UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS CUESTIONES SOBRE PROCESOS DE DECISION MARKOVIANOS

MEMORIA que, para optar al grado de Doctor, presenta el licenciado en Ciencias Matematicas D. MIguel Delgado Calvo-Flores

Miguel Delgado

Vº Bº El director del trabajo

R Infante M

Fdo. Prof. Dr. D. Rafael Infante Macias

Quiero expresar mi profundo agradecimiento al Profesor Dr. D. Rafael Infante Macias, director de esta memoria por su constante estimulo y ayuda en la preparación de la misma.

Asi mismo, quiero hacer llegar mi reconocimiento a todos aquellos que de un modo u otro han contribuido a la realización de este trabajo, en especial a la Catedra de Investigación Operativa.

Granada Agosto de 1975

I - INTRODUCCION

I-1 PLANTEAMIENTO Y OBJETIVOS

La memoria que presentamos, tiene como objetivo fundamental, el intento de sistematización de algunos problemas de Decisión - Markovianos con espacio contínuo de alternativas (controles ---- $u \in U \subset \mathbb{R}^m$) aún no satisfactoriamente resueltos en algunos tipos de cadenas estacionarias y procesos generales.

Bajo este punto de vista, y teniendo en cuenta que en el caso de que la región de control $U \subset \mathbb{R}^m$ se necesitan condiciones de continuidad, tal como establece el profesor Vélez Ibarrola en su tesis doctoral, y por tanto topologización de los espacios base, podemos dividir nuestro trabajo en dos grandes apartados:

a) Para evitar trivialidades, creación de topologías sobre el espacio de estados de una cadena de Markov estacionaria, englobando todas las situaciones posibles, tanto de cadenas finitas como infinitas, y dentro de éstas con matrices estocásticas ó subestocásticas. Además, pretendemos que estas topologías reflejen las propiedades de las cadenas consideradas, en cuanto a consideraciones de evolución y accesibilidad se refiere.

b) Aplicar las construcciones topológicas anteriores a la resolución de problemas de decisión sobre cadenas generales con - $U \subset \mathbb{R}^m$, en el sentido de establecer condiciones para la existencia de las políticas óptimas y la forma de la ganancias esperadas.

Al objeto de situarnos un poco en el tema, vamos a tratar de realizar un breve bosquejo histórico de los puntos que presentamos a estudio.

I-2 BREVE BOSQUEJO HISTORICO

El estudio de las propiedades topológicas del espacio de estados de una cadena de Markov estacionaria, y en general de un cierto proceso estocástico markoviano, comienza en la década de los 50 como herramienta para el estudio del potencial aleatorio y más concretamente, para la determinación de la expresión integral de las funciones armónicas, es decir, aquellas que cumplen G.f = f donde G es el operador asociado con el proceso considerado.

Por este motivo, el intentar hacer historia sobre los trabajos de topologización del espacio de estados de una cadena, es tanto como hacer historia sobre el desarrollo de la Teoría del Potencial aleatorio, lo que escapa de las líneas de esta introducción. Por ésto, destacaremos únicamente los trabajos fundamentales sobre el punto que a nosotros nos interesa.

Por otra parte, queremos hacer notar, que debido a que la teoría del potencial aleatorio sólo tiene sentido sobre cadenas transitorias y recurrentes, todo lo que la literatura especializada ofrece en este sentido, queda reducido a estos dos casos particulares.

Doob en 1.959 y Watanabe en 1.960, usando métodos clásicos de los potenciales newtonianos, las ideas de Martin sobre operadores positivos, y los trabajos de Feller sobre fronteras inducidas por matrices positivas, introducen para cadenas estacionarias transitorias (ver II-1) una cierta métrica en el espacio de estados que, lógicamente, dota a éste de una estructura topológica. A partir de ella, se llega al concepto de FRONTERA DE MARTIN de tanta importancia en la Teoría del potencial aleatorio.

Hunt en 1.960, da un tratamiento mucho más probabilístico de la teoría de la frontera en cadenas estacionarias transitorias y por tanto, a la topología del espacio de estados, demostrando una serie de relaciones que la misma posee con las propiedades probabilísticas de la cadena. Este autor, completa en muchos aspectos los trabajos de Doob y Watanabe.

En todos los estudios sobre cadenas transitorias, dada la matriz N de los tiempos medios de recurrencia, finita por construcción (ver II-1) y una cierta distribución inicial π , se construye una métrica a partir del vector πN. Aprovechándose de las condiciones de dualidad, también se estudia el caso de cadenas inversas a partir de vectores del tipo N.f donde f se considera como una distribución de partida con tiempo inverso. Doob y Watanabe, suponían que era degenerada tanto π como f, mientras que Hunt admite una distribución en el sentido amplio de la palabra.

Posteriormente, Kemeny, Snell y Knap (16) hacen un tratamiento exhaustivo del tema de la topología sobre el espacio de estados de una cadena transitoria, estableciendo las hipótesis fundamentales sobre el cardinal de los conjuntos considerados y admitiendo que π pueda tener alguna entrada nula.

Trabajos posterioros sobre el tema son debidos a K.L. Chung y P.A. Meyer, que se dedican sobre todo a los problemas con tiempo contínuo no aportando nada a las construcciones de Kemeny, sino estudiando simplemente algunas consecuencias de sus construcciones.

La extensión de las topologías al caso de cadenas recurrentes, (ver II-1) es debida fundamentalmente a Kemeny y Snell (1.963) utilizando un convenio para pasar de una cadena recurrente a otra transitoria equivalente en un número finito de pasos, sobre la que se realizan construcciones para llegar a una topología métrica sobre su espacio de estados. En 1.964, Orey introduce una forma equivalente con condiciones menos restringidas.

Todos los trabajos en este sentido, se encuentran recogidos en el libro de Kemeny y Knapp (16) con las condiciones más generales posibles.

Como en cadenas transitorias, K.L. Chung y P.A. Meyer, han estudiado el problema de la frontera, trasladándolo al caso de tiem po continuo, que no es de interés para nosotros.

La escuela que actualmente se ocupa con más intensidad de estas cuestiones, es la de Strasburgo bajo la dirección de P. A. Meyer.

Una nueva forma que se postula para enfocar estos problemas, la presentan algunas escuelas italianas y francesas, que proponen la aplicación de las topologías combinatorias sobre grafos.

Repasando todos los resultados obtenidos hasta el momento por los distintos autores, se comprueba que todos los trabajos sobre topologización del espacio de estados de una cadena de Markov, han sido realizados desde el punto de vista de la Teoría del potencial, ocupándose solamente de los casos transitorios y recurrentes, que bajo ese punto de vista son los más interesantes.

En cadenas que no sean ni transitorias ni recurrentes, todos los autores se limitan a considerar que dicha cadena se reduce a un caso más simple en sus evoluciones a lo largo del tiempo, y por ello no las tratan de un modo sistemático. No obstante, para nuestro objetivo desde el punto de vista de la Teoría de la Decisión, necesitamos dotar de estructura topológica al espacio de estados de una cadena general, lo que ha sido realizado siguiendo las líneas de la teoría conjuntista.

En algunas situaciones (cadenas transitorias) hemos aprovechado los trabajos existentes, por el contrario, en el caso de cadenas recurrentes nos hemos visto precisados de modificar algunas consideraciones. Nuestra contribución fundamental en este sentido es la estructura topológica sobre cadenas generales, obteniéndose hasta tres tipos ques se completan mútuamente en los distintos casos y que además deben admitir un estudio desde el punto de vista de la Teoría del Potencial aleatorio.

El aspecto fundamental que queremos destacar de esta parte de nuestro trabajo, es que, siguiendo las líneas marcadas en la lite ratura y al igual que las métricas construídas sobre cadenas transitorias y recurrentes, las topologías que hemos construído sobre cadenas generales, están íntimamente relacionadas con las propiedades aleatorias de las cadenas en cuanto a accesibilidad y comunicación se refiere. Al objeto de resaltar esta característica, en cada caso se hace una interpretación probabilística de los teoremas topológicos, comprobándose que toda la construcción es perfectamente compatible.

Para dar una idea de la marcha de nuestros métodos, indicaremos que siempre nos hemos basado en las relaciones de accesibilidad y comunicación entre estados, aprovechando que toda relación de equivalencia puede inducir una serie de topologías, uniformes ó no, sobre el espacio en que se construye.

También, se ha definido una semidistancia entre estados de una dacena cualquiera, lo que naturalmente podrá dar lugar a una métrica. La topología engendrada por la semidistancia, es a nuestro juicio de gran interés, pués sobre ella la probabilidad verifica una serie de propiedades de continuidad que pueden ser fundamentales para algunos estudios sobre cadenas.

Queremos destacar también, que nuestras construcciones, tal como hemos apuntado al comienzo, son válidas tanto en el caso finito como infinito, contando además en este último con la posibilidad de que la matriz sea subestocástica. Este enfoque, sigue las líneas de Kemeny, que a nuestro juicio son las más generales posibles.

Por último, queremos hacer notar, que aunque hemos trabajado con una meta un tanto particular, sin embargo, los resultados obtenidos son bastante generales y pueden servir, según creemos, para resolver algunos problemas de la Teoría del Potencial aleatorio que se encuentren aún sin estructurar.

*** Un PROCESO DE DECISION MARKOVIANO, puede ser considerado como un caso particular de Teoría de la Decisión y Teoría de Control, en el cual, un sistema dinámico estocástico, evoluciona en el tiempo de acuerdo con un proceso de Markov, ocupando posiciones ó estados de un cierto espacio C, de tal manera que cada transición produce un beneficio, bajo la hipótesis, de que el movimiento del sistema (las probabilidades de transición) y las recompensas asociadas, pueden ser modificadas mediante la elección de controles ó alternativas dentro de un cierto conjunto U. Toda aplicación $e: C \longrightarrow U$, será denominada ESTRATEGIA, y debe ser considerada como un indicador de nuestra línea de conducta, en el sentido de que nos marca cual debe ser la alternativa a elegir dependiendo del estado en que se encuentre el sistema considerado.

En estas condiciones, se trata de escoger las estrategias de manera óptima, es decir, que proporcionen ganancia esperada máxima para el decisor.

Por tratarse de un sistema que evoluciona en el tiempo, estas estrategias deberán determinarse para cualquier instante del tiempo (discreto ó contínuo) surgiendo así el concepto de POLITICA, como familia de estrategias dependiente del tiempo.

De acuerdo con este planteamiento, los problemas fundamentales que se presentan dentro de este tipo de procesos son los siguientes:

a) Determinación de la forma de la ganancia óptima en el tiempo.

b) Condiciones para la existencia de una política óptima, en el sentido de que maximice la ganancia esperada en cualquier instante del tiempo.

c) Forma límite de la ganancia óptima cuando el tiempo tiende a infinito.

d) Condiciones de estabilización de la política óptima, al tomar límite cuando el tiempo tiende a infinito.

a los cuales han tratado de dar respuesta distintos autores a lo largo del tiempo en las condiciones más diversas.

El carácter de proceso de decisión secuencial que poseen todos estos problemas, se pone especialmente de manifiesto cuando se trata de un proceso de Markov con tiempo discreto, ya que, encontrándonos en un cierto estado y bajo la elección de un cierto control $u \in U$, en la etapa en cuestión se produce la transición a otro estado, siguiendo la ley correspondiente a la alternativa escogida y proporcionando una ganancia que depende de la elección realizada. Desde el estado alcanzado, y para la siguiente etapa, será necesario tomar una nueva decisión que conducirá a un nuevo paso en la siguiente etapa. Como ya se ha indicado, a estas decisiones se les impondrán condiciones de optimalidad. Este tipo de procesos con tiempo discreto, son los que vamos a considerar en nuestro trabajo.

El intentar hacer un bosquejo histórico del desarrollo que han experimentado los métodos de resolución encaminados a dar respuesta a las cuatro preguntas anteriormente formuladas, presenta enormes dificultades, ya que han sido multitud los autores que han analizado los mismos y por tanto, múltiples las teorías que se han creado. Por este motivo, trataremos únicamente de hacer un poco de repaso, hasta situarnos en las condiciones que vamos a trabajar, es decir, en los procesos de decisión markovianos con tiempo discreto y estacionarios, con conjunto U de alternativas perteneciente a $\mathbb{R}^m$.

La herramienta básica en este tipo de problemas, es el PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE BELLMAN dado por el autor en 1.957, punto de partida de la Programación Dinámica, dentro de cuyo contexto se encuadran estos procesos. En este mismo año, el propio Bellman estudiará las generalidades de su aplicación a éstos.

No obstante los intentos de Bellman, debe considerarse a Howard como el verdadero iniciador de los estudios sobre los modelos markovianos, pués en 1.960 publica una obra ya clásica (13) en la que, mediante la aplicación del principio de optimalidad, estudia el problema de decisión situándose en el contexto de cadenas estacionarias finitas sin estados transitorios y con conjunto U de alternativas también finito. En estas condiciones, establece algoritmos para la determinación de ganancias óptimas y las políticas asociadas, tanto con horizonte finito como infinito.

A pesar de la simplicidad de los modelos y métodos utilizados por el autor, la obra debe ser considerada como capital, ya que marca la pauta para posteriores investigaciones.

En 1.962, Bellman y Dreyfus recogen estos trabajos junto con algunas nuevas aportaciones de Blackwell completa en el mismo año.

En el estudio de la generalización de los métodos propuestos por Howard al caso de cadenas con un número infinito de estados, estacionarias y con U finito, podemos destacar a Derman y Maitra, que a partir de 1.965 han publicado múltiples trabajos el tema.

En el mismo año 1.965, Blackwell inicia el estudio de los procesos de decisión markovianos estacionarios con espacio de estados general, obteniendo una serie de resultados para el caso de U numerable y estableciendo las condiciones bajo las que se ha de trabajar en el caso de $U \subset \mathbb{R}^m$. Estas condiciones, sistematizadas y perfeccionadas por estudios posteriores, son las que vamos a aplicar a nuestras generalizaciones. El propio Blackwell en 1.967 vuelve a trabajar sobre el tema desde un punto de vista un poco más aplicativo y amplio.

A partir de 1.966 y a raiz de algunos trabajos de Derman Strauch y Maitra, se ha comenzado a estudiar los procesos de decisión sobre transiciones markovianas no estacionarias, tanto en los casos generales como en los numerables del espacio de alternativas. Por otra parte, aunque se consideren procesos de decisión con probabilidades estacionarias, para cada alternativa supuesta fija, el hecho de ir tomando decisiones paso a paso (que naturalmente modifican las leyes de transición de cada etapa) suponen realmente, la creación de un proceso no estacionario. Desde este punto de vista, han sido estudiados por algunos autores, como Hinderer, Sirjaev y Dynkin, que han probado la equivalencia de los resultados. Esta, es una de las más modernas directrices en el estudio de los procesos de decisión markovianos.

En lugar de partir del principio de optimalidad de Bellman, en el estudio de este tipo de problemas también se puede partir del PRINCIPIO DE MAXIMO DE PONTRYAGUIN que conduce a una formulación equivalente. No entraremos en ella por apartarse de nuestros objetivos.

Queremos destacar también, que existen estudios de procesos con información incompleta que utilizan procedimientos bayesanos de resolución. No haremos hincapié alguno sobre ellos pués carecen de interés para nosotros.

En 1.974, el profesor Vélez Ibarrola del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Complutense de Madrid, ha realizado en su tesis doctoral un estudio muy completo de los procesos de decisión markovianos, tanto en tiempo discreto como contínuo, bajo la hipótesis de homogeneidad.

Recopilando los resultados obtenidos hasta el momento, podemos observar que el problema de decisión en una cadena infinita, de matriz de transición P estocástica ó subestocástica, y con conjunto de alternativas $U \subset \mathbb{R}^m$, realmente no ha sido tratado con rigor.

Situándonos dentro del contexto más general establecido por el profesor Vélez Ibarrola, si $U \subset \mathbb{R}^m$ se exigen unas hipótesis de continuidad sobre las funciones que intervienen en el problema, lo que determina que el espacio C de estados, deba poseer una topología Θ, sobre la que se construye el σ álgebra $\mathcal{A}=\sigma(\Theta)$ engendrada por la misma.

Aprovechando ahora los resultados que poseemos sobre la topologización del espacio de estados de cualquier tipo de cadena, es posible establecer condiciones de existencia para las políticas óptimas y la forma de las ganancias tanto en horizonte finito como infinito, bajo la simple hipótesis de que la cadena sea numerable.

Para probar la potencia de las construcciones realizadas, observaremos, que los resultados que se obtienen cuando la sistematización se aplica al caso de cadenas finitas, coinciden punto por punto con las obtenidas por los procedimientos habituales de esta materia. Además, se completan algunos resultados que no se tenían en el caso $U \subset \mathbb{R}^m$. Por este motivo, también consideramos nuestras construcciones, como una herramienta para la sistematización de los procesos de decisión markovianos con espacio contínuo de alternativas. Este, es un proyecto muy ambicioso y que ha dejado multitud de cuestiones por resolver. Estas constituirán investigaciones posteriores.

I-3 SUMARIO

De acuerdo con el planteamiento hecho en I-1, en el capítulo II de esta memoria se ha hecho un estudio exhaustivo de las propiedades topológicas del espacio de estados de una cadena de Markov. Comenzamos este análisis con unas breves notas (II-1) sobre la teoría general de cadenas de Markov, con el objeto fundamental de introducir la notación a utilizar. Queremos destacar que la base de esta pregunta, se ha tomado del libro de Kemeny, Snell y Knapp (16).

Se prosigue con el estudio de la topología sobre el espacio de estados de una cadena de Markov transitoria (II-2); en este apartado, hemos utilizado los resultados obtenidos por Kemeny (16) consiguiéndose la estructuración de dos topologías métricas para el espacio antes mencionado. La primera, se construye con base en medidas superregulares, mientras que la segunda utiliza funciones del mismo tipo, siendo por tanto equivalente a la consideración de la primera topología sobre la cadena dual. No obstante, en ambos casos los espacios resultan ser homeomorfos de acuerdo con la teoría de la dualidad.

A continuación, en II-3 se hace un estudio del tema en un caso totalmente opuesto al anterior, el de cadenas recurrentes. Para ello, se supone existe un estado destacado en el que la cadena recurrente a otra transitoria equivalente a la primitiva en un número finito de etapas. Es en ésta, donde se realizan todas las construcciones que se vieron en II-2. Ahora bien, creemos que la existencia de un estado destacado, para el que naturalmente no existe filtro de entornos, puede perjudicar nuestros objetivos, por lo que introducimos la modificación de realizar todo el planteamiento para cada uno de los estados de la cadena considerado como destacado. Tenemos de esta forma una familia de topologías sobre el espacio, cuya cota superior será tomada como la total que se utilizará a lo largo de todo el tratamiento.

Estudiados los casos más extremos, pasamos al análisis del -- más común, el de cadenas de Markov descomponibles. Con objeto de cimentar nuestras construcciones posteriores, se comienza con - un estudio de las propiedades generales de este tipo de cadena, que se ha hecho siguiendo las directrices del libro de Kemeny, - Snell y Knapp (16) y del libro de Chung (7). Todo ésto, se encuentra en la pregunta II-4.

A partir de estas propiedades, concretamente de las clases de equivalencia en las que se descompone el espacio de estados de - la cadena, se construye en II-5 la topología θ_1, resultando original de cuyas propiedades se hace un estudio exhaustivo, siendo fundamental característica de éstas, el hecho de que cada propiedad topológica tiene una interpretación probabilística muy clara en términos de accesibilidad entre estados de la cadena. Por este motivo, hemos creido conveniente denominarla TOPOLOGIA DE LA ACCESIBILIDAD.

En II-6, teniendo en cuenta a su vez, que toda relación de equivalencia induce una topología uniforme sobre el espacio en -- que se define (ver Bourbaki(4)), se construye en el espacio de estados, una nueva topología original θ_2 que posee esta propiedad fundamental. θ_2 es mas fina que θ_1 y con propiedades más fuertes, denominándose, por razones análogas a las de θ_1 TOPOLOGIA DE LA COMUNICACION, ya que en este caso toda propiedad de θ_2 se traduce en términos de probabilidad como propiedad de comunicación entre estados. Dos aspectos queremos destacar de esta topología: - de una parte, por ser uniforme es pseudométrica de modo que so-- bre el espacio de estados se puede definir una semidistancia compatible con dicha topología; el estudio de esta función no ha sido realizado aquí por apartarse de nuestros objetivos quedando - como camino abierto para investigaciones posteriores que juzga-- mos interesantes. En segundo lugar, con θ_2 el espacio resulta -- ser completo de modo que en él toda sucesión de Cauchy tiene límite. De hecho, para los espacios uniformes dicha completitud se da en términos de filtros de Cauchy (ver Boubaky(4)), pero el - paso a sucesiones es trivial. Por otra parte, queremos destacar, que este tipo de sucesiones, tiene una importancia fundamental - desde el punto de vista probabilística.

Se ha conseguido también, establecer entre los estados de una cadena de Markov descomponible una nueva semidistancia basada en las probabilidades de acceso eventual. En II-7, se estudia detalladamente la construcción de esta función y posteriormente la - de la topología asociada con ella. Dicha topología que se ha notado θ_3 refleja también las propiedades de comunicación entre estados, pero de forma más débil que en el caso de θ_2 por lo que - se la ha denominado TOPOLOGIA DE LA COMUNICACION DEBIL resultando además ser mas fina que la anterior. En esta topología, también el espacio resulta ser completo. No insistimos sobre ello. Propiedad muy interesante, es que en θ_3 las probabilidades de -- transición cumplen condiciones de regularidad bastante importantes para nuestros objetivos.

Queremos destacar, que en cualquiera de las tres topologías - anteriormente indicadas, la transición de la cadena en un paso - considerada como una función del espacio de estados en sí mismo, es estocásticamente contínua en el sentido de que se cumple la - propiedad de continuidad con probabilidad mayor que cero.

Como final del capítulo II (II-8) se analiza el caso, más general, en que un espacio de estados puede responder iterativamente a diversas cadenas markovianas, es decir, se supone un espacio de estados y en cada etapa del proceso imaginamos que se rige por una cierta matriz de transición distinta. En estas condiciones, establecemos la familia de topologías cada una de ellas correspondiente a la matriz de transición de una etapa. Construyendo la cota superior de la familia que poseemos, tendremos determinada una topología que refleja perfectamente las propiedades de la cadena en cualquier forma de transición. Como caso particular, si se trata del conjunto de matrices correspondientes - a las diferentes estrategias de un proceso de decisión, obtendremos la que hemos denominado TOPOLOGIA ASOCIADA A UN PROCESO DE - DECISION. Esta, será la base del planteamiento del capítulo III.

Queremos destacar, que en todo este capítulo se han estudiado las cadenas en su forma más general posible, sin mas que imponer la homogeneidad, pero sin hacer consideración alguna sobre el cardinal de las mismas, admitiéndose incluso que la matriz de transición (caso de número de estados infinito) pueda ser subestocástica. Tampoco se ha hecho consideración alguna sobre el cardinal de la descomposición.

En el capítulo III y siguiendo las ideas que el profesor Vélez Ibarrola presenta en su tesis doctoral, se trata de establecer una estructuración de los procesos de Decisión Markovianos con espacio de alternativas contínuo, englobando los casos en que el proceso base sea una cadena. Este ha sido el motivo fundamental de las construcciones del capítulo anterior, ya que una de las condiciones fundamentales que se impone al proceso base, es que su espacio de estados esté dotado de una topología.

En III-1 damos algunas propiedades de los procesos de Markov con espacio de estados general, que nos serán necesarias en apartados posteriores. También se presentan los resultados fundamentales sobre los procesos con recompensa asociada, estudiando la ganancia esperada tanto con horizonte finito como infinito. En este último caso, se trata también de llegar a una forma asintótica de dicha recompensa, es decir, a la expresión de la misma cuando el número de etapas tiende a infinito.

En III-2, se estudian los procesos de decisión markovianos con espacio contínuo de alternativas; para ello se establecen varios grupos de hipótesis y se analiza en cada uno de ellos la forma de la ganancia y la política óptimas tanto en horizonte finito como infinito; en este último caso también se analiza la expresión asintótica de estas magnitudes.

Queremos destacar, que hemos introducido para el pago la forma clásica y más intuitiva aunque los resultados se conserven idénticos.

Por otra parte, en muchos teoremas hemos suavizado las condiciones, con lo que se han obtenido enunciados pertinentes sobre la aplicación de los resultados a cadenas, habiendo llegado a dos conclusiones fundamentales: en primer lugar, todos ellos son totalmente válidos para el caso de cadenas finitas aunque con hipótesis algo fuertes; en segundo, los resultados, son totalmente aplicables al caso de una cadena infinita cualquiera que sea su forma suponiendo incluso que su matriz de transición pueda ser subestocástica, caso no analizado hasta el momento.

Para terminar, queremos indicar, que en este capítulo no hemos intentado realizar un estudio exhaustivo sobre el tema, sino mas bien satisfacer un doble objetivo. De una parte, el intento de estructuración de los procesos de decisión markovianos y por otra, demostrar la potencialidad de las construcciones realizadas en el capítulo II que creemos importantes además para un estudio de la Teoría del Potencial Aleatorio.

II - TOPOLOGIAS SOBRE CADENAS DE MARKOV

II-1 NOTA SOBRE CADENAS DE MARKOV

En esta primer pregunta, vamos a dar unas notas sobre las cadenas de Markov estacionarias, al objeto de establecer las notaciones y nomenclaturas que se van a utilizar.

Consideremos una cadena de Markov estacionaria de matriz de transición P y espacio C de estados, en principio numerable, sin que por ahora tengamos que hacer distinción alguna entre los casos finito e infinito. A partir de P, definimos las matrices N y H de acuerdo con:

H_{ij} Probabilidad de alcanzar eventualmente el estado E_j desde el E_i contando como posible la etapa n =o.

N_{ij} Número medio de veces que el sistema visita el estado E_j partiendo del E_i y contando la etapa n = o. Estos valores se denominan TIEMPOS MEDIOS DE RECURRENCIA.

Es trivial que $H_{ii} = 1$, admitiendo que en la etapa n = o, para todo i se realiza el paso $E_i \longrightarrow E_i$.

También, se pueden definir las matrices $\overline{H}$ y $\overline{N}$ con el mismo sentido que H y N sólo que sin contar la etapa n = o. Así, en general $\overline{H}_{ii}$ no tiene por que ser igual a 1, cumpliéndose además:

$$\overline{N} = N - I$$

$$\overline{H}_{ij} = H_{ij} \qquad i \neq j$$

Con base en $\overline{H}$ se establece una clasificación de estados del siguiente modo:

$$E_i \in C \text{ es RECURRENTE si } \bar{H}_{ii} = 1 \qquad N_{ii} = \infty$$

$$E_i \in C \text{ es TRANSITORIO si } \bar{H}_{ii} < 1 \qquad N_{ji} < \infty \;\; \forall j$$

No insistimos sobre las propiedades de esta clasificación que son harto conocidas.

Si definimos ahora la relación

$$E_i \sim E_j \qquad H_{ij} > 0 \qquad H_{ji} > 0$$

podemos comprobar que se trata de una relación de equivalencia — la COMUNICACION ya conocida — tal que los elementos de una misma clase son del mismo tipo, bien transitorios, bien recurrentes en sus diferentes modalidades. En estas condiciones, C puede descomponerse de la forma:

$$C = C_1 \cup C_2 \;\ldots\ldots \cup T = \left\{ \bigcup_{v \in V} C_v \right\} \cup T \qquad (1\text{-}1)$$

donde cada C_v es una subcadena cerrada y T es la clase de los estados transitorios. Si para algún $u \in C_u$ se reduce a un elemento, entonces éste se denomina ABSORBENTE.

Evidentemente, si C es finito V es un conjunto finito, mientras que si C es infinito V bien pudiera también serlo.

Para cada par de estados i, j, tenemos el siguiente cuadro de valores para H y N:

1.- $E_i, E_j \in T \quad N_{ij} < \infty \qquad N_{ji} < \infty \qquad H_{ij} \;\; H_{ji}$ no simultáneamente iguales a 1.

2.- $E_i \in T \,,\; E_j \in C_u \quad N_{ij} \neq 0 \quad N_{ji} = 0 \quad H_{ij} > 0 \quad H_{ji} = 0$

No obstante, puede ocurrir $N_{ij} = 0 \quad H_{ij} = 0$ de modo que — también la clase T se comporta como una clase cerrada.

3.- $E_i \in C_u$, $E_j \in C_v$ $u \neq v$ $N_{ij} = N_{ji} = 0$; $H_{ij} = H_{ji} = 0$

4.- E_i, $E_j \in C_u$ $N_{ij} = N_{ji} = \infty$ $H_{ij} = H_{ji} = 1$

De aquí, deducimos que si la cadena evoluciona un número infinito de etapas comenzando en $E_i \in C_u$ entonces, la dadena no sale de C_u. Si $E_i \in T$ podemos distinguir dos casos:

a) Si C es finito, con probabilidad 1 la cadena sólo está un número finito de veces en T.

b) Si C es infinito, puede ocurrir que la cadena permanezca una infinidad de veces en T (T también infinita) pero cada estado es visitado sólo un número finito de veces.

La matriz P, se descompone en cajas de acuerdo con (1-1), descomposición en cajas sobre la que no insistimos por ser de todos harto conocida.

De acuerdo con (1-1) podemos clasificar las cadenas en tres tipos:

1.- CADENAS TRANSITORIAS. Todos sus estados recurrentes son absorbentes. Si C es infinita, puede ocurrir $C \equiv T$, pero en general los estados recurrentes deben existir.

2.- CADENAS RECURRENTES. Toda la cadena es una sola clase de equivalencia recurrente.

3.- CADENAS ESTRICTAMENTE DESCOMPONIBLES. Son aquellas en las que C se descompone propiamente de la forma (1-1) existiendo clases cerradas con mas de un elemento.

No obstante esta clasificación, cara a las construcciones que vamos a realizar, convendremos en considerar sólo cadenas transitorias con todos los estados transitorios -posteriormente haremos un convenio válido para el caso finito- e introducir las cadenas transitorias generales dentro del contexto de extrictamente des-componibles.

De acuerdo con Kemeny, los vectores fila serán denominados MEDIDAS existiendo tres tipos:

SUPERREGULAR	$\pi \geqslant \pi P$
REGULAR	$\pi = \pi P$
SUBREGULAR	$\pi \leqslant \pi P$

Análogamente, los vectores columna serán denominados FUNCIONES, con tres tipos de idéntica definición que los anteriores.

xxx Antes de comenzar con el estudio de las topologías, queremos hacer notar que debe cumplirse:

$$\sum_j p_{ij} \leqslant 1$$

debiendo ser igual a 1 en toda cadena finita y en toda subcadena cerrada. Para cadenas infinitas ó la clase T, independientemente considerada, no se puede hacer aseveración alguna. Como veremos, esta condición es de bastante utilidad, situándonos en el caso más general posible.

II-2 TOPOLOGIA SOBRE UNA CADENA TRANSITORIA CON TODOS LOS ESTADOS TRANSITORIOS

Sabemos, que una cadena transitoria es aquella en la que $T \neq \emptyset$ y todos los estados recurrentes son absorbentes. Si C es infinito, entonces se puede admitir el caso $C \equiv T$ pero en general la matriz de transición para este tipo de cadena será de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ T_1 & T_2 \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}1)$$

donde I es la matriz identidad de dimensión adecuada. T_1 contiene las probabilidades de que el sistema pase de un estado transitorio a otro absorbente (para no salir nunca más de él) y T_2 puede ser considerada la matriz fundamental del proceso, ya que al ser en - general subestocástica, describirá una cadena (finita ó no) que - contenga solamente estados transitorios, que es la situación bajo la cual, Kemeny construye su topología.

Así pués, en todo lo que sigue, supondremos que se tiene una - cadena de Markov con todos los estados transitorios -si es finita nos reducimos a T_2 con lo que tendremos también englobado el caso subestocástico general- y tomemos una cierta distribución de partida π , que se supondrá fijada a lo largo de toda la construcción.

De acuerdo con lo que acabamos de decir, la cadena de la forma (2-1) no recibe un tratamiento que afecte a todos los estados, pero veremos, que ésto no presenta mayor dificultad, ya que las cadenas transitorias con algún estado absorbente entran de lleno en las construcciones posteriores, presentando además propiedades -- muy interesantes, que se verán cuando estudiemos la topología de la comunicación débil.

Dada N, matriz de los tiempos medios de recurrencia de los estados del sistema, que tiene todas las entradas finitas por ser $T \equiv C$, supondremos que el vector πN es no negativo, con valores finitos y superregular considerado como medida. Normalmente, impondremos que πN sea estrictamente positivo; caso de que contenga alguna entrada nula, deberemos realizar algunos modificaciones que se verán a continuación.

Puesto que $N_{\pi\, j} = (\pi . N)_j$ componente j-ésima del vector es positiva, podemos definir:

$$K(i,j) = N_{ij} / N_{\pi\, j}$$

puesto que $N_{ij} < \infty \quad \forall\, i,j \in C$.

Con el sentido habitual para las notaciones $K(.,j)$ $K(i,.)$, puede comprobarse fácilmente:

1.- Para cada j, $K(.,j)$ es una función no negativa.

2.- Para cada j, $K(.,j)$ es regular como función de i, cumpliéndose la igualdad estricta en la componente $i = j$.

3.- Para cada i fijo, $K(i,.)$ está acotada como función de la segunda variable.

4.- Para cada j $K(.,j)$ es tal que:

$$\pi . K(.,j) = I$$

donde I representa una matriz identidad de dimensión adecuada.

Para cada $i \in C$ definamos:

$$d_i(j,j') = |K(i,j) - K(i,j')| \quad \forall\, j,j' \in C$$

cumpliéndose para todo i, que $K(i,j_n)$ es una sucesión de Cauchy de números reales, cuando y sólo cuando:

$$\lim_{m,n \to \infty} d_i(j_m, j_n) = 0$$

Como $K(i,j)$ está acotada, podemos resumir todas las funciones d_i en una sola $d(j,j')$ con valores finitos definida por:

$$d(j,j') = \sum_i w_i \, N_{\pi\, i} \; | K(i,j) - K(i,j') |$$

donde los w_i son pesos arbitrariamente escogidos, con la única condición de que la cantidad $\sum_i w_i N_{ii}$ sea finita.

No es difícil comprobar, que $d: C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ es una métrica sobre C. En estas condiciones, dicho conjunto se convierte en un espacio métrico con todas sus consecuencias, de las cuales, la que más nos interesa es la existencia de una topología asociada con dicha métrica. En la misma, el concepto más importante es el de sucesión de Cauchy:

TEOREMA 2-1 " Una sucesión $\{E_{jn}\}$ en el espacio métrico (C,d) es una sucesión de Cauchy, cuando y sólo cuando la sucesión de números reales $\{K(i,jn)\}$ sea de Cauchy para todo $i \in C$".

El espacio (C,d), no tiene por qué ser completo, propiedad que nadie asegura. Por este motivo, tiene sentido el definir su completitud de Cauchy que conduce al concepto de FRONTERA DE MARTIN como la diferencia C^*-C, que es fundamental en Teoría del Potencial, pero no es útil para nuestros propósitos.

Teniendo en cuenta la definición de la métrica d a partir de los tiempos medios de recurrencia, resulta que la topología esté íntimamente ligada con las propiedades dinámicas y probabilísticas del sistema, de tal manera, que por ejemplo una sucesión de Cauchy no es otra cosa que un conjunto de estados alcanzables ó más bien, comunicados entre sí a lo largo de las distintas etapas, considerando un número infinito de éstas.

Antes de pasar a otra cuestión, queremos hacer notar que la elección de los pesos w_i tiene una importancia relativa, ya que elecciones distintas de los mismos conducen a métricas distintas pero que confieren a C estructuras homeomorfas.

*** Supongamos ahora, que se ha eliminado con anterioridad, que el vector πN tenga algún elemento nulo. En este caso, podemos realizar una serie de operaciones de conversión que exponemos brevemente:

Si C es el conjunto de estados de la cadena, definimos el subconjunto W del mismo dado por:

$$W = \left\{ i \in C \;/\; (\pi N)_i > 0 \right\}$$

La especial naturaleza de W, implica que la restricciónd de P P_W, coincide con el proceso estocástico cuyo n-ésimo resultado es que el n-simo resultado de la cadena se encuentre en W. En estas condiciones, la matriz de los tiempos de recurrencia para P_W no - es otra cosa que N_W restricción de N al W considerado.

De acuerdo con todo lo dicho, en el estudio caso de que πN tenga alguna entrada nula, nos restringimos al espacio W, que desde el punto de vista de las transiciones es el único importante.

*** A partir de funciones en lugar de medidas, puede definirse sobre C una nueva métrica, que conducirá a una topología distinta; dada una cadena transitoria P con todos sus estados transitorios fijemos una función $f > 0$ tal que $N.f$ sea positiva y finita. Si tuviese algún elemento nulo, actuaríamos como en el caso de medidas.

Para cada $i,j \in C$ definimos:

$$J(i,j) = N_{ij} \,/\, (N.f)_i$$

con el sentido conocido para estas notaciones.

La función $J(.,.)$ cumple las mismas propiedades que $K(.,.)$ sólo que cambiando los papeles de los argumentos, de acuerdo con la -- dualidad de funciones y medidas.

En estas condiciones, podemos definir:

$$d'(j,j') = \sum_i w_i (N.f)_i \left| J(j,i) - J(j',i) \right|$$

donde los pesos w_i cumplen las mismas propiedades que en caso anterior.

La función $d'(.,.)$, es nuevamente métrica sobre C como fácilmente puede comprobarse, lo que confiere a este espacio una nuevas estructura de espacio topológico. Las sucesiones de Cauchy en el mismo, se definen de un modo muy análogo al anterior:

TEOREMA 2-2 " Una sucesión $\{E_{j_n}\}$ en el espacio métrico (C,d') es de Cauchy, si y sólo si $\{J(j_n,i)\}$ es de Cauchy en R para todo i ".

Como en el caso anterior, el espacio no tiene por qué ser completo, de modo que siempre que puede definirse una completitud de Cauchy y una nueva forma de frontera que no tiene interés para nosotros.

Respecto de la importancia de los w_i hacemos las mismas consideraciones que para el caso de medidas.

Las dos formas de métrica que acabamos de analizar, se encuentran relacionadas entre sí por la teoría de la dualidad en cadenas. El estudio de estas relaciones y su influencia en los procesos de decisión markovianos, sería un punto interesante de investigación posterior.

Como última consideración, añadiremos, que la definición de las métricas implica que cualquier propiedad que se deduzca de las mismas, debe tener relaciones muy estrechas con las propiedades probabilísticas de la cadena, tanto a horizonte finito como infinito, considerando tiempo directo (medidas) ó tiempo inverso (funciones).

II-3 TOPOLOGIA SOBRE UNA CADENA RECURRENTE

Según se ha definido con anterioridad, una cadena se dice recurrente cuando sus estados constituyen una sola clase de equivalencia y ésta es recurrente.

Sobre este tipo de cadenas, trataremos de construir unas topologías de modo idéntico a las anteriores, pero deberemos hacer algunas transformaciones para subsanar el hecho de que para todo i $N_{ii} = \infty$ lo que en principio, impediría el establecimiento de una métrica por el procedimiento utilizado en el caso de cadenas transitorias.

Nuestro procedimiento general será, destacar entre todos los estados de la cadena uno en particular, estado distinguido para el que se supone que la cadena desaparece al alcanzarlo. De este modo, habremos pasado de una cadena recurrente a otra transitoria en la que se podrá realizar todo el conjunto de construcciones de la pregunta anterior.

Sea entonces P la matriz de transición de una cadena recurrente y E_0 un estado cualquiera de la misma que se supone fijado "a priori". Postrriormente, haremos algunas consideraciones sobre esta elección.

Definamos ahora una cadena transitoria de matriz Q asociada con P y E_0 de acuerdo con:

$$q_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & i \neq 0 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

con $q_{oo} = 1$ para conseguir que el estado distinguido sea absorbente.

Para esta cadena transitoria, la matriz N de los tiempos medios de recurrencia viene dada por :

$$N_{ij} = {}^{o}N_{ij} + \delta_{jo}$$

donde ${}^{o}N_{ij}$ indica el número medio de veces que la cadena alcanza el estado j partiendo del i antes de caer en E_o. δ_{jo} es la delta de Krönecker.

Nos encontramos ahora, en las mismas condiciones que en la pregunta anterior, de modo que podemos definir dos tipos de topologías métricas, una referente a medidas y otra referente a funciones. Hemos de hacer notar, que nos restringiremos al subconjunto de C constituído por estados puramente transitorios. De acuerdo con nuestros convenios, será:

$$C' = C - E_o$$

Escojamos ahora una distribución de partida ó medida no negativa π con entrada nula sobre E_o ó bien, definida sobre C', que además supondremos fijada a lo largo del trabajo. Haremos la hipótesis de que πN es no negativa finita y superregular sobre Q. Con dicho vector, podemos definir:

$$K(i,j) = N_{ij} / N_{\pi j}$$

que verificará las mismas propiedades que en el caso de cadenas propiamente transitorias y mediante la que fácilmente se puede construir d: $C' \times C' \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que sea una métrica.

Análogamente, si f es una función tomada como distribución inicial en tiempo inverso, a partir de N.f supuesta no negativa finita y superregular, se puede definir la métrica d' con las mismas consideraciones que en el caso anterior. A veces, cuando se trata de funciones, se suele imponer la condición N.f = 1, pero claramente podemos trabajar en cualquier caso.

La construcción del espacio completado para este tipo de cadena, es idéntica al caso de cadenas transitorias tomando una u otra métrica.

Salvando la dificultad de la existencia de un estado distinguido, existe un teorema que garantiza la unicidad (salvo homeomorfismos) de la topología establecida.

Aunque desde el punto de vista de la Teoría del Potencial la construcción es impecable, para nuestros propios propósitos de sistematización de la Teoría de la Decisión, la elección del estado distinguido en el que se supone acaba la cadena, presenta alguna ambiguedad, ya que la topología no queda definida para el estado considerado que sin embargo pertenece a la cadena. Por este motivo, estableceremos un artificio en los siguientes términos:

Sea $C = E_1, E_2 \ldots\ldots\ldots$ Para cada i, establezcamos la topología métrica θ_i correspondiente a la supresión del estado E_i con lo que tendremos la familia $\{\theta_i\}_{i \in C}$. La cota superior de esta familia, que notaremos θ, será tomada como topología sobre el espacio C considerado.

Esta construcción, podemos hacerla tanto con las métricas asociadas con las medidas, como con las asociadas con funciones.

Queremos hacer notar, que aunque cada θ_i es métrica, sin embargo θ no tiene por qué serlo, de modo que lo más que podemos asegurar sobre ella, es que se trata de una topología de tipo uniforme, pero esta condición es bastante para nuestros propósitos.

II-4 CADENAS DE MARKOV ESTRICTAMENTE DESCOMPONIBLES

En todo lo que sigue, vamos a considerar cadenas de Markov estrictamente descomponibles, es decir, aquellas en las que el espacio de estados se descompone propiamente de la forma:

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup T = \bigcup_{v \in V} C_v \cup T$$

donde V es un conjunto de índices, que en principio, no posee más propiedad que la de ser numerable.

Sabemos, que las clases cumplen las siguientes propiedades:

a) T contiene todos los estados transitorios

b) Si $E_j \in C_v$ entonces $H_{jk} = 1$ para todo $E_k \in C_v$ mientras que $H_{jk} = 0$ para todo $E_k \notin C_v$.

Evidentemente, la matriz de transición de la cadena puede descomponerse de la forma:

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_1 & 0 & & 0 \\ 0 & P_2 & & 0 \\ & & & \\ T_1 & T_2 & & T_t \end{pmatrix} \end{array}$$

donde cada P_i es una matriz estocástica, y cada T_i marca las probabilidades de paso a la correspondiente subcadena cerrada, mientras T_t indica, ó por así decirlo rige, la permanencia del sistema dentro del conjunto de los estados transitorios.

Podemos admitir, que todos ó alguno de los C_v sea un estado absorbente. En el primer caso, tendremos una cadena transitoria tal como la definía Kemeny, que realmente no ha sido tratada con anterioridad pero que entra de lleno en lo que vamos a decir.

Nuestro objetivo en las preguntas que siguen, es tratar de establecer una topología sobre el espacio de estados de este tipo de cadena. Si pretendemos la construcción de una métrica al estilo de las anteriores, nos encontramos con algunos inconvenientes ya apuntados por Kemeny:

a) No podemos asegurar nada-sobre todo en el caso de cadena infinita- acerca de la existencia de una medida superregular. Además, cada clase C_v tiene tiempos medios de recurrencia infinitos que dificultan su tratamiento global.

b) En cada elemento C_v ó T independientemente considerado, se puede establecer una topología métrica tal como se sabe; podría pensarse, que considerándolas como bases locales de entornos para los puntos de la clase correspondiente, se puede llegar a una topología sobre todo C. Esta construcción, presenta a nuestro parecer dos ambigüedades:

- La topología que se obtiene en este caso es de un tipo general conjuntista, sin que podamos afirmar nada sobre su uniformidad ó metrizabilidad.
- Considerar a T como una clase aislada de las C_v es una situación que no tiene sentido, sobre todo en cadenas finitas en las que sabemos que el proceso es absorbido en un número finito de pasos.

Por todos estos motivos, deberemos buscar para estos tipos de cadenas otros métodos y construcciones, Por otra parte, desearemos que la topología creada refleje las propiedades de accesibilidad y comunicación de los estados de la cadena y que sea lo más afín posible a una métrica. Como primera aproximación, cabe pensar en la relación fundamental de equivalencia de acuerdo -- con dos aspectos fundamentales a los que ya hemos aludido:

a) Una relación de equivalencia, permite siempre la construcción de topologías basadas en la descomposición del espacio en clases disjuntas. De hecho, se pueden establecer topologías uniformes ó pseudométricas que son de mayor interés que las conjuntistas generales.

b) La relación fundamental de equivalencia, refleja perfectamente las propiedades de la cadena, carácter que se transmite a las construcciones que realicemos sobre ella.

Volviendo sobre la forma (4-1) de la descomposición, observaremos que T puede reducirse al vacío, con lo que C queda descompuesto en un conjunto de subcadenas cerradas. Este caso, es de - bastante interés, pues nos va a permitir la identificación de - topologías y el estudio de las relaciones entre ellas.

Antes de terminar la pregunta, vamos a hacer una observación que puede ser de interés, cuando la clase T no es cerrada:

Analizando el sentido global de las evoluciones, cuando la cadena alcanza (cae) en un estado de una cierta subcadena C_i, -- puede ser olvidado el resto del proceso ya que sólo son posibles transiciones dentro de la citada C_i y nunca al exterior de este conjunto. Así pues y hablando de modo global, C_i se comporta como una forma de estado absorbente incluyendo el movimiento de la cadena en un sólo bloque.

En estas condiciones, para cada estado transitorio E_i y cada subcadena C_v, tiene sentido definir f_{iv} como la probabilidad de que la cadena caiga en cualquier estado de C_v partiendo de E_i.

Teniendo en cuenta, que la probabilidad de paso de una subcadena a otra viene dada por la delta de Kronecker, a partir de la primitiva cadena puede ser definida otra de la forma:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & \cdots\cdots & & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ T \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & I & & \\ & & & \\ \hline A_1 & A_2 & & A_t \end{array}\right) \end{array}$$

donde las matrices A_i contienen las probabilidades de transición desde cada estado transitorio a la correspondiente subcadena cerrada, ó sea, las probabilidades de absorción de la subcadena C_i, mientras que A_t contiene las probabilidades de permanencia dentro de los estados transitorios.

Esta construcción, aunque deforma todas las propiedades particulares de los estados, no afecta para nada el comportamiento global de la cadena. Por otra parte, tampoco debe afectar el comportamiento asintótico de la misma.

Al lado de ésto, la principal ventaja de este tratamiento, es que permite considerar roda cadena como transitoria con las ventajas teóricas que ésto lleva consigo. Por todos estos motivos, sugerimos que la construcción anterior puede ser de importancia. A pesar de todo, y dado que en algunas circunstancias puede resultar engañosa, no ha sido tenida en cuenta en el presente trabajo, de manera que todo nuestro análisis se ha montado contando con la totalidad de los estados.

En el estudio de la topología de la comunicación débil, se hace un análisis de las cadenas transitorias desde un punto de vista un poco diferente, pero que puede resultar interesante y en el que se completan algunos casos de Kemeny no tiene en cuenta.

II-5 TOPOLOGIA θ_1 (DE LA ACCESIBILIDAD) SOBRE UNA CADENA DESCOMPONIBLE

II-5-1 Construcción de la topología.-

Consideremos una cadena, sobre cuyo cardinal no afirmamos nada, propiamente descompuesta de la forma (4-1) y definamos la familia:

$$\theta_1 = \left\{ \emptyset \, , \, C \, , \, T, \, T \cup \left\{ \bigcup_j C_{kj} \right\} \quad j \in J \right\}$$

donde J es un conjunto de índices que nos indica que las uniones se realizan en todas las combinaciones posibles de 1,2, ... elementos de la clase $\{C_v\}_{v \in V^*}$

Por cuestiones de simplicidad, a partir de ahora consideraremos que con la notación $T \cup \{\bigcup_j C_{kj}\}$ puede reducirse a T ó coincidir con la totalidad de C. Este convenio, será usado a lo alrgo de todo el trabajo, y siempre que nuestros análisis no exijan una exacta especificación de la forma de los conjuntos.

Evidentemente, θ_1 es una topología sobre C, pues verifica:

1.- $\emptyset \in \theta_1$ por construcción

2.- $C \in \theta_1$ por construcción

3.- Si $O_i \quad i \in I$ es una subfamilia de θ_1 siendo I un conjunto cualquiera de índices, entonces $\bigcup_i O_i \in \theta_1$.

En efecto:

Para cualquier O_i puede escribirse $O_i = T \cup \{\bigcup C_{ik}\}$ de manera que

$$O_i = \bigcup_i \left[T \cup \{\bigcup C_{ik}\} \right] = T \cup \left\{ \bigcup_{kj} C_{kj} \right\} \in \theta_1$$

c.q.d.

4.- Si O_1 , $O_2 \in \Theta_1$ entonces $O_1 \cap O_2 \in \Theta_1$.

En efecto:

Por la definición de Θ_1 se tiene:

$$O_1 \cap O_2 = T \cup \left[\bigcup_{1_k} C_{1_k}\right] \cap \left[\bigcup_{2_k} C_{2_k}\right] \in \Theta_1$$

puesto que la expresión entre corchetes se puede reducir a una unión de subcadenas cerradas ó en el caso más desfavorable al vacío.

El par (C, Θ_1) es un espacio topológico cuyos puntos son los estados de la cadena, que como consecuencia, participan de dos caracteres, uno topológico y otro probabilístico. Veremos, que estas dos situaciones se encuentran perfectamente conjuntadas, de manera que puede decirse que se trata de una topología COMPATIBLE con el carácter probabilístico.

Si $\mathcal{F}_1 = \{F_i\}$ es la familia de los cerrados de la topología, como complementarios de los abiertos se tiene:

$$\mathcal{F}_1 = \left\{\emptyset , C , \bigcup_i C_{k_i}\right\}$$

es decir, todo cerrado se compone de la unión de un número exacto de subcadenas.

Antes de pasar al estudio de las propiedades de C con la topología que hemos creado, vamos a hacer tres puntualizaciones de interés para lo que sigue:

a) Si en (4-1) todo C_v es un estado absorbente, tendremos una cadena transitoria general, que entra de lleno dentro de la construcción, como ya indicamos, lo que permite la topologízación de la totalidad del espacio de estados.

b) Si $T = \emptyset$, ó sea $C = \bigcup_{v\in V} C_v$, entonces $\mathcal{F}_1 = \Theta_1$ lo que nos dice que el espacio topológico no es conexo. Por otra parte, como veremos, en este caso Θ_1 es igual a Θ_2 y Θ_3 de modo que se trata de una topología pseudométrica ó uniforme, que creemos más conveniente estudiar dentro del contexto de una pregunta posterior. Por este motivo, normalmente supondremos $T \neq \emptyset$; no obstante, algunas propiedades serán estudiadas para $T = \emptyset$ por ser ambivalentes, simplificando además el estudio de Θ_2.

Por otra parte, cuando veamos las interpretaciones probabilísticas de la topología, impondremos que la clase T no sea cerrada estocásticamente hablando. Este caso, también será estudiado dentro del contexto de Θ_2 y podemos pensar que no es muy diferente de la situación $T = \emptyset$, pues siendo cerrado el conjunto de los estados transitorios puede considerarse como un C_v más a todos los efectos.

c) Como no hacemos distinción entre los casos finitos e infinitos, no podemos asegurar la existencia de una cadena dual. En caso de que exista, si le aplicamosm la topologización que acabamos de definir, obtendremos un espacio homeomorfo con el primitivo, tal como se postula en la teoría de la dualidad entre espacios.

II-5-2 Propiedades de C como espacio topológico.-

En primer lugar, observemos que bajo las hipótesis de trabajo, los abiertos son de la forma $T \cup \left[\bigcup_i C_{k_i}\right]$ mientras que los cerrados responden a la fórmula $\bigcup_j C_{k_j}$ de tal manera que por ser $T \neq \emptyset$, ningún abierto puede ser simultáneamente cerrado ó a la inversa, de modo que en este caso C se transforma en un espacio topológico CONEXO.

Al objeto de evitar repeticiones en Θ_2 y Θ_3, queremos hacer notar, que salvo aquellas propiedades que dependen directamente de la conexión, todo lo que digamos puede ser directamente aplicado al caso $T = \emptyset$.

Por la forma de los abiertos, podemos asegurar que el conjunto $\mathcal{B}_1 \subset \Theta_1$ y definido por

$$\mathcal{B}_1 = \{T, \quad T \cup C_v \quad / \ v \in V\}$$

es una base de la topología Θ_1. Será, un conjunto finito si C lo es, y numerable en general en los casos restantes. De este modo, podemos asegurar que el espacio cumple el SEGUNDO AXIOMA DE NUMERABILIDAD.

Trivialmente se comprueba que $\mathcal{B}_1$ recubre a C, de modo que por las propiedades de los espacios conexos, dados dos puntos (estados) siempre existe una cadena simple de elementos de $\mathcal{B}_1$ que los une. En nuestro caso particular de espacio C, podemos distinguir para dos puntos las siguientes situaciones:

a) Si E_i E_j son estados transitorios, la cadena que los une se reduce a $T \in \mathcal{B}_1$.

b) Si E_i es transitorio y E_j recurrente, entonces existe una subcadena cerrada C_{k_j} tal que $E_j \in C_{k_j}$ de modo que la cadena se reduce al sólo elemento $T \cup C_{k_j} \in \mathcal{B}_1$.

c) Si E_i E_j son recurrentes comunicados, entonces existe C_k, subcadena cerrada que los contiene. También en este caso, la cadena se reduce al sólo elemento $T \cup C_k \in \mathcal{B}_1$.

d) Si E_1 y E_j son recurrentes no comunicados, existen C_{k_i} y —

C_{k_j} de manera que contiene respectivamente a cada uno de los estados considerados. En estas condiciones, la cadena está formada por los elementos $T \cup C_{k_i}$; $T \cup C_{k_j}$.

Esta propiedad, tiene una interpretación probabilística bastante interesante que veremos posteriormente.

Por cumplirse el segundo axioma de numerabilidad, toda base local de entornos será numerable y por tanto, el espacio cumple el PRIMER AXIOMA DE NUMERABILIDAD. Como consecuencia, tenemos que C es un espacio de Lindelöff y por tanto se cumple en él:

TEOREMA 5-1 " De todo recubrimiento de abiertos para $S \subset C$ se puede obtener un subrecubrimiento numerable".

enunciado que se conoce con el nombre de TEOREMA DE LINDELOFF.

Por la forma que tienen los cerrados, resulta que el concepto topológico de clausura coincide con el puramente probabilístico dado por Feller.

De acuerdo con un teorema que garantiza que todo espacio que verifique el segundo axioma de numerabilidad es separable (en el sentido de la densidad), podemos asegurar que el espacio C es separable ó lo que es lo mismo, que admite un subconjunto propio denso en él. Nótese que no hemos hecho alusión alguna a la existencia ó no de estados transitorios, ya que la numerabilidad no depende de este carácter. Para caracterizar los subconjuntos densos podemos enunciar:

TEOREMA 5-2 " Si $T = \emptyset$, condición necesaria y suficiente para que $X \subset C$ sea denso, es que contenga algún estado transitorio y no coincida con la totalidad de C ".

Para probar el teorema, basta tener en cuenta que por la forma de los cerrados, el único de éstos que puede contener un estado transitorio es la totalidad del espacio.

TEOREMA 5-3 "Si $T = \emptyset$, $C = \bigcup_{v \in V} C_v$, condición necesaria y suficiente para que X sea denso en C, es que X contenga al menos un punto de cada subcadena cerrada sin coincidir con la totalidad del espacio ".

La demostración de este teorema, es sumamente trivial desprendiéndose de la forma general de la cadena. Este resultado será tenido en cuenta al analizar las propiedades de θ_2 ya que este contexto es el que mejor se adapta al caso $T = \emptyset$.

*** En las hipótesis generales de trabajo de este apartado, $T = \emptyset$, diremos que dos cadenas con espacios de estados C y C', son EQUIVALENTES, cuando considerados C y C' como espacios topológocos sean homeomorfos. Por las propiedades de las aplicaciones biyectivas y bicontínuas, podemos asegurar:

a) C y C' tienen el mismo número de estados.

b) V y V' -conjuntos de índices de las clases cerradas - tienen el mismo cardinal.

c) Si C_v y $C'_{v'}$ son original e imagen en el homeomorfismo entonces

$$\mathrm{Card}(C_v) = \mathrm{card}(C'_{v'})$$

y además los dos conjuntos los dos conjuntos son subcadenas cerradas de las cadenas respectivas.

d) Si T y T' son los conjuntos de estados transitorios, podemos afirmar que están en correspondencia, con las mismas propiedades de las clases recurrentes.

La propiedad fundamental que caracteriza esta relación, radica en el hecho, de que por la igualdad de disposición, las evoluciones y comportamiento global de las cadenas deben ser idénticos, entendiendo con ésta notación las visitas a los -

estados transitorios y las posibilidades (no debe confundirse con probabilidades) de absorción en cualquiera de las subcadenas cerradas que componen el proceso.

De acuerdo con ésto, la relación de equivalencia establecida en este apartado, es de una gran importancia, pues atiende a las propiedades intrínsecas de las cadenas (evolución y recurrencia) permitiendo con ello, una clasificación funcional de las mismas y el estudio del comportamiento de toda una clase a través de uno sólo de sus representantes.

Sobre la relación, puede realizarse una consideración adicional de bastante interés:

Consideremos un espacio topológico cualquiera X que cumpla:

a) X es numerable.

b) X posee una topología conexa con un abierto mínimo que entra a formar parte de todos los abiertos de la topología.

c) Todo abierto de X, se compone de la unión del citado abierto mínimo con subconjuntos que a su vez -- son cerrados en dicha topología.

En estas condiciones, dicho X puede ser considerado homeomorfo -de hecho puede establecerse una aplicación biyectiva y bi-- contínua- con el espacio topológico construído sobre el conjunto de los estados de una cadena de Markov no irreducible y con conjunto T de estados transitorios no vacío. Como consecuen-- cia, y según la relación de equivalencia que hemos establecido, podemos lícitamente considerar a X como el espacio de estados de una cierta cadena de Markov con las características anteriormente dichas, encuadrada dentro de una cierta clase, y a cuya matriz de transición no se hiciese alusión alguna.

Esta propiedad, es a nuestro juicio, de un gran interés, -permitiéndonos definir lo que podíamos denominar ESPACIOS TOPOLOGICOS DE MARKOV.

Por otra parte, también permite resolver problemas relativos a la determinación de la forma correspondiente a la cadena de espacio de estados $A \subset C$, ya que estableciendo en A la topología relativa inducida por la de C, por un análisis -directo de las características de la misma, y haciendo uso de la consideración anterior, podemos llegar a establecer el tipo de cadena a la que corresponde el subconjunto A.

Por ejemplo, podemos afirmar que los abiertos y cerrados -se comportan respectivamente como espacios de estados correspondientes a cadenas no irreducibles con ó sin estados transitorios. Las matrices de transición de las cadenas aludidas, -se obtendrían por restricción de la matriz total a los subconjuntos de estados correspondientes, aplicando para este cálculo, bien procedimientos puramente analíticos, bien los basados en la teoría de grafos, tal como se indica en la referencia --(11); deducimos además, que el espacio es localmente conexo.

Antes de terminar el apartado, vamos a construir un espacio topológico inducido por C en el espacio cociente con respecto a la relación fundamental de equivalencia de los estados, para lo cual necesitaremos de la relación entre cadenas anteriormente establecida:

Dado C propiamente descompuesto de la forma (4-1) con --$T \neq \emptyset$, el conjunto cociente $C/\sim$ (comunicación) estará --formado por tantos puntos como clases de equivalencia. Si conservamos la notación, podemos escribir:

$$C/\sim = \left\{ T, C_1, \ldots\ldots\ldots C_n, \ldots\ldots \right\}$$

teniendo en cuenta que ahora se trata de puntos y no de sub--conjuntos.

Si construímos la topología cociente mediante la proyección canónica, resulta que $C/\sim$ es un espacio topológico en el que un subconjunto que contenga a T es abierto y en caso contrario cerrado. De acuerdo con lo que hemos dicho antes sobre la relación de equivalencia entre cadenas, podemos decir que $C/\sim$ es el espacio de estados de una cadena de Markov no irreducible, con un único estado transitorio, el punto T y una serie de estados absorbentes C_v $v \in V$.

Si hacemos uso del concepto de probabilidad de absorción, la matriz de transición de la cadena sería:

$$
\begin{array}{c}
\\ C_1 \\ C_2 \\ C_n \\ T
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_n & T \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
f_1 & f_2 & f_n & f_T
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Esta cadena, será denominada COCIENTE por su propia construcción.

II-5-3 Interpretaciones probabilísticas de la topología.-

El haber construído nuestra topología sobre las clases de equivalencia de la relación de comunicación, nos hace pensar, que todas las propiedades topológicas analizadas en el aprtado anterior, deben tener un enunciado en términos probabilísticos. Veremos, que esta suposición se cumple con tanto rigor que podemos decir que Θ_1 es una topología de comportamiento.

Como siempre a lo largo de esta pregunta, vamos a suponer que $T \neq \emptyset$ y admitiremos además que se trata de una clase no cerrada.

Según sabemos, todo abierto es de la forma

$$O = T \cup \left[\bigcup_i C_{k_i} \right]$$

de modo, que desde estados de O es posible alcanzar puntos que no pertenezcan a dicho conjunto (transitorio ⟶ recurrente) lo que, abusando del lenguaje, puede expresarse diciendo que todo abierto es COMPATIBLE con las salidas en la evolución del sistema.

De modo contrario, desde puntos que no pertenezcan a O no puede ser alcanzado ningún punto que pertenezca a este conjunto, hecho que es claro pues dicho abierto contiene los estados transitorios.

Las afirmaciones anteriores pueden ser invertidas, de manera, que si $O \subset C$ es tal que desde estados del mismo pueden alcanzar elementos exteriires mientras que desde éstos no pueden ser alcanzados los puntos del conjunto, entonces O contiene todos los estados transitorios y número exacto de subcadenas cerradas, de modo que es abierto.

En efecto:

Si O es tal que desde el exterior no puede ser alcanzado, debe contener la totalidad de T, ya que estos estados tienen la propiedad de que desde ellos se puede acceder a otro punto de cualquier clase de equivalencia.

Por otra parte, si O sólo contuviese una parte de una subcadena cerrada, mientras que otra parte estuviese en C-O, es decir

$$\exists\, C_i \qquad C_i \cap O \neq \emptyset \qquad C_i \cap [C-O] \neq \emptyset$$

como los estados de dicha subcadena están comunicados, serán posibles transiciones de dentro a fuera y de fuera a dentro - en contra de nuestras hipótesis iniciales.

Así pues, tal como hemos afirmado:

$$O = T \cup \left[\bigcup_i C_{k_i} \right]$$

admitiendo O = T para la que lo dicho no presenta ambigüedad alguna.

Estas conclusiones, pueden ser resumidas en el siguiente enunciado:

TEOREMA 5-4 " Condición necesaria y suficiente para que O C sea un abierto de Θ_1, es que desde el mismo se puedan alcanzar estados que no pertenezcan a O mientras que desde éstos, no pueden alcanzarse puntos de dicho conjunto ".

Esquemáticamente, el teorema se puede representar por:

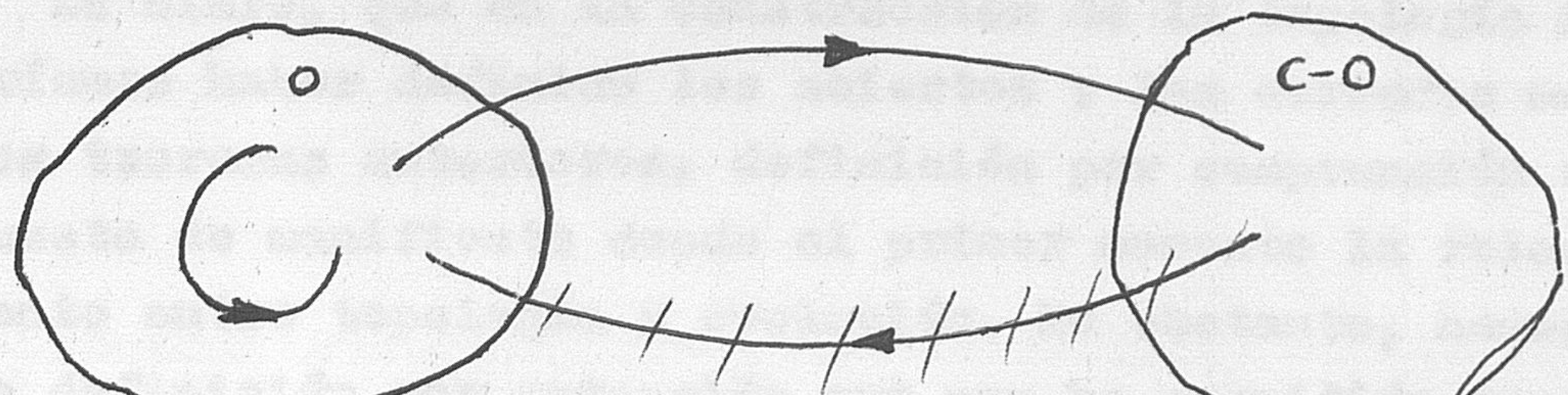


fig.1

Para los subconjuntos cerrados, como complementarios de los abiertos, podemos establecer un enunciado dual:

TEOREMA 5-5 "Condición necesria y suficiente para que un subconjunto F $\subset$ C sea cerrado, es que desde puntos del mismo no se puedan alcanzar puntos que no pertenezcan a él, mientras que desde éstos, se puedan alcanzar estados incluídos en él mismo".

Esquemáticamente se tendrá:

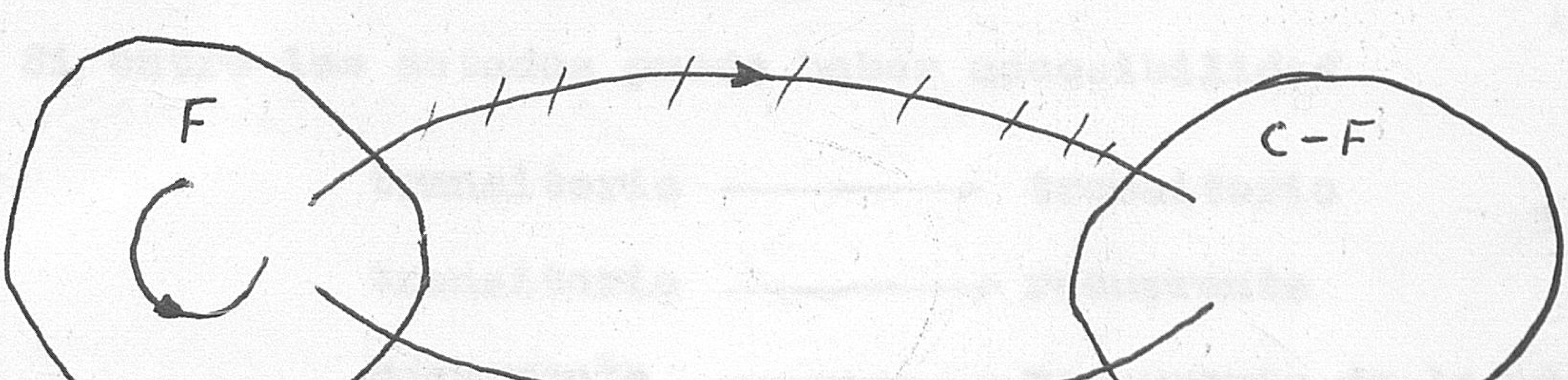


fig.2

Vemos pues, que el concepto de cerrado no es más que una generalización del de subcadena cerrada.

Es claro, que en la construcción de la topología sobre C, podríamos haber definido los abiertos y los cerrados mediante los dos teoremas anteriores, definición por comprensión que hubiese puesto de manifiesto desde el primer momento la relación existente entre topología y evolución. No obstante, hemos preferido la definición por extensión que nos ha permitido conocer directamente la forma explícita de los abiertos y cerrados, y por ende, las propiedades que dependen de ella.

Si analizamos $\mathcal{B}_1$ desde el punto de vista probabilístico, resulta, que los elementos de $\mathcal{B}_1$ son los mínimos abiertos dentro de los cuales se puede realizar una evolución completa de la cadena, ó lo que es lo mismo, fijado un cierto estado inicial, siempre puede encontrarse un elemento de $\mathcal{B}_1$ dentro del cual el sistema se localiza con probabilidad 1.

Por otra parte, recordemos que entre dos puntos siempre existe una cadena de elementos de $\mathcal{B}_1$ que los une. A la luz de la interpretación anterior, quedan claras las consideraciones que se hicieron en su momento sobre el tamaño de los elementos de dicha cadena:

a) Si entre los estados puede haber accesibilidad

transitorio $\longrightarrow$ transitorio

transitorio $\longrightarrow$ recurrente

recurrente $\longrightarrow$ recurrente de la misma clase

la cadena se reducía a un sólo elemento, ya que en él serán posibles transiciones completas.

b) Si entre los estados no puede haber accesibilidad

recurrente $\not\longrightarrow$ recurrente de distinta clase la cadena está formada por dos elementos, lo que indica naturalmente, que no son posibles transiciones completas entre dichos estados.

Esquemáticamente, estas dos situaciones pueden ser representadas por:

ACCESIBILIDAD

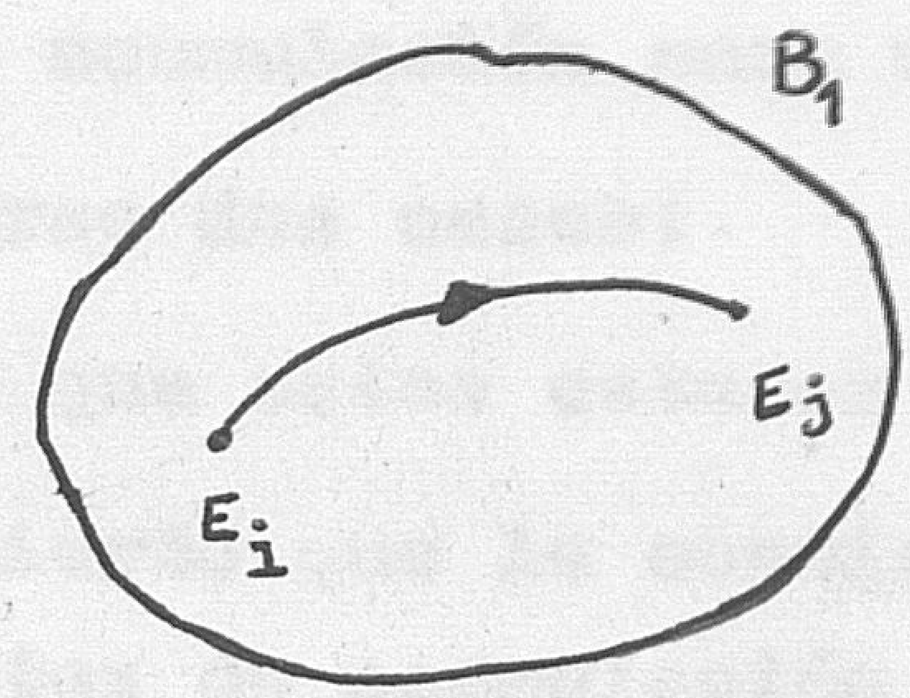


fig. 3

NO ACCESIBILIDAD

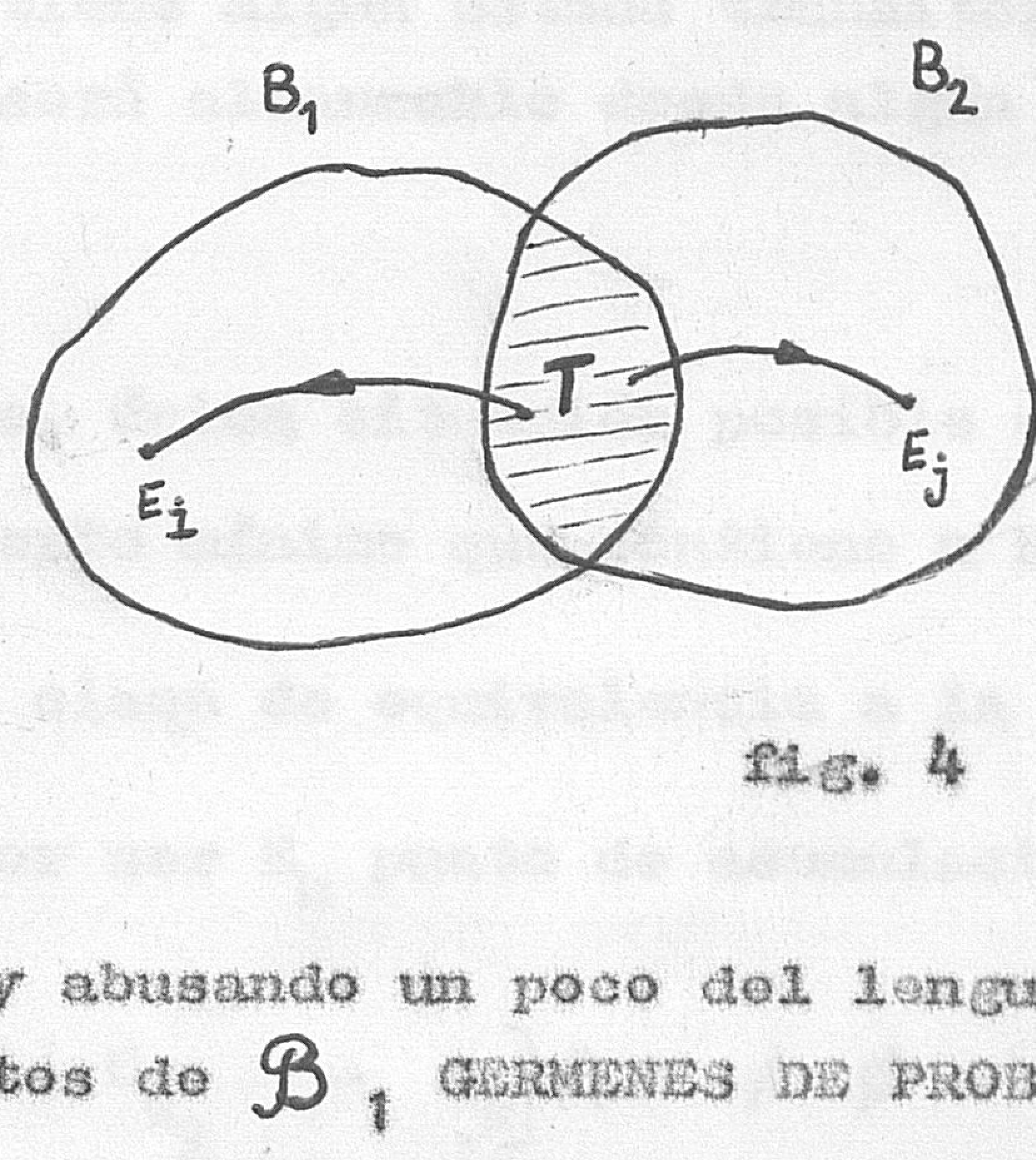


fig. 4

Por este motivo, y abusando un poco del lenguaje, podemos denominar a los elementos de $\mathcal{B}_1$ GERMENES DE PROBABILIDAD y a toda cadena simple que una dos estados mediante transiciones RAMA del proceso estocástico.

*** El punto de acumulación, es uno de los conceptos topológicos que mayor riqueza probabilística poseen. Para ellos, podemos enunciar un teorema que es válido tanto si $T = \emptyset$ como si $T \neq \emptyset$. Para el primer caso, dicho teorema será reforzado en Θ_2.

TEOREMA 5-6 " Condición necesaria y suficiente para que E_k sea punto de acumulación para un subconjunto $E \subset C$, es que E_k sea alcanzable desde algún punto de E, --- prescindiendo quizás del propio E_k ".

En efecto:

- Supongamos que E_k es punto de acumulación para un cierto E, - dado lo cual, pueden presentarse dos casos:

1) E_k es transitorio -siempre que estos estados existan- de - modo que como el mínimo abierto que lo contiene es T, por las porpiedades de los puntos de acumulación se tiene que cumplir:

$$\left[T - E_k\right] \cap E \neq \emptyset$$

Así pués, E contiene algún estado transitorio distinto de E_k y por tanto será alcanzable desde algún punto del con-- junto.

2) E_k es recurrente, única situación posible si $T = \emptyset$. En es- te caso, el abierto mínimo que contiene a E_k es $T \cup C_{k_i}$ -- donde C_{k_i} es la clase de equivalencia a la que pertenece - dicho estado. Por ser E_k punto de acumulación para E, En-- tonces:

$$\left[T \cup C_{k_i} - E_k\right] \cap E \neq \emptyset$$

dado lo cual, ó E contiene algún estado transitorio, ó al- gún estado de C_{k_i} distinto de E_k ó bien ambas cosas a la - vez. En las dos situaciones, E_k es alcanzable desde E.

Así pues, independientemente del carácter del estado, si es punto de acumulación de un conjunto, es alcanzable desde los puntos del mismo.

- Supongamos ahora, que E_k es alcanzable desde algún otro estado de E quizás distinto de él mismo. Para demostrar que E_k es punto de acumulación, invertimos los rezonamientos del punto anterior; según el carácter del estado, podemos distinguir:

1) E_k es transitorio. Si se cumple la hipótesis de entrada, es que E contiene algún otro estadp distinto de E_k y por tanto:

$$[T - E_k] \cap E \neq \emptyset$$

lo que prueba que es punto de acumulación.

2) E_k es recurrente, único caso posible si $T = \emptyset$. Cumpliéndose la hipótesis inicial, entonces E contiene algún estado transitorio ó algún estado recurrente de la misma clase — C_{k_i} que E_k pero distinto de él. Así pues:

$$[T \cup C_{k_i} - E_k] \cap E \neq \emptyset$$

lo que prueba que es punto de acumulación.

Así pués, independientemente de su carácter, si E_k es alcanzable desde un punto de E quizás distinto de 'él mismo, entonces es de acumulación para dicho conjunto.

Como corolarios de este teorema, podemos dar una serie de enunciados que permiten caracterizar los puntos interiores, exteriores, frontera y aislados de un cierto $E \subset C$ y que proporcionan incluso interpretación al nombre de los mismos de una manera sugestiva:

COROLARIO 5-1 "Condición necesaria y suficiente para que E_k sea interior a E, es que únicamente sea accesible desde puntos que pertenezcan a dicho E".

Esquemáticamente:

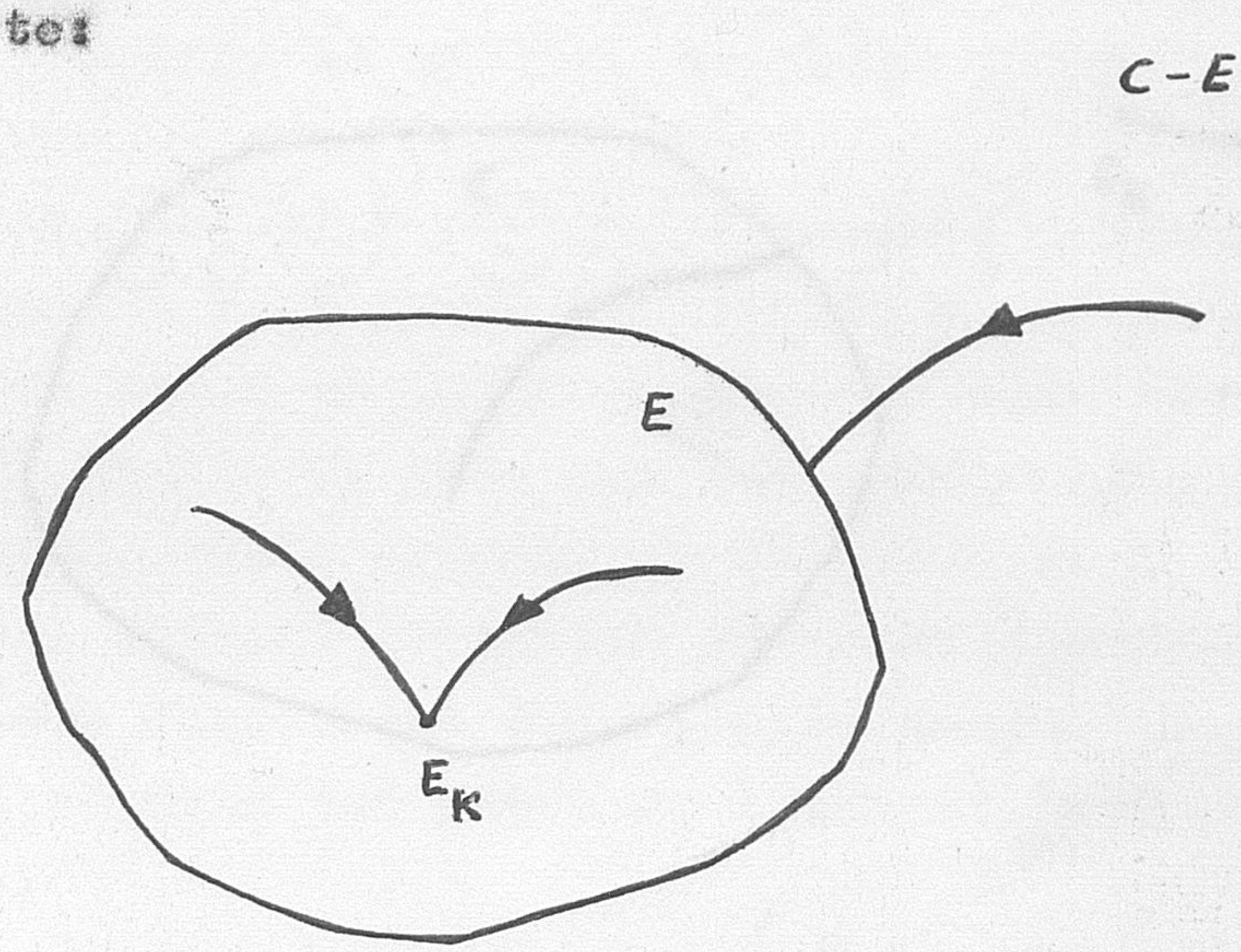


fig. 5

COROLARIO 5-2 "Condición necesaria y suficiente para que E_k sea un punto frontera de E, es que sea accesible desde puntos de E y puntos de C-E".

Esquemáticamente:

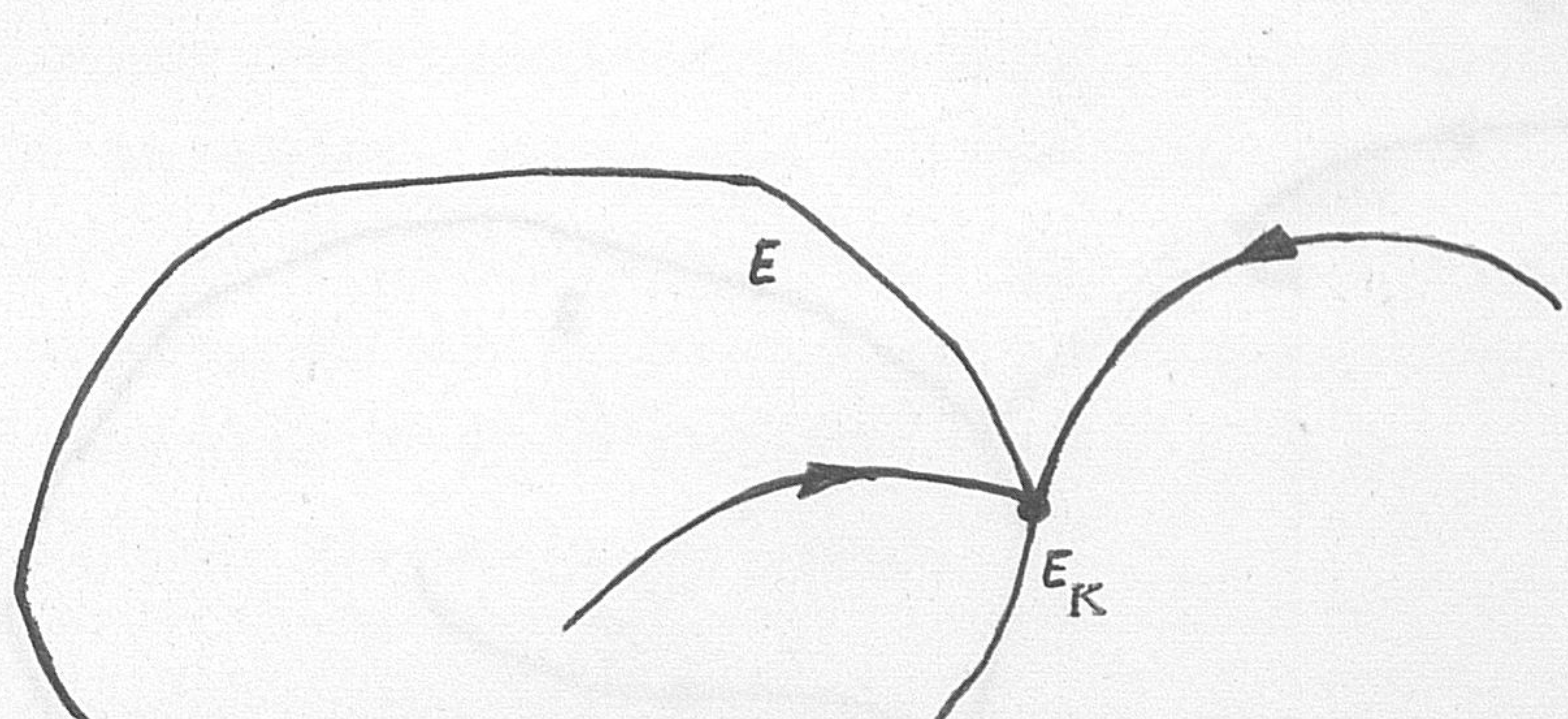


fig. 6

COROLARIO 5-3 "Condición necesaria y suficiente para que E_k sea exterior a E, es que sea alcanzable únicamente desde puntos de C-E".

Esquemáticamente:

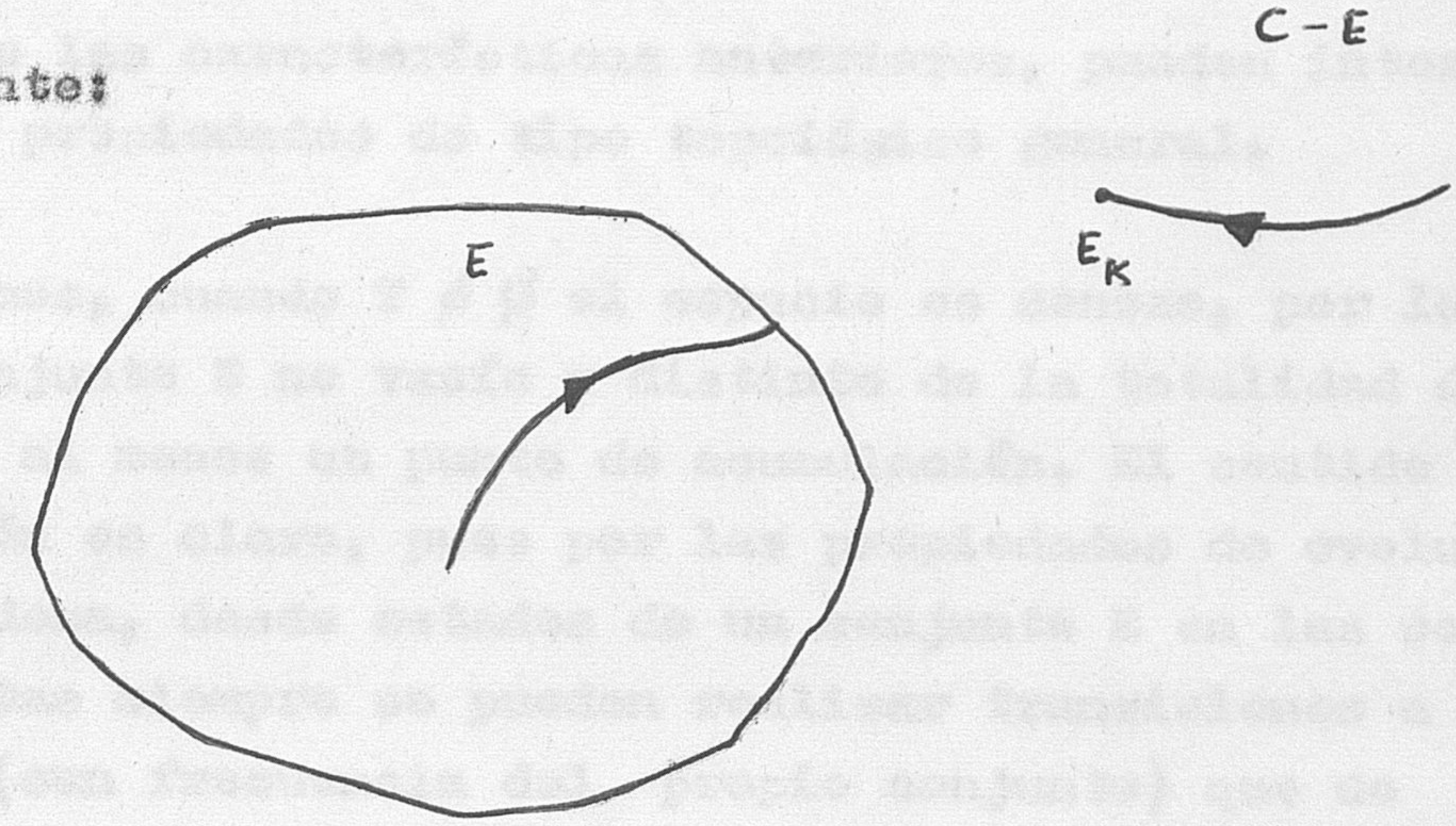


fig. 7

Como es natural, equivale a decir que los puntos exteriores a E son los puntos interiores a C-E.

COROLARIO 5-4 "Condición necesaria y suficiente para que E_k sea punto aislado de E, es que, perteneciendo a E, sólo sea alcanzable desde puntos de C-E".

Esquemáticamente:

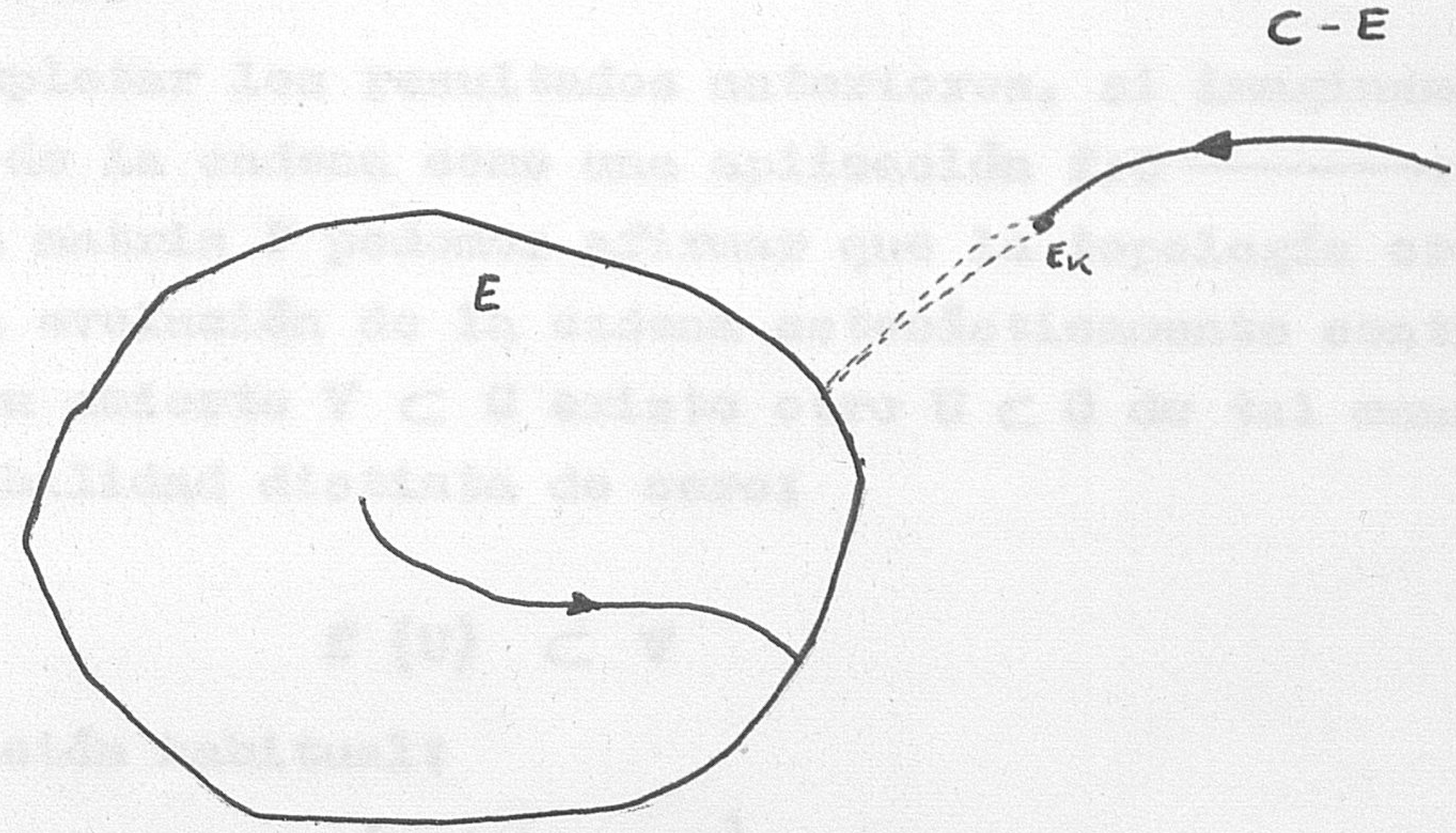


fig. 8

Como consecuencia de estos teoremas, quedan aclaradas todas las propiedades de los abiertos, y mediante los cerrados, se llega al concepto de clausura según Feller.

A la luz de las características anteriores, pueden interpretarse algunas propiedades de tipo topológico general.

Según sabemos, cuando $T \neq \emptyset$ el espacio es conexo, por lo cual, todo conjunto E no vacío y distinto de la totalidad del espacio posee al menos un punto de acumulación. El sentido de esta afirmación es claro, pues por las propiedades de evolución de la cadena, desde estados de un conjunto E en las condiciones supuestas siempre se pueden realizar transiciones a otros estados (con frecuencia del propio conjunto) que de acuerdo con el teorema 3-6 serán de acumulación para el conjunto considerado.

Según se dijo y demostró, todo conjunto E que contuviese al menos un estado transitorio era denso en C ó sea E = C. Analizando esta propiedad desde el punto de vista topológico, ya que desde un estado transitorio, es posible el acceso a cualquier otro estado de la cadena incluyendo los propios de E, lo que prueba que todo punto de C es de acumulación para el conjunto tal como se había postulado.

** Para completar los resultados anteriores, si imaginamos la evolución de la cadena como una aplicación $f: C \longrightarrow C$ regida por la matriz P podemos afirmar que la topología creada es tal que la evolución de la cadena estocásticamente continua, ó sea, para un abierto $V \subset C$ existe otro $U \subset C$ de tal manera que con probabilidad distinta de cero:

$$f(U) \subset V$$

ó con la notación habitual:

$$\text{Pro}\ \{f(U) \subset V\} \neq 0$$

En efecto:

El abierto V será de la forma $T \cup [\bigcup_i C_{k_i}]$ englobándose los casos $T = \emptyset$ $T \neq \emptyset$. Sus estados, pueden ser alcanzados desde otros estados transitorios ó desde los estados recurrentes de las mismas clases que lo componen; tomando $U = V$ trivialmente $f(U) \subset V$ con probabilidad distinta de cero.

Añadiremos, que la topología θ_1 es la menos fina en la que se verifica la propiedad anterior, de modo que si θ' es tal que en ella la evolución de la cadena es estocásticamente contínua, entonces:

$$\theta_1 \subset \theta'$$

*** Resumiendo todo lo dicho en el apartado, resulta, que todos los elementos de la topología tienen una clara interpretación probabilística, reflejando de manera directa, situaciones de accesibilidad y evolución estocástica. Por este motivo postulamos para θ_1 el nombre de TOPOLOGIA DE LA ACCESIBILIDAD.

II-6 TOPOLOGIA θ_2 (DE LA COMUNICACION) SOBRE UNA CADENA DESCOMPONIBLE

En la pregunta anterior, hemos establecido sobre C una topología con base en las clases de la relación fundamental de equivalencia, topología que cumplía una serie de propiedades de interés que incluso determinaban el nombre de la misma, pero observemos, que estas características responden directamente de la forma general de los abiertos, ya que dicha topología no pertenece a una familia tipificada de estructuras cuyas propiedades generales puedan verterse al modelo estudiado.

En las preguntas que siguen, vamos a tratar de determinar sobre C topologías uniformes que sean compatibles con las propiedades probabilísticas de la cadena. Con este tipo de topologías, se subsana el inconveniente que hemos apuntado en el párrafo anterior, ya que podrán aplicarse propiedades que dependan de la forma general de los abiertos y del hecho de ser uniformes. Entre las de este segundo tipo, destaca la posibilidad de establecer semidistancias sobre C.

Por otra parte, las estructuras uniformes permiten el estudio de la convergencia de un modo sistemático, a través del concepto de filtro de Cauchy y su asociado de sucesión de Cauchy, punto de gran importancia como posteriormente veremos.

En primer lugar y en la presente pregunta, estudiaremos la estructura uniforme que se crea directamente con base en la relación fundamental de equivalencia (comunicación) para pasar en la siguiente a la creación de una semidistancia que determinará una nueva uniformidad.

II-6-1 Construcción de la topología.-

Consideremos de nuevo una cadena propiamente descompuesta de la forma (4-1). Adelantando resultados, podemos afirmar que la clase T no es diferente de las otras a efectos de las topologías que vamos a crear, de modo que a lo largo de todo el capítulo y por cuestiones de comodidad, no la notaremos de modo diferente y así:

$$C = \bigcup_{v \in V} C_v$$

que nos permite además no hacer distinción alguna entre los casos $T \neq \emptyset$ y $T = \emptyset$ que como veremos no existe al menos desde un punto de vista formal.

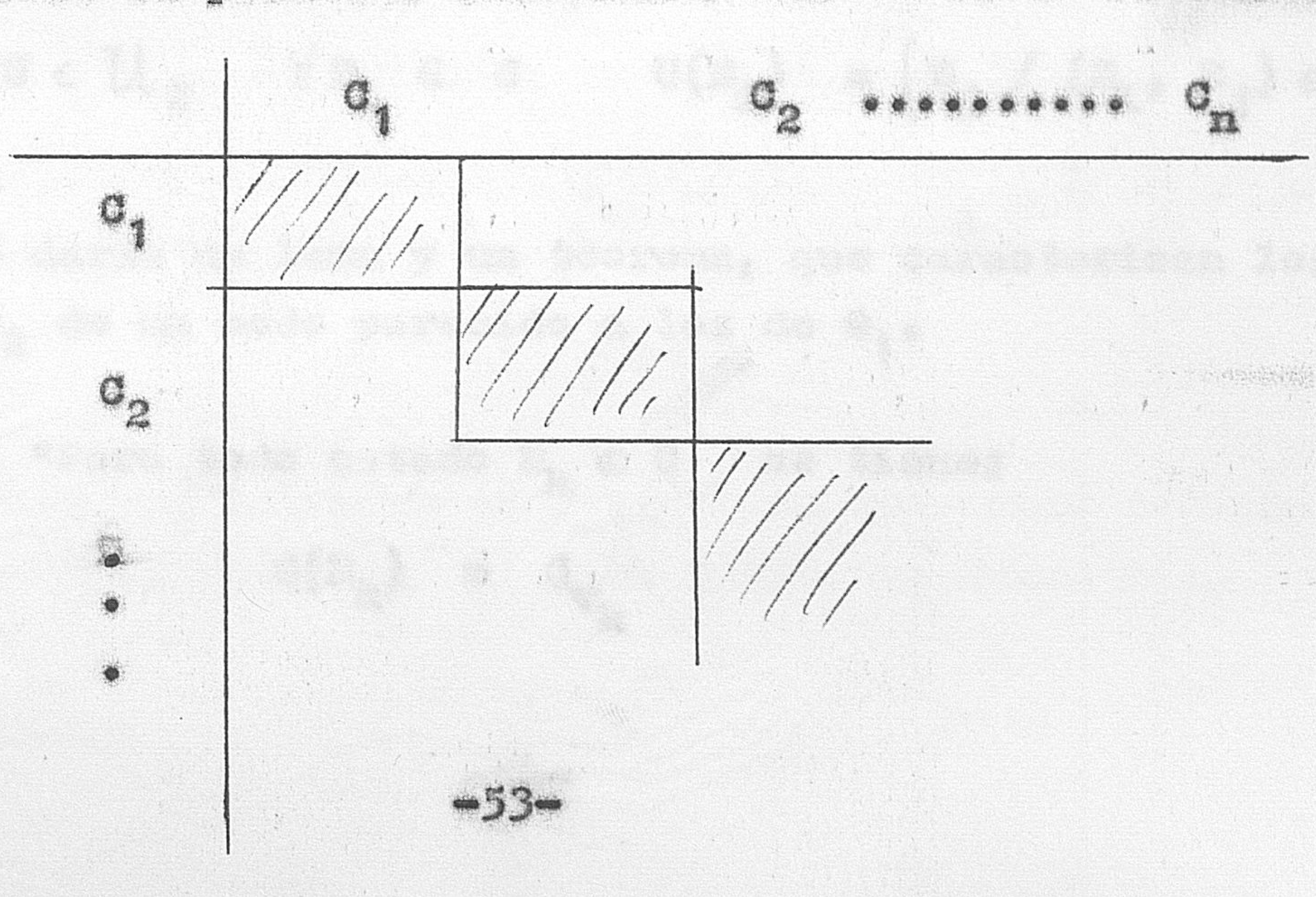
Teniendo en cuenta que una relación de equivalencia sobre un conjunto, determina una estructura uniforme cuyo sistema fundamental de banadas es la traza ó gráfico de la relación, podemos afirmar, que sobre C tenemos definida una estructura uniforme cuyo sistema fundamental de banadas es el conjunto G dado por:

$$G = \left\{ (E_i, E_j) \;/\; E_i \sim E_j \right\}$$

ó lo que es lo mismo:

$$G = \bigcup_{v \in V} C_v \times C_v$$

dando sobre el producto cartesiano una banda de la forma:



Según sabemos, la estructura uniforme $_2$ construída sobre C, queda definida de la forma:

$$\mathcal{U}_2 = \{U \in \mathcal{P}(C \times C) \; / \; G \subset U\}$$

que trivialmente puede comprobarse cumple los axiomas que la caracterizan como tal.

Si decimos (con nomenclatura de Bourbaki) que dos puntos estados son vecinos de orden $U \in \mathcal{U}_2$ si $(E_i, E_j) \in U$ entonces es evidente que la relación de comunicación es idéntica a la relación de vecindad según la banda G que trivialmente pertenece a $\mathcal{U}_2$. De nuevo, aparece un concepto probabilístico asociado con otro topológico, pues la vecindad según G indica comunicación concepto puramente probabilístico. Posteriormente, veremos que esta interrelación caracteriza toda la topología.

Construída una estructura uniforme sobre C, no presenta dificultad alguna la determinación de la topología (uniforme) subyacente a la misma. Dicha topología que notaremos Θ_2, quedará definida por:

$$\Theta_2 = \{O \in C \; / \; \forall E_i \in O \;\; \exists U \in \mathcal{U}_2 \; / U(E_i) \subset O\}$$

donde

$$\forall U \in \mathcal{U}_2 \quad \forall E_i \in C \quad U(E_i) = \{E_j \; / \; (E_i, E_j) \in U\}$$

Puede darse un lema y un teorema, que caracterizan los abiertos de Θ_2 de un modo parecido a los de Θ_1.

LEMA 6-1 "Para todo estado $E_k \in C$ se tiene:

$$G(E_k) = C_{v_k}$$

donde C_{v_k} es la clase de equivalencia que lo contiene".

En efecto:

Por definición $G(E_k) = \{E_i \;/\; (E_i, E_k) \in G\}$ ó sea los estados que son vecinos de orden G con E_i. Como ésto es equivalente a los que están comunicados con él:

$$G(E_k) = \{E_i \;/\; E_i \sim E_k\} = C_{v_k}$$

tal como queríamos demostrar.

Con este resultado, ya podemos enunciar:

TEOREMA 6-1 "Condición necesaria y suficiente para que un conjunto $O \subset C$ sea abierto de la topología uniforme θ_2, es que sea de la forma:

$$O = \bigcup_i C_{v_i} \qquad (6\text{-}1)$$

es decir, la unión de un número completo de clases de la relación de comunicación".

En efecto:

- Si $O = \bigcup_i C_{v_i}$ es abierto, pues para cada $E_k \in O$ la clase de equivalencia que lo contiene también está en O de modo que de acuerdo con el lema anterior:

$$C_{v_k} = G(E_k) \subset O$$

Como G es una banda de la estructura uniforme, podemos asegurar que O es abierto, tal como queríamos demostrar.

- Supongamos ahora que O es abierto y vamos a probar que presenta la forma (6-1). Lo haremos por reducción al absurdo, para lo cual, admitiremos que siendo abierto posee una forma general del tipo

$$O = \left[\bigcup_j C_{v_j}\right] \cup \left[\bigcup_k L_{v_k}\right]$$

donde para cada v_k puede encontrarse C_{v_k} de modo que:

$$L_{v_k} \subset C_{v_k} \qquad L_{v_k} \neq C_{v_k}$$

que además no interseca con ninguna de las clases que forman el primer término.

Sea E_k un punto (estado) cualquiera de O perteneciente a la segunda parte de (6-2), ó sea para el que exista v_k tal que E_k pertenece a L_{v_k}. Sea U una banda cualquiera de $\mathcal{U}_2$ que naturalmente contendrá a G, por lo cual:

$$G(E_k) \subset U(E_k)$$

y de acuerdo con el lema:

$$C_{v_k} \subset U(E_k)$$

de donde deducimos que en ningún caso puede cumplirse que $U(E_k)$ está contenido en L_{v_k}.

Por la forma de O y la propiedad de no intersección de las clases de equivalencia:

$$\forall U \in \mathcal{U}_2 \qquad U(E_k) \not\subset O$$

lo que es absurdo bajo la hipótesis de que O es abierto. Hemos de admitir entonces, que se verifica:

$$O = \bigcup_i C_{v_i}$$

tal como queríamos demostrar.

xxx La familia $\mathcal{F}_2$ de los subconjuntos cerrados de C respecto a la topología construída, se obtendrá como el conjunto de los complementarios de los elementos de Θ_2. Teniendo presente la descomposición del espacio C, podemos escribir:

COROLARIO 6-1 "Condición necesaria y suficiente para que $F \subset C$ sea cerrado, es que contenga un número exacto de clases de equivalencia, es decir:

$$F = \bigcup_i C_{v_i} \quad ".$$

Para completar tanto Θ_2 como $\mathcal{F}_2$, deberemos añadir el conjunto $\emptyset$, que realmente no responde a la forma de los teoremas, pero esto carece de importancia, ya que su introducción es mas convencional que operativa. Observamos que C responde tanto a la forma de abierto como a la de cerrado.

Antes de pasar al estudio de las propiedades que Θ_2 confiere a C, vamos a hacer algunas consideraciones de interés:

1) La construcción es totalmente válida para cadenas transitorias generales en el sentido de Kemony.

2) Los casos $T = \emptyset$ y $T \neq \emptyset$ son idénticos coincidiendo en el primero con Θ_2 con Θ_1 tal como habíamos indicado con anterioridad. Por otra parte, en este tipo de topología tampoco afecta para nada el hecho de que T sea abierto ó cerrado estocásticamente hablando, tal como veremos en las interpretaciones probabilísticas.

3) Como puede fácilmente comprobarse, en general $\Theta_1 \subset \Theta_2$ de mo-

do que tenemos sobre C una topología más fina que la anterior.

II-6-2 Propiedades de C como espacio topológico.-

Analizando la forma de todo abierto:

$$O = \bigcup_i C_{v_i}$$

que puede reducirse al vacío ó a una sola clase de equivalencia y que esta misma forma se postula para los cerrados, podemos afirmar que con la topología uniforme que se deduce de $\mathcal{U}_2$ el espacio C resulta ser no conexo. Esto, supone la pérdida de algunas propiedades con respecto a la topología de la accesibilidad, en particular aquellas que dependen de la conexión (por ejemplo, no podemos asegurar que todo conjunto posea al menos un punto de acumulación) pero esto queda de sobra compensado por la mayor riqueza y extensión del espacio contruído.

*** La familia $\mathcal{B}_2 \subset \Theta_2$ definida por:

$$\mathcal{B}_2 = \{ C_v \quad v \in V \}$$

ó sea, el conjunto de todas las clases de equivalencia, es una base de la topología Θ_2 sobre cuyo cardinal se pueden hacer las mismas consideraciones que en el caso de Θ_1. Por este motivo, podemos asegurar que el espacio verifica el segundo axioma de numerabilidad y por tanto que es de Lindelöff.

Aunque con Θ_2 C resulta ser no conexo, como $\Theta_2 \supset \Theta_1$ podemos establecer de nuevo mediante $\mathcal{B}_1 \subset \Theta_1$ cadenas simples que unan dos puntos ó estados cualesquiera. Como por otra parte todo conjunto de $\mathcal{B}_1$ se obtiene como unión de elementos de

$_2$, podemos de nuevo considerar esta familia como una base de las evoluciones de la cadena. En el apartado de interpretaciones probabilísticas insistiremos sobre el tema.

Por cumplirse se segundo axioma de numerabilidad se cumple el primero de modo que todo punto admite una base local de entornos numerable. De hecho, si notamos C_{v_k} la clase que contiene al estado E_k, el filtro de sus entornos viene dado por:

$$\beta(E_k) = \{S \in C \ / \ C_{v_k} \subset S\}$$

El uso del entorno básico mínimo, facilitará enormemente el estudio de las propiedades locales del espacio.

Como puede fácilmente comprobarse, el espacio C no es metrizable, pero por tratarse de una estructura uniforme es pseudométrico, de modo, que sobre él, siempre puede construirse una función semidistancia (como mínimo) y en general una familia de ellas de las que se puede suponer que deriva la topología. No entraremos sobre la determinación de dichas funciones, pero observaremos la importancia de este hecho, que claramente supone un avance sobre la topología de la accesibilidad.

*** De acuerdo con las propiedades de θ_2 y la caracterización anteriormente dada del filtro de los entornos, E_k será un punto de acumulación para S C si la clase de (4-1) en que E_k está contenido, dicha clase no es otra cosa que $G(E_k)$ de modo que si E_k es punto de acumulación para S, es vecino de orden G de algún punto de dicho conjunto, Recordando que la vecindad según esta banda particular y la comunicación son la misma cosa, podemos asegurar que los puntos de acumulación de un conjunto deben verificar una serie de propiedades probabilísticas en relación con los puntos del mismo. Esta interpretación, será estudiada con detalle en un apartado posterior.

Dada la forma que tienen los cerrados, el concepto de clausura según θ_2 no coincide con el dado por Feller, pues por ejemplo el conjunto T de los estados transitorios será abierto ó cerrado (desde el punto de vista probabilístico) pero siempre es cerrado topológicamente hablando.

Los conceptos subordinados al de punto de acumulación, tales como son el de punto interior exterior, frontera y aislado, se definen perfectamente en esta topología, y puede pensarse que también ellos deben tener relación con la comunicación de estados puesto que se construirán en términos de vecindad sobre G. Posteriormente insistiremos sobre el tema.

Por no ser en este caso C un espacio conexo, no podemos asegurar nada sobre las condiciones bajo las que un conjunto pueda poseer ó no un punto de acumulación.

Por la forma de los cerrados como la unión de un número exacto de clases de equivalencia y por cumplirse el segundo axioma de numerabilidad, podemos afirmar que el espacio es separable en el sentido de la densidad, caracterizando los conjuntos densos de acuerdo con el siguiente enunciado:

TEOREMA 6-2 "Condición necesaria y suficiente para que $S \subset C$ sea denso, ds que contenga un punto de cada una de las clases que componen C sin coincidir con la totalidad del espacio".

que puede ser identificado con el 5-3.

Con base en la topología uniforme que hemos creado, podemos establecer entre cadenas una relación del mismo tipo que la que se vio para Θ_1 , y así, diremos que dos cadenas son equivalentes cuando sus espacios de estados como topológicos uniformes sean homeomorfos.

Hemos de hacer notar, que en estos casos la definición no tiene ni mucho menos la importancia que tenía en el caso de la topología de la accesibilidad, ya que puede perfectamente corresponderse una cadena con estados transitorios con otra que no los posea; especificando aún más, podría ocurrir que dos cadenas con estados transitorios fuesen equivalentes, y sin embargo sus conjuntos de estados transitorios no estuviesen en correspondencia sino que fuese:

$$T_1 \longleftrightarrow C_{2_V} \qquad \text{subcadena cerrada del segundo espacio}$$

situación que no perturbaría en absoluto el homeomorfismo, con tal de que ambos subconjuntos tuviesen el mismo número de elementos.

Ahora bien, si consideramos únicamente el caso $T = \emptyset$ que es el más apto en nuestra topología, se pueden definir los espacios topológicos de Markov, coincidiendo esta definición con la que se dio para Θ_1 tal como debe ocurrir ya que las topologías coinciden en este caso.

De estas propiedades, se puede hacer uso para resolver problemas relativos a la forma de la cadena correspondiente a cualquier $A \subset C$. Por ejemplo, podemos afirmar que todo abierto ó cerrado es idéntico a un espacio C más restringido que el original con ó sin estados transitorios, situaciones indiferentes para nosotros. De esta manera, tanto los abiertos como los cerrados, son espacios topológicos uniformes no conexos cuya estructura uniforme se obtiene con base en la restricción de G a di--

cho conjunto.

Añadiremos, que caso de que exista la cadena dual, con una topología del tipo θ_2 deberá resultar homeomorfa con la primitiva.

*** Consideremos de nuevo, el espacio C de los estados de una cadena de Markov convertido en espacio uniforme con base en la relación fundamental de equivalencia. Construyamos el conjunto:

$$C/\sim \quad = \quad \left\{ C_v \qquad v \in V \right\}$$

donde las clases de equivalencia se consideran como puntos del nuevo espacio. En él podemos construir la topología cociente según la proyección canónica, que será una de tipo uniforme, procedente de la estructura que tiene como sistema fundamental de bandas la clase:

$$G/\sim \quad = \quad \left\{ (C_v, C_v) \qquad v \in V \right\}$$

ó sea la diagonal principal del producto cartesiano de C/ por sí mismo. De esta manera, la familia de abiertos de la topología es la familia $\mathcal{P}(C/\sim)$ con el sentido que conocemos para esta notación.

En estas condiciones, podemos afirmar que $C/\sim$ es el espacio de estados de una cierta cadena de Markov cuyas condiciones probabilísticas fuesen tales que proporcionasen la topología discreta. La matriz de transición de esta cadena, que será denominada CADENA COCIENTE, tal como se hizo con anterioridad, es:

$T = \emptyset \qquad\qquad P = I$ identidad de dimensión adecuada.

$$T = \emptyset \qquad\qquad P = \left(\begin{array}{cc|c} & I & 0 \\ \hline f_{1t} & f_{2t} & f_{tt} \end{array}\right)$$

donde f_{it} marca la probabilidad de absorción en la clase cerrada C_i y f_{tt} la probabilidad de permanencia en el conjunto de los estados transitorios. Si T es una clase cerrada, entonces $f_{tt} = 1$.

~~xxx~~ Para terminar este apartado, vamos a demostrar una propiedad que es de enorme interés y que deja plenamente justificada la adopción de las estructuras uniformes a la hora de dotar a C de una topología.

TEOREMA 6-3 "El espacio C con la topología θ_2 es completo, ó sea, en él, todo filtro de Cauchy tiene límite y por ende toda sucesión de Cauchy".

En efecto:

Sea $\mathcal{F} = \{F_i\}$ una familia de cerrados de C que cumpla:

a) Posee conjuntos pequeños con respecto a $\mathcal{U}_2$ es decir, para toda $U \in \mathcal{U}_2$ existe $F_i \in \mathcal{F}$ tal que $F_i^2 \subset U$.

b) Posee la propiedad de la intersección finita.

si demostramos que esta familia posee intersección total no vacía, tendremos probado que C es completo.

Si tomamos la banda $G \subset \mathcal{U}_2$ debe existir un cerrado F_{i_1} tal que

$$F_{i_1} \times F_{i_1} \subset G$$

y por la caracterización de los cerrados, podemos asegurar que las únicas condiciones bajo las que se cumple la inclusión anterior son:

$$F_{i_1} = \emptyset \qquad\qquad F_{i_1} = C_{v_1}$$

La primera, queda descartada por poseer la familia la propiedad de la intersección finita, de manera que necesariamente deberemos aceptar la segunda. Así la clase $\mathcal{F}$ posee un cerrado mínimo constituído por un elemento de la descomposición (4-1) que además será único, pues si existiese $F_{i_2} = C_{v_2}$ entonces:

$$F_{i_1} \cap F_{i_2} \neq \emptyset \implies C_{v_1} \cap C_{v_2} \neq \emptyset$$

de acuerdo con la propiedad de la intersección finita, lo que está en contra del carácter general de las clases de equivalencia. Esto nos lleva a aceptar que todo cerrado de $\mathcal{F}$ distinto de F_{i_1} debe contener dos ó mas clases de la relación .

Sea $F_j \neq F_{i_1}$, por la propiedad de la intersección finita, tendremos:

$$F_j \cap F_{i_1} \neq \emptyset$$

de modo que acudiendo a la forma de los cerrados podemos afirmar:

$$F_{i_1} \subset F_j \quad \forall j$$

y por tanto

$$\bigcap_{j} F_j \neq \emptyset$$

lo que prueba que el espacio C con la topología construída es completo tal como queríamos demostrar.

Como es lógico pensar, este resultado es de enorme importancia, pues garantiza que el espacio C es cerrado respecto de la operación de paso al límite en sucesiones ó filtros de Cauchy y por tanto inalterable a cualquier operación de este tipo. De acuerdo con ésto, C es su propia completitud.

TEOREMA 6-4 "Condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{E_{k_n}\}$ de estados de C sea de Cauchy, es que exista un subíndice n_o a partir del cual todos los términos de la sucesión pertenezcan a la misma clase de equivalencia ".

En efecto:

- Si $\{E_{k_n}\}$ cumple la condición impuesta, a partir de n_o todos los elementos son vecinos de orden G y por consiguiente vecinos con respecto a toda banda de la estructura uniforme. Dicho de otra manera:

$$\forall U \quad \forall m, n > n_o \Rightarrow (E_{k_m}, E_{k_n}) \in G \subset U$$

lo que prueba que la sucesión es de Cauchy tal como queríamos demostrar.

- Si $\{E_{k_n}\}$ es de Cauchy, sabemos que para todo $U \in \mathcal{U}_2$ debe encontrarse N de tal manera que m, $n \geqslant N \Rightarrow (E_{k_m}, E_{k_n}) \in U$.

Vamos a probar que en estas condiciones verifica el enunciado anterior. Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\{E_{k_n}\}$ es de Cauchy y que sus elementos pertenecen a distintas clases de equivalencia a lo largo de toda la variación de n.

Por ser de Cauchy, si fijamos U = G debe encontrarse N_o^G tal que

$$m, n \geqslant N_o^G \Rightarrow (E_{k_n}, E_{k_m}) \in G \qquad (6-3)$$

Ahora bien, de acuerdo con las hipótesis que hemos realizado, siempre es posible fijar $m, n \geqslant N_o^G$ de manera que existan clases de equivalencia distintas C_{v_m} C_{v_n} que cumplan:

$$E_{k_m} \in C_{v_m} \qquad E_{k_n} \in C_{v_n}$$

lo que está en total contradicción con (-6-3). Llegamos de esta manera, a la conclusión de que si la sucesión es de Cauchy, todos sus elementos a partir de un cierto subíndice ($n_o = N_o^G$) en adelante, deben pertenecer a una misma clase de equivalencia, tal como queríamos demostrar.

Recordando que la vecindad según G, la pertenencia a una misma clase de equivalencia y la comunicación son una misma cosa, podemos dar dos versiones del teorema anterior que permitirán posteriormente una más fácil interpretación del mismo.

TEOREMA 6-5 "Condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{E_{k_n}\}$ sea de Cauchy, es que a partir de un cierto subíndice, todos sus elementos sean vecinos de orden G".

TEOREMA 6-6 "Condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{E_{k_n}\}$ sea de Cauchy, es que a partir de un cierto subíndice en adelante, todos los términos de la misma estén comunicados".

Posteriormente insistiremos sobre este tema.

II-6-3 Interpretaciones probabilísticas de la topología.-

Teniendo en cuenta que θ_2 se ha construído con base en la relación de vecindad según G que es idéntica a la comunicación podemos afirmar que este carácter se tiene que transmitir a todos los elementos de la topología.

Por otra parte, podemos asegurar que todo lo que se diga aquí respecto a interpretaciones probabilísticas, es también válido para la topología del la accesibilidad, siempre que T sea una clase cerrada, ya que cuando se trata de clases cerradas, accesibilidad y comunicación son conceptos indistinguibles.

Aunque el espacio no es conexo, podemos dar un enunciado que caracteriza probabilísticamente hablando tanto los abiertos como los cerrados:

TEOREMA 6-7 "Condición necesaria y suficiente para que $S \subset C$ sea abierto (cerrado) es que sea cerrado respecto de la comunicación, es decir, que cualquiera que sea $E_k \in S$ si E_i está comunicado con él, entonces $E_i \in S$".

Esta propiedad, necesariamente se debe transmitir a los conceptos relacionados con el de abierto y con el de entorno, como pueden ser el de punto de acumulación y sus derivados.

Si consideramos la base $\mathcal{B}_2$ e imaginamos que la cadena evoluciona un número infinito de veces, podemos afirmar:

a) Si la cadena parte de estados recurrentes, el proceso no sale nunca de la correspondiente subcadena cerrada de modo que podemos olvidar el resto del sistema.

b) Si la cadena parte de un estado transitorio, caso de que éstos existan, puede ocurrir:

1) La clase T también es cerrada de modo que el proceso permanece siempre dentro de los estados transitorios.

2) La clase T es abierta, de modo que el sistema es absorbido por una subcadena cerrada después de un cierto número de evoluciones; en este caso, para el estudio del proceso se necesitan dos elementos de $\mathcal{B}_2$ pero uno de ellos, la clase transitoria puede ser olvidada después de un número finito de pasos.

En estas condiciones, podemos afirmar dos extremos que en realidad no son independientes:

A) Nuevamente, el conjunto $\mathcal{B}_2$ puede ser considerado como una base de las evoluciones de la cadena, prescindiendo quizás de un número finito de pasos.

B) Si imaginamos que se produce una sucesión de estados por evolución de la cadena un número infinito de pasos, resulta que a partir de un ceirto término, esta tiene todos sus elementos dentro de una clase de equivalencia y por tanto:

TEOREMA 6-8 "Condición necesaria y suficiente para que una sucesión de estados sea de Cauchy, es que se pueda obtener por evolución de la cadena un número infinito de pasos".

Por tanto puede de nuevo darse a los elementos de $\mathcal{B}_2$ el nombre de GERMENES DEL PROCESO ESTOCASTICO.

** Aprovechando las propiedades de $\mathcal{B}_2$ que hemos vista, podemos enunciar:

TEOREMA 6-9 "Condición necesaria y suficiente para que E_k sea un punto de acumulación de $S \subset C$, es que esté comunicado con algún estado de S distinto quizás del propio E_k".

En efecto:

- Si E_k es de acumulación $G(E_k) \cap S \neq \emptyset$ y por tanto, existe en S algún elemento de la misma clase de equivalencia que E_k con el que por definición debe estar comunicado.

- Si E_k está commicado con algún elemento de S, entonces, este último es de la misma clase y por tanto:

$$G(E_k) \cap S \neq \emptyset$$

de modo que como este es el entorno mínimo del punto, resulta ser de acumulación.

Como vemos, de acuerdo con algo que ya se indicó, las condiciones que hay que imponer en este caso son mucho más fuertes que las de la topología de la accesibilidad.

El concepto de clausura según Feller, que es función de la accesibilidad por suponer la entrada pero no la salida, no tie ne naturalmente, reflejo en esta topología.

Con esta caracterización de los puntos de acumulación, no tiene dificultad alguna el teorema que vimos para la caracterización de los conjuntos densos en C.

Como conceptos asociados al de puntos de acumulación, tenemos el de punto interior, exterior, frontera y aislado, que pueden ser interpretados mediante corolarios del teorema anterior y que pueden ser interpretados mediante corolarios del teorema anterior y que nuevamente proporcionan una interpretación sugestiva aún para el nombre de los mismos:

COROLARIO 6-2 "Condición necesaria y suficiente para que un punto sea interior a un conjunto, es que esté comunicado con puntos de dicho conjunto".

COROLARIO 6-3 "Condición necesaria y suficiente para que un punto sea frontera de un conjunto, es que esté comunicado con puntos del conjunto y puntos que no pertenezcan al mismo".

COROLARIO 6-4 "Condición necesaria y suficiente para que un punto sea exterior a un conjunto, es que esté comunicado únicamente con puntos que no pertenezcan al mismo".

COROLARIO 6-5 "Condición necesaria y suficiente para que un punto sea aislado, es que perteneciendo al conjunto únicamente esté comunicado con puntos que no pertenezcan al mismo".

Como consecuencia de todo ésto, es por lo que postulamos para esta topología el nombre de TOPOLOGIA DE LA COMUNICACION, -

que además refleja perfectamente las propiedades generales de las bandas de la estructura uniforme de la misma.

Para terminar la pregunta, queremos hacer notar que si consideramos la evolución de la cadena como una aplicación f : $C \longrightarrow C$ regida por P, esta resulta ser estocásticamente contínua con el mismo sentido que en θ_1. Además, podemos añadir el adjetivo UNIFORME ya que respeta (es compatible) con la estructura uniforme que hemos creado.

II-7 <u>TOPOLOGIA θ_3 (DE LA COMUNICACION DEBIL) SOBRE UNA CADENA DESCOMPONIBLE</u>

Para la definición de θ_3, debemos construir una semidistancia h sobre el espacio de estados de la cadena, para lo cual, nos basaremos en la matriz H de las probabilidades de acceso eventual.

Si C queda propiamente descompuesto de la forma (4-1), entonces:

$$
H = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ T \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \cdots & T \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & & \\ \hline & A & & A^T \end{array} \right) \end{array}
$$

donde 1 indica una matriz con todas sus entradas iguales a la unidad, y 0 una matriz que tiene todos sus elementos nulos, ambas de dimensiones adecuadas, A, será una matriz cuyos elementos cumplan:

$$a_{ij} \in [0, 1]$$

sin dondición adicional alguna, mientras que A^T es cuadrada verificando:

$$a_{ij}^T \begin{cases} \in [0,1] & \text{si } i \neq j \\ = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Posteriormente, daremos una nueva condición sobre los elementos de A^T fundamental para la construcción que pretendemos.

Es claro, que si la cadena no posea estados transitorios, entonces las cajas A y A^T no existen, y por tanto, en todas las propiedades que se desprendan de la matriz H, los casos $T = \emptyset$ y $T \neq \emptyset$ no pueden ser tratados como similares, de modo que siempre deberemos fijar bien las hipótesis de trabajo que vamos a emplear. Sin embargo, los casos que T es cerrada como clase de comunicación, no son distinguidos, pues aunque A desaparece, A^T sigue verificando propiedades análogas a los casos restantes.

II-7-1 Definición de una semidistancia sobre C. Construcción de la topología asociada.-

Como cualquier $H_{ij} \in [0,1]$ se tiene que $\ln H_{ij} \in [-\infty, 0]$

O y por tanto:

$$-\ln H_{ij} \in [0, \infty] \qquad i, j$$

NOTA Hemos tomado ln por cuestiones de comodidad, pero como veremos, los mismos resultados pueden ser obtenidos tomando logaritmos en cualquier base.

En estas condiciones, definamos la función

$$h: C \times C \longrightarrow [0, \infty] \equiv \mathbb{R}^+$$

de acuerdo con:

$$\forall E_i, E_j \in C \qquad h(E_i, E_j) = \max \left\{ -\ln H_{ij}, -\ln H_{ji} \right\}$$

para la que por comodidad a partir de ahora notaremos $h(i,j)$ para todo par de estados E_i E_j.

Se cumplen las siguientes propiedades:

1) Para todo E_i $h(i,i) = 0$ ya que:

$$h(i,i) = -\ln H_{ii} = \ln 1 = 0$$

2) E_i, E_j $h(i,j) = h(j,i)$ de acuerdo con la propia definición de la función.

3) Cualesquiera que sean E_i, E_j, E_k $h(i,k) \leqslant h(i,j) + h(j,k)$

En efecto:

De acuerdo con las propiedades de H se tiene

$H_{ik} \geqslant H_{ij} \; H_{jk}$ de modo que:

$$\ln H_{ik} \geqslant \ln H_{ij} + \ln H_{jk} \Rightarrow -\ln H_{ik} \leqslant -\ln H_{ij} - \ln H_{jk}$$

Por otra parte, según la definición que hemos dado, para h, sólo se pueden presentar excluyentemente una de las dos situaciones siguientes:

- $h(i,k) = -\ln H_{ik} \leqslant -\ln H_{ij} - \ln H_{jk}$

$$\max\left[-\ln H_{ij}, -\ln H_{ji}\right] + \max\left[-\ln H_{jk}, -\ln H_{kj}\right]$$

$$= h(i,j) + h(j,k)$$

- $h(i,k) = -\ln H_{ki} \leqslant h(i,j) + h(j,k)$ por un razonamiento en todo idéntico al del caso anterior.

Esta propiedad equivale a decir que h cumple la desigualdad triangular.

En estas condiciones, podemos asegurar que $h: C \times C \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una semidistancia en C y por tanto genera una topología uniforme sobre dicho espacio.

Para poder determinar la forma de los abiertos de θ_3, vamos a analizar los valores de h sobre las distintas combinaciones de estados:

1) Si E_i y E_j son recurrentes de la misma clase, entonces:

$$H_{ij} = H_{ji} = 1 \quad \Rightarrow \quad h(i,j) = 0$$

2) Si E_i y E_j son recurrentes de distinta clase, entonces:

$$H_{ij} = H_{ji} = 0 \quad \Rightarrow \quad h(i,j) = \infty$$

3) Si E_i es transitoio y E_j recurrente, sea cual sea el carácter probabilístico de T, debe cumplirse $H_{ji} = 0$ de donde

$$h(i,j) = -\ln H_{ji} = \infty$$

Por la simetría de h, a idéntica conclusión se llega cuando E_i es recurrente y E_j transitorio.

4) Si E_i y E_j son transitorios, vamos a probar que no pueden ser simlutáneamente H_{ij} y H_{ji} iguales a 1 salvo que $i = j$.

En efecto: Si notamos ${}^kH_{ij}$ como la probabilidad de pasar de i a j sin caer en el estado k, y recordamos la definición de H_{ij}, podemos escribir:

$$H_{ij} = {}^{j}\bar{H}_{ii} + {}^{i}\bar{H}_{ij}$$

$$\bar{H}_{ii} = {}^{i}\bar{H}_{ij} H_{ji} + {}^{j}\bar{H}_{ii}$$

de modo que si admitivos $H_{ij} = H_{ji} = 1$ entonces

$$\left.\begin{array}{l} {}^{j}\bar{H}_{ii} + {}^{i}\bar{H}_{ij} = 1 \\ \\ {}^{i}\bar{H}_{ij} + {}^{j}\bar{H}_{ii} = \bar{H}_{ii} \end{array}\right\} \Rightarrow H_{ii} = 1$$

lo que va en contra del carácter transitorio impuesto para E_i. De modo totalmente análogo, llegaríamos a que --- $H_{jj} = 1$. Así pues, H_{ij} y H_{ji} no pueden ser simultáneamente iguales a 1 y por tanto:

$$h(i,j) \; : \; \begin{cases} = 0 & \text{si } i = j \\ > 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Todas las consideraciones realizadas hasta el momento, pueden resumirse en el cuadro siguiente:

	RECURRENTE	TRANSITORIO
RECURRENTE	misma clase $h(i,j) = 0$ distinta clase $h(i,j) =$	$h(i,j) = \infty$
TRANSITORIO	$h(i,j) = \infty$	$h(i,j): \begin{cases} = 0 \text{ si } i = j \\ > 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

donde se ve, que la mayor significación la poseen los pares de estados transitorios distintos.

En estas condiciones podemos hacer dos consideraciones de interés:

a) Aunque la clase T sea cerrada, H sigue cumpliendo las mismas condiciones que hemos estudiado y por tanto h, lo que nos dice que en este caso nada debe ser modificado.

b) Si la cadena es transitoria, h es una métrica en el espacio de estados, pero como toda distancia es una semidistancia, todo lo que digamos se aplicará directamente a este caso.

*** Con base en la semidistancia h, en C se puede definir una topología uniforme Θ_3, cuyo sistema fundamental de bandas sea:

$$G = \left\{ U_a \in \mathcal{P}(C \times C) \;/\; U_a = h^{-1}([0,a]) \qquad a > 0 \right\}$$

ó bien

$$G^* = \left\{ U_{a_n} \in \mathcal{P}(C \times C) \;/\; U_{a_n} = H^{-1}([0,a_n]) \qquad a_n > 0 \quad a_n \to 0 \right\}$$

De acuerdo con el cuadro de valores anteriormente establecido, vamos a ver la forma que toman los elementos U_a anteriores, para lo cual, distinguiremos dos casos según la forma de la cadena en consideración.

1) Si la cadena no contiene estados transitorios, entonces, para toda a > 0 y finita:

$$h^{-1}(0,a) = h^{-1}(0) = \bigcup_{v \in V} (C_v \times C_v)$$

con el sentido que conocemos para el conjunto V de índices De esta manera, si consideramos una sucesión a_n convergente a cero y por tanto acotada, se puede afirmar:

$$\forall n \quad U_{a_n} = h^{-1}([0,a_n]) = h^{-1}(0) = \bigcup_{v\in V} (C_v \times C_v)$$

Así pues, en el caso de $T = \emptyset$ el sistema fundamental de bandas se reduce a la traza de la relación de comunicación que sabemos, nos conducirá a θ_2. Por este motivo, las cadenas no irreducibles con la clase de los estados transitorios vacía, no serán consideradas en esta pregunta ya que para ellas basta retroceder a la anterior. Nos situaremos pues, bajo la hipótesis $T \neq \emptyset$.

2) Si la cadena contiene estados transitorios, como primera consideración, podemos afirmar:

$$h^{-1}(0) = \bigcup_{v\in V} (C_v \times C_v) \cup \Delta_T$$

donde Δ_T representa la intersección ó restricción de la diagonal Δ del producto cartesiano CxC a la clase T, es decir,

$$\Delta_T = \left\{(E_i, E_i) \;/\; E_i \in T\right\}$$

Por cuestiones de comodidad y por ser un elemento destacado, escribiremos:

$$h^{-1}(0) = U_o$$

Sean ahora E_i y E_j dos estados transitorios distintos; según se ha demostrado, $h(i,j) \in (0,\infty)$ de modo que siempre se puede determinar el valor:

$$b = \inf \left\{ h(i,j) \quad i \neq j \quad E_i, E_j \in T\right\}$$

para lo que se distinguen dos casos:

a) <u>$b > 0$</u> único posible si T es finito. En estas condiciones, para todo a' tal que $0 < a' < b$ se tendrá:

$$h^{-1}([0, a']) = U_o$$

b) $\underline{b = 0}$ que se presenta cuando T es infinito pudiendo también ocurrir a). En estas condiciones, no puede encontrarse $a > 0$ para el que sea

$$h^{-1}([0,a]) = U_o$$

sino que únicamente $U_o = h^{-1}(0)$ de acuerdo con su definición.

Sea ahora $a > 0$ un valor cualquiera; independientemente del valor de b, se puede escribir:

$$U_a = h^{-1}(0,a) = \bigcup_{v \in V} (C_v \times C_v) \cup \Delta_T \cup H_T \qquad (7\text{-}2)$$

siempre que a sea finito. H_T representa un conjunto cualquiera de $T \times T - \Delta_T$, bien entendido que tomando a en todos sus posibles valores, H_T recorre toda la clase $\mathcal{P}(T \times T - \Delta_T)$

Si creamos la familia $\mathcal{G}^*$ ya definida con anterioridad, se tendrá:

$$\mathcal{G}^* = \left\{ \bigcup_{v \in V} (C_v \times C_v) \cup \Delta_T \cup H_T^n \quad / \quad H_T^n \in \mathcal{P}(T \times T - \Delta_T) \right\}$$

donde el índice n indica que se ha obtenido a partir del elemento a_n de la sucesión considerada.

Revisando las consiciones anteriormente estudiadas, podemos afirmar:

a) Si $b > 0$ U_o pertenece a $\mathcal{G}^*$.

b) Si $b = 0$, lo que nos indica que T es infinito numerable, no puede asegurarse $U_o \in \mathcal{G}^*$. Ahora bien, la diferencia entre U_o y cualquier elemento de $\mathcal{G}^*$ puede llegar a ser tan pequeña como queramos en términos discretos. Por otra parte, como:

$$[0] = \inf \left\{ [0, a] \quad a > 0 \right\}$$

podemos escribir:

$$U_o = \underline{\lim} \quad \left\{ U_{a_n} / a_n > 0 \right\}$$

En estas condiciones, lo que se postula para U_{a_n} se postula para U_o y a la inversa, salvo quizás para un número finito de términos. Esto nos indica, que la adición de U_o a G^* no debe perturbar en absoluto las propiedades de la familia.

De acuerdo con todo lo dicho, estableceremos en C la estructura uniforme cuyo sistema fundamental de bandas es la familia:

$$G^* = \left\{ \bigcup_{V} \left[(C_V \times C_V) \right] \cup \Delta_T \cup H_T \qquad H_T \in \mathcal{P}(T \times T - \Delta_T) \right\}$$

admitiendo que H_T pueda reducirse al vacío para engendrar la banda U_o.

Así, la estructura uniforme engendrada por h es:

$$\mathcal{U}_3 = \left\{ U \in \mathcal{P}(C \times C) \; / \; U \supset \bigcup_{V \in V} (C_V \times C_V) \cup \Delta_T \cup H_T \right\}$$

que engendrará una topología θ_3 en C, en la que $O \subset C$ será abierto si para todo $x \in O$ existe $U \in \mathcal{U}_3$ de tal manera que $U(x) \subset O$ con el sentido que conocemos para esta notación.

Como en el caso de todas las topologías anteriores, podemos dar un teorema que caracteriza perfectamente la forma de los abiertos de la misma:

TEOREMA 7-1 "Condición necesaria y suficiente para que un conjunto $O \subset C$ sea abierto de θ_3 es que sea de la for ma

$$O = \left[\bigcup_i C_{v_i}\right] \cup C_T \qquad (7\text{-}3)$$

donde C_{v_i} nota subcadenas cerradas y C_T un elemento cualquiera de $\mathcal{P}(T)$ ".

En efecto:

- Si $O \subset C$ es de la forma (7-3), definimos el conjunto

$$U_O = \bigcup_{v \in V} (C_v \times C_v) \cup \Delta_T \cup \left[(C_T \times C_T) - \Delta_T\right]$$

que pertenece a $\mathcal{U}_3$ como fácilmente puede comprobarse.

Para cualquier $E_k \in O$, pueden presentarse excluyentemente una de las dos situaciones:

$$\exists j \ / \quad E_k \in C_{u_j}$$

$$E_k \in C_T$$

En el primer caso, $U_o(E_k) = C_{u_j}$ pues todos los pares de estados de los que E_k forma parte están en U_O y por tanto

$$U_O(E_k) \subset O$$

Si $E_k \in C_T$, como en U_O no existen pares de la forma (transitorio, recurrente)

se tiene:

$$U_O(E_k) = \left\{ E_i \ / \quad (E_k, E_i) \in \Delta_T \cup [C_T \times C_T - \Delta_T] \right\}$$

de modo que ó bien $E_k = E_i$ ó bien $(E_k, E_i) \in C_T \times C_T - \Delta_T$

lo que equivale a decir:

$$E_i \in C_T$$

y por tanto $U_0(E_k) \subset O$.

Así pues, con la forma supuesta O es abierto.

- Si O es abierto, para todo E_k del mismo debe encontrarse U_0 de modo que $U_0\,(E_k) \subset O$.

Si E_k es recurrente, O debe contener toda la subcadena cerrada a la que pertenece dicho estado, ya que en caso contrario no se verificaría la caracterización de abierto de acuerdo con la forma que hemos dado para los U.

Por otra parte, volviendo a la inversa la demostración de la condición necesaria, O puede contener un número cualquiera de estados transitorios.

Así para O admitimos la forma (7-3).

Es claro, que pueden presentarse cualquiera de las situaciones siguientes, bien independientemente, bien asociadas, sin que se afecte para el nada el carácter de los conjuntos y la forma de las demostraciones :

$$C_T = T \;;\quad C_T = \emptyset \quad;\quad \bigcup_i C_{V_i} = \emptyset \qquad (7\text{-}4)$$

Cuando usemos la notación (7-3) supondremos que ímplícitamente se tiene en cuenta las condiciones (7-4).

Los cerrados de la topología como complementarios de los abiertos, deben tener una forma sencilla que se resume en el siguiente enunciado:

COROLARIO 7-1 "Condición necesaria y suficiente para que F C sea cerrado, es que sea de la forma:

$$F = [\bigcup_i C_{v_i}] \cup C_T$$

con el sentido que conocemos para esta notación".

*** Por otra parte, es claro que se tiene

$$\Theta_1 \subset \Theta_2 \subset \Theta_3$$

de modo que esta es la topología más fina de cuantas hemos crea do. Como puede fácilmente comprobarse, las tres coinciden cuando el conjunto de los estados transitorios es vacío.

II-7-2 Propiedades de C como espacio topológico.-

Como ocurría con Θ_2 respecto a Θ_3 C resulta ser un espacio no conexo ya que todo abierto es cerrado y viceversa.

Por la forma general de los abiertos, podemos asegurar que la familia $\mathcal{B}_3 \subset \Theta_3$ definida por:

$$\mathcal{B}_3 = \{C_v \quad v \in V \qquad E_{T_i} \quad i \in I_T\}$$

es una base de la topología, donde V nota como es habitual el conjunto de índices de las subcadenas cerradas e I_T es el de -- los estados transitorios.

$\mathcal{B}_3$ será siempre una familia numerable, de modo que - nuevamente podemos asegurar que el espacio verifica el segundo axioma de numerabilidad y por tanto también el primero. Como consecuencia, podemos asegurar que se trata de un espacio de Lindelöff.

Como en todas las topologías anteriormente estudiadas, los elementos de $\mathcal{B}_3$ son tales que, para cada estado, el elemento de la base que lo contiene es el mínimo abierto que cumple esta condición y que además entra a formar parte de todo otro abierto que contenga al estado considerado. De acuerdo con ésto, para el filtro de los entornos, puede afirmarse:

1) Si E_k es recurrente:

$$\beta(E_k) = \{S \subset C \ / \ C_{u_k} \subset S\}$$

donde C_{u_k} es la clase de la relación de comunicación donde está contenido.

2) Si E_k es transitorio, el mínimo abierto que lo contiene es él mismo y de este modo:

$$\beta(E_k) = \{S \subset C \ / \ E_k \in S\}$$

En esta topología, la base $\mathcal{B}_3$ no puede ser considerada como una base para las evoluciones probabilísticas de la cadena, condición que aquí no tiene mucho sentido.

Definido el punto de acumulación del modo habitual en topología conjuntista, resulta que el concepto de clausura no coincide con el dado por Feller, ya que todo abierto no tiene por qué contener a los estados transitorios, los cuales a su vez, son cerrados.

Por cumplirse el segundo axioma de numerabilidad, podemos asegurar que el espacio es separable en el sentido de admitir subconjuntos propios densos en él. Los subconjuntos densos se pueden caracterizar mediante el siguiente enunciado:

TEOREMA 7-2 "Condición necesaria y suficiente para que un conjunto $S \subset C$ sea denso, es que contenga a la totalidad de los estados transitorios, y al menos un elemento de cada una de las subcadenas cerradas que componen el proceso, sin llegar a coincidir con la totalidad del espacio".

La demostración será omitida ya que es trivial sin más que recordar la forma que en esta topología poseen los abiertos y los cerrados; queremos hacer notar, que es en todo semejante al que se dió con la topología θ_1, lo que se debe a la separación de los estados transitorios como elementos destacados.

Nuevamente, podemos establecer una relación de equivalencia entre cadenas con base en la homeomorfía de los espacios de estados, y teniendo en cuenta que T vuelve a ser destacado, esta construcción tiene la misma importancia y validez que en el caso de la topología de la accesibilidad, de modo que no insistamos sobre ella. Son triviales de definir, los espacios topológicos de Markov según θ_3 que deben ser uniformes, mediante los cuales podemos hacer las siguientes afirmaciones sobre abiertos y cerrados considerados estos como espacios topológicos uniformes con la topología relativa:

a) Si tomamos un abierto ó cerrado general de la forma $[\cup C_{u_i}] \cup C_T$

se obtiene una topología relativa equivalente a la de una cadena de Markov descompuesta en C_{u_i} $u_i \in U_i$ subcadenas cerradas y C_T como conjunto de estados transitorios. La matriz de transición de esta cadena, será la restricción de la primitiva al nuevo conjunto considerado. Si queremos con servar el carácter asintótico de la misma, deberemos utilizar el procedimiento propuesto en (11).

b) Si tomamos T como abierto ó cerrado particular, se obtendrá la topología equivalente a una cadena transitoria con h restringido a T. Puede comprobarse que se trata de una métrica que produce sobre este conjunto la topología discreta.

En general, se puede resolver el problema de la cadena asociada con un cierto $A \subset C$.

Respecto a la cadena cociente, esta resulta ser idéntica a la que se obtiene por θ_2 por lo que no hacemos ninguna consideración adicional.

*** Nuevamente, podemos asegurar que el espacio es completo con respecto a θ_3.

TEOREMA 7-3 "El espacio C es completo con respecto a θ_3 , en el sentido de que todo filtro de Cauchy y por ende de toda sucesión de Cauchy tiene límite en él mismo".

En efecto:

Sea $\{F_i\} = \mathcal{F}$ una familia de cerrados con la propiedade de los conjuntos pequeños y la de la intersección finita. Si demostramos que la familia tiene intersección total no vacía, habremos probado que el espacio es completo.

Según sabemos, todo elemento F_i será de la forma $\{\bigcup_i C_{u_i}\} \cup C_T$ donde algunos términos de la unión puede reducirse al vacío. Por la propiedad de los conjuntos pequeños, si tomamos $U_o \in \mathcal{U}_3$, debe encontrarse un cerrado F_{i_o} que cumpla:

$$F_{i_o} \times F_{i_o} \subset U_o$$

de modo que por la forma de U_o y la caracterización de los cerrados de la topología, las únicas situaciones bajo las que se cumple la inclusión anterior son:

$$F_{i_o} = \emptyset$$

$$F_{i_o} = C_{v_o} \quad \text{(subcadena cerrada)}$$

$$F_{i_o} = E_{i_o} \in T$$

La primera, queda descartada por la hipótesis de la intersección finita de modo que deberemos aceptar cualquiera de las otras dos. Estas son compatibles, pues si en existiesen $F_{i_o} = C_{v_o}$ y $F_{i_o} = E_{i_o} \in T$ por la propiedad de la intersección finita debe ser:

$$F_{i_o} \cap F_{i_o} \neq \emptyset \Rightarrow E_{i_o} \cap C_{v_o} \neq \emptyset$$

en contra de las propiedades básicas de cualquier cadena.

1) Si $F_{i_o} = C_{v_o}$ este será el mínimo cerrado de la familia y además único (ver teorema 6-3), de manera que para otro cualquier F_j de la familia

$$F_j \cap F_{i_o} \neq \emptyset$$

lo que equivale a decir

$$F_{i_o} \subset F_j \quad \forall j$$

y por lo tanto

$$\bigcap_j F_j = F_{i_o} \neq \emptyset$$

luego en este caso la familia tiene intersección total no vacía.

2) Si $F_{i_o} = E_{i_o} \in T$ repitiendo las líneas de demostración anteriores, también llegamos a la conclusión de que la familia tiene intersección total no vacía.

De acuerdo con todo lo dicho, podemos afirmar que el espacio C con θ_3 es completo.

Este resultado, es de enorme importancia, pues garantiza que C es cerrado respecto de la operación de paso al límite en sucesiones de Cauchy, y por tanto, inalterable a cualquier operación de este tipo.

Las sucesiones de Cauchy en C respecto a θ_3, se pueden caracterizar de acuerdo con el teorema:

TEOREMA 7-4 "Condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{E_{k_n}\}$ en C sea de Cauchy, es que a partir de un cierto subíndice n_o en adelante todos sus términos pertenezcan a una misma subcadena cerrada ó bien que sean iguales a un cierto estado transitorio, es decir:

$$n \geqslant n_o \begin{cases} E_{k_n} \in C_{u_i} \\ \quad ó \\ E_{k_n} = E_{T_i} \in T \end{cases}$$

En efecto:

- Si $\{E_{k_n}\}$ cumple la condición impuesta, a partir de un n_o en adelante todos los términos son vecinos de orden U_o y por tanto de toda banda U de la estructura uniforme, lo que prueba que la sucesión es de Cauchy.

- Si $\{E_{k_n}\}$ es de Cauchy, sabemos que para todo U debe encontrarse N_u de tal manera que:

$$m, n > N_u \Rightarrow (E_{k_m}, E_{k_n}) \in U$$

Si tomamos $U = U_o$ entonces la inclusión anterior sólo puede lograrse si:

a) $E_{k_m} = E_{k_n} \in T$

b) Existe una subcadena cerrada C_{u_i} tal que E_{k_n} y E_{k_m} están contenidos en la misma.

con lo que el teorema queda totalmente demostrado.

En principio, vemos que el resultado es más restrictivo y de menor proyección que el correspondiente de la topología de la comunicación (Teorema 6-3), de modo que toda sucesión de Cauchy de aquí lo será allí pero no inversamente, como debe ocurrir de acuerdo con las propiedades generales de las topologías uniformes y su relación de ordenación. Esta restricción debida a la interpretaciónes probabilísticas de la misma.

*** Para terminar el apartado, queremos observar que h puede ser convertida en una métrica mediante una relación de equivalencia trivial:

$$E_i \; h \; E_j \iff h(i,j) = 0$$

En estas condiciones se tiene:

$$C/h = \left\{ C_v \quad v \in V \qquad E_{T_i} \in T \right\}$$

ó sea, que el espacio cociente está constituído por puntos correspondientes a cada una de las subcadenas cerradas y los estados transitorios independientemente considerados.

Fácilmente, se comprueba que C/h es una cadena transitoria en la que la métrica deducida de h coincide con la h' construída directamente por los procedimientos habituales de esta pregunta a partir de la matriz H'.

II-7-3 Interpretaciones probabilísticas de la topología.-

Como resulta lógico pensar, la topología θ_3 por proceder de las probabilidades H_{ij}, debe cumplir algunas propiedades de tipo aleatorio relacionadas con la accesibilidad y la comunicación Demás, estas propiedades son válidas tanto si T es abierto como si es cerrado probabilísticamente hablando, debido a que H no se afecta por este carácter.

TEOREMA 7-5 "Condición necesaria para que O sea abierto (cerrado) en θ_3 es que para todo $E_k \in O$ exista $E_i \in O$ comunicado con 'él"

NOTA Se admite $E_i = E_k$ tomando la comunicación en el sentido de Kemeny contando como válida la etapa $n = 0$.

La demostración del teorema es trivial de acuerdo con la forma que se postula para los abiertos y cerrados.

Especificando elementos, podemos enunciar una versión del teorema más fuerte que la anterior:

TEOREMA 7-6 "Condición necesaria y suficiente para que $O \subset C$ - sea abierto (cerrado), es que sea cerrado respecto a la comunicación de estados recurrentes, es decir si $E_k \in O$ es recurrente, todo E_i comunicado con él, también pertenece a O".

La base $\mathcal{B}_3$ no tiene interés para nosotros, como no sea - desde el punto de vista meramente topológico.

Teneiendo en cuenta que $\theta_1 \subset \theta_3$, utilizaremos la base de la primera topología para el estudio probabilístico de las evoluciones, tal como se indicó en su momento. Como consecuencia, - si $T \neq \emptyset$ y no es cerrada, entonces una evolución infinita de - la cadena siempre proporciona una sucesión de Cauchy. Encualquier otro caso, no podemos asegurar nada al respecto.

xxx Los puntos de acumulación, tienen una interpretación sencilla al estilo de las topologías anteriores:

TEOREMA 7-7 "Condición necesaria para que E_k sea punto de acumulación para $S \subset C$ es que esté comunicado con algún punto de dicho conjunto. "

En efecto:

Sea S un conjunto cualquiera y E_k un punto de acumulación del mismo. Todo entorno de E_k corta a S y así, podemos - distinguir dos casos:

a) Si E_k es recurrente, el mínimo entorno del mismo es la subcadena cerrada que lo contiene, de modo que

$$C_k \cap S \neq \emptyset$$

por tanto, S contiene algún punto de C_k comunicado con E_k.

b) Si E_k es transitorio, como el mínimo entorno que lo contiene es el mismo, entonces $E_k \in S$ y como cada punto está comunicado consigo mismo, queda demostrada la propiedad.

El enunciado inverso sólo es cierto para estados recurrentes ya que el mínimo entorno del mismo contiene todos aquellos estados que están comunicados con él. Así:

COROLARIO 7-2 "Condición necesaria y suficiente para que un estado recurrente sea punto de acumulación de un conjunto $S \subset C$ es que esté comunicado con algún punto de S".

Como en todas las topologías anteriores, podemos definir punto interior, exterior, frontera y aislado mediante teoremas muy análogos a los anteriores. Omitimos sus enunciados que son repetición de los anteriores con las dos versiones, una como condición necesaria y otra como condición necesaria y suficiente, especificando el tipo de estado bajo consideración.

** Como en el caso de Θ_2, si consideramos la evolución de las topologías de la comunicación, postulándose el nombre de TOPOLOGIA DE LA COMUNICACION DEBIL, sin que el término débil indique nada desde el punto de vista topológico, sino aludiendo nuevamente a cuestiones probabilísticas.

*** Para terminar la pregunta, vamos a probar una propiedad que es importante para lo que posteriormente diremos sobre los procesos de decisión markovianos.

Definamos $P(E_i, O)$ para $O \in \Theta_3$ como la probabilidad de alcanzar O en un paso partiendo de E_i. Vamos a probar que esta función es contínua en E_i.

En efecto:

Sea $O = [\bigcup_i C_{v_i}] \cup C_T$ un elemento cualquiera de la topología. Según el carácter de E_i, podemos distinguir dos casos:

- E_i es recurrente, dado lo cual:

$$P(E_i, O) = \begin{cases} 0 & \text{si } E_i \notin O \\ 1 & \text{si } E_i \in O \end{cases}$$

Si C_i es la clase cerrada a la que pertenece E_i por la forma de los abiertos podemos asegurar:

$$\forall E_j \in C_i \Rightarrow P(E_j, O) = \begin{cases} 0 & \text{si } E_j \notin O \\ 1 & \text{si } E_j \in O \end{cases}$$

lo que prueba la continuidad en este caso, ya que C_i es entorno de E_i.

- Si E_i es transitorio, cualquiera que sea el valor de $P(E_i, O)$ como E_i es entorno de sí mismo, la continuidad queda demostrada "a priori".

Además, se puede postular la equicontinuidad, ya que el entorno es independiente de O.

Esta propiedad, se puede extender al σ-álgebra engendrada por Θ_3 como fácilmente puede intuirse.

II-8 TOPOLOGIA ASOCIADA A UN PROCESO DE DECISION

Hasta el momento, en este capítulo hemos considerado el problema de dotar de estructura topológica al espacio de estados de una cadena de Markov, de tal manera que esta topología reflejase, del modo más conveniente posible, ciertas propiedades probabilísticas de la cadena en cuestión (accesibilidad, comunicación ...) pero siempre bajo la hipótesis de que dicho espacio de estados se estaba considerando bajo el prisma de una sóla matriz de transición.

El problema cambia un poco cuando nos enfrentamos con la topologización del espacio de estados cara a una familia de matrices de transición, concretamente cara a un proceso de decisión markoviano, prosiguiendo además con nuestra idea de reflejar las propiedades probabilísticas que ahora son dependientes de una cierta familia $\left\{ P_t \right\}$ $t \in T$

Todo lo que vamos a decir a continuación, queda referido al problema de decisión, pero nada impide su extensión a otro caso, como podría ser la topologización en la situación de cadena no transitoria.

Concretándonos a nuestro problema, y prescindiendo de los pagos del mismo que nada interesan por ahora, consideremos una cadena de Markov con espacio C de estados en el que las probabilidades de transición dependen de la acción de un decisor. Concretamente, cada estado $x \in C$ tiene asociado un conjunto U_x de alternativas posibles (habitualmente $\forall x U_x = U$) pero por ahora nos situamos en el contexto más general) de modo que, si el sistema se encuentra en $x \in C$ y el decisor fija $u_x \in U_x$ el sistema evoluciona hasta cada posición $y \in C$ con probabilidad (1) $P_{x,y}^{u_x}$ en cada paso.

Sobre la forma de U_x , no hacemos en principio hipótesis alguna, pudiendo ser numerable (finito ó no) ó subconjunto de $\mathbb{R}^m$. De acuerdo con los objetivos de nuestro trabajo este será el caso en que nos situaremos, pero por ahora actuamos con generalidad.

De acuerdo con la nomenclatura habitual en Teoría de la Decisión, una estrategia será una aplicación de modo que a cada $x \in C$ le haga corresponder un elemento de U_x ó sea:

$$E = \{ e \ / \ e(x) \in U_x \quad \forall x \quad C \}$$

El conjunto de todas las posibles estrategias será notado E, pudiendo escribirse:

$$E = \prod_{x \in C} U_x$$

entendiendo con esta notación el producto cartesiano.

Evidentemente, si se fija $e \in E$ en una determinada etapa de evolución de la cadena, queda determinada una cierta matriz de transición P_e (de acuerdo con (1)) que rige lae evolución de la cadena al efectuarse la siguiente transición.

En estas condiciones, para tener definido el comportamiento de la cadena, no tenemos una sóla matriz de transición, sino toda una familia de ellas $\{P_e\}$ $e \in E$. Para cada elemento de la misma, C puede ser dotado de una cierta topología θ_e (a continuación analizaremos las distintas situaciones que se pueden presentar) de manera que tendremos toda una familia $\{\theta_e\}$ $e \in E$ de topologías, cada una de las cuales refle ja un comportamiento probabilístico distinto de C según las diferentes alternativas.

En estas condiciones construyamos Θ, cota superior de la familia $\{\Theta_e\}_{e \in E}$ en el espacio ordenado de todas las topologías sobre C, es decir, la topología que tiene como base la clase $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(C)$ de los elementos que son abiertos en algún Θ_e.

Por la forma en que estamos trabajando, podemos asegurar que Θ reflejará las propiedades probabilísticas de C según las matrices $\{P_e\}_{e \in E}$ suponiéndolas para distintas etapas.

Esta Θ será denominada TOPOLOGIA DEL PROCESO DE DECISION.

Sobre los distintos componentes de $\{\Theta_e\}_{e \in E}$ podemos hacer una serie de consideraciones de interés:

Definamos los conceptos:

$$E_I = \{e \in E \;/\; P_e \text{ es indescomponible}\}$$

$$E_D = \{e \in E \;/\; P_e \text{ es descomponible}\}$$

Evidentemente:

$$E = E_I \oplus E_D$$

1º) $E_I \equiv E$ dado lo cual para cada e en que la cadena sea transitotia con los estados transitorios, Θ_e es una topología métrica y, por tanto, uniforme, mientras que para cada e en que P_e sea recurrente Θ_e es simplemente pseudométrica.

En estas condiciones, podemos afirmar que Θ será una topología uniforme.

Teniendo en cuenta que en cada caso se pueden establecer dos tipos distintos de métrica, el problema se plantea al escoger cual de ellos debemos usar y si para toda e E conviene la misma.

2º) Si $E_I \neq \emptyset$ y $E_D \neq \emptyset$ sobre E_I podemos hacer las mismas consideraciones que en el caso anterior mientras que para cada $e \in E_D$ podemos utilizar cualquiera de los tres tipos que tenemos establecidos.

El problema de la elección del tipo se agudiza ya que tenemos seis posibilidades. De ellas realmente sólo cuatro son importantes, ya que si pretendemos que θ sea uniforme, la topología de la accesibilidad no debe ser utilizada. También está el problema del mantenimiento de una cierta topología a lo largo de todo el trabajo.

3º) $E_D \equiv E$ de modo que para cada $e \in E$ θ_e puede ser de tres tipos. Normalmente escogeremos los dos uniformes, si queremos que θ posea también este carácter.

La cuestión citada de la elección de la topología está aún por resolver, aunque creemos, que con θ_2 y θ_3 debemos tener suficiente para cualquier tipo de problema.

Antes de terminar este apartado, queremos destacar algunos aspectos acerca de θ:

a) Si C es finito θ también lo es, y por tanto compacto.

b) Si C es descomponible en un número finito de clases, cualquiera que sea $e \in E_D$, θ es finito y por tanto C compacto.

c) En cualquier caso θ cumple el segundo axioma de numera bilidad por lo que podemos asegurar que C es siempre de Lindelöff.

d) Si todos los elementos de $\{\Theta_e\}_{e \in E}$ son uniformes (quizá métricos), también lo es Θ y por tanto C puede ser dotado de una semidistancia compatible con Θ.

e) Θ debe reflejar cualquier propiedade probabilística de C en cualquier $e \in E$, ya que recoge la información de todas las P_e.

f) A partir de ahora y por el carácter topológico del espacio, los estados serán notados con letras x , y , ... al objeto de situarnos en un plano general y por cuestiones de simplificación.

III-1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y CONSIDERACIONES GENERALES

Como ya hemos indicado en la introducción, en este capítulo trataremos de estructurar y sistematizar los procesos de decisión Markovianos con parámetro discreto, estacionarios y con espacio de alternativas en general perteneciente a R^n. En este intento de sistematización, pretendemos englobar dentro de los mismos bajo tesis, las cadenas finitas ó no, con matriz estacionaria estocástica ó subestocástica, y los procesos de Markov generales, para lo cual, plantearemos el problema desde el punto de vista más amplio posible con hipótesis válidas para todo caso. Estas serán excesivamente fuertes para algunas situaciones pero como se trata de dar condiciones suficientes, este hecho no plantea más problema que el de admitir situaciones en las que se cumple la tesis sin verificarse las hipótesis.

A lo largo de este capítulo, veremos que teniendo en cuenta los resultados del anterior, todo proceso de decisión sobre una cadena cualquiera (aún cuando P sea subestocástica, caso no tratado hasta ahora) puede ser estudiado dentro del contexto general con resultados totalmente afines a los que se obtienen mediante el tratamiento por separado, caso de que la cadena bajo consideración sea finita.

Las ideas fundamentales de este capítulo, han sido tomadas de la Tesis doctoral del profesor Vélez Ibarrola del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Complutense de Madrid.

III - PROCESOS DE DECISION MARKOVIANOS CON ESPACIO DE ALTERNATIVAS CONTINUO

III-1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.- CONSIDERACIONES GENERALES

Como ya hemos indicado en la introducción, estamos tratando de estructurar y sistematizar los procesos de Decisión Markovianos con parámetro discreto, estacionarios y con espacio de alaternativas en general pertenecientes a $\mathbb{R}^m$. En este intento de sistematización, pretendemos englobar dentro de las mismas hipótesis, las cadenas finitas ó no, con matriz estacionaria estocástica ó subestocástica, y los procesos de Markov generales, para lo cual, plantearemos el problema desde el punto de vista más amplio posible con hipótesis válidas para todo caso. Estas serán excesivamente fuertes para algunas situaciones pero como se trata de dar condiciones suficientes, este hecho no plantea más problema que el de eliminar situaciones en las que se cumple la tesis sin verificarse las hipótesis.

A lo largo de este capítulo, veremos que teniendo en cuenta los resultados del anterior, todo proceso de decisión sobre una cadena cualquiera (aún cuando P sea subestocástica, caso no tratado hasta ahora) puede ser estudiado dentro del contexto general con resultados totalmente afines a los que se obtienen mediante el tratamiento por separado, caso de que la cadena bajo consideración sea finita.

Las ideas fundamentales de este capítulo, han sido tomadas de la Tesis doctoral del prfesor Vélez Ibarrola del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Complutense de Madrid.

III-1-1 Algunas consideraciones sobre procesos de Markov estacionarios con parámetro discreto.-

Sea un proceso de Markov con tiempo discreto, espacio de estados $(C, \mathcal{A})$ y función de transición estacionaria $P: C \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Tal como apunta Doob, si se trata de una cadena $P: C\times\mathcal{A} \to \mathbb{R}$, queda trivialmente inducida por la matriz de probabilidades de transición para cualquier $\mathcal{A}$.

De acuerdo con las ecuaciones de Chapman Kolmogoroff, para las transiciones en n etapas si $A \in \mathcal{A}$ se tiene:

$$P_m(x,A) = \int_C P_{m-1}(y,A) \cdot P(x,dy) \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

con $P_0(x,A) = I_A(x)$ (función indicador).

Inspirándose en la teoría de cadenas y al objeto de simplificar el estudio de este tipo de procesos, suele imponerse a los mismos la siguiente condición ó hipótesis de Doeblin:

H_D) Existe α medida finita en $(C, \mathcal{A})$ y existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0,1)$ de modo que para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $\alpha(A) \leq \varepsilon$ se cumple:

$$P_{n_0}(x,A) \leq 1-\varepsilon \qquad \forall x \in C$$

Puede verse en Doob (8) (capítulo V) que en estas condiciones se cumple:

a) Existe en C una partición de la forma

$$C = C_1 \cup C_2 \,\ldots\ldots\ldots \cup C_n \cup T$$

tal que:

1.- $\forall j \; P(x;C_j) = 1$ si $x \in C_j$ y si en $A \in \mathcal{A}$ $P(x,A) = 1$

entonces $\alpha(C_j - A) = 0$

2.- $\forall x \in C-T \Rightarrow P(x,T) = 0$

b) Para todo j existe en C_j una partición finita $D_j = D_{j_1} \cup \ldots \cup D_{j_{d_j}}$

tal que:

1.- $\forall i \; P(x, D_{ji+1}) = 1 \quad \forall x \in D_{ji}$ con $D_{j d_j + 1} = D_{j1}$

2.- $\forall i \; \exists \; \pi_{ji}$ distribución estacionaria en -- $(C, \mathcal{A})$ con respecto a P tal que -----

$\pi_{ji}(D_{ji}) = 1$ $\quad \pi_{ji}(A) > 0 \; \forall A \subset D_{ji}$ -- con $\alpha(A)$ 0

De acuerdo con ésto, el imponer H_D supone la descomposición de C en un número finito de subcadenas cerradas independientes, evolucionándose dentro de cada C_j de forma cíclica entre los - D_{ji}. El elemento T es transitorio con el sentido habitual para esta nomenclatura.

Si definimos para cada j

$$\pi_j(\cdot) = \frac{1}{d_j} \sum_{i=1}^{d_j} \pi_{ji}(\cdot)$$

se tiene una distribución estacionaria frente a P en C_j.

Se demuestra fácilmente (ver Doob (8)) que toda cadena finita verifica H_D sin ningún tipo de restricción.

A partir de la descomposición considerada, se puede estudiar la convergencia de la función de transición en n etapas:

a) $P_n(x,A)$ converge uniformemente a cero con $A \subset T$ cuando n tiende a infinito, de modo que $P_n(x,A) \leq k\mu^n$ con μ en $(0,1)$ y k un valor real cualquiera acotado. Esto nos indica, que la probabilidad de que el sistema permanezca indefinidamente en T es nula ó dicho de otra manera, el sistema es siempre absorbido por las clases recurrentes en un número finito de pasos.

b) Para todo $x \in D_{ji}$ y cualquier $A \in \mathcal{A}$ $P_{n \cdot d_j + m}(x,A)$ converge uniformemente a $\pi_{ji+m}(A)$ (i + m tomado módulo d_j) cuando n tiende a infinito, de modo que para la diferencia de estas dos funciones, podemos establecer una acotación del mismo tipo que la anterior.

Si $d_j = 1$ se tiene: $|P_n(x,A) - \pi_j(A)| \leq k\mu^n \quad x \in C_j$

c) Si definimos $\rho(x,C_j) = \lim_{n\to\infty} P_n(x,C_j)$ límite que siempre existe de acuerdo con las acotaciones anteriores, entonces:

$$\rho(x,C_j) = 1 \quad \forall x \in C_j$$

$$\rho(x,C_j) = 0 \quad x \in C - [C_j \cup T]$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho(x,C_j) = 1 \quad \forall x \in C$$

Por otra parte, también se tiene la convergencia:

$$\forall x \in C \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} P_n(x,A) = \sum_{j=1}^{n} \rho(x,C_j)\, \pi_j(A$$

uniformemente en x y A.

d) Si definimos $\rho(x, D_{ji}) = \lim_{n \to \infty} P_{n.d_j}(x, D_{ji})$ que siempre existe por el mismo motivo que en c), se tiene:

$$\rho(x, D_{ji}) = 1 \qquad \forall x \in D_{ji}$$

$$\rho(x, D_{ji}) = 0 \qquad \forall x \in C - [D_{ji} \cup T]$$

$$\sum_{1}^{d_j} \rho(x, D_{ji}) = 1 \qquad \forall x \in C$$

e) Si tomamos $d = \text{mcm}\ (d_j \ / \ j = 1, \ldots n)$ para toda $x \in C$ y todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} P_{n.d+m}(x,A) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d_j} (x, D_{ji}) \quad {}_{ji+m}($$

interpretando nuevamente que en cada sumando se toma $i + m$ módulo d_j ya que se trata de situaciones de periodicidad.

Todas estas propiedades, se cumplen "a priori" en cadenas finitas, no podemos decir lo mismo si tiene C un número infinito de estados. También puede ser P subestocástica. En cualquiera de estos últimos casos, puede hacerse la descomposición pero puede ser infinta ó T cerrada. De acuerdo con ésto, el imponer H_D será verdaderamenre efectivo y supondrá una nueva condición a tener en cuenta. Esta consideración no debe ser olvidada cuando la hipótesis se imponga a los procesos de decisión markovianos.

Añadamos por último, que a partir de los π_{ji} se pueden calcular otras distribuciones estacionarias para P(x,A) pero no son de interés para nuestro trabajo, por lo que no serán tratadas aquí.

III-1-2 Proceso con recompensa asociada. Forma asintótica de la ganancia esperada.-

Consideremos ahora, un proceso de Markov con tiempo discreto espacio de estados $(C, \mathcal{A})$ y función de transición estacionaria $P(x,A)$ tal que posea una recompensa asociada, en el sentido de que una transición entre los estados x,y de C proporciona un cierto beneficio que impondremos viene determinado por una función $r(x,y)$ $\quad r: C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada.

NOTA El beneficio vendrá medido, en general, en unidades de utilidad que en algunos casos pueden ser monetarias. - Este, es un problema que en nada afecta a nuestras --- construcciones por lo que no será tenido en cuenta.

En términos de esperanza matemática, la ganacia que se ob-- tiene al cabo de n etapas partiendo de un cierto estado x C, viene determinada por la ecuación de recurrencia

$$v_n(x) = \int_C P(x,dy) \left[v_{n-1}(y) + r(x,y) \right] \qquad n \geq 1 \qquad (1-1)$$

intuitivamente comprensible.

Habitualmente $v_o(x) = 0$, no obstante, en el contexto que - hemos utilizado para las cadenas, la etapa n = o es válida, - produciéndose una tansición $x \longrightarrow x \quad \forall x \in C$, de modo que - para situarnos en las condiciones más generales posibles, admitiremos

$$v_o(x) = b(x) \quad ; \quad b: C \longrightarrow \mathbb{R}$$

función a la que impondremos ser medible y acotada. Sobre las unidades en que se mide b(x), podemos hacer las mismas consideraciones que para $r(x,y)$.

La ecuación de recurrencia (1-1), también puede ponerse de la forma:

$$v_n(x) = R(x) + \int_C P(x,dy)\, v_{n-1}(y) \qquad (1-2)$$

donde

$$R(x) = \int_C P(x,dy)\, r(x,y)$$

tiene el mismo sentido que la recompensa esperada inmediata en el caso de los problemas sobre cadenas finitas.

Para R(x) y b(x), podemos dar unas interpretaciones más generales que las anteriores:

R(x): es el beneficio que se produce al pasar por un cierto estado x siguiendo las evoluciones de la cadena.

b(x): es el beneficio que se produce al alcanzar un cierto estado x en el momento en el que se supone finaliza el proceso.

Muchos autores, entre ellos el profesor Vélez Ibarrola, introducen las recompensas del proceso directamente en esta forma, en lugar de hacerlo a través de las funciones $r(x,y)$ y $v_o(x)$. Los resultados que se obtengan deben ser idénticos, motivo por el cual hemos preferido hacerlo de la segunda forma que creemos es la que mejor se adapta al concepto intuitivo del proceso con recompensa. Además, es la forma habitual de establecer el problema para las cadenas, pro lo cual, también lo consideramos preferible dado nuestro objetivo.

En el caso de que C sea numerable, las funciones se conver ton en vectores y matrices y las integrales en sumatorios de acuerdo con la teoría de Lebesgue, pero por cuestiones de comodidad y sistematización, arrastraremos siempre dicha simbología.

Uno de los problemas que más interés tiene en toda la teoría de procesos con recompensa, es el estudio de $v_n(x)$ en el límite con $n \longrightarrow \infty$, es decir, la forma asintótica de la ganancia esperada. Aún cuando la forma que imponemos para los beneficios es diferente a la considerada por le Profesor Vélez Ibarrola, los resultados son idénticos; por este motivo vamos a utilizar todos los teoremas dados por este autor, pero omitiremos su demostración.

En cada caso, haremos las consideraciones pertinentes sobre la aplicabilidad de los mismos a las cadenas, al objeto de ir estudiando paso a paso la sistematización que perseguimos.

TEOREMA 1-1 "Si se cumple H_D entonces:

$$\forall x \in C \quad \text{existe} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{v_n(x)}{n}$$

pudiendo escribirse:

$$\lim \frac{v_n(x)}{n} = g(x) = \begin{cases} g_j & \text{si } x \in C_j \\ \sum_j a_j \ g_j & \forall x \in T \end{cases}$$

donde $a_j \in [0,1] \quad \forall j \quad \sum_j a_j = 1$ siendo además uniforme la convergencia en x de la sucesión".

Este resultado, garantiza la estabilidad de la ganancia me dia por etapa bajo la hipótesis H_D. Se demuestra a partir de las distribuciones estacionarias $\pi_j(\cdot)$ y las formas de convergencia de la función de transición en n pasos, comptobándose además que se verifica:

$$\forall x \in C_j \qquad g(x) = g_j = \int_C R(y) \cdot \pi_j(dy)$$

$$a_j = \rho(x, C_j)$$

con el sentido que conocemos para estas notaciones de acuerdo con lo que se ha dicho en el apartado anterior.

Como vemos, este resultado es idéntico al que se tiene para cadenas finitas ya que éstas cumplen directamente H_D. Cuando se trate de cadenas infinitas, la imposición de estas condiciones permite la determinación de la ganancia media de una forma conocida.

El teorema anterior, se puede precisar aún más, teniendo en cuenta la descomposición de cada C_j:

TEOREMA 1-2 "Si se cumple H_D y para cada j $d_j = 1$ (las clases C_j don periódicas, entonces para cada x C_j existe el valor

$$\lim_{n \to \infty} \left[v_n(x) - ng_j\right]$$

Nuevamente, hacemos uso de las distribuciones estacionarias y la convergencia de la función de transición en n etapas, obteniendo:

$$\lim_{n\to\infty}\left[v_n(x) - ng_j\right] = v(x) + \int_C b(y)\ \pi_j(dy)$$

donde $v(x)$ es una función de beneficio que no depende de la etapa y cuya representación integral trataremos de obtener a continuación.

TEOREMA 1-3 "Si se cumple H_D y para cada j $d_j = d > 1$ (todas las clases C_j son periódicas del mismo periodo d) entonces para cada $x \in C_j$ existe

$$\lim_{k\to\infty}\left[v_{k.d+r}(x) - (k.d + r)\cdot g_j\right]$$

con $r = 0, 1, \ldots d - 1$ siendo uniforme la convergencia en x".

Si notamos

$$g_{ji} = \int_C R(y)\ .\ \pi_j(dy)$$

$$v_s(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\int_C R(y)\ P_{m.d+s}(x,dy) - g_{ji+s}\right]$$

$i + s$ tomado módulo d, entonces obtenemos:

$$\lim_{k\to\infty}\left[v_{k.d+r}(x)-(k.d+r)\ g_j\right]= \sum_{s=0}^{d-1} v_s(x) + \sum_{s=0}^{r-1} g_{ji+s} - rg_j + \int_C b(y)\ \pi_{ji+r}(dy)$$

habiendo tomado $i + s$ e $i + r$ módulo d.

Se puede ver también, que $v(x) = \sum_{s=0}^{d-1} v_s(x)$ indepen dientemente de de r mientras que el término

$$\theta_r = \sum_{s=0}^{r-1} g_{ji+s} - r g_j + \int_C b(y)\, \pi_{ji+r}(dy)$$

oscila periódicamente entre d valores a lo sumo al variar r.

$$\theta_o(x) = \int_C b(y)\, \pi_{ji}(dy)$$

■ Los teoremas anteriores, pueden ser englobados en uno sólo más general, que garantiza la existencia de límite y una forma estable para la ganancia media por etapa en cualquiera que sea la forma que H_D proporcione para la descomposición de C:

TEOREMA 1-5 "Si se cumple H_D y $d = \text{mcm}\ (d_j/j = 1 \ldots n)$ entonces para todo $x \in C$ y $\forall r = 0, 1, \ldots d-1$ existe

$$\lim_{k\to\infty} \left[V_{k.d+r}(x) - (k.d+r)\, g(x)\right]$$

con convergencia análoga al teorema anterior; se obtiene:

$$\lim_{k\to} \left[V_{k.d+r}(x) - (k.d+r)\, g(x)\right] = v(x) + \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1}^{d_j} \rho(x, D_{ji}) \sum_{s=0}^{r-1} g_{ji+s} - r g_j$$

$$+ \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1}^{d_j} \rho(x, D_{ji}) \int_C b(y)\, \pi_{ji+s}(dy)$$

donde todas las sumas $i + s$ se toman módulo d.

Todos los resultados obtenidos en los teoremas anteriores, se pueden resumir en el siguiente cuadro de valores:

"Si se cumple H_D entonces:

$$v_n(x) = ng(x) + v(x) + e_n(x) + \delta_n(x)$$

con:

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n(x) = 0$$

$$g(x) = g_j \quad \text{si} \quad x \in C_j$$

$$g(x) = \sum_j \rho(x, C_j)\, g_j \qquad \forall x \in T$$

$$e_n(x) = \int_C b(y)\, \pi_j(dy) \quad \text{si } x \in C_j \text{ y } d_j = 1 \text{ ó } x \in T \text{ y } \rho(x, C_j) = 1$$

$e_n(x)$ es una función periódica de n para $x \in C_j$ si $d_j > 1$ y también para $x \in T$ siempre que $\rho(x, C_j) = 1$.

$e_n(x)$ es una función periódica de n con periodo $d = \mathrm{mcm}(d_j)$ para todo $x \in T$.

Como podemos observar, estos resultados coinciden y son to talmente válidos para las cadenas finitas de acuerdo con la formulación establecida a partir de Howard. Para cadenas infinitas y cualquier forma de la matriz P, tendremos establecida la forma asintótica de $v_n(x)$.

Para terminar el apartado, vamos a dar unos enunciados que permiten establecer la forma de v(x) y por tanto la forma definitiva de la expresión asintótica de la ganancia esperada.

TEOREMA 1-6 "Si se verifica H_D y $1 = mcm(d_j/j=1, \ldots n)$ entonces:

$$g(x) + v(x) = R(x) + \int_C P(x,dy)\ v(y)$$

para todo $x \in C$. Si $b \equiv 0$ entonces:

$$\int_C \left[v(y) \sum_{j=1}^{n} \rho(x,C_j)\ \pi_j(dy) \right] = 0".$$

Este teorema, es totalmente análogo al que establecía Howard y que servía como base para la determinación del algoritmo de cálculo de políticas óptimas.

TEOREMA 1-7 "Si se cumple H_D y $mcm(d_j/\ j=1, \ldots n) = d > 1$ entonces:

$$\forall x \in C \begin{cases} d.g(x)+v(x) = \sum_{m=0}^{d-1} \int_C R(y)P_m(x,dy) + \int_C P_d(x,dy)\ v(y) \\ b \equiv 0 \Rightarrow \int v(y) \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d_j} \rho(x,D_{ji})\ \pi_{ji}(dy) = 0 \end{cases}$$

determinado $v(x)$, la ecuación de recurrencia (1-2) puede ponerse de la forma:

$$n.g(x) + v(x) + e_n(x) + \delta_n(x) = R(x) + \int_C P(x,dy) \left[(n-1)g(y) - v(y) + \right.$$
$$\left. + e_{n-1}(y) \quad + \varepsilon_{n-1}(y) \right]$$

que se puede transformar para garantizar que la ecuación funcional

$$g(x) + t(x) = R(x) + \int_C P(x,dy) \,.\, t(y)$$

tiene solución en t independientemente del valor de d.

Este resultado, que amplía los correspondientes de Howard, será la base para la determinación de las políticas óptimas y la forma asintótica de la ganancia caso de un proceso de decisión markoviano.

Si prescindimos de la hipótesis H_D legamos a un resultado análogo al del teorema 1-1 aunque un poco más restringido, ya que la convergencia no se afirma de manera uniforme sino tan sólo caso segura, debiendo además admitir la existencia de una distribución estacionaria respecto a P:

TEOREMA 1-8 "Si existe π distribución estacionaria por P, entonces puede afirmarse que existe $g(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x)/n$ de modo casi seguro".

Los restantes teorema sobre la forma del límite, no se pueden establecer ya que dependen de la descomposición de C impuesta por H_D.

Antes de terminar la pregunta, queremos destacar el hecho de que, mientras que bajo H_D quedan englobadas todas las cadenas finitas de un modo directo por cumplirla "a priori", a las cadenas infinitas cualquiera que sea su P debemos imponérla. En caso contrario, lo mas que podemos pretender es la aplicación del teorema 1-8. Incluso, podemos afirmar que habrá casos que no se puedan analizar dentro de los enunciados que hamos dado, pues como ya se indicó en (II-1) la existencia de una medida superregular, y por tanto de las distribución estacionaria, no está garantizada en la generalidad de los casos.

III-2 PROCESOS DE DECISION MARKOVIANOS CON $U \subset \mathbb{R}^m$

Consideremos ahora, el problema de decisión markoviano con espacio contínuo de alternativas basado en el proceso markoviano con recompensa que hemos estudiado en la pregunta anterior, es decir, un sistema dinámico que evoluciona aleatoriamente en tiempo discreto con espacio de estados $(C, \mathcal{A})$ de acuerdo con unas leyes probabilísticas (funciones de transición) que pueden ser modificadas por la acción de un decisor (control), proporcionando en cada paso recompensas que también dependen de la alternativa escogida.

De acuerdo con ésto, supondremos que el decisor posee un conjunto U de alternativas $U \subset \mathbb{R}^m$, de modo que para cada $x \in C$ y cada $u \in U$ la probabilidad de que el sistema pase de x a A bajo el control u es $P(x,u,A)$ obteniéndose en la transición $x \longrightarrow y$ un beneficio $r(x,u,y)$ en una etapa.

El problema, se plantea al tratar de determinar la ganancia y la política óptimas tanto con horizonte finito como infinito. El conjunto de las estrategias como aplicaciones $e: C \longrightarrow U$ será notado E.

NOTA La función de transición, tal como hacen Mine y Osaki, puede establecerse de punto a punto

$$P: \; C x U x C \longrightarrow \mathbb{R}$$

de donde se puede obtener por integración $P(x,u,A)$. Con cualquiera de las dos formulaciones el problema queda perfectamente resuelto e idénticamente planteado.

Sobre la forma en que se miden los beneficios, hare mos las mismas consideraciones que en la pregunta anterior.

Naturalmente, el hecho de trabajar con las hipótesis más generales de $U \subset \mathbb{R}^m$ y espacio de estados $(C, \mathcal{A})$ exige imponer condiciones de regularidad a las distintas componentes del problema; como ya se ha dicho, estas condiciones pueden ser excesivamente fuertes en determinados casos, pero trabajaremos con ellas indicando en qué situaciones pueden ser rebajadas para obtener una mayor amplitud de resultados.

III-2-1 Condiciones generales. Ganancia óptima.-

Para todo nuestro trabajo, supondremos que se cumplen las siguientes condiciones:

1) En C existe una topología Θ con $\mathcal{A} = \sigma(\Theta)$

2) $U \subset \mathbb{R}^m$ y es idéntico cualquiera que sea el estado en que se encuentre el decisor.

3) $r: C \times U \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, contínua en y semicontínua superiormente en u y equicontínua en x para cada u.

4) $P(\cdot,\cdot,A): C \times U \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible.

5) Para cada $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua y acotada, la familia

$$g(x,u) = \int_C P(x,u,dy)\ f(y)$$

es equicontínua en x y semicontínua superiormente en la u.

NOTA Como caso particular de la propiedad 5) la familia

$$R(x,u) = \int_C P(x,u,dy).\ r(x,u,y)$$

de los pagos esperados en un paso partiendo de x con la alternativa u, es equicontínua en x y semicontínua superiormente en u por las propiedades impuestas a $r(x,u,y)$ como puede fácilmente comprobarse.

Queremos destacar, que la satisfacción de la condición 1) (que a su vez es necesaria para la definición de continuidad) ha sido el motivo de la construcción de las topologías sobre el espacio de estados de una cadena de Markov estacionaria cualquiera, ya que hemos considerado que era la forma más lógica de estructurar los procesos de decisión markovianos. Naturalmente, usaremos para G las que hemos denominado ROPOLOGIAS DEL PROCESO DE DECISION en el capítulo anterior.

Por otra parte, la forma que tiene dicha topología permite asegurar que $P(x,u,A)$ está perfectamente definida a partir de la familia $P(u)$ de las matrices de transición según las diferentes alternativas, que fue estudiada en II-8, para los casos más importantes que se pueden presentar en cuanto a transiciones respecto de alternativas y estrategias (absorciones y comunicación). Aunque es cierto que se podría estudiar para $\mathcal{A}$ más amplio, con $\sigma(\theta)$ es suficiente para nuestros propósitos de acuerdo con lo que acabamos de decir.

En cuanto a las restantes condiciones del modelo, queremos indicar que quizá sean demasiado fuertes para el caso de cadenas finitas, pero son necesarias para intento de sistematización. Por otro lado, pensamos que no son del todo ajenas a una realidad física, pues por ejemplo la continuidad de los pagos puede interpretarse diciendo, que estados vecinos (ver definiciones topológicas) deben dar recompensas parecidas al realizarse una transición. En cada caso trataremos de simplificar las condiciones de trabajo.

Observaremos por último, que dada la forma en que se plantea el problema y los resultados del capítulo anterior, quedan perfectamente incluídas dentro del modelo las cadenas finitas e infinitas, admitiéndose incluso para estas últimas que para algún $u \in U$ ó alguna estrategia la matriz de transición pueda ser subestocástica, situación no analizada hasta ahora dentro de este tipo de procesos, y que sin embargo para nosotros es un caso totalmente válido y planteado con toda generalidad.

*** En estas condiciones, de acuerdo con la Programación Dinámica, si notamos $v_n^*(x)$ la ganancia óptima esperada al cabo de n etapas partiendo del estado x, podemos establecer para la misma la siguiente ecuación de recurrencia:

$$v_n^*(x) = \sup_{u \in U} \left\{ \int_C P(x,u,dy) \left[v_{n-1}^*(x) + r(x,u,y) \right] \right\}$$

$$= \sup_{u \in U} \left\{ R(x,u) + \int_C P(x,u,dy) \; v_{n-1}^*(y) \right\} \quad (2-1)$$

válida para $n \geqslant 1$. Como en el caso de procesos con recompensa, haremos notar que habitualmente $v_0^*(x) = 0$, pero admitiendo la transición identidad en la etapa $n = 0$, tiene sentido el establecer como situación más general:

$$v_0^*(x) = b(x) \qquad b: C \longrightarrow \mathbb{R}$$

función a la que imponemos ser contínua y acotada.

Para $R(x,u)$ y $b(x)$, podemos dar interpretaciones más generales que las anteriores e idénticas a las que se vieron en la pregunta anterior, sin más que añadir ahora que el pago $R(x,u)$ es el que se obtiene al pasar por el estado x según el control u.

Tal como se dijo anteriormente, muchos autores entre ellos el Profesor Vélez Ibarrola, utilizan esta segunda forma de de finir los pagos. No obstante los resultados que se obtienen son prácticamente idénticos. Por este motivo, vamos a utilizar la mayoría de las propiedades dadas por este autor modificando los enunciados ó las demostraciones cuando así se requiera. Para las restantes, omitiremos el desarrollo, salvo en aquellos casos en que la demostración de algún teorema contenga puntos de interés para nuestro objetivo de sistematización y sobre los que haremos las consideraciones pertinentes.

Añadamos, que nuestra intención no es hacer un estudio exhaustivo del problema sino mostrar un camino de sistematización de los procesos de decisión markovianos cualquiera que sea el proceso base, a la vez que mostrar la validez del método propuesto para ello.

*** Para garantizar la definición (2-1), de acuerdo con las hipótesis generales del modelo, deberemos probar que $v_n^*(x)$ es contínua y acotada:

- La acotación es trivial ya que se trata de suma y esperanzas de funciones acotadas cuyo superior no puede ser infinito. De hecho, probaríamos de un modo directo que $v_1^*(x)$ está acotada, y posteriormente por un procedimiento de recurrencia lo verificaríamos para cualquier n.

- Para probar la continuidad, también se utilizan un procedimiento de inducción.

  Definamos:

$$w_1(x,u) = R(x,u) + \int_C P(x,u,dy).b(y)$$

  de modo que por la hipótesis 5 podemos asegurar que es equicontínua en x y semicontínua superiormente en u. Evidentemente:

$$v_1^*(x) = \sup_{u\in U} \left\{ w_1(x,u) \right\}$$

y para cualesquiera x y x' estados de C, puede ponerse:

$$v_1^*(x) - v_1^*(x') = \left| \sup_{u\in U} \{w_1(x,u)\} - \sup_{u\in U} \{w_1(x',u)\} \right| \leq$$

$$\sup_{u\in U} \left| \{w_1(x,u) - w_1(x',u)\} \right|$$

Por la equicontinuidad de la familia $\{w_1(x,u)\}$ para cualquier $x_o \in C$ y $\varepsilon > 0$, existe $V(x_o)$ entorno de x_o independiente de u tal que se cumple:

$$\forall x \in V(x_o) \qquad |w_1(x_o,u) - w_1(x,u)| \leq \varepsilon$$

de modo que:

$$\forall x \in V(x_o) \qquad |v_1^*(x_o) - v_1^*(x)| \leq \sup_{u\in U} |w_1(x_o,u) - w_1(x,u)| \leq \varepsilon$$

lo que prueba que $v_1^*(x)$ es una función contínua.

Recurrentemente, supuesta la continuidad de $v_{n-1}^*(x)$ se tiene que

$$w_n(x,u) = R(x,u) + \int_C P(x,u,dy)\, v_{n-1}^*(y)$$

es equicontínua en x al variar u de modo que repitiendo el razonamiento anterior podemos asegurar que $v_n^*(x)$ es una función contínua.

Observaremos, que la semicontinuidad superior respecto de u que se postula para cualquier $w_1(x,u)$, sólo tiene sentido (y es en este contexto en el que se utiliza) caso de que U sea un conjunto compacto, pues en estas condiciones tenemos a segurada la accesibilidad del superior. De hecho, bastaría - imponer la condición de cuasi compacidad, pero como estamos suponiendo que $U \subset \mathbb{R}^m$ la separabilidad se cumple "a priori" y por tanto no supone falta de generalidad alguna suponer -- que sea compacto.

Si U es un subconjunto de un espacio topológico cualquiera la condición a imponer sería la de cuasi compacidad.

Bajo estas hipótesis podemos enunciar:

TEOREMA 2-1 "Si U es compacto, para toda etapa $n \in \mathbb{N}$ existe - una estrategia $e_n^* : C \longrightarrow U$ medible tal - que:

$$w_n(x, e_n^*(x)) = v_n^*(x) \qquad \forall x \in C$$

En efecto:

El subconjunto

$$U_x^n = \left\{ u \in U \;/\; w_n(x,u) = v_n^*(x) \right\} \subset U \qquad \forall x \in C$$

es no vacío por ser U compacto, y cerrado por la continuidad de las funciones que intervienen en la definición.

El problema se plantea ahora, al tratar de definir $e_n^*(x)$ de modo unívoco sobre $U_x^n \subset U$ de tal manera que posea --- (como función vectorial que es) componentes mdibles.

Si establecemos en R^m una cierta relación de orden $\precsim$ definiremos trivialmente:

$$e_n^*(x) = \min_{\prec} \left(U_x^n \subset U \right) \qquad \forall x \in C \qquad (2\text{-}2)$$

En particular, cuando se trate del orden lexicográfico, la componente h de $e_n^{*}(x)$ se puede definir de acuerdo con:

$$e_n^{*h}(x) = \min (u^h) \text{ sobre las componentes h-ésimas}$$

de aquellos $u \in U_x^n$ que verifiquen $u^i = e_n^{*}(x)$ $i > m$ (2-3)

Siempre que sea compatible con el sistema de intervalos borelianos de $\mathbb{R}^m$ $e_x^{*}(x)$ definido de acuerdo con (2-2) tendrá componentes medibles, ya que las funciones que intervienen en el problema son contínuas. En particular, el orden lexicográfico cumple esta propiedad. Por este motivo y aunque podemos situarnos dentro de un contexto más general, definiremos siempre las estrategias de acuerdo con (2-3).

Como indica el Profesor Vélez Ibarrola, el imponer que las estrategias tengan componentes medibles nos garantiza los puntos siguientes:

a) $P(x,e(x), A)$ es medible.

b) Si $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible $P(x,e(x),dy)f(y)$ es medible.

c) $r(\cdot,e(\cdot)) : C \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible.

De acuerdo con ésto nos limitaremos a considerar estrategias del conjunto $E = \{ e: C \longrightarrow U \}$ que sean medibles.

Claramente, para cada etapa $e_n^{*}(x)$ será la alternativa óptima a tomar en el estado x y la función $e_n^{*} : C \longrightarrow U$ será la estrategia óptima del problema en la etapa considerada. Determinando la familia $\{ e_n^{*} \}$ tendremos la política ó trayectoria óptima, que junto con $\{ v_n^{*} \}$ nos van a dar la solución del problema de decisión que estamos considerando. Como siempre, nos interesa el comportamiento asintótico de ambas familias, para ver si se produce ó no una estabilización de las mismas al crecer indefinidamente el número de transiciones.

Mine y Osaki (19) establecen condiciones para la existencia y forma de e_n^* cuando el proceso evoluciona partiendo inicialmente con una cierta distribución π (políticas π -óptimas) y para la existencia de aquellas políticas que producen ganancias que difieren de v_n^* menos de un cierto ε para cada etapa partiendo de una distribución inicial π (políticas $\pi-\varepsilon$ - óptimas). Por la forma en que se ha planteado el problema, queremos establecer políticas óptimas ó ε - óptimas para cualquier π, por lo cual, y como indica Hinderer (12) habremos de imponer condiciones más fuertes sobre el proceso en cuestión.

III -2-2 Hipótesis H_1. Forma asintótica de la ganancia y política óptimas.-

Para cualesquiera $x,y \in C$ $u,u' \in U$, definamos la función:

$$\lambda_{x,y,u,u'}(A) = P(x,u,A) - P(y,u',A) \qquad A \in \mathcal{A}$$

y el conjunto $S^+_{x,y,u,u'} \subset C$ tal que :

$$\lambda_{x,y,u,u'}(A) \begin{cases} \geqslant 0 & \text{si } A \subset S^+_{x,y,u,u'} \\ \\ \leqslant 0 & \text{si } A \subset C - S^+_{x,y,u,u'} \end{cases}$$

En estas condiciones, impondremos:

$$\sup_{x,y} \ \sup_{u,u} \ \lambda_{x,y,u,u'} \ (S^{+}_{x,y,u,u'}) < 1$$

hipótesis que denominaremos H_1 y que equivale a la que Howard establecía para cadenas finitas indescomponibles, ya que pue de demostrarse que bajo H_1 para cualquier $e \in E$ $P(x,e(x),A)$ satisface H_D, siendo aperiódica con una sóla subcadena cerrada y distribución estacionaria π^e.

Bajo H_1, siempre que el proceso sea una cadena (sin hipóte sis sobre su cardinal), la topología sobre C será la corres-- pondiente a un proceso de decisión con $E_D = E$ (ver II-8) por lo que podemos asegurar que es de tipo uniforme. En el caso - de que C sea infinito, podemos encontrarnos en el caso $C \equiv T$ ya que se trata de una clase cerrada y aperiódica para la que según demuestra Kemeny se puede encontrar una función supe-- rregular y por tanto una distribución estacionaria para cada alternativa ó estrategia. Esta situación, supone un avance un avance sobre lo que se ha estudiado hasta ahora. En estas con sideraciones, todos los resultados que obtengamos serán apli- cables a este tipo particular de proceso.

TEOREMA 2-2 "Si se cumple H_1, entonces para todo $x \in C$ y to do $n \in \mathbb{N}$

$$v^{*}_{n}(x) = ng^{*} + v^{+}(x) + \varepsilon^{*}_{n}(x)$$

con la sucesión $\varepsilon^{*}_{n}(x)$ convergente a cero en n uniformemente con x.

Este teorema, garantiza una forma estable para la ganancia óptima esperada, de tal manera que bajo la hipótesis H_1 a par tir de un n_0 en adelante, calculados g^{*} y $v^{*}(x)$ (que no dependen de n) no tenemos necesidad de aplicar la fórmula de recurrencia, sino que se puede estimar la ganancia óptima de acuerdo con:

$$v_n^{*}(x) \approx ng^{*} + v^{*}(x)$$

Por otra parte, si observamos que

$$\frac{v_n^{*}(x)}{n} = g^{*} + \frac{v^{*}(x)}{n}$$

es la ganancia óptima media por etapa, podemos decir que el teorema garantiza la estabilidad de esta cantidad.

COROLARIO 2-1 "Para cada $e \in E$ si π^{e} es la distribución estacionaria que posee el proceso, entonces:

$$v_n^{e}(x) = ng^{e} + v^{e}(x) + \int_C b(y) \cdot \pi^{e}(dy) + \varepsilon_n^{e}(x)$$

$$\text{con } \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n^{e}(x) = 0.$$

Esto nos dice, que para cada estrategia se puede llegar a una forma asintótica de la ganancia esperada, formalmente idéntica a la de la ganancia óptima, dependiendo de la estrategia en cuestión, El resultado enunciado así, nos servirá para establecer políticas ε-óptimas, ó sea, que proporcionen ganancias tan próximas al 'óptimo como queramos.

~~xxx~~ A continuación, se estavlecen las condiciones de estabilidad de la política óptima en un doble sentido:

a) Determinar en qué casos la familia $\{e_n^{*}\}$ de estrategias óptimas se estabiliza para n creciendo indefinidamente.

b) Analizar la variación de la ganancia que supone un cambio de estrategia en una determinada etapa.

También, podemos pensar en el problema del cálculo de g^* y el establecimiento de algoritmos para la determinación de las políticas óptimas y las ganancias esperadas asociadas. Para resolver estas cuestiones, enunciaremos:

TEOREMA 2-3 "Si se cumple H_1 y el conjunto U es compacto, entonces se tiene:

1.- Para todo $x \in C$ el conjunto

$$U_x^* = \left\{u \in U / \ R(x,u) + \int_C P(x,u,dy)v^*(y) = g^* + v^*(x)\right\}$$

no es vacío, y para toda sucesión $\{u_n\}$ de U tal que $u_n \in U_x^n$ (definido con anterioridad) el conjunto de los puntos de acumulación de la misma está contenido en U_x^*

2.- $$g^* + v^*(x) = \max_{u \in U} \left\{R(x,u) + \int_C P(x,u,dy)\ v^*(y)\right\} \quad \forall x \in C$$

3.- $g^* = \max\limits_{e \in E} \left\{g^e\right\}$ donde g^e ha sido definido por el corolario anterior cumpliéndose además que para cada e tal que $e(x) \in U^*$ $g^e = g^*$.

4.- Si $e \in E$ está tal que $e(x) \in U_x^*$ entonces $v^*(x) - v^e(x)$ es independiente de x y además $g^e + v^e(x) \geqslant R(x,u) + \int_C P(x,u,dy)\ v^e(y)$ para toda x y toda $u \in U$.

5.- Si $e \in E$ es tal que

$$\int_C P(x,e(x),dy)v^e(y) + R(x,e(x)) \geq R(x,e'(x)) + \int_C P(x,e'(x),dy)v^e(y)$$

entonces $g^e = g^*$.

6.- Para cada etapa, puede encontrarse una estrategia tal que aplicada a partir de la misma, produce un beneficio tan próximo al óptimo como queramos.

Sobre estos resultados, podemos hacer algunas consideraciones de interés:

a) Los resultados son válidos para cualquier tipo de cadena, siempre que se cumpla H_1.

b) Los postulados on idénticos a los que se obtienen para otras formas de U sobre cadenas finitas indesomponibles y aperiódicas, siempre que se pueda garantizar la accesibilidad de los superiores.

c) El resultado 2) permitiría la determinación de un algoritmo para l obtención de políticas óptimas idéntico al método de Howard.

III-2-3 Supresión de H_1. Forma asintótica de la ganancia y la política óptimas.-

En todo lo que sigue, se elimina la hipótesis H_1, de modo que nos vamos a enfrentar con el problema de decisión sobre cadenas estrictamente descomponibles, admitiéndose incluso que para cadenas infinitas se tenga una descomposición de tipo no finito ó T cerrada, ya que en principio también prescindimos de H_D. Como veremos, se obtienen resultados totalmente análogos a los que se tenían para cadenas finitas estrictamente descomponibles.

TEOREMA 2-4 Si definimos $M_n = \sup_{x\in C} v_n^*$ y $m_n = \inf_{x\in C} v_n^*(x)$ entonces si b 0 se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} M_n/n = \Delta \qquad \lim_{n\to\infty} m_n/n = \delta \text{ ".}$$

TEOREMA 2-5 "Si $b \equiv 0$ y $P(x,u,A)$ es equicontínua en x al variar u y A entonces la familia $\{ v_n^*(x)/n\}$ también es equicontínua ".

En efecto:

$$\frac{|w_n(x,u)-w_n(x_o,u)|}{n} \leqslant \frac{|R(x,u)-R(x_o,u)|}{n} + \int_C |P(x,u,dy)-P(x_o,u,dy)| \cdot \frac{|v_{n-1}^*(y)|}{n}$$

Fijado $\mathcal{E}> 0$ como $R(x,u)$ es equicontíuna en x bajo las hipótesis de medidibilidad de P (más aún se cumplirá bajo la equicontinuidad) entonces puede determinarse $W(x_o)$ entorno de x y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall u \quad \forall n > N \quad \forall x \in W(x_o) \quad \frac{|R(x,u)-R(x_o,u)|}{n} \leqslant \mathcal{E}/2$$

Por la equicontinuidad de la probabilidad, siempre puede conseguirse para el $\mathcal{E}$ fijado anteriormente, un entorno $W'(x_o)$ y $N' \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\forall u\ ,\ n>N',\forall x \in W'(x_o)\ \ |P(x,u,dy)-P(x_o,u,dy)| \leqslant \frac{\mathcal{E}/2}{\sup \frac{v_{n-1}^*}{n} - \inf \frac{v_{n-1}^*}{n}}$$

Escogido $N_0 = \max(N, N')$ y $W = \min\ W(x_0), W'(x_0)$ se tiene:

$$\forall u\ ,\ n > N_0\ \forall x \in W \qquad \frac{|w_n(x,u) - w_n(x_0,u)|}{n} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

Como la acotación sólo deja de verificarse para un número finito de etapas, podemos asegurar que la familia $w_n(x,u)/\ n$ es una familia equicontínua de funciones. Aplicando ahora las propiedades del superior, llegamos a la conclusión de que $\left\{v_n^*(x)/n\right\}_{n \in N}$ es una familia equicontínua de funciones.

Antes de proseguir, queremos destacar una serie de aspectos:

a) Al exigir la equicontinuidad de la probabilidad, es una condición muy fuerte sobre todo en el caso de cadenas, ahora bién, usando la topología Θ_3 puede subsanarse este inconveniente tal como se demostró en su momento.

b) Caso de que Θ sea finita, la equicontinuidad se puede sustituir simplemente por la continuidad.

c) Caso que la probabilidad sea equicontínua, la hipótesis 5) del modelo, se satisface con sólo imponer que $f(y)$ sea medible y acotada.

En estas condiciones , para determinar la forma asintótica de la ganancia óptima, debemos imponer una hipótesis que, como en el caso de cadenas finitas, garantice la comunicación entre cada par de estados, Por la existencia de Θ la formularemos en los siguientes términos:

H_2) "Para cada abierto O C no vacío y para cada y C-O, existe $e \in E$ tal que si el sistema parte de y con función de transición $P(\cdot, e(\cdot), A)$ hay probabilidad 1 de que el sistema pase alguna vez por O ".

Esto equivales a imponer que O sea recurrente para alguna alternativa ó estrategia en el proceso que parte de y C-O con función de transición $P(\cdot, e(\cdot), A)$.

Para nuestro objetivo de sistematización, es importante hacer notar que las topologías que hemos creado en el capítulo anterior son especialmente aptas para la verificación de esta hipótesis, pudiendo añadirse que:

a) Si se verifica H_2 tal como se propone para cadenas, se verifica tal como se propone aquí a través de la topología.

b) La propiedad inversa también es cierta.

Esto nos indica, que bajo la topología θ (ver II-8), toda cadena verifica H_2 siempre que no haya un subconjunto que sea recurrente y cerrado simultáneamente en toda estrategia. De acuerdo con ésto, cualquier propiedad que se postule bajo H_2 en esta forma, se puede extender sin restricción a cualquier tipo de cadena.

Si notamos $H(y,e,O,r)$ la probabilidad de que el sistema pase por primera vez por O en la etapa r-ésima partiendo de y con la estrategia e, entonces puede encontrarse $e(y,O)$ tal que :

$$\sum_{r} H(y,e,O,r) = 1$$

Así para cada $\eta \in [0,1]$ $\exists$ $h \in N$ tal que

$$\sum_{r=0}^{h} H(y,e,O,r) > \eta$$

Con todas estas hipótesis, ya podemos enunciar un teorema que garantiza la forma asintótica de la ganancia óptima y de la ganancia media por etapa:

TEOREMA 2-6 "Si C es semimétrico y cuasi compacto, $P(x,u,A)$ es equicontínua en x al variar u y A y se cumple H_2, entonces:

$$\forall x \in C \qquad v_n^*(x) = n.g^* + r_n(x)$$

$$\text{con} \lim_{n\to\infty} r_n(x)/n = 0\text{"}.$$

En efecto:

Si $b \equiv 0$ por el teorema 2-5 la familia $v_n(x)/n$ es equicontínua, de modo que por ser C semimétrico y cuasicompacto para todo $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$ tal que:

$$\forall x,y \quad C \quad / \quad s(x,y)<\delta \Rightarrow \quad \frac{|v_n^*(x) - v_n^*(y)|}{n} < \varepsilon$$

$n \in \mathbb{N}$ siendo s la semidistancia que hay establecida en C.

<u>NOTA</u> El teorema se puede enunciar para C métrico compacto, pero las condiciones que imponemos son más generales y aptas para nuestros objetivos.

Por la cuasi compacidad de C, fijado $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un recubrimiento finito $O_1^\varepsilon \dots O_p^\varepsilon$ de abiertos de diámetro δ para el espacio C, tales que:

$$\forall i=1,\dots,p \ \forall x,y \in O_i^\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{|v_n^*(x) - v_n^*(y)|}{n} < \varepsilon \qquad n \in \mathbb{N}$$

Por el mismo motivo anterior y la continuidad de las $v_n^*(x)$, -

para cada n N pueden concontrarse dos estados x_n e y_n ta-les que:

$$v_n^*(x_n) = M_n \qquad\qquad v_n^*(y_n) = m_n$$

de modo que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tendrán sendos puntos de acumulación x^* e y^* a los que convergerán dos sub-sucesiones de las anteriores $\{x_{n_v}\}$ $\{y_{n_v}\}$.

La hipótesis H_2 garantiza que se puede encontrar para cada i un o_i y un h_i tal que:

$$\sum_{r=o}^{h_i} H(y^*, o_i, O_i^\varepsilon, r) > \eta$$

con $\eta \in [0,1]$ y fijado "a priori".

Tomando $h = \max (h_i/i=1, \ldots, p)$ que siempre existe por ser un número finito de valores, podemos asegurar:

$$\forall\, i=1,\ldots,p \qquad \sum_{r=o}^{h} H(y^*, o_i, O_i^\varepsilon, r) > \eta$$

Para v suficientemente grande, y^* e y_{n_v} estarán en el mismo O_i^ε con lo que:

$$v_{n_v}^*(y^*) - m_{n_v} \leq n_v \varepsilon$$

Si suponemos que $x_{n_{v-h}} \in O_j^\varepsilon$ tendremos que para $x \in O_j^\varepsilon$

$$M_{n_{v-h}} - v_{n_{v-h}}(x) \leq (n_v - h)\varepsilon$$

de modo que si notamos $q = \inf_x \sup_u R(x,u)$ podemos escribir:

a) En la etapa r el sistema alcanza por vez primera un estado de O_j con probabilidad $H(y^*, e_j, O_j^\varepsilon, r)$, desde e el cual, adoptando una política óptima para n_v-h etapas, garantizamos una ganancia mayor que $M_{n_{v-h}} -(n_v-h)\varepsilon$ mientras que en las r primeras y h-r últimas, la ganancia es al menos q.

b) Con probabilidad $1- \sum H(y^*, e_j, O_j^\varepsilon, r)$ al final de las h primeras etapas el sistema no ha conseguido llegar a O_j, con lo que debemos conformarnos con aplicar la política óptima a partir de la posición que hayamos alcanzado garantizándonos al menos una ganancia total ----- $m_{n_{v-h}} + h.q.$

De las relaciones anteriores, resulta:

$$m_{n_v} \geqslant \sum_{r=o}^{h} H(y^*, e_j, O_j^\varepsilon, r) M_{n_{v-h}} + \left[1 - \sum_{r=o}^{h} H(y^*, e_j, O_j^\varepsilon\, r)\right] m_{n_v -h}$$

$$-(2n_v-h)\varepsilon \qquad + h.q$$

siempre que v sea suficientemente grande de acuerdo con lo - que hemos dicho con anterioridad.

Amén de todo lo dicho también se tiene:

$$M_{n_v} \leqslant M_{n_{v-h}} + h.Q$$

habiendo definido $Q = \sup_x \inf_u R(x,u)$ de manera que:

a) $$M_{n_v} - m_{n_v} \leqslant \left[\left(1 - \sum_{r=1}^{h} H(y^*, e_j, 0_j, r)\right)\left(M_{n_v} - m_{n_v}\right)\right] + h.(Q-q)$$

$$+ (2n_v - h)\varepsilon < (1-\eta)\left[M_{n_v-h} - m_{n_v-h}\right] + h(Q-q) + 2n_v\varepsilon$$

b) $$\frac{M_{n_v} - m_{n_v}}{n} < (1-\eta)\frac{M_{n_v-h} - m_{n_v-h}}{n_v - h} + h\frac{Q-q}{n_v} + 2\varepsilon$$

Si v es suficientemente grande como para que se verifiquen simultáneamente las acotaciones:

$$|M_n/n - \Delta| < \varepsilon \qquad n > n_v - h$$

$$|m_n/n - \delta| < \varepsilon \qquad n > n_v - h$$

$$h\frac{Q-q}{n_v} < \varepsilon$$

las desigualdades anteriores equivalen a escribir:

$$\Delta - \delta - 2\varepsilon < (1-\eta)(\Delta - \delta + 2\varepsilon) + 3\varepsilon$$

ó bien

$$(\Delta - \delta) < 7\varepsilon$$

Por las propiedades de las cantidades que intervienen en la relación, concluímos que se tiene:

$$\Delta = \delta$$

Por otra parte, si tenemos en cuenta el resultado:

$$m_n/n \leqslant v_n^*(x)/n \leqslant M_n/n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

para todo $x \in C$ se tendrá:

$$\delta \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, v_n^*(x)/n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, v_n^*(x)/n$$

ó lo que es lo mismo:

$$\forall\, x \in C \quad v_n^*(x)/n \longrightarrow g^* = \Delta = \delta$$

de donde se deduce

$$v_n^*(x) = n.g^* + r_n(x)$$

con $\lim r_n(x)/n = o$ cualquiera que sea $x \in C$ pudiendo además probarse que se trata de una convergencia uniforme ne x.

Hemos partido de la condición $b \equiv 0$. Si suponemos ahora que no se cumple, como lo que nos interesa son los pagos relativos, el resultado sigue siendo totalmente válido.

Al igual que en 2-2, este teorema garantiza que la ganancia media óptima por etapa se estabiliza.

*** Este teorema, se puede aplicar al caso de que una cadena sea el proceso base, tenidos en cuenta los siguientes extremos:

a) La cadena debe ser estrictamente descomponible.

b) Para cualquier cadena podemos establecer una topología θ (ver II-8) que sea uniforme y por tanto procedente de una semidistancia que se usará para la determinación de los abiertos O_j^ε.

c) Toda cadena finita con Θ es cuasicompacta "a priori" y además separable en el sentido de la densidad. Por otra parte, para la equicontinuidad nos bastará postular la continuidad simple.

d) Para cadenas, al transformarse las integrales en sumatorias, la continuidad se puede sustituir por semicontinuidad superior ó inferior tal como indica Hinderer (12).

e) Teniendo en cuenta que toda cadena finita verifica H_D "a priori" éstas pueden ser estudiadas dentro de un contexto más general que analizamos a continuación.

No obstante lo que acabamos de decir, el teorema 2-6 es idéntico al que se obtenía bajo H_2 para cadenas finitas salvo la continuidad de la función de transición. Con Θ_3 queda subsanada esta dificultad tal como ya dijimos.

La mayor importancia del teorema, radica en su aplicación a cadenas infinitas estrictamente descomponibles siempre que se pueda garantizar la cuasi compacidad del espacio de estados ó lo que es lo mismo, la accesibilidad de los superiores.

Respecto a la estabilidad de la política óptima, en las mismas condiciones del teorema, 2-6, puede probarse que existe un número finito de estrategias, tales que aplicadas de modo cíclico a lo largo de la evolución del proceso, producen una ganancia esperada media por etapa tan próxima a g^* como se desee. Sobre la aplicación de este resultado a cadenas, se hacen las mismas consideraciones que en el caso anterior.

*** También aquí, se puede generalizar el teorema de Derman que estudia la forma asintótica de la ganancia óptima y la existencia de estrategias óptimas. Omitiremos su demostración.

TEOREMA 2-7 "Si $\exists\ g\in\mathbb{R}$ y $\eta: C \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua y acotada, tal que $\forall x \in C$ sea $g + \eta(x) = \sup_{u\in U} \left[R(x,u) + \int_C P(x,u,dy) \cdot \eta(y)\right]$ entonces se cumple:

1.- $v_n^*(x) = ng^* + r_n(x)$ con $r_n(x)$ acotada uniformemente en x.

2.- Si existe $e \in E$ tal que

$$R(x,e(x)) + \int P(x,e,dy)\ \eta(y) = \sup_{u\in U}\left[R(x,u) + \int P(x,u,dy)\,\eta(y)\right]$$

para todo $x \in C$, entonces la sucesión ---

$$v_n^*(x) - v_n^e(x)$$

está uniformemente acotada.

Sobre este teorema que engloba sin restricción alguna al que se da para cadenas finitas, podemos hacer las siguientes consideraciones:

a) Si U es compacto, existe la estrategia que se admite como - hipótesis de la segunda parte del teorema, para la que se - pueden hacer las mismas afirmaciones que en el teorema 2-1.

b) Si $P(x,u,A)$ es equicontínua en x al variar A y u, entonces basta exigir que $\eta(x)$ sea medible y acotada, para que - quede garantizada la continuidad de la solución del problema.

III-2-4 Hipótesis H_D. Forma asintótica de la ganancia y la política óptimas.-

En ninguno de los apartados anteriores, hemos utilizado la hipótesis H_D de una manera explícita (en el primero se obtenía como consecuencia de H_1) sino que suponíamos que se trabajaba dentro de las condiciones más generales posibles aptas para todo tipo de proceso, sin establecer hipótesis alguna sobre la descomponibilidad del mismo. De este modo, la aplicación a cadenas finitas en las que H_D se verifica "a priori" exige condiciones muy fuertes.

En este apartado, vamos a imponer H_D según las diferentes estrategias, lo que como veremos, proporcionará resultados especialmente aptos para cadenas.

Para cada $e \in E$ supondremos que el proceso que se induce de función de transición $P(x,e,A)$ cumple H_D de modo que para cada estrategia se induce una partición de C de la forma:

$$C = C_1^e \cup C_2^e \;\ldots\ldots\ldots\ldots \cup C_{n_e}^e \;\cup T^e$$

siendo la ganancia obtenida, cuando se mantiene fija e de la forma:

$$v_n^e(x) = ng^e(x) + v^e(x) + \theta_n^e(x) + \delta_n^e(x)$$

con $\lim \delta_n^e(x) = 0$, $\theta_n^e(x)$ una función periódica de n y ---- $g^e(x) = g_j$ si $x \in C_j$ ó combinación convexa de las g_i si - $x \in T^e$.

Para conseguir una forma de comunicación entre cada dos es tados, un poco más débil que H_2 por existir H_D añadiremos la hipótesis:

H'_2) Para todo C_i^e subcadena cerrada para la función de transición $P(x,e,A)$, e $y \in C - C_i^e$, exista una estrategia $e' \in E$ tal que si el sistema parte de y con probabilidad $P(x,e',A)$ hay probabilidad no nula de que el sistema pase alguna vez por C_i^e.

En estas condiciones podemos enunciar:

TEOREMA 2-8 "Si $(C, \mathcal{B})$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, $P(x,u,A)$ es contínua en x para u y A y se cumplen H_D (en la versión anterior) y H'_2, entonces:

$$\forall e \in E \quad i = 1, \dots n_e \quad \exists e' \in E \text{ tal que } g^{e'}(x) = g_i^e \; \forall x \in C"$$

Este teorema, nos indica que toda estrategia se puede modificar para conseguir que proporcione sobre la totalidad de C la misma ganancia óptima que sobre una particular subcadena. Este enunciado, puede considerarse como un teorema de extensión Sobre la aplicabilidad del mismo, podemos afirmar:

a) Es totalmente válido para cadenas, pues Θ siempre verifica el segundo axioma de numerabilidad; en cadenas finitas no será necesario imponer H_D. En cadenas infinitas, su imposición supondrá un avance sobre las propiedades generales de las mismas.

b) El teorema 2-8 es válido en las condiciones del 2-6 siempre que se añada H_D en esta nueva versión ya que:

1.- Todo espacio semimétrico y cuasicompacto, verifica el segundo axioma de numerabilidad.

2.- H_2 implica H_2' siempre que se verifiquen el resto de las condiciones.

TEOREMA 2-9 "Si C es semimétrico cuasi compacto, $P(x,u,A)$ equicontínua en x al variar A y u se cumplen H_2 y H_D y U es compacto, entonces:

1) Existe una estrategia $e \in E$ tal que $g^e(x)=g^*$ si y sólo si existe $b: C \longrightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada tal que:

$$g^* + b(x) \leq \sup_{u \in U} \left[R(x,u) + \int_C P(x,u,dy) b(y)\right] \quad x \in C$$

2) Existe una estrategia $e \in E$ tal que $g^e(x)=g^*$ para todo $x \in C$ cuando y sólo cuando existe b en las mismas condiciones de 1) tal que:

$$g^* + b(x) = \sup_{u \in U} \left[R(x,u) + \int_C P(x,u,dy)\ b(y)\right]$$

salvo para un conjunto de medida nula para cada e_j, $j = 1,\dots n_{e'}$ siendo e' la estrategia que verifica:

$$R(x,e'(x)) + \int_C P(x,e(x),dy)\ b(y) = \sup_{u \in U} \left[R(x,u) + \int_C P(x,u,dy)\ b(y)\right] \quad x \in C$$

Sobre las hipótesis del teorema, hacemos las mismas consideraciones que para el 2-6.

COROLARIO 2-2 "En las mismas hipótesis del teorema anterior, si definimos

$$\overline{g} = \sup_{e\in E} \sup_{x\in C} g^e(x)$$

se tiene:

$$\overline{g} = \sup_{b} \inf_{x\in C} \left\{ \sup_{u\in U} \left[R(x,u) + \int_C P(x,u,dy)b(y) \right] - b(x) \right\}$$

cuando b recorre el conjunto de las funciones medibles y acotadas de C en $\mathbb{R}$.

Por otra parte, existe $e \in E$ tal que $g^e(x) = \overline{g}$ $x \in C$ cuando u sólo existe b medible y acotada que cumpla:

$$\overline{g} = \inf_{x\in C} \left\{ \sup_{u\in U} \left[R(x,u) + \int_C P(x,u,dy)b(y) \right] - b(x) \right\} ".$$

Sobre las condiciones de aplicabilidad de estos dos enunciados a nuestro intento de sistematización, hacemos las mismas consideraciones que en el teorema 2-6.

Resumiendo todo lo visto en el capítulo, podemos asegurar, que con ciertas hipótesis restrictivas y bajo las construcciones topológocas realizadas con anterioridad para las cadenas de Markov, se pueden establecer condiciones suficientes para garantizar la existencia de estrategias óptimas y la forma de la ganancia esperada total y media por etapa, para un proceso con función de transición estacionaria, en particular una cadenas, cualquiera que sea su cardinal y bajo cualquier hipótesis que se realice sobre la matriz de transición de la misma. De este modo, podemos asegurar que nuestros objetivos generales se han cumplido, ya que por una parte, hemos reunido en una sola estructura todos los procesos con espacio de alterna tivas continuo, y por otra, hemos probado la potencialidad de la herramienta topológica que hemos introducido sobre las cadenas de Markov.

B I B L I O G R A F I A

1) BELLMAN, R.
Dynamic Programming
Princeton Univ. Press. (1.957)

2) BELLMAN, R. and DREYFUS, S.
Applied Dynamic Programming
Princeton Univ. Press. (1.962)

3) BLACKWELL, D.
Discounted Dynamic Programming
Annals of Mathematics Statistics, Vol. 33 (1.962)

4) BOURBAKI, N.
Element de Mathematique
Livre III: Topologie Generales
Chap. 2: Structures Uniformes
Chap. 9: Utilisation des nombres reels en Topologie Generale
Herman Paris, 3ª Ed.

5) COX, R.L. and H. MILLER
The Theory of Stochastics Processes
Methuen (1.965)

6) CHUNG, K.L.
Lectures on Boundary Theory for Markov Chains
Annals of Mathematical Studies, Vol.65
Princeton Univ. Press. (1.970)

7) CHUNG, K.L.
Markov Chains with Stationary Transiction Probability
Springer-Verlag (1.967)

8) DOOB, J.L.
Stochastic Processes
John Wiley and Sons. Inc. (1.953)

9) DYNCKIN, E.B.
Theory of Markov Processes
Prentice-Hall Inc. Englewood Cliff (1.961)

10) FELLER, W.
An Introduction to Probability Theory and its Applications.
John Wiley and Sons. Inc. (1.962)

11) GUARDABASSI, G. and S. RINALDI
Two Problems in Markov Chains: A Topological Approach
O.R.S.A.

12) HINDERER, K.
Foundation of Non-Stationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter.
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, Vol. 33
Springer-Verlag (1.970)

13) HOWARD, R.A.
Dynamic Programming and Markov Processes
M.I.T. Press. (1.960)

14) HOWARD, R.A.
Dynamic Probabilistic Systems, Vol. I y II
John Wiley and Sons. Inc (1.971)

15) KELLEY, J.L.
Topología General.
Eudeba.

16) KEMENY, J.G., J.L. SNELL and A.W. KNAPP
Denumerable Markov Chains
D. Van Nostrand Company Inc. (1.966)

17) KRILON, N.V.
On regular Boundary Points for Markov Processes.
Theory of Probability and its Applications, Vol. XI, nº 4

18) LOEVE, M.
Probability Theory
D. Van Nostrand Company (1.967)

19) MINE, H. and S. OSAKI
Markovian Decision Processes
American Elsevier Publishing Company (1.970)

20) RIKOV, V.V.
Markov Decision Processes with Finite State and Decision Spaces.
Theoy of Probability and its Applications, Vol. XI, nº 2

21) SHUR, M.G.
On the Martin Boundary for a Class of Markov Processes
Theory of Probability and its Applications, Vol. XIII, nº

22) R. VELEZ IBARROLA
Control de los Procesos de Decisión Markovianos.
Tesis Doctoral. Madrid, 1.974.

INDICE Pag.

I.- INTRODUCCION

I-1 PLANTEAMIENTO Y OBJETIVOS 1

I-2 BREVE BOSQUEJO HISTORICO 2

I-3 SUMARIO 11

II.- TOPOLOGIAS SOBRE CADENAS DE MARKOV

II-1 NOTA SOBRE CADENAS DE MARKOV 16

II-2 TOPOLOGIA SOBRE UNA CADENA TRANSITORIA CON TODOS LOS ESTADOS TRANSITORIOS 20

II-3 TOPOLOGIA SOBRE UNA CADENA RECURRENTE 25

II-4 CADENAS DE MARKOV ESTRICTAMENTE DESCOMPONIBLES 28

II-5 TOPOLOGIA θ_1 (DE LA ACCESIBILIDAD) SOBRE UNA CADENA DESCOMPONIBLE 32

II-5-1 Construcción de la topología 32

II-5-2 Propiedades de C como espacio topológico 34

II-5-3 Interpretaciones probabilísticas de la topología 40

II-6 TOPOLOGIA θ_2 (DE LA COMUNICACION) SOBRE UNA CADENA DESCOMPONIBLE 52

II-6-1 Construcción de la topología 53

II-6-2 Propiedades de C como espacio topológico 58

II-6-3 Interpretación probabilística de la topología 67

II-7 TOPOLOGIA θ_3 (DE LA COMUNICACION DEBIL) SOBRE UNA CADENA DESCOMPONIBLE 72

II-7-1 Definición de una semidistancia sobre C. Construcción de la topología asociada 73

II-7-2 Propiedades de G como espacio topológico 83
II-7-3 Interpretaciones probabilísticas de la topología 90
II-8 TOPOLOGIA ASOCIADA UNUN PROCESO DE DECISION 94
III.- PROCESOS DE DECISION MARKOVIANOS CON ESPACIO DE ALTERNATIVAS CONTINUO
III-1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.- CONSIDERACIONES GENERALES 99
III-1-1 Algunas consideraciones sobre procesos de Markov estacionarios con parámetro discreto 100
III-1-2 Proceso con recompensa asociada. Forma asintótica de la ganancia esperada 104
III-2 PROCESOS DE DECISION MARKOVIANOS CON $U \subset \mathbb{R}^m$ 114
III-2-1 Condiciones generales. Ganancia óptima 115
III-2-2 Hipótesis H_1. Forma asintótica de la ganancia y política óptimas 122
III-2-3 Supresión de H_1. Forma asintótica de la política y la ganancia óptimas 126
III-2-4 Hipótesis H_D. Forma asintótica de la ganancia y política óptimas 137
BIBLIOGRAFIA 142

DILIGENCIA:

Reunido el Tribunal examinador en el día de fecha, constituido por:

Ilmo. Sr. D. Rafael Infante Macias (Decano)

D. Alfonso Guiraum Martin

D. Luis Esteban Carrasco

D. José Ramón Fuentes Mira

D. Ramón Gutierrez Jaimez

para juzgar la Tesis Doctoral del Licenciado Do Miguel Delgado Calvo-Flores

acordó por unanimidad otorgar la calificación de Sobresaliente

para que conste, se extiende firmada por los componentes del Tribunal, la presente diligencia.

Granada, 15 de Septiembre de 1975

El Secretario,

Ramón G. Jaimez

El Presidente,

R. Infante M.

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

A. Guiraum J. Esteban J. R. Fuentes