UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PROGRAMA DE DOCTORADO CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

CONOCIMIENTO CONCEPTUAL DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO ADQUIRIDO EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. UN ESTUDIO A TRAVÉS DE LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS.

Elena Fernández Millán

Granada, 2018

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autora: Elena Fernández Millán
ISBN: 978-84-9163-795-0
URI: http://hdl.handle.net/10481/49882

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PROGRAMA DE DOCTORADO CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CONOCIMIENTO CONCEPTUAL DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO ADQUIRIDO EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. UN ESTUDIO A TRAVÉS DE LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS.

Memoria de Tesis Doctoral realizada bajo la dirección de la doctora D.ª Marta Molina González que presenta D.ª Elena Fernández Millán para optar al grado de Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada.

Fdo.: D.ª Elena Fernández Millán

VºBº de la Directora

Fdo.: D.ª Marta Molina González

La doctoranda Elena Fernández Millán y la directora de la tesis Marta Molina González, garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por la doctoranda bajo la dirección de la directora de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada a, 24 de enero de 2018

Doctoranda

Fdo.: D.ª Elena Fernández Millán

Directora de la Tesis

Fdo.: D.ª Marta Molina González

El trabajo que se presenta en este documento pretende cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctora dentro del programa de doctorado Ciencias de la Educación impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Este trabajo ha sido realizado en el marco de dos proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España, y en el seno del grupo de investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación. Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico".

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a las personas que de una forma u otra han contribuido al proceso de realización de esta tesis doctoral.

En primer lugar a gracias a mi directora, la doctora D.ª Marta Molina González, por todo lo que me ha ofrecido desde que comenzaron mis estudios del Master en Didáctica de la Matemática. Marta despertó mi curiosidad hacia algunos aspectos de la didáctica del álgebra y gracias a ello continué en el mundo de la investigación. A lo largo de este tiempo me ha ofrecido su orientación y su experiencia con la mejor de las voluntades, cada reunión y conversación con ella me hace crecer. Me ha dedicado su tiempo, su paciencia y su confianza, me ha hecho sentirme cómoda y tener la certeza de que podía preguntar, opinar o sugerir cualquier cosa sin ninguna duda. Gracias Marta por haberme permitido realizar este trabajo en la distancia y con muchos altibajos, me lo has puesto todo muy fácil.

Gracias a mi familia y amigos, por su paciencia, sus continuos ánimos para continuar y la confianza, a veces ciega, depositada en mí.

Gracias a todos los estudiantes que han participado en este estudio, por su buena voluntad e interés en participar, sin vosotros todo esto no hubiese sido posible. También a los compañeros de profesión que se han interesado por este trabajo, me han dado sus opiniones y me han animado.

Gracias a Álex por escucharme y por participar en las conversaciones sobre este trabajo, haciendo como si fuese de tu total interés aunque sé que muchas veces no sabías ni de lo que hablaba. Por tu ilusión compartida por este trabajo, por hacerme reír y ver las cosas desde otros puntos de vista, por obligarme en ocasiones a apagar el ordenador. Gracias por compartir tu vida conmigo.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra juegan un papel fundamental en la etapa de ecuación secundaria obligatoria (ESO). Los documentos curriculares tanto estatales como autonómicos reflejan esta importancia. Junto con los números, el álgebra constituye un bloque de contenidos presente en los cuatro cursos de esta etapa educativa. Sin embargo, a pesar del extenso tiempo dedicado a la enseñanza del álgebra en la ESO, los estudiantes muestran cuantiosas y persistentes dificultades y errores en el trabajo con el simbolismo algebraico así como con ecuaciones y sistemas de ecuaciones, tal y como ponen de manifiesto numerosas investigaciones en el ámbito de la didáctica de la matemática.

Este hecho nos motiva para realizar esta tesis doctoral en la indagamos en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico característico de ecuaciones y sistemas de ecuaciones y del concepto de ecuación como un todo, que adquieren cuatro grupos de estudiantes a lo largo de su formación en la ESO.

Para ello utilizamos tres tipos de tareas: invención de problemas, generación de ejemplos y definición de conceptos matemáticos; todas ellas por parte de los estudiantes. Las tres tareas han sido ampliamente reconocidas en la investigación en didáctica de la matemática como válidas para evaluar el conocimiento conceptual que posee un individuo sobre un concepto matemático. La recogida de datos se lleva a cabo a través dos instrumentos: cuestionarios individuales y escritos y entrevistas semiestructuradas individuales grabadas en audio. Cada uno de los instrumentos y tareas aporta un tipo información que nos permite dar respuesta al problema de investigación planteado.

De esta forma identificamos varios aspectos que informan del conocimiento conceptual del simbolismo algebraico y del concepto de ecuación: características de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema, significados que le atribuyen a las estructuras aditivas y multiplicativas presentes en ecuaciones y sistemas de ecuaciones, dimensiones de variación posibles y rangos de variación permisibles en los ejemplos de ecuaciones generados por los estudiantes y palabras clave incluidas en sus definiciones del concepto de ecuación.

PRESENTACIÓN

La tesis doctoral desarrollada en esta memoria se presenta en la modalidad de agrupación de publicaciones. Las publicaciones seleccionadas, que se detallan a continuación, cumplen con los indicios de calidad requeridos por el Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada:

Artículo 1. Fernández-Millán, E. y Molina, M., (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 53-71.

Indicios de calidad:

a) La revista *Enseñanza de las Ciencias* está incluida en la WOS, con factor de impacto actual (2016) 0,549, situándose en el Q4 (195/235) en Education and Educational Research.
b) También está incluida en SCOPUS, con índice H 8. En 2016 está en el Q2 (582/934) en el área de Educación, tiene CiteScore 0.43, SNIP 0.657 y SJR 0.358.
c) Esta revista cuenta con el sello de calidad de la FECYT. También se encuentra indexada en las bases de datos siguientes: CARHUS +, CIRC, DIALNET plus, DICE, ERIH PLUS, Google Scholar, IRESIE, Latindex (Catálogo), MathEduc, MIAR y REBIUN.
d) Esta revista es un punto de referencia obligado entre los profesionales del campo de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias experimentales de España e Iberoamérica.
e) Otros indicios de calidad de la revista: **Clasificación CIRC** – grupo B, **Índice MIAR -** ICDS 9, **Categoría CARHUS** grupo A, 31 **Criterios Latindex cumplidos (catálogo), 14 Criterios CNEAI cumplidos según RESH, 17 Criterios ANECA cumplidos según RESH y en Google académico** índice H5 14 y mediana h5 26.

Artículo 2. Fernández-Millán E. y Molina, M. (2017). Secondary students' implicit conceptual knowledge of algebraic symbolism. An exploratory study through problem posing. *IEJME-Matematics Education, 12*(9), 799-826.

Indicios de calidad:

a) La revista Mathematics Education, antes recientemente denominada *International Electronic Journal of Mathematics Education*, está incluida en SCOPUS, con índice H 9 y en el Q4 (601/787) en el área de Educación en 2016. En este año tiene CiteScore 0.22, SNIP 0.444 y SJR 0.262 en el área de Educación.
b) También se encuentra indexada en EBSCO Education Source Complete, Cabell's Directory Index, Index Copernicus, Mathematics Education/Didactics Database y EdNA Online Database
c) Otros indicios de calidad de la revista: **Clasificación CIRC** - grupo C e **Índice MIAR -** ICDS 9. 5

Artículo 3. Fernández-Millán, E. y Molina, M. (en prensa). Ejemplos y definiciones de ecuaciones: una ventana hacia el conocimiento conceptual de estudiantes de secundaria. *PNA*

Indicios de calidad:

a) La revista *PNA* ha sido incluida en SCOPUS en 2017 por lo que aún no tiene asignados indicadores de impacto.
b) Esta revista cuenta con el sello de calidad de la FECYT. También se encuentra indexada en las bases de datos e índices siguientes: Catálogo BNE, CIRC, DICE, DRJI, Emerging Source Citation Index (ESCI), ERIC, ERIHPLUS, Global impact factor, Infobase Index. InRECS, Iresie, Latindex, Resh, Plataforma Sucupira, Anvur, Academic Journals Dabatase, Academic Search Premier, 360º, BASE, BIB, CNRS, Biblioteca electronica de Ciencia y Tecnología, BiuAnté, EBSCOhost, CCUC, RED CSIC,CCHS, carm.es, cesire, copac, Dialnet, Digibug, DOAJ, DULCINEA, ERA, EuDML, Fuente Academica Plus, ERIC, GALE, KBart, CZ3, Funes, Genamics, HEALLINK, HISPANA, INFOBASE INDEX, WILDCATTER CATALOG, MAswe, MIAR, CRUE, MathEduc, Observatorio de Revistas Cientificas de Ciencias Sociales, Psicodo, REDIB, REDINED, ROAD, Standford Libraries, SUNCAT, SUDOC, TIB, ULRICHSWEB, University de Macau, ZDB, Google Scholard, WorldCat, ResearcherID, Orcid, ResearchGate.
c) Otros indicios de calidad de la revista: **Clasificación CIRC** – grupo B , **Índice MIAR** – ICDS 9.5, Clasificación/Ranking Qualis Capes - A2, 30 **Criterios**

Latindex cumplidos (catálogo), 16 Criterios CNEAI cumplidos según RESH y 18 Criterios ANECA cumplidos según RESH.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

En este capítulo introducimos las principales ideas que caracterizan el problema de investigación de esta tesis doctoral. Posteriormente describimos la motivación personal y la justificación de este estudio desde una perspectiva curricular y desde la investigación en didáctica de la matemática.

1.1 CONOCIMIENTO CONCEPTUAL DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO Y DE LAS ECUACIONES.

El conocimiento matemático, como tema de estudio destacado en la investigación en didáctica de la matemática, ha sido objeto de múltiples clasificaciones (Hiebert y Lefevre, 1986). Una de las más utilizadas ha sido su categorización en conocimiento conceptual y conocimiento procedimental. A lo largo de este trabajo utilizamos la definición de ambos términos dada por Hiebert y Lefevre (1986). Según estos autores el conocimiento procedimental se construye con dos partes: una de ellas la compone el lenguaje formal, conocimiento de los símbolos y la sintaxis de las matemáticas que implica únicamente una conciencia de sus rasgos superficiales, y la segunda parte está formada con el conocimiento de los algoritmos o reglas empleados para resolver tareas matemáticas, instrucciones paso a paso que prescriben cómo concluir una tarea. El conocimiento conceptual es definido como aquel que es rico en relaciones de tal forma que una unidad es parte del conocimiento conceptual si su poseedor reconoce su relación con otras piezas de información.

Durante años el estudio del conocimiento procedimental ha sido protagonista en las investigaciones en didáctica de la matemática, en especial en didáctica del álgebra, sin embargo en las últimas décadas el conocimiento conceptual ha cobrado importancia y ha pasado a estudiarse conjuntamente con el anterior (Crooks y Alibali, 2014; Ross y Willson, 2012). El motivo de este cambio recae principalmente en la constatación de la importancia del mismo (Crooks y Alibali, 2014; Rittle-Johnson y Schneider, 2015; Ross y Willson, 2012). Los estudios que se centran en el conocimiento conceptual tienen diferentes objetivos: logar un consenso en su definición, discriminar cuál de ellos debe prevalecer a la hora de enseñar matemáticas y determinar cómo evaluarlo, son los temas principales.

En función de la forma de evaluarlo se clasifica el conocimiento conceptual en implícito y explícito. Varios estudios avalan las siguientes tareas para la evaluación de conocimiento conceptual implícito:

- aplicación y evaluación de procedimientos (Crook y Alibali, 2014);
- evaluación, clasificación, identificación y generación de ejemplos relativos a un concepto concreto (Crooks y Alibabli ,2014; Waywook, 1992; Abdul-Rahman, 2005; Zaskis y Leikin 2007, 2008; Goldenberg y Mason, 2008),
- invención de problemas (Ayllón, Castro y Molina, 2010; Cázares, Castro y Rico, 1998; Mestre, 2002; Rittle Johnson y Schneider, 2015; Abdul-Rahman, 2005).

Para la evaluación del conocimiento conceptual explícito una de las tareas señaladas es la explicación de conceptos, en particular, la definición de conceptos matemáticos (Crook y Alibali, 2014).

En este trabajo nos centramos en evaluar el conocimiento conceptual del concepto de ecuación y del simbolismo algebraico que se emplea en las ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Pretendemos determinar qué saben a este respecto los estudiantes como resultado de su formación en educación secundaria. En el caso de la ecuación nos interesa su conocimiento explícito e implícito. En el caso del simbolismo algebraico centramos nuestra atención en el conocimiento implícito.

Como tareas para evaluar el conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico seleccionamos la invención de problemas y para evaluar el conocimiento conceptual implícito del concepto de ecuación la generación de ejemplos. Brown y Walter (1990) señalan que ambas tareas van en la misma línea en el sentido que invierten el orden usual de las cosas: habitualmente tanto los ejemplos como los problemas son planteados por profesionales, ya sean profesores, libros de texto, etc. y no por los estudiantes. En este sentido Abdul-Rahman (2015) defiende que una forma de dar muestra del conocimiento conceptual adquirido puede ser aplicar lo que se ha aprendido, relativo a un concepto o a un procedimiento, de forma adecuada, a situaciones que no nos son familiares. Este es el caso de la invención de problemas y de la generación de ejemplos para los estudiantes participantes en esta investigación.

Por otro lado, abordamos la evaluación del conocimiento conceptual explícito del concepto de ecuación a través de la definición por parte de los estudiantes de dicho concepto matemático en dos situaciones diferentes: antes y después de la generación de ejemplos de ecuaciones por parte de los estudiantes.

1.2 MOTIVACIÓN PERSONAL

Desde septiembre de 2011 la investigadora de esta tesis doctoral es profesora de ESO en la especialidad de matemáticas y ha impartido clase en diferentes institutos públicos de Andalucía.

Durante el primer año como docente en 2011/2012 llamó mi atención las dificultades que presentaban los estudiantes al trabajar con el simbolismo algebraico, en concreto en la manipulación simbólica que implica la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones y en la resolución de problemas en los que intervienen ecuaciones. Observé que estas dificultades se presentaban no sólo en los primeros cursos de la ESO, sino que los estudiantes de cuarto curso seguían manifestándolas e incurriendo en numerosos errores en las tareas mencionadas anteriormente.

Esta inquietud me lleva a interesarme por los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el cuso 2012/2013 inicio mi etapa de formación como investigadora a través de la realización del Máster de Didáctica de la Matemática. Las observaciones mencionadas, que tuvieron lugar durante el primer curso como docente, despiertan mi interés especialmente por el conocimiento que adquieren los estudiantes sobre el simbolismo algebraico característico de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, siendo este el tema central del trabajo de fin de master (Fernández-Millán, 2013).

Esta tesis doctoral, que es continuación de Fernández-Millán (2013), se basa en la hipótesis de que muchas de las dificultades que ponen de manifiesto los estudiantes en su trabajo con el simbolismo algebraico y con las ecuaciones tienen su justificación en un conocimiento conceptual débilmente adquirido del mismo como resultado de su formación secundaria obligatoria. En primer lugar nos centramos en indagar en el conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico característico de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Los resultados obtenidos despiertan nuestro interés por indagar en el conocimiento conceptual tanto implícito como explícito del concepto ecuación visto como un todo, sin prestar atención esta vez, a las características del simbolismo algebraico. En esta última parte del trabajo dejamos a un lado el concepto sistema de ecuaciones ya que gran parte de los resultados obtenidos para las ecuaciones son extensibles a los sistemas de ecuaciones.

La realización de esta investigación tiene como propósito buscar una mejora de la enseñanza el álgebra, principalmente en lo que se refiere a la resolución de ecuaciones y de problemas resolubles con ecuaciones.

1.3 JUSTIFICACIÓN CURRICULAR

La recogida de datos tiene lugar con estudiantes de cuarto curso de la ESO, ya que centramos nuestro interés en el conocimiento conceptual que adquieren los estudiantes al término de esta etapa.

En el periodo en el tienen lugar las diferentes recogidas de datos, de 2013 a 2017, se ha producido una modificación de la legislación que regula las enseñanzas impartidas en la ESO tanto a nivel estatal como autonómica.

Desde 2013 hasta el curso 2015/2016 está vigente la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) para el curso 4º de ESO. Los documentos curriculares autonómicos que regulan sus enseñanzas son:

- Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.
- Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.

En el año 2013 tiene lugar una reforma educativa con la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) que se implanta en 4º de ESO en el curso académico 2016/2017. Los documentos curriculares autonómicos que regulan sus enseñanzas son:

- Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.
- Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

Tanto en la Orden del 10/08/2007 como en la del 14/07/2016 el álgebra, junto con los números, compone uno de los bloques de contenidos presentes en todos los cursos de la ESO.

A continuación detallamos los contenidos relativos al simbolismo algebraico, ecuaciones y sistemas de ecuaciones presentes en cada uno de los cursos de la ESO en la última reforma educativa (Orden de 14 de julio de 2016):

1º ESO: Iniciación al lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Valor numérico de una expresión algebraica. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Introducción a la resolución de problemas.

2º ESO: El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Valor numérico de una expresión algebraica. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos. Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.

3º ESO Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas: Introducción al estudio de polinomios. Operaciones con polinomios. Transformación de expresiones algebraicas con una indeterminada. Igualdades notables. Resolución ecuaciones de primer grado con una incógnita. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico). Resolución de sistemas de ecuaciones con dos ecuaciones y dos incógnitas (método de sustitución, igualación, reducción y gráfico). Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas.

3º ESO Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas: Expresión usando lenguaje algebraico. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico). Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios. Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos. Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

4º ESO Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas: Polinomios: raíces y factorización. Utilización de identidades notables. Resolución gráfica y algebraica de ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de problemas cotidianos mediante ecuaciones y sistemas.

4º ESO Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas: Manipulación de expresiones algebraicas. Utilización de igualdades notables. Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización. Ecuaciones de grado superior a dos. Fracciones algebraicas. Simplificación y operaciones. Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos. Inecuaciones de primer y segundo grado. Interpretación gráfica. Resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.

Estos documentos curriculares dan muestra del tiempo que se dedica a lo largo de estos cuatro cursos a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, en concreto de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, y de la relevancia de este contenido dentro de la ESO. En consecuencia los estudios que ayuden a evaluar el conocimiento algebraico que adquieren los estudiantes y detectar fortalezas y debilidades del mismo son necesarios para la mejora de la enseñanza en esta etapa.

1.4 JUSTIFICACIÓN DESDE LA INVESTIGACIÓN

A pesar del tiempo dedicado a la enseñanza del álgebra en la ESO, numerosos estudios en el campo de la investigación en didáctica de la matemática dan cuenta de numerosas y persistentes dificultades que ponen de manifiesto los estudiantes y los errores en los que incurren cuando trabajan con el simbolismo algebraico y con las ecuaciones. Dichos estudios aportan información sobre diferentes aspectos:

- Las dificultades que ponen de manifiesto los estudiantes relativas a la comprensión y uso de diferentes componentes del simbolismo algebraico tales como los símbolos literales o el signo igual entre otros: Kücheman (1981); Furinghetti y Paola (1994); Booth (1984); Filloy, Rojano y Puig (2008); Arnau y Puig (2013); Bills (2001) y Álvarez y Gómez-Chacón (2015).

- Las dificultades que evidencian cuando trabajan con expresiones algebraicas de forma general, sin atender de forma concreta a los componentes del simbolismo algebraico: Filloy y Rojano (1989), Resnick, Marmeche y Mathieu (1987), Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro (2011), Rodríguez-Domingo (2015), Isik y Kark (2012), Caprano y Joffrion (2006) y Molina, Rodríguez-Domingo, Cañadas y Castro (2016).
- Cómo ayudar a los estudiantes a desarrollar conocimiento de expresiones algebraicas de forma general: Chalouh y Herscovics (1988), Hercovics y Kieran (1980), Rittle-Johnson y Star (2007) y Ross y Willson (2011).

Estos estudios previos ponen de manifiesto la dificultad que entraña para los estudiantes el uso y comprensión del simbolismo algebraico y de los conceptos relacionados, entre ellos el de ecuación. Así mismo, evidencian la necesidad de profundizar en el estudio del conocimiento conceptual relacionado que adquieren los estudiantes. En consecuencia, nos planteamos la investigación que aquí se recoge en la que se aporta información sobre el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico y del concepto ecuación, se corroboran algunos resultados de investigaciones previas y puede servir de punto de partida para impulsar nuevas investigaciones relacionadas con el simbolismo algebraico en la educación secundaria.

Destacamos el carácter innovador de esta tesis en cuanto a dos de los instrumentos de recogida de datos: invención de problemas y generación de ejemplos por parte de los estudiantes. Solamente hemos encontrado un estudio que utilice la primera tarea para la evaluación del conocimiento conceptual del simbolismo algebraico y ningún estudio que utilice la generación de ejemplos para la evaluación del conocimiento conceptual implícito del concepto de ecuación como un todo. La realización de este trabajo aporta información sobre la utilidad de estos instrumentos para la evaluación del conocimiento conceptual implícito de conceptos matemáticos.

Por último, justificamos esta investigación por su aportación a la docencia desde dos puntos de vista: informa sobre las características de ecuaciones y sistemas de ecuaciones vinculadas a un déficit de conocimiento conceptual del simbolismo algebraico, así como de los elementos que caracterizan las ecuaciones en los que es necesario profundizar en la enseñanza. Por otro lado, los resultados que se obtienen pueden servir para informar el diseño de propuestas didácticas basadas en la invención de problemas, generación de ejemplos y definición de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes.

CAPÍTULO 2: OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo describimos el problema de investigación abordado en esta tesis doctoral por medio de un objetivo general y cuatro objetivos específicos.

El objetivo general de esta tesis es doble: analizar el conocimiento conceptual implícito relativo al simbolismo algebraico, característico de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, y el conocimiento conceptual implícito y explícito del concepto de ecuación, que adquieren los estudiantes como resultado de su formación matemática a lo largo de la ESO.

Acotamos dicho problema de investigación por medio de cuatro objetivos específicos que nos planteamos abordar con un grupo de estudiantes de 4º de ESO que ya hayan concluido su formación obligatoria en álgebra. Son los siguientes:

O.1 Identificar y comparar las características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema, en situaciones tanto libres como semiestructuradas proponiendo un significado para las incógnitas.

O.2 Distinguir y comparar el significado que dan los estudiantes a las operaciones contenidas en las ecuaciones y sistemas, en situaciones tanto libres como semiestructuradas proponiendo un significado para las incógnitas.

O.3 Identificar las dimensiones de variación posibles y los rangos de variación permisibles característicos de los ejemplos de ecuaciones que proponen los estudiantes.

O.4 Caracterizar las definiciones de ecuación dadas por los estudiantes.

Los dos primeros objetivos de investigación son abordados conjuntamente a través del primer y segundo artículos (capítulos 5 y 6) y el segundo y tercer objetivos son abordados en el tercer artículo (capítulo 7).

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

En este capítulo describimos las características metodológicas generales de la investigación realizada, los sujetos participantes en las diferentes recogidas de datos y el diseño de cada recogida de datos.

Este estudio es descriptivo y exploratorio. Descriptivo porque pretende dar detalle del conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico característico de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, así como del conocimiento conceptual implícito y explícito del concepto de ecuación. Es exploratorio ya que se disponen de pocos datos previos relativos a la evaluación de dichos tipos de conocimiento a través de la invención de problemas, generación de ejemplos de ecuaciones y definición del concepto de ecuación, por parte de los estudiantes.

La recogida de datos se ha realizado por medio de cuestionarios escritos y entrevistas semiestructuradas, ambos realizados de forma individual. Describimos a continuación las características de los sujetos participantes y el diseño de la recogida de datos.

3.1 SUJETOS PARTICIPANTES

El problema de investigación planteado en esta memoria requiere de la participación de estudiantes al término de la ESO, es por ello que para la recogida de datos se emplearon estudiantes de 4º curso de ESO. Los estudiantes pertenecían a cuatro grupos distintos matriculados en diferentes institutos de educación secundaria de localidades andaluzas. Todos los grupos fueron seleccionados intencionalmente y por disponibilidad. La autora de esta tesis era su profesora de matemáticas en el caso de tres de los grupos.

Respecto al conocimiento previo de los estudiantes de las tareas utilizadas para el estudio, ninguno de los grupos fue instruido previamente en la invención de problemas, en la generación de ejemplos de un determinado concepto matemático ni en la definición de conceptos matemáticos. Tampoco se habían trabajado los dos primeros tipos de tareas en el aula de matemáticas en relación a ningún contenido. El conocimiento previo de todos los grupos de estudiantes relativo al simbolismo algebraico y a las ecuaciones era similar: a lo largo de la ESO habían trabajado la resolución de ecuaciones y problemas relacionados, comenzando por ecuaciones de primer grado con una incógnita y, posteriormente, con ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales con dos incógnitas. En todos los grupos la recogida de datos se realizó en el tercer trimestre del curso escolar, por lo que se habían impartido todas las unidades de álgebra correspondientes a 4º de ESO.

El nivel en la asignatura de matemáticas en todos los casos era heterogéneo pudiéndose clasificar de medio. La asistencia a clase de los estudiantes era regular salgo en dos del grupo perteneciente a la primera recogida de datos.

En la tabla 3.1 se detallan algunas características de los diferentes grupos de estudiantes.

Tabla 3.1. *Características de los grupos de estudiantes.*

Curso	Número de estudiantes	Modalidad de la asignatura	Poder adquisitivo y condiciones socioculturales	Artículo relacionado
2012/13	20	Opción A (R.D. 1631/2006)	Bajo	1
2013/14	16	Opción B (R.D. 1631/2006)	Medio	2
2015/16	16	Opción B (R.D. 1631/2006)	Bajo	2
2016/17	20	Académicas (R.D. 1105/2014)	Medio	3

3.2 RECOGIDA DE DATOS

La recogida de datos se ha escalonado en cuatro cursos académicos diferentes, implementándose en el aula habitual de matemáticas en cada caso. Durante la primera recogida de datos la profesora del grupo estuvo presente en el aula con la investigadora. En el resto de los casos la recogida de datos fue llevada a cabo, por la investigadora, con grupos de estudiantes de los que era profesora de matemáticas.

Las tres primeras recogidas de datos, realizadas por medio de cuestionarios escritos individuales, van dirigidas a dar respuesta a los dos primeros objetivos específicos de investigación. Se les plantea a los estudiantes la tarea de inventar problemas de tal forma que para resolverlos sea necesario utilizar ciertas ecuaciones y sistemas de ecuaciones dados. La última recogida de datos persigue dar respuesta al tercer y cuarto objetivos específicos. En este caso se realizaron entrevistas clínicas semiestructuradas, planteándose dos tareas: la generación de ejemplos de ecuaciones y la definición del concepto de ecuación antes y después de la generación de ejemplos. Describimos a continuación el diseño de ambos instrumentos de recogida de datos.

Cuestionarios

Se diseñaron tres cuestionarios escritos con preguntas abiertas para indagar en el conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico. En los diversos ítems que se incluyen se pide al estudiante que invente un problema resoluble con una expresión algebraica dada.

El cuestionario 1 consta de siete ítems en cada uno de los cuales se incluye una ecuación o sistema de ecuaciones. Se presentan en el siguiente orden:

1. $8 = x + 6$;
2. $2x - 1 = 9$;
3. $x + 10 = 6x$;
4. $16 = x^2$:
5. $\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{array}\right\}$;
6. $\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{array}\right\}$ y
7. $20 = x(x+1)$.

Todos los números que intervienen en estas expresiones (coeficientes, términos independientes y soluciones), son números enteros. Cada una de las expresiones está caracterizadas por cinco variables de tarea: número de incógnitas, número de miembros de la ecuación con incógnita, estructura de la operación de la incógnita con incógnitas o con términos independientes y posición de la incógnita.

Para la selección de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones se llevó a cabo una revisión de libros de texto de diversas editoriales de todos los cursos de la educación secundaria y se utilizaron expresiones que aparecían con asiduidad, de tal forma que les resultaran familiares a los estudiantes.

A los estudiantes se les dieron las siguientes instrucciones una vez repartidos los cuestionarios:

En cada recuadro, os tenéis que inventar el enunciado de un problema, el que vosotros queráis, que se pueda resolver con el planteamiento de cada una de las ecuaciones o sistemas de ecuaciones propuestos. Si en alguno no sabéis qué poner, podéis saltároslo y volver después cuando hayáis inventando los otros problemas. Es importante que trabajéis individualmente y en silencio. Si tenéis cualquier duda levantad la mano y yo iré a ayudaros.

El cuestionario 2 también consta de siete ítems semejantes, con las siguientes expresiones:

1. $10{,}5x + 2 = 12{,}5$;
2. $x + 10 = 6x$;
3. $x(x+1) = 20$;
4. $\left.\begin{matrix} 5x + 2y = 290 \\ 2x + 5y = 200 \end{matrix}\right\}$;
5. $\left.\begin{matrix} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{matrix}\right\}$;
6. $\left.\begin{matrix} x + y = 3{,}25 \\ 1{,}2x + 0{,}9y = 3{,}6 \end{matrix}\right\}$ y
7. $x^2 = 16$.

Para la selección de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones de este segundo cuestionario se tuvieron en cuenta los mismos criterios que para el cuestionario 1 así como los resultados obtenidos tras analizar los datos de dicho cuestionario previo. Se mantienen las expresiones 2, 3, 5 y 7 del cuestionario 1 dado que fueron las que ocasionaron más dificultades a los estudiantes que realizaron el cuestionario 1. Las variables de tarea que caracterizan cada una de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones sufren algunas modificaciones respecto a las del cuestionario anterior:

- Eliminamos la última variable de tarea “posición de la incógnita” ya que consideramos que no aporta información relevante. Así en este cuestionario cuando la incógnita o incógnitas se encuentran en un solo miembro de la ecuación se sitúan a la izquierda.
- Modificamos el significado de la variable de tarea “coeficiente de la incógnita”: en el primer cuestionario esta variable de tarea hace referencia a si el coeficiente de la incógnita en cada una de las expresiones es el número uno o un número diferente de uno. En el segundo cuestionario la variable de tarea la denominamos “coeficiente de la incógnita y término independiente” haciendo en este caso referencia a si dichos números son enteros (sin precisar si es uno o diferente de uno) o decimales.

- La variable de tarea "estructura de operación de la incógnita" precisa para cada una de las tareas la estructura de la operación que contiene la expresión entre la incógnita y cantidades conocidas (coeficientes y términos independientes) y entre la incógnita y cantidades desconocidas (otras incógnitas).

Las instrucciones dadas a los estudiantes una vez repartidos los cuestionarios fueron las mimas que en el cuestionario 1 incluyendo la puntualización de que los problemas inventados debían estar relacionados con contextos de la vida cotidiana:

En cada recuadro escribe el enunciado de un problema inventado por ti que pueda resolverse empleando la ecuación o sistema de ecuaciones indicados, y que se refiera a un contexto de la vida cotidiana.
En clase has trabajado problemas de ese estilo y otros que en el enunciado solamente refieren a números y relaciones entre ellos, tales como el siguiente: "El doble de un número menos la unidad es igual a 9, averigua de qué número se trata."
En esta actividad te pedimos que inventes problemas relacionados con contextos de la vida cotidiana. NO HACE FALTA QUE RESUELVAS LOS PROBLEMAS.

El cuestionario 3 consta de las mismas tareas que el cuestionario 2, la diferencia es que en esta ocasión la invención de problemas por parte de los estudiantes tiene lugar en una situación semiestructurada en la que se proporcionan los significados a asignar a cada una de las incógnitas en los problemas a inventar (ver tabla 3.2).

Para seleccionar los significados de las incógnitas se tuvo en cuenta el análisis de los libros de texto anteriormente mencionado, de tal forma que fuera factible inventarse un problema en una situación familiar para los estudiantes.

Tabla 3.2. *Significado de las incógnitas en el cuestionario 3*

Número de tarea	Expresión	Significado de las incógnitas
1	$10{,}5x + 2 = 12{,}5$	x: número de horas que tarda en realizar un trabajo un fontanero
2	$x + 10 = 6x$	x: edad actual de Álvaro
3	$x(x+1) = 20$	x: longitud del lado de un rectángulo

Tabla 3.2. *Significado de las incógnitas en el cuestionario 3*

Número de tarea	Expresión	Significado de las incógnitas
4	$\left.\begin{array}{l}5x+2y=290\\2x+5y=200\end{array}\right\}$	x: número de cajas de cartón y: número de cajas de plástico
5	$\left.\begin{array}{r}x+y=7\\xy=10\end{array}\right\}$	x: longitud del ancho del suelo de una habitación rectangular y: longitud del largo del suelo de la misma habitación rectangular
6	$\left.\begin{array}{l}x+y=3{,}25\\1{,}2x+0{,}9y=3{,}6\end{array}\right\}$	x: kilogramos de plátanos y: kilogramos de cebollas
7	$x^2=16$	x: longitud del lado de un espejo cuadrado

Entrevista

La entrevista semiestructurada se llevó a cabo de forma individual y fue grabada en audio para su posterior trascripción. La duración aproximada de cada entrevista es de 30 minutos. En ella se presentan dos tipos tareas para que las realicen los estudiantes: la generación de ejemplos de ecuaciones y la definición del concepto de ecuación. La redacción aproximada de las preguntas en el orden que se presentaron a los estudiantes es la siguiente:

1) Define con tus palabras qué es para ti una ecuación.
2) Pon un ejemplo de una ecuación (ejemplo 1).
3) Por un ejemplo de una ecuación que sea diferente al ejemplo 1 (ejemplo 2).
4) Di al menos una cosa que haya diferente entre los ejemplos 1 y 2.
5) Pon varios ejemplos de ecuaciones en los que varíe el *elemento*[1] que has dicho anteriormente

[1] En la entrevista con los estudiantes sustituimos la palabra elemento por la diferencia entre los dos ejemplos reconocida en cada momento por los estudiantes: grado, número de términos, número de incógnitas, coeficiente, operación con la incógnita, miembro derecho de la ecuación y término independiente.

6) ¿Qué valores puede tomar el elemento que ha variado?
7) Observa todos los ejemplos que has generado, todos ellos son muy diferentes entre sí pero tienen elementos en común que hace que sean ecuaciones, indica cuáles son esos elementos.
8) Teniendo en cuenta todos los elementos que acabas de decir, intenta mejorar la definición de ecuación que has dado anteriormente.

Con las tareas de la 2 a la 7 indagamos en el conocimiento conceptual implícito del concepto ecuación y de esta forma damos respuesta el objetivo específico 3. Con las tareas 1 y 8 indagamos en el conocimiento conceptual explícito de dicho concepto y damos respuesta al cuarto y último objetivo específico de investigación.

CAPÍTULO 4: ESTRUCTURA DEL COMPENDIO DE PUBLICACIONES

En este capítulo describimos la estructura interna del compendio de publicaciones así como la manera en que los artículos se relacionan entre sí y contribuyen a dar respuesta al problema de investigación planteado. Para ello, describiremos los aspectos más importantes de cada artículo que determina su especificidad y al mismo tiempo, su relación con los otros artículos.

En primer lugar enumeramos los artículos del compendio que vienen íntegramente desarrollados en los capítulos 5, 6 y 7 de esta memoria:

- Artículo 1. Fernández-Millán E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 53-71. doi: http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455
- Artículo 2. Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2017). Secondary students' implicit conceptual knowledge of algebraic symbolism. An exploratory study through problem posing. *IEJME-Matematics Education, 12*(9), 799-826.
- Artículo 3. Fernández-Millán, E. y Molina, M. (en prensa). Ejemplos y definiciones de ecuaciones: Una ventana hacia el conocimiento conceptual de estudiantes de secundaria. *PNA.*

4.1 ESTRUCTURA Y ENCUADRE DEL ARTÍCULO 1

En el artículo 1 se expone un acercamiento a nuestro problema de investigación, mostrando una primera indagación en el conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico característico de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que los estudiantes adquieren como resultado de su formación obligatoria en álgebra.

En el marco teórico se aborda el proceso de traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal y su relación con el conocimiento conceptual. Se realiza una revisión de estudios previos relacionados con la temática que se clasifican en dos grupos: estudios que se centran en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes y en estudios que se centran indagar en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico a través del proceso de traducción del sistema de representación simbólico al verbal. Se destaca la baja presencia en la literatura de investigaciones que utilicen la invención de problemas para evaluar el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico.

La recogida de datos se realiza por medio del cuestionario 1 en el que los estudiantes han de inventar problemas, en una situación libre, resolubles mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones dados.

El principal aporte teórico de este estudio es que se establecen cuatro categorías sintácticas y dos categorías semánticas que permiten caracterizar el conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico evidenciado por los estudiantes al término de la ESO.

En cuanto a los resultados, se identificaron las características de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema. Estas son presencia de más de una incógnita, incógnita a ambos lados del signo igual, presencia de estructura multiplicativa entre incógnitas y coeficientes diferentes a dos. Además se obtuvo información sobre las principales estructuras semánticas, aditivas y multiplicativas, presentes en los problemas que inventan los estudiantes: combinación y cambio para las aditivas y comparación y proporcionalidad simple para las multiplicativas. Por otro lado, se detecta una mayor facilidad de los estudiantes para dar significado a las estructuras aditivas que multiplicativas. Además, se observa que cuando las estructuras multiplicativas se presentan entre incógnitas, las dificultades son superiores que cuando se presentan entre coeficientes e incógnitas.

4.2 ESTRUCTURA Y ENCUADRE DEL ARTÍCULO 2

El artículo 2 supone una continuación del artículo 1. En él seguimos indagando en el conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico característico de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que los estudiantes adquieren como resultado de su formación obligatoria en álgebra. Ampliamos la muestra de estudiantes para obtener una mayor representatividad de los datos. Modificamos las variables de tarea introduciendo coeficientes y términos independientes decimales en ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Además empleamos dos cuestionarios, uno en el que tienen que inventar problemas en una situación libre y otro en una situación semiestructurada en el que se les proporciona a los estudiantes el significado de las incógnitas (cuestionarios 2 y 3 respectivamente).

En el marco teórico se profundiza en el conocimiento conceptual implícito y en las formas de evaluarlo, siendo la traducción entre sistemas de representación una de ellas. Se tratan también las características del simbolismo algebraico.

El principal aporte de este estudio es que los resultados obtenidos permiten corroborar algunos de los resultados del estudio previo: los estudiantes manifiestan más dificultades a la hora de inventar problemas cuando la expresión dada presenta estructura multiplicativa entre incógnitas, coeficientes diferentes de 1 e incógnitas a ambos lados del signo igual. Así mismo las estructuras semánticas aditivas y multiplicativas más presentes en los problemas inventados coinciden con las del artículo 1. Los resultados obtenidos a partir del cuestionario 3 mejoran los anteriores y proporcionan información sobre el estado del conocimiento conceptual adquirido de los estudiantes.

Con la realización de este artículo damos por zanjada nuestra indagación en el conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico en esta tesis doctoral.

4.3 ESTRUCTURA Y ENCUADRE DEL ARTÍCULO 3

En artículo 3 nos centramos en el concepto de ecuación como un todo (no en sus componentes). Obtenemos información relativa al conocimiento conceptual implícito y explícito del concepto de ecuación de estudiantes al final de la ESO.

El marco teórico gira en torno a dos temáticas. En primer lugar ampliamos la información relativa al conocimiento conceptual de un concepto matemático y nos centramos en dos tareas específicas —la generación de ejemplos y la definición de conceptos matemáticos—, ambas por parte de los estudiantes, que desde la investigación en el área se proponen para evaluar el conocimiento conceptual implícito y explícito respectivamente. Posteriormente nos centramos específicamente en el concepto de ecuación, en concreto en las definiciones del concepto aportadas tanto en otras investigaciones como en libros de texto. En la revisión de estudios previos se sintetizan investigaciones que utilizan la generación de ejemplos y la definición de conceptos matemáticos para indagar en ambos tipos de conocimiento conceptual.

La recogida de datos se realiza esta vez a partir de una entrevista individual y semiestructurada.

Los principales resultados que aporta esta investigación son la identificación de las dimensiones de variación posibles y sus rangos de variación permisibles de los ejemplos que generan los estudiantes, informando así del conocimiento conceptual implícito del término de ecuación. Por otro lado, el análisis de las definiciones dadas por los estudiantes tras la generación de ejemplos aporta información, no solo del conocimiento conceptual explícito del concepto de ecuación, sino también del papel que juega esta tarea en el proceso de generalización empírica de conceptos matemáticos.

CAPÍTULO 5: INDAGACIÓN EN EL CONOCIMIENTO CONCEPTUAL DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA MEDIANTE LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS.

Resumen

A través de la actividad de invención de problemas, indagamos en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico que adquieren los estudiantes en la educación secundaria obligatoria. Concretamente, se identifican las características de ecuaciones y sistemas que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema; entre ellas: la inclusión de más de una incógnita y la presencia de la misma incógnita a ambos lados del signo igual, de coeficientes superiores a dos y de operaciones multiplicativas entre incógnitas. También se analizan los significados que dan a las incógnitas y operaciones contenidas en las expresiones, donde se detecta una mayor facilidad para dar significado a la estructura aditiva que a la multiplicativa.

Palabras clave: conocimiento conceptual; simbolismo algebraico; educación secundaria; invención de problemas; álgebra.

5.1 INTRODUCCIÓN

En la educación secundaria, se le concede gran importancia al estudio del álgebra y, en concreto, al trabajo con el simbolismo algebraico. Así, se pone de manifiesto en documentos curriculares tanto nacionales como autonómicos por los que se rigen las enseñanzas de esta etapa en España (BOE, 2014; BOJA, 2007*a*; BOJA, 2007*b*). Aun así, a pesar del tiempo que se dedica al aprendizaje del álgebra y, en particular, al dominio del simbolismo algebraico, los estudiantes muestran dificultades y cometen numerosos y reiterados errores en el manejo de este que sugieren un déficit en el conocimiento conceptual que adquieren de las diferentes componentes de dicho simbolismo (Booth, 1984; Castro, 2012; Cerdán, 2010; Filloy y Rojano, 1989; Kieran, 2007; Küchemann, 1981; Ruano, Socas y Palarea, 2008).

Estos resultados nos llevan a interesarnos por el conocimiento conceptual que adquieren los estudiantes como resultado de su formación matemática a lo largo de la educación secundaria obligatoria (ESO). Para indagar en él, elegimos la tarea de inventar problemas resolubles mediante ciertas expresiones simbólicas dadas, apoyándonos en las evidencias de estudios previos (por ejemplo Ayllón, Castro y Molina, 2010; Cázares, Castro y Rico, 1998; Mestre, 2002), que destacan la utilidad de la invención de problemas como tarea evaluadora de las habilidades de los estudiantes con relación a su conocimiento matemático. El estudio que aquí se presenta, de carácter exploratorio y descriptivo, supone un primer acercamiento al problema de investigación planteado en el que se centra la atención en las ecuaciones y sistemas de ecuaciones y se limita el significado de los símbolos literales al de incógnita.

5.2 TRADUCCIÓN DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO AL LENGUAJE VERBAL

Al hablar del «simbolismo algebraico» nos referimos al sistema de representación que se caracteriza por el empleo de la forma escrita en numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra. Entendemos por «sistema de representación» un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto (Castro y Castro, 1997).

El simbolismo algebraico es un sistema de representación compacto y de gran precisión, con alto grado de aplicabilidad en las matemáticas y en otras áreas. Permite representar ideas algebraicas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen (Arcavi, 1994) y transformar las expresiones por medio de técnicas algebraicas aprendidas sin necesidad de atender (temporalmente) al significado de los símbolos que las componen. Como consecuencia, una parte esencial de ser competente en álgebra es la capacidad de alternar de forma flexible y oportunista, por un lado, el uso de acciones desprovistas de significado, y por otro lado, la búsqueda de significados dirigida a cuestionar y a elegir estrategias, reflexionar, conectar ideas, sacar conclusiones o elaborar nuevos significados (Arcavi, 2006).

De estas dos dimensiones del trabajo con el simbolismo algebraico, la primera se sustenta en mayor medida en el conocimiento procedimental de los estudiantes, entendido como conocimiento de los procedimientos; mientras que la segunda lo hace en el conocimiento conceptual, en otras palabras, en el conocimiento de los conceptos que representa dicho simbolismo (Star, 2005). Es en esta segunda dimensión en la que centramos nuestra atención en este artículo al requerir a los estudiantes la invención de problemas resolubles por unas expresiones simbólicas, lo que implica, por su parte, la búsqueda de cantidades y relaciones posibles entre estas que puedan representarse mediante dichas expresiones.

Rittle Johnson y Schneider (2015) señalan que uno de los métodos para analizar el conocimiento conceptual implícito que adquieren los estudiantes de determinados conceptos matemáticos es la traducción entre diferentes sistemas de representación. Se le llama así al procedimiento mediante el que un objeto matemático representado mediante un sistema de representación pasa a ser representado en otro sistema (Gómez, 2007). Este proceso es complejo desde un punto de vista cognitivo. Además de la comprensión de los sistemas de representación implicados, requiere distinguir la información esencial que define el concepto representado para trasladarla a otro sistema de representación, obviando aspectos superfluos impuestos por el sistema de representación en el que viene expresado el concepto (Molina, 2014).

5.3 ESTUDIOS PREVIOS

Los estudios que han analizado el conocimiento conceptual que los estudiantes de educación secundaria tienen sobre simbolismo algebraico han atendido tanto a componentes independientes de este simbolismo (por ejemplo, los símbolos literales, el signo igual) como a las expresiones de forma global.

En su trabajo con estudiantes de entre 13 y 15 años, Küchemann (1981) observó que la mayoría de los estudiantes tenían dificultades para interpretar las letras en álgebra como incógnitas o como números generalizados. Furinghetti y Paola (1994), en un estudio con estudiantes de nivel educativo superior, encontraron que solo una pequeña minoría podría describir adecuadamente las diferencias entre los parámetros, incógnitas y variables, y la mayoría tendían a interpretar las letras como suplencia de objetos o de palabras. Ambos estudios coinciden con Booth (1984) en aludir al desigual uso de las letras en la aritmética y el álgebra como una de las causas de estas dificultades. Filloy, Rojano y Puig (2008) reportan casos en los que estudiantes asignan significados diferentes a una misma letra (por ejemplo, como incógnita y como variable) al interpretar una ecuación en una variable tal como $x + x/4 = 6 + x/4$. En esta línea cabe señalar la reflexión de Arnau y Puig (2013) sobre el diferente significado (variable *vs*. incógnita) que puede adquirir la letra según si la resolución de un problema se aborda desde el campo semántico de las funciones o desde el campo semántico de las ecuaciones.

En relación con el conocimiento que se adquiere de expresiones de forma global, estudios destinados a ayudar a los estudiantes a construir dicho conocimiento por medio de modelos de área rectangular (Chalouh y Herscovics, 1988) y de identidades aritméticas (Herscovics y Kieran, 1980) detectan mayor facilidad para interpretar de forma correcta las ecuaciones que las expresiones abiertas (sin signo de igual).

En general las dificultades que los estudiantes presentan a la hora de poner de manifiesto el conocimiento que tienen sobre las expresiones algebraicas se identifican como un reflejo de los errores que cometen en contextos numéricos (Linchevski y Livneh, 1999). No obstante, cabe destacar los obstáculos conceptuales que tienen lugar cuando los estudiantes pasan a operar con ecuaciones que tienen una incógnita a un lado del signo igual, a ecuaciones con incógnitas a ambos lados del signo igual (Filloy y Rojano, 1989). Para trabajar con este segundo tipo de ecuaciones el estudiante ha de entender que las expresiones en ambos miembros son de la misma naturaleza y deben dar significado a la igualdad de las expresiones, lo que en el marco de la enseñanza tradicional del álgebra requiere de instrucción específica según los citados autores.

Encontramos en la literatura tres grupos de autores que indagan específicamente en las traducciones del sistema de representación simbólico al verbal. Marmeche y Mathieu (1987) proponen a estudiantes de entre 11 y 14 años que, a partir de una expresión algebraica en la que intervienen estructuras aditivas, aporten una traducción con o sin contexto en la que se dé significado a dichas expresiones. Concluyen que ninguno de los estudiantes es capaz de proponer una traducción no contextualizada (por ejemplo, un número más su doble menos cinco) sin haber construido previamente una historia concreta para dicho enunciado. Los datos de su estudio les permiten plantear la hipótesis de que, para el aprendizaje del álgebra formal, un importante predecesor puede ser interpretar expresiones que tengan algún referente concreto.

Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro (2011) analizan los errores en los que incurren estudiantes de 4.º de la ESO en la traducción no contextualizada de simbolismo algebraico a lenguaje verbal. Entre los más comunes destacan: *a*) la confusión de operaciones aritméticas (especialmente, potencia y producto); *b*) la generalización de elementos de las expresiones (por ejemplo, al traducir –4 como «se resta un número par» en vez de «se resta el número cuatro»); *c*) el uso polisémico de una incógnita, y *d*) la inclusión de más variables de las necesarias. Rodríguez-Domingo (2015) detecta en estudiantes de secundaria una falta de precisión al abordar traducciones entre los sistemas de representación simbólico y verbal. Además, destaca los procesos de traducción del sistema de representación simbólico al verbal, frente a la traducción en sentido inverso, como más accesibles para los estudiantes tanto al inicio como al cierre de la educación secundaria, por lo que recomienda aprovechar esta mayor facilidad para promover un trabajo integrado de invención y resolución de problemas.

Isik y Kar (2012) analizan las dificultades que manifiestan profesores en formación cuando inventan problemas sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita y sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. En el primer caso, las dificultades identificadas se deben a la traducción incorrecta de la notación matemática, la asignación de valores no realistas a las incógnitas de los problemas inventados, al uso de simbolismo algebraico en el enunciado del problema, al cambio de la estructura de la ecuación en el problema inventado y al fallo al establecer una relación parte-todo. En los sistemas de ecuaciones, identifican las tres primeras dificultades anteriores y, además, otras dos: inventan problemas separados para cada una de las ecuaciones que forman el sistema y fallo al establecer una relación entre las variables.

En el contexto de las traducciones entre el sistema de representación verbal y el simbólico se reconoce como requisito para una traducción exitosa el comprender las incógnitas y las relaciones de dependencia mutua descritas en el enunciado verbal, así como las características sintácticas del simbolismo algebraico (Kaput, 1989). Estas observaciones nos llevan a distinguir dos dimensiones en nuestro análisis de las traducciones que realizan los estudiantes en este estudio: *a*) las características sintácticas de las ecuaciones y sistemas que los estudiantes conservan, y *b*) los significados que asignan a las incógnitas y a las operaciones que relacionan dichas incógnitas.

Acudimos a las clasificaciones de problemas aritméticos aditivos y multiplicativos que proponen Carpenter y Moser (1982) y Castro (2001), respectivamente, para distinguir significados de las operaciones que componen la estructura aditiva (suma y resta) y la estructura multiplicativa (multiplicación y división). Así, distinguimos entre problemas aditivos de cambio, comparación, combinación e igualación. En el caso de la estructura multiplicativa, distinguimos entre problemas de proporcionalidad simple, comparación y producto cartesiano.

5.4 ESTUDIO EMPÍRICO

En este artículo abordamos, por medio de la invención de problemas, el problema de investigación planteado al inicio: analizar el conocimiento conceptual, relativo al simbolismo algebraico, que adquieren los estudiantes como resultado de su formación matemática a lo largo de la ESO. Para la investigación que aquí se reporta, acotamos dicho problema por medio de dos objetivos específicos y precisando el tipo de expresiones simbólicas que consideramos.

Los objetivos específicos son: 1) identificar las características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema, y 2) distinguir el significado que dan los estudiantes a las incógnitas y operaciones contenidas en las ecuaciones y sistemas.

Las expresiones simbólicas consideradas son ecuaciones lineales y cuadráticas de una incógnita y sistemas de ecuaciones de dos incógnitas, cuyos coeficientes, términos independientes y soluciones son números enteros. En este primer acercamiento al problema de investigación nos centramos en el significado de la letra como incógnita por ser el significado al que mayor atención se le dedica en la ESO y, por tanto, el más familiar para los estudiantes al cierre de esta etapa.

Sujetos participantes

La muestra de estudiantes considerada fue intencional, dada su disponibilidad. La constituyen 20 estudiantes de 4.º curso de la ESO matriculados en la materia de matemáticas, opción A. El poder adquisitivo de los habitantes de la zona donde se encuentra el centro educativo es de nivel bajo, y las condiciones socioculturales también. La asistencia a clase de los estudiantes es regular salvo en dos de ellos. Según la información facilitada por su profesora de matemáticas, el nivel de rendimiento en la asignatura de matemáticas del grupo es heterogéneo, pudiendo calificarlo de medio.

Respecto a su conocimiento previo, desde el primer curso de la ESO han trabajado la resolución de ecuaciones y problemas relacionados, comenzando por ecuaciones de primer grado con una incógnita y, posteriormente, con ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales con dos incógnitas. Cuando se realizó la recogida de datos de este estudio habían concluido el trabajo en el aula de los contenidos relativos al álgebra. En concreto, habían trabajado ecuaciones de primer y segundo grado con paréntesis y denominadores, sistemas de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones no lineales, ambos con dos ecuaciones y dos incógnitas, todo ello de forma teórica y por medio de la resolución de problemas.

Diseño del instrumento

Para la recogida de datos se diseñó un cuestionario compuesto por siete tareas en cada una de las cuales se pedía al estudiante que inventara un problema que implicara en su resolución el uso de una ecuación o sistema dado. El tipo de expresiones consideradas habían sido previamente trabajadas por los estudiantes, tanto en el curso académico en el que se realizó el estudio como en cursos anteriores, y forman parte de los contenidos que se reflejan en el currículum de la ESO. Fueron diseñadas considerando los tipos de ecuaciones y sistemas más frecuentes a lo largo de la ESO, según un análisis de libros de texto de esta etapa, y buscando que hicieran factible la tarea de inventar un problema.

Las expresiones incluidas son cinco ecuaciones y dos sistemas de ecuaciones, con solución única, limitando así el uso de la letra al de incógnita. Los coeficientes, los términos independientes y las soluciones de las ecuaciones son números enteros. De este modo queríamos reducir la limitación que la resolución pudiera ejercer en el contexto del problema que inventar. En todas ellas, la incógnita o incógnitas aparecen relacionadas con otras cantidades –coeficientes, términos independientes, o la misma u otras incógnitas–, de tal forma que una sola incógnita no queda despejada a un lado del signo igual. El resto de variables de tarea consideradas en el diseño del cuestionario fueron el número de incógnitas, el número de miembros con incógnita, el coeficiente de la incógnita, la estructura operatoria de la operación de la incógnita con otras incógnitas o con términos independientes y la posición de la incógnita respecto del signo de igual. En la tabla 5.1 presentamos las ecuaciones y sistemas de ecuaciones considerados caracterizándolos en función de las variables de tarea que los diferencian.

Tabla 5.1. *Asignación de variables de tarea a las ecuaciones y sistemas del cuestionario*

		Variable de tarea				
Nº	Ecuación	Nº de incógnitas	Nº miembros con incógnita	Coeficiente de la incógnita	Estructura de la operación de la incógnita con incógnitas o términos independientes	Posición de la incógnita
1	$8 = x + 6$	1	1	1	Aditiva	Derecha
2	$2x - 1 = 9$	1	1	$\neq 1$	Aditiva	Izquierda
3	$x + 10 = 6x$	1	2	$\neq 1$	Aditiva	Ambos lados
4	$16 = x^2$	1	1	1	Multiplicativa	Derecha
5	$\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{array}\right\}$	2	1	$\neq 1$	Aditiva	Izquierda
6	$\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{array}\right\}$	2	1	1	Aditiva / Multiplicativa	Izquierda
7	$20 = x(x+1)$	1	1	1	Aditiva/ Multiplicativa	Derecha

El cuestionario fue administrado por una de las investigadoras en una sesión de clase de matemáticas, estando presente la profesora oficial del grupo. Su resolución por los estudiantes fue individual con lápiz y papel, a partir de las siguientes instrucciones:

> *En cada recuadro, os tenéis que inventar el enunciado de un problema, el que vosotros queráis, que se pueda resolver con el planteamiento de cada una de las ecuaciones o sistemas de ecuaciones propuestos. Si en alguno no sabéis qué poner podéis saltároslo y volver después, cuando hayáis inventando los otros problemas. Es importante que trabajéis individualmente y en silencio. Si tenéis cualquier duda levantad la mano y yo iré a ayudaros.*

Durante la implementación del cuestionario no se plantearon dudas relevantes por parte de los estudiantes.

5.4 ANÁLISIS DE LOS DATOS

Iniciamos el análisis de cada problema[2] inventado por los estudiantes realizando su traducción a simbolismo algebraico, a la que nos referiremos como «traducción simbólica». Para realizar estas traducciones, hemos procedido de izquierda a derecha y traduciendo palabra por palabra siempre y cuando era posible. En caso contrario, hemos realizado la traducción a simbolismo algebraico a partir de la construcción de un esquema mental de las relaciones matemáticas descritas en el enunciado dado. Por ejemplo, este último es el caso del proceso de traducción realizado en el siguiente problema propuesto por uno de los estudiantes para la tarea 5: *Cada 5 días Marcos recibe su paga y Ana la recibe al cabo de 3 días ¿Cuánto dinero tendrán al cabo de 69 días? ¿y al cabo de 15 días?* El cual traducimos a la siguiente expresión simbólica:

$$\begin{cases} \dfrac{69}{5}x + \dfrac{69}{3}y = z \\ \dfrac{15}{5}x + \dfrac{15}{3}y = t \end{cases}$$

Comparando la traducción simbólica con la expresión algebraica dada, clasificamos los problemas en «correctos», si la traducción simbólica del problema inventado coincide, con posibles cambios de orden en los términos, con la ecuación o sistema de ecuaciones propuesto, o en «incorrectos» en caso contrario. Etiquetamos como incorrectos problemas con traducción simbólica equivalente a la expresión dada, pues nuestra atención no está en el conocimiento conceptual de las expresiones en su conjunto, sino en cada uno de los componentes de estas.

A partir de un primer análisis de los enunciados formulados por los estudiantes y de la información extraída de los trabajos previos consultados, definimos dos grupos de categorías. Distinguimos entre «categorías sintácticas» y «semánticas» según si atienden a características sintácticas (forma) o semánticas (significado) de los problemas planteados. Las categorías sintácticas (tabla 5.2) surgen de la identificación de los elementos en los que difieren las expresiones dadas y de las traducciones simbólicas de

[2] Utilizamos el término *problema* para referirnos a los enunciados inventados por los estudiantes, sin entrar a discutir ni analizar si incluyen los elementos mínimos para que sean considerados como problemas de acuerdo con alguna definición prefijada.

los problemas inventados por los estudiantes. Estas categorías son las que nos permiten dar respuesta al primer objetivo específico de esta investigación. Por su parte las características semánticas (tabla 4) permiten dar respuesta al segundo objetivo específico.

Tabla 5.2. *Definición de las categorías sintácticas*

Categoría	Nombre	Definición
A	Conservación de términos y operaciones.	En la traducción simbólica del problema planteado, el tipo de términos (monomios de diferente grado, término independiente) que aparece y las operaciones que los relacionan son los que se presentan en la expresión algebraica dada.
B	Presencia de incógnitas operando	La traducción simbólica del enunciado planteado presenta incógnitas operando con otros elementos de la ecuación.
C	Relación entre coeficiente/s e incógnita/s	En la traducción simbólica del problema están presentes los mismos coeficientes de las incógnitas que aparecen en la expresión algebraica dada, operando con dichas incógnitas.
D	Igual número de incógnitas	El número de incógnitas que aparecen operando con otros elementos de la ecuación en la traducción simbólica, es el mismo que el de la expresión algebraica dada.

Las categorías A y B no son excluyentes y presentan dos valores posibles para cada uno de los enunciados propuestos por los estudiantes: «Sí» y «No». En la tabla 5.3 presentamos el ejemplo 1, en el que observamos que no se conservan los elementos de la ecuación, ya que se añade un monomio (categoría A); pero sí hay incógnitas operando con otros elementos de la ecuación (categoría B).

Las categorías C y D incluyen adicionalmente el valor de «No analizable» (N/A), debido a que un «No» en la categoría B excluye el análisis de las categorías C y D: si no hay incógnitas operando con otros elementos de la ecuación, no puede haber coeficientes operando con dichas incógnitas (categoría C), y el número de ese tipo de incógnitas no es igual al de la expresión dada (categoría D). Lo podemos observar en el ejemplo 2 de la tabla 5.3.

Las categorías sintácticas aportan información únicamente en el análisis de los problemas incorrectos; por ello, mostramos los resultados solo en estos casos. Si consideramos estas categorías en el caso de los problemas correctos, todas ellas se codificarían con un «Sí» (véase el ejemplo 3 de la tabla 5.3). En los problemas incorrectos, al menos una de las categorías sintácticas se valora con un «No».

Tabla 5.3. *Ejemplos de problemas inventados asociados a las categorías sintácticas.*

Ejemplo	Expresión dada	Enunciado inventado	Traducción simbólica	Codificación			
				A	B	C	D
1	$8 = x + 6$	*La suma de dos números consecutivos pares da 8. Calcula qué dos números son.*	$2x + 2x + 2 = 8$	NO	SI	NO	SI
2	$2x - 1 = 9$	*Si tengo 9 globos y mi madre me da uno más pero se me explotan la mitad ¿cuántos globos me quedan?*	$\frac{9+1}{2} = x$	NO	NO	N/A	N/A
3	$\begin{cases} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{cases}$	*Roberto ha ido al Centro Comercial y se ha comprado 5 camisetas y tres chaquetas, gastándose 69€ y Alba que le ha*	$\begin{cases} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{cases}$	SI	SI	SI	SI

Tabla 5.3. *Ejemplos de problemas inventados asociados a las categorías sintácticas.*

Ejemplo	Expresión dada	Enunciado inventado	Traducción simbólica	Codificación A	B	C	D
		acompañado ha comprado una camiseta y una chaqueta para su novio igual que la de Roberto gastándose 15€ en total ¿Cuánto es el valor de una camiseta? ¿Y de la chaqueta?					
4	$x+10=6x$	*La edad de Luis dentro de 10 años es igual que la edad de su hermana multiplicada por 6. ¿Qué edad tiene la hermana?*	$x+10=6y$	SI	SI	SI	NO

Cada una de las categorías semánticas, no excluyentes, definidas en la tabla 5.4, presenta tres valores posibles para cada uno de los enunciados propuestos por los estudiantes: «Sí», «No» y «No Analizable» (N/A). El valor de no analizable para la categoría E se aplica a los problemas en los que no hay incógnita operando con otros términos de la ecuación; son aquellos problemas que presentan «No» en la categoría B. En el caso de las categorías F y G, el valor de no analizable se utiliza para los casos en los que en la ecuación original no hay estructura aditiva o multiplicativa; este es el caso de la ecuación 1, que no presenta estructura multiplicativa, y la ecuación 4 que no presenta estructura aditiva.

Tabla 5.4. *Definición de las categorías semánticas*

Categoría	Nombre	Definición
E	Da significado a las incógnitas	Se asignan a las incógnitas referentes de un contexto no matemático[3].
F	Da significado a las estructuras aditivas	La parte aditiva del problema presenta alguna de las siguientes estructuras semánticas: cambio, combinación, comparación o igualación.
G	Da significado a las estructuras multiplicativas	La parte multiplicativa del problema presenta alguna de las siguientes estructuras semánticas: proporcionalidad simple, comparación o producto cartesiano.

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes no consideramos aquellos problemas que no pueden traducirse a un enunciado simbólico (por ejemplo, *En una casa hay 2 personas y una tele y 9 muebles. ¿Qué sería la tele? ¿x o y?),* o que se limitan a pedir la resolución de la ecuación o sistema de ecuaciones dado (por ejemplo, *Teniendo esta expresión 20 = x(x + 1), halla la x sabiendo que en los dos casos es el mismo número, y al resolverlo nos da 20*). A estos dos tipos de problemas nos referimos como «problemas descartados». La tabla 5.5 recoge las frecuencias de problemas descartados e ítems sin respuesta.

Tabla 5.5. *Frecuencias de problemas no analizables (n=20)*

Codificación	Ecuación/Sistema de ecuaciones						
	1	2	3	4	5	6	7
Sin respuesta	0	2	1	2	5	5	6
Descartados	1	2	2	1	0	3	1
Total	1	4	3	3	5	8	7

[3] Esta categoría busca distinguir los enunciados en los que las incógnitas son asociadas a un contexto no matemático de aquellos que denominamos problemas de teoría de números, es decir, problemas en los que las incógnitas son números descontextualizados (ej., en la ecuación 2, ¿Qué número al multiplicar por 2 y al restarle 1 te da como resultado 9?).

5.5 RESULTADOS

En este apartado, mostramos los resultados obtenidos al clasificar los problemas inventados por los estudiantes en correctos e incorrectos, y al utilizar las categorías presentadas en el apartado anterior para codificar dichos problemas. El mayor número de problemas inventados analizables (no descartados) corresponde a la ecuación 1, mientras que las dos últimas expresiones 6 y 7 son las que presentan menor número de enunciados analizables (véase la tabla 5.6).

La ecuación 1 destaca sobre las demás por ser la que presenta la mayor frecuencia de problemas correctos propuestos por los estudiantes. En el resto de ecuaciones, entre 6 y 8 de los 20 estudiantes proponen un problema cuya traducción simbólica es correcta. La ecuación 3 destaca por ser la que presenta una mayor frecuencia de enunciados incorrectos.

Tabla 5.6. *Frecuencias de problemas correctos e incorrectos*

Codificación	Ecuación/Sistema de ecuaciones						
	1	2	3	4	5	6	7
Correctos	15	8	6	8	8	6	6
Incorrectos	4	8	11	9	7	6	7
Total	19	16	17	17	15	12	13

Categorías sintácticas

Las categorías sintácticas permiten describir las diferencias que se detectan en la traducción simbólica de los problemas incorrectos planteados por los estudiantes.

Categorías A y B: conservación de los términos y operaciones y presencia de incógnitas operando.

La tabla 5.7 recoge las frecuencias que se registran al clasificar respecto de las dos primeras categorías (no excluyentes) los enunciados incorrectos propuestos por los estudiantes.

Tabla 5.7. *Codificación según las categorías A y B para cada ecuación y sistema de ecuaciones. n (número problemas incorrectos) =52*

Codificación	Ecuación							Total
	1	2	3	4	5	6	7	
A								
SI	0	0	3	0	1	1	1	6
NO	4	8	8	9	6	5	6	46
B								
SI	2	4	8	3	6	6	5	34
NO	2	4	3	6	1	0	2	18

De entre las diferencias que presenta la traducción simbólica de los problemas incorrectos planteados respecto de las expresiones algebraicas dadas destaca la modificación de los términos y/o las operaciones que los relacionan por su alta frecuencia (categoría A) (por ejemplo, en el sistema 6, *Me he comprado una camiseta y un pantalón y total me he gastado 7 euros. Si comprándome la camiseta al precio del pantalón me gasto 10 €. ¿Cuánto vale el pantalón y la camiseta?*, problema con traducción simbólica $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ y+y=10 \end{array}\right\}$). Esta diferencia se detecta en el 42% de los problemas analizables (88% de los problemas incorrectos), presentando las mayores frecuencias en las ecuaciones 2, 3 y 4.

En el caso de las ecuaciones y sistemas cuadráticos (4, 6 y 7), algunos problemas presentan modificaciones en las operaciones que relacionan los términos de la ecuación, debido a que su traducción simbólica corresponde a la de una ecuación lineal (dos de nueve en la ecuación 4, dos de cinco en el sistema 6 y cinco de seis en la ecuación 7).

La categoría B se codifica con un «NO» en un 17 % de los problemas analizables (35% de los problemas incorrectos). En la traducción simbólica de todos estos problemas, salvo uno, la incógnita no se encuentra operando con ningún otro elemento de la ecuación, sino que se encuentra despejada a un lado del signo igual. La excepción es el siguiente problema planteado en la ecuación 7, en el que no se menciona ninguna operación que implica una incógnita: *Ana tiene 20 años y Antonio es un año más pequeño. Dentro de un año la edad de Antonio será igual a la de Ana [ahora]*; si bien este problema también podría haberse descartado como sin sentido si se interpreta que en la última frase el estudiante se refiere a la edad de Ana entonces. La ecuación 4 destaca sobre las demás debido a que es para la que los estudiantes proponen un mayor número de problemas sin incógnita operando con otros elementos de la ecuación.

Categorías C y D: relación entre coeficientes e incógnitas e igual número de incógnitas.

La tabla 5.8 muestra las frecuencias correspondientes a la clasificación de los problemas incorrectos según las categorías C y D.

Tabla 5.8. *Codificación según las categorías C y D para cada ecuación y sistema de ecuaciones. n (número problemas incorrectos) =52*

Codificación		Ecuación							Total
		1	2	3	4	5	6	7	
C									
	SI	1	4	5	1	2	6	5	24
	NO	1	0	3	2	4	0	0	10
	N/A	2	4	3	6	1	0	2	18
D									
	SI	2	2	4	3	2	2	4	19
	NO	0	2	4	0	4	4	1	15
	N/A	2	4	3	6	1	0	2	18

Al atender a los coeficientes de las incógnitas (categoría C), distinguimos, dentro de los casos en que los estudiantes incluyen los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones dadas, aquellos casos en que estos se relacionan con las incógnitas de forma diferente a la dada. Esto tiene lugar en seis problemas, tres correspondientes a la ecuación 3 y otros tres correspondientes al sistema de ecuaciones 5. Un ejemplo es el problema siguiente, que incluye los números cinco, tres, y uno pero no desempeñan la función de coeficientes: *En una clase hay 69 mochilas, están repartidas en un grupo extranjeros y uno de españoles, los españoles tienen 5 mochilas iguales y los extranjeros 3. Los grupos de extranjeros y españoles son de 15 ¿Cuántas mochilas hay en cada grupo?*

Teniendo en cuenta las frecuencias recogidas en la tabla 8 para la categoría C, destaca el caso de las ecuaciones 3 y 4 y el sistema 5 por ser donde se concentran los problemas en los que las incógnitas presentan coeficientes diferentes (por ejemplo, *Pablo tiene una bolsa con canicas y a María le gana 10 más ¿Cuántas bolas tendrá si al llegar a casa cuenta que tiene 6 bolas más de las que ya tenía?*; cuya traducción simbólica es $x+10=x+6$, propuesto en la ecuación 3). En el caso del sistema 5, las dificultades se manifiestan en la primera de las ecuaciones, la que incluye coeficientes diferentes a uno. Cabe destacar que la ecuación 3 y el sistema 5, a diferencia del resto, incluyen ambas algún coeficiente superior a dos. En la ecuación 4, en la que el coeficiente sí es uno, la dificultad se encuentra asociada a la presencia de potencias. En este caso proponen enunciados que no se resuelven con la operación potencia y su traducción simbólica corresponde a la de una expresión lineal incluyendo expresiones tales como «el doble» o «el cuádruplo» (por ejemplo, *Calcula la edad de Ana sabiendo que su hermana le cuadruplica la edad, teniendo la hermana 16 años,* cuya traducción simbólica es: $4x=16$).

Cuando los estudiantes modifican el número de incógnitas (categoría D), tienden a añadir una incógnita; así ocurre en dos problemas en la ecuación 2 y el sistema 6, cuatro, en la ecuación 3, y uno, en la ecuación 7 y el sistema 5. En los sistemas de ecuaciones también ocurre que en una ocasión incluyen una única incógnita y en dos y un caso, respectivamente, se incluyen cuatro incógnitas. La ecuación 3 y los dos sistemas de ecuaciones propuestos son las expresiones en las que con mayor frecuencia los estudiantes tienden a incluir un mayor número de incógnitas que las dadas, mostrando dificultad para precisar que se refieren a las mismas incógnitas cuando en el enunciado se narran relaciones relativas a ecuaciones diferentes (por ejemplo, *En una caja hay cinco veces un número de chicles y tres veces un número de caramelos y en total hay 69. En otra caja hay un número de chicles y un número de caramelos y en total hay 15 ¿Cuántos caramelos y cuántos chicles hay en total entre las dos cajas?*, cuya traducción simbólica es $\begin{cases} 5x+3y=69 \\ z+t=15 \\ 5x+3y+z+t=? \end{cases}$). En la ecuación 3, cuatro estudiantes identifican las incógnitas como distintas al encontrarse en miembros diferentes (por ejemplo, *La edad de Luis dentro de 10 años es igual que la edad de su hermana multiplicada por 6. ¿Qué edad tiene la hermana?,* cuya traducción simbólica es: $x + 10 = 6y$).

Categorías semánticas

Atendemos ahora a los resultados que se obtienen al clasificar los problemas según las categorías semánticas definidas, que nos informan de los significados que los estudiantes asignan a las operaciones e incógnitas contenidas en las expresiones simbólicas dadas. Mostramos los resultados para cada ecuación (véanse las tablas 5.9 y 5.10) teniendo en cuenta los problemas correctos e incorrectos de forma conjunta.

Categoría E: da significado a las incógnitas.

En la mayoría (65%) de los enunciados analizables, los estudiantes asignan a las incógnitas referentes de un contexto no matemático (categoría E), siendo las ecuaciones 4 y 7 donde con menor frecuencia ocurre esto. En la ecuación 6, a 10 de los problemas les asignan a las incógnitas referentes de un contexto no matemático, pero solo 4 son correctos. También son correctos los dos problemas a los que asigna referentes matemáticos a las incógnitas. Estas tres expresiones algebraicas (dos ecuaciones y un sistema) tienen en común la presencia de operaciones de la estructura multiplicativa entre las incógnitas. Cabe destacar que en todos los problemas propuestos por los estudiantes, los símbolos literales han sido interpretados como incógnitas.

Tabla 5.9. *Codificación según la categoría E para cada ecuación y sistema de ecuaciones*

Codificación		Ecuación							
		1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
E									
	SI	14 (13)	11 (7)	13 (6)	5 (4)	14 (8)	10 (4)	4 (2)	71 (44)
	NO	3 (2)	1 (1)	1 (0)	6 (4)	0 (0)	2 (2)	7 (4)	20 (13)
	N/A	2 (0)	4 (0)	3 (0)	6 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (0)	18 (0)

Nota: Las frecuencias entre paréntesis corresponden únicamente a los problemas correctos.

Categoría F y G: da significado a las estructuras aditivas y multiplicativas.

Atendiendo a los resultados según las categorías F («Da significado a las estructuras aditivas»)[3] y G («Da significado a las estructuras multiplicativas»)[4] (véase la tabla 10), observamos que, en la mayoría de los enunciados (82%), los estudiantes dan significado a las estructuras aditivas; sin embargo, solo ocurre esto en el 46% de los enunciados en el caso de las estructuras multiplicativas; porcentajes relativos a los problemas inventados correspondientes a las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que tienen presencia de estructuras aditivas y multiplicativas, respectivamente. Es destacable observar que en el sistema 6 y en la ecuación 7 ningún estudiante da significado a las estructuras multiplicativas. En la ecuación 4 también se detecta una alta presencia de problemas que no dan significado a dichas estructuras; en siete de los problemas sí le dan significado, pero la traducción simbólica de ninguno de ellos coincide con la ecuación dada.

Tabla 5.10. *Codificación según las categorías F y G para cada ecuación y sistema de ecuaciones*

Codificación	Estructura Semántica	Ecuación 1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
F									
SI									
	CM	4 (2)	10 (5)	8 (4)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	7 (3)	30 (14)
	CB	9 (8)	2 (0)	6 (2)	0 (0)	14 (8)	9 (4)	0 (0)	40 (22)
	CP	0 (0)	0 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (1)	3 (1)
	I	3 (3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	3 (3)
NO		3 (2)	4 (3)	2 (0)	0 (0)	1 (0)	3 (2)	4 (2)	17 (9)
N/A		0 (0)	0 (0)	0 (0)	16 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	16 (8)

Tabla 5.10. *Codificación según las categorías F y G para cada ecuación y sistema de ecuaciones*

Codificación		Estructura Semántica	Ecuación 1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
G										
	SI									
		CP	0 (0)	11 (6)	9 (4)	4 (0)	2 (1)	0 (0)	0 (0)	26 (11)
		PS	0 (0)	2 (1)	1 (0)	3 (0)	9 (7)	0 (0)	0 (0)	15 (8)
		PC	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	NO		0 (0)	3 (1)	7 (2)	10 (8)	4 (0)	12 (6)	13 (6)	49 (23)
	N/A		19 (15)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	19 (15)

Estructuras semánticas: cambio (CM), combinación (CB), comparación (CP) o igualación (I), proporcionalidad simple (PS) y producto cartesiano (PC). Nota: Las frecuencias entre paréntesis corresponden únicamente a los problemas correctos.

Al atender a la estructura semántica de las partes aditivas de estos problemas se observa que predominan los problemas de combinación (53%), seguidos de los de cambio (39%). Todos los problemas que presentan estructura semántica de igualación son correctos, mientras que para el resto de estructuras semánticas lo son un 48% de los de cambio, el 55% de los de combinación y uno de los tres problemas de comparación. En el caso de las componentes multiplicativas, se observa que predominan las operaciones multiplicativas de comparación (63%) –42% de los cuales son correctos–, seguidas de las de proporcionalidad simple (37%) –donde predominan los problemas correctos (73%)–, con ausencia de problemas de producto cartesiano.

5.6 DISCUSIÓN

Los resultados ponen de manifiesto que los estudiantes encontraron dificultades para inventar problemas cuya traducción a simbolismo algebraico se correspondiera con las expresiones dadas. En todas salvo la ecuación 1 el porcentaje de problemas cuya traducción simbólica corresponde con la expresión dada no supera el 50%. El menor número de problemas correctos se presenta en las expresiones 3, 6 y 7. La ecuación 3 es la única que presenta la incógnita a ambos lados del signo igual, y las tareas 6 y 7 tienen como variable de tarea común que la estructura de las operaciones entre las incógnitas es multiplicativa. Los resultados correspondientes a las categorías sintácticas nos permiten dar respuesta al primer objetivo de investigación, mientras que los correspondientes a las categorías semánticas nos permiten abordar el segundo. Comenzamos la discusión de los resultados anteriormente presentados atendiendo a estas últimas en primer lugar.

Teniendo en cuenta la variable de tarea «estructura de la operación», se observa que los estudiantes manifiestan mayor facilidad para dar significado a las estructuras aditivas, por lo que se detecta un predominio de las estructuras semánticas de combinación y cambio (tanto en problemas correctos como incorrectos). Estas son las dos estructuras aditivas más frecuentes en los libros de texto de educación primaria según un estudio de Orrantia, González y Vicente (2005); por tanto, las más familiares para los estudiantes. Las estructuras multiplicativas identificadas son las de comparación y de proporcionalidad simple. Estos resultados llaman la atención sobre significados particulares de las estructuras multiplicativas que se detectan como débilmente vinculados a dichas operaciones en tanto que ningún alumno los considera al proponer problemas. La consideración del contexto del área de figuras planas rectangulares, por ejemplo, hubiera facilitado la invención de problemas asociados a las ecuaciones cuadráticas. El uso de las estructuras semánticas de proporcionalidad simple y comparación para dar significado a estas expresiones resulta artificial, pues requiere idear una situación en la que *a*) se desconozca tanto el factor escalar como una de las cantidades para el caso de la comparación o *b*) se desconozca la cantidad de elementos en cada grupo y el número de grupos, y ambas cantidades desconocidas estén relacionados aditiva o multiplicativamente (según consideremos el sistema 6 o las ecuaciones 4 o 7 respectivamente). Al no considerar situaciones de producto cartesiano, los estudiantes tuvieron dificultades para proponer problemas correctos.

Estos resultados ponen de manifiesto una limitación en el conocimiento de las estructuras multiplicativas que los estudiantes han desarrollado durante la ESO, así como en la capacidad de transferencia de su conocimiento conceptual de las operaciones aritméticas. Se identifican deficiencias concretamente en los contextos/situaciones que dan sentido a las operaciones aritméticas. Si bien los resultados obtenidos no son generalizables, es relevante llamar la atención sobre las situaciones aditivas comparativas y las multiplicativas de producto cartesiano para garantizar el desarrollo de un conocimiento completo de las situaciones que hacen significativas a las operaciones aritméticas. Así mismo, es destacable el caso de la estructura multiplicativa, pues solo en algo menos de la mitad de los enunciados los estudiantes le dan significado (siendo las dificultades más acusadas cuando la operación multiplicativa está presente entre incógnitas). Esta proporción se duplica en el caso de los problemas aditivos.

La dificultad provocada por la inclusión en las expresiones de la multiplicación como operación que relaciona las incógnitas de la expresión dada se manifiesta también a la hora dar significado a la incógnita. La ecuación 4 y el sistema de ecuaciones 7 (en ambas la operación entre incógnitas tiene estructura multiplicativa) son los casos en los que hay un mayor número de problemas propuestos donde no le dan significado a las incógnitas. Adicionalmente, se observa en los resultados aportados por el análisis de las categorías sintácticas. Así, en la ecuación 4 solo ocho de los problemas son correctos. Los estudiantes plantean problemas cuya traducción simbólica no conserva las operaciones entre los términos de la ecuación, bien porque la incógnita no opera con elementos de la ecuación, o son resolubles mediante ecuaciones lineales.

Cuando la estructura multiplicativa se presenta entre un número y una incógnita, los estudiantes tienen menos dificultades en darle significado, de tal forma que relacionan de forma correcta el coeficiente con la incógnita en el 74% de los problemas analizados, de los cuales un 70% son correctos. No obstante, los resultados sugieren que la presencia de coeficientes superiores a 2 en la expresión dada, fue un factor condicionante de la capacidad de los estudiantes para inventar problemas. Partiendo de las evidencias de estudios previos sobre la falta de precisión en procesos de traducción (Rodríguez-Domingo, 2015), este resultado puede estar relacionado con una mayor dificultad para expresar verbalmente relaciones multiplicativas relativas a ser múltiplo de un número natural superior a 2. Teniendo en cuenta el número de incógnitas, también detectamos dificultades en el uso del lenguaje verbal cuando en los sistemas de ecuaciones o en la ecuación 3 (con la misma incógnita en ambos lados del signo igual) han de precisar que las cantidades que aparecen representadas con la misma letra son las mismas. Consideramos que este hecho también está relacionado con la inclusión de más incógnitas de las incluidas en el sistema, lo cual ocurre en siete de los nueve problemas propuestos para los sistemas de ecuaciones (tareas 5 y 6). Estas evidencias llaman la atención sobre la necesidad de trabajar explícitamente en el aula el uso preciso del lenguaje verbal para describir relaciones cuantitativas entre cantidades desconocidas. El simbolismo algebraico por naturaleza es más preciso que el verbal, pero el aprendizaje de esta característica requiere que los estudiantes sean capaces de capturar con igual precisión dichas relaciones en ambos sistemas de representación.

Es interesante observar en los procesos de traducción planteados a los estudiantes la tendencia a proponer problemas cuya traducción simbólica presenta la incógnita despejada. Esto concuerda con la preferencia por métodos aritméticos que los estudiantes ponen de manifiesto cuando abordan la tarea de resolver problemas (Kieran, 2007). Esta tendencia denota en los estudiantes una visión operacional de los problemas en cuestión, que se aleja del interés del álgebra por dirigir la atención hacia las estructuras comunes de diferentes problemas, lo que da lugar a que sean resueltos por una misma familia de ecuaciones. En consecuencia, hacemos una llamada de atención hacia la enseñanza para dirigir la atención de los estudiantes hacia aspectos más estructurales de la resolución de problemas.

5.7 CONCLUSIÓN

En este artículo describimos una investigación en la que indagamos en el conocimiento conceptual que un grupo de estudiantes que están culminando su educación obligatoria ha adquirido sobre diferentes componentes de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Se han identificado características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultaron la tarea de inventar problemas, y el significado que los estudiantes atribuyeron a las operaciones e incógnitas contenidas en las expresiones dadas. Las citadas características son: el número de incógnitas superior a uno, la misma incógnita a ambos lados del signo de igual, coeficientes diferentes superiores a dos, y la presencia de estructuras multiplicativas entre incógnitas. En cuanto a los significados atribuidos a las operaciones, se detecta una mayor facilidad cuando se consideran estructuras aditivas, si bien las estructuras semánticas de comparación e igualación se presentan en un porcentaje muy bajo de los problemas, y cabe destacar la ausencia de la estructura semántica multiplicativa de producto cartesiano. La presencia de estructura multiplicativa también influye a la hora de mostrar dificultades en dar significado a las incógnitas.

En un contexto diferente al de estudios previos, en este caso, la invención de problemas, se ratifica la necesidad de atender al significado de las incógnitas cuando aparecen en miembros diferentes de una ecuación. Adicionalmente, llamamos la atención sobre la necesidad de intensificar la experiencia de los estudiantes con la estructura semántica multiplicativa de producto cartesiano, tanto en contextos aritméticos como algebraicos, y de atender al lenguaje natural necesario para la verbalización de relaciones multiplicativas. Se concluye también la necesidad de prestar una mayor atención en la enseñanza a la expresión mediante el sistema de representación verbal de esquemas de relaciones más complejos como son los modelizables mediante sistemas de ecuaciones, así como de promover un estudio más estructural de la resolución de problemas.

Desde el punto de vista de la docencia, las deficiencias identificadas informan para el diseño de propuestas didácticas que busquen desarrollar el conocimiento de los estudiantes relativo al significado de las operaciones aritméticas y del simbolismo algebraico. La utilidad constatada de la actividad de invención de problemas como una herramienta útil para evaluar el conocimiento de los estudiantes se vuelve a ratificar, ya sea con fines docentes o investigadores.

Los resultados obtenidos son un primer paso en el estudio del conocimiento conceptual del simbolismo algebraico que los estudiantes desarrollan durante la ESO mediante la resolución de problemas. Es continuación natural de este trabajo indagar en dicho conocimiento en relación con otros usos de las letras u otro tipo de expresiones algebraicas. Posteriores estudios con muestras más amplias permitirán confirmar los resultados obtenidos, si bien son coherentes con los de estudios previos consultados que abordan este análisis desde enfoques diferentes al de la invención de problemas.

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. En I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro (eds.), *Números y álgebra na aprendizagem da matemática e na formaçâo de profesores*. Caminha, Portugal: SPCE, pp. 29-47.

Arnau, D. y Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias,* 31(3), pp. 49-66.

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. Lleida, España: SEIEM, pp. 223-233. http://funes.uniandes.edu.co/1580/

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007*a*). *Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía*, vol. BOJA n.º 156, pp. 15-25. Sevilla, España: Junta de Andalucía.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007*b*). *Orden de 10-8-2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía,*vol. BOJA n.º 171, pp. 23-65. Sevilla, España: Junta de Andalucía.

Boletín Oficial del Estado (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*, vol. BOE n.º 3, pp. 169-546. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.

Carpenter, T.P. y Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* Hillsdale, NJ: LEA, pp. 9-24.

Castro, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (ed.), *Didáctica de la matemática en educación primaria*. Madrid, España: Síntesis, pp. 203-230.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García, L. Ordóñez (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*. Baeza, España: SEIEM, pp. 75-94.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, España: Horsori, pp. 95-124.

Cázares, J., Castro, E. y Rico, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. *Aula,* 10, pp. 19-39.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), pp. 99-110.

Chalouh, L. y Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. En A.F. Coxford y A.P. Shulte (eds.), *The ideas of algebra, K-12*. Reston, Virginia: NCTM, pp. 33-42.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics,* 9(2), pp. 19-25.

Filloy, E., Rojano T. y Puig, L. (2008*). Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* New York, NY: Springer.

Furinghetti, F. y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? En J.P. da Ponte y J.F. Matos (eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics*, vol. 2, pp. 368-375. Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher,* 73(8), pp. 572-580.

Isik, C. y Kar, T. (2012). The analysis of the problems the pre-service teachers experience in posing problems about equations. *Australian Journal of Teacher Education,* 37(9), pp. 93-113. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2012v37n9.1

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: NCTM, pp. 167-194.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: IAP, pp. 707-62.

Küchemann, D.E. (1981). Algebra. En K.M. Hart, M.L. Brown, D.E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (eds.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*. Londres, Reino Unido: John Murray, pp. 102-119.

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), pp. 173-196.

http://dx.doi.org/10.1023/A:1003606308064

Mestre, J.P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 23(1), pp. 9-50.

http://dx.doi.org/10.1016/S0193-3973(01)00101-0

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME*, 17(3), pp. 559-579. http://funes.uniandes.edu.co/6498/1/Gac173molina.pdf

Orrantia, J., González, L.B. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje*, 28, pp. 420-451.

http://dx.doi.org/10.1174/021037005774518929

Resnick, L.B., Cauzinille-Marmeche, E. y Mathieu, J. (1987). Understanding algebra. En J.A. Sloboda y D. Rogers (eds.), *Cognitive process in mathematics*. Oxford, Reino Unido: Clarendon Press, pp. 169-203.

Rittle-Johnson, B. y Schneider, M. (2015). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. En R.C. Kadosh y A. Dowker (eds.), Oxford Handbook of Numerical Cognition. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press, pp. 1118-1134.

Rodríguez-Domingo, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico. En M. MarínRodríguez y N. Climent (eds.), Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM. Ciudad Real, España: SEIEM, pp. 379- 391. http://funes.uniandes.edu.co/1887/

Ruano, R.M., Socas, M. y Palarea, M.M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), pp. 61-74.

Star, J. (2005). Re-«conceptualizing» procedural knowledge in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), pp. 404-411.

CAPÍTULO 6: SECONDARY STUDENTS' IMPLICIT CONCEPTUAL KNOWLEDGE OF ALGEBRAIC SYMBOLISM. AN EXPLORATORY STUDY THROUGH PROBLEM POSING

Abstract

Through the task of problem posing, we inquire into students' conceptual knowledge of algebraic symbolism developed in compulsory secondary education. We focus on identifying the characteristics of equations and systems of equations that made the problem posing task difficult for the students and analyzing the meanings that they gave to the operations contained in the expressions. To collect the data we used two questionnaires in which students were asked to pose problems that could be solved by using given equations or system of equations. In the second questionnaire a specific meaning for the unknowns in the given expression was suggested. The results complement those of a previous study. Students evidence a good conceptual knowledge of algebraic symbolism when meanings for the unknowns are suggested. Decimal numbers and an equation including parenthesis and multiplication of unknowns are the main elements that made some weaknesses in students' knowledge to surface. The results are more promising. They suggest the potential for compulsory algebra instruction to develop students' conceptual knowledge, although greater attention should be paid to the semantic aspects of algebra if students are to access such knowledge unaided.

Keywords: Algebraic symbolism; conceptual knowledge; equations; problem posing; unknown

6.1 INTRODUCTION

For years research on students' understanding of algebra has focused on their procedural knowledge, normally defined as the command of a sequence of steps or actions that may help solve problems (Crooks and Alibali, 2014; Ross and Willson, 2012). Recent decades have brought a change in the approach to researching algebra teaching instruction, however, geared to conceptual understanding as well to determine in greater depth not only the steps followed by students to solve problems, but also their understanding of the concepts implicit in the solution. Attendant upon this new approach has been a change in mathematics instruction in which curricular documents explicitly address the need for students to master both procedural and conceptual algebraic knowledge (Crooks and Alibali, 2014; Ross and Willson, 2012).

This new outlook stems from the realisation of the importance of conceptual knowledge (Crooks and Alibali, 2014; Rittle-Johnson and Schneider, 2015; Ross and Willson, 2012) and the shortcomings repeatedly detected in that regard in studies exploring students' algebraic competence, especially around the use of algebraic symbols (Filloy and Rojano, 1989; Küchemann, 1981; Furinghetti and Paola, 1994; Booth, 1984; Filloy, Rojano and Puig, 2008). The persistence of errors throughout several years of algebra instruction is striking (Álvarez and Gómez-Chacón, 2015; Molina, Rodríguez-Domingo, Cañadas and Castro, 2016).

These two circumstances informed the present study on the conceptual understanding of algebraic symbolism acquired by students as a result of mathematics instruction delivered throughout compulsory secondary education (abbreviated 'ESO' in Spanish). To narrow the field to be covered, the research focused on linear and quadratic equations with one unknown and systems of linear and quadratic equations with two unknowns. The meaning of literal symbols was restricted to the unknown only, for it is what last year ESO students are most familiar with, inasmuch as the instruction received fixes on such meanings.

The task assigned, to pose problems that could be solved by using certain symbolic expressions, was chosen on the grounds of prior evidence (e.g. Lin, 2004, Mestre, 2002; Sheikhzade, 2008) of the utility of problem posing for assessing students' mathematical skills. It was used in an earlier exploration of students' conceptual knowledge of algebraic symbolism (Fernández-Millán and Molina, 2016) that identified the characteristics of the algebraic equations deployed (linear and quadratic equations with one unknown and systems of two equations with two unknowns in which the coefficients, independent terms and solutions were integers) that rendered problem-posing difficult. The meanings attributed to the unknown by students and the operations contained in such equations were also studied. This second study sought to confirm the findings of the earlier research with a new sample of students. It also aimed to delve further into last-year ESO students' conceptual understanding of algebraic symbolism. For that reason, two forms of problem-posing were postulated, free and semi-structured, and the task variables characterising the equations and systems of equations considered were broadened. According to Stoyanova and Ellerton (1996), a problem-posing situation is considered as free when students are asked to generate a problem from a given contrived or naturalistic situation. It is referred to as semi-structured when students are given an open situation and are invited to explore the structure of that situation and to complete it by applying knowledge, skills, concepts, and relationships from their previous mathematical experiences.

6.2 CONCEPTUAL UNDERSTANDING OF ALGEBRAIC SYMBOLISM

Many studies have addressed the distinction between conceptual and procedural knowledge in mathematics. The objectives pursued include reaching a consensus on their definition, determining which should prevail in mathematics instruction and how they can best be evaluated (Castro, Prat and Gorgorió, 2016).

The pervasive use of the terms conceptual and procedural can be attributed to Hiebert and Lefevre (1986). These authors' characterisation of the two types of knowledge is applied throughout this article. Conceptual knowledge is based on a dense network of relationships among pieces of information that allow flexibility in information access and use. Procedural knowledge consists in two parts: the first is the system of symbolic representation in mathematics and the second the algorithms or rules used to perform mathematical tasks. More recent studies have confirmed that the aforementioned definition of conceptual knowledge as densely interconnected knowledge and the description of procedural knowledge as the ability to perform actions in sequence to solve problems continues to be valid (Rittle-Johnson and Schneider, 2015).

Despite the dilemma posed in research papers over whether procedural or conceptual knowledge should prevail in mathematics instruction, the consensus opinion is that the two should go hand-in-hand. The benefits attributed to conceptual knowledge include support for decision-making about the most suitable procedure for a given situation, a more flexible approach to problemsolving and evaluation of the solution (Crooks and Alibali, 2014).

Conceptual knowledge can be evaluated using indicators for explicit or implicit conceptual knowledge (Castro, Prat and Gorgorió, 2016; Crooks and Alibali, 2014). For the former, the aforementioned authors cited concept definition. Implicit conceptual knowledge evaluation can be broached through the evaluation, judgement, justification and application of procedures (Castro, Prat and Gorgorió, 2016). For instance, in the specific case of the mathematical concepts equivalence (idea that the two members of an equation represent the same quantity), inversion (idea that inverse operations of the same quantity in an equation do not alter the initial value) and cardinality (ability to count), Crooks and Alibali (2014) suggested a variety of tasks to evaluate implicit conceptual knowledge. These include determining whether an operation is correct, reproducing the structure of an equation or operation viewed previously, identifying equivalent equations and interpreting the solution or explaining the procedure used to solve problems. The authors also stressed the importance of specifically identifying and measuring conceptual knowledge and the need for validated tools for its evaluation.

Rittle-Johnson and Schneider (2015) and Ross and Willson (2012) defined the translation between different representation systems as a method for analysing the implicit conceptual knowledge acquired by students[4]. That idea has been endorsed by studies in which different representation systems are used to favour the development of conceptual knowledge in algebra (Cedillo, 2001; Charpell, 2001; Ferruchi, Kaur, Carter and Yeap, 2008; Fujii and Stephens, 2008; Ng and Lee, 2009). Translation is the procedure whereby a mathematical object represented by one system of representation is represented in another (Gómez, 2007). This is a cognitively complex process. In addition to understanding the representation systems involved, it calls for the ability to identify and translate to the other system the essential information that defines the concept represented, ignoring superfluous particulars imposed by the representation system in which the concept is expressed (Molina, 2014).

By algebraic symbolism is meant the representation system characterised by the use of written numerals, letters and signs typical of arithmetic and algebra. Algebraic symbolism is a compact and very precise representation system applicable to mathematics as well as other areas. With it, algebraic ideas can be represented independently of the initial specific context in which they arise (Arcavi, 1994) and expressions can be transformed with learned algebraic techniques, irrespective (temporarily) of the meaning of the constituent symbols. Consequently, an essential part of being algebraically competent is the ability to flexibly and opportunistically alternate, on the one hand, the use of actions devoid of meaning and on the other, the pursuit of meanings geared to questioning and choosing strategies, thinking reflectively, connecting ideas, drawing conclusions or formulating new meanings (Arcavi, 2005).

[4] 'Representation system' is understood here to be a structured set of notations, symbols and graphs that, subject to rules and conventions, can be used to express the features and properties of a concept (Castro and Castro, 1997).

Given the descriptions of conceptual and procedural knowledge adopted in this study, the first dimension of algebraic symbolism referred to by Arcavi is identified with the use of procedural knowledge, and the second with conceptual knowledge. This article focuses on the second dimension, asking students to pose problems that can be solved with given symbolic equations. This task requires translating symbolic to verbal representation and, therefore, it implies identifying quantities and possible relationships among them that may be represented by the starting equations. Letters and operations acquire meaning in a specific context (Wagner, 1981). The aim is to evaluate the implicit conceptual knowledge of the algebraic symbolism involved in each of the equations included in the study.

6.3 REVIEW OF THE LITERATURE

Studies addressing conceptual knowledge of algebraic symbolism do so from different perspectives. A short number of papers discusses teaching strategies or methods that may favour the acquisition of conceptual knowledge of algebraic symbolism. In one, Rittle-Johnson and Star (2007) taught their secondary school students to solve linear equations in three ways: comparing equivalent equations solved using the same method; comparing different types of equations solved with the same method; and comparing different methods for solving the same equation. They found that conceptual knowledge was acquired more effectively by comparing methods than by comparing different types of problems. In a study with secondary school teachers and students, Ross and Willson (2011) analysed the effect of three teaching models on the acquisition of conceptual and procedural knowledge of algebraic symbolism. After analysing the classes delivered by seven teachers, they concluded that the use of symbolic representations and participatory classroom instruction in which different meanings of mathematical ideas were shared by teacher and students helped the latter make connections between their ideas about a given concept, thereby favouring the acquisition of conceptual knowledge. These authors drew attention to the need for more studies on conceptual knowledge in algebra. Chalouh and Herscovics (1988), in turn, geared their research to helping students build conceptual knowledge of algebraic symbolism with models based on the area of rectangles, while Herscovics and Kieran (1988) deployed arithmetic identities to the same purpose. Both studies found that students interpreted equations correctly more readily than open expressions (with no equal sign).

Along the same lines as addressed in this study, other studies have assessed implicit conceptual knowledge of algebraic symbolism acquired by secondary students. Filloy and Rojano (1989) identified conceptual obstacles in the move from operating with equations with one unknown on one side of the equal sign to operating with equations with unknowns on both sides. To work with this second type of equations students must understand that the expressions in both members are of the same nature and should attribute meaning to the equality of the expressions. That, the authors contended, would call for specific instruction in the context of traditional instruction in algebraic symbolism. Caprano and Joffrion (2006) conducted a study to explore secondary school students' conceptual knowledge of algebraic symbolism with two multiplechoice tasks, in which they were asked to translate verbal to symbolic representation. The conclusion drawn was that the ability to apply existing knowledge to a new situation constituted proof of the acquisition of conceptual knowledge. The authors highlighted the importance of developing conceptual knowledge in mathematics and the relevance of vocabulary in that development.

Some studies that evaluate the conceptual understanding of algebraic symbolism acquired by students focus on literal symbols as components of such symbolism, more than on equations in general. In research on 13- to 15-year-old students, Küchemann (1981) observed that most found it difficult to interpret letters in algebra as unknowns or generalized numbers. Furinghetti and Paola (1994), studying higher education students, found that only a small minority could adequately describe the differences between parameters, unknowns and variables, and most tended to interpret letters as substitutes for objects or words. Both studies concurred with Booth (1984) in identifying the nonequivalent use of letters in arithmetic and algebra as one of the reasons for such difficulties. Filloy, Rojano and Puig (2008) reported cases in which students assigned different meanings to the same letter (for instance, as an unknown and as a variable), when interpreting a single variable equation such as $x + x/4 = 6 + x/4$). In this same vein, Arnau and Puig (2013) reflected on the different meanings (variable vs unknown) that a letter may adopt depending on the semantic field from which the solution to a given problem is broached: functions or equations. The meanings of letters are associated with different algebraic conceptions (Usiskin, 1988). Bills (2001) and Álvarez and Gómez-Chacón (2001), among others, reported that students encountered difficulty in interpreting and distinguishing between the meanings that could be adopted by a letter in a problem and move flexibly from one to another.

Two other groups of authors can be identified who specifically assessed secondary school students' conceptual knowledge using the translation from symbolic to verbal representation as a tool. Resnick, Cauzinille-Marmeche and Mathieu (1987) asked 11- to 14-year-old students to translate algebraic expressions containing additive structures to texts with or without context. They found that none of the students was able to put forward a non-contextualised interpretation (such as a number plus double that number less five) without having previously built a specific story for the given expression. Taking their data as a basis, they hypothesised that an effective predecessor to learning formal algebra would be to interpret equations with some specific reference.

Molina et al. (2016) analysed the errors made by Spanish 2nd and 4th year ESO students in the non-contextualised translation of algebraic symbolism to verbal language and vice-versa. The errors were classified by the mathematics content involved, distinguishing three categories, associated with: complete/incomplete wording, arithmetic and the characteristics of algebraic symbolism. The last group was sub-divided into: errors in generalising the elements of expressions (translating -4, for instance, as 'subtract an even number'), particularisation, assignment of different meanings to the same letter and structural errors. They found that translating symbolic to verbal representation was more accessible than the reverse for both the younger and older students. The most frequent errors in translating algebraic symbolism to verbal language were associated with the characteristics of algebraic symbolism, especially to the last two sub-types. Unlike the other types of errors, whose number declined in the older students, the number of errors related to algebraic symbolism committed by 2nd and 4th year students did not vary significantly. In light of the persistence of some errors with ongoing algebra instruction, the authors suggested the need for more research focusing on the characteristics of algebraic symbolism to acquire a deeper understanding of how students acquire that knowledge.

One generally accepted requirement for successful translations between verbal and symbolic representation is an understanding of unknowns and the mutual dependence described in the verbal wording of the problem, as well as the syntactic characteristics of algebraic symbolism (Kaput, 1989). Those observations inform the distinction between two dimensions in the present analysis of students' translations: a) the syntactic characteristics of equations and systems preserved by students; and b) the meanings assigned to unknowns and the operations relating such unknowns.

Prior classifications of additive (Carpenter and Moser, 1982) and multiplicative (Castro, 2001) arithmetic problems were used to distinguish between the meanings of additive (addition and subtraction) and multiplicative (multiplication and division) structures. The additive situations defined were change, comparison, combination and equalisation and the multiplicative situations, simple proportionality, comparison and Cartesian product.

An earlier study by the authors (Fernández-Millán and Molina, 2016) identified the characteristics of equations and systems of equations that hindered problem-posing and the meanings attributed by students to the operations and unknowns contained in the equations used. Such characteristics included the presence of more than one unknown, the same unknown on both sides of the equal sign, coefficients greater than two and the multiplication of two or more unknowns. Meanings were more readily attributed to operations involving additive structures, although comparison and equalisation structures appeared in very few of the word problems posed by students, while the Cartesian product was absent in multiplicative structures. The presence of multiplicative structures also heightened the difficulty to attribute meaning to unknowns. Those findings prompted further exploration of the characteristics of equations that hinder problem-posing and the contexts in which students are liable to use additive and multiplicative structures absent in the earlier study.

6.4 EMPIRICAL STUDY

As noted earlier, the research problem addressed in this problem-posing based study was to analyse the implicit conceptual knowledge of linear and quadratic equations and systems of equations acquired by Spanish ESO students. More specifically, the problem was confined to specific objectives and certain symbolic expressions. The objectives were:

1) to identify and compare the characteristics of equations and systems of equations that hinder students' ability to pose problems, establishing one free and one semi-structured (where a meaning for the unknowns was proposed) situation.
2) to distinguish and compare the meanings attributed by students to the operations contained in the equations and systems in the free and semistructured situations.

The symbolic expressions used were linear and quadratic equations with one unknown and systems of linear and quadratic equations with two unknowns, in which the coefficients, independent terms and solutions were rational numbers. Letters were used to symbolise unknowns.

Participants

The sample, intentionally selected on the grounds of student availability, comprised 32 last year Spanish ESO students enrolled at two schools. Socioeconomic and cultural levels were average in the area where one of the schools was located and low in the other. Both groups of students attended class in a regular basis. Student performance in mathematics was average and heterogeneous in both groups. The results for the two groups were pooled to create a more extensive dataset from a sample with a broader socio-economic spectrum.

The two groups' prior knowledge was theoretically the same. They had been solving equations and related problems from first year, beginning with first-degree equations with one unknown and progressing on to second-degree equations and systems of linear and non-linear equations with two unknowns. When the data were collected for this study they had concluded classroom work on the algebra-related content specified in compulsory education in Spain. More specifically, they had worked with first- and second-degree equations with brackets and denominators and systems of linear and non-linear equations (both with two equations and two unknowns), from both the theoretical and problem solving perspectives. They had no prior experience in problem-posing.

Questionnaire design

Two questionnaires, labelled 1 and 2, were used to collect the data for this study. Each consisted in seven tasks in which students were asked to pose a problem that could be solved by using the equation or system of equations specified in the task. The equations and systems of equations in the two questionnaires were the same and listed in the same order. The difference between the two was that in the second, students were furnished a specific meaning for the unknown or unknowns in the equation.

The instructions given to the students for each questionnaire were:

Questionnaire 1: "Write the statement of a problem posed by you that can be solved using the given equation or system of equations and that refers to a context of everyday life".

Questionnaire 2: "Write the statement of a problem posed by you that can be solved using the given equation or system of equations, taking into account the meaning of the unknowns that is indicated in each case, and that refers to a context of everyday life".

The symbolic expressions used in this study were designed bearing in mind the three essential factors described below. The first two criteria had been addressed in the earlier study to select the equations set out in the tasks.

The structure was to be familiar to students. That involved analysing the units on algebra in secondary school mathematics textbooks (including the book used by students in the year when the data were collected) and identifying the types of equations that prevailed. The equations included on the questionnaires consequently formed part of the ESO mathematics curriculum and had been the object of instruction.

Problem-posing was to be feasible. To that end, the equations and systems of equations selected were taken from problem-solving exercises previously performed by students.

The findings of the earlier study (Fernández-Millán and Molina, 2016) were taken into consideration. Table 6.1 lists the equations used in that study and for each, the number of problems posed by students, the number that were correct, the main characteristics of the equations that hindered student problem-posing and the decision to retain them or otherwise in the present study.

Table 6.1. *Equations used in Fernández-Millán and Molina (2016)*

#	Equation	No. of problems posed (n=20)	No. correctly posed	Characteristics of equations that hindered problem-posing	Inclusion in present study
1	$8 = x + 6$	19	15 (79%)	None of significance	No
2	$2x - 1 = 9$	16	8 (50%)	Coefficient $\neq 1$	No
3	$x + 10 = 6x$	17	6 (35%)	Unknown on both sides of equal sign Coefficient $\neq 1$	Yes

Table 6.1. *Equations used in Fernández-Millán and Molina (2016)*

#	Equation	No. of problems posed (n=20)	No. correctly posed	Characteristics of equations that hindered problem-posing	Inclusion in present study
4	$16 = x^2$	17	8 (47%)	Multiplication involving two unknowns	Yes
5	$\left.\begin{array}{r} 5x+3y=69 \\ x+y=15 \end{array}\right\}$	15	8 (53%)	System of equations Coefficients $\neq 1$	No
6	$\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ xy=10 \end{array}\right\}$	12	6 (50%)	System of equations Multiplication involving two unknowns	Yes
7	$20 = x(x+1)$	13	6 (46%)	Multiplication involving two unknowns	Yes

The present study introduced a variable that distinguished between integers and decimals as coefficients of unknowns and independent terms. For that reason equations 1 and 2 from the earlier study were eliminated and new equations were introduced with decimals as coefficients and independent terms. System of equations 5 was modified to introduce coefficients different to one in both equations as in the earlier study it was identified as one of the characteristics that hindered problem-posing.

Ultimately questionnaires 1 and 2 contained the same four equations and three systems of equations with single solutions, listed in Table 6.2 along with the variables studied.

The order of the equations relative to the earlier study was varied to determine its possible role in the small number of problems posed in the equations listed in the latter positions.

Table 6.2. *Characterisation of equations and systems of equations used in the study*

#	Equation	No. of unknowns	No. of members with unknowns	Coefficient of unknown and independent term	Operation with unknown
1	$10{,}5x + 2 = 12{,}5$	1	1	Decimal	Addition with known quantity Multiplication with known quantity
2	$x + 10 = 6x$	1	2	Integer	Addition with known quantity Multiplication with known quantity
3	$x(x+1) = 20$	1	1	Integer	Addition with known quantity Multiplication with unknown quantity
4	$\left.\begin{array}{l} 5x + 2y = 290 \\ 2x + 5y = 200 \end{array}\right\}$	2	1	Integer	Addition with unknown quantity Multiplication with known quantity

Table 6.2. *Characterisation of equations and systems of equations used in the study*

#	Equation	No. of unknowns	No. of members with unknowns	Coefficient of unknown and independent term	Operation with unknown
5	$\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ xy=10 \end{array}\right\}$	2	1	Integer	Addition with unknown quantity Multiplication with unknown quantity
6	$\left.\begin{array}{r} x+y=3{,}25 \\ 1{,}2x+0{,}9y=3{,}6 \end{array}\right\}$	2	1	Integer / Decimal	Addition with unknown quantity Multiplication with known quantity
7	$x^2=16$	1	1	Integer	Multiplication with unknown quantity

Note: Shaded equations were carried over from the earlier study

Table 6.3 lists the specific meanings proposed for each unknown in questionnaire 2 and the semantic additive and multiplicative structures inferred by such meanings. These meanings were used in pursuit of student familiarity with the exercise, for they were similar to the ones found in the textbooks reviewed.

Table 6.3. *Meanings for unknowns in questionnaire 2*

#	Equation	Meaning of unknowns	Semantic structure inferred by the proposed meaning	
			Additive	Multiplicative
1	$10{,}5x + 2 = 12{,}5$	x: number of hours needed by a plumber to complete a task		Simple proportionality
2	$x + 10 = 6x$	x: Álvaro's present age	Change or comparison	Comparison
3	$x(x+1) = 20$	x: length of side of a rectangle	Comparison	Cartesian product
4	$\left.\begin{array}{l}5x + 2y = 290\\ 2x + 5y = 200\end{array}\right\}$	x: number of cardboard boxes y: number of plastic boxes	Combination	Simple proportionality
5	$\left.\begin{array}{r}x + y = 7\\ xy = 10\end{array}\right\}$	x: width of floor in a rectangular room y: length of floor in a rectangular room	Combination	Cartesian product
6	$\left.\begin{array}{l}x + y = 3{,}25\\ 1{,}2x + 0{,}9y = 3{,}6\end{array}\right\}$	x: kilogrammes of bananas y: kilogrammes of onions	Combination	Simple proportionality
7	$x^2 = 16$	x: length of side of a square mirror	--	Cartesian product

Both groups answered questionnaires 1 and 2 in separate sessions on two consecutive days. One of the researchers, both groups' official mathematics teacher, was present. Students solved the problems individually with pencil and paper on the grounds of the following instructions provided in writing and read aloud by the teacher:

> *Use each space to pose a problem from everyday life that can be solved with the equation or system of equations provided. You've worked with this sort of word problems in the classroom and others involving only numbers and their relationships, such as: 'Twice the value of a number minus one is nine: figure out what that number is'. Here we're asking you to pose problems that can arise in everyday situations. YOU DON'T HAVE TO SOLVE THE PROBLEMS. If you don't know what to answer in one, you can skip it and come back to it later, after posing problems for the other equations. Please work individually and silently. If you have any questions, raise your hand and I'll help you.*

Students were asked to pose problems from everyday situations to encourage them to attribute meaning to the unknowns and additive and multiplicative structures. The students posed no significant doubts during this data collection.

6.5 DATA ANALYSIS

The problems[5] posed by students were analysed first by translating them to algebraic symbolism, referred to here as 'symbolic translation'. That involved proceeding from left to right and word for word wherever possible. Where it was not, the word problem was translated to algebraic symbolism by building a mental scheme of the mathematical relationships described.

A problem was regarded as 'correct' if its symbolic translation concurred with the initial equation or system of equations and 'incorrect' otherwise. Problems in which the symbolic translation was equivalent to the initial equation were regarded as incorrect, for the aim was to assess the conceptual understanding not of the equations as a whole, but rather of each component.

Two types of categories were defined: 'syntactic' and 'semantic', depending on whether they referred to the form or the meaning of the problems posed. The syntactic categories (Table 4) were the outcome of identifying the elements that differed between the initial equations and the symbolic translations of the problems posed by students. These categories served as the basis for meeting the first specific objective of this study. Their definition was inspired by but did not concur with the syntactic categories used in the earlier study, for the latter were refined to establish more precisely how students' word problems diverged from

[5] The word 'problem' is used here to mean word problems posed by students, irrespective of whether they meet certain minimum requirements to be regarded as problems further to a pre-established definition.

the initial equations. The semantic characteristics (Table 6.4), which did concur with those in the earlier study, were designed to meet the second specific objective.

Table 6.4. *Syntactic categories*

Category	Name	Definition
A	Operating unknowns	In the symbolic translation of the problem posed, the unknowns operated with other elements of the algebraic expression.
B	Coefficient-unknown relationships	In the symbolic translation of the problem, the coefficients of the unknowns present were the same as in the initial algebraic expression and operated with such unknowns.
C	Number of unknowns	The number of unknowns operating with other elements in the symbolic translation was the same as in the initial algebraic expression.
D	Terms with unknowns	The unknown was found in the same number of terms in the symbolic translation of the problem as in the initial algebraic expression.
E	Structural elements	Brackets were not added or deleted (equation 3) nor were the terms transposed in the symbolic translation of the problem.
F	Polynomial algebraic expression with equal sign	The symbolic translation of the problem yielded a polynomial algebraic expression with an equal sign.

The two possible values for category A for the word problems posed by students were ‘yes’ and ‘no’. In the first example given in Table 6.5, in the symbolic translation of the problem posed by a student the unknown did not operate with any other element of the equation, but rather was isolated on one side of the equal sign. Category A was consequently coded as ‘no’ in this case. The other syntactic categories included a third value, ‘not analysable

(N/A)', inasmuch as a 'no' in category A would preclude analysis in the rest of the syntactic categories (see example 1 in Table 5). The remaining syntactic categories were not mutually exclusive, as shown in examples 2, 3, 4 and 5 in Table 5. Category E was coded as 'no' whether or not the brackets were removed correctly (see example 5 in Table 6.5).

Table 6.5. *Examples of syntactic categories*

#	Initial equation	Word problem posed	Symbolic translation	Code					
				A	B	C	D	E	F
1	$x^2 = 16$	Pedro has two sons. The younger, Marcos, is 4 years old. The older is twice the age of the younger. How old is the older?	$4 \cdot 2 = x$	no	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
2	$\begin{cases} 5x + 2y = 290 \\ 2x + 5y = 200 \end{cases}$	If I have 5 tonnes of cardboard boxes and 2 tonnes of plastic boxes, I have 290 boxes. If instead I had 200 boxes, how many boxes of each type would I have?	$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 290 \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 200 \end{cases}$	yes	yes	yes	yes	yes	no
3	$\begin{cases} x + y = 3.25 \\ 1.2x + 0.9y = 3. \end{cases}$	Adding the kg of bananas and the kg of onions gives 3.25 kg and I have a bag with 1.2 kg of one and 0.9 kg of the other that adds up to 3.6. Calculate the system	$6 \begin{cases} x + y = 3.25 \\ 1.2 + 0.9 = 3.6 \end{cases}$	yes	no	yes	no	yes	yes
4	$10.5x + 2 = 12.5$	A man pushes 10.5 kg of potatoes in a wheelbarrow along a road and finds two more potatoes before leaving the field. How many kilos of potatoes does he have?	$10.5 + 2x = y$	yes	no	no	no	yes	yes
5	x(x+1)=20	I have a box with a number of rubbers and the same number plus 1 of pencil sharpeners and a total of 20 objects. How many rubbers are there?	x+x+1=20	yes	yes	yes	yes	no	yes

As the syntactic categories provided information on incorrect problems only, those are the only results shown. In correct problems, all the categories would be coded as 'yes'. In incorrect problems, at least one of the syntactic categories was coded 'no', as Table 6.5 shows.

Two non-mutually exclusive semantic categories were defined as listed in Table 6.6. Both could be coded as either 'yes' or 'no'. Category G was not analysed in equation 7, which had no additive structure, whereas category H was analysed in all the equations, for they all involved a multiplicative structure.

Table 6.6. *Semantic categories*

Category	Name	Definition
G	Meaning of additive structures	The additive part of the problem exhibited at least one of the following semantic structures: change, combination, comparison or equalisation.
H	Meaning of multiplicative structures	The multiplicative part of the problem exhibited at least one of the following semantic structures: simple proportionality, comparison or Cartesian product.

In this analysis, problems that could not be translated to a symbolic equation (such as "Several pairs of cats have 16 kittens. How many pairs of cats are there?") were omitted and labelled as 'omitted problem'.

6.6 RESULTS

This section discusses the classification of the problems posed by students as correct or incorrect and the use of the categories set out in the preceding section to code them. The largest number of analysable (not omitted) problems were posed for equations 2 and 7 in both questionnaires, whereas the largest number of omitted problems were posed for equation 3 in questionnaire 1 and equations 1 and 3 in questionnaire 2 (Table 6.7).

Table 6.7. *Frequency of non-analysable problems (n=32)*

Code	Equation/ System of equations						
	1	2	3	4	5	6	7
	Questionnaire 1						
Unanswered	3	1	13	4	3	10	0
Omitted	4	1	1	0	0	0	1
Total	7	2	14	4	3	10	1
	Questionnaire 2						
Unanswered	7	0	4	2	4	2	1
Omitted	1	0	4	0	1	2	0
Total	8	0	8	2	5	4	1

As Figure 1 shows, equations 2, 4 and 5 were the object of the largest number of correctly posed problems in both questionnaires, along with equation 7 in the second. In all these cases, the coefficients and independent terms were integers and equations 5 and 7 involved multiplication between two unknowns. The largest number of incorrect problems were posed for equations 1 and 7 in questionnaire 1 and 1 and 6 in questionnaire 2, all of which involved decimals as coefficients and independent terms. More problems were correctly posed in questionnaire 2 than questionnaire 1 for all the equations, with the widest variation in equations 3 (7 correct problems in questionnaire 1 and 19 in 2) and 7 (17 correct in 1 and 27 in 2).

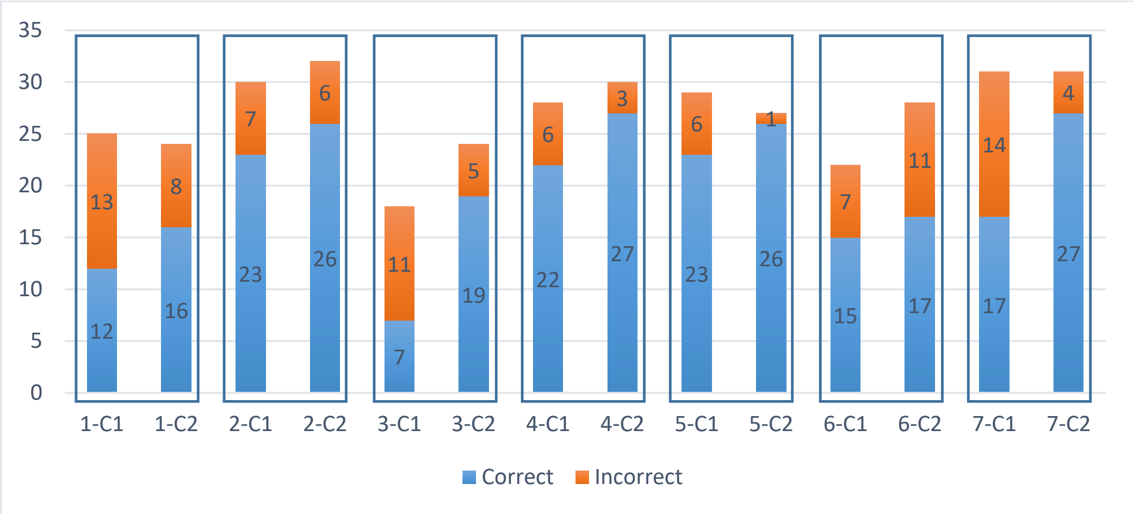

Figure 1. *Number of correct and incorrect problems for questionnaire 1 and 2.*

Note: C1· questionnaire ionaire 1; C2 · questionnaire 2.

Syntactic categories

The syntactic categories described the differences detected between the symbolic translation of the problems incorrectly posed by students and the initial symbolic expressions. Figure 2 shows the frequencies of word problems coded as 'no' in each syntactic category. In this figure results related to each category are placed inside a rectangle. Each bar corresponds to one of the questionnaires and shows the number of problems coded as 'no' in each expressions. The divergence in students' problems from the initial equations tended to involve the relationship between coefficients and unknowns (category B), the number of unknowns defined (category C) and the number of terms in which they appeared (category D).

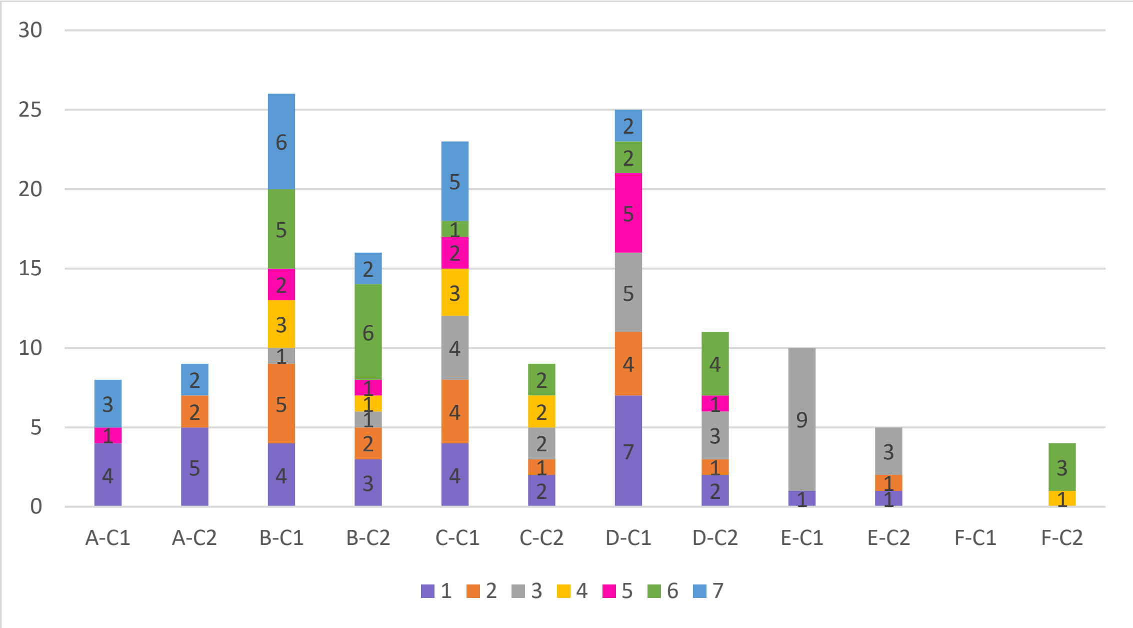

Figure 2. *Frequency of word problem coded as "no" by category.*

Note: C1· questionnaire ionaire 1; C2 · questionnaire 2.

The following is a discussion of the problems posed, category by category.

Category A: Operating unknowns

In both questionnaires, the vast majority (96 %) of the (non-omitted) problems posed by students involved an unknown operating with other terms. The number of problems with no unknown operating with other members of the equation was slightly higher in questionnaire 2, specifically in connection with equations 1 and 2. Often, in the symbolic translation of the problems coded as 'no' in category A, the unknown was isolated on one side of the equal sign. That was not the case in only four omitted problems, two each on questionnaires 1 and 2, in which the answer was included in the word problem itself, obviating the unknown. One example of such instances was posed for equation 1 in questionnaire 1: "How many hours would a plumber take to finish his work if, in addition to the 10.5 hours he's already devoted, we add 2 to get 12.5?" (the symbolic translation was 10.5 + 2 = 12.5).

Category B: Relationship between coefficients and unknowns

At least one word problem was coded no in this category in all seven equations. The equations involving decimal coefficients (equations 1 and system 6) exhibited a fairly high number of problems with a 'no' in this category in both questionnaires. Where system 6 problems were coded ‘no’ under this category, the relationship between coefficient and unknown was incorrect in the equation containing decimals. By way of example, one problem posed for system 6 in questionnaire 2 read as follows: “How many kg of bananas are there? And onions? If the sum of the kilogrammes of bananas and onions is 3.25 kg. In addition the shop’s lorry brings 1.2 kg more bananas and 0.9 kg more onions”, the total comes to 3.6 kg, and was translated symbolically as: $\begin{cases} x+y=3.25 \\ x+1.2+y+0.9=3.6 \end{cases}$. Note that the coefficients were not treated as such, but as independent terms.

Equation 7 stood out in this respect, with six problems in questionnaire 1 and two in questionnaire 2 in which the coefficients were not maintained. In most cases (five in questionnaire 1 and two in questionnaire 2), the difficulty was associated with the presence of exponents, for the solution to the problems posed did not involve operating with powers. In these cases, students added coefficients, with the symbolic translation yielding a linear equation. The following problem from questionnaire 1 serves as an example: “A person bought four articles, but can’t remember the price of each. Calculate the price knowing she spent €16 in all and that all the articles had the same price” (symbolic translation: $4x = 16$).

Generally speaking, the number of problems in which coefficients were incorrectly related to unknowns was smaller in questionnaire 2 than in questionnaire 1. The decline was steepest in equations 2 and 7.

Category C: Number of unknowns

The number of unknowns diverged from the initial equation in at least one of the problems posed for all the equations in questionnaire 1, although it was infrequent in the systems of equations. The flaws in the word problems for equation 1 consisted in including more than one unknown or replacing one of the independent terms with an unknown quantity. In equation 2, with unknowns in two members, the five divergent problems assigned the unknowns different meanings. In equation 3, three students posed problems requiring more than one equation, apparently as a result of eliminating the brackets. In equation 7 some students cited the area of a lot but without specifying that it was square.

The number of problems with a divergent number of unknowns declined substantially in questionnaire 2 (to 9, down from the 23 in questionnaire 1). In equation 7, none of the students included a different number of unknowns than in the initial equation. In both questionnaires, divergence from the number of unknowns tended to be upward. By way of example, the following problem was posed for system of equations 4 in questionnaire 1: "I have 290 euros saved in five-euro notes and coins, but I've spent 90 euros. How many bills and coins do I have now?", translated symbolically as: $\begin{cases} 5x+2y=290 \\ 5z+2t=200 \end{cases}$. The number of unknowns was reduced in only one of the problems posed for this same system of equations in questionnaire 1.

Category D: Terms with unknowns

In most cases students tended to add terms with unknowns: that happened in 20 of the 25 instances in questionnaire 1 and 6 of 10 cases in questionnaire 2. In equation 1, whenever unknowns were added (category C), the number of terms with unknowns also rose. Students also made this change in an attempt to remove the brackets in equation 3. Here and in system 5, when the multiplicative structure was replaced by an additive structure, the number of terms with unknowns was increased.

In questionnaire 1, the number of terms with unknowns was raised most frequently in equations 1, 3 and 5. The number of problems in which the symbolic translation yielded a larger number of unknowns than the initial equation was much smaller in questionnaire 2, particularly in the aforementioned equations.

System 6 merits mention here, as it had the highest frequency of problems coded 'no' in questionnaire 2, where it was higher than in questionnaire 1. In this system, when the number of terms with unknowns diverged, it was smaller than in the initial system, either because a single equation was proposed or all the decimal coefficients were included as independent terms, unrelated to unknowns.

Category E: Structural elements

This category was coded 'no' in only a few problems. The frequency of negatives was highest for equation 3, the only one with brackets, and was lower in questionnaire 2 than in questionnaire 1. In all cases with a 'no' code under this category in equation 3, the problems posed by students translated symbolically to an equation without brackets. In the other word problems coded negatively in this category students transposed terms (questionnaire 1) or added brackets (questionnaire 2).

Category F: Polynomial algebraic expression with equal sign

The symbolic translation of students' word problems failed to yield an algebraic polynomial with an equal sign in questionnaire 2 only. In the sole case involving system 4 and one of the cases involving system 6, in the symbolic translation of the students' problem the unknown was located in the denominator and therefore did not define a polynomial. In the other two cases involving system of equations 6 the symbolic translation exhibited no equal sign.

Semantic categories

The following is a discussion of the classification of the problems into the semantic categories defined. These results provided insight into the meanings attributed by students to the operations contained in the initial symbolic expressions. The findings are listed for each equation and correct and incorrect problems are discussed jointly.

Category G: Meaning of additive structures

Further to the findings for category G (Table 6.8), most of the word problems posed by students attributed meaning to these structures (86 % in questionnaire 1 and 89 % in questionnaire 2)[6]. Notably, students found it hardest to attribute meaning to the additive structure in equation 2 in questionnaire 2, where an age context was suggested. In equation 3 students encountered difficulties even when a meaning was proposed for the unknown. In both questionnaires, the difficulties were ostensibly greater in equations than in systems.

[6] Percentages relative to analysable problems involving additive structures

Table 6.8. *Word problem coding for category G*

Code	Semantic structure	Equation 1	2	3	4	5	6	Total
		Questionnaire 1						
YES	Combination	16 (9)	12 (11)	6 (0)	28 (22)	27 (22)	21 (15)	110 (79)
	Change	2 (0)	12 (9)	1 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	15 (10)
	Comparison	3 (0)	0 (0)	2 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	5 (1)
	Equalisation	0 (0)	1 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)
NO		4 (3)	5 (2)	9 (5)	0 (0)	2 (1)	1 (0)	21 (11)
		Questionnaire 2						
YES	Combination	22 (16)	6 (6)	1 (0)	30 (27)	27 (26)	28 (17)	114 (92)
	Change	0 (0)	15 (13)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	15 (13)
	Comparison	0 (0)	2 (0)	16 (16)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	18 (16)
	Equalisation	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
NO		2 (0)	9 (7)	7 (3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	18 (10)

Note: The values in brackets denote the number of correct problems. The shaded cells indicate the semantic structure prompted by the meanings proposed for the unknowns. Equation 7 was excluded because it had no additive structure.

The occurrence of additive semantic structures in the problems posed is shown in Figure 3 for questionnaires 1 and 2. Problems involving combination prevailed in both questionnaires for both correct and incorrect answers, whereas problems involving equalisation were nearly absent and the other types exhibited a very low frequency. Combination was also observed to predominate in each algebraic expression separately, with the exception of equation 2, in which change was also frequently found in both questionnaires. The small number of problems involving comparison were proposed in the first three equations, where this category was appropriate.

More problems involving combination and comparison, most correct, were detected in questionnaire 2. The frequency of problems involving combination was particularly high in equations 4, 5 and 6 and especially low in equation 3. The meanings proposed for equations 2 and 3 in questionnaire 2 led to problems involving change or comparison, depending on the case.

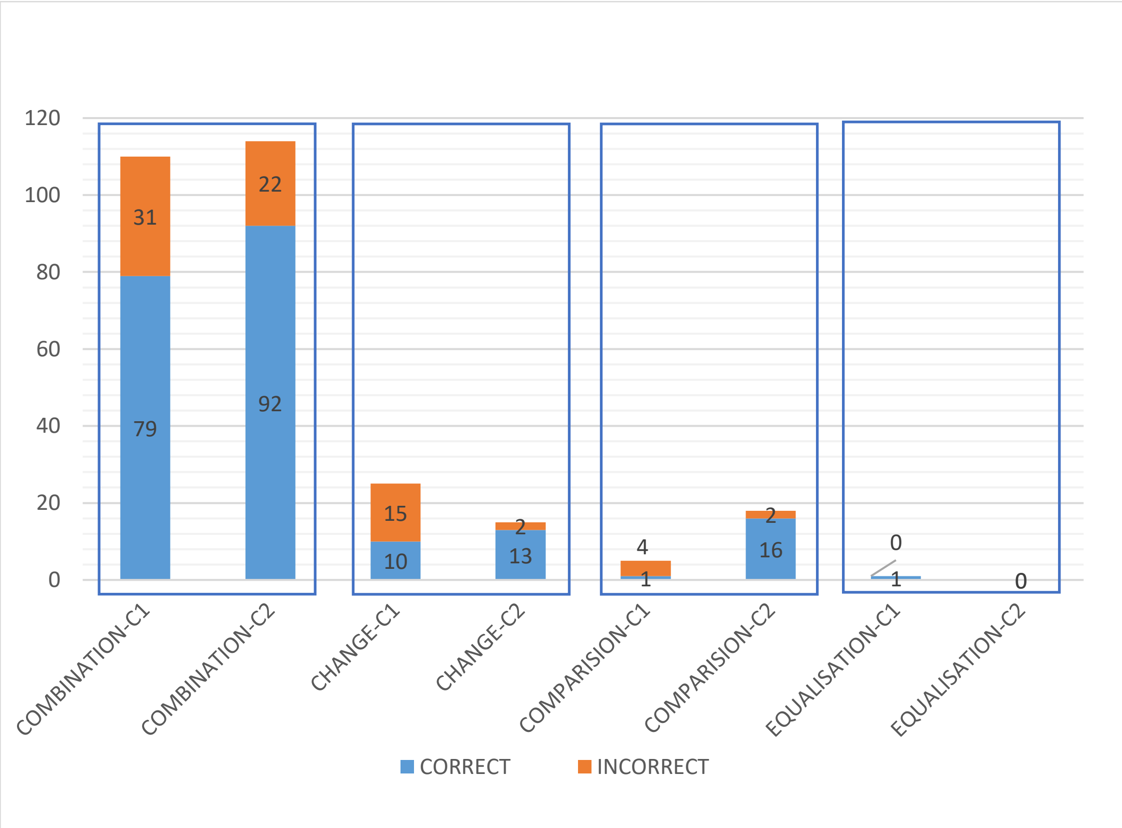

Figure 3. Frequency of additive semantic structures

Note: C1· questionnaire ionaire 1; C2 · questionnaire 2.

Category H: Meaning of multiplicative structures

As the data in Table 6.9 show, most of the word problems for questionnaires 1 (62 %) and 2 (75 %) attributed meaning to multiplicative structures[7] (category H), although the percentages were lower than for additive structures. The findings for equation 3 were particularly striking, with only one problem attributing meaning to multiplicative structures in questionnaire 1, compared to 15 in questionnaire 2. A similar difference was observed for equation 5, which also involved multiplying two unknowns.

Table 6.9. *Word problem coding for category H*

Code	Semantic structure	Equation							Total
		1	2	3	4	5	6	7	
					Questionnaire 1				
YES	Comparison	1 (0)	18 (17)	0 (0)	4 (4)	0 (0)	4 (3)	3 (0)	30 (24)
	Simple proportion	13 (6)	5 (2)	1 (0)	24 (18)	2 (0)	11 (10)	4 (0)	60 (36)
	Cartesian product	1 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	12 (7)	13 (8)
NO		10 (5)	7 (4)	17 (7)	0 (0)	27 (23)	7 (2)	12 (10)	63 (51)
					Questionnaire 2				
YES	Comparison	0 (0)	22 (19)	0 (0)	3 (3)	0 (0)	3 (2)	0 (0)	28 (24)
	Simple proportion	19 (15)	0 (0)	0 (0)	25 (23)	0 (0)	19 (15)	2 (0)	65 (53)

[7] Percentages relative to analysable problems, all of which included multiplicative structures.

Table 6.9. *Word problem coding for category H*

Code	Semantic structure	Equation							Total
		1	2	3	4	5	6	7	
	Cartesian product	0 (0)	0 (0)	15 (14)	0 (0)	15 (15)	0 (0)	23 (22)	53 (51)
NO		5 (1)	10 (7)	9 (5)	2 (1)	12 (13)	6 (0)	6 (5)	50 (31)

Note: The values in brackets denote the number of correct problems. The shaded cells indicate the semantic structure prompted by the meanings proposed for the unknowns.

The frequency of multiplicative semantic structures for questionnaires 1 and 2 is graphed in Figure 4. Simple proportionality prevailed in both questionnaires. The difference in the number of comparison structures between the two questionnaires was nearly negligible, whilst a greater number of problems involving simple proportionality was found in questionnaire 2 (50 vs 65). The widest gap was found for the Cartesian product (13 vs 55), however, associated with the equations involving the multiplication of two unknowns (3, 5 and 7). In questionnaire 1, students proposed problems involving the Cartesian product for equation 7 only.

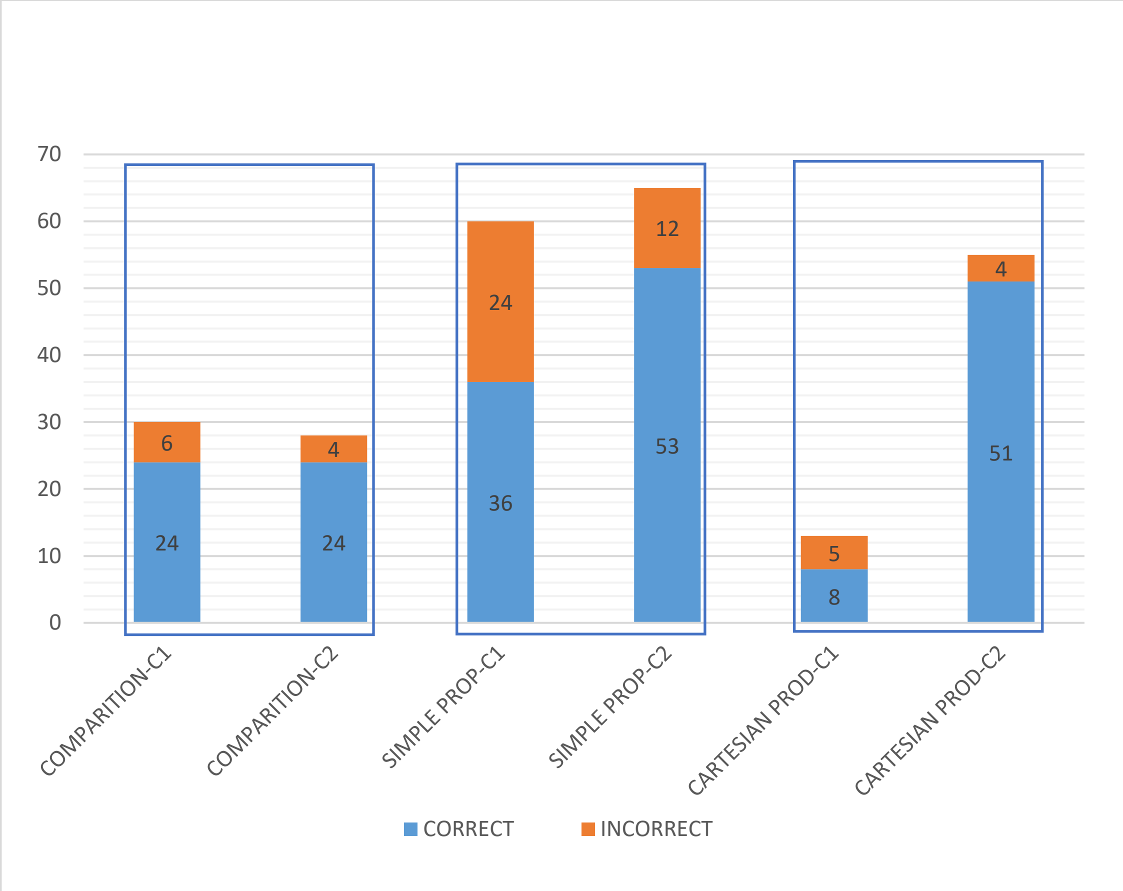

Figure 4. *Frequency of multiplicative semantic structures*

Note: C1· questionnaire ionaire 1; C2 · questionnaire 2.

6.7 DISCUSSION

Analysis based on the aforementioned syntactic and semantic categories, the vehicle for meeting the two objectives of this study, provides insight into the conceptual knowledge of algebraic symbolism acquired by compulsory secondary school students.

Although students found it difficult to pose problems that would translate in algebraic expressions concurring with the initial expressions, in most of these, over 50 % of the analysable problems posed were correct (the exceptions being 1 and 3 on questionnaire 1, where correct answers accounted for 48 % and 39 % of the totals, respectively). These difficulties eased significantly when meanings were furnished for unknowns (questionnaire 2), with over 60 % correctly worded problems in all the equations, and over 80 % in four (2, 4, 5 and 7). Students exhibited good conceptual understanding of algebraic symbolism in this second questionnaire, enabling them to attribute meaning to the equations. The presence of decimals as coefficients and equation 3, $[(x + 1) = 20]$, with brackets and multiplication of two unknowns, revealed certain gaps in that knowledge.

The presence of decimal coefficients conditioned students' ability to pose problems. The lowest proportion of correct problems was found for equation 1 (and equation 3, analysed below) on questionnaire 1 and 1 and 6 on questionnaire 2, both bearing decimals as coefficients and independent terms. When broaching this task students failed to relate the coefficient to the unknown, tending to construe it as an independent term. Furnishing a specific meaning to the unknowns (questionnaire 2) improved performance in terms of the number of correctly worded problems for both equations, although no decline was observed in the number of problems that failed to correctly relate the coefficient to the unknown (category B). Further to that finding and given the prevalence of simple proportionality in the meanings assigned to multiplicative structures, students may be conjectured to associate multiplication with repetitive addition. That would explain why they found it hard to formulate word problems for these equations. For instance, problems such as '1.2 kilos of bananas plus 0.9 kilos of onions' or '1.2 bananas plus 0.9 onions' for the symbolic expression '1.2x+0.9y' in system of equations 6 are indicative of students' limited ability to put into words the precision characteristic of algebraic symbolism.

Earlier studies exploring translation in the opposite direction (from verbal to symbolic language) described several phenomena indicative of this same difficulty. Cerdán (2010) noted that students focused only on some of the words in the problem that referred to amounts, regarding amounts sharing a given word in their description to be equal. González-Calero, Arnau and Puig (2013) found students to be imprecise when specifying the meanings of letters in an algebraic expression (e.g., x=cars). Mitchell (2001) coined the term 'wordwalking' to mean changing the words in a problem in ways that affect their meaning, leading to interpretations that diverged from the relations described in the word problem. Rodríguez-Domingo (2015) observed that some students regarded as acceptable translations in which part of the equation was expressed more generally (e.g., an even number instead of 2). Such findings, along with the difficulties in dealing with decimals as coefficients and independent terms attested to in this study, denote a need for a sharper focus in secondary school classrooms on the importance of precision in algebraic contexts and the concomitant differences between verbal and symbolic language. Students' linguistic competence should also be developed to enable them to grasp such precision verbally.

Equation 3 stood out for its complexity, with the highest proportion of omitted problems, the smallest number of correct answers in questionnaire 1 and a substantial percentage of students who failed to attribute meaning to the additive and multiplicative structures in both questionnaires. This equation had a more complex structure than the others expressions. Divining the solution to an algebraic problem solvable with this equation would probably be more accessible to students if expressed as the system $\left.\begin{array}{r} y = x+1 \\ xy = 20 \end{array}\right\}$ and deriving equation 3 in a subsequent step in the process. Posing a problem solvable with equation 3 is cognitively demanding in terms of students' sense of structure (Vega-Castro, Molina and Castro, 2012; Hoch and Dreyfus, 2005). That notion refers to a suite of skills requiring the combined use of conceptual and procedural knowledge, including dealing with a compound term as a whole, recognising familiar structures and identifying relationships between equations or parts of an equation. To successfully pose a problem solvable with equation 3 students had to recognise x and x+1 as two separate unknowns, whose product is 20. That would entail understanding the expression x+1 as a whole. It would also involve identifying relationships between parts of the equation. The difficulties revealed in this task therefore provide insight not only into students' conceptual knowledge but also into their sense of structure.

The presence of multiplication of two unknowns had a heavy impact on students' ability to pose problems. Proof of that can be found in questionnaire 1 primarily in the number of incorrectly worded problems for equation 1, and in equation 7, where barely 50 % of the problems posed were correct. Students posed problems calling for solutions with linear equations, attesting to greater ease in attributing meaning to multiplicative structures involving coefficients and unknowns than those involving two unknowns, as observed by Fernández-Millán and Molina (2016). That difficulty was also present in terms of the meaning attributed to multiplicative structures involving unknowns. In questionnaire 1, meaning was attributed least frequently to this type of structure in equations 3, 5 and 7. Students found it easier to deal with the multiplication of two unknowns when asked to pose problems for the equations in the second questionnaire. There, where the meanings proposed for the unknowns were related to the areas of plane geometric figures, prompting the use of the Cartesian product, the number of correct problems for equations 3, 5 and 7 rose significantly.

Whole number coefficients other than 1 were also observed to render problem-posing difficult for students, corroborating findings reported by Fernández-Millán and Molina (2016). In equations 2 and 4, with coefficients other than 1, the meanings of coefficients diverged more frequently from the original than in the other equations with integers as coefficients (3 and 4). In the earlier study the authors noted that this finding might be related to a greater difficulty to verbally express multiplicative relationships with natural numbers. This circumstance was less prominent in questionnaire 2, for furnishing meaning for the unknowns helped students associate the problem with a given context.

When students experienced difficulties in posing a problem, the factors primarily affected by the divergence introduced were: the relationship between coefficients and unknowns, the number of unknowns defined and the number of terms in which they appeared. The problems posed tended to include operating unknowns. In the scant instances where that was not the case, the equations affected were the ones with the simplest structure, which were either solved or rearranged to isolate the unknown. That divergence was not observed in systems of equations, in all likelihood due to the greater complexity of the process to be followed to do so. In the earlier study, however, it was detected in the problems posed for all the equations. Other more sporadically occurring types of divergence, not detected in the earlier study, included the omission of the equal sign or of brackets, the inclusion of brackets and the positioning of unknowns in the denominator of a fraction.

Variations in the number of unknowns tended to be upward, as observed in the earlier study. Detected primarily in questionnaire 1, this divergence was attributed a number of causes depending on the type of equation. Particularly prominent were flawed verbal expression when the equations contained decimals or the product of equal unknowns, which induced students to include more than one unknown. In such cases and where multiplicative were replaced with additive structures, students tended to raise the number of terms with unknowns.

Further to the information gleaned from the semantic categories, students attributed meaning to additive structures in nearly 90 % of the problems posed, exhibiting greater uncertainty in dealing with multiplicative structures, primarily in questionnaire 1. Combination followed by change prevailed in additive structures, as in the earlier study. These two are the types of additive structures most frequently found in primary school textbooks, according to a review by Orrantia, González and Vicente (2005). The paucity of problems involving comparison or equalisation was common to this and the earlier study.

When a specific meaning was furnished for the unknowns (questionnaire 2), students attributed meaning to multiplicative with the same ease as to additive structures (146 problems vested meaning in multiplicative and 147 in additive structures). That did not translate into a significant overall rise in the number of problems attributing meaning to additive structures in questionnaire 2 relative to questionnaire 1, although some of the semantic structures were impacted: in equation 2 there were more additive problems involving change and in equation 3 more involving comparison.

Although students did not tend to pose additive problems involving comparison, when induced to do so by the meaning furnished for the unknowns, comparisons (e.g., age) were frequently used and most of the problems posed were correct. Findings on the use of the Cartesian product in multiplicative problems were analogous. That multiplicative structure was scantly present in questionnaire 1 and absent altogether in equations 3 and 5, which involved multiplying two unknowns. No more than two students assigned meaning based on that product in both. Nonetheless, when meanings associated with lengths were proposed for the unknowns, all students used the Cartesian product in both equations, and nearly all correctly.

On the whole, simple proportionality and comparison were the prevalent multiplicative semantic structures in questionnaire 1, as was also reported in Fernández-Millán and Molina (2016).

The questionnaire 1 results concurred with the earlier study in detecting specific meanings for the operational structures that were weakly associated with such operations: Cartesian product and additive comparison. Thinking of the context of area of plane rectangles, for instance, would have helped students to pose problems for equations involving the multiplication of two unknowns in questionnaire 1. In the absence of situations associated with the Cartesian product, students found it difficult to pose problems correctly in these cases. The use of simple proportionality and comparison to attribute meaning to such equations is artificial, for it entails posing a situation in which a) both the scaling factor and one of the quantities for comparison is unknown or b) the number of elements in each group and the number of groups is unknown.

Such difficulties were drastically reduced, however, when a meaning was furnished for the unknowns, suggesting that conceptual knowledge was partially connected. The results inferred that such knowledge lies in the zone of proximal development and inaccessible to students if unaided. Although the equations used were all familiar to them, students needed help to connect them to the classroom contexts to which they were accustomed.

Lastly, the order in which the equations were presented was found to be unrelated to both the number of problems posed and the number of correctly worded problems (Table 7 and Figure 1).

6.8 CONCLUSIONS

This article, the continuation of an earlier study by Fernández-Millán and Molina (2016), compares the findings from both studies while further exploring the conceptual understanding of algebraic symbolism acquired by two groups of students in the last year of compulsory secondary school. The results of this second study, which are more promising, suggest the potential for compulsory algebra instruction to develop students' conceptual knowledge, although greater attention should be paid to the semantic aspects of algebra if students are to access such knowledge unaided.

The findings gleaned from the first questionnaire used (free problemposing) corroborated the results of the earlier study in terms of the difficulties experienced by students in posing problems for equations involving the multiplication of two unknowns and coefficients other than 1. In both studies problem-posing was particularly difficult for equation 3, which was interpreted to signify shortcomings in students' sense of structure. Limitations were also detected in students' ability to grasp the precision expressed with algebraic symbolism in verbal language. The tendency to isolate the unknown detected in the earlier study was not corroborated here, however, suggesting that students' concept of algebraic expressions was more relational than operational. In both studies, the predominant semantic categories were combination followed by change, in additive structures, and simple proportionality followed by comparison in multiplicative structures. The least prevalent additive semantic structures were comparison and equalisation and the least multiplicative structure was the Cartesian product.

The findings ratified the need to pay greater attention to expression through verbal representation of relationship schemes that can be modelled using equations and systems of equations, as well as to decimal coefficients and coefficients other than 1. The development of linguistic competence in algebraic contexts calls for steady work that can be undertaken in arithmetic contexts, given the wealth of elements and meanings shared by algebraic and numerical symbolisms.

From the educational standpoint, the shortcomings identified provide insight for the design of instructional proposals geared to developing students' understanding of the meaning of arithmetic operations and algebraic symbolism. The study ratifies the utility of problem-posing as a useful tool for evaluating student's implicit conceptual knowledge, whether for educational or research purposes.

This study, which forms part of the first author's PhD. thesis, was conducted under Spanish Research and Development Projects EDU201341632-P and EDU2016-75771-P, funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness.

REFERENCES

Álvarez, I. & Gómez-Chacón, I. M. (2015). Understanding the algebraic variable: Comparative Study of Mexican and Spanish students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1507-1529

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the learning of mathematics, 25(*2), 42-47.

Arnau, D. & Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 49-66. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n3.967

Bills, L. (2001). Shifts in the Meanings of Literal Symbols. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the Twenty-fifth PME International Conference* (pp. 2-161, 2-168). Utrecht, The Neatherlands: PME.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.

Capraro, M. & Joffrion, H. (2006). Algebraic Equations: Can Middle-School Students Meaningfully Translate from Words to Mathematical Symbols? *Reading Psychology*, *27*(2-3), 147-164.

Carpenter, T. & Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: Developmental perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, N. Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E. (2001). Multiplicación y división. In E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en educación primaria.* Madrid, España: Síntesis, pp. 203-230.

Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. In L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Castro, A., Prat, M. & Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación*, *374*, 43-68

Cedillo, T. E. (2001). Toward an algebra acquisition support system: A study based on using graphic calculators in the classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, *3,* 221–259.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, *4*(3), 99-110.

Chalouh, L. & Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. In A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra K-12 (*pp. 33-42). Reston, Virginia: NCTM.

Chappell, M. F. (2001). Creating connections: Promoting algebraic thinking with concrete models. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7*, 20–25.

Crooks, N. & Alibali, M. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, *34*(4), 344-377

Fernández-Millán E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(1), 53-71. DOI: http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455

Ferrucci, B. J., Kaur, B., Carter, J. A. & Yeap, B. (2008). Using a model approach to enhance algebraic thinking in the elementary school mathematics classroom. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: 2008 Yearbook* (pp. 195–209). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano T. & Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach.* New York, NY: Springer.

Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: 2008 Yearbook* (pp. 127–140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Furinghetti, F. & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? In J.P. da Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics* (vol. 2, pp. 368-375). Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* PhD Thesis. Granada: Universidad de Granada.

González-Calero, J. A., Arnau, D. & Puig, L. (2013). Dificultades en la construcción de nombres de cantidades durante la resolución algebraica de problemas verbales por estudiantes de primaria. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 301-310). Bilbao, Spain: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher, 73*(8), pp. 572-580.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 145–152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Küchemann, D.E. (1981). Algebra. In K.M. Hart, M.L. Brown, D.E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock & M. McCartney (Eds*.), Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102119). Londres, Reino Unido: John Murray.

Lin, P. J. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. In M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257-264). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Mestre J. P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Journal of Applied Developmental Psychology, 23*(1), 9-50.

Mitchell, J. M. (2001). Interactions between natural language and mathematical structures: the case of "wordwalking". *Mathematical Thinking and Learning, 3*(1), 29-52.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *La* G*aceta de la RSME, 17*(3), 559-579.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M.C. & Castro, E. (2016). Secondary School Student's Errors in the Translation of Algebraic Statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(3), 1-20.

Ng, S. F. & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 282–313.

Orrantia, J., González, L.B. & Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje, 28,* 420-451. http://dx.doi.org/10.1174/021037005774518929

Resnick, L.B., Cauzinille-Marmeche, E. & Mathieu, J. (1987). Understanding algebra. In J.A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), *Cognitive process in mathematics* (pp. 169-203). Oxford, Reino Unido: Clarendon Press.

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2015). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. In R.C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp. 1118-1134). Oxford, Reino Unido: Oxford University Press

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99,* 561–574. doi: 10.1037/0022–0663.99.3.561.

Rodríguez-Domingo, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria*. PhD thesis. Granada: Universidad de Granada.

Ross, A. & Willson, V. (2012). The Effects of Representations, Constructivist Approaches, and Engagement on Middle School Students' Algebraic Procedure and Conceptual Understanding. *School, Science and Mathematics, 112*(2), 117-128.

Sheikhzade, M. (2008, July). *Promoting skills of problem-posing and problem- solving in making a creative social studies classroom.* Presented at 4th Global Conference, Oxford. Available at http://www.inter-disciplinary.net/ati/education/cp/ce4/Sheikhzade%20paper.pdf.

Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education (Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 518–525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Usiskin Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In Coxford A.F. & Shulte A. P. (Eds.), *The Ideas of Algebra K-12* (pp. 8-19). VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vega-Castro, D., Molina, M. & Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Relime*, 15(2), 233–258.

Wagner, S. (1981). An analytical framework for mathematical variables. In Equipe de Recherche Pedagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th International PME Conference* (pp.165-170). Grenoble, France: PME.

CAPÍTULO 7: EJEMPLOS Y DEFINICIONES DE ECUACIONES: UNA VENTANA HACIA EL CONOCIMIENTO CONCEPTUAL DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA.

Resumen

En este estudio utilizamos la generación de ejemplos y la definición de conceptos por estudiantes para indagar en el conocimiento conceptual implícito y explícito del concepto ecuación que han adquirido en la Educación Secundaria. Los estudiantes mostraron facilidad para generar ejemplos de ecuaciones y determinar diferencias entre ellos, dando evidencias de su conocimiento conceptual implícito. En cuanto al explícito, manifestaron dificultades para definir el concepto de ecuación. Generar ejemplos les ayudó a identificar elementos comunes, generalizar y expresar verbalmente, aunque con ciertas limitaciones, lo que para ellos es una ecuación.

Palabras clave: conocimiento conceptual, ecuación, generación de ejemplos, definiciones.

Abstract

In this study, we use the generation of examples and the definition of concepts by students to study their implicit and explicit conceptual knowledge of the concept of equation acquired in secondary education. Students showed facility to generate examples of equations and to determine differences between them, giving evidences of their implicit conceptual knowledge. As for the explicit knowledge, they evidenced difficulties in defining the concept of equation. Generating examples helped them to identify common elements, to generalize and to express verbally, although with some limitations, what an equation is for them.

Keywords: conceptual knowledge, equation, examples generation, definitions.

7.1 INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre el conocimiento conceptual de conceptos matemáticos en el campo de Didáctica de la Matemática han aumentado en los últimos años estudiándose conjuntamente con el conocimiento procedimental (Crooks y Alibali, 2014; Ross y Willson, 2012). Este cambio se debe a la constatación de su importancia (Crooks y Alibali, 2014; Rittle-Johnson y Schneider, 2015; Ross y Willson, 2012). Uno de los temas de estudio relativos al conocimiento conceptual es cómo evaluarlo. Se identifican así indicadores de conocimiento conceptual explícito e implícito (Castro, Prat y Gorgorió, 2016; Crooks y Alibali, 2014). Dentro de la evaluación del conocimiento conceptual explícito, las definiciones juegan un papel fundamental (Zazkis y Leikin, 2008). Por otra parte, la generación de ejemplos por los estudiantes permite evaluar el conocimiento implícito (Waywook, 1992; Abdul-Rahman, 2005; Zaskis y Leikin 2007, 2008; Goldenberg y Mason, 2008). Ambas actividades son consideradas en este trabajo para indagar en el conocimiento conceptual del concepto de ecuación.

Llama la atención la cantidad de investigaciones que abordan el estudio del conocimiento de las ecuaciones por parte de estudiantes de secundaria y de las dificultades que se ponen de manifiesto cuando los estudiantes trabajan con ellas. Algunas de estas dificultades refieren a características del simbolismo algebraico que se emplea en las ecuaciones (e.g., Arnau y Puig, 2013; Álvarez y Gómez-Chacón, 2015; Resnick, Marmeche y Mathieu, 1987; Molina, Rodríguez-Domingo, Cañadas y Castro, 2016; Fernández-Millán y Molina, 2016 y 2017), y otras al concepto de ecuación visto como un todo (Filloy y Rojano, 1989; Caprano y Joffrion, 2006).

En la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) se le concede gran importancia al álgebra y en concreto al trabajo con el simbolismo algebraico y con las ecuaciones, tal y como ponen de manifiesto los documentos curriculares que rigen las enseñanzas de esta etapa en España. Aun así, las dificultades señaladas en los citados estudios sugieren un déficit en el conocimiento conceptual tanto del simbolismo algebraico como de las ecuaciones. Este hecho nos motiva a abordar el problema de investigación que aquí planteamos, como continuación a nuestros estudios previos Fernández-Millán y Molina (2016 y 2017). El problema de investigación planteado en ambos estudios previos es común: analizar el conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico presente en ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas que adquieren los estudiantes como resultado de su formación matemática a lo largo de la ESO. Los resultados señalan características de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema y los significados asignan los estudiantes a las estructuras operatorias contenidas en las expresiones algebraicas dadas.

De forma complementaria en este tercer trabajo pretendemos aportar información relativa al conocimiento conceptual del concepto de ecuación como un todo, sin prestar atención a las características individuales del simbolismo algebraico, que ponen de manifiesto un grupo de estudiantes, dejando a un lado los procesos de resolución. Para ello realizamos entrevistas individuales a un grupo de estudiantes en el último curso de la ESO en las que planteamos las dos tareas mencionadas anteriormente: la generación de ejemplos de ecuaciones y la definición del concepto de ecuación. El objetivo de investigación planteado en este trabajo es analizar el conocimiento conceptual del concepto de ecuación que han adquirido un grupo de estudiantes como resultado de su formación durante la ESO.

7.2 MARCO TEÓRICO

Para enmarcar teóricamente esta investigación, en primer lugar tratamos el papel que juega el conocimiento conceptual en la educación y nos centramos en dos formas de evaluarlo: la generación de ejemplos por parte de los estudiantes que nos permite evaluar el conocimiento conceptual implícito y la definición de conceptos matemáticos por parte de los mismos, que nos permite evaluar el conocimiento conceptual explícito. En segundo lugar prestamos atención al concepto de ecuación en la educación secundaria.

Conocimiento conceptual y su evaluación

Son numerosos los estudios que han abordado la distinción entre conocimiento conceptual y procedimental en el área de las matemáticas. El uso generalizado de estos dos tipos de conocimiento se debe a Hiebert y Lefevre (1986). Estudios más recientes (Rittle-Johnson y Schenider, 2015) señalan que sigue vigente la definición dada por estos autores. El conocimiento conceptual se basa en una rica red de relaciones entre piezas de información, que permiten flexibilidad en el acceso y uso de la información. El conocimiento procedimental, por otra parte, está compuesto por el sistema de representación simbólico de las matemáticas y los algoritmos o reglas utilizadas para resolver tareas matemáticas.

La constatación de la importancia del conocimiento conceptual se pone de manifiesto en los beneficios que este tipo de conocimiento aporta a la hora de enseñar matemáticas, tales como ser de ayuda en la toma de decisiones sobre el procedimiento más adecuado para una determinada situación, promover una mayor flexibilidad en la resolución de problemas y permitir valorar la solución encontrada (Crooks y Alibali, 2014). Uno de los temas de discusión en investigación en educación matemática en torno al conocimiento conceptual es la forma de evaluarlo. Castro, Prat y Gorgorió (2016) y Crooks y Alibali (2014) indican que se puede evaluar a través de indicadores de conocimiento conceptual explícito o implícito. Entre las tareas que permiten evaluar el conocimiento conceptual explícito los autores, tras una revisión de la literatura en relación a este tema, señalan la explicación de conceptos, en particular, la definición de conceptos matemáticos (Crook y Alibali, 2014). Por otra parte, la aplicación de procedimientos, la evaluación de procedimientos así como la evaluación, clasificación e identificación de ejemplos relativos a un concepto concreto son tareas que permiten evaluar el conocimiento implícito (Crooks y Alibali, 2014). Otra de las tareas que ha sido defendida como válida para la evaluación del conocimiento conceptual implícito es la generación de ejemplos por parte de los estudiantes (Waywook, 1992; Abdul-Rahman, 2005; Zaskis y Leikin 2007, 2008; Goldenberg y Mason, 2008).

A lo largo de esta investigación nos centramos en dos tareas específicas: la generación de ejemplos y la definición de conceptos matemáticos, ambas por parte de los estudiantes.

Watson y Mason (2002) señalan que el concepto de ejemplo incluye cualquier cosa utilizada como materia prima que sirva para poder intuir relaciones y para desarrollar el razonamiento inductivo. Pueden ser ejemplos: ilustraciones de conceptos y principios, siendo un concepto la representación mental de un objeto matemático, como es el caso de las ecuaciones, y un principio, una verdad que ha sido demostrada, una ley, como puede ser el caso del teorema del resto; contextos que ilustran o motivan un tema particular en matemáticas; y soluciones particulares donde varias son posibles. De un modo general señalan que los ejemplos deben ser vistos dentro de un contexto dado. A lo largo de este estudio nos restringimos a los que Watson y Mason (2005) denominan ejemplos de conceptos y principios.

El uso de ejemplos en educación matemática ha sido ampliamente reconocido tanto desde fuentes antiguas como nuevas (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson and Zaslavsky, 2006). Zazkis y Leikin (2007) reconocen dos intereses diferenciados del uso de ejemplos en la educación matemática: el primero para la enseñanza y diseño de materiales didácticos y el segundo para la investigación en educación matemática. El primero de estos ha sido largamente discutido (Watson y Mason, 2005; Zhu and Simon, 1987; Leinhardt, 1993). El segundo de los intereses mencionados es el que consideramos en este trabajo: la generación de ejemplos por parte de los estudiantes es una poderosa herramienta de investigación que aporta una “ventana” hacia la mente de los estudiantes (Zazkis y Leikin, 2007).

La actividad de generar ejemplos por parte de los estudiantes va en línea con la invención de problemas por los mismos, en el sentido de que son actividades que invierten el orden usual de la actividad matemática en el aula, ya que normalmente tanto los ejemplos como los problemas son propuestos por profesionales, ya sean profesores, libros de texto etc., y no por los estudiantes (Brown y Walter, 1990). Watson y Mason (2005) defienden que cuando los estudiantes generan sus propias representaciones, preguntas y problemas muestran su conocimiento matemático más profundamente que cuando se les dan tareas preparadas. En la misma línea Abdul-Rahman (2005) señala que el conocimiento conceptual puede ser considerado no solo como la habilidad de utilizar el conocimiento de algo para resolver problemas rutinarios correctamente, sino, de forma más importante, como el acto de extender dicho conocimiento de forma adecuada a situaciones que no nos son familiares, como es el caso de la generación de ejemplos.

Dentro de la tarea de generar ejemplos por parte de los estudiantes, Watson y Mason (2005) señalan que los ejemplos que estos producen emergen de un pequeño grupo de ideas que simplemente aparecen en respuesta a una tarea particular y en una situación particular. Así, muestran que el proceso de ejemplificación es individual, entendido como dependiente del conocimiento y de la experiencia del estudiante, y situacional, ya que está enmarcado por las circunstancias en las que se presenta ese conocimiento. Al grupo de ejemplos que una persona posee como resultado de su experiencia lo llaman "espacio de ejemplos" y le reconocen las siguientes características: 1) es dinámico, puede desarrollarse y cambiar; 2) tiene una estructura interna; 3) su estructura es personal. Así mismo distinguen, entre la cantidad de ejemplos que pueden existir en la mente de una persona, el "espacio de ejemplos accesible", definido como el conjunto de ejemplos que vienen a la mente del estudiante en un determinado momento. Este depende de muchos factores incluyendo el contexto, el desencadenante y el estado del individuo.

Dentro del espacio de ejemplos que puede generar un estudiante sobre un concepto determinado, Watson y Mason (2005) utilizan el término "dimensiones de variación posibles" para referirse a las características de un ejemplo que los estudiantes reconocen como susceptibles de cambio sin perder su ejemplaridad. Diferentes personas en diferentes momentos pueden percatarse de diferentes dimensiones que pueden variar. Así mismo el hecho de reconocer estas características por parte de los estudiantes puede no ser inmediato, pero es una actividad que puede desencadenar el profesor. Asociado con cada dimensión está el “rango de cambio permisible” que da cuenta del alcance del cambio posible en cualquiera de las dimensiones.

Goldengerg y Mason (2008) defienden que las dimensiones de variación posibles en los ejemplos pueden ayudar a los estudiantes a distinguir elementos esenciales de los que no lo son, si el rango de variación permisible de dichos elementos está bien seleccionado. Los citados autores, así como Abdul-Rahman (2005), señalan que el hecho de que los estudiantes sean capaces de identificar las características de un objeto que hacen que sea un ejemplo y cuáles de esas características pueden variar sin que el objeto pierda la ejemplaridad, informa sobre el conocimiento conceptual que poseen de un concepto matemático. Esta tarea de buscar elementos comunes en un objeto matemático que hacen que sea un ejemplo del mismo es lo que Zaslavsky (2008) describe como comparar y contrastar objetos que tengan algunas características en común, pero que al mismo tiempo difieran en relación con otros aspectos. Este autor señala que la búsqueda de diferencias y similitudes permite identificar maneras de pensar y grados en los que los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos.

En cuanto a la definición de conceptos matemáticos, Zazkis y Leikin (2008) señalan que juega un papel fundamental tanto en el enfoque de enseñanza, como en la secuencia de aprendizaje de dichos conceptos por parte de los estudiantes.

Relacionando el proceso de la generación de ejemplos con la definición de conceptos, Goldenberg y Mason (2008) mantienen que las definiciones funcionan como generalización o abstracción que emerge a través de la experiencia particular. En este caso, las definiciones que proponen los estudiantes están relacionadas con los ejemplos que ellos mismos generan. Solicitar a los estudiantes la definición de un concepto matemático tras la observación de ejemplos de dicho concepto lleva implícito un proceso de generalización intuitiva (Bills y Rowland, 1999) que puede ayudar a los estudiantes a dar muestra del conocimiento conceptual explícito de un concepto matemático que han adquirido. La idea de la generalización a través de la observación de ejemplos también es tratada por Abdul-Rahman (2005) quien señala que los diferentes ejemplos revelan que aunque algunas cosas varíen, otras se mantienen, así el hecho de generar ejemplos puede no solo enriquecer el espacio de ejemplos de un individuo, si no también dar una oportunidad a los estudiantes de explorar la estructura de los conceptos en términos de relaciones entre elementos, y de esta forma revelar su sentido de la generalidad.

Ecuaciones

El concepto de ecuación es definido de diferentes formas. Mostramos las diferentes definiciones de ecuación dadas por varias fuentes:

- Construcción central del álgebra que impregna todas las ramas de las matemáticas. “Las ecuaciones algebraicas se caracterizan como <expresión algebraica> = <expresión algebraica>” (Arcavi, Drijvers y Stacey, 2017, p.14), definiendo una expresión algebraica como “una combinación de números, letras y signos de operaciones bien estructurada de acuerdo con las reglas de la sintaxis algebraica” (p.13).

- “Es una declaración matemática que afirma que dos o más cantidades son las mismas unas que otras, también llamadas igualdad, fórmula o identidad” (Wolfram MathWorld, 2015; citado por Arcavi et al, 2017).

- Una afirmación, normalmente escrita con símbolos, que muestra la igualdad entre dos cantidades o expresiones algebraicas e.g., $x + 3 = 5$. Una ecuación numérica es aquella que contiene solo números. Una ecuación literal es la que contiene algunas letras (representando incógnitas o variables). Una ecuación identidad es una ecuación literal válida para cualquier valor de la variable. Una ecuación condicional (normalmente nombrada como ecuación) es una ecuación literal que no es verdadera para todos los valores de la variable. (Diccionario libre, 2003-2015, citado por Arcavi et al., 2017).

- Es una fórmula de la forma $A=B$, donde A y B son expresiones que deben contener varias variables llamadas incógnitas, y el signo = denota una relación de igualdad binaria. Aunque escrita en forma de proposición, una ecuación no es una afirmación que es verdadera o falsa, pero un problema consiste en encontrar las variables, llamadas soluciones, que, cuando se sustituyen por las incógnitas, alcanza el mismo valor en la expresión A y B. (Wikipedia, 2015; citado por Arcavi et al, 2017).

- Una fórmula que afirma que dos expresiones tienen el mismo valor. Una ecuación identidad (normalmente llamada una identidad) es aquella que es cierta para cualquier valor de las variables. Una ecuación condicional es aquella que es cierta solo para ciertos valores de las variables (Borowski y Borwein, 1989).

- "Es una afirmación matemática, dada en símbolos, que dice que dos objetos compatibles son los mismos o equivalentes (Tossavainen, Attorps y Väisänen, 2011, p.2).

Cada una de las definiciones consultadas enfatiza un matiz diferente del concepto de ecuación. Algunas de las definiciones caracterizan las ecuaciones como problemas a resolver o como preguntas a la espera de una respuesta como señalan Arcavi, Drijvers y Stacey (2017). Según este punto de vista, las ecuaciones no son, en sí las mismas, verdaderas o falsas, sino más bien una invitación a buscar los valores que deben sustituirse por las letras de tal manera que la igualdad se mantenga. Otras definiciones se centran en la distinción entre igualdad y ecuación condicional.

A partir de las ideas de Zazkis y Leikin (2008) sobre el papel fundamental que juega la forma en la que las definiciones de un concepto matemático se presentan a los estudiantes, hemos realizando una revisión de las unidades de álgebra de 21 libros de texto de todos los niveles de educación secundaria y de varias editoriales. Las definiciones que dan 10 de estos libros las podemos sintetizar como: una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas (Sánchez y López, 1999; Corbarán et al. 2003 (bis); Frías, Molero, Salvador y Zuasti, 2007; Vizmanos, Anzola, Peralta y Bargueño, 2008; Vizmanos, Anzola, Mansilla y Bujanda, 2010; Álvarez et al., 2010; Celma et al., 2010; Colera, Gaztelu y Colera 2016; Colera, Gaztelu y Oliveira, 2016). Los 11 libros restantes dan una definición equivalente a: igualdad entre expresiones algebraicas que se verifica únicamente para ciertos valores de las letras (Almodóvar, García, Gil y Nortes, 1997; Álvarez et al., 2007; Colera, Martí, Polo, Salvador y Solanes, 2007; Uriondo, 2007; Vizmanos, Anzola, Alcaide y Peralta, 2008; Arias y Maza, 2010; Bartomeu, Capella, Besora, Jané y Guiteras, 2011; García, 2011; Maragallo, 2011; Albertí et al., 2012; Colera, Gaztelu y Colera, 2016). La expresión "igualdad entre expresiones algebraicas" es sustituida en cinco de los libros consultados por "igualdad algebraica" y en siete libros por "igualdad entre números y letras". La forma en la que los libros consultados definen expresión algebraica difiere en unos de otros pero 17 de las definiciones tienen en común los términos: números, letras y operaciones aritméticas. La excepción son tres definiciones de expresión algebraica que se centran en el proceso de traducción al lenguaje algebraico: "las expresiones algebraicas surgen al traducir al lenguaje matemático situaciones en las que aparecen datos desconocidos o indeterminados que se representan por letras" (Colera, Gaztelu y Colera, 2016, p. 172), "una expresión algebraica es la forma de describir matemáticamente una situación, enunciado u operación matemática en lenguaje algebraico" (García, 2011, p. 135) y "una expresión algebraica es la que se obtiene al traducir al lenguaje algebraico los términos de un problema" (Colera, Gaztelu y Oliveira, 2016, p. 84). Uno de los libros consultados no proporciona una definición de expresión algebraica.

Teniendo en cuenta las definiciones consultadas, a pesar de que no hay un consenso en la investigación en la definición del concepto ecuación, y que a lo largo de este trabajo nos centramos en el concepto de ecuación fuera del contexto de la resolución de problemas, adoptamos una definición de ecuación que abarca la proporcionada por todos los libros de texto consultados: una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas (letras, números y operaciones) que se verifica para ciertos valores de las letras.

7.3 ESTUDIOS PREVIOS

En el campo de la investigación en educación matemática numerosos estudios abordan el conocimiento conceptual que han adquirido los estudiantes sobre las ecuaciones. La mayor parte de estas investigaciones se centran en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico, característico de las ecuaciones, que han adquirido los estudiantes en determinadas etapas de su formación. Este es el caso de, por ejemplo, de Küchemann (1981), Furinghetti y Paola (1994), Booth (1984), Filloy, Rojano y Puig (2008), Arnau y Puig (2013), Usiskin (1988), Bills (2001), Álvarez y Gómez-Chacón (2015), Resnick, Marmeche y Mathieu (1987), Molina, Rodríguez-Domingo, Cañadas y Castro (2016), Fernández-Millán y Molina (2016, 2017).

Aproximándonos más a nuestro trabajo de investigación, nos centramos en estudios que tratan el conocimiento conceptual del concepto ecuación de forma general, sin atender de forma específica a las características del simbolismo algebraico. Hallamos por un lado estudios que versan sobre qué estrategias o métodos de enseñanza pueden ayudar a la adquisición de dicho conocimiento conceptual de las ecuaciones: Rittle-Johnson y Star (2007, 2009), Rooss y Willson (2012), Chalouh y Herscovics (1988), Herscovics y Kieran (1980). Por otro lado, y en consonancia con nuestro problema de investigación, encontramos estudios que se centran en el conocimiento conceptual adquirido por estudiantes de secundaria del concepto de ecuación. Filloy y Rojano (1989) identifican obstáculos conceptuales en el paso de operar con ecuaciones que tienen una incógnita a un lado del signo igual, a ecuaciones con incógnitas a ambos lados del signo igual. Para trabajar con este segundo tipo de ecuaciones el estudiante ha de entender que las expresiones en ambos miembros son de la misma naturaleza y deben dar significado a la igualdad de las expresiones, lo que en el marco de la enseñanza tradicional de las ecuaciones requiere de instrucción específica según los citados autores. Caprano y Joffrion (2006) realizan un estudio con estudiantes de secundaria en el que indagan en su conocimiento conceptual de las ecuaciones a través de dos tareas multi-respuesta en las que se les pide la traducción del sistema de representación verbal al simbólico. En este estudio concluyen que el hecho de ser capaz de aplicar el conocimiento existente a una nueva situación, da muestra de la adquisición de conocimiento conceptual. Señalan la importancia de desarrollar el conocimiento conceptual en las clases de matemáticas y la relevancia del vocabulario en el desarrollo del mismo.

Dentro de los estudios que utilizan las definiciones de conceptos matemáticos y la generación de ejemplos, ambas actividades realizadas por estudiantes, para la evaluación del conocimiento conceptual de un determinado concepto no hemos encontrado ninguno que aborde el conocimiento conceptual del concepto de ecuación adquirido por los estudiantes de secundaria. Si encontramos estudios que utilizan estas tareas para evaluar el conocimiento conceptual de otros conceptos matemáticos como son los casos de Zazkis y Leikin (2007 y 2008), Abdul-Rahman (2005) y Rowland (2008).

7. 4 ESTUDIO EMPÍRICO

En este artículo abordamos el objetivo de investigación ya planteado y que recordamos: analizar el conocimiento conceptual del concepto de ecuación que han adquirido un grupo de estudiantes como resultado de su formación durante la ESO. Para ello realizamos entrevistas individuales a estudiantes de cuarto de ESO en las que les solicitamos que generen ejemplos de ecuaciones y definan el concepto de ecuación. Acotamos el problema de investigación por medio de los siguientes objetivos específicos:

1) Analizar el conocimiento conceptual implícito del concepto de ecuación a partir de la generación de ejemplos por los estudiantes.
2) Analizar el conocimiento conceptual explícito del concepto de ecuación.

Sujetos participantes

La muestra de estudiantes considerada fue intencional, dada su disponibilidad. La constituyen 20 estudiantes de cuarto de ESO de un instituto público, matriculados en la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. El grupo está compuesto por 13 chicos y siete chicas, cuyas edades están comprendidas entre los 15 y 16 años, a excepción de un estudiante que tiene 17 años. No hay repetidores del curso 4º de ESO en el grupo. Hay un alumno tiene las matemáticas pendientes del curso anterior pero en el momento de la recogida de datos para este estudio, ya había realizado y superado las pruebas necesarias para la recuperación de dicha asignatura. Dos estudiantes tienen un razonamiento lógico por encima de la media del grupo en la resolución de problemas, aun así, el nivel grupal de rendimiento en la asignatura de matemáticas se puede calificar de medio. La asistencia a clase de los estudiantes es regular. Respecto a su conocimiento previo sabemos que desde el primer curso de la ESO han trabajado con la resolución de ecuaciones y problemas relacionados, comenzando por ecuaciones de primer grado con una incógnita y, posteriormente, con ecuaciones de segundo y tercer grado, bicuadradas, con radicales, con fracciones y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales con dos incógnitas. Cuando se realizó la recogida de datos, último trimestre del curso escolar, habían concluido el trabajo en el aula de los contenidos relativos al álgebra propios de la etapa de la educación secundaria obligatoria.

Diseño del instrumento

La recogida de datos consistió en entrevistas individuales semiestructuras de aproximadamente 30 minutos de duración que fueron grabadas en audio. Fueron realizadas por la primera autora de este trabajo, que era su profesora de matemáticas.

La entrevista consta de dos tipos de tareas que, como se ha descrito previamente, han sido defendidas por diferentes autores como válidas para indagar en el conocimiento conceptual de un concepto matemático: definición y generación de ejemplos. Dentro de esta última se incluye la búsqueda de diferencias y de similitudes entre los ejemplos. En la tabla 7.1 se muestran las ocho tareas que componen la entrevista, en el orden en que fueron presentadas a los estudiantes.

Tabla 7.1. *Relación entre tareas y tipo de tarea*

Número de tarea	Tarea (redacción aproximada)	Tipo de tarea
1	Intenta definir con tus palabras qué es para ti una ecuación.	Definición
2	Pon un ejemplo de una ecuación (ejemplo 1).	Generación de ejemplos
3	Por un ejemplo de una ecuación que sea diferente al ejemplo 1 (ejemplo 2).	Generación de ejemplos
4	Di al menos una cosa que haya diferente entre los ejemplos 1 y 2.	Búsqueda de diferencias entre ejemplos
5	Pon varios ejemplos de ecuaciones en los que varíe el *elemento*[8] que has dicho anteriormente.	Generación de ejemplos
6	¿Qué valores puede tomar el elemento que ha variado?	Búsqueda de similitudes entre ejemplos
7	Observa todos los ejemplos que has generado, todos ellos son muy diferentes entre sí pero tienen elementos en común que hace que sean ecuaciones, indica cuáles son esos elementos.	Búsqueda de similitudes entre ejemplos
8	Teniendo en cuenta todos los elementos que acabas de decir, intenta mejorar la definición de ecuación que has dado anteriormente.	Definición

La tareas de la 2 a la 6 permiten abordar el primer objetivo de este trabajo, indagar en el conocimiento conceptual implícito del concepto de ecuación. Estas tareas son planteadas oralmente pero resueltas de forma escrita por los estudiantes. Esta parte de la entrevista es semiestructurada. Seguimos una metodología basada en una práctica de indagación, en

[8] En la entrevista con los estudiantes sustituimos la palabra elemento por la diferencia entre los dos ejemplos reconocida en cada momento por los estudiantes: grado, número de términos, número de incógnitas, coeficiente, operación con la incógnita, miembro derecho de la ecuación y término independiente.

términos de Szydlik (2015), que consiste en escuchar, confrontar y cuestionar los planteos de los estudiantes.

Las tareas 2 y 3 consisten en la generación por los estudiantes de dos ejemplos diferentes de ecuaciones. Únicamente hay intervención por parte de la investigadora en el caso de que propongan ejemplos de expresiones que no se corresponden con una ecuación por estar incompletas (e.g., $3x^2 + 4x + 2$), sugiriéndoles que revisen el ejemplo para subsanar su error, con preguntas tales como: *¿Estás seguro/a de que el ejemplo que propones se corresponde con una ecuación?* Pero sin decirles de forma explícita que el ejemplo que proponen no es una ecuación

La tarea 4 tiene como objetivo que los estudiantes identifiquen las dimensiones de variación posibles a partir de la búsqueda de diferencias entre los dos ejemplos generados previamente. Las tareas 5 y 6 van dirigidas a indagar en el rango de variación permisible, a partir de la generación de nuevos ejemplos y de la búsqueda de similitudes entre ellos. Estas tres tareas se repiten varias veces a lo largo de cada entrevista, siempre refiriéndose a elementos que ellos identifiquen como diferentes en sus dos primeros ejemplos. El objetivo es que identifiquen características de las ecuaciones susceptibles de variar y que hacen que los ejemplos propuestos por los mismos sigan siendo ecuaciones.

A lo largo de la entrevista se induce a los estudiantes a que busquen diferencias estructurales entre las ecuaciones, dejando a un lado otro tipo de diferencias como la forma de resolver las ecuaciones o el número de soluciones que tengan. De este modo se pretende que los estudiantes generen el mayor número de ejemplos posibles con las mayores variaciones posibles y no se limiten a proponer ejemplos que les resulte fácil resolver.

En la entrevista los estudiantes tienen libertad para la generación de ejemplos. Zazkis y Leikin (2007) ponen de manifiesto la necesidad de controlar la forma en la que requiere a los estudiantes que generen ejemplos, con el objetivo de hacer inferencias sobre el conocimiento de los estudiantes a partir de dichos ejemplos. La investigadora que dirige la entrevista presenta oportunidades para que lleven a cabo esta actividad a través de solicitar "otro y otro" o "algo diferente", tareas definidas por Watson y Mason (2005), las cuales animan que los estudiantes reflexionen sobre su primer ejemplo y busquen en una dirección diferente.

Las tareas 1, 7 y 8 permiten indagar en el conocimiento conceptual explícito, segundo objetivo de esta investigación. Estas tareas son preguntas cerradas, planteadas y resueltas de forma oral, sin intervención adicional por parte de la investigadora, la cual se limita a preguntar y a escuchar las respuestas de los estudiantes. Las tareas 1 y 8 hacen al estudiante la misma demanda: formular una definición del concepto de ecuación. La tarea 7 solicita al estudiante que busque similitudes entre los ejemplos generados en las tareas previas para llegar a identificar las características de los ejemplos planteados que hacen que todas las expresiones sean ecuaciones.

7.5 ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

En primer lugar atendemos al análisis de los datos relativos a la generación de ejemplos por los estudiantes (tareas 2 a 6). Distinguimos las dimensiones de variación posibles y el rango de cambio permisible para cada una de ellas. Esa primera parte del análisis va dirigida a dar respuesta al primer objetivo de investigación. Posteriormente nos centramos en las respuestas que dan los estudiantes a las tareas 1, 7 y 8, relativas a la definición del concepto de ecuación y que nos permiten abordar el segundo objetivo de investigación.

Dimensiones de variación y rango de cambio permisible

Para el análisis de los datos, partimos de los contenidos relativos a ecuaciones establecidos en el RD 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato: ecuaciones de primer grado con una incógnita, ecuaciones de segundo grado con una incógnita, sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de grado superior a dos. A partir de los mismos, hemos revisado las unidades de álgebra de los 21 libros de texto indicados anteriormente ESO para identificar qué características de las ecuaciones varían en los ejemplos y ejercicios de ecuaciones propuestos. Encontramos ocho dimensiones de variación posibles, cuyos rangos de variación permisibles paras las ecuaciones mostramos entre paréntesis: coeficiente (números reales); término independiente (números reales); miembro derecho de la ecuación (números y expresiones algebraicas); operación con la incógnita (suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíces); presencia de paréntesis; grado (números naturales); número de incógnitas (un número finito); número de términos (un número finito).

Como respuesta a la cuarta pregunta de la entrevista, los estudiantes identifican siete elementos susceptibles de variar en las ecuaciones: grado (18 estudiantes), número de términos (16 estudiantes), número de incógnitas (cinco estudiantes), coeficiente (15 estudiantes), operación de la incógnita (14 estudiantes), miembro derecho de la ecuación (14 estudiantes) y término independiente (ocho estudiantes). Además de identificar estas siete dimensiones de variación posible, los estudiantes son capaces de proponer ejemplos de ecuaciones en las que varía cada uno de los elementos y todas ellas guardan la ejemplaridad de ecuaciones. A través de las tareas de la 2 a 6, cada estudiante genera entre nueve y 23 ejemplos correctos de ecuaciones, siendo la media de 16 ejemplos por estudiante.

Grado

La mayoría de los estudiantes, 18 de 20, reconocen el grado como una de las diferencias entre los dos ejemplos de partida que ellos proponen. Los estudiantes son capaces de proponer ejemplos de ecuaciones con diferentes grados, que oscilan desde ecuaciones de primer grado hasta ecuaciones de grado 100. En la tabla 7.2 podemos observar los rangos de variación permisibles que los estudiantes asocian al grado de una ecuación tanto en los ejemplos que proponen como a la hora de verbalizarlos, así como las frecuencias de los mismos.

Tabla 7.2. *Frecuencias del rango de variación permisible para el grado de una ecuación*[9]

Tipo de respuesta	Naturales	Enteros	Racionales	Racionales positivos	Reales
Ejemplos	18	0	0	0	-
Verbalización	5	4	2	1	6

Número de términos y número de incógnitas

El número de términos es reconocido por 16 de los 20 estudiantes como una característica susceptible de variar en una ecuación. Proponen ejemplos de ecuaciones con un máximo de siete términos pero todos los estudiantes reconocen que las ecuaciones pueden tener infinitos términos. Un número más bajo de estudiantes, cinco en este caso, señalan que el número de incógnitas puede variar en una ecuación. Estos estudiantes proponen ejemplos de ecuaciones con hasta cinco incógnitas y a la hora de verbalizar el número de ellas que puede haber en una ecuación señalan que puede haber tantas como uno quiera. En este

[9] En las tablas 2, 3 y 5 las frecuencias de las respuestas en los ejemplos hacen referencia al menor conjunto numérico al que pertenecen los números.

sentido hay que tener en cuenta que se indica a los estudiantes que no es necesario que sepan resolver la ecuación.

Coeficiente

Otra de las diferencias entre los dos ejemplos iniciales que identifican 15 de los 20 estudiantes es el coeficiente. En la tabla 7.3 podemos observar los rangos de variación permisibles del coeficiente así como sus frecuencias.

Tabla 7.3. *Frecuencias del rango de variación permisible para el coeficiente de una ecuación*[2]

Tipo de respuesta	Naturales	Enteros	Racionales	Racionales positivos	Racionales menos el cero	Reales
Ejemplos	9	4	2	-	-	-
Verbalización	0	1	1	1	1	11

Mostramos los únicos ejemplos de ecuaciones con coeficientes enteros que proponen cuatro estudiantes: $3x^2 - 7x + 8 = 0, 2x^3 - 4x - 2 = 3$, $x^2 - 1x - 1 = 0$, $4x + 7 = -8x + 9$, $5x + -4x^2 = 7x - 8$, $6x - 17 = -20x + 100$ y $7x - 13x = 5$, así como aquellos con presencia de coeficientes racionales propuestos por dos estudiantes: $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0$, $\frac{3x}{666} = \frac{3x}{2}$.

Operación con la incógnita

La operación que vincula la incógnita con otros elementos de la ecuación es otra de las características que 14 de los 20 estudiantes identifican como susceptible de variar en las ecuaciones. Los estudiantes proponen ejemplos en los que están presentes las operaciones suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada y potencia, tal y como se puede observar en la tabla 7.4.

Tabla 7.4. *Frecuencias del rango de variación permisible para las operaciones con la incógnita*

Tipo de respuesta	Suma	Resta	Multiplicación	División	Raíz	Potencia
Ejemplos	10	9	12	12	10	8
Verbalización	14	10	14	13	12	3

Miembro derecho de la ecuación

De los 20 estudiantes 14 señalan el miembro derecho de la ecuación como una de las diferencias entre los dos ejemplos de partida. Cuando se les requiere que escriban ejemplos de ecuaciones en los que varíe esta característica, 5 de los 14 únicamente proponen ecuaciones con la estructura <expresión algebraica>=número, mientras que 9 estudiantes además de la mencionada, también proponen ejemplos con la estructura <expresión algebraica>=<expresión algebraica>. A la hora de verbalizar qué puede haber en el miembro derecho de una ecuación, 4 estudiantes identifican que solamente puede haber números y 10 señalan que además de números puede haber letras o expresiones algebraicas.

Término independiente

Menos de la mitad de los estudiantes, 8 de los 20, observan que el término independiente varía en los dos ejemplos de partida que ellos generan. Los rangos de variación y sus frecuencias se pueden observar en la tabla 7.5.

Tabla 7.5. *Frecuencia del rango de variación permisible para el término independiente*[1]

Tipo de respuesta	Naturales	Enteros	Racionales	Reales
Ejemplos	4	3	0	1
Verbalización	0	0	1	7

El único ejemplo de ecuación con término independiente irracional propuesto por un estudiante es: $3x + \sqrt{3} = 2y$.

Definiciones de ecuación

Para abordar el segundo objetivo de investigación, analizar el conocimiento conceptual explícito del concepto de ecuación, partimos de la definición de ecuación adoptada en este trabajo tras la revisión de los libros de texto: una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas (letras, números y operaciones) que se verifica para ciertos valores de las letras. A partir de esta definición seleccionamos las palabras mínimas de deben incluir las definiciones de los estudiantes para considerarlas correctas: expresión algebraica (letras, números y operaciones) e igualdad. En los casos en los que en dichas definiciones no estén incluidas todas estas palabras, consideraremos que son incorrectas. Obviamos en el análisis la expresión "ciertos valores de las letras", ya que a lo largo de la entrevista nos centramos en los elementos característicos de la estructura de la ecuación, dejando a un lado aspectos como la solución de la ecuación o la forma de resolverlas, tal y como se indicó en el diseño de la entrevista. A partir de ellas elaboramos la tabla 7.6 en la que mostramos la frecuencia con la que los estudiantes mencionan dichas palabras en sus respuestas a las tareas 1, 7 y 8.

Tabla 7.6. *Frecuencias de palabras clave en la definición de ecuación*

Palabras clave	Primera definición de ecuación	Elementos reconocidos como comunes en los ejemplos	Segunda definición de ecuación
Expresión algebraica	3	0	3
Letras/Incógnitas	17	20	20
Números	7	13	15
Operaciones	6	10	15
Igualdad	1	20	17

Analizamos en primer lugar las respuestas que dan los estudiantes a la definición de ecuación antes de generar los ejemplos, primera tarea de la entrevista. Teniendo en cuenta las palabras mínimas que están presentes en todas las definiciones de ecuación encontradas en los libros de texto, observamos que solamente tres estudiantes utilizan en sus definiciones el término expresión algebraica[10]. Diecisiete estudiantes, incluyendo dos de los que utilizaron la expresión algebraica, incluyen las letras o incógnitas en la definición y solamente siete mencionan explícitamente que en una ecuación tiene que haber números. En cuanto a las operaciones, o sus sinónimos (cuenta, expresión, expresión matemática o fórmula), son seis los estudiantes que las mencionan, mientras que el término igual o igualación únicamente es incluido por uno de los estudiantes en su definición: "Es una expresión algebraica igualada a cero que da unos resultados". Solamente este estudiante da una definición correcta de ecuación, algunos ejemplos de definiciones incorrectas proporcionadas por otros estudiantes son: "operación en que

[10] Entendemos que el término expresión algebraica lleva implícito la existencia de letras y números que se relacionan a través de signos que representan operaciones aritméticas.

intervienen unas incógnitas", "conjunto de incógnitas", "expresión algebraica que tiene incógnitas", "operación que tu hallas para descifrar una incógnita" o "conjunto de números y símbolos algebraicos, una expresión algebraica en la que hay varias incógnitas y que puede ser de primer, segundo y así de más grados".

Como respuesta a la tarea 7, en la que se les cuestiona por los elementos comunes que tienen los ejemplos que ellos han generado, todos identifican las incógnitas o letras y el signo igual o la igualación, 13 los números y 10 las operaciones. Solamente 6 de los 20 estudiantes identifican simultáneamente los cuatro elementos en su tarea de determinar los elementos comunes en todos sus ejemplos: incógnitas, números, operaciones y el signo igual.

Por último analizamos la definición que los estudiantes dan de ecuación como respuesta a la última tarea de la entrevista, tras analizar los elementos comunes que tienen todos los ejemplos que cada estudiante ha generado. Son 10 los estudiantes que incluyen en sus definiciones todas las palabras mínimas que consideramos necesarias para que la definición de ecuación sea correcta, mostramos algunas de ellas: "es aquella que posee una incógnita y que está igualada a cualquier número real, puede tener suma, resta, multiplicación y división", "una expresión algebraica que iguala entre sí dos expresiones y tiene una o varias incógnitas", "es una expresión algebraica igualada a algo, que tiene una incógnita y hay operaciones y hay diferentes grados", "es una expresión algebraica que puede tener varias incógnitas, términos independientes, igualadas a cero, puede tener varias operaciones y varios grados y pueden aparecer infinitos números reales", "es una operación matemática compuesta por una incógnita, coeficiente, puede tener término independiente, que se iguala a un número entero o natural y mediante esta operación se puede resolver la incógnita", "es un conjunto de números y letras que tienen unas características especiales entre ellas y comunes, que son: un grado, una incógnita, igualadas a una expresión, signos y operaciones". Los 10 estudiantes que dan definiciones incorrectas de ecuación incluyen las incógnitas en su definición, siete estudiantes incluyen los números y seis el signo igual y las operaciones, mostramos algunos ejemplos: "es una operación con números, letras e incógnitas, que son las letras. A través de esas operaciones tenemos que averiguar la incógnita", "es un cálculo de números naturales, enteros o racionales que pueden tener una incógnita o más" o "algo que tu igualas a otra cosa, una incógnita que igualas a un número"

7.6 DISCUSIÓN

El análisis de los datos realizado a través de la identificación de las dimensiones de variación posibles y de sus rangos de variación permisibles de los ejemplos generados por el grupo de estudiantes permite dar respuesta al primer objetivo de investigación, obteniendo así información sobre el conocimiento conceptual implícito que estos han adquirido del término de ecuación. El segundo objetivo de investigación, analizar su conocimiento conceptual explícito del mismo término, es abordado a través del análisis de las palabras clave incluidas en las definiciones que dan los estudiantes del término de ecuación antes y después de generar los ejemplos.

Comenzamos la discusión de los resultados por el primer objetivo de investigación. Los resultados ponen de manifiesto que los estudiantes son capaces de proponer un gran número de ejemplos correctos de ecuaciones que varían entre sí en diferentes elementos, dimensiones de variación posibles, que ellos mismos son capaces de verbalizar de forma adecuada. Identifican siete elementos como susceptibles de variar en las ecuaciones que coinciden con siete de las ocho detectadas en el análisis de los libros de texto. La presencia o no de paréntesis es la única característica que varía en las ecuaciones presentes en los libros de texto desde primero a cuarto de ESO y que ningún estudiante verbaliza, a pesar de ello cinco estudiantes proponen ejemplos de ecuaciones con y sin paréntesis. Si nos centramos en los rangos de variación permisibles para cada una de las dimensiones, observamos que, excepto en el número de términos y el número de incógnitas, los estudiantes muestran dificultades a la hora de identificar los diferentes rangos tanto cuando se les cuestiona al respecto como cuando generan ejemplos. Aunque señalan que una ecuación puede tener infinitos términos, interpretamos que los estudiantes son conscientes de que una ecuación debe tener un número de términos finito, y con la palabra infinito hacen referencia a muchos.

En el caso del grado de la ecuación todos los estudiantes proponen ejemplos correctos con diferentes grados que se corresponden con números naturales. A pesar de que indicamos a los estudiantes que no es necesario que sepan resolver las ecuaciones, este conjunto numérico es el único válido para el grado de una ecuación en el caso de ecuaciones polinómicas, aun así cuando se demanda a los estudiantes que identifiquen qué valores puede tomar el grado de una ecuación, solamente cinco de ellos identifica este conjunto numérico como el único válido y señalan que se puede corresponder con números enteros, racionales o reales. Este hecho puede estar relacionado con que los estudiantes no son capaces de precisar la restricción que tiene el exponente de una incógnita en el contexto de las ecuaciones, identificando así que el grado de una ecuación puede ser cualquier número que se pueda poner como exponente en una potencia.

En los casos del coeficiente y del término independiente los estudiantes muestran mayores dificultades en proponer ejemplos que difieran en estos elementos que en verbalizar los posibles valores que pueden tomar. La mayoría de los estudiantes proponen ejemplos correctos de ecuaciones en los que los coeficientes y los términos independientes se corresponden mayoritariamente con números naturales o enteros (13 de 15 estudiantes para el coeficiente y siete de ocho para el término independiente), y en escasas ocasiones con otro tipo de números (dos estudiantes proponen ejemplos con coeficientes racionales y un estudiante con el término independiente irracional). Sin embargo, a la hora de verbalizar qué conjuntos numéricos se pueden asociar a estas dos dimensiones, la mayoría de los estudiantes (11 de 15 para el coeficiente y 7 de 14 para el término independiente) señalan que pueden tomar cualquier valor que se corresponda con un número real. Consideramos que este hecho está relacionado con que la mayor parte de los ejemplos y ejercicios relativos a ecuaciones presentes en los libros de texto consultados utilizan coeficientes y términos independientes que se corresponden con números enteros. De hecho al preguntar por los posibles valores que puede tomar el coeficiente de una ecuación, una alumna señala “puede ser cualquier número pero he puesto ejemplos con naturales porque al final son a los que más acostumbrados estamos”.

En cuanto al miembro derecho de la ecuación, de los 14 estudiantes que identifican este elemento como susceptible de variar en una ecuación, la mayoría verbalizan y proponen ejemplos de ecuaciones en los que en el miembro derecho de la ecuación hay presencia tanto de letras como de expresiones algebraica (10 y nueve estudiantes respectivamente). A pesar de ello en la mayoría de los ejemplos propuestos por los estudiantes para este elemento, 41 de los 53, en el miembro derecho de la ecuación hay únicamente un número. Molina (2007) señala que el uso más reconocido del signo igual en aritmética es unidireccional siendo utilizado para conectar el cálculo a realizar con su resultado numérico y en álgebra el signo igual tiene un significado bidireccional conectando dos expresiones que son iguales, en el caso de las ecuaciones, para ciertos valores de la variable o variables. El resultado obtenido nos lleva a pensar que los estudiantes extienden el significado aritmético más reconocido del signo igual al álgebra. En este sentido, cuando en la entrevista preguntamos por diferencias que hay entre las dos ecuaciones de partida indican "el resultado" en lugar del miembro derecho de la ecuación.

La operación que vincula la incógnita con otros elementos de la ecuación es el último elemento que los estudiantes consideran susceptible de variar en las ecuaciones. No hay grandes diferencias entre los ejemplos generados por los estudiantes y lo que verbalizan al respecto ya que en ambas ocasiones se incluyen las mismas operaciones. La operación potencia es la que los estudiantes verbalizan en menor medida, esto podría ser debido a que los estudiantes interpreten el hecho de que una incógnita esté elevada a un número como relacionado únicamente con el grado de una ecuación y no como una operación que está realizando la incógnita, o bien porque al ser la potencia una multiplicación repetida, cuando verbalizan esta operación incluyan de forma implícita la potencia.

Nos centramos ahora en el conocimiento conceptual explícito que ponen de manifiesto los estudiantes cuando se les solicita que den una definición de ecuación. Si tenemos en cuenta las respuestas a la primera tarea de la entrevista, observamos que únicamente un estudiante da una definición correcta, aun así esta definición hace referencia a un tipo particular de ecuación, <expresión algebraica> = 0, la cual no cumple uno de los principios lógicos que debe cumplir la definición de un concepto matemático establecidos por Zazkis y Leikin (2008) quienes señalan que una definición tiene que establecer las condiciones necesarias y suficientes del concepto. Tal y como hemos comentado al inicio de la discusión, las tareas posteriores animan a los estudiantes a proponer un gran número de ejemplos y todos ellos son correctos. Tras la generación de ejemplos los estudiantes son capaces de dar respuesta a la penúltima tarea de la entrevista, verbalizando los elementos comunes que tienen todos ellos. La observación de estos elementos comunes permite a los estudiantes dar definiciones más completas del concepto ecuación en la última tarea de la entrevista, lo que les ayuda a mostrar de forma explícita el conocimiento que poseen del término ecuación. A pesar de que 10 de los 20 estudiantes dan definiciones correctas de ecuaciones, solamente seis de ellos son capaces de construir una definición general de ecuación equivalente a <expresión algebraica> = <expresión algebraica>. Este hecho puede ser resultado de que la mayor parte de los ejemplos que construyen los estudiantes en este estudio se corresponden con la estructura <expresión algebraica> = número, y es a partir de la observación de dichos ejemplos cuando construyen una nueva definición de ecuación. Podemos identificar estos ejemplos con lo que Tsamir, Tirosh y Levenson (2008) denominan ejemplos prototipo, dentro de un conjunto de ejemplos estos se aceptan intuitivamente como representante del concepto, sin embargo estas cogniciones intuitivamente aceptadas pueden causar obstáculos ya que pueden conducir a menudo a una imagen conceptual limitada. Es por ello que tras la observación de ejemplos con la estructura <expresión algebraica> = número, los estudiantes muestran limitaciones a la hora de dar muestra del conocimiento conceptual explícito del término ecuación.

Analizando simultáneamente los dos tipos de conocimiento objetivo de esta investigación del término ecuación, implícito y explícito, podemos deducir que el hecho de que este grupo de estudiantes identifique las siete dimensiones de variación posibles mencionadas, y sea capaz de proponer varios ejemplos de ecuaciones para cada uno de ellos, muestra la riqueza del "espacio de ejemplos accesible" que los estudiantes tienen relativos al concepto de ecuación. Teniendo en cuenta las ideas de Goldenberg y Mason (2008) y Adbul-Rahman (2005) podemos deducir que poseen un conocimiento conceptual implícito adecuado de dicho concepto, si bien el hecho de ejemplificar o verbalizar los rangos de variación permisibles de algunas de las dimensiones de variación de los diferentes ejemplos propuestos por ellos mismos, hacen aflorar algunas debilidades de dicho conocimiento. En este sentido cabe destacar que ninguno de los libros de texto consultados precisa de forma explícita qué rangos de variación permisibles son válidos para las dimensiones de variación posibles, por lo que es un conocimiento que los estudiantes han debido abstraer a partir de su trabajo con ecuaciones desde el primer curso de ESO y que fortalece la idea de que los estudiantes dan muestra de haber adquirido un buen conocimiento conceptual implícito del término ecuación. Las limitaciones detectadas en el conocimiento conceptual explícito de los estudiantes pueden estar en parte motivadas por limitaciones en su competencia lingüística como se ha argumentado en otros estudios previos (Fernández-Millán y Molina, 2017) o falta de experiencia definiendo conceptos.

7.8 CONCLUSIÓN

Este trabajo es una continuación de dos publicaciones anteriores (Fernández-Millán y Molina, 2016 y 2017). En estos tres trabajos indagamos en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico característico de las ecuaciones así como del concepto de ecuación como un todo. Los resultados de estos estudios muestran que la formación obligatoria en álgebra tiene potencial para el desarrollo de un adecuado conocimiento conceptual en lo que a simbolismo algebraico y ecuaciones se refiere, aunque se requiere algo más de trabajo centrado en aspectos semánticos del álgebra y en el desarrollo de la competencia lingüística de los estudiantes.

Se vuelve a ratificar con este trabajo la utilidad constatada en investigaciones previas de la generación de ejemplos, por parte de los estudiantes, para la evaluación del conocimiento conceptual implícito de conceptos matemáticos, así como para ayudar al proceso de generalización empírica de los estudiantes. Respecto de la tarea de definir conceptos matemáticos por parte de los estudiantes con el objetivo de evaluar su conocimiento conceptual explícito previamente a la generación de ejemplos, es importante tener en cuenta las consideraciones de Crooks y Alibali (2014) quienes sugieren que al requerir una verbalización explícita pueden subestimar el conocimiento conceptual, ya que los participantes pueden tener algún conocimiento conceptual que no está suficientemente avanzado como para poder expresarlo en palabras.

Como posibles vías de continuidad a este trabajo, planteamos corroborar los resultados obtenidos relativos a la limitación de los estudiantes a la hora de generar ejemplos de ecuaciones con mayor diversidad de conjuntos numéricos. Para ello, relacionado con la utilizad de los ejemplos en educación matemática, sugerimos que se podría proporcionar a un grupo de estudiantes una seria de ejemplos y de no-ejemplos de ecuaciones en los que esté presente esa variabilidad de conjunto numéricos para que ellos identifiquen y justifiquen si se corresponden o no con ecuaciones.

Desde el punto de vista de la docencia, las deficiencias detectadas en cuanto a la presencia de números diferentes de los naturales, en coeficientes y términos independientes de ecuaciones, tanto en los ejemplos generados por los estudiantes como en los libros de texto consultados, informan para el diseño de propuestas didácticas que busquen la riqueza numérica en la realización de ejercicios y propuesta de ejemplos en el aula. Del mismo modo se requiere un mayor trabajo de la competencia lingüística de los estudiantes que les permita definir conceptos matemáticos con precisión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdul-Rahman, S. (2005). Learning with examples and students' understanding of integration. En A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference of Mathematics Education into the 21st Century Project on "Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education*. Johor Bahru: UTM.

Albertí, M., Aragoneses, A., Bancells, A., Bosh, A., García, F., Hernández, A., Luque, B., Rovira, R.A., Sabater, L. y Ysem, J.A. (2012). *Matemáticas 4º ESO (Opción B).* Barcelona, España: Editorial Casals.

Almodóvar, J.A., García, P., Gil, J. y Nortes, A. (1997). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Editorial Santillana.

Álvarez, I. y Gómez-Chacón, I. M. (2015). Understanding the Algebraic Variable: Comparative Study of Mexican and Spanish Students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1507-1529.

Álvarez, M.D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2007). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial Santillana.

Álvarez, M.D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2010). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Santillana.

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities*. IMPACT (Interweaving Mathematics Pedagogy and Content for Teaching). Londres y Nueva York: Routledge.

Arias, J.M. y Maza, I. (2010). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Bruño.

Arnau, D. y Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 49-66.

Bartomeu, C., Capella, T., Besora, J., Jané, A. y Guiteras, J.M. (2011). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial McGraw Hill.

Bills, L. (2001). Shifts in the Meanings of Literal Symbols. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2* (p.p. 161, 2-168). Utrecht, Los Países Bajos: PME.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. En J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, y N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 1* (pp. 126–154). Prague, Czech Republic: Charles University.

Bills, L. y Rowland, T. (1999). Examples, generalization and proof. En L. Brown (Ed.), *Making meaning in mathematics: A collection of extended and refereed papers from* *the British Society for Research into Learning Mathematics, Visions of Mathematics 2, Advances in Mathematics Education 1* (pp. 103-116). York: QED.

Boletín Oficial del Estado (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. BOE, 3, 169-546.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.

Borowski, E. J. y Borwein, J. M. (1989). *Dictionary of mathematics*. Collins. Reino Unido.

Brown, S. I. y Walter, M. I. (1990). *The Art of Problem Posing* (2º Edición). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Capraro, M. y Joffrion, H. (2006). Algebraic Equations: Can Middle-School Students Meaningfully Translate from Words to Mathematical Symbols? *Reading Psychology*, *27*(2-3), 147-164.

Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación*, *374*, 43-68.

Celma, J., Dols, S., Domenech, E., Fontich, A., Marrasé, J.M., López, S., Peralta, L., Rebagliato, J., Valle, J., Santaolalla, E., Moreno, M. y Serrano, E. (2010). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial SM.

Chalouh, L. y Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. En A.F. Coxford y A.P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 33-42) Reston, VA: NCTM.

Colera, J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2016). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2016). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Editorial Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial Anaya.

Colera, A., Martí, M.D., Polo, M., Salvador, A. y Solanes, F. (2007). *Matemáticas 3º ESO*. Barcelona, España: Editorial Casals.

Corbarán, F., Álvarez, J.L., Fernández-Aliseda, A., González, A.E., Hans, J.A., Muñoz, J., Pomar, R., Renieblas, S. y Sánchez, P. (2003). *Matemáticas 2º ESO*. Barcelona. España. Editorial Vicens Vivens.

Corbarán, F., Álvarez, J.L., Fernández-Aliseda, A., González, A.E., Hans, J.A., Muñoz, J. y Queralt, T. (2003). *Matemáticas 4º ESO (Opción B)*. Barcelona. España. Editorial Vicens Vivens.

Crooks, N., y Alibali, M. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344-377

Diccionario Libre (2003–2015) http://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Equation+ (mathematics) (acceso 11 de septiembre de 2015).

Fernández-Millán, E., y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias,* 34(1), 53-71

Fernández-Millán, E., y Molina, M. (2017). Secondary students' implicit conceptual knowledge of algebraic symbolism. An exploratory study through problem posing. *IEJME-Matematics Education, 12*(9), 799-826.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano T. y Puig, L. (2008*). Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* New York, NY: Springer.

Frías, V., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, Z. (2007). *Matemáticas 1º ESO.* Barcelona, España: Editorial Casals.

Furinghetti, F. y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? En J.P. da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Volume 2*, (pp. 368-375). Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

García, F.J. (2011). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Editex.

Goldenber, P. y Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Education Study of Mathematics, 69*, 183-194.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher, 73*(8), 572-580.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Küchemann, D.E. (1981). Algebra. En K.M. Hart, M.L. Brown, D.E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (Eds.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). Londres, Reino Unido: John Murray.

Leinhardt, G. (1993). On teaching. En Glase, R. (Ed.), *Advances in instructional psychology, 4* (pp. 1-54). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Maragallo, J. (2011). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial Editex.

Molina, M. (2007). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo por algunos alumnos de tercero educación primaria* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Molina, M. Rodríguez-Domingo, S. Cañadas, M.C., y Castro, E. (2016). Secondary School Student's Errors in the Translation of Algebraic Statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(3), 1-20.

Resnick, L.B., Cauzinille-Marmeche, E. y Mathieu, J. (1987). Understanding algebra. En J.A. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive process in mathematics* (pp. 169-203). Oxford, Reino Unido: Clarendon Press.

Rittle-Johnson, B. y Schneider, M. (2015). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. En R.C. Kadosh y A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp. 1118-1134). Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B. y Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*, 561–574. doi: 10.1037/0022–0663.99.3.561.

Ross, A. y Willson, V. (2012). The Effects of Representations, Constructivist Approaches, and Engagement on Middle School Students' Algebraic Procedure and Conceptual Understanding. *School, Science and Mathematics, 112*(2), 117-128.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Education Study of Mathematics, 69*, 149-163.

Sánchez, J.L. y Vera, J. (1999). *Matemáticas 2º ESO.* Navarra, España: Editorial Oxford.

Szydlik, J. (2015). Mathematical Conversations to Transform Algebra Class. *Mathematics Teacher, 108*(9), 656-661.

Tossavainen, T., Attorps, L. y Väisänen, P. (2011). On mathematics students' understanding of the equation concept. *Far East Journal of Mathematical Education, 6*(2), 127-147.

Tsamir, P. Tiroh, D. y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples; the case of triangles. *Education Study of Mathematics, 69*, 81-95.

Uriondo, J.L. (2007). *Matemáticas 1º ESO*. Navarra, España: Editorial Oxford.

Usiskin Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En Coxford A.F. y Shulte A. P. (Eds.), *The Ideas of Algebra K-12* (pp. 8-19). VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vizmanos, J.R., Anzola, M., Alcaide, F. y Peralta, J. (2008). *Matemáticas 4º ESO (Opción B).* Madrid, España: Editorial SM.

Vizmanos, J.R., Anzola, M., Mansilla, S. y Bujanda, M.P. (2010). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial SM.

Vizmanos, J.R., Anzola, M., Peralta, J. y Bargueño, J. (2008). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Editorial SM.

Watson, A. y Mason, J. (2002). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of PME 26 Volume 4,* pp. 377–385). Norwich, Reino Unido: University of East Anglia.

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Waywood, A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics, 12*, 34-43.

Wikipedia, Equation. http://en.wikipedia.org/wiki/Equation (acceso 11 de septiembre de 2015).

Wolfram MathWorld (1999–2015). *Equation*. http://mathworld.wolfram.com/search/?query=equation&x=0&y=0 (Acceso 11 de septiembre de 2015).

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. *Topic Study Group 34: Research and development in task design and analysis, ICME, 11.*

Zazkis, R. y Leikin, R. (2007). Generating examples: from pedagogical tool to research tool. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 15–21.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Education Study of Mathematics, 69*, 131-148.

Zhu, S. y Simon, H. (1987). Learning mathematics from examples and by doing. *Cognition and Instruction, 4,* 137-166.

CAPÍTULO 8: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo realizamos una síntesis de los principales resultados obtenidos en el conjunto de la investigación que constituye esta tesis doctoral y que permiten dar respuesta a los objetivos de investigación planteados.

8.1. INDAGACIÓN EN EL CONOCIMIENTO CONCEPTUAL IMPLÍCITO DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO

La información relativa al conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico que adquieren los estudiantes al término de su educación secundaria obligatoria la aportan los resultados obtenidos por medio de los cuestionarios 1, 2 y 3. A través de ellos analizamos: 1) Las características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema y 2) los significados que dan los estudiantes a las estructuras aditivas y multiplicativas presentes en dichas ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Características de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema

Mostramos en primer lugar los resultados obtenidos cuando los estudiantes inventan problemas en una situación libre, que corresponden a los cuestionarios 1 y 2.

Las características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema en ese caso son:

- *Presencia de más de una incógnita (sistemas de ecuaciones):* esta característica supone una dificultad para los estudiantes que se pone de manifiesto en un mayor número de problemas sin respuesta para los dos sistemas de ecuaciones en el cuestionario 1 y para uno de los sistemas en el cuestionario 2. En la traducción simbólica de los problemas inventados por los estudiantes, se observa que tienden a añadir incógnitas en el primer cuestionario, mostrando así dificultad en precisar que las cantidades que aparecen representadas con la misma letra son las mismas. Si bien esta dificultad no se pone de manifiesto en un gran número de problemas inventados por los estudiantes para los sistemas de ecuaciones del cuestionario 2.
- *Incógnita a ambos lados del signo igual:* La dificultad detectada anteriormente en cuanto a la precisión de las cantidades que aparecen representadas con la misma letra es extensible a la ecuación $x + 10 = 6x$ presente en ambos cuestionarios, ya

que los estudiantes tienen cierta tendencia a inventar problemas cuya traducción simbólica implica la inclusión de más de una incógnita, lo que conlleva la presencia de un alto número de problemas incorrectos en el cuestionario 1.

Estas evidencias llaman la atención sobre la necesidad de trabajar explícitamente en el aula el uso preciso del lenguaje verbal para describir relaciones cuantitativas entre cantidades desconocidas. El simbolismo algebraico por naturaleza es más preciso que el verbal, pero el aprendizaje de esta característica requiere que los estudiantes sean capaces de capturar con igual precisión dichas relaciones en ambos sistemas de representación.

- *Coeficiente diferente de uno:* esta característica supone una dificultad para los estudiantes cuando hay presencia de coeficientes enteros diferentes de dos y con la presencia de coeficientes decimales (cuestionario 2). En la mayoría de casos en los que los estudiantes no establecen una relación que vincula correctamente el coeficiente con la incógnita es porque en la traducción simbólica del problema inventado, el coeficiente se presenta como término independiente. Cuando el coeficiente es entero y diferente de dos, los resultados indican que los estudiantes tienen mayores dificultades al expresar relaciones multiplicativas con dichos números a través de expresiones tales como el triple, el cuádruple o el séxtuple, siéndoles más familiares expresiones como el doble, evidencia ya detectada en estudios previos sobre la falta de precisión en procesos de traducción (Rodríguez-Domingo, 2015). En el caso de coeficientes decimales esta dificultad supone una alta presencia de problemas incorrectos para las tareas 1 y 6 del cuestionario 2 que podría estar relacionada con cierta tendencia de los estudiantes a expresar la multiplicación como suma repetida ya que predomina, entre los problemas inventados, la estructura semántica multiplicativa de proporcionalidad simple. Este hecho sugiere de nuevo limitaciones en la capacidad de los estudiantes de expresar con el lenguaje verbal la precisión que caracteriza al simbolismo algebraico.
- *Presencia de estructura multiplicativa entre incógnitas:* esta característica supone la invención de un mayor número de problemas incorrectos para las ecuaciones $x^2 = 16$ y $x(x+1) = 20$ en ambos cuestionarios. Dichos problemas incorrectos lo son debido principalmente a que los estudiantes inventan problemas cuya traducción simbólica se corresponde con ecuaciones lineales. Algunas de las traducciones simbólicas tienen la incógnita despejada a un lado del signo igual

(para la ecuación $x^2 = 16$ en el cuestionario 1). Esta tendencia concuerda con la preferencia por métodos aritméticos que los estudiantes ponen de manifiesto cuando abordan la tarea de resolver problemas (Kieran, 2007). También denota en los estudiantes una visión operacional de los problemas en cuestión, que se aleja del interés del álgebra por dirigir la atención hacia las estructuras comunes de diferentes problemas, lo que da lugar a que sean resueltos por una misma familia de ecuaciones. Otras traducciones simbólicas incluyen coeficientes diferentes de uno para la ecuación $x^2 = 16$, ya que en los enunciados inventados hay expresiones como "dos veces" o "el doble". Para la ecuación $x(x+1) = 20$ nos encontramos con problemas cuya traducción simbólica se corresponde con una ecuación en la que hay un mayor número de términos con incógnita que en la ecuación dada, así como con traducciones simbólicas en las que no hay presencia de paréntesis. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 15 \end{cases}$ que también presenta estructura multiplicativa en una de sus ecuaciones, es una de las tareas para las que hay un menor número de problemas analizables, bien porque los estudiantes no responden o porque no se puede traducir el enunciado del problema inventado a simbolismo algebraico, siendo descartados estos problemas. Los problemas incorrectos dentro de los analizables se deben principalmente a que los estudiantes inventan problemas cuya traducción simbólica implica la inclusión de estructura aditiva entre las incógnitas de la segunda ecuación. La mayor parte de los problemas presentes en los libros de texto cuya resolución implica el planteamiento de ecuaciones con incógnitas multiplicándose entre sí, están relacionados con contextos de áreas de figuras planas. Los estudiantes al no inventar problemas relativos a dichos contextos ponen de manifiesto las dificultadas expuestas.

Atendiendo a las tareas de forma individual, llama especialmente la atención la ecuación $x(x+1) = 20$ por su complejidad en tanto que hay más enunciados descartados y un menor número de problemas correctos en los cuestionarios 1 y 2. La estructura de esta expresión es más compleja que la de las demás ecuaciones (presentadas independientemente o dentro de los sistemas propuestos). Si pensamos en la resolución de un problema algebraico resoluble por medio de esta expresión, es probable que sea más accesible a los estudiantes su traducción al sistema $\left.\begin{array}{r} y = x + 1 \\ xy = 20 \end{array}\right\}$ obteniendo la ecuación 3 en un paso posterior del proceso de resolución. Inventar un problema resoluble mediante la ecuación 3 tienen una alta demanda cognitiva en términos del sentido estructural (Vega-Castro, Molina y Castro, 2012; Hoch y Dreyfus, 2005) de los estudiantes. Este término refiere a un conjunto de habilidades que requieren el uso combinado de conocimiento conceptual y procedimental, entre las que se encuentran tratar con un término compuesto como un todo, reconocer estructuras familiares e identificar relaciones entre expresiones o partes de una expresión. Para inventar con éxito un problema resoluble mediante la ecuación 3 los estudiantes han de reconocer x y $x+1$ como dos cantidades desconocidas diferentes, cuyo producto es 20. Esto implica concebir la expresión $x+1$ como un todo. Además requiere identificar relaciones entre ambas partes de la expresión. En consecuencia las dificultades puestas de manifiesto en esta tarea informan no solo del conocimiento conceptual de los estudiantes, también de su sentido estructural, y llaman la atención sobre la componente visual que implica el uso tanto sintáctico como semántico del simbolismo algebraico.

Mostramos a continuación los resultados obtenidos tras el análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario 3 en el que los estudiantes inventan problemas en una situación semiestructurada en la que se les proporciona un significado concreto para las incógnitas en cada una de las tareas. Los resultados difieren de los anteriores de forma general pues el número de problemas correctos en este caso aumentan sustancialmente: 60% de los problemas son correctos entre los cuestionarios 1 y 2 y 80% en el caso del cuestionario 3. Los estudiantes muestran menores dificultades a la hora de inventar problemas en esta situación, sin embargo, hay ciertas características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que les siguen suponiendo una dificultad a la hora de desarrollar esta tarea:

- *Presencia de coeficientes decimales:* en estos casos se siguen poniendo de manifiesto problemas a la hora de vincular correctamente el coeficiente con la incógnita, apareciendo en ciertos casos el coeficiente decimal como término independiente.
- *Presencia de incógnitas multiplicándose entre sí*: esta característica continúa suponiendo una dificultad para los estudiantes en la ecuación $x(x+1) = 20$, que además incluye paréntesis. Tal y como se ha especificado, la estructura de esta ecuación es más compleja que la del resto de tareas y hace aflorar dificultades que

se manifiestan principalmente en la eliminación de paréntesis y, como consecuencia, en la inclusión de más términos con incógnitas.

Significados de las estructuras aditivas y multiplicativas presentes en las ecuaciones

Prestamos especial atención a los resultados obtenidos como respuesta a los cuestionarios 1 y 2, en los que se plantea la invención de problemas en una situación libre.

En ambos cuestionarios los estudiantes manifiestan mayor facilidad en dar significado a las estructuras aditivas, detectándose en ellas un predominio de la estructura semántica de combinación seguida de la de cambio, tanto en problemas correctos como incorrectos. La estructura semántica aditiva de comparación se presenta únicamente en tres problemas del cuestionario 1 y en cinco del cuestionario 2. Los problemas con estructura semántica aditiva de igualación son prácticamente inexistentes: tres y uno para el primer y segundo cuestionario respectivamente. Cabe destacar que las estructuras aditivas de combinación y cambio son las más frecuentes en los libros de texto de educación primaria según un estudio de Orrantia, González y Vicente (2005).

En cuanto a las estructuras multiplicativas, los estudiantes presentan menos dificultades en darles significado cuando tienen lugar entre un coeficiente y una incógnita que cuando la estructura multiplicativa es entre incógnitas. En cuanto a los significados de las mismas predominan las estructuras semánticas multiplicativas de comparación y de proporcionalidad simple. La estructura semántica multiplicativa de producto cartesiano no se identifica en el cuestionario 1 pero si, aunque débilmente, en el 2. En este caso solamente se presenta en la ecuación $x^2 = 16$ cuando los estudiantes inventan problemas relacionados con contextos de áreas de figuras planas.

En el caso del cuestionario 3, al proporcionar a los estudiantes un significado concreto para las incógnitas de cada una de las tareas, se les induce a que inventen problemas en unos contextos determinados y, por lo tanto, también a unas estructuras semánticas tanto aditivas como multiplicativas concretas. Sigue predominando la estructura semántica aditiva de combinación pero aumenta significativamente la de comparación, siendo la segunda que se presenta en términos de frecuencia; le sigue en tercer lugar la estructura semántica aditiva de cambio, habiendo en este caso ausencia de problemas de igualación.

En cuanto a las estructuras semánticas multiplicativas también siguen predominando las de proporcionalidad simple y en este caso es la de producto cartesiano la que aumenta significativamente presentándose en segundo lugar. La estructura semántica multiplicativa de comparación se presenta en un menor número de problemas.

Los resultados obtenidos a partir del análisis de los resultados a los cuestionario 1, 2 y 3 muestran que las dificultades que ponen de manifiesto los estudiantes a la hora de inventar problemas en una situación libre, las cuales suponen un conocimiento conceptual limitado de ciertas características del simbolismo algebraico, se reducen drásticamente al sugerir un significado para las incógnitas, lo que sugiere que dicho conocimiento conceptual se encuentra parcialmente conectado. Los resultados indican que este conocimiento está en la zona de desarrollo próximo no estando accesible al alumno sin ayuda. Las expresiones consideradas son todas familiares al estudiante pero necesita un poco de ayuda para conectarlas con los contextos donde habitualmente se le da significado en la práctica escolar.

8.2 INDAGACIÓN EN EL CONOCIMIENTO CONCEPTUAL DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN

La información relativa al conocimiento conceptual del concepto de ecuación que adquieren los estudiantes al término de su educación secundaria obligatoria la aportan los resultados obtenidos a partir de la entrevista individual y semiestructurada. A través de ella analizamos: 1) Las dimensiones de variación posibles y los rangos de variación posibles en los ejemplos generados por los estudiantes 2) las características de las definiciones de ecuación que proporcionan los estudiantes.

Dimensiones de variación posibles y rango de variación permisible

Las dimensiones de variación posible que surgen y que ellos mismos son capaces de verbalizar correctamente son: grado, número de términos, número de incógnitas, coeficiente, operación de la incógnita, miembro derecho de la ecuación y término independiente. Además son capaces de generar nuevos ejemplos en los que muestran rangos de variación permisibles para cada una de las dimensiones que han reconocido previamente, si bien dichos rangos observados no siempre coinciden con los que verbalizan cuando se les pregunta explícitamente al respecto:

- *Grado:* en todos los ejemplos de ecuaciones generados por los estudiantes el grado se corresponde con un número natural. Cuando se les pregunta explícitamente qué valores puede tomar dicho grado solamente cinco estudiantes reconocen este conjunto numérico como el único que puede caracterizarlo. El resto de conjuntos numéricos verbalizados son: enteros, racionales y reales. Este hecho muestra una dificultad de los estudiantes a la hora de precisar la restricción que tiene el exponente de una incógnita en el contexto de las ecuaciones.

- *Número de términos y número de incógnitas:* los estudiantes proponen ejemplos de ecuaciones con hasta siete términos y de hasta cinco incógnitas. Si bien a la hora de verbalizar el número de cada uno de ellos que puede haber en una ecuación señalan que en ambos casos puede ser infinito. Ambos resultados son correctos ya que durante la entrevista se les indica a los estudiantes que no es necesario que sepan resolver las ecuaciones que proponen como ejemplos.
- *Coeficiente:* la mayoría de los ejemplos de ecuaciones propuestos por los estudiantes tienen coeficientes naturales, en muy pocos casos enteros y solo en dos ocasiones coeficientes racionales. Este hecho que puede estar relacionado con la mayor presencia de coeficientes naturales en los libros de texto de secundaria, tanto en ejemplos como en ejercicios. A la hora de verbalizar los conjuntos numéricos que pueden corresponderse con el coeficiente de una ecuación, sin embargo, la mayoría de los estudiantes señalan correctamente que puede ser cualquier número real.
- *Operación de la incógnita:* en los ejemplos que proponen los estudiantes las operaciones presentes entre la incógnita y otros elementos de la ecuación (coeficientes, términos independientes y otras incógnitas), coinciden con las que ellos mismos verbalizan: suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada y potencia. La potencia es verbalizada en muy pocas ocasiones, tal vez porque la identifiquen como una suma repetida.
- *Miembro derecho de la ecuación:* los estudiantes que identifican este elemento como susceptible de variar en las ecuaciones proponen ejemplos y verbalizan que en el miembro derecho de la ecuación puede haber tanto números como expresiones algebraicas. Si bien es cierto que la mayor parte de los ejemplos de ecuaciones generados, 41 de los 53, tienen la estructura <expresión algebraica> = número. Este hecho sugiere que los estudiantes extienden el significado aritmético unidireccional del signo igual (utilizado para conectar el cálculo a realizar con su resultado numérico) al álgebra, mientras que en esta rama de las matemáticas el signo igual tiene un significado bidireccional. En el caso de las ecuaciones conecta dos expresiones que son iguales para ciertos valores de la variable o variables

- *Término independiente:* todos excepto uno de los ejemplos de ecuaciones que generan los estudiantes tienen como términos independientes números enteros, hecho que puede tener la misma justificación que la mayor presencia de coeficientes naturales. De la misma forma que con los anteriores, a la hora de verbalizar qué tipo de números se pueden corresponder con este elemento de la ecuación, la mayoría de ellos señalan correctamente que puede ser cualquier número real.

Caracterización de las definiciones de ecuación

Caracterizamos las definiciones del concepto de ecuación de los estudiantes tomando como referente la siguiente definición que elaboramos a partir de la consulta de libros de texto de todos los niveles de educación secundaria y de varias editoriales: igualdad entre expresiones algebraicas que se verifica para ciertos valores de las letras. La forma en la que los libros consultados definen expresión algebraica tienen en común los términos: números, letras y operaciones aritméticas. A lo largo de este trabajo nos centramos en el concepto de ecuación fuera del contexto de la resolución de problemas, por lo que consideramos que las palabras mínimas que deben contener las definiciones proporcionadas por los estudiantes para que las consideremos correctas son: expresión algebraica (letras, números y operaciones), igualdad, ciertos valores de la letra.

El análisis de las respuestas de los estudiantes consiste en comparar las definiciones que ellos proponen con la que se indica anteriormente, teniendo en cuenta si en ellas se incluyen las palabras que captan el concepto de ecuación. Obviamos en el análisis la parte de la definición que hace referencia a "se verifica para ciertos valores de las letras" ya que nos centramos únicamente en los elementos característicos de la estructura de la ecuación y les habíamos indicado a los estudiantes que no era necesario que supieran resolver las ecuaciones.

La definición de los estudiantes del concepto de ecuación como respuesta a la primera pregunta de la entrevista tiene lugar antes de la generación de ejemplos. Solamente una de las definiciones incluye todas las palabras características de la definición elaborada, aunque hace referencia a la estructura <expresión algebraica> = 0, la cual no cumple uno de los principios lógicos que debe cumplir la definición de un concepto matemático establecidos por Zazkis y Leikin (2008): una definición tiene que establecer las condiciones necesarias y suficientes del concepto. De las palabras mínimas que deben incluir la definición de ecuación de los estudiantes la incluida con mayor frecuencia es letras/incógnitas (17 estudiantes), seguida de: números (7 estudiantes), operaciones (6 estudiantes), expresión algebraica (3 estudiantes) e igualdad (1 estudiante).

La segunda definición de ecuación por parte de los estudiantes tiene lugar tras la generación de ejemplos. Esta tarea permite a los estudiantes a dar definiciones más elaboradas de dicho concepto de tal forma que en este caso la frecuencia de las palabras mínimas que deben incluir las definiciones para ser correctas son: letras e incógnitas (20 estudiantes), igualdad (17 estudiantes), números (15 estudiantes), operaciones (15 estudiantes) y expresión algebraica (tres estudiantes). En este caso la mitad de los estudiantes dan definiciones correctas de ecuaciones. Aun así solo el 60% de ellos son capaces de construir una definición general de ecuación equivalente a <expresión algebraica> = <expresión algebraica>. Este hecho puede ser resultado de que la mayor parte de los ejemplos que construyen los estudiantes se corresponden con la estructura <expresión algebraica> = número, y es a partir de la observación de dichos ejemplos cuando construyen una nueva definición de ecuación. Podemos identificar estos ejemplos con lo que Tsamir, Tirosh y Levenson (2008) denominan ejemplos prototipo; dentro de un conjunto de ejemplos estos se aceptan intuitivamente como representante del concepto, sin embargo estas cogniciones intuitivamente aceptadas pueden causar obstáculos ya que pueden conducir a menudo a una imagen conceptual limitada. Es por ello que tras la observación de ejemplos con la estructura <expresión algebraica> = número los estudiantes muestran limitaciones a la hora de dar muestra del conocimiento conceptual explícito del término ecuación.

CAPÍTULO 9: CONCLUSIONES

En este capítulo mostramos las conclusiones obtenidas con la elaboración de esta tesis doctoral desde tres perspectivas: consecución de los objetivos, aportes a la investigación y a la docencia y posibles vías de continuidad.

9.1 CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS

La elaboración de las tres publicaciones que conforman esta tesis doctoral ha permitido abordar el objetivo general de esta investigación: analizar el conocimiento conceptual implícito relativo al simbolismo algebraico, característico de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, y el conocimiento conceptual implícito y explícito del concepto de ecuación, que adquieren los estudiantes como resultado de su formación matemática a lo largo de la ESO. Recordamos que en el segundo capítulo de esta memoria precisamos este problema de investigación por medio de cuatro objetivos específicos: los dos primeros relativos al conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico y los otros dos, respectivamente, al conocimiento conceptual implícito y explícito del concepto de ecuación.

En los dos primeros artículos se elaboran las categorías sintácticas que permiten caracterizar la traducción simbólica de los problemas inventados por los estudiantes para cada una de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones dados. El análisis posterior de los problemas incorrectos permite determinar las características de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema, dando así respuesta al primer objetivo específico de investigación.

La elaboración de las categorías semánticas, en dichos artículos, y su análisis tanto en problemas correctos como incorrectos, aportan información sobre el significado que dan los estudiantes a las operaciones contenidas en las ecuaciones y sistemas de ecuaciones propuestos, abordando el segundo objetivo específico de investigación.

En el artículo 3 la entrevista semiestructurada permite que los estudiantes generen un gran número de ejemplos de ecuaciones; la posterior transcripción de dicha entrevista y el análisis de los ejemplos aportan información sobre sus dimensiones de variación posibles y rangos de variación permisibles, lo cual permite dar respuesta al tercer objetivo específico de investigación.

El cuarto objetivo específico se aborda también en el artículo 3 a partir de la caracterización de las definiciones de ecuación que los estudiantes dan al principio y final de entrevista semiestructurada, tomando como referencia una definición elaborada a partir de la consulta de libros de texto de secundaria.

9.2 APORTES A LA INVESTIGACIÓN Y A LA DOCENCIA

La información obtenida en esta tesis doctoral es de utilidad para profundizar en el conocimiento conceptual tanto del simbolismo algebraico como del concepto de ecuación de los estudiantes al final de la ESO.

Desde el punto de vista de la investigación en didáctica de la matemática, la clasificación de las características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema, complementa el conjunto de estudios que abordan las dificultades que ponen de manifiesto los estudiantes, relativos a la comprensión y uso de diferentes componentes del simbolismo algebraico. En particular complementa a los estudios que informan a cerca de la limitación de los estudiantes en la capacidad de expresar con el lenguaje verbal la precisión que caracteriza al simbolismo algebraico. Otro aporte a la investigación lo hace la clasificación de los significados que los estudiantes dan a las estructuras aditivas y multiplicativas, en el sentido de que es novedoso en el campo de la investigación en didáctica de la matemática, pues no hemos encontrados estudios que investiguen explícitamente dichos significados en el terreno de las ecuaciones. También el análisis de los ejemplos generados por los estudiantes, aporta información al conjunto de investigaciones que tratan tanto sobre el conocimiento conceptual de las ecuaciones de forma general, sin atender a las distintas componentes del simbolismo algebraico, como a las investigaciones acerca de los diferentes usos del signo igual en matemáticas. Se observa un mayor uso unidireccional del signo igual, característico de la aritmética, que bidireccional, siendo este el significado propio del signo igual en el álgebra. Las categorías sintácticas y semánticas elaboradas y refinadas en los dos primeros artículos son un aporte de esta investigación de utilidad para seguir avanzando en el análisis del conocimiento conceptual algebraico de los estudiantes vía otras herramientas de evaluación o en relación a otras variables de tarea no consideradas aquí.

Por otro lado el análisis de las definiciones dadas por los estudiantes del concepto de ecuación corrobora una deficiencia en la competencia lingüística de los estudiantes, que previamente había sido detectada tanto en el análisis de los problemas inventados por los mismos como en estudios previos.

Por último, respondiendo a la llamada de atención mencionada por Crooks y Alibali (2014) sobre la importancia de identificar y medir el conocimiento conceptual de forma específica y la necesidad de herramientas validadas para poder evaluar dicho conocimiento, consideramos que los resultados de este estudio corroboran que los dos instrumentos empleados: invención de problemas y generación de ejemplos, ambas por parte de los estudiantes, son válidos para dicha tarea de evaluación.

Desde el punto de vista de la docencia, las dificultades encontradas acerca del trabajo tanto con el simbolismo algebraico como con las ecuaciones, por parte de los estudiantes, informan de la necesidad de prestar una mayor atención en la enseñanza a ciertas componentes de las ecuaciones y sistemas así como a la expresión mediante el sistema de representación verbal de esquemas de relaciones más complejos como son los modelizables mediante sistemas de ecuaciones, ecuaciones con coeficientes decimales y diferentes de uno, y ecuaciones con incógnitas multiplicándose entre sí. También informan de la necesidad de promover un estudio más estructural de la resolución de problemas, el trabajo en el aula con estructuras semánticas aditivas de comparación e igualación, y la multiplicativa de producto cartesiano. El significado del signo igual de las ecuaciones también requiere un mayor trabajo en el aula, consideramos que para ello se podría utilizar la generación de ejemplos por los estudiantes como parte de un proceso de generalización empírica. Otro aporte a la docencia lo hace el estudio de los rangos de variación permisibles, para cada una de las dimensiones de variación posibles, de los ejemplos que generan los estudiantes. Aporta información sobre la necesidad de incluir ejemplos, durante las explicaciones y en los libros de texto, con una mayor variabilidad de conjuntos numéricos que aparezcan tanto en coeficientes como en términos independientes y no limitarnos únicamente a números enteros. También la deficiencia en la competencia lingüística de los estudiantes requiere un trabajo continuado en el aula de la misma, que puede iniciarse en contextos aritméticos dada la riqueza de elementos y significados que comparten el simbolismo algebraico y el simbolismo numérico.

Terminamos los aportes a la docencia centrándonos específicamente en los instrumentos utilizado a lo largo de esta investigación para la recogida de datos. Consideramos que la invención de problemas, la generación de ejemplos y la definición de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes son tareas útiles para trabajar con ellas en el aula. De hecho, a lo largo del periodo de realización de esta tesis doctoral he utilizado, y pretendo seguir haciéndolo, en mis clases de matemáticas con estudiantes de ESO las tareas mencionadas anteriormente, a continuación señalo algunos de los beneficios observados:

- Invención de problemas: esta actividad la suelo plantear de forma oral y espontánea durante las explicaciones. La considero beneficiosa desde dos perspectivas. En primer lugar por cómo los estudiantes se enfrentan a la actividad: la ven como un reto, se animan a participar y dedican esfuerzo en plantear un problema que se corresponda con la ecuación o sistema de ecuaciones que les propongo, de la misma forma se corrigen unos a otros y aportan ideas y comentarios muy interesantes que les hace reflexionar sobre características del simbolismo algebraico. Piensan que la actividad está “fuera de la clases de matemáticas” la interpretan como un juego, en ocasiones me dicen “profesora vamos a jugar a lo de inventar problemas”. En segundo lugar, como docente, me aporta información sobre qué características del simbolismo algebraico comprenden mejor y sobre cuáles es necesario trabajar más en clase para su correcta comprensión.
- Generación de ejemplos: esta actividad la suelo plantear de forma oral y espontánea durante las explicaciones. Me aporta información como docente sobre si los estudiantes han comprendido un concepto o un procedimiento que estamos trabajando en clase.
- Definición de conceptos matemáticos: esta actividad la suelo plantear al comienzo de las clases de forma oral, para repasar lo que hemos visto el día anterior. La considero beneficiosa para los estudiantes porque favorece su utilización del lenguaje matemático y les ayuda a desarrollar la competencia lingüística.

9.3 LIMITACIONES Y POSIBLES VÍAS DE CONTINUIDAD

Somos conscientes de que la investigación realizada presenta algunas limitaciones. En primer lugar hacemos referencia a los sujetos participantes, los cuales fueron elegidos de forma intencional dada su disponibilidad. Esta forma de selección de la muestra así como hace que los resultados obtenidos no sean generalizables aunque la consideración de varios grupos da mayor relevancia a los mismos.

Otra limitación a mencionar es que en las entrevistas semiestructuradas no consideramos el estudio del conocimiento conceptual de los sistemas de ecuaciones. Limitamos el objetivo de esta parte de la investigación en parte por limitaciones de tiempo dado que la recogida de datos debía tener lugar tras haberse impartido todas las unidades de álgebra lo cual supone que tuvieron que realizarse a partir de la mitad del segundo trimestre, además, debía compatibilizarse con el desarrollo natural del curso. Aun así pensamos que muchos de los resultados obtenidos para las ecuaciones son extrapolables a los sistemas de ecuaciones.

Planteamos a continuación algunas posibles vías de continuidad de este trabajo de investigación:

- Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico característico de ecuaciones y sistemas de ecuaciones teniendo en cuenta otras variables de tareas diferentes a las planteadas. Por ejemplo considerando coeficientes y términos independientes con números racionales expresados como fracción o dando mayor presencia a los paréntesis.
- Diseño de propuestas de enseñanza que incluyan tareas como generación de ejemplos e invención de problemas para mejorar el conocimiento conceptual de conceptos matemáticos.
- Diseño de propuestas de enseñanza que se centren en el desarrollo de la competencia lingüística de los estudiantes, a través tanto de procesos de traducción del lenguaje simbólico al verbal, como en la definición de conceptos matemáticos.

REFERENCIAS

Abdul-Rahman, S. (2005). Learning with examples and students' understanding of integration. En A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference of Mathematics Education into the 21st Century Project on "Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education* (pp. 24-28). Johor Bahru: UTM.

Albertí, M., Aragoneses, A., Bancells, A., Bosh, A., García, F., Hernández, A., Luque, B., Rovira, R.A., Sabater, L. y Ysem, J.A. (2012). *Matemáticas 4º ESO (Opción B).* Barcelona, España: Editorial Casals.

Álvarez, I. y Gómez-Chacón, I. M. (2015). Understanding the algebraic variable: Comparative Study of Mexican and Spanish students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6), 1507-1529.

Álvarez, M.D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2007). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial Santillana.

Álvarez, M.D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2010). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Santillana.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. En I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro (Eds.), *Números y álgebra na aprendizagem da matemática e na formaçâo de profesores* (pp. 29-47). Camiña, Portugal: SPCE.

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities*. IMPACT (Interweaving Mathematics Pedagogy and Content for Teaching). Londres y Nueva York: Routledge.

Arias, J.M. y Maza, I. (2010). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Bruño.

Arnau, D. y Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 49-66.

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 223-233). Lleida, España: SEIEM. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1580/

Bartomeu, C., Capella, T., Besora, J., Jané, A. y Guiteras, J.M. (2011). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial McGraw Hill.

Bills, L. (2001). Shifts in the Meanings of Literal Symbols. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the Twenty-fifth PME International Conference* (pp. 2-161, 2-168). Utrecht, Los Países Bajos: PME.

Bills, L. y Rowland, T. (1999). Examples, generalization and proof. En L. Brown (Ed.), *Making meaning in mathematics: A collection of extended and refereed papers from the British Society for Research into Learning Mathematics, Visions of Mathematics 2, Advances in Mathematics Education 1* (pp. 103-116). York: QED.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007*a*). *Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía*. BOJA, 156, 15-25.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007*b*). *Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.* BOJA, 171, 23-65.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2016). *Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía*. BOJA, 122, 27-45.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2016). *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.* BOJA, 144, 108-396.

Boletín Oficial del Estado (2006). *Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo de Educación (LOE)*. BOE, 106, 17158-172017.

Boletín Oficial del Estado (2013). *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE).* BOE, 295, 97858-97921.

Boletín Oficial del Estado (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. BOE, 3, 169-546.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.

Brown, S. I. y Walter, M. I. (1990). *The Art of Problem Posing* (2ª edición). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Capraro, M. y Joffrion, H. (2006). Algebraic Equations: Can Middle-School Students Meaningfully Translate from Words to Mathematical Symbols? *Reading Psychology, 27*(2-3), 147-164.

Carpenter, T.P. y Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: LEA.

Castro, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en educación primaria* (pp. 203-230). Madrid, España: Síntesis.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). Baeza, España: SEIEM.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación, 374*, 43-68.

Cázares, J., Castro, E. y Rico, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. *Aula, 10*, 19-39.

Cedillo, T. E. (2001). Toward an algebra acquisition support system: A study based on using graphic calculators in the classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 3,* 221–259.

Celma, J., Dols, S., Domenech, E., Fontich, A., Marrasé, J.M., López, S., Peralta, L., Rebagliato, J., Valle, J., Santaolalla, E., Moreno, M. y Serrano, E. (2010). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial SM.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA, 4*(3), 99-110.

Chalouh, L. y Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. En A.F. Coxford y A.P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 33-42). Reston, VA: NCTM.

Chappell, M. F. (2001). Creating connections: Promoting algebraic thinking with concrete models. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7,* 20–25.

Celma, J., Dols, S., Domenech, E., Fontich, A., Marrasé, J.M., López, S., Peralta, L., Rebagliato, J., Valle, J., Santaolalla, E., Moreno, M. y Serrano, E. (2010). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial SM.

Colera, J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2016). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2016). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Editorial Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial Anaya. Colera, A., Martí, M.D., Polo, M., Salvador, A. y Solanes, F. (2007). *Matemáticas 3º ESO*. Barcelona, España: Editorial Casals.

Corbarán, F., Álvarez, J.L., Fernández-Aliseda, A., González, A.E., Hans, J.A., Muñoz, J., Pomar, R., Renieblas, S. y Sánchez, P. (2003). *Matemáticas 2º ESO*. Barcelona. España. Editorial Vicens Vivens.

Corbarán, F., Álvarez, J.L., Fernández-Aliseda, A., González, A.E., Hans, J.A., Muñoz, J. y Queralt, T. (2003). *Matemáticas 4º ESO (Opción B)*. Barcelona. España. Editorial Vicens Vivens.

Crooks, N. y Alibali, M. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344-377.

Diccionario Libre (2003–2015) http://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Equation+ (mathematics) (acceso 11 de septiembre de 2015).

Fernández-Millán, E. (2013). *Invención de problemas por estudiantes de secundaria: evaluación de su conocimiento sobre simbolismo algebraico.* Trabajo de Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 53-71. doi: http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2017). Secondary students' implicit conceptual knowledge of algebraic symbolism. An exploratory study through problem posing. *IEJME-Mathematics Education, 12*(9), 799-826.

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (en prensa). Ejemplos y definiciones de ecuaciones: una ventana hacia el conocimiento conceptual de estudiantes de secundaria. *PNA.*

Ferrucci, B. J., Kaur, B., Carter, J. A. y Yeap, B. (2008). Using a model approach to enhance algebraic thinking in the elementary school mathematics classroom. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: 2008 Yearbook* (pp. 195–209). Reston, VA: NCTM.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano T. y Puig, L. (2008*). Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* New York, NY: Springer.

Frías, V., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, Z. (2007). *Matemáticas 1º ESO.* Barcelona, España: Editorial Casals.

Furinghetti, F. y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? En J.P. da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII*

International Conference for the Psychology of Mathematics (Vol. 2, pp. 368-375). Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

García, F.J. (2011). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Editex.

Goldenber, P. y Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Education Study of Mathematics, 69*, 183-194.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

González-Calero, J. A., Arnau, D. y Puig, L. (2013). Dificultades en la construcción de nombres de cantidades durante la resolución algebraica de problemas verbales por estudiantes de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 301-310). Bilbao, Spain: SEIEM.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher, 73*(8), 572-580.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 145–152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Isik, C. y Kar, T. (2012). The analysis of the problems the pre-service teachers experience in posing problems about equations. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(9), 93-113. doi: http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2012v37n9.1

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-62). Charlotte, NC: IAP.

Küchemann, D.E. (1981). Algebra. En K.M. Hart, M.L. Brown, D.E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (Eds.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). Londres, Reino Unido: John Murray.

Leinhardt, G. (1993). On teaching. En Glase, R. (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4, pp. 1-54). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196. doi: http://dx.doi.org/10.1023/A:1003606308064

Lin, P. J. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257-264). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Maragallo, J. (2011). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial Editex.

Mestre, J.P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *23*(1), 9-50. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0193-3973(01)00101-0

Mitchell, J. M. (2001). Interactions between natural language and mathematical structures: the case of "wordwalking". *Mathematical Thinking and Learning, 3*(1), 29-52.

Molina, M. (2007). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo por algunos alumnos de tercero educación primaria*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME, 17*(3), 559-579. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/6498/1/Gac173molina.pdf

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M.C. y Castro, E. (2016). Secondary school student's errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(3), 1-20.

Ng, S. F. y Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 282–313.

Orrantia, J., González, L.B. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje, 28*, 420-451. doi: http://dx.doi.org/10.1174/021037005774518929

Resnick, L.B., Cauzinille-Marmeche, E. y Mathieu, J. (1987). Understanding algebra. En J.A. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive process in mathematics* (pp. 179-203). Oxford, Reino Unido: Clarendon Press.

Rittle-Johnson, B. y Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. En R.C. Kadosh y A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp. 1118-1134). Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B. y Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99,* 561–574. doi: 10.1037/0022–0663.99.3.561.

Rodríguez-Domingo, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria.* Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico. En M. Marín- Rodríguez y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 379-391). Ciudad Real, España: SEIEM. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1887/

Ross, A. y Willson, V. (2012). The effects of representations, constructivist approaches, and engagement on middle school students' algebraic procedure and conceptual understanding. *School, Science and Mathematics, 112*(2), 117-128.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Education Study of Mathematics, 69*, 149-163.

Ruano, R.M., Socas, M. y Palarea, M.M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

Sheikhzade, M. (2008). *Promoting skills of problem-posing and problem- solving in making a creative social studies classroom.* Presented at 4th Global Conference, Oxford. Disponible en http://www.inter-disciplinary.net/ati/education/cp/ce4/Sheikhzade%20paper.pdf.

Star, J. (2005). Re-«conceptualizing» procedural knowledge in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404-411.

Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. En P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education (Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 518–525). Melbourne, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Szydlik, J. (2015). Mathematical conversations to transform algebra class. *Mathematics Teacher, 108*(9), 656-661.

Usiskin Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En Coxford A.F. y Shulte A. P. (Eds.), *The Ideas of Algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Relime, 15*(2), 233–258.

Wagner, S. (1981). An analytical framework for mathematical variables. En Equipe de Recherche Pedagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th International PME Conference* (pp.165-170). Grenoble, Francia: PME.

Watson, A. y Mason, J. (2002). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of PME 26* (vol. 4, pp. 377–385). Norwich, Reino Unido: University of East Anglia.

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Waywood, A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics, 12*, 34-43.