

T
13
112

EFECTO DE LOS GRADOS
SUBNUCLEARES DE LIBERTAD
EN LA RESPUESTA
CUASIELÁSTICA NUCLEAR

José Enrique Amaro Soriano

TESIS DOCTORAL

UNIVERSIDAD DE GRANADA

MCMXCIII

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA	
GRANADA	
Nº Documento	<u>619655599</u>
Nº Copia	<u>121201778</u>



DEPARTAMENTO DE FISICA MODERNA

ANTONIO M. LALLENA

Tel. (34)(58)243216

(34)(58)274208

FAX (34)(58)274208

TELEX 78435 EDUCI E

LALLENA@ugr.es

16487::LALLENA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA
E-18071 GRANADA
SPAIN

ANTONIO M. LALLENA ROJO, Profesor Titular de Física Atómica, Molecular y Nuclear del Departamento de Física Moderna de la Universidad de Granada

CERTIFICO:

Que la presente memoria **Efecto de los grados subnucleares de libertad en la respuesta cuasielástica nuclear** ha sido realizada por D. José Enrique Amaro Soriano, Becario del plan general del F.P.I. adscrito a este Departamento, bajo mi dirección y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Granada, 1 de septiembre de 1993

Antonio M. Lallena Rojo



José E. Amaro Soriano

Este trabajo que tienes en tus manos es resultado de varios años de colaboración entre investigadores del departamento de Física Moderna de la Universidad de Granada y del INFN y el Dipartimento di Fisica de la Università di Lecce (Italia). Los doctores Antonio M. Lallena y Giampaolo Co' fueron, en uno y otro país, las cabezas planificadoras del proyecto, del que también formaron parte Enrico M.V. Fassanelli y yo mismo, claro.

A Antonio debo agradecerle su constante y efectiva dedicación en todo momento posible, llevada a cabo tanto en Granada como en Lecce, así como sus sagaces hallazgos de errores vitales, que nos llevaban de cabeza, en algunas ecuaciones y en los programas de ordenador. En muchos momentos de estancamiento él ha sido quien ha tirado de mí para llegar a la feliz consecución del trabajo.

Giampaolo ha soportado mi presencia mucho menos tiempo que Antonio, pero más intensamente. Debo agradecerle que me ofreciera desinteresadamente su casa, sus conocimientos culinarios, me presentara a sus amigos y me prestara sus tebeos. Su aportación científica y su experiencia sobre el pico cuasielástico han sido imprescindibles para mi tesis. Cientos de mensajes almacenados en lo más recóndito de mi correo electrónico avalan lo que digo. Debo citar también a Enrico, con quien trabajé durante mi primera visita a Lecce, y cuya Tesi di Laurea ayudó a sentar la base preliminar del proyecto. No debo olvidarme tampoco de Maria Concetta Gerardi, secretaria del Dipartimento di Fisica, que contribuyó en gran medida a hacerme tan agradables las estancias en el Dipartimento, me echó una mano en todas las gestiones que necesité realizar e iba a recogernos todas las mañanas durante un mes, a mi mujer y a mí, al piso en donde vivimos en Arnesano, entre muchas otras cosas.

Volviendo a Granada, debo agradecer las discusiones y comentarios de Carmen García Recio y Sara Cruz, ahora en Sevilla, acerca de la respuesta nuclear en el gas de Fermi.

Otras interacciones científicas y humanas, de características muy diversas, también han ayudado, en mayor o menor medida, y cada una a su manera, a la consecución de esta tesis. Entre otros, están: Fernando Arias, que me echó una mano con el UNIX en mis comienzos, Petra Cobos, que me ha dado ánimos desde un principio, Enrique Buendía por su apoyo logístico diario durante todo el verano del 93, María Jesús, que me ayudó a montar las figuras, entre otras muchas cosas, y en general todos mis compañeros del Departamento de Física Moderna.

A María Jesús

Índice

Introducción	1
1 Dispersión cuasielástica de electrones por núcleos.	7
1.1 Sección eficaz	7
1.2 Desarrollo multipolar de los operadores electromagnéticos.	9
1.3 Operadores electromagnéticos	9
1.3.1 Operador de carga	10
1.3.2 Operadores de corriente a un cuerpo	11
1.3.3 Corrientes de intercambio	12
1.3.4 Corrientes de intercambio dinámicas	15
1.4 Estructura nuclear	16
1.5 Clasificación de las respuestas atendiendo a los estados finales	18
2 Respuesta nuclear en el modelo de capas	21
2.1 Elementos de matriz de transición	21
2.1.1 Transiciones a estados finales a $1p - 1h$	22
2.1.2 Transiciones a estados finales a $2p - 2h$	25
2.2 Detalles del cálculo y análisis del modelo	26
2.2.1 Dependencia de la respuesta con el campo nuclear medio	27
2.2.2 Convergencia de la suma de multipolos y ondas parciales	29
2.2.3 Comparación con los resultados RPA	44
2.3 Factor de forma electromagnético del nucleón	46
2.3.1 Parametrizaciones de los factores de forma	46
2.3.2 Indeterminación en las respuestas	49
2.4 Efectos de las MEC	57
2.4.1 Factores de forma electromagnéticos en las MEC	57

2.4.2	Repuestas con estados finales a $1p - 1h$	60
2.4.3	Repuestas con estados finales a $2p - 2h$	65
2.4.4	Importancia relativa de las contribuciones de las MEC	72
2.4.5	Aproximación estática del pión	75
2.4.6	Factor de forma pión-nucleón	81
2.4.7	Efecto total de las MEC en la respuesta transversal	84
2.5	Comparación con los datos experimentales	87
2.6	Estados finales con dos partículas en el discreto y resonancias a baja energía	90
2.6.1	Estados finales con dos partículas en el discreto	90
2.6.2	Resonancias a baja energía	90
3	Efectos del tamaño finito nuclear	99
3.1	Repuestas en el modelo del gas de Fermi	100
3.2	Cálculo de las repuestas	106
3.3	Aproximación de la densidad local	109
3.4	Las MEC en el gas de Fermi	114
4	Contribución de la corriente de isóbaro	121
4.1	Elementos de matriz eléctricos y magnéticos	121
4.1.1	Transiciones a estados finales a $1p - 1h$	122
4.1.2	Transiciones a estados finales a $2p - 2h$	124
4.2	Factor de forma electromagnético de la corriente de isóbaro	126
4.3	Estados finales a $1p - 1h$	127
4.3.1	Convergencia de la suma en multipolos	127
4.3.2	Efecto sobre la respuesta a un cuerpo	127
4.3.3	Términos de interferencia	132
4.3.4	Repuestas puras de las MEC	132
4.3.5	Comparación con el gas de Fermi	137
4.4	Estados finales a $2p - 2h$	140
4.5	Efecto total de las MEC	143
5	Conclusiones y perspectivas	147
	Apéndice A Sección eficaz del proceso (e, e')	151

Apéndice B Corrientes de intercambio dinámicas	157
B.1 Interacción electromagnética	157
B.2 Interacción entre piones y nucleones no relativistas	158
B.3 Introducción del campo electromagnético	160
B.4 Corriente seagull	162
B.5 Interacción pión-fotón	166
B.6 Corriente piónica	167
Apéndice C Operadores multipolares de las MEC	171
C.1 Elementos de matriz entre estados nucleares	171
C.2 Operadores tensoriales básicos	172
C.3 Expresiones tensoriales de las corrientes	173
C.4 Operador multipolar eléctrico	175
C.4.1 Operador eléctrico piónico	176
C.4.2 Operador eléctrico seagull	177
C.4.3 Operador eléctrico de isóbaro	179
C.5 Operador multipolar magnético	182
C.5.1 operador magnético de isóbaro	182
C.6 Elementos de matriz de los operadores básicos	184
C.7 Elementos de matriz magnéticos de la corriente de isóbaro	186
Apéndice D Componentes radiales del propagador del pión	191
Apéndice E Interacción en el estado final (FSI)	197
E.1 Respuesta lineal.	197
E.2 Hamiltoniano efectivo.	198
E.3 Respuesta efectiva.	199
E.4 Autoenergía de los estados a $1p - 1h$	201
Apéndice F Respuesta de materia nuclear	205
F.1 Elementos de matriz $1p - 1h$ genéricos	205
F.2 Respuesta longitudinal	206
F.3 Respuesta transversal a un cuerpo	207
F.3.1 Elementos de matriz de la corriente de convección	207
F.3.2 Respuesta C	208

F.3.3	Elemento de matriz de la corriente de magnetización	208
F.3.4	Respuesta M	209
F.3.5	Respuesta de interferencia CM	210
F.4	Respuesta transversal de las MEC	210
F.4.1	Elementos de matriz de la corriente seagull	210
F.4.2	Respuesta de interferencia MS	212
F.4.3	Respuesta de interferencia CS	214
F.4.4	Elementos de matriz de la corriente Piónica	214
F.4.5	Respuesta de interferencia $M\pi$	215
F.4.6	Respuesta de interferencia $C\pi$	216
F.4.7	Elementos de matriz de la corriente de isóbaro	217
F.4.8	Respuesta de interferencia $M\Delta$	219
F.4.9	Respuesta de interferencia $C\Delta$	220
F.5	Cálculo de las integrales I^{ab}	220
F.5.1	Integrales básicas	220
F.5.2	Integrales con denominadores cuadráticos	224
F.5.3	Integrales Seagull	225
F.5.4	Integrales piónicas	225
F.5.5	Integral Δ	228
F.6	Cálculo analítico de las funciones respuesta	228
F.6.1	Sistema de coordenadas	228
F.6.2	Integración de la función respuesta	230

Introducción

Los experimentos de dispersión elástica e inelástica de electrones son la base del actual conocimiento de muchas de las propiedades del estado fundamental del núcleo atómico así como de las de sus principales modos de excitación. El propósito de estos experimentos es estudiar la reacción de un núcleo cuando se le comunica una cierta energía y momento lineal, haciendo incidir sobre él un haz de electrones de alta energía. El estudio de la distribución angular y de la energía de los electrones dispersados tras la colisión permite obtener la sección eficaz del proceso, cuyo perfil, que se muestra en la Fig. 1, refleja las características generales del espectro de excitación del núcleo, así como de los procesos asociados a las distintas zonas del mismo.

En primer lugar aparece el pico elástico (I) en donde no se transfiere ninguna energía y el núcleo permanece en su estado fundamental tras la colisión. Seguidamente se observa una serie de picos aislados (II) que corresponden a las excitaciones de los distintos estados nucleares ligados. Al aumentar la energía aparece la región de las resonancias gigantes (III), que está generada por el solapamiento de diversos picos, de varios MeV de anchura, originados por las excitaciones de modos colectivos nucleares y que son inestables respecto a la emisión de uno o varios nucleones.

A continuación aparece un gran pico (IV), de varios cientos de MeV de anchura, que se encuentra centrado a una energía de excitación $\omega \sim q^2/2M$, con q el momento transferido al núcleo y M la masa del nucleón; esta energía es igual a la energía cinética que adquiriría un nucleón que, inicialmente en reposo, colisionara directamente con el electrón de manera elástica, y de ahí que esta región del espectro sea conocida con el nombre de *pico cuasielástico*. Podemos por tanto considerar esta región como la que corresponde al proceso de colisión elástica del electrón incidente con un nucleón del núcleo [deF66]; el movimiento del nucleón y su energía de enlace son los aspectos que determinan la anchura del pico y su posición exacta.

A energías de excitación más altas aparece la región donde se excitan las resonancias nucleónicas y se emiten mesones reales (V). Finalmente se encuentra la región inelástica profunda en la que se ponen de manifiesto los grados de libertad de *quarks* [Mul91].

En este trabajo nos centramos en el pico cuasielástico cuya compresión es aún un problema abierto. En particular estamos interesados en el proceso de dispersión elástica inclusiva de electrones. En principio, este proceso presenta todas las características que permiten el uso de las aproximaciones comúnmente asumidas en física nuclear. Así, el momento y la energía transferidos al núcleo por el electrón son lo suficientemente elevados como para que la aproximación de impulso resulte adecuada; en el mecanismo de

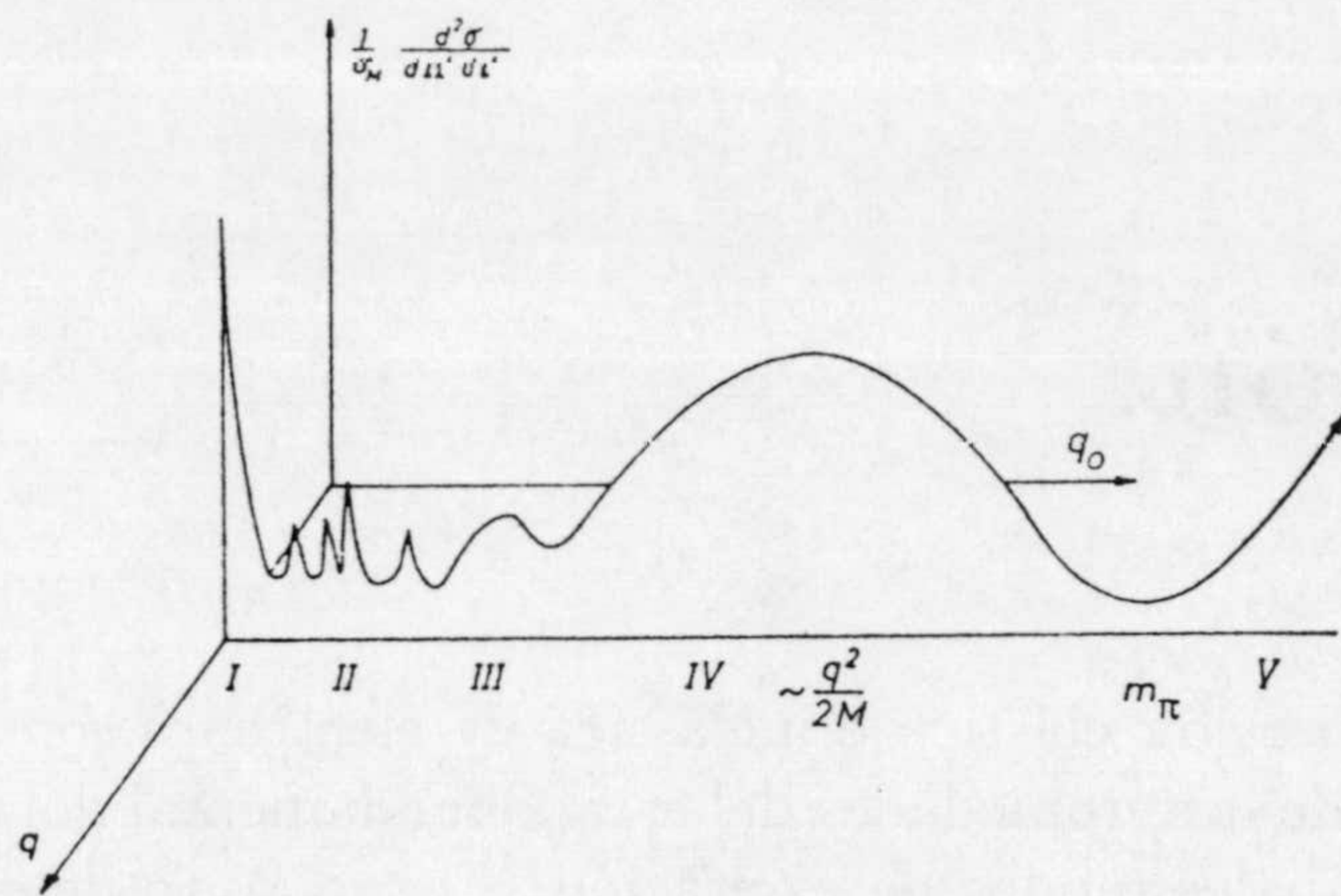


Figura 1: Esquema de la sección eficaz de dispersión de electrones por núcleos para un momento transferido concreto. Las distintas regiones están marcadas con números romanos. El pico cuasielástico corresponde a la zona (IV).

la reacción sólo está involucrado un nucleón y cabe suponer que otros procesos intermedios o a dos cuerpos contribuyen en mucha menor cuantía. Además la interacción entre el electrón y el núcleo (la interacción electromagnética) es bien conocida. Por lo tanto el mecanismo de la reacción está bajo control y la descripción de la dinámica del electrón puede ser separada completamente de la del núcleo. Por otro lado, es de suponer que un simple modelo nuclear de campo medio pueda usarse para describir el proceso de excitación, ya que está dominado, al menos a priori por el movimiento de un único nucleón. De hecho, los modelos que describen la dispersión cuasielástica de electrones en términos de la emisión de un nucleón, pueden reproducir bastante bien la sección eficaz inclusiva. Por ejemplo, el modelo de gas de Fermi describe con bastante precisión la posición y la anchura del pico cuasielástico para distintos núcleos y diferentes momentos trasferidos [Czy63, Mon71, Whi74], si se hace uso de un momento de Fermi efectivo adecuado.

La situación cambia cuando se lleva a cabo una separación de la sección eficaz en sus componentes longitudinal (de carga) y transversal (de corriente), combinando dos conjuntos de experimentos con el mismo valor del momento y energía transferidos, pero con diferentes ángulos de dispersión (separación de Rosenbluth [Ros50]). Los primeros experimentos de este tipo en el pico cuasielástico se hicieron en la pasada década usando como blanco diferentes núcleos y se obtuvieron las mencionadas respuestas para $^2,^3\text{H}$ y $^3,^4\text{He}$ [Mar85, Ber87, Dow88], ^{12}C [Bar83], $^{40,48}\text{Ca}$ y ^{56}Fe [Alt80, Dea83, Hot84, Mez85, Dea86], ^{208}Pb [Ber90] y ^{238}U [Bla86]. Los resultados obtenidos muestran que los anteriores modelos, que reproducen bien la sección eficaz total, no pueden describir simultáneamente las respuestas de carga y corriente. En lo que respecta a la primera, los datos experimentales resultan ser apreciablemente inferiores a los calculados, mientras que para la segunda los papeles se invierten y la teoría subestima considerablemente el experimento (ver p. ej. [Fro85]). Como consecuencia se pone de manifiesto que la excitación cuasielástica nuclear es un proceso más complicado de lo que podría pensarse a primera vista.

En los últimos años se ha trabajado intensamente para resolver este problema, enfocando los esfuerzos en aras de una mejora en la descripción de los distintos mecanismos que intervienen en el proceso. Así es bien conocido que los efectos de la interacción de estados finales (FSI), de las corrientes mesónicas de intercambio (MEC), de las correlaciones de corto alcance y de la excitación del isóbaro Δ , entre otros, resultan ser fundamentales para una correcta comprensión de esta región del espectro de excitación nuclear.

En un principio la atención se centró en la respuesta longitudinal, debido al hecho de que, en ese caso, la excitación electromagnética está dominada por la densidad de carga nuclear, la cuál puede aproximarse, de manera bastante correcta, como suma de las distribuciones individuales de los nucleones. Los grados subnucleares de libertad, tales como el intercambio de mesones, dan lugar a contribuciones que pueden ser despreciadas en una primera aproximación, lo que simplifica enormemente el tratamiento. Por otro lado, la existencia de la regla de suma de Coulomb (ver p. ej. [Orl91]), que relaciona la respuesta longitudinal con la carga nuclear, impone unos límites bastante precisos a la intensidad total de dicha respuesta, lo que supone un test adicional para los modelos usados.

Como ya hemos indicado antes, los modelos sencillos que describen la sección eficaz total presentan una sobrevaloración de los resultados experimentales. Sin embargo, la situación no mejora cuando se utilizan modelos más sofisticados como el modelo de capas con potencial de Woods-Saxon [Cap91] o de Hartree-Fock [Koh83], TDA [Del85], RPA en sistemas finitos [Cav84, Bri87, Shi89, Cav90] e infinitos [Alb86, Str87, Alb90] o la teoría OCBF en materia nuclear [Fan87, Fab89]. En estos cálculos se pone de manifiesto la necesidad de incluir configuraciones más complicadas en el modelo nuclear.

En el marco no relativista, se ha podido demostrar que es posible obtener una descripción razonable de los datos si se incluyen configuraciones a dos partículas-dos agujeros (2p-2h) en la función de onda nuclear [Dro87, Fan87, Co'88, Dro89, Fab89, Cap91] y correlaciones a muchos cuerpos [Bou89, Sag89, Bou91]

Alternativamente, se han propuesto otros mecanismos, más especulativos, ligados al *swelling* o aumento de tamaño del nucleón en el núcleo [Nob81,83, Cel85, Bro89b] o a efectos dinámicos relativistas [Bro89a, Chi89, Weh89, Hor90, Tan90]. Aunque las contribuciones de este tipo de procesos a la respuesta longitudinal permiten obtener un muy buen acuerdo con el experimento, es preciso tomarlos con cautela debido a los distintos problemas que pueden llevar acompañados (ver p. ej. la discusión que a este respecto aparece en la Ref. [Bou91]).

Sin embargo, en este punto en que la situación de la respuesta longitudinal parece resuelta, el problema se traslada a la respuesta transversal. Anteriormente hemos indicado que los modelos simples subestiman los valores experimentales. Evidentemente, la consideración adicional de mecanismos como los que acabamos de señalar van a dar lugar, también en este caso, a una reducción de la respuesta, con lo que el desacuerdo con la teoría se incrementa aún más [Cel85, Dro89].

Es importante señalar, no obstante, que el cálculo de la respuesta transversal no es tan simple como el de la longitudinal, siendo necesario incluir, para que pueda considerarse realista, las contribuciones debidas a las MEC y a la excitación de la resonancia bariónica

$\Delta(1232)$, además de las generadas por la FSI. A diferencia de lo que ocurre para la carga nuclear, estas contribuciones producen efectos no despreciables en la respuesta transversal, aceptándose usualmente que su consideración puede explicar, al menos hasta un cierto límite, la discrepancia teoría-experimento observada.

A pesar de ello, la mayoría de los cálculos de la respuesta transversal que se han llevado a cabo en núcleos finitos no incluyen dichas contribuciones. Independientemente de la complejidad del modelo elegido, modelo de capas [Koh83, Cap91], SRPA [Dro89] o RPA en el continuo [Bub91], en sistemas no relativistas, o cálculos relativistas basados en el modelo $\sigma-\omega$ [Bro89a, Hor90], no se consigue una mejora en la descripción del experimento, lo que pone de manifiesto la necesidad de considerar los efectos de los mecanismos subnucleares antes mencionados.

La inclusión de tales efectos no resulta ser una tarea simple y es por ello que sólo se han tenido en cuenta en un número reducido de cálculos [Koh81, Alb84, 86, Blu89, Alb90, Dek91], todos ellos con el común denominador del tratamiento del núcleo como un sistema infinito de nucleones, en el que, debido a la invarianza traslacional, las funciones de onda monoparticulares resultan ser ondas planas, lo que permite simplificar considerablemente los cálculos que deben realizarse, tanto a nivel analítico como computacional. Sin embargo, los resultados obtenidos no han podido describir de forma completa los datos experimentales, máxime si se tiene en cuenta que la comparación entre teoría y experimento exige la consideración de la FSI.

Recientemente se han llevado a cabo cálculos muy completos en núcleos con $A < 4$, en los que las respuestas longitudinal y transversal se han evaluado en el marco de un modelo en el que los estados se obtienen resolviendo la ecuación de Schrödinger en el formalismo de la función de Green mediante técnicas de tipo Monte Carlo y que incluye las MEC y la corriente de isóbaro [Car91,93]. El potencial utilizado es el V-14 con un potencial a tres cuerpos adicional de forma que puede describirse la energía de enlace de los núcleos en cuestión. El acuerdo logrado con los datos existentes es excelente, lo que ha permitido clarificar mucho la situación del problema de la separación L/T en el pico cuasielástico. Así, podemos ahora decir que dicho problema está resuelto básicamente para los núcleos ligeros; para los núcleos medios y pesados la respuesta longitudinal puede considerarse bajo control, mientras que el *puzzle* correspondiente a la transversal resta aún por resolver.

La presente Tesis se enmarca en esta situación de estudio de los núcleos medios y pesados y en ella se muestran los resultados del primer cálculo de la respuesta transversal llevado a cabo en dichos núcleos, que incluye las contribuciones de las MEC, de la excitación de la Δ y de otros grados subnucleares de libertad, y en el que el núcleo se trata como un sistema finito de nucleones. Los desarrollos se han llevado a cabo para núcleos de capa cerrada, cuyos estados nucleares han sido descritos en el marco del modelo de capas. A pesar de su sencillez el uso de este modelo está justificado ya que, como veremos, los resultados que se obtienen en aproximación de impulso son muy similares a los que proporciona un modelo nuclear mucho más complejo como es la RPA en el continuo.

Además, y dentro de esta aproximación de impulso, estudiamos la dependencia de la respuesta con los parámetros del potencial medio (que en nuestro caso es un potencial de Woods-Saxon) y con el factor de forma electromagnético del nucleón. Es importante

señalar que las distintas parametrizaciones que de este último existen dan lugar a incertidumbres en la respuesta que no son en absoluto despreciables.

En relación a los grados subnucleares, hemos incluido las corrientes piónica, seagull y de isóbaro, habiendo estudiado en ellas los efectos de la consideración del propagador dinámico del pión y del factor de forma pión-nucleón. La introducción del propagador dinámico conlleva la sustracción de la energía del pión en su denominador; como quiera que dicha energía se toma como cero en el límite estático usualmente utilizado, se espera un aumento en la respuesta resultante. Por otra parte, el factor de forma pión-nucleón tiene en cuenta el tamaño finito de estas partículas y produce una disminución en la intensidad de la interacción pión-nucleón, por lo que su introducción en los cálculos debería producir una disminución en la respuesta con respecto a su valor cuando el pión se considera puntual.

Como hemos dicho anteriormente, el cálculo de la respuesta cuasielástica nuclear se ha llevado a cabo, en una gran parte de los trabajos existentes en la literatura, usando para el núcleo modelos de sistema infinito, como el gas de Fermi, que a menudo incluyen mejoras de diversa naturaleza para tener en cuenta el tamaño finito del núcleo, la interacción nuclear, efectos relativistas, etc. En este trabajo hemos calculado también la función respuesta en un modelo de este tipo, con un objetivo doble. En primer lugar tratar de estimar los efectos debidos al tamaño finito del núcleo, tales como los de superficie y de capas, que estando contenidos en el cálculo realizado en el modelo de capas, no lo están en este tipo de modelos de núcleo infinito. En segundo lugar analizar las diferencias que se encuentran al comparar nuestro cálculo en el modelo de capas con los cálculos previos realizados en el modelo de gas de Fermi por otros autores, así como clarificar algunas inconsistencias que aparecen entre algunos de dichos cálculos. Para ello hemos comparado los resultados obtenidos en el modelo de capas con distintas aproximaciones basadas en el modelo de gas de Fermi. En particular hemos analizado con detalle la aproximación de la densidad local (LDA), dada su importancia como modelo para estudiar la respuesta nuclear tanto a pruebas electromagnéticas como hadrónicas.

La comparación con los datos experimentales constituye la parte más problemática del presente trabajo debido a que es necesario tener en cuenta la interacción de estados finales (FSI). Este efecto no está considerado en el modelo que hemos desarrollado y, como ya hemos comentado anteriormente, resulta ser uno de los mecanismos fundamentales a la hora de lograr una descripción razonable del experimento. La FSI parte del hecho de que la función respuesta nuclear en la RPA se modifica debido al acoplamiento de los estados finales a $1p - 1h$ con los del tipo a $2p - 2h$ en adelante. Nosotros usamos aquí un modelo fenomenológico [Smi88] de forma tal que la comparación con el experimento no carezca de significación.

El modelo desarrollado ha sido aplicado al caso concreto de los núcleos ^{12}C y ^{40}Ca . A pesar de la gran cantidad de tiempo de computación que requiere el modelo desarrollado, tanto el cálculo de las respuestas longitudinal y transversal en el modelo de capas, como su comparación con los resultados que proporcionan las distintas aproximaciones basadas en el modelo de gas de Fermi, se han llevado a cabo en ambos núcleos, siempre que ha sido posible, lo que ha permitido formular las conclusiones con una mayor perspectiva.

La estructuración de este trabajo es la siguiente: en el capítulo 1 se discute el modelo teórico de dispersión cuasielástica de electrones por núcleos que hemos utilizado. En el capítulo 2 presentamos los resultados de nuestros cálculos de las funciones respuesta con modelo de capas, y analizamos la influencia de los diversos mecanismos capaces de modificarla que hemos considerado, tales como factor de forma electromagnético del nucleón, MEC (seagull y piónica), propagador dinámico del pión, factor de forma pión-nucleón y FSI. Algunos de los resultados de este capítulo han sido publicados en las Refs. [Ama92a,93]. En el capítulo 3 comparamos los anteriores resultados con los que proporciona el modelo de gas de Fermi y discutimos la validez de éste para el estudio de la respuesta cuasielástica de núcleos finitos así como los posibles efectos asociados al tamaño finito nuclear. En el capítulo 4 analizamos el efecto de la corriente de isóbaro, tanto en el modelo de capas como en el gas de Fermi. A continuación exponemos las conclusiones de este trabajo y avanzamos las perspectivas que el modelo desarrollado abre para un futuro. Finalmente, incluimos, por completitud, algunos apéndices conteniendo cálculos y descripciones detalladas de diversas expresiones que hemos utilizado en el presente trabajo.

Capítulo 1

Dispersión cuasielástica de electrones por núcleos.

En este capítulo describimos el formalismo teórico en el que nos hemos basado para llevar a cabo el estudio de las funciones respuesta longitudinal y transversal nucleares en el pico cuasielástico. En primer lugar se discute la sección eficaz diferencial para el proceso de dispersión de electrones por núcleos y su relación con las funciones de respuesta nuclear. Seguidamente, pasamos a describir, en la sección 2, la forma que adquieren dichas funciones respuesta cuando los estados nucleares tienen momento angular definido. En la sección 3 introducimos los operadores de carga y corriente nucleares, prestando especial atención a las MEC, cuyo estudio representa la parte principal de este trabajo. Por último, el modelo de capas nuclear empleado y el método de obtención de las funciones monoparticulares, así como la forma final que adquieren las funciones respuesta, quedan descritos en la sección 4.

1.1 Sección eficaz

El punto de partida para el estudio de la respuesta nuclear es la sección eficaz diferencial del proceso (e, e') . En nuestra descripción (ver Fig. 1.1), sobre el núcleo atómico hacemos incidir un electrón en régimen ultrarelativista, es decir, cuya masa en reposo es despreciable frente a su energía incidente, E . Este electrón comunica al núcleo un momento $q = |\mathbf{q}|$ y una energía $\omega = E - E'$ (donde E' es la energía del electrón saliente) y es dispersado con un ángulo θ . En la *aproximación de Born de ondas planas* (PWBA), según la cual los electrones incidente y dispersado están descritos por ondas planas y la interacción electromagnética está caracterizada por el intercambio de un solo fotón virtual, la sección eficaz correspondiente por unidad de energía (E') y por unidad de ángulo sólido (Ω') del electrón saliente, puede escribirse en la forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \sigma_M \left[\frac{q_\mu^4}{q^4} R_L(q, \omega) + \left(\tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q_\mu^2}{2q^2} \right) R_T(q, \omega) \right], \quad (1.1)$$

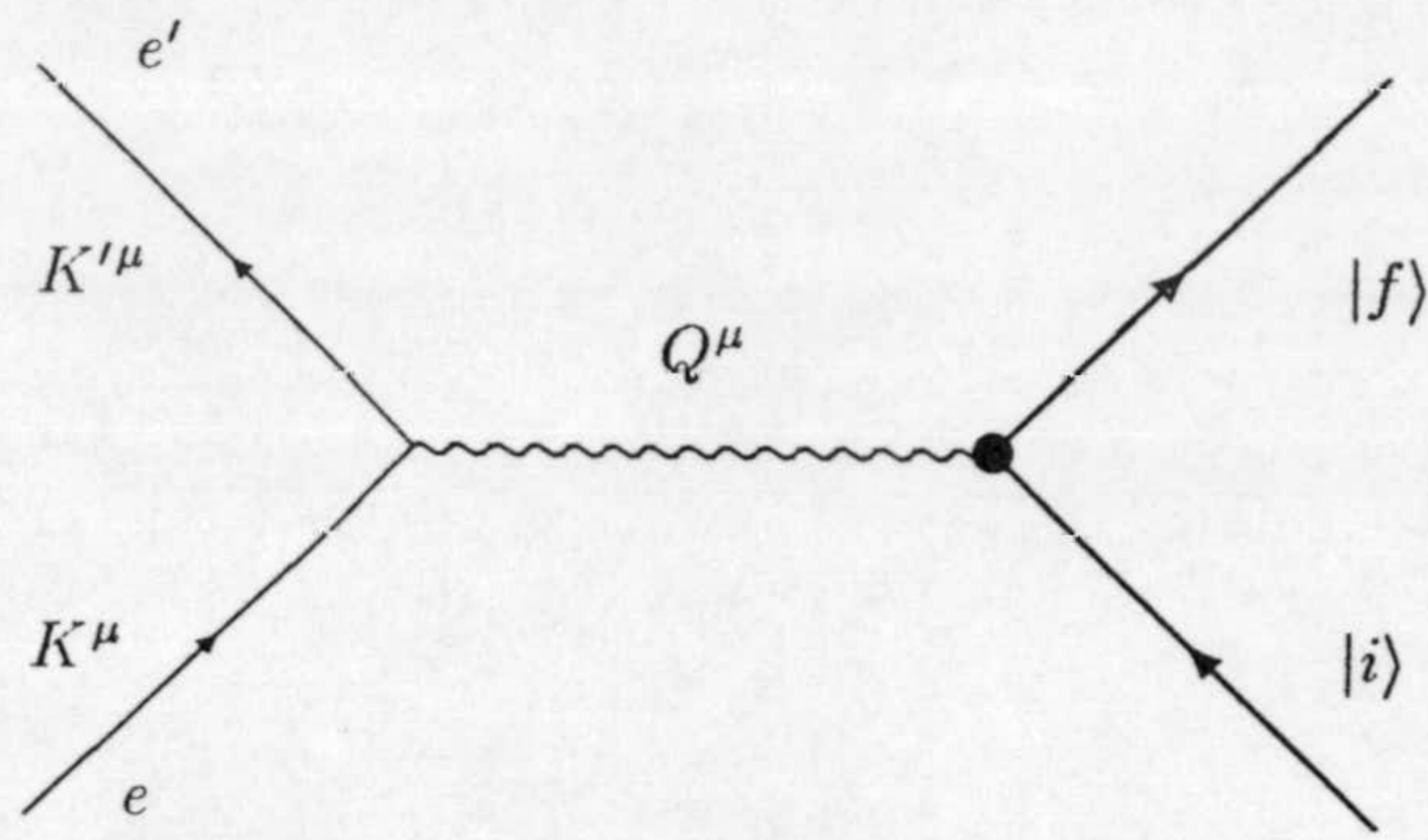


Figura 1.1: Diagrama de intercambio de un fotón en la dispersión electrón-núcleo

en donde $q^\mu = (\omega, \mathbf{q})$ es el cuadrimomento transferido, que verifica la relación $q_\mu^2 = \omega^2 - q^2$, y hemos indicado con σ_M la sección eficaz de Mott:

$$\sigma_M = \left(\frac{\alpha \cos(\theta/2)}{2E \sin^2(\theta/2)} \right)^2. \quad (1.2)$$

Las funciones R_L y R_T son, respectivamente, las funciones respuesta longitudinal y transversal nucleares. Estas funciones dependen sólo del momento y la energía transferidos al núcleo y se expresan en términos de los elementos de matriz de transición de los operadores de carga y de corriente nuclear. En concreto, para un núcleo de capas cerradas, las funciones respuesta se escriben en la forma:

$$R_L(q, \omega) = \sum_n \delta(E_n - \omega) |\langle n | \rho(\mathbf{q}) | 0 \rangle|^2 \quad (1.3a)$$

$$R_T(q, \omega) = \sum_n \delta(E_n - \omega) |\langle n | \mathbf{J}_T(\mathbf{q}) | 0 \rangle|^2, \quad (1.3b)$$

en donde $|0\rangle$ denota el estado fundamental del núcleo y $|n\rangle$ representa un estado excitado que tiene energía E_n relativa a la del estado fundamental ($E_0 = 0$). Además los operadores

$$\rho(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{x}) \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (1.4b)$$

son las transformadas de Fourier de los operadores de carga y corriente nucleares, y \mathbf{J}_T es la corriente transversal, esto es, la componente de \mathbf{J} perpendicular al vector \mathbf{q} .

La deducción de las anteriores expresiones se presenta con detalle en el apéndice A, donde se muestra que esta descomposición de la sección eficaz en una parte transversal y otra de carga puede hacerse siempre y cuando se cumpla la ecuación de continuidad, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}) - [H, \rho(\mathbf{q})] = 0$, (con H el hamiltoniano nuclear), ya que en tal caso la parte longitudinal de la corriente (parte paralela a \mathbf{q}) es absorbida dentro del término de carga.

1.2 Desarrollo multipolar de los operadores electromagnéticos.

Antes de describir la forma de los operadores de carga y corriente que usamos para calcular la respuesta nuclear, vamos a indicar cómo se modifican las expresiones de las respuestas (1.3a,1.3b) cuando los estados nucleares tienen simetría bien definida bajo rotaciones, así como paridad determinada. En tales circunstancias, el elemento de matriz de transición, de un operador dado, entre dos estados nucleares cualesquiera, es nulo salvo para las componentes del operador que están permitidas por conservación de momento angular y paridad; por lo tanto es conveniente proceder a un desarrollo multipolar del citado operador. En el caso de los operadores de carga y de corriente transversal que nos ocupan, este procedimiento permite descomponer el primero en términos de una suma de (infinitos) multipolos denominados *coulombianos*, $M_{JM}(q)$, que tienen paridad natural $(-1)^J$, mientras que el segundo se expresa en forma de una suma (también infinita) de operadores multipolares transversales *eléctricos*, $T_{JM}^E(q)$, cuya paridad es la misma que la de los multipolos coulombianos, y *magnéticos*, $T_{JM}^M(q)$, que presentan paridad *no natural* $(-1)^{J+1}$ [deF66, Don80, Cio80]. La forma concreta de estos operadores es la siguiente:

$$M_{JM}(q) = \int d^3r j_J(qr) Y_{JM}(\hat{r}) \rho(\mathbf{r}) \quad (1.5a)$$

$$T_{JM}^E(q) = \frac{1}{q} \int d^3r \{ \nabla \times [j_J(qr) \mathbf{Y}_{JJ}^M(\hat{r})] \} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.5b)$$

$$T_{JM}^M(q) = \int d^3r j_J(qr) \mathbf{Y}_{JJ}^M(\hat{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (1.5c)$$

en donde j_J es una función esférica de Bessel, Y_{JM} es un armónico esférico e $\mathbf{Y}_{JJ}^M(\hat{r})$ es un armónico esférico vectorial.

Usando esta descomposición en multipolos, y teniendo en cuenta que el estado fundamental de los núcleos de capa cerrada tiene espín cero y paridad positiva, las respuestas nucleares (1.3a) y (1.3b) vienen dadas por:

$$R_L(q, \omega) = 4\pi \sum_{\alpha} \sum_{J=0}^{\infty} |\langle \alpha, J || M_J(q) || 0 \rangle|^2 \delta(E_{\alpha} - \omega) \quad (1.6a)$$

$$R_T(q, \omega) = 4\pi \sum_{\alpha} \sum_{J=1}^{\infty} \left\{ |\langle \alpha, J || T_J^E(q) || 0 \rangle|^2 + |\langle \alpha, J || T_J^M(q) || 0 \rangle|^2 \right\} \delta(E_{\alpha} - \omega) \quad (1.6b)$$

en donde hemos denotado los estados finales de energía E_{α} por $|\alpha, JM\rangle$. En las sumas anteriores, la paridad de cada operador multipolar selecciona la paridad los correspondientes estados nucleares finales que contribuyen a la respuesta en cada caso.

1.3 Operadores electromagnéticos

La interacción básica puesta en juego en el proceso que estamos analizando, esto es, la interacción entre el fotón y el núcleo, está determinada por los operadores de carga y

corriente nucleares. En nuestro modelo, el núcleo es un sistema de nucleones no relativistas y, en principio, puntuales, de forma que la carga nuclear está generada directamente por la carga de los nucleones, mientras que la corriente nuclear es debida tanto a la carga como al momento magnético de los mismos.

Además de estos términos, que denominaremos a un cuerpo, se han considerado los efectos producidos por el intercambio de mesones virtuales entre parejas de nucleones. En nuestro modelo sólo se han incluido tales efectos en la parte correspondiente a la corriente. Los términos de la misma a que dan lugar son las denominadas MEC, en las que se ha considerado la posible excitación adicional de una resonancia de isóbaro. No hemos considerado los efectos de dicho intercambio en la carga, donde se espera que produzcan contribuciones despreciables en una primera aproximación.

En este apartado describimos el operador de carga utilizado en nuestros cálculos, así como los distintos términos del operador de corriente. Además se discuten las modificaciones que deben incluirse a fin de tener en cuenta distintos efectos, tales como el del tamaño finito de los nucleones y el del propagador dinámico para el mesón intercambiado.

1.3.1 Operador de carga

En el modelo más simple, la carga nuclear viene descrita en términos de un operador a un cuerpo y, en representación de posiciones, está dada por

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^A \frac{1 + \tau_3^k}{2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (1.7)$$

donde \mathbf{r}_k denota las coordenadas del k -ésimo nucleón y τ_3 es la tercera componente de la matriz de isospín. En esta aproximación sólo los protones contribuyen a la respuesta de carga, ya que el neutrón es globalmente neutro. No obstante, la introducción de los factores de forma electromagnéticos del protón y del neutrón permiten una descripción más realista de la distribución interna de la carga en ambas partículas [Fol52, Leo73]. Estos factores de forma se introducen de forma multiplicativa en la transformada de Fourier de la carga asociada a cada nucleón $\rho(\mathbf{q})$, o bien directamente en la expresión del operador multipolar coulombiano $M_{JM}(q)$ y, en general, dependen del cuadrimomento $q^\mu = (\omega, \mathbf{q})$. Nosotros mantendremos su dependencia en la energía transferida ω , de manera que $\rho(\mathbf{q})$ pasa a ser $\rho(\mathbf{q}, \omega)$ y puede expresarse como

$$\rho(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{k=1}^A \left[G_E^P(q, \omega) \frac{1 + \tau_3^k}{2} + G_E^N(q, \omega) \frac{1 - \tau_3^k}{2} \right] e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_k}, \quad (1.8)$$

en donde $G_E^P(q, \omega)$ y $G_E^N(q, \omega)$ son los factores de forma eléctricos del protón y del neutrón, respectivamente.

Además de estos factores de forma, hemos incluido en el cálculo de la densidad de carga la denominada corrección de Darwin-Foldy. Esta corrección, que tiene parcialmente en cuenta los efectos relativistas asociados a la interacción total covariante entre el electrón y

el nucleón [Fri73, Cio80], se introduce multiplicando la carga $\rho(\mathbf{q}, \omega)$ por el factor [Yen54, Cio80]:

$$f_{\text{DF}}(q, \omega) = \left(1 + \frac{q^2 - \omega^2}{4M^2}\right)^{-1/2}. \quad (1.9)$$

Por último, hemos de señalar que, al igual que ocurre en la corriente, existe una contribución adicional a la carga proveniente del intercambio de mesones y que nosotros no hemos incluido en el cálculo de la respuesta longitudinal. La razón para ello estriba en que esta contribución es de orden $O(\kappa^2)$ (con $\kappa = q/2M$ y M la masa del nucleón), mientras que la del término a un cuerpo de la carga es de orden $O(\kappa^0)$. No ocurre lo mismo con la corriente, donde las contribuciones de la parte a un cuerpo y de las MEC a la respuesta transversal son de orden $O(\kappa^1)$ [Fri82, Alb90].

1.3.2 Operadores de corriente a un cuerpo

La corriente a un cuerpo, \mathbf{j}^{OB} , o corriente en aproximación de impulso, es la suma de dos términos: la corriente de convección, \mathbf{j}^{C} , debida a la carga de los nucleones en movimiento, y la de magnetización, \mathbf{j}^{M} , debida al momento magnético de los mismos. Así, podemos escribir esta corriente como

$$\mathbf{j}^{\text{OB}} = \mathbf{j}^{\text{C}} + \mathbf{j}^{\text{M}} \quad (1.10)$$

donde las dos componentes de la misma vienen dadas, en su forma más simple, por:

$$\mathbf{j}^{\text{C}}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^A \frac{-i}{2M} \frac{1 + \tau_3^k}{2} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \nabla_k + \nabla_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)] \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{j}^{\text{M}}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^A \frac{1}{2M} \left(\mu_{\text{P}} \frac{1 + \tau_3^k}{2} + \mu_{\text{N}} \frac{1 - \tau_3^k}{2} \right) \nabla \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \boldsymbol{\sigma}^k, \quad (1.11b)$$

en donde μ_{N} y μ_{P} son los momentos magnéticos del protón y del neutrón, respectivamente, y $\boldsymbol{\sigma}^k$ son las matrices de espín de Pauli correspondientes al nucleón k -ésimo.

De nuevo observamos que en esta aproximación sólo los protones contribuyen a la corriente de convección. Con el fin de tener en cuenta la estructura interna de los nucleones, y tal y como hicimos con la carga, hemos modificado las expresiones de estas corrientes de manera que, bien en la transformada de Fourier de las mismas, o bien en los operadores multipolares transversales asociados, hemos introducido el correspondiente factor de forma de cada nucleón. Así pues, las corrientes de convección y magnetización, incluyendo dichos factores de forma, están dadas por:

$$\mathbf{j}^{\text{C}}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{k=1}^A \frac{-i}{2M} \left(G_{\text{E}}^{\text{P}}(q, \omega) \frac{1 + \tau_3^k}{2} + G_{\text{E}}^{\text{N}}(q, \omega) \frac{1 - \tau_3^k}{2} \right) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_k} (2\nabla_k + i\mathbf{q}) \quad (1.12a)$$

$$\mathbf{j}^{\text{M}}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{k=1}^A \frac{-i}{2M} \left(G_{\text{M}}^{\text{P}}(q, \omega) \frac{1 + \tau_3^k}{2} + G_{\text{M}}^{\text{N}}(q, \omega) \frac{1 - \tau_3^k}{2} \right) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_k} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}^k, \quad (1.12b)$$

donde G_{M}^{P} y G_{M}^{E} son los factores de forma magnéticos del protón y neutrón, respectivamente.

1.3.3 Corrientes de intercambio

Como hemos indicado anteriormente, el estudio del efecto de las MEC en la respuesta transversal nuclear constituye el tema central del presente trabajo. Nosotros hemos tenido en cuenta las contribuciones provenientes de la parte de más largo alcance del potencial de intercambio de mesones, es decir, las debidas al intercambio de un solo pión. Dado que la parte de nuestro modelo que describe la dinámica nuclear es no relativista, hemos considerado dicho límite para las citadas corrientes, en el cuál puede demostrarse [Gar76, Fri77a] que los términos que contribuyen son los correspondientes a los diagramas representados en la Fig. 1.2. En esta figura, el diagrama (a) corresponde a la corriente *seagull* y se caracteriza por la creación de un par nucleón-antinucleón en el vértice fotón-nucleón; el diagrama (b), en el que el fotón interactúa directamente con el pión en vuelo, corresponde a la denominada corriente *piónica* y, finalmente, el diagrama (c) describe un proceso en el que se produce la excitación de una Δ virtual y corresponde a la corriente de *isóbaro*.

Otros términos debidos al intercambio de mesones más pesados no han sido incluidos en nuestro cálculo. Usualmente se considera [Van81] que las correspondientes contribuciones son, al menos en una primera aproximación, mucho menos importantes que las de las corrientes descritas anteriormente, de manera que no las hemos considerado aquí. Así, la corriente a dos cuerpos total es de la forma

$$\mathbf{j}^{\text{TB}} = \mathbf{j}^{\text{S}} + \mathbf{j}^{\pi} + \mathbf{j}^{\Delta} \quad (1.13)$$

Para calcular las expresiones de las corrientes asociadas a estos tres términos, es necesario adoptar un modelo concreto de interacción pión-nucleón, fotón-nucleón-delta y pión-nucleón-delta. Los modelos de interacción pión-nucleón comúnmente usados (acoplamiento pseudo-escalar y pseudo-vectorial) dan el mismo resultado en el límite no relativista, y las corrientes *seagull* y *piónica*, en representación de posiciones, toman la forma:

$$\mathbf{j}^{\text{S}}(\mathbf{r}) = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} [\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2]_z \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) + (1 \longleftrightarrow 2) \quad (1.14a)$$

$$\mathbf{j}^{\pi}(\mathbf{r}) = -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} [\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2]_z \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \nabla h(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \overleftrightarrow{\nabla} \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|). \quad (1.14b)$$

No ocurre lo mismo con los distintos modelos que describen el término correspondiente a la resonancia de isóbaro. Así, la corriente de isóbaro usada por Hockert y colaboradores y otros autores [Hoc73, Loc74, Ris79], y que coincide con la obtenida por Chemtob y Rho usando un modelo de quarks estático [Che71], difiere de la usada por Donnelly *et al.* [Van81, Alb90], deducida a partir del lagrangiano chiral de Peccei [Pec69]. Nosotros adoptamos el primer punto de vista, en donde la corriente de isóbaro está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{\Delta}(\mathbf{r}) = & C_{\Delta} \nabla \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \left\{ [\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2]_z \left[\boldsymbol{\sigma}^1 \times \nabla \left(\boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) \right) \right] \right. \\ & \left. - 4\tau_z^2 \nabla \left(\boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) \right) \right\} + (1 \longleftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (1.15)$$

En las anteriores ecuaciones $f^2 = 0.079$ es la constante efectiva de acoplamiento pión-nucleón, μ es la masa del pión, \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son las coordenadas de los dos nucleones que

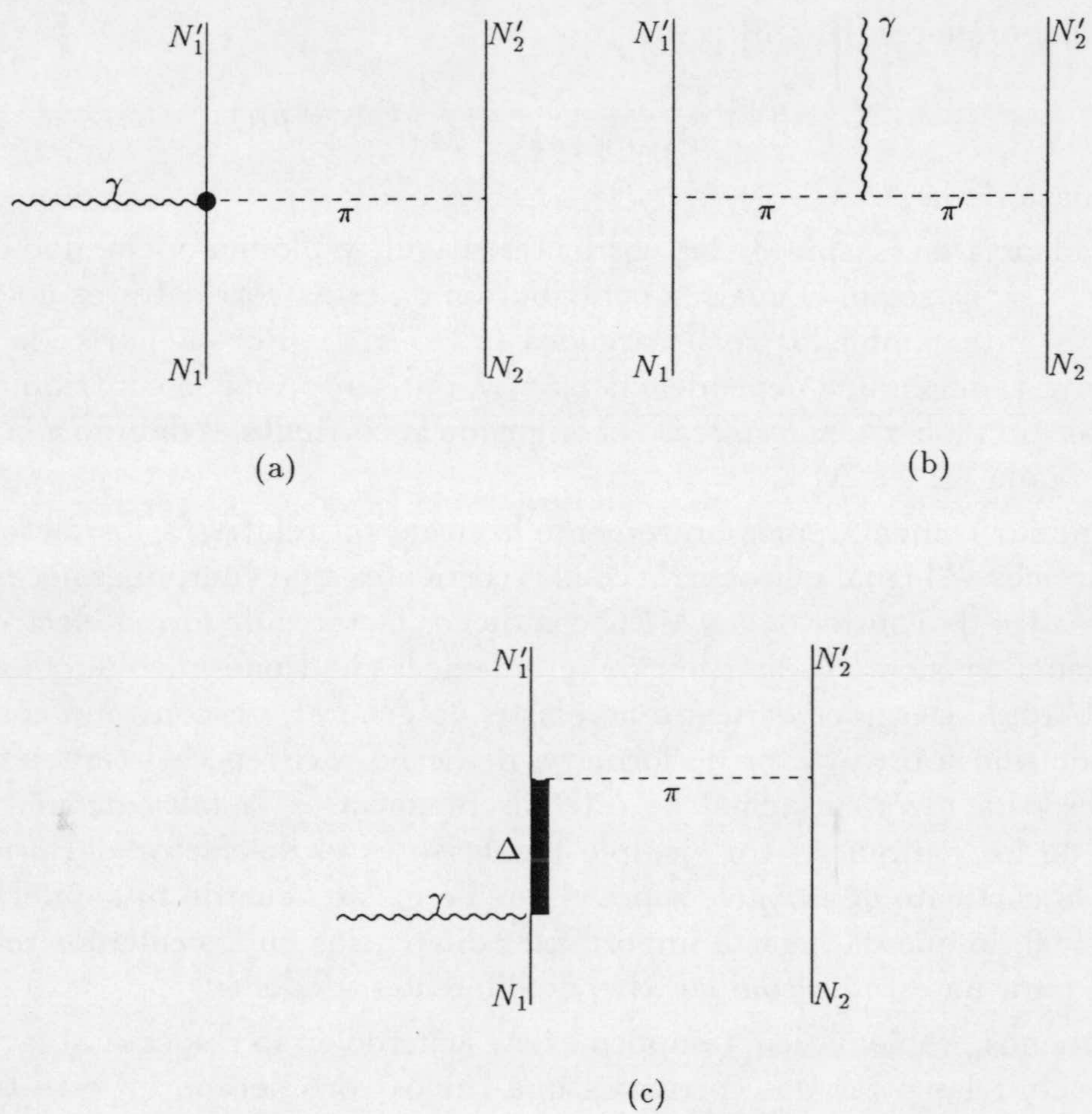


Figura 1.2: Diagramas correspondientes a las tres corrientes de intercambio mesónico consideradas en este trabajo: (a) seagull, (b) piónica y (c) isóbaro.

interactúan, mientras que la función h es la transformada de Fourier del propagador estático del pión:

$$h(|\mathbf{r}|) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{F_{\pi N}(p^2)}{p^2 + \mu^2}, \quad (1.16)$$

con $F_{\pi N}(p^2)$ el factor de forma pión-nucleón. Además se usa la notación

$$\varphi \overleftrightarrow{\nabla} \psi = \varphi \nabla \psi - (\nabla \varphi) \psi.$$

Por último, la constante C_Δ que multiplica a la corriente de isóbaro es la usada por Hockert y colaboradores [Hoc73]:

$$C_\Delta = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} \frac{4}{25M(M^* - M)} (\mu_P - \mu_N), \quad (1.17)$$

con M^* la masa de la Δ .

La dependencia en isospín de las corrientes seagull y piónica viene dada a través del operador $[\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2]_z$, según el cual, la contribución de estas corrientes es no nula siempre que los piones intercambiados sean cargados (π^+ ó π^-). Por su parte, la corriente de isóbaro incluye también una dependencia en τ_z y, por tanto, puede contribuir aún cuando se intercambie un pión π^0 , en cuyo caso el origen de la corriente es debido a la propagación de una Δ cargada (Δ^+ ó Δ^-).

Para terminar comentaremos brevemente la situación relativa a los factores de forma electromagnéticos. Al igual que ocurría con las corrientes a un cuerpo, es necesario corregir las transformadas de Fourier de las MEC con dichos factores de forma electromagnéticos, para poder tener en cuenta la distribución interna de los hadrones involucrados (nucleones, piones e isóbaros). Desgraciadamente no existe, en general, un convenio común sobre la adecuación de uno u otro factor de forma y, de hecho, existen casi tantas posibilidades como autores. La razón principal de esta discrepancia es la falta de una teoría clara y definitiva de los hadrones. Un ejemplo llamativo es el del factor de forma que debe incluirse en la corriente de isóbaro, sobre el que no existe acuerdo ni siquiera en su valor estático a $q = 0$, lo que da lugar a importantes diferencias en los cálculos realizados (ver Ref. [Loc74] para un estudio comparativo de diferentes modelos).

Aunque menos problemático, tampoco existe acuerdo en lo respecta al factor de forma que deben incluir las otras dos corrientes que hemos considerado en este trabajo. Así, una posibilidad es usar el factor de forma isovectorial del nucleón, F_1^V , en la seagull y el factor de forma electromagnético del pión, $F_{\pi\gamma}$, en la piónica [Hoc73, Som78, Ris79, Fri77b], aunque un estudio comparativo de Lock y Foldy [Loc74] muestra que los datos experimentales de electrodesintegración del deuterón se describen razonablemente bien cuando se sustituye F_1^V por un factor de forma vectorial axial F_A , dependiente de una masa axial efectiva dipolar, y en el factor de forma electromagnético del pión se incluyen efectos dependientes del cuadrimento de los dos piones involucrados en el diagrama (b) de la Fig. 1.2. Finalmente, cálculos más recientes usan, como alternativa, un factor de forma (fenomenológico) común para las tres corrientes [Van81, Alb90], de manera que se satisfaga la conservación de la corriente total [Fri76], así como la invariancia gauge [Sti70].

En el siguiente capítulo estudiaremos las modificaciones que produce en la respuesta transversal nuclear la consideración de las diferentes elecciones para estos factores de forma electromagnéticos.

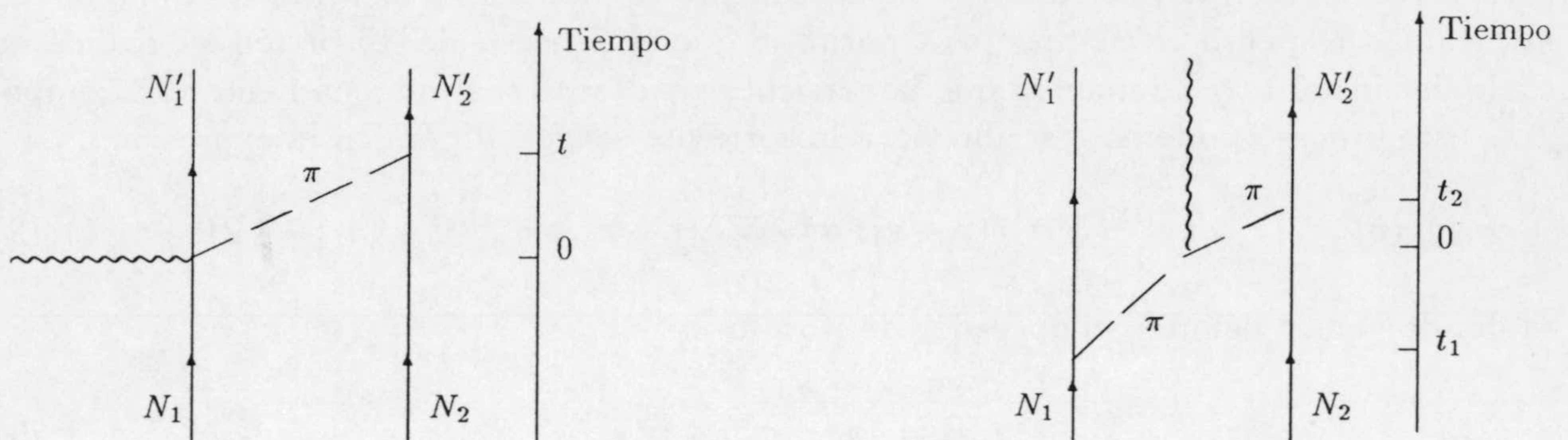


Figura 1.3: Diagramas dinámicos de las corrientes seagull y piónica.

1.3.4 Corrientes de intercambio dinámicas

Las expresiones de las MEC que hemos descrito anteriormente (ecs. (1.14)–(1.15)) corresponden a un modelo *estático*, en el sentido de que el pión intercambiado es independiente del tiempo, lo cual quiere decir que el intercambio es instantáneo. Este hecho se traduce en que la energía del pión no aparece en la expresión de su propagador (1.16). Uno de los aspectos que queremos analizar en este trabajo es el efecto que produce un tratamiento *dinámico* del pión en estas corrientes, tratamiento que no se considera usualmente en los cálculos en esta región de energías. Las correspondientes expresiones para las MEC dinámicas pueden obtenerse a partir de la densidad hamiltoniana de la interacción fenomenológica pión-nucleón, realizando un desarrollo perturbativo de la matriz- S con nucleones no relativistas, proceso que se detalla en el apéndice B para las corrientes seagull y piónica.

No obstante, es posible obtener estas corrientes partiendo de las correspondientes expresiones estáticas y sustituyendo el propagador h , dado por la ecuación (1.16), por el propagador completo dependiente del tiempo (no consideramos el factor de forma $F_{\pi N}$):

$$h(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{\mu^2 - k^2} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k d\omega \frac{e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}}{\mu^2 + \mathbf{k}^2 - \omega^2}, \quad (1.18)$$

que no es sino el propagador de Feynman de la ecuación de Klein-Gordon cambiado de signo (ver apéndice B).

Veamos como ejemplo el caso de la corriente seagull. Consideremos su expresión estática (1.14a) y supongamos que la interacción con el fotón sucede en $t = 0$. En este instante el nucleón N_1 emite un pión y se transforma en N'_1 . El pión, gobernado por su propagador $h(\mathbf{x}, t)$, será absorbido en el instante t por el nucleón N_2 , que se transforma en N'_2 (ver Fig. 1.3(a)). Puesto que los elementos de matriz de la corriente dinámica se

evalúan entre funciones de onda nucleónicas independientes de tiempo, es decir, en $t = 0$, debemos incluir un operador de evolución $e^{-iH_2 t}$ a la derecha y $e^{iH_2 t}$ a la izquierda de la corriente, siendo H_2 el hamiltoniano que gobierna el movimiento del segundo nucleón, para asegurar así que éste absorbe efectivamente el pión en el instante t . Finalmente, integramos respecto al tiempo para permitir que el proceso de absorción se realice en cualquier instante y de manera que la corriente resultante sea independiente del tiempo. Tras este proceso podemos escribir para la corriente seagull dinámica la expresión:

$$\mathbf{j}_{\text{din}}^S(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iH_2 t} B \boldsymbol{\sigma}^1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, t) e^{-iH_2 t} + (1 \longleftrightarrow 2), \quad (1.19)$$

en donde hemos definido el operador de isospín

$$B = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z. \quad (1.20)$$

Veamos cómo se modifican sus elementos de matriz. Si los nucleones N_2 y N'_2 tienen energías E_2 y E'_2 respectivamente, las exponenciales del hamiltoniano pueden ser factorizadas y podemos realizar la integración respecto al tiempo, resultando:

$$\begin{aligned} \langle N'_1 N'_2 | \mathbf{j}_{\text{din}}^S(\mathbf{r}) | N_1 N_2 \rangle &= \langle N'_1 N'_2 | B \boldsymbol{\sigma}^1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}}{\mu^2 + \mathbf{k}^2 - (\Delta E)^2} | N_1 N_2 \rangle \\ &+ \langle (1 \longleftrightarrow 2) \rangle, \end{aligned} \quad (1.21)$$

Por lo tanto, el elemento de matriz de la corriente dinámica se obtiene a partir del de la estática cambiando el cuadrado de la masa del pión μ^2 por $\mu^2 - (\Delta E)^2$ en el propagador, siendo ΔE la energía del pión intercambiado, obtenida como la diferencia entre las energías final e inicial del nucleón situado en el vértice opuesto a aquél sobre el que incide el fotón.

La corriente de isóbaro recibe un tratamiento completamente análogo al de la seagull, puesto que, como ésta, sólo incluye un propagador de pión.

El tratamiento de la corriente piónica es una extensión del anterior, con la salvedad de que ahora hay dos propagadores involucrados en el proceso, siendo necesario por tanto asignar un tiempo t_1 al primero y t_2 al segundo, lo que es equivalente a considerar que los dos piones asociados se propagan independientemente en el tiempo (ver Fig. 1.3(b)). Además debemos introducir dos operadores de evolución, $e^{-iH_1 t_1} e^{-iH_2 t_2}$ a la derecha, representando una traslación temporal de los nucleones iniciales, y $e^{iH_1 t_1} e^{iH_2 t_2}$ a la izquierda, para los nucleones finales. Finalmente, integramos sobre t_1 y t_2 . El resultado es una corriente dinámica cuyo elemento de matriz entre nucleones se obtiene, nuevamente a partir del de la estática, cambiando el cuadrado de la masa μ^2 en cada propagador por $\mu^2 - (\Delta E)^2$.

1.4 Estructura nuclear

Como hemos indicado anteriormente, hemos desarrollado un modelo para estudiar el proceso de dispersión cuasielástica en núcleos de capa cerrada, los cuáles han sido descritos

en el marco del modelo de capas. Así las funciones de onda monoparticulares que describen los estados nucleónicos se obtienen como solución de la ecuación de Schrödinger

$$\left[-\frac{1}{2M} \nabla^2 + V(r) \right] \phi(\mathbf{r}) = \epsilon \phi(\mathbf{r}) \quad (1.22)$$

en donde V es un potencial medio de tipo Woods-Saxon

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a}} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{V_{LS}}{1 + e^{(r-R)/a}} \right) + V_C(r). \quad (1.23)$$

en el que V_C es el potencial coulombiano creado por una distribución homogénea de carga Z y radio R_C

$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{2R_C} \left[3 - \left(\frac{r}{R_C} \right)^2 \right] & r < R_C \\ \frac{Ze^2}{r} & r \geq R_C \end{cases} \quad (1.24)$$

Puesto que el hamiltoniano conmuta con el momento angular total $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, la función de onda puede ser factorizada en una parte radial y otra angular

$$\phi(\mathbf{r}) = R_{lj}(\epsilon, r) \langle \hat{\mathbf{r}} | lj m \rangle | \frac{1}{2} t \rangle, \quad (1.25)$$

donde t denota la tercera componente de isospín y la parte angular está dada por

$$\langle \hat{\mathbf{r}} | lj m \rangle = \sum_{m_l m_s} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{l m_l}(\hat{\mathbf{r}}) | \frac{1}{2} m_s \rangle, \quad (1.26)$$

siendo $| \frac{1}{2} m_s \rangle$ el vector de espín.

En el caso de funciones de onda ligadas, ($\epsilon < 0$), la energía está cuantizada y queda especificada con el número cuántico principal n , en cuyo caso la función de onda radial se denota por $R_{lj}(\epsilon_n, r) = R_{nlj}(r)$.

Frecuentemente, especificaremos un estado monoparticular mediante un único índice $|p\rangle$, que representa todo el conjunto de números cuánticos necesarios para su identificación: energía, momento angular orbital, momento angular total, componente z de éste y tercera componente de isospín, es decir, $p = (\epsilon_p, l_p, j_p, m_p, t_p)$.

En el caso de que la partícula esté en el continuo ($\epsilon > 0$) la parte radial de la solución de la ecuación de Schrödinger tiene en general un comportamiento asintótico de la forma [Mes61]

$$R_{lj}(\epsilon, r) \sim \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \quad (1.27)$$

con $k^2 = 2M\epsilon$ y δ_l el desfase, que se calcula resolviendo el problema de dispersión por el potencial de Woods-Saxon en onda l . Una vez obtenido δ_l se elige un valor $r = r_0$ a partir del cuál se considera la forma asintótica para la función radial y se integra numéricamente la ecuación diferencial para los valores de r desde 0 hasta al citado valor r_0 , que queda determinado imponiendo la condición de que la función radial se anule en el origen. El método usado para este último propósito es el *algoritmo de Numerov* [Koo86], con el que se obtiene la solución en cada iteración con un error $O(h^6)$, con h el paso de integración, con lo que resulta ser un orden más exacto que el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

1.5 Clasificación de las respuestas atendiendo a los estados finales

Como las MEC son operadores a dos cuerpos, pueden dar lugar, en nuestro modelo, a transiciones a estados tanto con una como con dos partículas (nucleones) en el estado final. Como ya hemos indicado antes, en este trabajo limitamos nuestra investigación al estudio de núcleos de doble capa cerrada y suponemos que realizan una transición desde el estado fundamental, con $J^\Pi = 0^+$, a un estado final con momento angular J y paridad Π bien definidos. Así los dos tipos de estados finales posibles están caracterizados de la siguiente manera:

1. Estados a una partícula-un agujero (1p-1h), que denotamos por

$$|p, h^{-1}; JM, E\rangle,$$

caracterizados por tener una partícula en el continuo de energías con momento angular j_p , acoplada al núcleo residual con un agujero en la capa j_h , para dar un momento angular total J y tercera componente M . La energía de excitación de este estado en nuestro modelo de capas extremo es $E = \epsilon_p - \epsilon_h$ y la paridad $\Pi = (-1)^{l_p - l_h}$

2. Estados a dos partículas-dos agujeros (2p-2h), denotados por

$$|(p_1, p_2)J_p, (h_1^{-1}, h_2^{-1})J_h; JM, E\rangle$$

y que están caracterizados por tener dos partículas en el continuo, con momentos angulares j_{p_1} y j_{p_2} , acopladas a momento angular J_p . El núcleo residual presenta dos agujeros en las capas j_{h_1} y j_{h_2} , acoplados a momento angular J_h . Finalmente, el momento angular J total del sistema está generado por el acoplamiento de J_p y J_h . La energía de este estado es $E = \epsilon_{p_1} + \epsilon_{p_2} - \epsilon_{h_1} - \epsilon_{h_2}$ y su paridad $\Pi = (-1)^{l_{p_1} + l_{p_2} - l_{h_1} - l_{h_2}}$.

Usando esta definición de los estados finales en el desarrollo multipolar de las funciones respuesta, ecs. (1.6), podemos escribir:

$$R_L(q, \omega) = 4\pi \sum_J \sum_{ph} |\langle p, h^{-1}; J, E || M_J(q) || 0 \rangle|^2 \delta(\epsilon_p - \epsilon_h - \omega) \quad (1.28a)$$

$$R_T(q, \omega) = R_T^{1p1h}(q, \omega) + R_T^{2p2h}(q, \omega), \quad (1.28b)$$

de manera que la respuesta transversal se descompone en una parte que incluye sólo excitaciones a $1p - 1h$ y otra que incluye excitaciones a $2p - 2h$. A la primera de ellas contribuyen tanto las corrientes a uno como a dos cuerpos, mientras que la segunda respuesta está estrictamente generada por estas últimas. Sus expresiones generales son:

$$R_T^{1p1h}(q, \omega) = 4\pi \sum_J \sum_{ph} \left\{ \left| \langle p, h^{-1}; J, E || T_J^{\text{EOB}}(q) + T_J^{\text{ETB}}(q) || 0 \rangle \right|^2 + \left| \langle p, h^{-1}; J, E || T_J^{\text{MOB}}(q) + T_J^{\text{MTB}}(q) || 0 \rangle \right|^2 \right\} \delta(\epsilon_p - \epsilon_h - \omega) \quad (1.29a)$$

$$\begin{aligned}
R_T^{2p2h}(q, \omega) = & 4\pi \sum_J \sum_{p_1 p_2 h_1 h_2} \sum_{J_p J_h} \left\{ \left| \langle (p_1, p_2) J_p, (h_1^{-1}, h_2^{-1}) J_h; J, E \| T_J^{\text{ETB}}(q) \| 0 \rangle \right|^2 + \right. \\
& \left. \left| \langle (p_1, p_2) J_p, (h_1^{-1}, h_2^{-1}) J_h; J, E \| T_J^{\text{MTB}}(q) \| 0 \rangle \right|^2 \right\} \\
& \delta(\epsilon_{p_1} + \epsilon_{p_2} - \epsilon_{h_1} - \epsilon_{h_2} - \omega), \tag{1.29b}
\end{aligned}$$

en donde T^{EOB} y T^{MOB} son los operadores multipolares eléctrico y magnético asociados a la corriente a un cuerpo (1.10), mientras que T^{ETB} y T^{MTB} corresponden a la corriente a dos cuerpos (1.13).

En las expresiones anteriores vemos que las corrientes a un cuerpo interfieren con las corrientes a dos cuerpos en la respuesta a $1p - 1h$, mientras que la contribución de los estados finales a $2p - 2h$ se suma constructivamente a la respuesta a $1p - 1h$.

Con el fin de simplificar la escritura de las anteriores ecuaciones no hemos indicado la paridad de los estados finales, pero debemos hacer notar que, debido a que el estado fundamental $|0\rangle$ tiene paridad positiva, los operadores eléctricos, T^{E} (magnéticos, T^{M}), sólo permiten transiciones a estados eléctricos (magnéticos), lo cual quiere decir que el resto de las transiciones no contribuyen.

Otro hecho que debemos hacer notar es que, mientras la suma sobre agujeros h , h_1 y h_2 , lleva implícita una suma sobre las energías discretas ϵ_h , ϵ_{h_1} y ϵ_{h_2} , en la suma sobre los índices de partícula p , p_1 , p_2 , está implícita una integración sobre energías ϵ_p , ϵ_{p_1} y ϵ_{p_2} , una de las cuales siempre puede integrarse con ayuda de la delta de Dirac, que impone la conservación de la energía. Por lo tanto, para la excitación de un estado final a $1p - 1h$ se tiene $\epsilon_p = \omega + \epsilon_h$, y la energía de la partícula p está determinada para cada valor de la energía discreta ϵ_h . En cambio, para la excitación de un estado a $2p - 2h$ se tiene $\epsilon_{p_1} + \epsilon_{p_2} = \omega + \epsilon_{h_1} + \epsilon_{h_2}$; luego una de las energías, digamos ϵ_{p_1} , es aún independiente y debe ser integrada (numéricamente), mientras que la otra, ϵ_{p_2} , está determinada por la anterior ecuación. El límite superior de la integral sobre ϵ_{p_1} está determinado por la condición $\epsilon_{p_2} = \omega + \epsilon_{h_1} + \epsilon_{h_2} - \epsilon_{p_1} > 0$, de donde

$$\epsilon_{p_1} < \omega + \epsilon_{h_1} + \epsilon_{h_2} \tag{1.30}$$

Con respecto a los detalles de la integración numérica en energías, apuntaremos que se usa un método de Simpson de paso variable, que tiene en cuenta la distribución energética de los niveles del continuo.

En este punto debemos hacer notar la existencia de otras contribuciones a la respuesta a $2p - 2h$ en esta región energética y que no hemos citado hasta ahora. Una de ellas consiste en la excitación de dos partículas, una al continuo (p. ej. p_1) y la otra (p_2) a un estado discreto por encima del mar de Fermi. Este proceso, energéticamente posible en la región de interés, da lugar, en realidad, a una respuesta de emisión de una partícula, pero con la característica de que el núcleo residual queda en un estado excitado. En este caso, la suma sobre p_1 y p_2 es finita y no involucra ninguna integración, ya que el número de estados excitados monoparticulares discretos a los que puede transitar la partícula p_2 es finito y la energía de la partícula p_1 está en ese caso determinada por conservación.

La otra contribución de la que hablábamos corresponde a la posibilidad de que las dos partículas se exciten a estados discretos. Naturalmente, este proceso sólo contribuye a un pequeño conjunto de energías de excitación discretas situadas por debajo del doble del umbral de emisión, algunas de las cuales se localizan en la zona del pico cuasielástico, sobre todo cuando el momento transferido es bajo.

En el siguiente capítulo discutiremos algunos detalles relativos a estos dos mecanismos.

Capítulo 2

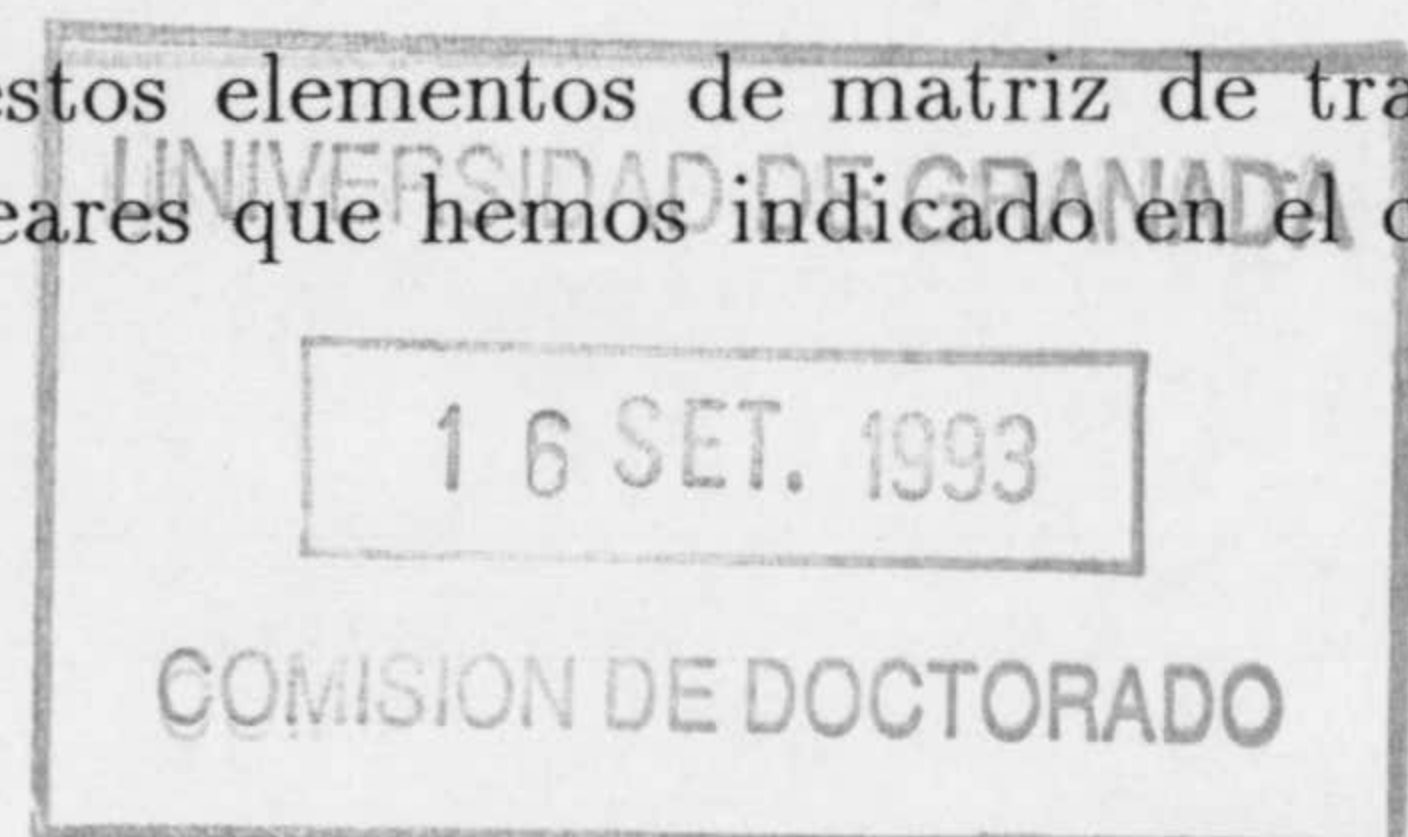
Respuesta nuclear en el modelo de capas

Después de introducir en el capítulo anterior el marco teórico en el que hemos desarrollado nuestros cálculos, en este capítulo estudiamos los resultados referentes a la respuesta cuasielástica de los núcleos ^{12}C y ^{40}Ca , y discutimos los efectos debidos a la inclusión de los distintos mecanismos subnucleares capaces de modificarla. Para ello, en primer lugar presentamos los elementos de matriz de los operadores multipolares asociados a cada una de las excitaciones simples a $1p - 1h$ y $2p - 2h$. Seguidamente analizamos algunos detalles del cálculo que tienen especial interés, tales como la sensibilidad de los resultados con respecto a la elección de los parámetros del potencial, convergencia de la suma en multipolos y en ondas parciales, etc. En la sección 2.3 estudiamos la incertidumbre en las respuestas a un cuerpo asociada a las distintas parametrizaciones del factor de forma del nucleón existentes. A continuación abordamos el tema principal de este trabajo: el efecto de las MEC, seagull y piónica, dejando el análisis de la corriente de isóbaro para el capítulo 4. Antes de comparar con los datos experimentales las respuestas obtenidas incluyendo las MEC, aplicamos el modelo de FSI. Finalmente, analizamos en la última sección la contribución de las excitaciones de dos partículas al discreto y las resonancias a baja energía de la respuesta.

2.1 Elementos de matriz de transición

Como hemos visto en el capítulo anterior, los estados finales nucleares que contribuyen a la región del pico cuasielástico, están situados en el continuo de energías. En lo que al modelo de capas extremo se refiere, este hecho no supone ninguna diferencia sustancial con respecto a las excitaciones a estados ligados. En nuestro esquema resulta, por tanto, que las expresiones que se obtienen para excitaciones a estados discretos son válidas igualmente para los elementos de matriz de emisión de una o dos partículas, sin más que introducir la adecuada función de onda radial del continuo.

Dedicamos esta sección a la descripción de estos elementos de matriz de transición asociados a las corrientes electromagnéticas nucleares que hemos indicado en el capítulo



anterior. En el caso de los operadores a un cuerpo, tanto de carga como eléctricos y magnéticos, las expresiones resultantes son conocidas [Co'84a, 85], así como las correspondientes a los operadores magnéticos de las corrientes seagull y piónica [Lal84, Deh85, Kre86, Ama90], que han sido aplicadas al estudio del efecto de las MEC en los factores de forma magnéticos de diversos núcleos, pero restringiéndose al espectro discreto. Nosotros utilizaremos aquí dichas expresiones para describir la emisión de una partícula.

El efecto de las corrientes de intercambio en las transiciones eléctricas a niveles discretos no se ha abordado en profundidad hasta ahora, debido fundamentalmente a la suposición de que las correspondientes contribuciones serían pequeñas [Fri80]. Por ello ha sido preciso desarrollar las correspondientes expresiones [Fas91, Ama92a, 93], proceso que esquematizamos en el apéndice C.

Por comodidad, escribiremos las respuestas longitudinal (1.6a) y transversal (1.6b) en la forma siguiente

$$R_L(q, \omega) = \sum_{\alpha} \sum_{J=0}^{\infty} |\langle J | \rho_J(q) | 0 \rangle|^2 \delta(E_{\alpha} - \omega) \quad (2.1a)$$

$$R_T(q, \omega) = \sum_{\alpha} \sum_{J=1}^{\infty} \left\{ |\langle J | J_J^E(q) | 0 \rangle|^2 + |\langle J | J_J^M(q) | 0 \rangle|^2 \right\} \delta(E_{\alpha} - \omega), \quad (2.1b)$$

en donde hemos definido los operadores

$$\rho_{JM}(q, \omega) = \sqrt{4\pi} M_{JM}(q, \omega) \quad (2.2a)$$

$$J_{JM}^E(q, \omega) = \sqrt{4\pi} T_{JM}^E(q, \omega) \quad (2.2b)$$

$$J_{JM}^M(q, \omega) = \sqrt{4\pi} T_{JM}^M(q, \omega). \quad (2.2c)$$

2.1.1 Transiciones a estados finales a $1p - 1h$

A estas transiciones contribuyen tanto las corrientes a un cuerpo como las MEC. A continuación escribimos los correspondientes factores de forma:

$$\langle ph^{-1}; J | \rho_J(q, \omega) | 0 \rangle = \Psi_J^{\pm}(ph) G_E^{ph}(q, \omega) \int_0^{\infty} dr r^2 j_J(qr) R_p(r) R_h(r) \quad (2.3a)$$

$$\langle ph^{-1}; J | J_J^{Ea}(q, \omega) | 0 \rangle = \Omega_J^{a+} F_E^a(q, \omega) \int_0^{\infty} dr r^2 j_J(qr) \mathcal{E}_{phJ}^a(r) \quad (2.3b)$$

$$\langle ph^{-1}; J | J_J^{Ma}(q, \omega) | 0 \rangle = i\Omega_J^{a-} F_M^a(q, \omega) \int_0^{\infty} dr r^2 j_J(qr) \mathcal{M}_{phJ}^a(r), \quad (2.3c)$$

en donde el índice a se refiere a la corriente involucrada, $a = C, M, S, \pi$, y hemos definido los siguientes coeficientes, que involucran factores geométricos:

$$\Omega_J^{a\pm}(ph) = \begin{cases} \frac{\Psi^{\pm}(ph)}{\sqrt{J(J+1)}}, & \text{si } a = C, M, S \\ \Phi_J^{\pm}(ph), & \text{si } a = \pi \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\Psi_J^{\pm}(ph) = (-1)^{j_p-1/2} \Phi_J^{\pm}(ph) \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\Phi_J^{\pm}(ph) = \frac{1 \pm (-1)^{l_p+l_h+J}}{2} \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{J}, \quad (2.6)$$

con $\hat{\alpha} = \sqrt{2\alpha + 1}$. Los factores electromagnéticos del nucleón y del pión entran en las ecs. (2.3b,2.3c) a través de las funciones $F_E^a(q, \omega)$ y $F_M^a(q, \omega)$, en la siguiente forma:

$$F_E^a(q, \omega) = \begin{cases} (1/q)G_E^{ph}(q, \omega) & \text{si } a = C \\ qG_M^{ph}(q, \omega) & \text{si } a = M \\ (1/q)F_S(q, \omega) & \text{si } a = S \\ (1/q)F_\pi(q, \omega) & \text{si } a = \pi \end{cases} \quad (2.7a)$$

$$F_M^a(q, \omega) = \begin{cases} G_E^{ph}(q, \omega) & \text{si } a = C \\ G_M^{ph}(q, \omega) & \text{si } a = M \\ F_S(q, \omega) & \text{si } a = S \\ F_\pi(q, \omega) & \text{si } a = \pi \end{cases} \quad (2.7b)$$

en donde el índice ph indica el tipo de isospín de la partícula que realiza la transición. En la sección 2.3 analizaremos el efecto de las distintas parametrizaciones de los factores de forma electromagnéticos del nucleón. Asimismo, en el apartado 2.4.1 estudiaremos las distintas elecciones de los factores de forma, F_S y F_π , que afectan a las corrientes seagull y piónica.

Por último, toda la información de las funciones radiales involucradas en la transición está contenida en las funciones $\mathcal{E}_{phJ}^a(r)$ y $\mathcal{M}_{phJ}^a(r)$, que entran en el integrando de (2.3b,2.3c). En el caso de las transiciones eléctricas se tiene:

$$\mathcal{E}_{phJ}^C(r) = \frac{1}{M_{ph}} \left\{ [(\kappa_p - \kappa_h)(\kappa_p + \kappa_h + 1) + J(J + 1)] R_p(r) \frac{d}{dr} R_h(r) + [(\kappa_p - \kappa_h)(\kappa_p + \kappa_h + 1) - J(J + 1)] R_h(r) \frac{d}{dr} R_p(r) \right\}, \quad (2.8a)$$

$$\mathcal{E}_{phJ}^M(r) = -\frac{1}{2M_{ph}} (\kappa_p - \kappa_h) R_p(r) \frac{d}{dr} R_h(r), \quad (2.8b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{phJ}^S(r) = & -2 \frac{f^2}{\mu^2} \sum_{h'} \hat{j}_{h'}^2 [\delta_{ph,N} \delta_{h'P} - \delta_{ph,P} \delta_{h'N}] \\ & \times \left\{ \sum_{L_1} \xi(l_p + l_{h'} + L_1 + 1) \hat{L}_1^2 \begin{pmatrix} j_p & j_{h'} & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \right. \\ & \times \left[(\kappa_p - \kappa_h) \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) - \frac{J(J + 1)}{r} \right] I_{ph'}(L_1, r) R_{h'}(r) R_h(r) \\ & + \sum_{L_2} \xi(l_h + l_{h'} + L_2 + 1) \hat{L}_2^2 \begin{pmatrix} j_{h'} & j_h & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \\ & \left. \times \left[(\kappa_p - \kappa_h) \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) + \frac{J(J + 1)}{r} \right] I_{h'h}(L_2, r) R_p(r) R_{h'}(r) \right\}, \quad (2.8c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{phJ}^\pi(r) = & 4 \frac{f^2}{\mu^2} \frac{1}{x} \sum_{h'} (-1)^{h'+h} \hat{j}_{h'}^2 [\delta_{ph,N} \delta_{h'P} - \delta_{ph,P} \delta_{h'N}] \\ & \times \sum_{L_1 L_2} \xi(l_p + l_{h'} + L_1 + 1) \xi(l_h + l_{h'} + L_2 + 1) \hat{L}_1^2 \hat{L}_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & J \\ j_h & j_p & j_{h'} \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} j_{h'} & j_h & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \\
& \times \left[\sqrt{L_2(L_2+1)} \left(\begin{array}{ccc} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) I_{h'h}(L_2, r) \frac{d}{dr} I_{ph'}(L_1, r) \right. \\
& \left. - \sqrt{L_1(L_1+1)} \left(\begin{array}{ccc} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) I_{ph'}(L_1, r) \frac{d}{dr} I_{h'h}(L_2, r) \right]. \quad (2.8d)
\end{aligned}$$

Los pasos para la obtención de estas expresiones están esquematizados en el apéndice C.

Las funciones que aparecen en los factores de forma magnéticos están dadas a continuación:

$$\mathcal{M}_{phJ}^C(r) = \frac{1}{2M_{ph}} [(\kappa_p + \kappa_h)(\kappa_p + \kappa_h + 1) - J(J+1)] \frac{1}{r} R_p(r) R_h(r), \quad (2.9a)$$

$$\mathcal{M}_{phJ}^M(r) = \frac{1}{2M_{ph}} \left[(\kappa_p + \kappa_h) \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) + \frac{J(J+1)}{r} \right] R_p(r) R_h(r), \quad (2.9b)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{phJ}^S(r) &= -2 \frac{f^2}{\mu^2} \sum_{h'} \hat{j}_{h'}^2 [\delta_{ph,N} \delta_{h'P} - \delta_{ph,P} \delta_{h'N}] \\
&\times \left\{ \sum_{L_1} \xi(l_p + l_{h'} + L_1 + 1) \hat{L}_1^2 \left(\begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)^2 \right. \\
&\times (\kappa_p + \kappa_h) I_{ph'}(L_1, r) R_{h'}(r) R_h(r) \\
&+ \sum_{L_2} \xi(l_h + l_{h'} + L_2 + 1) \hat{L}_2^2 \left(\begin{array}{ccc} j_{h'} & j_h & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)^2 \\
&\left. \times (\kappa_p + \kappa_h) I_{h'h}(L_2, r) R_p(r) R_{h'}(r) \right\} \quad (2.9c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{phJ}^\pi(r) &= 4 \frac{f^2}{\mu^2} \frac{1}{x} \sum_{h'} (-1)^{h'+h} \hat{j}_{h'}^2 [\delta_{ph,N} \delta_{h'P} - \delta_{ph,P} \delta_{h'N}] \\
&\times \sum_{L_1 L_2} \xi(l_p + l_{h'} + L_1 + 1) \xi(l_h + l_{h'} + L_2 + 1) \hat{L}_1^2 \hat{L}_2^2 \\
&\times \left\{ \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & J \\ j_h & j_p & j_{h'} \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} j_{h'} & j_h & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \\
&\times \sqrt{L_2(L_2+1)} \left(\begin{array}{ccc} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) I_{ph'}(L_1, r) I_{h'h}(L_2, r). \quad (2.9d)
\end{aligned}$$

En las anteriores expresiones vemos que en los factores de forma de las MEC ($a = S, \pi$) aparece la función $I_{\alpha\beta}(L, r)$, que tiene en cuenta la propagación del pión producido en la transición $\beta \rightarrow \alpha$ y, por tanto, incluye al propagador del pión y a las funciones de onda radiales involucradas en dicha transición. Su definición es la siguiente:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta}(L, x) &= \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa_\alpha + \kappa_\beta + 2}{r} \right) R_\alpha(r) R_\beta(r) \right\} \\
&\times \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 v(k, \epsilon_\alpha - \epsilon_\beta) j_L(kr) j_L(kx). \quad (2.10)
\end{aligned}$$

En la última integral hemos puesto el propagador completo (dinámico) del pión, dependiente de la diferencia entre las energías de los nucleones α y β , y que está definido por

$$v(k, \epsilon) = \frac{F_{\pi N}(k, \epsilon)}{\mu^2 + k^2 - \epsilon^2} \quad (2.11)$$

En un cálculo con MEC estáticas consideraremos $\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta = 0$. La integral sobre k que aparece en (2.10) puede calcularse de forma analítica, tal y como se muestra en el apéndice D.

2.1.2 Transiciones a estados finales a $2p - 2h$

En este caso sólo contribuyen las MEC. Los elementos de matriz correspondientes pueden escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \langle (p, p') J_p, (h^{-1}, h'^{-1}) J_h; J \| J_J^{Ea}(q, \omega) \| 0 \rangle \\ = \Phi_{J_p J_h J}^+ (p, p', h, h') F_E^a(q, \omega) \int_0^\infty dr r^2 j_J(qr) \mathcal{E}_{(pp') J_p, (hh') J_h; J}^a(r), \end{aligned} \quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned} \langle (p, p') J_p, (h^{-1}, h'^{-1}) J_h; J \| J_J^{Ma}(q, \omega) \| 0 \rangle \\ = i \Phi_{J_p J_h J}^- (p, p', h, h') F_M^a(q, \omega) \int_0^\infty dr r^2 j_J(qr) \mathcal{M}_{(pp') J_p, (hh') J_h; J}^a(r). \end{aligned} \quad (2.12b)$$

Ahora la conservación de la paridad está incluida en los coeficientes Φ^\pm :

$$\Phi_{J_p J_h J}^\pm (p, p', h, h') = (-1)^{J_p + J} \frac{1 \pm (-1)^{l_p + l_{p'} + l_h + l_{h'} + J}}{2} \hat{j}_p \hat{j}_{p'} \hat{j}_h \hat{j}_{h'} \hat{J}_p \hat{J}_h \hat{J} \quad (2.13)$$

Por su parte, las funciones radiales para transiciones eléctricas están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(pp') J_p, (hh') J_h; J}^S(r) = & -2 \frac{f^2}{\mu^2} [\delta_{p'h', N} \delta_{ph, P} - \delta_{p'h', P} \delta_{ph, N}] \sum_{L_1 L_2} \hat{L}_1^2 \hat{L}_2^2 C_{J_p J_h J}^{pp' hh'}(L_1, L_2) \\ & \times \left\{ \xi(l_{p'} + l_h + L_1 + 1) \frac{\kappa_p + (-1)^{l_p + l_{h'} + L_2 + 1} \kappa_{h'}}{\sqrt{L_2(L_2 + 1)}} \right. \\ & \times \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{x} \right) I_{p'h}(L_1, r) R_p(r) R_{h'}(r) \right] \\ & - \xi(l_p + l_{h'} + L_2 + 1) \frac{\kappa_h + (-1)^{l_{p'} + l_h + L_1 + 1} \kappa_{p'}}{\sqrt{L_1(L_1 + 1)}} \\ & \times \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{x} \right) I_{ph'}(L_2, r) R_{p'}(r) R_h(r) \right] \\ & - \xi(l_{p'} + l_h + L_1 + 1) \xi(l_p + l_{h'} + L_2 + 1) \sqrt{J(J+1)} \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \left. \times \frac{1}{r} [I_{p'h}(L_1, r) R_p(r) R_{h'}(r) - I_{ph'}(L_2, r) R_{p'}(r) R_h(r)] \right\} \end{aligned} \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{(pp')J_p,(hh')J_h;J}^\pi(r) &= 4 \frac{f^2}{\mu^2} [\delta_{p'h',N} \delta_{ph,P} - \delta_{p'h',P} \delta_{ph,N}] \frac{1}{r} \sum_{L_1 L_2} \hat{L}_1^2 \hat{L}_2^2 C_{J_p J_h J}^{pp'hh'}(L_1, L_2) \\
&\times \xi(l_{p'} + l_h + L_1 + 1) \xi(l_p + l_{h'} + L_2 + 1) \\
&\times \left[\sqrt{L_2(L_2 + 1)} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} I_{ph'}(L_2, r) \frac{d}{dr} I_{p'h}(L_1, r) \right. \\
&\left. - \sqrt{L_1(L_1 + 1)} \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} I_{p'h}(L_1, r) \frac{d}{dr} I_{ph'}(L_2, r) \right]. \quad (2.14b)
\end{aligned}$$

y las funciones radiales correspondientes a las transiciones magnéticas pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(pp')J_p,(hh')J_h;J}^S(r) &= -2 \frac{f^2}{\mu^2} [\delta_{p'h',N} \delta_{ph,P} - \delta_{p'h',P} \delta_{ph,N}] \sum_{L_1 L_2} \hat{L}_1^2 \hat{L}_2^2 C_{J_p J_h J}^{pp'hh'}(L_1, L_2) \\
&\times \left\{ \xi(l_{p'} + l_h + L_1 + 1) \frac{\kappa_p + (-1)^{l_{p'}+l_h+L_2+1} \kappa_{h'}}{\sqrt{L_2(L_2 + 1)}} \right. \\
&\times \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} I_{p'h}(L_1, r) R_p(r) R_{h'}(r) \\
&+ \xi(l_p + l_{h'} + L_2 + 1) \frac{\kappa_h + (-1)^{l_{p'}+l_h+L_1+1} \kappa_{p'}}{\sqrt{L_1(L_1 + 1)}} \\
&\left. \times \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} I_{ph'}(L_2, r) R_{p'}(r) R_h(r) \right\}, \quad (2.15a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(pp')J_p,(hh')J_h;J}^\pi(r) &= 4 \frac{f^2}{\mu^2} [\delta_{p'h',N} \delta_{ph,P} - \delta_{p'h',P} \delta_{ph,N}] \frac{1}{r} \sum_{L_1 L_2} \hat{L}_1^2 \hat{L}_2^2 C_{J_p J_h J}^{pp'hh'}(L_1, L_2) \\
&\times \xi(l_{p'} + l_h + L_1 + 1) \xi(l_p + l_{h'} + L_2 + 1) \quad (2.15b) \\
&\times \sqrt{L_2(L_2 + 1)} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} I_{p'h}(L_1, r) I_{ph'}(L_2, r).
\end{aligned}$$

En las anteriores expresiones se ha definido el siguiente coeficiente de acoplamiento:

$$C_{J_p J_h J}^{pp'hh'}(L_1, L_2) = \begin{Bmatrix} j_{p'} & j_p & J_p \\ j_h & j_{h'} & J_h \\ L_1 & L_2 & J \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_{p'} & j_h & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_p & j_{h'} & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

2.2 Detalles del cálculo y análisis del modelo

Nuestra intención es aplicar el formalismo presentado hasta ahora al estudio de la respuesta cuasielástica de los núcleos ^{12}C y ^{40}Ca . El primer paso para este cálculo consiste en obtener el conjunto de funciones de onda monoparticulares, que en nuestro caso están generadas por un campo nuclear medio de tipo Woods-Saxon (ver ec. (1.23)). Los parámetros han sido tomados de la Refs. [Co'84b] y [Co'87], para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente, en donde han sido fijados para reproducir lo mejor posible las energías monoparticulares

alrededor del nivel de Fermi, los correspondientes radios cuadráticos medios y, al mismo tiempo, dar una buena descripción de la excitación de las resonancias gigantes. Los valores específicos se muestran en la tabla 2.1 bajo el encabezamiento **WSI**, mientras que las energías de los niveles monoparticulares se muestran en la tabla 2.2 En nuestros cálculos se ha tomado el radio de carga $R_C = R$.

		WSI				WSII			
		V_0 [MeV]	V_{LS} [MeV]	R [fm]	a [fm]	V_0 [MeV]	V_{LS} [MeV]	R [fm]	a [fm]
^{12}C	P	62.0	3.20	2.86	0.57	55.0	3.20	2.86	0.57
	N	60.0	3.15	2.86	0.57	60.0	3.15	2.86	0.57
^{40}Ca	P	57.5	11.11	4.10	0.53	50.5	11.11	4.5	0.53
	N	55.0	8.50	4.10	0.53	55.0	8.50	4.5	0.53

Tabla 2.1: *Parámetros del potencial de Woods-Saxon. Por **WSI** denotamos a los usados a lo largo del presente trabajo. El conjunto de parámetros **WSII** corresponde al cálculo que se discute en la sección 2.2.1.*

2.2.1 Dependencia de la respuesta con el campo nuclear medio

La primera cuestión que surge cuando se estudian propiedades nucleares mediante modelos fenomenológicos, es el de la sensibilidad de los resultados con respecto al campo nuclear medio utilizado. Para analizar dicha sensibilidad, hemos calculado las respuestas puramente a un cuerpo en los dos núcleos considerados, modificando los potenciales de Woods-Saxon se manera que se obtenga una mejora en la descripción de la densidad de carga experimental. Los parámetros de estos nuevos potenciales y las energías de los correspondientes niveles monoparticulares se muestran en las tablas 2.1 y 2.2, respectivamente, bajo las columnas marcadas **WSII**. Las respectivas densidades de carga aparecen representadas, mediante curvas a trazos, en la Fig. 2.1, junto con las densidades correspondientes al potencial **WSI** (línea continua) y las experimentales (curvas de puntos). Las respuestas longitudinal y transversal calculadas con los dos potenciales se muestran en las Figs. 2.2 para el ^{12}C y 2.3 para el ^{40}Ca . En estas dos figuras, las curvas continuas (a trazos) corresponden al conjunto de parámetros **WSI** (**WSII**) de la tabla 2.1. Como podemos ver, el cambio en los parámetros del potencial produce una modificación en las funciones respuesta, que resulta ser tanto más apreciable cuanto más bajos son el momento transferido y la energía de excitación. Esto se ve claramente en la tabla 2.3, donde mostramos el incremento relativo

$$\delta R \equiv \frac{R(\text{WSII}) - R(\text{WSI})}{R(\text{WSI})}, \quad (2.17)$$

		Protones			Neutrones		
		WSI	WSII	exp.	WSI	WSII	exp.
^{12}C	2s1/2				-3.46		
	1d5/2				-3.74		
	1p1/2	-15.75			-17.65		
	1p3/2	-18.05	-13.49	-15.96	-19.59	-19.62	-18.72
	1s1/2	-34.58	-28.91		-36.17	-36.19	
^{40}Ca	2p1/2				-2.29		
	2p3/2				-4.85		
	1f7/2	-5.31			-9.76		
	1d3/2	-8.71	-8.93	-8.30	-15.70	-21.21	-15.60
	2s1/2	-10.30	-9.74	-10.33	-16.42	-20.95	-18.20
	1d5/2	-16.19	-15.05	-14.73	-21.37	-25.64	-21.60
	1p1/2	-23.02	-21.00		-29.80	-33.61	
	1p3/2	-26.51	-23.77		-32.42	-35.56	
	1s1/2	-36.00	-31.69		-42.57	-44.50	

Tabla 2.2: Energías monoparticulares del ^{12}C y del ^{40}Ca en MeV. Las columnas marcadas con **WSI** y **WSII** corresponden a los dos potenciales de Woods-Saxon de la tabla 2.1. Los valores experimentales han sido calculados a partir de los excesos de masas de los núcleos vecinos [Led78].

$q[\text{MeV}]$	^{12}C		^{40}Ca	
	$\delta R_L[\%]$	$\delta R_T[\%]$	$\delta R_L[\%]$	$\delta R_T[\%]$
300	6.40	4.01	11.74	4.38
400	4.64	2.74	7.54	6.09
550	4.32	2.68	7.08	5.88

Tabla 2.3: Incremento relativo de las funciones respuesta cuando se pasa de usar los potenciales **WSI** a los **WSII** para el ^{12}C y el ^{40}Ca .

de las respuestas longitudinal y transversal, expresado en tantos por ciento y calculado para cada momento transferido a la energía ω_{max} en donde se alcanza el máximo en cada caso. La única excepción al comentario que acabamos de hacer la constituye la respuesta transversal en el ^{40}Ca a $q = 300 \text{ MeV}$.

Independientemente de este hecho puntual, existen dos características generales que conviene resaltar. En primer lugar, el mayor efecto relativo aparece en la respuesta longitudinal, lo que refleja el hecho de que, para obtener el potencial **WSII**, hemos modificado la profundidad del pozo central correspondiente a los protones, cuya excitación domina dicha respuesta. En segundo lugar, el efecto es relativamente mayor en ^{40}Ca que en ^{12}C . Este hecho puede explicarse sin más que observar que la modificación de la densidad de carga (ver Fig. 2.1) producida por el cambio en los parámetros del potencial es apreciablemente más grande en el caso del ^{40}Ca .

Digamos finalmente que la modificación del campo medio nuclear da lugar a las diferencias entre las energías de los niveles discretos monoparticulares que se muestran en la tabla 2.2 Dichas diferencias constituyen la razón principal de que las discrepancias entre las respuestas calculadas con ambos potenciales sean más apreciables a bajo momento y baja energía, es decir, en la región del pico cuasielástico más cercana a las resonancias gigantes, las cuales resultan ser especialmente sensibles a los detalles específicos de los mencionados niveles monoparticulares.

En adelante, todos los cálculos serán realizados con los potenciales **WSI**.

2.2.2 Convergencia de la suma de multipolos y ondas parciales

En nuestro modelo, la respuesta total se obtiene como una suma infinita de multipolos con momento angular J (ver ecs. (1.28a), (1.29a) y (1.29b)) que, en el cálculo real, es necesario truncar. En este apartado pretendemos estudiar la convergencia de dicha suma para las distintas contribuciones de la respuesta.

Analicemos en primer lugar la respuesta a un cuerpo, esto es, sin contribuciones de las MEC. Los resultados obtenidos se muestran en las Figs. 2.4 y 2.5, donde se representan, para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente, las respuestas longitudinal y transversal calculadas incluyendo sucesivamente, de abajo a arriba, las contribuciones debidas a los distintos

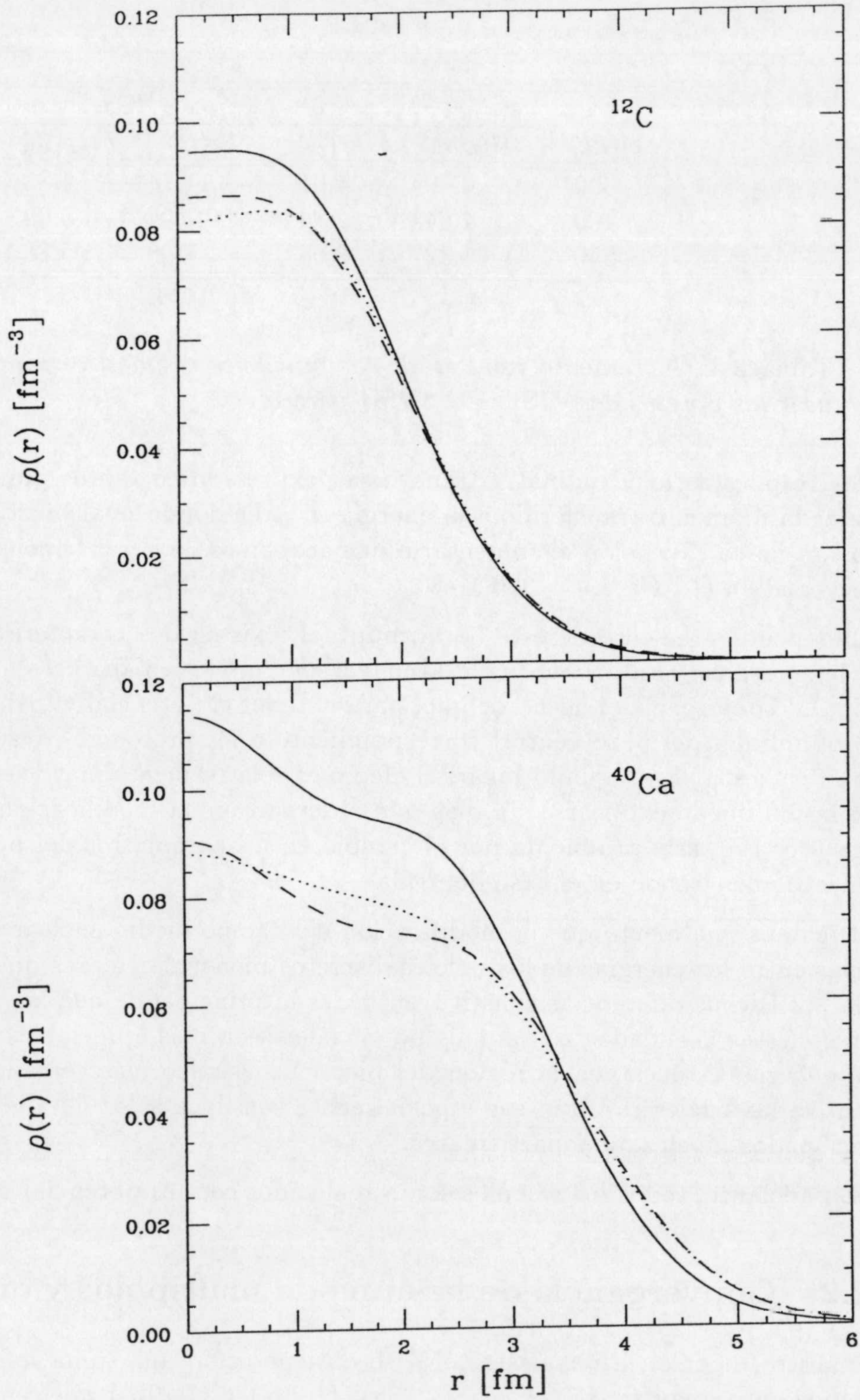


Figura 2.1: Densidades de carga del ^{12}C y ^{40}Ca . Las curvas continuas (a trazos) corresponden a las densidades calculadas con el potencial de Woods-Saxon correspondiente a los parámetros **WSI** (**WSII**). Las curvas de puntos son las densidades experimentales, tomadas de la referencia [Vri87].

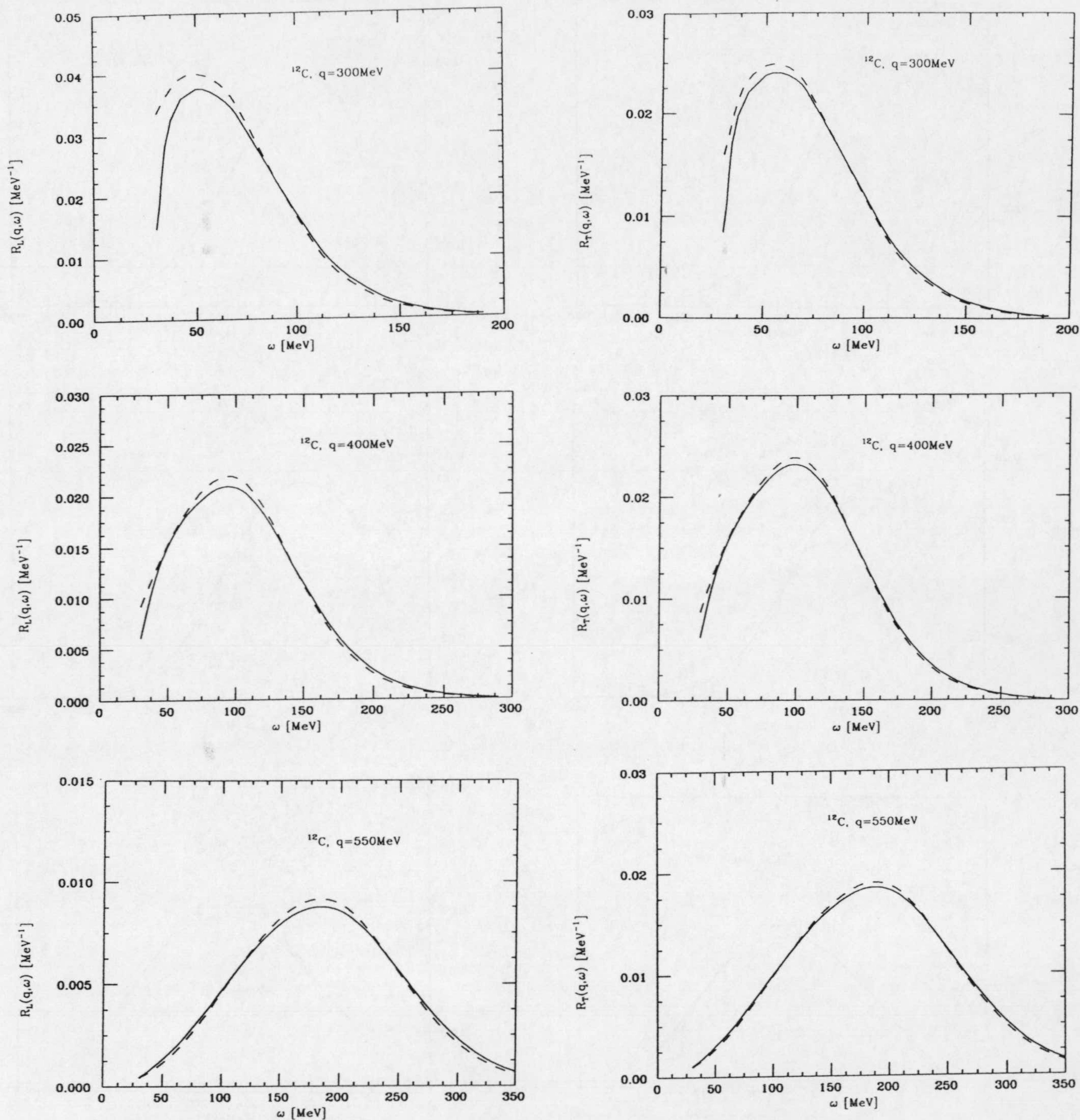


Figura 2.2: Funciones respuesta longitudinal y transversal del ^{12}C calculadas usando las dos parametrizaciones del potencial de Woods-Saxon de la tabla 2.1. Las curvas continuas (a trazos) corresponden al potencial WSI (WSII).

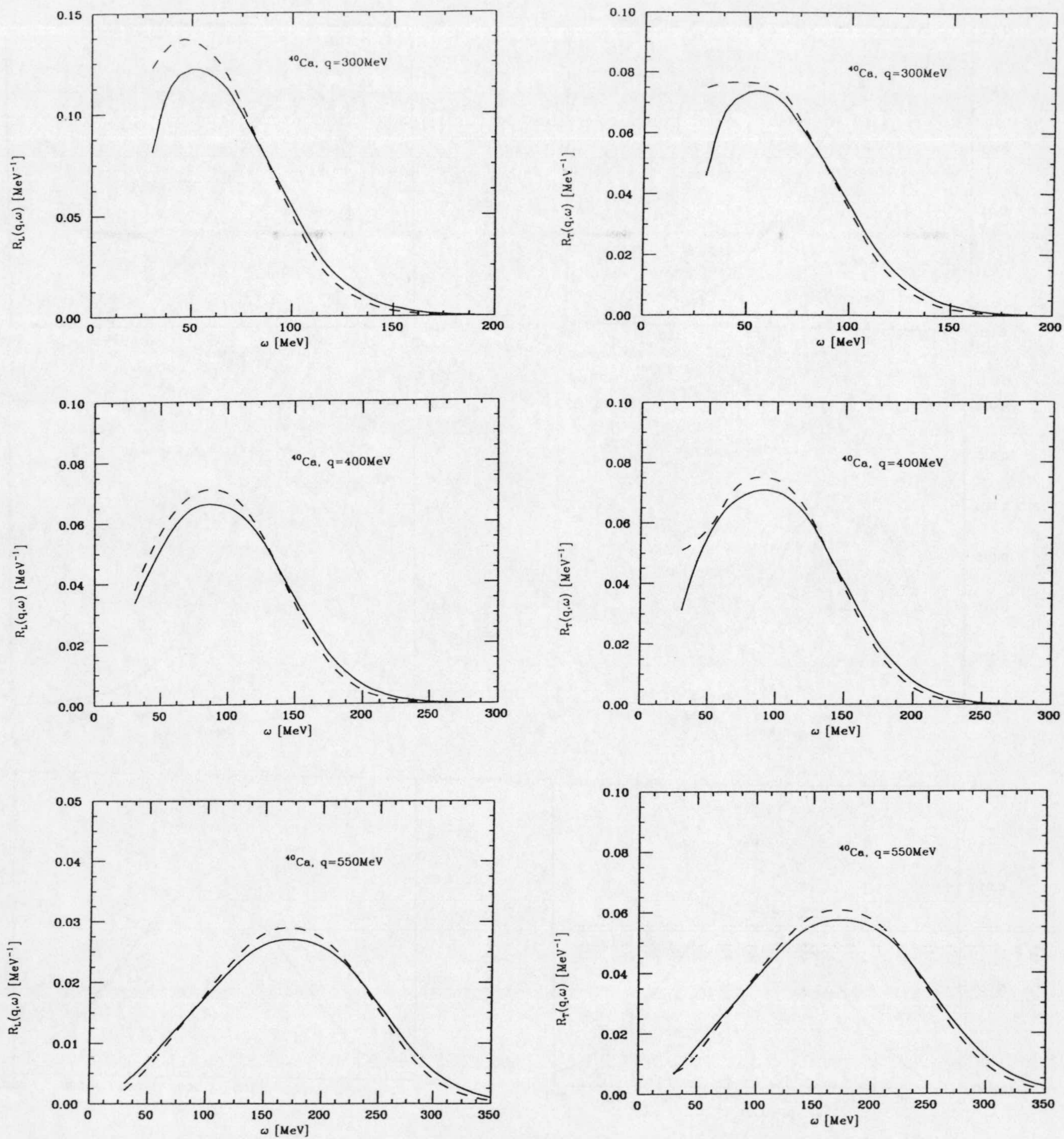


Figura 2.3: Igual que la Fig. 2.2 para el ^{40}Ca .

multipolos. En el caso del ^{12}C se han considerado todos hasta $J = 12$, y en el del ^{40}Ca hasta $J = 15$. Hay que señalar que a la respuesta longitudinal sólo contribuyen las excitaciones de paridad natural, $0^+, 1^-, 2^+, \dots$. Por el contrario, la respuesta transversal incluye los multipolos de ambas paridades, $1^\pm, 2^\pm, 3^\pm, \dots$. En las respuestas transversales, cada curva corresponde al resultado de añadir la contribución de los dos multipolos con igual J .

Como puede observarse, el número de multipolos necesario para alcanzar la convergencia crece con el momento transferido. Así, por ejemplo, en el caso del ^{12}C (Fig. 2.4) puede verse que, para $q = 300$ MeV, la convergencia se obtiene sumando hasta $J = 7$; para $q = 400$ MeV es necesario incluir hasta $J = 9$, mientras que, para $q = 550$ MeV, no se tiene convergencia por debajo de $J = 12$. En el caso del ^{40}Ca (Fig. 2.5) los valores de J necesarios son $J = 9$, $J = 11$ y $J = 15$, respectivamente, para los tres valores de q considerados.

El siguiente paso en nuestro análisis consiste en estudiar la convergencia de la suma en multipolos de la respuesta transversal cuando entran en juego las MEC. Comenzaremos con la parte de emisión de una partícula. En este caso, la respuesta transversal puede descomponerse en tres partes bien diferenciadas: respuesta pura a un cuerpo, que acabamos de estudiar, respuesta pura a dos cuerpos, que incluye únicamente a las MEC, e interferencia entre ambas. Comenzaremos por esta última, que, como veremos en el apartado 2.4.2, es la más importante. En las Figs. 2.6 y 2.7 podemos ver el proceso de convergencia de las respuestas transversales de interferencia correspondientes a las corrientes seagull (línea continua) y piónica (línea a trazos) separadamente. En este caso la convergencia se alcanza un poco antes que en la parte a un cuerpo; concretamente para los valores $J = 6, 7$ y 9 en el ^{12}C , y $J = 7, 9$ y 11 en el ^{40}Ca , respectivamente, para los tres momentos transferidos que aquí estamos considerando. Algo parecido sucede para la contribución pura de las MEC a la respuesta transversal a $1p - 1h$, cuya convergencia mostramos en las Figs. 2.8 y 2.9. Los valores de los multipolos de convergencia J que hemos encontrado en cada caso se resumen en la tabla 2.4. Una conclusión importante que se extrae de este primer análisis es que la contribución de las MEC a la respuesta de emisión de una partícula precisa de menos multipolos de excitación que la parte puramente a un cuerpo.

Con respecto a la suma en excitaciones a $1p - 1h$, éstas han sido calculadas considerando todos los estados de partícula permitidos por las reglas de acoplamiento de momento angular. En consecuencia, la suma sobre p, h en las respuestas a $1p - 1h$ (ver ecs. (1.28a), (1.29a)) es finita y no involucra ningún truncamiento.

El caso de la respuesta a $2p - 2h$ es distinto. En la ec. (1.29b), la suma sobre J_h es finita por serlo el número de agujeros. Para cada multipolo J , la suma sobre J_p está restringida por las reglas de acoplamiento y, por tanto, también es finita. Ahora bien, sobre j_{p_1} y j_{p_2} la única restricción es que se acoplen a momento angular total J_p , por lo que una de las variables, bien j_{p_1} , o j_{p_2} , puede tomar cualquier valor sin restricciones, y la suma en esta variable es infinita. Para realizar el cálculo correspondiente, es necesario imponer un límite al espacio de configuración de los estados de partícula. En el caso del ^{12}C se han considerado todas las capas hasta la $1d_{5/2}$, ya que hemos encontrado que la inclusión de ondas parciales más altas no produce ninguna modificación visible de la respuesta a $2p - 2h$.

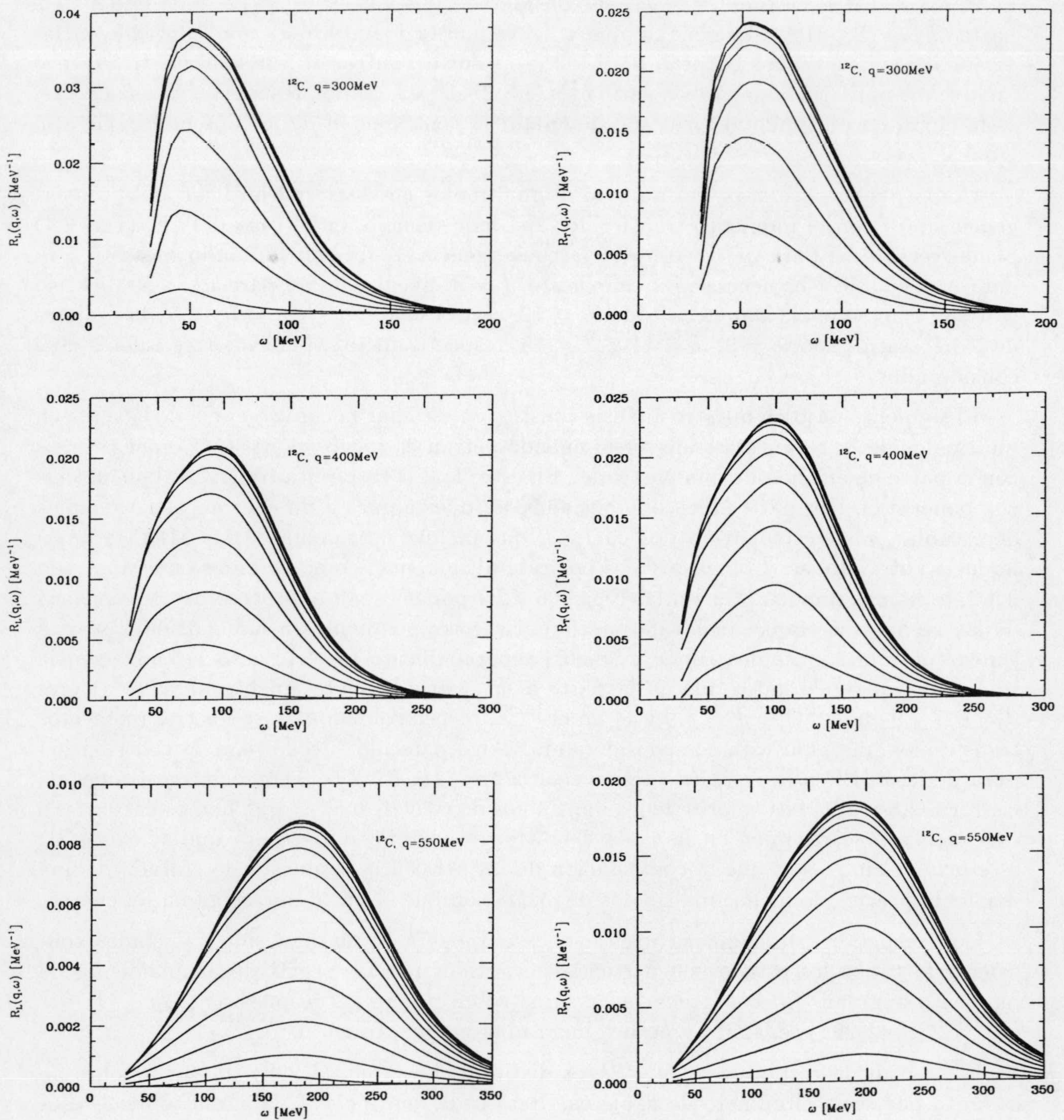


Figura 2.4: Test de convergencia de la suma en multipolos para las respuestas longitudinal y transversal a un cuerpo en el ^{12}C . En cada gráfica, las distintas curvas representan, de abajo a arriba, la respuesta obtenida sumando sucesivamente los multipolos en orden creciente de J . En el caso de la respuesta transversal cada curva se obtiene sumando a la inmediatamente inferior los dos multipolos, con igual J , correspondientes.

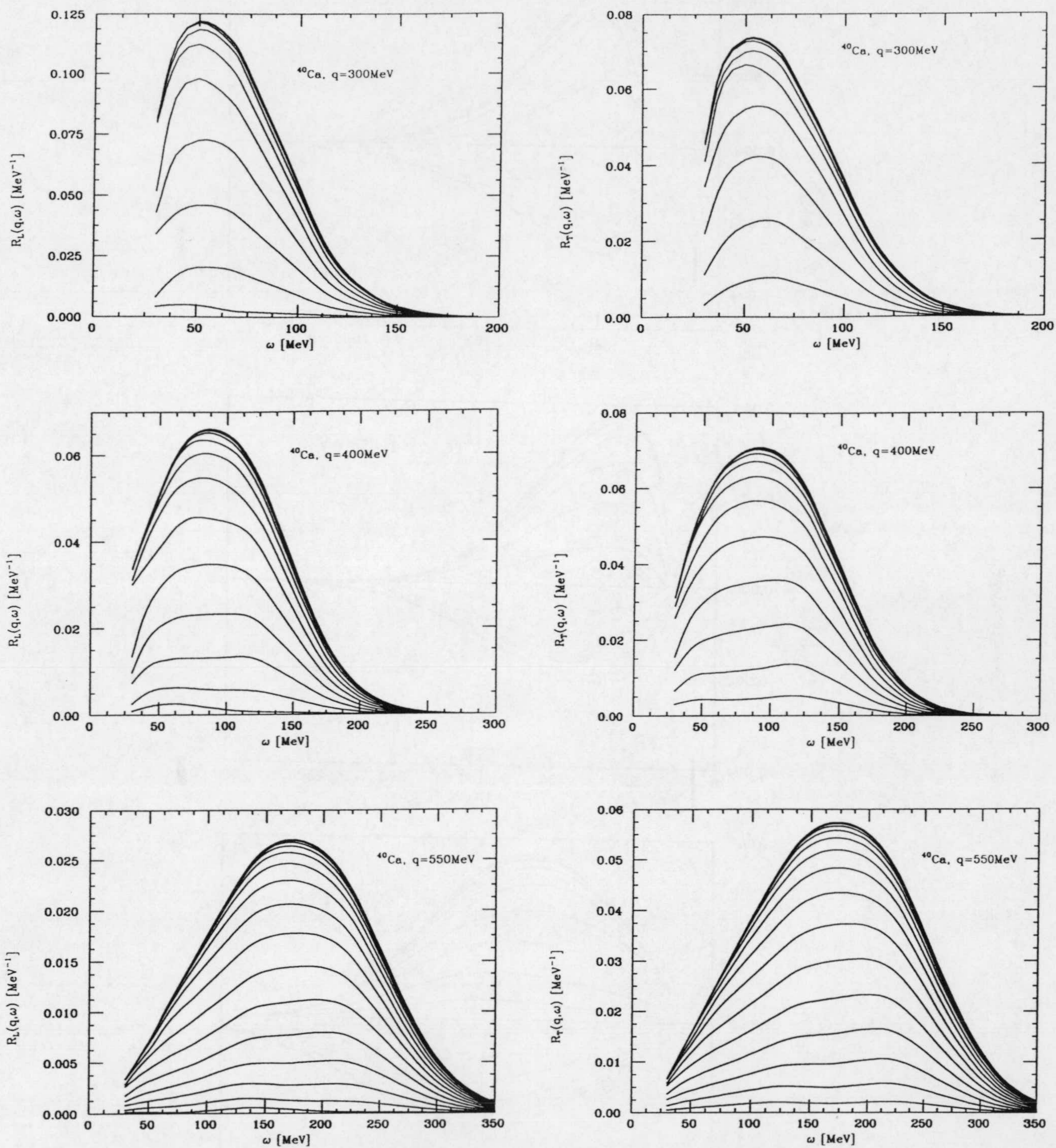


Figura 2.5: Test de convergencia para el ^{40}Ca . El significado de las curvas es el mismo que el de la Fig. 2.4

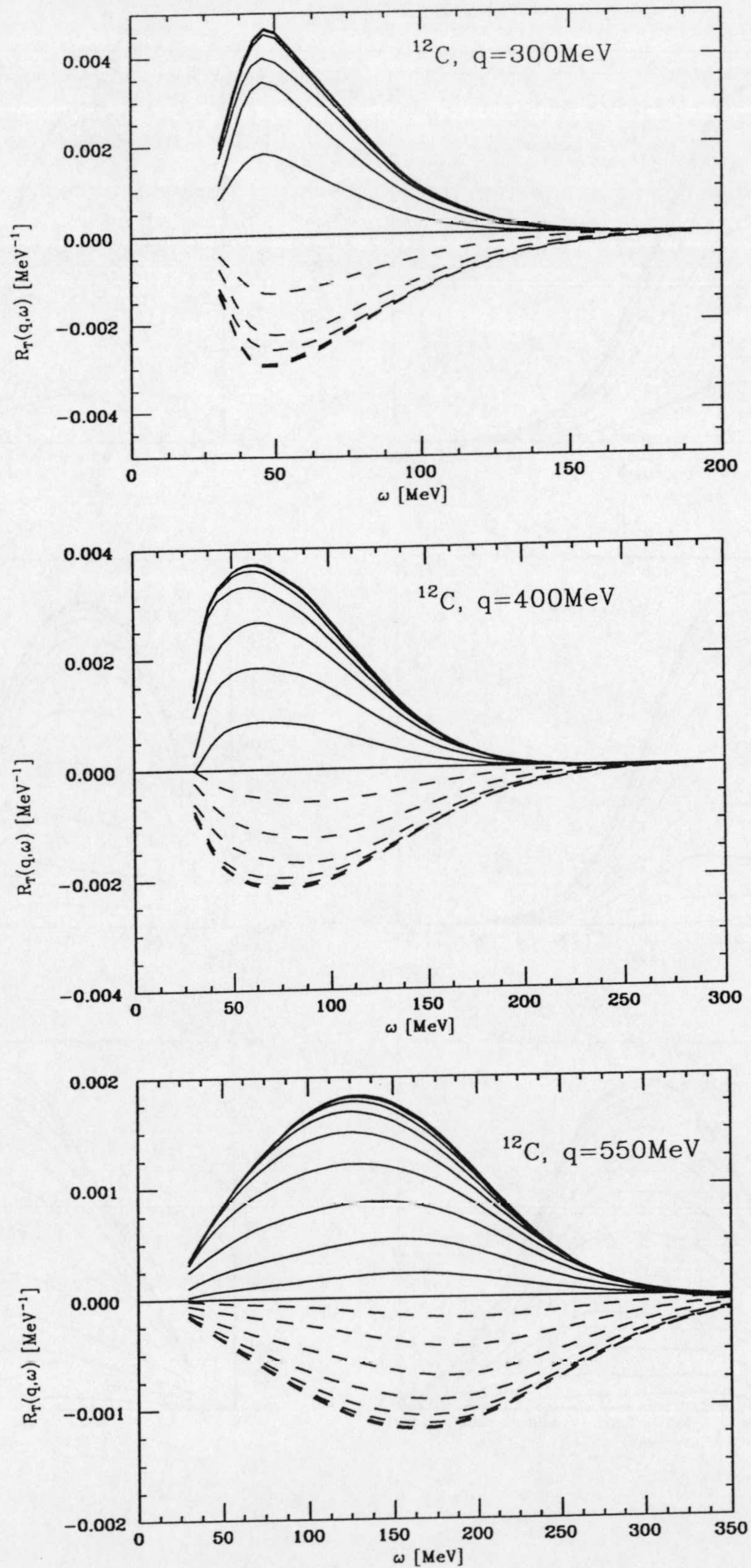


Figura 2.6: Convergencia de la suma en multipolos para la respuesta transversal de interferencia de la corriente a un cuerpo con la corriente seagull (línea continua) y con la piónica (línea a trazos), para el ^{12}C . Cada curva se ha obtenido de forma similar a las de la respuesta transversal en la Fig. 2.4.

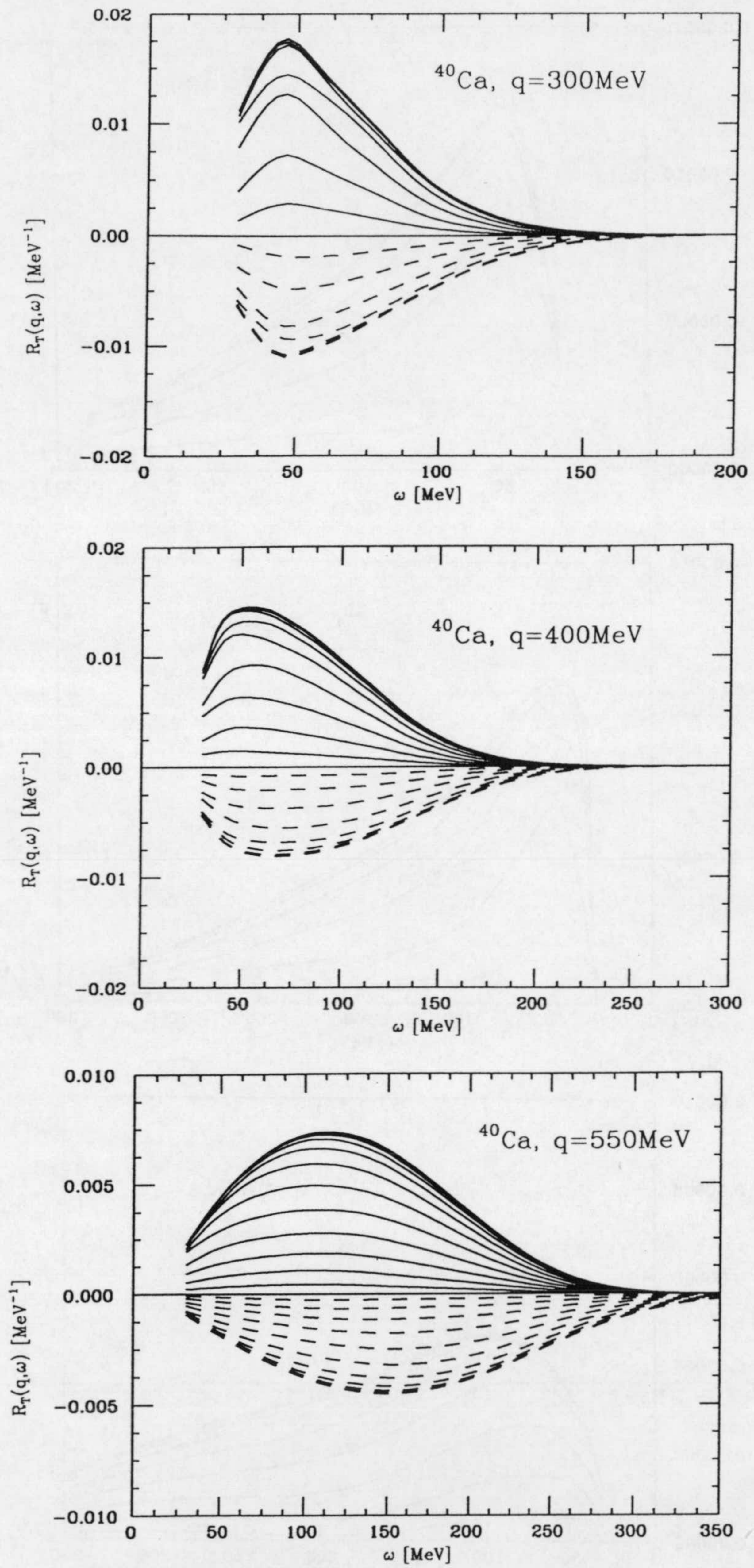


Figura 2.7: Idem que la Fig. 2.6 para el ^{40}Ca .

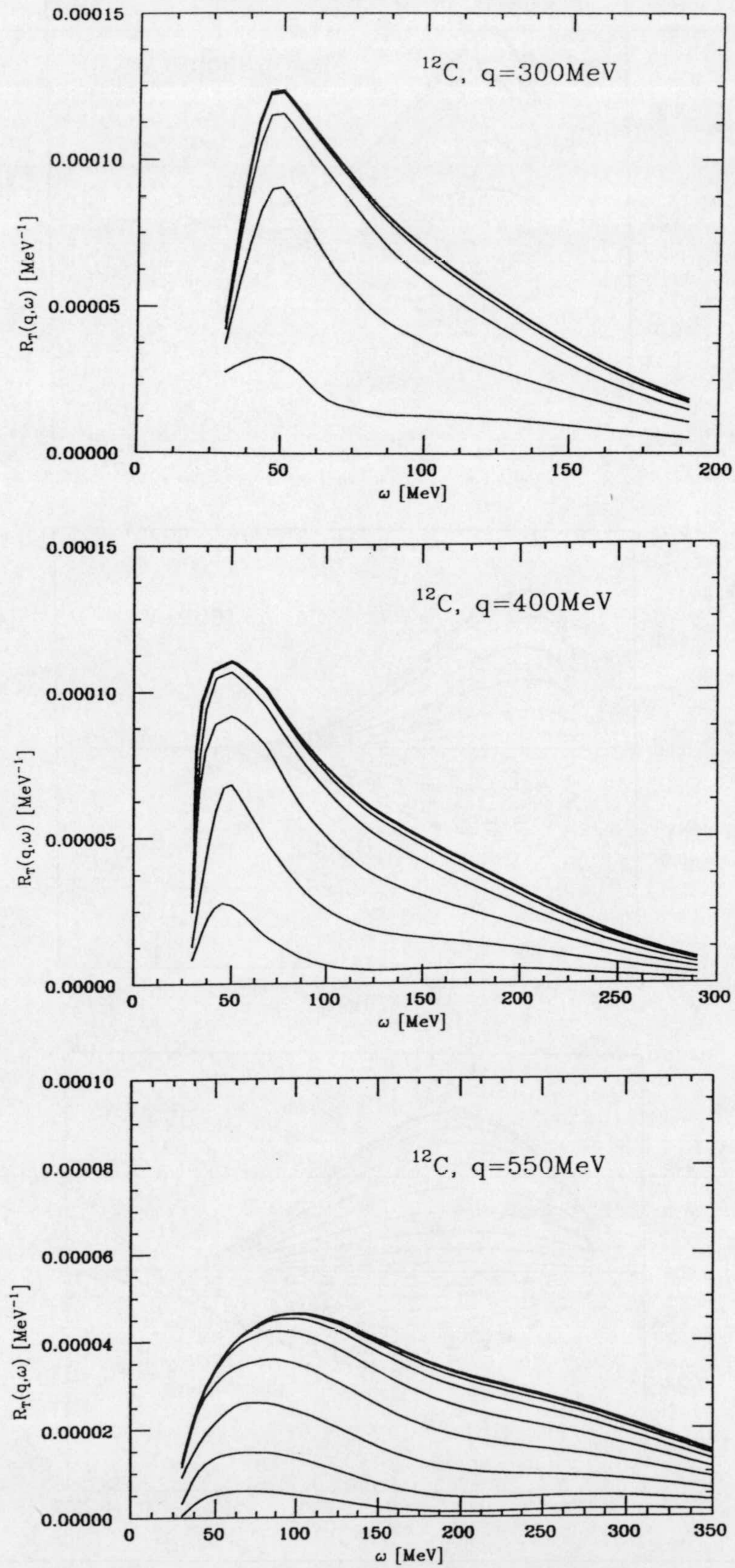


Figura 2.8: Convergencia de la suma en multipolos para la respuesta transversal pura de las MEC a $1p - 1h$ en el ^{12}C . Cada curva se ha obtenido de forma similar a las de la respuesta transversal en la Fig. 2.4.

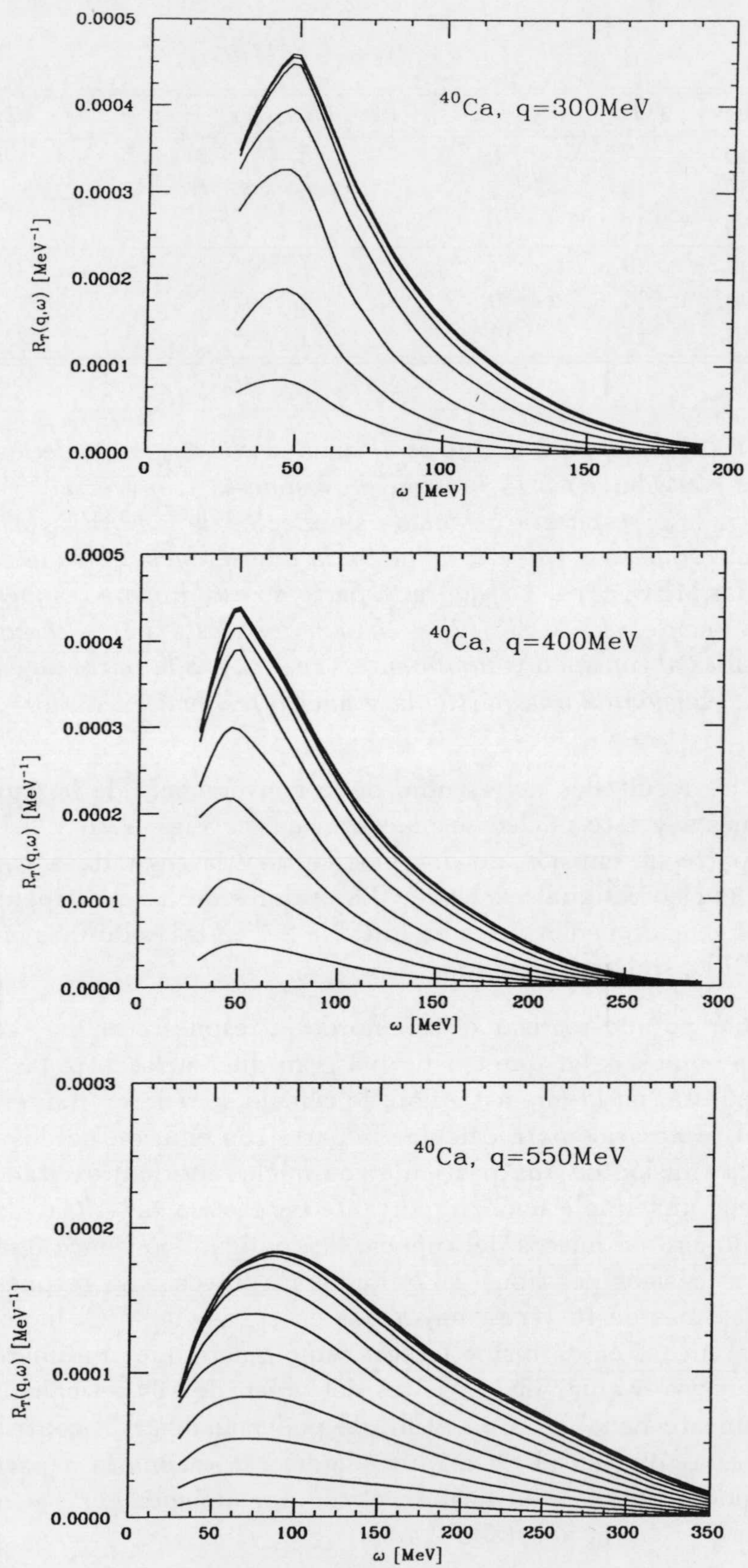


Figura 2.9: Idem que la Fig. 2.8 para el ^{40}Ca .

	$q[\text{MeV}]$	(OB)	$(1p - 1h)_I$	$(1p - 1h)_{\text{MEC}}$	$(2p - 2h)$	$(2p - 2h)^*$
^{12}C	300	7	6	5	6	5
	400	9	7	6	7	6
	550	12	9	8	9	9
^{40}Ca	300	9	7	7		7
	400	11	9	8		9
	550	15	11	11		12

Tabla 2.4: Multipolo J para el que se alcanza la convergencia de los distintos términos que contribuyen a la función de respuesta transversal. Aquí (OB) hace referencia a la respuesta calculada sin efectos de las MEC, $(1p - 1h)_I$ a la parte de la respuesta a $1p - 1h$ debida a la interferencia entre la corriente a un cuerpo y las MEC, $(1p - 1h)_{\text{MEC}}$ a la parte de esta misma respuesta que se debe exclusivamente a las MEC, $(2p - 2h)$ a la respuesta a $2p - 2h$ con emisión de dos partículas al continuo y, finalmente, $(2p - 2h)^*$ a la parte de esta misma respuesta con emisión de una partícula y núcleo residual excitado.

Por otro lado, los resultados del estudio de la convergencia de la suma en multipolos para esta respuesta y este núcleo se muestran en las Figs. 2.10 y 2.11. La primera corresponde a la parte de emisión de dos partículas y la segunda a la de emisión de una partícula con núcleo residual excitado. Los valores de los multipolos para los que se alcanza la convergencia pueden verse en la tabla 2.4 en las columnas encabezadas por $(2p - 2h)$ y $(2p - 2h)^*$, respectivamente.

A pesar de haber podido realizar el cálculo de la respuesta a $2p - 2h$ en el ^{12}C de forma completa, hay que señalar que existe una gran diferencia entre las dos partes que integran dicha respuesta, en lo que a tiempo de cálculo se refiere. Así, el cociente entre los tiempos de CPU necesarios para calcular la parte con emisión de dos partículas y la correspondiente a la emisión de una partícula con núcleo residual excitado es superior a 30. Este hecho tiene una implicación importante en el caso del ^{40}Ca . En este núcleo, el aumento en el número de huecos del espacio de configuración hace que el número de elementos de matriz básicos del tipo (2.12) que contribuyen a la respuesta de emisión de dos partículas sea más de 10 veces mayor que en el caso del ^{12}C , incrementándose el tiempo de cálculo al menos en el mismo factor; como quiera que el número de elementos de matriz que es preciso evaluar en el ^{12}C es del orden de 10^6 , el cálculo completo en el ^{40}Ca es prácticamente inviable. Con el fin de poder analizar la contribución de este término a la respuesta total en el ^{40}Ca , procederemos a estimarla a partir de cálculos parciales de unos pocos puntos y utilizando el comportamiento general que resulta del cálculo realizado en el ^{12}C (ver apartado 2.4.3).

Esta dificultad en el cálculo de la respuesta de emisión de dos partículas en el ^{40}Ca no es tan grave cuando se trata de la respuesta de emisión de una partícula con núcleo residual excitado. Esta parte de la respuesta puede ser evaluada de manera completa, ya

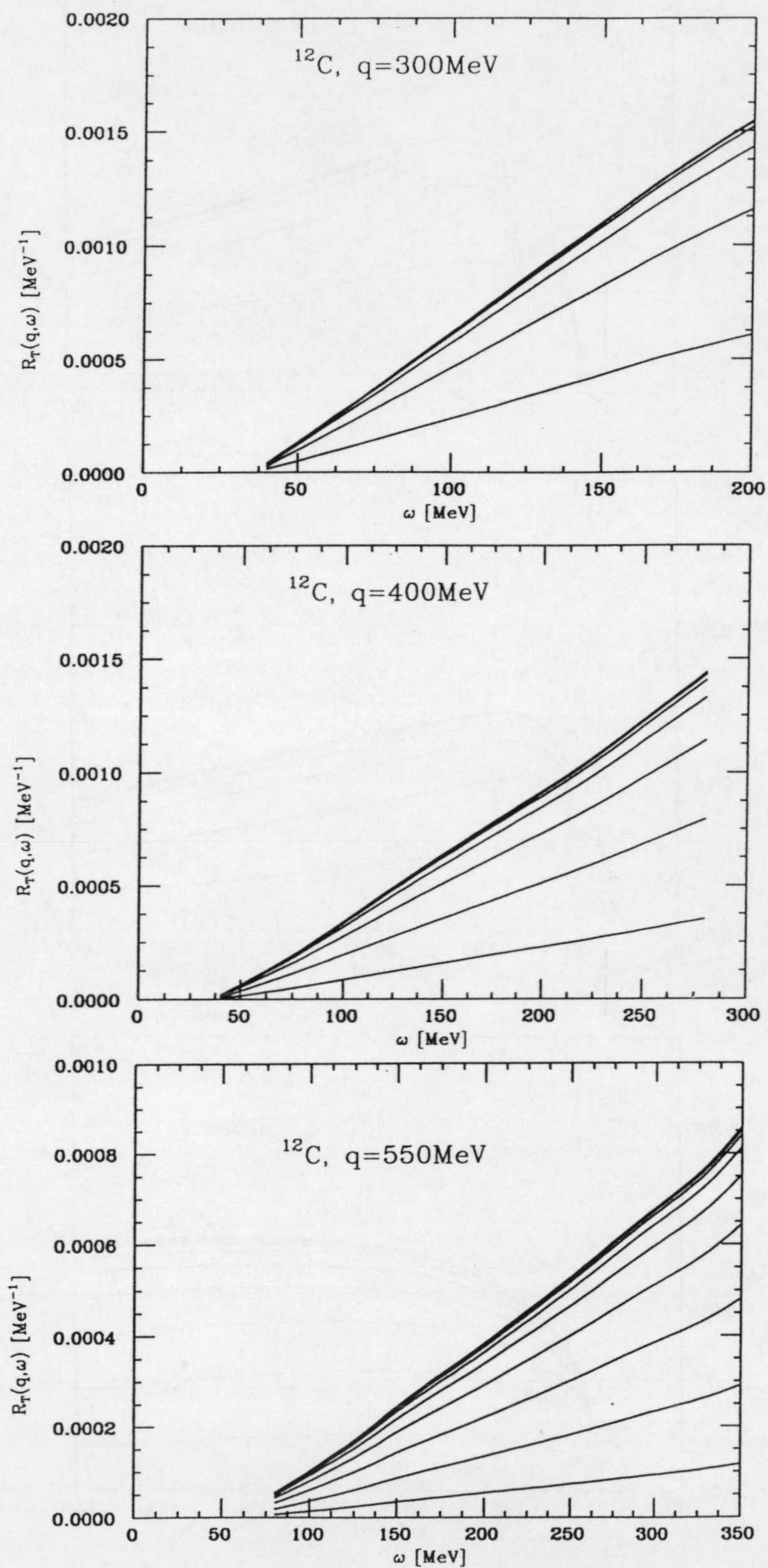


Figura 2.10: Convergencia de la respuesta transversal de emisión de dos partículas para el ^{12}C . Se ha usado el mismo convenio que en la Fig. 2.4 para las distintas curvas.

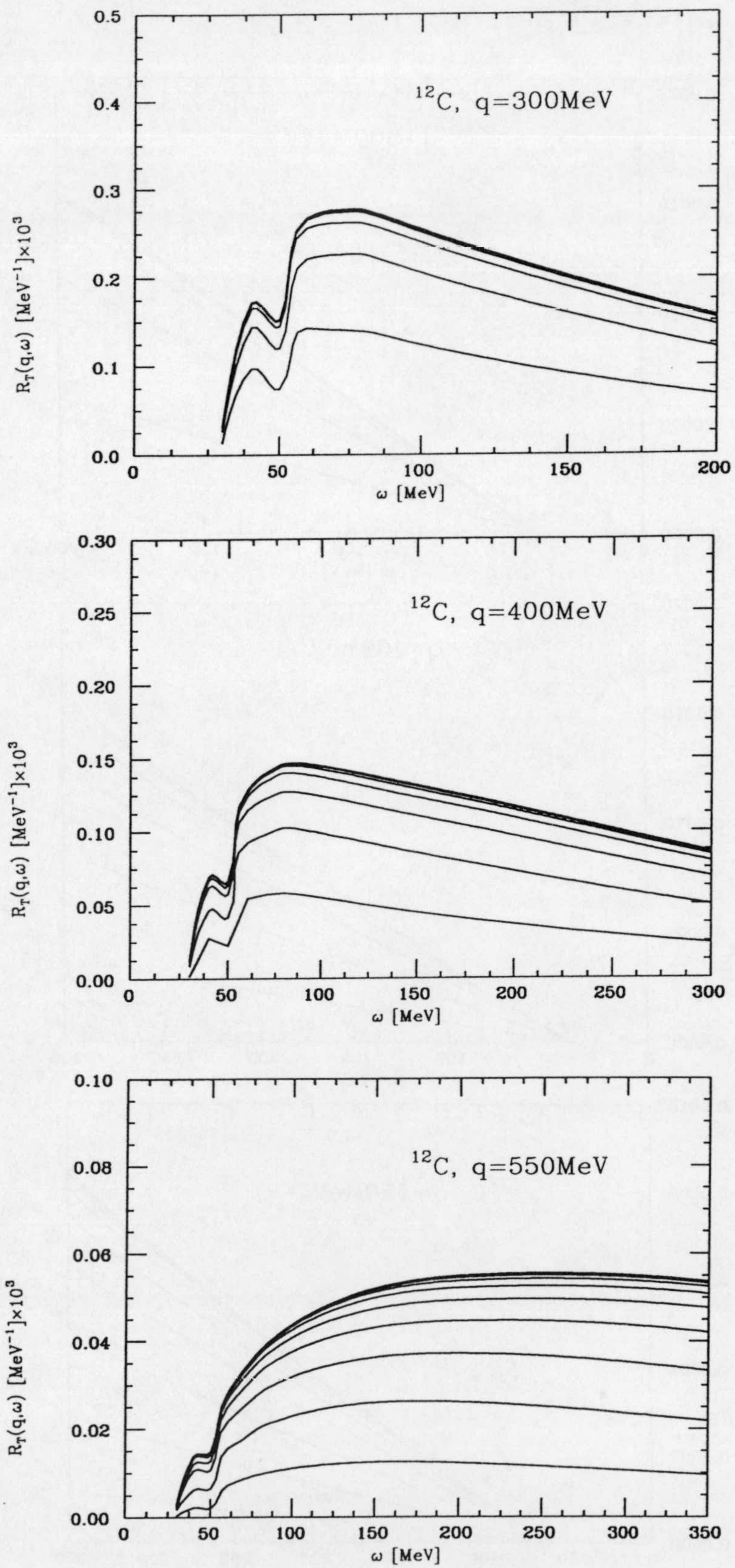


Figura 2.11: Lo mismo que en la Fig. 2.10 pero para la respuesta transversal de emisión de una partícula con núcleo residual excitado.

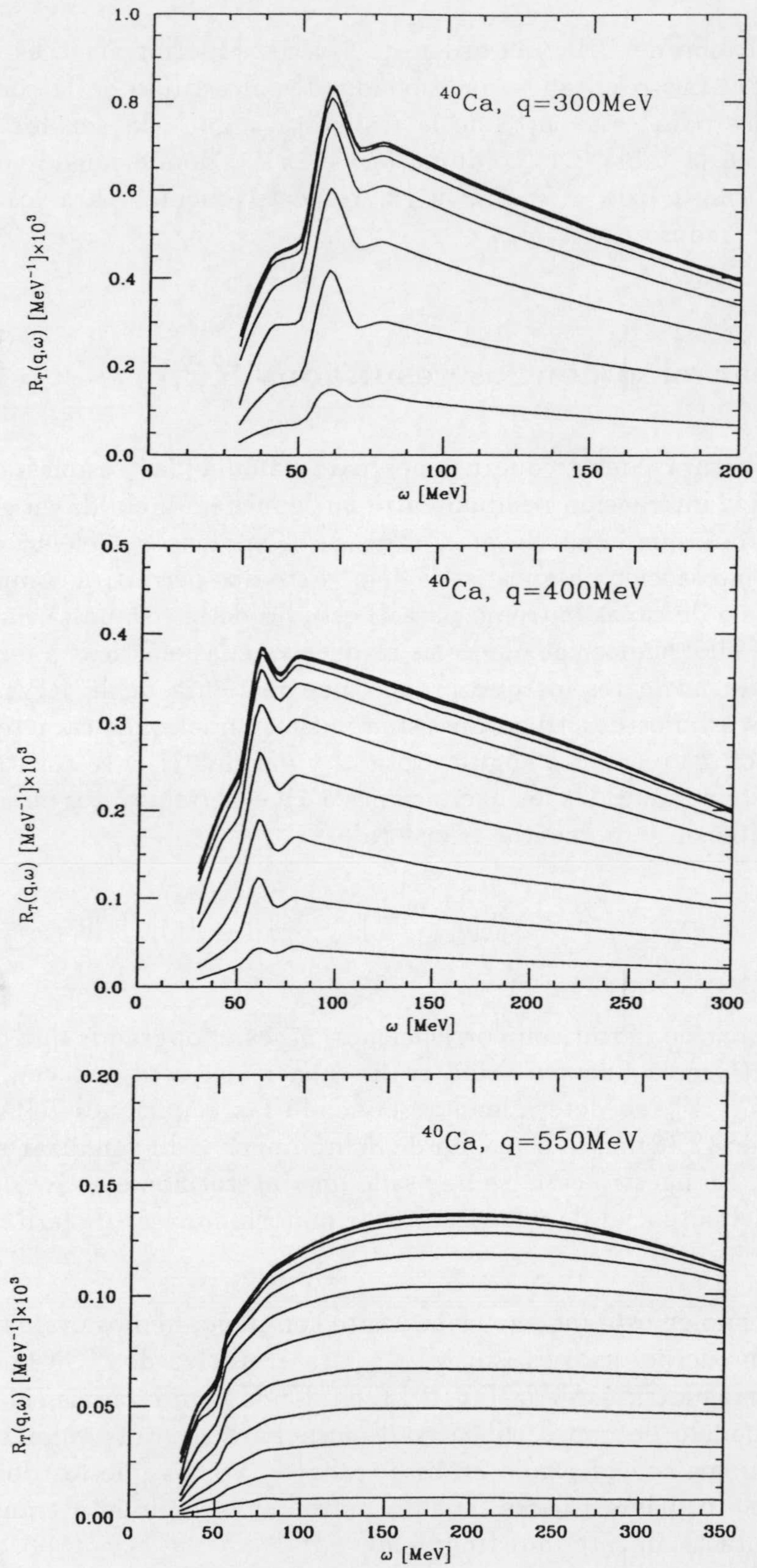


Figura 2.12: Igual que la Fig. 2.11 pero para el ^{40}Ca .

que requiere un tiempo de CPU del orden de 6 veces superior al necesario en ^{12}C para la misma respuesta. Los resultados correspondientes al estudio de la convergencia de la suma en multipolos para esta parte de la respuesta a $2p - 2h$ son los que mostramos en la Fig. 2.12 y en la tabla 2.4 (columna $(2p - 2h)^*$), donde puede verse cómo dicha convergencia se alcanza para $J = 7, 9$ y 12 , respectivamente, para los tres momentos transferidos considerados.

2.2.3 Comparación con los resultados RPA

El modelo de estructura nuclear que usamos para calcular las respuestas cuasielásticas no tiene en cuenta la interacción residual entre nucleones no incluida en el campo medio. Un test adicional que queremos llevar a cabo es el análisis del efecto que produce la inclusión de dicha interacción en nuestro modelo. Esto nos permitirá comprobar, además, la validez del modelo de capas extremo para el estudio de la respuesta nuclear en el pico cuasielástico. Para ello, hemos calculado las respuestas cuasielásticas a un cuerpo usando como estados finales nucleares los que proporciona la teoría de la RPA en el continuo [Co'84a, 88]. Estos estados describen un sistema con A nucleones caracterizado por una energía de excitación E , momento angular total J y paridad Π , y se construyen mediante superposición coherente de todas las excitaciones a $1p - 1h$ relevantes en una región dada de energías de excitación y momentos transferidos:

$$|n\rangle = \sum_{ph} \int d\epsilon \left(X_{ph}^n [a_p^+(\epsilon) b_h^+]_J - Y_{ph}^n [b_h a_p(\epsilon)]_J \right) |0\rangle, \quad (2.18)$$

en donde $|0\rangle$ es el mar de Fermi con correlaciones, b_h^+ es el operador que crea un agujero en la capa h y $a_p^+(\epsilon)$ crea una partícula en la capa p del continuo con una energía ϵ . Los coeficientes X_{ph}^n , Y_{ph}^n se determinan resolviendo las ecuaciones RPA, que resultan de sustituir el estado (2.18) en la ecuación de Schrödinger y diagonalizar una interacción residual apropiada. En nuestro caso, se ha usado una interacción efectiva de alcance finito obtenida a partir del potencial de polarización de materia nuclear de la Ref. [Pin88a], sin parte tensorial.

Dado que el cálculo en este modelo es bastante complejo, hemos evaluado las respuestas puramente a un cuerpo, esto es, sin MEC, para el núcleo de ^{12}C . Los resultados se muestran en las curvas a trazos de la Fig. 2.13, en donde comparamos con las respuestas obtenidas con el modelo de capas (línea continua), para los tres valores del momento transferido que venimos considerando en este trabajo. Vemos que los dos modelos producen resultados tanto más similares, cuanto mayor es el momento transferido, siendo para $q = 550\text{MeV}$ prácticamente indistinguibles.

Podemos por tanto concluir que, en la región del pico cuasielástico, el uso del modelo de capas tiene la suficiente validez como para proporcionar resultados tan fiables como los de un modelo más realista, como es la RPA.

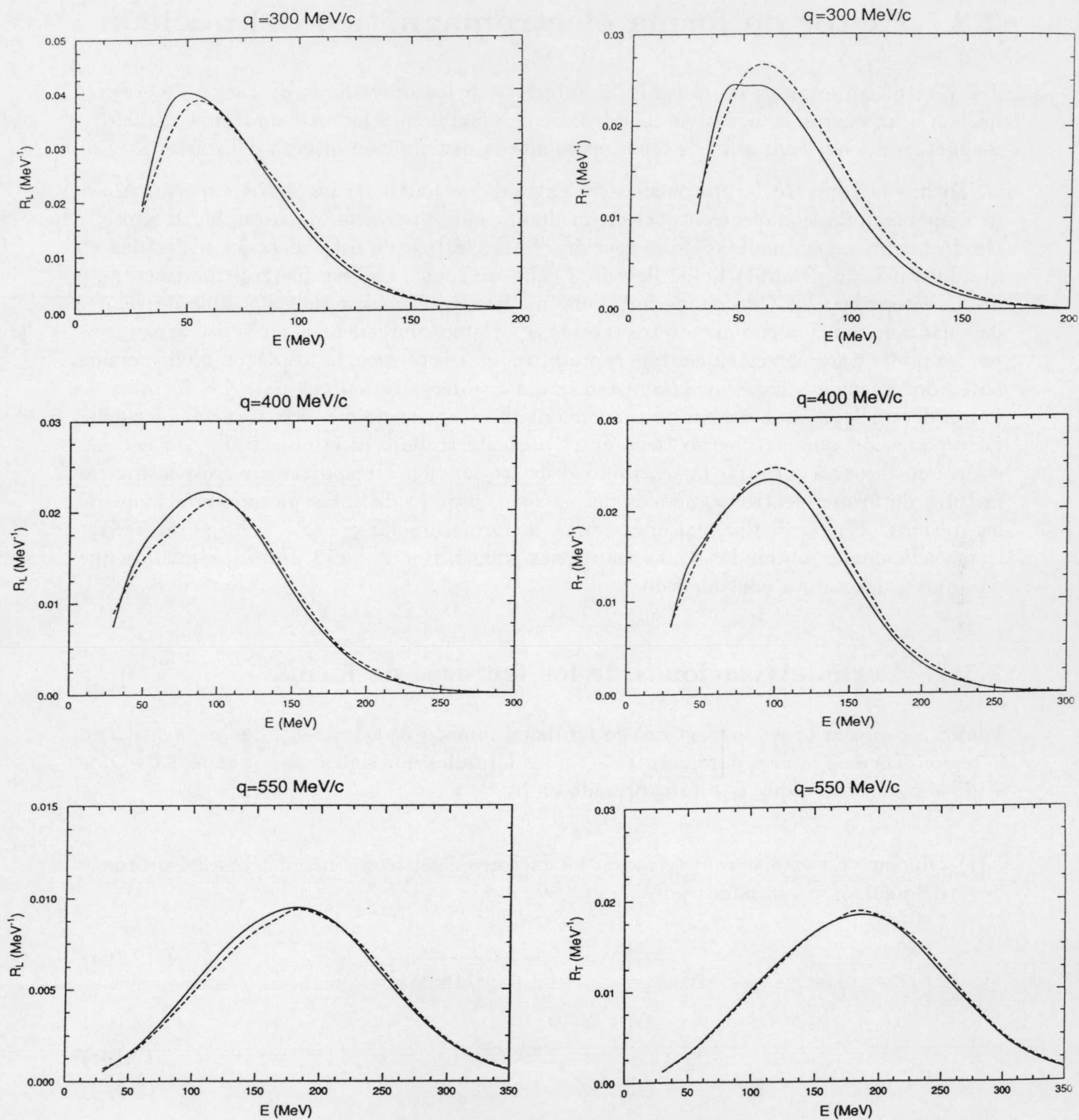


Figura 2.13: Comparación entre las respuestas calculadas con el modelo de capas (curva continua) y con la RPA en el continuo (curva discontinua)

2.3 Factor de forma electromagnético del nucleón

Tal y como apuntamos en el capítulo anterior, en los operadores de carga y corriente nuclear a un cuerpo es necesario incluir los correspondientes factores de forma eléctrico o magnético del nucleón, a fin de tener en cuenta la distribución interna del mismo.

Dichos factores de forma pueden ser extraídos a partir de los datos experimentales de dispersión elástica electrón-nucleón mediante una separación de Rosenbluth [Ros50]. Desde las primeras medidas de la sección eficaz elástica de esta reacción realizadas en Stanford [Cha56, Bum61], se ha llevado a cabo un considerable esfuerzo experimental, a fin de determinar los factores de forma del nucleón en el mayor rango posible de valores del cuadrado del cuadrimomento transferido q_μ^2 . Como consecuencia, en la literatura existen no pocas parametrizaciones que reproducen en cierta medida los datos de dispersión obtenidos en dichos experimentos, pero que dan diferentes valores para los factores de forma del nucleón en la región de cuadrimomento transferido que estamos considerando. La repercusión que este hecho tiene en el presente trabajo es el objeto de esta sección en la que vamos a estudiar la sensibilidad de las funciones respuesta con respecto a los factores de forma electromagnéticos del nucleón, usando distintas parametrizaciones de los mismos. En particular, consideraremos la forma dipolar y hasta ocho parametrizaciones adicionales, obtenidas de las referencias [Jan65, Ber72, Iac73, Hoe76, Sim80], y que pasamos a describir a continuación.

2.3.1 Parametrizaciones de los factores de forma

Vamos a expresar todos los factores de forma en función de $Q^2 = -q_\mu^2$, que es positivo en la región física de interés para nosotros. En las fórmulas que siguen se entiende, salvo que se diga lo contrario, que Q está expresado en fm^{-1} .

- (I) Dipolar. En esta parametrización los factores eléctricos y magnéticos del protón y del neutrón están dados por

$$G_E^P = \frac{1}{(1 + Q^2/18.23)^2}, \quad (2.19a)$$

$$G_E^N = 0, \quad (2.19b)$$

$$G_M^P = 2.793G_E^P, \quad (2.19c)$$

$$G_M^N = -1.913G_E^P. \quad (2.19d)$$

- (II) Janssens et al. [Jan65]. Aquí los factores de forma vienen expresados en términos de los factores de forma isoescalar e isovectorial

$$G_E^P = G_E^S + G_E^V, \quad G_E^N = G_E^S - G_E^V, \quad (2.20a)$$

$$G_M^P = G_M^S + G_M^V, \quad G_M^N = G_M^S - G_M^V, \quad (2.20b)$$

y dichos factores de forma se escriben como

$$G_E^S = 0.5 \left[\frac{2.5}{1 + Q^2/15.7} - \frac{1.6}{1 + Q^2/26.7} + 0.1 \right], \quad (2.21a)$$

$$G_E^V = 0.5 \left[\frac{1.16}{1 + Q^2/8.19} - 0.16 \right], \quad (2.21b)$$

$$G_M^S = 0.44 \left[\frac{3.33}{1 + Q^2/15.7} - \frac{2.77}{1 + Q^2/26.7} + 0.44 \right], \quad (2.21c)$$

$$G_M^V = 2.353 \left[\frac{1.11}{1 + Q^2/8.19} - 0.11 \right]. \quad (2.21d)$$

(III) Bertozzi et al. [Ber72]. En esta parametrización se tiene

$$G_E^P = \frac{1}{(1 + aQ^2)^2}, \quad G_E^N = \frac{1}{(1 + bQ^2)^2} - \frac{1}{(1 + aQ^2)^2}, \quad (2.22a)$$

$$G_M^P = \frac{2.793}{(1 + aQ^2)^2}, \quad G_M^N = \frac{-1.913}{(1 + aQ^2)^2}, \quad (2.22b)$$

con $a = 0.058333 \text{ fm}^2$ y $b = 0.048333 \text{ fm}^2$.

(IV) Iachello et al. [Iac73]. Estos autores establecen una serie de parametrizaciones distintas, de las cuales nosotros vamos a considerar cuatro. Estas se expresan en función de los factores de forma isoescalar e isovectorial de Dirac:

$$G_E^P = (F_1^V + F_1^S) + \frac{Q^2}{4M^2}(F_2^V + F_2^S), \quad (2.23a)$$

$$G_E^N = (F_1^S - F_1^V) + \frac{Q^2}{4M^2}(F_2^S - F_2^V), \quad (2.23b)$$

$$G_M^P = (F_1^V + F_1^S) + (F_2^V + F_2^S), \quad (2.23c)$$

$$G_M^N = (F_1^S - F_1^V) + (F_2^S - F_2^V), \quad (2.23d)$$

que a su vez se expresan en la forma

$$F_1^S = \frac{1}{2}g(Q^2) \left[1 - \beta_\omega - \beta_\phi + \beta_\omega \frac{\mu_\omega^2}{\mu_\omega^2 + Q^2} + \beta_\phi \frac{\mu_\phi^2}{\mu_\phi^2 + Q^2} \right], \quad (2.24a)$$

$$F_1^V = \frac{1}{2}g(Q^2) \left[1 - \beta_\rho + \beta_\rho \frac{\mu_\rho^2 + 8\Gamma_\rho\mu/\pi}{\mu_\rho^2 + Q^2 + (4\mu^2 + Q^2)\Gamma_\rho\alpha(Q)/\mu} \right], \quad (2.24b)$$

$$F_2^S = \frac{1}{2}g(Q^2) \left[(-0.120 - \alpha_\phi) \frac{\mu_\omega^2}{\mu_\omega^2 + Q^2} + \alpha_\phi \frac{\mu_\phi^2}{\mu_\phi^2 + Q^2} \right], \quad (2.24c)$$

$$F_2^V = \frac{1}{2}g(Q^2) \left[3.076 \frac{\mu_\rho^2 + 8\Gamma_\rho\mu/\pi}{\mu_\rho^2 + Q^2 + (4\mu^2 + Q^2)\Gamma_\rho\alpha(Q)/\mu} \right], \quad (2.24d)$$

con $\Gamma_\rho = 112 \text{ MeV}$ y donde la función $\alpha(Q)$ que aparece en el denominador de los factores de forma isovectoriales está definida por

$$\alpha(Q) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{Q^2 + 4\mu^2}{Q^2} \right]^{1/2} \log \left[\frac{(Q^2 + 4\mu^2)^{1/2} + Q}{2\mu} \right]. \quad (2.25)$$

Parametrización	$g(Q^2)$	$\Gamma[\text{GeV}^{-2}]$	β_ρ	β_ω	β_ϕ	a_ϕ
(IVa)	$1 + \gamma Q^2$	0.48	0.746	1.289	0.0	0.0
(IVb)		0.65	0.588	0.397	1.065	0.166
(IVc)	$(1 + \gamma Q^2)^2$	0.25	0.687	1.197	0.0	0.0
(IVc)		0.25	0.672	1.102	0.112	-0.052

Tabla 2.5: *Parámetros de los cuatro factores de forma (IV) tomados de la referencia [Iac73] y que consideramos en el presente trabajo.*

En las anteriores ecuaciones $\mu_\rho, \mu_\omega, \mu_\phi$ son las masas de los distintos mesones vectoriales, mientras que la función $g(Q^2)$ y los parámetros $\beta_\rho, \beta_\omega, \beta_\phi, \alpha_\phi, \Gamma_\rho$ se muestran en la tabla 2.5 para nuestras cuatro elecciones.

- (V) Simon et al. [Sim80]. En esta parametrización sólo se describen los factores de forma del protón, que viene dados por

$$G_E^P = \frac{0.312}{1 + Q^2/6} + \frac{1.312}{1 + Q^2/15.02} - \frac{0.709}{1 + Q^2/44.08} + \frac{0.085}{1 + Q^2/154.2}, \quad (2.26a)$$

$$G_M^P = 2.793 \left[\frac{0.694}{1 + Q^2/8.5} + \frac{0.719}{1 + Q^2/15.02} - \frac{0.418}{1 + Q^2/44.08} + \frac{0.005}{1 + Q^2/355.4} \right]. \quad (2.26b)$$

Para el neutrón tomamos de nuevo la forma dipolar.

- (VI) Hoeler et al. [Hoe76]. En este caso, Q se supone expresado en GeV y los factores de forma electromagnéticos del nucleón vienen dados de nuevo por las ecs. (2.23); los factores de forma isoescalar e isovectorial de Dirac se parametrizan ahora como sigue:

$$F_i^S = \sum_{j=1}^3 \frac{a_{ij}^S}{t_j^S + Q^2} \quad (2.27a)$$

$$F_i^V = F_i^\rho + \sum_{j=1}^3 \frac{a_{ij}^V}{t_j^V + Q^2} \quad (2.27b)$$

en donde $i = 1, 2$, las funciones F_i^ρ están dadas por

$$F_1^\rho = \frac{1}{2} \frac{0.955 + 0.09(1 + Q^2/0.355)^{-2}}{1 + Q^2/0.536} \quad (2.28a)$$

$$F_2^\rho = \frac{1}{2} \frac{5.335 + 0.0962(1 + Q^2/0.268)^{-1}}{1 + Q^2/0.603} \quad (2.28b)$$

y los parámetros a_{ij} y t_j se muestran en la tabla 2.6

j	a_{1j}^S	a_{2j}^S	a_{1j}^V	a_{2j}^V	t_j^S	t_j^V
1	0.71	-0.11	0.05	-1.99	0.78	1.21
2	-0.64	0.13	-0.52	0.20	1.02	2.45
3	-0.13	-0.02	0.28	0.19	1.80	2.95

Tabla 2.6: *Parámetros que aparecen en los factores de forma isoescalar e isovec-torial en la parametrización (VI) y que hemos tomado de la referencia [Hoe76].*

En las Figs. 2.14-2.17 se muestra la dependencia en energía de estos factores de forma, fijados los valores del cuadrimomento transferido q a 300, 400 y 550 MeV. En cada figura sólo hemos representado los resultados correspondientes a las parametrizaciones que toman los valores extremos, por arriba y por abajo, de entre las indicadas anteriormente, lo que nos da una idea de la incertidumbre existente en relación a este aspecto del cálculo, que no es exclusivo del problema aquí planteado. Además se muestra en línea continua el factor de forma correspondiente a la parametrización de Hoeler et al., que es el que usamos en el presente trabajo.

2.3.2 Indeterminación en las respuestas

Parece evidente, a la vista de los resultados que acabamos de discutir, que la banda de indeterminación que presentan los factores de forma del nucleón va a dar lugar a una indeterminación en las funciones respuesta. Sin embargo, como a la respuesta a un cuerpo contribuyen tanto los protones como los neutrones y las correspondientes contribuciones no pueden separarse, la indeterminación en dicha respuesta no se corresponde directamente con la de los factores de forma.

En las Figs. 2.18 y 2.19 se muestran, para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente, las bandas de indeterminación obtenidas para las respuestas longitudinal y transversal (esta última sin incluir los efectos de las MEC) y para los tres momentos transferidos $q = 300, 400$ y 550 MeV. Como antes, sólo hemos representado las funciones de respuesta que toman los valores más extremos (líneas a trazos), así como las calculadas con el factor de forma de Hoeler et al. (línea continua), que es el que hemos adoptado.

Analizemos en primer lugar la respuesta longitudinal, que sólo incluye el factor de forma eléctrico, a través del operador de carga. En este caso hay una relación directa entre la altura del pico y el valor del factor de forma eléctrico del protón. Las respuestas más altas se obtienen con la parametrización (IVb), que también da el mayor valor para G_E^P . Las funciones de respuesta longitudinal con los valores más pequeños son las calculadas con los factores de forma (V), a $q = 300$ MeV y (IVa) a $q = 400, 550$ MeV, parametrizaciones que también corresponden a los valores más pequeños de G_E^P para los mismos momentos transferidos (ver Fig. 2.14). La influencia del factor de forma eléctrico del neutrón, por su pequeño valor con respecto a G_E^P (compárense los valores de las curvas en las Figs. 2.14 y 2.16), es muy poco importante en la respuesta longitudinal.

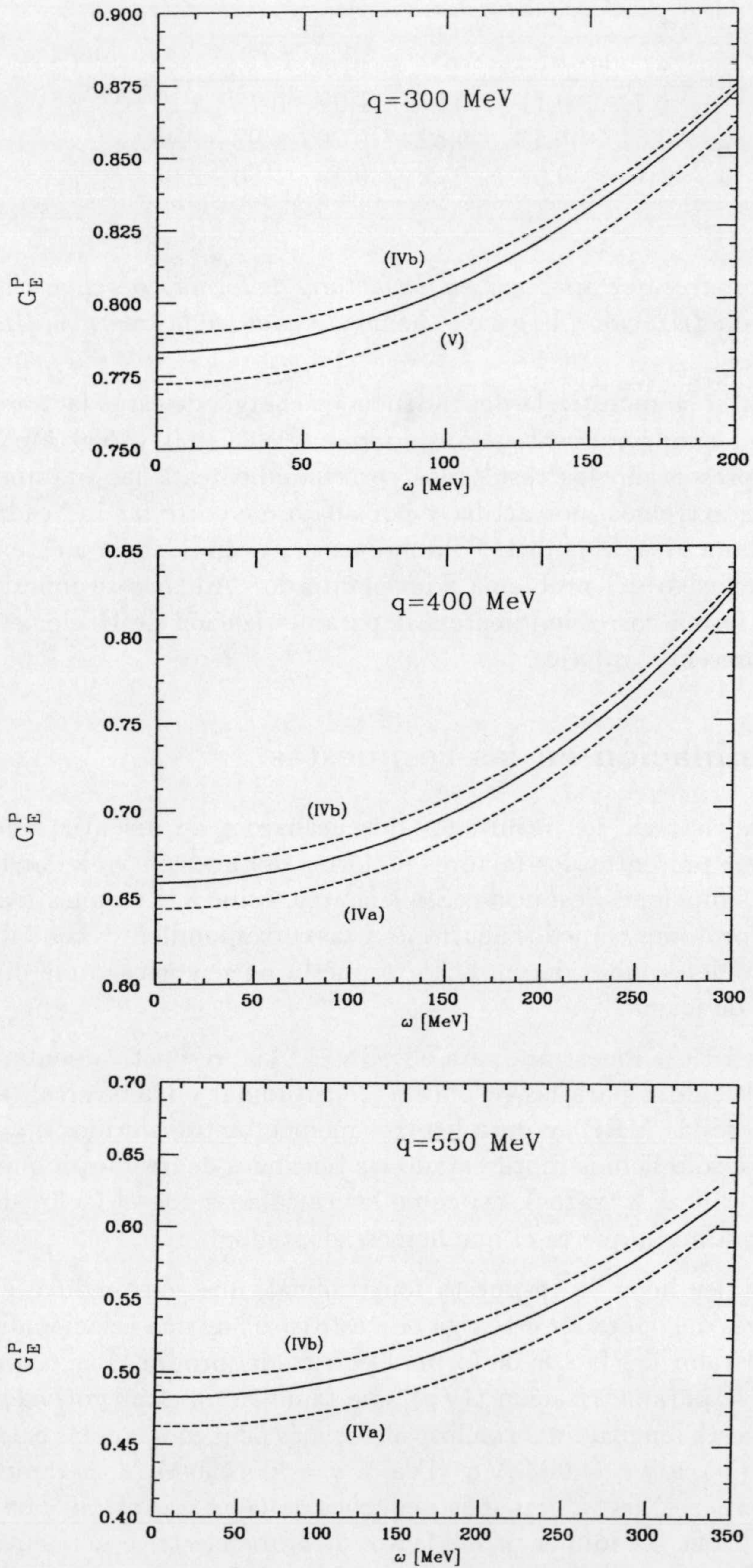


Figura 2.14: Factor de forma eléctrica del protón en las parametrizaciones extremas (curvas a trazos) y en la parametrización (VI) (curva continua) para los tres valores del momento transferido que usamos en el presente trabajo.

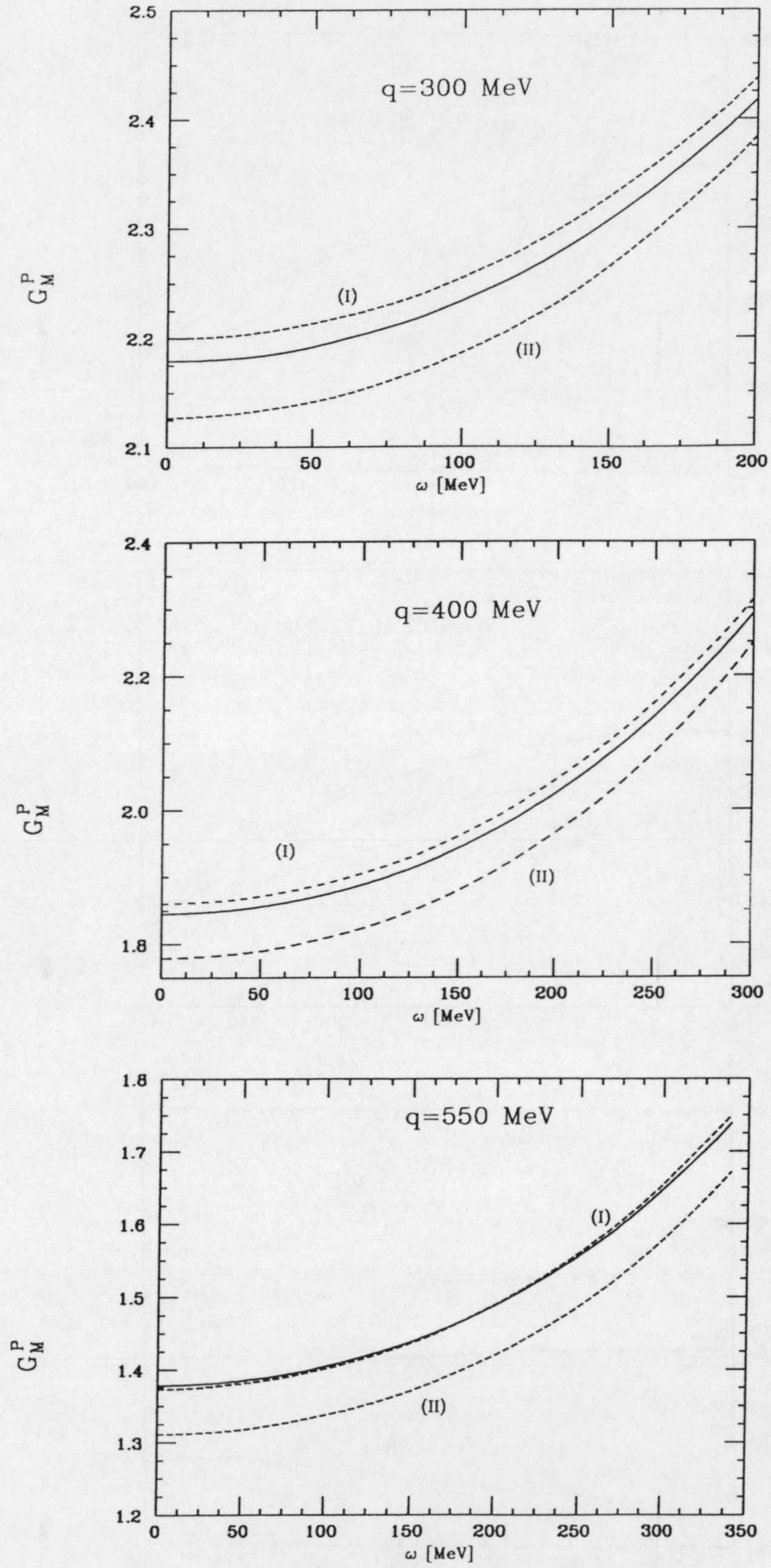


Figura 2.15: Idem que la Fig. 2.14 para el factor de forma magnético del protón.

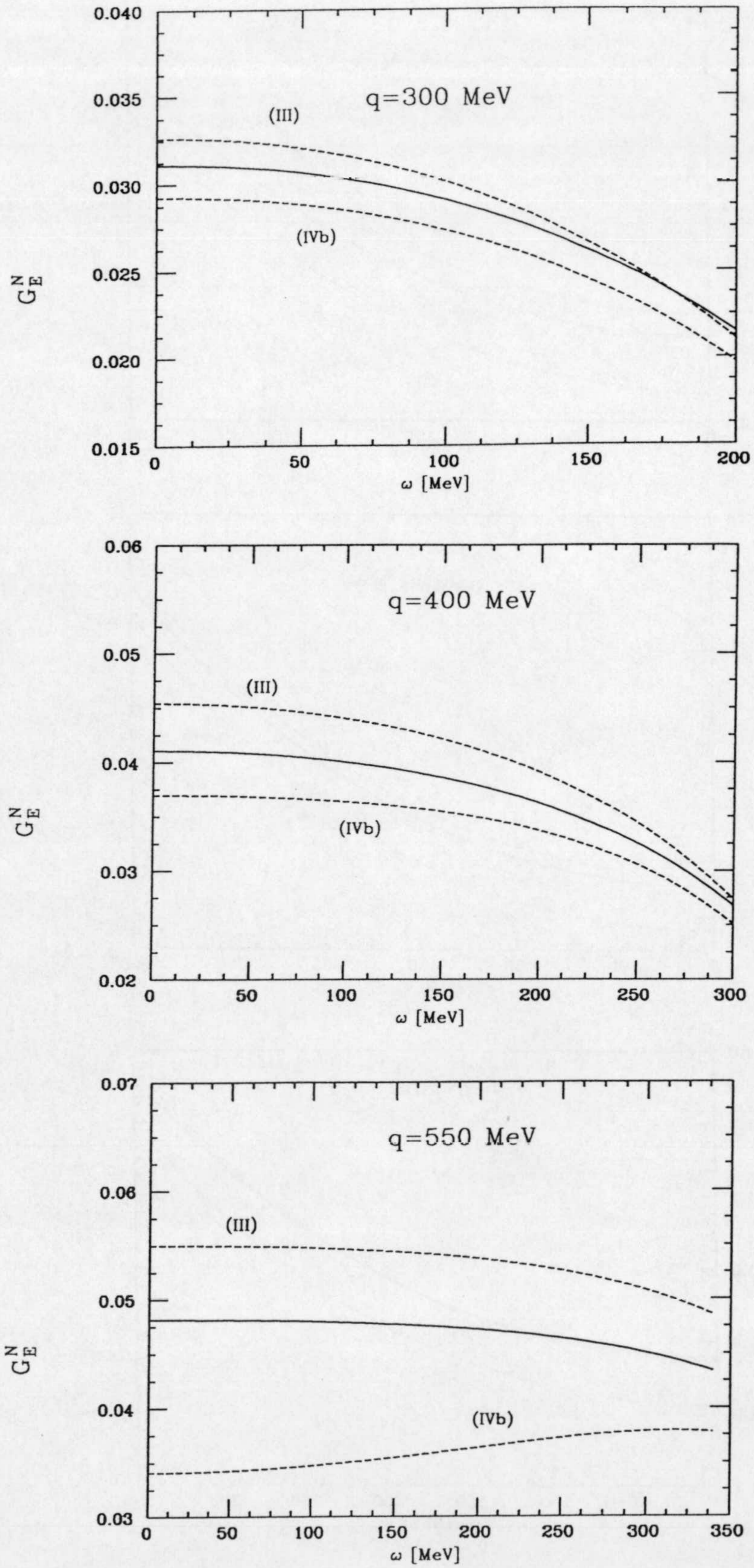


Figura 2.16: *Idem* que la Fig. 2.14 para el factor de forma eléctrico del neutrón.

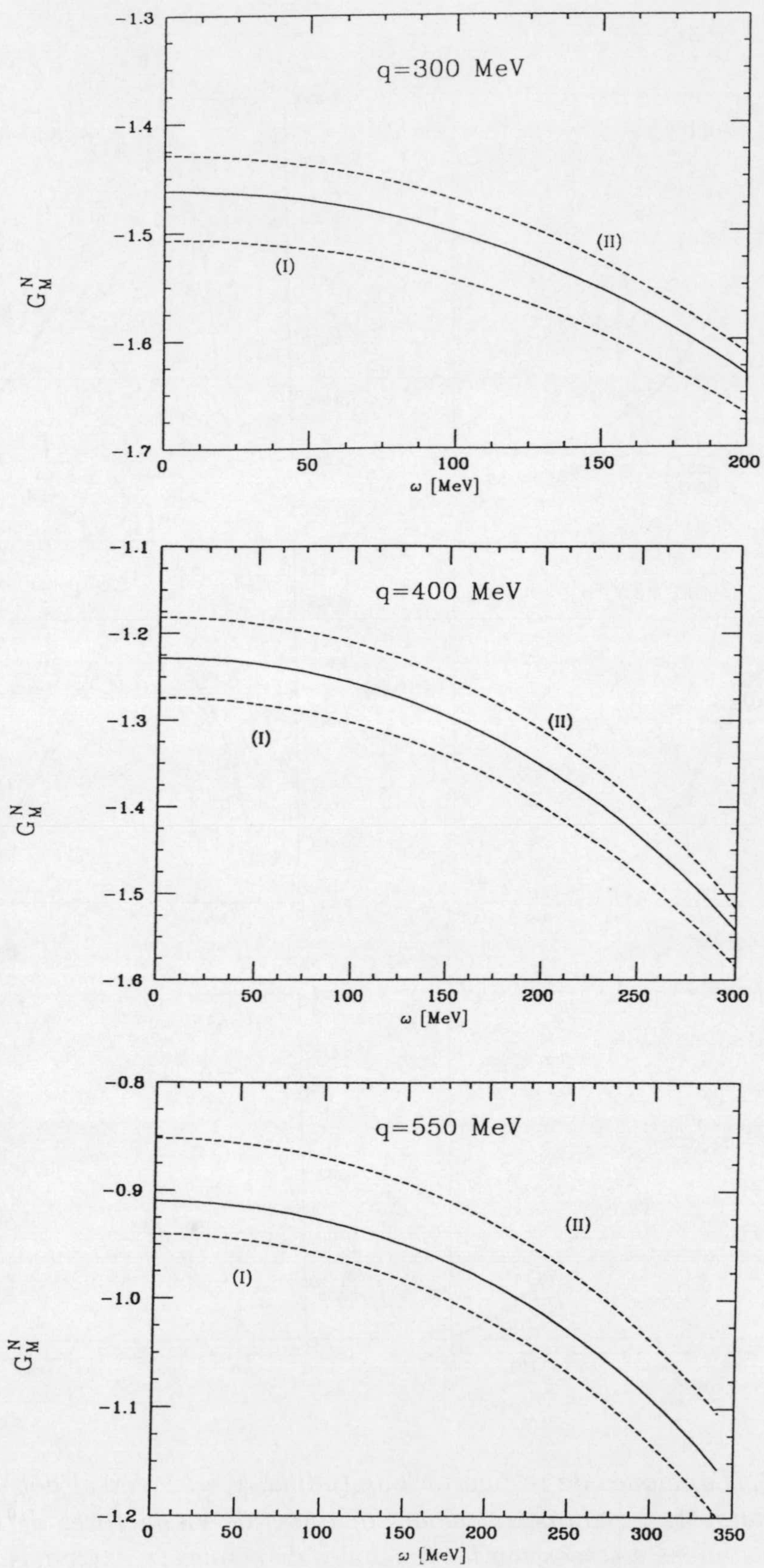


Figura 2.17: Idem que la Fig. 2.14 para el factor de forma magnético del neutrón.

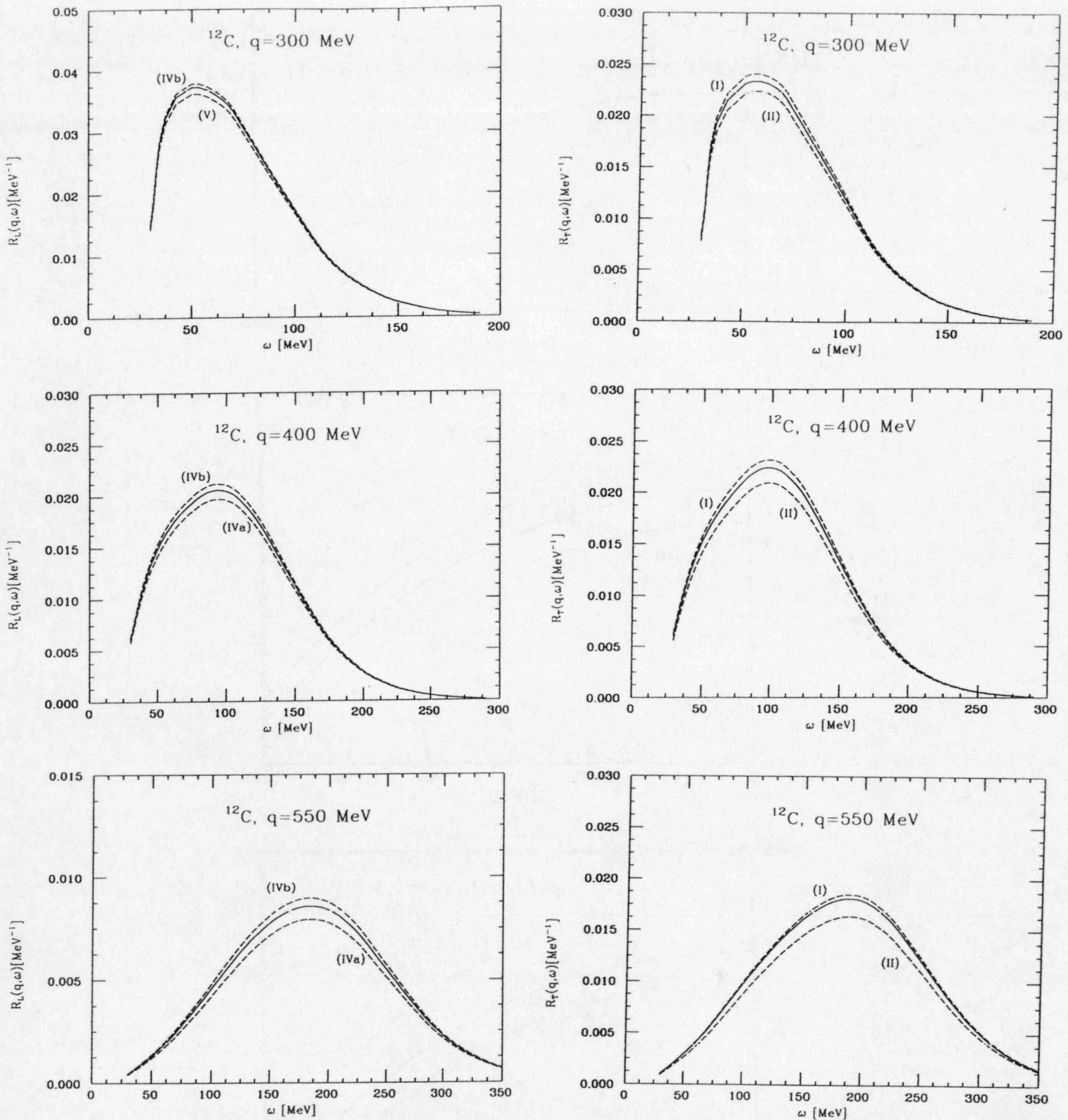


Figura 2.18: Funciones de respuesta longitudinal y transversal del ^{12}C calculadas utilizando tres parametrizaciones distintas de los factores de forma del nucleón. Las líneas a trazos son las funciones de respuesta extremas, mientras que las líneas continuas corresponden a la utilización del factor de forma de Hoeler et al.

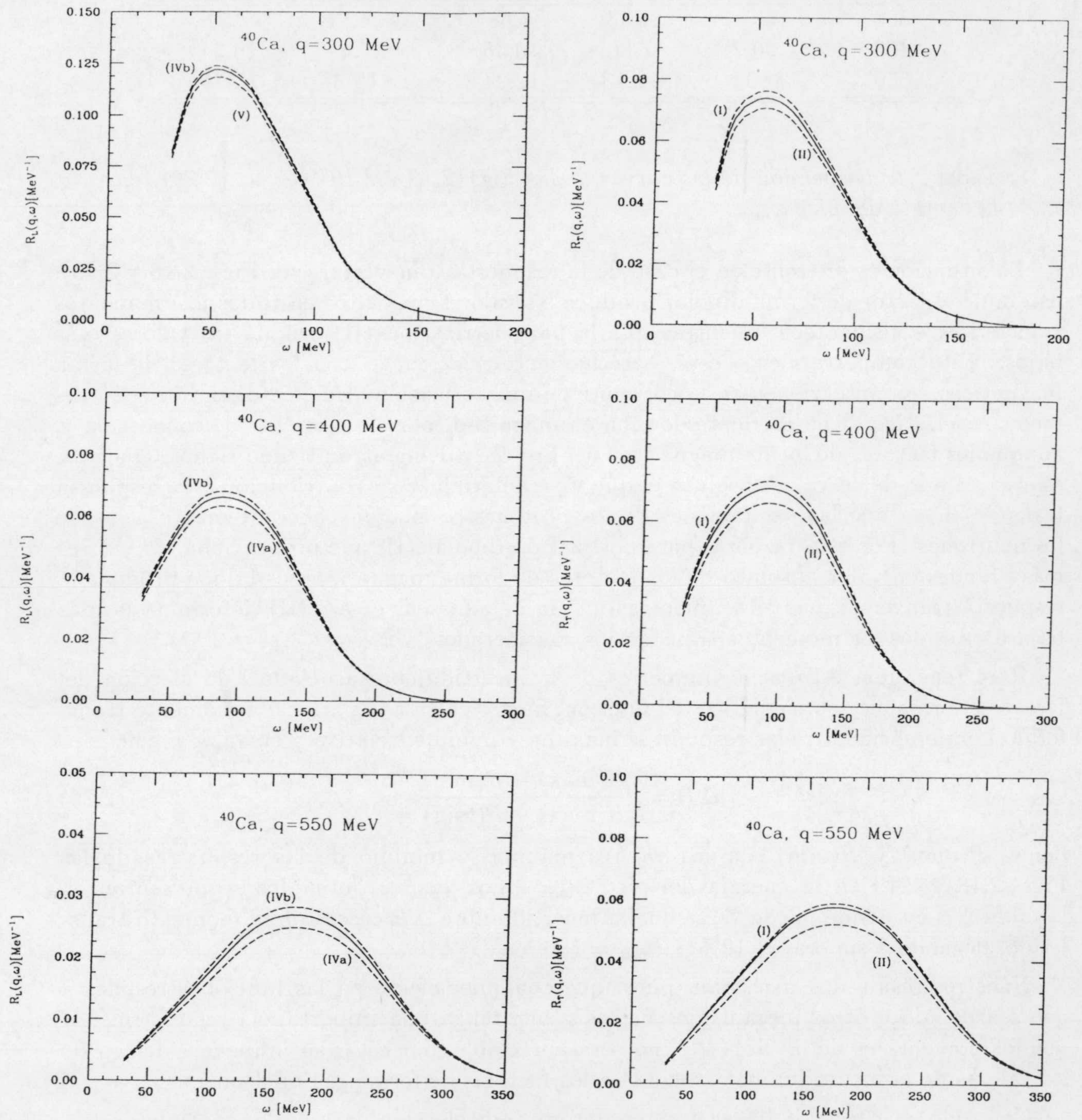


Figura 2.19: Lo mismo que la Fig. 2.18 para el ^{40}Ca .

q [MeV]	ω_{\max} [MeV]	^{12}C		^{40}Ca	
		ΔR_L [%]	ΔR_T [%]	ΔR_L [%]	ΔR_T [%]
300	50	4.53	7.58	4.51	7.54
400	90	7.36	10.36	7.47	10.34
550	180	12.13	12.24	12.38	12.31

Tabla 2.7: *Dispersión de las curvas de las Figs. 2.18 y 2.19 (ver ec. (2.29)) en la energía del pico ω_{\max} .*

La situación es diferente en el caso de la respuesta transversal (ver Figs. 2.18 y 2.19), en donde el factor de forma dipolar produce los valores más altos en todos los momentos transferidos considerados, mientras que la parametrización (II) origina los valores más bajos. Este comportamiento está estrechamente relacionado con los factores de forma magnéticos, que intervienen en la corriente de magnetización. En efecto, en la región del pico cuasielástico dicha corriente domina en magnitud sobre la corriente de convección y, aunque los factores de forma magnéticos del protón y del neutrón tienen signos opuestos, es el cuadrado de su valor absoluto el que va a determinar su contribución a la respuesta transversal, ya que las excitaciones de los protones se añaden coherentemente a las de los neutrones. Por esta razón la parametrización dipolar (I), que proporciona los valores más grandes en valor absoluto de los factores de forma magnéticos, es la que produce la respuesta transversal más alta, mientras que la de *Janssens et al.* (II) determina la más baja para todos los momentos transferidos considerados (ver Figs. 2.15 y 2.17).

Para tener una estimación numérica de la incertidumbre asociada a la elección del factor de forma electromagnético del nucleón, hemos calculado para cada momento transferido la diferencia entre las respuestas máxima y mínima, relativa a su valor medio:

$$\Delta R = 2 \frac{R(\max) - R(\min)}{R(\max) + R(\min)}, \quad (2.29)$$

donde $R(\max)$ y $R(\min)$ son los valores máximo y mínimo de las respuestas de las Figs. 2.18 y 2.19 en la energía del pico ω_{\max} . Los valores obtenidos se presentan en la tabla 2.7, en donde puede verse que la incertidumbre ΔR crece con el momento transferido, llegando a superar el 12% para $q = 550$ MeV.

Nuestros resultados muestran, pues, que cualquier efecto en las funciones respuesta que sea debido a otros mecanismos físicos y que tenga una importancia relativa menor que los porcentajes de la tabla 2.7, no será apreciable, por estar su influencia dentro de los valores de la incertidumbre asociada a los factores de forma del nucleón.

Con todo, es necesario llegar a un compromiso de elección para poder continuar nuestro análisis de las respuestas. En este sentido, es lógico adoptar para nuestros cálculos subsiguientes una parametrización de los factores de forma que represente el término medio de todas las que hemos analizado. Un examen de las figuras 2.18 y 2.19 nos lleva a proponer como más adecuada la parametrización correspondiente a las curvas de línea continua debida a *Hoeler et al.* [Hol76] y que será la que usemos en todo lo que sigue.

2.4 Efectos de las MEC

Hasta ahora el análisis que hemos realizado corresponde a la respuesta longitudinal y a la parte de la respuesta transversal asociada únicamente con la corriente nuclear a un cuerpo. Nuestra intención a partir de este momento es estudiar la influencia que las corrientes a dos cuerpos tienen sobre esta última respuesta. En esta sección nos restringiremos al estudio de las corrientes seagull y piónica en el modelo de capas, y dejaremos el caso de la corriente de isóbaro para el último capítulo.

Como hemos señalado en el capítulo anterior, las MEC contribuyen a la excitación de estados finales tanto con una como con dos partículas en el continuo. En el primer caso no es posible separarlas de la corriente a un cuerpo debido a que interfieren con ésta y, como veremos más adelante, dicha interferencia es mucho más importante que la contribución puramente de intercambio. En el caso de la respuesta de emisión de dos partículas, ésta se suma coherentemente a la anterior y es originada totalmente por las MEC, por lo que puede analizarse de forma separada de la respuesta de emisión de una partícula. Sin embargo, antes de proceder con el estudio de las diversas contribuciones, vamos a discutir brevemente el papel de los factores de forma electromagnéticos que deben incluirse en las MEC.

2.4.1 Factores de forma electromagnéticos en las MEC

Ya pusimos de manifiesto, en el capítulo anterior, que el principal problema que se plantea con respecto a la elección del factor de forma electromagnético que deben incluir las MEC, radica en la falta de consenso general sobre los propios factores, y no ya sobre su parametrización concreta.

En los cálculos realizados hemos adoptado el punto de vista de Hockert *et al.* [Hoc73]. Para la corriente seagull estos autores consideran el factor de forma isovectorial del nucleón, que viene dado por [Loc75]

$$F_S = F_1^V = F_1^P - F_1^N = \frac{G_E^P - G_E^N + \frac{Q^2}{4M^2}(G_M^P - G_M^N)}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}}. \quad (2.30)$$

Una forma simplificada de esta elección viene dada por la diferencia

$$F_S = G_E^P - G_E^N, \quad (2.31)$$

expresión que resulta ser muy próxima a G_E^P y que es el factor de forma utilizado por [Sch89]. La diferencia entre este factor de forma y el isovectorial será tanto más pequeña cuanto menor sea el cuadrado del cuadrimomento Q^2 . No obstante, en la siguiente discusión veremos que en la región del pico cuasielástico las diferencias entre ellos son apreciables. Por otra parte, para G_E^P y G_E^N usamos la misma parametrización adoptada en el apartado anterior, esto es, la de la referencia [Hoe76]

Para el factor de forma electromagnético del pión usaremos uno de tipo monopolar con dominancia del mesón ρ

$$F_\pi = F_{\pi\gamma} = \frac{1}{1 + Q^2/m_\rho^2}, \quad (2.32)$$

con m_ρ la masa del mesón ρ .

A pesar de que los cálculos realizados se han llevado a cabo con las elecciones de F_S y F_π que acabamos de mencionar, (2.31) y (2.32), la disparidad de pareceres existente con respecto a los factores de forma electromagnéticos de las MEC, nos ha llevado a realizar un análisis comparativo de algunas de las diversas opciones que aparecen en la literatura. Así, hemos considerado un total de seis factores de forma para la corriente seagull y tres para la corriente piónica. Los de la corriente seagull se describen a continuación:

(I) Factor de forma isovectorial F_1^V correspondiente a

- (a) la expresión dada por la ec. (2.30) y
- (b) la forma simplificada de la ec. (2.31).

(II) Factor de forma vectorial axial del nucleón

$$F_A = \frac{1}{(1 - q_\mu^2/m_A^2)^2}, \quad (2.33)$$

donde m_A es la masa axial efectiva de intercambio, que viene dada por

- (a) $m_A = 1150$ MeV, que es el valor que proporcionan los experimentos de electroproducción de piones y que usan Lock y Foldy [Loc75],
- (b) $m_A = 890$ MeV, que es la masa axial que se obtiene de los experimentos de dispersión de neutrinos, y
- (c) $m_A = 1190$ MeV, masa que resulta de los modelos de simetría quiral.

(III) Parametrización dipolar del factor de forma isovectorial

$$F_1^V = \frac{1}{\left(1 - \frac{q_\mu^2}{(855 \text{ MeV})^2}\right)^2}, \quad (2.34)$$

que es la usada por Van Orden y Donnelly [Van81].

Las seis elecciones del factor de forma F_S que acabamos de mencionar se comparan en la Fig. 2.20 para los tres valores del momento transferido ya familiares. El factor de forma que hemos elegido para realizar los cálculos de este trabajo está trazado con línea continua y es el más pequeño de los seis. Dada la gran dispersión de los valores de estos factores de forma, hemos evaluado la indeterminación de nuestros cálculos inherente a la indeterminación en el factor de forma de la corriente seagull, usando de nuevo la expresión (2.29) y obteniendo ΔF_S para cada momento transferido, en el valor de ω que hace máxima la respuesta a un cuerpo. Los resultados se muestran en la tercera columna de la tabla 2.8, donde puede observarse que dicha indeterminación crece con el momento transferido, llegando a superar el 40% para $q = 550$ MeV. Esto significa que, cuantitativamente, sólo el orden de magnitud de los efectos de las MEC es significativo. Por otra parte, el haber

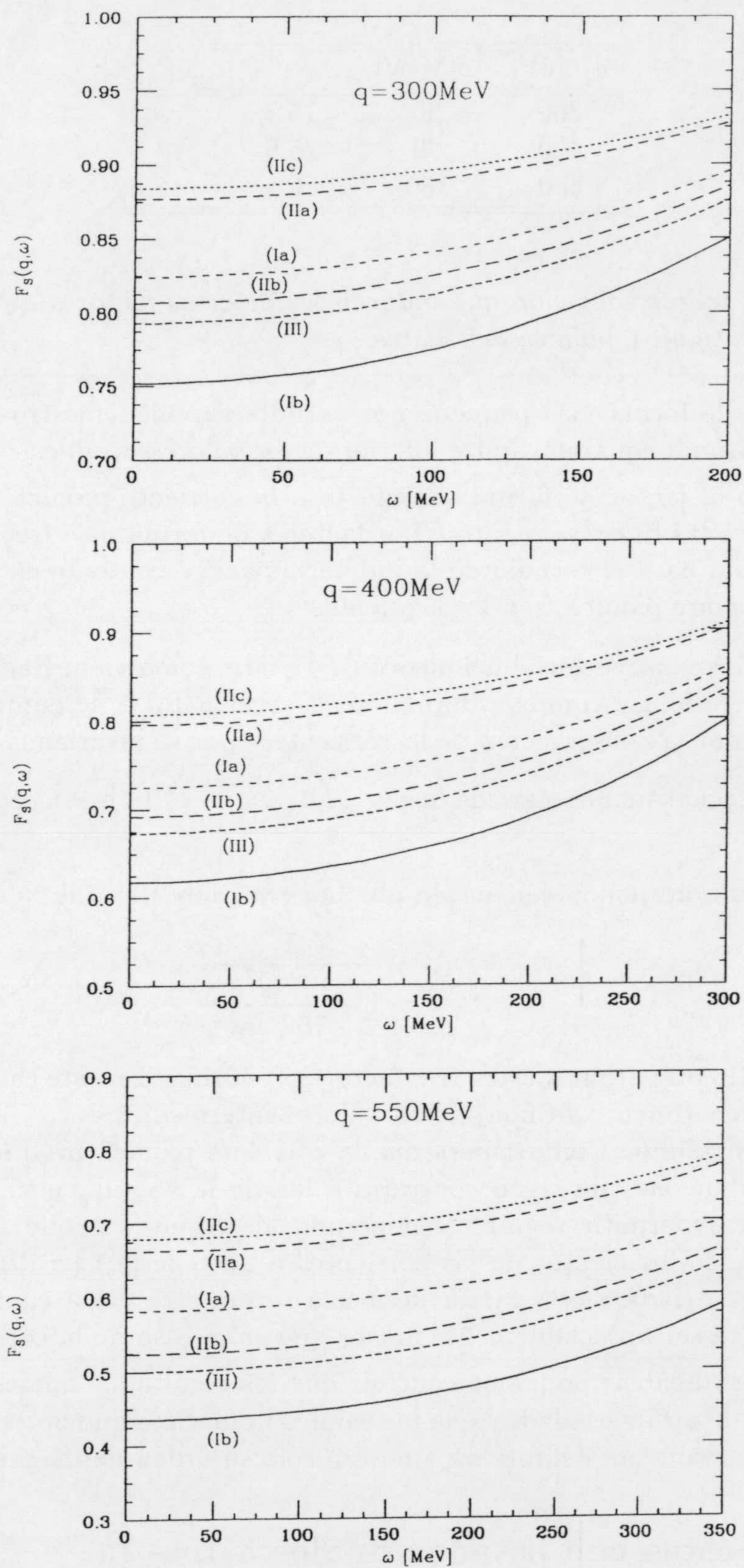


Figura 2.20: Comparación de seis factores de forma de la corriente seagull. En línea continua aparece nuestra elección.

$q[\text{MeV}]$	$\omega[\text{MeV}]$	$\Delta F_S[\%]$	$\Delta F_\pi[\%]$
300	50	15.7	5.3
400	90	25.6	8.3
550	180	40.2	12.6

Tabla 2.8: Indeterminación que inducen los diversos factores de forma de las corrientes seagull y piónica existentes.

elegido el factor de forma más pequeño nos permite suponer nuestros resultados acerca de la corriente seagull como un límite inferior de los valores posibles.

Con respecto al factor de forma que afecta a la corriente piónica, existe una mayor uniformidad entre las diversas fuentes. Los factores de forma más frecuentes, y que aquí hemos considerado para el estudio de la indeterminación existente en las contribuciones debidas a la corriente piónica, son los siguientes:

- (I) Factor de forma isovectorial del nucleón F_1^V , tal y como viene dado por la ec. (2.30). Con esta elección, y como ya dijimos en la sección 1.3.3, se cumplen las exigencias impuestas por la conservación de la corriente y por la invariancia gauge.
- (II) Parametrización monopolar, dada por (2.32), que es la que nosotros hemos adoptado.
- (III) Parametrización monopolar, usada por Lock y Foldy [Loc75]:

$$F_\pi = \frac{1}{1 + \frac{Q^2}{15.5 \text{ fm}^{-2}}}. \quad (2.35)$$

En la Fig. 2.21 comparamos estos tres factores de forma. En este caso nuestra elección de factor de forma (línea continua) toma valores intermedios entre las otras dos, pero está próxima al máximo. Como quiera que la corriente piónica produce en la respuesta a $1p - 1h$ contribuciones de signo contrario a las de la seagull, el factor de forma F_π adoptado nos va a permitir seguir considerando los resultados que se obtengan como un límite inferior de los efectos de las corrientes a dos cuerpos en dicha respuesta. La indeterminación asociada a este factor de forma se muestra en la cuarta columna de la tabla 2.8 y resulta ser apreciablemente menor que en el caso de la corriente seagull.

De este somero análisis podemos concluir que los resultados finales a que lleguemos no están exentos de arbitrariedad, y que los valores numéricos que obtengamos no pueden considerarse taxativamente definitivos, sino tan sólo su orden de magnitud.

2.4.2 Repuestas con estados finales a $1p - 1h$

Seguidamente vamos a estudiar el efecto de las MEC en la respuesta transversal. En esta sección analizaremos dicho efecto en la respuesta de emisión de una partícula $R_T^{1p1h}(q, \omega)$,

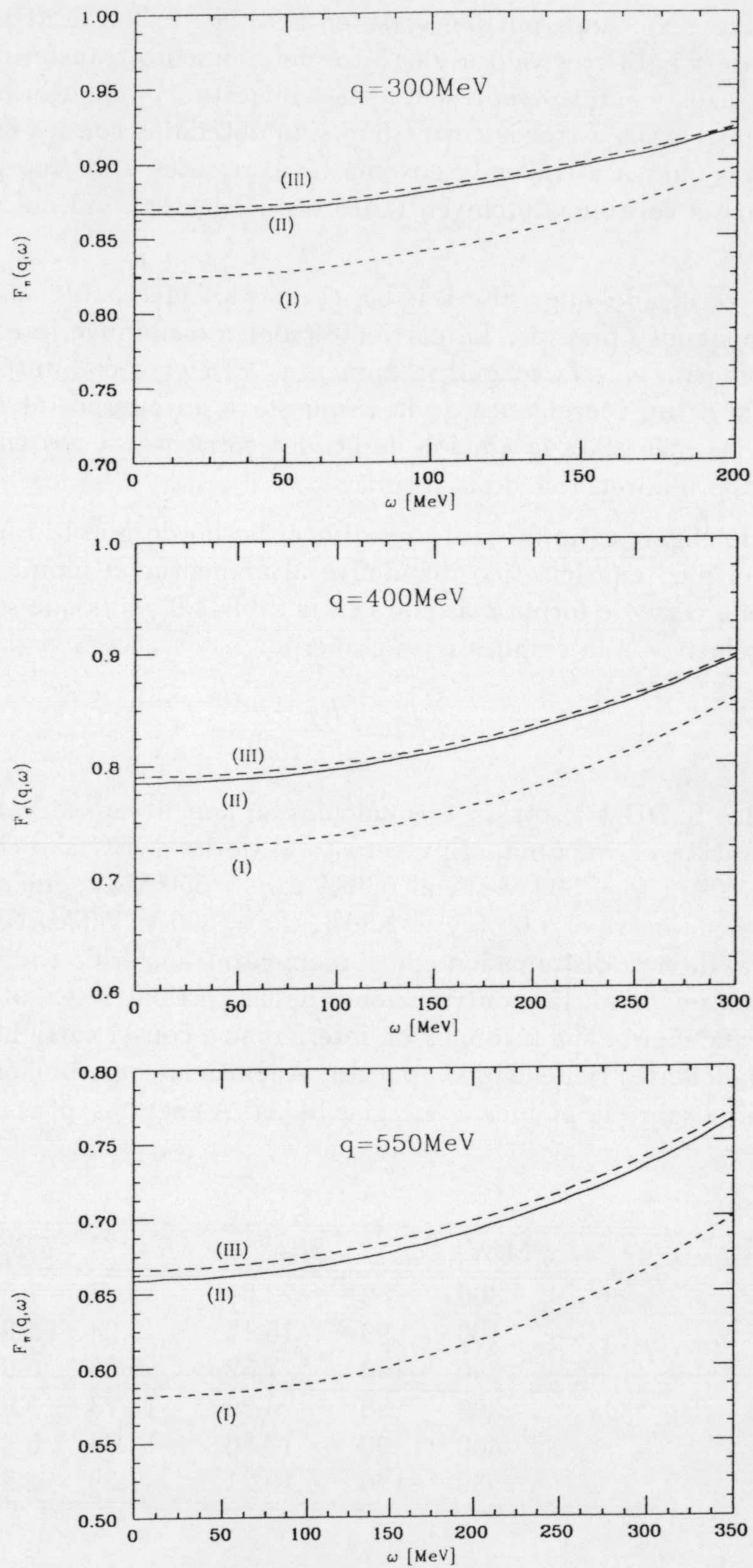


Figura 2.21: Comparación de tres factores de forma de la corriente piónica. En línea continua aparece nuestra elección.

ec. (1.29a). Los resultados pueden verse en las Figs. 2.22 y 2.23 para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente y para tres valores distintos del momento transferido. En ambas figuras, las curvas a trazos y puntos representan la respuesta calculada usando sólo la corriente a un cuerpo, las curvas a trazos cortos han sido obtenidas con las corrientes a un cuerpo y la piónica, las curvas a trazos largos con las corrientes a un cuerpo y la seagull y, por último, las curvas continuas incluyen tanto las corrientes a un cuerpo como la seagull y la piónica.

El primer resultado que cabe señalar es que los efectos de las corrientes seagull y piónica tienen signos opuestos. La corriente piónica disminuye la respuesta puramente a un cuerpo, mientras que la seagull la aumenta. El efecto conjunto de ambas corrientes de intercambio es un incremento de la respuesta a un cuerpo, al menos en la zona del pico. A energías más altas la adición de las dos corrientes a dos cuerpos da lugar a una disminución casi inapreciable de la misma.

En segundo lugar, es interesante resaltar el hecho de que la importancia relativa de las MEC en el pico cuasielástico disminuye al aumentar el momento transferido. Este resultado puede verse de forma más clara en la tabla 2.9, en la que se muestran los efectos de las MEC relativos a la respuesta a un cuerpo:

$$\delta R_T^a = \frac{R_T^a - R_T^{\text{OB}}}{R_T^{\text{OB}}}, \quad (2.36)$$

para $a = \text{OB} + \text{S}, \text{OB} + \pi, \text{total}$. Los cálculos se han llevado a cabo en las energías en donde la respuesta es máxima. El efecto total de las MEC a dichas energías pasa, en el ^{12}C , del 7.52% a $q = 300$ MeV, al 0.96% a $q = 550$ MeV, mientras que, en el ^{40}Ca , dicho efecto oscila entre el 9.09% y el 2.20%, a $q = 300$ y 550 MeV, respectivamente. La razón principal de esta disminución con el momento transferido radica en el hecho de que, como ya hemos señalado, las contribuciones de las corrientes seagull y piónica, que en su mayor parte se deben a sus términos de interferencia con la corriente a un cuerpo (como veremos más adelante) tienen signo opuesto. Además la contribución de la seagull, que es positiva, domina sobre la piónica a energías bajas. A energías altas ocurre lo contrario: la

	$q[\text{MeV}]$	ω_{max}	$\delta R_T^{\text{OB+S}}$	$\delta R_T^{\text{OB}+\pi}$	δR_T^{tot}
^{12}C	300	50	22.01	-11.87	7.52
	400	90	15.17	-9.04	4.87
	550	190	7.52	-6.08	0.96
^{40}Ca	300	50	26.29	-13.73	9.09
	400	90	17.36	-10.24	5.47
	550	170	10.21	-7.36	2.20

Tabla 2.9: Incremento relativo de la respuesta transversal a $1p - 1h$ cuando se añaden a la corriente a un cuerpo las corrientes seagull, piónica y las dos conjuntamente.

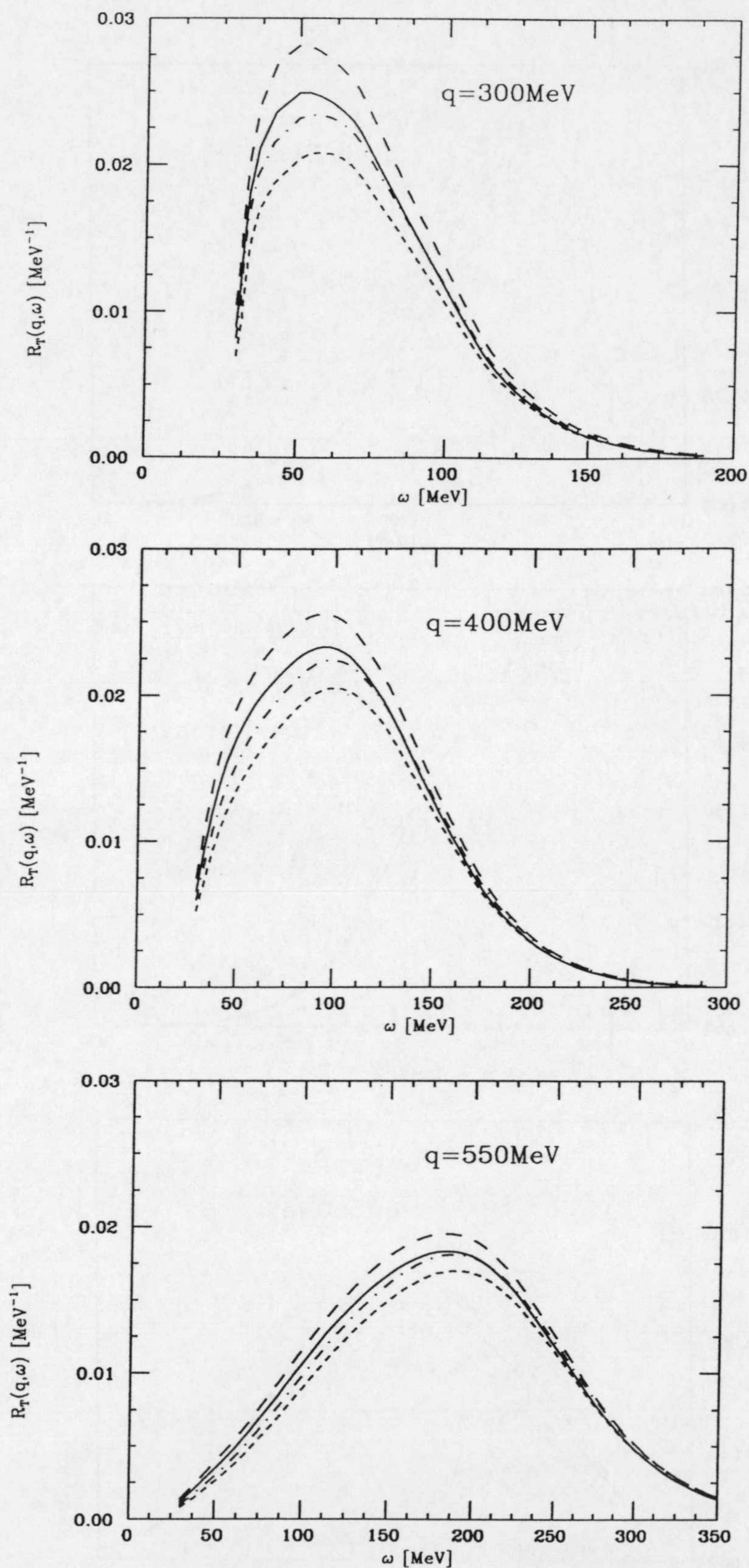


Figura 2.22: Respuesta transversal de emisión de una partícula por el ^{12}C , para tres valores diferentes del momento transferido q . Las curvas a trazos y puntos son las respuestas obtenidas usando sólo las corrientes a un cuerpo, las curvas a trazos cortos muestran las respuestas calculadas con las corrientes a un cuerpo y la piónica, las de trazos largos son las respuestas obtenidas con las corrientes a un cuerpo y la seagull y, por último, las líneas continuas se han obtenido usando las corrientes a un cuerpo, seagull y piónica.

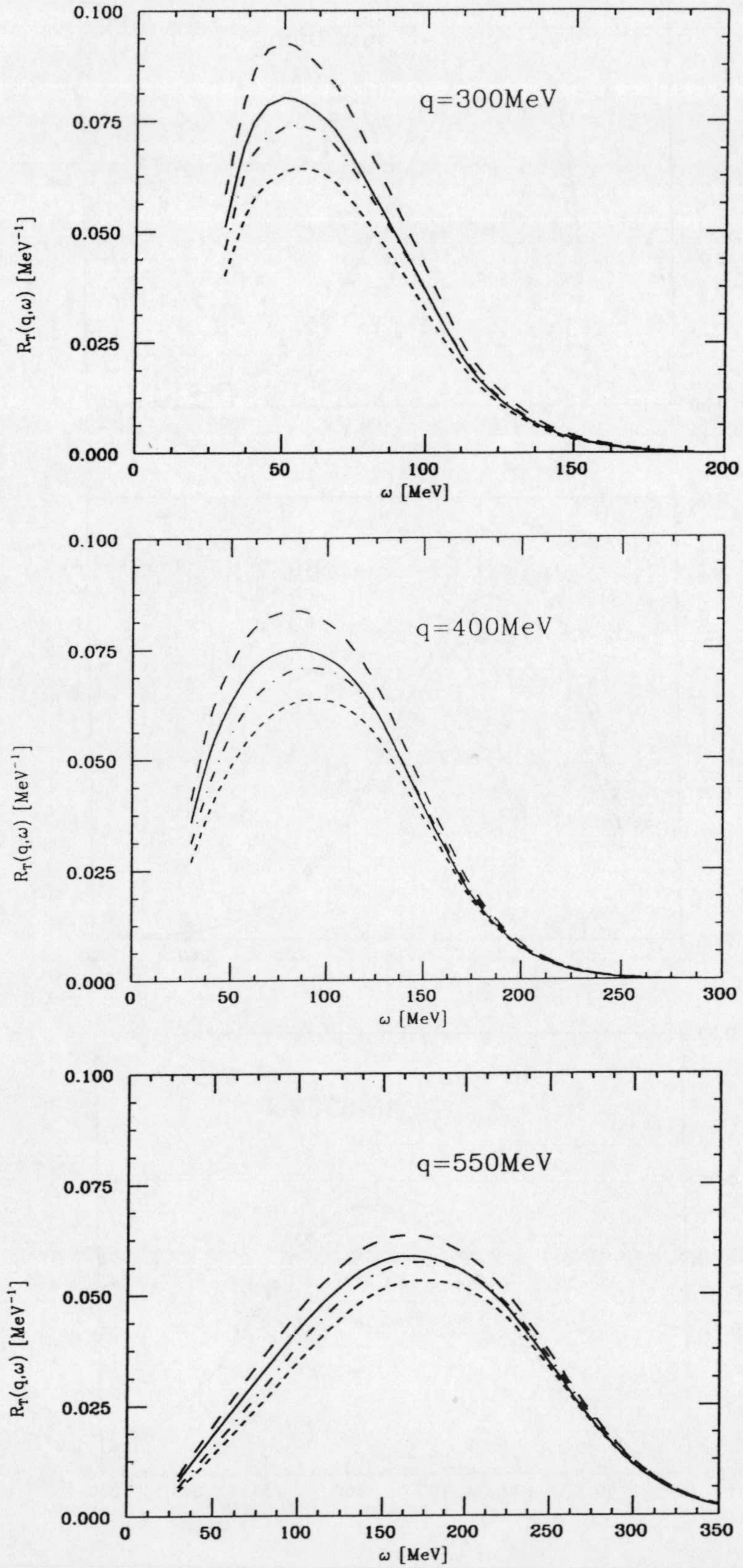


Figura 2.23: Igual que la Fig. 2.22 para el ^{40}Ca .

corriente piónica, cuyo efecto es negativo, domina sobre la seagull. Por tanto, existe una región de energías de excitación intermedias en donde los efectos de ambas corrientes se compensan casi por completo. Esto ocurre aproximadamente a las energías $\omega \simeq 90, 130$ y 200 MeV para los momentos $q = 300, 400$ y 550 MeV, respectivamente. Para estos mismos momentos transferidos, el máximo de la respuesta transversal está situado a las energías $\omega \simeq 50, 90$ y 180 MeV, que cada vez están más cerca de la zona de efecto nulo de las MEC.

Finalmente, comentar el hecho de que los efectos, aunque pequeños, son ligeramente mayores en ^{40}Ca que en ^{12}C .

2.4.3 Respuestas con estados finales a $2p - 2h$

Como ya hemos comentado, las respuestas de excitación de dos partículas se pueden clasificar en tres tipos dependiendo de que el estado final tenga las dos partículas en el continuo, una en el continuo y otra en el discreto y, por último, las dos en un estado discreto. Este último caso vamos a estudiarlo aparte, porque en realidad no corresponde a una respuesta de emisión propiamente dicha y sólo contribuye a ciertos valores determinados de la energía.

En la Fig. 2.24 podemos ver los resultados obtenidos en el ^{12}C para los tres valores del momento transferido que consideramos. En dicha figura comparamos la respuesta transversal de emisión de dos partículas al continuo (curva a trazos), la de emisión de una partícula con núcleo residual excitado (línea de puntos), y la suma de las dos (curva continua). La primera respuesta domina claramente sobre la segunda a medida que crece la energía. No obstante, el efecto de esta última es más importante cuanto menor es el valor de q .

Ya hemos comentado anteriormente el problema que se plantea a la hora de calcular la respuesta de emisión de dos partículas al continuo en el ^{40}Ca . Ello se debe al aumento en un orden de magnitud, con respecto al ^{12}C , del número de elementos de matriz básicos, dados por las ecs. (2.12), que deben evaluarse. Como quiera que el cálculo en el ^{12}C es ya de una magnitud considerable, ha sido preciso proceder a una estimación de la respuesta a $2p - 2h$ en el ^{40}Ca , a partir de los resultados obtenidos en el ^{12}C . En realidad esta estimación se ha llevado a cabo para la parte de la respuesta que involucra la emisión de dos partículas, ya que la correspondiente a la emisión de una partícula con núcleo residual excitado sí se ha evaluado de manera exacta. A continuación describimos el proceso llevado a cabo.

Como primera hipótesis, hemos considerado que el valor promedio de todos los elementos de matriz de transición (2.12a) y (2.12b), que hay que sumar, es independiente del núcleo en consideración, de forma que bastaría escalar la respuesta del ^{12}C con la razón $n(^{40}\text{Ca})/n(^{12}\text{C})$ de los números $n(^{40}\text{Ca})$ y $n(^{12}\text{C})$ de estados finales a $2p - 2h$ que intervienen en el cálculo de la respuesta de emisión de dos partículas en el ^{40}Ca y en el ^{12}C , respectivamente. Un cálculo de este factor, que es independiente del momento transferido, muestra que se mantiene prácticamente constante y próximo a 11 para todos los multipolos y energías consideradas. No obstante, este coeficiente no está de acuerdo con otros cálculos previos. Por ejemplo, Dekker *et al.* [Dek91] obtienen, usando un mo-

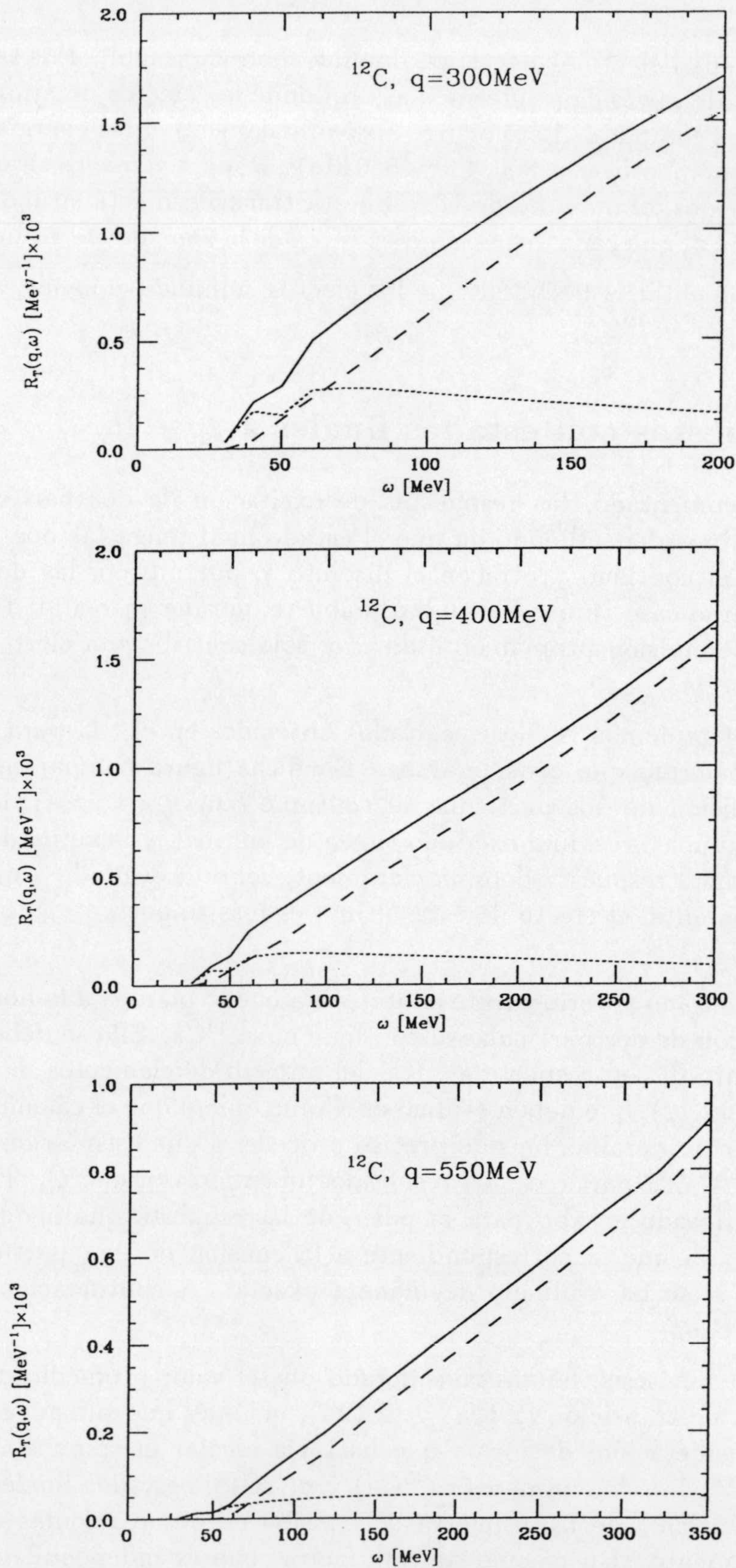


Figura 2.24: Respuesta transversal a $2p - 2h$ para el ^{12}C . Las curvas a trazos corresponden al caso en que las dos partículas están en el continuo, mientras que las curvas a puntos representan la emisión de una partícula al continuo y la otra excitada al discreto. Las curvas continuas representan la suma de las dos.

delo de gas de Fermi, que la relación entre las respuestas a $2p - 2h$ del ^{56}Fe y del ^{12}C a $q = 550 \text{ MeV}$ y $\omega = 300 \text{ MeV}$ es del orden de 7, claramente inferior al que obtenemos con este procedimiento.

Dada la discrepancia observada, resulta necesario establecer un procedimiento alternativo que permita encontrar una constante de proporcionalidad entre las dos respuestas a $2p - 2h$. Una manera de abordar este problema se basa en el hecho de que las funciones de respuesta que hemos calculado en el ^{12}C presentan un comportamiento aproximadamente lineal con relación a la energía ω (ver líneas a trazos de la Fig. 2.24). Además podemos comprobar en la Fig. 2.10 que ésto es también cierto para cada multipolo J por separado. Nosotros hemos supuesto que la respuesta a $2p - 2h$ en el ^{40}Ca presenta también este comportamiento general con respecto a la energía. Hay que señalar, sin embargo, que, aún suponiendo la linealidad de las dos respuestas, la proporcionalidad entre ellas no sería totalmente exacta, puesto que sus cortes con el eje ω no se producirían a la misma energía en los dos núcleos, sino al valor mínimo que debe tomar aquélla para extraer simultáneamente un protón y un neutrón. Este valor umbral no es el mismo para los dos núcleos, resultando ser menor para el ^{40}Ca , porque tiene partículas en capas más externas que las del ^{12}C . No obstante, esperamos que esta diferencia no produzca grandes variaciones en la respuesta con respecto a la que calculemos bajo la suposición de proporcionalidad.

En este punto, el problema que se plantea es triple. En primer lugar, hay que determinar el coeficiente de proporcionalidad; en segundo, hay que establecer su dependencia con el momento transferido y, finalmente, fijado éste, hay que corroborar que la suposición de que es independiente del valor de la energía es correcta. Para resolverlo, sería necesario conocer, como mínimo, el valor exacto de la respuesta a $2p - 2h$ en el ^{40}Ca a dos energías distintas para cada momento transferido considerado. Por lo tanto, hemos realizado este cálculo obligado en el ^{40}Ca para los valores que se muestran en las tablas 2.10-2.12, donde aparecen el número de elementos de matriz calculados en el ^{12}C , el cociente $n(^{40}\text{Ca})/n(^{12}\text{C})$ y la razón entre las correspondientes respuestas, para cada momento transferido, energía y multipolo por separado. En la última fila se hace lo mismo para la respuesta total, obtenida como suma de todos los multipolos hasta obtener la convergencia.

Como puede observarse, el cociente entre el número de elementos de matriz a calcular en ambos núcleos es, como ya hemos comentado, más o menos constante y del orden de 11. No ocurre lo mismo con el cociente entre las respuestas, que crece rápidamente con la multipolaridad, comenzando a valer algo más de 2 para $J = 1$, y llegando a superar ampliamente el valor 100 para $J = 12$ y $q = 550 \text{ MeV}$. No obstante, dado que los multipolos más bajos son los dominantes, la razón final entre las respuestas totales se sitúa en un valor relativamente bajo, que oscila alrededor de 4.7 y 4.9. En cuanto a la dependencia con la energía, encontramos que el cociente entre las respuestas presenta una variación relativa entre las dos energías consideradas que aumenta con el momento transferido, y toma los valores del 0.8, 1.2 y 2.3% para $q = 300, 400$ y 550 MeV , respectivamente. Dada la pequeñez de estas variaciones, consideramos una buena aproximación el suponer la proporcionalidad entre ambas respuestas. No obstante, hemos mantenido una dependencia con respecto al momento transferido, fijado el cual, hemos calculado la respuesta de emisión de dos partículas en el ^{40}Ca multiplicando la correspondiente al ^{12}C por el factor

J^π	$\omega = 120 \text{ MeV}$			$\omega = 160 \text{ MeV}$		
	$n(^{12}\text{C})$	$\frac{n(^{40}\text{Ca})}{n(^{12}\text{C})}$	$\frac{R_T(^{40}\text{Ca})}{R_T(^{12}\text{C})}$	$n(^{12}\text{C})$	$\frac{n(^{40}\text{Ca})}{n(^{12}\text{C})}$	$\frac{R_T(^{40}\text{Ca})}{R_T(^{12}\text{C})}$
1 ⁻	116735	10.93	2.67	136090	10.90	2.56
1 ⁺	116841	10.94	2.09	136212	10.91	2.14
2 ⁻	186614	10.98	4.10	217558	10.94	4.25
2 ⁺	186732	10.98	3.15	217692	10.95	3.13
3 ⁻	246731	11.02	5.68	287650	10.99	5.76
3 ⁺	246953	11.03	8.92	287904	10.99	9.18
4 ⁻	296176	11.06	17.05	345311	11.03	17.77
4 ⁺	296392	11.06	11.66	345559	11.03	11.80
5 ⁻	334693	11.09	22.10	390251	11.06	22.73
5 ⁺	334922	11.09	29.97	390513	11.06	30.84
6 ⁻	362343	11.10	45.72	422544	11.07	48.36
6 ⁺	362574	11.11	40.26	422804	11.07	39.94
7 ⁻	379223	11.11	67.77	442297	11.08	65.04
7 ⁺	379429	11.11	63.75	442528	11.08	69.74
total	3846358	11.06	4.74	4484913	11.03	4.78

Tabla 2.10: Estudio de la linealidad de la respuesta de emisión de dos partículas a $q = 300 \text{ MeV}$

J^π	$\omega = 160 \text{ MeV}$			$\omega = 200 \text{ MeV}$		
	$n(^{12}\text{C})$	$\frac{n(^{40}\text{Ca})}{n(^{12}\text{C})}$	$\frac{R_T(^{40}\text{Ca})}{R_T(^{12}\text{C})}$	$n(^{12}\text{C})$	$\frac{n(^{40}\text{Ca})}{n(^{12}\text{C})}$	$\frac{R_T(^{40}\text{Ca})}{R_T(^{12}\text{C})}$
1 ⁻	136090	10.90	2.38	150829	10.83	2.31
1 ⁺	136212	10.91	2.07	150949	10.83	2.04
2 ⁻	217558	10.94	2.50	241093	10.87	2.49
2 ⁺	217692	10.95	2.78	241217	10.88	2.70
3 ⁻	287650	10.99	4.02	318744	10.92	3.87
3 ⁺	287904	10.99	4.38	318998	10.92	4.38
4 ⁻	345311	11.03	8.51	382646	10.96	8.59
4 ⁺	345559	11.03	7.16	382894	10.96	6.90
5 ⁻	390251	11.06	13.44	432494	10.98	13.10
5 ⁺	390513	11.06	15.86	432755	10.98	16.19
6 ⁻	422544	11.07	27.18	468362	11.00	28.18
6 ⁺	422804	11.07	24.53	468620	11.00	24.18
7 ⁻	442297	11.08	41.33	490355	11.01	41.86
7 ⁺	442528	11.08	42.63	490586	11.01	44.84
8 ⁻	449564	11.09	61.58	498527	11.01	65.90
8 ⁺	449831	11.09	63.02	498795	11.01	67.09
9 ⁻	444490	11.09	94.63	493020	11.01	100.27
9 ⁺	444734	11.09	84.82	493266	11.02	89.68
total	6273532	11.05	4.85	6954150	10.97	4.79

Tabla 2.11: Igual que la tabla 2.10 para $q = 400 \text{ MeV}$.

J^π	$\omega = 200 \text{ MeV}$			$\omega = 240 \text{ MeV}$		
	$n(^{12}\text{C})$	$\frac{n(^{40}\text{Ca})}{n(^{12}\text{C})}$	$\frac{R_T(^{40}\text{Ca})}{R_T(^{12}\text{C})}$	$n(^{12}\text{C})$	$\frac{n(^{40}\text{Ca})}{n(^{12}\text{C})}$	$\frac{R_T(^{40}\text{Ca})}{R_T(^{12}\text{C})}$
1 ⁻	150829	10.83	2.20	160555	10.81	2.17
1 ⁺	150949	10.83	2.14	160687	10.82	2.09
2 ⁻	241093	10.87	2.18	256636	10.86	2.15
2 ⁺	241217	10.88	2.35	256772	10.86	2.29
3 ⁻	318744	10.92	2.83	339298	10.90	2.72
3 ⁺	318998	10.92	2.60	339572	10.91	2.55
4 ⁻	382646	10.96	3.66	407340	10.94	3.59
4 ⁺	382894	10.96	4.03	407608	10.94	3.83
5 ⁻	432494	10.98	6.59	460441	10.97	6.17
5 ⁺	432755	10.98	5.96	460722	10.97	5.83
6 ⁻	468362	11.00	10.25	498676	10.98	10.06
6 ⁺	468620	11.00	11.69	498954	10.99	10.78
7 ⁻	490355	11.01	20.39	522150	10.99	18.91
7 ⁺	490586	11.01	17.37	522400	10.99	17.11
8 ⁻	498527	11.01	28.22	530917	11.00	27.87
8 ⁺	498795	11.01	34.13	531201	11.00	31.81
9 ⁻	493020	11.01	53.76	525117	11.00	50.47
9 ⁺	493266	11.02	43.35	525377	11.00	42.71
10 ⁻	474016	11.02	63.76	504939	11.00	61.45
10 ⁺	474225	11.02	80.41	505163	11.01	74.61
11 ⁻	442314	11.04	114.36	471232	11.02	104.77
11 ⁺	442555	11.04	89.79	471489	11.02	83.30
12 ⁻	400183	11.08	122.94	426403	11.06	108.69
12 ⁺	400403	11.08	153.41	426639	11.06	137.21
total	9587846	10.99	4.91	10210288	10.98	4.80

Tabla 2.12: Igual que la tabla 2.10 para $q = 550 \text{ MeV}$.

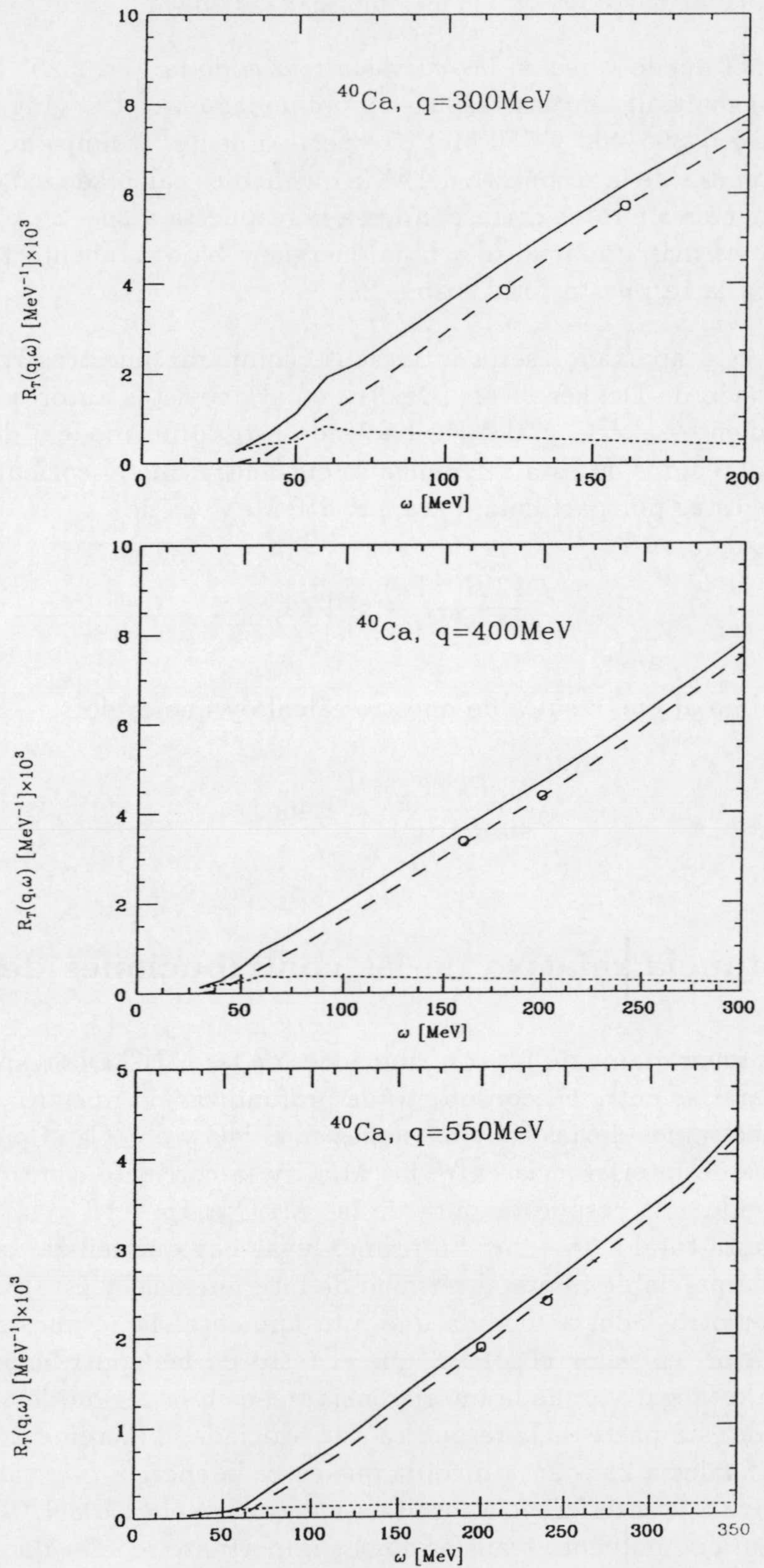


Figura 2.25: Igual que la Fig. 2.24 para el ^{40}Ca . Las respuestas de emisión de dos partículas han sido obtenidas escalando las correspondientes al ^{12}C utilizando los factores de proporcionalidad que se siguen de un cálculo exacto (círculos en la figura) para dos valores de ω y para cada momento transferido.

resultante de promediar entre los de las dos energías calculas.

El resultado final puede verse en las curvas a trazos de la Fig. 2.25. Los factores por los que se han multiplicado las respuestas obtenidas en el ^{12}C (Fig. 2.24) son 4.76, 4.82 y 4.855, para $q = 300, 400$ y 550 MeV, respectivamente. Asimismo, en dicha figura incluimos los seis puntos de la respuesta del ^{40}Ca que hemos calculado exactamente. En la misma figura, las curvas a puntos corresponden a la respuesta a $2p - 2h$ con una partícula en el discreto, que es más importante a baja energía y bajo momento transferido. Las líneas continuas son la respuesta total a $2p - 2h$.

Para terminar este apartado, sería interesante comparar nuestros resultados con el cálculo ya mencionado de Dekker *et al.* [Dek91], en el que estos autores evalúan las respuestas correspondientes al ^{12}C y al ^{56}Fe , haciendo uso de un modelo de gas de Fermi. De los resultados obtenidos en esta referencia se encuentra que el cociente entre las correspondientes respuestas por partícula, para $q = 550$ MeV, es de

$$\frac{12 R(^{56}\text{Fe})}{56 R(^{12}\text{C})} \simeq 1.43, \quad (2.37)$$

un valor muy próximo al que resulta de nuestro cálculo y que es de

$$\frac{12 R(^{40}\text{Ca})}{40 R(^{12}\text{C})} = 1.46. \quad (2.38)$$

2.4.4 Importancia relativa de las contribuciones de las MEC

Una vez analizadas separadamente las contribuciones de las MEC a la respuesta transversal, vamos a compararlas entre sí, con objeto de profundizar en nuestro análisis. En las Figs. 2.26 y 2.27 mostramos dichas contribuciones en el ^{12}C y el ^{40}Ca . Con línea continua aparece la respuesta de interferencia entre las MEC y la corriente a un cuerpo, la línea de puntos corresponde a la respuesta pura de las MEC a $1p - 1h$ y la línea de trazos representa la respuesta total a $2p - 2h$. En primer lugar hay que señalar que la respuesta pura a $1p - 1h$ es despreciable frente al término de interferencia, y éste es el que domina a baja energía. Por otro lado, a medida que ésta aumenta, la respuesta a $2p - 2h$ va siendo cada vez mayor, en valor absoluto, que el resto de las contribuciones, de forma que compensa el valor negativo que la interferencia tiene en la región de alta energía. La razón del aumento de esta parte de la respuesta está asociada al incremento progresivo del número de estados finales a $2p - 2h$ a medida que crece la energía (ver tablas 2.10-2.12). El efecto neto relativo a la interferencia resulta ser mayor en el caso del ^{40}Ca y disminuye a medida que aumenta el momento transferido. Es importante señalar que, en la posición del pico, tanto la respuesta a $2p - 2h$ como la de interferencia son del mismo orden de magnitud, siendo por tanto necesario considerarlas simultáneamente en la mencionada región de energías.

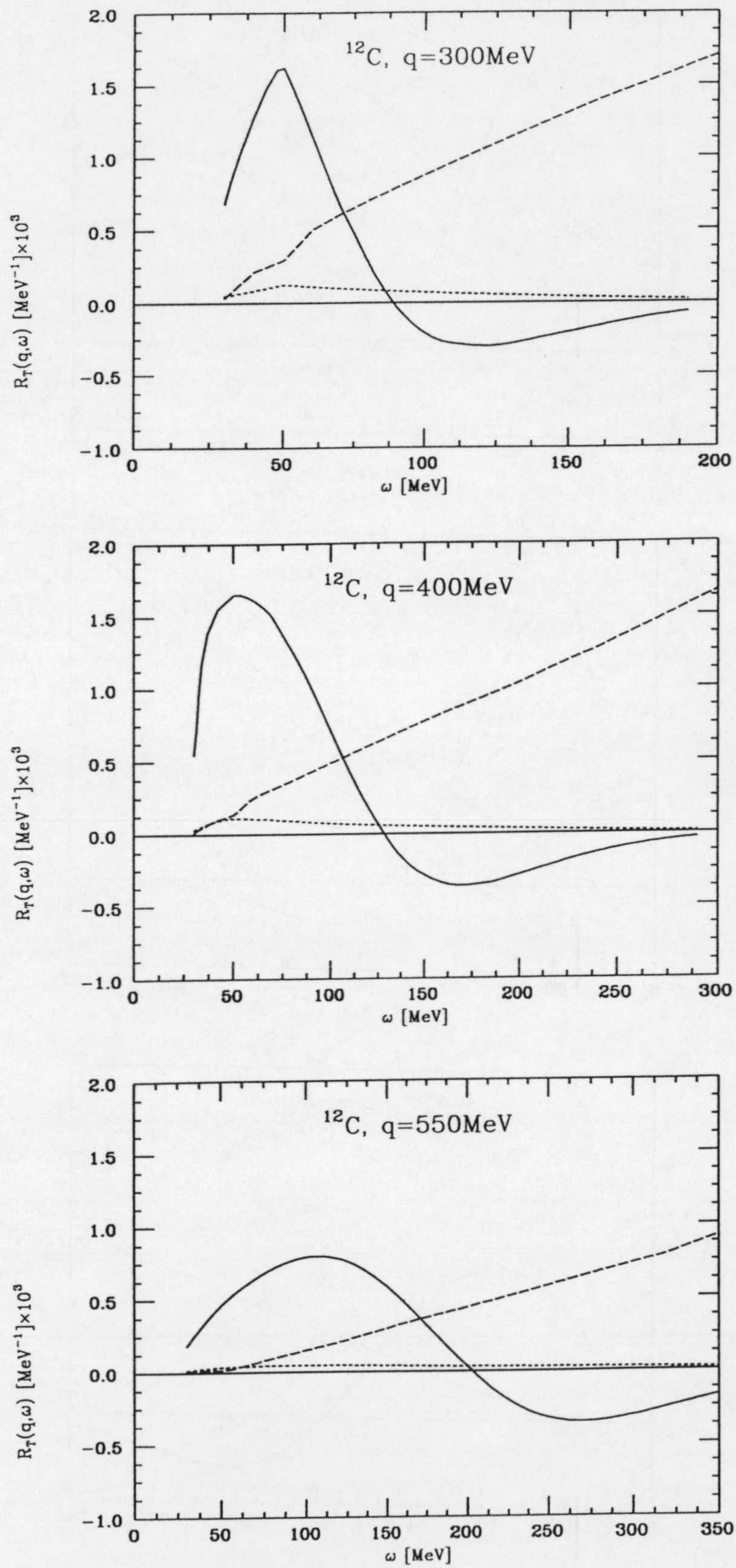


Figura 2.26: Las tres contribuciones de las MEC a la respuesta transversal del ^{12}C : término de interferencia (línea continua), respuesta a $1p - 1h$ pura de las MEC (línea de puntos) y respuesta total a $2p - 2h$ (línea a trazos).

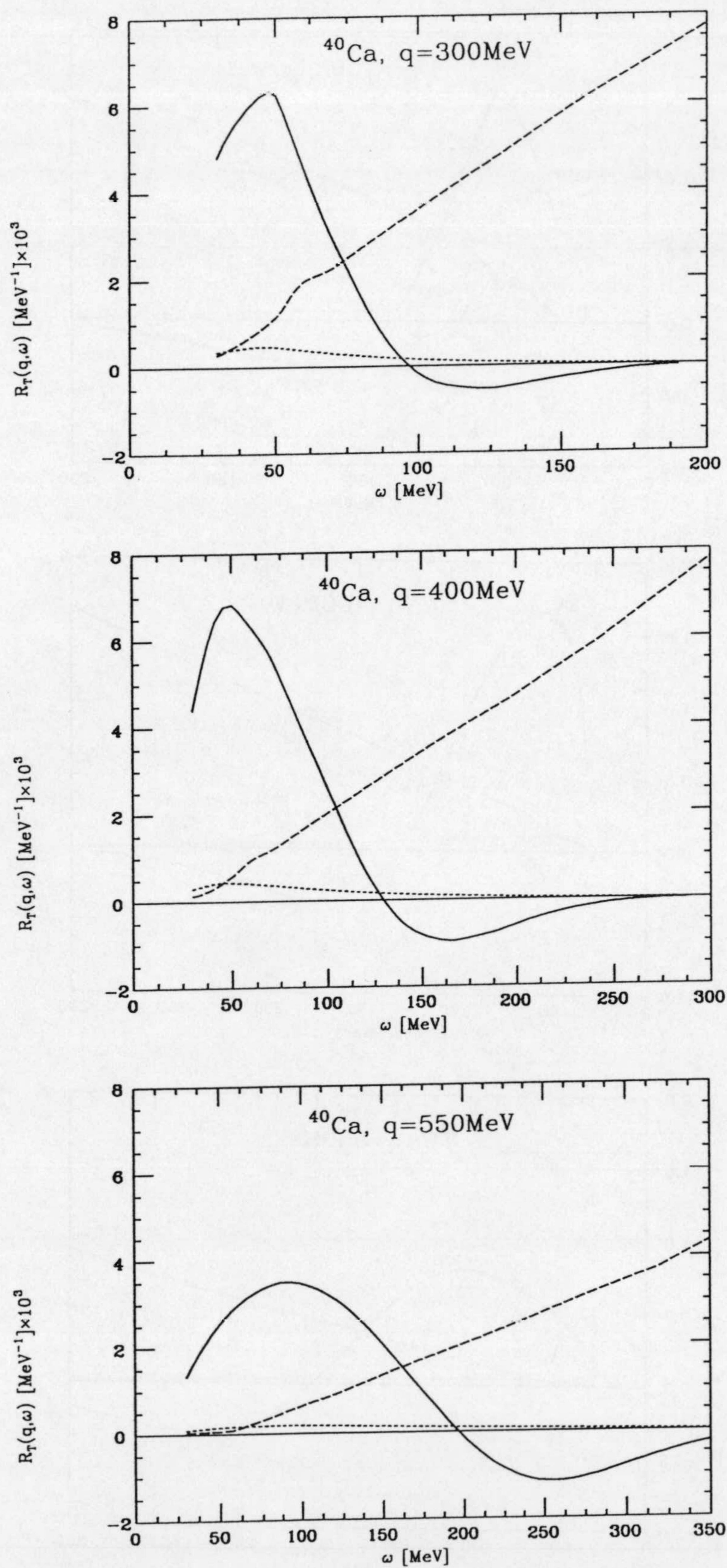


Figura 2.27: Igual que la Fig. 2.26 para el ^{40}Ca .

2.4.5 Aproximación estática del pión

Todas las respuestas asociadas a las MEC estudiadas hasta ahora han sido evaluadas utilizando el propagador dinámico del pión (2.11). Sin embargo, la mayoría de los cálculos existentes en la literatura [Koh81, Van81, Alb84, 90, Dek91] se han llevado a cabo en la aproximación estática. El siguiente paso en nuestro análisis consiste en estudiar las diferencias que produce en la respuesta transversal la consideración de esta aproximación.

Cualitativamente, cabría esperar que la magnitud de las corrientes de intercambio sea mayor cuando el pión se considera dinámico en vez de estático. En efecto, la aproximación estática desprecia la energía del pión en el denominador de su propagador. El caso dinámico puede entonces asimilarse al estático introduciendo una masa efectiva μ' , cuyo cuadrado está dado por

$$\mu'^2 = \mu^2 - \epsilon_\pi^2, \quad (2.39)$$

siendo ϵ_π la energía del pión. A medida que ésta aumenta, siempre que se conserve inferior a μ , la masa efectiva disminuye, aumentando el valor del propagador, hasta llegar a su valor máximo, resonante, cuando $\epsilon_\pi = \mu$; a partir de este valor la masa efectiva se hace imaginaria y el valor del propagador vuelve a disminuir. Esto es lo que ocurre en el espacio de momentos, pero es más ilustrativo examinar la situación en representación de posiciones, en la que el propagador dinámico del pión desnudo puede escribirse en la forma

$$h_\tau(r) = \begin{cases} \frac{e^{-\nu r}}{4\pi r} & \text{si } \tau > 0 \\ \frac{\cos \nu r}{4\pi r} & \text{si } \tau < 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

donde $\tau \equiv \mu'^2$ y hemos definido $\nu = \sqrt{|\tau|}$.

En esta expresión vemos que, para un valor fijo de r , si la energía que adquiere el pión es mayor que su masa (caso $\tau < 0$), el propagador puede ser inferior a su valor estático, e incluso hacerse negativo, debido a que depende del coseno de νr (ver Fig. 2.28). No obstante, estas situaciones se presentan, en el caso menos favorable (para $\omega > 350$ MeV) a partir de $r \sim 1$ fm, con lo que cabe esperar que su contribución sea relativamente pequeña, debido a que el propagador (2.40) incluye una potencia r^{-1} . Además hay que considerar que las funciones de onda de agujero que aparecen en la integrales del tipo (2.10) también disminuyen rápidamente con r . Por lo tanto, teniendo en cuenta estos dos factores, parece razonable pensar que el efecto neto del propagador dinámico sea un incremento de los elementos de matriz de las MEC con respecto a sus valores estáticos, con el consiguiente aumento en la respuesta transversal.

Para comprobar la validez de los anteriores argumentos hemos calculado la respuesta transversal usando la aproximación estática del propagador y la hemos comparado con las obtenidas previamente con el propagador dinámico. En las Figs. 2.29 y 2.30 mostramos los resultados para las contribuciones puras de las corrientes piónica (curva a trazos) y seagull (línea continua) a la respuesta a $1p - 1h$ en el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente. Las líneas de puntos corresponden a las mismas respuestas calculadas en la aproximación estática. Vemos que, efectivamente, el uso del propagador dinámico aumenta la respuesta

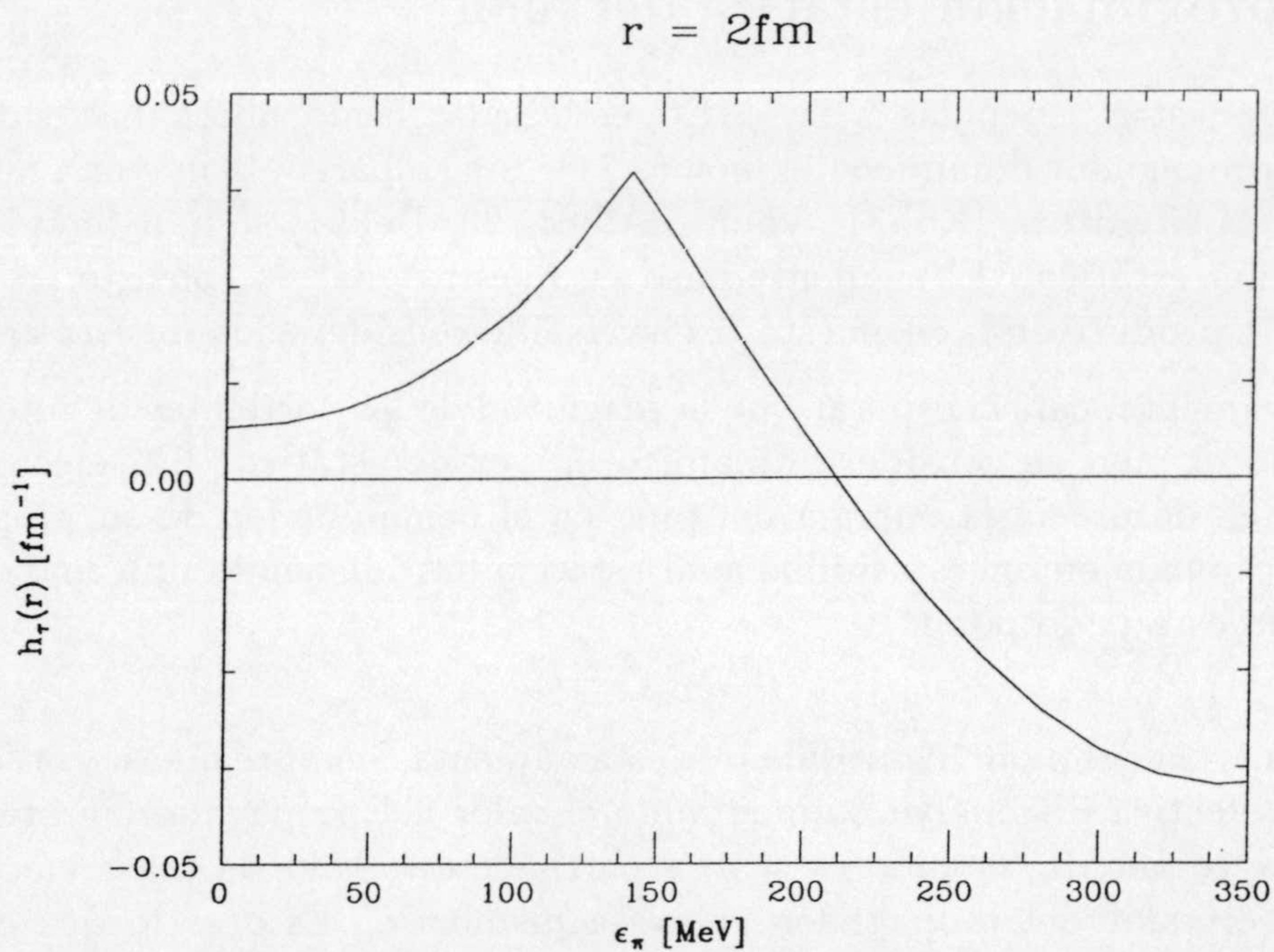


Figura 2.28: Propagador dinámico del pión en función de su energía, para un valor fijo de r . El máximo se alcanza para $\epsilon_\pi = \mu$.

transversal estática asociada a cada corriente de intercambio por separado y que la magnitud de este aumento crece con el momento transferido. Lo que nos interesa destacar de estas figuras es el hecho de que la magnitud relativa del incremento mencionado es mayor en el caso de la piónica que en el de la seagull. Esto es debido a que la corriente piónica contiene el producto de dos propagadores, mientras que la seagull sólo incluye a uno. Observemos, además, que el mencionado efecto es relativamente menor en el caso del ^{40}Ca .

Sin embargo, ya hemos visto anteriormente (ver Figs. 2.26 y 2.27) que estas contribuciones son despreciables frente a la interferencia a $1p - 1h$ y la respuesta a $2p - 2h$. Con respecto a la primera de ellas, el efecto relativo de la inclusión del propagador dinámico es más pequeño que en el caso anterior, como podemos ver en la Fig. 2.31 para el ^{12}C . Además, en este caso el aumento en la respuesta seagull se va a ver contrarestando por la disminución en la piónica (se hace más negativa). Como consecuencia, la suma de estas dos respuestas no se va a ver afectada en gran cuantía por la aproximación estática, lo que significa que la respuesta total a $1p - 1h$ lo va a ser aún menos.

Con respecto a la respuesta a $2p - 2h$ el efecto del propagador dinámico es más importante que en el caso anterior, debido a la ausencia de contribuciones de la corriente a un cuerpo. Los resultados en este caso para el ^{12}C se muestran en la Fig. 2.32. Con línea continua se representa la respuesta de emisión de dos partículas y con línea de puntos su aproximación estática. La diferencia relativa entre las dos curvas aumenta con el valor de la energía transferida, lo que significa que este efecto podrá ser importante en la región profunda.

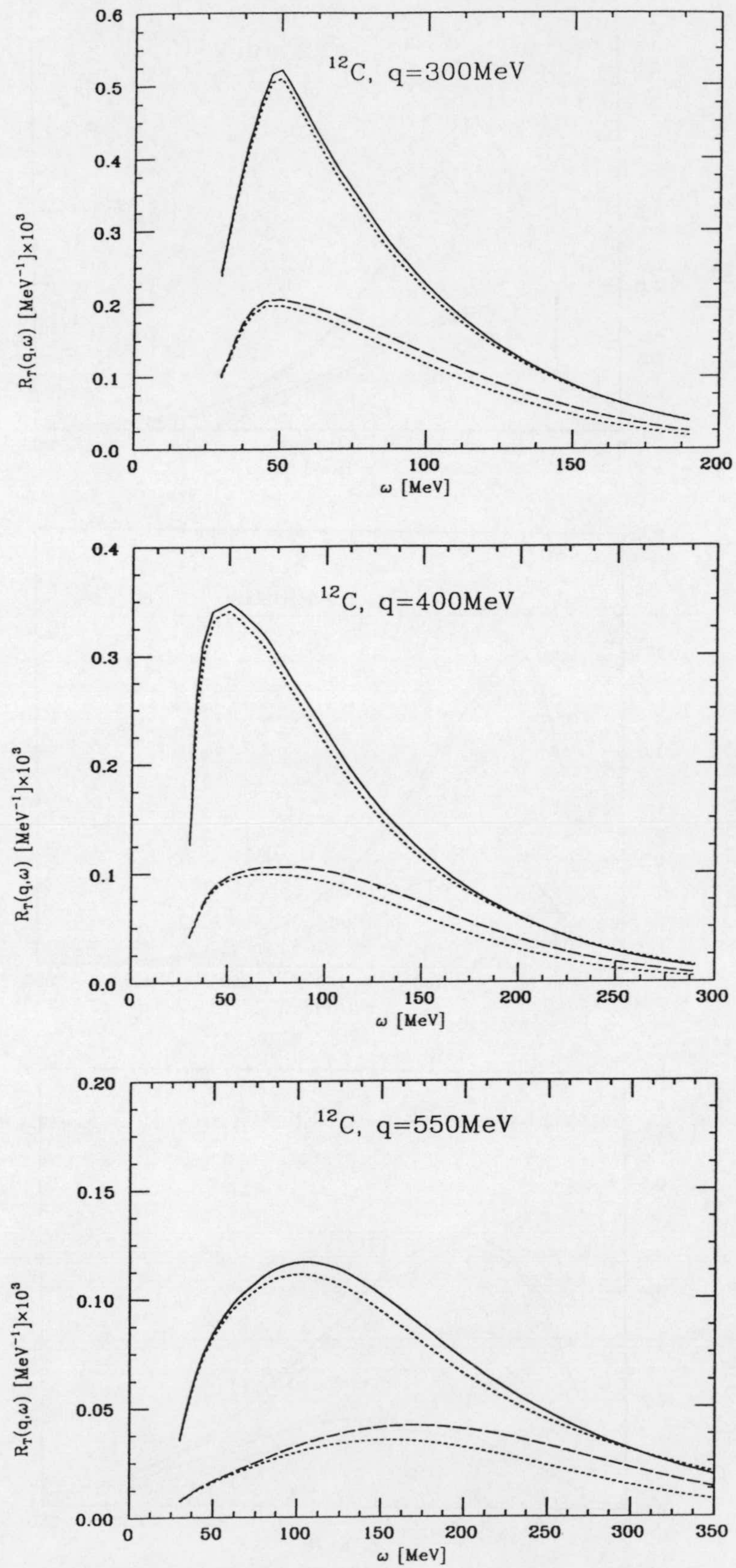


Figura 2.29: Contribuciones de las corrientes seagull (línea continua) y piónica (línea a trazos) a la respuesta a $1p - 1h$ del ^{12}C . Las curvas de puntos representan las mismas respuestas calculadas en la aproximación estática.

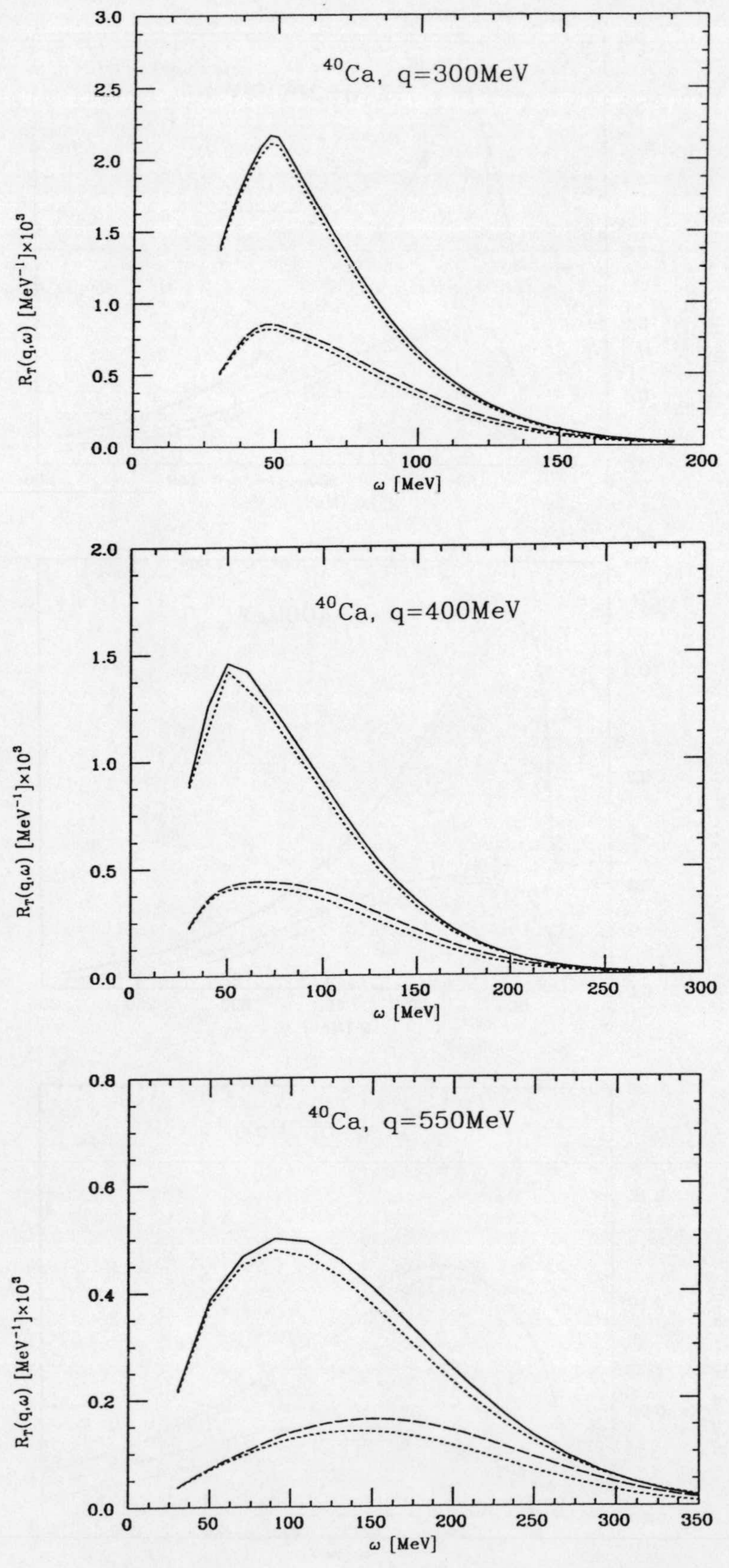


Figura 2.30: Igual que la Fig. 2.29 para el ^{40}Ca .

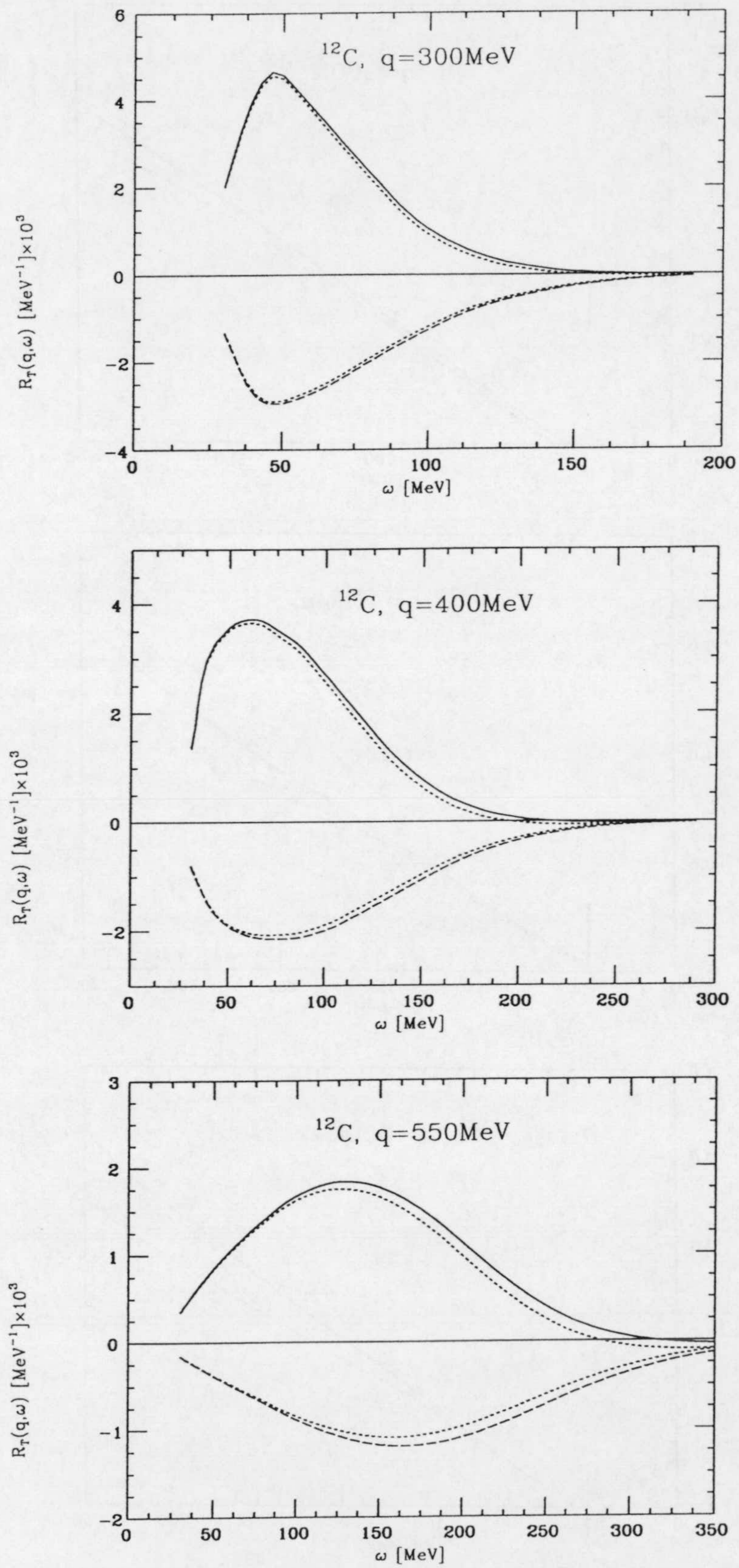


Figura 2.31: Respuestas de interferencia, para el ^{12}C , entre las corrientes a un cuerpo y la seagull (línea continua) y la piónica (línea a trazos) y sus correspondientes aproximaciones estáticas (curvas de puntos).

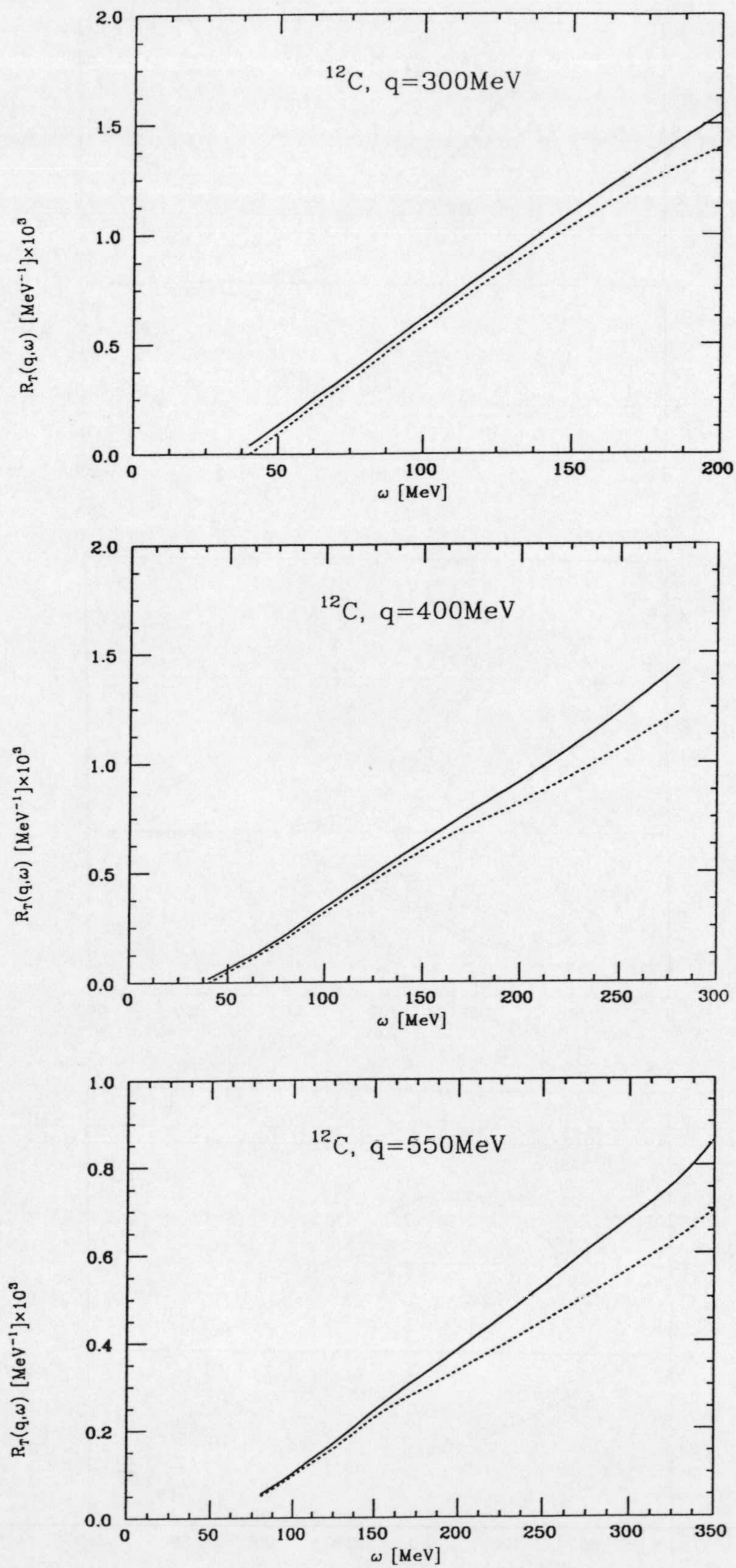


Figura 2.32: Respuesta de emisión de dos partículas en el ^{12}C (línea continua) y su aproximación estática (línea de puntos).

Al igual que en el caso a $1p - 1h$, hemos comprobado que el incremento que supone la inclusión del propagador dinámico en la respuesta de emisión de dos partículas es mayor en el caso de la corriente piónica que en el de la seagull. Además hemos constatado que la interferencia entre ambas es negativa y que la seagull domina sobre la piónica para todas las multipolaridades. Si esto fuera cierto para cada estado final individual a $2p - 2h$, el efecto sobre la contribución de cada uno de ellos sería una disminución, y por tanto lo mismo pasaría con la respuesta total. Sin embargo, el efecto sobre la respuesta total es un aumento de la misma. Esto podría ser debido a diversas causas, entre las que cabe señalar la posibilidad de que (i) existan estados finales a $2p - 2h$ para los cuales los elementos de matriz de las dos corrientes tienen el mismo signo, y (ii) se presenten situaciones en las cuales la corriente piónica domine sobre la seagull. La identificación de estos estados finales no puede llevarse a cabo de una manera directa debido al gran número de contribuciones presentes en esta respuesta.

2.4.6 Factor de forma pión-nucleón

Otro de los grados subnucleares de libertad que afectan a nuestro cálculo es el factor de forma pión-nucleón $F_{\pi N}$, que entra en la expresión del propagador del pión (2.11). Como quiera que en los cálculos que hemos hecho hasta ahora hemos considerado $F_{\pi N} = 1$, vamos a analizar en esta sección cuál es el efecto que su inclusión produce en la respuesta transversal.

Para ello hemos usado una parametrización de tipo monopolar [Som78, Alb84]:

$$F_{\pi N}(k, \epsilon) = \frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\Lambda^2 - \epsilon^2 + k^2}, \quad (2.41)$$

donde de nuevo ϵ es la energía del pión intercambiado, mientras que Λ es un parámetro cuyos valores más comúnmente aceptados son del orden de 1 GeV [Bra77, Som78, Wak83, Alb84, Mac87]. La inclusión de este factor de forma debe disminuir, en valor absoluto, la respuesta transversal asociada a cada corriente por separado, ya que el propagador del pión resultante

$$v(k, \epsilon) = \frac{F_{\pi N}(k, \epsilon)}{k^2 - \epsilon^2 + \mu^2} \quad (2.42)$$

se puede reescribir en la forma

$$v(k, \epsilon) = \frac{1}{k^2 - \epsilon^2 + \mu^2} - \frac{1}{k^2 - \epsilon^2 + \Lambda^2}$$

lo que equivale a sustraer al propagador del pión desnudo (con factor de forma $F_{\pi N} = 1$), otro propagador con masa Λ .

El análisis se ha llevado a cabo mediante un cálculo de la contribución de las MEC a la respuesta a $1p - 1h$, para diversos valores del parámetro Λ , a la energía en donde se alcanza el máximo de la misma para cada momento transferido.

Los resultados para el ^{12}C y el ^{40}Ca se muestran en las Figs. 2.33 y 2.34, respectivamente. Las curvas de puntos (de trazos) se han obtenido restando de la respuesta asociada

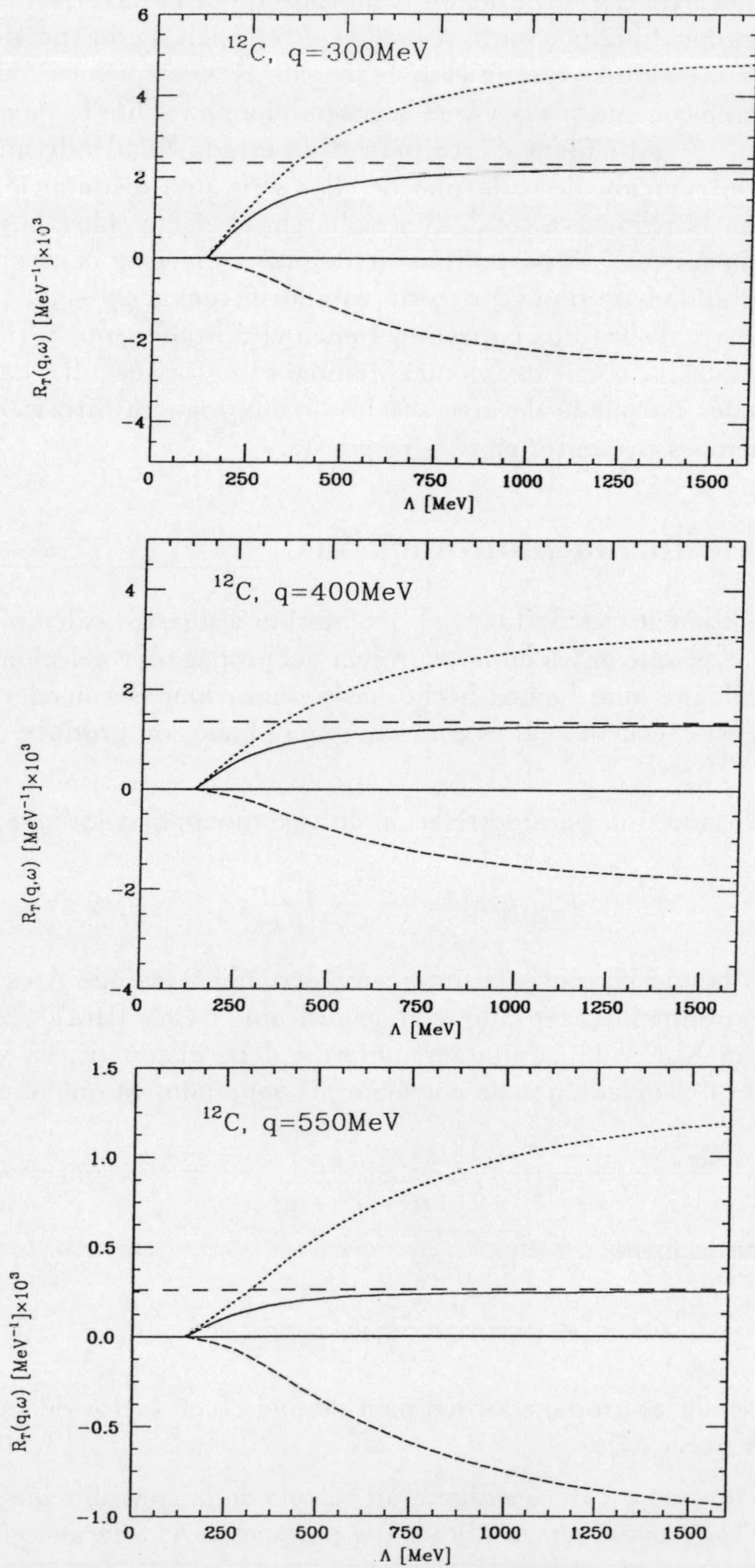


Figura 2.33: Contribución de las MEC a la respuesta transversal a $1p - 1h$ en función del parámetro Λ del factor de forma pión-nucleón para el ^{12}C . La curva a trazos corresponde a la corriente seagull, la de puntos a la piónica y la continua a la suma de ambas. El valor límite de ésta se representa con la asíntota horizontal a trazos.

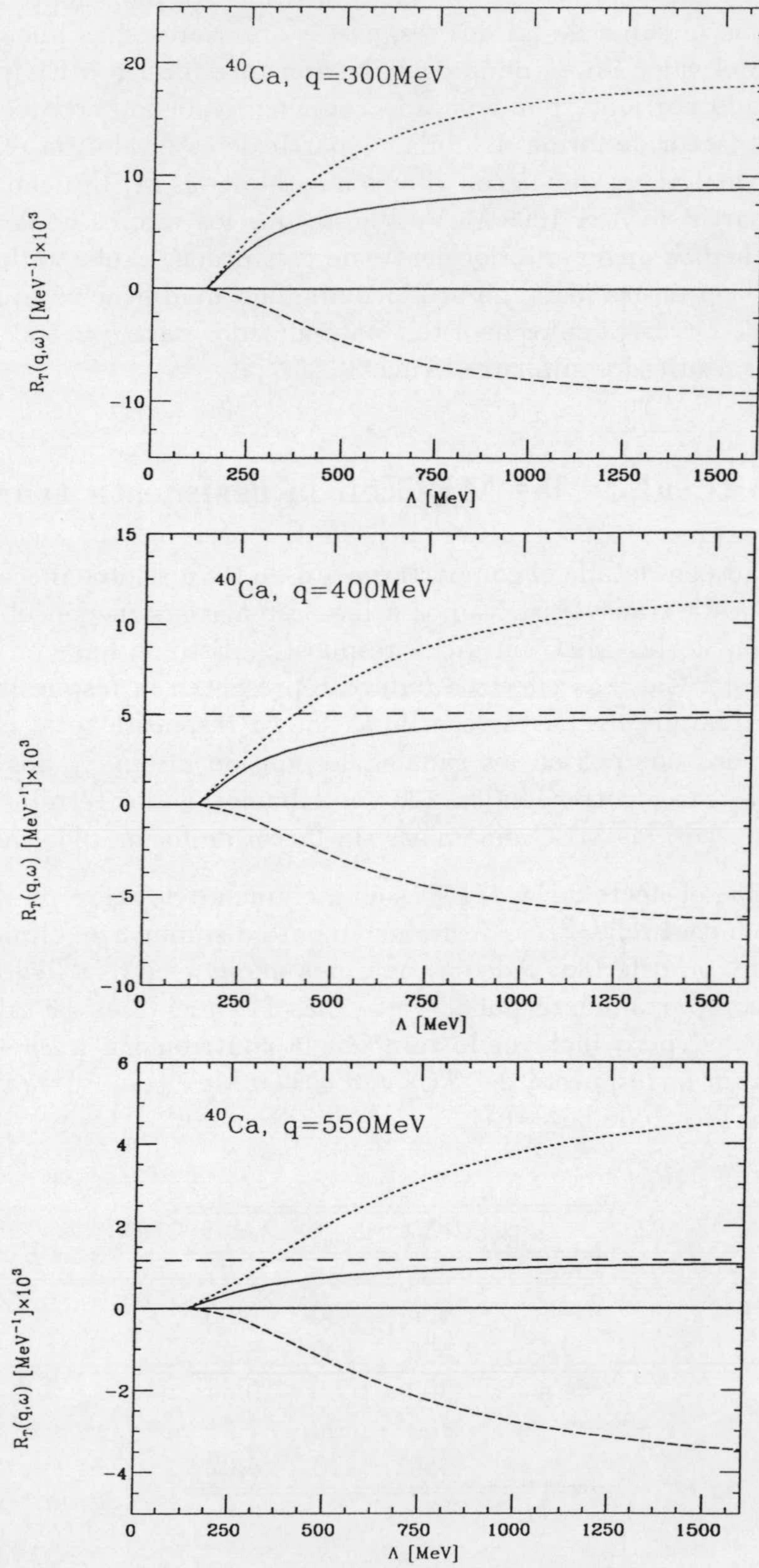


Figura 2.34: Lo mismo que la Fig. 2.33 para el ^{40}Ca .

a las corrientes a un cuerpo y seagull (piónica) la respuesta puramente a un cuerpo. Las curvas continuas son la suma de las dos respuestas anteriores. Las líneas horizontales de trazos representan el valor límite de la contribución total de las MEC para $\Lambda \rightarrow \infty$. La contribución de cada corriente por separado comienza valiendo cero cuando $\Lambda = \mu$, ya que en este caso el factor de forma se anula. A partir de este valor, la respuesta aumenta en valor absoluto, de manera que la contribución total de las MEC alcanza prácticamente su valor límite a partir de $\Lambda \simeq 1000$ MeV. Puesto que los valores de Λ usualmente utilizados son, como hemos dicho anteriormente, de este orden, el efecto de incluir el factor de forma pión-nucleón en las MEC no produce ninguna modificación apreciable en la respuesta transversal. Otros cálculos de este tipo realizados para $q = 550$ y $\omega = 100, 200$ y 300 MeV muestran resultados similares [Ama93].

2.4.7 Efecto total de las MEC en la respuesta transversal

Una vez analizado en detalle el comportamiento de los distintos mecanismos que contribuyen a la respuesta transversal, vamos a mostrar a continuación el efecto total que produce la inclusión de las MEC en dicha respuesta. Esto se hace en las Figs. 2.35 y 2.36 para el ^{12}C y el ^{40}Ca . Las curvas a puntos representan la respuesta de la corriente a un cuerpo, mientras que las curvas continuas son la respuesta total calculada con las corrientes a uno y dos cuerpos en los canales de emisión de una y dos partículas. Por último, las curvas a trazos corresponden a la contribución de los términos a $2p - 2h$. En este cálculo hemos usado las MEC dinámicas sin factor de forma pión-nucleón.

Como se esperaba, el efecto de las MEC es un incremento de las respuestas a un cuerpo. No obstante, la magnitud relativa de dicho incremento disminuye en el pico a medida que aumenta el momento transferido. Además notamos que el efecto es ligeramente superior en el ^{40}Ca . Este comportamiento puede verse más fácilmente en la tabla 2.13, que es análoga a la tabla 2.9, pero incluyendo también la contribución a $2p - 2h$. El mayor efecto se encuentra en la respuesta del ^{40}Ca a $q = 300$ MeV, que se ve incrementada en más de un 10%, por efecto de las MEC.

	$q[\text{MeV}]$	ω_{max}	δR_T^{tot}
^{12}C	300	50	8.77
	400	90	6.80
	550	190	3.23
^{40}Ca	300	50	10.64
	400	90	7.91
	550	170	5.02

Tabla 2.13: Incremento relativo de la respuesta transversal cuando se añaden a la corriente a un cuerpo las corrientes seagull y piónica, incluyendo los estados finales a $1p - 1h$ y $2p - 2h$.

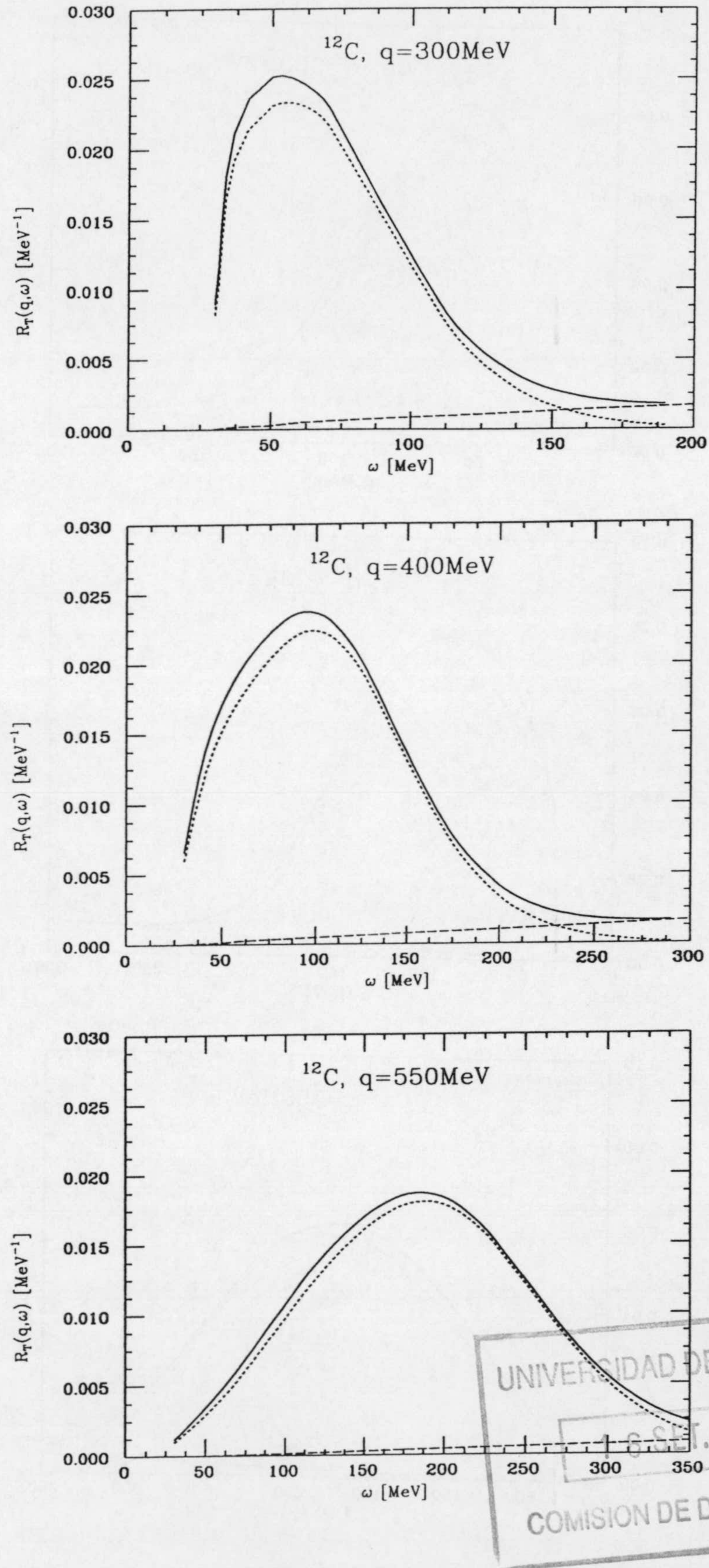


Figura 2.35: Respuesta transversal total (línea continua) del ^{12}C , incluyendo las contribuciones de las MEC. La línea de puntos representa la correspondiente respuesta a un cuerpo, mientras que la línea de trazos es la parte a $2p-2h$.

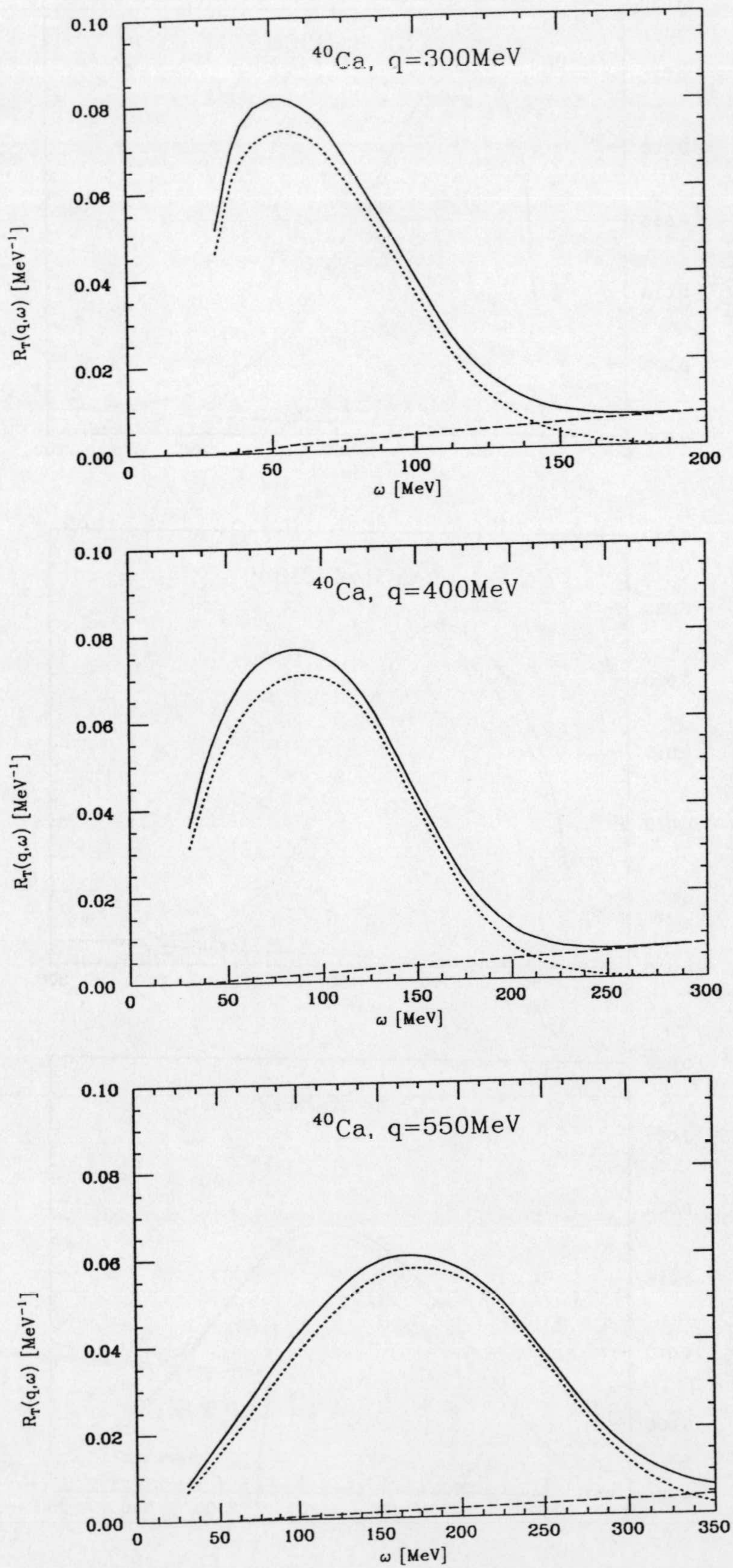


Figura 2.36: Igual que la Fig. 2.35 para el ^{40}Ca .

Finalmente, apuntar que la respuesta a alta energía está dominada por la contribución a $2p - 2h$.

2.5 Comparación con los datos experimentales

En esta sección vamos a comparar los resultados de nuestro cálculo con los datos experimentales existentes en el ^{12}C [Bar83] y el ^{40}Ca [Mez85]. No obstante, no es correcto hacer dicha comparación directamente usando nuestras respuestas calculadas con el modelo de capas, sino que es necesario modificarlas para incluir los efectos de la FSI [Fan87, Fab89]. La descripción del modelo fenomenológico que usamos aquí, se hace en el apéndice E. Allí se muestra que estos efectos pueden tenerse en cuenta, al menos parcialmente, promediando la respuesta obtenida con el modelo de capas en la forma

$$R^{\text{FSI}}(q, \omega) = \int_0^\infty dE R(q, E) [\rho(E, \omega) + \rho(E, -\omega)], \quad (2.43)$$

en donde la función peso $\rho(E, \omega) + \rho(E, -\omega)$ es la parte imaginaria del propagador efectivo, que incluye los efectos de interacción a través de autoenergías de los estados monoparticulares.

Las respuestas efectivas R^{FSI} longitudinal y transversal obtenidas por este procedimiento, se muestran en las Figs. 2.37 y 2.38 para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente (línea continua), junto con las del modelo de capas (línea de puntos) y los datos experimentales.

Las respuestas longitudinales efectivas describen mejor el experimento que las del modelo de capas, sobre todo en el caso del ^{12}C . Aún así, en el ^{40}Ca se siguen sobreestimando los datos experimentales.

Aunque la situación a nivel de la respuesta longitudinal mejora tras la inclusión de la FSI, resulta evidente que no ocurre lo mismo con la respuesta transversal. Así en el ^{12}C , la respuesta transversal en modelo de capas reproduce relativamente bien los datos experimentales, sobre todo a $q = 550\text{MeV}$, mientras que la respuesta efectiva los subestima apreciablemente. En el ^{40}Ca , sin embargo, ninguna de las dos respuestas es satisfactoria. Obsérvese, sin embargo, que dos son los efectos que produce la consideración de la FSI: una reducción de la respuesta y un ensanchamiento de la misma, con la consiguiente traslación del máximo hacia energías más altas. Cualitativamente, este último efecto parece que va en la dirección adecuada, en lo que a la respuesta transversal del ^{40}Ca se refiere, pero no lo es tanto en el caso del ^{12}C .

Podemos por tanto concluir que la inclusión de las MEC no compensa los efectos de la FSI, con lo que es necesario acudir a otros efectos que expliquen las discrepancias que aún persisten.

Hemos de señalar, para terminar, que no se dispone de los datos experimentales correspondientes a $q = 400\text{ MeV}$ en ^{40}Ca , por lo que en la Fig. 2.38, los resultados teóricos correspondientes a este valor del momento transferido se han comparado con los datos a $q = 410\text{ MeV}$. La razón de haber realizado los cálculos a $q = 400\text{ MeV}$ se debe a que nuestro interés principal es el estudio comparativo con el ^{12}C , más que la comparación con el experimento. En cualquier caso, hemos constatado que la diferencia entre las respuestas

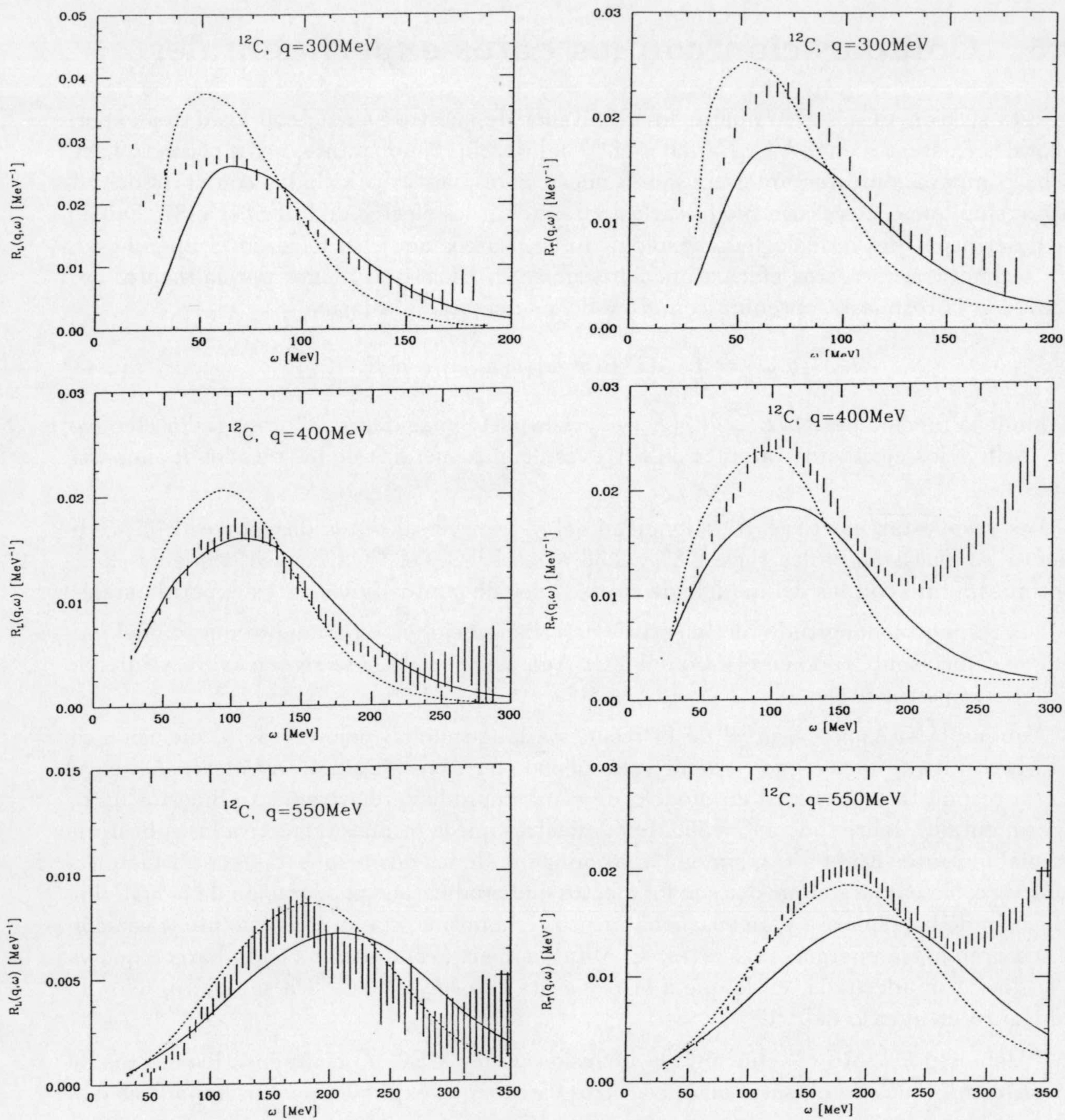


Figura 2.37: Respuestas efectivas en el ^{12}C incluyendo los efectos de la FSI (línea continua) obtenidas a partir de las del modelo de capas (línea de puntos). Los datos experimentales se han tomado de la referencia [Bar83].

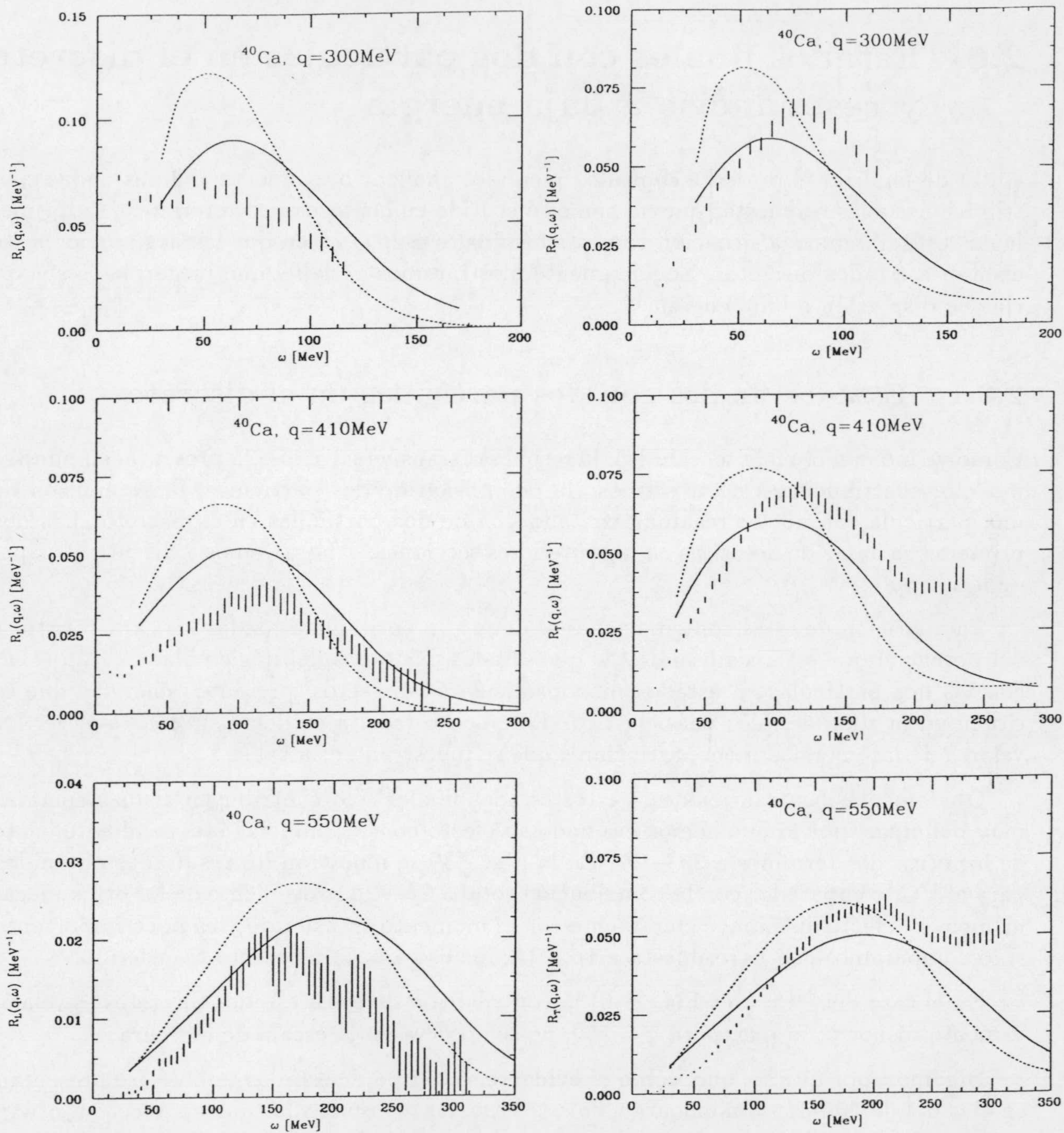


Figura 2.38: Igual que la Fig. 2.37 para el ^{40}Ca . En este caso los datos experimentales provienen de la referencia [Mez85].

a $1p - 1h$ para ambos valores del momento q es muy pequeña y no altera los resultados de la Fig. 2.38.

2.6 Estados finales con dos partículas en el discreto y resonancias a baja energía

Antes de finalizar el presente capítulo, queremos analizar brevemente algunas de las contribuciones a las respuestas que no hemos discutido en las secciones anteriores. En primer lugar, estudiaremos la situación con estados finales a $2p - 2h$ en que las dos partículas se excitan a estados discretos. Seguidamente mostraremos el papel que juegan las resonancias de dispersión a baja energía.

2.6.1 Estados finales con dos partículas en el discreto

Como ya indicamos en la sección 1.5, la respuesta transversal a $2p - 2h$ presenta, en nuestro modelo, contribuciones de tres tipos: la de emisión de dos partículas, la de emisión de una partícula con núcleo residual excitado y la de dos partículas en el discreto. Las dos primeras ya han sido descritas en las anteriores secciones. Ahora vamos a discutir el papel de la última.

La aparición de estas contribuciones se debe a la posibilidad, dadas las características del potencial que estamos usando, de que estados excitados del núcleo blanco a $2p - 2h$, con las dos partículas en estados monoparticulares discretos, presenten energías que se sitúen en la zona del pico cuasielástico. Este hecho resulta evidente sin más que ver los valores de las energías monoparticulares que se muestran en la tabla 2.2.

Obviamente, las transiciones a estos estados finales sólo contribuyen a unas energías muy definidas, por lo que hemos evaluado su efecto considerándolas independientemente de los otros dos términos a $2p - 2h$. En la Fig. 2.39 se muestran los resultados obtenidos para el ^{12}C , comparados con la contribución total a $2p - 2h$ proveniente de los otros mecanismos. El efecto disminuye claramente con el momento transferido y es poco importante si lo comparamos con la respuesta a $1p - 1h$, incluso a bajo momento transferido.

En el caso del ^{40}Ca (ver Fig. 2.40) la contribución de estos estados discretos es relativamente menor y tal que, para $q = 550$, no se observa en la escala de la figura.

Digamos, por último, que, como es evidente, este tipo de estados también se presentan en el canal de $1p - 1h$. Sin embargo, en este caso, las energías a las que aparecen se sitúan por debajo del umbral de emisión y no entran dentro de la región del pico cuasielástico.

2.6.2 Resonancias a baja energía

El segundo aspecto que queremos discutir es el del papel que juegan las resonancias a baja energía. En el cálculo de la respuesta a $2p - 2h$ con una de las partículas en el discreto

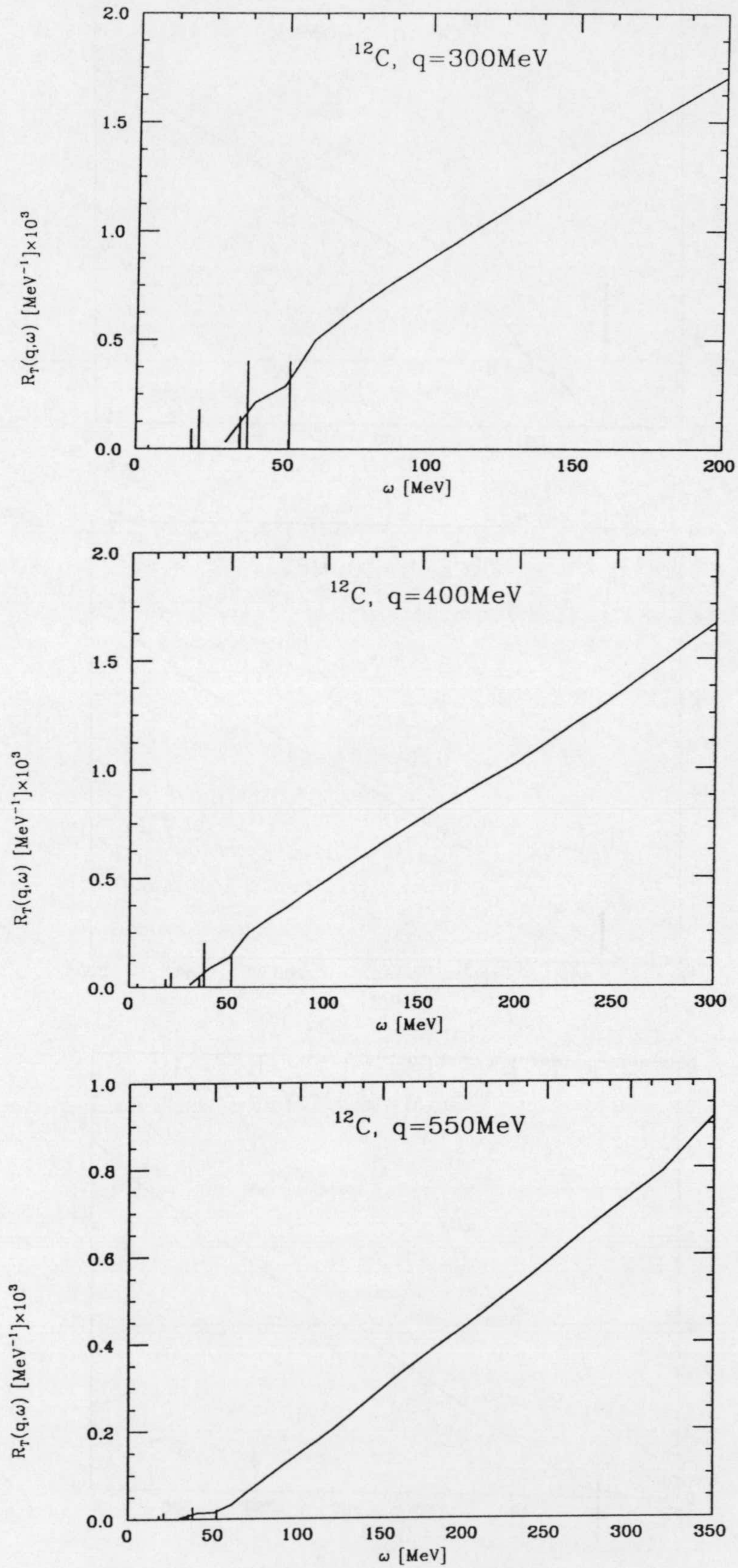


Figura 2.39: Comparación entre la respuesta a $2p-2h$ con una y dos partículas en el continuo (curvas continuas) y las contribuciones debidas a la excitación de las dos partículas a estados discretos (líneas verticales), para el ^{12}C .

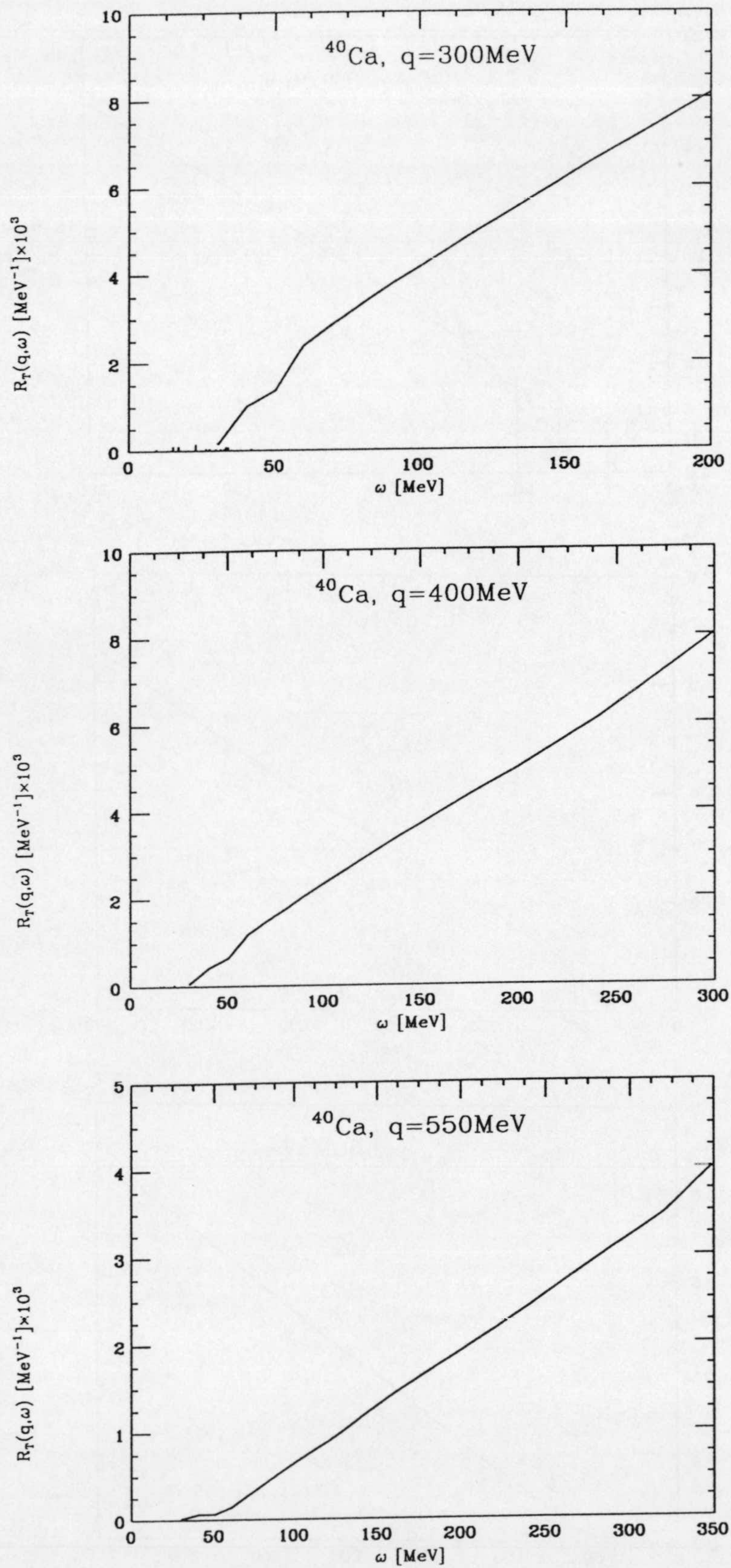


Figura 2.40: Igual que la Fig. 2.39 para el ^{40}Ca .

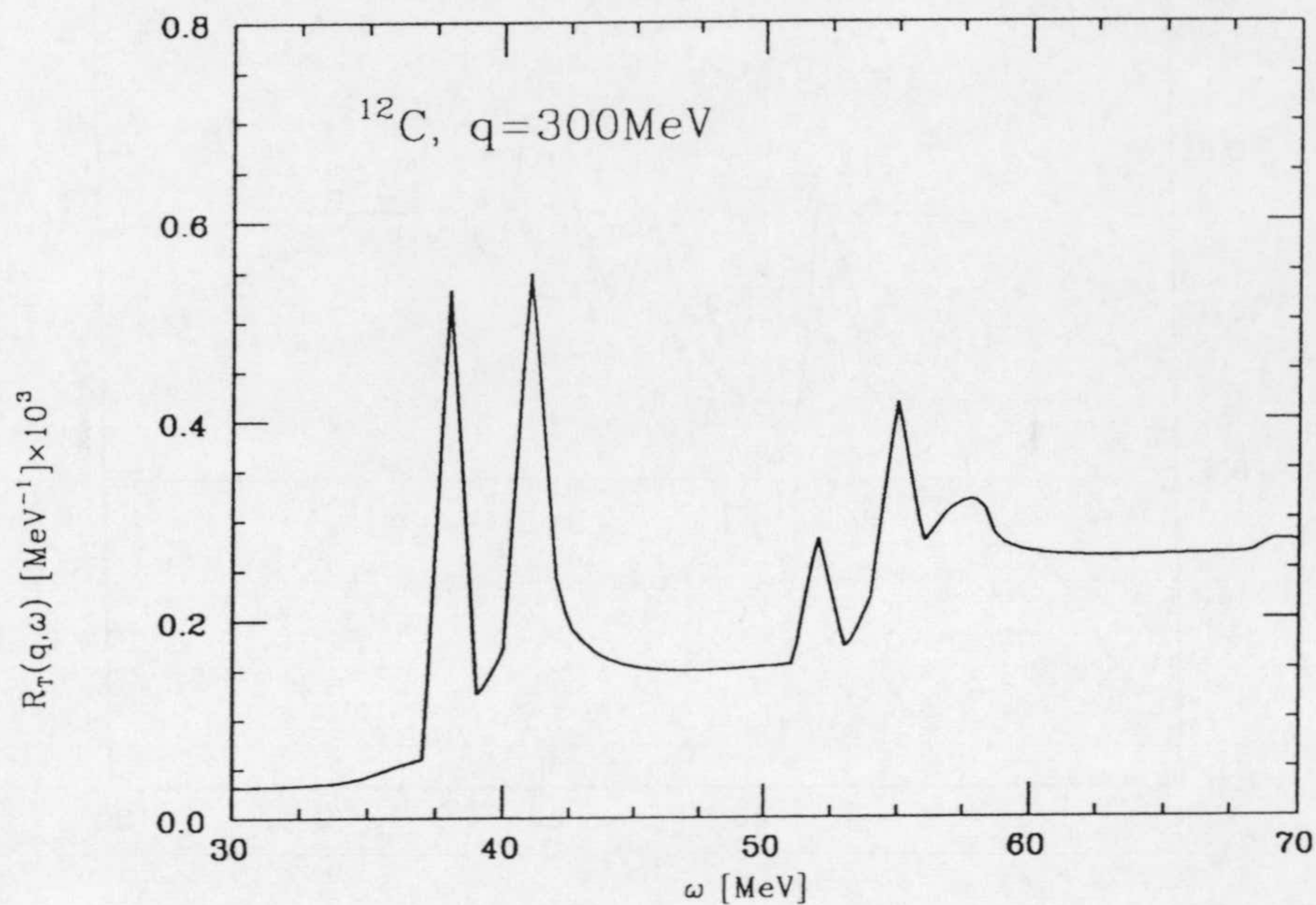


Figura 2.41: Respuesta de emisión de una partícula con núcleo residual excitado para el ^{12}C , a baja energía, calculada con un paso de barrido de 0.5 MeV.

(ver Figs. 2.11 y 2.12) se observan una serie de picos poco definidos. Si se evalúan dichas respuestas con una mayor resolución, barriendo la zona de baja energía con un paso reducido, encontramos una serie de resonancias de pocos MeV de anchura, algunas de las cuales están situadas a energías por encima de 50 MeV, ya en la zona del pico cuasielástico (ver Figs. 2.41 y 2.42). La situación en la que este efecto es más importante es la que corresponde a $q = 300$ MeV

Para investigar el origen de estos picos, hemos descompuesto la función respuesta de la Fig. 2.41, correspondiente al ^{12}C , en cuatro contribuciones originadas por las cuatro posibles excitaciones al discreto del núcleo residual, a saber, $P1p_{1/2}$, $N1p_{1/2}$, $N2s_{1/2}$ y $N1d_{5/2}$ (ver espacio de configuración del ^{12}C en la tabla 2.2). El resultado de esta descomposición se presenta en la Fig. 2.43. Cada curva está marcada con la excitación del núcleo residual a que corresponde. A cada respuesta se le ha sumado un número (indicado entre paréntesis) para evitar las confusiones debidas al solapamiento. La curva superior corresponde a la suma de las otras cuatro. En esta figura podemos identificar fácilmente cuáles son las excitaciones del núcleo residual que contribuyen a cada una de las resonancias que aparecen en la curva superior, (o en la Fig. 2.41).

Siguiendo adelante con nuestra investigación, hemos centrado nuestra atención en la contribución a la respuesta de la excitación $P1p_{1/2}$ (segunda curva, empezando por arriba, de la Fig. 2.43). Esta respuesta puede a su vez ser descompuesta en otras cuatro contribuciones correspondientes a las cuatro parejas de agujeros que son posibles en el estado final y que se muestran en la primera columna de la tabla 2.14. Cada una de estas configuraciones comienza a contribuir a la respuesta a partir de la correspondiente energía

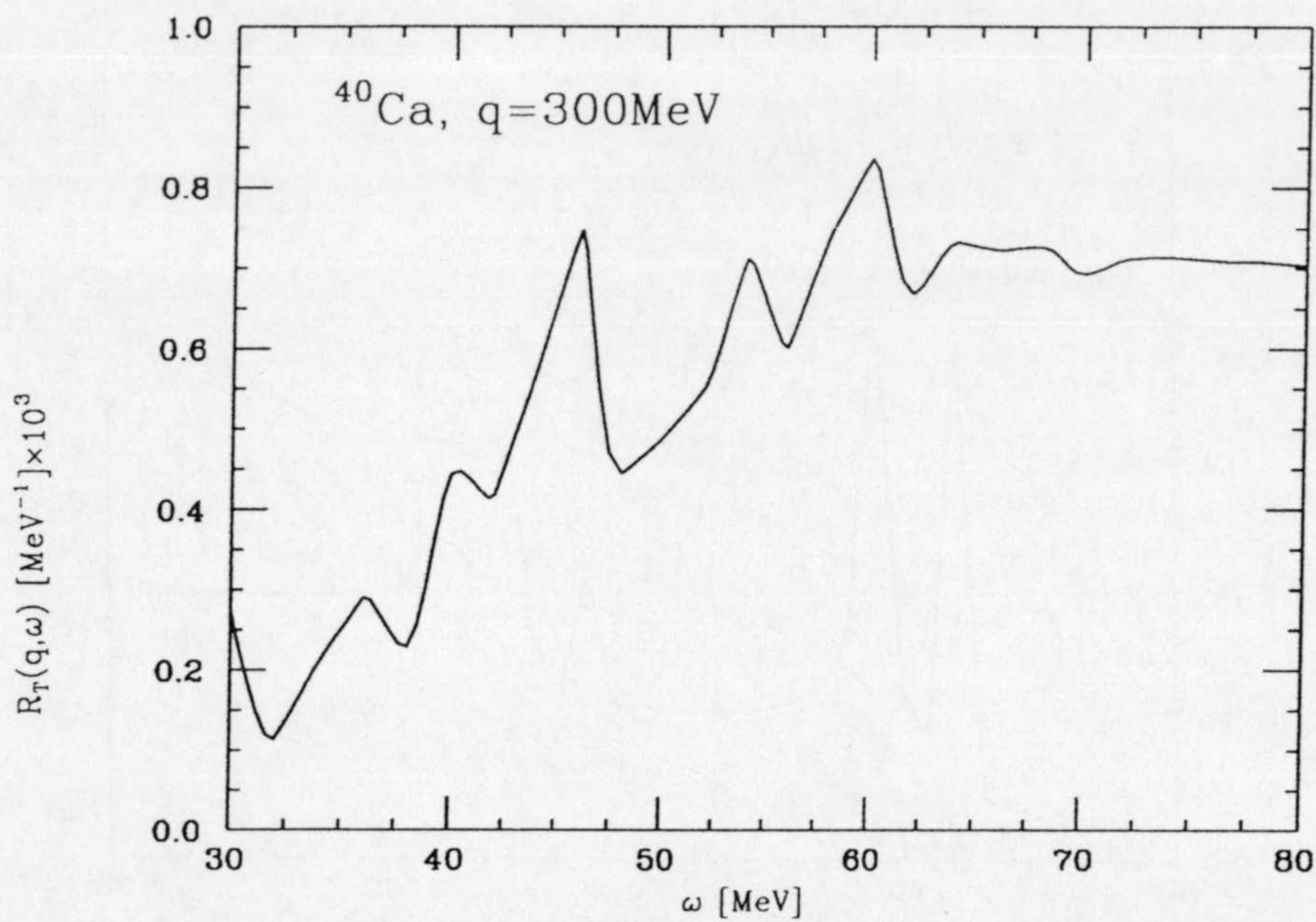


Figura 2.42: Igual que la Fig. 2.41 para el ^{40}Ca , con un paso de barrido de 1 MeV.

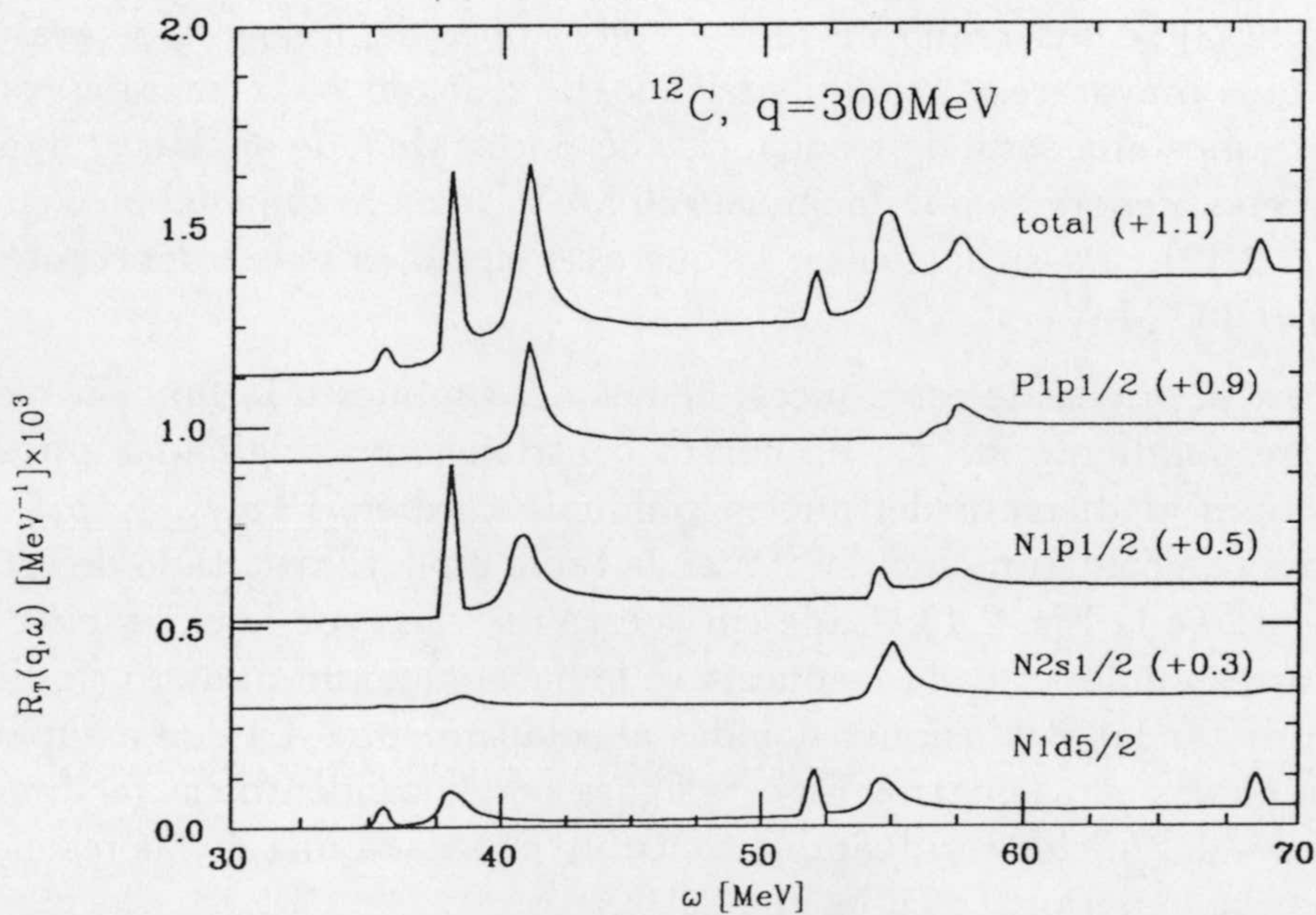


Figura 2.43: Descomposición de la respuesta de la Fig. 2.41 (curva superior) en las contribuciones provenientes de la excitación de una partícula a cada uno de los cuatro niveles del discreto por encima del mar de Fermi. Las cuatro curvas superiores se han desplazado sumando el número que se indica entre paréntesis.

Configuración de agujeros	Energía de emisión [MeV]
$(P1s_{1/2}, N1s_{1/2})^{-1}$	55.0
$(P1s_{1/2}, N1p_{3/2})^{-1}$	38.4
$(P1p_{3/2}, N1s_{1/2})^{-1}$	38.5
$(P1p_{3/2}, N1p_{3/2})^{-1}$	21.9

Tabla 2.14: Las cuatro configuraciones de agujeros que son posibles en el proceso de emisión de dos partículas por el ^{12}C . La energía que aparece en la segunda columna es la de emisión de una partícula cuando la otra es excitada al estado $P1p_{1/2}$.

en la segunda columna.

Las respuestas asociadas a cada una de estas cuatro parejas pueden verse en la Fig. 2.44 con diferentes tipos de trazo. La línea continua es la suma de las cuatro. Cuando cada una de las configuraciones empieza a contribuir, inmediatamente aparece un pico resonante y, luego, el comportamiento es uniforme, típico de una respuesta de emisión. En el caso de la $(P1p_{3/2}, N1p_{3/2})^{-1}$, ésta empieza a contribuir a una energía más baja que las que aparecen en la Fig. 2.44, razón por la cual dicho pico no aparece en la misma.

Finalmente, hemos analizado en detalle una de estas contribuciones, concretamente la curva a puntos, que presenta el pico resonante a mayor energía $\omega \simeq 57$ MeV. Un estudio de las contribuciones de los distintos multipolos a esta respuesta, revela que la resonancia es debida a las excitaciones 1^- y 2^- , que sólo tienen en común la emisión de una onda $d_{3/2}$ al continuo. La contribución de esta onda parcial es el pico aislado que se muestra en la parte inferior derecha de la Fig. 2.44 con línea continua. Comparándola con la curva de puntos, podemos concluir que esta onda es la causante final de dicha resonancia.

Un análisis semejante de cada uno de los picos de la Fig. 2.41 nos revelaría qué ondas parciales son las causantes de cada uno de los mismos. Queda, pues, aclarado, que estos picos corresponden a las resonancias a baja energía que produce el potencial de Woods-Saxon en las diversas ondas parciales del continuo.

Por la misma razón, resonancias análogas deben aparecer también en la respuesta a un cuerpo. Esto puede verse claramente en la Fig. 2.45, en la que mostramos los resultados de un cálculo con un paso de energía muy fino en la región de baja energía de la respuesta transversal a un cuerpo, y en la que encontramos tres resonancias importantes.

Por otro lado, en la Fig. 2.46 podemos ver la contribución de cada una de las cuatro capas del ^{12}C a la respuesta de la Fig. 2.45, entre 30 y 40 MeV de energía. Las tres resonancias mencionadas se deben, exclusivamente, a los canales de emisión de nucleones de las capas más profundas $s_{1/2}$, que son las que empiezan a contribuir en esta región de energía.

Igual que hemos hecho antes, podemos profundizar sobre el origen de la resonancia más intensa, situada a $\omega \simeq 36$ MeV, producida por emisión de protones desde la capa $1s_{1/2}$.

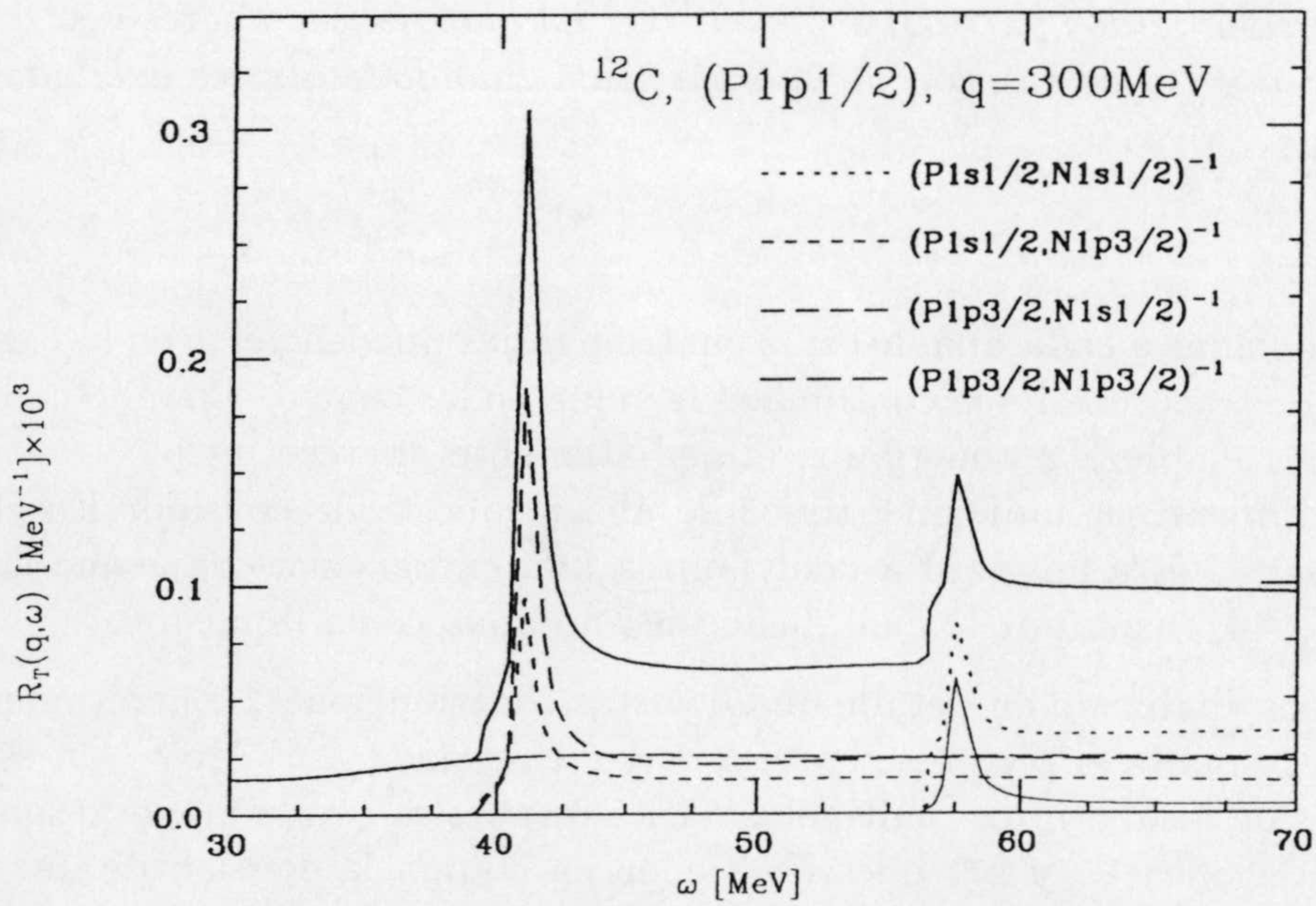


Figura 2.44: Descomposición de la respuesta correspondiente a la curva $P1p_{1/2}$ de la Fig. 2.43 (que también se muestra aquí en la curva superior) en las contribuciones debidas a las cuatro posibles combinaciones de parejas agujeros de protón y neutrón en el ^{12}C . La curva que aparece con línea continua en la parte inferior derecha corresponde a la parte de emisión de una onda de neutrón $d_{3/2}$ de la en el canal de la curva de puntos.

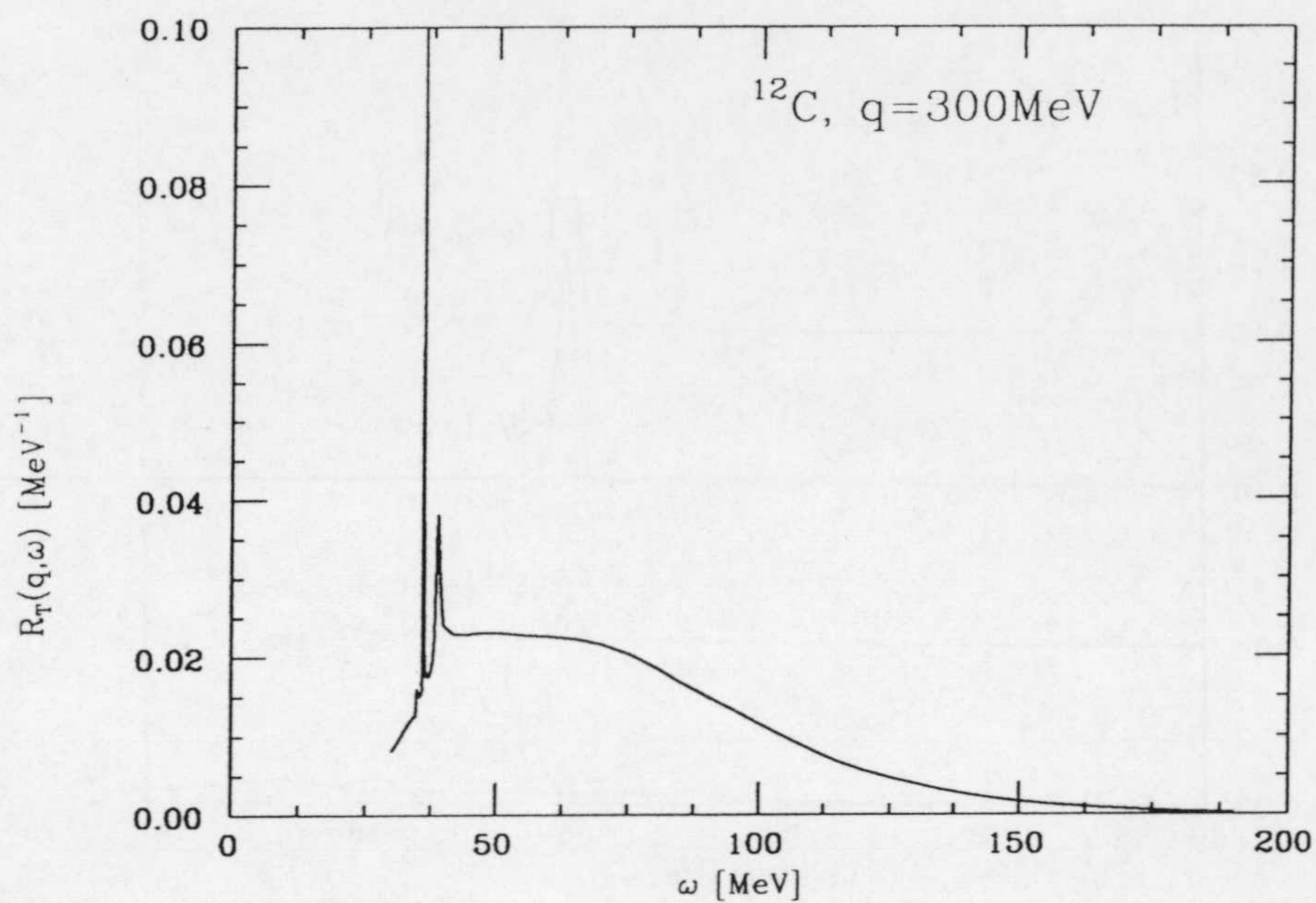


Figura 2.45: Respuesta transversal a un cuerpo en el ^{12}C a $q = 300$ MeV, calculada con un barrido de energía muy fino, que revela la estructura resonante a baja energía.

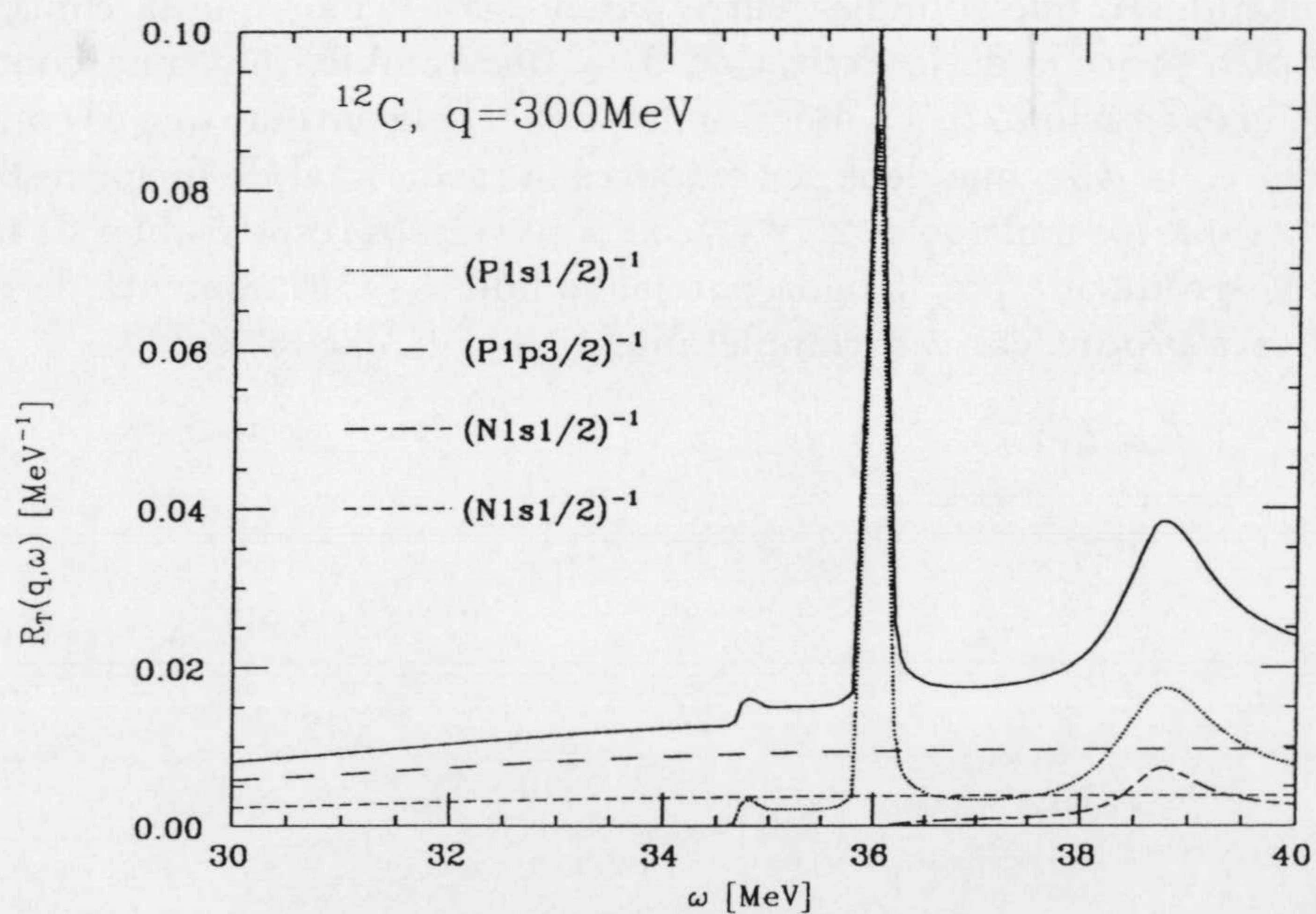


Figura 2.46: Descomposición de la zona resonante de la respuesta de la Fig. 2.45, que también se muestra aquí en línea continua) en las contribuciones debidas a cada una de las capas del ^{12}C .

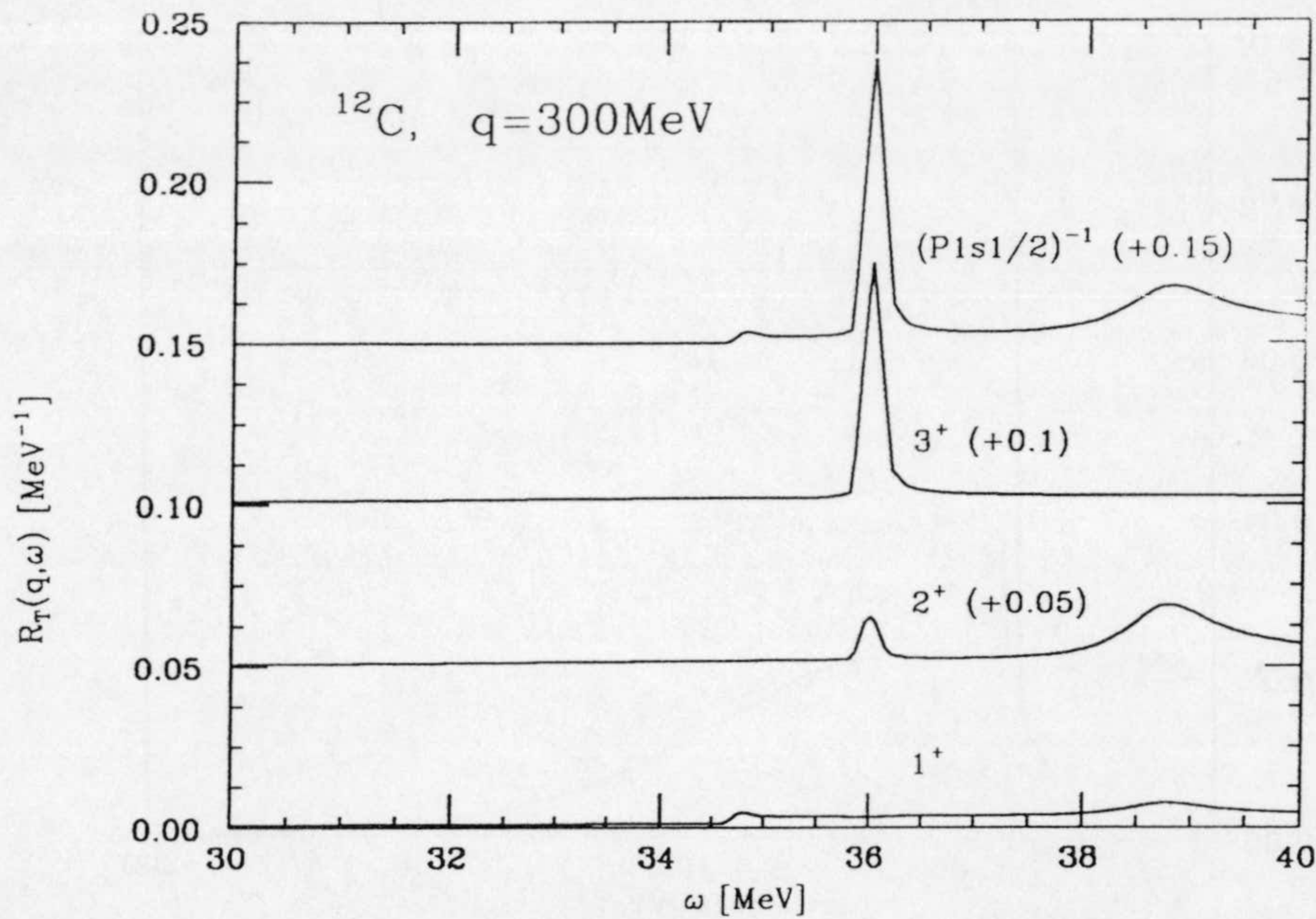


Figura 2.47: Descomposición de la respuesta transversal a un cuerpo originada por la capa $P1s_{1/2}$ del ^{12}C en los diversos multipolos que generan las resonancias.

En la Fig. 2.47 mostramos los multipolos más importantes que componen la respuesta asociada a este canal de emisión. Las diversas curvas se han desplazado sumándoles en cada caso el número que se indica entre paréntesis. Vemos que la contribución más importante al pico procede de la excitación 3^+ y que también hay una contribución no despreciable de la excitación 2^+ . La única onda parcial del continuo que es común a ambas multipolaridades es la $d_{5/2}$, que debe ser entonces la razón final de dicha resonancia. Por otra parte, vemos que los multipolos 2^+ y 1^+ son, a su vez, los responsables de la resonancia a $\omega \simeq 38.8$ MeV, producida por la onda parcial común $d_{3/2}$. Finalmente, la resonancia a $\omega \simeq 34.8$ MeV está producida, casi completamente, por la excitación 1^+ .

Capítulo 3

Efectos del tamaño finito nuclear

Como ya mencionamos en la Introducción de este trabajo, un gran número de las investigaciones que han sido realizadas hasta ahora acerca del pico cuasielástico se han llevado a cabo con modelos que describen al núcleo como un sistema infinito [Koh81, Alb84, 86, Fan87, Str87, Blu89, Fab89, Alb90, Dek91]. Son diversas las razones que pueden aducirse para explicar este hecho. En primer lugar podemos mencionar una razón pragmática: la simplificación de los cálculos que conlleva el hecho de que, en un sistema infinito, las funciones de onda monoparticulares estén descritas por ondas planas. En tal caso no es necesario hacer uso de la maquinaria del álgebra de momento angular, fundamental en el modelo de capas nuclear, ya que se puede trabajar en el espacio de momentos. Por otro lado, las sumas sobre estados excitados de partícula-hueco, que aparecen en el cálculo de las respuestas en el modelo de capas (ver ecs. (1.28a), (1.29a) y (1.29b)) vienen sustituidas por integrales respecto al momento. Aunque cuando se tienen estados finales a $1p-1h$ estas integrales pueden evaluarse de forma simple, en el caso de emisión de dos partículas se trata de integrales multidimensionales que resultan ser bastante costosas de calcular.

Existen, naturalmente, otras razones que, desde un punto de vista físico, abogan por el uso de una descripción como la que aquí estamos discutiendo. Así, por ejemplo, experimentalmente se observa que las respuestas cuasielásticas medidas para el mismo valor del momento transferido en distintos núcleos, escalan bastante bien como función del número de nucleones [Alb87], lo que hace pensar que en esta zona de energías los efectos de capas no son importantes. Además, en el pico cuasielástico el orden de magnitud de la región nuclear que ve el fotón virtual intercambiado por el electrón y el núcleo es inferior a 1 fm. Como los efectos de capas y de superficie se extienden sobre distancias mayores, su contribución a esta excitación debiera ser pequeña.

A pesar de todo, es obvio que los núcleos no son sistemas infinitos y que su dinámica está influenciada, normalmente, por los denominados efectos del tamaño finito. En este capítulo queremos profundizar en estos aspectos investigando la validez del uso de un modelo de sistema infinito para describir la respuesta cuasielástica nuclear, y tratando de estimar los antes mencionados efectos del tamaño finito del núcleo. Para ello compararemos los resultados que se obtienen mediante un modelo de tipo gas de Fermi, con los que hemos mostrado y discutido en el capítulo 2 de esta memoria. Esta comparación la

realizaremos sólo para el caso de estados finales a 1p-1h, dada la complejidad que conlleva el análisis de las contribuciones del canal a 2p-2h.

Con esta comparación pretendemos asimismo resolver, por un lado, las diferencias observadas entre nuestros resultados en el modelo de capas y los obtenidos con el gas de Fermi por algunos autores, y, por otro, las inconsistencias existentes entre algunos de éstos últimos cálculos. Para ello hemos desarrollado las distintas ecuaciones correspondientes al modelo de gas de Fermi, obteniendo expresiones ligeramente diferentes a las que usualmente aparecen reseñadas en la literatura y que detallamos en la sección 1.

Además del número de partículas, el parámetro necesario, para realizar un cálculo en un gas de Fermi, es el momento de Fermi k_F , que caracteriza al núcleo en su estado fundamental. Una de nuestras principales intenciones en este capítulo es diseñar un método, de tipo fenomenológico, que nos permita obtener un valor adecuado para el momento de Fermi, para lo que utilizaremos un promedio con la densidad. Los resultados que se obtienen con este procedimiento se discuten en la sección 2. En la sección 3 estudiamos el efecto que produce la utilización de la aproximación de la densidad local (LDA), que corresponde a un promedio, pesado de nuevo con la densidad, de gases de Fermi con distintos valores de k_F . Finalmente, en la sección 4, analizamos las contribuciones de las MEC en el contexto desarrollado.

3.1 Respuestas en el modelo del gas de Fermi

La idea básica de este modelo es considerar al núcleo como un gas de A nucleones, que no interactúan entre sí, y que está encerrado en un cubo de lado L y volumen V . En consecuencia, cada nucleón está descrito por una onda plana

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \chi \eta, \quad (3.1)$$

que está caracterizada por el vector de espín, $\chi = |s\rangle$, el de isospín, $\eta = |t\rangle$, y el vector momento \mathbf{k} , que es de la forma

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad (3.2)$$

con $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ un vector cuyas componentes n_i son números enteros, a fin de que $\psi_{\mathbf{k}}$ se anule en la superficie del cubo. El confinamiento de los nucleones queda garantizado exigiendo que la función de onda también se anule fuera del cubo. La energía del nucleón es $\omega_{\mathbf{k}} = k^2/2M$, con $k = |\mathbf{k}|$.

Para simular un sistema infinito, al final de los cálculos se toma el límite $V \rightarrow \infty$, con lo que se elimina la discretización de los momentos \mathbf{k} permitidos.

El estado fundamental nuclear se caracteriza mediante los momentos de Fermi de los protones y los neutrones, denotados por k_F^t . Todos los estados con tercera componente de isospín t y momento $k \leq k_F^t$ están ocupados. El número de estos estados es

$$N_t = 2 \sum_{\mathbf{k} \leq k_F^t} 1, \quad (3.3)$$

ya que para cada valor de k hay dos estados de espín posibles. Cuando se toma el límite $V \rightarrow \infty$, la suma anterior se sustituye por una integral a la que se añade un factor que se deduce de la ecuación (3.2):

$$N_t = 2V \int_{S_F^t} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (3.4)$$

donde S_F^t es una esfera de radio k_F^t . Según esta ecuación, en el límite de materia infinita, la densidad de protones o neutrones está dada por

$$\rho_t = \frac{N_t}{V} = \frac{k_F^t{}^3}{3\pi^2}. \quad (3.5)$$

En el caso de materia nuclear simétrica, la densidad de protones es igual a la de neutrones y, por tanto, también coinciden sus momentos de Fermi, $k_F^P = k_F^N = k_F$. Este es el caso que vamos a considerar, puesto que los núcleos que son objeto de nuestro estudio, ^{12}C y ^{40}Ca , tienen el mismo número de protones y de neutrones.

En este capítulo estamos interesados, como hemos indicado anteriormente, en analizar los efectos debidos al tamaño finito del núcleo, esto es, los que puedan aparecer al considerar el modelo de capas, en lugar del de gas de Fermi, en la descripción de las respuestas longitudinal y transversal nucleares, centrándonos en la parte de emisión de una partícula. En el modelo de gas de Fermi que ahora estamos discutiendo, los estados finales nucleares son, pues, del tipo

$$|f\rangle = \theta(k_F - h)\theta(p - k_F)|\mathbf{p}\mathbf{h}^{-1}\rangle = \theta(k_F - h)\theta(p - k_F)a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{h}}|F\rangle \quad (3.6)$$

en donde $|F\rangle$ indica el estado fundamental nuclear correspondiente al momento de Fermi k_F y $a_{\mathbf{k}}^+$ y $a_{\mathbf{k}}$ son los operadores de creación y destrucción de un nucleón. Las funciones paso $\theta(x)$ garantizan que los momentos \mathbf{p} y \mathbf{h} cumplan las condiciones requeridas. Por tanto, el estado $|f\rangle$ de la ecuación (3.6) está compuesto por un nucleón con momento \mathbf{p} ($p > k_F$), espín s_p e isospín t_p , y un núcleo residual con un agujero de un nucleón con momento \mathbf{h} ($h \leq k_F$), espín s_h e isospín t_h .

Para facilitar el análisis subsiguiente, y dado que la corriente nuclear viene dada, en general, como suma de varios términos a uno y dos cuerpos, es conveniente descomponer la respuesta transversal (1.3b) como suma de respuestas que involucran a una o dos de estas corrientes. En efecto, si escribimos que

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}^a + \mathbf{j}^b + \mathbf{j}^c + \dots,$$

entonces

$$|\langle f|\mathbf{J}_T|0\rangle|^2 = |\langle f|\mathbf{j}_T^a|0\rangle|^2 + |\langle f|\mathbf{j}_T^b|0\rangle|^2 + \dots + 2 \operatorname{Re}\langle f|\mathbf{j}_T^a|0\rangle\langle f|\mathbf{j}_T^b|0\rangle^* + \dots$$

y la descomposición consecuente para R_T puede escribirse en la forma:

$$R_T = R_T^a + R_T^b + \dots + R_T^{ab} + \dots$$

Las respuestas del tipo R_T^a son puras en el sentido de que son debidas únicamente a la corriente \mathbf{j}^a , y su definición es

$$R_T^a(\mathbf{q}, \omega) = \sum_f \delta(E_f - \omega) |\langle f|\mathbf{j}_T^a|0\rangle|^2. \quad (3.7)$$

Por su parte, las del tipo R_T^{ab} corresponden a la interferencia entre las corrientes \mathbf{j}^a y \mathbf{j}^b , siendo su expresión general:

$$R_T^{ab}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \operatorname{Re} \sum_f \delta(E_f - \omega) \langle f | \mathbf{j}_T^a | 0 \rangle \langle f | \mathbf{j}_T^b | 0 \rangle^*. \quad (3.8)$$

Usando la definición (3.6) de los estados finales, las funciones respuesta longitudinal (1.3a) y transversales pura (3.7) y de interferencia (3.8) se escriben

$$R_L(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{ph}} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(k_F - h) \theta(p - k_F) \left| \langle \mathbf{ph}^{-1} | \rho(\mathbf{q}) | F \rangle \right|^2 \quad (3.9a)$$

$$R_T^a(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{ph}} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(k_F - h) \theta(p - k_F) \left| \langle \mathbf{ph}^{-1} | \mathbf{j}_T^a(\mathbf{q}) | F \rangle \right|^2 \quad (3.9b)$$

$$R_T^{ab}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{ph}} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(k_F - h) \theta(p - k_F) \langle \mathbf{ph}^{-1} | \mathbf{j}_T^a(\mathbf{q}) | F \rangle \langle \mathbf{ph}^{-1} | \mathbf{j}_T^b(\mathbf{q}) | F \rangle^*. \quad (3.9c)$$

Las sumas que aparecen en las ecuaciones anteriores se realizan sobre los valores discretos de \mathbf{p} y \mathbf{h} , y se transforman en integrales cuando se toma el límite de materia infinita $V \rightarrow \infty$. Las integrales resultantes pueden ser calculadas analíticamente en el caso de la respuesta de carga y en el de las respuestas transversales correspondientes a las corrientes a un cuerpo (ver apéndice F para su obtención detallada). Estas respuestas pueden ser factorizadas como producto de un factor de forma cuadrático apropiado (asociado a cada operador de carga o corriente involucrado) y de una función que nosotros hemos denominado función de respuesta *reducida*:

$$R_L(q, \omega) = F_L(q, \omega) \mathcal{R}_L(q, \omega) \quad (3.10a)$$

$$R_T^C(q, \omega) = F_T^C(q, \omega) \mathcal{R}_T^C(q, \omega) \quad (3.10b)$$

$$R_T^M(q, \omega) = F_T^M(q, \omega) \mathcal{R}_T^M(q, \omega) \quad (3.10c)$$

$$R_T^{CM}(q, \omega) = 0. \quad (3.10d)$$

Los factores de forma cuadráticos están definidos por:

$$F_L = f_{DF}^2 (G_E^P)^2 \quad (3.11a)$$

$$F_T^C = (G_E^P)^2 \quad (3.11b)$$

$$F_T^M = (G_M^P)^2 + (G_M^N)^2, \quad (3.11c)$$

en donde hemos incluido el término de Darwin-Foldy (1.9) en el factor de forma longitudinal. Por su parte, las funciones de respuesta reducidas están dadas por

$$\mathcal{R}_L(q, \omega) = \frac{3AM}{4k_F^3 q} \theta(\omega) \theta \left(k_F - \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right| \right) \frac{k_F^2 - \kappa^2}{2} \quad (3.12a)$$

$$\mathcal{R}_T^C(q, \omega) = \frac{3AM}{4k_F^3 q} \theta(\omega) \theta \left(k_F - \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right| \right) \left[\frac{k_F^4 - \kappa^4}{4M^2} - \frac{k_F^2 - \kappa^2}{2} \left(\frac{\omega}{q} - \frac{q}{2M} \right) \right] \quad (3.12b)$$

$$\mathcal{R}_T^M(q, \omega) = \frac{q^2}{2M^2} \mathcal{R}_L(q, \omega). \quad (3.12c)$$

en donde el momento κ que aquí aparece está definido por

$$\kappa = \begin{cases} \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|, & \text{si } k_F < \frac{q}{2} - \frac{M\omega}{q} \\ \sqrt{k_F^2 - 2M\omega}, & \text{si } k_F > \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \end{cases} \quad (3.13)$$

En este punto cabe hacer algunos comentarios acerca de las respuestas a un cuerpo en el gas de Fermi que acabamos de exponer:

1. Las respuestas reducidas que hemos definido corresponderían a las de un núcleo formado por nucleones puntuales (y con momento magnético igual a 1).
2. La respuesta de interferencia entre las corrientes de convección y magnetización es cero. Este resultado es debido a que la primera es independiente del espín, mientras que la segunda es proporcional a σ . Como consecuencia, al realizar la suma sobre espines iniciales y finales, obtenemos siempre dos términos que no se diferencian más que en la orientación del espín y que se anulan mutuamente.
3. La respuesta reducida de magnetización es proporcional a la respuesta longitudinal reducida, para un momento transferido dado.
4. La región donde la respuesta no es nula está determinada por las funciones paso $\theta(x)$ que aparecen en las ecuaciones (3.12a) y (3.12b). La primera de ellas nos indica que la energía transferida ω debe ser positiva, puesto que el núcleo está inicialmente en su estado fundamental de mínima energía. Por otro lado, la segunda obliga a que se cumplan las dos condiciones siguientes:

$$k_F > \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \Rightarrow \omega < \frac{q^2}{2M} + \frac{qk_F}{M} \quad (3.14a)$$

$$k_F > \frac{q}{2} - \frac{M\omega}{q} \Rightarrow \omega > \frac{q^2}{2M} - \frac{qk_F}{M}, \quad (3.14b)$$

que en términos geométricos se pueden formular diciendo que en el plano (q, ω) la región donde la respuesta es no nula es la zona del primer cuadrante situada entre las parábolas $\omega = qk_F/M + q^2/2M$ y $\omega = -qk_F/M + q^2/2M$. Esta restricción se puede entender fácilmente, puesto que no es más que consecuencia de la conservación de la energía y del principio de exclusión de Pauli. En efecto, la energía transferida al núcleo cuando se emite un nucleón que inicialmente tenía momento h es

$$\omega = \frac{|\mathbf{h} + \mathbf{q}|^2}{2M} - \frac{h^2}{2M} = \frac{q^2 + 2hq \cos \theta}{2M},$$

siendo θ el ángulo entre \mathbf{h} y \mathbf{q} . Entonces, fijado q , el valor máximo de ω se obtiene para $h = k_F$ y $\cos \theta = 1$, y resulta ser:

$$\omega_{\max} = \frac{q^2}{2M} + \frac{qk_F}{M}.$$

Por lo tanto, la energía que se transfiere a un nucleón es máxima cuando éste se encuentra en la esfera de Fermi ($h = k_F$) con momento paralelo a \mathbf{q} . Por su parte, el mínimo de ω corresponde a $h = k_F$ y $\cos \theta = -1$ y toma el valor:

$$\omega_{\min} = \frac{q^2}{2M} - \frac{qk_F}{M};$$

es decir, que la energía transferida es mínima cuando el nucleón está en la esfera de Fermi con momento antiparalelo a \mathbf{q} . Además la energía mínima es no nula siempre que $q > 2k_F$, es decir, siempre que el momento transferido sea suficiente para invertir el momento de dicho nucleón y sacarlo fuera del mar de Fermi para no violar el principio de exclusión de Pauli.

5. Todas las respuestas son proporcionales al número de partículas A o, lo que es lo mismo, al volumen V , que en nuestro límite es infinito. Por lo tanto, la magnitud que tiene sentido en materia nuclear infinita es la respuesta por partícula. A la hora de aplicar los resultados a un núcleo finito, bastará multiplicar por el número de partículas para obtener la respuesta deseada.

Con respecto a las MEC, sólo vamos a considerar sus respuestas de interferencia con las corrientes a un cuerpo. Estas constituyen los términos dominantes de las contribuciones de las MEC a la respuesta transversal, como ya comprobamos en el capítulo anterior con el modelo de capas, mientras que las respuestas puras R_T^{SS} , $R_T^{\pi\pi}$ y la de interferencia $R_T^{S\pi}$ resultan ser prácticamente despreciables. Aquí consideraremos que en el caso del gas de Fermi ocurre lo mismo y no procederemos a su evaluación, que, además, resultaría extremadamente tediosa por el elevado número de términos que involucra. Esto se nota particularmente en el caso de la respuesta puramente piónica, cuya estructura operatorial es más complicada que la de la seagull, por el hecho de contener el producto de dos propagadores (compárense en el apéndice F las expresiones para las integrales I^{MS} e I^{CS} con las de las integrales $I^{M\pi}$ e $I^{C\pi}$). De hecho, la integral I^π que entraría en la ecuación (3.17) para el cálculo de la correspondiente respuesta piónica pura, tiene 142 sumandos, lo cual complica sobremanera su cálculo.

Al igual que las asociadas a las corrientes a un cuerpo, todas las respuestas de interferencia un cuerpo-MEC pueden ser escritas como producto de un factor de forma y una respuesta reducida

$$R_T^{ab}(q, \omega) = F_T^{ab}(q, \omega) \mathcal{R}_T^{ab}(q, \omega) \quad (3.15)$$

en donde $a = M, C$ y $b = S, \pi$. Los factores de forma F_T^{ab} se definen mediante

$$F_T^{CS} = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} \frac{4}{M} G_E^P (G_E^P - G_E^N) \quad (3.16a)$$

$$F_T^{MS} = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} \frac{4}{M} (G_M^P - G_M^N) (G_E^P - G_E^N) \quad (3.16b)$$

$$F_T^{C\pi} = -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} \frac{8}{M} G_E^P F_{\pi\gamma} \quad (3.16c)$$

$$F_T^{M\pi} = -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} \frac{4}{M} (G_M^P - G_M^N) F_{\pi\gamma}. \quad (3.16d)$$

Por su parte, las respuestas reducidas de interferencia se expresan también de una forma análoga a las respuestas reducidas a un cuerpo (3.12), pudiendo escribirse como sigue:

$$\mathcal{R}_T^{ab}(q, \omega) = \frac{3AM}{4k_F^3 q} \theta(\omega) \theta\left(k_F - \left|\frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2}\right|\right) \int_{\kappa}^{k_F} dh h I^{ab}(h, \sqrt{2ME + h^2}, q). \quad (3.17)$$

Como vemos, ahora la dependencia en k_F y κ viene dada a través de la integral de ciertas funciones de tres variables, $I^{ab}(h, p, q)$; estas funciones contienen la información acerca de los elementos de matriz nucleares de las corrientes, y vienen dadas en términos de integrales sobre momentos de la forma (ver apéndice F):

$$I^{CS}(h, p, q) = \int_{S_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{h}^T \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k}) \left[\frac{1}{(\mathbf{h} + \mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + \mu^2} - \frac{1}{(\mathbf{h} - \mathbf{k})^2 + \mu^2} \right] \quad (3.18a)$$

$$I^{MS}(h, p, q) = \int_{S_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{q} \cdot \left[\frac{\mathbf{h} + \mathbf{q} - \mathbf{k}}{(\mathbf{h} + \mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + \mu^2} - \frac{\mathbf{h} - \mathbf{k}}{(\mathbf{h} - \mathbf{k})^2 + \mu^2} \right] \quad (3.18b)$$

$$I^{C\pi}(h, p, q) = \int_{S_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[(\mathbf{h} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{q} - (\mathbf{h} - \mathbf{k})^2](\mathbf{k} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^T}{[(\mathbf{h} + \mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + \mu^2][(\mathbf{h} - \mathbf{k})^2 + \mu^2]}, \quad (3.18c)$$

$$I^{M\pi}(h, p, q) = \int_{S_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{q^2 (\mathbf{h}^T - \mathbf{k}^T)^2}{[(\mathbf{h} + \mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + \mu^2][(\mathbf{h} - \mathbf{k})^2 + \mu^2]}, \quad (3.18d)$$

en donde S_F es la esfera de integración de radio k_F y hemos indicado por \mathbf{h}^T la parte transversal del vector \mathbf{h}

$$\mathbf{h}^T = \mathbf{h} - \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{q}}{q^2} \mathbf{q}. \quad (3.19)$$

Es importante señalar el hecho de que en las anteriores ecuaciones aparecen los propagadores del pión en la aproximación estática. La razón básica para haber elegido dicha aproximación en el análisis que queremos llevar ahora a cabo es de tipo meramente práctico, ya que, en tal caso, las integrales (3.18b,b) correspondientes a la corriente seagull pueden ser resueltas analíticamente, mientras que las correspondientes a la piónica (3.18c,d) se reducen a una integral sobre una variable unidimensional, que se evalúa numéricamente. Las expresiones correspondientes aparecen en el apéndice F. Allí se muestra que las funciones $I^{ab}(h, p, q)$ sólo dependen de los módulos de los vectores \mathbf{h} , \mathbf{q} , $\mathbf{p} \equiv \mathbf{h} + \mathbf{q}$, lo cual no es obvio a priori a la vista de sus definiciones (3.18).

Como ya comprobamos en el capítulo anterior, la introducción del propagador dinámico no afecta apreciablemente a la respuesta de emisión de una partícula, por lo que su consideración sólo se traduciría en un aumento de la complejidad en los cálculos de las integrales I^{ab} que ya no podrían reducirse en la forma que acabamos de comentar.

Digamos finalmente que la estructura de las respuestas de interferencia OB-MEC (3.17) es análoga a la de las respuestas a un cuerpo (3.12) y, por tanto, son válidos los mismos comentarios que hicimos acerca de la región de energía-momento donde la respuesta es no nula y su proporcionalidad con el número de partículas.

3.2 Cálculo de las respuestas

Como hemos visto en las ecuaciones de la sección anterior, además del número de partículas A , el parámetro necesario para obtener las respuestas es el momento de Fermi k_F . Dado que el modelo que aquí estamos considerando es un modelo de materia nuclear, parece lógico suponer para el momento de Fermi en un primer paso su valor tradicional $k_F = 272$ MeV, extraído a partir de la densidad central de los núcleos pesados, $\rho = 0.17$ fm⁻³, la cual se obtiene de experimentos de dispersión elástica de electrones.

En las Figs. 3.1 y 3.2 se muestran las respuestas longitudinal y transversal a un cuerpo, esto es, sin la inclusión de los efectos de las MEC, para el ¹²C y el ⁴⁰Ca, respectivamente. Las líneas continuas se han obtenido en el modelo de capas, mientras que las líneas a trazos corresponden a la elección del momento de Fermi que acabamos de señalar. Como podemos comprobar, ambos cálculos difieren notablemente, para todos los momentos transferidos considerados, si bien las discrepancias son menores en ⁴⁰Ca que en ¹²C.

Este resultado está de acuerdo con los cálculos de otros autores, como Moniz y colaboradores [Mon71]. Estos apuntan que los valores de k_F necesarios para reproducir la sección eficaz total en núcleos pesados, desde el ⁵⁷Ni hasta el ²⁰⁸Pb, son ligeramente inferiores al de materia nuclear, oscilando levemente alrededor de 260 MeV y van disminuyendo de forma gradual a medida que el núcleo es más ligero, llegando al valor de $k_F = 169$ MeV en el caso del ⁶Li.

Con respecto a los núcleos pesados, la estabilidad del momento de Fermi se debe a la saturación de las fuerzas nucleares, que se traduce en una densidad que es prácticamente constante en el interior nuclear y que disminuye paulatinamente en la superficie, por lo que a esta región podría asignarse un momento de Fermi *local* más pequeño que en el interior. Este mismo argumento puede aplicarse a núcleos ligeros, con la particularidad de que los efectos de superficie son cada vez más notables y de ahí la disminución del momento de Fermi necesario para reproducir la sección eficaz. En cualquier caso, estos resultados reflejan el hecho de que en los núcleos finitos la densidad promedio es menor que en materia nuclear.

Para los núcleos que estamos considerando en este trabajo, Moniz *et al.* obtienen $k_F = 221$ MeV para el ¹²C y $k_F = 251$ MeV para el ⁴⁰Ca. Sin embargo, estos valores del momento de Fermi efectivo han sido ajustados empíricamente a fin de reproducir la sección eficaz experimental en el pico cuasielástico. Es evidente que este proceso de ajuste refleja la presencia de los efectos del tamaño finito nuclear, pero no da idea de la forma en que pueden ser tenidos en cuenta.

Con el fin de profundizar en este aspecto, proponemos a continuación un procedimiento simplificado de obtención de un momento de Fermi efectivo, que tiene en cuenta, en cierto sentido, la distribución interna de los correspondientes sistemas nucleares. Para ello partimos de la ec. (3.5) que liga el momento de Fermi con la densidad (constante) de protones o neutrones de la materia nuclear. Si ahora introducimos en dicha ecuación la densidad de protones o neutrones del núcleo finito, dependiente de r , podemos definir un momento de Fermi *local*

$$k_F^t(r) = (3\pi^2 \rho_t(r))^{1/3}. \quad (3.20)$$

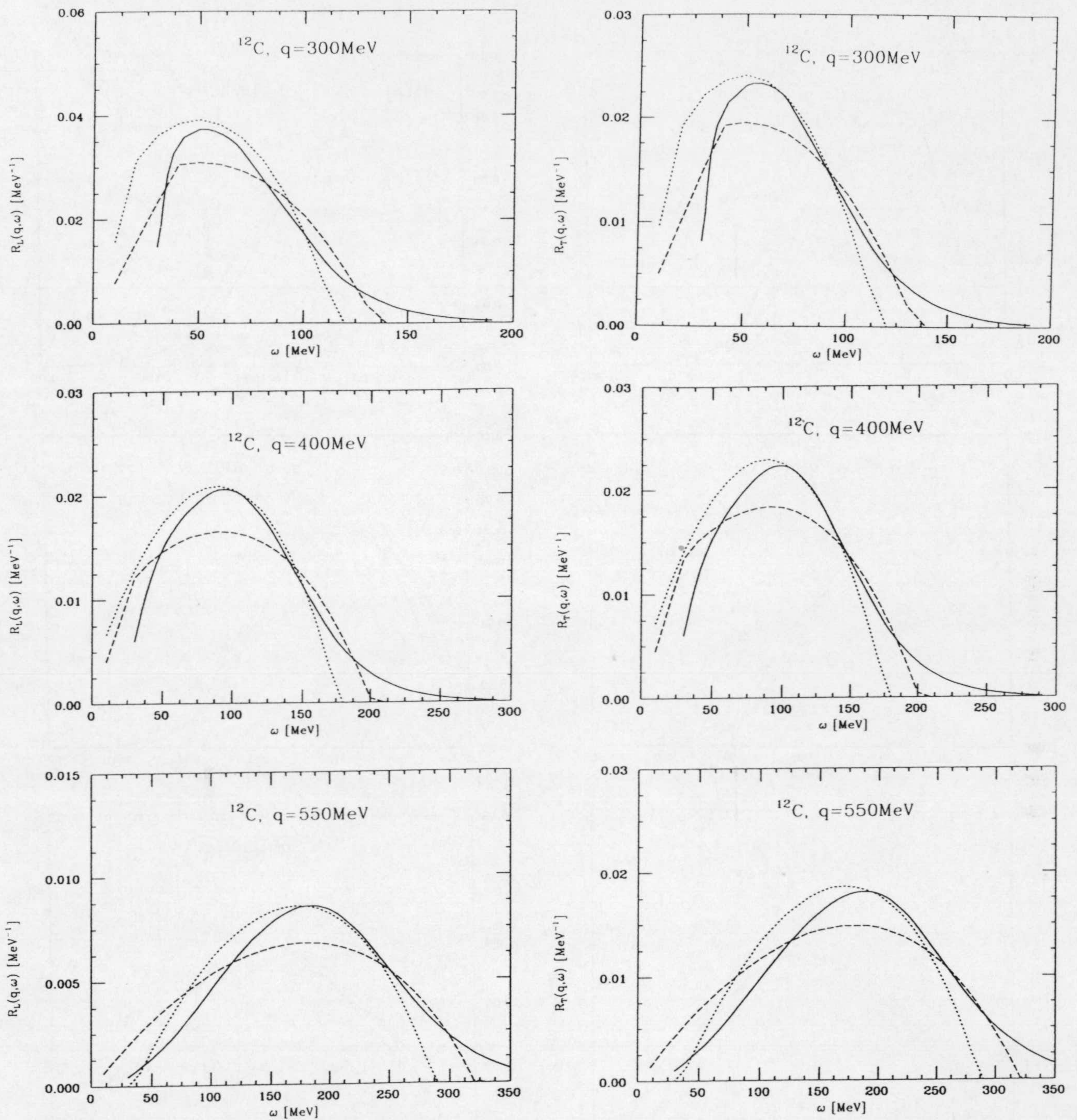


Figura 3.1: Comparación entre las respuestas del ^{12}C obtenidas con el modelo de capas (líneas continuas) y con el gas de Fermi para dos valores distintos del momento de Fermi. Las líneas a trazos se han calculado usando el momento de Fermi de la materia nuclear $k_F = 272$ MeV y las curvas a puntos corresponden al momento de Fermi efectivo $k_F = 215$ MeV. En la respuesta transversal no se han incluido los efectos de las MEC.

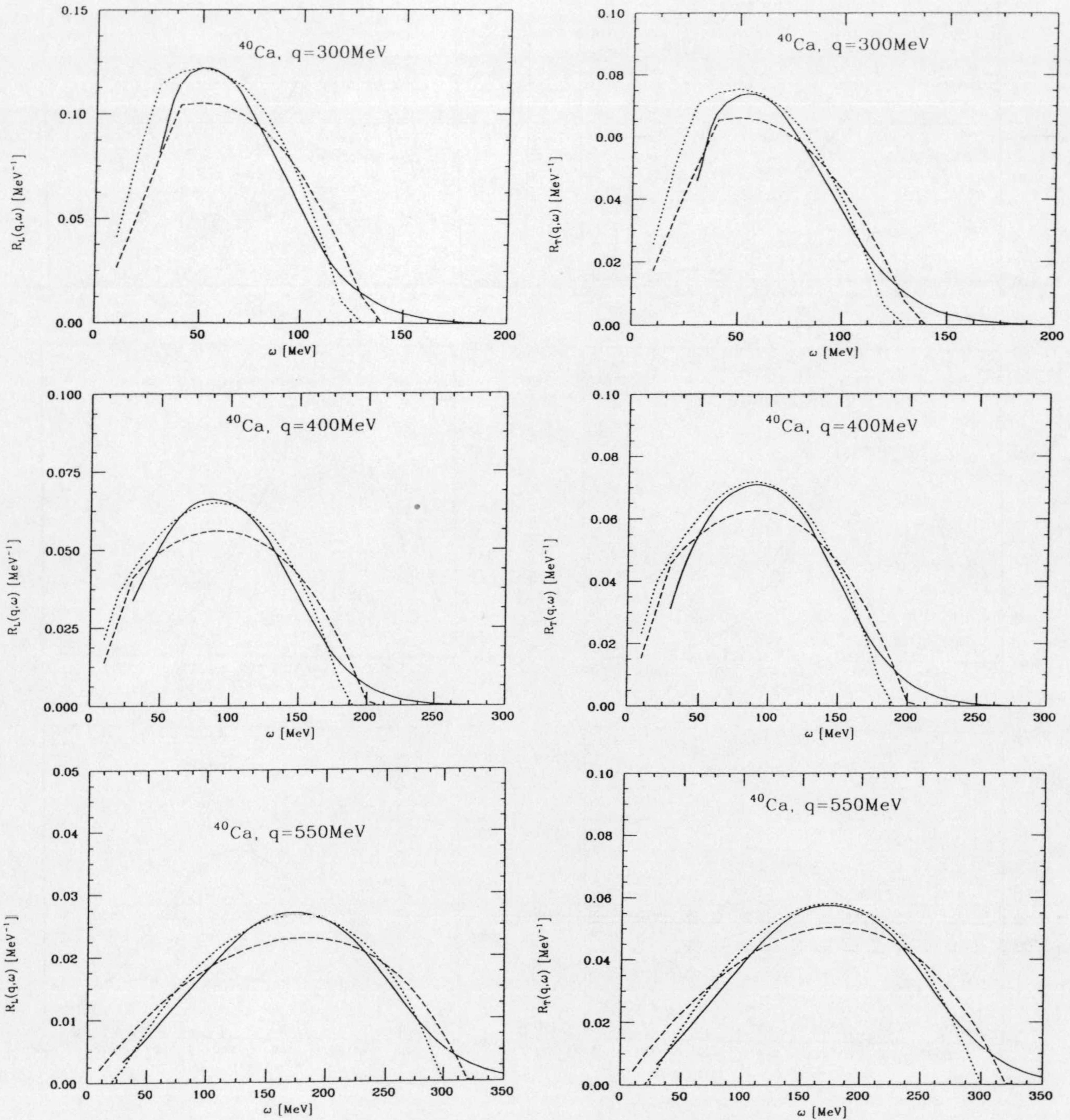


Figura 3.2: Lo mismo que la Fig. 3.1 para el ^{40}Ca . En este caso el momento de Fermi efectivo con el que se han calculado las líneas de puntos es de $k_F = 235\text{ MeV}$.

Nosotros estamos interesados en el caso de la materia nuclear simétrica, en el que la densidad de protones es igual a la de neutrones, por lo que es conveniente considerar la densidad promedio

$$\rho = [\rho_P + \rho_N]/2$$

obteniéndose así un momento de Fermi local, común para ambos tipos de nucleones,

$$k_F(r) = (3\pi^2 \rho(r))^{1/3}. \quad (3.21)$$

Seguidamente, promediamos usando como función peso la misma densidad para obtener así el momento de Fermi efectivo buscado, que vendrá dado por

$$\langle k_F \rangle = \frac{4\pi}{Z} \int k_F(r) \rho(r) r^2 dr = \frac{4\pi}{Z} (3\pi^2)^{1/3} \int \rho(r)^{4/3} r^2 dr. \quad (3.22)$$

En el caso concreto de los núcleos que estamos estudiando, ^{12}C y ^{40}Ca , la evaluación del momento de Fermi efectivo la hemos llevado a cabo usando la densidad promedio de protones y neutrones que se obtiene a partir de los correspondientes potenciales de Woods-Saxon **WSI** utilizados en los cálculos del capítulo 2. Los valores obtenidos son de $\langle k_F \rangle = 215 \text{ MeV}$ para el ^{12}C y de $\langle k_F \rangle = 235 \text{ MeV}$ para el ^{40}Ca , valores que están relativamente próximos a los obtenidos empíricamente por Moniz y colaboradores.

Las respuestas longitudinal y transversal a un cuerpo calculadas con estos valores del momento de Fermi efectivo para ambos núcleos se muestran en las Figs. 3.1 y 3.2 con líneas a puntos. El acuerdo con las calculadas usando el modelo de capas (líneas continuas) resulta ser bastante bueno.

En general se vuelve a observar una mejora del acuerdo entre los dos modelos a medida que el núcleo es más pesado, lo que simplemente muestra el hecho de que, a medida que aumenta A , el núcleo se aproxima más a la materia nuclear. Por otro lado, también mejora el acuerdo entre el modelo de capas y el de gas de Fermi cuanto mayor es el momento transferido. Este resultado que ya habíamos comentado antes, confirma el hecho de que a mayor momento transferido, se exploran distancias nucleares más pequeñas, con la consiguiente disminución de los efectos de superficie.

Es importante señalar que, a pesar de la buena descripción de las respuesta obtenidas en el modelo de capas que se logra para el pico cuasielástico, los cálculos en el modelo de gas de Fermi, realizados con un valor dado del momento k_F , no pueden reproducir la cola que presentan los resultados del modelo de capas a alta energía. Este hecho es debido a la existencia de un momento máximo permitido en el caso del gas de Fermi, mientras que las respuestas del modelo de capas van a cero suavemente, como corresponde a un sistema finito cuya función de onda en el estado fundamental tiene componentes con cualquier momento.

3.3 Aproximación de la densidad local

Como acabamos de ver, el uso del momento de Fermi efectivo en los cálculos con el modelo de gas de Fermi, permite una descripción razonable de las respuestas obtenidas

en el modelo de capas, si bien no proporciona el comportamiento correcto a altas energías. En esta sección vamos a tratar de corregir este defecto y, si es posible, mejorar el acuerdo entre ambos modelos. Para ello vamos a analizar la denominada *aproximación de la densidad local* (LDA), que corresponde a la aproximación semiclásica de la teoría de Thomas-Fermi [Alb89], y que ha sido utilizada con profusión para la determinación de respuestas nucleares, no sólo en experimentos con pruebas electromagnéticas, sino también hadrónicas.

A diferencia del proceso seguido para calcular el momento de Fermi efectivo, ahora evaluamos, primero, la respuesta $R^{\text{FG}}(q, \omega, k_F(r))$ de un gas de Fermi con momento $k_F(r)$ y luego promediamos, obteniendo así la respuesta de la LDA:

$$R^{\text{LDA}}(q, \omega) = \frac{1}{Z} \int d^3r \rho(r) R^{\text{FG}}(q, \omega, k_F(r)) \quad (3.23)$$

Dado que en un gas de Fermi

$$R(q, \omega)\rho/Z = R(q, \omega)/V$$

es la respuesta por unidad de volumen, que es una cantidad finita, podemos interpretar

$$\frac{1}{Z} \rho(r) R^{\text{FG}}(q, \omega, k_F(r)) d^3r$$

como la respuesta local asociada al elemento de volumen nuclear d^3r , la cuál está determinada, obviamente, por la densidad en dicha región. La respuesta total se obtiene, pues, integrando sobre todo el volumen nuclear.

En principio es de esperar que la respuesta calculada mediante la ecuación (3.23) presentará una estructura que se asemejará más a la de la respuesta de un sistema finito que a la evaluada mediante un gas de Fermi. En efecto, como la LDA consiste en tomar un promedio de gases de Fermi con distintos momentos $k_F(r)$, estamos permitiendo que las funciones de onda nucleares tengan componentes con momentos más altos. Aunque sigue habiendo un momento máximo, que corresponde al máximo de la densidad, y que determina la región de energía en la que la respuesta es distinta de cero, la anulación de ésta no se produce tan bruscamente como en un gas de Fermi puro.

Con objeto de comparar la respuestas que proporciona la LDA con las del modelo de capas, hemos evaluado el promedio (3.23) utilizando de nuevo la densidad media entre protones y neutrones asociada al correspondiente potencial de Woods-Saxon. Los resultados se muestran en las Figs. 3.3 para el ^{12}C y 3.4 para el ^{40}Ca . En estas figuras las respuestas transversales no incluyen los efectos de las MEC. Con líneas de puntos mostramos las respuestas calculadas con la LDA que, como puede comprobarse, presentan cualitativamente una forma similar a la de las obtenidas con el modelo de capas (línea continua). Sin embargo, los resultados no son cuantitativamente tan satisfactorios como los que obtuvimos con un gas de Fermi puro en el apartado anterior, sobre todo en lo que se refiere a la altura del máximo. Como en los casos anteriores, la descripción obtenida es peor en el caso del ^{12}C que en el del ^{40}Ca , y resulta ser tanto mejor cuanto mayor es el momento transferido.

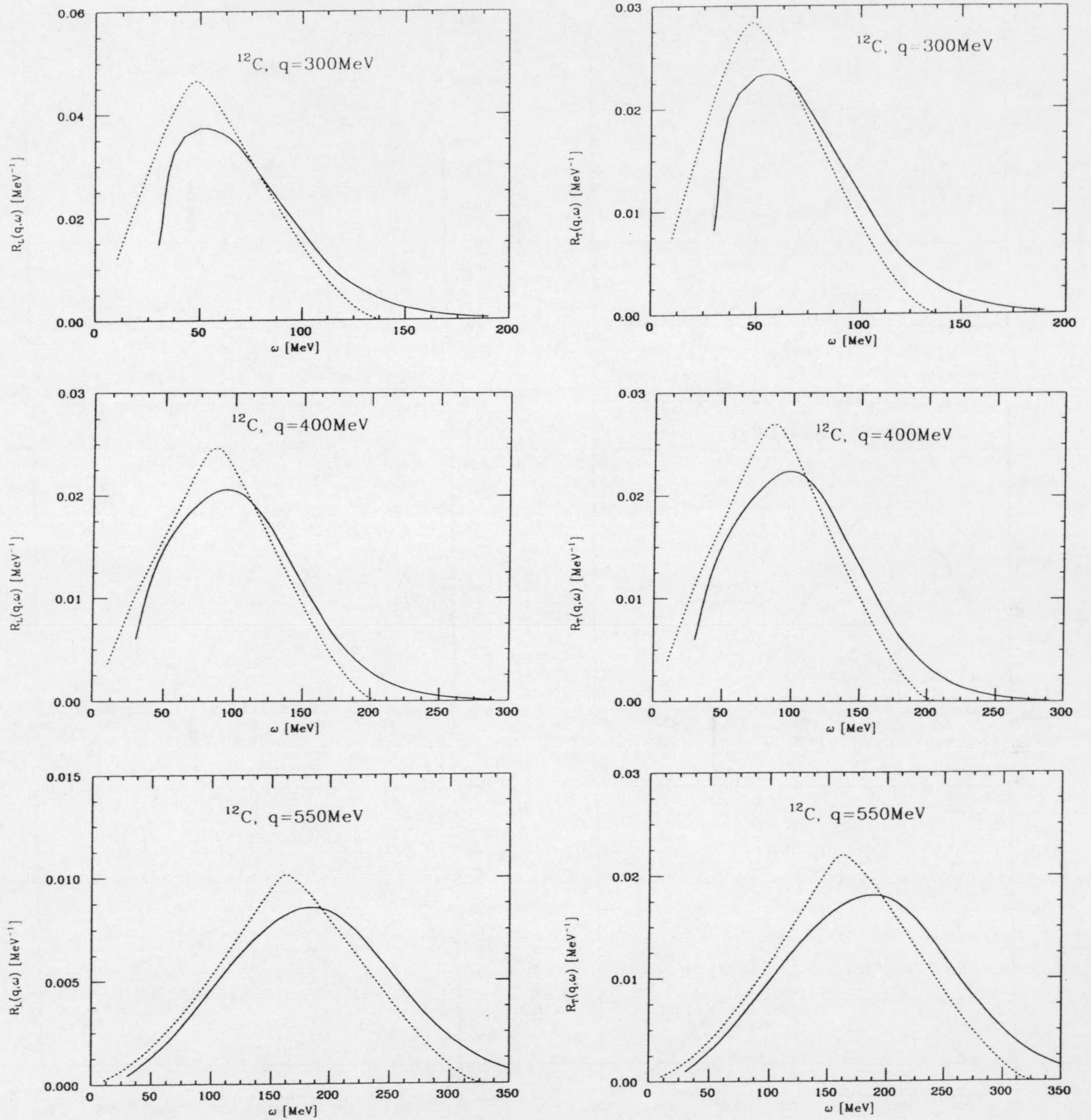


Figura 3.3: Comparación entre las respuestas del ^{12}C obtenidas con el modelo de capas (líneas continuas) y las calculadas en la LDA, con la densidad del modelo de capas (curva a puntos). Las respuestas transversales no incluyen los efectos de las MEC.

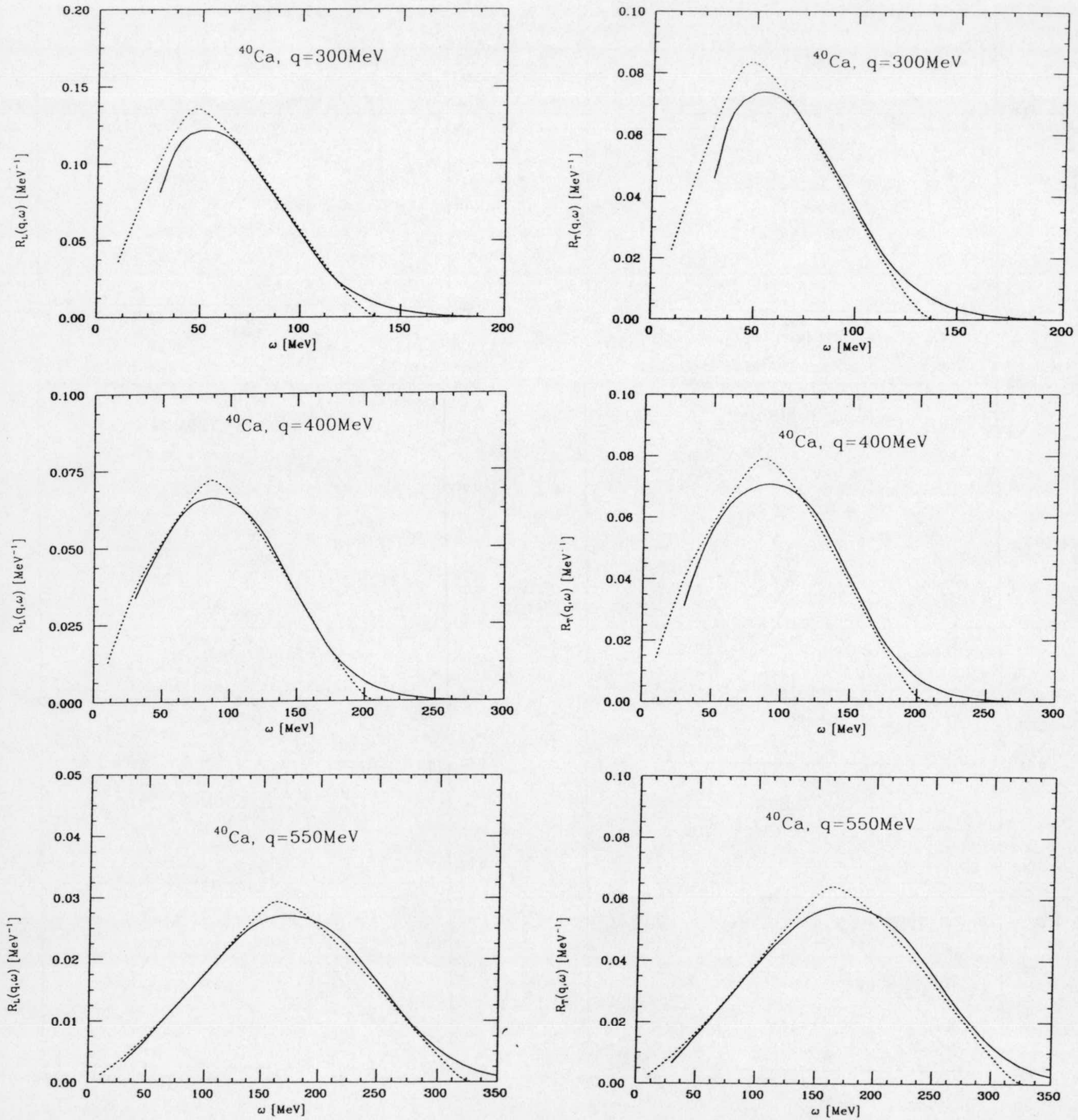


Figura 3.4: Idem que la Fig. 3.3 para el ^{40}Ca

Por tanto, de nuestros resultados parece deducirse, al contrario de lo que a priori cabría esperar, que la LDA no es una buena aproximación para calcular la respuesta de un núcleo finito, o al menos no tan buena como considerar un modelo de gas de Fermi con un momento de Fermi efectivo.

Con el fin de profundizar en este aspecto particular, nos hemos planteado el problema de optimizar la función densidad que debemos emplear en la LDA para reproducir lo mejor posible las respuestas del modelo de capas. Para ello, hemos parametrizado dicha densidad como una distribución de tipo Fermi

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a_0]} \quad (3.24)$$

con sólo dos parámetros independientes, a_0 y R_0 , ya que el valor de ρ_0 está determinado por la condición de normalización

$$\int \rho(r) d^3r = Z.$$

Los parámetros correspondientes a la densidad de Fermi óptima se obtienen minimizando mediante el método de mínimos cuadrados. Para ello fijamos el conjunto finito de puntos (q_i, ω_i) usado para calcular las respuestas en el modelo de capas; en nuestro caso el momento transferido toma los valores $q_i = 300, 400$ y 550 MeV y la energía transferida ω_i varía desde 30 hasta 350 MeV a intervalos regulares de 20 MeV. Seguidamente minimizamos el cuadrado de la distancia entre las funciones respuesta del modelo de capas y de la LDA, que está dado por

$$\begin{aligned} \Delta(a_0, R_0) \equiv & \sum_i \left[R_L(q_i, \omega_i) - R_L^{\text{LDA}}(q_i, \omega_i; a_0, R_0) \right]^2 \\ & + \sum_i \left[R_T(q_i, \omega_i) - R_T^{\text{LDA}}(q_i, \omega_i; a_0, R_0) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Los parámetros que se obtienen con este procedimiento son los que se muestran en la tabla 3.1, bajo el epígrafe de 1ª minimización.

	1ª minimización		2ª minimización	
	R_0 [fm]	a_0 [fm]	R_0 [fm]	a_0 [fm]
^{12}C	1.67	0.335	1.71	0.365
^{40}Ca	2.8	0.47	3.27	0.39

Tabla 3.1: *Parámetros de las densidades de Fermi que mejor aproximan las respuestas LDA y las del modelo de capas.*

Las respuestas LDA calculadas utilizando estas densidades óptimas se muestran en las Figs. 3.5 y 3.6, para el ^{12}C y para el ^{40}Ca , respectivamente (curvas a trazos). Como

podemos ver, estas respuestas reproducen algo mejor que las curvas a puntos de las Figs. 3.3 y 3.4 las respuestas del modelo de capas (línea continua), ya que sus máximos tienen una altura más adecuada y sus colas se ensanchan y se extienden hacia regiones de más alta energía antes de anularse.

En las Figs. 3.5 y 3.6 se muestran también (curvas a puntos) los resultados correspondientes a una segunda minimización en la que no se han incluido los puntos correspondientes a $\omega = 30$ MeV. La razón de eliminar estos puntos estriba en que no son representativos de la respuesta en el pico y, además, en el caso del ^{12}C , no son reproducibles de manera razonable con las densidades que aquí estamos utilizando. Los parámetros resultantes se dan en la tabla 3.1. En la Fig. 3.5 vemos que el haber desechado la energía $\omega = 30$ MeV produce una respuesta LDA en el ^{12}C que reproduce mejor la altura de la respuesta del modelo de capas. Por otra parte, las dos respuestas calculadas con la LDA en el ^{40}Ca (Fig. 3.6) no varían mucho entre las dos minimizaciones llevadas a cabo.

Sí que se observan diferencias importantes en las densidades óptimas obtenidas con el procedimiento anterior. En la Fig. 3.7 comparamos dichas densidades óptimas con las densidades promedio entre protones y neutrones en el modelo de capas (línea continua). Como vemos, las densidades óptimas obtenidas en la primera minimización (curvas a trazos) corresponden a núcleos que resultan ser apreciablemente más densos que en el modelo de capas. Sin embargo, la segunda minimización (curvas a puntos) produce, al menos en el caso del ^{40}Ca , una densidad muy similar a la que proporciona el modelo de capas.

Estos resultados ponen de manifiesto la escasa sensibilidad de la respuesta nuclear en el pico cuasielástico a los detalles de la densidad nuclear, sobre todo a medida que aumenta el número de partículas y el momento transferido. Este comportamiento ya lo señalamos en el capítulo anterior, con motivo de la comparación de los resultados obtenidos con dos parametrizaciones del potencial de Woods-Saxon. En cualquier caso, la discusión que hemos llevado a cabo establece dudas sobre la validez de la LDA para el estudio de la respuesta cuasielástica.

Para finalizar comentaremos que la principal diferencia entre las respuestas calculadas con las dos densidades en el ^{40}Ca (Fig. 3.6) está en la zona de alta energía. Esto puede entenderse fácilmente recordando que, en un gas de Fermi, la anchura de la región donde la respuesta a un cuerpo es no nula aumenta con el momento de Fermi, como se deduce de las ecuaciones (3.14) y puede apreciarse en las Figs. 3.1 y 3.2. En la LDA la máxima anchura está asociada al momento de Fermi local máximo, que a su vez está determinado por el máximo de la densidad nuclear utilizada para realizar el promedio. Por tanto, esto aclara el por qué la respuesta LDA más ancha se obtiene utilizando la función densidad con un valor máximo mayor.

3.4 Las MEC en el gas de Fermi

Una vez estudiados los efectos de tamaño finito del núcleo en las respuestas a un cuerpo, vamos a analizar su papel en la parte de la respuesta transversal que está asociada a las

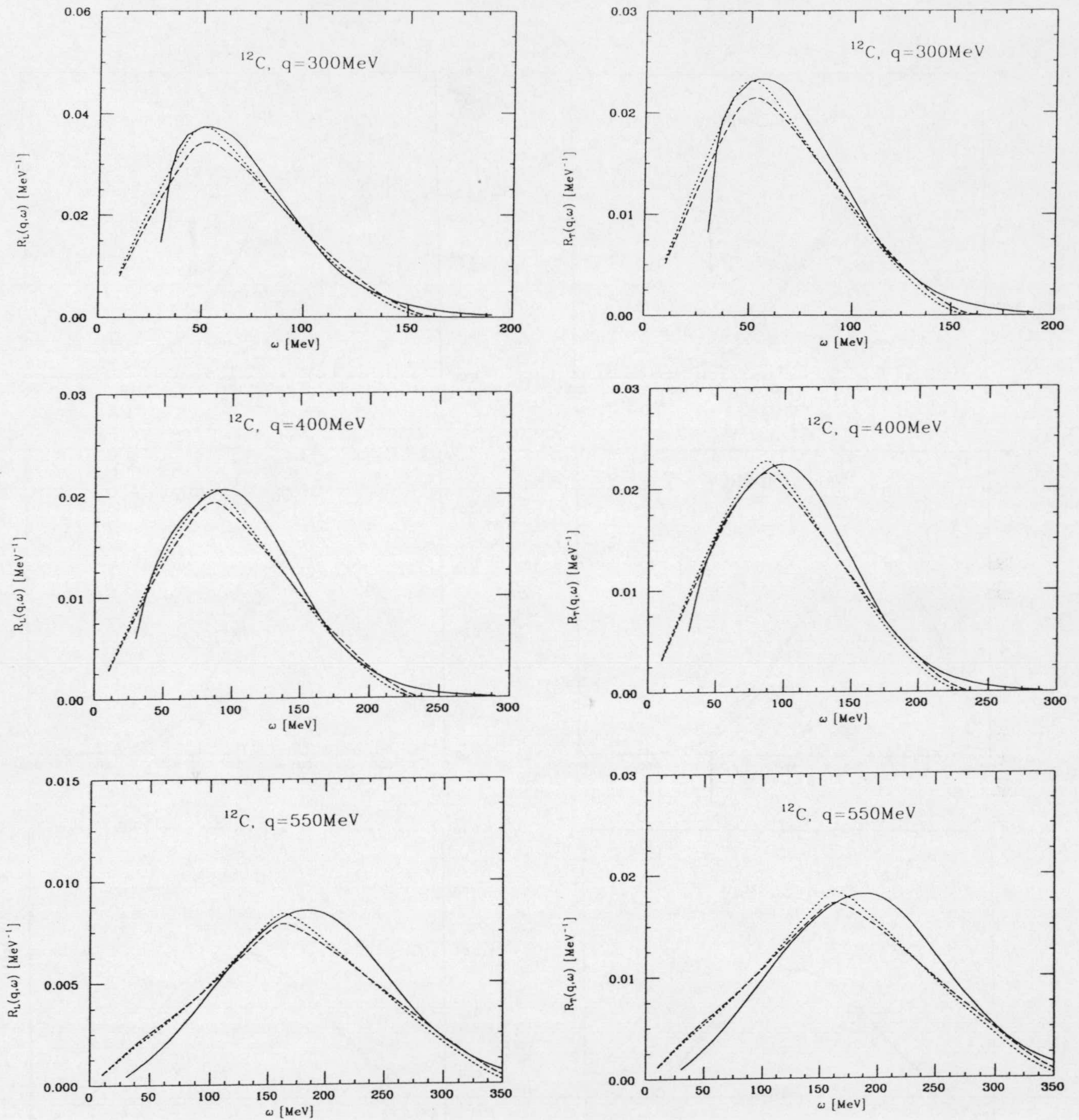


Figura 3.5: Comparación entre las respuestas del ^{12}C obtenidas con el modelo de capas (líneas continuas) y las calculadas en la LDA, con las densidades de Fermi óptimas obtenidas con la primera (curva a trazos) y segunda (curva a puntos) minimizaciones y cuyos parámetros aparecen en la tabla 3.1. Las respuestas transversales no incluyen los efectos de las MEC.

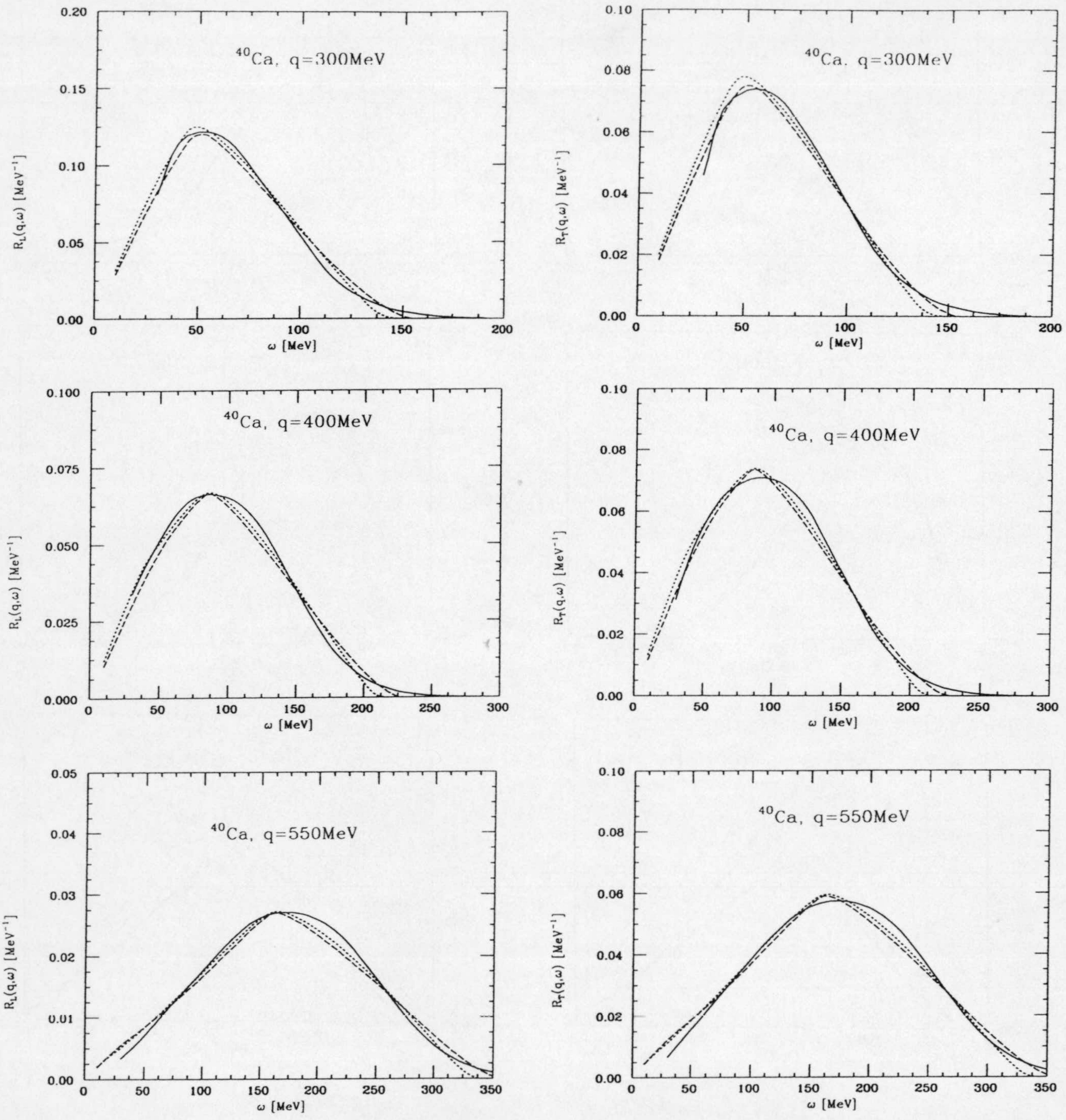


Figura 3.6: Idem que la Fig. 3.5 para el ^{40}Ca

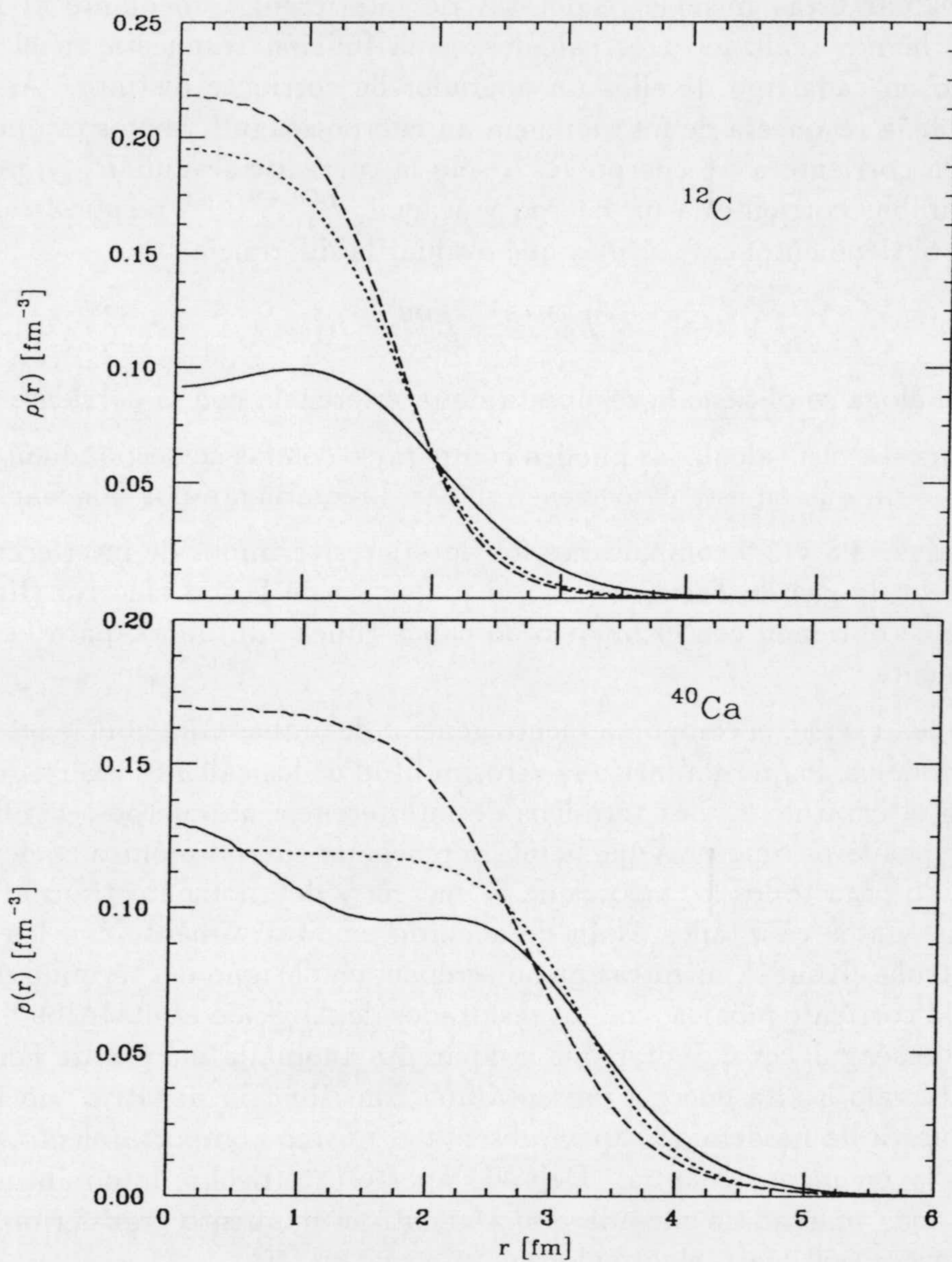


Figura 3.7: Densidades promedio entre neutrones y protones en el modelo de capas (línea continua) comparadas con las densidades de Fermi óptimas correspondientes a la primera (curvas a trazos) y segunda (curvas a puntos) minimizaciones y que mejor reproducen la respuesta del modelo de capas usando la LDA.

MEC. Ya sabemos que la mayor contribución de las MEC a la respuesta transversal de emisión de una partícula en el pico cuasielástico la dan los términos de interferencia con la corriente a un cuerpo. Concretamente, centraremos nuestra atención en las respuestas de interferencia “un cuerpo”-seagull, $R_T^{CS} + R_T^{MS}$ y “un cuerpo”-piónica, $R_T^{C\pi} + R_T^{M\pi}$.

Para evaluar estas mismas respuestas de interferencia mediante el formalismo del capítulo 2, hemos realizado tres cálculos de la función respuesta en el modelo de capas, usando en cada uno de ellos un operador de corriente distinto. Así, por ejemplo, para calcular la respuesta de interferencia un cuerpo-seagull, hemos evaluado R_T usando solamente la corriente a un cuerpo R_T^{OB} , sólo la corriente seagull R_T^S y, por último, considerando ambas corrientes a un cuerpo y seagull, R_T^{OB+S} . La respuesta de interferencia buscada se obtiene entonces sin más que evaluar la diferencia

$$R_T^{OB+S} - R_T^{OB} - R_T^S.$$

De forma análoga se obtiene la respuesta de interferencia con la corriente piónica.

Las respuestas así calculadas pueden compararse con las correspondientes en el modelo de gas de Fermi, que en este caso vienen dadas directamente por la ecuación (3.17).

En las Figs. 3.8 y 3.9 comparamos los anteriores términos de interferencia calculados con el modelo de gas de Fermi usando el momento de Fermi efectivo (línea punteada), con los que se obtienen con el modelo de capas (línea continua), para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente.

Como puede verse, el comportamiento general de ambas contribuciones es muy similar en ambos modelos, lo que garantiza la verosimilitud de los cálculos realizados en el modelo de capas en el capítulo 2. Los términos de interferencia un cuerpo-seagull son predominantemente positivos, mientras que la interferencia un cuerpo-piónica es siempre negativa. Esto es válido para todos los valores de la energía y del momento transferido que hemos considerado. Estos resultados están de acuerdo cualitativamente con los obtenidos por Kohno y Otsuka [Koh81], mientras que discrepan, en el signo del término de interferencia asociado a la corriente piónica, con los resultados de Alberico *et al.* [Alb90]. Con respecto a la corriente seagull, es de notar que la aparente anomalía del gas de Fermi, que en un pequeño intervalo a alta energía presenta una contribución negativa, no lo es tanto, ya que la respuesta de modelo de capas presenta el mismo comportamiento, aunque a más alta energía y en menor cuantía. Dejando aparte este hecho, la similitud entre ambos modelos es más marcada a medida que aumenta el momento transferido, y parece ser, sobre todo a $q = 550$ MeV, algo mejor en ^{40}Ca que en ^{12}C .

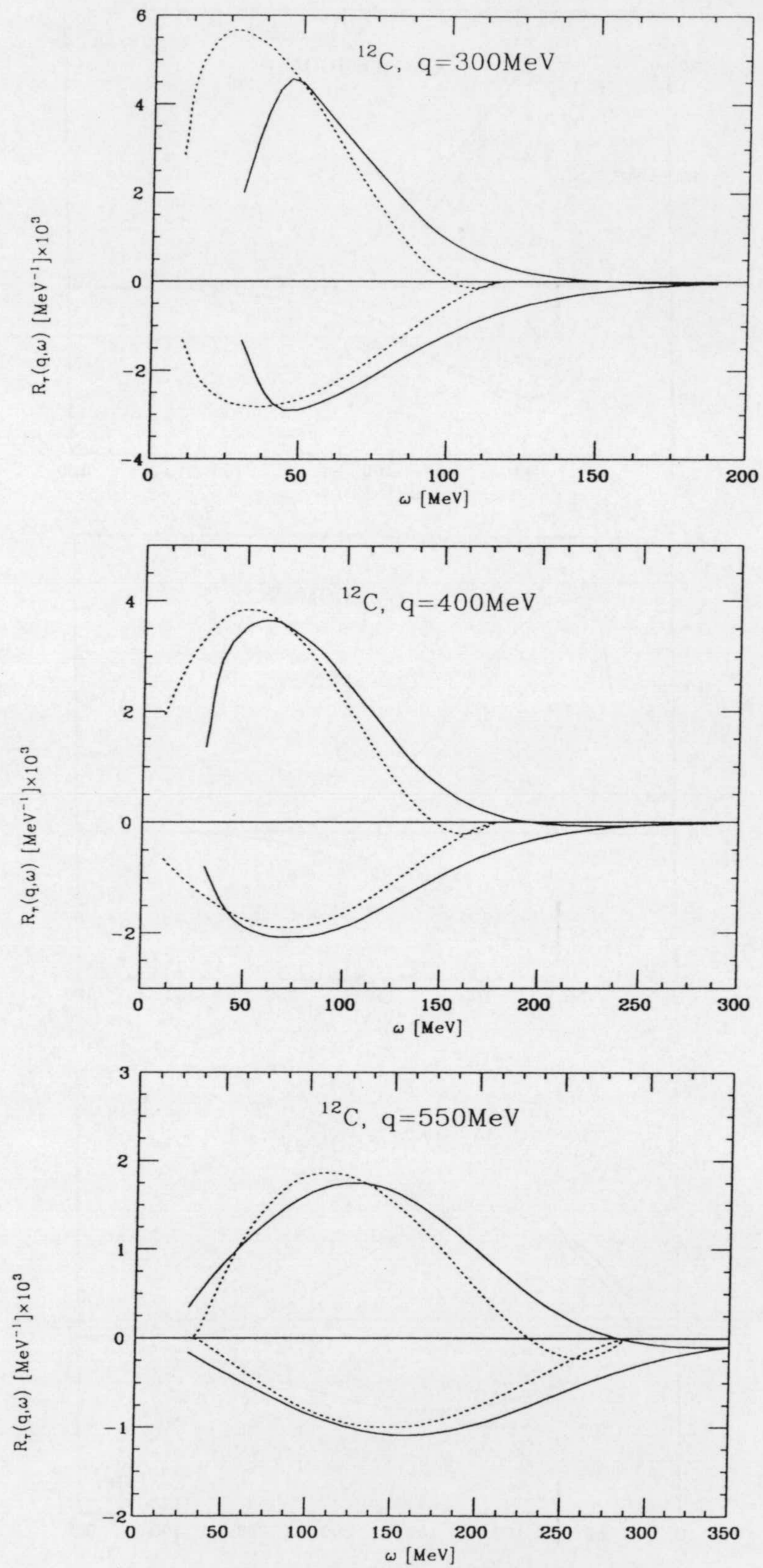


Figura 3.8: Términos de interferencia entre las corrientes a un cuerpo y las MEC en el ^{12}C . Las curvas continuas corresponden al cálculo en el modelo de capas, mientras que las curvas a puntos son las obtenidas con el modelo de gas de Fermi, usando el momento de Fermi efectivo $k_F = 212 \text{ MeV}$.

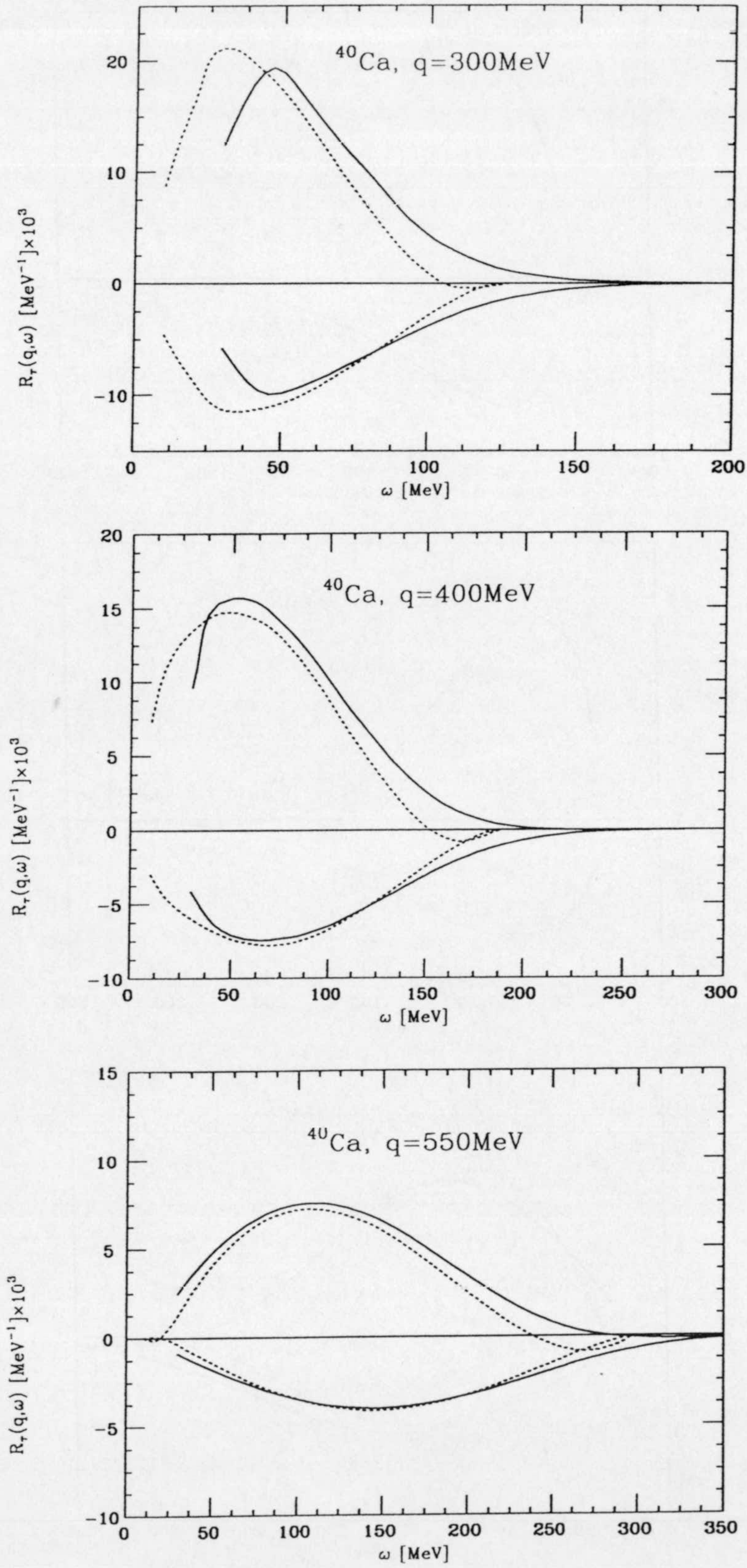


Figura 3.9: Idem que la Fig. 3.8 para el ^{40}Ca . En este caso los cálculos en el gas de Fermi se han llevado a cabo usando $k_F = 235 \text{ MeV}$

Capítulo 4

Contribución de la corriente de isóbaro

En este capítulo vamos a centrarnos en la contribución de la corriente de isóbaro (ec. (1.15) y Fig. 1.2c) a la respuesta transversal en el pico cuasielástico. En primer lugar, describiremos los elementos de matriz correspondientes a los procesos de emisión de una y dos partículas. Seguidamente, discutiremos brevemente algunos detalles acerca del factor de forma electromagnético que interviene en esta corriente, para, a continuación, centrarnos en el análisis del efecto que produce la inclusión de esta corriente en los distintos términos que intervienen en la respuesta de emisión de una partícula, en el marco del modelo de capas. También estudiamos los efectos del tamaño finito nuclear, mediante la comparación con el modelo de gas de Fermi. Por último, estudiamos la respuesta de emisión de dos partículas y mostramos nuestro resultado final para la respuesta transversal cuando se incluyen las tres MEC consideradas en el presente trabajo.

4.1 Elementos de matriz eléctricos y magnéticos

Las expresiones de los elementos de matriz eléctricos y magnéticos de la corriente de isóbaro se detallan a continuación. Veremos que su estructura general es similar a la de los correspondientes elementos de matriz de la corriente seagull, salvo por la adición de un término diagonal en isospín proveniente del canal de intercambio de un pión neutro. Este término es responsable de la aparición del canal de emisión de dos protones o dos neutrones, mecanismo que no es posible si sólo se consideran las corrientes seagull y piónica. Las expresiones que a continuación se presentan han sido desarrolladas tal y como se esquematiza en el apéndice C, ya que la corriente de isóbaro no se había tratado previamente en este esquema.

4.1.1 Transiciones a estados finales a $1p - 1h$

Siguiendo la misma notación de la sección 2.1.1, escribimos los elementos de matriz eléctricos y magnéticos de la corriente de isóbaro en la forma:

$$\langle ph^{-1}; J \| J_J^{E\Delta}(q, \omega) \| 0 \rangle = \Omega_J^{\Delta+} F_E^{\Delta}(q, \omega) \int_0^{\infty} dr r^2 j_J(qr) \mathcal{E}_{phJ}^{\Delta}(r) \quad (4.1a)$$

$$\langle ph^{-1}; J \| J_J^{M\Delta}(q, \omega) \| 0 \rangle = i\Omega_J^{\Delta-} F_M^{\Delta}(q, \omega) \int_0^{\infty} dr r^2 \mathcal{M}_{phJ}^{\Delta}(r), \quad (4.1b)$$

en donde los coeficientes $\Omega_J^{\Delta\pm}$ están dados por

$$\Omega_J^{\Delta\pm} = \frac{\hat{J}}{\sqrt{J(J+1)}} (-1)^{j_p-1/2} \frac{1 \pm (-1)^{l_p+l_h+J}}{2} \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{J} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

y los factores de forma pueden escribirse como:

$$F_E^{\Delta}(q, \omega) = qF_{\Delta}(q, \omega) \quad (4.3a)$$

$$F_M^{\Delta}(q, \omega) = F_{\Delta}(q, \omega), \quad (4.3b)$$

donde el factor de forma F_{Δ} que aparece en estas dos ecuaciones será discutido en la próxima sección. Como en el caso de las corrientes seagull y piónica, la información relativa a las funciones de onda nucleares se haya contenida en las funciones $\mathcal{E}_{phJ}^{\Delta}(r)$ y $\mathcal{M}_{phJ}^{\Delta}(r)$. La expresión para la función $\mathcal{E}_{phJ}^{\Delta}(r)$ es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{phJ}^{\Delta}(r) = & 2 \frac{f^2}{\mu^2} a_{\Delta} \sum_{h'} \hat{j}_{h'}^2 \sum_L \hat{L}^2 \\ & \times \left\{ \xi(l_p + l_{h'} + L + 1) \begin{pmatrix} j_p & j_{h'} & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 R_{h'}(r) R_h(r) \right. \\ & \times [[\delta_{ph,N} \delta_{h'P} - \delta_{ph,P} \delta_{h'N}] \Gamma(h', h, p, L, J) \\ & - 2\delta_{t_{h'}t_h} \delta_{t_{h'}t_p} \tau_p \chi_+(h', h, p, L, J) \frac{1}{r}] I_{ph'}(L, r) \\ & - \xi(l_h + l_{h'} + L + 1) \begin{pmatrix} j_{h'} & j_h & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 R_p(r) R_{h'}(r) \\ & \times [[\delta_{ph,N} \delta_{h'P} - \delta_{ph,P} \delta_{h'N}] \Gamma(h', p, h, L, J) \\ & \left. - 2\delta_{t_{h'}t_h} \delta_{t_{h'}t_p} \tau_p \chi_+(h', h, p, L, J) \frac{1}{r}] I_{h'h}(L, r) \right\}. \quad (4.4) \end{aligned}$$

En esta ecuación, el símbolo Γ denota el operador

$$\Gamma(h', h, p, L, J) = (\kappa_p - \kappa_h) \frac{d}{dr} + \chi_-(h', h, p, L, J) \frac{1}{r}, \quad (4.5)$$

mientras que las funciones χ_{\pm} se definen mediante

$$\begin{aligned} \chi_{\pm}(h', h, p, L, J) = & \frac{1}{2} (\kappa_{h'} + \kappa_p) (\kappa_h - \kappa_p) \\ & \pm \frac{1}{2} \frac{1 - \delta_{j_p, 1/2}}{\kappa_p^2 - 1} [\kappa_{h'} (\kappa_{h'} + \kappa_p) - L(L+1)] \\ & \times [\kappa_h (\kappa_h - \kappa_p) - J(J+1)]. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Las funciones magnéticas son un tanto más complicadas y vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{phJ}^{\Delta}(r) = & 2 \frac{f^2}{\mu^2} a_{\Delta} \sum_{h'} \hat{j}_{h'}^2 \\
& \times \left\{ \sum_L \hat{L}^2 \xi(l_p + l_{h'} + L + 1) \begin{pmatrix} j_p & j_{h'} & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 R_{h'}(r) R_h(r) \right. \\
& \times \left[[\delta_{ph,N} \delta_{h'P} - \delta_{ph,P} \delta_{h'N}] \Gamma_1(i, h, p, L, J) \right. \\
& \left. + 2 \delta_{t_{h'} t_h} \delta_{t_{h'} t_p} \tau_p \Gamma_2(h', h, p, L, J) \right] I_{ph'}(L, r) \\
& + \sum_L \hat{L}^2 \xi(l_h + l_{h'} + L + 1) \begin{pmatrix} j_{h'} & j_h & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 R_p(r) R_{h'}(r) \\
& \times \left[[\delta_{ph,N} \delta_{h'P} - \delta_{ph,P} \delta_{h'N}] \Gamma_1(h', p, h, L, J) \right. \\
& \left. + 2 \delta_{t_{h'} t_h} \delta_{t_{h'} t_p} \tau_p \Gamma_2(h', h, p, L, J) \right] I_{h'h}(L, r) \\
& \left. + 2 \delta_{t_p t_h} \tau_p J(J+1) j_J(qr) \frac{1}{r} I_{ph}(J, r) \frac{dR_{h'}^2}{dr} \right\}. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Los operadores Γ_1 y Γ_2 se definen mediante:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(h', h, p, L, J) = & [D j_J(qr)] \left[(\kappa_p + \kappa_h) \frac{d}{dr} - \chi_-(h', h, p, L, J) \frac{1}{r} \right] \\
& + J(J+1) j_J(qr) \frac{\kappa_p + \kappa_{h'}}{r^2} \quad (4.8a)
\end{aligned}$$

$$\Gamma_2(h', h, p, L, J) = J(J+1) j_J(qr) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \chi_+(h', h, p, L, J) \frac{[D j_J(qr)]}{r}. \quad (4.8b)$$

En estas ecuaciones el operador D que actúa sobre las funciones de Bessel está dado por

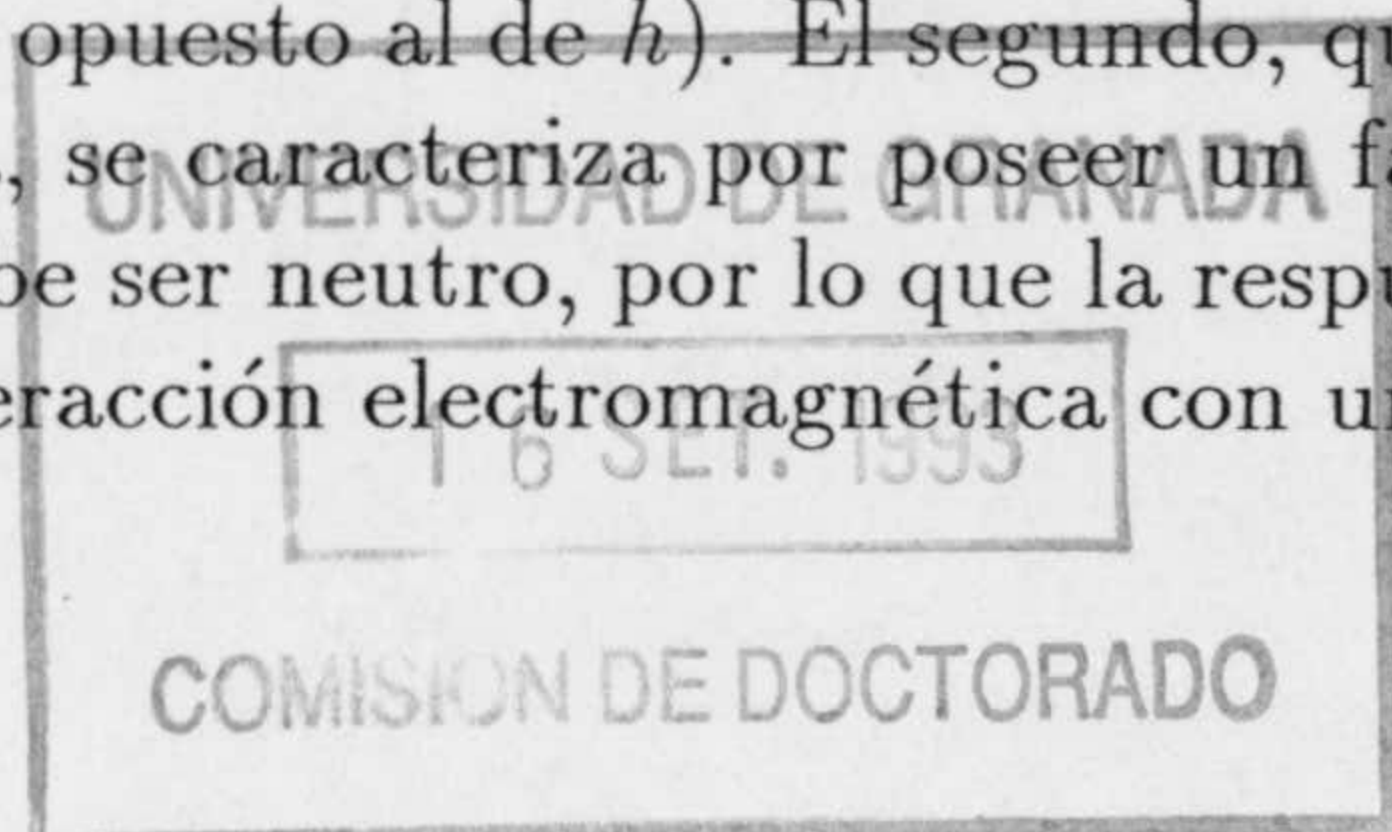
$$D = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}. \quad (4.9)$$

Por último, la constante a_{Δ} incluye al denominador de masas de C_{Δ} (ver ec. (1.25))

$$a_{\Delta} = \frac{4}{25M(M^* - M)} \quad (4.10)$$

Debe observarse que en este caso de la corriente de isóbaros, las funciones magnéticas \mathcal{M} incluyen tanto las funciones de Bessel, j_J , como sus derivadas en su definición.

Con respecto a la estructura de isospín, los elementos de matriz magnéticos y eléctricos tienen en común dos tipos de términos. El primero corresponden al factor $[\delta_{ph,N} \delta_{h'P} - \delta_{ph,P} \delta_{h'N}]$, el cual expresa la conservación de la carga, por un lado, (ya que el agujero h y la partícula p deben tener el mismo isospín) y, por otro, que el pión intercambiado está cargado (ya que el agujero intermedio h' tiene isospín opuesto al de h). El segundo, que no aparece en las anteriores corrientes seagull y piónica, se caracteriza por poseer un factor $\delta_{t_{h'} t_h} \delta_{t_{h'} t_p} \tau_p$, que indica que el pión intercambiado debe ser neutro, por lo que la respuesta asociada a este término es debida solamente a la interacción electromagnética con una Δ



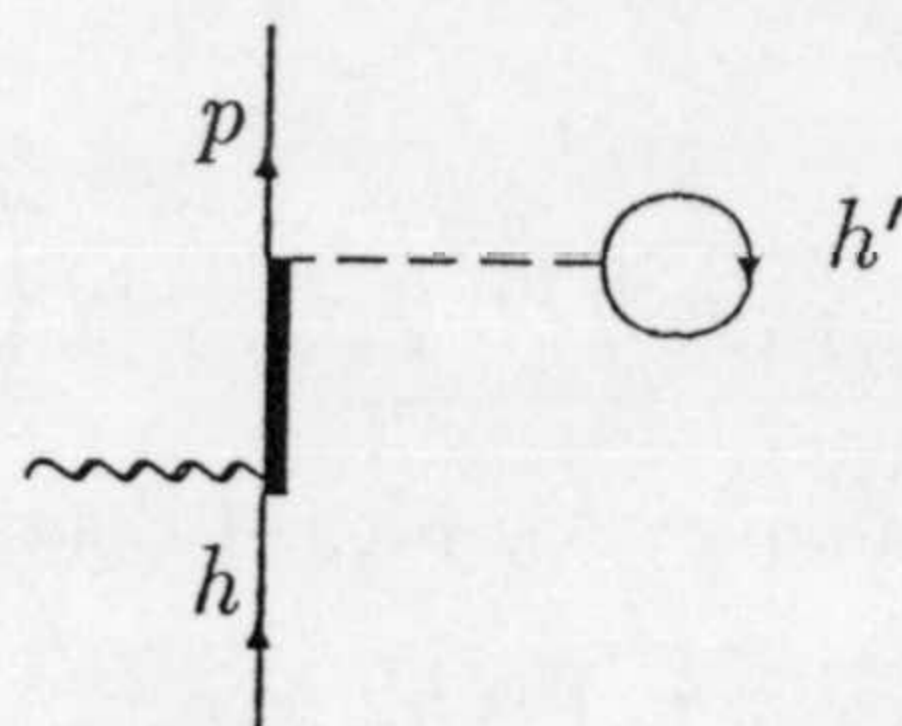


Figura 4.1: Diagrama de excitación de una delta con emisión de un pión, que es absorbido por el medio nuclear.

cargada. Debemos añadir, además, que estos dos tipos de contribuciones proceden de la parte de intercambio del elemento de matriz a dos cuerpos antisimetrizado. De la parte directa tan sólo permanece un término en los elementos de matriz magnéticos, a saber, el que posee el factor $\delta_{t_p t_h} \tau_p$ (ver último sumando de la ec. (4.7)), sin ninguna restricción sobre el isospín del agujero intermedio h' ; este término corresponde al canal de excitación $h \rightarrow p$ con una Δ intermedia y emisión de un pión (neutro), que es absorbido por el medio nuclear representado por la derivada de la densidad de nucleones, que es proporcional a $\sum_{h'} \hat{j}_{h'}^2 dR_{h'}^2/dr$ (ver Fig. 4.1).

4.1.2 Transiciones a estados finales a $2p - 2h$

Los elementos de matriz correspondientes a estas transiciones, en el caso de la corriente de isóbaro, se escriben en la forma:

$$\begin{aligned} & \langle (p, p') J_p, (h^{-1}, h'^{-1}) J_h; J \| J_J^{E\Delta}(q, \omega) \| 0 \rangle \\ & = \Phi_{J_p J_h J}^+ (p, p', h, h') F_E^\Delta(q, \omega) \int_0^\infty dr r^2 j_J(qr) \mathcal{E}_{(pp') J_p, (hh') J_h; J}^\Delta(r) \end{aligned} \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} & \langle (p, p') J_p, (h^{-1}, h'^{-1}) J_h; J \| J_J^{M\Delta}(q, \omega) \| 0 \rangle \\ & = i \Phi_{J_p J_h J}^- (p, p', h, h') F_M^\Delta(q, \omega) \int_0^\infty dr r^2 \mathcal{M}_{(pp') J_p, (hh') J_h; J}^\Delta(r). \end{aligned} \quad (4.11b)$$

en donde los coeficientes Φ^\pm son los mismos que se definieron en (2.13)

$$\Phi_{J_p J_h J}^\pm (p, p', h, h') = (-1)^{J_p + J} \frac{1 \pm (-1)^{l_p + l_{p'} + l_h + l_{h'} + J}}{2} \hat{j}_p \hat{j}_{p'} \hat{j}_h \hat{j}_{h'} \hat{J}_p \hat{J}_h \hat{J}$$

A continuación damos las expresiones de las funciones eléctricas \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(pp') J_p, (hh') J_h; J}^\Delta(r) & = 2 \frac{f^2}{\mu^2} a_\Delta \sum_{L_1 L_2} \hat{L}_1^2 \hat{L}_2^2 \\ & \times \left\{ [\delta_{p'h', N} \delta_{ph, P} - \delta_{p'h', P} \delta_{ph, N}] C_{J_p J_h J}^{pp' hh'}(L_1, L_2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\xi(l_p + l_{h'} + L_2 + 1) R_{p'}(r) R_h(r) \Delta_1^E(h, p', L_1, L_2; r) I_{ph'}(L_2, r) \right. \\
& - \xi(l_{p'} + l_h + L_1 + 1) R_p(r) R_{h'}(r) \Delta_1^E(p, h', L_2, L_1; r) I_{p'h}(L_1, r) \left. \right] \\
& - 2\delta_{t_{p'}t_h} \delta_{t_{p't_{h'}}} C_{J_p J_h J}^{pp'h'h'}(L_1, L_2) \\
& \times \left[\tau_p \xi(l_p + l_{h'} + L_2 + 1) R_{p'}(r) R_h(r) \Delta_2^E(h, p', L_1, L_2; r) I_{ph'}(L_2, r) \right. \\
& - \tau_{p'} \xi(l_{p'} + l_h + L_1 + 1) R_p(r) R_{h'}(r) \Delta_2^E(p, h', L_2, L_1; r) I_{p'h}(L_1, r) \left. \right] \\
& + 2(-1)^{j_h + j_{h'} + J_h} \delta_{t_{p'}t_{h'}} \delta_{t_{p't_h}} C_{J_p J_h J}^{pp'h'h'}(L_1, L_2) \\
& \times \left[\tau_p \xi(l_p + l_h + L_2 + 1) R_{p'}(r) R_{h'}(r) \Delta_2^E(h', p', L_1, L_2; r) I_{ph}(L_2, r) \right. \\
& - \tau_{p'} \xi(l_{p'} + l_{h'} + L_1 + 1) R_p(r) R_h(r) \Delta_2^E(p, h, L_2, L_1; r) I_{p'h'}(L_1, r) \left. \right] \}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

En esta ecuación utilizamos las siguientes definiciones de los operadores Δ_1^E y Δ_2^E :

$$\begin{aligned}
\Delta_1^E(a, b, L_1, L_2; r) &= - \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\kappa_a + (-1)^{l_a + l_b + L_1 + 1} \kappa_b}{\sqrt{L_1(L_1 + 1)}} \frac{d}{dr} \\
&\quad - \xi(l_a + l_b + L_1 + 1) \sqrt{L_2(L_2 + 1)} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{r} \quad (4.13a)
\end{aligned}$$

$$\Delta_2^E(a, b, L_1, L_2; r) = \xi(l_a + l_b + L_1) \sqrt{L_1(L_1 + 1)} \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{r}. \quad (4.13b)$$

Por su parte, las funciones magnéticas pueden escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(pp')J_p, (hh')J_h; J}^\Delta(r) &= 2 \frac{f^2}{\mu^2} a_\Delta \sum_{L_1 L_2} \hat{L}_1^2 \hat{L}_2^2 \\
& \times \left\{ [\delta_{p'h', N} \delta_{ph, P} - \delta_{p'h', P} \delta_{ph, N}] C_{J_p J_h J}^{pp'h'h'}(L_1, L_2) \right. \\
& \times \left[\xi(l_p + l_{h'} + L_2 + 1) R_{p'}(r) R_h(r) \Delta_1^M(h, p', L_1, L_2; r) I_{ph'}(L_2, r) \right. \\
& + \xi(l_{p'} + l_h + L_1 + 1) R_p(r) R_{h'}(r) \Delta_1^M(p, h', L_2, L_1; r) I_{p'h}(L_1, r) \left. \right] \\
& + 2\delta_{t_{p'}t_h} \delta_{t_{p't_{h'}}} C_{J_p J_h J}^{pp'h'h'}(L_1, L_2) \\
& \times \left[\tau_p \xi(l_p + l_{h'} + L_2 + 1) R_{p'}(r) R_h(r) \Delta_2^M(h, p', L_1, L_2; r) I_{ph'}(L_2, r) \right. \\
& + \tau_{p'} \xi(l_{p'} + l_h + L_1 + 1) R_p(r) R_{h'}(r) \Delta_2^M(p, h', L_2, L_1; r) I_{p'h}(L_1, r) \left. \right] \\
& - 2(-1)^{j_h + j_{h'} + J_h} \delta_{t_{p'}t_{h'}} \delta_{t_{p't_h}} C_{J_p J_h J}^{pp'h'h'}(L_1, L_2) \\
& \times \left[\tau_p \xi(l_p + l_h + L_2 + 1) R_{p'}(r) R_{h'}(r) \Delta_2^M(h', p', L_1, L_2; r) I_{ph}(L_2, r) \right. \\
& + \tau_{p'} \xi(l_{p'} + l_{h'} + L_1 + 1) R_p(r) R_h(r) \Delta_2^M(p, h, L_2, L_1; r) I_{p'h'}(L_1, r) \left. \right] \}. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

En este caso los operadores Δ_i^M tienen una estructura más complicada que en el caso de la parte eléctrica:

$$\Delta_1^M(a, b, L_1, L_2; r) = \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{[Dj_J(qr)]}{\sqrt{L_1(L_1 + 1)}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \left[\kappa_a + (-1)^{l_a+l_b+L_1+1} \kappa_b \right] \frac{d}{dr} - \xi(l_a + l_b + L_1 + 1) \frac{L_1(L_1 + 1)}{r} \right\} \\
& + \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & J \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{J(J+1)L_2(L_2+1)}}{\sqrt{L_1(L_1+1)}} \\
& \times \left[\kappa_b + (-1)^{l_a+l_b+L_1+1} \kappa_a \right] \frac{j_J(qr)}{r^2} \tag{4.15a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2^M(a, b, L_1, L_2; r) = & \xi(l_a + l_b + L_1) \frac{1}{r} \left\{ \sqrt{J(J+1)} \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} j_J(qr) \frac{d}{dr} \right. \\
& \left. - \sqrt{L_2(L_2+1)} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} [Dj_J(qr)] \right\}. \tag{4.15b}
\end{aligned}$$

4.2 Factor de forma electromagnético de la corriente de isóbaro

Antes de pasar a calcular la respuesta transversal usando las expresiones descritas en la sección anterior, es necesario hacer una elección del factor de forma electromagnético F_Δ que aparece en las ecs. (4.3a) y (4.3b). Ya adelantamos en la sección 1.3.3 que ésta es una cuestión bastante conflictiva, ya que la corriente que nos ocupa es dependiente del modelo, en el sentido de que no está restringida por la ecuación de continuidad, al contrario de lo que ocurre con las corrientes seagull y piónica [Ris84]. Un estudio en esta dirección excede los objetivos de este trabajo y nos limitaremos a comentar que nuestro tratamiento de la corriente de isóbaro, ec. (1.15), que se sigue del modelo de quark estático [Bro75], puede considerarse, con mucho, el tradicionalmente más utilizado para el estudio de la electroexcitación nuclear [Hoc73, Ris84, Sch89]. En la teoría estática, el factor de forma electromagnético F_Δ , asociado a la transición $\gamma N\Delta$, es proporcional al factor de forma isovectorial magnético, G_M^V [Fub58], definido en (2.20b), y que es el que usaremos en lo que sigue a la hora de evaluar las contribuciones de esta corriente:

$$F_\Delta = 2G_M^V. \tag{4.16}$$

Es necesario comentar en este punto que el factor de forma G_M^V a menudo se define incluyendo el factor 2 de (4.16), en cuyo caso $F_\Delta = G_M^V$. De cualquier forma, dicho factor de forma está caracterizado por su valor en el origen. En nuestro caso, la definición que adoptamos cumple $G_M^V = (\mu_P - \mu_N)/2 = 2.353$.

Otros cálculos previos de la corriente de isóbaro utilizan, entre otras, la parametrización de Dufner y Tsai de los datos de electroexcitación de la Δ [Duf67, Lock75], o bien una parametrización dipolar que también afecta, sin ninguna variación, a las corrientes seagull y piónica [Van81, Alb90]. Sin embargo, esta comparación directa entre estos factores de forma y el que nosotros utilizamos (4.16) no es aclaratoria, puesto que también existen diferencias entre la forma explícita de las corrientes utilizadas, dada la dependencia de esta corriente con respecto al modelo. Es de destacar, a este respecto, que Lock y Foldy

[Lock75] obtienen una corriente de isóbaro que es mayor (en módulo) que la que nosotros utilizamos, en un factor $5/2$, aunque desechan este factor a la hora de realizar los cálculos.

En suma, a la vista de la inconsistencia que existe con respecto a los distintos tratamientos de esta corriente, debemos tomar precauciones a la hora de interpretar los resultados obtenidos y volver a advertir que tan sólo el orden de magnitud de éstos es significativo.

4.3 Estados finales a $1p - 1h$

Comenzaremos nuestro análisis del efecto de la corriente de isóbaro estudiando su contribución a la respuesta de emisión de una partícula.

4.3.1 Convergencia de la suma en multipolos

En primer lugar cabe realizar un estudio de la convergencia en multipolos de la respuesta incluyendo la corriente delta. La contribución más importante, como veremos más adelante, proviene de la interferencia entre la corriente de isóbaro y la corriente a un cuerpo. La contribución acumulada de cada momento angular J a esta respuesta se muestra en las Figs. 4.2 y 4.3 para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente. La convergencia se alcanza aproximadamente para los mismos valores que en el caso de las respuestas de interferencia entre las corrientes seagull y piónica y la corriente a un cuerpo (ver tabla 2.4). En los cálculos que siguen hemos calculado las respuestas en ^{12}C y en ^{40}Ca sumando, respectivamente, hasta $J = 12$ y $J = 15$.

4.3.2 Efecto sobre la respuesta a un cuerpo

El efecto que la inclusión de la corriente de isóbaro produce en la respuesta a $1p - 1h$ se presenta en las Figs. 4.4 y 4.5, donde mostramos cuatro funciones de respuesta transversales para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente. En línea de trazos y puntos aparece la respuesta puramente a un cuerpo; el resto de las curvas han sido obtenidas añadiendo a la corriente a un cuerpo la corriente de isóbaro (línea de trazos), las corrientes seagull y piónica (línea de puntos) y las tres MEC simultáneamente (línea continua). Como podemos ver, la corriente de isóbaro da lugar, en la región del pico, a una contribución de signo contrario a la respuesta a un cuerpo y su consideración produce una disminución del efecto conjunto de las otras dos MEC.

Este comentario queda corroborado por los resultados de la tabla 4.1, en la que aparecen los porcentajes de incremento de la respuesta a $1p - 1h$ con respecto a la respuesta a un cuerpo, ec. (2.36), evaluados para cada momento a la energía del pico. Si solamente se incluye la corriente de isóbaro (tercera columna) se produce una reducción de la respuesta de alrededor de un 8% en el ^{12}C y un 10% en el ^{40}Ca . A diferencia de lo observado para las corrientes seagull y piónica (ver tabla 2.9), el porcentaje de reducción debido a la corriente de isóbaro, resulta no variar mucho con el momento. El efecto total de las tres MEC (cuarta columna) es negativo en el pico en todos los casos y aumenta con el momento transferido, en valor absoluto.

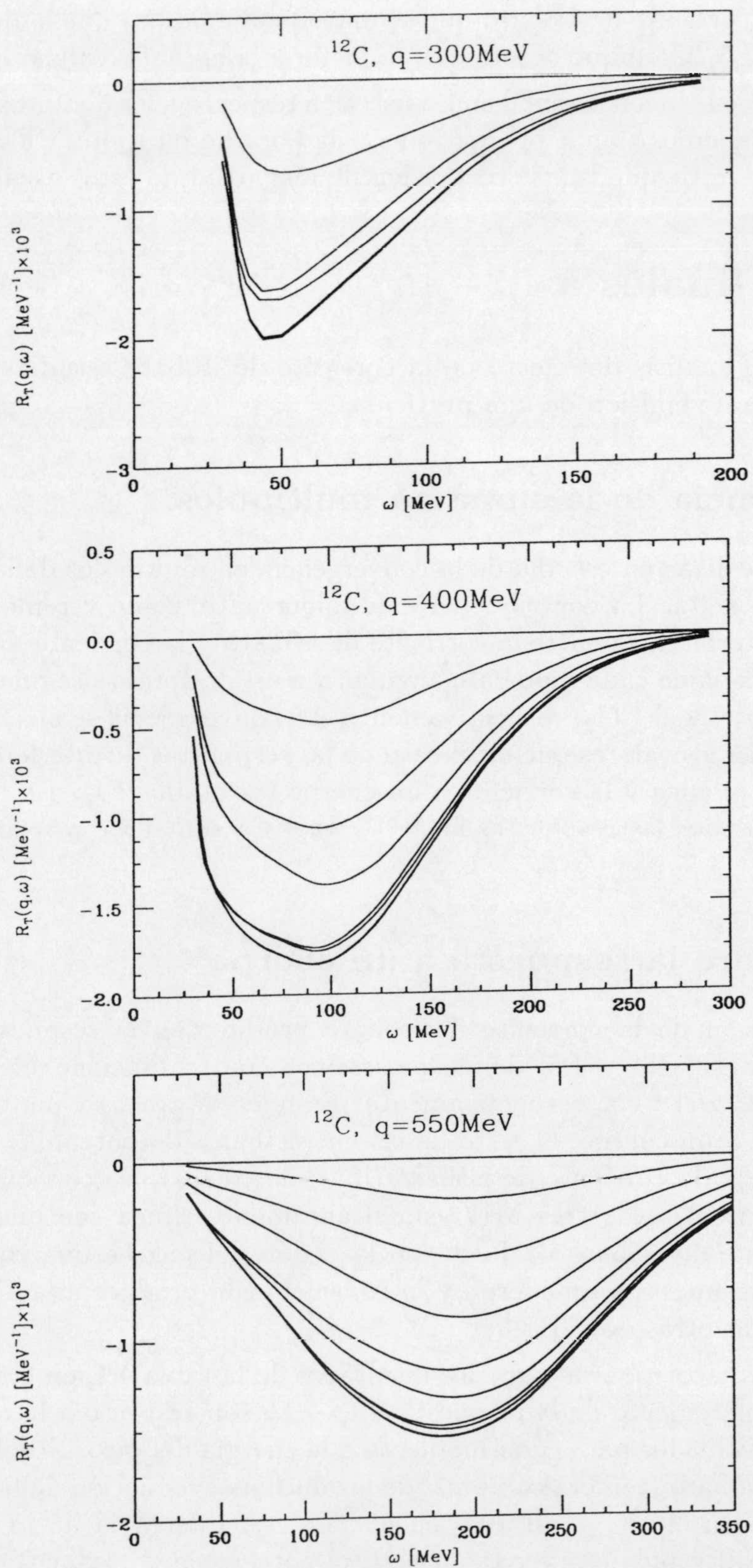


Figura 4.2: Respuestas de interferencia en el ^{12}C entre las corrientes de isóbaros y a un cuerpo. Cada curva se ha obtenido sumando sucesivamente la contribución de los dos multipolos J^- y J^+ a la respuesta acumulada.

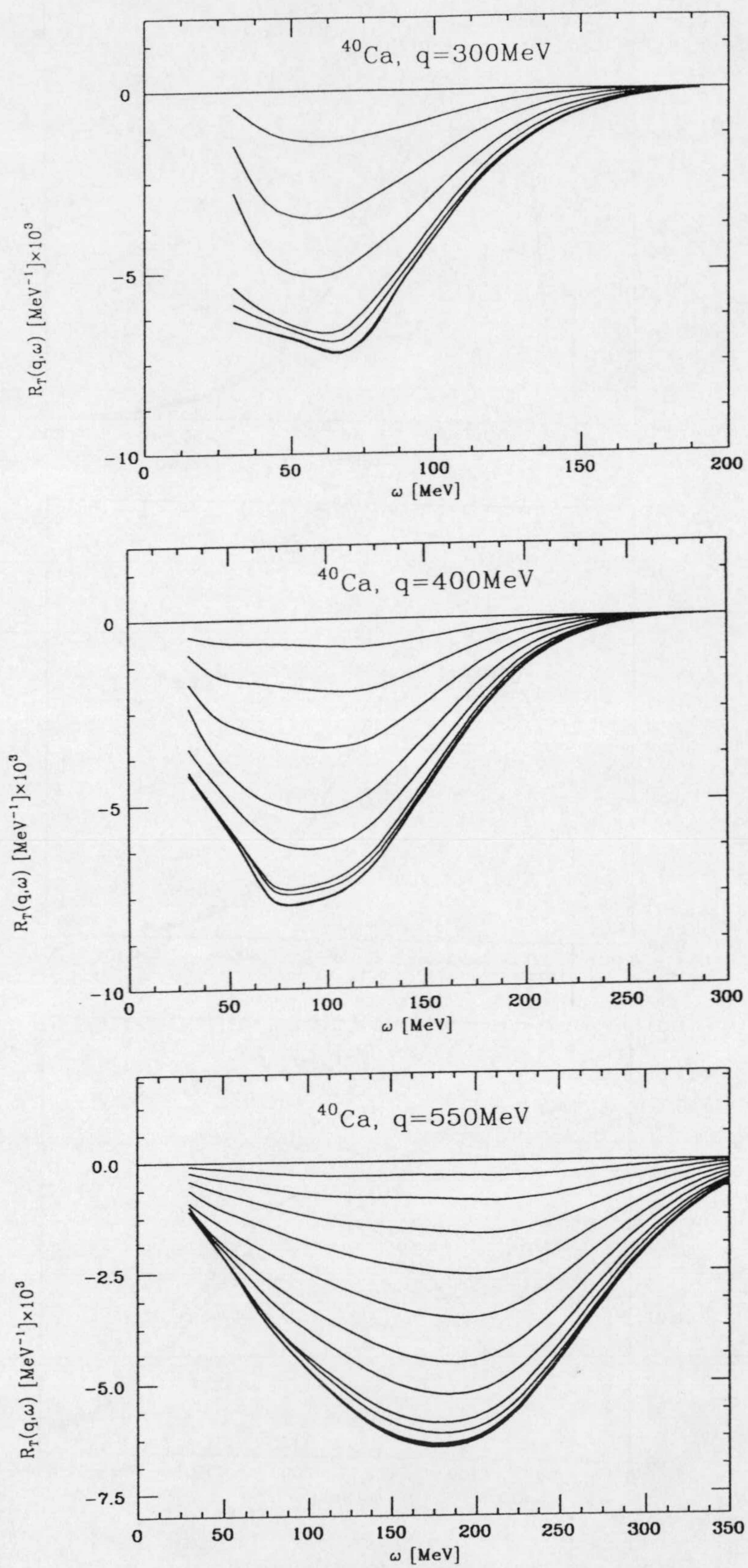


Figura 4.3: Igual que la Fig. 4.2 para el ^{40}Ca .

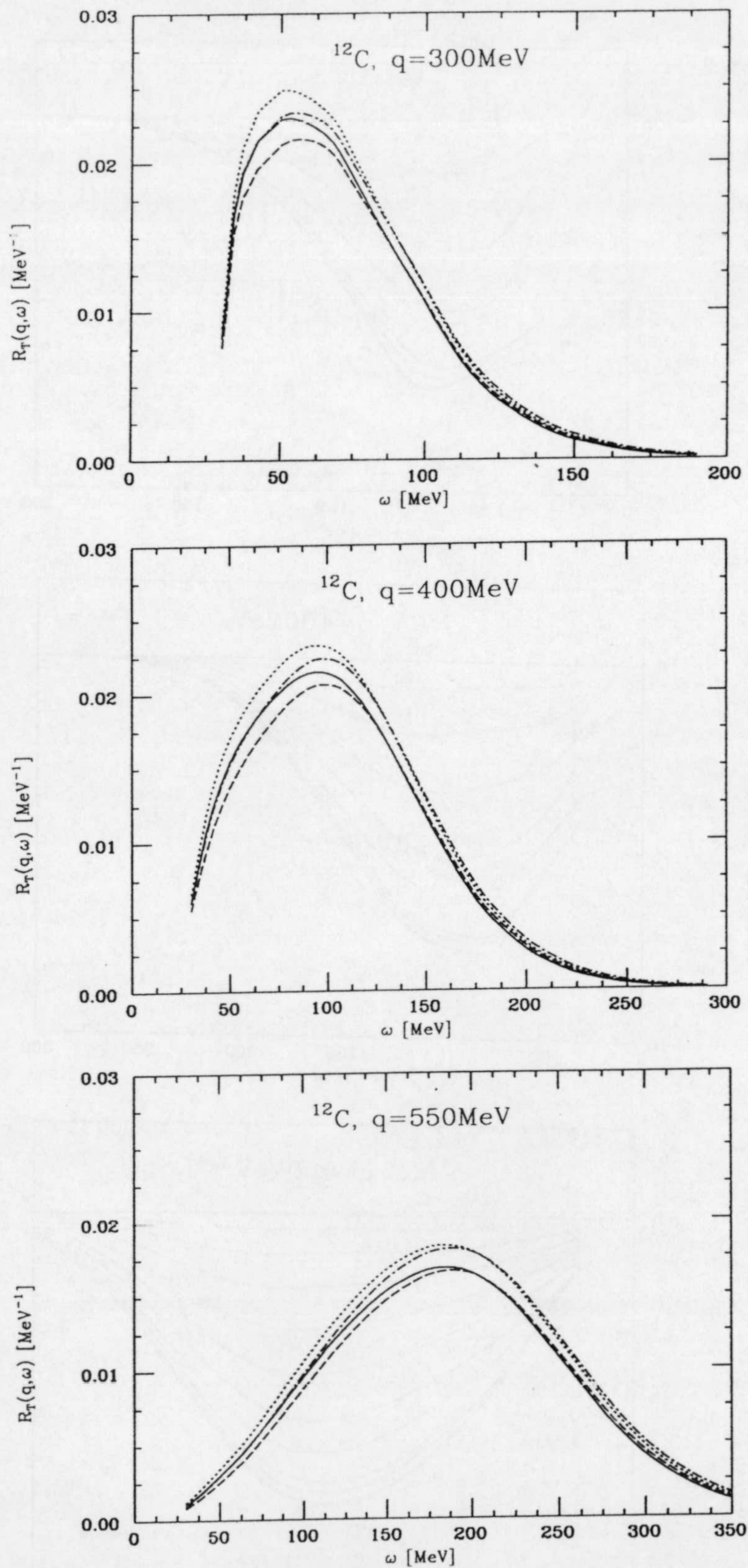


Figura 4.4: Respuesta transversal de emisión de una partícula en el ^{12}C . Las curvas de trazos y puntos representan la respuesta puramente a un cuerpo, mientras que el resto han sido obtenidas añadiendo a la corriente a un cuerpo la corriente de isóbaro (línea de trazos), las corrientes seagull y piónica (línea de puntos) y las tres simultáneamente (línea continua).

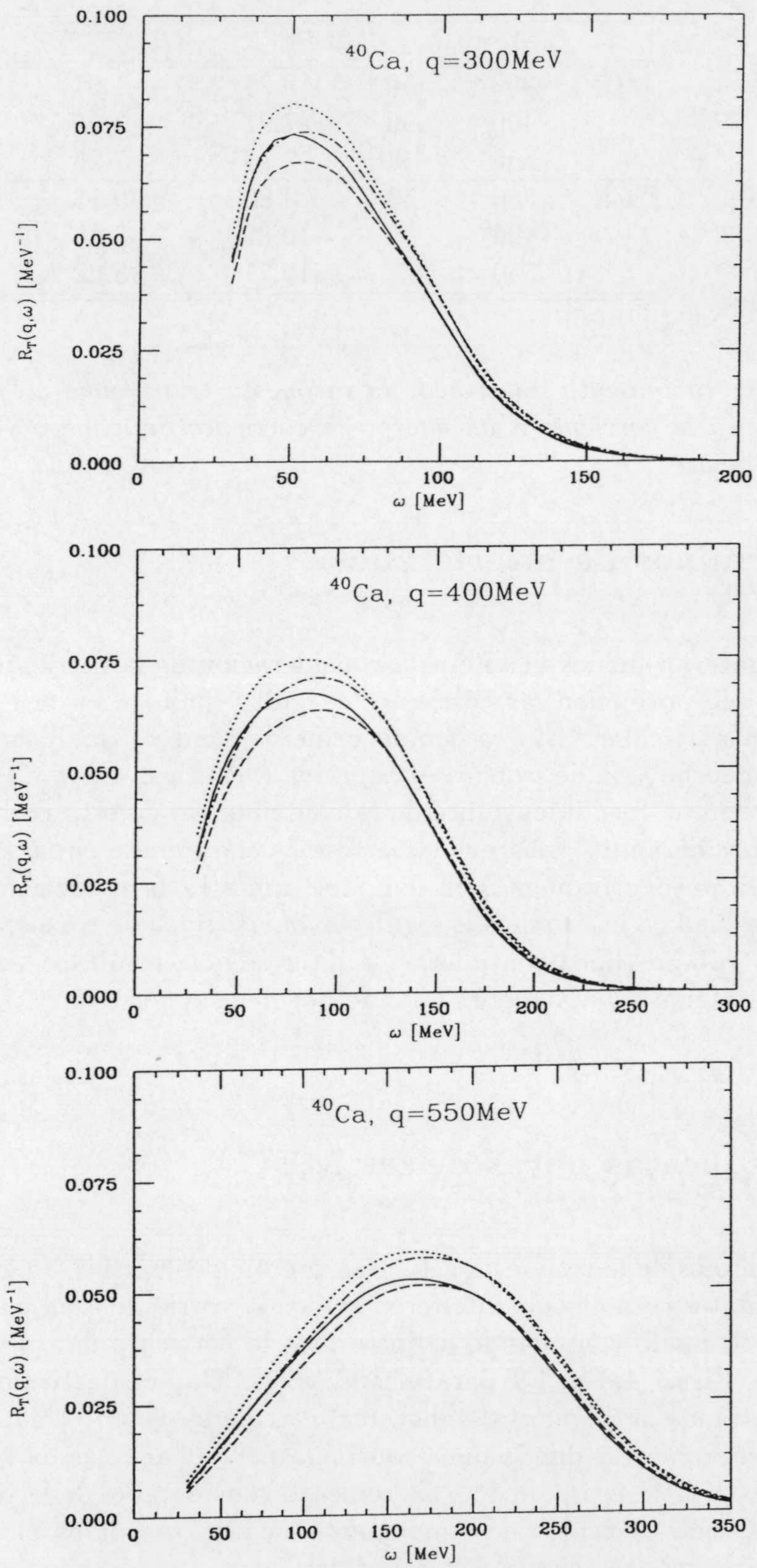


Figura 4.5: Igual que la Fig. 4.4 para el ^{40}Ca .

	$q[\text{MeV}]$	ω_{max}	$\delta R_T^{\text{OB}+\Delta}$	$\delta R_T^{\text{OB}+\text{S}+\pi+\Delta}$
^{12}C	300	50	-8.21	-1.01
	400	90	-7.91	-3.25
	550	190	-8.19	-7.26
^{40}Ca	300	50	-8.80	-0.13
	400	90	-10.32	-5.15
	550	170	-10.71	-8.62

Tabla 4.1: *Incremento relativo de la respuesta transversal a $1p - 1h$ cuando se añaden a la corriente a un cuerpo la corriente de isóbaro y las tres MEC conjuntamente.*

4.3.3 Términos de interferencia

En la sección anterior hemos visto que la consideración de la corriente de isóbaro cancela el incremento que producían las corrientes seagull y piónica en la respuesta transversal de emisión una partícula. Esto es debido principalmente a que la interferencia entre la corriente a un cuerpo y la de isóbaro es negativa (ver Figs. 4.2 y 4.3) y a que esta interferencia es el término más importante de la contribución de esta corriente a la respuesta que estamos considerando. Esto puede verse más claramente en las Figs. 4.6 y 4.7 para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente, en donde se muestra la reducción de la respuesta de interferencia asociada a las corrientes seagull y piónica (línea de trazos) cuando se les añade la corriente de isóbaro (línea continua). La interferencia resultante es negativa, salvo en una restringida región a baja energía, donde permanece positiva.

4.3.4 Respuestas puras de las MEC

Aunque los términos de la respuesta a $1p - 1h$ producidos exclusivamente por las MEC no son tan importantes como los de interferencia con la corriente a un cuerpo, es interesante estudiar cómo se modifican cuando se introduce la corriente de isóbaro. Este efecto se muestra en las Figs. 4.8 y 4.9 para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente. En línea de trazos representamos la respuesta transversal calculada usando solamente las corrientes seagull y piónica, mientras que la línea continua incluye, además, la corriente de isóbaro. Como vemos, esta última produce un incremento considerable de la respuesta en la zona de alta energía, que es tanto más importante cuanto mayor es el valor del momento transferido. Asimismo, se observa una reducción en la zona del pico a $q = 400$ y 500 MeV. El comportamiento en ambos núcleos es muy similar, aunque el efecto es relativamente mayor en ^{40}Ca .

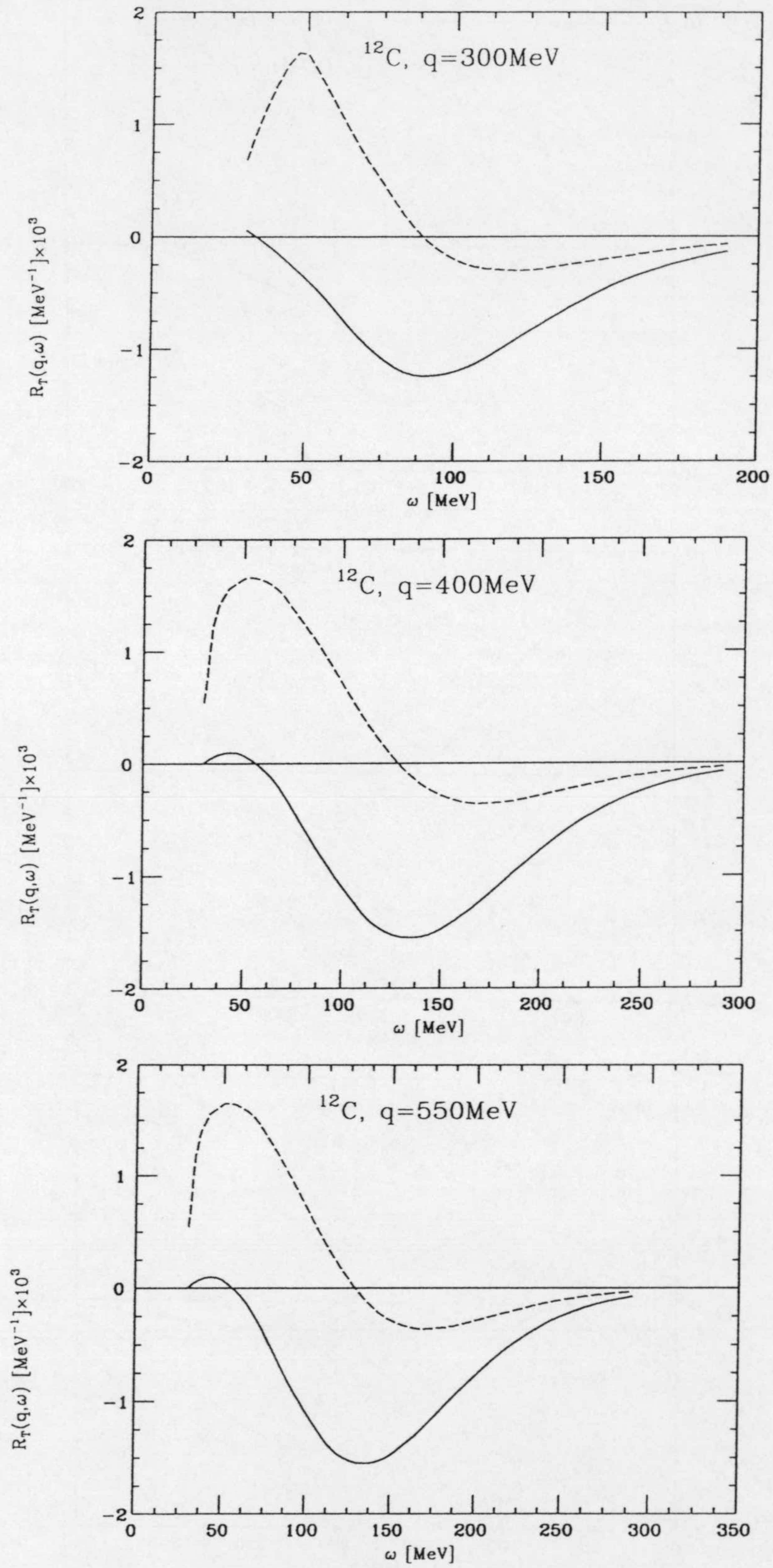


Figura 4.6: Respuesta de interferencia entre las MEC seagull y piónica y la corriente a un cuerpo (línea a trazos) e incluyendo además la corriente de isóbaro (línea continua), para el ^{12}C .

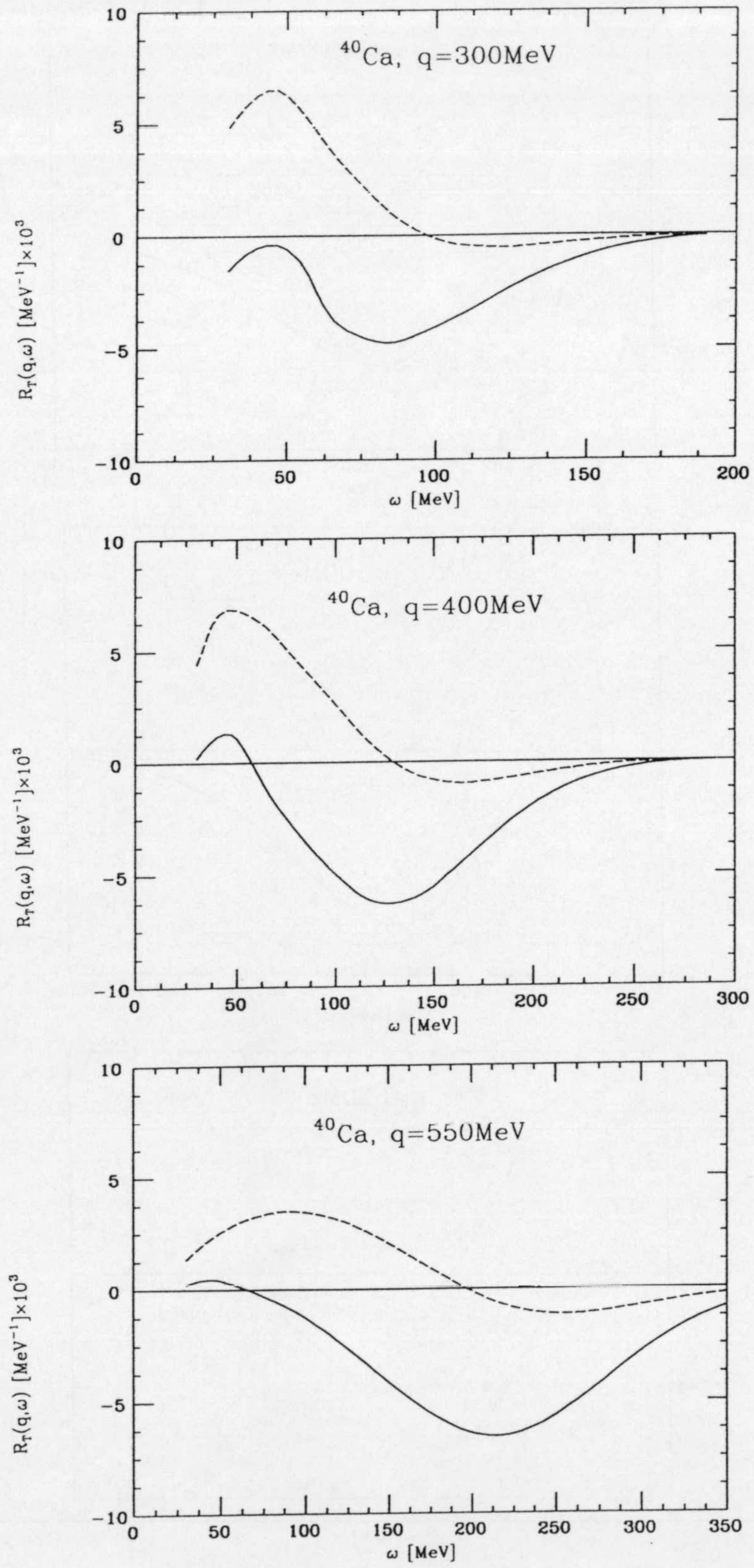


Figura 4.7: Igual que la Fig. 4.6 para el ^{40}Ca .

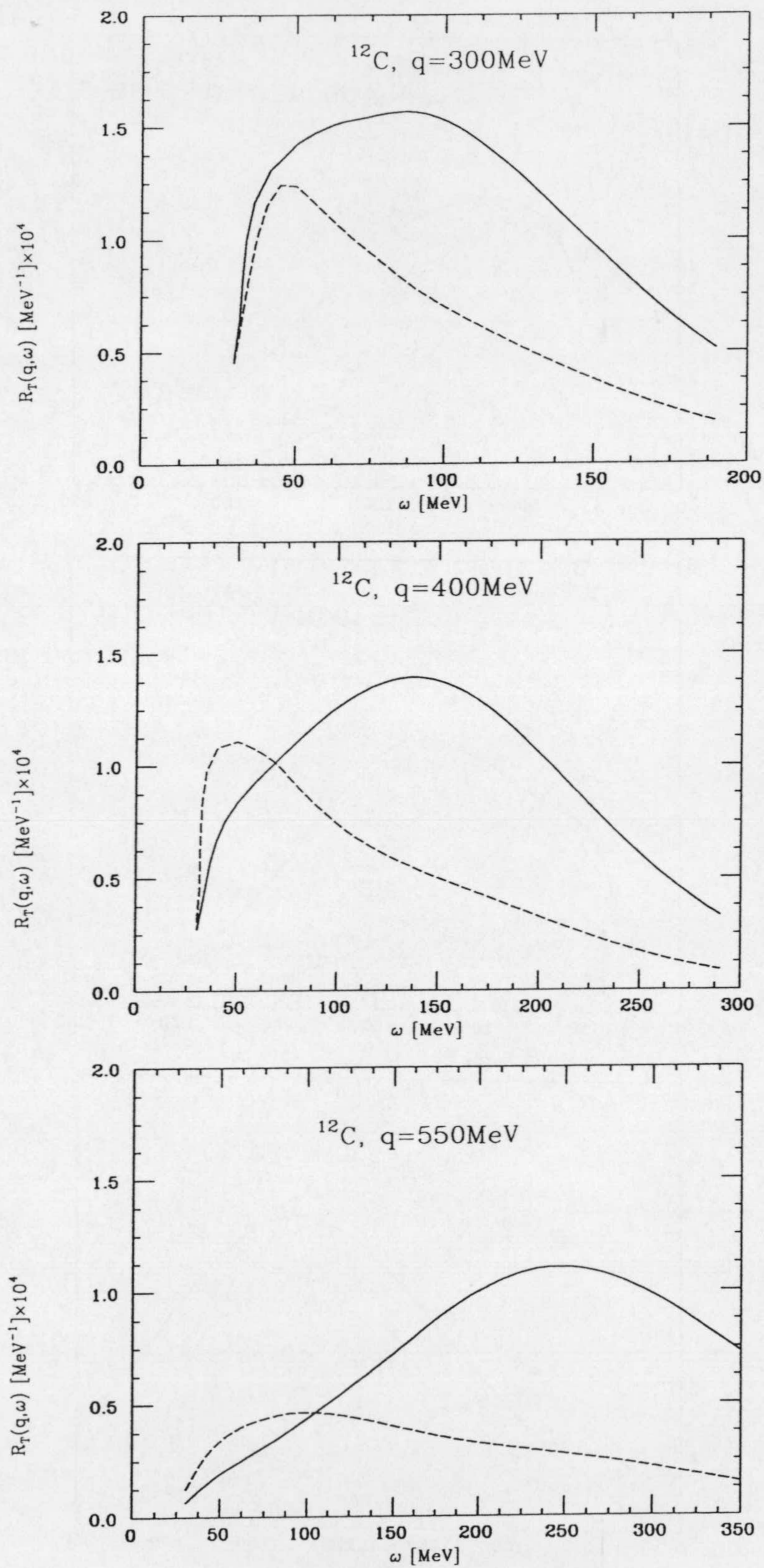


Figura 4.8: Respuesta de emisión de una partícula debida solamente a las MEC en el ^{12}C . Las curvas a trazos son debidas a las corriente seagull y piónica, mientras que las curvas continuas incluyen, además, a la corriente de isóbaro.

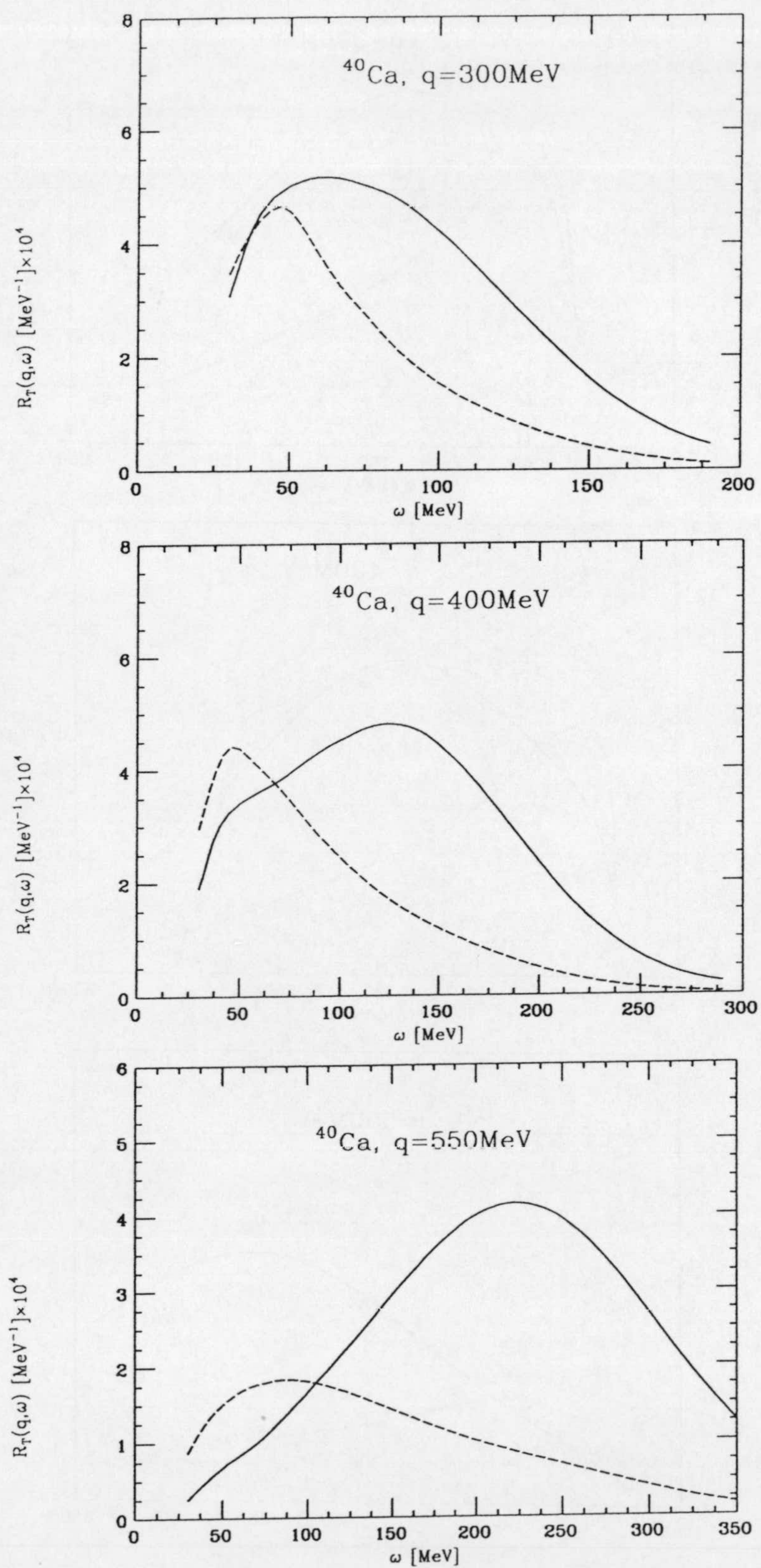


Figura 4.9: Igual que la Fig. 4.8 para el ^{40}Ca .

4.3.5 Comparación con el gas de Fermi

Al igual que hicimos en el caso de las corrientes seagull y piónica en el capítulo anterior, queremos comparar la contribución de la corriente de isóbaro que hemos obtenido en el modelo de capas, con la obtenida usando un modelo de gas de Fermi. Vamos a realizar la comparación a nivel de la respuesta de interferencia entre la corriente de isóbaro y la corriente a un cuerpo. Dos son las principales razones que apoyan la necesidad de realizar esta comparación. En primer lugar, determinar si los efectos del tamaño finito nuclear producen diferencias sustanciales en la respuesta de isóbaro calculada y, en segundo, arrojar luz sobre las grandes discrepancias observadas entre nuestros resultados y dos cálculos previos existentes en la literatura [Koh81, Alb90], en los que el efecto de la corriente de isóbaro es considerablemente mayor que el que nosotros obtenemos. Por añadidura, ambos cálculos producen, cuantitativamente, distintos resultados para las tres corrientes consideradas. Por nuestra parte, ya en el capítulo anterior mostramos resultados consistentes obtenidos con los modelos mencionados, para las respuestas seagull y piónica, hecho que aboga en favor de nuestro tratamiento. En este apartado veremos que también somos consistentes en los que a la corriente de isóbaro se refiere.

Siguiendo la metodología del capítulo anterior, consideraremos sólo la respuesta de interferencia entre la corriente que nos ocupa y la corriente a un cuerpo. En el apéndice F mostramos que la parte de interferencia con la corriente de convección es cero, por lo que resta tan sólo la interferencia con la corriente de magnetización, que se puede escribir, siguiendo la notación de la ec. (3.15), en la forma:

$$R_T^{M\Delta}(q, \omega) = F_T^{M\Delta}(q, \omega) \mathcal{R}_T^{M\Delta}(q, \omega), \quad (4.17)$$

en donde el factor de forma se define mediante

$$F_T^{M\Delta} = -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} a_\Delta \frac{2}{M} (G_M^P - G_M^N) G_M^V \quad (4.18)$$

con la constante a_Δ dada por la ecuación (4.10). La función de respuesta reducida $\mathcal{R}_T^{M\Delta}$ tiene una expresión análoga a la de las interferencias de las MEC seagull y piónica con la corriente a un cuerpo, ec. (3.17); por lo tanto, tan sólo basta introducir en la integral de dicha ecuación la función $I^{M\Delta}(h, p, q)$, que está definida por

$$I^{M\Delta}(h, p, q) = \int_{S_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{3q^2(\mathbf{h} + \mathbf{q} - \mathbf{k})^2 - [\mathbf{q} \cdot (\mathbf{h} + \mathbf{q} - \mathbf{k})]^2}{(\mathbf{h} + \mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + \mu^2} + \frac{3q^2(\mathbf{h} - \mathbf{k})^2 - [\mathbf{q} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k})]^2}{(\mathbf{h} - \mathbf{k})^2 + \mu^2} \right]. \quad (4.19)$$

La obtención de estas ecuaciones se detalla en el apéndice F.

La respuesta de interferencia entre las corrientes de isóbaro y a un cuerpo calculada con el modelo de gas de Fermi se muestra con línea de trazos en las Figs. 4.10 y 4.11, para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente. En este cálculo se han utilizado los momentos de Fermi efectivos que se calcularon en el capítulo anterior. En las mismas figuras hemos representado, con línea continua, las mismas respuestas calculadas con el modelo de capas.

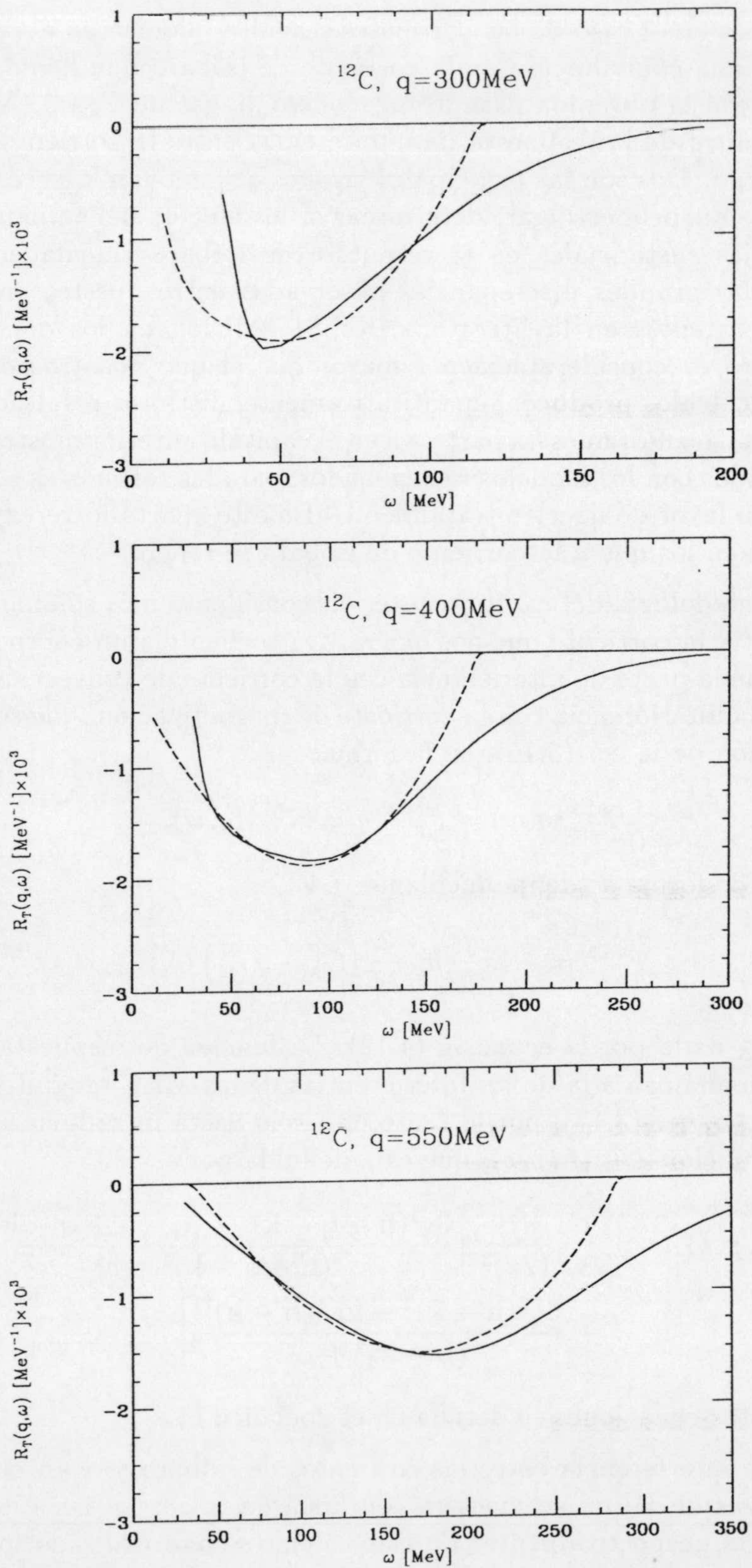


Figura 4.10: Respuestas de interferencia entre las corrientes de isóbaros y a un cuerpo, para el ^{12}C , calculadas con el modelo de capas (línea continua) y con el modelo de gas de Fermi (línea de trazos) usando el momento de Fermi efectivo calculado en el capítulo 3.

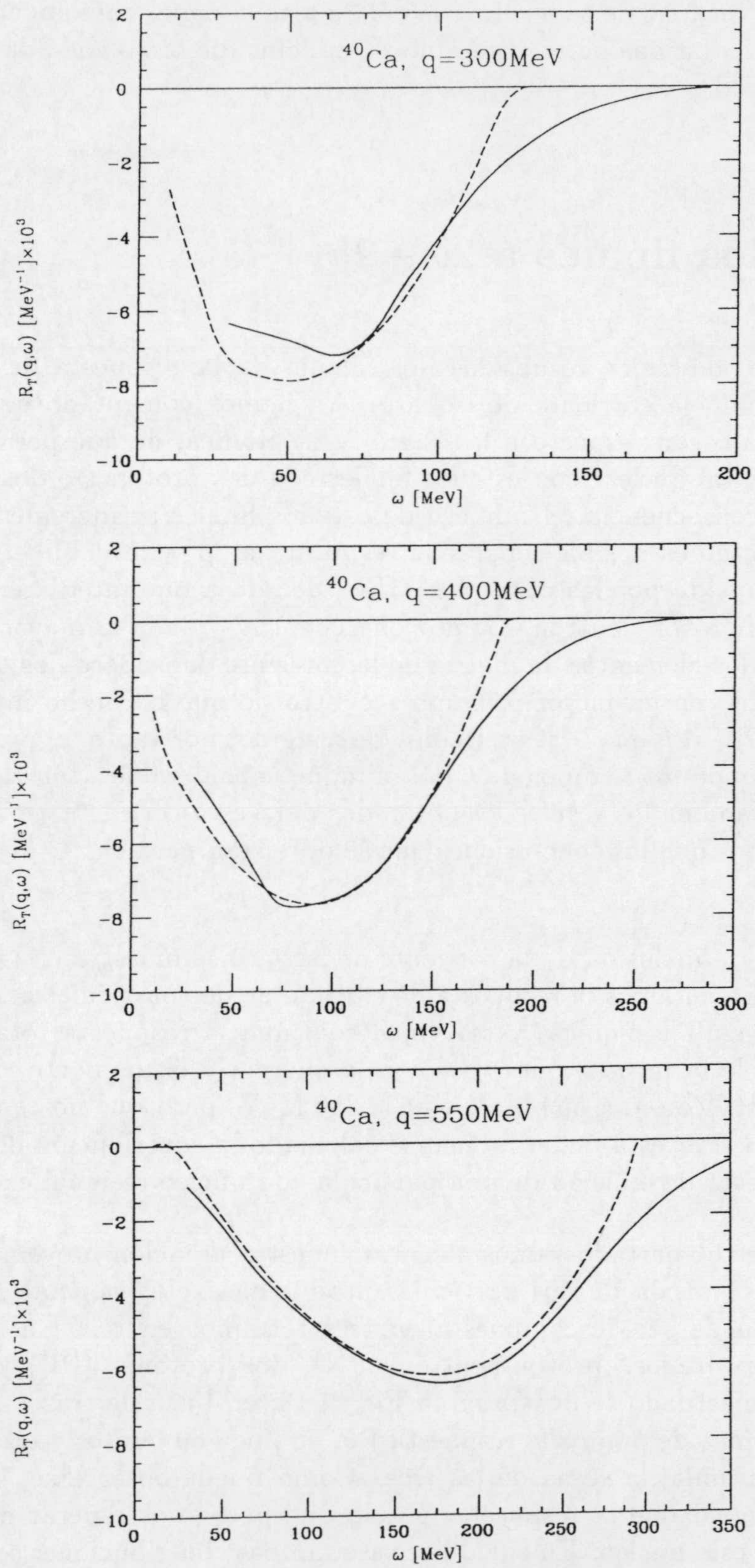


Figura 4.11: Igual que la Fig. 4.10 para el ^{40}Ca .

Cuantitativamente, ambos modelos producen resultados similares en la zona del pico, pero el gas de Fermi es incapaz de reproducir la cola a alta energía, como ocurría también con las otras corrientes. La analogía entre ambos modelos mejora a medida que aumenta el momento transferido.

4.4 Estados finales a $2p - 2h$

Vamos a describir ahora los resultados del cálculo de la respuesta de emisión de dos partículas incluyendo la corriente de isóbaro. Ya hemos comentado que esta corriente presenta la novedad, con respecto a la seagull y la piónica, de que permite de conectar el estado fundamental nuclear con estados finales con dos protones o dos neutrones en el continuo. Como consecuencia, el número de estados finales se incrementa en un factor ~ 2 . Sin embargo, no es posible separar la respuesta a $2p - 2h$ debida a la corriente de isóbaro de la producida por las otras dos MEC, debido a que interfieren en la parte de emisión de parejas protón-neutrón. Como consecuencia, y dada la mayor complejidad de las expresiones de los elementos de matriz de la corriente de isóbaro, los tiempos de CPU se han incrementado en un factor próximo a cuatro, lo que ha hecho inviable el cálculo de la respuesta a $2p - 2h$ en el ^{40}Ca . Hemos restringido, por tanto, el presente cálculo al caso del ^{12}C , en donde los tiempos de CPU, aunque considerables, son razonables. Dada la similitud observada en los resultados obtenidos para esta corriente a nivel de respuesta a $1p - 1h$, esperamos que las conclusiones que se obtengan para el ^{12}C puedan extenderse al caso del ^{40}Ca .

El resultado de la inclusión de la corriente de isóbaro se muestra en la Fig. 4.12. Con línea de trazos representamos la respuesta de emisión de dos partículas al continuo debida a las corrientes seagull y piónica, y con línea continua la respuesta total. El resultado es un incremento de la misma, que crece con la energía y el momento transferidos, que llega a ser de un 100% a $q = 550 \text{ MeV}$ y $\omega = 350 \text{ MeV}$, pero que no es de gran cuantía en la zona del pico. Por esta razón no hemos calculado la contribución de la corriente de isóbaro a la respuesta de emisión de una partícula con núcleo residual excitado.

Para finalizar este apartado vamos a centrar nuestra atención brevemente en la parte de la respuesta de emisión de dos partículas producida exclusivamente por la corriente de isóbaro, que puede ser descompuesta en tres términos en razón al tipo de isospín de los nucleones excitados: protón-neutrón (PN), dos protones (PP) y dos neutrones (NN). El análisis efectuado se ilustra en la Fig. 4.13; en línea de trazos se representa la respuesta PN, en línea de puntos la respuesta PP, en línea de puntos y trazos la respuesta NN y, en línea continua, la suma de las tres. Como puede observarse, la respuesta PP es prácticamente igual que la respuesta NN, lo que podíamos esperar dada la simetría protón-neutrón de este núcleo. En cualquier caso, ambas contribuciones son bastante más pequeñas que la respuesta PN, que resulta ser relativamente más importante a medida que aumenta q .

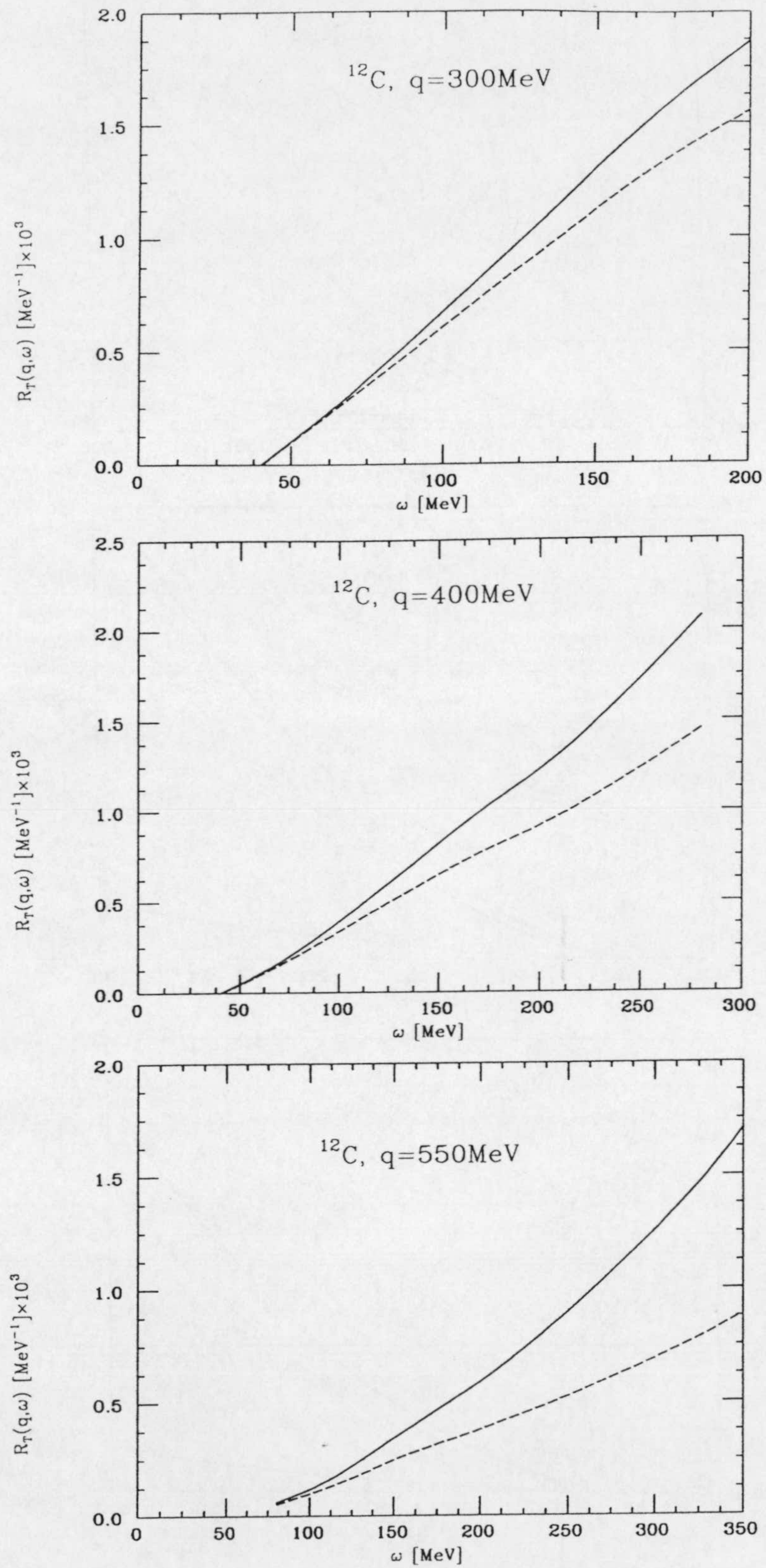


Figura 4.12: Respuesta de emisión de dos partículas en el ^{12}C . La línea continua representa la respuesta total, mientras que la línea de trazos sólo incluye las corrientes seagull y piónica.

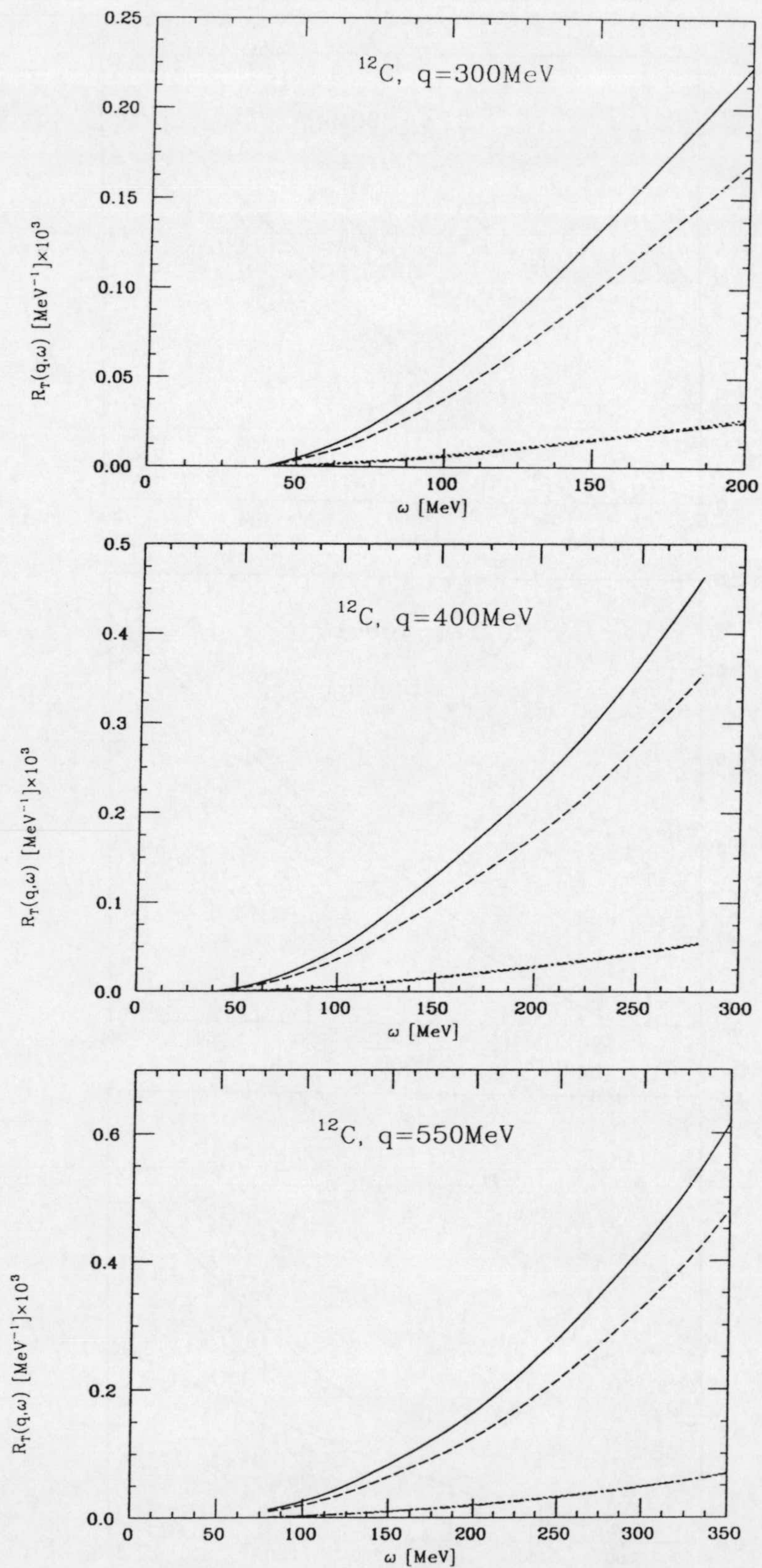


Figura 4.13: Respuesta de emisión de dos partículas en el ^{12}C (línea continua) y su descomposición en emisión de pares PN (trazos), PP (puntos) y NN (puntos y trazos).

	$q[\text{MeV}]$	ω_{max}	δR_T^{tot}
^{12}C	300	50	0.12
	400	90	-1.16
	550	190	-3.96
^{40}Ca	300	50	1.24
	400	90	-2.48
	550	170	-4.64

Tabla 4.2: Incremento relativo de la respuesta transversal total con respecto a la respuesta a un cuerpo.

4.5 Efecto total de las MEC

Una vez analizadas todas las contribuciones a la respuesta transversal que hemos considerado en este trabajo, estamos en condiciones de mostrar el efecto total de las MEC sobre la misma. Los resultados pueden verse en las Figs. 4.14 y 4.15 para el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente. La línea de puntos corresponde a la respuesta transversal a un cuerpo, la línea de trazos es la respuesta de emisión de dos partículas, incluyendo la Δ y la de emisión de una partícula con núcleo residual excitado inducida por las corrientes seagull y piónica. Finalmente, la línea continua es la respuesta total, suma de la anterior y de la respuesta total a $1p - 1h$, incluyendo las tres MEC consideradas. En el caso del ^{40}Ca , hemos estimado la parte de emisión de dos partículas escalando la correspondiente al ^{12}C , con los mismos factores que encontramos en el capítulo 2 y que, aunque fueron calculados considerando solamente las corrientes seagull y piónica, suponemos que son también válidos si incluimos la corriente de isóbaro.

Estas dos figuras deben compararse con las Figs. 2.35 y 2.36, que no incluían la Δ . Puede apercibirse que la parte de alta energía presenta un ligero aumento con respecto a las respuestas de dichas figuras. En la zona del pico y a bajo momento transferido, la modificación de la respuesta a un cuerpo es apreciablemente menor cuando incluimos la Δ que cuando no lo hacemos. En particular, para $q = 300$ MeV, la respuesta no se modifica prácticamente por debajo de $\simeq 110$ MeV de energía. A medida que aumenta el momento q , las MEC producen un efecto cada vez más reductor del pico. Los porcentajes del incremento relativo con respecto a la respuesta a un cuerpo en el pico pueden verse en la tabla 4.2. Estos números se diferencian de los de la tabla 2.13 en el capítulo 2 (que no incluían la Δ), en, aproximadamente, un 8%, en el caso del ^{12}C , y un 9% en el del ^{40}Ca .

A la vista de los resultados obtenidos, está claro que una comparación con los datos experimentales no va a modificar en ninguna medida las conclusiones de la sección 2.5, por lo que no la vamos a repetir aquí.

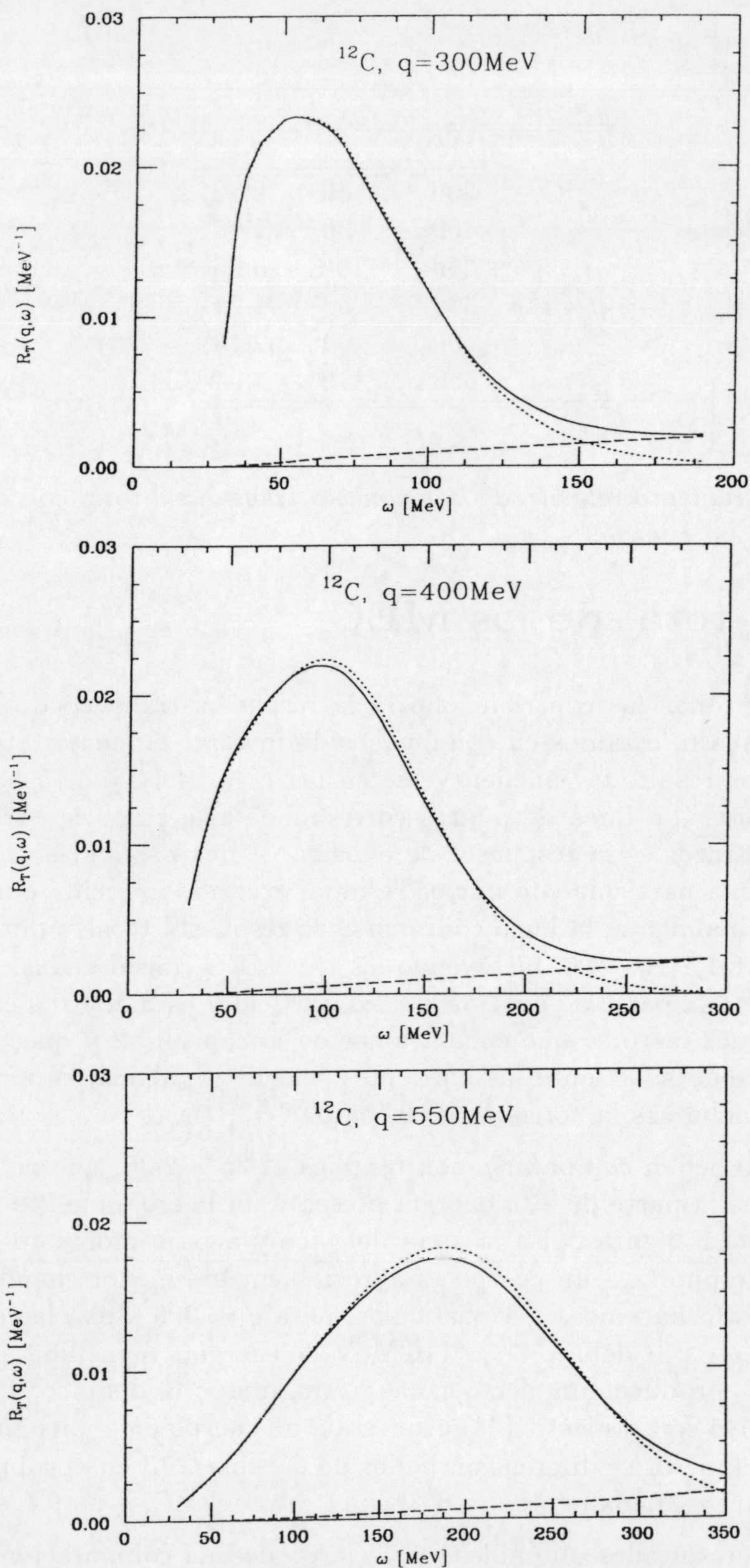


Figura 4.14: Respuesta transversal total en el ^{12}C (línea continua), incluyendo la corriente de isóbaro. La línea de puntos representa la respuesta a un cuerpo y la línea a trazos la de emisión de dos partículas, incluyendo la parte de emisión de un nucleón con núcleo residual excitado inducida por las corrientes seagull y piónica.

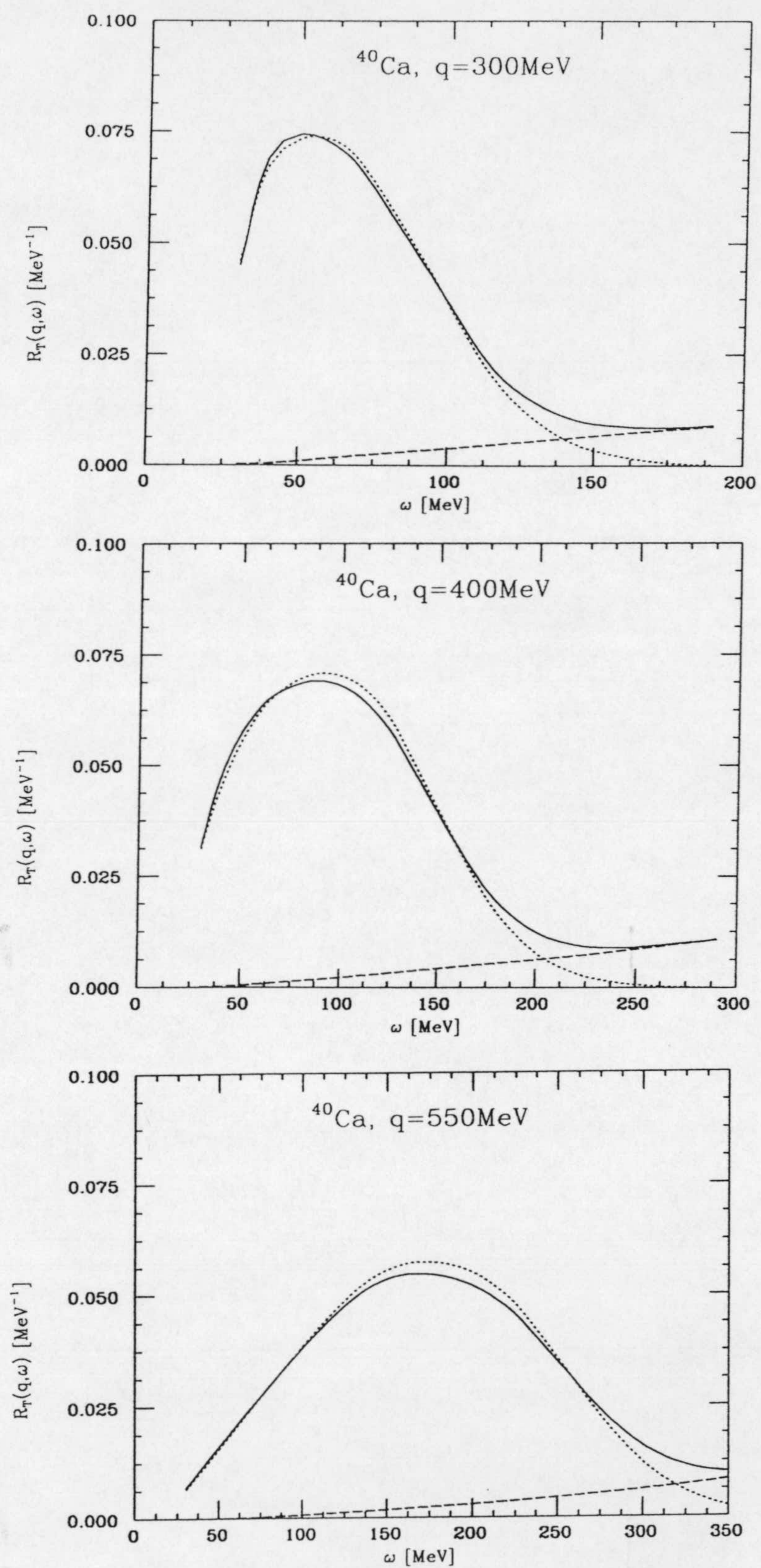


Figura 4.15: Igual que la Fig. 4.14 para el ^{40}Ca .



Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo hemos estudiado en detalle la función de respuesta nuclear en el pico cuasielástico, prestando especial atención a la parte transversal de la misma. El cálculo principal se ha llevado a cabo utilizando el modelo de capas extremo para describir las funciones de onda nucleares, dado que, en la aproximación de impulso, los resultados de este tratamiento no difieren en gran medida de los obtenidos con un modelo nuclear más sofisticado, como es la RPA en el continuo. Hemos realizado el estudio en dos núcleos de doble capa cerrada, el ^{12}C y el ^{40}Ca , por lo que podemos formular estas conclusiones con una mayor generalidad. La respuesta transversal nuclear se obtiene a partir de los elementos de matriz de transición del operador de corriente electromagnética nuclear, que viene dado, en nuestro cálculo, como suma de la corriente a un cuerpo y una corriente a dos cuerpos, que es generada por el intercambio de mesones virtuales entre los nucleones del núcleo. En este trabajo hemos considerado las tres MEC que se deben al intercambio de piones, seagull, piónica y de isóbaro, ésta última provocada por la excitación intermedia de los nucleones a una resonancia Δ . Además de las corrientes de intercambio, hemos estudiado otros mecanismos capaces de modificar la respuesta, tales como la parametrización de los factores de forma electromagnéticos del nucleón y el tamaño finito nuclear, mediante comparación de nuestros resultados con los de un cálculo basado en el modelo de gas de Fermi. Finalmente, hemos comparado las respuestas así calculadas con los datos experimentales del ^{12}C y el ^{40}Ca , después de haber tenido en cuenta los efectos debidos a la interacción en el estado final.

Los principales resultados de nuestro estudio son los que a continuación se relacionan:

1. Las incertidumbres en la parametrización de los factores de forma electromagnéticos del nucleón producen considerables variaciones en las respuestas longitudinal y transversal. La dispersión debida a este efecto oscila alrededor de un 10% en la región del pico.
2. La mayor contribución de las MEC en el pico se debe a la respuesta de interferencia entre éstas y la corriente a un cuerpo, mientras que la respuesta de emisión de dos partículas es relevante en la zona de muy alta energía. No obstante, la respuesta a $2p - 2h$ no es despreciable en la región próxima al pico.

3. La contribución de las MEC puede verse muy influenciada por la elección de los factores de forma electromagnéticos que aparecen en dichas corrientes. La dispersión puede alcanzar, en la zona del pico, valores de hasta un 40%, como ocurre en el caso de la corriente seagull a $q = 550$. La elección que nosotros hemos realizado nos permite considerar nuestros resultados como mínimos, en lo que a las corrientes seagull y piónica se refiere.
4. El uso de un propagador dinámico para el pión de intercambio sólo produce pequeñas modificaciones en la respuesta a $1p-1h$ y es sólo relevante en la respuesta de emisión de dos partículas a alta energía.
5. La consideración del factor de forma pión-nucleón en las corrientes no afecta apreciablemente a la respuesta transversal.
6. El efecto neto de las MEC en el pico es un leve incremento a bajo momento transferido, que se hace negativo a medida que éste aumenta. En cualquier caso, dicho incremento es inferior, en valor absoluto, al 4% y 5%, en el ^{12}C y el ^{40}Ca , respectivamente, para los momentos transferidos considerados. La razón de este efecto está en que la contribución de la corriente seagull a la respuesta a $1p-1h$ tiene signo opuesto a las de las corrientes piónica y de isóbaro. A la energía del pico dominan éstas dos corrientes frente a la seagull, por lo que el efecto es negativo a nivel de respuesta a $1p-1h$. No obstante, parte de este efecto negativo se ve compensado por el de la respuesta a $2p-2h$.
7. La magnitud de la contribución de la corriente de isóbaro es comparable a las de las otras dos MEC en las dos respuestas a $1p-1h$ y a $2p-2h$. Su efecto sobre esta última respuesta crece a medida que aumenta la energía.
8. La contribución a $2p-2h$ está dominada, a altas energías, por el canal de emisión de dos nucleones.
9. La inclusión de las MEC no es capaz de compensar la reducción que la FSI produce en la respuesta transversal. Los datos experimentales de la respuesta transversal son subestimados por nuestro modelo, si bien los de la respuesta longitudinal se describen bastante mejor.
10. Los resultados obtenidos con el modelo de gas de Fermi dependen, en gran medida, del valor del momento de Fermi k_F . Mediante el uso de un valor efectivo de este momento, es posible obtener un buen acuerdo con los resultados del modelo de capas, sobre todo a alto momento transferido.
11. La LDA no es una buena aproximación en los núcleos ligeros y, en general, podemos considerarla como de dudosa fiabilidad en el caso del estudio de la respuesta electromagnética. Los resultados que se obtienen son muy poco dependientes de la densidad nucleónica que se considere y, de hecho, la respuesta obtenida con el modelo de capas puede describirse de manera razonable incluso cuando se utilizan densidades bastante diferentes de las que genera este modelo.

12. Los efectos de cada una de las tres MEC en el pico cuasielástico se describen bastante bien mediante el cálculo en el gas de Fermi, usando un momento de Fermi efectivo. Los resultados mejoran a medida que aumenta el momento transferido.
13. Los resultados obtenidos con los dos modelos son completamente compatibles, lo que soluciona las discrepancias observadas con otros cálculos previos realizados en el modelo de gas de Fermi.

Dada la imposibilidad de describir los datos experimentales, nuestros resultados ponen de manifiesto que la resolución del problema de la separación de las respuestas longitudinal y transversal, en núcleos medios y pesados, requiere una mejora en la descripción de la estructura nuclear y del mecanismo de la reacción. Concretamente, queremos señalar los siguientes aspectos:

1. Cabe la posibilidad de que un tratamiento microscópico de la FSI muestre que la respuesta transversal se ve disminuida en menor medida que la longitudinal. Este efecto produciría un mejor acuerdo con el experimento. Sin embargo, los primeros cálculos en esta dirección [Dro89] no corroboran esta idea.
2. Nuestro tratamiento de las MEC se ha visto limitado a la consideración de las corrientes seagull, piónica y de isóbaro. Un modelo más refinado requeriría la inclusión de corrientes de intercambio de mesones más pesados y una mejora en la descripción de la corriente de isóbaro, que en la actualidad aún no está plenamente establecida.
3. Aunque el orden de magnitud de las contribuciones de las MEC que hemos obtenido está de acuerdo con los cálculos en el gas de Fermi, existe una gran diferencia con respecto a cálculos muy detallados existentes en núcleos con $A \leq 4$ [Car91, 93], que incluyen correlaciones de corto alcance en las funciones de onda nucleares, no tenidas en cuenta en nuestro modelo. Es muy posible que la introducción de este tipo de correlaciones en las funciones de onda de los núcleos que nos ocupan produzca el efecto deseado.
4. Por último, es lógico esperar que, dada la magnitud de las energías puestas en juego en el pico cuasielástico, un tratamiento relativista, tanto de los nucleones emitidos, como de las corrientes electromagnéticas, produzca mejores resultados. Cálculos realizados en gas de Fermi relativista [Blu89, Dek91] muestran que la respuesta transversal se ve incrementada con respecto a la del límite no relativista.

Los cuatro aspectos que acabamos de señalar muestran los puntos básicos de futuro del trabajo que aquí hemos presentado. Además, el formalismo desarrollado puede extenderse a otros procesos, entre los que cabe señalar, por su interés experimental, la fotoemisión de nucleones (γ, N) y los procesos de coincidencia simple ($e, e'N$), y doble ($e, e'2N$) (incluyendo, o no, grados de libertad de polarización en el haz incidente) con electrones.

Los dos primeros presentan similitudes que están siendo estudiadas a nivel experimental y que requieren de un estudio teórico cuidadoso [Bev93]. El último se relaciona con la posibilidad de estudiar directamente las correlaciones NN de corto alcance.

En cualquier caso, pensamos que las posibilidades abiertas son amplias y de interés, y que los resultados aquí obtenidos serán de gran utilidad en este sentido.

Apéndice A

Sección eficaz del proceso (e, e')

En la teoría de la electrodinámica cuántica el hamiltoniano de interacción electromagnética entre un electrón con corriente $-ej_\mu$ y un núcleo con corriente eJ_μ está dado por

$$\mathcal{H}_I = eN[A_\mu(J^\mu - j^\mu)],$$

en donde N indica producto normal ordenado, e es la carga del electrón y A_μ es el campo electromagnético. En lo que sigue usaremos los convenios de notación de Mandl y Shaw [Man84]. La anterior interacción permite calcular la sección eficaz del proceso de dispersión de un electrón por un núcleo atómico. El estado inicial que consideraremos es del tipo:

$$|i, \mathbf{p}\rangle = |i\rangle_{\text{núcleo}} \otimes |\mathbf{p}\rangle_{\text{electrón}},$$

mientras que el final es

$$|f, \mathbf{p}'\rangle = |f\rangle_{\text{núcleo}} \otimes |\mathbf{p}'\rangle_{\text{electrón}}.$$

El término del desarrollo perturbativo de la matriz S que contribuye al intercambio de un fotón es el siguiente:

$$S = (-i)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 (-e^2) N[\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)}_{\text{contracción}} j_\mu(x_1)J_\nu(x_2)],$$

en donde aparece la contracción de dos campos electromagnéticos, que se expresa en términos del propagador de Feynman del fotón:

$$\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)}_{\text{contracción}} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} iD_F^{\mu\nu}(q)e^{iq(x_1-x_2)},$$

con $D_F^{\mu\nu}(q) = -g^{\mu\nu}/q^2$. El correspondiente elemento de matriz de transición de la matriz S está dado por

$$\langle f, \mathbf{p}' | S | i, \mathbf{p} \rangle = -e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} e^{iq(x_1-x_2)} \langle \mathbf{p}' | j_\mu(x_1) | \mathbf{p} \rangle \langle f | J_\nu(x_2) | i \rangle. \quad (\text{A.1})$$

El elemento de matriz de la corriente del electrón, supuesto que éste se describe mediante una onda plana, se escribe en la forma

$$\langle \mathbf{p}' | j_\mu(x_1) | \mathbf{p} \rangle = e^{i(p'-p)x_1} \langle \mathbf{p}' | j_\mu(0) | \mathbf{p} \rangle, \quad (\text{A.2})$$

$$\langle \mathbf{p}' | j_\mu(0) | \mathbf{p} \rangle = \left(\frac{m}{VE'} \frac{m}{VE} \right)^{1/2} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u_s(\mathbf{p}), \quad (\text{A.3})$$

en donde s, s' se refieren a la polarización de spin del electrón, $E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$, $E' = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}'^2}$ y V es el volumen de normalización, que al final de los cálculos se hará tender a infinito.

Sustituyendo en (A.1), la integración sobre x_1 produce una $\delta(q + p' - p)$, lo cual permite realizar asimismo la integral sobre q , tomando éste el valor $q = p - p'$, que es el cuadrimomento transferido por el electrón al núcleo. Se tiene entonces

$$\langle f, \mathbf{p}' | S | i, \mathbf{p} \rangle = -e^2 i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \langle \mathbf{p}' | j_\mu(0) | \mathbf{p} \rangle \int d^4x e^{-iqx} \langle f | J_\nu(x) | i \rangle. \quad (\text{A.4})$$

Teniendo en cuenta que la dependencia temporal del operador de corriente nuclear es

$$J_\nu(t, \mathbf{x}) = e^{iHt} J_\nu(\mathbf{x}) e^{-iHt}, \quad (\text{A.5})$$

donde H es el hamiltoniano nuclear, podemos integrar respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{-iqx} \langle f | J_\nu(x) | i \rangle &= \int d^4x e^{-i\omega t + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} e^{i(E_f - E_i)t} \langle f | J_\nu(\mathbf{x}) | i \rangle \\ &= 2\pi \delta(E_f - E_i - \omega) \langle f | J_\nu(\mathbf{q}) | i \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

siendo $\omega = q^0 = E - E'$ la energía transferida por el electrón y

$$J_\nu(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} J_\nu(\mathbf{x}) \quad (\text{A.7})$$

la transformada de Fourier de la corriente. Sustituyendo (A.6) en (A.4) se tiene:

$$\langle f, \mathbf{p}' | S | i, \mathbf{p} \rangle = -2\pi i \delta(E_f - E_i - \omega) \frac{e^2}{q^2} \langle \mathbf{p}' | j_\mu(0) | \mathbf{p} \rangle \langle f | J^\mu(\mathbf{q}) | i \rangle.$$

A partir del elemento de matriz S se obtiene la sección eficaz diferencial del proceso:

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{V}{v_{rel}} \frac{V d^3p'}{(2\pi)^3},$$

con T el tiempo de transición. Siguiendo la prescripción usual de considerar $(2\pi\delta(E))^2 = 2\pi\delta(E)T$, usando la velocidad relativa $v_{rel} = |\mathbf{p}|/E$ y sustituyendo la corriente de transición del electrón, ecuación (A.3), se obtiene la sección eficaz siguiente:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(E_f - E_i - \omega) \frac{e^4 m^2}{q^4 E' |\mathbf{p}|} |\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{p}) \langle f | J_\mu(\mathbf{q}) | i \rangle|^2 d^3p'.$$

Si tanto el electrón inicial y final como el núcleo inicial no están polarizados y el estado nuclear final no es medido, debemos sumar en espines finales y promediar en espines iniciales tanto del electrón como del núcleo, así como sumar sobre todos los estados finales nucleares:

$$d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{ss'} \sum_f \overline{\sum_i} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(E_f - E_i - \omega) \frac{e^4 m^2}{q^4 E' |\mathbf{p}|} |\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{p}) \langle f | J_\mu(\mathbf{q}) | i \rangle|^2 d^3p'. \quad (\text{A.8})$$

La suma sobre espines del electrón se expresa en términos de trazas de matrices γ :

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{ss'} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{p}) [\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \gamma^\nu u_s(\mathbf{p})]^* \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\not{p}' + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^\nu \right], \end{aligned}$$

que se evalúan fácilmente, resultando la expresión

$$N^{\mu\nu} = \frac{1}{2m^2} [p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu + q^2 g^{\mu\nu} / 2], \quad (\text{A.9})$$

Por su parte, diferenciando ambos miembros de la igualdad $E'^2 = m^2 + \mathbf{p}'^2$, se obtiene $E' dE' = |\mathbf{p}'| d|\mathbf{p}'|$ y el elemento de volumen de momentos en coordenadas esféricas resulta:

$$d^3 p' = d\Omega' |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| = d\Omega' |\mathbf{p}'| E' dE'.$$

Sustituyendo ambos resultados en (A.8), introduciendo la constante de estructura fina $\alpha = e^2/4\pi$ y dividiendo por $d\Omega' dE'$, se obtiene la sección eficaz por unidad de energía y por unidad de ángulo sólido del electrón saliente:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \frac{2\alpha^2 |\mathbf{p}'|}{q^4 |\mathbf{p}|} \sum_f \overline{\sum_i} \delta(E_f - E_i - \omega) [p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu + q^2 g^{\mu\nu} / 2] J_\mu(\mathbf{q}) J_\nu(\mathbf{q})^*, \quad (\text{A.10})$$

en donde hemos escrito $J_\mu(\mathbf{q})$ por su elemento de matriz $\langle f | J_\mu(\mathbf{q}) | i \rangle$, para simplificar la notación.

El siguiente paso consiste en exigir que la corriente nuclear se conserve:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0, \quad (\text{A.11})$$

ecuación que puede ser escrita en términos de la corriente independiente del tiempo (ecuación (A.5)), ya que $J^\mu(x) = e^{i\omega t} J^\mu(\mathbf{x})$. Sustituyendo en (A.11) obtenemos la ecuación de continuidad en la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = -i\omega J^0(\mathbf{x}).$$

ecuación que en el espacio de momentos se escribe como un producto escalar de cuadrivectores:

$$q_\mu J^\mu(\mathbf{q}) = 0.$$

Ahora bien, puesto que $q = p - p'$, la ecuación de continuidad nos asegura que

$$p'_\mu J^\mu(\mathbf{q}) = p_\mu J^\mu(\mathbf{q}) = P_\mu J^\mu(\mathbf{q}),$$

en donde hemos definido

$$P = \frac{1}{2}(p + p'), \quad (\text{A.12})$$

luego la contracción tensorial que aparece en la sección eficaz, ecuación (A.10), se simplifica a:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &\equiv [p'^{\mu}p^{\nu} + p'^{\nu}p^{\mu} + q^2 g^{\mu\nu}/2]J_{\mu}(\mathbf{q})J_{\nu}(\mathbf{q})^* \\ &= 2|\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}|^2 + \frac{1}{2}q^2 \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^*,\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

Descompongamos ahora la corriente en su parte longitudinal y su parte transversal al vector \mathbf{q} :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_L + \mathbf{J}_T, \quad (\text{A.14})$$

con \mathbf{J}_L paralelo a \mathbf{q} y $\mathbf{J}_T \cdot \mathbf{q} = 0$. Por la ecuación de continuidad se establece una relación de proporcionalidad entre la parte longitudinal de la corriente J_L y la densidad $\rho = J^0$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_L = |\mathbf{q}|J_L = \omega\rho \Rightarrow J_L = \frac{\omega}{|\mathbf{q}|}\rho. \quad (\text{A.15})$$

Aplicando la descomposición A.14 a la contracción (A.13) podremos escribir:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_L + \mathcal{F}_T + \mathcal{F}_{LT},$$

donde \mathcal{F}_L es la parte longitudinal, que contiene los productos del tipo $\rho\rho$, ρJ_L y $J_L J_L$, y que, debido a la ecuación de continuidad, pueden reescribirse como productos $\rho\rho$. Por su parte, \mathcal{F}_T es la parte transversal de la contracción y contiene sólo a la corriente transversal. Por último, \mathcal{F}_{LT} contiene los términos de interferencia longitudinal-transversal ρJ_T y $J_L J_T$. Este último término no va a contribuir a la suma (A.10) por razones de simetría. En efecto, si el núcleo no está polarizado, no puede definir ninguna dirección privilegiada en el plano perpendicular a \mathbf{q} . Por lo tanto, la suma vectorial

$$\sum_f \overline{\sum_i} \delta(E_f - E_i - \omega) \langle f | \rho(\mathbf{q}) | i \rangle \langle f | \mathbf{J}_T(\mathbf{q}) | i \rangle^* = 0,$$

porque en caso contrario construiríamos un vector transversal a partir de un promedio esférico de estados nucleares.

Por la misma razón, algunos de los términos de \mathcal{F}_T no van a contribuir a la sección eficaz no polarizada. Para verlo, elijamos previamente el eje z en la dirección de \mathbf{q} para simplificar la notación. Entonces podemos escribir

$$\mathcal{F}_T = 2|\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}_T|^2 - \frac{q^2}{2}|\mathbf{J}_T|^2 = 2 \sum_{jk=1}^2 \left(P_j P_k - \frac{1}{4}q^2 \delta_{jk} \right) J_j J_k^*.$$

Al promediar esféricamente y sumar sobre estados finales, podemos construir el tensor autoadjunto transversal (definido para $j, k = 1, 2$)

$$\mathcal{W}_{jk}(\mathbf{q}) \equiv \sum_f \overline{\sum_i} \delta(E_f - E_i - \omega) \langle f | J_j(\mathbf{q}) | i \rangle \langle f | J_k(\mathbf{q}) | i \rangle^*,$$

que debe ser múltiplo de la identidad porque, en caso contrario, sus ejes propios definirían dos direcciones transversales privilegiadas. Por lo tanto, debe cumplirse

$$\mathcal{W}_{jk} = \delta_{jk} \mathcal{W}_{11} = \delta_{jk} \mathcal{W}_{22}.$$

Esto quiere decir que podemos sustituir $J_j J_k^*$ por $\delta_{jk} |\mathbf{J}_T|^2 / 2$ sin alterar la sección eficaz final. En consecuencia, \mathcal{F}_T se reescribe en la forma:

$$\mathcal{F}_T = \sum_{jk=1}^2 \left(P_j P_k - \frac{1}{4} q^2 \delta_{jk} \right) \delta_{jk} |\mathbf{J}_T|^2 = \left(\mathbf{P}_T^2 - \frac{q^2}{2} \right) |\mathbf{J}_T|^2, \quad (\text{A.16})$$

donde \mathbf{P}_T es la parte transversal del vector \mathbf{P} . Con respecto a la parte longitudinal de la contracción (ver ec. (A.13))

$$\mathcal{F}_L = 2|P_0 \rho - P_3 J_3|^2 + \frac{1}{2} q^2 (|\rho|^2 - |J_3|^2),$$

puede simplificarse observando que el cuadrivector P cumple

$$q_\mu P^\mu = \frac{1}{2} (p - p')_\mu (p + p')^\mu = 0, \quad (\text{A.17})$$

con lo cual $P_3 = \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} P_0$, y usando también que

$$1 - \frac{\omega^2}{\mathbf{q}^2} = -\frac{q^2}{\mathbf{q}^2},$$

así como la ecuación de continuidad de la corriente. El resultado para \mathcal{F}_L es, por lo tanto:

$$\mathcal{F}_L = \frac{1}{2} \frac{q^4}{\mathbf{q}^4} (4P_0^2 - \mathbf{q}^2) |\rho|^2 = \frac{1}{2} \frac{q^4}{\mathbf{q}^4} [(E + E')^2 - \mathbf{q}^2] |\rho|^2 \quad (\text{A.18})$$

De manera que la sección eficaz (A.10) se puede escribir en la forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \frac{2\alpha^2 |\mathbf{p}'|}{q^4 |\mathbf{p}|} \sum_f \overline{\sum_i} \delta(E_f - E_i - \omega) [a_L R_L(\mathbf{q}, \omega) + a_T R_T(\mathbf{q}, \omega)], \quad (\text{A.19})$$

donde

$$R_L(\mathbf{q}, \omega) = \sum_f \overline{\sum_i} \delta(E_f - E_i - \omega) |\langle f | \rho(\mathbf{q}) | i \rangle|^2 \quad (\text{A.20})$$

$$R_T(\mathbf{q}, \omega) = \sum_f \overline{\sum_i} \delta(E_f - E_i - \omega) |\langle f | \mathbf{J}_T(\mathbf{q}) | i \rangle|^2, \quad (\text{A.21})$$

son las funciones de respuesta nuclear longitudinal y transversal, respectivamente, y a_L y a_T son los factores cinemáticos que se extraen de (A.18) y (A.16)

$$a_L = \frac{1}{2} \frac{q^4}{\mathbf{q}^4} [(E + E')^2 - \mathbf{q}^2] \quad (\text{A.22})$$

$$a_T = \mathbf{P}^2 - \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{q})^2}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{2} q^2, \quad (\text{A.23})$$

con $\mathbf{P} = (\mathbf{p} + \mathbf{p}')/2$.

Calculemos el factor cinemático que aparece en la sección eficaz (A.19)

$$\sigma_0 \equiv \frac{2\alpha^2 |\mathbf{p}'|}{q^4 |\mathbf{p}|}$$

para electrones en límite ultrarelativista, es decir, aquellos que cumplen $E, E' \gg m^2$. En este caso se puede aproximar el momento del electrón por su energía: $\mathbf{p}^2 \simeq E^2$, $\mathbf{p}'^2 \simeq E'^2$, lo que nos permite realizar la siguiente aproximación para el cuadrado del cuadrimomento transferido:

$$q^2 = p^2 + p'^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \simeq -2EE' + 2EE' \cos \theta = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (\text{A.24})$$

Por lo tanto la aproximación buscada es

$$\sigma_0 \simeq \frac{\alpha^2}{[2E \sin^2(\theta/2)]^2} \frac{1}{2EE'}.$$

De manera similar pueden aproximarse los coeficientes a_L y a_T que aparecen multiplicando a las funciones respuesta. Para el primero de ellos tendremos, a partir de (A.22),

$$a_L \simeq \frac{1}{2} \frac{q^4}{q^4} [2EE' + 2EE' \cos \theta] = 2EE' \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{q^4}{q^4}.$$

Para aproximar a_T debemos considerar previamente el siguiente producto:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^2 \mathbf{P}^2 &= \frac{1}{4} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 \\ &\simeq \frac{1}{4} (E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta) (E^2 + E'^2 + 2EE' \cos \theta) \\ &= \frac{1}{4} [(E^2 + E'^2)^2 - 4E^2 E'^2 \cos^2 \theta]. \end{aligned}$$

Usando esta última ecuación junto con (A.17) y (A.24), se tiene:

$$\mathbf{q}^2 \mathbf{P}^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{P})^2 \simeq E^2 E'^2 \sin^2 \theta \simeq -q^2 EE' \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

por lo que a_T , ec. (A.23), se puede escribir en la forma:

$$a_T \simeq -\frac{q^2}{q^2} EE' \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2} \simeq 2EE' \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(-\frac{q^2}{2q^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Finalmente, sustituyendo las aproximaciones para σ_0 , a_L y a_T en la sección eficaz (A.24) se tiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \sigma_M \left[\frac{q^4}{q^4} R_L(\mathbf{q}, \omega) + \left(\tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2q^2} \right) R_T(\mathbf{q}, \omega) \right] \quad (\text{A.25})$$

en donde σ_M es la sección eficaz de Mott:

$$\sigma_M = \left(\frac{\alpha \cos(\theta/2)}{2E \sin^2(\theta/2)} \right)^2.$$

Apéndice B

Corrientes de intercambio dinámicas

Dedicamos este apéndice a la obtención detallada de las MEC dinámicas seagull y piónica, usando una teoría cuántica de campos con nucleones no relativistas. Seguimos los convenios de notación de Mandl y Shaw [Man84].

B.1 Interacción electromagnética

El hamiltoniano de interacción electromagnética entre un potencial A^μ y una partícula X con carga e , caracterizada por el operador densidad de corriente ej^μ , está dado por

$$\mathcal{H}_I(x) = eA^\mu(x)j_\mu(x).$$

El primer término en el desarrollo perturbativo de la matriz S correspondiente a dicha interacción es [Man84]

$$S^{(1)} = -i \int d^4x \mathcal{H}_I(x). \quad (\text{B.1})$$

Consideremos el proceso elemental de absorción de un fotón $\gamma + X \rightarrow X$. La transición del fotón está gobernada por el elemento de matriz

$$\langle 0|A^\mu(x)|\gamma\rangle = A^\mu(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \quad (\text{B.2})$$

y la dependencia temporal de j_μ , en la representación de interacción es

$$j_\mu(x) = e^{iH_0t} j_\mu(\mathbf{x}) e^{-iH_0t},$$

donde $j_\mu(\mathbf{x})$ es la corriente en la representación de Schrödinger y H_0 es el hamiltoniano de la partícula X . Si sus estados inicial y final son propios del hamiltoniano H_0 , la corriente de transición resultante se puede escribir

$$j_\mu(x)_{fi} = \langle f|e^{iH_0t} j_\mu(\mathbf{x}) e^{-iH_0t}|i\rangle = e^{i(E_f - E_i)t} j_\mu(\mathbf{x})_{fi}. \quad (\text{B.3})$$

Insertando los elementos de matriz (B.2,B.3) en la expresión de la matriz S (B.1) podemos integrar la coordenada temporal

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= \langle f|S^{(1)}|\gamma i\rangle = -ie \int d^4x e^{i(E_f - E_i - \omega)t} A^\mu(\mathbf{x}) j_\mu(\mathbf{x})_{fi} \\ &= -2\pi i \delta(E_f - E_i - \omega) e \int d^3x A^\mu(\mathbf{x}) j_\mu(\mathbf{x})_{fi}. \end{aligned}$$

En este apéndice sólo estamos interesados en operadores de corriente vectoriales, con $j_0 = 0$. En este caso, la ecuación anterior se escribe:

$$S_{fi}^{(1)} = 2\pi i \delta(E_f - E_i - \omega) e \int d^3x \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})_{fi}. \quad (\text{B.4})$$

B.2 Interacción entre piones y nucleones no relativistas

En esta sección vamos a obtener un hamiltoniano de interacción entre nucleones no relativistas y piones, partiendo del hamiltoniano de interacción pseudo-escalar:

$$\mathcal{H}_{\pi NN}(x) = ig \bar{\psi}(x) \gamma^5 \tau_i \phi_i(x) \psi(x), \quad (\text{B.5})$$

donde ψ es el campo de Dirac relativista del nucleón, incluyendo isospín, ϕ_i son los tres campos de pión y τ_i son las matrices de Pauli que operan sobre el isospín del nucleón.

Para encontrar el límite de nucleones no relativistas debemos desarrollar el producto genérico $\bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^5 u(\mathbf{p})$. Si consideramos el resultado.

$$\begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \gamma_0 \gamma^5 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a'b - b'a$$

y usamos un espinor de la forma

$$u(\mathbf{p}) = \left(\frac{E + M}{2M} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + M} \chi \end{pmatrix},$$

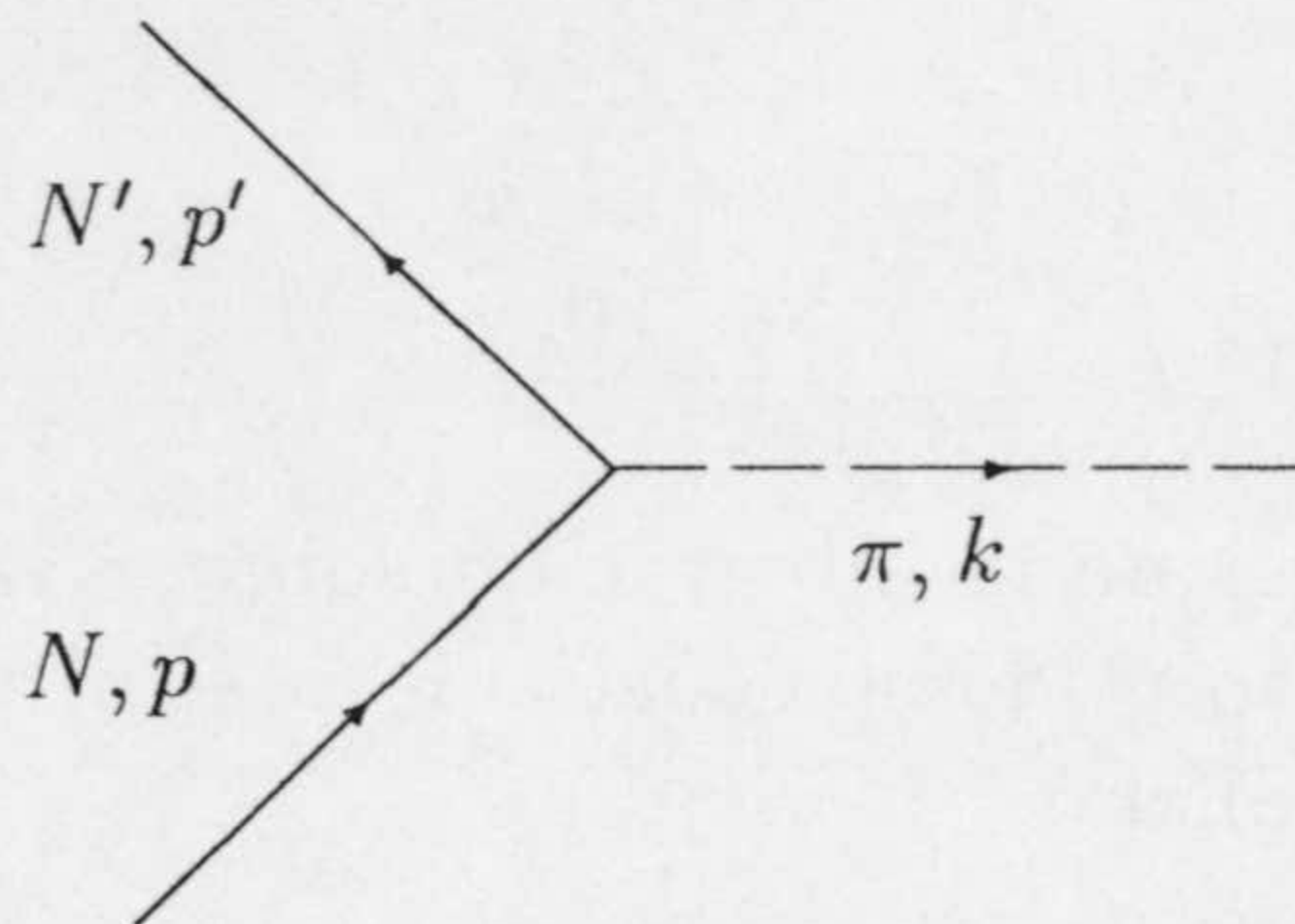
donde χ incluye vectores de espín e isospín de dos componentes, llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_5 u(\mathbf{p}) &= \left(\frac{E' + M}{2M} \frac{E + M}{2M} \right)^{1/2} \left(\chi'^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + M} \chi - \chi'^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{E' + M} \chi \right) \\ &= \left(\frac{E' + M}{2M} \frac{E + M}{2M} \right)^{1/2} \chi'^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\frac{\mathbf{p}}{E + M} - \frac{\mathbf{p}'}{E' + M} \right) \chi. \end{aligned}$$

En el límite no relativista $E \simeq E' \simeq M$, de donde nos queda, finalmente

$$\bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_5 u(\mathbf{p}) \simeq \chi'^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{2M} \chi. \quad (\text{B.6})$$

Nuestra intención es aplicar esta aproximación al proceso elemental de emisión de un pión $N \rightarrow N + \pi$



en donde los nucleones inicial N y final N' tienen momentos p y p' , respectivamente, y el pión π emitido tiene momento k . El elemento de matriz S correspondiente a este diagrama viene dado, en primer orden de teoría de perturbaciones, por

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= \langle N', \pi | -i \int d^4x \mathcal{H}_{\pi NN}(x) | N \rangle \\ &= g \int d^4x \langle N' | \bar{\psi}(x) \gamma^5 \tau_i \psi(x) | N \rangle \langle \pi | \phi_i(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

en donde hemos considerado (B.5). Para calcular estos elementos de matriz usaremos los siguientes desarrollos de los campos del nucleón y del pión:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\mathbf{p}r} \sqrt{\frac{M}{VE_{\mathbf{p}}}} [c_{\mathbf{p}r} u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_{\mathbf{p}r}^\dagger v_r(\mathbf{p}) e^{ipx}] \\ \phi(x) &= \sum_{\mathbf{k}j} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} [b_{\mathbf{k}j} e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}j}^\dagger e^{ikx}] \xi_j, \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores V es el volumen de normalización, los espinores u_r y v_r incluyen también a los vectores de isospín con dos componentes, $c_{\mathbf{p}r}$ y $d_{\mathbf{p}r}^\dagger$ son, respectivamente, operadores de destrucción de un nucleón y de creación de un antinucleón, $E_{\mathbf{p}}$ y $\omega_{\mathbf{k}}$ son las energías del nucleón y del pión, ξ_j ($j = 1, 2, 3$) son los isovectores de polarización del pión y, por último, $b_{\mathbf{k}j}^\dagger$ y $b_{\mathbf{k}j}$ son los operadores de creación y destrucción del pión.

Teniendo en cuenta que los estados inicial y final del proceso en consideración están dados por $|N\rangle = c_{\mathbf{p}r}^\dagger |0\rangle$, $|N'\rangle = c_{\mathbf{p}'r'}^\dagger |0\rangle$, $|\pi\rangle = b_{\mathbf{k}\zeta}^\dagger |0\rangle$, donde $\zeta = \sum \zeta_j \xi_j$ representa el isovector de polarización del pión emitido, que es una combinación lineal de los ξ_j , los elementos de matriz básicos que necesitamos pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \langle \pi | \phi_i(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \zeta_i e^{ikx} \\ \langle N' | \bar{\psi}(x) \gamma^5 \tau_i \psi(x) | N \rangle &= \frac{M}{V \sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}}} \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') \gamma^5 \tau_i u_r(\mathbf{p}) e^{ip'x} e^{-ipx} \\ &\simeq \frac{1}{V} \chi'^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{2M} \tau_i \chi e^{ip'x} e^{-ipx}, \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado (B.6) y que $E_{\mathbf{p}} \simeq E_{\mathbf{p}'} \simeq M$ en nuestra aproximación no relativista para los nucleones. Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, el elemento

de matriz S (B.7) resulta

$$S_{fi}^{(1)} = \frac{g}{2MV} \int d^4x \chi'^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tau_i \chi e^{ip'x} e^{-ipx} \frac{\zeta_i}{\sqrt{2V\omega_k}} e^{ikx}.$$

Notemos ahora que, después de la integración sobre x , va a aparecer una delta de Dirac $\delta(k + p' - p)$ y por lo tanto podemos sustituir $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ por \mathbf{k} . Utilizando asimismo que $\mathbf{k}e^{ikx} = i\nabla e^{ikx}$, podemos poner:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= i \frac{g}{2MV} \int d^4x \chi'^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \left(\frac{\zeta_i}{\sqrt{2V\omega_k}} e^{ikx} \right) \tau_i \chi e^{ip'x} e^{-ipx} \\ &= \langle N', \pi | -i \int d^4x \mathcal{H}_{\pi NN}^0(x) | N \rangle, \end{aligned}$$

en donde hemos introducido un hamiltoniano efectivo

$$\mathcal{H}_{\pi NN}^0(x) = -\frac{g}{2M} \varphi^{\dagger}(x) [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla, \tau_i \phi_i(x)] \varphi(x) \quad (\text{B.8})$$

que contiene el campo del nucleón definido en términos de componentes de energía positiva y con espinores no relativistas:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}st} \chi_{st} a_{\mathbf{p}st} e^{-ipx} \quad (\text{B.9})$$

Aquí χ_{st} se refiere a los vectores de polarización de espín e isospín, ambos con dos componentes y $a_{\mathbf{p}st}$ es el operador destrucción de un nucleón (no relativista) con momento \mathbf{p} , y terceras componentes de espín s e isospín t . La ecuación (B.8) puede también obtenerse usando un hamiltoniano con acoplamiento pseudo-derivativo. con constante de acoplamiento f_{π} . La relación entre ésta y la constante g de la ecuación (B.8) viene dada por

$$\frac{g}{2M} = \frac{f_{\pi}}{\mu}$$

en donde μ es la masa del pión. A menudo también se define otra constante f , mediante

$$f = \frac{f_{\pi}}{\sqrt{4\pi}},$$

cuyo valor es $f = 0.079$.

B.3 Introducción del campo electromagnético

El siguiente paso es introducir un campo electromagnético en el hamiltoniano (B.8). El procedimiento usual es utilizar el acoplamiento mínimo $\nabla \rightarrow \nabla - iq\mathbf{A}$ cuando la partícula sobre la que opera ∇ tiene carga q . En el caso de que la partícula en cuestión sea un pión es necesario poner cierto cuidado, puesto que tiene tres estados de carga y el acoplamiento debe hacerse separadamente para cada uno de ellos.

Comenzamos desarrollando el producto escalar entre las matrices de isospín y los campos del pión en función de las componentes esféricas (que tienen carga definida) ϕ_- , ϕ_0 y ϕ_+ de éste.

$$\tau_i \phi_i = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 & \sqrt{2}\phi_+ \\ \sqrt{2}\phi_- & -\phi_0 \end{pmatrix},$$

Escribamos ahora explícitamente la estructura de isospín de un nucleón poniendo su función de onda en forma de un vector de dos componentes, la primera de las cuales corresponde a la parte de protón y la segunda a la de neutrón,

$$\varphi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix},$$

y desarrollemos la parte de isospín del hamiltoniano (B.8). Para simplificar la escritura de las siguientes ecuaciones, en lugar del conmutador $[\nabla, \tau_i \phi_i]$ escribiremos $\nabla \tau_i \phi_i$, entendiendo que ∇ sólo opera sobre el pión ϕ_i . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi^\dagger \nabla \phi_i \tau_i \varphi &= \begin{pmatrix} p^* & n^* \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \phi_0 & \sqrt{2}\phi_+ \\ \sqrt{2}\phi_- & -\phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \\ &= p^* \nabla (\phi_0 p + \sqrt{2}\phi_+ n) + n^* \nabla (\sqrt{2}\phi_- p - \phi_0 n), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

A continuación se introduce el acoplamiento mínimo.

$$\nabla \phi_0 \rightarrow \nabla \phi_0 \quad (\text{B.11a})$$

$$\nabla \phi_+ \rightarrow (\nabla - ie\mathbf{A})\phi_+ \quad (\text{B.11b})$$

$$\nabla \phi_- \rightarrow (\nabla + ie\mathbf{A})\phi_- \quad (\text{B.11c})$$

con lo que aparece un nuevo término en (B.10), que contiene al campo electromagnético, y que está dado por

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}ie\mathbf{A}(p^* \phi_+ n - n^* \phi_- p) &= -\sqrt{2}ie\mathbf{A} \varphi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & \phi_+ \\ -\phi_- & 0 \end{pmatrix} \varphi \\ &= -ie\mathbf{A} \varphi^\dagger \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \phi_1 + i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \phi_2 \right] \varphi \\ &= -ie\mathbf{A} \varphi^\dagger i(\tau_2 \phi_1 - \tau_1 \phi_2) \varphi \quad (\text{B.12}) \\ &= -e\mathbf{A} \varphi^\dagger (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\phi})_z \varphi. \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

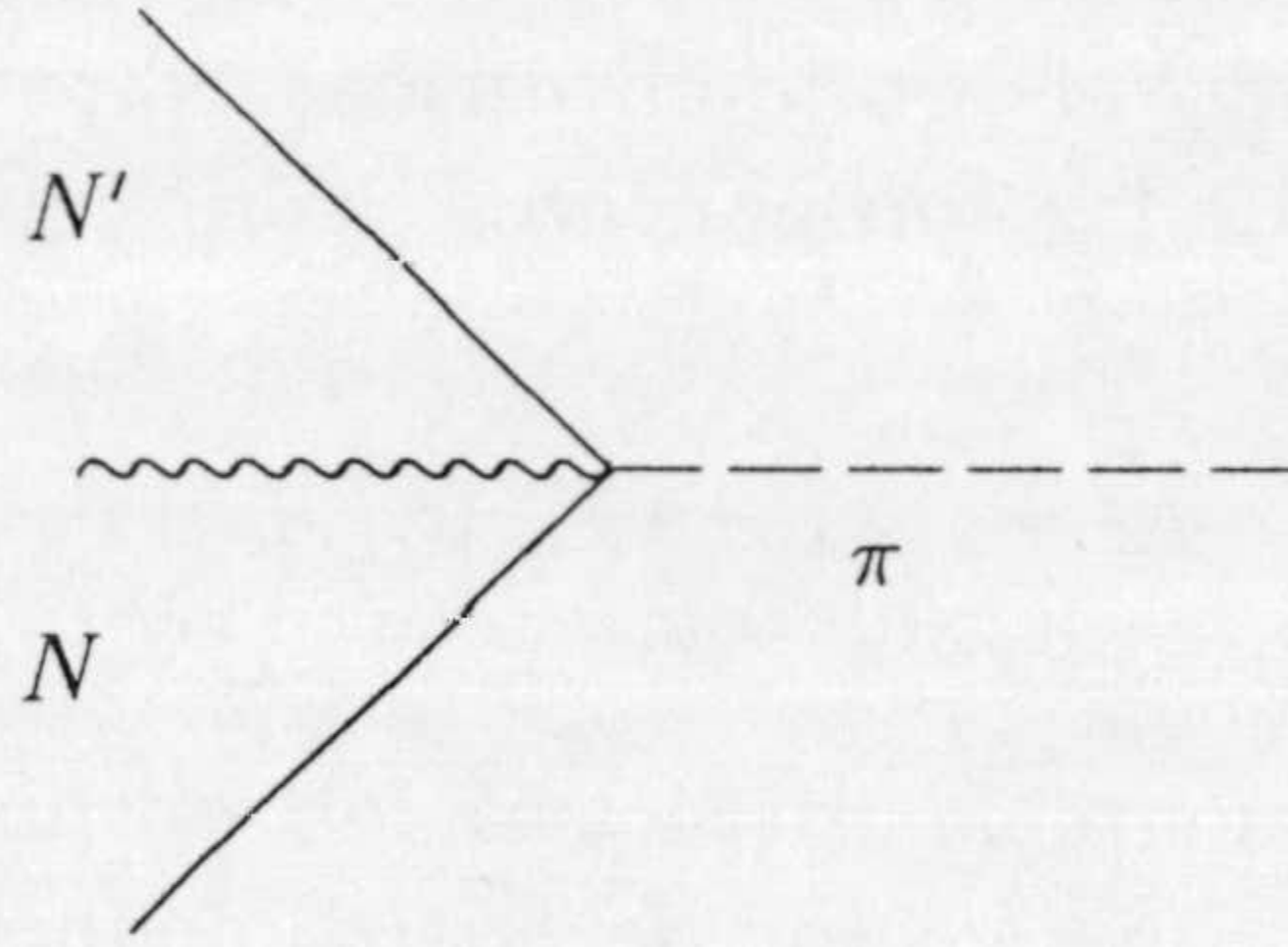
Puede comprobarse fácilmente que llegamos al mismo resultado si se usa el operador de carga del nucleón $Q = (1 + \tau_3)/2$ y se introduce el acoplamiento mínimo *generalizado*

$$\nabla \rightarrow \nabla - ieQ\mathbf{A},$$

que, en realidad, es válido sólo cuando el pión está dentro de un conmutador, es decir, la fórmula correcta es

$$[\nabla, \cdot] \rightarrow [\nabla - ieQ\mathbf{A}, \cdot].$$

Tras este acoplamiento mínimo ha aparecido un nuevo término en el hamiltoniano (B.8), que corresponde al vértice de interacción seagull:



y cuya expresión se obtiene a partir de (B.13):

$$\mathcal{H}_{\pi NN\gamma} = e \frac{f_\pi}{\mu} \varphi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\phi})_z \varphi. \quad (\text{B.14})$$

B.4 Corriente seagull

Para calcular la expresión correcta de la corriente seagull consideremos el proceso de intercambio de un pión entre dos nucleones, inducido por foto-absorción $\gamma + N + N \rightarrow N + N$, tal y como se muestra en la figura B.1.

El método que vamos a seguir consiste en calcular el elemento de matriz S correspondiente a este proceso y escribirlo en forma similar a la ecuación (B.4), de forma que podamos extraer, por inspección, la corriente seagull. El hamiltoniano de interacción necesario para este proceso es

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_{\pi NN}^0 + \mathcal{H}_{\pi NN\gamma},$$

con lo que el elemento de matriz S , en segundo orden perturbativo, puede escribirse como

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle N'_1 N'_2 | -\frac{1}{2!} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 T \{ N[\mathcal{H}_{\pi NN}^0(x_1)] N[\mathcal{H}_{\pi NN\gamma}(x_2)] \\ &\quad + N[\mathcal{H}_{\pi NN\gamma}(x_1)] N[\mathcal{H}_{\pi NN}^0(x_2)] \} | N_1 N_2 \gamma \rangle \\ &= \langle N'_1 N'_2 | \frac{e f_\pi^2}{2 \mu^2} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \{ N[(\varphi^\dagger \boldsymbol{\tau}_i \nabla \phi_i \varphi)_{x_1} (\varphi^\dagger \mathbf{A}(\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\phi})_z \varphi)_{x_2}] + \\ &\quad N[(\varphi^\dagger \mathbf{A}(\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\phi})_z \varphi)_{x_1} (\varphi^\dagger \boldsymbol{\tau}_i \nabla \phi_i \varphi)_{x_2}] \} | N_1 N_2 \gamma \rangle \\ &= \langle N'_1 N'_2 | e \frac{f_\pi^2}{\mu^2} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 N[(\varphi^\dagger \boldsymbol{\tau}_i \nabla \phi_i \varphi)_{x_1} (\varphi^\dagger \mathbf{A}(\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\phi})_z \varphi)_{x_2}] | N_1 N_2 \gamma \rangle \end{aligned}$$

En donde hemos aplicado el teorema de Wick y hemos tenido en cuenta el hecho de que los dos sumandos son iguales. Esto puede comprobarse cambiando x_1 por x_2 en el segundo término y permutando los dos hamiltonianos dentro del producto normal. No hay cambio de signo porque estamos permutando un número par de operadores fermiónicos y $\phi_i(x_1)\phi_j(x_2) = \phi_j(x_2)\phi_i(x_1)$ por ser el pión un bosón. Además, en las ecuaciones

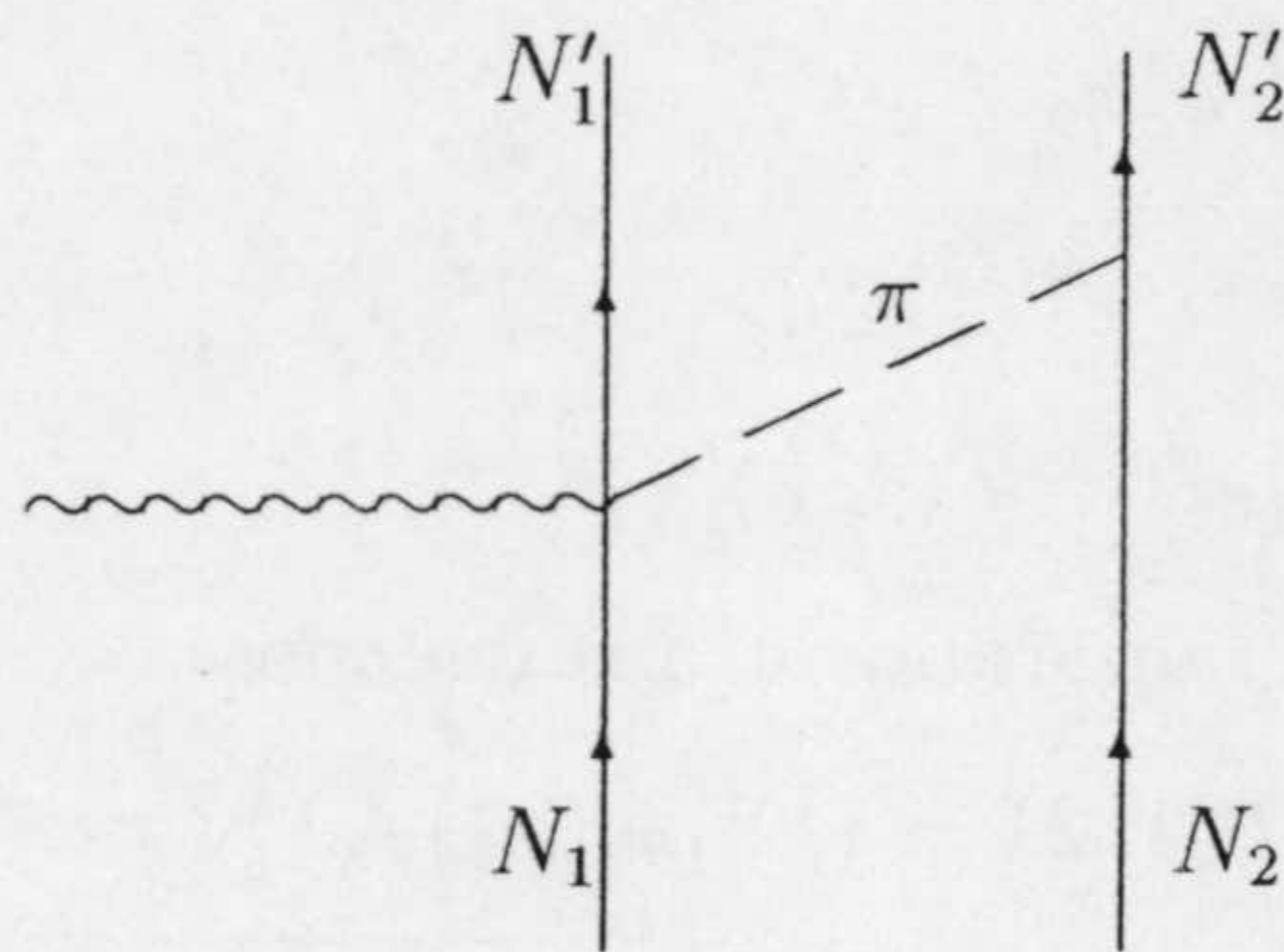


Figura B.1: Diagrama seagull

precedentes hemos usado la notación $\mathcal{A} \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}$ y $\mathcal{V} \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla$, operador que sólo actúa sobre el campo de pión inmediatamente a su derecha.

Pongamos ahora los campos de nucleón en orden normal, permutando $\varphi(x_1)$ y $\varphi^\dagger(x_2)$, con el consiguiente cambio de signo. Se tiene entonces

$$S_{fi} = \langle N'_1 N'_2 | -e \frac{f_\pi^2}{\mu^2} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \varphi^\dagger(x_1) \varphi^\dagger(x_2) \tau_i^1 \mathcal{V}_1 \underbrace{\phi_i(x_1) \mathcal{A}_2(\boldsymbol{\tau}^2 \times \boldsymbol{\phi}(x_2))_z}_{\text{seagull}} \varphi(x_1) \varphi(x_2) | N_1 N_2 \gamma \rangle,$$

en donde τ_i^1 y $\boldsymbol{\tau}^2$ operan, respectivamente, sobre los campos $\varphi(x_1)$ y $\varphi(x_2)$, mientras que $\mathcal{V}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla_1$ y $\mathcal{A}_2 = \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{A}(x_2)$, con $\boldsymbol{\sigma}_1$ y $\boldsymbol{\sigma}_2$ actuando sobre los campos $\varphi(x_1)$ y $\varphi(x_2)$ y ∇_1 es el gradiente respecto a las coordenadas \mathbf{x}_1 del pión.

El elemento de matriz correspondiente al fotón lo escribiremos en la forma

$$\langle 0 | \mathbf{A}(x_2) | \gamma \rangle = \mathbf{A}(x_2) e^{-i\omega t_2} \equiv \mathbf{A}(x_2). \quad (\text{B.15})$$

Para evaluar el elemento de matriz entre nucleones, escribamos los estados correspondientes a los nucleones iniciales y finales en la forma

$$\begin{aligned} |N_i\rangle &= a_i^\dagger |0\rangle \\ |N'_i\rangle &= a_{i'}^\dagger |0\rangle, \end{aligned}$$

con $i = 1, 2$ y donde a_i^\dagger crea un nucleón con momento p_i y espín-isospín χ_i , mientras que $a_{i'}^\dagger$ crea un nucleón con momento $p'_{i'}$ y espín-isospín $\chi'_{i'}$. Introduciendo ahora el desarrollo (B.9) del operador campo del nucleón, se obtiene una suma del tipo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} f_{ijkl} \langle 0 | a_{2'} a_{1'} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle &= \\ &= \sum_{ijkl} f_{ijkl} (\delta_{1'i} \delta_{2'j} - \delta_{2'i} \delta_{1'j}) (\delta_{1l} \delta_{2k} - \delta_{2l} \delta_{1k}) \\ &= f_{1'2'21} - f_{1'2'12} + f_{2'1'12} - f_{2'1'21}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Por lo tanto, el elemento de matriz S puede escribirse en la forma

$$S_{fi} = e^{\frac{f^2}{\mu^2} \frac{1}{V^2} \int d^4x_1 \int d^4x_2} \quad (B.17)$$

$$\left\{ \chi_1^\dagger e^{ip_1' x_1} \otimes \chi_2^\dagger e^{ip_2' x_2} T(1, 2) [\chi_1 e^{-ip_1 x_1} \otimes \chi_2 e^{-ip_2 x_2} - \chi_2 e^{-ip_2 x_1} \otimes \chi_1 e^{-ip_1 x_2}] \right.$$

$$\left. - \chi_2^\dagger e^{ip_2' x_1} \otimes \chi_1^\dagger e^{ip_1' x_2} T(1, 2) [\chi_1 e^{-ip_1 x_1} \otimes \chi_2 e^{-ip_2 x_2} - \chi_2 e^{-ip_2 x_1} \otimes \chi_1 e^{-ip_1 x_2}] \right\},$$

En donde hemos definido el operador a dos cuerpos

$$T(1, 2) = \tau_i^1 \nabla_1 \phi_i(x_1) \underbrace{A_2(\tau^2 \times \phi(x_2))}_z.$$

La contracción de pión que aquí aparece es el propagador de Feynman:

$$\underbrace{\phi_i(x_1) \phi_j(x_2)} = i\delta_{ij} \Delta_F(x_1 - x_2) = i\delta_{ij} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2 - \mu^2}. \quad (B.18)$$

con lo que la parte de isospín del operador $T(1, 2)$ se evalúa fácilmente:

$$\begin{aligned} \tau_i^1 \underbrace{\phi_i(x_1) (\tau^2 \times \phi(x_2))}_z &= \tau_i^1 \phi_i(x_1) \underbrace{\varepsilon_{3jk} \tau_j^2 \phi_k(x_2)} \\ &= i\varepsilon_{3ji} \tau_i^1 \tau_j^2 \Delta_F(x_1 - x_2) \\ &= -i(\tau^1 \times \tau^2)_z \Delta_F(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

El resultado final para $T(1, 2)$ es

$$T(1, 2) = -i(\tau^1 \times \tau^2)_z \nabla_1 \Delta_F(x_1 - x_2) A_2$$

A continuación transformamos el segundo sumando de la ecuación (B.17) intercambiando las variables x_1 y x_2 , así como el orden de los vectores de espín e isospín $\chi_1 \otimes \chi_2 \leftrightarrow \chi_2 \otimes \chi_1$, $\chi_2' \otimes \chi_1' \leftrightarrow \chi_1' \otimes \chi_2'$ y el de los respectivos operadores $\sigma_1, \tau^1 \leftrightarrow \sigma_2, \tau^2$. Mediante este procedimiento obtenemos

$$\begin{aligned} S_{fi} &= e^{\frac{f^2}{\mu^2} \frac{1}{V^2} \int d^4x_1 \int d^4x_2} \left\{ \chi_1^\dagger e^{ip_1' x_1} \otimes \chi_2^\dagger e^{ip_2' x_2} \right. \\ &\quad \left. [T(1, 2) + T(2, 1)] [\chi_1 e^{-ip_1 x_1} \otimes \chi_2 e^{-ip_2 x_2} - \chi_2 e^{-ip_2 x_1} \otimes \chi_1 e^{-ip_1 x_2}] \right\} \\ &\equiv S(1, 2) + S(2, 1), \end{aligned}$$

en donde hemos definido $S(i, j)$ como el elemento de matriz del operador $T(i, j)$, $i, j = 1, 2$. Ahora realizamos las integraciones sobre las variables temporales y reconstruimos las funciones de onda del nucleón no relativistas e independientes del tiempo

$$\varphi_n(\mathbf{x}_j) = V^{-1/2} \chi_n e^{i\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x}_j} \quad (B.19)$$

Así, para $S(1, 2)$, y una vez realizadas las integrales temporales directa y de intercambio

$$\begin{aligned} &\int dt_1 dt_2 e^{iE_1' t_1} e^{iE_2' t_2} e^{-i(t_1-t_2)k_0} e^{-i\omega t_2} e^{-iE_1 t_1} e^{-iE_2 t_2} \\ &= (2\pi)^2 \delta(E_1' - k_0 - E_1) \delta(E_1' + E_2' - E_1 - E_2 - \omega) \\ &\int dt_1 dt_2 e^{iE_1' t_1} e^{iE_2' t_2} e^{-i(t_1-t_2)k_0} e^{-i\omega t_2} e^{-iE_2 t_1} e^{-iE_1 t_2} \\ &= (2\pi)^2 \delta(E_1' - k_0 - E_2) \delta(E_1' + E_2' - E_1 - E_2 - \omega), \end{aligned}$$

podemos integrar con respecto a k_0 en el propagador del pión, obteniendo el resultado:

$$S(1,2) = -i(2\pi)\delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2 - \omega)e^{\frac{f_\pi^2}{\mu^2}} \int d^3x_1 d^3x_2 \varphi_{1'}^\dagger(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_{2'}^\dagger(\mathbf{x}_2) (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2)_z \\ \left\{ \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla_1 \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{(E'_1 - E_1)^2 - \mathbf{k}^2 - \mu^2} \right] \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \varphi_1(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_2(\mathbf{x}_2) \right. \\ \left. - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla_1 \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{(E'_1 - E_2)^2 - \mathbf{k}^2 - \mu^2} \right] \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \varphi_2(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_1(\mathbf{x}_2) \right\}.$$

Análogamente, para $S(2,1)$ se tiene

$$S(2,1) = -i(2\pi)\delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2 - \omega)e^{\frac{f_\pi^2}{\mu^2}} \int d^3x_1 d^3x_2 \varphi_{1'}^\dagger(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_{2'}^\dagger(\mathbf{x}_2) (\boldsymbol{\tau}_2 \times \boldsymbol{\tau}_1)_z \\ \left\{ \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla_2 \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{(E'_2 - E_2)^2 - \mathbf{k}^2 - \mu^2} \right] \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_1) \varphi_1(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_2(\mathbf{x}_2) \right. \\ \left. - \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla_2 \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{(E'_2 - E_1)^2 - \mathbf{k}^2 - \mu^2} \right] \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_1) \varphi_2(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_1(\mathbf{x}_2) \right\}.$$

Con estos resultados, podemos expresar S_{fi} en una forma análoga a (B.4):

$$S_{fi} = S(1,2) + S(2,1) = -i(2\pi)\delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2 - \omega) \left[-e \int d^3x \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}_{fi}^S(\mathbf{x}) \right],$$

con el elemento de matriz de la corriente seagull dado por

$$\mathbf{j}_{fi}^S(\mathbf{x}) = \frac{f_\pi^2}{\mu^2} \int d^3x_1 d^3x_2 \varphi_{1'}^\dagger(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_{2'}^\dagger(\mathbf{x}_2) \\ \left\{ \left[(\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla_1 \bar{h}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, E'_1 - E_1) \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \right. \right. \\ \left. \left. + (\boldsymbol{\tau}^2 \times \boldsymbol{\tau}^1)_z \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla_2 \bar{h}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, E'_2 - E_2) \boldsymbol{\sigma}_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \right] \varphi_1(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_2(\mathbf{x}_2) \right. \\ \left. - \left[(\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla_1 \bar{h}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, E'_1 - E_2) \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \right. \right. \\ \left. \left. + (\boldsymbol{\tau}^2 \times \boldsymbol{\tau}^1)_z \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla_2 \bar{h}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, E'_2 - E_1) \boldsymbol{\sigma}_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \right] \varphi_2(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_1(\mathbf{x}_2) \right\},$$

en donde hemos definido la función \bar{h}

$$\bar{h}(\mathbf{x}, E) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2 + \mu^2 - E^2}. \quad (\text{B.20})$$

La expresión anterior del elemento de matriz de la corriente seagull puede escribirse en la forma

$$\mathbf{j}_{fi}^S(\mathbf{x}) = \langle 1'2' | \mathbf{j}^S(\mathbf{x}) | 12 - 21 \rangle$$

con el operador de corriente seagull definido en la forma

$$\mathbf{j}^S(\mathbf{x}) = \frac{f_\pi^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla_1 \bar{h}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, E'_1 - E_1) \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) + (1 \leftrightarrow 2).$$

En realidad esta no es la forma operatorial correcta de \mathbf{j}^S porque depende de las energías inicial y final de los estados involucrados, lo que significa que esta corriente depende del hamiltoniano de los nucleones. Para obtener la expresión correcta aplicaremos el siguiente teorema, fácil de comprobar.

Teorema B.1 Sean T y A dos operadores, α un número y H un hamiltoniano con autovectores $\{|i\rangle\}$, es decir, $H|i\rangle = E_i|i\rangle$. Supongamos que los elementos de matriz de T satisfacen

$$T_{ij} = \frac{A_{ij}}{\alpha - (E_j - E_i)^2} \quad \forall i, j,$$

Entonces T está dado por

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t, \alpha) e^{iHt} A e^{-iHt},$$

con la función f definida mediante

$$f(t, \alpha) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha - \omega^2}.$$

Usando este teorema obtenemos para la corriente seagull

$$\mathbf{j}^S(\mathbf{x}) = \frac{f_\pi^2}{\mu^2} \int dt e^{iH_1 t} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla_1 h(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t) \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) e^{-iH_1 t} + (1 \leftrightarrow 2),$$

en donde h es el propagador del pión dependiente del tiempo cambiado de signo

$$h(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{\mu^2 - k^2} = -\Delta_F(x).$$

Finalmente, y puesto que $h(\mathbf{x}, t)$ es una función par con respecto a todas sus variables, se verifica que

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \nabla_1 h(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \nabla_1 h(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, t) = \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \nabla_1 h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, t) &= -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \nabla h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, t), \end{aligned}$$

con lo que el resultado final para la corriente seagull es:

$$\mathbf{j}^S(\mathbf{x}) = -\frac{f_\pi^2}{\mu^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \int dt e^{iH_1 t} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, t) \boldsymbol{\sigma}_2 e^{-iH_1 t} + (1 \leftrightarrow 2).$$

B.5 Interacción pión-fotón

La interacción de un pión con un campo electromagnético se obtiene a partir del hamiltoniano del pión libre, que de forma unificada para incluir sus tres estados de carga, se escribe:

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}_+ \dot{\phi}_- + \nabla \phi_+ \cdot \nabla \phi_- + \mu^2 \phi_+ \phi_- + \frac{1}{2} \dot{\phi}_0^2 + (\nabla \phi_0)^2 + \mu^2 \phi_0^2. \quad (\text{B.21})$$

mediante el acoplamiento mínimo (B.11a)-(B.11c) aparece en el hamiltoniano anterior un término de interacción electromagnética dado por:

$$\mathcal{H}_{\pi\pi\gamma} = -ie\mathbf{A} \cdot [\phi_+ \nabla \phi_- - (\nabla \phi_+) \phi_-].$$

Escribiendo ϕ_{\pm} en función de sus componentes reales $\phi_{\pm} = (\phi_1 \mp \phi_2)/\sqrt{2}$, tendremos

$$\mathcal{H}_{\pi\pi\gamma} = -ie\mathbf{A} \cdot 2\text{Im}(\phi_+ \nabla \phi_-) = e\mathbf{A} \cdot [\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1],$$

que se puede escribir finalmente en forma vectorial:

$$\mathcal{H}_{\pi\pi\gamma} = e\mathbf{A} \cdot (\vec{\phi} \times \nabla \vec{\phi})_z \quad (\text{B.22})$$

En esta expresión hemos indicado los vectores en el espacio de isospín con una flecha, para distinguirlos de los vectores ordinarios que aparecen en negrita. Hacemos esta distinción para enfatizar el hecho de que un vector sólo puede multiplicarse escalar o vectorialmente con otro del mismo tipo y así ahorrar posibles confusiones en la próxima sección. Por ejemplo, en la ecuación anterior \mathbf{A} está multiplicado escalarmente con ∇ .

B.6 Corriente piónica

La corriente piónica corresponde al proceso de la figura B.2. El hamiltoniano de interacción responsable del mismo es

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_{\pi NN}^0 + \mathcal{H}_{\pi\pi\gamma}.$$

La amplitud de dicho proceso está dada por el tercer orden del desarrollo perturbativo de la matriz S :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle N'_1 N'_2 | \frac{(-i)^3}{2} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 x_3 \\ &\quad \times T \{ N[\mathcal{H}_{\pi NN}^0(x_1)] N[\mathcal{H}_{\pi NN}^0(x_2)] N[\mathcal{H}_{\pi\pi\gamma}(x_3)] \} | N_1 N_2 \gamma \rangle \\ &= \langle N'_1 N'_2 | i \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 x_3 \\ &\quad N \left[\underbrace{\left(-\frac{f_\pi}{\mu} \varphi^+ \vec{\tau} \cdot \nabla \vec{\phi} \varphi \right)_{x_1} \left(-\frac{f_\pi}{\mu} \varphi^+ \vec{\tau} \cdot \nabla \vec{\phi} \varphi \right)_{x_2} \left(e\mathbf{A} \cdot (\vec{\phi} \times \nabla \vec{\phi})_z \right)_{x_3}} \right] | N_1 N_2 \gamma \rangle \\ &= -ie \frac{f_\pi^2}{\mu^2} \langle N'_1 N'_2 | \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 x_3 \\ &\quad \varphi^+(x_1) \varphi^+(x_2) \nabla_1 \nabla_2 \mathbf{A}(x_3) \cdot \underbrace{[\vec{\tau}^1 \cdot \vec{\phi}(x_1) \vec{\tau}^2 \cdot \vec{\phi}(x_2) (\vec{\phi}(x_3) \times \nabla_3 \vec{\phi}(x_3))_z]} \varphi(x_1) \varphi(x_2) | N_1 N_2 \gamma \rangle \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores los gradientes actúan sólo sobre los campos de pión. La parte que contiene el isospín y la contracción de piones se evalúa usando de nuevo (B.18):

$$\begin{aligned} &\underbrace{\vec{\tau}^1 \cdot \vec{\phi}(x_1) \vec{\tau}^2 \cdot \vec{\phi}(x_2) (\vec{\phi}(x_3) \times \nabla_3 \vec{\phi}(x_3))_z} \\ &= -[\vec{\tau}^1 \times \vec{\tau}^2]_z \Delta_F(x_1 - x_3) \nabla_3 \Delta_F(x_2 - x_3), \end{aligned}$$

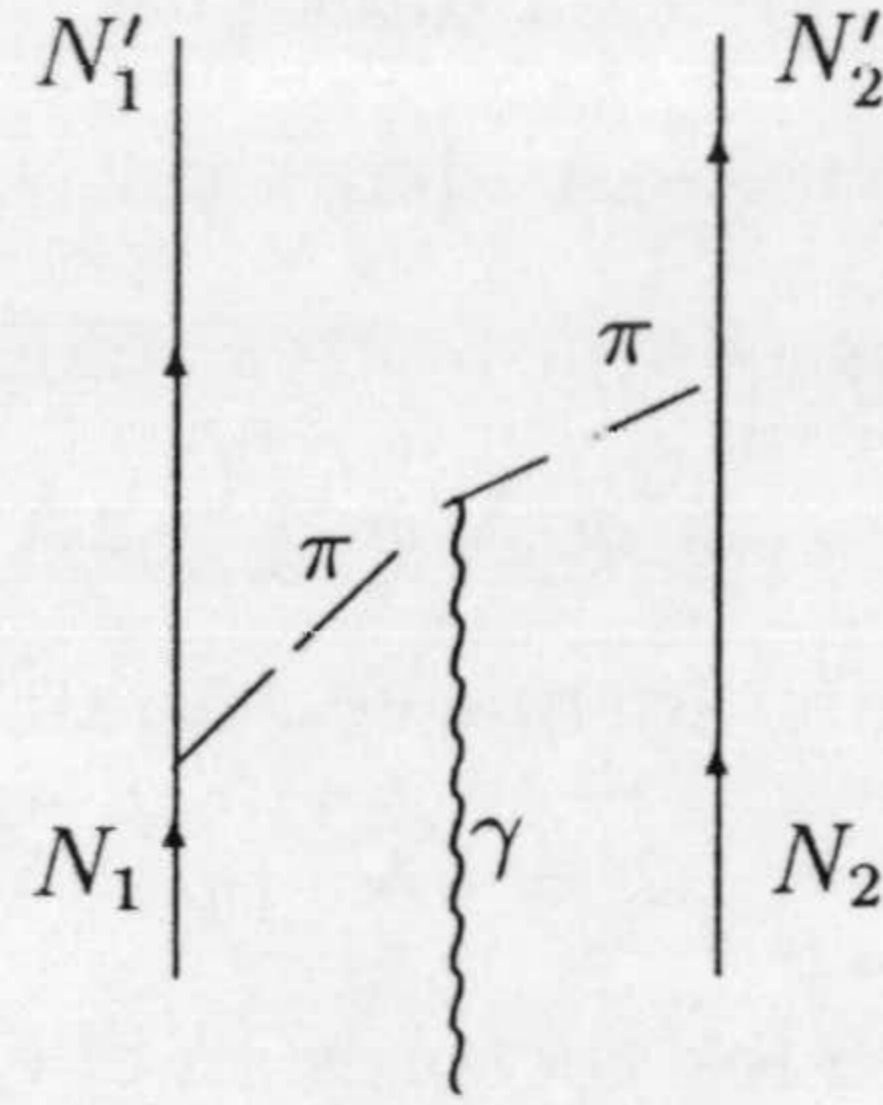


Figura B.2: Diagrama piónico.

por lo que, el elemento de matriz S se escribe como:

$$S_{fi} = ie \frac{f_\pi^2}{\mu^2} \langle N'_1 N'_2 | \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 x_3 \varphi^+(x_1) \varphi^+(x_2) [\vec{\tau}^1 \times \vec{\tau}^2]_z \not{\nabla}_1 [\Delta_F(x_1 - x_3)] \mathbf{A}(x_3) \cdot \nabla_3 \not{\nabla}_2 [\Delta_F(x_2 - x_3)] \varphi(x_1) \varphi(x_2) | N_1 N_2 \gamma \rangle.$$

Usando (B.15) y desarrollando los elementos de matriz entre nucleones igual que en (B.16), esta expresión se puede escribir en la forma

$$S_{fi} = ie \frac{f_\pi^2}{\mu^2} \frac{1}{V^2} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 x e^{-i\omega t} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \left\{ \chi_1^\dagger e^{ip_1 x_1} \otimes \chi_2^\dagger e^{ip_2 x_2} \right. \\ \left. \times \mathbf{T}(x_1, x_2; x) [\chi_1 e^{-ip_1 x_1} \otimes \chi_2 e^{-ip_2 x_2} - \chi_2 e^{-ip_2 x_1} \otimes \chi_1 e^{-ip_1 x_2}] \right\}, \quad (\text{B.23})$$

$$(\text{B.24})$$

en donde hemos definido

$$\mathbf{T}(x_1, x_2; x) = [\vec{\tau}^1 \times \vec{\tau}^2]_z \not{\nabla}_1 \Delta_F(x_1 - x) \overleftrightarrow{\nabla} \not{\nabla}_2 \Delta_F(x_2 - x). \quad (\text{B.25})$$

Introduciendo en esta ecuación la expresión (B.18) en los dos propagadores de pión, asignándoles los cuadrimomentos $k_1 = (\omega_1, \mathbf{k}_1)$ y $k_2 = (\omega_2, \mathbf{k}_2)$, respectivamente, podemos realizar las tres integrales temporales de (B.23):

$$\int dt_1 dt_2 dt e^{i[E'_1 t_1 + E'_2 t_2 + \omega_1(t_1 - t) + \omega_2(t_2 - t) - E_2 t_1 - E_1 t_2]} e^{-i\omega t} \\ = (2\pi)^3 \delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2 - \omega) \delta(E'_1 - E_2 + \omega_1) \delta(E'_2 - E_1 + \omega_2) \quad (\text{B.26})$$

$$\int dt_1 dt_2 dt e^{i[E'_1 t_1 + E'_2 t_2 + \omega_1(t_1 - t) + \omega_2(t_2 - t) - E_1 t_1 - E_2 t_2]} e^{-i\omega t} \\ = (2\pi)^3 \delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2 - \omega) \delta(E'_1 - E_1 + \omega_1) \delta(E'_2 - E_2 + \omega_2), \quad (\text{B.27})$$

Por último, también podemos integrar sobre las energías ω_1 y ω_2 de los dos piones, obteniéndose

$$S_{fi} = -2\pi i \delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2 - \omega) \left[-e \int d^3 x \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}_{fi}^\pi(\mathbf{x}) \right], \quad (\text{B.28})$$

con la corriente de transición piónica \mathbf{j}_{fi}^π dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{fi}^\pi &= -\frac{f_\pi^2}{\mu^2} \int d^3x_1 d^3x_2 \varphi_{1'}(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_{2'}(\mathbf{x}_2) [\vec{\tau}^1 \times \vec{\tau}^2]_z \\ &\quad \left\{ \nabla_1 \bar{h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, E'_1 - E_1) \overleftrightarrow{\nabla} \nabla_2 \bar{h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2, E'_2 - E_2) \varphi_1(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_2(\mathbf{x}_2) \right. \\ &\quad \left. - \nabla_1 \bar{h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, E'_1 - E_2) \overleftrightarrow{\nabla} \nabla_2 \bar{h}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2, E'_2 - E_1) \varphi_2(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi_1(\mathbf{x}_2) \right\} \\ &= \langle 1'2' | \mathbf{j}^\pi(\mathbf{x}) | 12 - 21 \rangle, \end{aligned}$$

en donde hemos usado (B.20) y (B.19) y hemos introducido el operador de la corriente piónica \mathbf{j}^π que, con la ayuda del teorema B.1 aplicado dos veces, puede escribirse, finalmente, en la forma integral:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^\pi(\mathbf{x}) &= -\frac{f_\pi^2}{\mu^2} \int dt_1 dt_2 e^{iH_1 t_1} e^{iH_2 t_2} [\vec{\tau}^1 \times \vec{\tau}^2]_z \\ &\quad \sigma_1 \cdot \nabla_1 h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, t_1) \overleftrightarrow{\nabla} \sigma_2 \cdot \nabla_2 h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2, t_2) e^{-iH_1 t_1} e^{-iH_2 t_2}. \quad (\text{B.29}) \end{aligned}$$



Apéndice C

Operadores multipolares de las MEC

Dedicamos este apéndice a la descripción analítica de los operadores multipolares que involucran a las MEC consideradas en este trabajo. La reducción de las expresiones, mediante el álgebra de momento angular, a la forma más simple posible, es una necesidad imprescindible en un cálculo como el que nos ocupa, ya que el mantener en las expresiones muchos coeficientes de reacoplamiento resulta extremadamente costoso en tiempo de computación. La técnica que usamos, y que ha sido utilizada en [Lal84] para el cálculo de los factores de forma magnéticos correspondientes a las corrientes seagull y piónica que aquí utilizamos, es bastante conveniente, ya que presenta una sistemática aplicable a toda una amplia categoría de operadores de transición, y no solamente a los que usamos en este trabajo. Desgraciadamente, las MEC son de naturaleza bastante más complicada que las corrientes a un cuerpo y su desarrollo multipolar conduce a expresiones intermedias de considerable longitud, motivo por el cual no incluimos aquí el cálculo detallado de sus elementos de matriz.

C.1 Elementos de matriz entre estados nucleares

En el capítulo 1 establecimos que, en nuestro modelo de capas extremo, la respuesta cuasielástica nuclear se expresa en términos de los elementos de matriz de transición reducidos entre el estado fundamental y estados del tipo $1p-1h$ y $2p-2h$, de los operadores multipolares, coulombianos para la longitudinal y eléctricos y magnéticos para la transversal. Estos elementos de matriz de transición entre estados de A partículas se expresan a su vez en función de los elementos de matriz básicos entre estados de una partícula, para los operadores a un cuerpo, y de dos partículas para operadores a dos cuerpos. En concreto, si U_{JM} es un operador irreducible a un cuerpo, su elemento de matriz reducido entre el estado fundamental y un estado final a $1p-1h$ está dado por

$$\langle p, h^{-1}; J \| U_J \| 0 \rangle = \langle p \| U_J \| h \rangle, \quad (\text{C.1})$$

mientras que para un operador a dos cuerpos V_{JM}

$$\langle p, h^{-1}; J \| V_J \| 0 \rangle = \sum_{h'} \sum_{J_1 J_2} (-1)^{J_1+J_2+J+1} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J \\ j_h & j_p & j_{h'} \end{matrix} \right\} \langle h' p J_1 \| V_J \| h h' J_2 \rangle_A, \quad (\text{C.2})$$

en donde el subíndice A indica antisimetrización en el sentido siguiente:

$$\langle (j_2 j_2') J_2 \| V_J \| (j_1 j_1') J_1 \rangle_A = \langle (j_2 j_2') J_2 \| V_J \| (j_1 j_1') J_1 \rangle - (-1)^{j_1+j_1'+J_1} \langle (j_2 j_2') J_2 \| V_J \| (j_1' j_1) J_1 \rangle \quad (\text{C.3})$$

Por último, los elementos de matriz de transición a estados $2p-2h$ para el mismo operador a dos cuerpos, se escriben como:

$$\langle (p_1, p_2) J_p, (h_1^{-1}, h_2^{-1}) J_h; J \| V_J \| 0 \rangle = (-1)^{j_{p_1}+j_{p_2}+J_p} \langle p_2 p_1 J_p \| V_J \| h_1 h_2 J_h \rangle_A. \quad (\text{C.4})$$

Por lo tanto, el problema se reduce a calcular los elementos de matriz básicos de los operadores multipolares a uno y dos cuerpos entre estados de una partícula y de dos partículas respectivamente. Como dijimos en el capítulo 2, no vamos a considerar aquí los operadores magnéticos de las corrientes seagull y piónica, cuya descripción detallada puede encontrarse en las referencias [Lal84, Kre86]. Por lo tanto, describiremos solamente los operadores eléctricos de las corrientes seagull, piónica y de isóbaro, así como el magnético de ésta.

El método de obtención de los respectivos elementos de matriz pasa por expresar dichos operadores explícitamente en forma tensorial irreducible.

C.2 Operadores tensoriales básicos

Existe una serie de operadores irreducibles que generan, mediante productos acoplados, el álgebra de los operadores tensoriales locales. En nuestro caso, basta considerar operadores a dos cuerpos del tipo $V_{JM}(\sigma^1, \sigma^2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, que dependen de las matrices de espín de las partículas 1 y 2, así como de sus coordenadas, y no contienen operadores diferenciales. Como mostraremos más adelante, los operadores multipolares asociados a las tres corrientes de intercambio caen dentro de esta categoría.

Los 4 operadores básicos a un cuerpo son

$$1, \sigma_m, Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), [\sigma \otimes Y_l(\hat{\mathbf{r}})]_M^J. \quad (\text{C.5})$$

A partir de estos se generan, mediante productos acoplados, 16 operadores irreducibles básicos a dos cuerpos. De éstos sólo tres van a aparecer en nuestras expresiones, aunque en el caso general de un operador arbitrario, serán necesarios todos. Por su especial importancia es conveniente definir

$$M_{Ll}^i(\hat{\mathbf{r}}_i) = [\sigma^i \otimes Y_l(\hat{\mathbf{r}}_i)]^L \quad (\text{C.6})$$

y que corresponde al cuarto de los operadores básicos (C.5) y en el que el índice i se refiere a la partícula sobre la que actúa, $i = 1, 2$. Usando la definición anterior, los tres

operadores que generan los multipolos eléctricos y magnéticos de las MEC son los que siguen:

$$A(L_1 l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) = \left[M_{L_1 l_1}^1(\hat{\mathbf{r}}_1) \otimes M_{L_2 l_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \right]_M^J \quad (\text{C.7})$$

$$B_1(l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) = \left[Y_{l_1}(\hat{\mathbf{r}}_1) \otimes M_{L_2 l_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \right]_M^J \quad (\text{C.8})$$

$$B_2(L_1 l_1, l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) = \left[M_{L_1 l_1}^1(\hat{\mathbf{r}}_1) \otimes Y_{l_2}(\hat{\mathbf{r}}_2) \right]_M^J \quad (\text{C.9})$$

C.3 Expresiones tensoriales de las corrientes

El primer paso para la descomposición de los operadores multipolares electromagnéticos en combinaciones lineales de los operadores básicos del apartado anterior, consiste en expresar las mismas corrientes de intercambio en forma tensorial, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^S(\mathbf{r}) = & 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \boldsymbol{\sigma}^1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sum_{l_2} \sum_{s_2=\pm 1} (-1)^{l_2} \hat{l}_2 I_{l_2 s_2}(r, r_2) B_2(L_2 l_2, L_2; 00; \hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{r}}) \\ & + (1 \longleftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^\pi(\mathbf{r}) = & -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{kM_k \lambda} \sum_{l_1 l_2} \sum_{s_1 s_2 s'_2=\pm 1} (-1)^{\lambda+M_k} \hat{l}_1 \hat{l}_2 \hat{L}'_2 \hat{\lambda} I_{l_1 s_1}(r, r_1) I_{l_2 s_2 s'_2}(r, r_2) \\ & \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \lambda & k \\ L_1 & L_2 & L'_2 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc} L_1 & \lambda & L'_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) A(L_1 l_1, L_2 l_2; kM_k; \hat{\mathbf{r}}_1 \hat{\mathbf{r}}_2) \mathbf{Y}_{k\lambda}^{-M_k}(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + (1 \longleftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^\Delta(\mathbf{r}) = & C_\Delta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sum_{l_2} \sum_{s_2 s'_2=\pm 1} (-1)^{l_2} \hat{l}_2 I_{l_2 s_2 s'_2}(r, r_2) \\ & \nabla \times \left\{ (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \boldsymbol{\sigma}^1 \times \left[M_{L_2 l_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes \mathbf{Y}_{L_2 l_2}(\hat{\mathbf{r}}) \right]_0^0 - 4\tau_z^2 \left[M_{L_2 l_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes \mathbf{Y}_{L_2 l_2}(\hat{\mathbf{r}}) \right]_0^0 \right\} \\ & + (1 \longleftrightarrow 2), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

en donde el símbolo $(1 \longleftrightarrow 2)$ indica cambiar \mathbf{r}_1 por \mathbf{r}_2 , $\boldsymbol{\sigma}^1$ por $\boldsymbol{\sigma}^2$ y $\boldsymbol{\tau}^1$ por $\boldsymbol{\tau}^2$. En estas expresiones se usan las definiciones de L_i y L'_i ($i = 1, 2$) siguientes:

$$\begin{aligned} L_i &= l_i + s_i \\ L'_i &= L_i + s_i; \end{aligned}$$

además, dado un momento angular L , utilizamos la notación

$$\hat{L} = \sqrt{2L + 1}.$$

Por último, en las corrientes aparecen las siguientes funciones:

$$I_{l_i s_i}(r, r_i) = \frac{1}{\hat{l}_i} (l_i + \delta_{s_i 1})^{1/2} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq q^3 v(q) j_{l_i}(qr_i) j_{L_i}(qr) \quad (\text{C.13})$$

$$I_{l_i s_i s'_i}(r, r_i) = \frac{1}{\hat{l}_i \hat{L}_i} \left[(l_i + \delta_{s_i 1})(L_i + \delta_{s'_i 1}) \right]^{1/2} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq q^4 v(q) j_{l_i}(qr_i) j_{L'_i}(qr), \quad (\text{C.14})$$

y $v(q)$ es el propagador del pion en espacio de momentos (2.11).

Esbozaremos los pasos necesarios para derivar la ecuación (C.12) de la corriente de isóbaro. En primer lugar, notemos que dicha corriente (ec. (1.15)) puede escribirse en forma de un rotacional:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^\Delta(\mathbf{r}) &= \nabla \times \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) &= C_\Delta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \left\{ (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \boldsymbol{\sigma}^1 \times \nabla \left[\boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \right] - 4\tau_z^2 \nabla \left[\boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \right] \right\} \\ &\quad + (1 \longleftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

La expresión (C.12) se obtiene a partir del desarrollo multipolar del propagador del pión. Descompondremos la demostración en cuatro pasos:

1. Desarrollo multipolar de h . En primer lugar, es necesario descomponer el propagador del pión en sus partes radiales y angulares, usando para ello el desarrollo de la onda plana en serie de armónicos esféricos:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(q) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)} \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(q) \sum_{lm} 4\pi i^l j_l(qr) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{q}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \sum_{l'm'} 4\pi i^{l'} j_{l'}(qr_2) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{q}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}}_2). \end{aligned}$$

Integrando ahora sobre los ángulos de \mathbf{q} y usando la ortonormalidad de los armónicos esféricos, se tiene el desarrollo buscado:

$$h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = \sum_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}_2) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq q^2 v(q) j_l(qr) j_l(qr_2). \quad (\text{C.16})$$

2. Desarrollo multipolar de ∇h . Aplicando el operador gradiente sobre los dos miembros de la ecuación anterior y haciendo uso de la fórmula del gradiente [Eis86]:

$$\nabla [j_l(qr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] = \frac{q}{l} \sum_{s=\pm 1} (l + \delta_{s,1})^{1/2} j_L(qr) \mathbf{Y}_{lL}^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{C.17})$$

con $L = l + s$, se obtiene:

$$\nabla h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = \sum_{lm} \sum_{s=\pm 1} I_{ls}(r, r_2) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}_2) \mathbf{Y}_{lL}^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{C.18})$$

en donde hemos hecho uso de la definición (C.13).

3. Expresión tensorial de $\boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h$. Multiplicando la ecuación anterior por $\boldsymbol{\sigma}^2$ y usando la siguiente expresión para el producto escalar entre un vector y un armónico esférico vectorial:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_{lL}^m(\hat{\mathbf{r}}) = [\mathbf{A} \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}})]_m^l, \quad (\text{C.19})$$

se tiene

$$\boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = \sum_{lm} \sum_{s=\pm 1} I_{ls}(r, r_2) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}_2) [\boldsymbol{\sigma}^2 \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}})]_l^m.$$

La suma sobre m se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} \sum_m Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}_2) [\sigma^2 \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}})]_l^m &= (-1)^l \hat{l} \left[Y_l(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes [\sigma^2 \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}})]_l \right]_0 \\ &= (-1)^l \hat{l} \left[[\sigma^2 \otimes Y_l(\hat{\mathbf{r}}_2)]_L \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}}) \right]_0 \\ &= (-1)^l \hat{l} \left[M_{Ll}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}}) \right]_0, \end{aligned}$$

en donde hemos usado la definición (C.6), de forma que finalmente queda:

$$\sigma^2 \cdot \nabla h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = \sum_l \sum_{s=\pm 1} (-1)^l \hat{l} I_{ls}(r, r_2) \left[M_{Ll}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}}) \right]_0. \quad (\text{C.20})$$

4. **Expresión tensorial de $\nabla(\sigma \cdot \nabla h)$.** Usando de nuevo la fórmula del gradiente, ec. (C.17), se tiene

$$\nabla [I_{ls}(r, r_2) Y_{LM}(\hat{\mathbf{r}})] = \sum_{s'=\pm 1} I_{ls s'}(r, r_2) \mathbf{Y}_{LL'}^M(\hat{\mathbf{r}}),$$

con $L' = L + s'$, de manera que el gradiente de (C.20) se puede escribir como:

$$\nabla [\sigma^2 \cdot \nabla h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)] = \sum_l \sum_{s, s'=\pm 1} (-1)^l \hat{l} I_{ls s'}(r, r_2) \left[M_{Ll}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes \mathbf{Y}_{LL'}(\hat{\mathbf{r}}) \right]_0.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (C.15), se obtiene el resultado buscado.

C.4 Operador multipolar eléctrico

En esta sección mostramos que el operador multipolar eléctrico asociado a cada una de las MEC, puede escribirse como combinación lineal de los operadores tensoriales básicos definidos en la sección C.2, cuyos coeficientes son funciones que dependen sólo de las coordenadas radiales y de los coeficientes de acoplamiento. Toda la dependencia angular está incluida, por tanto, en dichos operadores básicos.

En primer lugar, transformemos el operador multipolar eléctrico, ec. (1.5b), usando, para ello, la fórmula del rotacional:

$$\nabla \times [j_l(qr) \mathbf{Y}_{ll}^m(\hat{\mathbf{r}})] = -i \frac{q}{\hat{l}} \sum_{s=\pm 1} (l + \delta_{s,-1})^{1/2} s j_L(qr) \mathbf{Y}_{lL}^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{C.21})$$

con $L = l + s$. De esta forma, el operador eléctrico asociado a la corriente \mathbf{j}^a se escribirá en la forma

$$T_{JM}^{\text{Ea}}(q) = -\frac{i}{\hat{j}} \sum_{s=\pm 1} (J + \delta_{s,-1})^{1/2} s \int d^3r j_{J'}(qr) \mathbf{Y}_{JJ'}^M(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{j}^a(\mathbf{r}), \quad (\text{C.22})$$

con $J' = J + s$.

C.4.1 Operador eléctrico piónico

El operador multipolar eléctrico para la corriente piónica se escribe en función del primer operador básico, que definimos en (C.7):

$$T_{JM}^{E\pi}(q) = -\frac{i}{\hat{J}} \sum_{s=\pm 1} (J + \delta_{s,-1})^{1/2} s S_{JJ'M}^{\pi}(q), \quad (\text{C.23a})$$

$$\begin{aligned} S_{JJ'M}^{\pi}(q) \equiv & 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_3 \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{(-1)^J}{\hat{J}} \sum_{l_1 l_2} \sum_{s_1 s_2 = \pm 1} \hat{l}_1 \hat{l}_2 A(L_1 l_1, L_2 l_2; JM, \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) \\ & \left\{ \xi(L_1 + L_2 + J) (J + \delta_{s,-1})^{1/2} \int_0^{\infty} dr r j_{J'}(qr) I_{l_1 s_1}(r, r_1) I_{l_2 s_2}(r, r_2) \right. \\ & \left[\sqrt{L_2(L_2 + 1)} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \sqrt{L_1(L_1 + 1)} \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ & + s(J + \delta_{s1})^{1/2} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \left. \int_0^{\infty} dr r^2 j_{J'}(qr) \left[I_{l_1 s_1}(r, r_1) \frac{dI_{l_2 s_2}(r, r_2)}{dr} - I_{l_2 s_2}(r, r_2) \frac{dI_{l_1 s_1}(r, r_1)}{dr} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.23b})$$

con $L_i = l_i + s_i$, $J' = J + s$, y se hace uso de la función de paridad $\xi(l)$, cuyo valor es 1 (0) si l es par (impar), o bien, explícitamente,

$$\xi(l) = [1 + (-1)^l]/2. \quad (\text{C.24})$$

Demostremos las expresiones (C.23a, C.23b) para el operador eléctrico piónico. Comencemos sustituyendo la correspondiente corriente (C.11) en el operador eléctrico (C.22) y desarrollando la integral resultante:

$$\begin{aligned} \int d^3 r j_{J'}(qr) \mathbf{Y}_{JJ'}^M(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{j}^{\pi}(\mathbf{r}) &= -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_3 \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{kM_k \lambda} \sum_{l_1 l_2} \sum_{s_1 s_2 s'_2 = \pm 1} (-1)^{\lambda + M_k} \hat{l}_1 \hat{l}_2 \hat{L}'_2 \hat{\lambda} \\ & \left\{ \begin{matrix} 1 & \lambda & k \\ L_1 & L_2 & L'_2 \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} L_1 & \lambda & L'_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A(L_1 l_1, L_2 l_2; kM_k; \hat{\mathbf{r}}_1 \hat{\mathbf{r}}_2) \\ & \int d^3 r j_{J'}(qr) \mathbf{Y}_{JJ'}^M(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{Y}_{k\lambda}^{-M_k}(\hat{\mathbf{r}}) I_{l_1 s_1}(r, r_1) I_{l_2 s_2 s'_2}(r, r_2) \\ & + (1 \longleftrightarrow 2). \end{aligned}$$

Usando la ortonormalidad de los armónicos esféricos vectoriales,

$$\int d\hat{\mathbf{r}} \mathbf{Y}_{J'l'}^{*M'}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{ll'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}, \quad (\text{C.25})$$

podemos eliminar la suma en k, M_k, λ y sustituir éstos por JMJ' . Seguidamente el producto de los símbolos 6- j y 3- j se puede escribir como combinación de dos símbolos 3- j usando la fórmula

$$\left\{ \begin{matrix} L_1 & J' & L'_2 \\ 1 & L_2 & J \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} L_1 & J' & L'_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \xi(J + L_2 + L_1) \frac{1}{\hat{J} \hat{J}' \hat{L}_2 \hat{L}'_2}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ [(L_2 + \delta_{s'_2, -1})(J + \delta_{s, -1})]^{1/2} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. - s'_2 s [(L_2 + \delta_{s'_2, 1})(J + \delta_{s, 1})]^{1/2} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

De esta forma obtenemos la expresión:

$$\begin{aligned} \int d^3 r j_{J'}(qr) Y_{JJ'}^M(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{j}^\pi(\mathbf{r}) &= -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{l_1 l_2} \sum_{s_1 s_2 s'_2 = \pm 1} (-1)^{J+1} \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{J} \hat{L}_2} \\ & \left\{ \xi(L_1 + L_2 + J) [(L_2 + \delta_{s'_2, -1})(J + \delta_{s, -1})]^{1/2} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. - s'_2 s [(L_2 + \delta_{s'_2, 1})(J + \delta_{s, 1})]^{1/2} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ & A(L_1 l_1, L_2 l_2; k M_k; \hat{\mathbf{r}}_1 \hat{\mathbf{r}}_2) \int_0^\infty dr r^2 j_{J'}(qr) I_{l_1 s_1}(r, r_1) I_{l_2 s_2 s'_2}(r, r_2) \\ & + (1 \longleftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Finalmente, utilizando las siguientes relaciones de recurrencia entre funciones de Bessel esféricas:

$$j_{L+1}(qr) + j_{L-1}(qr) = \frac{\hat{L}^2}{qr} j_L(qr) \quad (\text{C.28a})$$

$$\sum_{s=\pm 1} s(L + \delta_{s, 1}) j_{L+s}(qr) = -\frac{\hat{L}^2}{q} \frac{d}{dr} j_L(qr), \quad (\text{C.28b})$$

se realizan las siguientes sumas sobre s'_2 , que involucran a las funciones $I_{l s s'}$ y que se expresan en términos de las $I_{l s}$ y de sus derivadas:

$$\sum_{s'} \sqrt{L + \delta_{s', -1}} I_{l s s'}(r_1, r_2) = \sqrt{L(L+1)} \hat{L} \frac{1}{r_1} I_{l s}(r_1, r_2) \quad (\text{C.29a})$$

$$\sum_{s'} s' \sqrt{L + \delta_{s', 1}} I_{l s s'}(r_1, r_2) = -\hat{L} \frac{d}{dr_1} I_{l s}(r_1, r_2). \quad (\text{C.29b})$$

Sustituyendo en (C.27) y escribiendo explícitamente el término $(1 \longleftrightarrow 2)$, se obtiene el resultado buscado.

C.4.2 Operador eléctrico seagull

En el operador eléctrico para la corriente seagull aparecen ya los otros dos operadores básicos B_1 y B_2 , definidos por las ecuaciones (C.8, C.9). Su expresión es la siguiente:

$$T_{JM}^{\text{ES}}(q) = -\frac{i}{\hat{J}} \sum_{s=\pm 1} (J + \delta_{s, -1})^{1/2} s S_{JJ'M}^{\text{S}}(q), \quad (\text{C.30a})$$

$$S_{JJ'M}^{\text{S}}(q) = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{(-1)^J}{\hat{J}} j_{J'}(qr_1) \sum_{l_1 l_2} \sum_{s_2 = \pm 1} \xi(l_1 + l_2 + J) \hat{l}_2 I_{l_2 s_2}(r_1, r_2)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{s_1=\pm 1} \left[[(J + \delta_{s,-1})(L_1 + \delta_{s_1 1})]^{1/2} \begin{pmatrix} J & L_1 & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \right. \\
& + s s_1 [(J + \delta_{s_1})(L_1 + \delta_{s_1,-1})]^{1/2} \begin{pmatrix} J & L_1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left. \right] A(L_1 l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) \\
& + (J + \delta_{s,-1})^{1/2} \hat{l}_1 \begin{pmatrix} J & l_1 & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} B_1(l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) \left. \right\} \\
& + (1 \longleftrightarrow 2) \tag{C.30b}
\end{aligned}$$

Para obtener esta expresión, sustituyamos la corriente (C.10) en el operador eléctrico (C.22). Obtenemos entonces la siguiente integral

$$\begin{aligned}
S_{JJ'M}^S(q) &= \int d^3 r j_{J'}(qr) \mathbf{Y}_{JJ'}^M(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{j}^S(\mathbf{r}) \\
&= 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \int d^3 r j_{J'}(qr) \mathbf{Y}_{JJ'}^M(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \\
&\quad \sum_{l_2} \sum_{s_2=\pm 1} (-1)^{l_2} \hat{l}_2 I_{l_2 s_2}(r, r_2) B_2(L_2 l_2, L_2; 00; \hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{r}}) \\
&\quad + (1 \longleftrightarrow 2). \tag{C.31}
\end{aligned}$$

En esta expresión aparece el producto escalar entre una matriz de espín y un armónico esférico vectorial, puede escribirse en forma tensorial usando (C.19). La parte angular y de espín se puede reacomodar entonces usando la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Y}_{JJ'}^M(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^1 B_2(L_2 l_2, L_2; 00; \hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{r}}) \\
&= [\boldsymbol{\sigma}^1 \otimes Y_{J'}(\hat{\mathbf{r}}_1)]_J^M \otimes [(\boldsymbol{\sigma}^2 \otimes Y_{l_2}(\hat{\mathbf{r}}_2))_{L_2} \otimes Y_{L_2}(\hat{\mathbf{r}}_2)]_0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\lambda l_1} (-1)^{J+L_2+\lambda} \frac{\hat{\lambda} \hat{l}_1}{\hat{J}} \\
&\quad \cdot \left\{ \sqrt{2} \xi(L_2 + l_1 + J + 1) (J + \delta_{s,-1})^{1/2} \begin{pmatrix} J & \lambda & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & l_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - s (J + \delta_{s_1})^{1/2} \begin{pmatrix} J & \lambda & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&\quad [(\boldsymbol{\sigma}^1 \otimes Y_{l_1}(\hat{\mathbf{r}}_1))_\lambda \otimes (\boldsymbol{\sigma}^2 \otimes Y_{l_2}(\hat{\mathbf{r}}_2))_{L_2}]_J^M \tag{C.32}
\end{aligned}$$

y es, por tanto, combinación lineal de los $A(\lambda l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2)$, ec. (C.7). Sustituyendo en (C.31) y realizando la integral sobre $d^3 r$ con ayuda de la delta de Dirac, tendremos:

$$\begin{aligned}
S_{JJ'M}^{SG}(q) &= 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\hat{J}} j_{J'}(qr_1) \sum_{\lambda l_1 l_2} \sum_{s_2=\pm 1} (-1)^{l_1+l_2+\lambda+1} \hat{l}_1 \hat{l}_2 \hat{\lambda} I_{l_2 s_2}((r, r_2) \\
&\quad \left\{ \sqrt{2} \xi(L_2 + l_1 + J + 1) (J + \delta_{s,-1})^{1/2} \begin{pmatrix} J & \lambda & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & l_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - s (J + \delta_{s_1})^{1/2} \begin{pmatrix} J & \lambda & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&\quad A(\lambda l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2). \tag{C.33}
\end{aligned}$$

Para finalizar, se efectúan las sumas sobre λ usando las expresiones:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} \hat{\lambda} \begin{pmatrix} J & \lambda & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & l_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} [\sigma \otimes Y_{l_1}]_{\lambda} = \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\hat{l}_1} \left\{ \sum_{s_1=\pm 1} (L_1 + \delta_{s_1,1})^{1/2} \begin{pmatrix} J & L_1 & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} [\sigma \otimes Y_{l_1}]_{L_1} \right. \\ \left. + \hat{l}_1 \begin{pmatrix} J & l_1 & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} [\sigma \otimes Y_{l_1}]_{l_1} \right\} \end{aligned} \quad (C.34)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} \hat{\lambda} \begin{pmatrix} J & \lambda & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [\sigma \otimes Y_{l_1}]_{\lambda} = \\ \frac{1}{\hat{l}_1} \sum_{s_1=\pm 1} s_1 (L_1 + \delta_{s_1,-1})^{1/2} \begin{pmatrix} J & L_1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [\sigma \otimes Y_{l_1}]_{L_1}. \end{aligned} \quad (C.35)$$

Sustituyendo en (C.33), y usando (C.7) y (C.8), se obtiene el resultado buscado.

C.4.3 Operador eléctrico de isóbaro

La analogía formal que existe entre las corrientes seagull y de isóbaro, conduce a que el operador eléctrico de ésta última también contenga, como la anterior, los tres operadores tensoriales básicos A , B_1 y B_2 en su expresión tensorial final, aunque las funciones radiales componentes en el desarrollo son algo más complicadas:

$$T_{JM}^{E\Delta}(q) = -\frac{i}{\hat{J}} \sum_{s=\pm 1} (J + \delta_{s,-1})^{1/2} s S_{JJ'M}^{\Delta}(q), \quad (C.36a)$$

$$\begin{aligned} S_{JJ'M}^{\Delta}(q) = & \frac{C_{\Delta}}{\sqrt{4\pi}} \frac{(-1)^J}{\hat{J}} q s (J + \delta_{s,-1})^{1/2} j_J(qr_1) \sum_{l_1 l_2} \sum_{s_2=\pm 1} \xi(l_1 + l_2 + J) \hat{l}_2 \\ & \left\{ (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \sum_{s_1=\pm 1} \mathcal{T}_1^E(L_1 l_1, L_2 l_2; r_1, r_2) A(L_1 l_1, L_2 l_2; JM; r_1, r_2) \right. \\ & - (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \sum_{s_1=\pm 1} \hat{l}_1 \mathcal{T}_2^E(l_1, L_2 l_2; r_1, r_2) A(l_1 l_1, L_2 l_2; JM; r_1, r_2) \\ & \left. - 4i \tau_z^2 \hat{l}_1 \mathcal{T}_3^E(l_1, L_2 l_2; r_1, r_2) B_1(l_1, L_2 l_2; JM; r_1, r_2) \right\} \\ & + (1 \longleftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (C.36b)$$

Los coeficientes \mathcal{T}_i^E están definidos mediante las siguientes funciones radiales, que involucran a las integrales $I_{ls}(r_1, r_2)$ y a sus derivadas:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1^E(L_1 l_1, L_2 l_2; r_1, r_2) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{J(J+1)}} \left\{ [(L_1 + \delta_{s_1,1}) L_2 (L_2 + 1)]^{1/2} \begin{pmatrix} L_2 & L_1 & J \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[2 \frac{d}{dr_1} - \frac{s_1 \hat{l}_1^2 + 1}{r_1} \right] \right. \\ \left. + s_1 (L_1 + \delta_{s_1,-1})^{1/2} \begin{pmatrix} L_2 & L_1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[(s_1 \hat{l}_1^2 + 3) \frac{d}{dr_1} - \frac{2L_2(L_2 + 1)}{r_1} \right] \right\} I_{l_2 s_2}(r_1, r_2) \end{aligned}$$

$$\mathcal{T}_2^E(l_1, L_2 l_2; r_1, r_2) = \begin{pmatrix} L_2 & J & l_1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{dI_{l_2 s_2}(r_1, r_2)}{dr_1}$$

$$\mathcal{T}_3^E(l_1, L_2 l_2; r_1, r_2) = \sqrt{l_1(l_1 + 1)} \begin{pmatrix} L_2 & J & l_1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{I_{l_2 s_2}(r_1, r_2)}{r_1}$$

De nuevo, para obtener estas expresiones hay que sustituir la corriente de isóbaro (C.12) en ecuación del operador eléctrico (C.22), obteniendo entonces un operador de la forma:

$$S_{JJ'M}^\Delta(q) = \int d^3 r j_{J'}(qx) \mathbf{Y}_{JJ'}^M(\hat{\mathbf{r}}) \cdot [\nabla \times \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})],$$

que se puede reescribir usando la relación

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (\text{C.37})$$

en términos del rotacional de la función de Bessel por el armónico esférico vectorial, ya que la integral de una divergencia es cero cuando el integrando se anula para $r \rightarrow \infty$. Usando entonces la siguiente fórmula del rotacional

$$\nabla \times [j_{J'}(qr) \mathbf{Y}_{JJ'}^M(\hat{\mathbf{r}})] = \frac{iqs}{j} \sqrt{J + \delta_{s,-1}} j_J(qr) \mathbf{Y}_{JJ}^M(\hat{\mathbf{r}}),$$

podemos escribir

$$S_{JJ'M}^\Delta(q) = \int d^3 r \frac{iqs}{j} \sqrt{J + \delta_{s,-1}} j_J(qr) \mathbf{Y}_{JJ}^M(\hat{\mathbf{r}})$$

$$C_\Delta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sum_{l_2} \sum_{s_2 s_2' = \pm 1} (-1)^{l_2} \hat{l}_2 I_{l_2 s_2 s_2'}(r, r_2)$$

$$\cdot \left\{ (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \boldsymbol{\sigma}^1 \times [M_{L_2 l_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes \mathbf{Y}_{L_2 L_2'}(\hat{\mathbf{r}})]_0^0 - 4\tau_z^2 [M_{L_2 l_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes \mathbf{Y}_{L_2 L_2'}(\hat{\mathbf{r}})]_0^0 \right\}$$

$$+ (1 \longleftrightarrow 2).$$

El siguiente paso es integrar la delta de Dirac y expresar la parte angular y de espín como combinación lineal de operadores básicos, haciendo uso de las dos siguientes relaciones:

$$\mathbf{Y}_{J\lambda}^M(\hat{\mathbf{r}}_1) \cdot \{ \boldsymbol{\sigma}_1 \times [M_{l_2 L_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes \mathbf{Y}_{L_2 L_2'}(\hat{\mathbf{r}}_1)]_0 \} =$$

$$-i \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \hat{L}_2' \hat{\lambda} \sum_{L_1 l_1} (-1)^{L_1} \hat{l}_1 \hat{L}_1 \begin{Bmatrix} L_2 & J & L_1 \\ L_2' & \lambda & l_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L_2' & l_1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [M_{l_1 L_1}^1(\hat{\mathbf{r}}_1) \otimes M_{l_2 L_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2)]_{JM}$$

$$(\text{C.38a})$$

$$\mathbf{Y}_{J\lambda}^M(\hat{\mathbf{r}}_1) \cdot [M_{l_2 L_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes \mathbf{Y}_{L_2 L_2'}(\hat{\mathbf{r}}_1)]_0 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{J+L_2'} \hat{L}_2' \hat{\lambda} \sum_{l_1} \hat{l}_1 \begin{Bmatrix} L_2 & J & l_1 \\ \lambda & L_2' & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L_2' & l_1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [Y_{l_1}(\hat{\mathbf{r}}_1) \otimes M_{l_2 L_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2)]_{JM}$$

$$(\text{C.38b})$$

Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned}
S_{JJ'M}^{\Delta}(q) &= \frac{C_{\Delta}}{\sqrt{4\pi}} (-1)^J q s \sqrt{J + \delta_{s,-1} j J} (qr_1) \sum_{l_1 l_2} \sum_{s_2, s_2' = \pm 1} \hat{l}_1 \hat{l}_2 \hat{L}'_2 I_{l_2 s_2 s_2'}(r_1, r_2) \begin{pmatrix} L'_2 & l_1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \left\{ -\sqrt{6} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \sum_{s_1 = \pm 1} \hat{L}_1 \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ L'_2 & J & l_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A(L_1 l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) \right. \\
&\quad + \sqrt{6} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \hat{l}_1 \begin{pmatrix} L_2 & J & l_1 \\ L'_2 & J & l_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A(l_1 l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) \\
&\quad \left. - 4i \tau_z^2 \begin{pmatrix} L_2 & J & l_1 \\ J & L'_2 & 1 \end{pmatrix} B_1(l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) \right\} \\
&\quad + (1 \longleftrightarrow 2)
\end{aligned}$$

Esta expresión se reduce operando en dos pasos: en el primero reducimos cada uno de los dos símbolos 9- j a un símbolo 6- j ; a continuación se reducen los productos entre un símbolo 3- j y un 6- j a combinaciones lineales de símbolos 3- j . Para realizar el primer paso utilizamos las relaciones

$$\begin{pmatrix} L_2 & J & l_1 \\ L'_2 & J & l_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{J+l_1+l_2} \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{s'_2 \hat{L}'_2 + 1}{\hat{l}_1 \sqrt{l_1(l_1+1)}} \begin{pmatrix} L'_2 & l_1 & J \\ J & 1 & L_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.39a})$$

$$\begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ L'_2 & J & l_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{J+l_1+l_2} \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{s_1 \hat{l}_1^2 + s'_2 \hat{L}'_2 + 2}{\hat{J} \sqrt{J(J+1)}} \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & J \\ L'_2 & l_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.39b})$$

mientras que los productos de los símbolos 6- j por el 3- j $\begin{pmatrix} L'_2 & l_1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ están dados por:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} l_1 & J & L'_2 \\ 1 & L_2 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & J & L'_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \xi(l_1 + L_2 + J + 1) \frac{(L_2 + \delta_{s'_2, -1})^{1/2}}{\hat{L}_2 \hat{L}'_2 \hat{J}} \begin{pmatrix} L_2 & J & l_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} l_1 & J & L'_2 \\ 1 & L_2 & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & J & L'_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \xi(J + L_2 + L_1) \frac{1}{\hat{l}_1 \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{L}'_2} \\
&\quad \left\{ [(L_2 + \delta_{s'_2, -1})(L_1 + \delta_{s_1, 1})]^{1/2} \begin{pmatrix} L_2 & L_1 & J \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + s_1 s'_2 [(L_2 + \delta_{s'_2, 1})(L_1 + \delta_{s_1, -1})]^{1/2} \begin{pmatrix} L_2 & L_1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Con todo, la función $S_{JJ'M}^{\Delta}(q)$ toma la forma:

$$\begin{aligned}
S_{JJ'M}^{\Delta}(q) &= \frac{C_{\Delta}}{\sqrt{4\pi}} (-1)^J q s \sqrt{J + \delta_{s,-1} j J} (qr_1) \sum_{l_1 l_2} \sum_{s_2, s_2' = \pm 1} \hat{l}_1 \hat{l}_2 \hat{L}'_2 I_{l_2 s_2 s_2'}(r_1, r_2) \\
&\quad \left\{ -\sqrt{6} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \sum_{s_1 = \pm 1} \hat{L}_1 (-1)^{l_1+l_2+J} \frac{s_1 \hat{l}_1^2 + s'_2 \hat{L}'_2 + 2}{2\sqrt{6} J(J+1) \hat{J}} \frac{1}{\hat{l}_1 \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{L}'_2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xi(J + L_1 + L_2) \left[\sqrt{(L_2 + \delta_{s'_2, -1})(L_1 + \delta_{s_1, 1})} \begin{pmatrix} L_2 & L_1 & J \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& \quad \left. + s_1 s'_2 \sqrt{(L_2 + \delta_{s'_2, 1})(L_1 + \delta_{s_1, -1})} \begin{pmatrix} L_2 & L_1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] A(L_1 l_1, L_2 l_2; JM; \hat{r}_1, \hat{r}_2) \\
& \quad + \sqrt{6} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \hat{l}_1 (-1)^{J+l_1+l_2} \frac{s'_2 \hat{L}_2^2 + 1}{2\sqrt{6J(J+1)} \hat{J} \hat{L}_2 \hat{L}'_2 \hat{J}} \frac{1}{\hat{L}_2 \hat{L}'_2 \hat{J}} \xi(J + l_1 + L_2 + 1) \\
& \quad \sqrt{L_2 + \delta_{s'_2, -1}} \begin{pmatrix} L_2 & J & l_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A(l_1 l_1, L_2 l_2; JM; \hat{r}_1, \hat{r}_2) \\
& \quad - 4i \tau_z^2 \xi(l_1 + l_2 + J) \frac{1}{\hat{L}_2 \hat{L}'_2 \hat{J}} \sqrt{L_2 + \delta_{s'_2, -1}} \\
& \quad \left. \begin{pmatrix} L_2 & J & l_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} B_1(l_1, L_2 l_2; JM; \hat{r}_1, \hat{r}_2) \right\} \\
& \quad + (1 \longleftrightarrow 2). \tag{C.41}
\end{aligned}$$

Por último, se realizan las sumas en s'_2 usando las relaciones (C.29a, C.29b) entre las integrales $I_{l s s'}$ y $I_{l s}$, así como las dos siguientes, que se obtienen a partir de las relaciones de recurrencia entre las funciones esféricas de Bessel:

$$\sum_{s'} s' \sqrt{L + \delta_{s', -1}} I_{l s s'}(r_1, r_2) = -\frac{\sqrt{L(L+1)}}{\hat{L}} \left(2 \frac{d}{dr_1} + \frac{1}{r_1} \right) I_{l s}(r_1, r_2) \tag{C.42a}$$

$$\sum_{s'} \sqrt{L + \delta_{s', 1}} I_{l s s'}(r_1, r_2) = -\frac{1}{\hat{L}} \left(\frac{d}{dr_1} - \frac{2L(L+1)}{r_1} \right) I_{l s}(r_1, r_2) \tag{C.42b}$$

Sustituyendo en (C.41) se obtiene el resultado buscado.

C.5 Operador multipolar magnético

Como ya hemos dicho, las expresiones del operador multipolar magnético son ya conocidas, con excepción del de la corriente de isóbaro, a la que dedicamos esta sección.

C.5.1 operador magnético de isóbaro

Mostraremos aquí que la expresión tensorial de este operador es la siguiente:

$$\begin{aligned}
T_{JM}^{M\Delta}(q) &= \frac{C_\Delta}{\sqrt{4\pi}} (-1)^J \sum_{l_1 l_2 s_2} \hat{l}_2 \xi(l_1 + L_2 + J) \\
& \quad \left\{ (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \sum_{s_1} T_1^M(L_1 l_1, L_2; r_1, r_2) A(L_1 l_1, L_2 l_2; JM; \hat{r}_1, \hat{r}_2) \right. \\
& \quad + (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \hat{l}_1 T_2^M(l_1, L_2; r_1, r_2) A(l_1 l_1, L_2 l_2; JM; \hat{r}_1, \hat{r}_2) \\
& \quad \left. + 4i \tau_z^2 \hat{l}_1 T_3^M(l_1, L_2; r_1, r_2) B_1(l_1, L_2 l_2; JM; \hat{r}_1, \hat{r}_2) \right\} \\
& \quad + (1 \longleftrightarrow 2), \tag{C.43}
\end{aligned}$$

donde el símbolo ($1 \longleftrightarrow 2$) significa cambiar $(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\tau}^1)$ por $(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\tau}^2)$ y las funciones radiales T_i^M están definidas por

$$T_1^M(L_1 l_1, L_2 l_2; r_1, r_2) = \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ [D_1 j_J(qr_1)] \left(\sqrt{L_1 + \delta_{s_1 1}} \frac{d}{dr_1} + \sqrt{L_1(L_1 + 1)} s_1 \frac{\sqrt{L_1 + \delta_{s_1, -1}}}{r_1} \right) I_{l_2 s_2}(r_1, r_2) + j_J(qr_1) J(J + 1) \sqrt{L_1 + \delta_{s_1 1}} \frac{1}{r_1^2} I_{l_2 s_2}(r_1, r_2) \right\} \quad (\text{C.44})$$

$$T_2^M(l_1, L_2 l_2; r_1, r_2) = \begin{pmatrix} l_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} [D_1 j_J(qr_1)] \left[\frac{d}{dr_1} I_{l_2 s_2}(r_1, r_2) \right] - \sqrt{L_2(L_2 + 1)} J(J + 1) \begin{pmatrix} l_1 & J & L_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{r_1^2} j_J(qr_1) I_{l_2 s_2}(r_1, r_2) \quad (\text{C.45})$$

$$T_3^M(l_1, L_2 l_2; r_1, r_2) = \sqrt{l_1(l_1 + 1)} \begin{pmatrix} l_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{r_1} [D_1 j_J(qr_1)] I_{l_2 s_2}(r_1, r_2) + \sqrt{J(J + 1)} \begin{pmatrix} l_1 & J & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{r_1} [D_1 j_J(qr_1) I_{l_2 s_2}(r_1, r_2)], \quad (\text{C.46})$$

en donde se hace uso del operador:

$$D_i = \frac{d}{dr_i} + \frac{1}{r_i}$$

Para derivar estas expresiones se parte de la definición (1.5c) del operador multipolar magnético, teniendo en cuenta que la corriente delta es un rotacional puro y usando de nuevo la relación (C.37) para aplicar el rotacional a la función de Bessel y al armónico esférico vectorial, lo que nos lleva a utilizar de nuevo la fórmula del rotacional (C.21). El operador magnético se puede escribir entonces en la siguiente forma:

$$T_{JM}^{M\Delta}(q) = -iC_\Delta \frac{q}{\hat{j}} \sum_{l_2} \sum_{s_2 s_2' s = \pm 1} (-1)^{l_2} \hat{l}_2 s (J + \delta_{s, -1})^{1/2} I_{l_2 s_2 s_2'}(r_1, r_2) j_{J'}(qr_1) \mathbf{Y}_{JJ'}^M(\hat{\mathbf{r}}_1) \cdot \left\{ (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \boldsymbol{\sigma}_1 \times [M_{L_2 l_2}^2 \otimes \mathbf{Y}_{L_2 L_2'}(\hat{\mathbf{r}}_1)]_0 - 4\tau_z^2 [M_{L_2 l_2}^2(\hat{\mathbf{r}}_2) \otimes \mathbf{Y}_{L_2 L_2'}(\hat{\mathbf{r}}_1)]_0 \right\} + (1 \longleftrightarrow 2),$$

en donde hemos realizado la integral en d^3r haciendo uso de la delta de Dirac que lleva la corriente (C.12). A partir de este punto, se puede proceder con analogía a los pasos seguidos para la obtención del operador eléctrico de isóbaro. En primer lugar, por tanto, se vuelve a expresar la parte angular y de espín como combinación lineal de los operadores básicos, usando de nuevo las ecuaciones (C.38a, C.38b). Así se llega a la expresión

$$T_{JM}^{M\Delta}(q) = -\frac{C_\Delta}{\sqrt{4\pi}} (-1)^J \frac{q}{\hat{j}} \sum_{s=\pm 1} s \hat{j}' \sqrt{J + \delta_{s, -1}} j_{J'}(qr_1) \sum_{l_1 l_2} \sum_{s_2, s_2' = \pm 1} \hat{l}_1 \hat{l}_2 \hat{L}'_2 I_{l_2 s_2 s_2'}(r_1, r_2) \left\{ \sqrt{6} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \sum_{s_1 = \pm 1} \hat{L}_1 \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ L'_2 & J' & l_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} A(L_1 l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2)$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{6}(\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \hat{l}_1 \left\{ \begin{matrix} L_2 & J & l_1 \\ L'_2 & J' & l_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\} A(l_1 l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) \\
& - 4i\tau_z^2 \left\{ \begin{matrix} L_2 & J & l_1 \\ J' & L'_2 & 1 \end{matrix} \right\} B_1(l_1, L_2 l_2; JM; \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) \left\{ \begin{matrix} L'_2 & l_1 & J' \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} \\
& + (1 \longleftrightarrow 2)
\end{aligned}$$

El segundo símbolo 9- j puede reducirse al mismo 6- j del tercer sumando, con ayuda de la ecuación

$$\left\{ \begin{matrix} L_2 & J & l_1 \\ L'_2 & J' & l_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\} = (-1)^{J+l_1+l_2+1} \frac{s\hat{J}^2 - s'_2\hat{L}_2^2}{2\sqrt{6}\hat{l}_1\sqrt{l_1(l_1+1)}} \left\{ \begin{matrix} L_2 & J & l_1 \\ J' & L'_2 & 1 \end{matrix} \right\} \quad (\text{C.47})$$

El producto de dicho 6- j y el 3- j se reduce aplicando (C.26). Por último, el producto del primer 9- j por el 3- j se obtiene aplicando la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} L_2 & J & L_1 \\ L'_2 & J' & l_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_1 & J' & L'_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} &= \frac{\xi(J+L_2+l_1)}{\hat{l}_1\hat{L}_1\hat{L}_2\hat{L}'_2\hat{J}\hat{J}'\sqrt{6J(J+1)}} \left\{ \begin{matrix} L_1 & L_2 & J \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ s_1[L_1(L_1+1)(J+\delta_{s,-1})(L_2+\delta_{s'_2,-1})(L_1+\delta_{s_1,-1})]^{1/2} \right. \\
& - s[J(J+1)(J+\delta_{s_1})(L_2+\delta_{s'_2,-1})(L_1+\delta_{s_1})]^{1/2} \\
& \left. - s'_2[L_2(L_2+1)(J+\delta_{s,-1})(L_2+\delta_{s'_2,1})(L_1+\delta_{s_1})]^{1/2} \right\}
\end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

Al igual que hicimos para el operador eléctrico de isóbaro, se realizan las sumas en s'_2 aplicando las ecuaciones (C.29a,C.29b,C.42a,C.42b). Finalmente, utilizando las dos relaciones de recurrencia entre funciones de Bessel ya citadas (C.28a,C.28b), así como las siguientes,

$$\sum_{s=\pm 1} s j_{J+s}(qr) = -\frac{1}{q} \left(\frac{1}{r} + 2 \frac{d}{dr} \right) j_J(qr) \quad (\text{C.49})$$

$$\sum_{s=\pm 1} s(J+\delta_{s,-1}) j_{J+s}(qr) = -(1-\delta_{J0}) \frac{\hat{J}^2}{q} \left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) j_J(qr) \quad (\text{C.50})$$

$$\sum_{s=\pm 1} (J+\delta_{s,-1}) j_{J+s}(qr) = (1-\delta_{J0}) \frac{1}{q} \left(\frac{2J(J+1)+1}{r} + \frac{d}{dr} \right) j_J(qr) \quad (\text{C.51})$$

realizamos la suma sobre s , obteniendo de esta manera el resultado (C.43).

C.6 Elementos de matriz de los operadores básicos

El siguiente paso consiste en calcular los elementos de matriz de los operadores multipolares entre estados de dos partículas. Una vez conocidos estos operadores como combinación lineal de los operadores básicos (C.7)—(C.9), la parte angular y de espín de

dichos elementos de matriz queda expresada como combinación de los elementos de matriz de dichos operadores básicos, cuyas expresiones generales damos a continuación, y sus coeficientes contienen ciertas combinaciones de integrales de las funciones radiales.

Denotemos la parte angular de los estados inicial y final de dos partículas acopladas, mediante

$$\begin{aligned} |J_{ab}\rangle &= |j_a j_b J_{ab}\rangle, \\ |J_{cd}\rangle &= |j_c j_d J_{cd}\rangle, \end{aligned}$$

y definamos

$$\mathcal{M}(L_1 l_1, L_2 l_2; J) = \langle J_{ab} \| A(L_1 l_1, L_2 l_2; J) \| J_{cd} \rangle \quad (\text{C.52})$$

$$\mathcal{N}_1(l_1, L_2 l_2; J) = \langle J_{ab} \| B_1(l_1, L_2 l_2; J) \| J_{cd} \rangle \quad (\text{C.53})$$

$$\mathcal{N}_2(L_1 l_1, l_2; J) = \langle J_{ab} \| B_2(L_1 l_1, l_2; J) \| J_{cd} \rangle. \quad (\text{C.54})$$

Estos elementos de matriz básicos son los que se necesitan para evaluar los factores de forma de las MEC. Sus valores se calculan en términos de coeficientes n - j , y es necesario distinguir los casos en que $L_i = l_i \pm 1$ y $L_i = l_i$. En las fórmulas que siguen, como en las secciones anteriores, supondremos que $L_i = l_i + s_i$, con $s_i = \pm 1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(L_1 l_1, L_2 l_2; J) &= \frac{1}{4\pi} (-1)^{j_a + j_b + 1} \xi(l_a + l_c + L_1 + 1) \xi(l_b + l_d + L_2 + 1) \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{J}_{ab} \hat{J}_{cd} \hat{J} \\ &\quad \frac{\kappa_a + \kappa_c - s_1 l_1 - \delta_{s_1 1}}{\sqrt{l_1 + \delta_{s_1 1}}} \frac{\kappa_b + \kappa_d - s_2 l_2 - \delta_{s_2 1}}{\sqrt{l_2 + \delta_{s_2 1}}} \\ &\quad \left(\begin{array}{ccc} j_a & j_c & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} j_b & j_d & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ L_1 & L_2 & J \end{array} \right\} \quad (\text{C.55a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(l_1 l_1, L_2 l_2; J) &= \frac{1}{4\pi} (-1)^{j_a + j_b} \xi(l_a + l_c + l_1) \xi(l_b + l_d + L_2 + 1) \hat{l}_1 \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{J}_{ab} \hat{J}_{cd} \hat{J} \\ &\quad (1 - \delta_{l_1 0}) \frac{\kappa_a - \kappa_c}{\sqrt{l_1(l_1 + 1)}} \frac{\kappa_b + \kappa_d - s_2 l_2 - \delta_{s_2 1}}{\sqrt{l_2 + \delta_{s_2 1}}} \\ &\quad \left(\begin{array}{ccc} j_a & j_c & l_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} j_b & j_d & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ l_1 & L_2 & J \end{array} \right\} \quad (\text{C.55b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(L_1 l_1, l_2 l_2; J) &= \frac{1}{4\pi} (-1)^{j_a + j_b} \xi(l_a + l_c + L_1 + 1) \xi(l_b + l_d + l_2) \hat{l}_2 \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{J}_{ab} \hat{J}_{cd} \hat{J} \\ &\quad \frac{\kappa_a + \kappa_c - s_1 l_1 - \delta_{s_1 1}}{\sqrt{l_1 + \delta_{s_1 1}}} (1 - \delta_{l_2 0}) \frac{\kappa_b - \kappa_d}{\sqrt{l_2(l_2 + 1)}} \\ &\quad \left(\begin{array}{ccc} j_a & j_c & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} j_b & j_d & l_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ L_1 & l_2 & J \end{array} \right\} \quad (\text{C.55c}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_1(l_1, L_2 l_2; J) = \frac{1}{4\pi} (-1)^{j_a + j_b} \xi(l_a + l_c + l_1) \xi(l_b + l_d + L_2 + 1) \hat{l}_1 \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{J}_{ab} \hat{J}_{cd} \hat{J}$$

$$\hat{l}_1 \frac{\kappa_b + \kappa_d - s_2 l_2 - \delta_{s_2 1}}{\sqrt{l_2 + \delta_{s_2 1}}} \begin{pmatrix} j_a & j_c & l_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & j_d & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ l_1 & L_2 & J \end{matrix} \right\} \quad (\text{C.55d})$$

$$\mathcal{N}_2(L_1 l_1, l_2; J) = \frac{1}{4\pi} (-1)^{j_a + j_b} \xi(l_a + l_c + L_1 + 1) \xi(l_b + l_d + l_2) \hat{l}_2 \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{J}_{ab} \hat{J}_{cd} \hat{J} \\ \hat{l}_2 \frac{\kappa_a + \kappa_c - s_1 l_1 - \delta_{s_1 1}}{\sqrt{l_1 + \delta_{s_1 1}}} \begin{pmatrix} j_a & j_c & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & j_d & l_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ L_1 & l_2 & J \end{matrix} \right\}. \quad (\text{C.55e})$$

C.7 Elementos de matriz magnéticos de la corriente de isóbaro

Dadas las expresiones de los elementos de matriz angulares (C.55a—C.55e) de los operadores básicos, el cálculo de los elementos de matriz de los operadores multipolares eléctricos y magnéticos (C.23a, C.23b, C.30a, C.30b, C.36a, C.36b, C.43) es ya una simple cuestión de manipulación algebraica y uso de las relaciones entre símbolos $n-j$, aunque la considerable longitud de las expresiones intermedias haría extremadamente extensa la descripción del mismo. Por lo tanto, y como ilustración de los pasos a seguir, esquematizaremos aquí, brevemente, tan sólo la obtención de los elementos de matriz reducidos del operador magnético de isóbaro, entre estados de dos partículas acopladas.

En primer lugar, desarrollando el término ($1 \longleftrightarrow 2$) de la ecuación (C.43), sustituyendo los elementos de matriz básicos (C.55a—C.55e) y reagrupando, se obtiene:

$$\langle J_{ab} || T_J^{M\Delta}(q) || J_{cd} \rangle = -\frac{C_\Delta}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{4\pi} (-1)^{j_a + j_b + J} \xi(l_a + l_b + l_c + l_d + J + 1) \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{J}_{ab} \hat{J}_{cd} \hat{J} \\ \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 r_1^2 r_2^2 R_a(r_1) R_b(r_2) R_c(r_1) R_d(r_2) \\ \sum_{l_1 l_2} \left\{ \langle (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \rangle \sum_{s_1 s_2} \left[\hat{l}_2 T_1^M(L_1 l_1, L_2; r_1, r_2) + \hat{l}_1 T_1^M(L_2 l_2, L_1; r_2, r_1) \right] \right. \\ \xi(l_a + l_c + L_1 + 1) \xi(l_b + l_d + L_2 + 1) \frac{\kappa_a + \kappa_c - s_1 l_1 - \delta_{s_1 1}}{\sqrt{l_1 + \delta_{s_1 1}}} \frac{\kappa_b + \kappa_d - s_2 l_2 - \delta_{s_2 1}}{\sqrt{l_2 + \delta_{s_2 1}}} \\ \left. \begin{pmatrix} j_a & j_c & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & j_d & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ L_1 & L_2 & J \end{matrix} \right\} \right. \\ \left. - \sum_{s_2} \left[\langle (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \rangle \frac{\kappa_a - \kappa_c}{\sqrt{l_1(l_1 + 1)}} T_2^M(l_1, L_2; r_1, r_2) + 4i \langle \tau_z^2 \rangle T_3^M(l_1, L_2; r_1, r_2) \right] \right]$$

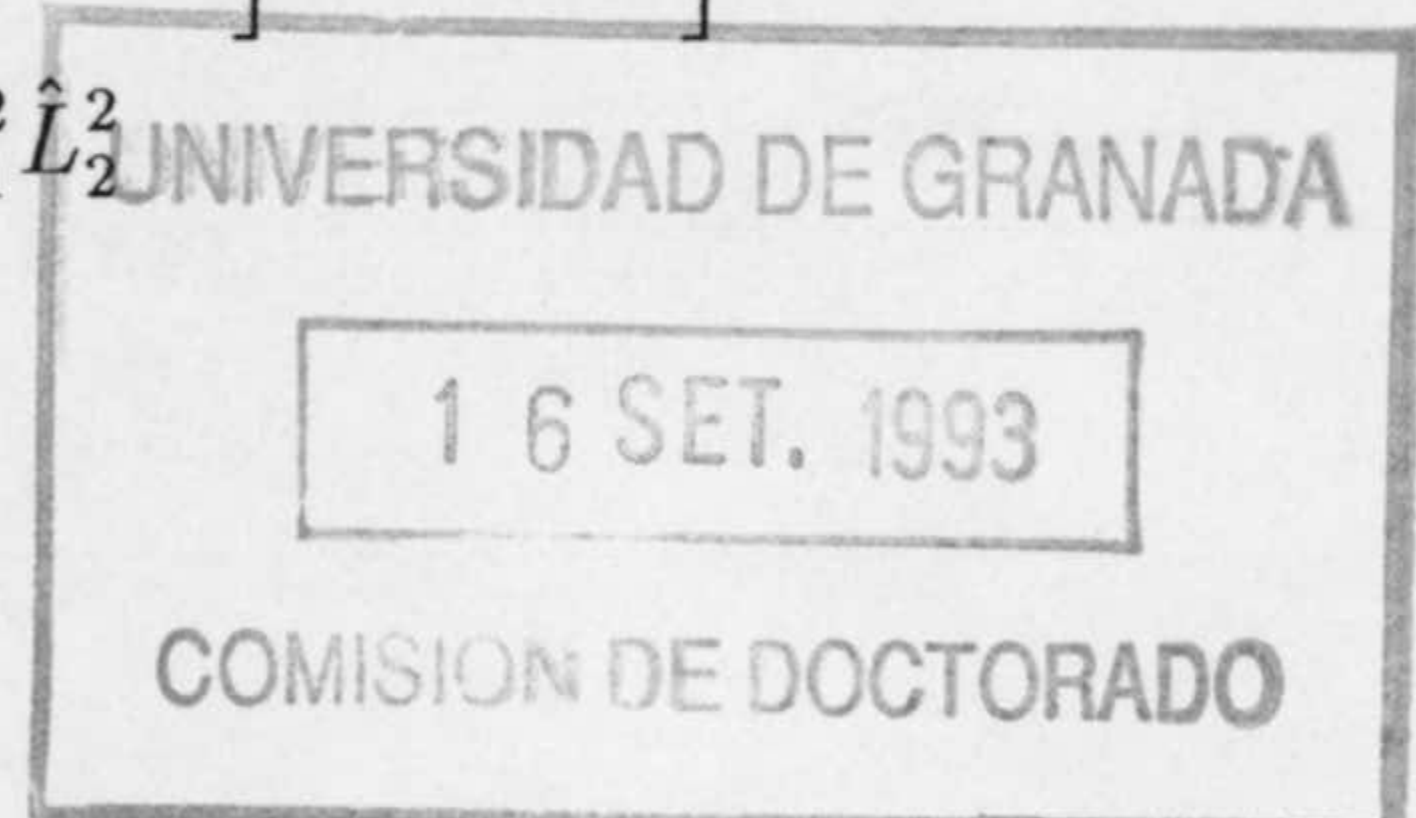
$$\begin{aligned}
& \hat{l}_1^2 \hat{l}_2^2 \xi(l_a + l_c + l_1) \xi(l_b + l_d + L_2 + 1) \frac{\kappa_b + \kappa_d - s_2 l_2 - \delta_{s_2 1}}{\sqrt{l_2 + \delta_{s_2 1}}} \\
& \left(\begin{array}{ccc} j_a & j_c & l_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} j_b & j_d & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ l_1 & L_2 & J \end{array} \right\} \\
& + \sum_{s_1} \left[\langle (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \rangle \frac{\kappa_b - \kappa_d}{\sqrt{l_2(l_2 + 1)}} T_2^M(l_2, L_1; r_2, r_1) - 4i \langle \tau_z^1 \rangle T_3^M(l_2, L_1; r_2, r_1) \right] \\
& \hat{l}_1^2 \hat{l}_2^2 \xi(l_a + l_c + L_1 + 1) \xi(l_b + l_d + l_2) \frac{\kappa_a + \kappa_c - s_1 l_1 - \delta_{s_1 1}}{\sqrt{l_1 + \delta_{s_1 1}}} \\
& \left(\begin{array}{ccc} j_a & j_c & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} j_b & j_d & l_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ L_1 & l_2 & J \end{array} \right\} \quad (C.56)
\end{aligned}$$

A continuación transformamos las sumas sobre l_i, s_i ($i = 1, 2$) a sumas sobre $L_i = l_i + s_i$, teniendo en cuenta que cada una de estas sumas puede escribirse en la forma genérica

$$\sum_{l_i=0} \sum_{s_i=\pm 1} F(L_i) G(l_i, s_i) = F(0) G(1, -1) + \sum_{L_i=1} F(L_i) [G(L_i - 1, 1) + G(L_i + 1, -1)] \quad (C.57)$$

Sustituyendo las expresiones (C.44—C.46) en (C.56) y haciendo uso repetido de (C.57) se obtiene, tras un poco de álgebra, el elemento de matriz

$$\begin{aligned}
\langle J_{ab} || T_J^{M\Delta}(q) || J_{cd} \rangle &= -\frac{C_\Delta}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{4\pi} (-1)^{j_a + j_b + J} \xi(l_a + l_b + l_c + l_d + J + 1) \\
& \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{J}_{ab} \hat{J}_{cd} \hat{J} \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 r_1^2 r_2^2 R_a(r_1) R_b(r_2) R_c(r_1) R_d(r_2) \\
& \left\{ -\langle (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \rangle \sum_{L_1 L_2} \xi(l_a + l_c + L_1 + 1) \xi(l_b + l_d + L_2 + 1) \hat{L}_1^2 \hat{L}_2^2 \right. \\
& \left(\begin{array}{ccc} j_a & j_c & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} j_b & j_d & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ L_1 & L_2 & J \end{array} \right\} \\
& \left[\frac{1}{\sqrt{L_1(L_1 + 1)}} \left(\begin{array}{ccc} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \hat{U}_1^{(ac)}(L_1; r_1) \right. \\
& \left. \int_0^\infty dq_2 q_2^2 \frac{2}{\pi} v(q_2) \left[\left(\frac{d}{dr_2} - \frac{\kappa_b + \kappa_c}{r_2} \right) j_{L_2}(q_2 r_2) \right] j_{L_2}(q_2 r_1) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{L_2(L_2 + 1)}} \left(\begin{array}{ccc} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \hat{U}_1^{(bd)}(L_2; r_2) \right. \\
& \left. \int_0^\infty dq_1 q_1^2 \frac{2}{\pi} v(q_1) \left[\left(\frac{d}{dr_1} - \frac{\kappa_a + \kappa_d}{r_1} \right) j_{L_1}(q_1 r_1) \right] j_{L_1}(q_1 r_2) \right] \\
& \left. + \sum_{l_1 L_2} \xi(l_a + l_c + l_1) \xi(l_b + l_d + L_2 + 1) \hat{l}_1^2 \hat{L}_2^2 \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc} j_a & j_c & l_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} j_b & j_d & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ l_1 & L_2 & J \end{array} \right\} \\
& \left[\langle (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \rangle \frac{\kappa_a - \kappa_c}{\sqrt{l_1(l_1 + 1)}} \hat{U}_{21}(l_1 L_2, r_1) + 4i \langle \tau_z^2 \rangle \hat{U}_{22}(l_1 L_2, r_1) \right] \\
& \int_0^\infty dq_2 q_2^2 \frac{2}{\pi} v(q_2) \left[\left(\frac{d}{dr_2} - \frac{\kappa_b + \kappa_c}{r_2} \right) j_{L_2}(q_2 r_2) \right] j_{L_2}(q_2 r_1) \\
& - \sum_{L_1 l_2} \xi(l_a + l_c + L_1 + 1) \xi(l_b + l_d + l_2) \hat{L}_1^2 \hat{l}_2^2 \\
& \left(\begin{array}{ccc} j_a & j_c & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} j_b & j_d & l_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ L_1 & l_2 & J \end{array} \right\} \\
& \left[\langle (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \rangle \frac{\kappa_b - \kappa_d}{\sqrt{l_2(l_2 + 1)}} \hat{U}_{21}(l_2 L_1; r_2) - 4i \langle \tau_z^1 \rangle \hat{U}_{22}(l_2 L_1; r_2) \right] \\
& \int_0^\infty dq_1 q_1^2 \frac{2}{\pi} v(q_1) \left[\left(\frac{d}{dr_1} - \frac{\kappa_a + \kappa_d}{r_1} \right) j_{L_1}(q_1 r_1) \right] j_{L_1}(q_1 r_2) \Big\}, \tag{C.58}
\end{aligned}$$

en donde se usan las siguientes definiciones para los operadores \hat{U} :

$$\begin{aligned}
\hat{U}_1^{(ac)}(L_1, r_1) &= [D_1 j_J(qr_1)] \left[\left(\kappa_a + \kappa_c \right) \frac{d}{dr_1} - \frac{L_1(L_1 + 1)}{r_1} \right] \\
&+ J(J + 1) \frac{\kappa_a + \kappa_c}{r_1^2} j_J(qr_1) \tag{C.59a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{21}(l_1, L_2; r_1) &= \left(\begin{array}{ccc} l_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) [D_1 j_J(qr_1)] \frac{d}{dr_1} \\
&- \sqrt{L_2(L_2 + 1)J(J + 1)} \left(\begin{array}{ccc} l_1 & J & L_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \frac{1}{r_1} j_J(qr_1) \tag{C.59b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{22}(l_1, L_2, r_1) &= \frac{1}{r_1} \sqrt{l_1(l_1 + 1)} \left(\begin{array}{ccc} l_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) [D_1 j_J(qr_1)] \\
&+ \frac{1}{r_1} \sqrt{J(J + 1)} \left(\begin{array}{ccc} l_1 & J & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) D_1 j_J(qr_1). \tag{C.59c}
\end{aligned}$$

Integrando por partes, obtenemos las integrales definidas en (2.10):

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dr_2 r_2^2 R_b(r_2) R_d(r_2) \int_0^\infty dq_2 q_2^2 \frac{2}{\pi} v(q_2) \left[\left(\frac{d}{dr_2} - \frac{\kappa_b + \kappa_d}{r_2} \right) j_{L_2}(q_2 r_2) \right] j_{L_2}(q_2 r_1) \\
= -I_{bd}(L_2, r_1), \tag{C.60}
\end{aligned}$$

y una expresión análoga cambiando 1 por 2 y (a, c) por (b, d) . Haciendo uso de (C.60), renombrando las variables l_i a L_i , y extrayendo factores comunes, se puede escribir el elemento de matriz (C.58) en la forma final:

$$\langle J_{ab} || T_J^{M\Delta}(q) || J_{cd} \rangle = -\frac{C_\Delta}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{4\pi} (-1)^{j_a + j_b + J} \xi(l_a + l_b + l_c + l_d + J + 1)$$

$$\begin{aligned}
& \hat{j}_a \hat{j}_b \hat{j}_c \hat{j}_d \hat{J}_{ab} \hat{J}_{cd} \hat{J} \sum_{L_1 L_2} \hat{L}_1^2 \hat{L}_2^2 \begin{pmatrix} j_a & j_c & L_1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & j_d & L_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_a & j_b & J_{ab} \\ j_c & j_d & J_{cd} \\ L_1 & L_2 & J \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \xi(l_b + l_d + L_2 + 1) \int_0^\infty dr_1 r_1^2 R_a(r_1) R_c(r_1) \right. \\
& \left[\langle (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \rangle \Delta_1^M(c, a, L_1, L_2; r_1) - 4i \langle \tau_z^2 \rangle \Delta_2^M(c, a, L_1, L_2; r_1) \right] I_{bd}(L_2, r_1) \\
& + \xi(l_a + l_c + L_1 + 1) \int_0^\infty dr_2 r_2^2 R_b(r_2) R_d(r_2) \\
& \left. \left[\langle (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z \rangle \Delta_1^M(b, d, L_2, L_1; r_2) - 4i \langle \tau_z^1 \rangle \Delta_2^M(b, d, L_2, L_1; r_2) \right] I_{ac}(L_1, r_2) \right\}, \quad (\text{C.61})
\end{aligned}$$

en donde hemos definido los operadores Δ_i^M mediante

$$\begin{aligned}
\Delta_1^M(c, a, L_1, L_2; r_1) &= \xi(l_a + l_c + L_1 + 1) \frac{1}{\sqrt{L_1(L_1 + 1)}} \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \hat{U}_1^{(ac)}(L_1; r_1) \\
&\quad - \xi(l_a + l_c + L_1) \frac{\kappa_a - \kappa_c}{\sqrt{L_1(L_1 + 1)}} \hat{U}_{21}(L_1, L_2; r_1) \quad (\text{C.62a})
\end{aligned}$$

$$\Delta_2^M(c, a, L_1, L_2; r_1) = \xi(l_a + l_c + L_1) \hat{U}_{22}(L_1, L_2; r_1) \quad (\text{C.62b})$$

Por último, añadir que estos operadores pueden expresarse en la forma (4.15), sin más que sustituir las definiciones (C.59a—C.59c) y haciendo uso de las siguientes relaciones entre símbolos 3 - j:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \sqrt{\frac{L_2(L_2 + 1)}{J(J + 1)}} \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & J \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{si } L_1 + L_2 + J \text{ es impar} \\
\sqrt{L_1(L_1 + 1)} \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{J(J + 1)} \begin{pmatrix} L_1 & J & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \\
&= -\sqrt{L_2(L_2 + 1)} \begin{pmatrix} L_2 & J & L_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{si } L_1 + L_2 + J \text{ es par.}
\end{aligned}$$

Un procedimiento similar permite obtener los elementos de matriz para el resto de los operadores multipolares de las MEC.



Apéndice D

Componentes radiales del propagador del pión

En este apéndice presentamos con detalle la solución de la integral interna sobre k de (2.10) que aparece en las expresiones de las MEC y que aquí denotaremos por

$$I_L(x, r; E) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 v(k, E) j_L(kx) j_L(kr). \quad (\text{D.1})$$

Esta función corresponde a la parte radial del desarrollo multipolar (C.16) del propagador del pión en representación de posiciones.

El propagador $v(k, E)$, en el caso general, incluye el factor de forma pión nucleón, ec. (2.42),

$$v(k, E) = \frac{F_{\pi N}}{k^2 - E^2 + \mu^2}.$$

Usando para $F_{\pi N}$ una parametrización dipolar (2.41) y definiendo $\mu'^2 = \mu^2 - E^2$ y $\lambda = \Lambda^2 - E^2$, el propagador puede escribirse en la forma

$$v(k, E) = \frac{1}{\mu'^2 + k^2} - \frac{1}{\lambda^2 + k^2}. \quad (\text{D.2})$$

Sustituyendo (D.2) en (D.1) podemos expresar I_L en la forma

$$I_L(x, r; E) = \frac{2}{\pi} \mathcal{I}_L(x, r, \mu'^2) - \frac{2}{\pi} \mathcal{I}_L(x, r, \lambda^2),$$

En donde la función \mathcal{I}_L se define mediante la integral

$$\mathcal{I}_L(x, r, \tau) = \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{\tau + k^2} j_L(kr) j_L(kx). \quad (\text{D.3})$$

Con objeto de calcular esta integral mediante el teorema de los residuos, es necesario extender el dominio de integración a toda la recta real, usando que la función j_L tiene paridad $(-1)^L$. Además, es también conveniente expresar las funciones esféricas de Bessel en términos de las funciones esféricas de Hankel de primera y segunda especie,

$$j_L(z) = \frac{1}{2} [h_L^{(1)}(z) + h_L^{(2)}(z)].$$

Haciendo ésto y usando la relación

$$h_L^{(1)}(-z) = (-1)^L h_L^{(2)}(z), \quad (\text{D.4})$$

podemos escribir (D.3) en la forma:

$$\mathcal{I}_L(x, r, \tau) = \frac{1}{4} [I_L^{11}(x, r, \tau) + I_L^{12}(x, r, \tau)], \quad (\text{D.5})$$

en donde hemos definido

$$I_L^{ij}(x, r, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 \frac{1}{\tau + k^2} h_L^{(i)}(kx) h_L^{(j)}(kr).$$

Teniendo en cuenta los desarrollos asintóticos para $|k| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} h_L^{(1)}(kx) h_L^{(1)}(kr) &\rightarrow -\frac{e^{ik(x+r)-iL\pi}}{xr k^2} \\ h_L^{(1)}(kx) h_L^{(2)}(kr) &\rightarrow \frac{e^{ik(x-r)}}{xr k^2}, \end{aligned}$$

la integral I_L^{11} se calculará cerrando el contorno por el semiplano superior (fig. D.1(a)), mientras que para I_L^{12} es necesario distinguir los casos $x > r$, en donde el contorno es el mismo de antes, y $x < r$, donde se cerrará por el semiplano inferior (fig. D.1(b)). Asimismo, debe tenerse en cuenta que las funciones $h_L^{(i)}$ son singulares en el origen, por lo que el punto $k = 0$ debe ser rodeado por el contorno de integración. Se demuestra fácilmente que la contribución a la suma $I_L^{11} + I_L^{12}$, proveniente de rodear este punto, es cero (aunque cada uno de los sumandos individuales diverge). Para concretar, definamos las funciones de una variable compleja k :

$$f_{ij}(k) = \frac{k^2}{k^2 - \tau} h_L^{(i)}(kx) h_L^{(j)}(kr), \quad (\text{D.6})$$

y consideremos el semicírculo c de radio ϵ que rodea al punto $k = 0$ (fig. D.1). Entonces se cumple:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_c (f_{11} + f_{12}) = 0. \quad (\text{D.7})$$

Caso $\tau > 0$. Debe tenerse en cuenta que el signo de τ determina la posición de los demás polos del integrando. En el caso $\tau > 0$ hay polos en $k = \pm i\nu$, con $\nu = \sqrt{\tau}$, y en $k = 0$ (éste último sólo para el contorno D.1(b)). Son necesarios los siguientes residuos

$$\text{Res}_{k=i\nu} f_{ij}(k) = i \frac{\nu}{2} h_L^{(i)}(i\nu x) h_L^{(j)}(i\nu r) \quad (\text{D.8})$$

$$\text{Res}_{k=-i\nu} f_{12}(k) = -i \frac{\nu}{2} h_L^{(2)}(i\nu x) h_L^{(1)}(i\nu r) \quad (\text{D.9})$$

Para calcular el residuo en $k = 0$, tengamos en cuenta que, de los desarrollos en serie de las funciones de Bessel y de Newmann esféricas:

$$j_n(z) = \frac{z^n}{(2n+1)!!} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}z^2}{1!(2n+3)} + \frac{\left(\frac{1}{2}z^2\right)^2}{2!(2n+3)(2n+5)} - \dots \right\} \quad (\text{D.10})$$

$$y_n(z) = -\frac{(2n-1)!!}{z^{n+1}} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}z^2}{1!(1-2n)} + \frac{\left(\frac{1}{2}z^2\right)^2}{2!(1-2n)(3-2n)} - \dots \right\} \quad (\text{D.11})$$

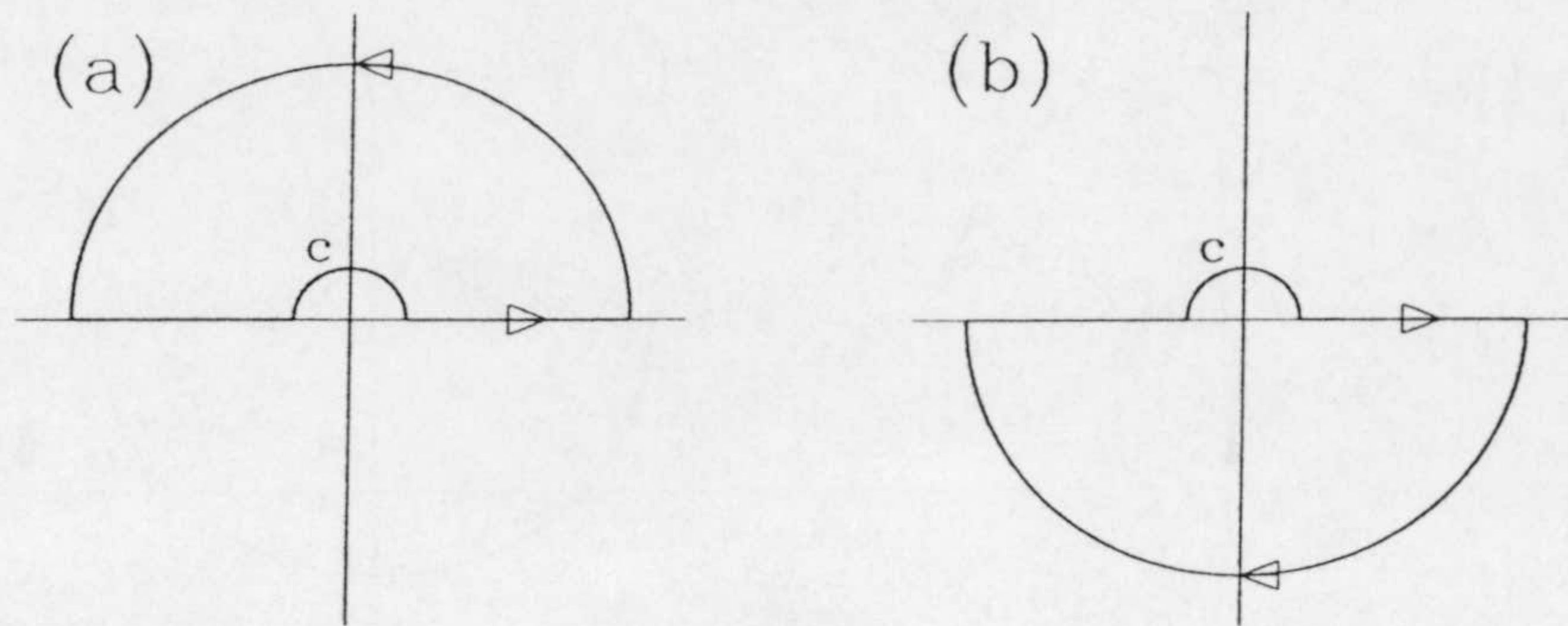


Figura D.1: Contornos de integración en el caso $\tau > 0$.

y de su relación con las funciones de Hankel,

$$h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + iy_n(z) \quad (\text{D.12a})$$

$$h_n^{(2)}(z) = j_n(z) - iy_n(z), \quad (\text{D.12b})$$

se concluye que el producto $h_L^{(i)}(i\nu x)h_L^{(j)}(i\nu r)$ es real, de manera que los residuos (D.8) y (D.9) son imaginarios puros. Como la integral buscada es $2\pi i \sum \text{Res}$, y debe ser real, el residuo en $k = 0$ debe ser también imaginario puro. A este residuo contribuirá, por tanto, tan sólo la parte imaginaria

$$\text{Im } h_L^{(1)}(kx)h_L^{(2)}(kr) = y_L(kx)j_L(kr) - j_L(kx)y_L(kr),$$

que es no singular en el origen, por lo que concluimos que el residuo correspondiente es cero

$$\text{Res}_{k=0} f_{12}(k) = 0.$$

Por lo tanto, encontramos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_L(x > r; \tau) &= \frac{1}{4} 2\pi i \left\{ \text{Res}_{k=i\nu} f_{11}(k) + \text{Res}_{k=i\nu} f_{12}(k) \right\} \\ &= -\frac{\pi}{2} \nu h_L^{(1)}(i\nu x) j_L(i\nu r) \\ \mathcal{I}_L(x < r; \tau) &= \frac{1}{4} 2\pi i \left\{ \text{Res}_{k=i\nu} f_{11}(k) - \text{Res}_{k=-i\nu} f_{12}(k) \right\} \\ &= -\frac{\pi}{2} \nu h_L^{(1)}(i\nu r) j_L(i\nu x). \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones se pueden escribir conjuntamente en la forma

$$\mathcal{I}_L(x, r; \tau) = -\frac{\pi}{2} \nu j_L(i\nu r_{<}) h_L^{(1)}(i\nu r_{>}), \quad (\text{D.13})$$

en donde hemos definido $r_{<} = \min\{x, r\}$ y $r_{>} = \max\{x, r\}$.

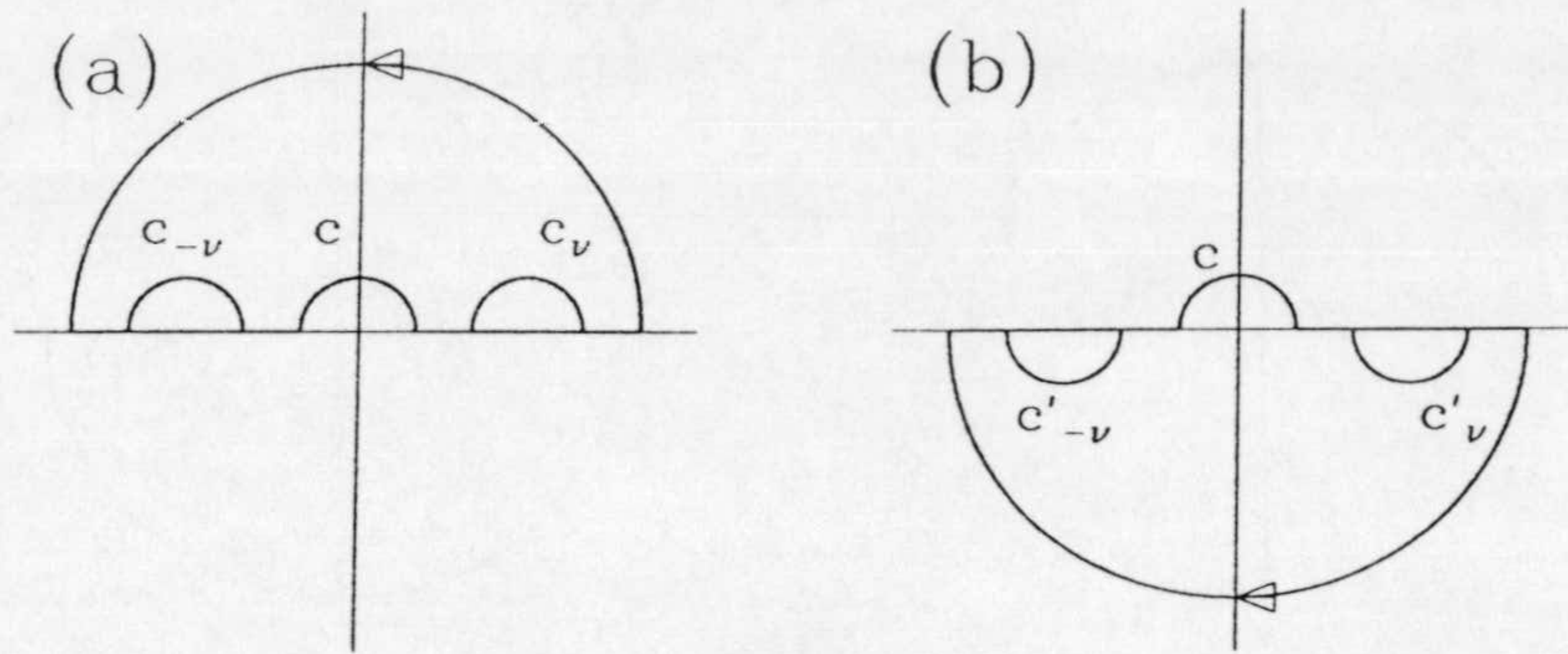


Figura D.2: Contornos de integración en el caso $\tau < 0$.

Caso $\tau < 0$. Estudiemos a continuación el caso $\tau < 0$. Ahora hay dos polos en el eje real, en los puntos $k = \pm\nu$, con $\nu = \sqrt{|\tau|}$. Por lo tanto hay que calcular un valor principal de Cauchy usando los contornos de la fig. D.2. El contorno (a) se utiliza para calcular I_L^{11} y $I_L^{12}(x, r, \tau)$ para $x > r$, mientras que con el contorno (b) calculamos $I_L^{12}(x, r, \tau)$ para $x < r$. Los caminos $c_{-\nu}$, c_ν , $c'_{-\nu}$ y c'_ν son semicírculos de radio ϵ que rodean los puntos $k = \pm\nu$.

El contorno (a) no encierra ningún polo. Por tanto se tiene

$$I_L^{11}(x, r, \tau) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_c f_{11} + \int_{c_{-\nu}} f_{11} + \int_{c_\nu} f_{11} \right). \quad (\text{D.14})$$

Usando la definición (D.6) de f_{ij} , se tiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c_{-\nu}} f_{11} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi d\theta \, i\epsilon e^{i\theta} f_{11}(-\nu + \epsilon e^{i\theta}) = i\frac{\pi}{2} \nu h_L^{(1)}(-\nu x) h_L^{(1)}(-\nu r)$$

y, análogamente,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c_\nu} f_{11} = -i\frac{\pi}{2} \nu h_L^{(1)}(\nu x) h_L^{(1)}(\nu r).$$

Sustituyendo en (D.14) y aplicando (D.4), obtenemos la integral I_L^{11} como:

$$I_L^{11}(x, r, \tau) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_c f_{11} - i\frac{\pi}{2} \nu \left\{ h_L^{(2)}(\nu x) h_L^{(2)}(\nu r) - h_L^{(1)}(\nu x) h_L^{(1)}(\nu r) \right\}. \quad (\text{D.15})$$

Para I_L^{12} y $x > r$ se tiene, análogamente,

$$I_L^{12}(x > r, \tau) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_c f_{12} - i\frac{\pi}{2} \nu \left\{ h_L^{(2)}(\nu x) h_L^{(1)}(\nu r) - h_L^{(1)}(\nu x) h_L^{(2)}(\nu r) \right\}. \quad (\text{D.16})$$

Para $x < r$, recorreremos los semicírculos c' de la fig. D.2(b). Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} I_L^{12}(x < r, \tau) &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_c f_{11} + \int_{c_{-\nu}} f_{11} + \int_{c_\nu} f_{11} \right) \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_c f_{12} - i\frac{\pi}{2} \nu \left\{ -h_L^{(2)}(\nu x) h_L^{(1)}(\nu r) + h_L^{(1)}(\nu x) h_L^{(2)}(\nu r) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Sumando (D.15) y (D.16) y haciendo uso de (D.7), (D.12a) y (D.12b), se obtiene, para $x > r$:

$$I_L^{11}(x > r, \tau) + I_L^{12}(x > r, \tau) = -2\pi\nu j_L(\nu r)y_L(\nu x), \quad (\text{D.18})$$

mientras que, sumando (D.15) y (D.17), el resultado es:

$$I_L^{11}(x < r, \tau) + I_L^{12}(x < r, \tau) = -2\pi\nu j_L(\nu x)y_L(\nu r). \quad (\text{D.19})$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en (D.5) tendremos finalmente, el resultado

$$\mathcal{I}_L(x, r, \tau) = -\frac{\pi}{2}\nu j_L(\nu r_<)y_L(\nu r_>), \quad (\text{D.20})$$

para $\tau < 0$ y $\nu = \sqrt{|\tau|}$.



Apéndice E

Interacción en el estado final (FSI)

La función de respuesta nuclear en aproximación de impulso, esto es, la debida únicamente a la carga o momento magnético de los nucleones individuales, puede verse sensiblemente afectada por el acoplamiento entre los estados finales excitados a $1p-1h$ y las excitaciones $2p-2h$ o más altas, debido a la interacción residual que en el modelo de capas extremo no está tenida en cuenta, mientras que sólo lo está parcialmente en la RPA. Análogamente, la respuesta incluyendo las MEC se ve afectada debido al acoplamiento de los estados finales con estados de $np-nh$. Este efecto, conocido con el nombre de *Interacción en el estado final* (FSI), puede ser tenido en cuenta, al menos parcialmente, introduciendo una autoenergía compleja para los estados a $1p-1h$ [Smi88, Co'88]. Como resultado, la respuesta total (incluyendo la FSI) puede expresarse como una integral de la respuesta en el modelo de capas. En este apartado introduciremos el método que hemos empleado para tener en cuenta la FSI, según el modelo fenomenológico desarrollado por Smith y Wambach, haciendo incapié en las diversas aproximaciones que son necesarias para tratar el problema. Para simplificar la exposición nos restringiremos a exponer el método para rectificar la función respuesta en impulso. El resultado final se generalizará directamente a la respuesta incluyendo MEC.

E.1 Respuesta lineal.

Partiremos de la expresión de la función respuesta en términos de la parte imaginaria de la función de Lindhart:

$$R(q, \omega) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \langle 0 | A_q^+ G(\omega) A_q | 0 \rangle$$

en donde $G(\omega)$ es la función de Green nuclear

$$G(\omega) = \frac{1}{H - \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{H + \omega - i\varepsilon} = G^{(+)}(\omega) + G^{(+)}(-\omega),$$

Aquí $G^{(+)}$ es la función de Green avanzada $(H - \omega - i\varepsilon)^{-1}$. El operador A_q representa la interacción mediante la cual se comunica un momento q al núcleo que, en el caso de la respuesta longitudinal, es el operador densidad de carga y, en el caso de la respuesta

transversal, será una corriente electromagnética. La respuesta RPA o del modelo capas se obtiene introduciendo un conjunto completo de estados del tipo a $1p - 1h$, cada uno con energía E_α .

$$\begin{aligned} R(q, \omega) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{\alpha} |\langle \alpha | A_q | 0 \rangle|^2 \left(\frac{1}{E_\alpha - \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{E_\alpha + \omega - i\varepsilon} \right) \\ &= \sum_{\alpha} |\langle \alpha | A_q | 0 \rangle|^2 \delta(E_\alpha - \omega). \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

La última igualdad se sigue de la Fórmula de Dirac [Wyl76]

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{x' - x - i\varepsilon},$$

de donde se deduce que el término que involucra a $G^{(+)}(-\omega)$ no contribuye a la respuesta para $\omega > 0$. No obstante, veremos que sí lo hará cuando se reescribe H como un hamiltoniano efectivo que tiene en cuenta la FSI, lo que equivale a introducir un propagador efectivo $G_e^{(+)}$.

E.2 Hamiltoniano efectivo.

La respuesta calculada en el modelo de capas (bien sea puro o RPA) según la ec. (E.1) supone una aproximación muy concreta: que los estados $|\alpha\rangle$ son vectores propios del hamiltoniano H . En realidad *esto no es cierto* y esta es la razón principal para que, con el fin de reestablecer la igualdad (E.1), se introduzca un término adicional o autoenergía en el numerador, que en el presente método proviene de la sustitución de H por un *hamiltoniano efectivo*. Para encontrar una forma adecuada de dicho hamiltoniano efectivo, usamos la llamada *técnica de la proyección de Feshbach* [Fes62]: Sea P el proyector sobre un subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$, sea $Q = 1 - P$ el proyector sobre el espacio ortogonal \mathcal{H}_2 y tomemos un autoestado $|\psi\rangle$ del hamiltoniano H , $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$. Entonces se tiene

$$PH(P + Q)|\psi\rangle = PH|\psi\rangle = EP|\psi\rangle,$$

de donde

$$PHQ|\psi\rangle = (E - PHP)P|\psi\rangle.$$

Esto es válido para cualquier proyector P , luego cambiando P por Q , se cumplirá asimismo

$$QHP|\psi\rangle = (E - QHQ)Q|\psi\rangle.$$

Ahora despejamos $Q|\psi\rangle$ de la segunda ecuación y sustituimos en la primera, obteniendo:

$$PHQ(E - QHQ + i\varepsilon)^{-1}QHP|\psi\rangle = (E - PHP)P|\psi\rangle,$$

En donde hemos sumado una cantidad infinitesimal imaginaria $i\varepsilon$ al operador $E - QHQ$ para asegurarnos de que es invertible. Finalmente, esta última ecuación se puede escribir en la forma

$$[PHP + PHQ(E - QHQ + i\varepsilon)^{-1}QHP]P|\psi\rangle = EP|\psi\rangle$$

o, abreviadamente,

$$H_e(E)P|\psi\rangle = EP|\psi\rangle,$$

en donde hemos introducido el hamiltoniano efectivo

$$H_e(E) = PHP - U(E).$$

Aquí PHP es la proyección del hamiltoniano en el subespacio \mathcal{H}_1 , que corresponderá al espacio modelo de estados nucleares, bien sean del modelo de capas o de la RPA, conteniendo solamente excitaciones a $1p - 1h$. Además se ha definido el operador

$$U(E) = PHQ \frac{1}{QHQ - E - i\varepsilon} QHP,$$

potencial efectivo que contiene información de las componentes en el espacio \mathcal{H}_2 , o estados a $np - nh$, no tenidas en cuenta en el modelo de capas utilizado. Supuesto que H es de la forma $H = H_0 + V$, donde V es a dos cuerpos, la parte a un cuerpo H_0 no puede conectar \mathcal{H}_1 con \mathcal{H}_2 , es decir, $PHQ = PVQ$ y $QHP = QVP$. Se tendrá entonces

$$U(E) = PVQ \frac{1}{QHQ - E - i\varepsilon} QVP.$$

E.3 Respuesta efectiva.

Sustituyendo H por $H_e(\omega)$ en la definición del propagador $G^{(+)}(\omega)$, se obtiene la expresión del propagador efectivo $G_e(\omega)$ que actúa en el espacio modelo, pero contiene información de los estados $np - nh$:

$$\begin{aligned} G_e^{(+)}(\omega) &= \frac{1}{H_e(\omega) - \omega - i\varepsilon} \\ G_e(\omega) &= G_e^{(+)}(\omega) + G_e^{(+)}(-\omega). \end{aligned}$$

La respuesta efectiva que resulta de este propagador efectivo puede expresarse entonces de la siguiente manera:

$$R^{\text{FSI}}(q, \omega) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{\alpha} |\langle \alpha | A_q | 0 \rangle|^2 \left(\frac{1}{E_{\alpha} - \omega - \Sigma_{\alpha}(\omega) - i\varepsilon} + \frac{1}{E_{\alpha} + \omega - \Sigma_{\alpha}(-\omega) + i\varepsilon} \right),$$

donde se ha definido la *autoenergía* del estado α mediante

$$\Sigma_{\alpha}(\omega) = \langle \alpha | U(\omega) | \alpha \rangle$$

y se ha hecho la aproximación *diagonal* de $U(\omega)$. Vemos que el potencial efectivo genera una autoenergía compleja para cada estado α del modelo de capas utilizado. La respuesta efectiva que así se obtiene no puede expresarse directamente en términos de la respuesta del modelo de capas porque la autoenergía $\Sigma_{\alpha}(\omega)$ depende del estado α . Si hacemos la suposición de que en la región del continuo del pico cuasielástico Σ_{α} no depende mucho

del estado particular α que se excita, podemos poner $\Sigma_\alpha \simeq \Sigma$ y descomponemos esta última en sus partes real e imaginaria

$$\Sigma(\omega) = \Delta(\omega) + i\Gamma(\omega)/2$$

y la respuesta efectiva se escribe:

$$R^{\text{FSI}}(q, \omega) = \sum_{\alpha} |\langle \alpha | A_q | 0 \rangle|^2 [\rho(E_\alpha, \omega) + \rho(E_\alpha, -\omega)],$$

en donde la parte entre corchetes corresponde a la parte imaginaria del propagador efectivo

$$\rho(E, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(\omega)}{[E - \omega - \Delta(\omega)]^2 + [\Gamma(\omega)/2]^2}. \quad (\text{E.2})$$

Con el fin de relacionar esta expresión con la de la respuesta calculada en el modelo de capas, escribamos explícitamente la energía en el número cuántico α que describe nuestros estados excitados: $\alpha = (E, \lambda)$, con lo cual la suma sobre estados pasa a ser una integral en energía y una suma en el resto de los números cuánticos λ precisos para la determinación completa de los estados: $\sum_{\alpha} = \int_0^{\infty} dE \sum_{\lambda}$. La respuesta efectiva se escribe entonces

$$R^{\text{FSI}}(q, \omega) = \int_0^{\infty} dE \sum_{\lambda} |\langle E, \lambda | A_q | 0 \rangle|^2 [\rho(E, \omega) + \rho(E, -\omega)]$$

y la respuesta del modelo de capas:

$$R(q, \omega) = \int_0^{\infty} dE \sum_{\lambda} |\langle E, \lambda | A_q | 0 \rangle|^2 \delta(E - \omega) = \sum_{\lambda} |\langle E, \lambda | A_q | 0 \rangle|^2.$$

Sustituyendo esta última expresión en la respuesta efectiva tenemos

$$R^{\text{FSI}}(q, \omega) = \int_0^{\infty} dE R(q, E) [\rho(E, \omega) + \rho(E, -\omega)]. \quad (\text{E.3})$$

Por lo tanto, los estados del modelo de capas que contribuyen a la respuesta efectiva no son aquéllos con $E = \omega$, sino que están distribuidos según la función $\rho(E, \omega) + \rho(E, -\omega)$. Nótese que la función $\rho(E, \omega)$, ecuación (E.2), tiene un máximo para $E = \omega + \Delta(\omega)$. Por esta razón la parte real de la autoenergía $\Delta(\omega)$ se denomina desplazamiento de la energía (*energy shift*). Por otra parte, si analizamos brevemente una función del tipo

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + a^2},$$

vemos que tiene su máximo en $x = 0$, con valor $f_{\text{max}} = 1/a$, mientras que su valor en $x = a$ es $f(a) = 1/(2a) = f_{\text{max}}/2$. Por lo tanto, la anchura de la gráfica de f a la mitad de su altura es $2a$. Análogamente, la anchura de $\rho(E, \omega)$ a mitad de su altura, para un ω dado, es igual a $\Gamma(\omega)$, de aquí que a la parte imaginaria de la autoenergía se la denomine *anchura de la distribución* o *spreading width*. En el límite $\Sigma(\omega) \rightarrow 0$ se tiene $\rho(E, \omega) \rightarrow \delta(E - \omega)$ y por lo tanto $\rho(E, -\omega)$ no contribuye a la respuesta. No obstante, vemos que en el modelo FSI la truncación del espacio de estados excitados y la

introducción del hamiltoniano efectivo, trae como consecuencia una contribución no nula proveniente de la parte retardada del propagador $G^{(+)}(-\omega)$.

Vemos que el problema de la respuesta efectiva debida a la FSI queda resuelto si conocemos la función $\rho(E, \omega)$, o bien si conocemos la autoenergía $\Sigma(\omega)$. No obstante, basta conocer sólo su parte imaginaria porque se satisface la relación de dispersión

$$\Delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\Gamma(\omega')}{\omega' - \omega},$$

que se deduce de la siguiente expresión general válida para cualquier función $f(z)$ analítica en el semiplano complejo superior que se anule para $|z| \rightarrow \infty$ [Wyl76]:

$$f(x + i\varepsilon) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{f(x' + i\varepsilon)}{x' - x}.$$

E.4 Autoenergía de los estados a $1p - 1h$.

Para calcular la parte imaginaria de la autoenergía es necesario hacer una serie de aproximaciones de manera que pueda relacionarse con la anchura γ de la distribución de una única partícula en el núcleo, magnitud que puede ser parametrizada mediante modelos fenomenológicos, o bien puede medirse experimentalmente.

En primer lugar, supongamos que la contribución dominante del espacio $np - nh$ a la autoenergía Σ_α proviene de las excitaciones $2p - 2h$. Esto es equivalente a sustituir H por el potencial medio H_0 en el denominador:

$$\Sigma_\alpha(\omega) = \langle \alpha | V Q \frac{1}{H_0 - \omega - i\varepsilon} Q V | \alpha \rangle = \sum_{pp'hh'} \frac{|\langle pp'h^{-1}h'^{-1} | V | \alpha \rangle|^2}{\sum \epsilon - \omega - i\varepsilon}$$

y la suma del denominador corresponde a la energía del estado intermedio $2p - 2h$:

$$\sum \epsilon = \epsilon_p + \epsilon_{p'} - \epsilon_h - \epsilon_{h'}.$$

Tomemos $|\alpha\rangle = |ki^{-1}\rangle$ un estado a $1p - 1h$. De los distintos términos que contribuyen a la autoenergía de este estado, vamos a considerar solamente aquellos que corresponden a los cuatro diagramas de la fig. E.1, que denominamos (a), (b), (c) y (d), despreciando los términos de intercambio. Por ejemplo, la autoenergía que se deriva del diagrama (a) es

$$\Sigma_{\alpha,a} = \sum_{pp'h} \frac{|\langle p'p | V | kh \rangle|^2}{\epsilon_{p'} + \epsilon_p - \epsilon_h - \epsilon_i - \omega - i\varepsilon}.$$

En la representación diagramática puede apreciarse que los diagramas (a) y (b) corresponden a las autoenergías de una partícula y un agujero respectivamente. Por lo tanto, $\text{Im}\Sigma_{\alpha a}$ y $\text{Im}\Sigma_{\alpha b}$ se identifican con las anchuras γ de dichos estados monoparticulares:

$$\begin{aligned} \text{Im}\Sigma_{\alpha a} &= \gamma(\epsilon_F + \epsilon_k) \\ \text{Im}\Sigma_{\alpha b} &= \gamma(\epsilon_F + \epsilon_i) = \gamma(\epsilon_F + \epsilon_k - \omega), \end{aligned}$$

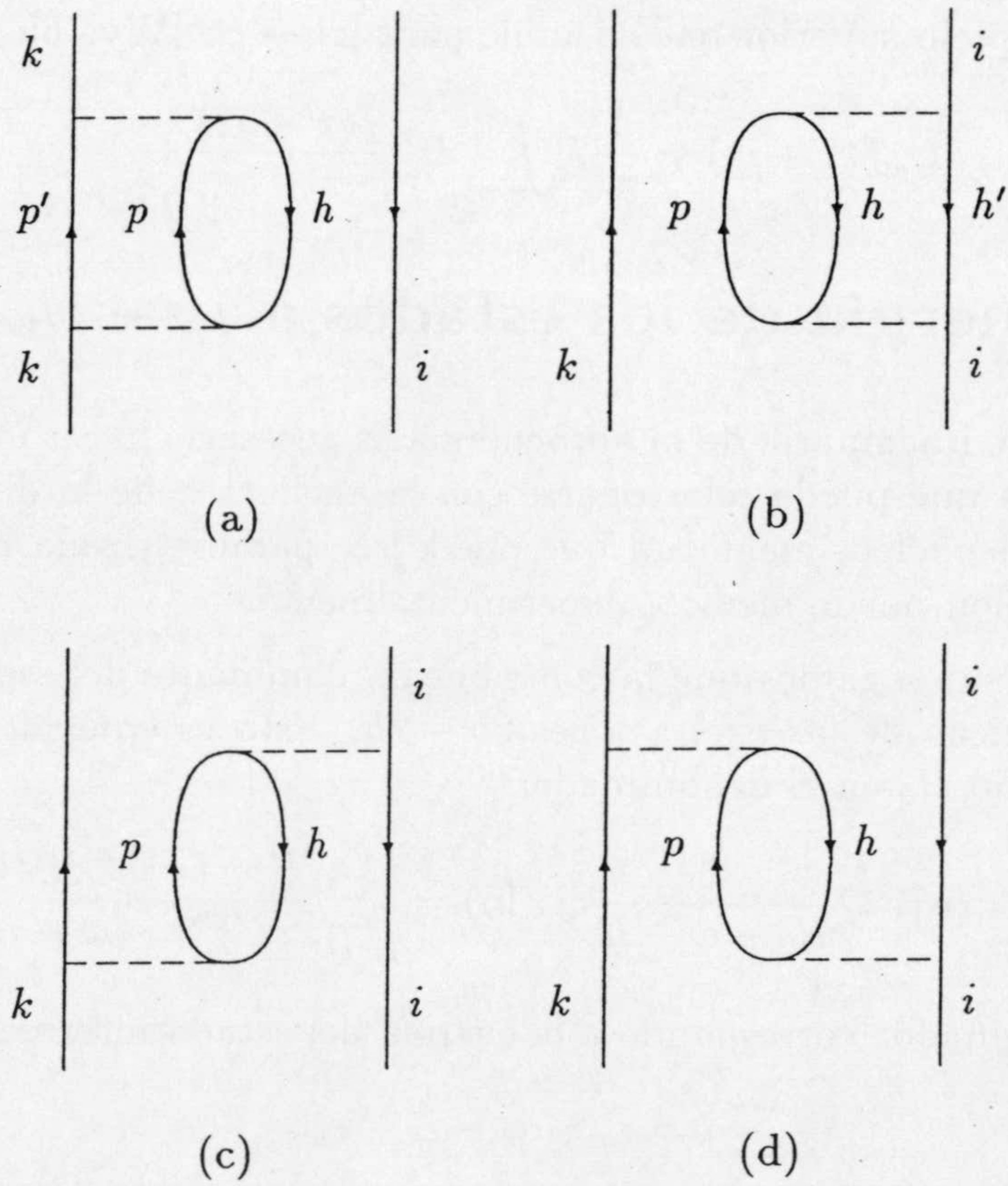


Figura E.1: Diagramas que se consideran para la evaluación de la autoenergía de los estados a $1p - 1h$

en donde hemos puesto que la energía del agujero i es $\epsilon_i = \epsilon_k - \omega$. Supongamos ahora que la pareja (ki^{-1}) está acoplada a espín total S e isospín T . Puede mostrarse que, bajo la aproximación de que los elementos de matriz espaciales de (c) y (d) son aproximadamente iguales a los de (a) y (b) en promedio y en la región del pico cuasielástico, la parte imaginaria de la autoenergía del estado $|(ki^{-1}); ST\rangle$ puede escribirse como [Smi88, Co'88]:

$$\Gamma_{\alpha ST}(\omega) = [\gamma(\epsilon_F + \epsilon_k) + \gamma(\epsilon_F + \epsilon_k - \omega)](1 + \xi_{ST}),$$

en donde ξ_{ST} proviene de los diagramas (c), (d) y da cuenta de la interferencia entre la partícula k y el agujero i . Este coeficiente depende fundamentalmente de las constantes de acoplamiento de la parte de espín e isospín de la interacción residual en los diversos canales. En particular, una medida de estas constantes la dan los parámetros G_0 y G'_0 definidos en la teoría de Landau Migdal de los sistemas fermiónicos. Nosotros hemos tomado los valores $\xi_{00} = -1$, $\xi_{01} = 0.11$, $\xi_{10} = -0.395$ y $\xi_{11} = -0.075$ que resultan de tomar $G_0 = 0.32$, $G'_0 = 1.28$ [Pin88b, Co'88]. Antes hemos dicho que vamos a suponer que la autoenergía partícula-hueco no depende del estado. Para obtener una anchura independiente de la excitación particular $|\alpha\rangle$, promediamos para todas las posibles energías ϵ_k . Así, la anchura en el canal ST será

$$\Gamma_{ST}(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega d\epsilon [\gamma(\epsilon_F + \epsilon) + \gamma(\epsilon_F + \epsilon - \omega)](1 + \xi_{ST}),$$

y el problema queda reducido a la determinación fenomenológica de la anchura monoparticular $\gamma(\epsilon_F + \epsilon)$, que para $\epsilon > 0$ puede ser asociada con el potencial óptico fenomenológico obtenido a partir de datos de dispersión elástica a baja energía, mientras que para estados de agujero, $\epsilon < 0$, puede relacionarse con la anchura Γ^\perp , que pueden ser directamente medida. Nosotros hemos elegido la parametrización

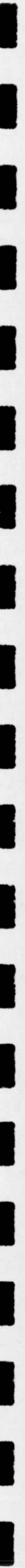
$$\gamma(\epsilon_F + \epsilon) = 21.5 \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + 18^2} (\text{MeV}),$$

que ajusta razonablemente los datos de Mahaux y Ngô [Mah82, 81] Finalmente, para núcleos de capa cerrada y con igual número de protones que de neutrones, podemos suponer igual probabilidad para excitar los distintos canales de espín e isospín. Así, para la respuesta transversal usamos la anchura media

$$\Gamma = \frac{1}{4} [\Gamma_{00} + \Gamma_{10} + \Gamma_{01} + \Gamma_{11}],$$

mientras que para la respuesta longitudinal, que involucra solamente al operador de carga, que no afecta al espín, tomamos

$$\Gamma = \frac{1}{2} [\Gamma_{00} + \Gamma_{01}].$$



Apéndice F

Respuesta de materia nuclear

Presentamos aquí el cálculo detallado de las respuestas longitudinal y transversal de materia nuclear sin interacción cuando los estados finales son del tipo $1p - 1h$, incluyendo la contribución de las MEC en la parte transversal. En este modelo nuclear tan simple, se tratan a los protones y a los neutrones como dos gases de Fermi independientes, de manera que en principio hay que considerar dos momentos de Fermi distintos: uno para protones k_F^P , y otro para neutrones k_F^N . En las aplicaciones al capítulo 3, en el que se particulariza a materia simétrica (igual número de protones que de neutrones), dichos momentos de Fermi tienen el mismo valor.

F.1 Elementos de matriz $1p - 1h$ genéricos

Para la evaluación de las funciones respuesta asociadas a los operadores de carga y corriente, debemos evaluar sus elementos de matriz entre el estado fundamental $|F\rangle$ y los estados excitados partícula-hueco

$$|ph^{-1}\rangle = a_p^+ a_h |F\rangle,$$

siendo p y h estados monoparticulares caracterizados por su momento (ondas planas), espín e isospín, es decir, (\mathbf{p}, s_p, t_p) y (\mathbf{h}, s_h, t_h) , respectivamente.

Si A es un operador a un cuerpo utilizaremos el resultado

$$\langle ph^{-1}|A|F\rangle = \langle p|A|h\rangle, \quad (\text{F.1})$$

mientras que si A es a dos cuerpos, el correspondiente elemento de matriz es

$$\langle ph^{-1}|A|F\rangle = \sum_{k < F} [\langle pk|A|hk\rangle - \langle pk|A|kh\rangle], \quad (\text{F.2})$$

En donde el símbolo $\sum_{k < F}$ indica que hay que sumar sobre todos los números cuánticos de agujero (\mathbf{k}, s_k, t_k) , incluyendo los protones con $k < k_F^P$ y los neutrones con $k < k_F^N$. La suma sobre \mathbf{k} se convierte en una integral cuando se toma el límite de materia infinita.

Por analogía con el convenio anterior, a menudo haremos uso de la función paso generalizada $\theta(F - k)$, que debe entenderse como $\theta(k_F^P - k)$, si la partícula k es un protón, y como $\theta(k_F^N - k)$, si es un neutrón.

Por su parte, a menudo utilizaremos la definición

$$\omega_h^t = \frac{\hbar^2}{2M_t}, \quad (\text{F.3})$$

donde M_t es la masa del nucleón con isospín t .

F.2 Respuesta longitudinal

La respuesta longitudinal que vamos a calcular es la respuesta de la carga (que ya incluye la corriente longitudinal a través de la ecuación de continuidad). El operador densidad de carga de protones (no tenemos aquí en cuenta los factores de forma del nucleón) está dado por

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1 + \tau_3}{2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \equiv Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1),$$

donde \mathbf{r}_1 es la coordenada del nucleón. Su transformada de Fourier es

$$\rho(\mathbf{q}) = \int d^3r Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = Q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} \quad (\text{F.4})$$

y su elemento de matriz de transición, ec (F.1) está dado por

$$\begin{aligned} \langle ph^{-1} | \rho(\mathbf{q}) | F \rangle &= \langle p | \rho(\mathbf{q}) | h \rangle = \int_V d^3r_1 \frac{1}{V} \langle s_p | s_h \rangle \langle t_p | Q | t_h \rangle e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{h}\cdot\mathbf{r}_1} \\ &= \delta_{s_p s_h} \delta_{t_p t_h} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{p}, \mathbf{h}} Q_h. \end{aligned}$$

Aquí hemos integrado sobre el volumen V y por ello hemos obtenido una delta de Kronecker de momentos. Además usamos la notación $Q_h = \langle t_h | Q | t_h \rangle$. La respuesta longitudinal será, por tanto,

$$\begin{aligned} R_L(\mathbf{q}, \omega) &= \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) |\delta_{s_p s_h} \delta_{t_p t_h} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h}, \mathbf{p}} Q_h|^2 \\ &= 2 \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h^P - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}^P) \theta(k_F^P - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F^P) \\ &= \mathcal{R}_P(\mathbf{q}, \omega), \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

en donde hemos sumado sobre espín (de donde se obtiene el factor 2) e isospín de ambas partículas y hemos hecho uso de la delta de Kronecker para sumar sobre el momento \mathbf{p} . La respuesta que se obtiene es exclusivamente debida a los protones, por lo que la hemos denotado \mathcal{R}_P . En general, es conveniente definir (ya que posteriormente haremos uso de ella) una respuesta dependiente de isospín

$$\mathcal{R}_t(\mathbf{q}, \omega) = 2 \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h^t - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}^t) \theta(k_F^t - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F^t) \quad (\text{F.6})$$

y que corresponde a la respuesta genérica ante el operador siguiente

$$\rho_t(\mathbf{q}) = \sum_{s\mathbf{k}} a_{ts}^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) a_{ts}(\mathbf{k}). \quad (\text{F.7})$$

Este es un operador que comunica un momento \mathbf{q} a los nucleones de tipo t (bien protones $t = P$ o neutrones $t = N$), con una amplitud constante (independiente del momento y del espín). En el espacio de posiciones $\rho_t(\mathbf{r})$ es la densidad de nucleones de tipo t . En la sección F.9 abordaremos el cálculo de la suma sobre \mathbf{h} que aparece en (F.6).

F.3 Respuesta transversal a un cuerpo

La respuesta transversal es la asociada a la parte transversal (perpendicular a \mathbf{q}) de la transformada de Fourier de la corriente nuclear, cuya parte a un cuerpo contiene un término de magnetización y otro de convección. En esta sección calculamos los elementos de matriz genéricos asociados a estas dos corrientes.

F.3.1 Elementos de matriz de la corriente de convección

La corriente de convección está dada por

$$\mathbf{j}^C(\mathbf{r}) = \frac{-i}{2M} Q [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \nabla_1 + \nabla_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)]$$

y su transformada de Fourier es

$$\mathbf{j}^C(\mathbf{q}) = \frac{-i}{2M} Q [e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} \nabla_1 + \nabla_1 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1}] = \frac{1}{2M} Q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} [-2i\nabla_1 + \mathbf{q}], \quad (\text{F.8})$$

en donde hemos aplicado ∇_1 sobre la exponencial. El elemento de matriz de este operador es

$$\begin{aligned} \langle p | \mathbf{j}^C(\mathbf{q}) | h \rangle &= \frac{1}{V} \delta_{t_p t_h} \delta_{s_p s_h} Q_h \frac{1}{2M_P} \int_V d^3 r_1 e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} [-2i\nabla_1 + \mathbf{q}] e^{i\mathbf{h}\cdot\mathbf{r}_1} \\ &= \delta_{t_p t_h} \delta_{s_p s_h} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h},\mathbf{p}} Q_h \frac{1}{2M_P} [2\mathbf{h} + \mathbf{q}]. \end{aligned}$$

A la componente transversal de esta corriente sólo contribuye la parte proporcional a \mathbf{h} . Aplicando (F.1) se tiene, finalmente,

$$\langle p h^{-1} | \mathbf{j}_T^C(\mathbf{q}) | F \rangle = \langle p | \mathbf{j}_T^C(\mathbf{q}) | h \rangle = \delta_{t_p t_h} \delta_{s_p s_h} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h},\mathbf{p}} \frac{Q_h}{M_P} \mathbf{h}_T, \quad (\text{F.9})$$

con

$$\mathbf{h}_T = \mathbf{h} - \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{q}}{q^2} \mathbf{q}.$$

F.3.2 Respuesta C

Calculemos la respuesta de convección usando el elemento de matriz (F.9):

$$\begin{aligned} R_T^C(\mathbf{q}, \omega) &= \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) \left| \delta_{t_p t_h} \delta_{s_p s_h} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h}, \mathbf{p}} \frac{Q_h}{M_h} \mathbf{h}_T \right|^2 \\ &= 2 \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h^P - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}^P) \theta(k_F^P - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F^P) \frac{\mathbf{h}_T^2}{M_P^2}. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Debido a la delta de energías se tiene que

$$\omega - \frac{q^2}{2M} - \frac{2\mathbf{h} \cdot \mathbf{q}}{2M} = 0,$$

luego

$$\frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{q}}{q} = \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2}$$

y por lo tanto, la parte transversal del vector \mathbf{h} se puede escribir

$$\mathbf{h}_T^2 = \mathbf{h}^2 - \frac{(\mathbf{h} \cdot \mathbf{q})^2}{q^2} = \mathbf{h}^2 - \left(\frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right)^2$$

Sustituyendo en la respuesta (F.10) tendremos

$$R_T^C(\mathbf{q}, \omega) = 2 \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h^P - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}^P) \theta(k_F^P - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F^P) \left[\frac{\mathbf{h}^2}{M_P^2} - \left(\frac{\omega}{q} - \frac{q}{2M_P} \right)^2 \right] \quad (\text{F.11})$$

Una última observación: la respuesta de convección es la misma que la asociada al operador de transición efectivo

$$\rho_P^C(\mathbf{q}) = \sum_{s\mathbf{k}} \frac{k_T}{M_P} a_{sP}^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) a_{sP}(\mathbf{k}),$$

cuyo efecto es comunicar un momento \mathbf{q} a los protones con una amplitud $k_T/M_P \leq 1$ (compárese con la expresión (F.7))

F.3.3 Elemento de matriz de la corriente de magnetización

De un modo análogo calcularemos el elemento de matriz de la transformada de Fourier de la corriente de magnetización

$$\mathbf{j}^M(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{2M} \nabla \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \boldsymbol{\sigma},$$

que está dada por

$$\mathbf{j}^M(\mathbf{q}) = \frac{\mu}{2M} \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\sigma} = -\frac{i\mu}{2M} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_1}. \quad (\text{F.12})$$

Su elemento de matriz se obtiene fácilmente aplicando (F.1):

$$\langle ph^{-1} | \mathbf{j}^M(\mathbf{q}) | F \rangle = \langle p | \mathbf{j}^M(\mathbf{q}) | h \rangle = -\delta_{t_p t_h} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h}, \mathbf{p}} \frac{i\mu_h}{2M_h} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{s_p s_h}, \quad (\text{F.13})$$

que es ya transversal porque es un producto vectorial con \mathbf{q} . En esta ecuación, μ_h es el momento magnético del nucleón $|h\rangle$.

F.3.4 Respuesta M

A partir del elemento de matriz de la corriente de magnetización (F.13) calculamos la respuesta

$$\begin{aligned}
 R_T^M(\mathbf{q}, \omega) &= \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) \left| \delta_{t_p t_h} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h}, \mathbf{p}} \frac{i\mu_h}{2M_h} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{s_p s_h} \right|^2 \\
 &= \sum_t \sum_{ss'} \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h^t - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}^t) \theta(k_F^t - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F^t) \frac{\mu_t^2}{4M_t^2} |\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ss'}|^2 \\
 &= \sum_{ss'} |\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ss'}|^2 \sum_t \left(\frac{\mu_t}{2M_t} \right)^2 \frac{1}{2} \mathcal{R}_t(\mathbf{q}, \omega),
 \end{aligned}$$

en donde hemos cambiado los índices de suma en espín a $s = s_p$ y $s' = s_h$ y de isospín a $t = t_h$. Además hemos usado la definición (F.6) de la respuesta \mathcal{R}_t . La suma sobre espín se expresa en función de trazas de matrices de Pauli:

$$\sum_{ss'} |\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ss'}|^2 = \text{Tr} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma})^2.$$

La matriz afectada por la traza se puede escribir como

$$(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma})^2 = q^2(\boldsymbol{\sigma}^2 - 1).$$

En efecto, basta usar sucesivamente las relaciones

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} &= \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \\
 \sigma_k \sigma_m &= i \epsilon_{kmn} \sigma_n + \delta_{km}
 \end{aligned}$$

en el desarrollo del producto escalar

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma})^2 &= \epsilon_{ijk} q_j \sigma_k \epsilon_{ilm} q_l \sigma_m = q_j q_j \sigma_k \sigma_k - q_j q_k \sigma_k \sigma_j \\
 &= q^2 \boldsymbol{\sigma}^2 - q^2 - i q_j q_k \epsilon_{kji} \sigma_i = q^2 \boldsymbol{\sigma}^2 - q^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la traza buscada es

$$\text{Tr} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma})^2 = \text{Tr} q^2(\boldsymbol{\sigma}^2 - 1) = q^2(6 - 2) = 4q^2$$

y la respuesta de magnetización queda en la forma:

$$R_T^M(\mathbf{q}, \omega) = 2q^2 \sum_t \left(\frac{\mu_t}{2M_t} \right)^2 \mathcal{R}_t(\mathbf{q}, \omega). \quad (\text{F.14})$$

Por último, en el caso de materia nuclear simétrica, pondremos

$$\mathcal{R}_P = \mathcal{R}_N \equiv \mathcal{R},$$

y consideraremos también que $M_P = M_N \equiv M$. En un cálculo práctico, puede tomarse para M el promedio entre M_P y M_N . La respuesta de convección se escribe entonces:

$$R_T^M(\mathbf{q}, \omega) = (\mu_P^2 + \mu_N^2) \frac{q^2}{2M} \mathcal{R}(\mathbf{q}, \omega). \quad (\text{F.15})$$

F.3.5 Respuesta de interferencia CM

En este apartado veremos que la respuesta de interferencia convección-magnetización definida en (3.8) es cero. En efecto, dicha respuesta está dada por:

$$\begin{aligned}
 R_T^{\text{CM}}(\mathbf{q}, \omega) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) \\
 &\quad \delta_{i_p t_h} \delta_{s_p s_h} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h}, \mathbf{p}} \frac{Q_h}{M_h} \mathbf{h}_T \cdot \left[\delta_{i_p t_h} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h}, \mathbf{p}} (-i) \frac{\mu_h}{2M_h} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{s_p s_h} \right]^* \\
 &= 2 \operatorname{Re} \sum_s \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h^{\text{P}} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}^{\text{P}}) \theta(k_F^{\text{P}} - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F^{\text{P}}) \frac{i\mu_{\text{P}}}{4M_{\text{P}}^2} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ss}^*).
 \end{aligned}$$

La suma sobre espines es cero, ya que las matrices de Pauli tienen traza nula. Por lo tanto queda demostrado que no hay interferencia C-M en la respuesta:

$$R_T^{\text{CM}} = 0.$$

F.4 Respuesta transversal de las MEC

Como apuntamos en el capítulo 3, sólo vamos a considerar aquí las respuestas de interferencia de las MEC con la corriente a un cuerpo. Asimismo, y con la principal finalidad de que las integrales resultantes puedan realizarse (al menos en parte) analíticamente, adoptaremos la aproximación estática y con el factor de forma pión-nucleon igual a la unidad.

F.4.1 Elementos de matriz de la corriente seagull

Con las consignas anteriores, la transformada de Fourier de la corriente Seagull se escribe

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}^{\text{S}}(\mathbf{q}) &= B \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma}^1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) + (1 \longleftrightarrow 2) \\
 &= B e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla_1 h(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - B e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \nabla_2 h(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).
 \end{aligned}$$

En esta fórmula el operador B vale

$$B = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} (\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2)_z$$

y la función h es el propagador del pión

$$h(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} v(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

con

$$v(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mu^2 + k^2}.$$

Seguidamente calcularemos el elemento de matriz genérico:

$$\langle p'_1, p'_2 | \mathbf{j}^S(\mathbf{q}) | p_1, p_2 \rangle = B_{1'2',12} \frac{1}{V^2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 e^{-i\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{-i\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{r}_2} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \\ i[\sigma_{s'_1 s_1} \sigma_{s'_2 s_2} \cdot \mathbf{k} v(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_1} - \sigma_{s'_2 s_2} \sigma_{s'_1 s_1} \cdot \mathbf{k} v(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_2}],$$

en donde $|p_i\rangle = |\mathbf{p}_i, s_i, t_i\rangle$, $|p_i\rangle = |\mathbf{p}_i, s_i, t_i\rangle$ y $B_{1'2',12}$ es el elemento de matriz del operador B entre los correspondientes estados de isospín. En este punto debemos aclarar que, aunque la integración sobre \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 se extiende al volumen de integración V , nuestro propósito es tomar el límite $V \rightarrow \infty$ para calcular la respuesta. En el primer sumando tomaremos dicho límite para realizar la integración sobre \mathbf{r}_2 , cuyo resultado será una delta de Dirac, mientras que mantendremos la integración sobre V para \mathbf{r}_1 . En el segundo sumando, en cambio, mantendremos V finito en la integral sobre \mathbf{r}_2 . Tras dichas integraciones se tendrá

$$\langle p'_1 p'_2 | \mathbf{j}^S(\mathbf{q}) | p_1 p_2 \rangle = B_{1'2',12} \frac{i}{V} \int d^3 k \left[\delta_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{p}'_1} \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} - \mathbf{p}'_2) \sigma_{s'_2 s_2} \sigma_{s'_1 s_1} \cdot \mathbf{k} v(\mathbf{k}) \right. \\ \left. - \delta_{\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{p}'_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - \mathbf{p}'_1) \sigma_{s'_2 s_2} \sigma_{s'_1 s_1} \cdot \mathbf{k} v(\mathbf{k}) \right] \\ = - \delta_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2} B_{1'2',12} \frac{i}{V} \left[\sigma_{s'_1 s_1} \sigma_{s'_2 s_2} \cdot \mathbf{k}_2 v(\mathbf{k}_2) - \sigma_{s'_2 s_2} \sigma_{s'_1 s_1} \cdot \mathbf{k}_2 v(\mathbf{k}_1) \right],$$

donde $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1$ y $\mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2$ son los momentos transferidos al primer y al segundo nucleón, respectivamente.

Ahora haremos uso de la ecuación (F.2), teniendo en cuenta que el elemento de matriz del operador B es

$$B_{1'2',12} = -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} 2i(\delta_{1'N} \delta_{2'P} \delta_{1P} \delta_{2N} - \delta_{1'P} \delta_{2'N} \delta_{1N} \delta_{2P}). \quad (\text{F.16})$$

Por este motivo

$$\langle pk | B | hk \rangle = 0,$$

ya que el nucleón $|k\rangle$ no puede ser a la vez protón y neutrón. Puesto que la corriente seagull es proporcional a B , de la ecuación (F.2) sólo sobrevive el término de intercambio:

$$\langle ph^{-1} | \mathbf{j}^S(\mathbf{q}) | F \rangle = - \sum_{k < F} \langle pk | \mathbf{j}^S(\mathbf{q}) | kh \rangle \\ = \frac{i}{V} \delta_{\mathbf{h} + \mathbf{q}, \mathbf{p}} \sum_{k < F} B_{pk, kh} \\ [\sigma_{pk} \sigma_{kh} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}) v(\mathbf{k} - \mathbf{h}) - \sigma_{kh} \sigma_{pk} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) v(\mathbf{p} - \mathbf{k})],$$

en donde, para aligerar la notación, escribimos $\sigma_{pk} \equiv \sigma_{s_p s_k}$, etc. La suma sobre \mathbf{k} se transforma en una integral en el límite $V \rightarrow \infty$ mediante la sustitución

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}.$$

Por lo tanto, renombrando los índices de espín e isospín s_k, t_k como s, t tendremos:

$$\begin{aligned} \langle ph^{-1} | \mathbf{j}^S(\mathbf{q}) | F \rangle &= i\delta_{\mathbf{h}+\mathbf{q},\mathbf{p}} \sum_{st} B_{ptth} \int_{S_t} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\ &\quad [\boldsymbol{\sigma}_{ps} \boldsymbol{\sigma}_{sh} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}) v(\mathbf{k} - \mathbf{h}) - \boldsymbol{\sigma}_{sh} \boldsymbol{\sigma}_{ps} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) v(\mathbf{p} - \mathbf{k})] \\ &= -i\delta_{\mathbf{h}+\mathbf{q},\mathbf{p}} \sum_t B_{ptth} \sum_s [\boldsymbol{\sigma}_{ps} \boldsymbol{\sigma}_{sh} \cdot \mathbf{I}_t^S(\mathbf{h}) + \boldsymbol{\sigma}_{sh} \boldsymbol{\sigma}_{ps} \cdot \mathbf{I}_t^S(\mathbf{p})], \end{aligned}$$

en donde hemos definido la siguiente integral sobre el interior de la esfera de Fermi:

$$\mathbf{I}_t^S(\mathbf{h}) = \int_{F_t} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\mathbf{h} - \mathbf{k}) v(\mathbf{h} - \mathbf{k}). \quad (\text{F.17})$$

F.4.2 Respuesta de interferencia MS

El siguiente paso es el cálculo de la respuesta de interferencia entre las corrientes de magnetización y seagull:

$$\begin{aligned} R_T^{\text{MS}}(\mathbf{q}, \omega) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) \langle ph^{-1} | \mathbf{j}_T^M(\mathbf{q}) | F \rangle \cdot \langle ph^{-1} | \mathbf{j}_T^S(\mathbf{q}) | F \rangle^* \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) (-i) \delta_{\mathbf{h}+\mathbf{q},\mathbf{p}} \delta_{t_p t_h} \frac{\mu_h}{2M_h} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph} \cdot \\ &\quad i\delta_{\mathbf{h}+\mathbf{q},\mathbf{p}} \sum_t B_{ptth}^* \sum_s [\boldsymbol{\sigma}_{ps} \boldsymbol{\sigma}_{sh} \cdot \mathbf{I}_t^S(\mathbf{h}) + \boldsymbol{\sigma}_{sh} \boldsymbol{\sigma}_{ps} \cdot \mathbf{I}_t^S(\mathbf{p})]^* \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{tt_h} \frac{\mu_h}{2M_h} B_{htth}^* \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}) \theta(F - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - F) \\ &\quad \sum_{ss_p sh} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph}) \cdot [\boldsymbol{\sigma}_{ps} \boldsymbol{\sigma}_{sh} \cdot \mathbf{I}_t^S(\mathbf{h}) + \boldsymbol{\sigma}_{sh} \boldsymbol{\sigma}_{ps} \cdot \mathbf{I}_t^S(\mathbf{h} + \mathbf{q})]^*. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Nótese que la parte transversal de la corriente seagull es seleccionada al hacer el producto escalar con la magnetización, porque ésta es ya perpendicular a \mathbf{q} . Realizemos las sumas sobre espín:

$$\begin{aligned} \sum_p (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps}^* &= \sum_p \mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{ph} \times \boldsymbol{\sigma}_{sp}) = -\mathbf{q} \cdot \sum_p \boldsymbol{\sigma}_{sp} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph} \\ &= -\mathbf{q} \langle s | \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} | h \rangle = -2i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{sh}, \end{aligned}$$

en donde hemos usado que el producto vectorial de dos matrices de Pauli es

$$\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} = \epsilon_{ijk} \sigma^j \sigma^k = i\epsilon_{ijk} \epsilon_{jkl} \sigma^l = 2i\delta_{il} \sigma^l = 2i\sigma^i = 2i\boldsymbol{\sigma}$$

y aquí se ha utilizado la contracción

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{jkl} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} = \delta_{il} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jl} = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il}$$

Seguidamente sumaremos sobre sh haciendo uso de la traza

$$\operatorname{Tr} \sigma^i \sigma^j = 2\delta_{ij}. \quad (\text{F.19})$$

Luego

$$\sum_{psh} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps}^* \boldsymbol{\sigma}_{sh}^* = -2i \sum_{sh} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{sh} \boldsymbol{\sigma}_{hs} = -2i \mathbf{q} \cdot \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} = -4i \mathbf{q} \quad (\text{F.20})$$

Análogamente, la suma sobre espín del segundo sumando de (F.18) toma el valor

$$\sum_{psh} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{sh}^* \boldsymbol{\sigma}_{ps}^* = \sum_{psh} \mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{ph} \times \boldsymbol{\sigma}_{hs}) \boldsymbol{\sigma}_{sp} = \sum_{ps} \mathbf{q} \cdot 2i \boldsymbol{\sigma}_{ps} \boldsymbol{\sigma}_{sp} = 4i \mathbf{q}. \quad (\text{F.21})$$

Sustituyendo (F.20) y (F.21) en la respuesta (F.18) tendremos:

$$R_T^{\text{MS}}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \text{Re} \sum_{tth} \frac{\mu_h}{2M_h} B_{htth}^* \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}) \theta(F - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - F) \\ 4i \mathbf{q} \cdot [\mathbf{I}_t^{\text{S}}(\mathbf{h} + \mathbf{q}) - \mathbf{I}_t^{\text{S}}(\mathbf{h})].$$

Como B es imaginario iB^* es real, luego:

$$R_T^{\text{MS}}(\mathbf{q}, \omega) = 4i \sum_{tth} \frac{\mu_h}{2M_h} B_{htth}^* \mathcal{R}_{tth}^{\text{MS}}(\mathbf{q}, \omega),$$

donde hemos definido la respuesta reducida

$$\mathcal{R}_{tth}^{\text{MS}} = 2 \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h^{t\mathbf{h}} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}^{t\mathbf{h}}) \theta(k_F^{t\mathbf{h}} - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F^{t\mathbf{h}}) I^{\text{MS}}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) \quad (\text{F.22})$$

y la función

$$I^{\text{MS}}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot [\mathbf{I}_t^{\text{S}}(\mathbf{h} + \mathbf{q}) - \mathbf{I}_t^{\text{S}}(\mathbf{h})]. \quad (\text{F.23})$$

La suma en isospín se calcula genéricamente usando (F.16):

$$\sum_t B_{ptth} A_t = -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} 2i \sum_t (\delta_{pN} \delta_{tP} \delta_{hN} - \delta_{pP} \delta_{tN} \delta_{hP}) A_t \\ = -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} 2i \delta_{ph} (\delta_{hN} A_P - \delta_{hP} A_N). \quad (\text{F.24})$$

La respuesta es, por consiguiente:

$$R_T^{\text{MS}}(\mathbf{q}, \omega) = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} \left[\frac{4\mu_P}{M_P} \mathcal{R}_{\text{NP}}^{\text{MS}} - \frac{4\mu_N}{M_N} \mathcal{R}_{\text{PN}}^{\text{MS}} \right]. \quad (\text{F.25})$$

Finalmente, particularicemos a materia nuclear simétrica. En este caso $k_F^{\text{P}} = k_F^{\text{N}}$ y $M_P = M_N = M$, con lo cual

$$\mathcal{R}_{\text{PN}}^{\text{MS}} = \mathcal{R}_{\text{NP}}^{\text{MS}} \equiv \mathcal{R}^{\text{MS}},$$

de donde

$$R_T^{\text{MS}}(\mathbf{q}, \omega) = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} 4 \frac{\mu_P - \mu_N}{M} \mathcal{R}^{\text{MS}}(\mathbf{q}, \omega)$$

F.4.3 Respuesta de interferencia CS

La respuesta de interferencia convección-seagull está dada por:

$$R_T^{CS}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \operatorname{Re} \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h}, \mathbf{p}} \delta_{s_p s_h} \delta_{t_p t_h} \frac{\epsilon_h}{M_h} \mathbf{h}_T \cdot \\ i \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h}, \mathbf{p}} \sum_t B_{ptth}^* \sum_s [\boldsymbol{\sigma}_{ps} \boldsymbol{\sigma}_{sh} \cdot \mathbf{I}_t^S(\mathbf{h}) + \boldsymbol{\sigma}_{sh} \boldsymbol{\sigma}_{ps} \cdot \mathbf{I}_t^S(\mathbf{h} + \mathbf{q})]^*.$$

La suma en espín se calcula usando de nuevo (F.19). En concreto, para cualesquiera vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , se tiene

$$\mathbf{a} \cdot \sum_{ss'} \boldsymbol{\sigma}_{s's} \boldsymbol{\sigma}_{ss'} \cdot \mathbf{b} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (\text{F.26})$$

de donde

$$R_T^{CS}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \operatorname{Re} \frac{2i}{M_P} \sum_t B_{PttP}^* \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h^P - \omega_{\mathbf{h}+\mathbf{q}}^P) \theta(k_F^P - h) \theta(|\mathbf{h} + \mathbf{q}| - k_F^P) \\ \mathbf{h}_T \cdot [\mathbf{I}_t^S(\mathbf{h}) + \mathbf{I}_t^S(\mathbf{h} + \mathbf{q})].$$

Usando (F.24) tendremos

$$B_{PttP}^* = -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} 2i \delta_{tN}$$

y por lo tanto

$$R_T^{CS} = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} \frac{4}{M_P} \mathcal{R}^{CS}, \quad (\text{F.27})$$

en donde hemos definido la respuesta reducida

$$\mathcal{R}^{CS}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h^P - \omega_{\mathbf{h}+\mathbf{q}}^P) \theta(k_F^P - h) \theta(|\mathbf{h} + \mathbf{q}| - k_F^P) I^{CS}(\mathbf{h}, \mathbf{q}), \quad (\text{F.28})$$

que contiene asimismo a la función

$$I^{CS}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = \mathbf{h}_T \cdot [\mathbf{I}_N^S(\mathbf{h}) + \mathbf{I}_N^S(\mathbf{h} + \mathbf{q})]. \quad (\text{F.29})$$

F.4.4 Elementos de matriz de la corriente Piónica

Partimos de la corriente piónica, dada por

$$\mathbf{j}^\pi(\mathbf{r}) = -B \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \nabla_1 h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \vec{\nabla} \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla_2 h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2),$$

La transformada de Fourier de esta corriente tiene el siguiente elemento de matriz genérico a dos cuerpos:

$$\langle p'_1 p'_2 | \mathbf{j}^\pi(\mathbf{q}) | p_1 p_2 \rangle = -B_{1'2',12} \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{V^2} \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1) \cdot \mathbf{r}_1} e^{i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2) \cdot \mathbf{r}_2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \\ \left[-i \boldsymbol{\sigma}_{s'_1 s_1} \cdot \mathbf{k}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)} i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) (-i) \boldsymbol{\sigma}_{s'_2 s_2} \cdot \mathbf{k}_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)} \right] v(\mathbf{k}_1) v(\mathbf{k}_2) \\ = i B_{1'2',12} \frac{1}{V} \int d^3 k_1 d^3 k_2 \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2 - \mathbf{k}_2) \\ \boldsymbol{\sigma}_{s'_1 s_1} \cdot \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\sigma}_{s'_2 s_2} \cdot \mathbf{k}_2 v(\mathbf{k}_1) v(\mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \\ = i B_{1'2',12} \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1+\mathbf{p}'_2} \boldsymbol{\sigma}_{s'_1 s_1} \cdot \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\sigma}_{s'_2 s_2} \cdot \mathbf{k}_2 v(\mathbf{k}_1) v(\mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2).$$

en donde hemos definido $\mathbf{k}_i = \mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i$. El correspondiente elemento de matriz de transición a un estado $1p - 1h$ se obtiene de manera análoga al caso de la corriente Seagull. En particular, tan sólo contribuye el término de intercambio:

$$\begin{aligned}
 \langle ph^{-1} | \mathbf{j}^\pi(\mathbf{q}) | F \rangle &= - \sum_{k < F} \langle pk | \mathbf{j}^\pi(\mathbf{q}) | kh \rangle \\
 &= - \frac{i}{V} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h},\mathbf{p}} \sum_{k < F} B_{pkkh} \boldsymbol{\sigma}_{pk} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) \boldsymbol{\sigma}_{kh} \cdot (\mathbf{k}_h) v(\mathbf{p} - \mathbf{k}) v(\mathbf{k} - \mathbf{h}) (\mathbf{h} + \mathbf{p} - 2\mathbf{k}) \\
 &= -i \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h},\mathbf{p}} \sum_t B_{ptth} \sum_s \int_{S_t} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\sigma}_{ps} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{p}) \boldsymbol{\sigma}_{sh} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k}) \\
 &\quad v(\mathbf{k} - \mathbf{p}) v(\mathbf{h} - \mathbf{k}) (\mathbf{h} + \mathbf{p} - 2\mathbf{k}). \tag{F.30}
 \end{aligned}$$

F.4.5 Respuesta de interferencia $M\pi$

Seguidamente calcularemos la respuesta transversal de interferencia entre las corrientes de magnetización y piónica.

$$\begin{aligned}
 R_T^{M\pi}(\mathbf{q}, \omega) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) (-i) \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h},\mathbf{p}} \delta_{t_p t_h} \frac{\mu_h}{2M} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph}) \cdot \\
 &\quad i \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h},\mathbf{p}} \sum_t B_{ptth}^* \sum_s \int_{S_t} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\
 &\quad \boldsymbol{\sigma}_{ps}^* \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{p}) \boldsymbol{\sigma}_{sh}^* \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k}) v(\mathbf{k} - \mathbf{p}) v(\mathbf{h} - \mathbf{k}) (\mathbf{h} + \mathbf{p} - 2\mathbf{k})_T \\
 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{tt_h} \frac{\mu_h}{2M} B_{htth}^* \sum_h \delta(\omega + \omega_h - \omega_{\mathbf{h}+\mathbf{q}}) \theta(F - h) \theta(|\mathbf{h} + \mathbf{q}| - F) \\
 &\quad \sum_{ss_p s_h} \int_{S_t} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\sigma}_{ps}^* \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{h}) \boldsymbol{\sigma}_{sh}^* \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k}) \\
 &\quad v(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{h}) v(\mathbf{h} - \mathbf{k}) (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph}) \cdot (\mathbf{q} + 2\mathbf{h} - 2\mathbf{k}).
 \end{aligned}$$

Procedamos ahora a realizar las sumas sobre las variables de espín. Para simplificar, llamemos

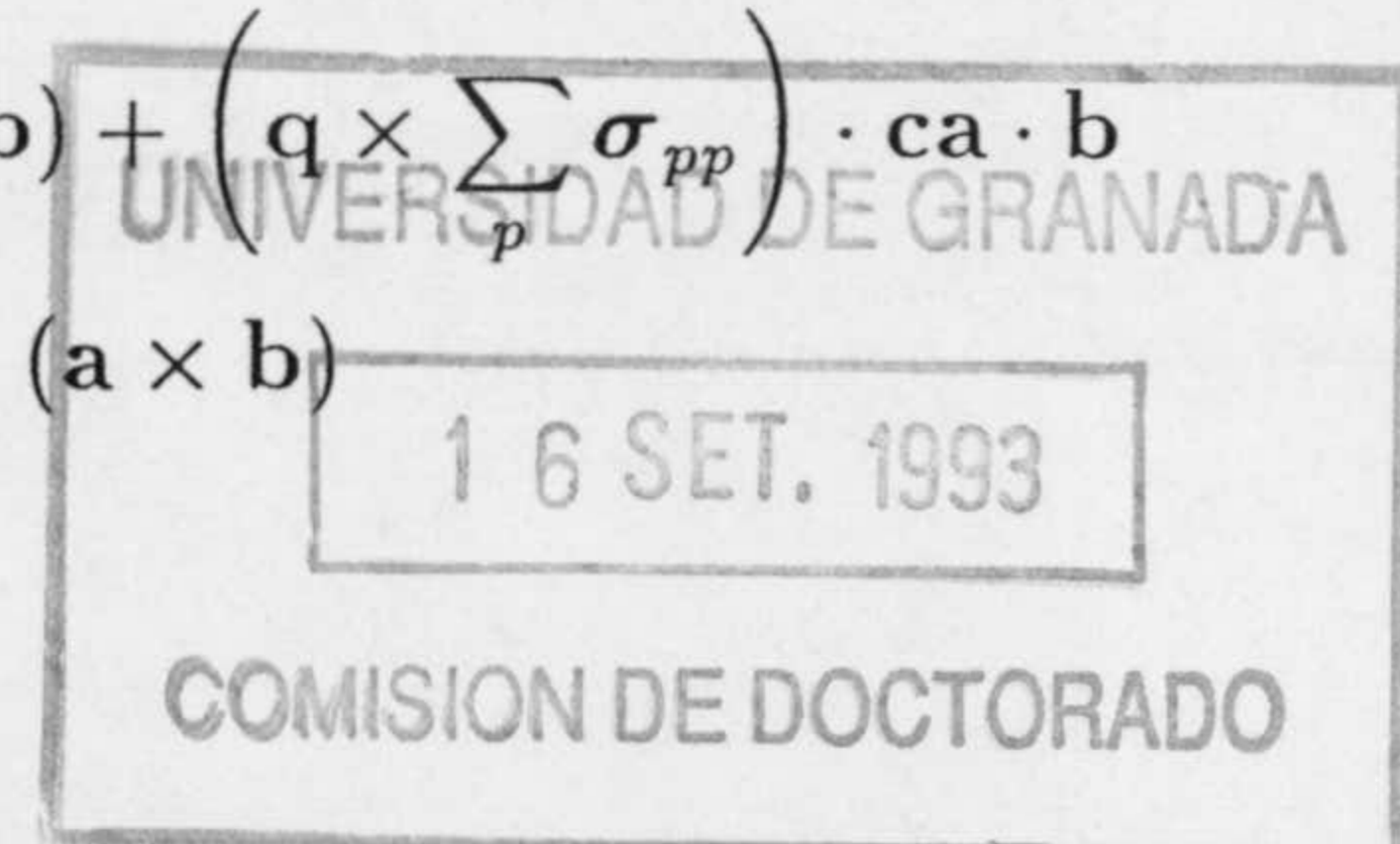
$$\mathbf{b} = \mathbf{h} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{k} - \mathbf{h} - \mathbf{q} = -\mathbf{b} - \mathbf{q}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{q} + 2(\mathbf{h} - \mathbf{k}) = \mathbf{q} + 2\mathbf{b}.$$

Calculemos la siguiente suma sobre espín:

$$\mathbf{a} \cdot \sum_s \boldsymbol{\sigma}_{ps} \boldsymbol{\sigma}_{sh} \cdot \mathbf{b} = \langle p | i \epsilon_{ijk} a_i b_j \sigma_k + a_i b_i | h \rangle = i \boldsymbol{\sigma}_{ph} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \delta_{ph} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Sustituyamos este resultado en:

$$\begin{aligned}
 \sum_{ss_p s_h} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph}) \cdot \mathbf{c} \boldsymbol{\sigma}_{ps}^* \cdot \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_{sh}^* \cdot \mathbf{b} &= \sum_{ph} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph}) \cdot \mathbf{c} [-i \boldsymbol{\sigma}_{ph}^* \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \delta_{ph} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] \\
 &= -i (\mathbf{c} \times \mathbf{q}) \cdot \sum_{ph} \boldsymbol{\sigma}_{ph} \boldsymbol{\sigma}_{hp} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \left(\mathbf{q} \times \sum_p \boldsymbol{\sigma}_{pp} \right) \cdot \mathbf{c} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\
 &= -2i (\mathbf{c} \times \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -2i(2\mathbf{b} \times \mathbf{q}) \cdot (-\mathbf{q} \times \mathbf{b}) \\
&= -4i(\mathbf{b} \times \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{q}) \\
&= -4i\epsilon_{ijk}b_jq_k\epsilon_{ilm}b_lq_m \\
&= -4i[b^2q^2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{q})^2] \\
&= -4i[q^2(\mathbf{h} - \mathbf{k})^2 - (\mathbf{q} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k}))^2] \\
&= -4iq^2(\mathbf{h} - \mathbf{k})_T^2.
\end{aligned}$$

En la tercera línea hemos usado (F.26) y que las matrices de Pauli tienen traza nula, y en la última línea el teorema de Pitágoras. Sustituyendo en la respuesta tendremos:

$$R_T^{M\pi}(\mathbf{q}, \omega) = -2 \operatorname{Re} 2i \sum_{tt_h} \frac{\mu_h}{2M_h} B_{htth}^* \mathcal{R}_{tt_h}^{M\pi}(\mathbf{q}, \omega),$$

y se ha definido la respuesta:

$$\mathcal{R}_{tt'}^{M\pi}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \sum_h \delta(\omega + \omega_h^{t'} - \omega_{\mathbf{h}+\mathbf{q}}^{t'}) \theta(k_F^{t'} - h) \theta(|\mathbf{h} + \mathbf{q}| - k_F^{t'}) I_t^{M\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) \quad (\text{F.31})$$

y la integral

$$I_t^{M\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) \equiv \int_{S_t} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} q^2 (\mathbf{h} - \mathbf{k})_T^2 v(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{h}) v(\mathbf{h} - \mathbf{k}). \quad (\text{F.32})$$

Por último sumamos sobre isospín usando (F.24) y la respuesta toma la forma

$$R_T^{M\pi}(\mathbf{q}, \omega) = 4\pi \frac{f^2}{\mu^2} \left[\frac{4\mu_N}{M_N} \mathcal{R}_{PN}^{M\pi}(\mathbf{q}, \omega) - \frac{4\mu_P}{M_P} \mathcal{R}_{NP}^{M\pi}(\mathbf{q}, \omega) \right]$$

y en el caso de materia simétrica $\mathcal{R}_{PN}^{M\pi} = \mathcal{R}_{NP}^{M\pi}$ y se tiene:

$$R_T^{M\pi}(\mathbf{q}, \omega) = -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} 4 \frac{\mu_P - \mu_N}{M} \mathcal{R}^{M\pi}(\mathbf{q}, \omega). \quad (\text{F.33})$$

F.4.6 Respuesta de interferencia $C\pi$

La respuesta de interferencia entre las corrientes de convección y piónica se obtiene a partir de los correspondientes elementos de matriz:

$$\begin{aligned}
R_T^{C\pi}(\mathbf{q}, \omega) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h},\mathbf{p}} \delta_{s_p s_h} \frac{Q_h}{M_P} \mathbf{h}_T \cdot \\
&\quad i \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{h},\mathbf{p}} \sum_t B_{ptth}^* \sum_s \int_{S_t} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\
&\quad \boldsymbol{\sigma}_{ps}^* \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{p}) \boldsymbol{\sigma}_{sh}^* \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k}) v(\mathbf{k} - \mathbf{p}) v(\mathbf{h} - \mathbf{k}) (\mathbf{h} + \mathbf{p} - 2\mathbf{k})_T \\
&= 2 \operatorname{Re} i \frac{1}{M_P} B_{PNNP}^* \sum_h \delta(\omega + \omega_h^P - \omega_{\mathbf{h}+\mathbf{q}}^P) \theta(k_F^P - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F^P) \\
&\quad \sum_{ss'} \int_{S_N} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\sigma}_{ss'} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h} - \mathbf{q}) \boldsymbol{\sigma}_{s's} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k}) \\
&\quad v(\mathbf{k} - \mathbf{h} - \mathbf{q}) v(\mathbf{h} - \mathbf{k}) (2\mathbf{h} - 2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{h}_T.
\end{aligned}$$

Usando (F.19) y (F.16) tendremos:

$$R_T^{C\pi}(\mathbf{q}, \omega) = -4\pi \frac{f^2}{\mu^2} \frac{8}{M_P} \mathcal{R}^{C\pi}(\mathbf{q}, \omega),$$

con la respuesta $\mathcal{R}^{C\pi}$ definida por

$$\mathcal{R}^{C\pi}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h^P - \omega_{\mathbf{h}+\mathbf{q}}^P) \theta(k_F^P - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F^P) I^{C\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}), \quad (\text{F.34})$$

y la integral de convección-piónica

$$I^{C\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = \int_{S_N} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [(\mathbf{k} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{q} - (\mathbf{h} - \mathbf{k})^2] (\mathbf{k} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}_T v(\mathbf{h} - \mathbf{k}) v(\mathbf{k} - \mathbf{h} - \mathbf{q}). \quad (\text{F.35})$$

De nuevo, en el caso de materia simétrica se hace $k_F^P = k_F^N$.

F.4.7 Elementos de matriz de la corriente de isóbaros

Para simplificar la escritura, y dado que la corriente de isóbaros es algo más complicada que las anteriores, a partir de aquí nos restringiremos al caso de materia nuclear simétrica.

La corriente de isóbaros está dada por

$$\mathbf{j}^\Delta(\mathbf{r}) = C_\Delta \nabla \times \left\{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \left[U \boldsymbol{\sigma}^1 \times \nabla \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) - 4\tau_z^2 \nabla \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \right] \right. \\ \left. + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \left[-U \boldsymbol{\sigma}^2 \times \nabla \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \nabla h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - 4\tau_z^1 \nabla \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \right] \right\}, \quad (\text{F.36})$$

en donde hemos introducido el operador de isospín

$$U = [\boldsymbol{\tau}^1 \times \boldsymbol{\tau}^2]_z,$$

con $\boldsymbol{\tau}^i$ el isospín del nucleón i -ésimo, y el valor de C_Δ puede verse en la ecuación (1.17).

La transformada de Fourier de esta corriente es del tipo genérico siguiente

$$\int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \nabla \times [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \mathbf{A}(\mathbf{r})] = -ie^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} \mathbf{q} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_1).$$

en donde $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ es una función vectorial arbitraria. Haciendo uso de esta expresión, podemos escribir la transformada de Fourier de la corriente de isóbaros en la forma:

$$\mathbf{j}^\Delta(\mathbf{q}) = -iC_\Delta \mathbf{q} \times \left\{ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} \left[U \boldsymbol{\sigma}^1 \times \nabla_1 \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla_1 h(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - 4\tau_z^2 \nabla_1 \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \nabla_1 h(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \right. \\ \left. + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_2} \left[-U \boldsymbol{\sigma}^2 \times \nabla_2 \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \nabla_2 h(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - 4\tau_z^1 \nabla_2 \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \nabla_2 h(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right] \right\}$$

Seguidamente calculamos el elemento de matriz entre ondas planas

$$\langle p'_1 p'_2 | \mathbf{j}^\Delta(\mathbf{q}) | p_1 p_2 \rangle = -iC_\Delta \frac{1}{V^2} \int d^3r_1 d^3r_2 e^{-i\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{-i\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{r}_2} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \\ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{q} \times \left\{ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} \left[U_{1'2'12} \boldsymbol{\sigma}_{s'_1 s_1} \times ik \boldsymbol{\sigma}_{s'_2 s_2} \cdot ikv(\mathbf{k}) e^{ik \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \right. \right. \\ \left. \left. - 4\delta_{t'_1 t_1} \delta_{t'_2 t_2} \tau_2 ik \boldsymbol{\sigma}_{s'_2 s_2} \cdot ikv(\mathbf{k}) e^{ik \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \delta_{s'_1 s_1} \right] \right. \\ \left. + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_2} \left[-U_{1'2'12} \boldsymbol{\sigma}_{s'_2 s_2} \times ik \boldsymbol{\sigma}_{s'_1 s_1} \cdot ikv(\mathbf{k}) e^{ik \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} \right. \right. \\ \left. \left. - 4\delta_{t'_1 t_1} \delta_{t'_2 t_2} \tau_1 ik \boldsymbol{\sigma}_{s'_1 s_1} \cdot ikv(\mathbf{k}) e^{ik \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} \delta_{s'_2 s_2} \right] \right\}.$$

Como en los casos anteriores, una de las integraciones sobre las coordenadas \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 se extiende a todo el espacio y la otra al volumen V . Gracias a las funciones delta de momento resultantes podemos realizar la integración sobre k . El resultado para el elemento de matriz es

$$\begin{aligned} \langle p'_1 p'_2 | \mathbf{j}^\Delta(\mathbf{q}) | p_1 p_2 \rangle &= -i \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \frac{C_\Delta}{V} \mathbf{q} \times \left\{ 4 \delta_{t_1, t'_1} \delta_{t_2, t'_2} \tau_1 \delta_{s'_2 s_2} (\boldsymbol{\sigma}_{s'_1 s_1} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 v(\mathbf{k}_1) \right. \\ &\quad \left. + 4 \delta_{t_1, t'_1} \delta_{t_2, t'_2} \tau_2 \delta_{s'_1 s_1} (\boldsymbol{\sigma}_{s'_2 s_2} \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_2 v(\mathbf{k}_2) \right. \\ &\quad \left. - U_{1'2', 12} [(\boldsymbol{\sigma}_{s'_1 s_1} \times \mathbf{k}_2) (\boldsymbol{\sigma}_{s'_2 s_2} \cdot \mathbf{k}_2) v(\mathbf{k}_2) - (\boldsymbol{\sigma}_{s'_2 s_2} \times \mathbf{k}_1) (\boldsymbol{\sigma}_{s'_1 s_1} \cdot \mathbf{k}_1) v(\mathbf{k}_1)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.37})$$

en donde $\mathbf{k}_i = \mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i$, $i = 1, 2$.

La expresión para el elemento de matriz de transición nuclear entre el estado fundamental y un estado a $1p - 1h$ se obtiene a partir de (F.2). Como ocurre en el caso de las otras dos MEC, el elemento de matriz directo del operador de isospín U es cero. Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle pk | \mathbf{j}^\Delta(\mathbf{q}) | hk \rangle &= -i \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{h}} \frac{C_\Delta}{V} \mathbf{q} \times \left\{ 4 \delta_{t_p t_h} \tau_p \boldsymbol{\sigma}_{ph} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{h}) v(\mathbf{p} - \mathbf{h}) (\mathbf{p} - \mathbf{h}) \right. \\ &\quad \left. + 4 \delta_{t_p t_h} \tau_k \delta_{s_p s_h} \boldsymbol{\sigma}_{kk} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}) v(\mathbf{k} - \mathbf{k}) (\mathbf{k} - \mathbf{k}) \right\}. \end{aligned}$$

El segundo sumando es obviamente nulo. El primer sumando también es cero, ya que, debido a la delta de momentos, el elemento de matriz es nulo a no ser que $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{h}$, en cuyo caso, $\mathbf{q} \times (\mathbf{p} - \mathbf{h}) = 0$. Por lo tanto, el término directo en una transición de este tipo producida por la corriente delta es cero. Sólo queda el término de intercambio:

$$\begin{aligned} \langle ph^{-1} | \mathbf{j}^\Delta(\mathbf{q}) | F \rangle &= - \sum_{k < F} \langle pk | \mathbf{j}^\Delta(\mathbf{q}) | kh \rangle \\ &= i \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{h}} \frac{C_\Delta}{V} \mathbf{q} \times \sum_{k < F} \left\{ 4 \delta_{t_p t_k} \tau_p \delta_{t_k t_h} \delta_{s_k s_h} \boldsymbol{\sigma}_{pk} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) v(\mathbf{p} - \mathbf{k}) (\mathbf{p} - \mathbf{k}) \right. \\ &\quad \left. + 4 \delta_{t_p t_k} \tau_h \delta_{t_k t_p} \delta_{s_k s_p} \boldsymbol{\sigma}_{kh} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}) v(\mathbf{k} - \mathbf{h}) (\mathbf{k} - \mathbf{h}) \right. \\ &\quad \left. + 2i \delta_{t_p t_h} (\delta_{kP} \delta_{hN} - \delta_{kN} \delta_{hP}) [\boldsymbol{\sigma}_{pk} \times (\mathbf{k} - \mathbf{h}) \boldsymbol{\sigma}_{kh} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}) v(\mathbf{k} - \mathbf{h}) \right. \\ &\quad \left. - \boldsymbol{\sigma}_{kh} \times (\mathbf{p} - \mathbf{k}) \boldsymbol{\sigma}_{pk} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) v(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Tomando el límite $V \rightarrow \infty$ y sumando sobre isospín y sobre el espín en los dos primeros sumandos, tendremos:

$$\begin{aligned} \langle ph^{-1} | \mathbf{j}^\Delta(\mathbf{q}) | F \rangle &= i \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{h}} C_\Delta \delta_{t_p t_h} \tau_p \mathbf{q} \times \left\{ 4 \mathbf{A}_{ph}(\mathbf{p}) + 4 \mathbf{A}_{ph}(\mathbf{h}) \right. \\ &\quad \left. + 2i \sum_s \boldsymbol{\sigma}_{sh} \times \mathbf{A}_{ps}(\mathbf{p}) - 2i \sum_s \boldsymbol{\sigma}_{ps} \times \mathbf{A}_{sh}(\mathbf{h}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.38})$$

en donde hemos puesto $s = s_k$ y hemos definido las funciones vectoriales

$$\mathbf{A}_{ab}(\mathbf{h}) \equiv \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\sigma}_{ab} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k}) v(\mathbf{h} - \mathbf{k}) (\mathbf{h} - \mathbf{k}). \quad (\text{F.39})$$

Las sumas sobre el índice de espín s que aparecen en (F.38) pueden realizarse teniendo en cuenta que

$$\sum_s \boldsymbol{\sigma}_{sh} \times \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_{ps} \cdot \mathbf{a} = i(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ph})\mathbf{a} - ia^2 \boldsymbol{\sigma}_{ph},$$

de donde se puede poner

$$\sum_s \boldsymbol{\sigma}_{sh} \times \mathbf{A}_{ps}(\mathbf{p}) = i\mathbf{A}_{ph}(\mathbf{p}) - iI_{\Delta}(\mathbf{p})\boldsymbol{\sigma}_{ph},$$

en donde se ha definido la integral

$$I_{\Delta}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 v(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \quad (\text{F.40})$$

De forma análoga, se muestra que

$$\sum_s \boldsymbol{\sigma}_{ps} \times \mathbf{A}_{sh}(\mathbf{h}) = -i\mathbf{A}_{ph}(\mathbf{h}) - iI_{\Delta}(\mathbf{h})\boldsymbol{\sigma}_{ph}$$

Por lo tanto, podemos poner el elemento de matriz de la corriente de isóbaro en la forma:

$$\begin{aligned} \langle ph^{-1} | \mathbf{j}^{\Delta}(\mathbf{q}) | F \rangle &= 2i\delta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}-\mathbf{h}} C_{\Delta} \delta_{t_p t_h} \tau_p \\ &\quad \mathbf{q} \times \{ \mathbf{A}_{ph}(\mathbf{p}) + \mathbf{A}_{ph}(\mathbf{h}) + [I_{\Delta}(\mathbf{p}) + I_{\Delta}(\mathbf{h})] \boldsymbol{\sigma}_{ph} \}. \end{aligned}$$

F.4.8 Respuesta de interferencia $M\Delta$

Esta respuesta está dada por

$$\begin{aligned} R_T^{M\Delta}(\mathbf{q}, \omega) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) \langle ph^{-1} | \mathbf{j}_T^M(\mathbf{q}) | F \rangle^* \cdot \langle ph^{-1} | \mathbf{j}_T^{\Delta}(\mathbf{q}) | F \rangle \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) (-i) \delta_{\mathbf{h}+\mathbf{q}, \mathbf{p}} \delta_{t_p t_h} \frac{\mu_h}{2M} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph} \cdot \\ &\quad 2i\delta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}-\mathbf{h}} C_{\Delta} \delta_{t_p t_h} \tau_p \mathbf{q} \times \{ \mathbf{A}_{ph}(\mathbf{p}) + \mathbf{A}_{ph}(\mathbf{h}) + [I_{\Delta}(\mathbf{p}) + I_{\Delta}(\mathbf{h})] \boldsymbol{\sigma}_{ph} \}. \end{aligned}$$

La suma sobre isospín toma el valor $\mu_P - \mu_N$, mientras que para efectuar las sumas sobre espín aplicaremos la ecuación (F.19). Por una parte debemos calcular

$$\begin{aligned} \sum_{s_p s_h} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ph}) \cdot (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{hp}) &= \sum_{s_p s_h} [q^2 \boldsymbol{\sigma}_{ph} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{hp} - (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ph})(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{hp})] \\ &= q^2 \operatorname{Tr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{q} \cdot \operatorname{Tr} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} \\ &= 4q^2. \end{aligned}$$

La otra suma sobre espín es la siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{s_p s_h} (\mathbf{q} \times \mathbf{A}_{ph}(\mathbf{p})) \cdot (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{hp}) &= \sum_{s_p s_h} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\sigma}_{ph} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) v(\mathbf{p} - \mathbf{k}) (\mathbf{q} \times (\mathbf{p} - \mathbf{k})) \cdot (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{hp}) \\ &= \sum_{s_p s_h} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\sigma}_{ph} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) v(\mathbf{p} - \mathbf{k}) [q^2 (\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{hp} - \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{hp}] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [2q^2 (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 - 2(\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}))^2] v(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \\ &= 2q^2 I_{\Delta}(\mathbf{p}) - 2I'_{\Delta}(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

en donde hemos definido la integral

$$I'_{\Delta}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k})]^2 v(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \quad (\text{F.41})$$

Por lo tanto, la respuesta $M\Delta$ se escribe en la forma

$$R_T^{M\Delta}(\mathbf{q}, \omega) = 2C_{\Delta} \frac{\mu_P - \mu_N}{M} \mathcal{R}^{M\Delta}, \quad (\text{F.42})$$

con la respuesta reducida $\mathcal{R}^{M\Delta}$ definida por

$$\mathcal{R}^{M\Delta}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) I^{M\Delta}(\mathbf{h}, \mathbf{q}), \quad (\text{F.43})$$

donde, por último, la función $I^{M\Delta}$ se define por:

$$I^{M\Delta}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = [I'_{\Delta}(\mathbf{p}) + I'_{\Delta}(\mathbf{h}) - 3q^2 I_{\Delta}(\mathbf{p}) - 3q^2 I_{\Delta}(\mathbf{h})]. \quad (\text{F.44})$$

F.4.9 Respuesta de interferencia $C\Delta$

En esta sección veremos que la respuesta de interferencia entre las corrientes de convección y de isóbaro es cero. En efecto, dicha respuesta está dada por

$$\begin{aligned} R_T^{C\Delta}(\mathbf{q}, \omega) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) \langle ph^{-1} | \mathbf{j}_T^C(\mathbf{q}) | F \rangle^* \cdot \langle ph^{-1} | \mathbf{j}_T^{\Delta}(\mathbf{q}) | F \rangle \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{ph} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(F - h) \theta(p - F) \delta_{\mathbf{h}+\mathbf{q},\mathbf{p}} \delta_{t_p t_h} \delta_{s_p s_h} \frac{Q_h}{M} \mathbf{h}_T \cdot \\ &\quad 2i \delta_{\mathbf{q},\mathbf{p}-\mathbf{h}} C_{\Delta} \delta_{t_p t_h} \tau_p \mathbf{q} \times \{ \mathbf{A}_{ph}(\mathbf{p}) + \mathbf{A}_{ph}(\mathbf{h}) + [I_{\Delta}(\mathbf{p}) + I_{\Delta}(\mathbf{h})] \boldsymbol{\sigma}_{ph} \}. \end{aligned}$$

Debido a que la corriente de convección es diagonal en espín (de ahí $\delta_{s_p s_h}$), las sumas en espín se traducen en trazas de una matriz de Pauli

$$\begin{aligned} \sum_{s_p s_h} \mathbf{A}_{ph} \delta_{s_p s_h} &= 0 \\ \sum_{s_p s_h} \boldsymbol{\sigma}_{ph} \delta_{s_p s_h} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dicha respuesta es nula

$$R_T^{C\Delta} = 0 \quad (\text{F.45})$$

F.5 Cálculo de las integrales I^{ab}

F.5.1 Integrales básicas

El cálculo de las funciones de respuesta de interferencia entre las corrientes a un cuerpo y las MEC involucra el conocimiento previo de las funciones $I^{ab}(\mathbf{h}, \mathbf{q})$. Previamente a su cálculo, definiremos una serie de integrales básicas que necesitaremos inevitablemente. Todas estas integrales tienen como dominio una esfera de radio el momento de fermi $k < k_F$ y su cálculo se puede realizar analíticamente. Se describen una a una a continuación

Integral K_0

Se define mediante

$$K_0(\mathbf{a}, t) = \int \frac{d^3 k}{k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} + t}$$

Es evidente que K_0 sólo depende del módulo de a , lo cual se comprueba sin más que rotar la variable de integración \mathbf{k} de manera que el eje z apunte en la dirección de \mathbf{a} . Tras la rotación no cambian ni $d^3 k$ ni la esfera de integración, de manera que:

$$K_0(\mathbf{a}, t) = K_0(a, t) = \int \frac{d^3 k}{k^2 - 2k_3 a + t}$$

Integrales K_1^i

Estas son integrales de naturaleza vectorial, definidas por

$$K_1^i(\mathbf{a}, t) = \int \frac{k_i d^3 k}{k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} + t}$$

Para analizar la dependencia en \mathbf{a} de esta integral, pasamos a un sistema de referencia, que denominaremos B' , con el eje z en la dirección de \mathbf{a} . Denotando por $K_1'^i$ a la correspondiente integral en el nuevo sistema, se tiene:

$$K_1'^i = \int \frac{k_i d^3 k}{k^2 - 2k_3 a + t}$$

ahora es fácil comprobar que $K_1'^1 = K_1'^2 = 0$ sin más que cambiar k_1 por $-k_1$ y k_2 por $-k_2$ dentro de la integral. Así pues, podemos escribir

$$K_1'^i = \frac{a'_i}{a} K_1(a, t)$$

en donde a'_i son las coordenadas de \mathbf{a} en la nueva base y K_1 es la integral

$$K_1(a, t) = \int \frac{k_3 d^3 k}{k^2 - 2k_3 a + t}$$

que solo depende del módulo a . La expresión de $K_1'^i$ en función de a_i es covariante y por tanto se tendrá en cualquier sistema:

$$K_1^i(\mathbf{a}, t) = \frac{a_i}{a} K_1(a, t). \quad (\text{F.46})$$

Integrales K_2^{ij}

Ahora consideramos el caso en que el integrando contiene una diada:

$$K_2^{ij}(\mathbf{a}, t) = \int \frac{k_i k_j d^3 k}{k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} + t}$$

Determinamos la dependencia en \mathbf{a} pasando de nuevo a la base B' . En este sistema es obvio que las integrales K_2^{ij} con $i \neq j$ son cero, como se comprueba cambiando el signo, bien a k_1 , bien a k_2 , según convenga. Además cambiando k_1 por k_2 se comprueba que $K_2^{11} = K_2^{22}$, de manera que basta con calcular las dos integrales siguientes:

$$K_2^1(a, t) = K_2^2(a, t) = \int \frac{k_1 k_1 d^3 k}{k^2 - 2k_3 a + t}$$

$$K_2^3(a, t) = \int \frac{k_3 k_3 d^3 k}{k^2 - 2k_3 a + t}$$

y $K_2'^{ij}$ se expresa

$$K_2'^{ij}(\mathbf{a}, t) = \delta_{ij} K_2^i(a, t). \quad (\text{F.46})$$

Ahora debemos expresar $K_2'^{ij}$ en cualquier sistema de coordenadas. Para ello haremos uso del siguiente teorema:

Teorema. Supongamos que en una base ortonormal $B' = (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3)$, donde $\mathbf{u}'_3 = \mathbf{a}/a$, un tensor \mathbf{T} tiene coordenadas $t'_{ij} = A_i \delta_{ij}$, con A_i invariantes bajo rotaciones cumpliendo $A_1 = A_2$. Entonces en cualquier otra base ortonormal $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ las coordenadas de \mathbf{T} son

$$t_{ij} = A_1 \delta_{ij} + (A_3 - A_1) \frac{a_i a_j}{a^2},$$

en donde a_i son las coordenadas de \mathbf{a} en la base B : $\mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{u}_i$.

Demostración. Denominemos por a_{ij} a la matriz de cambio de la base B' a la base B . Por ser esta matriz ortogonal se tiene:

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \Rightarrow \sum_{k=1}^2 a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} - a_{i3} a_{j3}.$$

Utilizando esta fórmula en las ecuaciones de transformación de las componentes del tensor \mathbf{T} , tendremos:

$$t_{ij} = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} t'_{kl} = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} A_k = \sum_k a_{ik} a_{jk} A_k = A_1 \sum_{k=1}^2 a_{ik} a_{jk} + A_3 a_{i3} a_{j3}$$

$$= A_1 (\delta_{ij} - a_{i3} a_{j3}) + A_3 a_{i3} a_{j3} = A_1 \delta_{ij} + (A_3 - A_1) a_{i3} a_{j3}.$$

Ahora basta recordar que la matriz de cambio de base satisface $\mathbf{u}'_j = \sum a_{jk} \mathbf{u}_k$. Multiplicando por \mathbf{u}_i tendremos: $a_{ij} = \mathbf{u}'_j \cdot \mathbf{u}_i$, luego

$$a_{i3} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}'_3 = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{a}/a = a_i/a,$$

de donde se tiene el resultado buscado.

Otra forma de derivar este resultado parte de la suposición de que t_{ij} debe expresarse de forma covariante a partir del vector \mathbf{a} , como combinación lineal de los dos únicos tensores covariantes que podemos formar, a saber, δ_{ij} y $a_i a_j$:

$$t_{ij} = f \delta_{ij} + g a_i a_j$$

con f y g coeficientes invariantes que calculamos a partir de la expresión conocida de \mathbf{T} en la base B' , en donde $a'_1 = a'_2 = 0$ y $a'_3 = a$. Llegamos así al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 &= t'_{11} = f \\ A_2 &= t'_{22} = f \\ A_3 &= t'_{33} = f + ga^2 \end{aligned}$$

y de esta última obtenemos $g = (A_3 - f)/a^2 = (A_3 - A_1)/a^2$.

Aplicando este teorema a la integral K_2^{ij} y teniendo en cuenta (F.47), obtenemos la expresión covariante

$$K_2^{ij}(\mathbf{a}, t) = \delta_{ij}K_2^1(a, t) + [K_2^3(a, t) - K_2^1(a, t)]\frac{a_i a_j}{a^2}. \quad (\text{F.48})$$

Vemos, pues, que para conocer las integrales anteriores sólo necesitamos calcular 4 integrales básicas que sólo dependen del módulo a , que son: $K_0(a, t)$, $K_1(a, t)$, $K_2^1(a, t)$ y $K_2^3(a, t)$. Ya hemos dicho anteriormente que estas integrales son analíticas. Sus expresiones finales se detallan a continuación.

$$K_0(a, t) = 2\pi k_F - 2\pi\sqrt{t - a^2}\phi_1(a, t) + \pi\frac{k_F^2 + t - 2a^2}{2a}\phi_2(a, t) \quad (\text{F.49a})$$

$$\begin{aligned} K_1(a, t) &= \frac{\pi k_F}{2a}(4a^2 - k_F^2 - t) - 2\pi a\sqrt{t - a^2}\phi_1(a, t) \\ &+ \pi\frac{4a^2(2a^2 - t) - (k_F^2 + t)^2}{8a^2}\phi_2(a, t) \end{aligned} \quad (\text{F.49b})$$

$$\begin{aligned} K_2^1(a, t) &= \frac{\pi k_F}{6a^2}\left[\frac{1}{2}(k_F^4 + 8a^4 - 10a^2t + t^2) + \frac{1}{3}k_F^2(a^2 + 3t)\right] + \frac{2\pi}{3}(t - a^2)^{3/2}\phi_1(a, t) \\ &+ \frac{\pi}{48a^3}\left[k_F^2(6a^2k_F^2) - k_F^4 - 3k_F^2t - 3t^2\right. \\ &\left. - 16a^6 + 24a^4t - 6a^2t^2 - t^3\right]\phi_2(a, t) \end{aligned} \quad (\text{F.49c})$$

$$\begin{aligned} K_2^3(a, t) &= \frac{\pi k_F}{3a^2}\left[\frac{1}{2}(-k_F^4 + 16a^4 - 8a^2t - t^2) + \frac{1}{3}k_F^2(2a^2 - 3t)\right] \\ &+ 2\pi\frac{4a^2 - 5a^2t + t^2}{3\sqrt{t - a^2}}\phi_1(a, t) \\ &+ \frac{\pi}{24a^3}\left[k_F^2(k_F^4 + 3k_F^2t + 3t^2) - 32a^6 + 24a^4t + t^3\right]\phi_2(a, t), \end{aligned} \quad (\text{F.49d})$$

en donde las funciones ϕ_i están definidas por

$$\phi_1(a, t) = \arctan\frac{k_F - a}{\sqrt{t - a^2}} + \arctan\frac{k_F + a}{\sqrt{t - a^2}} \quad (\text{F.50a})$$

$$\phi_2(a, t) = \log\frac{k_F^2 - 2ak_F + t}{k_F^2 + 2ak_F + t}. \quad (\text{F.50b})$$

F.5.2 Integrales con denominadores cuadráticos

Las siguientes integrales se obtienen derivando las integrales del apartado anterior:

$$J_0(\mathbf{a}, t) = \int \frac{d^3 k}{(k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} + t)^2} = -\frac{\partial}{\partial t} K_0(a, t). \quad (\text{F.51a})$$

$$J_1^i(\mathbf{a}, t) = \int \frac{k_i d^3 k}{(k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} + t)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_i} K_0(\mathbf{a}, t) = \frac{1}{2} \frac{a_i}{a} \frac{\partial}{\partial a} K_0(a, t). \quad (\text{F.51b})$$

$$\begin{aligned} J_2^{ij}(\mathbf{a}, t) &= \int \frac{k_i k_j d^3 k}{(k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} + t)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_j} K_1^i(\mathbf{a}, t) \\ &= \frac{\delta_{ij}}{2a} K_1(a, t) + \frac{a_i a_j}{2a} \frac{\partial}{\partial a} \frac{K_1(a, t)}{a} \end{aligned} \quad (\text{F.51c})$$

$$J_3^{ijl}(\mathbf{a}, t) = \int \frac{k_i k_j k_l d^3 k}{(k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} + t)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_l} K_2^{ij}(\mathbf{a}, t). \quad (\text{F.51d})$$

Esta última integral requiere la derivada de un tensor del tipo

$$t_{ij}(\mathbf{a}) = \delta_{ij} f(a) + \frac{a_i a_j}{a^2} g(a),$$

con $f = K_2^1$ y $g = K_3^3 - K_2^1$, cuyo valor es:

$$\frac{\partial t_{ij}(\mathbf{a})}{\partial a_l} = \frac{\delta_{ij} a_l}{a} \frac{df}{da} + \frac{\delta_{jl} a_i + \delta_{il} a_j}{a} \frac{g}{a} + \frac{a_i a_j a_l}{a^3} \left(\frac{dg}{da} - \frac{2g}{a} \right).$$

Ahora bien, esta expresión se puede simplificar debido al hecho de que J_3^{ijl} debe ser simétrico, como se deduce de su definición. Por lo tanto es necesario que $df/da = g/a$, es decir,

$$\frac{\partial K_2^1(a, t)}{\partial a} = \frac{K_3^3(a, t) - K_2^1(a, t)}{a},$$

hecho que, efectivamente, puede comprobarse expresando las integrales K_2^1 y K_3^3 en coordenadas esféricas e integrando por partes una de ellas con respecto a θ . Como consecuencia tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{df}{da} = \frac{g}{a} &= \frac{K_3^3 - K_2^1}{a} \\ \frac{dg}{da} &= \frac{\partial(K_3^3 - K_2^1)}{\partial a} = \frac{\partial K_3^3}{\partial a} - \frac{K_3^3 - K_2^1}{a} \\ \frac{dg}{da} - \frac{2g}{a} &= \frac{\partial(K_3^3 - K_2^1)}{\partial a} - 2 \frac{K_3^3 - K_2^1}{a} = \frac{\partial K_3^3}{\partial a} - 3 \frac{K_3^3 - K_2^1}{a}. \end{aligned}$$

Así que la expresión para J_3^{ijl} es:

$$\begin{aligned} J_3^{ijl}(\mathbf{a}, t) &= \frac{\delta_{ij} a_l + \delta_{jl} a_i + \delta_{li} a_j}{2a} \frac{K_3^3(a, t) - K_2^1(a, t)}{a} \\ &+ \frac{a_i a_j a_l}{2a^3} \left(\frac{\partial K_3^3(a, t)}{\partial a} - 3 \frac{K_3^3(a, t) - K_2^1(a, t)}{a} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.52})$$

F.5.3 Integrales Seagull

Las respuestas de interferencia magnetización-seagull y convección-seagull (F.25) y (F.27) se expresan en términos de \mathcal{R}^{MS} y \mathcal{R}^{CS} (F.22, F.28), que a su vez contienen la integral seagull (F.17). Con el propagador del pion desnudo esta integral se escribe en función de K_0 y K_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{\text{S}}(\mathbf{h}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{h} - \mathbf{k}}{k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} + h^2 + \mu^2} \\ &= \frac{\mathbf{h}}{(2\pi)^3} \left[K_0(h, \mu^2 + h^2) - \frac{1}{h} K_1(h, \mu^2 + h^2) \right] \end{aligned}$$

A partir de esta fórmula podemos escribir las siguientes combinaciones que aparecen en las respuestas \mathcal{R}^{MS} y \mathcal{R}^{CS} :

$$\begin{aligned} I^{\text{MS}}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) &= \mathbf{q} \cdot [\mathbf{I}^{\text{S}}(\mathbf{h} + \mathbf{q}) - \mathbf{I}^{\text{S}}(\mathbf{h})] = \\ &= \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{h} + q^2}{(2\pi)^3} \left[K_0(|\mathbf{h} + \mathbf{q}|, \mu^2 + (\mathbf{h} + \mathbf{q})^2) - \frac{1}{|\mathbf{q} + \mathbf{h}|} K_1(|\mathbf{h} + \mathbf{q}|, \mu^2 + (\mathbf{h} + \mathbf{q})^2) \right] \\ &\quad - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{h}}{(2\pi)^3} \left[K_0(h, \mu^2 + h^2) - \frac{1}{h} K_1(h, \mu^2 + h^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.53a})$$

$$\begin{aligned} I^{\text{CS}}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) &= \mathbf{h}_T \cdot [\mathbf{I}^{\text{S}}(\mathbf{h} + \mathbf{q}) + \mathbf{I}^{\text{S}}(\mathbf{h})] = \\ &= \frac{h_T^2}{(2\pi)^3} \left[K_0(|\mathbf{h} + \mathbf{q}|, \mu^2 + (\mathbf{h} + \mathbf{q})^2) - \frac{1}{|\mathbf{q} + \mathbf{h}|} K_1(|\mathbf{h} + \mathbf{q}|, \mu^2 + (\mathbf{h} + \mathbf{q})^2) \right] \\ &\quad + K_0(h, \mu^2 + h^2) - \frac{1}{h} K_1(h, \mu^2 + h^2) \end{aligned} \quad (\text{F.53b})$$

F.5.4 Integrales piónicas

Parametrización de Feynman

Las respuestas de interferencia de la corriente piónica (F.31, F.34) contienen unas integrales (F.32, F.35) más complicadas que las anteriores debido a que aparece el producto de dos propagadores de pion con distintos momentos. No obstante, este producto se puede expresar como potencias de un único propagador usando el método conocido por el nombre de *parametrización de Feynman* [Sak87, Man84]. Consiste en hacer uso de la identidad

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2},$$

que aplicada al producto de dos propagadores desnudos nos da:

$$\frac{1}{\mu^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{h})^2} \frac{1}{\mu^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{h})^2} = \int_0^1 \frac{dz}{(k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} + t)^2}, \quad (\text{F.54})$$

con

$$\mathbf{a} = \mathbf{h} + z\mathbf{q} \quad (\text{F.55a})$$

$$t = \mu^2 + a^2 + z(1-z)q^2. \quad (\text{F.55b})$$

Ahora es obvia la utilidad de este método, porque las integraciones respecto a \mathbf{k} de las integrales piónicas pueden llevarse a cabo directamente usando las funciones (F.51a—F.51d), con la salvedad de que se ha introducido un parámetro nuevo z respecto al que hay que integrar numéricamente.

Integral $M\pi$

A continuación calculamos la forma explícita de la integral (F.32) involucrada en la respuesta de magnetización-piónica, para el caso del pion descrito por un propagador desnudo, y que está dada por:

$$\begin{aligned} I^{M\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k q^2 (\mathbf{h} - \mathbf{k})_T^2 \frac{1}{\mu^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{h})^2} \frac{1}{\mu^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{h})^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^1 dz \int d^3k q^2 \frac{(\mathbf{h} - \mathbf{k})_T^2}{(k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} + t)^2}. \end{aligned}$$

Desarrollando el cuadrado del numerador:

$$(\mathbf{h} - \mathbf{k})_T^2 = h_T^2 - 2h_T^i k_i + k^2 - \frac{1}{q^2} q_i q_j k_i k_j$$

tendremos:

$$I^{M\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^1 dz q^2 \left[h_T^2 J_0(a, t) - 2h_T^i J_1^i(\mathbf{a}, t) + J_2^{ii}(\mathbf{a}, t) - \frac{1}{q^2} q_i q_j J_2^{ij}(\mathbf{a}, t) \right].$$

A continuación sustituimos los valores de las integrales J_α :

$$\begin{aligned} J_2^{ii} &= \frac{3}{2a} K_1(a, t) + \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial a} \frac{K_1(a, t)}{a} \\ \frac{q_i q_j}{q^2} J_2^{ij} &= \frac{K_1(a, t)}{2a} + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})^2}{2aq^2} \frac{\partial}{\partial a} \frac{K_1(a, t)}{a} \\ 2h_T^i J_1^i &= \frac{\mathbf{h}_T \cdot \mathbf{a}}{a} \frac{\partial K_0(a, t)}{\partial a}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral $I^{M\pi}$:

$$\begin{aligned} I^{M\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} q^2 \int_0^1 dz \left[h_T^2 J_0(a, t) + \frac{K_1(a, t)}{a} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2a} \left(a^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})^2}{q^2} \right) \frac{\partial}{\partial a} \frac{K_1(a, t)}{a} - \frac{\mathbf{h}_T \cdot \mathbf{a}}{a} \frac{\partial K_0(a, t)}{\partial a} \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que $\mathbf{a} = \mathbf{h} + z\mathbf{q}$, su parte transversal es $\mathbf{a}_T = \mathbf{h}_T$ y por lo tanto:

$$a^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})^2}{q^2} = a_T^2 = h_T^2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{h}_T = \mathbf{a}_T \cdot \mathbf{h}_T = h_T^2,$$

de forma que la integral se simplifica a

$$I^{M\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} q^2 \int_0^1 dz \left[\frac{K_1(a, t)}{a} + \frac{h_T^2}{2a} \frac{\partial}{\partial a} \frac{K_1(a, t)}{a} - \frac{h_T^2}{a} \frac{\partial K_0(a, t)}{\partial a} - h_T^2 \frac{\partial K_0(a, t)}{\partial t} \right]. \quad (\text{F.56})$$

Integral $C\pi$

Por su parte, la integral que aparece en la respuesta de interferencia convección-piónica es:

$$I^{C\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[(\mathbf{k} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{q} - (\mathbf{h} - \mathbf{k})^2] (\mathbf{k} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}_T}{[\mu^2 + (\mathbf{h} - \mathbf{k})^2][\mu^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{h} - \mathbf{q})^2]}.$$

Desarrollando el producto

$$\begin{aligned} [(\mathbf{k} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{q} - (\mathbf{h} - \mathbf{k})^2] (\mathbf{k} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}_T = \\ h_T^2 (\mathbf{h} \cdot \mathbf{q} + h^2) - [h_T^2 (\mathbf{q} + 2\mathbf{h}) + (\mathbf{h} \cdot \mathbf{q} + h^2) \mathbf{h}_T] \cdot \mathbf{k} + \\ h_T^2 k^2 + (q_i + 2h_i) h_T^j k_i k_j - \mathbf{h}_T \cdot \mathbf{k} k^2, \end{aligned}$$

sustituimos en la integral y realizamos la parametrización de Feynman:

$$\begin{aligned} I^{C\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^1 dz \left\{ h_T^2 (\mathbf{h} \cdot \mathbf{q} + h^2) J_0(a, t) - [h_T^2 (\mathbf{q} + 2\mathbf{h}) + (\mathbf{h} \cdot \mathbf{q} + h^2) \mathbf{h}_T] \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{a}, t) \right. \\ \left. + h_T^2 J_2^{ii}(\mathbf{a}, t) + (q_i + 2h_i) h_T^j J_2^{ij}(\mathbf{a}, t) - h_T^i J_3^{ijj}(\mathbf{a}, t) \right\}. \end{aligned}$$

De nuevo expresamos las funciones J_α en términos de K_α , resultando:

$$\begin{aligned} J_2^{ii} &= \frac{K_1(a, t)}{a} + \frac{1}{2} \frac{\partial K_1(a, t)}{\partial a} \\ (q_i + 2h_i) h_T^j J_2^{ij} &= \frac{h_T^2}{2a} \left(2 - \frac{(\mathbf{q} + 2\mathbf{h}) \cdot \mathbf{a}}{a^2} \right) K_1(a, t) + \frac{h_T^2}{2a^2} (\mathbf{q} + 2\mathbf{h}) \cdot \mathbf{a} \frac{\partial K_1(a, t)}{\partial a} \\ h_T^i J_3^{ijj} &= \frac{h_T^2}{2a^2} \left(2K_2^3(a, t) - 2K_2^1(a, t) + a \frac{\partial K_2^3(a, t)}{\partial a} \right). \end{aligned}$$

La integral $C\pi$ queda finalmente en la forma:

$$\begin{aligned} I^{C\pi}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = \frac{h_T^2}{(2\pi)^3} \int_0^1 dz \left\{ (\mathbf{h} \cdot \mathbf{q} + h^2) J_0(a, t) - \frac{(\mathbf{q} + 2\mathbf{h}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{q} + h^2}{2a} \frac{\partial K_0(a, t)}{\partial a} \right. \\ \left. + \frac{1}{a} \left(2 - \frac{(\mathbf{q} + 2\mathbf{h}) \cdot \mathbf{a}}{2a^2} \right) K_1(a, t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{(\mathbf{q} + 2\mathbf{h}) \cdot \mathbf{a}}{2a^2} \right) \frac{\partial K_1(a, t)}{\partial a} \right. \\ \left. - \frac{1}{2a^2} \left(2K_2^3(a, t) - 2K_2^1(a, t) + a \frac{\partial K_2^3(a, t)}{\partial a} \right) \right\}. \quad (\text{F.57}) \end{aligned}$$

F.5.5 Integral Δ

En este caso sólo hay que calcular la integral $I^{M\Delta}$ (F.44),

$$I^{M\Delta}(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = \left[I'_{\Delta}(\mathbf{p}) + I'_{\Delta}(\mathbf{h}) - 3q^2 I_{\Delta}(\mathbf{p}) - 3q^2 I_{\Delta}(\mathbf{h}) \right],$$

ya que no hay interferencia $C\Delta$. La solución está determinada conociendo las dos integrales I_{Δ} e I'_{Δ} que aparecen en su definición. Consideremos en primer lugar la integral (F.40), que está dada por:

$$\begin{aligned} I_{\Delta}(\mathbf{h}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{h} - \mathbf{k})^2}{\mu^2 + (\mathbf{h} - \mathbf{k})^2} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{h^2 - 2h_i k_i + k_i k_i}{k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} + \mu^2 + h^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left[h^2 K_0(h, \mu^2 + h^2) - 2h_i K_1^i(\mathbf{h}, \mu^2 + h^2) + K_2^{ii}(\mathbf{h}, \mu^2 + h^2) \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, tendremos:

$$I_{\Delta}(\mathbf{h}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left[h^2 K_0(h, \mu^2 + h^2) - 2h K_1(h, \mu^2 + h^2) + K_2^3(h, \mu^2 + h^2) + 2K_2^3(h, \mu^2 + h^2) \right]. \quad (\text{F.58})$$

La otra integral necesaria es (F.41):

$$\begin{aligned} I'_{\Delta}(\mathbf{h}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[\mathbf{q} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k})]^2}{\mu^2 + (\mathbf{h} - \mathbf{k})^2} \\ &= q_i q_j \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{h_i h_j - h_i k_j - h_j k_i + k_i k_j}{k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} + \mu^2 + h^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ (\mathbf{h} \cdot \mathbf{q})^2 K_0(h, \mu^2 + h^2) - (\mathbf{h} \cdot \mathbf{q}) q_i K_1^i(\mathbf{h}, \mu^2 + h^2) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{h} \cdot \mathbf{q}) q_j K_1^j(\mathbf{h}, \mu^2 + h^2) + q_i q_j K_2^{ij}(\mathbf{h}, \mu^2 + h^2) \right\}. \end{aligned}$$

Haciendo uso de (F.46) y (F.48) se tiene, finalmente,

$$\begin{aligned} I'_{\Delta}(\mathbf{h}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ (\mathbf{h} \cdot \mathbf{q})^2 K_0(h, \mu^2 + h^2) - 2 \frac{(\mathbf{h} \cdot \mathbf{q})^2}{h} K_1(h, \mu^2 + h^2) \right. \\ &\quad \left. + q^2 K_2^2(h, \mu^2 + h^2) + \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{h})^2}{h^2} \left[K_2^3(h, \mu^2 + h^2) - K_2^2(h, \mu^2 + h^2) \right] \right\} \quad (\text{F.59}) \end{aligned}$$

F.6 Cálculo analítico de las funciones respuesta

F.6.1 Sistema de coordenadas

Todas las funciones respuesta reducidas que hemos definido en este apéndice son de la forma

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \sum_{\mathbf{h}} \delta(\omega + \omega_{\mathbf{h}} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}) \theta(k_F - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F) I(\mathbf{h}, \mathbf{q}). \quad (\text{F.60})$$

y en el límite de materia infinita se escriben como una integral

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3h \delta(\omega + \omega_h - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{h}}) \theta(k_F - h) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{h}| - k_F) I(\mathbf{h}, \mathbf{q}). \quad (\text{F.61})$$

En el caso de las respuestas a un cuerpo la función $I(\mathbf{h}, \mathbf{q})$ es muy sencilla: es igual a la unidad en la respuesta longitudinal (F.5), mientras que en el caso de la respuesta de convección (F.11) es igual a

$$I(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = \frac{h^2}{M^2} - \left(\frac{\omega}{q} - \frac{q}{2M} \right)^2 \quad (\text{F.62})$$

Pero en las respuestas de interferencia con las MEC, esta función se complica bastante, expresándose como las integrales $I^{ab}(\mathbf{h}, \mathbf{q})$ que hemos analizado en la sección anterior. No obstante, independientemente de la complejidad de estas funciones, es posible reducir (F.61) a una integral unidimensional. En primer lugar observemos que la dependencia en (\mathbf{h}, \mathbf{q}) de las funciones (F.53a), (F.53b), (F.56), (F.57), (F.58) y (F.59), se realiza a través de las variables h , q , $|\mathbf{h} + \mathbf{q}|$ y todas las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \cdot \mathbf{q} &= hq \cos \theta \\ h_T^2 &= h^2 - \frac{(\mathbf{h} \cdot \mathbf{q})^2}{q^2} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{q} &= \mathbf{h} \cdot \mathbf{q} + zq^2 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{h} &= h^2 + z\mathbf{q} \cdot \mathbf{h} \\ a &= \sqrt{h^2 + z^2q^2 + 2z\mathbf{q} \cdot \mathbf{h}} \\ t &= \mu^2 + a^2 + z(1-z)q^2, \end{aligned}$$

que, a su vez, sólo dependen de las variables h , q y $\mathbf{h} \cdot \mathbf{q}$. Esta última podemos expresarla en términos de la variable

$$p = |\mathbf{h} + \mathbf{q}|, \quad (\text{F.63})$$

teniendo en cuenta que

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2}(p^2 - h^2 - q^2).$$

Por lo tanto, todas las funciones que entran en la función respuesta (F.61) se pueden hacer depender tan sólo de las 3 variables (h, p, q) .

A continuación transformaremos el elemento de volumen $d^3h = h^2 dh d \cos \theta d\phi$ cambiando la variable $\cos \theta$ por la nueva coordenada p en un sistema de referencia con el eje z en la dirección de \mathbf{q} , de forma que

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{q} = hq \cos \theta$$

diferenciando:

$$hq d \cos \theta = p dp \Rightarrow d \cos \theta = \frac{p dp}{hq}$$

y el nuevo elemento de volumen es:

$$d^3h = \frac{ph}{q} dh dp d\phi. \quad (\text{F.64})$$

El rango de variación de h y ϕ no ha cambiado: $h \in (0, \infty)$, $\phi \in (0, 2\pi)$. Por su parte, la variable p está restringida por la condición $p^2 = h^2 + q^2 + 2hq \cos \theta$, con $-1 < \cos \theta < 1$, de donde

$$|h - q| < p < h + q. \quad (\text{F.65})$$

F.6.2 Integración de la función respuesta

Usando las coordenadas (h, p, ϕ) introducidas en el párrafo anterior, y escribiendo $I(h, p, q) = I(\mathbf{h}, \mathbf{q})$, dado que esta función sólo depende de tres variables, la función respuesta (F.60) toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{q}, \omega) &= 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3h \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(p - k_F) \theta(k_F - h) I(h, p, q) \\ &= 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} dh \int_{|h-q|}^{h+q} dp \int_0^{2\pi} d\phi \frac{ph}{q} \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) \theta(p - k_F) I(h, p, q). \end{aligned} \quad (\text{F.66})$$

De la integración sobre ϕ obtenemos un factor 2π . Por otra parte, definiendo $\varphi(p) = \theta(p - k_F) I(h, p, q)$, podemos escribir la integral sobre p en la forma:

$$\begin{aligned} \int_{|h-q|}^{h+q} dp p \varphi(p) \delta(\omega + \omega_h - \omega_p) &= M \int_{|h-q|}^{h+q} d\left(\frac{p^2}{2M}\right) M \varphi(p) \delta\left(\omega + \frac{h^2}{2M} - \frac{p^2}{2M}\right) \\ &= \varphi(\sqrt{2M\omega + h^2}) \theta(h + q - \sqrt{2M\omega + h^2}) \theta(\sqrt{2M\omega + h^2} - |h - q|). \end{aligned}$$

Las dos funciones paso de esta última expresión imponen que

$$\left. \begin{aligned} (h + q)^2 > 2M\omega + h^2 &\Leftrightarrow 2hq > 2M\omega - q^2 \\ (h - q)^2 < 2M\omega + h^2 &\Leftrightarrow -2hq < 2M\omega - q^2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow |2M\omega - q^2| < 2hq,$$

de donde se tiene la condición:

$$h > \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|,$$

y por lo tanto podemos poner

$$\theta(h + q - \sqrt{2M\omega + h^2}) \theta(\sqrt{2M\omega + h^2} - |h - q|) = \theta\left(h - \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|\right)$$

Sustituyendo en la respuesta (F.66) tendremos:

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}, \omega) = 2 \frac{VM}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{q} \int_0^{k_F} dh h I(h, \sqrt{2M\omega + h^2}, q) \theta(\sqrt{2M\omega + h^2} - k_F) \theta\left(h - \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|\right). \quad (\text{F.67})$$

De la primera función paso del integrando de (F.67) se obtienen las condiciones:

$$2M\omega + h^2 > k_F^2 > h^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega > 0 \\ h^2 > F^2 - 2M\omega \end{cases}$$

La primera de ellas nos ratifica que la energía transferida al núcleo debe ser positiva, ya que éste se encuentra inicialmente en su estado fundamental de mínima energía.

De la segunda función paso de (F.67) extraemos que

$$k_F > h > \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|$$

y por lo tanto podemos sustituir

$$\begin{aligned} \theta(\sqrt{2M\omega + h^2} - k_F)\theta\left(h - \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|\right) &= \\ &= \theta(\omega)\theta\left(k_F - \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|\right)\theta(h^2 - k_F^2 + 2M\omega). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (F.67), tendremos:

$$\mathcal{R} = \frac{2VM}{(2\pi)^2 q} \theta(\omega)\theta\left(k_F - \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|\right) \int_{\left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|}^{k_F} dh h I(h, \sqrt{2M\omega + h^2}, q) \theta(h^2 - k_F^2 + 2M\omega).$$

Esta última función paso no altera el límite superior de integración, porque $k_F^2 > k_F^2 - 2M\omega$, sino el inferior en el caso en que

$$k_F^2 - 2M\omega > \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|^2 = \frac{M^2\omega^2}{q^2} - M\omega + \frac{q^2}{4} \iff k_F^2 > \left(\frac{M\omega}{q} + \frac{q}{2} \right)^2.$$

Teniendo esto en cuenta, la función respuesta se puede poner finalmente en la forma:

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2VM}{(2\pi)^2 q} \theta(\omega)\theta\left(k_F - \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right|\right) \int_{\kappa}^{k_F} dh h I(h, \sqrt{2M\omega + h^2}, q). \quad (\text{F.68})$$

con el límite inferior κ definido por:

$$\kappa = \begin{cases} \left| \frac{M\omega}{q} - \frac{q}{2} \right| & \text{si } k_F < \frac{M\omega}{q} + \frac{q}{2} \\ \sqrt{k_F^2 - 2M\omega} & \text{si } k_F > \frac{M\omega}{q} + \frac{q}{2} \end{cases} \quad (\text{F.69})$$

Nótese que en el segundo caso $k_F^2 - 2M\omega > (M\omega/q)^2 + (q/2)^2 - M\omega = (M\omega/q - q/2)^2 > 0$ y por tanto tiene sentido tomar su raíz cuadrada.



Referencias

- [Alb84] W. Alberico, M. Ericson and A. Molinari, *Ann. Phys. (N.Y.)* **154** (1984), 356.
- [Alb86] W.M. Alberico et al., *Phys. Rev. C* **34** (1986), 977.
- [Alb87] W.M. Alberico, P. Czerski, M. Ericson and A. Molinari, *Nucl. Phys. A* **462** (1987), 269.
- [Alb89] W.M. Alberico, R. Cenni and A. Molinari, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **23** (1989), 171.
- [Alb90] W.M. Alberico, T.W. Donnelly and A. Molinari, *Nucl. Phys. A* **512** (1990), 541.
- [Alt80] R. Altemus et al., *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980), 965.
- [Ama90] J.E. Amaro, "Estudio del espectro de excitación magnética del ^{48}Ca ", *Tesis de Licenciatura*, Universidad de Granada, 1990.
- [Ama92a] J.E. Amaro, G. Co', E.M.V. Fasanelli and A.M. Lallena, *Phys. Lett. B* **277** (1992), 249.
- [Ama92b] J.E. Amaro and A.M. Lallena, *Nucl. Phys. A* **537** (1992), 585.
- [Ama93] J.E. Amaro, G. Co', and A.M. Lallena, *Ann. Phys. (N.Y.)* **221** (1993), 306.
- [Ari78] A. Arima, Y. Horikawa, H. Hyuga and T. Suzuki, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978), 1001.
- [Bar83] P. Barreau et al., *Nucl. Phys. A* **402** (1983), 515; *Note CEA-N-2334*, Saclay (1983).
- [Ber72] W. Bertozzi, J. Friar, J. Heisenberg and J.W. Negele, *Phys. Lett. B* **41** (1972), 408.
- [Ber87] A.M. Bernstein, en "Proceedings of the 3rd. Workshop on Perspectives in Nuclear Physics at Intermediate Energies" (S. Boffi, C. Ciofi degli Atti and M. Giannini, Eds.), World Scientific, Singapore, 1987.
- [Ber90] M. Bernheim et al., en "Proceedings of the Workshop on Two Nucleon Emission Reaction" (O. Benhar and A. Fabrocini, Eds.), ETS Editrice, Pisa, 1990.

- [Bev93] L.J. de Bever "A comparison of real and virtual photon reactions on ^{11}B ", *Tesis Doctoral*, Universiteit Utrecht, 1993.
- [Bla86] C. Blatchey et al., *Phys. Rev. C* **34** (1986), 1243.
- [Blu85] P.G. Blunden and B. Castel, *Nucl. Phys. A* **445** (1985) 742.
- [Blu89] P.G. Blunden and M.N. Butler, *Phys. Lett. B* **219** (1989), 151.
- [Bou89] P.M. Boucher, B. Castel, Y. Okuhara and H. Sagawa, *Ann. Phys. (N.Y.)* **196** (1989), 150.
- [Bou91] P.M. Boucher and J.W. Van Orden, *Phys. Rev. C* **43** (1991), 582.
- [Bra77] M. Brack, D.O. Riska, and W. Weise, *Nucl. Phys. A* **287** (1977), 425.
- [Bri87] F.A. Brieva and A. Dellafiore, *Phys. Rev. C* **36** (1987), 899.
- [Bro75] G.E. Brown and W. Weise, *Phys. Rep. C* **22** (1975), 279.
- [Bro89a] R. Brokmann, D. Drechsel, J. Frank and P.G. Reinhard, *Z. Phys. A* **332** (1989), 51.
- [Bro89b] G.E. Brown and M. Rho, *Phys. Lett. B* **222** (1989), 324.
- [Bub91] M. Buballa, S. Drożdż, S. Krewald and J. Speth, *Ann. Phys. (N.Y.)* **208** (1991), 346.
- [Bum61] F. Bumiller, M. Croisiaux, E. Dally and R. Hofstadter, *Phys. Rev.* **126** (1961), 1623.
- [Cap91] F. Capuzzi, C. Giusti and F.D. Pacati, *Nucl. Phys. A* **524** (1991), 681.
- [Car91] J. Carlson and R. Schiavilla, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1991), 3681.
- [Car93] J. Carlson and R. Schiavilla, en "Proceedings of the Workshop on Electron-Nucleus Scattering" (O. Benhar, A. Fabrocini and R. Schiavilla, Eds.), World Scientific, Singapore, 1993.
- [Cav84] M. Cavinato et al., *Nucl. Phys. A* **423** (1984), 376.
- [Cav90] M. Cavinato, M. Marangoni and A.M. Saruis, *Phys. Lett. B* **235** (1990), 346.
- [Cel85] L.S. Celenza, A. Harindranath and C.M. Shakin, *Phys. Rev. C* **32** (1985), 248.
- [Cha56] E.E. Chambers and R. Hofstadter, *Phys. Rev.* **103** (1956), 1454.
- [Che71] M. Chemtob and M. Rho, *Nucl. Phys. A* **163** (1971), 1.
- [Chi89] C.R. Chinn, A. Picklesimer and J.W. Van Orden, *Phys. Rev. C* **40** (1989), 790; 1159.

- [Cio80] C. Ciofi degli Atti, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **3** (1980), 163.
- [Co'84a] G. Co', "A model for nucleon emission induced by electron scattering", *Tesis Doctoral*, Universität Bonn, 1984.
- [Co'84b] G. Co' and S. Krewald, *Phys. Lett. B* **137** (1984), 145.
- [Co'85] G. Co' and S. Krewald, *Nucl. Phys. A* **433** (1985), 392.
- [Co'87] G. Co', A.M. Lallena and T.W. Donnelly, *Nucl. Phys. A* **469** (1987), 684.
- [Co'88] G. Co', K.Q. Quader, R. Smith and J. Wambach, *Nucl. Phys. A* **485** (1988), 61.
- [Co'89] G. Co', en "Proceedings of the Workshop on Electron-Nucleus Scattering" (A. Fabrocini et al., Eds.), World Scientific, Singapore, 1989.
- [Czy63] W. Czyz, *Phys. Rev.* **131** (1963), 2141.
- [Dea83] M. Deady et al., *Phys. Rev. C* **28** (1983), 631.
- [Dea86] M. Deady et al., *Phys. Rev. C* **33** (1986), 1897.
- [deF66] T. deForest and J.D. Walecka, *Adv. Phys.* **15** (1966), 57.
- [Deh85] J.S. Dehesa, S. Krewald, A.M. Lallena and T.W. Donnelly, *Nucl. Phys. A* **436** (1985), 573.
- [Del85] A. Dellafiore, F. Lenz and F.A. Brieva, *Phys. Rev. C* **31** (1985), 1088.
- [Dek91] M.J. Dekker, P.J. Brussaard and J.A. Tjon, *Phys. Lett. B* **266** (1991), 249.
- [Don80] T.W. Donnelly, en "Proceedings of the International School on Electron and Pion Interactions with Nuclei at Intermediate Energies" (W. Bertozzi, S. Costa and C. Schaerf, Eds.), Harwood, Chur, 1980.
- [Dow88] K. Dow et al., *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988), 1706.
- [Dro87] S. Drożdż, G. Co', J. Wambach and J. Speth, *Phys. Lett. B* **185** (1987), 287.
- [Dro89] S. Drożdż, M. Buballa, S. Krewald and J. Speth, *Nucl. Phys. A* **501** (1989), 487.
- [Duf67] A.J. Dufner and Y.S. Tsai, *Phys. Rev.* **168** (1968), 1801.
- [Eis88] J.M. Eisenberg and W. Greiner. "Excitation mechanisms of the nucleus", North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [Fan87] S. Fantoni and V.R. Pandharipande, *Nucl. Phys. A* **473** (1987), 234.
- [Fab89] A. Fabrocini and S. Fantoni, *Nucl. Phys. A* **503** (1989), 375.

- [Fas91] E.M.V. Fasanelli "Effetti di Correnti di Scambio Mesonico nella Risposta Quasi Elastica del ^{12}C ", *Tesi di Laurea*, Università di Lecce, 1991.
- [Fes62] H. Feshbach, *Ann. Phys.* **19** (1962), 287.
- [Fol52] L.L. Foldy, *Phys. Rev.* **87** (1952), 688
- [Fri73] J.L. Friar, *Ann. Phys. (N.Y.)* **81** (1973), 332.
- [Fri76] J.L. Friar and S. Fallieros, *Phys.Rev. C* **13** (1976), 2571.
- [Fri77a] J.L.Friar, *Phys. Lett. B* **69** (1977), 51.
- [Fri77b] J.L.Friar, *Ann. Phys.* **104** (1977), 380.
- [Fri80] J.L. Friar, en "Proceedings of the International School on Electron and Pion Interactions with Nuclei at Intermediate Energies" (W. Bertozzi, S. Costa and C. Schaerf, Eds.), Harwood, Chur, 1980.
- [Fro85] B. Frois, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **13** (1985), 117.
- [Fru84] S. Frullani and J. Mougey, *Ad. Nucl. Phys.*, **14** (1984), .
- [Fub58] S. Fubini, Y. Nambu and V. Wataghin, *Phys. Rev.* **111** (1958), 329.
- [Gar76] M. Gari and H. Hyuga, *Z. Phys. A* **277** (1976), 291; *N.Phys. A* **274** (1976), 333.
- [Hoc73] J. Hockert, D.O. Riska, M. Gari and A. Huffman, *Nucl.Phys. A* **217** (1973), 14.
- [Hoe76] G. Hoehler et al., *Nucl. Phys. B* **114** (1976), 505.
- [Hor90] C.J. Horowitz and J. Piekarewicz, *Nucl. Phys. A* **511** (1990), 461.
- [Hot84] A. Hotta et al., *Phys. Rev. C* **30** (1984), 87.
- [Iac73] F. Iachello, A.D. Jackson and A. Lande, *Phys. Lett. B* **43** (1973), 191.
- [Jan65] T. Janssens, R. Hofstadter, E.B. Hughes and M.R. Yearian, *Phys. Rev.* **142** (1966), 922.
- [Koh81] M. Kohno and N. Ohtsuka, *Phys. Lett. B* **98** (1981), 335.
- [Koh83] M. Kohno, *Nucl. Phys. A* **410** (1983), 349.
- [Koo86] S.E. Koonin, "Computational physics", Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1986.
- [Kre86] S. Krewald, A.M. Lallena and J.S. Dehesa, *Nucl. Phys. A* **448** (1986), 685.
- [Lal84] A.M. Lallena, "Influencia de las corrientes mesónicas de intercambio en la difusión magnética de electrones por núcleos de capa cerrada", *Tesis Doctoral*, Universidad de Granada, 1984.

- [Lal91] A.M. Lallena, *Int. J. Mod. Phys. A* **6** (1991), 2213.
- [Led78] C.M. Lederer and V.S. Shirley, Eds., "Table of isotopes", Wiley, N.Y., 1978.
- [Leo73] M. Leon, "Particle physics: an introduction", Academic Press, New York, 1973.
- [Loc75] J.A. Lock and L.L. Foldy, *Ann. Phys.* **93** (1975), 276.
- [Mac87] R. Machleidt, K. Holinde and Ch. Elster, *Phys. Rep.* **149** (1987), 1.
- [Mah81] C. Mahaux and N. Ngô, *Phys. Lett. B* **100** (1981), 285.
- [Mah82] C. Mahaux and N. Ngô, *Nucl. Phys. A* **378** (1982), 205.
- [Man84] F. Mandl and G. Shaw, "Quantum field theory", John Wiley & Sons, Suffolk, 1984.
- [Mar85] C. Marchand et al., *Phys. Lett. B* **B153** (1985), 29; *Note CEA-N-2439*, Saclay (1985).
- [Mes61] A. Messiah, "Quantum mechanics", North-Holland, London, 1961.
- [Mez84] Z.E. Meziani et al., *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984), 2130.
- [Mez85] Z.E. Meziani et al., *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985), 1233; *DPhN n^o 2292*, Saclay (1984).
- [Mon71] E.J. Moniz et al., *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971), 445.
- [Mul91] P.J. Mulders, en "Modern topics in electron scattering" (B.Frois and I.Sick, Eds.), World Scientific, Singapore, 1991.
- [Nob81] J.V. Noble, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981), 412.
- [Nob83] J.V. Noble, *Phys. Rev. C* **27** (1983), 423.
- [Orl91] G. Orlandini and M. Traini, *Rep. Prog. Phys.* **54** (1991), 257.
- [Pec69] R.D. Peccei, *Phys. Rev.* **181** (1969), 1902.
- [Pin88a] D. Pines, K.Q. Quader and J. Wambach, *Nucl. Phys. A* **469** (1988), 365
- [Pin88b] D. Pines, K.F. Quader and J. Wambach, *Nucl. Phys. A* **477** (1988), 365.
- [Ris79] D.O. Riska, en "Mesons in nuclei, Vol.II" (M. Rho and D. Wilkinson, Eds.), North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [Ris84] D.O. Riska, *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **11** (1984), 199.
- [Ros50] M.N. Rosenbluth, *Phys. Rev.* **79** (1950), 615.
- [Sag89] H. Sagawa, P.M. Boucher, B. Castel and Y. Okuhara, *Phys. Lett. B* **219** (1989), 10.

- [Sak87] J.J. Sakurai, "Advanced quantum mechanics", Addison-Wesley, 1987.
- [Sch89] R. Schiavilla, V.R. Pandharipande and D.O. Riska, *Phys. Rev. C* **40** (1989), 2224.
- [Shi89] T. Shigehara, K. Shimizu and A. Arima, *Nucl. Phys. A* **492** (1989), 388.
- [Sim80] G.G. Simon, Ch. Schmitt, F. Borkowski and V.H. Walther, *Nucl. Phys. A* **333** (1980), 381.
- [Sie37] A.J.F. Siegert, *Phys. Rev.* **52** (1937), 787.
- [Smi88] R.D. Smith and J. Wambach, *Phys. Rev. C* **38** (1988), 100.
- [Som78] B. Sommer, *Nuc. Phys. A* **308** (1978), 263.
- [Sti70] P. Stichel and E. Werner, *Nucl. Phys. A* **145** (1970), 257.
- [Str87] U. Stroth, R.W. Hasse and P. Schuck, *Nucl. Phys. A* **462** (1987), 45.
- [Tan90] K. Tanaka, W.Bentz and A.Arima, *Nucl. Phys. A* **518** (1990), 229.
- [Van81] J.W. Van Orden and T.W. Donnelly, *Ann. Phys. (N.Y.)* **131** (1981), 451.
- [Vri87] H. de Vries, C.W. de Jager and C. de Vries, *At. Data Nucl. Data Tables* **36** (1987), 495.
- [Wak83] M. Wakamatsu and K. Matsumoto, *Nucl. Phys. A* **392** (1983), 323.
- [Weh89] K. Wehrberger and F. Beck, *Nucl. Phys. A* **491** (1989), 587.
- [Why74] R.R. Whitney et al., *Phys. Rev. C* **9** (1974), 2230.
- [Wyl76] H.W. Wyld, "Mathematical methods for physics", Benjamin/Cummins, Menlo Park, 1976.
- [Yen54] D.R. Yennie, D.G. Ravenhall and R.N. Wilson, *Phys. Rev.* **95** (1954), 500.