UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Álgebra

COHOMOLOGÍA DE GRUPOS CATEGÓRICOS COFIBRADOS.

LIDIA FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

TESIS DOCTORAL

Granada, Septiembre de 1998.

Memoria realizada en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Prof. Dr. Don. *Antonio Martínez Cegarra*, para la obtención del grado de doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Granada.

V^o B^o del director: Antonio Martínez Cegarra.

Aspirante a doctor: Lidia Fernández Rodríguez.

Dedicado a Migue.

Agradecimientos:

Quisiera agradecer ante todo al Profesor Antonio Martínez Cegarra el haberme dirigido en la realización de esta memoria, así como la confianza depositada en mí desde el principio.

También quisiera agradecer a Juan Campos, a José Miguel Alonso y a Rafa Yañez la ayuda prestada en materia informática.

Por último, mostrar mi gratitud a mi familia y a Migue, que siempre me han apoyado y animado en los momentos difíciles.

Índice

Introducción

Un grupo categórico es un grupoide monoidal en el que cada objeto tiene un cuasi-inverso con respecto al producto tensor. Así por ejemplo, los grupos categóricos con sólo un objeto son exactamente los grupos abelianos. Esta memoria se concentra en la introducción y el estudio de un cierto tipo de cohomología no abeliana $\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, $1 \leq i \leq 2$, definida para una categoría pequeña $\mathcal{B}$, con coeficientes en un (pseudo)diagrama de grupos categóricos $\mathbb{G}^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$, en lugar de en $\mathcal{B}$-módulos como es usual. Consideramos coeficientes en pseudodiagramas de grupos categóricos porque aparecen en numerosos problemas algebraicos y topológicos, tales como la clasificación de extensiones arbitrarias de grupos, la clasificación de álgebras de Azumaya sobre anillos conmutativos, o la clasificación de las secciones cruzadas de una fibración entre CW-complejos cuyas fibras tienen grupos de homotopía triviales en dimensiones distintas de 1 y 2. Como discutimos explícitamente a lo largo de la memoria, muchos de estos problemas pueden ser reformulados en términos de la clasificación de torsores sobre una categoría pequeña $\mathcal{B}$ bajo la acción de un determinado $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$, esto es, una categoría $\mathcal{B}$-cofibrada $\mathcal{P}_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathcal{B}$, junto con dos $\mathcal{B}$-funtores

$$- \otimes - : \mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathbb{G} \to \mathbb{G} \quad \text{e} \quad I : \mathcal{B} \to \mathbb{G},$$

satisfaciendo ciertas condiciones de coherencia, y entonces se pueden solucionar vía la cohomología $\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, donde $\mathbb{G}^{\otimes}$ es el pseudodiagrama de grupos categóricos canónicamente determinado por el $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G}$.

Los conceptos de grupo categórico cofibrado y pseudodiagrama de grupos categóricos se revisan en el primer capítulo de la memoria, así como la equivalencia entre ambos vía una adecuada construcción de Grothendieck. En la última parte del capítulo se contemplan algunos ejemplos ilustrativos de dichos conceptos, el primero de los cuales se refiere a módulos sobre una categoría pequeña. En un segundo ejemplo, consideramos un grupo G actuando sobre un anillo conmutativo S y construimos un diagrama $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes} : G \to GpCAT$ que asocia al único objeto de G, el grupo categórico de los S-módulos invertibles $(\mathcal{P}ic(S), \otimes)$. En un tercer ejemplo, asociamos un espacio topológico X, junto con subespacios $B \subseteq A \subseteq X$, y un conjunto de puntos base $S \subseteq B$, con un grupo categórico cofibrado sobre el grupoide fundamental de B en el conjunto S, $\Pi_1(B, S)$, que llamaremos el grupo categórico cofibrado de Whitehead de (X, A, B, S) y denotaremos por $W(X, A, B, S)$. Cuando X es un CW-complejo con k-esqueleto X^k, para $k \geq 0$, el grupo categórico fibra de $W(X, X^1, X^1, X^0)$ sobre un punto $* \in X^0$ es monoidalmente equivalente al grupo categórico estricto definido por el módulo cruzado de Whitehead $\pi_2(X, X^1, *) \to \pi_1(X^1, *)$, [52]. Estos grupos categóricos cofibrados, están estrictamente relacionados con otras construcciones recientes tales como el bigrupoide de homotopía de un espacio topológico, estudiado por Hardie, Kamps y Kieboom en [26], o el 2-grupoide de Whitehead de una terna (X, A, S), estudiado por Moerdijk en [38].

Si $\mathcal{B}$ es una categoría pequeña, un $\mathcal{B}$-torsor bajo un $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G}$ está definido como una $\mathcal{B}$-categoría cofibrada [26], $\mathcal{E} \xrightarrow{p_{\mathcal{E}}} \mathcal{B}$, tal que para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$ la categoría fibra $\mathcal{E}_A$ es equivalente a la correspondiente del grupo categórico $\mathbb{G}_A$, vía una $\mathcal{B}$-acción de $\mathbb{G}$ sobre $\mathcal{E}$, es decir vía la presencia de un $\mathcal{B}$-funtor $\mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $(X, \xi) \mapsto {}^X\xi$, junto con isomorfismos naturales satisfaciendo ciertas condiciones de coherencia. El conjunto de $\mathcal{B}$-torsores bajo $\mathbb{G}$, junto con los $\mathcal{B}$-funtores $\mathbb{G}$-equivariantes y las $\mathcal{B}$-homotopías $\mathbb{G}$-equivariantes, definen un 2-grupoide $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$, que se estudiará en el segundo capítulo de la memoria. A ese respecto incluimos tres ejemplos que muestran una conexión estrecha con algunos problemas algebraicos y topológicos: En el primero, demostramos que la teoría de Baues de extensiones lineales de una categoría pequeña $\mathcal{B}$ por un $\mathcal{B}$-módulo, [3], [4], es un caso particular de la teoría de torsores categóricos, cuando se toman los coeficientes apropiados. En un segundo ejemplo, consideramos una extensión de Galois de anillos conmutativos, S/R, con grupo $G = Gal(S/R)$, y el G-grupo categórico de los S-módulos invertibles $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\int G$, definido por Fröhlich y Wall en [21] (bajo la terminología de una categoría monoidal G-graduada) y que se recuerda en el primer capítulo de la memoria. Entonces explicamos como cada R-álgebra de Azumaya A, que contenga a S como subálgebra conmutativa maximal, tiene asociado un G-torsor, $\underline{\underline{A}}$, de tal forma que $A \mapsto \underline{\underline{A}}$ induce una biyección entre el grupo relativo de Brauer-Goldman $Br(S/R)$, y el conjunto de clases de equivalencia de G-torsores bajo $\mathcal{P}ic(S)$. En un tercer ejemplo, mostramos un torsor no trivial sobre un grupo categórico cofibrado de Whitehead.

El tercer capítulo está dedicado a la clasificación cohomológica de $\mathcal{B}$-torsores bajo un $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G}$, lo que se consigue extendiendo el análisis de Schreier de extensiones de grupos, tal como hicieron Breen en [7], Ulbrich en [49] o Carrasco-Cegarra en [11] para resolver problemas de clasificación similares. Desarrollamos entonces una teoría de conjuntos de factores para torsores categóricos y concluimos que el 2-grupoide $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$ es equivalente a un 2-grupoide de 2-cociclos $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, cuyos grupos de homotopía, en el sentido de [37] o [32], se usan para definir los conjunto de cohomología $\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$ para $i = 0, 1, 2$. Estos conjuntos de cohomología se describen en términos de conjuntos de factores o 2-cociclos, derivaciones y elementos invariantes. En este capítulo incluimos varios ejemplos, demostrando la relación entre esta teoría de cohomología y muchas otras más clásicas tales como la cohomología de grupos de Eilenberg-MacLane [20], la cohomología de grupos no abeliana de Dedecker [17], la cohomología de categorías pequeñas de André, Roos o Watts [1, 41, 51], la cohomología de Fröhlich-Wall de categorías graduadas tipo grupo [21] y la cohomología de extensiones de anillos conmutativos de Hattory-Ulbrich [27] o Villamayor-Zelinsky [50].

Una equivalencia de categorías pequeñas $\mathcal{B} \simeq \mathcal{B}'$, o una $\mathcal{B}$-equivalencia monoidal de $\mathcal{B}$-grupos categóricos $\mathbb{G}' \simeq \mathbb{G}$, induce un isomorfismo en cohomología. Además, una sucesión exacta corta de $\mathcal{B}$-grupos categóricos $\mathbb{G}' \to \mathbb{G} \to \mathbb{G}''$, o equivalentemente una sucesión exacta corta de pseudodiagramas de grupos categóricos $\mathbb{G}'^{\otimes} \to \mathbb{G}^{\otimes} \to \mathbb{G}''^{\otimes}$, en el sentido definido en el capítulo 4, induce una sucesión exacta de nueve términos de grupos y conjuntos punteados $...\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes}) \to \mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{G}''^{\otimes}) \to \mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{G}'^{\otimes}) \to ...$, que, por ejemplo, se reduce a la conocida sucesión exacta de seis términos de Chase-Harrison-Rosenberg [16], asociada a una extensión de Galois de anillos conmutativos S/R con grupo G, cuando se toma una sucesión particular adecuada de G-grupos categóricos.

El último capítulo está dedicado al significado topológico de la clasificación de los $\mathcal{B}$-torsores bajo un $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G}$ por el conjunto de cohomología $\mathbb{H}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes})$. Esto se lleva a cabo de la misma forma que en el caso de la clasificación de extensiones singulares de grupos de un grupo G por un G-módulo M por el grupo de cohomología $H^2(G,M)$, y entonces demuestra que están en correspondencia biyectiva con las clases de homotopía fibradas de secciones cruzadas de la fibración escindida

$$K(M,2) \overset{i}{\hookrightarrow} L(M_G,2) \underset{s}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} K(G,1).$$

Asociamos a cada $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G}$ un conjunto simplicial, denominado su nervio y denotado por $Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)$, y una aplicación simplicial sobre el nervio de la categoría $\mathcal{B}$, $\varphi : Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes) \to Ner(\mathcal{B})$, que es una fibración de Kan siempre que $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}$ sea una bifibración. Esta aplicación simplicial está canónicamente escindida por una sección cruzada $s : Ner(\mathcal{B}) \to Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)$ y su fibra $\varphi^{-1}(A)$, sobre cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, es isomorfa al conjunto simplicial $Ner(\mathbb{G}_A,\otimes)$, nervio del grupo categórico fibra de $\mathbb{G}$ sobre A [12]. Entonces, cada fibra $\varphi^{-1}(A)$ es un complejo de Kan con el tipo de homotopía del grupo categórico fibra $\mathbb{G}_A$. El principal resultado que probamos es la existencia de una biyección entre el conjunto de cohomología $\mathbb{H}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes})$ y el conjunto $\Gamma\left[{}^{Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)}/_{Ner(\mathcal{B})}\right]$ de clases de homotopía fibrada de secciones cruzadas para φ. Concluimos con algunos ejemplos, después de aplicar realizaciones geométricas para situarnos en el contexto de los CW-complejos.

Capítulo 1

Grupos categóricos cofibrados.

1.0 Introducción.

En [40], Quillen define una K-teoría algebraica mediante grupos de homotopía de espacios clasificantes de ciertas categorías pequeñas, surgiendo desde aquí interés por la relación entre categorías y los tipos de homotopía de sus espacios clasificantes.

Cuando se realiza el colímite homotópico de un (pseudo)diagrama de espacios $B(F) : \mathcal{B} \to Top$, que es obtenido al considerar los espacios clasificantes de un (pseudo)diagrama de categorías pequeñas $F : \mathcal{B} \to Cat$, el resultado tiene el tipo de homotopía de una cierta categoría $F\int\mathcal{B}$, conocida como la construcción de Grothendieck sobre el diagrama. Este hecho, conocido como el teorema del colímite homotópico, es debido a Thomason [48], y permite describir e interpretar adecuadamente muy diversos colímites homotópicos.

El núcleo fundamental de este capítulo concierne al cálculo de colímites homotópicos de diagramas de CW-complejos $X : \mathcal{B} \to Top$, en la particular situación en que éstos son conexos por arcos y sus grupos de homotopía son triviales en dimensiones superiores a 2, es decir tales que $\pi_i(X_A) = 0$ $\forall i \neq 1, 2$, $A \in Ob(\mathcal{B})$. Es conocido desde la tesis de Sinh [46], que los grupos categóricos -es decir, grupoides monoidales $(\mathbb{G}, \otimes)$ en los que las traslaciones $Y \otimes -$ son autoequivalencias- son modelos algebraicos para los 2-tipos de homotopía conexos, y una adecuada teoría de espacios clasificantes $B(\mathbb{G}, \otimes)$ para estos grupos categóricos es desarrollada por Carrasco y Cegarra en [12], donde particularmente se establece que el funtor $(\mathbb{G}, \otimes) \mapsto B(\mathbb{G}, \otimes)$ define una equivalencia entre la categoría de homotopía de grupos categóricos y la de CW-complejos conexos por arcos con grupos de homotopía triviales en otras dimensiones que 1 y 2. Y esto nos conduce de forma natural a considerar, en la sección 2 de este capítulo, pseudodiagramas de grupos categóricos $F^{\otimes}: \mathcal{B} \to Gp - CAT$, donde se introduce su colímite homotópico $F^{\otimes}\int\mathcal{B}$, mediante una adecuada *construcción de Grothendieck*, que nos lleva en definitiva a la concepción de los *grupos categóricos cofibrados* como modelos conceptuales de los colímites homotópicos de diagramas de grupos categóricos.

La estructura del capítulo es como sigue. En la primera sección realizamos una síntesis de la teoría concerniente a la construcción de Grothendieck, esencialmente tomada de [25] y [19]. Particularmente se recuerda alguna terminología básica, en relación con los conceptos de pseudofuntor (o pseudodiagrama) y de cofibración entre categorías pequeñas, y se esquematiza la equivalencia de Grothendieck entre pseudofuntores y cofibraciones.

En la segunda sección, se hace una breve introducción a los grupos categóricos, esencialmente siguiendo los trabajos de Sinh [46] y Saavedra [42], y a los diagramas de grupos categóricos con el tipo de una categoría pequeña arbitraria. Una adecuada *construcción de Grothendieck* da la concepción de colímite homotópico de un diagrama de grupos categóricos, y se concluye con el resultado fundamental de que, mediante colímites homotópicos, diagramas de grupos categóricos resultan esencialmente equivalentes a grupos categóricos cofibrados, cuyo estudio básico también es incluido en la sección.

La tercera sección está dedicada a ejemplos ilustrativos del concepto de grupo categórico cofibrado, que surgen con interés tanto desde el Álgebra como de la Topología: Aquellos asociados a sistemas de coeficientes, particularmente a módulos sobre categorías pequeñas; los grupos categóricos graduados de Picard asociados a extensiones Galoisianas de anillos conmutativos, que surgen de forma natural en el estudio de los grupos de Brauer-Goldman; y los grupos categóricos cofibrados de Whitehead, que describen 2-tipos de homotopía no conexos.

1.1 Colímites homotópicos de categorías pequeñas.

1.1.1 (Co)fibraciones entre categorías.

Comenzamos recordando algunas definiciones y terminología de carácter básico.

Cuando es dado un funtor $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$, usualmente adoptamos la conveniencia de referirnos a $\mathcal{E}$ como una *$\mathcal{B}$-categoría* y a $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ como al *funtor proyección* de $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{B}$. De esta forma, fijada una categoría $\mathcal{B}$, la categoría de $\mathcal{B}$-categorías es la categoría coma $CAT/\mathcal{B}$, cuyos morfismos son los *$\mathcal{B}$-funtores*, o funtores entre $\mathcal{B}$-categorías $T : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ que son compatibles con las proyecciones, es decir tales que $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}T = \mathcal{P}_{\mathcal{E}}$. Por un *$\mathcal{B}$-morfismo natural* entre $\mathcal{B}$-funtores $T, R : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$, entenderemos una transformación natural $\tau : T \to R$ tal que $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}\tau = id_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}$.

Un $\mathcal{B}$-funtor $T : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ es una *$\mathcal{B}$-equivalencia* si existe un $\mathcal{B}$-funtor $T' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$-isomorfismos naturales $TT' \simeq id_{\mathcal{D}}$ y $T'T \simeq id_{\mathcal{E}}$. La siguiente caracterización de $\mathcal{B}$-equivalencias es debida a Grothendieck [25].

Recordemos que si $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ es una $\mathcal{B}$-categoría, para cada objeto $A \in \mathcal{B}$ la *categoría fibra* de $\mathcal{E}$ sobre A es $\mathcal{E}_A = \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{-1}(id_A)$; esto es, sus objetos, llamados A-objetos, son aquellos $\alpha \in \mathcal{E}$ tales que $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(\alpha) = A$, y sus morfismos, llamados A-morfismos, son aquellos $f : \alpha \to \beta \in \mathcal{E}$ tales que $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(f) = id_A$.

Proposición 1.1.1 *Si $T : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ es un $\mathcal{B}$-funtor entre $\mathcal{B}$-categorías $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ y $(\mathcal{D}, \mathcal{P}_{\mathcal{D}})$, son equivalentes:*

i) T es una $\mathcal{B}$-equivalencia.

ii) T es una equivalencia de categorías y para cualquier objeto A de $\mathcal{B}$, el funtor inducido en las fibras, $T_A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{E}_A$ es una equivalencia de categorías.

iii) T es fiel y pleno y para cualquier objeto A de $\mathcal{B}$ y cualquier A-objeto η de $\mathcal{E}$, existen un A-objeto ξ de $\mathcal{D}$ y un A-isomorfismo $u : T(\xi) \to \eta$.

Si $\mathcal{E}$ es una $\mathcal{B}$-categoría y $b : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{B}$, al referirnos a un *b-morfismo* de $\mathcal{E}$ entendemos un morfismo $f : \alpha \to \beta$ tal que $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(f) = b$.

Si α es un A-objeto y β es un B-objeto de $\mathcal{E}$, usualmente denotaremos por $Hom_b(\alpha, \beta)$ al conjunto de todos los b-morfismos de α en β.

Definición 1.1.2 *Sea $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ una $\mathcal{B}$-categoría y $b : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{B}$. Un b-morfismo $f : \alpha \to \beta$ se dice* cocartesiano *si para cualquier otro B-objeto β' la aplicación $f^* : Hom_B(\beta, \beta') \longrightarrow Hom_b(\alpha, \beta')$, $g \mapsto gf$, es biyectiva. Esto es, si para cualquier otro b-morfismo $f' : \alpha \to \beta'$, de dominio α, existe un único B-morfismo $g : \beta \to \beta'$ tal que $gf = f'$.*

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dd, squiggly] & & \beta' \arrow[dd, squiggly] \\
& \beta \arrow[ur, dashed] \arrow[dd, squiggly] & \\
A \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "b"'] & & B \arrow[dl, equal] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Análogamente, f se dirá cartesiano si para cualquier otro A-objeto α' la aplicación $f_* : Hom_A(\alpha', \alpha) \to Hom_b(\alpha', \beta)$, $g \mapsto fg$, es biyectiva. Esto es, si para cualquier otro b-morfismo de codominio β, $f' : \alpha' \to \beta$, existe un único A-morfismo $g : \alpha' \to \alpha$ tal que $fg = f'$.

La noción de morfismo (co)cartesiano es esencial para la correspondiente de categoría (co)fibrada, que recordamos ahora.

Definición 1.1.3 *Una $\mathcal{B}$-categoría $\mathcal{E}$ se denomina* pre(co)fibrada, *o el funtor $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ se denomina una* pre(co)fibración, *si para cualquier morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$ y cualquier B-objeto β (A-objeto α), existe un b-morfismo (co)cartesiano de codominio β (dominio α), $f : \alpha \to \beta$.*

Una $\mathcal{B}$-categoría pre(co)fibrada $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ se dice (co)fibrada, *o $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ una* (co)fibración, *si la composición de morfismos (co)cartesianos es de nuevo (co)cartesiano.*

Una $\mathcal{B}$-categoría $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ se dice bifibrada cuando es fibrada y cofibrada.

Si $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ y $(\mathcal{D}, \mathcal{P}_{\mathcal{D}})$ son $\mathcal{B}$-categorías, $\mathcal{E} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$ denotará el producto cartesiano de $(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}, \mathcal{P}_{\mathcal{D}})$; ésta es obviamente una $\mathcal{B}$-categoría que es cofibrada si y sólo si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{D}$ lo son.

Cuando una $\mathcal{B}$-categoría $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ es cofibrada, entonces es posible seleccionar un *sistema de imágenes directas* de $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{B}$; esto es, para cada morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$, y cada A-objeto en $\mathcal{E}$, α, un b-morfismo cocartesiano de dominio α, $\Gamma_b(\alpha) : \alpha \to {}^b\alpha$. Estos morfismos cocartesianos $\Gamma_b(\alpha)$ son llamados los *morfismos de transporte* del sistema, y cada B-objeto ${}^b\alpha$ la *imagen directa* del A-objeto α por el morfismo $b : A \to B$. Siempre supondremos que los sistemas de imágenes directas son *normalizados*, en el sentido de que el morfismo de transporte sobre cualquier identidad es la correspondiente identidad en $\mathcal{E}$; esto es, para cualquier A-objeto α, ${}^{id_A}\alpha = \alpha$ y $\Gamma_{id_A}(\alpha) = id_\alpha$.

Ejemplo 1.1.4 Siendo $\mathcal{B}$ cualquier categoría, sea $Mor(\mathcal{B})$ la categoría cuyos objetos son los morfismos $A \to A'$ en $\mathcal{B}$, y cuyos morfismos son los cuadrados conmutativos en $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "b"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, "b'"] & B' \end{tikzcd}$$

Consideremos $dom : Mor(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$, el funtor dominio:

$$(A \longrightarrow A') \longmapsto A$$

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{b} B & & \\ \downarrow \qquad \downarrow & \longmapsto & (A \xrightarrow{b} B) \\ A' \xrightarrow{b'} B' & & \end{array}$$

Entonces dom es una cofibración si y sólo si, $\mathcal{B}$ admite cuadrados cocartesianos (pushouts). Para cada morfismo $b : A \to B$, un b-morfismo cocartesiano en $Mor(\mathcal{B})$ es simplemente un cuadrado cocartesiano.

Ejemplo 1.1.5 Todo isomorfismo es cartesiano y cocartesiano. Si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ son dos grupoides, y $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ es un funtor entre ellos, entonces $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ es una cofibración si y sólo si, para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$ y cada objeto $\alpha \in \mathcal{E}$ con $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(\alpha) = A$, existe un morfismo en $\mathcal{E}$, $f : \alpha \to \alpha'$, de dominio α, tal que $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(f) = b$. De manera que una cofibración entre grupoides es lo mismo que una fibración en el sentido de Brown [8]. Cualquier fibración de

Serre entre espacios induce una cofibración ($\sim$ fibración) entre los grupoides fundamentales correspondientes.

Si cada grupo se mira como un grupoide con un solo objeto, una cofibración entre grupos $p : G \to H$, es simplemente un epimorfismo de grupos, y un sistema de imágenes directas para un tal epimorfismo es simplemente una sección conjuntista $s : H \to G$ de p, es decir, tal que $ps = id_H$.

Un $\mathcal{B}$-funtor $T : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ se dice *cocartesiano* siempre que aplique morfismos cocartesianos de $\mathcal{E}$ en morfismos cocartesianos de $\mathcal{D}$. Tenemos así la 2-categoría $COCART/\mathcal{B}$, de $\mathcal{B}$-categorías cofibradas, $\mathcal{B}$-funtores cocartesianos y $\mathcal{B}$-transformaciones naturales entre éstos.

Proposición 1.1.6 *Sea $T : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ un $\mathcal{B}$-funtor cocartesiano entre $\mathcal{B}$-categorías cofibradas. Para que T sea una $\mathcal{B}$-equivalencia es necesario y suficiente que para cada objeto A de $\mathcal{B}$, el funtor inducido en las fibras $T_A : \mathcal{E}_A \to \mathcal{D}_A$ sea una equivalencia.*

La justificación de la terminología de cofibración viene sobre todo por lo que sigue.

1.1.2 Pseudodiagramas de categorías.

Consideremos $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ una cofibración. La selección de un sistema de imágenes directas $(\Gamma_b(\alpha) : \alpha \mapsto {}^b\alpha)$, determina de forma natural un sistema de datos consistente de categorías, funtores y equivalencias naturales de la forma siguiente:

- Cada objeto A de $\mathcal{B}$ define la categoría fibra sobre A, $\mathcal{E}_A$.
- Cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, define el funtor *imagen directa por b*,

$$ {}^b(-) : \mathcal{E}_A \longrightarrow \mathcal{E}_B $$

que asigna a cada A-morfismo $f : \alpha \to \alpha'$, el único morfismo en $\mathcal{E}_B$ ${}^bf : {}^b\alpha \to {}^b\alpha'$ determinado por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "\Gamma_b(\alpha)"] \arrow[d, "f"'] & {}^b\alpha \arrow[d, dashed, "{}^bf"] \\ \alpha' \arrow[r, "\Gamma_b(\alpha')"'] & {}^b\alpha' \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Notemos que ${}^{id_A}(-) = id_{\mathcal{E}_A}$.

- Cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ en $\mathcal{B}$, definen una equivalencia natural

$$\psi_{b,c} : {}^{c}({}^{b}(-)) \xrightarrow{\sim} {}^{cb}(-)$$

definida sobre cada A-objeto α por la conmutatividad del cuadrado:

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\Gamma"'] & {}^{cb}\alpha \arrow[d, "\psi"] \\ {}^{b}\alpha \arrow[r, "\Gamma"'] & {}^{c}({}^{b}\alpha) \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Siendo fácil de obtener que estas equivalencias son *coherentes*, en el sentido de que para cualesquiera tres morfismos componibles en $\mathcal{B}$, $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C \xrightarrow{d} D$, los diagramas

$$\begin{tikzcd} {}^{d}({}^{c}({}^{b}(-))) \arrow[r, "{}^{d}\psi"] \arrow[d, "\psi"'] & {}^{d}({}^{cb}(-)) \arrow[d, "\psi"] \\ {}^{dc}({}^{b}(-)) \arrow[r, "\psi"'] & {}^{dcb}(-) \end{tikzcd}$$

son conmutativos; y *normalizadas*, en el sentido de que para cualquier $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, $\psi_{id_A,b} = id = \psi_{b,id_B}$.

Resulta en definitiva que cada $\mathcal{B}$-categoría cofibrada $\mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}} \mathcal{B}$, define de forma natural un *pseudodiagrama de categorías pequeñas de tipo* $\mathcal{B}$, o en otras palabras, un *pseudofuntor* $\mathcal{B} \longrightarrow CAT$, en el sentido que precisamos a continuación:

Definición 1.1.7 *Dada una categoría $\mathcal{B}$, un pseudodiagrama o pseudofuntor*

$$(F, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow CAT$$

es un sistema de aplicaciones asignando:

i) A cada objeto A de $\mathcal{B}$, una categoría F_A (la categoría fibra sobre A).

ii) A cada morfismo $b : A \to B$ *en* $\mathcal{B}$, *un funtor* ${}^b(-) : F_A \to F_B$ *(el funtor* imágenes directas*).*

iii) A cada par de morfismos componibles en $\mathcal{B}$, $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$, *una equivalencia natural*

$$\psi_{b,c} : {}^c({}^b(-)) \xrightarrow{\sim} {}^{cb}(-).$$

Estos datos, deben satisfacer las condiciones de normalización: ${}^{id_A}(-) = id_{F_A}$ *y* $\psi_{id_A,b} = id = \psi_{b,id_B}$, *y las de coherencia: Para cada tres morfismos componibles* $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C \xrightarrow{d} D$, *y cada* $\alpha \in F_A$, *el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
{}^d({}^c({}^b\alpha)) \arrow[r, "{}^d\psi"] \arrow[d, "\psi"'] & {}^d({}^{cb}\alpha) \arrow[d, "\psi"] \\
{}^{dc}({}^b\alpha) \arrow[r, "\psi"'] & {}^{dcb}\alpha
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Por supuesto que un funtor o diagrama de categorías pequeñas de tipo $\mathcal{B}$ es un pseudofuntor en el cual ψ sólo consiste de identidades.

Según con las construcciones anteriores, cada cofibración $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$, con un sistema de imágenes directas seleccionado $\Gamma = (\Gamma_b(\alpha) : \alpha \to {}^b\alpha)$, determina un pseudodiagrama $(\mathcal{E}, \psi) : \mathcal{B} \to CAT$. Si suponemos ahora que $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ es un $\mathcal{B}$-funtor cocartesiano, entonces aplica fibras dentro de fibras y aplica morfismos de transporte de $\mathcal{E}$ en morfismos cocartesianos con las mismas proyecciones en $\mathcal{B}$ que los de $\mathcal{E}'$. Esto da, para cualesquiera sistemas de imágenes directas Γ y Γ' de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$, respectivamente, y cada morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$, una familia de B-isomorfismos naturales

$$T_b(\alpha) : T({}^b\alpha) \xrightarrow{\sim} {}^bT(\alpha), \qquad \alpha \in \mathcal{E}_A,$$

determinados por la conmutatividad de los triángulos

$$\begin{tikzcd}
T(\alpha) \arrow[rr, "T(\Gamma)"] \arrow[dr, "\Gamma'"'] & & T({}^b\alpha) \arrow[dl, "T_b(\alpha)"] \\
& {}^bT(\alpha) &
\end{tikzcd}$$

Estas equivalencias naturales $T_b : T(^b(-)) \xrightarrow{\sim} {}^bT(-)$, entre funtores de $\mathcal{E}_A$ a $\mathcal{D}_B$ para cada $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, satisfacen que $T_{id_A} = id_{T/\mathcal{E}_A}$, y la condición de compatibilidad que asegura que para cada par de morfismos componibles en $\mathcal{B}$, $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & T(^c(^b\alpha)) \arrow[rr, "T(\psi)"] \arrow[dl, "T_c"'] & & T(^{cb}\alpha) \arrow[dr, "T_{cb}"] & \\
{}^cT(^b\alpha) \arrow[drr, "{}^cT_b"'] & & & & {}^{cb}T(\alpha) \\
 & & {}^c(^bT(\alpha)) \arrow[urr, "\psi'"'] & &
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

es conmutativo.

Definición 1.1.8 *Por un morfismo de pseudodiagramas de categorías de tipo $\mathcal{B}$, $T : (F,\psi) \to (F',\psi')$, entendemos un sistema de funtores $T_A : F_A \to F'_A$, para cada objeto A de $\mathcal{B}$, y equivalencias naturales $T_b : T_B(^b(-)) \xrightarrow{\sim} {}^bT_A(-)$, para cada morfismo $b : A \to B$, de manera que $T_{id_A} = id_{T_A}$ y los diagramas* (1.3) *conmutan para cada par de morfismos componibles.*

Análogamente, si $\tau : T \to T'$ es una $\mathcal{B}$-transformación natural entre $\mathcal{B}$-funtores cocartesianos T y T', ésta induce un sistema de transformaciones naturales entre los correspondientes funtores fibra $\tau_A : T_A \to T'_A$, y para cada $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$ los diagramas de B-morfismos

$$\begin{tikzcd}
T_B(^b\alpha) \arrow[r, "T_b"] \arrow[d, "\tau"'] & {}^bT_A(\alpha) \arrow[d, "{}^b\tau"] \\
T'_B(^b\alpha) \arrow[r, "T'_b"'] & {}^bT'_A(\alpha)
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

resultan todos conmutativos.

Definición 1.1.9 *Si $T, T' : (F,\psi) \to (F',\psi')$ son dos morfismos de pseudodiagramas $(F,\psi), (F',\psi') : \mathcal{B} \to CAT$, una* modificación *de T a T' es un sistema de transformaciones naturales $\tau_A : T_A \to T'_A$, de manera que los correspondientes diagramas* (1.4) *son conmutativos.*

Como consecuencia de las construcciones anteriores, tenemos definido un 2-funtor

$$COCART/\mathcal{B} \longrightarrow PseudoDiag(\mathcal{B}, CAT) \tag{1.5}$$

cuyo rango es la 2-categoría de pseudofuntores, morfismos de pseudodiagramas y modificaciones entre ellos.

En la siguiente subsección observamos precisamente que (1.5) es una 2-equivalencia de 2-categorías, describiendo el camino inverso mediante colímites homotópicos de pseudodiagramas.

1.1.3 La construcción de Grothendieck.

Si $F = (F, \psi) : \mathcal{B} \to CAT$ es un pseudodiagrama de categorías pequeñas, podemos asociarle una $\mathcal{B}$-categoría cofibrada $F\int\mathcal{B}$, conocida como la construcción de Grothendieck o como el colímite homotópico de F (véase [48] o [25]), que está dotada canónicamente de un sistema de imágenes directas y cuyo pseudodiagrama asociado es isomorfo a F. Esta se define como sigue:

Los objetos de $F\int\mathcal{B}$ son pares (α, A), con $A \in Ob(\mathcal{B})$ y $\alpha \in Ob(F_A)$. Un morfismo en $F\int\mathcal{B}$ es un par $(f, b) : (\alpha, A) \to (\beta, B)$, consistente de un morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$ y un morfismo en F_B, $f : {}^b\alpha \to \beta$. La composición de morfismos en $F\int\mathcal{B}$ está dada por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\alpha, A) \arrow[r, "{(f,b)}"] \arrow[dr, "{(g^c f\psi_{b,c}^{-1}(\alpha), cb)}"'] & (\beta, B) \arrow[d, "{(g,c)}"] \\
& (\gamma, C)
\end{tikzcd}$$

de acuerdo con la composición en F_C,

$${}^{cb}\alpha \xrightarrow{\psi^{-1}} {}^c({}^b\alpha) \xrightarrow{{}^cf} {}^c\beta \xrightarrow{g} \gamma.$$

Existe un funtor proyección $F\int\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, $(f, b) \mapsto b$, y es inmediato observar que un b-morfismo en $F\int\mathcal{B}$, $(f, b) : (\alpha, A) \to (\beta, B)$ es cocartesiano si y sólo si $f : {}^b\alpha \to \beta$ es un isomorfismo en F_B. De esta forma vemos que $F\int\mathcal{B}$ es $\mathcal{B}$-cofibrada, estando definido canónicamente un sistema de imágenes directas por $(\Gamma_b(\alpha, A) = (id_{({}^b\alpha)}, b) : (\alpha, A) \to ({}^b\alpha, B))$.

Notemos que las categorías fibras de $F\int\mathcal{B}$ se identifican con las categorías de pseudodiagramas, $(F\int\mathcal{B})_A \cong F_A$, $(\alpha, A) \leftrightarrow \alpha$, y que entonces el pseudodiagrama asociado a $F\int\mathcal{B}$ es isomorfo al original F.

Procediendo de forma natural respecto a esta construcción, si $T : F \to F'$ es un morfismo de pseudodiagramas de tipo $\mathcal{B}$, $F, F' : \mathcal{B} \to CAT$, éste define un $\mathcal{B}$-funtor $T\int\mathcal{B} : F\int\mathcal{B} \to F'\int\mathcal{B}$ que en objetos está dado por $(T\int\mathcal{B})(\alpha, A) = (T_A(\alpha), A)$ y en morfismos por

$$(T\textstyle\int\mathcal{B})((\alpha, A) \xrightarrow{(f,b)} (\beta, B)) = (T_A(\alpha), A) \xrightarrow{(T_B(f)T_b^{-1}(\alpha),b)} (T_B(\beta), B)$$

de acuerdo con la composición en F'_B

$${}^bT_A(\alpha) \xrightarrow{T_b^{-1}} T_B({}^b\alpha) \xrightarrow{T_B(f)} T_B(\beta).$$

Este $\mathcal{B}$-funtor $T\int\mathcal{B}$ es de hecho cocartesiano, pues si $(f, b) : (\alpha, A) \to (\beta, B)$ es cocartesiano, $f : {}^b\alpha \to \beta$ es un isomorfismo en F_B, con lo que $T_B(f)$ lo es en F'_B y obtenemos finalmente que $T_B(f)T_b(\alpha)^{-1}$ es un isomorfismo.

Siguiendo las mismas observaciones, si $\tau : T \to T'$ es una modificación de morfismos entre pseudodiagramas $F, F' : \mathcal{B} \to CAT$, entonces se determina canónicamente una $\mathcal{B}$-transformación natural $\tau\int\mathcal{B} : T\int\mathcal{B} \to T'\int\mathcal{B}$ dada simplemente por $(\tau\int\mathcal{B})_{(\alpha,A)} = (\tau_A(\alpha), id_A) : (T_A(\alpha), A) \longrightarrow (T'_A(\alpha), A)$.

A partir de aquí, omitimos los detalles que finalmente establecen como la construcción

$$F \longmapsto F\textstyle\int\mathcal{B}$$

determina una 2-equivalencia de 2-categorías

$$PseudoDiag(\mathcal{B}, CAT) \xrightarrow{\sim} COCART/\mathcal{B},$$

quasi-inversa de la construcción recíproca comentada en la sección 1.1.2.

1.2 Colímites homotópicos de grupos categóricos.

1.2.1 Grupos categóricos.

Categorías monoidales y, en particular, grupos categóricos han sido tratados extensivamente en la literatura. Con carácter general nos referimos a [35],

[42], [31], [34] y [46] para los aspectos que les conciernen. Más que nada para fijar notaciones, nos limitamos aquí a recordar su concepto.

Una categoría monoidal $(\mathbb{G}, \otimes) = (\mathbb{G}, \otimes, a, I, l, r)$ consiste de una categoría $\mathbb{G}$, un funtor $\otimes : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, llamado el *producto tensor*, un objeto $I \in \mathbb{G}$, llamado el *objeto unidad*, e isomorfismos naturales

$$a = a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

$$l = l_X : I \otimes X \xrightarrow{\sim} X \quad , \quad r = r_X : X \otimes I \xrightarrow{\sim} X$$

llamados de *asociatividad, unidad izquierda* y *unidad derecha* respectivamente, tales que para cualesquiera objetos X, Y, Z, T de $\mathbb{G}$ los siguientes diagramas, llamados *pentágono de asociatividad* y *triángulo de unidad*, conmutan.

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) \arrow[rr, "1\otimes a"] \arrow[d, "a"'] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \arrow[d, "a"] \\
(X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[dr, "a"'] & & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T \arrow[dl, "a\otimes 1"] \\
& ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& X \otimes Y & \\
X \otimes (I \otimes Y) \arrow[ur, "1\otimes l_Y"] \arrow[rr, "a"] & & (X \otimes I) \otimes Y \arrow[ul, "r_X\otimes 1"']
\end{tikzcd}$$

Es bien conocido que la conmutatividad de tales pentágonos y triángulos implican un *teorema de coherencia* [35] [31], que expresa la conmutatividad de cualquier diagrama en $\mathbb{G}$ construido en base a instancias de l, r y a.

En una categoría monoidal $(\mathbb{G}, \otimes)$, un objeto X es llamado 2-*regular* si los funtores de traslación $Y \mapsto X \otimes Y$ e $Y \mapsto Y \otimes X$ son autoequivalencias en $\mathbb{G}$.

Definición 1.2.1 *Un grupo categórico es una categoría monoidal* $(\mathbb{G}, \otimes)$ *en la cual todo objeto es* 2*-regular y cuya categoría subyacente* $\mathbb{G}$ *es un grupoide, es decir todo morfismo es un isomorfismo.*

En el siguiente parágrafo describiremos algunos grupos categóricos interesantes. La siguiente caracterización es usualmente de gran utilidad.

Proposición 1.2.2 *Sea $(\mathbb{G},\otimes)$ un grupoide monoidal. Son equivalentes:*

i) $(\mathbb{G},\otimes)$ es un grupo categórico.

ii) Para cada objeto X, existe un objeto X^* y un morfismo $\delta_X : X^*\otimes X \xrightarrow{\sim} I$.

Una categoría monoidal es llamada *estricta* si los isomorfismos de asociatividad y unidad a, l y r, son todos identidades. Un grupo categórico $(\mathbb{G},\otimes)$ es llamado *estricto* si es estricto como categoría monoidal y los δ_X pueden ser elegidos identidades, o, equivalentemente si el conjunto de sus objetos tiene estructura de grupo, respecto a la ley de composición interna que el producto tensor $\otimes$ define. Grupos categóricos estrictos son esencialmente lo mismo que *módulos cruzados* en el sentido de Whitehead; este hecho lo comentaremos un poco en la sección 1.2.2, ejemplo 1.2.5.

Supongamos que $(\mathbb{G},\otimes)$ y $(\mathbb{H},\otimes)$ son grupos categóricos. Un *homomorfismo, funtor monoidal* o *$\otimes$-funtor*, $T : (\mathbb{G},\otimes) \longrightarrow (\mathbb{H},\otimes)$, consiste de un funtor $T : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$, junto con una familia de isomorfismos naturales

$$T_{X,Y} : T(X\otimes Y) \xrightarrow{\sim} T(X)\otimes T(Y)$$

que es compatible con los isomorfismos de asociatividad, en el sentido de que para cualesquiera objetos $X, Y, Z \in \mathbb{G}$, el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & T((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[rr, "T_{X\otimes Y,Z}"] & & T(X\otimes Y)\otimes T(Z) \arrow[dr, "T_{X,Y}\otimes 1"] & \\
T(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[ur, "T(a)"] \arrow[dr, "T_{X,Y\otimes Z}"'] & & & & (T(X)\otimes T(Y))\otimes T(Z) \\
 & T(X)\otimes T(Y\otimes Z) \arrow[rr, "1\otimes T_{Y,Z}"] & & T(X)\otimes(T(Y)\otimes T(Z)) \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

En tal caso, existe un único isomorfismo

$$T_0 : T(I) \xrightarrow{\sim} I$$

tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
T(X\otimes I) \arrow[r, "T(r)"] \arrow[d, "T_{X,I}"] & T(X) \\
T(X)\otimes T(I) \arrow[r, "1\otimes T_0"] & T(X)\otimes I \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T(I \otimes X) \arrow[r, "T(l)"] \arrow[d, "T_{I,X}"] & T(X) \\ T(I) \otimes T(X) \arrow[r, "T_0 \otimes 1"] & I \otimes T(X) \arrow[u, "l"] \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Un homomorfismo es llamado *estricto* si los isomorfismos $T_{X,Y}$ son identidades.

Supuesto ahora que $T' : (\mathbb{G}, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{H}, \otimes)$ es otro homomorfismo, una *homotopía*, o morfismo entre funtores monoidales, $h : T \to T'$ es una transformación natural (necesariamente una equivalencia al ser $\mathbb{H}$ un grupoide) $h : T \to T'$, $h = (h_X : T(X) \xrightarrow{\sim} T'(X))$, tal que para cualesquiera objetos X, Y de $\mathbb{G}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(X \otimes Y) \arrow[r, "T_{X,Y}"] \arrow[d, "h_{X\otimes Y}"] & T(X) \otimes T(Y) \arrow[d, "h_X \otimes h_Y"] \\ T'(X \otimes Y) \arrow[r, "T'_{X,Y}"] & T'(X) \otimes T'(Y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

La composición de homomorfismos entre grupos categóricos, así como las composiciones horizontal y vertical de homotopías entre ellos, están definidas de forma canónica. De esta forma se tiene una 2-categoría que denotaremos

$$GpCAT$$

y a la que nos referiremos como la 2-categoría de grupos categóricos. Usualmente utilizaremos también $GpCAT$ para referirnos a la categoría de grupos categóricos, esto es, olvidando homotopías.

1.2.2 Algunos ejemplos de grupos categóricos.

Ejemplo 1.2.3 *El grupo categórico $(Eq(\mathcal{C}), \otimes)$ de auto-equivalencias en una categoría.*

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Los objetos de la categoría $Eq(\mathcal{C})$ son las equivalencias $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y los morfismos son las equivalencias naturales $\tau : F \to G$. La composición en $Eq(\mathcal{C})$ viene dada por la composición vertical usual de transformaciones naturales: $(\sigma\tau)_X = \sigma_X \tau_X$. Evidentemente, $Eq(\mathcal{C})$ es un grupoide. La composición de funtores y la composición horizontal de transformaciones naturales definen un funtor $\otimes : Eq(\mathcal{C}) \times Eq(\mathcal{C}) \to Eq(\mathcal{C})$, es decir, dadas $\tau : F \to G$ y $\tau' : F' \to G'$ el producto $\tau' \otimes \tau : F'F \to G'G$ está definido por $(\tau' \otimes \tau)_X = \tau'_{GX} F'(\tau_X) = G'(\tau_X)\tau'_{FX}$. Obsérvese que $\otimes$ es un funtor como consecuencia de las conocidas leyes de Godement.

Entonces $(Eq(\mathcal{C}), \otimes) = (Eq(\mathcal{C}), \otimes, 1, 1_{\mathcal{C}}, 1, 1)$ es un grupo categórico en el que los isomorfismos de asociatividad y unidad son identidades.

Ejemplo 1.2.4 *El grupo categórico de Picard de un álgebra.*
Sea R un álgebra asociativa y unitaria sobre un anillo conmutativo k. Un $R \otimes_k R^0$-módulo P (o equivalentemente un R-bimódulo tal que para $a \in k$ y $x \in P$, $ax = xa$), es llamado *invertible* si como R-módulo izquierda es un progenerador y $R \cong End_R(P)$, lo que es equivalente a que se tengan $R \otimes_k R^0$-isomorfismos $P^* \otimes_R P \tilde{\to} R$, $P \otimes_R P^* \tilde{\to} R$, donde $P^* = Hom_R(P, R)$ es el bimódulo dual de P.

La categoría de los R-bimódulos invertibles $\mathcal{P}ic_k(R)$ es la que tiene a éstos como objetos y cuyos morfismos son los $R \otimes_k R^0$-isomorfismos entre ellos. De esta forma $\mathcal{P}ic_k(R)$ es un grupoide, que admite una estructura monoidal con producto tensor $\otimes = \otimes_R$, el usual de bimódulos sobre R con los también usuales isomorfismos de asociatividad $a : (P \otimes_R Q) \otimes_R T \cong P \otimes_R (Q \otimes_R T)$, $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$, y unidad $r : P \otimes_R R \cong P$, $x \otimes r \mapsto xr$, y $l : R \otimes_R P \cong P$, $r \otimes x \mapsto rx$.

El grupo categórico así obtenido $(\mathcal{P}ic_k(R), \otimes) = (\mathcal{P}ic_k(R), \otimes_R, a, R, l, r)$, es llamado el de Picard de la k-álgebra R. Notemos que su grupo de componentes conexas es $\mathrm{Pic}_k(R)$, el usual grupo de clases de isomorfía de $R \otimes_k R^0$-módulos invertibles. Si P es cualquier objeto de $\mathcal{P}ic_k(R)$, entonces se verifica que $Aut_{\mathcal{P}ic_k(R)}(P) \cong C(R)^*$, el grupo de unidades del centro de R.

Si consideramos ${}_R\mathfrak{M}$, la categoría de R-módulos izquierda, el grupo categórico $(Eq({}_R\mathfrak{M}), \otimes)$ de autoequivalencias en ${}_R\mathfrak{M}$ descrito en el ejemplo anterior, contiene como subgrupo categórico al de las autoequivalencias k-lineales, que denotamos por $(Eq_k({}_R\mathfrak{M}), \otimes)$. Es una simple aplicación de la teoría de Morita que el homomorfismo de grupos categóricos

$$(\mathcal{P}ic_k(R), \otimes) \longrightarrow (Eq_k({}_R\mathfrak{M}), \otimes)$$

definido por $P \mapsto P \otimes_R -$ es una equivalencia monoidal, con homomorfismo quasi-inverso dado por $F \mapsto F(R)$. Dicho en otras palabras, ambos grupos categóricos son homotópicamente equivalentes.

Ejemplo 1.2.5 *Módulos cruzados.*
Es bien conocido que grupos categóricos estrictos son esencialmente lo mismo que módulos cruzados en el sentido de Whitehead, [9]. Recordemos que un módulo cruzado es un sistema $\Phi = (H, \pi, \varphi, \rho)$ donde $\rho : H \to \pi$ es un homomorfismo de grupos y $\varphi : \pi \to Aut(H)$ es una acción, para los cuales se verifican las siguientes condiciones:

$$\rho({}^a h) = a\rho(h)a^{-1}; \qquad {}^{\rho(h)}h' = hh'h^{-1}.$$

Dado un módulo cruzado Φ, el correspondiente grupo categórico estricto $\mathbb{G}(\Phi)$ se puede describir de la siguiente forma: Los objetos son los elementos del grupo π; una flecha $h : a \to b$ es un elemento $h \in H$ con $a = \rho(h)b$. La composición es la multiplicación en H. El producto tensor viene definido por

$$(a \xrightarrow{h} b) \otimes (c \xrightarrow{h'} d) = (ac \xrightarrow{h^b h'} bd).$$

Y recíprocamente, si $(\mathbb{G}, \otimes) = (\mathbb{G}, \otimes, 1, I, 1, 1)$ es un grupo categórico estricto, éste da lugar a un módulo cruzado como sigue: π es el grupo de objetos de $\mathbb{G}$, H es el conjunto de flechas $u : X \to I$ sobre el objeto unidad, $\rho : H \to \pi$ es la aplicación dominio y la acción $\varphi : \pi \to Aut(H)$ es la conjugación

$${}^X(u : X \longrightarrow I) = (X \otimes u \otimes X^* \longrightarrow I);$$

las estructuras de grupo en H y π son las inducidas por el producto tensor en $\mathbb{G}$.

Ejemplo 1.2.6 *El grupo categórico* $(\Pi_2(X,*), \otimes)$ *de lazos de un espacio punteado.*
Denotemos por $\Pi_1(Y)$ el grupoide fundamental de un espacio topológico Y.

Si $(X,*)$ es un espacio topológico punteado con punto base $* \in X$, entonces $\Pi_2(X,*) = \Pi_1(\Omega(X,*))$, esto es, el grupoide fundamental del espacio de lazos $\Omega(X,*)$. Entonces, los objetos son las aplicaciones $\omega : I \to X$ tales que $\omega(0) = * = \omega(1)$, y los morfismos $[f] : \omega \to \omega'$ son las clases de homotopía relativa a lazos finales de homotopías $f : \omega \to \omega'$ relativas a puntos finales.

La composición de dos morfismos en $\Pi_2(X,*)$, $[f]:\omega\to\omega'$ y $[g]:\omega'\to\omega''$ esta definida por $[g][f]=[gf]$ donde $gf:I\times I\to X$ es la aplicación

$$(gf)(t,s)=\begin{cases} f(t,2s) & 0\le s\le 1/2\\ g(t,2s-1) & 1/2\le s\le 1.\end{cases}$$

Como el funtor Π_1 preserva productos, la aplicación

$$\mu:\Omega(X,*)\times\Omega(X,*)\to\Omega(X,*)$$

definida por

$$\mu(\omega,\omega')=\begin{cases} \omega(2t) & 0\le t\le 1/2\\ \omega'(2t-1) & 1/2\le t\le 1\end{cases}\tag{1.6}$$

induce un funtor $\otimes:\Pi_2(X,*)\times\Pi_2(X,*)\to\Pi_2(X,*)$ que viene dado en objetos por $\omega\otimes\omega'=\mu(\omega,\omega')$ y, en morfismos por $[f]\otimes[g]=[f\otimes g]$ donde

$$(f\otimes g)(t,s)=\begin{cases} f(2t,s) & 0\le t\le 1/2\\ g(2t-1,s) & 1/2\le t\le 1.\end{cases}$$

Existe un isomorfismo de asociatividad $a:(\omega\otimes\omega')\otimes\gamma\to\omega\otimes(\omega'\otimes\gamma)$ que está definido como la clase de homotopía de la aplicación $A:I\times I\to X$ dada por

$$A(u,v)=\begin{cases} \omega(\frac{4u}{v+1}) & 0\le u\le \frac{v+1}{4}\\ \omega'(4u-v-1) & \frac{v+1}{4}\le u\le\frac{v+2}{4}\\ \gamma(\frac{4u-2-v}{2-v}) & \frac{v+2}{4}\le u\le 1\end{cases}\tag{1.7}$$

y existe, un objeto unidad $*$, que es la aplicación constante de I a $*$, e isomorfismos de unidad

$$l=[L]:*\otimes\gamma\xrightarrow{\sim}\gamma\quad,\quad r=[R]:\gamma\otimes *\xrightarrow{\sim}\gamma$$

donde $L,R:I\times I\to X$ están definidos por

$$L(u,v)=\begin{cases} * & 0\le u\le\frac{1-v}{2}\\ \gamma(\frac{2u+v-1}{1+v}) & \frac{1-v}{2}\le u\le 1\end{cases}\tag{1.8}$$

$$R(u,v)=\begin{cases} \gamma(\frac{2u}{v+1}) & 0\le u\le\frac{v+1}{2}\\ * & \frac{v+1}{2}\le u\le 1\end{cases}$$

de manera que $(\Pi_2(X,*),\otimes)=(\Pi_2(X,*),\otimes,a,*,l,r)$ es un grupo categórico. Nótese que el grupo de componentes conexas de $\Pi_2(X,*)$ es $\pi_1(X,*)$ y el grupo de automorfismos en el objeto unidad es $\pi_2(X,*)$

1.2.3 Grupos categóricos cofibrados.

En esta subsección consideraremos dada una categoría pequeña $\mathcal{B}$. Intuitivamente, por un *grupo categórico cofibrado sobre* $\mathcal{B}$, o un $\mathcal{B}$-*grupo categórico*, queremos entender un grupo categórico interno en la 2-categoría $COCART/\mathcal{B}$, de $\mathcal{B}$-categorías cofibradas. En lo que sigue, nos dedicamos esencialmente a formalizar este concepto.

Si $\mathbb{G}$ es una $\mathcal{B}$-categoría cofibrada, con $\mathcal{P}_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathcal{B}$ el funtor proyección, una $\mathcal{B}$-estructura monoidal en $\mathbb{G}$ viene dada por un $\mathcal{B}$-funtor

$$- \otimes - : \mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathbb{G} \to \mathbb{G},$$

y en tal caso, la terna $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es llamada una $\mathcal{B}$-categoría tensorial.

Si $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es una $\mathcal{B}$-categoría tensorial, una *asociatividad* para $\mathbb{G}$ es una $\mathcal{B}$-transformación natural

$$a : - \otimes (- \otimes -) \xrightarrow{\sim} (- \otimes -) \otimes - \tag{1.9}$$

tal que para cualesquiera A-objetos X, Y, Z, T de $\mathbb{G}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) \arrow[rr, "1\otimes a"] \arrow[dl, "a"'] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \arrow[dr, "a"] & \\
(X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[drr, "a"'] & & & & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T \arrow[dll, "a\otimes 1"] \\
 & & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T & &
\end{tikzcd} \tag{1.10}$$

es conmutativo.

Si $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es una $\mathcal{B}$-categoría tensorial, una *unidad* para $\mathbb{G}$ es una terna (I, l, r) donde $I : \mathcal{B} \to \mathbb{G}$ es un $\mathcal{B}$-funtor y r y l son $\mathcal{B}$-transformaciones naturales

$$l : I\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(-) \otimes - \xrightarrow{\sim} id_{\mathbb{G}} \quad , \quad r : - \otimes I\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(-) \xrightarrow{\sim} id_{\mathbb{G}} \tag{1.11}$$

donde, si notamos $I_A = I(A)$ se verifica

$$r_{I_A} = l_{I_A} : I_A \otimes I_A \to I_A \tag{1.12}$$

Nótese que de la naturalidad de r y l se deduce que para cualquier A-objeto X de $\mathbb{G}$

$$r_{X\otimes I_A} = r_X \otimes 1_{I_A} \qquad\qquad l_{I_A\otimes X} = 1_{I_A} \otimes l_X$$

Si $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es una $\mathcal{B}$-categoría tensorial con una asociatividad a y una unidad (I, l, r), éstas se dicen *compatibles* si para cualesquiera A-objetos X, Y de $\mathbb{G}$, los triángulos

$$\begin{tikzcd} & X\otimes Y & \\ X\otimes(I_A\otimes Y) \arrow[ur, "1\otimes l_Y"] \arrow[rr, "a"] & & (X\otimes I_A)\otimes Y \arrow[ul, "r_X\otimes 1"'] \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

$$\begin{tikzcd} & X\otimes Y & \\ I_A\otimes(X\otimes Y) \arrow[ur, "l_{X\otimes Y}"] \arrow[rr, "a"] & & (I_A\otimes X)\otimes Y \arrow[ul, "l_X\otimes 1"'] \end{tikzcd} \tag{1.14}$$

$$\begin{tikzcd} & X\otimes Y & \\ X\otimes(Y\otimes I_A) \arrow[ur, "1\otimes r_Y"] \arrow[rr, "a"] & & (X\otimes Y)\otimes I_A \arrow[ul, "r_{X\otimes Y}"'] \end{tikzcd} \tag{1.15}$$

son conmutativos.

Definición 1.2.7 *Una* $\mathcal{B}$-categoría monoidal $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$ *es una* $\mathcal{B}$-*categoría tensorial* $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$*, junto con una asociatividad* a *y una unidad* (I, l, r) *que son compatibles en el sentido anterior.*

Definición 1.2.8 *Sea* $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$ *una* $\mathcal{B}$-*categoría monoidal, sea* A *un objeto de* $\mathcal{B}$ *y* $\mathbb{G}_A$ *la fibra sobre* A. *Un objeto* $X \in \mathbb{G}_A$ *es* 2-*regular si los funtores*

$$\begin{array}{rl} X\otimes - : \mathbb{G}_A \longrightarrow \mathbb{G}_A & \qquad - \otimes X : \mathbb{G}_A \longrightarrow \mathbb{G}_A \\ Y \longmapsto X\otimes Y & \qquad Y \longmapsto Y\otimes X \end{array}$$

son equivalencias de categorías.

Obsérvese que I_A es un objeto 2-regular para cada objeto A de $\mathcal{B}$.

Es interesante resaltar aquí que las condiciones que definen una categoría monoidal no son independientes, de hecho se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.2.9 *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$ una $\mathcal{B}$-categoría tensorial con una asociatividad a, un $\mathcal{B}$-funtor $I : \mathcal{B} \to \mathbb{G}$ y l, r $\mathcal{B}$-isomorfismos naturales como en* (1.11)*. Entonces, la categoría es monoidal si y sólo si se verifica la conmutatividad de* (1.13)*. Esto es, de* (1.13) *se deducen* (1.14), (1.15) *y* (1.12)*.*

Demostración: Vamos a comenzar probando la conmutatividad de (1.15); Consideremos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & X\otimes(Y\otimes(I_A\otimes T)) \arrow[rr, "1\otimes a"] \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "1\otimes(1\otimes l)"] \arrow[rr, phantom, "(I)"', shift right=6ex] & & X\otimes((Y\otimes I_A)\otimes T) \arrow[dl, "1\otimes(r\otimes 1)"'] \arrow[dr, "a"] & \\
(X\otimes Y)\otimes(I_A\otimes T) \arrow[drr, "1\otimes l"] \arrow[ddrr, "a"'] \arrow[rr, phantom, "(II)"] & & X\otimes(Y\otimes T) \arrow[d, "a"] \arrow[rr, phantom, "(III)"] & & (X\otimes(Y\otimes I_A))\otimes T \arrow[dll, "(1\otimes r)\otimes 1"'] \arrow[ddll, "a\otimes 1"] \\
 & \arrow[r, phantom, "(V)"] & (X\otimes Y)\otimes T \arrow[r, phantom, "(IV)"] & & \\
 & & ((X\otimes Y)\otimes I_A)\otimes T \arrow[u, "r\otimes 1"] & &
\end{tikzcd}
$$

donde el recinto externo es el pentágono de coherencia (1.10) para X, Y, I_A, T. Las regiones (I) y (V) son conmutativas por (1.13); y (II) y (III) por la naturalidad de a. Como todos los morfismos son isomorfismos concluimos que (IV) es conmutativo.

Tomamos ahora $T = I_A$ y obtenemos que (IV)=(1.15)$\otimes I_A$, y como I_A es 2-regular, entonces (1.15) es conmutativo.

De forma análoga probaríamos que (1.14) también lo es.

Ahora, por la naturalidad de r, el cuadrado

$$
\begin{tikzcd}
(I_A\otimes I_A)\otimes I_A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "r\otimes 1"'] & I_A\otimes I_A \arrow[d, "r"] \\
I_A\otimes I_A \arrow[r, "r"] & I_A
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo, de donde $r_{I_A\otimes I_A} = r_{I_A}\otimes 1_{I_A}$; pero tomando $X = Y = I_A$ en (1.13) y (1.15) obtenemos que

$$1\otimes l_{I_A} = (r_{I_A}\otimes 1_{I_A})a_{I_A,I_A,I_A} = r_{I_A\otimes I_A}a_{I_A,I_A,I_A} = 1\otimes r_{I_A}$$

de donde $l_{I_A} = r_{I_A} : I_A \to I_A \otimes I_A$. ■

Cuando $\mathcal{B} = *$ es la categoría trivial con un solo objeto y un solo morfismo, una $\mathcal{B}$-categoría monoidal es una categoría monoidal en el sentido usual. Si G es un grupo considerado como una categoría con un solo objeto y cuyos morfismos son los elementos de G, una G-categoría monoidal es exactamente una categoría monoidal establemente graduada sobre el grupo G en el sentido de Fröhlich-Wall [21]

Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) = (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$ una $\mathcal{B}$-categoría monoidal. Si A es un objeto de $\mathcal{B}$, un A-objeto X de $\mathbb{G}$ se dice *invertible* si es 2-regular. Un *inverso* para un objeto invertible consiste de un objeto X^* y de un isomorfismo

$$\delta_X : X \otimes X^* \xrightarrow{\sim} I_A \tag{1.16}$$

que existirá por ser $X \otimes -$ una autoequivalencia. Evidentemente, si (X', δ'_X) es otro inverso, existirá un único isomorfismo $\varphi : X^* \to X'$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd}
X \otimes X^* \arrow[dr, "\delta_X"] \arrow[d, "1\otimes\varphi"'] & \\
X \otimes X' \arrow[r, "\delta'_X"'] & I_A
\end{tikzcd}$$

resulta conmutativo.

Definición 1.2.10 *Por un* $\mathcal{B}$-grupo categórico *entendemos una* $\mathcal{B}$*-categoría monoidal* $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) = (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$ *en la cual todo objeto es invertible, es decir, 2-regular y así mismo todo* A*-morfismo es un* A*-isomorfismo. Esto es,* $\mathbb{G}_A$ *es un grupoide para cualquier objeto* A *de* $\mathcal{B}$

Si $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es un $\mathcal{B}$-grupo categórico, una vez elegido un sistema de inversos (X^*, δ_X) para cada A-objeto X de $\mathbb{G}$, resulta unívocamente definido un funtor en $\mathbb{G}_A$ para cada objeto A de $\mathcal{B}$ que hace que los isomorfismos (1.16) sean naturales. Este funtor hace corresponder a cada A-objeto X de $\mathbb{G}$, su inverso X^* y a cada A-morfismo $f : X \to Y$ en $\mathbb{G}$, el único A-morfismo

f^* que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \otimes X^* \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "f\otimes 1"'] & I_A \\ Y \otimes X^* \arrow[r, "1\otimes f^*"'] & Y \otimes Y^* \arrow[u, "\delta_Y"'] \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Por otra parte, se nos determinan también isomorfismos naturales

$$\gamma_X : X^* \otimes X \longrightarrow I_A$$

para cualquier A-objeto X de $\mathbb{G}$, con la condición de que los diagramas

$$\begin{tikzcd} & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[r, "a"] \arrow[dl, "1\otimes\gamma_X"'] & (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[dr, "\delta_X\otimes 1"] & \\ X \otimes I_A \arrow[drr, "r_X"'] & & & I_A \otimes X \arrow[dl, "l_X"] \\ & & X & \end{tikzcd}$$

sean conmutativos.

Es fácil aunque tedioso demostrar la siguiente

Proposición 1.2.11 *Si* $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) = (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$ *es un* $\mathcal{B}$*-grupo categórico, entonces para cualquier objeto* A *de* $\mathcal{B}$ *y para cualquier* A*-objeto* X *de* $\mathbb{G}$*, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[r, "a"] \arrow[dl, "1\otimes\gamma_{X^*}"'] & (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[dr, "\delta_{X^*}\otimes 1"] & \\ X^* \otimes I_A \arrow[drr, "r_{X^*}"'] & & & I_A \otimes X^* \arrow[dl, "l_{X^*}"] \\ & & X^* & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Se concluyen también A-isomorfismos canónicos

$$X \xrightarrow{\sim} (X^*)^* \qquad\qquad (X\otimes Y)^* \xrightarrow{\sim} Y^*\otimes X^*$$

para cualesquiera X, Y A-objetos de $\mathbb{G}$, que resultan naturales una vez realizada la elección de los $\mathcal{B}$-isomorfismos (1.16) que determinan el carácter funtorial de $X \mapsto X^*$.

Supongamos ahora que $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) = (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$ y $(\mathbb{H}, \mathcal{P}_{\mathbb{H}}, \otimes) = (\mathbb{H}, \mathcal{P}_{\mathbb{H}}, \otimes, a, I, l, r)$ son dos $\mathcal{B}$-grupos categóricos.

Definición 1.2.12 *Un* $\mathcal{B}$-homomorfismo $T : (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \to (\mathbb{H}, \mathcal{P}_{\mathbb{H}}, \otimes)$ *es un* $\mathcal{B}$*-funtor* $T : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ *junto con una* $\mathcal{B}$*-equivalencia natural*

$$T_{X,Y} : T(X\otimes Y) \xrightarrow{\sim} T(X)\otimes T(Y)$$

que es compatible con los isomorfismos de asociatividad, en el sentido de que para cualquier objeto A *de* $\mathcal{B}$ *y cualesquiera* A*-objetos* X, Y, Z *de* $\mathbb{G}$ *el diagrama en* $\mathbb{H}_A$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & T((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[r, "T_{X\otimes Y,Z}"] & T(X\otimes Y)\otimes T(Z) \arrow[dr, "T_{X,Y}\otimes 1"] & \\
T(X\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[ur, "T(a)"] \arrow[dr, "T_{X,Y\otimes Z}"'] & & & (T(X)\otimes T(Y))\otimes T(Z) \\
 & T(X)\otimes T(Y\otimes Z) \arrow[r, "1\otimes T_{Y,Z}"] & T(X)\otimes(T(Y)\otimes T(Z)) \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.17}$$

es conmutativo.

Proposición 1.2.13 *Si* $T : (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{H}, \mathcal{P}_{\mathbb{H}}, \otimes)$ *es un* $\mathcal{B}$*-homomorfismo, existe una única* $\mathcal{B}$*-equivalencia natural*

$$T_0 : TI \xrightarrow{\sim} I$$

tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
T(X\otimes I_A) \arrow[r, "T(r)"] \arrow[d, "T_{X,I_A}"] & T(X) \\
T(X)\otimes T(I_A) \arrow[r, "1\otimes T_0"] & T(X)\otimes I_A \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd} \tag{1.18}$$

$$
\begin{tikzcd}
T(I_A \otimes X) \arrow[r, "T(l)"] \arrow[d, "T_{I_A,X}"] & T(X) \\
T(I_A) \otimes T(X) \arrow[r, "T_0 \otimes 1"] & I_A \otimes T(X) \arrow[u, "l"']
\end{tikzcd}
\tag{1.19}
$$

conmutan (véase [42]), para cualquier objeto A de $\mathcal{B}$ y cualquier A-objeto X de $\mathbb{G}$.

Demostración: En efecto, lo siguiente prueba que si (1.18) es conmutativo para un cierto X, entonces (1.19) lo es para todo Y y recíprocamente.

Consideramos el diagrama (1.17) con $Y = I_A$ y $Z = Y$, y los recintos internos que se indican

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & T((X\otimes I_A)\otimes Y) \arrow[rrr, "T_{X\otimes I_A,Y}"] \arrow[dr, "T(r_X\otimes 1)"] & & & T(X\otimes I_A)\otimes T(Y) \arrow[ddll, "T(r_X)\otimes 1"'] \arrow[ddrr, "T_{X,I_A}\otimes 1"] & & \\
 & (II) & T(X\otimes Y) \arrow[d, "T_{X,Y}"] & (I) & (T(X)\otimes I_A)\otimes T(Y) \arrow[dll, "r_{T(X)}\otimes 1"] & (III) & \\
T(X\otimes(I_A\otimes Y)) \arrow[uur, "T(a)"] \arrow[urr, "T(1\otimes l_Y)"] \arrow[ddr, "T_{X,I_A\otimes Y}"'] & & T(X)\otimes T(Y) & (IV) & & (VI) & (T(X)\otimes T(I_A))\otimes T(Y) \arrow[ull, "(1\otimes T_0)\otimes 1"'] \\
 & (V) & & (VII) & T(X)\otimes(I_A\otimes T(Y)) \arrow[ull, "1\otimes l_{T(Y)}"] \arrow[uu, "a"] & & \\
 & T(X)\otimes T(I_A\otimes Y) \arrow[uur, "1\otimes T(l_Y)"] \arrow[rrr, "1\otimes T_{I_A,Y}"'] & & & T(X)\otimes(T(I_A)\otimes T(Y)) \arrow[u, "1\otimes(T_0\otimes 1)"] \arrow[uurr, "a"'] & &
\end{tikzcd}
$$

donde (III) se obtiene de (1.18) tensorizando con $T(Y)$; (VI) es conmutativo por la naturalidad de a; (II) y (IV) por (1.13); y (I) y (V) por la naturalidad de T. Además vemos que (VII) es justamente (1.19) tensorizado con $T(X)$.

Si tomamos T_0 como el único que hace conmutar (1.18) para $X = I_A$, resultará (1.19) conmutativo para todo Y y entonces (1.18) para todo X. ∎

Proposición 1.2.14 *Si* $T : (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{H}, \mathcal{P}_{\mathbb{H}}, \otimes)$ *es un* $\mathcal{B}$*-homomorfismo, existen isomorfismos únicos*

$$\lambda_X : T(X)^* \longrightarrow T(X^*)$$

de manera que los diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd}
 & T(X)\otimes T(X^*) & T(X\otimes X^*) \arrow[l, "T_{X,X^*}"'] \arrow[dr, "T(\delta_X)"] & \\
T(X)\otimes T(X)^* \arrow[ur, "1\otimes\lambda_X"] \arrow[drr, "\delta_{T(X)}"'] & & & T(I_A) \arrow[dl, "T_0"] \\
 & & I_A &
\end{tikzcd} \tag{1.20}$$

$$\begin{tikzcd}
 & T(X^*)\otimes T(X) & T(X^*\otimes X) \arrow[l, "T_{X^*,X}"'] \arrow[dr, "T(\gamma_X)"] & \\
T(X)^*\otimes T(X) \arrow[ur, "\lambda_X\otimes 1"] \arrow[drr, "\gamma_{T(X)}"'] & & & T(I_A) \arrow[dl, "T_0"] \\
 & & I_A &
\end{tikzcd} \tag{1.21}$$

son conmutativos.

En efecto, seleccionamos λ_X, para cada A-objeto X, de manera que (1.20) sea conmutativo y se comprueba fácilmente que (1.21) también lo es.

Si $T : (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{G}', \mathcal{P}_{\mathbb{G}'}, \otimes)$ y $T' : (\mathbb{G}', \mathcal{P}_{\mathbb{G}'}, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{G}'', \mathcal{P}_{\mathbb{G}''}, \otimes)$ son $\mathcal{B}$-homomorfismos entre $\mathcal{B}$-grupos categóricos, su compuesto $T'T$ es el $\mathcal{B}$-homomorfismo $T'' : (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{G}'', \mathcal{P}_{\mathbb{G}''}, \otimes)$ que se define por $T'' = T'T$ y $T''_{X,Y} : T'T(X) \otimes T'T(Y) \longrightarrow T'T(X \otimes Y)$ el morfismo definido por la composición

$$T'T(X) \otimes T'T(Y) \xrightarrow{T'_{T(X),T(Y)}} T'(T(X) \otimes T(Y)) \xrightarrow{T'(T_{X,Y})} T'T(X \otimes Y)$$

Definición 1.2.15 *Si* $T, T' : (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{H}, \mathcal{P}_{\mathbb{H}}, \otimes)$ *son dos* $\mathcal{B}$*-homomorfismos, una* $\mathcal{B}$-homotopía *(o* $\mathcal{B}$-morfismo*)* $h : T \to T'$ *es una* $\mathcal{B}$*-equivalencia natural* $h = (h_X : T(X) \to T'(X))$ *tal que para cualquier* $A \in \mathcal{B}$ *y* *para cualesquiera A-objetos X, Y de $\mathbb{G}$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} T(X \otimes Y) \arrow[r, "T_{X,Y}"] \arrow[d, "h_{X\otimes Y}"] & T(X) \otimes T(Y) \arrow[d, "h_X \otimes h_Y"] \\ T'(X \otimes Y) \arrow[r, "T'_{X,Y}"] & T'(X) \otimes T'(Y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Entonces, para cualquier categoría pequeña $\mathcal{B}$ tenemos una 2-categoría, $GpCAT/\mathcal{B}$, cuyos objetos son los $\mathcal{B}$-grupos categóricos, cuyos morfismos son los $\mathcal{B}$-homomorfismos y cuyas 2-flechas o deformaciones son las $\mathcal{B}$-homotopías.

Queremos concluir este parágrafo con la siguiente observación.

Proposición 1.2.16 *i) Si $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es cualquier $\mathcal{B}$-grupo categórico, entonces todo morfismo de $\mathbb{G}$ es cocartesiano.*

ii) El $\mathcal{B}$-funtor $T : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$, subyacente a cualquier $\mathcal{B}$-homomorfismo de $\mathcal{B}$-grupos categóricos $T : (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{H}, \mathcal{P}_{\mathbb{H}}, \otimes)$, es siempre cocartesiano.

Demostración: i) Supongamos que $u : X \to Y$ es un b-morfismo en $\mathbb{G}$ para $b : A \to B$ un cierto morfismo de $\mathcal{B}$. Considerando entonces $\Gamma : X \to {}^bX$ cualquier b-morfismo cocartesiano de dominio X, que existe al ser el funtor $\mathcal{P}_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathcal{B}$ una cofibración, tendrá que existir un B-morfismo $v : {}^bX \to Y$ tal que $v\Gamma = u$. Pero $v \in \mathbb{G}_B$, que es un grupoide, y, por tanto v es un isomorfismo. Todo isomorfismo es cocartesiano y así u lo es también al ser composición de cocartesianos.

ii) Es inmediato de i). ■

De acuerdo con la proposición anterior, concluimos con la existencia de un funtor de olvido

$$GpCAT/\mathcal{B} \longrightarrow COCART/\mathcal{B} \tag{1.22}$$

que prescinde de la estructura monoidal, esto es asigna a cada $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, la $\mathcal{B}$-categoría cofibrada $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}})$, a cada $\mathcal{B}$-homomorfismo T, el $\mathcal{B}$-funtor cocartesiano T, y a cada $\mathcal{B}$-homotopía $\tau : T \to T'$, la propia transformación natural τ.

1.2.4 (Pseudo)diagramas de grupos categóricos.

Seguimos considerando dada una categoría pequeña $\mathcal{B}$.

Analizamos en lo que sigue el efecto de la construcción (1.5) desarrollada en la sección 1.1.2 $COCART/\mathcal{B} \longrightarrow PseudoDiag(\mathcal{B}, CAT)$ cuando ésta se aplica a $\mathcal{B}$-grupos categóricos, es decir cuando se compone con el 2-funtor de olvido (1.22), $GpCAT/\mathcal{B} \longrightarrow COCART/\mathcal{B}$.

Supongamos que $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es un $\mathcal{B}$-grupo categórico. Una vez seleccionado un sistema de imágenes directas en $\mathbb{G}$, $(\Gamma_b(X) : X \to {}^bX)$ -recordemos que $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}$ es una cofibración- tendremos, de acuerdo con la construcción mostrada en 1.1.2, asociado a éste un pseudodiagrama de categorías de tipo $\mathcal{B}$, $(\mathbb{G}, \psi) : \mathcal{B} \to CAT$, que asocia a cada objeto A de $\mathcal{B}$ la categoría fibra $\mathbb{G}_A = \mathcal{P}_{\mathbb{G}}^{-1}(id_A)$, a cada morfismo $b : A \to B$ el funtor ${}^b(-) : \mathbb{G}_A \to \mathbb{G}_B$, y a cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$, la equivalencia natural $\psi_{b,c} : {}^c({}^b(-)) \xrightarrow{\sim} {}^{cb}(-)$.

Ahora, ocurre que cada categoría fibra $\mathbb{G}_A$, $A \in \mathcal{B}$, es un grupo categórico con estructura tensorial dada por la restricción del $\otimes$ de $\mathbb{G}$. Consideremos éste bajo la notación $(\mathbb{G}_A, \otimes)$.

Si $b : A \to B$ es cualquier morfismo en $\mathcal{B}$, y $X, Y \in \mathbb{G}_A$ son cualesquiera dos A-objetos de $\mathbb{G}$, existe un único B-isomorfismo

$$b_{X,Y} : {}^b(X \otimes Y) \xrightarrow{\sim} {}^bX \otimes {}^bY \tag{1.23}$$

determinado por la conmutatividad del triángulo en $\mathbb{G}$

$$\begin{tikzcd} & {}^bX \otimes {}^bY \\ X \otimes Y \arrow[ur, "\Gamma\otimes\Gamma"] \arrow[dr, "\Gamma"'] & \\ & {}^b(X \otimes Y) \arrow[uu, dashed, "b_{X,Y}"'] \end{tikzcd} \tag{1.24}$$

y se observa entonces que ${}^b(-) : (\mathbb{G}_A, \otimes) \to (\mathbb{G}_B, \otimes)$ es un homomorfismo de grupos categóricos.

Puesto que el sistema de imágenes directas Γ puede ser claramente escogido con la adicional condición de normalización

$$\Gamma_b(I_A) = I_b : I_A \to I_B \tag{1.25}$$

(ya que todo morfismo en $\mathbb{G}$ es cocartesiano). Resulta que el homomorfismo de grupos categóricos ${}^{b}(-)$ es estricto en unidades, en el sentido de que

$$ {}^{b}I_A = I_B \tag{1.26}$$

Además, las equivalencias naturales

$$\psi_{b,c} : {}^{c}({}^{b}(-)) \overset{\sim}{\to} {}^{cb}(-) \tag{1.27}$$

se reconocen ahora como homotopías entre homomorfismos de grupos categóricos, esto es para cualesquiera A-objetos X e Y, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{}^{c}({}^{b}(X\otimes Y)) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[d, "{}^{c}(b_{X,Y})"'] & & {}^{cb}(X\otimes Y) \arrow[d, "(cb)_{X,Y}"] \\
{}^{c}({}^{b}X\otimes {}^{b}Y) \arrow[dr, "c_{{}^{b}X,{}^{b}Y}"'] & & {}^{cb}X\otimes {}^{cb}Y \\
& {}^{c}({}^{b}X)\otimes {}^{c}({}^{b}Y) \arrow[ur, "\psi\otimes\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Y resulta en definitiva que cada $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ define de forma natural un *pseudodiagrama de grupos categóricos de tipo* $\mathcal{B}$, o con otras palabras, un *pseudofuntor* $\mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$, en el sentido que precisamos a continuación.

Definición 1.2.17 *Dada una categoría pequeña $\mathcal{B}$, un pseudodiagrama, o pseudofuntor, de grupos categóricos de tipo $\mathcal{B}$*

$$(\mathbb{F}^{\otimes}, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$$

es un sistema de aplicaciones asignando:

i) A cada objeto A de $\mathcal{B}$, un grupo categórico $(\mathbb{F}_A, \otimes) = (\mathbb{F}_A, \otimes, I_A, a, l, r)$.

ii) A cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, un homomorfismo

$${}^{b}(-) : (\mathbb{F}_A, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{F}_B, \otimes)$$

iii) A cada par de flechas componibles en $\mathcal{B}$, $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$, una homotopía

$$\psi_{b,c} : {}^{c}({}^{b}(-)) \overset{\sim}{\to} {}^{cb}(-).$$

Estos datos deben satisfacer las condiciones de normalización*:*

$$^{id_A}(-) = id_{(\mathbb{F}_A,\otimes)}, \quad {}^bI_A = I_B, \quad \psi_{id_A,b} = id_{^b(-)}, \quad \psi_{b,id_B} = id_{^b(-)}$$

para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, y coherencia*: Si $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C \xrightarrow{d} D$ son tres morfismos componibles en $\mathcal{B}$, y $\alpha \in \mathbb{F}_A$ es cualquier objeto, entonces el diagrama en $\mathbb{F}_D$*

$$\begin{tikzcd} {}^d({}^c({}^b\alpha)) \arrow[r, "{}^d\psi"] \arrow[d, "\psi"'] & {}^d({}^{cb}\alpha) \arrow[d, "\psi"] \\ {}^{dc}({}^b\alpha) \arrow[r, "\psi"'] & {}^{dcb}\alpha \end{tikzcd}$$

es conmutativo

Por un *diagrama* de grupos categóricos de tipo $\mathcal{B}$, entendemos un pseudofuntor $(\mathbb{F}^{\otimes}, \psi)$ en el cual ψ consiste de identidades, es decir un funtor $\mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$.

De acuerdo con las construcciones anteriores, cada grupo categórico cofibrado sobre $\mathcal{B}$, $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, con un sistema de imágenes directas seleccionado $(\Gamma_b(X) : X \to {}^bX)$, determina un pseudodiagrama de grupos categóricos de tipo $\mathcal{B}$, $(\mathbb{G}^{\otimes}, \psi) : \mathcal{B} \to GpCAT$. Si suponemos ahora que $T : (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{G}', \mathcal{P}_{\mathbb{G}'}, \otimes)$, es un $\mathcal{B}$-homomorfismo, entonces la restricción a cada fibra $T_A : (\mathbb{G}_A, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{G}'_A, \otimes)$, $A \in \mathcal{B}$, es claramente un homomorfismo de grupos categóricos. Además, como T es siempre cocartesiano, proposición 1.2.16, para cada morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$, se nos determina una familia de B-isomorfismos naturales

$$T_b(X) : T({}^bX) \longrightarrow {}^bT(X), \qquad X \in \mathbb{G}_A,$$

determinados por la conmutatividad de los triángulos en $\mathbb{G}'$

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[rr, "T(\Gamma)"] \arrow[dr, "\Gamma'"'] & & T({}^bX) \arrow[dl, "T_b(X)"] \\ & {}^bT(X) & \end{tikzcd}$$

que inmediatamente se reconocen definiendo una homotopía entre homomorfismos

$$T_b : T_B{}^b(-) \longrightarrow {}^b(-)T_A,$$

es decir, para cualesquiera B-objetos X e Y, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T({}^b(X\otimes Y)) \arrow[rr, "T_b"] \arrow[d, "T(b_{X,Y})"'] & & {}^bT(X\otimes Y) \arrow[d, "{}^b(T_{X,Y})"] \\
T({}^bX\otimes {}^bY) \arrow[d, "T_{{}^bX,{}^bY}"'] & & {}^b(T(X)\otimes T(Y)) \arrow[d, "b_{T(X),T(Y)}"] \\
T({}^bX)\otimes T({}^bY) \arrow[rr, "T_b\otimes T_b"'] & & {}^bT(X)\otimes {}^bT(Y)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

En definitiva, concluimos que cada $\mathcal{B}$-homomorfismo induce un *homomorfismo* de pseudodiagramas de grupos categóricos en el siguiente preciso sentido:

Definición 1.2.18 *Dada una categoría pequeña $\mathcal{B}$ y dados dos pseudodiagramas de grupos categóricos, $(\mathbb{F}^{\otimes},\psi),(\mathbb{F}'^{\otimes},\psi'):\mathcal{B}\longrightarrow GpCAT$. Por un homomorfismo $T:(\mathbb{F}^{\otimes},\psi)\longrightarrow(\mathbb{F}'^{\otimes},\psi')$ entendemos una familia de homomorfismos de grupos categóricos*

$$T_A:(\mathbb{F}_A,\otimes)\longrightarrow(\mathbb{F}'_A,\otimes),$$

uno para cada objeto $A\in\mathcal{B}$, y de homotopías entre homomorfismos

$$T_b: T_B{}^b(-)\longrightarrow {}^bT_A(-),$$

una para cada morfismo $b:A\to B$ en $\mathcal{B}$, de manera que se satisface la condición de normalización: $T_{id_A}=id_{T_A}$, y la de coherencia: para cualquier par de morfismos componibles en $\mathcal{B}$, $A\xrightarrow{b}B\xrightarrow{c}C$, el diagrama en $\mathbb{F}_C$

$$\begin{tikzcd}
T_C({}^c({}^b\alpha)) \arrow[rr, "T_C(\psi)"] \arrow[d, "T_c"'] & & T_C({}^{cb}\alpha) \arrow[d, "T_{cb}"] \\
{}^cT_B({}^b\alpha) \arrow[r, "{}^cT_b"'] & {}^c({}^bT_A(\alpha)) \arrow[r, "\psi'"'] & {}^{cb}T_A(\alpha)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para cualquier $\alpha\in\mathbb{F}_A$

Si $T : (\mathbb{F}^{\otimes},\psi) \longrightarrow (\mathbb{F}'^{\otimes},\psi)$ y $T' : (\mathbb{F}'^{\otimes},\psi) \longrightarrow (\mathbb{F}''^{\otimes},\psi)$ son dos homomorfismos de pseudodiagramas, su compuesto $T'T$ es el homomorfismo $T'' : (\mathbb{F}^{\otimes},\psi) \longrightarrow (\mathbb{F}''^{\otimes},\psi)$ definido de la siguiente forma: Para cada objeto A de $\mathcal{B}$, $T''_A : (\mathbb{F}_A,\otimes) \to (\mathbb{F}''_A,\otimes)$ es $T''_A = T'_A T_A$; y para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, la equivalencia natural $T''_b : T''_B({}^b(-)) \to {}^bT''_A(-)$ viene definida por la composición

$$T''_B({}^b(-)) = T'_B T_B({}^b(-)) \xrightarrow{T'_B(T_b)} T'_B({}^bT_A(-)) \xrightarrow{T'_b(T_A)} {}^bT'_A T_A(-).$$

Análogamente, si $\tau : T \to T'$ es una $\mathcal{B}$-homotopía, entre $\mathcal{B}$-homomorfismos de $\mathcal{B}$-grupos categóricos $T,T' : (\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes) \longrightarrow (\mathbb{G}',\mathcal{P}_{\mathbb{G}'},\otimes)$, ésta restringe a una familia de homotopías entre los homomorfismos inducidos en los grupos categóricos fibras $\tau_A : T_A \to T'_A$, verificándose que para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$ los diagramas de B-isomorfismos

$$\begin{tikzcd} T_B({}^b\alpha) \arrow[r, "T_b"] \arrow[d, "\tau_B"'] & {}^bT_A(\alpha) \arrow[d, "{}^b\tau_A"] \\ T'_B({}^b\alpha) \arrow[r, "T'_b"'] & {}^bT'_A(\alpha) \end{tikzcd} \tag{1.28}$$

resultan todos conmutativos.

Definición 1.2.19 *Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y consideremos dos homomorfismos $T,T' : (\mathbb{F}^{\otimes},\psi) \to (\mathbb{F}'^{\otimes},\psi)$ entre pseudodiagramas de grupos categóricos $(\mathbb{F}^{\otimes},\psi),(\mathbb{F}'^{\otimes},\psi) : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$. Una* modificación *de T a T' es un sistema de homotopías $\tau_A : T_A \to T'_A$, entre los homomorfismos de grupos categóricos $T_A, T'_A : (\mathbb{F}_A,\otimes) \to (\mathbb{F}'_A,\otimes)$, una para cada objeto A de $\mathcal{B}$, tal que los correspondientes diagramas* (1.28) *resultan conmutativos.*

Los pseudodiagramas de grupos categóricos de tipo $\mathcal{B}$, junto con los homomorfismos y modificaciones entre ellos, forman una 2-categoría que denotaremos

$$PseudoDiag(\mathcal{B}, GpCAT).$$

Las construcciones indicadas en esta subsección muestran la existencia de un 2-funtor

$$GpCAT/\mathcal{B} \longrightarrow PseudoDiag(\mathcal{B}, GpCAT) \tag{1.29}$$

que, en la siguiente, se mostrará como una equivalencia de 2-categorías, siendo el camino inverso descrito precisamente como un cálculo de colímites homotópicos.

Si $(\mathbb{G}^{\otimes}, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$ es un pseudodiagrama de grupos categóricos de tipo $\mathcal{B}$ y $F : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ es un funtor, por composición con $\mathbb{G}^{\otimes}$, se define un pseudodiagrama de grupos categóricos de tipo $\mathcal{B}'$, $F^*\mathbb{G}^{\otimes} : \mathcal{B}' \to GpCAT$. Este queda entonces definido por las siguientes asignaciones: para cada objeto A' en $\mathcal{B}'$, el grupo categórico $(\mathbb{G}_{F(A')}, \otimes)$; para cada $b' : A' \to B'$ en $\mathcal{B}'$, el homomorfismo de grupos categóricos ${}^{F(b')}(-) : (\mathbb{G}_{F(A')}, \otimes) \to (\mathbb{G}_{F(B')}, \otimes)$; y por último, para cada par de flechas componibles en $\mathcal{B}'$, $A' \xrightarrow{b'} B' \xrightarrow{c'} C'$, la homotopía $\psi_{F(b'),F(c')} : {}^{F(c')}({}^{F(b')}(-)) \longrightarrow {}^{F(c'b')}(-)$. Así definido, claramente cumple las condiciones de coherencia y normalización.

Si $\tau : F \to F'$ es una transformación natural entre dos funtores dados, $F, F' : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, ésta induce un homomorfismo entre los pseudodiagramas inducidos $\tau_* : F^*\mathbb{G}^{\otimes} \to F'^*\mathbb{G}^{\otimes}$ de la siguiente forma. Para cada objeto A' de $\mathcal{B}'$, $\tau_{A'} : F(A') \to F'(A')$ es un morfismo en $\mathcal{B}$ y por tanto se obtiene un homomorfismo de grupos categóricos ${}^{\tau_{A'}}(-) : \mathbb{G}_{F(A')} \to \mathbb{G}_{F'(A')}$. Para cualquier morfismo $b' : A' \to B'$ en $\mathcal{B}'$, la naturalidad de τ proporciona el diagrama conmutativo en $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} F(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"] \arrow[d, "F(b')"'] & F'(A') \arrow[d, "F'(b')"] \\ F(B') \arrow[r, "\tau_{B'}"'] & F'(B') \end{tikzcd}$$

con lo que se obtienen equivalencias naturales

$${}^{\tau_{B'}}({}^{F(b')}(-)) \xrightarrow{\psi_{\tau_{B'},F(b')}} {}^{\tau_{B'}F(b')}(-) = {}^{F'(b')\tau_{A'}}(-) \xrightarrow{\psi^{-1}_{F'(b'),\tau_{A'}}} {}^{F'(b')}({}^{\tau_{A'}}(-))$$

Por tanto τ_* asocia a cada A' de $\mathcal{B}'$, el homomorfismo ${}^{\tau_{A'}}(-)$ y a cada morfismo $b' : A' \to B'$ en $\mathcal{B}'$ la equivalencia natural $\psi^{-1}_{F'(b'),\tau_{A'}}\psi_{\tau_{B'},F(b')}$, y se comprueba fácilmente que cumple las condiciones de coherencia y normalización.

Claramente, si $\tau = 1_F : F \to F$, entonces $\tau_* = id_{F^*\mathbb{G}^{\otimes}}$. Además, si $\tau : F \to F'$ y $\sigma : F' \to F''$ son dos transformaciones naturales entre funtores $F, F', F'' : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, las homotopías $\psi_{\tau_{A'},\sigma_{A'}} : {}^{\sigma_{A'}}({}^{\tau_{A'}}(-)) \to {}^{\sigma_{A'}\tau_{A'}}(-)$

proporcionan una modificación entre $\sigma_*\tau_*$ y $(\sigma\tau)_*$ que convierte a estos homomorfismos de pseudodiagramas en equivalentes.

Como consecuencia inmediata de las anteriores observaciones, si se tienen dos funtores equivalentes $F, F' : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, los pseudodiagramas de tipo $\mathcal{B}'$, $F^*\mathbb{G}^{\otimes}$ y $F'^*\mathbb{G}^{\otimes}$ son equivalentes.

1.2.5 La construcción de Grothendieck.

Si $\mathbb{F}^{\otimes} = (\mathbb{F}^{\otimes}, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$ es un pseudodiagrama de grupos categóricos, al componer con el obvio funtor de olvido (de la estructura monoidal) $GpCAT \to CAT$, tenemos un pseudodiagrama de categorías pequeñas subyacente, $\mathbb{F} = (\mathbb{F}, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow CAT$, al cual podemos aplicar la integración de Grothendieck, como en la sección 1.1.3 obteniendo la $\mathcal{B}$-categoría cofibrada $\mathbb{F}\!\int\!\mathcal{B}$. Lo que observamos ahora es simplemente que esta $\mathcal{B}$-categoría es realmente un $\mathcal{B}$-grupo categórico en el sentido de la definición 1.2.10.

En efecto, $\mathbb{F}\!\int\!\mathcal{B}$ tiene una $\mathcal{B}$-estructura tensorial

$$-\tilde{\otimes}- : \mathbb{F}\!\int\!\mathcal{B} \times_{\mathcal{B}} \mathbb{F}\!\int\!\mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{F}\!\int\!\mathcal{B} \tag{1.30}$$

definida en objetos por

$$(X, A)\tilde{\otimes}(X', A) = (X \otimes X', A)$$

donde $X \otimes X'$ es el producto tensor de X y X' en el grupo categórico $(\mathbb{F}_A, \otimes)$; y en morfismos por

$$((X, A) \xrightarrow{(f,b)} (Y, B))\tilde{\otimes}((X', A) \xrightarrow{(f',b)} (Y', B)) = (X \otimes X', A) \xrightarrow{(f\tilde{\otimes}f',b)} (Y \otimes Y', B)$$

donde $f\tilde{\otimes}f' : {}^b(X \otimes X') \to Y \otimes Y'$ es el morfismo en $\mathbb{F}_B$ dado por la composición

$${}^b(X \otimes X') \xrightarrow{\sim} {}^bX \otimes {}^bX' \xrightarrow{f\otimes f'} Y \otimes Y',$$

siendo ${}^b(X \otimes X') \xrightarrow{\sim} {}^bX \otimes {}^bX'$ el isomorfismo canónico del pseudodiagrama (${}^b(-) : \mathbb{F}_A \to \mathbb{F}_B$ es un homomorfismo) y $f \otimes f'$ el producto tensor de f y f' en el grupo categórico $\mathbb{F}_B$.

El funtor unidad

$$I : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{F}\!\int\!\mathcal{B} \tag{1.31}$$

está simplemente dado por $I(A) = (I_A, A)$, donde I_A es el objeto unidad del grupo categórico $\mathbb{F}_A$, y para cada morfismo $b : A \to B$ de $\mathcal{B}$ es

$$I(b) = (id_{I_B}, b) : (I_A, A) \to (I_B, B)$$

(recordemos que ${}^bI_A = I_B$, (1.26)).

Los $\mathcal{B}$-isomorfismos de asociatividad y unidad vienen dados por los correspondientes de los grupos categóricos fibras, es decir

$$a_{(X,A),(Y,A),(Z,A)} = (a_{X,Y,Z}, id_A) \tag{1.32}$$

$$l_{(X,A)} = (l_X, id_A) \ \text{ y } \ r_{(X,A)} = (r_X, id_A). \tag{1.33}$$

Definición 1.2.20 *Si* $\mathbb{F}^{\otimes} = (\mathbb{F}^{\otimes}, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$ *es un pseudodiagrama de grupos categóricos, definimos su* construcción de Grothendieck, $\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$ *como el grupo categórico cofibrado sobre* $\mathcal{B}$ *arriba descrito. Esto es,* $\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$ *es la categoría de Grothendieck* $\mathbb{F}\int\mathcal{B}$ *con la* $\mathcal{B}$*-estructura de grupo categórico definida por* (1.30), (1.31), (1.32) *y* (1.33).

La construcción $\mathbb{F}^{\otimes} \longmapsto \mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$ es funtorial. Si $T : \mathbb{F}^{\otimes} \longrightarrow \mathbb{G}^{\otimes}$ es un homomorfismo de pseudodiagramas de grupos categóricos de tipo $\mathcal{B}$, éste define un $\mathcal{B}$-homomorfismo de $\mathcal{B}$-grupos categóricos $T\int\mathcal{B} : \mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{G}^{\otimes}\int\mathcal{B}$, donde para cada par de A-objetos, (X, A), (Y, A), el isomorfismo canónico

$$(T\textstyle\int\mathcal{B})((X, A)\tilde{\otimes}(Y, A)) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} (T\int\mathcal{B})(X, A)\tilde{\otimes}(T\int\mathcal{B})(Y, A)$$

es el definido por el par

$$((T_A)_{X,Y}, id_A) : (T_A(X \otimes Y), A) \longrightarrow (T_A(X) \otimes T_A(Y), A),$$

donde $(T_A)_{X,Y} : T_A(X \otimes Y) \stackrel{\sim}{\to} T_A(X) \otimes T_A(Y)$ es el isomorfismo canónico del homomorfismo de grupos categóricos $T_A : (\mathbb{F}_A, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{G}_A, \otimes)$.

Análogamente, si $\tau : T \to T'$ es una modificación de homomorfismos entre pseudodiagramas de grupos categóricos $\mathbb{F}^{\otimes}, \mathbb{G}^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$, $T, T' : \mathbb{F}^{\otimes} \longrightarrow \mathbb{G}^{\otimes}$, ésta determina canónicamente una $\mathcal{B}$-homotopía entre los $\mathcal{B}$-homomorfismos de $\mathcal{B}$-grupos categóricos inducidos, $\tau\int\mathcal{B} : T\int\mathcal{B} \longrightarrow T'\int\mathcal{B}$ dada simplemente por

$$(\tau\textstyle\int\mathcal{B})_{(X,A)} = (\tau_X, id_A) : (T_A(X), A) \longrightarrow (T'_A(X), A).$$

Desde aquí, es un simple ejercicio rutinario establecer que:

Teorema 1.2.21 *La construcción* $\mathbb{F}^{\otimes} \longmapsto \mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$ *define un* 2*-funtor*

$$-\textstyle\int\mathcal{B} : PseudoDiag(\mathcal{B}, GpCAT) \longrightarrow GpCAT/\mathcal{B},$$

que es una 2*-equivalencia, con cuasi-inverso el* 2*-funtor definido en* (1.29).

1.3 Algunos ejemplos de grupos categóricos cofibrados.

1.3.1 Módulos.

Módulos sobre categorías pequeñas surgen de forma natural al estudiar la cohomología singular de los espacios clasificantes de estas categorías, [41], [40], [3]. Si $\mathcal{B}$ es una categoría pequeña, un $\mathcal{B}$-módulo izquierda es un funtor $M : \mathcal{B} \to Ab$, de $\mathcal{B}$ a la categoría de grupos abelianos, es decir un diagrama de grupos abelianos con el tipo de la categoría $\mathcal{B}$. Entonces M asocia a cada objeto $A \in \mathcal{B}$ un grupo abeliano $M_A = M(A)$ y a cada morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$, un homomorfismo ${}^{b}(-) : M_A \to M_B$, $x \mapsto {}^{b}x$, de manera que se tienen las identidades

$${}^{b}(x+y) = {}^{b}x + {}^{b}y, \qquad {}^{1}x = x, \qquad {}^{c}({}^{b}x) = {}^{cb}x$$

cuando tengan sentido.

Ahora, cada grupo abeliano A puede ser visto como un grupo categórico estricto con un solo objeto, siendo los elementos de A sus morfismos, y donde tanto la composición como el producto tensor están dados por la suma en A. De esta forma, si $M : \mathcal{B} \to Ab$ es un $\mathcal{B}$-módulo, éste es también un cierto diagrama de grupos categóricos.

De acuerdo con la construcción de Grothendieck descrita en la sección 1.2.5, cada $\mathcal{B}$-módulo M, define un $\mathcal{B}$-grupo categórico estricto, que llamaremos el *producto semidirecto*, y representaremos por

$$(M \rtimes \mathcal{B}, pr, \otimes) = (M \rtimes \mathcal{B}, pr, \otimes, id, I, id, id)$$

que resulta descrito de la siguiente forma:

La categoría $M \rtimes \mathcal{B}$ tiene los mismos objetos que $\mathcal{B}$, y un morfismo en $M \rtimes \mathcal{B}$ es un par $(x, b) : A \to B$, donde $b : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{B}$ y

$x \in M_B$. La composición está definida por

$$(y, c)(x, b) = (y + {}^c x, cb)$$

y el funtor proyección es $pr(x, b) = b$. El producto tensor viene dado por

$$(x, b) \otimes (y, b) = (x + y, b)$$

y el $\mathcal{B}$-funtor unidad $I : \mathcal{B} \to M \rtimes \mathcal{B}$ es $I_b = (0, b)$ para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$.

Si G es un grupo, y lo miramos como una categoría (grupoide) con un solo objeto, entonces un módulo sobre la categoría G, M, es un G-módulo en el sentido usual. El G-grupo categórico $M \rtimes G$ es claramente el usual grupo producto semidirecto de M por G, visto como una categoría con un solo objeto.

1.3.2 Los grupos categóricos graduados de Picard.

Sea G un grupo actuando por automorfismos sobre un anillo conmutativo S.

Denotemos por $(\mathcal{P}ic(S), \otimes) = (\mathcal{P}ic_S(S), \otimes)$, al grupo categórico de los S-módulos invertibles (véase ejemplo 1.2.4). Esto es, $\mathcal{P}ic(S)$ tiene como objetos los S-módulos proyectivos finitamente generados de rango constante uno y sus correspondientes S-isomorfismos como morfismos, estando dada su estructura monoidal por el usual producto tensor de S-módulos.

Ahora, para cada $\sigma \in G$ y cada S-módulo M denotemos por ${}^\sigma M$ el S-módulo que es igual a M como grupo abeliano pero con S-acción dada por

$$s \cdot x = \sigma^{-1}(s)x, \quad s \in S, \quad x \in M.$$

De esta forma, cada $\sigma \in G$ proporciona una auto-equivalencia

$${}^\sigma(-) : \mathcal{P}ic(S) \to \mathcal{P}ic(S)$$

$$(P \xrightarrow{f} Q) \longmapsto ({}^\sigma P \xrightarrow{{}^\sigma f = f} {}^\sigma Q),$$

teniéndose identificaciones ${}^\sigma({}^\tau(-)) = {}^{\sigma\tau}(-)$ y ${}^1(-) = id$; así como isomorfismos canónicos ${}^\sigma(P \otimes_S Q) \cong {}^\sigma P \otimes_S {}^\sigma Q$, $x \otimes y \mapsto x \otimes y$.

Entonces, si consideramos el grupo G como una categoría (grupoide) con un solo objeto y con G como el conjunto de sus morfismos, tenemos un diagrama

$$\mathcal{P}ic(S)^{\otimes} : G \longrightarrow GpCAT$$

que asigna $(\mathcal{P}ic(S), \otimes)$ al único objeto de G, y a cada $\sigma \in G$, el homomorfismo ${}^{\sigma}(-) : (\mathcal{P}ic(S), \otimes) \to (\mathcal{P}ic(S), \otimes)$. De acuerdo con la construcción de Grothendieck (sección 1.2.5), concluimos con un grupo categórico cofibrado sobre G, es decir un grupo categórico G-graduado en la terminología de Fröhlich y Wall [21],

$$\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\textstyle\int G = (\mathcal{P}ic(S)\!\int G, \mathcal{P}, \otimes_S, a, S, l, r)$$

cuyos objetos son los S-módulos invertibles, es decir, aquellos S-módulos proyectivos y finitamente generados con rango constante uno. Una flecha $P \to Q$ es un par (f, σ) donde $\sigma \in G$ y $f : P \to {}^{\sigma}Q$ es un isomorfismo de S-módulos. La composición está definida por $(g, \tau)(f, \sigma) = (gf, \sigma\tau)$, y el funtor proyección por $\mathcal{P}(f, \sigma) = \sigma$. El G-producto tensor viene dado por el producto tensor de módulos sobre S

$$(P \xrightarrow{(f,\sigma)} Q) \otimes_S (P' \xrightarrow{(f',\sigma)} Q') = (P \otimes_S P' \xrightarrow{(f \otimes_S f', \sigma)} Q \otimes_S Q')$$

y el G-funtor unidad $S : G \longrightarrow \mathcal{P}ic(S)\!\int G$ se define por $S_1 = S$ y para cualquier $\sigma \in G$ $S_{\sigma} = (\sigma^{-1}, \sigma) : S \to S$, donde $\sigma^{-1} : {}^{\sigma}S \to S$ es el S-isomorfismo definido por σ^{-1}. Los isomorfismos de asociatividad y unidad son los usuales para el producto tensor de módulos.

$$(P \otimes_S Q) \otimes_S T \cong P \otimes_S (Q \otimes_S T), \qquad P \otimes_S S \cong P \cong S \otimes_S P.$$

Resaltemos que la categoría fibra (sobre el único objeto $1 \in G$) es el grupo categórico de los S-módulos invertibles $(\mathcal{P}ic(S), \otimes)$.

1.3.3 El grupo categórico cofibrado de Whitehead.

Sea $\Pi_1(Y, Z)$ el grupoide fundamental de un espacio topológico Y en un conjunto de puntos base $Z \subseteq Y$, es decir, el subgrupoide pleno del grupoide fundamental de Y, $\Pi_1(Y)$, cuyos objetos son los puntos $y \in Z$; y notemos por

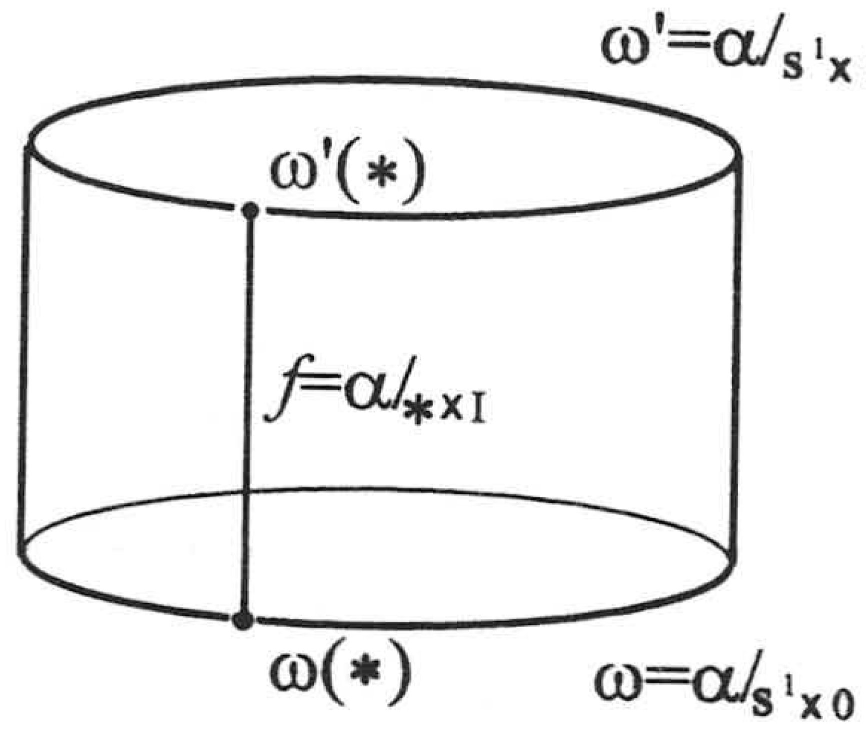
$S^1 = I/\partial I$, $\partial I = \{0,1\}$, a la esfera 1-dimensional basada en $* = \bar{0} = \bar{1}$. Sea X un espacio topológico, $B \subseteq A \subseteq X$ dos subespacios y $S \subseteq B$ un conjunto de puntos (base). Consideramos el espacio

$$(X,B)^{(S^1,*)} = \{\omega : S^1 \to X/ \quad \omega(*) \in B\} \subseteq X^{S^1}$$

con la topología inducida, el subespacio $(A,S)^{(S^1,*)} \subseteq (X,B)^{(S^1,*)}$ y el grupoide de clases de funciones relativo, [8],

$$W(X,A,B,S) = \Pi_1((X,B)^{(S^1,*)}, (A,S)^{(S^1,*)}).$$

Entonces, $W(X,A,B,S)$ es un grupoide cuyos objetos son aquellos lazos en A basados en puntos de S, y cuyas flechas son clases de equivalencia de aplicaciones del cilindro a X, $\alpha : S^1 \times I \to X$, que llevan $S^1 \times \partial I$ en A, $* \times I$ en B y $* \times \partial I$ en S.



Dos de tales aplicaciones $\alpha, \beta : S^1 \times I \to X$ son equivalentes si son homotópicas por una homotopía $h : S^1 \times I \times I \to X$, que lleva $* \times I^2$ en B y tal que $h/_{S^1 \times 0 \times I} = \alpha/_{S^1 \times 0} = \beta/_{S^1 \times 0}$ y $h/_{S^1 \times 1 \times I} = \alpha/_{S^1 \times 1} = \beta/_{S^1 \times 1}$. El dominio y codominio de un morfismo $[\alpha]$ son sus restricciones a $S^1 \times 0$ y $S^1 \times 1$ respectivamente, y la composición es la composición vertical usual de homotopías.

Ahora bien, existe una cofibración ($\sim$ fibración) de grupoides

$$\mathcal{P} : W(X,A,B,S) \longrightarrow \Pi_1(B,S)$$

inducida por la aplicación de *evaluación en* $*$, $(X,B)^{(S^1,*)} \longrightarrow B$, $\omega \mapsto \omega(*)$; y así $W(X,A,B,S)$ es un grupoide cofibrado sobre el grupoide fundamental $\Pi_1(B,S)$. Además, la estructura de cogrupo de S^1 induce un $\Pi_1(B,S)$-producto tensor

$$W(X,A,B,S) \times_{\Pi_1(B,S)} W(X,A,B,S) \xrightarrow{\otimes} W(X,A,B,S)$$

dado en objetos por la concatenación de lazos, y en morfismos por la composición horizontal de homotopías; y existe un $\Pi_1(B,S)$-funtor unidad

$$I : \Pi_1(B,S) \longrightarrow W(X,A,B,S)$$

inducido por la aplicación $I : B \to (X,B)^{(S^1,*)}$, que lleva cada punto $x \in B$ al lazo constante basado en x, $I_x(t) = x$, $0 \leq t \leq 1$.

De esta forma, hemos descrito la estructura de un $\Pi_1(B,S)$-grupo categórico

$$(W(X,A,B,S), \mathcal{P}, \otimes) = (W(X,A,B,S), \mathcal{P}, \otimes, a, I, l, r)$$

para el cual los isomorfismos a, l y r están definidos como las clases de equivalencia de las homotopías estándar respectivas que prueban la asociatividad y unidad de la composición de lazos, $a : \omega \otimes (\omega' \otimes \omega'') \to (\omega \otimes \omega') \otimes \omega''$, $r : \omega \otimes I_x \to \omega$ y $l : I_x \otimes \omega \to \omega$. En [47] aparecen fórmulas explícitas. Obsérvese que $W(X,A,B,S)$ es entonces un $\Pi_1(B,S)$-grupo categórico puesto que para cualquier lazo $\omega : (S^1,*) \to (A,S)$, existe la curva inversa ω^{-1}, es decir, $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$, y un $\omega(*)$-morfismo en $W(X,A,B,S)$, $\omega \otimes \omega^{-1} \xrightarrow{\sim} I_{\omega(*)}$.

Llamamos a $(W(X,A,B,S), \mathcal{P}, \otimes)$ el *grupo categórico cofibrado de Whitehead* de (X,A,B,S).

Nota 1 Para un CW-complejo X con k-esqueleto X^k, $k > 0$, y cada punto $x_0 \in X^0$, el grupo categórico $W(X,X^1,X^1,X^0)_{x_0}$ fibra de $W(X,X^1,X^1,X^0)$ sobre x_0 es equivalente al grupo categórico estricto definido por el módulo cruzado de Whitehead $\pi_2(X,X^1,x_0) \to \pi_1(X^1,x_0)$ [52], de acuerdo con la equivalencia conocida entre la categoría de módulos cruzados y la categoría de grupos categóricos estrictos [9, 31].

Nota 2 Un *bigrupoide* es una bicategoría en el sentido de Bénabou [6], tal que las 2-celdas son estrictamente invertibles y las 1-celdas son invertibles salvo isomorfismos de coherencia [26]. La categoría de bigrupoides es equivalente a la categoría de grupos categóricos cofibrados sobre grupoides (no sabemos si esta equivalencia aparece en la literatura), y el bigrupoide correspondiente a $W(X,X,X,X)$ es justamente el bigrupoide de homotopía de un espacio topológico X, $\Pi(X)$, como se define en [26].

Nota 3 En [38] se define el *2-grupoide de Whitehead* de un espacio topológico X relativo a subespacios $S \subseteq A \subseteq X$. La categoría de 2-

grupoides es equivalente a la categoría de grupos categóricos estrictos cofibrados sobre grupoides, y el grupo categórico estricto que corresponde al 2-grupoide de Moerdijk es equivalente a nuestro $W(X, A, A, S)$, cuando $\pi_2(A, *) = 0 = \pi_1(X, A, *)$ para cualquier punto $* \in S$.

Capítulo 2

Torsores categóricos.

2.0 Introducción.

La teoría de objetos principales y homogéneos relativos a la acción de un grupo, y particularmente la parte concerniente a su clasificación, es de gran importancia y consustancial en muchos aspectos de la Geometría, el Álgebra y la Topología. Cuando tal grupo es el de automorfismos (isometrías, homeomorfismos,...) en un objeto dado, los correspondientes objetos principales y homogéneos son precisamente aquellos que localmente resultan con la misma forma del objeto dado y, usualmente, pueden ser descritos mediante torcimientos (twistings) o deformaciones de éste. Por este motivo, Grothendieck [24] se refiere a ellos como *Torsores*; aunque en la literatura también son usuales las terminologías de *fibrados principales* (principal bundles) y *productos cruzados* (crossed products).

Con el simple principio de actuación de que en un contexto categórico *identidades ecuacionales* entre objetos han de ser interpretadas en términos de *isomorfismos coherentes*, dedicamos este Capítulo 2 de la memoria a desarrollar los formalismos de una teoría de torsores en CAT, es decir de torsores de categorías pequeñas. Aquí, el papel clásico del grupo de automorfismos en un objeto, es jugado por el grupo categórico de autoequivalencias en una categoría $(Eq(\mathcal{C}), \otimes)$, (c.f. ejemplo 1.2.3), y una representación de un grupo categórico, es decir un homomorfismo $(\mathbb{G}, \otimes) \to (Eq(\mathcal{C}), \otimes)$, es lo equivalente a una acción (categórica) de $(\mathbb{G}, \otimes)$ en $\mathcal{C}$, establecida en términos de un funtor $ac : \mathbb{G} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, junto con isomorfismos naturales ${}^{(X \otimes Y)}\beta \simeq {}^{X}({}^{Y}\beta)$, ${}^{I}\beta \simeq \beta$, satisfaciendo ciertas condiciones de coherencia.

El capítulo consta de dos secciones. En la primera concentramos los aspectos teóricos concernientes a la teoría de $\mathcal{B}$-torsores sobre un $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, para $\mathcal{B}$ una categoría base arbitraria. Éstos son categorías pequeñas cofibradas sobre $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$, tales que para cada objeto $A \in \mathcal{B}$ la categoría fibra $\mathcal{E}_A$ es equivalente a la subyacente de la correspondiente al $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G}_A$, vía una $\mathcal{B}$-acción dada de $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ sobre $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$. El conjunto de $\mathcal{B}$-torsores sobre $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, junto con los $\mathcal{B}$-funtores equivariantes y las correspondientes $\mathcal{B}$-homotopías equivariantes entre ellos, conforman un 2-grupoide, $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$, que es estudiado en la primera sección.

En la segunda sección hemos incluido varios ejemplos con los que pretendemos tanto ilustrar como justificar y sustentar la oportunidad y el interés de estudiar el concepto de torsor categórico, tal como se ha realizado previamente. Así, mostramos como la teoría de *extensiones lineales* de Baues, [3], que concierne a cada categoría pequeña $\mathcal{B}$ y cada $\mathcal{B}$-módulo, y particularmente entonces la de extensiones singulares de un grupo G por un G-módulo, es un caso especial de nuestra teoría de torsores categóricos. En un segundo ejemplo, atendemos al grupo de Brauer-Goldman $Br(S/R)$, relativo a una extensión Galoisiana de anillos conmutativos S/R, y mostramos como cada uno de sus elementos puede ser interpretado como un torsor categórico. En un tercer ejemplo mostramos un camino natural por el cual torsores categóricos, relativos a la acción de grupos categóricos cofibrados de Whitehead, surgen desde la topología, asociados a pares de espacios.

2.1 Acciones categóricas.

2.1.1 Acciones de grupos categóricos.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $(\mathbb{G}, \otimes)$ un grupo categórico. Una $\mathbb{G}$-acción sobre $\mathcal{C}$, véase [30], consiste de un funtor $\mathbb{G} \times \mathcal{C} \xrightarrow{ac} \mathcal{C}$, $(X, \beta) \mapsto {}^X\beta$, junto con isomorfismos naturales

$$\phi = \phi_{X,Y,\beta} : {}^{(X \otimes Y)}\beta \xrightarrow{\sim} {}^X({}^Y\beta)$$

$$\phi_0 = \phi_{0,\beta} : {}^I\beta \xrightarrow{\sim} \beta$$

tales que, para cualesquiera objetos $X, Y, Z \in \mathbb{G}$ y $\beta \in \mathcal{C}$, el siguiente pentágono

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & {}^{(X\otimes(Y\otimes Z))}\beta \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dl, "{}^{a}\beta"'] & & {}^{X}({}^{(Y\otimes Z)}\beta) \arrow[dr, "{}^{X}\phi"] & \\
{}^{((X\otimes Y)\otimes Z))}\beta \arrow[drr, "\phi"'] & & & & {}^{X}({}^{Y}({}^{Z}\beta)) \\
 & & {}^{(X\otimes Y)}({}^{Z}\beta) \arrow[urr, "\phi"'] & &
\end{tikzcd}$$

así como el triángulo

$$\begin{tikzcd}
{}^{(X\otimes I)}\beta \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "{}^{r}\beta"'] & & {}^{X}({}^{I}\beta) \arrow[dl, "{}^{X}\phi_0"] \\
 & {}^{X}\beta &
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Cuando existe una $\mathbb{G}$-acción sobre $\mathcal{C}$, cada objeto $X \in \mathbb{G}$ define una equivalencia $\phi(X) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, $\phi(X)(\beta \xrightarrow{f} \gamma) = {}^{X}f : {}^{X}\beta \to {}^{X}\gamma$, y cada morfismo $u : X \to Y$ en el grupo categórico $\mathbb{G}$ define una equivalencia natural $\phi(u) : \phi(X) \to \phi(Y)$, $\phi(u)_\beta = {}^{u}\beta : {}^{X}\beta \to {}^{Y}\beta$. Entonces existe un homomorfismo de grupos categóricos

$$\phi : \mathbb{G} \to Eq(\mathcal{C})$$

donde $\phi_{X,Y} : \phi(X \otimes Y) \to \phi(X)\phi(Y)$ está dado por $(\phi_{X,Y})_\beta = \phi_{X,Y,\beta}$. Recíprocamente, dada cualquier categoría $\mathcal{C}$ y cualquier homomorfismo ϕ de $\mathbb{G}$ en $Eq(\mathcal{C})$, podemos definir una $\mathbb{G}$-acción sobre $\mathcal{C}$ tomando ${}^{X}\beta = \phi(X)(\beta)$ para cada par de objetos $X \in \mathbb{G}$ y $\beta \in \mathcal{C}$, y ${}^{u}f : {}^{X}\beta \to {}^{Y}\gamma$ como la diagonal del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
{}^{X}\beta \arrow[r, "\phi(X)(f)"] \arrow[d, "\phi(u)_\beta"'] \arrow[dr, "{}^{u}f"] & {}^{X}\gamma \arrow[d, "\phi(u)_\gamma"] \\
{}^{Y}\beta \arrow[r, "\phi(Y)(f)"'] & {}^{Y}\gamma
\end{tikzcd}$$

para cada par de morfismos $u : X \to Y$ en $\mathbb{G}$ y $f : \beta \to \gamma$ en $\mathcal{C}$; y, para $X, Y \in Ob(\mathbb{G})$ y $\beta \in Ob(\mathcal{C})$, tomamos $\phi_{X,Y,\beta} = (\phi_{X,Y})_\beta : {}^{X\otimes Y}\beta \to {}^X({}^Y\beta)$ y $\phi_{0,\beta} = (\phi_0)_\beta : {}^I\beta \to \beta$ donde $\phi_0 : \phi(I) \to 1_{\mathcal{C}}$ es el isomorfismo natural definido por el homomorfismo ϕ.

Entonces, dar una $\mathbb{G}$-acción sobre una categoría $\mathcal{C}$ es equivalente a dar un homomorfismo de $\mathbb{G}$ en el grupo categórico de auto-equivalencias en $\mathcal{C}$

Ejemplo 2.1.1 Sea G un grupo y S cualquier conjunto y consideremos $dis(G)$ y $dis(S)$ las categorías discretas con solo identidades que definen G y S. La multiplicación en G determina un grupo categórico estricto $(dis(G), \cdot) = (dis(G), \cdot, 1, e, 1, 1)$ y una $dis(G)$-acción sobre $dis(S)$ viene determinada por la acción del grupo G sobre S en el sentido usual.

Ejemplo 2.1.2 Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y $(Eq(\mathcal{C}), \otimes)$ el grupo categórico de autoequivalencias de $\mathcal{C}$ descrito en el ejemplo 1.2.3. Entonces $(Eq(\mathcal{C}), \otimes)$ actúa sobre $\mathcal{C}$ por la acción correspondiente al homomorfismo identidad $1_{Eq(\mathcal{C})} : Eq(\mathcal{C}) \to Eq(\mathcal{C})$, es decir ${}^F A = F(A)$.

Ejemplo 2.1.3 Si $\mathcal{C}$ es cualquier categoría y $(\mathbb{G}, \otimes)$ cualquier grupo categórico, podemos definir una $\mathbb{G}$-acción sobre $\mathcal{C}$ tomando ${}^X\beta = \beta$ para cada par de objetos $X \in \mathbb{G}$ y $\beta \in \mathcal{C}$, y ${}^u f = f$ para cualesquiera morfismos u en $\mathbb{G}$ y f en $\mathcal{C}$; los isomorfismos naturales ϕ y ϕ_0 son identidades. Esta $\mathbb{G}$-acción corresponde al homomorfismo cero $\mathbb{G} \to Eq(\mathcal{C})$ y se denomina la $\mathbb{G}$-acción trivial.

Ejemplo 2.1.4 Sea $(\mathbb{G}, \otimes)$ cualquier grupo categórico. Podemos hacer actuar a $\mathbb{G}$ sobre sí mismo mediante el producto tensor a la izquierda, esto es, la $\mathbb{G}$-acción sobre $\mathbb{G}$ en la que ${}^X Y = X \otimes Y$, ${}^u v = u \otimes v$, y los isomorfismos ϕ y ϕ_0 están dados por los isomorfismos de asociatividad y unidad a la izquierda. Esta acción se denomina la acción regular a la izquierda sobre $\mathbb{G}$.

Ejemplo 2.1.5 *La $\Pi_2(Y)$-acción sobre el grupoide $\Pi_1(Y^X)$.*
Si X e Y son espacios con punto base $*$, entonces $\Pi_1(Y^X)$ es el grupoide definido en [8], esto es, los objetos son las aplicaciones $f : X \to Y$ de espacios con punto base y los morfismos $[\Gamma] : f \to g$ son clases de homotopía relativa a aplicaciones finales de homotopías $\Gamma : f \to g$ relativas al punto base.

Supongamos que X tiene un punto base no degenerado $*$. Entonces, para cualquier aplicación $f : X \to Y$ y cada lazo $\omega \in \Omega(Y)$, podemos elegir una aplicación $\Gamma_{f,\omega} : I \times X \to Y$ verificando que $\Gamma_{f,\omega}(0,x) = f(x)$ y $\Gamma_{f,\omega}(t,*) = \omega(t)$. Definimos ${}^{\omega}f : X \to Y$ por $({}^{\omega}f)(x) = \Gamma_{f,\omega}(1,x)$; entonces $\Gamma_{f,\omega}$ es una homotopía libre de f a ${}^{\omega}f$ a lo largo de ω.

La correspondencia $(\omega, f) \mapsto {}^{\omega}f$ se extiende a un funtor en los grupoides fundamentales $\Pi_2(Y) \times \Pi_1(Y^X) \to \Pi_1(Y^X)$ que está definido en morfismos de la siguiente forma: Sea $h : I \times I \to Y$ una homotopía de ω a ω' $rel\{0,1\}$ y sea la aplicación $\Gamma : I \times X \to Y$ una homotopía de f a f' $rel\{*\}$; como el par $(I \times X, I \times \{*\} \cup \{0,1\} \times X) = (I, \{0,1\}) \times (X, *)$ tiene la propiedad de extensión homotópica, la aplicación H del subespacio $\{0\} \times I \times X \cup I \times \{0,1\} \times X \cup I \times I \times \{*\}$ en Y definida por $H(0,s,x) = \Gamma(s,x)$, $H(t,s,*) = h(t,s)$, $H(t,0,x) = \Gamma_{f,\omega}(t,x)$ y $H(t,1,x) = \Gamma_{f',\omega'}(t,x)$, tiene una extensión $H : I \times I \times X \to Y$. Sea ${}^{h}\Delta(s,x) = H(1,s,x)$; entonces ${}^{h}\Delta : I \times X \to Y$ es una homotopía de ${}^{\omega}f$ a ${}^{\omega'}f'$ $rel\{*\}$ cuya clase de homotopía depende sólo de las clases de homotopía $[h]$ y $[\Gamma]$ de h y Γ respectivamente. Entonces definimos ${}^{[h]}[\Gamma] = [{}^{h}\Delta] : {}^{\omega}f \longrightarrow {}^{\omega'}f'$.

Para definir el isomorfismo natural $\phi : {}^{(\omega\otimes\omega')}f \to {}^{\omega}({}^{\omega'}f)$ para cada par de lazos $\omega, \omega' \in \Omega(Y)$ y cada aplicación $f : X \to Y$, consideremos la aplicación $H : \{0\} \times I \times X \cup I \times \{0,1\} \times X \cup I \times I \times \{*\} \to Y$ definida por $H(0,s,x) = f(x)$, $H(t,0,x) = \Gamma_{f,\omega\otimes\omega'}(t,x)$, $H(t,1,x) = \begin{cases} \Gamma_{f,\omega'}(2t,x) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \Gamma_{{}^{\omega'}f,\omega}(2t-1,x) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$ y $H(t,s,*) = \omega(t)$. Esta aplicación tiene una extensión $H : I \times I \times X \to Y$. Sea $\varphi(s,x) = H(1,s,x)$; entonces $\varphi : I \times X \to Y$ es una homotopía de ${}^{(\omega\otimes\omega')}f$ a ${}^{\omega}({}^{\omega'}f)$ $rel\{*\}$ y tomamos $\phi = [\varphi] : {}^{(\omega\otimes\omega')}f \to {}^{\omega}({}^{\omega'}f)$.

Finalmente, para cualquier $f : X \to Y$, la propiedad de extensión homotópica garantiza la existencia de una aplicación $H : I \times I \times X \to Y$ tal que $H(0,s,x) = f(x)$, $H(t,0,x) = \Gamma_{f,*}(t,x)$, $H(t,1,x) = f(x)$ y $H(t,s,*) = *$; esto se usa para definir el isomorfismo natural $\phi_0 : {}^{*}f \to f$ como la clase de homotopía de la aplicación $\varphi_0(s,x) = H(1,s,x)$.

Observemos que la $\Pi_2(Y)$-acción sobre $\Pi_1(Y^X)$ induce, en las componentes conexas, la acción estándar del grupo $\pi_1(Y)$ en el conjunto $[X,Y]$ de clases de homotopía de aplicaciones de X a Y.

Ejemplo 2.1.6 *La $\Pi_2(X,*)$-acción sobre el grupoide $\Pi_2(X,A,*)$.*

Dado un subespacio $A \subseteq X$ y un punto base $* \in A$ definimos el espacio $\Omega(X,A,*) = \{\gamma \in X^I/\gamma(0) = *, \gamma(1) \in A\} \subseteq X^I$ con la topología inducida y sea $\Pi_2(X,A,*) = \Pi_1(\Omega(X,A,*))$ el grupoide fundamental de $\Omega(X,A,*)$. Entonces los objetos son aquellas curvas en X con origen $*$ y rango contenido en A, y los morfismos $[\Gamma] : \gamma \to \gamma'$ son clases de homotopía relativa a curvas finales de homotopías $\Gamma : I \times I \to X$ de γ en γ' tales que $\Gamma(0,s) = *$ y $\Gamma(1,s) \in A$.

La aplicación $\mu : \Omega(X,*) \times \Omega(X,A,*) \to \Omega(X,A,*)$ definida como en (1.6), induce un funtor entre los correspondientes grupoides fundamentales

$$\otimes : \Pi_2(X,*) \times \Pi_2(X,A,*) \longrightarrow \Pi_2(X,A,*)$$

que está dado en objetos por $(\omega,\gamma) \mapsto \omega \otimes \gamma$, la curva producto de ω y γ, y en morfismos por $[f] \otimes [g] = [f \otimes g]$ donde

$$(f \otimes g)(t,s) = \begin{cases} f(2t,s) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1,s) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Los isomorfismos $\phi : (\omega \otimes \omega') \otimes \gamma \to \omega \otimes (\omega' \otimes \gamma)$ y $\phi_0 : * \otimes \gamma \to \gamma$ están definidos como las clases de homotopía de las aplicaciones $A : I \times I \to X$ y $L : I \times I \to X$ dadas en (1.7) y (1.8).

Sea $(\mathbb{G},\otimes)$ un grupo categórico y supongamos que $\mathbb{G}$ actúa sobre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Un funtor $\mathbb{G}$-*equivariante* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de un funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y una familia de isomorfismos naturales

$$T_{X,\beta} : T({}^X\beta) \longrightarrow {}^XT(\beta)$$

tales que para cualesquiera objetos $X, Y \in \mathbb{G}$ y $\beta \in \mathcal{C}$ los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
& T({}^{(X\otimes Y)}\beta) \arrow[rr, "T_{X\otimes Y,\beta}"] \arrow[dl, "T(\phi)"'] & & {}^{(X\otimes Y)}T(\beta) \arrow[dr, "\phi'"] & \\
T({}^X({}^Y\beta)) \arrow[drr, "T_{X,{}^Y\beta}"'] & & & & {}^X({}^Y(T(\beta))) \\
& & {}^X(T({}^Y\beta)) \arrow[urr, "{}^X T_{Y,\beta}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T({}^I\beta) \arrow[rr, "T_{I,\beta}"] \arrow[dr, "T(\phi_0)"'] & & {}^I T(\beta) \arrow[dl, "\phi'_0"] \\
& T(\beta) &
\end{tikzcd}$$

2.1.2 Acciones de grupos categóricos cofibrados.

Supongamos ahora que $\mathcal{B}$ es una categoría, $(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)=(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes,a,I,l,r)$, un $\mathcal{B}$-grupo categórico y $(\mathcal{E},\mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ una $\mathcal{B}$-categoría.

Definición 2.1.7 *Una* $\mathcal{B}$-acción de $(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)$ sobre $\mathcal{E}$ *consiste en un* $\mathcal{B}$-*funtor* $\mathbb{G}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{E}\xrightarrow{ac}\mathcal{E}$, $(X,\xi)\mapsto {}^X\xi$, *junto con* $\mathcal{B}$-*isomorfismos naturales*

$$\phi=(\phi_{X,Y,\xi}:{}^{X\otimes Y}\xi\xrightarrow{\sim}{}^X({}^Y\xi)),\qquad \phi_0=(\phi_{0,\xi}:{}^{I_{\mathcal{P}(\xi)}}\xi\xrightarrow{\sim}\xi) \tag{2.1}$$

tales que para cualquier objeto A *de* $\mathcal{B}$, A-*objetos* X,Y *de* $\mathbb{G}$ *y* A-*objeto* ξ *de*

$\mathcal{E}$, *los diagramas (en la categoría fibra* $\mathcal{E}_A$*)*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & {}^{(X\otimes(Y\otimes Z))}\xi \arrow[ld, "{}^{a}\xi"'] \arrow[rr, "\phi"] & & {}^{X}\left({}^{(Y\otimes Z)}\xi\right) \arrow[rd, "{}^{X}\phi"] & \\ {}^{((X\otimes Y)\otimes Z))}\xi \arrow[rrd, "\phi"'] & & & & {}^{X}\left({}^{Y}\left({}^{Z}\xi\right)\right) \\ & & {}^{(X\otimes Y)}\left({}^{Z}\xi\right) \arrow[rru, "\phi"'] & & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

$$\begin{tikzcd} {}^{(X\otimes I_A)}\xi \arrow[rr, "\phi"] \arrow[rd, "{}^{r}\xi"'] & & {}^{X}\left({}^{I_A}\xi\right) \arrow[ld, "{}^{X}\phi_0"] \\ & {}^{X}\xi & \end{tikzcd}$$

conmutan.

Si $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ *es un* $\mathcal{B}$*-grupo categórico estricto y los isomorfismos* (2.1) *son identidades, la* $\mathcal{B}$*-acción es* estricta.

Cuando $\mathcal{B} = *$, una $\mathcal{B}$-acción de $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ sobre $\mathcal{E}$ es una acción del grupo categórico $(\mathbb{G}, \otimes)$ sobre la categoría $\mathcal{E}$ en el sentido de la sección 2.1.1.

Si tenemos una $\mathcal{B}$-acción de $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ sobre $\mathcal{E}$, para cualquier objeto A de $\mathcal{B}$ es evidente que ésta restringe a una acción del grupo categórico fibra $(\mathbb{G}_A, \otimes)$ sobre la categoría fibra $\mathcal{E}_A$. Como cualquier objeto $X \in \mathbb{G}_A$ es 2-regular o, lo que es lo mismo, invertible, éste determina una equivalencia ${}^{X}(-) : \mathcal{E}_A \to \mathcal{E}_A$, $\xi \mapsto {}^{X}\xi$; y por otra parte, cualquier A-morfismo $u : X \to Y$ en $\mathbb{G}$ determina una equivalencia natural $({}^{u}\xi : {}^{X}\xi \xrightarrow{\sim} {}^{Y}\xi)$ entre ${}^{X}(-)$ e ${}^{Y}(-)$.

Definición 2.1.8 *Supongamos que el* $\mathcal{B}$*-grupo categórico* $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ *actúa sobre dos* $\mathcal{B}$*-categorías* $\mathcal{E}$ *y* $\mathcal{D}$*. Un* $\mathcal{B}$-funtor $\mathbb{G}$-equivariante $T : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ *es un* $\mathcal{B}$*-funtor* $T : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ *junto con una* $\mathcal{B}$*-equivalencia natural*

$$T_{X,\xi} : T({}^{X}\xi) \xrightarrow{\sim} {}^{X}T(\xi)$$

tal que, para cualquier objeto A *de* $\mathcal{B}$*, cualesquiera* A*-objetos* X, Y *de* $\mathbb{G}$ *y* *cualquier A-objeto ξ de $\mathcal{E}$, los diagramas*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& T({}^{(X\otimes Y)}\xi) \arrow[rr, "T_{X\otimes Y,\xi}"] \arrow[dl, "T(\phi)"'] & & {}^{(X\otimes Y)}T(\xi) \arrow[dr, "\phi'"] & \\
T({}^{X}({}^{Y}\xi)) \arrow[drr, "T_{X,{}^{Y}\xi}"'] & & & & {}^{X}({}^{Y}(T(\xi))) \\
& & {}^{X}(T({}^{Y}\xi)) \arrow[urr, "{}^{X}(T_{Y,\xi})"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T({}^{I_A}\xi) \arrow[rr, "T_{I_A,\xi}"] \arrow[dr, "T(\phi_0)"'] & & {}^{I_A}T(\xi) \arrow[dl, "\phi'_0"] \\
& T(\xi) &
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Definición 2.1.9 *Supongamos que $T, T' : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ son dos $\mathcal{B}$-funtores $\mathbb{G}$-equivariantes, entre dos $\mathcal{B}$-categorías sobre las que actúa $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$. Una* $\mathcal{B}$-homotopía $\mathbb{G}$-equivariante $h : T \to T'$ *es una $\mathcal{B}$-transformación natural tal que para cualquier $A \in \mathcal{B}$ y cualesquiera A-objetos X de $\mathbb{G}$ y ξ de $\mathcal{E}$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
T({}^{X}\xi) \arrow[r, "T_{X,\xi}"] \arrow[d, "h"'] & {}^{X}T(\xi) \arrow[d, "{}^{X}h"] \\
T'({}^{X}\xi) \arrow[r, "T'_{X,\xi}"] & {}^{X}T'(\xi)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Es fácil observar que para cualquier categoría $\mathcal{B}$ y cualquier $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ tenemos una 2-categoría cuyos objetos son las $\mathcal{B}$-categorías provistas de una $\mathcal{B}$-acción de $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, cuyos morfismos son los $\mathcal{B}$-funtores $\mathbb{G}$-equivariantes y cuyas deformaciones son las $\mathcal{B}$-homotopías $\mathbb{G}$-equivariantes.

2.1.3 Acciones simplemente transitivas.

Definición 2.1.10 *Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y sea ac una $\mathcal{B}$-acción de un $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) = (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$ sobre una $\mathcal{B}$-categoría*

$(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$. *Decimos que la acción es* simplemente transitiva *si el funtor inducido* $\mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \overset{(ac,pr)}{\longrightarrow} \mathcal{E} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E}$ *es una* $\mathcal{B}$*-equivalencia de* $\mathcal{B}$*-categorías.*

La proposición que sigue a continuación caracteriza las acciones simplemente transitivas de diferentes formas.

Proposición 2.1.11 *Supongamos que un* $\mathcal{B}$*-grupo categórico* $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ *actúa sobre una* $\mathcal{B}$*-categoría* $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$*. Entonces son equivalentes:*

i) La acción es simplemente transitiva.

ii) *a) Para cada objeto* $A \in \mathcal{B}$ *y cualesquiera dos* A*-objetos* ξ, η *de* $\mathcal{E}$*, existe un* A*-objeto* X *de* $\mathbb{G}$ *y un* A*-isomorfismo* ${}^X\xi \overset{\sim}{\to} \eta$*.*

b) Para cualquier morfismo $b : A \to B$ *en* $\mathcal{B}$*, cualquier* b*-morfismo* $f : \xi \to \eta$ *en* $\mathcal{E}$*, cualquier* A*-objeto* X *de* $\mathbb{G}$ *y cualquier* B*-objeto* Y *de* $\mathbb{G}$ *la aplicación* $Hom_b(X, Y) \longrightarrow Hom_b({}^X\xi, {}^Y\eta)$, $u \mapsto {}^uf$ *es una biyección.*

iii) Todo morfismo en $\mathcal{E}$ *es cocartesiano y para cada objeto* A *de* $\mathcal{B}$ *y cada* A*-objeto* ξ *de* $\mathcal{E}$*, el funtor* $\rho_\xi : \mathbb{G}_A \to \mathcal{E}_A$, $X \mapsto {}^X\xi$ *es una equivalencia entre las categorías fibras sobre* A*.*

iv) Todo morfismo en $\mathcal{E}$ *es cocartesiano y para cada objeto* A *de* $\mathcal{B}$*, o la categoría fibra* $\mathcal{E}_A$ *es vacía o existe un* A*-objeto* ξ *de* $\mathcal{E}$ *tal que el funtor* $\rho_\xi : \mathbb{G}_A \to \mathcal{E}_A$ *es una equivalencia.*

Demostración: El funtor $\mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \overset{(ac,pr)}{\longrightarrow} \mathcal{E} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E}$, $(X, \xi) \mapsto ({}^X\xi, \xi)$ es fiel y pleno si para cualesquiera dos objetos $(X, \xi), (Y, \eta) \in \mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E}$ la aplicación

$$Hom_{\mathbb{G}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{E}}((X, \xi), (Y, \eta)) \longrightarrow Hom_{\mathcal{E}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{E}}(({}^X\xi, \xi), ({}^Y\eta, \eta))$$

$(u, f) \mapsto ({}^uf, f)$ es biyectiva. Supongamos que X y ξ son A-objetos y que Y y η son B-objetos, entonces $Hom_{\mathbb{G}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{E}}((X, \xi), (Y, \eta))$ es la unión disjunta de los conjuntos $Hom_b(X, Y) \times Hom_b(\xi, \eta)$, de la misma forma que $Hom_{\mathcal{E}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{E}}(({}^X\xi, \xi), ({}^Y\eta, \eta))$ lo es de los conjuntos $Hom_b({}^X\xi, {}^Y\eta) \times Hom_b(\xi, \eta)$. Entonces (ac, pr) es fiel y pleno si y sólo si, para cualquier $b : A \to B$ y cualquier b-morfismo $f : \xi \to \eta$, la aplicación $Hom_b(X, Y) \longrightarrow Hom_b({}^X\xi, {}^Y\eta)$, $u \mapsto {}^uf$, es una biyección, es decir, se verifica la condición $b)$ de $ii)$.

Recordemos ahora, Proposición 1.1.1, que un $\mathcal{B}$-funtor entre $\mathcal{B}$-categorías es una $\mathcal{B}$-equivalencia si y sólo si es fiel y pleno y sus restricciones a las categorías fibra son densas. Entonces, (ac, pr) será una $\mathcal{B}$-equivalencia si y sólo si se verifica la condición $b)$ de $ii)$ y además para cualquier objeto A de $\mathcal{B}$ el funtor restricción $(ac, pr)_A : \mathbb{G}_A \times \mathcal{E}_A \longrightarrow \mathcal{E}_A \times \mathcal{E}_A$ es denso. Si esto es así y ξ, η son dos A-objetos, existen $(X, \alpha) \in \mathbb{G}_A \times \mathcal{E}_A$ y un isomorfismo $(f, g) \in \mathcal{E}_A \times \mathcal{E}_A$, $(f, g) : ({}^X\alpha, \alpha) \xrightarrow{\sim} (\eta, \xi)$. Esto significa que f y g son dos A-isomorfismos, $f : {}^X\alpha \xrightarrow{\sim} \eta$, $g : \alpha \xrightarrow{\sim} \xi$. Entonces la composición ${}^X\xi \xrightarrow{({}^Xg)^{-1}} {}^X\alpha \xrightarrow{f} \eta$ es un A-isomorfismo y se verifica $a)$ de $ii)$. Recíprocamente, si tenemos un A-isomorfismo $f : {}^X\xi \overset{\sim}{\to} \eta$, el par $(f, 1) : ({}^X\xi, \xi) \to (\eta, \xi)$ es un isomorfismo en $\mathcal{E}_A \times \mathcal{E}_A$ y por $a)$ se tiene la densidad del funtor $(ac, pr)_A$. Tenemos entonces la equivalencia entre $i)$ y $ii)$.

Ahora supongamos que la acción es simplemente transitiva. Si A es un objeto de $\mathcal{B}$ y ξ es un A-objeto, la aplicación $Hom_A(X, Y) \longrightarrow Hom_A({}^X\xi, {}^Y\xi)$, $u \mapsto {}^u\xi$, es una biyección para cualesquiera A-objetos X, Y de $\mathbb{G}$, gracias a la condición $b)$ de $ii)$; así que $\rho_\xi : \mathbb{G}_A \to \mathcal{E}_A$ es fiel y pleno. Además es denso gracias a $a)$, y es entonces una equivalencia de categorías. Para probar $iii)$ sólo falta observar que todo morfismo en $\mathcal{E}$ es cocartesiano.

Sea $f : \xi \to \eta$ un b-morfismo en $\mathcal{E}$, con $b : A \to B$ y sea η' cualquier B-objeto. Elegimos un B-isomorfismo $g : {}^X\eta \to \eta'$ que existe por $a)$ de $ii)$, para algún B-objeto X de $\mathbb{G}$,; y consideramos también los isomorfismos canónicos $\phi_0 : {}^{I_A}\xi \overset{\sim}{\to} \xi$ y $\phi_0 : {}^{I_B}\eta \overset{\sim}{\to} \eta$. Tenemos entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_B(I_B, X) \arrow[r, "(1)", "\sim"'] \arrow[d, "(I_b)^*"'] & Hom_B({}^{I_B}\eta, {}^X\eta) \arrow[r, "g_*\phi_0{}^*", "\sim"'] \arrow[d, "({}^{I_b}f)^*"] & Hom_B(\eta, \eta') \arrow[d, "f^*"] \\
Hom_b(I_A, X) \arrow[r, "(2)", "\sim"'] & Hom_b({}^{I_A}\xi, {}^X\eta) \arrow[r, "\phi_0{}^* g_*"] & Hom_b(\xi, \eta')
\end{tikzcd}$$

donde (1) es la biyección $u \mapsto {}^u\eta$ y (2) es la biyección $v \mapsto {}^v f$. Como cualquier morfismo en $\mathbb{G}$ es cocartesiano, $(I_b)^*$ es una biyección, y como consecuencia f^* también lo es, es decir, f es cocartesiano.

Ahora probaremos que $iii) \Rightarrow ii)$. La condición $a)$ es clara. Para probar $b)$, sea $b : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{B}$, $f : \xi \to \eta$ un b-morfismo en $\mathcal{E}$, X un A-objeto de $\mathbb{G}$, e Y un B-objeto de $\mathbb{G}$. Como la proyección $\mathcal{P}_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathcal{B}$ es una cofibración, existirá un b-morfismo de dominio X, $u : X \to Y'$, haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_B(Y',Y) \arrow[r, "u^*", "\sim"'] \arrow[d, "\rho_\eta"] & Hom_b(X,Y) \arrow[d, "(-)f"] \\ Hom_B({}^{Y'}\eta, {}^{Y}\eta) \arrow[r, "({}^u f)^*", "\sim"'] & Hom_b({}^X\xi, {}^Y\eta) \end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son biyecciones por ser u y ${}^u f$ cocartesianas, y como $\rho_\eta : \mathbb{G}_B \to \mathcal{E}_B$ es una equivalencia, la aplicación inducida $Hom_B(Y',Y) \to Hom_B({}^{Y'}\eta, {}^{Y}\eta)$ es una biyección. Entonces, la flecha vertical restante también lo es. Esto prueba $ii)$.

Finalmente, probaremos que $iv) \Rightarrow iii)$. Supongamos que ξ es un A-objeto en $\mathcal{E}$ tal que $\rho_\xi : \mathbb{G}_A \to \mathcal{E}_A$ es una equivalencia, y sea η otro A-objeto. Entonces existe un A-objeto Y de $\mathbb{G}$ y un A-isomorfismo $f : {}^Y\xi \xrightarrow{\sim} \eta$ y como consecuencia, encontramos una equivalencia ${}^{X\otimes Y}\xi \xrightarrow{\sim} {}^X({}^Y\xi) \xrightarrow{\sim} {}^X\eta$ entre los funtores $\rho_\xi(-\otimes Y)$ y ρ_η

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_A \arrow[rr, "-\otimes Y"] \arrow[dr, "\rho_\eta"'] & & \mathbb{G}_A \arrow[dl, "\rho_\xi"] \\ & \mathcal{E}_A & \end{tikzcd}$$

Como $-\otimes Y$ es una autoequivalencia en $\mathbb{G}_A$, ρ_η también lo es. ■

2.1.4 Torsores. El 2-grupoide $\underline{\underline{\text{Tors}}}\,(\mathcal{B}, \mathbb{G})$.

Queremos definir ahora la noción de torsor. Primero, observemos el siguiente corolario que es una consecuencia simple de la proposición anterior.

Corolario 2.1.12 *Supongamos que el $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ actúa de forma simplemente transitiva sobre la $\mathcal{B}$-categoría $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$. Entonces son equivalentes:*

i) El funtor proyección $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ es sobreyectivo en morfismos.

ii) $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ es una cofibración sobreyectiva en objetos.

iii) $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ es sobreyectiva en objetos y es una precofibración, es decir, para cualquier morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$, y cualquier A-objeto ξ de $\mathcal{E}$, existe un b-morfismo cocartesiano de dominio ξ.

Demostración: El hecho de que cualquier morfismo en $\mathcal{E}$ sea cocartesiano garantiza la equivalencia entre *ii*) y *iii*), así como que ambas implican *i*). Supongamos que se verifica *i*). Entonces, $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ es sobreyectiva sobre identidades y por tanto sobre objetos. Si $b : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{B}$ y ξ es un A-objeto, consideremos $f : \eta \to \sigma$ cualquier b-morfismo. Como ξ y η son A-objetos, por la Proposición 2.1.11 *ii*) *a*), existe un A-objeto X de $\mathbb{G}$ y un A-isomorfismo $g : \xi \to {}^X\eta$. Por otra parte, como $\mathcal{P}_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathcal{B}$ es una cofibración, existe un b-morfismo de dominio X, $u : X \to Y$. Entonces, la composición $\xi \xrightarrow{g} {}^X\eta \xrightarrow{{}^u f} {}^Y\sigma$ es un b-morfismo de dominio ξ. Por tanto $i) \Rightarrow iii)$. ■

Definición 2.1.13 *Una $\mathcal{B}$-categoría $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ sobre la que existe una $\mathcal{B}$-acción simplemente transitiva de un $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ se denomina un* torsor *si el funtor proyección $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ es sobreyectivo en morfismos, o equivalentemente $\mathcal{E}$ es una $\mathcal{B}$-categoría cofibrada con fibras no vacías.*

Si $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es un $\mathcal{B}$-grupo categórico estricto, el torsor $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ se dice estricto *si la $\mathcal{B}$-acción de $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ sobre $\mathcal{E}$ es estricta y la $\mathcal{B}$-equivalencia $\mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E}$ es un isomorfismo.*

Obsérvese que en el caso particular en el que $\mathcal{B}$ es un grupoide, o por ejemplo un grupo, cualquier categoría cofibrada sobre $\mathcal{B}$ es también un grupoide (puesto que un morfismo cocartesiano sobre un isomorfismo es también otro isomorfismo [25]) y así la condición de que todo morfismo sea cocartesiano estará siempre garantizada. Además, si $\mathcal{B}$ es un grupoide y $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es un $\mathcal{B}$-grupo categórico (y como consecuencia también un grupoide), un torsor sobre $\mathcal{B}$ bajo $\mathbb{G}$ consiste de un grupoide $\mathcal{E}$ junto con una aplicación sobreyectiva $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ y una $\mathcal{B}$-acción $\mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que para cualquier objeto A de $\mathcal{B}$ y cualquier A-objeto ξ de $\mathcal{E}$, $\rho_\xi : \mathbb{G}_A \to \mathcal{E}_A$, $X \mapsto {}^X\xi$ establece una equivalencia entre las categorías fibra sobre A.

Definición 2.1.14 *Dado un $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, si $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ y $(\mathcal{D}, \mathcal{P}_{\mathcal{D}})$ son dos torsores sobre $\mathcal{B}$ bajo $\mathbb{G}$, por un* morfismo de torsores *de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{D}$ entendemos un $\mathcal{B}$-funtor $\mathbb{G}$-equivariante $T : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$. Si $T, T' : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ son dos morfismos de torsores, por una* homotopía $h : T \to T'$ *entendemos una $\mathcal{B}$-homotopía $\mathbb{G}$-equivariante entre ellos.*

Podemos observar fácilmente que tenemos una 2-categoría $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B},\mathbb{G})$, cuyos objetos son los torsores sobre $\mathcal{B}$ bajo $\mathbb{G}$, cuyos morfismos son los morfismos de torsores y cuyas deformaciones son las homotopías entre morfismos.

Proposición 2.1.15 *Para cualquier categoría $\mathcal{B}$ y cualquier $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)$, $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B},\mathbb{G})$ es un 2-grupoide (débil), es decir, toda homotopía es invertible y todo morfismo es homotópicamente invertible.*

Demostración: En un torsor sobre $\mathcal{B}$ bajo $\mathbb{G}$, las fibras son grupoides. Entonces, todo morfismo sobre una identidad de $\mathcal{B}$ es un isomorfismo, y por tanto cualquier $\mathcal{B}$-transformación natural entre dos morfismos de torsores es una $\mathcal{B}$-equivalencia natural. En particular, fácilmente se deduce que toda homotopía entre dos morfismos de torsores es invertible.

Supongamos ahora que $T:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$ es un morfismo de torsores sobre $\mathcal{B}$ bajo $\mathbb{G}$, y veamos que existen $T':\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ y homotopías $TT'\simeq id$, $T'T\simeq id$. Empecemos observando que $T:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$ es una $\mathcal{B}$-equivalencia de $\mathcal{B}$-categorías. Como, tanto en $\mathcal{E}$ como en $\mathcal{D}$, todo morfismo es cocartesiano, véase la proposición 2.1.11, es suficiente observar que para cualquier objeto $A\in\mathcal{B}$, la restricción de T a las fibras $T_A = T/_{\mathcal{E}_A}:\mathcal{E}_A\to\mathcal{D}_A$ es una equivalencia. Sin embargo, como $\mathcal{E}_A$ es no vacía, existirá un A-objeto $\xi\in\mathcal{E}$, y tendremos el diagrama de funtores

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_A \arrow[rr, "\rho_\xi"] \arrow[dr, "\rho_{T(\xi)}"'] & & \mathcal{E}_A \arrow[dl, dashed, "T_A"] \\ & \mathcal{D}_A & \end{tikzcd}$$

donde ρ_ξ, $\rho_{T(\xi)}$ son equivalencias por la Proposición 2.1.11, *iii*). Los funtores $T_A\cdot\rho_\xi$ y $\rho_{T(\xi)}$ son naturalmente equivalentes gracias a los A-isomorfismos naturales $T_{X,\xi}:T({}^X\xi)\to {}^XT(\xi)$ y como consecuencia T_A es una equivalencia.

Esto significa que $T:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$ es una $\mathcal{B}$-equivalencia y por tanto, existen un $\mathcal{B}$-funtor $T':\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ y dos $\mathcal{B}$-equivalencias naturales $h: TT'\xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{D}}$ y $h': id_{\mathcal{E}}\xrightarrow{\sim} T'T$ tales que $T'h\cdot h'T' = id$ y $hT\cdot Th' = id$. Ahora observemos que se puede dotar a T' de una única estructura de $\mathcal{B}$-funtor $\mathbb{G}$-equivariante de manera que h y h' sean $\mathcal{B}$-homotopías $\mathbb{G}$-equivariantes, mediante los isomorfismos $T'_{X,\xi'}: T'({}^X\xi')\xrightarrow{\sim} {}^XT'(\xi')$, que hacen los siguientes diagramas conmutativos en la correspondiente categoría fibra

$$\begin{tikzcd} TT'({}^X\xi') \arrow[r, "T(T'_{X,\xi'})"] \arrow[d, "h"'] & T({}^XT'(\xi')) \arrow[d, "T_{X,T'(\xi')}"] \\ {}^X\xi' & {}^X(TT'(\xi')). \arrow[l, "{}^Xh"] \end{tikzcd}$$

■

Como consecuencia de la anterior proposición, la existencia de un morfismo de torsores $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ determina una relación de equivalencia entre los torsores sobre $\mathcal{B}$ bajo $\mathbb{G}$ y, en este caso, normalmente diremos que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son torsores equivalentes. Denotaremos entonces por $Tors[\mathcal{B}, \mathbb{G}]$ al conjunto de clases de equivalencia de torsores sobre $\mathcal{B}$ bajo el $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, es decir, al conjunto de componentes conexas del 2-grupoide $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$.

Observemos que el 2-grupoide $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$ está punteado por el llamado *torsor trivial* $\mathbb{G}^{tr}$, que viene dado por el mismo $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}})$ (recuérdese que el funtor proyección $\mathcal{P}_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathcal{B}$ es una cofibración sobreyectiva), junto con la $\mathcal{B}$-acción de $\mathbb{G}$ sobre sí mismo definida por el producto tensorial a la izquierda $ac = \otimes : \mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, es decir, ${}^XY = X \otimes Y$.

La siguiente proposición caracteriza los torsores equivalentes al torsor trivial:

Proposición 2.1.16 *Un torsor $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{B}$ bajo $\mathbb{G}$ es equivalente al torsor trivial $\mathbb{G}^{tr}$ si y sólo si escinde, esto es, el funtor proyección $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ admite una sección $S : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}S = id$.*

Demostración: El torsor trivial $\mathbb{G}^{tr}$ claramente está escindido por el funtor unidad $I : \mathcal{B} \to \mathbb{G}$, y entonces cualquier $\mathcal{B}$-torsor equivalente a él también escinde. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{B}$-torsor bajo $\mathbb{G}$ escindido por un funtor $S : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$. Entonces tenemos un $\mathcal{B}$-funtor $T : \mathbb{G} \to \mathcal{E}$ definido por la composición $\mathbb{G} \xrightarrow{(1,\mathcal{P}_{\mathbb{G}})} \mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B} \xrightarrow{1\times S} \mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \xrightarrow{ac} \mathcal{E}$. Es decir, si X es un A-objeto de $\mathbb{G}$, $T(X) = {}^XS(A)$, que es $\mathbb{G}$-equivariante por los $\mathcal{B}$-isomorfismos $T({}^XY) = T(X \otimes Y) = {}^{(X\otimes Y)}S(A) \cong {}^X({}^YS(A)) = {}^XT(Y)$. Como consecuencia, $\mathcal{E}$ es equivalente al torsor trivial. ■

Por tanto, $Tors[\mathcal{B},\mathbb{G}]$ es un conjunto punteado por la clase de los torsores escindidos.

Recordemos [33, 38] que para un 2-grupoide $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$, $\pi_0(\underline{\underline{\mathcal{A}}})$ denota su conjunto de componentes conexas. Además, para cada objeto A de $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$, $\pi_1(\underline{\underline{\mathcal{A}}},A)$ es el grupo de clases de homotopía de automorfismos de A, y $\pi_2(\underline{\underline{\mathcal{A}}},A)$ es el grupo (abeliano) de homotopías de 1_A en sí misma. Un morfismo $\varphi:\underline{\underline{\mathcal{A}}}\to\underline{\underline{\mathcal{A}'}}$, de 2-grupoides, es una equivalencia si, y sólo si, φ induce una biyección $\pi_0(\underline{\underline{\mathcal{A}}})\to\pi_0(\underline{\underline{\mathcal{A}'}})$, y para cualquier objeto A de $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$, isomorfismos de grupos $\pi_i(\underline{\underline{\mathcal{A}}},A)\to\pi_i(\underline{\underline{\mathcal{A}'}},\varphi(A))$, para $i=1,2$, [38].

Los grupos de homotopía de $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B},\mathbb{G})$, basados en $\mathbb{G}^{tr}$, tienen una primera interpretación natural:

Proposición 2.1.17 *i)* $\pi_0(\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B},\mathbb{G}))=Tors[\mathcal{B},\mathbb{G}]$, *el conjunto de clases de equivalencia de B-torsores bajo $\mathbb{G}$.*

ii) $\pi_1(\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B},\mathbb{G}),\mathbb{G}^{tr})=\Gamma\big[\mathbb{G}/\mathcal{B}\big]$*; el grupo de clases de $\mathcal{B}$-equivalencia de $\mathcal{B}$-funtores $S:\mathcal{B}\to\mathbb{G}$ (es decir, tales que $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}S=1_{\mathcal{B}}$).*

iii) $\pi_2(\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B},\mathbb{G}),\mathbb{G}^{tr})=Nat_{\mathcal{B}}(I,I)$*, el grupo abeliano de $\mathcal{B}$-equivalencias naturales del $\mathcal{B}$-funtor unidad $I:\mathcal{B}\to\mathbb{G}$ en sí mismo.*

Demostración: *i)* es cierta pues un morfismo de torsores siempre es una equivalencia.

Para probar *ii)* y *iii)* resaltemos que π_1 es el grupo de clases de $\mathcal{B}$-homotopía de $\mathcal{B}$-funtores $\mathbb{G}$-equivariantes $\mathbb{G}\to\mathbb{G}$ y que π_2 es el grupo abeliano de $\mathcal{B}$-homotopías $\mathbb{G}$-equivariantes de $1_{\mathbb{G}^{tr}}$ en sí mismo.

Ahora, para cada $\mathcal{B}$-funtor $\mathbb{G}$-equivariante $T:(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)\to(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)$, denotemos por $F_T=TI:\mathcal{B}\to\mathbb{G}$, que es un $\mathcal{B}$-funtor; y para cada $\mathcal{B}$-funtor $F:\mathcal{B}\to\mathbb{G}$ sea $T_F:\mathbb{G}\to\mathbb{G}$ el $\mathcal{B}$-funtor $\mathbb{G}$-equivariante definido por $T_F(X)=X\otimes F(A)$, si $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X)=A$, junto con los $\mathcal{B}$-isomorfismos $T_F(X\otimes Y)=(X\otimes Y)\otimes F(A)\xrightarrow{a^{-1}}X\otimes(Y\otimes F(A))=X\otimes T_F(Y)$. Es fácil ver que para cualquier $\mathcal{B}$-funtor $\mathbb{G}$-equivariante T, los isomorfismos $T(X)\xrightarrow{T(r^{-1})}T(X\otimes I_A)\xrightarrow{T_{X,I_A}}X\otimes TI_A=T_{F_T}(X)$ definen una $\mathcal{B}$-homotopía $\mathbb{G}$-equivariante $T\to T_{F_T}$; de la misma forma que para cualquier $\mathcal{B}$-funtor

$F : \mathcal{B} \to \mathbb{G}$, los isomorfismos $F_{T_F}(A) = I_A \otimes F(A) \xrightarrow{\sim} F(A)$ definen una $\mathcal{B}$-equivalencia $F_{T_F} \to F$. Esto prueba ii).

Si ahora consideramos $T, T' : (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \to (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ dos $\mathcal{B}$-funtores $\mathbb{G}$-equivariantes, observamos que para cualquier $\mathcal{B}$-homotopía $\tau : F_T \to F_{T'}$, existe una única $\mathcal{B}$-homotopía $\mathbb{G}$-equivariante $h : T \to T'$ tal que $hI = \tau$, determinada por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "h_X"] & T'(X) \\
T(X \otimes I_A) \arrow[u, "T(r)"] \arrow[r, "h_{X \otimes I_A}"] \arrow[d, "\tau_{X,I_A}"'] & T'(X \otimes I_A) \arrow[u, "T'(r)"'] \arrow[d, "\tau'_{X,I_A}"] \\
X \otimes F_T(A) \arrow[r, "X \otimes \tau_A"] & X \otimes F_{T'}(A)
\end{tikzcd}$$

para todo X de $\mathbb{G}$ con $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X) = A$. Como $F_{1_{\mathbb{G}}} = 1_{\mathbb{G}} I = I$ hemos probado iii). ∎

2.2 Algunos ejemplos de torsores categóricos.

2.2.1 Extensiones lineales de Baues.

Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y M cualquier $\mathcal{B}$-módulo a la izquierda. De acuerdo con [3, 4], una categoría $\mathcal{E}$ se dice una *extensión lineal* de $\mathcal{B}$ por M, y se nota

$$M + \rightarrowtail \mathcal{E} \overset{\mathcal{P}}{\twoheadrightarrow} \mathcal{B}$$

si se verifican (a), (b) y (c):

(a) $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ tienen los mismos objetos y $\mathcal{P}$ es un funtor pleno, que es la identidad en objetos.

(b) Para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, el grupo M_B actúa simple y transitivamente sobre el conjunto de b-morfismos $\mathcal{P}^{-1}(b) = Hom_b(A, B) \subseteq \mathcal{E}$. Para cada $x \in M_B$ y cada b-morfismo f, denotamos por ${}^x f$ a la acción de x sobre f.

(c) La acción verifica la ley lineal de distributividad ${}^{y}g^{x}f = {}^{(y+{}^{c}x)}(gf)$, para cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ en $\mathcal{B}$, y cada c-morfismo g, b-morfismo f, $x \in M_B$ e $y \in M_C$.

Lo que nos gustaría destacar ahora es que una extensión lineal de $\mathcal{B}$ por M, $M+ \rightarrowtail \mathcal{E} \overset{\mathcal{P}}{\twoheadrightarrow} \mathcal{B}$, es lo mismo que un torsor estricto sobre $\mathcal{B}$ bajo $M \rtimes \mathcal{B}$, con funtor proyección $\mathcal{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ y la $\mathcal{B}$-acción $(M \rtimes \mathcal{B}) \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \xrightarrow{ac} \mathcal{E}$ viene dada por ${}^{(x,b)}f = {}^{x}f$, para todo $(x, b) : A \to B$ en $M \rtimes \mathcal{B}$ y todo b-morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{E}$. La condición (c) de la definición de extensión lineal se traduce en que ac es un funtor, y además (a) y (b) demuestran que $\mathcal{E}$ es un torsor (Proposición 2.1.11 *ii*) y Corolario 2.1.12).

Si $Lin[\mathcal{B}, M]$ denota el conjunto de clases de equivalencia de extensiones lineales de $\mathcal{B}$ por M, tenemos una aplicación de inclusión

$$Lin[\mathcal{B}, M] \hookrightarrow Tors[\mathcal{B}, M \rtimes \mathcal{B}]$$

que es además una biyección:

Recordemos que una $\mathcal{B}$-categoría era $\mathcal{B}$-esquelética cuando, para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, dos A-objetos isomorfos son iguales, es decir, cuando todas las categorías fibra son categorías esqueléticas. Toda $\mathcal{B}$-categoría es $\mathcal{B}$-equivalente a una $\mathcal{B}$-esquelética.

Si $\mathcal{E}$ es un torsor sobre una categoría $\mathcal{B}$ bajo un $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G}$, y $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ es una $\mathcal{B}$-equivalencia, entonces podemos trasladar a lo largo de T la $\mathcal{B}$-acción de $\mathbb{G}$ sobre $\mathcal{E}$ a una estructura de torsor esencialmente única sobre $\mathcal{E}'$ de manera que T se convierta en un morfismo de torsores. En particular, todo $\mathcal{B}$-torsor $\mathcal{E}$ es equivalente a uno $\mathcal{B}$-esquelético.

Ahora, supongamos que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{B}$-torsor esquelético bajo $M \rtimes \mathcal{B}$, con funtor proyección $\mathcal{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$. Para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, la categoría fibra $\mathcal{E}_A$ es equivalente a $(M \rtimes \mathcal{B})_A = M_A$, el grupo abeliano M_A considerado como una categoría con sólo un objeto, así que $\mathcal{E}_A$ tiene sólo un objeto, que podemos identificar con A. Entonces podemos suponer que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ tienen los mismos objetos y $\mathcal{P}$ es la identidad en objetos, y por tanto que $\mathcal{E}$ es una extensión lineal de $\mathcal{B}$ por M. Entonces,

$$Lin[\mathcal{B}, M] \cong Tors[\mathcal{B}, M \rtimes \mathcal{B}].$$

Observemos que si $\mathcal{B} = G$, es un grupo considerado como una categoría con un único objeto, y M es un G-módulo, considerado como un funtor

$M : G \to Ab$, entonces el conjunto $Lin[G, M]$ se puede identificar fácilmente con el conjunto $Ext[G, M]$ de todas las clases de equivalencia de extensiones de grupos $0 \to M \to E \to G \to 1$ de G por el G-módulo M. Por otra parte, $M \rtimes G$ es el producto semidirecto de grupos usual de G y M, considerados éstos como categorías con un solo objeto, y entonces

$$Ext[G, M] \cong Tors[G, M \rtimes G]$$

para cualquier grupo G y cualquier G-módulo M.

2.2.2 Álgebras de Azumaya sobre extensiones de Galois.

Sea G un grupo actuando sobre un anillo conmutativo S por automorfismos de anillos.

El objeto principal de este ejemplo es explicar cómo, cuando S es una extensión de Galois finita de $R = S^G = \{s \in S/\ \sigma(s) = s\ \forall \sigma \in G\}$, toda R-álgebra de Azumaya A que contenga a S como subálgebra conmutativa maximal tiene asociado un G-torsor bajo $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\int G$, $\underline{\underline{A}}$; de manera que, por ejemplo, $\underline{\underline{\mathcal{E}nd}}_R(S)$ es el torsor trivial $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\int G$. En realidad, la aplicación $A \mapsto \underline{\underline{A}}$ induce una biyección

$$Br(S/R) \xrightarrow{\sim} Tors(G, \mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\textstyle\int G) \qquad (2.3)$$

entre el grupo de Brauer de R-álgebras de Azumaya, para las cuales S es un anillo de escisión, y el conjunto de clases de equivalencia de torsores sobre G bajo $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\int G$ (véase sección 1.3.2).

Observemos que si $\mathrm{Pic}(S) = 0$, el G-grupo categórico $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\int G$ es equivalente a $Aut_{\mathcal{P}ic(S)}(S) \rtimes G = U(S) \rtimes G$, el G-grupo categórico definido por el G-módulo de unidades $U(S)$, y entonces

$$Tors(G, \mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\textstyle\int G) \cong Ext(G, U(S)).$$

Por tanto, cuando $\mathrm{Pic}(S)$ es trivial, (2.3) generaliza el conocido isomorfismo $Br(S/R) \cong Ext(G, U(S))$.

Sea A una R-álgebra de Azumaya que contiene a S como subálgebra conmutativa maximal. Como A está escindida por S, también lo está su álgebra opuesta A°, y como además es un S-progenerador, tenemos un isomorfismo de R-álgebras $S \otimes_R A^{\circ} \cong Hom_S(A, A)$, y una equivalencia de Morita

$- \otimes_S A : {}_S\mathfrak{M} \to {}_{S\otimes_R A^\circ}\mathfrak{M}$, con funtor cuasi-inverso $Hom_{S\otimes_R A^\circ}(A, -)$, equivalente al funtor $M \mapsto M^S = \{m \in M/ \quad sm = ms \quad \forall s \in S\}$. Entonces, para cualquier $S \otimes_R A^\circ$-módulo existe un isomorfismo de $S \otimes_R A^\circ$-módulos $M^S \otimes_S A \cong M$, $x \otimes a \mapsto xa$.

Para cada $\sigma \in G$, tomamos ahora

$$A_\sigma = ({}^\sigma A)^S = \{a \in A/ \quad \sigma^{-1}(s)a = as \quad \forall s \in S\}.$$

Entonces, $A_\sigma \otimes_S A \cong {}^\sigma A$ como $S \otimes_R A^\circ$-módulos y simplemente contando rangos se demuestra que $A_\sigma \in \mathcal{P}ic(S)$. Observamos que $A_1 = S$ y que para cualesquiera dos $\sigma, \tau \in G$ existe un isomorfismo de S-módulos $\varphi_{\sigma,\tau} : {}^\sigma A_\tau \otimes_S A_\sigma \to A_{\sigma\tau}$, con $\varphi_{\sigma,\tau}(a \otimes b) = ab$ (podemos comprobar fácilmente que $\varphi_{\sigma,\tau} \otimes_S A$ es un isomorfismo). Usamos los S-módulos invertibles A_σ y los isomorfismos $\varphi_{\sigma,\tau}$ para construir un torsor sobre G bajo $\mathcal{P}ic(S)^\otimes \textstyle\int G$, $\underline{\underline{A}}$, de la siguiente forma:

Los objetos de $\underline{\underline{A}}$ son los S-módulos invertibles, así que $\underline{\underline{A}}$ y $\mathcal{P}ic(S)^\otimes \textstyle\int G$ tienen los mismos objetos. Una flecha $P \to Q$ es un par (f, σ) donde $\sigma \in G$ y $f : P \to {}^\sigma Q \otimes_S A_\sigma$ es un isomorfismo de S-módulos. La composición de dos flechas $(f, \sigma) : P \to Q$ y $(g, \tau) : Q \to L$ es $((1 \otimes \varphi_{\sigma,\tau})({}^\sigma g \otimes 1)f, \sigma\tau) : P \to L$, de acuerdo con la composición de S-isomorfismos

$$P \xrightarrow{f} {}^\sigma Q \otimes_S A_\sigma \xrightarrow{{}^\sigma g \otimes 1} {}^{\sigma\tau} L \otimes_S {}^\sigma A_\tau \otimes A_\sigma \xrightarrow{1 \otimes \varphi_{\sigma,\tau}} {}^{\sigma\tau} L \otimes_S A_{\sigma\tau}$$

Es fácil ver que dicha composición es asociativa, y para cualquier S-módulo invertible P, la correspondiente identidad en la categoría $\underline{\underline{A}}$ es el par $(1_P, 1) : P \to P$, donde $1 \in G$ es el automorfismo identidad de S, y $1_P : P \to P \otimes_S S$ es el isomorfismo $x \mapsto x \otimes 1$. Así pues, $\underline{\underline{A}}$ es un grupoide que además es cofibrado sobre G por el funtor proyección $\mathcal{P} : \underline{\underline{A}} \to G$, $\mathcal{P}(f, \sigma) = \sigma$.

Además, existe una G-acción de $\mathcal{P}ic(S)^\otimes \textstyle\int G$ sobre el grupoide $\underline{\underline{A}}$, $(\mathcal{P}ic(S)^\otimes \textstyle\int G) \times_G \underline{\underline{A}} \xrightarrow{ac} \underline{\underline{A}}$, dada por el producto tensorial de S-módulos por la izquierda, es decir, ${}^P Q = P \otimes_S Q$ en objetos, y ${}^{(f,\sigma)}(g, \sigma) = (f \otimes g, \sigma)$, o más explícitamente

$${}^{(P \xrightarrow{f} {}^\sigma Q)}(P' \xrightarrow{g} {}^\sigma Q' \otimes_S A_\sigma) = (P \otimes_S P' \xrightarrow{f \otimes g} {}^\sigma (Q \otimes_S Q') \otimes_S A_\sigma)$$

en morfismos. Claramente, ac es un funtor, que define una G-acción para la cual los isomorfismos (2.1) son de nuevo los isomorfismos usuales de asociatividad y unidad para el producto tensor de módulos. Por tanto, $\underline{\underline{A}}$ es un G-torsor bajo $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\int G$, pues el funtor $\rho_S : \mathcal{P}ic(S) \to \underline{\underline{A}}_1$, $P \mapsto {}^P S = P \otimes_S S$, claramente establece una equivalencia entre $\mathcal{P}ic(S)$ y la categoría fibra de $\underline{\underline{A}}$ sobre el único objeto $1 \in G$.

2.2.3 Torsores bajo grupos categóricos de Whitehead.

Queremos describir ahora un torsor no trivial bajo un grupo categórico cofibrado de Whitehead. Primero, necesitamos hacer algunas observaciones sobre el grupoide fundamental de espacios. Es un hecho conocido [8] que una fibración de espacios $p : X \to Y$ induce una fibración ($\sim$ cofibración) de grupoides $\Pi_1(X) \xrightarrow{\Pi_1(p)} \Pi_1(Y)$. Si $y_0 \in Y$ es cualquier punto base, podemos considerar el espacio fibra $X_{y_0} = p^{-1}(y_0)$ y su grupoide fundamental $\Pi_1(X_{y_0})$. Además, tenemos el grupoide fibra de $\Pi_1(p)$ sobre y_0, considerado como un objeto de $\Pi_1(Y)$, $\Pi_1(X)_{y_0} = \Pi_1(p)^{-1}(y_0)$. En la siguiente proposición, observamos que, bajo algunas condiciones, los dos grupoides, el grupoide fundamental del espacio fibra y el grupoide fibra del grupoide fundamental, son iguales.

Proposición 2.2.1 *i) El funtor $\Pi_1(X_{y_0}) \xrightarrow{i} \Pi_1(X)_{y_0}$, inducido por la aplicación de inclusión $X_{y_0} \hookrightarrow X$, proporciona una biyección entre los correspondientes conjuntos de componentes conexas.*

ii) Si para cualquier $x_0 \in X_{y_0}$ el homomorfismo $\pi_2(X, x_0) \to \pi_2(Y, y_0)$ es sobreyectivo, entonces $i : \Pi_1(X_{y_0}) \to \Pi_1(X)_{y_0}$ es un isomorfismo.

Demostración: Como i es la aplicación identidad en objetos, está claro que la aplicación inducida en el conjunto de componentes conexas es sobreyectiva. Supongamos que $x_0, x_1 \in X_{y_0}$ representan la misma clase en $\Pi_1(X)_{y_0}$; es decir, que existe una curva $\omega : I \to X$ con $\omega(0) = x_0$ y $\omega(1) = x_1$, y una homotopía $h : I \times I \to Y$ con $h/_{I\times 0} = p\omega$ y constantemente y_0 a lo largo de los otros ejes $I \times 1$, $0 \times I$ y $1 \times I$. Entonces, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\partial I \times I \cup I \times 0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\
I \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y
\end{tikzcd}$$

donde g está definida por $g(0,u) = x_0$, $g(1,u) = x_1$ y $g(t,0) = \omega(t)$, es conmutativo y existe una diagonal $H : I \times I \to X$. Sea $\omega' = H/_{I\times 1} : I \to X$; entonces $\omega'(0) = x_0$, $\omega'(1) = x_1$ y $p\omega'(t) = h(t,1) = y_0$, esto es, ω' es una curva en X_{y_0} de x_0 a x_1; así que x_0 y x_1 también representan la misma clase en $\Pi_1(X_{y_0})$.

Para probar $ii)$, es suficiente observar que para todo $x_0 \in X_{y_0}$ la aplicación de inclusión induce un isomorfismo $Aut_{\Pi_1(X_{y_0})}(x_0) \cong Aut_{\Pi_1(X)_{y_0}}(x_0)$ entre los correspondientes grupos de automorfismos. Ahora bien, para un tal x_0, existen dos sucesiones exactas de grupos,

$$1 \longrightarrow Aut_{\Pi_1(X)_{y_0}}(x_0) \xrightarrow{i} Aut_{\Pi_1(X)}(x_0) \xrightarrow{p} Aut_{\Pi_1(Y)}(y_0)$$

y

$$\pi_2(X,x_0) \xrightarrow{p} \pi_2(Y,y_0) \longrightarrow \pi_1(X_{y_0},x_0) \xrightarrow{i} \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{p} \pi_1(Y,y_0)$$

la primera inducida por la fibración de grupoides $\Pi_1(p)$, [8], y la segunda por la fibración p. Como $Aut_{\Pi_1(X)}(x_0) = \pi_1(X,x_0)$, $Aut_{\Pi_1(Y)}(y_0) = \pi_1(Y,y_0)$ y $Aut_{\Pi_1(X_{y_0})}(x_0) = \pi_1(X_{y_0},x_0)$, entonces $Aut_{\Pi_1(X_{y_0})}(x_0) \cong Aut_{\Pi_1(X)_{y_0}}(x_0)$, si y sólo si, $i : \pi_1(X_{y_0},x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ es inyectiva o equivalentemente, si y sólo si $p : \pi_2(X,x_0) \to \pi_2(Y,y_0)$ es sobreyectiva. ■

La anterior proposición se puede usar para determinar los grupos categóricos fibras de grupos categóricos cofibrados de Whitehead. Por ejemplo, sea $W(X,B) = W(X,X,B,B) = \Pi_1((X,B)^{(S^1,*)})$ el grupo categórico de Whitehead definido por un par de espacios (X,B), que es cofibrado sobre el grupoide fundamental $\Pi_1(B)$, con un funtor proyección inducido por la aplicación de evaluación en $*$, $(X,B)^{(S^1,*)} \xrightarrow{p} B$. Para cualquier $x_1 \in B$, el espacio fibra sobre x_1 es el espacio de lazos $\Omega(X,x_1)$, y así el grupoide fundamental del espacio fibra sobre x_1 es $\Pi_1(\Omega(X,x_1))$.

Ahora bien, si $\omega \in \Omega(X,x_1)$ es cualquier lazo en X basado en x_1, tenemos una equivalencia homotópica $\omega \otimes - : \Omega\big((X,B)^{(S^1,*)}, I_{x_1}\big) \longrightarrow \Omega\big((X,B)^{(S^1,*)}, \omega\big)$, que induce un isomorfismo $\pi_2\big((X,B)^{(S^1,*)}, I_{x_1}\big) \cong \pi_2\big((X,B)^{(S^1,*)}, \omega\big)$. Como el homomorfismo $\pi_2\big((X,B)^{(S^1,*)}, I_{x_1}\big) \longrightarrow \pi_2(B,x_1)$ tiene una sección (la inducida por la aplicación lazo constante, $I : B \to (X,B)^{(S^1,*)})$, deducimos que $\pi_2\big((X,B)^{(S^1,*)},\omega\big) \longrightarrow \pi_2(B,x_1)$ es sobreyectivo, y así estamos en las hipótesis de la Proposición 2.2.1. Por tanto existe un isomorfismo de grupos categóricos

$$\Pi_1(\Omega(X,x_1)) \cong W(X,B)_{x_1} \tag{2.4}$$

Obsérvese que el $\otimes$-producto sobre $\Pi_1(\Omega(X,x_1))$ es el inducido sobre los grupoides fundamentales por la aplicación estándar de H-grupos

$$\Omega(X,x_1)\times\Omega(X,x_1) \longrightarrow \Omega(X,x_1).$$

Fijemos un punto $x_0 \in B$, y consideremos el subespacio de X^I, $\Omega(X,B,x_0) = \{\gamma \in X^I /\ \gamma(0)\in B\ y\ \gamma(1) = x_0\} \subseteq X^I$ con la topología inducida. Existe una fibración $p : \Omega(X,B,x_0) \longrightarrow B$ dada por $p(\gamma) = \gamma(0)$, y entonces una cofibración inducida entre los correspondientes grupoides fundamentales

$$\Pi_1(\Omega(X,B,x_0)) \xrightarrow{p} \Pi_1(B). \tag{2.5}$$

Observamos que existe una $\Pi_1(B)$-acción de $W(X,B)$ sobre $\Pi_1(\Omega(X,B,x_0))$

$$W(X,B)\times_{\Pi_1(B)}\Pi_1(\Omega(X,B,x_0)) \xrightarrow{\otimes} \Pi_1(\Omega(X,B,x_0))$$

dada en objetos por la concatenación de curvas y en morfismos por la composición horizontal de homotopías, y así, los isomorfismos (2.1) se definen por las homotopías estándar que prueban la asociatividad y unidad de la concatenación de curvas. Entonces tenemos la siguiente:

Proposición 2.2.2 *Si B está contenido en una arco-componente de X, y $\pi_2(B,*) = 0$ para todo punto base $* \in B$, entonces $\Pi_1(\Omega(X,B,x_0))$ es un torsor sobre $\Pi_1(B)$ bajo el grupo categórico cofibrado de Whitehead $W(X,B)$.*

Demostración: A partir de las hipótesis de deduce fácilmente que la cofibración (2.5) es sobreyectiva en objetos. Entonces, gracias a la Proposición 2.1.11, es suficiente observar que para cualquier curva en X, $\delta : x_1 \to x_0$, el funtor $\rho_\delta = - \otimes \delta : W(X,B)_{x_1} \longrightarrow \Pi_1(\Omega(X,B,x_0))_{x_1}$ es una equivalencia. Para esto, usamos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} W(X,B)_{x_1} \arrow[r, "-\otimes\delta"] \arrow[d, "(a)"', "\sim"] & \Pi_1(\Omega(X,B,x_0))_{x_1} \\ \Pi_1(\Omega(X,x_1)) \arrow[r, "(b)", "\sim"'] & \Pi_1(\Omega(X,B,x_1))_{x_1} \arrow[u, "(c)", "\sim"'] \end{tikzcd}$$

donde (a) es el isomorfismo (2.4), (c) es la equivalencia inducida por la equivalencia de fibra homotópica

$$\begin{tikzcd} \Omega(X,B,x_1) \arrow[rr, "-\otimes\delta"] \arrow[dr, "p"'] & & \Omega(X,B,x_0) \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

y (b) es el isomorfismo obtenido de la Proposición 2.2.1 , para la fibración $p : \Omega(X,B,x_1) \longrightarrow B$. Obsérvese que la fibra sobre x_1 es el espacio de lazos en X, $\Omega(X,x_1)$, y, como $\pi_2(B,x) = 0$ para todo x, $\Pi_1(\Omega(X,x_1)) \cong \Pi_1(\Omega(X,B,x_1))$. ■

Observemos que el $\Pi_1(B)$-torsor $\Pi_1(\Omega(X,A,x_0))$ no es equivalente al trivial. El funtor proyección $\mathcal{P} : \Pi_1(\Omega(X,B,x_0)) \longrightarrow \Pi_1(B)$ restringe a los correspondientes grupos de automorfismos de I_{x_0} y x_0 respectivamente, al homomorfismo $\pi_2(X,B,x_0) \longrightarrow \pi_1(B,x_0)$ que, en general, no es sobreyectivo; entonces $\mathcal{P}$ no escinde.

Capítulo 3

Cohomología.

3.0 Introducción.

El Algebra Homológica surge de muy diversas fuentes en Algebra y en Topología. Ejemplos decisivos vienen desde el estudio de extensiones de grupos discretos (Schreier [43], Eilenberg-MacLane [20]), de grupos algebraicos (Serre [45], Giraud [23]) o topológicos (Segal [44]) o, con más generalidad, desde los problemas asociados a la clasificación de objetos que resultan principales y homogéneos por la acción de un grupo dado, en muy diversos contextos, tanto algebraicos (Beck [5]), como topológicos (Giraud, [23]).

En nuestro caso, la clasificación de torsores categóricos nos conduce de forma natural al estudio e interpretación de una cierta cohomología no abeliana $\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$, $0 \leq i \leq 2$, de una categoría pequeña $\mathcal{B}$, con coeficientes en un pseudodiagrama de grupos categóricos $\mathbb{F}^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$, que, como valor añadido, encuentra diversos precedentes de interés como simples ejemplos de la misma y, al igual que la usual cohomología de grupos, tiene aplicaciones topológicas.

Presentamos este capítulo en tres secciones. En la primera de estas realizamos, como resultado más importante, la clasificación cohomológica de los $\mathcal{B}$-torsores sobre un $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, que es establecida mediante una extensión del clásico análisis de Schreier [43] de las extensiones de grupos. Así, cada tal $\mathcal{B}$-torsor puede ser descrito, salvo equivalencias, por un *conjunto de factores* o *2-cociclo* de $\mathcal{B}$ con coeficientes en el pseudodiagrama $\mathbb{G}^{\otimes}$ canónicamente asociado al $\mathcal{B}$-grupo categórico (por la equivalencia de Grothendieck establecida en el capítulo 1), y probamos que el

2-grupoide $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$ es equivalente a un correspondiente 2-grupoide cohomológico $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, cuyos grupos de homotopía definen los de cohomología $\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, $0 \leq i \leq 2$. Estos grupos de cohomología se describen entonces en términos de *conjuntos de factores*, *derivaciones* o *elementos invariantes* en analogía con la cohomología de grupos a la que se generaliza (véanse ejemplos 3.1.5, 3.1.6 y 3.1.7).

En la segunda sección de este capítulo nos centramos en mostrar las relaciones entre esta nueva teoría de cohomología y otras varias más clásicas y conocidas. Particularmente con la cohomología de André, Roos o Watts [1, 41, 51] de categorías pequeñas, las cohomologías de Picard de extensiones Galoisianas de anillos debidas a Hattory y Ulbrich [27, 49] y Villamayor y Zelinski [50], y la cohomología de categorías monoidales graduadas establecida por Fröhlich y Wall [21] para su uso en el estudio de grupos de Brauer abstractos o generalizados.

En la tercera sección del capítulo probamos como resultado principal la existencia de sucesiones exactas de nueve términos en cohomología de grupos categóricos cofibrados

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{H}^0(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes}) \arrow[r] & \mathbb{H}^0(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \arrow[r] & \mathbb{H}^0(\mathcal{B}, \mathbb{F}''^{\otimes}) \arrow[r] & \mathbb{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes}) \arrow[r] & \mathbb{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \arrow[dlll] \\
& & \mathbb{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{F}''^{\otimes}) \arrow[r] & \mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes}) \arrow[r] & \mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \arrow[r] & \mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}''^{\otimes})
\end{tikzcd}$$

correspondientes a sucesiones exactas cortas en los sistemas de coeficientes. Estas sucesiones, por ejemplo, reducen a la bien conocida sucesión exacta de Chase-Harrison-Rosenberg asociada a una extensión de Galois de anillos conmutativos.

3.1 Cohomología.

3.1.1 Conjuntos factores.

En lo que sigue, manteniendo en mente la clásica teoría de Schreier para extensiones de grupos, desarrollamos una teoría de *conjuntos de factores* para torsores categóricos. Un tal conjunto factor será un sistema de *descent datum* adecuado para determinar y reconstruir cada torsor salvo isomorfismos.

Fijemos entonces una categoría pequeña $\mathcal{B}$ y $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ un $\mathcal{B}$-grupo categórico. Recordemos que la 2-categoría de $\mathcal{B}$-grupos categóricos es equivalente a la de pseudodiagramas de grupos categóricos con el tipo de la categoría $\mathcal{B}$, teorema 1.2.21, de manera que seleccionado un sistema arbitrario de imágenes directas en $\mathbb{G}$, $(\Gamma_b(X) : X \to {}^bX)$, es $\mathbb{G} \approx \mathbb{G}^{\otimes}\int\mathcal{B}$, donde $\mathbb{G}^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$ es el pseudodiagrama que asocia a cada objeto A de $\mathcal{B}$ el grupo categórico fibra $\mathbb{G}_A = \mathcal{P}_{\mathbb{G}}^{-1}(id_A)$, a cada morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$ el homomorfismo ${}^b(-) : \mathbb{G}_A \to \mathbb{G}_B$, definido por la conmutatividad de los diagramas (1.1) y (1.24), y a cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ en $\mathcal{B}$, la homotopía $\psi_{b,c} : {}^c({}^b(-)) \xrightarrow{\sim} {}^{cb}(-)$, definida por los diagramas (1.2) (c.f. secciones 1.2.4 y 1.2.5).

Supongamos ahora que $(\mathcal{E}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B})$ es un $\mathcal{B}$-torsor respecto a la $\mathcal{B}$-acción $\mathbb{G} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \xrightarrow{ac} \mathcal{E}$, $(X, \xi) \mapsto {}^X\xi$, del $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G}$.

Para cada objeto $A \in \mathcal{B}$ elegimos un A-objeto $\Lambda_A \in \mathcal{E}$. Entonces, para cada morfismo de $\mathcal{B}$, $b : A \to B$, seleccionamos un B-objeto $t_b \in \mathbb{G}$ y un b-morfismo $\Upsilon_b : \Lambda_A \to {}^{t_b}\Lambda_B$, con dominio Λ_A y codominio ${}^{t_b}\Lambda_B$ (tal morfismo existe, pues si tomamos $\Upsilon : \Lambda_A \to \eta$ cualquier b-morfismo con dominio Λ_A, entonces η y Λ_B son B-objetos y existe un B-isomorfismo $\eta \xrightarrow{\lambda} {}^{t_b}\Lambda_B$ para algún B-objeto $t_b \in \mathbb{G}$; la composición $\lambda\Upsilon$ nos proporciona la requerida Υ_b). Cuando $b = 1_A$ es un morfismo identidad tomamos $t_{1_A} = I_A$, el objeto unidad de $\mathbb{G}_A$, y $\Upsilon_{1_A} = \phi_0^{-1} : \Lambda_A \to {}^{I_A}(\Lambda_A)$.

Si $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ es un par de morfismos componibles en $\mathcal{B}$, como Υ_{cb} es cocartesiano, existe un único C-morfismo ${}^{t_{cb}}\Lambda_C \longrightarrow {}^{({}^ct_b \otimes t_c)}\Lambda_C$ haciendo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & {}^{t_b}\Lambda_B \arrow[rr, "\Gamma_c\Upsilon_c"] & & {}^{({}^ct_b)}({}^{t_c}\Lambda_C) \\
\Lambda_A \arrow[ur, "\Upsilon_b"] \arrow[dr, "\Upsilon_{cb}"'] & & & {}^{({}^ct_b\otimes t_c)}\Lambda_C \arrow[u, "\phi"'] \\
 & {}^{t_{cb}}\Lambda_C \arrow[urr, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

conmutativo. Además, dadas las equivalencias $\rho_{\Lambda_C} : \mathbb{G}_C \to \mathcal{E}_C$, $u \mapsto {}^u\Lambda_C$, este morfismo se escribe como ${}^{(t_{c,b})}\Lambda_C$ para un único C-morfismo en $\mathbb{G}$:

$$t_{c,b} : t_{cb} \xrightarrow{\sim} {}^ct_b \otimes t_c$$

Si $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C \xrightarrow{d} D$ son tres morfismos componibles en $\mathcal{B}$, la ley de asociatividad asegura que $\Upsilon_{(dc)b} = \Upsilon_{d(cb)}$ y a partir de esto, es fácil (aunque tedioso) deducir que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
t_{dcb} \arrow[r, "t_{d,cb}"] \arrow[d, "t_{dc,b}"] & {}^{d}t_{cb} \otimes t_d \arrow[d, "{}^{d}t_{c,b}\otimes 1"] \\
{}^{dc}t_b \otimes t_{dc} \arrow[r, "1\otimes t_{d,c}"] & {}^{dc}t_b \otimes {}^{d}t_c \otimes t_d
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

en el que se han omitido algunos morfismos canónicos de asociatividad (1.9), (1.23), (1.27),..., es conmutativo.

Además, para cualquier morfismo $b : A \to B$, como $\Gamma_1 = 1$ y $\Upsilon_1 = \phi_0^{-1}$, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & {}^{t_b}\Lambda_B & & {}^{t_b}({}^{I_B}\Lambda_B) \arrow[ll, "{}^{t_b}\Phi_0"'] & \\
\Lambda_A \arrow[ur, "\Upsilon_b"] \arrow[drr, "\Upsilon_b"'] & & & & {}^{(t_b\otimes I_B)}\Lambda_B \arrow[ul, "\phi"'] \arrow[dll, "{}^{r}\Lambda_B"] \\
 & & {}^{t_b}\Lambda_B & &
\end{tikzcd}$$

deducimos la primera de las siguientes dos identidades:

$$t_{1_B,b} = r_B^{-1} : t_b \longrightarrow t_b \otimes I_B, \qquad t_{b,1_A} = l_A^{-1} : t_b \longrightarrow I_A \otimes t_b \tag{3.2}$$

y la segunda se deduce de forma similar.

Definición 3.1.1 *El sistema de datos t, que consiste del B-objeto t_b para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, y el C-isomorfismo $t_{c,b} : t_{cb} \to {}^{c}t_b \otimes t_c$ para cada par de morfismos componibles en $\mathcal{B}$, $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$, se denomina un* Conjunto de Factores *(o un* sistema de Schreier*) para el $\mathcal{B}$-torsor $\mathcal{E}$ bajo $\mathbb{G}$.*

El conjunto de factores t para un torsor claramente depende de las elecciones de Λ_A y Υ_b. Sea t' el nuevo cociclo obtenido a partir de segundas elecciones Λ'_A y Υ'_b. Entonces, para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, Λ_A y Λ'_A son dos A-objetos y existe un A-objeto $\varphi_A \in \mathbb{G}$ y un A-isomorfismo en $\mathcal{E}$, $u_A : \Lambda_A \xrightarrow{\sim} {}^{\varphi_A}\Lambda'_A$; por lo tanto, para cualquier morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$, tenemos un único B-isomorfismo en $\mathbb{G}$

$$\varphi_b : t_b \otimes \varphi_B \xrightarrow{\sim} {}^{b}\varphi_A \otimes t'_b$$

haciendo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_A \arrow[r, "\Upsilon_b"] \arrow[dd, "u_A"] & {}^{t_b}\Lambda_B \arrow[r, "{}^{(t_b)}u_B"] & {}^{t_b}({}^{\varphi_B}\Lambda'_B) & \\
 & & & {}^{(t_b\otimes\varphi_B)}\Lambda'_B \arrow[ul, "\phi"'] \arrow[dl, dashed, "{}^{(\varphi_b)}\Lambda'_B"] \\
{}^{(\varphi_A)}\Lambda'_A \arrow[r, "\Gamma_b\Upsilon'_b"] & {}^{({}^b\varphi_A)}({}^{(t'_b)}\Lambda'_B) & {}^{({}^b\varphi_A\otimes t'_b)}\Lambda'_B \arrow[l, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

conmutativo. Es fácil entonces demostrar que para cualquier par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ en $\mathcal{B}$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & t_{cb}\otimes\varphi_C \arrow[r, "\varphi_{cb}"] \arrow[dl, "t_{c,b}\otimes 1"'] & {}^{cb}\varphi_A\otimes t'_{cb} \arrow[dr, "1\otimes t'_{c,b}"] & \\
{}^ct_b\otimes t_c\otimes\varphi_C \arrow[drr, "1\otimes\varphi_c"'] & & & {}^{cb}\varphi_A\otimes{}^ct'_b\otimes t'_c \\
 & & {}^ct_b\otimes{}^c\varphi_B\otimes t'_c \arrow[ur, "{}^c\varphi_b\otimes 1"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

en el que hemos omitido algunos morfismos de asociatividad canónicos (1.9), (1.23), (1.27)..., es conmutativo.

Obsérvese también que para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
I_A\otimes\varphi_A \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, "l"'] & & \varphi_A\otimes I_A \arrow[dl, "r"] \\
 & \varphi_A &
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

es conmutativo.

Definición 3.1.2 *El sistema de datos φ, que consiste en el A-objeto $\varphi_A \in \mathbb{G}$, para cada objeto $A \in \mathcal{B}$, y el B-morfismo $\varphi_b : t_b \otimes \varphi_B \xrightarrow{\sim} {}^b\varphi_A \otimes t'_b$ para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, se denomina* morfismo *(o* coborde*) del conjunto de factores t a t'.*

El morfismo $\varphi : t \to t'$ depende de las elecciones de φ_A y u_A. Sea φ' el nuevo morfismo procedente de una segunda elección de φ'_A y $u'_A : \Lambda_A \to {}^{\varphi'_A}\Lambda'_A$. Entonces, para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, existe un único A-isomorfismo en $\mathbb{G}$

$$v_A : \varphi_A \to \varphi'_A$$

haciendo que el siguiente diagrama en $\mathcal{E}$ sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & {}^{\varphi_A}\Lambda'_A \arrow[dd, dashed, "v_A\Lambda'_A"] \\
\Lambda_A \arrow[ur, "u_A"] \arrow[dr, "u'_A"'] & \\
 & {}^{\varphi'_A}\Lambda'_A
\end{tikzcd}$$

Es fácil ver que para cualquier morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
t_b \otimes \varphi_B \arrow[r, "\varphi_b"] \arrow[d, "1\otimes v_B"] & {}^b\varphi_A \otimes t'_b \arrow[d, "{}^b v_A \otimes 1"] \\
t_b \otimes \varphi'_B \arrow[r, "\varphi'_b"] & {}^b\varphi'_A \otimes t'_b
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

es conmutativo.

Definición 3.1.3 *El sistema $v = (v_A)_{A\in\mathcal{B}}$ que consiste del A-isomorfismo $v_A : \varphi_A \to \varphi'_A$ para cada objeto $A \in \mathcal{B}$, se denomina una* homotopía *entre morfismos de conjuntos de factores, $v : \varphi \to \varphi'$.*

3.1.2 El 2-grupoide de 2-cociclos $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$.

Las observaciones y construcciones de la sección anterior motivan y sugieren las siguientes definiciones.

Definición 3.1.4 *Sea $\mathbb{F}^{\otimes} = (\mathbb{F}^{\otimes}, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$ un pseudodiagrama de grupos categóricos con el tipo de una categoría pequeña $\mathcal{B}$. Un 2-cociclo de $\mathcal{B}$ con coeficientes en $\mathbb{F}^{\otimes}$, $t = (t_b, t_{c,b})$, es un sistema consistente en los siguientes datos:*

- *Un objeto $t_b \in \mathbb{F}_B$, para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$.*
- *Un C-morfismo, $t_{c,b} : t_{cb} \to {}^c t_b \otimes t_c \in \mathbb{F}_C$, para cada par de morfismos componibles en $\mathcal{B}$, $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$.*

que verifican la condición de cociclo*: Para cada tres morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C \xrightarrow{d} D \in \mathcal{B}$, el diagrama en $\mathbb{F}_D$*

$$\begin{tikzcd}
t_{dcb} \arrow[r, "t_{d,cb}"] \arrow[d, "t_{dc,b}"] & {}^d t_{cb} \otimes t_d \arrow[d, "{}^d t_{c,b}\otimes 1"] \\
{}^{dc} t_b \otimes t_{dc} \arrow[r, "1\otimes t_{d,c}"] & {}^{dc} t_b \otimes {}^d t_c \otimes t_d
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

es conmutativo; y la de normalización*:*

$$t_{1_B} = I_B, \quad t_{1_B,b} = r^{-1} : t_b \to t_b \otimes I_B, \quad t_{b,1_A} = l^{-1} : t_b \to I_B \otimes t_b \tag{3.7}$$

Estos 2-cociclos son los objetos de un 2-grupoide, $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$, donde si $t, t' \in \mathbb{Z}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$, un *morfismo* $\varphi : t \to t'$ es un sistema $\varphi = (\varphi_A, \varphi_b)$ consistente de:

- Un A-objeto $\varphi_A \in \mathbb{F}_A$, para cada objeto A de $\mathcal{B}$,

- Un B-isomorfismo

$$\varphi_b : t_b \otimes \varphi_B \longrightarrow {}^b\varphi_A \otimes t'_b,$$

para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$,

de manera que se verifica la condición de hacer conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & t_{cb} \otimes \varphi_C \arrow[rr, "\varphi_{cb}"] \arrow[dl, "t_{c,b}\otimes 1"'] & & {}^{cb}\varphi_A \otimes t'_{cb} \arrow[dr, "1\otimes t'_{c,b}"] & \\ {}^c t_b \otimes t_c \otimes \varphi_C \arrow[drr, "1\otimes\varphi_c"'] & & & & {}^{cb}\varphi_A \otimes {}^c t'_b \otimes t'_c \\ & & {}^c t_b \otimes {}^c\varphi_B \otimes t'_c \arrow[urr, "{}^c\varphi_b\otimes 1"'] & & \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

para cada par de morfismos $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ en $\mathcal{B}$ y

$$\begin{tikzcd} I_A \otimes \varphi_A \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, "l"'] & & \varphi_A \otimes I_A \arrow[dl, "r"] \\ & \varphi_A & \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$

Si $\varphi, \varphi' : t \to t'$ son dos morfismos en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$, una *homotopía* (o *deformación*) $v : \varphi \to \varphi'$ es una colección $v = (v_A)$ consistente en un A-isomorfismo en $\mathbb{F}_A$, $v_A : \varphi_A \to \varphi'_A$, para cada objeto $A \in \mathcal{B}$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} t_b \otimes \varphi_B \arrow[r, "\varphi_b"] \arrow[d, "1\otimes v_B"] & {}^b\varphi_A \otimes t'_b \arrow[d, "{}^b v_A\otimes 1"] \\ t_b \otimes \varphi'_B \arrow[r, "\varphi'_b"] & {}^b\varphi'_A \otimes t'_b \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

es conmutativo para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$.

La composición de dos morfismos en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$, $t \xrightarrow{\varphi} t' \xrightarrow{\varphi'} t''$ está dada por el producto tensor $\varphi \otimes \varphi'$, donde $(\varphi \otimes \varphi')_A = \varphi_A \otimes \varphi'_A$ para cada objeto $A \in \mathcal{B}$, y para cada morfismo en $\mathcal{B}$, $b : A \to B$, $(\varphi \otimes \varphi')_b$ está definido por la composición

$$t_b \otimes \varphi_B \otimes \varphi'_B \xrightarrow{\varphi_b \otimes 1} {}^b\varphi_A \otimes t'_b \otimes \varphi'_B \xrightarrow{1 \otimes \varphi'_b} {}^b\varphi_A \otimes {}^b\varphi'_A \otimes t''_b \xrightarrow{\sim} {}^b(\varphi_A \otimes \varphi'_A) \otimes t''_b$$

La composición vertical de dos homotopías está dada por la composición en $\mathbb{F}$, es decir, $(wv)_A = w_A v_A$ para cada objeto $A \in \mathcal{B}$, y la composición horizontal de homotopías por el producto tensor, $(v \otimes w)_A = v_A \otimes w_A$.

Así definido, es fácil ver que $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ es en realidad un 2-grupoide (débil) que llamaremos el *2-grupoide de 2-cociclos* de la categoría $\mathcal{B}$ con coeficientes en $\mathbb{F}^{\otimes}$.

Ejemplo 3.1.5 *El 2-grupoide de 2-cociclos de Eilenberg-MacLane* $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, M)$. Sea G un grupo y M un G-módulo. Tal como en la sección 1.3.1, M es un diagrama sobre G, de grupos categóricos y tenemos definido el correspondiente 2-grupoide $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, M)$. Analizando directamente la correspondiente definición de 2-cociclo, vemos que un tal $t \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, M)$ consiste precisamente de una aplicación $t : G \times G \to M$, verificando la condición de cociclo ${}^x t_{y,z} + t_{x,yz} = t_{x,y} + t_{xy,z}$, y de normalización $t_{x,1} = 0 = t_{1,x}$.

Un morfismo entre 2-cociclos $d : t \to t'$ es una aplicación $d : G \to M$ tal que $t'_{x,y} + d(xy) = {}^x d(y) + d(x) + t_{x,y}$ y una homotopía $a : d \to d'$ entre morfismos $d, d' : t \to t'$ es un elemento $a \in M$ tal que $d'(x) + a = {}^x a + d(x)$, $x \in G$. La composición de dos morfismos $t \xrightarrow{d} t' \xrightarrow{d'} t''$ es la aplicación $d + d' : G \to M$ definida por $(d + d')(x) = d(x) + d'(x)$ para todo $x \in G$; y las composiciones horizontal y vertical de homotopías vienen dadas por la suma en M.

Ejemplo 3.1.6 *El 2-grupoide de conjuntos de factores de Schreier* $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, H)$. Sea H un grupo. Si consideramos H como una categoría con un único objeto, entonces tiene asociado el grupo categórico de auto-equivalencias, $Eq(H)$, que tiene como conjunto de objetos al grupo $Aut(H)$ y como conjunto de flechas al grupo holomorfo $Hol(H)$. Más exactamente, una flecha $h : f \to g$ es un elemento $h \in H$ con $f = C(h)g$, donde $C(h)$ es el automorfismo interior en H definido por h. La composición es la multiplicación en H. El producto tensor viene dado por

$$(f \xrightarrow{h} g) \otimes (f' \xrightarrow{h'} g') = (ff' \xrightarrow{hg(h')} gg').$$

Ahora, supongamos que tenemos dos grupos H y G, y consideramos el G-diagrama de grupos categóricos que asocia el grupo categórico $(Eq(H), \otimes)$ al único objeto de G, y el homomorfismo identidad en $(Eq(H), \otimes)$ a cada elemento de G; esto es, el correspondiente al G-grupo categórico trivialmente cofibrado $Eq(H) \times G$. Tenemos entonces el correspondiente 2-grupoide de 2-cociclos que denotaremos simplemente por $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, Eq(H))$.

Chequeando la definición, vemos que un 2-cociclo $t \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, Eq(H))$ consiste de un automorfismo $t_x \in Aut(H)$, para cada $x \in G$, y de un elemento $t_{x,y} \in H$ que define una flecha $t_{x,y} : t_{xy} \longrightarrow t_x t_y$ en $Eq(H)$, es decir, con $t_{xy} = C(t_{x,y}) t_x t_y$, para cada $(x, y) \in G^2$, y tal que para cualquier $(x, y, z) \in G^3$, $(t_{x,y} \otimes 1_{t_z}) t_{xy,z} = (1_{t_x} \otimes t_{y,z}) t_{x,yz}$, o equivalentemente que $t_{x,y} \cdot t_{xy,z} = t_x(t_{y,z}) \cdot t_{x,yz}$ y $t_1 = id_H$, $t_{x,1} = 1 = t_{1,x}$, $x \in G$.

Entonces, vemos que los objetos de $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, Eq(H))$ son exactamente los conjuntos de factores de Schreier de extensiones de grupos de G por H.

Ejemplo 3.1.7 *El 2-grupoide de 2-cociclos de Dedecker.*
Sea G un grupo, $\Phi = (H, \pi, \varphi, \rho)$ un módulo cruzado y $\mathbb{G}(\Phi)$ el grupo categórico estricto definido por Φ, tal como describimos en el ejemplo 1.2.5. Denotemos también por $\mathbb{G}(\Phi)$ al funtor constante $G \longrightarrow GpCAT$ que asigna precisamente $\mathbb{G}(\Phi)$ al único objeto de G y la identidad a todo elemento de G. Entonces, un objeto de $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, \mathbb{G}(\Phi))$ consiste de dos aplicaciones $G \to \pi$, $x \mapsto t_x$, y $G^2 \to H$, $(x, y) \mapsto t_{x,y}$, tales que:

i) $t_{xy} = \rho(t_{x,y}) \cdot t_x \cdot t_y$,

ii) ${}^{t_x}t_{y,z} \cdot t_{x,yz} = t_{x,y} \cdot t_{xy,z}$,

iii) $t_{x,1} = 1 = t_{1,x}$, $\quad t_1 = 1$;

esto es, $t = (t_x, t_{x,y})$ representa exactamente un 2-cociclo de Dedecker [17].

3.1.3 Los grupos de cohomología $\mathbb{H}^i$, $i = 0, 1, 2$.

En esta sección introducimos los grupos de cohomología de una categoría pequeña con coeficientes en un pseudodiagrama de grupos categóricos, o equivalentemente en un grupo categórico cofibrado, después de la equivalencia del teorema 1.2.21, mediante los invariantes homotópicos del 2-grupoide de 2-cociclos $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$.

Recordemos que si $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ es un 2-grupoide, $\pi_0(\underline{\underline{\mathcal{A}}})$ denota su conjunto de componentes conexas; para cada objeto $* \in \mathcal{A}$, $\pi_1(\underline{\underline{\mathcal{A}}}, *)$ es el grupo de clases de homotopía (deformaciones) de automorfismos en $*$, y $\pi_2(\underline{\underline{\mathcal{A}}}, *)$ es el grupo (abeliano) de homotopías de 1_* en sí misma.

Por ejemplo, si G es un grupo, M un G-módulo y $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, M)$ es el 2-grupoide de 2-cociclos de Eilenberg-MacLane de G con coeficientes en M, Ejemplo 3.1.5, entonces $\pi_0(\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, M)) = H^2(G, M)$, el segundo grupo de cohomología de G con coeficientes en M, $\pi_1(\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, M), 0) = H^1(G, M)$ y $\pi_2(\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, M), 0) = H^0(G, M)$, donde 0 denota el 2-cociclo trivial de G en M.

Definición 3.1.8 *Si $\mathbb{F}^{\otimes} = (\mathbb{F}^{\otimes}, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$, es un pseudodiagrama de grupos categóricos con el tipo de una categoría pequeña $\mathcal{B}$, se definen los grupos de cohomología $\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ por*

$$\begin{array}{l} \mathbb{H}^0(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) = \pi_2(\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}), tr), \\ \mathbb{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) = \pi_1(\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}), tr) \quad\quad y \\ \mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) = \pi_0(\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})). \end{array} \tag{3.11}$$

donde tr es el 2-cociclo trivial (que se caracteriza por ser un conjunto de factores para el $\mathcal{B}$-torsor trivial sobre $\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$), y que está definido por $tr_b = I_B$, para cada morfismo $A \xrightarrow{b} B$ de $\mathcal{B}$ y $tr_{c,b} = l_{I_C}^{-1} = r_{I_C}^{-1} : I_C \xrightarrow{\sim} I_C \otimes I_C$ para cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ en $\mathcal{B}$.

Estos grupos de cohomología tienen un carácter funtorial. Observemos que si $T : \mathbb{F}^{\otimes} \to \mathbb{G}^{\otimes}$ es un homomorfismo entre dos pseudodiagramas de grupos categóricos $\mathbb{F}^{\otimes}, \mathbb{G}^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$, éste induce un morfismo de 2-grupoides

$$T_* : \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$$

que lleva un 2-cociclo $t = (t_b, t_{c,b} : t_{cb} \to {}^c t_b \otimes t_c) \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ al 2-cociclo $T_*(t) = (T(t_b), T(t)_{c,b})$ donde, para cualquier par de morfismos componibles,

$A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ en $\mathcal{B}$, $T(t)_{c,b}$ es la composición

$$T(t_{cb}) \overset{T(t_{c,b})}{\longrightarrow} T({}^c t_b \otimes t_c) \overset{\sim}{\longrightarrow} {}^c T(t_b) \otimes T(t_c).$$

Si $\varphi = (\varphi_A, \varphi_b : t_b \otimes \varphi_B \to {}^b\varphi_A \otimes t'_b) : t \longrightarrow t'$ es un morfismo en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$, entonces $T_*(\varphi) = (T(\varphi_B), T(\varphi)_b) : T_*(t) \longrightarrow T_*(t')$ donde para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, $T(\varphi)_b$ es la composición

$$T(t_b) \otimes T(\varphi_B) \overset{\sim}{\longrightarrow} T(t_b \otimes \varphi_B) \overset{T(\varphi_b)}{\longrightarrow} T({}^b\varphi_A \otimes t'_b) \overset{\sim}{\longrightarrow} {}^bT(\varphi_A) \otimes T(t'_b)$$

y una homotopía $v : \varphi \to \varphi'$, $v = (v_A : \varphi_A \to \varphi'_A)$; tiene como imagen $T_*(v) = (T(v_A) : T(\varphi_A) \to T(\varphi'_A))$.

Todo homomorfismo de 2-grupoides induce los correspondientes en los grupos de homotopía y por tanto tendremos morfismos

$$\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \longrightarrow \mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes}) \qquad i = 0, 1, 2.$$

(notemos que existe un único morfismo en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, $\phi_0 : T_*(tr) \overset{\sim}{\to} tr$).

Observemos a continuación que los grupos de cohomología $\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ son invariantes del tipo de homotopía de $\mathbb{F}^{\otimes}$. Recordemos para ello que un morfismo de 2-grupoides $\varphi : \underline{\underline{A}} \to \underline{\underline{A}}'$ es una equivalencia, [38], si se verifican las tres condiciones siguientes:

i) Para cualquier objeto A' de $\underline{\underline{A}}'$ existe un objeto A de $\underline{\underline{A}}$ y una flecha $\varphi(A) \to A'$.

ii) Para cualesquiera objetos A y B de $\underline{\underline{A}}$ y cada flecha $f' : \varphi(A) \to \varphi(B)$ existe otra flecha $f : A \to B$ y una homotopía $\varphi(f) \to f'$.

iii) Para cualesquiera morfismos $f, g : A \to B$ en $\underline{\underline{A}}$, φ induce una biyección entre homotopías $f \to g$ en $\underline{\underline{A}}$ y homotopías $\varphi(f) \to \varphi(g)$ en $\underline{\underline{A}}'$.

Un morfismo $\varphi : \underline{\underline{A}} \to \underline{\underline{A}}'$, de 2-grupoides, es una equivalencia si, y sólo si, φ induce una biyección $\pi_0(\underline{\underline{A}}) \to \pi_0(\underline{\underline{A}}')$, y para cualquier objeto A de $\underline{\underline{A}}$, isomorfismos de grupos $\pi_i(\underline{\underline{A}}, A) \to \pi_i(\underline{\underline{A}}', \varphi(A))$, para $i = 1, 2$, [38].

Proposición 3.1.9 *Si $T : \mathbb{F}^{\otimes} \to \mathbb{G}^{\otimes}$ es una equivalencia entre pseudodiagramas de grupos categóricos $\mathbb{F}^{\otimes}, \mathbb{G}^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$, entonces el morfismo inducido $T_* : \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \to \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$ es una equivalencia de 2-grupoides. Por tanto los inducidos $T_* : \mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \to \mathbb{H}^i(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$ son isomorfismos.*

Demostración: En efecto, sea $s = (s_b, s_{c,b})$ un objeto de $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, esto es, para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, s_b es un objeto de $\mathbb{G}_B$ y para cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ en $\mathcal{B}$, $s_{c,b} : s_{cb} \to {}^c s_b \otimes s_c$ es un C-morfismo en $\mathbb{G}_C$. Por ser T_B un funtor denso, existirán un B-objeto $t_b \in \mathbb{F}_B$ y un B-isomorfismo $\phi_b : T(t_b) \to s_b$. Además, para cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ en $\mathcal{B}$, elegimos $t_{c,b} : t_{cb} \to {}^c t_b \otimes t_c$, como el único morfismo en $\mathbb{F}_C$ que hace conmutar el diagrama en $\mathbb{G}_C$

$$\begin{tikzcd}
s_{cb} \arrow[rr, "s_{c,b}"] & & {}^c s_b \otimes s_c \\
T(t_{cb}) \arrow[u, "\phi_{cb}"] \arrow[dr, dashed, "T(t_{c,b})"'] & & {}^c T(t_b) \otimes T(t_c) \arrow[u, "{}^c\phi_b \otimes \phi_c"'] \\
& T({}^c t_b \otimes t_c) \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

(dicho morfismo existe y es único por ser T_C un funtor fiel y pleno). Así construido $t = (t_b, t_{c,b}) \in \mathbb{Z}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ y verifica que $\phi = (I_A, l\phi_b r) : T_*(t) \xrightarrow{\sim} s$.

Observemos ahora que cada morfismo $\varphi' : T_*(t) \to T_*(t')$ en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, es homotópico a $T_*(\varphi)$ para $\varphi : t \to t'$ un morfismo en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$. Para esto, sea $\varphi' = (\varphi'_A, \varphi'_b)$, es decir, φ'_A un A-objeto de $\mathbb{G}_A$ para cada objeto A de $\mathcal{B}$, y $\varphi'_b : T(t_b) \otimes \varphi'_B \to {}^b\varphi'_A \otimes T(t'_b)$ un B-morfismo en $\mathbb{G}_B$, para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$. Por la densidad del funtor T_A, existen un A-objeto de $\mathbb{F}_A$, φ_A, y un A-isomorfismo $u_A : T(\varphi_A) \to \varphi'_A$. Además, para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, elegimos $\varphi_b : t_b \otimes \varphi_B \to {}^b\varphi_A \otimes t'_b$ como el único B-morfismo en $\mathbb{F}_B$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(t_b) \otimes \varphi'_B \arrow[r, "\varphi'_b"] & {}^b\varphi'_A \otimes T(t'_b) \\
T(t_b) \otimes T(\varphi_B) \arrow[u, "1 \otimes u_B"] \arrow[d, "\sim"] & {}^bT(\varphi_A) \otimes T(t'_b) \arrow[u, "{}^b u_A \otimes 1"'] \arrow[d, "\sim"'] \\
T(t_b \otimes \varphi_B) \arrow[r, dashed, "T(\varphi_b)"'] & T({}^b\varphi_A \otimes t'_b)
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Así definido, $\varphi = (\varphi_A, \varphi_b) : t \to t'$ es un morfismo de

2-cociclos y se verifica que $u = (u_A : T(\varphi_A) \to \varphi'_A)$ es una homotopía entre $T(\varphi)$ y φ'.

Por último, observemos que se induce una biyección entre homotopías $v : \varphi \to \varphi'$ en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ y homotopías $T(\varphi) \to T(\varphi')$ en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$. Si $v' : T(\varphi) \to T(\varphi')$ es una homotopía en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, esto es, para cada objeto A de $\mathcal{B}$, $v'_A : T(\varphi_A) \to T(\varphi'_A)$, por ser T_A fiel y pleno, existirá un único morfismo $v_A : \varphi_A \to \varphi'_A$ para cada objeto A de $\mathcal{B}$ de manera que $T(v_A) = v'_A$. Con esto se obtiene que $v = (v_A : \varphi_A \to \varphi'_A)$ es la única homotopía que verifica que $T_*(v) = v'$. ■

3.1.4 $\mathbb{H}^i$ y torsores. El teorema de clasificación.

Probamos aquí uno de los principales resultados de esta memoria.

Teorema 3.1.10 *Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña.*

i) Si $\mathbb{F}^{\otimes} = (\mathbb{F}^{\otimes}, \psi) : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$ es un pseudodiagrama de grupos categóricos, existe una equivalencia de 2-grupoides

$$\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}\textstyle\int\mathcal{B})$$

donde $\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$ es el $\mathcal{B}$-grupo categórico definido por $\mathbb{F}^{\otimes}$ en la sección 1.2.5

ii) Si $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es un $\mathcal{B}$-grupo categórico, existe una equivalencia de 2-grupoides

$$\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes}) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$$

donde $\mathbb{G}^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$ es el pseudodiagrama de grupos categóricos definido por $\mathbb{G}$ en la sección 1.2.4

Demostración: Por el teorema 1.2.21 y la proposición 3.1.9, *i)* y *ii)* son equivalentes. Probaremos *ii)*, donde suponemos que el pseudodiagrama de grupos categóricos $\mathbb{G}^{\otimes}$ se ha construido a partir del sistema de imágenes directas $(\Gamma_b(X) : X \to {}^bX)$ en $\mathbb{G}$.

Sea $t \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$ un 2-cociclo. Entonces, t define un pseudodiagrama de categorías pequeñas $\mathcal{B} \to CAT$, para el cual: la categoría asociada a cada objeto $A \in \mathcal{B}$ es $\mathbb{G}_A$, la categoría fibra de $\mathbb{G}$ sobre A; para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, el funtor asociado es $b_* = {}^{b}(-) \otimes t_b : \mathbb{G}_A \to \mathbb{G}_B$; y para cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$, la equivalencia natural $\alpha_{c,b} : (cb)_* \to c_* b_*$ viene dada por los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
{}^{cb}X \otimes t_{cb} \arrow[rr, "\alpha_{c,b}(X)"] \arrow[dr, "1\otimes t_{c,b}"'] & & {}^{c}({}^{b}X \otimes t_b) \otimes t_c \\
& {}^{cb}X \otimes {}^{c}t_b \otimes t_c \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

para $X \in \mathbb{G}_A$.

Entonces t (véase el capítulo primero de esta memoria) tiene una cofibración asociada $\mathcal{P}_t : \mathcal{E}_t \to \mathcal{B}$, que se puede describir de la siguiente forma: los objetos de $\mathcal{E}_t$ son pares (X, A) con $A \in Ob(\mathcal{B})$ y X un A-objeto en $\mathbb{G}$; las flechas son pares $(u, b) : (X, A) \to (Y, B)$, donde $b : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{B}$ y $u : {}^{b}X \otimes t_b \to Y$ es un B-morfismo en $\mathbb{G}$. La composición de dos morfismos $(X, A) \xrightarrow{(u,b)} (Y, B) \xrightarrow{(v,c)} (Z, C)$ está definida como $(v, c) \cdot (u, b) = (v \circ u, cb)$, donde $cb : A \to C$ es la composición en $\mathcal{B}$ y $v \circ u : {}^{cb}X \otimes t_{cb} \to Z$ es el único C-morfismo en $\mathbb{G}$, que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{}^{cb}X \otimes t_{cb} \arrow[rr, dashed, "v\circ u"] \arrow[d, "1\otimes t_{c,b}"'] & & Z \\
{}^{cb}X \otimes {}^{c}t_b \otimes t_c \arrow[dr, "\sim"'] & & {}^{c}Y \otimes t_c \arrow[u, "v"'] \\
& {}^{c}({}^{b}X \otimes t_b) \otimes t_c \arrow[ur, "{}^{c}u\otimes 1"'] &
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Esta composición es asociativa y unitaria gracias a las condiciones de 2-cociclo y de normalización de t. La cofibración $\mathcal{P}_t : \mathcal{E}_t \to \mathcal{B}$ está definida por $\mathcal{P}_t(u, b) = b$. Obsérvese que cualquier morfismo en $\mathcal{E}_t$ es cocartesiano pues cualquier categoría fibra $\mathbb{G}_A$ es un grupoide.

Además, existe una $\mathcal{B}$-acción de $\mathbb{G}$ sobre $\mathcal{E}_t$ definida por el producto tensor a la izquierda, es decir, tomando ${}^{Z}(X, A) = (Z \otimes X, A)$ para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$ y A-objetos $Z, X \in \mathbb{G}$, y si $(u, b) : (X, A) \to (Y, B)$ es cualquier morfismo en $\mathcal{E}_t$ y $v : Z \to Z'$ es cualquier b-morfismo en $\mathbb{G}$, entonces se define ${}^{v}(u, b) = ({}^{v}u, b) : (Z \otimes X, A) \to (Z' \otimes Y, B)$, donde ${}^{v}u$ es el morfismo

${}^{v}u : {}^{b}(Z \otimes X) \otimes t_b \to Z' \otimes Y$ definido por la composición

$${}^{b}(Z \otimes X) \otimes t_b \xrightarrow{\sim} {}^{b}Z \otimes {}^{b}X \otimes t_b \xrightarrow{1 \otimes u} {}^{b}Z \otimes Y \xrightarrow{\tilde{v} \otimes 1} Z' \otimes Y,$$

siendo $\tilde{v} : {}^{b}Z \to Z'$ el único B-isomorfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "\Gamma_b(Z)"'] & Z' \arrow[d, dashed, "\tilde{v}"] \\
& {}^{b}Z
\end{tikzcd}$$

Las $\mathcal{B}$-equivalencias naturales asociadas $\phi : {}^{(X \otimes Y)}(Z, A) \xrightarrow{\sim} {}^{X}({}^{Y}(Z, A))$ y $\phi_0 : {}^{I_A}(X, A) \xrightarrow{\sim} (X, A)$ están definidas por los isomorfismos de asociatividad y unidad de $\mathbb{G}$.

Si A es un objeto de $\mathcal{B}$, y (X, A) es cualquier A-objeto en $\mathcal{E}_t$, se tienen los A-isomorfismos $(r, 1_A) : {}^{X}(I_A, A) \to (X, A)$, y es inmediatamente evidente que para cualesquiera A-objetos $X, Y \in \mathbb{G}$, $Hom_A(X, Y) \xrightarrow{\sim} Hom_A({}^{X}(I_A, A), {}^{Y}(I_A, A))$. Entonces, el funtor $\rho_{(I_A, A)} : \mathbb{G}_A \to (\mathcal{E}_t)_A$, $X \mapsto {}^{X}(I_A, A)$, es una equivalencia. Así que, gracias a la Proposición 2.1.11, *iv*), $\mathcal{E}_t$ es un $\mathcal{B}$-torsor bajo el $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G}$.

Si t y t' son 2-cociclos, cada morfismo de 2-cociclos $\varphi : t \to t'$ define un $\mathcal{B}$-funtor $\mathbb{G}$-equivariante $\mathcal{E}_\varphi : \mathcal{E}_t \to \mathcal{E}_{t'}$ que lleva un objeto $(X, A) \in \mathcal{E}_t$ en $(X \otimes \varphi_A, A) \in \mathcal{E}_{t'}$ y un morfismo $(u, b) : (X, A) \to (Y, B)$ en $\mathcal{E}_t$ en el morfismo $(\mathcal{E}_\varphi(u), b) : (X \otimes \varphi_A, A) \longrightarrow (Y \otimes \varphi_B, B)$ de $\mathcal{E}_{t'}$, donde el B-morfismo $\mathcal{E}_\varphi(u)$ es el único que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{}^{b}(X \otimes \varphi_A) \otimes t'_b \arrow[r, dashed, "\mathcal{E}_\varphi(u)"] \arrow[d, "\sim"'] & Y \otimes \varphi_B \\
{}^{b}X \otimes {}^{b}\varphi_A \otimes t'_b & {}^{b}X \otimes t_b \otimes \varphi_B. \arrow[l, "1 \otimes \varphi_b"'] \arrow[u, "u \otimes 1"']
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que las $\mathcal{B}$-equivalencias naturales $\mathcal{E}_\varphi({}^{X}(Y, A)) \xrightarrow{\sim} {}^{X}\mathcal{E}_\varphi(Y, A)$ están obviamente definidas por los isomorfismos de asociatividad y unidad de $\mathbb{G}$.

Además, si $v : \varphi \to \varphi'$ es una homotopía en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$ entre dos morfismos $\varphi, \varphi' : t \to t'$, entonces define de forma natural una homotopía en $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$, $\mathcal{E}_v : \mathcal{E}_\varphi \to \mathcal{E}_{\varphi'}$, haciendo, para cada objeto (X, A),

$$\mathcal{E}_v(X, A) = (X \otimes \varphi_A \otimes I_A \xrightarrow{r} X \otimes \varphi_A \xrightarrow{1 \otimes v_A} X \otimes \varphi'_A, 1_A) : \mathcal{E}_\varphi(X, A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\varphi'}(X, A).$$

Así definidas, es evidente que las tres funciones $t \mapsto \mathcal{E}_t$, $\varphi \mapsto \mathcal{E}_\varphi$ y $v \mapsto \mathcal{E}_v$, definen un morfismo de 2-grupoides $\mathcal{E} : \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes}) \longrightarrow \underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$, que aseguramos establece la equivalencia requerida.

Para ver esto, supongamos que $\mathcal{E}$ es un torsor sobre $\mathcal{B}$ bajo $\mathbb{G}$, y sea t un conjunto de factores de $\mathcal{E}$, después de elegir un A-objeto $\Lambda_A \in \mathcal{E}$ para cada objeto $A \in \mathcal{B}$ y un b-morfismo $\Upsilon_b : \Lambda_A \to {}^{t_b}\Lambda_B$ para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$. Entonces existe un morfismo de torsores $T : \mathcal{E}_t \to \mathcal{E}$ definido por $T(X, A) = {}^X\Lambda_A$, para cada objeto $(X, A) \in \mathcal{E}_t$; y para cada morfismo $(u, b) : (X, A) \to (Y, B)$ en $\mathcal{E}_t$, $T(u, b) : {}^X\Lambda_A \to {}^Y\Lambda_B$ se define como la composición en $\mathcal{E}$

$$ {}^X\Lambda_A \xrightarrow{\Gamma_b(X)\Upsilon_b} {}^{{}^bX}({}^{t_b}\Lambda_B) \xrightarrow{\sim} {}^{({}^bX \otimes t_b)}\Lambda_B \xrightarrow{u\Lambda_B} {}^Y\Lambda_B. $$

Ahora, observemos que cualquier morfismo de torsores $T : \mathcal{E}_t \to \mathcal{E}_{t'}$ es homotópico a un morfismo de torsores en la imagen del morfismo $\mathcal{E} : \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes}) \to \underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$. Para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, supongamos que $T(I_A, A) = (\varphi_A, A)$, para un A-objeto particular $\varphi_A \in \mathbb{G}$. Entonces, cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$ define un b-morfismo en $\mathcal{E}_{t'}$ por la composición

$$ (\varphi_A, A) = T(I_A, A) \overset{T(l,b)}{\longrightarrow} T(t_b, B) \overset{\sim}{\to} T({}^{t_b}(I_B, B)) \overset{\sim}{\to} {}^{t_b}(\varphi_B, B) = (t_b \otimes \varphi_B, B), $$

que se escribe como un par $(\varphi_b^{-1}, b) : (\varphi_A, A) \to (t_b \otimes \varphi_B, B)$ para un único B-morfismo $\varphi_b^{-1} : {}^b\varphi_A \otimes t'_b \to t_b \otimes \varphi_B$. De esta forma, encontramos un morfismo de 2-cociclos $\varphi = (\varphi_A, \varphi_b) : t \to t'$, que induce un morfismo de torsores $\mathcal{E}_\varphi : \mathcal{E}_t \to \mathcal{E}_{t'}$ homotópico al morfismo de torsores dado $T : \mathcal{E}_t \to \mathcal{E}_{t'}$, por la homotopía $T \to \mathcal{E}_\varphi$, definida para cada objeto $(X, A) \in \mathcal{E}_t$ por el morfismo composición

$$ T(X, A) \xrightarrow{\sim} T(X \otimes I_A, A) \xrightarrow{\sim} {}^XT(I_A, A) = \mathcal{E}_\varphi(X, A). $$

Finalmente, vemos que para cualesquiera dos morfismos $\varphi, \varphi' : t \to t'$ en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, $\mathcal{E}$ induce una biyección entre homotopías $v : \varphi \to \varphi'$ en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, y homotopías $\mathcal{E}_\varphi \to \mathcal{E}_{\varphi'}$ en $\underline{\underline{Tors}}(\mathcal{B}, \mathbb{G})$. Dada una homotopía $h : \mathcal{E}_\varphi \to \mathcal{E}_{\varphi'}$, notemos $h_{(X,A)} = (v_{(X,A)}, 1_A) : (X \otimes \varphi_A, A) \longrightarrow (X \otimes \varphi'_A, A)$ para cualquier objeto $(X, A) \in \mathcal{E}_t$. Entonces tenemos una homotopía $v = (v_A : \varphi_A \to \varphi'_A)_A$

de φ a φ', la única tal que $\mathcal{E}_v = h$, donde para cada objeto $A \in \mathcal{B}$, v_A está determinada por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} X \otimes \varphi_A \otimes I_A \arrow[r, "v_{(X,A)}"] \arrow[d, "1\otimes r"'] & X \otimes \varphi'_A \\ X \otimes \varphi_A \arrow[ur, dashed, "1\otimes v_A"'] & \end{tikzcd}$$

■

Como consecuencia directa del teorema 3.1.10 y la proposición 2.1.17, obtenemos el siguiente

Teorema 3.1.11 *Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña.*

i) Si $\mathbb{F}^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$ es un pseudodiagrama de grupos categóricos, se tienen isomorfismos

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) & \cong & Tors[\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}\textstyle\int\mathcal{B}] \\ \mathbb{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) & \cong & \Gamma\big[\mathbb{F}^{\otimes}\textstyle\int\mathcal{B}/\mathcal{B}\big] \\ \mathbb{H}^0(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) & \cong & Nat_{\mathcal{B}}(I, I) \end{array}$$

donde $\Gamma\big[\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}/\mathcal{B}\big]$ es el grupo de clases de $\mathcal{B}$-equivalencias de $\mathcal{B}$-funtores $\mathcal{B} \to \mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$, y $Nat_{\mathcal{B}}(I, I)$ es el grupo de clases de $\mathcal{B}$-equivalencias naturales del $\mathcal{B}$-funtor unidad $I : \mathcal{B} \to \mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$ en sí mismo.

ii) Si $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es cualquier $\mathcal{B}$-grupo categórico, se tienen isomorfismos

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes}) & \cong & Tors[\mathcal{B}, \mathbb{G}] \\ \mathbb{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes}) & \cong & \Gamma\big[\mathbb{G}/\mathcal{B}\big] \\ \mathbb{H}^0(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes}) & \cong & Nat_{\mathcal{B}}(I, I) \end{array}$$

3.1.5 Derivaciones y elementos invariantes.

Como en la usual cohomología de grupos, los grupos $\mathbb{H}^i$, $i = 0, 1$, pueden ser descritos en términos de derivaciones y elementos invariantes.

Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y $\mathbb{F}^{\otimes} = (\mathbb{F}^{\otimes}, \psi) : \mathcal{B} \to GpCAT$ un pseudodiagrama de grupos categóricos definido sobre $\mathcal{B}$. Por definición, el grupo de cohomología $\mathbb{H}^1(\mathcal{B},\mathbb{F}^{\otimes})$ consiste entonces de clases de homotopía de automorfismos en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B},\mathbb{F}^{\otimes})$ del 2-cociclo trivial tr. Ahora bien, un automorfismo $\varphi : tr \to tr$ consiste de un A-objeto $\varphi_A \in \mathbb{F}_A$, para cada objeto $A \in \mathcal{B}$, y un B-isomorfismo $\varphi_b : I_B \otimes \varphi_B \longrightarrow {}^b\varphi_A \otimes I_B \in \mathbb{F}_B$ para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$; como tenemos los B-isomorfismos canónicos $I_B \otimes \varphi_B \xrightarrow{l} \varphi_B$ y ${}^b\varphi_A \otimes I_B \xrightarrow{r} {}^b\varphi_A$, es indudable que dar la anterior φ_b es equivalente a presentar el B-morfismo $\mathbf{d}_b : \varphi_B \to {}^b\varphi_A$, $\mathbf{d}_b = r\varphi_b l^{-1}$. Si hacemos $\mathbf{d}_A = \varphi_A$ para cada $A \in \mathcal{B}$, y reescribimos las condiciones de morfismo de φ (conmutatividad de (3.8), y condición de normalización (3.9)) en términos de $\mathbf{d}$, éstas aseguran que para cualquier par de morfismos componibles en $\mathcal{B}$, $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{d}_C \arrow[r, "\mathbf{d}_{cb}"] \arrow[d, "\mathbf{d}_c"'] & {}^{cb}\mathbf{d}_A \\ {}^c\mathbf{d}_B \arrow[r, "{}^c\mathbf{d}_b"] & {}^c({}^b\mathbf{d}_A) \arrow[u, "\psi"', "\sim"] \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

es conmutativo (es decir, $\mathbf{d}_{cb} = {}^c\mathbf{d}_b\mathbf{d}_c$ salvo isomorfismos canónicos), y además

$$\mathbf{d}_{1_A} = id_{\mathbf{d}_A} \tag{3.13}$$

para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$.

Supongamos ahora que $v : \varphi \to \varphi'$, es una homotopía entre dos automorfismos en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B},\mathbb{F}^{\otimes})$ del cociclo trivial tr. Tomemos $\mathbf{d}_b = r\varphi_b l^{-1}$ y $\mathbf{d}'_b = r\varphi'_b l^{-1}$ como antes, para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$. Entonces, la condición de homotopía por la que los cuadrados (3.10) son conmutativos, en términos de $\mathbf{d}$ y $\mathbf{d}'$, se traduce en que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{d}_B \arrow[r, "\mathbf{d}_b"] \arrow[d, "v_B"'] & {}^b\mathbf{d}_A \arrow[d, "{}^bv_A"'] \\ \mathbf{d}'_B \arrow[r, "\mathbf{d}'_b"] & {}^b\mathbf{d}'_B \end{tikzcd}$$

es conmutativo para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$; es decir, se verifica que $\mathbf{d}'_b \cdot v_B = {}^bv_A \cdot \mathbf{d}_b$.

Estos hechos sugieren las siguientes definiciones.

Definición 3.1.12 *Una* derivación, *o un* morfismo cruzado, *de $\mathcal{B}$ a $\mathbb{F}^{\otimes}$ es un sistema de datos $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_A, \mathbf{d}_b)$, que consiste de :*

- *Para todo objeto $A \in \mathcal{B}$, un A-objeto $\mathbf{d}_A \in \mathbb{F}_A$.*

- *Para todo morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, un B-isomorfismo en el grupo categórico $\mathbb{F}_B$, $\mathbf{d}_b : \mathbf{d}_B \to {}^b\mathbf{d}_A$ que debe verificar la condición de derivación por la cual el diagrama (3.12) debe ser conmutativo y la condición de normalización (3.13).*

Definición 3.1.13 *Si $\mathbf{d}, \mathbf{d}' : \mathcal{B} \to \mathbb{F}^{\otimes}$ son dos derivaciones, una* homotopía *$v : \mathbf{d} \to \mathbf{d}'$, es una colección que consiste de un A-isomorfismo $v_A : \mathbf{d}_A \to \mathbf{d}'_A$ para cada objeto $A \in \mathcal{B}$, tal que $\mathbf{d}'_b v_B = {}^b v_A \mathbf{d}_b$ para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$.*

De acuerdo con las anteriores observaciones, existe una correspondencia uno a uno entre los automorfismos del 2-cociclo trivial y el conjunto de todas las derivaciones de $\mathcal{B}$ a $\mathbb{F}^{\otimes}$, que denotaremos como $Der(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$. Además, las homotopías entre dos automorfismos del 2-cociclo trivial están en correspondencia biyectiva con las homotopías entre las correspondientes derivaciones. Denotemos por $Der[\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}]$ al grupo de clases de homotopía de todas las derivaciones de $\mathcal{B}$ a $\mathbb{F}^{\otimes}$. Hagamos notar que $Der[\mathcal{B}, \mathbb{G}]$ tiene una estructura de grupo inducida por el producto tensor de derivaciones, $\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}'$; donde $(\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}')_A = \mathbf{d}_A \otimes \mathbf{d}'_A$ para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, y para cualquier $b : A \to B$, $(\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}')_b$ es la composición

$$\mathbf{d}_B \otimes \mathbf{d}'_B \xrightarrow{\mathbf{d}_b \otimes \mathbf{d}'_b} {}^b\mathbf{d}_A \otimes {}^b\mathbf{d}'_A \xrightarrow{\sim} {}^b(\mathbf{d}_A \otimes \mathbf{d}'_A).$$

Las *Derivaciones Interiores* de $\mathcal{B}$ a $\mathbb{F}^{\otimes}$ son de la misma forma, aquellas correspondientes a los automorfismos del 2-cociclo trivial que son homotópicas al automorfismo identidad, 1_{tr}, que consiste del A-objeto I_A, para cada $A \in Ob(\mathcal{B})$, y el B-morfismo $id : I_B \otimes I_B \to I_B \otimes I_B$ para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$. Obsérvese que la derivación correspondiente a 1_{tr}, $\mathbf{d}^{tr}$, es aquella para la cual $\mathbf{d}^{tr}_A = I_A$ y $\mathbf{d}^{tr}_b = id_{I_B}$, y por tanto una derivación $\mathbf{d} : \mathcal{B} \to \mathbb{F}^{\otimes}$ es una derivación interior si, y sólo si, para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$ se tiene

$$\mathbf{d}_b = {}^b v_A \cdot v_B^{-1}$$

para una colección v que consiste de un A-isomorfismo $v_A : \mathbf{d}_A \to I_A$ para cada objeto $A \in \mathcal{B}$.

En particular, observamos que homotopías de la derivación trivial en sí misma están en biyección con aquellas colecciones $v = (v_A : I_A \longrightarrow I_A)$ que consisten de un A-automorfismo $v_A : I_A \longrightarrow I_A$, para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, tal que ${}^b v_A = v_B$ para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$. A un automorfismo v en estas condiciones se le denomina un *elemento $\mathcal{B}$-invariante* de $\mathbb{F}^{\otimes}$, y $(\mathbb{F}^{\otimes})^{\mathcal{B}}$ denotará el grupo abeliano de todos los elementos $\mathcal{B}$-invariantes de $\mathbb{G}$ (con la multiplicación por composición $vw = (v_A w_A)$).

En resumen, del Teorema 3.1.11 y las anteriores observaciones se obtiene lo siguiente:

Teorema 3.1.14 *Si $\mathcal{B}$ es una categoría pequeña y $\mathbb{F}^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$ es un pseudodiagrama de grupos categóricos, se tienen isomorfismos:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) & \cong & Der[\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}] \\ \mathbb{H}^0(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) & \cong & (\mathbb{F}^{\otimes})^{\mathcal{B}} \end{array}$$

3.2 Algunos ejemplos de cohomología.

3.2.1 Cohomología de André-Watts.

Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y $M : \mathcal{B} \to Ab$ un $\mathcal{B}$-módulo a la izquierda. Entonces, tal como se comento en el ejemplo 1.3.1, M es en particular un diagrama de grupos categóricos (con un solo objeto) y tendremos definido el 2-grupoide de 2-cociclos $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, M)$ y los correspondientes grupos de cohomología $\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, M)$, $i = 0, 1, 2$.

Ahora, comprobando las definiciones vemos que un 2-cociclo $t \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, M)$ consiste de un elemento $t_{c,b} \in M_C$ para cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$ en $\mathcal{B}$, tal que para cualesquiera tres morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C \xrightarrow{d} D$, se verifica ${}^d t_{c,b} + t_{d,cb} = t_{d,c} + t_{dc,b}$; un morfismo de 2-cociclos $\varphi : t \to t'$ consiste de un elemento $\varphi_b \in M_B$, para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, verificando $t'_{c,b} + \varphi_{cb} =^c \varphi_b + \varphi_c + t_{c,b}$ para cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$; y que una homotopía entre dos morfismos $v : \varphi \to \varphi'$ consiste de un elemento $v_A \in M_A$, para cada objeto $A \in \mathcal{B}$, verificando $\varphi'_b + v_B = {}^b v_A + \varphi_b$ para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$.

Entonces, concluimos que $\mathbb{H}^i(\mathcal{B}, M) = H^i(\mathcal{B}, M)$, los grupos usuales de cohomología de $\mathcal{B}$ con coeficientes en el $\mathcal{B}$-módulo a la izquierda $M : \mathcal{B} \to Ab$, usados en [41], [1], [51] y [40].

En particular, el Teorema 3.1.10 asegura que $H^2(\mathcal{B}, M) \cong Tors[\mathcal{B}, M \rtimes \mathcal{B}]$, es decir, los $\mathcal{B}$-torsores bajo $M \rtimes \mathcal{B}$ están clasificados por $H^2(\mathcal{B}, M)$. Además, vimos en la sección 2.2.1 que $Tors[\mathcal{B}, M \rtimes \mathcal{B}] \cong Lin[\mathcal{B}, M]$, el conjunto de clases de equivalencia de extensiones lineales de $\mathcal{B}$ por M, con lo que se obtiene el isomorfismo $H^2(\mathcal{B}, M) \cong Lin[\mathcal{B}, M]$ y tenemos el teorema de clasificación de Baues-Wirsching [3].

3.2.2 Cohomologías de Hattory-Ulbrich y Villamayor-Zelinski.

Sea S/R una extensión de Galois de anillos conmutativos con grupo G, y consideremos el diagrama de grupos categóricos $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes} : G \longrightarrow GpCAT$ descrito en la sección 1.3.2. Entonces tenemos el 2-grupoide de 2-cociclos $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, \mathcal{P}ic(S)^{\otimes})$, y los grupos de cohomología $\mathbb{H}^i(G, \mathcal{P}ic(S)^{\otimes})$ correspondientes, para $i = 0, 1, 2$.

En este caso, vemos que un 2-cociclo $t \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, \mathcal{P}ic(S)^{\otimes})$ es una familia de S-módulos invertibles t_σ, $\sigma \in G$, y S-isomorfismos $t_{\sigma,\tau} : t_{\sigma\tau} \xrightarrow{\sim} {}^{\sigma}t_\tau \otimes_S t_\sigma$ verificando la condición de asociatividad $({}^{\sigma}t_{\tau,\gamma} \otimes 1_{t_\sigma})t_{\sigma,\tau\gamma} = (1_{{}^{\sigma\tau}t_\gamma} \otimes t_{\sigma,\tau})t_{\sigma\tau,\gamma}$. Un morfismo de 2-cociclos $\varphi : t \to t'$ consiste de un S-módulo P junto con S-isomorfismos $\varphi_\sigma : t_\sigma \otimes_S P \xrightarrow{\sim} {}^{\sigma}P \otimes t'_\sigma$, verificando $(1 \otimes t'_{\sigma,\tau})\varphi_{\sigma\tau} = ({}^{\sigma}\varphi_\tau \otimes 1)(1 \otimes \varphi_\sigma)(t_{\sigma,\tau} \otimes 1)$; y una homotopía entre dos morfismos $v : \varphi \to \varphi'$ es un S-isomorfismo $v : P \xrightarrow{\sim} P'$ verificando $({}^{\sigma}v \otimes 1)\varphi_\sigma = \varphi'_\sigma(1 \otimes v)$. En particular, una derivación $\mathbf{d} : G \to \mathcal{P}ic(S)^{\otimes}$ consiste de un S-módulo invertible P junto con una familia de S-isomorfismos $d_\sigma : P \to {}^{\sigma}P$ tales que $d_{\sigma\tau} = {}^{\sigma}d_\tau \cdot d_\sigma$, $\sigma, \tau \in G$. Y un elemento G-invariante de $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}$ es un S-automorfismo en S, es decir, un elemento s de $U(S)$ tal que ${}^{\sigma}s = s$ para todo $\sigma \in G$.

Entonces, es fácil comprobar que los grupos de cohomología de G con coeficientes en $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}$, $\mathbb{H}^i(G, \mathcal{P}ic(S)^{\otimes})$ para $i = 0, 1, 2$, coinciden con los $H^i(G, S)$ definidos por Hattory en [27] (véase también [49]). Estos $H^i(G, S)$ son los grupos de cohomología de un complejo cosimplicial de categorías con estructura de grupo abeliano

$$\mathcal{C}^0(G, \mathcal{P}ic(S)) \rightrightarrows \mathcal{C}^1(G, \mathcal{P}ic(S)) \,\substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\, \mathcal{C}^2(G, \mathcal{P}ic(S)) \,\substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\, \cdots$$

donde $\mathcal{C}^n(G, \mathcal{P}ic(S))$ es la categoría de las aplicaciones $G^n \to Ob(\mathcal{P}ic(S))$.

Además, observemos que como S/R es una extensión de Galois, existen isomorfismos $S\otimes_R S \cong \mathcal{C}^1(G,S)$, $S\otimes_R S\otimes_R S\cong \mathcal{C}^2(G,S)$,...,donde $\mathcal{C}^n(G,S)$ es la R-álgebra de todas las funciones de G^n a S. Entonces, para $n\geq 1$, la categoría de auto-equivalencias de Morita $ME(S\otimes_R S\otimes_R \ldots^{n)} \otimes_R S)$ es equivalente a $ME(\mathcal{C}^n(G,S))$ y consecuentemente también equivalente a $\mathcal{C}^n(G,ME(S))$, la categoría de todas las aplicaciones de G^n a la clase de equivalencias de Morita de S en sí mismo. Pero $ME(S)\simeq \mathcal{P}ic(S)$, y así el complejo cosimplicial de Hattory $(\mathcal{C}^n(G,\mathcal{P}ic(S)))$ es equivalente al complejo cosimplicial de Amitsur

$$J = (\ ME(S) \rightrightarrows ME(S\otimes_R S) \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow} ME(S\otimes_R S\otimes_R S) \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow} \cdots\ )$$

considerado en [50], para definir los grupos de cohomología $H^i(J), i\geq 0$.

En definitiva, tenemos los isomorfismos

$$\mathbb{H}^i(G,\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}) \cong H^i(G,S)\cong H^i(J)$$

para $i=0,1,2$.

Resaltemos que, teniendo en cuenta los resultados de [27, Sect.5] o [50, Theorem 5.2] tenemos los isomorfismos

$$\begin{array}{l} \mathbb{H}^0(G,\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}) \cong U(S)^G \\ \mathbb{H}^1(G,\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}) \cong \mathrm{Pic}(R) \\ \mathbb{H}^2(G,\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}) \cong Br(S/R) \end{array} \tag{3.14}$$

y entonces, por el Teorema 3.1.14, también deducimos

$$Br(S/R)\cong Tors[G,\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\textstyle\int G].$$

Este isomorfismo está simplemente inducido por la correspondencia $A\mapsto \underline{\underline{A}}$, descrita en la sección 2.2.2, que asocia un torsor a una R-álgebra de Azumaya A que contenga a S como subálgebra conmutativa maximal. De hecho, $\underline{\underline{A}}$ es exactamente el torsor correspondiente por la equivalencia del Teorema 3.1.10 al conjunto de factores de Kanzaki de la R-álgebra de Azumaya A [32].

3.2.3 Cohomología de Fröhlich-Wall.

En [21] Fröhlich y Wall definen los grupos de cohomología, denotados aquí como $FW^n(G,\mathbb{G})$, para G un grupo y $\mathbb{G}$ una categoría tipo grupo estrictamente coherente establemente graduada sobre G, es decir, un G-grupo categórico $(\mathbb{G}, gr, +) = (\mathbb{G}, gr, +, a, 0, l, r)$, donde el funtor proyección $gr : \mathbb{G} \to G$ es el G-grado, junto con una G-simetría coherente $c = (c_{X,Y} : X + Y \to Y + X)$. Probaremos que, para $n = 0, 1, 2$, los grupos $FW^n(G, \mathbb{G})$ son isomorfos a nuestros grupos de cohomología $\mathbb{H}^n(G, \mathbb{G}^{\otimes})$, donde $\mathbb{G}^{\otimes}$ es el diagrama definido por $\mathbb{G}$, una vez elegido un sistema de imágenes directas. Específicamente, esto significa que la conmutatividad c es superflua para definir la cohomología de Fröhlich-Wall para valores pequeños de n.

El hecho de que $FW^n(G, \mathbb{G})$ y $\mathbb{H}^n(G, \mathbb{G})$ coincidan para $n = 0, 1$, es consecuencia de que ambos grupos de cohomología tienen interpretaciones análogas: para $n = 0$, el grupo de automorfismos G-invariantes de grado uno del objeto cero 0, [21, pp.262] y Teorema 3.1.14 de esta memoria; y para $n = 1$ el grupo de clases de homotopía de G-funtores de G a $\mathbb{G}$, [21, Prop. 7.6] y Teorema 3.1.11 de este trabajo.

Examinemos entonces el caso $n = 2$.

Del teorema de coherencia [21, Prop. 7.5], podemos suponer que $\mathbb{G}$ es una categoría G-graduada en grupos en el sentido de [21]. Esto significa que todos los isomorfismos a, l, r y c son aplicaciones identidad y los objetos de $\mathbb{G}$ (y por tanto los morfismos de un determinado grado) forman un grupo abeliano. Recordemos brevemente la definición de los grupos de cohomología de Fröhlich-Wall. Estos se definían como los grupos de cohomología de complejos de cocadenas

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}^1(G, \mathbb{G}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^2(G, \mathbb{G}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^3(G, \mathbb{G}) \longrightarrow \cdots \qquad ,$$

donde, para $n \geq 0$, $\mathcal{C}^{n+1}(G, \mathbb{G})$ es el grupo de todas las aplicaciones $c : G^{n+1} \longrightarrow Mor(\mathbb{G})$ tales que

i) el grado de $c(\sigma_0, ..., \sigma_n)$ es σ_0.

ii) el dominio de $c(\sigma_0, ..., \sigma_n)$ no depende de σ_0.

y el coborde $\delta : \mathcal{C}^n(G, \mathbb{G}) \longrightarrow \mathcal{C}^{n+1}(G, \mathbb{G})$ está definido por

$$\begin{array}{rcl} \delta c(\sigma_0, ...\sigma_n) & = & c(\sigma_0\sigma_1, ..., \sigma_n) \cdot c(\sigma_1, ..., \sigma_n)^{-1} \\ & + & \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i c(\sigma_0, ..., \sigma_i\sigma_{i+1}, ...\sigma_n) \quad +(-1)^n c(\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}). \end{array}$$

Sea $Z^2(G, \mathbb{G}) = \{c \in \mathcal{C}^2(G, \mathbb{G}) / \quad \delta c = 0\}$ el grupo de 2-cociclos de Fröhlich-Wall. Cualquier $c \in Z^2(G, \mathbb{G})$ es de la forma $c(\sigma_0, \sigma_1) : t_{\sigma_1} \to s_{\sigma_0, \sigma_1}$

(de grado σ_0); y la condición $\delta c = 0$ significa que

$$c(\sigma_0\sigma_1, \sigma_2)c(\sigma_1, \sigma_2)^{-1} + c(\sigma_0, \sigma_1) = c(\sigma_0, \sigma_1\sigma_2). \tag{3.15}$$

Si comparamos dominios en (3.15), vemos que $s_{\sigma_1,\sigma_2} + t_{\sigma_1} = t_{\sigma_1\sigma_2}$. Por tanto, un 2-cociclo c es necesariamente de la forma $c(\sigma_0, \sigma_1) : t_{\sigma_1} \to t_{\sigma_0\sigma_1} - t_{\sigma_0}$, y es fácil ver que entonces ambos miembros en (3.15) tienen el mismo dominio y codominio, para cualesquiera $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in G$.

Ahora fijemos un sistema de imágenes directas para $\mathbb{G}$, es decir, un isomorfismo de grado σ, $\Gamma = \Gamma_\sigma(X) : X \to {}^\sigma X$, para cada objeto $X \in \mathbb{G}$ y $\sigma \in G$. Entonces, $Hom_\sigma(X, Y) \cong Hom_1({}^\sigma X, Y)$, $u \mapsto u' = u\Gamma^{-1}$, para cualesquiera objetos $X, Y \in \mathbb{G}$; y los 2-cociclos $c = (c(\sigma_0, \sigma_1)) \in Z^2(G, \mathbb{G})$ están en correspondencia uno a uno con las familias c' de objetos t_σ, $\sigma \in G$, y morfismos de grado uno $c'(\sigma_0, \sigma_1) : {}^{\sigma_0}t_{\sigma_1} \longrightarrow t_{\sigma_0\sigma_1} - t_{\sigma_0}$, verificando $c'(\sigma_0\sigma_1, \sigma_2)^{\sigma_0}c'(\sigma_1, \sigma_2)^{-1} + c'(\sigma_0, \sigma_1) = c'(\sigma_0, \sigma_1\sigma_2)$. Como las traslaciones $X \mapsto X + Y$ son automorfismos en la categoría fibra $\mathbb{G}_1$ ($= Ker(\mathbb{G})$ en [21]), tomando $t_{\sigma_0,\sigma_1} = c'(\sigma_0, \sigma_1) + 1_{t_{\sigma_0}}$ vemos que dicha familia $c' = (c'(\sigma_0, \sigma_1))$ es equivalente a una familia t que consiste en un objeto t_σ, para cada $\sigma \in G$ y un morfismo de grado uno $t_{\sigma_0,\sigma_1} : {}^{\sigma_0}t_{\sigma_1} + t_{\sigma_0} \longrightarrow t_{\sigma_0\sigma_1}$, para cada par $\sigma_0, \sigma_1 \in G$, en términos de la cual una comprobación rutinaria demuestra que la anterior condición de cociclo para c' se transforma en (3.6).

Entonces, tenemos una biyección $Z^2(G, \mathbb{G}) \cong Ob(\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, \mathbb{G}^\otimes))$, $c \leftrightarrow t$, que, se comprueba fácilmente, induce otra entre los correspondientes conjuntos de clases de cohomología, es decir, $FW^2(G, \mathbb{G}) \cong \mathbb{H}^2(G, \mathbb{G}^\otimes)$.

3.3 Sucesiones exactas cortas de grupos categóricos cofibrados.

3.3.1 Sucesiones exactas cortas de grupos categóricos cofibrados.

Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña. Es bien conocido que la noción de exactitud en la categoría de $\mathcal{B}$-módulos se traduce simplemente en que una sucesión de $\mathcal{B}$-módulos, es decir de funtores (o diagramas) de $\mathcal{B}$ en la categoría de grupos abelianos, $S : M' \to M \to M''$, es exacta corta si para cualquier objeto

$A \in \mathcal{B}$, la sucesión correspondiente de grupos abelianos

$$0 \to M'_A \to M_A \to M''_A \to 0$$

es exacta corta. En lo que sigue, adoptaremos esta noción para pseudodiagramas de grupos categóricos, para ello recordemos la siguiente definición [7], [11].

Definición 3.3.1 *Una sucesión de grupos categóricos y homomorfismos*

$$s : (\mathbb{G}', \otimes) \xrightarrow{j} (\mathbb{G}, \otimes) \xrightarrow{q} (\mathbb{G}'', \otimes)$$

se dice exacta corta si:

(1) *q es una cofibración sobreyectiva en objetos.*

(2) *$Im(j) \subseteq q^{-1}(I)$, es decir qj es constante el objeto unidad de $\mathbb{G}''$.*

(3) *$j : \mathbb{G}' \to q^{-1}(I)$ es una equivalencia de categorías.*

En base a este concepto de sucesión exacta corta de grupos categóricos, establecemos la siguiente

Definición 3.3.2 *Sean $\mathbb{F}'^{\otimes}, \mathbb{F}^{\otimes}, \mathbb{F}''^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$ pseudodiagramas de grupos categóricos definidos sobre una categoría pequeña $\mathcal{B}$. Diremos que una sucesión de homomorfismos*

$$\mathbb{F}'^{\otimes} \xrightarrow{j} \mathbb{F}^{\otimes} \xrightarrow{q} \mathbb{F}''^{\otimes} \tag{3.16}$$

es exacta corta, si se verifica:

i) Para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, la sucesión inducida de grupos categóricos $(\mathbb{F}'_A, \otimes) \xrightarrow{j_A} (\mathbb{F}_A, \otimes) \xrightarrow{q_A} (\mathbb{F}''_A, \otimes)$ es exacta corta.

ii) Para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$ y cualquier objeto X' de $\mathbb{F}'_A$, $q_b(j_A(X')) \circ q_B(j_b(X')) = id_{I''_B}$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
q_B({}^b j_A(X')) \arrow[r, "q_b(j_A(X'))"] & {}^b q_A j_A(X') = I''_B \arrow[d, equal] \\
& q_B j_B({}^b X') = I''_B \arrow[ul, "q_B(j_b(X'))"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Ejemplo 3.3.3 Una extensión de Galois de anillos conmutativos S/R, con grupo $G = Gal(S/R)$, proporciona un interesante ejemplo de una sucesión exacta corta de diagramas de grupos categóricos definidos sobre G

$$U(S)^{\otimes} \xrightarrow{j} \mathcal{P}ic(S)^{\otimes} \xrightarrow{q} \mathrm{Pic}(S)^{\otimes}_{dis} \ , \tag{3.17}$$

donde $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes} : G \longrightarrow GpCAT$ es el diagrama de grupos categóricos descrito en 1.3.2 , que asigna el grupo categórico de los S-módulos invertibles $(\mathcal{P}ic(S), \otimes_S)$, al único objeto de G, y $U(S)^{\otimes} : G \longrightarrow GpCAT$ es el diagrama correspondiente al G-módulo de las unidades de S, es decir el que asocia $U(S)$ al único objeto de G, (confróntese la sección 1.3.1). El diagrama denotado $\mathrm{Pic}(S)^{\otimes}_{dis} : G \longrightarrow GpCAT$, está definido de la siguiente forma: El grupo categórico asociado al único objeto de G, es el grupo categórico estricto $\mathrm{Pic}(S)_{dis}$, que es la categoría discreta, es decir con solo identidades, con objetos los del grupo de Picard $\mathrm{Pic}(S)$, cuya estructura monoidal está dada por el producto en el grupo $\mathrm{Pic}(S)$ y donde para cada $\sigma \in G$, el automorfismo ${}^{\sigma}(-) : \mathrm{Pic}(S)_{dis} \to \mathrm{Pic}(S)_{dis}$ viene dado simplemente por ${}^{\sigma}[P] = [{}^{\sigma}P]$ (recordemos ${}^{\sigma}P$ por la sección 1.3.2).

Hagamos notar que $\mathrm{Pic}(S)$ es un G-módulo, precisamente por la acción ${}^{\sigma}[P] = [{}^{\sigma}P]$, de manera que el diagrama $\mathrm{Pic}(S)^{\otimes} : G \longrightarrow GpCAT$, tal como en la sección 1.3.1, está definido. Pero $\mathrm{Pic}(S)^{\otimes}$ y $\mathrm{Pic}(S)^{\otimes}_{dis}$ no son equivalentes, pues $\mathrm{Pic}(S)$ tiene un solo objeto y los elementos de $\mathrm{Pic}(S)$ como morfismos, en tanto que $\mathrm{Pic}(S)_{dis}$ sólo tiene identidades y los elementos de $\mathrm{Pic}(S)$ como objetos.

Los homomorfismos j y q en (3.17) están definidos como sigue: La sucesión de homomorfismos de grupos categóricos, correspondiente al único objeto de G

$$U(S) \xrightarrow{j} \mathcal{P}ic(S) \xrightarrow{q} \mathrm{Pic}(S)_{dis} \ ,$$

está dada por $q(P \xrightarrow{f} Q) = ([P] \xrightarrow{id} [Q])$ y $j(s) = s : S \to S$, el morfismo de multiplicación por s. Las homotopías ${}^{\sigma}j(-) \to j^{\sigma}(-)$ y ${}^{\sigma}q(-) \to q^{\sigma}(-)$ son identidades.

Por la equivalencia entre pseudodiagramas de grupos categóricos y grupos categóricos cofibrados, $\mathbb{F}^{\otimes} \mapsto \mathbb{F}^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B}$, el concepto de exactitud establecido en la definición 3.3.2, se transporta como sigue:

Definición 3.3.4 *Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y*

$$S : (\mathbb{G}', \mathcal{P}_{\mathbb{G}'}, \otimes) \xrightarrow{j} (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \xrightarrow{q} (\mathbb{G}'', \mathcal{P}_{\mathbb{G}''}, \otimes)$$

una sucesión de $\mathcal{B}$-grupos categóricos cofibrados. Diremos que S es exacta corta si se verifican

(a) q es una cofibración sobreyectiva en objetos.

(b) El cuadrado

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathcal{P}_{\mathbb{G}'}"'] & \mathbb{G} \arrow[d, "q"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "I_{\mathbb{G}''}"] & \mathbb{G}'' \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(c) El funtor inducido $\mathbb{G}' \xrightarrow{(\mathcal{P}_{\mathbb{G}'}, j)} \mathcal{B} \times_{\mathbb{G}''} \mathbb{G}$ es una $\mathcal{B}$-equivalencia.

Proposición 3.3.5 *Una sucesión de pseudodiagramas $\mathbb{F}'^{\otimes} \xrightarrow{j} \mathbb{F}^{\otimes} \xrightarrow{q} \mathbb{F}''^{\otimes}$, con $\mathbb{F}'^{\otimes}, \mathbb{F}^{\otimes}, \mathbb{F}''^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$, es exacta corta si y sólo si la sucesión de $\mathcal{B}$-grupos categóricos*

$$(\mathbb{F}'^{\otimes}\textstyle\int\mathcal{B}, \mathcal{P}', \otimes) \longrightarrow (\mathbb{F}^{\otimes}\textstyle\int\mathcal{B}, \mathcal{P}, \otimes) \longrightarrow (\mathbb{F}''^{\otimes}\textstyle\int\mathcal{B}, \mathcal{P}'', \otimes) \tag{3.18}$$

es exacta corta.

Demostración: Supongamos que $\mathbb{F}'^{\otimes} \xrightarrow{j} \mathbb{F}^{\otimes} \xrightarrow{q} \mathbb{F}''^{\otimes}$ es exacta corta. Teniendo en cuenta que la aplicación inducida $q\int\mathcal{B} : \mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{F}''^{\otimes}\int\mathcal{B}$ se define en objetos por $(q\int\mathcal{B})(X, A) = (q_A(X), A)$, el hecho de que $q\int\mathcal{B}$ sea sobreyectiva en objetos es consecuencia inmediata de que q_A lo es para cualquier A. Por otra parte, si $(g, b) : (X'', A) \to (Y'', B)$ es un morfismo en $\mathbb{F}''^{\otimes}\int\mathcal{B}$, esto es, $b : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{B}$ y $g : {}^{b}X'' \to Y''$ un morfismo en $\mathbb{F}''_B$, como q_A es sobreyectiva en objetos, existe un objeto $X \in \mathbb{F}_A$ tal que $q_A(X) = X''$ y se puede elegir $u : {}^{b}X \to Y$ en $\mathbb{F}_B$ como un levantamiento del morfismo composición en $\mathbb{F}''_B$

$$q_B({}^{b}X) \xrightarrow{q_b(X)} {}^{b}q_A(X) = {}^{b}X'' \xrightarrow{g} Y''$$

que existe por ser q_B una cofibración. Así elegido, se observa que (u,b) es un morfismo en $\mathbb{F}^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B}$ tal que $(q\!\int\!\mathcal{B})(u,b) = (g,b)$. Por tanto $q\!\int\!\mathcal{B}$ es una cofibración.

Veamos ahora que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}'^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B} \arrow[r, "j\int\mathcal{B}"] \arrow[d, "\mathcal{P}'"'] & \mathbb{F}^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B} \arrow[d, "q\int\mathcal{B}"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "I''"] & \mathbb{F}'^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B} \end{tikzcd} \tag{3.19}$$

es conmutativo. Para esto, sea (X', A) un objeto de $\mathbb{F}'^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B}$, entonces

$$(q\!\int\!\mathcal{B})(j\!\int\!\mathcal{B})(X',A) = (q_A j_A(X'), A) = (I''_A, A) = I''\mathcal{P}'(X',A)$$

(nótese que se ha utilizado que $q_A j_A = id_{I''_A}$). De la misma forma, si $(f',b) : (X',A) \to (Y',B)$ es un morfismo en $\mathbb{F}'^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} (q\!\int\!\mathcal{B})(j\!\int\!\mathcal{B})(f',b) &= (q\!\int\!\mathcal{B})(j_B(f')j_b(X')^{-1}, b) \\ &= (q_B j_B(f') q_B(j_b(X'))^{-1} q_b(j_A(X'))^{-1}, b) \\ &= (id_{I''_B}, b) \\ &= I''\mathcal{P}'(f',b). \end{aligned}$$

Con esto queda probada la conmutatividad del diagrama (3.19).

Por último quedaría comprobar que $(\mathcal{P}', j\!\int\!\mathcal{B})$ es una $\mathcal{B}$-equivalencia. Sea entonces $(A,(X,A))$ un objeto de $\mathcal{B} \times_{(\mathbb{F}'^{\otimes}\int\mathcal{B})} (\mathbb{F}^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B})$, esto es, A es un objeto de $\mathcal{B}$ y X un objeto de $\mathbb{F}_A$ tal que $q_A(X) = I''_A$. Teniendo en cuenta que $j_A : \mathbb{F}'_A \to q_A^{-1}(I''_A)$ es una equivalencia, se tienen un objeto X' de $\mathbb{F}'_A$ y un isomorfismo en $\mathbb{F}_A$, $j_A(X') \cong X$; con esto obtenemos un morfismo en $\mathcal{B} \times_{(\mathbb{F}'^{\otimes}\int\mathcal{B})} (\mathbb{F}^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B})$, $(\mathcal{P}', j\!\int\!\mathcal{B})(X',A) \cong (A,(X,A))$, y como consecuencia la densidad de $(\mathcal{P}', j\!\int\!\mathcal{B})$.

Ahora sean (X',A) e (Y',B) dos objetos de $\mathbb{F}'^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B}$, y sea un morfismo $(b,(u,b)) : (A,(j_A(X'),A)) \to (B,(j_B(Y'),B))$ en $\mathcal{B} \times_{(\mathbb{F}'^{\otimes}\int\mathcal{B})} (\mathbb{F}^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B})$, es decir, $b : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{B}$ y $u : {}^b j_A(X') \to j_B(Y')$ un morfismo en $\mathbb{F}^{\otimes}\!\int\!\mathcal{B}$ tal que $q_B(u) q_b(j_A(X'))^{-1} = id_{I''_B}$. Entonces la composición $j_B({}^bX') \xrightarrow{j_b(X')} {}^b j_A(X') \xrightarrow{u} j_B(Y')$ es un morfismo en $q_B^{-1}(I''_B)$, pues $q_B(u j_b(X')) = q_B(u) q_b(j_A(X'))^{-1} = id_{I''_B}$ y por ser $j_B : \mathbb{F}'_B \to q_B^{-1}(I''_B)$ una equivalencia, existirá un único morfismo $u' : {}^bX' \to Y'$ con $j_B(u') = u j_b(X')$.

Entonces, $(u', b) : (X', A) \to (Y', B)$ es el único morfismo en $\mathbb{F}'^{\otimes}\int\mathcal{B}$ que verifica $(\mathcal{P}', j\int\mathcal{B})(u', b) = (b, (u, b))$. Con lo que queda probado que $(\mathcal{P}', j\int\mathcal{B})$ es un $\mathcal{B}$-funtor fiel y pleno.

Recíprocamente, supongamos que (3.17) es exacta corta y veamos que entonces $\mathbb{F}'^{\otimes} \xrightarrow{j} \mathbb{F}^{\otimes} \xrightarrow{q} \mathbb{F}''^{\otimes}$ es exacta corta.

En primer lugar probaremos que para cualquier objeto A de $\mathcal{B}$, el funtor $q_A : \mathbb{F}_A \to \mathbb{F}''_A$ es una cofibración sobreyectiva en objetos; para esto, sea X'' un objeto de $\mathbb{F}''_A$, entonces $(X'', A) \in \mathbb{F}''^{\otimes}\int\mathcal{B}$ y como $q\int\mathcal{B}$ es sobreyectiva en objetos, existirá (X, A) en $\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$ tal que $(q\int\mathcal{B})(X, A) = (q_A(X), A) = (X'', A)$ y por tanto q_A es sobreyectiva en objetos. Ahora sea $g : X'' \to Y''$ un morfismo en $\mathbb{F}''_A$ y $X \in \mathbb{F}_A$ un objeto tal que $q_A(X) = X''$, entonces teniendo en cuenta que $q\int\mathcal{B}$ es una cofibración, dado el morfismo (g, id_A) en $\mathbb{F}''^{\otimes}\int\mathcal{B}$ y el objeto (X, A) en $\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$, existe un morfismo (f, id_A) en $\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B}$ de dominio (X, A) tal que $(q\int\mathcal{B})(f, id_A) = (g, id_A)$ y como consecuencia, f es tal que $q_A(f) = g$.

Sea ahora $X' \in \mathbb{F}'_A$, entonces $(q\int\mathcal{B})(j\int\mathcal{B})(X', A) = I''\mathcal{P}'(X', A)$, esto es $q_A j_A(X') = I_A$. Por otra parte, sea $f' : X' \to Y'$ un morfismo en $\mathbb{F}'_A$, se verifica también que $(q\int\mathcal{B})(j\int\mathcal{B})(f', id_A) = I''\mathcal{P}'(f', id_A)$, y con esto se demuestra que $q_A j_A(f') = id_{I''_A}$.

Ahora bien, para cualquier $X \in q_A^{-1}(I''_A)$, $(A, (X, A))$ es un objeto de $\mathcal{B} \times_{(\mathbb{F}''^{\otimes}\int\mathcal{B})} (\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B})$ y como $(\mathcal{P}', j\int\mathcal{B}) : \mathbb{F}'^{\otimes}\int\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \times_{(\mathbb{F}''^{\otimes}\int\mathcal{B})} (\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B})$ es una $\mathcal{B}$-equivalencia, existe un objeto (X', A) en $\mathbb{F}'^{\otimes}\int\mathcal{B}$ y un isomorfismo

$$(\mathcal{P}', j\textstyle\int\mathcal{B})(X', A) \cong (A, (X, A)),$$

esto nos dice que $j_A(X') \cong X$ y por tanto $j_A : \mathbb{F}'_A \to q_A^{-1}(I''_A)$ es denso. Sean ahora $X', Y' \in \mathbb{F}'_A$ y sea $u : j_A(X') \to j_A(Y')$ un morfismo en $\mathbb{F}_A$ tal que $q_A(u) = I''_A$, entonces $(id_A, (u, id_A)) : (j\int\mathcal{B})(X', A) \to (j\int\mathcal{B})(Y', A)$ es un morfismo en $\mathcal{B} \times_{(\mathbb{F}''^{\otimes}\int\mathcal{B})} (\mathbb{F}^{\otimes}\int\mathcal{B})$ y como $(\mathcal{P}', j\int\mathcal{B})$ es una $\mathcal{B}$-equivalencia, existe una única $(f, id_A) : (X', A) \to (Y', A)$ tal que $(\mathcal{P}', j\int\mathcal{B})(f, id_A) = (id_A, (u, id_A))$, lo que se traduce en que $j_A(f) = u$. Con esto queda probado que j_A es fiel y pleno y por tanto una equivalencia.

Por último, probaremos que si $X' \in \mathbb{F}'_A$ es un objeto, y $b : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{B}$, $q_b(j_A(X'))q_B(j_b(X')) = id_{I''_B}$. Por ser el diagrama (3.19) conmutativo, si (f', b) es un morfismo en $\mathbb{F}'^{\otimes}\int\mathcal{B}$, se verifica que

$$(q\textstyle\int\mathcal{B})(j\int\mathcal{B})(f', b) = I''\mathcal{P}'(f', b),$$

es decir, $(q_B j_B(f) q_B(j_b(X'))^{-1} q_b(j_A(X'))^{-1}, b) = (id_{I''_B}, b)$ y como $q_B j_B = id_{I''_B}$ se obtiene lo que se pretendía probar. ■

3.3.2 Las sucesiones exactas de nueve términos.

En lo que sigue demostraremos que una sucesión exacta corta de pseudodiagramas de grupos categóricos $\mathbb{F}^{\otimes} \xrightarrow{j} \mathbb{F}^{\otimes} \xrightarrow{q} \mathbb{F}'^{\otimes}$ induce una sucesión de 2-grupoides $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \to \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \to \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes})$. Primero, recordemos de [38] que un morfismo de 2-grupoides $\varphi : \underline{\underline{\mathcal{A}}} \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{A}'}}$ es una *fibración* (Grothendieck) si verifica las siguientes dos condiciones:

(*i*) Para cualquier objeto $B \in \underline{\underline{\mathcal{A}}}$ y cualquier morfismo $f' : A' \to \varphi(B)$ en $\underline{\underline{\mathcal{A}'}}$, existe un morfismo $f : A \to B$ en $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ tal que $\varphi(f) = f'$.

(*ii*) Para cualquier morfismo $g : A \to B$ en $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$, cualquier morfismo en $\underline{\underline{\mathcal{A}'}}$ $f' : \varphi(A) \to \varphi(B)$ y cualquier homotopía $v' : f' \to \varphi(g)$ en $\underline{\underline{\mathcal{A}'}}$, existe una flecha $f : A \to B$ y una homotopía $v : f \to g$ en $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ tal que $\varphi(f) = f'$ y $\varphi(v) = v'$.

Proposición 3.3.6 *Sea $\mathbb{F}^{\otimes} \xrightarrow{j} \mathbb{F}^{\otimes} \xrightarrow{q} \mathbb{F}'^{\otimes}$ una sucesión exacta corta de pseudodiagramas de grupos categóricos. Entonces, la aplicación inducida $q_* : \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes})$ es una fibración de Grothendieck de 2-grupoides, cuya fibra sobre el 2-cociclo trivial, $q_*^{-1}(tr)$, es equivalente a $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$.*

Demostración: Para hacer esto, tendremos en cuenta que un morfismo entre grupoides es una cofibración si y sólo si es una fibración, véase el ejemplo 1.1.5.

Sea $t' \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ un 2-cociclo y $\varphi'' : \tilde{t} \to q_*(t')$ un morfismo en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes})$. Observemos que existe un levantamiento $\varphi : t \to t'$ de φ'' de la siguiente forma: Como q_B es sobreyectivo en objetos, para cualquier objeto $B \in \mathcal{B}$ podemos elegir un B-objeto $\varphi_B \in \mathbb{F}_B$ tal que $q_B(\varphi_B) = \varphi''_B$. Sea $b : A \to B$ cualquier morfismo en $\mathcal{B}$. Como q_B es una fibración, existe un levantamiento $X_b \xrightarrow{u_b} {}^b\varphi_A \otimes t'_b$ del B-morfismo compuesto de $\mathbb{F}'$ $\tilde{t}_b \otimes \varphi''_B \xrightarrow{\varphi''_b} {}^b\varphi''_A \otimes q_B(t'_b) \xrightarrow{\sim} q_B({}^b\varphi_A \otimes t'_b)$. Ahora, $- \otimes \varphi_B : \mathbb{F}_B \to \mathbb{F}_B$ es una equivalencia, y así existe un B-objeto Y_b y un B-isomorfismo $Y_b \otimes \varphi_B \xrightarrow{w_b} X_b$. Como $-\otimes \varphi''_B : \mathbb{F}'_B \to \mathbb{F}'_B$ es también una equivalencia, existe un único B-isomorfismo $v''_b : \tilde{t}_b \to q_B(Y_b)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tilde{t}_b \otimes \varphi''_B \arrow[dr, "v''_b \otimes 1"'] & q_B(Y_b \otimes \varphi_B) \arrow[l, "q_B(w_b)"'] \arrow[d, "\sim"] \\
& q_B(Y_b) \otimes q_B(\varphi_B)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Finalmente, elijamos $v_b : t_b \to Y_b$, un levantamiento de $v''_b : \tilde{t}_b \to q_B(Y_b)$, y definamos $\varphi_b : t_b \otimes \varphi_B \longrightarrow {}^b\varphi_A \otimes t'_b$ como la composición $t_b \otimes \varphi_B \xrightarrow{v_b \otimes 1} Y_b \otimes \varphi_B \xrightarrow{w_b} X_b \xrightarrow{u_b} {}^b\varphi_A \otimes t'_b$. Entonces $\varphi = (\varphi_B, \varphi_b) : t \longrightarrow t'$ es un morfismo en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ con $q_*(\varphi) = \varphi''$, donde $t \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ es el 2-cociclo que consiste en el B-objeto t_b para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$ y el C-morfismo $t_{c,b} : t_{cb} \longrightarrow {}^c t_b \otimes t_c$ determinado de manera única por la conmutatividad de (3.8) para cada par de morfismos componibles $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$.

La segunda condición para las fibraciones de Grothendieck es más fácil de comprobar que la primera. Sean $t, t' \in \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ dos 2-cociclos, $\varphi' : t \to t'$ un morfismo en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ y $v'' : \tilde{\varphi} \to q_*(\varphi')$ una homotopía en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes})$. Entonces conseguimos una homotopía $v : \varphi \to \varphi'$ en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F})$ verificando $q_*(v) = v''$, simplemente eligiendo, para cualquier objeto $A \in \mathcal{B}$, un levantamiento $v_A : \varphi_A \to \varphi'_A$ de $v''_A : \tilde{\varphi}_A \to q(\varphi'_A)$, y definiendo, para cualquier morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, $\varphi_b : t_b \otimes \varphi_B \to {}^b\varphi_A \otimes t'_b$, como el único B-isomorfismo en $\mathbb{F}_B$ que hace que el diagrama (3.10) sea conmutativo. Una comprobación rutinaria demuestra ahora que $q_*^{-1}(tr)$ es equivalente a $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes})$ sin más que tener en cuenta que para cualquier objeto A de $\mathcal{B}$, $j_A : \mathbb{F}_A \to q_A^{-1}(I''_A)$ es una equivalencia de categorías.

■

Como consecuencia de [38] se tiene que una sucesión fibrada de 2-grupoides punteados $(\mathcal{A}', *) \to (\mathcal{A}, *) \to (\mathcal{A}'', *)$ induce una sucesión exacta de homotopía de grupos y conjuntos punteados,

$$0 \to \pi_2(\mathcal{A}', *) \to \pi_2(\mathcal{A}, *) \to \pi_2(\mathcal{A}'', *) \to \pi_1(\mathcal{A}', *) \to \ldots \to \pi_0(\mathcal{A}'').$$

Si consideramos la sucesión de homotopía correspondiente a la sucesión fibrada $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes}) \xrightarrow{j_*} \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \xrightarrow{q_*} \underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}''^{\otimes})$ inducida por una sucesión exacta corta de pseudodiagramas de grupos categóricos, y teniendo en cuenta las identificaciones (3.11), podemos deducir lo siguiente:

Teorema 3.3.7 *Sea* $\mathbb{F}'^{\otimes} \xrightarrow{j} \mathbb{F}^{\otimes} \xrightarrow{q} \mathbb{F}''^{\otimes}$ *una sucesión exacta corta de pseudodiagramas de grupos categóricos. Existe una sucesión exacta de nueve términos de grupos y conjuntos punteados:*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbb{H}^0(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes}) \to \mathbb{H}^0(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \to \mathbb{H}^0(\mathcal{B}, \mathbb{F}''^{\otimes}) \to \mathbb{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes}) \to \mathbb{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \\ \to \mathbb{H}^1(\mathcal{B}, \mathbb{F}''^{\otimes}) \to \mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}'^{\otimes}) \to \mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}^{\otimes}) \to \mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{F}''^{\otimes}). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ejemplo 3.3.8 De nuevo consideremos S/R, una extensión de Galois de anillos conmutativos con grupo $G = Gal(S/R)$, y la sucesión exacta corta de pseudodiagramas de grupos categóricos (3.17). Entonces, $\mathbb{H}^i(G, U(S)^{\otimes}) = H^i(G, U(S))$, la cohomología usual de G con coeficientes en el G-módulo $U(S)$, para $i = 0, 1, 2$, y tenemos $\mathbb{H}^0(G, \mathcal{P}ic(S)^{\otimes}) = U(S)^G = H^0(G, U(S))$, $\mathbb{H}^1(G, \mathcal{P}ic(S)^{\otimes}) = \mathrm{Pic}(R)$ y $\mathbb{H}^2(G, \mathcal{P}ic(S)^{\otimes}) = Br(S/R)$ (véase sección 3.2.2).

Primero analicemos la cohomología de G con coeficientes en $\mathrm{Pic}(S)^{\otimes}_{dis}\!\int G$. Recordemos que en $\mathrm{Pic}(S)^{\otimes}_{dis}\!\int G$

$$Hom_\sigma([P], [Q]) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } [P] \neq {}^\sigma[Q] \\ \{\sigma\} & \text{si } [P] = {}^\sigma[Q] \ . \end{cases}$$

En particular, $Aut_1([S]) = \{1\}$ y $\mathbb{H}^0(G, \mathrm{Pic}(S)^{\otimes}_{dis}) = 0$, por el Teorema 3.1.11. Además, una derivación $\mathbf{d} : G \to \mathrm{Pic}(S)^{\otimes}_{dis}$ consiste de un elemento $[P] \in \mathrm{Pic}(S)$ tal que $1 : [P] \to {}^\sigma[P]$ es un morfismo, es decir, $[P] =^\sigma [P]$ para cualquier $\sigma \in G$. Entonces, por el Teorema 3.1.14, $\mathbb{H}^1(G,\ \mathrm{Pic}(S)^{\otimes}_{dis}) = (\mathrm{Pic}(S)^{\otimes})^G$. Finalmente, comprobando la definición vemos que un 2-cociclo en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(G, \mathrm{Pic}(S)^{\otimes}_{dis})$ consiste de un elemento $[P]_\sigma \in \mathrm{Pic}(S)$ para cada $\sigma \in G$ tal que $[P]_{\tau\sigma} = {}^\sigma[P]_\tau \otimes [P]_\sigma$ para cualesquiera $\sigma, \tau \in G$; pero entonces $\sigma \mapsto [P]_\sigma$ es exactamente una derivación de G al G-módulo $\mathrm{Pic}(S)$, y se tienen los isomorfismos $\mathbb{H}^2(G, \mathrm{Pic}(S)^{\otimes}_{dis}) \cong H^1(G, \mathrm{Pic}(S))$. Como consecuencia, la sucesión exacta del Teorema 3.3.7 que corresponde a la sucesión exacta corta de pseudodiagramas de grupos categóricos (3.17), se reduce a

$$0 \to H^1(G, U(S)) \to \mathrm{Pic}(R) \to \mathrm{Pic}(S)^G \to H^2(G, U(S)) \to Br(S/R) \to H^1(G, \mathrm{Pic}(S)),$$

la conocida sucesión exacta de Chase-Harrison-Rossenberg [16].

Vemos que, incluso aunque la categoría de módulos cruzados es equivalente a la categoría de grupos categóricos estrictos (véase el Ejemplo 1.2.5), y por esta equivalencia un morfismo sobreyectivo de módulos cruzados $\Phi \overset{q}{\twoheadrightarrow} \Phi''$ corresponde a una fibración de grupos categóricos sobreyectiva en objetos $\mathbb{G}(\Phi) \xrightarrow{\mathbb{G}(q)} \mathbb{G}(\Phi'')$, el núcleo de Dedecker $\Phi' = Ker(q)$, [17], no hace a la sucesión $\mathbb{G}(\Phi') \to \mathbb{G}(\Phi) \to \mathbb{G}(\Phi'')$ una sucesión exacta de grupos categóricos en el sentido de la Definición 3.3.1, es decir $\mathbb{G}(Ker(q))$ no es equivalente a $Ker(\mathbb{G}(q))$. Esta es la razón por la que la sucesión exacta para la cohomología de Dedecker [17], no es un caso particular de (3.20) (c.f. [10]).

Capítulo 4

Clasificación por clases de homotopía.

4.0 Introducción.

Sea G un grupo y M un G-módulo. Denotemos por $B(M,G)$ al CW-complejo conexo por arcos, único salvo homotopía, con grupos de homotopía $\pi_1 B(M,G) \cong G$, $\pi_2 B(M,G) \cong M$ como G-módulo, $\pi_i B(M,G) = 0$ para todo $i \neq 1,2$ y cuyo sistema de invariantes de Postnikov es trivial, es decir, $0 = k^3 B(M,G) \in H^3(G,M)(\approx K(G,1))$. Este espacio $B(M,G)$ contiene al espacio clasificante del grupo G, $B(G)$, como un retracto y es bien conocido que existen biyecciones naturales

$$Ext(G,M) \overset{(1)}{\cong} H^2(G,M) \overset{(2)}{\cong} \Gamma\Big({}^{B(M,G)}/_{B(G)}\Big) \tag{4.1}$$

entre el conjunto de clases de equivalencia de extensiones de grupos de G por el G-módulo M, el segundo grupo de cohomología de G con coeficientes en el G-módulo M y el conjunto de clases de homotopía fibrada de secciones cruzadas $B(G) \hookrightarrow B(M,G)$. Si M es un G-módulo trivial, $B(M,G) \approx K(M,2) \times K(G,1)$ es un producto de espacios de Eilenberg-MacLane y $\Gamma\Big({}^{B(M,G)}/_{B(G)}\Big) = [K(G,1), K(M,2)]$ es el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de $K(G,1)$ en $K(M,2)$.

Las biyecciones $Ext(G,M) \cong H^2(G,M)$ han sido adecuadamente generalizadas en el capítulo 3 de esta memoria mediante la demostración de correspondientes biyecciones $Tors[\mathcal{B},\mathbb{G}] \cong \mathbb{H}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes})$, establecidas para cada categoría pequeña $\mathcal{B}$ y cada $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$. En este capítulo presentamos como resultado fundamental un teorema de representabilidad homotópica para los conjuntos de cohomología $\mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$, de una categoría $\mathcal{B}$ con coeficientes en un pseudodiagrama de grupos categóricos con el tipo de la categoría $\mathcal{B}$, generalizando el isomorfismo (2) de (4.1).

Cada $\mathcal{B}$-grupo categórico tiene un cierto espacio clasificante $B(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, que salvo equivalencia homotópica es el colímite homotópico del pseudodiagrama de espacios con el tipo de la categoría $\mathcal{B}$ definido por los espacios clasificantes de los grupos categóricos fibra: $A \mapsto B(\mathbb{G}_A, \otimes)$. Por ejemplo, si M es un G-módulo, entonces $B(M \rtimes G, pr, \otimes) = B(M, G)$. Este espacio $B(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ contiene como un retracto a $B(\mathcal{B})$, el espacio clasificante de la categoría $\mathcal{B}$ y, entonces, probamos la existencia de una biyección natural $\mathbb{H}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes}) \cong \Gamma\left[{}^{B(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)}/_{B(\mathcal{B})}\right]$, entre el segundo conjunto de cohomología de $\mathcal{B}$ con coeficientes en el pseudodiagrama definido por el $\mathcal{B}$-grupo categórico, y el conjunto de clases de homotopía fibrada de secciones cruzadas $B(\mathcal{B}) \hookrightarrow B(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$.

4.1 El nervio de un grupo categórico cofibrado.

Sea Δ la categoría de conjuntos ordenados $[n] = \{0, 1, 2, ..., n\}$, $n \geq 0$, y aplicaciones crecientes. Entonces la categoría de conjuntos simpliciales es la categoría de funtores $\Delta^{op} \longrightarrow Set$. En esta sección usamos unas cuantas definiciones conocidas y hechos acerca de conjuntos simpliciales (véanse la referencias [37], [22] o [29]).

En adelante consideramos cada conjunto ordenado $[n]$ como una categoría con exactamente una flecha $i \to j$ si $i \leq j$. Entonces una aplicación no decreciente $[n] \to [m]$ es lo mismo que un funtor.

Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña. Si $Fun([n], \mathcal{B})$ denota el conjunto de funtores $[n] \to \mathcal{B}$, $n \geq 0$, tenemos un conjunto simplicial $Fun(-, \mathcal{B}) : \Delta^{op} \longrightarrow Set$ que se denomina el nervio de la categoría (Grothendieck) y se denota por $Ner(\mathcal{B})$. Entonces, $Ner_0(\mathcal{B}) = Ob(\mathcal{B})$, el conjunto de objetos de $\mathcal{B}$, $Ner_1(\mathcal{B}) = Mor(\mathcal{B})$, el conjunto de morfismos de $\mathcal{B}$, y para $n \geq 2$ un n-símplex de $Ner(\mathcal{B})$ es una upla

$$(B_i \xrightarrow{b_{ij}} B_j)_{0\leq i<j\leq n}$$

de morfismos de $\mathcal{B}$ tales que $b_{jk}\cdot b_{ij} = b_{ik}$ si $i<j<k$, o equivalentemente una sucesión de morfismos componibles en $\mathcal{B}$, $B_0 \xrightarrow{b_{01}} B_1 \xrightarrow{b_{12}} B_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{b_{n-1,n}} B_n$. Por ejemplo, si $[m] \in \Delta$, $Ner([m]) = \Delta[m]$ es el m-símplex estándar. Si un grupo G se considera como una categoría con un único objeto, entonces $Ner(G)$ es el conjunto simplicial de Eilenberg-MacLane $K(G,1)$.

Ahora, supongamos dado $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) = (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$ un $\mathcal{B}$-grupo categórico y en él un sistema de imágenes directas $(\Gamma_b(X) : X \to {}^bX)$, que determina el pseudodiagrama de grupos categóricos $\mathbb{G}^{\otimes} : \mathcal{B} \longrightarrow GpCAT$, $B \mapsto \mathbb{G}_B$, $(A \xrightarrow{b} B) \longmapsto ({}^b(-) : \mathbb{G}_A \to \mathbb{G}_B)$, de acuerdo con la equivalencia establecida en el teorema 1.2.21.

Si $q : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ es cualquier funtor, sea $q^*\mathbb{G}$ el $\mathcal{C}$-grupo categórico obtenido como pull back de $\mathbb{G}$ vía q; es decir, por el cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd} q^*\mathbb{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{G} \arrow[r, "\mathcal{P}_{\mathbb{G}}"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Entonces, se tienen identificaciones $(q^*\mathbb{G})_C = \mathbb{G}_{q(C)}$, $C \in \mathcal{C}$, entre las categorías fibras, y se ve fácilmente que el $\mathcal{C}$-grupo categórico $q^*\mathbb{G}$ tiene como pseudo-diagrama de grupos categóricos asociado $(q^*\mathbb{G})^{\otimes} = q^*\mathbb{G}^{\otimes}$, de acuerdo con las notaciones mantenidas en la sección 1.2.4.

Definición 4.1.1 *El* nervio *de un $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, denotado por $Ner(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, es el conjunto simplicial definido por*

$$[n] \longmapsto Ner_n(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) = \bigcup_{b:[n]\to\mathcal{B}} \mathbb{Z}^2([n], b^*\mathbb{G}^{\otimes}) \ ,$$

donde $b : [n] \to \mathcal{B}$ es cualquier funtor, es decir, cualquier n-símplex de $Ner(\mathcal{B})$, y para cada $b : [n] \to \mathcal{B}$, $\mathbb{Z}^2([n], b^*\mathbb{G})$ es el conjunto de 2-cociclos de $[n]$ con coeficientes en el $[n]$-grupo categórico $b^*\mathbb{G}$.

Entonces $Ner_0(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) = Ob(\mathcal{B})$, el conjunto de objetos de $\mathcal{B}$, un 1-símplex $x \in Ner_1(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es un par $x = (X_{01}, b_{01} : B_0 \to B_1)$, donde $b_{01} : B_0 \to B_1$ es un morfismo en $\mathcal{B}$ y X_{01} un objeto de $\mathbb{G}$ tal que

$\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X_{01}) = B_1$, es decir, X_{01} es un B_1-objeto de $\mathbb{G}$; y para $n \geq 2$, un n-símplex de $Ner(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ es una upla

$$x = (u_{ijk}, X_{ij}, b_{ij}, B_i)_{0 \leq i < j < k \leq n}$$

que consiste de: un objeto $B_i \in \mathcal{B}$ para cada $0 \leq i \leq n$; un morfismo $b_{ij} : B_i \to B_j$ en $\mathcal{B}$ para cada $0 \leq i < j \leq n$, tal que $b_{jk} \cdot b_{ij} = b_{ik}$ si $i < j < k$; un B_j-objeto $X_{ij} \in \mathbb{G}$, para cada $0 \leq i < j \leq n$ y un B_k-morfismo $u_{ijk} : X_{ik} \xrightarrow{\sim} {}^{b_{jk}}X_{ij} \otimes X_{jk}$, para cada $0 \leq i < j < k \leq n$, tal que si $0 \leq i < j < k < l \leq n$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_{il} \arrow[r, "u_{ijl}"] \arrow[d, "u_{ikl}"'] & {}^{b_{jl}}X_{ij} \otimes X_{jl} \arrow[d, "1 \otimes u_{jkl}"] \\
{}^{b_{kl}}X_{ik} \otimes X_{kl} \arrow[r, "{}^{b_{kl}}u_{ijk} \otimes 1"'] & {}^{b_{jl}}X_{ij} \otimes {}^{b_{kl}}X_{jk} \otimes X_{kl}
\end{tikzcd} \qquad (4.2)$$

es conmutativo.

Ilustramos la definición de nervio de un $\mathcal{B}$-grupo categórico con tres ejemplos:

Ejemplo 4.1.2 *El complejo generalizado de Eilenberg-MacLane $L(M_G, 2)$.*

Sea G un grupo y M un G-módulo. Consideremos el G-grupo categórico producto semidirecto $(M \rtimes G, pr, \otimes)$ definido en la sección 1.3.1. Aplicando directamente la definición 4.1.1 al caso, vemos que los n-símplices de $Ner(M \rtimes G, pr, \otimes)$ están descritos por uplas

$$x = (m_{ijk}, \sigma_{ij})$$

consistentes de un elemento $\sigma_{ij} \in G$, para cada $0 \leq i \leq j \leq n$, y de un elemento $m_{ijk} \in M$, para cada $0 \leq i \leq j \leq k \leq n$, tales que

- $\sigma_{jk}\sigma_{ij} = \sigma_{ik}$ si $i \leq j \leq k$

- $m_{jkl} + m_{ijl} =^{\sigma_{kl}} m_{ijk} + m_{ikl}$ si $i < j < k < l$

- $m_{ijk} = 0$ si $i = j$ o $j = k$

estando los operadores cara dados por

$$d_m x = (m_{\delta_m(i)\delta_m(j)\delta_m(k)}, \sigma_{\delta_m(i)\delta_m(j)})$$

donde $\delta_m : [n-1] \to [n]$ es la aplicación inyectiva no decreciente que no toma el valor $m \in [n]$, es decir, $\delta_m(i) = i$ si $i < m$ y $\delta_m(i) = i+1$ si $i \geq m$.

Observamos inmediatamente que $Ner(M \rtimes G, pr, \otimes)$ es reducido, es decir $Ner_0(M \rtimes G, pr, \otimes) = \{1\}$, y que se tienen isomorfismos $Ner_1(M \rtimes G, pr, \otimes) \cong G$, $x \mapsto \sigma_{01}$, $Ner_2(M \rtimes G, pr, \otimes) \cong M \times G^2$, $x \mapsto (m_{012}, \sigma_{01}, \sigma_{12})$,..., $Ner_n(M \rtimes G, pr, \otimes) \cong M^{\frac{n(n-1)}{2}} \times G^n$. En definitiva, vemos que $Ner(M \rtimes G, pr, \otimes)$ es un complejo minimal reducido, con dos grupos de homotopía no triviales, $\pi_1 \cong G$ y $\pi_2 \cong M$ como G-módulo. Esto es,

$$Ner(M \rtimes G, pr, \otimes) \cong L(M_G, 2)$$

donde $L(M_G, 2)$ es el complejo minimal generalizado de Eilenberg-MacLane definido por G y el G-módulo M.

Si $M = 0$, entonces $Ner(G) = K(G, 1)$, el complejo minimal de Eilenberg-MacLane con grupo fundamental G; y si $G = 1$, obtenemos que $Ner(M, \otimes) = K(M, 2)$, el complejo de Eilenberg-MacLane con $\pi_2 = M$.

Ejemplo 4.1.3 *El complejo de Picard de una extensión de Galois.*

Sea S/R una extensión de Galois de anillos conmutativos con grupo $G = Gal(S/R)$. Consideremos ahora el diagrama de grupos categóricos $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes} : G \longrightarrow GpCAT$ descrito en la sección 1.3.2, y el correspondiente G-grupo categórico $(\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\int G, \mathcal{P}, \otimes_S)$.

Definimos el complejo simplicial de Picard $\mathcal{P}(S/R)$ como el nervio del G-grupo categórico $\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\int G$, es decir

$$\mathcal{P}(S/R) = Ner(\mathcal{P}ic(S)^{\otimes}\!\textstyle\int G, \mathcal{P}, \otimes_S)$$

Entonces, un n-símplex $x \in \mathcal{P}_n(S/R)$ es una upla

$$x = (f_{ijk}, P_{ij}, \sigma_{ij})$$

que consiste de un elemento $\sigma_{ij} \in G$ y un S-módulo invertible P_{ij}, para cada $0 \leq i \leq j \leq n$, y de un isomorfismo de S-módulos

$$f_{ijk} : P_{ik} \xrightarrow{\sim} {}^{\sigma_{jk}}P_{ij} \otimes P_{jk}$$

para cada $0 \leq i \leq j \leq k \leq n$, tales que

(1) $\sigma_{jk}\sigma_{ij} = \sigma_{ik}$ si $i \leq j \leq k$

(2) $P_{ii} = S$

(3) Los isomorfismos $f_{iik} : P_{ik} \xrightarrow{\sim} {}^{\sigma_{ik}}S \otimes_S P_{ik}$ y $f_{ijj} : P_{ij} \to P_{ij} \otimes_S S$ son los canónicos $x \mapsto 1 \otimes x$, $x \mapsto x \otimes 1$.

(4) Para cualesquiera $i \leq j \leq k \leq l$, se tiene $(1 \otimes f_{jkl})f_{ijl} = (f_{ijk} \otimes 1)f_{ikl}$.

Como en el ejemplo anterior, las caras de un n-símplex son

$$d_m(x) = (f_{\delta_m(i),\delta_m(j),\delta_m(k)}, P_{\delta_m(i)\delta_m(j)}, \sigma_{\delta_m(i)\delta_m(j)}).$$

Las peculiaridades más interesantes de este complejo pueden resumirse como sigue:

Proposición 4.1.4 *Para cualquier extensión de Galois de anillos conmutativos S/R, con grupo de Galois finito G, el complejo $\mathcal{P}(S/R)$ tiene las siguientes propiedades:*

(a) $\mathcal{P}(S/R)$ es reducido (entonces conexo) y de Kan.

(b) Tiene a lo sumo dos grupos de homotopía no triviales, a saber:

$$\pi_1(\mathcal{P}(S/R)) = \mathrm{Pic}(S) \rtimes G, \quad y$$

$$\pi_2(\mathcal{P}(S/R)) = U(S) \quad ;$$

(c) Es un hipergrupoide 2-dimensional, esto es para $n \geq 3$ cualquier n-símplex está determinado por cualesquiera tres de sus caras.

(en (b), $\mathrm{Pic}(S) \rtimes G$ es el grupo producto semidirecto de G por el G-módulo $\mathrm{Pic}(S)$).

Demostración: El complejo $\mathcal{P}(S/R)$ es claramente reducido teniendo como único 0-símplex $S = (S \xrightarrow{\sim} S \otimes_S S, S, 1)$.

Notemos ahora que un 1-símplex de $\mathcal{P}(S/R)$ es justamente un par (P, σ), donde $\sigma \in G$ y P es un S-módulo invertible. Además, dar un 2-símplex $z \in \mathcal{P}_2(S/R)$ con caras $d_0(z) = (P_{12}, \sigma_{12})$, $d_2(z) = (P_{01}, \sigma_{01})$

y $d_1(z) = (P_{02}, \sigma_{02} = \sigma_{12}\sigma_{01})$ es equivalente a dar un isomorfismo $f_{012} : P_{02} \to {}^{\sigma_{12}}P_{01} \otimes P_{12}$

$$z = \begin{tikzcd} & 2 & \\ & f_{012} & \\ 0 \arrow[uur, "{(P_{02},\sigma_{02})}"] \arrow[rr, "{(P_{01},\sigma_{01})}"'] & & 1 \arrow[uul, "{(P_{12},\sigma_{12})}"'] \end{tikzcd}$$

Entonces, vemos que la condición de extensión de Kan para 1-símplices es una simple consecuencia de la invertibilidad de los S-módulos P_{ij} y de los elementos σ_{ij} de G. Por ejemplo, dados dos 1-símplices (P_{12}, σ_{12}) y (P_{02}, σ_{02}), encontramos un 2-símplex z tal que $d_0(z) = (P_{12}, \sigma_{12})$ y $d_1(z) = (P_{02}, \sigma_{02})$, tomando $\sigma_{01} = \sigma_{12}^{-1}\sigma_{02}$, $P_{01} = {}^{\sigma_{12}^{-1}}(P_{02} \otimes_S Hom_S(P_{12}, S))$ y $f_{012}^{-1} : {}^{\sigma_{12}}P_{01} \otimes P_{12} \longrightarrow P_{02}$ el isomorfismo canónico $f_{012}^{-1}(x \otimes \varphi \otimes y) = x\varphi(y)$.

La condición de extensión de Kan en pleno, es consecuencia de la propiedad (c), esto es, de que para cualquier $n \geq 3$, un n-símplex $x = (f_{ijk}, P_{ij}, \sigma_{ij})$ está completamente determinado por cualesquiera tres de sus caras. Para ver esto, notemos que una cara $d_m(z)$ incluye todos los σ_{ij}, P_{ij} y f_{ijk} tal que $m \notin \{i, j, k\}$. Entonces, si uno conoce las caras $d_m(z)$, $d_r(z)$ y $d_s(z)$, uno conoce todos los elementos de z, excepto el isomorfismo $f_{mrs} : P_{ms} \to {}^{\sigma_{rs}}P_{mr} \otimes P_{rs}$; pero tomando cualquier $i \notin \{m, r, s\}$ (que existe pues $n \geq 3$), la condición (4) de n-símplex en $\mathcal{P}(S/R)$ para i, m, r, s (en el orden que se presenten), vemos que también f_{mrs} está determinado por los otros.

Calculamos ahora los grupos de homotopía de $\mathcal{P}(S/R)$ en su único vértice. Por lo visto anteriormente, la relación de homotopía en n-símplex es trivial si $n \geq 2$.

Si $z = (f_{012}, P_{01}, P_{12}, P_{02}, \sigma_{01}, \sigma_{12})$ representa un 2-símplex, entonces $z \in \pi_2(\mathcal{P}(S/R))$ si y sólo si sus caras $d_m(z) = (S, 1)$, $m = 0, 1, 2$. Esto es, si y sólo si $P_{01} = P_{12} = P_{02} = S$ y $\sigma_{01} = \sigma_{12} = 1$. Un tal 2-símplex es entonces un S-isomorfismo $f : S \to S \otimes_S S$, o equivalentemente, un automorfismo S-lineal en S, que es lo mismo que dar una unidad del anillo S, así que $\pi_2(\mathcal{P}(S/R)) \cong U(S)$, el grupo de las unidades de S.

Ahora bien, un elemento de $\pi_1(\mathcal{P}(S/R))$ está representado por un par $(P_{01}, \sigma_{01}) \in \mathcal{P}ic(S) \times G$ siendo $(P_{01}, \sigma_{01}) \sim (P_{02}, \sigma_{02})$ si existe un 2-símplex de la forma $x = (f_{012}, P_{01}, P_{02}, S, \sigma_{01}, 1)$, con $d_1(x) = (P_{02}, \sigma_{02})$, es decir, tal que $\sigma_{01} = \sigma_{01}1 = \sigma_{02}$ y $f_{012} : P_{02} \xrightarrow{\sim} P_{01} \otimes_S S \cong P_{01}$. Por consiguiente, la aplicación $\mathrm{Pic}(S) \times G \longrightarrow \pi_1(\mathcal{P}(S/R))$, $([P], \sigma) \mapsto [(P, \sigma)]$, es biyectiva. Además, la multiplicación en π_1 está determinada por cualquier 2-símplex representativo

$$\begin{tikzcd} & S & \\ S \arrow[ur, "{(T,\tau\sigma)}"] \arrow[rr, "{(P,\sigma)}"'] & f & S \arrow[ul, "{(Q,\tau)}"'] \end{tikzcd}$$

por $[(Q, \tau)][(P, \sigma)] = [(T, \tau\sigma)]$; ahora bien, por definición de 2-símplices, $[(T, \tau\sigma)] = [({}^{\tau}P \otimes_S Q, \tau\sigma)]$, y de esta forma concluimos que la biyección es realmente un isomorfismo $\mathrm{Pic}(S) \rtimes G \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{P}(S/R))$. ■

Ejemplo 4.1.5 *El nervio de un grupo categórico.*

Supongamos $(\mathbb{G}, \otimes)$ un grupo categórico. Considerando éste como trivialmente cofibrado sobre la categoría $*$, consistente de un solo objeto, obtenemos el conjunto simplicial $Ner(\mathbb{G}, \otimes)$, considerado en [12] como el nervio del grupo categórico. Este es un conjunto simplicial reducido, cuyos 1-símplices son los objetos de $\mathbb{G}$, es decir $Ner_1(\mathbb{G}, \otimes) = Ob(\mathbb{G})$ y cuyos n-símplices para $n \geq 2$, son uplas de morfismos en $\mathbb{G}$

$$x = (X_{ik} \xrightarrow{u_{ijk}} X_{ij} \otimes X_{jk})_{0 \leq i < j < k \leq n}$$

tales que $(u_{ijk} \otimes 1)u_{ikl} = (1 \otimes u_{jkl})u_{ijl}$. Tal como es probado en [12], este es un conjunto simplicial de Kan, cuyos grupos de homotopía son

$$\pi_i(Ner(\mathbb{G}, \otimes)) = \begin{cases} 0 & i \neq 1, 2 \\ [\mathbb{G}] & \text{el grupo de componentes conexas de } \mathbb{G},\ i = 1 \\ Aut_{\mathbb{G}}(I) & \text{el grupo de automorfismos de } I,\ i = 2. \end{cases}$$

En el trabajo citado se prueba también que $(\mathbb{G}, \otimes) \mapsto Ner(\mathbb{G}, \otimes)$ establece una equivalencia entre la categoría de homotopía de grupos categóricos y la de complejos simpliciales con grupos de homotopía triviales en otras dimensiones que 1 y 2.

Si $\mathcal{B}$ es cualquier categoría pequeña y consideramos el $\mathcal{B}$-grupo categórico $(\mathbb{G}\times\mathcal{B}, pr, \otimes)$ donde $\mathbb{G}\times\mathcal{B}$ es la categoría producto y $pr : \mathbb{G}\times\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ el funtor proyección, entonces $Ner(\mathbb{G}\times\mathcal{B}, pr, \otimes) = Ner(\mathbb{G},\otimes)\times Ner(\mathcal{B})$.

Finalizamos esta sección haciendo mención a un reciente resultado de Cegarra [13], que justifica la consideración de ser un colímite homotópico, dada a la construcción de Grothendieck hecha en 1.2.5.

Al componer con el funtor Nervio, el diagrama de grupos categóricos $\mathbb{F}^{\otimes} : \mathcal{B}\longrightarrow GpCAT$, da un diagrama $Ner(\mathbb{F}^{\otimes}) : \mathcal{B}\to Set^{\Delta^{op}}$, de conjuntos simpliciales de tipo $\mathcal{B}$, entonces en [13] se prueba el siguiente teorema de colímite homotópico.

Teorema 4.1.6 *Sea* $\mathbb{F}^{\otimes} : \mathcal{B}\longrightarrow GpCAT$ *un diagrama de grupos categóricos, existe una equivalencia homotópica débil*

$$hocolim(Ner(\mathbb{F}^{\otimes}))\xrightarrow{\sim} Ner(\mathbb{F}^{\otimes}\textstyle\int\mathcal{B}).$$

4.2 La fibración escindida definida por un grupo categórico bifibrado.

Supongamos dado $(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes) = (\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes,a,I,l,r)$ un $\mathcal{B}$-grupo categórico y en él un sistema de imágenes directas $(\Gamma_b(X) : X\to {}^bX)$, que determina el pseudodiagrama asociado de grupos categóricos fibras $\mathbb{G}^{\otimes} : \mathcal{B}\longrightarrow GpCAT$, $B\mapsto\mathbb{G}_B$, $(A\xrightarrow{b}B)\mapsto({}^b(-) : \mathbb{G}_A\to\mathbb{G}_B)$, de acuerdo con la equivalencia establecida en el teorema 1.2.21.

Existe una aplicación simplicial

$$Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)\underset{s}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} Ner(\mathcal{B}) \tag{4.3}$$

definida por $\varphi(u_{ijk},X_{ij},b_{ij},B_i) = (b_{ij},B_i)$, que tiene una sección cruzada dada por $s(b_{ij},B_i) = (l^{-1}_{I_{B_k}}, I_{B_j}, b_{ij}, B_i)$, y cuya fibra $\varphi^{-1}(B)$ sobre un objeto $B\in\mathcal{B}$, se puede describir de la siguiente forma: $\varphi^{-1}(B)_0 = \{B\}$, es decir, $\varphi^{-1}(B)$ es un conjunto simplicial reducido; $\varphi^{-1}(B)_1 = \{X\in Ob(\mathbb{G})/\ \mathcal{P}_{\mathbb{G}}(X) = B\} = Ob(\mathbb{G}_B)$, el conjunto de objetos del grupo categórico fibra de $\mathbb{G}$ sobre B, y para $n\geq 2$ un n-símplex de $\varphi^{-1}(B)$ es una upla de morfismos en $\mathbb{G}_B$

$$x = (X_{ik}\xrightarrow{u_{ijk}} X_{ij}\otimes X_{jk})_{0\leq i<j<k\leq n}$$

tal que si $0 \leq i < j < k < l \leq n$, entonces $(u_{ijk} \otimes 1)u_{ikl} = (1 \otimes u_{jkl})u_{ijl}$.

Entonces, vemos que para cualquier objeto $B \in \mathcal{B}$, $\varphi^{-1}(B) = Ner(\mathbb{G}_B, \otimes)$, el nervio del grupo categórico fibra $\mathbb{G}_B$ estudiado en [12] es decir, *El nervio de la fibra es la fibra del nervio.*

La siguiente proposición caracteriza el hecho de que φ sea una fibración de Kan.

Proposición 4.2.1 *Sea* $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ *un* $\mathcal{B}$*-grupo categórico y sea* φ *la aplicación simplicial inducida* $\varphi : Ner(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \to Ner(\mathcal{B})$*. Entonces:*

φ *es una fibración de Kan* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}$ *es una bifibración.*

Para la demostración de esta proposición usaremos el siguiente resultado.

Lema 4.2.2 *Si* $(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ *es un* $\mathcal{B}$*-grupo categórico en el que se ha fijado un sistema de imágenes directas* $(\Gamma_b(X) : X \to {}^bX)$*, entonces:*

$\mathcal{P}_{\mathbb{G}}$ *es una bifibración* $\Leftrightarrow$ *Para cualquier morfismo* $b : A \to B$ *en* $\mathcal{B}$*, el funtor* ${}^b(-) : \mathbb{G}_A \to \mathbb{G}_B$ *es una equivalencia.*

Demostración:

Supongamos que $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}$ es una fibración y sea $b : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{B}$. Entonces, dado cualquier B-objeto $Y \in \mathbb{G}_B$, existe un A-objeto $X \in \mathbb{G}_A$ y un b-morfismo $u : X \to Y$. Como el b-morfismo $\Gamma_b(X) : X \to {}^bX$ es cocartesiano, existirá un único B-isomorfismo $v : {}^bX \to Y$ tal que $v\Gamma_b(X) = u$. Con la existencia de dicho v queda probado que ${}^b(-)$ es denso.

Por otra parte, si $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}$ es una fibración, todo morfismo en $\mathbb{G}$ es cartesiano, y en particular lo será $\Gamma_b(X)$ para cualquier $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$ y cualquier $X \in \mathbb{G}_A$. Con esto, si X e Y son dos A-objetos de $\mathbb{G}$ y $g : {}^bX \to {}^bY$ es cualquier B-morfismo, existe un único A-morfismo $f : X \to Y$ haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Gamma_b(X)"] \arrow[d, dashed, "f"'] & {}^bX \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "\Gamma_b(Y)"'] & {}^bY \end{tikzcd}$$

y como consecuencia directa de la definición del funtor ${}^b(-)$ se obtiene que ${}^bf = g$ y queda probado que ${}^b(-)$ es fiel y pleno.

Recíprocamente, sean $b : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{B}$ e $Y \in \mathbb{G}_B$. Por la densidad del funtor ${}^b(-)$, existirá un objeto $X \in \mathbb{G}_A$ y un B-isomorfismo $g : {}^bX \to Y$. Como consecuencia, la composición $X \xrightarrow{\Gamma_b(X)} {}^bX \xrightarrow{g} Y$ es un b-morfismo. El morfismo g es cartesiano por ser un isomorfismo, por tanto, para concluir que $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}$ es una fibración, sólo es necesario probar que $\Gamma_b(X)$ es cartesiano. Sea entonces Z un A-objeto y $u : Z \to {}^bX$ cualquier b-morfismo. Como $\Gamma_b(Z)$ es cocartesiano, existe un B-morfismo $v : {}^bZ \to {}^bX$ haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\Gamma_b(Z)"] \arrow[dr, "u"'] & {}^bZ \arrow[d, dashed, "v"] \\ & {}^bX \end{tikzcd}$$

y ahora, por ser ${}^b(-)$ fiel y pleno existirá un único morfismo $w : Z \to X$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\Gamma_b(Z)"] \arrow[d, dashed, "w"'] \arrow[dr, "g"] & {}^bZ \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "\Gamma_b(X)"'] & {}^bX \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Con esto se tiene que $\Gamma_b(X)$ es cartesiano y como consecuencia también lo es $g\Gamma_b(X)$ ∎

Demostración de la Proposición 4.2.1: *Condición suficiente:* La condición de fibración de Kan en dimensión $n = 0$ se traduce en que para cualquier $B \in Ob(\mathcal{B})$, el grupo categórico fibra $\mathbb{G}_B$ es no vacío, lo cual siempre es cierto. Para $n \geq 2$, dicha condición es consecuencia directa de que para cualquier $n \geq 2$ un $(n+1)$-símplex $x = (u_{ijk}, X_{ij}, b_{ij}, B_i)$ está completamente determinado por cualesquiera tres de sus caras. Para ver esto, notemos que una cara $d_m(x)$ incluye todos los B_i, b_{ij}, X_{ij}, u_{ijk} tales que $m \notin \{i, j, k\}$. Entonces si uno conoce las caras $d_m(x)$, $d_r(x)$, $d_s(x)$, uno conoce todos los elementos de x, excepto el isomorfismo $u_{mrs} : X_{ms} \to {}^{b_{rs}}X_{mr} \otimes X_{rs}$; pero tomando para cualquier $i \notin \{m, r, s\}$ (que existe pues $n + 1 \geq 3$) el diagrama conmutativo (4.2) para i, m, r, s (en el orden en que se encuentren), vemos que también u_{mrs} está determinado por los otros. Obsérvese que para algunos casos es necesario usar que los funtores ${}^{b}(-)$ son plenos.

Veamos ahora los tres casos posibles para $n = 1$:

Sean $x_0, x_2 \in Ner_1(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ tales que $d_0(x_2) = d_1(x_0)$, esto es, $x_0 = (Y, c : B \to C)$, $x_2 = (X, b : A \to B)$, y sea $y \in Ner_2(\mathcal{B})$ tal que $d_0(y) = \varphi(x_0)$, $d_2(y) = \varphi(x_2)$, es decir, $y = (b : A \to B, c : B \to C)$. Entonces tiene que existir $x \in Ner_2(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ de manera que $\varphi(x) = y$, $d_0(x) = x_0$ y $d_2(x) = x_2$. Por cumplir estas condiciones, x tendrá que ser de la forma $x = (u, X, Y, Z, b, c, A, B, C)$ donde Z es un C-objeto y $u : Z \to {}^{c}X \otimes Y$ es un C-morfismo (siempre existen pues se puede tomar $Z = {}^{c}X \otimes Y$ y $u = id$).

Sean ahora $x_1, x_2 \in Ner_1(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ tales que $d_1(x_2) = d_1(x_1)$, esto es, $x_1 = (Z, a : A \to C)$, $x_2 = (X, b : A \to B)$, y sea $y \in Ner_2(\mathcal{B})$ tal que $d_1(y) = \varphi(x_1)$, $d_2(y) = \varphi(x_2)$, es decir, $y = (b : A \to B, c : B \to C)$ de forma que $cb = a$. Entonces tiene que existir $x \in Ner_2(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ de manera que $\varphi(x) = y$, $d_1(x) = x_1$ y $d_2(x) = x_2$. Por cumplir estas condiciones, x tendrá que ser de la forma $x = (u, X, Y, Z, b, c, A, B, C)$ donde Y es un C-objeto y $u : Z \to {}^{c}X \otimes Y$ es un C-morfismo (siempre existen por ser ${}^{c}X \otimes -$ una autoequivalencia en $\mathbb{G}_C$).

Por último, sean $x_0, x_1 \in Ner_1(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ tales que $d_0(x_1) = d_0(x_0)$, esto es, $x_0 = (Y, c : B \to C)$, $x_1 = (Z, a : A \to C)$, y sea $y \in Ner_2(\mathcal{B})$ tal que $d_0(y) = \varphi(x_0)$, $d_1(y) = \varphi(x_1)$, es decir, $y = (b : A \to B, c : B \to C)$, de manera que $cb = a$. Entonces debe existir $x \in Ner_2(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ de manera que $\varphi(x) = y$, $d_0(x) = x_0$ y $d_1(x) = x_1$. Por cumplir estas condiciones, x tendrá que ser de la forma $x = (u, X, Y, Z, b, c, A, B, C)$ donde X es un B-objeto y $u : Z \to {}^{c}X \otimes Y$ es un C-morfismo. Como $- \otimes Y$ es una autoequivalencia en $\mathbb{G}_C$, existe un C-objeto $T \in \mathbb{G}_C$ y un C-isomorfismo $v : Z \to T \otimes Y$. Ahora bien, como $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}$ es una fibración, el funtor ${}^{c}(-)$ es denso y existe un B-objeto X y un C-isomorfismo $w : T \to {}^{c}X$. Entonces la composición $Z \xrightarrow{v} T \otimes Y \xrightarrow{w \otimes 1} {}^{c}X \otimes Y$ nos proporciona el morfismo u que buscábamos.

Condición necesaria: Recíprocamente, sea $c : B \to C$ un morfismo en $\mathcal{B}$ y Z un C-objeto de $\mathbb{G}$. Tomando $x_0 = (I_C, c : B \to C)$, $x_1 = (Z, c : B \to C)$ e $y = (id : B \to B, c : B \to C)$, obtenemos que $x_0, x_1 \in Ner_1(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ son tales que $d_0(x_1) = d_0(x_0)$ e $y \in Ner_2(\mathcal{B})$ es tal que $d_0(y) = \varphi(x_0)$ y $d_1(y) = \varphi(x_1)$. Por verificarse la condición de fibración de Kan, existirá un B-objeto X y un C-morfismo $u : Z \to {}^{c}X \otimes I_C$ y componiendo con $r_{{}^{c}X}$ se obtendrá un morfismo $Z \to {}^cX$. Con esto se prueba que el funtor ${}^b(-)$ es denso.

Para probar ahora que ${}^b(-)$ es fiel y pleno, tendremos que ver que la aplicación $Hom_A(X,Y) \to Hom_B({}^bX, {}^bY)$, $u \mapsto {}^bu$ es una biyección. Sea entonces $w : {}^bX \to {}^bY$ un B-morfismo. Al componerlo con el isomorfismo $l^{-1}_{{}^bY}$, obtenemos un morfismo $u : {}^bX \to {}^bY \otimes {}^bI_A$ (recuérdese que ${}^bI_A = I_B$). Sean ahora $x_0 = (r^{-1}_{{}^bY}, I_A, {}^bY, I_B, id_A, b, A, A, B)$, $x_1 = (r^{-1}_{{}^bX}, X, {}^bX, I_B, id_A, b, A, A, B)$ y $x_2 = (u, I_A, {}^bX, {}^bY, id_A, b, A, A, B)$ tres 2-símplex de $Ner(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ verificando que $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$ si $0 \leq i < j \leq 2$. Consideremos también $y = (id_A : A \to A, id_A : A \to A, b : A \to B)$ un 3-símplex de $Ner(\mathcal{B})$, que verifica que $d_i(y) = \varphi(x_i)$, $i = 0,1,2$. Por ser φ una fibración de Kan, existirá un 3-símplex $x = (u_{ijk}, X_{ij}, b_{ij}, B_i)$ de $Ner(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$ tal que $d_i(x) = x_i$, $i = 0,1,2$ y $\varphi(x) = y$. Simplemente desarrollando estas condiciones obtenemos que: $B_0 = A$, $B_1 = A$, $B_2 = A$, $B_3 = B$, $b_{01} = id_A$, $b_{12} = id_A$, $b_{23} = b$, $X_{01} = I_A$, $X_{02} = X$, $X_{03} = {}^bX$, $X_{12} = Y$, $X_{13} = {}^bY$, $X_{23} = I_B$, $u_{013} = u$, $u_{023} = r^{-1}_{{}^bX}$ y $u_{123} = r^{-1}_{{}^bY}$. Faltaría por determinar el morfismo $v = u_{012} : X \to I_A \otimes Y$. Pero este morfismo viene determinado por el diagrama (4.2) para $i = 0$, $j = 1$, $k = 2$, $l = 3$ que resultaría de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
{}^bX \arrow[r, "u"] \arrow[d, "r^{-1}_{{}^bX}"'] & {}^bI_A \otimes {}^bY \arrow[d, "1\otimes r^{-1}_{{}^bY}"] \\
{}^bX \otimes I_B \arrow[r, dashed, "{}^bv\otimes 1"'] & {}^bI_A \otimes {}^bY \otimes I_B
\end{tikzcd}$$

Como también se verifica que $(1 \otimes r^{-1}_{{}^bY})u = (u \otimes 1)r^{-1}_{{}^bX}$ se tiene que ${}^bv \otimes 1 = u \otimes 1$, y por ser $- \otimes I_B$ una equivalencia que ${}^bv = u$. El morfismo v así obtenido es único por ser todos los morfismos en la categoría fibra isomorfismos. La composición $v' = l_Y v$ verifica que ${}^bv = w$.

■

Ejemplo 4.2.3 Los grupos categóricos descritos en los ejemplos de las secciones 1.3.2 (Picard) y 1.3.3 (Whitehead) son ambos bifibrados. El de la sección 1.3.1, referente a módulos, será bifibrado siempre que los homomorfismos ${}^b(-) : M_A \to M_B$ sean isomorfismos de grupos abelianos, es decir, siempre que el módulo $M : \mathcal{B} \to Ab$ sea un sistema local.

4.3 El teorema de clasificación homotópica.

Consideremos un grupo G, un G-módulo M y el G-grupo categórico producto semidirecto que se define, $M \rtimes G = (M \rtimes G, pr, \otimes, a, I, l, r)$, como en el ejemplo de la sección 1.3.1, cuyo grupo categórico fibra es el definido por el grupo abeliano M. Entonces $Ner(G) = K(G,1)$, el complejo minimal de Eilenberg-MacLane con grupo fundamental G, $Ner(M,\otimes) = K(M,2)$, el complejo minimal de Eilenberg-MacLane con segundo grupo de homotopía M, y $Ner(M \rtimes G, pr, \otimes) = L(M_G, 2)$ el complejo minimal de Eilenberg-MacLane generalizado comentado en el ejemplo 4.1.2. La fibración escindida (4.3) nos proporciona en este caso la sucesión fibrada escindida

$$K(M,2) \overset{i}{\hookrightarrow} L(M_G,2) \underset{s}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} K(G,1). \tag{4.4}$$

Por la teoría de obstrucción la sucesión fibrada (4.4) es única salvo equivalencias homotópicas fibradas, es decir, depende sólo de G y M, y además el problema de clasificar las secciones cruzadas de $\varphi : L(M_G, 2) \to K(G,1)$, salvo homotopías fibradas, se resuelve por el grupo de cohomología de G con coeficientes en el G-módulo M, es decir, existe una biyección

$$\Gamma\left[{}^{L(M_G,2)}/_{K(G,1)}\right] \cong H^2(G,M),$$

lo que motiva el principal resultado en este capítulo:

Teorema 4.3.1 *Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes, a, I, l, r)$ un $\mathcal{B}$-grupo categórico bifibrado. Entonces existe una biyección*

$$\Gamma\left({}^{Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)}/_{Ner(\mathcal{B})}\right) \cong \mathbb{Z}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes})$$

entre el conjunto de secciones simpliciales cruzadas de la fibración $\varphi : Ner(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \to Ner(\mathcal{B})$ y el conjunto de 2-cociclos en $\mathcal{B}$ con coeficientes en $\mathbb{G}$.

Además, dos 2-cociclos están en la misma clase de cohomología si, y sólo si, sus correspondientes secciones cruzadas son fibra homotópicas. Como *consecuencia, la anterior biyección induce otra,*

$$\Gamma\left[{}^{Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)}/_{Ner(\mathcal{B})}\right] \cong \mathbb{H}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes}), \tag{4.5}$$

entre el conjunto de clases homotopía fibrada de secciones cruzadas de φ y el conjunto de 2-cohomología de $\mathcal{B}$ con coeficientes en $\mathbb{G}^{\otimes}$.

Demostración: En primer lugar, con el mismo razonamiento que se realizó en la proposición 4.2.1 se observa que si $n \geq 3$, cualquier n-símplex $x = (u_{ijk}, X_{ij}, b_{ij}, B_i)$ de $Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)$ está completamente determinado por cualesquiera tres de sus caras, y por tanto por sus caras 2-dimensionales.

Sea $\alpha : Ner(\mathcal{B}) \longrightarrow Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)$ una sección cruzada de φ. Entonces α_0 es la aplicación identidad en objetos de $\mathcal{B}$ y, de acuerdo con las anteriores observaciones, α está determinada por $\alpha_i : Ner_i(\mathcal{B}) \to Ner_i(\mathbb{G}, P_{\mathbb{G}},\otimes)$ para $i = 1,2$. Ahora, α_1 es de la forma $\alpha_1(A \xrightarrow{b} B) = (t_b, A \xrightarrow{b} B)$, donde t_b es un B-objeto de $\mathbb{G}$; y entonces, usando las identidades simpliciales, α_2 es de la forma $\alpha_2(A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C) = (t_{c,b}, t_b, t_c, t_{cb}, b, c, A, B, C)$, donde $t_{c,b} : t_{cb} \to {}^c t_b \otimes t_c$ es un C-morfismo en $\mathbb{G}$. A partir de dichas identidades simpliciales, vemos que $t = (t_b, t_{c,b})$ es de hecho un 2-cociclo en $\mathbb{Z}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes})$, que claramente determina a α_1 y α_2, y por tanto a α. Además, cualquier 2-cociclo $t \in \mathbb{Z}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes})$ procede de una sección cruzada α definida de la siguiente forma: Si $b : [n] \to \mathcal{B}$ es un n-símplex de $Ner(\mathcal{B})$, entonces $\alpha(b) = b^*(t)$, donde $b^* : \mathbb{Z}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes}) \longrightarrow \mathbb{Z}^2([n], b^*\mathbb{G}^{\otimes})$ es la aplicación inducida por el funtor b. Entonces $\alpha \mapsto t$ establece la biyección anunciada.

Ahora, consideremos la categoría producto $\mathcal{B} \times [1]$, que es una $\mathcal{B}$-categoría vía el funtor proyección $pr : \mathcal{B} \times [1] \to \mathcal{B}$, los $\mathcal{B}$-funtores de inclusión $u_0, u_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \times [1]$, $u_i(x) = (x,i)$, $i = 0,1$, y el pseudodiagrama de grupos categóricos de tipo $\mathcal{B} \times [1]$, $pr^*\mathbb{G}^{\otimes} = (\mathbb{G} \times [1])^{\otimes}$. Entonces, aseguramos que la sucesión

$$\mathbb{Z}^2(\mathcal{B} \times [1], (\mathbb{G} \times [1])^{\otimes}) \underset{pr_*u_1^*}{\overset{pr_*u_0^*}{\rightrightarrows}} \mathbb{Z}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes}) \tag{4.6}$$

es un coigualador: Si $T \in \mathbb{Z}^2(\mathcal{B} \times [1], (\mathbb{G} \times [1])^{\otimes})$ es un 2-cociclo tal que $pr_*u_0^*(T) = t$ y $pr_*u_1^*(T) = t'$, encontramos un morfismo de 2-cociclos en $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes})$, $\varphi : t \to t'$ eligiendo para cada objeto $A \in \mathcal{B}$, $\varphi_A = pr(T_{(1_A,\iota)})$, donde $\iota : 0 \to 1$ es el único morfismo de la categoría $[1]$ que no es la identidad, y para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, $\varphi_b : t_b \otimes \varphi_B \longrightarrow {}^b\varphi_A \otimes t'_b$ como la proyección en $\mathbb{G}$ del morfismo composición en $\mathbb{G} \times [1]$

$$T_{(b,0)} \otimes T_{(1_B,\iota)} \xrightarrow{T^{-1}_{(1,\iota),(b,0)}} T_{(b,\iota)} \xrightarrow{T_{(b,1),(1,\iota)}} {}^{(b,1)}T_{(1_A,\iota)} \otimes T_{(b,1)}$$

(obsérvese que $(b,\iota) = (b,1)(1_A,\iota) = (1_B,\iota)(b,0)$ en $\mathcal{B} \times [1]$). Es fácil ver que las condiciones de 2-cociclo para T son equivalentes a las condiciones de morfismo de 2-cociclos para $\varphi : t \to t'$. Recíprocamente, cualquier morfismo de 2-cociclos $\varphi : t \to t'$ define un 2-cociclo T en $\mathcal{B} \times [1]$ con coeficientes en $(\mathbb{G} \times [1])^{\otimes}$ tal que $pr_* u_0^*(T) = t$ y $pr_* u_1^*(T) = t'$ haciendo, para cada morfismo $b : A \to B$ en $\mathcal{B}$, $T_{(b,0)} = (t_b, 0)$, $T_{(b,1)} = (t'_b, 1)$ y $T_{(b,\iota)} = ({}^b\varphi_A \otimes t'_b, 1)$, y para cada par de morfismos componibles en $\mathcal{B}$, $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C$, $T_{(c,0),(b,0)} = (t_{c,b}, 0)$, $T_{(c,1),(b,1)} = (t'_{c,b}, 1)$, $T_{(c,1),(b,\iota)} = (1 \otimes t'_{c,b}, 1)$ y $T_{(c,\iota),(b,0)} = (({}^c\varphi_b \otimes 1)^{-1}(1 \otimes t'_{c,b}), 1)$.

Ahora, sabemos que $\mathbb{Z}^2(\mathcal{B}, \mathbb{G}^{\otimes}) \cong \Gamma\big({}^{Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)}/_{Ner(\mathcal{B})}\big)$ y

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2(\mathcal{B} \times [1], (\mathbb{G} \times [1])^{\otimes}) &\cong \Gamma\big({}^{Ner(\mathbb{G}\times[1],\mathcal{P}_{\mathbb{G}}\times 1,\otimes)}/_{Ner(\mathcal{B}\times[1])}\big) \\ &= \Gamma\big({}^{Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)\times\Delta[1]}/_{Ner(\mathcal{B})\times\Delta[1]}\big). \end{aligned}$$

Sin embargo, las secciones cruzadas de $Ner(\mathbb{G}) \times \Delta[1] \xrightarrow{\varphi\times 1} Ner(\mathcal{B}) \times \Delta[1]$ están en correspondencia uno a uno con aquellas homotopías simpliciales $H : Ner(\mathcal{B}) \times \Delta[1] \longrightarrow Ner(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, entre secciones cruzadas de $\varphi : Ner(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes) \longrightarrow Ner(\mathcal{B})$, que son estacionarias sobre $Ner(\mathcal{B})$ (es decir, tales que $\varphi \cdot H : Ner(\mathcal{B}) \times \Delta[1] \longrightarrow Ner(\mathcal{B})$ es la homotopía identidad). Por tanto, la sucesión del coigualador (4.6) nos proporciona la biyección (4.5).

■

El anterior teorema, junto con el Teorema 3.1.11, también establecen que existe una biyección natural entre la colección de clases de equivalencia de $\mathcal{B}$-torsores bajo un $\mathcal{B}$-grupo categórico $\mathbb{G}$, y la colección de clases de homotopía fibrada de secciones cruzadas de $Ner(\mathcal{B})$ a $Ner(\mathbb{G}, \mathcal{P}_{\mathbb{G}}, \otimes)$, es decir:

Teorema 4.3.2 *Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y sea $\mathbb{G}$ un $\mathcal{B}$-grupo categórico. Existe una biyección*

$$\Gamma\Big[{}^{Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)}/_{Ner(\mathcal{B})}\Big] \cong Tors[\mathcal{B}, \mathbb{G}].$$

El caso de coeficientes triviales, esencialmente tratado en [14], resulta, como caso particular de los teoremas 3.1.11 y 4.3.1, expresable como sigue:

Teorema 4.3.3 *Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y $(\mathbb{G},\otimes)$ un grupo categórico, existen biyecciones naturales*

$$Tors[\mathcal{B},\mathbb{G}\times\mathcal{B}]\cong\mathbb{H}^2(\mathcal{B},\mathbb{G})\cong[Ner(\mathcal{B}),Ner(\mathbb{G},\otimes)]$$

entre el conjunto de clases de $\mathcal{B}$-torsores sobre el $\mathcal{B}$-grupo categórico producto $(\mathbb{G}\times\mathcal{B},pr,\otimes)$, el segundo conjunto de cohomología de $\mathcal{B}$ con coeficientes en el diagrama constante $\mathbb{G}$, y el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales de $Ner(\mathcal{B})$ a $Ner(\mathbb{G},\otimes)$.

Y, como una ilustración con intereses puramente algebraicos, damos el siguiente ejemplo, que es un teorema de representabilidad homotópica del grupo de Brauer-Goldman:

Corolario 4.3.4 *Si S/R es una extensión de Galois de anillos conmutativos con grupo finito G, existe una biyección natural*

$$Br(S/R)\cong\Gamma\left({}^{\mathcal{P}(S/R)}/_{K(G,1)}\right),$$

donde $\mathcal{P}(S/R)$ es el G-grupo categórico de Picard descrito en el ejemplo 4.1.3 y la proposición 4.1.4, y $\Gamma\left({}^{\mathcal{P}(S/R)}/_{K(G,1)}\right)$ es el conjunto de clases de homotopía fibrada de secciones cruzadas de la fibración $\varphi:\mathcal{P}(S/R)\to K(G,2)$, $\varphi(f_{ijk},P_{ij},\sigma_{ij})=(\sigma_{ij})$.

Para una categoría pequeña $\mathcal{B}$, su espacio clasificante $B(\mathcal{B})$ es la realización geométrica del conjunto simplicial $Ner(\mathcal{B})$, es decir, $B(\mathcal{B})=|Ner(\mathcal{B})|$. Si $\mathbb{G}$ es un $\mathcal{B}$-grupo categórico, definimos su espacio clasificante como $B(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)=|Ner(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)|$. Si $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}$ es una bifibración, la fibración de Kan (4.3) nos proporciona una fibración de Serre, con una sección cruzada

$$B(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)\overset{|\varphi|}{\underset{\dashleftarrow}{\longrightarrow}}B(\mathcal{B}),$$

cuya fibra sobre cualquier punto base A es homeomorfa a $B(\mathbb{G}_A,\otimes)$, el espacio clasificante del grupo categórico $\mathbb{G}_A$, fibra de $\mathbb{G}$ sobre A. Entonces, de los teoremas 3.1.11 y 4.3.1 deducimos la existencia de biyecciones

$$Tors[\mathcal{B},\mathbb{G}]\cong\Gamma\left[{}^{B(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)}/_{B(\mathcal{B})}\right]\cong\mathbb{H}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes}),\tag{4.7}$$

donde $\Gamma\left[{}^{B(\mathbb{G},\mathcal{P}_{\mathbb{G}},\otimes)}/_{B(\mathcal{B})}\right]$ es el conjunto de clases de homotopía fibrada de secciones cruzadas para $|\varphi|$.

Si $F:\mathcal{B}'\to\mathcal{B}$ es un funtor y $\mathbb{G}^{\otimes}:\mathcal{B}\longrightarrow GpCAT$ es un pseudo-diagrama de grupos categóricos, éste induce un morfismo

$$F^*:\mathbb{Z}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes})\longrightarrow\mathbb{Z}^2(\mathcal{B}',F^*\mathbb{G}^{\otimes})$$

que lleva un 2-cociclo $t=(t_b,t_{c,b}:t_{cb}\to{}^{c}t_b\otimes t_c)\in\mathbb{Z}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes})$ al 2-cociclo $F^*(t)=(t_{F(b')},t_{F(c'),F(b')})$. Como consecuencia tendremos un morfismo

$$F^*:\mathbb{H}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes})\to\mathbb{H}^2(\mathcal{B}',F^*\mathbb{G}^{\otimes}).$$

Ahora, a partir de (4.7) y teniendo en cuenta que una equivalencia entre categorías pequeñas $\mathcal{B}'\to\mathcal{B}$ induce una equivalencia homotópica entre sus espacios clasificantes $B(\mathcal{B}')\to B(\mathcal{B})$, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.3.5 *Si $F:\mathcal{B}'\to\mathcal{B}$ es una equivalencia de categorías pequeñas, para todo pseudo-diagrama de grupos categóricos $\mathbb{G}^{\otimes}:\mathcal{B}\longrightarrow GpCAT$, el morfismo inducido $F^*:\mathbb{H}^2(\mathcal{B},\mathbb{G}^{\otimes})\longrightarrow\mathbb{H}^2(\mathcal{B}',F^*\mathbb{G}^{\otimes})$ es un isomorfismo.*

Recordemos que cualquier CW-complejo X es homotópicamente equivalente al espacio clasificante de una categoría pequeña [40], [29]: la categoría de símplices $\Delta(X)$ es aquella cuyos objetos son pares (n,α), donde $n\geq 0$ y $\alpha:\Delta^n\to X$ es una aplicación continua; y una flecha $u:(n,\alpha)\to(m,\beta)$ es una flecha $u:[n]\to[m]$ en Δ con la propiedad $\alpha=u^*(\beta)$. Entonces existe una equivalencia homotópica $X\simeq B(\Delta(X))$. Además, cualquier CW-complejo arco-conexo F con grupos triviales en dimensiones distintas de 1 y 2 tiene el tipo de homotopía de un grupo categórico [46], [36], [12]: Sea $W(F,*)=W(F,F^1,*,*)$ el grupo categórico de Whitehead de clases de homotopía en F de lazos en el 1-esqueleto F^1 (véase Ejemplo 1.3.3). Entonces existe una equivalencia homotópica $F\simeq B(W(F,*))$ si $\pi_i(F,*)=0$ para todo $i\neq 1,2$.

Parece que la clasificación homotópica de $\mathcal{B}$-grupos categóricos es equivalente a la clasificación homotópica de las fibraciones de Serre $Y\to X$, que tienen una sección cruzada y cuyas fibras F tienen grupos de homotopía triviales en dimensiones distintas de 1 y 2. Como consecuencia, las biyecciones (4.7) son apropiadas para describir algebraicamente todos los conjuntos

$\Gamma[{}^{Y}/_{X}]$. No nos meteremos en esto aquí, pero un caso particular es fácil de demostrar.

Por ejemplo, consideremos el caso de una fibración trivial $F \times X \to X$, donde X es un CW-complejo con el tipo de homotopía de un poliedro $|K|$ asociado a un complejo simplicial K, y F es un CW-complejo arco-conexo y punteado con $\pi_i(F,*) = 0$ para todo $i \neq 1, 2$. Si consideramos K como la categoría definida por el conjunto ordenado de sus símplices, entonces el espacio clasificante $B(K)$ es el poliedro definido por el complejo simplicial cuyos vértices son los símplices de K y cuyos símplices son colecciones no vacías finitas de símplices de K que están totalmente ordenados; es decir, $B(K) = |sd(K)|$ es el poliedro definido por la subdivisión baricéntrica de K, entonces, X tiene el mismo tipo de homotopía que la categoría K. Además, $F \simeq B(W(F,*), \otimes)$, $F \times X \simeq B(W(F,*) \times K, pr, \otimes)$, y $\Gamma\left[{}^{F\times X}/_{X}\right] = [X, F]$, el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $X \to F$; entonces las biyecciones (4.7), particularizan a

$$Tors[K, W(F,*)] \cong [X, F] \cong \mathbb{H}^2(K, W(F,*)),$$

donde $Tors[K, W(F,*)]$ denota el conjunto de clases de equivalencia de torsores sobre K bajo el grupo categórico trivialmente cofibrado $W(F,*)$, es decir, por la proyección $W(F,*) \times K \to K$, y análogamente $\mathbb{H}^2(K, W(F,*)) = \mathbb{H}^2(K, W(F,*) \times K)$.

Como último ejemplo, sea K un complejo simplicial como el de antes, $\Pi_1(K)$ el grupoide de caminos de K, y $M : \Pi_1(K) \to Ab$ cualquier funtor de $\Pi_1(K)$ a la categoría de grupos abelianos. Si consideramos K como la categoría definida por el conjunto ordenado de sus símplices, entonces M define un K-módulo a la izquierda y tenemos el K-grupo categórico bifibrado $M \rtimes K = (M \rtimes K, pr, \otimes, a, I, l, r)$ definido como en la sección 1.3.1. Entonces sabemos que $B(K) \simeq |K|$, el poliedro definido por K, $\mathbb{H}^2(K, M) \cong H^2(|K|, M)$, la cohomología de $|K|$ (véase la sección 3.2.1) con coeficientes en el sistema local M, y $Tors[K, M \rtimes K] \cong Lin[M, K]$, el conjunto de clases de equivalencia de K por M (véase la sección 2.2.1). Si $L(M_K, 2) = B(M \rtimes K, pr, \otimes)$ denota el espacio clasificante del K-grupo categórico $M \rtimes K$, tenemos una fibración de Serre con una sección cruzada

$$L(M_K, 2) \underset{\dashleftarrow}{\xrightarrow{|\varphi|}} |K|$$

donde, para cada vértice $v \in K$, la fibra sobre v es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $(M_v, 2)$ y tal que la acción de $\pi_1(K, v) \subseteq \pi_1(L(M_K, 2), v)$ sobre el grupo $M_v \subseteq \pi_2(L(M_K, 2), v)$ coincide con la dada. Las biyecciones (4.7) se particularizan a

$$Lin[M, K] \cong \Gamma\left[{}^{L(M_K,2)}/_{|K|}\right] \cong H^2(|K|, M).$$

Bibliografía

[1] M. André, Limites et fibrés. C.R. 260 (1965) 756-759.

[2] M. Barr, Cohomology in Tensored categories, in Proceedings of the conference on Categorical Algebra. La Jolla 1965. (Springer, Berlin 1966) 344-354.

[3] H. J. Baues and G. Wirsching, The cohomology of small categories. J. of Pure and Appl. Algebra, 38 (1985), 187-211.

[4] H. J. Baues, Algebraic homotopy (Cambridge University press, Cambridge 1989).

[5] J. Beck, Triples, algebras and cohomology. Columbia University, Ph. D. (1967).

[6] J. Bénabou, Introduction to bicategories, in reports of the Midwest Category Seminar, Lecture Notes in Math. 47 (Springer, Berlin, 1967) 1-77.

[7] L. Breen, Théorie de Schreier supérieure, Ann.Scient. Éc. Norm. Sup. 4^a série, 25 (1992), 465-514.

[8] R. Brown, Fibrations of groupoids. Journal of algebra 15 (1970), 103-132

[9] R. Brown and C. B. Spencer, G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group. Proc. Kon. Ned. Acad. v. Wet. 79 (1976), 296-302.

[10] M. Bullejos and A. M. Cegarra, A 3-dimensional non-abelian cohomology of groups with applications to homotopy classification of continuous maps. Can. J. Math. 43 (2) (1991), 265-296.

[11] P. Carrasco and A. M. Cegarra, Schreier theory for central extensions of categorical groups. Communication in Algebra 24 (13) (1996), 4059-4112.

[12] P. Carrasco and A. M. Cegarra, (Braided) Tensor structures on homotopy groupoids and nerves of (braided) categorical groups. Communications in Algebra 24 (13) (1996) 3995-4058.

[13] A. M. Cegarra, Homotopy colimits of categorical groups. Preprint (1998).

[14] A. M. Cegarra and A. R. Garzón, Homotopy classification of categorical torsors. Preprint (1997).

[15] A. M. Cegarra and L. Fernández, Cohomology of cofibred categorical groups. J.P.A.A. por aparecer ref. 2076 (1998)

[16] S. U. Chase, D. K. Harrison and A. Rosenberg, Galois theory and cohomology of commutative rings. Memoirs A.M.S. 52 (1965).

[17] P. Dedecker, Cohomologie non-abeliane. Séminaire de l'Institud Mathématique Lille, 1964-1965.

[18] F. DeMeyer and E. Ingraham, Separable algebras over Commutative rings (Lecture Notes in Math. 181, Springer-Berlin, 1971).

[19] J. Duskin, An Outline of a theory of higher dimensional descent. Bull. Soc. Math. Belg. XLI. 2. (1989) 249-278.

[20] S. Eilenberg and S. MacLane, Cohomology theory in abstract groups I. Ann. of Math. 58 (1953) 55-106.

[21] A. Fröhlich and C. T. Wall, Graded monoidal categories. Compositio Mathemática 28 (1974), 229-285.

[22] P. Gabriel and M. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory (Springer-Verlag, 1967).

[23] J. Giraud, Cohomologie non abélienne. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstallungen 179, (Springer-Verlag, 1971).

[24] A. Grothendieck, A general theory of fiber spaces with structure sheaf. Univ. of Kansas, 1955.

[25] A. Grothendieck, Catégories Fibrées et déscente, (SGAI) exposé VI. Lecture Notes in Math. 224 (Springer-Berlin 1971) 145-194.

[26] K. A. Hardie, K. H. Kamps and R. W. Keboom, A homotopy bigroupoid of a Topological space. Preprint (1997).

[27] A. Hattory, On the groups $H^n(S,G)$ and the Brauer group of commutative rings. Sci. Papers College Gen. Ed. Univ Tokyo 28 (1978) 1-20.

[28] G. Hoff, Cohomologies et extensions de catégories. Math. Scand. 74 (1994) 191-207.

[29] L. Illusie, Complexe cotangent et deformations II. Lecture Notes in Math. 283. (Springer, Berlin, 1972).

[30] J. F. Jardine, Supercoherence. J. Pure Appl. Algebra75 (1991), 103-194.

[31] A. Joyal and R. Street, Braided tensor categories. Advances in Math. (1), 82 (1991) 20-78.

[32] T. Kanzaki, On generalized crossed product and Brauer group. Osaka J.Math. 5 (1968) 175-188.

[33] M. H. Kapranov and V. A. Voevodsky, ∞-groupoids and homotopy types. Cahiers Topologie et Géom. Diff. Catégoriques XXXII-1 (1991) 29-46.

[34] G. M. Kelly, On MacLane's conditions for coherence of natural associativities, commutativities, etc. J. of Algebra 1 (1964) 397-402.

[35] S. MacLane, Natural associativity and commutativity. Rice University Studies 49 (1963), 28-46.

[36] S. MacLane and J. H. C. Whitehead, On 3-type of a complex. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 30 (1956), 41-48.

[37] J. P. May, Simplicial objects in Algebraic Topology (Van Nostrand, 1967).

[38] I. Moerdijk, Lecture on 2-dimensional groupoids. Institut de Math. Pure et Appliqué Univ. Catholique de Louvain. Rapport n^o 175, 1990.

[39] J. C. Moore, Seminar on algebraic homotopy theory (Princeton, 1956).

[40] D. Quillen, Higher algebraic K-theory: I, in Algebraic K-theory I. Lecture notes in Math. 341 (Springer, Berlin 1973), 77-139.

[41] J. E. Roos, Sur les dérivés du foncteur $\varinjlim$. C.R. 252 (1961) 3702-3704.

[42] N. Saavedra, Catégories tannakiennes. Lecture Notes in Math. 265 (Springer, Berlin, 1972).

[43] O. Schreier, Uber die Erweiterung von Gruppen I. Monatsh. Math. Phys. 34 (1926), 165-180.

[44] G. Segal, Cohomology of Topological Groups. Symposia Mat. IV Instituto Nazionale di Alta Matematic, Bologna (1970) 377-387.

[45] J. P. Serre, Groupes algébriques et corps de classe. Actualités scientifiques et Industrielles, Herman (1959).

[46] H. X. Sinh, Gr-catégories, (Université Paris VII. Thèse de doctorat, 1975).

[47] E. H. Spanier, Algebraic Topology. (Mc Graw-Hill, New York, 1966).

[48] R. W. Thomason, Homotopy colimits in the category of small categories. Math. Proc. Comb. Phil. Soc., 85 (1979), 91-109.

[49] K. H. Ulbrich, Group cohomology for Picard categories, Journal of Algebra 91 (1984), 464-498.

[50] O. E. Villamayor and D. Zelinsky, Brauer groups and Amitsur cohomology for general commutative ring extension. J. Pure Appl. Algebra 10 (1977), 19-55.

[51] Ch. E. Watts, A homology theory for Small Categories, in Proc. Conf. on Categorical Algebra, La Jolla 1965 (Springer-Berlin, 1966), 331-335.

[52] J. H. C. Whitehead, Combinatorial Homotopy II, Bull AMS 55 (1949) 469-543.