiría en una auténtica extensión no trivial:

$$[\hat{Z}_n, \hat{Z}_m^*] = \kappa \delta_{n+m} \hat{I} \quad . \tag{4.139}$$

Éste es el mismo fenómeno que ocurre en el caso del grupo de Galileo y el de Poincaré, donde el primero se puede obtener como contracción del segundo. Sin embargo, la presencia de los generadores de Virasoro en el álgebra física hace esta extensión imposible: está prohibida por las identidades de Jacobi. Vemos que la presencia de los modos *gravitatorios* impone restricciones al tamaño del espacio de fases físico.

#### 4.3.3.d Análisis físico del modelo

Consideramos ahora la interpretación física del modelo. En lo que se refiere a los estados del espacio de Hilbert, nos centramos en primer lugar en aquéllos que tienen la forma

$$\hat{L}_{n_1}^I \dots \hat{L}_{n_j}^I |0\rangle \quad n_1, \dots, n_j \leq -2 \quad , \tag{4.140}$$

y que están generados por los modos de Virasoro *intrínsecos*. La función de estos vectores es la de generar la estructura espacio-temporal subyacente, de la misma manera que ocurría en el caso sin materia. Expanden el espacio lineal soporte de una representación irreducible del álgebra de Virasoro con  $c^I (= c - c^{Sug}) = c' > 1$ , que es reducida bajo su subálgebra cinemática  $sl^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , dando lugar a un conjunto de representaciones irreducibles de  $sl(2, \mathbb{R})$ , denotadas por  $R^{(N)}$ , de manera que cada una de ellas tiene un espacio-tiempo  $AdS^2$  asociado, con *radio*  $R = \frac{c^I}{\sqrt{N(N-1)}}$ . Nuevamente, cada vector  $|N, n, i\rangle$  en una representación

$R^{(N)}$  caracteriza un estado de excitación de ese espacio-tiempo. Todo lo comentado en la discusión del modelo de gravedad pura en el Apartado 4.2.3, aplica en este caso. Estos modos crean por tanto el andamiaje espacio-temporal del modelo.



El rasgo novedoso es la aparición de los modos de materia. Un estado general se puede escribir de la forma:

$$|\Psi\rangle = \sum_{N,n,i} (\text{Modos de Kac - Moody físicos}) |N, n, i\rangle \quad . \quad (4.141)$$

Podemos pensar en los estados generados por los modos físicos  $\hat{J}_n^1$  y  $\hat{J}_n^2$  (o, equivalentemente, por  $\hat{Z}_n$  y  $\hat{Z}_n^*$ ) como los *cuantos* de ciertos *campos* cuánticos que representan la materia. Por supuesto, estos *campos* no son tales en un sentido ordinario, pues carecemos de un único espacio-tiempo de fondo que pueda servir de soporte para tales objetos. Por contra, disponemos de una colectividad de los mismos. Sólo cuando consideramos un estado que descansa completamente sobre un espacio-tiempo específico, esto es cuando  $N$  e  $i$  están fijos en el sumatorio previo, tiene sentido hablar de una noción estándar de campo donde los estados generados por  $\hat{J}_n^1$  y  $\hat{J}_n^2$  constituyen sus excitaciones elementales. En general, un estado físico es una superposición lineal de diferentes espacio-tiempos, cada uno de los cuales soporta un contenido diferente de *materia*. Esta última tiene, por consiguiente, un carácter esencialmente global y no local.

Un punto muy importante es el hecho de que los grados de libertad de materia no son modos libres, como consecuencia de sus relaciones de conmutación no canónicas. Por tanto, si un estado con un contenido de materia dado sufre la acción de una perturbación (de materia), el consiguiente proceso de reordenación produce una mezcla que resulta en un cambio en la distribución de esos modos de materia. Esto hace que la estructura del espacio de Hilbert sea muy complicada, una situación que empeora aún más al tener en cuenta la ligadura de Sugawara. A pesar de la complejidad del espacio de las fases cuántico, la imagen física del sistema es muy simple: tenemos dos campos de materia cuánticos con interacciones no lineales extendidos sobre diferentes espacio-tiempos.

El efecto de la gravedad es la consecuencia de la acción de los modos de Virasoro completos, orbital más intrínseco:  $\hat{L}_n = \hat{L}_n^{Sug} + \hat{L}_n^I$ . Cuando uno de estos modos actúa sobre un estado físico, el doble efecto combinado del carácter gauge de la parte orbital junto con el cambio de distribución del soporte espacio-temporal inducido por la parte intrínseca (ver Subapartado 4.2.3.b), conduce a una redistribución del contenido de materia sobre lo que hemos denominado *Universo* (colectividad de espacio-tiempos). Este doble efecto enriquece la dinámica del modelo respecto al caso puramente gravitatorio.

El límite clásico se obtiene haciendo  $c \rightarrow \infty$ . Notamos que la condición cuántica de existencia de una noción espacio-temporal,  $c - c^{Sug} = c'$ , se hace indiferenciable de la condición clásica  $c = c' - 3\frac{K^2}{\alpha}$  en este límite, dado que  $c^{Sug}$  y  $\frac{K^2}{4\alpha}$  son cantidades acotadas superiormente, resultando consistentes ambas condiciones. Nuevamente, los diferentes espacio-tiempos colapsan en un único  $AdS^2$  con radio muy grande. Los modos de materia se encuentran sobre el mismo espacio-tiempo soporte, permitiendo una interpretación como excitaciones de campos de materia estándar, cuya dinámica en este régimen puede estudiarse mediante la acción semiclásica presentada en el Apartado 4.3.2.

Esta acción es la suma de un término gravitatorio, otro de materia y uno de interacción. El término de materia tiene una expresión perturbativa que al orden más bajo representa tres campos escalares libres, lo cual puede verse directamente de la forma de  $\Theta^{KM}$ . Los términos de corrección de órdenes superiores acoplan estos campos escalares, produciendo dinámica no trivial. El grado de libertad no físico  $F_\phi$  puede verse como un campo auxiliar necesario para construir la dinámica de la parte de materia. El término de gravedad tiene



exactamente la misma forma que la encontrada en el Subapartado 4.2.3.c, de donde tomamos la interpretación de  $F_l$  como un campo métrico efectivo que da lugar a una corrección a la métrica de fondo:

$$ds^2 = ds_{AdS(R \gg 1)}^2 + \partial_\lambda F_l d\lambda du . \quad (4.142)$$

La presencia del término de interacción gravedad-materia muestra la influencia de ésta última en la noción clásica de métrica.

El significado de los campos de materia,  $F_z$  y  $F_{z^*}$  no está muy claro. Una posibilidad es que simplemente sean campos clásicos escalares no libres en interacción con gravedad, pero esto entonces plantea el problema de identificar la clase de materia física o interacción a la que corresponden. Otra posibilidad es que estos grados de libertad sólo tengan sentido en un régimen de interacción fuerte, de manera que en un límite clásico (de interacción suave) se desacoplen. La justificación matemática para esta opción es la posibilidad de incorporar la contracción de Inönü-Wigner antes discutida en el modelo, en caso de que los modos físicos de materia aparecieran corregidos por un parámetro multiplicativo  $\lambda$ . En el límite de interacción débil,  $\lambda \rightarrow 0$ , los modos asociados a  $z^n$  y  $z^{*n}$  pierden su contenido dinámico.

Éste es un hecho no trivial debido a la presencia de modos de gravedad y se manifiesta en el decrecimiento del tamaño del espacio de fases clásico con respecto al cuántico. Tendríamos *campos* que poseen una existencia física en el régimen fuerte no lineal y que se hacen triviales en el débil. Un mecanismo como el descrito podría tener interés para el estudio del suavizado de singularidades gravitacionales. Indicaría la presencia de física *exótica* en el entorno de las singularidades que desaparecería al alejarnos de ellas, sin tener análogos en la teoría clásica.

Un problema en la discusión previa es la especificación de la naturaleza del parámetro  $\lambda$ . Existen distintas posibilidades que pueden desarrollarse en el seno del modelo, combinando las constantes  $\alpha, c$  y  $c'$ . Desafortunadamente el modelo no es lo suficientemente restrictivo como para seleccionar una.

## 4.4 Discusión y Conclusiones

Hemos formulado un modelo de dinámica gravitatoria bidimensional con el grupo de Virasoro abstracto como punto de partida fundamental. La existencia del espacio-tiempo soporte no se asume desde un principio sino que se introduce en el desarrollo del propio modelo, estando ligada a una combinación crítica,  $c = c'$ , de los parámetros de extensión central. Como resultado, las características de este *espacio-tiempo* son bastante inusuales. Por una lado, no existe un único espacio-tiempo sino una superposición cuántica de una colectividad de espacios de  $AdS^2$  bidimensionales. Por otro lado, a nivel cuántico algunos difeomorfismos no se realizan como simetría gauge, sino que de hecho son los generadores de los grados de libertad, recuperándose su carácter gauge sólo en el límite clásico. Esta aparición de grados de libertad en el proceso de cuantización sugiere cuantizar primero e imponer las ligaduras después, sobre la opción de resolver primero la teoría clásica para después cuantizar. Se han incluido nuevos grados de libertad interpretables como *materia* mediante el uso de un álgebra de Kac-Moody que amplían la simetría de partida. Esta materia presenta un carácter no local teniendo sus excitaciones soporte en los distintos espacio-tiempos coexistentes. Las características globales de la simetría (exponenciabilidad de la representación desde el nivel de álgebra de Lie hasta el nivel de grupo) han resultado



cruciales para la consistencia del modelo en presencia de materia, puesto que han permitido eliminar el carácter *ad hoc* de las condiciones necesarias para conseguir la unitariedad. Éste es un ejemplo de la íntima conexión entre las nociones de globalidad y unitariedad.

Especial atención requiere el problema de la recuperación de la estructura espacio-temporal a partir de la teoría cuántica. Ésta se asocia al subgrupo  $SL(2, \mathbb{R})$  en el módulo característico y en particular a cada una de sus representaciones presentes dentro de la representación total del grupo de Virasoro. Sin embargo, la simple presencia de las distintas posibilidades consideradas en el Apartado 4.2.4 da una idea de que tal asociación dista de ser nítida. Debemos admitir que no hemos concluido con una construcción explícita de tal estructura, sino que el mecanismo que la introduce esencialmente sistematiza y formaliza un algoritmo de selección del espacio-tiempo adecuado, apoyándose en argumentos de sencillez y naturalidad (en el contexto de CSG), pero sin realmente evitar un matiz *ad hoc* en su carácter. Se requeriría una investigación específica más intensa con técnicas algebraicas tipo Gel'fand-Kolmogorov [GN43, GN48] o similares.

Tras esta discusión general podemos enunciar las siguientes conclusiones:

- a) Los aspectos técnicos del modelo presentado, cumplen satisfactoriamente nuestro primer objetivo *estructural* al presentar un formalismo matemático, obtenido a partir de un álgebra infinito-dimensional ligada a la noción de difeomorfismos, que sirve de soporte para la descripción de la teoría física.
- b) La evaluación del éxito conseguido en el segundo objetivo *conceptual* presenta dos aspectos:
  - i) Por un lado supone una auténtica interpretación física (de naturaleza *fundamental*, no efectiva) del formalismo matemático, con lo que podemos considerar la construcción como un genuino modelo físico. La conexión en el límite semiclásico con modelos de naturaleza gravitatoria nos permite considerar a la teoría como un modelo de gravedad cuántica, si bien debemos reconocer que sería deseable compensar el carácter especulativo de la descripción cuántica con algún tipo de predicción, rasgo ausente en el modelo.
  - ii) En la formulación concreta de este modelo, aparecen limitaciones y dificultades esenciales ligadas a la hipótesis de la simetría como pilar básico. A pesar de ser capaz de llevarnos a la construcción de un sistema no trivial, no consigue evitar problemas de ambigüedad en la interpretación física de los objetos construidos, en particular en el caso de la materia, puesto que en este modelo concreto tal hipótesis no resulta suficientemente fuerte para fijar una única posibilidad entre las opciones que sugiere.
- c) El tercer objetivo de obtener la estructura espacio-temporal como noción derivada no se consigue realizar en un sentido estricto. Siendo este caso el más sencillo, por trabajar en dimensiones bajas, esta conclusión será muy importante a la hora de fijar los objetivos en dimensiones superiores.
- d) Debemos destacar la emergencia de grados de libertad físicos presentes en el régimen cuántico y que desaparecen en el clásico (difeomorfismos dinámicos y materia que desacopla por Inönü-Wigner), como una conclusión fundamental de este modelo y que pensamos que lo trasciende, pasando a constituir un rasgo fundamental de los



sistemas físicos: el número de grados de libertad no se conserva al pasar del sistema clásico al cuántico, conclusión particularmente crítica en el análisis de teorías gauge.

En este sentido, la distinción de una parte orbital y una parte intrínseca en los modos de difeomorfismos de Virasoro, representa un mecanismo que supera explícitamente la contradicción que apuntábamos en el Apartado 1.1.2 al discutir la posibilidad de extraer grados de libertad físicos a partir de una simetría gauge, como son los difeomorfismos. En efecto, en teorías donde éstos carecen de contenido dinámico (simpléctico), como en las teorías conformes de campos, es posible escribir los difeomorfismos en términos de los grados de libertad físicos sobre los que actúan. Si además constituyen una simetría gauge, estas expresiones aparecen como ligaduras en los respectivos espacios de representación.

En nuestro modelo, este aspecto de los difeomorfismos está recogido en la parte orbital. Por añadidura ésta debe ser gauge por cuestiones de unitariedad (no es una cuestión de elección). Por tanto, existe una realización de la simetría de difeomorfismos con el carácter gauge habitual. Pero además surgen nuevos grados de libertad auténticamente físicos que están ligados a la parte intrínseca (que podemos llamar anómala) y que interpretamos como gravitatorios. En este sentido, la contradicción de extraer dinámica a partir de una simetría gauge se desvanece. Una posible enseñanza de este mecanismo es la necesidad de incluir materia para realizar el carácter gauge de los difeomorfismos a nivel cuántico. En tal caso, la invariancia gauge bajo difeomorfismos no tendría sentido en un espacio-tiempo vacío.



## Capítulo 5

# Simetrías locales y difeomorfismos

Este Capítulo emprende el estudio del álgebra de los difeomorfismos en dimensiones espacio-temporales realistas. El problema se simplifica truncando sus infinitos grados de libertad mediante la restricción del análisis a una subálgebra finita. De hecho, el estudio se aborda de una manera indirecta en cuyo planteamiento inicial no resulta obvio el papel de los difeomorfismos. Se trata de formular un escenario común para las dinámicas asociadas a grupos locales internos y espacio-temporales, donde los difeomorfismos sólo emergen en la última etapa del análisis. Toda la discusión se restringe al movimiento semiclásico de una partícula en el seno de campos de fondo. Se emplean simultáneamente dos estrategias: la realización de la simetría en el espacio de movimientos de la dinámica de Cartan, por un lado, y el formalismo de CSG, por el otro. La aplicación de ambas al estudio de una simetría  $U(1)$  local, con origen en la invariancia de fase de la partícula libre, proporciona una descripción satisfactoria del movimiento de una partícula en un campo electromagnético, compatible con el principio de acoplamiento mínimo. La CSG, con un carácter más algorítmico, es elegida para estudiar el caso técnicamente más complicado de las translaciones locales, asociadas a la aparición de un campo gravitatorio. Si consideramos la extensión central como primitiva y previa a cualquier simetría local, la mera introducción del campo gravitatorio conlleva la aparición de un campo electromagnético y de una mezcla potencial entre ambos. Este último fenómeno tiene interesantes consecuencias físicas como la violación del principio de equivalencia o de la simetría CPT.

### 5.1 Introducción

Este Capítulo plantea un enfoque radicalmente distinto en el estudio de los difeomorfismos respecto al desarrollado en el Capítulo anterior. En lugar de realizar un estudio frontal de la dinámica derivada de los mismos mediante un análisis de sus estructuras simplécticas asociadas (a nivel clásico) o de sus representaciones unitarias e irreducibles (a nivel cuántico), aquí seguimos una estrategia indirecta que sitúa el problema central de esta memoria en un contexto más amplio en el que los difeomorfismos sólo se hacen presentes en un estadio avanzado.

En concreto este Capítulo replantea el papel de las simetrías locales en la generación de dinámica, distinguiéndose de otros enfoques semejantes por el peso otorgado a las condiciones impuestas por requerimientos puramente derivados de la simetría (como por ejemplo la noción de invariancia estricta). Como motivación técnica para el problema general de la Tesis podemos señalar el particular método para derivar un álgebra de corrientes (ver



Apartado 5.2.2), que conduce al álgebra de difeomorfismos en el caso de las translaciones locales, produciéndose la convergencia (al menos estructural) con el tema central de esta memoria.

Desde un punto de vista más físico, este estudio de las simetrías locales está alentado por su éxito en el caso más sencillo de la interacción electromagnética [AA83] y por la familiaridad con estas estructuras, donde la intuición está mejor desarrollada, permitiendo quizá una interpretación más clara del papel dinámico de los difeomorfismos. Como objetivo más ambicioso y general, se plantea el establecimiento de un escenario donde tratar de forma conjunta las interacciones asociadas a simetrías internas y espacio-temporales (asociadas a subgrupos de los difeomorfismos), permitiendo eventualmente la discusión de la mezcla de interacciones.

Si bien nos mantenemos en un formalismo clásico, vamos a asistir a la emergencia de conceptos cuánticos como consecuencia directa del papel fundamental de la noción de simetría en la construcción del sistema físico <sup>1</sup>. Es más, nos limitaremos al estudio de la dinámica de una partícula en el seno de campos de fondo, relegando la discusión de la dinámica intrínseca de estos últimos al Capítulo siguiente. El papel de la simetría en la dinámica de un sistema lo vamos a explorar desde los dos enfoques alternativos siguientes:

- i)* El primero asume la existencia previa de una estructura dinámica sobre la que el grupo actúa.
- ii)* En el segundo, la CSG, la dinámica se deriva directamente a partir de una ley de grupo.

En cuanto al segundo enfoque, por ahora sólo diremos que si bien es menos general que el primero, pues una dinámica arbitraria no está necesariamente derivada de una estructura grupo-teórica, presenta la ventaja de que su aplicación resulta más algorítmica y sencilla de aplicar. Utilizamos este tratamiento en las Secciones 5.3 y 5.4. Respecto al primer enfoque, diremos que la imposición sobre la dinámica de condiciones estrictamente motivadas por la simetría, en general enriquece dicha dinámica al tiempo que permite profundizar en la comprensión de su estructura. El siguiente Apartado ilustra mediante un ejemplo los mecanismos básicos que tienen lugar en este modo de proceder.

### 5.1.1 Partícula libre galileana: invariancia estricta y estudio semiclásico

Analicemos el papel de la simetría en el caso que constituye, posiblemente, el ejemplo más sencillo de dinámica de un sistema físico: la partícula libre galileana clásica.

Para ello utilizamos el formalismo de Cartan expuesto en la Sección 2.3, esto es, describimos la dinámica sobre una estructura de contacto. La variedad soporte en esta estructura, que hemos denominado espacio de movimientos, viene dada en nuestro caso por  $\mathbb{R} \times T^*(\mathbb{R}^3)$ , parametrizado por  $(t, q^i, p_j)$ , donde  $\mathbb{R}^3$  es el espacio de configuración de la partícula libre. La forma de contacto, que hemos denominado de Poincaré-Cartan, está definida por

$$\Theta_{PC} = p_i dx^i - \frac{\vec{p}^2}{2m} dt \quad , \quad (5.1)$$

<sup>1</sup>Esto no es más que una muestra del grado de interrelación entre las nociones de simetría y sistema cuántico.



y caracteriza la dinámica de la partícula libre. El grupo de Galileo *actúa* como grupo de simetrías del sistema. Escribimos una realización del mismo como grupo de transformaciones del espacio de movimientos:

$$\begin{cases} t' &= t + b \\ \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{a} + \vec{V}t \\ \vec{p}' &= R\vec{p} + m\vec{V} \end{cases} \quad (5.2)$$

Para comprobar explícitamente su papel como simetría del sistema, calculamos las variaciones infinitesimales que estas transformaciones inducen en la  $\Theta_{PC}$ , para lo cual escribimos los generadores asociados a los distintos parámetros del grupo, así como las derivadas de Lie correspondientes:

$$\begin{aligned} X_b &= \frac{\partial}{\partial t} & \Rightarrow & L_{X_b} \Theta_{PC} = 0 \\ X_{\vec{a}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} & \Rightarrow & L_{X_{\vec{a}}} \Theta_{PC} = 0 \\ X_{\vec{V}} &= t \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + m \frac{\partial}{\partial \vec{p}} & \Rightarrow & L_{X_{\vec{V}}} \Theta_{PC} = d(m\vec{x}) = df_V \\ X_{\vec{\epsilon}} &= \vec{x} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \vec{p} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{p}} & \Rightarrow & L_{X_{\vec{\epsilon}}} \Theta_{PC} = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

La *semi-invariancia* de  $\Theta_{PC}$  bajo el grupo de Galileo, puesta de manifiesto por la presencia de la diferencial total  $df_V$  en las variaciones infinitesimales, es suficiente para asegurar el carácter de simetría del sistema del grupo pues, como hemos señalado en la Sección 2.3, no afecta a las ecuaciones clásicas del movimiento. Sin embargo, y a pesar de la ausencia de una estricta necesidad para ello, podemos otorgar a la simetría un mayor peso en este análisis, de forma que deje de ser un elemento *pasivo* que actúa sobre una estructura preexistente para convertirse en un ingrediente que interviene *activamente* en la construcción de la dinámica del sistema. En tal caso, resulta natural exigir que la estructura dinámica relevante sea *estrictamente* invariante bajo el grupo de simetrías del sistema. En particular, vamos a elevar a la categoría de postulado la invariancia estricta de la 1-forma de Poincaré-Cartan (o sus generalizaciones) y veamos que consecuencias se derivan de ello.

### 5.1.1.a Álgebra de los invariantes Noether

Antes de centrarnos en la obtención de la invariancia estricta, resulta conveniente hacer ciertos comentarios estructurales de carácter general. Tras un primer análisis se concluye que el fenómeno de la semi-invariancia es independiente de la realización escogida del grupo de Galileo sobre el espacio de movimientos. De hecho, se puede relacionar con la estructura algebraica intrínseca del grupo de Galileo, en concreto con sus aspectos cohomológicos [Le69, Le71]. A este respecto podemos ganar rápidamente cierta intuición estudiando los corchetes de Poisson de los invariantes Noether del sistema. Para calcularlos recordamos la expresión que adquieren en el formalismo de Cartan

$$\mathcal{N}_Y = i_Y \Theta_{PC} - f_Y \quad , \quad (5.4)$$

con lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_b &= -\frac{\vec{p}^2}{2m} \\ \mathcal{N}_{\vec{a}} &= \vec{p} \\ \mathcal{N}_{\vec{V}} &= t\vec{p} - m\vec{x} \\ \mathcal{N}_{\vec{\epsilon}} &= \vec{x} \wedge \vec{p} \end{aligned} \quad (5.5)$$



Éstas son funciones bien definidas sobre la variedad simpléctica cociente, con lo que podemos calcular su corchete de Poisson inducido por la forma pre-simpléctica  $d\Theta$ . Dichos corchetes reproducen el álgebra de Galileo salvo en el caso

$$\{\mathcal{N}_{a^i}, \mathcal{N}_{V^j}\} = m\delta_{ij} \quad , \quad (5.6)$$

puesto que su análogo en términos de los generadores del grupo se anula. Como hemos visto en el Subapartado 2.2.2.b, la aparición de un término central que no puede ser eliminado por un cambio lineal en el álgebra (extensión no trivial), está ligada a la estructura cohomológica del álgebra. Esta diferencia entre el álgebra de los generadores y la realización en términos de los invariantes Noether, que tampoco supone de por sí una auténtica dificultad en la formulación de la dinámica, constituye de hecho otra motivación para la revisión de la misma al considerar a la simetría como uno de sus constituyentes fundamentales y sugiere al grupo de Galileo extendido como el auténtico grupo con contenido físico.

### 5.1.1.b Extensión de estructuras

En cualquier caso, aquí nos interesa insistir en el enfoque que promueve la obtención de la invariancia estricta. La razón es que tal tratamiento ilustra la estrategia general que se sigue en el estudio de casos más complicados. Dicha estrategia, mediante la que se trata de satisfacer cierta exigencia dictada por el carácter fundamental asignado al grupo de simetría, consta de dos pasos que de hecho se llevan a cabo de forma simultánea. Por un lado se amplía el espacio sobre el que se realiza el grupo, lo que conlleva la introducción de nuevos parámetros en la teoría, y por otro se modifica la 1-forma de Poincaré-Cartan mediante la adición de nuevos términos, de forma que la dinámica resulta potencialmente alterada.

En nuestro caso la condición dictada por la simetría es la invariancia estricta de la 1-forma de contacto. Para ello extendemos el espacio de movimientos con una nueva variable  $z = e^{i\phi}$  de tal manera que la variación de la diferencial total  $d\phi$ , utilizada para modificar la forma de Poincaré-Cartan ( $\Theta_{PC} \rightarrow \Theta = \Theta_{PC} + d\phi$ ), cancele el término  $d(m\vec{x})$  de la variación de  $\Theta$  bajo  $X_{\vec{V}}$ . Esto es, queremos que la acción del grupo de Galileo sobre  $\phi$  sea tal que

$$d\phi' = d\phi - d(m\vec{x}^i) \quad , \quad (5.7)$$

para cada  $V^i$ . Una acción finita del grupo de Galileo que satisface esta condición infinitesimal viene dada por

$$z' = ze^{-i[\frac{1}{2}mV^2t + mVx + \varphi]} \quad , \quad (5.8)$$

donde ha sido necesario añadir asimismo una nueva variable  $\varphi$  al grupo para obtener una acción bien definida y que hace que el generador de los *boosts* se escriba:

$$X_{\vec{V}} = t \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + m \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + m\vec{x} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad . \quad (5.9)$$

Componiendo dos acciones sucesivas podemos obtener la ley de grupo:

$$\begin{aligned} b'' &= b' + b \\ \vec{a}'' &= \vec{a}' + R(\vec{\epsilon}')\vec{a} + \vec{V}'b \\ \vec{V}'' &= \vec{V}' + R(\vec{\epsilon}')\vec{V} \end{aligned} \quad (5.10)$$



$$\begin{aligned}\vec{\epsilon}'' &= \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^2}{4}} \vec{\epsilon}' + \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}'^2}{4}} \vec{\epsilon} + \frac{1}{2} \vec{\epsilon}' \wedge \vec{\epsilon} \\ e^{i\varphi''} &= e^{i\varphi'} e^{i\varphi} e^{-\frac{im}{\hbar} [\vec{V}' R' \vec{a} + \frac{1}{2} b \vec{V}'^2]}\end{aligned}$$

que constituye de hecho la ley de grupo de Galileo centralmente extendido (isomorfa a la del ejemplo del Apartado 3.4.1, con las rotaciones añadidas). En particular, el álgebra de Lie cerrada por los generadores de este grupo extendido coincide con la de los invariantes Noether antes presentados, reproduciéndose el conmutador (si  $\Xi\Psi = i\Psi$ )

$$[\tilde{X}_A^i, \tilde{X}_V^j] = m\delta_{ij} \quad , \quad (5.11)$$

con lo que la imposición de la condición de invariancia estricta de  $\Theta$  nos lleva a la misma conclusión obtenida al analizar los invariantes Noether.

Las ecuaciones dinámicas en el espacio de movimientos extendido, vienen ahora dadas por el sistema dinámico definido por el campo vectorial  $\bar{X}$  determinado por

$$dt(\bar{X}) = 1 \quad , \quad i_{\bar{X}}d\Theta = 0 \quad , \quad i_{\bar{X}}\Theta = 0$$

donde la última condición completa las de la Proposición de Cartan, (2.3.4), de la misma manera que en CSG. Tomando cociente por este campo, recuperamos una estructura de contacto del tipo que encontrábamos al discutir la cuantización geométrica.

En definitiva, podemos sintetizar la relevancia de este ejemplo en dos puntos:

- a) Al trabajar con formulaciones de la dinámica de un sistema en cuya misma construcción no interviene activamente la noción de simetría, la entrada en juego de este concepto junto con la imposición de condiciones sobre su realización (invariancia estricta en este caso) conlleva en general la extensión y modificación de las estructuras dinámicas existentes *a priori*. En el caso estudiado de la partícula libre galileana, esto resulta en una reformulación semiclásica de la dinámica, mientras que en otros sistemas (con otras imposiciones sobre la realización de la simetría) se produce la aparición de nuevos grados de libertad dinámicos, como veremos en las siguientes Secciones.
- b) El  $U(1)$  de la invariancia de fase aparece como nexo entre cuantización y simetría. Efectivamente, en la Sección 2.1 veíamos cómo el  $U(1)$  se relacionaba con la noción de cuantización, mientras que este ejemplo muestra su relación con la invariancia estricta bajo una simetría. Este análisis de hecho sugiere otro argumento para considerar el uso de grupos centralmente extendidos por  $U(1)$  como un buen punto de partida en la formulación de la dinámica de un sistema físico.

## 5.2 Electromagnetismo à la Cartan

### 5.2.1 Acoplamiento mínimo

Si bien la caracterización matemática del grupo de gauge en una teoría tipo Yang-Mills precisa del empleo de conceptos de fibrados principales [Na90], cuando el fibrado relevante en el problema es de hecho trivial, podemos pensar en tal grupo de gauge como el conjunto de aplicaciones del espacio-tiempo  $M$  con valores en un grupo rígido  $G$ ,  $Map(M, G) \equiv G(M)$ . Siguiendo la terminología habitual, decimos que el grupo de gauge es un *grupo local*.



Repasamos brevemente el denominado *principio de gauge*<sup>2</sup> La forma más sencilla de presentarlo en términos físicos, consiste en partir de un sistema, por ejemplo definido por una función lagrangiana  $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, \dots)$  dependiente de un campo  $\Phi$  y sus derivadas, de tal forma que exista un grupo  $G$  que actúa sobre los campos dejando invariante la acción y constituyendo por tanto una simetría del sistema. Esto es

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow e^{i\lambda^a T_a} \Phi \quad (\Rightarrow \partial_\mu \Phi \rightarrow e^{i\lambda^a T_a} \partial_\mu \Phi) \\ \delta_\lambda S &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde  $T^a$  son los generadores infinitesimales del grupo.

El *principio de gauge* consiste en promover los parámetros  $\lambda$  a funciones sobre el espacio-tiempo  $M$ ,  $\lambda(x)$ , e imponer que las correspondientes transformaciones dependientes de las coordenadas  $x$  sigan siendo una simetría del sistema (este requerimiento de hecho es dinámico, puesto que como vamos a ver exige la modificación del propio sistema). Decimos que el grupo de simetría  $G$  se hace *local*.

Sin embargo, al imponer el nuevo grupo  $G(M)$  como simetría de la acción nos encontramos con el problema de que los términos  $\partial_\mu \Phi$  ya no se transforman de forma covariante bajo el grupo, apareciendo un término corrector proporcional a la derivada del parámetro del grupo,  $\partial_\mu \lambda^a$ . Para compensar este término, corregimos la derivada con un término, una conexión  $A_\mu$ , que se transforma bajo el grupo de la forma apropiada para obtener la cancelación y recuperar la transformación apropiada de la derivada, denominada ahora *covariante*. Esto se consigue introduciendo los campos  $A_\mu = A_\mu^a T_a$  donde  $A_\mu^a$ , y por tanto  $A_\mu$ , son las componentes de una 1-forma con valores en el álgebra de Lie de  $G$ . De hecho, la condición de covariancia impone unas reglas de transformación sobre  $A_\mu$  que la caracteriza como la 1-forma de conexión de un fibrado principal con grupo estructural  $G$ . Las componentes  $A_\mu^a$  constituyen nuevos grados de libertad de la teoría y el mecanismo por el que emergen como corrección de la derivada parcial se denomina *acoplamiento mínimo*.

### 5.2.2 Reformulación del principio

Una vez introducida la versión estándar del acoplamiento mínimo, vamos a presentarlo según el esquema planteado en el ejemplo de la semi-invariancia de la partícula libre galileana.

Para ello, hacemos más explícita la noción de grupo local, si bien en un tratamiento infinitesimal a nivel de álgebra de Lie. Como hemos señalado antes, el grupo de gauge asociado a un grupo rígido  $G$  viene dado, en el caso trivial, por las aplicaciones de una variedad (espacio-temporal) en ese grupo. Infinitesimalmente esto significa que el álgebra de Lie viene dada por el producto tensorial de las funciones reales definidas sobre  $M$  con el álgebra rígida del grupo dado,  $\mathcal{G}$ :  $\mathcal{G}_{local} = \mathcal{C}(M) \otimes \mathcal{G}$ . En este punto vamos a generalizar la noción estándar de grupo local, introduciendo una dependencia sobre las representaciones del grupo  $G$ ,  $\mathcal{R}_G$ . En efecto, para definir el conmutador de los elementos en  $\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{G}$ , consideramos la realización de los generadores infinitesimales  $X \in \mathcal{G}$  en  $\mathcal{R}_G$ ,  $X_{\mathcal{R}}$ . De esta forma el álgebra del grupo local, que resulta más apropiado denotar como  $\mathcal{G}_{local}^{\mathcal{R}}$ , viene dada por:

$$[f \otimes X_{\mathcal{R}}, g \otimes Y_{\mathcal{R}}] = (f X_{\mathcal{R}} g) \otimes Y_{\mathcal{R}} - (g Y_{\mathcal{R}} f) \otimes X_{\mathcal{R}} + (fg) \otimes [X_{\mathcal{R}}, Y_{\mathcal{R}}] \quad . \quad (5.13)$$

<sup>2</sup>Por razones históricas, es difícil evitar cierta confusión al emplear el término *gauge*. En este Apartado, el principio de gauge se refiere al proceso de hacer local cierto grupo de simetrías rígido. En el resto de la memoria hablamos de gauge para referirnos a una simetría que deja invariante cada una de las soluciones. En particular, las teorías tipo Yang-Mills constituyen una clase de tales formulaciones de la dinámica.



En el caso de que la representación  $\mathcal{R}_G$  de  $G$  no actúe sobre  $M$ , los dos primeros sumandos del miembro de la derecha se anulan y recuperamos literalmente el álgebra de Lie de  $Map(M, G) (\equiv G(M))$ .

En nuestro tratamiento nos interesa estudiar la posibilidad de hacer *local* sólo una parte del grupo  $G$ . Para ello tomamos como elementos de partida un grupo dado  $G$ , una representación (fiel) del mismo y un subgrupo invariante  $H \subset G$ . Seleccionamos un conjunto de generadores infinitesimales que constituyan una base del álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  adaptada a  $H$ , esto es, una base  $\{X_A, X_a\}$  ( $A = \{1, \dots, \dim(H)\}$ ;  $a = \{\dim(H) + 1, \dots, \dim(G)\}$ ) de  $\mathcal{G}$ , donde los generadores  $X_A$  forman una base del álgebra de Lie de  $H$ . Por ser  $H$  invariante:

$$[X_a, X_A] = C_{aA}^B X_B \quad . \quad (5.14)$$

Con estos elementos, hacemos local el subgrupo  $H$  introduciendo los generadores  $f \otimes X_A$ , con  $f \in \mathcal{C}(M)$ <sup>3</sup>. Las conmutadores adicionales que involucran a los generadores locales, son:

$$\begin{aligned} [f \otimes X_A, g \otimes X_B] &= (f X_A g) \otimes X_B - (g X_B f) \otimes X_A + (fg) \otimes [X_A, X_B] \\ [X_a, f \otimes X_A] &= L_{X_a} f \otimes X_a + f \otimes [X_a, X_A] = \\ &= L_{X_a} f \otimes X_a + C_{aA}^B f \otimes X_B \quad . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Los que sólo afectan a generadores *rígidos* no se ven alterados.

### 5.2.3 Partícula en un campo electromagnético

Una vez que hemos planteado el esquema general para la construcción y estudio de un grupo local, volvemos al análisis de la acción del grupo de Galileo, en este caso ya extendido, sobre el sistema dinámico de la partícula libre. Como un paso más en la profundización del estudio de su dinámica, que quedará justificado por los resultados, postulamos la promoción del subgrupo central  $U(1)$ , obviamente invariante, a grupo local  $U(1)(x, t)$ . La condición de que el grupo resultante sea simetría del sistema físico, de hecho dejando estrictamente invariante la 1-forma que generaliza a la de Poincaré-Cartan, conlleva la modificación de esta última, y por ende de la dinámica, constituyendo la base de la formulación del principio de acoplamiento mínimo en el caso del grupo  $U(1)$  rígido, que nos va a conducir a la descripción del movimiento de una partícula en el seno de un campo electromagnético de fondo [AA83]. Se produce por tanto una identificación entre el  $U(1)$  de la Mecánica Cuántica y el  $U(1)$  electromagnético, cuyo significado subyacente está aún por comprender.

Para obtener el álgebra relevante, escribimos el álgebra de Lie  $\tilde{\mathcal{G}}$  del grupo de Galileo centralmente extendido (sólo hacemos explícitos los conmutadores no nulos)

$$\begin{aligned} [X_{Vi}, X_b] &= X_{a^i} & [X_{Vi}, X_{aj}] &= \frac{m}{\hbar} \delta_{ij} X_\phi \\ [X_{\epsilon^i}, X_{\epsilon^j}] &= \epsilon_{ij}^k X_{\epsilon^k} & [X_{\epsilon^i}, X_{Vj}] &= \epsilon_{ij}^k X_{V^k} & [X_{\epsilon^i}, X_{aj}] &= \epsilon_{ij}^k X_{a^k} \quad , \end{aligned} \quad (5.16)$$

que, como hemos insistido antes, deja estrictamente invariante la forma  $\Theta = p_i dx^i - \frac{p^2}{2m} + d\phi$ , esto es,  $L_{X_i} \Theta = 0, \forall X_i \in \tilde{\mathcal{G}}$ .

En nuestro esquema, la incorporación de los nuevos generadores  $f \otimes X_\phi$ , donde  $f$  es una función real sobre el espacio de configuración de la partícula, exige la elección de una

<sup>3</sup>En adelante omitiremos la referencia explícita a la representación  $\mathcal{R}_G$ .



representación concreta del grupo de Galileo extendido. Nuestra elección corresponde a la realización de los generadores dada en (5.3) y (5.9). Los nuevos conmutadores vienen dados por:

$$[X_i, f \otimes X_\varphi] = (L_{X_i} f) \otimes X_\varphi \quad (5.17)$$

Para imponer este álgebra ampliada como simetría del sistema y por tanto de  $\Theta$ , debemos obtener una realización suya sobre el espacio de movimientos extendido sobre el que está definida  $\Theta$ . Esto se obtiene con  $f \otimes X_\phi = f \frac{\partial}{\partial \phi}$ , pero al calcular las variaciones infinitesimales de la dinámica bajo esta transformación obtenemos:

$$L_{f \otimes X_\phi} \Theta = d(i_{f \otimes X_\phi} \Theta) + i_{f \otimes X_\phi} d\Theta = df \quad (5.18)$$

esto es, sólo recuperamos semi-invariancia. Para obtener invariancia estricta seguimos la misma estrategia que en el caso anterior. Ampliamos una vez más el espacio de realización de manera que las nuevas variables entren a formar parte de una nueva 1-forma presimpléctica donde la transformación de los nuevos parámetros compense esta  $df$ .

En concreto, añadimos nuevas variables  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_0$  que aparecen en la  $\Theta$  mediante la 1-forma  $\Gamma = \Gamma_i dx^i + \Gamma_0 dt$ , y que se transforman bajo  $U(1)(\vec{x}, t)$  como el gradiente *espacio-temporal* de la función  $f$ . En particular, esto implica que las componentes en  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_0$  de la realización del generador  $f \otimes X_\phi$  son  $-\vec{\nabla} f$  y  $-\frac{\partial f}{\partial t}$ , respectivamente.

La presencia de nuevos términos en la  $\Theta' (= \Theta_{PC} + \Gamma)$  hace que se pierda la invariancia bajo la acción infinitesimal de los generadores del Galileo centralmente extendido rígido, que sólo es recuperada añadiendo a dichos generadores componentes en las nuevas variables  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_0$ . Las nuevas realizaciones de los generadores deben respetar el álgebra y simultáneamente garantizar

$$L_{X_i}(\Theta') = 0 \quad (5.19)$$

para todos los generadores. Esto es de hecho posible<sup>4</sup> mediante la siguiente realización del álgebra sobre las variables  $(t, \vec{x}, \vec{p}, \vec{\Gamma}, \Gamma_0, \phi)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_b &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \tilde{X}_{\vec{a}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \\ \tilde{X}_{\vec{V}} &= t \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + m \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + \vec{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \Gamma_0} + \frac{m}{\hbar} \vec{x} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \tilde{X}_{\vec{\epsilon}} &= \vec{x} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \vec{p} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + \vec{\Gamma} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{\Gamma}} \\ f \otimes X_\varphi &= -\vec{\nabla} f \frac{\partial}{\partial \vec{\Gamma}} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \Gamma_0} - f \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (5.20)$$

A nivel finito las transformaciones de las nuevas variables  $\Gamma$  se escriben

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}' &= R\vec{\Gamma} \\ \Gamma'_0 &= \Gamma_0 + \vec{V} \cdot R\vec{\Gamma} \end{aligned} \quad (5.21)$$

<sup>4</sup>En la siguiente subsección veremos un ejemplo donde es necesario ampliar de nuevo el álgebra para que la realización sea posible.



bajo una rotación y un *boost* y,

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}' &= \vec{\Gamma} - \vec{\nabla}f \\ \Gamma'_0 &= \Gamma_0 - \frac{\partial f}{\partial t},\end{aligned}\quad (5.22)$$

bajo un elemento de  $U(1)(\vec{x}, t)$ .

Para obtener las ecuaciones del movimiento, necesitamos calcular la intersección del núcleo de  $\Theta'$  y  $d\Theta'$ . Escribiendo la conexión  $\Gamma$  como  $\Gamma \equiv qA_i dx^i - qA_0 dt$ , donde  $q$  representa la carga eléctrica de la partícula, la forma  $\Theta'$  viene dada por (prescindiendo de la  $'$ ):

$$\begin{aligned}\Theta &= m\vec{v} \cdot d\vec{x} - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 dt \\ &+ q\vec{A} \cdot d\vec{x} - qA^0 dt + \hbar d\phi.\end{aligned}\quad (5.23)$$

con lo que la evolución está generada por el campo

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{q}{m} \left[ \left( \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right) v^j - \frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial v_i} \\ &- \left[ \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{q}{\hbar}(\vec{v} \cdot \vec{A} - A^0) \right] \frac{\partial}{\partial \phi},\end{aligned}\quad (5.24)$$

De aquí se derivan las ecuaciones del movimiento de una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v} \\ m\frac{d\vec{v}}{dt} &= q \left[ \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \\ \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{1}{\hbar} \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{m} \vec{A} \cdot \vec{p} \right).\end{aligned}\quad (5.25)$$

Si definimos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{A} &\equiv \vec{B} \\ -\vec{\nabla}A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &\equiv \vec{E},\end{aligned}\quad (5.26)$$

obtenemos la expresión estándar para la fuerza de Lorentz:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}].\quad (5.27)$$

Un análisis semejante se puede aplicar para el caso relativista partiendo del grupo de Poincaré. En este caso la extensión central es una pseudo-extensión y no está motivada por la invariancia estricta. No obstante, repitiendo el proceso se vuelven a recuperar las ecuaciones de la fuerza de Lorentz.

Veremos que la falta de una motivación clara para la extensión central en el caso relativista se subsana cuando se toma el grupo como único elemento generador de la dinámica del sistema (Sección 5.3), con la obtención del espacio de las fases dentro de él. No obstante, este problema de la motivación es general, afectando a la propia justificación para hacer local el  $U(1)$  central. Por el momento, debemos admitir que el apoyo para tales imposiciones radica en el interés de los resultados obtenidos *a posteriori*.



### 5.2.4 Movimiento de una partícula en un potencial

Un ejemplo claro del último comentario lo encontramos en el presente Apartado, donde vamos a derivar las ecuaciones del movimiento de una partícula galileana en el seno de un potencial externo. Partimos de la simetría cinemática del sistema, el grupo de Galileo, y hacemos local un subgrupo suyo. En particular este subgrupo es el de las translaciones espaciales y temporales que pasan a ser funciones (sólo) del tiempo, a diferencia del caso anterior, donde la dependencia se imponía tanto sobre la variable temporal como sobre las espaciales. La razón por la que se elige este principio de *gauge* no resulta en absoluto clara, pero los resultados la sustentan al menos como un mecanismo eficaz para la construcción de una dinámica. Lo más que podemos apuntar es que el hacer la translación temporal local en el tiempo induce el término adecuado en la 1-forma de contacto para derivar la dinámica buscada. Sin embargo, debido a la conmutación de los nuevos generadores con los *boosts*, la incorporación de las translaciones espaciales dependientes del tiempo se hace necesaria, por poco intuitivo que esto resulte. En efecto:

$$[f(t) \otimes \frac{\partial}{\partial t}, t \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial p}] = f(t) \otimes \frac{\partial}{\partial x} . \quad (5.28)$$

A diferencia del desarrollo de la sección anterior, vamos a imponer primero la simetría local y sólo después la invariancia estricta. La razón es que el proceso en general no conmuta, de forma que el sistema resultante depende del orden en que impongamos dichas condiciones. Más adelante, en la Sección 5.4 analizaremos la otra posibilidad, si bien en el contexto relativista.

Por brevedad, consideremos una única dimensión espacial. Partiendo del grupo de Galileo sin extender y haciendo locales las variables indicadas previamente, obtenemos el álgebra:

$$\begin{aligned} [f(t) \otimes X_b, X_b] &= -\frac{df}{dt} \otimes X_b \\ [f(t) \otimes X_b, X_a] &= 0 \\ [f(t) \otimes X_b, X_V] &= f(t) \otimes X_a . \end{aligned} \quad (5.29)$$

Estos generadores no dejan semi-invariante la forma  $\Theta_{PC}$ , lo que solucionamos nuevamente ampliando el espacio de representación,  $(x, p, t, h)$ , esta vez con una función  $h$ . Los generadores adquieren una nueva componente en  $\frac{\partial}{\partial h}$  al tiempo que la  $\Theta_{PC}$  se ve modificada por la conexión  $\Gamma \equiv hdt$ . La semi-invariancia de

$$\Theta'_{PC} = pdx - \frac{p^2}{2m} dt + hdt , \quad (5.30)$$

fija las componentes de los generadores en  $h$ . Sin embargo, la misma presencia de estas nuevas componentes deforma el álgebra, necesitándose un nuevo generador local  $f(t) \otimes X_h$  para que el álgebra cierre. La expresión completa de los generadores con la nueva componente en  $h$ , resulta:

$$\begin{aligned} f(t) \otimes X_b &= f \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{p^2}{2m} - h \right) \frac{df}{dt} \frac{\partial}{\partial h} \\ f(t) \otimes X_a &= f \frac{\partial}{\partial x} - p \frac{df}{dt} \frac{\partial}{\partial h} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
X_V &= t \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial p} \\
f(t) \otimes X_h &= f \frac{\partial}{\partial h} .
\end{aligned} \tag{5.31}$$

El nuevo generador también deja semi-invariante la  $\Theta_{PC}$  corregida. Como en el caso del grupo de Galileo, para obtener invariancia estricta añadimos un nuevo parámetro  $\phi$  al espacio de representación y  $d\phi$  a  $\Theta'_{PC}$ . Las componentes de los generadores en el nuevo parámetro quedan fijadas imponiendo que la variación de  $\phi$  bajo los respectivos generadores compense la diferencial total que resulta en su variación de la  $\Theta'_{PC}$ . Con esto nos queda:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f(t) \otimes X_b} &= f \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{p^2}{2m} - h \right) \frac{df}{dt} \frac{\partial}{\partial h} - \frac{f}{\hbar} \left( \frac{p^2}{2m} - h \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \\
\widetilde{f(t) \otimes X_a} &= f \frac{\partial}{\partial x} - p \frac{df}{dt} \frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{\hbar} f p \frac{\partial}{\partial \phi} \\
\tilde{X}_V &= t \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial p} - \frac{m}{\hbar} \left( x - \frac{p}{m} t \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \\
\widetilde{f(t) \otimes X_h} &= f \frac{\partial}{\partial h} - \frac{f}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \phi} .
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Las ecuaciones de Cartan asociadas a la  $\Theta'_{PC} + d\phi$  nos llevan a

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial h}{\partial x} ,
\end{aligned}$$

esto es, las ecuaciones de Newton del movimiento de una partícula en presencia de una fuerza originada por el potencial  $h(x)$ .

### 5.3 Electromagnetismo en el formalismo de CSG

En la Sección anterior, los grados de libertad que definen el espacio de movimientos del sistema, son estructuras externas al grupo sobre las que éste actúa. En particular  $A_0$  y  $A_i$  no son variables del grupo, sino parámetros que reciben su acción.

En esta sección vamos a reconsiderar el problema del Apartado 5.2.3 partiendo exclusivamente del grupo relevante, Galileo extendido por  $U(1)$  local, tratando de recuperar los grados de libertad involucrados a partir del propio grupo. Para ello vamos a emplear la CSG, explotando sus aspectos semiclásicos, pero sin olvidar que tal formulación establece un marco muy apropiado para un ulterior tratamiento cuántico.

En primer lugar escribimos una ley de grupo para Galileo extendido por  $U(1)(x, t)$ . Ilustramos el proceso trabajando en una dimensión espacial y por lo tanto prescindiendo de rotaciones, que serán incorporadas posteriormente. Seguimos la misma estrategia que habitualmente se utiliza en el cálculo de la ley del grupo de Galileo extendido, lo que conlleva su realización sobre un sistema. Si bien en la Sección 5.1 hemos llegado a la ley de Galileo extendido mediante la exigencia de invariancia estricta en la realización sobre el espacio de movimientos clásico, resulta más cómodo el análisis de la invariancia de la ecuación de Schrödinger bajo el grupo de Galileo [Ba54]. En este contexto, el grupo actúa introduciendo una fase en la función de onda  $\Psi'(x') = e^{-im(\frac{1}{2}V^2t + Vx)}\Psi(x)$ . La asociatividad de la acción



requiere la introducción del parámetro central del grupo  $\varphi$ . Tras componer sucesivamente dos transformaciones  $\Psi'(x') = e^{-im(\frac{1}{2}V^2t+Vx+\varphi)}\Psi$ , obtenemos ley de composición explícita, de manera que para  $\zeta \equiv e^{i\varphi}$

$$\zeta'' = \zeta'\zeta e^{-im(V'A+\frac{1}{2}V'^2B)} \quad (5.33)$$

Para la extensión por  $U(1)(x, t)$  repetimos los pasos previos haciendo local  $\varphi$

$$\Psi'(x') = e^{-im(\frac{1}{2}V^2t+Vx+\varphi(x,t))}\Psi \quad (5.34)$$

y usando el siguiente desarrollo de Taylor para  $\varphi(x, t)$

$$\varphi(x, t) = \varphi + \varphi_x x + \varphi_t t + \frac{1}{2!}\varphi_{xx}x^2 + \frac{1}{2!}\varphi_{tt}t^2 + \frac{1}{2!}\varphi_{xt}xt + \dots \quad (5.35)$$

de forma que  $\varphi, \varphi_x, \varphi_t, \varphi_{xx}, \varphi_{tt}, \varphi_{xt} \dots$  parametrizan el grupo  $U(1)(x, t)$ . Componiendo dos transformaciones llegamos a la ley de grupo:

$$\begin{aligned} b'' &= b' + b \\ a'' &= a' + a + V'b \\ V'' &= V' + V \\ \varphi_x'' &= \varphi_x' + \varphi_x + \varphi_{xx}'a + \varphi_{xt}'b + \dots \\ \varphi_t'' &= \varphi_t' + \varphi_t + \varphi_x'V + \varphi_{xx}'aV + \varphi_{tt}'b + \varphi_{xt}'(a + Vb) + \dots \\ \varphi_{xx}'' &= \varphi_{xx}' + \varphi_{xx} + \dots \\ \varphi_{tt}'' &= \varphi_{tt}' + \varphi_{tt} + \varphi_{xx}'V^2 + 2\varphi_{xt}'V + \dots \\ \varphi_{xt}'' &= \varphi_{xt}' + \varphi_{xt} + \varphi_{xx}'V + \dots \\ &\dots \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta e^{-im(V'a+\frac{1}{2}bV'^2)} e^{i(\varphi_x'a+\varphi_t'b+\frac{1}{2!}\varphi_{xx}'a^2+\frac{1}{2!}\varphi_{tt}'b^2+\varphi_{xt}'ab+\dots)} \end{aligned}$$

Una observación importante, como veremos a continuación, es que esta ley de grupo cierra orden por orden en el desarrollo de  $\varphi(x, t)$ .

A partir de aquí podemos proceder según el algoritmo de la CSG. Sin embargo, tras calcular los campos de vectores izquierdos y la 1-forma de cuantización  $\Theta$ , se obtiene que el módulo característico, esto es, aquellos vectores por los que hay que tomar cociente para obtener la variedad de soluciones, viene dado por:

$$\mathcal{G}_\Theta = \langle X_V^L + mX_{\varphi_x}^L, X_{\varphi_{xx}}^L, X_{\varphi_{tt}}^L, X_{\varphi_{xt}}^L, \dots \rangle \quad .$$

Por tanto estos campos no contribuyen a la introducción de los nuevos grados de libertad. Sólo los modos lineales tienen contenido dinámico.

Por razones de comodidad, y teniendo en cuenta que la ley cierra orden por orden, nos restringimos al estudio del grupo con desarrollo de  $\varphi$  hasta orden lineal, al que denominaremos  $\tilde{G}_E$ . Reescribimos para este caso la ley de grupo, en dimensión espacial 3 e incorporando rotaciones, con la notación  $\varphi_{\vec{x}} = \vec{A}$ ,  $\varphi_t = A_0$ , que hace evidente nuestra intención (también denotamos  $\vec{a}$  por  $\vec{x}$  y  $b$  por  $t$ , ahora que ya no hay confusión entre parámetros del grupo y del espacio de representación). La ley de grupo se escribe entonces:



$$\begin{aligned}
t'' &= t' + t \\
\vec{x}'' &= \vec{x}' + R' \vec{x} + \vec{v}' t \\
\vec{v}'' &= \vec{v}' + R' \vec{v} \\
R'' &= R' R \\
\vec{A}'' &= \vec{A}' + R' \vec{A} \\
A_0'' &= A_0' + A_0 + \vec{v}' \cdot R' \vec{A} \\
\zeta'' &= \zeta' \zeta e^{i\xi_m(g',g)} e^{i\xi_q(g',g)} \\
\xi_m(g',g) &\equiv -m[\vec{v}' \cdot R' \vec{x} + \frac{1}{2} t \vec{v}'^2] \\
\xi_q(g',g) &\equiv -q[\vec{A}' \cdot R' \vec{x} + t(\vec{v}' \cdot \vec{A}' - A_0')] .
\end{aligned} \tag{5.36}$$

El cociclo  $\xi_m(g',g)$ , que llamaremos de Bargmann y ligado al subgrupo de Galileo, dota de estructura simpléctica a la subvariedad parametrizada por  $(x^i, v_j)$ , mientras que el nuevo cociclo  $\xi_q(g',g)$ , parametrizado por la carga eléctrica, está asociado a una subvariedad simpléctica de coordenadas  $(x^i, A_j)$ . Puesto que ambos cociclos involucran a  $\vec{x}$ , las subvariedades simplécticas correspondientes tienen una *intersección* que obliga a una mezcla no trivial entre  $v_j$  y  $A_j$  para formar el auténtico par canónico conjugado de  $x^j$ , siendo ésta la esencia del mecanismo de acoplamiento mínimo en este enfoque.

A partir de la ley de grupo calculamos los generadores infinitesimales obteniendo, para los campos vectoriales invariantes por la izquierda

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t^L &= \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - \left[ \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q(\vec{v} \cdot \vec{A} - A_0) \right] \Xi \\
\tilde{X}_{\vec{x}}^L &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - [m \vec{v} + q \vec{A}] \Xi \\
\tilde{X}_{\vec{v}}^L &= \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \\
\tilde{X}_{\vec{\epsilon}}^L &= \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^2}{4}} \frac{\partial}{\partial \vec{\epsilon}} - \frac{1}{2} \vec{\epsilon} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{\epsilon}} \\
\tilde{X}_{\vec{A}}^L &= \frac{\partial}{\partial \vec{A}} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial A_0} \\
\tilde{X}_{A_0}^L &= \frac{\partial}{\partial A_0} \\
\tilde{X}_{\zeta}^L &= i \left( \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial \phi} \equiv \Xi ,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

y para los derechos

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t^R &= \frac{\partial}{\partial t} \\
\tilde{X}_{\vec{x}}^R &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \\
\tilde{X}_{\vec{v}}^R &= \frac{\partial}{\partial \vec{v}} + t \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \\
\tilde{X}_{\vec{\epsilon}}^R &= \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^2}{4}} \frac{\partial}{\partial \vec{\epsilon}} + \frac{1}{2} \vec{\epsilon} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{\epsilon}}
\end{aligned} \tag{5.38}$$



$$\begin{aligned}\tilde{X}_A^R &= \frac{\partial}{\partial \vec{A}} - q\vec{x}\Xi \\ \tilde{X}_{A_0}^R &= \frac{\partial}{\partial A_0} + qt\Xi \\ \tilde{X}_\zeta^R &= i\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial \phi} \equiv \Xi .\end{aligned}$$

Asimismo, la 1-forma de cuantización, por dualidad con los campos izquierdos resulta:

$$\Theta \equiv \theta^{(\zeta)L} = m\vec{v} \cdot d\vec{x} - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 dt + q\vec{A} \cdot d\vec{x} - qA_0 dt + \frac{d\zeta}{i\zeta} . \quad (5.39)$$

Las relaciones de conmutación para los generadores (por ejemplo) izquierdos, omitiendo las que involucran a rotaciones, son:

$$\begin{aligned}[\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_{x^i}^L] &= 0 & [\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_{v^i}^L] &= -\tilde{X}_{x^i}^L & [\tilde{X}_{x^i}^L, \tilde{X}_{v^j}^L] &= m\delta_{ij}\Xi \\ [\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_{A^i}^L] &= 0 & [\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_{A_0}^L] &= -q\Xi & [\tilde{X}_{x^i}^L, \tilde{X}_{A^j}^L] &= q\delta_{ij}\Xi \\ [\tilde{X}_{x^i}^L, \tilde{X}_{A_0}^L] &= 0 & [\tilde{X}_{v^i}^L, \tilde{X}_{A^i}^L] &= \delta_{ij}\tilde{X}_{A_0}^L & [\tilde{X}_{v^i}^L, \tilde{X}_{A_0}^L] &= 0\end{aligned} \quad (5.40)$$

Si calculamos el módulo característico de  $\Theta$  para  $q = 0$ , que es el caso de la partícula libre, encontramos que está generadado por

$$\mathcal{G}_\Theta|_{q=0} = \langle \tilde{X}_t^L, \tilde{X}_\epsilon^L, \tilde{X}_{\vec{A}}^L, \tilde{X}_{A_0}^L \rangle , \quad (5.41)$$

con lo que las variables  $\vec{A}, A_0$  desaparecen como grados de libertad al tomar cociente por los campos en  $\mathcal{G}_\Theta$ .  $\tilde{X}_t^L$  nos da la evolución temporal de un sistema que tiene un espacio de las fases de dimensión  $3 + 3$ . Sin embargo para  $q \neq 0$ , el módulo característico viene dado por

$$\mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_\epsilon^L, \tilde{X}_A^L - \frac{q}{m}\tilde{X}_v^L \rangle , \quad (5.42)$$

que nos lleva a una variedad simpléctica de dimensión  $4 + 4$ , en la que el tiempo  $t$  adquiere carácter dinámico, siendo la variable conjugada de  $A_0$ , como consecuencia del cociclo eléctrico. El único campo vectorial en el módulo característico, aparte de las rotaciones  $\tilde{X}_\epsilon^L$ , es el que define el acoplamiento mínimo,  $\tilde{X}_A^L - \frac{q}{m}\tilde{X}_v^L$ . Este mecanismo de acoplamiento mínimo se hace explícito al calcular los invariantes Noether  $i_{\tilde{X}^R}\Theta$

$$\begin{aligned}i_{\tilde{X}_t^R}\Theta &= -\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + qA_0\right) \\ i_{\tilde{X}_{\vec{x}}^R}\Theta &= m\vec{v} + q\vec{A} \equiv \vec{P} \\ i_{\tilde{X}_{\vec{v}}^R}\Theta &= -m(\vec{x} - \vec{v}t) + q\vec{A}t \\ i_{\tilde{X}_A^R}\Theta &= -q\vec{x} \\ i_{\tilde{X}_{A_0}^R}\Theta &= qt ,\end{aligned} \quad (5.43)$$

que, en particular, reproducen el *momento canónico*  $\vec{P} \equiv m\vec{v} + q\vec{A}$ .

Sin embargo, como hemos visto, el sistema así construido no presenta evolución temporal. Es un caso similar al que sucede en el grupo conforme, en el que el generador de



las translaciones temporales forma parte del espacio de las fases del sistema físico, eliminando la evolución dinámica en el tiempo. En aquel caso, el sistema evoluciona bajo otro parámetro asociado al generador de las dilataciones. Un modelo explícito de tal dinámica está estudiado en [ACC99], a nivel cuántico. Las funciones de onda de las partículas en esta dinámica conforme tienen soporte natural en todo el espacio-tiempo, sin evolución en el tiempo. Si uno insiste en mirar desde el punto de vista de Poincaré y hacer que las funciones de onda tengan soporte sobre una superficie de Cauchy que evoluciona en el tiempo, uno debe introducir una ligadura al precio de destruir la invariancia bajo el grupo conforme (esto tiene interés de por sí puesto que conduce a un fenómeno de radiación del vacío, pero el punto que nos interesa enfatizar aquí es la ruptura de la estructura grupo-teórica).

En nuestro caso debemos utilizar un mecanismo análogo para introducir una dinámica estándar en el tiempo. Esto es, debemos imponer una ligadura en el sistema que reduzca el espacio de las fases. Esto se consigue haciendo depender en  $\vec{x}$  y  $t$  a las variables  $A_t$  y  $\vec{A}$ , que pasan a ser  $A_t(\vec{x}, t)$  y  $\vec{A}(\vec{x}, t)$ . En definitiva estamos identificando estos parámetros con campos evaluados sobre la posición espacial y temporal de la partícula. A este nivel, el presente mecanismo debe ser considerado como un *truco* que de hecho destruye la estructura grupo-teórica. Aceptándolo e imponiendo tal ligadura, obtenemos la forma de contacto:

$$\omega(x) = m dv^i \wedge dx^i - mv^i dx^i \wedge dt + q \partial_t A^i dt \wedge dx^i + q \partial_j A_i dx^j \wedge dx^i - q \partial_i A_t dx^i \wedge dt \quad (5.44)$$

a partir de la cual se derivan las ecuaciones del movimiento de Lorentz estándar presentadas en la Sección anterior.

Una vez presentado el formalismo para el caso galileano, mencionamos que puede ser repetido análogamente para el caso relativista, pero partiendo del grupo de Poincaré. En la Sección anterior teníamos problemas en este punto para motivar la extensión central que posteriormente habría de ser hecha local, puesto que la semi-invariancia no nos servía como guía. Sin embargo en CSG la simple formulación del punto de partida, esto es, la dinámica de la partícula libre, exige tal extensión central. En efecto, aunque el pseudo-cociclo que la genera es trivial el punto de vista de la cohomología del grupo, como sabemos induce una dinámica no trivial asociada a las órbitas coadjuntas del grupo de Poincaré. Una vez realizada tal extensión por  $U(1)$ , podemos volver a proponer su carácter local obteniendo un grupo  $\tilde{P}_E$  análogo a  $\tilde{G}_E$ , que permite recuperar adecuadamente la dinámica de una partícula en el seno de un campo electromagnético de fondo.

## 5.4 Translaciones locales y Gravedad

Tras el estudio del movimiento de una partícula en el seno de un campo electromagnético, abordamos un caso de mayor complejidad retomando la línea del Apartado 5.2.4 donde hacíamos locales las traslaciones espaciales y temporales, si bien ahora con un objetivo más ambicioso.

En primer lugar, y dado que la noción de espacio-tiempo como una entidad en sí es un concepto esencialmente relativista, tomamos como punto de partida el grupo de Poincaré. Además, los generadores se hacen depender de todo el espacio-tiempo, no sólo del tiempo como en el Apartado 5.2.4. Cabe preguntarse sobre el tipo de dinámica que uno espera reproducir en este caso. Si un  $U(1)$  local nos llevaba a la introducción de un campo electromagnético de forma consistente con las aproximaciones estándar al problema, el estudio de las traslaciones locales está ligado en la literatura a la búsqueda de un principio *gauge* en la formulación de dinámicas gravitatorias.



La formulación de la Gravedad como teoría gauge asociada a un grupo local es un tema que ha sido objeto de enfoques muy variados. Con frecuencia el lenguaje empleado en este contexto adolece de falta de nitidez con lo que los respectivos logros no siempre resultan fáciles de evaluar, ya que la conexión con las formulaciones estándar de la Gravedad suele ser indirecta y con frecuencia oscura. De hecho, resulta curioso encontrar en distintos tratamientos de este tema afirmaciones de carácter mutuamente contradictorio. En líneas generales podemos decir que aunque esta aproximación permite definir genuinas dinámicas gravitatorias, la Relatividad General en concreto no se formula limpiamente en estos términos, esto es, precisa de hipótesis de naturaleza *ad hoc*. Ejemplos de tratamientos de la Gravedad a partir de un grupo local son los desarrollados en [Ut56] (con Lorentz local), [Kib61] (donde se incorporan las translaciones locales) o la teoría de Einstein-Cartan (ver [GS87]). Otros tratamientos más recientes pueden encontrarse en [IS83, HMMN95, GH96] e incluso existen aproximaciones que parten exclusivamente de translaciones locales [Wu01].

En nuestro acercamiento al problema procedemos bajo el estímulo de los anteriores desarrollos, motivación que debemos admitir como de naturaleza muy vaga, con lo que asumimos la existencia de una relación entre translaciones locales y dinámica gravitatoria. Por supuesto, tal intuición deberá ser evaluada a la luz de los resultados obtenidos.

Los procesos de hacer local un subgrupo para introducir una interacción y el de tomar extensiones centrales para dotar de carácter cuántico (semiclásico) a dicha dinámica, no conmutan en este caso. La razón es que en el grupo de Poincaré extendido, el subgrupo de translaciones no es invariante, mientras que en el no extendido sí lo es. Así, si primero imponemos el carácter local a las translaciones y después realizamos la extensión central, el primer paso proporciona nuevos generadores en el grupo que dan lugar a potenciales relacionados con una dinámica gravitatoria mientras que el segundo paso aporta el  $U(1)$  cuántico.

Sin embargo, si entendemos que la simetría de  $U(1)$  tiene un carácter básico y por tanto la extensión central debe realizarse previamente, entonces la presencia de

$$[K_i, P_j] = \delta_{ij}P_0 + \delta_{ij}\Xi \quad , \quad (5.45)$$

en la simetría rígida, hace que en el conmutador de los boosts con las translaciones locales presente la forma

$$[K_i, f \otimes P_j] = K_i f \otimes P_j + f \otimes [K_i, P_j] = K_i f \otimes P_j + \delta_{ij} f \otimes P_0 + \delta_{ij} f \otimes \Xi \quad . \quad (5.46)$$

El último sumando implica la aparición de un  $U(1)$  local en la simetría y esto conduce, como hemos visto en Secciones anteriores, a un campo electromagnético. Por tanto, al proceder en este orden, las translaciones locales conllevan la interacción electromagnética. Este hecho constituye un buen apoyo para la opción de extender primero y hacer local después <sup>5</sup>, pues emerge cierto carácter unificador al introducir dos interacciones básicas en una sola operación. Como veremos después, otra razón para preferir este orden es que esta introducción simultánea de ambas interacciones propicia la aparición de términos de mezcla entre ambas. Efectivamente, la estructura del nuevo grupo del que derivamos la dinámica permite la aparición de interacciones de carácter híbrido, en particular una interacción de tipo electromagnético pero construida a partir de fuentes gravitatorias.

<sup>5</sup>Especialmente si confirmamos la relación de las translaciones locales con la gravedad.



### 5.4.1 Conexión con los difeomorfismos

Antes de seguir adelante, debemos mencionar que en el proceso de hacer locales las translaciones espacio-temporales, para lo cual usaremos su realización sobre el espacio-tiempo con generador  $X_\mu = \partial_\mu$ , los generadores locales  $f \otimes X_\mu$  cierran la siguiente subálgebra:

$$[f \otimes X_\mu, g \otimes X_\nu] = (f \partial_\mu g) \otimes X_\nu - (g \partial_\nu f) \otimes X_\mu, \quad (5.47)$$

que es isomorfa al álgebra de difeomorfismos (ver Sección 6.2). Este punto es clave pues muestra la convergencia, al menos estructural, con el tema central de la Tesis, al tiempo que podría ofrecer una conexión con la interpretación física de los modelos basados exclusivamente en el álgebra de difeomorfismos.

### 5.4.2 Obtención del álgebra de Lie

A la hora de desarrollar la dinámica disponemos de las dos posibilidades estudiadas a lo largo del Capítulo y ejemplificadas en el caso electromagnético. La primera de ellas, a partir de la realización del grupo de Poincaré sobre el espacio de movimientos, conlleva la ampliación del espacio de las fases con nuevos parámetros que se transforman bajo el grupo de manera que compensen las correspondientes variaciones de la  $\Theta$ . Este procedimiento tiene el problema de que en general no respeta la estructura del grupo que se quiere realizar, pudiendo aparecer nuevos generadores no esperados. Éste es el caso del generador  $f \otimes \frac{\partial}{\partial \hbar}$  en el ejemplo del Apartado 5.2.4. El propio cierre del álgebra puede ser una tarea muy difícil. Por esto resulta más eficaz la opción basada en la CSG, que es algorítmica y donde la dinámica se obtiene totalmente en términos del grupo. Éste es el enfoque que elegimos.

Habiendo optado por el grupo de Poincaré centralmente extendido con las translaciones espacio-temporales como funciones locales del propio espacio-tiempo, el primer paso consiste en obtener una expresión explícita para este grupo. Partimos en este caso del álgebra de Lie, que es el nivel donde desarrollamos nuestra intuición sobre el papel dinámico de los distintos parámetros del grupo. Realizamos una simplificación a varios niveles:

- i) En primer lugar, aplicamos el mismo truco empleado en el caso electromagnético, esto es, en lugar de considerar todos los órdenes en el desarrollo de Taylor de las translaciones espacio-temporales como funciones de las coordenadas espacio-temporales  $x^\mu$ , construimos la ley de grupo considerando únicamente el término lineal en la expansión y recuperamos la dinámica mediante una ligadura en la  $\Theta$ . Por tanto, en el álgebra de Lie a exponenciar sólo nos fijaremos en los términos  $f(x) \otimes X_\mu$  con  $f(x)$  lineal.
- ii) La estructura del álgebra que vamos a estudiar es bastante más complicada que las contempladas anteriormente, de tal forma que la exponenciación la vamos a realizar en el desarrollo perturbativo expuesto en el Apartado 3.3.1, de hecho sólo hasta el orden perturbativo no trivial más bajo.
- iii) En la propia obtención del álgebra de partida vamos a realizar una doble simplificación. La representación que escogemos de Poincaré es la que se realiza sobre el espacio-tiempo,  $X_\mu = \partial_\mu$ ,  $L_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma} x^\sigma \partial_\nu - \eta_{\nu\sigma} x^\sigma \partial_\mu$ . Sin embargo, al hacer locales las translaciones tenemos una *duplicación* de los generadores del subgrupo de Lorentz. En efecto, por un lado tenemos los  $L_{\mu\nu}$  de la representación rígida original, difeomorfismos infinitesimales de carácter lineal, y por otro las combinaciones



$\eta_{\mu\sigma}x^\sigma \otimes \partial_\nu - \eta_{\nu\sigma}x^\sigma \otimes \partial_\mu$ , combinaciones *antisimétricas* de las traslaciones locales con  $f$  lineal. Ambos conjuntos de generadores tienen las mismas reglas de conmutación de manera que su diferencia adquiere carácter *gauge* (en el sentido del Subapartado 3.2.2.d) y se desacopla de la teoría. Para evitar la duplicación del grupo de Lorentz vamos a quedarnos con uno solo de ellos y puesto que en este caso no se plantea ambigüedad, en la notación de los generadores vamos a prescindir de los símbolos  $\otimes$ . En definitiva, y dado que la forma de construir el álgebra sigue apoyándose en una representación sobre el espacio-tiempo, en la práctica podemos considerar como una base apropiada la formada por los generadores de las traslaciones espacio-temporales  $\partial_\mu$ , el término central  $\partial_\varphi$  y los campos de vectores obtenidos al multiplicarlos por las funciones lineales sobre el espacio-tiempo,  $x^\mu \partial_\nu$  y  $x^\mu \partial_\varphi$ <sup>6</sup> (donde ya hemos omitido el  $\otimes$ ). Esto es, la base del álgebra se realiza como

$$\begin{aligned} X_\mu &= \partial_\mu \\ L_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\sigma}x^\sigma \partial_\nu - \eta_{\nu\sigma}x^\sigma \partial_\mu \\ h_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\sigma}x^\sigma \partial_\nu + \eta_{\nu\sigma}x^\sigma \partial_\mu \\ A_\mu &= q\eta_{\mu\sigma}x^\sigma \partial_\varphi \\ \Xi &= \partial_\varphi \end{aligned} \quad (5.48)$$

Sin embargo, esta base no facilita la identificación de las variables dinámicas. Para ello, es necesario realizar un cambio de base de forma que los conmutadores generen términos centrales que nos permitan identificar los pares conjugados relevantes. Una posible redefinición, que no es exhaustiva pero ya ofrece una dinámica relevante, es la siguiente,

$$\begin{aligned} X_\mu &= \partial_\mu + A\delta_\mu^0 \partial_\varphi \\ L_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\sigma}x^\sigma \partial_\nu - \eta_{\nu\sigma}x^\sigma \partial_\mu + B(\eta_{\mu\sigma}x^\sigma \delta_\nu^0 - \eta_{\nu\sigma}x^\sigma \delta_\mu^0)x^\sigma \partial_\varphi \\ h_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\sigma}x^\sigma \partial_\nu + \eta_{\nu\sigma}x^\sigma \partial_\mu + F(\eta_{\mu\sigma}x^\sigma \delta_\nu^0 + \eta_{\nu\sigma}x^\sigma \delta_\mu^0)x^\sigma \partial_\varphi + D\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \eta_{0\sigma}x^\sigma \partial_\varphi \\ A_\mu &= q\eta_{\mu\sigma}x^\sigma \partial_\varphi \\ \Xi &= \partial_\varphi \end{aligned} \quad (5.49)$$

con

$$\begin{aligned} A &\text{ arbitrario ; } B = -mc - \kappa qc + A \\ D &= 0 ; F = -mc + A \end{aligned} \quad (5.50)$$

Como vemos explícitamente, lo que hemos hecho es una pseudo-extensión *no central*, puesto que hemos *pseudo-extendido* por los  $x^\mu \partial_\varphi \sim A^\mu$ . La dependencia de la dinámica sobre la base de partida es un fenómeno ligado a las pseudo-extensiones, como vimos en el Apartado 3.1.3.

En esta base, el álgebra resulta

$$[X_\mu, L_{\nu\rho}] = -\eta_{\nu\mu}X_\rho + \eta_{\rho\mu}X_\nu + (m + kq)c(-\eta_{\rho\mu}\delta_\nu^0 + \eta_{\nu\mu}\delta_\rho^0)\Xi$$

<sup>6</sup>Recordemos que los términos centrales locales aparecen automáticamente como consecuencia de haber extendido por  $U(1)$  antes de hacer locales las traslaciones.



$$\begin{aligned}
[X_\mu, h_{\nu\rho}] &= -\eta_{\nu\mu}X_\rho - \eta_{\rho\mu}X_\nu + (2(g - mc)\delta_\nu^0\delta_\rho^0\eta_{0\mu} + mc(\eta_{\rho\mu}\delta_\nu^0 + \eta_{\nu\mu}\delta_\rho^0))\Xi \\
[X_\mu, A_\nu] &= -q\eta_{\nu\mu}\Xi \\
[L_{\mu\nu}, L_{\alpha\beta}] &= -\eta_{\alpha\nu}L_{\mu\beta} + \eta_{\beta\nu}L_{\mu\alpha} + \eta_{\alpha\mu}L_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}L_{\nu\alpha} \\
[L_{\mu\nu}, h_{\alpha\beta}] &= -\eta_{\alpha\nu}h_{\mu\beta} - \eta_{\beta\nu}h_{\mu\alpha} + \eta_{\alpha\mu}h_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}h_{\nu\alpha} \\
&+ \frac{1}{q}\{\kappa qc(\eta_{\alpha\nu}\delta_\beta^0\delta_\mu^0 - \eta_{\mu\alpha}\delta_\beta^0\delta_\nu^0 + \eta_{\nu\beta}\delta_\alpha^0\delta_\mu^0 - \eta_{\mu\beta}\delta_\alpha^0\delta_\nu^0) \\
&- 2(g - mc)[(\eta_{\alpha\nu}\delta_\mu^0\delta_\beta^0 - \eta_{\alpha\mu}\delta_\nu^0\delta_\beta^0 + \eta_{\nu\beta}\delta_\mu^0\delta_\alpha^0 - \eta_{\mu\beta}\delta_\nu^0\delta_\alpha^0)\delta_0^\rho \\
&+ \delta_\alpha^0\delta_\beta^0(\eta_{0\nu}\delta_\mu^0 - \eta_{0\mu}\delta_\nu^0)]\}A_\rho \\
[L_{\mu\nu}, A_\rho] &= -\eta_{\rho\nu}A_\mu + \eta_{\rho\mu}A_\nu \\
[h_{\mu\nu}, h_{\alpha\beta}] &= -\eta_{\alpha\nu}L_{\mu\beta} - \eta_{\beta\nu}L_{\mu\alpha} - \eta_{\alpha\mu}L_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}L_{\nu\alpha} \\
&+ \frac{1}{q}\{-\kappa qc(\eta_{\alpha\nu}(\delta_\beta^0\delta_\mu^0 - \delta_\mu^0\delta_\beta^0) + \eta_{\beta\nu}(\delta_\alpha^0\delta_\mu^0 - \delta_\mu^0\delta_\alpha^0) \\
&+ \eta_{\alpha\mu}(\delta_\beta^0\delta_\nu^0 - \delta_\nu^0\delta_\beta^0) + \eta_{\beta\mu}(\delta_\alpha^0\delta_\nu^0 - \delta_\nu^0\delta_\alpha^0)) \\
&+ 2(g - mc)(\delta_\alpha^0\delta_\beta^0(\delta_\mu^0\eta_{0\nu} + \delta_\nu^0\eta_{0\beta}) - \delta_\mu^0\delta_\nu^0(\delta_\alpha^0\eta_{0\beta} + \delta_\beta^0\eta_{0\alpha}))\}A_\rho \\
[h_{\mu\nu}, A_\rho] &= -\eta_{\rho\nu}A_\mu - \eta_{\rho\mu}A_\nu .
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Antes de proseguir con el análisis general, y con objeto de obtener una mejor intuición, reescribimos el álgebra en su versión 1+1 dimensional (por tanto sin rotaciones) y denotamos los generadores por  $X, t, v(\equiv L_{0i}), h_{tt}, h_{tx}, h_{xx}, A_x, A_t, \Xi$ :

$$\begin{aligned}
[v, X] &= -t + (m + q\kappa)c\Xi \\
[v, t] &= -X \\
[v, h_{tt}] &= -h_{tx} - \frac{1}{q}(mc - g)A_x \\
[v, h_{tx}] &= -h_{tt} + h_{xx} - \left[ c\left(\kappa - \frac{2m}{q}\right) + \frac{2g}{q} \right] \kappa c A_t \\
[v, h_{xx}] &= h_{tx} + \kappa c A_x \\
[v, A_t] &= -A_x \\
[v, A_x] &= -A_t \\
[X, h_{tx}] &= -t - mc\Xi \\
[X, h_{xx}] &= -X \\
[X, A_x] &= q\Xi \\
[t, h_{tt}] &= t + g\Xi \\
[t, h_{tx}] &= X \\
[t, A_t] &= -q\Xi \\
[h_{tt}, h_{tx}] &= v + \frac{1}{q}(mc - g + \kappa qc)A_x \\
[h_{tt}, A_t] &= A_t \\
[h_{tx}, h_{xx}] &= v + \kappa c A_x \\
[h_{tx}, A_t] &= A_x \\
[h_{tx}, A_x] &= -A_t
\end{aligned} \tag{5.52}$$



$$[h_{xx}, A_x] = A_x .$$

Tenemos varios comentarios sobre estos generadores.

- a) Notamos el parámetro central  $g$  en el conmutador entre la translación temporal  $t$  y  $h_{tt}$ , que es el acoplamiento análogo al que encontrábamos en el Apartado 5.2.4. Siendo en este caso el potencial  $h_{tt}$  presumiblemente gravitatorio,  $g$  resulta proporcional a la *masa gravitacional*. Es muy importante observar que no hay ninguna condición grupo-teórica que exija una relación entre  $m$ , *masa inercial* y  $g$ , que por tanto son en principio independientes.
- b) Aparece un parámetro  $\kappa$  que acopla el *campo gravitacional* con el electromagnético. Además este parámetro implica una corrección a la masa inercial por  $\kappa q$ .
- c) Podemos señalar dos aspectos patológicos. Por un lado, para partículas no cargadas surgen términos no analíticos,  $\frac{1}{q}$ , en los conmutadores. Por otro lado, al hacer nulo el parámetro  $\kappa$  en las relaciones previas, esperaríamos recuperar la física estándar, con electromagnetismo y *gravedad* desacoplados. Sin embargo el acoplamiento sigue activo, cuestionando la consistencia de la dinámica desde el punto de vista físico. Una forma de solucionar ambas dificultades consiste en imponer la condición

$$g = mc , \quad (5.53)$$

esto es, hacer la masa gravitatoria proporcional a la masa inercial. En cierto sentido, ésta es una manera de recuperar el *principio de equivalencia débil* (sólo para  $\kappa = 0$ ) en un lenguaje algebraico como una condición de consistencia con la física convencional.

### 5.4.3 Exponenciación y dinámica

Volviendo al problema en dimensiones realistas, el primer paso consiste en obtener el grupo finito a partir del álgebra infinitesimal. Como hemos mencionado antes, para exponenciar el álgebra seguimos la técnica descrita en el Apartado 3.3.1. Siendo éste el ejemplo más importante que vamos a tratar en este Capítulo, procedemos con detalle a su construcción.

En primer lugar identificamos a partir del álgebra las constantes de estructura. Utilizando índices  $\mu$  para translaciones  $x^\mu$ ,  $\mu\nu$  para combinaciones *antisimétricas* de los generadores lineales  $L_{\mu\nu}$ ,  $\widetilde{\mu\nu}$  para combinaciones *simétricas*  $h_{\mu\nu}$  y  $\tilde{\mu}$  para los generadores asociados con el campo electromagnético, tenemos:

$$\begin{aligned}
C_{\mu,\nu\rho}^\alpha &= -\eta_{\nu\mu}\delta_\rho^\alpha + \eta_{\rho\mu}\delta_\nu^\alpha = -\eta_{\mu[\nu}\delta_{\rho]}^\alpha \\
C_{\mu,\widetilde{\nu\rho}}^\alpha &= -\eta_{\mu(\nu}\delta_{\rho)}^\alpha \\
C_{\mu,\nu\rho}^\varphi &= (m + \kappa q)c - \eta_{\mu[\nu}\delta_{\rho]}^0 \\
C_{\mu,\widetilde{\nu\rho}}^\varphi &= 2(g - mc)\delta_\nu^0\delta_\rho^0\eta_{0\mu} + mc\eta_{\mu(\nu}\delta_{\rho)}^0 \\
C_{\mu,\tilde{\nu}}^\varphi &= -q\eta_{\nu\mu} \\
C_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\omega\rho} &= -\frac{1}{2}\eta_{[\alpha[\nu}\delta_{\mu]}^{[\omega}\delta_{\beta]}^{\rho]} \\
C_{\mu\nu,\widetilde{\alpha\beta}}^{\widetilde{\omega\rho}} &= -\frac{1}{2}\eta_{(\alpha[\nu}\delta_{\mu]}^{(\omega}\delta_{\beta)}^{\rho)} \\
C_{\mu\nu,\widetilde{\alpha\beta}}^{\tilde{\rho}} &= -\frac{1}{q} \left\{ -\kappa qc\eta_{(\alpha[\nu}\delta_{\mu]}^0\delta_{\beta)}^\rho + 2(g - mc) (\eta_{(\alpha[\nu}\delta_{\mu]}^0\delta_{\beta)}^0\delta_0^\rho + \delta_{0[\mu}\delta_{\nu]}^\rho\delta_\alpha^0\delta_\beta^0) \right\}
\end{aligned} \quad (5.54)$$



$$\begin{aligned}
C_{\mu\nu,\tilde{\rho}}^{\tilde{\alpha}} &= \eta_{\rho[\mu}\delta_{\nu]}^{\alpha} \\
C_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\omega\rho} &= -\frac{1}{2}\eta_{(\alpha(\nu}\delta_{\mu)}^{[\mu}\delta_{\beta)}^{\rho]} \\
C_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{\rho}} &= -\frac{1}{q}\left\{-\kappa qc\eta_{(\alpha(\nu}\delta_{\mu)}^{[0}\delta_{\beta)}^{\rho]} + 2(g-mc)(\delta_{\alpha}^0\delta_{\beta}^0\eta_{0(\mu}\delta_{\nu)}^{\rho} - \delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0\eta_{0(\beta}\delta_{\alpha)}^{\rho})\right\} \\
C_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\tilde{\rho}}^{\tilde{\alpha}} &= -\eta_{\rho(\mu}\delta_{\nu)}^{\alpha}
\end{aligned}$$

Como vimos en el Apartado 3.3.1, hasta tercer orden la ley de grupo toma la forma

$$g''^k = g'^k + g^k + B_{i,j}^k g'^i g'^j + \frac{1}{2!} B_{i,j,l}^k g'^i g'^j g'^l + \frac{1}{2!} B_{i,j,l}^k g'^i g'^j g'^l + \dots \quad (5.55)$$

donde las  $B$ 's se fijan utilizando las reglas:

$$\begin{aligned}
B_{i,j}^k - B_{j,i}^k &= C_{ij}^k \quad (\text{segundo orden}) \\
B_{i,jl}^k - B_{ij,l}^k &= B_{p,l}^k B_{i,j}^p - B_{i,p}^k B_{j,l}^p \quad (\text{tercer orden}) .
\end{aligned} \quad (5.56)$$

Estas relaciones dejan mucha libertad sobre la elección de las  $B$ 's, para lo cual hay que suplementarlas con condiciones sobre las mismas. A continuación presentamos una elección consistente. A segundo orden

$$\begin{aligned}
B_{\nu\rho,\mu}^{\alpha} &= -C_{\mu,\nu\rho}^{\alpha} \\
B_{\tilde{\nu}\tilde{\rho},\mu}^{\alpha} &= -C_{\mu,\tilde{\nu}\tilde{\rho}}^{\alpha} \\
B_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\omega\rho} &= \frac{1}{2} C_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\omega\rho} \\
B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\omega\rho} &= \frac{1}{2} C_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\omega\rho} \\
B_{\mu\nu,\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{\omega}\tilde{\rho}} &= C_{\mu\nu,\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{\omega}\tilde{\rho}} \\
B_{\mu\nu,\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{\rho}} &= C_{\mu\nu,\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{\rho}} \\
B_{\mu\nu,\tilde{\rho}}^{\tilde{\alpha}} &= C_{\mu\nu,\tilde{\rho}}^{\tilde{\alpha}} \\
B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{\rho}} &= \frac{1}{2} C_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{\rho}} \\
B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\tilde{\rho}}^{\tilde{\alpha}} &= C_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\tilde{\rho}}^{\tilde{\alpha}} \\
B_{\nu\rho,\mu}^{\varphi} &= -C_{\mu,\nu\rho}^{\varphi} \\
B_{\tilde{\nu}\tilde{\rho},\mu}^{\varphi} &= -C_{\mu,\tilde{\nu}\tilde{\rho}}^{\varphi} \\
B_{\tilde{\nu},\mu}^{\varphi} &= -C_{\mu,\tilde{\nu}}^{\varphi} .
\end{aligned} \quad (5.57)$$

(5.58)

Mientras que para el tercero tenemos

$$\begin{aligned}
B_{\mu\nu;\alpha\beta,\rho}^{\varphi} - B_{\mu\nu,\alpha\beta;\rho}^{\varphi} &= B_{\sigma\gamma,\rho}^{\varphi} B_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\sigma\gamma} - B_{\mu\nu,\sigma}^{\varphi} B_{\alpha\beta,\rho}^{\sigma} \\
B_{\mu\nu;\tilde{\alpha}\tilde{\beta},\rho}^{\varphi} - B_{\mu\nu,\tilde{\alpha}\tilde{\beta};\rho}^{\varphi} &= B_{\tilde{\sigma}\tilde{\gamma},\rho}^{\varphi} B_{\mu\nu,\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{\sigma}\tilde{\gamma}} + B_{\tilde{\sigma},\rho}^{\varphi} B_{\mu\nu,\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\sigma} - B_{\mu\nu,\sigma}^{\varphi} B_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta},\rho}^{\sigma} \\
B_{\mu\nu;\tilde{\alpha},\rho}^{\varphi} - B_{\mu\nu,\tilde{\alpha};\rho}^{\varphi} &= B_{\tilde{\sigma},\rho}^{\varphi} B_{\mu\nu,\tilde{\alpha}}^{\tilde{\sigma}} \\
B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu};\alpha\beta,\rho}^{\varphi} - B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\alpha\beta;\rho}^{\varphi} &= -B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu},\sigma}^{\varphi} B_{\alpha\beta,\rho}^{\sigma}
\end{aligned} \quad (5.59)$$



$$\begin{aligned}
B_{\tilde{\mu}\nu;\tilde{\alpha}\beta,\rho}^\varphi - B_{\tilde{\mu}\nu,\tilde{\alpha}\beta;\rho}^\varphi &= B_{\sigma\gamma,\rho}^\varphi B_{\tilde{\mu}\nu,\tilde{\alpha}\beta}^{\sigma\gamma} + B_{\tilde{\sigma},\rho}^\varphi B_{\tilde{\mu}\nu,\tilde{\alpha}\beta}^{\tilde{\sigma}} - B_{\tilde{\mu}\nu,\sigma}^\varphi B_{\tilde{\alpha}\beta,\rho}^\sigma \\
B_{\tilde{\mu}\nu;\tilde{\alpha},\rho}^\varphi - B_{\tilde{\mu}\nu,\tilde{\alpha};\rho}^\varphi &= B_{\tilde{\sigma},\rho}^\varphi B_{\tilde{\mu}\nu,\tilde{\alpha}}^{\tilde{\sigma}} \\
B_{\tilde{\mu};\alpha\beta,\rho}^\varphi - B_{\tilde{\mu},\alpha\beta;\rho}^\varphi &= -B_{\tilde{\mu},\sigma}^\varphi B_{\alpha\beta,\rho}^\sigma \\
B_{\tilde{\mu};\tilde{\alpha}\beta,\rho}^\varphi - B_{\tilde{\mu},\tilde{\alpha}\beta;\rho}^\varphi &= -B_{\tilde{\mu},\sigma}^\varphi B_{\tilde{\alpha}\beta,\rho}^\sigma .
\end{aligned}$$

Con esta elección, la ley de grupo nos queda

$$\begin{aligned}
x''^\alpha &= x^\alpha + x'^\alpha + \eta_{\mu[\nu}\delta_{\rho]}^\alpha l'^{\nu\rho} x^\mu + \eta_{\mu(\nu}\delta_{\rho)}^\alpha h'^{\nu\rho} x^\mu + \dots \\
l''^{\omega\rho} &= l^{\omega\rho} + l'^{\omega\rho} - \frac{1}{4}\eta_{[\alpha[\nu}\delta_{\mu]}^{[\omega}\delta_{\rho]}\beta]} l'^{\mu\nu} l^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\eta_{(\alpha(\nu}\delta_{\mu)}^{[\omega}\delta_{\rho]}\beta)} h'^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} + \dots \\
h''^{\omega\rho} &= h^{\omega\rho} + h'^{\omega\rho} - \frac{1}{2}\eta_{(\alpha[\nu}\delta_{\mu]}^{(\omega}\delta_{\rho)}\beta)} l'^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} + \dots \\
A''^\rho &= A^\rho + A'^\rho \\
&+ \frac{1}{q} (\kappa qc \eta_{(\alpha[\nu}\delta_{\mu]}^0 \delta_{\beta)}^\rho - 2(g - mc)(\eta_{(\alpha[\nu}\delta_{\mu]}^0 \delta_{\beta)}^0 \delta_0^\rho + \eta_{0[\mu}\delta_{\nu]}^\rho \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0)) l'^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{1}{2q} (\kappa qc \eta_{(\alpha(\nu}\delta_{\mu)}^{[0}\delta_{\rho]}\beta)} - 2(g - mc)(\delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 \eta_{0(\mu}\delta_{\nu)}^\rho - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \eta_{0(\beta}\delta_{\alpha)}^\rho)) h'^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \\
&+ \eta_{\rho[\mu}\delta_{\nu]}^\alpha l'^{\mu\nu} A^\rho - \eta_{\rho(\mu}\delta_{\nu)}^\alpha h'^{\mu\nu} A^\rho + \dots \tag{5.60} \\
\varphi'' &= \varphi' + \varphi - (m + \kappa q)c \eta_{\mu[\nu}\delta_{\rho]}^0 l'^{\mu\nu} x^\rho + q\eta_{\nu\mu} A'^\nu x^\mu \\
&- (2(g - mc) \delta_\nu^0 \delta_\rho^0 \nu_{0\mu} + mc \eta_{\mu(\nu}\delta_{\rho)}^0) h'^{\nu\rho} x^\mu \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{-1}{4}(m + \kappa q)c \eta_{\rho[\sigma}\delta_{\gamma]}^0 \eta_{[\alpha[\nu}\delta_{\mu]}^{[\sigma}\delta_{\rho]}\beta]} - (m + \kappa q)c \eta_{\sigma[\mu}\delta_{\nu]}^0 \eta_{\rho[\alpha}\delta_{\beta]}^\sigma \right) l'^{\mu\nu} l'^{\alpha\beta} x^\rho \right. \\
&- (2(g - mc) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \eta_{0\sigma} + mc \eta_{\sigma(\mu}\delta_{\nu)}^\sigma) \eta_{\rho[\alpha}\delta_{\beta]}^\sigma h'^{\mu\nu} l'^{\alpha\beta} x^\rho \\
&+ q \eta_{\sigma\mu} \eta_{\rho[\alpha}\delta_{\beta]}^\sigma A'^\mu l'^{\alpha\beta} x^\rho \\
&+ \left. \left[ \frac{-1}{4}(m + \kappa q)c \eta_{\rho[\sigma}\delta_{\gamma]}^0 \eta_{(\alpha(\nu}\delta_{\mu)}^{[\sigma}\delta_{\rho]}\beta)} - 2(g - mc) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \eta_{0\sigma} \eta_{\rho(\alpha}\delta_{\beta)}^\sigma \right. \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma} \left( -\kappa qc \eta_{(\alpha(\nu}\delta_{\mu)}^{[0}\delta_{\rho]}\beta)} + 2(g - mc)(\delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 \eta_{0(\mu}\delta_{\nu)}^\sigma - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \eta_{0(\beta}\delta_{\alpha)}^\sigma) \right) \right] h'^{\mu\nu} h'^{\alpha\beta} x^\rho \\
&+ q \eta_{\sigma\mu} \eta_{\rho(\alpha}\delta_{\beta)}^\sigma A'^\mu h'^{\alpha\beta} x^\rho \left. \right\} \\
&+ 2(g - mc) \eta_{\rho[\mu}\eta_{\nu]}^0 \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 l'^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} x^\rho + \dots
\end{aligned}$$

A partir de aquí podríamos calcular todos los elementos asociados a la dinámica, tanto clásica como cuántica. Sin embargo, en el enfoque que estamos siguiendo nos basta con calcular la  $\Theta$ , para lo cual usamos la expresión general

$$\Theta = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial g^i} \right|_{\substack{g=g \\ g'=g^{-1}}} dg^i . \tag{5.61}$$

Para evaluarla necesitamos la forma del inverso de los parámetros del grupo (para el término central no es necesario), pero sólo a un orden menor que el presente en la ley de grupo, obteniendo

$$\begin{aligned}
(x^{-1})^\alpha &= -x^\alpha + \eta_{\mu[\nu}\delta_{\rho]}^\alpha l'^{\nu\rho} x^\mu + \eta_{\mu(\nu}\delta_{\rho)}^\alpha h'^{\nu\rho} x^\mu + \dots \\
(l^{-1})^{\omega\rho} &= -l^{\omega\rho} + \dots \tag{5.62}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(h^{-1})^{\omega\rho} &= -h^{\omega\rho} - \frac{1}{2}\eta_{(\alpha[\nu\delta_\mu]}^{(\omega\delta^\rho)_\beta)} l^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} + \dots \\
(A^{-1})^\rho &= -A^\rho + \frac{1}{q} (\kappa qc \eta_{(\alpha[\nu\delta_\mu]}^0 \delta_\beta)^\rho - 2(g - mc)(\eta_{(\alpha[\nu\delta_\mu]}^0 \delta_\beta)^0 \delta_0^\rho + \eta_{0[\mu\delta_\nu]}^\rho \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0)) l^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \\
&\quad + \eta_{\rho[\mu\delta_\nu]}^\alpha l^{\mu\nu} A^\rho - \eta_{\rho(\mu\delta_\nu)}^\alpha h^{\mu\nu} A^\rho + \dots
\end{aligned}$$

Con esto, la 1-forma de cuantización nos queda

$$\begin{aligned}
\Theta &= d\varphi \\
&\quad + \{(m + \kappa q)c \eta_{\rho[\alpha\delta_\beta]}^0 l^{\alpha\beta} + (mc \eta_{\rho(\alpha\delta_\beta)}^0 + 2(g - mc) \eta_{0\rho} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0) h^{\alpha\beta} \\
&\quad - q\eta_{\alpha\rho} A^\alpha + \frac{1}{4}(m + \kappa q)c (\eta_{\sigma[\mu\delta_\nu]}^0 \eta_{\rho[\beta\delta_\alpha]}^\sigma + \eta_{\sigma[\alpha\delta_\beta]}^0 \eta_{\rho[\nu\delta_\mu]}^\sigma) l^{\mu\nu} l^{\alpha\beta} \\
&\quad - \frac{1}{4}[mc (\eta_{\sigma(\mu\delta_\nu)}^0 \eta_{\rho(\beta\delta_\alpha)}^\sigma + \eta_{\sigma(\alpha\delta_\beta)}^0 \eta_{\rho(\nu\delta_\mu)}^\sigma) \\
&\quad + 2(g - mc) (\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \eta_{0\sigma} \eta_{\rho(\alpha\delta_\beta)}^\sigma + \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 \eta_{0\sigma} \eta_{\rho(\mu\delta_\nu)}^\sigma)] h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \\
&\quad + \frac{1}{2}[2(m + \kappa q)c \eta_{\rho(\mu\eta_\nu)[\alpha\delta_\beta]}^0 + mc \eta_{\rho[\alpha\eta\beta](\mu\delta_\nu)}^0 \\
&\quad + 2(g - mc) \eta_{\rho[\alpha\eta\beta]0} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0] l^{\alpha\beta} h^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{q}{2} \eta_{\nu\rho} \eta_{\omega[\alpha\delta_\beta]}^\nu l^{\alpha\beta} A^\omega - \frac{q}{2} \eta_{\nu\rho} \eta_{\omega(\alpha\delta_\beta)}^\nu h^{\alpha\beta} A^\omega \} dx^\rho \\
&\quad + 2(g - mc) \eta_{\rho[\nu\eta_\mu]0} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 l^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} dh^{\alpha\beta} .
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Tomando su diferencial exterior  $d\Theta$  obtenemos la curvatura  $\omega$ , que en forma covariante presenta el aspecto

$$\begin{aligned}
\omega &= dl^{\alpha\beta} \wedge dx^\rho \{(m + \kappa q)c \eta_{\rho[\alpha\delta_\beta]}^0 + \frac{1}{2}(m + \kappa q)c (\eta_{\sigma[\mu\delta_\nu]}^0 \eta_{\rho[\beta\delta_\alpha]}^\sigma + \eta_{\sigma[\alpha\delta_\beta]}^0 \eta_{\rho[\nu\delta_\mu]}^\sigma) l^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2} [2(g - mc) \eta_{\rho[\alpha\eta\beta]0} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + 2(m + \kappa q)c \eta_{\rho(\nu\eta_\mu)[\beta\delta_\alpha]}^0 + mc \eta_{\rho[\alpha\eta\beta](\mu\delta_\nu)}^0] h^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{q}{2} \eta_{\sigma\rho} \eta_{\mu[\alpha\delta_\beta]}^\sigma A^\mu \} \\
&\quad + dh^{\alpha\beta} \wedge dx^\rho \{2(g - mc) \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 \eta_{0\rho} + mc \eta_{\rho(\alpha\delta_\beta)}^0 \\
&\quad - \frac{1}{2}[mc (\eta_{\sigma(\mu\delta_\nu)}^0 \eta_{\rho(\beta\delta_\alpha)}^\sigma + \eta_{\sigma(\alpha\delta_\beta)}^0 \eta_{\rho(\nu\delta_\mu)}^\sigma) \\
&\quad + 2(g - mc) (\eta_{0(\beta\eta_\alpha)\rho} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + \eta_{0(\mu\eta_\nu)\rho} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0)] h^{\mu\nu} \\
&\quad + [3(g - mc) \eta_{0[\nu\eta_\mu]\rho} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 + (m + \kappa q)c \eta_{\rho(\beta\eta_\alpha)[\nu\delta_\mu]}^0 + \frac{1}{2} mc \delta^0_{(\beta\eta_\alpha)[\nu\eta_\mu]\rho}] l^{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{q}{2} \eta_{\sigma\rho} \eta_{\mu(\beta\delta_\alpha)}^\sigma A^\rho \} \\
&\quad + dA^\alpha \wedge dx^\rho \{-q\eta_{\alpha\rho} + \frac{q}{2} \eta_{\rho[\nu\eta_\mu]} \alpha l^{\mu\nu} - \frac{q}{2} \eta_{\rho(\nu\eta_\mu)} \alpha h^{\mu\nu} \} \\
&\quad - dl^{\mu\nu} \wedge dh^{\alpha\beta} 2(g - mc) \eta_{\rho[\mu\eta_\nu]0} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 x^\rho .
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Como hemos señalado, al elegir los  $B$ 's existe una libertad que se traduce en distintas expresiones para la ley de grupo y por tanto para la  $\Theta$ . La expresión adecuada sólo puede identificarse a la luz de las ecuaciones finales <sup>7</sup>. Debemos fiarnos de la intuición desarrollada

<sup>7</sup>Lo cual no deja de involucrar un cierto carácter circular, puesto que la obtención de nuevas fuerzas es una de las posibilidades y no es claro como separarlas de una parametrización *inadecuada*.



en los ejemplos más sencillos. A la luz de esto, en la  $\omega$  aparecen términos que involucran a la  $A_\mu$  mezclándolos con  $l^{\mu\nu}$  y  $h^{\mu\nu}$  en términos no proporcionales a  $\kappa$ , la nueva constante de mezcla, de forma que mezclan gravedad y electromagnetismo dentro del caso de la física estándar, algo no deseable. Estos términos cruzados pueden ser eliminados mediante el cambio de variables

$$A^\alpha \mapsto A^\alpha + \eta_{\sigma\gamma}(l^{\alpha\sigma} + h^{\alpha\sigma})A^\gamma, \quad (5.65)$$

con lo que nos queda

$$\begin{aligned} \omega = & dl^{\alpha\beta} \wedge dx^\rho \left\{ (m + \kappa q)c \eta_{\rho[\alpha} \delta_{\beta]}^0 + \frac{1}{2}(m + \kappa q)c (\eta_{\sigma[\mu} \delta_{\nu]}^0 \eta_{\rho[\beta} \delta_{\alpha]}^\sigma + \eta_{\sigma[\alpha} \delta_{\beta]}^0 \eta_{\rho[\nu} \delta_{\mu]}^\sigma) l^{\mu\nu} \right. \\ & + \frac{1}{2} [2(g - mc) \eta_{\rho[\alpha} \eta_{\beta]}^0 \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + 2(m + \kappa q)c \eta_{\rho(\nu} \eta_{\mu)[\beta} \delta_{\alpha]}^0 + mc \eta_{\rho[\alpha} \eta_{\beta]} (\mu \delta_\mu)^0] h^{\mu\nu} \} \\ & + dh^{\alpha\beta} \wedge dx^\rho \{ 2(g - mc) \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 \eta_{0\rho} + mc \eta_{\rho(\alpha} \delta_{\beta)}^0 \\ & - \frac{1}{2} [mc (\eta_{\sigma(\mu} \delta_{\nu)}^0 \eta_{\rho(\beta} \delta_{\alpha)}^\sigma + \eta_{\sigma(\alpha} \delta_{\beta)}^0 \eta_{\rho(\nu} \delta_{\mu)}^\sigma) \\ & + 2(g - mc) (\eta_{0(\beta} \eta_{\alpha)} \rho \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + \eta_{0(\mu} \eta_{\nu)} \rho \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0) \} h^{\mu\nu} \\ & + [3(g - mc) \eta_{0[\nu} \eta_{\mu]\rho} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 + (m + \kappa q)c \eta_{\rho(\beta} \eta_{\alpha)[\nu} \delta_{\mu]}^0 + \frac{1}{2} mc \delta^0_{(\beta} \eta_{\alpha)[\nu} \eta_{\mu]\rho}] l^{\mu\nu} \} \\ & - dA^\alpha \wedge dx^\rho q \eta_{\alpha\rho} \\ & - dl^{\mu\nu} \wedge dh^{\alpha\beta} 2(g - mc) \eta_{\rho[\mu} \eta_{\nu]} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 x^\rho. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Para la interpretación física de los parámetros resulta más adecuado romper la covariancia haciendo explícita la separación entre componentes espaciales y temporales. Introduciendo  $\eta_{00} = 1, \eta_{ij} = -\delta_{ij}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \omega = & dl^{0i} \wedge dx^0 \left( -(m + \kappa q)c \delta_{ij} (l^{0j} + h^{0j}) - \frac{1}{2} mc \delta_{ij} h^{0j} \right) \\ & + dl^{0j} \wedge dx^i \left[ (m + \kappa q)c \delta_{ij} + \frac{1}{2}(m + \kappa q)c (\delta_{lj} \delta_{ik} - \delta_{kj} \delta_{li}) l^{kl} \right. \\ & \quad \left. + g \delta_{ij} h^{00} + (m + \kappa q)c (\delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{ik} \delta_{jl}) h^{kl} \right] \\ & + dl^{jk} \wedge dx^i \left( \frac{1}{2}(m + \kappa q)c (\delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{jl} \delta_{ik}) l^{0l} + \frac{1}{2} mc (\delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{jl} \delta_{ik}) h^{0l} \right) \\ & + dh^{00} \wedge dx^0 (2g - 4g h^{00}) \\ & + dh^{0i} \wedge dx^0 \left( mc \delta_{ij} h^{0j} - (\kappa q + \frac{3}{2}m)c \delta_{ij} l^{0j} \right) \\ & + dh^{00} \wedge dx^i (g \delta_{ij} h^{0j} + (3(g - mc) + mc) \delta_{ij} l^{0j}) \\ & + dh^{0j} \wedge dx^i \left( -mc \delta_{ij} - \frac{1}{2} mc (\delta_{kj} \delta_{il} + \delta_{lj} \delta_{ik}) h^{kl} + g \delta_{ij} h^{00} + \frac{1}{2} mc (\delta_{jl} \delta_{ik} - \delta_{kj} \delta_{il}) l^{kl} \right) \\ & + dh^{jk} \wedge dx^i \left( -\frac{mc}{2} (\delta_{lk} \delta_{ij} + \delta_{lj} \delta_{ik}) h^{0l} + (m + \kappa q)c (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{kl}) l^{0l} \right) \\ & - q dA^0 \wedge dx^0 \\ & + q \delta_{ij} dA^i \wedge dx^j \\ & + 2(g - mc) x^j \delta_{ij} dl^{0i} \wedge dh^{00}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Por analogía con la  $d\Theta$  de la partícula libre buscamos que el término en  $dl^{0i} \wedge dx^j$  esté multiplicado por la masa, que en este caso está corregida por  $\kappa qc$ . Asimismo, debemos eliminar



la dependencia en los términos de rotaciones  $l^{ij}$ , que pertenecen al módulo característico. Todo esto se consigue con los cambios

$$\begin{aligned}
 (m + \kappa q)c l^{0i} &\mapsto (m + \kappa q)c l^{0i} + \frac{1}{2}(m + \kappa q)c (l^{ij} - l^{ji})l^{0j} + g\delta_{ij}h^{00}l^{0j} \\
 &\quad - 2(m + \kappa q)ch^{ij}l^{0j} + \dots \\
 h^{0j} &\mapsto h^{0j} + \frac{1}{2}(l^{ij} - l^{ji})h^{0i} \\
 h^{00} &\mapsto h^{00} - \frac{1}{4}\delta_{ij}h^{0i}l^{0j} \quad ,
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

y nos queda,

$$\begin{aligned}
 \omega &= dl^{0i} \wedge dx^0 \left( -(m + \kappa q)c(l^{0i} + h^{0i}) + \frac{1}{2}(g - mc) h^{0i} \right) \\
 &+ (m + \kappa q)c dl^{0i} \wedge dx^i \\
 &+ dh^{00} \wedge dx^0 (2g - 4g h^{00}) \\
 &+ dh^{0i} \wedge dx^0 \left( mc h^{0i} - (\kappa q + m)c l^{0i} + \frac{1}{2}(g - mc)l^{0i} \right) \\
 &+ dh^{00} \wedge dx^i (g h^{0i} + 2(g - mc) l^{0i}) \\
 &+ dh^{0j} \wedge dx^i ((-mc + g h^{00})\delta_{ij} - mc h^{ji}) \\
 &- mc dh^{ij} \wedge dx^i h^{0j} \\
 &- q dA^0 \wedge dx^0 \\
 &+ q dA^i \wedge dx^i \\
 &+ 2(g - mc) x^i dl^{0i} \wedge dh^{00} \quad .
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

Como ocurría en el caso electromagnético, el tiempo  $t$  tiene un carácter dinámico por lo que no hay evolución temporal. Ésta sólo se obtiene mediante la ligadura por la que hacemos depender los parámetros  $h^{\mu\nu}$  y  $A^\mu$  en  $x^\mu$ , convirtiéndose por tanto en campos. Hasta ahora, en el análisis puramente grupo-teórico, hemos mantenido la constante  $g$  independiente. Sin embargo, mantenerla en el estudio propiamente de la dinámica es innecesariamente engorroso pues la condición  $g = mc$ , que simplifica los cálculos, resulta de hecho natural. Con esta condición, la  $\omega$  local tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 \omega(x) &= -(m + \kappa q)c(l^{0i} + h^{0i})dl^{0i} \wedge dx^0 \\
 &+ (m + \kappa q)c dl^{0i} \wedge dx^i \\
 &+ [2mc(1 - 2h^{00})\partial_j h^{00} + (mch^{0i} - (m + \kappa q)c l^{0i})\partial_j h^{0i} - mch^{0j}\partial_0 h^{00} \\
 &+ mc(1 - h^{00})\partial_0 h^{0j} + mch^{ij}\partial_0 h^{0i} + mch^{0i}\partial_0 h^{ij} - q\partial_j A^0 - q\partial_0 A^j] dx^j \wedge dx^0 \\
 &+ [mch^{0i}\partial_k h^{00} - mc(1 - h^{00})\partial_k h^{0i} - mch^{ij}\partial_k h^{0j} \\
 &- mch^{0j}\partial_k h^{ij} + q\partial_k A^i] dx^k \wedge dx^i \quad .
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

Imponemos que el campo de vectores  $\bar{X}$  de componentes

$$\bar{X} = \bar{X}^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \bar{X}^p \frac{\partial}{\partial x^p} + \bar{X}^{0p} \frac{\partial}{\partial l^{0p}} \quad , \tag{5.71}$$



esté en el núcleo de  $\omega(x)$ ,  $i_X\omega = 0$ , proporcionando las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\bar{X}^i &= l^{0i} + h^{0i} \\
(m + \kappa q)c\bar{X}^{0k} &= \left[ 2mc(1 - 2h^{00})\partial_k h^{00} + (mch^{0i} - (m + \kappa q)c l^{0i})\partial_k h^{0i} - mch^{0k}\partial_0 h^{00} \right. \\
&+ mc(1 - h^{00})\partial_0 h^{0k} + mch^{ik}\partial_0 h^{0i} + mch^{0i}\partial_0 h^{ik} - q\partial_k A^0 - q\partial_0 A^k \left. \right] \\
&+ X^p \left[ mc(h^{0p}\partial_k h^{00} - (1 - h^{00})\partial_k h^{0p} - h^{pj}\partial_k h^{0j} + h^{0j}\partial_k h^{pj} \right. \\
&- h^{0k}\partial_p h^{00} + (1 - h^{00})\partial_p h^{0k} + h^{kj}\partial_p h^{0j} - h^{0j}\partial_p h^{kj} \left. \right] \\
&+ q(\partial_k A^p - \partial_p A^k) \left. \right] . \tag{5.72}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento vienen dadas por el sistema dinámico generado por dicho campo

$$\begin{aligned}
\frac{dx^0}{dt} &= \bar{X}^0 = 1 \\
\frac{dx^i}{dt} &= \bar{X}^i \\
\frac{dl^{0i}}{dt} &= \bar{X}^{0i} , \tag{5.73}
\end{aligned}$$

que conducen a las ecuaciones *tipo-Newton*:

$$\begin{aligned}
(m + \kappa q)c \frac{d^2 x^i}{dt^2} &= (m + \kappa q)c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{dt} \right) = (m + \kappa q)c \frac{d}{dt} \bar{X}^i = \\
&= (m + \kappa q)c \frac{d}{dt} (l^{0i} + h^{0i}) = \\
&= (m + \kappa q)c \bar{X}^{0i} + (m + \kappa q)c \partial_0 h^{0i} + (m + \kappa q)c \partial_p h^{0k} \bar{X}^p . \tag{5.74}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones para las componentes de  $X$ , obtenemos finalmente las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
(m + \kappa q)c \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} &= -q(\partial_0 \vec{A} + \vec{\nabla} A^0 - \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \\
&+ mc(\partial_0 \vec{h} + \vec{\nabla} h^{00} - \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{h}) \\
&+ \frac{1}{4}mc \left[ -\partial_0(h^{00}\vec{h}) + \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{\nabla} \wedge (h^{00}\vec{h}) \right. \\
&+ \partial_0(\vec{h} \cdot \vec{h}) - \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{h} \cdot \vec{h}) \\
&- \left. 2\vec{\nabla}(h^{002}) + \vec{\nabla}(\vec{h} \cdot \vec{h}) \right] \\
&+ \frac{\kappa qc}{2} \left( \frac{1}{4}\vec{\nabla}(\vec{h} \cdot \vec{h}) + \partial_0 \vec{h} - \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{h} \right) , \tag{5.75}
\end{aligned}$$

donde hemos reescalado los campos y denotado  $(\vec{h})^i = h^{0i}$ ,  $(\vec{h})^{ij} = h^{ij}$ .

Realizamos algunos comentarios sobre estas ecuaciones. En el miembro cinemático, a la izquierda, observamos lo que ya habíamos predicho al ver el álgebra de partida: la masa cinemática está corregida por un término proporcional a  $\kappa$  y la carga de la partícula.



En el lado dinámico, la primera línea es de nuevo la fuerza de Lorentz, mientras que las cuatro siguientes representan los primeros términos en las ecuaciones geodésicas de una partícula moviéndose en una métrica de fondo. De hecho la primera de estas líneas se corresponde con la aproximación conocida como *electrogravedad* [Wa84]. El desarrollo es necesariamente aproximado, por el carácter perturbativo de la exponenciación y por faltar términos en el álgebra como consecuencia de la falta de exhaustividad en la extensión de partida. Sin embargo, creemos que el resultado es no trivial en el orden de aproximación realizado.

La última línea es proporcional al parámetro de mezcla  $\kappa$  y muestra la aparición de una nueva fuerza de tipo *electromagnético* aunque de origen gravitatorio. Podemos asegurar que es nueva y no se corresponde con una redefinición de la masa dinámica mediante un ajuste con los términos gravitatorios, pues para que esto fuera posible todos los términos deberían corregirse simultáneamente, algo que no ocurre.

Podemos señalar dos consecuencias de naturaleza fundamental ligadas a una constante  $\kappa \neq 0$ , que en principio pueden ser sometidas a juicio experimental. En primer lugar, el principio de equivalencia se viola, puesto que la masa inercial se corrige mientras que la dinámica no lo hace <sup>8</sup>. En definitiva, si esta mezcla caracterizada por el parámetro  $\kappa$  realmente tiene lugar, debemos admitir una violación *cuántica* del principio de equivalencia.

En segundo lugar,  $\kappa \neq 0$  implica una diferencia de masa entre partículas cargadas y sus antipartículas. Esto se produciría siempre que la constante  $\kappa$  no resultase proporcional a una potencia impar de la carga  $q$  pues en tal caso, la corrección a la masa sería independiente del signo de la carga. De hecho, las actuales incertidumbres en la masa de tales pares, como por ejemplo electrón-positrón, ponen una cota superior para el valor de  $\kappa$ , implicando un valor muy pequeño para la misma. A nivel fundamental, esto supondría una violación de la simetría CPT, efecto que debería ponerse de manifiesto en experimentos que miden el *Lamb shift* en átomos de anti-hidrógeno [CEHHZ94, Bau96, Bl98].

Por último debemos mencionar que esta fuerza de tipo electromagnético, pero que sólo involucra potenciales gravitatorios, podría dar lugar a efectos típicamente electromagnéticos en regiones donde tales campos están ausentes. Un ejemplo de tales fenómenos podría ser el giro del vector de polarización de la luz al atravesar campos gravitatorios intensos.

#### 5.4.4 Límite no relativista

En este Apartado vamos a comentar brevemente el límite no relativista de una forma grupo-teórica. Esencialmente se trata del mismo proceso para pasar de la cinemática relativista, esto es, el grupo de Poincaré, a la no relativista representada por el grupo de Galileo. Tal paso se realiza mediante una contracción de Inönü-Wigner, presentada en el Subapartado 4.3.3.c, contrayendo respecto a los generadores de las translaciones temporales y de las rotaciones y usando la velocidad de la luz  $c$  como parámetro de contracción.

En el caso presente, donde hemos incorporado la presencia de interacciones, contraemos respecto al subgrupo del caso cinemático al que le añadimos los generadores  $A_i$ . Para preparar la contracción escribimos el álgebra no covariante y redefinimos  $h_{00}$  por  $\frac{1}{c^2}$  y el resto de los generadores por  $\frac{1}{c}$ :

$$[x_0, L_{0i}] = x_i$$

<sup>8</sup>Sin embargo, como hemos visto anteriormente, tal principio se *deriva* para  $\kappa = 0$  como una condición de consistencia de la dinámica, sin tener que imponerlo *a priori*.



$$\begin{aligned}
[x_0, h_{00}] &= \frac{2}{c^2}x_0 - 2m\Xi \\
[x_0, h_{0i}] &= x_i \\
[x_0, A_0] &= q\Xi \\
[x_i, L_{0j}] &= \frac{1}{c^2}\delta_{ij}x_0 - \frac{1}{c}(m + \kappa q)c\delta_{ij}\Xi \\
[x_i, L_{jk}] &= -\delta_{ij}x_k + \delta_{ik}x_j \\
[x_i, h_{0j}] &= -\frac{\delta_{ij}}{c^2}x_0 + m\delta_{ij}\Xi \\
[x_i, h_{jk}] &= -\frac{\delta_{ij}}{c}x_k - \frac{\delta_{ik}}{c}x_j \\
[x_i, A_j] &= -q\delta_{ij}\Xi \\
[L_{0i}, L_{0j}] &= -\frac{1}{c^2}L_{ij} \\
[L_{0i}, L_{jk}] &= -\delta_{ij}L_{0k} + \delta_{ik}L_{0j} \\
[L_{0i}, h_{00}] &= -\frac{2}{c^2}h_{i0} \\
[L_{0i}, h_{0j}] &= -\delta_{ij}h_{00} - \frac{1}{c}h_{ij} + \kappa\delta_{ij}A_0 \\
[L_{0i}, h_{jk}] &= \frac{1}{c}(-\delta_{ij}h_{0k} - \delta_{ik}h_{0j}) + \frac{\kappa}{c}(\delta_{ij}A_k + \delta_{ik}A_j) \\
[L_{0i}, A_j] &= -\delta_{ij}A_0 \\
[L_{0i}, A_0] &= -\frac{1}{c^2}A_i \\
[L_{ij}, L_{kl}] &= -\delta_{kj}L_{il} + \delta_{lj}L_{ik} + \delta_{ik}L_{jl} - \delta_{il}L_{jk} \\
[L_{ij}, h_{0k}] &= -\delta_{kj}h_{0i} + \delta_{ik}h_{0j} \\
[L_{ij}, h_{kl}] &= -\delta_{kj}h_{il} + \delta_{lj}h_{ik} + \delta_{ik}h_{jl} + \delta_{il}h_{jk} \\
[L_{ij}, A_k] &= -\delta_{kj}A_i + \delta_{ik}A_j \\
[h_{00}, h_{0i}] &= \frac{2}{c^2}L_{0i} - 2\frac{\kappa}{c^3}A_i \\
[h_{00}, A_0] &= \frac{2}{c^2}A_0 \\
[h_{0i}, h_{0j}] &= \frac{1}{c^2}L_{ij} \\
[h_{0i}, h_{jk}] &= \frac{1}{c}(-\delta_{ij}L_{0k} - \delta_{ik}L_{0j}) + \frac{\kappa}{c}(\delta_{ij}A_k + \delta_{ik}A_j) \\
[h_{0i}, A_j] &= -\delta_{ij}A_0 \\
[h_{0i}, A_0] &= -\frac{1}{c^2}A_i \\
[h_{ij}, h_{kl}] &= \frac{1}{c^2}(-\delta_{kj}L_{il} - \delta_{lj}L_{ik} - \delta_{ik}L_{jl} - \delta_{il}L_{jk}) \\
[h_{ij}, A_k] &= \frac{1}{c}(-\delta_{kj}A_i - \delta_{ik}A_j) .
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Haciendo  $c \rightarrow \infty$ , obtenemos la búsqueda contracción de Inönü-Wigner:

$$\begin{aligned}
[x_0, L_{0i}] &= x_i , [x_0, h_{00}] = -2m\Xi , [x_0, h_{0i}] = x_i , [x_0, A_0] = q\Xi \\
[x_i, L_{0j}] &= -(m + \kappa q)\delta_{ij}\Xi , [x_i, L_{jk}] = -\delta_{ij}x_k + \delta_{ik}x_j
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
[x_i, h_{0j}] &= m\delta_{ij}\Xi, \quad [x_i, A_j] = -q\delta_{ij}\Xi & (5.77) \\
[L_{0i}, L_{jk}] &= -\delta_{ij}L_{0k} + \delta_{ki}L_{0j}, \quad [L_{0i}, h_{0j}] = -\delta_{ij}h_{00} + k\delta_{ij}A_0, \quad [L_{0i}, A_j] = -\delta_{ij}A_0 \\
[L_{ij}, L_{kl}] &= -\delta_{kj}L_{il} + \delta_{lj}L_{ik} + \delta_{ik}L_{jl} - \delta_{il}L_{jk}, \quad [L_{ij}, h_{0k}] = -\delta_{kj}h_{0i} + \delta_{ik}h_{0j} \\
[L_{ij}, h_{kl}] &= -\delta_{kj}h_{il} - \delta_{lj}L_{ik} + \delta_{ik}L_{jl} + \delta_{il}L_{jk}, \quad [L_{ij}, A_k] = -\delta_{kj}A_i + \delta_{ki}A_j \\
[h_{0i}, A_j] &= -\delta_{ij}A_0.
\end{aligned}$$

A partir de este álgebra podemos repetir todo el proceso presentado anteriormente, para finalmente llegar a las siguientes ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned}
\frac{dx^i}{dt} &= v^i \quad (\equiv L^{0i} + h^{0i}) \\
(m + \kappa q) \frac{d\vec{v}}{dt} &= q \left[ \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \\
&\quad - m \left[ \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{h}) - \vec{\nabla} h_{00} - \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \right] + \frac{m}{4} \nabla(\vec{h} \cdot \vec{h}) \\
&\quad - \frac{\kappa q}{2} \left[ \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{h}) - \frac{1}{4} \nabla(\vec{h} \cdot \vec{h}) - \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \right] & (5.78)
\end{aligned}$$

Esta contracción representa por tanto un paso intermedio en el límite no relativista completo, como lo muestra la aparición de los términos gravito-electromagnéticos en la parte geodésica. Asimismo muestra los términos de mezcla.

Contrayendo nuevamente respecto al subgrupo de Galileo,  $h_{00}$ ,  $A_0$  y  $A_i$  (esto es, redefiniendo  $h_{0i}$ ) se obtiene el límite no relativista total (estándar).

## 5.5 Discusión y conclusiones

Si bien en este Capítulo nos hemos separado de nuestra estrategia principal en la búsqueda de una dinámica gravitatoria a partir del grupo de difeomorfismos, éste reaparece finalmente como simetría fundamental ligada a la Gravedad. Hemos descrito la dinámica semiclásica de una partícula en el seno de campos externos de fondo, usando la simetría como guía en la caracterización de estas interacciones. En efecto, partiendo del grupo cinemático de la partícula libre, hemos introducido las interacciones mediante un mecanismo que supone una revisión del principio de *gauge*, al hacer local parte de ese grupo cinemático, si bien previamente extendido centralmente. En el caso de una descripción tipo Cartan, la ampliación del grupo de simetría con los generadores locales requiere la inclusión de nuevos grados de libertad físicos en el espacio donde se realiza la simetría, con lo cual hemos descrito en particular el caso electromagnético. Sin embargo, el uso de las técnicas semiclásicas de la CSG proporciona una manera más sistemática de atacar el problema, apareciendo los nuevos campos dentro del propio grupo. Tras analizar nuevamente el caso electromagnético, donde el  $U(1)$  de la extensión central se identifica con el  $U(1)$  del electromagnetismo, hemos estudiado la incorporación del campo gravitatorio a partir de las translaciones locales. Junto a motivaciones generales un tanto oscuras acerca del tratamiento de la Gravedad como una teoría asociada a un grupo de gauge local, hemos identificado los nuevos campos como grados de libertad métricos gracias fundamentalmente a las ecuaciones del movimiento resultantes, que en la aproximación en que trabajamos corresponden a una linealización



de las ecuaciones geodésicas. Debemos señalar no obstante, que el campo de gauge que uno esperaría encontrar a partir de las translaciones locales en una aproximación estándar no se corresponde con tales grados de libertad métricos, sino más bien con las tétradas o *vierbein*. Es más, nuestras *translaciones locales*, que están construidas a partir de una representación concreta que da lugar al grupo de difeomorfismos, no se corresponden con la visión estándar como aplicaciones de la variedad en el grupo de las translaciones (que es un grupo abeliano). Todo esto hace que haya que ser extremadamente cauto con cualquier comparación con otras aproximaciones a la gravedad gauge en la literatura.

Si bien su uso es más sistemático, las técnicas de CSG conllevan la restricción técnica de trabajar con un álgebra truncada en sus infinitos grados de libertad. Por otro lado, sitúa la discusión a las puertas de un tratamiento genuinamente cuántico. Tal paso no se ha dado por la necesidad de refinar en tal caso la imposición de la ligadura  $A_\mu \rightarrow A_\mu(x), h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu}(x)$ , que se ha empleado en el régimen clásico. El rasgo más interesante de nuestra descripción es la posibilidad de abordar el problema de la mezcla de interacciones mediante una mezcla de sus simetrías asociadas, que si bien puede ser trivial desde el punto de vista cohomológico, no lo es desde el dinámico en el espíritu de la pseudo-cohomología. En este sentido resulta especialmente interesante la aparición de una fuerza sobre la partícula, de naturaleza electromagnética pero construida a partir de potenciales gravitatorios (campos métricos). Como conclusiones podemos enunciar los siguientes puntos:

- a) Identificación de las constantes que caracterizan a una partícula y sus acoplamientos  $(m, q, \kappa)$ , con parámetros asociados a la (pseudo-)cohomología del grupo de simetría subyacente.
- b) Obtención de interacciones a partir de la estructura cinemática mediante la sustitución de ciertos subgrupos de la simetría cinemática por sus correspondientes versiones locales. Por el momento, la dinámica intrínseca asociada a los campos de fondo no se ha estudiado, limitándonos al movimiento de partículas en su seno.
- c) En nuestro tratamiento, la *mezcla de interacciones* exige la extensión previa de la estructura cinemática por un  $U(1)$  central, dotando de un carácter cuántico al mecanismo. Tal mezcla tiene, a este nivel, consecuencias experimentales fundamentalmente ligadas a la redefinición de las constantes que caracterizan a la partícula. Por un lado, la masa inercial se ve redefinida mientras que la gravitacional no, implicando una violación del principio de equivalencia. Por otro lado, tal redefinición de la masa inercial depende en principio del signo de la carga, con lo que la masa de una partícula cargada y su anti-partícula se modificarían de distinta manera conllevando una violación de la simetría CPT. Si esto último se toma como un principio fundamental, esto significaría que  $\kappa$  es proporcional a una potencia impar de  $q$ .
- d) Recuperación de los difeomorfismos como simetría básica asociada a una dinámica gravitatoria sin imponerlo desde un principio.



## Capítulo 6

# Dimensiones espacio-temporales realistas

En este Capítulo convergen las líneas de investigación iniciadas en los dos Capítulos anteriores, presentándose un estudio de la dinámica asociada al álgebra completa de difeomorfismos en dimensiones espacio-temporales realistas, mediante la aplicación de la CSG. El principal resultado lo constituye la construcción de una representación de peso máximo del álgebra de difeomorfismos extendida no centralmente y actuando sobre el álgebra de corrientes asociada a un grupo  $U(1)$ . A pesar del interés intrínseco de tal realización, ésta no parece ser suficiente para representar por sí sola todo el formalismo matemático de un modelo completo de Gravedad. Surge así la necesidad de completarla mediante la incorporación de cierta estructura adicional, aún por identificar, que nos lleva a considerar nuestra construcción como un paso intermedio en un programa en desarrollo. No obstante, y a pesar de su carácter incompleto, nuestro formalismo permite la discusión de ciertos aspectos parciales, pero relevantes, de los caracteres cuánticos de la física gravitacional. Con este objetivo se ofrecen distintas interpretaciones físicas, clasificadas como fundamentales o fenomenológicas, según su espíritu. Todas ellas llevan asociada, en cualquier caso, una reflexión sobre el carácter gauge de los difeomorfismos en las respectivas teorías cuánticas.

### 6.1 Generalización de ideas y estructuras previas

Las dos líneas de trabajo desarrolladas en los Capítulos 4 y 5 son necesariamente incompletas y precisan ser generalizadas. Por un lado, la dinámica obtenida a partir del grupo de Virasoro, limitada a un espacio-tiempo bidimensional, exige su extensión al caso de dimensión realista. Sin embargo, en tal situación perdemos la guía representada por la acción de Polyakov, que nos permitía conectar con las nociones gravitacionales a través del análisis del tratamiento semiclásico. Necesitaremos, por tanto, suplementar el formalismo matemático con nuevas intuiciones físicas. En lo que se refiere a la recuperación de una noción espacio-temporal a partir de la teoría cuántica, las dificultades encontradas ya en el altamente crítico caso bidimensional, nos sugieren aplazar el estudio de este punto específico para futuros análisis, concentrándonos en los restantes aspectos, en particular la realización de la ruptura del carácter gauge de los difeomorfismos en el régimen cuántico. Por tanto, en este Capítulo consideraremos el álgebra de difeomorfismos no como una simetría abstracta, sino de hecho asociada a las transformaciones infinitesimales de una estructura espacio-temporal



local previamente existente.

Respecto a la mezcla de interacciones en el Capítulo 5, planteamos el estudio de la dinámica intrínseca de los grados de libertad de la teoría de campos, congelando la dinámica específica de la partícula. Se estudiará en primer lugar una generalización del álgebra de dimensión finita presentada en la Sección 5.4, intentando extraer los grados de libertad métricos directamente a partir del grupo de difeomorfismos. Los problemas encontrados en este intento nos llevan a repasar el tratamiento de una simetría gauge local en el contexto de la CSG. Esto conduce a una visión de la simetría de difeomorfismos, en este contexto particular de la mezcla de interacciones, como una parte de una estructura todavía por completar.

## 6.2 Extensiones del álgebra de difeomorfismos

Como comentamos en la Sección 3.3, el álgebra de Lie del grupo de difeomorfismos de una variedad  $M$  puede verse como el conjunto de los campos vectoriales (de clase  $C^\infty$ ), dotados con su conmutador natural. Este álgebra se denota por  $Vect(M)$  [Fu84] que en nuestro caso, donde se trata específicamente con difeomorfismos locales asociados a un abierto de la variedad, se corresponde realmente con  $Vect(\mathbb{R}^d)$ , con  $d = dim(M)$ .

En definitiva, dados dos campos de vectores  $\eta = \eta^\mu(x)\partial_\mu$  y  $\xi = \xi^\nu(x)\partial_\nu$ , el producto de Lie entre dichos campos viene dado por el conmutador:  $[\eta, \xi] = (\eta^\mu\partial_\mu\xi^\nu - \xi^\mu\partial_\mu\eta^\nu)\partial_\nu$ , que define un álgebra isomorfa a la obtenida a partir de las translaciones locales en la Sección 5.4. Una expresión equivalente, pero mejor adaptada al estudio de las extensiones de este álgebra (donde los difeomorfismos actúan sobre objetos más generales), viene dada en términos de derivadas de Lie,  $\mathcal{L}_\eta$ <sup>1</sup>, simplemente por:

$$[\mathcal{L}_\eta, \mathcal{L}_\xi] = \mathcal{L}_{[\eta, \xi]} \quad . \quad (6.1)$$

Como comentaremos después, para el caso con  $d \geq 2$  no existen extensiones centrales. La construcción de la dinámica requerirá, por tanto, del uso de las pseudo-extensiones discutidas en el Apartado 3.1.c. Sin embargo, sí existen extensiones no centrales del álgebra de difeomorfismos que enriquecen la dinámica y generalizan de forma más adecuada el álgebra de Virasoro empleada en el modelo del Capítulo 4. Estas extensiones vienen dadas por un cociclo  $c(\eta, \xi)$ , con lo que la forma del álgebra queda:

$$[\mathcal{L}_\eta, \mathcal{L}_\xi] = \mathcal{L}_{[\eta, \xi]} + c(\eta, \xi) \quad . \quad (6.2)$$

A la hora de estudiar las pseudo-extensiones resulta más conveniente trabajar en un espacio tipo *momentos*, para lo cual precisamos de una base de Fourier en la que expandir las componentes de los campos vectoriales, lo que a su vez proporciona una base para los campos vectoriales sobre la variedad. Si escogemos [Lar00] como base para los campos de vectores la constituida por los generadores,  $L_\mu(\mathbf{m}) = ie^{im_\rho x^\rho}\partial_\mu$ , con  $\mathbf{m}$  un vector  $d$ -dimensional cuyas componentes consideraremos enteras por simplicidad técnica, la anterior expresión resulta:

$$[L_\mu(\mathbf{m}), L_\nu(\mathbf{n})] = n_\mu L_\nu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - m_\nu L_\mu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \quad . \quad (6.3)$$

<sup>1</sup>A diferencia de los capítulos anteriores, y con objeto de no confundirla con los generadores de difeomorfismos en el espacio de momentos, empleamos aquí una  $\mathcal{L}$  caligráfica para denotar la derivada de Lie.



Decimos que la extensión es local si  $c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  tiene la forma:

$$c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = pol_{\mu\nu}^a(\mathbf{m}, \mathbf{n})A_a(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \quad , \quad (6.4)$$

siendo  $pol_{\mu\nu}^a(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = -pol_{\nu\mu}^a(\mathbf{n}, \mathbf{m})$  un polinomio en  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{n}$  y  $A_a(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  el nuevo generador que extiende el álgebra.

Es más, en el presente estudio nos limitaremos a considerar extensiones definidas por módulos tensoriales, esto es, donde los generadores  $A_a$  constituyen el soporte de una representación de  $gl(d)$ . A pesar de que existen representaciones no tensoriales con interés manifiesto (extensión de Mickelsson-Fadeev, extensión por conexiones, etcétera), la ventaja de las tensoriales radica en la existencia de una clasificación completa [Dz96], que permite un tratamiento sistemático. Además, como vamos a ver, la gama de posibilidades ya es suficientemente rica en este caso.

Podemos caracterizar una densidad tensorial  $\Phi_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}(x)$ ,  $p$  veces contravariante,  $q$  veces covariante y de peso conforme  $\lambda$ , y que denotaremos por  $(p, q; \lambda)$ , mediante los conmutadores [Lar00]

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_\xi, \Phi_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}(x)] &= -\xi^\sigma(x) \partial_\sigma \Phi_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}(x) - \lambda \partial_\sigma \xi^\sigma(x) \Phi_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}(x) \\ &+ \sum_{i=1}^p \partial_\sigma \xi^{\mu_i}(x) \Phi_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_p}(x) - \sum_{j=1}^q \partial_{\nu_j} \xi^\sigma(x) \Phi_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}(x) \quad , \end{aligned} \quad (6.5)$$

o en la versión de espacio de momentos

$$\begin{aligned} [L_\rho(\mathbf{m}), \Phi_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}(\mathbf{n})] &= (n_\rho + (1 - \lambda)m_\rho) \Phi_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \\ &+ \sum_{i=1}^p \delta_\rho^{\mu_i} m_\sigma \Phi_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_p}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - \sum_{j=1}^q m_{\nu_j} \Phi_{\nu_1 \dots \rho \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \quad . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Una densidad tensorial se puede ver como una aplicación de  $M$  con valores en un  $gl(d)$ -módulo. La clasificación de las extensiones no centrales tensoriales en [Dz96] viene dada en términos de las representaciones irreducibles de  $gl(d)$ . Puesto que la descomposición  $gl(d) \sim sl(d) \oplus gl(1)$ , permite escribir estas representaciones irreducibles en términos del peso conforme antes mencionado y de los vectores de peso máximo de  $sl(d)$ , las distintas extensiones vienen parametrizadas en términos de un peso  $\lambda$  y una partición  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1})$ , o equivalentemente, de tableros de Young. Sin embargo, puesto que aquí nos limitaremos a enumerar las distintas posibilidades, sin realizar un auténtico análisis de las mismas, no seremos exhaustivos en la identificación de la representación involucrada, limitándonos a especificar el tipo  $(p, q; \lambda)$  de la densidad tensorial en cuestión. Esto introduce una degeneración en la notación que será solventada haciendo explícitas las propiedades de simetría de los tensores.

La clasificación completa proporciona diecisiete cociclos no equivalentes, agrupados en cuatro clases distintas. Sin embargo, dos de ellas están restringidas a variedades de dimensión dos y uno. Puesto que estamos interesados en construir modelos en dimensiones realistas, presentaremos únicamente las otras dos clases, correspondientes a cociclos cúbicos y cuárticos, respectivamente. Para cada extensión tensorial, hacemos explícita la notación del tensor correspondiente, su tipo  $(p, q; \lambda)$ , el entero  $d_0$  que indica la dimensión mínima para la que la extensión es válida ( $d \geq d_0$ ), las eventuales propiedades de simetría del tensor y finalmente la forma del cociclo tanto en configuración como en momentos.



## 1. Primera clase. Cociclos cúbicos.

i)  $S^\rho, (1, 0; 1), d_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= (\partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial_\nu \eta^\nu - \partial_\mu \xi^\mu \partial_\rho \partial_\nu \eta^\nu) \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= m_\mu n_\nu (m_\rho - n_\rho) S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

ii)  $K_\mu^{(\sigma\tau)}, (2, 1; 1), d_0 = 2$ :

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= (\partial_\mu \xi^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \eta^\nu) K_\nu^{(\sigma\tau)} - (\partial_\sigma \partial_\tau \xi^\mu \partial_\nu \eta^\nu) K_\mu^{(\sigma\tau)} \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= m_\mu n_\sigma n_\tau K_\nu^{(\sigma\tau)}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - n_\nu m_\sigma m_\tau K_\mu^{(\sigma\tau)}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

## 2. Segunda clase. Cociclos cuárticos.

i)  $F_1^{[\mu\nu]}, (2, 0; 1), d_0 = 2$ :

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= (\partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial_\tau \partial_\nu \eta^\nu) F_1^{[\rho\tau]} \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= m_\rho m_\mu n_\tau n_\nu F_1^{[\rho\tau]}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

ii)  $F_2^{[\mu\nu]}, (2, 0; 1), d_0 = 2$ :

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= (\partial_\rho \partial_\nu \xi^\mu \partial_\tau \partial_\mu \eta^\nu) F_2^{[\rho\tau]} \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= m_\rho m_\nu n_\tau n_\mu F_2^{[\rho\tau]}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

iii)  $E_{1\mu}^{\rho(\sigma\tau)}$  (con  $E_{1\mu}^{(\rho\sigma\tau)=0}$ ),  $(3, 1; 1), d_0 = 3$ :

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= (\partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \eta^\nu - \partial_\rho \partial_\mu \eta^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \xi^\nu) E_{1\nu}^{\rho(\sigma\tau)} \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= (m_\rho m_\mu n_\sigma n_\tau - n_\rho n_\mu m_\sigma m_\tau) E_{1\nu}^{\rho(\sigma\tau)}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.11)$$

iv)  $E_{2\mu}^{\rho(\sigma\tau)}$  (con  $E_{2\mu}^{(\rho\sigma\tau)=0}$ ),  $(3, 1; 1), d_0 = 3$ :

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= (\partial_\rho \partial_\nu \xi^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \eta^\nu - \partial_\rho \partial_\nu \eta^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \xi^\nu) E_{2\mu}^{\rho(\sigma\tau)} \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= (m_\rho m_\nu n_\sigma n_\tau - n_\rho n_\nu m_\sigma m_\tau) E_{2\mu}^{\rho(\sigma\tau)}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

v)  $D_\mu^{(\rho\sigma\tau)}, (3, 1; 1), d_0 = 2$ :

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= (\partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \eta^\nu - \partial_\rho \partial_\mu \eta^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \xi^\nu) D_\nu^{(\rho\sigma\tau)} \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= (m_\rho m_\mu n_\sigma n_\tau - n_\rho n_\mu m_\sigma m_\tau) D_\nu^{(\rho\sigma\tau)}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.13)$$

vi)  $B_{(\mu\nu)}^{[(\lambda\rho)(\sigma\tau)]}, (4, 2; 1), d_0 = 3$ :

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= \partial_\lambda \partial_\rho \xi^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \eta^\nu B_{(\mu\nu)}^{[(\lambda\rho)(\sigma\tau)]} \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= m_\lambda m_\rho n_\sigma n_\tau B_{(\mu\nu)}^{[(\lambda\rho)(\sigma\tau)]}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.14)$$



vii)  $A_{[\mu\nu]}^{(\lambda\rho\sigma\tau)}$ ,  $(4, 2; 1)$ ,  $d_0 = 3$ :

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= \partial_\lambda \partial_\rho \xi^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \eta^\nu A_{[\mu\nu]}^{(\lambda\rho\sigma\tau)} \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= m_\lambda m_\rho n_\sigma n_\tau A_{[\mu\nu]}^{(\lambda\rho\sigma\tau)}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.15)$$

viii)  $C_{[\mu\nu]}^{((\lambda\rho)(\sigma\tau))}$  (con  $C_{[\mu\nu]}^{(\lambda\rho\sigma\tau)} = 0$ ),  $(4, 2; 1)$ ,  $d_0 = 4$ :

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= \partial_\lambda \partial_\rho \xi^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \eta^\nu C_{[\mu\nu]}^{((\lambda\rho)(\sigma\tau))} \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= m_\lambda m_\rho n_\sigma n_\tau C_{[\mu\nu]}^{((\lambda\rho)(\sigma\tau))}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Las extensiones de la segunda clase, b), se pueden obtener a partir de la extensión de un único tensor  $R_{\mu\nu}^{(\lambda\rho)(\sigma\tau)}$

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= \partial_\lambda \partial_\rho \xi^\mu \partial_\sigma \partial_\tau \eta^\nu R_{\mu\nu}^{(\lambda\rho)(\sigma\tau)} \\ c_{\mu\nu}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) &= m_\lambda m_\rho n_\sigma n_\tau R_{\mu\nu}^{(\lambda\rho)(\sigma\tau)}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.17)$$

de naturaleza reducible y cuya descomposición proporciona cada uno de los tensores asociados a las respectivas extensiones anteriores

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(\lambda\rho)(\sigma\tau)} &= A_{[\mu\nu]}^{(\lambda\rho\sigma\tau)} + B_{(\mu\nu)}^{[(\lambda\rho)(\sigma\tau)]} + C_{[\mu\nu]}^{((\lambda\rho)(\sigma\tau))} \\ &+ \delta_\mu^{(\lambda} G_\nu^{\rho)(\sigma\tau)} - \delta_\nu^{(\sigma} G_\mu^{\tau)(\lambda\rho)} + \delta_\nu^{(\lambda} G_\mu^{\rho)(\sigma\tau)} - \delta_\mu^{(\sigma} G_\nu^{\tau)(\lambda\rho)} \end{aligned} \quad (6.18)$$

con

$$\begin{aligned} G_\nu^{\rho(\sigma\tau)} &= D_\nu^{(\rho\sigma\tau)} + E_{1\nu}^{\rho(\sigma\tau)} + E_{2\nu}^{\rho(\sigma\tau)} + \delta_\nu^{(\sigma} F_1^{\tau)\rho} + \delta_\nu^{(\sigma} F_2^{\tau)\rho} + \delta_\nu^{(\sigma} H^{\tau)\rho} + \delta_\nu^\rho H^{\sigma\tau} \\ C_{[\mu\nu]}^{[\lambda\rho\sigma\tau]} &\equiv 0, \quad E_\nu^{\rho(\sigma\tau)} \equiv 0 \\ F^{\rho\sigma} &= F^{[\rho\sigma]}, \quad H^{\rho\sigma} = H^{(\rho\sigma)} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Las extensiones aquí presentadas corresponden a nuevos campos de naturaleza tensorial que se acoplan a la teoría obtenida a partir del álgebra de difeomorfismos. Como hemos dicho, la anterior lista no exhausta las posibles extensiones, pues objetos no tensoriales como conexiones también pueden surgir mediante un proceso de extensión del álgebra original. De hecho, otra línea para aumentar el número de extensiones (incluyendo a las extensiones tensoriales) consistiría en restringir el álgebra original, difeomorfismos, a una subálgebra suya y asumir que tal subálgebra es la única responsable de la aparición de dinámica. Un caso particular está constituido por las subálgebras de difeomorfismos que dejan invariante ciertas estructuras relevantes, como por ejemplo los campos vectoriales hamiltonianos o los de contacto. Otros ejemplos son las álgebras  $W_\infty$  en dimensión dos, de gran importancia en la física de sistemas esencialmente bidimensionales [Za85, Hu93].

Nuestro único propósito aquí es mostrar la versatilidad de la aproximación y la riqueza de posibilidades que ofrece, objetivo que creemos cumplido concentrándonos en las extensiones tensoriales del álgebra completa.



### 6.2.1 Nuevos generadores. Álgebras de corrientes

Otra forma de incorporar nuevos grados de libertad al modelo, consiste en estudiar la acción natural del grupo de difeomorfismos sobre determinados generadores correspondientes a campos con soporte sobre la variedad espacio-temporal. A diferencia del caso de las extensiones, este procedimiento no altera la dinámica intrínseca de los modos de difeomorfismos debido a la estructura semidirecta de la simetría resultante <sup>2</sup>.

Especial interés tiene el caso en que los nuevos modos cierran el álgebra de corrientes de una simetría interna (sin acción sobre el espacio-tiempo). Esto es, dada un álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  con generadores  $\{J^a\}$  y conmutadores  $[J^a, J^b] = iC_c^{ab}J^c$ , consideramos el álgebra  $Map(M, \mathcal{G})$ , con generadores  $X = X_a(x)J^a$  y conmutadores  $[X, Y] = iC_c^{ab}X_a(x)X_b(x)J^c$ . Este, álgebra junto con sus correspondientes extensiones, generaliza las álgebras de Kac-Moody que han aparecido en la Sección 4.3. Asimismo, juegan un papel clave en la extensión a dimensión infinita de las ideas sobre la mezcla de interacciones presentadas en el Capítulo 5. La estructura general de las extensiones del álgebra de corrientes viene dada por los conmutadores

$$\begin{aligned} [X, Y] &= iC_c^{ab}X_a(x)X_b(x)J^c + c(X, Y) \\ [\mathcal{L}_\xi, X] &= \xi^\mu \partial_\mu X_a J^a + c(\xi, X) \end{aligned} \quad (6.20)$$

o en el espacio de momentos

$$\begin{aligned} [J^a(\mathbf{m}), J^b(\mathbf{n})] &= iC_c^{ab}J^c(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + c^{ab}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \\ [L_\mu(\mathbf{m}), J^a(\mathbf{n})] &= n_\mu J^a(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + c_\mu^a(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Considerando representaciones matriciales en  $gl(n)$  de los generadores de  $\mathcal{G}$ , se puede hacer uso de las extensiones tensoriales del grupo de difeomorfismos (en dimensión  $n$ ) para inducir extensiones en las álgebras de corrientes. Adoptando una base  $J^a$  tal que,  $tr(J^a J^b) = y_M \delta^{ab}$  e introduciendo el vector  $\delta^a$ , definido como  $tr(\sigma^a) = z_M \delta^a$ , donde  $\delta^c C_c^{ab} = 0$  ó  $z_M = 0$ , encontramos las siguientes extensiones asociadas a las dos clases presentadas explícitamente en la Sección anterior.

Correspondientes a la primera clase de extensiones de difeomorfismos, tenemos:

1.a)

$$\begin{aligned} c(\xi, X) &= z_M \delta^a S^\rho (\partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu X_a) \\ c(X, Y) &= z_M^2 \delta^a \delta^b S^\rho (\partial_\rho X_a Y_b) \end{aligned} \quad (6.22)$$

1.b)

$$\begin{aligned} c(\xi, X) &= 0 \\ c(X, Y) &= y_M \delta^{ab} S^\rho (\partial_\rho X_a Y_b) \end{aligned} \quad (6.23)$$

<sup>2</sup>Matemáticamente, la manera de incorporar nuevos grados de libertad mediante extensiones es proyectiva, que indica que los difeomorfismos aparecen como el cociente de otra estructura  $G$ . La que proponemos en este Apartado es inyectiva, apareciendo los difeomorfismos como subgrupo de  $G$ . En términos de secuencias espectrales [HS70], la primera corresponde a  $G \rightarrow Diff(M) \rightarrow 1$ , mientras que la segunda está asociada a  $1 \rightarrow Diff(M) \rightarrow G$ .



1.c)

$$\begin{aligned} c(\xi, X) &= z_M \delta^a S^\rho (\partial_\rho \partial_\mu \xi^\mu X_a - \partial_\mu \xi^\mu \partial_\rho X_a) \\ c(X, Y) &= z_M^2 \delta^a \delta^b S^\rho (\partial_\rho X_a Y_b - X_a \partial_\rho Y_b) \end{aligned} \quad (6.24)$$

1.d)

$$\begin{aligned} c(\xi, X) &= \epsilon (J^a)_j^i K_i^{(\sigma\tau)|j} (\partial_\mu \xi^\mu \partial_\sigma \partial_\tau X_a) + 2 (J^a)_j^i K_i^{(\sigma j)} (\partial_\mu \xi^\mu \partial_\sigma X_a) \\ &\quad - z_M \delta^a K_\mu^{(\sigma\tau)} (\partial_\sigma \partial_\tau \xi^\mu X_a) \\ c(X, Y) &= \epsilon z_M \delta^a (J^b)_k^j K_j^{(\sigma\tau)|k} (X_a \partial_\sigma \partial_\tau Y_b) + 2 \delta^a (J^b)_k^j K_j^{(\sigma k)} (X_a \partial_\sigma Y_b) - (X \leftrightarrow Y) \end{aligned} \quad (6.25)$$

donde  $K_\alpha^{(\beta\gamma)}$  es un objeto que vive en una variedad de dimension  $d+n$ , parametrizada localmente por  $(x^1, \dots, x^d, y^1, \dots, y^n)$ . Los índices griegos  $(\mu, \nu, \dots)$  corren entre 1 y  $d$ , y los índices latinos entre 1 y  $n$ . Explícitamente,  $K_i^{(\sigma\tau)|j}(x) \equiv K_i^{(\sigma\tau)}(y^j x)$ .

Asociada a la segunda clase de extensiones de difeomorfismos, tenemos

$$\begin{aligned} c(\xi, X) &= \epsilon (J^a)_j^i R_{\mu i}^{(\lambda\rho)(\sigma\tau)|j} (\partial_\lambda \partial_\rho \xi^\mu \partial_\sigma \partial_\tau X_a) + 2 (J^a)_j^i R_{\mu i}^{(\lambda\rho)(\sigma j)} (\partial_\lambda \partial_\rho \xi^\mu \partial_\sigma X_a) \\ c(X, Y) &= \epsilon^2 (J^a)_k^i (J^b)_l^j R_{ij}^{(\lambda\rho)(\sigma\tau)|kl} (\partial_\lambda \partial_\rho X_a \partial_\sigma \partial_\tau Y_b) \\ &\quad + 2 \epsilon (J^a)_k^i (J^b)_l^j \left( R_{ij}^{(k\rho)(l\tau)|l} \partial_\rho X_a \partial_\sigma \partial_\tau Y_b + R_{ij}^{(\lambda\rho)(l\tau)|k} \partial_\lambda \partial_\rho X_a \partial_\tau Y_b \right) \\ &\quad + 4 (J^a)_k^i (J^b)_l^j R_{ij}^{k\rho(l\tau)} \partial_\rho X_a \partial_\tau Y_b . \end{aligned} \quad (6.26)$$

En nuestra discusión nos ceñiremos a discutir la posibilidad más sencilla. Ésta viene dada por la extensión 1.i) en el caso de los difeomorfismos (que de hecho generaliza el cociclo de Virasoro a dimensiones superiores) y por un álgebra de corrientes  $U(1)$  con extensiones 1.b), que generaliza la de Kac-Moody

$$\begin{aligned} [L_\mu(\mathbf{m}), L_\nu(\mathbf{n})] &= n_\mu L_\nu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - m_\nu L_\mu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - m_\mu n_\nu (m_\rho - n_\rho) S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ [L_\mu(\mathbf{m}), S^\nu(\mathbf{n})] &= n_\mu S^\nu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \delta_\mu^\nu m_\rho S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n}) , \\ [L_\mu(\mathbf{m}), A(\mathbf{n})] &= n_\mu A(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ [A(\mathbf{m}), A(\mathbf{n})] &= (n_\rho - m_\rho) S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n}) . \end{aligned} \quad (6.27)$$

Aparte de ser el álgebra más simple, también es la que muestra una conexión más directa con las discusiones de los anteriores capítulos.

### 6.3 Mezcla de interacciones

En esta sección se plantea el estudio de la dinámica intrínseca de los campos externos que han aparecido en el Capítulo 5. El primer paso requiere la identificación de la simetría relevante. En el primer Apartado se explora una línea basada en una generalización puramente formal de la estructura de partida. Las dificultades en este intento suscitan un replanteamiento del problema en un segundo Apartado.



### 6.3.1 Generalización ingenua de electro-gravedad

Este Apartado ilustra las dificultades ligadas a la conexión entre un formalismo matemático y su interpretación física, problema especialmente grave en el caso de sistemas definidos a partir de una estructura abstracta. Constituye pues una llamada de atención para mantener algún mecanismo de control físico sobre las estructuras que tomamos como punto de partida en nuestros análisis. En particular, vamos a realizar una generalización ingenua a dimensión infinita de la estructura matemática del modelo del Capítulo anterior, con el único criterio de encontrar un álgebra de dimensión infinita que contenga el álgebra (5.51) como subálgebra finita.

Con este objetivo recordamos dos aspectos de este modelo. En primer lugar, el punto de partida para la mezcla de gravedad y electromagnetismo era el análisis de las translaciones locales, interpretadas como el grupo de difeomorfismos mediante el uso de la expresión (5.47), y del  $U(1)$  local construido a partir del término de extensión central. En este contexto, una base adecuada para estas *translaciones locales*, es la que utiliza funciones potenciales en lugar de las ondas planas empleadas en la sección anterior

$$\bar{L}_\mu(\mathbf{m}) \equiv (x^1)^{m_1} \dots (x^\mu)^{m_\mu} \dots (x^d)^{m_d} x^\mu \partial_\mu \equiv (x^\rho)^{m_\rho + \delta_{\rho\mu}} \partial_\mu, \quad (6.28)$$

donde la variedad subyacente es  $d$ -dimensional,  $\mathbf{m}$  denota nuevamente un vector  $(m_1, \dots, m_d)$  de componentes enteras y se entiende un producto en  $\rho$ . El álgebra que cierran estos difeomorfismos es nuevamente,

$$[\bar{L}_\mu(\mathbf{m}), \bar{L}_\nu(\mathbf{n})] = n_\mu \bar{L}_\nu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - m_\nu \bar{L}_\mu(\mathbf{m} + \mathbf{n}). \quad (6.29)$$

Este álgebra presenta una estructura *graduada*:  $\mathcal{D} = \oplus \mathcal{D}_m$ ,  $[\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_n] \subset \mathcal{D}_{m+n}$ , donde  $\mathcal{D}_m = \langle \bar{L}_\mu(\mathbf{m}) \rangle$ , tal que  $m \equiv \sum_i m_i$ . Por su parte, el conjunto de generadores  $(x^\rho)^{m_\rho} \partial_\rho$  constituyen una base para el álgebra de  $U(1)$  local, donde  $\partial_\rho$  es la representación del generador central.

El segundo aspecto a recordar del modelo es la manera explícita en que se obtuvo el álgebra, pues nos va a ser útil para hacer efectiva la generalización. Volvemos a escribir la representación empleada los generadores del álgebra de corrientes truncada (5.49), donde el generador  $L_{\mu\nu}$  se denota como  $t_{\mu\nu}$  para evitar su confusión con los difeomorfismos

$$\begin{aligned} X_\mu &\equiv \partial_\mu + A \delta_\mu^0 \partial_\varphi \\ t_{\mu\nu} &\equiv \eta_{\mu\sigma} x^\sigma \partial_\nu - \eta_{\nu\sigma} x^\sigma \partial_\mu + B(\eta_{\mu\sigma} \delta_\nu^0 - \eta_{\nu\sigma} \delta_\mu^0) x^\sigma \partial_\varphi \\ h_{\mu\nu} &\equiv \eta_{\mu\sigma} x^\sigma \partial_\nu + \eta_{\nu\sigma} x^\sigma \partial_\mu + F(\eta_{\mu\sigma} \delta_\nu^0 + \eta_{\nu\sigma} \delta_\mu^0) x^\sigma \partial_\varphi + D \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \eta_{0\sigma} x^\sigma \partial_\varphi \\ A_\mu &\equiv q \eta_{\mu\sigma} x^\sigma \partial_\varphi, \end{aligned} \quad (6.30)$$

donde

$$\begin{aligned} A &\text{ arbitrario ; } B = -mc - \kappa qc + A \\ D = 0 &\text{ ; } F = -mc + A. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Observamos los siguientes puntos:

- i) Los representantes de los generadores  $X_\mu$ , por un lado, y de  $h_{\mu\nu}$  y  $t_{\mu\nu}$  por otro, se obtienen a partir de  $\mathcal{D}_{-1}$  y  $\mathcal{D}_0$ , respectivamente, mediante la redefinición,

$$\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + a_s[n] \delta_\mu^0 \partial_\varphi, \quad (6.32)$$



donde  $a_s[n]$  es una función sobre el grado  $n$  del difeomorfismo correspondiente y donde la simetría asociada a los subíndices  $\{\mu\nu\}$  se denota por  $s$ . Así,  $a[-1] = A$ ,  $a_s[0] = B$ ,  $a_a[0] = F$ .

- ii) En esta aproximación de campo estático, los representantes del campo electromagnético  $A_\mu$ , así como de los términos que redefinen a los difeomorfismos lineales, se pueden ver como campos de vectores que generan el álgebra de corrientes local de  $U(1)$  (que como hemos dicho se identifica con el generador de extensión central).
- iii) La mezcla entre las fuerzas gravitacionales y electromagnéticas es proporcional al parámetro  $\kappa$  y por tanto a la diferencia  $a_s[0] - a_a[0] (= B - F = -\kappa qc)$ .

A la vista de conmutadores del tipo  $[h_{\dots}, h_{\dots}] \sim A_{\dots}$ , un primer intento de generalizar este álgebra a dimensión infinita consiste en tratar de identificar el campo electromagnético  $A_\mu$  con una extensión no central del álgebra de difeomorfismos ( $[L_\eta, L_\xi] = L_{[\eta, \xi]} + c(\eta, \xi)$ ). Sin embargo, a la vista de lo expuesto en la Sección anterior debemos rechazar esta posibilidad, dado que todos los cociclos  $c(\eta, \xi)$  asociados extensiones tensoriales no triviales contienen al menos una derivada segunda en las componentes del campo vectorial, y por tanto se anulan sobre nuestros generadores del álgebra truncada, donde los generadores de difeomorfismos son a lo sumo lineales.

Otra opción conceptualmente más sencilla consiste en considerar una extensión de los difeomorfismos mediante el álgebra de corrientes de  $U(1)$ , trivial desde el punto de vista cohomológico pero con consecuencias fundamentales para la dinámica. Estamos hablando de una redefinición de los generadores de difeomorfismos mediante una combinación lineal que involucre a los modos de  $U(1)(x)$  de manera análoga a la que tiene lugar a nivel infinitesimal al construir las pseudo-extensiones, y que resulta crucial para entender la dinámica de ciertos sistemas físicos. La manera concreta para elegir la combinación lineal adecuada está motivada por la substitución (6.32), que se traduce en una redefinición de los difeomorfismos por los términos del álgebra de corrientes de  $U(1)$ . La idea es, por tanto, partir del conjunto completo de los difeomorfismos y extender (6.32) al caso infinito-dimensional. Para ello debemos escoger una función  $a_s[n]$  consistente con la dada para el caso truncado. La elección más sencilla consiste en tomar una función lineal en el grado del difeomorfismo:  $a_s[n] = a_s \cdot (m + 1)$ , donde  $a_s$  es una constante.

Antes de continuar con esta estrategia, es conveniente introducir cierta notación. Considerando vectores  $d$ -dimensionales, denotaremos por  $\mathbf{p}_{(\nu_1) \dots (\nu_j)}^{(\mu_1) \dots (\mu_i)}$  a un vector cuya componente  $\alpha$  viene dada por  $(\delta_\alpha^{\mu_1} + \dots + \delta_\alpha^{\mu_i} - \delta_{\nu_1}^\alpha - \dots - \delta_{\nu_j}^\alpha)$  (por ejemplo,  $\mathbf{p}^{(\sigma)} = (0, \dots, {}^\sigma 1, \dots, 0)$ ). Igualmente, y con objeto de hacer la extensión a dimensión infinita más clara, es conveniente introducir combinaciones lineales de difeomorfismos con dos subíndices

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{m}) \equiv \eta_{\mu\sigma} \bar{L}_\nu(\mathbf{m} + \mathbf{p}_{(\nu)}^{(\sigma)}) \quad , \quad (6.33)$$

donde se entiende la suma en  $\sigma$ , y construir a partir de ellas las combinaciones simétricas y antisimétricas

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\mu\nu}(\mathbf{m}) &\equiv D_{\mu\nu}(\mathbf{m}) + D_{\nu\mu}(\mathbf{m}) \\ \tilde{t}_{\mu\nu}(\mathbf{m}) &\equiv D_{\mu\nu}(\mathbf{m}) - D_{\nu\mu}(\mathbf{m}) \quad . \end{aligned} \quad (6.34)$$

Si definimos  $A(\mathbf{m}) \equiv q(x^\rho)^{m_\rho} \partial_\varphi$ , la aplicación de la redefinición (6.32) se traduce en

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(\mathbf{m}) &\equiv \tilde{h}_{\mu\nu}(\mathbf{m}) + B(m + 1)(\eta_{\mu\sigma} \delta_\nu^0 + \eta_{\nu\sigma} \delta_\mu^0) A(\mathbf{m} + \mathbf{p}^{(\sigma)}) \\ t_{\mu\nu}(\mathbf{m}) &\equiv \tilde{t}_{\mu\nu}(\mathbf{m}) + F(m + 1)(\eta_{\mu\sigma} \delta_\nu^0 - \eta_{\nu\sigma} \delta_\mu^0) A(\mathbf{m} + \mathbf{p}^{(\sigma)}) \quad , \end{aligned} \quad (6.35)$$



donde hemos hecho  $a_s = B$  y  $a_a = F$ . Fijando  $\mathbf{m} = 0$ , recuperamos el caso del álgebra rígida. La ventaja de haber escrito los generadores en términos de  $\bar{L}_\mu(\mathbf{m})$  y  $A(\mathbf{m})$ , en lugar de trabajar con sus expresiones explícitas<sup>3</sup> como campos vectoriales, reside en que podemos usar sus relaciones de conmutación abstractas

$$\begin{aligned} [L_\mu(\mathbf{m}), L_\nu(\mathbf{n})] &= n_\mu L_\nu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - m_\nu L_\mu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ [L_\mu(\mathbf{m}), A(\mathbf{n})] &= n_\mu A(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ [A(\mathbf{m}), A(\mathbf{n})] &= 0 . \end{aligned} \quad (6.36)$$

Al aplicarlas a los generadores  $h_{\mu\nu}(\mathbf{m})$ ,  $t_{\mu\nu}(\mathbf{m})$  y  $A(\mathbf{m})$  encontramos conmutadores del tipo (sólo hacemos explícitos algunos para dar una idea de los resultados):

$$\begin{aligned} [h_{\mu\nu}(\mathbf{m}), h_{\alpha\beta}(\mathbf{n})] &= n_\nu \eta_{\mu\sigma} h_{\alpha\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\nu)}^{(\sigma)}) - m_\beta \eta_{\alpha\sigma} h_{\mu\nu}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\beta)}^{(\sigma)}) \\ &+ n_\mu \eta_{\nu\sigma} h_{\alpha\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\mu)}^{(\sigma)}) - m_\alpha \eta_{\beta\sigma} h_{\mu\nu}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\alpha)}^{(\sigma)}) \\ &+ \eta_{\alpha\nu} t_{\mu\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \eta_{\alpha\mu} t_{\nu\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \eta_{\beta\nu} t_{\mu\alpha}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \eta_{\beta\mu} t_{\nu\alpha}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ &+ [-Bm(\eta_{\mu\sigma'} n_\nu \delta_\nu^\rho (\delta_\beta^0 \eta_{\alpha\sigma} + \delta_\alpha^0 \eta_{\beta\sigma}) + \eta_{\nu\sigma'} n_\mu \delta_\mu^\rho (\delta_\beta^0 \eta_{\alpha\sigma} + \delta_\alpha^0 \eta_{\beta\sigma})) \\ &+ Bn(\eta_{\alpha\sigma'} m_\beta \delta_\beta^\rho (\delta_\nu^0 \eta_{\mu\sigma} + \delta_\mu^0 \eta_{\nu\sigma}) + \eta_{\beta\sigma'} m_\alpha \delta_\alpha^\rho (\delta_\nu^0 \eta_{\mu\sigma} + \delta_\mu^0 \eta_{\nu\sigma}))] \cdot \\ &\quad A(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\rho)}^{(\sigma)(\sigma')}) \\ &+ [(B(n+1) - F(m+n+1))(\delta_\mu^\rho (\eta_{\alpha\nu} \delta_\beta^0 + \eta_{\beta\nu} \delta_\alpha^0) + \delta_\nu^\rho (\eta_{\alpha\mu} \delta_\beta^0 + \eta_{\beta\mu} \delta_\alpha^0)) \\ &- (B(m+1) - F(m+n+1))(\delta_\alpha^\rho (\eta_{\mu\beta} \delta_\nu^0 + \eta_{\nu\beta} \delta_\mu^0) + \delta_\beta^\rho (\eta_{\mu\alpha} \delta_\nu^0 + \eta_{\nu\alpha} \delta_\mu^0))] \cdot \\ &\quad \eta_{\rho\sigma} A(m+n+p^{(\sigma)}) \\ [t_{\mu\nu}(\mathbf{m}), t_{\alpha\beta}(\mathbf{n})] &= n_\nu \eta_{\mu\sigma} t_{\alpha\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\nu)}^{(\sigma)}) - m_\beta \eta_{\alpha\sigma} t_{\mu\nu}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\beta)}^{(\sigma)}) \\ &- n_\mu \eta_{\nu\sigma} h_{\alpha\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\mu)}^{(\sigma)}) + m_\alpha \eta_{\beta\sigma} h_{\mu\nu}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\alpha)}^{(\sigma)}) \\ &+ \eta_{\alpha\nu} t_{\mu\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - \eta_{\alpha\mu} t_{\nu\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - \eta_{\beta\nu} t_{\mu\alpha}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \eta_{\beta\mu} t_{\nu\alpha}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ &+ [-Fm(\eta_{\mu\sigma'} n_\nu \delta_\nu^\rho (\delta_\beta^0 \eta_{\alpha\sigma} - \delta_\alpha^0 \eta_{\beta\sigma}) - \eta_{\nu\sigma'} n_\mu \delta_\mu^\rho (\delta_\beta^0 \eta_{\alpha\sigma} - \delta_\alpha^0 \eta_{\beta\sigma})) \\ &+ Fn(\eta_{\alpha\sigma'} m_\beta \delta_\beta^\rho (\delta_\nu^0 \eta_{\mu\sigma} - \delta_\mu^0 \eta_{\nu\sigma}) - \eta_{\beta\sigma'} m_\alpha \delta_\alpha^\rho (\delta_\nu^0 \eta_{\mu\sigma} - \delta_\mu^0 \eta_{\nu\sigma}))] \cdot \\ &\quad A(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\rho)}^{(\sigma)(\sigma')}) \quad (6.37) \\ &+ [-Fm(\delta_\mu^\rho (\eta_{\alpha\nu} \delta_\beta^0 - \eta_{\beta\nu} \delta_\alpha^0) - \delta_\nu^\rho (\eta_{\alpha\mu} \delta_\beta^0 - \eta_{\beta\mu} \delta_\alpha^0)) \\ &+ Fm(\delta_\alpha^\rho (\eta_{\mu\beta} \delta_\nu^0 - \eta_{\nu\beta} \delta_\mu^0) - \delta_\beta^\rho (\eta_{\mu\alpha} \delta_\nu^0 - \eta_{\nu\alpha} \delta_\mu^0))] \cdot \\ &\quad \eta_{\rho\sigma} A(m+n+p^{(\sigma)}) \\ [h_{\mu\nu}(\mathbf{m}), t_{\alpha\beta}(\mathbf{n})] &= n_\nu \eta_{\mu\sigma} t_{\alpha\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\nu)}^{(\sigma)}) - m_\beta \eta_{\alpha\sigma} h_{\mu\nu}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\beta)}^{(\sigma)}) \\ &+ n_\mu \eta_{\nu\sigma} t_{\alpha\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\mu)}^{(\sigma)}) + m_\alpha \eta_{\beta\sigma} h_{\mu\nu}(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\alpha)}^{(\sigma)}) \\ &+ \eta_{\alpha\nu} h_{\mu\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \eta_{\alpha\mu} h_{\nu\beta}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - \eta_{\beta\nu} h_{\mu\alpha}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - \eta_{\beta\mu} h_{\nu\alpha}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ &+ [-Fm(\eta_{\mu\sigma'} n_\nu \delta_\nu^\rho (\delta_\beta^0 \eta_{\alpha\sigma} - \delta_\alpha^0 \eta_{\beta\sigma}) + \eta_{\nu\sigma'} n_\mu \delta_\mu^\rho (\delta_\beta^0 \eta_{\alpha\sigma} - \delta_\alpha^0 \eta_{\beta\sigma})) \\ &+ Bn(\eta_{\alpha\sigma'} m_\beta \delta_\beta^\rho (\delta_\nu^0 \eta_{\mu\sigma} + \delta_\mu^0 \eta_{\nu\sigma}) - \eta_{\beta\sigma'} m_\alpha \delta_\alpha^\rho (\delta_\nu^0 \eta_{\mu\sigma} + \delta_\mu^0 \eta_{\nu\sigma}))] \cdot \\ &\quad A(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\rho)}^{(\sigma)(\sigma')}) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Ésta fue la forma en que realizamos el primer análisis de este problema.



$$\begin{aligned}
& + [(F(n+1) - B(m+n+1))(\delta_\mu^\rho(\eta_{\alpha\nu}\delta_\beta^0 - \eta_{\beta\nu}\delta_\alpha^0) + \delta_\nu^\rho(\eta_{\alpha\mu}\delta_\beta^0 - \eta_{\beta\mu}\delta_\alpha^0)) \\
& + Bn(\delta_\alpha^\rho(\eta_{\mu\beta}\delta_\nu^0 + \eta_{\nu\beta}\delta_\mu^0) - \delta_\beta^\rho(\eta_{\mu\alpha}\delta_\nu^0 + \eta_{\nu\alpha}\delta_\mu^0))] \\
& \quad \eta_{\rho\sigma}A(m+n+p^{(\sigma)}) .
\end{aligned}$$

Nuevamente, haciendo  $\mathbf{m} = 0$ , y con  $A_\mu \equiv \eta_{\mu\sigma}A(\mathbf{m} + \mathbf{p}^{(\sigma)})$ , recuperamos el álgebra (5.51), con lo que de hecho este álgebra infinito-dimensional supone una generalización suya, lo que constituía nuestro objetivo.

Otra ventaja de trabajar con las relaciones abstractas surge al analizar las potenciales extensiones del álgebra. El aspecto de las relaciones de conmutación expresadas en términos de  $h_{\mu\nu}(\mathbf{m})$  y  $t_{\mu\nu}(\mathbf{m})$  realmente no invita a semejante análisis. Sin embargo, en términos de  $\bar{L}_\mu(\mathbf{m})$  y  $A(\mathbf{m})$ , podemos aplicar las extensiones del Apartado anterior. Como ejemplo consideramos la extensión tensorial más sencilla (6.27), tanto de difeomorfismos como del álgebra de corrientes

$$\begin{aligned}
[L_\mu(\mathbf{m}), L_\nu(\mathbf{n})] &= n_\mu L_\nu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - m_\nu L_\mu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - c_1 m_\mu n_\nu (m_\rho - n_\rho) S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\
[L_\mu(\mathbf{m}), A(\mathbf{n})] &= n_\mu A(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\
[A(\mathbf{m}), A(\mathbf{n})] &= c_2 (n_\rho - m_\rho) S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\
[L_\mu(\mathbf{m}), S^\nu(\mathbf{n})] &= n_\mu S^\nu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \delta_\mu^\nu m_\rho S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n}) ,
\end{aligned} \tag{6.38}$$

anulándose el resto de los generadores. Al usar este álgebra extendida en el cálculo de los conmutadores que involucran  $h_{\mu\nu}$  and  $t_{\mu\nu}$ , encontramos las siguientes deformaciones a los resultados previos:

$$\begin{aligned}
[h_{\mu\nu}(\mathbf{m}), h_{\alpha\beta}(\mathbf{n})] &= \dots + B^2(m+1)(n+1)(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}\delta_\nu^0\delta_\beta^0 + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}\delta_\nu^0\delta_\alpha^0 \\
& + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}\delta_\mu^0\delta_\beta^0 + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}\delta_\mu^0\delta_\alpha^0)(n_\rho - m_\rho + \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\sigma)S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}^{(\sigma)(\sigma')}) \\
& - c[\eta_{\mu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}(m_\nu + \delta_\nu^\sigma - 1)(n_\beta + \delta_\beta^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\nu + \delta_\rho^\beta)\delta_\nu^\gamma\delta_\beta^{\gamma'} \\
& + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}(m_\nu + \delta_\nu^\sigma - 1)(n_\alpha + \delta_\alpha^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\nu + \delta_\rho^\alpha)\delta_\nu^\gamma\delta_\alpha^{\gamma'} \\
& + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}(m_\mu + \delta_\mu^\sigma - 1)(n_\beta + \delta_\beta^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\mu + \delta_\rho^\beta)\delta_\mu^\gamma\delta_\beta^{\gamma'} \\
& + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}(m_\mu + \delta_\mu^\sigma - 1)(n_\alpha + \delta_\alpha^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\mu + \delta_\rho^\alpha)\delta_\mu^\gamma\delta_\alpha^{\gamma'}] \\
& \cdot S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\gamma)(\gamma')}^{(\sigma)(\sigma')}) \\
[t_{\mu\nu}(\mathbf{m}), t_{\alpha\beta}(\mathbf{n})] &= \dots + F^2(m+1)(n+1)(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}\delta_\nu^0\delta_\beta^0 - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}\delta_\nu^0\delta_\alpha^0 \\
& - \eta_{\nu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}\delta_\mu^0\delta_\beta^0 + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}\delta_\mu^0\delta_\alpha^0)(n_\rho - m_\rho + \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\sigma)S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}^{(\sigma)(\sigma')}) \\
& - c[\eta_{\mu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}(m_\nu + \delta_\nu^\sigma - 1)(n_\beta + \delta_\beta^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\nu + \delta_\rho^\beta)\delta_\nu^\gamma\delta_\beta^{\gamma'} \\
& - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}(m_\nu + \delta_\nu^\sigma - 1)(n_\alpha + \delta_\alpha^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\nu + \delta_\rho^\alpha)\delta_\nu^\gamma\delta_\alpha^{\gamma'} \\
& - \eta_{\nu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}(m_\mu + \delta_\mu^\sigma - 1)(n_\beta + \delta_\beta^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\mu + \delta_\rho^\beta)\delta_\mu^\gamma\delta_\beta^{\gamma'} \\
& + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}(m_\mu + \delta_\mu^\sigma - 1)(n_\alpha + \delta_\alpha^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\mu + \delta_\rho^\alpha)\delta_\mu^\gamma\delta_\alpha^{\gamma'}] \\
& \cdot S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\gamma)(\gamma')}^{(\sigma)(\sigma')}) \\
[h_{\mu\nu}(\mathbf{m}), t_{\alpha\beta}(\mathbf{n})] &= \dots + BF(m+1)(n+1)(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}\delta_\nu^0\delta_\beta^0 - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}\delta_\nu^0\delta_\alpha^0 \\
& + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}\delta_\mu^0\delta_\beta^0 - \eta_{\nu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}\delta_\mu^0\delta_\alpha^0)(n_\rho - m_\rho + \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\sigma)S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}^{(\sigma)(\sigma')}) \\
& - c[\eta_{\mu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}(m_\nu + \delta_\nu^\sigma - 1)(n_\beta + \delta_\beta^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\nu + \delta_\rho^\beta)\delta_\nu^\gamma\delta_\beta^{\gamma'}
\end{aligned} \tag{6.39}$$



$$\begin{aligned}
& - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}(m_\nu + \delta_\nu^\sigma - 1)(n_\alpha + \delta_\alpha^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\nu + \delta_\rho^\alpha)\delta_\nu^\gamma\delta_\alpha^{\gamma'} \\
& + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\alpha\sigma'}(m_\mu + \delta_\mu^\sigma - 1)(n_\beta + \delta_\beta^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\mu + \delta_\rho^\beta)\delta_\mu^\gamma\delta_\beta^{\gamma'} \\
& - \eta_{\nu\sigma}\eta_{\beta\sigma'}(m_\mu + \delta_\mu^\sigma - 1)(n_\alpha + \delta_\alpha^{\sigma'} - 1)(m_\rho - n_\rho + \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^{\sigma'} - \delta_\rho^\mu + \delta_\rho^\alpha)\delta_\mu^\gamma\delta_\alpha^{\gamma'} \\
& \cdot S^\rho(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}_{(\gamma)(\gamma')}^{(\sigma)(\sigma')}) .
\end{aligned}$$

La discusión anterior presenta los siguientes problemas:

- i)  $A_\mu(\mathbf{m}) = \eta_{\mu\sigma}A(\mathbf{m} + \mathbf{p}^{(\sigma)})$  no se transforma como una 1-forma, sino como un escalar (es esencialmente un término en el desarrollo de Taylor de un escalar), por lo tanto no puede representar al potencial vector.
- ii) Lo mismo aplica para  $h_{\mu\nu}(\mathbf{m})$  y  $t_{\mu\nu}(\mathbf{m})$ . El primero no se transforma como una métrica bajo difeomorfismos y respecto al segundo, ni siquiera tenemos intuición sobre qué papel debería representar.

En definitiva no sabemos como interpretar nuestros objetos. Ante esta situación, lo mejor es asumir plenamente el papel que las translaciones locales y el  $U(1)$  local desempeñaban en la motivación del Capítulo 4, esto es, como grupos de gauge locales. La razón para no haber optado directamente por esta opción natural es que involucra la incorporación de grados de libertad externos al grupo. Ésta es una posibilidad que tratábamos de soslayar buscando los grados de libertad relevantes dentro de los límites definidos por la simetría. En el siguiente Apartado tratamos de encuadrar estos grupos locales en el contexto del tratamiento en CSG de las teorías con grupos de gauge locales.

### 6.3.2 Teorías gauge locales en CSG

Como hemos visto en el Apartado 5.2.1, en la formulación estándar de las teorías de campos con un grupo de gauge local  $U(M)$ , los grados de libertad del sistema se construyen a partir de las componentes  $A_\mu^a$  de una 1-forma de conexión en un fibrado principal con grupo estructural  $U$ . Dicha formulación tiene la ventaja de proporcionar un marco conceptualmente simple, con la claridad asociada a un tratamiento geométrico bien desarrollado. Tal descripción del sistema es redundante pues no todas las componentes  $A_\mu^a$  tienen auténtico contenido físico, hecho que la caracteriza como una formulación gauge de la teoría. Localmente, dos componentes  $A_\mu^a$  y  $A_\mu^a$  son consideradas físicamente equivalentes si pertenecen a la misma órbita del grupo  $U(x)$ . Esto es

$$A_\mu^a \sim A_\mu^a \Leftrightarrow A_\mu^a = uA_\mu^a u^{-1} + u\partial_\mu u^{-1} . \quad (6.40)$$

Sin entrar en los problemas sutiles asociados al caso en que la topología del fibrado sea no trivial, el cociente bajo esta relación de equivalencia define el espacio de soluciones del sistema parametrizado por los grados de libertad físicos. En definitiva, en la descripción general previa al cociente, manejamos dos tipos de *campos* locales: los campos de gauge  $A_\mu^a$  en función de los cuales se escribe la dinámica (el lagrangiano, ecuaciones de movimiento, etcétera) y los elementos  $u(x)$  del grupo de gauge local, que eliminan los grados de libertad espúreos.

El abandono de la descripción estándar con el objetivo de abordar el problema de la descripción del sistema desde una perspectiva de CSG, exige la revisión del concepto de *gauge* en la formulación del modelo. En efecto, tal enfoque involucra la construcción de una



estructura de grupo única que incorpore los dos tipos de campos,  $A_\mu^a(x)$  y  $u(x)$ , junto con la extensión central necesaria para la introducción de la dinámica. En el espíritu de la CSG, es dicha estructura grupo-teórica, y en particular sus extensiones, la que debe esclarecer el contenido dinámico de los grados de libertad involucrados, determinando qué generadores son variables físicas, cuáles son gauge y por último cuáles generan evolución en los grados de libertad del sistema.

### 6.3.2.a Grupo de una teoría tipo Yang-Mills

No existe una manera obvia de construir un grupo de Lie, necesariamente infinito-dimensional, que cumpla los requisitos necesarios para la apropiada descripción de una teoría tipo Yang-Mills. La razón para ello estriba en que la ley de transformación 6.40 no es compatible con una ley de grupo. Para ver esto más claramente recurrimos al caso abeliano donde

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) + \varphi(x) \quad , \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \varphi'(x) \quad . \quad (6.41)$$

La condición  $g * e = e * g = g$  en la ley de grupo  $g'' = g' * g$ , donde  $e$  es el elemento neutro, implica que la ley de composición toma la forma  $g''^i = g'^i + g^i + O(2)$  cerca de la identidad. Esto quiere decir que los únicos términos lineales en la ley de grupo para la componente  $g''^i$  son  $g'^i$  y  $g^i$ . Por tanto, la presencia del término lineal  $\partial_\mu \varphi'(x)$  en la ley de transformación de  $A_\mu(x)$  impide usarla de forma directa para construir la correspondiente ley de grupo.

En un primer intento [AN92], restringido al caso electromagnético, se construyó un grupo de cuantización trabajando con los campos  $\vec{E}(x)$  y  $\vec{B}(x)$  en lugar del potencial vector  $A_\mu(x)$ . Un tratamiento análogo en términos de este último campo requiere la introducción de un nuevo parámetro en la ley de grupo, con una naturaleza que puede ser entendida como correspondiente a un parámetro BRST de carácter bosónico [ALN89b].

Sin embargo, el tratamiento más sistemático del problema se desarrolla en las referencias [ACN97, CA99]. La primera se concentra en el caso abeliano, reproduciéndose la dinámica cuántica del campo electromagnético y de Proca de una manera unificada, mientras que la segunda referencia aborda el caso no abeliano. La estrategia seguida en la construcción del grupo de cuantización utiliza el parámetro central presente en la teoría, con objeto de modificar la acción del grupo de gauge sobre los *campos de gauge*  $A_\mu^a$ . Específicamente, eliminamos la componente no tensorial de la acción de  $u(x)$  sobre  $A_\mu^a$  a cambio de introducir un cociclo en la ley de grupo del parámetro central en el grupo extendido<sup>4</sup>. La acción del grupo de gauge resulta

$$\begin{aligned} u(x) &\rightarrow u'(x)u(x) \quad , \quad A_\mu(x) \rightarrow u'(x)A_\mu(x)u^{-1}(x) \\ \zeta &\rightarrow \zeta e^{i \int_\Sigma d\sigma_\mu(x) \text{tr} \left[ u'^{-1}(x) \partial_\nu u'(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^\mu A^\nu(x) \right]} \quad , \end{aligned} \quad (6.42)$$

donde el argumento de la exponencial tiene la estructura  $\xi(g', g) = \int_\Sigma d\sigma_\mu(x) J^\mu(g'|g)(x)$ , siendo  $J^\mu(g'|g)(x)$  una corriente simpléctica con la propiedad de ser *conservada*  $\partial_\mu J^\mu(g'|g)(x) = 0$ . Tal  $\xi(g', g)$  constituye un auténtico 2-cociclo del grupo  $G = U(x) \otimes_s G_A$ , donde  $G_A$  es el grupo abeliano constituido por el espacio (vectorial) de potenciales  $A_\mu^a$ . Debemos notar

<sup>4</sup>Esto es análogo a la aparición del cociclo en la ley de Galileo extendido como consecuencia del análisis de la transformación adecuada inducida en la función de onda. En el presente caso, la eliminación de la acción no tensorial sobre  $A_\mu^a$  involucra la modificación de la fase  $\zeta = e^{i\varphi}$  asociada al funcional  $\Psi(A_\mu^a)$ .



que con la nueva acción de  $U(x)$  tales potenciales no pueden ser interpretados literalmente como conexiones <sup>5</sup>.

Una vez que disponemos de la acción (6.42), podemos construir inmediatamente la ley de grupo. De forma simbólica, sin entrar en los detalles que varían de un caso a otro y que se pueden ver en [ACN97, CA99], denotamos por  $A$  a los potenciales vectores e introducimos un conjunto de parámetros  $E \sim \dot{A}$  asociados a sus correspondientes coordenadas canónicas (esto es estrictamente correcto si escogemos un parámetro temporal y calculamos los conmutadores a tiempos iguales). A partir de (6.42), la ley de grupo, denominado *grupo de cuantización de Yang-Mills* ( $\tilde{G}_{YM}$ ) en [CA99], adquiere la forma simbólica

$$\begin{aligned} u''(x) &= u'(x)u(x) \\ A''(x) &= A'(x) + u'(x)A(x)u^{-1}(x) \\ E''(x) &= E'(x) + u'(x)E(x)u^{-1}(x) \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta e^{i\xi(g',g)} \end{aligned} \quad (6.43)$$

con  $\xi(g', g) = \xi_1(g', g) + \xi_2(g', g) + \xi_3(g', g)$ , donde  $\xi_1(g', g)$  es un cociclo que confiere carácter de par conjugado a  $A(x)$  y  $E(x) \sim \dot{A}(x)$ ,  $\xi_2(g', g)$  es esencialmente el cociclo en (6.42) que acopla  $A(x)$  (o  $E(x)$ ) con  $u(x)$  y finalmente  $\xi_3(g', g)$  es un cociclo (que puede ser coborde, pero que genera dinámica no trivial) que sólo involucra a  $u(x)$ .

Podemos ver la estructura general del grupo  $\tilde{G}_{YM}$  como la extensión no central del grupo  $G_A$  por el grupo  $\tilde{U}$ , que es a su vez una extensión central del grupo de gauge local. Por tanto  $\tilde{G}_{YM}$  tiene estructura de fibrado principal con grupo estructural  $\tilde{U}$  y base  $G_A$ . La teoría cuántica se desarrolla como en el caso sin ligaduras, con la única diferencia de que la condición de equivariancia sobre las funciones de onda, la condición de  $U(1)$ -función, se convierte en un condición de  $\tilde{U}$ -función, de acuerdo con el cambio de grupo estructural (ver Subapartado 3.2.2.d).

### 6.3.2.b Papel de los distintos cociclos

Con objeto de ilustrar el papel de cada uno de los cociclos en la ley de grupo, escribimos explícitamente el caso correspondiente al  $U(1)$  local. Trabajamos en el espacio de momentos, por lo que  $A_\mu(x)$  ( $\dot{A}_\mu(x)$ ) viene parametrizado por sus coeficientes de Fourier  $a_\mu(k)$  y  $a_\mu^\dagger(k)$  y los elementos de  $U(1)(x)$  por  $\phi(k)$  y  $\phi^\dagger(k)$ . Por simplicidad, trivializamos la acción del grupo de Lorentz, de forma que el resto de los generadores vienen dados por las translaciones y la extensión central. Así tenemos

$$\begin{aligned} a_\mu''(k) &= a_\mu'(k)e^{-ikx} + a_\mu(k) \\ a_\mu^{\dagger''}(k) &= a_\mu^{\dagger'}(k)e^{ikx} + a_\mu^\dagger(k) \\ \phi''(k) &= \phi'(k)e^{-ikx} + \phi_\mu(k) \\ \phi^{\dagger''}(k) &= \phi^{\dagger'}(k)e^{ikx} + \phi_\mu^\dagger(k) \\ x'' &= x' + x \end{aligned} \quad (6.44)$$

<sup>5</sup>Una forma de motivar a nivel semiclásico tal modificación en la ley grupo, consiste en tratar de compensar las variaciones en la forma de Poincaré-Cartan extendida ( $\Theta_{PC} + d\varphi$ ) debidas a la acción de la simetría local, mediante un cociclo apropiado que modifique el término central ( $d\varphi$ ), en lugar de usar transformaciones no tensoriales de un campo  $A_\mu$ . Éste último campo se introduce, como en el caso de acoplamiento mínimo estándar, pero sin comportamiento de conexión.



$$\begin{aligned}
\zeta'' &= \zeta' \zeta \exp \left[ \frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{2k^0} i \{ \xi_1(g', g) + \xi_2(g', g) + \xi_3(g', g) \} \right] \\
\xi_1(g', g) &= \eta^{\mu\nu} [a_\mu(k) a_\mu^\dagger(k) e^{ikx} - a_\mu^\dagger(k) a_\mu(k) e^{-ikx}] \\
\xi_2(g', g) &= i \left[ \phi^{\dagger'}(k) k^\mu a_\mu(k) e^{ikx} + \phi'(k) k^\mu a_\mu^\dagger(k) e^{-ikx} \right. \\
&\quad \left. - k^\mu a_\mu^{\dagger'}(k) \phi(k) e^{ikx} - k^\mu a_\mu'(k) \phi^\dagger(k) e^{-ikx} \right] \\
\xi_3(g', g) &= k^2 [\phi^{\dagger'}(k) \phi(k) e^{ikx} - \phi'(k) \phi^\dagger(k) e^{-ikx}] .
\end{aligned}$$

Los distintos cociclos  $\xi_i(g', g)$  contienen la información relevante acerca del contenido dinámico de la teoría y en particular de la caracterización de la noción de transformación de gauge en el formalismo.

*Primer cociclo:  $\xi_1(g', g)$*

El papel de  $\xi_1(g', g)$  es el de conferir contenido dinámico al potencial vector, de manera que  $(A, E)$  constituya un par canónicamente conjugado (en este caso,  $(a_\mu(k), a_\mu^\dagger(k))$ ). En nuestro ejemplo esto se aprecia directamente a nivel infinitesimal en los conmutadores

$$[\tilde{X}_{a_\mu^\dagger(k)}^L, \tilde{X}_{a_\mu(k')}^L] = i\eta^{\mu\nu} \Delta_{kk'} \Xi, \quad (6.45)$$

donde  $\Delta_{kk'} = 2k^0 \delta^3(k - k')$  es la función delta generalizada sobre la hoja positiva del hiperboloide de masas.

*Segundo cociclo:  $\xi_2(g', g)$*

Por su parte,  $\xi_2(g', g)$  es el cociclo *mezcla* resultante de la eliminación de la parte no tensorial del potencial  $A_\mu$ . Infinitesimalmente,

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}_{a_\mu(k)}^L, \tilde{X}_{\phi^\dagger(k')}^L] &= k^\mu \Delta_{kk'} \Xi \\
[\tilde{X}_{a_\mu^\dagger(k)}^L, \tilde{X}_{\phi(k')}^L] &= k^\mu \Delta_{kk'} \Xi .
\end{aligned} \quad (6.46)$$

La presencia de este cociclo implica que, en cualquier caso, las variables correspondientes al grupo local no están absolutamente desprovistas de contenido dinámico. Esto podemos verlo considerando los campos en módulo característico

$$\mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_{x^\mu}^L, \tilde{X}_{c(k)}^L, \tilde{X}_{c^\dagger(k)}^L \rangle, \quad (6.47)$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{c(k)}^L &= \tilde{X}_{\phi(k)}^L + ik_\mu \tilde{X}_{a_\mu(k)}^L \\
\tilde{X}_{c^\dagger(k)}^L &= \tilde{X}_{\phi^\dagger(k)}^L + ik_\mu \tilde{X}_{a_\mu^\dagger(k)}^L .
\end{aligned} \quad (6.48)$$

Éstas son las combinaciones que carecen de contenido dinámico, por lo que  $\tilde{X}_{\phi(k)}^L$  y  $\tilde{X}_{\phi^\dagger(k)}^L$  sí lo poseen en cierta medida. Esto se observa más claramente, de forma semiclásica, construyendo los invariantes Noether, que son las funciones que parametrizan realmente la variedad



de soluciones. Encontramos que los invariantes Noether asociados a las componentes del potencial vector vienen dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{a_\mu(k)} &= i \tilde{X}_{a_\mu(k)}^R \Theta = e^{-ikx} \left[ k^\mu \phi^\dagger(k) - ia^{\mu\dagger} \right] \\ \mathcal{N}_{a_\mu^\dagger(k)} &= i \tilde{X}_{a_\mu^\dagger(k)}^R \Theta = e^{ikx} \left[ k^\mu \phi(k) + ia^\mu \right] ,\end{aligned}\quad (6.49)$$

donde vemos que los parámetros  $\phi(k)$  entran explícitamente en la constitución del espacio de las fases, esto es, la variable física es una mezcla.

Los parámetros  $c(k)$  y  $c^\dagger(x)$  asociados a los respectivos campos del módulo característico, no sólo no entran en la constitución del espacio de las fases, sino que satisfacen una condición más fuerte: sus invariantes Noether son exactamente cero:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{c_\mu(k)} &= 0 \\ \mathcal{N}_{c_\mu^\dagger(k)} &= 0 .\end{aligned}\quad (6.50)$$

Esto quiere decir que los  $\tilde{X}_{c(k)}^R$  y  $\tilde{X}_{c^\dagger(k)}^R$  generan las auténticas transformaciones gauge (ver Subapartado 3.2.2.d). Una forma alternativa de verlo, quizá más intuitiva, es considerar las ecuaciones del movimiento generadas por estos campos,  $\tilde{X}_{c(k)}^L$  y  $\tilde{X}_{c^\dagger(k)}^L$  antes de caer a la variedad de soluciones. La evolución generada en los parámetros del grupo es esencialmente

$$\begin{aligned}a_\mu(k) &\sim a_\mu(k) + ik_\mu c(k) & \phi(k) &\sim \phi(k) + c(k) \\ a_\mu^\dagger(k) &\sim a_\mu^\dagger(k) - ik_\mu c^\dagger(k) & \phi^\dagger(k) &\sim \phi^\dagger(k) + c^\dagger(k) ,\end{aligned}\quad (6.51)$$

que definen exactamente, en versión de momentos, las relaciones de equivalencia asociadas a una transformación gauge.

*Tercer cociclo:*  $\xi_3(g', g)$

La aparición de este cociclo debe entenderse en el contexto del tratamiento de las anomalías en la CSG (Subapartado 3.2.2.3) que sugiere realizar una extensión maximal del grupo de partida. Esto se traduce en la posibilidad de introducir un extensión central en el propio grupo de gauge, el cociclo  $\xi_3(g', g)$ . En el caso concreto de nuestro ejemplo, infinitesimalmente se tiene

$$\left[ \tilde{X}_{\phi^\dagger(k)}^L, \tilde{X}_{\phi(k')}^L \right] = ik^2 \Delta_{kk'} \Xi . \quad (6.52)$$

Cuando el fotón está fuera de la capa másica ( $k^2 \neq 0$ ) los modos  $\phi(k)$  presentan explícitamente contenido dinámico, introduciendo nuevos grados de libertad en la teoría de un modo anómalo <sup>6</sup>.

En definitiva, este tratamiento de teorías gauge locales en CSG proporciona una manera de estudiar en un mismo modelo distintos sistemas parametrizados por los valores de las constantes de extensión central.

Para concluir, únicamente señalamos que el objeto de este apartado es el de justificar la importancia del estudio de la dinámica intrínseca del grupo de gauge de una teoría tipo

<sup>6</sup>La discusión correcta del contenido dinámico de los distintos modos, involucra el análisis de las ligaduras. Realmente la consecuencia de  $k^2 = 0$  ó  $k^2 \neq 0$  es la posibilidad de imponer todas las ligaduras ( $k^2 = 0$ ) o sólo la mitad ( $k^2 \neq 0$ ). En el primer caso tenemos el campo electromagnético y en el segundo el de Proca.



Yang-Mills. El propio carácter gauge o no de los parámetros, depende críticamente de las extensiones (centrales) realizadas. En particular, el estudio de la dinámica de estas subálgebras es crucial para la comprensión del mecanismo de imposición de las ligaduras y eventualmente la generación de nueva dinámica modelada en aproximaciones alternativas por medio de una ruptura dinámica de la simetría. Por supuesto, esta dinámica debe acoplarse a la del resto de los modos (los campos de gauge) para realizar una descripción del auténtico sistema físico.

En esta línea habrá que interpretar la simetría (6.27), empleada en el Apartado 6.3.1 y ligada a translaciones y  $U(1)$  locales, como parte de una simetría mayor donde la mezcla de interacciones puede estar ligada de manera fundamental a la aparición de anomalías. Olvidándonos de momento de esta posibilidad, en la siguiente Sección procedemos a un análisis sistemático de los aspectos técnicos asociados al álgebra (6.27).

## 6.4 Modelo dinámico asociado a difeomorfismos

Al tomar el álgebra (6.27) como punto de partida para la construcción de un modelo con los difeomorfismos locales como simetría básica subyacente, lo primero que notamos es la ausencia de extensiones centrales no triviales. Por tanto, el primer paso para derivar una dinámica a partir de ella es realizar una pseudo-extensión. Como vimos en el Apartado 3.1.3, en el álgebra de Lie esto equivale a una redefinición de ciertos generadores por un término central  $\Xi$ . Motivados por los casos de dimensiones bajas redefinimos

$$\begin{aligned} A(\mathbf{m}) &\mapsto A(\mathbf{m}) + \alpha\delta(\mathbf{m})\Xi \\ S^\rho(\mathbf{m}) &\mapsto S^\rho(\mathbf{m}) + C^\rho\delta(\mathbf{m})\Xi \\ L_\mu(\mathbf{m}) &\mapsto L_\mu(\mathbf{m}) + \tilde{C}_\mu\delta(\mathbf{m})\Xi \end{aligned} \quad (6.53)$$

El siguiente paso es exponenciar el álgebra a nivel de grupo. Esto conlleva las dificultades asociadas al manejo de un álgebra de dimensión infinita. Nuevamente recurrimos a la técnica perturbativa expuesta en el Apartado 3.3.1 para la construcción de una ley de grupo formal.

Usando un índice  $\mu(\mathbf{m})$  para  $L_\mu(\mathbf{m})$ ,  $\tilde{\mu}(\mathbf{m})$  para  $S^\mu(\mathbf{m})$ ,  $\mathbf{m}$  para  $A(\mathbf{m})$  y  $\varphi$  para  $\Xi$ , las constantes de estructura se escriben (hemos efectuado un cambio de signo global, por tanto inocuo, consecuencia de la técnica de exponenciación que estamos empleando)

$$\begin{aligned} C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} &= -(n_\mu\delta_\nu^\rho - m_\nu\delta_\mu^\rho)\delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{r}) \\ C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} &= m_\mu n_\nu (m_\rho - n_\rho)\delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{r}) \\ C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^\varphi &= -[-m_\mu n_\nu (m_\rho - n_\rho)C^\rho + (n_\mu\delta_\nu^\rho - m_\nu\delta_\mu^\rho)\tilde{C}_\rho]\delta(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} &= -(n_\mu\delta_\rho^\nu - m_\nu\delta_\rho^\mu)\delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{r}) \\ C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^\varphi &= -(n_\mu\delta_\rho^\nu - m_\nu\delta_\rho^\mu)C^\rho\delta(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ C_{\mathbf{mn}}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} &= -(n_\rho - m_\rho)\delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{r}) \\ C_{\mathbf{mn}}^\varphi &= -(n_\rho - m_\rho)c_2C^\rho\delta(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{n}}^{\mathbf{r}} &= -n_\mu\delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{r}) \\ C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{n}}^\varphi &= -\alpha n_\mu\delta(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.54)$$

y las usamos para construir un ley de grupo formal,  $g'' = g' * g$ , hasta tercer orden en las variables del grupo. Como notación adicional, asociamos la variable  $l^\mu(\mathbf{m})$  con el generador



$L_\mu(\mathbf{m})$ ,  $s^\mu(\mathbf{m})$  con  $S_\mu(\mathbf{m})$ ,  $a(\mathbf{m})$  con  $A(\mathbf{m})$  y  $\varphi$  con  $\Xi$ , obteniendo:

$$\begin{aligned}
l''^\rho(\mathbf{r}) &= l'^\rho(\mathbf{r}) + l^\rho(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})}l'^\mu(\mathbf{m})l^\nu(\mathbf{n}) \\
&+ \frac{1}{8}C_{\nu(\mathbf{n})\mu(\mathbf{m})}^{\rho(\mathbf{r})}C_{\gamma(\mathbf{q})\sigma(\mathbf{s})}^{\mu(\mathbf{m})})l'^\nu(\mathbf{n})l'^\gamma(\mathbf{q})l^\sigma(\mathbf{s}) + \dots \\
s''^\rho(\mathbf{r}) &= s'^\rho(\mathbf{r}) + s^\rho(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}l'^\mu(\mathbf{m})l^\nu(\mathbf{n}) \\
&+ C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}l'^\mu(\mathbf{m})s^\nu(\mathbf{n}) + \frac{1}{2}C_{\mathbf{m}\mathbf{n}}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}a'(\mathbf{m})a(\mathbf{n}) \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}C_{\nu(\mathbf{n})\mu(\mathbf{m})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}C_{\gamma(\mathbf{q})\sigma(\mathbf{s})}^{\mu(\mathbf{m})} + \frac{1}{2}C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}C_{\gamma(\mathbf{q})\sigma(\mathbf{s})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})}\right]l'^\nu(\mathbf{n})l'^\gamma(\mathbf{q})l^\sigma(\mathbf{s}) \\
&+ C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}C_{\gamma(\mathbf{q})\sigma(\mathbf{s})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})}l'^\nu(\mathbf{n})l'^\gamma(\mathbf{q})s^\sigma(\mathbf{s}) + \frac{1}{2}C_{\mathbf{n}\mathbf{m}}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}C_{\gamma(\mathbf{q})\mathbf{s}}^{\mathbf{m}}l'^\gamma(\mathbf{q})a'(\mathbf{n})a(\mathbf{s})] + \dots \quad (6.55) \\
a''(\mathbf{p}) &= a'(\mathbf{p}) + a(\mathbf{p}) + C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{n}}^{\mathbf{r}}l'^\mu(\mathbf{m})a(\mathbf{n}) + \frac{1}{2}C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{m}}^{\mathbf{r}}C_{\gamma(\mathbf{q})\mathbf{s}}^{\mathbf{m}}l'^\nu(\mathbf{n})l'^\gamma(\mathbf{q})a(\mathbf{s}) + \dots \\
\varphi'' &= \varphi' + \varphi + \frac{1}{2}C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\varphi}l'^\mu(\mathbf{m})l^\nu(\mathbf{n}) + C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\nu}(\mathbf{m})}^{\varphi}l'^\mu(\mathbf{m})s^\nu(\mathbf{n}) + C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{n}}^{\varphi}l'^\mu(\mathbf{m})a(\mathbf{n}) \\
&+ \frac{1}{2}C_{\mathbf{m}\mathbf{n}}^{\varphi}a'(\mathbf{m})a(\mathbf{n}) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}C_{\rho(\mathbf{r})\mu(\mathbf{m})}^{\varphi}C_{\nu(\mathbf{n})\sigma(\mathbf{s})}^{\mu(\mathbf{m})} + \frac{1}{2}C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^{\varphi}C_{\nu(\mathbf{n})\sigma(\mathbf{s})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})}\right]l'^\rho(\mathbf{r})l'^\nu(\mathbf{n})l^\sigma(\mathbf{s}) \\
&+ C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^{\varphi}C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\sigma}(\mathbf{s})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})}l'^\rho(\mathbf{r})l'^\nu(\mathbf{n})s^\sigma(\mathbf{s}) + C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{m}}^{\varphi}C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{s}}^{\mathbf{m}}l'^\rho(\mathbf{r})l'^\nu(\mathbf{n})a(\mathbf{s}) \\
&+ \frac{1}{2}C_{\mathbf{r}\mathbf{m}}^{\varphi}C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{s}}^{\mathbf{m}}l'^\nu(\mathbf{n})a'(\mathbf{r})a(\mathbf{s}) + \dots
\end{aligned}$$

Con esta ley de grupo, calculamos los campos de vectores invariantes por la izquierda, resultando

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})}^L &= \frac{\partial}{\partial l^\tau(\mathbf{t})} + \left\{ \frac{1}{2}C_{\mu(\mathbf{m})\tau(\mathbf{t})}^{\rho(\mathbf{r})}l^\mu(\mathbf{m}) + \frac{1}{8}C_{\nu(\mathbf{n})\mu(\mathbf{m})}^{\rho(\mathbf{r})}C_{\gamma(\mathbf{q})\tau(\mathbf{t})}^{\mu(\mathbf{m})}l'^\nu(\mathbf{n})l^\gamma(\mathbf{q}) + \dots \right\} \frac{\partial}{\partial l^\rho(\mathbf{r})} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2}C_{\mu(\mathbf{m})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}l^\mu(\mathbf{m}) + \left( \frac{1}{8}C_{\nu(\mathbf{n})\mu(\mathbf{m})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}C_{\gamma(\mathbf{q})\tau(\mathbf{t})}^{\mu(\mathbf{m})} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{4}C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}C_{\gamma(\mathbf{q})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} \right) l'^\nu(\mathbf{n})l^\gamma(\mathbf{q}) + \dots \right\} \frac{\partial}{\partial s^\rho(\mathbf{r})} + \left\{ \frac{1}{2}C_{\mu(\mathbf{m})\tau(\mathbf{t})}^{\varphi}l^\mu(\mathbf{m}) \right. \\
&+ \left. \left( \frac{1}{8}C_{\nu(\mathbf{n})\mu(\mathbf{m})}^{\varphi}C_{\gamma(\mathbf{q})\tau(\mathbf{t})}^{\mu(\mathbf{m})} + \frac{1}{4}C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^{\varphi}C_{\gamma(\mathbf{q})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} \right) l'^\nu(\mathbf{n})l^\gamma(\mathbf{q}) + \dots \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})}^L &= \frac{\partial}{\partial l^\tau(\mathbf{t})} + \left\{ C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}l^\mu(\mathbf{m}) + \frac{1}{2}C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}C_{\gamma(\mathbf{q})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})}l'^\nu(\mathbf{n})l^\gamma(\mathbf{q}) + \dots \right\} \frac{\partial}{\partial s^\rho(\mathbf{r})} \\
&+ \left\{ C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\varphi}l^\mu(\mathbf{m}) + \frac{1}{2}C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^{\varphi}C_{\gamma(\mathbf{q})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})}l'^\nu(\mathbf{n})l^\gamma(\mathbf{q}) + \dots \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (6.56) \\
\tilde{X}_{a(\mathbf{t})}^L &= \frac{\partial}{\partial a(\mathbf{t})} + \left\{ C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{t}}^{\mathbf{r}}l^\mu(\mathbf{m}) + \frac{1}{2}C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{m}}^{\mathbf{r}}C_{\gamma(\mathbf{q})\mathbf{t}}^{\mathbf{m}}l'^\nu(\mathbf{n})l^\gamma(\mathbf{q}) + \dots \right\} \frac{\partial}{\partial a(\mathbf{r})} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2}C_{\mathbf{m}\mathbf{t}}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}a(\mathbf{m}) + \frac{1}{4}C_{\mathbf{q}\mathbf{m}}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})}C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{t}}^{\mathbf{m}}l'^\nu(\mathbf{n})a(\mathbf{q}) + \dots \right\} \frac{\partial}{\partial s^\rho(\mathbf{p})} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2}C_{\mathbf{m}\mathbf{t}}^{\varphi}a(\mathbf{m}) + C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{t}}^{\varphi}l^\mu(\mathbf{m}) + \frac{1}{2}C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{m}}^{\varphi}C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{t}}^{\mathbf{m}}l'^\rho(\mathbf{r})l^\nu(\mathbf{n}) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4}C_{\mathbf{n}\mathbf{m}}^{\varphi}C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{t}}^{\mathbf{m}}l'^\rho(\mathbf{r})a(\mathbf{n}) + \dots \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\tilde{X}_\varphi^L &= \frac{\partial}{\partial \varphi},
\end{aligned}$$



así como los campos de vectores invariantes por la derecha

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})}^R &= \frac{\partial}{\partial l^\tau(\mathbf{t})} + \frac{1}{2} C_{\tau(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} l^\nu(\mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial l^\rho(\mathbf{r})} + \left( \frac{1}{2} C_{\tau(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} l^\nu(\mathbf{n}) + C_{\tau(\mathbf{t})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} s^\nu(\mathbf{n}) \right) \frac{\partial}{\partial s^\rho(\mathbf{r})} \\
&+ C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{n}}^{\mathbf{r}} a(\mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial a(\mathbf{r})} + \left( \frac{1}{2} C_{\tau(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^\varphi l^\nu(\mathbf{n}) + C_{\tau(\mathbf{t})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^\varphi s^\nu(\mathbf{n}) + C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{n}}^\varphi a(\mathbf{n}) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})}^R &= \frac{\partial}{\partial s^\tau(\mathbf{t})} \\
\tilde{X}_{a(\mathbf{t})}^R &= \frac{\partial}{\partial a(\mathbf{t})} + \frac{1}{2} C_{\mathbf{tn}}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} a(\mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial s^\rho(\mathbf{r})} + \frac{1}{2} C_{\mathbf{tn}}^\varphi a(\mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\tilde{X}_\varphi^R &= \frac{\partial}{\partial \varphi} .
\end{aligned} \tag{6.57}$$

De manera análoga, la 1-forma de cuantización,  $\Theta$ , adquiere la expresión

$$\begin{aligned}
\Theta &= \theta^{L(\varphi)} = d\varphi \\
&+ \left\{ -\frac{1}{2} C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^\varphi l^\mu(\mathbf{m}) + \left( \frac{1}{8} C_{\rho(\mathbf{r})\mu(\mathbf{m})}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})\nu(\mathbf{n})}^{\mu(\mathbf{m})} + \frac{1}{4} C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})\nu(\mathbf{n})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} \right) l^\rho(\mathbf{r}) l^\gamma(\mathbf{q}) \right\} dl^\nu(\mathbf{n}) \\
&+ \left\{ -C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^\varphi l^\mu(\mathbf{m}) + \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} l^\rho(\mathbf{r}) l^\gamma(\mathbf{q}) \right\} ds^\nu(\mathbf{n}) \\
&+ \left\{ -\frac{1}{2} C_{\mathbf{mn}}^\varphi a(\mathbf{m}) - C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{n}}^\varphi l^\mu(\mathbf{m}) + \frac{1}{4} (2C_{\mathbf{mn}}^\varphi C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{q}}^{\mathbf{m}} + C_{\mathbf{qm}}^\varphi C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}) l^\rho(\mathbf{p}) a(\mathbf{q}) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{m}}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})\mathbf{n}}^{\mathbf{m}} l^\rho(\mathbf{r}) l^\gamma(\mathbf{q}) \right\} da(\mathbf{n}) .
\end{aligned} \tag{6.58}$$

#### 6.4.1 Formalismo semiclásico

Excepto para combinaciones críticas de los parámetros de cohomología (relacionados con posibles anomalías) que no vamos a considerar aquí, el núcleo simultáneo de  $\Theta$  y  $d\Theta$ , esto es el módulo característico, viene dado por:

$$\mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_{l^\mu(\mathbf{0})}^L, \tilde{X}_{s^\mu(\mathbf{0})}^L, \tilde{X}_{a(\mathbf{0})}^L \rangle . \tag{6.59}$$

Como sabemos, estos campos de vectores son los generadores de las ecuaciones del movimiento generalizadas, de manera que el espacio de las fases clásico viene dado por  $Diff(M)/G_\Theta$ . Bajo la evolución dictada por estas ecuaciones, los invariantes Noether son funciones constantes, cuya expresión es

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{l^\tau(\mathbf{t})} &= i \tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})}^R \Theta \\
&= C_{\tau(\mathbf{t})\mu(\mathbf{m})}^\varphi l^\mu(\mathbf{m}) + C_{\tau(\mathbf{t})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi s^\mu(\mathbf{m}) + C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{m}}^\varphi a(\mathbf{m}) \\
&+ \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\mu(\mathbf{m})}^\varphi C_{\sigma(\mathbf{s})\tau(\mathbf{t})}^{\mu(\mathbf{m})} + C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} \right) l^\rho(\mathbf{r}) l^\gamma(\mathbf{q}) \\
&+ C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} l^\rho(\mathbf{r}) s^\gamma(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} C_{\mathbf{rm}}^\varphi C_{\mathbf{q}\tau(\mathbf{t})}^{\mathbf{m}} a(\mathbf{r}) a(\mathbf{q}) + C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{m}}^\varphi C_{\mathbf{q}\tau(\mathbf{t})}^{\mathbf{m}} l^\rho(\mathbf{r}) a(\mathbf{q}) + \dots \\
\mathcal{N}_{s^\tau(\mathbf{t})} &= i \tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})}^R \Theta \\
&= C_{\tilde{\tau}(\mathbf{t})\mu(\mathbf{m})}^\varphi l^\mu(\mathbf{m}) + \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} l^\rho(\mathbf{r}) l^\gamma(\mathbf{q}) + \dots
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{a(t)} &= i \tilde{X}_{a(t)}^R \Theta & (6.60) \\
&= C_{\mathbf{tm}}^\varphi a(\mathbf{m}) + C_{\mathbf{t}\mu(\mathbf{m})}^\varphi l^\mu(\mathbf{m}) \\
&+ \frac{1}{4} (2C_{\mathbf{mt}}^\varphi C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{q}}^{\mathbf{m}} + C_{\mathbf{qm}}^\varphi C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{t}}^{\mathbf{m}} + 2C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\mathbf{qt}}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})}) l^\rho(\mathbf{r}) a(\mathbf{q}) \\
&+ \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{m}}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})\mathbf{t}}^{\mathbf{m}} l^\rho(\mathbf{r}) l^\gamma(\mathbf{q}) + \dots
\end{aligned}$$

Finalmente, los invariantes Noether asociados con los campos de vectores que generan  $\mathcal{G}_\Theta$  pueden ser escritos en términos del resto de los invariantes Noether, denominados básicos y que parametrizan la variedad de soluciones. Hasta segundo orden, consecuencia de haber desarrollado la ley de grupo hasta tercer orden, encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{l^\tau(0)} &= \left\{ \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\mu(\mathbf{m})}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})\tau(0)}^{\mu(\mathbf{m})} + C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})\tau(0)}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} \right) (C_{\tilde{\nu}(\mathbf{n})\rho(\mathbf{r})}^\varphi)^{-1} (C_{\tilde{\nu}'(\mathbf{n}')\gamma(\mathbf{q})}^\varphi)^{-1} \right. \\
&- C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})\tau(0)}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} (C_{\tilde{\nu}(\mathbf{n})\rho(\mathbf{r})}^\varphi)^{-1} (C_{\alpha(\mathbf{a})\tilde{\gamma}(\mathbf{q})}^\varphi)^{-1} (C_{\alpha(\mathbf{a})\gamma(\mathbf{q})}^\varphi) (C_{\tilde{\nu}'(\mathbf{n}')\gamma'(\mathbf{q}')}^\varphi)^{-1} \\
&- C_{\tau'(t')\mathbf{q}'}^\varphi (C_{\mathbf{a}'\mathbf{q}'}^\varphi)^{-1} C_{\mathbf{a}'\rho'\mathbf{r}'}^\varphi (C_{\tilde{\nu}'(\mathbf{n}')\rho(\mathbf{r}')}^\varphi)^{-1} \\
&+ \frac{1}{2} C_{\mathbf{rm}}^\varphi C_{\mathbf{s}\tau(0)}^{\mathbf{m}} (C_{\mathbf{t}'\mathbf{r}}^\varphi)^{-1} C_{\mathbf{t}'\gamma'(\mathbf{q}')}^\varphi (C_{\tilde{\nu}(\mathbf{n})\gamma'(\mathbf{q}')}^\varphi)^{-1} (C_{\mathbf{t}''\mathbf{s}}^\varphi)^{-1} C_{\mathbf{t}''\gamma''(\mathbf{q}'')}^\varphi (C_{\tilde{\nu}''(\mathbf{n}'')\gamma''(\mathbf{q}'')}^\varphi)^{-1} \\
&- C_{\rho(\mathbf{r})\mu}^\varphi C_{\mathbf{s}\tau(0)}^\mu (C_{\tilde{\nu}(\mathbf{n})\rho(\mathbf{r})}^\varphi)^{-1} (C_{\mathbf{t}''\mathbf{s}}^\varphi)^{-1} C_{\mathbf{t}''\gamma''(\mathbf{q}'')}^\varphi (C_{\tilde{\nu}''(\mathbf{n}'')\gamma''(\mathbf{q}'')}^\varphi)^{-1} \left. \right\} \mathcal{N}_{s^\nu(\mathbf{n})} \mathcal{N}_{s^{\nu'}(\mathbf{n}')} \\
&+ C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})\tau(0)}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} (C_{\tilde{\nu}(\mathbf{n})\rho(\mathbf{r})}^\varphi)^{-1} (C_{\alpha(\mathbf{a})\tilde{\gamma}(\mathbf{q})}^\varphi)^{-1} \mathcal{N}_{s^\nu(\mathbf{n})} \mathcal{N}_{l^\alpha(\mathbf{a})} \\
&+ \left\{ -C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})\tau(0)}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} (C_{\tilde{\nu}(\mathbf{n})\rho(\mathbf{r})}^\varphi)^{-1} (C_{\alpha(\mathbf{a})\tilde{\gamma}(\mathbf{q})}^\varphi)^{-1} C_{\tau'(t')\mathbf{q}'}^\varphi (C_{\mathbf{n}'\mathbf{q}'}^\varphi)^{-1} \right. \\
&- \frac{1}{2} C_{\mathbf{rm}}^\varphi C_{\mathbf{s}\tau(0)}^{\mathbf{m}} (C_{\mathbf{n}'\mathbf{p}}^\varphi)^{-1} ((C_{\mathbf{t}''\mathbf{s}}^\varphi)^{-1} C_{\mathbf{t}''\gamma''(\mathbf{q}'')}^\varphi (C_{\tilde{\nu}''(\mathbf{n}'')\gamma''(\mathbf{q}'')}^\varphi)^{-1} \\
&+ (C_{\mathbf{n}'\mathbf{s}}^\varphi)^{-1} C_{\mathbf{t}'\gamma'(\mathbf{q}')}^\varphi (C_{\tilde{\nu}(\mathbf{n})\gamma'(\mathbf{q}')}^\varphi)^{-1} + C_{\rho(\mathbf{r})\mu}^\varphi C_{\mathbf{s}\tau(0)}^\mu (C_{\tilde{\nu}(\mathbf{n})\rho(\mathbf{r})}^\varphi)^{-1} (C_{\mathbf{bfn}'\mathbf{s}}^\varphi)^{-1} \left. \right\} \\
&\cdot \mathcal{N}_{s^\nu(\mathbf{n})} \mathcal{N}_{a(\mathbf{n}')} + \frac{1}{2} C_{\mathbf{rm}}^\varphi C_{\mathbf{q}\tau(0)}^{\mathbf{m}} (C_{\mathbf{t}'\mathbf{p}}^\varphi)^{-1} (C_{\mathbf{t}''\mathbf{s}}^\varphi)^{-1} \mathcal{N}_{a(t')} \mathcal{N}_{a(t'')} + \dots \\
\mathcal{N}_{s^\tau(0)} &= \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})\tilde{\tau}(0)}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} (C_{\tilde{\tau}'(t')\rho(\mathbf{r})}^\varphi)^{-1} (C_{\tilde{\tau}''(t'')\gamma(\mathbf{q})}^\varphi)^{-1} \mathcal{N}_{s^{\tau'}(t')} \mathcal{N}_{s^{\tau''}(t'')} + \dots \\
\mathcal{N}_{a(0)} &= \left\{ -\frac{1}{4} [2C_{\mathbf{m}0}^\varphi C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{q}}^{\mathbf{m}} + C_{\mathbf{qm}}^\varphi C_{\rho(\mathbf{r})0}^{\mathbf{m}} + 2C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\mathbf{q}0}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})}] \right. \\
&(C_{\tilde{\tau}'(t')\rho(\mathbf{r})}^\varphi)^{-1} (C_{\mathbf{t}''\mathbf{q}}^\varphi)^{-1} C_{\mathbf{t}''\gamma''(\mathbf{q}'')}^\varphi (C_{\tilde{\nu}''(\mathbf{n}'')\gamma''(\mathbf{q}'')}^\varphi)^{-1} \\
&+ \left. \left[ \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{m}}^\varphi C_{\gamma(\mathbf{q})0}^{\mathbf{m}} \right] (C_{\tilde{\tau}'(t')\rho(\mathbf{r})}^\varphi)^{-1} (C_{\tilde{\nu}''(\mathbf{n}'')\gamma(\mathbf{q})}^\varphi)^{-1} \right\} \mathcal{N}_{s^{\tau'}(t')} \mathcal{N}_{s^{\nu''}(\mathbf{n}'')} \\
&+ \left\{ \frac{1}{4} [2C_{\mathbf{m}0}^\varphi C_{\rho\mathbf{r}\mathbf{q}}^{\mathbf{m}} + C_{\mathbf{qm}}^\varphi C_{\rho(\mathbf{r})0}^{\mathbf{m}} + 2C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^\varphi C_{\mathbf{q}0}^{\tilde{\mu}(\mathbf{m})}] (C_{\tilde{\tau}'(t')\rho(\mathbf{r})}^\varphi)^{-1} (C_{\mathbf{t}''\mathbf{q}}^\varphi)^{-1} \right\} \\
&\cdot \mathcal{N}_{s^{\tau'}(t')} \mathcal{N}_{a(t'')} + \dots
\end{aligned} \tag{6.61}$$

#### 6.4.2 Análisis cuántico

La representación regular se construye originalmente sobre aquellas funciones complejas definidas sobre el grupo extendido que satisfacen una condición de  $U(1)$ -equivariancia

$$\tilde{X}_\varphi^R \Psi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi = i \Psi \quad , \tag{6.62}$$



y se realiza infinitesimalmente por los campos vectoriales derechos. Con objeto de reducir la representación, debemos imponer las condiciones de polarización determinadas por una subálgebra  $\mathcal{P}$  adecuada, definida en términos de campos de vectores invariantes por la izquierda. La elección de tal subálgebra de polarización implica la selección de una clase particular de representaciones.

La subálgebra de polarización está integrada por el módulo característico junto con un representante de cada pareja de operadores conjugados. En nuestro caso una condición necesaria para que dos generadores den un término central por conmutación, es que sus momentos asociados,  $\mathbf{m}_1$  y  $\mathbf{m}_2$ , satisfagan  $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = 0$ . Esto es, si consideramos el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^d$  con entradas enteras, los pares conjugados están asociados a aquellos pares de puntos simétricos respecto al origen. Si definimos la clase de equivalencia en  $\mathbb{R}^d$ , *ser simétrico respecto al origen*, una polarización vendrá dada por una elección de representantes de las clases de equivalencia, con la condición de que los operadores asociados cierren un álgebra (horizontal). Cada una de estas posibles polarizaciones da lugar, en principio, a una clase de representaciones no equivalentes.

Aquí vamos a elegir la polarización más sencilla que podemos concebir en este contexto, directamente motivada por la usada para Virasoro así como la polarización *estándar* en los grupos de Kac-Moody. Para ello, introducimos la siguiente notación: dado un vector  $\mathbf{m} \neq 0$ , llamaremos  $m_f$  a su primera componente  $m_i$  no nula. En el caso  $\mathbf{m} = 0$ , hacemos  $m_f = 0$ . De esta forma, introducimos la polarización

$$\mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_{l^\mu(\mathbf{t})}^L, \tilde{X}_{s^\mu(\mathbf{t})}^L, \tilde{X}_{a(\mathbf{t})}^L \rangle, \quad (6.63)$$

que define las ecuaciones de polarización

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{l^\mu(\mathbf{t})}^L \Psi &= 0 \\ \tilde{X}_{s^\mu(\mathbf{t})}^L \Psi &= 0 \\ \tilde{X}_{a(\mathbf{t})}^L \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (6.64)$$

Una solución general se puede escribir como una combinación lineal

$$\begin{aligned} \Psi &= A|0\rangle + \sum_{\mathbf{m}, (m_f > 0)} (A_{\mu(\mathbf{m})} |l^\mu(\mathbf{m})\rangle + A_{\tilde{\mu}(\mathbf{m})} |s^\mu(\mathbf{m})\rangle + A_{\mathbf{m}} |a(\mathbf{m})\rangle) \\ &+ \sum (A_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})} |l^\mu(\mathbf{m})l^\nu(\mathbf{n})\rangle + A_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\nu}(\mathbf{n})} |l^\mu(\mathbf{m})s^\nu(\mathbf{n})\rangle \\ &+ A_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{n}} |l^\mu(\mathbf{m})a(\mathbf{n})\rangle + A_{\tilde{\mu}(\mathbf{m})\tilde{\nu}(\mathbf{n})} |s^\mu(\mathbf{m})s^\nu(\mathbf{n})\rangle \\ &+ A_{\tilde{\mu}(\mathbf{m})\mathbf{n}} |s^\mu(\mathbf{m})a(\mathbf{n})\rangle + A_{\mathbf{m}\mathbf{n}} |a(\mathbf{m})a(\mathbf{n})\rangle) \end{aligned} \quad (6.65)$$

donde las funciones en la base,  $|\dots\rangle$ , ya están polarizadas y presentan de hecho una estructura de producto en términos de funciones,  $\{\dots\}$ , las cuales presentaremos explícitamente más abajo. Las funciones polarizadas comparten una función peso común  $W$  que depende de la representación particular

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \zeta W \\ |l^\mu(\mathbf{m})\rangle &= \zeta W \{l^\mu(\mathbf{m})\}, \quad |s^\mu(\mathbf{m})\rangle = \zeta W \{s^\mu(\mathbf{m})\}, \quad |a(\mathbf{m})\rangle = \zeta W \{a(\mathbf{m})\} \\ |l^{\mu_1}(\mathbf{m}_i) \dots s^{\mu_1}(\mathbf{m}_j) \dots a(\mathbf{m}_k) \dots\rangle &= \zeta W \{l^{\mu_1}(\mathbf{m}_i)\} \dots \{s^{\mu_1}(\mathbf{m}_j)\} \dots \{a(\mathbf{m}_k)\} \dots \end{aligned} \quad (6.66)$$



Las formas explícitas de estas funciones son

$$\begin{aligned}
W &= 1 - \sum_{\mathbf{n}(n_f > 0)} \left( \frac{1}{2} C_{\nu(\mathbf{n})\mu(\mathbf{m})}^{\varphi} l^{\mu}(\mathbf{m}) l^{\nu}(\mathbf{n}) + \frac{1}{2} C_{\mathbf{m}\mathbf{n}}^{\varphi} a(\mathbf{m}) a(\mathbf{n}) \right. \\
&\quad \left. + C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\mu}(\mathbf{m})}^{\varphi} l^{\mu}(\mathbf{n}) s^{\mu}(\mathbf{n}) + C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{m}}^{\varphi} l^{\mu}(\mathbf{n}) a(\mathbf{n}) + \dots \right) \\
\{l^{\gamma}(\mathbf{q})\} &= l^{\gamma}(\mathbf{q}) - \sum_{t_f \leq 0, m_f > 0, n_f > 0, m_f + n_f \geq q_f} \left[ \frac{1}{2} C_{\mu(\mathbf{m})\tau(\mathbf{t})}^{\gamma(\mathbf{q})} l^{\mu}(\mathbf{m}) l^{\tau}(\mathbf{t}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} \left( - \sum_{r_f \leq 0} C_{\mu(\mathbf{m})\tau(\mathbf{t})}^{\rho(\mathbf{r})} C_{\nu(\mathbf{n})\rho(\mathbf{r})}^{\gamma(\mathbf{q})} + \sum_{r_f > 0} (C_{\rho(\mathbf{r})\tau(\mathbf{t})}^{\gamma(\mathbf{q})} C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + C_{\mu(\mathbf{m})\rho(\mathbf{r})}^{\gamma(\mathbf{q})} C_{\nu(\mathbf{n})\tau(\mathbf{t})}^{\rho(\mathbf{r})} \right) l^{\tau}(\mathbf{t}) l^{\mu}(\mathbf{m}) l^{\nu}(\mathbf{n}) + \dots \right] \\
\{s^{\gamma}(\mathbf{q})\} &= s^{\gamma}(\mathbf{q}) - \sum_{t_f \leq 0, m_f > 0, n_f > 0, m_f + n_f \geq q_f} \left( \frac{1}{2} C_{\mu(\mathbf{m})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} l^{\mu}(\mathbf{m}) l^{\tau}(\mathbf{t}) + C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} l^{\mu}(\mathbf{m}) s^{\tau}(\mathbf{t}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} C_{\mathbf{m}\mathbf{t}}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} a(\mathbf{m}) a(\mathbf{t}) \right) + \left[ \sum_{r_f \leq 0} \left( \frac{1}{8} C_{\mu(\mathbf{m})\tau(\mathbf{t})}^{\rho(\mathbf{r})} C_{\nu(\mathbf{n})\rho(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} - \frac{1}{2} C_{\mu(\mathbf{m})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r_f > 0} \left( -\frac{1}{8} C_{\rho(\mathbf{r})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} + \frac{1}{4} C_{\mu(\mathbf{m})\rho(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} C_{\nu(\mathbf{n})\tau(\mathbf{t})}^{\rho(\mathbf{r})} \right) \right] l^{\tau}(\mathbf{t}) l^{\mu}(\mathbf{m}) l^{\nu}(\mathbf{n}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \sum_{r_f \leq 0} C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} + \sum_{r_f > 0} \left( \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\rho(\mathbf{r})} \right) \right] l^{\mu}(\mathbf{m}) l^{\nu}(\mathbf{n}) s^{\tau}(\mathbf{t}) + \\
&\quad - \frac{1}{4} \left[ \sum_{r_f \leq 0} (C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{t}}^{\mathbf{r}} C_{\mathbf{n}\mathbf{r}}^{\gamma(\mathbf{q})} + 2 C_{\mathbf{n}\mathbf{t}}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})}) - \sum_{r_f > 0} C_{\mathbf{n}\mathbf{r}}^{\gamma(\mathbf{q})} C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{t}}^{\mathbf{r}} \right] l^{\mu}(\mathbf{m}) a(\mathbf{t}) a(\mathbf{n}) + \dots \\
\{a(\mathbf{q})\} &= a(\mathbf{q}) - \sum_{t_f \leq 0, m_f > 0, n_f > 0, m_f + n_f \geq q_f} (C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{t}}^{\mathbf{q}} l^{\mu}(\mathbf{m}) a(\mathbf{t}) - \frac{1}{2} \left[ \sum_{r_f \leq 0} C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{t}}^{\mathbf{r}} C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{r}}^{\mathbf{q}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r_f > 0} \left( \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{t}}^{\mathbf{q}} C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} - C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{r}}^{\mathbf{q}} C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{t}}^{\mathbf{r}} \right) \right] l^{\mu}(\mathbf{m}) l^{\nu}(\mathbf{n}) a(\mathbf{t}) + \dots) .
\end{aligned}
\tag{6.67}$$

La acción del álgebra original se realiza mediante los campos de vectores invariantes por la derecha, de forma que aquellos campos de vectores con  $m_f < 0$  actúan como operadores creación y los  $m_f \geq 0$  como operadores destrucción. Finalmente, la acción explícita de los campos de vectores invariantes derechos sobre las funciones al orden más bajo del espacio de Hilbert reducido, es

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{a(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |0\rangle &= C_{\mathbf{t}\mathbf{n}}^{\varphi} |a(\mathbf{n})\rangle + C_{\mathbf{t}\nu(\mathbf{n})}^{\varphi} |l^{\nu}(\mathbf{n})\rangle - \frac{1}{2} \sum_{r_f \leq 0} C_{\mathbf{t}\mathbf{n}}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\varphi} |a(\mathbf{n}) l^{\mu}(\mathbf{m})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{a(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |l^{\gamma}(\mathbf{q})\rangle &= C_{\mathbf{t}\mathbf{n}}^{\varphi} |a(\mathbf{n}) l^{\gamma}(\mathbf{q})\rangle + C_{\mathbf{t}\nu(\mathbf{n})}^{\varphi} |l^{\nu}(\mathbf{n}) l^{\gamma}(\mathbf{q})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{a(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |s^{\gamma}(\mathbf{q})\rangle &= C_{\mathbf{t}\mathbf{n}}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} |a(\mathbf{n})\rangle + C_{\mathbf{t}\mathbf{n}}^{\varphi} |a(\mathbf{n}) s^{\gamma}(\mathbf{q})\rangle + C_{\mathbf{t}\nu(\mathbf{n})}^{\varphi} |l^{\nu}(\mathbf{n}) s^{\gamma}(\mathbf{q})\rangle
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left[ \sum_{r_f \leq 0} \left( \frac{1}{4} C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{t}}^{\mathbf{r}} C_{\mathbf{nr}}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} + C_{\mathbf{nt}}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} \right) \right. \\
& \left. - \sum_{r_f > 0} \frac{1}{4} C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{t}}^{\mathbf{r}} C_{\mathbf{nr}}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} \right] |l^\mu(\mathbf{m})a(\mathbf{n})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{a(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |a(\mathbf{q})\rangle & = C_{\mathbf{tn}}^\varphi |a(\mathbf{n})a(\mathbf{q})\rangle + C_{\mathbf{tv}(\mathbf{n})}^\varphi |l^\nu(\mathbf{n})a(\mathbf{q})\rangle + \frac{1}{2} C_{\mathbf{t}\mu(\mathbf{m})}^{\mathbf{q}} |l^\mu(\mathbf{m})\rangle \\
& - \frac{1}{2} \left[ \sum_{r_f \leq 0} C_{\mathbf{t}\mu(\mathbf{m})}^{\mathbf{r}} C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{r}}^{\mathbf{q}} + \sum_{r_f > 0} C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{r}}^{\mathbf{q}} C_{\nu(\mathbf{n})\mathbf{t}}^{\mathbf{r}} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\mathbf{t}}^{\mathbf{r}} C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} \right] |l^\mu(\mathbf{m})l^\nu(\mathbf{n})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |0\rangle & = C_{\tilde{\tau}(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^\varphi |l^\nu(\mathbf{n})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |l^\gamma(\mathbf{q})\rangle & = C_{\varphi\tilde{\tau}(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})} |l^\nu(\mathbf{n})l^\gamma(\mathbf{q})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |s^\gamma(\mathbf{q})\rangle & = C_{\tilde{\tau}(\mathbf{t})\mu(\mathbf{m})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} |l^\mu(\mathbf{m})\rangle + C_{\tilde{\tau}(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} |l^\nu(\mathbf{n})s^\gamma(\mathbf{q})\rangle \\
& + \frac{1}{2} \left[ \sum_{r_f \leq 0} C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} + \sum_{r_f > 0} \left( \frac{1}{2} C_{\rho(\mathbf{r})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} \right) \right. \\
& \left. - C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\tau}(\mathbf{t})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} \right] |l^\mu(\mathbf{m})l^\nu(\mathbf{n})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |a(\mathbf{q})\rangle & = C_{\tilde{\tau}(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^\varphi |l^\nu(\mathbf{n})a(\mathbf{q})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |0\rangle & = C_{\tau(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^\varphi |l^\nu(\mathbf{n})\rangle + C_{\tau(\mathbf{t})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^\varphi |s^\nu(\mathbf{n})\rangle + C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{n}}^\varphi |a(\mathbf{n})\rangle \\
& - \sum_{r_f \leq 0} \left( \frac{1}{4} C_{\tau(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} C_{\mu(\mathbf{m})\rho(\mathbf{r})}^\varphi + \frac{1}{2} C_{\tau(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^\varphi \right) |l^\nu(\mathbf{n})l^\mu(\mathbf{m})\rangle \\
& - \sum_{r_f \leq 0} C_{\tau(\mathbf{t})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^\varphi |s^\nu(\mathbf{n})l^\mu(\mathbf{m})\rangle - \frac{1}{2} \sum_{r_f \leq 0} C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{n}}^{\mathbf{r}} C_{\mathbf{mr}}^\varphi |a(\mathbf{n})a(\mathbf{m})\rangle \\
& - \sum_{r_f \leq 0} C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{n}}^{\mathbf{r}} C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{r}}^\varphi |a(\mathbf{n})l^\mu(\mathbf{m})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |l^\gamma(\mathbf{q})\rangle & = C_{\tau(\mathbf{t})\mu(\mathbf{m})}^{\gamma(\mathbf{q})} |l^\mu(\mathbf{m})\rangle + C_{\tau(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^\varphi |l^\nu(\mathbf{n})l^\mu(\mathbf{m})\rangle + C_{\tau(\mathbf{t})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^\varphi |s^\nu(\mathbf{n})l^\gamma(\mathbf{q})\rangle \\
& + C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{n}}^\varphi |a(\mathbf{n})l^\gamma(\mathbf{q})\rangle - \frac{1}{8} \left[ 3 \sum_{r_f \leq 0} C_{\tau(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} C_{\mu(\mathbf{m})\rho(\mathbf{r})}^{\gamma(\mathbf{q})} \right. \\
& \left. + \sum_{r_f > 0} \left( C_{\mu(\mathbf{m})\rho(\mathbf{r})}^{\gamma(\mathbf{q})} C_{\nu(\mathbf{n})\tau(\mathbf{t})}^{\rho(\mathbf{r})} - C_{\rho(\mathbf{r})\tau(\mathbf{t})}^{\gamma(\mathbf{q})} C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} \right) \right] |l^\mu(\mathbf{m})l^\nu(\mathbf{n})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |s^\gamma(\mathbf{q})\rangle & = C_{\tau(\mathbf{t})\mu(\mathbf{m})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} |l^\mu(\mathbf{m})\rangle + C_{\tau(\mathbf{t})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} |s^\nu(\mathbf{n})\rangle \\
& + C_{\tau(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^\varphi |l^\nu(\mathbf{n})s^\gamma(\mathbf{q})\rangle + C_{\tau(\mathbf{t})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^\varphi |s^\nu(\mathbf{n})s^\gamma(\mathbf{q})\rangle \\
& - \left[ \sum_{r_f \leq 0} \left( \frac{3}{8} C_{\tau(\mathbf{t})\mu(\mathbf{m})}^{\rho(\mathbf{r})} + \frac{3}{4} C_{\tau(\mathbf{t})\mu(\mathbf{m})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} C_{\nu(\mathbf{n})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} \right) + \sum_{r_f > 0} \left( \frac{1}{8} C_{\mu(\mathbf{m})\rho(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} C_{\nu(\mathbf{n})\tau(\mathbf{t})}^{\rho(\mathbf{r})} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} C_{\nu(\mathbf{n})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} - \frac{1}{8} C_{\rho(\mathbf{r})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} C_{\mu(\mathbf{m})\nu(\mathbf{n})}^{\rho(\mathbf{r})} \right] |l^\mu(\mathbf{m})l^\nu(\mathbf{n})\rangle
\end{aligned} \tag{6.68}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{r_f \leq 0} C_{\nu(\mathbf{n})\tau(\mathbf{t})}^{\tilde{\rho}(\mathbf{r})} C_{\mu(\mathbf{m})\tilde{\rho}(\mathbf{r})}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} |l^\mu(\mathbf{m})s^\nu(\mathbf{n})\rangle + C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{n}}^\varphi |a(\mathbf{n})s^\gamma(\mathbf{q})\rangle \\
& + \frac{1}{2} \sum_{r_f \leq 0} C_{\mathbf{n}\tau(\mathbf{t})}^{\mathbf{r}} C_{\mathbf{m}\mathbf{r}}^{\tilde{\gamma}(\mathbf{q})} |a(\mathbf{m})a(\mathbf{n})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})(t_f \leq 0)}^R |a(\mathbf{q})\rangle & = C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{n}}^{\mathbf{q}} |a(\mathbf{n})\rangle + C_{\tau(\mathbf{t})\nu(\mathbf{n})}^\varphi |l^\nu(\mathbf{n})a(\mathbf{q})\rangle + \frac{1}{2} C_{\tau(\mathbf{t})\tilde{\nu}(\mathbf{n})}^\varphi |s^\nu(\mathbf{n})a(\mathbf{q})\rangle \\
& + C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{n}}^\varphi |a(\mathbf{n})a(\mathbf{q})\rangle - \sum_{r_f \leq 0} C_{\tau(\mathbf{t})\mathbf{n}}^{\mathbf{r}} C_{\mu(\mathbf{m})\mathbf{r}}^{\mathbf{q}} |a(\mathbf{n})l^\mu(\mathbf{m})\rangle + \dots \\
\tilde{X}_{a(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |0\rangle & = 0 \\
\tilde{X}_{a(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |a(\mathbf{q})\rangle & = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{t})|0\rangle \\
\tilde{X}_{a(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |l^\gamma(\mathbf{q})\rangle & = 0 \\
\tilde{X}_{a(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |s^\gamma(\mathbf{q})\rangle & = 0 \\
\tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |0\rangle & = 0 \\
\tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |a(\mathbf{q})\rangle & = 0 \\
\tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |l^\gamma(\mathbf{q})\rangle & = 0 \\
\tilde{X}_{s^\tau(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |s^\gamma(\mathbf{q})\rangle & = \delta_\tau^\gamma \delta(\mathbf{q} - \mathbf{t})|0\rangle \\
\tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |0\rangle & = 0 \\
\tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |a(\mathbf{q})\rangle & = 0 \\
\tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |l^\gamma(\mathbf{q})\rangle & = \delta_\tau^\gamma \delta(\mathbf{q} - \mathbf{t})|0\rangle \\
\tilde{X}_{l^\tau(\mathbf{t})(t_f > 0)}^R |s^\gamma(\mathbf{q})\rangle & = 0 ,
\end{aligned}$$

donde  $|0\rangle$  se comporta con un estado de vacío que es único por construcción. La acción sobre funciones de onda de orden superior está limitada por el desarrollo perturbativo inicial en la ley de grupo. Aparte de esto, el cálculo es completamente directo, aunque tedioso.

Como en los casos del grupo de Virasoro y de Kac-Moody, introducimos un producto de Hilbert  $\langle \dots | \dots \rangle$  en el espacio de representación imponiendo  $\langle 0|0\rangle = 1$  y especificando el adjunto de cada operador. Para ello definimos

$$\hat{L}_\mu(\mathbf{m}) = \tilde{X}_{l^\mu(\mathbf{m})}^R, \hat{A}(\mathbf{m}) = \tilde{X}_{a(\mathbf{m})}^R, \hat{S}^\rho(\mathbf{m}) = \tilde{X}_{s^\rho(\mathbf{m})}^R,$$

e introducimos la siguiente adjudicación de adjuntos

$$\hat{L}_\mu^\dagger(\mathbf{m}) = \hat{L}_\mu(-\mathbf{m}), \hat{A}^\dagger(\mathbf{m}) = \hat{A}(-\mathbf{m}), (\hat{S}^\rho)^\dagger(\mathbf{m}) = \hat{S}^\rho(-\mathbf{m}).$$

## 6.5 Interpretaciones

### 6.5.1 Análisis general

La idea física que subyace al modelo matemático presentado en la Sección anterior, es la realización anómala a nivel cuántico de una simetría que se comporta como gauge a nivel



clásico. En este sentido, se está concediendo un importante peso conceptual a la formulación gauge en sí de la teoría clásica. En efecto, ésta en principio representa simplemente una descripción sintética del sistema físico, más cómoda que una descripción (clásicamente) equivalente en términos de objetos invariantes gauge donde la simetría gauge ya ha sido eliminada. Sin embargo, la simple posibilidad de que la ruptura de la invariancia gauge pueda tener repercusiones a nivel físico, constituye una diferencia fundamental respecto a la formulación reducida donde estos modos ni siquiera aparecen. En nuestro caso, la simetría de difeomorfismos del sistema original es sustituida por una deformación de la misma (como extensión), que no contiene a los difeomorfismos como subgrupo, sino más bien como cociente.

A la hora de plantear la cuestión de la interpretación física debemos abordar el siguiente problema que planteábamos en el Capítulo 1. En el tratamiento estándar de la formulación gauge de una teoría disponemos de un conjunto de grados de libertad sobre los que actúa dicha simetría gauge. Estos grados de libertad codifican (de forma redundante) la información física y proporcionan el vínculo con la interpretación del modelo. Sin embargo, en nuestro enfoque tratamos esencial y únicamente con los grados de libertad que son gauge en esa formulación estándar de la teoría, con lo que carecemos *a priori* del punto de contacto con la interpretación. Para conectar nuestro formalismo matemático con una noción de Gravedad parece necesario por tanto derivar o incluir (diferencia fundamental como veremos) objetos interpretables como campos métricos u otras nociones semejantes (como, por ejemplo, una formulación en términos de conexiones a la Ashtekar), que permitan la descripción del campo gravitatorio. Debemos señalar que no existe una forma obvia de introducir estos objetos en el esquema, lo cual constituye una importante dificultad para la interpretación física.

Para afrontar esta situación podemos asumir dos estrategias básicas, conceptualmente diferentes:

1. La primera, que era la presentada en las motivaciones del Capítulo 1, supone un replanteamiento de naturaleza radical del problema físico, apostando por el grupo de difeomorfismos como la estructura básica a partir de la cual *derivar* el resto. Aunque este enfoque parece conllevar una contradicción interna, ya que pretende reconstruir toda la dinámica a partir de los modos que a nivel clásico codifican precisamente lo que no es dinámico (son gauge), existen formas de dar sentido a tal concepción. En efecto,
  - a) Éste es el espíritu de las construcciones desarrolladas en el Capítulo 4 y en un sentido menos nítido en el Capítulo 5. En las primeras se parte del grupo de Virasoro, difeomorfismos deformados, para reconstruir una noción métrica así como su dinámica. Para ello resulta fundamental como guía la existencia de la acción de Polyakov, como puente entre la métrica y cierto subgrupo de los difeomorfismos. Desafortunadamente, este caso parece excesivamente especial, al estar ligado a dimensión dos y a un gauge específico de la métrica en unas coordenadas particulares (cono de luz). La ausencia de una construcción análoga en dimensiones realistas es un obstáculo fundamental para la generalización de esta línea. En cuanto a la construcción del Capítulo 5, si bien consigue derivar una noción métrica a partir de ciertos difeomorfismos, se trata de un caso en el que los campos de fondo carecen de dinámica intrínseca. La generalización a dimensiones superiores se encuentra con problemas como los ilustrados en la



Sección 6.3. que apuntan a la necesidad de *añadir* nueva estructura.

Incluso si conseguimos extraer los grados de libertad dinámicos, esto ha de ser consistente con la existencia de un grupo de difeomorfismos que sea gauge a nivel clásico, sin trivializar con ello los modos recién construidos. Esto no es nada obvio y constituye una dificultad crítica. Sin embargo, cabe pensar en mecanismos que solucionan esta *contradicción*, como la aparición de los difeomorfismos gauge a partir de la construcción de Sugawara en el caso bidimensional con materia.

- b) Una segunda posibilidad consiste en buscar los campos asociados a los grados de libertad gravitatorios clásicos entre los generadores que deforman el álgebra de difeomorfismos en dimensiones realistas, definiendo las extensiones no centrales. Ésta resulta una posibilidad atractiva, pues los grados de libertad físicos se derivan a partir de los difeomorfismos pero no se identifican con ellos, con lo que estos últimos podrían hacerse gauge en el límite clásico sin trivializar por ello el modelo. Sin embargo, entre las extensiones consideradas no se ha podido encontrar una con un nexo más o menos directo con las teorías clásicas, quizá por habernos limitado a considerar las extensiones tensoriales. El problema es que no basta con encontrar los grados de libertad adecuados, sino que además es necesario que la dinámica derivada de los cociclos aproxime la dinámica clásica.

Las posibilidades a) y b) que acabamos de plantear surgen de manera natural en el contexto del modelo de la Sección 6.4. Por completitud, ofrecemos un ejemplo de otra línea independiente de abordar la construcción de una teoría completa a partir de los difeomorfismos que, aunque por el momento debemos considerar como excesivamente especulativa, al mismo tiempo deja ver que el estudio no debe considerarse cerrado.

- c) De un modo heurístico, se puede sugerir cierta relación fundamental entre los modos de difeomorfismos y los modos métricos y por tanto gravitatorios. En el tratamiento general de la CSG, dadas dos variables conjugadas como por ejemplo  $x$  y  $p$ , el operador cuántico asociado a una de ellas, sea  $p$ , viene dado por un campo de vectores invariante derecho asociado a su pareja conjugada:  $\hat{p} = \tilde{X}_x^R = \frac{\partial}{\partial x}$ . Por otra parte, una manera de obtener en una teoría (métrica) clásica de campos el tensor energía-impulso (simétrico) consiste en usar la expresión  $\delta S = T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ , que sugiere un carácter dinámicamente conjugado entre la métrica y la corriente Noether simetrizada asociada a translaciones infinitesimales (difeomorfismos locales), si considerásemos a éstas últimas como variables básicas en una estructura simpléctica. En las teorías estándar no es relevante considerar este potencial espacio de las fases, ya que no existe un hamiltoniano que defina una dinámica en el mismo. Pero en un sentido vago, podemos decir que los difeomorfismos y las métricas son objetos conjugados. En este sentido, y atendiendo al carácter dual entre coordenadas y generadores que hemos señalado antes, podríamos decir que los generadores infinitesimales asociados al grupo de difeomorfismos (o más bien sus combinaciones simétricas) tienen un contenido métrico. Sin embargo, en ausencia de una auténtica construcción que modele esta idea, debemos relegarla como esencialmente especulativa, a la espera de una investigación más profunda que explore la idea.

2. La segunda estrategia para discutir la emergencia de grados de libertad gravitatorios en el modelo, considera el sistema descrito en la Sección anterior como parte de una



estructura más general. En este sentido, este trabajo debe ser entendido como un paso intermedio en un proyecto más amplio en el que los otros grados de libertad están aún por identificar o al menos por incorporar a una estructura grupo-teórica. Los resultados que aquí se discutan tendrán, por tanto, un interés básicamente estructural. Asimismo, pueden presentar un interés cualitativo al sugerir elementos que deben ser incorporados en la solución final.

De hecho, el presente modelo se interpreta con mayor facilidad como un tipo de teoría *topológica*, si bien con grados de libertad locales, donde la noción métrica debe aparecer como consecuencia de *añadir* cierta estructura. En esta visión del modelo como parte de una estructura mayor, caben aún dos clases de interpretaciones:

- i) *Como teoría fundamental.* El modelo es parte de una teoría que trata de describir los grados de libertad fundamentales del sistema físico.
- ii) *Como teoría fenomenológica,* donde se entiende que el modelo describe ciertos grados de libertad efectivos que modelan los grados de libertad fundamentales de una teoría subyacente.

## 6.5.2 Varios ejemplos

Presentamos tres escenarios diferentes enmarcados en un contexto gravitacional, donde la representación del grupo de difeomorfismos juega un papel clave. Todos estos ejemplos siguen el espíritu del enfoque 2 del Apartado anterior, ésto es, incorporan cierta estructura externa (provisional) al modelo de la Sección 6.4.

### 6.5.2.a Interpretaciones de carácter fundamental

#### *Espacio de Hilbert de una teoría gravitacional*

En la construcción de la dinámica semiclásica de un sistema a partir de una simetría, existen diferencias fundamentales entre la CSG y otros métodos como por ejemplo el tratamiento de las órbitas coadjuntas. De hecho, la CSG no sólo proporciona una estructura simpléctica sobre la que podemos construir una dinámica, sino que determina la función hamiltoniana (o al menos un conjunto de ellas) que especifica la evolución del sistema. En este sentido, nuestro modelo *topológico* está dotado con una dinámica intrínseca dictada por los campos de vectores en el módulo característico,  $\mathcal{G}_\Theta$ .

Sin embargo, no es necesario recurrir a toda la estructura de la CSG para formular modelos bien definidos. Podemos emplear la CSG como un método potente para obtener, a partir de una simetría fundamental, un espacio de las fases sobre el que describir una dinámica si proporcionamos cierta información adicional.

En este sentido, vamos a entender el espacio de representación de la Sección previa como el espacio de Hilbert de una teoría gravitacional genuinamente cuántica. En este sentido, nuestra construcción matemática proporciona la *cinemática* de tal modelo gravitatorio. La relevancia de este espacio de Hilbert para una teoría gravitacional reside, por un lado, en el hecho de que los operadores  $L_\mu^\dagger(\mathbf{m})$  y  $L_\mu(\mathbf{m})$  constituyen esencialmente una realización cuántica de los campos vectoriales con soporte sobre la variedad  $M$  y, por otro lado, en que trabajamos en una representación de peso máximo donde los estados se obtienen a partir de un vacío por acción de estos operadores cuánticos, estableciéndose una relación entre estados y campos vectoriales. Aprovechando el hecho de que el campo métrico clásico es



un tensor  $(0, 2)$  simétrico caracterizado por su acción sobre los campos de vectores clásicos, introducimos un operador cuántico métrico definiendo su acción sobre un conjunto adecuado de estados, esto es, de campos vectoriales cuantizados. Un conjunto apropiado de tales campos vectoriales es aquél que define una tétrada  $\{e_a\}$  (por supuesto, no podemos hablar de tétradas hasta no tener una noción métrica; por ahora son simplemente cuatro campos de vectores linealmente independientes). Considerando las componentes de estas tétradas en una base coordinada y expandiéndolas formalmente en una base de Fourier (ondas planas), encontramos

$$e_a(x) = e_a^\mu(x) \partial_\mu = \sum_{\mathbf{m}} e_a^\mu(\mathbf{m}) e^{i\mathbf{m}_\rho x^\rho} \partial_\mu = \sum_{\mathbf{m}} e_a^\mu(\mathbf{m}) L_\mu(\mathbf{m}) \quad , \quad (6.69)$$

donde hemos hecho uso de la notación de la Sección 6.2. Promoviendo el campo clásico  $L_\mu(\mathbf{m})$  a operador cuántico  $\hat{L}_\mu(\mathbf{m})$  mediante el uso de la representación de la Sección 6.4,  $e_a(x)$  se convierte en un operador  $\hat{e}_a$

$$e_a \mapsto \hat{e}_a = \sum_{\mathbf{m}} e_a^\mu(\mathbf{m}) \hat{L}_\mu(\mathbf{m}) \quad . \quad (6.70)$$

Asociando a cada uno de estos operadores un estado de forma canónica,  $|e_a\rangle \equiv \hat{e}_a|0\rangle$ , construimos un operador métrico  $\hat{g}$  imponiendo la *condición cuántica de tétrada*

$$\langle e_a | \hat{g} | e_b \rangle = \eta_{ab} \quad . \quad (6.71)$$

La manera más sencilla de realizar esta condición consiste en restringir el dominio del operador  $\hat{g}$  a los estados *mono-particulares*  $L_\mu^\dagger(\mathbf{m})|0\rangle$ . Es más, exigimos que el operador sea hermítico ( $\hat{g}^\dagger = \hat{g}$ ) y diagonal en el número cuántico  $\mathbf{m}$  de los estados:  $\hat{g} L_\mu^\dagger(\mathbf{m})|0\rangle = g_\mu^\nu(\mathbf{m}) L_\nu^\dagger(\mathbf{m})|0\rangle$ . Para poder comparar con la teoría clásica, es mejor introducir un objeto covariante en los dos índices espacio-temporales,  $g_{\mu\nu}(\mathbf{m}) \equiv \langle 0 | L_\mu(\mathbf{m}) \hat{g} L_\nu(\mathbf{m}) | 0 \rangle$ , cuya forma explícita es

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{m}) = \frac{-C_\rho}{2} (g_\mu^\sigma(\mathbf{m})(m_\nu \delta_\sigma^\rho + m_\sigma \delta_\nu^\rho) + g_\nu^\sigma(\mathbf{m})(m_\mu \delta_\sigma^\rho + m_\sigma \delta_\mu^\rho)) \quad , \quad (6.72)$$

donde hemos considerado por simplicidad que el único parámetro central que no se anula en (6.53) es  $C_\rho$ . Con estos elementos, la condición (6.71) se expresa simplemente

$$\eta_{ab} = \sum_{\mathbf{m}} g_{\mu\nu}(\mathbf{m}) e_a^\mu(\mathbf{m}) e_b^{\nu*}(\mathbf{m}) \quad , \quad (6.73)$$

que es el análogo en este modelo a la expresión estándar en el espacio de configuración y relaciona la acción cuántica de  $\hat{g}$  con una noción métrica.

El contacto con la teoría clásica se consigue invirtiendo el paso  $L_\mu(\mathbf{m}) \mapsto \hat{L}_\mu(\mathbf{m})$  y tomando los parámetros  $g_{\mu\nu}(\mathbf{m})$  como las componentes de Fourier del campo métrico clásico

$$g_{\mu\nu}(x) = \sum_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}_\rho x^\rho} g_{\mu\nu}(\mathbf{m}) \quad . \quad (6.74)$$

Como hemos dicho, la discusión previa describe la *cinemática* de los grados de libertad métricos, pero no ofrece pista alguna sobre la forma específica en la que estos  $g_\nu^\mu(\mathbf{m})$  (o  $e_a^\mu(\mathbf{m})$ ) deberían ser escogidos. Ésta es una información *dinámica* que en este



modelo concreto será incluida mediante la imposición de una ligadura, externa al grupo, sobre los parámetros  $g_{\mu\nu}(\mathbf{m})$ . En principio la ligadura más simple con una conexión directa con la física clásica, es la transformada de Fourier de las ecuaciones de Einstein en el vacío,  $R_{\mu\nu} = 0$ . Encontramos

$$\begin{aligned}
0 &= m_\lambda \sum_{\mathbf{m}} g^{\lambda\sigma}(\mathbf{m} - \mathbf{n}) (n_\nu g_{\mu\sigma}(\mathbf{n}) + n_\mu g_{\nu\sigma}(\mathbf{n}) - n_\sigma g_{\nu\mu}(\mathbf{n})) \\
&- n_\nu \sum_{\mathbf{n}} g^{\lambda\sigma}(\mathbf{m} - \mathbf{n}) (n_\lambda g_{\mu\sigma}(\mathbf{n}) + n_\mu g_{\lambda\sigma}(\mathbf{n}) - n_\sigma g_{\nu\mu}(\mathbf{n})) \\
&+ \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} g^{\eta\sigma}(\mathbf{m} - \mathbf{n} - \mathbf{p}) (p_\nu g_{\mu\sigma}(\mathbf{p}) + p_\mu g_{\nu\sigma}(\mathbf{p}) - p_\sigma g_{\nu\mu}(\mathbf{p})) \\
&\quad g^{\lambda\sigma'}(\mathbf{n} - \mathbf{q}) (q_\lambda g_{\eta\sigma'}(\mathbf{q}) + q_\eta g_{\lambda\sigma'}(\mathbf{q}) - q_{\sigma'} g_{\lambda\eta}(\mathbf{q})) \\
&- \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q}} g^{\eta\sigma}(\mathbf{m} - \mathbf{n} - \mathbf{p}) (p_\lambda g_{\mu\sigma}(\mathbf{p}) + p_\mu g_{\lambda\sigma}(\mathbf{p}) - p_\sigma g_{\lambda\mu}(\mathbf{p})) \\
&\quad g^{\lambda\sigma'}(\mathbf{n} - \mathbf{q}) (q_\nu g_{\eta\sigma'}(\mathbf{q}) + q_\eta g_{\nu\sigma'}(\mathbf{q}) - q_{\sigma'} g_{\nu\eta}(\mathbf{q})) .
\end{aligned} \tag{6.75}$$

En cuanto a la interpretación física de los estados del espacio de Hilbert,  $|0\rangle$  corresponde a un espacio tiempo localmente plano, donde la expresión *localmente* hace referencia a un entorno completo, y no sólo a un punto. Los estados mono-particulares poseen una relación directa con los campos de vectores *cuantizados* y corresponden a excitaciones locales del campo métrico en una determinada dirección, creando una distorsión en las distancias que es medida por la acción del operador cuántico  $\hat{g}$ . Si bien la restricción del dominio del operador  $\hat{g}$  al espacio de estados mono-particulares es suficiente para mostrar aspectos cuánticos tales como probabilidades de transición entre estados con distinto contenido de excitación métrica, podemos pensar en dotar también a los estados multi-particulares con un contenido métrico. Una forma sencilla de extender del dominio de  $\hat{g}$  consiste en definir un proyector  $P$  ( $P^2 = P$ ) desde el espacio Hilbert total, al de los estados mono-particulares. En ese caso, definimos  $\hat{g}|\Psi\rangle \equiv \hat{g}P|\Psi\rangle$ , de forma que un estado general adquiere una interpretación de excitación métrica. Este paso hace la dinámica más rica. Sin embargo, el proceso de proyección implica una pérdida de información, pues dos estados que se proyectan al mismo estado mono-particular y que por tanto tienen la misma interpretación física, evolucionan en general de forma distinta bajo la acción de un operador dado. De esta forma, si sólo poseemos información métrica, eliminado el resto del conocimiento de la microestructura, el sistema presenta cierta incertidumbre en su evolución. El sistema total es determinista, pero si sólo disponemos de información parcial, no podemos predecir su evolución.

Finalmente, observamos que los operadores construidos en términos de  $\hat{L}_\mu(\mathbf{m})$  y  $\hat{L}_\mu^\dagger(\mathbf{m})$  mezclan estados correspondientes a diferentes excitaciones métricas. Por tanto, los difeomorfismos cuánticos no son gauge en general.

#### *Teorías gauge de la gravedad en CSG*

Como hemos visto en el Apartado 6.3.2, en el tratamiento de teorías gauge locales en CSG, la ley de grupo de la simetría original  $\tilde{G}$  incluye tanto a las funciones asociadas a los *campos o potenciales de gauge* como a los parámetros correspondientes al propio grupo local (de *gauge*). Sin embargo, una sutil mezcla no trivial ocurre entre estos dos conjuntos de parámetros implicando una reestructuración de los grados de libertad físicos y gauge. Como resultado de este proceso, los elementos originales del grupo de gauge ganan contenido



dinámico. Por tanto, si tratamos la Gravedad como una teoría gauge en CSG tomando los difeomorfismos locales como la simetría asociada a las translaciones locales, los propios parámetros  $l^\mu(\mathbf{m})$  adquieren un significado métrico. Por supuesto, la teoría completa necesita de la adición de la otra parte del grupo, los campos de gauge, algo que puede enfocarse desde diferentes perspectivas (con estructuras métricas, campos definiendo tétradas, variables de conexión a la Ashtekar, etcétera). Pero independientemente de la forma concreta en que se introduzca esta estructura que falta, las combinaciones  $m_\mu \tilde{X}_{l^\nu(\mathbf{m})}^R$  entrarán en la teoría como parte de los grados de libertad físicos de tipo gravitacional.

En cuanto a la ruptura de la invariancia bajo difeomorfismos, la presencia de términos centrales en el conmutador de los generadores de difeomorfismos, aquí conseguida mediante pseudo-extensiones, convierte a dichos generadores en ligaduras de segunda clase. La consecuencia directa es que no todos los grados de libertad *espúreos* pueden ser eliminados. En definitiva, el modelo que hemos desarrollado en la Sección 6.4 se centra en el análisis de la dinámica asociada a un análogo del cociclo  $\xi_3(g', g)$  del Apartado 6.3.2. Allí tenía como consecuencia la aparición de nuevos grados de libertad (como los que se necesitan para constituir un campo de Proca a partir de uno sin masa) o la adquisición de masa de los bosones de gauge [CA99]. En nuestro caso, al presentar además una extensión no central, aparecen nuevos campos en escena. En principio, éstos pueden modelar la introducción de *materia* en el esquema y no se puede descartar un papel en la generación de masa del resto de los campos todavía por introducir. En cualquier caso, debemos insistir en que el modelo sólo representa un paso en el camino hacia una teoría aún por completar.

Finalmente el estudio de la acción no trivial del grupo de difeomorfismos sobre el grupo  $U(1)$  local, permite obtener intuición sobre la forma en la que la mezcla entre gravedad y electromagnetismo puede tener lugar en el caso infinito-dimensional. De hecho, el efecto conjunto de esta acción no trivial entre los grupos de gauge asociados a distintas interacciones junto con el fenómeno de mezcla de los grados de libertad físicos y gauge en cada una de las interacciones, podría dotar al grupo de gauge del papel de intermediario o catalizador para una genuina mezcla de los auténticos modos físicos en una teoría general de unificación. El desarrollo de esta idea exige el estudio previo de la incorporación del resto de los grados de libertad.

### 6.5.2.b Una interpretación fenomenológica

En la interpretación fenomenológica que aquí presentamos del modelo, éste se entiende como una teoría efectiva válida a energías intermedias-bajas. Como motivación realizamos una breve revisión histórica del problema de generación de la masa de las partículas.

#### *Motivación*

La corrección de la masa de una partícula como consecuencia efectiva de su interacción con el entorno circundante es una idea muy vieja cuya pista se puede seguir hasta la hidrodinámica del siglo XIX. De hecho, en muchos sistemas físicos que describen el movimiento de un objeto en el seno de un fluido clásico continuo, la solución de las ecuaciones hidrodinámicas admite un tratamiento efectivo en el que el objeto se comporta como si estuviera en movimiento libre pero con una masa corregida o *renormalizada*, la cual depende de características generales tales como condiciones de contorno. La extensión de estas ideas a la electrodinámica condujo a J.J. Thomson a la introducción de la noción de *masa electromagnética* de una carga como consecuencia de la interacción con su propio campo electromagnético, elemento fundamental en la posterior teoría del electrón de Lorentz [Lo04]. Con la llegada de la Teoría



Cuántica, las concepciones de Lorentz inspiraron fuertemente los esfuerzos de Kramers, resultando en la conexión entre las ideas clásicas previas y los nuevos problemas asociados a las divergencias que surgían en el cálculo de la autoenergía del electrón, conduciendo a una renormalización radiativa de la masa. En los días tempranos de la Electrodinámica Cuántica se albergaba la esperanza de desarrollar una teoría fundamental que eliminara las divergencias y permitiese derivar con éxito los valores de los parámetros característicos (como la constante de estructura fina). Sin embargo, la solución final del problema mediante la aplicación del programa de renormalización condujo a una situación en la que la Teoría Cuántica de Campos no sondea la física más allá de cierta escala de energía. La forma en la que esta física afecta a los fenómenos de más baja energía es a través de la renormalización de ciertos parámetros, entre ellos las masas de las partículas. En este contexto, la idea de masa como autoenergía de una partícula ha perdido nitidez.

Otros mecanismos conceptualmente diferentes han sido construidos para afrontar aspectos parciales, pero fundamentales, del problema del origen de la masa. Un ejemplo lo constituye el uso de técnicas de *lattice QCD* para manejar la dinámica de los hadrones ligeros en el cálculo de la masa de los bariones [Wil99, Wil02, Be99]. En cualquier caso, cuestiones tales como la masa de los leptones o la *materia oscura* cosmológica permanecen abiertas.

A partir del breve repaso histórico previo [Br93], extraemos las dos ideas básicas que nos servirán de guía. En primer lugar, retomamos la vieja idea que enfatiza el papel de la interacción con los campos circundantes como un elemento fundamental en la generación de masa y, en segundo lugar, adoptamos un enfoque efectivo en el que la física más allá de cierta escala no se discute. La presencia de cuestiones abiertas sugiere la introducción de física habitualmente ignorada en el problema de generación de la masa. Un candidato atractivo, y por otra parte bastante natural, para ese ingrediente físico adicional es la Gravedad con su asociada invariancia bajo difeomorfismos, que no se introduce habitualmente en la física de partículas a altas energías. La única condición explícita que le impondremos a la teoría fundamental subyacente, es que la invariancia bajo difeomorfismos juegue un papel esencial en su formulación.

Al adoptar un tratamiento efectivo, parece razonable admitir la existencia de una escala de energías en la que la Teoría Cuántica de Campos resulta una buena aproximación y donde se aplica su noción de partícula como excitación local del vacío resultante de la acción de un operador de campo (local). Asimismo, estamos aceptando implícitamente la noción de espacio-tiempo como una variedad diferenciable que constituye el sustrato sobre el que se mueven las partículas. Separaremos fenomenológicamente la dinámica intrínseca de este fondo dinámico, gobernada por las ecuaciones de la Relatividad General, del efecto que la invariancia implícita bajo difeomorfismos produce en el proceso cuántico de la creación de partículas.

Nos encontramos por tanto estudiando un régimen en el que las partículas físicas pueden ser consideradas como objetos puntuales y la dinámica clásica del espacio-tiempo se encuentra desacoplada. El adjetivo *físicas* referido a las partículas resulta esencial, como opuesto a partículas ideales tipo *test*, pues conlleva una ruptura de la noción de espacio-tiempo en el mismo punto donde se encuentran. Lo que sugerimos es que las partículas físicas literalmente perforan el espacio-tiempo, creando un *agujero*. Esto tiene profundas consecuencias en el modelo cuántico que describe la creación de partículas. Se puede demostrar [PS86] que la presencia de un agujero en una variedad bidimensional induce términos centrales anómalos en los conmutadores cuánticos entre (algunos de) los generadores de la



invariancia bajo difeomorfismos, echando a perder de esta manera la simetría clásica (ésta puede recuperarse en teorías específicas, como la teoría de cuerdas, en el valor crítico de la anomalía conforme). Proponemos que este proceso de hecho se generaliza a dimensiones superiores, induciendo una realización anómala de la simetría de los difeomorfismos clásica, eso sí, limitada al proceso cuántico de creación de partículas. Esto podría sustentarse mediante un análisis detallado de los términos dominantes en una expansión de producto de operadores (Operator Product Expansion, OPE) adecuada. A nivel técnico, tal anomalía del álgebra podría ser expresada mediante una de las extensiones no centrales del grupo de difeomorfismos presentadas en la Sección 6.2. En cualquier caso, esta anomalía no contradice la realización exacta de esta simetría a energías más altas, donde deberíamos usar un modelo más fundamental para el acoplamiento entre los grados de libertad gravitacionales y de materia. Simplemente significa que el precio que debemos pagar para evitar tal descripción detallada y sustituirla por un tratamiento efectivo en el que el espacio-tiempo clásico está desacoplado, es la aceptación de una ruptura de la invariancia gauge clásica bajo difeomorfismos.

#### *Hipótesis y conjetura*

Las anteriores motivaciones heurísticas pueden ser sintetizadas en la siguiente hipótesis: existe un régimen efectivo en el que las partículas físicas son puntuales y su proceso de creación conlleva una ruptura de la invariancia bajo difeomorfismos clásica, la cual se realiza de un modo anómalo.

La presencia de una anomalía en una teoría gauge local obstruye la reducción de grados de libertad para los cuales la simetría gauge está diseñada, implicando un aumento del espacio físico de las fases a costa de los grados de libertad que deberían ser espúreos pero que ganan contenido dinámico. Un ejemplo familiar de esto lo constituye el modo de Liouville en teoría de cuerdas no crítica. Este problema supone una seria amenaza para la consistencia de la teoría (unitariedad y renormalizabilidad), al menos al aplicar los métodos estándar, algo especialmente crítico cuando se considera la teoría gauge en cuestión como una teoría fundamental. No obstante, existen intentos para construir teorías anómalas consistentes, donde la mencionada aparición de nuevos grados de libertad es explícita [FS86]. Sin embargo, la presencia de una anomalía también puede entenderse como una traza característica que indica la existencia de nueva física a energías más altas [Pr91]. Ésta es precisamente la situación con la que estamos tratando aquí. La influencia de los grados de libertad a energías superiores se codifica en ciertos modos efectivos que se hacen presentes en la teoría fenomenológica.

La forma estándar a través de la cual se manifiesta una anomalía, que está de acuerdo con lo expresado en las motivaciones previas, es a través de la aparición de términos adicionales en los conmutadores cuánticos con respecto a los que definen la simetría clásica. Por tanto, proponemos que la simetría de difeomorfismos se realiza en la teoría efectiva como una extensión, no necesariamente central, del álgebra de difeomorfismos locales. Para concretar, nos centraremos en las extensiones tensoriales de la Sección 6.2. En consonancia con el conjunto del trabajo, trabajaremos en el espacio de momentos, adoptando una notación consistente con la ya presentada. Así, denotamos los difeomorfismos locales por  $\hat{L}_\mu(\mathbf{m})$ , los campos asociados a las partículas en cuestión por  $\hat{\Phi}_a(\mathbf{m})$  y las extensiones tensoriales por  $\hat{A}_i(\mathbf{m})$  (donde por supuesto  $\mu$  es un índice espacio-temporal,  $a$  e  $i$  son índices internos y  $\mathbf{m}$  es un vector que etiqueta el espacio de momentos). En esta notación, los conmutadores



cuánticos están dados por

$$\begin{aligned} [\hat{L}_\mu(\mathbf{m}), \hat{L}_\nu(\mathbf{n})] &= m_\nu \hat{L}_\mu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) - n_\mu \hat{L}_\nu(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + c_{\mu\nu}^i(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \hat{A}_i(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ [\hat{L}_\mu(\mathbf{m}), \hat{\Phi}_a(\mathbf{n})] &= -n_\mu \hat{\Phi}_a(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \\ [\hat{\Phi}_a(\mathbf{m}), \hat{\Phi}_b(\mathbf{n})] &= \hat{\alpha}_{ab}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \quad , \end{aligned} \quad (6.76)$$

donde  $c_{\mu\nu}^i(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  es el cociclo asociado a las extensiones anómalas que dan contenido dinámico a los difeomorfismos y donde  $\hat{\alpha}_{ab}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  proporciona los conmutadores estándar de los campos libres.

Para dar un auténtico significado a toda la discusión anterior, necesitamos construir modelos que describan una dinámica consistente con este álgebra. Es aquí donde entra la construcción de la Sección 6.4 e incluso las del Capítulo 4 si nos atenemos al formalismo matemático.

Como hemos visto, la aplicación de estas técnicas a álgebras del tipo (6.76) conduce a la obtención de representaciones de peso máximo con un único vacío en el espacio de Hilbert correspondiente, donde los operadores  $\hat{L}_\mu(\mathbf{m})$  correspondientes a los difeomorfismos anómalos actúan genuinamente creando y destruyendo estados como corresponde a su recién adquirido contenido dinámico. Un resultado especialmente importante lo constituye la expresión de los invariantes Noether de los parámetros en el módulo característico en función de los invariantes Noether básicos (6.61). En particular, puesto que el hamiltoniano ha de estar entre las funciones del módulo característico, encontramos la forma general para el operador hamiltoniano efectivo

$$\hat{H}_{ef} = \hat{H}_{libre}(\hat{\Phi}^\dagger, \hat{\Phi}) + \hat{H}_{mezcla}(\hat{\Phi}^\dagger, \hat{\Phi}, (\hat{L}_\mu)^\dagger, \hat{L}_\mu, (\hat{F})^\dagger, \hat{F}) \quad , \quad (6.77)$$

donde  $\hat{H}_{libre}$  es el hamiltoniano correspondiente a la teoría del campo  $\hat{\Phi}$  libre y sin masa. Nuestra propuesta es que la expresión que corrige al hamiltoniano libre sin masa puede dar cuenta de los términos de masa en la teoría efectiva. De forma precisa, nuestra conjetura se expresa de la siguiente manera: *una parte crucial de la generación de masa puede ser descrita fenomenológicamente como una corrección radiativa resultante de la interacción entre los modos de los campos sin masa y ciertos grados de libertad efectivos que aparecen como resultado de la mera existencia de las partículas.*

#### Un ejemplo

Por supuesto, una predicción real de esta contribución a la masa requeriría un cierto conocimiento de la teoría fundamental subyacente, puesto que es la responsable de fijar el valor de las extensiones en el álgebra (6.76). Aparte de este punto, el presente mecanismo no es sensible a la descripción detallada a mayor energía, que podría encontrar soporte en una teoría tipo cuerdas, una versión de geometría no conmutativa, gravedad cuántica de lazos, una teoría cuántica de campos más sofisticada, una aproximación a la gravedad mediante el uso de conjuntos causales, etcétera, u otra teoría fenomenológica subyacente, como los agujeros de gusano en gravedad cuántica euclídea.

A pesar de que un intento serio para proporcionar un ejemplo realista en este contexto ciertamente requiere un análisis cuidadoso sobre la potencial ruptura anómala de la invariancia bajo difeomorfismos en las actuales candidatas para teorías fundamentales, nuestras construcciones se pueden usar ya para apuntar ciertos rasgos generales. Si bien el modelo



matemático de la Sección 6.4, que lo podemos relacionar con la dinámica de un campo escalar bajo la acción de los difeomorfismos dinámicos, constituye una realización de las relaciones (6.76), aquí nos limitaremos a considerar un caso todavía más elemental en dimensión  $1 + 1$ , simplemente atendiendo al hecho de que las expresiones involucradas son mucho más sencillas. Efectivamente, presentamos un ejemplo muy simplificado pero ilustrativo, que estudia el campo escalar sin masa en una dimensión espacial (compacta). Con la hipótesis de que sólo los difeomorfismos espaciales se hacen dinámicos, el álgebra relevante es:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_m, \hat{L}_n] &= (m - n)\hat{L}_{m+n} + cm^3\delta_{m+n,0} \\ [\hat{L}_m, \hat{a}_n] &= -n\hat{a}_{m+n} \\ [\hat{a}_m, \hat{a}_n] &= m\delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (6.78)$$

Ésta es de hecho una subálgebra de la presentada en la Sección 4.3, por lo que los resultados técnicos se obtienen esencialmente de allí. El espacio de Hilbert se construye a partir de un único vacío  $|0\rangle$ , aplicando los operadores creación  $\hat{\alpha}_n^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}_{-n}$  y  $\hat{L}_n^\dagger \equiv \hat{L}_{-n}$ , con  $n > 0$ , y donde los operadores de aniquilación están dados por  $\hat{\alpha}_n \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}_n$  y  $\hat{L}_n$  ( $n \geq 0$ ). Los operadores  $\hat{\alpha}_n^\dagger, \hat{\alpha}_n$  satisfacen ahora las relaciones de conmutación canónicas,  $[\hat{\alpha}_n, \hat{\alpha}_m^\dagger] = \delta_{n,m}$ . El cálculo perturbativo del hamiltoniano del sistema, que se deriva de la expresión de los invariantes Noether junto con el apropiado ajuste de los valores de las extensiones centrales, resulta:

$$\hat{H} = \sum_{n>0} \left( n\hat{\alpha}_n^\dagger\hat{\alpha}_n + \frac{1}{cn^2}\hat{L}_n^\dagger\hat{L}_n + \dots \right) \quad (6.79)$$

Por contra, la expresión derivada en el tratamiento estándar en teoría de campos de un campo escalar libre con masa  $M$ , presenta un único término  $\hat{H}_{campo} = \sum_{n>0} \sqrt{M^2 + n^2}\hat{\alpha}_n^\dagger\hat{\alpha}_n$ , donde omitimos los modos cero. Teniendo en cuenta que la expresión (6.79) es únicamente perturbativa, buscamos un régimen en que podamos compararla de forma coherente con  $\hat{H}_{campo}$ . Esto se puede conseguir expandiendo la relación de dispersión para  $n \gg 1$ . En este caso tenemos,

$$\hat{H}_{campo} = \sum_{n>0} n\sqrt{1 + \frac{M^2}{n^2}}\hat{\alpha}_n^\dagger\hat{\alpha}_n = \sum_{n>0} \left( n\hat{\alpha}_n^\dagger\hat{\alpha}_n + \frac{M^2}{2n}\hat{\alpha}_n^\dagger\hat{\alpha}_n + \dots \right) \quad (6.80)$$

La manera explícita en que estableceremos la comparación entre ambos tratamientos (notamos que la aproximación de CSG no es una teoría cuántica de campos) la realizaremos evaluando (6.79) y (6.80) sobre los estados físicos, en particular sobre los estados monoparticulares  $|k\rangle = \hat{\alpha}_k^\dagger|0\rangle$ . Uno puede cuestionarse la conveniencia de usar estos estados para representar las excitaciones de los modos escalares en una teoría con presencia de difeomorfismos dinámicos, donde la excitación de los modos efectivos podría sugerir la posibilidad de usar combinaciones lineales más generales que incluyeran estados  $\hat{L}_k^\dagger|0\rangle$  en la definición de los vectores relevantes. En el peor de los casos, podemos considerar (6.79) como un hamiltoniano perturbado en un contexto estándar de teoría de perturbaciones sobre un campo escalar sin masa, usando por tanto los estados  $|k\rangle = \hat{\alpha}_k^\dagger|0\rangle$  para evaluar las correcciones de primer orden a los niveles de energía. Éste es el espíritu que adoptamos en este ejemplo sencillo.



La corrección a los niveles de energía de la partícula sin masa, calculados a partir de la teoría cuántica efectiva derivada de (6.78), da cuenta de la interacción con los grados de libertad efectivos asociados a los difeomorfismos dinámicos. Si bien esta energía puede mostrar un comportamiento complicado en el momento de la partícula, separaremos la contribución de los momentos grandes y los pequeños intentando extraer la energía asociada a la masa a partir de la forma de la energía de interacción a momentos bajos. Por tanto, al evaluar el segundo sumando en (6.79), y que denotaremos por  $\hat{H}_L$ , esperamos encontrar una expresión que podamos identificar con la que procede del segundo sumando en (6.80), más una energía que contribuya sólo a momentos altos,  $E_{h-m}$ :

$$\frac{\langle k|\hat{H}_L|k\rangle}{\langle k|k\rangle} = \frac{M^2}{2k} + E_{h-m} . \quad (6.81)$$

La evaluación del primer miembro proporciona el resultado finito

$$\frac{\langle k|\hat{H}_L|k\rangle}{\langle k|k\rangle} = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{k(k-n)}{n^2} . \quad (6.82)$$

La identificación de la masa de la partícula a partir de la expresión (6.82) está garantizada por la existencia en dicha suma de términos con dependencia en  $k^{-1}$ . Por tanto

$$\frac{M^2}{2k} \sim \frac{1}{ck} \Rightarrow M \sim \sqrt{\frac{2}{c}} . \quad (6.83)$$

El resto de la energía es de hecho una corrección de momentos altos a la energía de interacción, implicando desviaciones a altas energías en la relación de dispersión que estamos tratando de ajustar. La inclusión de estas correcciones en la correspondiente teoría de campos sin difeomorfismos dinámicos, implicaría la corrección del propagador del campo libre. Por tanto, mientras no tratemos con energías muy altas, una teoría de campos de un campo escalar de Klein-Gordon con masa  $M = \sqrt{\frac{2}{c}}$  es un buen modelo para la teoría cuántica efectiva definida por (6.78), representando un fundamento para explicar el origen del parámetro de masa en la teoría de campos. Sin embargo, si extendemos el rango de aplicación de tal modelo de campos más allá del régimen en el que resulta válido, estamos despreciando la energía de interacción inherente a las altas energías que, aunque presente en el sistema, queda desacoplada en nuestra descripción del mismo. Esto es, en el tratamiento de campos estamos desacoplando esta energía, de forma efectiva, de las interacciones no gravitatorias. Estamos hablando por tanto de una energía, como tal fuente del campo gravitacional (cuya dinámica desacoplamos desde el principio), que no es *vista* por el resto de las interacciones físicas, resultando por tanto completamente *oscura*. Parece tentador sugerir de una manera especulativa esta línea como una posibilidad para entender el problema de la materia oscura. Si estudiamos los estados biparticulares, encontramos

$$\frac{\langle kl|\hat{H}_L|kl\rangle}{\langle kl|kl\rangle} = \frac{k}{c} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{k-n}{n^2} + \frac{l}{c} \sum_{n=1}^{l-1} \frac{l-n}{n^2} + \frac{kl}{c(1+\delta_{n,k})} \left( \frac{1}{(k+l)^2} + \frac{\delta_{k \neq l}}{(k-l)^2} \right) , \quad (6.84)$$

donde los dos primeros términos en el miembro de la derecha corresponden a las masas de las partículas y sus correcciones de momentos elevados, mientras que el tercer término se puede interpretar como una energía extra necesaria para mantener las partículas *separadas*. Puesto



que es positiva, debemos *realizar* trabajo para mantenerlas separadas (o más propiamente, crearlas separadas).

El único objeto de este ejemplo, es el de suscitar la intuición sobre la potencialidades de las expresiones (6.76) y (6.77) que constituyen el auténtico punto que queremos enfatizar. Quizá el escenario desarrollado en este ejemplo para la realización del modelo matemático de la Sección 4.2 y de las ideas físicas presentadas en la primera parte de esta sección, resulte demasiado ingenuo. Efectivamente, situaciones más complejas pueden ser necesarias para explorar las auténticas posibilidades del enfoque. En este sentido, se podría emplear el modelo matemático para la descripción de una partícula como un sistema con estructura interna, en lugar de estar representada por un único estado en el espacio de Hilbert, constituido por las excitaciones del propio campo y las de los modos efectivos resultantes de la anomalía. En tal caso sería necesario introducir elementos externos en el modelo, como funciones de distribución de los modos efectivos, que vendrían en última instancia determinados por la teoría subyacente. En este esquema la masa correspondería sencillamente a la energía del estado ligado de menor energía. Ésta es una posibilidad inspirada en la situación de sistemas complejos como son los bariones.

Es más, es posible que nuestro modelo de dinámica asociada a los difeomorfismos dinámicos tenga una conexión más directa con formalismos no basados en teorías de campos. En este sentido, la expresión (6.79) se corresponde mejor con la análoga en una teoría de *primera cuantización* tal como el tratamiento estándar de la cuerda bosónica [GSW87, Pol98].

### *Recapitulación*

En definitiva, hemos planteado un escenario sencillo para la generación de masa de las partículas al proponer un mecanismo que, partiendo de campos libres sin masa, es capaz de introducir un parámetro de masa en el modelo. Incluso si este efecto es pequeño, podría proporcionar un germen no nulo susceptible de ser amplificado mediante otros mecanismos tales como la renormalización multiplicativa que ocurre en el tratamiento del electrón en la electrodinámica cuántica. La descripción tiene una naturaleza efectiva y resulta bastante insensible a la teoría fundamental subyacente, siempre que la invariancia bajo difeomorfismos juegue un papel fundamental en la misma. El mecanismo involucra un fuerte uso de la concepción del fenómeno de creación de partículas como un proceso inherentemente cuántico. Esto se puede ver directamente en el ejemplo mostrado subrayando la dependencia de la masa de las partículas en la carga central del álgebra de Virasoro, de tal manera que la primera se anula cuando  $c \rightarrow \infty$ . Esto último se corresponde con el límite clásico del modelo, como hemos visto en el Apartado 4.2.3, revelándose la masa como un concepto esencialmente cuántico. Si bien la presencia de interacciones no gravitacionales es crucial para imprimir un carácter puntual a las partículas en teoría cuántica de campos, una vez que aceptamos tal naturaleza podemos ignorar tales interacciones (que funcionan por tanto como una especie de catalizador) y tratar esencialmente con teorías *libres* como punto de partida del citado mecanismo. Incluso si la conjetura que relaciona la aparición de masa con la interacción con ciertos grados de libertad efectivos no funciona apropiadamente, las correcciones radiativas propuestas pueden implicar consecuencias importantes y observables para el espectro de energía de los campos libres, suponiendo en particular modificaciones en los propagadores de los campos.

Los problemas básicos del mecanismo son, por un lado, un carácter *demasiado* universal, que conlleva problemas para proteger a las partículas de masa nula de una eventual generación de masa y, por otro lado, la necesidad de realizar un ajuste fino para que existan



términos interpretables como masa.

## 6.6 Discusión y conclusiones

Con la experiencia del estudio del caso bidimensional, en este Capítulo nos hemos centrado en la construcción de modelos físicos que parten del grupo de los difeomorfismos, entendidos como un conjunto de transformaciones de una variedad (local) previamente existente. Esto es, hemos aplazado el intento de reconstruir la estructura espacio-temporal como objeto derivado. Las estructuras métricas (o similares) responsables de la gravedad clásica, no han podido ser *derivadas* dentro de nuestros modelos específicos, con lo que el formalismo construido ha necesitado la incorporación de estructura adicional externa para la consecución de un modelo físico.

Por otra parte, se ha producido una convergencia explícita en los desarrollos de los dos Capítulos anteriores, puesto que el formalismo elaborado representa una generalización, en ambos casos incompleta pero por distintas razones, de las dos líneas de trabajo.

Dejando las discusiones y conclusiones globales para los Capítulos 7 y 8, podemos enunciar las siguientes conclusiones de carácter específico:

- a) El objetivo *estructural* se ha cumplido mediante la construcción de una representación de peso máximo correspondiente al álgebra de Lie de dimensión infinita cerrada por los difeomorfismos locales  $L_\mu(\mathbf{m})$  definidos sobre una variedad de dimensión superior a uno, actuando de forma semidirecta sobre los modos escalares  $A(\mathbf{m})$  y extendida no centralmente por los generadores tensoriales  $S^\rho(\mathbf{m})$ . Esta representación, junto con el correspondiente tratamiento semiclásico, proporciona un soporte matemático susceptible de ser dotado de una interpretación que complete un modelo físico. También debemos notar que tal construcción tiene un interés matemático intrínseco, independiente de su papel en una teoría física.
- b) Una conclusión de carácter negativo que creemos que tiene una gran importancia metodológica es la comprensión del carácter, en cierta medida, ingenuo del primer intento de generalización de la mezcla de interacciones. Concluimos que en la generalización de un problema físico específico no basta con encontrar estructuras matemáticas que formalmente consigan tal objetivo, sino que se precisa de una guía física que conduzca y otorgue validez a la construcción puramente matemática.
- c) Desde el punto de vista del objetivo *conceptual*, si bien no hemos identificado los grados de libertad fundamentales de la Gravedad a partir del grupo de difeomorfismos en nuestros desarrollos concretos, sí podemos concluir que hemos construido auténticos modelos físicos que poseen una interpretación gravitatoria, bien de naturaleza fundamental o fenomenológica, aunque abordando aspectos parciales del problema. Los primeros, los fundamentales, necesitan de la incorporación explícita de estructura extra y en este contexto el modelo construido debe entenderse como parte integrante de una teoría más general. Por su parte, el modelo fenomenológico exige la aceptación de ciertas hipótesis sobre una supuesta teoría fundamental a nivel subyacente, tiene un menor alcance en contenido físico pero al mismo tiempo es menos exigente con la interpretación fina de los objetos que aparecen en el mismo, perfilándose como un tratamiento más autocontenido que, por supuesto, debe considerarse como un paso intermedio en el desarrollo de un trabajo más amplio.







## Capítulo 7

# Discusiones finales

### 7.1 Resultados y objetivos generales

En primer lugar hacemos una valoración de la consecución de los objetivos iniciales.

#### 7.1.1 Objetivo estructural

El primer objetivo, de carácter técnico, ha sido cumplido satisfactoriamente mediante la construcción de formalismos matemáticos que describen la dinámica, tanto clásica como cuántica, correspondiente a grados de libertad extraídos a partir del grupo de difeomorfismos y de su acción sobre otras simetrías de dimensión infinita. Más específicamente:

1. Se ha construido una representación del grupo de Virasoro actuando de forma semi-directa sobre un grupo  $SU(1, 1)$  de Kac-Moody. Como principales resultados técnicos señalamos:
  - a) Reducción de la representación de Virasoro bajo la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ , módulo característico para el caso crítico  $c = c'$  ( $c = c' + c^{Sug}$ , en el caso anómalo con presencia de materia).
  - b) Identificación de una polarización de orden superior para la reducción del caso anómalo asociado al grupo de Virasoro actuando sobre  $SU(1, 1)$  de Kac-Moody con un  $SL(2, \mathbb{R})$  en el módulo característico.
  - c) Relación entre unitariedad y globalidad en dicha representación, ligando la eliminación de estados con norma negativa a condiciones de exponenciabilidad de la representación.
  - d) Recuperación de la acción de Polyakov con un término correctivo en el estudio semiclásico del grupo de Virasoro.
  - e) Consistencia del espacio  $AdS^2$  como espacio-tiempo del modelo, gracias al análisis de las representaciones de la serie discreta de los grupos  $SO(p, q)$ .
2. Construcción, en dimensiones espacio-temporales realistas, de una representación del álgebra de difeomorfismos actuando sobre el álgebra de corrientes de  $U(1)$ , ambas extendidas no centralmente por un generador tensorial  $S^\rho$ . Éste constituye el resultado técnico más importante de este trabajo, si bien su estudio completo todavía requiere trabajo adicional.



3. Expresión de los invariantes Noether asociados a variables de evolución en función de los invariantes Noether básicos. Este punto resulta extraordinariamente importante en cierta interpretación física de los modelos y representa asimismo un resultado con interés formal intrínseco como una generalización clásica de la construcción de Sugawara en teorías conformes.
4. En el contexto del estudio semiclásico de la subálgebra de difeomorfismos obtenida al truncar el álgebra de las translaciones locales del grupo de Poincaré centralmente extendido, muestra especial interés el resultado que recupera: *a)* las ecuaciones de Lorentz de un partícula cargada, *b)* las ecuaciones geodésicas en una aproximación linealizada de la métrica y *c)* un sugerente nuevo término que emerge como mezcla de ambas interacciones.

### 7.1.2 Objetivo conceptual

La evaluación del grado de éxito en el objetivo conceptual es más delicada. Podemos afirmar que el objetivo de dotar a los anteriores formalismos matemáticos de una interpretación emplazada en un escenario gravitatorio, se cumple en los modelos presentados en este trabajo.

Sin embargo, tal consecución es sólo parcial, puesto que en dichas interpretaciones se renuncia a la construcción de una teoría completa donde los auténticos grados de libertad gravitatorios surjan a partir del grupo de difeomorfismos, que era el planteamiento general del problema en el Capítulo 1. Si bien representado un avance en las líneas allí formuladas, los modelos tratados en este trabajo se limitan, por el momento, al estudio de aspectos parciales del fenómeno gravitatorio en un contexto cuántico.

Tras estos comentarios generales, discutimos más específicamente las distintas interpretaciones desarrolladas para los diferentes casos:

- a)* Sólo en el caso bidimensional estamos realmente trabajando con una teoría que pretende ser una descripción completa, donde los grados de libertad relevantes gravitatorios se derivan a partir de un grupo de difeomorfismos. Sin embargo, tal caso parece especialmente crítico puesto que en él se cuenta con la guía explícita de la acción de Polyakov (la gravedad de Einstein se trivializa en dimensión dos) cuya relación con el grupo de Virasoro es de naturaleza muy singular. En dimensiones superiores tal conexión se pierde y no hemos encontrado ninguna forma definitiva de derivar los modos gravitatorios desde los difeomorfismos por sí solos. Incluso si tal cosa sucediese, su emergencia debería ser consistente con la presencia de un álgebra de difeomorfismos con carácter gauge a nivel clásico. Esto exigiría la existencia de un mecanismo que permitiese trivializar estos difeomorfismos sin destruir la dinámica. En el caso bidimensional con materia, los generadores de Sugawara proporcionan una interesante línea de pensamiento, pero su generalización a dimensiones superiores no es directa.

En cualquier caso, entendemos que el caso bidimensional representa un modelo explícito de cómo se pueden estudiar distintos aspectos fundamentales de una teoría de gravedad cuántica.

- b)* En el caso de dimensiones realistas, que en definitiva es el de mayor interés físico, los auténticos grados de libertad gravitatorios han de ser proporcionados (mientras no se disponga de una generalización del objeto de partida de la construcción, esto es, del grupo de difeomorfismos) por una estructura externa a nuestros modelos. Éstos, por tanto, no describen teorías completas.



Por otro lado, aunque íntimamente ligado a esta identificación de los modos dinámicos de la teoría, debemos resaltar que los grados de libertad de difeomorfismos no se realizan como una simetría gauge a nivel cuántico (si los hacemos gauge, los modelos que hemos descrito esencialmente se trivializan, al menos en su sector de difeomorfismos, quedándonos sin sistema físico). Estamos por tanto ante el que quizá es el fenómeno más interesante desde el punto de vista físico presentado en este trabajo: la aparición anómala de grados de libertad a nivel cuántico que desaparecen a nivel clásico. Decidir si una simetría es gauge o no, es tanto como decidir cuál es el espacio de soluciones del sistema físico. Si bien los difeomorfismos deben ser una simetría gauge a nivel clásico, la presencia de anomalías (bien controladas en un formalismo como la CSG) puede generar nuevos grados de libertad a nivel cuántico <sup>1</sup>.

A la luz de las anomalías, el tema de esta Tesis bien podría reformularse como un estudio sobre la identificación de los grados de libertad físicamente relevantes. Se necesita entonces de una guía de naturaleza física que permita decidir las distintas posibilidades que en principio se plantean.

- c) Siguiendo con los modelos en dimensiones realistas, en las interpretaciones de naturaleza fundamental que hemos presentado, donde se asume que el modelo es una parte de una teoría que describe los auténticos grados de libertad del sistema físico, la idea de b) se materializa de la siguiente forma:
- i) El espacio de representación de los modos métricos gravitatorios, cuya dinámica supuestamente viene descrita por otro sector de la teoría, está construido a partir de los difeomorfismos. En el caso de trivializar éstos, tal espacio desaparece como espacio de Hilbert físico. Los operadores construidos a partir de difeomorfismos mueven los estados de este espacio y por tanto no son gauge.
  - ii) En el caso de mezcla de interacciones, la presencia de cociclos en el sector de difeomorfismos rompe explícitamente el carácter gauge del grupo de difeomorfismos. Por otra parte, estos modos de difeomorfismos se mezclan no trivialmente con los modos auténticamente gravitatorios, perdiéndose una distinción nítida entre ambos.
- d) Por otro lado, en la interpretación fenomenológica que hemos formulado, asumimos explícitamente la ruptura de la naturaleza gauge de los difeomorfismos en el proceso de creación cuántica de partículas (puntuales). Los grados de libertad físicos que así aparecen codifican de forma efectiva el contenido dinámico de los modos responsables de la gravedad a una energía más alta, donde la invariancia estricta bajo los difeomorfismos debe recuperarse. A energías más bajas, una vez aceptada la presencia de estos grados de libertad efectivos, nos olvidamos de su origen anómalo y los acoplamos a un tratamiento estándar de teoría cuántica de campos en espacios curvos [BD82, Wa92], donde el carácter gauge de los difeomorfismos vuelve a hacerse presente. La presencia de estos campos podría tener consecuencias experimentales como variaciones en el propagador de los campos libres o en la determinación del espectro de dichos campos (en particular, su masa).

---

<sup>1</sup>A diferencia del punto a) en el que se trata con una teoría completa, en un modelo en el que los grados de libertad gravitatorios son externos, sí podemos hacer gauges los difeomorfismos a nivel clásico sin trivializar la dinámica.



Dando un paso más en nuestra especulación basada en este modelo fenomenológico, estamos asumiendo una visión de la realidad en diferentes niveles de teorías efectivas estratificadas en función de una energía característica. En términos generales, el comportamiento cuántico se hace más patente al aumentar la energía <sup>2</sup>. Distinguiremos cuatro regímenes en la descripción de la Gravedad: región *clásica*, descrita por la Relatividad General, *semiclásica*, descrita por la teoría cuántica de campos en espacios curvos, *semicuántica*, que es la descrita en nuestro modelo, y región puramente *cuántica* que se describiría en términos de grados de libertad fundamentales, aún por dilucidar.

Situados en este contexto, y motivados por el análisis de las anomalías en CSG, proponemos que el aumento de la energía implica la aparición de nuevos grados de libertad físicos en la teoría. Utilizando un símil de materia condensada, podemos decir que existen distintas temperaturas de activación para diferentes grados de libertad, de forma que por debajo de esa temperatura ciertos modos se desacoplan. Ésta es básicamente la idea de que el *tamaño* del espacio de las fases cuántico es, en general, mayor que el clásico. Consecuentemente, la propia noción de grado de libertad físico o gauge queda relativizada y sujeta a la energía característica del fenómeno en concreto que estemos estudiando.

- e) La otra línea discutida en esta memoria, esto es, el modelo con grados de libertad obtenidos al hacer locales y truncar ciertos subgrupos de la simetría cinemática, aporta nueva luz sobre la interacción de una partícula con un campo externo, al interpretar ciertos parámetros cohomológicos como las constantes que caracterizan y describen el estado de la partícula y sus interacciones. En concreto, tales parámetros incluyen la carga eléctrica, la masa dinámica (la relación de la masa cinemática y la cohomología es conocida desde hace tiempo [So70, Mich64]), la posibilidad de correcciones a la masa cinemática y una mezcla de interacciones gravitatorias y electromagnéticas.

### 7.1.3 Estructura del espacio-tiempo

La ausencia de una interpretación como teoría completa en el actual grado de desarrollo de nuestros modelos, hace que aplacemos el intento de formular una reconstrucción en sentido literal de la noción de espacio-tiempo.

El mecanismo presentado en el caso bidimensional, que contiene interesantes aspectos a pesar de incorporar hipótesis de naturaleza *ad hoc*, deberá ser reevaluado en dimensiones realistas una vez que se disponga de la adecuada identificación y descripción de los grados de libertad fundamentales en Gravedad. Este objetivo ha funcionado, en cualquier caso, como estímulo continuo en el estudio de los restantes aspectos del trabajo.

Por otro lado, y en el caso de completar este objetivo, cabe plantearse si una derivación de la estructura espacio-temporal *a partir* de los difeomorfismos, concepto que precisa en su propia definición de la existencia de una variedad soporte, no se da cierto razonamiento *circular*. En tal caso, al trabajar con estructuras *equivalentes* al mismo nivel, en lugar

<sup>2</sup>Por supuesto, existen fenómenos cuánticos a bajas energías, pero en general tales rasgos se hacen más relevantes al aumentar la energía. En definitiva, la descripción de los fenómenos gravitatorios a altas energías es una de las motivaciones para tratar de construir una teoría cuántica de la Gravedad. Aunque no se puede descartar la posibilidad de que toda la teoría sea asintóticamente libre [FT81].



de hablar de *derivación* quizá sería más apropiado hablar de *caracterización* de la estructura espacio-temporal *en términos* de los difeomorfismos. Tal caracterización implicaría igualmente una profunda revisión de la dinámica del espacio-tiempo.

## 7.2 Perspectivas futuras

Los desarrollos presentados en esta Tesis representan el planteamiento de una línea de investigación y deben considerarse como un estadio intermedio de un trabajo en desarrollo. En este sentido, algunos de los posibles pasos siguientes, ordenados de menor a mayor grado de ambición, serían:

1. En el espíritu de la aproximación fenomenológica, construir modelos efectivos con grados de libertad anómalos a partir de las órbitas coadjuntas del grupo de difeomorfismos y sus extensiones, introduciendo explícitamente una acción construida a partir del potencial (local) de la forma simpléctica sobre el espacio de las fases [NP92]. La ventaja de este método es que constituye una forma conceptualmente simple de pasar de nuestras estructuras algebraicas a un lenguaje más estándar de teoría de campos. El problema serio vendría a la hora de cuantizar la teoría.
2. En la dirección hacia una teoría fundamental en la manera presentada en el Apartado 6.3.2 (y [ACN97, CA99]), completar el grupo de difeomorfismos (extendido) con modos gravitatorios externos al mismo. Estudiar en este contexto la mezcla de interacciones.
3. Tratar de *derivar* los grados fundamentales gravitatorios mediante la incorporación de nueva estructura que esté definida en términos del propio grupo de difeomorfismos (como era la caso de las extensiones no centrales). Una posible vía consiste en considerar el primer fibrado jet del grupo de difeomorfismos y dotarlo de estructura de grupo. La motivación para esto es que las conexiones (campos de gauge) en los grupos de gauge se escriben como derivadas totales de los parámetros de gauge cuando carecen de contenido dinámico (son *puros gauges*), pero dejan de poder escribirse así cuando adquieren dinámica. El fibrado jet proporciona precisamente la estructura que distingue un objeto y su derivada como grados de libertad esencialmente independientes.
4. En el caso de culminar con éxito tal derivación de los grados de libertad fundamentales gravitatorios, volver a plantear la posibilidad de reconstruir la estructura espacio-temporal a partir de una teoría directamente cuántica.
5. Generalizar la realización de la noción de simetría a estructuras matemáticas más generales que grupos y álgebras de Lie que presenten una mayor flexibilidad.







## Capítulo 8

# Conclusiones

Principales resultados de la Tesis:

1. Construcción de un modelo de gravedad cuántica bidimensional a partir del grupo de Virasoro abstracto. La noción de espacio-tiempo emerge cuánticamente en ciertos valores críticos de las extensiones centrales, para los cuales los generadores de un subgrupo  $SL(2, \mathbb{R})$  pierden su carácter simpléctico. Estos generadores se interpretan como isometrías del espacio-tiempo, objeto modelado como un espacio homogéneo  $AdS^2 \approx SO(1, 2)/SO(1, 1)$  asociado a cada una de las representaciones irreducibles de  $SL(2, \mathbb{R})$  en el espacio de Hilbert del sistema. La reducción del mismo proporciona una colectividad de espacio-tiempos que son mezclados por la acción de los modos dinámicos de Virasoro, grados de libertad gravitatorios en este modelo.
2. Obtención del límite clásico del anterior modelo bidimensional, recuperando la acción de Polyakov de la gravedad inducida, corregida por un término adicional.
3. Acoplamiento de nuevos modos dinámicos al modelo de gravedad de Virasoro, mediante la incorporación de una simetría de Kac-Moody asociada a un grupo  $SU(1, 1)$ . La reducción (anómala) del modelo ampliado, precisa del uso de una polarización de orden superior construida con operadores cuadráticos en el álgebra envolvente, que permite identificar en los modos de Virasoro una componente *intrínseca*, responsable de los grados de libertad gravitatorios, y una componente *orbital*, expresada en términos de los generadores de Kac-Moody. Por otro lado, la unitariedad del modelo está íntimamente ligada a condiciones de globalidad de la representación, junto con la imposición de ligaduras definidas en términos de la construcción de Sugawara de los generadores del grupo de Virasoro. Como consecuencia de estas ligaduras, la parte *orbital* de los modos de Virasoro se hace gauge, proporcionando un mecanismo que reconcilia el papel de los difeomorfismos como generadores de dinámica en el modelo, con el carácter gauge que presentan en los tratamientos estándar.
4. Derivación de las ecuaciones de Lorentz de una partícula en el seno de un campo electromagnético y de su movimiento geodésico en una métrica linealizada, a partir del estudio de determinados grupos de Lie obtenidos haciendo locales las simetrías cinemáticas relevantes. Este análisis permite la caracterización de las constantes que definen el estado de la partícula y sus interacciones, como parámetros de la cohomología del grupo asociado.



5. Obtención de un término de mezcla entre las fuerzas electromagnética y gravitatoria sobre una partícula, en el contexto del anterior estudio de la dinámica de la partícula que enfatiza el papel clave de las simetrías. La presencia de este término extra en las ecuaciones del movimiento tiene consecuencias experimentales, como son la violación del principio de equivalencia entre masa gravitatoria y cinemática, por un lado, y de la simetría CPT (dependiendo de los valores concretos que tomen las constantes del modelo), por otro.
6. Construcción de una representación de peso máximo del álgebra de los difeomorfismos en dimensiones realistas, actuando sobre el álgebra de corrientes de  $U(1)$  y extendida por un campo tensorial, así como el correspondiente tratamiento semiclásico de la dinámica asociada, donde la obtención de los invariantes Noether presenta un especial interés.

Esta construcción sirve como soporte para el desarrollo de varios modelos cuánticos con interpretación gravitatoria, cada uno de los cuales precisa de la incorporación de cierta estructura adicional. Como modelos *fundamentales*, en primer lugar se presenta la construcción de un espacio de Hilbert donde la métrica actúa como un operador y, en segundo lugar, se plantea un escenario para la mezcla de interacciones asociadas a simetrías internas y espacio-temporales. Por otro lado, se formula un modelo *fenomenológico* donde el sistema dinámico derivado del grupo de difeomorfismos permite estudiar, de forma efectiva, el papel del fenómeno gravitatorio en aspectos (cuánticos) como la generación de masa de partículas. También se apuntan otras modificaciones de alta energía al espectro de las partículas, de manera que a las correcciones al propagador de los campos libres les corresponderían desviaciones de las formas funcionales que describen las fuerzas de interacción. Para ser más precisos y convertir estas observaciones en auténticas predicciones experimentales se requiere más trabajo.

De forma más general, concluimos:

- i)* El grupo de difeomorfismos por sí solo no da cuenta de los grados de libertad gravitacionales y en particular no permite recuperar la estructura espacio-temporal. Si se parte de él, resulta necesaria la introducción de estructura adicional, bien cerrando una simetría mayor o mediante algún tipo de mecanismo *ad hoc*.
- ii)* En general, la presencia de anomalías matemáticamente controlables (como es el caso en CSG) conlleva la aparición de nuevos grados de libertad en el régimen cuántico que están ausentes a nivel clásico. Este hecho modifica profundamente la naturaleza del sistema físico estudiado y en concreto el contenido dinámico o gauge de los grados de libertad que lo describen. En particular, en el caso de un sistema con contrapartida clásica, este fenómeno sugiere la opción de cuantizar primero la dinámica del sistema tomando las ligaduras a posteriori, frente a la posibilidad de resolver primero la teoría para después cuantizarla, pues en este segundo caso el número de grados de libertad se conserva.
- iii)* En el caso gravitatorio aquí estudiado, el anterior mecanismo permite utilizar el grupo de difeomorfismos para estudiar aspectos parciales del problema de la gravedad cuántica. En todos los casos analizados, algunos difeomorfismos pierden su carácter gauge en el régimen cuántico para pasar a ser variables con contenido dinámico.



- iv)* La valoración sobre el interés físico de la aparición de nuevos grados de libertad en el régimen cuántico, queda en suspenso ante la ausencia de una contrapartida experimental. Podemos concluir que existe una auténtica necesidad de nuevos hechos experimentales que guíen un proceso que, por ahora, sólo puede ser especulativo. Por supuesto, tal especulación no es gratuita, pues resulta fundamental para la propia búsqueda de adecuados escenarios experimentales.







## Apéndice A

# Estructuras matemáticas importantes

### A.1 Fibrados principales

La noción de fibrado principal juega un papel clave en este trabajo pues representa el soporte de objetos como las variedades cuánticas o los grupos centralmente extendidos. También es fundamental en el tratamiento global de las teorías de Yang-Mills. Por esta razón, enunciamos su definición así como ciertas nociones básicas.

**Definición A.1.19** (*fibrado principal*). Un fibrado principal  $F(M, G)$  con base la variedad diferenciable  $M$  y grupo estructural  $G$ , es una variedad  $F$  sobre la que actúa el grupo  $G$ <sup>1</sup>. Tal acción cumple los siguientes requisitos:

- i) Es una acción libre de puntos fijos. La órbita de  $G$  a través de un punto  $p \in F$  se denomina la fibra en el punto  $p$  y por ser la acción libre, es difeomorfa a  $G$ .
- ii)  $M$  es el cociente  $F/G$  definido por la relación de equivalencia “pertenecer a la misma fibra”. Denotamos por  $\pi$  a la proyección natural al cociente.
- iii)  $F$  es localmente trivial, lo que significa que para todo punto  $m \in M$  existe un entorno  $U$  de  $m$  tal que  $\pi^{-1}(U)$  es difeomorfo a  $U \times G$ . A este difeomorfismo  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  se le denomina trivialización local.

Entre los elementos que han aparecido en este trabajo ligados a la estructura de fibrado principal, destacamos:

a) *Sección local*

Dado un abierto  $U \subset M$ , se denomina *sección local* a una aplicación  $\sigma : U \rightarrow F$  compatible con la proyección, esto es,  $\pi \circ \sigma(m) = m, \forall m \in U$ .

b) *Función equivariante*

---

<sup>1</sup>Generalmente esta acción se toma por convención por la derecha, pero en el caso de las extensiones centrales es una acción izquierda.



Dado un espacio vectorial  $V$ , y una representación  $D$  de  $G$  en  $V$ , decimos que una función  $\phi : F \rightarrow V$  es *equivariante* (o *G-función*) si <sup>2</sup>

$$\phi(gp) = D(g)\phi(p) \quad . \quad (\text{A.1})$$

c) *Campo vectorial fundamental*

La acción de  $G$  sobre  $F$  define de forma natural una aplicación de  $\mathcal{G}$  en  $TF$ . Dado un elemento  $A \in \mathcal{G}$ , su imagen  $X_A$  se denomina *campo vectorial fundamental* asociado a  $A$  y  $X_A(p)$  es tangente a la fibra en cada  $p \in F$  (por tanto  $\pi(X_A) = 0$ ).

d) *Conexión en un fibrado*

Los fibrados principales poseen una noción natural de verticalidad dada por el núcleo de la proyección  $\pi$ . Sin embargo, en ocasiones (y las construcciones en este trabajo constituyen un ejemplo) se necesita también una noción de *horizontalidad*. Las conexiones juegan este papel.

Una conexión  $\Theta$  es una 1-forma sobre  $F$  con valores en  $\mathcal{G}$  tal que,

1.  $\Theta(X_A) = A$  (en la notación del punto c)).
2.  $R_g^*(\Theta)(X) = Ad(g^{-1})\Theta(X)$  (se ha supuesto una acción derecha).

De hecho, *Theta* permite descomponer el tangente a  $F$  en un punto  $p$ , en una parte vertical y otra horizontal.

Dejamos para la bibliografía [KN63, Na90] el resto de los detalles.

## A.2 Cohomología de grupos y álgebras de Lie

La cohomología es un concepto dual al de *homología*, con lo que su estudio general se encuadra en el contexto del álgebra homológica [HS70]. En general, los conceptos cohomológicos resultan especialmente útiles como herramientas clasificadoras de estructuras en los más diversos contextos.

Muy brevemente, los espacios de cohomología aparecen cuando disponemos de una serie de espacios  $\{C^n\}$ , cuyos elementos se denominan *cocadenas*, de tal manera que existe un conjunto de aplicaciones  $\delta_n : C^n \rightarrow C^{n+1}$

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} \dots \quad , \quad (\text{A.2})$$

denominadas operadores *coborde*, que satisfacen la condición

$$\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0 \quad \forall n \quad . \quad (\text{A.3})$$

De esta manera, la imagen de  $\delta_n$  está dentro del núcleo de  $\delta_{n+1}$ , esto es,  $Im(\delta_{n-1}) \subset Ker(\delta_n)$ . A los elementos de  $Ker(\delta_n)$  los denominamos *n-cociclos* y a los elementos de  $Im(\delta_{n-1})$ , *n-cobordes*. Se denomina *n-ésimo* espacio de cohomología al cociente

$$H^n = \frac{Ker(\delta_n)}{Im(\delta_{n-1})} \quad . \quad (\text{A.4})$$

<sup>2</sup>Normalmente, la noción de función equivariante surge en el contexto de fibrados vectoriales asociados, de los que aquí no vamos a hablar. Asimismo, la representación se evalúa en el inverso, con el objeto de definir una acción derecha. Sin embargo en el contexto en que nosotros trabajamos, nos interesa emplear acciones izquierdas.



Concretamos las estructuras cohomológicas relevantes en esta memoria:

### 1. Cohomología de grupos

Dado un grupo de Lie  $G$ , un grupo abeliano  $A$  y una acción (izquierda)  $R$  de  $G$  sobre  $A$ , podemos definir las cocadenas  $\gamma_n$  del espacio  $C^n$ , que ahora denotaremos  $C_R^n(G, A)$ , como aplicaciones

$$\gamma_n : G \times \dots \times G \rightarrow A, \quad (\text{A.5})$$

dotando a  $C^n$  con estructura de grupo abeliano,

$$(\gamma_n + \gamma'_n)(g_1, \dots, g_n) = \gamma_n(g_1, \dots, g_n) + \gamma'_n(g_1, \dots, g_n) . \quad (\text{A.6})$$

El operador coborde se define en este caso

$$\begin{aligned} (\delta_n \gamma_n)(g_1, \dots, g_n, g_{n+1}) &\equiv R(g_1)(\gamma_n)(g_2, \dots, g_n, g_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \gamma_n(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} \gamma_n(g_1, \dots, g_n), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

y cumple la condición de nilpotencia  $\delta^2 = 0$ . Los espacios de cohomología, en este caso grupos de cohomología, se denotan como

$$H_R^n(G, A) = \frac{\text{Ker}(\delta_n)}{\text{Im}(\delta_{n-1})} . \quad (\text{A.8})$$

Los ejemplos de (A.7) para las primeras cocadenas son:

$$\begin{aligned} (\delta \gamma_0)(g) &= R(g)\gamma_0 - \gamma_0 \\ (\delta \gamma_1)(g_1, g_2) &= R(g_1)\gamma_1(g_2) - \gamma_1(g_1 g_2) + \gamma_1(g_1) \\ (\delta \gamma_2)(g_1, g_2, g_3) &= R(g_1)\gamma_2(g_2, g_3) + \gamma_2(g_1, g_2 g_3) - \gamma_2(g_1 g_2, g_3) - \gamma_2(g_1, g_2) . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Ejemplos:

- a) Haciendo  $A = \mathcal{G}^*$  y tomando  $R$  como la acción coadjunta  $\text{Coad}$  de  $G$  sobre su coálgebra, obtenemos el primer grupo de cohomología  $H_{\text{Coad}}^1(G, \mathcal{G}^*)$ . Imponiendo la condición de antisimetría (2.31) sobre las cocadenas, obtenemos la cohomología simpléctica  $H_S(G, \mathcal{G}^*)$  del Subapartado 2.2.2.a. Las condiciones de cociclo y coborde que aparecían allí se obtienen directamente de la segunda y primera línea de (A.9), respectivamente.
- b) Haciendo  $A = U(1)$  y tomando como  $R$  la representación trivial, obtenemos el grupo  $H^2(G, U(1))$  que clasifica las extensiones centrales en el Subapartado 2.2.2.b.

### 2. Cohomología de álgebras

Dada un álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ , un espacio vectorial  $V$  y una representación  $\rho$  de  $\mathcal{G}$  sobre  $V$ , definimos las cocadenas en  $C_\rho^n(\mathcal{G}, V)$  como aplicaciones antisimétricas

$$\Gamma_n : \mathcal{G} \times \dots \times \mathcal{G} \rightarrow V . \quad (\text{A.10})$$



El operador coborde se define ahora,

$$\begin{aligned}
 (\delta_n \Gamma)(X_1, \dots, X_{n+1}) &\equiv \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i) (\Gamma(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{n+1})) \\
 &+ \sum_{\substack{j, k=1 \\ j < k}}^{n+1} (-1)^{j+k} \rho([X_j, X_k], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_{n+1})
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

que cumple de nuevo  $\delta^2 = 0$ . Los espacios de cohomología se denotan ahora  $H_\rho^n(\mathcal{G}, V)$ . Los ejemplos de la acción de  $\delta$  para las cocadenas más bajas son

$$\begin{aligned}
 (\delta \Gamma_0)(X_1) &= \rho(X_1) \Gamma_0 \\
 (\delta \Gamma_1)(X_1, X_2) &= \rho(X_1) \Gamma_1(X_2) - \rho(X_2) \Gamma_1(X_1) - \rho_1([X_1, X_2]) \\
 (\delta \Gamma_2)(X_1, X_2, X_3) &= \rho(X_1) \Gamma_2(X_2, X_3) - \rho(X_2) \Gamma_2(X_1, X_3) + \\
 &+ \rho(X_3) \Gamma_2(X_1, X_2) - \Gamma_2([X_1, X_2], X_3) + \\
 &+ \Gamma_2([X_1, X_3], X_2) - \Gamma_2([X_2, X_3], X_1) .
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Volviendo a hacer  $V = \mathcal{G}^*$  y  $\rho = \text{coad}$  recuperamos  $H_S(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*) \approx H_{\text{coad}}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ , y haciendo  $V = \mathbb{R} \approx u(1)$  y  $\rho$  trivial, obtenemos  $H^2(\mathcal{G}, U(1))$ .



## Apéndice B

### Reducción de $\mathcal{H}_{(c,c)}$

#### 1. Reducción de $\mathcal{H}_{(c,c)}$ bajo $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$

i) Los vectores de peso máximo de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$  tienen un nivel de Virasoro bien definido.

*Prueba:* sea  $|m\rangle$  un estado en una representación irreducible de  $SL^{(1)}(2, \mathbb{R})$ , satisfaciendo la condición de vector de peso máximo  $\hat{L}_1 |m\rangle = 0$ , que es único en tal representación. Consideremos el vector  $\hat{L}_0 |m\rangle$ , que se encuentra en la misma representación que  $|m\rangle$ . Entonces

$$\hat{L}_1(\hat{L}_0 |m\rangle) = (\hat{L}_1 + \hat{L}_0 \hat{L}_1) |m\rangle = 0 . \quad (\text{B.1})$$

Esto es,  $\hat{L}_0 |m\rangle$  es también un vector de peso máximo, lo cual implica:

$$\hat{L}_0 |m\rangle = N |m\rangle \Rightarrow |m\rangle \text{ autovector de } L_0. \quad (\text{B.2})$$

Además, el valor del Casimir sobre  $|m\rangle$  (y en toda la representación) es  $N(N-1)$ :

$$(\hat{L}_0^2 - \frac{1}{2}(\hat{L}_1 \hat{L}_{-1} + \hat{L}_{-1} \hat{L}_1)) |m\rangle = (\hat{L}_0^2 - \hat{L}_0) |m\rangle = (N^2 - N) |m\rangle = N(N-1) |m\rangle \quad (\text{B.3})$$

ii) Dada una representación irreducible, el nivel de cada uno de los vectores (en caso de que esté bien definido) obtenidos a partir del vector de peso máximo, es mayor que el de éste último.

*Prueba:* Directamente a partir de la construcción de los vectores de la representación  $(\hat{L}_{-1})^n |m\rangle$ .

iii) En el nivel  $N$  de Virasoro existen  $D^{(N)} - D^{(N-1)}$  vectores de peso máximo, donde  $D^{(N)}$  es la dimensión del nivel  $N$ .

*Prueba:* Usamos inducción sobre  $N$ .

Para  $N=2$  tenemos  $(D^{(2)} - D^{(1)} = 1 - 0 = 1)$ , y de hecho el único vector linealmente independiente en el nivel  $N = 2$ ,  $\hat{L}_{-2} |0\rangle$ , es un vector de peso máximo:  $\hat{L}_1 \hat{L}_{-2} |0\rangle = 0$  (podemos asimismo comprobar la validez de nuestra afirmación para  $N = 3$ ,  $D^{(3)} - D^{(2)} = 1 - 1 = 0$ , o  $N = 4$ ,  $D^{(4)} - D^{(3)} = 2 - 1 = 1$ ).

Asumiéndolo para  $N-1$ , consideremos el nivel  $N$ . Existen  $D^{(N)}$  vectores independientes,  $D^{(N-1)}$  de los cuales pertenecen a representaciones inducidas a partir del nivel



$N - 1$  por la acción de  $L_{-1}$ . Por tanto podemos encontrar  $D^{(N)} - D^{(N-1)}$  vectores independientes que no pertenecen a las representaciones construidas a partir de vectores de peso máximo de un nivel inferior y por *ii*) tampoco pueden ser obtenidas a partir de vectores de peso máximo de nivel superior. De esta manera, por pertenecer a alguna representación irreducible (en este punto estamos asumiendo redubilidad completa), ellos mismos tienen que ser vectores de peso máximo. Estos estados generan las  $D^{(N)} - D^{(N-1)}$  representaciones irreducibles de Casimir  $N(N - 1)$  (por *i*)).

(Nota: *ii*) y *iii*) pueden ser evitados directamente, si observamos que el homomorfismo  $\hat{L}_{-1}$  del nivel  $N$  al nivel  $N - 1$  es sobreyectivo. Por tanto, podemos usar

$$\dim(\text{Im } L_{-1}) + \dim(\text{Ker } L_{-1}) = \dim(\text{Level } N) \quad , \quad (\text{B.4})$$

para derivar el resultado buscado, sin asumir la hipótesis de reducibilidad completa, que es recuperada de una forma constructiva).

Finalmente tenemos

$$\mathcal{H}_{(c,c)} = \bigoplus_N (D^{(N)} - D^{(N-1)})R^{(N)} \quad . \quad (\text{B.5})$$

## 2. Ortogonalidad de las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})$

*i*) Diferentes niveles de Virasoro son ortogonales.

Consideremos el vector  $\hat{L}_{n_j} \dots \hat{L}_{n_1} |0\rangle$  en el nivel  $N$  y el vector  $\hat{L}_{m_j} \dots \hat{L}_{m_1} |0\rangle$  en el nivel  $M < N$ . Al construir el producto escalar,  $\langle 0 | \hat{L}_{-m_1} \dots \hat{L}_{-m_j} \hat{L}_{n_j} \dots \hat{L}_{n_1} |0\rangle$ , observamos que el vector  $\hat{L}_{-m_1} \dots \hat{L}_{-m_j} \hat{L}_{n_j} \dots \hat{L}_{n_1} |0\rangle$  pertenece al nivel  $N - M$ , y por tanto puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores en una base de ese nivel. Cada uno de los elementos de la base aniquilan  $\langle 0 |$  por las condiciones de vacío.

*ii*) Estados del mismo nivel en diferentes representaciones de  $SL(2, \mathbb{R})$  son ortogonales.

Consideremos dos estados de peso máximo  $|N_1\rangle$  y  $|N_2\rangle$ , correspondientes a diferentes representaciones y de nivel  $N_1$  y  $N_2$  ( $N_1 \leq N_2$ ), respectivamente. Ahora, consideremos el producto escalar de dos estados  $(\hat{L}_{-1})^{n_1} |N_1\rangle$  y  $(\hat{L}_{-1})^{n_2} |N_2\rangle$ , tales que  $n_1 + N_1 = n_2 + N_2$ :

$$\langle N_1 | (\hat{L}_1)^{n_1} (\hat{L}_{-1})^{n_2} |N_2\rangle = \langle N_1 | (\hat{L}_1)^{n_1 - n_2} (\hat{L}_1)^{n_2} (\hat{L}_{-1})^{n_2} |N_2\rangle \quad (\text{B.6})$$

El operador  $(\hat{L}_1)^{n_2} (\hat{L}_{-1})^{n_2}$  siempre puede ser escrito en la forma  $(\dots)L_1 + L_0$ . El primer término directamente aniquila al vector  $|N_2\rangle$ , mientras que  $|N_2\rangle$  es un autoestado de  $\hat{L}_0$ . Así,

a) Para  $n_1 - n_2 > 0$ ,  $(\hat{L}_1)^{n_1 - n_2}$  aniquila a  $|N_2\rangle$ .

b) Para  $n_1 = n_2$ , siempre podemos escoger  $|N_1\rangle$  ortogonal a  $|N_2\rangle$ , aplicando un procedimiento de Gram-Schmidt.

Por tanto, hemos probado la ortogonalidad de estos dos vectores.



# Bibliografía

- [AM78] Abraham, R., Marsden, J.E., *Foundations of Mechanics* (segunda edición), Addison Wesley (1978).
- [AA82] V. Aldaya and J.A. de Azcárraga, *J. Math. Phys.*, **23** 1297 (1982).
- [AA83] V. Aldaya and J.A. de Azcárraga, *Int. J. of Theor. Phys.* **22**, 1 (1983).
- [AA85] V. Aldaya, J. A. de Azcárraga, *Int. J. Theo. Phys.* **24**, 141 (1985).
- [ABN91] V. Aldaya, J. Bisquert and J. Navarro-Salas, *Phys. Lett.* **A156**, 381 (1991).
- [ABGN96] V. Aldaya, J. Bisquert, J. Guerrero and J. Navarro-Salas, *Rep. Math. Phys.* **37**, 387 (1996).
- [ACC99] V. Aldaya, M. Calixto, J.M. Cerveró, *Commun. Math. Phys.* **200**, 325 (1999).
- [ACN97] V. Aldaya, M. Calixto and M. Navarro, *Int. J. Mod. Phys.* **A12**, 3609 (1997).
- [AG01] V. Aldaya, J. Guerrero, *Rep. Math. Phys.* **47**, 213 (2001).
- [AGM98] V. Aldaya, J. Guerrero and G. Marmo, in *Symmetries in Science X*, Ed. Bruno Gruber, Plenum Press, pág. 1-36 (1998).
- [AJ00a] V. Aldaya, J.L. Jaramillo, *Class. Quantum Grav.* **17**, 1649 (2000).
- [AJ00b] V. Aldaya, J.L. Jaramillo, *Class. Quantum Grav.* **17**, 4877 (2000).
- [AJ00c] V. Aldaya, J.L. Jaramillo, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl)* **B88**, 229 (2000).
- [AJ02] V. Aldaya, J.L. Jaramillo, *en preparación*.
- [AJGa] V. Aldaya, J.L. Jaramillo and J. Guerrero, *enviado*.
- [AJGb] V. Aldaya, J.L. Jaramillo and J. Guerrero, *en preparación*.
- [AKN91] V. Aldaya, J.R. Klauder and J. Navarro-Salas, *Class. Quant. Grav.* **8**, 413 (1991).
- [ALN89a] V. Aldaya, R. Loll and J. Navarro-Salas, *Phys.Lett.* **B225**, 340 (1989).
- [ALN89b] V. Aldaya, R. Loll and J. Navarro-Salas, *Phys.Lett.* **B237**, 392 (1989).
- [AN87] V. Aldaya, J. Navarro-Salas, *Commun. Math. Phys.* **113**, 375 (1987).
- [AN90] V. Aldaya, J. Navarro-Salas, *Commun. Math. Phys.* **126**, 575 (1990).



- [AN91] V. Aldaya, J. Navarro-Salas, Commun. Math. Phys. **139**, 433 (1991).
- [AN92] V. Aldaya, J. Navarro-Salas, Phys. Lett. **B274**, 79 (1992).
- [ABLN92] V. Aldaya, J. Navarro-Salas, J. Bisquert, R. Loll, J. Navarro-Salas, J. Math. Phys. **33**, 3087 (1992).
- [ANN91] V. Aldaya, J. Navarro-Salas and M. Navarro, Phys.Lett. **B260**, 311 (1991).
- [ARN89] V. Aldaya, A. Ramírez and J. Navarro-Salas, Commun. Math. Phys. **121** 541 (1989).
- [AS89] A. Alekseev and S. Shatashvili, Nuc. Phys. **B323**, 719 (1989).
- [Al89] E. Álvarez, Rev. Mod. Phys. **61**, 561 (1989).
- [AIS78] S.J. Avis, C.J. Isham and D. Storey, Phys. Rev. **D18**, 3565 (1978).
- [Ar78] V.I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag (1978).
- [AT94] A. Ashtekar, R.S. Tate, J.Math.Phys. **35**, 6434 (1994).
- [BCJ94] D. Bak, D. Cangemi, R. Jackiw, Phys. Rev. **D49**, 5173 (1994).
- [Ba54] V. Bargmann, Ann. Math. **59**, 1 (1954).
- [Be99] C. Bernard *et al.*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73**, 198 (1999).
- [BRFW89] J. Balog, L. O’Raighfertaigh, P. Forgacs and A. Wipf, Nucl. Phys. **B325**, 225 (1989).
- [Ban99] M. Bañados, Charla invitada en *Second Meeting "Trends in Theoretical Physics"*, Buenos Aires (1998); **hep-th9901148**.
- [Bar94] I. Bars, in *"Perspectives in Mathematical physics"*, Vol.III, Eds. R. Penner and S.T. Yau, International Press (1994).
- [Bar96] I. Bars, Phys.Rev. **D53** 3308-3323 (1996).
- [BN91] I. Bars and D. Nemeschansky, Nucl. Phys. **B348** 89 (1991).
- [BD82] N.D. Birrel, P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press (1982).
- [Bau96] G. Baur *et al.*, Phys. Lett. **B368**, 251 (1996).
- [Bl98] G. Blanford *et al.*, Phys. Rev. Lett. **80**, 3037 (1998).
- [Br93] L. M. Brown (ed.), *Renormalization*, Springer-Verlag (1993).
- [BH86] J.D. Brown, M. Henneaux, Commun. Math. Phys. **104**, 207 (1986).
- [CA99] M. Calixto, V. Aldaya, J. Phys. **A 32**, 7287 (1999).
- [Ca97] S. Carlip, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B57**, 8 (1997).



- [Ca98] S. Carlip, *Quantum gravity in 2+1 dimensions*, Cambridge University Press (1998).
- [CEHHZ94] M. Charlton, J. Eades, D. Horvath, R.J. Hughes, C. Zimmermann, *Physics Reports* **241**, 65 (1994).
- [CL84] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li, *Gauge theory of elementary particles*, Oxford University Press (1984).
- [Col88] S. Coleman, *Nucl. Phys.* **B310**, 643 (1988).
- [Co94] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).
- [Di25] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London ser. A*, **109**, 642 (1925).
- [DLP89] L.J. Dixon, J. Lykken and M.E. Peskin, *Nucl. Phys.* **B325**, 329 (1989).
- [Dz96] A. Dzhumadil'daev, *Z. Phys. C* **72**, 509 (1996).
- [EMRV99] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy, C. Victoria-Monge, **math-ph/9904008**.
- [FS86] L.D. Faddeev and S.L. Shatashvili, *Phys. Lett.* **167B**, 225 (1986).
- [FF82] B.L. Feigin and D.B. Fuchs, *Funct. Anal. Appl.* **16**, 114 (1982).
- [FT81] T.S. Fradkin, A.A. Tseytlin, *Phys. Lett.* **104B**, 377 (1981).
- [FMS97] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal field theory*, Springer-Verlag (1997).
- [Fu84] D.B. Fuks, *Cohomology of infinite dimensional algebras*, Consultants Bureau (Russian ed. (1984)), (1986).
- [FQS84] D. Friedan, Z. Qiu and S. Shenker, *Phys. Rev. Lett* **52**, 1575 (1984).
- [Fr74] C. Fronsdal, *Phys. Rev.* **D10** 589 (1974).
- [Ga91] K. Gawedzki, *Non-compact WZW conformal field theories*, hep-th/9110076.
- [GH96] F. Gronwald, F.W. Hehl, **gr-qc/9602013**.
- [GN43] I.M. Gel'fand and M.A. Naimark, *Mat. Sb.* **12**, 197 (1943).
- [GN48] I.M. Gel'fand and M.A. Naimark, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **12**, 445 (1948).
- [GP89] A. Galindo, P. Pascual, *Mecánica Cuántica*, Eudema Universidad (1989).
- [GRC64] I.M. Gelfand, D.A. Raikov and G.E. Chilov, *Les Anneaux normis commutatifs*, Gauthier-Villars, Paris (1964).
- [Gu95] J. Guerrero, *Técnica de polarizaciones de orden superior en cuantización y anomalías*, tesis doctoral. Universidad de Granada (1995).
- [GS84] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic techniques in Physics* (cuarta edición), Cambridge University Press (1984).



- [GS87] M. Gökeler, T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity*, Cambridge University Press (1987).
- [GO86] P. Goddard, D. Olive, *Int. Jour. Mod. Phys.***1**, 303 (1986).
- [Go69] Godbillon, C., *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann (1969).
- [Gol92] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, Editorial Reverté (1992).
- [GSW87] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory, Volume I, Introduction*, Cambridge University Press (1987).
- [Ha89] M. Hammermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Dover Publ. Inc., NY (1989).
- [HE73] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space time*, Cambridge University Press (1973).
- [He78] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, N.Y. (1978).
- [HB66] W. J. Holman, L.C. Biedenharn, *Ann. Phys.* **39**, 1 (1966).
- [HMMN95] F.W. Hehl, J.D. McCrea, E.W. Mielke, Y. Ne'eman, *Phys.Rept.* 258, 1 (1995).
- [HT92] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press (1992).
- [HS70] P.J. Hilton, U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Springer-Verlag (1970).
- [Hu93] C.M. Hull, *Commun. Math. Phys.* **156**, 245 (1993).
- [Is84] C.J. Isham, en *Relativity, Groups and Topology II, Les Houches 1983*, editado por B.S DeWitt y R. Stora, North Holland, Amsterdam (1984).
- [Is95] C.J. Isham, *Plenary lecture GR14 Conference*, **gr-qc/9510063**, (1995).
- [Is02] C.J. Isham, Imperial/TP/01-02/20, **quant-ph/0206090** (2002).
- [ID89] C. Itzykson, J.M. Drouffe, *Statistical field theory, Volume 2*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1989).
- [IS83] D. Ivanenko, G. Sardanashvily, *Phys. Rep.* **94**, 1 (1983).
- [IW56] E. Inönü and E.P. Wigner, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **39**, 510 (1956).
- [Ja62] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover (1962).
- [Ja95] T. Jacobson, *Phys.Rev.Lett.* 75, 1260 (1995).
- [JA99] J.L. Jaramillo, V. Aldaya, *J.Phys. A* L503 (1999).
- [JA02] J.L. Jaramillo, V. Aldaya, *Mod. Phys. Let* **A17** 809 (2002).



- [JN96] B. Julia and H. Nicolai, *Nuc. Phys.* **B482** 431 (1996).
- [Ka79] V.G. Kac, *Lecture Notes in Physics* **94**, 441 (1979).
- [Kib61] T.W.B. Kibble, *J. Math. Phys.* **2**, 212 (1961).
- [Kir76] A.A. Kirillov, *Elements of the theory of representations*, Springer Verlag (1976).
- [KN63] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, J. Wiley (1963).
- [Ko97] M. Kontsevich, **q-alg/9709040**.
- [KMS67] J. Kuriyan, N. Mukunda, E.C.G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **9**, 2100 (1967).
- [La75] S. Lang, *SL<sub>2</sub>(R)*, Addison-Wesley Publishing Company (1975).
- [Lar99] T.A. Larsson, *Commun. Math. Phys.* **201** (1999), 461.
- [Lar00] T.A. Larsson, **math-ph/0002016**.
- [Le69] J.M. Lévy-Leblond, *Commun. Math. Phys.* **12**, 64 (1969).
- [Le71] J.M. Lévy-Leblond, en *Group theory and its applications*, Vol. II, E.M. Loebl ed., Acad. Press, pp. 221 (1971).
- [LNR66] N. Limic, J. Niederle, R. Raczka, *J. Math. Phys.* **7**, 2026 (1966).
- [LNR67] N. Limic, J. Niederle, R. Raczka, *J. Math. Phys.* **8**, 1079 (1967).
- [Lo04] H.A. Lorentz, *Proc. Acad. Sci., Amsterdam* **6** (1904). Reprinted in A. Einstein *et al.*, *The Principle of Relativity*, Dover (1952).
- [Mad92a] J. Madore, *Class. Quant. Grav.*, **9** 69 (1992).
- [Mad92b] J. Madore, *Annals of Physics*, **219** 187 (1992).
- [Maj93] P. Majumdar, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 2059.
- [MR94] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag (1994).
- [Mich64] L. Michel, en *Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics*. F. Gürsey ed., Gordon & Breach, 135 (1964).
- [Mick86] J. Mickelsson, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 2493.
- [Mick89] J. Mickelsson, *Current Algebras and Groups*, Plenun Press (1989).
- [Mik92] A. Mikovic, *Phys. Lett.* **B291** 19 (1992).
- [Mill72] W. Miller, *Symmetry Groups and their Applications*, Academic Press (1972).
- [Miln84] J. W. Milnor, in *Relativity, Groups and Topology II*, Les Houches Session XL, 1983, ediatdo por B.S. de Witte R. Stora, North-Hollans, Amsterdam (1984).
- [Mo95] M. de Montigny, *Graded contractions of affine Kac-Moody algebras*, **q-alg/9512020**.



- [Moy49] J.E. Moyal, Proc. Cambridge Philos. Soc. **45**, 99 (1949).
- [Mu67] N. Mukunda, J. Math. Phys. **8**, 2210 (1967).
- [MACS00] N. Mukunda, Arvind, S. Chaturvedi, R. Simon, **quant-ph/0002070**.
- [Na90] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Ltd. (1990).
- [NNA93] J. Navarro-Salas, M. Navarro and V. Aldaya, Nuc.Phys. **B403** 291 (1993).
- [NP92] E. Nissimov and S. Pacheva, Theor. Math. Phys., **93** 1268 (1992).
- [Po81] A.M. Polyakov, Phys. Lett. **B163**, 207 (1981).
- [Po87] A.M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. **A11**, 893 (1987).
- [Pol98] J. Polchinski, *String Theory Vol. I*, Cambridge University Press.
- [Pr91] J. Preskill, Ann. Phys.(N.Y.) **210**, 323 (1991).
- [PS86] A. Pressley and G. Segal, *Loop groups*, Oxford Science Publications (1986).
- [RT74] T. Regge, C. Teitelboim, Ann. Phys. (N.Y.) **88**, 286 (1974).
- [Ro98] C. Rovelli, Charla en *GR15 Conference*, Puna (1998).
- [Ro99] C. Rovelli, J.Math.Phys. **41**, 3776 (2000).
- [Ro00] C. Rovelli, Charla en *9th Marcel Grossmann Meeting Roma* (2000); **gr-qc/0006061**.
- [RLN66] R. Raczka, N. Limic, J. Niederle, J. Math. Phys. **7**, 1861 (1966).
- [Ru66] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, NY (1966).
- [Sa61] E.J. Saletan, J. Math. Phys. **2**, 1 (1961).
- [Se65] J.P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, New Yor, Benjamin (1965).
- [So70] J.M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod Université (1970).
- [Su68] H. Sugawara, Phys. Rev. **170**, 1659 (1968).
- [Sn80] J. Sniatycki, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1980).
- [Th84] C.B. Thorn, Nucl. Phys. **B 248**, 551 (1984).
- [Ut56] R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
- [Wa84] R.M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [Wa92] R.M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, The University of Chicago Press (1992).
- [We72] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972).
- [We95] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press.



- [Wil99] F. Wilczek, *Physics Today*, Nov. 1999, 11.
- [Wil02] F. Wilczek, **hep-ph/0201222**.
- [Wit88] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **114**, 1 (1988).
- [Wit91] E. Witten, *Phys. Rev. D* **44**, 314 (1991).
- [Wo91] Woodhouse, N. M. J. (1991), *Geometric Quantization* (segunda edición), Oxford University Press.
- [Wu01] N. Wu, **hep-th/0109145**.
- [Yu76] H. P. Yuen, *Phys. Rev. A* **13**, 2226 (1976).
- [Za85] A.B. Zamolodchikov, *Theor. Math. Phys.* **65**, 1205 (1985).