

5/173

Superficies de Curvatura Constante

José Antonio Gálvez López

Tesis Doctoral



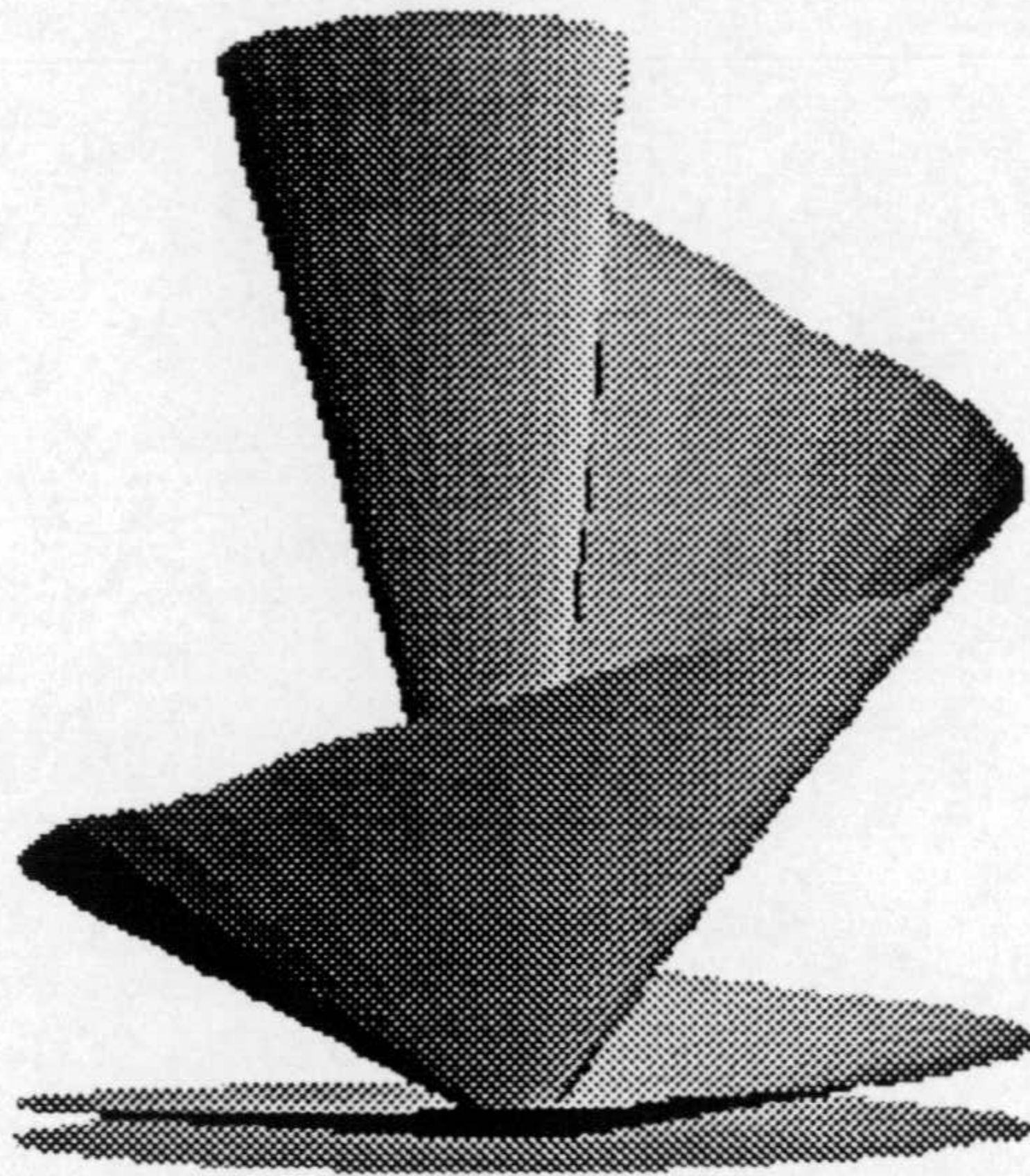
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Superficies de
Curvatura Constante

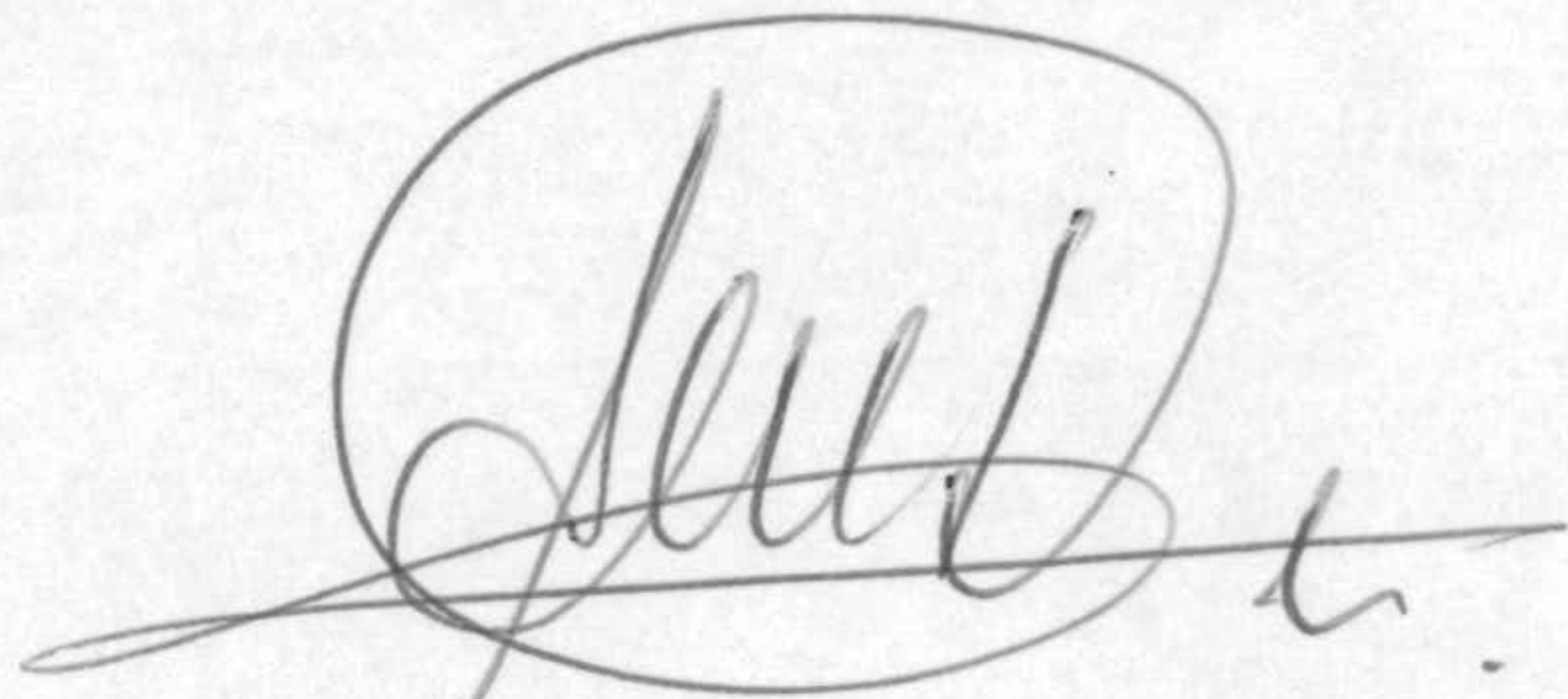
José Antonio Gálvez López



Superficies de Curvatura Constante

José Antonio Gálvez López

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de D. Antonio Martínez López y D. Francisco Milán López, Profesores Titulares de dicho Departamento, para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.



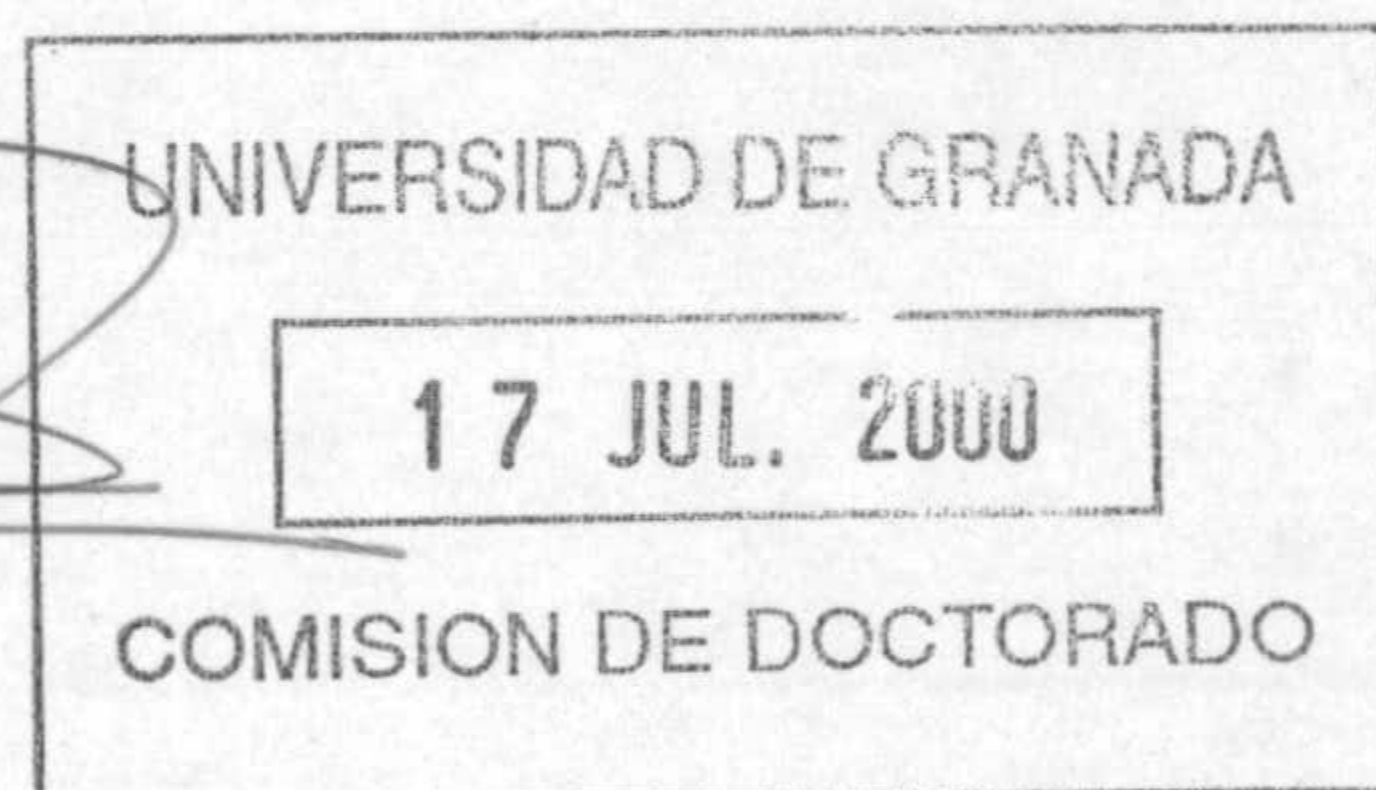
Fdo.: Antonio Martínez López



Fdo.: Francisco Milán López



Fdo.: José Antonio Gálvez López



Quiero agradecer de forma sincera a Antonio Martínez y Francisco Milán, directores de esta memoria, su ayuda constante, apoyo y paciencia durante estos años.

También quiero expresar mi gratitud a Manuel M. Ritoré y Alfonso Romero por la ayuda prestada, en algunos momentos, durante la elaboración de esta memoria

Daré también las gracias de forma muy especial a Claudio P. Cosin, Domingo Rodríguez y Marta Santos por el apoyo brindado, además de ratos entrañables. Agradecimiento que hago extensivo a todos y cada uno de los miembros del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada.

A mis padres,
por su constante apoyo
de principio a fin.

Índice General

Introducción	iii
1 Curvatura de Gauss-Kronecker constante.	1
1.1 Generalidades.	1
1.1.1 Espacios modelo.	1
1.1.2 Hipersuperficies: notación y propiedades.	5
1.1.3 Algunas ecuaciones fundamentales.	8
1.2 Estimaciones sobre la altura.	12
1.3 Estimaciones sobre la curvatura.	14
1.4 Estimaciones sobre el área.	17
1.5 Estimaciones sobre el volumen.	19
2 La aplicación de Gauss y segunda forma fundamental.	21
2.1 Superficies con curvatura de Gauss positiva.	22
2.2 Superficies con curvatura de Gauss negativa.	27
2.3 Unicidad de la inmersión.	31
3 Superficies llanas en el espacio hiperbólico.	33
3.1 Preliminares.	33
3.2 Representación conforme.	35
3.3 Ejemplos de superficies llanas.	44
3.3.1 Superficies Paralelas.	44
3.3.2 Superficies de Revolución.	44
3.4 La aplicación de Gauss de una superficie llana.	47
4 Completitud y embebimiento de superficies llanas en \mathbb{H}^3.	55
4.1 Superficies llanas completas.	55
4.2 Completitud de los finales.	57
4.3 Embebimiento y comportamiento asintótico de los finales.	63

Introducción.

En 1827 Carl Friedrich Gauss presentó a la Real Sociedad Científica (ver [18]) la obra precursora de la Geometría Diferencial “Disquisitiones generales circa superficies curvas”, donde no sólo introduce tres conceptos de trabajo centrales y fundamentalmente nuevos: la aplicación de Gauss esférica, la curvatura gaussiana y la curvatura total, sino que obtiene ecuaciones y fórmulas básicas que van a permitir su interpretación y estudio.

A este respecto, tanto Gauss como posteriormente B. Riemann, en su generalización de Geometría a variedades riemannianas, no dudaron en considerar a la curvatura como el “invariante” más natural. Concepto que, desde sus comienzos, ha jugado un papel central en Geometría Diferencial y ha sido utilizado en otros campos como Física, donde, según la teoría de Einstein, el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio viene determinado por la curvatura del espacio-tiempo.

La importancia que la curvatura ha venido desempeñando en el desarrollo de la Geometría Diferencial ha orientado su estudio desde múltiples direcciones y sentidos. En esta memoria trataremos de profundizar en el comportamiento geométrico de las superficies de curvatura de Gauss constante, inmersas como hipersuperficies en alguno de los espacio modelo de la Geometría y en su conexión con la teoría del análisis complejo y armónico.

Por su enorme interés, el estudio global de las superficies con curvatura constante en los distintos espacios modelo fue abordado y resuelto, en ciertos casos, con relativa prontitud. Los resultados de H. Liebmann en 1899 y D. Hilbert [33] en 1901 prueban que la única superficie cerrada con curvatura constante no nula es la esfera. Posteriormente, estudios sucesivos de P. Hartman y L. Nirenberg [31] en 1959, J. J. Stoker [57] en 1961 y W. S. Massey [44] en 1962 demuestran, de forma independiente, que toda superficie completa con curvatura de Gauss nula es un plano o un cilindro recto sobre una curva plana, simple y cerrada.

Desde un punto de vista analítico ya Gauss conocía que una superficie de curvatura constante K en \mathbb{R}^3 puede ser descrita localmente como el grafo de una función $f(x, y)$ que satisface la siguiente ecuación totalmente no lineal de tipo Monge-Ampère:

$$(1 + f_x^2 + f_y^2)^2 K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2.$$

En este sentido y aunque el estudio de las ecuaciones de tipo Monge-Ampère fue iniciado en 1809 por G. Monge, [47], en una serie de trabajos referentes a familias uniparamétricas de planos, no ha sido hasta los últimos 25 años cuando con los trabajos de S. Y. Cheng y S. T. Yau, [14], L. A. Caffarelli, L. Nirenberg y J. Spruck, [9], y B. Guan y J. Spruck, [29], el análisis de la existencia y regularidad de solución, para este tipo de ecuaciones, ha experimentado un considerable avance que se ha traducido en un conocimiento más profundo acerca de la existencia de superficies de curvatura constante acotando una familia de curvas convexas dadas, ver [29], [39].

M. O. Bonnet ya observó en 1853, [5], que el problema de estudiar superficies de curvatura de Gauss constante en el espacio euclídeo podía ser de una dificultad análoga a otro también de gran interés en Física Matemática: el estudio de las superficies con curvatura media constante. Sus argumentos se fundamentaban en que dada una superficie de curvatura constante positiva $1/a^2$ en el espacio euclídeo, la superficie paralela a distancia $\pm a$ de la primera tiene curvatura media constante $1/(2a)$ y recíprocamente (relación que puede generalizarse a otros espacios ambiente, ver [59]).

En este sentido Rosenberg también conjeturó que numerosas propiedades de las superficies de curvatura media constante se cumplen también para las superficies con curvatura de Gauss constante y viceversa. Estas observaciones y los recientes progresos que en el estudio de las superficies con curvatura media constante han supuesto trabajos como los realizados por R. Bryant [8], D. A. Hoffman y R. Osserman [37], [38], K. Kenmotsu [41], H. Rosenberg [50] y M. Umehara y K. Yamada [61], nos ha motivado a plantearnos en esta memoria objetivos que atienden a:

- (A) Obtener diferentes estimaciones de tipo geométrico que ayuden a conocer el comportamiento de una superficie de curvatura constante acotada por curvas planas.
- (B) Estudiar la aplicación de Gauss de las superficies de curvatura constante.
- (C) Conseguir una representación conforme o armónica de las inmersiones con curvatura de Gauss constante en los espacios modelo, obtener ejemplos y, en su caso, analizar el comportamiento en infinito.

La herramienta de trabajo fundamental que usaremos retoma una vieja idea de E. Cartán, [12], quien, como alternativa al estudio de las superficies con métrica dada (problema de deformación de Gauss), planteó el problema análogo de investigar las superficies admitiendo una segunda forma fundamental fijada. Es por ello que a lo largo

de la memoria trabajaremos con superficies no degeneradas, inmersas en alguno de los espacios modelo, sobre las que consideraremos la estructura de superficie de Riemann (o de Lorentz) que sobre ellas induce la segunda forma fundamental de la inmersión.

Comenzamos el primer capítulo de esta memoria recordando algunas propiedades elementales de los espacios modelo, de la segunda forma fundamental de una hipersuperficie, de la aplicación de Gauss y de sus curvaturas.

Dada una inmersión no degenerada de codimensión uno en un espacio modelo, calculamos el laplaciano para la segunda forma fundamental de la inmersión y de su aplicación de Gauss. Como consecuencia de este cálculo obtenemos varios resultados, entre los cuales probamos que

Sea S una hipersuperficie de dimensión n con curvatura de Gauss-Kronecker constante no nula, K , embebida en el espacio euclídeo (resp., en espacio hiperbólico de curvatura seccional constante c) con borde en un hiperplano totalmente geodésico. Entonces la distancia máxima desde un punto de S al hiperplano es $\frac{2}{\sqrt{K}}$ (resp., $\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{K}}\right)$).

Si bien los resultados de existencia de superficies con curvatura constante positiva en \mathbb{R}^3 nos demuestran que para cualquier curva convexa Γ contenida en un plano P existe un grafo sobre P de curvatura constante K con borde Γ , nada es conocido sobre los posibles valores que puede tomar K en términos de la curva Γ . En este sentido, nosotros probamos

Dada una superficie compacta S con borde conexo y $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión con curvatura de Gauss constante positiva K tal que la imagen del borde, Γ , cae en un plano P , entonces

$$K \leq \frac{\pi |i(\Gamma)|}{|\bar{A}|}$$

donde \bar{A} e $i(\Gamma)$ son el área algebraica y el índice de rotación de la curva Γ , respectivamente. Además la igualdad sólo es posible cuando $x(S)$ es una semiesfera de radio $1/\sqrt{K}$.

Posteriormente, nos centramos en el estudio del área de una superficie de curvatura constante, consiguiendo una acotación superior e inferior del área de cualquier inmersión de este tipo con borde plano Γ , en términos de la curvatura de la inmersión, la característica de Euler de la superficie y la curva Γ . Además, si S es simplemente conexa, estas acotaciones son óptimas en el sentido que son alcanzadas de forma única por los casquetes esféricos.

Este resultado combinado con un teorema de J. L. Barbosa y M. P. do Carmo, [4], nos proporciona el siguiente corolario

Dada una superficie compacta con borde conexo S , una inmersión $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura de Gauss constante positiva K tal que la imagen del borde Γ , es una curva de Jordan plana, entonces si la longitud L de Γ satisface que $4\pi^2 - KL^2 \geq 0$ se tiene que

$$2\pi - 2\sqrt{\pi^2 - \pi K|\bar{A}|} \leq KA \leq 2\pi - \sqrt{4\pi^2 - KL^2},$$

o bien

$$2\pi + \sqrt{4\pi^2 - KL^2} \leq KA \leq 2\pi + 2\sqrt{\pi^2 - \pi K|\bar{A}|}.$$

donde A y $|\bar{A}|$ son el área de la inmersión y el área plana encerrada por la imagen del borde, respectivamente. Además, la igualdad ocurre en alguna de las desigualdades anteriores si, y sólo si, $x(S)$ es un casquete esférico.

Esto nos lleva a pensar en la existencia de al menos dos superficies de curvatura constante acotando una misma curva de Jordan, una de área pequeña y otra de área grande como ocurre con los dos casquetes esféricos de igual curvatura cuando el borde es una circunferencia.

Terminamos el primer capítulo de la memoria estimando el volumen, V , encerrado por un grafo de curvatura constante positiva, K , y borde plano. Concretamente probamos que si la altura máxima sobre el plano, h , es conocida, entonces

$$V \leq \pi \left(\frac{h}{K} - \frac{h^3}{3} \right).$$

En caso contrario, el volumen se puede estimar por la fórmula

$$V \leq \frac{2}{3}\pi \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \right)^3.$$

Ocurriendo la igualdad en alguna de las dos desigualdades anteriores sólo cuando la superficie es una semiesfera de radio $1/\sqrt{K}$.

El estudio de las propiedades geométricas de la aplicación de Gauss de una subvariedad, así como el problema de hasta qué punto determina ésta a la subvariedad han sido de gran interés en Geometría Diferencial, ver, por ejemplo, [1], [36], [37], [38], [41], [48], [52], [53] y [64].

En particular, la existencia y unicidad de una inmersión conforme desde una superficie de Riemann en \mathbb{R}^n con una aplicación de Gauss dada ha sido estudiada por varios autores. En primer lugar, K. Kenmotsu [41] demuestra que para una superficie de Riemann S simplemente conexa y una aplicación diferenciable $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, existe una inmersión conforme no minimal en \mathbb{R}^3 con N como su aplicación de Gauss si, y sólo

si, existe una función diferenciable $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo una ecuación diferencial de segundo orden en términos de H , N y la estructura conforme. Además, en caso de que H exista cumpliendo las condiciones anteriores, hay una única inmersión, salvo traslaciones, para la cual H es su curvatura media y da una fórmula explícita para calcular dicha inmersión.

Posteriormente, D. A. Hoffman y R. Osserman, [37], [38], generalizan el resultado de K. Kenmotsu para inmersiones conformes en \mathbb{R}^n y demuestran que la existencia de la función H anterior sólo depende de la aplicación de Gauss y la estructura conforme. Con ello, consiguen demostrar que la existencia o no de una inmersión no minimal desde una superficie de Riemann en \mathbb{R}^n con una aplicación de Gauss, N , fijada es equivalente a que una serie de ecuaciones de tercer grado en términos de N y la estructura conforme se satisfagan. En cuyo caso, la aplicación es única, salvo semejanzas. Además, prueban una fórmula para su cálculo.

Teniendo en cuenta también la gran importancia de la segunda forma fundamental en Geometría Diferencial y en otros campos como Óptica, Hidrostática y Mecánica (ver [6], [13], [58]), en el segundo capítulo de esta memoria nos planteamos como alternativa de los estudios de K. Kenmotsu, D. A. Hoffman y R. Osserman la existencia y unicidad de una inmersión en \mathbb{R}^3 desde una superficie con una aplicación de Gauss y una estructura conforme para su segunda forma fundamental fijadas.

Así, tomada una superficie S y una inmersión $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ consideramos a S con la estructura conforme inducida por su segunda forma fundamental (posiblemente degenerada) y probamos que si la inmersión es de curvatura positiva ésta puede ser recuperada conociendo su curvatura, su aplicación de Gauss y la estructura de superficie de Riemann de S .

Además, la curvatura, K , ha de cumplir

$$4K \left(g_{z\bar{z}} - 2g_z g_{\bar{z}} \frac{\bar{g}}{1 + g\bar{g}} \right) = K_z g_{\bar{z}} + K_{\bar{z}} g_z.$$

donde g es la composición de la proyección estereográfica y la aplicación de Gauss a la esfera y z es un parámetro conforme. Esto nos demuestra que K está determinada, salvo multiplicación por constantes positivas, por g y la estructura conforme, siendo la inmersión de curvatura constante si, y sólo si, g es armónica.

Recíprocamente, respondemos al problema de existencia planteado para curvatura positiva probando que

Si S es una superficie de Riemann simplemente conexa y $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable, entonces existe una inmersión $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ con aplicación de Gauss N y tal que la estructura conforme sobre S es la

inducida por la segunda forma fundamental si, y sólo si,

$$|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2 > 0,$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{4}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left(\bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_z}{1 + g\bar{g}} \right) \right) \right\} = 0.$$

Además, la inmersión es única, salvo traslaciones y homotecias de \mathbb{R}^3 y puede ser recuperada utilizando (2.17).

De manera análoga obtenemos resultados similares para curvatura negativa. Y demostramos que la unicidad de la inmersión, en condiciones generales, es cierta si el conjunto de puntos de S donde la aplicación de Gauss no es difeomorfismo local tiene interior vacío, dando un ejemplo que nos prueba que esta última hipótesis es necesaria.

En los capítulos 3 y 4 de esta memoria centramos nuestro estudio en las superficies llanas del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3 \subseteq \mathbb{L}^4$. Para ello, observamos que éstas están relacionadas con la ecuación de Monge–Ampère

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 1$$

estudiada por K. Jörgens [40] en términos de datos holomorfos (ver también [22] y [23]). Nosotros probamos que

Dada una inmersión en el espacio hiperbólico con segunda forma fundamental definida, las aplicaciones de Gauss hiperbólicas (ver [8]) son conformes para la estructura de superficie de Riemann inducida por la segunda forma fundamental si, y sólo si, la inmersión es llana o totalmente umbilical.

El hecho de que las aplicaciones de Gauss hiperbólicas sean holomorfas para una inmersión llana, junto con la elección de unos parámetros conformes adecuados, siguiendo la idea de K. Jörgens, nos lleva a la siguiente representación en el modelo de las matrices hermiticas de \mathbb{L}^4 , a partir de una función f y una 1-forma ω holomorfas que llamaremos datos de Weierstrass de la inmersión:

(I) Sean S una superficie simplemente conexa y $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión llana. Si sobre S consideramos la estructura conforme determinada por la segunda forma fundamental de ψ , entonces existe una inmersión holomorfa $g : S \rightarrow \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ y un par (f, ω) formado por una función holomorfa f y una 1-forma holomorfa ω sobre S tal que:

- $|f| < 1$ y $\omega \neq 0$ en todo punto,

•

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega,$$

- la inmersión puede ser recuperada como $\psi = gg^*$,
- la métrica inducida y la segunda forma fundamental de la inmersión vienen dadas por

$$ds^2 = f\omega^2 + (1 + |f|^2) |\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2,$$

$$d\sigma^2 = (1 - |f|^2) |\omega|^2.$$

Además, g es única salvo multiplicación a la derecha por una matriz constante $g_0 \in \text{SU}(2)$.

(II) Recíprocamente, sean S una superficie de Riemann y $g : S \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ una inmersión holomorfa tal que

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

con $|\alpha_1| < |\alpha_2|$. Entonces la aplicación $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ dada por $\psi = gg^*$ es una inmersión llana con métrica inducida y segunda forma fundamental dadas como en (I), donde $f = \alpha_1/\alpha_2$ y $\omega = \alpha_2$.

Esta representación conforme es similar a la dada por R. Bryant [8] en 1987 para el estudio de las superficies de curvatura constante uno en \mathbb{H}^3 , que ha sido intensamente utilizada para dar ejemplos y caracterizar algunos completos, ver [16], [61], [60].

Una vez obtenida la representación conforme estudiamos las superficies paralelas de una llana y las superficies de revolución, dando una parametrización conforme explícita de éstas. Terminamos el tercer capítulo probando que la aplicación de Gauss de una inmersión llana en \mathbb{H}^3 es una inmersión llana espacial en el espacio de de-Sitter y recíprocamente. Esto nos llevará a poder representar las superficies llanas del espacio de de-Sitter con métrica inducida riemanniana o lorentziana (teorema 3.4.1).

El último capítulo de la memoria está dedicado al estudio de las superficies llanas completas en \mathbb{H}^3 y del comportamiento de los finales completos en infinito. En este sentido, comenzamos dando una nueva demostración del teorema de clasificación de las superficies llanas completas probado por primera vez por J. A. Volkov y S. M. Vladimirova en 1971 [62] y S. Sasaki en 1973 [55], que afirma

La imagen de una inmersión llana completa en el espacio hiperbólico es una horosfera o el conjunto de puntos equidistantes de una geodésica.

Posteriormente, probamos que todo final completo de una superficie llana es del tipo conforme de un disco punteado y caracterizamos los finales regulares, esto es, los finales completos para los cuales los datos de Weierstrass (f, ω) definidos en el disco unidad menos el origen extienden de forma meromorfa al cero. Son también descritos ejemplos de finales multivaluados con datos holomorfos bien definidos y de finales irregulares. Terminamos el capítulo probando cuándo un final regular está embebido y demostrando que

Todo final regular de una superficie llana es asintótico a un final de una superficie de revolución.

Capítulo 1.

Hipersuperficies con curvatura de Gauss-Kronecker constante.

En este capítulo establecemos notación y definiciones generales sobre hipersuperficies y espacios modelo, introduciendo la segunda forma fundamental como herramienta básica para ciertos cálculos sobre hipersuperficies con curvatura de Gauss-Kronecker no nula.

Con este espíritu, nos centramos en el estudio de propiedades de tipo geométrico sobre superficies en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss constante positiva y borde en un plano. Así, estudiaremos la altura máxima que estas superficies pueden alcanzar sobre el plano y obtendremos cotas óptimas sobre el área encerrada por su borde, el área de la superficie y el volumen euclídeo determinado por la superficie y el plano, caracterizando a los casquetes esféricos como los únicos que alcanzan dichas cotas.

1.1 Generalidades.

Dedicaremos esta sección a introducir las representaciones usuales de los espacios modelo, a definir algunos conceptos elementales sobre subvariedades y calcularemos el laplaciano de la inmersión y aplicación de Gauss de una hipersuperficie en un espacio modelo cuando la segunda forma fundamental sea una métrica.

1.1.1 Espacios modelo.

Sea $M^{n+1}(c)$ una variedad riemanniana de dimensión $n + 1$, $n \geq 1$, completa, simplemente conexa y con curvatura seccional constante c . Entonces el teorema de

Cartan nos asegura que, salvo isometrías, ésta viene dada por una de las siguientes representaciones:

1. El **espacio euclídeo** \mathbb{R}^{n+1} con su métrica usual $\langle , \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2$, si $c = 0$.

2. La **esfera euclídea**

$$\mathbb{S}^{n+1}(c) = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \sum_{i=0}^{n+1} x_i^2 = \frac{1}{c} \right\},$$

con la métrica inducida de \mathbb{R}^{n+2} , dada por $\langle , \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} dx_i^2$, si $c > 0$.

3. El **espacio hiperbólico**,

$$\mathbb{H}^{n+1}(c) = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+2} \mid -x_0^2 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = \frac{1}{c}, x_0 > 0 \right\},$$

con la métrica inducida de \mathbb{L}^{n+2} , dada por $\langle , \rangle = -dx_0^2 + \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2$, si $c < 0$.

Denotemos por \mathcal{T}_n al grupo de traslaciones afines de \mathbb{R}^n , $O(n)$ al grupo ortogonal dado por todas las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n que conservan el producto escalar y $O^\uparrow(1, n)$ al grupo ortocrono dado por todas las transformaciones vectoriales de \mathbb{L}^n que conservan la métrica y tales que llevan el cono de luz

$$\mathbb{N}^n = \left\{ (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{L}^n \mid -x_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0, x_0 > 0 \right\},$$

en si mismo.

Entonces el grupo de isometrías del espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} , la esfera euclídea $\mathbb{S}^{n+1}(c)$ y el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ viene dado, respectivamente, por el producto semidirecto de $O(n+1)$ y \mathcal{T}_{n+1} , la restricción a $\mathbb{S}^{n+1}(c)$ de toda aplicación del grupo ortogonal $O(n+2)$ y la restricción a $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ de toda transformación del grupo ortocrono $O^\uparrow(1, n+2)$.

En consecuencia, las subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{R}^{n+1} son sus subespacios afines y las de $\mathbb{S}^{n+1}(c)$ y $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ son sus intersecciones con subespacios vectoriales de \mathbb{R}^{n+2} y \mathbb{L}^{n+2} , respectivamente. En particular, la geodésica γ que en el instante 0 pasa por p a velocidad v está dada por

$$\gamma(t) = p + tv, \quad c = 0,$$

$$\gamma(t) = \cos(\sqrt{c}|v|t)p + \frac{\text{sen}(\sqrt{c}|v|t)}{\sqrt{c}|v|}v, \quad c > 0,$$

$$\gamma(t) = \cosh(\sqrt{-c}|v|t) p + \frac{\sinh(\sqrt{-c}|v|t)}{\sqrt{-c}|v|} v, \quad c < 0.$$

En el caso hiperbólico, esto es, $c < 0$, el modelo anterior es a menudo sustituido por otras representaciones que nos serán útiles a lo largo de esta memoria y que pasamos a describir brevemente.

Modelo del semiespacio superior.-

Si en $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_{n+1} > 0\}$ introducimos la métrica

$$ds^2 = \frac{1}{-c x_{n+1}^2} (dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2) \quad (1.1)$$

de curvatura seccional constante c , de forma directa se demuestra que la aplicación de $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ en \mathbb{R}_+^{n+1} dada por

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow \frac{1}{x_0 + x_{n+1}} \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{\sqrt{-c}} \right)$$

es una isometría entre estos dos espacios.

Es claro de (1.1) que las rotaciones y traslaciones horizontales euclídeas son isometrías de \mathbb{R}_+^{n+1} . Otras transformaciones, que conservan el producto escalar, asociadas a cada punto $(y, 0)$, $y \in \mathbb{R}^n$, del hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$ son:

1. Traslaciones hiperbólicas verticales:

$$(x, x_{n+1}) \longrightarrow (e^t(x - y), e^t x_{n+1}),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $x_{n+1} > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Esto es, homotecias euclídeas de centro $(y, 0)$ y razón e^t .

2. Reflexiones o simetrías hiperbólicas:

$$(x, x_{n+1}) \longrightarrow (y, 0) + \frac{t^2}{|x - y|^2 + x_{n+1}^2} (x - y, x_{n+1}), \quad (1.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $x_{n+1} > 0$, $t > 0$ y $|\cdot|$ denota la norma de \mathbb{R}^n . Es decir, inversiones euclídeas (en el semiplano superior) de una esfera de radio t y centro $(y, 0)$.

En este sentido, también se consideran reflexiones hiperbólicas de centro infinito, las simetrías euclídeas en hiperplanos verticales.

De la descripción de estos movimientos, es claro que, al ser los puntos fijos de isometrías, los planos verticales y las semiesferas de cualquier radio y dimensión k , $k \leq n$, que cortan ortogonalmente al hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$, éstos son subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{R}_+^{n+1} . En particular, los semicírculos cortando al hiperplano anterior con ángulo recto y las rectas verticales son las geodésicas en este modelo de espacio hiperbólico.

En la descripción realizada de las traslaciones hiperbólicas, a cada geodésica vertical le hemos asociado un grupo uniparamétrico de isometrías obtenidas por traslación a lo largo de dicha geodésica normalizada. Como, vía una reflexión hiperbólica, cualquier geodésica puede ser aplicada en una vertical, se deduce que toda geodésica γ con velocidad constante determina unívocamente un grupo uniparamétrico de traslaciones hiperbólicas cuyo campo de Killing extiende el campo tangente a γ .

Modelo conforme de la bola.-

Consideremos sobre la bola abierta centrada en el origen de \mathbb{R}^{n+1} y radio $\frac{1}{\sqrt{-c}}$, $\mathbb{B}^{n+1}(\frac{1}{\sqrt{-c}})$, la métrica de curvatura seccional constante c

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + c|x|^2)^2} (dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2), \quad (1.3)$$

con $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ y $|\cdot|$ norma euclídea.

Entonces, la aplicación de \mathbb{R}_+^{n+1} con la métrica dada por (1.1) en $\mathbb{B}^{n+1}(\frac{1}{\sqrt{-c}})$

$$(y, y_{n+1}) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{-c}(|y|^2 + (y_{n+1} + 1)^2)} (2y, |y|^2 + y_{n+1}^2 - 1), \quad (1.4)$$

$y \in \mathbb{R}^n$, $y_{n+1} > 0$, es una isometría entre ambos espacios.

Es claro de (1.3) que la restricción a $\mathbb{B}^{n+1}(\frac{1}{\sqrt{-c}})$ de todo elemento de $O(n+1)$ es una isometría de éste espacio, en particular, las rotaciones respecto de una recta vectorial y simetrías euclídeas respecto de hiperplanos pasando por el origen son isometrías para este modelo. Además, dado que (1.2), las simetrías en hiperplanos verticales y (1.4) son aplicaciones conformes de \mathbb{R}^{n+1} , las simetrías hiperbólicas en este modelo son de nuevo reflexiones en hiperplanos e inversiones en esferas que cortan ortogonalmente a la esfera del infinito $S_\infty^n = \partial \mathbb{B}^{n+1}(\frac{1}{\sqrt{-c}})$.

Obsérvese también que todo punto $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, exterior a la bola es centro de una única de estas esferas cuyo radio r está dado por $r^2 = 1/c + |p|^2$. En consecuencia, cada rayo radial naciendo en la bola determina una familia uniparamétrica de tales reflexiones, la cual ha sido frecuentemente usada para desarrollar en este espacio el

método de Alexandroff del que hablaremos en la próxima sección.

De las consideraciones anteriores también se deduce que las subvariedades totalmente geodésicas en este modelo son los casquetes esféricos k -dimensionales, $k \leq n$, y discos que cortan ortogonalmente a S_∞^n .

En general, no es difícil demostrar, (ver [56]), que el grupo de isometrías en los modelos del semiplano superior y conforme de la bola se corresponden, respectivamente, con el grupo de transformaciones conformes de \mathbb{R}_+^{n+1} y $\mathbb{B}^{n+1}(\frac{1}{\sqrt{-c}})$ como subconjuntos del espacio euclídeo.

1.1.2 Hipersuperficies: notación y propiedades.

Sea S una variedad diferenciable n -dimensional, $n \geq 2$, que consideraremos siempre conexa, y $x : S \rightarrow M$ una inmersión de S en una variedad riemanniana, M , de dimensión $n + 1$.

Definiciones.

Si S y M son orientables, existe N campo de vectores normal unitario a lo largo de la inmersión, que llamaremos **aplicación de Gauss**. Y se define la segunda forma fundamental de la inmersión x asociada a N en un punto p como

$$\sigma_p(v, w) = \langle -\nabla_v N, w \rangle$$

donde $v, w \in T_p S$ son vectores tangentes a S en p , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la métrica de M y ∇ su conexión de Levi-Civita.

Diremos que la inmersión x tiene segunda forma fundamental **no degenerada** si σ es una métrica semi-riemanniana, o equivalentemente, el endomorfismo de Weingarten dado por

$$A(v) = -\nabla_v N \in T_p S, \quad v \in T_p S$$

es biyectivo.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las curvaturas principales de la inmersión en un punto p asociadas a N , esto es, los autovalores del endomorfismo de Weingarten. Se define la r -ésima curvatura de la inmersión H_r en p como

$$\binom{n}{r} H_r = S_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r},$$

donde $H = H_1 = \text{traza}(A)/n$ y $K = H_n = \det(A)$ son la **curvatura media** y la **curvatura de Gauss-Kronecker** de la inmersión, respectivamente.

Observación. Si $x : S \rightarrow M$ es una inmersión de una superficie en un espacio de dimensión tres con curvatura seccional constante K_M , entonces la fórmula de Gauss nos dice que la curvatura de Gauss-Kronecker, K , y la curvatura de Gauss, K_G , de la superficie están relacionadas mediante la fórmula

$$K = K_G - K_M.$$

En particular, las curvaturas de Gauss y de Gauss-Kronecker de una superficie en \mathbb{R}^3 coinciden.

Desde el punto de vista de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, las hipersuperficies con curvatura de Gauss-Kronecker constante vienen dadas por ecuaciones de tipo Monge-Ampère. Concretamente, si S es una variedad diferenciable de dimensión n , $n \geq 2$, y x es una inmersión con curvatura de Gauss-Kronecker constante de S en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} o en el modelo del semiespacio superior del espacio hiperbólico \mathbb{R}_+^{n+1} , entonces dicha hipersuperficie puede verse localmente, salvo isometrías, como el grafo de una función $\phi(x_1, \dots, x_n)$ que verifica la siguiente ecuación totalmente no lineal:

$$\det(\phi_{ij}) = K(1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{n+2}{2}}, \quad (1.5)$$

en el espacio euclídeo y

$$\det(\phi_{ij} + 2\phi_i\phi_j + e^{-2\phi}\delta_{ij}) = Ke^{-2n\phi}(1 + e^{2\phi}|\nabla\phi|^2)^{\frac{n+2}{2}}, \quad (1.6)$$

en el espacio hiperbólico, donde $\nabla\phi$ denota el gradiente euclídeo de la función ϕ , ver [39], [51].

El uso del principio del máximo de Hopf para la diferencia de dos funciones que sean soluciones de (1.5) o (1.6) permite obtener el siguiente principio de comparación.

Teorema 1.1.1 Sean S_1 y S_2 dos hipersuperficies en el espacio euclídeo o hiperbólico, con curvaturas de Gauss-Kronecker constantes K_1 y K_2 , respectivamente. Sean N_1 y N_2 aplicaciones de Gauss de S_1 y S_2 , respectivamente, con segundas formas fundamentales asociadas definidas positivas. Entonces, si p es un punto de tangencia común, con $N_1(p) = N_2(p) = v$ tal que S_1 se encuentra por debajo de S_2 respecto de la dirección v , en un entorno de p , entonces $K_1 \leq K_2$. Además, si $K_1 = K_2$ ambas hipersuperficies coinciden en el entorno anterior.

Este principio de comparación permite estudiar en estos espacios la geometría de las hipersuperficies con curvatura de Gauss-Kronecker constante comparándolas con otras hipersuperficies 'conocidas' (frecuentemente, umbilicales y de revolución). Y, en particular, aplicar a este estudio el método usado por Alexandroff en 1956 para superficies embebidas con curvatura media constante, que de manera estándar consiste en

tomar familias uniparamétricas de hipersuperficies totalmente geodésicas que intersecan a la hipersuperficie, reflejar respecto de las mismas la parte de la hipersuperficie que queda a un lado y compararla con la parte de la hipersuperficie que queda al otro.

Las superficies umbilicales y de revolución con curvatura constante en los espacios euclídeo e hiperbólico, \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}_+^3 , pueden ser descritas fácilmente, ver, por ejemplo, [11], [56]. No obstante, para una mejor comprensión de su comportamiento incluimos a continuación algunas ilustraciones. Así, tenemos que las superficies de revolución con curvatura de Gauss, K_G , positiva en \mathbb{R}^3 son la esfera o una de los siguientes tipos

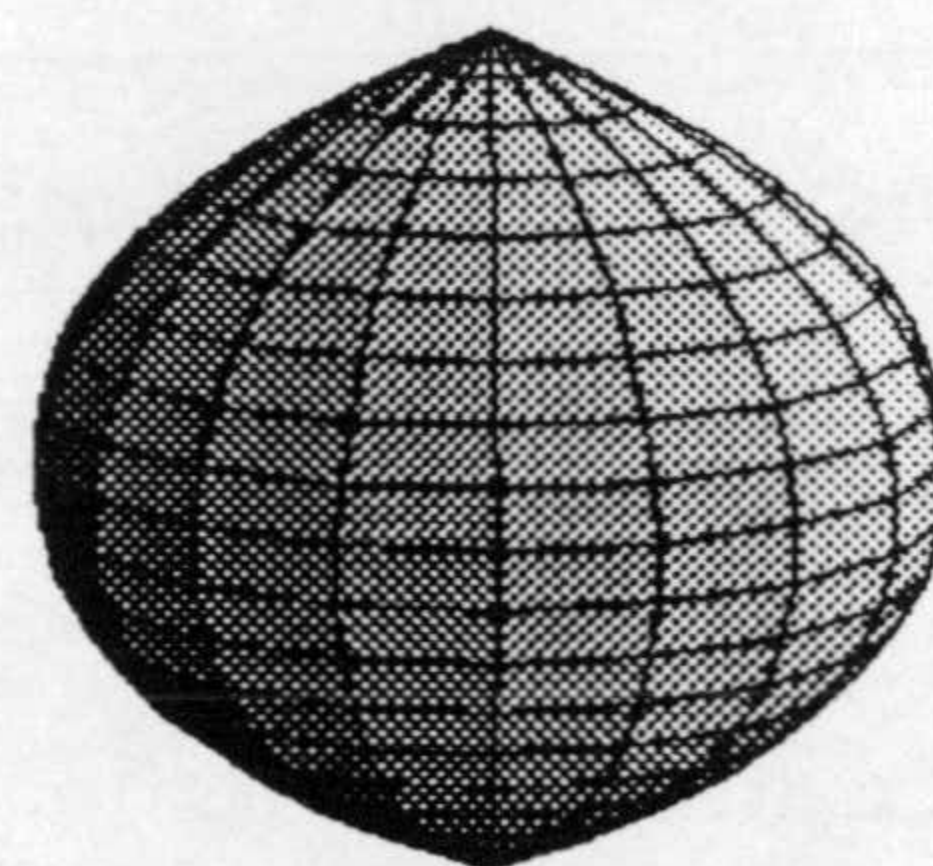
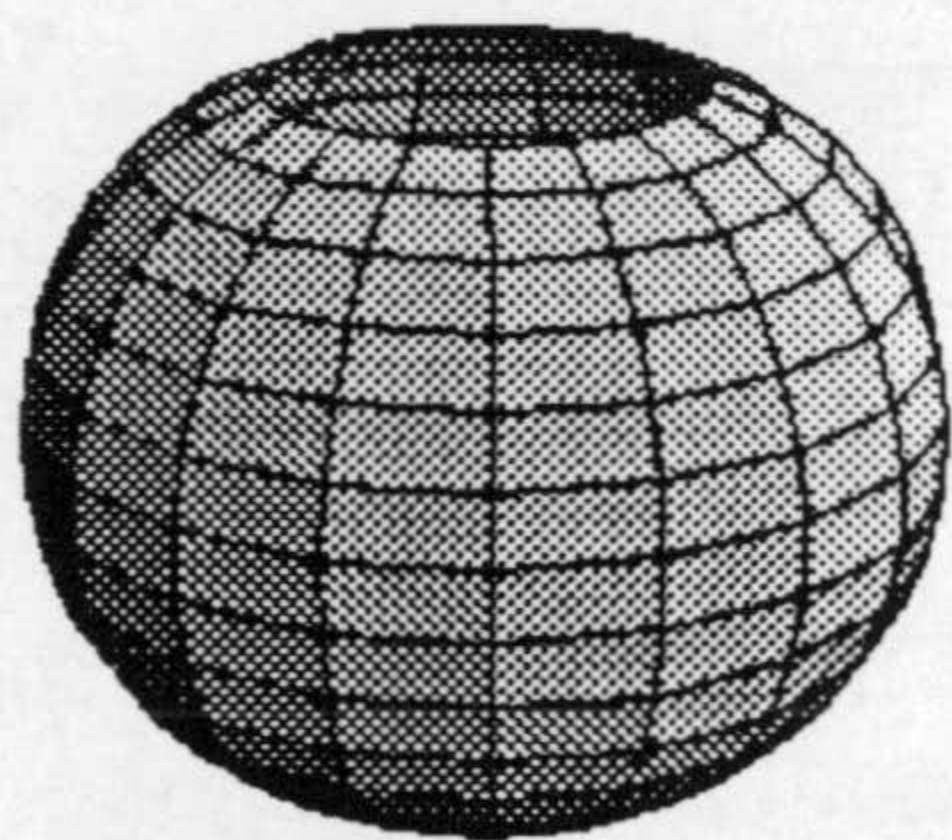


Figura 1.1: $K_G > 0$ constante en \mathbb{R}^3 . Figura 1.2: $K_G > 0$ constante en \mathbb{R}^3 .

De igual manera, las superficies de revolución con curvatura de Gauss negativa en el espacio euclídeo son la pseudoesfera, ver figura 2.1, o tienen una representación similar a las siguientes

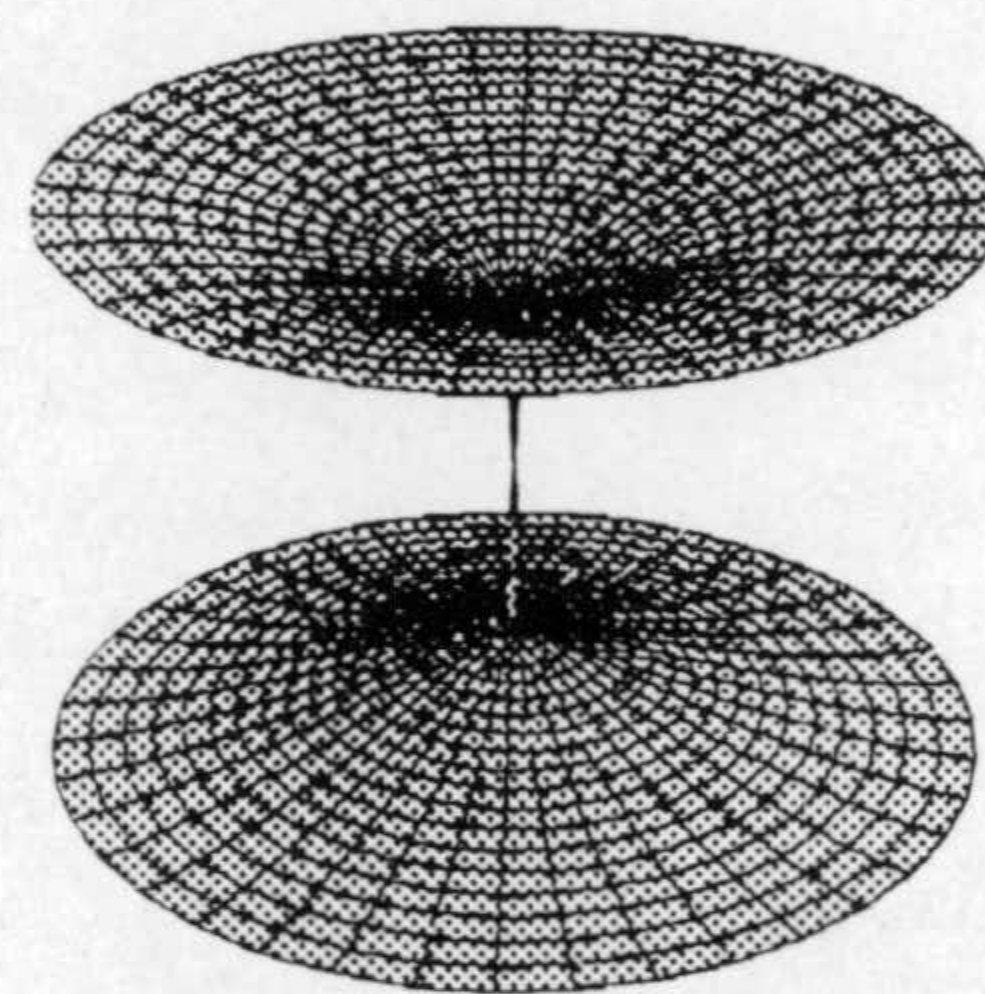
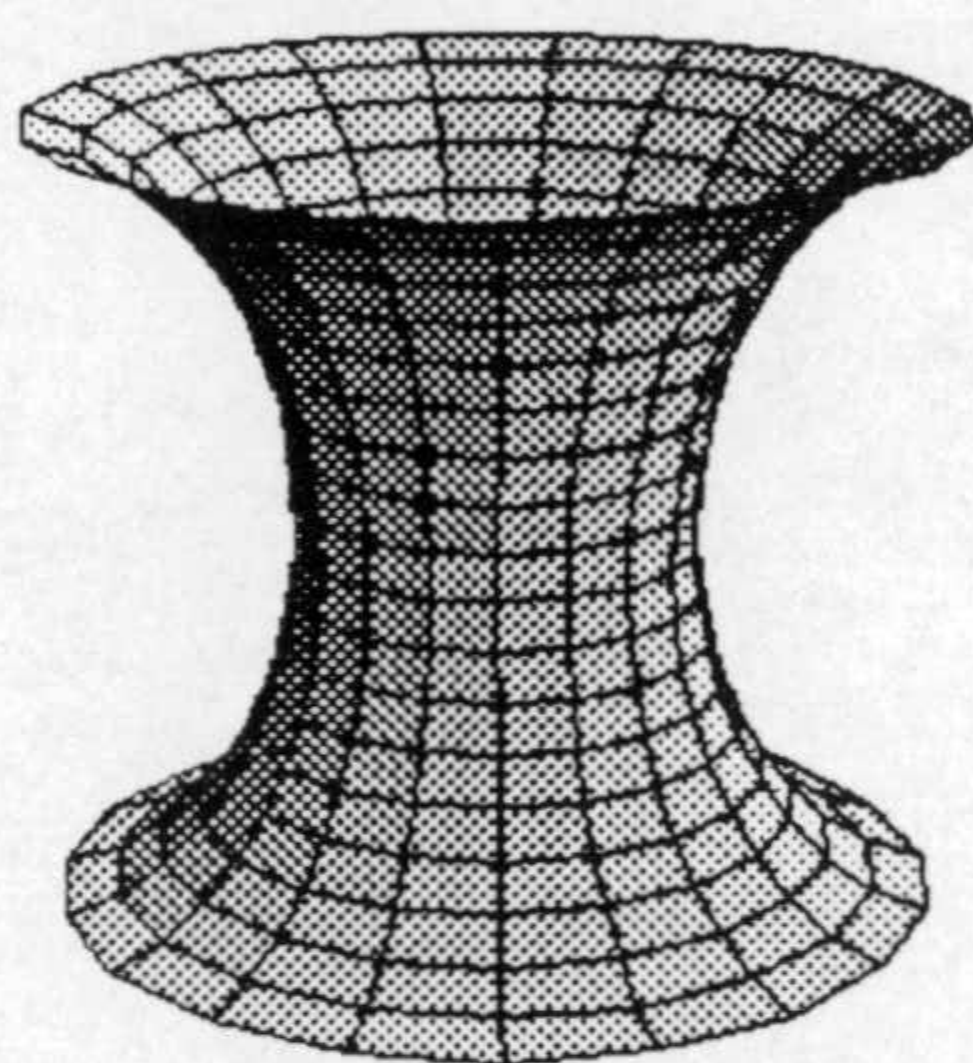


Figura 1.3: $K_G < 0$ constante en \mathbb{R}^3 . Figura 1.4: $K_G < 0$ constante en \mathbb{R}^3 .

Las figuras 1.5 y 1.6 nos muestran ejemplos de superficies con curvatura constante en el espacio hiperbólico, \mathbb{R}_+^3 . La primera con curvatura positiva no umbilical y la

segunda completa con curvatura negativa.

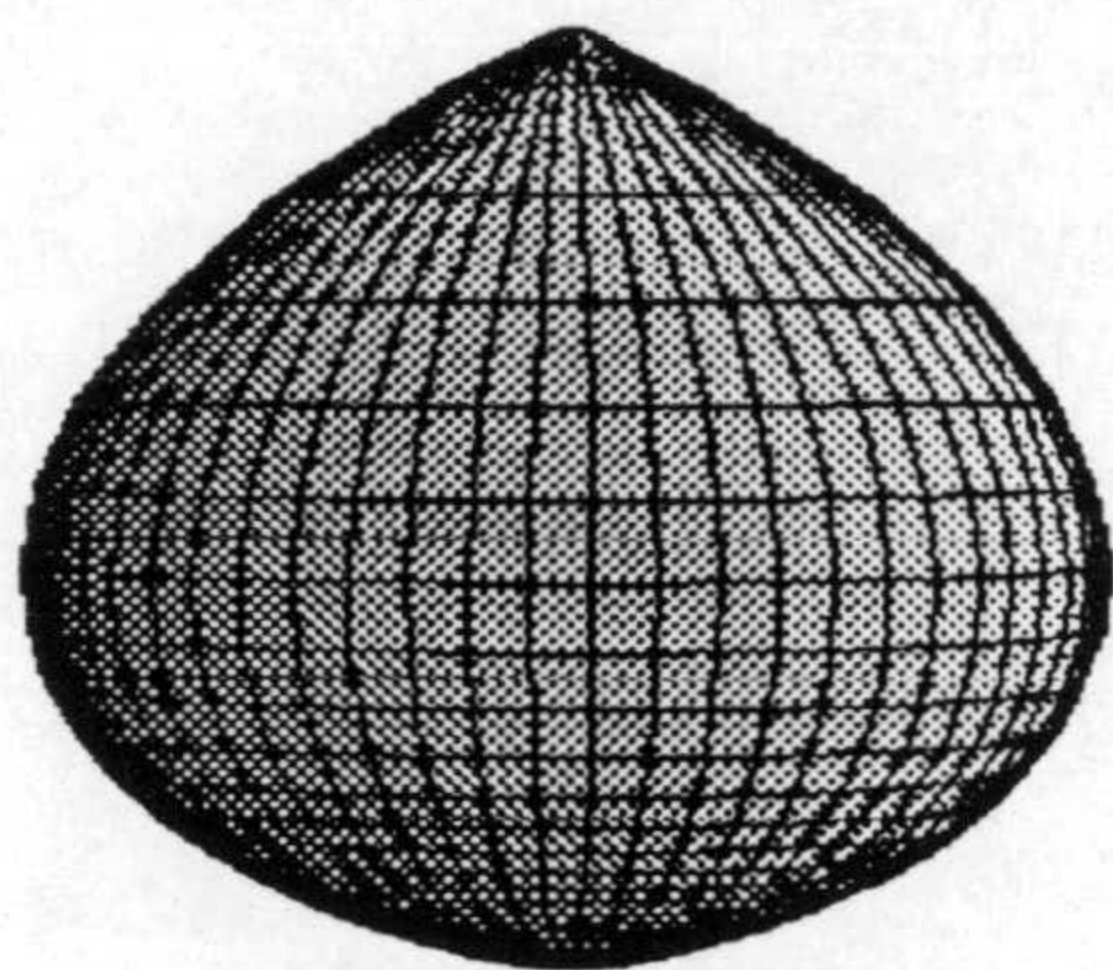


Figura 1.5: $K_G > 0$ en \mathbb{R}_+^3 .

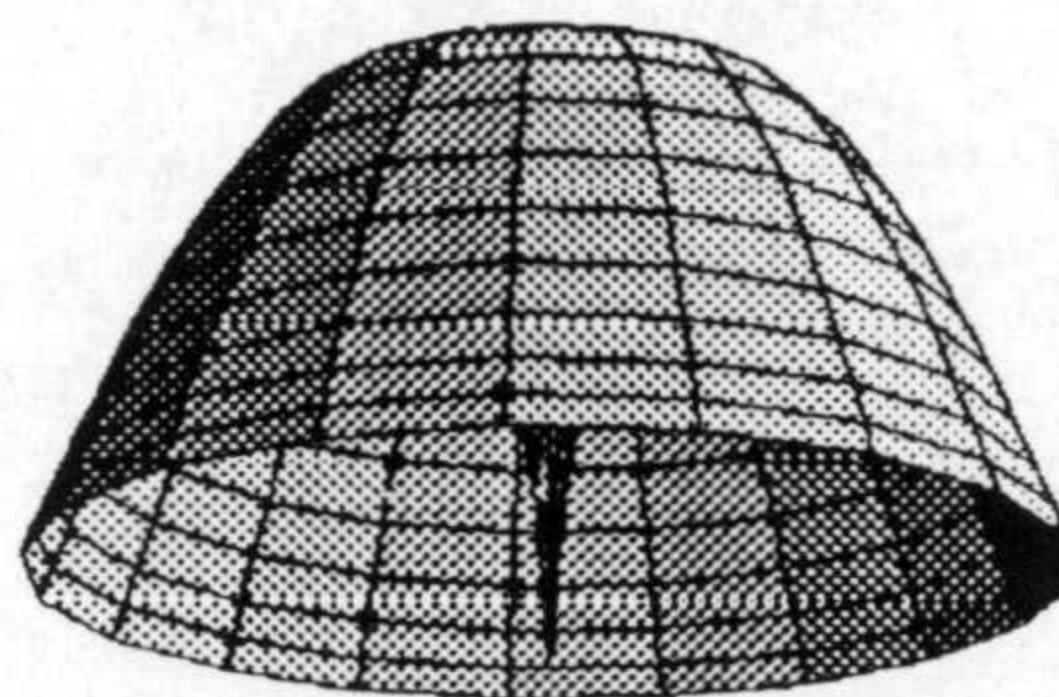


Figura 1.6: $-1 < K_G < 0$ en \mathbb{R}_+^3 .

1.1.3 Algunas ecuaciones fundamentales.

Si denotamos por $M^{n+1}(c)$ al espacio modelo $\mathbb{S}^{n+1}(c)$, \mathbb{R}^{n+1} o $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ según c sea mayor, igual o menor que cero, entonces obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.1 Sean S una variedad diferenciable de dimensión n orientable y $x : S \rightarrow M^{n+1}(c)$ una inmersión en un espacio modelo. Si la segunda forma fundamental de la inmersión es no degenerada, entonces la curvatura de Gauss-Kronecker es constante si, y sólo si, la parte tangente de $\Delta^\sigma N$ o $\Delta^\sigma x$ es cero, en cuyo caso

$$\Delta^\sigma N = -nHN + ncx \quad (1.7)$$

$$\Delta^\sigma x = nN - nc \frac{H_{n-1}}{K} x \quad (1.8)$$

donde Δ^σ denota el laplaciano para la métrica σ .

DEMOSTRACIÓN:

Denotemos por ∇ la conexión de Levi-Civita de \mathbb{L}^{n+2} , \mathbb{R}^{n+1} o \mathbb{R}^{n+2} según c sea menor, igual o mayor que cero, respectivamente, y por ∇^σ la conexión de la métrica σ .

Tomamos $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base de campos de vectores ortonormales en un entorno de un punto $p \in S$ y paralelos en p para la métrica σ , esto es, $\sigma(E_i, E_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$, $\nabla_{E_i(p)}^\sigma E_j = 0$, con $\varepsilon_i = \pm 1$ y δ_{ij} la delta de Kronecker.

Calculamos $\langle \Delta^\sigma N, E_j \rangle$ en p :

$$\langle \Delta^\sigma N, E_j \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle E_i(E_i(N)), E_j \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, E_j \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (E_i \langle \nabla_{E_i} N, E_j \rangle - \langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} E_j \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle -\nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} E_j \rangle,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

usando que $\langle \nabla_{E_i} N, E_j \rangle = -\sigma(E_i, E_j) = -\varepsilon_i \delta_{ij}$.

Además, si $G = (g_{kl}) = (\langle E_k, E_l \rangle)$ y $G^{-1} = (g^{lk})$ es su matriz inversa, entonces

$$-\nabla_{E_i} N = \sum_{l=1}^n \varepsilon_l g^{il} E_l. \tag{1.10}$$

Ya que el corchete de Lie $[E_i, E_j](p) = 0$, usando (1.9), (1.10) y la fórmula de Koszul, obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \Delta^\sigma N, E_j \rangle &= \sum_{i,l=1}^n g^{il} \langle \nabla_{E_i} E_j, E_l \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^n g^{il} (E_i \langle E_j, E_l \rangle + E_j \langle E_i, E_l \rangle \\
&\quad - E_l \langle E_i, E_j \rangle) = \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^n g^{il} E_j(g_{il}) = \frac{1}{2} \text{traza}(G^{-1} E_j(G)) \\
&= \frac{1}{2} E_j(\log(\det(G))),
\end{aligned}$$

donde \det denota el determinante usual.

Como la curvatura de Gauss-Kronecker K satisface $|K| \det(G) = 1$

$$\langle \Delta^\sigma N, E_j \rangle = -\frac{1}{2} E_j(\log |K|). \tag{1.11}$$

De aquí es claro que la parte tangente de $\Delta^\sigma N$ es cero si, y sólo si, K es constante.

Por otro lado, usando (1.10)

$$\begin{aligned}
\langle \Delta^\sigma N, N \rangle &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle E_i(E_i(N)), N \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, N \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (E_i \langle \nabla_{E_i} N, N \rangle - \langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} N \rangle) \\
&= \sum_{i,l=1}^n g^{il} \langle E_l, \nabla_{E_i} N \rangle = - \sum_{i,l=1}^n g^{il} \varepsilon_l \delta_{il} = - \sum_{i=1}^n g^{ii} \varepsilon_i \\
&= -nH.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Si c no es cero, entonces $\langle x, x \rangle = \frac{1}{c}$ nos da $\langle x, N \rangle = 0$ y $\langle x, E_i \rangle = 0$ para $i = 1, \dots, n$, con lo que

$$\begin{aligned} \langle \Delta^\sigma N, x \rangle &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle E_i(E_i(N)), x \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N, x \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (E_i \langle \nabla_{E_i} N, x \rangle - \langle \nabla_{E_i} N, E_i \rangle) = n \end{aligned} \quad (1.13)$$

De esta manera, de (1.11), (1.12) y (1.13) si K es constante se obtiene (1.7).

Por otro lado, la ecuación de Codazzi en un espacio de curvatura constante queda

$$\langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_j} E_k \rangle = \langle \nabla_{E_j} N, \nabla_{E_i} E_k \rangle, \quad i, j, k = 1, \dots, n,$$

que junto con (1.9), (1.10) y (1.11) nos da

$$\begin{aligned} \langle \Delta^\sigma x, E_j \rangle &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle E_i(E_i(x)), E_j \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} x, E_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle = \sum_{i,k=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_k g_{jk} \langle \nabla_{E_i} E_i, -\nabla_{E_k} N \rangle \\ &= \sum_{i,k=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_k g_{jk} \langle \nabla_{E_k} E_i, -\nabla_{E_i} N \rangle = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k g_{jk} \langle \Delta^\sigma N, E_k \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k g_{jk} E_k (\log |K|). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Como la matriz $(\varepsilon_k g_{jk})$ tiene determinante no nulo, de (1.14) se deduce que K es constante si, y sólo si, la parte tangente de $\Delta^\sigma x$ es cero.

Además

$$\begin{aligned} \langle \Delta^\sigma x, N \rangle &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle E_i(E_i(x)), N \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} x, N \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} E_i, N \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle E_i, -\nabla_{E_i} N \rangle = n. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Si consideramos el endomorfismo de Weingarten, A , asociado a N , de (1.10)

$$E_i = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j g_{ij} A(E_j), \quad i = 1, \dots, n,$$

y como A es biyectivo

$$A^{-1}(E_i) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j g_{ij} E_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

De esta manera, si c no es cero, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \Delta^\sigma x, x \rangle &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle E_i(E_i(x)), x \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} x, x \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} E_i, x \rangle = - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle E_i, E_i \rangle = - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_{ii} \\ &= -\text{traza } A^{-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, utilizando una base ortonormal para la métrica inducida que diagonalice A se tiene

$$\langle \Delta^\sigma x, x \rangle = -n H_{n-1}/K. \quad (1.16)$$

Así, si K es constante, de (1.14), (1.15) y (1.16) se tiene (1.8). ■

Como consecuencia inmediata del cálculo del laplaciano de la aplicación de Gauss se obtiene, ver [19], [20],

Corolario 1.1.1 *Una hipersuperficie orientable en \mathbb{R}^{n+1} con segunda forma fundamental no degenerada tiene curvatura de Gauss-Kronecker constante si, y sólo si, su aplicación de Gauss es armónica para σ .*

Si S es una superficie y $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión con curvatura de Gauss constante positiva entonces S es orientable y se puede elegir un normal unitario N a la inmersión tal que la segunda forma fundamental, σ , es definida positiva. Así, si $z = u + iv$ es un parámetro conforme para σ entonces $K |x_u \times x_v|^2 = 1$ y de (1.8), $x_{uu} + x_{vv} = 2\sqrt{K} x_u \times x_v$, donde \times denota el producto vectorial usual de \mathbb{R}^3 .

Por tanto, la existencia de una superficie simplemente conexa con curvatura de Gauss constante positiva K y borde una curva de Jordan $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ es equivalente a resolver el siguiente problema de Plateau:

- Encontrar $x : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
- $\Delta x = 2\sqrt{K} x_u \times x_v$
 - $\det(x_{uu}, x_u, x_v) = \det(x_{vv}, x_u, x_v) > 0$, $\det(x_{uv}, x_u, x_v) = 0$, (condición de parámetros conformes)
 - $x : \partial\bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una representación admisible de la curva de Jordan Γ

donde $\bar{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 \leq 1\}$ es el disco unidad cerrado y Δ el laplaciano usual en el plano.

Aunque el estudio de este problema no ha sido abordado hasta ahora, su semejanza con el problema de Plateau para superficies de curvatura media constante en \mathbb{R}^3 y los estudios que en este caso han sido realizados por Heintz, [32], Hildebrant, [34], Brezis,

Coron, [7], etc., dan pie a investigar el siguiente problema:

“Dada una curva de Jordan Γ en \mathbb{R}^3 y un número real $K > 0$, ¿cuándo es posible encontrar una superficie con curvatura de Gauss K y borde Γ ? Y, en tal caso, ¿cuántas superficies existen cumpliendo las condiciones anteriores?”

Un paso previo que puede ayudar a la comprensión del problema de existencia consiste en determinar condiciones necesarias para que una superficie de curvatura constante pueda tener como borde una curva prefijada. De esta manera, dedicamos el resto del capítulo a estudiar propiedades geométricas de las superficies con curvatura de Gauss constante positiva con borde.

1.2 Estimaciones sobre la altura.

En esta sección daremos una acotación sobre la altura máxima que puede alcanzar una hipersuperficie compacta en $M^{n+1}(c)$, $c \leq 0$, con curvatura de Gauss-Kronecker constante y borde en un hiperplano totalmente geodésico, a partir del cálculo del laplaciano de la inmersión y de su aplicación de Gauss.

Teorema 1.2.1 *Sea S una hipersuperficie compacta embebida en $M^{n+1}(c)$, $c \leq 0$, con borde contenido en un hiperplano totalmente geodésico P y curvatura de Gauss-Kronecker constante no nula. Entonces la distancia máxima entre un punto de S y P es menor o igual que*

$$\frac{2}{\sqrt[n]{K}} \quad \text{si } c = 0, \quad \frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt[n]{K}} \right) \quad \text{si } c < 0.$$

DEMOSTRACIÓN:

Sean p un punto de S de distancia máxima a P y γ la geodésica orientada de velocidad uno, ortogonal a P en $\gamma(0)$ pasando por $p = \gamma(d)$, $d > 0$.

Consideremos el campo de Killing X generado por las isometrías de $M^{n+1}(c)$, $c \leq 0$, dadas por las traslaciones, h_t , a lo largo de γ , a distancia $|t|$, con h_0 la identidad.

Como $h_d(P)$ deja a S a un lado y tiene un contacto con ella en p , se tiene que toda curvatura seccional de S en p es positiva ya que K no es cero y se puede elegir un normal N a lo largo de S tal que todos los autovalores sean positivos en p y, por tanto, en todo S , con lo que σ es definida positiva para dicha elección del normal y Δ^σ es un operador elíptico.

Usando, de forma estándar, el principio de reflexión de Alexandroff respecto de los hiperplanos geodésicos $P_t = h_t(P)$ se demuestra que $S_1 = \bigcup_{t \geq d/2} S \cap P_t$ es un grafo con

respecto a la coordenada Killing t sobre un dominio en P , siendo t la función distancia desde P .

De esta forma, basta demostrar que las cotas

$$\frac{1}{\sqrt[n]{K}} \quad \text{si } c = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt[n]{K}} \right) \quad \text{si } c < 0, \quad (1.17)$$

son ciertas si S es un grafo sobre P .

Salvo isometrías, podemos suponer que P es el hiperplano de \mathbb{L}^{n+2} , $\{x_{n+1} = 0\}$ intersecado con $M^{n+1}(c)$ si $c < 0$ y el hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$ de \mathbb{R}^{n+1} si $c = 0$ y la hipersuperficie queda en el semiespacio $\{x_{n+1} \geq 0\}$.

Entonces tomando $a = (0, \dots, 0, 1)$ en \mathbb{L}^{n+2} o \mathbb{R}^{n+1} en cada caso, y usando (1.7), (1.8) tenemos

$$\Delta^\sigma \langle \sqrt[n]{K}x + N, a \rangle = n \left((\sqrt[n]{K} - H) \langle N, a \rangle + c \left(1 - \frac{H_{n-1}}{\sqrt[n]{K^{n-1}}} \right) \langle x, a \rangle \right). \quad (1.18)$$

Para σ definida positiva el normal unitario asociado cumple que $\langle N, a \rangle \leq 0$ y las curvaturas de la inmersión satisfacen

$$H = H_1 \geq \sqrt{H_2} \geq \dots \geq \sqrt[n-1]{H_{n-1}} \geq \sqrt[n]{H_n} = \sqrt[n]{K},$$

ver [30]. Por tanto, de (1.18) y $c \leq 0$,

$$\Delta^\sigma \langle \sqrt[n]{K}x + N, a \rangle \geq 0$$

sobre S y

$$\langle \sqrt[n]{K}x + N, a \rangle = \langle N, a \rangle \leq 0$$

sobre el borde de S . Así, por el principio del máximo $\langle \sqrt[n]{K}x + N, a \rangle \leq 0$ sobre todo S , esto es,

$$\langle x, a \rangle \leq -\frac{1}{\sqrt[n]{K}} \langle N, a \rangle. \quad (1.19)$$

Si $c = 0$, utilizando que $-1 \leq \langle N, a \rangle \leq 0$ se obtiene la desigualdad deseada. Si $c < 0$, consideramos p , punto de mayor distancia a P que es grafo desde $p_0 = \gamma(0) \in P$, entonces $p = \gamma(d) = \cosh(\sqrt{-c}d)p_0 + \sinh(\sqrt{-c}d)a/\sqrt{-c}$ y $N(p) = -\gamma'(d)$, con lo que usando (1.19)

$$\frac{1}{\sqrt{-c}} \sinh(\sqrt{-c}d) = \langle p, a \rangle \leq -\frac{1}{\sqrt[n]{K}} \langle N(p), a \rangle = \frac{1}{\sqrt[n]{K}} \cosh(\sqrt{-c}d)$$

y, así

$$\tanh(\sqrt{-c}d) \leq \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt[n]{K}}$$

como se quería demostrar. ■

Las dos desigualdades anteriores fueron por primera vez obtenidas por H. Rosenberg en 1993, ver [50], utilizando operadores elípticos diferentes.

1.3 Estimaciones sobre la curvatura.

Consideremos ahora una variedad riemanniana de dimensión tres, M , con curvatura seccional constante c y una inmersión desde una superficie S en M con curvatura de Gauss mayor que c , o equivalentemente, con curvatura de Gauss-Kronecker (o curvatura extrínseca) positiva, entonces S es orientable y se puede elegir un campo de vectores normal unitario a la inmersión para que la segunda forma fundamental sea una métrica riemanniana.

De esta manera S será considerada como superficie de Riemann con la estructura conforme dada por σ .

Denotemos por Ω a la 2-forma dada en un parámetro conforme arbitrario z como

$$\Omega(z) = \langle x_z, x_z \rangle dz^2,$$

entonces tenemos, ver [46],

Lema 1.3.1 *Sea $x : S \rightarrow M$ una inmersión con curvatura extrínseca positiva. Entonces Ω es holomorfa si, y sólo si, la inmersión tiene curvatura de Gauss constante.*

DEMOSTRACIÓN :

Basta demostrar que el resultado es cierto para $M^3(c)$, ya que por el teorema de Cartan M es localmente isométrica a dicha variedad.

Dado un parámetro conforme z sobre la superficie de Riemann S se tiene que Ω es holomorfa si, y sólo si, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \langle x_z, x_z \rangle = 0$, o equivalentemente, $\langle \Delta^\sigma x, x_z \rangle = 0$.

Por tanto, Ω es holomorfa si, y sólo si, la parte tangente de $\Delta^\sigma x$ es cero. Así, el resultado sigue, usando la proposición 1.1.1. ■

Lema 1.3.2 *Sea S una superficie con borde conexo Γ y característica de Euler uno. Si $x : S \rightarrow M$ es una inmersión con curvatura extrínseca constante positiva y $x(\Gamma)$ es línea de curvatura, entonces la inmersión es totalmente umbilical.*

DEMOSTRACIÓN :

Ya que la característica de Euler de la superficie es uno, S es conformemente equivalente al disco cerrado unidad $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$, ver [21].

Así, podemos considerar $S = \bar{D}$ y elegir coordenadas polares (r, θ) dadas por

$$z = u + iv = re^{i\theta}.$$

De esta manera

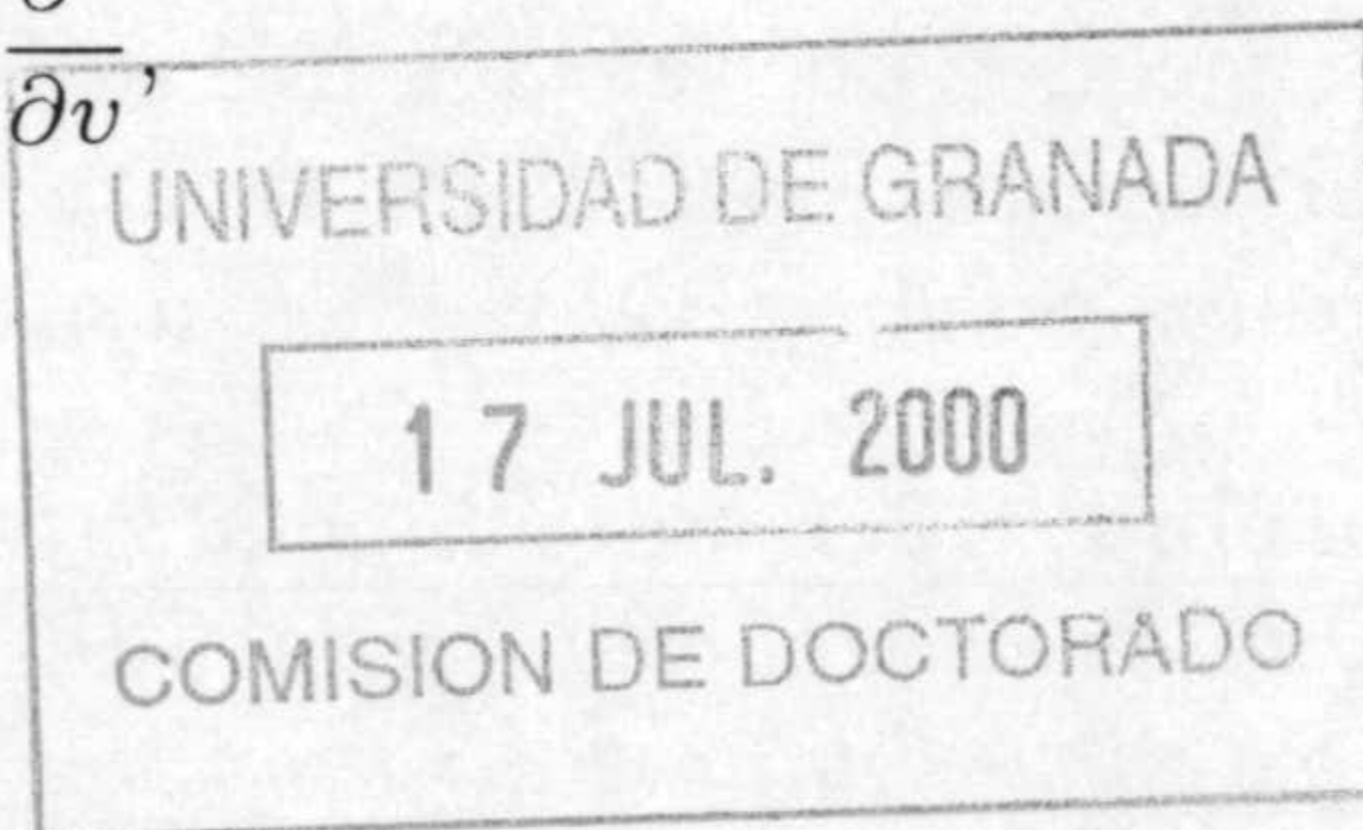
$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial u} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial v},$$

sobre el borde del disco unidad.

Como z es un parámetro conforme,

$$\sigma \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = 0$$



y, por tanto, usando que Γ es línea de curvatura,

$$0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = -\frac{1}{2}(E - G)\operatorname{sen}2\theta + F \cos 2\theta, \quad (1.20)$$

sobre el borde de \bar{D} , donde la métrica inducida por la inmersión viene dada por

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2.$$

Utilizando el lema anterior, la función $f(z) = E(z) - G(z) - 2iF(z)$ es holomorfa y también lo es la función $g(z) = z^2 f(z)$, que tiene como parte imaginaria una función armónica que coincide con $(E - G)\operatorname{sen}2\theta - 2F \cos 2\theta$ sobre el borde de \bar{D} .

De (1.20) la parte imaginaria de g se anula sobre el borde y, por tanto, ha de ser idénticamente nula. Así, g es constante y como $g(0) = 0$, f es la función nula, es decir, x es una inmersión totalmente umbilical. ■

Ahora, sean S una superficie compacta con borde conexo y $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión tal que la imagen del borde de la superficie, Γ , cae en un plano, P .

Si a es un normal unitario al plano, al número

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \langle x \times dx, a \rangle \quad (1.21)$$

se le llama área algebraica de Γ . El número anterior es independiente de la parametrización elegida y si Γ es una curva de Jordan el valor absoluto del área algebraica es el área del dominio acotado encerrado por Γ en P .

A continuación estimaremos una condición a priori para que una curva cerrada plana pueda ser el borde de una superficie compacta con curvatura de Gauss constante, K , en \mathbb{R}^3 .

En este caso, es claro que si la superficie no cae en un plano ha de tener un punto con curvatura positiva y, por tanto, $K > 0$. Si además Γ es una curva de Jordan entonces como el cuadrado de su curvatura es mayor o igual que el cuadrado de su curvatura normal y ésta nunca se anula, la curvatura de Γ no es cero en ningún punto y Γ es globalmente convexa.

Es conocido, ver [39], que toda curva de Jordan globalmente convexa es el borde de infinitas superficies de curvatura de Gauss constante positiva. Veamos una acotación sobre los posibles valores de la curvatura de la inmersión en términos de la curva.

Teorema 1.3.1 Sean S una superficie compacta con borde conexo y $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión con curvatura de Gauss constante positiva, K , tal que la imagen del borde, Γ , cae en un plano P . Entonces

$$K \leq \frac{\pi|i(\Gamma)|}{|\bar{A}|},$$

donde \bar{A} e $i(\Gamma)$ son el área algebraica y el índice de rotación de la curva Γ , respectivamente.

Además, la igualdad ocurre si, y sólo si, $x(S)$ es una semiesfera de radio $1/\sqrt{K}$.

DEMOSTRACIÓN :

Sean (u, v) coordenadas locales de la inmersión y N un normal unitario a lo largo de S bien orientado. Entonces

$$N_u \times N_v = Kx_u \times x_v,$$

esto es,

$$K(d(dx \times x)) = d(dN \times N)$$

sobre S . Y utilizando el teorema de Stokes, obtenemos la siguiente fórmula

$$K \int_{\Gamma} dx \times x = \int_{\Gamma} dN \times N. \quad (1.22)$$

Como x es una inmersión con curvatura positiva, P corta a Γ de forma transversal y $N \times a \neq 0$ a lo largo de Γ . Elegimos un campo de vectores tangente unitario t a lo largo de Γ tal que $\det(N, t, a) > 0$ sobre Γ . Entonces, de (1.22) y la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} 2K|\bar{A}| &= K \int_{\Gamma} \langle dx \times x, a \rangle = \int_{\Gamma} \langle dN \times N, a \rangle \\ &= \int_{\Gamma} k_n \det(N, t, a) \leq \int_{\Gamma} k_{\Gamma} = 2\pi|i(\Gamma)|, \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde k_n y k_Γ son la curvatura normal y la curvatura de Γ , respectivamente.

Si la igualdad ocurre en la desigualdad anterior, entonces $N \times t = a$ y $k_n = k_\Gamma$ sobre Γ . Así,

$$\langle N, a \rangle = 0, \quad \langle dN(t), N \times t \rangle = \langle dN(t), a \rangle = 0$$

y

$$dN(t) = -k_\Gamma t.$$

Esto es, $x(\partial S)$ es línea de curvatura.

Por otro lado, la curvatura geodésica de Γ , k_g , cumple que $k_g^2 = k_\Gamma^2 - k_n^2 = 0$. Y la fórmula de Gauss-Bonnet da

$$2\pi\chi(S) = \int_S K > 0$$

donde $\chi(S)$ es la característica de Euler de S , ver [10].

Así, $\chi(S) = 1$ y por el lema 1.3.2, $x(S)$ es totalmente umbilical con borde geodésico. Por tanto, $x(S)$ es una semiesfera de radio $1/\sqrt{K}$. ■

1.4 Estimaciones sobre el área.

Ahora veamos una cota sobre el área de una inmersión con borde una curva plana.

Teorema 1.4.1 Sean S una superficie compacta con borde conexo y $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión con curvatura de Gauss constante positiva, K , tal que la imagen del borde, Γ , se encuentra en un plano P . Entonces si llamamos A al área de S se tiene

$$2\pi\chi(S) - 2\sqrt{\pi^2 i(\Gamma)^2 - \pi K |\bar{A}| |i(\Gamma)|} \leq KA \leq 2\pi\chi(S) + 2\sqrt{\pi^2 i(\Gamma)^2 - \pi K |\bar{A}| |i(\Gamma)|}.$$

Además, si la característica de Euler de S es uno, la igualdad ocurre en alguna de las desigualdades anteriores si, y sólo si, $x(S)$ es un casquete esférico.

DEMOSTRACIÓN:

Como Γ es conexa, compacta y la superficie es transversal a P a lo largo de Γ , un entorno, U , de Γ en $x(S)$ se encuentra en uno de los semiespacios determinados por P . Sea a vector unitario ortogonal a P tal que U se encuentra en $P^+ = \{p \in \mathbb{R}^3 / \langle p, a \rangle \geq 0\}$.

Sean N normal unitario bien orientado a lo largo de S y t campo de vectores tangentes unitarios sobre Γ tal que $\det(N, t, a) < 0$. Si denotamos por t' la derivada covariante de t , entonces

$$t' = k_g(N \times t) + k_n N$$

y

$$\langle t', a \rangle = -k_g |\nabla f| + k_n \langle N, a \rangle,$$

donde $f = \langle x, a \rangle$ es la función altura y ∇f su gradiente para la métrica inducida en S .

Por otra parte, si n es el normal unitario interior a Γ en P

$$N = \langle N, n \rangle n + \langle N, a \rangle a = |\nabla f| n + \langle N, a \rangle a.$$

De donde

$$|\nabla f|^2 + \langle N, a \rangle^2 = 1, \quad k_g^2 = k_\Gamma^2 (1 - |\nabla f|^2). \quad (1.24)$$

Ahora, usando el teorema de Gauss-Bonnet, la desigualdad de Schwarz, (1.23) y (1.24)

$$\begin{aligned} (2\pi\chi(S) - KA)^2 &= \left(\int_\Gamma k_g \right)^2 \leq \int_\Gamma k_\Gamma \int_\Gamma k_\Gamma (1 - |\nabla f|^2) \\ &= \int_\Gamma k_\Gamma \left(\int_\Gamma k_\Gamma - \int_\Gamma k_n \det(N, t, -a) \right) \\ &= (2\pi|i(\Gamma)|) (2\pi|i(\Gamma)| - 2K|\bar{A}|), \end{aligned} \quad (1.25)$$

que da las desigualdades buscadas.

Si la igualdad ocurre en (1.25), entonces $|\nabla f|$ es constante a lo largo de Γ y, de (1.24), $\langle N, a \rangle$ es constante sobre Γ . Como $dN(t) = -k_n t + \lambda N \times t$, para cierto número real λ , $\langle dN(t), a \rangle = 0$ y $\langle N \times t, a \rangle \neq 0$, concluimos que $\lambda = 0$ y Γ es línea de curvatura. Por tanto, el resultado es consecuencia inmediata del lema 1.3.2. ■

Si Γ es una curva de Jordan, el índice de rotación de Γ es uno en valor absoluto y es fácil probar, ver [39], que la inmersión es un embebimiento y la característica de Euler de S es uno.

De esta manera, combinamos el resultado anterior con la siguiente desigualdad isoperimétrica debida a Barbosa y do Carmo, ver [4],

Teorema 1.4.2 (Barbosa-do Carmo)

Sea S una superficie C^2 , con métrica C^2 posiblemente degenerada en puntos aislados y D un dominio simplemente conexo en S con área A y acotada por una curva de clase C^1 , cerrada, regular a trozos, de longitud L . Si K_G es la curvatura de Gauss de la superficie, K_0 un número real arbitrario y suponemos que K_G está acotada superiormente en un entorno de todo punto aislado, entonces

$$L^2 \geq 4\pi A \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_D (K_G - K_0)^+ - \frac{K_0 A}{4\pi} \right).$$

Además, la igualdad ocurre si, y sólo si, K_G es constantemente K_0 y D es un disco geodésico.

Y, como consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.4.1 Sean S una superficie compacta con borde conexo y $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión con curvatura de Gauss constante positiva, K , tal que la imagen del borde, Γ , es una curva de Jordan plana. Entonces

$$2\pi - 2\sqrt{\pi^2 - \pi K|\bar{A}|} \leq KA \leq 2\pi + 2\sqrt{\pi^2 - \pi K|\bar{A}|}.$$

Si la longitud, L , de la curva Γ satisface $4\pi^2 - KL^2 \geq 0$, entonces

$$2\pi - 2\sqrt{\pi^2 - \pi K|\bar{A}|} \leq KA \leq 2\pi - \sqrt{4\pi^2 - KL^2},$$

o bien

$$2\pi + \sqrt{4\pi^2 - KL^2} \leq KA \leq 2\pi + 2\sqrt{\pi^2 - \pi K|\bar{A}|}.$$

Además, la igualdad ocurre en alguna de las desigualdades anteriores si, y sólo si, $x(S)$ es un casquete esférico.

Observaciones. Si Γ es una circunferencia, entonces $L^2 = 4\pi|\bar{A}|$ y el teorema 1.3.1 nos asegura que $4\pi^2 - KL^2 \geq 0$, para $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ inmersión con curvatura de Gauss constante, K , e imagen del borde Γ . Por tanto, una de las desigualdades anteriores se cumple y $x(S)$ ha de ser un casquete esférico.

Esto nos proporciona una demostración diferente del hecho conocido que una superficie con curvatura de Gauss constante y borde una circunferencia es un casquete esférico. Que también puede ser demostrado usando el principio de reflexión de Alexandroff para probar que la superficie adquiere todas las simetrías de su borde y, por tanto, ha de ser de revolución.

1.5 Estimaciones sobre el volumen.

Consideremos ahora $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un embebimiento con curvatura de Gauss constante positiva, K , de una superficie compacta con borde conexo. Si la imagen del borde, Γ , cae en un plano P , denotaremos por V al volumen del dominio encerrado por $x(S)$ y la componente conexa acotada de $P - \Gamma$. Con esta notación tenemos

Teorema 1.5.1 Si $x(S)$ es un grafo sobre un dominio en el plano P , entonces el volumen encerrado por $x(S)$ y P cumple la siguiente desigualdad

$$V \leq \pi \left(\frac{h}{K} - \frac{h^3}{3} \right),$$

donde h es la máxima altura de $x(S)$ sobre P . Además, la igualdad ocurre si, y sólo si, $x(S)$ es una semiesfera de radio $1/\sqrt{K}$.

DEMOSTRACIÓN:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que P es el plano de \mathbb{R}^3 dado por $\{x_3 = 0\}$, $a = (0, 0, 1)$ y $x(S)$ se encuentra en el semiespacio superior de \mathbb{R}^3 . Así $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in U$, siendo U un dominio en P . Si Γ_s denota la curva de Jordan plana dada por $x(U) \cap \{(u, v, s) / u, v \in \mathbb{R}\}$, entonces de (1.21) y (1.22)

$$\begin{aligned} 2KV &= 2K \int_0^h |\bar{A}(\Gamma_s)| = \int_0^h \int_{\Gamma_s} \langle dN \times N, a \rangle \\ &= \int_0^h \int_{\Gamma_s} k_n(\Gamma_s) \langle N \times t^s, a \rangle = \int_0^h \int_{\Gamma_s} k_{\Gamma_s} |\nabla f|^2, \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde t^s es un campo de vectores tangente unitario bien orientado a lo largo de Γ_s , k_{Γ_s} su curvatura, $k_n(\Gamma_s)$ su curvatura normal y $f = \langle x, a \rangle$ la función altura.

De (1.19), $\sqrt{K}f + N_3 \leq 0$ sobre U . Entonces, usando que $N_3 = -1/\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$, tenemos

$$f_u^2 + f_v^2 = \frac{1}{\langle N, a \rangle^2} - 1 \leq \frac{1}{Kf^2} - 1$$

y

$$|\nabla f|^2 = \frac{f_u^2 + f_v^2}{1 + f_u^2 + f_v^2} \leq 1 - Kf^2.$$

De (1.26)

$$2KV \leq \int_0^h (1 - Ks^2) \int_{\Gamma_s} k_{\Gamma_s} = 2\pi \left(h - \frac{Kh^3}{3} \right),$$

que da la desigualdad buscada.

Además, la igualdad ocurre si, y sólo si, Γ_s es línea de curvatura para todo s . Por tanto, el resultado es consecuencia del lema 1.3.2. ■

Bajo las hipótesis del teorema anterior y utilizando la desigualdad (1.17) para grafos tenemos

Corolario 1.5.1 *El volumen encerrado por $x(S)$ y P cumple*

$$V \leq \frac{2}{3}\pi \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \right)^3.$$

La igualdad ocurre si, y sólo si, $x(S)$ es una semiesfera de radio $1/\sqrt{K}$.

Capítulo 2.

La aplicación de Gauss y segunda forma fundamental de superficies en el espacio euclídeo.

El estudio de la aplicación de Gauss de una subvariedad de \mathbb{R}^n , qué propiedades posee y cómo determina a la subvariedad, es un problema de gran interés en Geometría Diferencial, ver, por ejemplo, [1], [36], [37], [38], [41], [48], [52], [53] y [64].

Así, la existencia y unicidad de una inmersión desde una superficie o hipersuperficie en \mathbb{R}^n con una métrica o estructura conforme y aplicación de Gauss dadas han sido estudiadas por varios autores. En particular, K. Kenmotsu, D. A. Hoffman y R. Osserman ([37], [38], [41]) investigaron el problema de existencia y unicidad para superficies, probando que existe una inmersión conforme no minimal desde una superficie simplemente conexa en \mathbb{R}^n con una aplicación de Gauss dada si, y sólo si, un conjunto de ecuaciones diferenciales dependientes de la estructura conforme y la aplicación de Gauss se cumplen. El problema de unicidad para hipersuperficies también fue estudiado por K. Abe y J. Erbacher [1].

En este capítulo estudiamos propiedades de la aplicación de Gauss de una superficie en \mathbb{R}^3 relacionadas con su segunda forma fundamental. Así, en las secciones 2.1 y 2.2 resolvemos el problema de existencia y unicidad de una inmersión, $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, con curvatura de Gauss no nula desde una superficie simplemente conexa S en \mathbb{R}^3 con una aplicación de Gauss y estructura conforme para su segunda forma fundamental fijadas, dando una fórmula de representación de la superficie similar a la de Enneper-Weierstrass.

En la sección 2.3 probamos que dadas dos inmersiones desde una superficie en \mathbb{R}^3

con igual aplicación de Gauss y estructura conforme para su segunda forma fundamental, ambas inmersiones coinciden, salvo una semejanza, si el conjunto de puntos de S donde la segunda forma fundamental es degenerada tiene interior vacío.

2.1 Superficies con curvatura de Gauss positiva.

Si S es una superficie diferenciable y $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión con curvatura de Gauss positiva. Entonces podemos tomar $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ aplicación de Gauss a lo largo de S tal que la segunda forma fundamental, σ , sea definida positiva. Y consideramos a S como superficie de Riemann con la estructura conforme inducida por σ .

Sea $z = u + iv$ un parámetro conforme para σ , entonces la métrica inducida y la segunda forma fundamental vendrán dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} ds^2 &= E du^2 + 2F dudv + G dv^2 \\ d\sigma^2 &= e (du^2 + dv^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde E, F, G y e son funciones diferenciables con $e > 0$.

Denotemos por $g : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la composición de la proyección estereográfica usual con N , esto es,

$$g = (N_1 + iN_2)/(1 - N_3), \quad (2.2)$$

donde $N = (N_1, N_2, N_3)$. A la aplicación g la llamaremos también **aplicación de Gauss** de la inmersión. De esta forma obtenemos:

Teorema 2.1.1 Sean $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión con curvatura de Gauss positiva, K , $g : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ su aplicación de Gauss y $z = u + iv$ un parámetro conforme para σ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial z} &= \frac{(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial z} &= -i \frac{(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{\partial x_3}{\partial z} &= 2 \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)$.

DEMOSTRACIÓN:

Derivando en (2.2) tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{(1 - N_3)^2} \left(\frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial z} - N_3 \frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial z} + \frac{\partial N_3}{\partial z} (N_1 + iN_2) \right), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{(1 - N_3)^2} \left(\frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial \bar{z}} - N_3 \frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial N_3}{\partial \bar{z}} (N_1 + iN_2) \right). \quad (2.5)$$

Por otro lado, de (2.1), las ecuaciones de Weingarten quedan

$$N_u = \frac{e}{EG - F^2} (-Gx_u + Fx_v), \quad N_v = \frac{e}{EG - F^2} (Fx_u - Ex_v). \quad (2.6)$$

y

$$K = \frac{e^2}{EG - F^2}, \quad N = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|} = \frac{x_u \times x_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

De donde se tiene

$$N \times N_u = -\sqrt{K} x_v, \quad N \times N_v = \sqrt{K} x_u.$$

Ahora podemos expresar el segundo y tercer términos entre paréntesis de (2.4) en función de las derivadas de las dos primeras funciones coordenadas de la inmersión:

$$\begin{aligned} & -N_3 \frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial z} + \frac{\partial N_3}{\partial z} (N_1 + iN_2) = \\ & = \frac{1}{2} (N_1 N_{3u} - N_3 N_{1u} + N_2 N_{3v} - N_3 N_{2v} + i(N_2 N_{3u} - N_3 N_{2u} + N_3 N_{1v} - N_1 N_{3v})) = \\ & = \frac{\sqrt{K}}{2} ((x_{1u} + x_{2v}) + i(x_{2u} - x_{1v})). \end{aligned}$$

De manera análoga, para (2.5) se obtiene

$$-N_3 \frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial N_3}{\partial \bar{z}} (N_1 + iN_2) = \frac{\sqrt{K}}{2} ((-x_{1u} + x_{2v}) + i(-x_{2u} - x_{1v})).$$

Y, por tanto,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{1}{(1 - N_3)^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} (N_1 + iN_2) + \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial z} (x_1 + ix_2) \right), \\ \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{(1 - N_3)^2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (N_1 + iN_2) - \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (x_1 + ix_2) \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Como $\langle N, N \rangle = 1$, de (2.2) se deduce

$$N_1 = \frac{g + \bar{g}}{1 + g\bar{g}}, \quad N_2 = -i \frac{g - \bar{g}}{1 + g\bar{g}}, \quad N_3 = \frac{-1 + g\bar{g}}{1 + g\bar{g}}. \quad (2.8)$$

Entonces (2.7) puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\frac{4g_z}{(1+g\bar{g})^2} &= \left(\frac{2g}{1+g\bar{g}}\right)_z + \sqrt{K}(x_1 + ix_2)_z, \\ \frac{4g_{\bar{z}}}{(1+g\bar{g})^2} &= \left(\frac{2g}{1+g\bar{g}}\right)_{\bar{z}} - \sqrt{K}(x_1 + ix_2)_{\bar{z}},\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$2\frac{g_z + g^2\bar{g}_z}{(1+g\bar{g})^2} = \sqrt{K}(x_1 + ix_2)_z, \quad (2.9)$$

$$2\frac{g_{\bar{z}} + g^2\bar{g}_{\bar{z}}}{(1+g\bar{g})^2} = -\sqrt{K}(x_1 + ix_2)_{\bar{z}}. \quad (2.10)$$

De esta manera, las dos primeras ecuaciones de (2.3) se obtienen de (2.9) y la ecuación conjugada de (2.10).

Ahora, ya que $\langle x_u, N \rangle = \langle x_v, N \rangle = 0$, uno tiene

$$x_{3u} = -\frac{N_1x_{1u} + N_2x_{2u}}{N_3}, \quad x_{3v} = -\frac{N_1x_{1v} + N_2x_{2v}}{N_3},$$

y usando (2.8)

$$x_{3z} = \frac{g + \bar{g}}{1 - g\bar{g}}x_{1z} - i\frac{g - \bar{g}}{1 - g\bar{g}}x_{2z}. \quad (2.11)$$

Así, la tercera ecuación de (2.3) se obtiene de las anteriores. ■

Observación. Como consecuencia de (2.1) y el cálculo de las derivadas de las coordenadas de la inmersión, la primera y segunda forma fundamentales están dadas por

$$\begin{aligned}ds^2 &= \frac{4}{K(1+g\bar{g})^2} \left(-g_z\bar{g}_z dz^2 + (g_{\bar{z}}\bar{g}_z + g_z\bar{g}_{\bar{z}})|dz|^2 - g_{\bar{z}}\bar{g}_{\bar{z}}d\bar{z}^2 \right), \\ d\sigma^2 &= 4\frac{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2}|dz|^2.\end{aligned}$$

De (2.1), (2.6) y las expresiones anteriores, la curvatura media de la inmersión es

$$H = \text{traza}(-dN) = \sqrt{K} \frac{|g_{\bar{z}}|^2 + |g_z|^2}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2}.$$

Por otro lado, sabemos que la inmersión es umbilical en un punto p si, y sólo si, $H^2 = K$ en dicho punto, o equivalentemente de la expresión anterior $g_z = 0$ en p . Así, teniendo en cuenta que la proyección estereográfica invierte la orientación, la inmersión cae en una esfera si, y sólo si, la aplicación de Gauss es holomorfa para la segunda forma fundamental, es decir, $g_z = 0$.

Ahora, estudiamos qué condiciones ha de cumplir una aplicación $g : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ para que sea la aplicación de Gauss para alguna inmersión de S en \mathbb{R}^3 con la estructura conforme de la segunda forma fundamental ya fijada.

Teorema 2.1.2 *Si $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión con curvatura de Gauss positiva K , entonces la aplicación de Gauss g satisface:*

$$4K \left(g_{z\bar{z}} - 2g_z g_{\bar{z}} \frac{\bar{g}}{1 + g\bar{g}} \right) = K_z g_{\bar{z}} + K_{\bar{z}} g_z. \quad (\text{E})$$

Además, la curvatura de Gauss está determinada, salvo multiplicación por constantes positivas, por la aplicación de Gauss.

DEMOSTRACIÓN:

Utilizando (2.3), se obtiene que las condiciones de integrabilidad $(x_{jz})_{\bar{z}} = (x_{j\bar{z}})_z$, $j = 1, 2, 3$, se satisfacen si, y sólo si,

$$\begin{aligned} & \frac{8K}{1 + g\bar{g}} \left((-\bar{g} + \bar{g}^3)g_z g_{\bar{z}} + (g - g^3)\bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \right) + K_z \left((1 - g^2)\bar{g}_{\bar{z}} - (1 - \bar{g}^2)g_{\bar{z}} \right) + \\ & K_{\bar{z}} \left((1 - g^2)\bar{g}_z - (1 - \bar{g}^2)g_z \right) + 4K \left((1 - \bar{g}^2)g_{z\bar{z}} - (1 - g^2)\bar{g}_{z\bar{z}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{8K}{1 + g\bar{g}} \left((\bar{g} + \bar{g}^3)g_z g_{\bar{z}} + (g + g^3)\bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \right) + K_z \left((1 + g^2)\bar{g}_{\bar{z}} + (1 + \bar{g}^2)g_{\bar{z}} \right) + \\ & K_{\bar{z}} \left((1 + g^2)\bar{g}_z + (1 + \bar{g}^2)g_z \right) - 4K \left((1 + \bar{g}^2)g_{z\bar{z}} + (1 + g^2)\bar{g}_{z\bar{z}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{8K}{1 + g\bar{g}} \left(-\bar{g}^2 g_z g_{\bar{z}} + g^2 \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \right) + K_z (g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_{\bar{z}}) + K_{\bar{z}} (g\bar{g}_z - \bar{g}g_z) + \\ & 4K (\bar{g}g_{z\bar{z}} - g\bar{g}_{z\bar{z}}) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Y tomando (2.12) menos (2.13) mas $2g$ por (2.14), obtenemos (E). Recíprocamente, si la ecuación (E) se cumple las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) también se satisfacen.

De (E) y su ecuación conjugada se tiene el sistema

$$\begin{aligned} (\log K)_z g_{\bar{z}} + (\log K)_{\bar{z}} g_z &= 4 \left(g_{z\bar{z}} - 2g_z g_{\bar{z}} \frac{\bar{g}}{1 + g\bar{g}} \right), \\ (\log K)_z \bar{g}_{\bar{z}} + (\log K)_{\bar{z}} \bar{g}_z &= 4 \left(\bar{g}_{z\bar{z}} - 2\bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \frac{g}{1 + g\bar{g}} \right), \end{aligned}$$

con $|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2 > 0$. Por tanto,

$$(\log K)_z = \frac{4}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left(\bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_z}{1 + g\bar{g}} \right). \quad (L)$$

De la expresión de (L) es claro que K está determinada, salvo multiplicación por constantes positivas, por g . ■

Como (2.12), (2.13) y (2.14) son las ecuaciones de estructura de la inmersión y las tres son equivalentes a (E) o a (L), tenemos las condiciones necesarias y suficientes de integración de la inmersión, si la superficie es simplemente conexa. Además, ésta puede ser calculada de (2.3).

Teorema 2.1.3 Sean S una superficie de Riemann simplemente conexa y $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable. Entonces, existe una inmersión $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ con aplicación de Gauss N y tal que la estructura conforme sobre S es la inducida por la segunda forma fundamental si, y sólo si,

$$|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2 > 0, \quad (2.15)$$

$$\text{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{4}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left(\bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_z}{1 + g\bar{g}} \right) \right) \right\} = 0, \quad (2.16)$$

donde g viene dada por (2.2). Además, la inmersión es única, salvo traslaciones y homotecias de \mathbb{R}^3 y puede ser recuperada utilizando las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= \int \text{Re} \left\{ 2 \frac{(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K} (1 + g\bar{g})^2} dz \right\} + c_1, \\ x_2 &= \int \text{Re} \left\{ -2i \frac{(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K} (1 + g\bar{g})^2} dz \right\} + c_2, \\ x_3 &= \int \text{Re} \left\{ 4 \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{\sqrt{K} (1 + g\bar{g})^2} dz \right\} + c_3, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde

$$\log K = \int \text{Re} \left\{ \frac{8}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left(\bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_z}{1 + g\bar{g}} \right) dz \right\} + \lambda,$$

c_1, c_2, c_3, λ son constantes reales y las integrales son tomadas desde un punto fijo a uno variable.

DEMOSTRACIÓN :

Si S es una superficie de Riemann con estructura conforme dada por la segunda forma fundamental de una inmersión $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces $K > 0$, así $\log K$ y

$\partial^2(\log K)/\partial z\partial\bar{z}$ deben ser números reales. El resultado sigue de los teoremas 2.1.1 y 2.1.2.

Recíprocamente, ya que S es simplemente conexa, existe $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $K = e^\varphi$, cumpliendo (L) si, y sólo si, (2.16) se satisface. Y (L) es la condición completa de integrabilidad de (2.3).

Además, si $x, y : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ son dos inmersiones como las anteriores con curvaturas de Gauss K_1, K_2 , respectivamente, entonces $(\log K_1)_z = (\log K_2)_z$ y $K_1 = rK_2$ para alguna constante positiva r . Así $y_z = \sqrt{r}x_z$ y se concluye que $y = \sqrt{r}x + c, c \in \mathbb{R}^3$. ■

Como consecuencia, para superficies con curvatura de Gauss constante se tiene el siguiente resultado

Corolario 2.1.1 *Sea S una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces S puede ser inmersa en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss constante y estructura conforme sobre S dada por su segunda forma fundamental si, y sólo si, existe un difeomorfismo local armónico de S a \mathbb{S}^2 .*

DEMOSTRACIÓN:

Si $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión con curvatura de Gauss constante K , ya que S es una superficie de Riemann con estructura conforme dada por la segunda forma fundamental, entonces K debe de ser positiva. Por tanto, N es un difeomorfismo local y, como consecuencia del corolario 1.1.1, $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ ha de ser armónica.

Recíprocamente, si $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo local, entonces $|g_{\bar{z}}| \neq |g_z|$ para cualquier parámetro z . Cambiando N por $-N$, si fuese necesario, podemos suponer que $|g_{\bar{z}}| > |g_z|$, esto es, (2.15) se cumple.

Por otro lado, N es armónica si, y sólo si, $N_{z\bar{z}} \times N = 0$, esto es, por cálculos directos, de (2.8), si se satisface

$$g_{z\bar{z}} - 2g_z g_{\bar{z}} \frac{\bar{g}}{1 + g\bar{g}} = 0.$$

Con lo que (2.16) también se cumple. Y la inmersión puede ser calculada usando (2.17).

Finalmente, de (L), $(\log K)_z = 0$ y K debe ser una constante positiva. ■

2.2 Superficies con curvatura de Gauss negativa.

En esta sección son expuestos los resultados sobre existencia de superficies de curvatura de Gauss negativa con una estructura para la segunda forma fundamental

prefijada, que pueden ser probados de una manera similar a la sección anterior.

Sean S una superficie diferenciable orientable y $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión con curvatura de Gauss negativa. Entonces σ es una métrica de Lorentz y S puede ser considerada como una superficie de Lorentz (ver [65]).

Ahora, elegimos un campo de vectores normal unitario N sobre S bien orientado y coordenadas asintóticas (u, v) , esto es,

$$d\sigma^2 = 2f \, dudv,$$

con f función diferenciable positiva.

Razonando como en la sección anterior y teniendo en cuenta que en este caso $K = -f^2/(EG - F^2)$ se tiene

$$\begin{aligned} (x_1)_u &= -2 \frac{\operatorname{Im}((1 - g^2)\bar{g}_u)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2}, & (x_1)_v &= 2 \frac{\operatorname{Im}((1 - g^2)\bar{g}_v)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2}, \\ (x_2)_u &= -2 \frac{\operatorname{Re}((1 + g^2)\bar{g}_u)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2}, & (x_2)_v &= 2 \frac{\operatorname{Re}((1 + g^2)\bar{g}_v)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2}, \\ (x_3)_u &= -4 \frac{\operatorname{Im}(g\bar{g}_u)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2}, & (x_3)_v &= 4 \frac{\operatorname{Im}(g\bar{g}_v)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2}, \end{aligned}$$

así la primera y segunda forma fundamental se escriben

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{4g_u\bar{g}_u}{K(1 + g\bar{g})^2} du^2 + 4\frac{g_u\bar{g}_v + g_v\bar{g}_u}{K(1 + g\bar{g})^2} dudv - \frac{4g_v\bar{g}_v}{K(1 + g\bar{g})^2} dv^2, \\ d\sigma^2 &= 4i \frac{g_u\bar{g}_v - g_v\bar{g}_u}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2}, \end{aligned}$$

y la curvatura media de la inmersión viene dada por

$$H = i\sqrt{-K} \frac{g_u\bar{g}_v + g_v\bar{g}_u}{g_v\bar{g}_u - g_u\bar{g}_v}.$$

Ahora las ecuaciones de estructura de la inmersión nos dan los siguientes resultados.

Teorema 2.2.1 Sean S una superficie orientada y $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión con curvatura de Gauss negativa K , entonces la aplicación de Gauss $g : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ debe cumplir:

$$4K \left(g_{uv} - 2g_u g_v \frac{\bar{g}}{1 + g\bar{g}} \right) = K_u g_v + K_v g_u.$$

Además, la curvatura de Gauss está determinada, salvo constantes positivas, por la aplicación de Gauss.

Teorema 2.2.2 Sean S una superficie de Lorentz simplemente conexa y $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable. Entonces, existe una inmersión $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la estructura dada por la segunda forma fundamental es la existente sobre S y N es su aplicación de Gauss si, y sólo si,

$$\begin{aligned} i(g_u \bar{g}_v - \bar{g}_u g_v) &> 0, \quad y \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\bar{g}_u g_v - g_u \bar{g}_v} \left(\operatorname{Im}(g_v \bar{g}_{uv}) + 2|g_v|^2 \frac{\operatorname{Im}(\bar{g} g_u)}{1 + g\bar{g}} \right) \right) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\bar{g}_u g_v - g_u \bar{g}_v} \left(\operatorname{Im}(\bar{g}_u g_{uv}) + 2|g_u|^2 \frac{\operatorname{Im}(g \bar{g}_v)}{1 + g\bar{g}} \right) \right). \end{aligned}$$

Además, la inmersión es única, salvo traslaciones y homotecias de \mathbb{R}^3 . Y ésta puede ser calculada como sigue:

$$\begin{aligned} x_1 &= \int \left(-2 \frac{\operatorname{Im}((1 - g^2)\bar{g}_u)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2} du + 2 \frac{\operatorname{Im}((1 - g^2)\bar{g}_v)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2} dv \right) + c_1, \\ x_2 &= \int \left(-2 \frac{\operatorname{Re}((1 + g^2)\bar{g}_u)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2} du + 2 \frac{\operatorname{Re}((1 + g^2)\bar{g}_v)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2} dv \right) + c_2, \\ x_3 &= \int \left(-4 \frac{\operatorname{Im}(g\bar{g}_u)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2} du + 4 \frac{\operatorname{Im}(g\bar{g}_v)}{\sqrt{-K} (1 + g\bar{g})^2} dv \right) + c_3, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \log(-K) &= \int \left(\frac{8}{\bar{g}_u g_v - g_u \bar{g}_v} \left(\operatorname{Im}(\bar{g}_u g_{uv}) + 2|g_u|^2 \frac{\operatorname{Im}(g \bar{g}_v)}{1 + g\bar{g}} \right) du + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{\bar{g}_u g_v - g_u \bar{g}_v} \left(\operatorname{Im}(g_v \bar{g}_{uv}) + 2|g_v|^2 \frac{\operatorname{Im}(\bar{g} g_u)}{1 + g\bar{g}} \right) dv \right) + \lambda, \end{aligned}$$

c_1, c_2, c_3, λ son constantes reales y las integrales son tomadas a lo largo de una curva de un punto fijo a uno variable.

Si se particulariza el resultado anterior para superficies con curvatura de Gauss constante negativa se obtiene

Corolario 2.2.1 Sea S una superficie de Lorentz simplemente conexa. Entonces S puede ser inmersa en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss constante y la estructura conforme sobre S está dada por la segunda forma fundamental si, y sólo si, existe un difeomorfismo local armónico desde S a \mathbb{S}^2 . Además, la inmersión puede ser calculada usando el teorema anterior.

Algunos ejemplos clásicos de superficies con curvatura constante negativa en \mathbb{R}^3 pueden describirse de forma sencilla usando la representación anterior. Por ejemplo las

siguientes aplicaciones armónicas a la esfera de Riemann,

$$g_{ab}(u, v) = \frac{e^{i(a(u-v)+b(u+v))} \left((a+ib) e^{bu} - (a-ib) e^{bv+a(u+v)} \right)}{(a-ib) e^{bu} + (a+ib) e^{bv+a(u+v)}},$$

donde a, b son constantes, $|a| \neq |b|$, son las aplicaciones de Gauss de las inmersiones x_{ab} de curvatura constante

$$K = -\frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

en \mathbb{R}^3 dadas por

$$\begin{aligned} x_{1\ ab}(u, v) &= \frac{2 e^{(a+b)(u+v)} \cos(a(u-v) + b(u+v))}{e^{2bu} + e^{2bv+2a(u+v)}} \\ x_{2\ ab}(u, v) &= \frac{2 e^{(a+b)(u+v)} \operatorname{sen}(a(u-v) + b(u+v))}{e^{2bu} + e^{2bv+2a(u+v)}} \\ x_{3\ ab}(u, v) &= (a^2 + b^2) \left(\frac{u}{a-b} + \frac{v}{a+b} \right) - \tanh(b(-u+v) + a(u+v)). \end{aligned}$$

La inmersión anterior representa a una pseudoesfera cuando a o b son cero y a una superficie de Dini en el resto de los casos.

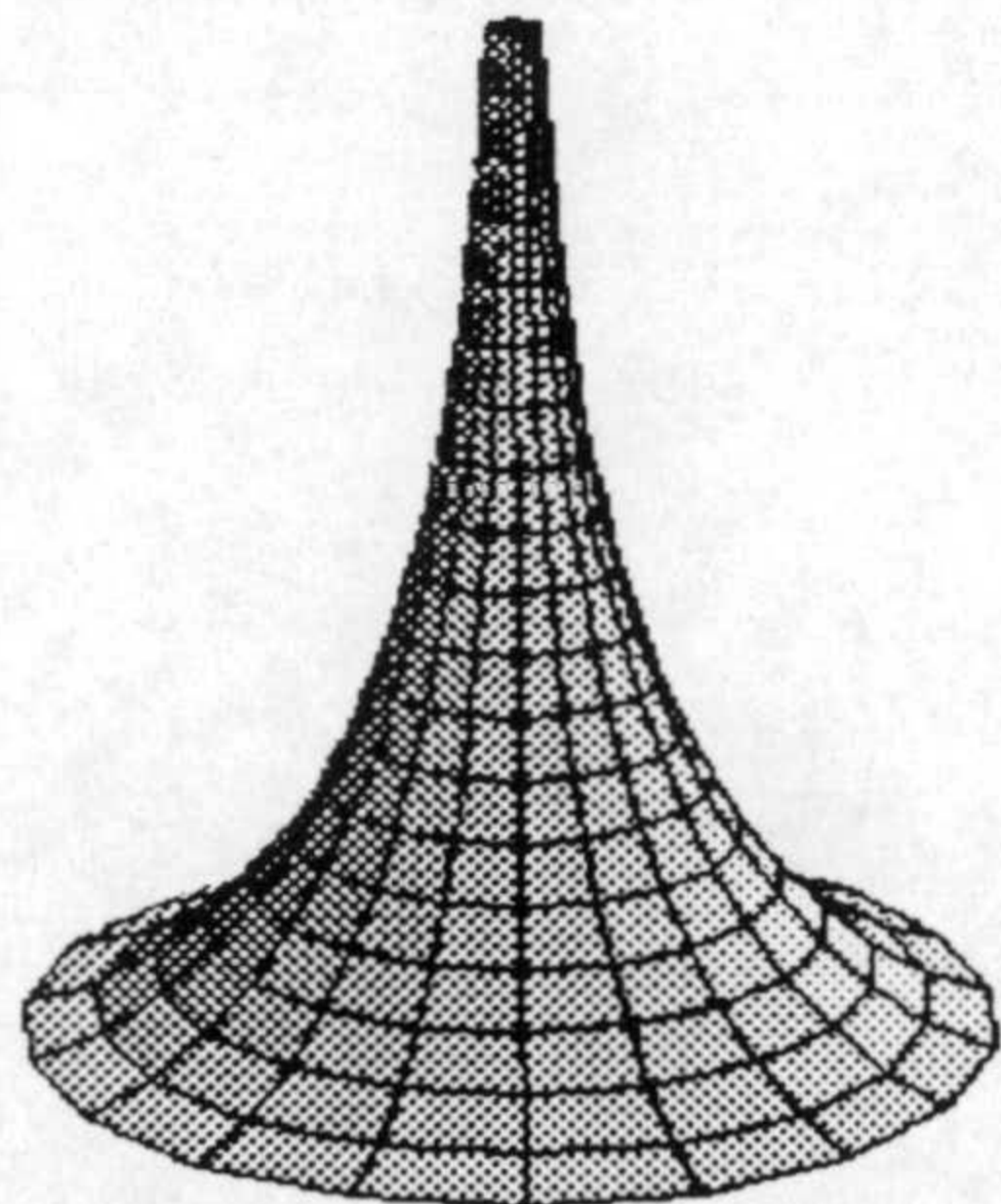


Figura 2.1: Pseudoesfera.

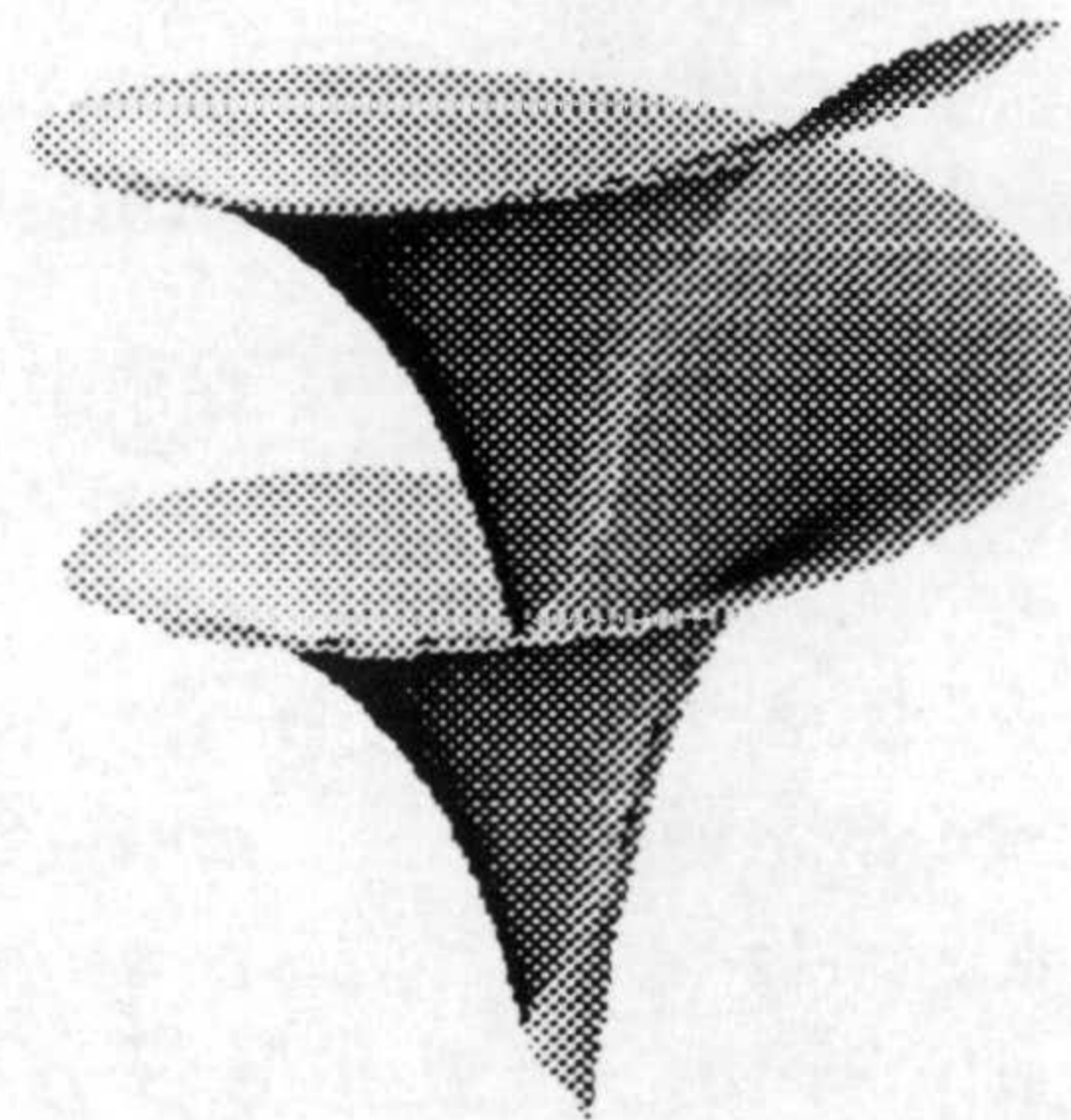


Figura 2.2: Superficie de Dini.

2.3 Unicidad de la inmersión.

El objetivo de esta sección es intentar comprender cuándo la aplicación de Gauss de una superficie inmersa en \mathbb{R}^3 y la estructura conforme dada por su segunda forma fundamental, que posiblemente sea degenerada, determinan de forma única la inmersión.

Corolario 2.3.1 Sean S una superficie orientada conexa, $\chi_j : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, $j=1,2$, dos inmersiones con la misma aplicación de Gauss y estructura conforme dada por la segunda forma fundamental. Si el conjunto de puntos donde N no es difeomorfismo local, S_0 , tiene interior vacío entonces las inmersiones coinciden, salvo una homotecia y traslación de \mathbb{R}^3 .

DEMOSTRACIÓN:

Sea \langle, \rangle_j la métrica inducida sobre S por la inmersión χ_j , esto es, $\langle, \rangle_j = \chi_j^*(\langle, \rangle)$, $j = 1, 2$. Ya que S_0 es un conjunto cerrado, si $q \notin S_0$ entonces de los teoremas 2.1.3 y 2.2.2 existe un entorno abierto simplemente conexo de q sobre el cual $\chi_1 = \mu(q)\chi_2 + b(q)$, donde $\mu(q) \neq 0$ y $b(q) \in \mathbb{R}^3$ son constantes.

Ya que el interior de S_0 es vacío y $\langle, \rangle_1(q) = \mu(q)^2 \langle, \rangle_2(q)$ para todo $q \in S - S_0$, la igualdad anterior es cierta en todo punto. Además, μ^2 es una función diferenciable tal que $d\mu^2 = 0$ sobre $S - S_0$. Por tanto, μ^2 es constante y μ es constante sobre cada componente conexa de $S - S_0$ e igual a r o $-r$, con $r \neq 0$.

Si $p \in S_0$ entonces existe un entorno U de p tal que μ es constante sobre $U \cap (S - S_0)$. En otro caso, existirían dos sucesiones de puntos p_m, p_n tendiendo a p con $(d\chi_1)_{p_m} = r(d\chi_2)_{p_m}$ y $(d\chi_1)_{p_n} = -r(d\chi_2)_{p_n}$. Pero obtendríamos, $r(d\chi_2)_p = (d\chi_1)_p = -r(d\chi_2)_p$. Por tanto, podemos suponer que $\mu = r$ sobre S y la demostración concluye de $d(\chi_1 - r\chi_2) = 0$. ■

Observación. Es importante tener en cuenta que si la hipótesis anterior sobre S_0 no se cumple entonces las dos inmersiones no tienen porqué estar relacionadas mediante una traslación y homotecia.

Por ejemplo, podemos considerar las inmersiones

$$\begin{aligned} \chi_1(u, v) &= (2 \cos u, \frac{1}{2} \operatorname{sen} u, v), \\ \chi_2(u, v) &= \left(\frac{\cos u}{2\sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 u + 4 \operatorname{sen}^2 u}}, \frac{2 \operatorname{sen} u}{\sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 u + 4 \operatorname{sen}^2 u}}, v \right), \end{aligned}$$

que tienen la misma aplicación de Gauss e igual estructura conforme, ya que

$$\sigma_1 = \frac{1}{32} \sqrt{2(17 - 15 \cos(2u))^3} \sigma_2.$$

Sin embargo, χ_1 y χ_2 son parametrizaciones de un cilindro elíptico y un cilindro circular, respectivamente. Por tanto, es claro que no existe una composición φ de homotecia con traslación tal que $\chi_1 = \varphi \circ \chi_2$.

Capítulo 3.

Superficies llanas en el espacio hiperbólico.

En este capítulo obtenemos una representación en términos de datos holomorfos de las superficies llanas en el espacio hiperbólico, consideradas éstas como superficies de Riemann para la estructura conforme determinada por su segunda forma fundamental.

Así, en la sección 3.1 identificaremos \mathbb{L}^4 con el conjunto de matrices hermíticas de orden dos por dos, $\mathbb{Herm}(2)$, y a los espacios hiperbólico y de de-Sitter con ciertos subconjuntos de matrices de $\mathbb{Herm}(2)$. Utilizaremos esta identificación de \mathbb{L}^4 en la sección 3.2 para conseguir la representación conforme de las superficies llanas en el espacio hiperbólico (que salvo dilataciones en \mathbb{L}^4 podemos suponer de curvatura seccional constante -1) y probaremos que la aplicación de Gauss hiperbólica es conforme para una inmersión con segunda forma fundamental definida si, y sólo si, ésta es llana o totalmente umbilical.

Usaremos la representación anterior en las secciones 3.3 y 3.4 para dar algunos ejemplos de superficies llanas en el espacio hiperbólico y, una vez demostrado que la aplicación de Gauss de una inmersión llana en el espacio hiperbólico es una inmersión llana en el espacio de de-Sitter, obtenemos una representación conforme para las superficies llanas riemannianas y lorentzianas en \mathbb{S}_1^3 .

3.1 Preliminares.

Sea \mathbb{L}^4 el espacio de Minkowski dotado de coordenadas lineales (x_0, x_1, x_2, x_3) y producto escalar \langle , \rangle dado por la forma cuadrática $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Entonces

identificamos \mathbb{L}^4 con el conjunto de matrices hermíticas de orden dos por dos, $\mathbb{Herm}(2)$, haciendo corresponder al punto (x_0, x_1, x_2, x_3) la matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^3 x_j e_j$$

donde

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bajo esta identificación uno tiene para cualquier matriz hermítica, $m \in \mathbb{Herm}(2)$, que $\langle m, m \rangle = -\det(m)$. Además, el grupo de Lie $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ formado por las matrices complejas de orden dos por dos con determinante uno actúa de forma natural sobre \mathbb{L}^4 mediante la representación

$$g \cdot m = g m g^*$$

donde $m \in \mathbb{Herm}(2)$, $g \in \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ y g^* denota la matriz traspuesta y conjugada de g .

En consecuencia, ya que $\det(gmg^*) = \det(m)$, el grupo conexo $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ conserva el producto escalar de \mathbb{L}^4 y su orientación. El núcleo de esta acción es $\{\pm I_2\} \subseteq \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ y, por tanto, $\mathbb{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathbb{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm I_2\}$ se puede ver como la componente de la identidad del grupo de isometrías de \mathbb{L}^4 .

Consideremos las dos hipercuádricas

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) / -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_0 > 0\}$$

$$\mathbb{S}_1^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) / -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

con la métrica inducida de \mathbb{L}^4 . Entonces \mathbb{H}^3 representa al espacio hiperbólico de dimensión tres con curvatura seccional constante -1 y \mathbb{S}_1^3 a la variedad lorentziana de dimensión tres con curvatura seccional constante 1 conocida como espacio de de-Sitter.

Por otro lado, sea \mathbb{N}^3 el cono de vectores luminosos con primera coordenada positiva, esto es,

$$\mathbb{N}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 / -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, x_0 > 0\}.$$

Si uno considera para cada $v \in \mathbb{N}^3$ la semirrecta $[v]$ generada por v , entonces obtenemos una partición de \mathbb{N}^3 y el borde ideal, \mathbb{S}_∞^2 , de \mathbb{H}^3 se puede ver como el cociente de \mathbb{N}^3 bajo la relación de equivalencia asociada. Así, la métrica inducida está bien definida salvo un factor de proporcionalidad, con lo que \mathbb{S}_∞^2 obtiene una estructura conforme

natural como el cociente $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+$.

La acción de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sobre \mathbb{L}^4 puede ser restringida a \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}_1^3 como una acción isométrica y transitiva. Así, \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}_1^3 también pueden ser representados como

$$\mathbb{H}^3 = \{g \cdot e_0 / g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\}$$

y

$$\mathbb{S}_1^3 = \{g \cdot e_j / g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Por su parte, \mathbb{N}^3 es interpretado como el espacio de matrices hermiticas semi-definidas positivas de orden dos por dos con determinante cero. Y sus elementos son escritos de la forma $a \bar{a}^t$, donde $a^t = (a_1, a_2)$ es un vector no nulo en \mathbb{C}^2 determinado de manera única, salvo multiplicación por un número complejo de módulo uno.

Entonces, la aplicación $a \bar{a}^t \rightarrow [(a_1, a_2)] \in \mathbb{CP}^1$ se convierte en la aplicación cociente de \mathbb{N}^3 sobre \mathbb{S}_∞^2 e identifica \mathbb{S}_∞^2 con \mathbb{CP}^1 . Así, la acción natural de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sobre \mathbb{S}_∞^2 es la de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sobre \mathbb{CP}^1 por transformaciones de Möbius.

3.2 Representación conforme de las superficies llanas en el espacio hiperbólico.

Sean S una superficie simplemente conexa y $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3 \subseteq \mathbb{L}^4$ una inmersión en el espacio hiperbólico con métrica inducida llana. Entonces, existe una inmersión coordenada isoterma $x + iy : S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (3.1)$$

Si consideramos η campo de vectores normal unitario a la inmersión, las ecuaciones de estructura pueden expresarse como

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= E\eta + \psi, \\ \psi_{xy} &= F\eta, \\ \psi_{yy} &= G\eta + \psi, \\ \eta_x &= -E\psi_x - F\psi_y, \\ \eta_y &= -F\psi_x - G\psi_y, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde E , F y G son funciones diferenciables sobre la superficie.

De las ecuaciones de Gauss y Mainardi-Codazzi obtenemos que $EG - F^2 = 1$, $E_y = F_x$ y $F_y = G_x$. Por tanto, ya que S es una superficie simplemente conexa,

existe una función bien definida $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E = \phi_{xx}$, $F = \phi_{xy}$, $G = \phi_{yy}$. En consecuencia, la segunda forma fundamental de la inmersión puede expresarse como

$$d\sigma^2 = \phi_{xx}dx^2 + \phi_{yy}dy^2 + 2\phi_{xy}dx dy, \quad (3.3)$$

con

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 1. \quad (3.4)$$

Si consideramos las funciones

$$u = x + \phi_x, \quad v = y + \phi_y, \quad (3.5)$$

entonces el jacobiano de la transformación $(x, y) \rightarrow (u, v)$ viene dado por

$$1 + \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2. \quad (3.6)$$

Y eligiendo η normal unitario a la inmersión tal que σ es definida positiva, de (3.4) y (3.6) obtenemos que (u, v) son unos nuevos parámetros y

$$\psi_u = \frac{1 + \phi_{yy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\psi_x - \frac{\phi_{xy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\psi_y, \quad (3.7)$$

$$\psi_v = \frac{-\phi_{xy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\psi_x + \frac{1 + \phi_{xx}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\psi_y.$$

Por tanto, si llamamos $z = u + iv$, de (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) y (3.7),

$$d\sigma^2 = \frac{1}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}|dz|^2 \quad (3.8)$$

y

$$(\psi - \eta)_u = \psi_x, \quad (\psi - \eta)_v = \psi_y. \quad (3.9)$$

Esto es, $z : S \rightarrow \mathbb{C}$ es una inmersión coordenada conforme para la estructura de superficie de Riemann sobre S dada por la segunda forma fundamental y $[\psi - \eta] : S \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$ es una aplicación holomorfa.

Además, de (3.2), (3.7) y (3.9) se deduce

$$\begin{aligned} (\psi - \eta)_{uu} &= \frac{1 + \phi_{yy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\psi + \frac{1 + \phi_{xx}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\eta, \\ (\psi - \eta)_{vv} &= \frac{1 + \phi_{xx}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\psi + \frac{1 + \phi_{yy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\eta, \end{aligned}$$

esto es, $4(\psi - \eta)_{z\bar{z}} = \psi + \eta$. Por lo que la inmersión ψ puede ser recuperada a partir de la aplicación $\psi - \eta$ como

$$\psi = \frac{1}{2}(\psi - \eta) + 2(\psi - \eta)_{z\bar{z}}. \quad (3.10)$$

Sean ahora $A, B : S \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas globales sobre S tales que $[\psi - \eta] : S \rightarrow \mathbb{S}_{\infty}^2 \equiv \mathbb{CP}^1$, queda representada como $[(A, B)]$, entonces

$$\psi - \eta = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} (\bar{A}, \bar{B}) = \lambda \begin{pmatrix} A\bar{A} & A\bar{B} \\ \bar{A}B & B\bar{B} \end{pmatrix},$$

para alguna función real positiva $\lambda \in C^{\infty}(S)$. Así, de (3.1), (3.5) y (3.9) se tiene

$$\frac{1}{2} = \langle (\psi - \eta)_z, (\psi - \eta)_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2} \lambda^2 |AB_z - BA_z|^2.$$

Y como $AB_z - BA_z$ no se anula sobre S , existe una función holomorfa $R : S \rightarrow \mathbb{C}$ con $R^2 = AB_z - BA_z$.

Por tanto, podemos escribir

$$\psi - \eta = 2 \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{D} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

donde $C = A/(\sqrt{2}R)$ y $D = B/(\sqrt{2}R)$.

En consecuencia, de (3.10) y (3.11) tenemos la siguiente expresión para la inmersión

$$\psi = \begin{pmatrix} C\bar{C} + 4C_z\bar{C}_z & C\bar{D} + 4C_z\bar{D}_z \\ \bar{C}D + 4\bar{C}_zD_z & D\bar{D} + 4D_z\bar{D}_z \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

y para su normal unitario

$$\eta = \begin{pmatrix} -C\bar{C} + 4C_z\bar{C}_z & -C\bar{D} + 4C_z\bar{D}_z \\ -\bar{C}D + 4\bar{C}_zD_z & -D\bar{D} + 4D_z\bar{D}_z \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Si consideramos la función $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f = \frac{\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2i\phi_{xy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}, \quad (3.14)$$

de (3.2), (3.7) y (3.9), obtenemos $(\psi + \eta)_z = f(\psi - \eta)_{\bar{z}}$, esto es,

$$4 \begin{pmatrix} C_{zz}\bar{C}_z & C_{zz}\bar{D}_z \\ \bar{C}_zD_{zz} & D_{zz}\bar{D}_z \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} C\bar{C}_z & C\bar{D}_z \\ \bar{C}_zD & D\bar{D}_z \end{pmatrix}.$$

Como C_z y D_z no pueden anularse simultáneamente se verifica

$$C_{zz} = \frac{1}{4}fC, \quad D_{zz} = \frac{1}{4}fD. \quad (3.15)$$

Así, f es una función holomorfa y de (3.4), (3.14) se tiene que

$$|f| < 1. \quad (3.16)$$

Finalmente, de (3.12) y (3.15), la inmersión ψ se puede recuperar como $\psi = gg^*$, donde $g : S \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$ es una inmersión holomorfa dada por

$$g = \begin{pmatrix} C & 2C_z \\ D & 2D_z \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

tal que

$$g^{-1}dg = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dz. \quad (3.18)$$

Además, usando (3.1), (3.3), (3.8), (3.14) y (3.18), la métrica inducida y la segunda forma fundamental pueden ser escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{4} \left(f dz^2 + (1 + |f|^2) |dz|^2 + \bar{f} d\bar{z}^2 \right), \\ d\sigma^2 &= \frac{1}{4} (1 - |f|^2) |dz|^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por otra parte, si $\tilde{g} : S \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$ es una inmersión holomorfa con $\psi = \tilde{g}\tilde{g}^*$, entonces existe una aplicación holomorfa $g_0 : S \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{U}(2) \subseteq \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$ tal que $g = \tilde{g}g_0$, donde $\mathbb{S}\mathbb{U}(2) = \{m \in \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C}) / mm^* = I_2\}$. Así, $(g_0)_z = 0$ y g_0 es una matriz constante.

Con todo lo anterior obtenemos

Teorema 3.2.1 (Representación conforme)

(I) Sean S una superficie simplemente conexa y $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión llana. Si sobre S consideramos la estructura conforme determinada por la segunda forma fundamental de ψ , entonces existe una inmersión holomorfa $g : S \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$ y un par (f, ω) formado por una función holomorfa f y una 1-forma holomorfa ω sobre S tal que:

- $|f| < 1$ y $\omega \neq 0$ en todo punto,
-

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega, \quad (3.20)$$

- la inmersión puede ser recuperada como $\psi = gg^*$,
- la métrica inducida y la segunda forma fundamental de la inmersión vienen dadas por

$$\begin{aligned} ds^2 &= f\omega^2 + (1 + |f|^2) |\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2, \\ d\sigma^2 &= (1 - |f|^2) |\omega|^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Además, g es única salvo multiplicación a la derecha por una matriz constante $g_0 \in \text{SU}(2)$.

(II) Recíprocamente, sean S una superficie de Riemann y $g : S \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ una inmersión holomorfa tal que

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

con $|\alpha_1| < |\alpha_2|$. Entonces la aplicación $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ dada por $\psi = gg^*$ es una inmersión llana con métrica inducida y segunda forma fundamental dadas por (3.21), donde $f = \alpha_1/\alpha_2$ y $\omega = \alpha_2$.

DEMOSTRACIÓN:

(I) es claro de (3.12), (3.16), (3.17), (3.18) y (3.19), tomando $\omega = 1/2 dz$.

Recíprocamente, sean $g : S \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ una inmersión holomorfa y $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ la aplicación dada por $\psi = gg^*$. De (3.22)

$$d\psi = g \begin{pmatrix} 0 & f\omega + \bar{\omega} \\ \omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} g^*, \quad (3.23)$$

donde $f = \alpha_1/\alpha_2$ tiene módulo menor que uno y $\omega = \alpha_2$.

Como f es una función holomorfa

$$d \left(\frac{1}{2}(1+f)\omega + \frac{1}{2}(1+\bar{f})\bar{\omega} \right) = 0, \quad d \left(\frac{i}{2}(1-f)\omega - \frac{i}{2}(1-\bar{f})\bar{\omega} \right) = 0$$

y, por tanto, existen localmente funciones reales bien definidas x, y tales que

$$dx = \frac{1}{2}(1+f)\omega + \frac{1}{2}(1+\bar{f})\bar{\omega}, \quad dy = \frac{i}{2}(1-f)\omega - \frac{i}{2}(1-\bar{f})\bar{\omega}.$$

con

$$dx \wedge dy = \frac{-i}{2} (1 - |f|^2) \omega \wedge \bar{\omega}.$$

Como $|f| < 1$, tenemos que (x, y) son nuevas coordenadas. Y, de (3.23), la métrica inducida viene dada por

$$ds^2 = \langle d\psi, d\psi \rangle = -\det(d\psi) = f\omega^2 + (1 + |f|^2)|\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 = dx^2 + dy^2,$$

esto es, ψ es una inmersión llana.

Por otro lado, de (3.23) se deduce que un normal a la inmersión es $\eta = -ge_3g^*$ y

$$d\eta = -g \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} - f\omega \\ \omega - \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} g^*. \quad (3.24)$$

Así, se concluye que la segunda forma fundamental queda

$$d\sigma^2 = \langle d\psi, -d\eta \rangle = (1 - |f|^2)|\omega|^2. \quad \blacksquare$$

El par (f, ω) en el teorema anterior será llamado **datos de Weierstrass** asociados a la representación conforme de la inmersión llana.

Si consideramos los datos de Weierstrass (f, ω) y la inmersión holomorfa g escritos en un parámetro complejo arbitrario ζ como $(f(\zeta), h(\zeta)d\zeta)$ y

$$g = \begin{pmatrix} C & E \\ D & F \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

entonces, de (3.15), (3.17) y (3.20), uno tiene que

$$\frac{d}{d\zeta} \begin{pmatrix} C & E \\ D & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & E \\ D & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & fh \\ h & 0 \end{pmatrix},$$

por tanto,

$$E = \frac{1}{h}C_\zeta, \quad F = \frac{1}{h}D_\zeta \quad (3.26)$$

y C, D son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal ordinaria

$$X_{\zeta\zeta} - \frac{h_\zeta}{h}X_\zeta - fh^2X = 0. \quad (3.27)$$

Recíprocamente, si C y D son soluciones de (3.27) entonces $\frac{1}{h}(CD_\zeta - DC_\zeta)$ es constante. De esta manera, podemos tomar C, D soluciones (linealmente independientes) de (3.27) tal que

$$g = \begin{pmatrix} C & \frac{1}{h}C_\zeta \\ D & \frac{1}{h}D_\zeta \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \quad (3.28)$$

y $\psi = gg^*$ determina la inmersión llana

$$\psi = \begin{pmatrix} C\bar{C} + \frac{1}{|h|^2}C_\zeta\bar{C}_\zeta & C\bar{D} + \frac{1}{|h|^2}C_\zeta\bar{D}_\zeta \\ \bar{C}D + \frac{1}{|h|^2}\bar{C}_\zeta D_\zeta & D\bar{D} + \frac{1}{|h|^2}D_\zeta\bar{D}_\zeta \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

con normal unitario

$$\eta = \begin{pmatrix} -C\bar{C} + \frac{1}{|h|^2}C_\zeta\bar{C}_\zeta & -C\bar{D} + \frac{1}{|h|^2}C_\zeta\bar{D}_\zeta \\ -\bar{C}D + \frac{1}{|h|^2}\bar{C}_\zeta D_\zeta & -D\bar{D} + \frac{1}{|h|^2}D_\zeta\bar{D}_\zeta \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

y datos de Weierstrass $(f, h d\zeta)$.

Además, si A y B son otras soluciones de (3.27) en las condiciones anteriores entonces

$$\begin{aligned} A &= m_{11}C + m_{12}D \\ B &= m_{21}C + m_{22}D \end{aligned}$$

con $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$. Y la inmersión llana asociada a A y B viene dada por $m\psi m^*$, donde $m = (m_{ij})$, esto es, coincide con ψ salvo una isometría de \mathbb{H}^3 .

Por otro lado, si S es una superficie de Riemann simplemente conexa y (f, ω) un par, formado por una función holomorfa de módulo menor que uno y una 1-forma holomorfa que no se anula en ningún punto, entonces (f, ω) son los datos de Weierstrass de alguna inmersión llana en \mathbb{H}^3 , determinada por (3.25), (3.26) y (3.27).

Lema 3.2.1 Sean (f, ω) datos de Weierstrass de una inmersión llana en el espacio hiperbólico, entonces, para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, el par $(e^{2i\theta}f, e^{-i\theta}\omega)$ son datos de Weierstrass de la misma inmersión.

Recíprocamente, si $(f_1, \omega_1), (f_2, \omega_2)$ son datos de Weierstrass de una misma inmersión llana, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f_1 = e^{2i\theta}f_2$ y $\omega_1 = e^{-i\theta}\omega_2$.

DEMOSTRACIÓN:

La primera afirmación del lema es clara ya que tanto (f, ω) como $(e^{2i\theta}f, e^{-i\theta}\omega)$ dan lugar a la misma ecuación diferencial, (3.27), y como $|\omega| = |e^{-i\theta}\omega|$, de (3.29), se obtiene la misma inmersión.

Recíprocamente, sean $(f_1, \omega_1), (f_2, \omega_2)$ datos de Weierstrass de una misma inmersión llana y g_1, g_2 inmersiones holomorfas en $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ asociadas a (f_1, ω_1) y (f_2, ω_2) ,

respectivamente, tales que $g_1 g_1^* = g_2 g_2^*$.

Del teorema de representación conforme obtenemos que $g_1 = g_2 g_0$, donde g_0 es una matriz constante en $SU(2)$, esto es,

$$g_0 = \begin{pmatrix} p & -q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix}$$

con $|p|^2 + |q|^2 = 1$. Por tanto, (3.20) nos da

$$\begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega_1 = g_0^{-1} \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega_2 g_0 = \begin{pmatrix} pq + \bar{p}\bar{q}f_2 & -q^2 + \bar{p}^2 f_2 \\ p^2 - \bar{q}^2 f_2 & -pq - \bar{p}\bar{q}f_2 \end{pmatrix} \omega_2.$$

Como $pq + \bar{p}\bar{q}f_2 = 0$ y $|f_2| < 1$, se obtiene que $pq = 0$, por lo que p o q es cero. Si p valiese cero,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\bar{q}^2 f_2 \omega_2, \\ f_1 \omega_1 &= -q^2 \omega_2 \end{aligned}$$

y tendríamos que $f_1 f_2 \bar{q}^2 = q^2$. Pero ya que $|f_1 f_2| < 1$ la igualdad no es posible, por lo que q ha de ser cero y $|p|^2 = 1$.

Así, si escribimos $p = e^{-i\theta/2}$ se deduce que $f_1 = e^{2i\theta} f_2$ y $\omega_1 = e^{-i\theta} \omega_2$. ■

Veamos ahora bajo qué condiciones la aplicación, $[\psi - \eta] : S \rightarrow S_\infty^2$, es conforme para la segunda forma fundamental. Más concretamente

Teorema 3.2.2 Sean S una superficie y $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión con segunda forma fundamental definida. Si consideramos sobre S la estructura conforme inducida por σ y tomamos η campo de vectores normal unitario a lo largo de S , entonces $[\psi - \eta] : S \rightarrow S_\infty^2$ es conforme si, y sólo si, la inmersión ψ es llana o totalmente umbilical.

DEMOSTRACIÓN:

Sean k_1, k_2 las curvaturas principales de la inmersión y $\{E_1, E_2\}$ una base ortonormal diferenciable para la métrica inducida en un entorno de p que diagonaliza a σ en este punto, esto es,

$$\sigma(E_i(p), E_j(p)) = k_i \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Entonces $[\psi - \eta]$ es una aplicación conforme si y sólo si

$$\frac{(1 - k_1)^2}{k_1} = \frac{(1 - k_2)^2}{k_2}$$

en todo punto de S , o equivalentemente

$$(k_2 - k_1)(1 - k_1 k_2) = 0.$$

Sea $K = k_1 k_2$ la curvatura de Gauss-Kronecker (o curvatura extrínseca) de S , entonces el conjunto de puntos donde la inmersión no es llana, $S' = \{p \in S / K(p) \neq 1\}$, es abierto en S y $\psi|_{S'}$ es totalmente umbilical.

Así, K es constante sobre cada componente conexa de S' y, por tanto, de su clausura. Con lo que, ψ es llana o totalmente umbilical. ■

Definición. Las aplicaciones $G^+ = [\psi + \eta]$ y $G^- = [\psi - \eta]$ serán llamadas **aplicaciones de Gauss hiperbólicas** de la inmersión $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ con normal unitario η .

Para ver su interpretación geométrica tomamos para cada punto $p \in S$ el plano vectorial de \mathbb{L}^4 generado por los vectores $\psi(p)$, $\eta(p)$. Este plano corta al cono de luz \mathbb{N}^3 en dos semirrectas vectoriales generadas por $\psi(p) + \eta(p)$ y $\psi(p) - \eta(p)$, respectivamente. Y la intersección de este plano con \mathbb{H}^3 es la geodésica del espacio hiperbólico que parte de $\psi(p)$ en la dirección de $\eta(p)$. Así, $G^+(p)$ y $G^-(p)$ se pueden interpretar como la intersección de la geodésica orientada normal a la superficie, que parte de $\psi(p)$, con el borde ideal \mathbb{S}_∞^2 . Su interpretación geométrica en el modelo conforme de la bola viene dado por la siguiente figura:

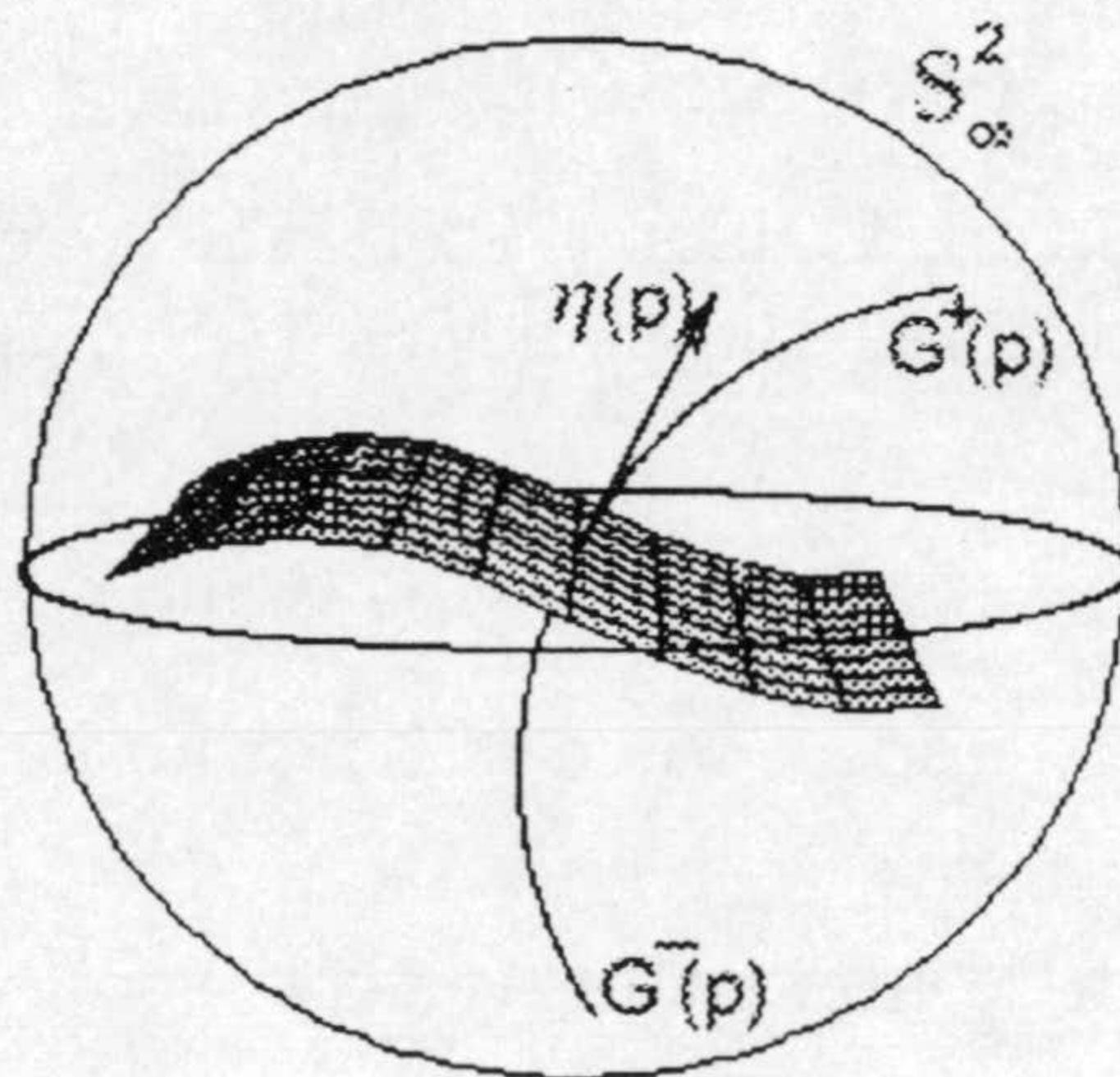


Figura 3.1: Aplicación de Gauss hiperbólica.

Además, si $\psi : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una inmersión llana, dada por (3.29), entonces usando (3.30) las aplicaciones $G^+, G^- : S \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pueden escribirse como

$$G^- = \frac{C}{D}, \quad G^+ = \frac{dC}{dD}. \quad (3.31)$$

3.3 Ejemplos de superficies llanas.

3.3.1 Superficies Paralelas.

Consideremos una superficie simplemente conexa S y una inmersión llana $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$. Entonces existe una inmersión coordenada conforme ζ sobre S y datos de Weierstrass $(f, h d\zeta)$ tal que $\psi = gg^*$ con g determinada por (3.27) y (3.28).

Si tomamos

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{-t/2}C & \frac{1}{h}e^{t/2}C\zeta \\ e^{-t/2}D & \frac{1}{h}e^{t/2}D\zeta \end{pmatrix},$$

para $t \in \mathbb{R}$ tal que $e^{2t}|f| < 1$, entonces

$$g_t^{-1} dg_t = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t}f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-t}h d\zeta$$

y $\psi_t = g_t g_t^* = \cosh(t)\psi + \sinh(t)\eta$ es una inmersión llana paralela a ψ a distancia $|t|$, con datos de Weierstrass $(e^{2t}f, e^{-t}h d\zeta)$.

3.3.2 Superficies de Revolución.

Si consideramos el modelo de \mathbb{H}^3 dado por el semiespacio superior de \mathbb{R}^3 , cualquier superficie de revolución alrededor de la geodésica $\{(0, 0, x_3) / x_3 > 0\}$ puede ser parametrizada de la forma

$$\psi(r, \theta) = (y_1(r)\cos(\theta), y_1(r)\sin(\theta), y_3(r)) \quad (3.32)$$

con $y_1(r), y_3(r) > 0$, donde elegimos r como la longitud de arco de la curva generatriz $(y_1(r), 0, y_3(r))$.

La curvatura de Gauss de la inmersión, ver [11], [56], viene entonces dada por

$$K_G = -\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{y_1(r)}{y_3(r)} \right) \frac{y_3(r)}{y_1(r)}.$$

Por tanto, ψ es una inmersión llana si, y sólo si, $y_1(r) = (ar + b)y_3(r)$, con a y b no ambos nulos.

Distinguimos dos casos:

- (i) Si $a = 0$, se puede comprobar que el parámetro $r + ib\theta$ es isotermo para la métrica inducida por la inmersión. Y de (3.2), (3.5)

$$z = \left(1 + \sqrt{\frac{b^2}{1+b^2}}\right) r + i \left(1 + \sqrt{\frac{1+b^2}{b^2}}\right) b\theta$$

es una inmersión coordinada conforme para la estructura de superficie de Riemann inducida por la segunda forma fundamental.

Tomemos el nuevo parámetro $\zeta = e^{z/k}$, con $k = \sqrt{2b^2 + 1}$, entonces de (3.14) los datos de Weierstrass asociados a la inmersión son

$$f(\zeta) = \frac{1}{k^2}, \quad \omega = \frac{1}{2} dz = \frac{k}{2\zeta} d\zeta.$$

con $\zeta \in \mathbb{C} - \{0\}$. Usando (3.27), (3.28), se tiene

$$g(\zeta) = \frac{i\sqrt{k}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^{1/2} & \frac{1}{k}\zeta^{1/2} \\ \zeta^{-1/2} & -\frac{1}{k}\zeta^{-1/2} \end{pmatrix}$$

y la superficie llana de revolución es la superficie equidistante a la geodésica anterior a distancia $\frac{1}{2} \log \left(\frac{k^2+1}{(k-1)^2}\right)$, (ver figura 3.2), que está dada, salvo isometrías, por la inmersión

$$\psi_{0,k}(\zeta) = \left(\frac{(k^2 - 1)\zeta}{(k^2 + 1)|\zeta|^2}, \frac{2k}{(k^2 + 1)|\zeta|} \right). \quad (3.33)$$

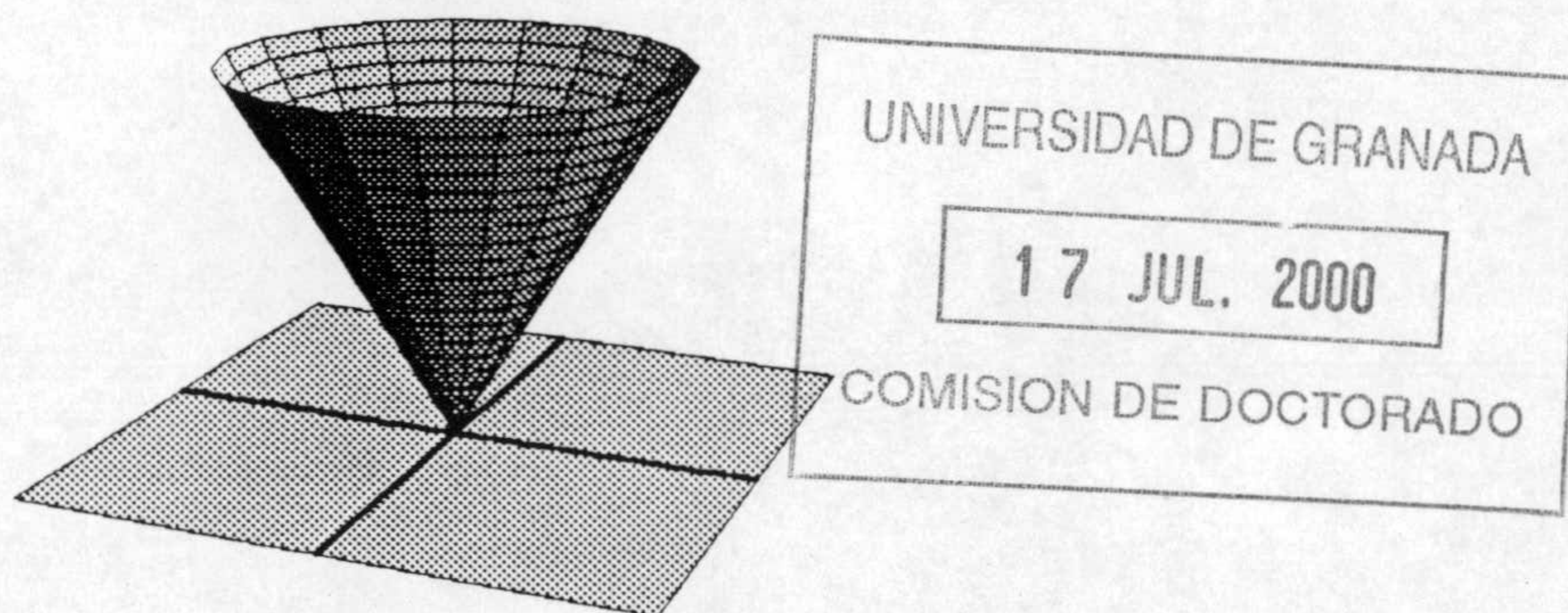


Figura 3.2: $a=0$.

- (ii) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{a}(ar + b)e^{ia\theta}$ es un parámetro isotermo unitario para la métrica inducida por ψ . Por tanto, de (3.2) y (3.5)

$$z = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1 - a^2}{(ar + b)^2}}\right) \frac{1}{a}(ar + b)e^{ia\theta}$$

es un parámetro conforme. Así, si tomamos el nuevo parámetro local ζ determinado por $\zeta^a = az$, los datos de Weierstrass asociados a la inmersión son

$$f(\zeta) = \frac{1 - a^2}{\zeta^{2a}}, \quad \omega = \frac{1}{2}\zeta^{a-1}d\zeta,$$

para $\zeta \in \mathbb{C}^*$ tal que $|f(\zeta)| < 1$.

De esta manera usando (3.27) y (3.28), obtenemos

$$g(\zeta) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^{(a+1)/2} & (a+1)\zeta^{(1-a)/2} \\ \zeta^{(a-1)/2} & (a-1)\zeta^{-(1+a)/2} \end{pmatrix}$$

y la superficie llana de revolución, salvo isometrías, es parametrizada de forma explícita por

$$\psi_a(\zeta) = \left(\frac{\zeta(|\zeta|^{a-1} + (a^2 - 1)|\zeta|^{-(a+1)})}{|\zeta|^{a+1} + (a+1)^2|\zeta|^{1-a}}, \frac{2}{|\zeta|^{a+1} + (a+1)^2|\zeta|^{1-a}} \right). \quad (3.34)$$

Observemos que las superficies parametrizadas por ψ_a, ψ_{-a} son isométricas mediante la reflexión sobre el plano geodésico $\{(x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$ dada por

$$I(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}(x_1, x_2, x_3).$$

En ese sentido, uno tiene una horosfera cuando $a = \pm 1$,

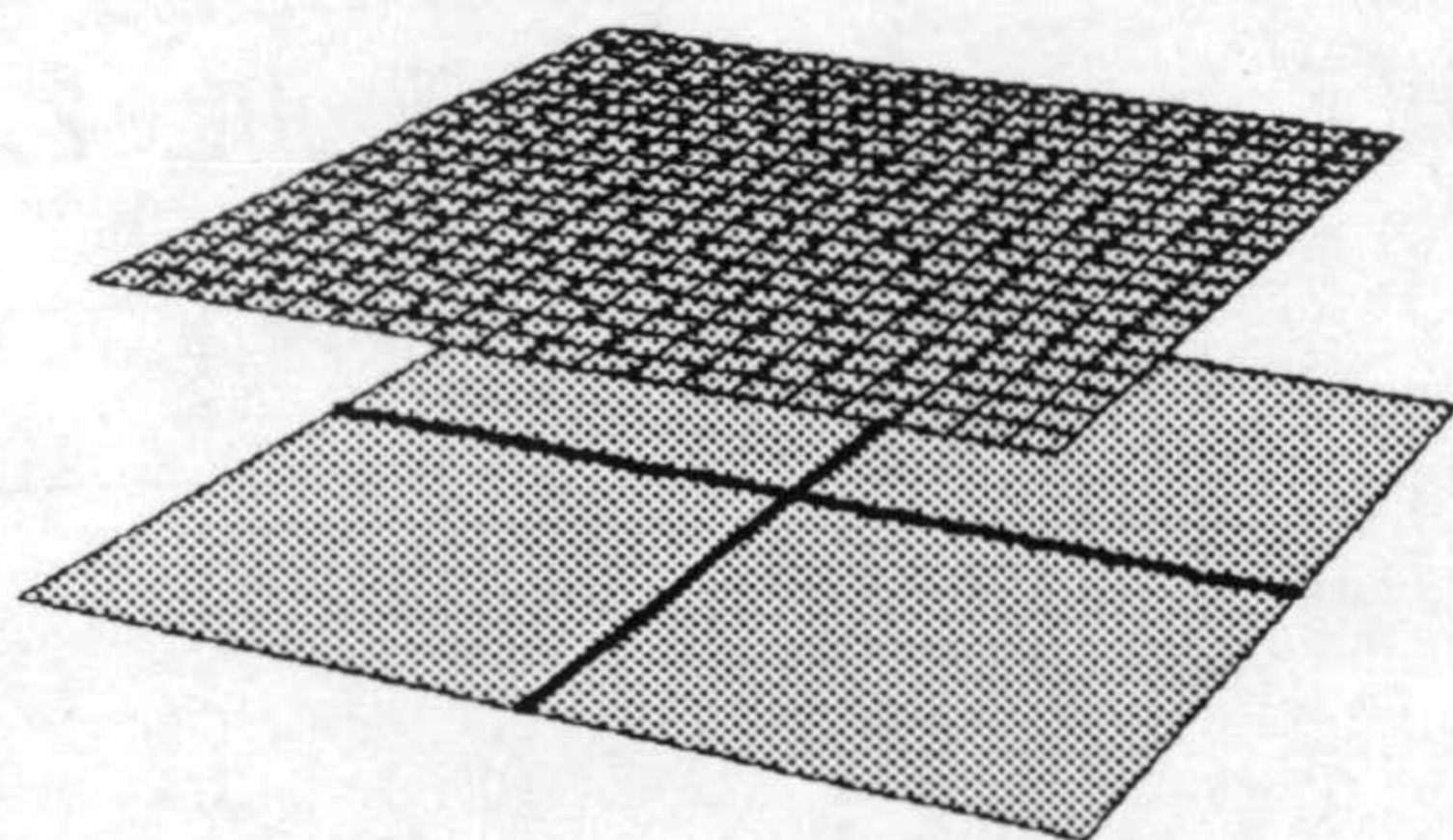


Figura 3.3: $a = -1$.

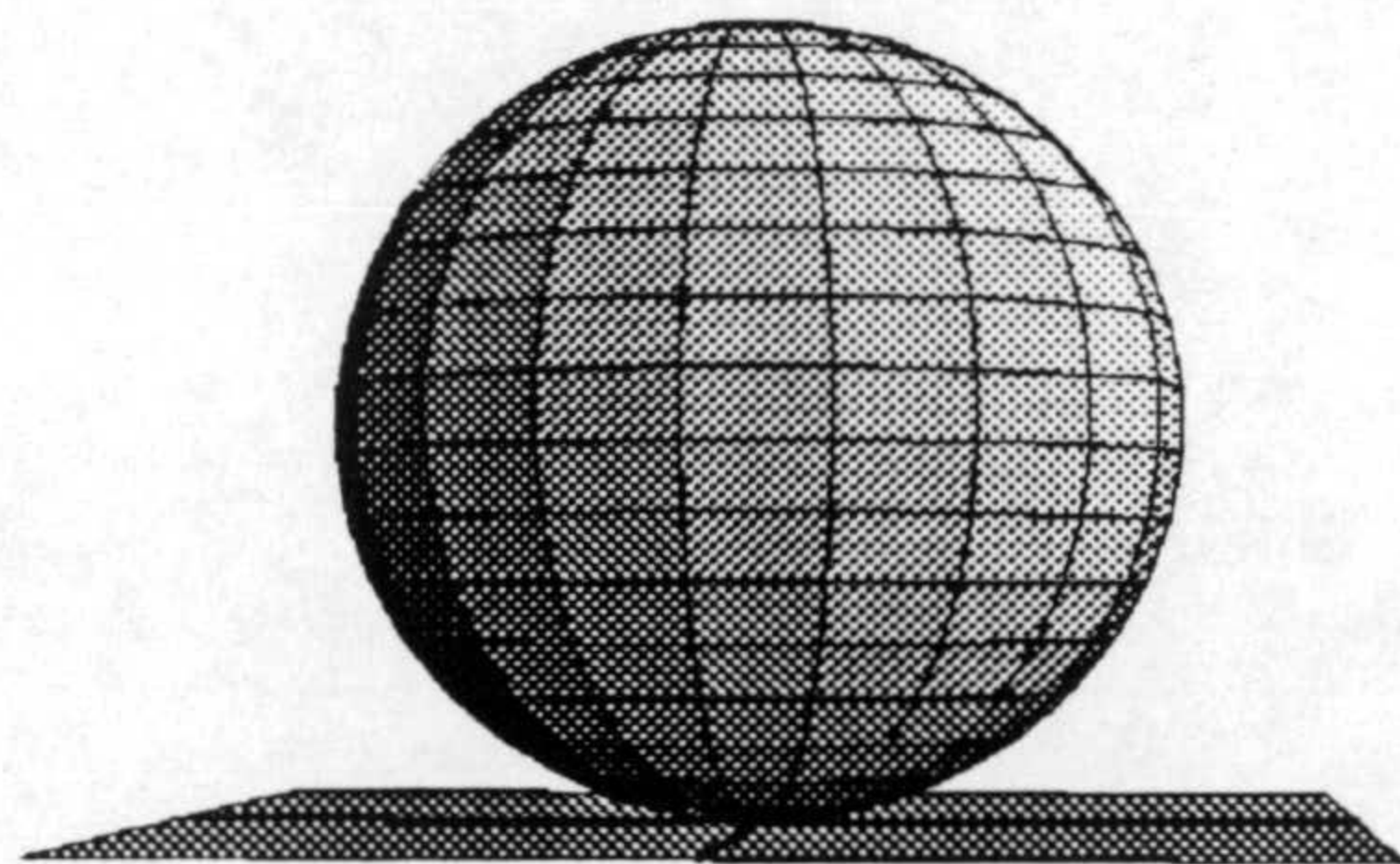


Figura 3.4: $a = 1$.

y superficies llanas no completas cuando $a \neq \pm 1$.

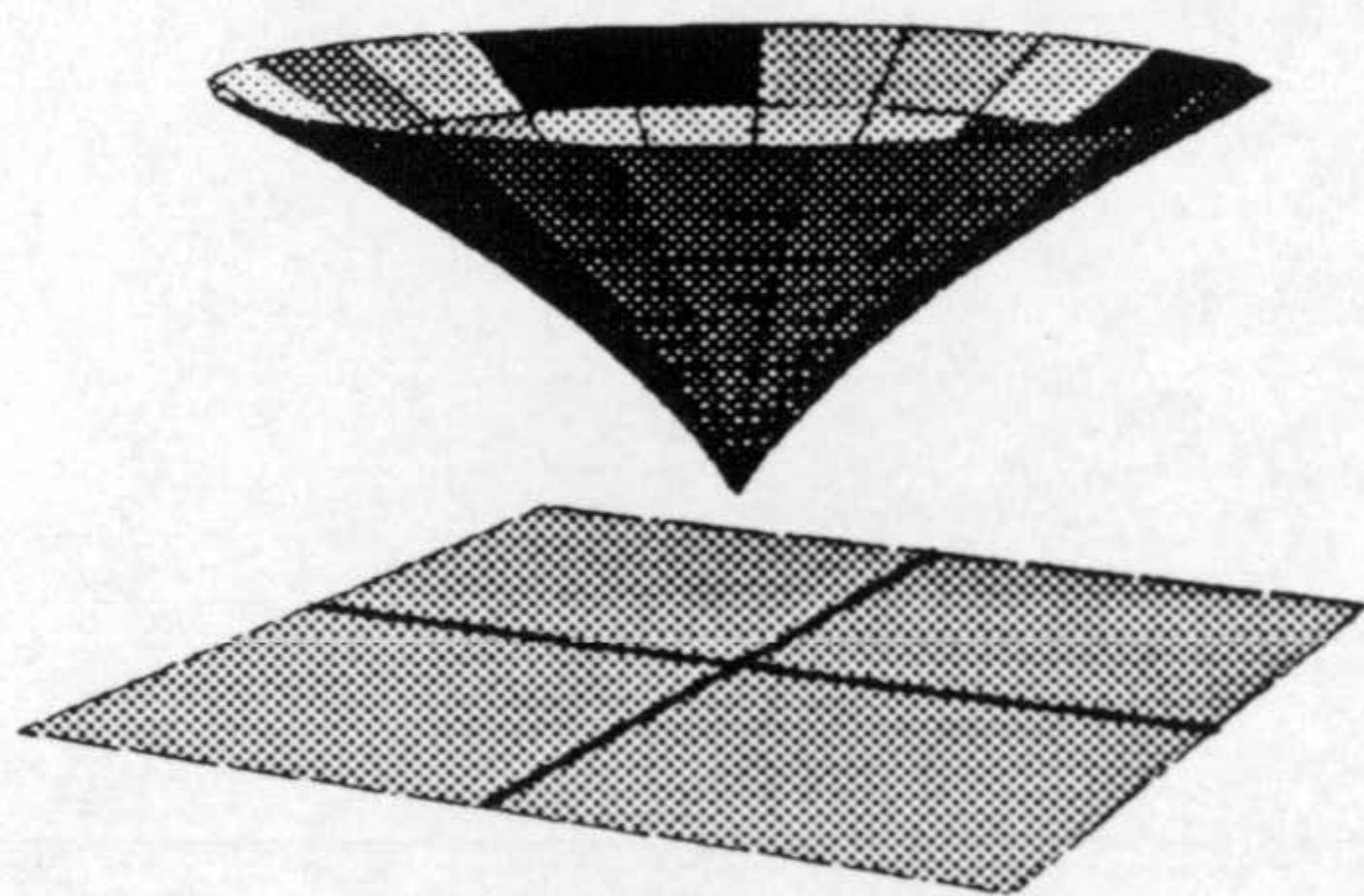


Figura 3.5: $-1 < a < 0$.

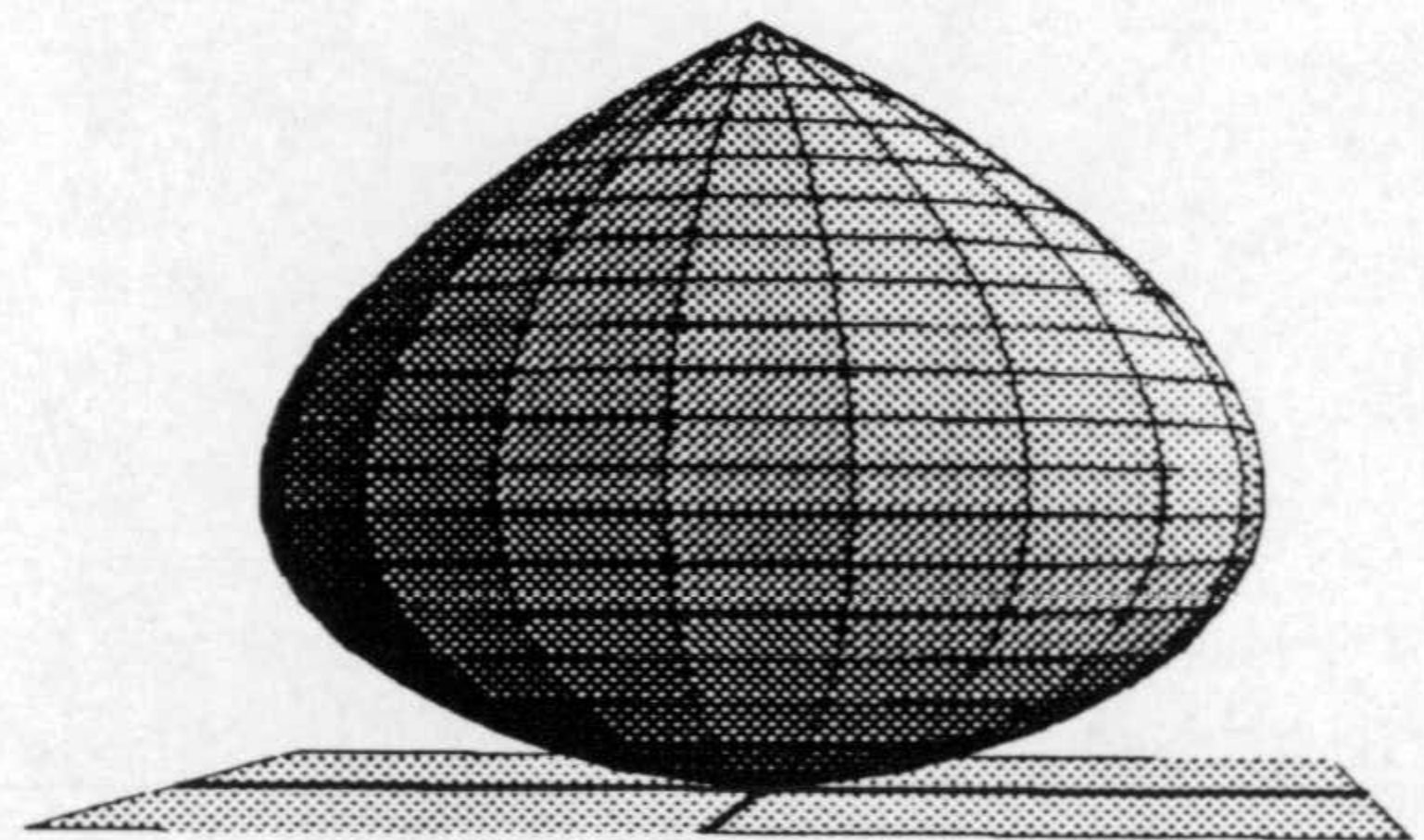


Figura 3.6: $0 < a < 1$.

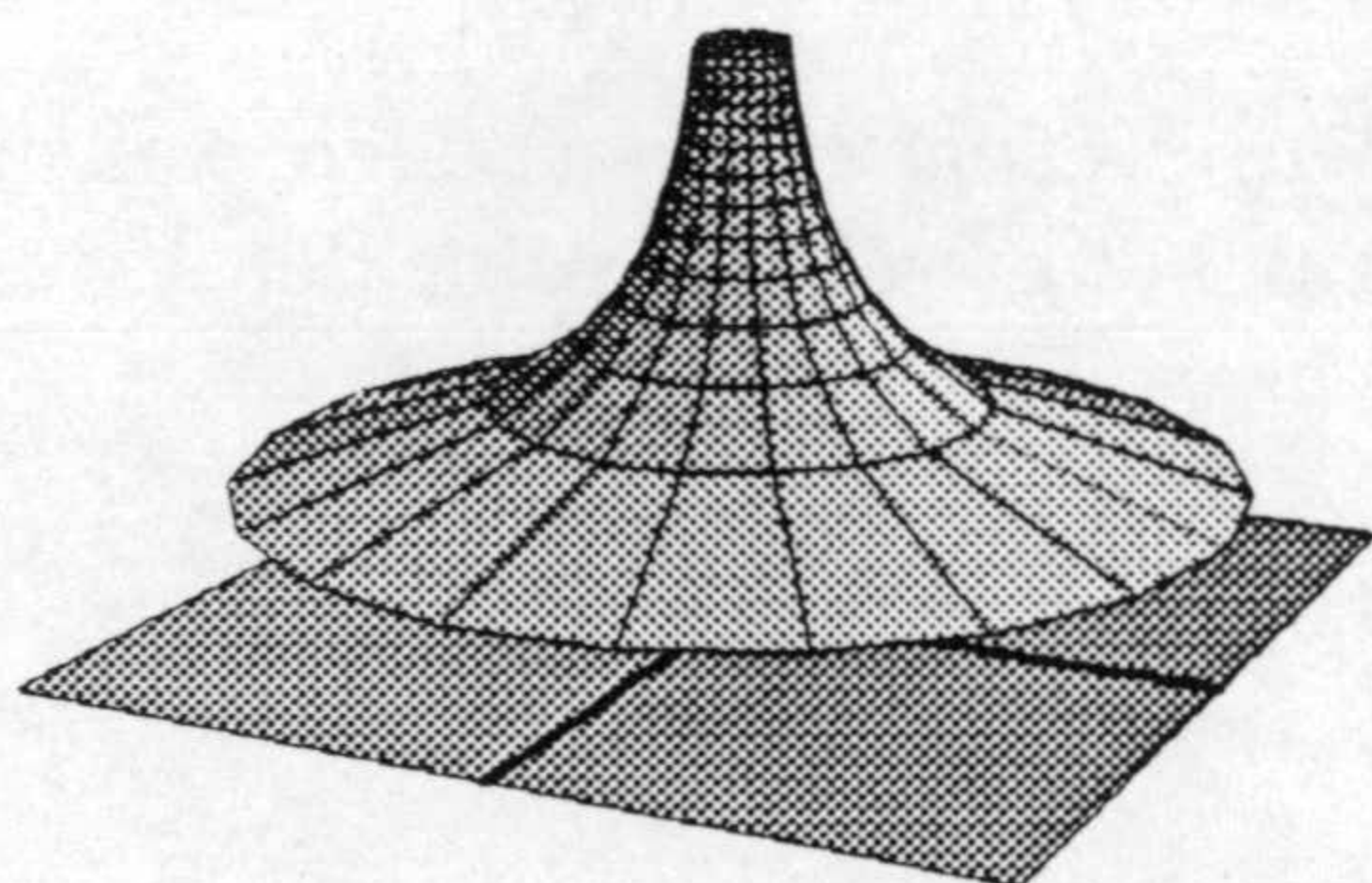


Figura 3.7: $a < -1$.

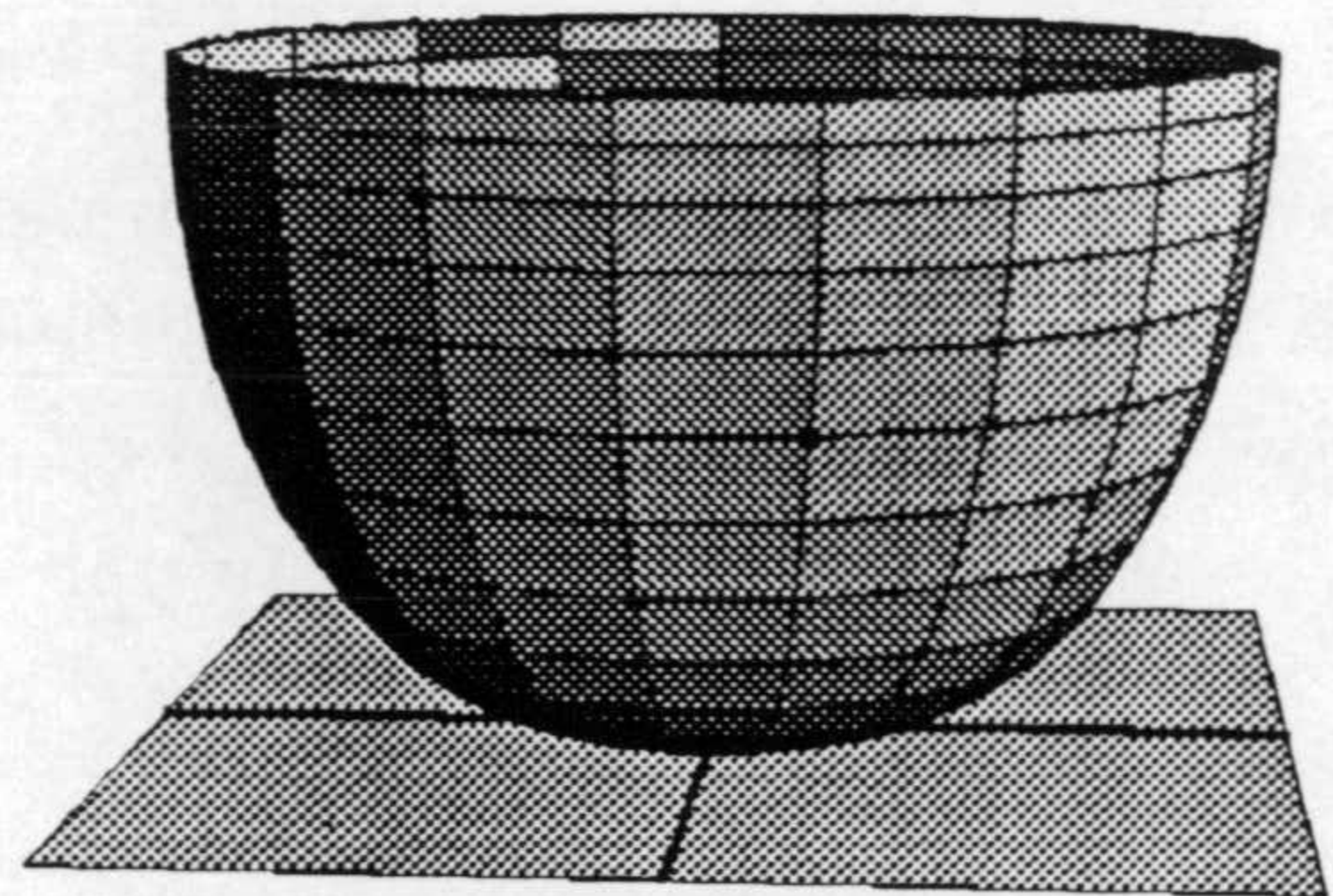


Figura 3.8: $a > 1$.

3.4 La aplicación de Gauss de una superficie llana.

Sean S una superficie y $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión llana con parámetros, (x, y) , conformes unitarios para la métrica inducida, en un entorno simplemente conexo de un punto. Si consideramos $\eta : S \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ aplicación de Gauss de la inmersión, de (3.2) y (3.4), (ϕ_x, ϕ_y) son nuevos parámetros en algún entorno del punto anterior y

$$\langle d\eta, d\eta \rangle = (\phi_{xx}^2 + \phi_{xy}^2)dx^2 + 2\phi_{xy}(\phi_{xx} + \phi_{yy})dx dy + (\phi_{xy}^2 + \phi_{yy}^2)dy^2 = d(\phi_x)^2 + d(\phi_y)^2.$$

Por tanto, η es una inmersión llana espacial en el espacio de de-Sitter.

Veamos que el recíproco es cierto, esto es, toda inmersión llana con métrica inducida riemanniana $\tilde{\eta} : S \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ puede ser vista como la aplicación de Gauss de una inmersión llana en el espacio hiperbólico.

Para ello, tomemos (x, y) parámetros conformes unitarios para la métrica inducida, en un entorno simplemente conexo de un punto. Entonces de las ecuaciones de estructura e integrabilidad obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{xx} &= c_{xx}\tilde{\psi} - \tilde{\eta} \\ \tilde{\eta}_{xy} &= \tilde{\phi}_{xy}\tilde{\psi} \\ \tilde{\eta}_{yy} &= \tilde{\phi}_{yy}\tilde{\psi} - \tilde{\eta} \\ \tilde{\psi}_x &= \tilde{\phi}_{xx}\tilde{\eta}_x + \tilde{\phi}_{xy}\tilde{\eta}_y \\ \tilde{\psi}_y &= \tilde{\phi}_{xy}\tilde{\eta}_x + \tilde{\phi}_{yy}\tilde{\eta}_y\end{aligned}$$

donde $\tilde{\phi}$ es una función diferenciable con $\tilde{\phi}_{xx}\tilde{\phi}_{yy} - \tilde{\phi}_{xy}^2 = 1$ y $\tilde{\psi}$ es un normal unitario a la inmersión, esto es, $\langle \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \rangle = -1$.

Salvo un cambio de $\tilde{\psi}$ por $-\tilde{\psi}$, si fuese necesario, podemos suponer que $\tilde{\psi}(S) \subseteq \mathbb{H}^3$ y por las ecuaciones anteriores tenemos

$$\langle d\tilde{\psi}, d\tilde{\psi} \rangle = d(\tilde{\phi}_x)^2 + d(\tilde{\phi}_y)^2,$$

esto es, $\tilde{\psi} : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una inmersión llana en el espacio hiperbólico con normal $\tilde{\eta}$. Además, la segunda forma fundamental de ambas inmersiones coinciden y viene dada por $\langle d\tilde{\psi}, -d\tilde{\eta} \rangle$.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, (3.29) y (3.30), es claro que toda inmersión llana riemanniana en \mathbb{S}_1^3 puede ser representada en términos de datos holomorfos para su segunda forma fundamental.

Ya que la métrica sobre \mathbb{S}_1^3 no es definida, existen inmersiones llanas en este espacio con métrica inducida lorentziana. Veamos que éstas también tienen representación conforme.

Teorema 3.4.1 (Representación conforme de las superficies llanas de \mathbb{S}_1^3)

(I) Sean S una superficie simplemente conexa y $\psi : S \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ una inmersión llana con métrica no degenerada. Si sobre S consideramos la estructura conforme determinada por la segunda forma fundamental de ψ , entonces existe una inmersión holomorfa $g : S \rightarrow \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ y un par (f, ω) formado por una función holomorfa f y una 1-forma holomorfa ω sobre S tal que (3.20) se satisface y

- (a) si la inmersión es riemanniana, $|f| < 1$, $\omega \neq 0$ en todo punto y la inmersión es recuperada como $\psi = \pm g e_3 g^*$. En cuyo caso, la métrica inducida y segunda forma fundamental vienen dadas por

$$\begin{aligned}ds^2 &= -f\omega^2 + (1 + |f|^2)|\omega|^2 - \bar{f}\bar{\omega}^2, \\ d\sigma^2 &= (1 - |f|^2)|\omega|^2,\end{aligned}\tag{3.35}$$

Además, g es única salvo multiplicación a la derecha por una matriz constante g_0 tal que $g_0 e_3 g_0^* = e_3$.

- (b) si la inmersión es lorentziana, $\text{Im}(f) < 0$, $\omega \neq 0$ en todo punto y la inmersión puede ser recuperada como $\psi = -g e_1 g^*$. En cuyo caso, la métrica inducida y segunda forma fundamental vienen dadas por

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(f\omega^2 + (f + \bar{f}) |\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 \right), \\ d\sigma^2 &= i (\bar{f} - f) |\omega|^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Y g es única salvo multiplicación a la derecha por una matriz constante g_0 tal que $g_0 e_1 g_0^* = e_1$.

(II) Recíprocamente, sean S una superficie de Riemann y $g : S \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ una inmersión holomorfa cumpliendo (3.22).

- (a) Si $|\alpha_1| < |\alpha_2|$, la aplicación $\psi : S \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ dada por $\psi = g e_3 g^*$ es una inmersión llana riemanniana con métrica inducida y segunda forma fundamental dadas por (3.35), donde $f = \alpha_1/\alpha_2$ y $\omega = \alpha_2$.
- (b) Si $\alpha_2 \neq 0$ y $\text{Im}(\alpha_1/\alpha_2) < 0$, la aplicación $\psi : S \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ dada por $\psi = g e_1 g^*$ es una inmersión llana lorentziana con métrica inducida y segunda forma fundamental dadas por (3.36), donde $f = \alpha_1/\alpha_2$ y $\omega = \alpha_2$.

DEMOSTRACIÓN:

El caso riemanniano es inmediato de las consideraciones anteriores, el teorema de representación conforme de superficies llanas en el espacio hiperbólico y de (3.24).

Para el caso lorentziano tomamos una inmersión coordinada asintótica $x + iy : S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$ds^2 = 2dx dy \quad (3.37)$$

y elegimos η campo de vectores normal unitario a la inmersión. Entonces las ecuaciones de estructura quedan

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= E\eta, \\ \psi_{xy} &= F\eta - \psi, \\ \psi_{yy} &= G\eta, \\ \eta_x &= -F\psi_x - E\psi_y, \\ \eta_y &= -G\psi_x - F\psi_y, \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde E , F y G son funciones diferenciables sobre S .

Usando las ecuaciones de Gauss y Mainardi-Codazzi tenemos $EG - F^2 = 1$, $E_y = F_x$ y $F_y = G_x$. Y como S es simplemente conexa existe una función real ϕ sobre S tal que $E = \phi_{xx}$, $F = \phi_{xy}$, $G = \phi_{yy}$ cumpliendo (3.4). Además, la segunda forma fundamental viene dada por (3.3).

Consideremos ahora

$$z = u + iv = y - i\phi_x. \quad (3.39)$$

Entonces, de (3.4), z es una nueva inmersión coordenada. Y un cálculo directo nos da

$$\psi_u = -\frac{\phi_{xy}}{\phi_{xx}}\psi_x + \psi_y, \quad \psi_v = \frac{-1}{\phi_{xx}}\psi_x. \quad (3.40)$$

Así, de (3.3), (3.4), (3.38), (3.39) y (3.40) obtenemos

$$d\sigma^2 = \frac{1}{\phi_{xx}}|dz|^2 \quad (3.41)$$

y

$$(\psi_x)_u = -\psi, \quad (\psi_x)_v = -\eta. \quad (3.42)$$

Por tanto, de (3.4), (3.37), (3.39), (3.41) y (3.42), la segunda forma fundamental es definida positiva para una elección adecuada de η , $z : S \rightarrow \mathbb{C}$ es una inmersión coordenada conforme y $[\psi_x] : S \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$ es una aplicación holomorfa.

Además, de las expresiones anteriores obtenemos

$$(\psi_x)_{uu} = \frac{\phi_{xy}}{\phi_{xx}}\psi_x - \psi_y, \quad (\psi_x)_{vv} = -\frac{\phi_{xy}}{\phi_{xx}}\psi_x - \psi_y,$$

esto es,

$$4(\psi_x)_{z\bar{z}} = -2\psi_y. \quad (3.43)$$

Usando un razonamiento similar al caso de superficies llanas en el espacio hiperbólico para la aplicación conforme $[\psi_x]$, se obtiene la existencia de funciones holomorfas C y D tales que

$$\psi_x = \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{D} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

En consecuencia, de (3.42) y (3.44) se tiene

$$\psi = - \begin{pmatrix} C\bar{C}_z + C_z\bar{C} & C\bar{D}_z + C_z\bar{D} \\ \bar{C}D_z + \bar{C}_zD & D\bar{D}_z + D_z\bar{D} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

y

$$\eta = -i \begin{pmatrix} -C\bar{C}_z + C_z\bar{C} & -C\bar{D}_z + C_z\bar{D} \\ \bar{C}D_z - \bar{C}_zD & -D\bar{D}_z + D_z\bar{D} \end{pmatrix}.$$

Si consideramos la función $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f = \frac{\phi_{xy} - i}{2\phi_{xx}}, \quad (3.46)$$

entonces, de (3.38), (3.40), (3.42), (3.43) y (3.44) obtenemos $(\psi_y)_z = -2f(\psi_x)_{\bar{z}}$ y

$$\begin{pmatrix} C_{zz}\bar{C}_z & C_{zz}\bar{D}_z \\ \bar{C}_z D_{zz} & \bar{D}_z D_{zz} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} C\bar{C}_z & C\bar{D}_z \\ \bar{C}_z D & \bar{D}_z D \end{pmatrix}.$$

Como C_z y D_z no pueden anularse simultáneamente, las funciones holomorfas C y D cumplen la ecuación diferencial

$$C_{zz} = fC, \quad D_{zz} = fD. \quad (3.47)$$

Por tanto, usando (3.4), (3.46) y (3.47), f es una función holomorfa cumpliendo $\text{Im}(f) < 0$.

Finalmente, de (3.45) y (3.47), la inmersión ψ puede ser recuperada como $\psi = -ge_1g^*$, donde $g : S \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ es la aplicación holomorfa dada por

$$g = \begin{pmatrix} C & C_z \\ D & D_z \end{pmatrix}$$

cumpliendo (3.20) con $\omega = dz$.

Recíprocamente, sean $g : S \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ una inmersión holomorfa y $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ la aplicación dada por $\psi = -ge_1g^*$. De (3.22) se tiene

$$d\psi = -g \begin{pmatrix} f\omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \\ 0 & \omega + \bar{\omega} \end{pmatrix} g^*, \quad (3.48)$$

donde $f = \alpha_1/\alpha_2$ verifica $\text{Im}(f) < 0$ y $\omega = \alpha_2 \neq 0$.

Utilizando que f es una función holomorfa

$$d(-f\omega - \bar{f}\bar{\omega}) = 0, \quad d\left(\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\bar{\omega}\right) = 0$$

y, por tanto, existen funciones locales x, y tales que

$$dx = -f\omega - \bar{f}\bar{\omega}, \quad dy = \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\bar{\omega},$$

con

$$dx \wedge dy = -\frac{1}{2}(f - \bar{f})\omega \wedge \bar{\omega}.$$

Ya que $Im(f) < 0$, (x, y) son nuevas coordenadas. Y la métrica inducida viene dada por

$$ds^2 = \langle d\psi, d\psi \rangle = - \left(f\omega^2 + (f + \bar{f})|\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 \right) = 2dxdy,$$

esto es, ψ es una inmersión llana lorentziana.

Por otro lado, de (3.48) un normal a la inmersión es $\eta = ge_2g^*$ y

$$d\eta = g \begin{pmatrix} i(-f\omega + \bar{f}\bar{\omega}) & 0 \\ 0 & i(\omega - \bar{\omega}) \end{pmatrix} g^*.$$

Así, la segunda forma fundamental queda

$$d\sigma^2 = \langle d\psi, -d\eta \rangle = i(\bar{f} - f)|\omega|^2.$$

■

Finalmente, aplicamos el teorema anterior cuando la función holomorfa f es constante, obteniendo algunos ejemplos que tendrán especial interés en la clasificación de las superficies llanas completas.

Consideremos \mathbb{C} con su estructura de superficie de Riemann usual, $f(z) = c$, para cierta constante $c \in \mathbb{C}$ y $\omega = dz$. Distinguimos:

(A) *Caso riemanniano,*

- si $c = 0$, de (3.27) y (3.28) se tiene

$$g(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$$

y la inmersión llana viene dada, salvo isometrías, por

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ z & -1 + |z|^2 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

con métrica completa $ds^2 = |dz|^2$.

- si $0 < |c| < 1$, haciendo el cambio de parámetro $\zeta = az$, con $a^2 = c$, (3.27) y (3.28) dan

$$g(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \begin{pmatrix} e^{-\zeta} & -ae^{-\zeta} \\ e^{\zeta} & ae^{\zeta} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

y la inmersión, salvo isometrías, es

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{|c|}} \begin{pmatrix} (1 - |c|)e^{-(\zeta + \bar{\zeta})} & (1 + |c|)e^{-\zeta + \bar{\zeta}} \\ (1 + |c|)e^{\zeta - \bar{\zeta}} & (1 - |c|)e^{\zeta + \bar{\zeta}} \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

con métrica $ds^2 = -cdz^2 + (1 + |c|^2)|dz|^2 - \bar{c}d\bar{z}^2$. Y como $ds^2 \geq (1 - |c|^2)|dz|^2$, la inmersión llana es completa.

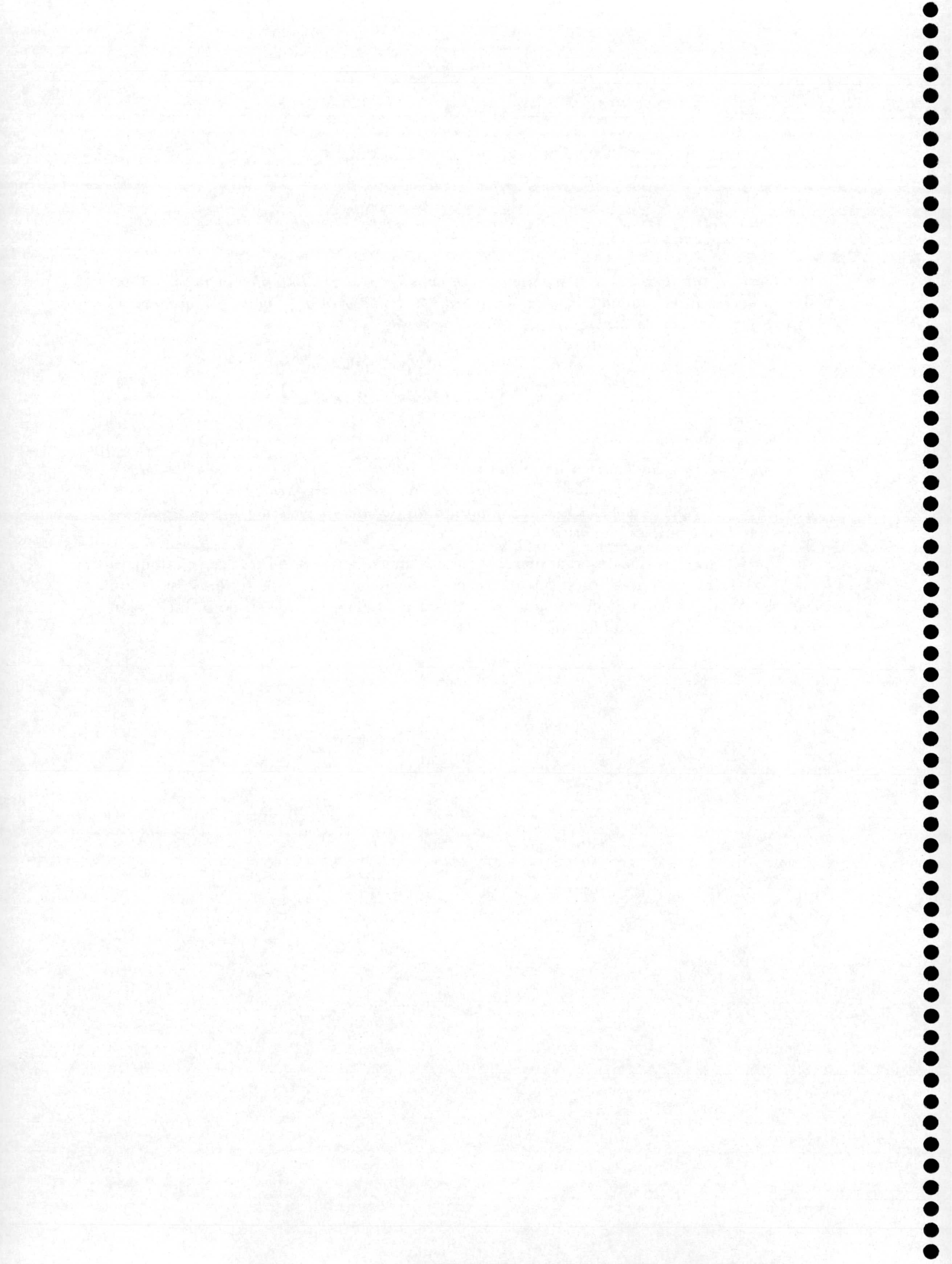
(B) *Caso lorentziano: si c es un número complejo con parte imaginaria negativa entonces haciendo el cambio $\zeta = \sqrt{c}z$, la aplicación holomorfa $g(\zeta)$ viene dada como en (3.50) y, por tanto, la inmersión es, salvo isometrías*

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} 2ae^{-(\zeta + \bar{\zeta})} & 2ibe^{-\zeta + \bar{\zeta}} \\ -2ibe^{\zeta - \bar{\zeta}} & -2ae^{\zeta + \bar{\zeta}} \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

siendo $\sqrt{c} = a + ib$.

En este caso, la métrica de la inmersión, $ds^2 = -(cdz^2 + (c + \bar{c})|dz|^2 + \bar{c}d\bar{z}^2)$, puede ser expresada como $ds^2 = 2dx dy$ para los parámetros reales $x = -cz - \bar{c}\bar{z}$, $y = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, que son globales y con dominio de definición en todo \mathbb{R}^2 , de donde es claro que la métrica es completa.

Por último, hay que observar que si tomamos una superficie de Riemann cualquiera con f constante entonces en un entorno de cualquier punto podemos suponer, salvo un cambio de coordenada conforme, que $\omega = dz$ y, por tanto, la imagen de la inmersión caería en uno de los ejemplos anteriores.



Capítulo 4.

Completitud y embebimiento de superficies llanas en el espacio hiperbólico.

El principal objetivo de este capítulo es el estudio del comportamiento de los finales completos de una superficie llana en el espacio hiperbólico. En la sección 4.1 hacemos una nueva demostración de la clasificación de las superficies llanas completas en el espacio hiperbólico (ver [55], [62]) y en el espacio de de-Sitter (ver [17]).

En la sección 4.2 probamos que todo final completo de una superficie llana en el espacio hiperbólico es del tipo conforme de un disco punteado, estudiamos cómo son sus datos de Weierstrass y cuándo unos datos del tipo anterior dan lugar a una inmersión univaluada y con final regular, esto es, tal que su aplicación de Gauss hiperbólica extiende a todo el disco.

Finalmente, en la sección 4.3 caracterizamos los finales regulares embebidos y probamos que todo final regular de una superficie llana es asintótico al final de una superficie de revolución.

4.1 Superficies llanas completas.

A partir de la representación conforme dada en el capítulo anterior veamos una nueva demostración de la clasificación de superficies llanas completas en el espacio hiperbólico, ya obtenida, de forma independiente, por J. A. Volkov y S. M. Vladimirova (1971) y S. Sasaki (1973), ver [55] y [62].

Teorema 4.1.1 *Sea S una superficie y $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión llana completa, entonces $\psi(S)$ es una horosfera o el conjunto de puntos equidistantes de una geodésica.*

DEMOSTRACIÓN :

Podemos suponer que S es simplemente conexa, en caso contrario, pasaríamos a su recubridor universal. El teorema de Cartan nos asegura que S con su métrica inducida es isométrica a \mathbb{R}^2 con su métrica usual.

Así, utilizando el teorema de uniformización, S con la estructura conforme dada por la segunda forma fundamental ha de ser biholomorfa al plano complejo \mathbb{C} o al disco abierto unidad D .

Si (f, ω) son datos de Weierstrass asociados a la inmersión, entonces de (3.16) y (3.21)

$$ds^2 \leq 4|\omega|^2. \quad (4.1)$$

Por tanto, la métrica $4|\omega|^2$, que es conforme a la dada por la segunda forma fundamental, es completa, de donde S no puede ser biholomorfa al disco unidad, ver [48].

De esta forma, S es conformemente equivalente a \mathbb{C} y como f es una función holomorfa de módulo menor que uno, se tiene que f es constante. Además, usando el lema 3.2.1 podemos suponer que la constante es real no negativa, por lo que se deduce de los ejemplos de superficies de revolución que $\psi(S)$ es una horosfera si la constante es cero y una superficie equidistante a una geodésica en otro caso. ■

Observación. *El teorema anterior sigue siendo cierto si cambiamos la completitud de la métrica inducida por la completitud de la segunda forma fundamental. Para ello basta razonar de forma análoga teniendo en cuenta que de (3.16) y (3.21) se obtiene que $d\sigma^2 \leq |\omega|^2$ y así la métrica llana $|\omega|^2$ sería completa.*

Análogamente, se puede realizar un estudio de las superficies llanas completas en \mathbb{S}_1^3 .

Proposición 4.1.1 *Sea S una superficie y $\psi : S \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ una inmersión riemanniana o lorentziana llana completa, entonces $\psi(S)$ es una de las superficies dadas por (3.49) y (3.51) si la inmersión es riemanniana o por (3.52) si es lorentziana.*

DEMOSTRACIÓN :

Si $\psi : S \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ es una inmersión llana riemanniana completa entonces, de (3.16) y (3.35), $ds^2 \leq 4|\omega|^2$. Por tanto, razonando como en el teorema anterior, se deduce que S es conforme a \mathbb{C} y f es constante, de donde $\psi(S)$ es una de las superficies dadas por (3.49) o (3.51).

Si $\psi : S \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ es una inmersión llana lorentziana completa entonces existen parámetros (x, y) definidos en todo \mathbb{R}^2 tal que $ds^2 = 2 dx dy$.

Por otro lado, de la demostración del teorema 3.4.1, existe $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo que $y - i\phi_x$ es un parámetro conforme y, de igual manera, se prueba que también lo es $x + i\phi_y$. Por tanto,

$$z = x + \phi_x + i(y + \phi_y) = (x + i\phi_y) + i(y - i\phi_x)$$

es un nuevo parámetro conforme y ya que la matriz hessiana de ϕ es definida positiva el lema de Lewy, ver [56], nos asegura que la transformación $(x, y) \rightarrow z$ crece distancias y, en consecuencia, es un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 en si mismo.

Así, S es biholomorfa a \mathbb{C} y como la parte imaginaria de la función f está acotada, ésta debe ser constante, por lo que $\psi(S)$ es una de las superficies dadas por (3.52). ■

4.2 Completitud de los finales.

En esta sección vamos a describir algunas de las propiedades de los datos holomorfos y de la aplicación de Gauss hiperbólica en infinito para las inmersiones llanas.

Definición. Entenderemos por final la imagen mediante una inmersión de un anillo difeomorfo a $\{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| \leq 1\}$. Y diremos que el final es completo si lo es la inmersión.

Como consecuencia inmediata de (4.1), ver [48], se tiene el siguiente resultado

Lema 4.2.1 *Todo final completo de una superficie llana en \mathbb{H}^3 es biholomorfo, con la estructura conforme dada por la segunda forma fundamental, a un disco punteado.*

Por tanto, el estudio de finales completos es equivalente al estudio de inmersiones $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$, donde $D^* = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1\}$, para las cuales la métrica inducida es completa en el origen.

Ya que D^* no es un dominio simplemente conexo los datos de Weierstrass asociados a la inmersión podrían no estar bien definidos sobre D^* , sino sobre su recubridor universal. Así, éstos pueden ser considerados como función y 1-forma holomorfas multivaluadas sobre D^* .

Lema 4.2.2 *Sea $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión llana y (f, ω) datos de Weierstrass asociados a ψ . Entonces existen números reales μ y ν tales que*

$$(A) \quad 0 \leq \mu, \nu < 1, \text{ con } \mu + 2\nu \in \{0, 1, 2\},$$

$$(B) \quad f(z) = z^\mu f_1(z) \quad \text{y} \quad \omega(z) = z^\nu \omega_1(z),$$

donde f_1 es una función holomorfa univaluada sobre D y ω_1 una 1-forma univaluada sobre D^* .

Además, la ecuación diferencial (3.27) está bien definida sobre D^* . Y si ds^2 es completa en el origen, entonces ω_1 tiene a lo sumo un polo en dicho punto.

DEMOSTRACIÓN:

La aplicación exponencial usual desde el conjunto simplemente conexo $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) < 0\}$ en D^* es una aplicación recubridora conforme, por tanto, si consideramos (f, ω) datos de Weierstrass de la inmersión, éstos están bien definidos sobre \mathbb{C}^- .

De la expresión de la métrica inducida y segunda forma fundamental, (3.21), se tiene que $|f|$, $|\omega|$ y $f\omega^2$ son univaluados sobre D^* , por lo que existen funciones holomorfas $a, b : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} f(e^{z+2\pi i}) &= a(z)f(e^z), \\ \omega(e^{z+2\pi i}) &= b(z)\omega(e^z), \end{aligned}$$

con $|a(z)| = 1 = |b(z)|$.

Así, a y b son constantes y existen $\mu, \nu \in [0, 1[$ tales que $a(z) = e^{2\pi\mu i}$, $b(z) = e^{2\pi\nu i}$. Y como $f\omega^2$ está bien definido sobre D^* , $e^{2\pi\mu i}e^{4\pi\nu i} = 1$, esto es, $\mu + 2\nu \in \{0, 1, 2\}$. De esta manera,

$$f_1 = z^{-\mu} f \quad \text{y} \quad \omega_1 = z^{-\nu} \omega$$

son univaluadas en D^* y la ecuación diferencial (3.27) está bien definida sobre D^* . Por otro lado, como $\mu \in [0, 1[$ y $|f| < 1$, uno concluye que f_1 es holomorfa en el origen.

Además, si la métrica inducida es completa en el origen, usando que $\nu \in [0, 1[$ y $ds^2 \leq 4|\omega|^2$ se tiene que $ds^2 \leq 4|\omega_1|^2$ y ω_1 tiene a lo más un polo en el origen, ver [48].

Observación. Incluso en el caso que (f, ω) sean unos datos de Weierstrass univaluados en D^* , ya que el dominio no es simplemente conexo, la inmersión podría ser multivaluada.

Por ejemplo, si tomamos $f(z) = -z^2$, $\omega(z) = -1/z^2 dz$, $z \in D^*$, la ecuación diferencial asociada es

$$X'' + \frac{2}{z}X' + \frac{1}{z^2}X = 0,$$

que tiene como soluciones a las funciones

$$A_1 z^{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + A_2 z^{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C}.$$

Así, la inmersión llana asociada viene dada, salvo isometrías, por $\psi = g g^*$, donde

$$g(z) = c \begin{pmatrix} z^{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ z^{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} & \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \end{pmatrix}$$

con $c^2 = -i/\sqrt{3}$.

Y la expresión de la inmersión en el modelo del semiespacio superior de \mathbb{R}^3 , ver figura 4.1, es

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{(e^{-r} - \frac{1}{2}e^r) \cos(\sqrt{3}r) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^r \sin(\sqrt{3}r)}{e^{-r-\sqrt{3}\theta} + e^{r-\sqrt{3}\theta}}, \\ \psi_2 &= \frac{(e^{-r} - \frac{1}{2}e^r) \sin(\sqrt{3}r) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^r \cos(\sqrt{3}r)}{e^{-r-\sqrt{3}\theta} + e^{r-\sqrt{3}\theta}}, \\ \psi_3 &= \frac{\sqrt{3}}{e^{-r-\sqrt{3}\theta} + e^{r-\sqrt{3}\theta}}, \end{aligned}$$

donde $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ y $z = e^{r+i\theta}$, con $r + i\theta \in \mathbb{C}^-$.

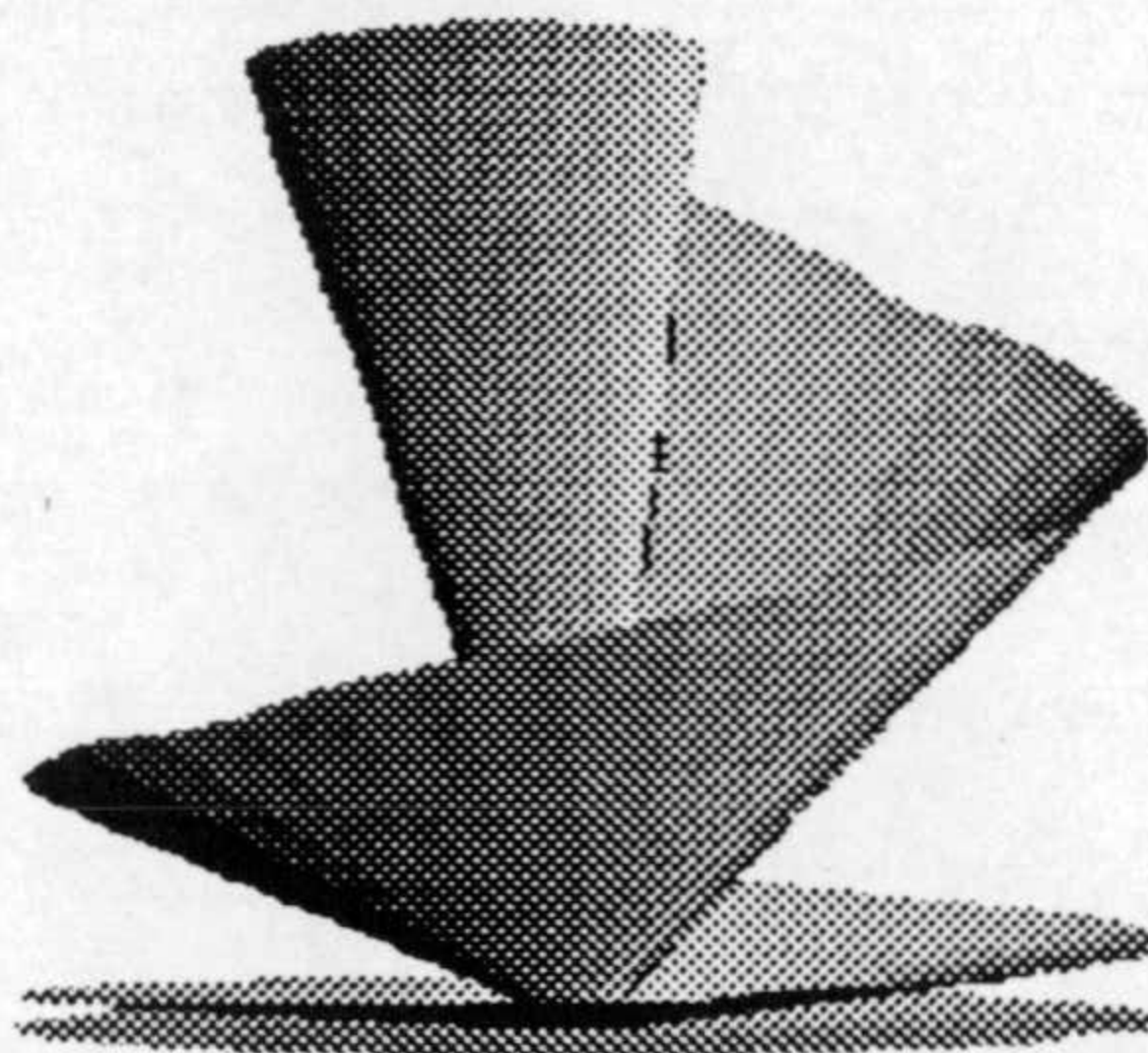


Figura 4.1: Final multivaluado.

Veamos ahora bajo qué condiciones podemos asegurar que unos datos de Weierstrass del tipo anterior dan lugar a una inmersión llana bien definida sobre D^* , esto es, no ramificada.

Para ello, recordemos, ver [15], que si p y q son funciones holomorfas en D^* , la ecuación diferencial lineal ordinaria

$$X''(z) + p(z)X'(z) + q(z)X(z) = 0 \quad (4.2)$$

tiene una singularidad regular en el origen si p y q tienen a lo sumo un polo de orden uno y dos, respectivamente, en cero.

En cuyo caso, si

$$p(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} p_k z^k, \quad q(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} q_k z^k,$$

entonces un sistema fundamental de soluciones (posiblemente multivaluado) de (4.2) viene dado por

$$\begin{aligned} C(z) &= z^{\lambda_1} a(z), \\ D(z) &= z^{\lambda_2} b(z) + kC(z) \text{Log}(z), \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde a y b son funciones holomorfas sobre el disco unidad que no se anulan en el origen, λ_1 y λ_2 son las soluciones de la ecuación indicial

$$\lambda^2 + (p_{-1} - 1)\lambda + q_{-2} = 0$$

y k es un número complejo, no nulo si λ_1 y λ_2 coinciden.

Con esto tenemos

Teorema 4.2.1 Sean (f, ω) datos de Weierstrass sobre D^* cumpliendo las condiciones (A) y (B) del lema anterior, con f no idénticamente nula. Si $f\omega^2$ tiene a lo más un polo de orden dos en el origen y $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una inmersión llana asociada, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) La inmersión ψ está bien definida sobre D^* .
- (b) La aplicación de Gauss hiperbólica G^- es univaluada.
- (c) Un sistema fundamental de las soluciones de (3.27) sobre D^* es $\{z^\lambda a(z), z^{\lambda-m} b(z)\}$ donde a, b son funciones holomorfas sobre D , no nulas en el origen, $m \in \mathbb{N}$ y $\lambda, \lambda - m$ son las soluciones de la ecuación indicial asociada a (3.27).

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\omega = h(z)dz$, $z \in D^*$ con $h(z) = z^\nu h_1(z)$, $\nu \in [0, 1[$ y h_1 holomorfa sobre D^* . Ya que $f\omega^2$ tiene a lo más un polo de orden dos en el origen y f no es idénticamente cero, h_1 no tiene una singularidad esencial y, por tanto, h'/h tiene a lo sumo un polo de orden uno.

De esta manera

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{k=-1}^{\infty} p_k z^k, \quad f(z)h(z)^2 = \sum_{k=-2}^{\infty} q_k z^k$$

y la ecuación indicial de (3.27) es

$$\lambda^2 - (p_{-1} + 1)\lambda - q_{-2} = 0. \quad (4.4)$$

Sean λ_1, λ_2 las soluciones de (4.4), entonces un sistema fundamental de soluciones viene dado como en (4.3).

Finalmente, multiplicando C o D por una constante adecuada, podemos suponer que $CD_z - C_zD = h$, con lo que, salvo isometrías, ψ viene dada por (3.29), y de (3.31) se tiene $G^- = C/D$, salvo transformaciones de Möbius.

Por tanto, si ψ está bien definida entonces G^- es univaluada, de donde $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ y $k = 0$, por lo que, λ_1 y λ_2 no coinciden. Además, si (c) ocurre es claro que ψ está bien definida sobre D^* . ■

Definiciones.

Al entero positivo m dado por el teorema anterior se le denomina **multiplicidad del final**.

Por otro lado, si $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una inmersión llana con final completo en el origen diremos que el final es **regular** si la aplicación de Gauss hiperbólica G^- extiende de forma holomorfa al origen.

Observaciones.

1. Las inmersiones $\psi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ para las superficies llanas de revolución dadas por (3.33) y (3.34) tienen aplicación de Gauss asociada $G^-(z) = z$, de donde, es claro que el final $\psi(D^*)$ es regular y tiene multiplicidad uno.

2. Si consideramos los datos de Weierstrass

$$f(z) = \frac{1}{4}(1 - 2z + 2z^2), \quad \omega(z) = \frac{2}{z^2}dz, \quad \text{con } 0 < |z| < \frac{1}{2}(\sqrt{7} - 1),$$

su ecuación diferencial asociada

$$X'' + \frac{2}{z}X' - \frac{1 - 2z + 2z^2}{z^4}X = 0$$

tiene como soluciones $A_1 z e^{1/z} + A_2 \frac{2+2z+z^2}{z} e^{-1/z}$, donde A_1 y A_2 son números complejos.

Así, la inmersión llana asociada a estos datos es, salvo isometrías, $\psi = g g^*$, donde

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z e^{1/z} & \frac{-z + z^2}{2} e^{1/z} \\ \frac{2 + 2z + z^2}{z} e^{-1/z} & \frac{2 + z^2 + z^3}{2z} e^{-1/z} \end{pmatrix}.$$

Esto nos da un ejemplo de una superficie bien definida en D^* en la que $f\omega^2$ tiene un polo de orden mayor que dos en el origen. Por otro lado, de (3.21),

$$ds^2 \geq (1 - |f|)^2 |\omega|^2 = \frac{(4 - |1 - 2z + 2z^2|)^2}{4|z|^4} |dz|^2,$$

de lo que se deduce que el final es completo y como $G^-(z) = \frac{z^2}{2+2z+z^2} e^{2/z}$ tiene una singularidad esencial en el origen, el final es no regular.

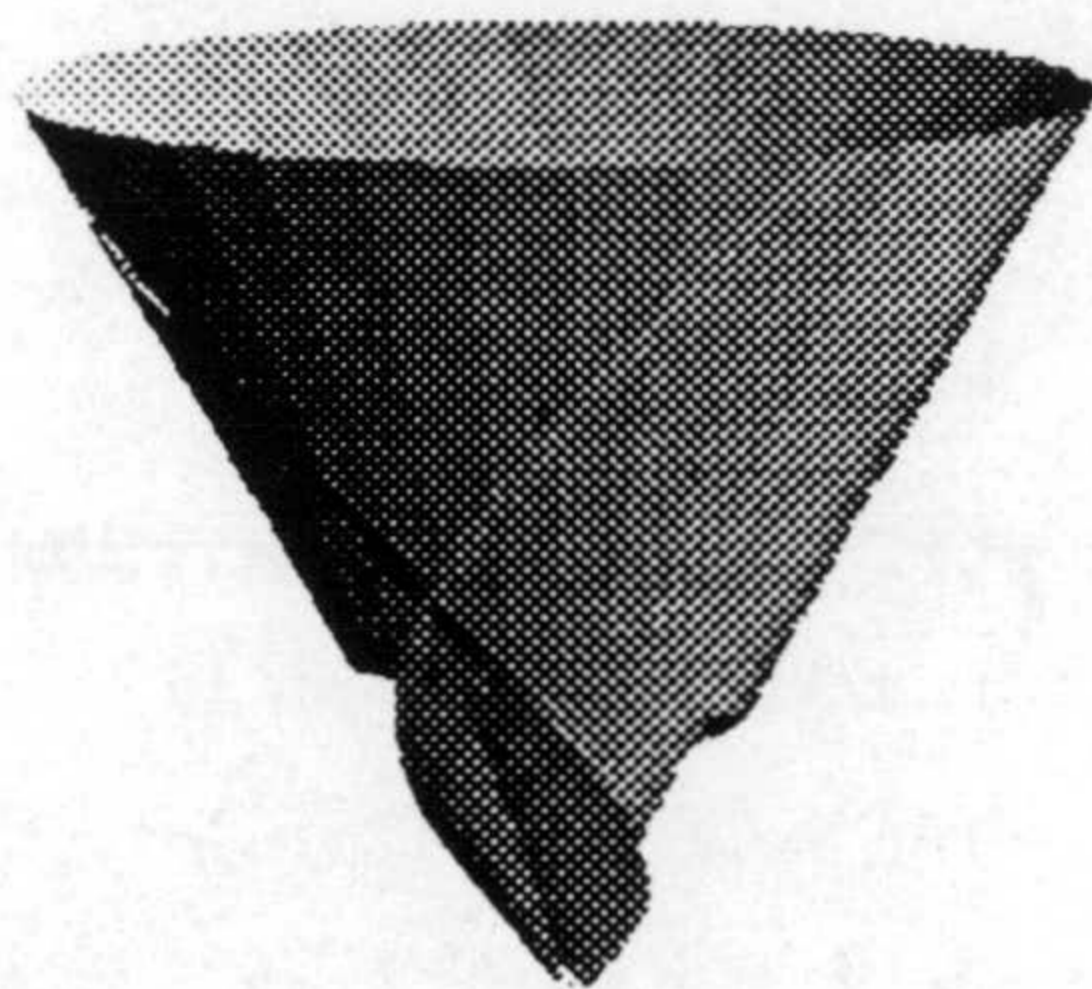


Figura 4.2: Final irregular.

Teorema 4.2.2 Sean $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión llana con final completo en el origen y (f, ω) datos de Weierstrass asociados a ψ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) El final es regular.
- (b) $f\omega^2$ tiene a lo más un polo en el origen de orden dos.
- (c) La ecuación diferencial (3.27) tiene una singularidad regular en el origen.

DEMOSTRACIÓN :

Ya que el final es completo, si escribimos $\omega = h(z)dz$, entonces h'/h tiene a lo más un polo en el origen de orden 1. Por tanto, (b) y (c) son equivalentes, ver [15].

Veamos ahora la equivalencia entre (a) y (b). Para ello, supongamos que $f\omega^2$ tiene a lo más un polo en el origen de orden dos, entonces del teorema anterior, G^- está dada, salvo transformaciones de Möbius, por

$$G^-(z) = z^m \frac{a(z)}{b(z)}, \quad (4.5)$$

con a , b funciones holomorfas sobre D no nulas en el origen y $m \in \mathbb{N}$. Por tanto, el final es regular.

Recíprocamente, tenemos que la derivada schwarziana de G^- , ver [35], con respecto a z viene dada por

$$\begin{aligned} \{G^-, z\} &:= \frac{d}{dz} \left(\frac{(G^-)''(z)}{(G^-)'(z)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{(G^-)''(z)}{(G^-)'(z)} \right)^2 \\ &= \frac{d}{dz} \left(\frac{h'(z)}{h(z)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h'(z)}{h(z)} \right)^2 - f(z)h(z)^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Así, si G^- se extiende de forma holomorfa al origen, entonces $\frac{(G^-)''(z)}{(G^-)'(z)}$ tiene a lo más un polo de orden uno en el origen y, de (4.6), fh^2 tiene a lo más un polo de orden dos. ■

Observación. De (4.5) se deduce que la multiplicidad del final es el número de ramificación de G^- en el origen.

4.3 Embebimiento y comportamiento asintótico de los finales.

En esta sección estudiaremos el comportamiento asintótico en infinito de un final regular y caracterizaremos cuando está embebido.

Sea $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión llana con final regular en el origen. Salvo isometrías, podemos suponer que $G^-(0) = 0$. Así, de (4.5), existen un parámetro ζ , un número real positivo ε y un natural m tal que $G^-(\zeta) = \zeta^m$ con $\zeta \in D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} / |z| < \varepsilon\}$.

Si escribimos $\omega(\zeta) = h(\zeta)d\zeta$ y

$$g(\zeta) = \begin{pmatrix} C(\zeta) & \frac{1}{h(\zeta)}C'(\zeta) \\ D(\zeta) & \frac{1}{h(\zeta)}D'(\zeta) \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

entonces de (3.31) uno tiene $C(\zeta) = \zeta^m D(\zeta)$ y $h(\zeta) = -m\zeta^{m-1}D(\zeta)^2$, $\zeta \in D_\varepsilon^* = D_\varepsilon - \{0\}$.

Por tanto, si tomamos $D(\zeta) = \zeta^p d(\zeta)$, donde d es una función holomorfa no nula en el origen, obtenemos que

$$g(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta^{m+p}d(\zeta) & -\zeta^{-p}c_1(\zeta) \\ \zeta^p d(\zeta) & -\zeta^{-(m+p)}c_2(\zeta) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

con c_1 y c_2 funciones holomorfas en un entorno del origen, dadas por

$$\begin{aligned} c_1(\zeta) &= \frac{(m+p)d(\zeta) + \zeta d'(\zeta)}{md(\zeta)^2}, \\ c_2(\zeta) &= \frac{pd(\zeta) + \zeta d'(\zeta)}{md(\zeta)^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

De esta manera, (3.20) nos da

$$f(\zeta) = -\frac{p(m+p)d(\zeta)^2 + (m+2p-1)\zeta d(\zeta)d'(\zeta) + (2d'(\zeta)^2 - d(\zeta)d''(\zeta))\zeta^2}{m^2d(\zeta)^6} \zeta^{-2(m+2p)}$$

y ya que el módulo de f es menor que uno

$$m+2p \leq 0 \quad \text{y} \quad |d(0)|^2 > \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad m+2p = 0. \quad (4.9)$$

En particular, si consideramos el modelo de \mathbb{H}^3 dado por el semiespacio superior de \mathbb{R}^3 , entonces ψ viene dada por

$$\psi(\zeta) = \left(\zeta^m \frac{|\zeta|^{2p}|d|^2 + |\zeta|^{-2(m+p)}c_1\bar{c}_2}{|\zeta|^{2(m+p)}|d|^2 + |\zeta|^{-2p}|c_1|^2}, \frac{1}{|\zeta|^{2(m+p)}|d|^2 + |\zeta|^{-2p}|c_1|^2} \right). \quad (4.10)$$

Así, si escribimos $\psi_1 + i\psi_2$ a la proyección de ψ sobre el plano $\Pi_0 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_3 = 0\}$, se tiene de (4.8) y (4.10)

$$\psi_1 + i\psi_2 = \frac{\zeta^m}{|\zeta|^{2m}} \frac{|\zeta|^{2p}|d|^2 + |\zeta|^{-2(m+p)}c_1\bar{c}_2}{|\zeta|^{2p}|d|^2 + |\zeta|^{-2(m+p)}|c_1|^2} = \frac{1}{\zeta^m} \left(1 - \frac{c_1}{d} |\zeta|^{-2(m+2p)} A \right) \quad (4.11)$$

donde

$$A(\zeta) = \frac{1}{|d|^2 + |c_1|^2 |\zeta|^{-2(m+2p)}}. \quad (4.12)$$

Ahora, de (4.9), (4.11) y (4.12), $\psi_1 + i\psi_2$ es un difeomorfismo local y una aplicación propia de un entorno punteado del origen sobre el exterior de un disco cerrado.

Además, ya que la imagen del lazo $\gamma_\delta(t) = \delta e^{2\pi it}$, con $t \in [0, 1]$ y $\delta > 0$ suficientemente pequeño, gira alrededor del origen m veces, $\psi_1 + i\psi_2$ es una aplicación recubridora de m hojas. Con lo que, si γ_R es una circunferencia centrada en el origen de radio R , para R suficientemente grande, entonces $\gamma = \psi \circ (\psi_1 + i\psi_2)^{-1} \circ \gamma_R$ es un lazo en el cilindro $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_+^3 / y_1^2 + y_2^2 = R^2\}$ que gira alrededor de él m veces y se corta a si mismo, a menos que $m = 1$.

De todo ello obtenemos

Teorema 4.3.1 *Sea $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión llana con final regular en el origen. Entonces el final está embebido si y sólo si la multiplicidad del final es $m = 1$.*

Observación. *De las anteriores consideraciones se deduce que si tenemos una inmersión llana $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ con final regular embebido en el origen entonces, salvo isometrías, el final puede ser visto en el modelo del semiespacio de \mathbb{H}^3 como un grafo sobre el exterior de un dominio acotado Ω en Π_0 .*

Finalmente, estudiemos el comportamiento en infinito de un final regular. Para ello, veamos qué entenderemos por proximidad en infinito.

Definición. *Dadas dos inmersiones llanas $\psi, \varphi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ con finales regulares en el origen, diremos que ψ y φ tienen el mismo comportamiento en infinito si la distancia hiperbólica entre $\psi(\zeta)$ y $\varphi(\zeta)$ tiende a cero cuando ζ tiende al origen.*

Observemos de (3.33), (3.34) y (4.8) que (4.10) es una superficie de revolución si y sólo si $d(\zeta)$ es constante (incluso si $m \neq 1$). Con esto tenemos

Teorema 4.3.2 *Sea $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión llana con final regular en el origen. Entonces existe una inmersión llana de revolución $\psi_R : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ tal que ψ y ψ_R tienen el mismo comportamiento en infinito.*

DEMOSTRACIÓN:

Si tomamos el modelo de \mathbb{H}^3 dado por el semiespacio superior de \mathbb{R}^3 , podemos suponer que ψ está dada por (4.10) sobre D_ε^* .

Consideremos, ahora, ψ_R la superficie llana de revolución dada por

$$\psi_R(\zeta) = \left(\frac{1}{\bar{\zeta}^m} \left(1 - \frac{m+p}{m|d_0|^2} |\zeta|^{-2(m+2p)} A_0 \right), |\zeta|^{-2(m+p)} A_0 \right) \quad (4.13)$$

donde

$$A_0 = \frac{1}{|d_0|^2 + \frac{(m+p)^2}{m^2|d_0|^2} |\zeta|^{-2(m+2p)}}$$

y $d_0 = d(0)$.

Ya que la distancia hiperbólica entre dos puntos con coordenadas (y_1^1, y_2^1, y_3^1) , (y_1^2, y_2^2, y_3^2) en este modelo de \mathbb{H}^3 está dada por

$$\operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{(y_1^1 - y_1^2)^2 + (y_2^1 - y_2^2)^2 + (y_3^1 - y_3^2)^2}{2y_3^1 y_3^2} \right) \quad (4.14)$$

entonces, denotando $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ y $\psi_R = (\psi_{R1}, \psi_{R2}, \psi_{R3})$, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{(\psi_1 - \psi_{R1})^2 + (\psi_2 - \psi_{R2})^2 + (\psi_3 - \psi_{R3})^2}{2\psi_3\psi_{R3}} = \\ & = \frac{\frac{1}{|\zeta|^{2m}} \left| \frac{c_1}{d} |\zeta|^{-2(m+2p)} A - \frac{m+p}{m|d_0|^2} |\zeta|^{-2(m+2p)} A_0 \right|^2 + |\zeta|^{-4(m+p)} (A - A_0)^2}{2|\zeta|^{-4(m+p)} A A_0} = \\ & = \frac{1}{2} \left(|\zeta|^{-2(m+2p)} \left| \frac{c_1}{d} \sqrt{\frac{A}{A_0}} - \frac{m+p}{m|d_0|^2} \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right|^2 + \left(\sqrt{\frac{A}{A_0}} - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Así, de (4.8) y (4.9) la expresión anterior tiende a cero cuando ζ tiende al origen. Por tanto, de (4.14) es claro que ψ y ψ_R tienen el mismo comportamiento en infinito.

■

Observación. Si $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una inmersión llana con final regular embebido, entonces sabemos que el final puede ser visto como el grafo de una función g sobre el exterior de un dominio acotado en Π_0 . Por tanto, usando (4.8) y (4.10), g se puede escribir como

$$g(y_1, y_2) = \frac{|a_1 + g_1(y_1, y_2)|^{-2(1+p)}}{(y_1^2 + y_2^2)^{-(1+p)}} (a_2 + g_2(y_1, y_2)) \quad (4.15)$$

con

$$\lim_{y_1^2 + y_2^2 \rightarrow \infty} g_1(y_1, y_2) = 0 = \lim_{y_1^2 + y_2^2 \rightarrow \infty} g_2(y_1, y_2),$$

$$a_1 = 1 - \frac{2}{1 + 4|d(0)|^4}, \quad a_2 = \frac{4|d(0)|^2}{1 + 4|d(0)|^4}, \quad \text{si } 1 + 2p = 0$$

y

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{|d(0)|^2}, \quad \text{si } 1 + 2p < 0.$$

Así, si consideramos (4.15) y la inmersión llana de revolución dada por (4.13) con $m = 1$, obtenemos que la distancia hiperbólica entre los puntos en $\psi(D^*)$ y $\psi_R(D^*)$ con la misma proyección sobre Π_0 tiende a cero en infinito. Esto es, todo final regular embebido de una superficie llana en \mathbb{H}^3 es, visto como grafo en el modelo superior de \mathbb{H}^3 , asintótico a un final de una superficie llana de revolución.

Bibliografía

- [1] K. Abe y J. Erbacher, 'Isometric immersions with the same Gauss map', *Math. Ann.* **215** (1975), 197-201.
- [2] A. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [3] R. Aiyama y K. Akutagawa, 'Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^3(-c^2)$ and $\mathbb{S}_1^3(c^2)$ ', *Ann. Glob. Anal. Geom.* **17-1** (1999), 49-76.
- [4] J. L. Barbosa y M. P. do Carmo, 'A proof of a general isoperimetric inequality for surfaces', *Math. Z.* **173** (1980), 13-28.
- [5] O. Bonnet, *J. de l'Ecole Polytechnique* **19** (1848), 131.
- [6] M. Born y E. Wolf, *Principles in Optics*, Pergamon, New York, 1975.
- [7] H. Brezis y J. M. Coron, 'Multiple solutions of h -systems and Reillich's conjecture', *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), 149-187.
- [8] R. L. Bryant, 'Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space', *Astérisque* **154-155** (1987), 321-347.
- [9] L. A. Caffarelli, L. Nirenberg y J. Spruck, 'The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations I. Monge-Ampère equations', *Comm. Pure Appl. Math.*, **37** (1984), 369-402.
- [10] M. P. do Carmo, *Geometría Diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial S. A., Madrid, 1990.
- [11] M. P. do Carmo y M. Dajczer, 'Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature', *Trans. A. M. S.* **277** (2) (1983), 685-709.
- [12] E. Cartan, 'Les surfaces qui admettent une seconde forme fondamentale donnée', *Bull. Sci. Math.* **67** (2) (1943), 8-32.

-
- [13] J. Chazy, *Dynamique des systèmes matériels*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [14] S. Y. Cheng y S. T. Yau, 'On the regularity of the Monge-Ampère equation $\det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \right) = F(x, u)$ ', *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 839-866.
- [15] E. A. Coddington y N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [16] P. Collin, L. Hauswirth y H. Rosenberg, 'The geometry of finite topology surfaces properly embedded in hyperbolic space with constant mean curvature one', Preprint.
- [17] M. Dajczer y K. Nomizu, 'On flat surfaces in \mathbb{S}_1^3 and \mathbb{H}_1^3 ', *Manifolds and Lie Groups*, 71-108, Birkhauser, Boston, Mass., 1981.
- [18] P. Dombrowski, *150 Years after Gauss's "Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas"*, *Astérisque* **62**, Soc. Mat. France, Paris, 1979.
- [19] J. Eells y L. Lemaire, 'A report on harmonic maps', *Bull. London Math. Soc.* **10** (1978), 1-68.
- [20] J. Eells y L. Lemaire, 'Another report on harmonic maps', *Bull. London Math. Soc.* **20** (1988), 385-524.
- [21] H. M. Farkas y I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer, 1992.
- [22] L. Ferrer, A. Martínez y F. Milán, 'Symmetry and Uniqueness of Parabolic Affine Spheres', *Math. Ann.* **305** (1996), 311-327.
- [23] L. Ferrer, A. Martínez y F. Milán, 'An extension of a theorem by K. Jörgens and a maximum principle at infinity for parabolic affine spheres', *Math. Z.* **230** (1999), 471-486.
- [24] J. A. Gálvez y A. Martínez, 'Estimates in surfaces with positive constant Gauss curvature', aparecerá en *Proc. A. M. S.*
- [25] J. A. Gálvez y A. Martínez, 'The Gauss map and second fundamental form of surfaces in \mathbb{R}^3 ', aparecerá en *Geom. Dedicata*.
- [26] J. A. Gálvez, A. Martínez y F. Milán, 'Contact holomorphic curves and flat surfaces', aparecerá en *Proc. of the 1999 Beijing Conf., Geometry and Topology of Submanifolds X*, World Scientific.
- [27] J. A. Gálvez, A. Martínez y F. Milán, 'Flat surfaces in the hyperbolic 3-space', *Math. Ann.* **316** (2000), 419-435.

- [28] V. G. Grove, 'On closed convex surfaces', Proc. A. M. S. **8** (1957), 777-786.
- [29] B. Guan y J. Spruck, 'Boundary value problems on \mathbb{S}^n for surfaces of constant Gauss curvature', Ann. of Math. **138** (1993), 601-624.
- [30] G. Hardy, J. Littlewood y G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 1989.
- [31] P. Hartman y L. Nirenberg, 'On spherical images whose jacobians do not change signs', Amer. J. Math. **81** (1959), 901-920.
- [32] E. Heintz, 'Über die existenz einer fläche konstanter mittlerer krümmung bei vorgegebener berandung', Math. Ann. **127** (1954), 258-287.
- [33] D. Hilbert, 'Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung', Trans. A. M. S. **2** (1901), 87-99.
- [34] S. Hildebrandt, 'On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature', Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 97-114.
- [35] E. Hille, *Lectures on ordinary differential equations*, Addison-Wesley, 1969.
- [36] D. A. Hoffman y R. Osserman, *The geometry of the generalized Gauss map*, Mem. A. M. S. 236, Providence, R. I., 1980.
- [37] D. A. Hoffman y R. Osserman, 'The Gauss map of surfaces in \mathbb{R}^n ', J. Diff. Geom. **18** (1983), 733-754.
- [38] D. A. Hoffman y R. Osserman, 'The Gauss map of surfaces in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4 ', Proc. London Math. Soc. **50** (3) (1985), 27-56.
- [39] D. Hoffman, H. Rosenberg y J. Spruck, 'Boundary value problems for surfaces of constant Gauss curvature', Comm. Pure Appl. Math. **XLV** (1992), 1051-1062.
- [40] K. Jörgens, 'Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ ', Math. Ann. **127** (1954), 130-134.
- [41] K. Kenmotsu, 'Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature', Math. Ann. **245** (1979), 89-99.
- [42] Y. Kitagawa, 'Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in \mathbb{S}^3 ', J. Math. Soc. Japan **40** (3) (1988), 457-476.
- [43] T. Klotz, 'Some uses of the second fundamental form on strictly convex surfaces', Proc. A. M. S. **14** (1963), 793-799.

- [44] W. S. Massey, '*Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean space*', Tohoku Math. J. **14** (1962), 73-79.
- [45] T. K. Milnor, '*Abstract Weierstrass Surfaces*', J. Diff. Geom. **15** (1980), 365-380.
- [46] T. K. Milnor, '*Harmonic maps and classical surface theory in Minkowski 3-space*', Trans. A. M. S. **280** (1983), 161-185.
- [47] G. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, Paris, 1809.
- [48] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, New York, Van Nostrand, 1969.
- [49] R. C. Reilly, '*Variational Properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms*', J. Diff. Geom. **8** (1973), 465-477.
- [50] H. Rosenberg, '*Hypersurfaces of constant curvature in space forms*', Bull. Sc. math. 2^e série **117** (1993), 211-239.
- [51] H. Rosenberg y J. Spruck '*On the existence of convex hypersurfaces of constant Gauss curvature in hyperbolic space*', J. Differential Geometry **40** (1994), 379-409.
- [52] E. A. Ruh, '*Asymptotic behaviour of non-parametric minimal hypersurfaces*', J. Differential Geometry **4** (1970), 509-513.
- [53] E. A. Ruh y J. Vilms, '*The tension field of the Gauss map*', Trans. A. M. S. **149** (1970), 569-573.
- [54] S. Sasaki, '*On complete surfaces with Gaussian curvature zero in 3-sphere*', Colloq. Math. **26** (1972), 165-174.
- [55] S. Sasaki, '*On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space*', Kodai Math. Sem. Rep. **25** (1973), 449-457.
- [56] M. Spivak, *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.
- [57] J. J. Stoker, '*Developable surfaces in the large*', Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 627-635.
- [58] J. L. Synge, *Geometrical Optics*, Cambridge University Press, London, 1937.
- [59] K. Tenenblat, '*Transformations of Manifolds and Applications to Differential Equations*', International Conference on G. D., Rio de Janeiro, 1996.

-
- [60] M. Umehara y K. Yamada, '*A parametrization of the Weierstrass formulae and perturbation of complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 into the hyperbolic 3-space*', J. Reine Angew. Math. **432** (1992), 93-116.
- [61] M. Umehara y K. Yamada, '*Complete surfaces of constant mean curvature-1 in the hyperbolic 3-space*', Ann. of Math. **137** (1993), 611-638.
- [62] J. A. Volkov y S. M. Vladimirova, '*Isometric immersions of the Euclidean plane in Lobačevskii space*', Math. Notes **10** (1971), 655-661.
- [63] R. Walden, '*Eindeutigkeitsätze für II-isometrische Eiflächen*', Math Z. **120** (1971), 143-147.
- [64] J. L. Weiner, '*The Gauss map for surfaces: Part 2. The Euclidean case*', Trans. A. M. S. **293** (1986), 447-466.
- [65] T. Weinstein, '*An introduction to Lorentz surfaces*', Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1996.

 Biblioteca Universitaria de Granada


01066676