CMMoST 2017

4th INTERNATIONAL CONFERENCE ON
MECHANICAL MODELS IN STRUCTURAL ENGINEERING

Polytechnic University of Madrid
29th November - 1st December

Full Papers

CMMoST 2017

4th INTERNATIONAL CONFERENCE ON

MECHANICAL MODELS IN STRUCTURAL ENGINEERING

Polytechnic University of Madrid
29th November - 1st December

POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

ETSI CAMINOS CANALES Y PUERTOS

GRUPO ESPAÑOL DE IABSE

Authors
Víctor Compán Cardiel
Andrés Sáez Pérez
Enrique Hernández Montes
Luisa Mª Gil Martín
Mª Dolores Gómez Pulido
Margarita Cámara Pérez

Edition Coordinator
Víctor Compán Cardiel
Margarita Cámara Pérez

Contributor
Esther España Castaño

Edita: Godel Impresiones Digitales, S.L.
ISBN: 978-84-17293-12-3
Dep. Legal: Gr-1564/2017

Designed by Esther España Castaño

CMMoST 2017

4th INTERNATIONAL CONFERENCE ON

MECHANICAL MODELS IN STRUCTURAL ENGINEERING

Polytechnic University of Madrid
29th November - 1st December

PREFACE

Welcome to the Fourth International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering (**CMMoST2017)**, celebrated at the School of Civil Engineering of the Polytechnic University of Madrid (Madrid, Spain), from 29th November to 1st December, 2017.

CMMoST2017 is a scientific event organized by the Polytechnic University of Madrid in conjunction with the University of Seville and the University of Granada, Spain. The CMMoST conference series are devoted to fostering the continued involvement of the research community in all the areas of Structural Engineering, from identifying innovative applications and novel solution techniques to developing new mathematical procedures or addressing educational issues in technical degrees. Previous successful conferences were held in Granada (2011 and 2013) and Seville (2015), Spain .

The present volume is a collection of edited papers that were accepted for oral presentation at **CMMoST2017** after peer-review. We warmly thank all the contributors, authors, plenary speakers and sponsors of the event and wish this conference will offer you fruitful scientific discussions and a pleasant time in the historic city of Madrid.

The conference organizers would also like to express their gratitude to the International Scientific Advisory Board for their assistance in supporting and promoting the objectives of the meeting, as well as for their assistance in the form of reviews of the submitted papers.

Madrid, November 2017

ORGANIZING COMMITEE

Víctor Compán Cardiel. University of Seville, Spain.
Andrés Sáez Pérez. University of Seville, Spain.
Enrique Hernández Montes. University of Granada, Spain.
Luisa María Gil Martín. University of Granada, Spain.
Mª Dolores Gómez Pulido. Technical University of Madrid- CSIC, Spain.
Margarita Cámara Pérez. University of Seville, Spain.

LOCAL COMMITEE

Iván Muñoz Díaz. Technical University of Madrid, Spain.
José Manuel Soria Herrera. Technical University of Madrid, Spain.

SCIENTIFIC COMMITEE

Alberto Taliercio. Polytechnic of Milan, Italy.
Alejandro Mateo Hernández Díaz. Gobierno de Canarias, Spain.
Alfredo E. Huespe. Centro de Investigación de Métodos Computacionales, CIMEC (UNL/CONICET), Argentina.
Antoni Cladera Bohigas. University of Baleares Islands, Spain.
Antonio Marí Bernat. Polytechnic University of Cataluña, Spain.
Biljana Scepanovic. University of Montenegro, Montenegro.
Carlos Zanuy Sáchez. Polytechnic University of Madrid, Spain.
Eduardo Bayo Pérez. University of Navarra, Spain.
Enrique Mirambell Arrizabalaga. Polytechnic University of Cataluña, Spain.
Esperanza Rodríguez Mayorga. University of Seville, Spain.
Eugenio Oñate Ibañez de Navarra. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Spain.
Federico C. Buroni. University of Seville, Spain.
Felipe García Sánchez. University of Málaga, Spain.
Fernando Medina Encina. University of Seville, Spain.
Germán Castillo López. University of Málaga, Spain.
Ignacio Javier Paya Zaforteza. Polytechnic University of Valencia, Spain.
Javier Fernando Jiménez Alonso. University of Seville, Spain.
José María Goicolea Ruigómez. Polytechnic University of Madrid, Spain.
Juan Francisco Carbonell Márquez. University Loyola of Seville, Spain.
Luis Albajar Molera. Polytechnic University of Madrid, Spain.
Luis Rodríguez de Tembleque. University of Seville, Spain.
Manuel Romero García. Polytechnic University of Valencia, Spain.

Margarita Cámara Pérez. University of Seville, Spain.
Mario Rodríguez Rodríguez. Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico.
Mark A. Aschheim. Santa Clara University, EEUU.
Michele Palermo. University of Bolognia, Italy.
Miguel Fernández-Ruíz. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland.
Miguel Muñoz Black. University Mayor of San Andrés, Bolivia.
Osvaldo Luís Manzoli. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil.
Pablo Pachón García. University of Seville, Spain.
Pascual Martí Montrull. Polytechnic University of Cartagena, Spain.
Pedro Miguel Sosa. Polytechnic University of Valencia, Spain.
Pietro Gambarova. Polytechnic of Milan, Italia.
Rafael Aguilar Velez. Pontifical Catholic University of Peru, Peru.
Rafael Castro Triguero. University of Córdoba, Spain.
Salvador Ivorra Chorro. University of Alicante, Spain.
Stravroula Pantazopoulou. York University, Canada.
Tomaso Trombetti. University of Bologna, Italy.
Xavier Oliver Olivella. Polytechnic University of Cataluña, Spain.

Full Papers

CMMoST 2017

4th INTERNATIONAL CONFERENCE ON
MECHANICAL MODELS IN
STRUCTURAL ENGINEERING

INDICE

KEYNOTE LECTURES

APLICACIONES DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS EN EL PROYECTO DE PUENTES.
Astiz Suárez, Miguel Ángel. 11

DISEÑO COMPUTATIONAL DE MATERIALES Y ESTRUCTURAS. UN NUEVO PARADIGMA EN LA INGENIERÍA MECÁNICA Y ESTRUCTURAL.
Oliver Olivella, Xavier. 11

FULL PAPERS

SOME EXPERIENCES ON RELIABILITY BASED AEROELASTIC ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF LONG SPAN BRIDGES.
Baldomir, Aitor; Kusano, Ibuki; Jurado, José A.; Hernández, Santiago. 15

DESIGN OF VIBRATION DAMPING SYSTEMS USING SIMPLIFIED MODELS FOR LIGHTWEIGHT FOOTBRIDGES.
Casado, Carlos M.; Fernández, Javier; Pereda, José; Soria, José M.; Castaño, Javier. 31

AN IMPROVED FIREFLY ALGORITHM FOR OPTIMIZATION OF REINFORCED CONCRETE SECTIONS.
Sánchez-Olivares, Gregorio; Tomás Espín, Antonio; Martínez Martínez, Alfonso. 47

MODELING JUMPING LOADS USING TIME SERIES MODELS.
Cara, Javier; Fernández, Javier; Fraile, Alberto; Lorenzana, Antolín. 67

OPTIMAL LOCATION OF A TMD ON A LIVELY FOOTBRIDGE.
Ibán, Norberto; Magdaleno, Álvaro; Cacho, Mariano; Díaz, Iván M. 73

EXPERIMENTAL NUMERICAL CORRELATION OF THE DELAMINATION OF COMPOSITE STRUCTURES SUBJECTED TO LOW SPEED IMPACT.
Burgos de la Rosa, Ismael; Lopez Taboada, Carlos; Castillo López, Germán; Zabala, Haritz; Aretxabaleta, Laurentzi; García Sánchez, Felipe. 85

SIMPLIFIED MODEL FOR THE BEHAVIOUR OF HUMAN IMPACT AGAINST GLASS PLATES.
Alonso, Jesús; Parra, Jose Antonio; Huerta, Mª Consuelo. 105

EXPERIMENTAL STUDY ON SHEAR CRITICAL RC BEAMS STRENGTHENED WITH FE-SMA STRIPS.
Ruiz-Pinilla, Joaquín G.; Montoya-Coronado, Luis A. ; Ribas-Gonzalez, Carlos R.; Cladera-Bohigas, Antoni. 117

LONG TERM TENSION STIFFENING MODEL FOR REINFORCED CONCRETE MEMBERS.
Carbonell-Márquez, Juan Francisco; Gil-Martín, Luisa María. 127

METHODOLOGY FOR THE DYNAMIC ANALYSIS OF BUILDING SUBJECTED TO SEISMIC ACTIONS, INCORPORATING THE EFFECT OF NON-STRUCTURAL ELEMENTS.
García Pastor, Mª Carmen; Gómez Yábar, Amaya. 145

NEW PROPOSAL FOR EFFECTIVE WIDTH FOR E-STUB STRENGTH EVALUATION.
López, Manuel; Loureiro, Alfonso; Gutiérrez, Ruth M.; Reinosa, José Manuel. 157

FREE VIBRATION ANALYSIS OF GRAPHENE SHEET- AND CARBON NANOTUBE-REINFORCED POLYMER PLATES.
García-Macías, Enrique; Rodríguez-Tembleque, Luis; Sáez, Andrés. 165

NEW WALTERDALE BRIDGE: MODELS USED FOR STRUCTURAL ANALYSIS DURING THE CONSTRUCTION OF A STEEL THRUST ARCH BRIDGE.
Castrillo Calvillo, Miriam; Granda San Segundo, Laura; García Rodriguez, Patricia; Martínez Cutillas, Antonio; Muñoz Tarilonte, Alberto. 187

STRUCTURAL ANALYSIS AND DAMAGE ASSESSMENT OF THE VISTABELLA CHURCH'S TOWER TO ESTABLISH THE MASONRY'S ACTIVE REINFORCEMENT FOR ITS RESTORATION.
Señis, Roger; Pavón, Susana. 207

PROJECT OF EXPANSION OF A CONSTRUCTION USING PBL.
García-Marina, Vanessa. 219

GEOMETRY AND STRUCTURAL ANALYSIS PARAMETRIZATION OF STEEL NODES IN HIGH-RISE BUILDINGS. CASE STUDY ROYAL MEKKA CLOCK TOWER.
Rodríguez Izquierdo, Víctor; Vázquez Carretero, Narciso. 231

3D-WALL BEAM SYSTEM LOAD TRANSFER. CASE STUDY: JOHN CRANKO BALLET SCHOOL.
Rodríguez Izquierdo, Víctor. 237

LIMIT ANALYSIS BY LINEAR PROGRAMMING: CONSIDERATIONS REGARDING HISTORICAL MASONRY STRUCTURES.
Magdalena, Fernando; García, Julián; Hernando, José Ignacio; Magdalena, Eva. 243

STICK-SLIP VIBRATIONS OF A SLIDER WITH A RATE-AND STATE-FRICTION MODEL AND A FLUID-INFILTRATED MEDIUM.
Santillán, David; Cueto Felgueroso, Luis; Mosquera, Juan Carlos; Vila Martínez, Cristina. 259

STRUCTURAL ANALYSIS OF THE ARCH OF TAQ-I KISRA.
Fernández-Ruiz, Manuel Alejandro; Palomares-Bautista, Antonio; Hernández-Montes, Enrique . 275

A NONLINEAR NUMERICAL MODEL OF A HISTORICAL SLENDER STRUCTURE.
Diaferio, M. ; Foti, D. ; Giannoccaro, N.I.; Ivorra, S. 287

DISCUSSION ON HARMONIC DYNAMIC MODELS OF PEDESTRIAN LOADS FOR FOOTBRIDGES.
Cañada, Javier; Iturregui, Carlos; Díaz, Iván M.; García Palacios, Jaime H.; Goicolea, José M.; Lorenzana Ibán, Antolín. 297

FRP CONFINEMENT OF FIRE-DAMAGED CALCARENITE SAMPLES.
Estevan García, Luis; Baeza, F. J.; Ivorra, Salvador. 317

A TOOL FOR STUDENT'S WORK AND SKILLS SELF-ASSESSMENT.
Sánchez, Jacobo; Parra, José Antonio; Alonso, Jesús; Huerta, Mª Consuelo. 329

FAMILIES OF FREE-STANDING PRE-STRESSED PIN-JOINED STRUCTURES. SOME REMARKS ON STABILITY.
Gil Martín, Luisa María; Fernández Ruiz, M. Alejandro; Carbonell Márquez, Juan Francisco. 343

DYNAMIC IDENTIFICATION OF HISTORICAL AND SINGULAR BAROQUE VAULTS DESIGNED BY BALTHASAR NEUMANN: BASILICA OF THE FOURTEEN HOLY HELPERS AND CHAPEL OF THE WÜRZBURG RESIDENCE (GERMANY).
Pachón, Pablo; Compán, Víctor; Cámara, Margarita, Rottner, Matthias; Moro, J. Luis 361

INFLUENCE OF DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS OF GLASS PLATES ON HUMAN IMPACT RESISTANCE.
Sanchidrián, Alberto; Parra, José Antonio; Alonso, Jesús; Pecharromán, Julián; Huerta, Consuelo. 371

ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL EN SERVICIO DE EDIFICIOS INDUSTRIALES CON MAQUINARIAS.
Peralta, María H.; Ercoli, Norma L.; Pico, Leonel O.; Bacchiarello, Raúl. 387

NORMATIVE APPROACH TO THE MECHANICAL BEHAVIOUR OF POLYOLEFIN FIBRE REINFORCED CONCRETE.
Picazo, Álvaro; Alberti, Marcos G.; Enfedaque, Alejandro; Gálvez, Jaime C. 407

GEOMETRIC AND CONSTRUCTIVE MODELS FOR VERIFICATION OF THE EQUILIBRIUM OF MASONRY STRUCTURES.
Mencías, David. 421

YIELD DESIGN BASED NUMERICAL ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL REINFORCED CONCRETE STRUCTURES.
Vincent, H. ; Arquier, M.; Bleyer, J.; de Buhan, P. 435

MODELING OF SLEEVE SEMI RIGID JOINTS OF Z COLD FORMED PROFILES.
Gutiérrez, R.; Loureiro, A.; Reinosa, JM.; López, M. 451

CONSTRUCCIÓN, ANÁLISIS DINÁMICO Y CANCELACIÓN DE VIBRACIONES DE UN FORJADO MIXTO LIGERO.
Marinas-Sanz, Gonzalo; Díaz, Iván M.; Soria, José M.; García-Palacios, Jaime H.; Zanuy, Carlos. 459

SKILLS OF ARTIFICIAL VISION AND MACHINE LEARNING TO LOCATE (IN SPACE AND TIME) THE FOOTSTEPS OF A PEDESTRIAN WHILE WALKING.
Cosido, Óscar J.; Salcines, Alberto; Ruiz, Óscar; Lorenzana, Antolín. 477

DIFFERENT CRITERIA FOR TUNING TMDS: PERFORMANCE CONSIDERING FREQUENCY AND TIME SIMULATIONS.
Magdaleno, Álvaro; Cara, Javier; Pérez, Elena; Casado, Carlos; Lorenzana, Antolín. 493

ADJUSTABLE TMD (IN STIFFNESS AND DAMPING) USING MAGNETS AND COILS.
Hernández, Ovidio; Poncela, Alfonso V.; López, Pablo M.; Ibán, Norberto. 507

MAXIMUM LIKEHOOD METHODS FOR FINITE ELEMENT MODEL UPDATING OF CIVIL ENGINEERING STRUCTURES: A COMPARATIVE STUDY.
Jiménez-Alonso, J. F.; Hudson, E. J.; Pavic, A.; Sáez, A. 519

STATISTICAL MODELLING OF STEP VARIABILITY IN HUMAN WALKING.
García-Diéguez, Marta; Zapico-Valle, Jose Luis; García-Terán, José María. 533

VIBRATION CONTROL STRATEGIES FOR PEDESTRIAN STRUCTURES.
Díaz, Iván M.; García-Palacios, Jaime H.; Soria, J.M; Pereira, Emiliano. 541

AN APPROACH OF THE SEISMIC CALCULATION METHODOLOGIES COMPARED TO CODES BASED ON NON LINEAR ENERGY BALANCE.
Iturregui Arranz, Carlos; Soria, Jose M.; Díaz, Iván M.; García-Palacios, Jaime H. 559

AEROELASTIC COEFFICIENTS FOR CROSS-SECTION CABLE-STAYED BRIDGE USING CFD ANALYSIS AND COMPARISON WITH WIND TUNEL TESTS.
Soria, J.M.; Arroyo, J.; Calvo, J.; Díaz, Iván M.; García-Palacios, Jaime H. 579

MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE BÓVEDAS POR IMPOSICIÓN: LA IGLESIA DE SANTA ANA EN SEVILLA.
J.A. Valseca; Rodríguez-León, M.T.; Compán, Víctor; Vázquez, Enrique; Sánchez, José. 589

IDENTIFYING A TMD AND ITS FINAL TUNING ONCE INSTALLED ON A LIVELY COMPOSITE SLAB.
Canales Sánchez-Castro, Fernando; Soria, José M.; Díaz, Iván M.; Marinas-Sanz, Gonzalo; García-Palacios, Jaime H. 605

SLENDER STRUCTURES VIBRATION SUPRESSION IN BY ELECTROMAGNETIC ADAPTIVE CONTACLESS SOLUTION.
Hernández, Ovidio; Vasallo, Ali; Pereira, Emiliano; Poncela, Alfonso V. 619

STATISTICAL ANALYSIS OF THE GROUND REACTION FORCES ON VIBRATING PAVEMENTS.
García-Terán, José María; García-Dieguez, Marta; Magdaleno, Álvaro; Fraile, Alberto. 633

FIBRE REINFORCED HIGH STRENGTH CONCRETE SUBJECTED TO ELEVATED TEMPERATURES.
Varona, F.B.; Baeza, F.J.; Ivorra, S.; Bru, D. 653

SEISMIC RESPONSE OF A THREE-STOREY BUILDING WITH CROSS-LAMINATED TIMBER PANELS: LESSONS LEARNED FROM NUMERICAL SIMULATION.
González Rodrigo, Beatriz; Fraile de Lerma, Alberto; Mosquera Feijoo, Juan Carlos. 667

UPDATING MODELS OF FINITE ELEMENTS BY MODAL OPERATIONAL ANALYSIS AND GENETIC ALGORITHMS. APPLICATION TO ARCHITECTURAL HERITAGE BUILT.
Chaves, Estefanía; Pachón, Pablo; Compán, Víctor; Baeza, Juan Ramón. 679

AUTOMATIC OPTIMIZATION PROCESS OF SHELL-TYPE BEHAVIOUR ON A FREE FORM STRUCTURE. 697
España, Esther; Cámara, Margarita; González de Canales, Francisco

KEYNOTE LECTURES

CMMoST 2017

4th INTERNATIONAL CONFERENCE ON

MECHANICAL MODELS IN STRUCTURAL ENGINEERING

Polytechnic University of Madrid
29th November - 1st December

Miguel Angel Astiz Suárez
Universidad Politécnica de Madrid

KEYNOTE LECTURE: APLICACIONES DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS EN EL PROYECTO DE PUENTES.

Catedrático de Universidad, el el Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Universidad Politécnica de Madrid.

Xavier Oliver Olivella
Universidad Politécnica de Cataluña

KEYNOTE LECTURE: DISEÑO COMPUTATIONAL DE MATERIALES Y ESTRUCTURAS. UN NUEVO PARADIGMA EN LA INGENIERÍA MECÁNICA Y ESTRUCTURAL

Catedrático de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras.
Dpto. de Ingeniería Civil y Ambiental, Universidad Politécnica de Catalunya (UPC).
Profesor de Investigación del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).

Full Papers

CMMoST 2017

4th INTERNATIONAL CONFERENCE ON

MECHANICAL MODELS IN STRUCTURAL ENGINEERING

Polytechnic University of Madrid
29th November - 1st December

Some experiences on reliability based aeroelastic analysis and optimization of long span bridges

Baldomir, Aitor[1]; Kusano, Ibuki[2]; Jurado, José A.[3]; Hernández, Santiago[4]

ABSTRACT

Flutter instability in suspension bridges is a critical design constraint. It has been demonstrated over the years that wind tunnel tests produce the more reliable results although there is uncertainty in their values. Thus a probabilistic analysis approach is more appropriate when dealing with this kind of structures. In this research the probability of failure against flutter is obtained considering the wind velocity at the bridge location as well as the points that define the flutter derivatives as random variables. A reliability-based design optimization (RBDO) is also formulated to obtain the minimum deck and cable weight that guaranties a target safety level against flutter. Three RBDO methods are implemented in this research (Reliability Index Approach, Performance Measure Approach and Sequential Optimization and Reliability Assessment) and they are applied to the case of the Messina Bridge Project.

Keywords: RBDO, Flutter derivatives, Optimization, Reliability, Suspension bridges.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de puentes de gran vano soportados por cables ha experimentado un creciente incremento en la longitud de vano llegando a luces de casi 2 km, lo que hace que estas estructuras sean cada vez más flexibles y por tanto más sensibles a las acciones de viento. Entre los distintos tipos de inestabilidad estructural que pueden surgir en esta tipología de puentes, destaca la inestabilidad de flameo, por ser uno de los estados límite último que condicionan el diseño de estos puentes. Esto se debe a que dicha inestabilidad puede desencadenar el colapso parcial o total de la estructura, como así lo demuestran varios ejemplos en la historia.

Por tanto es necesario que el ingeniero tenga las herramientas necesarias para poder calcular la velocidad de viento a partir de la cual este fenómeno puede producirse. Las primeras investigaciones en el ámbito de la aeroelasticidad de puentes se realizaron en 1940 para el puente de Tacoma Narrows antes de su colapso. F.B. Farquharson de la Universidad de Washington construyó un modelo del puente y un modelo seccional del tablero que se ensayaron en un túnel de viento obteniendo las

[1] *Structural Mechanics Group, School of Civil Engineering, Universidade da Coruña (SPAIN). abaldomir@udc.es (Corresponding author)*
[2] *Structural Mechanics Group, School of Civil Engineering, Universidade da Coruña (SPAIN). ikusano@udc.es*
[3] *Structural Mechanics Group, School of Civil Engineering, Universidade da Coruña (SPAIN). jjurado@udc.es*
[4] *Structural Mechanics Group, School of Civil Engineering, Universidade da Coruña (SPAIN). hernandez@udc.es*

primeras conclusiones y estableciendo las primeras recomendaciones para mejorar el comportamiento frente a esta inestabilidad. Estos estudios eran puramente experimentales y en ese mismo año se publican los primeros desarrollos teóricos sobre la inestabilidad por flameo para el caso de la placa plana Theodorsen T. [1,2]. Habrá que esperar hasta 1971 para contar con la primera formulación del flameo para puentes propuesta por Scanlan y Tomko [3]. En esta formulación las fuerzas aeroelásticas que actúan sobre el tablero dependen de las denominadas funciones de flameo (flutter derivatives, en inglés) que multiplican a los grados de libertad de arrastre, elevación y momento, así como a sus derivadas respecto al tiempo. Estas "flutter derivatives" dependen de las características del tablero y su obtención se realiza experimentalmente en túnel de viento. Aunque existen métodos numéricos para estimar estas funciones, es aceptado por la comunidad científica que los métodos proporcionados por la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD) no son lo suficientemente precisos para ser utilizados de forma exclusiva para este propósito.

Los ensayos que se realizan en túnel de viento están sujetos a diversas fuentes de incertidumbre que deben tenerse en cuenta a la hora de proporcionar los resultados obtenidos en ellos. En particular las funciones de flameo experimentan variaciones significativas en función del laboratorio en el que se obtengan, tal y como se explica en el trabajo de Sarkar et al. [4]. En este trabajo se concluye que las diferencias dependen numerosos factores como las condiciones de operatividad del laboratorio, las técnicas usadas para extraer resultados de turbulencia, el tiempo de ensayo, etc… Por tanto, es necesario cuantificar la incertidumbre existente en los resultados experimentales para poder utilizar dicha información en las distintas fases de análisis y diseño de estos puentes.

Ostenfeld-Rosental et al. [5] plantearon por primera vez obtener la probabilidad fallo frente a flameo considerando 7 variables aleatorias que incluían la velocidad de flameo, propiedades estructurales y la velocidad de viento entre otras. Ge et al. [6] calcula la probabilidad de fallo debido a flameo usando el método FORM (First Order Reliability Method) y utilizando una fórmula empírica para obtener la velocidad de flameo. Baldomir et al. [7] propone considerar cada uno de los puntos que definen las funciones de flameo como una variable aleatoria y obtener mediante métodos de fiabilidad la probabilidad de fallo frente al estado límite de flameo. También se considera la velocidad de viento en el emplazamiento del puente y el amortiguamiento como variables aleatorias. De esta manera es posible cuantificar el impacto que tiene sobre la seguridad frente a flameo el hecho de tener mayor o menor incertidumbre en los datos obtenidos en túnel de viento.

Los estudios anteriores proporcionan información sobre la probabilidad de fallo frente a flameo cuando se tienen en cuenta incertidumbre en diferentes parámetros que afectan a la verificación de este estado límite. Sin embargo, es posible tener en cuenta este tipo de restricciones probabilistas en la etapa de diseño. Concretamente los métodos de optimización probabilista [8-14] permiten mejorar el diseño limitando el valor máximo de la probabilidad de fallo frente a un estado límite. En este sentido Kusano et al. [15] plantean por primera vez la optimización de tableros de puentes colgantes y los cables principales considerando restricciones de tipo probabilista cuando se tiene en cuenta la incertidumbre presente en los ensayos experimentales que proporcionan las funciones de flameo. Durante más de 15 años en el túnel de viento del Grupo de Mecánica de Estructuras de la Universidade da Coruña se han realizado numerosos ensayos para determinar la velocidad de flameo de puentes y pasarelas muy diversas. Durante esta experiencia se ha constatado que los resultados

obtenidos están sujetos siempre a una cierta dispersión y como consecuencia se ha realizado un estudio para conocer el efecto de esta dispersión en los resultados de probabilidades de fallo y en el diseño óptimo probabilista.

En este documento se expone el método híbrido que permite obtener la velocidad de flameo de un puente, la formulación de análisis de fiabilidad para conocer la probabilidad de fallo por flameo así como el planteamiento para introducir dicha información aleatoria en el diseño óptimo del tablero y cables de un puente colgante.

2. CÁLCULO DE LA VELOCIDAD DE FLAMEO MEDIANTE MÉTODOS HÍBRIDOS.

2.1. Etapa experimental

Esta primera etapa se lleva a cabo en un túnel de viento y sirve para determinar las fuerzas aeroelásticas $\mathbf{f}_a$ por unidad de longitud de tablero. Dichas fuerzas son las que ejerce el viento sobre el tablero (Fig. 1) y se descomponen en tres acciones por unidad de longitud, que son: una fuerza de arrastre (drag), que produce una flexión lateral del tablero, una fuerza de elevación (lift), que produce una flexión vertical del tablero y un momento (momento), alrededor del eje longitudinal del tablero que produce torsión a lo largo del mismo. Las fuerzas aeroelásticas por unidad de longitud, resultan:

$$
\begin{aligned}
D_a &= \frac{1}{2}\rho V^2 B\left(KP_1^*\frac{\dot{v}}{V} - KP_2^*\frac{B\dot{\varphi}_x}{V} - K^2P_3^*\varphi_x + K^2P_4^*\frac{v}{B} - KP_5^*\frac{\dot{w}}{V} - K^2P_6^*\frac{w}{B}\right)\\
L_a &= \frac{1}{2}\rho V^2 B\left(KH_1^*\frac{\dot{w}}{V} + KH_2^*\frac{B\dot{\varphi}_x}{V} + K^2H_3^*\varphi_x + K^2H_4^*\frac{w}{B} - KH_5^*\frac{\dot{v}}{V} - K^2H_6^*\frac{v}{B}\right)\\
M_a &= \frac{1}{2}\rho V^2 B^2\left(KA_1^*\frac{\dot{w}}{V} + KA_2^*\frac{B\dot{\varphi}_x}{V} + K^2A_3^*\varphi_x + K^2A_4^*\frac{w}{B} - KA_5^*\frac{\dot{v}}{V} - K^2A_6^*\frac{v}{B}\right)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

donde V es la velocidad media del viento, B el ancho de la sección, ρ es la densidad del aire, $K = \omega B/V$ es la frecuencia reducida, con $\omega = 2\pi f$ y la frecuencia en rad/s. Los valores P_i^*, H_i^* y A_i^*, con i = 1…6, son las funciones de flameo, que varían con la velocidad reducida.

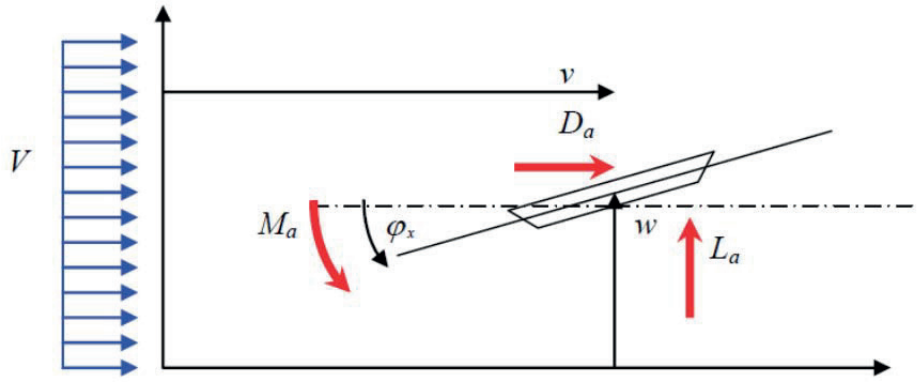


Figura 1. *Fuerzas aeroelásticas que actúan sobre un tablero*

2.2. Etapa computacional

Se utiliza el análisis multimodal de flameo para resolver este problema, tal y como han descrito investigadores como Kastuchi et al. [16] y Chen et al. [17]. El sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento dinámico de un tablero sometido a unas fuerzas de origen aeroelástico $\mathbf{f_a}$ es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{C} - \mathbf{C_a})\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K_a})\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2}$$

siendo **M**, **C** y **K** las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del tablero, y $\mathbf{K_a}$ y $\mathbf{C_a}$ las matrices aeroelásticas de rigidez y amortiguamiento, que se obtienen de forma experimental en el túnel de viento. Aplicando análisis modal a la Eq. 2, la solución es una combinación de los *m* modos más significativos. El desarrollo de esta formulación lleva a tener que resolver finalmente el siguiente problema de autovalores [18]:

$$\left(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}\right)\mathbf{w}_{\mu}e^{\mu t} = \mathbf{0} \tag{3}$$

donde en la formación de la matriz **A**, que no es simétrica, intervienen las matrices **K**, $\mathbf{K_a}$, **C** y $\mathbf{C_a}$.

Para resolver este problema se necesitan los modos de vibración del puente completo así como las frecuencias naturales, que se obtienen mediante un modelo de elementos finitos. La resolución del problema de valores propios se puede realizar de forma iterativa obteniendo así las *m* parejas de valores propios complejos conjugados correspondientes a cada uno de los modos de vibración considerados. Se alcanza la velocidad crítica de flameo cuando para velocidades crecientes de viento alguno de los autovalores presenta un amortiguamiento nulo por vez primera, lo que es síntoma del umbral de la inestabilidad. En este estudio se ha utilizado el código FLAS [19] desarrollado en la Universidade da Coruña para resolver el problema de autovalores proporcionando la velocidad de flameo.

3. FIABILIDAD ESTRUCTURAL EN EL FENÓMENO DE FLAMEO DE PUENTES

3.1. Variables aleatorias

La primera variable aleatoria que se considera es la velocidad de viento en el emplazamiento del puente, siendo una de las fuentes de incertidumbre más claras por la propia naturaleza aleatoria del fenómeno. Generalmente esta información se conoce a través de las estaciones meteorológicas de la zona así como a través de la instalación de anemómetros específicos para la construcción de este tipo de puentes. Esta variable se suele caracterizar a través de funciones de distribución extremales tipo Gumbel, Weibull o Frechet.

Otra variable aleatoria que se tiene en cuenta es el amortiguamiento estructural cuya variación puede ser hasta del 40% de su valor medio en puentes de gran vano como describe Davenport [20]. En este trabajo se define esta variable con una distribución log-normal con un coeficiente de variación de 0.2.

Por último, como se comentó anteriormente, en el túnel de viento se produce una cierta dispersión a la hora de obtener las funciones de flameo y por tanto un primer planteamiento es considerar los puntos que definen las funciones de flameo como variables aleatorias. En definitiva, por cada una de

las 18 funciones de flameo, se tendrán tantas variables aleatorias como puntos la definen. En la Fig. 2 se muestra un ejemplo de una función de flameo y los puntos que se deberán considerar como variables aleatorias.

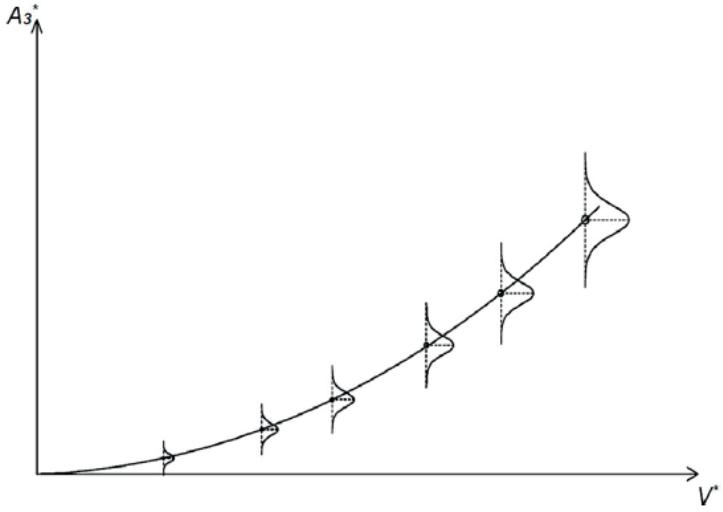


Figura 2. *Ejemplo de una función de flameo. Se define una variable aleatoria de distribución normal por cada punto obtenido en laboratorio.*

3.2. Función de estado límite

La expresión de la función de estado límite es muy simple, puesto que se desea que la velocidad de flameo del puente sea superior a la velocidad de viento extremal alcanzada en la ubicación del puente. Su forma normalizada es la siguiente:

$$G(\mathbf{X}) = \frac{V_f(x_i, \zeta)}{x_w} - 1 \qquad i = 1, ..., n \tag{4}$$

donde V_f es la velocidad de flameo, que depende de las variables aleatorias asociadas a las funciones de flameo x_i y del amortiguamiento estructural ζ , y x_w es la variable aleatoria de velocidad de viento que incide sobre el tablero del puente. Así el número total de variables aleatorias del problema es de n+2.

3.3. Método FORM modificado

El método FORM se debe a Hasofer-Lind [21], que establece el valor del índice de fiabilidad como la mínima distancia entre el origen del espacio normalizado U a la superficie de fallo definida como g(**U**)=0. El problema de fiabilidad se puede plantear como el siguiente problema de optimización:

$$\beta = \min \sqrt{\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U}} \tag{5}$$

sujeto a

$$g(\mathbf{U}) = 0 \tag{6}$$

donde *β* es el índice de fiabilidad y la solución del problema (**U***) se denomina punto máximo probable de fallo (MPP). El proceso iterativo propuesto por Hasofer-Lind requiere linealizar la función de estado límite en el entorno del punto de estudio y se obtiene β como la distancia desde ese punto al hyperplano resultante de dicha linealización. La expression de esta distancia es:

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} u_i^2} = \frac{g(\mathbf{U}^*) - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial g(\mathbf{U}^*)}{\partial u_i} u_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial g(\mathbf{U}^*)}{\partial u_i} \right)^2}} \tag{7}$$

El algoritmo de Hasofer-Lind considera como punto inicial (MPP) el valor medio de las variables aleatorias, esto es $\mathbf{U}_0=\mathbf{0}$. Tras obtener β el nuevo MPP se calcula como:

$$\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k - \mathbf{v}\beta \tag{8}$$

donde **v** es el vector unitario del gradiente de la función aproximada en el punto MPP. Se repiten los mismos pasos hasta llegar a convergencia en *β*. Otro criterio de convergencia es que la función de estado limite en el MPP (**U***) sea nulo. Este algoritmo presenta algunas veces dificultades de convergencia, que pueden solucionarse disminuyendo el paso de avance mediante un factor de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \frac{\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k}{c} \tag{9}$$

donde *c* es el factor de reducción. Se han obtenido buenos resultados para valores de este factor entre 2 y 5.

3.4. Aplicación al proyecto del puente sobre el estrecho de Messina

En la Fig. 3. se muestra el modelo seccional de este puente a escala 1/100 instalado en el túnel de viento de la Universidade da Coruña. Las funciones de flameo fueron obtenidas por A. León [22] y los resultados se muestran en la Fig. 4.

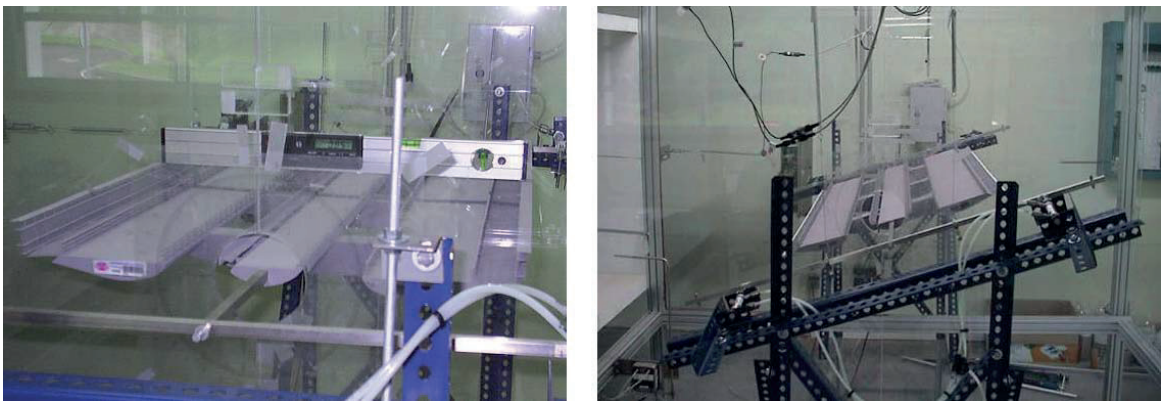


Figura 3. *Ensayo en túnel de viento del modelo seccionál del proyecto del puente sobre el estrecho de Messina*.

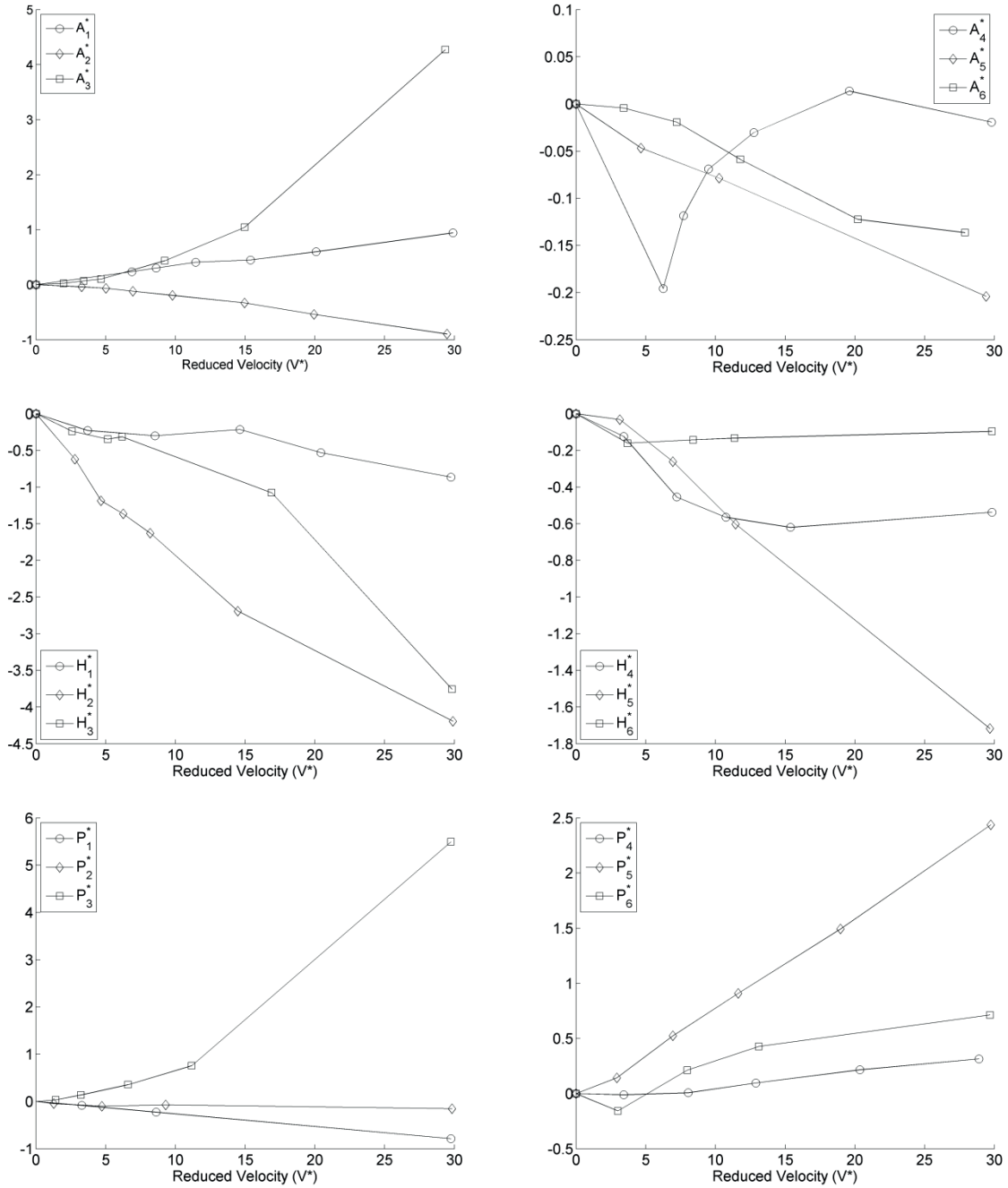


Figura 4. *Funciones de flameo del tablero del puente sobre el estrecho de Messina*

Como se comentó anteriormente para resolver la ecuación de equilibrio dinámico es necesario obtener los modos y frecuencias naturales de vibración del puente completo. En este caso se ha definido un modelo de elementos finitos en el software comercial Abaqus [23] (Fig. 5) con 12528 grados de libertad. Los modos de vibración se obtienen en dos pasos: en primer lugar se realiza un análisis estático con no linealidad geométrica únicamente a peso propio y en un segundo paso y considerando las tensiones iniciales en la estructura debidas a peso propio se realiza el análisis modal.

Se ha resuelto el problema de fiabilidad frente a flameo para diferentes situaciones en función del número de variables aleatorias que se tienen en cuenta simultáneamente, que son:

I. Únicamente la velocidad de viento (x_w) se considera variable aleatoria
II. Se consideran variables aleatorias x_w), el amortiguamiento estructural y las 6 funciones de flameo correspondientes a una componente de las fuerzas aeroelásticas.
III. Se consideran a la vez tanto la velocidad de viento, el amortiguamiento estructural como todas las funciones de flameo.

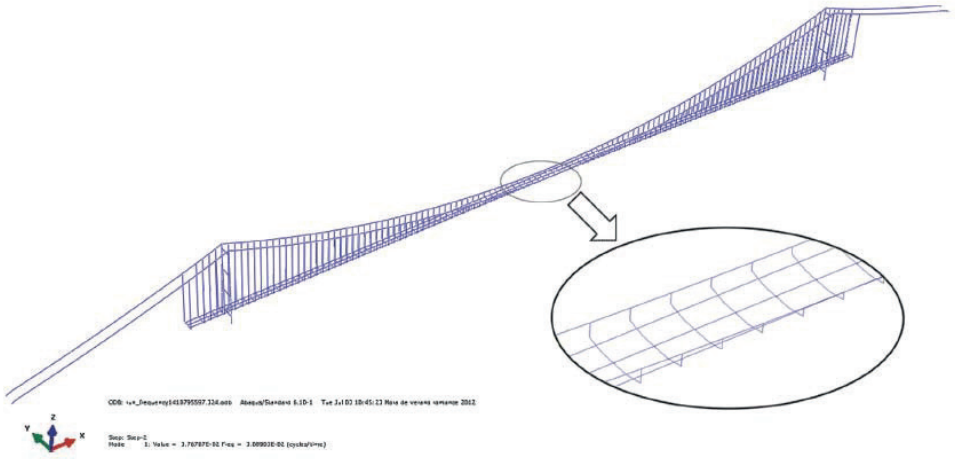


Figura 5. *Vista del modelo de elementos finitos del puente sobre el estrecho de Messina*

En el primer caso únicamente hay una variable aleatoria y el índice de fiabilidad que se obtiene es β=16.534. Dicho valor se reduce a β=16.472 cuando se añade además el amortiguamiento estructural como variable aleatoria. Los resultados para los casos II y III se muestran en las Tablas 1 y 2.

Tabla 1. Índice de fiabilidad y probabilidad de fallo considerando x_w, ζ y las 6 funciones de flameo del mismo tipo como variables aleatorias

Variables aleatorias	Nº de variables (N)	σ=5%		σ=15%	
		β	P_f	β	P_f
$x_w, \zeta, A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*, A_5^*, A_6^*$	34	15.528	1.12E-54	12.004	1.69E-33
$x_w, \zeta, H_1^*, H_2^*, H_3^*, H_4^*, H_5^*, H_6^*$	30	16.154	5.32E-59	14.651	6.64E-49
$x_w, \zeta, P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*, P_5^*, P_6^*$	27	16.267	8.46E-60	15.445	4.08E-54

Tabla 2. Índice de fiabilidad y probabilidad de fallo considerando x_w, ζ y las 18 funciones de flameo como variables aleatorias

Variables aleatorias	Nº de variables (N)	σ=5%		σ=15%	
		β	P_f	β	P_f
$x_w, \zeta\ A_1^*, ..., A_6^*, H_1^*, ..., H_6^*, P_1^*, ..., P_6^*$	90	15.217	1.36E-52	12.163	2.45E-34

Se puede observar que los valores de probabilidad de fallo son exageradamente bajos. Esto es así debido a que el dimensionamiento de este puente se hizo para una velocidad de diseño de 75 m/s, muy superior a la velocidad máxima registrada en el emplazamiento del puente.

Otra ventaja de este estudio es que permite determinar la influencia que tiene sobre la probabilidad de fallo el hecho de tener más incertidumbre en una u otra función de flameo.

En la Fig. 6 se muestra la evolución del algoritmo iterativo de Hasofer-Lind modificado por Baldomir mediante el factor de reducción *c*. Se puede ver que para *c*=4 la convergencia se alcanza tanto en el índice de fiabilidad como en el valor de la función de estado límite.

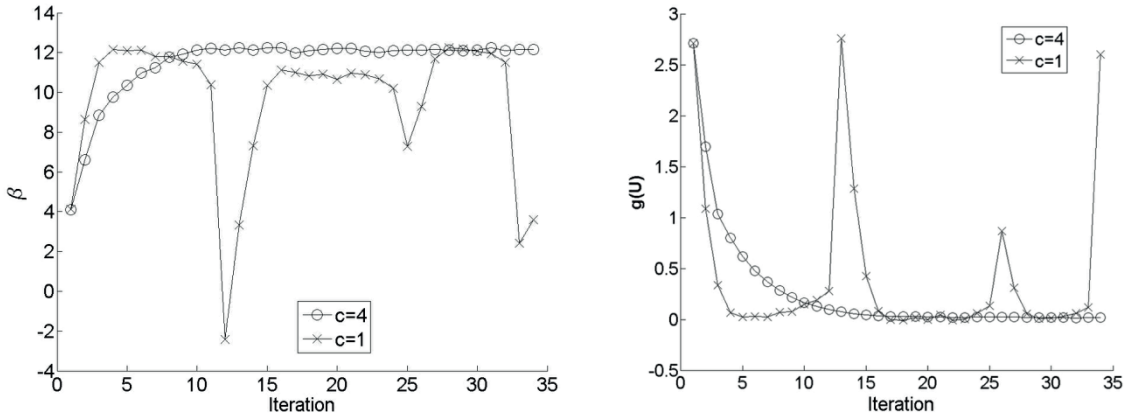


Figura 6. *Evolución del índice de fiabilidad y de la función de estado límite para c*=1 y *c*=4.

4. OPTIMIZACIÓN DE PUENTES COLGANTES EN RÉGIMEN PROBABILISTA CON CONDICIONES DE FLAMEO

4.1. Formulación del problema de optimización probabilista y métodos para su resolución

El problema general de optimización probabilista se puede formular del siguiente modo:

$$\min F(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \tag{10}$$

sujeto a:

$$P\left[G_i(\mathbf{d},\mathbf{x}) \le 0\right] \le P_{f_i}{}^T \quad i=1,2,\ldots m \tag{11}$$

$$h_j(\mathbf{d}) \le 0 \quad j=m+1,\ \ldots,M \tag{12}$$

donde **d** es el vector que contiene a las variables de diseño del problema, **x** es el vector de variables aleatorias, *P* es el operador de probabilidad y $P_{f_i}{}^T$ es el valor máximo de la probabilidad de fallo admitido para un estado límite concreto. h_j es el conjunto de restricciones deterministas del problema.

Existen numerosos métodos que permiten resolver el problema anterior. Un resumen exhaustivo de estos métodos puede encontrarse en el trabajo publicado por Aoues [9] donde se hace una clasificación en métodos de dos niveles, métodos de un nivel y métodos desacoplados. La formulación original da lugar a métodos de dos niveles en el sentido de que existen dos bucles de optimización anidados, el bucle externo que modifica el diseño y bucle interno que realiza el análisis de fiabilidad. Entre estos métodos destacan el método RIA (Reliability Index Reliability Index Approach) desarrollado por Enevoldsen and Sorensen [24] o el método PMA (Performance Measure Approach) publicado por Tu et al. [25]. Estos métodos resuelven directamente el problema anterior pero son computacionalmente costosos. Entre los métodos más utilizados están los métodos desacoplados

pues como su nombre indica separan el bucle de optimización del bucle de análisis de fiabilidad. Destaca el denominado SORA (Sequential Optimization and Reliability Assessment) publicado por Du and Chen [12] pues proporciona resultados muy precisos con un coste computacional muy reducido.

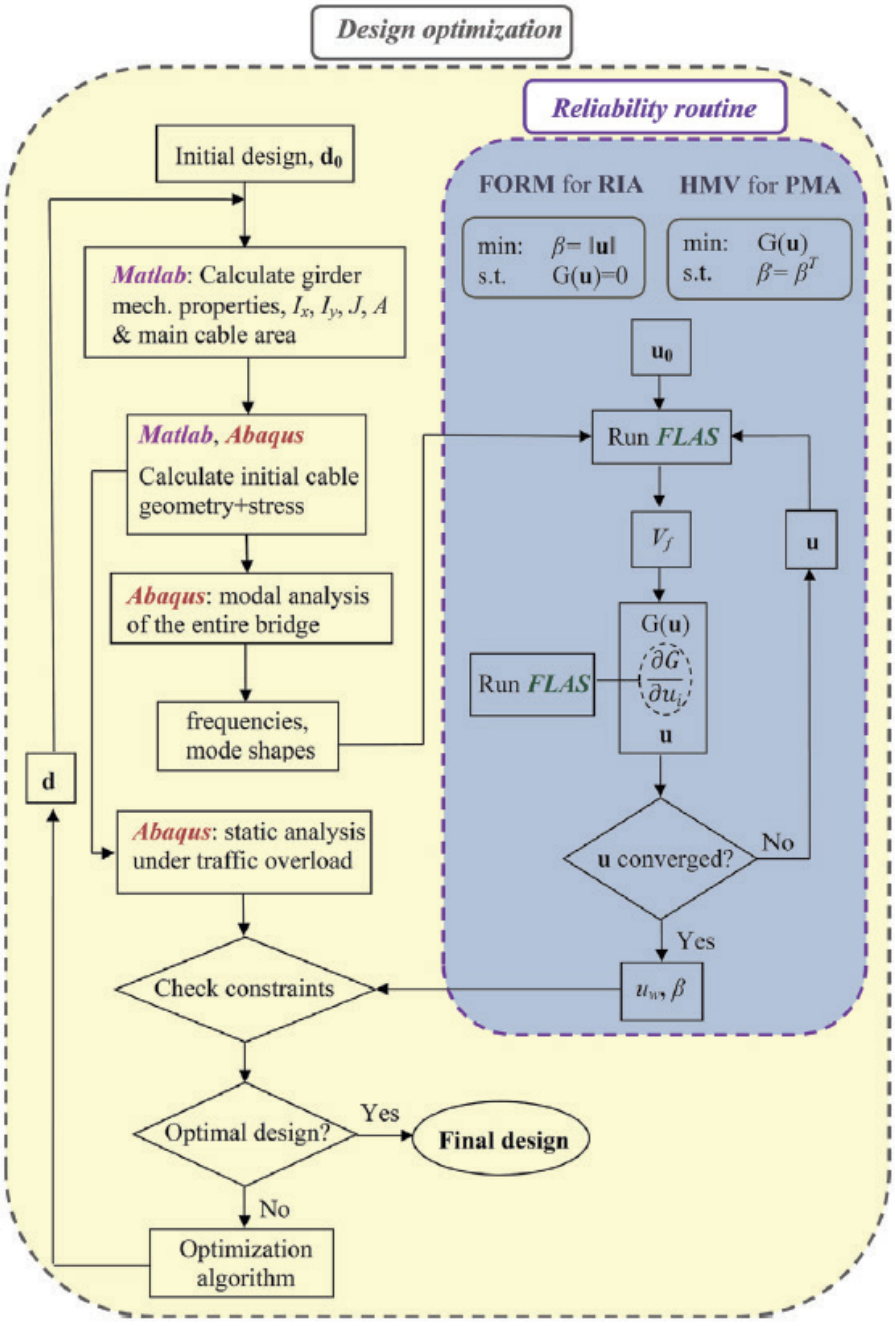


Figura 7. *Diagrama de flujo de los métodos RIA y PMA aplicados a optimización de puentes con condiciones de flameo*.

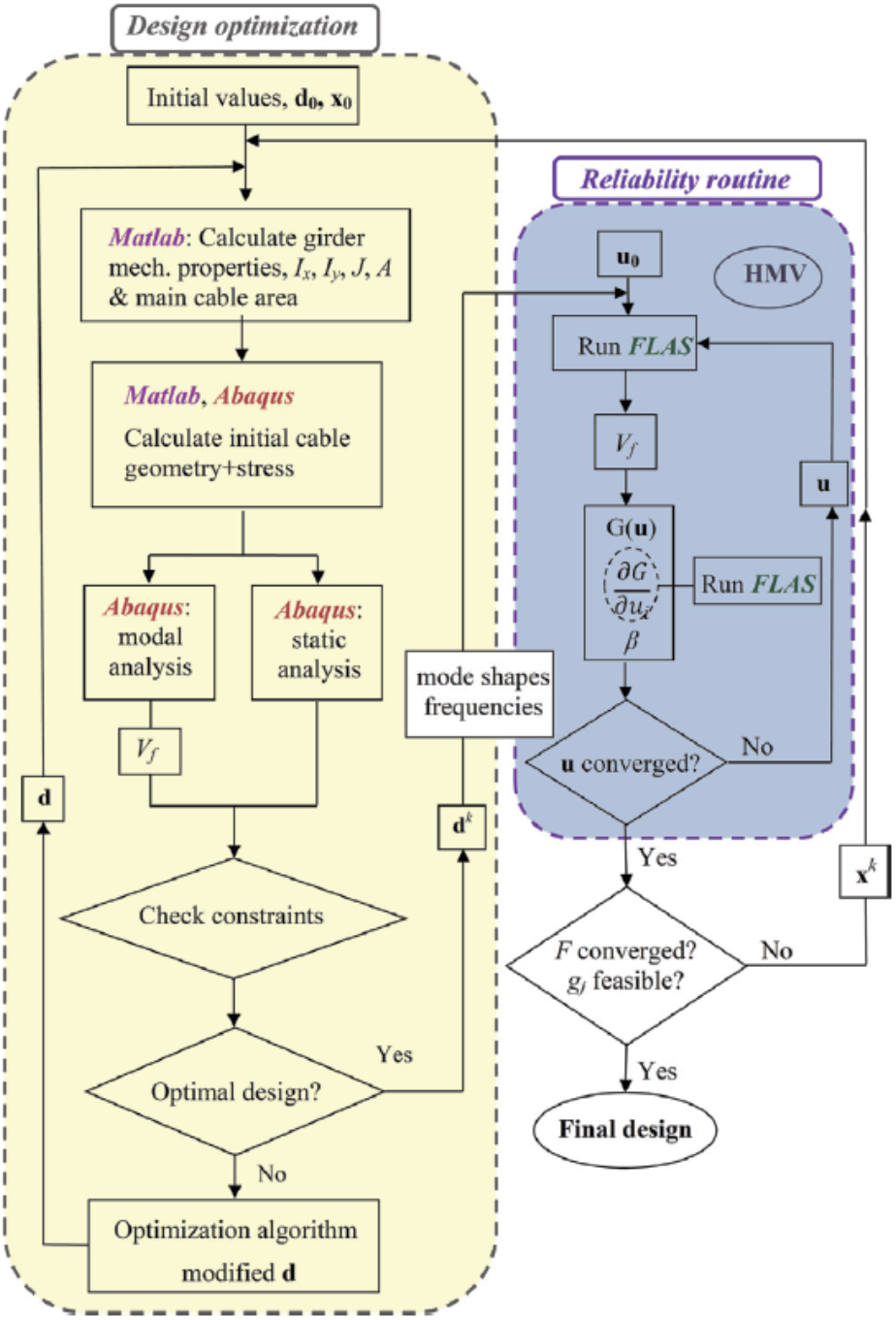


Figura 8. *Diagrama de flujo del método SORA aplicado a optimización de puentes con condiciones de flameo*.

En las figuras 7 y 8 se presenta la implementación de los métodos RIA, PMA y SORA para resolver el problema planteado en las ecuaciones 10-12. La programación de estos métodos se ha realizado en MATLAB [26] utilizando como algoritmo de optimización el método SQP (Sequential Quadratic Programming) implementado en la función 'fmincon'. El algoritmo ejecuta Abaqus para obtener los modos y frequencias de vibración en cada iteración y FLAS para obtener la velocidad de flameo. Estos códigos se lanzan intensivamente para obtener los gradientes de las condiciones de diseño respecto a las variables de diseño **d** y los gradientes de la función de estado límite respecto a las variables aleatorias **x**.

4.2. Aplicación al proyecto del puente sobre el estrecho de Messina

El problema de optimización descrito se ha resuelto para el mismo ejemplo que en el apartado 3. En este caso se trata de optimizar los espesores de las chapas que forman los 3 cajones del puente (Fig. 9) y el área de los cables principales. Las variables aleatorias consideradas son la velocidad de viento y los puntos que definen las funciones de flameo.

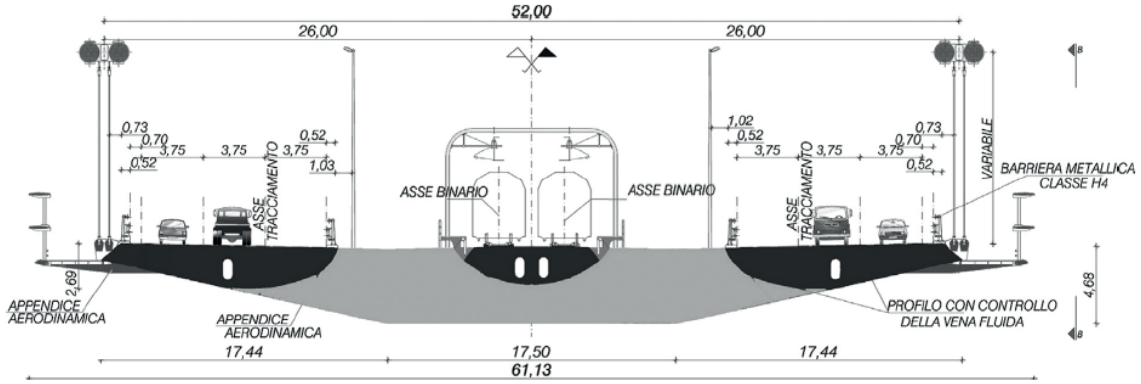


Figura 9. *Sección transversal del tablero del puente sobre el estrecho de Messina*.

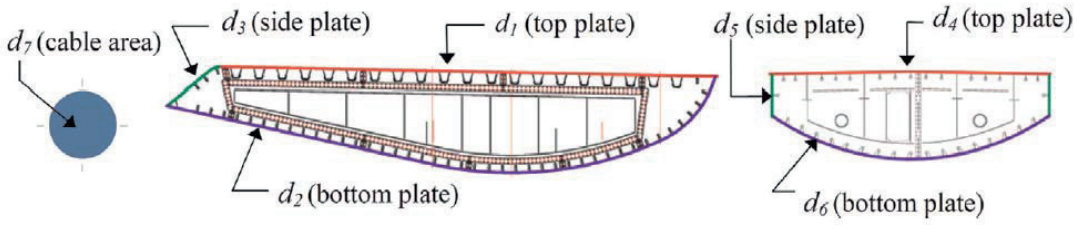


Figura 10. *Variables de diseño consideradas*.

El problema de optimización es este caso se formula como:

$$\min f(\mathbf{d}) \tag{12}$$

sujeto a

$$g_1 : P\left[V_f(x_i) - x_w \le 0\right] \le P_f \tag{13}$$

$$g_{2a} : 5 \text{ mm} \le d_i \le 30 \text{ mm} \quad i=1, 2,\ldots, 6 \tag{14}$$

$$g_{2b} : 1.0 \text{ m}^2 \le d_7 \le 3.0 \text{ m}^2 \tag{15}$$

$$g_3 : \sigma_c \le 800 \text{ MPa} \tag{16}$$

$$g_4 : \frac{z_d}{z_{max}} - 1 \le 0 \quad \left(z_{max} = \frac{L}{500}; L = 3300\ m \right) \tag{17}$$

Los espesores en milímetros de las chapas que forman los cajones definidos en proyecto son $\mathbf{d}_0$=[14,14,14,16,12,14], y el área del cable principal, d7=2.0165 m^2, dando lugar a un volumen de acero de cable y tablero de 5,983.75 m^3 y 21,092.59 m^3, respectivamente. El índice de fiabilidad fijado para el problema de optimización fue arbitrariamente escogido con valor de β=12. El objetivo del estudio es minimizar el volumen total de acero (cable y tablero) manteniendo un nivel de seguridad de β=12 frente al fenómeno de flameo.

Los resultados obtenidos mediante los tres métodos descritos se muestran en la Fig. 11. El resultado numérico de la variable d7 (área del cable) se ha representado multiplicado por 10 para poder incluirla en el mismo gráfico que los espesores de chapa.

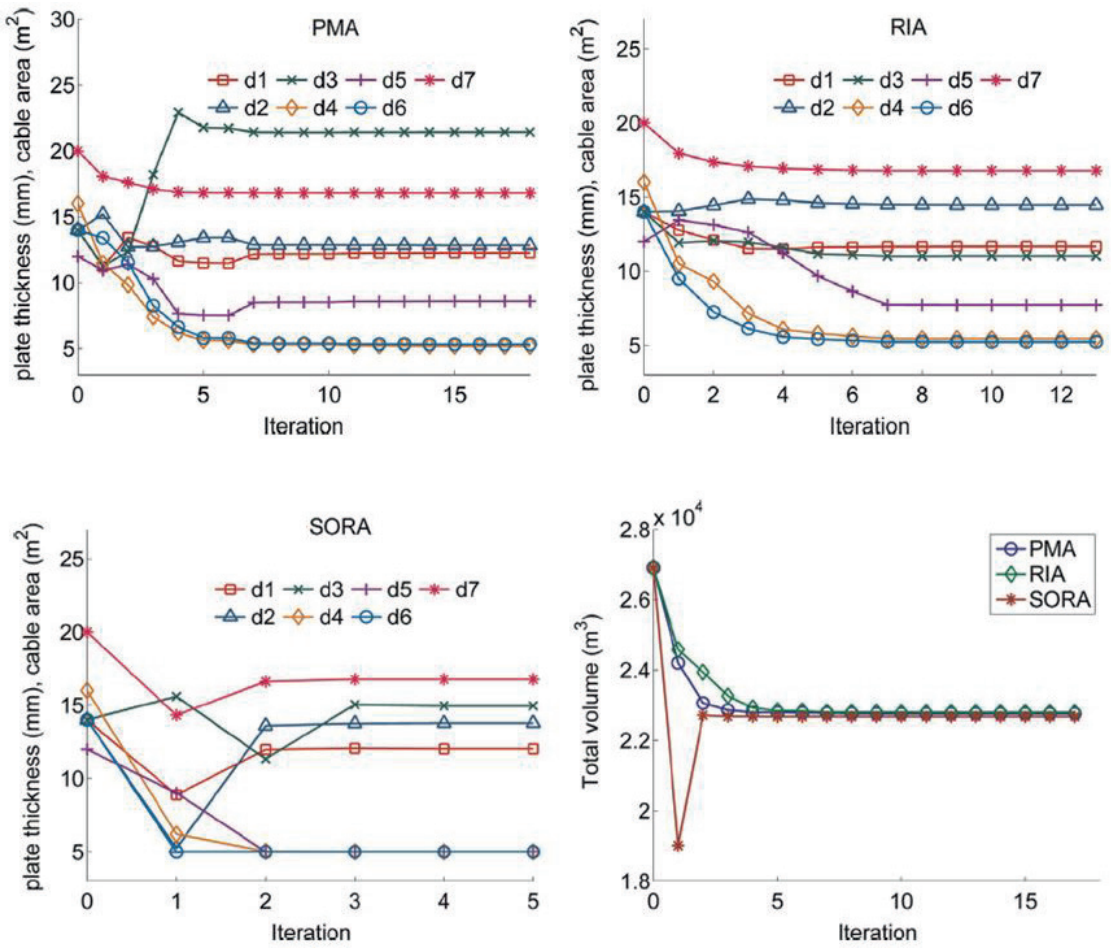


Figura 11. *Resultado de la optimización probabilista*.

Como se puede observar la función objetivo converge al mismo valor mediante los tres métodos implementados. No obstante existe alguna diferencia entre los espesores óptimos de las chapas, pero las diferencias más significativas se dan entre d3 y d5 que contribuyen muy poco al peso total de los cajones. En el resultado final tanto la condición de flameo como la condición de tension en el cable son activas.

Tabla 3. Resultados numéricos de las variables de diseño y función objetivo.

β=12	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	Func. objetivo	% cambio
Diseño original	14.000	14.000	14.000	16.000	12.000	14.000	2.000	26903.75	
RIA	12.260	12.830	21.430	5.180	8.600	5.330	1.680	22797.16	-15.26
PMA	11.700	13.620	15.250	6.310	6.240	6.060	1.680	22760.56	-15.40
SORA	12.530	13.630	9.990	5.000	8.160	5.000	1.670	22671.32	-15.73

En cuanto al coste computacional destacar que el método desacoplado SORA llegó a convergencia en aproximadamente la mitad de tiempo que los métodos RIA y PMA.

5. CONCLUSIONES

En esta investigación se muestra la importancia que tiene obtener con fiabilidad la velocidad de flameo de un puente. En dicho cálculo es determinante el trabajo realizado en el túnel de viento para obtener las funciones de flameo que determinarán las fuerzas aeroelásticas que actúan sobre un tablero de puente. Mediante análisis probabilista es posible obtener la probabilidad de fallo cuando existe incertidumbre tanto en las acciones (viento) como en la resistencia del puente (velocidad de flameo, amortiguamiento). En este caso se ha considerado que los puntos que definen las funciones de flameo son variables aleatorias y se ha calculado el impacto que tiene sobre la probabilidad de fallo frente a flameo. Como se puede observar un incremento en la dispersión de los datos obtenidos experimentalmente lleva a un descenso de la seguridad y por tanto a un dimensionamiento mayor. Con las técnicas de optimización probabilista ambos conceptos se pueden conjugar de forma que es posible obtener el diseño de menor peso que garantice un nivel de seguridad prefijado, teniendo en cuenta la información aleatoria tanto del viento incidente como de los resultados en el túnel de viento. En esta investigación se aplican dichos conceptos al proyecto del puente sobre el estrecho de Messina, obteniendo tanto la probabilidad de fallo frente a este estado límite como el dimensionamiento óptimo de las chapas que forman los cajones y el área de los cables principales o catenarias.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación parcial del Ministerio de Economía y Competitividad a través del proyecto BIA2015-71942-REDT y del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad (MINECO) a través del proyecto con referencia BIA2016-76656-R.

REFERENCIAS

[1] Theodorsen, T. (1935). General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. NACA Rept. 496.

[2] Theodorsen, T., Garrick, I. E. (1940). Mechanism of Flutter, a Theoretical and Experimental Investigation of the Flutter Problem. NACA. Rept. 685.

[3] Scanlan, R. H., Tomko, J. J. (1971). Airfoil and Bridge Deck Flutter Derivatives. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 97, Nº EM6, pp 1717-1737.

[4] Sarkar, P., Caracoglia, L., Haan Jr., F., Sato, H., Murakoshi, Jun. (2009). Comparative and sensitivity study of flutter derivatives of selected bridge deck sections, Part 1: Analysis of inter-laboratory experimental data. Engineering Structures 31, 158-169.

[5] Ostenfeld-Rosenthal, P., Madsen, H.O., Larsen, A. (1992). Probabilistic flutter criteria for long-span bridges. J. Wind Eng. Ind. Aeodynam. 42(1-3) 1265-1276.

[6] Ge YJ, Xiang HF, Tanaka H. (2000). Application of a reliability analysis model to bridge flutter under extreme winds. J. Wind Eng Ind Aerodyn; 86(2-3):155–67.

[7] Baldomir, A., Kusano, I., Jurado, J.A., Hernández, S. (2013). A reliability study for the Messina Bridge with respect to flutter phenomena considering uncertainties in experimental and numerical data. Computers and Structures, 128, 91-100.

[8] Haldar, A., Mahadevan, S. (2000). Probability, reliability, and statistical methods in engineering design, John Wiley & Sons, New York.

[9] Aoues, Y., Chateauneuf, A. (2010). Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization. Volume 41, Number 2, p.277-294, 2010.

[10] Lee, J. O., Yang, Y. S., Ruy, W. S. (2002). A Comparative Study on Reliability-index and Target-performance-based Probabilistic Structural Design Optimization. Computers and Structures, Vol. 80, No. 3-4, pp. 257-269.

[11] Youn, B. D., Choi, K. K., and Park, Y. H. (2003). Hybrid Analysis Method for Reliability based Design Optimization. Journal of Mechanical Design, ASME, Vol. 125, No. 2, 12 pp. 221-232.

[12] Du, X., and Chen, W. (2004). Sequential Optimization and Reliability Assessment Method for Efficient Probabilistic Design. Journal of Mechanical Design, Vol 126, No. 2, p.225 – 233.

[13] Ramu, P., Qu, X., Youn, B.D. et al. (2006). Inverse reliability measures and reliability-based design optimization. Int. J. Reliability and Safety, Vol1 Nos 1/2.

[14] Chen, G., Xu, L., Jiang, L. (2006). A sequential approximate programming strategy for reliability-based strucutral optimization. Computer & Structures 84 (21), p.1353-1367.

[15] Kusano, I., Baldomir, A., Jurado, J.A., Hernández, S. (2015). Probabilistic optimization of the main cable and bridge deck of long-span suspension bridges under flutter constraint. J. Wind Eng. Ind. Aeodynam. 146, 59-70.

[16] Katsuchi, H., Jones, N.P., Scanlan, R.H. (1999). Multimode coupled flutter and buffeting analysis of the Akashi-Kaikyo bridge. J. Struct. Eng. 125 (1), 60-70.

[17] Chen, X., Kareem, A., Matsumoto, M. (2001). Multimode coupled flutter and buffeting analysis of long span bridges. J. Wind Eng. Ind. Aeodynam. 89 649-664.

[18] Jurado, J.A., Hernandez,S. (2004). Sensitivity analysis of bridge flutter with respect to mechanical parameters of the deck. Struct. Multi. Optim. 27(4), 272–283.

[19] Jurado, J.A., Kusano, I., Hernandez, S., Nieto, F. (2013). Improvement of multimodal flutter analysis code, FLAS. CWE2013, Cambridge, UK.

[20] Davenport, A.G., Larose, G.L. (1989). The structural damping of long span bridges: an interpretation of observation, Proceedings of the Canada-Japan Workshop on Bridge Aerodynamics, Ottawa, 111–118.

[21] Hasofer, AM, Lind, N. (1974). An exact and invariant first-order reliability format. J Eng Mech Division; 100(EM1):111–21.

[22] Leon A. Análisis aeroelástico de puentes soportados por cables en el dominio del tiempo y de la frecuencia. PhD thesis, University of La Coruña, Spain, 2009 [in Spanish].

[23] Abaqus (2014) Abaqus 6.14.2. Documentation

[24] Enevoldsen I, Sørensen JD (1994) Reliability-based optimization in structural engineering. Struct Saf 15(3):169–196.

[25] Tu J, Choi KK, Park YH (1999) A new study on reliability-based design optimization. J Mech Des Trans ASME 121(4):557–564.

[26] MATLAB (2013) MATLAB R2013a. Documentation

DESIGN OF VIBRATION DAMPING SYSTEMS USING SIMPLIFIED MODELS FOR LIGHTWEIGHT FOOTBRIDGES

Carlos M. Casado[1], Javier Fernández[2], José Pereda[3], José M. Soria[4] and Javier Castaño[3]

ABSTRACT

This paper shows the use of a simplified structural model for lightweight and lively footbridges for the design of vibration damping systems. The lumped-mass model of the footbridge under study was obtained experimentally by in-situ testing using the mid-span acceleration response to a single person load and a method consisting on fitting that response to the initial part of the resonant build-up of a lumped-mass model subjected to the same force. Passive and semi-active mass dampers were designed based on different control strategies such as H_∞ optimization techniques or on-off displacement based Ground-Hook control. The response of the footbridge model with and without vibration damping systems was simulated using some of the pedestrian loading models proposed in codes and footbridges design guidelines.

In all the cases, the use of these control systems improved noticeably the response of the footbridge model subjected to pedestrian loading models. This study showed both, the usefulness of the build-up technique as an affordable and fast method to obtain simple footbridges models, and the suitability of vibration damping systems based on mass dampers to improve the dynamic behaviour of footbridges subjected to pedestrian-induced vibrations.

Keywords: Footbridges, model identification, vibration, control, mass dampers.

1. INTRODUCTION AND OBJECTIVES

To assess human-induced response of footbridges and to design vibration damping systems such as mass dampers, a reliable estimation of the structure modal parameters (frequency, damping, and mass) is vital. Contrary to modal frequencies and damping, an accurate modal mass estimation requires expensive and sometimes heavy equipment which makes to be often overlooked [1].

This paper shows the use of a simplified structural model for lightweight and lively footbridges for the design of vibration damping systems. The SDOF lumped-mass model is obtained experimentally by in-situ testing using the mid-span acceleration response to a single person dynamic load and a method consisting on fitting that response to the initial part of the resonant build-up of a lumped-mass model to that experimented by the footbridge.

[1] *Centro Tecnológico CARTIF, Boecillo, Valladolid (SPAIN) carcas@cartif.es (Corresponding autor)*
[2] *ETSII, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (SPAIN). jfernandezm@etsii.upm.es*
[3] *ITAP, EII, University of Valladolid, Valladolid (SPAIN). pereda@eii.uva.es, javier.castano@alumnos.uva.es*
[4] *ETSICCP, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (SPAIN). jmsoria@upm.es*

The method makes use of a data-base of laboratory-recorded time series of various people bouncing and jumping on a force plate to different frequencies. A reasonable assumption that the fundamental characteristics of human induced forces change little between laboratory and field testing is assumed taking into account that the early resonant build-up is relatively insensitive to the imperfect timing of human jumping or bouncing [1]. To overcome this uncertainty an improved method based on the use of wireless inertial measurement units for force and response measurements was recently presented [2] with good results.

The recorded forces are used as excitation inputs of the SDOF lumped-mass model. The frequency, damping and mass values of the model are changed so that the initial part of the resonant build-up of the model fits to that experimented by the footbridge when the same force is applied.

Indisputably this is not the most accurate mass estimation method compared with traditional ones like Modal Testing where in-situ measurement of excitation forces applied via an instrument hammer, drop-weight or a shaker is required. However these devices have practical limitations as careful adjustment of signal to noise ratio (Hammer), portability (drop-weight and shakers) or great investment (shakers) [2].

Using this Build-up method in collaboration with the damping estimation by logarithm decrement method or fitting to an exponential decay curve, a good estimation of the modal parameters (frequency, damping and mass) of the studied mode is obtained. These values are enough to assess and quantify the serviceability of a structure with or without vibration damping system.

Once the SDOF model was estimated, passive and semi-active mass dampers were designed based on different control strategies such as H_∞ optimization techniques or on-off displacement based Ground-Hook control. The response of the footbridge model with and without vibration damping systems was simulated using some of the pedestrian loading models proposed in codes and footbridges design guidelines.

Figure 1. *"Isla dos aguas" Footbridge in Palencia (Spain).*

The identification model method was employed in a real structure. The footbridge under study is sited in Palencia (Spain) and is known both as “Isla dos aguas” Footbridge, as well as “San Miguel” Footbridge, named after its vicinity to the San Miguel Church. This underslung truss footbridge is composed of only one 52 meter steel span with a wooden deck and two steel handrails (Figure 1). The structure develops noticeable vibrations when a single or a group of runners are crossing the footbridge.

2. FOOTBRIDGE MODEL IDENTIFICATION

Preliminary time domain and spectral analysis showed a linear behaviour of the studied footbridge with well separated modes. The first vertical bending modes of the structure were identified around 2.6 Hz, 6.9 Hz and 11.8 Hz respectively. In the Figure 2, the FFTs of the footbridge for 156 and 207 strides per minute running tests at mid span and quarter span respectively are shown. The spectres showed how the two first vertical modes were in resonance when running at those frequencies or its multiples.

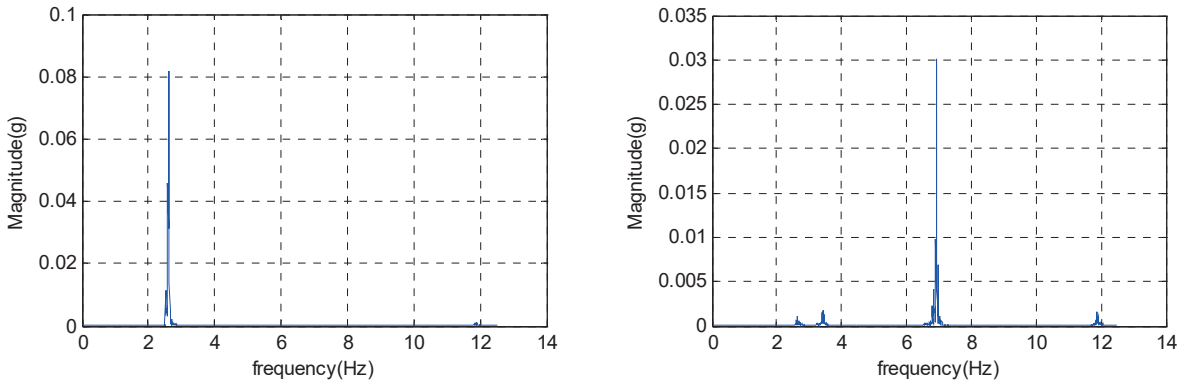


Figure 2. FFTs of the footbridge mid span and quarter span acceleration records when running at 156 and 207 strides per minute respectively.

Commonly, the adopted mean value for running and jumping is 2.5 Hz, being the normal running frequencies in the [2.2 – 2.7] Hz interval [3]. Therefore, the 1st vertical bending mode (2.6 Hz) is without doubt the easiest mode to be excited and the identified SDOF lumped-mass model of the footbridge was reduced to this one.

Previously to the field tests, the input forces were recorded at the laboratory by means of a force plate and a metronome. Two groups of force recordings performed by an 85 Kg person and a 100 Kg person were done at different rates including 2.6 Hz. From now on these people are named Tester A and Tester B respectively.

In the field tests, a 4 channel data logger, a laptop, a metronome and a 1V/g piezoelectric accelerometer were used to register the mid-span acceleration response of the structure subjected to bouncing and jumping human loads.

Figure 3. Field tests: Experiment set-up and footbridge excitation by human bouncing (Tester B).

In Figure 4, the acceleration records at mid-span when both testers performed bouncing tests at 2.6 Hz are shown. The signal parts in magenta corresponding to the free decaying oscillations of the acceleration signal were used to identify the damping values of the excited mode.

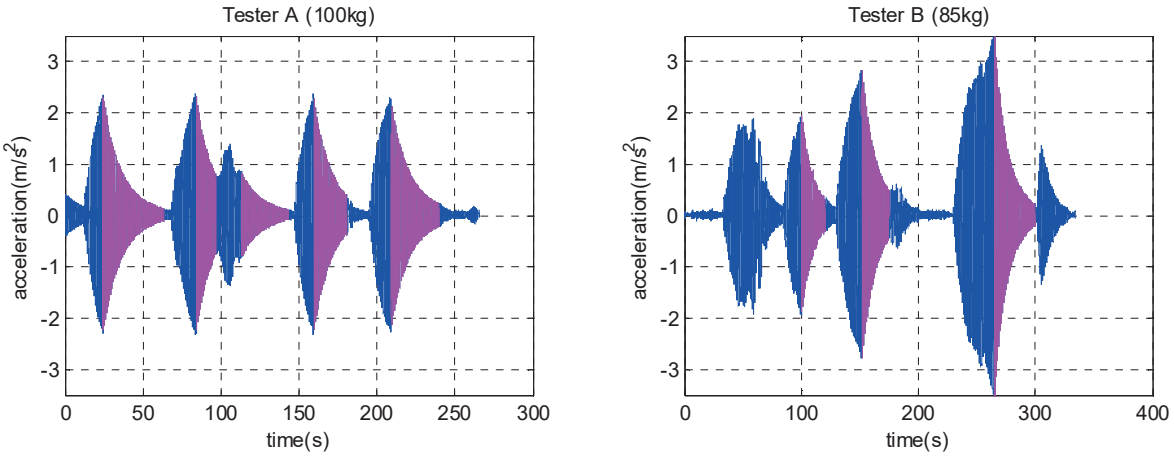


Figure 4. Portions of the acceleration signals used for damping estimation.

Damping values were identified by curve fitting. The general equation for an exponentially damped sinusoid with damper ratio lower than one may be represented by:

$$y = A * e^{-\lambda * t}(\sin(\omega_d * t + \phi)) \quad (1)$$

Where A is the initial amplitude of the envelope, λ is the decay constant, ω_d the angular frequency and φ the phase angle at t=0.

The decay rate λ and damping ratio ξ are related with the next expression:

$$\xi = \lambda/\omega \tag{2}$$

In order to identify the damping ratios, exponential decay curves were adjusted to the acceleration positive peaks. In Figure 5, one of the portions of acceleration signals depicted in the Figure 4 beside the fitted exponential curve are shown.

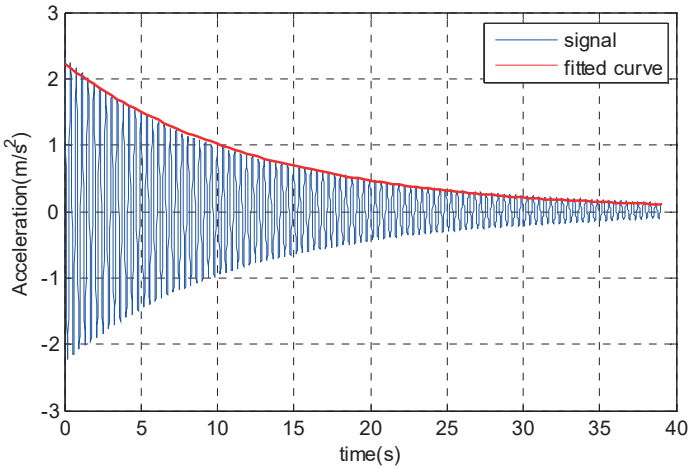


Figure 5. Damping identification by fitting to an exponential decay curve.

Aiming to see how the damping and frequency values depend on the magnitude of the acceleration, moving signal portions of 15 consecutive positive peaks were used to characterize the trend of damping and frequency values. In Figure 6 the results obtained with the signal depicted in the previous figure are shown.

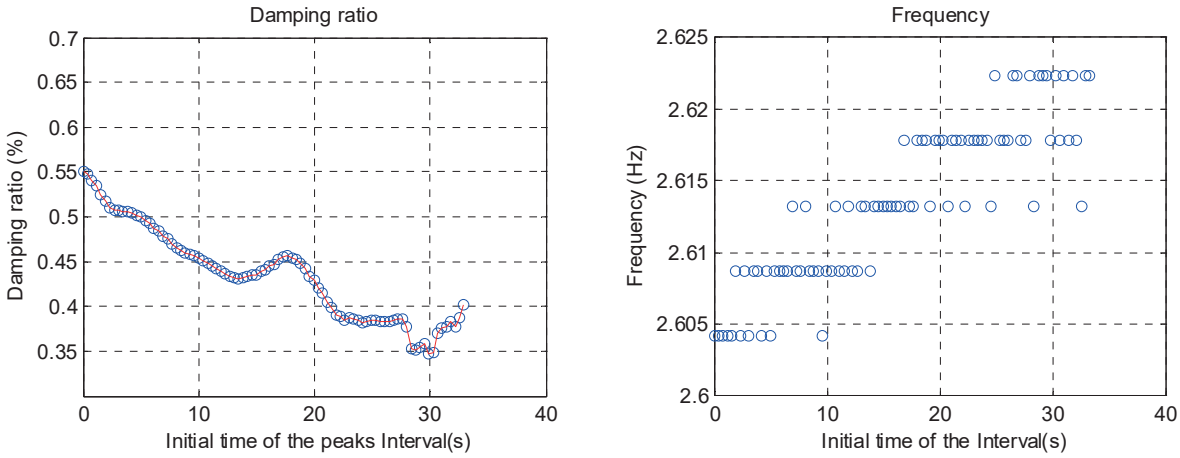


Figure 6. Identified damping and frequency values using a moving calculation with data sets of 15 positive peaks of the acceleration records.

The pictures shows a decreasing trend of the damping value as the magnitude of the acceleration decreases, being the opposite trend for the frequency where the values increase slightly as acceleration decreases. This behavior has been presented in all tests and agrees with results obtained in the bibliography [4].

The numerical values obtained after processing the 8 highlighted decreasing parts of the signals in the Figure 4 (5 performed by the Tester A and 3 by the Tester B) are shown in the Table 1. In the table the values of the frequency and damping obtained after processing the whole signal, beside the interval of values after processing 15 consecutive positive peaks and the level of acceleration in these intervals are shown.

Table 1. Damping and frequency values

Magnitude	Tester A (100kg)					Tester B (85kg)		
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 1	Test 2	Test 3
Damping (%)	0.476	0.521	0.410	0.491	0.444	0.459	0.482	0.504
Damping Interval (%)	[0.347, 0.551]	[0.480, 0.556]	[0.341, 0.460]	[0.435, 0.564]	[0.346, 0.495]	[0.343, 0.495]	[0.417, 0.521]	[0.412, 0.589]
Frequency (Hz)	2.613	2.607	2.618	2.665	2.656	2.618	2.615	2.623
Frequency Interval (Hz)	[2.604, 2.622]	[2.604, 2.613]	[2.609, 2.622]	[2.604, 2.622]	[2.613, 2.627]	[2.607, 2.622]	[2.609, 2.622]	[2.595, 2.646]
Acceleration (m/s^2)	[0.127, 2.313]	[0.755, 2.317]	[0.118, 0.823]	[0.372, 2.274]	[0.245, 2.136]	[0.111, 1.942]	[0.486, 2.845]	[0.161, 3.547]

Taking into account the table values, the damping value of the footbridge when oscillating at around 2.6 Hz is in the [0.4 - 0.5]% interval.

In Figure 7, the portions of the acceleration signal used for the build-up identification method are highlighted in magenta. Three of these portions were performed by the Tester A and three more by the Tester B. How the Tester A performs more homogeneous loads is observed in the figures. This emphasizes the necessity of perform several tests by experienced testers so that reliable results are obtained.

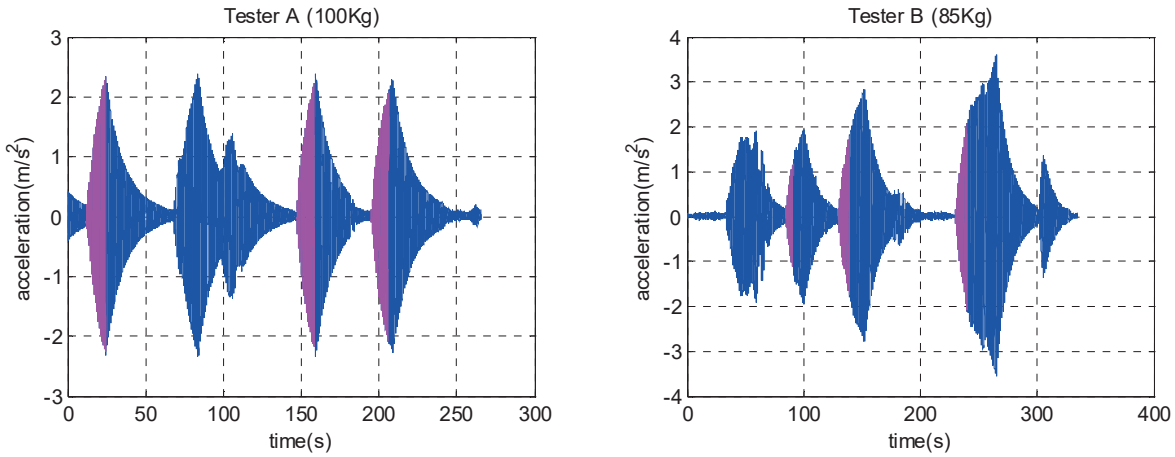


Figure 7. Portions of the acceleration signals used in the build up method.

Figure 8 shows the results obtained with the curve fitting process for one of the acceleration signal portions. The upper-left graph shows in red the portion of the recorded force signal used in the identification process. The footbridge acceleration record and the selected peaks used in the fitting process are depicted in the upper-right graph. Finally, the lower graph shows, both, real acceleration

and simulated one once the SDOD lumped-mass model is fitted. Mathematics related to this method was presented by Brownjhon[1].

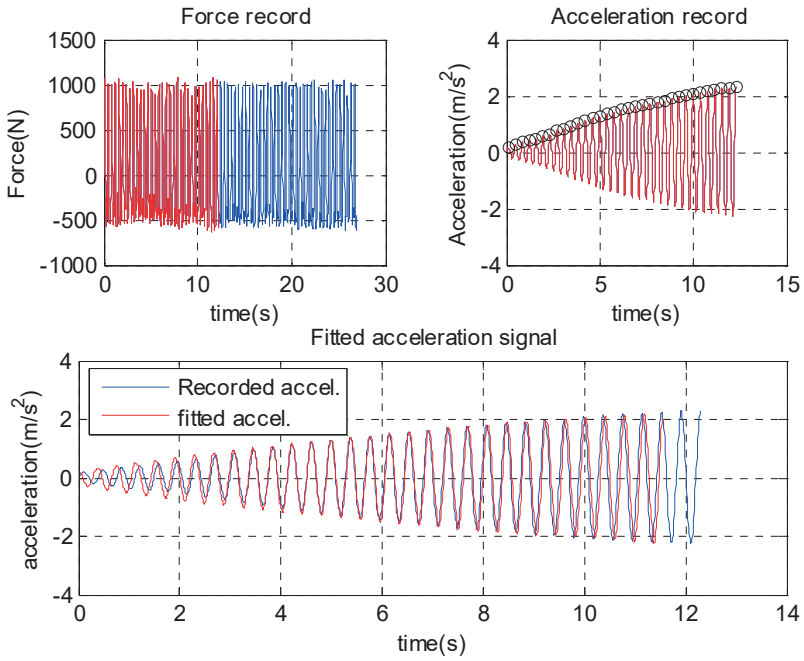


Figure 8. Example of fitting process using the build-up method.

The identification results after processing the six signals are collected in Table 2 .

Table 2. Fitted modal parameters using the Build-up method.

Magnitude	Tester A (100 Kg)			Tester B (85kg)		
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 1	Test 2	Test 3
Mass (Kg)	18200	15700	16900	13700	16600	14700
Damping (%)	0.45	0.50	0.50	0.40	0.4	0.4
Frequency (Hz)	2.6	2.605	2.605	2.645	2.6	2.6

The table show how the estimated parameters are around 17000±1000 Kg, 0.45% and 2.605 Hz attending to the tests performed by the Tester A, and 15000±1000 Kg, 0.4% and 2.6 Hz by the Tester B.

There is an important grade of uncertainty of the footbridge modal mass value (13700 to 18200Kg), nevertheless an average value is enough to evaluate how heavy the mass dampers should be in order to fulfil the maximum acceleration levels proposed in the standards.

From now on, the parameters of the SDOF lumped mass model of the footbridge for the main mode are set to 16000 kg, 0.45% and 2.61 Hz. These values were used to design passive and semi-active mass dampers.

Before showing the process to optimize the mass dampers and the simulation results obtained with these ones, a review of some regulations and footbridge design guides is shown.

3. REGULATIONS AND FOOTBRIDGE DESIGN GUIDES

In order to evaluate the comfortability of the footbridge after attaching both passive and semi-active mass dampers, the simulated acceleration response is assessed according to different standards and footbridge design guidelines. In general, the standards (1) recommend that the structures avoid ranges of natural frequencies matching normal walking paces and (2) set acceleration comfort limits which depend on the vibration frequency.

A summary of both, frequencies ranges to be avoided and acceleration limits proposed in the codes are summarized in footbridge design guidelines like Fib [3] or Setra [5], and vibration serviceability studies of footbridges like [6].

In the case of the "Isla dos aguas" footbridge, the vertical bending mode of 2.6 Hz is considered to be under study for resonance risk by the Eurocode 5 (ENV 1995-2) [7].

Once a footbridge is considered to be under study, next step consists on assessing if the response of the footbridge under human loads is under the serviceability acceleration limits. Most codes do not propose any type of load models, suggesting that is up to the designer and structure owner the definition of these loads. Fortunately, there are load models proposed in footbridge design guidelines like Setra and Fib and standards like ISO 10137 [8].

Setra guideline [5] proposes that the vertical component of the load can be approached by a simple sequence of semi-sinusoids, represented using the following expression:

$$F(t) = \begin{cases} G_0 + \sum_{i=1}^{n} G_i \sin 2\pi i f_m t & if\ (j-1)T_m \le t \le (j - {}^1\!/_2)T_m \\ 0 & if\ (j - {}^1\!/_2)T_m < t \le jT_m \end{cases} \quad (3)$$

Where G_0 is the pedestrian weight, $G_1 = 1.6G_0$, $G_2 = 0.7G_0$, $G_3 \approx 0.2G_0$, f_m the stride rate, T_m the period ($T_m = 1/f_m$) and j the step number ($j = 1,2,$ etc.).

In the case of the ISO 10137 [8], the vertical load model proposed for one pedestrian is defined by:

$$F_1(t) = W\left(1 + \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \sin\left(2\pi n f_p t + \varphi_n\right)\right) \quad (4)$$

where W is the pedestrian weight, α_n is a numerical coefficient corresponding to the nth harmonic, φ_n is the phase angle of the nth harmonic, f_p is the frequency component of repetitive loading and k is the number of harmonics that characterize the forcing function in the frequency range of interest. For a running pedestrian the α_n coefficients are $\alpha_1 = 1.4$, $\alpha_2 = 0.4$ y $\alpha_3 = 0.1$.

The load models for a 100 kg person using ISO 10137 and Setra guideline are shown in blue in Figure 9. In both load models, the force oscillates between two maximum values while the pedestrian is walking/running across the footbridge. Taking into account the results in [4] where the overestimation of the acceleration responses obtained with these load models compared to the real ones was proved, the load models applied in the simulations of the next sections were weighted taking into account the current position of the pedestrian along the footbridge and the excited mode. Therefore the force loads were weighted by the modal shape of the excited mode (2.6Hz). Because no modal analysis of the "Isla dos aguas" footbridge was done and the modal shapes were not identified, a parabola was used as the modal shape keeping in mind that is very similar to the modal shape of the first vertical bending mode of a hinged-hinged beam. The figure shows in red the weighted force models. The excitation time around 15 seconds, corresponds to the time taken for a person running at 2.6 strides per second to cross over the 52 meter footbridge.

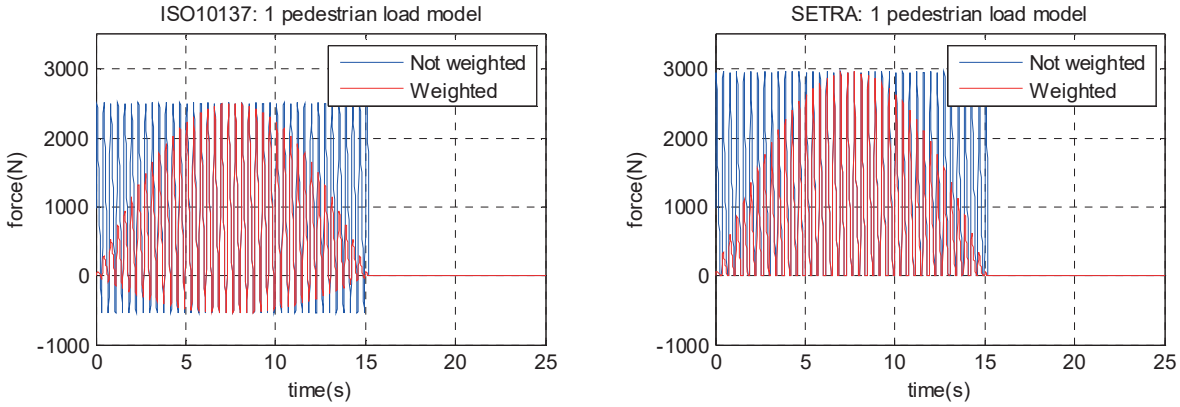


Figure 9. 100kg pedestrian load models using ISO137 and SETRA.

In Figure 10 the relation between the velocity of the runner and its stride frequency is shown attending the fib guideline [3] and the study performed by Nummela [9] after analysing the data of 25 endurance athletes with eight different speeds. The figure shows noticeable differences in the range from 3.5 to 5 Hz between the two curves, but not in the range between 2 to 3 Hz which is the range in what we are interested.

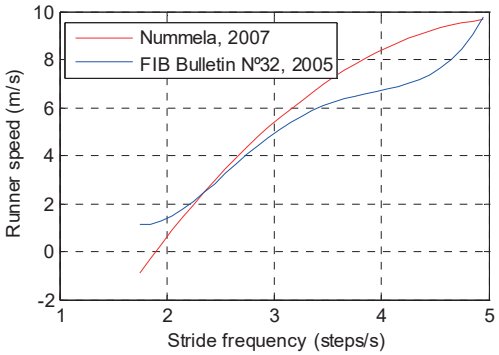


Figure 10. Runner speed and stride frequency relation.

The relations obtained from fib and Nummela data by curve fitting were respectively:

$$s = 0.582 * f^4 - 7.578 * f^3 + 35.3 * f^2 - 66.82 * f + 45.12 \quad (5)$$

$$s = -0.875 * f^2 + 9.16 * f - 14.23 \quad (6)$$

Where s is the runner stride frequency in steps/s and s the runner speed in m/s second. The velocities obtained for a frequency of 2.6 strides per seconds were 3.43 m/s (Fib) and 3.67 m/s (Nummela).

4. MASS DAMPERS CALCULATION

In this section both passive and semi-active mass damper calculation and the simulation results using the ISO 10137 weighted load model depicted in Figure 9 are shown.

4.1. Passive Mass Dampers

A passive mass damper, commonly known as tuned mass damper (TMD) is a well proven mechanism to increase the damping of structures prone to vibrations. A TMD is basically a secondary mass attached to the structure by means of springs and oil dampers. Once the TMD is optimal tuned to a specific mode of the structure, usually the main one, the damping in that mode is noticeably increased. These devices have been widely studied in the last century since Frahm proposed this concept in 1909 to reduce rolling motions of ships. The first analytical tuned methods, unlike the most numerical methods, do not take into account the damping of the structure.

Some of these analytical methods like Den Hartog [10], Warburton[11] and Connor[12], numerical methods like Tsai and Lin [13] and Poncela et al. [14] based on curve fitting and H-infinity controllers respectively and others shown in SAMCO Guideline [15] have been used to calculate the TMD parameters for the "Isla dos aguas" footbridge.

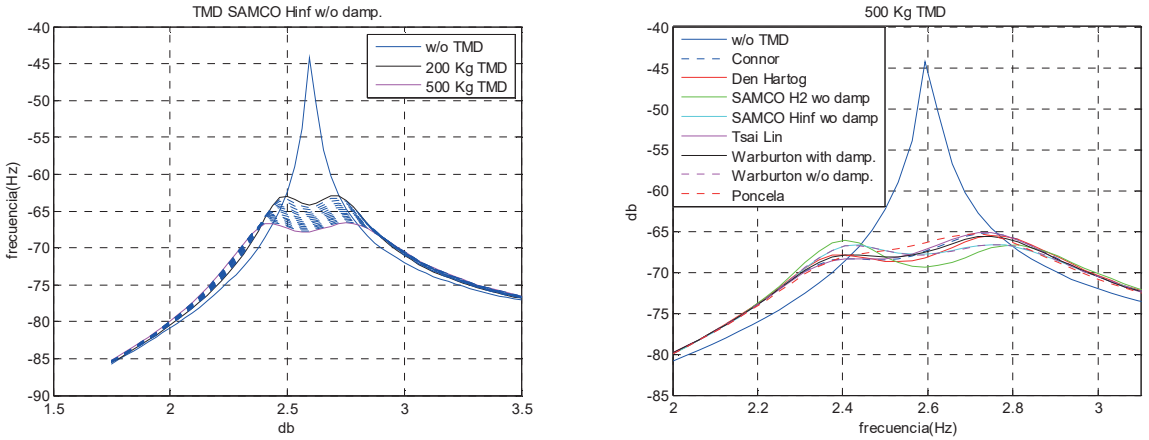


Figure 11. Examples of the FRFs of the footbridge with and without TMD.

The use of H-infinity methods in the TMD tuning should be more robust to disturbances and uncertainties in the model, anyway the TMD parameters obtained with all these tuning methods are very similar as it can be concluded from the right hand of Figure 11, where the frequency response functions (FRF) of the SDOF lumped-mass model of the "Isla dos aguas" footbridge without and with a 500 kg TMD tuned by the mentioned methods are shown. In the left hand of the figure, the improvement of the damping obtained in the mode as the TMD mass is increased from 200 kg to 500 kg is depicted.

In Table 3, the parameters of TMDs from 200 to 300 kg using Den Hartog and Poncela tuning methods are shown.

Table 3. TMD parameters using Den Hartog and Poncela tuning methods.

Magnitude	TMD Mass (Kg)					
	200	**220**	**240**	**260**	**280**	**300**
Stiffness (N/m) Den Hartog	52065	57130	62171	67186	72176	77142
Stiffness (N/m) Poncela	51632	56629	61592	66510	71384	76232
Damping (N*s/m) Den Hartog	425.7	488.7	554.1	621.7	691.4	763.0
Damping (N*s/m) Poncela	458.5	537.2	628.2	702.2	752.8	832.2

The acceleration peaks beside some of the defined acceleration comfort limits for a 2.6Hz frequency are depicted in Figure 12. Checking the graph and taking into account the maximum acceleration peak, a TMD of at least 440 kg is necessary to fulfil the Eurocodes.

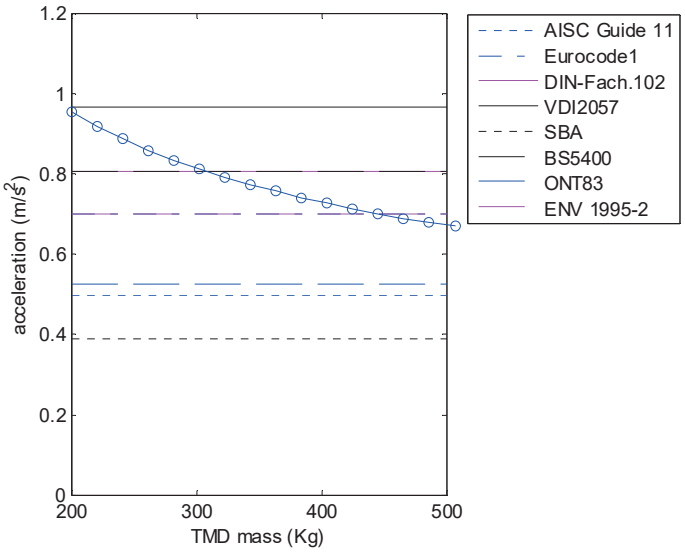


Figure 12. Maximum acceleration peaks obtained with a 200 to 500 kg TMD optimized using Den Hartog method.

4.2. Semi-active Mass Dampers

The semi-active TMD (SATMD) proposed in this study is based on the use of magneto-rheological dampers. The idea is to replace the hydraulic dampers of a passive TMD by magneto-rheological ones. In this case, the damping of the dampers, unlike the hydraulic ones, is variable in an interval.

For the control strategy, the solution proposed by Koo [16] is used. Koo suggests a groundhook control scheme and four strategies: (1) Velocity-based, on-off groundhook control (On-off VBG), (2) Velocity-based, continuous groundhook control (Continuous VBG), (3) Displacement-based, on-off groundhook control (On-off DBG) and (4) Displacement-based, continuous groundhook control (Continuous DBG).

The On-off DBG strategy gave good results in previous studies [17], so this one was used in this study. This strategy consists on the use of two damping values (c_{on}, c_{off}) to adjust the MR damper depending on the value obtained in the next expressions:

$$x_1 * v_{12} \geq 0 \;\; c_{controllable} = c_{on}$$
$$x_1 * v_{12} < 0 \;\; c_{controllable} = c_{off} \tag{7}$$

Where x_1 is the absolute vertical displacement of the span and v_{12} is the relative velocity of the semi-active TMD

In the Figure 13, the FRFs obtained with the structure without damping devices, with a passive TMD and with the semiactive TMD based on an On-Off DBG control strategy is shown.

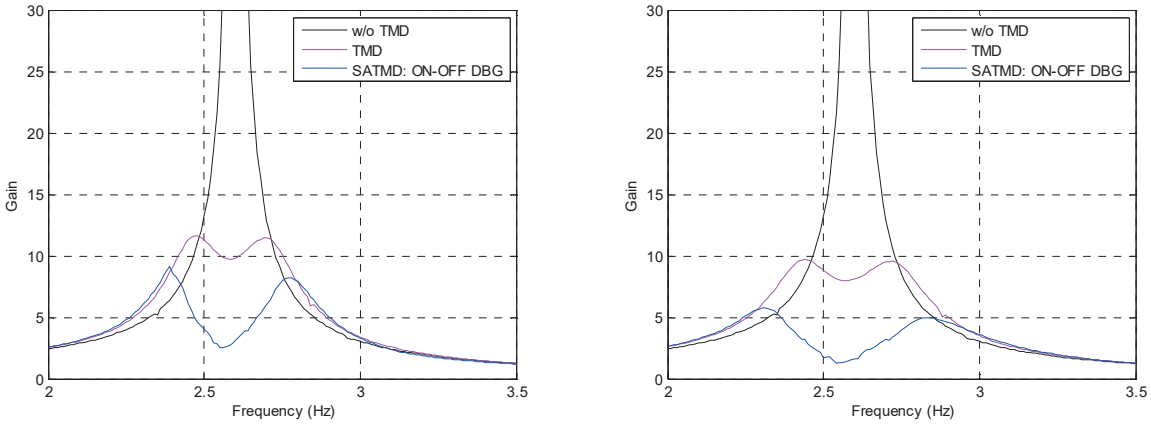


Figure 13. FRFs of the footbridge without mass dampers and with a 200 and 300 Kg TMD and SATMD

In Table 4, the parameters of SATMDs from 200 to 300 kg using the On-off DBG strategy proposed by Koo are shown.

Table 4. SATMD parameters using On-off DBG strategy.

Magnitude	SATMD Mass (Kg)					
	200	**220**	**240**	**260**	**280**	**300**
Stiffness (N/m)	51704	56928	62171	67182	72177	77276
Damping On (N*s/m)	1872.8	1657.5	2558	2763.5	3015.4	6433
Damping Off (N*s/m)	101.8	243.4	99.8	90.3	98.9	108.6

In Figure 14, the temporary responses of the footbridge without and with a 300 kg TMD and a 300 Kg SATMD are shown. The graph shows the suitability of vibration damping systems based on mass dampers to improve the dynamic behaviour of footbridges subjected to pedestrian-induced vibrations.

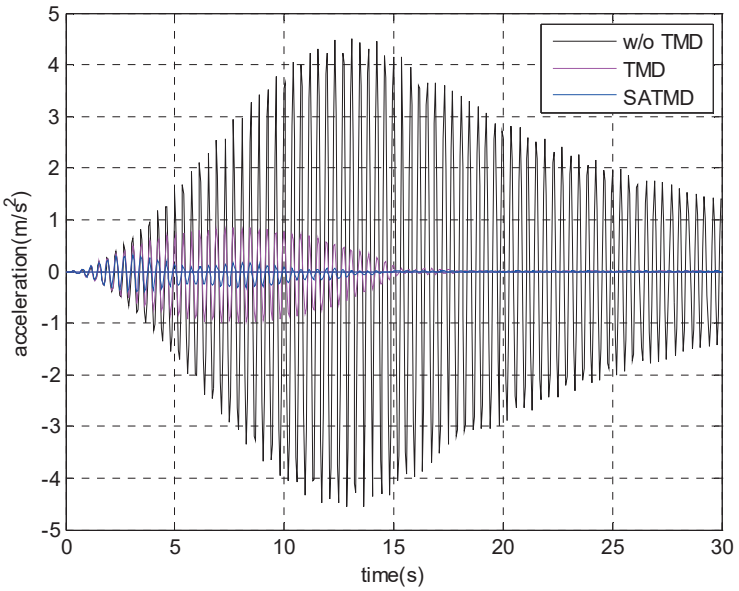


Figure 14. Simulation of the footbridge without mass damper and with a 300 kg TMD and SATMD.

In Figure 15, the acceleration peaks obtained with passive mass dampers and showed in Figure 12 are compared with the ones obtained with semi-active mass dampers of same weight. The picture shows how a SATMD lower than 200 kg is necessary to fulfil the Eurocode 5 (ENV 1995-2).

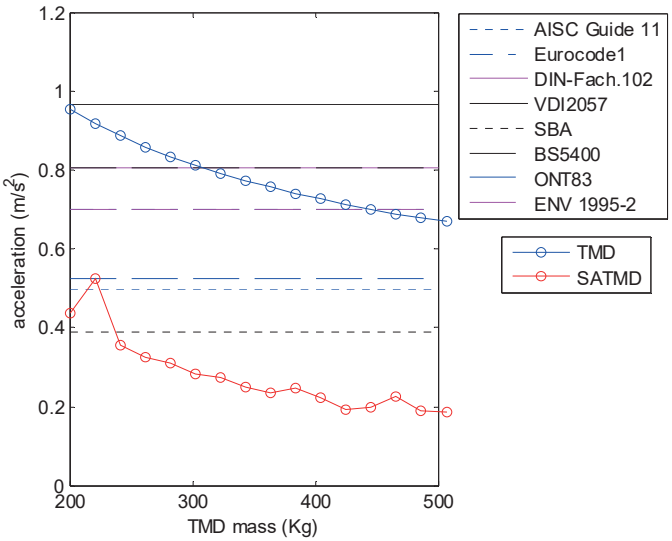


Figure 15. Maximum acceleration peaks obtained for a 200 to 500 kg TMD and SATMD.

5. CONCLUSIONS

The paper shows the use of an affordable method (Build-up method) to obtain a SDOF lumped-mass model of lightweight and lively footbridges. The method was used to identify a simple model of the "Isla dos aguas" footbridge and consists on fitting the initial part of the resonant build-up of a SDOF lumped-mass model to the one experienced by the real footbridge when both are subjected to the same force load. Although the results showed a noticeable uncertainty in the mass parameter identification, the use of the average value could be enough to do initial vibration serviceability studies or evaluate how heavy the mass dampers should be in order to fulfil the maximum acceleration levels proposed in the standards.

Both, passive and semi-active mass dampers where calculated using methods proposed in the bibliography. After simulating the footbridge model with the calculated mass dampers and the weighted load model proposed in ISO 10137, a semi-active mass damper lower than 200 kg or a passive mass damper of at least 440 Kg are necessary to attach in the mid-span of the "Isla dos aguas" footbridge in order to fulfil the Eurocode 5 (ENV 1995-2) when a 100 kg person is running at the resonance frequency across the footbridge.

The simulations show the usefulness of the build-up method as an affordable and fast technique to obtain simple footbridges models and the suitability of vibration damping systems based on mass dampers to improve the dynamic behaviour of footbridges subjected to pedestrian-induced vibrations.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to acknowledge to the financial support through Research Projects BIA2014-59321 and BIA2015-71942-REDT (Ministerio de Economía y Competitividad, Spanish Government).

REFERENCES

[1] Brownjohn J.M.W. & Pavic A. (2007). Experimental methods for estimating modal mass in footbridges using human-induced dynamic excitation. *Engineering Structures, 29, 2833–2843.*

[2] Brownjohn J.M.W., Bocian M., Hester D., Quattrone A., Hudson W., Moore D., Goh S. & Lim M.S. (2016). Footbridge system identification using wireless inertial measurement units for force and response measurements. *Journal of Sound and Vibration, 384, 339-355.*

[3] FIB (2005). Guidelines for the design of footbridges. International Federation for Structural Concrete (Bulletin 32), Lausanne, Switzerland.

[4] de Sebastián J, Muñoz IM, Casado CM, Poncela AV & Lorenzana A (2013) Evaluación de la predicción de aceleraciones debidas al tránsito peatonal en una pasarela en servicio. *Informes de la Construcción, 65(531), 335-348.*

[5] SETRA (2006). Technical Guide: Footbridges. Assessment of Vibrational Behaviour of Footbridges Under Pedestrian Loading. Service d'Etudes techniques des routes et autoroutes (reference 0611).

[6] Salgado R., Branco J.M., Cruz P.J.S. & Ayala G. (2014) Serviciability assessment of the Góis footbridge using vibration monitoring. *Case Studies in Nondestructive Testing and Evaluation. 2, 71-76.*

[7] UNE-EN 1995-2:2010 (2010). Eurocódigo 5: Proyecto de estructuras de madera. Parte 2: Puentes. AENOR.

[8] INTERNATIONAL STANDARD ISO 10137 (2007), Bases of for design of structures – Serviceability of buildings and walkways against vibrations. ISO 10137:2007, International Organization for Standardization, 2007.

[9] Nummela A., Keränen T. & Mikkelsson T.O. (2007), Factors related to top running speed and Economy. *International Journal of Sports Medicine 28, 655–661*

[10] Den Hartog J.P. (1956), Mechanical vibrations, New York. McGraw Hill 4th Edition.

[11] Warburton G.B. (1982) Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics 10, 381–401.*

[12] Connor, JJ. (2003) Introduction to structural motion control, New Jersey, MIT-Prentice Hall.

[13] Tsai, KC. and GC. Lin (1993) Optimum tuned mass damper for minimizing steady state response of support excited and damped systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 22(11), 957–973.*

[14] Poncela A., Casado C.M., Baeyens E. & Peran J.R. (2007). Design of Devices for Protecting Civil Structures using Fixed-Order H∞ Control. *Journal of Structural Control & Health Monitoring, 14(2), 239-260*.

[15] SAMCO – Guidelines for Structural Control, 2006. www.samco.org

[16] Koo J.H. (2003). Using Magneto-Rheological Dampers in Semi-active Tuned Vibration Absorber to Control Structural Vibrations, PhD. Dissertation, July 2003, Blacksburg, Virginia, USA.

[17] Casado C.M., de Sebastian J., Poncela A.V. & Lorenzana A. (2008) Design of a Semi-active Tuned Mass Damper for the Science Museum Footbridge of Valladolid. In 4th European Conference on Structural Control. (pp. 125-132), San Petersburgo (Rusia).

An improved Firefly Algorithm for optimization of reinforced concrete sections

Sánchez-Olivares, Gregorio[1];Tomás Espín, Antonio[2]; Martínez Martínez, Alfonso[3]

ABSTRACT

A numerical procedure is proposed in this paper for achieving the minimum cost design of reinforced concrete rectangular sections under compression and bending by using a biologically-inspired meta-heuristic optimization algorithm. The problem formulation includes the costs of concrete, reinforcement and formwork, obtaining the detailed optimum design in which the section dimensions and the reinforcement correspond to values used in practice. The formulation has been simplified in order to reduce the computational cost while ensuring the rigor necessary to achieve safe designs. The numerical procedure includes the possibility of using high-strength concrete and several design constraints, such as minimum reinforcement and limiting the neutral axis depth. One numerical example is presented, drawing comparisons between the results obtained by ACI318 and EC2 standards.

Keywords: optimization, meta-heuristic algorithms, reinforced concrete structures, cross section dimensioning, biaxial bending.

1. INTRODUCTION

The optimum design of concrete structures is one of the research fields in which meta-heuristic algorithms are useful. In recent years, considerable effort has been made to adapt and improve them to specific problems [1]. Coello et al [2] used a simple Genetic Algorithm (GA) for the design of rectangular reinforced concrete (RC) beams. Rajeev and Krishnamoorthy [3] applied a simple GA to the cost optimization of two-dimensional RC frames. Koumousis and Arsenis [4] used GA for the detailed design of RC members. Rafiq and Southcombe [5] used GA for the detailed design of biaxial columns reinforcement. Camp et al. [6] used GA by constructing a database for beams and columns which contains the sectional dimensions and the reinforcement data in the practical range to optimize for the optimum design of plane frames. Lee and Ahn [7] used GA to optimize RC plane frames subject to gravity loads and lateral loads. Lepš and Šejnoha [8] used GA to design RC cross sections including the effect of shear reinforcement [9]. Kwak and Kim [10,11] used the Direct Search Method and GA to optimize RC plane frames. Govindaraj and Ramasamy [12,13] used GA for the optimum detailed design for RC frames based on Indian Standard specifications. Martínez et al. [14] used the Ant Colony Optimization algorithm, the GA and the Threshold Acceptance Algorithm for economic optimization of RC bridge piers with hollow rectangular sections. Jahjouh et al. [15] used an Artificial Bee Colony

[1]*Department of Civil Engineering. Universidad Politécnica de Cartagena (SPAIN). gregorio.sanchez@upct.es*
[2]*Department of Civil Engineering. Universidad Politécnica de Cartagena (SPAIN). antonio.tomas@upct.es (Corresponding author)*
[3]*Department of Civil Engineering. Universidad Politécnica de Cartagena (SPAIN). a.martinez@upct.es*

Algorithm to obtain the optimum design (optimum cross section dimensions and reinforcement details) for singly RC continuous beams. Akin and Saka [16,17] presented an optimum design algorithm based on the Harmony Search method for the detailed design of special seismic moment RC plane frames considering the provisions of ACI318-14 [18] and ASCE 7-05 [19].

Among different biologically-inspired meta-heuristic optimization methods proposed by several authors, the Firefly Algorithm (FA) has proved better than the GA and Particle Swarm Optimization in terms of efficiency [20]. The research by Gandomi et al. [21] uses different chaotic systems to replace the FA parameters, observing some improvement in its efficiency. It is interesting to mention the work by Fister et al. [22] about the impact of this algorithm in recent years, since it has been applied in solving design problems in several engineering fields. In the field of structural design, the works by Gandomi et al. [23,24] and Talatahari et al. [25] are particularly noteworthy.

Any option for solving complex problems, such as the design of reinforced concrete structures, must be focused to those algorithms that are efficient, to thus reduce the computational cost. Although significant achievements have been made in solving the design of sections, elements and reinforced concrete structures subjected to loads in a plane, less research has been made in solving the cases under biaxial bending, in which the computational cost increases if the equivalent rectangular compressive stress block is not used for calculating stresses in the compressed zone of the section. This increased complexity of the problem requires algorithms with proven efficiency [26], among which the FA is a suitable choice. Other methods arising in recent years present noteworthy behaviour, although they can only become candidates to be selected once their efficiency to solve actual problems with constraints has been sufficiently tested.

The formulation proposed to solve the optimum design problem can be implemented in any meta-heuristic algorithm [27]. In this paper the FA algorithm has been chosen, in which a numerical strategy has been implemented to achieve safe designs with a reasonable computational cost.

The formulation includes the following design considerations:

i) high-strength concrete, which means adopting a characteristic compressive cylinder strength of concrete at 28 days f_{ck} > 50 MPa in Eurocode 2 (EC2) [28], and specified compressive strength of concrete 41.37 MPa < f'_c < 82.74 MPa in ACI318 [18],
ii) minimum area of reinforcement according to the standards ACI318 or EC2,
iii) constructive requirements according to the standards ACI318 or EC2, and
iv) constraining the neutral axis depth in order to comply with a certain ductility criterion.

To show the applicability in different meta-heuristic algorithms, this formulation has been implemented in two of them: a GA and the original FA by Yang [1,23]. Besides, a modification in Yang's FA is also included to improve the computational efficiency when the algorithm is searching the global optimum [27]. One numerical example is presented for the optimization of the whole cross section (concrete, steel and formwork) using the ACI318 and EC2 standards.

2. OPTIMIZATION OF CONCRETE RECTANGULAR CROSS SECTIONS

2.1. Optimum design problem

A question arises about whether the values obtained for the reinforcement are the most appropriate or not. This question is not only from the point of view of resistance, since these values are obtained from the equilibrium equations, but from the perspective of optimum reinforcement, which affects not only cost, but also the environmental aspects related to the reduction of resources consumed for the production of steel for reinforcement. Due to the infinite number of solutions, an optimization problem to obtain the optimum reinforcement in the cross section can be proposed as an ideal method of solving the equations system [29-33]. Moreover, it would be interesting to obtain not only the optimum reinforcement but also the optimum width and depth values of the rectangular cross section.

In the design of members under combined flexure and axial load it is common to use conventional methods to obtain the reinforcement with symmetrical distribution. This may be appropriate when flexural moments with different signs and similar values are present. However, in other situations this distribution may result in uneconomical constructive simplification and be environmentally inadequate, with it being more interesting not to use the symmetrical distribution, but to search for another distribution with optimum reinforcement. This is the case, for example, of retaining walls with a vertical load at the top (the soil pressure is causing single sign flexure in the wall) [24], or circular piers for retaining walls, in which longitudinal reinforcement can be reduced by more than 50 % compared with traditional designs [34]. Admittedly, the probability of positioning error increases in this case of asymmetrical reinforcement, but it can be prevented with more careful control of this phase of the construction.

In this section of the paper, the problem of calculating the optimum geometry and reinforcement in a rectangular concrete cross section subjected to biaxial bending and axial force is studied. A simple optimization method is implemented that allows considering high-strength concrete, with a minimum area of reinforcement according to ACI318 or EC2, and a ductility constraint on the neutral axis depth to guarantee certain curvature.

2.2. Variables

The total population is stated by a matrix with the individuals located in rows. Each row or individual consists of twelve design variables. The design variables that have been taken into account for each individual i are (Fig. 1): the depth of neutral axis z_i, the angle of the neutral fiber θ_i, the width b_i, the height h_i, the bar diameter of the right side reinforcement $\varphi'_{y,i}$, the number of bars on the right side of the section $n'_{y,i}$, the bar diameter of the left side reinforcement $\varphi_{y,i}$, the number of bars on the left side of the section $n_{y,i}$, the bar diameter of the top side reinforcement $\varphi'_{x,i}$, the number of bars on the top side of the section $n'_{x,i}$, the bar diameter of the bottom side reinforcement $\varphi_{x,i}$, and the number of bars on the bottom side of the section $n_{x,i}$.

Although the design variables z_i and θ_i are continuous, the rest of the variables are discrete. All of them can adopt any value within the limits imposed by the designer. The variables b_i and h_i adopt values of 5 by 5 mm. The variables $n'_{y,i}$, $n_{y,i}$, $n'_{x,i}$ and $n_{x,i}$ take integer values. Finally, the variables $\varphi'_{y,i}$, $\varphi_{y,i}$, $\varphi'_{x,i}$ and $\varphi_{x,i}$ adopt values corresponding to commercial diameters of reinforcing steel bars.

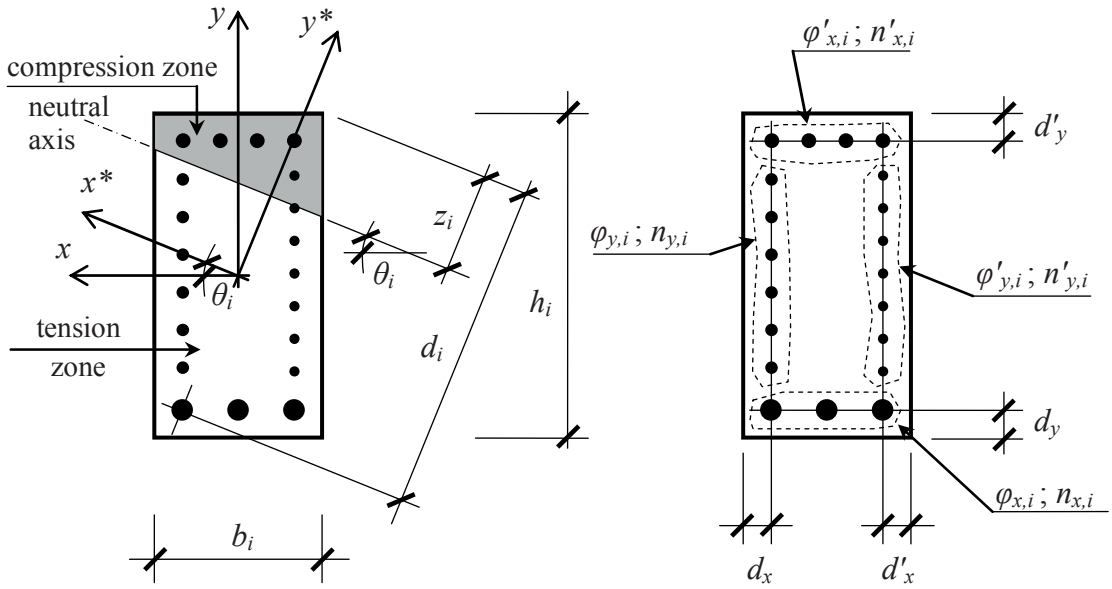


Figure 1. Cross section geometry and design variables for the individual i.

The proposed formulation considers optimization variables instead of design variables. These optimization variables are chosen to improve the performance of the algorithm. For instance, it is easy to define lower and upper bounds for the design variables θ_i, b_i, h_i, $\varphi'_{y,i}$, $n'_{y,i}$, $\varphi_{y,i}$, $n_{y,i}$, $\varphi'_{x,i}$, $n'_{x,i}$, $\varphi_{x,i}$ and $n_{x,i}$. However, it is difficult to define lower and upper bounds for the design variable z_i that can reach high positive or negative values (with low eccentricity and compressive or tensile axial load, respectively). A simple solution to this problem is to take into account a new optimization variable ξ_i instead of the design variable z_i as follows

$$\xi_i = \frac{2}{\pi}\arctan(z_i) \tag{1}$$

High values for z_i correspond to values close to 1 for ξ_i. The upper bound $\xi^U = 1$ corresponds to the upper bound $z^U = \infty$.

Moreover, the design variables θ_i, b_i, h_i, $\varphi'_{y,i}$, $n'_{y,i}$, $\varphi_{y,i}$, $n_{y,i}$, $\varphi'_{x,i}$, $n'_{x,i}$, $\varphi_{x,i}$, $n_{x,i}$ have been normalized by dividing their values by their upper bounds to obtain the optimization variables: ζ_i, β_i, η_i, $\omega'_{y,i}$, $v'_{y,i}$, $\omega_{y,i}$, $v_{y,i}$, $\omega'_{x,i}$, $v'_{x,i}$, $\omega_{x,i}$, $v_{x,i}$, respectively. In this way the optimization variables adopt values which have the same order of magnitude, within the interval of values [0,1]. Normalizing the variables in this way ensures that they have the same relative importance when used in the design algorithm, thus favouring its efficiency.

2.3. Fitness function

In this paper the following fitness function is proposed:

$$F(\mathbf{X}_i) = \frac{f(\mathbf{X}_i)}{f(\mathbf{X}^U)} - \sum_{j=1}^{mvi} g_j(\mathbf{X}_i)\left(\frac{f(\mathbf{X}_i)}{f(\mathbf{X}^U)} + \frac{f(\mathbf{X}^U)}{f(\mathbf{X}_i)}\right) \quad (2)$$

where $\mathbf{X}_i = (\xi_i, \zeta_i, \beta_i, \eta_i, \omega'_{y,i}, v'_{y,i}, \omega_{y,i}, v_{y,i}, \omega'_{x,i}, v'_{x,i}, \omega_{x,i}, v_{x,i})$ is the 12-dimensional optimization variable vector for the individual i; $\mathbf{X}^U$ is the 12-dimensional optimization variable upper bound vector; $f(\mathbf{X}_i)$ is the objective function to be minimized, and mvi is the number of violated constraints ($g_j < 0$) for the individual i.

Or in a simplified manner

$$F_i = f_i * + g_i * \left(f_i * + \frac{1}{f_i *}\right) \quad (3)$$

This fitness function does not take into account a coefficient to penalize the constraints, which is usually dependent on the problem, having shown a good response in all the designs that have been tested [27]. The fitness function is plotted in Fig. 2.

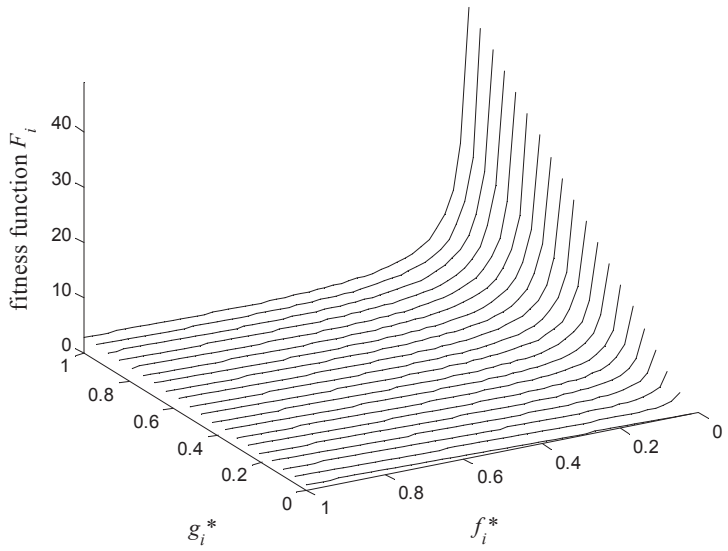


Figure 2. Fitness function F_i.

2.4. Objective function

The objective function f_i of the optimization problem for the individual i is the cost of RC cross section per unit length

$$f(\mathbf{X}_i) = f_i = P_c A_{c,i} + P_s \rho_s A_{st,i} + P_f L_{f,i} \quad (4)$$

where P_c is the price of concrete per unit volume, P_s is the price of steel per kilogram, ρ_s is the density of steel and P_f is the price of formwork per unit area, $A_{c,i}$ is the area of the concrete cross section for the individual i, $A_{st,i}$ is the total area of steel reinforcement for the individual i and $L_{f,i}$ is the length of form for the individual i.

The objective function (4) can also be expressed for beams as

$$f(\mathbf{X}_i) = f_i = P_c(b_i h_i - A_{st,i}) + P_s \rho_s A_{st,i} + P_f(b_i + 2h_i) \tag{5}$$

or for columns as

$$f(\mathbf{X}_i) = f_i = P_c(b_i h_i - A_{st,i}) + P_s \rho_s A_{st,i} + P_f(2b_i + 2h_i) \tag{6}$$

2.5. Constraints

2.5.1. Reinforcement constraints

The option of considering minimum reinforcement according to ACI318 or EC2 may be activated before starting the calculation of the optimum reinforcement.

According to ACI318, the amount of steel in the tension reinforcement $A_{s,i}$ for the individual i shall not be less than the amount

$$\begin{aligned} A_{s,i} \geq \max\Bigg[& \frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y} b_i (h_i - d'_y),\ \frac{1.4}{f_y} b_i (h_i - d'_y),\ \dots \\ & \frac{\sqrt{f'_c}}{4f_y} h_i (b_i - d'_x),\ \frac{1.4}{f_y} h_i (b_i - d'_x) \Bigg] = A_{s,\min,i} \end{aligned} \tag{7}$$

where f_y is the specified yield strength of reinforcement and f'_c is the specified compressive strength of concrete.

For low eccentricity, the minimum total area of reinforcement $A_{st,\min,i}$ for the individual i is

$$A_{st,i} \geq 0.01 b_i h_i = A_{st,\min,i} \tag{8}$$

According to EC2, the amount of steel in the tension reinforcement $A_{s,i}$ for the individual i shall not be less than the amount

$$A_{s,i} \geq \max\left[0.26\frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_i\left(h_i - d'_y\right),\ 0.0013 b_i\left(h_i - d'_y\right),\ \ldots \right.$$
$$\left. 0.26\frac{f_{ctm}}{f_{yk}} h_i\left(b_i - d'_x\right),\ 0.0013 h_i\left(b_i - d'_x\right) \right] = A_{s,\min,i} \quad (9)$$

where f_{ctm} is the mean value of axial tensile strength of concrete and f_{yk} is the characteristic yield strength of reinforcement.

In the case of combined flexure and axial load, the amount of steel in the compression reinforcement $A'_{s,i}$ for the individual *i* shall not be less than the amount

$$A'_{s,i} \geq \frac{0.05 N_{Ed}}{f_{yd}} = A'_{s,\min,i} \quad (10)$$

where N_{Ed} is the design value of the applied axial compression load and f_{yd} is the design yield strength of reinforcement.

For low eccentricity, the minimum total area of reinforcement $A_{st,\min,i}$ for the individual *i* is

$$A_{st,i} = A_{s,i} + A'_{s,i} \geq \max\left[0.1\frac{N_{Ed}}{f_{yd}},\ 0.002 b_i h_i \right] = A_{st,\min,i} \quad (11)$$

In the case of flexural moment and tensile axial force, the total area of reinforcement $A_{st,i}$ for the individual *i* must satisfy

$$A_{st,i} \geq A_{c,i}\frac{f_{ctm}}{f_{yd}} = A_{st,\min,i} \quad (12)$$

The normalized reinforcement constraints are the following:

$$g_{As,i} = \frac{A_{s,i}}{A_{s,\min,i}} - 1 \geq 0 \quad (13)$$

$$g_{A's,i} = \frac{A'_{s,i}}{A'_{s,\min,i}} - 1 \geq 0 \quad (14)$$

$$g_{Ast,i} = \frac{A_{st,i}}{A_{st,\min,i}} - 1 \geq 0 \tag{15}$$

2.5.2. Ductility constraint

If greater ductility in the cross section is required, the neutral axis depth z_i for the individual i should be constrained to a certain maximum value [35-36]. For this purpose, ACI318 recommends using a strain in the tension reinforcement of at least 0.005. This limitation may be used as ductility constraint by using a maximum neutral axis depth $z_{\max,i}$ for the individual i (Fig. 3)

$$z_i \leq z_{\max,i} = \frac{d_i}{1 + \frac{0.005}{0.003}} = 0.375 d_i \tag{16}$$

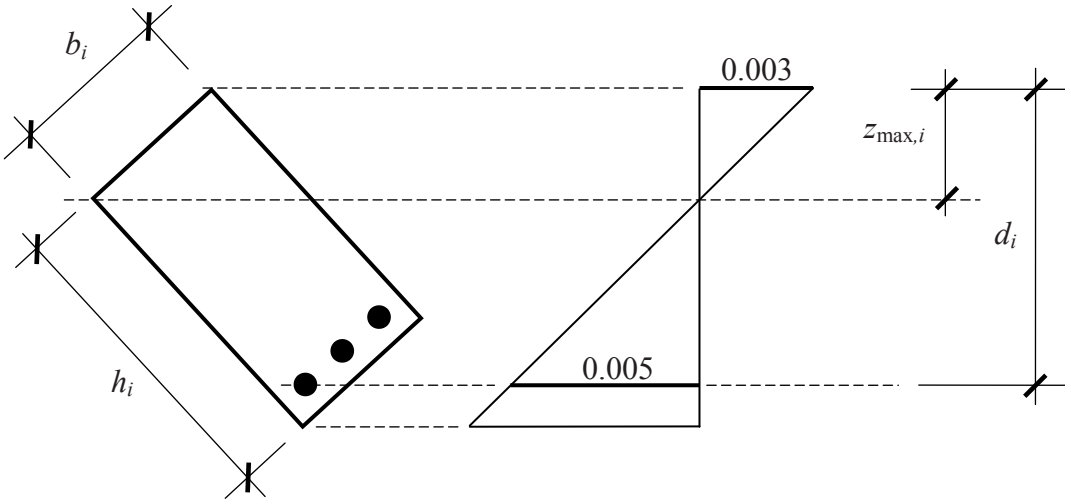


Figure 3. Maximum neutral axis depth $z_{max,i}$ according to ACI318.

EC2 recommends the following limitation

$$z_i \leq z_{\max,i} = \begin{cases} 0.25 d_i & f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.15 d_i & 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \tag{17}$$

The normalized form of the ductility constraint for the individual i is

$$g_{duct,i} = 1 - \frac{z_i}{z_{\max,i}} \geq 0 \tag{18}$$

2.5.3. Steel reinforcement spacing constraints

To ensure that there is the necessary spacing s_i between steel bars of reinforcement spacing constraints are defined for the individual i. For this purpose, ACI318 recommends a minimum spacing $s_{\min,i}$ for the individual i

$$s_{\min,i} = \begin{cases} \max(\varphi_i, 25\,\text{mm}) & \text{for beams} \\ \max(1.5\varphi_i, 40\,\text{mm}) & \text{for columns} \end{cases} \tag{19}$$

and a maximum spacing $s_{\max,i}$ closest to the tension faces for the individual i

$$s_{\max,i} = \min\left[380\left(\frac{280}{\frac{2}{3}f_y}\right) - 2.5c_c \;,\quad 380\left(\frac{280}{\frac{2}{3}f_y}\right)\right] \tag{20}$$

where φ_i is the diameter [mm] of the reinforcing bar to which the spacing constraint is calculated, adopting the value $\varphi'_{y,i}$, $\varphi_{y,i}$, $\varphi'_{x,i}$ or $\varphi_{x,i}$ for the right, left, upper or bottom side of the section, respectively; f_y [MPa] is the specified yield strength of reinforcement; and c_c is the clear cover [mm] of tension reinforcement, which is used to calculate the value of d_x or d_y for the bars in the bottom or left side, respectively.

EC2 recommends a minimum spacing $s_{\min,i}$ for the individual i

$$s_{\min,i} = \max(\varphi_i, 20\,\text{mm}) \tag{21}$$

The normalized form of the spacing constraints for the individual i are

$$g_{sp,\min,i} = \frac{s_i}{s_{\min,i}} - 1 \geq 0 \tag{22}$$

$$g_{sp,\max,i} = 1 - \frac{s_i}{s_{\max,i}} \geq 0 \tag{23}$$

2.5.4. Strength constraints

To ensure that the cross section resists the design loads two strength constraints are defined for the individual i. Both constraints produce satisfactory results in all the examples tested [27]. The first constraint ensures resistance against combined flexure and axial load. The second assures that load eccentricity is the same as the strength eccentricity of cross section. The first of the two constraints in normalized form for the individual i is

$$g_{s1,i} = 1 - \frac{\sqrt{P_u^2 + M_{x,u}^2 + M_{y,u}^2}}{\phi(\mathbf{X}_i)\sqrt{P_n(\mathbf{X}_i)^2 + M_{x,n}(\mathbf{X}_i)^2 + M_{y,n}(\mathbf{X}_i)^2}} = \\ = 1 - \frac{\sqrt{P_u^2 + M_{x,u}^2 + M_{y,u}^2}}{\phi_i\sqrt{P_{n,i}^2 + M_{x,n,i}^2 + M_{y,n,i}^2}} \geq 0 \quad \text{(ACI318)} \tag{24}$$

or

$$g_{s1,i} = 1 - \frac{\sqrt{N_{Ed}^2 + M_{x,Ed}^2 + M_{y,Ed}^2}}{\sqrt{N_{Rd}(\mathbf{X}_i)^2 + M_{x,Rd}(\mathbf{X}_i)^2 + M_{y,Rd}(\mathbf{X}_i)^2}} = \\ = 1 - \frac{\sqrt{N_{Ed}^2 + M_{x,Ed}^2 + M_{y,Ed}^2}}{\sqrt{N_{Rd,i}^2 + M_{x,Rd,i}^2 + M_{y,Rd,i}^2}} \geq 0 \quad \text{(EC 2)} \tag{25}$$

where P_u is the factored axial force, $M_{x,u}$ is the factored moment about x-axis at cross section, $M_{y,u}$ is the factored moment about y-axis at cross section, ϕ_i is the strength reduction factor for the individual i, $P_{n,i}$ is the nominal axial load normal to cross section for the individual i, $M_{x,n,i}$ is the nominal moment about x-axis at cross section for the individual i, $M_{y,n,i}$ is the nominal moment about y-axis at cross section for the individual i, $M_{x,Ed}$ is the design value of the applied internal flexural moment about x-axis at cross section, $M_{y,Ed}$ is the design value of the applied internal flexural moment about y-axis at cross section, $N_{Rd,i}$ is the design axial resistance of cross section for the individual i, $M_{x,Rd,i}$ is the design moment resistance of cross section about x-axis for the individual i, $M_{y,Rd,i}$ is the design moment resistance of cross section about y-axis for the individual i. The Fiber Method has been used in this work to obtain ($P_{n,i}$; $M_{x,n,i}$; $M_{y,n,i}$) or ($N_{Rd,i}$; $M_{x,Rd,i}$; $M_{y,Rd,i}$) [27].

The second of the two constraints in normalized form for the individual i is (Fig. 4)

$$g_{s2,i} = -\left[\frac{(1-\cos\psi_i)}{2}\right]^{\frac{1}{q}}; \quad q = \left(e^{\frac{\cos\psi_i}{C_1}} - \frac{\cos\psi_i}{C_2}\right); \quad \begin{cases} C_1 \in [1,2] \\ C_2 \in [5,50] \end{cases} \tag{26}$$

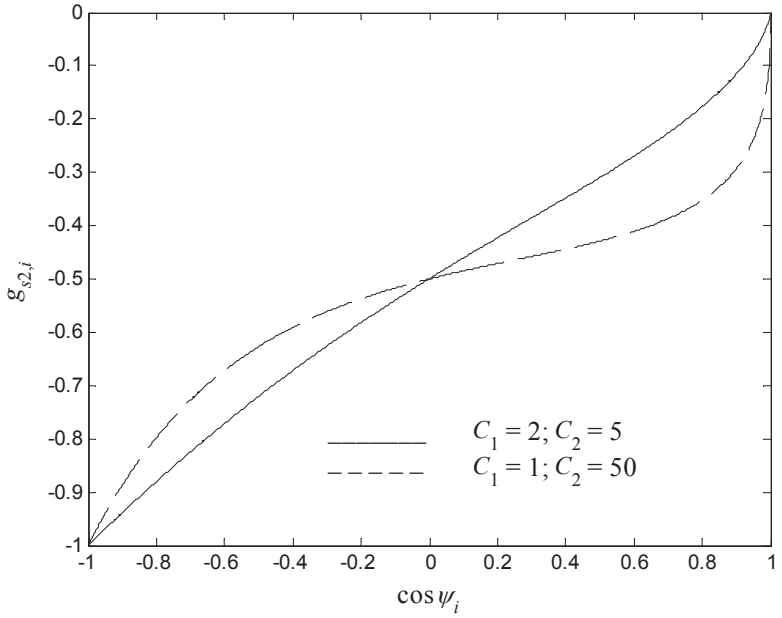


Figure 4. Strength constraint $g_{s2,i}$.

with (Fig. 5)

$$\cos\psi_i = \frac{P_u}{\sqrt{P_u^2 + M_{x,u}^2 + M_{y,u}^2}} \frac{P_{n,i}}{\sqrt{P_{n,i}^2 + M_{x,n,i}^2 + M_{y,n,i}^2}} + \\ + \frac{M_{x,u}}{\sqrt{P_u^2 + M_{x,u}^2 + M_{y,u}^2}} \frac{M_{x,n,i}}{\sqrt{P_{n,i}^2 + M_{x,n,i}^2 + M_{y,n,i}^2}} + \\ + \frac{M_{y,u}}{\sqrt{P_u^2 + M_{x,u}^2 + M_{y,u}^2}} \frac{M_{y,n,i}}{\sqrt{P_{n,i}^2 + M_{x,n,i}^2 + M_{y,n,i}^2}} \quad \text{(ACI318)} \tag{27}$$

or with

$$\cos\psi_i = \frac{N_{Ed}}{\sqrt{N_{Ed}^2 + M_{x,Ed}^2 + M_{y,Ed}^2}} \frac{N_{Rd,i}}{\sqrt{N_{Rd,i}^2 + M_{x,Rd,i}^2 + M_{y,Rd,i}^2}} + \\ + \frac{M_{x,Ed}}{\sqrt{N_{Ed}^2 + M_{x,Ed}^2 + M_{y,Ed}^2}} \frac{M_{x,Rd,i}}{\sqrt{N_{Rd,i}^2 + M_{x,Rd,i}^2 + M_{y,Rd,i}^2}} + \\ + \frac{M_{y,Ed}}{\sqrt{N_{Ed}^2 + M_{x,Ed}^2 + M_{y,Ed}^2}} \frac{M_{y,Rd,i}}{\sqrt{N_{Rd,i}^2 + M_{x,Rd,i}^2 + M_{y,Rd,i}^2}} \quad \text{(EC 2)} \tag{28}$$

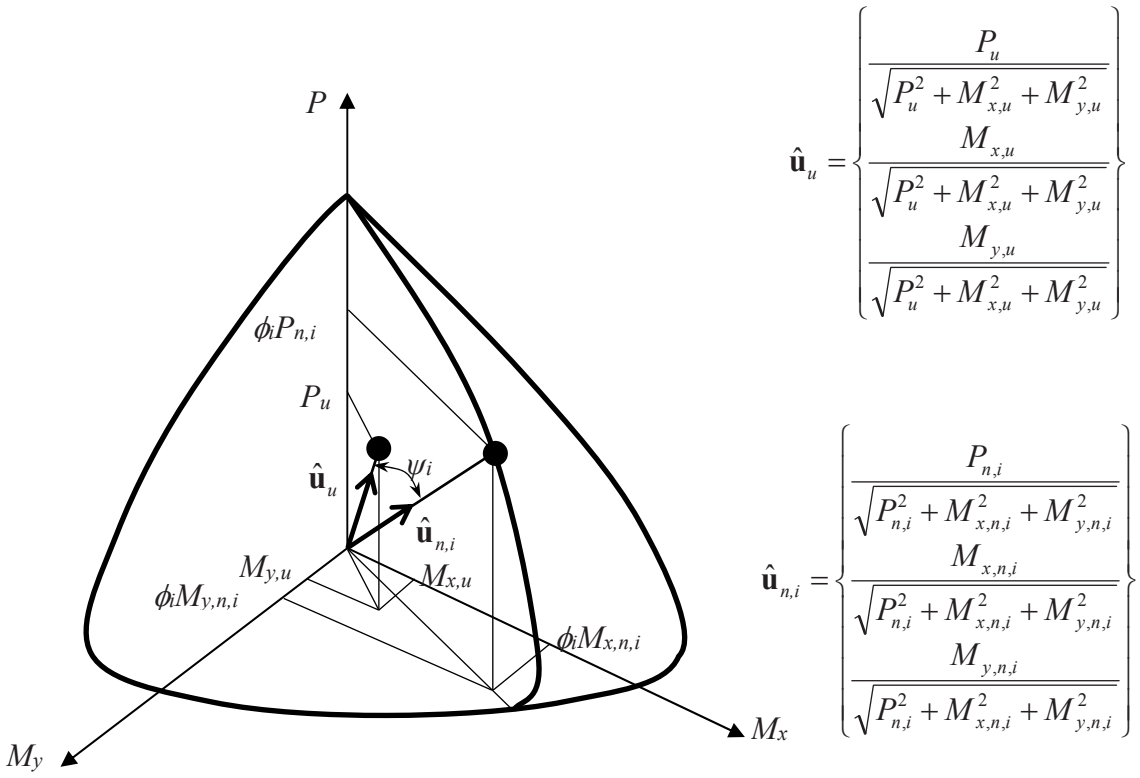


Figure 5. Interaction diagram M-P and strength of the individual i.

It can be seen that the constraint $g_{s2,i}$ is different to the others since it never reaches positive or null values. The algorithm seeks to obtain values close to zero for $g_{s2,i}$ in order to reduce the value of F_i.

As can be appreciated in Fig. 4 the constraint $g_{s2,i}$ has an appearance that depends on the values we adopt for the coefficients C_1 and C_2. This fact affects the way in which the algorithm progresses in searching for the optimum. The ranges of values commented for the coefficients C_1 and C_2 (Fig. 4) have produced satisfactory results in an extensive series of cases which have been taken into account to check the validity of the proposed design method [27].

2.6. Optimization methodology

2.6.1. Firefly Algorithm (FA)

The majority of optimization problems in structural design are highly non-linear and include many variables (discrete and/or continuous) and complex constraints [26]. Among meta-heuristic optimization algorithms, Yang's FA can efficiently deal with this type of problems [37]. The FA belongs to the so-called swarm-based methods. The search process for the optimum depends on two main components: exploration and exploitation. Exploration is the part of the process that focuses on searching for solutions that are candidates to global optimum within the design space. Exploitation is the part of the process which, using the information available, focuses on searching for solutions around the best found thus far. Both components depend on the control parameters of the algorithm. The FA reproduces, in a simple and idealized manner, the social behaviour of fireflies. Fireflies

communicate with each other, seek prey, and find a partner using different patterns of bioluminescent flashes. The characteristics of these flashes are idealized to achieve the development of this algorithm. To start with, three rules are followed:

i) All fireflies have only one gender, so any firefly may be attracted to another.

ii) The attractiveness that one firefly generates on another is directly proportional to the brightness of its luminescence and decreases as the distance between them increases. If we observe only a pair of fireflies we can see that only the less bright one moves toward the brighter one. In the event that there were no brighter fireflies than a specific one, then this one would move around the space randomly.

iii) The brightness of a firefly is related with the value the fitness function adopts for it. In a minimization problem the brightness of a firefly may be chosen as being inversely proportional to the value adopted from the fitness function.

The attractiveness β for a couple of flashing fireflies is defined by

$$\beta(r) = \beta_0 \frac{1}{1+\gamma r^m} \tag{29}$$

where γ is the absorption coefficient for a given medium, m is an integer so that $m > 1$, r is the distance between these two fireflies and β_0 is the attractiveness at $r = 0$.

The movement of a firefly i is attracted to another more attractive (brighter) firefly j as determined by

$$\mathbf{p}_i^{k+1} = \mathbf{p}_i^k + \left(\mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k\right)\beta_0 \frac{1}{1+\gamma r_{ij}^m} + \alpha\left(\texttt{rand} - \frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{X}^U - \mathbf{X}^L\right) \tag{30}$$

where k is the current iteration, $\mathbf{p}_i^k$ is the spatial coordinate vector of the i-th firefly at the k-th iteration, $\mathbf{p}_j^k$ is the spatial coordinate vector of the j-th firefly at the k-th iteration, α is the randomization parameter, `rand` is a random number generator uniformly distributed in [0, 1], $\mathbf{X}^L$ is the optimization variable lower bound vector, and r_{ij} is the Cartesian distance

$$r_{ij} = \left\|\mathbf{p}_i^k - \mathbf{p}_j^k\right\| \tag{31}$$

Although the formulation of the FA is very efficient, an oscillatory behaviour at the end of the search process can arise. This problem can be avoided by reducing the randomization parameter α as the process progresses. The research by Gandomi, Yang and Alavi [23] has indicated that, for most cases, $\alpha \in [0.01, 1]$ can be taken. The absorption coefficient γ characterizes the variation of the attractiveness, and its value is important in determining the speed of the convergence and how the FA behaves. In theory, $\gamma \in [0, \infty)$, but in practice, $\gamma \in [0.01, 10]$ [1,22]. When γ tends to zero the

attractiveness is constant: therefore, a firefly can be seen by all other fireflies. On the other hand, when γ is very large, then the attractiveness decreases dramatically, and all fireflies are short-sighted or equivalent to flying in a deep foggy sky. This means that all fireflies move almost randomly, which corresponds to a random search technique. In general, the FA corresponds to the situation between these two limit states.

2.6.2. Implementation. Modified version of Yang's Firefly Algorithm (MFA)

The 12-dimensional spatial coordinate $\mathbf{p}_i^k$ adopted is

$$\mathbf{p}_i^k = \left\{ \xi_i^k \quad \zeta_i^k \quad \beta_i^k \quad \eta_i^k \quad \omega'^k_{y,i} \quad \nu'^k_{y,i} \quad \omega^k_{y,i} \quad \nu^k_{y,i} \quad \omega'^k_{x,i} \quad \nu'^k_{x,i} \quad \omega^k_{x,i} \quad \nu^k_{x,i} \right\}^T \tag{32}$$

and the Cartesian distance is

$$r_{ij} = \left\| \mathbf{p}_i^k - \mathbf{p}_j^k \right\| = \sqrt{\sum_{l=1}^{12} \left(p_{i,l}^k - p_{j,l}^k \right)^2} \tag{33}$$

The Yang's FA toolbox [1] implemented in code MATLAB® [38] has been used in this research and modified by reducing not only the randomization parameter α (an original feature of the FA) but also the absorption coefficient γ as optimization progresses. This strategy involves gradually reducing exploration and increasing exploitation, more intensely at each iteration k. If $k_{\max}$ is the maximum number of iterations, the variable $t = k / k_{\max}$ can be used to define the function (Fig. 6)

$$s(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \le t_c \\ \dfrac{(t-1)^2}{(t_c-1)^2} & t_c < t \le 1 \end{cases} \tag{34}$$

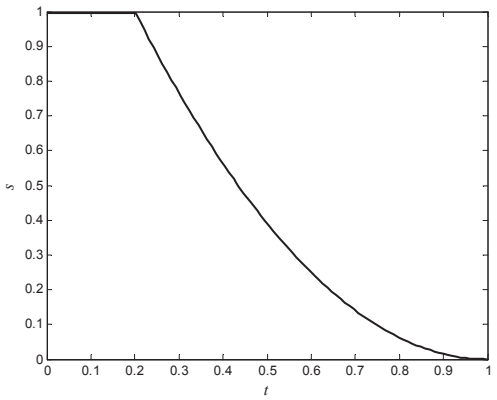


Figure 6. Function $s(t)$ with t_c= 0.2.

and the new randomization parameter $\alpha(t)$ and the absorption coefficient $\gamma(t)$ are

$$\alpha(t)=\alpha_0 s(t) \tag{35}$$

$$\gamma(t)=\gamma_0 s(t) \tag{36}$$

The simplest yet efficient strategy is to set $\gamma=1/\sqrt{L}$, where L is the typical length of design variables. Moreover, the randomization parameter α should ideally be related to the actual scale of each design variable [23]. For that reason and because optimization variables are being normalised in this work, values of α_0 and γ_0 around the unit can be adopted in the expressions (35) and (36).

The authors have modified the FA algorithm by Yang [1,20,23] also in order to improve the process of seeking the optimum. To do so, the flight of each firefly is directed only toward the subset of fireflies that shine more brightly than it does, making its approach towards the one which shines least brightly of the subset and ending its approach toward the one that shines most. Thus, each firefly in its flight adopts values of the variables which tend to increase its brightness.

Moreover, there is the possibility that within the firefly's flight values may be found which make it shine brighter than the firefly which was the brightest until that moment. Under that circumstance, the firefly occupies the position of the brightest of them all. Then this firefly develops a small random displacement

$$\mathbf{p}_1^{k+1}=\mathbf{p}_1^{k}+\alpha^2\left(\mathtt{rand}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{X}^U-\mathbf{X}^L\right) \tag{37}$$

This small random displacement increases the firefly's mobility, but also that of the whole population, which follows its movements. Thus, exploration improves and the probability for the process to end at a local minimum reduces.

2.6.3. Parameters

As a result, the FA has the following parameters: β_0, m, γ, α, NF and $k_{\max}$. The MFA adopts a new parameter (t_c) according to the expression (34).

The parameters β_0, m and γ affect the attractiveness, with β_0 being that which affects in a more direct and simpler way. A constant value of β_0 = 1 has been adopted in this work, since this value has been proven to be suitable in most design examples studied in the literature [1,23,25].

The others parameters considered in this work are m = 2, γ_0 = 10, α_0 = 1, NF = 200, $k_{\max}$ = 700 and t_c = 0.1. The procedure followed for tuning those parameters can be found in the literature [27].

3. EXAMPLE

One numerical example is presented, drawing comparisons between the results obtained by ACI318 and EC2 standards. A cross section under a factored flexural moment $M_{x,u}$ = 400 kNm is studied. The strength of concrete is f_c' = 30 MPa. The strength of steel is f_y = 500 MPa. The clear cover of reinforcement is 40 mm and the stirrup diameter is 10 mm. The cost is calculated using a price of P_c = 100 €/m^3 for concrete and P_s = 1.2 €/kg for steel. The cost for formwork is P_f = 30 €/m^2. The length of form is b + 2h. The optimization variable ξ is constrained in the interval [-0.7, 0.7], the angle of the neutral fiber θ in [0, π/2] rad, the width of the cross section b in [0.30, 0.50] m and the height h in [0.30, 0.90] m. The reinforcement bar diameters φ'_x, φ_x are constrained in the interval [6, 32] mm, the number of reinforcement bars n'_y, n_y in [0, 0] and n'_x, n_x in [2, 10]. The parameters of the Eq. (26) are C_1 = 2 and C_2 = 5. The constraints (13) to (15), (18), (22) to (25) and (26) are considered in this example.

A Matlab® GA toolbox has been modified by the authors to adapt it to the features of the problem. Details of the method can be found in the literature [39]. The GA parameters that have been considered are: stochastic universal sampling; multipoint crossover; mutation rate linearly decreasing from 1.0 to 0.0 with the population convergence; migration rate between subpopulations of 50 % each 50 generations; and elitism with 50 % of the new offspring reinserted into the old population. The above parameters have provided satisfactory results in previous work by the authors [40,41]. Other parameters used in the GA, such as number of subpopulations (10), constant population size per subpopulation (1000) and maximum number of generations (380), have been selected in order to provide a number of objective function assessments similar to that by the MFA.

The best solution obtained from 10 runs of each algorithm is considered to be the optimal design solution of such algorithm. The optimal design solutions obtained considering ACI318 and EC2 standards are shown in Table 1. The values obtained for mean cost, standard deviation of cost, number of objective function assessments and relative time, are shown in Table 2. The evolution of the objective function depending on variables b and h and the global optimum achieved are shown in Fig. 7. The MFA has been used to optimize the reinforcement for each pair of constant values (b, h) assigned initially. The designs obtained in 10 runs using the GA, FA and MFA are also shown in Fig. 7.The objective function evolution of the best solution considering ACI318 standard and using MFA is shown in Fig. 8.

Table 1. Optimal design solutions obtained using the GA, FA and MFA

	GA		FA		MFA	
	ACI318	**EC2**	**ACI318**	**EC2**	**ACI318**	**EC2**
z **(mm)**	148.1	136.0	139.3	138.1	154.5	136.0
θ **(rad)**	0	0	0	0	0	0
b**(mm)**	325	345	370	350	300	320
h **(mm)**	575	605	475	595	585	605
φ'_x**(mm)**	6	6	14	16	6	8
n'_x	2	7	4	3	2	7
φ_x **(mm)**	25	20	32	25	32	20
n_x	5	6	4	4	3	6
Cost (€/m)	86.34	86.93	92.90	90.95	84.66	86.11

Table 2. Performance comparison for the GA, FA and MFA

	GA		FA		MFA	
	ACI318	**EC2**	**ACI318**	**EC2**	**ACI318**	**EC2**
Mean cost (€/m)	88.24	87.84	112.71	116.67	85.31	87.09
Standard deviation (€/m)	1.67	0.67	14.85	12.21	1.56	0.59
Objective function assessments	$3.80\ 10^7$	$3.80\ 10^7$	$1.41\ 10^8$	$1.41\ 10^8$	$3.78\ 10^7$	$3.72\ 10^7$
Relative time (%)	100	85.2	218	214	76.3	75.6

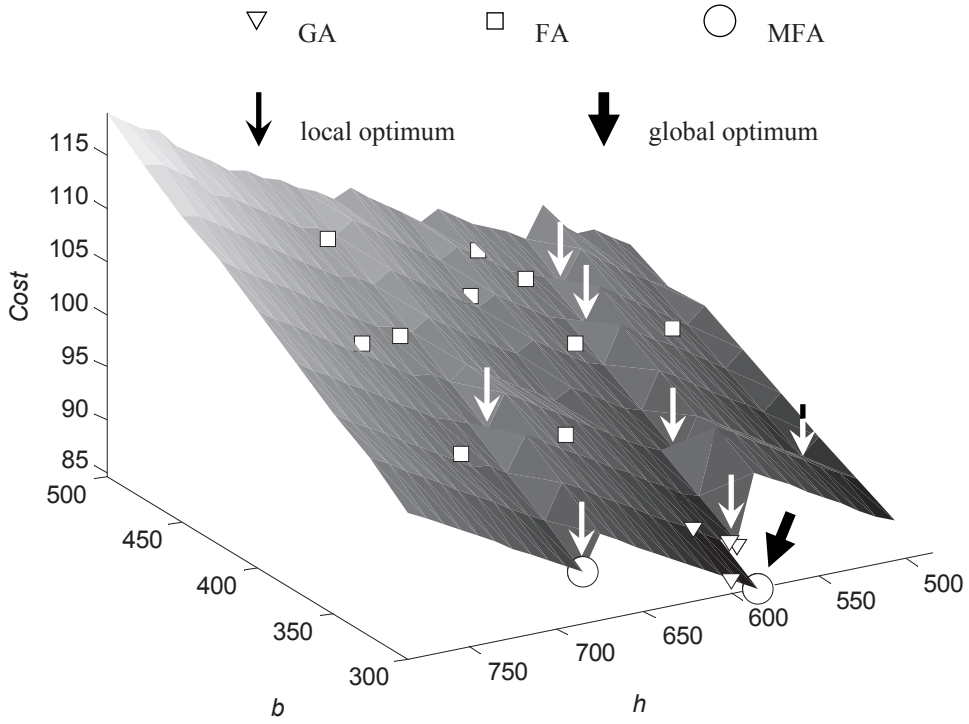


Figure 7. Objective function evolution depending on variables b and h and designs obtained in 10 runs. ACI318.

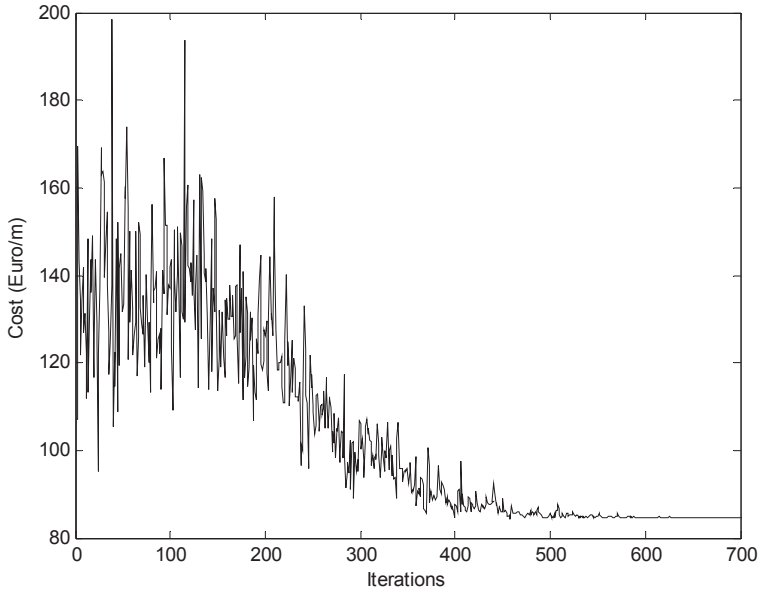


Figure 8. Objective function evolution. MFA. ACI318.

4. CONCLUSIONS AND FINAL REMARKS

A numerical procedure is proposed in this paper for achieving the minimum cost design of reinforced concrete rectangular sections under compression and bending by using biologically-inspired meta-heuristic optimization algorithms.

The problem formulation (variables, fitness function and constraints) has been simplified in order to reduce the computational cost yet ensuring the rigor necessary to achieve safe designs. The formulation includes the costs of concrete, reinforcement and formwork, obtaining the detailed optimum design in which the section dimensions and the reinforcement correspond to values used in practice. The procedure includes the possibility of using high-strength concrete and several design constraints, such as minimum reinforcement and limiting the neutral axis depth.

The problem formulation and the algorithm (MFA) have been validated by applying them to all the designs that have been tested [27]. Among them, the simple problem of reinforced concrete cross sections under flexural loading has been chosen for performance comparisons among the GA, FA and MFA. The results show that the proposed numerical procedure is capable of obtaining the global optimum with a lower computational cost, even in the complicated situation of the optimum being in the frontier of design space [23].

REFERENCES

[1] Yang, X-S. (2010). Nature-inspired metaheuristic algorithms, 2nd Edition. Frome, UK: Luniver Press.

[2] Coello, C. A., Chistiansen, A. D., Santos, F. (1997). A simple genetic algorithm for the design of reinforced concrete beams. *Eng. and Comput.*, 13, 185-96.

[3] Rajeev, S., Krishnamoorthy, C.S. (1998). Genetic algorithm-based methodology for design optimization of reinforced concrete frames. *Comput-Aided Civ. Infrastruct. Eng.*, 13(1), 63-74.

[4] Koumousis, V.K., Arsenis, S.J. (1998). Genetic algorithms in optimal detailed design of reinforced concrete members. *Comput.-Aided Civ. Inf.*, 13(1), 43-52.

[5] Rafiq, M.Y., Southcombe, C. (1998). Genetic algorithms in optimal design and detailing of reinforced concrete biaxial columns supported by a declarative approach for capacity checking. *Comput. Struct.*, 69, 443-57.

[6] Camp, C.V., Pezeshk, S., Hansson, H. (2003). Flexural design of reinforced concrete frames using a genetic algorithm. *J. Struct. Eng. ASCE*, 129(1), 105-15.

[7] Lee, C., Ahn, J. (2003). Flexural design of reinforced concrete frames by genetic algorithm. *J. Struct. Eng. ASCE*, 129(6), 762-74.

[8] Lepš, M., Šejnoha, M. (2003). New approach to optimization of reinforced concrete beams. *Comput. Struct.*, 81(18-19), 1957-1966.

[9] Kvasnička, V. (1994). Augmented simulated annealing adaption of feed-forward neural networks. *Neural Network World*, 3, 67-80.

[10] Kwak, H.-G., Kim, J. (2008). Optimum design of reinforced concrete frames based on predetermined section database. *Comput. Aided Des.*, 40(3), 396-408.

[11] Kwak, H.-G., Kim, J. (2009). An integrated genetic algorithm complemented with direct search for optimum design of RC frames. *Comput. Aided Des.*, 41(7), 490-500.

[12] Govindaraj, V., Ramasamy, J.V. (2005). Optimum detailed design of reinforced concrete continuous beams using Genetic Algorithms. *Comput. Struct.*, 84(1-2), 34-48.

[13] Govindaraj, V., Ramasamy, J.V. (2007). Optimum detailed design of reinforced concrete frames using Genetic Algorithms. *Eng. Optim.*, 39(4), 471-94.

[14] Martínez, F.J., González-Vidosa, F., Hospitaler, A., Yepes, V. (2010). Heuristic optimization of RC bridge piers with rectangular hollow sections. *Comput. Struct.*, 88, 375-86.

[15] Jahjouh, M.M., Arafa, M.H., Alquedra, M.A. (2013). Artificial Bee Colony (ABC) algorithm in the design optimization of RC continuous beams. *Struct. Multidisc. Optim.*, 47, 963-979.

[16] Akin, A., Saka, M.P. (2012). Optimum detailing design of reinforced concrete plane frames to ACI318-05 using the harmony search algorithm. In Proceedings of the eleventh international conference on computational structures technology, B.H.V. Topping (editor), paper 72. Dubrovnik, Croatia: Civil Comp Press.

[17] Akin, A., Saka, M.P. (2015). Harmony search algorithm based optimum detailing design of reinforced concrete plane frames subject to ACI318-05 provisions. *Comput. Struct.*, 147, 79-95.

[18] ACI Committee 318. (2014). Building code requirements for structural concrete (ACI318-14) and commentary (318R-14). Farmington Hills, MI, USA: American Concrete Institute.

[19] ASCE 7-05. (2005). Minimum design loads for buildings and other structures. Virginia, USA: American Society of Civil Engineers.

[20] Yang, X-S. (2009). Firefly Algorithms for Multimodal Optimization. In Stochastic Algorithms: Foundations and Applications, SAGA 2009, Lecture Notes in Computer Sciences, 5792, (pp. 169-78).

[21] Gandomi, A.H., Yang, X-S., Talatahari, S., Alavi, A.H. (2013). Firefly algorithm with chaos. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 18, 89-98.

[22] Fister, I., Fister Jr., I., Yang, X-S., Brest, J. (2013). A comprehensive review of firefly algorithms. *Swarm and Evolutionary Computation*, 13, 34-46.

[23] Gandomi, A.H., Yang, X-S., Alavi, A.H. (2011). Mixed variable structural optimization using Firefly Algorithm. *Comput. Struct.*, 89, 2325-36.

[24] Gandomi, A.H., Kashani, A.R., Roke, D.A., Mousavi, M. (2015). Optimization of retaining wall design using recent swarm intelligence techniques. *Eng. Struct.*, 103, 72-84.
[25] Talatahari, S., Gandomi, A.H., Yun, G.J. (2014). Optimum design of tower structures using Firefly Algorithm. *Struct. Design Tall Spec. Build.*, 23, 350-61.
[26] Sahab, M.G., Toropov, V.V., Gandomi, A.H. (2013). A review on traditional and modern structural optimization: problems and techniques. In Metaheuristic Applications in Structures and Infrastructures (pp. 25-47). London: Elsevier Inc.
[27] Sánchez-Olivares, G., Tomás, A. (2017). Improvements in meta-heuristic algorithms for minimum cost design of reinforced concrete rectangular sections under compression and biaxial bending. *Eng. Struct.*, 130, 162-79.
[28] Technical Committee CEN/TC250. (2004). Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels: European Committee for Standardization.
[29] Sarma, K.C., Adeli, H. (1998). Cost optimization of concrete structures. *J. Struct. Eng. ASCE*, 124(5), 570-78.
[30] Barros, M.H.F.M., Barros, A.F.M., Ferreira, C.A. (2004). Closed form solution of optimal design of rectangular reinforced concrete sections. *Eng. Computation*, 21(7), 761-76.
[31] Raue, E., Hahn, S. (2005). Optimum reinforcement design of concrete cross-sections considering deformation constraints. *J. Civ. Eng. Manag.*, 11(1), 65-71.
[32] Tomás, A., Martí, P. (2010). Design of reinforcement for concrete co-planar shell structures using optimization techniques. *Meccanica*, 45(5), 657-69.
[33] Gil-Martín, L.M., Aschheim, M., Hernández-Montes, E., Pasadas-Fernández, M. (2011). Recent developments in optimal reinforcement of RC beam and column sections. *Eng. Struct.*, 33(4), 1170-80.
[34] Gil-Martín, L.M., Hernández-Montes, E., Aschheim, M. (2010). Optimal reinforcement of RC columns for biaxial bending. *Mater. Struct.*, 43(9), 1245-56.
[35] Ho, J.C.M. (2011). Limited ductility design of reinforced concrete columns for tall buildings in low to moderate seismicity regions. *Struct. Design Tall Spec. Build.*, 20(1), 102-20.
[36] Au, F.T.K., Leung, C.C.Y., Kwan, A.K.H. (2011). Flexural ductility and deformability of reinforced and prestressed concrete sections. *Comput. Concrete*, 8(4), 473-89.
[37] Talbi, E. (2009). Metaheuristics: from design to implementation. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons.
[38] MATLAB® Primer (R2014a). (2014). Natick, MA, USA: The MathWorks, Inc.
[39] Chipperfield, A.J., Fleming, P.J., Fonseca, C.M. (1994). Genetic algorithm tools for control systems engineering. In Proceedings of '94 Adaptive Computing in Engineering Design and Control Conference (ed. I. C. Parmee), Plymouth, UK.
[40] Sánchez-Olivares, G., Tomás, A. (2013). Design of planar semi-rigid steel frames using genetic algorithms and Component Method. *J. Constr. Steel. Res.*, 88, 267-78.
[41] López-López, A., Tomás, A., Sánchez-Olivares, G. (2016). Behaviour of reinforced concrete rectangular sections base on tests complying with seismic construction requirements. *Struct. Concrete*, 17(4), 656-67.

MODELING JUMPING LOADS USING TIME SERIES MODELS

Cara, Javier[1]; Fernández, Javier[1]; Fraile, Alberto[1]; Lorenzana, Antolín[2]

ABSTRACT

In this work a time series model for jumping load is proposed. This model has two parts: an autoregressive part and a harmonic part. The parameters of the model are estimated from data recorded at a force plate.

Keywords: jumping load, human induced load, dynamic test, time series.

1. INTRODUCTION

The interest for modelling human induced loads on structures has been recurrent since the first accidents on suspension bridges in the nineteenth century like Broughton (1831) in the U.K. or Angers (1850) in France. These loads are usually modelled as series of harmonic forces which are defined in terms of their Fourier coefficients. Different values of these Fourier coefficients were obtained from full scale measurements and have been included in codes. For example, in [1] periodic human loads F(t) are modelled by

$$F(t)=W\left(1+\sum_{j=1}^{3}\alpha_j \sin\left(j\omega t+\phi_j\right)\right) \quad , \tag{1}$$

where W is the weight of the jumpers, ω is the jumping frequency, ϕ_j is the phase lag, and α_j is the Fourier coefficient (or dynamic load factor) for the jth component.

In this work an autoregressive time series model is proposed:

$$F_k=\sum_{i=1}^{p} a_i F_{k-i}+\sum_{j=1}^{q}\left[b_j \sin\left(2\pi f\, j\, k\Delta t\right)+c_j \cos\left(2\pi f\, j\, k\Delta t\right)\right]+e_k \quad , \tag{2}$$

where F_k is the force a discrete time $k\Delta t$, $a_i, i=1,\cdots,p$, $b_j, c_j, j=1,\cdots,q$ are constants and e_k is the noise of the model. e_t is assumed to be a Gaussian white noise series with zero mean and variance σ_e^2 (see [2] for more details).

1 *Mechanical Engineering. Universidad Politécnica de Madrid (Spain).* javier.cara@upm.es; *(Corresponding author);* jfernandezm@etsii.upm.es; alberto.fraile@upm.es

2 *DITAP, EII. Universidad de Valladolid (Spain).* ali@eii.uva.es

2. RESULTS

2.1. Model estimation

The parameters of model (2) have been estimated using experimental data recorded in jumping tests. For that, several tests where conducted in a force plate, recording the data produced by different people jumping from 1.0 to 3.0 Hz. The targeted frequency was set with a metronome in order to help the jumper to jump at the established frequency. Figure 1 shows the one person jumping at the force plate.

In this work we are going to analyse the force produced by one person jumping at 2.0 Hertz (see Figure 2). Model (2) was estimated using ordinary least squares with p = 5 and q = 5. The results are shown in Table (1).

Figure 1. *Jumping test.*

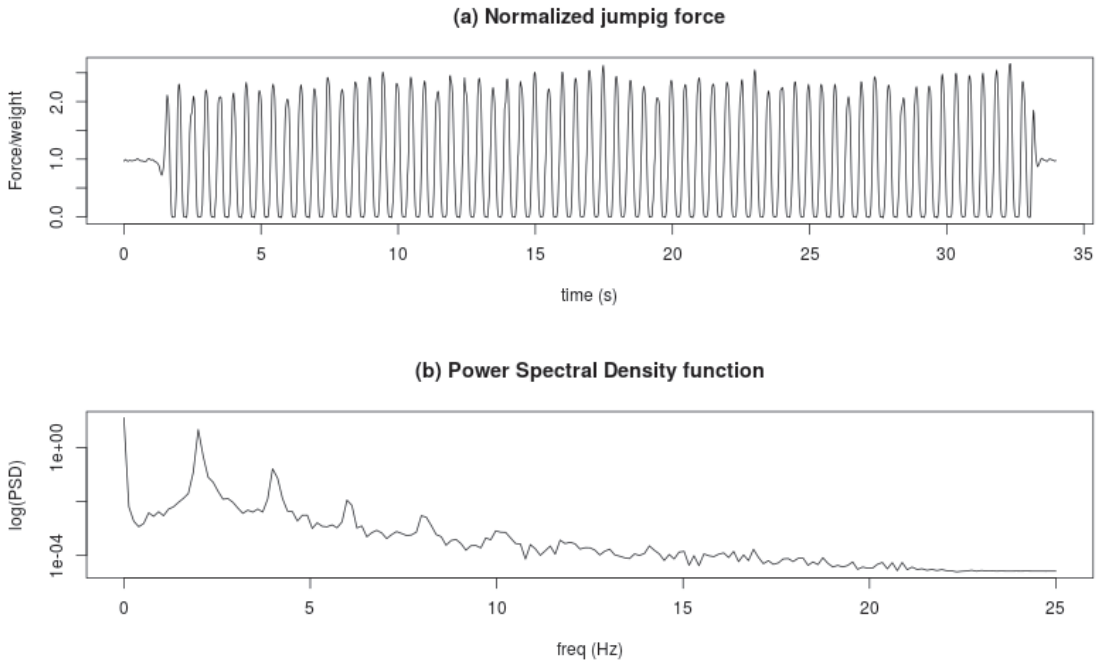


Figure 2. *Time series recorded with jumping frequency of 2.0 Hz.*

Table 1. Model parameters estimated from experimental data

i	$\hat{a}_i$	$\hat{b}_i$	$\hat{c}_i$
1	2.1357	-0.0239	-0.0051
2	-1.8834	-0.0251	0.0112
3	1.1787	0.0099	0.0015
4	-0.6750	0.0125	-0.0026
5	0.1649	0.0101	0.0084

With $\hat{\sigma}_e = 0.07295$. The jumper weight was 80 kg.

2.2. Results

Finally, the estimated model can be used to simulate different realizations of time series of jumps. In Figure (3), one of this simulations is shown.

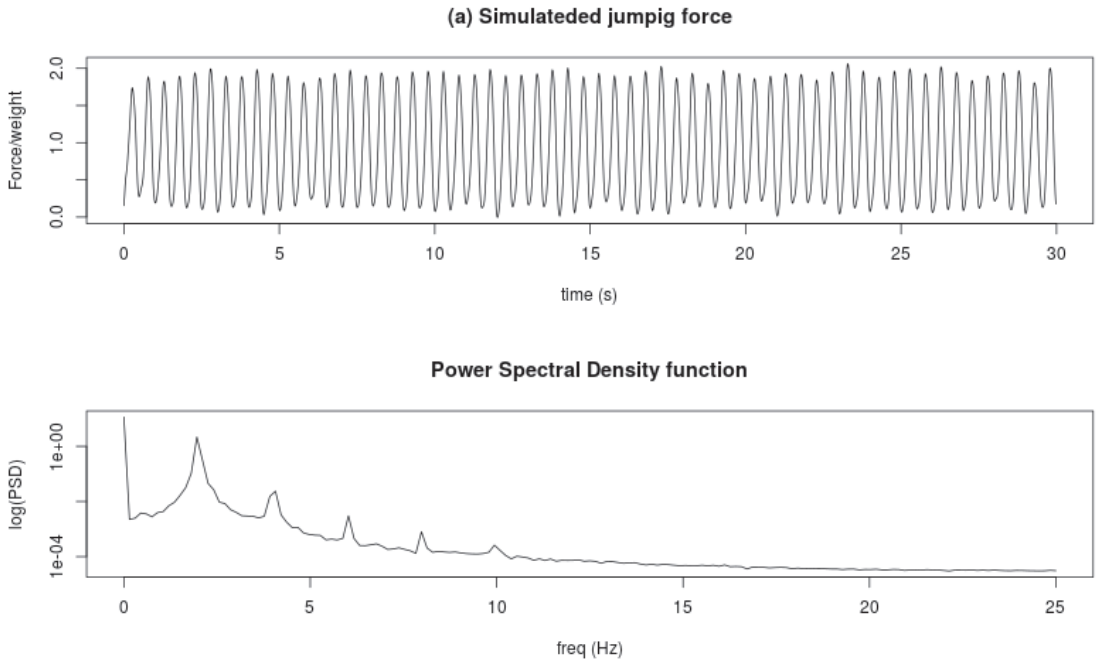


Figure 3. *Simulated time series.*

3. CONCLUSIONS

In this work a time series model for jumping loads has been proposed. This model is suitable for the generation of simulated time history series of jumping loads.

ACKNOWLEDGEMENTS

This research was supported by the Ministerio de Economía y Competitividad of Spain under the research project BIA2015-71942-REDT. The financial support is gratefully acknowledged.

REFERENCES

[1] Steel Construction Institute (2007) “Design of floors for vibration: A New Approach”. SCI P 354.

[2] Shumway, Robert H. and Stoffer, Robert H. Time Series Analysis and its applications. Springer. Third Edition.

UBICACIÓN ÓPTIMA DE UN TMD EN UNA PASARELA PEATONAL

Norberto Ibán[1], Álvaro Magdaleno [2], Mariano Cacho[2], Iván M. Díaz[2]

[1]*Centro Tecnológico CARTIF, Valladolid (SPAIN). noriba@cartif.es*
[2]*ITAP, EII. Universidad de Valladolid. (SPAIN). alvaro.magdaleno@uva.es, cacho@eii.uva.es*
[3] *ETSICCP, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (SPAIN), ivan@upm.es*

Palabras Clave: Elementos finitos; Actualización de Modelos; Amortiguador de Masa Sintonizado; Diseño Óptimo; Respuestas Temporales

autor: noriba@cartif.es (Norberto Ibán)

RESUMEN

Las estructuras sometidas a excitaciones inducidas por las acciones humanas pueden producir efectos vibratorios que generen grandes aceleraciones y en general problemas de serviciabilidad. El control de las vibraciones mediante sistemas pasivos, semiactivos y activos han sido propuestos como posibles soluciones para reducir el nivel vibratorio en estructuras como puedan ser los puentes, mástiles de aerogeneradores o estructuras esbeltas, entre otros [1]. Se sabe que los amortiguadores de masa sintonizada (AMS o TMD, *Tuned mass damper*) atenúa la respuesta de la vibración de una estructura incrementando su amortiguación mediante la aplicación de fuerzas inerciales que generan una respuesta al movimiento dado por la estructura [2]. Recientemente, se han propuesto diferentes implementaciones de TMD para mejorar su eficiencia. En el caso de estructuras con frecuencias naturales espacialmente distribuidas los diseños y la ubicación de los TMDs pueden no ser tan obvios al no ser adecuado aplicar la teoría de Den Hartog [3] debido a los efectos de acoplamiento entre los diferentes modos de la estructura y el del propio TMD [4]. Por ello se recomienda calibrar el modelo y estimar sobre él la verdadera actuación del TMD. El objetivo de este trabajo es analizar si una estrategia basada en el análisis de las FRFs, sobre un modelo computacional actualizado es adecuado para evaluar la adecuación de un TMD o por el contrario los fenómenos transitorios debidos a las típicas solicitaciones presentes en estas estructuras, acciones humanas, deben ser consideradas para su optimización a tenor de los resultados de las respuestas dinámicas evaluadas en términos de aceleraciones.

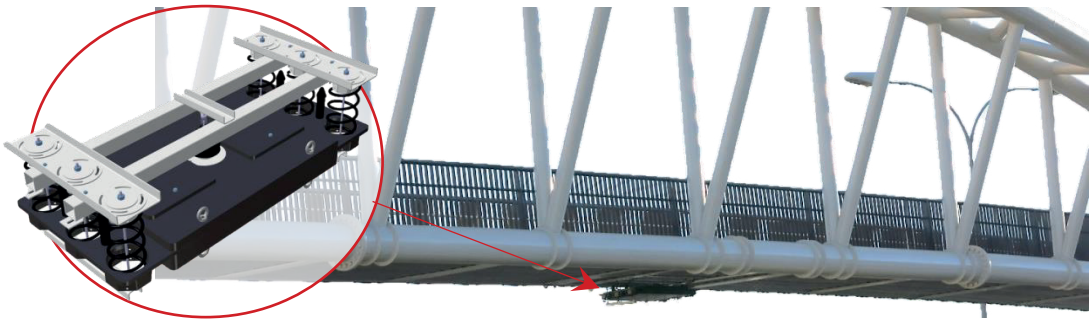


Figura 1. *Acoplamiento real de TMD-pasarela peatonal*

1. INTRODUCION

Aunque en el pasado, en el sector de la ingeniería civil venía siendo habitual el uso de modelos aproximados para estimar la respuesta dinámica de las estructuras de tipo puente, hoy en día es habitual modelar la estructura utilizando las actuales capacidades CAE. El uso de modelos discretos y simples ha demostrado ser insuficientes para el adecuado modelado de estructuras esbeltas, ya que no pueden representar algunos efectos relacionados con los modos de vibración cuando estos están estrechamente espaciados y que frecuentemente ocurren en la práctica. Además, las pasarelas modernas son cada vez más esbeltas y propensas a oscilar bajo la acción de los peatones, por lo que necesidad de considerar las vibraciones y su control en la fase de diseño es primordial.

Conocer los métodos FE y las capacidades para realizar un modelado preciso y que se ajuste a un comportamiento estructural real, capaz a su vez de convertirse en un software asequible, guiaría, sin vacilar, a los profesionales de la ingeniería civil. Sin embargo, en lo que respecta al diseño estructural, hay una falta de experiencia en modelado de FE, particularmente en lo que respecta a su estado modal, no siendo raro que el modelo no coincida con la estructura real. La forma de avanzar en el desarrollo de estas competencias es vincular las pruebas modales y el análisis FE con la actualización de los modelos de las estructuras y extraer unas directrices generales de diseño. Un procedimiento para la toma de medidas experimentales y la actualización de los modelos de elementos finitos fueron descritos en trabajos anteriores así como el estudio y las propuestas de los dispositivos de mitigación sobre ese modelo numérico calibrado. También se estudió su ubicación óptima mediante estrategias basadas en FRFs (funciones de respuesta de frecuencia) sobre modelos simplificados. Destacar la dificultad que entraña estas estrategias, pues no solo es una tarea tediosa (se deben considerar varias FRF a lo largo de la pasarela), sino también su limitación, ya que el cruce de peatones es un efecto transitorio y las curvas FRF no incluyen la respuesta transitoria, solo el estacionario bajo carga armónica siendo esto una de las principales deficiencias de los modelos existentes, pues no consideran los cambios en las propiedades dinámicas del sistema debidos a la presencia y tránsito de los peatones.

Por ello en este trabajo se lleva a cabo una comparativa entre estrategias basadas en FRFs con las respuestas de varias simulaciones, en las que entran en consideración dispositivos de mitigación en diferentes ubicaciones para diferentes escenarios.

2. DESCRIPCION DE LA PASARELA

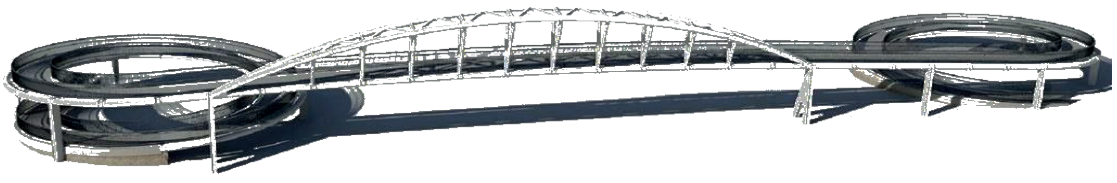


Figura 2. *Pasarela bajo estudio*

En este trabajo la estructura en cuestión es la pasarela peatonal de acceso al Estadio Balear sobre la Vía de cintura Ma-20 de Manacor (Palma de Mallorca). El vano central dispone de un arco construido a base de dos tubos de acero de diámetro 500mm montados en celosía con 9 montantes de diámetro 200mm. El arco está formado por dos tubos, uno alineado sobre la vertical que da inercia al sistema y

otro ligeramente desviado para contrarrestar el momento producido por el tablero en voladizo. El tablero montado sobre las ménsulas está construido a base de hormigón armado con chapa colaborante. En la anterior conferencia de IOMAC se presentó el procedimiento para actualizar esta pasarela para que los resultados computacionales coincidan con las mediciones desde un punto de vista estático, modal y dinámico. Las dos primeras frecuencias son 2.098Hz y 2.505Hz, ambos en el rango propenso a ser excitada por un peatón caminando. El amortiguamiento estructural (tipo Rayleigh) se fijó en 0,32%.

3. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

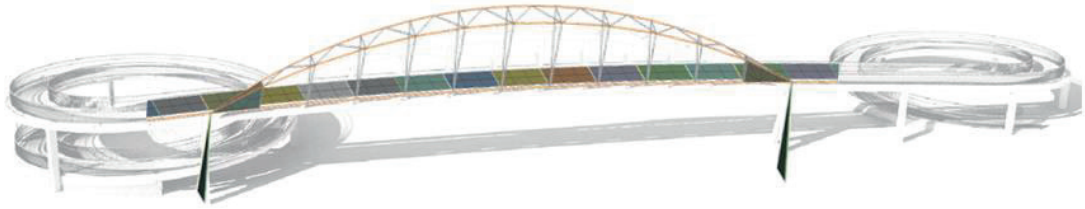


Figura 3. *Modelo numérico de EF de la pasarela*

Como primer paso se generó un modelo de elementos finitos de la estructura en cuestión mediante el software comercial ANSYS usando más de 600 elementos tipo BEAM188 para las barras tubulares de acero y 120 elementos SHELL181 para la cubierta de hormigón. Se consideraron varios tipos de sección transversal para el esqueleto de acero según las dimensiones comentadas en el anterior punto, pero para la cubierta se utilizó un elemento de espesor constante (200mm). Aunque los pasamanos de la pasarela se muestran rígidamente unidos a la cubierta, se ha considerado excluirlos del modelado computacional por su baja o prácticamente nula participación estructural. Sin embargo su masa si ha sido considerada sobre el peso de la cubierta. Los parámetros modales (frecuencias naturales, formas modales y amortiguamientos modales) fueron extraídos tras el proceso de actualización del modelo.

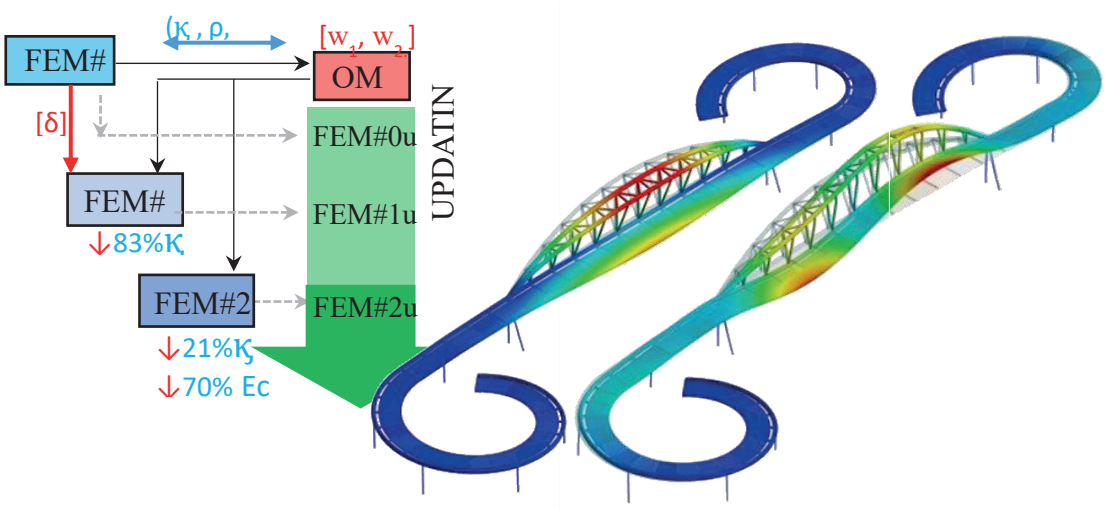


Figura 4. *Primeras dos deformadas modales del modelo actualizado*

Una vez calibrado el modelo numérico (de manera estática y modal), ambos modelos deben responder de manera similar cuando son excitados por cualquier fuerza dinámica. Después de comprobar que esto es cierto (figura 5), usando para ello una fuerza tipo aplicada sobre el centro del vano, se acopla el TMD. El objetivo de esta fuerza tipo era la de obtener un registro de la respuesta con la que comparar y corresponde a una fuerza armónica a 2.098 usando un shaker. En la figura 5 se representa dicha fuerza y el registro de la respuesta donde, en el primer tramo (hasta el segundo 32) aparece la respuesta forzada y en el segundo la caída libre.

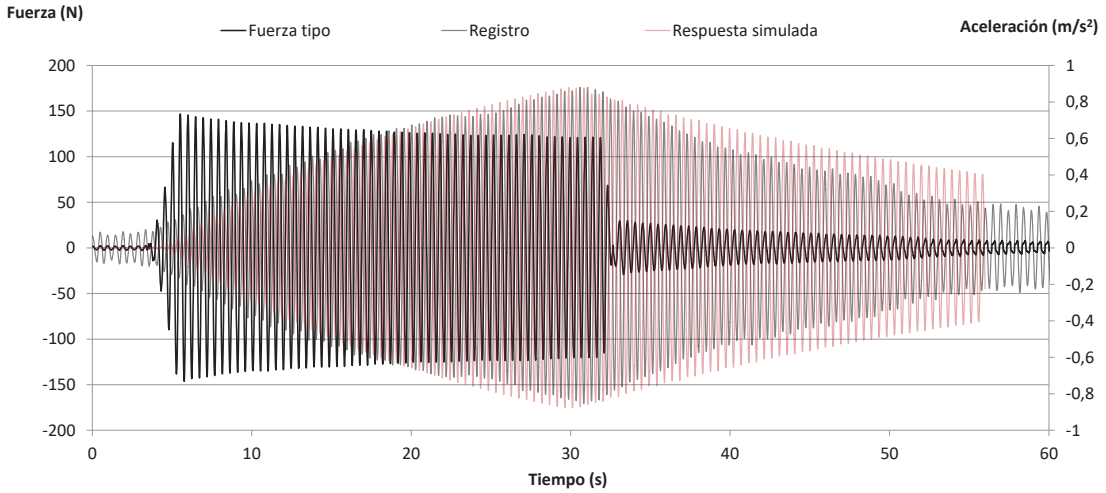


Figura 5. *Respuesta en el punto medio del vano del modelo y su comparativa en la realidad*

Con la estructura perfectamente modelada y ajustada con la realidad el propósito ahora es modelar al peatón. Para ello destacar que la principal diferencia entre la masa móvil con velocidad (propuesta en el modelo de interacción peatón-estructura) y la dada por una carga constante móvil es que la carga aplicada sobre la estructura debido a la masa suspendida es variable con el tiempo y la ubicación. La figura 6Figura 6 muestra el modelo adoptado haciendo uso de los diferentes elementos de la biblioteca de Ansys así como de su forma de contacto.

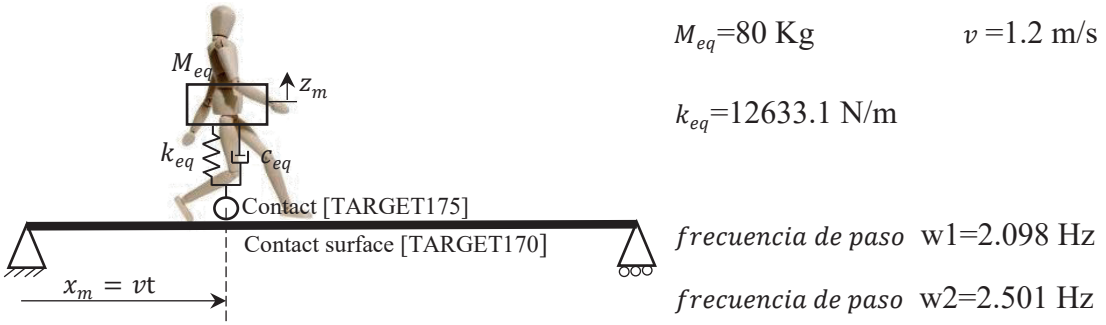


Figura 6. *Modelo de interacción peatón-estructura propuesto*

4. ESTRATEGIAS BASADAS EN FUNCIONES DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

Tratando de predecir la ubicación óptima del dispositivo atenuador sin considerar los fenómenos transitorios se somete al modelo a un barrido en frecuencias entre 1Hz y 4Hz, mediante la aplicación de un carga armónica sobre los diferentes puntos de estudio, obteniendo las FRFs (funciones de respuesta en frecuencia) para los diferentes escenarios. Los diferentes escenarios varían en función del dispositivo amortiguador empleado y su ubicación (A-B-C-D-E-F). Para todos los dispositivos amortiguadores (TMD) se emplea una tonelada de masa móvil inercial (que es el 2% de la masa total del modelo actualizado de la pasarela). Aunque El TMD puede sintonizarse para cualquiera de los modos este estudio se centra en el caso de que el TMD esté siempre sintonizado para la primera frecuencia resonante (w1). Para lograr este enfoque el TMD tendrá diferentes sintonizados para cada una de las localizaciones, es decir su frecuencia y amortiguamiento irán en función de su posición. Fijaremos la atención en las posiciones F y C por la experiencia adquirida.

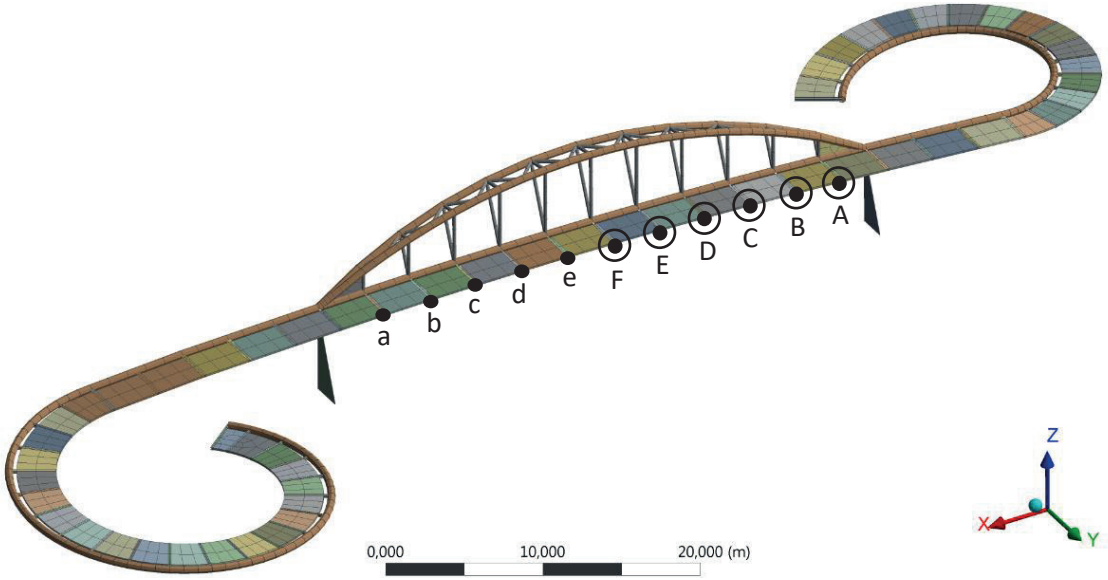


Figura 7. *Posibles localizaciones para el TMD*

La simulación de este problema proporciona los resultados de la figura 8 donde se puede apreciar las FRFs para el punto de análisis (P) cuando la fuerza de excitación se localiza en ese mismo punto (P) para los diferentes escenarios de estudio (sin TMD, conTMD). Destacar que entre los escenarios en los que se simula el acoplamiento del TMD este estará localizado en alguna de las dos posiciones siguientes, F o C, atacando siempre en la minimización del modo uno. Así la notación será FRF [P, TMDw1_FoC].

Atendiendo ahora a lo que denominamos factor de amplificación (FA) y obtenido como el valor FRF en la frecuencia w1 para los diferentes casos de estudio analizaremos mediante el valor sumatorio de estos (factor de amplificación acumulado) la educabilidad del acoplamiento mediante su comparación con los resultados que obtengamos usando estrategias basadas en respuestas transitorias de las aceleraciones.

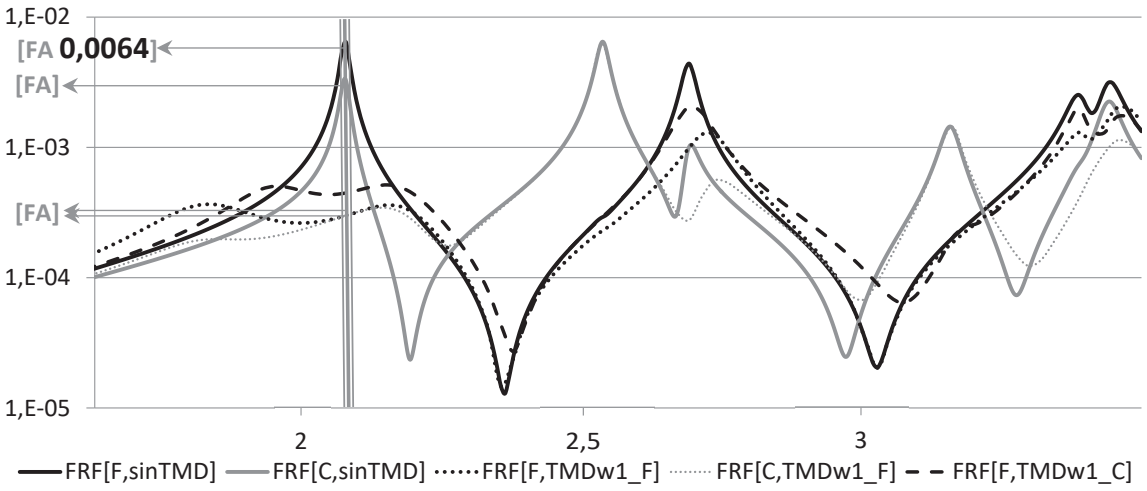


Figura 8. *FRFs para los casos sin TMD y con TMD ubicado en el centro del vano (punto F)*

Hacer notar que en la obtención del factor de amplificación acumulado se ha considerado que los factores de amplificación para los puntos del A al E deben ser sumados dos veces por la simetría que presenta la estructura, y ser de esta forma representativo para todo el vano.

Tabla 1. Factores de amplificación ante una fuerza actuante en el punto F

						Factor de Amplificación [FA]						**FA acumulado**
	a	b	c	d	e	**F**	E	D	C	B	A	**sin TMD**
w1	…	…	…	…	…	**0,0064**	0,0062	0,0056	0,0046	0,0040	0,0040	**0,0552**
w2	…	…	…	…	…	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0003	0,0033
w3	…	…	…	…	…	0,0044	0,0039	0,0030	0,0020	0,0006	0,0011	0,0255
												con TMDw1_F
w1	…	…	…	…	…	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	**0,0023**
w2	…	…	…	…	…	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002	0,0034
w3	…	…	…	…	…	0,0020	0,0015	0,0010	0,0015	0,0024	0,0025	0,0198

						Factor de Amplificación [FA]						FA acumulado
	a	b	c	d	e	**F**	E	D	C	B	A	**con TMDw1_C**
w1	…	…	…	…	…	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0003	0,0002	**0,0045**
w2	…	…	…	…	…	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0002	0,0041
w3	…	…	…	…	…	0,0020	0,0019	0,0015	0,0014	0,0023	0,0023	0,0211

Analizando estos valores se aprecia como el escenario donde el TMD se dispone en la posición central del vano (F) se ve reducido en un 95.8% mientras la fuerza de excitación oscila a la frecuencia w1 sobre ese mismo punto mientras que sería un 91.8% cuando la fuerza de excitación oscila a la frecuencia w1 sobre el punto F cuando el TMD se ubica en C.

De este modo y con los valores obtenidos para los casos en los que el TMD está sintonizado para el modo uno y ubicado en las posiciones F y C podemos representar el diagrama de barras de la figura 9. Este gráfico representa no solo los diferentes factores de amplificación cuando la fuerza de excitación coincide con la localización del punto a evaluar, en este caso estamos prestando especial atención en las posiciones F y C, sino que podemos usarlos para llevar a cabo una evaluación más completa donde la localización de la excitación entra en consideración. Aunque los valores del factor de amplificación extraídos no incluyen la respuesta transitoria, hecho por el cual necesitamos comprobar la influencia de la carga transitoria que trataremos en el siguiente apartado, si podrían establecer nuevas medidas de evaluación.

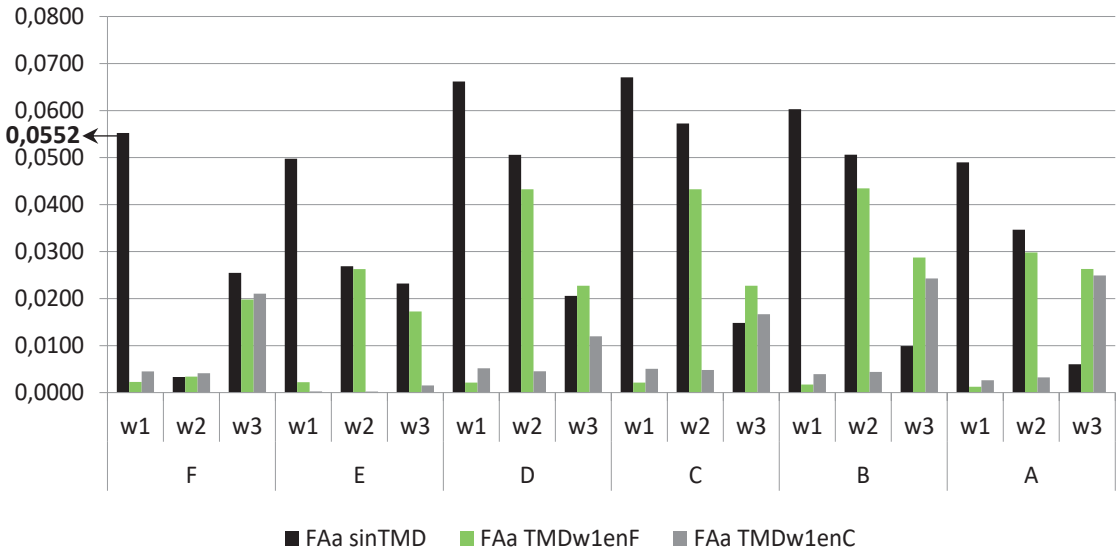


Figura 9. *Factores de amplificación acumulada sin TMD, con TMDw1_F y con TMDw1_C*

Con esta estrategia basada en FRFs y considerando los tres primeros modos de vibración la conclusión más importante es que si solo nos centramos en lo que ocurre en el punto medio (F) el TMD estaría mejor ubicado en el punto central que en el punto C pero entendiendo que la pasarela no solo se mueve cuando se excita en su punto central se podría concluir que los factores de amplificación acumulado para todas los puntos cuando el TMD está sintonizado para la primera frecuencia es mejor cuando este está localizado en C puesto que los valores en naranja suman 0.143 y es aproximadamente la mitad de lo que suman los azules claro (localización en F) 0.339.

5. ESTRATEGIAS BASADAS EN EL ANALISIS DE LOS REGISTROS TEMPORALES

Para la comprensión de la respuesta acoplada, se realizan varias simulaciones elegidas convenientemente, pues el coste temporal de la simulación es elevado, la más lógica (TMD localizado justo en el centro del tramo principal y sintonizado a la primera frecuencia) frente a otras. Se comparan las respuestas de la pasarela para diferentes escenarios, con el fin de extraer algunas conclusiones interesantes cuando el modelo incluye el efecto de los cambios en las propiedades dinámicas de la pasarela debido a la presencia del peatón.

El escenario de partita consistirá en el tránsito de una persona (80Kg) con frecuencia de paso coincidente con la primera frecuencia de la estructura y que parte del punto 1 (inicio del tránsito) a una velocidad de 1.2m/s hacia el punto 2 (a 56.1m del punto 1) cuando sobre la estructura no se ha acoplado aún ningún dispositivo atenuador. La figura 10 muestra las respuestas en el punto medio, en aceleraciones, de un tránsito real y el obtenido por simulación sobre el escenario de partida, haciendo notar la similitud de las respuestas.

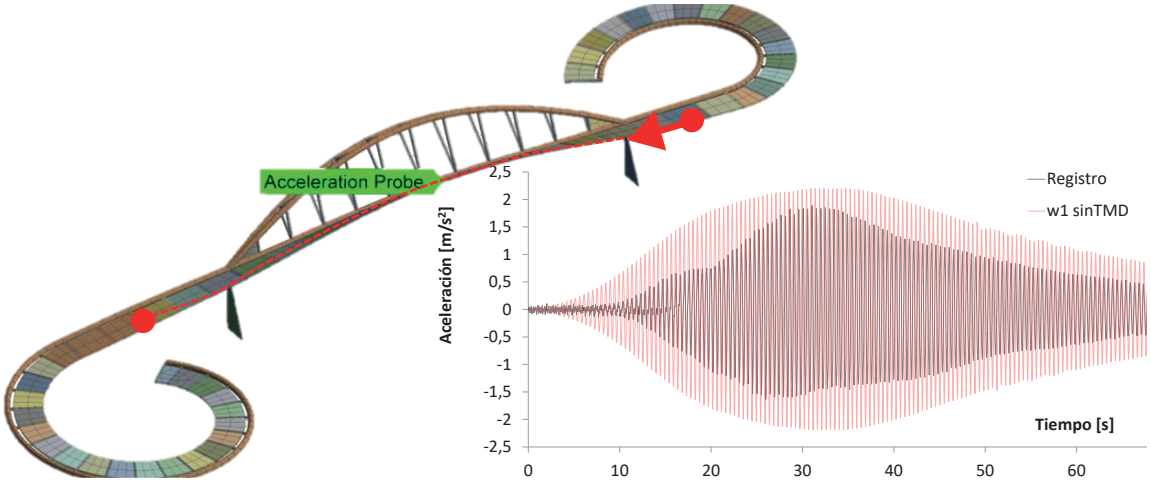


Figura 10. *Trayectoria del peatón y respuestas del punto medio del modelo y del registro real*

A modo de justificar por qué la respuesta obtenida por simulación es ligeramente superior a la registrada mediante ensayos, se debe hacer notar que raramente puede una persona establecer una frecuencia de paso establecida sin desviarse de ella y mucho menos con el ritmo establecido desde el primer paso el ritmo. En este sentido no es de extrañar que por simulación, la excitación sea perfecta y por consecuentemente pueda vibrar más y que adquiera más amplitud desde los primeros instantes. Asumiendo esto en la siguiente figura se muestran los típicos parámetros con los que se avalúan las aceleraciones y que se ha creído oportuno considerar en esta estrategia, y que parten de los registros transitorios obtenidos en el centro del vano (punto F) para los diferentes escenarios donde la frecuencia de paso puede ser w1 o w2.

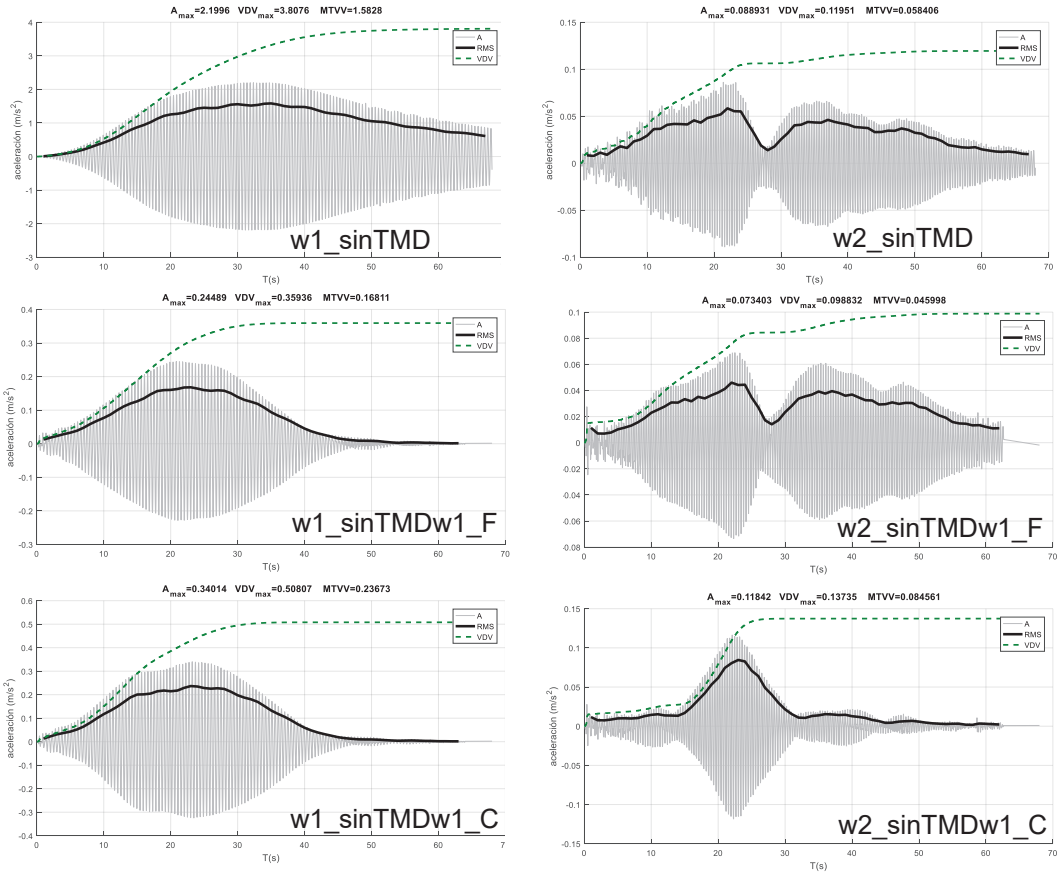


Figura 11. *Respuesta temporal de aceleraciones en el centro del vano de la pasarela ante un peatón caminando.*

Tabla 1. Transito del peatón coincidente con la primera frecuencia de la pasarela

Parámetros para el punto F	sin TMD	TMD1 [1000kg]		TMD1 [1000kg]	
	-	Sintonizado al modo1		Sintonizado al modo1	
	-	Ubicación F		Ubicación C	
Pick	2.199	0.244	Reducción 88.9%	0.340	Reducción 84.5%
VDV	3.807	0.359	Reducción 90.6%	0.508	Reducción 86.6%
MTVV	1.582	0.168	Reducción 89.4%	0.236	Reducción 85.0%

Tabla 2. Transito del peatón coincidente con la segunda frecuencia de la pasarela

Parámetros para el punto F	sin TMD	TMD1 [1000kg]		TMD1 [1000kg]	
	-	Sintonizado al modo1		Sintonizado al modo1	
	-	Ubicación F		Ubicación C	
Pick	0.088	0.073	Reducción 17.4%	0.115	Ampliación 29.8%
VDV	0.119	0.098	Reducción 17.3%	0.137	Ampliación 14.9%
MTVV	0.058	0.045	Reducción 21.4%	0.084	Ampliación 44.7%

Una comparativa de todas estas respuestas entre si se ve representada en la figura inferior.

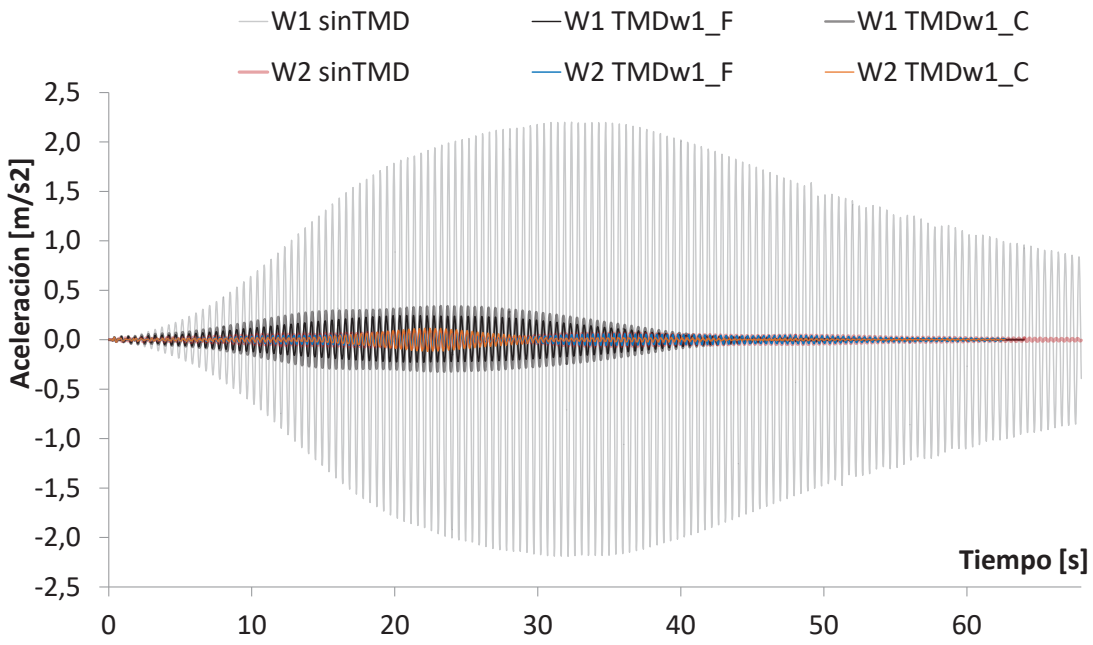


Figura 12. *Respuestas temporales evaluadas*

6. CONCLUSIONES

Los resultados para cualquiera de las estrategias muestran tendencias similares aunque difieren ligeramente del valor de reducción estimado. En la siguiente tabla se recopila los principales valores del estudio.

Tabla 3. Comparativa de estrategias

Frecuencia de paso	**sin TMD**	**TMD1 [1000kg]**		**TMD1 [1000kg]**	
Estrategia seguida	**-**	**Sintonizado al modo1**		**Sintonizado al modo1**	
	-	**Ubicación F**		**Ubicación C**	
W1 FRF	0.0064	0.0004	Reducción 93.7%	0.0005	Reducción 92.2%
W1 MTVV	1.582	0.168	Reducción 89.4%	0.236	Reducción 85.0%
W2 FRF	0.0004	0.0004	Reducción 0.1%	0.0005	Ampliación 25%
W2 MTVV	0.058	0.045	Reducción 21.4%	0.084	Ampliación 44.7%

A falta de continuar y profundizar el estudio con otros casos donde se dispongan más TMDs en otras ubicaciones (sintonizados convenientemente en esas ubicaciones), y contemplando combinaciones de 2 o 3 TMDs en diferentes localizaciones y analizando los valores para los diferentes tránsitos el modelo y las estrategias formuladas en este trabajo indican que si la posibilidad es acoplar un único TMD estará mejor ubicado en el punto F que en C. Destacar que cuando la frecuencia de paso es w2 y

el TMD está situado en C, sintonizado para contrarrestar la primea frecuencia, su efectividad es nula e incluso perjudicial, aunque cabe destacar que estamos hablando de valores muy bajos comparados con los de la respuesta estructural más crítica.

A este respecto, parte de estos escenarios han podido analizarse en la figura 9 donde la localización de la fuerza y de la respuesta no solo podían localizarse en la misma ubicación, mostrando de este modo que la localización C podría ser mejor, como ya se ha comentado, si todas las aceleraciones de todos los putos y para cualquier transito fueran evaluadas en conjunto y no de forma puntual.

AGREDECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a D. Javier Henche (Grahen Ingenieros S.L.) y D. Víctor Darder (Melchor Mascaró) por darnos la oportunidad de trabajar con ellos. Asimismo, los autores agradecen la financiación parcial del Ministerio de Economía y Competitividad a través del proyecto BIA2015-71942-REDT.

REFERENCIAS

[1] *Housner GW, Bergman, LA, Caughey TK, Chassiakos AG, Claus RO, Masri SF, Skelton RE, SoongTT, SpencerBF, Yao JTP. Structural control: Past, present, and future. Journal of Engineering Mechanics-ASCE 1997; 127:887-971.*

[2] *SymansMD, Constantinou MC. Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review. Engineering Structures 1999;21:469-487.*

[3] *Den Hartog J P. Mechanical Vibrations, 4th edition, McGraw-Hill, New York, 1956.*

[4] *Abé M, Igusa T. Tuned Mass Dampers for structures with closely spaced natural frequencies. Earthquake Enginnering and Structural Dynamics 1995; 24: 247-261.*

[5] *Zarate B. A., Caicedo J. M., "Finite element model updating: multiple alternatives," Engineering Structures, vol. 30, no. 12, pp. 3724–3730, 2008.*

EXPERIMENTAL NUMERICAL CORRELATION OF THE DELAMINATION OF COMPOSITE STRUCTURES SUBJECTED TO LOW SPEED IMPACT

Burgos de la Rosa, Ismael[1]; Lopez Taboada, Carlos[1]; Castillo López, Germán[1]; Zabala, Haritz [2]; Aretxabaleta, Laurentzi[2], García Sánchez, Felipe[1]

ABSTRACT

In this work, we have analyzed the delamination caused by a low velocity impact on carbon-epoxy laminates made with balanced 0/90 braided fabrics and made by resin infusion. The items have been tested with a fall drop system.

The numerical simulation was performed using the Explicit Non-Lineal Finite Element Method (NASTRAN SOL700). Delamination was analyzed using cohesive zone models (CZM). The parameters of the Tvergaard and Hutchinson constitutive law have been defined based on experimental fracture data of the laminate and mechanical properties of the resin used.

The results show a good correlation (error<2%) regarding the maximum force, contact time and residual stiffness. The good correlation in evaluating the residual stiffness after impact has special interest since it allows the designer to evaluate the integrity level of a structure that has suffered an impact, generating damage.

Keywords: impact, FEM-explicit, composites, delamination, CZM.

1. INTRODUCCION Y OBJETIVOS

El creciente interés por reducir el peso en estructuras móviles está llevando al uso masivo de materiales compuestos, especialmente los basados en laminados de fibra de carbono. Una prueba de ello es su uso creciente en aeronaútica (Airbus A350, Boeing 787 Dreamliner, …) y en automoción (BMW i3 e i8, …), entre otros sectores. Este hecho hace necesario que los diseñadores dispongan de herramientas de diseño adecuadas que permitan garantizar su comportamiento en servicio.

Los materiales compuestos laminados presentan mecanismos de fallo complejos (fisuración de matriz, rotura de fibras, delaminación, … y sus combinaciones) que hacen necesario disponer de modelos de degradación complejos que permitan garantizar la durabilidad del compuesto considerando determinando nivel de daño.

[1] *Departamento de Ingeniería Civil, de Materiales y Fabricación. Universidad de Málaga (ESPAÑA).* 0618445664@uma.es, clopezt@uma.es *(Corresponding author),* gcastillo@uma.es, fgsanchez@uma.es
[2] *Departamento de Mecánica y Producción Industrial, Mondragon Unibertsitatea (ESPAÑA).* hzabala@mondragon.edu , laretxabaleta@mondragon.edu

En el caso de los compuestos laminados, uno de los mecanismos de fallo más críticos es la delaminación [1], ya que puede suponer una importante pérdida de capacidad portante, es de difícil detección visual y su evolución condiciona el posterior fallo del componente.

El comportamiento interlaminar de un compuesto viene caracterizado por su tenacidad a fractura interlaminar en los tres modos que contempla la mecánica de la fractura elástica lineal (LEFM). Ahora bien, según Jensen y Sheinman [2] la contribución del modo III en los fenómenos de delaminación es imperceptible. Por tanto, es común asumir que la delaminación de un compuesto laminado crece en una combinación de los modos I y II, dominada por el modo I.

Una de las solicitaciones más críticas a las que es sometida una estructura móvil a lo largo de su ciclo de vida es el impacto. Después de un impacto es necesario evaluar la capacidad portante residual que presenta la estructura.

Los impactos son solicitaciones dinámicas de corta duración e intensidad elevada, que por su naturaleza, pueden producir daños importantes sobre las mismas [3]. La velocidad de impacto es uno de los parámetros más empleados a la hora de clasificar los diferentes tipos de impacto [4]:

a) Impacto de baja velocidad, de larga duración y baja intensidad, en los que el tiempo de impacto es suficientemente largo como para que la estructura tenga una respuesta global (Fig. 1a).
b) Impactos de alta velocidad, de muy corta duración e intensidad elevada, en los que la respuesta está gobernada por ondas flexionales. (Fig. 1b).
c) Impactos balísticos en los que la respuesta está gobernada por ondas de tracción-compresión (Fig. 1c).

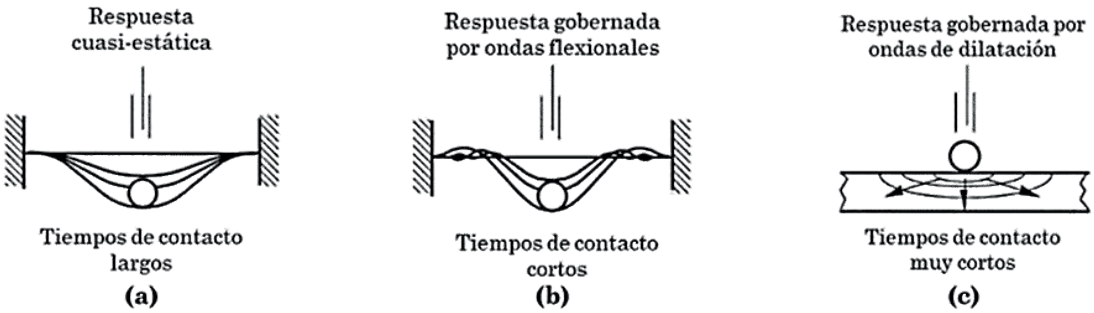


Figura 1. *Respuesta de la estructura en función del tipo de impacto* [5] *(a) Impacto de baja velocidad, (b) Impacto de velocidad intermedia y (c) Impacto balístico.*

Algunos autores [5], [6], [7] consideran que para definir un impacto de baja velocidad es necesario que la velocidad de impacto sea inferior a $50\ m/s$ y que la relación entre la masa del impactor, m_{imp}, y la de la probeta, m_{pro}, debe ser superior a 4. Según estos criterios, las condiciones de impacto seleccionadas en este trabajo permiten hablar de impacto de baja velocidad.

A la hora de resolver un problema dinámico mediante el método de los elementos finitos es necesario hacer una discretización temporal. Para ello pueden utilizarse dos métodos: implícito y explícito. Los

métodos implícitos se basan en calcular las variables incógnitas planteando las ecuaciones dinámicas en el mismo instante que se buscan resolver. Como consecuencia se plantea un sistema de ecuaciones algebraicas acoplado que requieren un proceso iterativo para cada incremento de tiempo lo que puede suponer elevados costes computacionales que crecen cuadráticamente con el tamaño del problema. Si a este hecho le añadimos no linealidades como las inherentes a la degradación del material o a las condiciones de contacto en un problema de impacto, las condiciones de convergencia son difíciles de garantizar [3].

Este problema queda resuelto utilizando la integración explícita. Esta técnica se basa en establecer las ecuaciones dinámicas en un instante, t_n, previo al que se quieren calcular las variables incógnita, t_{n+1}. El algoritmo de resolución se basa en el esquema de diferencias centrales, así para el problema de impacto, la posición, las fuerzas y las aceleraciones se definen en el instante, t_n, y las velocidades se definen en el instante, $t_{n+1/2}$ [3]. Este hecho, junto con el empleo de matrices de masas concentradas proporcionan un algoritmo de cálculo elemento por elemento que no precisa ni ensamblar ni resolver el sistema global de ecuaciones en cada paso con lo que el coste computacional se reduce drásticamente. Sin embargo como contrapartida, para garantizar su estabilidad requiere que el paso de tiempo sea inferior a un valor crítico establecido por la condición de Courant, Ec. (1).

$$\Delta t < \Delta t_{crit} = \frac{h}{c} = \frac{2}{w_{max}} = \pi\sqrt{\frac{m_{imp}}{K}} \tag{1}$$

donde c es la máxima velocidad de las ondas, h el tamaño de elemento y w_{max} la máxima frecuencia propia del sistema. Este requisito obliga a realizar una discretización temporal con incrementos de tiempo inferiores al tiempo que tarda una onda de tensión en recorrer un elemento finito (es por tanto dependiente del tamaño de elemento). Este método es aconsejable en problemas con grandes aceleraciones y tiempos de análisis pequeños, tal y como ocurre en el estudio de impacto del presente trabajo.

Entre las técnicas numéricas de simulación de fractura que más ampliamente se han implementado en los códigos de cálculo comerciales que utilizan el método de los elementos finitos (FEM) destacan el método VCCT (Virtual Crack Closure Technique) y el CZM (Cohesive Zone Model) [8]. En ambos métodos se parte de la energía de fractura. El VCCT resulta simple de utilizar sin embargo exige presuponer la zona de inicio de la delaminación mientras que los modelos de zona cohesiva (CZM) presentan la ventaja de predecir el inicio de la delaminación. En este trabajo se ha seleccionado la técnica CZM. Las zonas en las que potencialmente se puede generar delaminación, son modelizadas mediante el uso de elementos cohesivos que incorporan las superficies que se separarán durante el proceso de delaminación.

La Fig. 2 esquematiza un elemento 3D cohesivo de 8 nodos con el sistema local de coordenadas, en el que 1 es la coordenada normal al plano del elemento y las coordenadas 2 y 3 definen el plano del mismo.

El elemento cohesivo únicamente tiene en cuenta los desplazamientos relativos, expresados con la componente normal, v_n, y dos componentes transversales, v_s y v_t, entre los planos superior e inferior, expresadas en un sistema de coordenadas local Ec. (2).

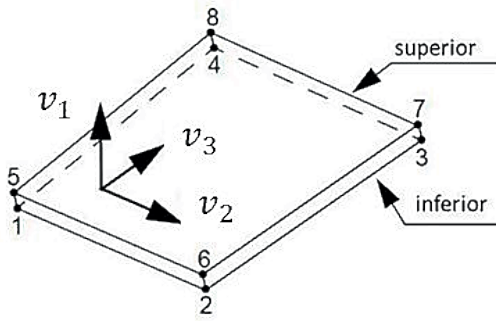


Figura 2. *Elemento cohesivo 3D* [9]

$$\left.\begin{aligned} v_n &= v_1^{superior} - v_1^{inferior} \\ v_s &= v_2^{superior} - v_2^{inferior} \\ v_t &= v_3^{superior} - v_3^{inferior} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

El desplazamiento de apertura efectivo vendrá dado por la Ec. (3).

$$v = \sqrt{v_n^2 + v_s^2 + v_t^2} \quad (3)$$

Existen diferentes leyes constitutivas de materiales cohesivos, todas ellas definidas en términos de tensiones normales y tangenciales al plano de referencia. La Fig. 3 muestra las tres más habituales.

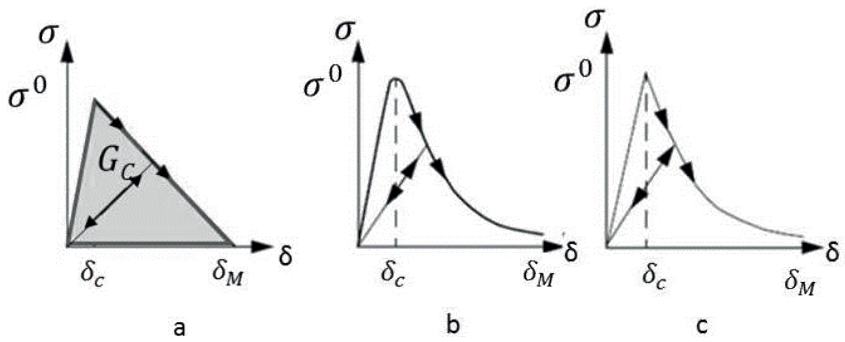


Figura 3. *Leyes constitutivas de materiales cohesivos (a) bilineal, (b) exponencial, (c) lineal-exponencial*

En la Fig. 3, δ es el desplazamiento de apertura efectivo en un instante determinado, δ_C es el desplazamiento de apertura crítico, δ_M es el desplazamiento de apertura máximo y Gc (área ley de comportamiento cohesivo) es la tasa de liberación de energía o energía cohesiva.

Para unos valores de tensión máxima (σ^0) y G_C determinadas, el valor de δ_M queda definido. Sin embargo, el valor de δ_C puede ser seleccionado variando con ello la rigidez del elemento cohesivo, Fig. 4, según la Ec. (4):

$$K_{cohe} = \frac{\sigma^0}{\delta_c} \quad (4)$$

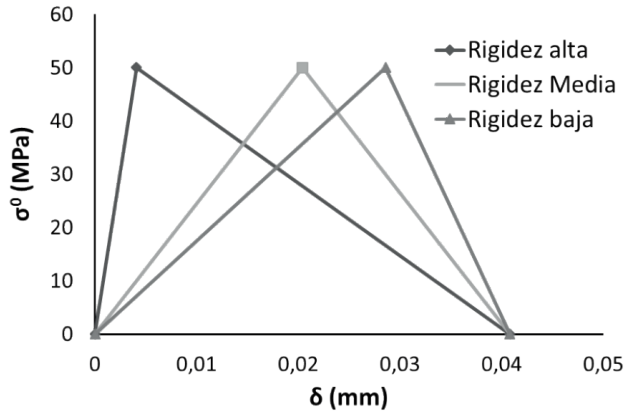


Figura 4. *Rigidez del material cohesivo*.

El objetivo de este trabajo es simular el comportamiento a impacto de baja velocidad de un compuesto laminado carbono-epoxi al ser sometido a energías de impacto que provoquen fallo por delaminación. Para ello se ha utilizado el método de elementos finitos explicito (NASTRAN SOL700) y elementos cohesivos. Se ha seleccionado la ley de comportamiento cohesiva más adecuada, así como los parámetros que la definen.

Se han fabricado placas laminadas mediante infusión de resina. Los ensayos de impacto se han realizado mediante una máquina de caída de dardo CEAST INSTRON 9350.

La contrastación teórico-experimental se ha realizado comparando los valores de fuerza máxima, tiempos de contacto, áreas de delaminación y rigideces residuales post impacto.

2. MATERIALES EMPLEADOS

El material compuesto empleado en este trabajo ha sido un laminado carbono-epoxi. Concretamente la resina empleada es bicomponente suministrada por SiComin que consta de resina SR8100 y endurecedor lento SD8822. La relación en peso de mezcla resina-endurecedor ha sido de 100:31. La resina seleccionada presenta una baja viscosidad a temperatura ambiente que la hace especialmente eficaz para su uso en el proceso de infusión de resina.

Las propiedades mecánicas óptimas del sistema resina-endurecedor se obtienen tras un ciclo de curado y post-curado, *Tabla 1*.

Tabla 1. Propiedades de la resina SR8100/SD8822.

Propiedad	Valor
Densidad	1,150 ± 0,001 g/cm^3
Temperatura de transición vítrea	68 ± 1 °C
Alargamiento a rotura	1,7 ± 0,3 %
Resistencia a tracción	41,6 ± 8,9 MPa
Módulo de elasticidad	2,92 ± 0,13 GPa

Como refuerzo se ha empleado un tejido plano equilibrado, fig. 5a, de fibra de carbono Hexcel (ref.43199) [10] (Fig. 5b) con un gramaje de $200\ gr/m^2$, realizado a partir de fibra de carbono de alta resistencia de 3K. Las propiedades mecánicas aportadas por Hexcel se pueden ver en la *Tabla 2*.

(a) (b)

Figura 5. *Descripción de tejido plano equilibrado. (a) Esquema* [11] *y (b) Fotografía del tejido empleado.*

Tabla 2. Propiedades mecánicas de la fibra de carbono [10].

Propiedad	Valor
Densidad	1,79 g/cm^3
Alargamiento a rotura	1,9 %
Resistencia a tracción	4440 MPa
Módulo de elasticidad	221 GPa

El material objeto de estudio ha sido fabricado por infusión de resina, Fig. 6. Este proceso permite obtener porcentajes de fibra medio-alto así como espesores uniformes. Como resultado se ha fabricado una placa de $500\ mm \times 500\ mm \times 1{,}42\ mm$, con una disposición de láminas $[0]_{3s}$.

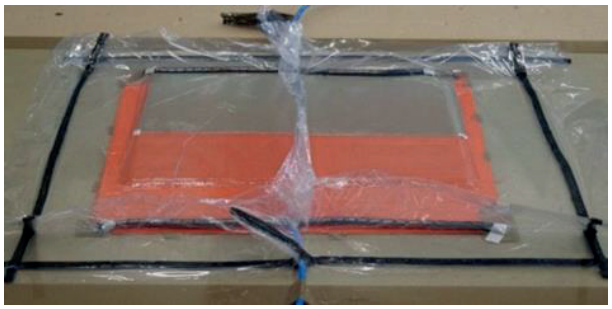


Figura 6. *Fabricación del laminado por infusión de resina.*[12]

A partir de la placa fabricada se han obtenido, mediante corte por chorro de agua, todas las probetas necesarias para caracterizar el material (probetas de tracción, cizalladura interlaminar,…), así como para los ensayos de impacto de flexión biaxial (probetas circulares). En la *Tabla 3* se pueden ver las propiedades del material fabricado, considerando que las coordenadas x e y definen el plano de la placa, siendo x la dirección de la trama e y la del material (Fig. 5a).

Tabla 3. Propiedades del laminado fabricado. [12]

Propiedad	Valor
Contenido en volumen de fibra	48,4 ± 0,7 %
Contenido en vacíos	3,3 ± 0,1 %
Densidad	1,42 ± 0,01 g/cm^3
Espesor lámina elemental	0,237 mm
Módulo de Elasticidad ($Ex = Ey$)	57,3 ± 0,8 GPa
Resistencia a tracción ($X = Y$)	781 ± 43 MPa
Coeficiente de Poisson (ν_{xy})	0,179
Módulo de Cizalladura (Exy)	3,08 ± 0,16 GPa
Resistencia a cizalladura (S)	80,3 ± 2,8 MPa
Tasa de liberación de energía en modo I (G_{IC})	496 ± 21 J/m^2
Tasa de liberación de energía en modo II (G_{IIC})	2000 J/m^2

3. ENSAYOS DE IMPACTO

Los ensayos de impacto biaxial se han llevado a cabo en una máquina de caída de dardo CEAST Fractovis-Plus 7520 (Fig. 7a) equipada con un percutor instrumentado (Ceast ref. 7529.506).

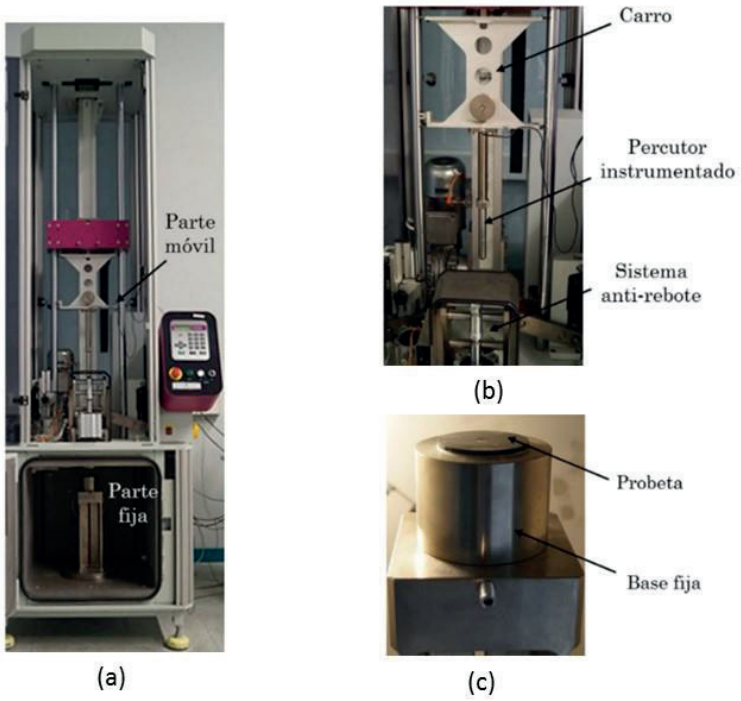


Figura 7. *Descripción de la máquina de caída de dardo CEAST Fractovis-Plus 7520.*

La probeta, de $60\ mm$ de diámetro, se apoya sobre una base anular (Ceast ref. 7520.042) de diámetro interior 40 mm y exterior $60\ mm$ (Fig. 7c). El percutor, de cabeza semiesférica (Ceast ref. 7529.804), va montado sobre un carro de masa m_{imp} que se suelta desde una altura predeterminada en función de

la energía de impacto deseada y que va guiado hasta impactar en el centro de la probeta. Al alcanzar la probeta, el percutor genera sobre ella una solicitación impulsiva de flexión, cuya respuesta es registrada en forma de curva fuerza-tiempo. Para evitar un segundo impacto, la máquina está equipada con un sistema anti-rebote (Fig. 7b) que bloquea al percutor después del primer impacto. A partir de la señal fuerza de contacto-tiempo, $F(t)$, conociendo la masa del impactor, m_{imp}, y la velocidad inicial en el instante de inicio del impacto, $v(0)$, es posible obtener mediante integración las curvas velocidad-tiempo, $v(t)$, desplazamiento-tiempo, $u(t)$, y energía absorbida-tiempo, $E_a(t)$, Ecs. (5) (6) y (7):

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{m_{imp}} \cdot \int_0^t F(t)dt \tag{5}$$

$$u(t) = \int_0^t \left[v(0) + \frac{1}{m_{imp}} \cdot \int_0^t F(t)dt \right] dt \tag{6}$$

$$E_a(t) = \int_0^t F(t) \cdot \left[v(0) + \frac{1}{m_{imp}} \cdot \int_0^t F(t)dt \right] dt \tag{7}$$

A partir de los diferentes modos de fallo que aparecen, es posible definir los umbrales de energía que caracterizan el tipo de daño que sufre la probeta en función de la energía incidente, E_i, la energía de delaminación, E_D, y la energía de rotura de fibras, E_{RF}:

a) Si $E_i < E_D$ no hay degradación ya que el primer modo de fallo es el de delaminación.
b) Si $E_D < E_i < E_{RF}$ se producirá delaminación.
c) Si $E_i > E_{RF}$ se producirá delaminación y rotura de fibras, en ese orden.

Para garantizar las condiciones de impacto de baja velocidad descritos en el epígrafe 1, se ha elegido una masa de impactor de $2\ kg$ y velocidades de impacto inferiores a $50\ m/s$.

En la Fig.8 se puede ver la respuesta ante el impacto del laminado objeto de estudio, sometido a tres niveles de energía: $E_i = 1\,J <\ E_D$, $E_i = 2\,J >\ E_D$, $E_i = 6\,J >\ E_{RF}$.

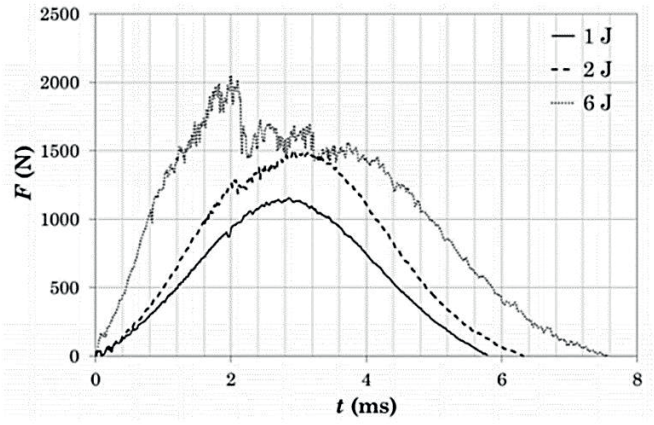


Figura 8. *Curvas fuerza-tiempo para diferentes energías de impacto.*[12]

Una vez degradada la probeta, es posible determinar su rigidez residual, K_{res}. Para su obtención se ha utilizado el método propuesto por Feraboli y Kedward [13]. Se realizan tres ensayos de impacto sobre la misma probeta: uno inicial por debajo del umbral de delaminación (por tanto sin daño), un segundo impacto, y objeto de análisis, que sí genere daño y un tercer impacto del mismo nivel energético que el inicial sobre la probeta ya dañada. Según Feraboli & Kedward [13] el tiempo de contacto en un impacto que no genera daño está relacionado con la rigidez de la probeta, K, y la masa del impactor, m_{imp}, Ec.(8):

$$t_c = \pi\sqrt{\frac{m_{imp}}{K}} \tag{8}$$

Midiendo los tiempos de contacto en impactos que no producen degradación, en la probeta virgen, t_{c0}, cuya rigidez es, K_0, y en la probeta degradada, t_{cD}, de rigidez, K_D, obtenemos la rigidez residual, K_{res}, Ec. (9).

$$K_{res} = \frac{K_D}{K_0} = \left(\frac{t_{c0}}{t_{cD}}\right)^2 \tag{9}$$

Así mismo se ha realizado una inspección no destructiva mediante ultrasonidos utilizando un equipo OmniScan MXU-M, obteniéndose el área delaminada.

4. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

El software empleado para la simulación del ensayo de impacto ha sido NASTRAN 2014 , en concreto el módulo explícito no lineal (SOL 700) [14].

4.1. Geometría

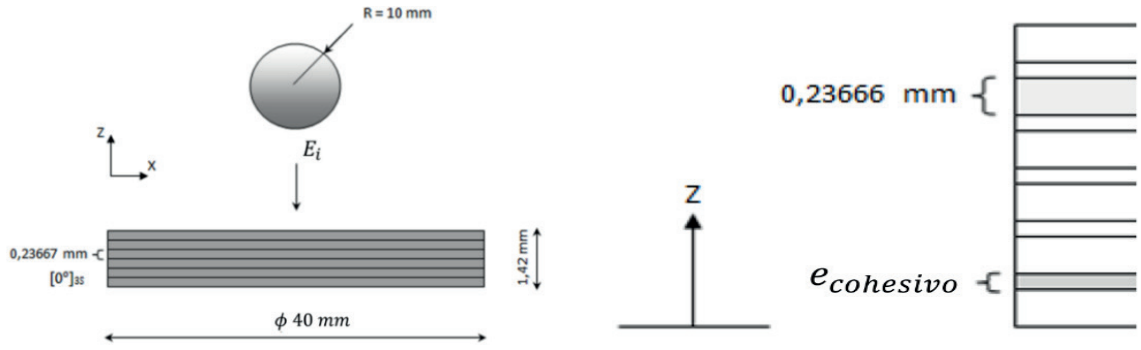
NASTRAN 2014, exige que los elementos cohesivos sean elementos sólidos por lo que se debe definir la geometría del problema en tres dimensiones. Así mismo, para poder simular la evolución de la delaminación, es necesario definir todos los posibles planos de delaminación, siendo necesario por tanto introducir una capa cohesiva entre cada dos láminas de compuesto (Fig. 9). Por ello se ha definido una geometría 3D de un disco de $40\ mm$ de diámetro y espesor e.

Como impactor, se ha definido una esfera de $20\ mm$ de diámetro, situándola a una distancia de $1{,}45 mm$ de la placa con objeto de reducir al máximo el tiempo de computación.

4.2. Mallado

Habitualmente, los materiales compuestos laminados se modelizan mediante elementos tipo Shell debido a los reducidos espesores que suelen presentar. Sin embargo, el uso de elementos cohesivos en NASTRAN 2014 exige la utilización de elementos sólidos. Entre los disponibles dentro de NASTRAN, se

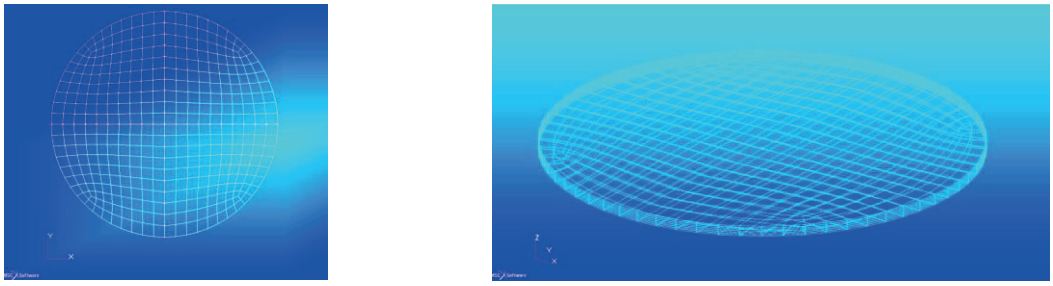
han utilizado los elementos hexaédricos de ocho nodos, los únicos que pueden emplearse dentro del método explícito.



(a) (b)

Figura 9. *Geometría definida. (a) Disco laminado e impactor. (b) Apilamiento de láminas y capas cohesivas.*

Para garantizar la doble simetría, se ha mallado un cuarto de la superficie circular y posteriormente se han creado sus correspondientes simetrías (Fig. 10a). El mallado, en la dirección del espesor, se ha definido con un elemento por lámina y uno en cada superficie cohesiva, Fig. 10b. Los elementos se han definido como homogéneos para ajustarse a la definición de un elemento por lámina.



(a) (b)

Figura 10. *Vistas de la discretización.*

El tamaño final de los elementos se ha elegido tras un estudio de sensibilidad, utilizando como criterio de convergencia la fuerza máxima de impacto, véase Fig. 11.

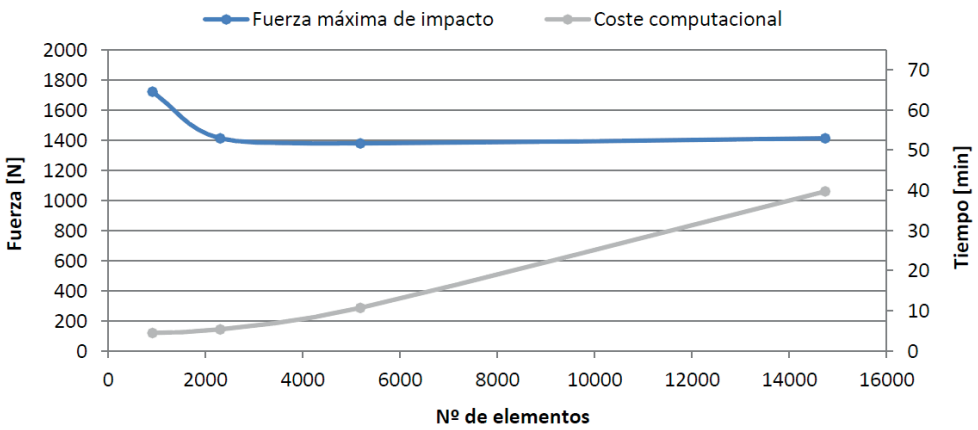


Figura 11. *Estudio de sensibilidad de la fuerza de impacto frente al tamaño de elemento.*

Analizando los resultados y teniendo en cuenta el coste computacional, se ha seleccionado como tamaño óptimo de elemento de la probeta $3\ mm$, dando lugar a un mallado de 2303 elementos.

El mallado del impactor se ha realizado con elementos hexaédricos con un tamaño de elementos en la zona de contacto de $2\ mm$, cumpliendo, de esta manera, la recomendación de que el tamaño de elemento que contacta sea inferior al del contactado [15].

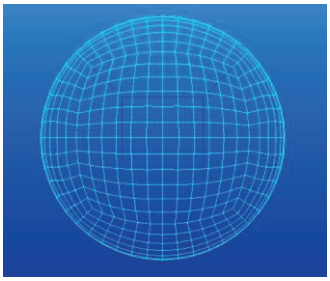


Figura 12. Mallado del impactor .

4.3. Propiedades de los materiales.

4.3.1. Laminado

Cada una de las láminas elementales es definida como material ortótropo 3D. A partir de los ensayos realizados, disponemos de las propiedades de la lámina elemental en el plano del laminado (*Tabla 3*). Sin embargo, es necesario introducir las propiedades fuera del plano. Estas propiedades han sido estimados mediante modelos micromecánicos [16], a partir de las propiedades elásticas de una lámina unidireccional con la misma fibra, resina y porcentaje de fibra en volumen, garantizando las restricciones de simetría de la matriz de flexibilidad [17]. En la *Tabla 4* pueden verse las propiedades estimadas que, junto con las descritas en la *Tabla 3*, definen todas las propiedades de la lámina utilizadas en la simulación.

Tabla 4. Propiedades elásticas de la lámina elemental fuera del plano xy.

Propiedad	Valor
Módulo de Elasticidad (Ez)	2,92 GPa
Coeficiente de Poisson (ν_{zx})	0,0178
Coeficiente de Poisson (ν_{yz})	0,35
Módulo de Cizalladura ($Exz = Eyz$)	1,216 GPa

4.3.2. *Zona cohesiva*

Entre los modelos cohesivos disponibles en la solución SOL700, se ha seleccionado el de Tvergaard y Hutchinson [18] debido a que este modelo se ajusta mejor a los casos en los que el denominado modo de miscibilidad, definido por la Ec. (10), es elevado.

$$\beta = \frac{\delta_{II}}{\delta_I} \tag{11}$$

Donde:

- β es el modo de miscibilidad
- δ_I y δ_{II} son, respectivamente, los desplazamientos relativos en modo I y modo II.

En el caso que nos ocupa, el factor de miscibilidad es $\beta = 2{,}01$ por lo que el proceso de delaminación se producirá en un modo combinado I-II, pero gobernado por el modo I.

La ley constitutiva cohesiva de Tvergaard y Hutchinson, Fig. 13, utiliza la medida adimensional λ de la separación entre las superficies del elemento cohesivo. Esta medida se calcula con la interacción entre los desplazamientos relativos de los planos en la dirección normal (δ_3, modo I) y en las direcciones tangenciales (δ_1, δ_2, modo II), Ec. (11):

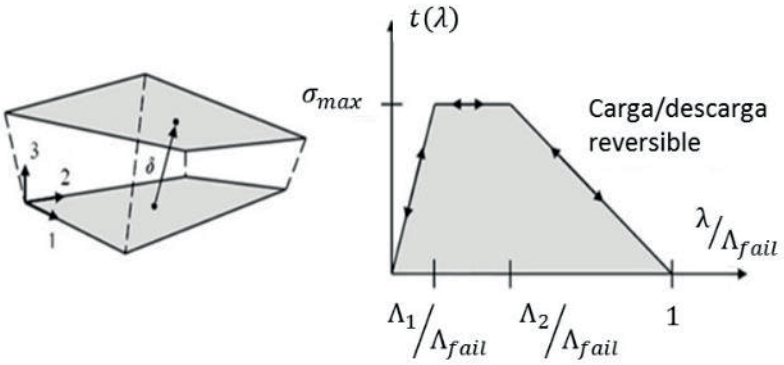


Figura 13. *Desplazamiento relativo y ley constitutiva tracción-separación del material cohesivo* [19]**.**

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\delta_1}{TLS}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2}{TLS}\right)^2 + \left(\frac{\langle\delta_3\rangle}{NLS}\right)^2} \tag{11}$$

donde:

- TLS y NLS corresponden a los máximos desplazamientos relativos en dirección tangencial (modo II) y normal (modo I) respectivamente.
- $\langle\delta_3\rangle$ incluye los paréntesis de Mc-Cauley para distinguir los casos de tracción $\delta_3 \geq 0$ y compresión $\delta_3 < 0$.

Para el cálculo de la tensión en función de dicho parámetro adimensional se siguen las Ecs. (12):

$$\left.\begin{aligned} t(\lambda) &= \sigma_{max}\frac{\lambda}{\Lambda_1/\Lambda_{fail}} && \text{si} \quad \lambda < \Lambda_1/\Lambda_{fail} \\ t(\lambda) &= \sigma_{max} && \text{si } \Lambda_1/\Lambda_{fail} < \lambda < \Lambda_2/\Lambda_{fail} \\ t(\lambda) &= \sigma_{max}\frac{1-\lambda}{1-\Lambda_2/\Lambda_{fail}} && \text{si } \Lambda_2/\Lambda_{fail} < \lambda < 1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Por tanto, los parámetros a definir serán:

- σ_{max} tensión máxima. Este parámetro se elegirá en función del modo de fractura dominante, en nuestro caso, el modo I.
- TLS y NLS.

- $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_{fail}$. Distancias adimensionales correspondientes a la σ_{max} , al inicio de la degradación y al fallo final respectivamente.

Para establecer el valor de NLS (modo I) y TLS (modo II), se han utilizado las tasas de liberación de energía en modo I y modo II respectivamente.

En el presente estudio se ha utilizado una ley constitutiva del material cohesivo bilineal, $\Lambda_1 = \Lambda_2$, y los desplazamientos de fallo, δ_{iF}, serán los que recoge la Ec. (13).

$$\left.\begin{aligned} \delta_{3F} &= NLS = \frac{2.G_{IC}}{T} \\ \delta_{1F} &= \delta_{2F} = TLS = \frac{2.G_{IIC}}{S} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Donde:

- Los subíndices 1, 2 y 3; representan las direcciones tangenciales y normal respectivamente. Véase Fig. 13.
- T es la tensión última en modo I.
- S la tensión última para modo II.
- G_{IC} y G_{IIC} son las tasas de liberación de energía críticas en modo I y II respectivamente.

Como valores de tensión máxima correspondientes a los modos I y II se han establecido, respectivamente, la resistencia a tracción ($T = 41{,}6MPa$) y la resistencia a cizalladura ($S = 83{,}1\ MPa$) de la resina empleada. Utilizando las Ecs. (13) y los datos de tensión máxima y energías críticas (Tablas 3 y 4) se obtienen los valores siguientes indicados en Ec. 14.

$$\left.\begin{aligned} \delta_{IF} = \delta_{3F} = NLS = \frac{2.G_{IC}}{T} &= \frac{2{,}0{,}496\ N/mm}{41{,}6\ MPa} = 2{,}385.10^{-2}mm \\ \delta_{IIF} = \delta_{1F} = \delta_{2F} = TLS = \frac{2.G_{IIC}}{S} &= \frac{2.2\ N/mm}{83{,}1\ MPa} = 4{,}813.10^{-2}mm \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Para el cálculo del desplazamiento crítico, en la ley constitutiva, es necesario definir la rigidez del elemento cohesivo. Con objeto de no modificar sustancialmente la rigidez a lo largo del espesor de la probeta, es necesaria una rigidez mínima del elemento cohesivo en dicha dirección. Turón [20] propone, para el caso de utilizar superficies cohesivas, rigideces cohesivas, K_{cohe}, del orden de $10^6 N/mm^3$. Por otro lado, Alfano y Crisfield [21] han demostrado que la variación de este parámetro no afecta notablemente los resultados y sin embargo, su disminución mejora notablemente la convergencia numérica. Por ello, en este trabajo se ha optado por el valor de $763.000\ N/mm^3$, propuesto por Merillo et al [22] para laminados de carbono-epoxi. Mediante la Ec. 15 obtenemos el desplazamiento crítico.

$$\delta_c = \frac{T}{K_{cohe}} = \frac{41{,}6\ MPa}{763.000\ MPa/mm} = 5{,}4522.10^{-5}mm \quad (15)$$

Los valores Λ_1, Λ_2 serán los reflejados en la Ec. (16).

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{\delta_C}{\delta_F} = 2{,}28.10^{-3} \quad (16)$$

El espesor utilizado para los elementos cohesivos ha sido de $0{,}01mm$.

4.3.3. Impactor

En el caso del impactor, al tratarse de acero, se ha modelizado como material isótropo. Teniendo en cuenta que se ha modelizado como una esfera de $20\ mm$ de diámetro y que la masa total empleada durante el ensayo es de $2\ kg$, se ha definido una densidad acorde con estos datos. En la *Tabla 5* se pueden ver las propiedades introducidas.

Tabla 5. Propiedades del impactor.

Propiedad	Valor
Módulo de Elasticidad (E)	206,7 GPa
Coeficiente de Poisson (ν)	0,3
Módulo de Cizalladura (G)	79,5 GPa
Densidad (ρ)	4,77.10^5 kg/m^3

4.4. Condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno impuestas han sido:

a) Desplazamientos.
   Considerando que el pisador de la máquina provoca el empotramiento del disco, se han impedido los desplazamientos y rotaciones en todo el contorno de la probeta modelada.
b) Velocidad inicial.
   Se han simulado dos condiciones de impacto, una por debajo del umbral de delaminación: $E_i = 1J$, y otra superior a dicho umbral, e inferior al de rotura de fibras: $E_i = 2J$.
   Teniendo en cuenta la masa del impactor y la distancia inicial del impactor a la probeta ($1{,}45\ mm$ para reducir el tiempo de computación), se han obtenido como velocidades iniciales de impacto $v_0 = 0{,}966\ m/s$ y $v_0 = 1{,}404\ m/s$, respectivamente, para las citadas energías.
c) Fuerza inercial.
   Se ha introducido, en la dirección del impacto, la aceleración de la gravedad $g = -9{,}807\ m/s^2$.
d) Condiciones de contacto.
   Se han definido el contacto entre el impactor y la probeta, así como el posible contacto entre láminas al desaparecer los elementos cohesivos durante la delaminación.

4.5. Parámetros de integración temporal.

El método de integración temporal utilizado ha sido el explícito no lineal. NASTRAN, en función del tamaño mínimo de elemento, determina el paso de tiempo de manera que se cumpla la condición de Courant, Ec. (1).

La utilización de elementos de integración reducida, con un único punto de integración en el centro del elemento, tal y como ocurre en los hexaedros de bajo orden, hace que el tiempo de computación disminuya. Sin embargo, estos elementos pueden provocar el fenómeno conocido como *hourglassing* que se produce Como consecuencia de que, con un único punto de integración en el centro del elemento, existirán dos modos de deformación que no presentan rigidez. Modos denominados de energía cero o de hourglass. Estos modos de deformación, de aparecer, pueden propagarse por todo el mallado reduciendo la exactitud del cálculo, pudiendo, incluso, causar un error de análisis al hacer que alguna dimensión de elemento sea nula [14].

Únicamente es necesario controlar el hourglassing en los casos en los que dicha energía sea superior al 10% de la energía interna del modelo [14]. Es por tanto necesario ir evaluando la energía de hourglassing durante el cálculo para asegurarse de que no se rebasa este límite. En nuestro caso, se ha evaluado dicha energía cada 50 pasos de cálculo, manteniéndose la energía de hourglassing inferior al $10\ \%$ de la energía interna del modelo.

Finalmente se ha definido un tiempo de análisis de $0{,}006\ s$ y 100 pasos de cálculo para los que se van a almacenar los resultados.

5. CORRELACION NUMÉRICO EXPERIMENTAL

La correlación numérico-experimental se ha llevado a cabo comparando la fuerza máxima, F_{max}, el tiempo de contacto, t_c , el área delaminada, A, y la rigidez residual.

Se han realizado dos ensayos, el primero con un nivel de energía de impacto $E_i = 1J$, que no induce daño en la probeta, y el segundo con una $E_i = 2J$, que es superior a la energía que provoca delaminación E_D, e inferior a la energía que provoca rotura de fibras E_{RF}.

Finalmente, para determinar la resistencia residual, se vuelve a someter a la probeta delaminada a un impacto que no provoca degradación, $E_i = 1J$.

5.1. Impacto de $E_i = 1J$.

La Fig. 14 muestra la curva fuerza-tiempo obtenida experimentalmente y mediante el modelo numérico desarrollado. Realizando un análisis de los resultados, puede observarse que la forma que sigue la evolución de la fuerza de impacto con respecto al tiempo es simétrica, lo que muestra la falta de daño inducido en la probeta. La diferencia entre las fuerzas máximas es de un $23\ \%$ y del tiempo de contacto de $5{,}9\%$, véase *Tabla 6*.

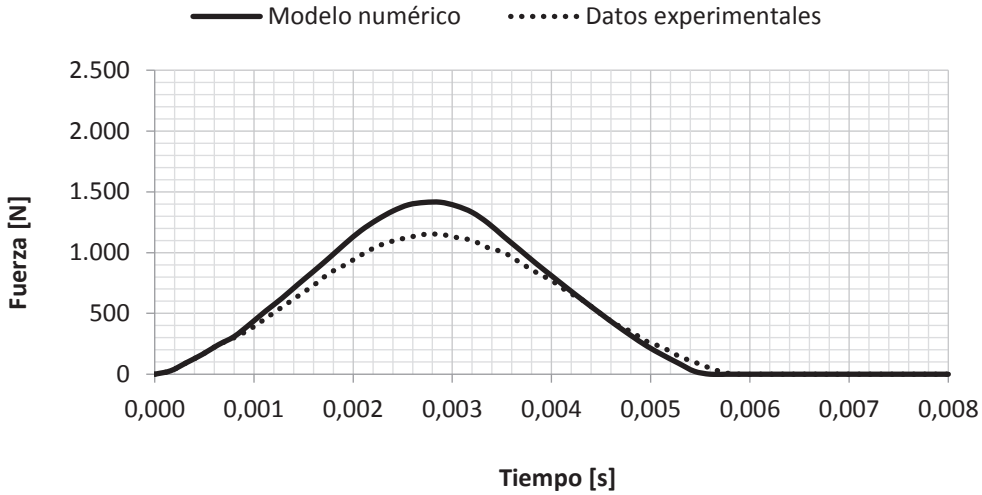


Figura 14. *Correlación numérico-experimental para un ensayo de impacto de* $1J$.

Tabla 6. Correlación numérico-experimental $E_i = 1J$.

Parámetro	Numérico	Experimental	Error (%)
Fuerza máxima (N)	1.414,2	1.150	23
Tiempo de contacto (s)	0,00544	0,00576	5,9

5.2. Impacto de $E_i = 2J$.

Tal y como se puede observar en la Fig. 15, la curva fuerza-tiempo no es simétrica, lo que indica que el impacto ha provocado delaminación en la parte central de la probeta. Es posible visualizar la delaminación graficando los elementos cohesivos de todos los planos que han fallado, Fig. 16.

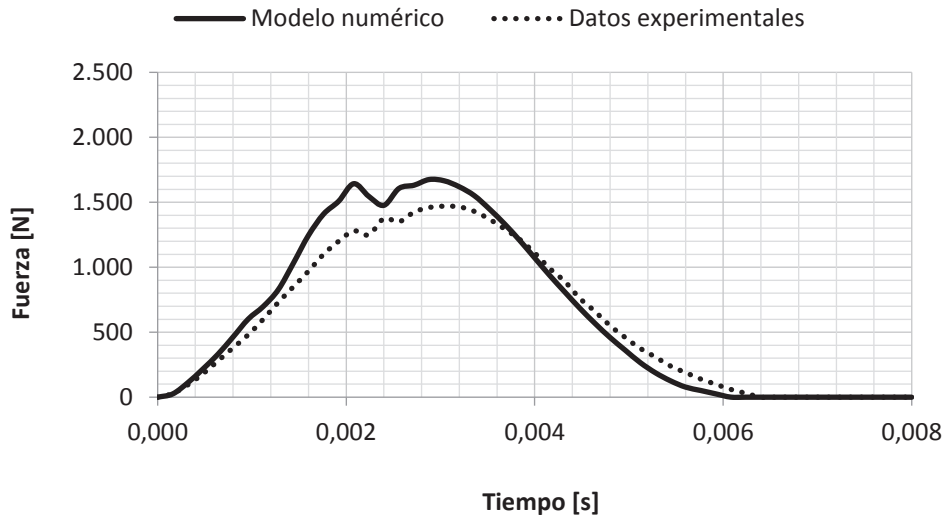


Figura 15. *Correlación numérico-experimental para un ensayo de impacto de* $2J$.

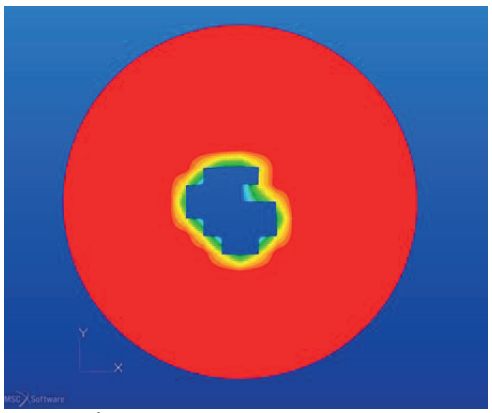


Figura 16. *Área delaminada para un impacto de 2J.*

La *Tabla 7* muestra los resultados obtenidos. El error con respecto a la fuerza máxima es de un $11{,}8\ \%$, el error en el tiempo de contacto es de un $2{,}6\ \%$ y finalmente el error en el área delaminada varía mucho, $20\ -\ 80\ \%$, dada la gran dispersión de los resultados experimentales.

Tabla 7. Correlación numérico-experimental $E_i = 2J$.

Parámetro	Numérico	Experimental	Error (%)
Fuerza máxima (N)	1.643,11	1.470	11,8
Tiempo de contacto (s)	0,00608	0,00624	2,6
Área delaminada (mm²)	90	50 - 75	20-80%

Una vez simulado el impacto con $E_i = 2J$ los elementos cohesivos degradados son eliminados del modelo y se vuelve a simular un impacto con $E_i = 1J$. En la Fig. 17 se pueden ver superpuestas las tres curvas fuerza tiempo.

A partir de los tiempos de contacto calculados en un impacto sin degradación, t_{cO}, y en otro con degradación, t_{cD}, Fig. 17, y empleando la Ec. (9); se ha obtenido la rigidez residual, K_D/K_0, tanto a partir de los resultados de la simulación numérica, como de los experimentales. En la *Tabla 8* se puede ver que el error es de un $1{,}7\ \%$.

6. CONCLUSIONES

Se ha realizado la correlación numérico-experimental del daño por delaminación inducido por un impacto transversal de baja velocidad en materiales compuestos laminados en forma de tejido de fibra de carbono y matriz epoxi. Para ello se han fabricado placas laminadas mediante infusión de resina, que posteriormente han sido caracterizadas y sometidas a diferentes impactos de caída de dardo.

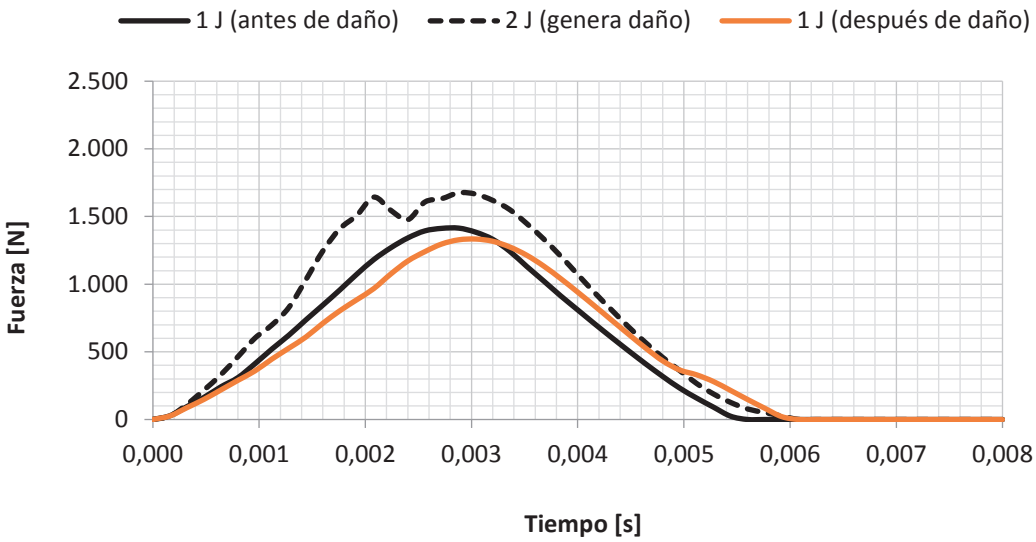


Figura 17.*Curvas Fuerza-tiempo obtenidas mediante FEM sobre probeta virgen y dañada*

Tabla 8. Rigidez residual para un impacto de $E_i = 2J$.

Parámetro	Numérico	Experimental	Error (%)
Rigidez residual (K_D/K_0)	0,8444	0,83 - 0,95	1,7

La simulación numérica se ha realizado mediante el método de elementos finitos utilizando integración numérica explícita (NASTRAN, SOL700). La delaminación ha sido modelizada mediante el método CZM (Cohesive Zone Model). Este método permite modelizar el inicio y propagación de la degradación por delaminación sin necesidad de predecir el lugar donde se va a iniciar. La ley constitutiva del material cohesivo utilizada ha sido la de Tvergaard y Hutchinson [18]. En este trabajo se han definido los parámetros a utilizar en dicha ley constitutiva basados en datos experimentales de fractura del laminado empleado y de propiedades mecánicas de la resina utilizada.

Los resultados muestran una buena correlación entre los resultados numéricos y experimentales. Los errores obtenidos en los casos analizados son:

- Fuerza máxima: $11.8 \div 23$ %.
- Tiempo de contacto: $2{,}6 \div 5{,}9$ %.
- Rigidez residual: $1{,}7$ %.

La buena correlación a la hora de evaluar la rigidez residual post impacto resulta de especial interés ya que permite al diseñador evaluar el nivel de integridad que presenta una estructura que ha sufrido un impacto, generando daño.

REFERENCIAS

[1] Chester, R., Clark, G. (1992). Modelling of Impact Damage Features in Graphite/Epoxy Laminates. *Damage Detection in Composite Materials*, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959: ASTM International, pp. 200-200–13.

[2] Jensen, H.M., Sheinman, I. (2001). Straight-sided, buckling-driven delamination of thin films at high stress levels. *Int. J. Fract.*, vol. 110, no. 4, pp. 371–385.

[3] Goicolea, J.M. Estructuras sometidas a impacto. E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid.

[4] Zukas, J.A. (1993). Some common problems in the numerical modeling of impact phenomena. *Comput. Syst. Eng.*, vol. 4, no. 1, pp. 43–58.

[5] Olsson, R. (2000). Mass criterion for wave controlled impact response of composite plates. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, vol. 31, no. 8, pp. 879–887.

[6] Sankar, B.V. (1996). Low-Velocity Impact Response and Damage in Composite Materials. *Key Eng. Mater.*, vol. 120–121, pp. 549–582.

[7] Swanson, S.R. (1992). Limits of quasi-static solutions in impact of composite structures. *Compos. Eng.*, vol. 2, no. 4, pp. 261–267.

[8] Mollón, V., Bonhomme, J., Elmarakbi, A.M., Argüelles, A., Viña, J. (2012). Finite element modelling of mode I delamination specimens by means of implicit and explicit solvers. *Polym. Test.*, vol. 31, no. 3, pp. 404–410.

[9] MSC Software Company (2014). MARC Volume A: Theory and User information.

[10] HEXCEL (2008). HexForce and HexPly selector guide.

[11] MATEX (2014). [Online]. Available: www.matexsa.com.mx.

[12] Zabala, H. (2014). Influencia de la velocidad de impacto en la delaminación generada por impactos transversales de baja velocidad en tejidos carbono-epoxi. Dependencia del comportamiento interlaminar del composite a la velocidad de propagación de grieta (PhD. thesis). Universidad de Mondragón.

[13] Feraboli, P., Kedward, K.T. (2006). A new composite structure impact performance assessment program. *Compos. Sci. Technol.*, vol. 66, no. 10, pp. 1336–1347.

[14] *MSC NASTRAN 2014. Explicit Nonlinear (SOL 700) User's Guide*. MSC Software Corporation, 2014.

[15] MSC Software Corporation (2014). *MSC NASTRAN 2014. Nonlinear User's Guide*.

[16] *Notice d'utilisation des logiciels (MIC-MAC, GENLAM, LAMRANK, MATFIX)*. THINK COMPOSITES.

[17] Barbero, E.J. (2008). *Finite element analysis of composite materials*. New York: CRC Press.

[18] Tvergaard, V., Hutchinson, J.W. (1992). The relation between crack growth resistance and

fracture process parameters in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 40, no. 6, pp. 1377–1397.

[19] MSC Software Corporation (2014).*MSC NASTRAN 2014. Quick Reference Guide.*

[20] Turon, A., Dávila, C.G., Camanho, P.P., Costa, J. (2007). An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 74, no. 10, pp. 1665–1682.

[21] Alfano, G., Crisfield, M.A. (2001). Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 50, no. 7, pp. 1701–1736.

[22] Merillo, J.C., Cañibaño, E., Alanís, S.E., Maestro, C. (2014). Predicción de daños interlaminares e interlaminares en laminados compuestos mediante la utilización de modelos de daño. *XX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica.* pp. 1–8.

Simplified model for the behavior of human impact against glass plates

Alonso, Jesús[1]; Parra, José Antonio[2]; Huerta, M. Consuelo[3]

ABSTRACT

Nowadays as safety assessment procedure against soft body impacts, the behaviour of the glass is usually evaluated by an impact test according to the European standard EN 12600 [1]. A 2 DOF model is proposed to estimate time histories and maximum values of the pendulum acceleration and strain in the middle of the plate. It includes all the fundamental elements to reproduce the behaviour of the glass panes considering different designs. The model tries to solve the most typical problems of the simplified models as the glass nonlinear behaviour, the variation of the dimensions and the extrapolation of the methods to other boundary conditions.

Therefore the proposed 2 DOF simplified model is an easy tool for dimensioning and design of safety glass under human impact. It allows to know the behaviour of the glass in different configurations simulating a complex transient phenomena through an accurate and simplified way.

Keywords: Safety glass, soft impact, simplified model, design method and body impact.

1. INTRODUCTION

1.1. Study of art

Glass is one of the most used materials in the world of construction. The glass is so used thanks to its aesthetic features and its high functionality. Most of skyscrapers and innovative buildings have glass as one of its main materials in facades. But apart from its use in facades, glass is used in many other structures, handrails, walls, doors, windows… Therefore, it is a material widely used in different situations but due to its brittle nature it can create hazard if it were to break, taking a special importance when only glass is the element preventing from fallings.

In this moment, there is no standard design for glass panes under human impact. For approval a glass only is necessary to check the safety requirement of the European standard EN 12600 [1]. It uses an impact test of a pendulum on a glass (Fig. 1), and tries to classify it according to the maximum pendulum height and the type of the glass rupture. In the Standard test only thickness may be considered, dimensions, boundary conditions and impact height of the glass are fixed. But in operational conditions all of these parameters may change and the behaviour of the glass can be significantly different. For example, FEM results obtained for an impact from 450 mm on the middle of a rectangular plates with 10 mm of thickness and similar dimensions to the glasses of European standard show a difference close

[1] *Department Mechanical Eng. ETSII UPM (SPAIN). j.alonso@alumnos.upm.es (Corresponding author)*
[2] *Department Mechanical Eng. ETSII UPM (SPAIN). jose.parra.hidalgo@alumnos.upm.es*
[3] *Department Mechanical Eng. ETSII UPM (SPAIN). mariaconsuelo.huerta@upm.es*

to 50% in stress when the plate has double size. This fact shows that the conclusions obtained in the standard test cannot be transferred to any other installed glass.

Figure 1. *Pendulum impact test, EN 12600.*

In addition to the simplified models, other alternative techniques can be used to set a glass as safe as in situ tests and complex numerical solutions. "In situ" experimental test can be used to obtain the strength of the glass, but this process is time consuming and expensive. In addition impact glass results have a great dispersion due to glass rupture stress, several impacts would be necessary to characterize the glass integrity.

Numerical solutions methods are used in plate elements [2] with different aims, the most common ones in impact problems are based on finite elements. Full transient analysis simulations have been used [8] to reproduce the impact test by other authors. This option provides accurate results, when the model is updated, but the main problem is the definition of the model. A complex finite element model must be used including the correct model of the boundary conditions which are not available to all glass designers [3].

Therefore simplified models seem a useful method to study the impact on the glass with design proposes and in simple way. Three simplified models have been reviewed, two for human impact and one more for hard and soft impact.

In this type of phenomena, systems with concentrated mass and springs are used [4]. The three studies are based on 2 DOF models, one degree of freedom for the impact head and the other one for the plate considering linear behaviour. After dynamic behaviour is computed, additional hypothesis are assumed for stress calculation. Simplifications with constant square load of approximately 20±2 cm of side are supposed. The mass and the stiffness representative of the pendulum are 50 kg and 350-400 kN/m. Mass and stiffness of the pane are parameters which change depending on the model proposed.

M. Fröling [5] has developed a reduced model by means of modal reduction techniques similar as the Rayleigh-Ritz method, the model estimates the stress on the plate but it has problems with larges panes (higher than 2x2 m^2).

Schneider [6] introduces several assumptions, the spring constant of the glass is obtained by a linear sine series, the effective mass of the glass plate is the generalized mass for a mode shape and the shape of the dynamic deformation of the glass plate corresponds with the static one.

The model is completed with a simplified procedure [7] to obtain a static equivalent load with design proposes. The model is compared with experimental data presenting maximum errors around 60% for the maximum stress value respect to the finite element model presented by the same author and which has been previously calibrated in several test [6].

Y. Yang [8] works with a 2 DOF model to estimate the response of a plate subject to impact by solid object, hard and soft impact. To incorporate the effect of the large displacement and the contribution of the higher modes of vibration two parameters are proposed. The values of these parameters are obtained minimizing the differences between the finite element and the simplified models. The values of stiffness proposed by this model in the case of glasses, show differences around a 20% with the modal point stiffness of the first mode of vibration.

1.2. Objectives

In this paper a 2 DOF model is proposed to estimate time histories and maximum values of the pendulum acceleration and strain in the middle of glass panes for impacts applied on the same point. The model includes all the elements to reproduce the behaviour in the glass considering alternative designs. The results are compared with test for different pendulum height, thickness, and boundary conditions.

Nonlinear behaviour of the glass plates, the variation of the dimensions and the extrapolation of the methods to other boundary conditions are the main problems when simulations try to reproduce the impact on the glass. All of this effects are considered by the proposed model achieving great results in the simulated cases.

Impact test and the simplified model are compared in this paper, showing that the proposed method has enough accuracy to be considered as a useful dimensioning tool. To know the real behaviour of the glass, data from an extensive test campaign [9] has been used. Used tests follow the methodology of the European standard EN 12600 [1] where a pendulum of 50 kg impacts on the centre of the pane (836 mm x 1938 mm) supported on its four sides (4S). In addition of the boundary conditions proposed by the standard and glasses supported in two sides (2S) were tested. With these three different boundary conditions, 17 specimens were struck taking into account the main design variables: boundary conditions, thickness (between 5 mm and 10 mm), in monolithic and layered plates. For each specimen several impacts were applied, the lowest initial height tested was 25 mm, being increased successively up to a maximum value of 1200 mm, finally a total of 240 impacts were carried out.

2. SIMPLIFIED MODEL

2.1. Dynamic Behaviour 2DOF

The proposed 2DOF model calculates the dynamic behaviour of the plate during the impact of the pendulum: the impact force on the glass pane is estimated with the computed pendulum acceleration. After, using assumptions for the boundary conditions and the large displacement behaviour, the strains in the glass can be estimated.

The dynamic model represented in Fig. 2 is valid during the contact stage. The degree of freedom of the glass corresponds to the first mode shape, and the other one is the pendulum mass (Mp) and stiffness (Kp). Mass and stiffness of the glass plate depend on the impact location.

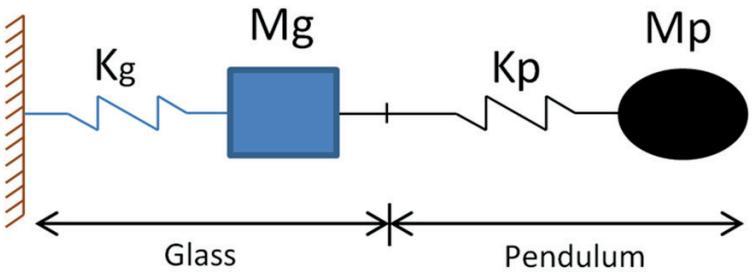


Figure 2. *Simplified model of 2 degrees of freedom.*

The values for the pendulum characteristics correspond with the nominal ones proposed by the standard, Kp=350 kN/m and Mp=50 kg. In this work all the impacts are located on the centre of the plate, and the behaviour is represented by the equivalent stiffness of the first mode shape (point modal stiffness, Eq. (1)) and the apparent mass of the first mode in the same point, Eq. (2).

$$K_g = \frac{w_n^2}{(\phi_c \cdot \phi_c)} \tag{1}$$

$$M_g = \frac{K_g}{w_n^2} \tag{2}$$

Where w_n (rad/s) is the natural frequency and ϕ_c is the modal component on the middle of the plate normalized to $\emptyset^T M \emptyset = I$.

A linear transient analysis is performed with the initial velocity of the pendulum in the beginning of the contact stage between pendulum and glass. Modal superposition is used for the resolution neglecting damping effect. The force applied to the plate is estimated with the acceleration of the pendulum multiplied by its mass, Eq. (3).

$$(F_p = M_p \cdot a_p) \tag{3}$$

Depending on the boundary condition of the tested glasses, it may present geometrical nonlinear behaviour when they are impacted from medium or high energy levels. This is the case for one of the most usual boundary condition, four sides supported (4S). To take into account this effect, the corresponding stiffness is modified according to the maximum force during the phenomena.

Usually simplified models do not consider nonlinear behaviour due to the complexity, but with the previous hypothesis a first approach can be done defining for each boundary condition the criteria for a change in the glass stiffness. Following the analytical approach of static nonlinear behaviour of square plates a simplified curve is defined in three sections. The apparent stiffness of the glass is obtained multiplying the modal point stiffness (K_g) by a factor α_i (according the simplified stiffening curve of Fig. 3). Sections of the simplified curve are limited by F_1 and F_2, that correspond with the forces applied on the middle of the plate producing a linear displacement of 1 and 3 times the thickness of the glass. For each impact, α_i is selected depending on the maximum force.

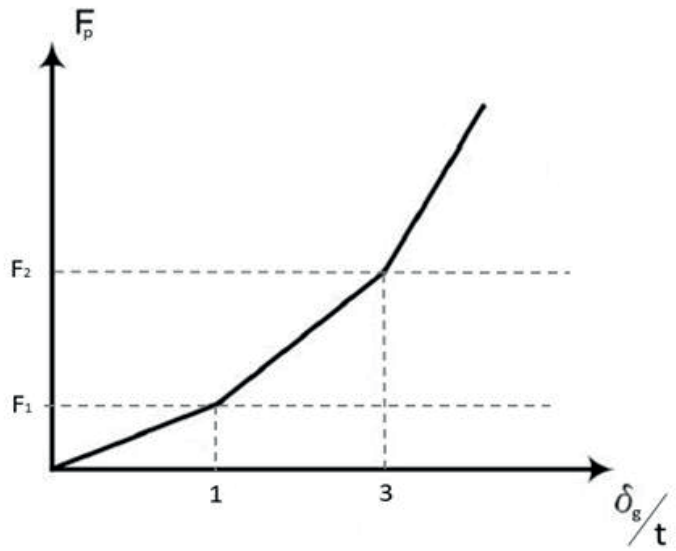


Figure 3. *Simplified stiffening curve.*

2.2. Strain calculation

For design proposes, the strain level in the plate is an important parameter that can be estimate with the simplified model. In the proposed method, strains are estimated on the middle of the glass plate during all contact stage through an incremental method (Eq. (4)).

$$(\varepsilon_{Total}^{NL}(t) = \varepsilon^{NL}(t - \Delta t) + \Delta\varepsilon^{NL}(t) \tag{4}$$

Strain increment is obtained with the increment of nonlinear strains per increment of force. At this point, this procedure is supported by the time history of the dynamic behaviour previously calculated. Force increment was obtained by the dynamic simplified model and it is used to obtain the strain increment (Eq. (5)).

$$\Delta\varepsilon^{NL}(t) = \Delta\epsilon_{unit}^{NL}(t) \cdot \Delta F(t) = \Delta\epsilon_{unit}^{NL}(t) \cdot m_p \cdot \Delta\ddot{x}_p(t) \tag{5}$$

In the case of the strains, the nonlinear effect is very important and it is necessary to follow the static nonlinear behaviour of the plate modifying the increment of the strains according to the force on each instant Eq. (6).

To consider that effect, the parameter α^* may be used with similar values that the previous dynamic stiffening coefficient α_i as a good approximation. But other values in function of the size of the plate and the boundary conditions can achieve more accuracy results. This method allows to follow the adequate simplify stiffening curve with three stages and obtain the nonlinear micro strain by means of the increment of linear strains.

$$\Delta\epsilon_{unit}^{NL} = \frac{\Delta\epsilon_{unit}^{L}}{\alpha^*(F(t))} \tag{6}$$

The expression used to obtain the linear strain is different depending on the boundary condition of the plate. For 4S plates, a procedure based on the model of a plate under a little concentric load on the middle of the pane [16] is proposed (Eq. (7)). Where E is the Elastic Modulus, t is the thickness of the plate, ν is the poisson coefficient, b is the width of the glass plate, r_0 is radius of load application and β is the dimension factor tabulated in [10].

$$\Delta\varepsilon_{unit}^{L} = \frac{3}{2\pi E t^2}\left[(1+\nu)Ln\frac{2b}{\pi r_0} + \beta\right] \tag{7}$$

All the parameters of the last expression except the radius of application load are defined by the material, the geometry and the boundary conditions of the plate. The effect of the contact area is very important because slightly increments of area may change the strains significantly. Due to the

importance of this parameter, the simplified model may work with a variable contact area depending of the energy of impact considered on the initial velocity of the pendulum v_i. This value has been adjusted to the area of the experimental tests [9]. The half contact area between pendulum and glass, due to the symmetry, was registered in all the tested impacts and the shape was parameterized (see Fig. 4) with three variables H1, H2 and L. The area and the value of the parameters are reproducible with the regressions curves showed in Eq. (8), Eq. (9) and Eq. (10), where the values are calculated in function of the initial velocity.

$$L = 15.92v_i + 39.824 \tag{8}$$

$$H_1 = 6.7008v_i + 18.33 \tag{9}$$

$$H_2 = 3.6346v_i + 17.362 \tag{10}$$

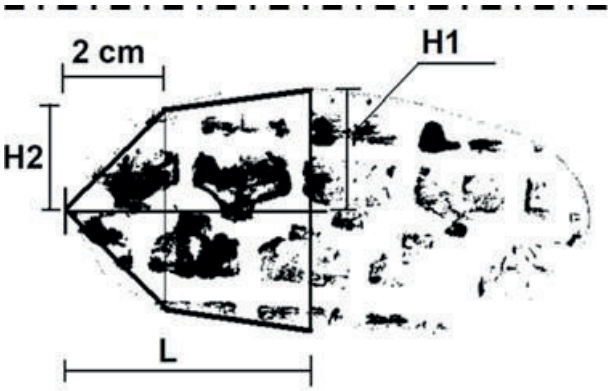


Figure 4. *Simplified stiffening curve.*

When the plate is supported on two opposite sides (2S), the behaviour of the pane glass may be obtained by beam theory. The procedure is similar as plates (4S), but in this case the unitary strain increment is calculated using the expression of the linear bending strains, Eq. (11).

$$\Delta\varepsilon_{unit}^{L} = \frac{l \cdot t}{4 \cdot I \cdot E} \tag{11}$$

3. MODEL RESULTS

3.1. Study cases

A total of 21 plates divide in 7 different specimens were tested with multiplies impacts from different heights as shown in *Table 1* with the updated values of elastic modulus (E), thickness (t), point modal Stiffness and Frequency obtained with modal test. The nomenclature used to identify the specimens is, T (tempered) or L (annealed), next the thickness of each sheet of glass (5, 10, 4-4 or 3-3 mm) and finally the boundary condition. The size of the glasses tested depends on the boundary conditions, 876x1938 mm for 4 side supported (4S) and 876x1200 mm for 2 sides supported (2S). Tested plates cover a huge range of plates, with thickness between 5 and 10 mm and Stiffness between 881 kN and 79 kN.

Table 1. Campaign summary.

Specimens (x3 plates)	Test Impacts (240)		Modal updated parameters			
	Nº Impacts	Different Heights	E (Gpa)	t (mm)	Modal Stiffness (kN/m)	Frequency (Hz)
T10-4S	54	9	72.9	9.8	807	35.22
T05-4S	41	15	69.5	4.38	79	20.24
T10-2S	12	4	73.2	9.47	573	31.58
L55-4S	51	14	70	10	881	36.04
L44-4S	17	8	72	7.94	342	30.48
L33-4S	37	13	72.6	6.39	157	25.03

3.2. Nominal Case

According to the standard [1], the reference glass to check the behaviour of the support frame structure is the tempered glass with 10 mm of thickness and supported in 4 sides (T10-4S). This glass was impacted from 450 mm and compared with the 2 DOF model to analyse the results of both procedures.

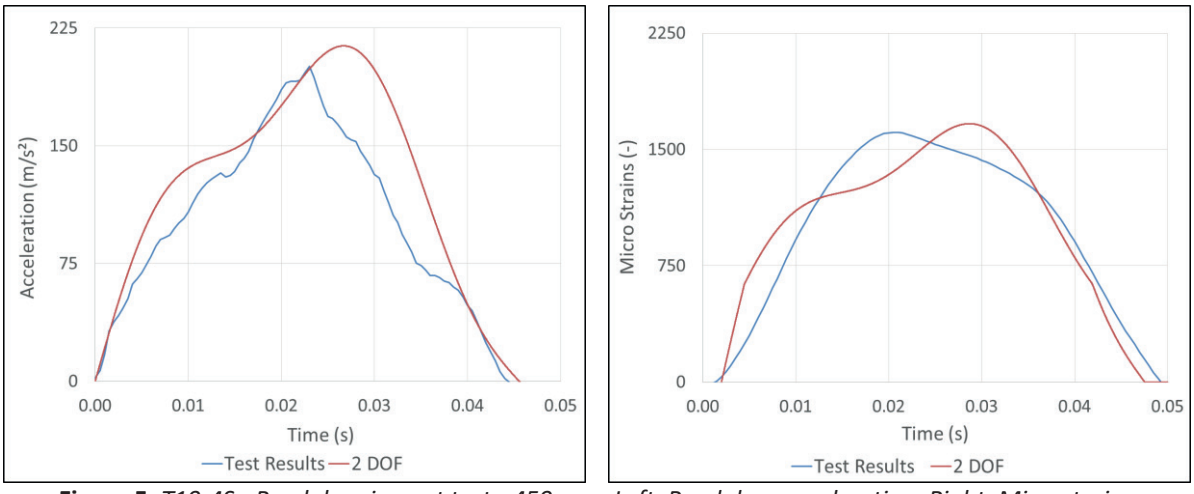


Figure 5. *T10-4S - Pendulum impact test - 450 mm; Left: Pendulum acceleration; Right: Microstrain.*

In the first instant of Fig. 5, the pendulum is stopped, until it impacts against the plate, with an initial velocity that can be calculated in function of the drop height. Pendulum acceleration values show contact between glass and pendulum during 50 ms approximately. During the contact stage, the contact area between the glass and the tires is changing with the time and it varies from 0 to its maximum value in 25 ms approximately but most of the time the value is near to its maximum. Despite the complexity, 2DOF pendulum acceleration show a similar time history during all the contact stage.

For the micro strain calculation, as can be see, there is a good approach between both time histories. Plate behaviour is well reproduced by 2 DOF simplified model additionally, the shape of the 2 GDL curve show a great approach in accordance with the recorded test results.

3.3. Other conditions

As previously commented, nonlinearities are one of the most complex effects in the simulation of the glass impacts. The accuracy of the simplified model in this point can be assessed through the comparison of the T05-4S. In Fig. 6, recorded pendulum acceleration is showed until the pendulum reaches its maximum height after the impact rebound. A good agreement between real data and the simplified model is obtained during the contact glass-tires therefore nonlinearities seem well reproduced by the simplified model.

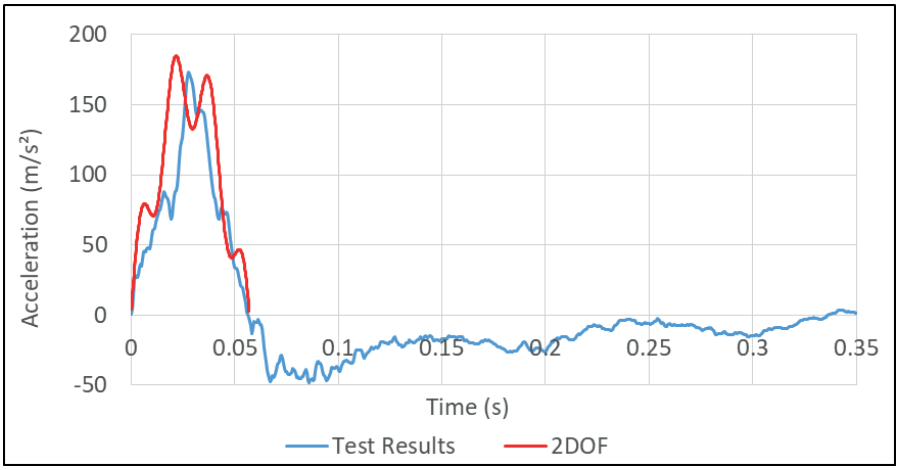


Figure 6. *Comparison between test data and 2DOF simplified model – T05-4S, impact height of 450 mm.*

The boundary conditions change the behaviour of the glass significantly due to the stiffness and frequency plate variation. For example, experimental tests can show that difference between 4S and other boundary conditions may be higher than the 50% for Micro-Strain values.

Fig. 7 shows the results obtained when T10-2S is impacted from 200 mm of height. This height is considered enough by other authors [7] to represent the impact energy in a typical human impact. As in the other analysed cases, simplified model simulates the impact behaviour obtaining similar values during all the contact.

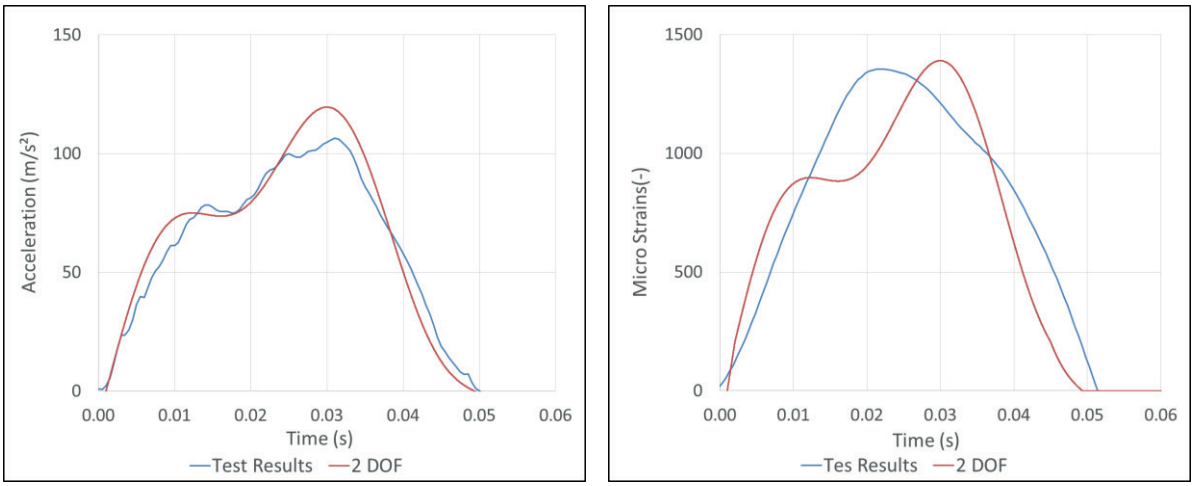


Figure 7. *T10-2S - Pendulum impact test - 200 mm; Left: Pendulum acceleration; Right: Microstrain.*

4. CONCLUSIONS

This paper presents a 2 DOF Simplified Model to represent the most important parameters in the soft body contact. The model allows the calculation of glass with different sizes, support conditions for human impact load. The proposed model does not only calculate maximum value, time histories are calculated too.

The easy adaptability to different boundary conditions is one of the main strengths of the 2 DOF simplified model. In addition, nonlinear behaviour and contact area effect are considered by the model. This fact allows errors lower than 20 % in strains between the simplified model and the experimental campaign developed. Therefore the results obtained with the simplified model show enough accuracy to consider it a great tool for design proposes.

Further research will focus on the laminated behaviour post-breakage and the characterization of the typical boundary conditions. In addition failure probability has to be introduced in the model in order to set the safety criteria in the impact.

REFERENCES

[1] CEN (2002) EN 12600: Glass in building – pendulum test – impact test method and classification for flat glass. CEN, Brussels, Belgium.

[2] Zhang, X. & Li, Wen L. (2009). Vibrations of rectangular plates with arbitrary non-uniform elastic edge restraints. Journal of Sound and Vibration 326 (2009) 221-234.

[3] Postigo, S. (2010). Estudio teórico experimental de impactos humanos contra vidrios de acristalamientos de edificación (unpublished PhD .thesis). Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

[4] Clough, R.W. & Penzien, J. (1993). Dynamic of Structures (McGraw-Hill, USA, 1993).

[5] Fröling, M., Persson, K. & Austrell, P.-E. (2013). A reduced model for glass structures subjected to dynamic impact loads. COST Action TU0905, Mid-Term Conference on Structural Glass – Belis, Louter & Mocibob (Eds).

[6] Schneider, J. & Wörner, J.-D. (2001). Impact Loading on Glass Panes by Soft Body Impact – Theoretical Analysis and Experimental Verification-. Glass Processing Days 18-21 June.

[7] Schneider, J. & Schula, S. (2010). Transient impact simulation and a simplified mechanical model for soft body impact on glass panes. Proc. of the Engineered Transparency Conference, Düsseldorf, 29-30 September.

[8] Yang, Y., LAM, N.T.K. & Zhang, L. (2012). Estimation of response of plate structure subject to low velocity impact by a solid object. International Journal of Structural Stability and Dynamics. Vol 12 No. 6.

[9] Pacios, A., Postigo, S. & Huerta, C. (2011). Relationship between characteristic parameters of impact test for safety glasses. Stahlbau Spezial/2011 Nr. GB_08.

[10] Warren C. Young. Roark. Formulas for stress and strain. (McGraw-Hill, USA, 1989)

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

Experimental study on shear critical RC beams strengthened with Fe-SMA strips

Ruiz Pinilla, Joaquín Guillermo[1]; Montoya Coronado, Luis Alberto[2];

Ribas González, Carlos[3]; Cladera Bohigas, Antoni[4].

RESUMEN

This paper shows the preliminary results of an experimental campaign regarding the increase of the shear strength on reinforced concrete beams strengthened by means of a low cost Iron-based shape memory alloy (Fe-SMA). This Fe-SMA strips are implemented as external stirrups which are previously pre-strained to 4%. After installation, the strips are heated up to 160 ^{o}C to induce its recovering shape properties to confine the concrete beam. The experimental campaign is focused on the characterization of the Fe-SMA strips and the practical application for retrofitting small scale beams without internal steel stirrups. The strengthened beams are able to avoid the typical brittle shear failure and demonstrate the promising performance of the proposed technology.

Keywords: Iron-based shape memory alloy, shear strengthening, reinforced concrete, experimental test, retrofitting.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente los proyectos estructurales se están enfocando en procesos de diseño basados en prestaciones para optimizar y controlar el comportamiento de los mecanismos de fallo de las estructuras. Este aspecto ha llevado a estudiar y controlar el comportamiento a flexión incrementando sobre todo la ductilidad seccional y orientándose en explotar toda la capacidad seccional del hormigón armado. Sin embargo, cuando nos enfrentamos al efecto del cortante, se puede constatar que los mecanismos no son dúctiles y por el contrario, este efecto reduce la capacidad de ductilidad seccional y global. Por esta razón, los refuerzos a cortante son muy a menudo necesarios en estructuras existentes, especialmente cuando la estructura puede ser sometida a acciones sísmicas de alta intensidad. Todos los componentes del efecto cortante que se involucran en el mecanismo de fallo siguen bajo rigurosos estudios e investigaciones para comprender todos estos aspectos que se deberían de tener en cuenta. Distintos modelos mecánicos han sido propuestos, en esta investigación se tomará como base el modelo propuesto por [1], "Compression Chord Capacity Model (CCCM)" para diseño del cortante para estructuras de hormigón. Este modelo es capaz de considerar la utilización de refuerzos externos a cortante e introducir el efecto de tensiones de recuperación inducido por el efecto de

[1] *Dpto. de Física. Universidad de las Islas Baleares (España). joaquin.ruiz@uib.es (Corresponding author)*
[2] *Dpto. de Física. Universidad de las Islas Baleares (España). luis.montoya@uib.es*
[3] *Dpto. de Física. Universidad de las Islas Baleares (España). carlos.ribas@uib.es*
[4] *Dpto. de Física. Universidad de las Islas Baleares (España). antoni.cladera@uib.es*

recuperación de la forma de las aleaciones con memoria de forma una vez ajustado alrededor de la viga y confinándola.

Actualmente, existen muchas propuestas para refuerzos a cortante con diferentes materiales como FRP [2], SMA [3] entre otros [4]. Sin embargo, la mayoría de estas tecnologías son de tipo pasivo, por lo que el refuerzo exterior sólo se activará ante incremento de daño en la viga reforzada. La mayoría de las aleaciones de SMA tiene un comportamiento muy dúctil, así como otros aspectos muy remarcables que siguen en fases de investigación para la aplicación en ingeniería civil como la capacidad de volver a una forma predefinida al calentar, el denominado efecto de memoria de forma (SME de sus siglas en inglés), la pseudoelasticidad, o capacidad de volver a deformaciones prácticamente nulas después de deformaciones no lineales del entorno del 6-8 %, y por otro lado la gran capacidad de disipar energía ante la aplicación de cargas cíclicas. El efecto SME presenta una aplicación singular cuando su recuperación de forma de la aleación es restringida, por lo que se pueden generar "tensiones de recuperación", las cuales puede ser usadas como una fuerza de pretensado [5]. Las SMAs han sido ya utilizadas como refuerzo interno a cortante a nivel de laboratorio, demostrando que pueden proporcionar una elevada ductilidad en roturas por cortante [6].

El material utilizado como elemento de refuerzo en la campaña experimental aquí descrita viene suministrado en forma de rollo de lámina, o fleje. Éste será utilizado como refuerzo externo a cortante en vigas de hormigón armado a pequeña escala. En este trabajo se demostrará el beneficio que proporciona la recuperación de forma del Fe-SMA al activarlo aumentado la temperatura hasta 160 ºC (temperatura que no produce daños en el hormigón). De esta manera se puede modificar el modo de fallo del elemento estructural de hormigón, pasando de tener fallo por cortante a fallo por flexión.

El material estudiado para aplicaciones enfocadas a refuerzo a cortante en este artículo refiere específicamente al Fe-SMA el cuál fue proporcionando por la empresa re-fer que lo comercializa actualmente. Esta aleación con memoria de forma de bajo coste tiene la tendencia a ser más competitivo para el uso del día a día de la construcción en comparación a otras aleaciones de SMA [7]. Aunque la súper-elasticidad no está presente en esta aleación de bajo coste, la ductilidad y la recuperación de forma persiste como bondad del material. La capacidad de recuperar forma es considerablemente baja en comparación con otras SMA (1% de recuperación de forma). No obstante, esa baja recuperación de forma del Fe-SMA sigue siendo suficiente para generar tensiones de pretensado de hasta 350 MPa, para generar fuerzas internas que pueden equilibrar las fuerzas externas en elementos estructurales. Esta tensión es probablemente baja comparada con las tensión que alcanzan las armaduras pretensadas, pero es del mismo orden de magnitud que la tensión de trabajo de un acero pasivo convencional bajo combinaciones de servicio, por lo que el refuerzo aplicado exteriormente podrá alcanzar tensiones de servicio similares a si se hubiese colocado en la fase inicial de construcción del elemento estructural y sin necesidad de incremento de daño en el elemento reforzado, a diferencia de las otras técnicas de refuerzo pasivas.

Este nueva aleación desarrollada en el EMPA, Suiza, tiene la siguiente composición: Fe–17Mn–5Si–10Cr–4Ni–1(V, C) (mass%) [8]. Esta muestra claras ventajas para aplicaciones como material de pretensado debido a su alto módulo de elasticidad en comparación a las SMA comerciales, como el Ni-Ti o el Ni-Ti-Nb. Además, su composición química es responsable de una resistencia a la corrosión

claramente muy superior a los aceros comunes en la construcción, gracias al 10% de Cr. El material de Fe-SMA puede ser producido en escala industrial bajo condiciones de temperatura ambiente sin necesidad de incrementar su costo de producción. El material puede ser fabricado en diferentes secciones tanto conformados en caliente como en frío como en barras, cables, láminas etc.

2. CARACTERISTICAS DE LA ALEACIÓN Fe-SMA

El procedimiento de la producción de Fe-SMA está detallado en (Czaderski, et al., 2014). Ensayos de tracción, de pre-estiramiento y de calentamiento/enfriado de la aleación quedan recogidas también en [5]. En este estudio referenciado, el material utilizado se presentaba en forma de alambre. Para la campaña experimental que se presenta en este artículo se han utilizado láminas de 50 mm de ancho y 0.5 mm de espesor. El material Fe-SMA se recibió en fase austenita y sin pre-estiramiento por lo que se ha llevado a cabo un estudio de caracterización para conocer su comportamiento termo-mecánico. Los resultados experimentales coinciden con el estudio de [9], quienes obtuvieron un valor óptimo de pre-estiramiento sobre el 4%, con una deformación residual remanente de 3.1%, y cuya tensión de recuperación resultante tras la transformación martensítica con deformación impedida es de 350 MPa. Los ensayos de caracterización (Figura 1) se han llevado a cabo en los laboratorios de la Universitat de les Illes Balears. En la Figura 1a se muestra una imagen de una lámina de Fe-SMA sometida al ensayo de pre-estiramiento y de tensiones de recuperación, y en la Figura 1b se muestran los resultados de dos ensayos: uno de tracción de la lámina hasta su rotura y otro de pre-estiramiento al 4% (curva con rama de carga y de descarga). En ésta última figura puede observarse la elevada ductilidad del material, mayor al 40%, y las deformaciones remanentes tras el pre-estiramiento.

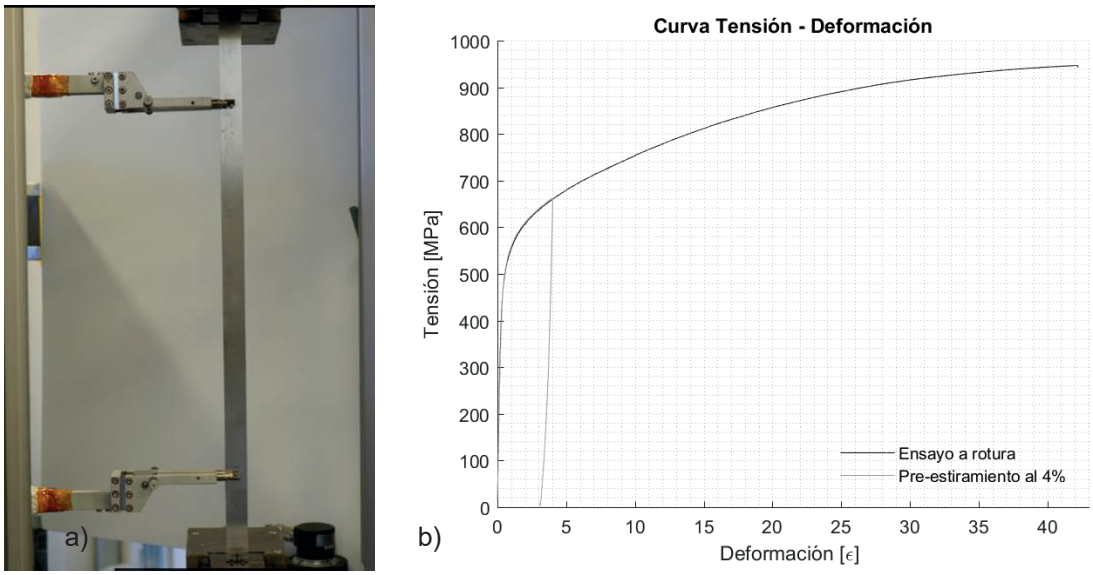


Figura 1. *Ensayos de las láminas Fe-SMA: a) disposición de la lámina en el pórtico de ensayos. b) ensayo de tracción y de pre-estiramiento.*

3. CAMPAÑA EXPERIMENTAL

La campaña experimental sobre vigas de hormigón, llevada a cabo en la Universitat de les Illes Balears, pretende evaluar la efectividad del uso de las aleaciones de memoria de forma en base hierro (Fe-SMA) como técnica de refuerzo en elementos estructurales de hormigón armado. Para ello se han ensayado 6 vigas a pequeña escala susceptibles de ser reforzadas a esfuerzo cortante. Todos los especímenes se han fabricado en 6 moldes idénticos con una única amasada de hormigón (Tabla 1). Dos de los especímenes se ensayan sin ningún tipo de refuerzo externo sirviendo como especímenes de referencia (S1_R1 y S1_R2), y los otros cuatro se refuerzan externamente a esfuerzo cortante con láminas de Fe-SMA. De estas cuatro, dos se ensayan sin activar el material de refuerzo (S1_SP1 y S1_SP2) y las otras dos se ensayan tras la activación del material de refuerzo (S1_SA1 y S1_SA2).

Tabla 1. Nomenclatura y características de los especímenes

Nomenclatura	Tipo de refuerzo		
	No reforzada	Fe-SMA sin activación	Fe-SMA con activación
S1_R1	X		
S1_R2	X		
S1_SP1		X	
S1_SP2		X	
S1_SA1			X
S1_SA2			X

Los especímenes tienen una sección rectangular de 80 mm de ancho y 150 mm de canto, con una longitud total de 900 mm (Figura 2a). La resistencia a compresión del homigón f_c ha sido de 30.1 MPa a la edad del día del ensayo de los especímenes, obtenida a partir de ensayos de compresión de probetas cúbicas de 150x150x150 mm. Ha sido usada una única armadura de diámetro 16 mm como refuerzo interno de la sección de hormigón con un límite elástico f_y de 549.5 MPa. Con el fin de reducir el número de variables en los ensayos, la armadura se suelda en sus extremos a una placa de anclaje evitando así que pueda producirse el fallo de adherencia.

El refuerzo exterior se realiza con láminas de Fe-SMA de 25 mm de ancho y 0.5 mm de espesor alrededor de la sección de la viga (Figura 2b), por lo que las láminas de 50 mm suministradas se han cortado longitudinalmente por la mitad. La colocación se realiza con un pequeño tesado inicial de las láminas para así asegurar un correcto contacto entre el refuerzo y la viga, realizando la fijación posteriormente de forma mecánica mediante clavos.

La activación del refuerzo se consigue a través de temperatura mediante el uso de un decapador (pistola de calor). El control de la temperatura se ha realizado colocando termopares en varios puntos de las láminas verificando que en todos ellos se superan los 160 ºC necesarios para que tenga lugar la transformación martensítica y, por tanto, la generación de tensiones de recuperación.

La carga se aplica mediante desplazamiento impuesto en la zona central de los especímenes tal y como muestra la Figura 3, siendo el cortante en cada uno de los extremos igual a la mitad de la fuerza aplicada con el actuador en la zona central, siendo la luz libre entre apoyos de 760 mm.

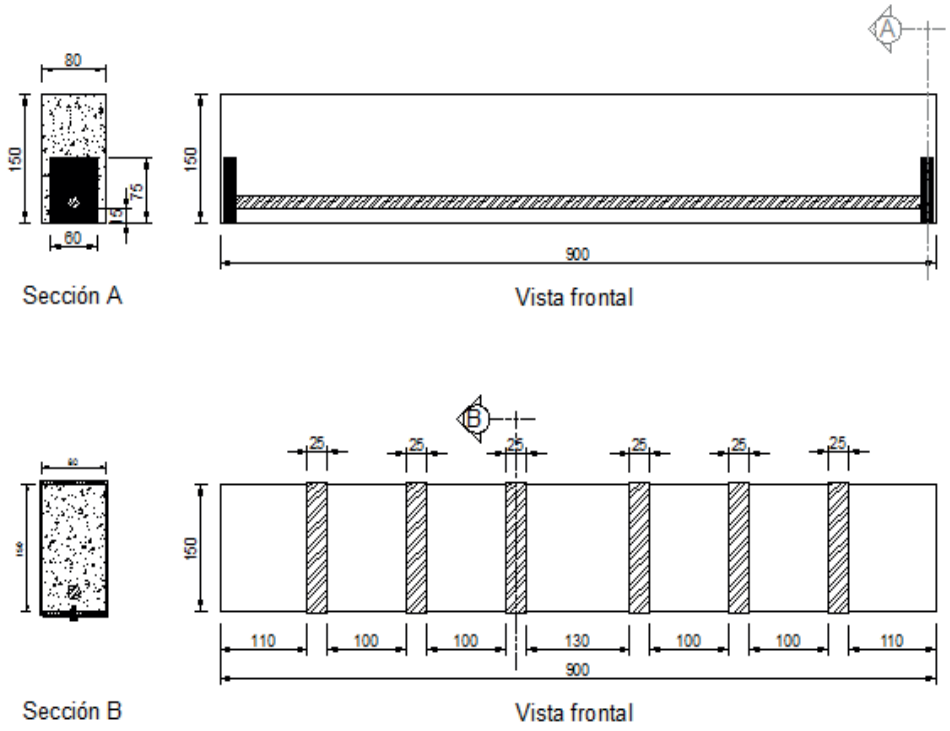


Figura 2. *Geometría de los especímenes: a) geometría de los especímenes de referencia. b) Disposición del refuerzo exterior para el resto de especímenes.*

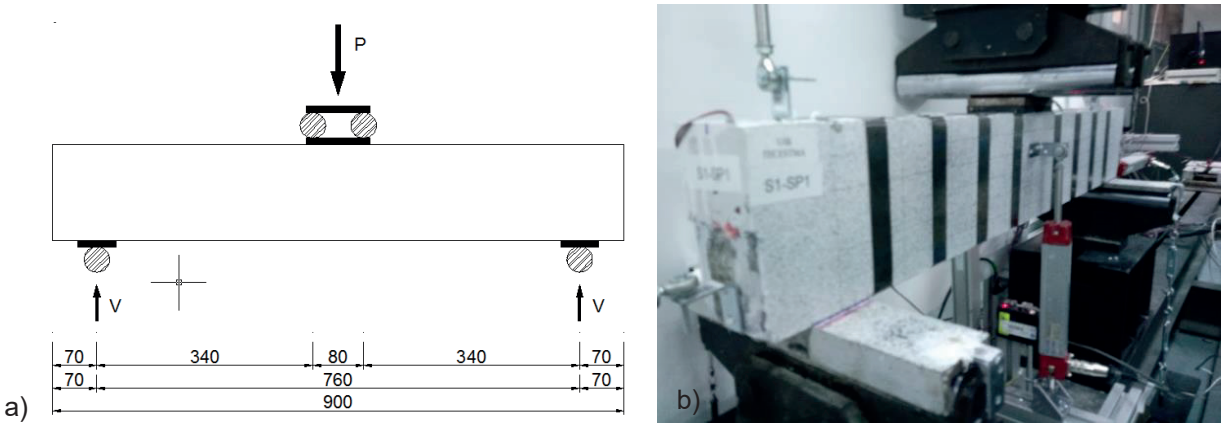


Figura 3. *Esquema de ensayo: a) posición de los soportes y del punto de aplicación de la carga. b) Imagen de un espécimen dentro del pórtico de ensayos.*

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Se muestran a continuación lo resultados generales obtenidos a partir de la campaña experimental de los seis especímenes llevados hasta rotura en los ensayos: dos de referencia, dos con refuerzo sin activar y dos con refuerzo activado. Cabe destacar la diferencia inicial que existe entre un refuerzo no activado y uno que sí lo está. Tras la activación del material la lámina recupera parte de su deformación libre hasta entrar en contacto con la viga la cual coarta su deformación, momento a partir del cual comienzan a producirse tensiones de recuperación que se traducen en tensiones de confinamiento

activo sobre la sección de hormigón. En la Figura 4 pueden apreciarse las holguras de contacto existentes entre una de las láminas y la viga, antes y después de realizar la activación del material.

Figura 4. *Ajuste de una lámina con la superficie de la viga. Espécimen S1_SA1: a) estado antes de la activación. b) Estado después de la activación.*

En la Figura 5 se muestran las curvas obtenidas en los seis ensayos, donde se representa en el eje vertical el esfuerzo cortante resistido por los especímenes (la mitad de la carga aplicada por el actuador) y en el eje horizontal el desplazamiento vertical de los especímenes en el punto medio de la luz. En la Tabla 2 se resumen algunos de los valores más representativos de los resultados. Se recoge la fuerza cortante máxima soportada por los especímenes y el desplazamiento vertical en el centro de luz para dicha carga máxima. También se presenta el valor del desplazamiento de los especímenes en el momento en el que éstos han perdido un 15% de su resistencia máxima.

Puede observarse que la respuesta de los especímenes ha sido muy parecida entre cada pareja de ensayos: S1_R1/S1_R2, S1_SP1/S1_SP2 y S1_SA1/S1_SA2. En el caso de los especímenes de referencia S1_R1 y S1_R2 hay una pequeña diferencia debido a que no están reforzados y presentan un comportamiento frágil, de modo que una vez alcanzada la carga máxima la degradación se produce muy rápidamente. En la viga S1_R1, después de la aparición de la fisura crítica a cortante, se produjo cierto efecto arco adicional que favoreció un leve incremento en la carga última antes de la rotura.

Las probetas de referencia (S1_R1 y S1_R2) han soportado un cortante máximo de 17.95 y 15.83 kN, mientras que los especímenes con refuerzo sin activar (S1_SP1 y S1_SP2) alcanzan valores de 29.51 y 31.01 kN y los especímenes con refuerzo activado (S1_SA1 y S1_SA2) 31.68 y 31.64 kN. Los especímenes que más carga han soportado han sido aquellos en los que se ha realizado la activación del Fe-SMA, seguido de los especímenes en los que no se ha realizado la activación; en ambos casos se ha mejorado la capacidad resistente de los especímenes de referencia hasta el doble de su capacidad aproximadamente. Estas 4 últimos vigas rompieron a flexión, mientras que las dos vigas de referencia sin refuerzo rompieron claramente a cortante.

Los especímenes en los que se ha realizado la activación (S1_SA1 y S1_SA2) han presentado un comportamiento más rígido que en los que no se ha realizado la activación (S1_SP1 y S1_SP2). En el primer caso la carga máxima se alcanza con un desplazamiento de 6.52 y 5.83 mm y en el segundo a un desplazamiento de 7.89 y 9.34 mm, que puede evidenciarse también observando la pendiente de las curvas fuerza-desplazamiento.

La activación del refuerzo genera unas tensiones de confinamiento en la sección de hormigón que consigue un trabajo más solidario entre ambos elementos, de modo que la curva fuerza-desplazamiento presenta un comportamiento más suave y paulatino en estos especímenes (S1_SA1 y S1_SA2). Los especímenes con refuerzo no activo presentan mayor oscilación de los valores de la curva debido a la aparición de fisuras y posterior entrada en carga del refuerzo.

El desplazamiento para el que la carga máxima soportada por los especímenes reforzados tiene una reducción del 15% ($\delta_{85\%}$) de su valor es mayor en los especímenes S1_SP1 y S1_SP2 (18.11 y 15.13 mm), seguido de los especímenes S1_SA1 y S1_SA2 (10.09 y 11.06 mm) y finalmente los especímenes S1_R1 y S1_R2 (4.11 y 2.18 mm). No obstante, la relación entre el desplazamiento "$\delta_{85\%}$" y el desplazamiento máximo "δ" es muy similar para los casos de los especímenes reforzados, 2.30 y 1.62 en S1_SP1 y S1_SP2 y 1.55 y 1.90 en S1_SA1 y S1_SA2 respectivamente.

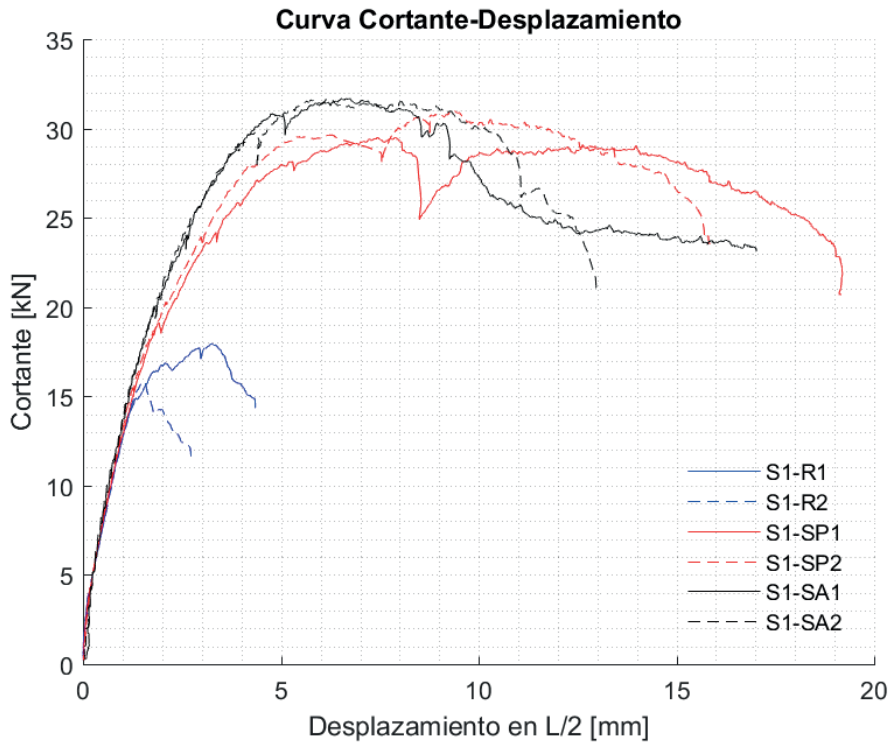


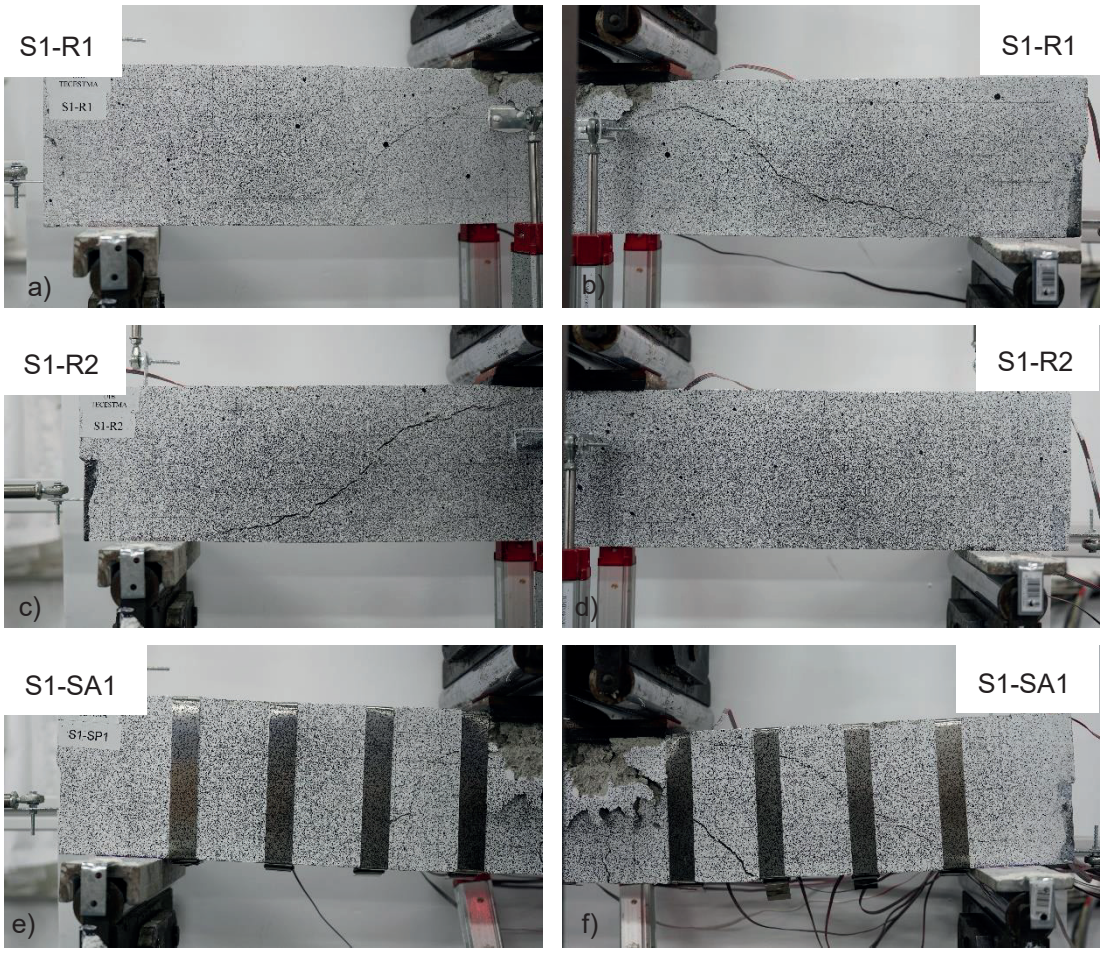
Figura 5. *Curvas Cortante vs Desplazamiento.*

Tabla 2. Resultados obtenidos en los ensayos experimentales: cortante máximo resistido "$V_{máx}$", desplazamiento vertical en centro de luz en el instante de carga máxima "δ", desplazamiento vertical en centro de luz tras una pérdida del 15% de la carga máxima "$\delta_{85\%}$".

Nomenclatura	Resultados obtenidos		
	$V_{máx}$ (kN)	δ (mm)	$\delta_{85\%}$ (mm)
S1_R1	17.95	3.24	4.11
S1_R2	15.83	1.53	2.18
S1_SP1	29.51	7.89	18.11
S1_SP2	31.01	9.34	15.13
S1_SA1	31.68	6.52	10.09
S1_SA2	31.64	5.83	11.06

En la Figura 6 se muestran las imágenes del estado de los especímenes en el momento en el que se alcanza la capacidad máxima de carga. Se presentan dos imágenes por cada una de las probetas

correspondientes a los extremos izquierdo y derecho de cada viga. En ellas pueden verse los patrones de fisuración que se han producido en la campaña experimental. La rotura de los especímenes de referencia (S1_R1 y S1_R2) se caracteriza por la presencia de una fisura muy marcada y tendida debido al esfuerzo cortante (Figura 6a y Figura 6b), muy diferente a lo observado en los especímenes con refuerzo externo Fe-SMA en los que las fisuras son más inclinadas y distribuidas a lo largo de su longitud. El uso del refuerzo hace que la resistencia a esfuerzo cortante aumente provocando un cambio del modo de fallo. En el resto de figuras, desde la Figura 6c a la Figura 6f, se observan fallos en la cabeza comprimida en la zona central de los especímenes, así como algunas fisuras verticales, debido en ambos casos esfuerzos de flexión. En los especímenes en los que no se activó el refuerzo (S1_SP1 y S1_SP2) además se advierten unas fisuras de cortante más acusadas que en los especímenes en los que se activó el refuerzo (S1_SA1 y S1_SA2). El hecho de que las 4 vigas reforzadas externamente rompieran a flexión, no ha permitido constatar de una forma totalmente evidente las diferencias en estado límite último de resistencia a cortante en el caso de refuerzos activados y sin activar. En futuros ensayos se buscará la rotura a cortante en los especímenes reforzados.



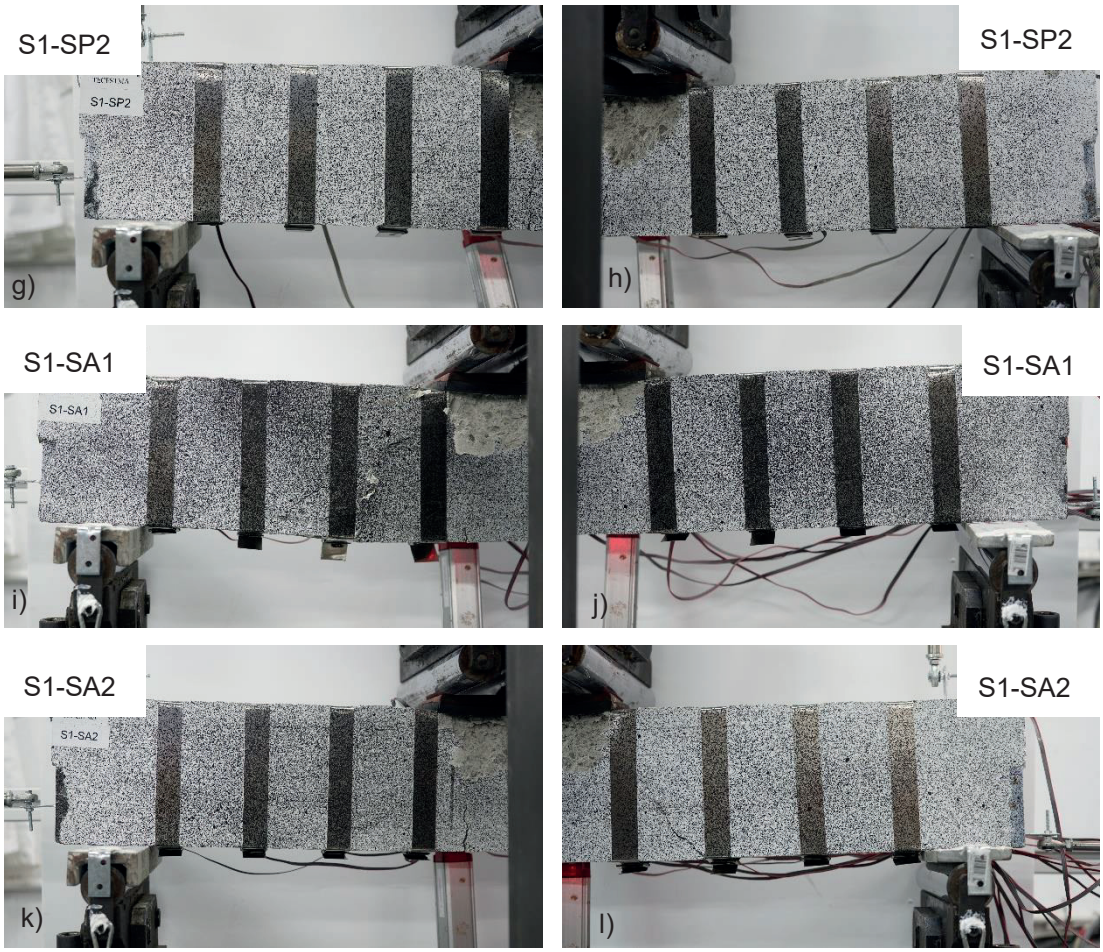


Figura 6. *Imágenes del estado de los especímenes en ambos extremos (izquierdo y derecho) en el momento en el que se alcanza el cortante máximo: a,b) espécimen S1_R1, c,d) espécimen S1_R2, e,f) espécimen S1_SP1, g,h) espécimen S1_SP2, i,j) espécimen S1_SA1, k,l) espécimen S1_SA2.*

5. CONCLUSIONES

Se ha llevado a cabo una campaña experimental de seis especímenes que muestra la mejora de resistencia y de ductilidad de vigas de hormigón armado gracias a la disposición de un refuerzo externo formado por láminas de Fe-SMa, llegando a cambiar el modo de fallo de las vigas de cortante a flexión. Dicho refuerzo se ha aplicado con y sin activación del material y se han encontrado diferencias tanto en ajuste del refuerzo a la viga como en el comportamiento solidario entre el refuerzo exterior y la viga existente. Este trabajo ha presentado un análisis preliminar de los resultados del laboratorio, si bien en estos momentos se está analizando con más detalle el patrón de fisuración a partir de las imágenes captadas durante los ensayos.

FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

En la campaña experimental presentada se ha verificado la validez de las aleaciones de Fe-SMA como material de refuerzo en vigas de hormigón armado para esfuerzo cortante, dando pie a futuras líneas de investigación relacionadas con esta temática: el estudio de nuevas disposiciones de refuerzo, el estudio de otras técnicas de anclaje del material y el estudio de modelos mecánicos que sobre su aplicación.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren expresar su agradecimiento por la financiación recibida de la Agencia Estatal de Investigación del Ministerio de Economía y Competitividad de España y de los Fondos Europeos de Desarrollo Regional que financia el proyecto de investigación "Contribución a la extensión de la vida útil de estructuras de hormigón mediante una adecuada evaluación estructural y su refuerzo con materiales avanzados - Horvital" (BIA2015-64672-C4-3-R). Los autores expresan también su gratitud a la empresa re-fer por el suministro de material Fe-SMA utilizado en esta campaña experimental.

REFERNCIAS

[1] Marí, A., Bairán J. M., Cladera, A., Oller, E. y Ribas Gonzales, C. R. (2015). Shear-flexural strength mechanical model for the design and assessment of reinforced concrete beams. *Structure and Infrastructure Engineering ,* 11 (11), 1399-1419.

[2] Oller, E., Marí, A., Bairán, J. M. y Cladera, A. (2015). Shear design of reinforced concrete beams with FRP longitudinal and transverse reinforcement. *Composites Part B: Engineering,* 104-122.

[3] Rius Gibert, J. M., Mas Gracia, B., Ribas Gonzales, C. R. y Cladera Bohigas, A. (2017). Refuerzo externo activo a cortante mediante aleaciones con memoria de. *VII Congreso de ACHE*.

[4] Ruiz Pinilla, J. G., Pallarés, F. J., Gimenez, E. y Calderón, P. (2014). Experimental tests on retrofitted RC beam-column joints underdesigned to seismic loads. General approach. *Engineering Structures,* 59, 702-714.

[5] Cladera, A., Weber, B., Leinenbach, C., Czaderski, C., Shahverdi, M. y Motavalli, M. (2014). Iron-based shape memory alloys for civil engineering structures: An overview. *Construction and Building Materials,* 63, 281–293.

[6] Mas, B., Cladera, A. y Ribas, C. (2016). Experimental study on concrete beams reinforced with pseudoelastic Ni-Ti continuous rectangular spiral reinforcement failing in shear. *Engineering Structures,* 127, 758-768.

[7] Shahverdi, M., Czaderski, C. y Motavalli, M. (2016). Iron-based shape memory alloys for prestressed near-surface mounted strengthening of reinforced concrete beams. *Construction and Building Materials,* 112, 28–38.

[8] Dong, Z., Klotz, U. E., Leinenbach, C., Bergamini, A., Czaderski, C. y Motavalli, M. A (2009). Novel Fe-Mn-Si Shape Memory Alloy With Improved Shape Recovery Properties by VC Precipitation. *You have full text access to this content,* 11, nº 2, 40-44.

[9] Lee, W. J., Weber, B., Fletrin, G., Czaderski, C., Motavalli, M. y Leinenbach, C. (2013). Stress recovery behavior of an Fe-Mn-Si-Cr-Ni-VC shape memory alloy used for prestressing. *Smart Meterial and Structures,* 22, nº 12.

Long term tension stiffening model for reinforced concrete members

Carbonell-Márquez, Juan Francisco [1]; Gil-Martín, Luisa María [2]

ABSTRACT

A short-term tension stiffening model for cracked concrete under tension implicit in the formulation of Eurocode 2 is presented. This model provides the concrete stress in terms of strain in a reinforced concrete element. In addition to this, a long-term tension stiffening model based on the short-term one is defined. The long-term model accounts the effect of time, creep and shrinkage. The model is compared against the results of some experimental campaigns in order to show its validity and possible future enhancements.

Keywords: Tensorrigidez, Deformación, Largo Plazo, Área efectiva de hormigón.

1. INTRODUCCIÓN

A la hora de efectuar cálculos en estado límite último, la contribución del hormigón sometido a tracción se suele obviar al considerar la capacidad total de un elemento de hormigón armado (HA). No obstante, cuando los cálculos se realizan en estado límite de servicio, como deformaciones de elementos de HA fisurados bajo niveles normales de carga, el hormigón presente entre fisuras proporciona una rigidez adicional al refuerzo que, especialmente con valores bajos de la cuantía de armado [1], conduce a deformaciones menores que las obtenidas sin considerar esta contribución del hormigón a tracción. Esta contribución de hormigón se debe al traspaso de tensiones de tracción desde el acero al hormigón que lo rodea debido a la adherencia entre ambos materiales y es denominado comúnmente como tensorrigidez o, en inglés, *tension-stiffening*. Este fenómeno ha sido estudiado con detalle en los últimos 40 o 50 años, siendo numerosos los modelos existentes en la literatura [2–22] para introducir adecuadamente la contribución de la tensorrigidez en la rigidez global del elemento de HA.

La normativa europea de estructuras de hormigón armado, el Eurocódigo 2 (EC2) [23] considera que un elemento fisurado se comporta en términos medios (tensiones y deformaciones medias) de manera intermedia a como lo haría el mismo elemento en dos estados extremos: estado I (no fisurado) en el que el hormigón y el acero experimentan la misma deformación y la capacidad resistente a tracción del hormigón no se limita y, estado II (fisurado) en el que sólo se considera la contribución del acero desnudo, sin colaboración del hormigón traccionado una vez superada la tensión de fisuración. El EC2 § 7.4.3. (3) propone la siguiente expresión de interpolación:

[1] *Departamento de Mecánica. Universidad de Córdoba (ESPAÑA). E-mail: jcarbonell@uco.es*
[2] *Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica. Universidad de Granada (ESPAÑA). E-mail: mlgil@ugr.es (Corresponding author)*

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta)\alpha_I \quad (1)$$

donde α es el parámetro de deformación que se pretende calcular (flecha, curvatura o deformación), α_I y α_{II} son los valores correspondientes al estado I (sin fisurar) y al estado II (fisurado), respectivamente, y el parámetro ζ es un coeficiente que introduce la contribución del hormigón debido a la tensorrigidez, definido como:

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2 \quad (2)$$

donde σ_s y σ_{sr} son las tensiones en la armadura calculadas en estado II para el valor de la carga aplicada y para la carga que produce la primera fisura, respectivamente. El coeficiente β de la Eq. (2) tiene en cuenta la duración de la carga y su posible repetición, siendo igual a 1 en el caso de cargas a corto plazo y 0.5 para largo plazo o cargas cíclicas. El parámetro β tiene en cuenta la caída a largo plazo de la contribución del hormigón a tracción, aunque no incluye explícitamente la influencia de cada uno de los parámetros que lo controlan [24] y, de hecho, según [25], el efecto de tensorrigidez es modelizado de manera tosca a través del parámetro β.

En el presente trabajo, se emplea la formulación presentada por el EC2 para derivar un modelo que proporciona una relación tensión-deformación de la tensorrigidez del hormigón a corto y largo plazo que puede ser empleado en cálculos que conlleven análisis seccional. En primer lugar se deduce de manera detallada el modelo general propuesto para posteriormente aplicarlo para la predicción de la flecha en mitad de vano a largo plazo de un conjunto de elementos de HA sometidos a flexión en 4 puntos cuyos resultados han sido extraído de diversas campañas de ensayos publicadas.

2. MODELO DE TENSORRIGIDEZ DEL HORMIGÓN ARMADO IMPLÍCITO EN EL EC2

El origen de la Eq. (1) se encuentra en el CEB Desing Manual on Cracking and Deformations [26]. Este manual considera la tensorrigidez en un elemento de HA fisurado sometido a tracción a través del incremento de rigidez de la armadura de tal manera que, en términos medios, la deformación que experimenta el acero se encuentra entre los casos de sección sin fisurar (estado I) y fisurada (estado II), Figura 1. Si un elemento con una longitud total l experimenta una elongación Δl bajo una carga axial $N \geq N_{cr}$, siendo N_{cr} el axil que produce la primera fisura en el elemento, la deformación media del acero puede escribirse como:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_{sII} - \Delta\varepsilon_s \quad (3)$$

donde ε_{sII} es la deformación en la barra desnuda sometida al axil N y $\Delta\varepsilon_s$ es la contribución del hormigón a tracción que, experimentalmente y propuesto por Rao [27], ha sido formulada como:

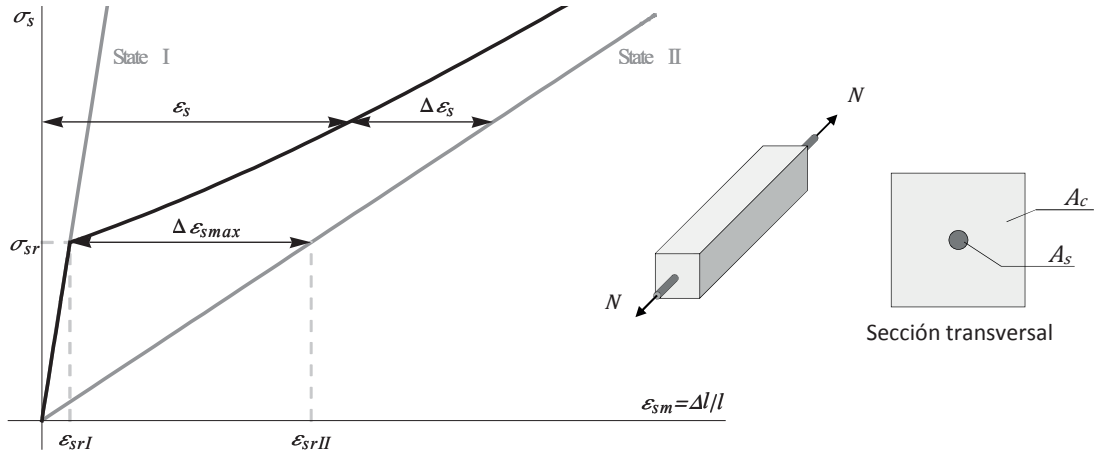


Figura 1. *Modelo tensión-deformación para el armado en un miembro de HA en tensión pura. Modificado de* [26].

$$\Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon_{smax}\left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right) \tag{4}$$

La máxima contribución de la tensorrigidez, $\Delta\varepsilon_{smax}$, se produce en el instante para el que produce la primera fisura.

Según la Figura 1:

$$\Delta\varepsilon_{smax} = \varepsilon_{srII} - \varepsilon_{srI} \tag{5}$$

donde ε_{srI} y ε_{srII} son las deformaciones longitudinales unitarias correspondientes al axil que origina la fisuración, N_{cr}, en los estados I y II, respectivamente.

Introduciendo las Eqs. (4) y (5) en la Eq. (3) y, teniendo en cuenta que $\sigma_s = (\sigma_{sr}/\varepsilon_{srI})\varepsilon_{sI} = (\sigma_{sr}/\varepsilon_{srII})\varepsilon_{sII}$ (Figura 1), se obtiene que:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sI}\left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2 + \varepsilon_{sII}\left(1 - \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2\right) \tag{6}$$

Retomando la Eq. (2) e introduciendo el factor β justo delante del cociente de tensión del acero, la Eq. (6) correspondería a la Eq. (1) particularizada para el cálculo de deformaciones longitudinales, es decir, $\alpha = \varepsilon_{sm}$, $\alpha_I = \varepsilon_{sI}$ y $\alpha_{II} = \varepsilon_{sII}$.

2.1. Expresión explícita para la tensorrigidez

La Eq. (6) representa la rigidización del acero debida a la contribución del hormigón y proporciona la deformación media del acero en función la tensión σ_s y en función de la deformación correspondiente a dos casos extremos: sección no fisurada y completamente fisurada. Por tanto, ε_{sI} y ε_{sII} son también variables dentro de la expresión de la Eq. (6).

Hernández-Montes et al. [28] dedujeron un modelo de tensorrigidez que proporciona la tensión media en el hormigón en función de la deformación en un elemento de HA más allá de la deformación

de fisuración. En lo que sigue, se suponen deformaciones medias y se admite que la deformación del acero y el hormigón adyacente es la misma: $\varepsilon_c = \varepsilon_{sm} = \varepsilon$. De esta manera, la deformación en la armadura del elemento de HA sometido a tracción pura N en el estado I se puede obtener como:

$$\varepsilon_{sI} = \frac{N}{A_{c,eff}E_c + A_sE_s} \tag{7}$$

donde A_s y $A_{c.eff} \leq A_c$ son el área de armado y el área de efectiva de hormigón a tracción debida a la adherencia entre hormigón y acero [14], respectivamente, y E_s y E_c son los módulos de elasticidad del acero y del hormigón antes de la fisuración, respectivamente.

Tras la fisuración, la deformación en el acero es:

$$\varepsilon_{sII} = \frac{N}{A_sE_s} \tag{8}$$

Teniendo en cuenta que σ_{sr} es la tensión en la armadura correspondiente a la carga que produce la primera fisura (supuesta la sección completamente fisurada, estado II) y que las deformaciones medias del hormigón y del acero de la misma fibra son idénticas, entonces $\varepsilon_{srI} = \varepsilon_c = \varepsilon_{ct}$, con ε_{ct} la deformación para la cual se produce la fisuración del hormigón. Teniendo en cuenta que la resistencia a tracción del hormigón se puede expresar entonces como $f_{ct} = \varepsilon_{srI}E_c$, el axil que produce la primera fisura considerando el estado I puede expresarse como:

$$N_{cr} = \varepsilon_{srI}\left(A_{c,eff}E_c + A_sE_s\right) = f_{ct}\frac{\left(A_{c,eff}E_c + A_sE_s\right)}{E_c} \tag{9}$$

Como σ_{sr} implica fisuración completa, dicha tensión puede escribirse como:

$$\sigma_{sr} = \frac{N_{cr}}{A_s} = f_{ct}\frac{\left(A_{c,eff}E_c + A_sE_s\right)}{A_sE_c} \tag{10}$$

Finalmente, la tensión en el acero σ_s en una sección fisurada bajo un axil $N > N_{cr}$ viene dada por:

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} \tag{11}$$

Sustituyendo los parámetros definidos en las Eqs. (7)-(11) en la Eq. (6) e introduciendo el factor β, Eq. (2),la deformación media en el elemento de HA queda:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon = \frac{N}{A_{c,eff}E_c + A_sE_s}\beta\left(\frac{f_{ct}\frac{\left(A_{c,eff}E_c + A_sE_s\right)}{E_c}}{\frac{N}{A_s}}\right)^2 + \frac{N}{A_sE_s}\left(1 - \beta\left(\frac{f_{ct}\frac{\left(A_{c,eff}E_c + A_sE_s\right)}{E_c}}{\frac{N}{A_s}}\right)^2\right) = \frac{N^2E_c - \beta A_{c,eff}f_{ct}^2\left(A_{c,eff}E_c + A_sE_s\right)}{NA_sE_sE_c} \tag{12}$$

Reordenando los términos en la Eq. (12), se obtiene la siguiente expresión:

$$N^2 E_c - N A_s E_s E_c \varepsilon - \beta A_{c,eff} f_{ct}^2 \left(A_{c,eff} E_c + A_s E_s\right) = 0 \quad (13)$$

Si llamamos σ_{cTS} a la tensión en el hormigón asociada al fenómeno de la tensorrigidez, el axil $N > N_{cr}$ puede escribirse como:

$$N = \sigma_{cTS} A_{c,eff} + \sigma_s A_s = \sigma_{cTS} A_{c,eff} + \varepsilon E_s A_s \quad (14)$$

Introduciendo la Eq. (14) en la Eq. (13), se obtiene una ecuación de segundo grado en σ_{cTS}:

$$\left(\sigma_{cTS} A_{c,eff} + \varepsilon E_s A_s\right)^2 E_c - \left(\sigma_{cTS} A_{c,eff} + \varepsilon E_s A_s\right) A_s E_s E_c \varepsilon - \beta A_{c,eff} f_{ct}^2 \left(A_{c,eff} E_c + A_s E_s\right) = 0$$

$$\rightarrow \sigma_{cTS} = -\frac{\varepsilon E_s}{2} \frac{A_s}{A_{c,eff}} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon E_s}{2} \frac{A_s}{A_{c,eff}}\right)^2 + \beta f_{ct}^2 \left(1 + \frac{A_s E_s}{A_{c,eff} E_c}\right)} \quad (15)$$

Denominando $\rho_{eff} = A_s / A_{c,eff}$ y $n = E_s / E_c$, la expresión del modelo de tensorrigidez para el hormigón queda finalmente:

$$\sigma_{cTS}(\varepsilon) = -\frac{\rho_{eff}}{2} \varepsilon E_s + \sqrt{\left(\frac{\rho_{eff}}{2} \varepsilon E_s\right)^2 + \beta f_{ct}^2 \left(1 + n \rho_{eff}\right)} \quad (16)$$

2.2. Deformación de cedencia aparente y modelo completo del hormigón a tracción

Al emplear el modelo definido por la Eq. (16) es necesario tener en cuenta que la máxima carga axial que pueden soportar conjuntamente la armadura y el área efectiva del hormigón a tracción es $N_y = A_s f_y$, con f_y el límite elástico del acero, Figuras 2 y 3 (a). Por tanto, la máxima deformación para la cual la expresión de la Eq. (16) es válida es la deformación de cedencia aparente, ε_{ap}. Para calcular este valor de deformación, se plantea el equilibrio bajo N_y entre una sección genérica en la que se consideran deformaciones medias del hormigón y acero y entre una sección en la que existe una fisura (nula contribución del hormigón) y el acero trabaja por tanto a su límite elástico, Figura 2:

$$A_s E_s \varepsilon_y = A_s E_s \varepsilon_{ap} + A_{c,eff} \sigma_{cTS}\left(\varepsilon_{ap}\right) \rightarrow \varepsilon_{ap} \quad (17)$$

Si el área efectiva de hormigón a tracción, $A_{c,eff}$, se considera independiente de la deformación, la deformación de cedencia aparente se puede obtener introduciendo la Eq. (16) en la Eq. (17) como:

$$\varepsilon_{ap} = 1 - \frac{\beta f_{ct}^2 \left(1 + n \rho_{eff}\right)}{\varepsilon_y \left(E_s \rho_{eff}\right)^2} \quad (18)$$

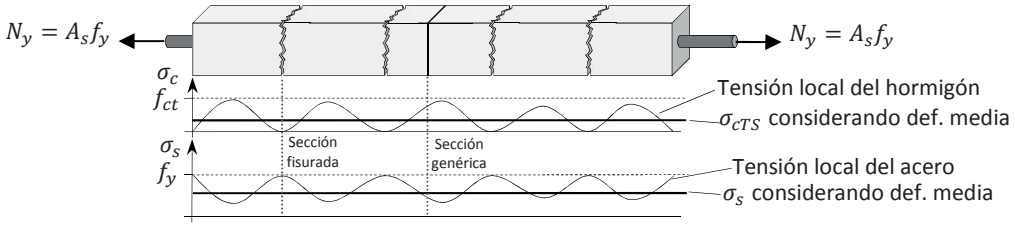


Figura 2. *Equilibrio entre una sección genérica donde ambos hormigón y acero son traccionados considerando deformaciones medias y una sección donde se produce una fisura (el hormigón no colabora) y las barras del refuerzo han alcanzado el límite elástico.*

Una vez alcanzada la deformación de cedencia aparente, la carga axial alcanza el valor N_y y permanece constante, Figura 3(a). Para deformaciones mayores a ε_{ap} la contribución del hormigón debe decrecer hasta que se alcanza la deformación de cedencia real, ε_y, momento a partir del cual la contribución del hormigón asociada a la tensorrigidez desaparece, Figura 3 (b). En dicha figura, se ha supuesto una ley lineal entre ε_{ap} y ε_y.

Teniendo en cuenta lo anterior, el modelo completo del hormigón a tracción, σ_{ct}, que debe aplicarse al área efectiva de hormigón, $A_{c,eff}$, queda:

$$\sigma_{ct}(\varepsilon) = \begin{cases} E_c\varepsilon & \text{si} \quad 0 < \varepsilon \le \varepsilon_{ct} \\ -\frac{\rho_{eff}}{2}\varepsilon E_s + \sqrt{\left(\frac{\rho_{eff}}{2}\varepsilon E_s\right)^2 + \beta f_{ct}^2\left(1 + n\rho_{eff}\right)} & \text{si} \quad \varepsilon_{ct} < \varepsilon \le \varepsilon_{ap} \\ \frac{\sigma_{cTS,ap}}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ap}}\left(\varepsilon_y - \varepsilon\right) & \text{si} \quad \varepsilon > \varepsilon_{ap} \end{cases} \tag{19}$$

con $\sigma_{cTS,ap} = \sigma_{cTS}(\varepsilon_{ap})$.

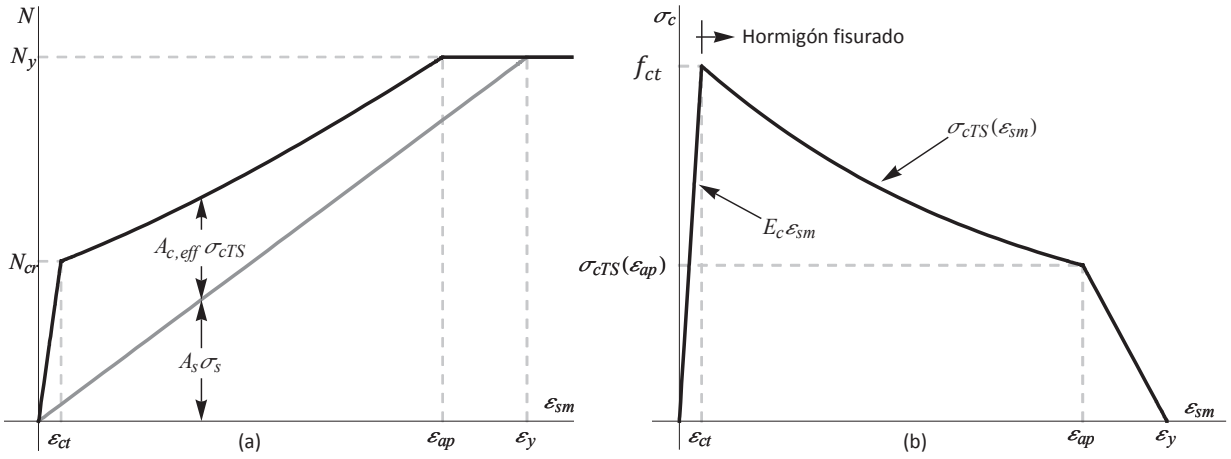


Figura 3. *Elemento de HA en tracción pura: (a) Carga axial soportada por el elemento en función de su deformación media; (b) Tensión de tracción en el hormigón incluyendo el modelo de tensorrigidez.*

2.3. Área efectiva del hormigón a tracción

Una vez alcanzado el valor de deformación correspondiente a la resistencia a tracción del hormigón, ε_{ct}, *el hormigón fisura y el único hormigón que contribuye a resistir las tracciones es el definido por el área efectiva,* $A_{c,eff}$. En este apartado se define el valor de $A_{c,eff}$ empleado en este artículo para distintas secciones transversales.

En la literatura existen diferentes modelos para definir el área de hormigón efectiva a tracción, tales como los propuestos por Kwak y Song [12], Manfredi y Pecce [29], Bentz [30] o Castel et al. [31].

Ya en el Código Modelo de 1978 del CEB-fib [32], se definía $A_{c,eff}$ como el área rectangular que rodea la barra de diámetro Ø y centrada en ella de con los lados menores o iguales a 15Ø, quedando el área efectiva truncada por los límites geométricos de la sección de HA y sin solaparse con áreas efectivas correspondientes a otras barras de armado [33]. Las últimas versiones del Código Modelo (MC90 [34] y MC2010 [35]) y el EC2 definen $A_{c,eff}$ tal y como se muestra en la Figura 4.

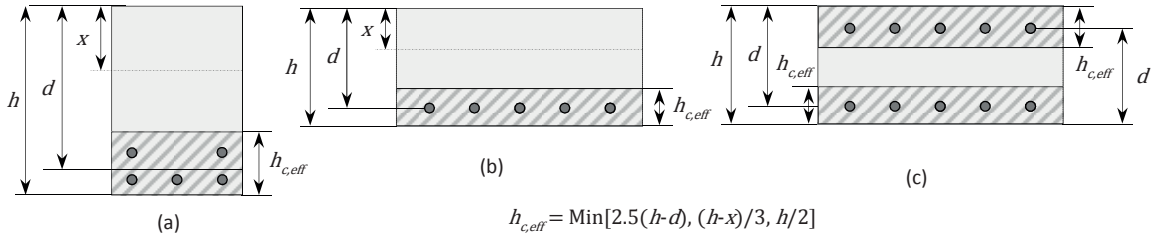


Figura 4. *Área efectiva de hormigón a tracción de acuerdo con el Código Modelo 2010* [35] *y el Eurocódigo 2 [23]: (a) viga; (b) losa; (c) elemento sometido a tracción. Adaptado de [23].*

Gil-Martín et al. [36] propusieron una modificación a la expresión de $A_{c,eff}$ dada por el EC2 (Figura 4). La profundidad de la fibra neutra, x, correspondiente a una viga de HA sometida a flexión simple decrece a medida que el momento flector crece. De acuerdo con esto, la expresión propuesta por el EC2 $h_{c,eff} = (h - x)/3$ implica un incremento de la altura del área efectiva a medida que aumenta la solicitación sobre la sección. El incremento de $A_{c,eff}$ durante el proceso de carga es físicamente imposible debido a la degradación del hormigón asociada con la pérdida de adherencia a altas deformaciones de tracción. Por esta razón, Gil-Martín et al. [36] proponen el siguiente límite superior a la condición $h_{c,eff} = (h - x)/3$: $h_{c,eff} = (h - x_{cr})/3$, donde x_{cr} es la profundidad de la fibra neutra correspondiente al momento de fisuración M_{cr}. La expresión propuesta por Gil-Martín et al. [36] para $h_{c,eff}$ queda:

$$h_{c,eff} = Min\begin{cases} 2.5(h-d) \\ (h-x_{cr})/3 \\ h/2 \end{cases} \tag{20}$$

Todas las definiciones relativas a $A_{c,eff}$ corresponden a secciones de HA rectangulares, existiendo pocos estudios en relación al $A_{c,eff}$ en el caso de elementos de HA con sección circular. Wiese et al. [37] propusieron un área efectiva de hormigón en tracción para secciones circulares de HA simétricamente armadas. Posteriormente, Carbonell-Márquez et al. [38] propusieron una expresión $A_{c,eff}$ válida para secciones circulares de HA tanto simétrica como asimétricamente armadas, Figura 5, calculada en base a resultados experimentales a corto y largo plazo [39,40]. El área efectiva

propuesta en [38] consiste en una banda circular de ancho $h_{c,eff}$ situada bajo la fibra cuya deformación es ε_{ct}. Tal y como se aprecia en la Figura 5, el ancho $h_{c,eff}$ se define en función de un ancho interior, $h_{c,effint}$, y de un ancho exterior, $h_{c,effext}$. La geometría final de puede calcularse mediante las siguientes expresiones extraídas de [38]:

$$h_{c,effint} = h_{c,eff}\frac{TSz_{top}}{TSz} \leq R_{int} \tag{21}$$

$$h_{c,effext} = h_{c,eff} - h_{c,effint} \tag{22}$$

donde, para secciones circulares de HA armadas con barras equidistantes en todo el perímetro:

$$h_{c,eff} = \frac{1}{R^{4/3}}(-1.765R^2 + 11.343Rx - 9.375x^2) \tag{23}$$

y para secciones circulares de HA armadas asimétricamente:

$$h_{c,eff} = \frac{1}{R^{4/3}}(-1.117R^2 + 8.657Rx - 7.132x^2) \tag{24}$$

estando $h_{c,eff}$, R y x expresados en mm.

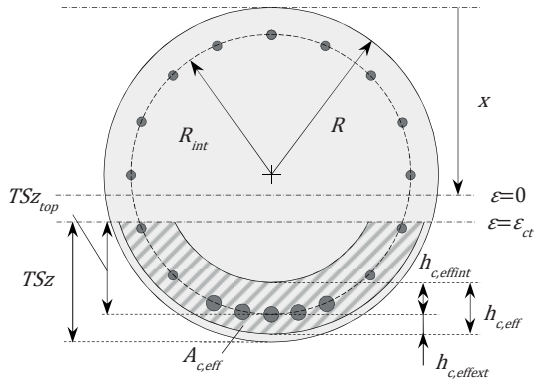


Figura 5. *Definición y nomenclatura para $A_{c,eff}$. Adaptado de* [38].

3. MODELO DE TENSORRIGIDEZ A LARGO PLAZO PARA HORMIGÓN ARMADO

El modelo de tensorrigidez para el hormigón de la Figura 3 es válido sólo para corto plazo. Existen numerosos trabajos que indican que la colaboración del hormigón a tracción decrece con el tiempo debido a factores como la fluencia por tracción o la microfisuración que se produce alrededor de las barras de armado debida a la retracción [41,42]. El efecto de largo plazo es introducido en la expresión proporcionada por el EC2 mediante el parámetro β, Eqs. (1) y (2), y que ha sido introducido en el modelo de tensorrigidez propuesto, Eq. (19). Este parámetro tiene en cuenta la duración de las cargas, el deterioro de la adherencia entre acero y hormigón y la fisuración debida a retracción [43]. Así pues, a efectos prácticos, la caída en la contribución de la tensorrigidez se considera exclusivamente mediante el parámetro β. El EC2 propone dos valores para el parámetro β: 1.0 para

cargas de corto plazo y 0.5 para cargas mantenidas en el tiempo o cargas repetidas. De acuerdo con [25,41], ésta es una forma muy ruda y simplista de considerar la degradación de la tensorrigidez y la fisuración dependiente del tiempo.

Si se consideran valores del parámetro β distintos de 1, el modelo de la Eq. (19) necesita ser modificado. Consideremos un prisma de hormigón armado con una sola barra y sometido a carga axil de tracción mantenida en el tiempo ($\beta = 0.5$). La curva carga-deformación correspondiente se muestra en la Figura 6 (a) (línea negra o-a-b-c-d), situada entre la curva correspondiente a la barra asilada (línea quebrada negra o-d) y la curva correspondiente a carga de corto plazo ($\beta = 1.0$, línea quebrada gris o-a-e-d). La intersección teórica de la curva definida por Eq. (18) con $\beta = 0.5$ y la línea del estado no fisurado (tramo o-a, Figura 6 (a)) se produciría para una carga de tracción inferior al axil de fisuración N_{cr} y paraa una deformación inferior a ε_{ct}, siendo esto último físicamente imposible ya que la deformación correspondiente a la fisuración es ε_{ct} y no otra. Este es el motivo que explica la caída que se produce en la curva $\varepsilon - N$ cuando se alcanza ε_{ct} (tramo a-b en la Figura 6 (a)). Este fenómeno se refleja también en la curva $\varepsilon - \sigma$ del hormigón fisurado sometido a tracción en forma de caída vertical de la tensión al alcanzar ε_{ct} (tramo a-b en la Figura 6 (b)). La tensión correspondiente al punto b se calcula imponiendo $\beta = 0.5$ y $\varepsilon = \varepsilon_{ct}$ en la Eq. (16).

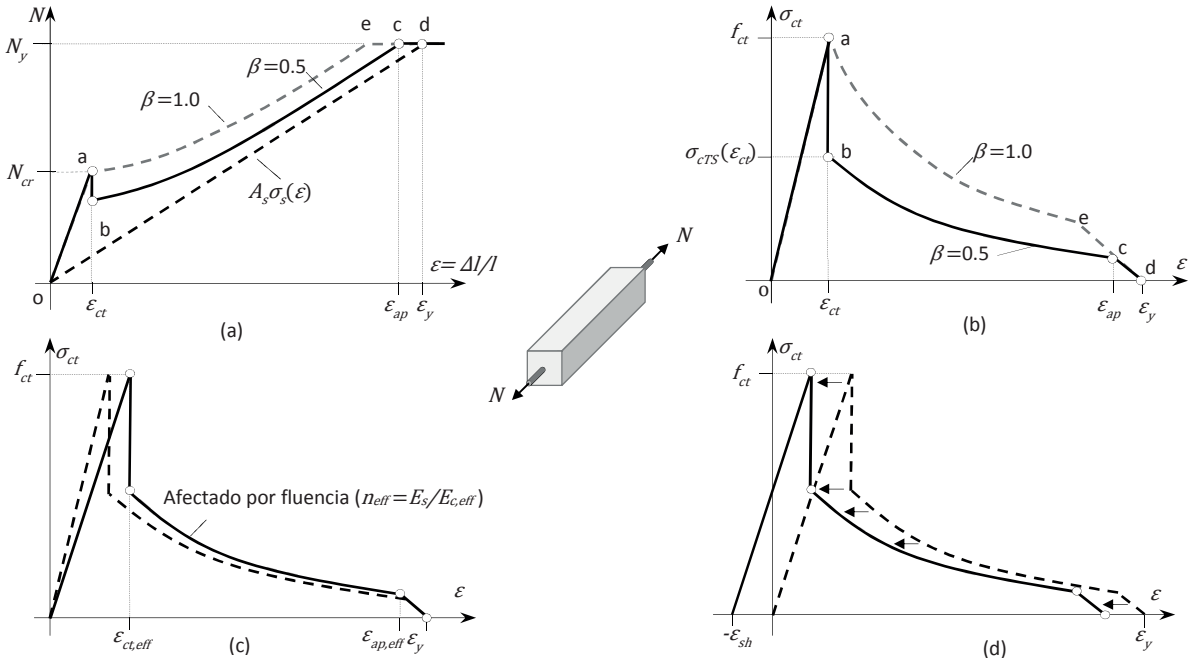


Figura 6. *Curva carga-deformación (a), modelo tensión deformación del hormigón (b) de un prisma sometido a una carga de tracción sostenida en el tiempo y modelo tensión deformación del hormigón fisurado afectado por fluencia (c) y retracción (d). Adaptado de* [40].

Los efectos de la fluencia y de la retracción también deben tenerse en cuenta a la hora de formular el modelo a largo plazo de la tensorrigidez del hormigón. Así pues, la Figura 6 (c) muestra la curva $\varepsilon - \sigma$ de la Figura 6 (b) afectada por la fluencia mediante el cambio del módulo de elasticidad del hormigón E_c por el módulo de elasticidad efectivo, $E_{c,eff}$ (en la Eq. (16), el parámetro n debe ser sustituido por $n_{eff} = E_s/E_{c,eff}$) y la deformación de fisuración viene dada por $\varepsilon_{ct,eff} = f_{ct}/E_{c,eff}$. Una vez afectada por la fluencia, la curva $\varepsilon - \sigma$ de la Figura 6 (c) se desplaza horizontalmente tal y como se

muestra en la Figura 6 (d) haciendo coincidir el cero en tensión con una deformación de compresión igual a $\varepsilon_{sh} > 0$, la deformación de retracción libre según EC2.

La formulación final de modelo tensión – deformación del hormigón fisurado sometido a tracción de largo plazo teniendo en cuenta el fenómeno de la tensorrigidez queda:

$$\sigma_{ct}(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{f_{ct}}{\varepsilon_{ct,eff}}(\varepsilon + \varepsilon_{sh}) & \text{si} \quad \varepsilon < \varepsilon_{ct,eff} - \varepsilon_{sh} \\ \sigma_{cTS,eff}(\varepsilon + \varepsilon_{sh}) & \text{si} \quad \varepsilon_{ct,eff} - \varepsilon_{sh} \leq \varepsilon < \varepsilon_{ap,eff} - \varepsilon_{sh} \\ \frac{\sigma_{cTS,eff}(\varepsilon_{ap,eff})}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ap,eff}}\left(\varepsilon_y - (\varepsilon + \varepsilon_{sh})\right) & \text{si} \quad \varepsilon_{ap,eff} - \varepsilon_{sh} \leq \varepsilon < \varepsilon_y - \varepsilon_{sh} \\ 0 & \text{si} \quad \varepsilon \geq \varepsilon_y - \varepsilon_{sh} \end{cases} \tag{25}$$

con $\sigma_{cTS,eff}$ el modelo de tensorrigidez del hormigón dado por la Eq. (16) calculado con $n_{eff} = E_s/E_{c,eff}$ y $\beta = 0.5$.

4. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS DEL MODELO CON RESULTADOS EXPERIMENTALES

La bondad del modelo propuesto es evaluada comparando los resultados de deflexión obtenidos teóricamente empleando dicho modelo con los resultados de varias campañas experimentales encontradas en la literatura.

4.1. Deformación de elementos de hormigón armado en el tiempo

El cálculo de deformaciones de flexión a largo plazo de elementos de HA debe tener en cuenta cuatro efectos principales (a) la evolución de las fisuras, (b) la reducción de la tensorrigidez con el tiempo, (c) el incremento de curvatura debido a la fluencia del hormigón y (d) la limitación a la retracción que constituye el armado que, en caso de ser asimétrico, produce una curvatura adicional dependiente del tiempo [41].

La flecha teórica de una viga de HA sometida a flexión se ha calculado integrando la curvatura a lo largo del eje del elemento. La curvatura en cada sección puede obtenerse si se conocen, por un lado, el diagrama momento – curvatura ($M - \phi$) y, por otro, el diagrama de momentos flectores del elemento. El diagrama $M - \phi$ de una sección particular en un tiempo t se obtiene imponiendo el equilibrio de acciones (fuerzas y momentos) sobre la sección, para lo que es necesario conocer los diagramas tensión-deformación de acero y hormigón, tanto a tracción como a compresión. En lo que sigue, tensiones, deformaciones y fuerzas de compresión se consideran positivas. Así pues, el modelo de hormigón traccionado y fisurado teniendo en cuenta la tensorrigidez y los efectos de largo plazo debe ser ligeramente reformulado ya que en la Eq. (25) se había considerado que las tensiones y deformaciones de tracción eran positivas:

$$\sigma_{cTS,eff}(\varepsilon) = -\frac{\rho_{eff}}{2}\varepsilon E_s - \sqrt{\left(\frac{\rho_{eff}}{2}\varepsilon E_s\right)^2 + \beta f_{ct}^2\left(1 + n_{eff}\rho_{eff}\right)} \tag{26}$$

$$\sigma_{ct}(\varepsilon)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad \varepsilon \le -\varepsilon_y+\varepsilon_{sh}\\ \frac{\sigma_{cTS,eff}(\varepsilon_{ap,eff})}{(-\varepsilon_y-\varepsilon_{ap,eff})}\left(-\varepsilon_y-(\varepsilon-\varepsilon_{sh})\right) & \text{si} \quad -\varepsilon_y+\varepsilon_{sh}<\varepsilon\le\varepsilon_{ap,eff}+\varepsilon_{sh}\\ \sigma_{cTS,eff}(\varepsilon-\varepsilon_{sh}) & \text{si} \quad \varepsilon_{ap,eff}+\varepsilon_{sh}<\varepsilon\le-\varepsilon_{ct,eff}+\varepsilon_{sh}\\ \frac{-f_{ct}}{\varepsilon_{ct,eff}}(\varepsilon-\varepsilon_{sh}) & \text{si} \quad \varepsilon>-\varepsilon_{ct,eff}+\varepsilon_{sh}\end{cases} \tag{27}$$

con $\varepsilon_{ap,eff}<0$ obtenida a partir del equilibrio de un segmento de barra definido por una sección meda y una fisura en la que el hacer ha plastificado:

$$-A_s f_y = A_s E_s \varepsilon_{ap,eff} + A_{c,eff}\sigma_{cTS,eff}\left(\varepsilon_{ap,eff}\right) \rightarrow \varepsilon_{ap,eff} \tag{28}$$

con $\sigma_{cTS,eff}$ definido por la Eq. (26).

Consideremos la sección de HA rectangular como la mostrada en la Figura 7, asumiendo como válida la hipótesis de Bernoulli (las secciones planas permanecen planas tras la deformación) y que no se produce deslizamiento entre acero y hormigón, la deformación en una fibra cualquiera de la sección puede escribirse como:

$$\varepsilon\left(y,\varepsilon_{cg},\phi\right)=\varepsilon_{cg}+\phi\, y \tag{29}$$

En la Eq. (26) ε_{cg} es la deformación en el centro de gravedad de la sección bruta (no se considera la presencia de acero) e y es la coordenada vertical de la fibra con respecto a dicho centro de gravedad, Figura 7. Planteando el equilibrio en la sección transversal:

$$N=\int_{y_{\varepsilon_{ct}}}^{\frac{h}{2}}\sigma_c\,(\varepsilon)bdy+\int_{A_{c,eff}}\sigma_{ct}(\varepsilon)dA+\sum_j A_{\emptyset j}\sigma_s(\varepsilon) \tag{30}$$

$$M=\int_{y_{\varepsilon_{ct}}}^{\frac{h}{2}}\sigma_c\,(\varepsilon)ybdy+\int_{A_{c,eff}}\sigma_{ct}(\varepsilon)ydA+\sum_j A_{\emptyset j}\sigma_s(\varepsilon)\,y_j \tag{31}$$

donde $A_{\emptyset j}$ e y_j son el área y la coordenada vertical de la barra de armado j. El modelo tensión – deformación para el hormigón traccionado a aplicar al área eficaz a tracción, σ_{ct}, es el definido en la Eq. (27) y el del hormigón sin fisurar, σ_c, es el propuesto por EC2 debidamente afectado por la fluencia y la retracción. El modelo tensión-deformación del acero, σ_s, es el modelo bilineal propuesto por el EC2.

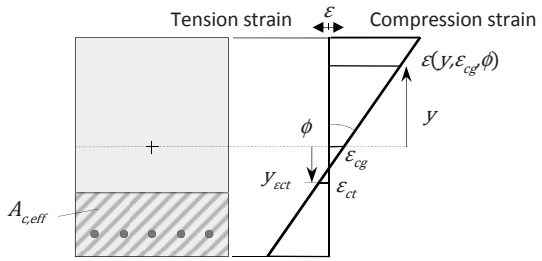


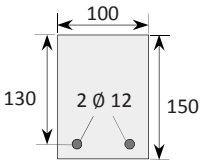
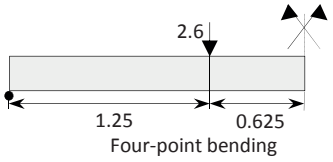
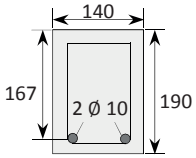
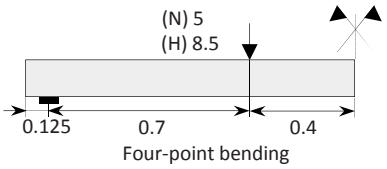
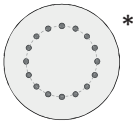
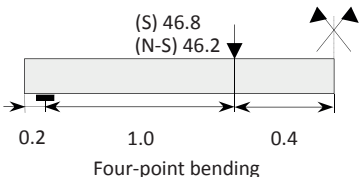
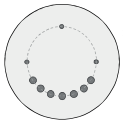
Figura 7. *Distribución de deformaciones en una sección rectangular de HA.*

La obtención del diagrama $M-\phi$ de una sección con unas características concretas se basa en un proceso iterativo: imponiendo el equilibrio de axiles, Eq. (30), para un valor de curvatura dado, $\phi=\phi_i$, la deformación del centro de gravedad de la sección, ε_{cg_i}, se halla imponiendo el equilibrio de axiles mediante el método de bisección. Una vez obtenido el valor de ε_{cg_i} para cada valor de ϕ_i, el momento flector se obtiene a partir de la Eq. (31).

4.2. Campañas experimentales

Las campañas empleadas en el análisis se corresponden con ensayos de deformación a largo plazo de distintos elementos de HA. Las campañas seleccionadas corresponden a ensayos de flexión en cuatro puntos y cubren tanto elementos con secciones transversales rectangulares como circulares. Los ratios momento flector aplicado – momento flector último (M_{max}/M_{ult}) y humedades relativas (HR) se resumen en la Tabla 1, en la que además se indican las correspondientes campañas experimentales así como las características principales de los elementos analizados.

Tabla 1. Campañas experimentales

Campaña experimental	Especímen	Características materiales	Sección transversal (cotas en mm)	Configuración del ensayo (cotas en mm, cargas en kN o kN/m)
Bakoss et al. [44]	1B2	f_c= 39 MPa M_{max}/M_{ult}=62% HR=44.5%		
Miàs et al. [45]	N-L1-S10	f_c= 27.7 MPa M_{max}/M_{ult}=62.5% HR=55%		
	H-L1-S10	f_c= 56 MPa M_{max}/M_{ult}=60.7% HR=54%		
Hernández-Montes et al. [40]	Symmetrical (S)	f_c= 58.1 MPa M_{max}/M_{ult}=33% HR=75%		
	Non-symmetrical (NS)	f_c= 42.7 MPa M_{max}/M_{ult}=34.8% HR=30%		

*Detalles de las secciones circulares en Hernández Montes et al. [40]

4.3. Discusión

En la Figura 8 se han representado los valores medidos de la flecha a mitad de vano obtenidos en cada en las campañas experimentales (extraídas de las referencias correspondientes indicadas en la Tabla

1) y el valor de flecha teórica estimada que ha sido obtenida mediante la integración de los diagramas $M - \phi$ calculados con los modelos analíticos anteriormente expuestos.

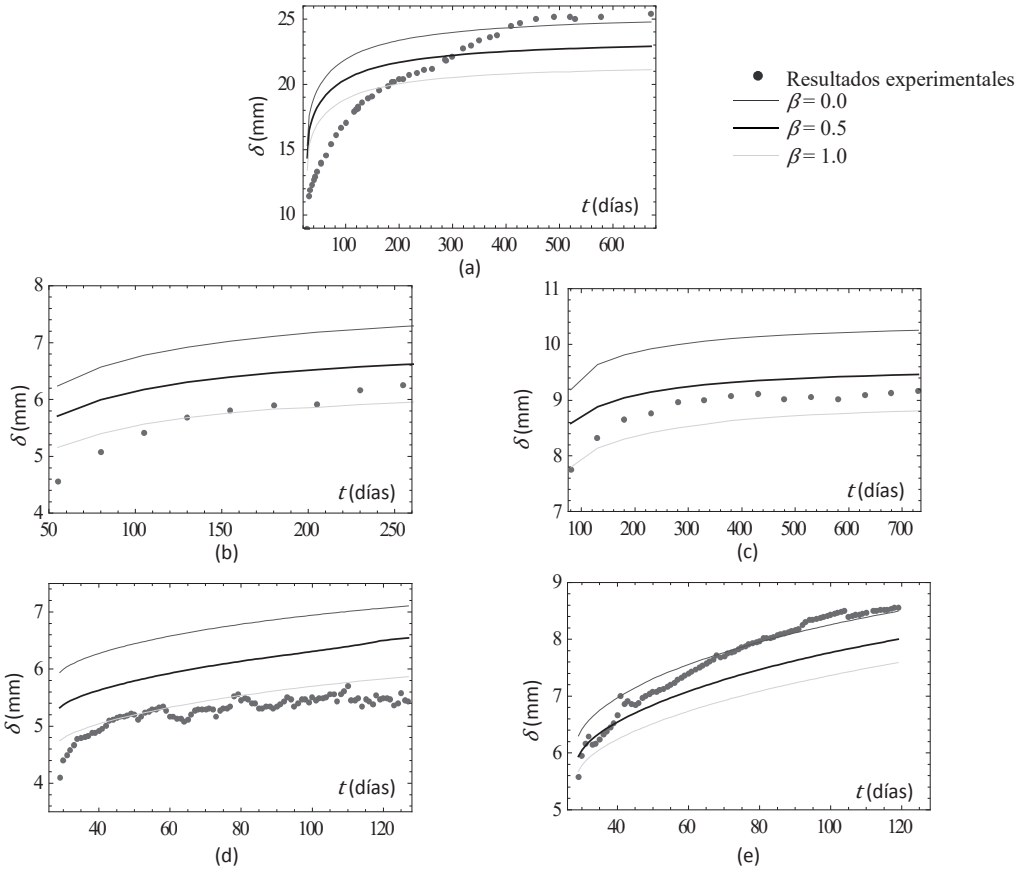


Figura 8. *Comparativa de resultados experimentales de flecha a mitad de vano frente a resultados obtenidos por integración de los diagramas calculados con los modelos expuestos para los diferentes especímenes detallados en la Tabla 1: (a) 1B2 en Bakoss et al.* [44]*; (b) N-L1-S10 y (c) H-L1-S10 en Miàs et al.* [45]*; (d) Pilote simétrico y (e) Pilote asimétrico en Hernández-Montes et al.* [40]*.*

En las gráficas de la Figura 8 se han presentado los valores de flecha obtenidos analíticamente considerando tres valores del parámetro β: β = 0.5, β = 1.0 y β = 0.0 (que corresponde a ausencia total de colaboración del hormigón a tracción por tensorrigidez).

La Figura 8 (a) corresponde al espécimen 1B2 ensayado en Bakoss et al. [44]. En esta figura se observa como la flecha experimental es inicialmente sobre estimada por el modelo teórico pero, a partir de aproximadamente la mitad del ensayo, la tendencia se invierte y la deflexión estimada en centro de luz es menor que la medida. Al final del ensayo ($t \approx$ 650 días) la flecha calculada analíticamente con β = 0.5 es un 9.73% menor que la flecha medida experimentalmente, aunque el resultado analítico más cercano al experimental es el calculado con β = 0.0, siendo un 2.36 % menor.

En el caso de los elementos ensayados por Miàs et al. [45], especimen N-L1-S10 (Figura 8 (b)) y especimen H-L1-S10 (Figura 8 (c)), la flecha registrada en los ensayos queda comprendida entre las curvas de β = 0.5 y β = 1.0. Las flechas al final de los ensayos calculadas mediante los métodos analíticos son un 5.55% y un 3.25% mayores que las realmente experimentadas por los elementos N-

L1-S10 (Figura 8 (b)) y H-L1-S10 (Figura 8 (c)), respectivamente, con el consiguiente margen de seguridad.

En el caso de los pilotes de HA ensayados en Hernández-Montes et al. [40], los resultados analíticos predicen de distinta forma los resultados experimentales. Así, en el caso del pilote simétrico, Figura 8 (d), los resultados analíticos predicen flechas mayores en el tiempo que las medidas. Al final del ensayo (t = 119 días), el resultado de flecha más cercano al experimental es el calculado con β = 1.0 (7.75% mayor que el valor medido).

La flecha en centro de luz del pilote asimétrico se ajusta bien a los valores estimados para el caso β = 1.0 (cargas instantáneas) aunque al final del ensayo los resultados analíticos considerando que el efecto de la tensorrigidez ha desaparecido (β = 0.0) son muy similares a los experimentales (ambos resultados difieren en un 0.68% al final del ensayo, t = 127 días).

Un aspecto importante que puede advertirse en las gráficas de la Figura 8 es la diferente tendencia mostrada por los resultados analíticos y los resultados experimentales. Salvo en la Figura 8 (c) correspondiente al elemento H-L1-S10 ensayado en Miàs et al. [45] y en la Figura 8 (d) correspondiente al elemento de sección circular con armado simétrico ensayado por Hernández-Montes et al. (β = 0.0), donde los resultados experimentales tienen una tendencia paralela a la de las curvas de resultados analíticos en todo el rango de tiempo analizado, los resultados experimentales muestran una tendencia creciente más pronunciada que los resultados analíticos, indicando que el fenómeno de la tensorrigidez se reduce progresivamente en el tiempo hasta llegar incluso a desaparecer. Este hecho sugiere que par que a el efecto de tensorrigidez sea adecuadamente modelizado por los modelos analíticos, sería conveniente que la expresión del parámetro β dependiera del tiempo.

5. CONCLUSIONES

El hormigón entre las fisuras contribuye en la rigidez del elemento de HA. Este fenómeno , conocido como tensorrigidez, afecta al cálculo de deformaciones en ELS. El EC2 presenta una formulación para cálculos en estado límite de servicio que tiene en cuenta este efecto. A partir de la expresión propuesta por el EC2 y la recogida en el CEB Design Manual on Cracking and Deformations, se deduce un modelo tensión – deformación para el hormigón traccionado en la zona que rodea las barras de armado de la sección del elemento de HA. Se presentan también los límites de dicha zona tanto para secciones rectangulares y para secciones circulares. Conocidos los modelos analíticos tensión – deformación para todos los materiales que constituyen la sección transvesal de un elemento de HA, se puede obtener un diagrama momento – curvatura planteando, primero y para una curvatura dada, el equilibrio de axiles para calcular la deformación longitudinal del centro de gravedad de la sección y, posteriormente, el momento flector correspondiente a cada curvatura. Sometido el elemento de HA a un caso de carga particular que induce un diagrama de momentos flectores determinado, la curvatura en cada sección se puede calcular al conocer el diagramas $M - \phi$. Finalmente, la curvatura se integra a lo largo del elemento para calcular la deflexión en cada sección.

Se han estudiado varios elementos procedentes de campañas experimentales publicadas para comparar los resultados medidos con los resultados analíticos. La predicción de la flecha a final de ensayo ha sido sobre estimada en unos casos y subestimada en otros, aunque nunca se ha superado un 10% de diferencia entre los resultados analíticos y experimentales. La tendencia creciente mostrada por los resultados experimentales en comparación con los resultados analíticos parece indicar que el parámetro β que tiene en cuenta la degradación de la tensorrigidez no debiera ser constante en el tiempo para poder predecir correctamente los resultados experimentales. No obstante, se precisarían un mayor número de ensayos para poder tener en cuenta el efecto de todos los fenómenos englobados por β (duración de las cargas, el deterioro de la adherencia entre acero y hormigón, fluencia a tracción, microfisuración debida a retracción) en su variación con el tiempo.

REFERENCES

[1] Wu, H.Q., Gilbert, R.I. (2008). An experimental study of tension stifening in reinforced concrete members under short-term and long-term loads. Sidney.

[2] Gilbert, R.I., Warner, R.F. (1978). Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs. *Journal of the Structural Division. 104(12), 1885–1900.*

[3] Floegl, H., Mang, H. (1982). Tension Stiffening Concept Based on Bond Slip. *Journal of the Structural Division. 108(12), 2681–2701.*

[4] Vecchio, F.J., Collins, M.P. (1986). The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear. *ACI Journal. 83(2), 219–231.*

[5] G. K. V. Prakhya, Morley, C.T. (1990). Tension-Stiffening and Moment-Curvature Relations of Reinforced Concrete Elements. *ACI Structural Journal. 87(5), 597–605.*

[6] Gupta, A.K., Maestrini, S.R. (1990). Tension Stiffness Model for Reinforced Concrete Bars. *Journal of Structural Engineering. 116(3), 769–790.*

[7] Massicotte, B., Elwi, A.E., MacGregor, J.G. (1990). Tension-Stiffening Model for Planar Reinforced Concrete Members. *Journal of Structural Engineering. 116(11), 3039–3058.*

[8] Belarbi, A., Hsu, T.T.C. (1994). Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened By Concrete. *ACI Structural Journal. 91(4), 465–474.*

[9] Hsu, T.T.C., Zhang, L.X. (1996). Tension Stiffening in Reinforced Concrete Membrane Elements. *ACI Structural Journal. 93(1), 108–115.*

[10] Choi, C.-K., Cheung, S.-H. (1996). Tension stiffening model for planar reinforced concrete members. *Computers & Structures. 59(1), 179–190.*

[11] Kaklauskas, G., Ghaboussi, J. (2001). Stress-Strain Relations for Cracked Tensile Concrete from RC Beam Tests. *Journal of Structural Engineering. 127(1), 64–73.*

[12] Kwak, H.-G., Song, J.-Y. (2002). Cracking analysis of RC members using polynomial strain distribution function. *Engineering Structures. 24(4), 455–468.*

[13] Torres, L., López-Almansa, F., Bozzo, L.M. (2004). Tension-Stiffening Model for Cracked Flexural Concrete Members. *Journal of Structural Engineering. 130(8), 1242–1251.*

[14] Bentz, E.C. (2005). Explaining the Riddle of Tension Stiffening Models for Shear Panel Experiments. *Journal of Structural Engineering. 131(9), 1422–1425.*

[15] Gilbert, R.I. (2007). Tension Stiffening in Lightly Reinforced Concrete Slabs. *Journal of Structural Engineering. 133(6), 899–903.*

[16] Yankelevsky, D.Z., Jabareen, M., Abutbul, A.D. (2008). One-dimensional analysis of tension stiffening in reinforced concrete with discrete cracks. *Engineering Structures. 30(1), 206–217.*

[17] Stramandinoli, R.S.B., La Rovere, H.L. (2008). An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members. *Engineering Structures. 30(7), 2069–2080.*

[18] Wu, H.Q., Gilbert, R.I. (2009). Modeling short-term tension stiffening in reinforced concrete prisms using a continuum-based finite element model. *Engineering Structures. 31(10), 2380–2391.*

[19] Ng, P.L., Lam, J.Y.K., Kwan, a. K.H. (2010). Tension stiffening in concrete beams. Part 1: FE analysis. *Proceedings of the ICE - Structures and Buildings. 163(1), 19–28.*

[20] Kaklauskas, G., Gribniak, V., Salys, D., Sokolov, A., Meskenas, A. (2011). Tension-Stiffening Model Attributed to Tensile Reinforcement for Concrete Flexural Members. *Procedia Engineering. 14, 1433–1438.*

[21] Gribniak, V., Mang, H.A., Kupliauskas, R., Kaklauskas, G. (2015). Stochastic Tension-Stiffening Approach for the Solution of Serviceability Problems in Reinforced Concrete: Constitutive Modeling. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. 30(9), 684–702.*

[22] Gribniak, V., Kaklauskas, G., Juozapaitis, A., Kliukas, R., Meskenas, A. (2017). Efficient technique for constitutive analysis of reinforced concrete flexural members. *Inverse Problems in Science and Engineering. 25(1), 27–40.*

[23] European Committee for Standardization. (2004). Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1–1: General rules and rules for buildings UNE-EN 1992-1-1, p. 227. Bruselas: European Committee for Standardization.

[24] Zanuy, C. (2010). Analytical approach to factors affecting long-term tension stiffening. *Magazine of Concrete Research. 62(12), 869–878.*

[25] Gilbert, R.I. (2013). Time-dependent stiffness of cracked reinforced and composite concrete slabs. Procedia Engineering. 57, 19–34.

[26] CEB. (1985). CEB Design Manual on Cracking and Deformations, Bulletin d'information 158, p. 250. Beeby AW, Favre R, Koprna M, Jaccoud JP, editors. Paris: Comite Euro-International du Beton.

[27] Rao, P.S. 1966. Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte. Berlin

[28] Hernández-Montes, E., Cesetti, A., Gil-Martín, L.M.M. (2013). Discussion of "An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members", by Renata S.B. Stramandinoli, Henriette L. La Rovere. *Engineering Structures. 48, 763–764.*

[29] Manfredi, G., Pecce, M. (1998). A refined R.C. beam element including bond–slip relationship for the analysis of continuous beams. *Computers & Structures. 69(1), 53–62.*

[30] Bentz, E.C. (2000). Sectional Analysis of Reinforced Concrete Members. University of Toronto;

[31] Castel, A., Vidal, T., François, R. (2006). Effective Tension Active Cross-Section of Reinforced Concrete Beams After Cracking. *Materials and Structures. 39(1), 115–126.*

[32] CEB. 1978. CEB model code for concrete structures: International recommendation. 3rd ed. London: Cement and Concrete Association.

[33] Hernández-Díaz, A.M., Gil-Martín, L.M. (2012). Analysis of the equal principal angles assumption

in the shear design of reinforced concrete members. *Engineering Structures. 42, 95–105.*

[34] Commitee for The Model Code 1990. (1993). CEB Bulletin No. 213/214: CEB-FIP Model Code 90, p. 460. Lausanne: Tomas Telford.

[35] FIB. (2012). Model Code 2010. Model Code 2010 – Final draft. vol. 1. Fib Bulletin No. 65. Lausanne: International Federation for Structural Concrete.

[36] Gil-Martín, L.M., Carbonell-Márquez, J.F., Hernández-Montes, E. (2015). Upper bound to the effective area of concrete in tension. In: 3rd International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering (pp. 767–774). Sevilla.

[37] Wiese, H., Curbach, M., Speck, K., Weiland, S., Eckfeldt, L., Hampel, T. (2004). *Rißbreitennachweis für Kreisquerschnitte. Beton- und Stahlbetonbau. 99(4), 253–261.*

[38] Carbonell-Márquez, J.F., Gil-Martín, L.M., Fernández-Ruíz, M.A., Hernández-Montes, E. (2014). Effective area in tension stiffening of reinforced concrete piles subjected to flexure according to Eurocode 2. *Engineering Structures. 76, 62–74.*

[39] Gil-Martín, L.M., Carbonell-Márquez, J.F., Fernández-Ruíz, M.A., Hernández-Montes, E. (2016). Theoretical and experimental short-term behavior of non-symmetrical wall pile retaining systems. *Engineering Structures. 112, 172–183.*

[40] Hernández-Montes, E., Fernández-Ruiz, M.A., Carbonell-Márquez, J.F., Gil-Martín, L.M. (2017). Theoretical and experimental in-service long-term response of symmetrically and non-symmetrically reinforced concrete piles. *Archives of Civil and Mechanical Engineering. 17, 433–445.*

[41] Gilbert, R.I. (2008). Calculation of Long-Term Deflection. CIA Seminar - Control of Long-Term Deflection. p. 22.

[42] Lee, J. Il, Lee, Y.H., Scanlon, A. (2005). Long-Term Tension-Stiffening Effects in Concrete. Paper by Richard H. Scott and Andrew W. Beeby Discussion by Je Il Lee, Young Hak Lee, and Andrew Scanlon. *ACI Structural Journal. 904–905.*

[43] Gilbert, R.I., Ranzi, G. (2011). Time-Dependent Behaviour of Concrete Structures, p. 447. New York: Spon Press.

[44] Bakoss, S.L., Gilbert, R.I., Faulkes, K.A., Pulmano, V.A. (1982). Long-term deflections of reinforced concrete beams*. Magazine of Concrete Research. 34, 203–212.*

[45] Miàs, C., Torres, L., Turon, A., Sharaky, I.A. (2013). Effect of material properties on long-term deflections of GFRP reinforced concrete beams. *Construction and Building Materials. 41, 99–108.*

Methodology for the dynamic analysis of building subjected to seismic actions, incorporating the effect of non-structural elements

García Pastor, Mª Carmen[1]; Gómez Yábar, Amaya[2]

ABSTRACT

It is common practice to consider the enclosures and partitions of buildings as 'non-structural' elements and, consequently, neglect the rigidity and resistance they provide in the analysis of the structure against gravitational loads. However, this simplification is not always on the safe side when it comes to analysing the behaviour of the structure against horizontal earthquake loads. The vast majority of seismic standards establish that it is necessary to consider the influence of non-structural construction elements that can develop sufficient rigidity and resistance to modify the conditions of the structure, and that they must be taken into account when generating the structural analysis model. For this reason, CYPE Ingenieros S.A., in collaboration with the International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), has developed a software tool that incorporates a model and a calculation methodology that allows us to consider the effects of the '*frame-masonry wall*' interaction in seismic situations.

Keywords: seismic, building, partitions, interaction, non-structural element, level of damage.

1. INTRODUCCIÓN

En la generación del modelo de un edificio para su análisis estructural, suele despreciarse la rigidez y resistencia aportada por cerramientos y particiones, ya que son considerados elementos "no estructurales". La forma usual de proceder, es incluirlos como cargas aplicadas en el modelo, no como partes del mismo. Pero, tal como se verá en los ejemplos planteados, esta simplificación no siempre queda del lado de la seguridad cuando se trata de analizar el comportamiento de la estructura frente a acciones sísmicas.

Cuando un tabique no ha sido aislado del pórtico que lo enmarca, ante cargas horizontales, se produce la interacción de ambos sistemas. Este efecto incrementa la rigidez lateral del pórtico y puede generar diferentes problemas como torsión en el edificio, efecto de planta blanda o incremento de las fuerzas sísmicas.

La distribución en planta no uniforme de los elementos de fábrica, genera una traslación del centro de rigidez hacia la zona donde están concentrados los tabiques, dando lugar a efectos de torsión en el edificio (Fardis et al. [1]).

[1] *Departamento I+D+I. Cype Ingenieros (ESPAÑA). imasd@cype.com (Corresponding author)*
[2] *Departamento I+D+I. Cype Ingenieros (ESPAÑA). imasd@cype.com*

Cuando se producen cambios de rigidez bruscos entre las plantas de un edificio, las fuerzas horizontales correspondientes a la acción sísmica tienen mayor incidencia en los pilares de las plantas con menor rigidez. Si estos no están convenientemente diseñados, los esfuerzos pueden provocar su rotura frágil, lo que haría peligrar la estabilidad del edificio pudiendo llevarlo incluso al colapso. El problema de "planta blanda" se produce, generalmente, en edificios donde la planta baja (habitualmente, con altura superior al resto) está destinada a uso comercial o garajes y, por tanto, está exento de tabiques, mientras que los pisos superiores están destinados a viviendas con gran cantidad de particiones. Aún en el caso de que la planta inferior tuviese una rigidez análoga a la de las superiores, durante los primeros instantes del sismo se produce la rotura de los tabiques de las zonas más bajas del edificio, lo que provoca modificaciones bruscas de rigidez y por tanto una irregularidad en altura similar a la anteriormente descrita. (Negro et al. [2], Álvarez et al. [3])

El anteriormente mencionado incremento de la fuerza sísmica en las estructuras aporticadas se debe a que los tabiques rigidizan los pórticos, disminuyendo su periodo natural de vibrar, con lo cual, la estructura podría ingresar en la meseta del espectro sísmico, aumentando el coeficiente sísmico y por ende, la fuerza sísmica (Hashemi et al. [4]).

La gran mayoría de normas sísmicas establecen que es necesario considerar la influencia de los elementos constructivos no estructurales que pueden desarrollar rigidez y resistencia suficientes para alterar las condiciones de la estructura, teniéndolos en cuenta para la confección del modelo de análisis estructural. Por ello, la empresa CYPE Ingenieros S.A., en colaboración con el Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE), ha desarrollado una herramienta informática que incorpora un modelo de análisis estructural que permite tener en cuenta la influencia de la fábrica en el comportamiento de los pórticos de hormigón armado, e incorporar la fractura progresiva de la misma.

A continuación se describen, brevemente, las bases de la metodología de cálculo y el modelo de análisis desarrollados, y se muestran los resultados de su aplicación para el análisis de algunos casos de estructuras de edificación concretas.

2. METODOLOGÍA

El objetivo del modelo es asegurar una buena representación del comportamiento estructural del pórtico con muros de fábrica en situación sísmica, teniendo siempre presente que dicho modelo debe ser incorporado en un programa de análisis estructural con unos tiempos de cálculo razonables.

El modelo computacional propuesto simplifica el problema de análisis no lineal, resolviéndolo mediante una técnica iterativa de análisis lineal a trozos, siguiendo un proceso similar al que se utiliza en mecánica de fractura lineal (MFL).

2.1. Modelo de análisis

Se propone una formulación simplificada apropiada para calcular el comportamiento a fuerzas horizontales de una estructura porticada cuyas aberturas están cerradas con fábrica, mediante un

modelo que permita realizar un análisis equivalente en un tiempo reducido de cálculo. El objetivo fundamental es que la estructura equivalente tenga una capacidad (resistencia, rigidez y ductilidad) similar a la de la estructura real. Para conseguir esta equivalencia, se introducen en la estructura unas barras diagonales cuya rigidez y resistencia desarrollen una fuerza que controle el movimiento horizontal del pórtico, de la misma manera que lo haría la fábrica confinada en el pórtico real (Fig. 1).

Estas barras diagonales, del mismo modo que la fábrica, no trabajan a tracción pues su contribución es casi nula. Además, su rigidez en la dirección perpendicular al plano de la tabiquería es considerada nula, también.

Las características geométricas de la diagonal equivalente (Fig. 2) se determinan utilizando, inicialmente, las formulaciones propuestas por Liauw-Kwan [5] y Stafford [6][7], y, en una segunda fase, se ajustan los resultados a la experimentación, incluyendo en la formulación la rigidez al movimiento horizontal (capacidad cortante) del muro, propuesta por el CIMNE.

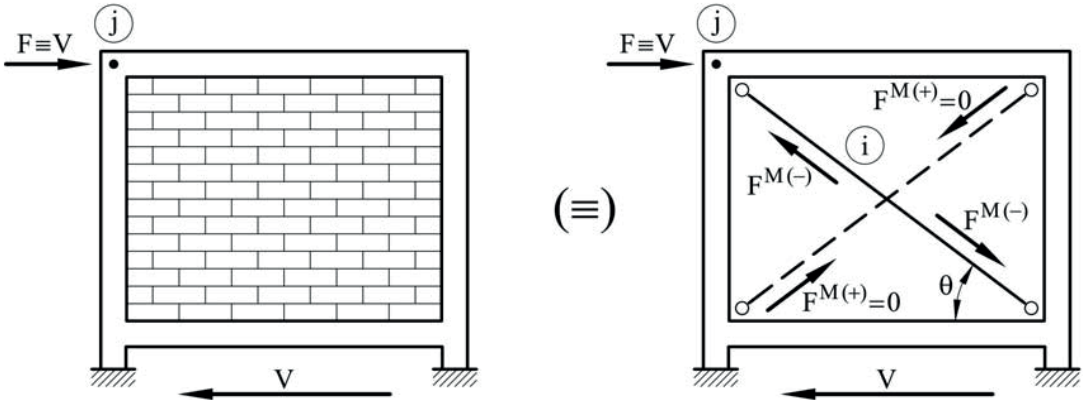


Figura 1. *Representación simplificada del pórtico con panel de fábrica.*

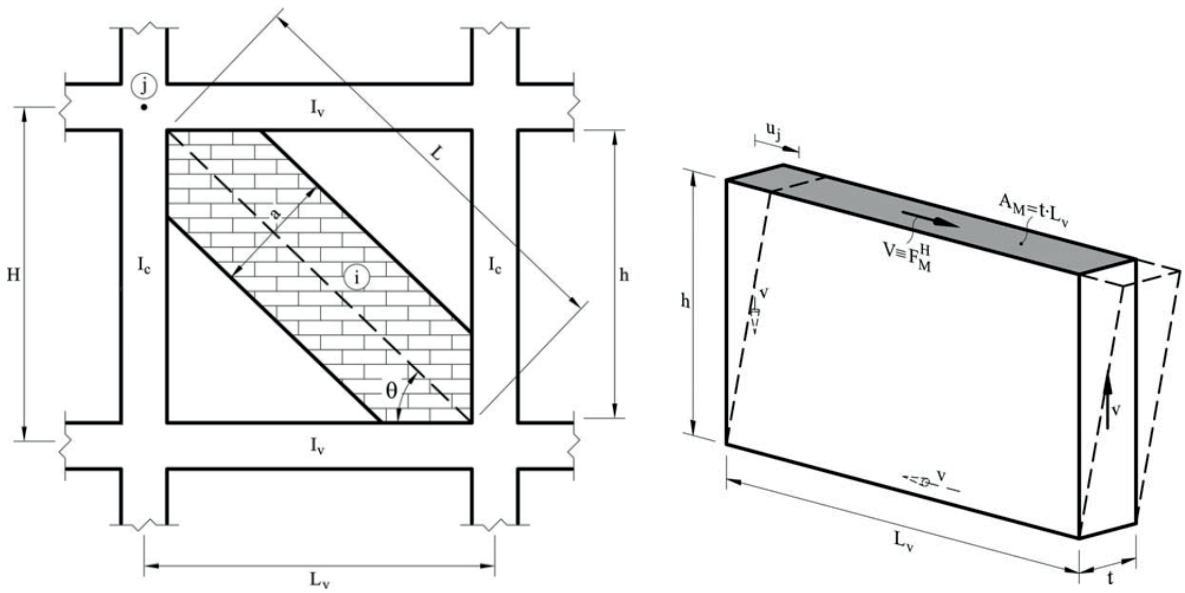


Figura 2. *(a)Representación de la diagonal de fábrica contenida en el pórtico; (b) Hipótesis de deformación en su plano de un muro de fábrica.*

La determinación de las propiedades mecánicas ortótropas de la fábrica se basa en un método de homogeneización que se describe con detalle por López et al. [8] y Quinteros et al. [9], así como en la formulación propuesta por diferentes normativas para ello (Eurocódigo [10], Código Técnico de la Edificación [11] - España, Normas Técnicas de la Construcción [12] - México). Además, estas barras tendrán la característica de modificar evolutivamente su capacidad estructural según la resistencia residual de la fábrica real, en función del nivel de daño alcanzado en la misma (Oliver et al. [13], Oller et al. [14][15][16]). Es decir, su capacidad de resistir a esfuerzos axiles de compresión dependerá de su resistencia límite, en este caso condicionada por una variable de daño local *'d'* que evolucionará en función del nivel de desplazamiento relativo entre pisos (Fig. 3).

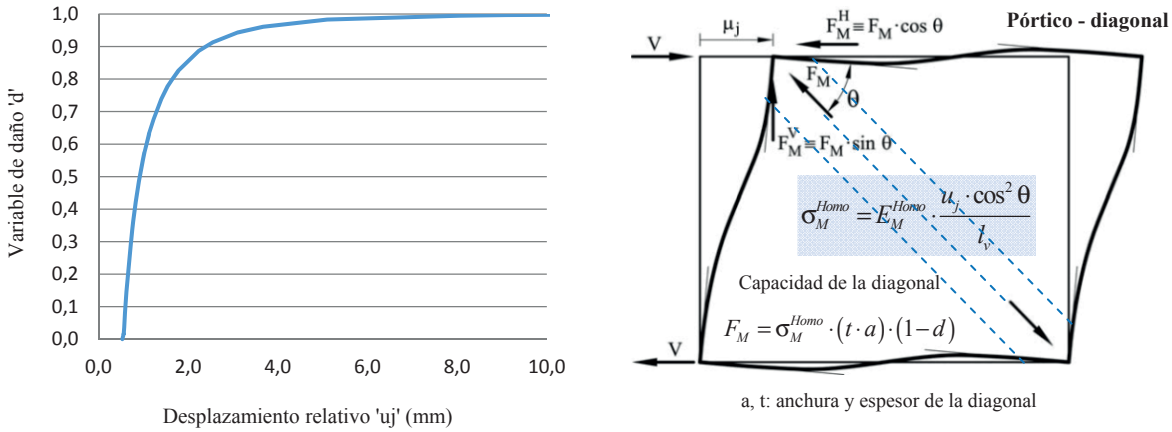


Figura 3. *(a)Evolución de la variable de daño 'd' vs 'uj'; (b) Capacidad de la diagonal de fábrica.*

2.2. Metodología de cálculo

La metodología propuesta consiste en la resolución de varios modelos de vibración (Fig. 4), correspondientes a diferentes estados de la tabiquería. La resolución de un problema no lineal de fractura se aborda como una solución sucesiva de distintos problemas lineales (evolutivos) que corresponden a sucesivos instantes del problema no lineal. La respuesta frente a la acción sísmica de la estructura, para cada uno de los modelos de vibración considerados, se obtiene mediante un análisis modal espectral, suponiendo un comportamiento elástico lineal de los materiales, y teniendo en cuenta la rigidez aportada por los elementos constructivos, que va disminuyendo de forma progresiva en función del nivel de daño.

De este modo es posible estimar de forma suficientemente precisa el comportamiento real del edificio durante un sismo, ya que se generan y resuelven varios modelos de cálculo lineales que cubren las distintas situaciones que se pueden llegar a producir en la realidad.

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

La metodología expuesta se incorpora a una herramienta de software, con el fin de facilitar el análisis de estructuras de edificación reales. A continuación se presentan los resultados obtenidos para dos casos concretos: en el primero se puede observar el efecto producido por la existencia de una planta

diáfana (efecto "soft storey" o planta blanda), mientras que en el segundo se presenta un caso de evolución de la rigidez de la estructura por rotura de la fábrica durante un sismo.

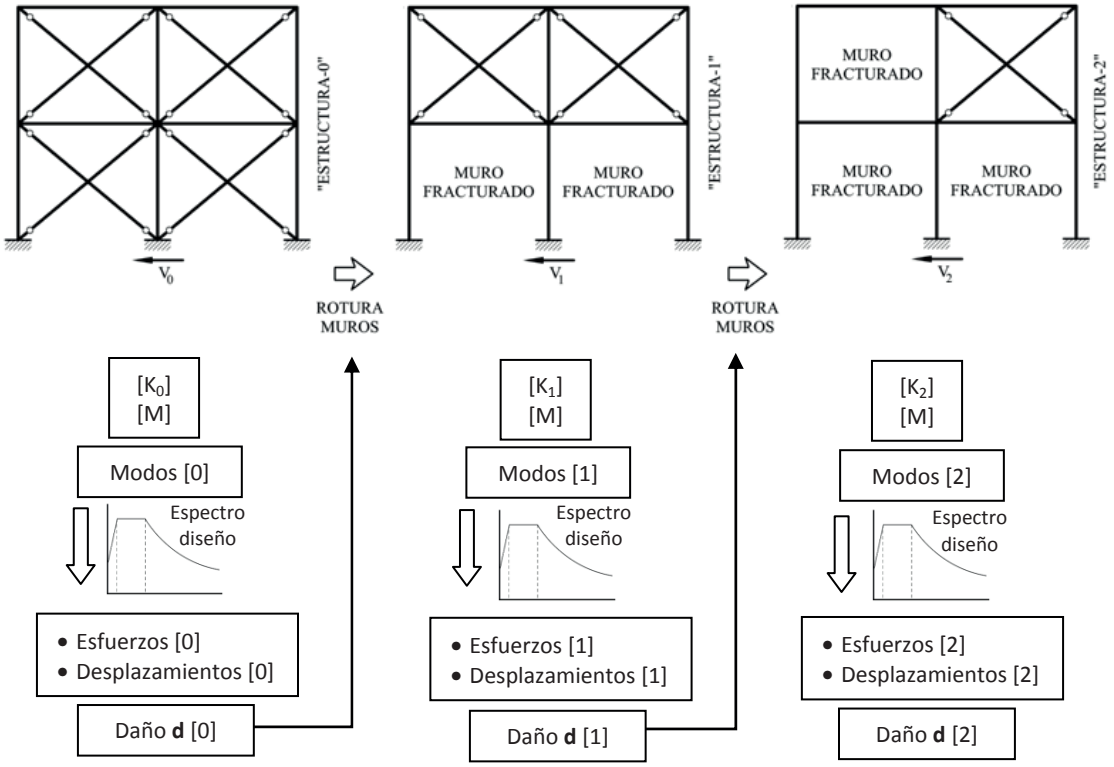


Figura 4. *Representación esquemática del cálculo evolutivo.*

La estructura analizada (Fig. 5), en ambos casos, es un edificio de hormigón armado de 7 niveles (6 + casetón), constituido por pórticos con luces que oscilan entre los 3 y 6 m y por forjados de losa maciza de 25 cm de espesor. Las vigas son descolgadas, de sección 30x50 cm. La altura de planta es de 3,10m, excepto para la planta baja, cuya altura es de 4,00m.

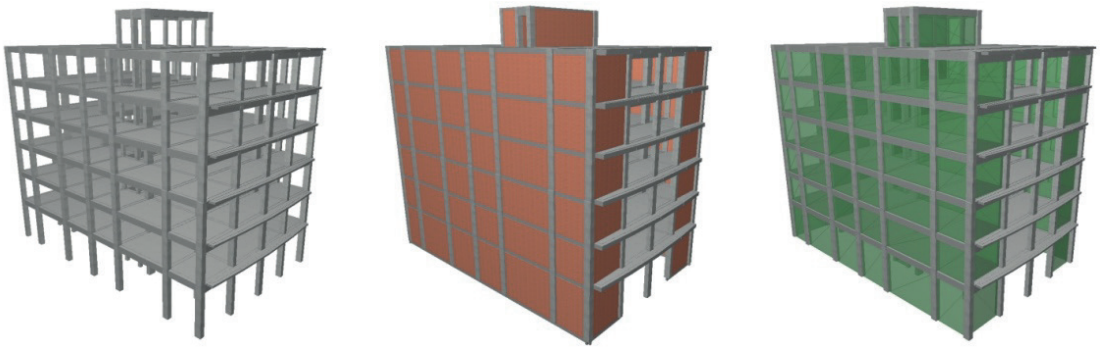


Figura 5. *(a) Estructura; (b) Distribución de tabiques y cerramientos; (c) Elementos constructivos.*

Se considera la influencia de los elementos constructivos no estructurales mediante la introducción de muros de fábrica de 12 cm de espesor, formados por piezas de ladrillo cerámico perforado de

resistencia 20MPa y mortero M10. La herramienta genera las diagonales de fábrica equivalentes (Fig. 6) a partir de la definición de datos básicos (geometría y posición, módulo de elasticidad y resistencia homogeneizados) para, posteriormente, generar y resolver los modelos de análisis correspondientes según la metodología expuesta.

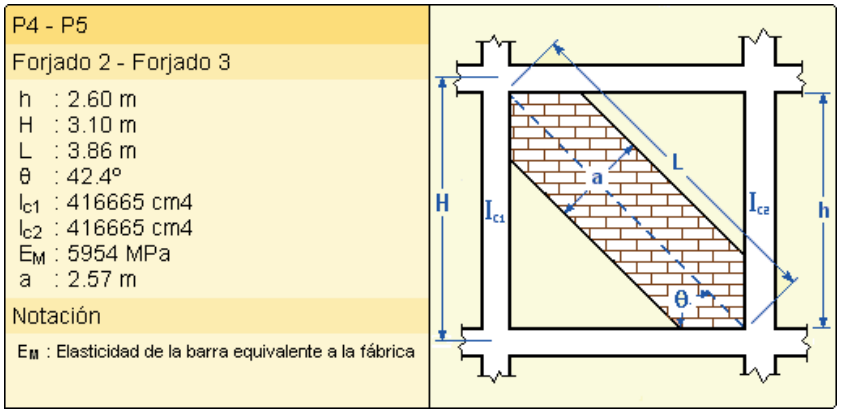


Figura 6. *Datos de la diagonal equivalente generada.*

3.1. Caso I: planta baja diáfana

Para este caso se ha introducido una distribución uniforme en altura de tabiques en todas las plantas, salvo en la planta baja donde no se ha introducido ninguno.

En la Fig. 7 se puede apreciar la diferencia de comportamiento de la estructura al incluir los muros en el análisis. El "Estado 0" (a), representa la deformada del edificio para el modo fundamental, con la hipótesis habitual de no considerar ningún elemento constructivo. La deformada del "Estado PB" (b), por su parte, sí incluye el efecto de los tabiques y, por ello, el valor de los desplazamientos es muy inferior al obtenido en el "Estado 0".

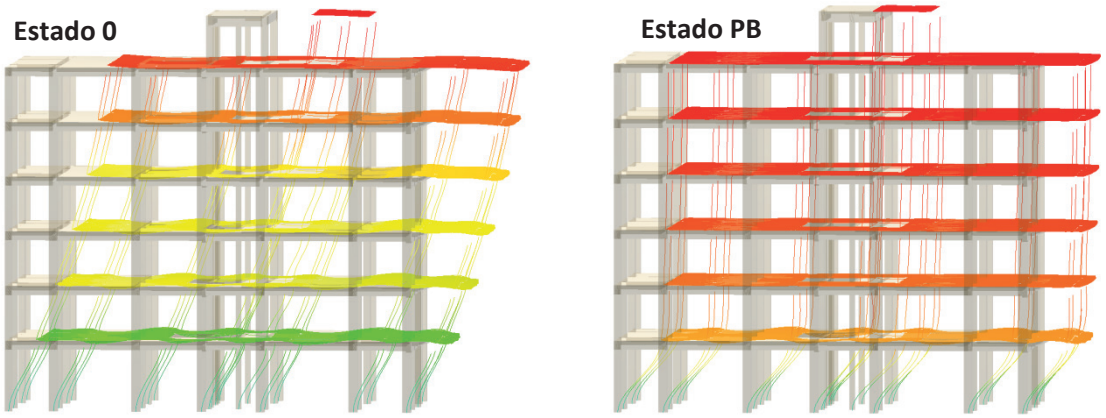


Figura 7. *Deformada de la estructura. (a) Sin tabiquería; (b) Con tabiquería – planta baja diáfana.*

Los periodos correspondientes a las frecuencias propias de vibración de la estructura, también son diferentes. En la Fig. 8 se representa sobre el espectro de diseño, en color azul claro, el rango de los periodos para los distintos modos de vibración de la estructura. Se remarca mediante una línea de trazo grueso el periodo correspondiente al modo fundamental que, para el caso de la estructura sin tabiquería, es de 0.773s mientras que, para la estructura con planta baja diáfana, es de 0.481s. Esto hace que el valor de la ordenada en el espectro sea más de 1,5 veces mayor en (b): Sd(g) = 0.039 para el caso de piso diáfano, frente a Sd(g) = 0.024 para la estructura desnuda.

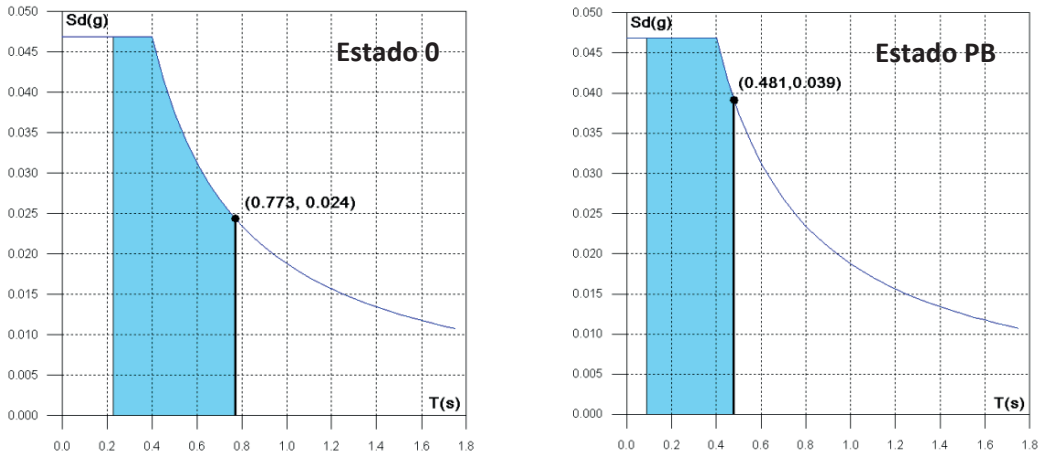


Figura 8. *Periodos modales. (a) Sin tabiquería; (b) Con tabiquería – planta baja diáfana*

En la Fig. 9 se representa gráficamente el sumatorio de los esfuerzos cortantes debidos a la acción sísmica en la base de los pilares para cada planta. Dichos esfuerzos se han obtenido por combinación de los resultados de los diferentes modos con el método CQC.

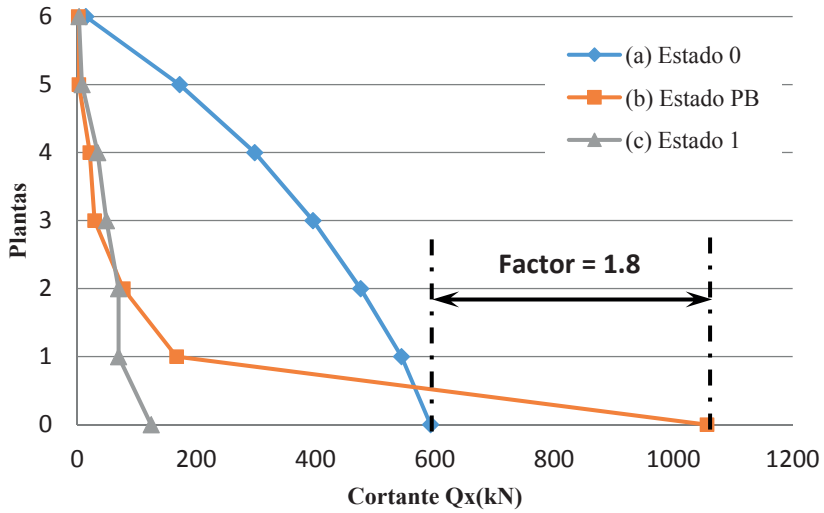


Figura 9. *Cortante Qx por planta.*

Como puede observarse en la gráfica, en la base del edificio, el cortante total que se obtiene como resultado tras considerar el efecto de la planta diáfana (b), es prácticamente el doble (1,8 veces) que el que se obtiene sin considerar el efecto de la tabiquería (a). En el resto de las plantas, sin embargo, se obtienen esfuerzos más desfavorables al considerar la estructura desnuda. El Estado 1 (c) representado, corresponde a los resultados de la estructura con cerramientos en todas las plantas. El

cortante resistido por los pilares es menor, ya que también se reparte entre los elementos de fábrica considerados.

3.2. Caso II: rotura progresiva de cerramientos por efecto de la acción sísmica

Se ha definido una distribución uniforme de cerramientos en todas las plantas, incluido la planta baja. En este caso, se muestra la evolución del comportamiento de la estructura durante un sismo debido a la degradación y rotura progresiva de la fábrica.

El nivel de daño es un parámetro representativo del estado de fractura del muro. Su valor es variable entre 0 (el muro está intacto) y 1 (completamente fracturado), y depende del desplazamiento relativo entre plantas en la dirección del muro. En el ejemplo calculado, se analizan 6 estados, además del Estado 0, que se corresponde con el de la estructura sin elementos constructivos. El Estado 1 corresponde a la estructura con cerramientos intactos en todas las plantas. En el Estado 6 (último estado generado, en el que se estabiliza el nivel de daño) la fábrica de las plantas inferiores está fracturada. El resto son estados intermedios en los que se ha ido produciendo la fisuración progresiva de los muros dispuestos. En la *Tabla 1* se muestra la evolución del nivel de daño en cada estado obtenido, para uno de los muros definidos.

Tabla 1. Nivel de daño.

Nivel de daño	Estado 1	Estado 2	Estado 3	Estado 4	Estado 5	Estado 6
Piso 6 - Piso 7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Piso 5 - Piso 6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Piso 4 - Piso 5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Piso 3 - Piso 4	0,16	0,41	0,41	0,41	0,41	0,41
Piso 2 - Piso 3	0,37	0,69	0,80	0,87	0,92	0,94
Piso 1 - Piso 2	0,50	0,85	0,95	0,98	0,99	0,99
Cim. - Piso 1	0,82	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00

Los resultados de la *Tabla 1* se obtienen según el proceso que se expone a continuación (véase Fig.4). Se lanza un primer cálculo modal espectral, incluyendo, en la rigidez de la estructura, la rigidez aportada por las fábricas totalmente intactas (Estado 1). Este análisis modal provoca unos desplazamientos en la estructura, y por tanto un desplazamiento relativo entre la cabeza y el pie de cada muro de fábrica. Dicho desplazamiento relativo se corresponde con un nivel de daño 'd' en el elemento (Fig.3(a)). Este parámetro de daño, para un determinado muro y para cada planta en altura por las que se extiende, es el que se muestra en la columna 'Estado 1' de la *Tabla 1*.

Tras este cálculo, se conoce el daño 'd' sufrido por cada muro. La capacidad de la diagonal equivalente (F_M) del muro dañado se calcula según la formulación de la figura 3(b). Se lanza un segundo cálculo modal espectral incluyendo, en la rigidez de la estructura, la rigidez aportada por las fábricas dañadas en el primer cálculo (Estado 2). Este análisis modal provoca unos desplazamientos en la estructura, un desplazamiento relativo entre la cabeza y el pie de cada muro de fábrica y un nivel de daño 'd' en el

elemento, asociado a dicho desplazamiento relativo. Este parámetro para el muro de estudio y para cada planta por la que se extiende, se muestra en la columna 'Estado 2' de la *Tabla 1*.

Este proceso se repite de forma sucesiva hasta que el valor del parámetro de daño de todos los muros de la estructura se estabiliza (Estado 6). Por cada muro de mampostería de la estructura se tiene una tabla análoga a la *Tabla 1*. Los diferentes estados y cálculos encadenados son generados de forma automática por el programa CYPECAD en el que se ha implementado la metodología expuesta.

De los resultados se deduce que, en un primer instante, la fábrica comienza a fisurarse en las plantas inferiores, produciendo una disminución de la rigidez en esta zona y, por ello, un incremento de los desplazamientos que provoca mayores roturas. En los instantes siguientes, se produce la rotura total de los cerramientos de la planta baja (daño 1,00) y la fisuración progresiva en orden ascendente de los tabiques en los siguientes niveles, mientras que la fábrica de los pisos superiores sufre poca o ninguna fisuración.

Los resultados del modelo de cálculo propuesto reflejan de forma fiel los daños que habitualmente sufren los edificios en sismos reales.

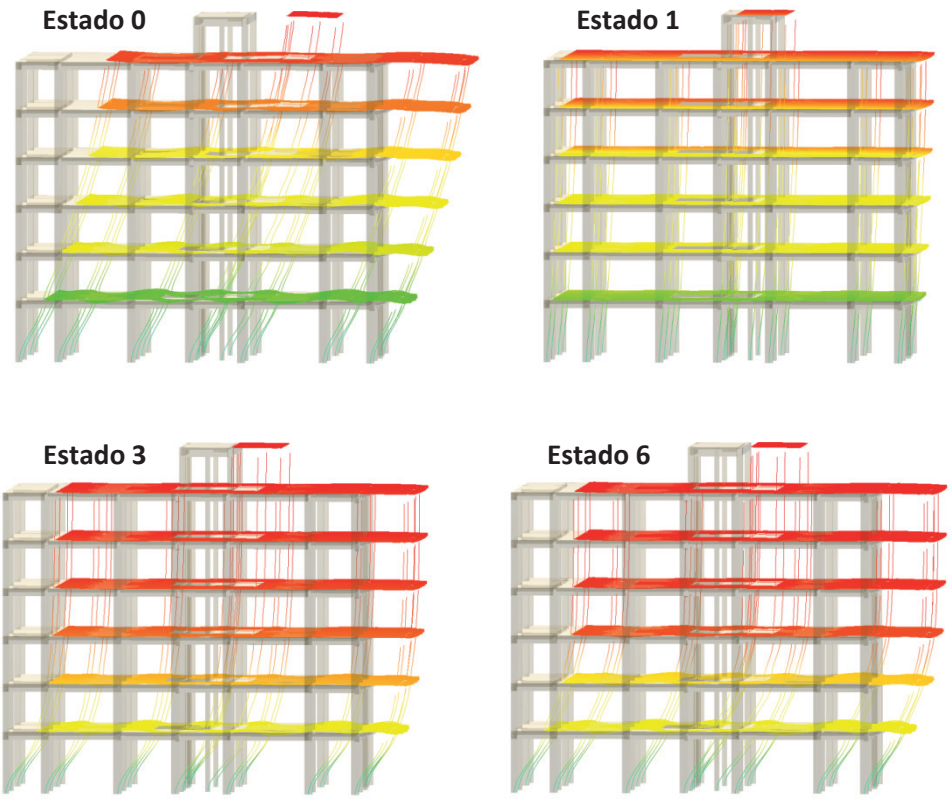


Figura 10. *Deformada de la estructura. (a) Sin tabiquería; (b) Con tabiquería; (c) Estado intermedio 3 (tabiquería fisurada); (d) Estado intermedio 6 (tabiquería fisurada).*

A medida que la capacidad resistente de la fábrica va disminuyendo debido a la fractura progresiva, se produce un aumento en los valores de los desplazamientos. En la Fig. 10 se muestran las deformadas del edificio para el modo fundamental de diferentes estados. El Estado 0 no considera ningún

elemento constructivo; el Estado 1 considera el efecto de los tabiques intactos; el resto de estados tienen en cuenta la influencia de la fábrica para diferentes niveles de fisuración, y de todos ellos, se representan los estados 3 y 6, que se corresponden con el máximo cortante en columnas en las plantas baja y primera, respectivamente

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, en la Fig. 11 se representa gráficamente el sumatorio de los esfuerzos cortantes debido a la acción sísmica en la base de los pilares para cada planta. Para las plantas baja y primera, los esfuerzos que se producen en los estados 3 a 6 (*Tabla 2*) son superiores a los que se obtendrían al no incluir los tabiques en el modelo (Estado 0).

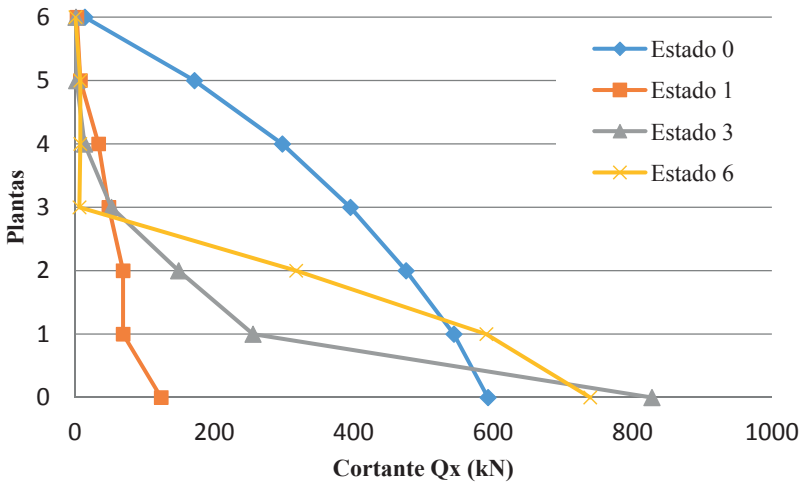


Figura 11. *Cortante Qx por planta.*

Tabla 2. Cortante Qx por planta.

Cortante Qx (kN)	Estado 0	Estado 1	Estado 2	Estado 3	Estado 4	Estado 5	Estado 6
P6 - P7	14,234	2,873	2,598	1,457	1,078	0,895	0,807
P5 - P6	171,460	7,962	2,643	2,507	5,038	6,720	7,712
P4 - P5	297,594	34,063	30,266	13,740	9,167	7,973	7,754
P3 - P4	395,323	48,728	61,305	52,421	35,122	18,811	6,467
P2 - P3	475,143	69,091	122,715	148,858	180,846	247,457	317,398
P1 - P2	543,807	69,184	110,942	255,491	478,456	573,390	**590,252**
Cim. - P1	592,599	123,832	511,703	**827,824**	797,696	757,932	739,372

4. CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos se puede concluir que el modelo de cálculo propuesto consigue una buena representación del comportamiento real de las estructuras de edificación en situación sísmica. Gracias a la herramienta informática desarrollada, su aplicación es suficientemente simple y se puede incorporar al diseño de estructuras en edificios comunes de forma sencilla.

Queda patente la importancia que tiene considerar el efecto de la fábrica en el caso de que exista alguna planta diáfana, ya que se producen incrementos importantes en los esfuerzos de los pilares en dicha planta respecto a los que se obtendrían con el modelo de la estructura desnuda.

Para cubrir este efecto, algunas normativas sísmicas proponen que, en caso de no realizar un cálculo más exacto, los esfuerzos se multipliquen por un factor comprendido entre 1.5 y 2.5. Estos valores se corresponden con los obtenidos por la aplicación de la metodología propuesta.

También se deduce de la aplicación del modelo, y así se constata en la realidad, que en los primeros instantes de un sismo moderado se produce la rotura de la fábrica de las plantas inferiores. Esto produce un efecto análogo al de la planta blanda y, por tanto, también se deben diseñar los pilares de dichas plantas con esfuerzos superiores a los calculados sin incluir la tabiquería. El modelo propuesto permite una predicción de cómo se va a ir produciendo la fisuración y rotura progresiva de la fábrica, y estimar los esfuerzos de los elementos estructurales en la situación pésima.

AGRADECIMIENTOS

Los avances y conclusiones que se exponen en el presente trabajo forman parte de los resultados obtenidos por la empresa CYPE Ingenieros S.A. en colaboración con el Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE) en el proyecto de investigación "*Metodología para el análisis dinámico de edificios sometidos a acciones sísmicas, con incorporación del efecto de los elementos no estructurales y desarrollo de herramienta software con modelo BIM*". Dicho proyecto se ha podido llevar a cabo gracias a la financiación ofrecida por el CDTI (Centro para el Desarrollo Tecnológico Industrial) para proyectos de I+D+I y, su realización, no hubiera sido posible sin los conocimientos y ayuda proporcionados especialmente por Sergio Oller y Alex Barbat.

Algunas de las figuras utilizadas para facilitar la comprensión del modelo de cálculo y la metodología de análisis, están extraídas de la documentación proporcionada por el CIMNE para la realización del mencionado proyecto.

REFERENCIAS

[1] Fardis, M. N., Bousias, S. N., Franchioni, G. & Panagiotakos, T. B. (1999). Seismic Response and Design of RC Structures with Plan-Eccentric Masonry Infills, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 28, no. 2 (pp. 173-191).

[2] Negro, P. & Verzeletti, G. (1996). Effect of Infills on the Global Behavior of RC Frames: Energy Considerations from Pseudo-Dynamic Tests, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 25, no. 8 (pp. 753-773).

[3] Álvarez Cabal, R., Díaz-Pavón Cuaresma, E., & Rodríguez Escribano, R. (2013). El Terremoto de Lorca. Efectos en los edificios, *Consorcio de Compensación de Seguros*.

[4] Hashemi, A. & Mosalam, K. M., Seismic Evaluation of Reinforced Concrete Buildings Including Effects of Masonry Infill Walls, *PEER Report 2007/100.*

[5] Liauw, T., Kwan, K. (1984). Non Linear Behaviour of Non-integral Infilled Frames, *Computers & Structures,* vol. 18, no. 3 (pp. 551-560).

[6] Stafford, S. (1962). Lateral Stiffness of Infilled Frames, *Proceedings of the American Society of Civil Engineering, Journal of Structural Division,* 88 (ST6) (pp. 183-199).

[7] Stafford, S. (1966). Behaviour of Square Infilled Frames, *Proceedings of the American Society of Civil Engineering, Journal of Structural Division,* 92 (ST1) (pp. 381-403).

[8] López, J., Oller, S., Oñate, E., Lubliner, J. (1999). A Homogeneous Constitutive Model for Masonry*, International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 46 (pp. 1651-1671).

[9] Quinteros, R., Oller, S., Nallim, L. (2011). Nonlinear Homogenization Techniques to Solve Masonry Structures Problems, *Composite Structures*, vol. 94 (pp. 724-730).

[10] Eurocode 6 – Design of masonry structures. (1996). Part 1-1: General rules for reinforced and unreinforced masonry structures.

[11] Código Técnico de la Edificación. Documento Básico Se-F Seguridad Estructural: Fábrica. (2006).

[12] Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería. (2004).

[13] Oliver, J., Cervera, M., Oller, S., Lubliner, J. (1990). Nonlinear Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete, *Proceedings of the 2nd International Conference on Computer Aided, Analysis and Design of Concrete Structures* (pp. 945-957).

[14] Oller, S. (2001). Fractura Mecánica un Enfoque Global, *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)*.

[15] Oller, S. (2002). Análisis y Cálculo de Estructuras de Materiales Compuestos, *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)*.

[16] Oller, S., Car, E., Lubliner, J. (2003). Definition of a General Implicit Orthotropic Yield Criterion, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 192, no. 7-8 (pp. 895-912).

New proposal for effective width for E-stub strength evaluation

López, Manuel[1]; Loureiro, Alfonso[2]; Gutiérrez, Ruth M.[3]; Reinosa, José Manuel[4]

ABSTRACT

Bolted steel joints play a very important role in steel design and the component method used in the Eurocode is very successful method to evaluate their behavior. In the case of three-dimensional steel joints with additional plate welded to the column to attach the week axis, the E-stub component appear. This component is not covered by the Eurocode but his stiffness and strength have been studied recently by a mechanical model based in an equivalent frame. A fundamental parameter of this equivalent frame is the effective width and in this article, a new formulation is proposed. A parametric study with finite element models show that the new effective width improves the accuracy of the E-stub mechanical model.

Keywords: component method, Eurocode, E-stub, strength, steel connections.

1. INTRODUCCIÓN

Las uniones atornilladas tienen un rol fundamental dentro de las estructuras metálicas y mixtas, tanto por su influencia en el comportamiento de estructural como por el coste de materiales y fabricación. Por lo tanto, la caracterización de las mismas mediante el desarrollo de modelos mecánicos ha sido y es un importante campo de investigación. Uno de los métodos más importantes para modelizar su comportamiento el método de los componentes que también ha sido adoptado por el Eurocódigo [1].

En el método de los componentes los parámetros fundamentales son la rigidez y resistencia de cada uno de los componentes en los que se divide la unión. El Eurocódigo recoge el comportamiento de los componentes más habituales de uniones bidimensionales [2-4], sin embargo los componentes de las uniones tridimensionales no han sido recogidos en esta normativa. Muchos investigadores han realizado trabajos en esta línea para proponer formulaciones en este tipo de uniones [5-8].

Uno de los componentes que aparece en las uniones atornilladas tridimensionales con chapas adicionales soldadas entre las alas del pilar es el E-stub que se muestra en la Fig. 1. Para este componente ya han sido propuestas formulaciones para los parámetros fundamentales que definen el comportamiento que son la rigidez [7] y resistencia [8]. Pero la necesidad de implementar mejoras para optimizar los cálculos de los ingenieros obliga al desarrollo constante de nuevas formulaciones. Siguiendo esta línea, en este artículo se propone una nueva formulación para el ancho efectivo utilizado

[1] *Higher Polytechnic University College. University of A Coruña (SPAIN). manuellopez@udc.es (Corresponding author)*
[2] *Higher Polytechnic University College. University of A Coruña (SPAIN). loureiro@udc.es*
[3] *Higher Polytechnic University College. University of A Coruña (SPAIN). rutgut@udc.es*
[4] *Higher Polytechnic University College. University of A Coruña (SPAIN). jreinosa@udc.es*

en el cálculo de la resistencia de este componente que aporta una reducción del error entre los resultados analíticos y experimentales tanto en el error medio como en la desviación estándar.

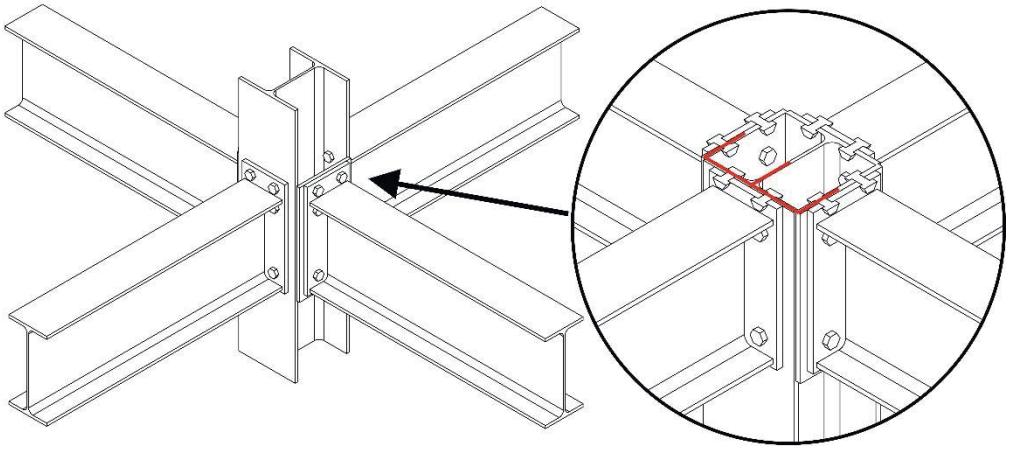


Figura 1. *Unión atornillada tridimensional con chapas adicionales, E-stub.*

2. MODELO MECÁNICO PARA EL CÁLCULO DE LA RIGIDEZ DEL E-STUB

Para el desarrollo de un modelo mecánico que determine la resistencia del E-stub se utiliza un modelo de pórtico equivalente en dos dimensiones como el que se presenta en la Fig. 2 donde las vigas 1 y 2 representan el ala del pilar y la viga 3 la chapa adicional [7-8].

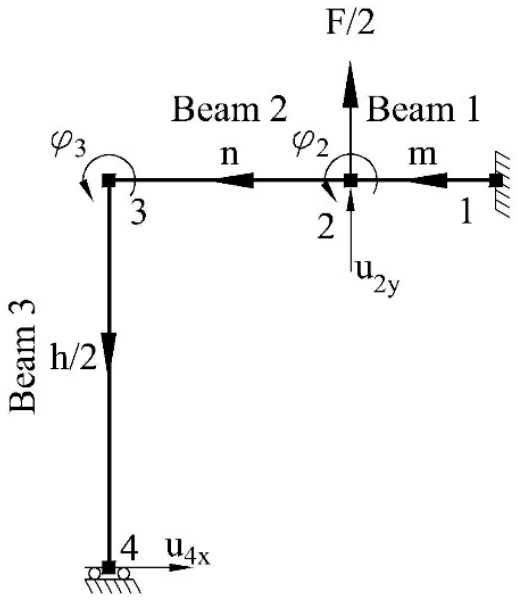


Figura 2. *Modelo de pórtico equivalente del E-stub.*

Los parámetros mecánicos de las vigas de la Fig. 2 son: h es el canto del pilar, m es definido en el Eurocódigo [1] según la Eq. 1 y n es definido según la Eq. 2.

$$m = \frac{w}{2} - t_{wc} - 0.8r \tag{1}$$

$$n = \frac{b - w}{2} \tag{2}$$

Donde w es la distancia entre tornillos, t_{wc} es el espesor del alma del pilar, r es radio de acuerdo del perfil del pilar y b es el ancho del pilar. La fuerza F es el valor de la fuerza de tracción sobre la línea de tornillos que forman el E-stub, considerando únicamente el caso más habitual 2 tornillos por línea.

Este problema es resuelto mediante análisis matricial asumiendo un comportamiento lineal y elástico el material y pequeños desplazamientos hasta la formación de rótulas plásticas en el pórtico equivalente. Se considera que las primeras rótulas plásticas se forman en los puntos 1 y 2 de la Fig. 2. Por lo tanto el valor de la resistencia del E-stub será el valor de la fuerza F que provoca la formación de la primera rótula [8].

Los valores de las fuerzas que provocan la formación de rótulas en los puntos 1 y 2 ha sido propuesto por Loureiro et al. [8] y se corresponde con las Ecuaciones 3 y 4 respectivamente.

$$F_{1,Rd} = 2M_{f,Rd}\frac{(m+n)^2\left(4\frac{h}{2}I_{fc}+I_{ap}(m+n)\right)}{mn\left(I_{ap}n(m+n)+2I_{fc}\frac{h}{2}(m+2n)\right)} \quad (3)$$

$$F_{1,Rd} = 2M_{f,Rd}\frac{(m+n)^3\left(4\frac{h}{2}I_{fc}+I_{ap}(m+n)\right)}{2m^2n\left(I_{ap}n(m+n)+I_{fc}\frac{h}{2}(2m+3n)\right)} \quad (4)$$

La expresión de los momentos de inercia I_{fc} y I_{ap} responde a las Ecuaciones 5 y 6 respectivamente.

$$I_{fc} = \frac{1}{12}b_{eff,p}\,t_{fc}^3 \quad (5)$$

$$I_{ap} = \frac{1}{12}b_{eff,p}\,t_{ap}^3 \quad (6)$$

El momento último $M_{f,Rd}$ de la sección del ala se define como.

$$M_{f,Rd} = \frac{b_{eff,p}f_y t_{fc}^2}{4} \quad (7)$$

Donde f_y es el límite elástico del material y $b_{eff,p}$ es ancho efectivo ponderado del pórtico equivalente propuesto.

2.1. Definición del ancho efectivo ponderado

Un ancho efectivo del pórtico equivalente ya había sido propuesto por Loureiro et al [8] con un valor que correspondía a un patrón de rotura circular que se produce en el ala del pilar alrededor de los tornillos. Pero aquí se propone utilizar un ancho efectivo ponderado con coeficientes 1.375 y 0.625 de forma que el parámetro n adquiere mayor relevancia en la resistencia del E-stub. Por lo tanto se propone la Eq. 8 para evaluar el ancho efectivo del pórtico equivalente.

$$b_{eff,p} = 2\pi\frac{d_h+(0.625m+1.375n)}{4} \quad (8)$$

Donde d_h es el diámetro de la cabeza del tornillo.

3. VALIDACIÓN DEL ANCHO EFECTIVO PONDERADO

Para la validación del ancho efectivo ponderado se utilizan los resultados del estudio paramétrico por elementos finitos publicado por Loureiro et al [8], donde estudian el E-stub con pilares con diferentes perfiles laminados, chapas adicionales de diferentes espesores y diferentes tipos de tornillos.

En la resistencia de los modelos analizados hay tres componentes involucrados que serán: alma del pilar y chapas adicionales a tracción ($F_{cwt,Rd}$), resistencia del ala del pilar a flexión ($F_{cfb,Rd}$) y resistencia de los tornillos a tracción ($F_{b,Rd}$).

Por lo tanto la resistencia del conjunto del E-stub modelizado con elementos finitos será el mínimo de los tres componentes y responderá a la Eq. 9

$$F_{E,Rd} = \min\left(F_{\mathrm{cwt,Rd}}, F_{\mathrm{cfb,Rd}}, F_{\mathrm{b,Rd}}\right) \tag{9}$$

Para evaluar $F_{cwt,Rd}$ hay que considerar el espesor de las chapas adicionales en la expresión del alma del pilar a tracción, debido a que estas trabajan a tracción solidariamente con el alma. Por lo tanto la ecuación recogida en el Eurocódigo 3 [1] para el alma a tracción se multiplica por un factor de 1.5 para tener en cuenta el efecto de las chapas adicionales, asimilando así el comportamiento de las chapas adicionales al de unas chapas de refuerzo soldadas al alama, tal como se muestra en la Eq. 10.

$$F_{\mathrm{cwt,Rd}} = \frac{\omega b_{eff,p} 1.5 t_{wc} f_y}{\gamma_{M0}} \tag{10}$$

Donde ω es un factor de reducción debido a los efectos del cortante en el panel.

La resistencia del ala del pilar a flexión $F_{cfb,Rd}$ se evalúa utilizando las Ecuaciones 3 y 4 tal como se indica en la Eq. 11.

$$F_{\mathrm{cfb,Rd}} = \min\left(F_{1,Rd}, F_{2,Rd}\right) \tag{11}$$

La resistencia de los tornillos se evalúa de acuerdo al Eurocódigo [1] con la Eq. 12.

$$F_{\mathrm{b,Rd}} = 0.9 A_s f_{u,b} 2 \tag{12}$$

Donde $f_{u,b}$ es la resistencia última del tornillo y A_s es el área efectiva.

En la *Tabla 1* se comparan los resultados de resistencia del E-stub obtenidos en el estudio paramétrico con elementos finitos realizado por Loureiro et al [8] con la resistencia del modelo mecánico utilizando un ancho efectivo ponderado. Donde F_{FEM} es la resistencia del modelo de elementos finitos, $F_{E\text{-}stub}$ es la resistencia del modelo mecánico con el ancho efectivo ponderado, e es el espesor de la chapa adicional, L es la longitud de la chapa adicional y w es la distancia entre tornillos.

Tabla 1. Comparación de la resistencia del modelo mecánico con $b_{eff,p}$ con los MEF

Modelo	Pilar	e (mm)	w (mm)	L (mm)	Tornillo	F_{FEM} (kN)	$F_{E\text{-}stub}$ (kN)	Error (%)
M01	HEA200	8	90	200	10.9TR20	195	178	-8.6
M02	HEA200	15	90	200	10.9TR20	203	191	-6.0

M03	HEA200	20	90	200	10.9TR20	210	200	-4.8
M04	HEA200	8	110	200	10.9TR20	185	163	-11.8
M05	HEA200	15	110	200	10.9TR20	193	181	-6.3
M06	HEA200	20	110	200	10.9TR20	195	195	-0.2
M07	HEA200	8	120	200	10.9TR20	180	164	-8.9
M08	HEA200	15	120	200	10.9TR20	190	185	-2.4
M09	HEA200	20	120	200	10.9TR20	196	203	3.5
M10	HEA240	8	120	240	10.9TR20	232	228	-1.8
M11	HEA240	15	120	240	10.9TR20	242	242	0.1
M12	HEA240	20	120	240	10.9TR20	248	256	3.3
M13	HEA240	8	160	240	10.9TR20	225	227	0.8
M14	HEA240	15	160	240	10.9TR20	243	246	1.4
M15	HEA240	20	160	240	10.9TR20	246	266	8.2
M16	HEA240	8	180	240	10.9TR20	230	219	-4.8
M17	HEA240	15	180	240	10.9TR20	260	248	-4.7
M18	HEA240	20	180	240	10.9TR20	260	279	7.4
M19	HEA280	8	160	280	10.9TR20	255	249	-2.2
M20	HEA280	15	160	280	10.9TR20	273	267	-2.3
M21	HEA280	20	160	280	10.9TR20	275	286	3.9
M22	HEA280	8	180	280	10.9TR20	255	257	0.8
M23	HEA280	15	180	280	10.9TR20	275	280	1.7
M24	HEA280	20	180	280	10.9TR20	280	298	6.3
M25	HEA280	8	200	280	10.9TR20	255	245	-3.8
M26	HEA280	15	200	280	10.9TR20	280	268	-4.2
M27	HEA280	20	200	280	10.9TR20	290	294	1.4
M28	HEA200	8	120	200	10.9TR16	163	155	-4.8
M29	HEA200	15	120	200	10.9TR16	175	175	0.2
M30	HEA200	20	120	200	10.9TR16	179	192	7.2

M31	HEA240	8	120	240	10.9TR16	212	218	2.8
M32	HEA240	15	120	240	10.9TR16	220	232	5.3
M33	HEA240	20	120	240	10.9TR16	224	245	9.3
M34	HEA280	8	160	280	10.9TR16	237	239	0.9
M35	HEA280	15	160	280	10.9TR16	250	256	2.4
M36	HEA280	20	160	280	10.9TR16	255	274	7.5
M37	HEA280	8	200	280	10.9TR16	240	234	-2.3
M38	HEA280	15	200	280	10.9TR16	255	256	0.4
M39	HEA280	20	200	280	10.9TR16	265	281	6.0
M40	HEB180	8	100	180	10.9TR20	325	323	-0.6
M41	HEB180	15	100	180	10.9TR20	345	340	-1.5
M42	HEB180	20	100	180	10.9TR20	350	360	2.7
M43	HEB300	8	150	300	10.9TR20	440	441	0.2
M44	HEB300	15	150	300	10.9TR20	440	441	0.2
M45	HEB300	20	150	300	10.9TR20	443	441	-0.5
M46	HEB300	8	180	300	10.9TR20	441	441	0.0
M47	HEB300	15	180	300	10.9TR20	445	441	-0.9
M48	HEB300	20	180	300	10.9TR20	440	441	0.2
M49	HEB300	8	200	300	10.9TR20	443	441	-0.5
M50	HEB300	15	200	300	10.9TR20	445	441	-0.9
M51	HEB300	20	200	300	10.9TR20	443	441	-0.5

Si analizamos los errores entre los resultados de resistencia del modelo de elementos finitos y el modelo mecánico con un ancho efectivo ponderado podemos ver que el error medio es de 0.02% y el error máximo es de 11.8%. De la misma forma analizando la relación $F_{FEM}/F_{E\text{-}stub}$ podemos ver que la media es 1.00 y la desviación estándar 0.05. Esto supone una mejora con respecto a los valores obtenidos por Loureiro el al [8] con un ancho efectivo sin ponderar que obtenían una media de 0.996 y una desviación estándar de 0.07.

En la Fig. 3, se muestran de manera gráfica los valores de resistencia del modelo de elementos finitos frente a los del modelo mecánico con ancho efectivo ponderado de la Tabla 1, pudiendo observarse que los puntos se aproximan a una recta de pendiente unidad.

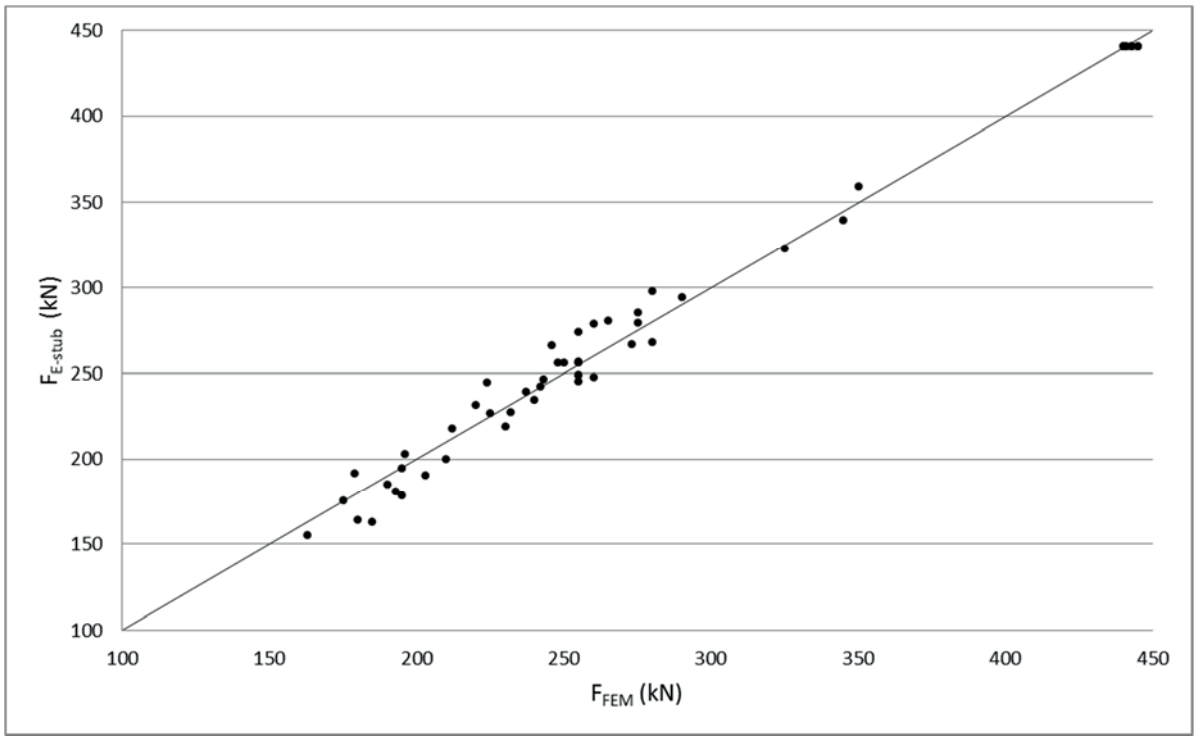


Figura 3. *Resistencia del MEF frente a la resistencia del modelo mecánico con un ancho efectivo ponderado*

4. CONCLUSIONES

En este artículo se ha estudiado la resistencia del E-stub mediante un pórtico equivalente donde uno de los parámetros fundamentales es el ancho efectivo. Para la evaluación del ancho efectivo se ha usado una ponderación de dos factores, 0.625 para el parámetro m y 1.375 para el parámetro n, lo que ha permitido obtener unos valores de resistencia muy próximos a los valores obtenidos con modelos de elementos finitos. Del análisis estadístico de la relación $F_{FEM}/F_{E\text{-}stub}$ del estudio paramétrico se obtiene un valor de la media 1.00 con una desviación típica muy baja. Por lo tanto, la introducción de esta ponderación supone un ligero aumento de la complejidad de la formulación pero mejora la aproximación de la resistencia mediante el modelo mecánico.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero del Ministerio de Ciencia e Innovación por medio del proyecto de investigación BIA2013-48069-C2-2-P.

REFERENCIAS

[1] Eurocode 3 (2005). *Design of steel structures-part 1.8: design of joints*. Brussels. CEN.

[2] Jaspart, J.P. (1991). *Etude de la semi-rigidite des noeuds poutre-colonne et son influence sur la resistance et la stabilite des ossatures en acier*. Ph.D.thesis. Belgium: University of Liege. (1991).

[3] Yee,Y.L.; Melchers, R.E. (1986). *Moment-rotation curves for bolted connections. Journal of Structural Engineering, ASCE,* 112, 615-635.

[4] Swanson, J.A.; Kokan, D.S.;Leon, R.T. (2002). *Advanced finite element modeling of bolted T-stub connection components. Journal of Constructional Steel Research*, 58(5),1015–31.

[5] Janss J, Jaspart JP, Maquoi R. (1987). *Strength and behaviour of in plane weak axis joints and 3D joints." Proc. of the state of the art workshop on connections and the behaviour, strength and design of steel structure*, 60-8.

[6] Cabrero JM, Bayo E. (2006). *The semi-rigid behaviour of the three-dimensional steel beam-to-column joints subjected to proportional loading. Part I: Experimental evaluation, Journal of Constructional Steel Research*, 63, 1241-53.

[7] Loureiro A, López M, Gutiérrez R, Reinosa JM. (2013). *Experimental and numerical analysis of E-stubs in three dimensional joints: a new analytical formulation for the stiffness calculation, Engineering Structures*, No. 53, 1–9.

[8] Loureiro A, López M, Gutiérrez R, Reinosa JM. (2013). *A new analytical formulation for the E-Stub strength calculation in three dimensional steel joints with additional plates welded to the weak axis, Engineering Structures*, No. 56, pp. 2263-2272.

Free vibration analysis of graphene sheet- and carbon nanotube-reinforced polymer plates

García-Macías, Enrique[1]; Rodríguez-Tembleque, Luis[2]; Sáez, Andrés[3]

ABSTRACT

Carbon-based nanomaterials such as carbon nanotubes or graphene have drawn the attention of a large section of the scientific community in recent years. The outstanding mechanical, electrical and thermal properties of these nanoparticles have impelled the quest for novel high-strength and multifuntional nanocomposite materials. After some of the first experimental studies reported outstanding enhancements of the mechanical properties of polymeric matrices doped with small filler concentrations, most attention of research has focused on carbon nanotubes. Nevertheless, despite a large number of promising applications of carbon nanotubes as mechanical and multifunctional fillers has been reported in the literature, some limiting factors such as high manufacturing cost, difficulty in obtaining adequate uniform dispersions, as well as their highly anisotropic properties, still remain an obstacle to the extensive development of these composites. However, recent investigations demonstrate the superior properties of graphene and its derivatives, as well as better dispersion and relatively low manufacturing cost. Although these recent findings have begun to turn the attention towards graphene, to date the number of publications dealing with the theoretical analysis of graphene sheet-reinforced structural elements is rather scant. In this context, the present work reports the vibrational behavior of graphene sheet- and carbon nanotube-reinforced composite flat panels. The macroscopic elastic moduli of the composites are computed by means of a Mori-Tanaka micromechanics model. This framework is apt to account for the morphology of the nanoinclusions so that it is possible to evaluate the stiffening effect of both carbon nanotubes and graphene sheets. The results demonstrate superior load bearing capacity of graphene sheet reinforced composite panels for both fully aligned and randomly oriented filler configurations. In addition, defects in the microstructure stemming from agglomeration and restacking of graphene sheets into graphite platelets are also analyzed. The presented approach is envisaged to provide a tractable analytical framework to assess the potential application of graphene sheets as mechanical reinforcements for high-performance and light-weight composites.

Keywords: Agglomeration, Carbon nanotubes, Graphene, Graphite platelets, Mori-Tanaka method, Micromechanics

1. INTRODUCTION

[1] *Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla (SPAIN). E-mail: egarcia28@us.es*
[2] *Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla (SPAIN). E-mail: luisroteso@us.es*
[3] *Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla (SPAIN). E-mail: andres@us.es*

Over the last two decades, a broad cross section of the scientific community has endeavoured to develop carbon-based nanomaterials for high-strength and multifuntional composite materials. Recent advances in the field of Nanotechnology have led to the production of new polymer nanocomposites with superior mechanical properties and low mass density, as well as excellent electrical, thermal and chemical properties. In particular, Carbon Nanotubes (CNTs) and graphene have shown promise for developing novel advanced nanocomposites [1–3]. CNTs, which can be considered as a rolled-up graphene sheet, have been reported to provide remarkable enhancements of the mechanical properties of polymeric matrices doped with small concentrations of CNTs [2, 4]. For instance, Qian et al. [5] doped polystyrene with a concentration of 1 wt% of Multi-Walled Carbon Nanotubes (MWCNTs), reaching increases with respect to the neat polymer in elastic modulus and break stress of 36-42% and ∼25%, respectively. Despite the promising potential of CNTs, aspects such as high manufacturing cost, difficulty in obtaining adequate uniform dispersions, as well as their highly anisotropic properties, remain an obstacle to the extensive development of CNT-reinforced polymer composites. In contrast, recent investigations agree to report the superior properties of graphene and its derivatives [6–9]. It is noteworthy the experimental study of Rafiee et al. [10] who compared the effective mechanical properties of epoxy loaded with Graphene Platelets (GPs), Single Walled Carbon Nanotubes (SWCNTs), and MWCNTs at a nanofiller concentration of 0.1% wt. Their results shown that graphene led to Young's modulus 31% higher than that of pristine epoxy, whilst only 3% increments were reached by SWCNTs. Their results also reported that graphene nanocomposites outperformed those doped with CNTs in terms of toughness and fatigue behavior. The superiority of graphene is ascribed to its high specific surface area and nanofiller/matrix interlocking, as well as its two-dimensional geometry, which facilitates its dispersion and provides more uniform filler distributions compared to CNTs. These excellent properties showcased by graphene, together with their low manufacturing cost [11], make graphene a promising nanofiller in the short run.

Recently, much research effort has been devoted to the synthesis and experimental caracterization of graphene sheet-reinforced nanocomposites. Stankovich et al. [12] first successfully dispersed graphene sheets throughout polystyrene by means of chemical reduction of exfoliated graphite oxide nanoplatelets. Kalaitzidou et al. [13] analyzed the morphology and mechanical properties of polypropylene doped with exfoliated Graphite NanoPlatelets (GnPs). Their results showed that, in comparison to available commercial fillers such as carbon fibers, carbon black and clays, GnPs had the strongest reinforcing effect for very low loadings up to 5% in terms of Young's modulus, as well as flexural and impact strength. Ramanathan et al. [14] reported the creation of poly (methyl methacrylate) (PMMA) loaded with Functionalized Graphene Sheets (FGSs). The results showed an outstanding increase of the elastic modulus of 33% with an addition of only 0.05% of FGSs, exceeding that obtained for SWCNT-PMMA composites. Another noteworthy contribution was done by Das et al. [15] who studied the nano-indentation response of PolyVinyl Alcohol (PVA) and PMMA doped with FGSs. Their results reported significant increases in both the elastic modulus and hardness with the addition of 0.6 wt% of graphene. Despite these encouraging results from experimentation, the number of research works dealing with the theoretical analysis of graphene-reinforced composites is still very scant and, consequently, the analysis of the mechanical response of structural elements made of nanocomposites doped with graphene and its derivatives is at a very early stage. Micromechanics homogenization techniques have been widely used to address the overall behavior

of CNT-reinforced composites [16, 17]. It is worth noting the work by Thostenson and Chou [18] who adopted the Halpin-Tsai theory to estimate the elastic moduli of CNT-reinforced polystyrene. Hu et al. [19] employed Molecular Mechanics (MM), computational structure mechanics and Molecular Dynamics (MD) with a finite element method to tackle the macroscopic elastic properties of CNT-reinforced composites. Shokrieh and Rafiee [20] proposed an equivalent long fiber to substitute an embedded CNT in a polymer matrix. To this aim, the authors developed a 3-D finite element model consisting of a CNT, inter-phase region using vdW interactions, and surrounding polymer. Wuite and Adali [21] studied the bending behavior of classical symmetric cross-ply and angle-ply laminated beams reinforced by aligned CNTs and isotropic beams reinforced by randomly oriented CNTs. By using a micromechanical constitutive model based on the Mori-Tanaka method, they highlighted that small percentages of CNT reinforcement lead to significant improvement in beam stiffness. Vodenitcharova and Zhang [22] developed a continuum model for the uniform bending and bending-induced buckling of a straight nanocomposite beam with circular cross section reinforced by a single-walled carbon nanotube (SWNT). Formica et al. [23] studied the vibrational properties of cantilevered CNTRC plates with an Eshelby-Mori-Tanaka approach and finite element modeling. Conversely, studies on the mechanical behavior of graphene-reinforced polymer composites are still rather scarce. Ji et al. [24] investigated the stiffening effect of graphene sheets dispersed in polymer nanocomposites using the Mori-Tanaka micromechanics method. The results highlighted the superior stiffening capability of graphene sheets compared to CNTs. Sapnos et al. [25] used a micromechanical finite element approach to obtain the mechanical properties of the composites reinforced by uniformly distributed graphene. Rahman and Haque [26] employed MM and MD simulations to study the GPs/epoxy nanocomposites. Li et al. [27] studied the mechanical response of a graphene sheet sandwiched between ultra-thin polymer layers. Feng et al. [28] studied the nonlinear bending behavior of multi-layer polymer nanocomposite beams reinforced with funcionally graded distributions of graphene platelets. The effective macroscopic properties of the composites were computed by a modified Halpin-Tsai micromechanics model.

Along with these fascinating stiffening effect of graphene sheets, there also exist some studies in the literature reporting no improvements or even reductions in properties [29–32]. One of the main reasons of these discrepancies is the appearance of non-uniform spatial distributions of nanofillers. Due to the electronic configuration of carbon-based nanoparticles as well as their high specific surface area, and therefore, large van de Waals (vdW) attraction forces [33–35], both graphene sheets as CNTs tend to agglomerate. A noticeable contribution in this respect is the work by Shi et al. [36] who introduced a two-parameter agglomeration model to estimate the macroscopic elastic moduli of CNT-reinforced polymer composites. That approach consists of considering the agglomerates as ellipsoidal inclusions so that one can conduct the homogenization process in two separate steps. The results demonstrated substantial decreases of the elastic modulus of the composites, what highlights the widespread thought of agglomeration as microstructure defects. The same approach was utilized by Ji et al. [24] to investigate the agglomeration effects in graphene sheet-reinforced composites. Similarly, their results highlighted the detrimental effect of agglomeration on the macroscopic mechanical behavior of the nanocomposites. In addition, it has been reported in the literature that individual layers of graphene undergo out-of-plane wrapping, rippling, folding, scrolling and crumpling [37–39], which can weaken the effective behavior of the composite. In this line, Ji et al. [24] also extended their Mori-Tanaka micromechanics approach for considering restacking of graphene sheets

forming multi-layered graphite. Likewise, their results evidenced reductions in the overall elastic moduli with increasing number of graphene sheets restacked into graphite platelets.

In this paper, the Mori-Tanaka homogenization scheme presented in [24] is utilized to investigate the free vibrational behavior of graphene sheet- and CNT-reinforced polymer composite plates. A detailed parametric analysis is presented to assess the benefits, from a mechanical perspective, of graphene compared to CNTs. In addition, the two-parameter agglomeration model proposed by Shi et al. [36] is adopted to estimate the agglomeration effects for both nanoinclusions. Finally, the effects of restacking of graphene sheets on the free-vibration behavior of composite panels is also analyzed.

This paper is organized as follows: Section 2 presents the composite plates analyzed in this study as well as the material properties of the different phases. Section 3 overviews the micromechanics homogenization of the elastic moduli of graphene sheet- and carbon nanotube-reinforced polymer composites, both fully aligned and randomly oriented filler configurations. Section 4 introduces the consideration of some limiting factors of the load bearing capacity of polymer nanocomposites, namely agglomeration effects and restacking of graphene sheets. Section 5 presents the numerical results and discussion and, finally, Section 6 concludes the paper and summarizes the main findings.

2. GRAPHENE SHEET- AND CARBON NANOTUBE- REINFORCED POLYMER PLATES

Figure 1 shows the polymer nanocomposite plates studied in this paper, with length a, width b, thickness t and filler orientation angle α. The numerical studies are conducted with the commercial Finite Element (FE) code ANSYS v18.0. Panels are modeled with the standard structural shell element, Shell 181 [40]. This element type is a quadrilateral 4-nodes element involving both bending and membrane properties with three rotational and three translational degrees of freedom per node. This element is suitable for thin to moderately-thick shell structures. Both natural frequencies and mode shapes are computed by a conventional eigenvalue modal analysis.

Two different nanoinclusions are studied, namely graphene sheets and SWCNTs as illustrated in Fig. 2. An atom thick graphene sheet is comprised of a two-dimensional (2D) hexagonal network of covalently bonded carbon atoms. In order to define the graphene microstructure, a local coordinate system x_1 - x_2 - x_3 is set up as shown in Fig. 2(a). Thence, a graphene layer lays on the $x_1 - x_2$ plane and x_3-axis is normal to its surface. In spite of the fact that a widely-accepted definition of the elastic moduli of graphene is still lacking in the literature, most studies agree to consider graphene as a transversely isotropic material. According to Lee et al. [41] and Reddy et al. [42], we take the in-plane Young's modulus and Poisson's ratio as E_{31}=1020 GPa and ν_{12}=0.4, respectively. In view of its one-atom thickness and possible interaction with the polymer matrix, the out-of-plane modulus E_3 and the shear modulus G_{13} are assumed to be 100 times the in-plane modulus, while another Poisson's ratio, ν_{31}, is taken as 1% of ν_{12}, i.e. E_3=G_{13}=102000 GPa and ν_{31}=0.004. In accordance with the notation of Hill [43] and Walpole [44], the tensor of elastic moduli of a transversely isotropic inclusion, $\boldsymbol{C}_r$, can be noted as $\boldsymbol{C}_r$ = ($2k_r$, l_r, n_r, $2m_r$, $2p_r$), where k_r, l_r, m_r, n_r and p_r are fiber Hill's elastic moduli [43]; k_r is the plane-strain bulk modulus under lateral dilatation in the $x_1 - x_2$ plane, n_r is the uniaxial tension

modulus in the x_3 direction, l_r is the associated cross modulus, m_r and p_r are the shear moduli in the $x_1 - x_2$ and $x_1 - x_3$ planes, respectively. Thus, the stiffness tensor we use for a graphene sheet is $\boldsymbol{C}_r^{graphene}$ = (1700, 6.8, 102000, 738, 204000) GPa. On the other hand, SWCNTs consist of a rolled-up graphene sheet that forms a cylinder as shown in Fig. 2(b). In this case, CNTs exhibit symmetric material properties about the x_1-axis and the $x_2 - x_3$ plane defines a plane of isotropy. According to Popov et al. [45], the stiffness tensor for CNTs are $\boldsymbol{C}_r^{cnt}$ = (60, 10, 450, 2, 2) GPa. Finally, the matrix material studied in this paper is polystyrene with Young's modulus E_m=1.9 GPa and Poisson's ratio ν_m=0.3 so that the matrix stiffness tensor can be noted as $\boldsymbol{C_m}$ = ($3\kappa_m$; $2\mu_m$) = (4.75; 1.46), with κ_m and μ_m being the matrix's bulk and shear moduli, respectively.

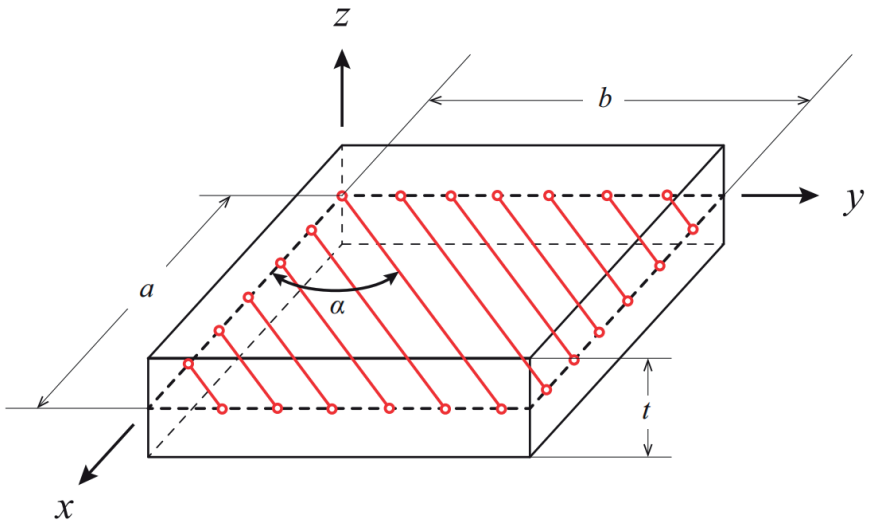


Figure 1: Geometry and coordinate system of polymer nanocomposite plate.

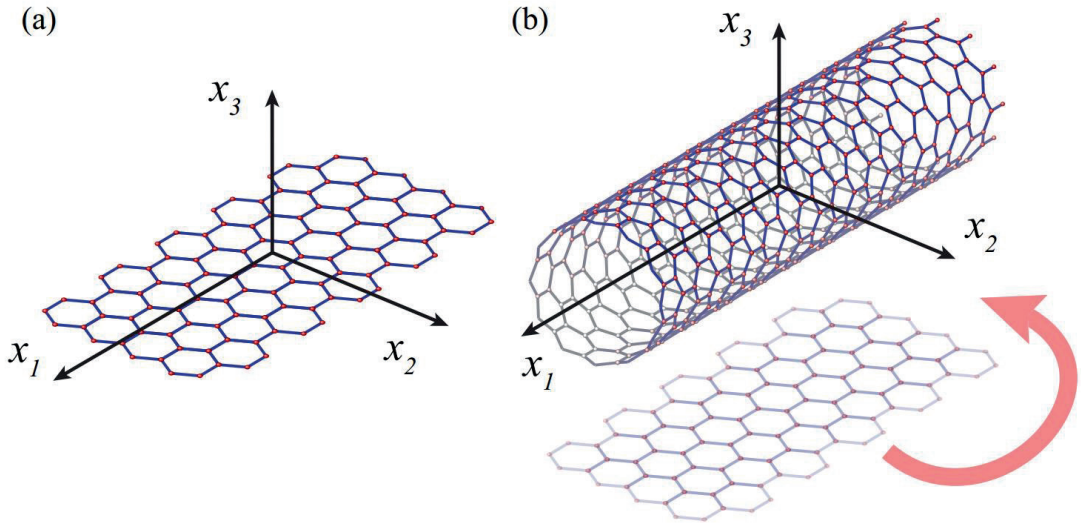


Figure 2: Coordinate system for a single graphene sheet (a) and a carbon nanotube (b).

3. MICROMECHANICS PREDICTION OF THE EFFECTIVE ELASTIC MODULI OF GRAPHENE SHEET- AND CARBON NANOTUBEREINFORCED COMPOSITES

This section briefly overviews the micromechanics prediction of the elastic moduli of graphene sheet- and carbon nanotube-reinforced polymer matrices. The Eshelby-Mori-Tanaka homogenization framework is considered and both fully aligned and randomly oriented filler configurations are studied.

3.1. Effective elastic properties of fully aligned nanoinclusions

Let V denote the Representative Volume Element (RVE) of a linear elastic polymer matrix doped with N different dispersed inclusions (*e.g.* aligned graphene sheets and CNTs of Figs. 3 (a) and (b), respectively). It is assumed that the RVE contains a sufficient number of fillers in such a way that the overall properties of the composite are statistically represented [46]. It is assumed that both graphene sheets and CNTs can be considered as transversely isotropic ellipsoidal inclusions dispersed throughout the matrix. In addition, the hosting matrix material is defined isotropic and perfect bonding between phases is assumed. In conjunction with the used Hill's notation, Hooke's law for inclusions with transversely isotropic properties (x_3 is the axis of material symmetry) takes the form:

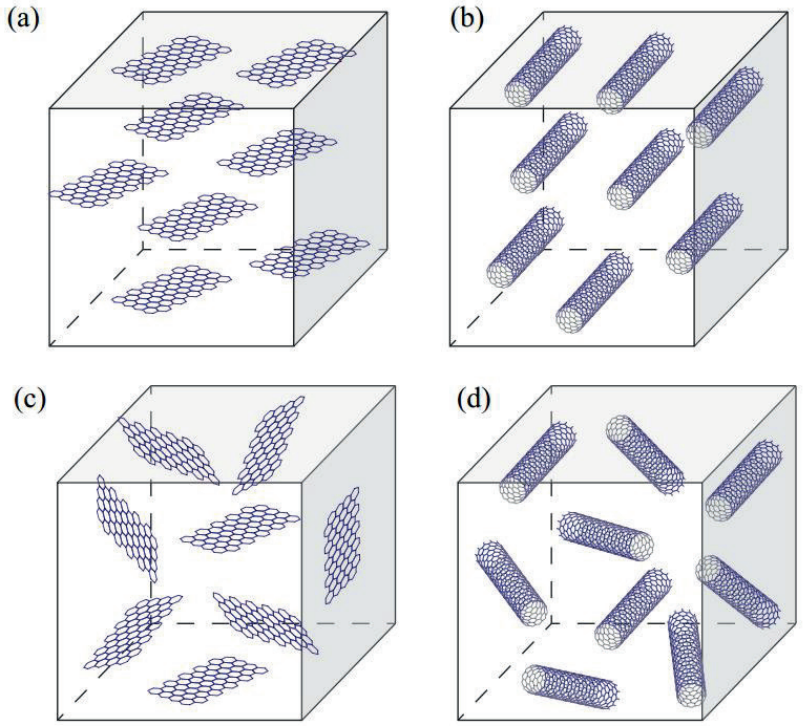


Figure 3: RVE containing fully aligned graphene sheets and CNTs, (a) and (b), respectively, and randomly oriented graphene sheets and CNTs, (c) and (d), respectively.

$$\boldsymbol{C}_r = \begin{bmatrix} k_r + m_r & k_r - m_r & l_r & 0 & 0 & 0 \\ k_r - m_r & k_r + m_r & l_r & 0 & 0 & 0 \\ l_r & l_r & n_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_r \end{bmatrix} \tag{1}$$

expression that can be directly applied to graphene layers according to the coordinate system illustrated in Fig.2 (a). On the other hand, the definition of the stiffness tensor of CNTs can be readily obtained by a counter-clockwise rotation of Eq. (1) by a $\pi/2$ angle about x_2-axis. Throughout this work, the superscripts "*r*" and "*m*" refer the corresponding quantity to the *rth* inclusion and matrix occupied portions of *V*. With this convention, the relationships between the total average strain and stress tensors in the RVE, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ and $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$, respectively, are defined by the rule of mixtures as follows:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = f_m \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{m}} + \sum_{r=1}^{N} f_r \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r} \tag{2}$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = f_m \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{m}} + \sum_{r=1}^{N} f_r \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{r} \tag{3}$$

Here, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{m}}$ and $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{m}}$ are the average strain and stress in the matrix, and $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r}$ and $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{r}$ are the corresponding orientation-dependent average fields in a typical inclusion. f_r denotes the volume fraction occupied by *rth* the inclusions and, therefore, the volume fraction of the matrix is $f_m = 1 - \sum_{r=1}^{N} f_r$. In addition, the interaction between the average *rth* inclusion strain with the corresponding average matrix strain is governed by the strain concentration tensor $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{r}}$ as:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{r}} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{m}} \tag{4}$$

Equations (2), (3), and (4), as well as the linear elastic constitutive laws of the phases, namely *rth* inclusion and matrix as $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{r} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{r}} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r}$ and $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{m} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{m}} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{m}}$, respectively, suffice to identify the equivalent material's effective stiffness $\boldsymbol{C}$ defined through $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, and whose resulting expression reads:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{r}} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{m}} \tag{5}$$

The Mori-Tanaka (MT) method [47] is one of the most commonly used homogenization approaches due to its simplicity. The MT method allows extending the theory of Eshelby [48,49], restricted to one single inclusion embedded in a semi-infinite elastic, homogeneous and isotropic medium, to the case of a finite domain doped with multiple inhomogeneities. The Eshelby-Mori-Tanaka method, also known as the equivalent inclusion-average stress method, is based on the equivalent elastic inclusion idea of Eshelby and the concept of average stress in the matrix stated by Mori-Tanaka. According to Benveniste's revision [50], the effective elastic tensor by the Eshelby-Mori-Tanaka method writes:

$$\boldsymbol{C} = \left[f_m \boldsymbol{C}_m + \sum_{r=1}^{N} f_r \left(\boldsymbol{C}_m : \boldsymbol{A}_r^{dil} \right) \right] : \left(f_m \boldsymbol{I} + \sum_{r=1}^{N} f_r \boldsymbol{A}_r^{dil} \right)^{-1} \tag{6}$$

where $\boldsymbol{I}$ is the fourth rank identity tensor, and $\boldsymbol{A}_r^{dil}$ denotes the strain concentration tensor for the limit case of a single anisotropic ellipsoidal inhomogeneity in an infinite matrix whose expression was stated by Eshelby [48] as:

$$\boldsymbol{A}_r^{dil} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S_r}\colon \boldsymbol{C_m^{-1}}\colon (\boldsymbol{C_r} - \boldsymbol{C_m})\right]^{-1} \tag{7}$$

The Eshelby's tensor $\boldsymbol{S_r}$, well documented in Mura [51], accounts for the interaction of the mechanical strain within the *rth* isolated inclusion and the elastic surrounding. Let us remark that, in the case of ellipsoidal inclusions embedded in an isotropic medium, the Eshelby's tensor depends upon the aspect ratio of the inclusion and the Poisson's ratio of the matrix. In order to count on a general framework for the analysis of both 2D graphene layers and 1D CNTs, both fillers are defined as ellipsoidal domains as:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1 \tag{8}$$

with a_1, a_2, and a_3 the semi-axes of the inclusion in the x_1, x_2 and x_3 axes. Hence, the general Eshelby's tensor is defined as:

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} \tag{9a}$$

$$S_{1111} = \frac{3}{8\pi(1-\nu_m)} a_1^2 I_{11} + \frac{1-2\nu_m}{8\pi(1-\nu_m)} I_1 \tag{9b}$$

$$S_{1122} = \frac{1}{8\pi(1-\nu_m)} a_2^2 I_{12} - \frac{1-2\nu_m}{8\pi(1-\nu_m)} I_1 \tag{9c}$$

$$S_{1133} = \frac{1}{8\pi(1-\nu_m)} a_3^2 I_{13} - \frac{1-2\nu_m}{8\pi(1-\nu_m)} I_1 \tag{9d}$$

$$S_{1212} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{16\pi(1-\nu_m)} I_{12} + \frac{1-2\nu_m}{16\pi(1-\nu_m)} I_1 \tag{9e}$$

$$\Delta(s) = \sqrt{(a_1^2+s)(a_2^2+s)(a_3^2+s)} \tag{10a}$$

$$I_1 = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(a_1^2+s)\Delta(s)} \tag{10b}$$

$$I_{11} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(a_1^2+s)^2\Delta(s)} \tag{10c}$$

$$I_{12} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(a_1^2+s)(a_2^2+s)\Delta(s)} \tag{10d}$$

The remaining coefficients are found by simultaneous cyclic permutation of (1,2,3) and (a_1, a_2, a_3). Finally, the definition of the Eshelby's tensor in Voigt matrix notation writes:

$$S_{pq} = \begin{cases} S_{ijkl} & \text{if } p = 1,2,3 \\ 2S_{ijkl} & \text{if } p = 4,5,6 \end{cases} \tag{11}$$

3.2. Effective elastic properties of randomly oriented nanoinclusions

In order to describe the fillers' orientation, two Euler angles, polar θ and azimuthal angles γ, are defined. Due to the high number of fillers contained in the RVE, the description of their orientation field is of statistical nature. The probability of a filler lying in an infinitesimal range of angles θ and $\theta + \mathrm{d}\theta$, and γ and $\gamma + \mathrm{d}\gamma$ is given by $\Omega(\theta,\gamma)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta d\gamma$, with $\Omega(\theta,\gamma)$ being the so-called Orientation Distribution Function (ODF). Any ODF must satisfy the following normalization condition:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \Omega(\theta,\gamma)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta d\gamma = 1 \tag{12}$$

The integration of any ODF weighted function $F(\theta,\gamma)$ over all possible orientations in the Euler space, also referred to as the orientational average of F, $\langle F\rangle$, is defined through:

$$\langle F\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{F}(\theta,\gamma)\Omega(\theta,\gamma)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta d\gamma \tag{13}$$

If the fillers are completely randomly oriented, the density function is $\Omega(\theta,\gamma) = 1/\,2\pi$. According to the Mori-Tanaka method, the overall constitutive tensor is defined as:

$$\boldsymbol{C} = \left[f_m\boldsymbol{C}_m + \sum_{r=1}^{N} f_r\langle \boldsymbol{C}_m{:}\,\boldsymbol{A}_r^{dil}\rangle\right]{:}\left(f_m\boldsymbol{I} + \sum_{r=1}^{N} f_r\langle \boldsymbol{A}_r^{dil}\rangle\right)^{-1} \tag{14}$$

Closed-form expression of Eq. (14) can be found in [24].

4. FACTORS LIMITING THE LOAD BEARING CAPACITY

In this section, factors limiting the load bearing capacity are included in the previously presented micromechanics approach, namely agglomeration and restacking of graphene sheets.

4.1. Agglomeration effects

A critical phenomenon to be taken into consideration for the simulation of nanocomposites is the appearance of non-uniform spatial distributions of nanoinclusions. The difficulty in obtaining good fiber dispersions is related to the circumstance that nanofillers tend to agglomerate in bundles. This effect is attributed to the electronic configuration of carbon-based nanoparticles and their high specific surface area which increases the van de Waals (vdW) attraction forces among fillers [33-35]. It is extensively

reported in the literature that bundles can substantially decrease the overall mechanical properties of the composites. In this paper, the two-parameter agglomeration model introduced by Shi et al. [36] is here adopted to model the effective mechanical properties of non-uniform distributions of fillers. This approach differentiates two regions, one with high filler concentration, corresponding to spherical clusters, and another with low filler concentration, i.e. the surrounding composite. Therefore, the total volume of fillers, V_r, dispersed in the RVE, V, can be divided into the following two parts:

$$V_r = V_r^{bundles} + V_r^m \tag{15}$$

where $V_r^{bundles}$ and V_r^m denote the volumes of CNTs dispersed in the bundles and in the matrix, respectively. In order to characterize the agglomeration of CNTs in bundles, Shi et al. [36] introduced two parameters, ξ and ζ, as follows:

$$\xi = \frac{V_{bundles}}{V}, \quad \zeta = \frac{V_r^{bundles}}{V_r} \tag{16}$$

where $V_{bundles}$ is the volume occupied by the bundles in the RVE. The agglomeration parameter ξ represents the volume ratio of bundles with respect to the total volume of the RVE. On the other hand, ζ stands for the volume ratio of fillers within the bundles with respect to the total volume of fillers. This pair of parameters unequivocally determine the agglomeration scheme as outlined in Fig. 4. After some straightforward manipulations, the CNT volume fractions in the bundles and the surrounding composite, c_1 and c_2, respectively, can be expressed as:

$$c_1 = f_r \frac{\zeta}{\xi}, \quad c_2 = f_r \frac{1-\zeta}{1-\xi} \tag{17}$$

being f_r the total volume fraction in the composite. It can be extracted from Eq. (17) that $\zeta \geq \xi$ must be met in order to impose a higher filler concentration in the clusters. The limit case $\zeta = \xi$ represents an uniform distribution of the fillers, whilst the heterogeneity degree grows for larger values of ζ with limit case of $\zeta = \min\left(1, \frac{\xi}{f_r}\right)$. Hence, the homogenization process can be carried out in two steps. Firstly, the overall constitutive tensor of the inclusions, $\mathbf{C}^{\text{in}}$, and the surrounding composite, $\mathbf{C}^{\text{out}}$, are obtained with polymer as matrix and nanotubes as inclusions with concentrations c_1 and c_2, respectively. Secondly, the effective constitutive tensor of the composite, $\mathbf{C}^*$, is computed considering the surrounding composite as matrix material and bundles as inclusions. On this basis, the micromechanics approach of Eq. (6) can be extended to account for agglomeration. Closed-form solutions of randomly oriented graphene sheets and CNTs with agglomeration in spherical bundles can be found in [24] and [36], respectively.

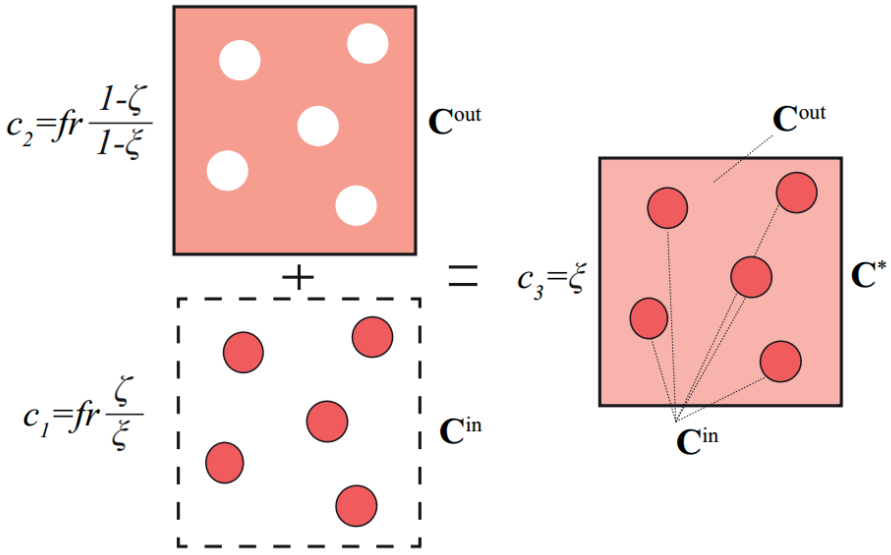


Figure 4: Schematic representation of the two parameter agglomeration model

4.2. Restacking of graphene sheets

In practical nanocomposites, 2D graphene sheets have a tendency to stack up and form multi-layered graphite due to the steric effect and the vdW interaction between different sheets. The shape of graphite will influence the stiffening effect due to its dominance in the Eshelby's tensor. We examine the representative situation where the graphene sheets stack up in the shape of ellipsoids with two semi-major axes equal in length, *i.e.* $a_1 = a_2$, and a semi-minor axis a_3 is defined by the aspect ratio a_3/a_1 represents the thickness of the resulting restacked graphene sheets, as shown in Fig. 5. On this basis, the Eshelby's tensor can be reckoned by Eqs. (9) and (10). The elastic parameters of graphite is taken from [52] as $\boldsymbol{C}_r^{graphite}$=(1240,15,36.5,880,8) GPa.

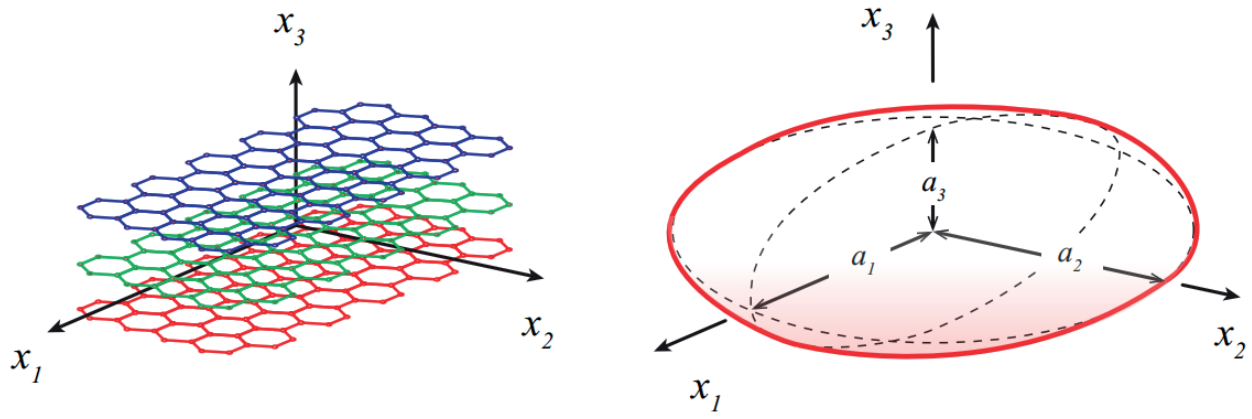


Figure 5: Schematic representation of restacking of graphene sheets forming multi-layered graphite and equivalent ellipsoid.

5. DISCUSSION

In this section, a detailed parametric analysis of the vibrational behavior of graphene sheet-reinforced polymer composite plates is presented. According to the geometrical definition presented in Fig. 1, square plates of dimensions a=b=100 cm, and t=a/50 are studied. Two different kinds of boundary conditions are investigated, namely all edges simply supported (SSSS) and clamped (CCCC). The boundary conditions at any edge can be defined as follows:

$$\begin{cases} u_s = u_z = \varphi_s = 0 & : \text{Simply supported edge (S)} \\ u_s = u_n = u_z = \varphi_s = \varphi_n = 0 & : \text{Clamped edge (C)} \end{cases} \tag{18}$$

with u and φ standing for translation and rotational degrees of freedom, respectively. The subscripts n and s denote the normal and tangential directions, respectively. The non-dimensional frequency parameter for vibration analysis is defined by:

$$\lambda = w\frac{b^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\rho t}{D}} \tag{19}$$

where w is the angular frequency of the CNTRC plates, ρ is the plate density per unit volume and $D = E_m t^3/12(1-\nu_m^2)$ is the flexural rigidity of the neat polymer plate. The material properties of the different phases involved in the analyses are summarized in Table 1. In this study, it is assumed that the effective material properties are independent of the geometry of the plates. The overall density ρ of a two-phase nanocomposite plates can be determined according to the standard rule of mixtures as $\rho = f_r\rho_r + f_m\rho_m$. Finally, the transverse shear correction factor k_s for computing the shear stiffness matrix of the composite plates is given by Efraim and Eisenberg [53] as:

$$k_s = \frac{6 - f_r\nu_{12}^r - f_m\nu_m}{5} \tag{20}$$

Firstly, the effect of filler content on the macroscopic elastic moduli of fully aligned graphene sheet- and CNT-reinforced composite plates is analysed in Fig. 6 for both SSSS and CCCC boundary conditions. Both graphene sheet and CNT nanofillers are studied, corresponding to solid and dashed lines respectively. The first mode shapes for SSSS boundary conditions and graphene sheet- and CNT-reinforced composite panels are depicted in Fig. 7. It is evidenced that the stiffening effect of graphene sheets overtakes that of CNTs for all the natural frequencies. For instance, the addition of graphene at a volume fraction of 0.05 rises the first natural frequency of the SSSS composite panels up to five times that of the neat polymer, whilst CNTs only doubles this value. Let us remark that, in the case of graphene sheet-reinforced composites, the second and third natural frequencies overlap due to symmetry about $x-z$ and $y-z$ planes, in accordance with the mode shapes shown in Fig. 7. In the case of CNTs, according to the filler configuration described in Fig. 1, the macroscopic stiffness may be tuned by varying the filler orientation angle α. Fig. 8 shows the comparison between the fundamental frequency of SSSS graphene-reinforced composite plates and that of CNT-reinforced composite plates with varying

filler orientation angles. Three different filler volume fractions are considered in this analysis, namely f_r=0.05, 0.1 and 0.2. It can be extracted from this analysis that the superior stiffening effect of graphene sheets compared to CNTs is more acute at higher filler contents. This fact, together with the better dispersion of graphene reported in the literature, is of pivotal importance for practical application. Indeed, it can be also seen that the fundamental frequency of CNT-reinforced composites can be tuned by conveniently aligning the fillers, however, for the analysed filler contents, CNTs cannot even provide half of the one obtained with graphene sheets for all the range of angles.

Table 1: Elastic moduli of constituent phases, namely graphene, graphite, CNT and polystyrene, Refs. [10, 54, 55].

	Graphene	**Graphite**	**CNT**		**Polystyrene**
k_r (GPa)	850.0	620.0	30.0	E_m (GPa)	1.9
l_r (GPa)	6.8	15.0	10.0	ν_m	0.3
n_r (GPa)	120000.0	36.5	450.0	ρ_m (kg/m^3)	1040
m_r (GPa)	369.0	440.0	1.0		
p_r (GPa)	120000.0	4.0	1.0		
ρ_r (kg/m^3)	2300	1060	1400		

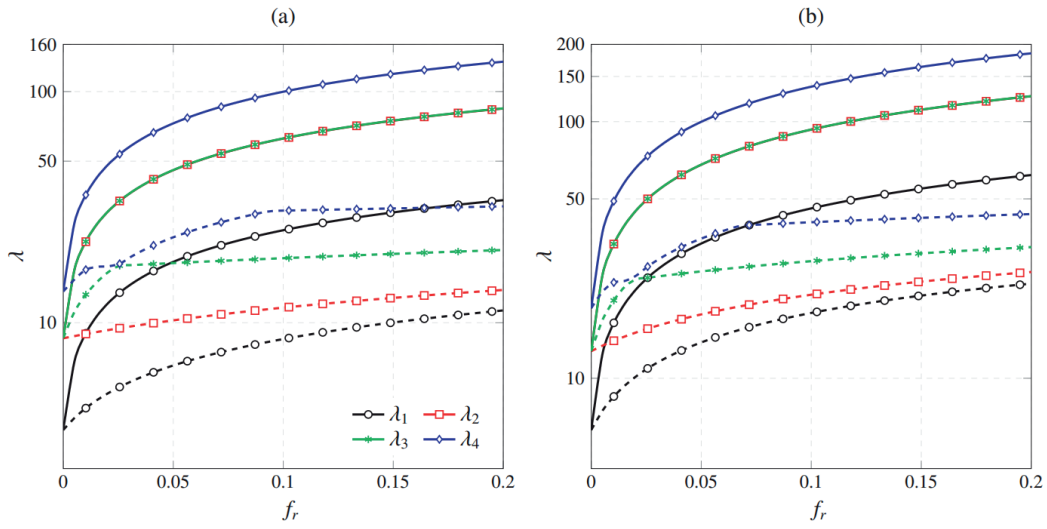


Figure 6: Non-dimensional natural frequencies versus filler volume fraction for fully aligned graphene sheet- and CNT-reinforced composite plates, corresponding to solid and dashed lines, respectively

(a=b=100 cm, t=a/50, SSSS (a) and CCCC (b) boundary conditions).

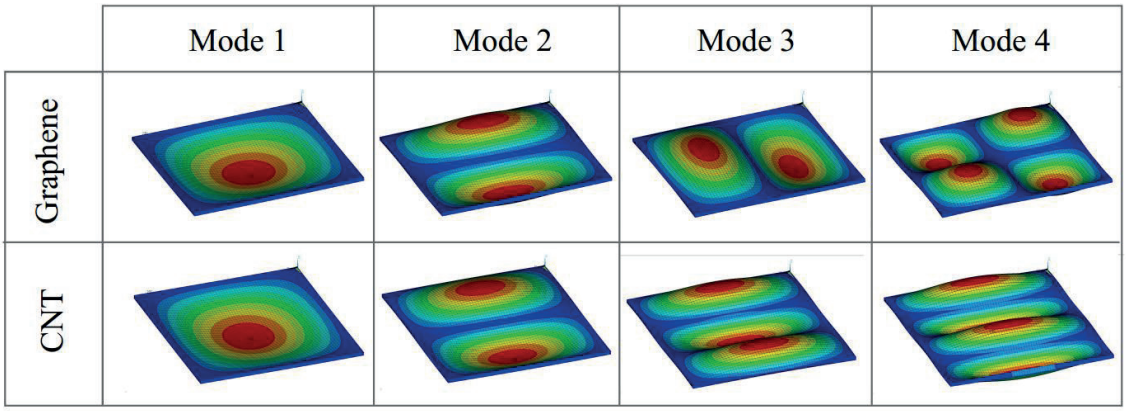


Figure 7: First four mode shapes for fully aligned graphene sheet- and CNT-reinforced composite plates (a=b=100 cm, t=a/50, f_r=0.2, SSSS).

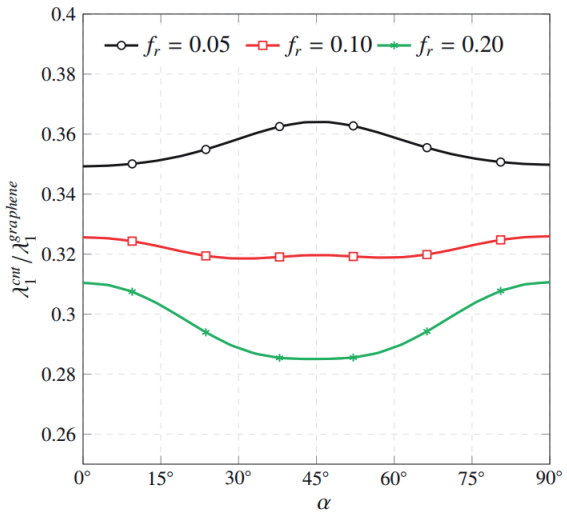


Figure 8: Ratio between the non-dimensional fundamental frequency of CNT-reinforced composite plates λ_1^{cnt} and that of fully aligned graphene sheet-reinforced composite plates $\lambda_1^{graphene}$ with varying filler orientation angle α (a=b=100 cm, t=a/50, SSSS).

The comparison between the stiffening effect of graphene sheets and CNTs is also conducted for randomly oriented configurations in Fig. 9. In this case, both composites exhibit isotropic elastic moduli and thus second and third natural frequencies coincide. It can be extracted that randomly oriented configurations, as typically found when no special aligning techniques are undertaken, are less effective and the load bearing capacity is lower than that obtained with fully aligned configurations. With regard to the comparison between nanofillers, graphene leads to much stiffer composites so that similar conclusions to previous analysis can be extracted here.

Finally, we examine the comparison of graphene sheets and CNTs on the basis of the multi-inclusion micromechanics approach. To this aim, the filler volume fraction is divided between graphene sheets

and CNTs. A volume fraction f_{cnt} is defined as the fraction of CNTs with respect to the total volume of nanofillers. Hence, the volume fractions of graphene sheets and CNTs are defined as $f_{cnt}f_r$ and $(1-f_{cnt})f_r$, respectively. As expected from the previous analyses, it can be observed that as f_{cnt} increases, the content of CNTs increases and the composite thus exhibits less stiff behavior.

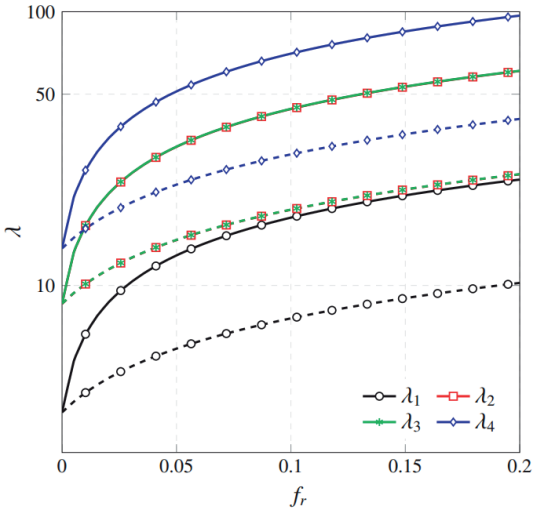


Figure 9: Non-dimensional natural frequencies versus filler volume fraction for randomly oriented graphene sheet- and CNT-reinforced composite plates, corresponding to solid and dashed lines, respectively (a=b=100 cm, t=a/50, SSSS boundary condition).

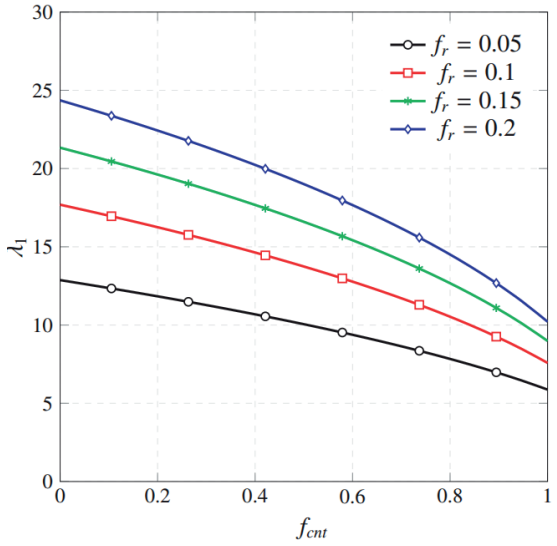


Figure 10: Non-dimensional natural frequency of composite plates reinforced by randomly oriented graphene sheets, some of which have rolled up into CNTs a=b=100 cm, t=a/50, SSSS boundary condition).

Finally, the effects of agglomeration and restacking of graphene sheets are analyzed. Fig. 11 shows the non-dimensional fundamental frequency for different graphene volume fractions, namely f_r=0.05, 0.10, 0.15 and 0.20, and varying agglomeration degree. In the first analysis, Fig. 11 (a), the agglomeration parameter ξ is fixed with value 0.2, while the remaining agglomeration parameter ζ ranges from 0 to 1. In other words, the ratio of spherical bundles with respect to the total volume of the RVE is fixed, while the filler distribution ranges from the limit case of all the fillers dispersed outside

and inside the bundles. The limit case of $\xi = \zeta$ =0.2 stands for perfectly uniform distribution, while the heterogeneity stems from the distinct filler concentrations within and outside the bundles. It is evidenced that the agglomeration of graphene sheets induces detrimental effects on the macroscopic properties of the composites. For instance, in the case of f_r=0.2, the limit case of all the nanofillers gathered within the bundles yield reductions of the fundamental frequency up to 80\%. This sort of results highlights the importance of developing efficient dispersion techniques to tackle the appearance of agglomerates which act as defects in the resulting micro-structure. Similarly, Fig. 11 (b) analyses the agglomeration effect on the non-dimensional fundamental frequency when ξ is fixed with value 0.5. In this case, similar conclusions can be extracted.

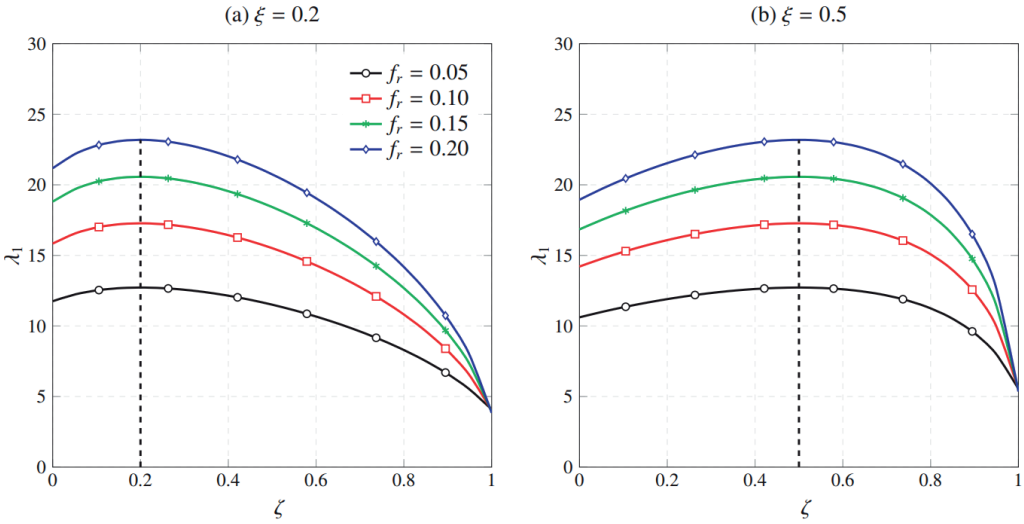


Figure 11: Non-dimensional fundamental frequency of a composite panel reinforced by randomly oriented graphene sheets with agglomeration: (a) ξ =0.2 and (b) ξ =0.5 (a=b=100 cm, t=a/50, SSSS boundary condition).

Figures 12 (a) and (b) show the non-dimensional fundamental frequency of graphene sheet-reinforced composite panels with restacking effects for fully aligned and randomly oriented configurations, respectively. In accordance with Fig. 5, the restacking of graphene sheets forming multi-layered graphite platelets can be modeled by ellipsoidal inclusions with aspect ratio a_3/a_1. It is extracted that for increasing number of stacked graphite layers, *i.e.* higher aspect ratio a_3/a_1, the overall stiffness decreases for both cases. It is especially critical for aspect ratios a_3/a_1 above E-3 where the most drastic reductions are found. These results evidence that the stiffening effect of graphene sheets may be dramatically reduced when a considerable fraction of fillers stacks up forming platelets of graphite. In order to further this analysis, Fig. 13 shows the non-dimensional fundamental frequency of composite panels doped with graphene sheets, some of which are lumped into graphite platelets. To this purpose, similarly to the analysis of composites doped with both graphene sheets and CNTs, a parameter $f_{stacking}$ is defined as the ratio of the total volume of fillers defined as graphite platelets. An aspect ratio of the graphite platelets is fixed at $a_3/a_1 = 0.1$ and three different filler contents are analyzed, namely f_r=0.05, 0.1 and 0.2. It is observed that increasing contents of graphene sheets lumped into graphite platelets yield drastic reduction of the overall stiffness.

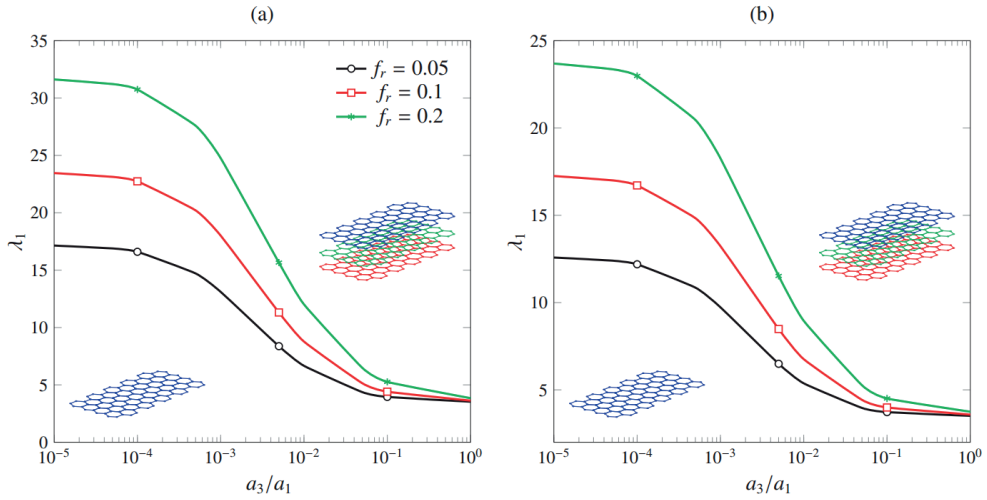


Figure 12: Non-dimensional fundamental frequency of a composite panel reinforced by fully aligned and randomly oriented graphene sheets with restacking effects, (a) and (b) respectively (a=b=100 cm, t=a/50, SSSS boundary condition).

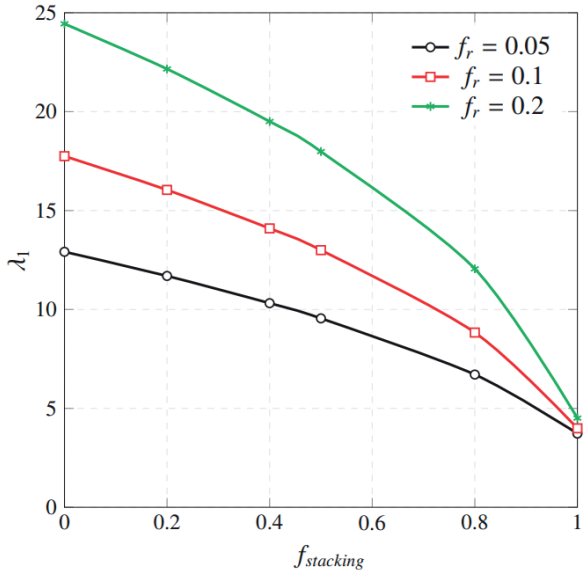


Figure 13: Non-dimensional natural frequency of composite plates reinforced by randomly oriented graphene sheets, some of which are lumped into graphite platelets (a=b=100 cm, t=a/50, a_3/a_1=0.1, SSSS boundary condition).

6. CONCLUSIONS

This paper presents a study of the vibrational behavior of graphene sheet- and CNT-reinforced composite plates by means of a Mori-Tanaka micromechanics model. Harmful effects reported in the literature such as agglomeration and restacking of graphene sheets have been considered. In order to highlight the superior load bearing capacity of graphene compared to CNTs, detailed parametric analyses have been presented. Micromechanical aspects such as filler content, filler distribution, heterogeneous filler dispersions and restacking of graphene into graphite platelets have been investigated. Overall, the key findings of this work are summarized as follows:

- The stiffening effect of graphene sheets as mechanical additives have been shown superior in comparison to CNTs. In both fully aligned and randomly oriented distributions, graphene has been shown to provide higher resonant frequencies.
- The fundamental frequency of CNT-reinforced flat panels can be tuned by different filler orientations. Nevertheless, the presented results demonstrate that the stiffening effect of graphene sheets surpasses all the possible CNT configurations.
- Agglomeration of fillers into clusters may be understood as a mechanical defect in the microstructure of the composite. The results demonstrated critical reductions of the resonant frequency as the heterogeneity degree of the filler dispersion increases.
- The restacking of graphene sheets into graphite platelets is a limiting factor of the macroscopic behavior of these composites. The numerical results showed dramatic reductions of the effective resonant frequencies for higher fractions of graphene sheets lumped into graphite platelets.

The present work is envisaged to provide a valuable theoretical framework to investigate the behavior of graphene sheet-reinforced structural elements. In virtue of a tractable analytical formulation, the present approach is readily applicable to an extensive range of structural elements, as well as assist the design of high performance graphene sheet-reinforced composites.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the Ministerio de Economía y Competitividad of Spain and the Consejería de Economía, Innovacion, Ciencia y Empleo of Andalucía (Spain) under projects DPI2014-53947-R and P12-TEP-2546. E. G-M was also supported by a FPU contract-fellowship from the Spanish Ministry of Education Ref: FPU13/04892. The financial support is gratefully acknowledged.

REFERENCES

[1] W. Choi, I. Lahiri, R. Seelaboyina, Y. S. Kang, Synthesis of graphene and its applications: a review, Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences 35 (2010) 52–71.
[2] J. N. Coleman, U. Khan, W. J. Blau, Y. K. Gunko, Small but strong: a review of the mechanical properties of carbon nanotube–polymer composites, Carbon 44 (2006) 1624–1652.
[3] R. F. Gibson, A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures, Composite Structures 92 (2010) 2793–2810.
[4] Z. Spitalsky, D. Tasis, K. Papagelis, C. Galiotis, Carbon nanotube–polymer composites: Chemistry, processing, mechanical and electrical properties, Progress in Polymer Science 35 (2010) 357–401.
[5] D. Qian, E. C. Dickey, R. Andrews, T. Rantell, Load transfer and deformation mechanisms in carbon nanotube-polystyrene composites, Applied Physics Letters 76 (2000) 2868–2870.

[6] M. Martin-Gallego, M. M. Bernal, M. Hernandez, R. Verdejo, M. A. Lopez-Manchado, Comparison of filler percolation and mechanical properties in graphene and carbon nanotubes filled epoxy nanocomposites, European Polymer Journal 49 (2013) 1347–1353.

[7] G. Mittal, V. Dhand, K. Y. Rhee, S. J. Park, W. R. Lee, A review on carbon nanotubes and graphene as fillers in reinforced polymer nanocomposites, Journal of Industrial and Engineering Chemistry 21 (2015) 11–25

[8] I. Zaman, H. C. Kuan, J. Dai, N. Kawashima, A. Michelmore, A. Sovi, S. Dong, L. Luong, J. Ma, From carbon nanotubes and silicate layers to graphene platelets for polymer nanocomposites, Nanoscale 4 (2012) 4578–4586.

[9] Z. Li, R. J. Young, N. R. Wilson, I. A. Kinloch, C. Valls, Z. Li, Effect of the orientation of graphenebased nanoplatelets upon the young's modulus of nanocomposites, Composites Science and Technology 123 (2016) 125–133.

[10] M. A. Rafiee, J. Rafiee, Z. Wang, H. Song, Z.-Z. Yu, N. Koratkar, Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content, ACS nano 3 (2009) 3884–3890.

[11] S. Y. Yang, W. N. Lin, Y. L. Huang, H.-W. Tien, J.-Y. Wang, C.-C. M. Ma, S.-M. Li, Y.-S. Wang, Synergetic effects of graphene platelets and carbon nanotubes on the mechanical and thermal properties of epoxy composites, Carbon 49 (2011) 793–803.

[12] S. Stankovich, D. A. Dikin, G. H. B. Dommett, K. M. Kohlhaas, E. J. Zimney, E. A. Stach, R. D. Piner, S. T. Nguyen, R. S. Ruoff, Graphene-based composite materials, nature 442 (2006) 282–286.

[13] K. Kalaitzidou, H. Fukushima, L. T. Drzal, Mechanical properties and morphological characterization of exfoliated graphite-polypropylene nanocomposites, Composites Part A: applied science and manufacturing 38 (2007) 1675–1682.

[14] T. Ramanathan, A. A. Abdala, S. Stankovich, D. A. Dikin, M. Herrera-Alonso, R. D. Piner, D. H. Adamson, H. C. Schniepp, X. R. R. S. Chen, R. S. Ruoff, Functionalized graphene sheets for polymer nanocomposites, Nature nanotechnology 3 (2008) 327–331.

[15] B. Das, K. E. Prasad, U. Ramamurty, C. N. R. Rao, Nano-indentation studies on polymer matrix composites reinforced by few-layer graphene, Nanotechnology 20 (2009) 125705.

[16] K. Liew, Z. Lei, L. Zhang, Mechanical analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composites: a review, Composite Structures 120 (2015) 90–97.

[17] G. Pal, S. Kumar, Modeling of carbon nanotubes and carbon nanotube-polymer composites, Progress in Aerospace Sciences 80 (2016) 33–58.

[18] E. T. Thostenson, T. W. Chou, On the elastic properties of carbon nanotube-based composites: modelling and characterization, Journal of Physics D: Applied Physics 36 (2003) 573.

[19] N. Hu, H. Fukunaga, C. Lu, M. Kameyama, B. Yan, Prediction of elastic properties of carbon nanotube reinforced composites, volume 461, The Royal Society, 2005, pp. 1685–1710.

[20] M. M. Shokrieh, R. Rafiee, Prediction of mechanical properties of an embedded carbon nanotube in polymer matrix based on developing an equivalent long fiber, Mechanics Research Communications 37 (2010) 235–240.

[21] J. Wuite, S. Adali, Deflection and stress behaviour of nanocomposite reinforced beams using a multiscale analysis, Composite structures 71 (2005) 388–396.

[22] T. Vodenitcharova, L. Zhang, Bending and local buckling of a nanocomposite beam reinforced by a singlewalled carbon nanotube, International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 3006–3024.

[23] G. Formica, W. Lacarbonara, R. Alessi, Vibrations of carbon nanotube-reinforced composites, Journal of Sound and Vibration 329 (2010) 1875–1889.

[24] X. Y. Ji, Y. P. Cao, X. Q. Feng, Micromechanics prediction of the effective elastic moduli of graphene sheet-reinforced polymer nanocomposites, Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering 18 (2010) 045005.

[25] K. N. Spanos, S. K. Georgantzinos, N. K. Anifantis, Mechanical properties of graphene nanocomposites: a multiscale finite element prediction, Composite Structures 132 (2015) 536–544.

[26] R. Rahman, A. Haque, Molecular modeling of crosslinked graphene-epoxy nanocomposites for characterization of elastic constants and interfacial properties, Composites Part B: Engineering 54 (2013) 353–364.

[27] X. Li, J. Warzywoda, G. B. McKenna, Mechanical responses of a polymer graphene-sheet nano-sandwich, Polymer 55 (2014) 4976–4982.

[28] C. Feng, S. Kitipornchai, J. Yang, Nonlinear bending of polymer nanocomposite beams reinforced with non-uniformly distributed graphene platelets (gpls), Composites Part B: Engineering 110 (2017) 132–140.

[29] W. Li, A. Dichiara, J. Bai, Carbon nanotube-graphene nanoplatelet hybrids as high-performance multifunctional reinforcements in epoxy composites, Composites Science and Technology 74 (2013) 221–227.

[30] J. Cho, J. Y. Chen, I. M. Daniel, Mechanical enhancement of carbon fiber/epoxy composites by graphite nanoplatelet reinforcement, Scripta materialia 56 (2007) 685–688.

[31] J. A. King, D. R. Klimek, I. Miskioglu, G. M. Odegard, Mechanical properties of graphene nanoplatelet/epoxy composites, Journal of Applied Polymer Science 128 (2013) 4217–4223.

[32] X. Wang, L. Song, W. Pornwannchai, Y. Hu, B. Kandola, The effect of graphene presence in flame retarded epoxy resin matrix on the mechanical and flammability properties of glass fiber-reinforced composites, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 53 (2013) 88–96.

[33] A. Allaoui, S. Bai, H. Cheng, J. Bai, Mechanical and electrical properties of a MWNT/epoxy composite, Composites Science and Technology 62 (2002) 1993–1998.

[34] H. Li, H. Xiao, J. Yuan, J. Ou, Microstructure of cement mortar with nano-particles, Composites Part B: Engineering 35 (2004) 185–189.

[35] J. M. Wernik, S. A. Meguid, Recent developments in multifunctional nanocomposites using carbon nanotubes, Applied Mechanics Reviews 63 (2010) 050801.

[36] D. Shi, X. Feng, Y. Y. Huang, K. Hwang, H. Gao, The effect of nanotube waviness and agglomeration on the elastic property of carbon nanotube-reinforced composites, Journal of Engineering Materials and Technology 126 (2004) 250–257.

[37] A. Fasolino, J. H. Los, M. I. Katsnelson, Intrinsic ripples in graphene, Nature materials 6 (2007) 858–861.

[38] J. C. Meyer, A. K. Geim, M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, T. J. Booth, S. Roth, The structure of suspended graphene sheets, Nature 446 (2007) 60–63.

[39] E. Perim, L. D. Machado, D. S. Galvao, A brief review on syntheses, structures and applications of nanoscrolls, arXiv preprint arXiv:1501.05711 (2015).

[40] Structural analysis guide, Release 15.0, ANSYS Inc, Cannonsburg, PA (2014).

[41] C. Lee, X. Wei, J. W. Kysar, J. Hone, Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene, science 321 (2008) 385–388.

[42] C. D. Reddy, S. Rajendran, K. M. Liew, Equilibrium configuration and continuum elastic properties of finite sized graphene, Nanotechnology 17 (2006) 864.

[43] R. Hill, A self-consistent mechanics of composite materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 13 (1965) 213–222.

[44] L. Walpole, On the overall elastic moduli of composite materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 17 (1969) 235–251.

[45] V. Popov, V. Van Doren, M. Balkanski, Elastic properties of crystals of single-walled carbon nanotubes, Solid State Communications 114 (2000) 395–399.

[46] S. Nemat-Nasser, M. Hori, Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials, volume 37, Elsevier, 2013.

[47] T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, Acta metallurgica 21 (1973) 571–574.

[48] J. D. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences 241 (1957) 376–396

[49] J. Eshelby, The elastic field outside an ellipsoidal inclusion, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1959) 561–569.

[50] Y. Benveniste, A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, Mechanics of materials 6 (1987) 147–157.

[51] T. Mura, Micromechanics of defects in solids, volume 3, Springer Science & Business Media, 1987.

[52] O. L. Blakslee, D. G. Proctor, E. J. Seldin, G. B. Spence, T. Weng, Elastic constants of compression-annealed pyrolytic graphite, Journal of Applied Physics 41 (1970) 3373–3382.

[53] E. Efraim, M. Eisenberger, Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates, Journal of Sound and Vibration 299 (2007) 720–738.

[54] M. Yas, M. Heshmati, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite beams reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load, Applied Mathematical Modelling 36 (2012) 1371–1394.

[55] J. X. Shi, T. Natsuki, X. W. Lei, Q. Q. Ni, Equivalent Young's modulus and thickness of graphene sheets for the continuum mechanical models, Applied Physics Letters 104 (2014) 223101.

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

New Walterdale Bridge: Models used for structural analysis during the construction of a steel thrust arch bridge

Miriam Castrillo Calvillo[1], Laura Granda San Segundo[2], Patricia García Rodríguez[3], Antonio Martínez Cutillas[4], Alberto Muñoz Tarilonte[5].

[1]ACCIONA Infrastructure (SPAIN). miriam.castrillo.calvillo@acciona.com
[2] ACCIONA Infrastructure (SPAIN). laura.granda.sansegundo@acciona.com
[3]ACCIONA Infrastructure (SPAIN). patricia.garcia.rodriguez@acciona.com
[4]Carlos Fernandez Casado, S.L. (SPAIN). amartinez@cfcsl.com
[5] Carlos Fernandez Casado, S.L. (SPAIN). amt@cfcsl.com

Keywords: Bridge, steel thrust arch, construction, structural models, FEM.

1. INTRODUCTION

ACCIONA Construction and Technical Departments (both in Canada and in Spain), Allnorth Consultants and Carlos Fernández Casado S.L.,(CFCsl), joined forces to carry out the erection procedure of the new Walterdale Bridge in Edmonton, Alberta (Canada). The Walterdale Bridge Replacement Project was commissioned by the City of Edmonton (COE) in 2013. The detailed architectural design of the bridge was carried out by COWI International and Engineering Dialog. ACCIONA-Pacer Joint Venture (APJV) was contracted to build the structure and Allnorth Consultants Limited was hired by APJV as the Erection Engineer of Record for the Project. The Bridge, which spans the North Saskatchewan River with a 230 m length and 43 m sag steel thrust arch supports a steel-composite deck, 22.40 m wide and formed by two main box girders suspended by hangers to the steel arch. A shared used pathway (SUP), with a steel box section, was connected to the steel arch by hangers and to the steel concrete composite deck through steel cross beams.[1]-[2]

ACCIONA Construction and Technical Departments were first predesigning the procedure with models to validate the manoeuver feasibility. It was then presented to the COE for initial approval. After this, the Erection Engineering Company, AllNorth, was detailing with parallel models the procedure as Erection Engineer of record. At the same time, ACCIONA Technical services and CFCsl prepared independent refined models to complete the QA and final in-house validation of the whole erection procedure and all the involved temporary structures, ensuring that the final desired geometry was going to be met, ensuring all the stages were behaving as engineered and no problem was going to be encountered during construction, nor at the permanent stage.

Long span bridges, in general, and arch bridges in particular have an efficient structural behavior once they are completely erected. Bridge engineering requires a detailed conception of the construction sequence of the bridge in order to manage different intermediate structures with different structural schemes adapted to the size and weights which can be managed by different auxiliary elements: cranes, barges, hydraulic jacks etc. All these intermediate structures are checked by detailed and appropriate structural models. These models allow an elastic behavior of the structure in all the stages and achieving the target final geometry properly. Global bar element models, detailed shell or solid Finite Element models with geometrical non-linear behavior were performed.

2. CONSTRUCTION SEQUENCE

The erection of the bridge was divided in three phases;

- Phase 1: Arch installation which was also divided in three stages; firstly the assembly of the mid span arch on temporary towers downstream of its final location to be, secondly, skidded and navigated to its temporary location in preparation for the first heavy lift [Figure 1].

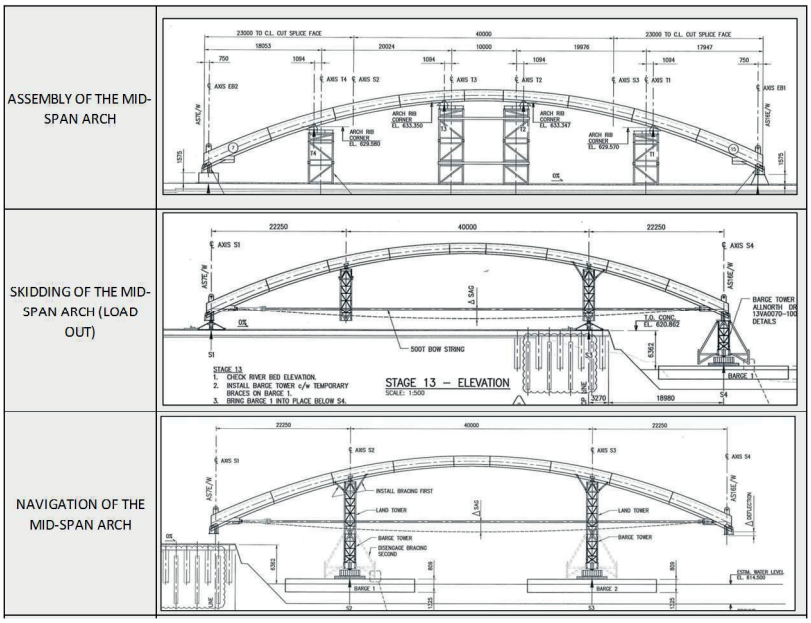


Figure 1. Arch Erection.

Finally, first and second heavy lift: The initial Mid span was lift into an intermediate location using four heavy lifting strand jacks systems while the stump arches on the concrete thrust legs at the final location were being assembled to splice with the new mid span. After completion of this first heavy lift, a second heavy lift was performed to lift the new Mid span to its final location [Figure 2].

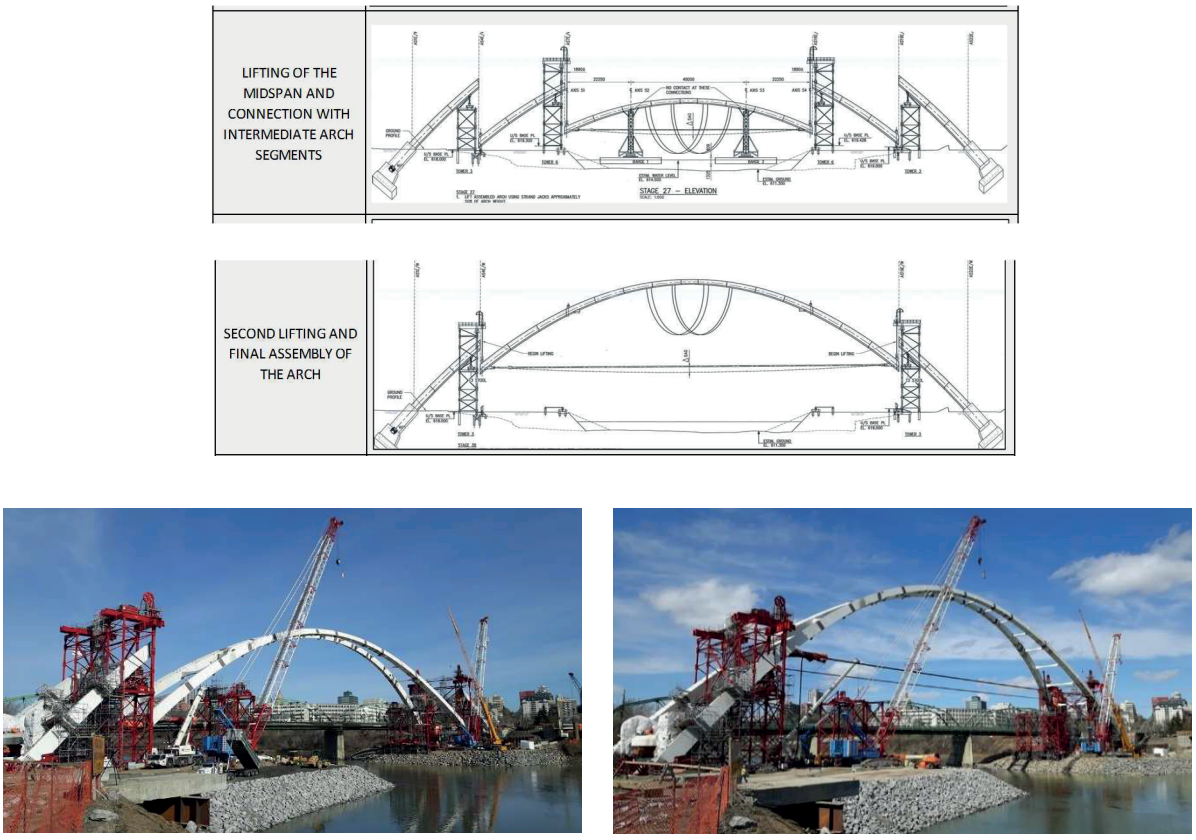


Figure 2. Arch erection. First and Second heavy lift.

- Phases 2 & 3: Deck installation and SUP installation: The deck and SUP steel structures were also installed in two stages. Two quarters of the deck and SUP were installed over berms, supported on temporary towers, and the Mid deck (over the water) was lifted into position by cranes working from the existing berms [Figure 3].

Figure 3. Deck and SUP installation.

Figure 4. Walterdale Bridge.

3. TARGET GEOMETRY STRUCTURAL MODEL

One of the most critical specifications of the New Walterdale Bridge Project was the following one: "The completed structure shall have a geometric configuration in general conformance with the dimensions shown on drawings for the dead load condition, achieved at completion of construction at a reference temperature of -5ºC. This geometric configuration is defined as target geometry".

Even if the structure was manufactured according to the design drawings, with their correspondent tolerances, some other variables had to be taken into consideration in order to guarantee that the target geometry was achieved. These variables were both external and related to the construction procedure:

- External to the construction procedure:
  - *Temperature*: In order to estimate the geometric corrections due to thermal difference from places, the bridge location in Canada and the steel workshop in South Korea, a structural model was developed to determine both, the differences in length of the segments and the variation in vertical deflection to be applied to manufactured steel elements.
    So, a thermal difference of (temperature at workshop)-(reference temperature: -5ºC) was applied as a uniform thermal increase of temperature to the structural model [Figure 5].

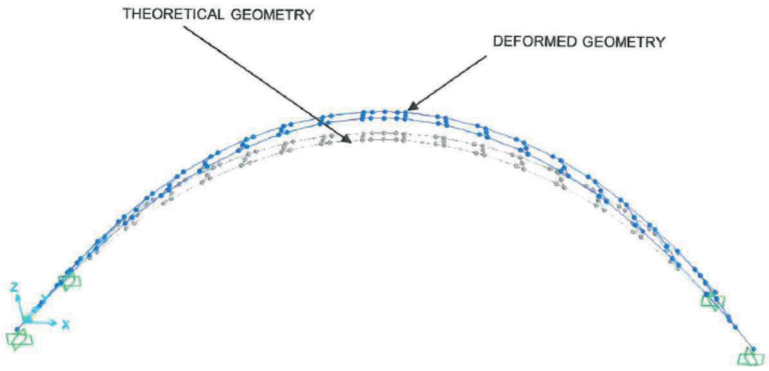


Figure 5. Theoretical and thermal deformed geometry.

From the described analysis, different deflection values were obtained as computer outputs for every joint. These values were added to the ones included for permanent loads, creep and shrinkage in the Design Drawings. So, it was guaranteed that when the bridge was erected at site and the air temperature reached the specified reference temperature of -5ºC, the structure matches with the natural geometry specified in the Detailed Design Drawings.

- *Mechanical characteristics of the soil.* A range of values of the mechanical properties of the ground under the foundation of the arch were provided by the designers [Table 1]. Moreover the reactions in the thrust blocks once the arch was finished were indicated in the drawings. Therefore, a number of structural models were developed to estimate the proper springs that would lead to the above-mentioned reactions.

	Current Analysis		Base Analysis
	Analysis 1 (Lower Bound Springs)	Analysis 2 (Upper Bound Springs)	
Axial Spring Constant	1700 kN/m³	4400 kN/m³	Infinity (rigid)
Rotational Spring Constant	77600000 kN.m/rad	216600000 kN.m/rad	Infinity (rigid)
Governing Stress Range at AS2W	13.7 MPa	15.1 MPa	16 Mpa
Demand Over Capacity	0.297	0.327	0.35

THRUST BLOCK REACTION COMBINATIONS (FACTORED)			
CASE/LOAD	P [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
SERVICE DEAD LOAD - NE	32 100	400	3 100
SERVICE DEAD LOAD - SW	29 400	-26 200	-14 200
SERVICE (SLS 1) - SW Mx MAX	34 100	-121 500	-38 900
SERVICE (SLS 1) - NE Mx MAX	36 000	85 900	-17 100
SERVICE (SLS 1) - SW My MAX	37 400	-113 700	-53 800
ULTIMATE (ULS 3) - SW Mx MAX	44 900	-191 500	-66 300
ULTIMATE (ULS 3) - SW My MAX	46 200	-117 900	-81 100
ULTIMATE (ULS 3) - NE Mx MAX	47 900	159 200	-35 600
ULTIMATE (ULS 4) - NE P MAX	50 200	47 100	-29 600

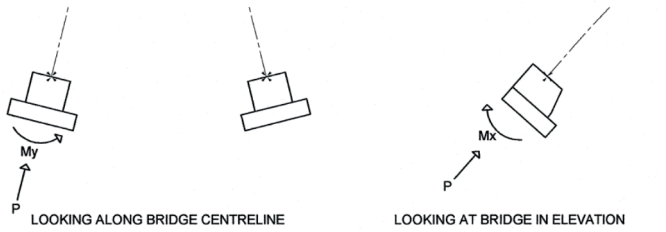


Table 1. Range value of the Mechanical properties of the ground foreseen reactions in the thrust blocks.

- Inherent to the construction Procedure:

In order for the construction team to perform a full and detailed survey of the permanent structure as required throughout the construction procedure, a separate model containing control points on the arch, deck and SUP was created [Figure 6]. This model simulated each construction stage and produced a geometry control table which was able to output the deformed shape of the permanent structure at each stage of construction being a quality assurance (QA) and control checking tool. For each stage the reality and the model performed very similar results. This model was performed by ACCIONA (SAP2000) 20[6] and Allnorth, with MIDAS software [3]. A similar independent model was performed by CFCsl with SOFISTIK [4] which will be described below. The model had the configuration as shown in [Figure 6-7].

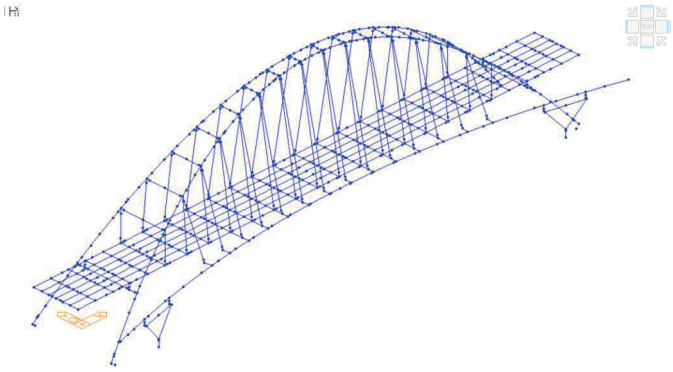


Figure 6. Geometry model definition.

The arch structure was initially defined in accordance with the geometry presented in the design drawings. During the Arch installation procedure, the models were adjusted based on the final as built geometry of the arch [Figure 7]. Hanger lengths need to be revised in order to ensure that the profile of the deck matches as closely as possible to the target geometry as established in the design drawings and contract documents fulfilling the Project tolerances. It is important to note that a trial assembly of the whole arch was done in the fabrication yard in Korea in order to accept the final segments shipping to Canada.

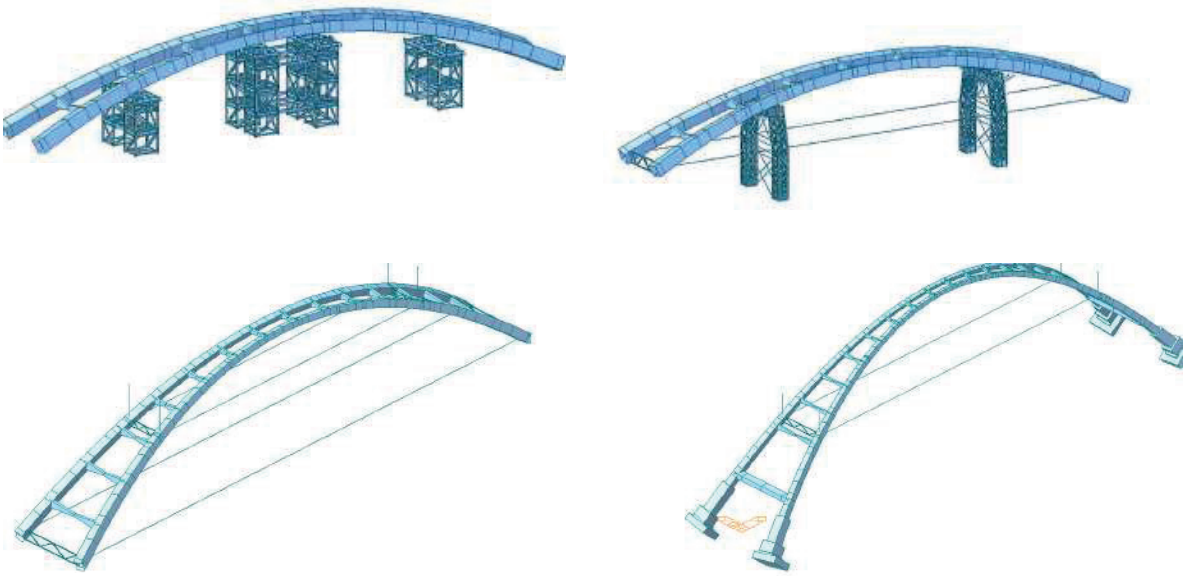


Figure 7. Different stages Arch geometry control definition.

Once all the superimposed loads were installed on the structure, a final survey was performed and compared with the theoretical coordinates + thermal adjustments provided by the model for that specific stage of construction. At that time, the as built geometry of the hanger pin plates location was analysed, and final adjustments on the turnbuckle [Figure 8] were provided in order to be able to perform the required adjustments to accomplish the structure geometry and hanger tensions targets included in the contract documents.

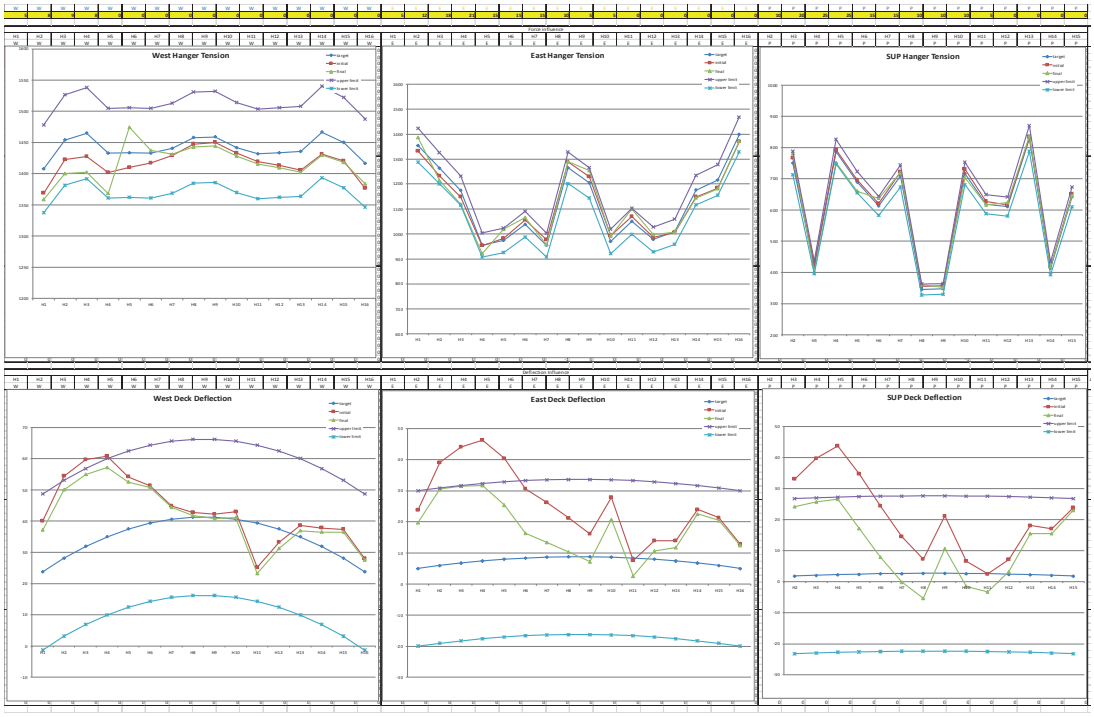


Figure 8. Example of the final tuning matrix adjustment based on as built geometry.

4. ARCH ERECTION PROCEDURE

During the fully independent check of the bridge erection, only the information included in the erection procedure drawings and in the Erection Engineering drawings was used to develop the models. Therefore, no information about the designer's model was considered with the aim of undertaking an independent approach to simulate the structure.

The Bridge construction was divided in three basic phases; firstly the arch erection, and secondly the deck and the pedestrian bridge (SUP) installation. In the same way, two different models were created to asses each process [Figure 9]. The first model simulated the arch erection along the whole erection sequence, including the temporary works (towers, bowstrings, lifting cables, etc.), and the second model simulated the sequence of construction of the deck and the SUP.

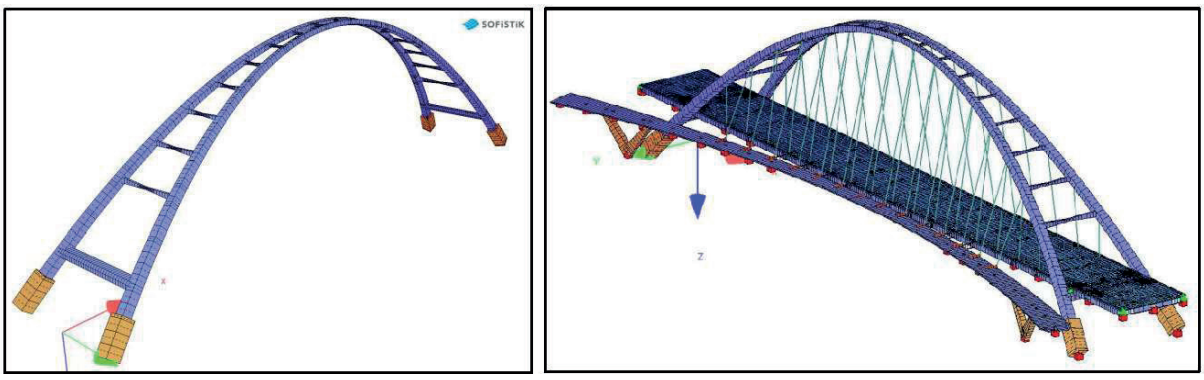


Figure 9. Calculation models for the arch erection and for the deck and SUP installation.

These models were created with *SOFISTIK*, a general purpose Finite Element analysis software for civil and structural engineering modeling [4], which allows linear and non-linear calculation and is able to process different finite element types in the same model. In our case, every element of the model is defined as a bar element with the exception of the concrete slab of the deck, which was performed with 2D shell type finite elements.

The mechanical properties of the bar elements were generated by SOFISTIK [4], apart from the cross-sections geometry, which were manually created for every element of the model, and their materials [Figure 10].

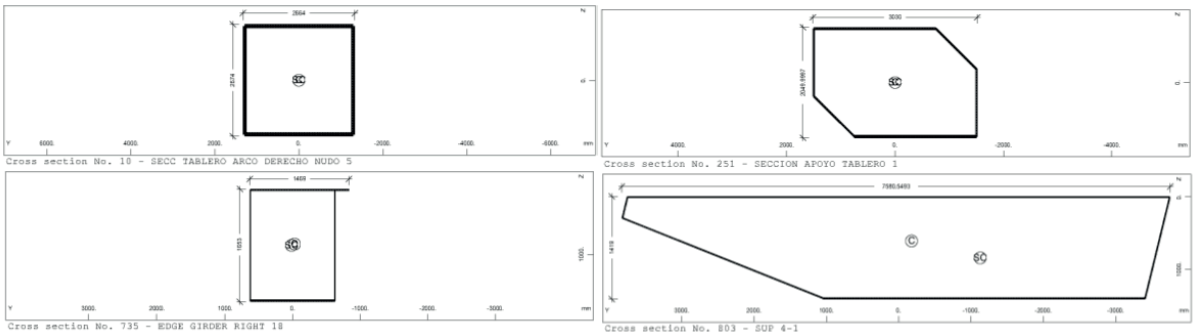


Figure 10. Examples of cross-sections in the models.

The figure below [Figure 11] shows the elastic-plastic non-linear typical stress-strain diagrams of the materials used in the models.

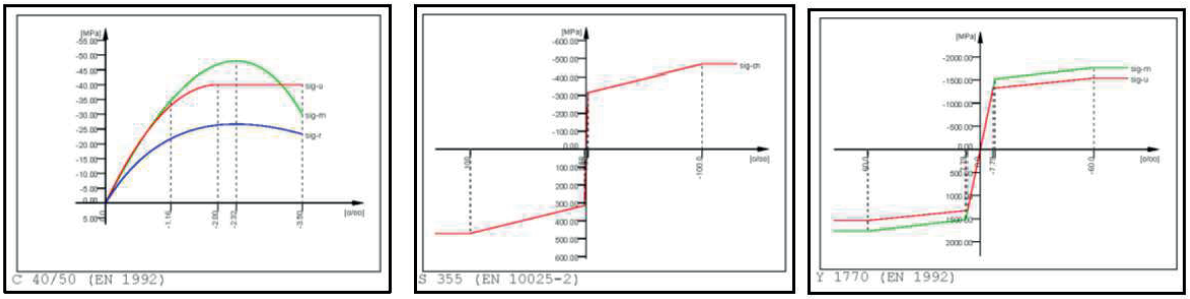


Figure 11. Stress-strain diagrams for the concrete slab, steel members and cables.

Temporary elements as lifting towers or temporary supports were simulated in the model in a simple manner. In some cases, these elements were represented by a simple support condition in a node, for instance the lifting towers. In other cases, when they had a relevant influence in the structural system, they were modeled in more detail, for example the mid-span assembly towers [Figure 12]. Nevertheless, peer review scope was not the verification of the temporary supports itself, but the checking of reactions transmitted from the main structure.

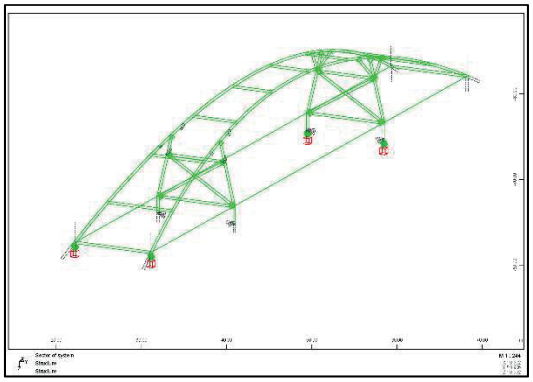


Figure 12. Assembly towers and temporary bracings used for the mid span load out.

A remarkable characteristic of the model was the use of non-linear analysis for solving the structure. It was required to properly simulate the behavior of the temporary bow-string cables and the lifting cables. Second-order theory was performed, which includes compression cut off for cable elements, geometrically non-linearity according to second-order theory and system modification for taking into account large deformations.

Non-linear analysis allowed bow-string tension force and sag control, as well as solving lifting maneuvers, as shown in the figure below [Figure 13], in which a transverse winds acts on the mid-span during lifting.

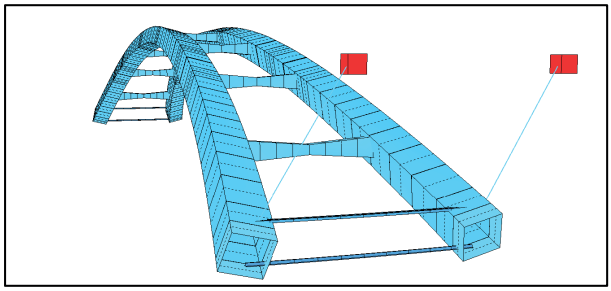


Figure 13: System deformation due to wind loads during lifting.

4.1. Erection sequence simulation

The erection of the bridge consisted on many different and complex stages, which were previously described in section 2.

In order to be able to model the different stages of the bridge construction, a special module in SOFISTIK (CSM) was used [5]. Figures below [Figure 14,Figure ***15***,Figure ***16*** and Figure ***17***] show some of the construction stages included in the model.

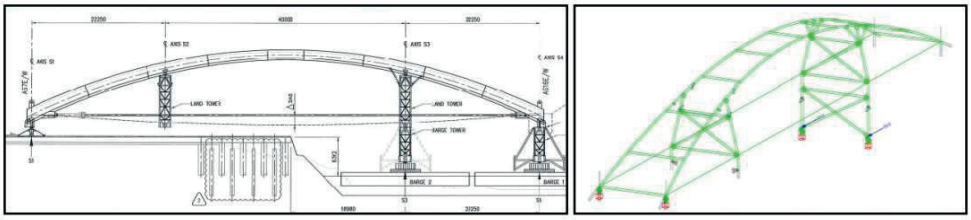


Figure 14. Skidding of the mid-span arch.

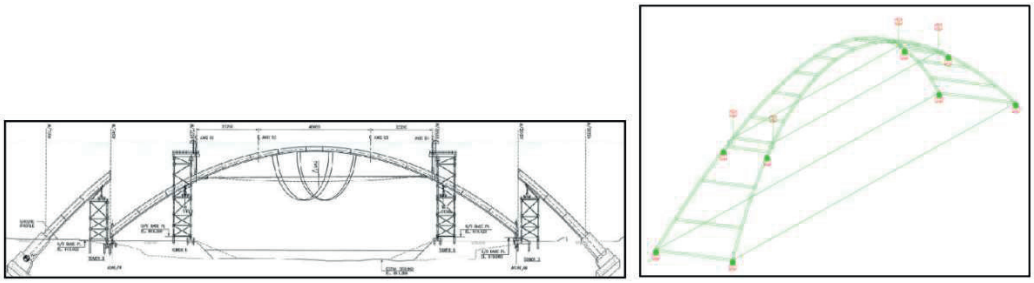


Figure 15. Heavy lifting and connection of the intermediate segments of the arch.

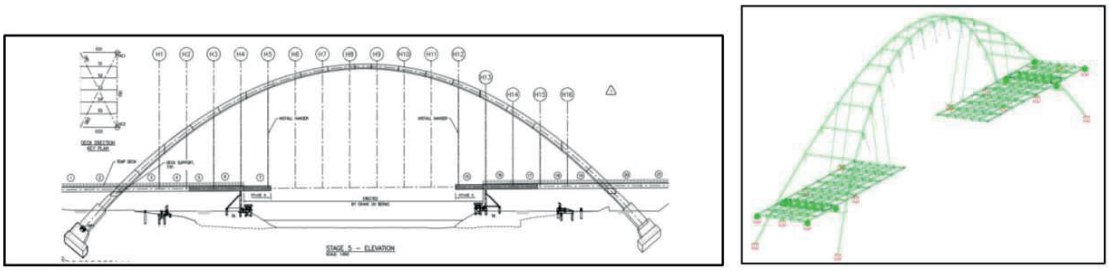


Figure 16. Deck and hangers installation.

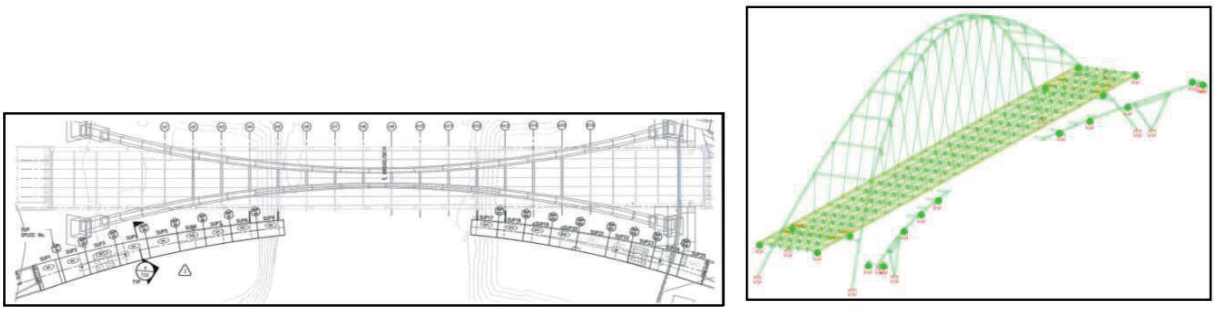


Figure 17. SUP erection.

For the arch construction sequence a simulation of 22 structural systems were required. 40 Structural systems were required for the deck and SUP installation.

The SOFISTIK construction stage tool (CSM) [5] allows the simulation of evolutionary construction process with a simple and clear input. The elements of the bridge are divided in groups which are activated or deactivated at each construction stage. In the same way, loads acting on the structure

during the construction, as self-weight, dead load, cable installation force or jacking movements, are applied or removed in the process.

In addition, the software provides the option of modifying the initial stiffness of an element, for example, to simulate the poured of a concrete element or the installation of a cable stay, and the coupling conditions between elements, as required.

One of the greatest advantages of the software is the fact that when an element is removed from the system, linked forces are automatically introduced in the remaining system with opposite sign.

Geometrical control of bridge was performed by means of defining the type of erection of new elements. The software provides different options: In original system position, with original inclination or tangential erection, as shown in the following sketch [Figure 18].

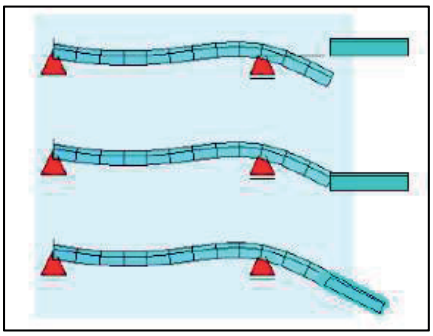


Figure 18. Geometrical options for the erection of new elements.

As a result, each construction system was solved for permanent loads. Variable loads, as wind loads, temperature or construction live load, were computed independently. For each construction system generated by CSM, variable loads were manually introduced. Finally, both the permanent and the variable loads were combined and the structure was checked for any single stage.

4.2. Sensitivity analysis-risk assessment

A sensitivity study was developed in order to identify risks, establish limits during the bridge erection maneuvers, and assess geometrical fabrication errors of steel members, which was the most challenging and complex task of the bridge construction, due to the fact that the adjustment measured on the connection between the parts of the bridge were very limited.

4.2.1. Variation on the Bow-String tension

The aim of this study was to check the maximum admissible variation of tension from one cable of the bow-string to the other [Figure 19], outlined by ALE (heavy-lifting subcontractor). This limit was defined as a 5 % difference in tension force and it was controlled during the skidding maneuvers by installing independent jacks at each bow-string.

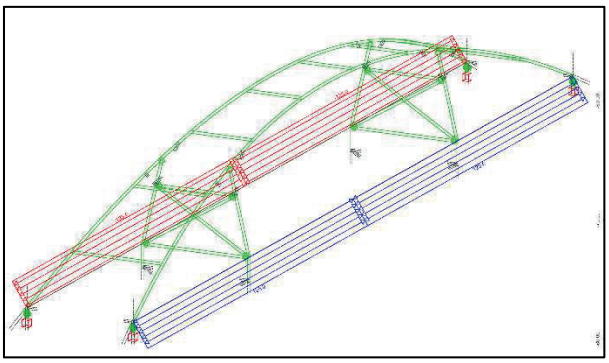


Figure 19. Study of variation of tension between bow string cables.

4.2.2. First, second and third skidding manoeuvers

During the skidding manoeuver, at the stage in which the mid-span arch was transferred from the skid rails to the barges, the effect of friction in skid-shoes was taken into account in order to limit the maximum pushing horizontal force. As a matter of conservative concept, 5% friction was considered even when navigating, at each support. The two ribs arches were also studied for cases of different settlement in one support out of the other three, safety factors were found big for failure, up to 100 mm differential settlement, this was possible by including transversal temporary frames at the 4 arch leg edges.

4.2.3. Navigation

During navigation, a possible unbalanced movement of barges was studied by means of introducing in the model a relative movement between barges [Figure 20]. In this way the maximum relative movement between barges was limited, which was easily controlled during the operation. The buckling factor of the navigation towers was studied with a sensitivity analysis varying the relative movement of the navigation tower foot or barges. The safety factor was big enough regarding to this relative displacement, the limit was 300 mm, the use of a separating truss between barges was disregarded. In order to avoid big horizontal forces and instability of barges, the navigation towers were hinged in the connection with the barge, with a hinged frame structural model, the arch represented the bent beam of the frame, and the barges were the foundations with hinges to avoid barge instabilities.

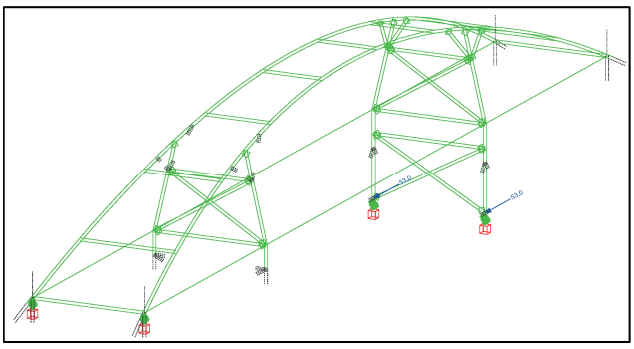


Figure 20. Sensitivity study during navigation maneuver.

4.2.4. Arch heavy-liftting

The misalignment of the lifting jacks during the heavy lifting maneuvers of the segments 7 to 15 and the segments 4 to 18 was also identified as a risk. Throughout the calculation model, the implications of an uneven lifting were assessed with the aim of limiting the misalignment and the difference of force between the lifting jacks. 65 mm and 150 mm were the maximum allowable lags for the first and the second heavy liftings, respectively.

4.2.5. Completion of splices-geometrical fitting

The most critical step in the installation of the steel arches of the Walterdale Bridge was the stage in which the final connections of the arch were completed. The Arch was modelled using MIDAS/Civil [3] and different sensitivity analysis and finite elements meshes were developed with two main objectives:

Firstly: Match most closely the target geometry and the referenced stress distribution which will result in a final geometry within tolerance of the structure as designed [Figure 21].

Secondly: Facilitate the installation while dealing with various factors which are beyond the control of the construction team, most importantly the fabrication error of the arch itself.

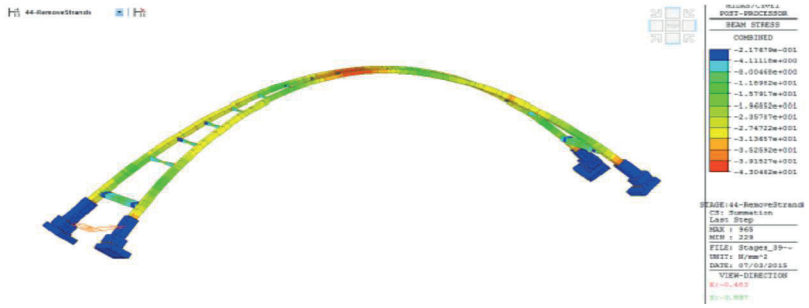


Figure 21. Arch completion MIDAS model steel stresses.

In order to analyze the local stresses caused by the forces that will be required to align the segments, a model was created with a mesh of tetrahedral solid elements of the second order (20 nodes per element). The mesh was refined at zones of load application and around auxiliary brackets for splicing alignments [Figure 22].

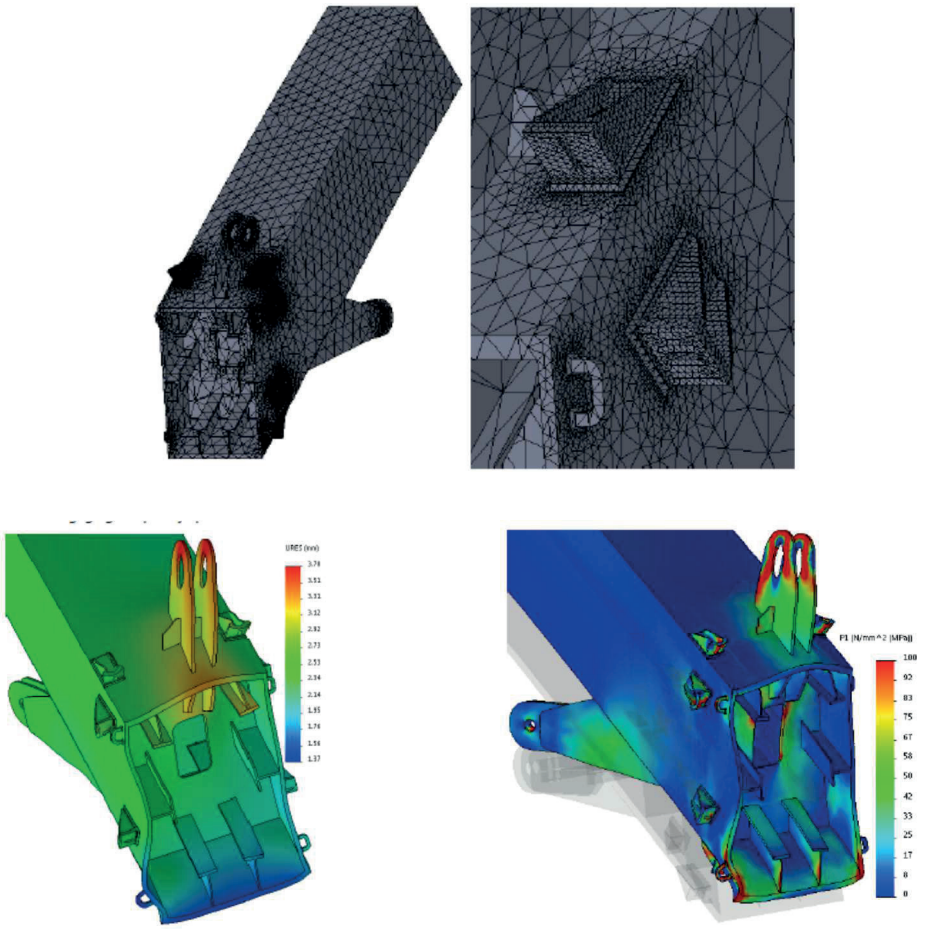


Figure 22. Finite element meshes to calculate displacements, stresses and deformations.

5. DECK AND SUP ERECTION PROCEDURE

In order to fully assess the deck and SUP installation procedure in its entirety, a three dimensional, staged model was created which simulates each stage of construction [Figure 23]. In this model, each member of the arch, deck and SUP is a stick member.

The Starting point of the model took into account the as built geometry of the arch as it resulted from the construction procedure used. The model is staged so that each step of construction could be properly assessed.

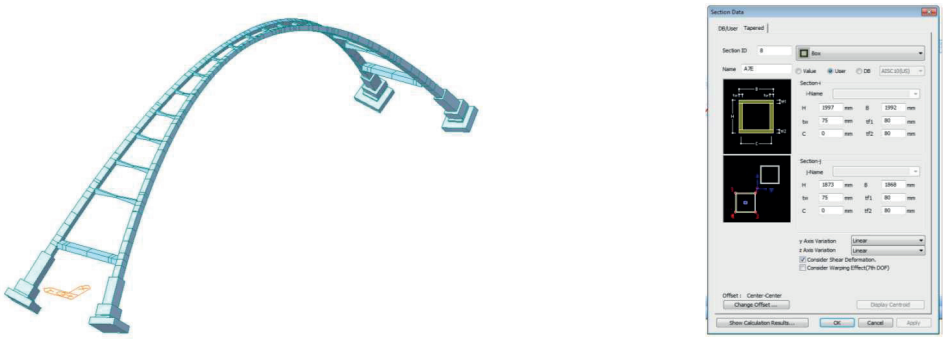


Figure 23. Starting point of the model.

The deck was installed sequentially; its members were defined as composite members in the model, with the activation of the concrete deck occurring at the appropriate stage [Figure 24]. This accounts for the changes in structural properties of the deck during casting.

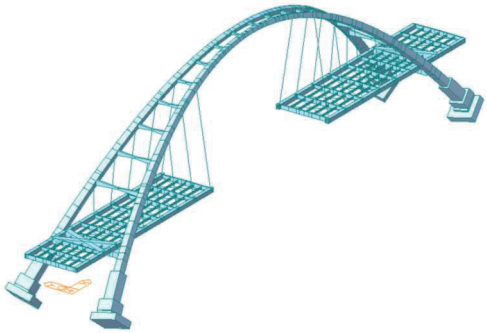


Figure 24. Deck installation sequence.

The installation of the SUP was modelled in a stage way in accordance with the envisaged Erection procedure. The sectional properties of the SUP were manually defined in the model [Figure 25].

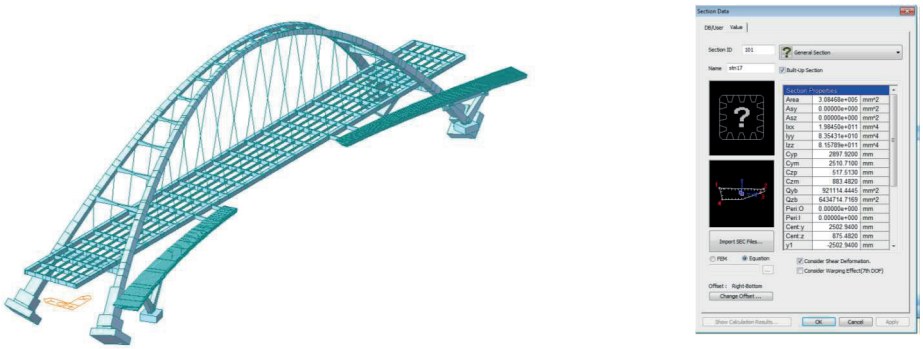


Figure 25. SUP installation sequence.

The full procedure was modelled incorporating only the construction loading (no traffic loads were taken into account). This model, including the full procedure that was used in order to confirm the following targets:

a) Arch, deck and SUP geometry through all the construction process.
b) Confirmation that the final geometry will comply with the contract specifications.
c) Hanger tensions during the construction procedure and final tensions at the end of construction.

A third model, which assesses the effects of external loads on the structure, was created [Figure 26]. The purpose of this model is to ensure that each of the stages is assessed for each of the load cases which are required by the code. This model considered each stage under the following load cases.

- Live load
- Wind load
- + 28 Degrees
- - 41 Degrees

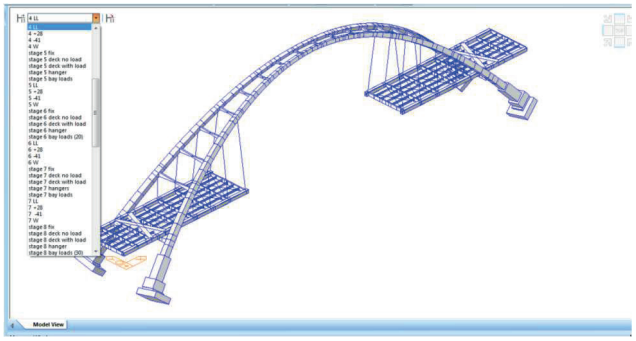


Figure 26. ULS model.

The results of each of these stages and load cases are then combined manually to determine the ULS demands on the structures.

6. SPECIAL STUDIES DURING EXECUTION DESCRIPTION

During the erection of the bridge, some modifications or adjustments to the Erection Engineering Procedure were made which required additional verification of the structure. As it was done for the risk assessment, partial models of each construction stage were used for the analysis of each situation. The most interesting tasks are briefly recorded below.

6.1. Locked In stresses in the arch struts

For the achievement of the arch splices connection, several different adjustments were required. These operations were tracked on site and rechecked with further analysis, to cross check the performance.

The connection of the intermediate segments of the arch had been simulated in a single stage in which the four edges of the arch had been simultaneously spliced at the moment of the lifting cables release. However, the real situation was much more complex [Figure 27]; the splices were completed in different times with many different intermediate adjustment manoeuvres.

Figure 27. Approach of arch segments.

In the same way, the arch erection model was modified in order to properly simulate the boundary conditions of the four edges and the different adjustment operations during the splicing process (variation of bowstrings force, variation of lifting cables force, jack forces in brackets, etc.).

The geometrical modifications of the arch caused negligible forces in the arch ribs. However, the locked in stresses were quite relevant in the struts. It required a further analysis to evaluate the level of stresses in the struts in service.

6.2. Temporary connections of SUP segments.

Previously to complete the final welded connections, the SUP segments were temporary assembled at SUP9 & SUP16 joints and at both sides of the key segment (SUP13)[Figure 28].

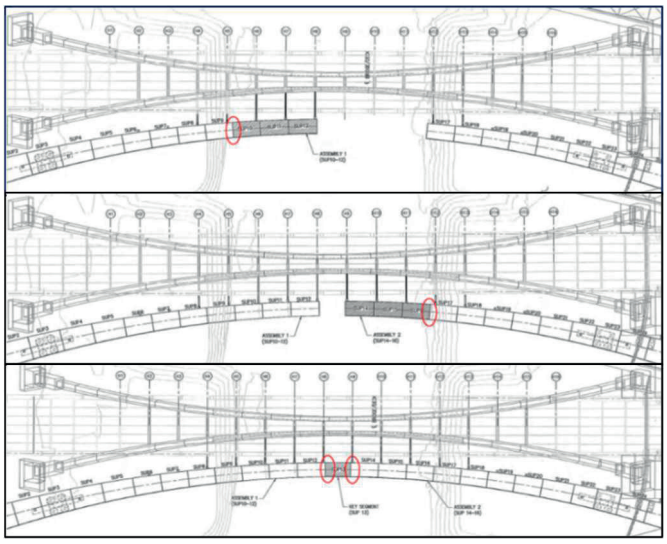


Figure 28. Temporary connections at SUP9&SUP16 and SUP13.

Temporary connections were designed to allow a fast installation and to resist the forces in the joint until the end of the construction process.

The temporary bolts necessary to bring the segments together for welding, were the elements used for the temporary connections at SUP9&16 and at SUP13. The number of bolts was adjusted in order to minimize the connection time and therefore the time holding the segments from the crane.

In addition two alignment tabs in the top flange were provided for approaching and aligning the segments, as shown in the figure below [Figure 29].

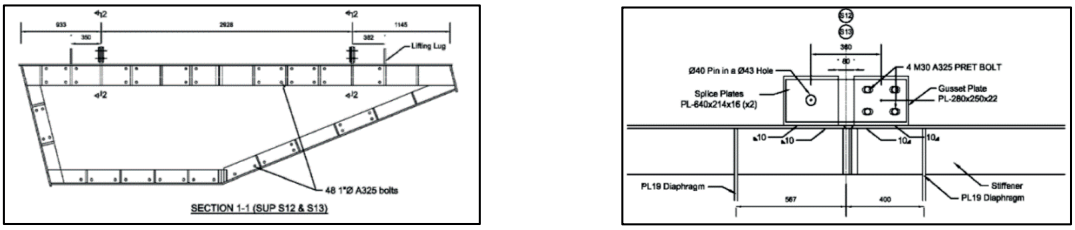


Figure 29. Temporary connection at SUP13.

Throughout the calculation model these temporary elements were analysed by means of determining forces during the construction process. The variable loads, especially temperature, introduced significant forces in the connections in some construction stages. It brought to limit the magnitude of these loads considering the period of the year in which the temporary connection would work.

6.3. Assessment of the final structure stiffness in order to identify fracture critical members

Independently from the construction process calculation, a study was carried on in order to determine which steel elements of the structure were to be considered as "Fracture Critical Members" (FCM), and therefore would require a fracture control plan.

FCM should fulfil two conditions: To be subjected to tensile stresses for either axial or bending forces, and to be non-redundant, which means that the failure of the element would result in collapse of the bridge or a portion of the bridge.

First condition was directly checked in the model by means of determining elements partially or totally subjected to tensile stresses in service. In this way, the arch ribs were excluded because they were fully in compression or the level of tensile stresses was very low and in a small portion of the cross-section.

Second condition, redundancy, was checked in a more complex way. An alternative load-path was demonstrated by means of checking the resistance of the structure in the event of fracture. The procedure was as follows:

- Based on our experience, the most sensitive members in the most demanding cross-section were chosen to verify the redundancy of the system.
- Forces in service in these sections were obtained for the full non-factored live load.
- The structural system was modified by means of varying the coupling condition in the node. In the case of failure of elements in tension, the node was completely released. For members mainly subjected to bending moments, only the rotation coupling was released.

- On the modified system the forces associated with the released couplings were applied as external loads with opposite sign. These loads were factored in order to take into account the dynamic amplification in the case of a sudden failure.
- The resulting forces were summed to the forces in the structure in service, and the resistance of the structure was checked.

As a result, only the floor beams were classified as FCM.

6.4. SUP temporary supports.

The type and location of the SUP temporary supports were modified during the erection of the bridge, which required an additional calculation of the construction process in order to check the hangers lengths, the temporary supports and the achievement of the target geometry [Figure 30].

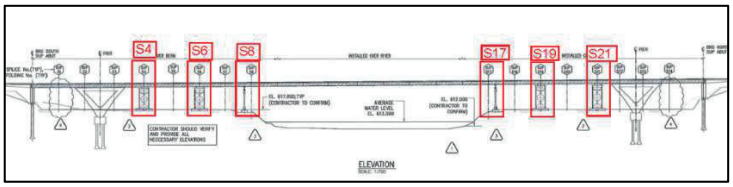


Figure 30. Temporary connection at SUP13.

The configuration of the bearings on temporary supports was varied along the SUP installation. Firstly, at the moment of placing segments on the temporary towers and connecting each other, two pairs of bearings were required as shown in the figure below [Figure 31].

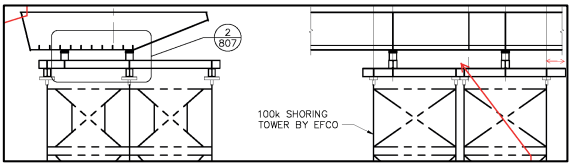


Figure 31. Temporary connection at SUP13.

Secondly, one pair of bearing was removed and the SUP was supported in two bearing in one single axis. In this situation the SUP was jacked from some of the temporary towers. Finally, once the SUP was connected to the bridge, the internal bearing was removed with the aim of controlling properly the reaction on the tower, avoiding the effect shown in the figure below [Figure 32].

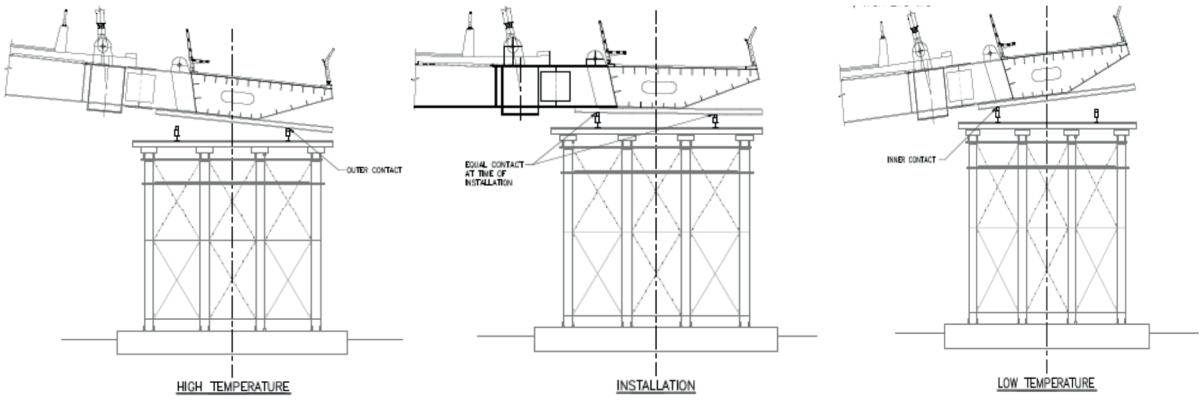


Figure 32. Temporary connection at SUP13.

The Coupling conditions of the SUP segments on the temporary supports were modified in the model to simulate the real situation in each stage.

7. CONCLUSIONS

The Bridge erection procedure, outlined in this article, brought the strain-stress level, hanger tensions and the geometry of the permanent structure (arch+deck+sup) to a final stage that complied with the Client expectations. The modelling analysis of the whole erection manoeuver stages has been the imperative tool for this purpose, hence, an asset for the final successful achievement of the Arch construction.

8. ACKNOWLEDGEMENTS

- City of Edmonton, COWI & Dialog.
- Allnorth Consultants:
    - Dragan Majkic P.Eng., Erection Engineer of Record.
    - Nigel Brown P.Eng., Detailed Design and Project Management.
    - Koushan Sadeghi P.Eng., Detailed Design and Site Support.
    - Bogdan Alexeyenko P.Eng., Modelling.

9. REFERENCES

[1] Martinez Adrados, P.M.; Castrillo Calvillo, M.; Majkic, Dragan; Brown, Nigel; Sadeghi, Koushan; Alexeyenko, Bogdan; Chang, Andy. *Walterdale Bridge,* SEABC Newsletter • Volume 37 • February 2017
[2] Martinez Adrados, P.M.; Castrillo Calvillo, M.; Majkic, Dragan; Brown, Nigel; Sadeghi, Koushan; *A moving story*,. Bridge, design & engineering. Issue N0. 86 first quarter 2017.
[3] MIDAS Manual v4*.16. MIDAS IT*
[4] SOFISTIK Manual, Version 2016-2. SOFISTIK AG.
[5] CSM Manual, Version 2016-3. SOFISTIK AG.
[6] SAP2000 Manual, Version 15.1.0 Advanced.

Structural analysis and damage assessment of the Vistabella Church's Tower to establish the masonry's active reinforcement for its restoration

Señís, Roger[1]; Pavón, Susana[2]

ABSTRACT

This paper presents the reinforcement system for the restoration of the Vistabella Church's Tower (La Secuita, Tarragona). The intervention was carried out due to evident chronic pathologies that affected the resistant behaviour and stability of the steeple. After some numerical approaches (structural analysis and damage assessment) it became clear that, in relation the wind action, the lightness of such a masonry construction along with the feebleness of the connections between the structural members were at the basis of the problem. In order to provide additional vertical load without substantively modifying the structural scheme, a solution based on external prestressed bars, was implemented. The procedure, the theory that supports it and the results of the follow-up are described in detail, these being the objective of the paper.

Keywords: Vistabella's Tower, Historical masonry, Damage assessment, Structural restoration, Active reinforcement.

1. INTRODUCCIÓN

La iglesia del Sagrat Cor de Vistabella (La Secuita, Tarragona) es un monumento histórico de Josep Maria Jujol (1879-1949), arquitecto modernista vinculado a Antoni Gaudí (1852-1926), su maestro e íntimo colaborador. En 1917 Jujol recibió el encargo de los vecinos del pueblo de Vistabella para proyectar la iglesia parroquial, la cual fue construida (1919-1923) por los propios vecinos, empleando técnicas tradicionales y materiales sencillos (piedra, cerámica, mortero de cal y hierro). El monumento fue declarado Bien Cultural de Interés Nacional, BCIN, por la Generalitat de Catalunya en marzo de 2011.

El edificio se resuelve en planta sobre la base de un cuadrado de 12,6x12,6 m que genera la envolvente, con sus vértices orientados a los cuatro puntos cardinales. En la parte central se encuentra la nave principal dispuesta a 45 grados en relación a la geometría de la planta, de acuerdo a la Figura 1 [1]. El sistema estructural que cubre la iglesia lo componen pilares, arcos y bóvedas de fábrica de ladrillo y mortero de cal y se caracteriza por cuatro pilares dispuestos en el centro de la nave de los que arrancan todos los arcos, entre ellos los principales, dos arcos parabólicos cruzados a 60 y 120 grados (en planta) que alcanzan una altura de 11,70 m y sobre los que cargan las bóvedas de crucería.

[1] *Departamento de Tecnología en la Arquitectura (TA). Universidad Politécnica de Cataluña (ESPAÑA). roger.senis@upc.edu (Corresponding author)*
[2] *Departamento de Tecnología en la Arquitectura (TA). Universidad Politécnica de Cataluña (ESPAÑA). susana.pavon@upc.edu*

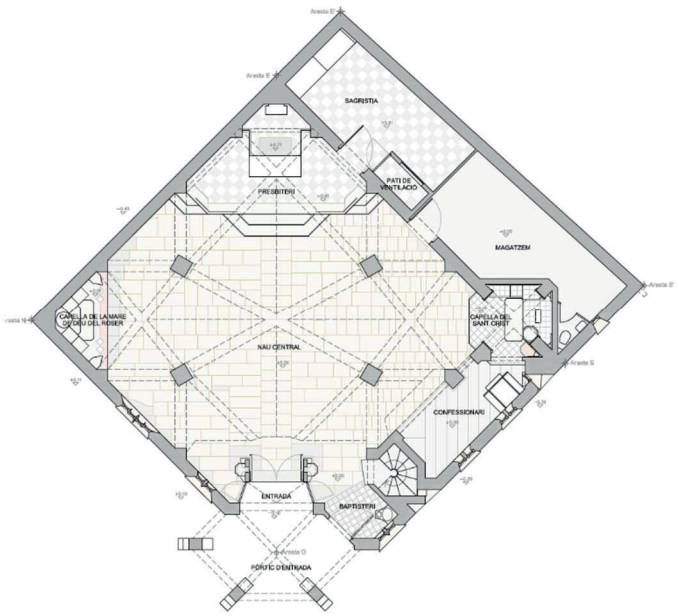


Figura 1. *Planta baja de la iglesia con referencias al cuadrado exterior y la nave central* [1]

Los dos arcos parabólicos centrales se prolongan por encima de la clave del crucero y emergen al exterior en forma de **cuatro costillas de fábrica de ladrillo inclinadas de sección transversal en "T"** y coronadas a 28 m de altura por la Cruz conformando uno de los elementos formales y estructurales más representativos de la iglesia: **el campanario** (Fig. 2).

Figura 2. *Vistas exteriores de la iglesia de Vistabella en la actualidad*

Una primera aproximación al monumento permite apreciar el objetivo del diseño de la obra, donde el propio sistema estructural se establece de acuerdo a **la función resistente de la forma** [2], para la obtención de una geometría más óptima y eficiente, a la vez que se da respuesta a las cuestiones formales y funcionales para las cuales fue proyectada.

No obstante, a raíz de las patologías crónicas existentes en la iglesia y documentadas en el proyecto de restauración [3], el campanario, el elemento más expuesto y por lo tanto el más afectado por estas problemáticas, ha sido, recientemente, **objeto de restauración estructural.** Ya con antelación, el campanario fue objeto de otras intervenciones (1993; 2001), incluso en 1935, a cargo del propio Jujol que colocó un sistema de tirantes para reforzarlo, a tenor de su derrumbamiento parcial debido a un fuerte viento huracanado [4,5]. Un sistema pasivo que resultó ser poco efectivo frente a la acción eólica, ya que los tirantes sólo entraban en carga cuando la fábrica de ladrillo estaba solicitada a **esfuerzos de tracción considerables,** hecho nada deseable/conveniente [5].

La propia naturaleza de la estructura - campanario, su geometría; la variabilidad de las propiedades mecánicas de los materiales; las diversas soluciones de ensamblaje; las técnicas constructivas desarrolladas a lo largo de su historia, así como el desconocimiento del estado inicial y del alcance de los daños existentes, son factores que convirtieron la fase previa de investigación y diagnóstico en una fase compleja que requirió de un desempeño riguroso y un conocimiento exhaustivo de la problemática a evaluar. Para ello se estableció un enfoque esencialmente interdisciplinario en el que desde la variedad de conocimientos se abordó la investigación histórica, la evaluación *in situ*, la modelización y el análisis estructural [1,5-9].

En este contexto, durante el proceso de investigación de campo y de la evaluación *in situ* para la caracterización mecánica de los materiales y los elementos estructurales, **en conjunción con la preservación del bien cultural,** se plantearon y desarrollaron técnicas de ensayo no destructivas o poco destructivas [10,11], para la obtención de dicha información.

Mediante estas técnicas, junto con la definición geométrica y la posterior modelización del sistema resistente del campanario de acuerdo al análisis estructural realizado, se determinó que, bajo la acción del viento, la geometría existente (el campanario de fábrica de ladrillo y de piedra) estaba sometida a esfuerzos de tracción destacables (Apartado 2), superando la capacidad resistente de los materiales.

El diagnóstico concluyó que esta casuística originaba el daño estructural del campanario, viéndose agravado por el deterioro producido, (Fig. 3), a lo largo del tiempo, por la acción del ambiente sobre los materiales constituyentes del mismo [1,5,12]**,** en ocasiones debido al uso inadecuado (desde el punto de vista de la durabilidad) de algunos materiales como el acero o el mortero, en ocasiones en busca de soluciones más ingeniosas que efectivas [13]**.**

Figura 3. *Vistas exteriores de la iglesia de Vistabella antes de la restauración realizada*

Atendiendo a los resultados del análisis estructural inicial realizado (Apartado 2), los cuales indican claramente la existencia de tensiones de tracción producidas por la acción eólica, y no compensadas por las compresiones correspondientes al peso propio del campanario (elemento especialmente esbelto), se constata la existencia de grietas (con separación de labios). Ello generaba discontinuidades en la fábrica de ladrillo que se convertían en articulaciones, pérdida de rigidez axial de las costillas y una creciente inestabilidad del sistema resistente. Por lo tanto, dado que las condiciones de la estructura y de sus materiales no garantizaban un nivel de seguridad aceptable, se propuso una **intervención de restauración estructural** [1,3,5,12,13], como se expone en el Apartado 3.

Esta intervención se planteó para **restituir el adecuado comportamiento resistente del sistema estructural, incorporando, mediante un sistema de pretensado, fuerzas axiles de comprensión que, añadidas a las del peso propio del campanario, neutralizan las tensiones de tracción producidas por la acción del viento**. Esta solución (postesado axial), aunque implique que en algunos casos se incremente las tensiones de compresión a las que se someterá el material, es una solución que aporta un buen rendimiento estructural, siendo reconocido en el ámbito científico-técnico como una de las técnicas más eficientes de refuerzo, frente a acciones horizontales, de elementos estructurales conformados por materiales resistentes a compresión y con bajas o nulas prestaciones a tracción [14].

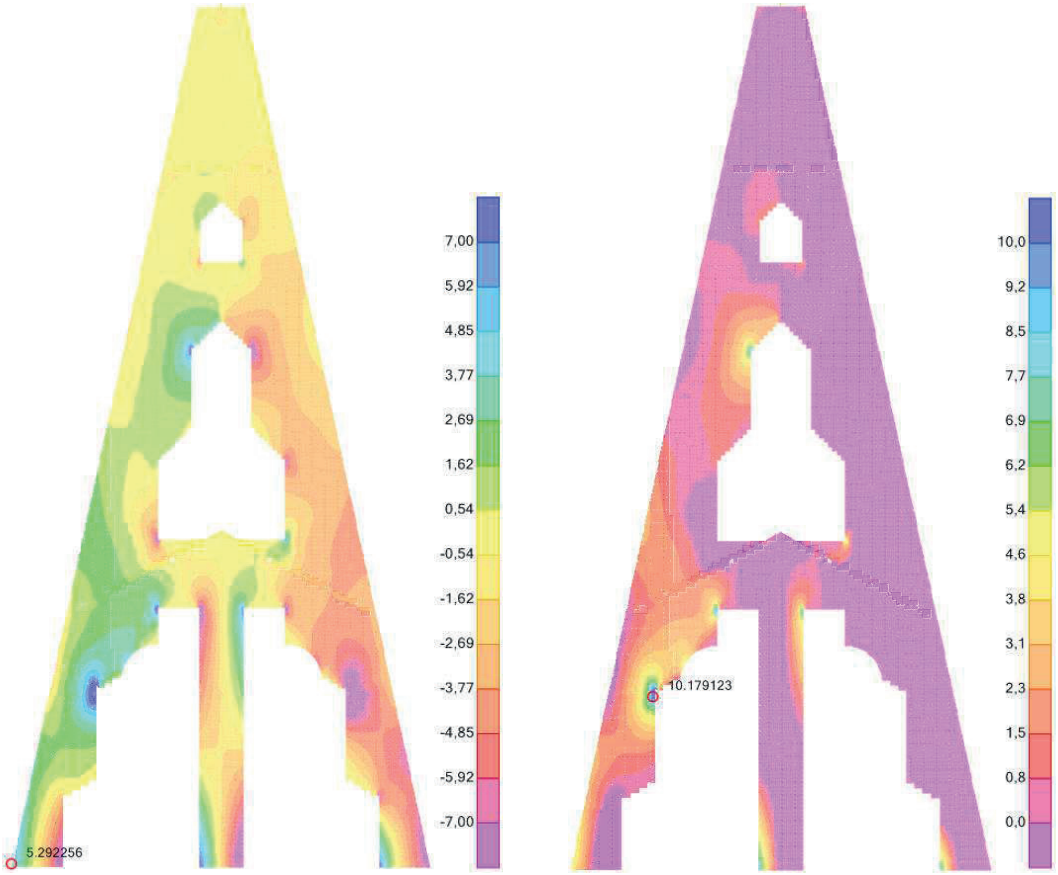
En este sentido, en el presente artículo se expone el análisis estructural y la evaluación del daño realizados (Apartado 2) **del sistema resistente del campanario (costillas de fábrica de ladrillo) para la posterior definición del sistema activo planteado para su refuerzo** (Apartado 3)**.**

2. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL Y EVALUACIÓN DEL DAÑO DEL CAMPANARIO

De acuerdo a lo expuesto previamente, en el momento de evaluar estructuralmente el elemento arquitectónico singular y de cierta complejidad formal que es el campanario de Vistabella, el primer punto necesario fue disponer de las características geométricas y mecánicas de los elementos resistentes que lo conforman.

En base a esta recopilación de datos realizada [3,12], se analizó la estructura completa del campanario inicial (previo a la restauración estructural), de acuerdo al planteamiento acordado con los técnicos redactores del proyecto de restauración (Prats, Pavón, *et al*. [3]), determinando su comportamiento resistente (acciones solicitantes) y, consecuentemente, la evaluación del daño de la fábrica de ladrillo (estado tensional), especialmente, frente a las cargas horizontales (acción del viento). En la Figura 4, se muestra el estado tensional inicial de las costillas debido a la acción del peso propio (PP) + viento (V_x).

Como se observa en la Figura 4, se determinó que la fábrica de ladrillo trabajaba a tensiones de tracción destacables bajo la acción del viento, la cual era una situación nada deseable. Puntualmente, había zonas que podían llegar, considerando un comportamiento elástico del material, a una tensión de tracción superior a 10 kg/cm^2 en puntos concretos. Esta casuística era la que estaba produciendo patologías considerables en la estructura del campanario, poniendo en riesgo su resistencia y/o estabilidad, ya fuera parcial o total. En este sentido, fue de suma relevancia realizar el refuerzo estructural (sistema activo) para la restauración del campanario, el cual se describe a continuación.



.a. .b.

Figura 4. *Estado tensional inicial (kg/cm²) de les costillas (PP+Vx): a) Tensiones de tracción y compresión; b) Tensiones de tracción* [3,5]

3. DEFINICIÓN DEL SISTEMA ACTIVO PARA EL REFUERZO DEL CAMPANARIO

A tenor de los resultados obtenidos en el análisis estructural del campanario existente (estado inicial), en este apartado se describe el sistema de refuerzo que ha permitido arreglar de forma definitiva las diferentes patologías que afectaban a la resistencia y/o estabilidad parcial o total del campanario.

Se definió un sistema activo de ocho tirantes externos de Ø16 mm de acero inoxidable, dos por costilla, sustituyendo los tirantes existentes que no eran efectivos, como se ha expuesto anteriormente. Cada uno de ellos se ha situado en los vértices que forman la intersección de las dos partes de la sección en "T" de las costillas de fábrica de ladrillo y discurriendo paralelos a estos vértices desde la base del campanario hasta la aguja del mismo (Fig. 5). Los tirantes se han vinculado a las costillas de fábrica de ladrillo mediante placas de anclaje en los extremos e intermedias, generando tirantes de tres tramos. Con el tesado de los tirantes se ha realizado una solución de postesado gradual/secuencial, en referencia a la ejecución en obra del tesado (aspecto ampliamente documentado [12,13]).

Así, la restauración estructural realizada **recupera** la propuesta de refuerzo ejecutada anteriormente por el propio Jujol (sistema pasivo de tirantes de acero), pero **incorporando,** mediante el sistema de refuerzo realizado, las mejoras y los avances que permiten las técnicas, la tecnología y los materiales de la actualidad, **sin alterar las cargas bajo el campanario (equilibrio estático),** lo cual es un aspecto fundamental [13].

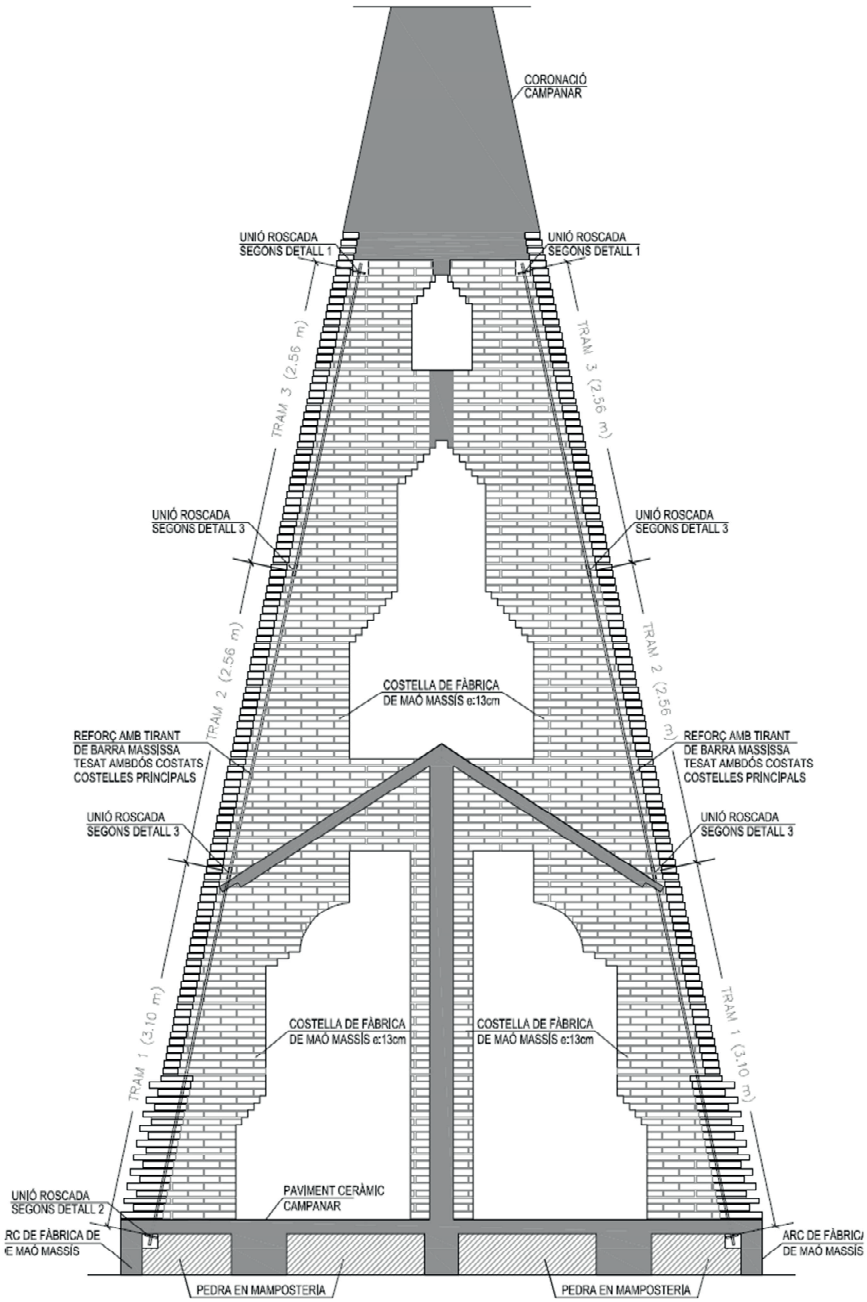


Figura 5. *Definición del sistema de refuerzo con tirantes en las costillas del campanario* [3,5]

En efecto, se ha llevado a cabo **una restauración estructural mediante un sistema de postesado axial gradual y secuencial de las costillas con tirantes de acero inoxidable externos.**

Esta intervención se asimila conceptualmente, en parte, a la propuesta por el Dr. arquitecto Robert Brufau en una chimenea industrial en Roda de Ter (proyecto no ejecutado). Un planteamiento estructural que el propio Brufau expone: "La intervención consistiría en hacer un cierto postesado vertical de toda la fábrica, introduciendo compresiones axiales a través de un tensor [...]. Con esta operación se quería reducir al máximo el riesgo de que nunca se presentaran indeseadas tensiones de tracción a la obra de fábrica" [15].

En este contexto, **se estudió el tensado más adecuado** (Tabla 1), según la temperatura ambiente del día en que se llevó a cabo (7 de octubre de 2016, Tª media durante tensado: 21ºC), así como en base a los valores de temperatura máxima (verano) y mínima (invierno) **considerando el salto térmico que pueda afectar al tesado,** debido al alargamiento y el acortamiento de los tirantes. Los valores analizados se muestran en la Tabla 2, destacando que la diferencia entre los valores del tesado teórico y el tesado real reside en tener en cuenta, también, en el segundo el alargamiento o acortamiento de los elementos de fábrica (costillas) debido a los incrementos de temperatura (verano/invierno según el caso).

Tabla 1. Definición de las fuerzas de tesado y verificación del postesado objetivo [12,13]

	POSTESADO OBJETIVO			
Tramo	**Tesado (KN) objetivo**	**Tª equiv. (numérica)**	**Verificación Tª (modelo)**	**σ (Kg/cm²)**
Tramo 1	20			**-7,0**
Tirantes 1	**10**	-16	**-18**	
Tramo 2	40			**-7,0**
Tirantes 2	**20**	-32	**-35**	
Tramo 3	60			**-7,0**
Tirantes 3	**30**	-48	**-53**	
Costilla	**60**			**-6,0**

Tabla 2. Estudio y verificación del tesado en Tª ambiente máxima (verano) y mínima (invierno) [12,13]

	TESADO + ΔT+ (VERANO)						
Tramo	**T + ΔT+**	**Tesado (KN) teórico**	**%**	**σ (teórico)**	**Tesado (KN) real**	**%**	**σ (real)**
Tramo 1		0	0,00%	**0,0**	8	40,00%	**-2,8**
Tirantes 1	**0**	**0**			**4**		
Tramo 2		-19	48,57%	**-6,8**	26	65,00%	**-6,3**
Tirantes 2	**-17**	**-10**			**13**		
Tramo 3		-40	66,67%	**-7,2**	46	76,67%	**-7,0**
Tirantes 3	**-35**	**-20**			**23**		
Costilla		-40	66,67%	**-4,0**	46	76,67%	**-4,6**
	TESADO + ΔT- (INVIERNO)						
Tramo	**T + ΔT-**	**Tesado (KN) teórico**	**%**	**σ (teórico)**	**Tesado (KN) real**	**%**	**σ (real)**
Tramo 1		53	-262,86%	**-18,4**	38	190,00%	**-6,3**
Tirantes 1	**-46**	**26**			**19**		
Tramo 2		72	180,00%	**-6,8**	58	145,00%	**-7,0**
Tirantes 2	**-63**	**36**			**29**		
Tramo 3		93	154,29%	**-7,2**	82	136,67%	**-8,4**
Tirantes 3	**-81**	**46**			**41**		
Costilla		93	154,29%	**-9,3**	82	136,67%	**-8,2**

Asimismo, **para garantizar la correcta puesta en obra del tesado, se instrumentó todo el proceso, a fin de controlar las fuerzas aplicadas a los tirantes en los diferentes niveles en todo momento**. La

estrategia seguida contempló la instrumentación de los ocho tirantes, en 3 niveles, con lo que se pudo hacer un seguimiento individualizado de las tres fases de tesado previstas, para un total de 24 galgas extensométricas [16]. En la Tabla 3, se muestran **los valores del protocolo de control establecido para el seguimiento en obra del tesado gradual/secuencial** para cada una de las fases, así como las correspondientes deformaciones unitarias, ε (μm/m), de acuerdo a la expresión (1), de cada tramo para su verificación en obra (instrumentación).

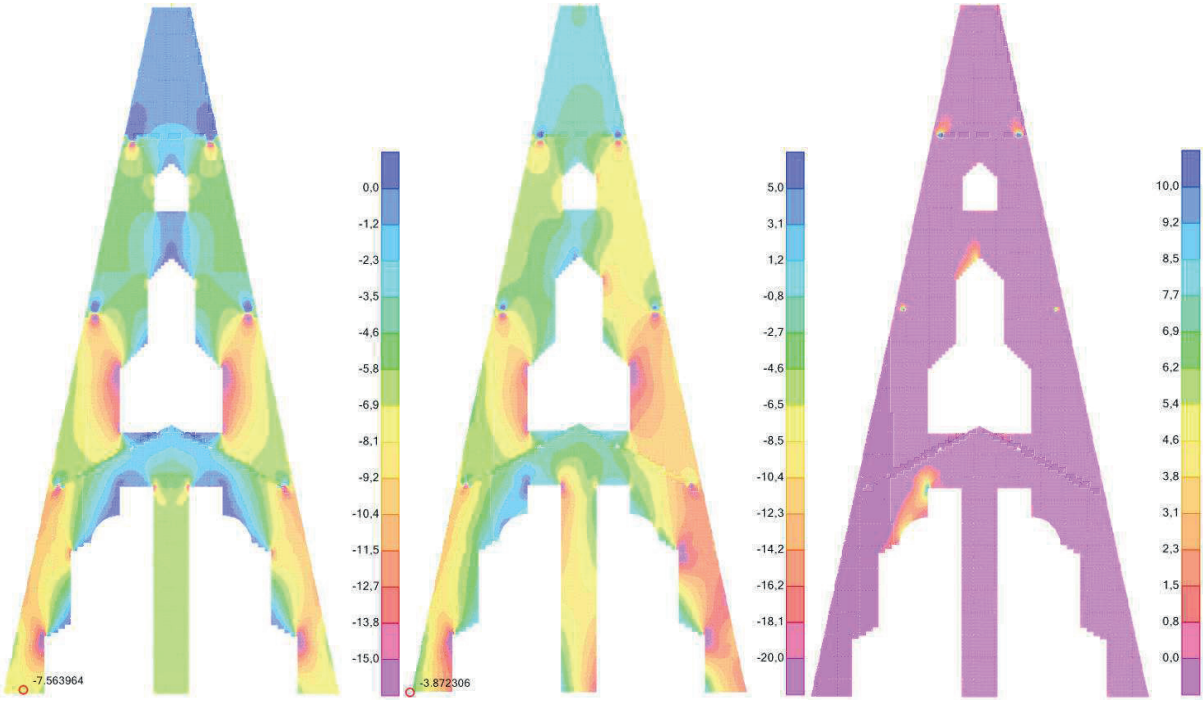
$$\varepsilon = \frac{N/A}{E} \tag{1}$$

Tabla 3. Valores del tesado gradual/secuencial y los parámetros de control (protocolo) para su verificación en obra [12,13]

	POSTESADO VERTICAL GRADUAL Y SECUENCIAL - CONTROL DEL TESADO							
	FASE 1							
Tramo	**Tesado (KN) final FASE 1**	**%**	**ε (μm/m) final FASE 1**	**Secuencia**	**Tesado (KN) gradual**	**Tesado (KN) acumulado**	**%**	**ε (μm/m) gradual (1)**
Tramo 1	**9,0**	90,0%	232	1	**4,5**	4,5	45,0%	**116**
				2	**4,5**	9,0	90,0%	**232**
Tramo 2	**9,0**	45,0%	232	1	4,5	4,5	22,5%	**116**
				2	4,5	9,0	45,0%	**232**
Tramo 3	**9,0**	30,0%	232	1	4,5	4,5	15,0%	**116**
				2	4,5	9,0	30,0%	**232**
	FASE 2							
Tramo	**Tesado (KN) final FASE 2**	**%**	**ε (μm/m) final FASE 2**	**Secuencia**	**Tesado (KN) gradual**	**Tesado (KN) acumulado**	**%**	**ε (μm/m) gradual (1)**
Tramo 1	**9,8**	98,0%	253	3	0,4	9,4	94,0%	**242**
				4	0,4	9,8	98,0%	**253**
Tramo 2	**18,6**	93,0%	479	3	**4,8**	13,8	69,0%	**356**
				4	**4,8**	18,6	93,0%	**479**
Tramo 3	**18,6**	62,0%	479	3	4,8	13,8	46,0%	**356**
				4	4,8	18,6	62,0%	**479**
	FASE 3							
Tramo	**Tesado (KN) final FASE 3**	**%**	**ε (μm/m) final FASE 3**	**Secuencia**	**Tesado (KN) gradual**	**Tesado (KN) acumulado**	**%**	**ε (μm/m) gradual (1)**
Tramo 1	**10,0**	100,0%	258	5	0,1	9,9	99,0%	**255**
				6	0,1	10,0	100,0%	**258**
Tramo 2	**20,0**	100,0%	516	5	0,7	19,3	96,5%	**498**
				6	0,7	20,0	100,0%	**516**
Tramo 3	**30,0**	100,0%	773	5	**5,7**	24,3	81,0%	**626**
				6	**5,7**	30,0	100,0%	**773**

Como se observa en la Tabla 3, **en el protocolo de control de tesado del sistema de tirantes se consideró el incremento de las fuerzas en los tramos superiores debido al tesado de los tramos inferiores (tesado gradual).** Este fenómeno se produjo por la deformación de las placas de anclaje.

Los resultados del comportamiento resistente del campanario, de acuerdo a la solución de refuerzo realizada, se muestran en la Figura 6 para las diferentes acciones solicitantes (PP, V_x y Tesado). Respectivamente, se presenta el estado tensional (pre-compresiones) de las costillas principales según la acción del tesado, T, (Figura 6*a*), así como el comportamiento resultante (Figuras 6*bc*), conjugado con el peso propio y el viento (PP + V_x + T).



.a. .b. .c.

Figura 6. *Estado tensional resultante (kg/cm2): a) Pre-compresiones por el efecto del tesado, T; b) Tensiones de compresión y de tracción; c) Tensiones de tracción (PP+Vx+T)* [3,5]

Como se observa en la Figura 6, **el comportamiento resistente resultante (estado tensional) de la estructura del campanario mejora de forma considerable,** en relación al comportamiento inicial (Fig. 4), siendo las tracciones prácticamente inexistentes (Fig. 6*c*) **por el efecto del postesado vertical gradual definido.** Para lograrlo, se establece una fuerza de tensado para cada tramo de tirante, atendiendo a la influencia del viento en cada dirección y el efecto térmico en cada punto según la orientación solar.

4. CONCLUSIONES

Para concluir, se expresan las reflexiones surgidas del trabajo desarrollado [3,12], y presentado, para la restauración estructural de esta obra del Patrimonio Cultural Catalán con patologías crónicas:

a) Se determina que el comportamiento resistente inicial del campanario era inadecuado y, por ello, requirió de un refuerzo estructural que mejorara dicho comportamiento.

b) Se realiza la restauración estructural del campanario **interviniendo con la máxima pureza, recuperando la esencia y la "simplicidad" de la actuación llevada a cabo por el propio Jujol en 1935 (refuerzo con tirantes),** sin la utilización de elementos superficiales y/o superfluos que tapen o "ensucien" la obra. Mediante un profundo conocimiento del binomio, conocido como **"estética estructural"** [2,17-19], que conforman el comportamiento estructural y el concepto arquitectónico.

c) Se presenta la solución adoptada mediante **un sistema postesado vertical gradual** (ejecutado secuencialmente), el cual fue posible gracias a las técnicas, la tecnología y los materiales de la actualidad, **sin alterar las cargas bajo el campanario (equilibrio estático).**

d) Se concluye que las intervenciones realizadas en el campanario de Vistabella han sido altamente satisfactorias, a tenor de los resultados obtenidos (Fig. 7), mediante **el uso de técnicas de postesado para garantizar su estabilidad, siendo necesario actuar con rigor y un elevado conocimiento de la problemática a tratar.**

Figura 7. *Vistas del campanario. Estado inicial y estado final, respectivamente*

REFERENCIAS

[1] Moreno, A. (2017). A cor obert. Restauració de l'església del Sagrat Cor de Jesús de Vistabella. *L'informatiu del CAATEEB,* 351 (Enero-Marzo 2017): pp. 94-100. Entrevista a Susana Pavón.

[2] Señís, R. (2014). Optimización de mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura. Análisis de las direcciones principales identificadas por sus líneas isostáticas. Tesis doctoral. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya. Id: http://www.tdx.cat/handle/10803/146178

[3] Prats, S., Pavón, S. *et al.* (2015). *Projecte de restauració de l'església del Sagrat Cor de Vistabella.*

[4] Llinàs, J., Miralles, R. (2008). *Pla Director per obres de reparació i restauració de l'església del Sagrat Cor de Vistabella*. Direcció General del Patrimoni Cultural, Barcelona.

[5] Señís, R. (2016). Anàlisi del comportament estructural i avaluació del dany del campanar de l'església de Vistabella (La Secuita) per al seu reforç. En *Congrés d'Arquitectura 2016* (pp. 1-7). Barcelona: Col·legi d'Arquitectes de Catalunya (COAC).

[6] ICOMOS/ISCARSAH Committee. (2003). ICOMOS charter - principles for the analysis, conservation and structural restoration of architectural heritage.

[7] ISO/TC98. (2010). *ISO/FDIS 13822 bases for design of structures - assessment of existing structures*.

[8] Pérez-Gálvez, F., Rodríguez-Liñán, C., Rubio, P. (2009). Determinación de las características mecánicas de los muros de fábrica de ladrillo en la arquitectura doméstica sevillana de los siglos XVIII y XIX. *Informes de la Construcción,* 61(514): pp. 19-28.

[9] Roca, P., Cervera, M., Pelà, L., Clemente, R., Chiumenti, M. (2013). Continuum FE models for the analysis of Mallorca Cathedral. *Engineering Structures,* 46: pp. 653-670.

[10] Lombillo, I., Thomas, C., Villegas, L., Fernández-Álvarez, J.P., Norambuena-Contreras, J. (2013). Mechanical characterization of rubble stone masonry walls using non and minor destructive tests. *Construction Building Materials,* 43: pp. 266-277.

[11] Señís, R., Llorens, M. Structural assessment of the Vistabella Church's Tower (Spain): Material characterization by the Hole-Drilling technique and continuum FEM. *Construction and Building Materials* (2017). [En revisión]

[12] Señís, R. (2016). Definición y ejecución del postesado vertical gradual para el refuerzo y la restauración estructural del campanario de Vistabella. *Informe Técnico.* Barcelona; 2016: pp. 1-29.

[13] Señís, R. (2017). Restauración y refuerzo estructural del campanario de la Iglesia de Vistabella, obra de Josep Maria Jujol. El uso de técnicas de postesado para la estabilización del campanario de fábrica de ladrillo. *Quaderns d'estructures.* [In press]

[14] Brufau, R. (2012). *El uso de técnicas de postesado para garantizar la estabilidad de los rosetones góticos*, Vol. 5, primer texto, p. 21.

[15] Brufau, R. (2007). Construint fum. *Quaderns d'arquitectura i urbanisme,* 253: pp. 74-77.

[16] Llorens, M., Señís, R., Moreno, B., Pavón, S. (2017). Monitoring of an external prestressing used as a strengthening technique in a historical masonry steeple. En *Proceedings of the MS3 - Identification, Control and Structural Health Monitoring of Civil Structures within the 8th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials.* Madrid; 2017: pp. 1-10.

[17] Señís, R. (2013). Isostatic lines' study to optimize steel space grid envelope structures for tall buildings according to their solicitations. En *Proceedings of the 2nd International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering*. Granada; 2013: pp. 156-161.

[18] Señís, R. (2013). Isostatic lines' study to optimize steel space grid envelope structures for tall buildings according to their solicitations. En *Proceedings of the 2nd International Conference on Structures and Architecture*. Guimarães: CRC; 2013: pp. 631-635.

[19] Señís, R. (2016). Criterios de diseño y análisis estructural del Centro de Atención y Gestión de Llamadas de Urgencia 112 Catalunya Reus. *Informes de la Construcción,* 68(541); 2016: e139.

PROJECT OF EXPANSION OF A CONSTRUCTION USING PBL

Vanessa García-Marina[1]

ABSTRACT

The basic idea of this project of expansion of a construction is that students of the degree in mechanical engineering learn to think solutions beginning from a given initial general idea and develop its design and calculus using a software dedicated to engineering, construction and architecture which is not only applicable to education but also to the professional field. The aim is to identify necessary loads, learn to use the Norm, search in the internet used solutions in similar cases, choose the form of the solution structure (draft), look for equivalences between calculi done with the program and by hand, interpret results, learn how to get the stresses and deformations in each bar or element, draw diagrams.

To do so, an active methodology named after *Project Based Learning* or *PBL* has been used [1, 2]. Although in theoretical lectures they learn to calculate the different elements of an industrial unit (applicable too to other typologies of edifications) as lattices or trusses, roof-purlins, beams with rolled profiles or plate girders, piers, and footings of reinforced concrete, it is also intended that the student be able to design and calculate a structure with the program CYPE engineers [3]. Thus, he or she is capable to make more complex structural models and at the same time, understand how the program works internally due to the fact that he/she knows to calculate each element separated by hand using the basis of the Technical Building Code or TBC (CTE in Spanish) [4].

The problem suggested to the students is the expansion of a school, knowing a series of constraints for its design. It is placed in a neighborhood with more and more children, and in the last five years the demand for more classrooms has increased. In this moment the school has a school yard with place for playing basketball and soccer. In the surroundings, though, there are houses. Therefore, to do the expansion they cannot count on exceeding the limits of the school building or the school yard. However, the school desires to keep having place for the basketball fields and the soccer fields. These can be covered or uncovered. According to the urban planning regulations of the city, we cannot construct more stories over the actual school building.

Students have full freedom to imagine the initial situation and how they want to be the final design. What they will design in the CYPE engineering program will only be the new part, that is, the expansion. Making use of the Portal Frame Generator module and after that the Cype 3D module, each team of 3 or 4 students makes the structural model and analyzes the results yielded. These analyses are based on the method of the limit states, so it analyzes the integrity of the model of the structure via verification of the ultimate limit states and the serviceability limit states.

By means of partial safety coefficients, different combinations of actions can be considered to affect the structural model and see whether it fails or not. Following the criterion of the TBC, to verify the load-bearing capacity of the model the equations (1) can be used: for a persistent or transitory situation (1.a), for an extraordinary situation (1.b), or for a seismic accidental action (1.c).

$$\sum_{j\geq 1}\gamma_{G,j}\cdot G_{k,j}+\gamma_P\cdot P+\gamma_{Q,1}\cdot Q_{k,1}+\sum_{i>1}\gamma_{Q,i}\cdot\Psi_{0,i}\cdot Q_{k,i} \quad (1.a)$$

$$\sum_{j\geq 1}\gamma_{G,j}\cdot G_{k,j}+\gamma_P\cdot P+A_d+\gamma_{Q,1}\cdot\Psi_{1,1}\cdot Q_{k,1}+\sum_{i>1}\gamma_{Q,i}\cdot\Psi_{2,i}\cdot Q_{k,i} \quad (1.b)$$

$$\sum_{j\geq 1}G_{k,j}+P+A_d+\sum_{i>1}\Psi_{2,i}\cdot Q_{k,i} \quad (1.c)$$

However, to verify the serviceability aptitude the equations (2) will be used: actions of short duration that can cause an irreversible effect (2.a), actions of short duration that can cause a reversible effect (2.b), or effects due to actions of long duration (2.c).

$$\sum_{j\geq 1}G_{k,j}+P+Q_{k,1}+\sum_{i>1}\Psi_{0,i}\cdot Q_{k,i} \quad (2.a)$$

$$\sum_{j\geq 1}G_{k,j}+P+\Psi_{1,1}\cdot Q_{k,1}+\sum_{i>1}\Psi_{2,i}\cdot Q_{k,i} \quad (2.b)$$

$$\sum_{j\geq 1}G_{k,j}+P+\sum_{i>1}\Psi_{2,i}\cdot Q_{k,i} \quad (2.c)$$

For the conclusions indicate that each group has proposed an initial sketch and after that has solved its particular project, giving as a result a final design of the model which, after verifying that does not fail under any of the limit states, can be confirmed that the real structure will not fail because the model has been studied with the same dimensions under the necessary and specific loads according to the analyzed geographic location. And for the end of the academic course, students will be capable of verifying both with manual and computational calculation a particular structural model.

Keywords: structural model, limit states, Project Based Learning, Technical Building Code.

1. INTRODUCTION

In the Degree of Mechanical Engineering there is a subject of Industrial Structures and Constructions in the third year. There students learn how to design and dimension different structural elements, so that in the end they are completely capable of designing a whole industrial building, from the structural point of view, they see heating, electrical and other installations in different subjects. They are prepared to face a Final Degree Project based on the design and construction of a pavilion. They can make all the calculations by hand, but if they want to present a model of a structure a bit more complex, it is very useful to be able to handle a professional tool as the CYPE Engineering software. There are other possibilities such as Sap, Revit, Tricalc or Cespla, but the author has decided to use this software because it is quite a complete program with a lot of possibilities and a professional use, too, but with the option of an educational license called Campus, which allows students to work at the university, at home, or wherever they want to, with the possibility of technical service and their own license code, which is valid for the whole academic year.

Under these conditions, students learn to calculate structural elements in magistral and practical lectures, as well as they learn the use of the Cype through the application of the PBL methodology

working in teams of three or four people. Thus, students work not only with the assistance of the docent but also with the collaboration of the rest of the members of the team.

With the aim to give a brief explanation of the subject, contents will be quickly reviewed. The first element students learn to calculate by hand is the truss, where they see different methods to calculate stresses such as the method of separation of joints graphically and analitically, Ritter, or Maxwell-Cremona, and for the deformations of the bars they study Williot and Castigliano's energetic methods. They use these methods to solve isostatic and hyperstatic trusses. After that, roof-purlins are explained. As the process to design purlins is quite complex and long, a Flipped Classroom is applied so that students understand better what they have to do and why. Here they have to identify loads actuating over the roof, and apply the deforming and resistant criteria to design them. Then there is the turn for the beams. These are studied for the use of normalized rolled profiles and for the use of plate girders, in case loads and spans are too large for the rolled profiles. The last metallic element studied is the pier. It is designed under compression with the possibility of buckling. Finally, concrete footings are calculated.

It remains clear that to make all these calculations for a complete structure is a very long process, and that is why in the case of final degree projects usually students consider the possibility of using the Cype program. They have the critical competence to know if results are coherent or not, because they know how the program makes the calculations in the algorithm. Apart from that, sometimes they add some manual calculi or additional analysis such as FEM by means of other software like Catia or Patran or Nx to complete the documentation.

The idea to work with a structural model instead of a real structure is very important. With the model one reaches enough accuracy to make good approximate calculations, and it has to be considered that to try to make real exact calculations can lead to non-viable situations because the computer cost would be enormous. One only has to be careful to apply to the model loads as near to reality as possible, avoiding to overcharge the model with data not necessary for the calculations. Details can be included in the end, achieving a good final result.

2. PROJECT BASED LEARNING OR PBL

In this teaching-learning process a certain structure has to be followed. It has to be clear which the learning objectives searched for are when one decides to apply it. Students have to be sure what point they have to arrive to. Then they have to know how to begin with the solving of the project, how to look for the possible solutions. Therefore, some information sources and resources have to be handed to them. Of course the scene laid before them has to be posed, which is the situation they have to solve by their project. All teams have the same initial information, but as the design of a project is totally free and dependant on the designer, each team arrives to a different solution. This is, perhaps, the main difference compared with a Problem Based Learning, that the Project is more general, but a Problem is more delimited and so students have more detailed information so they work on a more similar solution. And what is very important and cannot be forgotten about is the driving question which has to motivate the students to look for a solution and make clear what are they intended to work on. In our case these sections were posed as follows.

2.1. Learning objectives

In our project the objectives were to identify necessary loads, learn to use the Norm, search in the internet used solutions in similar cases, choose the form of the solution structure (draft), look for equivalences between calculi done with the program and by hand, interpret results, learn how to get the stresses and deformations in each bar or element, and to draw diagrams.

2.2. Information sources and resources

The students could make use of the TBC Norm, the internet, the lecturers of the subject, and the notes from the subject to accomplish their projects.

2.3. Scene

The project was posed as follows. The Basque Government asked to design the expansion for a school building. It is placed in a neighborhood with more and more children, and in the last five years the demand for more classrooms has increased. In this moment the school has a school yard with place for playing basketball and soccer.

In the surroundings, though, there are houses. Therefore, to do the expansion we cannot count on exceeding the limits of the school building or the school yard. However, the school desires to keep having place for the basketball fields and the soccer fields. These can be covered or uncovered.

According to the urban planning regulations of the city, more stories cannot be constructed over the actual school building.

2.4. Driving question

It is very important to reach to a question that motivates the students to begin with their design and focuses with the desired objective: How can we expand the space of a school building, increasing the number of classrooms but without losing space for the school yard?

3. METHODOLOGY

This methodology of the PBL has been used in the third course of the degree in mechanical engineering in the University College of Engineering of Vitoria-Gasteiz. The subject has been “Industrial Structures and Constructions” and it has been carried out in the three groups of students, namely the groups of Spanish, Basque, and English. In the Spanish group students have been distributed into 6 teams, in the Basque group students have been distributed into 5 teams, and in the English group students have been distributed into 3 teams, so in the end 14 different projects have been proposed.

Initially, four or five sessions of a couple of hours were introduced to students, where the CYPE program was explained by means of designing a simple example. Then, a document with the points given in sections 2.1 to 2.4 was handed over to students. During the first session after finishing with the example of the CYPE, they made teams and read the document and internalized the problem, so

that in the next session they could begin drawing a draft and designing their project in the program. The docent took all the drafts examining superficially the initial idea and told the students that they should be careful with the dimensions of the structure and to plan where the openings for windows and doors were going to be, as they affect the wind action.

Then, to begin designing a structure with this program, it is highly recommendable to use first the Portal Frame Generator module. Thus, a reference frame can be designed and then in the CYPE 3D module it can be repeated as many times as necessary to become a three dimensional structure. So the docent also had to help the teams in defining correctly these referential frames. In Fig 1 the main modules of the program are shown.

Figure 1. *Main menu of the CYPE program.*

In the Portal Frame Generator each team introduced their design. Here they have to introduce some dimensions; they also have to choose the Norm according to the country, and some load values such as weight of roof coating, useful overload in roof (selecting its category of use, too), weight of lateral coating, wind and snow. Additionally when the wind load data is described, the openings for windows and doors have to be defined, so that the program can calculate the outside and inside wind pressure coefficients to calculate the adequate combinations. Into this module, roof and façade purlins can be described. However, only roof purlins were used. Apart from this, lateral wall has also to be described, if one wants to define lateral wind pulling or pushing on the façades, not only over the roof planes. And after that, they prepare for exporting the frame to the Cype 3D module as shown in Fig 2.

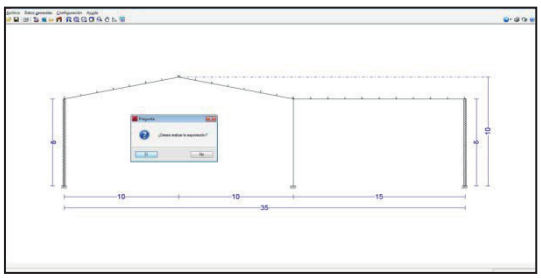


Figure 2. *Result of the definition of a frame in the Portal Frame Generator before the exportation to the Cype 3D.*

After defining a frame, if one needs to repeat that frame for example eight more times, it has to be defined before exporting the frame, and the result of the exportation will be the one represented in Fig 3.

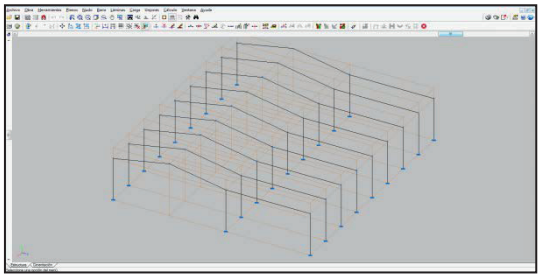


Figure 3. *Result of the exportation to CYPE 3D.*

Once students are in this module, now they have to expand their design as much as possible. They have to consider where the openings for doors are, where to describe piers not to coincide with an opening or not to interfere the activity inside the structure model. Additionally they have to define floors and as well as their corresponding loads of weights and useful overloads.

Now it is time to remember that what students are introducing and defining here are models of the real structures as it is virtually impossible to introduce the complete structure with all the details of construction. So the model is made out of bars representing beams and piers and bridgings as Saint Andrews crosses and others. And to these bars the characteristics of usual rolled profiles are given, such as HEB profiles for piers or IPE profiles as beams, and round tie rods as bridgings. And to the base of the piers external link of rigid fixing type is given to simulate the fixed connection to the foundation through anchoring plates. On top of the gable piers articulations are defined, to try to simulate the real behavior of a structure where the loads from the roof are transmitted to the ground through the main piers and a bit less through the gable piers, who are supposed to work more against the wind as well as the bridgings placed on the lateral façades, between the first two frames and the last two frames; and if the total length of the structure is large, along the length more bridgings are placed too. See Fig 4 for the arrangement of the bridgings.

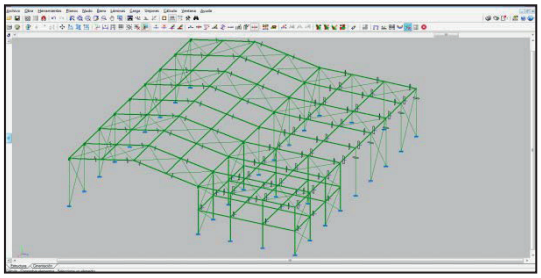
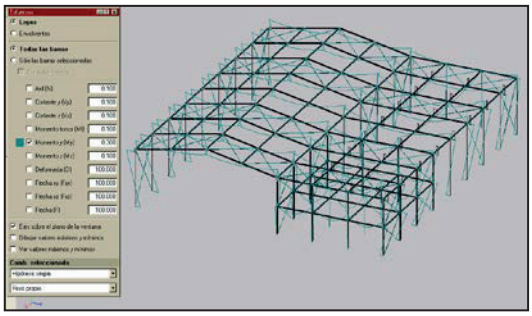


Figure 4. *Structure after running the final calculations.*

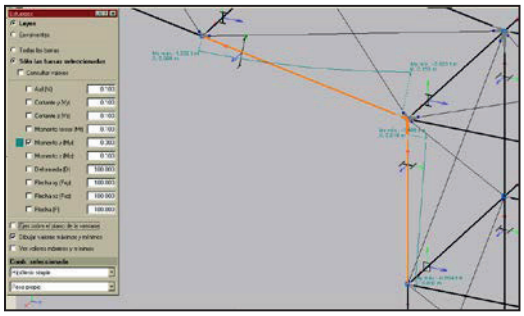
Trying to be as realistic as possible, buckling and lateral buckling coefficients can also be defined, and when every structural characteristic is more or less defined in the program, one can run the calculus. Although it is automatic, it is known that this program uses the limit states as criteria of failure. When

it finishes the calculations, a lot of information can be achieved. The deformation in each one of the bars of the structure, the reactions in the joints, the axial, bending moments, torsions, or shear of every bar, and furthermore the numeric values of these forces, moments or displacements.

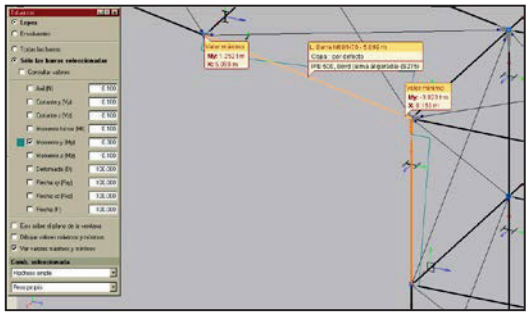
It is very representative that when one bar has enough mechanical characteristics is painted in green color, and when it is not enough is painted in red, explaining which the failure type is: resistant criterion or deforming criterion. The program analyzes all the profiles of the type selected, for example, if an IPE has been chosen for a certain beam, the program analyzes all the IPEs from 80 up to 600, saying if it would be valid or not for that element. Thus, one is capable to convert every red bar into green elements, by replacing the wrong ones by larger profiles of the same series. And if it is not possible to use one simple rolled profile for such bar, for example because loads are so large, then the designer (in our case students) can change the profile type to simple profile with brackets, or double profiles welded, or double profiles with plates, or castellated profiles. There is an option to view the axial or shear forces or bending moments diagrams drawn for each one of the bars, or if one prefers it the numerical values can also be represented. Fig 5 shows the diagram of moments My in axis y, in every element first, and in two elements of the model after. There it can be seen some of the different options; one can draw simply the diagram of the element, with or without the values in the extremes; or can see in which sections appear the maximum and minimum values of the stress; or one can also consult in one concrete section the value of the stress. The same can be done with the diagrams of axial, torsion, shear, sags...



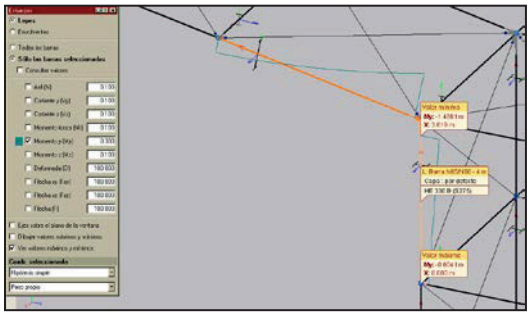
a. *Diagram of moments My in every elements of the model*



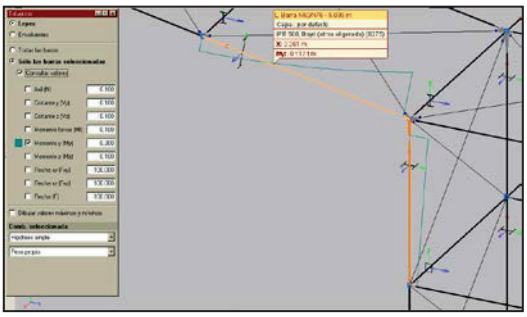
b. *Diagram of moments My in two elements of the model with the maximum and minimum values represented*



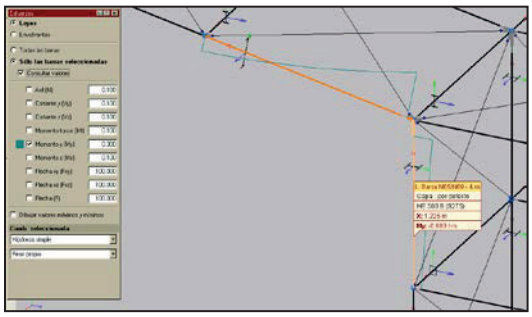
c. *Maximum and minimum values of the diagram of moments My displayed with the corresponding abscissa in the beam selected*



d. *Maximum and minimum values of the diagram of moments My displayed with the corresponding abscissa in the pier selected*



e. *Exact value of the diagram of moments My consulted in a concrete abscissa in the beam selected*



f. *Exact value of the diagram of moments My consulted in a concrete abscissa in the pier selected*

Figure 5. *Diagrams of some elements of the structural model.*

Just to take conscience of the behavior of the structural model under the application of the loads, an animation can be run with the colored scale typical of the finite elements analysis indicating low deformations in blue and high deformations in red, with intermediate values of deformations represented in different colors as shown in Fig 6.

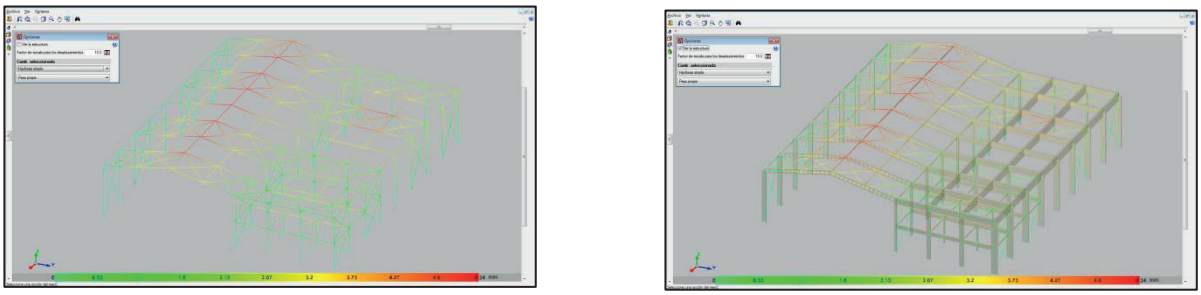


Figure 6. *Structure represented running the final calculations.*

Finally the foundations have to be designed. Depending on the soil geotechnical characteristics (resistance or deformability) superficial footings or deeper foundations such as capped piles can be used. In this case the most common footings have been used, some students have used the eccentric solution joined by tie-beams or grade beams and some students have used the centered footings equally joined by tie-beams or grade beams, depending on the existence of moments or only axial forces. In Figs 7 and 8 an example of foundation is shown.

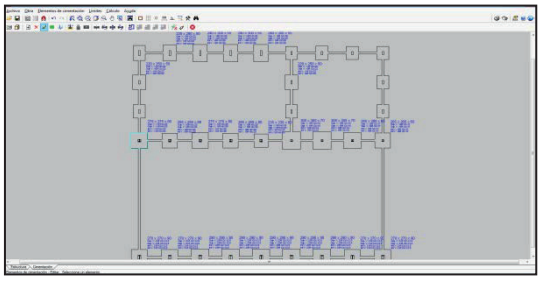


Figure 7. *Foundation made out of centered footings and tie-beams and grade beams.*

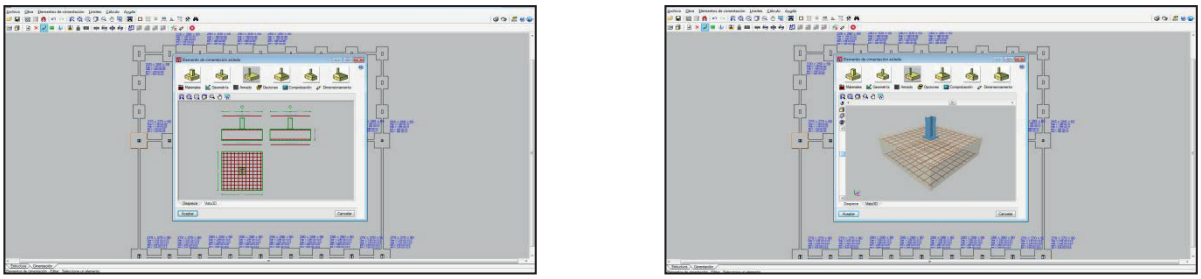


Figure 8. *a) Reinforcement detail of one footing and b) 3D view of reinforcement of one footing.*

After making all necessary adjustments to the structural model, the program lets us view a 3D image of the resulting project as Fig 9 illustrates.

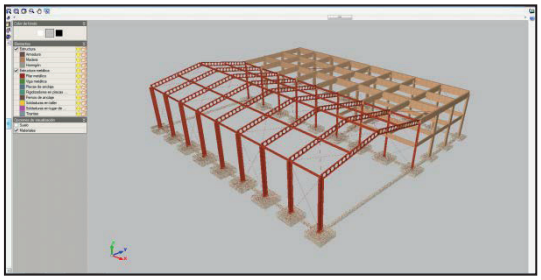


Figure 9. *3D view of the whole structural model (structure and foundation).*

As mentioned before in the introduction, the program realizes calculi by means of the limit states, which is also the basis for the Norm of the Technical Building Code or TBC in force in our country. The ultimate limit states are those that, if surpassed, constitute a risk to the people, either because they produce a decommissioning of the building or the total or partial collapse of the same [4]. As final limit states, the following should be considered:

a) Loss of balance of the building, or of a structurally independent part, considered as a rigid body

b) Failure by excessive deformation, transformation of the structure or part of it into a mechanism, breakage of its structural elements (including supports and foundation) or their joints, or instability of structural elements including those arising from effects dependent on time (corrosion, fatigue)

Service limit states are those that, if overcome, affect the comfort and well-being of users or third parties, the correct functioning of the building or the appearance of the construction. Service limit states may be reversible and irreversible. Reversibility refers to the consequences that exceed the limits specified as admissible, once the actions that have produced them have disappeared. As service limit states, the following should be considered:

a) Deformations (sags, settlements or collapses) that affect the appearance of the work, the comfort of the users, or the operation of equipment and facilities

b) Vibrations that cause a lack of comfort of the people, or that affect the functionality of the work

c) Damage or deterioration that may adversely affect the appearance, durability or functionality of the work

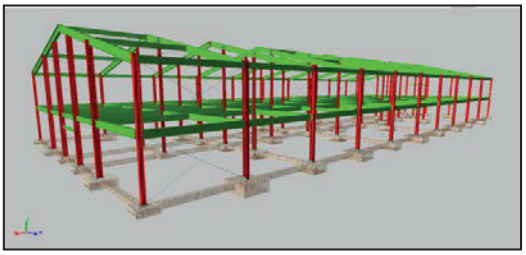
The TBC recommends using partial safety coefficients, to represent different combinations of actions that affect the structural model.

All in all, the designer has to use the real loads without weighting coefficients to calculate the deformations in every structural element to know which the real sags are. This is known as the Deforming Criterion. In the contrary, the calculation of the stresses, moments, shears, etc. has to be done by using the weighting coefficients of the safety partial coefficients, to make sure that the elements will bear the efforts provoked by the loads. We overestimate loads to try to consider loads a bit larger than reality, just in case when working the building suffers an overload or accidental loads not considered in the calculi. This is known as Resistant Criterion.

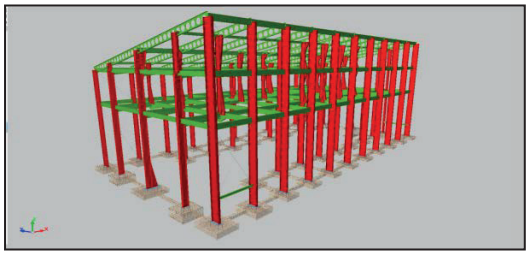
4. RESULTS

Students have been divided into 14 different teams, each one composed of three or four people. They have worked during a complete semester for a couple of hours per week. As the solution have been of free design, some of the constructions have been easier to calculate and dimension than others, this fact making the teams need less time to finish. All this means that some of the structural models have been larger with more bars and nodes to solve, but it has not been a problem since the license used for this project has been the Campus license, which has not restrictions over the number of nodes or size of the model.

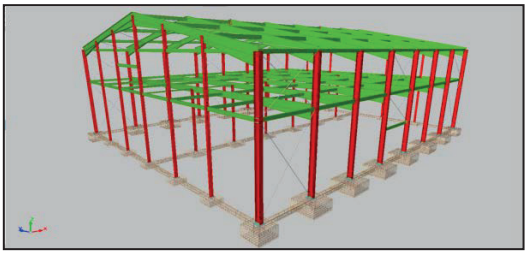
In the following Fig. 10 the different designs worked on by the teams of students are shown. Teams 1, 3, 6, 9, 12, and 14 belong to the Spanish group; while teams 2, 4, 5, 7, and 10 belong to the Basque group; and finally teams 8, 11, and 13 belong to the English group. These are the final results of every project proposed by each team of students after verifying that all the limit states are fulfilled.



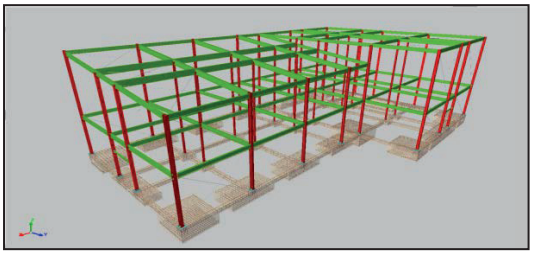
a. *Resulting structural model of team 1*



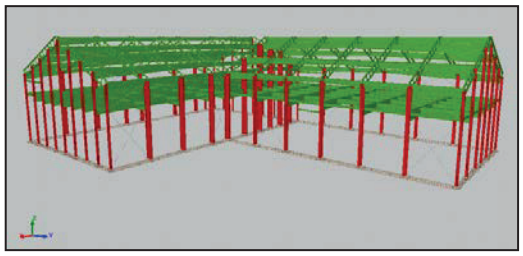
b. *Resulting structural model of team 3*



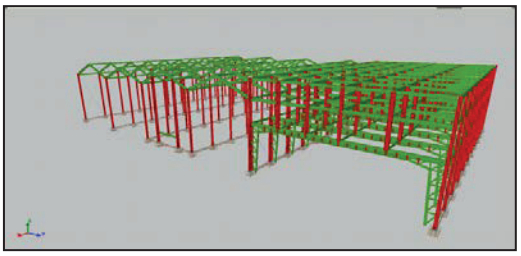
c. *Resulting structural model of team 6*



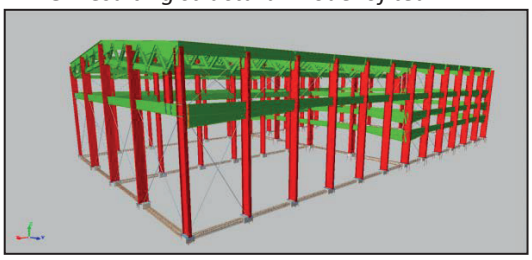
d. *Resulting structural model of team 9*



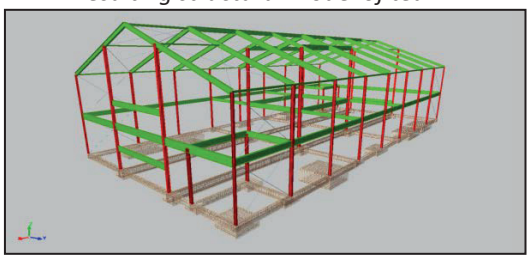
e. *Resulting structural model of team 12*



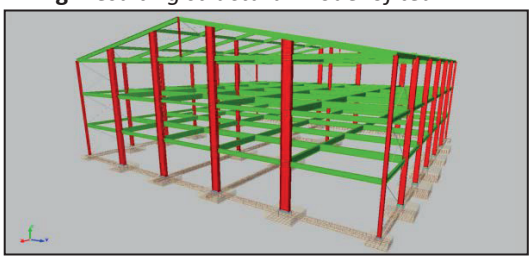
f. *Resulting structural model of team 14*



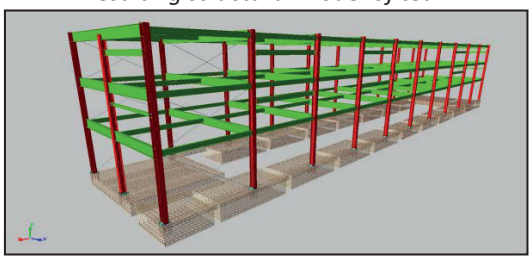
g. *Resulting structural model of team 2*



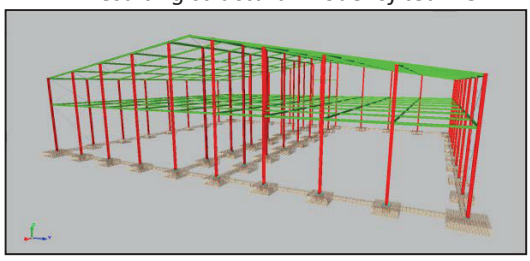
h. *Resulting structural model of team 4*



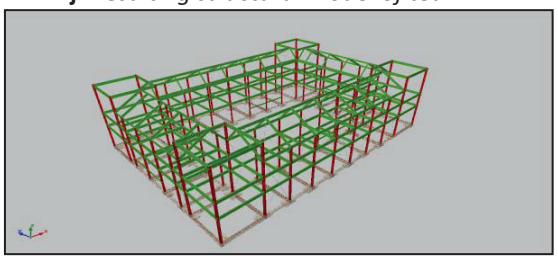
i. *Resulting structural model of team 5*



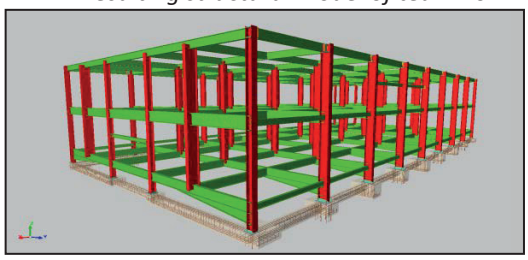
j. *Resulting structural model of team 7*



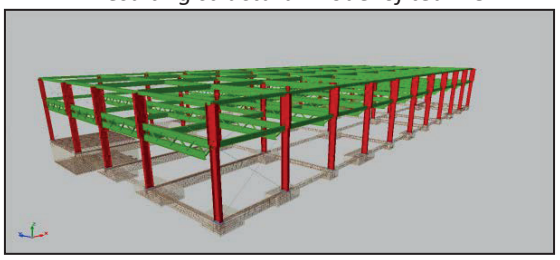
k. *Resulting structural model of team 10*



l. *Resulting structural model of team 8*



m. *Resulting structural model of team 11*



n. *Resulting structural model of team 13*

Figure 10. *Final designs of the solutions proposed by the students*

5. CONCLUSIONS

For the conclusions one can indicate that each team has proposed an initial sketch and after that has solved its particular project, giving as a result a final design of the model which, after verifying that it does not fail under any of the limit states, can be confirmed that the real structure will not fail because the model has been studied with the same dimensions under the necessary and specific loads according to the analyzed geographic location. And for the end of the academic course, students are capable of verifying both with manual and computational calculation a particular structural model.

6. ACKNOWLEDGEMENTS

The author wishes to thank to the University School of Engineering of Vitoria-Gasteiz for promoting the implementation of active methodologies in the teaching process and the Educational Advisory Service of the University of the Basque Country for their continuous offer of helpful courses in different fields of education for improving teachers training.

7. REFERENCES

[1] Scott Freeman, Sarah L. Eddy, Miles McDonough, Michelle K. Smith, Nnadozie Okoroafor, Hannah Jordt, Mary Pat Wenderoth. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *PNAS, vol 111, n 23, 8410-8415*.

[2] Juan Jesús Torres Gordillo. (2010). Construcción del conocimiento en educación superior a través del aprendizaje por proyectos. *REOP, vol 21, n 1, 137-142.*

[3] CYPE Ingenieros. Software para Arquitectura, Ingeniería, y Construcción. www.cype.es

[4] Technical Building Code (review of April 2009). www.codigotecnico.org

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

Geometry and structural analysis parametrization of steel nodes in high-rise buildings. Case study: Royal Mekka Clock Tower

Rodríguez Izquierdo, Víctor[1]; Vázquez Carretero, Narciso[2]

ABSTRACT

Digital production interface to structural analysis is enormously benefitted through the parametrization of the steel nodes geometry and its structural analysis. A design and structural analysis platform focussed in this elements is proposed as a necessary step contributing to a fully integrated digital construction process for high-rise steel buildings.

Keywords: Optimization, geometry parametrization, steel nodes, high-rise buildings, digital fabrication.

1. INTRODUCTION

The Royal Mekka Clock Tower, currently third tallest building on earth with 601 meters, arises from the idea of placing a Clock on top of the Tower 5 of the King Abdulaziz Endowment. The project is a process of research and optimization developed in no less than 107 phases, with the remarkable challenge that supposed to dispose a 250 m steel structure on top of a fully designed and in construction 350 meters reinforced concrete structure and almost duplicate its height. The knowledge acquired during this project has been taken as a basis for this research.

Figure 1. *Royal Mekka Clock Tower / 250 meters steel tower top*

[1]*Mayr|Ludescher|Partner, Stuttgart (GERMANY) / University of Seville (SPAIN). victor.rodriguez@mayr-ludescher.de*
[2]*University of Seville (SPAIN). narciso@us.es*

For this unique building shape: Trussed (triangulated) tube as a main bracing system and Inclined mega-columns, the key is in choosing a support system, the stresses are adjusted according to the pre-conditions and moreover offers the possibility that the loads are selectively introduced to the substructure.

2. STEEL NODES

Complex steel parts, such as the connection nodes, had to be entirely prefabricated prior to shipping. These connections had to be welded precisely and carefully so as to guarantee maximum strength when installed on site. To optimize the performance of the steel and the welded joints, the material was preheated using a series of gas torches. The welding was carried out in a repetitive, symmetrical process. This means that the joints were welded several times from each side to reduce the risk of shrinking and to improve strength. Each connection node has a weight of more than 16 tons and can support forces in excess of 1000 tons.

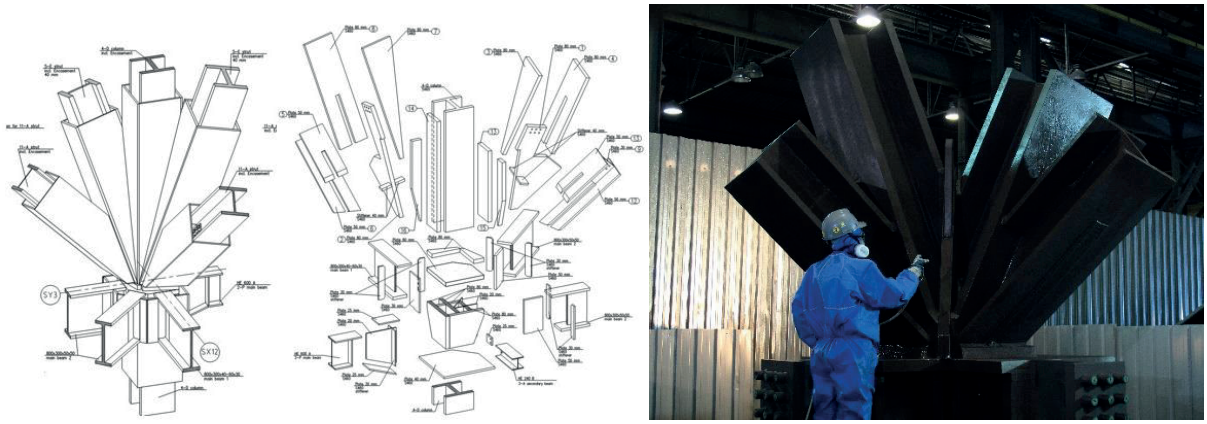


Figure 3. *Steel node*

Fostering simplicity and constructability within the structure is what brought the engineers to the need to use 3D-models of every complex steel nodes as a direct input for steel fabrication, digital processing of shop drawings.

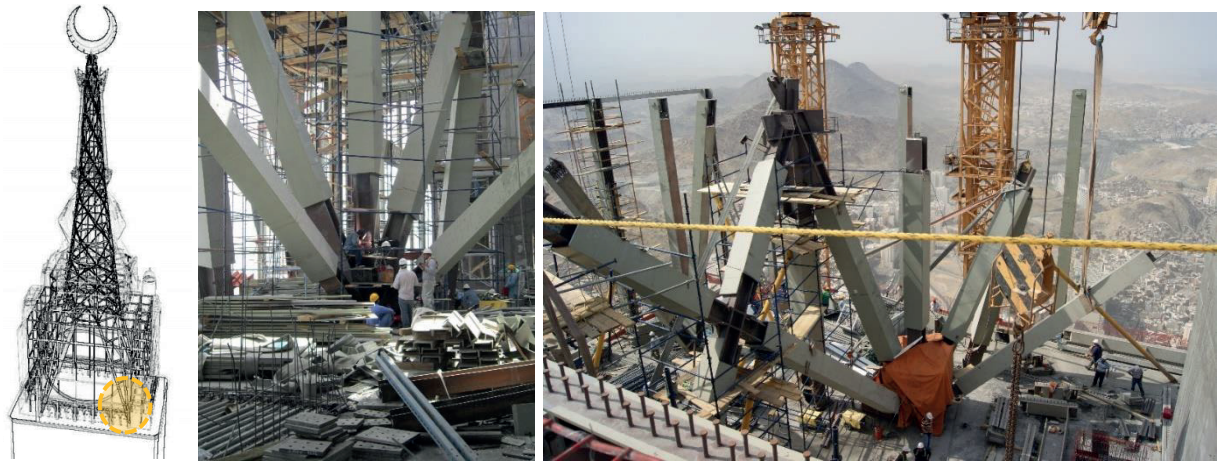


Figure 4. *Steel nodes assembly*

3. METHODOLOGY

Through a geometric parametrization process of the structure we can achieve a more efficient system. Connecting different software and parametric tools, such as, Rhinoceros + Grasshopper, Excel and Sofistik and programming languages as C#, VB, RhinoPython, an optimal time saving, free of coordination mistakes, analysis and design platform (ADP) is created.

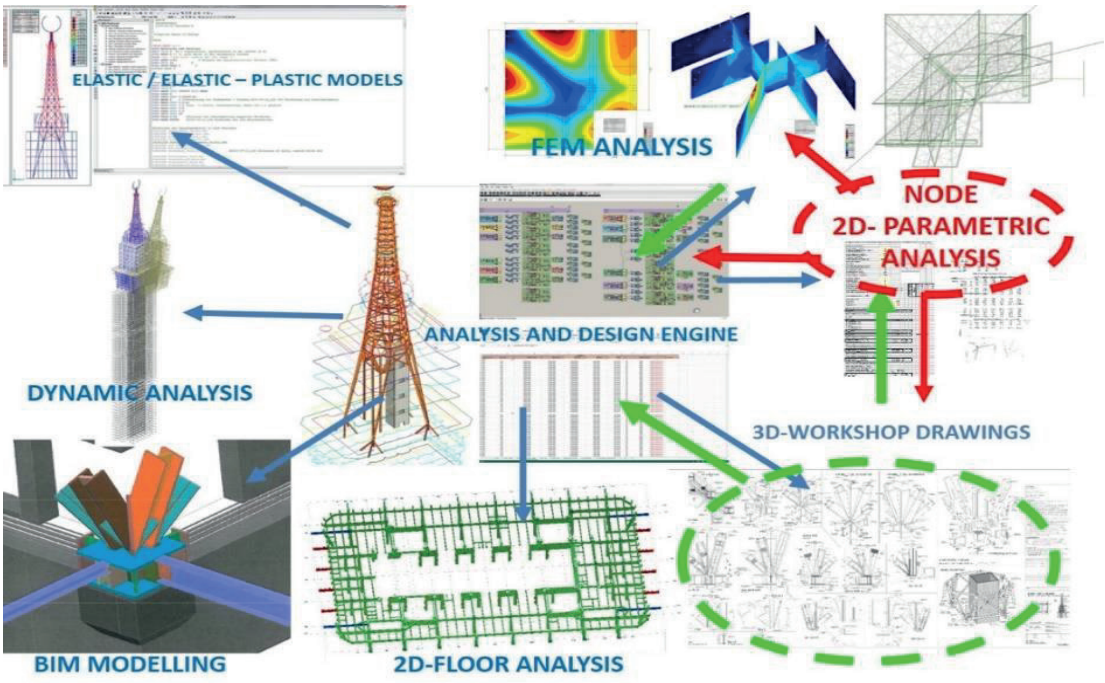


Figure 5. *Analysis and design engine – Parametric node analysis*

In high-rise buildings of special interest are the relations time-design and optimization-feasibility of the steel nodes. Node structural analysis and more specific the production of the workshop drawings is a significant time-consuming project phase and it is likely to end into a very conservative design.

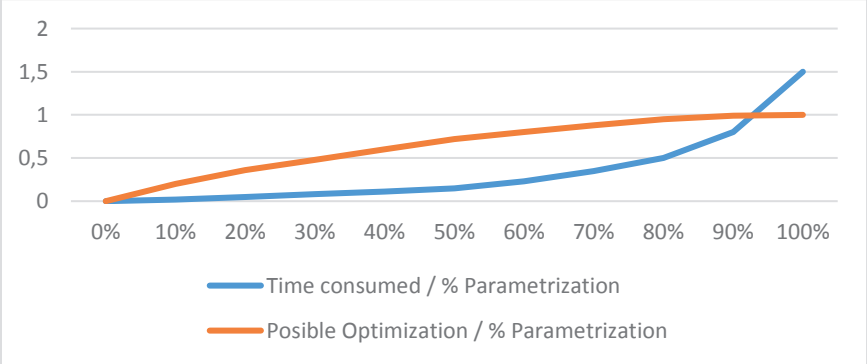


Figure 6. *Time consumption and Optimization / % Parametrization in the analysis*

This comparison will give us the keys to find the most effective system, will allow to take decisions at different stages and give the client the possibility to participate in to a later stage.

Figure 7. *Cost / Satisfaction of the client*

Digital production interface to structural analysis is enormously benefitted through the parametrization of the node geometry and its structural analysis (2D and 3D FEM). Moreover, an automatized 3D workshop-drawing tool as a direct input for the steel manufacturer is generated. Every individual node interacts with its environment, adapts to it and effects on it neighboring parts.

In this optimization not only the final number of steel nodes played a major role, construction feasibility, crane loading, temporary and final stage of the nodes, resulted to be determinant influencing factors which affected the most in the consumption of time, material (footprint) and economic resources.

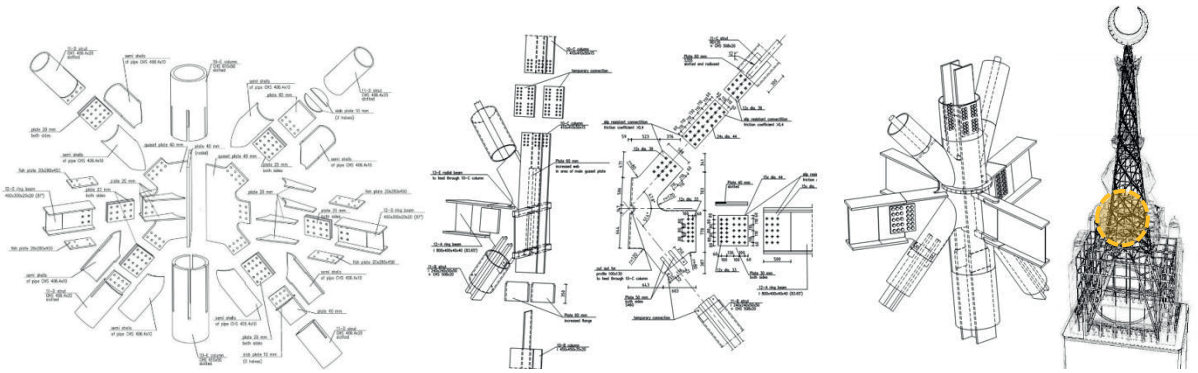


Figure 7. *Steel node, isometric views, digital processing of shop drawings.*

This bring us to the point that manufacturing industry continues to efficiently increase production at an almost exponential rate due automation and robotics. Currently robots are being used in manufacturing for material handling, processing operations, assembly and inspection. The possibilities that this opens to the construction industry where the processes are very similar, design parametric platforms are a optimal introduction way of robotics to some of them, what could lead to increase exponentially the effectiveness of construction.

4. CONCLUSION

Complex structures can only be economically implemented with parametric generation, the extension of the related project phases can be positively optimized.

Alterations in geometry and structural design can be accomplished at any time with little effort.

Digital fabrication will bring automated derivation of suitable 2D and 3D production data to machine code (laser data, milling data…). Use of existing digital production processes (laser cutting, robot welding, bonding) is inefficient through multiple digitalization (digital model > 2D-drawing > digital model).

The details can react to their environment; new variables are integrated in the process, such as, number of subsequent axes, angle and inclination of the axes, material thicknesses and connection geometry to further planes. Late adjustments of the details can be realized without a relevant time-consume.

The integration of digital technologies into construction promises significant contributions to sustainability and productivity/efficiency, while allowing new geometries. The multidisciplinary nature of the digital processes remains the central challenge to establish a digital design culture.

A fully integrated digital model for the process of construction, transform the architectural / structural drawing from merely representation to an actual instruction for a robotic workforce.

ACKNOWLEDGEMENTS

The author is grateful to Mr. Guido Ludescher for the opportunity to learn from this awesome project and extends his sincere appreciation to the civil engineer Mr. Frank Braun (Mayr|Ludescher|Partner, Stuttgart) for his support, collaboration and helpful advices.

REFERENCES

[1] Wai-Ming Ho, G., Liu, P., Liu, M. Parametric analysis and design engine for tall building structures. International Journal of High-Rise Buildings (2012, vol. 1, n° 1, pp. 279-283).

[2] Schumacher, J., Naugle M. A methodological shift in building design through development of collaborative design platforms. International Journal of High-Rise Buildings (December 2014, vol. 3, n° 4, pp. 279-283).

[3] Detail Engineering – SOM Structural Engineering (2015, vol. 4) DETAIL – Institut für international Architektur – Dokumentation GmbH & Co. KG, Munich.

[4] Rhinoceros, G.: Grasshopper Rhinoceros. http://http://www.grasshopper3d.com/ (2016).

3D Wall-Beam System load transfer.

Case study: John Cranko Ballet School

Rodríguez Izquierdo, Víctor[1]

ABSTRACT

In the structural analysis of complex 3D wall-beam systems, a direct comparison of different modelling variants leads to drastic differences in the results. FEM 3D effects are difficult to verify but a reasonable way to understand the global behaviour. Planar models could lead to very conservative values but are easy to verify.

Keywords: Strut-and-tie model, concrete node, built-in unit, wall-beam.

1. INTRODUCTION

The architectural design of the new John Cranko Ballet School consists of a terraced building with exposed concrete in the façade and in most of the interior surfaces. Burger Rudacs architects design arises as a powerful topographical answer to the urban situation that develops with a vertical drop of around 20 meters. The new building of the John Cranko School is built on a plot north-east of Stuttgart city centre within sight of the main station.

The outer dimensions of the new building are about 90 x 36 meters. The floor plan is based on a regular grid of 3 x 3 meters and the storey heights of the levels E01 to E10 are constantly 3.5 meters. Due to the height offset of this ever-changing spatial body, three-dimensional spatial sequences are created to offer the school an unusually rich and sensuous interior space quality.

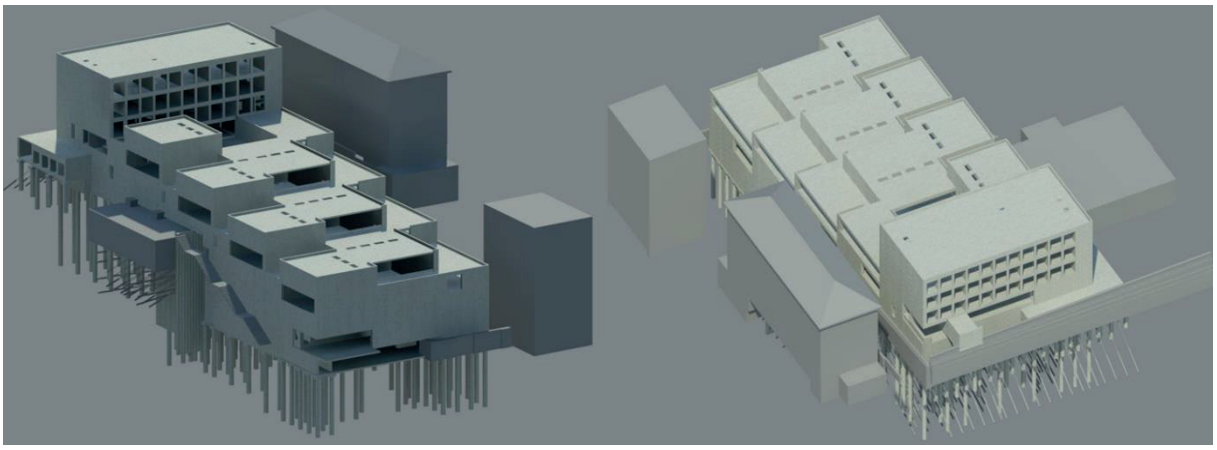


Figure 1. *3D-Revit Model – Structural indirectly supported elements*

2. STRUCTURALL CONCEPT

[1]*Mayr|Ludescher|Partner, Stuttgart (GERMANY). victor.rodriguez@mayr-ludescher.de*

The structural system mainly consists of flat slabs and a 3D system of highly reinforced concrete walls acting as deep beams with large spans of up to 30 x 24 meters. In Fig. 1 all slender wall- beams are highlighted in red.

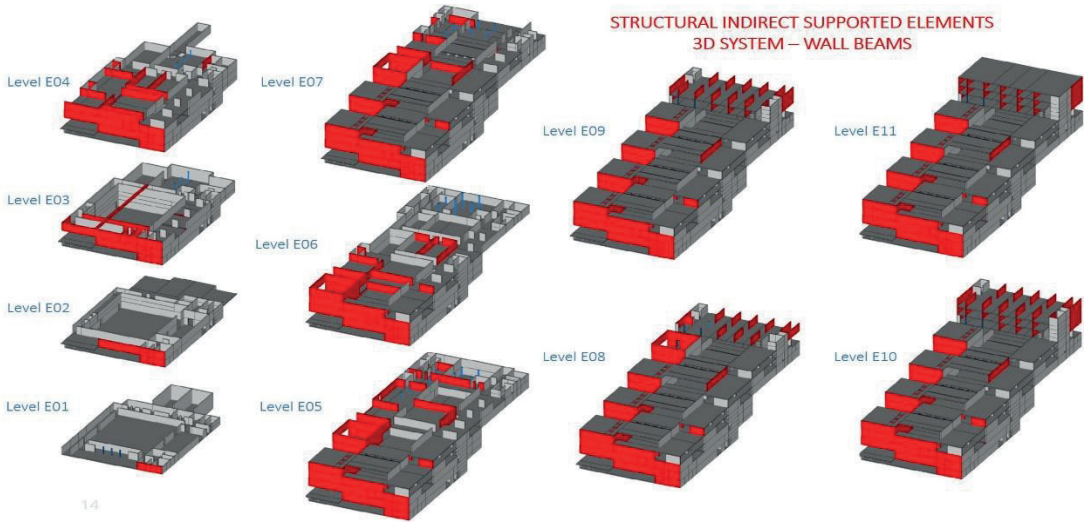


Figure 2. *3D- Structural indirectly supported elements*

3. MODELLING VARIANTS

For the study of the intersection points where huge loads were to be transferred, structural engineers used four different types of analysis models. The 3D FEM of the entire building and the 2D-FEM of every horizontal level were used to obtain the reaction forces. Then 2D Strut-and-tie models were implemented to reproduce them and control the workflow of the stresses. Finally, through 3D strut-and-tie models behavioural assumptions were verified.

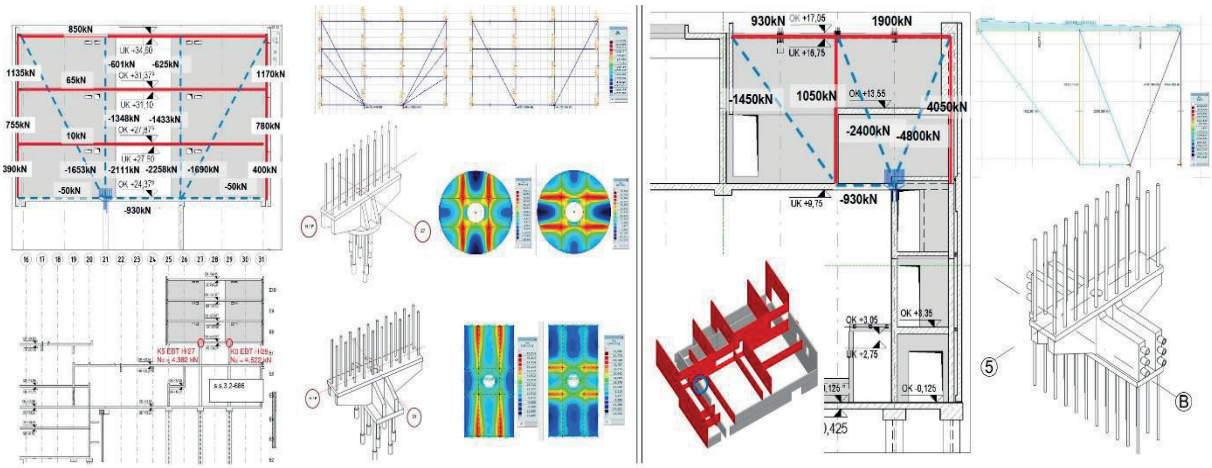


Figure 3. *2D strut-and-tie modelling, 3D-Model built-in units.*

In complex 3D wall beam systems, big differences in between 3D and 2D FEM are expected. The 3D effects created by multiple wall beam intersecting elements can considerably reduce the intersection point forces but only in simple cases are them easy to verify. The combination of 2D FEM and strut-and-tie models brought engineers to a defiant conservative loading that has been resolved with a non-less

challenging audacious design. In a direct comparison, it can be seen that different modelling variants lead to drastic differences in the results.

4. INTERSECTION NODES

As the concrete strength is insufficient, special high strength steel built-in units were designed to transfer high local support loads (of up to 20 MN) at the intersection points of the wall-beams.

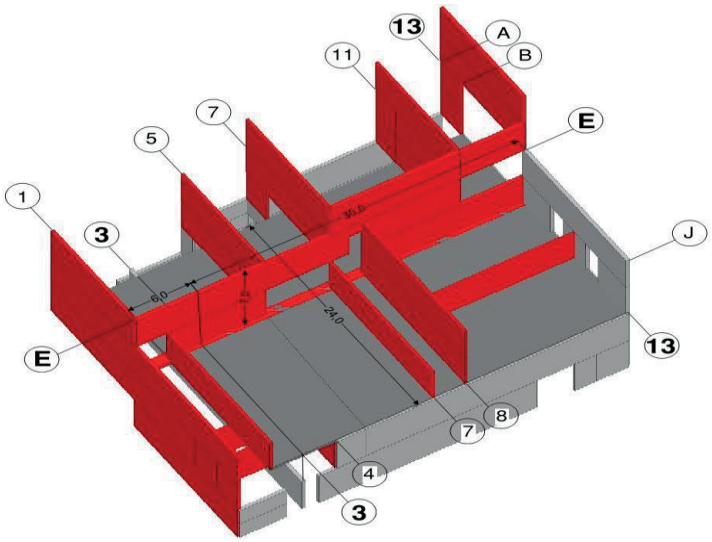


Figure 4. *Indirect supported structural elements. Axis E.*

There were three determining factors for the structural engineers from Mayr | Ludescher | Partner to develop this solution. Firstly, walls with insufficient thickness from 20 until 35 cm, in which even high-strength concrete (until 50 MPa) was not capable of transferring the loads through the intersection nodes. Secondly, exposed concrete elements with high requirements (most restrictive category “SB4” according to the DBV/VDZ-Merkblatt „Sichtbeton“ Tab. 1, 2+3). And, finally, fire safety requirements that increased the concrete cover.

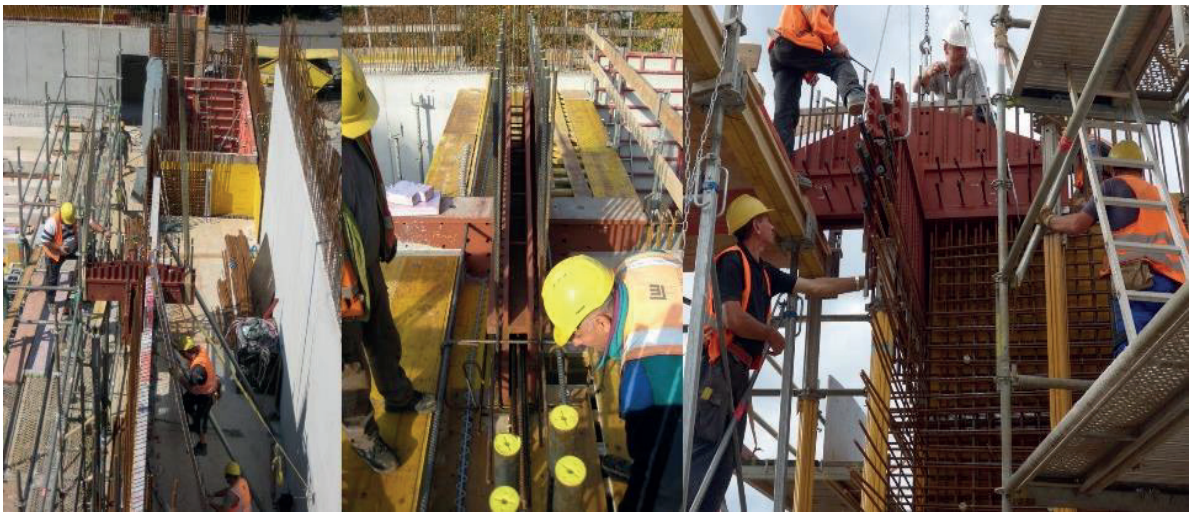


Figure 5. *Mounting process of the built-in units*

Nine of the studied concrete intersection nodes were solved with seven different built-in units. With plate thicknesses of up to 60 mm, maximum dimensions of 2,8 m x 2,0 m x 1,9 m and self-weight of up to 4,4 tons, placing the steel units on site, connecting the reinforcement and pouring the concrete in and through them was a very important part of the design process.

5. CONCLUSIONS

The advantage of a 2D modelling, both from FEM and strut-and-ties models, is obvious. Thanks to the simple systems, the results can be clearly understood. By means of a manual calculation of the loads from the influencing areas and the loads from auxiliary elements, which have been determined by means of node support reactions, one is also on the safe side in the dimensioning.

With 3D FEM models, which represent the whole building, it can always be that the loads are distributed differently on the components than assumed. Flat slabs, for example, often lead to horizontal bearings, and each support has a spring stiffness, which is determined by the program and usually results in smaller internal forces and moments. Whether the system is just the same is often questionable.

In order to prevent a failure of the components, one should on the safe side use planar models for the dimensioning of the components. The faster version is a shear plate model. However, this is always to be used with caution, since it can also lead to unclear or even wrong results. In the case of simple, rectangular walls, usually provides well-comprehensible results. If, however, the geometry of a wall panel is more complex, due to elevation steps, openings, … the results also need to be precisely analysed. Point loads and node supports usually distort the results by means of singularities.

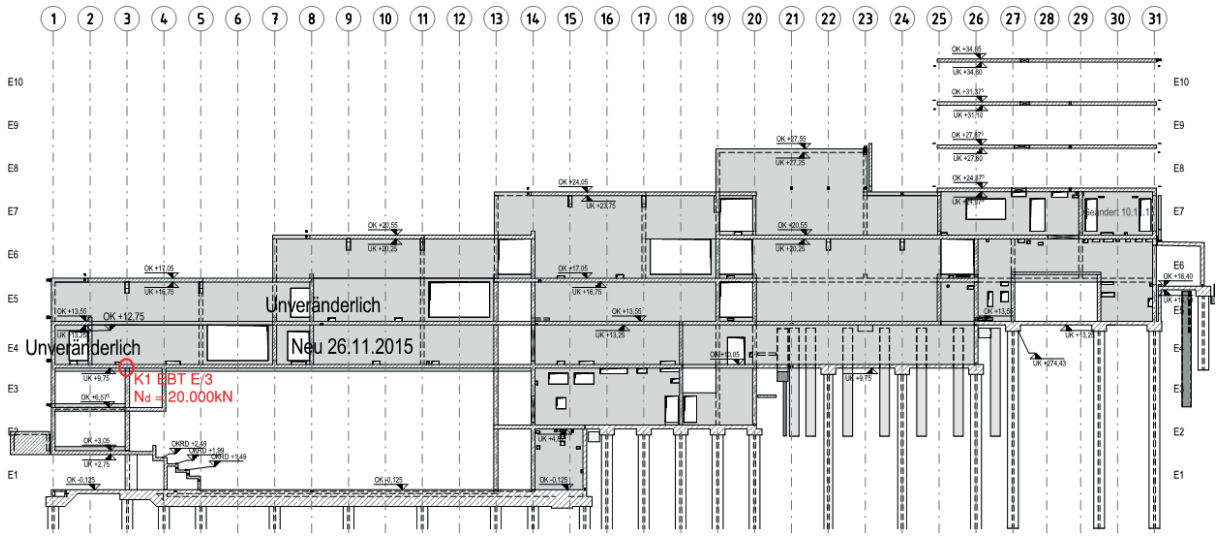


Figure 6. *Reaction design force at Axis E/4.*

Compared to this, strut-and-tie models yield very clear results. If a suitable system has been designed, the bars display results without great interpretation requirements. The disadvantage here is the time consume, the more complex the geometry of the wall, the more complex is to create a model. Often, however, there is no way around, since other models produce too many unclear and thus uncertain results.

Spatial strut-and-tie models often provide very similar, but usually smaller, results than the planar models. Nevertheless, one has to say that it is far less clear to understand. There are not so many factors where you have to rely on the program, but here, too, crossing bars create springs that reduce the internal forces. This does not have to be wrong, but it is not on the safe side either. One of the reasons why one should not rely too much on the internal forces is the strong simplification. Eccentricities have been completely ignored in this model and elevation steps have been included in the cross-sections in a greatly simplified manner. Especially in this case it should not be used for actual dimensioning, but it is a good way to use the results as comparative values.

ACKNOWLEDGEMENTS

The author is grateful to Mr. Guido Ludescher for the opportunity to work in this awesome project and extends his sincere appreciation to the civil engineers Mr. Bodo Berg, Ms. Gundula Bender and Mr. Robert Schmidthäuser (Mayr|Ludescher|Partner, Stuttgart) for their collaboration and helpful advices.

REFERENCES

[1] Schlaich, J., Schafer, K., Jennewein, M., Towards a Consistent Design of Structural Concrete. PCI Journal, vol. 32, issue 3, pp.74-150 (May-June, 1987).

[2] Hörmann, A. (2005). Ermittlung optimierter Stabwerkmodelle auf Basis des Kraftflusses als Anwendung plattformunabhängiger Prozesskopplung (PhD. Thesis). Munich: Tech. Univ. Munich.

[3] DAfStb (Hrsg.) (2012): Heft 600: Erläuterungen zu DIN EN 1992-1-1 und DIN EN 1992-1-1/NA (Eurocode 2). Berlin: Beuth Verlag GmbH.

[4] DIN Deutsches Institut für Normierung e.V. (2010): DIN EN 1990-1-1 Grundlagen der Tragwerksplanung. Berlin: Beuth Verlag GmbH.

[5] DIN Deutsches Institut für Normierung e.V. (2010): DIN EN 1991-1-1/NA Allgemeine Einwirkungen auf Tragwerke. Berlin: Beuth Verlag GmbH.

[6] DIN Deutsches Institut für Normierung e.V. (2010). DIN EN 1992-1-1 Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. Berlin: Beuth Verlag GmbH.

[7] Fingerloos, F., Hegger, J., Zilch, K., Bundesvereinigung der Prüfingenieure für Bautechnik e.V. (Hrsg.), Deutscher Beton- und Bautechnik-Verein E.V. (Hrsg.), Institut für Stahlbetonbewehrung e.V. (Hrsg.); Verband Beratender Ingenieure (VBI) (Hrsg.) (2012). Kurzfassung des Eurocode 2 für Stahlbetontragwerke im Hochbau. Berlin: Beuth Verlag GmbH

[8] Grasser, E., Thielen, G., DAfStb (Hrsg.) (1991). Heft 240: Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrößen und Formänderungen von Stahlbetontragwerken. [3. Auflage]. Berlin: Beuth Verlag GmbH.

[9] Leonhardt, F., Mönnig, E. (1977). Vorlesungen über Massivbau: Dritter Teil: Grundlagen zum Bewehren im Stahlbetonbau. [3. Auflage]. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag

[10] Rombach, G. (2006). Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau: Fehlerquellen und ihre Vermeidung. [2. Auflage]. Berlin: Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG.

Limit Analysis by Linear Programming: Considerations regarding historical masonry structures

Magdalena, Fernando[1]; García, Julián[2]; Hernando, J.Ignacio[3]; Magdalena, Eva[4]

ABSTRACT

When the collapse mode does not include sliding, the Limit Analysis is an excellent tool to check the stability and strength of the historic masonry structures in a simplified way. In an early stage, its relation with Mathematical Programming was already shown. However, their joint application presents a significant problem in the case of highly heterogeneous, anisotropic and with low or no tensile strength materials. In the methods that use Linear Programming the usual procedure is to establish a load, or a system of concomitant variable loads, that are increased by a coefficient called load factor. Any value of this factor below the one that causes the collapse is considered safe. This paper tries to analyzes the drawbacks of this approach and to show alternatives.

Keywords: masonry structures, Limit Analysis, Linear Programming, Safety factor, Chebyshed center.

1. INTRODUCCIÓN

En 1952 Kooharian [1] demostró que los teoremas del Análisis Límite eran aplicables a las estructuras de fábrica, aunque ya en 1953 Drucker [2] demostró que estos no eran aplicables en el caso de colapso por deslizamiento. En los casos en que el modo de colapso no incluye deslizamiento el Análisis Límite Estándar es una excelente herramienta para la comprobación de la estabilidad y la resistencia de modo simplificado, especialmente en el corto plazo. De hecho es probablemente una de las mejores opciones cuando se dispone de escasos datos acerca de la estructura, ya que sólo requiere datos geométricos y estimación de acciones para comprobar la estabilidad, y tensiones límites de rotura de los materiales para comprobar la resistencia. Por el contrario, no es en absoluto el más adecuado cuando se necesita comprobar el comportamiento en el largo plazo de la estructura, tarea para la cual existen herramientas más sofisticadas pero que requieren un mayor esfuerzo en la adquisición de datos.

La utilización de los teoremas como fundamento para análisis "manuales" ha sido ampliamente desarrollada por Heyman y ha tenido gran éxito puesto que entronca perfectamente con una larga tradición de análisis - gráfico o no - mediante líneas de empujes. Fig.(1)

[1]*DCAC ETSEM-UPM Madrid(España). fernando.magdalena@upm.es (Correspondingauthor)*
[2]*DCAC ETSEM-UPM Madrid(España). julian.garciam@upm.es*
[3]*DEFE ETSAM-UPM. Madrid (España). joseignacio.hernando@upm.es*
[4]*Technical University.Eindhoven (The Netherlands). evamagdalena2@hotmail.com*

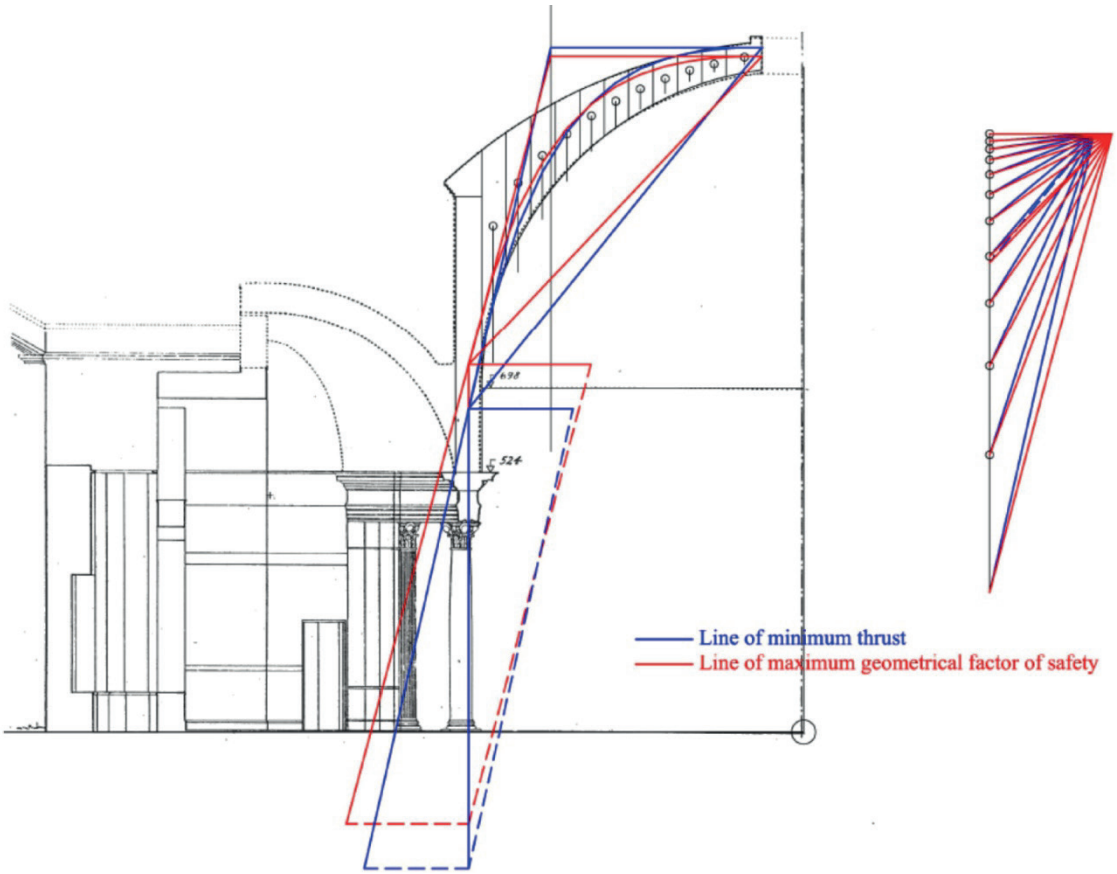


Figura 1. *Análisis de la reconstrucción hipotética de una de las cúpulas de Villa Adriana*

Desde muy pronto el Análisis Límite y la Programación Matemática - sea Lineal o no - han ido de la mano. Charnes et al. [3] establecieron la equivalencia para las cerchas entre dos problemas duales de programación lineal y los principios "estático" y "cinemático" del colapso plástico. Más tarde otros como Dorn [4] y Charnes et al. [5] extendieron la equivalencia a los pórticos. A partir de los años 70, con la extensión del uso de los ordenadores, la aplicación del Análisis Límite mediante Programación Lineal sufre un fuerte desarrollo. Algunos ejemplos son la aplicación a un medio continuo mediante elementos finitos de un material rígido-plástico por Anderheggen [6] o la aplicación a estructuras de fábrica modelizadas mediante ensamblajes de bloques rígidos en contacto unilateral mediante una formulación estática por Livesley [7] o cinemática por Gilbert et al. [8].

La aplicación del teorema del límite inferior o estático permite comprobar si una estructura es estable y resistente sometida a un sistema fijo de cargas. Esto es lo que se ha venido haciendo de modo habitual cuando se emplean los citados métodos "manuales", ya que basta comprobar que existe una solución de equilibrio entre un sistema cualquiera de solicitaciones internas -no tienen por qué ser las "reales"- y el citado sistema de cargas fijas, y que dichas solicitaciones no vulneran en ningún punto las restricciones del material. Utilizando una analogía antropomórfica, si existe una solución que permita conseguir el equilibrio y no infrinja las restricciones, la estructura la "encontrará".

Asunto muy diferente es saber, en el caso de que varíen las cargas o las propiedades de la estructura, cual es el margen de seguridad que le resta a la estructura antes de colapsar. La aplicación de los teoremas presenta un importante problema en el caso de materiales altamente heterogéneos,

anisótropos y con escasa o nula resistencia a tracción. Éste se agudiza en extremo cuando se emplean los teoremas en combinación con la Programación Matemática. El problema venía de origen, el propio nombre de los teoremas - teorema del límite superior y teorema del límite inferior - induce al equívoco. Es un hecho conocido, aunque a veces ignorado con graves consecuencias, que en ocasiones es más peligroso reducir las cargas sobre una estructura de este tipo que aumentarlas.

Limitándonos en adelante a los métodos que tienen una formulación exclusivamente estática, este problema ha venido siendo manejado en el caso de los métodos "manuales", para estructuras lineales y cuando sólo son necesarias comprobaciones de estabilidad, mediante el llamado coeficiente de seguridad geométrico.

En los métodos que emplean la Programación Lineal la dificultad es heredada de la aplicación original del Análisis Límite a problemas de rotura con materiales resistentes igualmente a tracción y compresión. El método habitual es establecer una carga o un sistema de cargas variables concomitantes a las cuales se las hace crecer de acuerdo a un coeficiente λ llamado factor de carga, se trata de hallar el valor máximo de este factor y aceptar la hipótesis de que cualquier factor por debajo de éste corresponde a un sistema de cargas seguro. Un factor de carga igual a 1, o lo que es lo mismo un coeficiente de seguridad igual a 1 para el sistema de cargas concomitantes, significa que la estructura se encuentra en la situación de inicio del colapso. En esta formulación cuanto mayores son el factor de carga -o coeficiente de seguridad- mayor es la seguridad de la estructura respecto al sistema de cargas. Esto no siempre es cierto y para poder avanzar en el tema es necesario aclarar previamente la formulación y terminología que vamos a emplear.

2. MODELADO DE LA ESTRUCTURA

En el modelo propuesto el material compuesto constituyente de la estructura -considerando tanto los sillares o mampuestos como las juntas- es un material idealizado como unilateral, es decir, con escasa o nula resistencia a tracción -en el modelo más simple nula- elevada resistencia a compresión -aunque a diferencia del modelo de Heyman [9] no ilimitada- y deslizamiento inexistente o impedido. La adopción de la hipótesis de resistencia a tracción nula ha sido adoptada por la inmensa mayoría de los autores y está del lado de la seguridad. La limitación de la resistencia a compresión -rotura por aplastamiento- está menos extendida pero ya aparece en la obra de autores como Delbecq [10] o la citada de Livesley [7]. En cuanto al deslizamiento es necesario que esté impedido debido a las limitaciones del método -el Análisis Límite Estándar- por tanto, se supone un rozamiento muy grande o disposiciones constructivas que impidan el deslizamiento. El tema del colapso con deslizamiento ha sido tratado en distintos trabajos, y entre ellos varios de los autores [11].

El comportamiento del material se idealiza como el de uno rígido-plástico despreciando las deformaciones elásticas. En este tipo de material las deformaciones plásticas al alcanzar las restricciones de límite son tan grandes en comparación con las elásticas que es una simplificación aceptable.

Para un material del tipo descrito unilateral y rígido-plástico se puede considerar unas solicitaciones y una distribución de tensiones en una junta -real o virtual- como las representadas en la Fig (2), considerando únicamente solicitaciones axiales y de flexión.

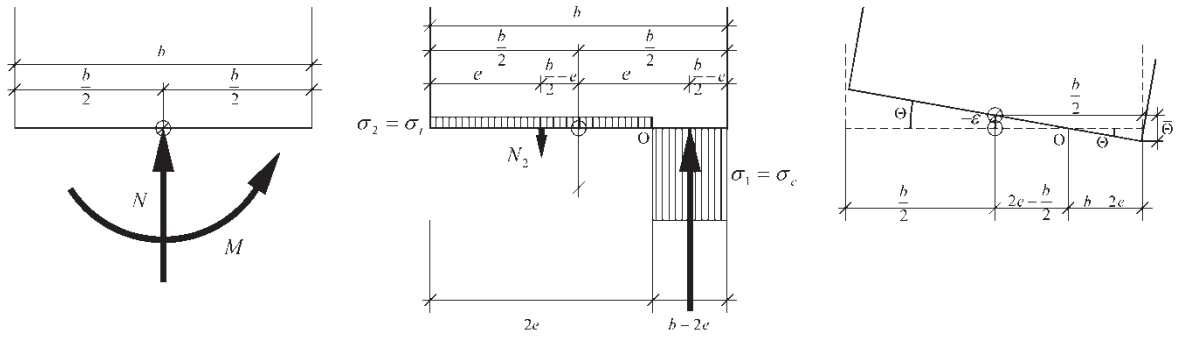


Figura 2. *Solicitaciones, tensiones y deformaciones en una "junta" de una estructura de fábrica.*

Utilizando como variables estáticas las solicitaciones en las juntas, normal N y momento M, se puede definir una superficie límite o de cedencia -llamada por otros autores superficie de fluencia- Fig. (3). Los estados de solicitaciones representados en el interior de dicha superficie son seguros. Los estados contenidos en la envolvente estricta son aquellos en que está a punto de iniciarse el colapso. Los estados en el exterior de dicha superficie no tienen significado físico, al ser imposibles. Además para que sea posible aplicar el Análisis Límite la superficie debe ser convexa y, para poder aplicar el Análisis Limite Estándar, los "multiplicadores plásticos" o deformaciones elementales que se producen al alcanzar las solicitaciones un punto de la superficie límite deben ser perpendiculares a dicha superficie en ese punto.

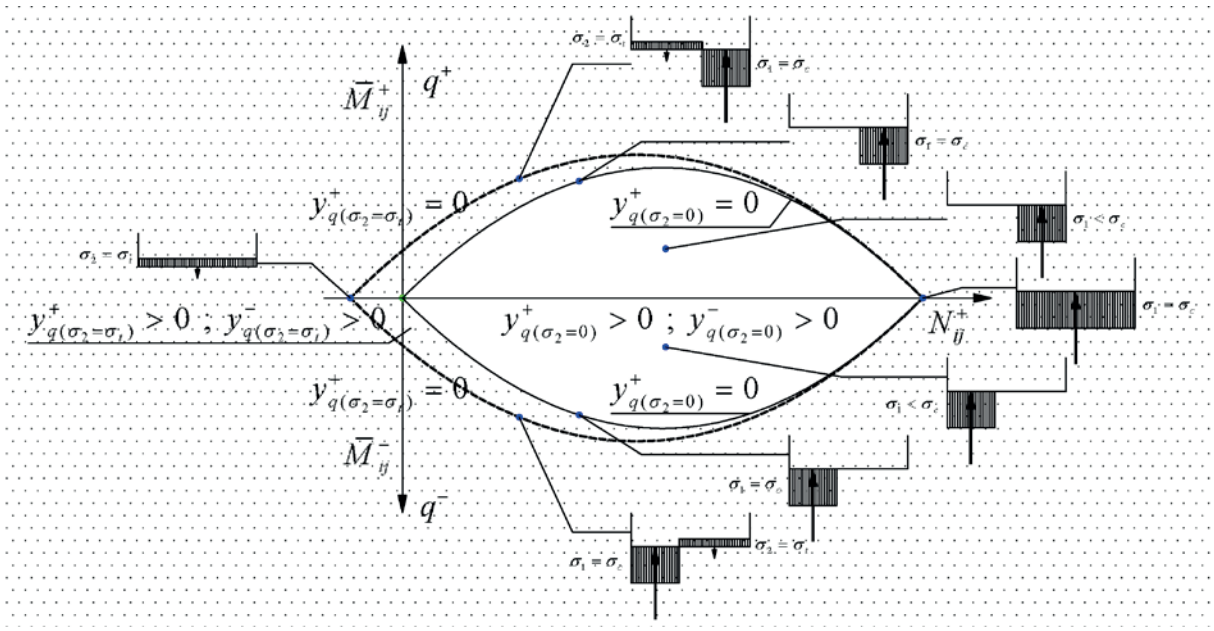


Figura 3. *Superficies de cedencia -o de fluencia según algunos autores- de la anterior "junta" definidas en el espacio de las variables estáticas -normal y momento- en línea continua sin resistencia a tracción y en línea discontinua con una pequeña resistencia a tracción. Los puntos en la zona interior a la superficie representan soluciones estáticas admisibles.*

La inclusión de las solicitaciones tangenciales se haría mediante la correspondiente superficie de cedencia $N,\ T$. Como ya se ha dicho si estas llevaran al deslizamiento estaríamos fuera del marco de aplicación del Análisis Límite Estándar, por tanto se supone como hacen muchos autores que la

resistencia por rozamiento es suficientemente grande o que el deslizamiento está impedido y no se consideran en el desarrollo posterior por simplicidad en la exposición.

Es necesario aclarar la terminología que se va a emplear. Siendo $\mathbf{B^t}$ la matriz de equilibrio, $\mathbf{s}$ un vector de tensiones internas, $\mathbf{g}$ un vector de cargas permanentes, λ el factor de carga, $\mathbf{q}$ un vector de acciones variables, $\mathbf{y}$ un vector de "holguras respecto a las restricciones límites de las tensiones" que debe ser positivo y que desde un punto de vista geométrico es la distancia desde el estado de tensiones analizado hasta la correspondiente restricción límite, $\mathbf{L^t}$ una matriz de coeficientes adecuados que relaciona las tensiones internas con las citadas holguras -y que podemos llamar matriz de cedencia- $\mathbf{B}$ la matriz de compatibilidad -traspuesta de la de equilibrio- $\mathbf{u}$ un vector de desplazamientos nodales -de cada uno de los elementos en los que discretizamos la estructura- $\mathbf{z}$ un vector de "multiplicadores plásticos" -deformaciones elementales que se producen al alcanzar las tensiones sus correspondientes restricciones de límite- y $\mathbf{V}$ una matriz de coeficientes adecuados, a la que podríamos llamar matriz de fluencia. Por definición, toda solución de inicio de colapso debe cumplir las siguientes condiciones Eq.(1):

$$\begin{aligned} \mathbf{B^t s} &= \mathbf{f} = \mathbf{g} + \lambda \mathbf{q} \\ \mathbf{-L^t s} &= \mathbf{y} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} &\perp \mathbf{z} \\ \mathbf{z} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{q^t u} &= 1 \\ \mathbf{Bu} - \mathbf{Vz} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1}$$

Que se pueden desglosar de la siguiente manera:

a/ Ser una solución estática admisible, Eq.(2)

$$\left.\begin{aligned} \text{s.a.}\quad \mathbf{B^t s} &= \mathbf{g} + \lambda \mathbf{q} \\ \mathbf{-L^t s} &= \mathbf{y} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \equiv \mathbf{y} \in \{E_y\} \tag{2}$$

b/ Ser una solución cinemática admisible, Eq.(3)

$$\left.\begin{aligned} \text{s.a.}\quad \mathbf{Bu} - \mathbf{Vz} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{q^t u} &= 1 \\ \mathbf{z} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \equiv \mathbf{z} \in \{K_z\} \tag{3}$$

c/ Satisfacer la relación entre soluciones estáticas y soluciones cinemáticas, Eq.(4)

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} &\perp \mathbf{z} \\ \mathbf{z} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4}$$

Esta formulación u otra equivalente es la empleada por la mayor parte de los investigadores que se enfrentan al problema general sin excluir la posibilidad de un fallo que incluya deslizamiento y que por

tanto utilizan Análisis Límite no-Estándar. Este tipo de problema es conocido como un Problema con restricciones de Complementariedad o abreviadamente como Problema de Complementariedad, y debido a las restricciones que relacionan las soluciones estática y cinemática, Eq.(4), éste es un problema intratable desde el punto de vista computacional que puede tener una, ninguna o múltiples soluciones.

Mucho más sencillo es el caso que vamos a tratar de estructuras planas, o tridimensionales a las cuales se puede aplicar una linealización, y en las que el deslizamiento se supone inexistente o impedido. En este caso las condiciones de óptimo del Problema de Complementariedad son un par de Programas Lineales duales en los que hallando el máximo valor del factor de carga para el caso de la solución estática o el correspondiente mínimo para la solución cinemática se obtiene el factor de carga de inicio de colapso.

En los casos en que el material cumple con las condiciones expuestas anteriormente y el mecanismo de colapso no incluye deslizamiento se puede aplicar el Análisis Límite Estándar. El enfoque más habitual es hallar el máximo valor del factor de carga, para el cual se inicia el colapso Eq.(5) o Eq. (6), y considerar que cualquier valor del factor de carga por debajo de éste es un valor seguro, tanto más seguro cuanto más bajo. De este modo el factor de carga actúa como un coeficiente de seguridad global a aplicar sobre las acciones variables, un λ_{max}=0 indica que la estructura está al borde del colapso bajo las acciones permanentes, un λ_{max}=1 que lo está bajo la acción conjunta de las acciones permanentes y las variables sin mayorar, y un λ_{max}>1 que es posible aumentar aún las acciones variables antes de llegar al colapso.

$$\max \lambda \quad \text{s.a.} \left\{ \mathbf{B}^t\mathbf{s} = \mathbf{f} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{q} \; ; \; -\mathbf{L}^t\mathbf{s} = \mathbf{y} \; ; \; \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \right\} \tag{5}$$

$$\max \lambda \; \text{s.a.} \; \mathbf{y} \in \left\{ \mathrm{E}_y \right\} \tag{6}$$

La segunda y tercera restricciones de la Eq. (5) definen un poliedro convexo, y en la mayor parte de los casos cerrado, que llamamos superficie de cedencia. Resulta obvio que en problemas que incluyan estabilidad existe tanto un límite superior como uno inferior para λ, y por tanto los métodos basados exclusivamente en la obtención de un λ_{max} no son adecuados.

3. MÉTODOS PROPUESTOS

El enfoque más ambicioso para la evaluación de la seguridad, alternativo a los coeficientes de seguridad parciales -y que corresponde a los métodos probabilistas nivel III- es plantear una simulación -por ejemplo de tipo Monte Carlo- con valores aleatorios de las cargas así como de cualquier otra característica mecánica o geométrica sujeta a variación. Este tipo de planteamiento, aunque muy atractivo desde el punto de vista teórico, resulta de difícil aplicación en la práctica debido a la escasez de datos, que es uno de los motivos que hace apropiado el uso del Análisis Límite. Sería necesario conocer las distribuciones de frecuencias de los parámetros implicados tales como acciones, resistencias ... y caso de disponer de ellas aún quedaría por determinar cuál es el número de repeticiones necesario para obtener el nivel de confianza deseado, tema que se ha tratado en otros trabajos [12].

En lo que sigue nos limitaremos a los métodos de evaluación de la seguridad de nivel I, que a nuestro efecto son métodos deterministas cuyos resultados se modifican mediante un cierto margen de seguridad y que a menudo se desarrollan de modo práctico mediante coeficientes de seguridad parciales.

Para evitar una exposición abstracta se van a mostrar los conceptos sobre un ejemplo sencillo. Las limitaciones del ejemplo son evidentes, ya que se ha sacrificado la exactitud en favor de la sencillez y la posibilidad de representación gráfica. La más importante se discutirá más adelante.

Sea una viga de material rígido-plástico simplemente apoyada sobre un bloque de material rígido. El momento último capaz de resistir la propia viga -que ejemplifica la resistencia del material- es M_u , en sus extremos se aplican una fuerza fija F_1 que ejemplifica las acciones permanentes $\boldsymbol{g}$ y una fuerza variable F_2 que ejemplifica las acciones variables $\boldsymbol{q}$, afectada de un factor de carga λ . Las dimensiones y disposición son las reflejadas en la Fig. (4).

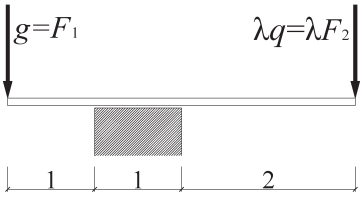


Figura 4. *Representación esquemática del caso de estudio.*

Las variables estáticas en este caso son las acciones $\boldsymbol{g}$, λ $\boldsymbol{q}$ y las restricciones están definidas respecto a las situaciones límites de estabilidad, Eq. (7,8) y resistencia, Eq. (9,10).

$$F_1 \geq \lambda F_2 \qquad (7)$$

$$F_1 \leq 3\lambda F_2 \qquad (8)$$

$$Mu \geq F_1 \qquad (9)$$

$$\frac{Mu}{2} \geq \lambda F_2 \qquad (10)$$

Estas restricciones pueden representarse gráficamente sobre el espacio definido por las variables estáticas $\boldsymbol{g}$, λ $\boldsymbol{q}$ Fig. (5) y definen cada una de ellas dos semiespacios uno blanco en que la restricción se cumple y uno gris en el que no. La intersección de todos estos semiespacios define un poliedro n-dimensional convexo, en el ejemplo un polígono.

En el interior de este poliedro, que si es cerrado se llama politopo, están todas las soluciones que cumplen con todas las restricciones. En el ejemplo es el polígono blanco.

En la envolvente del poliedro están las soluciones para las cuales se ha alcanzado alguna restricción límite y, en el caso del ejemplo, está a punto de iniciarse el colapso.

En el exterior, en la zona gris, no existen soluciones posibles desde el punto de vista físico.

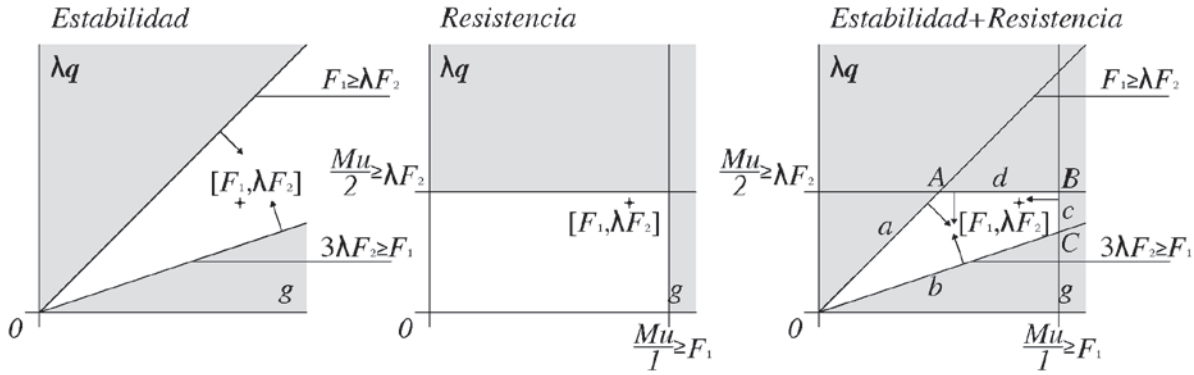


Figura 5. *Representación, para el ejemplo de estudio, de las restricciones de estabilidad (izquierda), de resistencia (centro) y de cedencia en general (derecha).*

3.1 Intervalo de estabilidad

Resulta obvio, observando la figura, que las soluciones inseguras -la zona gris- pueden encontrarse tanto en la dirección de los λ crecientes, como de los decrecientes. La propuesta más simple consiste en hallar ambos límites -superior e inferior- Eq. (11,12) y definir el intervalo entre ambos [λ_{min}, λ_{max}] como intervalo de estabilidad del sistema de cargas.

$$\lambda_{\max} = \max \lambda \quad \text{s.a.} \left\{ \mathbf{B}^t\mathbf{s} = \mathbf{f} = \mathbf{g} + \lambda\mathbf{q} \; ; \; -\mathbf{L}^t\mathbf{s} = \mathbf{y} \; ; \; \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \right\} \tag{11}$$

$$\lambda_{\min} = \min \lambda \quad \text{s.a.} \left\{ \mathbf{B}^t\mathbf{s} = \mathbf{f} = \mathbf{g} + \lambda\mathbf{q} \; ; \; -\mathbf{L}^t\mathbf{s} = \mathbf{y} \; ; \; \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \right\} \tag{12}$$

El procedimiento puede ser representado gráficamente, Fig (6). El segmento de recta [F_1,$\lambda_{min}F_2$], [F_1,$\lambda_{max}F_2$] constituye un politopo de dimensionalidad inferior, en este caso 1, y dentro de él están contenidas todas las soluciones estáticas admisibles para las cuales F_1 es un valor fijo.

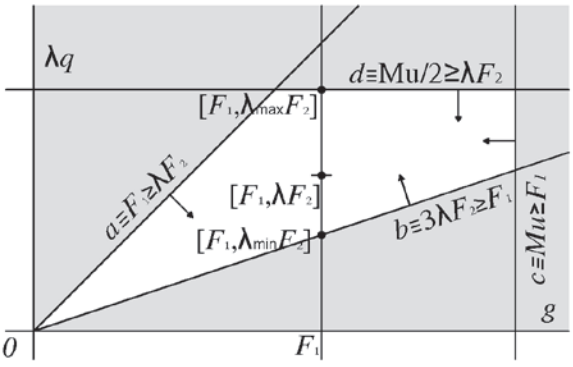


Figura 6. *Intervalo de estabilidad para el sistema de cargas.*

Cualquier valor de λ interior al intervalo es un valor seguro y tanto más seguro cuanto más lejos se encuentre de ambos valores extremos o, lo que es lo mismo, cuanto más cerca se encuentre de su valor medio $\lambda_{med} = (\lambda_{max}+\lambda_{min}) / 2$. Sería posible definir un coeficiente de seguridad γ para un factor de carga, Eq. (13) como la relación entre las distancias hasta el valor medio de los valores extremos y del valor dado.

$$\gamma = \arg\max \left\{ \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\text{med}}}{\lambda - \lambda_{\text{med}}}, \frac{\lambda_{\text{med}} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\text{med}} - \lambda} \right\} \tag{13}$$

En los casos en que $\lambda = \lambda_{max}$ o $\lambda = \lambda_{min}$ será $\gamma = 1$ es decir la estructura está en una situación de inicio de colapso.

Las potencialidades y las limitaciones de este primer método se entienden mejor a través de un ejemplo. Una forma posible de estudiar la influencia de la posición de una carga variable actuando sobre un arco es hallar la máxima carga variable que soporta el arco en cada posición. Una de las circunstancias que modifica la forma de esta línea de influencia es la existencia de relleno en el trasdós y su espesor, Fig. (7A). En la figura 7B se representan las líneas de influencia de los factores de carga máximo y mínimo para diferentes alturas de relleno, como se puede apreciar en muchos casos el colapso está más cercano debido al λ_{min} que al λ_{max}. Finalmente se representan las líneas de influencia de los factores de carga λ_{max}, λ_{med} y λ_{min} para el caso de relleno hasta la clave del arco, Fig. (7C). En este último caso se puede apreciar que la línea de λ_{med} está muy próxima a la línea de $\lambda = 0$, es decir sólo con cargas permanentes, en la parte central del arco. Por el contrario, en las zonas de arranque del arco ambas se separan de forma rápida, siendo más seguro un aumento de acciones variables en esta zona y mucho más inseguro reducir el relleno en el trasdós. En el caso descrito la obtención en un número suficiente de puntos del intervalo de soluciones seguras permite hacerse una idea clara del comportamiento del arco. El coeficiente de seguridad global del arco sin sobrecarga podríamos obtenerlo hallando el valor mínimo de los coeficientes de seguridad parciales obtenidos para cada ubicación de la carga, como se ha descrito anteriormente.

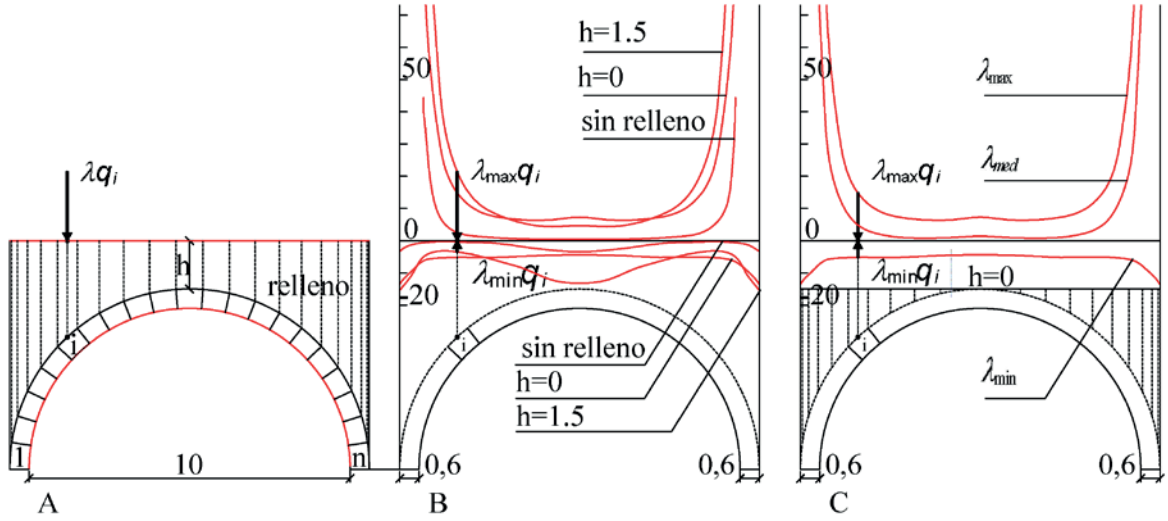


Figura 7. *Líneas de influencia para un arco del factor de carga de una carga variable en función de su posición.*

Siguiendo el razonamiento hasta este punto, hemos llegado a la poco intuitiva conclusión de que la seguridad del arco -tal como la hemos definido- bajo la acción de las cargas permanentes, peso propio y relleno, es pequeña en la zona de los arranques, dado que la línea de influencia correspondiente al λ_{med} se encuentra muy alejada de la correspondiente a $\lambda = 0$. Por otro lado la seguridad de esta zona aumenta considerablemente al aumentar la carga variable sobre ellos y sería la más segura para una carga móvil positiva. Lo expuesto basta para comprender que el método es una herramienta potente para entender el comportamiento de la estructura pero requiere un importante esfuerzo de análisis de los resultados "manual". Por otro lado, requiere un importante esfuerzo de cálculo, ya que hay que

resolver dos programas lineales por cada punto en que se quiera considerar la acción de cargas variables.

3.2 Contracción en un valor fijo de la superficie de cedencia

Resulta deseable disponer de métodos más estandarizados. En este sentido, en estructuras lineales el problema de la seguridad -o mejor de su margen- se ha venido resolviendo, cuando el único comportamiento a comprobar es la estabilidad, mediante el llamado Coeficiente de Seguridad Geométrico (CSG) que se puede interpretar como la comprobación de que existe una solución estática admisible -línea de empujes- en el interior de una geometría contraída proporcionalmente respecto de la original. Fig.(8).

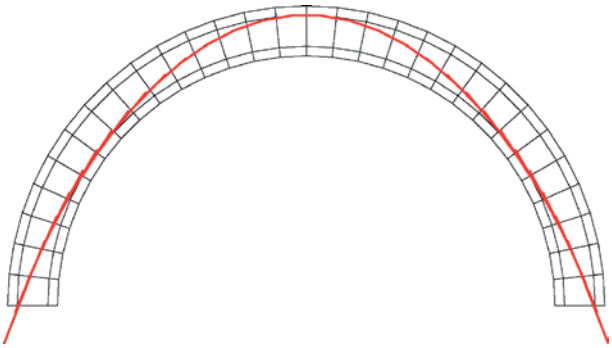


Figura 8. *Representación gráfica del Coeficiente de Seguridad Geométrico mediante una línea de empujes contenida en el interior de la geometría contraída.*

Este problema no puede resolverse directamente mediante un Programa Lineal, pero sí puede resolverse iterativamente mediante dicha herramienta. Para ello se va aumentando y/o reduciendo el CSG en un proceso de bisección hasta obtener el máximo CSG para el cual la estructura es estable. En estos casos el requisito de resistencia se comprueba habitualmente "a posteriori".

En este trabajo estamos interesados en métodos más generales y que se puedan aplicar a cualquier tipo de estructuras, por ello, en adelante vamos a centrarnos en métodos basados en la contracción de la superficie de cedencia o, vistos desde otro ángulo, en la distancia desde un estado de tensiones seguro hasta la superficie de cedencia. Este tipo de problemas puede resolverse en los casos de envolventes convexas como problemas de Optimización Convexa y en el caso más simple -como el que nos ocupa- de envolventes poliédricas, como problemas de Programación Lineal.

Los métodos generales para la resolución de este tipo de problemas pueden encontrarse en trabajos como el de Boyd et al [13], pero conviene recordar que, en la formulación empleada, hemos definido el vector $\boldsymbol{y}$ como aquel cuyos componentes son las distancias geométricas desde el estado de tensiones considerado hasta las correspondientes restricciones de cedencia, Fig. (9 izquierda), y podemos aprovechar este hecho.

Por tanto, una alternativa fácil de implementar es hallar la distancia desde un estado definido de tensiones -o de cargas en el ejemplo- hasta el punto más cercano de la superficie de fluencia. Esto se puede conseguir añadiendo una nueva condición $h \leq y_i$, resolviendo $\max h$ y haciendo $\min y_i = \max h$. Eq. (14).

$$\min y_i = \max h \quad \text{s.a.} \left\{ \lambda = \lambda_1; 0 \le h \le y_i; \mathbf{B}^t\mathbf{s} = \mathbf{g} + \lambda\mathbf{q} \; ; \; -\mathbf{L}^t\mathbf{s} = \mathbf{y} \; ; \; \mathbf{y} \ge \mathbf{0} \right\} \tag{14}$$

El conjunto de puntos para los cuales el $\min y_i \ge h$ define una superficie de cedencia contraída Fig.(9 derecha) cuya envolvente queda definida por la restricción $\min y_i = h$.

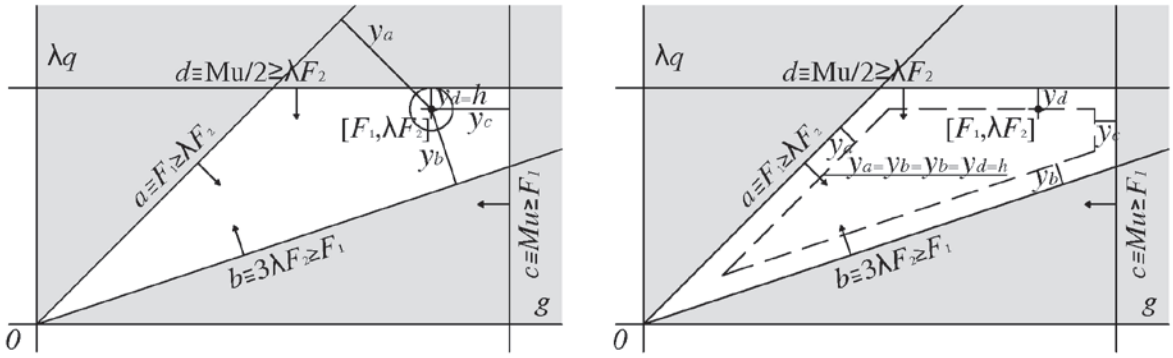


Figura 9. *En la izquierda distancia a las diferentes restricciones de cedencia y distancia mínima h, en la derecha superficie de cedencia contraída a una distancia h*

Todos los estados de tensiones en el interior de esta envolvente están al menos a una distancia h de la restricción límite más cercana.

El método descrito permite mediante la resolución de un único Programa Lineal garantizar que al menos un estado de tensiones correspondiente al factor de carga $\lambda = \lambda_1$ está a una distancia h de la más cercana de las restricciones de cedencia y además saber cual es esta restricción. El inconveniente del método es que no permite saber si esta distancia es pequeña o grande en términos relativos al tamaño de la superficie de cedencia.

3.3 Contracción homotética de la superficie de cedencia

Una propuesta más ambiciosa es debida a Cervera [14] y consiste en contraer la superficie de cedencia homotéticamente respecto a un punto interior que es hipotéticamente el más seguro, la propuesta quedó sin implementar para el caso general de fábricas. La idea tiene grandes similitudes con el método de los factores de seguridad parciales, tal como lo describe por ejemplo Ditlevsen [15].

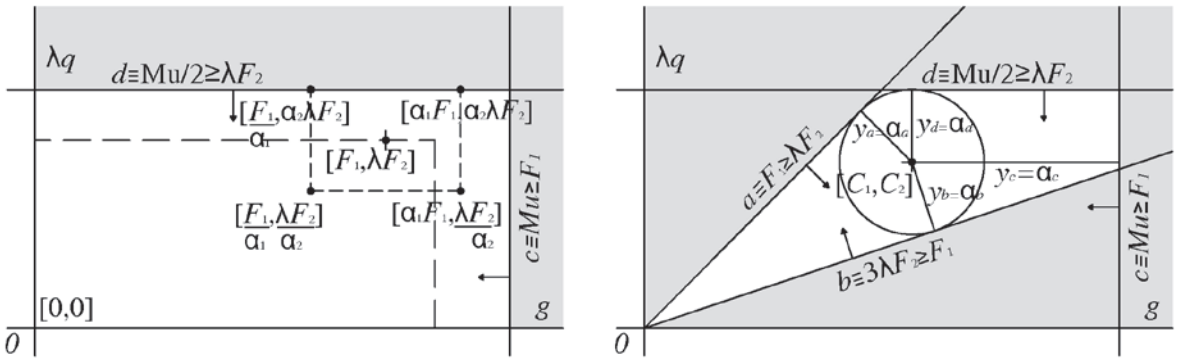


Figura 10. *En la izquierda, factores de seguridad parciales y superficie "suficientemente segura", en la derecha obtención del centro de Chebyshed.*

En la figura 2.5 del texto citado y en la Fig. (10 izquierda) se presenta una superficie contraída de la superficie de estado límite -en la terminología de Ditlevsen- o superficie de cedencia, que envuelve en su interior todos los estados "suficientemente seguros" de acuerdo a los factores parciales de seguridad adoptados. La principal dificultad para la adopción del método en estructuras de fábrica radica en la ubicación del origen respecto al cual se establecen los factores parciales de seguridad.

No es casualidad que en la figura (10 izquierda) se hayan representado únicamente las restricciones de resistencia, respecto de las cuales la solución estática más segura es la más cercana al origen [0,0]. Sin embargo, en la figura de la derecha se observa que, para el caso general que incluye restricciones de estabilidad y resistencia, el punto que representa el estado más seguro -el punto más alejado de la superficie de cedencia envolvente- está muy alejado del origen. Los siguientes párrafos van a tratar de cómo obtener este punto y como utilizarlo para evaluar la seguridad de la estructura.

El centro de Chebyshed es el punto interior que está a la máxima distancia posible de una envolvente convexa, Boyd [13]. Es también el centro de la mayor hiperesfera, o esfera n-dimensional, contenida en el interior de dicha envolvente, Fig.(10 derecha), por ello recibe también el nombre de "ball center". Obtener dicho centro en el caso de un conjunto convexo contenido en la citada envolvente es un problema de optimización convexa. Cuando dicha envolvente es un poliedro, como en el caso tratado, el problema puede resolverse mediante Programación Lineal, Eq. (15), de forma muy similar a la de la Eq. (14). Se trata de hallar el máximo valor de h que en este caso es el radio de la máxima hiperesfera inscribible en el poliedro.

$$\max h \;\; \text{s.a.} \; \left\{ 0 \le h \le y_i ; \;\; \mathbf{-L^t s = y} \; ; \mathbf{y \ge 0} \right\} \tag{15}$$

La solución del Programa Lineal nos dará tanto el valor de h como de los diferentes y_i. Estos y_i son las distancias desde el centro que vamos a usar como origen, dado que es el punto más alejado de la superficie de cedencia y por tanto el más seguro, a las correspondientes restricciones.

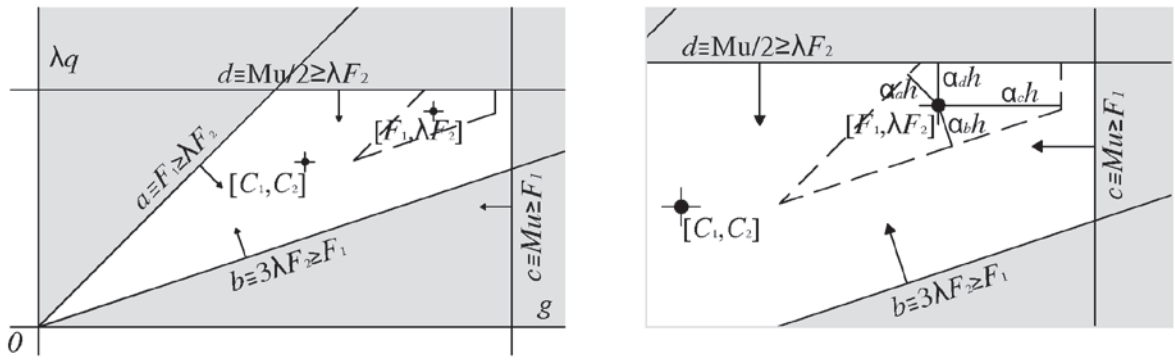


Figura 11. *Obtención de los coeficientes de seguridad parciales máximos para un estado de tensiones dado.*

Volviendo a la Fig. (10 izquierda), vemos que los márgenes de seguridad son función de unos coeficientes y de la distancia al origen, y en el presente caso al punto más seguro. Tomando los valores de los y_i obtenidos en el anterior paso como coeficientes α_i podemos volver a repetir la operación realizada en la Eq. (14), pero en este caso con distancias, a las correspondientes

restricciones de cedencia, ponderadas por medio de los citados coeficientes, Fig. (11 derecha) y Eq. (16).

$$\max h \;\text{ s.a. } \left\{\lambda = \lambda_1; 0 \le \alpha_i h \le y_i; \mathbf{B}^t\mathbf{s} = \mathbf{g} + \lambda\mathbf{q}\;;\; -\mathbf{L}^t\mathbf{s} = \mathbf{y}\;;\; \mathbf{y} \ge \mathbf{0}\right\} \tag{16}$$

La solución del Programa Lineal nos dará de nuevo tanto el valor de h como de los diferentes y_i , pero esta vez nos interesan los valores relativos de los y_i respecto de sus correspondientes α_i., Fig. (12 derecha).

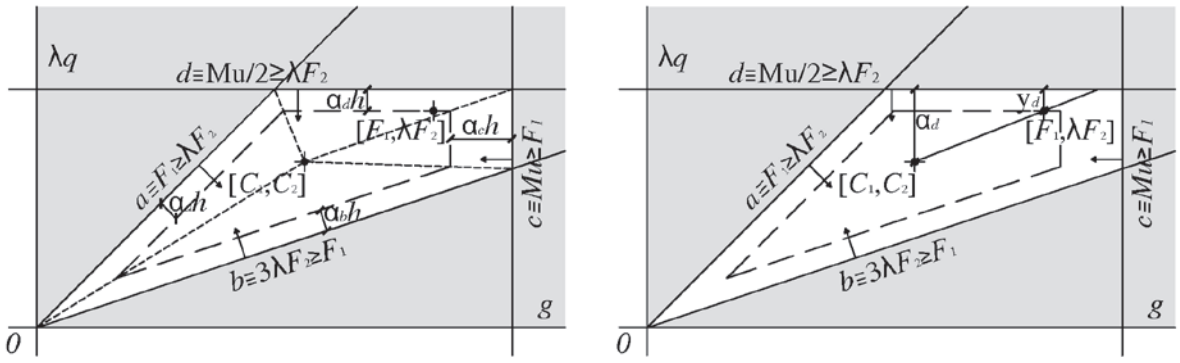


Figura 12. *En la izquierda, contracción homotética de la superficie de cedencia, en la derecha, mínimo "coeficiente de seguridad parcial" de un estado de tensiones dado.*

Definiendo, de modo parecido a Ditlevsen, un coeficiente de seguridad parcial γ_i respecto a una restricción dada i mediante la Eq. (17).

$$\gamma_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i - y_i} \tag{17}$$

Cuando $y_i=0$, es decir cuando el punto está en la superficie de cedencia, el coeficiente de seguridad parcial γ_i respecto a la restricción i es 1.

Hay que aclarar en este punto que dado que estamos empleando la palabra "factor" para el factor de carga y que la formulación del factor de seguridad no es exactamente igual a la de Ditlevsen, hemos reservado pues la palabra factor para las dos primeras y coeficiente para la nueva que se propone.

Según el concepto de seguridad más habitual, el coeficiente de seguridad parcial que nos interesa evaluar es el menor de ellos, Eq. (18).

$$\gamma_{\min} = \arg\min\left\{\gamma_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i - y_i}\right\} \tag{18}$$

Sin embargo, uno de las principales características del Análisis Límite es que considera que el colapso no se inicia por alcanzar en un único punto o respecto a una única restricción las condiciones de límite, sino que es necesario que se alcancen en puntos suficientes en número y ubicación para convertir la estructura en un mecanismo.

Es posible otro enfoque distinto para este mismo problema. El lugar geométrico de todos los puntos que tienen un mismo coeficiente γ_{min} es una superficie homotética con la superficie de cedencia y con centro de la homotecia en el centro de Chebyshed, Fig. (12 izquierda). Podemos fijar un determinado valor para este coeficiente γ_{min} con lo cual obtendremos un valor de h y por tanto una separación a la superficie de cedencia fijada por $\alpha_i h$. Con esta superficie "suficientemente segura" obtenida al contraer de esta manera la de cedencia se puede realizar cualquiera de las operaciones que realizaríamos con la original. Por ejemplo, se podría hallar el intervalo de estabilidad de la carga variable que cumple con un coeficiente de seguridad parcial γ dado. Cómo fijar el valor de este coeficiente escapa al alcance del presente trabajo.

4. DISCUSIÓN

La extensión de las conclusiones obtenidas del ejemplo es limitada. Una de las diferencias más significativas, entre el ejemplo y el caso general, es que en el este último para un mismo estado de cargas son posibles diferentes estados de tensiones. Por ello, es requisito indispensable que sean aplicables los principios del Análisis Límite Estándar para poder garantizar que, de entre todas las soluciones posibles, la estructura "encontrará" aquella que tenga un mayor coeficiente de seguridad. En consecuencia en el caso en que el inicio del colapso pueda incluir deslizamiento no es aplicable lo dicho.

Tal como se ha visto anteriormente, una vez formulado el problema, con su conjunto de ecuaciones y restricciones, es posible obtener mediante la optimización de las funciones citadas o cualquier otra función lineal información muy útil acerca de la resistencia y estabilidad a corto plazo de una estructura de este tipo. Esta obtención se hace a muy bajo coste computacional.

El coeficiente de seguridad parcial tal como se ha formulado en este trabajo no corresponde con exactitud con lo que habitualmente se entiende por factor de seguridad parcial, aunque de la comparación de la Fig. (10 izquierda) con la Fig. (11 derecha) se ve que tiene bastante similitud. En el presente caso se ha optado por comparar la máxima seguridad que puede conseguir la estructura, respecto a cada restricción, con la seguridad correspondiente al caso en estudio. No obstante, es posible utilizar otros coeficientes distintos de los α_i, si el caso lo requiere. El proceso a partir de que estos se hayan fijado es igual al desarrollado para los α_i, aunque en este caso la superficie "suficientemente segura" ya no será homotética de la de cedencia.

5. CONCLUSIONES

Cuando se evalúa la seguridad de las estructuras históricas de fábrica utilizando Análisis Límite mediante Programación Lineal:

1/ El enfoque más comúnmente empleado, consistente en hallar el máximo factor de carga que aplicado a las acciones variables produce el colapso y considerarlo como coeficiente de seguridad respecto a dichas acciones, es claramente inseguro en determinados casos. Cuando las acciones variables externas -o parte de ellas- son estabilizantes, una disminución de estas puede llevar a la estructura más cerca del colapso. Ésta es sin duda la conclusión más importante de las extraídas puesto que afecta también a otros métodos de evaluación de la seguridad.

2/ Hallar tanto el máximo como el mínimo de este factor de carga sólo duplica el esfuerzo de cálculo y permite definir entre ambos valores un "intervalo de estabilidad" dentro del cual todos los valores del factor de carga son seguros. En los casos en que la única fuente de incertidumbre son las cargas variables y estas son mucho menores que las cargas permanentes -como es habitual en estructuras históricas de fábrica- el valor medio del factor de carga entre el máximo y el mínimo puede ser un buen valor de referencia como valor que da la máxima estabilidad y que podría utilizarse como origen para establecer coeficientes de seguridad parciales para dichas cargas. El valor de este coeficiente será 1 para cargas correspondientes a los factores máximo o mínimo y un valor muy alto para las correspondientes al factor de carga medio.

3/ Hallar la distancia mínima desde un estado determinado de tensiones, correspondiente a un factor de carga fijado previamente, hasta el punto más próximo de la superficie de cedencia garantiza en un sólo paso que dicho factor de carga es seguro y permite obtener como parte del resultado las distancias a las restricciones límites que definen los diferentes modos de colapso posibles. Se obtiene así una idea clara aunque no cuantificada del grado de seguridad de la estructura bajo dichas cargas y de cuáles son los modos de colapso más probables.

4/ Los coeficientes parciales de seguridad, y en especial el de menor valor de ellos obtenido por el método descrito, garantizan que para un determinado sistema de cargas -tanto fijas como variables- existe una solución correspondiente a un determinado estado de tensiones para la cual el coeficiente de seguridad respecto a cualquiera de los modos posibles de colapso es igual o mayor al obtenido.

5/ Respecto a este último método, conviene aclarar que un coeficiente parcial de seguridad mínimo igual a 1, respecto a una de las restricciones límites, no supone que la estructura esté a punto de iniciar el colapso, ya que éste no comienza hasta se alcanza un estado de tensiones en que las restricciones alcanzan su valor límite en un número y situación suficiente de puntos para convertir la estructura en un mecanismo. Puede de esto deducirse que el método infravalora la seguridad de la estructura respecto al inicio del colapso y que es necesaria más investigación sobre este tema. En cualquier caso se puede afirmar que el coeficiente parcial de seguridad obtenido de este modo es un coeficiente seguro.

6/ Para solventar este problema puede utilizarse la segunda versión del método descrito, fijando un coeficiente de seguridad parcial y hallando los factores de carga máximo y mínimo para la superficie "suficientemente segura", aunque hay que advertir que así nos apartamos de los procedimientos habitualmente aceptados.

En cualquier caso es necesaria una mayor investigación acerca de éste y otros posibles enfoques alternativos y mayor esfuerzo en la cuantificación de los coeficientes de seguridad que se consideren suficientes para este tipo de estructuras.

REFERENCIAS

[1] Kooharian, A. (1953). Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches. *Proceedings of the American Concrete Institute, 49, 317-328.*

[2] Drucker, D.C. (1953). Coulomb friction, plasticity and limit loads. *Transations of American Society of MechanicalEngineers. 76, 71-74.*

[3] Charnes, A., Greenberg, H.J. (1951). Plastic collapse and linear programming.*Bull. Amer. Math. Soo.. 57, 480.*

[4] Dorn, W. S. (1955). *On the Plastic Collapse of Structures and Linear Programming.* Dissertations. Carnegie MellonUniversity. Paper 85.

[5] Charnes, A., Lemke, C. E., Zienkiewiz, O. C. (1959). Virtual Work, Linear Programming and Plastic Limit Analysis. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. Vol. 251, No. 1264, 110-116.*

[6] Anderheggen, E., Knopfel, H. (1972). Finite element limit analysis using linear programming. *Int. J. Solids Structures. 8, 1413-1431.*

[7] Livesley, R.K. (1978). Limit analysis of structures formed from rigid blocks. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. 12, 1853-1871.*

[8] Gilbert, M., Melbourne, C. (1994). Rigid block analysis of masonry structures. *The Structural Engineer. 72, 356-361.*

[9] Heyman, J. (1966) The stone skeleton. International Journal of Solids and Structures, 2, 249-279.

[10] Delbecq, Jean-Michel (1982). Les ponts en maçonnerie. Evaluation de la stabilité. SETRA Ministère des transports.

[11] Magdalena, F. (2013) El problema del rozamiento en el análisis de estructuras de fábrica mediante modelos de sólidos rígidos. Tesis de Doctorado. Universidad Politécnica de Madrid.

[12] Magdalena, F.; García, J.; Hernando, J.I.; Magdalena, E. (2017). Safety assessment of masonry structures using ordinal optimization. Proceedings of the 4th WTA International PhD Symposium. Ed. WTA Nederland.

[13] Boyd, S.; Vanderberghe, L. (2004) Convex Optimization. Cambridge University Press.

[14] Cervera, J. (2010). Un criterio robusto para la medida del margen -coeficiente- de seguridad. *Informes de la Construcción. Vol.62, 518, 33-42.*

[15] Ditlevsen, O.; Madsen, H.O. (2007). Structural Reliability Methods. Internet edition 2.3.7

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

Stick-slip vibrations of a slider with a rate-and state-friction model and a fluid-infiltrated medium

Santillán, David[1]; Cueto-Felgueroso, Luis[2]; Mosquera, Juan Carlos[3]; Vila, Cristina[4]

ABSTRACT

Stick-slip frictional instability is the most relevant cause of the rupture of earthquakes. This study aims to analyse the effects of poroelasticity on the characterization of fault slip instabilities. The rate- and state-variable constitutive law is assumed as the frictional force.

A dynamic analysis of a simple spring-slider model is performed. It includes simplified poroelastic features as well as assumptions on drainage conditions, in order to account for the effects of an infiltrated-fluid. Two simplified poroelastic assumptions are compared and numerical conclusions are derived for the spring-slider model.

Keywords: stick-slip vibrations, rate and state friction, poroelasticity, spring-slider model

1. INTRODUCTION

The stick-slip phenomenon is produced between two sliding surfaces in contact. Although diverse friction models are used in engineering applications, an increasing research effort has been devoted during the last decades on the dynamic behaviour of elastic solids subjected to friction. This study is focused on the numerical analysis of the slip between two bodies in contact with Coulomb-type friction.

Rate- and state-constitutive friction law is a versatile methodology for modelling a wide range of phenomena, from rock friction laboratory tests to earthquake aftershocks.

The Biot equations for dynamic poroelasticity comprise the mechanical equilibrium and the coupling between solid and fluid mass conservation. The poroelasticity of the medium causes variations in the fluid pore pressure, which affects the effective contact pressure, hence coupling the shear pulling force and the normal effective stress [1].

[1]*Department of Civil Engineering: Hydraulics, Energy and Environment. Universidad Politécnica de Madrid (SPAIN). david.santillan@upm.es*
[2]*Department of Civil Engineering: Hydraulics, Energy and Environment. Universidad Politécnica de Madrid (SPAIN). luis.cueto@upm.es*
[3] *Department of Continuum Mechanics and Structural Analysis. Universidad Politécnica de Madrid (SPAIN). juancarlos.mosquera@upm.es (Corresponding author), ORCID ID 0000-0003-3292-2176*
[4] *Department of Continuum Mechanics and Structural Analysis. Universidad Politécnica de Madrid (SPAIN). vilamartinezcristina@hotmail.com*

2. The simplified poroelastic model

The poroelasticity theory studies the interaction between a porous material and the pore fluid that occupies the voids. The governing equations of the theory of linear poroelasticity comprise the linear constitutive laws of a poroelastic material, equilibrium equations and the fluid mass balance equation, which is based on Terzaghi's effective stress principle and links the grain forces to the fluid pore pressure. Such equations describe the coupling between the fluid flow and the mechanical response of the linear elastic porous medium. Drained conditions refer to solid deformations at fixed pore pressure (pressure head) p; so the fluid is allowed to flow in or out of the deforming element while keeping p constant. On the contrary, undrained conditions correspond to deformations with no fluid flowing into or out of the element, hence without variation of fluid content.

In what follows, tensile stresses and dilation strains are positive. The sign of p is defined in terms of excess pore pressure, this is positive for compression. In accordance with the principle of effective stress: $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha_B\, p\, \delta_{ij}$ with σ'_{ij} being the effective stress tensor and α_B the Biot coefficient.

2.1. Fluid flow through an homogeneous medium

Consider an isotropic linear poroelastic medium of porosity n, compressibility of the solid phase C_s, saturated with a fluid with unjacketed compressibility C_f. The drained compressibility of the overall porous medium is C_m, the inverse of its drained bulk modulus, $C_m = 1/K$. It is considerably larger than C_s and C_f. If the solid phase is composed of a single constituent, it is generally assumed that $C_s = C_f$. The compressibility of the porous medium C_m is related to the mean effective stress σ' and the volumetric strain $\varepsilon = \varepsilon_{kk}$:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon}{C_m} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{K}\left(\frac{\sigma_{kk}}{3} + \alpha_B p\right) \tag{1}$$

Darcy's empirical law describes fluid flow through a non-deformable porous medium. By assuming that global z axis points upward in the vertical direction, Darcy's law on a fluid-saturated medium is expressed for each of the three spatial directions as

$$\mathbf{q} = -\nabla.\left(\mathbf{K}\,\nabla p - \rho_f \mathbf{g}\right) \Rightarrow q_x = -\frac{\kappa}{\mu_f}\frac{\partial p}{\partial x}\;;\; q_y = -\frac{\kappa}{\mu_f}\frac{\partial p}{\partial y}\;;\quad q_z = -\frac{\kappa}{\mu_f}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_f\right) \tag{2}$$

with κ being the intrinsic permeability of the porous material $[L^2]$ (which is a function of porosity n, though in the original definition depends only on the grain size), μ_f the fluid dynamic viscosity, γ_f the

fluid specific weight, q_i the volumetric flow rate per unit area or specific discharge $[L/T]$ in each direction of the fluid within the porous material, $\mathbf{K}$ the permeability tensor and $\mathbf{g}$ the gravity acceleration vector.

Darcy's law can be expressed in terms of the so-called coefficient of permeability or hydraulic conductivity $[L/T]$, $k = \kappa\, \gamma_f \,/\, \mu_f$:

$$q_x = -\frac{k}{\gamma_f}\frac{\partial p}{\partial x}\;;\; q_y = -\frac{k}{\gamma_f}\frac{\partial p}{\partial y}\;;\quad q_z = -\frac{k}{\gamma_f}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_f\right) \tag{3}$$

The storativity of the pore space, S, is defined as the increase of fluid content per unit volume of material caused by a unit increase of fluid pressure when there is no volumetric strain $(\varepsilon = 0)$:

$$S = n\, C_f + (\alpha_B - n)\, C_s \tag{4}$$

It can also be expressed in terms of the Skempton's pore pressure coefficient B and the drained bulk modulus of the porous medium K:

$$S = \frac{\alpha_B}{B}\frac{(1 - \alpha_B B)}{K} = \frac{\alpha_B}{B\, K_u} \tag{5}$$

with K_u being the undrained bulk modulus of the composite. The equation of fluid mass conservation is expressed as (the storage equation):

$$\alpha_B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + S\, \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla.\,\mathbf{q} \tag{6}$$

in which $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ is the time derivative of the volumetric strain and $\alpha_B = 1 - {}^{C_s}/_{C_m}$ is the Biot-Willis coefficient, which represents the ratio between the volume of fluid gained or lost in a material element and the volume change of that element, when the fluid pressure is allowed to recover its initial value. Substitution of Eq. (2) into Eq. (6) yields the fluid diffusion equation:

$$\alpha_B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + S\, \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla.\left(\frac{\kappa}{\mu_f}\, \nabla p\right) \tag{7}$$

For an homogeneous material, the storage equation reduces to:

$$\alpha_B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + S \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu_f} \nabla^2 p = \frac{k}{\gamma_f} \nabla^2 p \tag{8}$$

The inverse of the storage coefficient S is referred to as the Biot modulus M:

$$M = \frac{1}{S} = \frac{K_u - K}{\alpha_B^2} \tag{9}$$

The variation of fluid content, ζ, is the change in fluid volume per unit volume of porous medium. It is often used to state the constitutive equation for the fluid phase in terms of the pressure and the volumetric strain $\varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{u}$ as follows:

$$\zeta = \frac{1}{M} p + \alpha_B \nabla \cdot \mathbf{u} \tag{10}$$

The above expression indicates that an increase in fluid content can be caused by either an increment in the fluid pressure or a structural expansion.

2.2. The constitutive equations for a homogeneous linear poroelastic material

These equations deal with the interaction forces between the solid and fluid phases. When formulated in the displacements, the linear isotropic poroelastic problem consists of a system of partial differential equations, in which the unknowns are the displacements vector $\mathbf{u}$ and the fluid pressure p. The infinitesimal strain tensor is $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$. On the one hand, the internal equilibrium equations, expressed in terms of the displacements are:

$$\nabla \cdot (G(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}) - \alpha_B \nabla p = -\mathbf{f} \tag{11}$$

In the above expression, $\mathbf{f}$ is the vector of body forces, G is the shear modulus, $\lambda = K - 2G/3$ is the Lamé constant and $\mathbf{I}$ the identity tensor. The same equations can be expressed as well for each direction:

$$\left(K+\frac{G}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)+G\,\nabla^2 u_j-\alpha_B\frac{\partial p}{\partial x_j}=0 \tag{12}$$

By assuming linearity, reversibility of the deformation process and absence of body forces, the constitutive equations for the solid phase are:

$$\sigma_{ij}=2G\,\varepsilon_{ij}+\left(K-\frac{2G}{3}\right)\delta_{ij}\varepsilon-\alpha_B\delta_{ij}p \tag{13}$$

On the other hand, the fluid diffusion equation is obtained from the conservation of fluid mass with a Darcy flow law given in Eq. (2)

$$\alpha_B\frac{\partial(\nabla.\mathbf{u})}{\partial t}+\frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial t}-\nabla.(\mathbf{K}\,\nabla p)=\omega \tag{14}$$

with $\mathbf{K}$ being the permeability tensor and ω a fluid source or sink term.

The coupling term in Eq. (11) is $\alpha_B\nabla p$, which represents the additional stress caused by the fluid pressure within the structure; the coupling term in Eq. (14) is the time derivative of $\alpha_B(\nabla.\mathbf{u})$, which accounts for the additional variation of fluid content due to volume changes.

2.3. The 1D poroelastic problem

Consider an homogeneous 1D domain $\Omega=\{x: 0\le x\le L\}$. In this case the unknowns are the pore pressure p and the displacement u. By taking into account that $\partial\varepsilon/\partial t=\partial^2 u/\partial x\partial t$ in Eq. (14), the governing equations of linear poroelasticity reduce to

$$\begin{aligned} &E'\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha_B\frac{\partial p}{\partial x}=0\,,, \quad 0\le x\le L, t>0\\ &u=f_1(x) \qquad\qquad ,, \quad 0\le x\le L, t=0\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{k}{\gamma_f}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\alpha_B\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=0\,,, \quad 0\le x\le L, t>0\\ &p=f_2(x) \qquad\qquad\qquad ,, \quad 0\le x\le L, t=0\end{aligned} \tag{16}$$

with $E' = K + 4G/3$. The parameter E' is often referred to as the constrained modulus, the longitudinal modulus or the P-wave modulus, this is the elastic modulus in a uniaxial strain state, with the direct strain components in the other directions being zero.

Solving the above problem is rather cumbersome, so some kind of strategy to overcome the coupling difficulties is worthwhile in order to simplify the solution procedure. A first feasible approach assumes that the volumetric strain rate is proportional to the pressure rate

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = C \frac{\partial p}{\partial t} \tag{17}$$

so that Eq. (16) is transformed into the classic diffusion equation:

$$\left(\alpha_B C + \frac{1}{M}\right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{18}$$

The system of equations is thus uncoupled. In an iterative numerical procedure, the pore pressure is determined from Eq. (18) and then the deformations are obtained through Eq. (15).

By defining m_v as the confined compressibility, the inverse of the constrained modulus:

$$m_v = \frac{1}{K + \frac{4}{3}G} = \frac{1}{E'} \tag{19}$$

and by assuming that $\varepsilon = \varepsilon_x = m_v \, \sigma'_x = m_v \, (\sigma_x + \alpha_B \, p)$, substitution into the storage Eq. (16) gives

$$(\alpha_B^2 \, m_v + S) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \alpha_B \, m_v \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \tag{20}$$

Another feasible approach neglects the spatial dependence of the terms in Eq. 16. The numerical procedure used for the slider in this work seeks to avoid the spatial dependence of the Laplacian term $\nabla^2 p$.

3. The damped spring-slider model

The numerical simulation of the slip of a spring-slider system, considered as a single-degree-of-freedom model, has been widely applied to study the diverse earthquake-related motions. Some relevant studies are the works of Helmstetter and Shaw [6], Rice and Tse [7], Segall and Rice [8], Perfettini et al. [9], Chambon and Rudnicki [10]. The assumed frictional force is of Coulomb type with a rate- and state-dependent friction law. An optional damper is attached for representing additional poroelastic effects. The initial pore pressure value at the dashpot ends is p_0. A constant loading velocity V_0 is exerted at point **A** (**Fig. 1**), accounting for the creep at the deeper part of the fault.

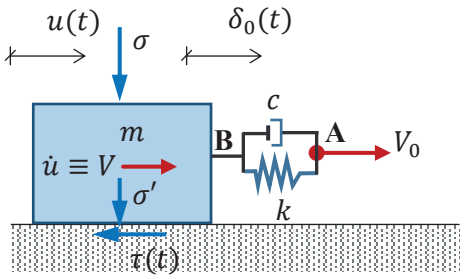


Figure 1. *Single-degree of freedom system with a spring and a viscous damper sliding with friction.*

The displacement measured with respect to an initial equilibrium configuration is $u(t)$; the model assumes that slip rate $\dot{u} \equiv V$, friction parameters and strength $\tau(t)$ are uniform within the fault patch and so at the block-ground interface. The stiffness k accounts for the elastic interactions between the fault patch and the ductile zones away, which creep at a constant rate. When referring to seismic events, k is a function of the ratio between the shear modulus of the medium, G, and the length of the fault patch, $k \approx G/l$ [6].

The instantaneous relative velocity between ends **A** and **B** of the damper causes a variation in the pressure value at **B**, and hence on the pore pressure within the block, which affects the effective normal contact stress. The governing equation of motion of the slider is:

$$m\ddot{u} - c(V_0 - \dot{u}) - k(V_0 t - u) = -sign(\dot{u})\,\tau(t) \tag{21}$$

3.1. The rate and state friction model

It is a consistent methodology that has proven to be suitable for modelling a wide range of phenomena, from rock friction laboratory tests to earthquake aftershocks. This implies that frictional strength τ depends on both slip velocity and the state of the contact surface as follows:

$$\tau(V,\sigma,\psi) = \left[\mu_0 + a\ln\frac{V}{V^*} + \psi\right]\sigma' \tag{22}$$

with V being the slip velocity, σ' the effective normal stress and ψ the state variable, which describes the state of the sliding surface. In case of steady sliding with $V = V^*$ (a reference slip velocity), ψ vanishes and the friction coefficient becomes μ_0. Both μ_0 and the material parameter a are experimentally determined.

The evolution of the state variable ψ is a function dependent on the slip velocity, the effective normal stress and on itself:

$$\frac{d\psi}{dt} = G(\sigma',\psi,V) \tag{23}$$

Several expressions are employed for (23), especially the renowned slip law (Ruina, 1983) and the ageing law (Dieterich, 1979) [1]. In general, these show that the sliding system reaches the steady state after a given displacement D_c, usually referred to as characteristic length of friction or critical slip distance. It is also interpreted as the slip distance required to renew the contact population. Usual values, obtained experimentally, lie within the range $10^{-5} - 10^{-1}m$ and increase with fault roughness.

Based on experimental research, Dieterich and Ruina introduced an analogous expression for the rate- and state-variable constitutive law, known as the “slowness law” and given by

$$\tau(V,\theta) = \left[\mu_0 + a\ln\left(\frac{V}{V^*}\right) + b\ln\frac{V^*\theta}{D_c}\right]\sigma' \tag{24}$$

In the above expression, the state variable θ is related with ψ through

$$\psi = b\ln\frac{V^*\theta}{D_c} \tag{25}$$

where b is a material parameter too. Because of (25), the state variable θ is often interpreted as the average age of the contacts, the effective contact time between surface asperities.

The constitutive relation (24) was derived from empirical issues in order to match experimental observations, though it is not defined for $V = 0$. With the aim to account for eventual backward jumps, likely to occur close to null slip rates , Ben-Zion and Rice propose the following form [2][3]:

$$\mu = a \operatorname{arcsinh}\left[\frac{V}{2V^*}\exp\left(\frac{\mu_0 + b\ \ln\frac{V^*\theta}{D_c}}{a}\right)\right] \tag{26}$$

Thus the base friction coefficient μ_0 becomes modified by two second-order effects: the term $\ln(V/V^*)$ accounts for the creep caused by thermally processes at the interface, whereas the evolution of the state variable θ characterizes the properties of the contact asperities which affect the friction coefficient as well. For V^* in the range $10^{-9} - 10^{-3}\ m/s$, τ is an increasing function of V. Likewise, generally $|\mu| \gg a$, so that a and b are typically of the order of 2%-4% of μ_0 [5]. It is widely accepted that the material parameters a and b are of the order of 0.01 and proportional to the effective normal stress. Their values are experimentally found to depend on the fault gouge properties and temperature [6].

According to Dieterich, the state evolution law is

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 - \frac{\theta V}{D_c} \tag{27}$$

This involves that friction evolves logarithmically with time, even when in stationary contact $(V = 0)$**.** It is suitable for modelling the interseismic phase. By contrast, the Ruina-Dieterich slip law is given by

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\theta V}{D_c}\ln\left(\frac{\theta V}{D_c}\right) \tag{28}$$

which appears to be more suitable for studying the nucleation phase and explaining experimental results for large changes in the slip rate, although implies that the state only evolves during slip, i.e. $V \neq 0$.

3.2. The steady-state frictional response and its stability

The system is at steady-state regime when: a) is moving with the speed V_0; b) the effective normal stress σ' is constant; and c) the state variable does not vary: $G(\sigma', \psi, V_0) = 0$. Consequently, both the Dieterich and Ruina models yield identical values for the state variable and the friction coefficient:

$$\psi \equiv \psi_{ss} = -b \ln\left(\frac{V_0}{V^*}\right) \Rightarrow \theta_{ss} = \frac{D_c}{V_0} \; ; \; \mu \equiv \mu_{ss} = \mu_0 + (a-b) \ln\left(\frac{V_0}{V^*}\right) \tag{29}$$

When $a \geq b$, μ_{ss} increases with slip rate (velocity-strengthening regime) so the system is always stable and evolves towards the steady-state regime $(V = V_0)$. Conversely, if $a < b$, the second term on the right-hand side becomes negative, what implies that friction at steady state decreases with slip velocity (velocity-weakening regime). There is a Hopf bifurcation so that the system may become either conditionally stable or unstable due to the decreasing steady-state friction strength. Bifurcation occurs when the effective normal stress is larger than a critical value σ'_c

$$\sigma'_c = k \frac{D_c}{(b-a)} - \frac{m V_0^2}{a \, D_c} \tag{30}$$

If $\sigma' \geq \sigma'_c$ the sliding is unstable and stick-slip motion occurs. In the vicinity of the bifurcation zone, the motion is oscillatory. When $\sigma' < \sigma'_c$ the regime is conditionally stable, so that a sudden velocity change may cause the system to become unstable, depending of the magnitude of the velocity pulse.

In this sense, the parameters that control the frictional stability are the critical distance D_c, the combined parameter $(a-b)$ as well as the effective normal stress σ' [4]. Alternatively, the ratio b/a is the main parameter that determines the stability response of the rate- and state-dependent frictional sliding, along with μ_0, the ratio k/k_c and the sliding velocity V_0 [6]. In addition, when referring to earthquakes, the parameters b/a, k/k_c and the initial stress on the interface $(\tau_0 = \mu_0 \, \sigma')$ altogether explain pre- and post-seismic motions. The term k_c is the critical stiffness, defined by Ruina (1983):

$$k_c = \sigma' \frac{(b-a)}{D_c} \left[1 + \frac{m V_0^2}{a \, \sigma' D_c}\right] \tag{31}$$

Under steady-state sliding and the ageing law, infinitesimal perturbations leave the system in stable slip when $k > k_c$ as the slip rate evolves toward V_0 at large times, whereas if $k < k_c$ the system becomes unstable and stick-slip motion may occur or slip rate tends to infinity at finite time . However, instabilities can be found when using the slip law even if $k > k_c$.

During the iterative numerical solution procedure, nonzero residuals may be encountered but not-null slip rates. Thus, in order to avoid sudden changes in the coefficient of friction for slip velocities near zero, it is necessary to establish a cut-off value, V_{linear}. So the variation of the friction coefficient is regularized for very low velocities $(V < V_{linear})$ in this work according to

$$\tau(V,\theta) = \left[\mu_0 + a\ln\left(\frac{V_{linear}}{V^*}\right) + b\ln\frac{V^*\theta}{D_c} - a\left(1 - \frac{V}{V_{linear}}\right)\right]\sigma' \tag{32}$$

This approach differs from the inverse hyperbolic sine regularization Eq. (26) by Ben-Zion and Rice.

3.3. Numerical solution procedure including the poroelastic effects

The motion of the slider shown in Fig. 1 is numerically simulated according to Eq. 21:

$$m\ddot{u} = k(V_0 t - u) + c(V_0 - \dot{u}) - sign(\dot{u})\,\mu\,(\sigma + \alpha_B\,p) \tag{33}$$

The addition of poroelastic effects entails:

$$\frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\gamma_f}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \alpha_B\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \tag{34}$$

The initial pore pressure value at points **A** and **B** is p_0. The other initial conditions are:

$$u(0) = 0\,;\ \dot{u}(0) = V_0\,;p(0) = p_0;\ \mu = \mu_0 \tag{35}$$

Assuming a unit lateral area for the block, the total longitudinal stress can be replaced by

$$\sigma_x = c(V_0 - \dot{u}) + k(V_0 t - u)\ \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = m_v(-c\ddot{u} + k(V_0 - \dot{u}) + \alpha_B\,\dot{p}) \tag{36}$$

For simplicity, the term $c\ddot{u}$ can be disregarded in the volumetric strain rate expression. In case σ_x is assumed constant at each time step, Eq. 20 becomes

$$(\alpha_B^2\,m_v + S)\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu_f}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{37}$$

The variables that describe the system response are the slip rate V, the state variable $\theta(t)$, the elongation of the spring, $\delta_0 - u = V_0 t - u$, and the pore pressure p.

The modelling of a dimensionless spring-slider requires to transform the Laplacian operator in Eq. (16), so two alternative simplified assumptions for the system motion have been hereby adopted. The first one, named PG, considers a proportionality between the second derivative and the pressure gradient. Thus the diffusion equation has the form

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{A}(p_0 - p) \Rightarrow \frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu_f}\frac{1}{A}(p_0 - p) - \frac{\alpha_B}{L}(V_0 - \dot{u}) \tag{38}$$

with the constants A having units of square meters and L of meters. The second one, named VG, approach swaps the Laplacian for a velocity gradient, so that the storage equation becomes

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{A}(V_0 - \dot{u}) \Rightarrow \frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial t} = -\left(\frac{\alpha_B}{L} - \frac{\kappa}{\mu_f}\frac{1}{A}\right)(V_0 - \dot{u}) \tag{39}$$

The previous equation shows that pressure decays when the relative velocity between both dashpot ends is positive and vice versa. The undrained regime is accounted for when $A \to \infty$. The time-dependent analysis is carried out through the leapfrog integration method.

3.4. Sample case

A numerical simulation is carried out with the following values:

- Rate and state friction parameters (ageing law):

$$\mu_0 = 0.6; a = 0.005; b = 0.05;\ V^* = 0.0001; D_c = 0.005;\ \theta(0) = D_c/V^* = 50$$

- Spring-slider parameters in consistent SI units:

$$\sigma = 100\ ; m = 500; \mathrm{c} = 0;\ k = 1000;\ V_0 = 0.001$$

- Time Integration: $\Delta t = 0.0001;\ V_{linear} = 10^{-5}$

Since $a < b$, the system motion is unstable, so the stick-slip phenomenon is likely to arise. The critical stiffness of the system is $k_c = 900$. The assessment of the poroelasticity effect on the slider response is the key point in these simulations. Hence, both an undamped system and undrained conditions have been considered. Other poromechanical properties of the composite are included in *Table 1*.

The slider displacement is also calculated for the rate- and state-dependent friction law alone (RS). Four instabilities occur It is depicted in blue in Fig. 2, which shows the comparison with the results from the

velocity gradient (VG) assumption. Likewise, the results from the pressure gradient approach (PG) are compared in Fig. 3.

Table 1. Poromechanical characterization of materials

Property	Value
Fluid compressibility	$4x10^{-10}$ Pa^{-1}
Dynamic viscosity	0,001 Pa.s
Bulk modulus of porous medium	$7x10^{8}$ Pa
Modulus of Elasticity	20 GPa
Poisson's Ratio	0,25
Porosity	0,1
Intrinsic permeability	10^{-13} m^2
L	1000 m
p_0	100

The poroelastic coupling appears to cause both larger stick-slip displacements and a delay in the rupture phenomena.

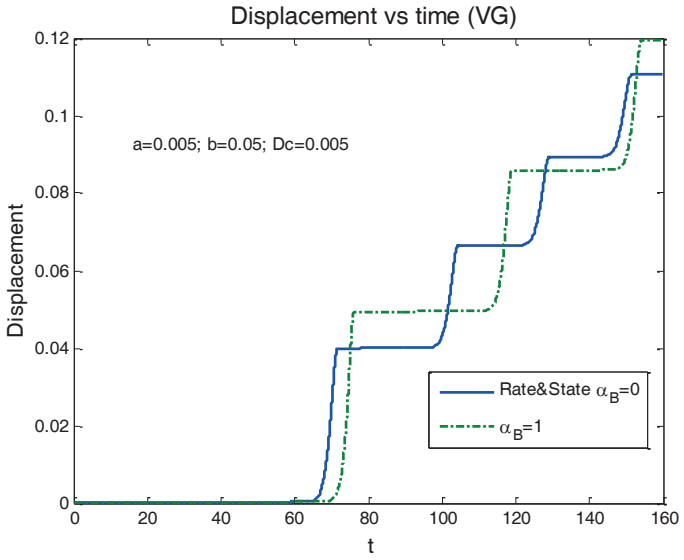


Figure 2. *Numerical results of slip for an undamped slider. Comparison between the elastic and the undrained poroelastic (VG) approaches.*

Fig. 4 and Fig. 5 show the velocity of this SDOF system for the VG and PG models, respectively.It appears that the poroelastic coupling lead to larger velocities during the rupture.

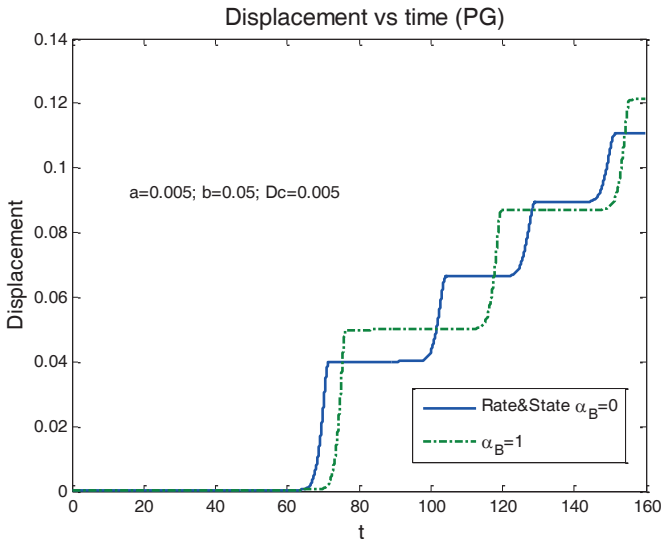


Figure 3. *Comparison of displacements between the elastic and the undrained poroelastic (PG) approaches.*

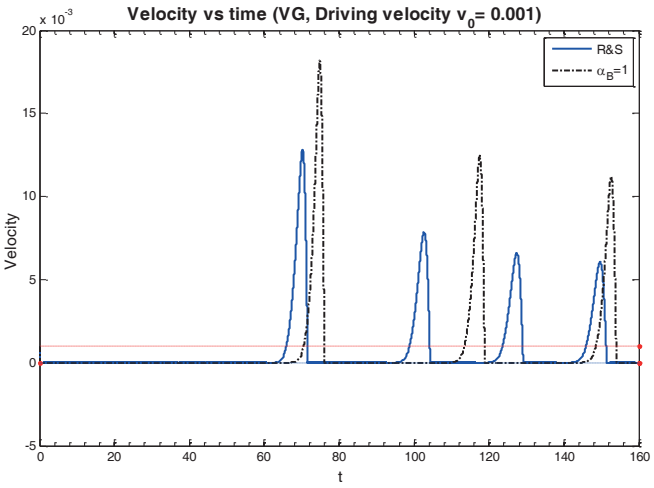


Figure 4. *Slip rates of the slider for both the elastic and the undrained poroelastic (VG) approaches.*

There are small differences between the results of VG and PG models. Nevertheless, an in-depth analysis of the effect of poromechanic parameters on each response is necessary for achieving conclusions close to actual or laboratory-derived measurements.

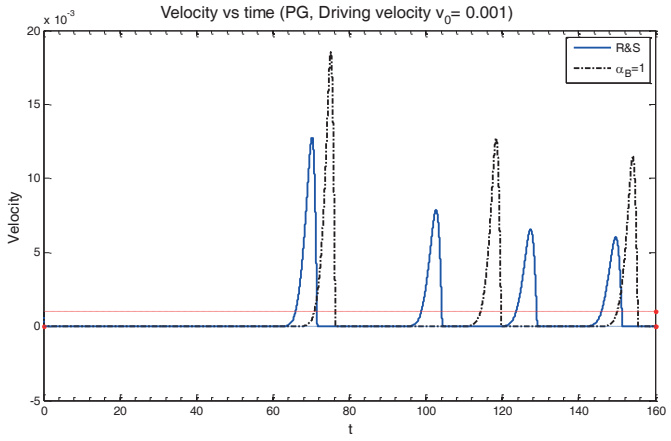


Figure 5. *Slip rates of the slider for both the elastic and the undrained poroelastic (PG) approaches.*

Fig. 6 illustrates the evolution of pore pressure in the slider. Sudden pressure jumps are slightly delayed with respect to the corresponding ruptures in displacements.

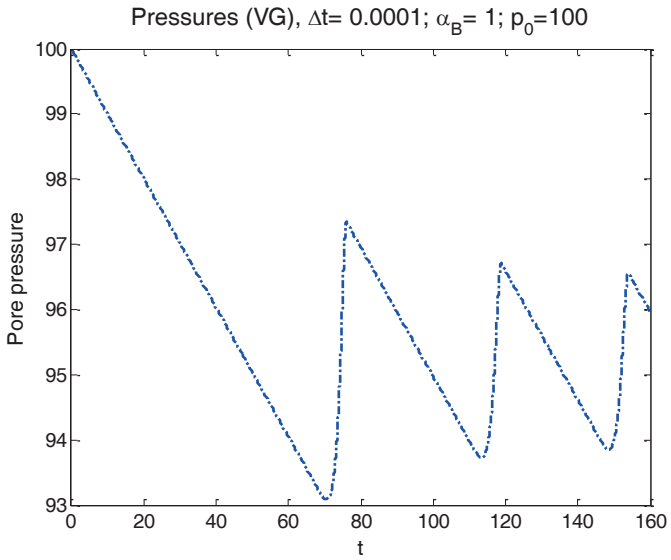


Figure 6. *Evolution of fluid pore pressure within the slider (PG).*

4. CONCLUSIONS

The characterization of the coupling between shear and normal stresses on a fault can be modelled, at a first approximation, by means of a spring-slider system. The inclusion of poroelasticity in the system response can also be performed through simplified formulations in order to characterize the effect of poroelastic coupling on the stability of the system motion.

A model of a SDOF spring-slider system including poroelastic behaviour has been implemented in this study. Two different simple feasible approaches have been tested. The results obtained from the

simulations show that poroelasticity effects appear to delay the system instability, lead to larger stick-slip motions and larger slip rates. However, this procedure requires further research in order to characterize the constants and the parameters that form the model, compare the efficiency of both PG and VG approaches and analyse the stability regimes.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was partially funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness, through grants RyC-2012-11704 and CTM2014-54312-P (LCF).

REFERENCES

[1] Dunham, E. M., and J. R. Rice (2008), Earthquake slip between dissimilar poroelastic materials, *Journal of Geophysical Research*, *113, B09304, 1-20*, doi:10.1029/2007JB005405.

[2] Rice, J.R., Ben-Zion, Y. (1996). Slip complexity in earthquake fault models. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 93*, *3811–3818.*

[3] Ben-Zion, Y., Rice, J.R. (1997). Dynamic simulations of slip on a smooth fault in an elastic solid. *Journal of Geophysical Research*, *102, B8, 17771-17784*.

[4] Scholz, C.H. (1998), Earthquakes and friction laws. *Nature, 391, 1, 37-42*.

[5] Prakash, V. (2009), Rate and state variable friction laws: Estimation of model parameters for slip velocity dependence at coseismic slip rates. *Journal of Applied Physics, 106*, *123513*; doi:10.1063/1.3259395.

[6] Helmstetter, A., Shaw,B. (2009).Afterslip and aftershocks in the rate-and-state friction law. Journal of Geophysical Research, 114, B01308, doi:10.1029/2007JB005077.

[7] Rice, J.R., Tse, S.T. (1986). Dynamic motion of a single degree of freedom system following a rate and state dependent friction law. *Journal of Geophysical Research*, *91, B1, 521-530*.

[8] Segall, P., Rice, J.R. (1995). Dilatancy, compaction, and slip instability of a fluid-infiltrated fault. *Journal of Geophysical Research*, *100, B11, 22155-22171*.

[9] Perfettini H., Schmittbuhl, J., Rice, & J.R., Rocco, M. (2001). Frictional response induced by time-dependent fluctuations of the normal loading. *Journal of Geophysical Res*, *106, B7, 13455-13472*.

[10] Chambon, G., & Rudnicki, J. (2001). Effects of normal stress variations on frictional stability of a fluid-infiltrated fault. *Journal of Geophysical Research*, *106, B6, 11353-11372*.

[11] Wang, J-H. (2016). Slip of a one-body dynamical spring-slider model in the presence of slip-weakening friction and viscosity. *Annals of Geophysics, 59, 5, S0541, 1-14*.

Structural analysis of the arch of Taq-i Kisra

Fernández-Ruiz, Manuel Alejandro[1] ; Palomares-Bautista, Antonio[2], Hernández-Montes, Enrique[3]

ABSTRACT

The ancient arch of Taq-i Kisra in Iraq is the largest single-span vault of unreinforced brickwork remaining in the world. A recent work suggests the possibility that the builder of the arch derived its geometry from the use of hanging models. In this work a structural analysis of the ancient arch of Taq-i Kisra is developed in order to corroborate the previous assumption. Given the estimated distribution of self-weight, different equilibrium shapes composed of piecemeal segments of catenaries united together were considered varying boundary conditions. The resulting equilibrium shapes support the previous assumption and very likely the builder of Taq-i Kisra used hanging models with point weights applied at specific points.

Keywords: Taq-i Kisra; Catenary; Ancient Structures

1. INTRODUCCIÓN

El arco de Taq-i Kisra o Gran Arco de Ctesifonte (ver Fig.1) forma parte de un palacio real situado en la antigua ciudad de Ctesifonte, capital del imperio Sasánida. Está situado cerca de la actual Salman Pak (Irak) y es el mayor arco de mampostería no reforzada de vano único en el mundo. No se conoce con exactitud en qué año se construyó; investigadores como Scarre [1] afirman que se construyó sobre el 540 DC. El arco está hecho de obra de fábrica de ladrillos de arcilla y mortero (principalmente yeso), cubre un vano de 25.6 m y su punto más alto tiene una altura de 30.3 m.

Figura 1. *Vista general del arco Taq-i Kisra en Irak [2]*

[1] *Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica. Universidad de Granada (ESPAÑA). E-mail: malejandrofr@ugr.es (Corresponding author)*
[2] *Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Granada (ESPAÑA). E-mail: anpalom@ugr.es*
[3] *Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica. Universidad de Granada (ESPAÑA). E-mail: emontes@ugr.es*

El comportamiento estructural de un arco depende de su forma y del tipo de carga que soporta. El arco perfecto es aquel que adopta una forma lo más cercana posible a la línea de empuje correspondiente a las cargas que soporta. De esta forma, las cargas se transmiten desde el arco a la cimentación sin causar ningún tipo de tracción en el arco (que estaría totalmente comprimido).

Es de sobra conocido que la parábola es la forma geométrica óptima cuando la carga es constante por unidad de longitud horizontal. Por otra parte, la catenaria es la curva óptima cuando la carga es constante por unidad de longitud. En [3] se propone una expresión analítica de la forma óptima de un arco sometido a cualquier configuración de cargas. Las ecuaciones diferenciales propuestas en [3] se basan en las ecuaciones de equilibrio (las de compatibilidad y constitutivas no se tienen en cuenta). El famoso arquitecto español Antonio Gaudí (1852-1926) también usó solamente las ecuaciones de equilibrio en el diseño de muchos de sus trabajos, utilizando modelos colgantes para encontrar configuraciones de equilibrio de estructuras sometidas únicamente a compresión.

La geometría de la parábola ya era conocida en el tiempo en el que se construyó el arco de Taq-i Kisra. Por su parte, la forma de la catenaria fue descrita matemáticamente por Johann Bernoulli en "Solutio problematis funicularii" (1691) [4] y por Christiaan Huygens en "Dynastae Zulichemii, solutio problematis funicularii" (1691) [5] (11 siglos después de la construcción del arco de Taq-i Kisra). Robert Hooke (1635-1703) fue el primero que explícitamente aplicó la forma catenaria en la construcción de arcos [6]. Hooke asoció la forma de equilibrio de un arco sometido a su propio peso con la de una cuerda que cuelga de dos puntos sometida a su peso propio. El arquitecto español Antonio Gaudí (1852-1926) utilizó este mismo método de diseño para obtener configuraciones de equilibrio de arcos y bóvedas como la inversa de modelos colgantes.

En Hernández-Montes et al. [7] se realizó un completo análisis estructural del arco de Taq-i Kisra, incluyendo un modelo de elementos finitos, un modelo colgante de cadenas y un modelo numérico. La conclusión a la que se llegó fue que la forma geométrica del arco de Taq-i Kisra implica un conocimiento profundo de las formas de equilibrio de estructuras que trabajan exclusivamente en compresión. Además, Hernández Montes et al. [7] sugiere que el denominado "Ingeniero de Ctesifonte" utilizó modelos colgantes como base del diseño del arco, ya que su forma no se asemeja a arcos parabólicos ya conocidos en la época.

En este trabajo se estudian un mayor número de posibles líneas de empuje dentro del arco de Taq-i Kisra para refinar el modelo numérico propuesto en [7]. Dicho modelo consiste en una serie de catenarias concatenadas con fuerzas puntuales aplicadas en los puntos de unión entre ellas simulando el peso del arco. Para calcular una configuración de equilibrio de dichas catenarias es necesaria la imposición de una serie de condiciones de contorno. Debido a la importancia de la elección de las condiciones de contorno se estudiará su influencia en la configuración de equilibrio final.

2. GEOMETRÍA DEL ARCO DE TAQ-I KISRA

La geometría y las características de los materiales que componen el arco se han obtenido de [8]. La sección transversal media del arco es la que aparece en la Fig. 2. El arco cubre una luz de 25.6 metros

y tiene una altura de 30.3 metros. La línea discontinua central de la Fig.2 es la línea media situada entre los extremos de ambos apoyos. Se puede comprobar fácilmente que el arco no es perfectamente simétrico respecto a este eje (ver Fig.2).

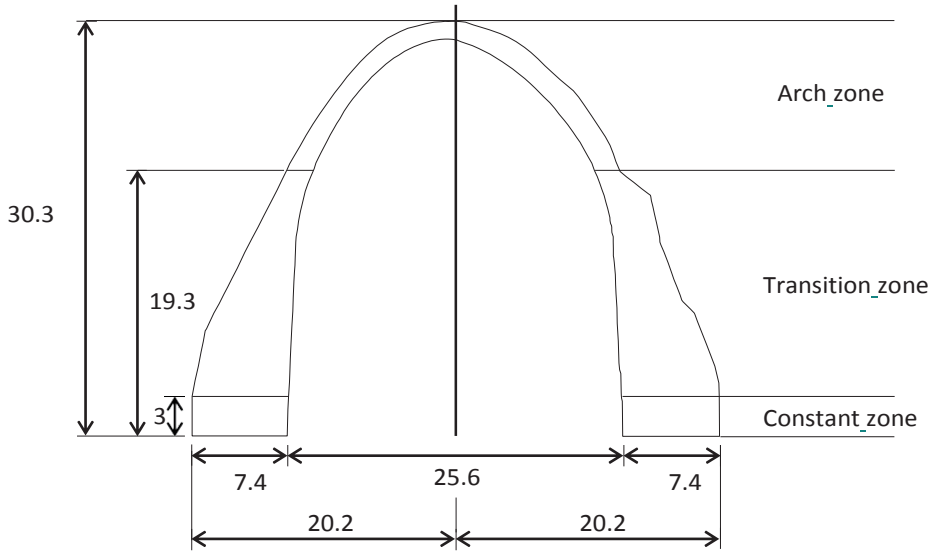


Figura 2. *Geometría actual del arco de Taq-i Kisra (adaptado de [8]). Dimensiones en m.*

Según el estudio realizado en [8] la sección transversal del arco se puede dividir en tres zonas. La primera zona sería la denominada "zona arco", donde el arco presenta un espesor casi constante (1.35 m en el punto superior y 2.1 m al final de dicha zona). La segunda zona sería la "zona de transición", donde el espesor se incrementa desde 2.1 m hasta 7.4 m. Por último, la "zona constante" presenta un espesor de 7.4 m casi constante (ver Fig.2).

El arco se encuentra realizado en obra de fábrica compuesta por ladrillos y mortero (yeso). La densidad aparente de los ladrillos y del mortero empleado es de 1160 y 1460 kg/m^3 respectivamente [8]. En este trabajo se ha utilizado una densidad aparente conjunta de 1298 kg/m^3 [7].

3. LA CURVA CATENARIA

La catenaria es la curva que adopta un cable con una rigidez a flexión nula que cuelga entre dos puntos fijos y se encuentra únicamente sometida a su peso propio. En la Fig.3 se presenta una porción diferencial de cable de longitud *ds* sometida a un peso por unidad de longitud *w*. La curva está referida a los ejes rectilíneos *x* e *y*, actuando la carga gravitacional en la dirección *y*. *H* y *V* son las componentes horizontal y vertical de la fuerza interna en cualquier punto de la catenaria. La fuerza resultante *T* es tangente a la curva en el punto considerado dada la nula rigidez a flexión del cable. Debido a la no presencia de cargas horizontales a lo largo de la longitud de la curva, el valor de la componente *H* es constante para así mantener el equilibrio horizontal.

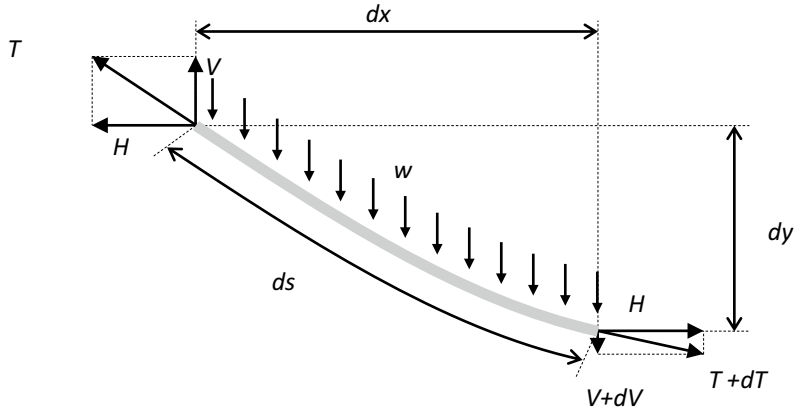


Figura 3. *Porción diferencial de un cable sometido a su peso propio*

Aplicando equilibrio de fuerzas verticales:

$$dV = w\, ds \tag{1}$$

La resultante *T* en cualquier punto del cable se encuentra alineada con éste (al ser tangente), por lo que la pendiente (*dy*/*dx*) en cualquier punto de la curva debe de cumplir la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} \tag{2}$$

La derivada respecto de la coordenada *x* de la Eq.3 es la siguiente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dV}{dx}\frac{1}{H} \tag{3}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, la longitud *ds* se puede expresar de la siguiente forma:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{4}$$

Haciendo la derivada de *ds* respecto a *x*:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \tag{5}$$

En la Eq.5 *y'* es la primera derivada de *y* respecto de *x*. Introduciendo la Eq. 5 en la Eq.3:

$$y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1 + y'^2} \tag{6}$$

En la Eq.6 *c* es la constante de la catenaria (*c* = *H*/*w*) e *y''* es la segunda derivada de *y* respecto de *x*. La solución de esta ecuación diferencial es la ecuación de la curva catenaria:

$$y = c\ Cosh\left(\frac{x + a_1}{c}\right) + a_2 \tag{7}$$

4. DISEÑO Y ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL ARCO DE TAQ-I KISRA

Se pretende simular numéricamente la forma ideal de equilibrio del arco de Taq-i Kisra sometida únicamente a compresión. Para ello se va a suponer que adopta la forma de una cadena invertida sometida a su peso propio (peso constante por unidad de longitud) y unos pesos adicionales que representan aquellas regiones que tienen un mayor peso. De esta manera, la forma de equilibrio resultante será una serie de catenarias unidas unas con otras en los puntos de aplicación de las cargas puntuales. Cada uno de estos segmentos de catenaria tendrán el mismo valor de *H* al no haber cargas exteriores horizontales.

4.1. Distribución del peso propio

El peso propio del arco se introducirá de dos formas [7]: como peso constante por unidad de longitud de arco (área punteada de la Fig.4) más una serie de cargas puntuales (flechas en Fig.4). Todos los pesos indicados se encuentran expresados por metro lineal de ancho de arco. El origen de coordenadas se encuentra situado en el punto medio del espesor del arco en la sección marcada por el eje de simetría de la Fig.1 (punto medio entre los extremos de los apoyos del arco). El área rayada tiene un peso por unidad de longitud de *w* = 2310 kg/m, con un espesor medio de 1.78 m [7]. Los valores de las cargas puntuales W_i junto con las coordenadas del centroide de cada porción de arco P_i se encuentra recogidas en la *Tabla 1*.

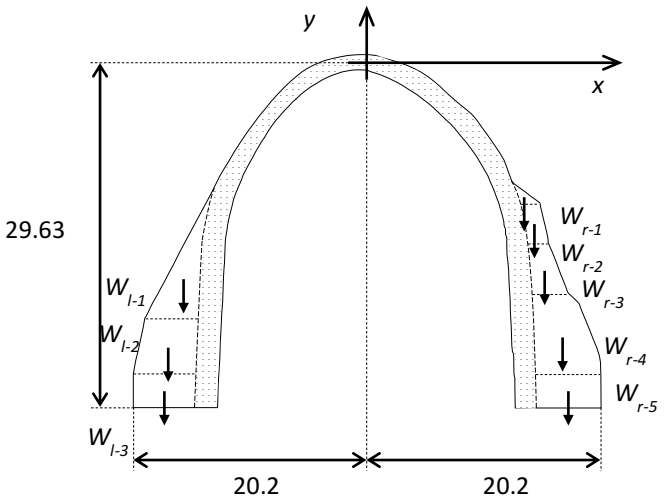


Figura 4. *Distribución del peso propio del arco de Taq-i Kisra (dimensiones en m). Adaptado de [7]*

Tabla 1. Puntos de aplicación del peso propio del arco [7]

	W (kg)	x_p (m)	y_p (m)

W_{l-1}	29,03	-15.81	-18.57
W_{l-2}	30,405	-17.11	-24.38
W_{l-3}	19,955	-17.44	-28.15
W_{r-1}	1,764	13.50	-11.47
W_{r-2}	7,121	14.40	-13.75
W_{r-3}	13,642	15.25	-17.85
W_{r-4}	42,88	16.76	-23.52
W_{r-5}	21,025	17.32	-28.16

4.2. Equilibrio de fuerzas en los puntos de aplicación del peso propio

La catenaria es la forma de equilibrio de un cable sometido a un peso constante por unidad de longitud. Si de un punto cualquiera se le cuelga un peso puntual, la geometría resultante pasa a ser la de dos catenarias unidas en dicho punto de aplicación de la carga. Es por ello que la forma de equilibrio del arco resultante será una sucesión de catenarias.

Como a priori no se conoce la geometría de las catenarias, los puntos de aplicación del peso propio son incógnitas del problema. Para reducir el número de incógnitas, se va a suponer que la coordenada y de los puntos donde se aplican las cargas son conocidas y coinciden con las propuestas en [7] (ver *Tabla 1*). Las coordenadas x_w de cada uno de los puntos de aplicación de carga se calculan imponiendo equilibrio de fuerzas en dicho punto. En la Fig.5 se muestra el equilibrio de fuerzas en un punto genérico P_i.

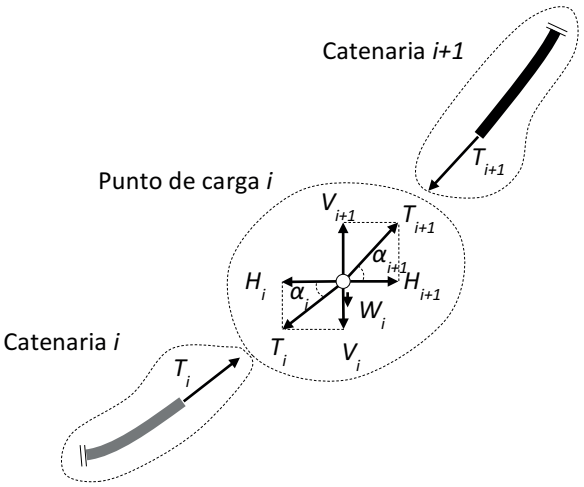


Figura 5. *Equilibrio de cargas en un punto genérico P_i de aplicación de carga. Dicho punto se encuentra entre dos catenarias consecutivas i y i+1. Adaptado de [7]*

Imponiendo equilibrio horizontal y vertical en el punto P_i:

$$\sum F_H = 0 \rightarrow H_i = H_{i+1} = H \tag{8}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow V_i + W_i = V_{i+1} \tag{9}$$

La componente vertical V_i correspondiente a la tensión T_i de la catenaria *i* se puede expresar como:

$$V_i = H_i \, Tan(\alpha_i) \tag{10}$$

El valor de Tan(α_i) coincide con el valor de la pendiente de la curva en el punto P_i (x_{wi}, y_{pi}) que es igual a $y_i'(x_{wi})$ (ver Eq.7 para $x = x_{wi}$). Así, la Eq.9 puede reescribirse como:

$$y_i'(x_{wi})H + W_i = y_{i+1}'(x_{wi})H \tag{11}$$

4.3. Equilibrio general

La configuración de equilibrio global del arco de Taq-i Kisra se va a calcular basada en la distribución de peso propio propuesta en [7]. Todas las catenarias consideradas tienen una carga por unidad de longitud *w* = 2310 kg/m. Como no hay ninguna carga exterior horizontal, el valor de *H* es constante para todas las catenarias (siempre se cumple la Eq.8) y, consecuentemente, el valor de la constante c también será la misma (ver Eq.7). Considerando el origen de coordenadas de la Fig.4, la expresión matemática de la catenaria genérica *i* es la siguiente:

$$y = c \, Cosh\left(\frac{x + a_{1i}}{c}\right) + a_{2i} \tag{12}$$

Las catenarias que queden a la izquierda del origen de coordenadas se identificarán con el prefijo "l-" (left) y las que queden a la derecha con "r-" (right). Para obtener la forma de equilibrio final se debe de invertir la secuencia de catenarias para estar sometida únicamente a compresión

Debido a la distribución de peso propio considerada en [7], aparecen 10 catenarias (4 en el lado izquierdo y 6 en el derecho). Cada catenaria tiene 3 incógnitas (c, a_{1i}, a_{2i}). Como se ha comentado anteriormente, la constante *c* es la misma para todas las catenarias, por lo que hasta ahora se tiene un total de 19 incógnitas.

Por otra parte, cada punto de aplicación de cargas proporciona 3 ecuaciones. Las coordenadas del punto de carga P_i (x_{wi}, y_{pi}) que conecta las catenarias *i* y *i+1* (ver Fig.5) tiene que cumplir las ecuaciones correspondientes a ambas catenarias ($y_i(x_{wi}) = y_{pi}$ e $y_{i+1}(x_{wi}) = y_{pi}$, primera y segunda ecuación respectivamente). Aquí aparece una nueva incógnita: el valor de la coordenada *x* de aplicación de la carga x_{wi} (ya que se supone que la coordenada *y* de los puntos de aplicación de cargas es conocida, ver *Tabla 1*). Sin embargo, se puede expresar el valor de x_{wi} en función de las variables de la catenaria *i* utilizando la primera ecuación. La tercera ecuación que introduce el punto de carga es el equilibrio vertical de fuerzas (Eq.11). Como la primera ecuación se ha utilizado para x_{wi}, cada punto de cargas introduce 2 ecuaciones, que suman un total de 16 ecuaciones.

Al final el problema presenta 19 incógnitas y 16 ecuaciones. Para resolverlo es necesaria la consideración de 3 condiciones de contorno impuestas por el diseñador. En [7] se consideraron las siguientes condiciones:

1. La catenaria del extremo izquierdo pasa por el punto medio del apoyo izquierdo.
2. La catenaria del extremo derecho pasa por el punto medio del apoyo derecho.

3. La coordenada vertical del vértice de la catenaria central con respecto al origen de coordenadas considerado es 0.

4.4. Formas de equilibrio considerando distintas condiciones de contorno

Para obtener un mayor conocimiento del comportamiento estructural del arco de Taq-i Kisra se van a considerar unas nuevas condiciones de contorno distintas a las propuestas en [7]. Estas nuevas condiciones de contorno se recogen en la Tabla 2 y en la Fig.6.

Tabla 2. Condiciones de contorno consideradas

	Condición 1	Condición 2	Condición 3
C.C.1.1	A (0, 0.68)	G (-16.54, 29.64)	J (16.38, 29.64)
C.C.1.2	B (0, 0.23)	G (-16.54, 29.64)	J (16.38, 29.64)
C.C.1.3	C (0, 0)	G (-16.54, 29.64)	J (16.38, 29.64)
C.C.1.4	D (0, -0.23)	G (-16.54, 29.64)	J (16.38, 29.64)
C.C.1.5	E (0, -0.68)	G (-16.54, 29.64)	J (16.38, 29.64)
C.C.2.1	C (0, 0)	G (-16.54, 29.64)	I (15.15, 29.64)
C.C.2.2	C (0, 0)	G (-16.54, 29.64)	K (17.61, 29.64)
C.C.3.1	C (0, 0)	F (-17.66, 29.64)	J (16.38, 29.64)
C.C.3.2	C (0, 0)	H (-15.24, 29.64)	J (16.38, 29.64)

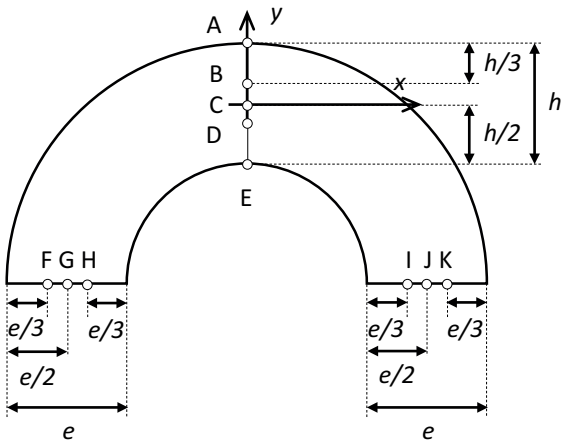


Figura 6. *Esquema de puntos de condiciones de contorno*

Los puntos A, B, C, …, K referidos en la Tabla 2 están situados en la geometría del arco como muestra el esquema de la Fig.6. En las condiciones de contorno C.C.1.1 a C.C.1.5 la catenaria del extremo izquierdo pasa por el punto medio del apoyo izquierdo y la catenaria del extremo derecho pasa por el punto medio del apoyo derecho. Además, la catenaria central debe de pasar por la intersección del eje Y con el borde superior del arco (C.C.1.1), tercio superior del espesor del arco (C.C.1.2), centro del

espesor (C.C.1.3), tercio inferior del espesor (C.C.1.4) y borde inferior (C.C.1.5) del arco. Respecto a las condiciones de contorno C.C.2.1 y C.C.2.2, en ambas configuraciones la catenaria del extremo izquierdo pasa por el punto medio del apoyo izquierdo y la catenaria central por el punto medio del espesor del arco en el eje Y. Además, la catenaria derecha pasa por los puntos situados a un tercio del espesor del arco en el apoyo derecho (ver Fig.6). Finalmente, en ambas condiciones de contorno C.C.3.1 y C.C.3.2 la catenaria del extremo derecho pasa por el punto medio del apoyo derecho y la catenaria central por el punto medio del espesor del arco en el eje Y. La catenaria del extremo izquierdo pasa por los puntos situados a un tercio del espesor del arco en el apoyo izquierdo (ver Fig.6).

Las configuraciones de equilibrio de cada una de las condiciones de contorno consideradas están recogidas en la Fig.7.

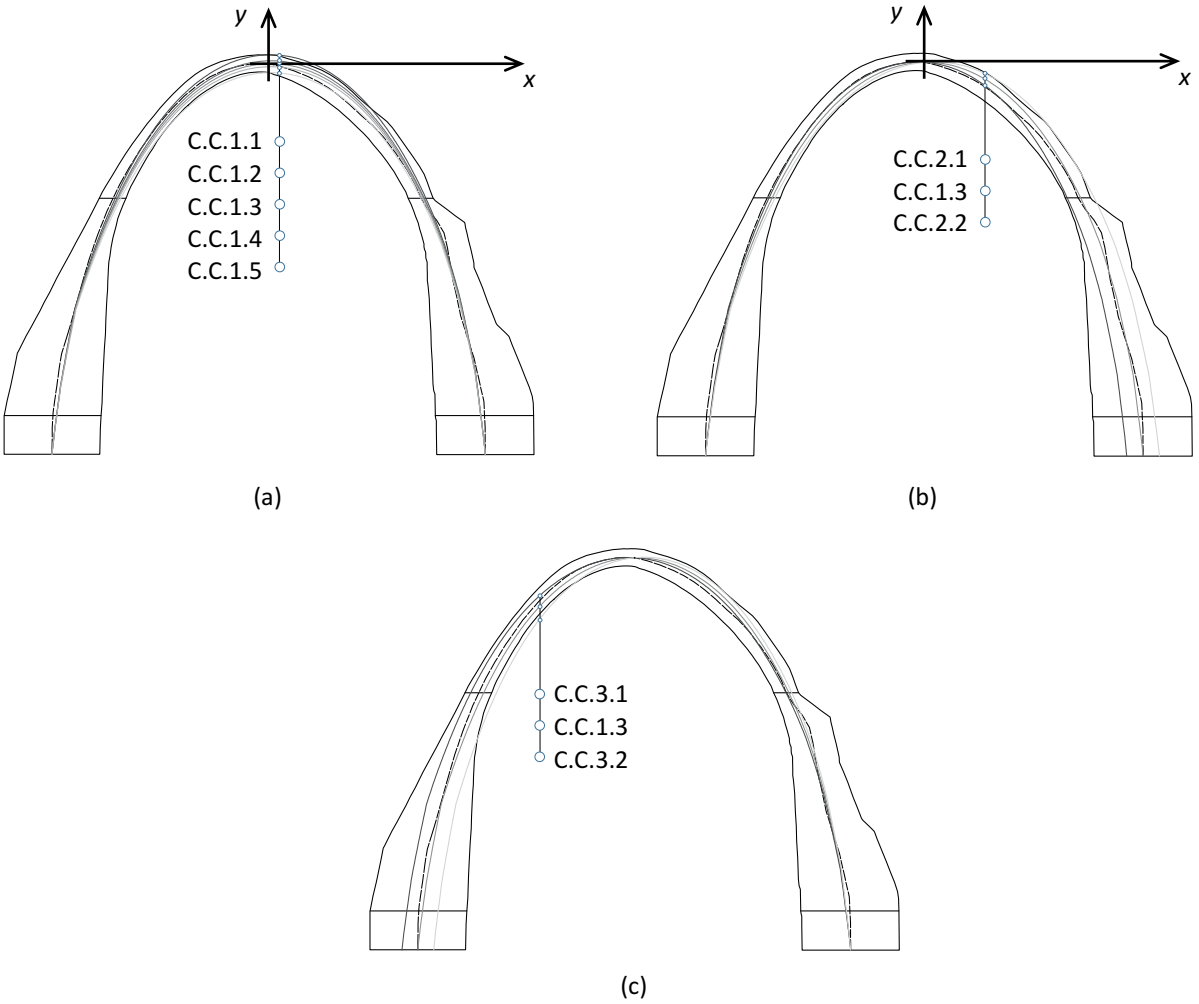


Figura 7. *Configuraciones de equilibrio considerando distintas condiciones de contorno: (a) Condiciones de contorno 1; (b) Condiciones de contorno 2; (c) Condiciones de contorno 3*

En la Fig.7 la línea discontinua representa la línea media de la geometría del arco. El error cuadrático medio existente entre las formas de equilibrio obtenidas y esta curva media se encuentran recogidas en la Tabla 3.

Tabla 3. Error cuadrático medio de las formas de equilibrio obtenidas respecto a la línea media de la geometría del arco

	Error cuadrático medio
C.C.1.1	0,80
C.C.1.2	0,65
C.C.1.3	0,63
C.C.1.4	0,67
C.C.1.5	0,85
C.C.2.1	1,96
C.C.2.2	1,95
C.C.3.1	1,12
C.C.3.2	2,56

Como se puede observar en la Tabla 3, la forma de equilibrio que más se asemeja a la línea media es la C.C.1.3 (la considerada inicialmente en [7]). Se puede concluir que el modelo estructural propuesto en [7] es compatible con la forma real del arco. Además, se puede comprobar que la gran mayoría de las formas de equilibrio obtenidas tienen una tendencia a desplazarse hacia la derecha del arco, mostrando una asimetría respecto al eje Y. Esta asimetría puede venir dada por el propio diseño del arco o puede ser resultado de otros hechos (efecto del viento, deterioro de la estructura con el tiempo, etc.).

5. CONCLUSIONES

El arco de Taq-i Kisra es el mayor arco de mampostería no reforzada de vano único en el mundo, construido alrededor del año 540 D.C. En este trabajo se ha realizado un análisis estructural del arco para tratar de entender su configuración de equilibrio sometido a su peso propio. La configuración de equilibrio se basa en una serie de catenarias unidas las unas a las otras con pesos en las uniones simulando pesos adicionales. Distintas configuraciones de equilibrio se han obtenido introduciendo distintas condiciones de contorno en el problema de equilibrio. Los resultados muestran que el modelo de catenarias propuesto en [7] modela de forma correcta el comportamiento estructural del arco. La gran mayoría de las catenarias correspondientes a las condiciones de contorno consideradas muestran una clara asimetría respecto al eje Y. Esto concuerda con la geometría del arco, que tiene un mayor espesor en la parte derecha.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor ha recibido una beca-contrato FPU del Plan Propio de la Universidad de Granada.

REFERENCIAS

[1] C. Scarre, *The seventy wonders of the Ancient World: the great monuments and how they*

were built. Thames & Hudson, 1999.

[2] MIT, "General view, view of arch of Ctesiphon, ca. 1980." [Online]. Available: https://dome.mit.edu/handle/1721.3/73610. [Accessed: 20-Apr-2016].

[3] L. M. Gil-Martín, E. Hernández-Montes, A. Palomares, M. Pasadas-Fernández, "The optimum shape of an arch under non-symmetric loading conditions," *Archive of Applied Mechanics*, 2016.

[4] J. Bernoulli, "Solutio problematis funicularii," *Acta Eruditorum*, pp. 274–276, 1691.

[5] C. Huygens, "Dynaste Zulichemii, solutio problematis funicularii," *Acta Eruditorum*, pp. 281–282, 1691.

[6] R. Hooke, *Lectiones Cutlerianæ, or A collection of lectures: physical, mechanical, geographical, & astronomical*. London. Printed for John Martyn, 1679.

[7] E. Hernández-Montes, M. A. Fernández-Ruíz, M. Aschheim, L. M. Gil-Martín, "Structural knowledge within the 6th Century AD arch of Taq-i Kisra," *International Journal of Architectural Heritage*, vol. ACCEPTED, 2017.

[8] N. Chandra Makoond, "Advanced computational modelling of Taq-Kisra, Irak," MsC Thesis. Czech Technical University in Prague, 2015.

A nonlinear numerical model of a historical slender structure

Diaferio, Mariella[1]; Foti, Dora[2]; Giannoccaro, Nicola Ivan; Ivorra, Salvador

ABSTRACT

The present study deals with the definition of a numerical model able to describe the actual dynamic behaviour of an historical slender structure: the bell tower of Santa Maria di Loreto Church in Mola di Bari (Bari, Italy). Thus, a dynamic experimental campaign has been performed during which the oscillations due to environmental actions have been recorded. Subsequently, such data have been elaborated by means of operational modal analysis methods operating both in the frequency and in the time domain. The identified modal properties have been utilised to update a finite element model of the bell tower in order to match the experimental results. A nonlinear static analysis has been performed on the validated finite element model with the aim of evaluate the structural behaviour under seismic actions.

Keywords: Masonry structure, Operational modal analysis, Finite element model, Nonlinear static analysis.

1. INTRODUCTION

In the last decades the conservation and the structural safety assessment of the historical heritage have become an central issue for the modern societies as a consequence of the collapse of important structures during the recent seismic events. Therefore, the researchers have focused their attention on the prevention of these collapses and on the evaluation of the actual dynamic behaviour of such structures. However, the definition of a model able to predict the dynamic response of the examined structure is needed to establish the possible interventions and to help the decision makers to manage such patrimony.

However, usually due to the presence of damage, cracks or degradation and to the lack of documentation, the definition of a refined numerical model is quite difficult and cannot be done without an extensive experimental campaign. In this field, the approach able to give information on the global behaviour of a structure and which is not destructive, is the one which make use of the vibrations induced by environmental actions [1]-[12].

The aforementioned tests have been performed on the bell tower of Santa Maria di Loreto in Mola di Bari (Italy), and the modal properties have been identified. On such basis, in the present paper a 3D

[1] *Department of Civil Engineering and Architecture, Politecnico di Bari (ITALY). E-mail address (Corresponding author)*

[2] *Department. Institution (COUNTRY). E-mail address*

NOTE: "(Corresponding author)" should be added where applicable.

refined finite element model of the bell tower is discussed. Finally, a nonlinear static analysis has been carried out on the validated finite element model in order to evaluate the seismic performance of the structure.

2. THE BELL TOWER OF SANTA MARIA DI LORETO CHURCH

The Santa Maria di Loreto Church was erected between the XVII and XVII century and it was realized in soft calcarenite stone. The church is located at the southern outskirts of the town in front of the sea. The bell tower (shown in Fig. 1) is aligned with the main façade and connected to the church by an opening located at the base of the tower. It has a total height of 38.3m and it is connected to the church for 9.53m. It has a square transversal section with a side of about 6.3 m and it is composed by the classical three bodies (fig. 2) : the first body has no windows and arrives to the belfry. The wall thickness of the first body is about 2 m.

Figure 1. *Bell tower of Santa Maria di Loreto (Mola, Bari, Italy). (a) North view. (b) Main façade (c) Plan view.*

The second body houses a steel box structure on which four bells and the swinging mechanism are located. The second body has a window with rounded arch on each façade and it has a wall thickness equal to 1.6m. The third body is characterized by pillars on the corners and it has a wall thickness of about 0.85 m. The tower shows good preservation conditions at the first body, however at the second and third bodies (Figure 3) it presents degradation due to the atmospheric exposition, as it stands near the sea.

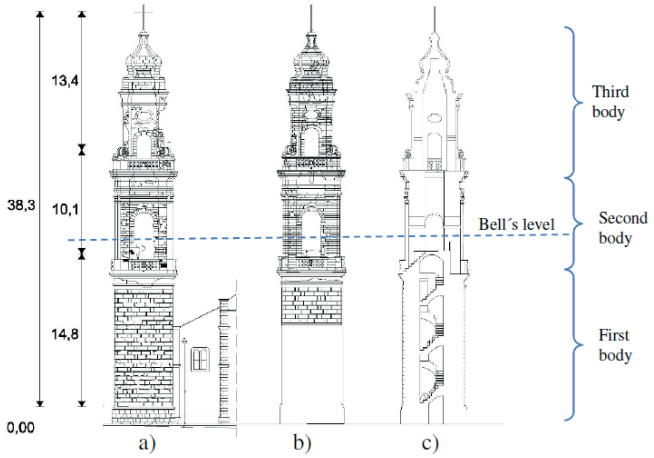


Figure 2. *Bell tower of Santa Maria di Loreto (Mola, Bari, Italy). (a) East view. (b) West view (c) vertical section.*

Figure 3. *Degradation at the second and third bodies of the bell tower due to atmospheric actions.*

3. THE DYNAMIC TESTS AND THE OPERATION MODAL ANALYSIS

Dynamic tests have been performed on the bell tower on the 21th April 2016, during a sunny and windy day. The experimental setup was composed by 10 PCB (Model 393B04) uniaxial piezoelectric accelerometers. These sensors were connected through 4 synchronized digital acquisition (compact DAQ 9188 with 8-slot) systems to a laptop by an Ethernet cable, which was positioned at the base of the bell tower. The signal conversion and the data acquisition were managed using a laptop in the framework with a data acquisition software developed in the labview programming code (Labview 2012). The uniaxial accelerometers have been installed in order to record the components of the vibrations along two orthogonal axis in each monitored point of the bell tower. In detail, five points of the structure have been monitored, located at three different levels [13][14]; in fig. 4 the positions and orientations of the sensors are sketched.

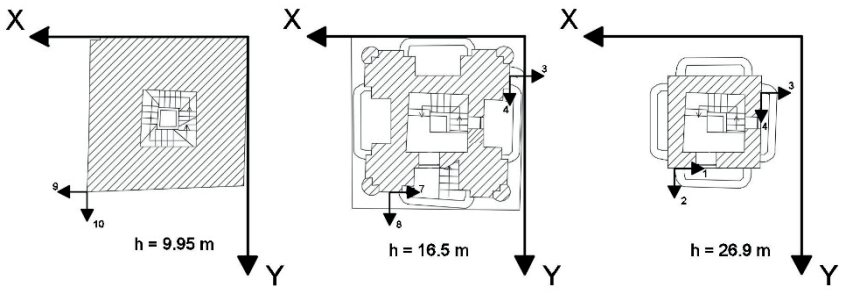


Figure 4. *position and orientation of the 10 uniaxial accelerometers.*

Four tests of fifteen minutes have been recorded under environmental loads with a sampling frequency of 1024 Hz.

All the available data have been analysed by means of two operational modal analysis techniques: the Curve-fit Frequency Domain Decomposition (CFDD) , which operates in the frequency domain, and the Stochastic Subspace Identification (SSI) which operates in the time domain [15]. For all the considered tests and the methods, a good repeatability of the identified first three natural frequencies is obtained (see for more details [13][14]), making confidence about the accuracy of the results. Consequently, in Table 1 the average values of the identified frequencies are reported.

Table 1. Average values of the identified frequencies

≠ mode	Frequency [Hz]
1	1.694
2	1.754
3	5.330

4. THE NUMERICAL MODEL

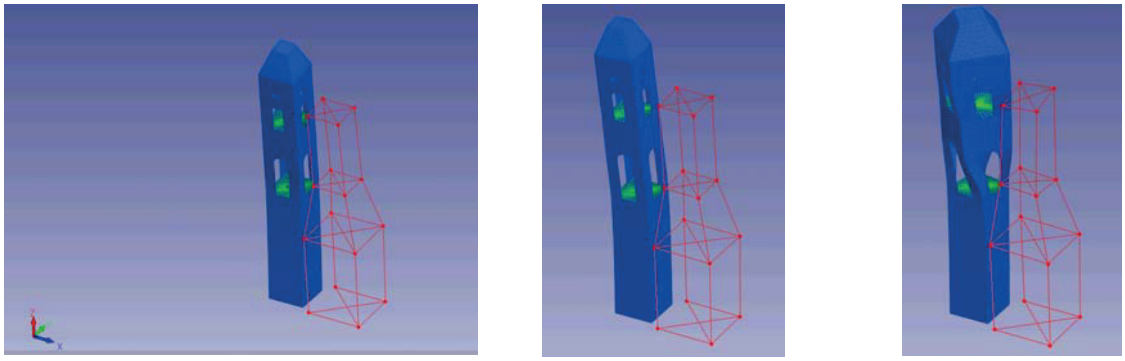
In order to predict the dynamic response of the examined bell tower, a numerical model has been defined on the basis of the visual inspection of the tower and of the available documentation. The model has been realized by means of Strauss software [16]. It has been assumed the bell tower fixed at the base. The walls of the tower have been modelled through 3498 shell elements of the type QUAD4 which are defined by means of 4 nodes each one with three degrees of freedom [16]. The masses of the vertical structural elements have been automatically computed by assuming the weight per volume unit ρ =1500 kg/m^3, moreover, the masses related to the stairs and the floors have been assumed lumped at each corresponding level. The masonry has been modelled as a homogenous material with a Young's modulus equal to 1500 MPa (fig. 5).
In order to model the interaction between the church and the bell tower, pinned beams have been introduced along the directions of the church walls; such beams have a fixed length (i.e. 20 cm) and transversal section (i.e. a circular transversal section with diameter equal to 0.254 m for the pinned beams along the x direction, and diameter equal to 0.127m for the ones along the y direction) while the elastic modulus has been evaluated by matching the experimental results.

Figure 5. *Finite element model of the bell tower of Santa Maria di Loreto (Mola di Bari, Italy).*

The updating procedure performed with the aim of match the experimental results, gave the subsequent result: a Young's modulus equal to 3000 MPa for the pinned beams along the x direction, and Young's modulus equal to 40000 MPa for the ones along the y direction. In Table 2 the comparison between the experimental and numerical first three natural frequencies is shown.

Table 2. Comparison between the experimental and numerical frequencies

≠ mode	Experimental Frequency [Hz]	Numerical Frequency [Hz]	Differences [%]
1	1.694	1.683	0.6
2	1.754	1.758	0.2
3	5.330	5.579	4.6



a) First mode b) Second mode c) Third mode

Figure 6. *Numerical (blue) and experimental (red points) mode shapes of the bell tower of Santa Maria di Loreto (Mola di Bari, Italy).*

In fig. 6 the comparison between the experimental and numerical first three mode shapes are shown.

The comparison between the experimental and the numerical modal parameters allows to consider the model able to describe the actual response of the bell tower.

5. THE NONLINEAR STATIC ANALYSIS

In order to evaluate the seismic performance of the examined bell tower, a nonlinear static analysis has been performed on the validated finite element model. In detail, the study has been carried out taking into account several hypotheses on the interaction between the bell tower and the church. As prescribed by the Italian building code [17], horizontal forces acting along the principal axes and concentrated at the lumped structural masses have been applied to the 3D finite element model of the bell tower. The forces are evaluated in accordance with the equation (1):

$$F_i = F_h \frac{z_i W_i}{\sum_{j=1}^{n} W_j z_j} \qquad with \qquad F_h = S_d(T_1) \frac{W\lambda}{g} \tag{1}$$

where F_i is the i-th concentrated force located at the i-th lumped mass; W_i is the weight of the i-th mass, z_i is the altitude of the i-th mass respetct to the foundation, $S_d(T_1)$ is the design horizontal spectral value for the first natural period of the structure, W is the total weight of the structure, $\lambda = 1$ and g the gravity acceleration.

The masonry has been assumed having a compressive strength equal to 1.1 MPa and a maximum tensile strength equal to 0.1 MPa (see fig. 7).

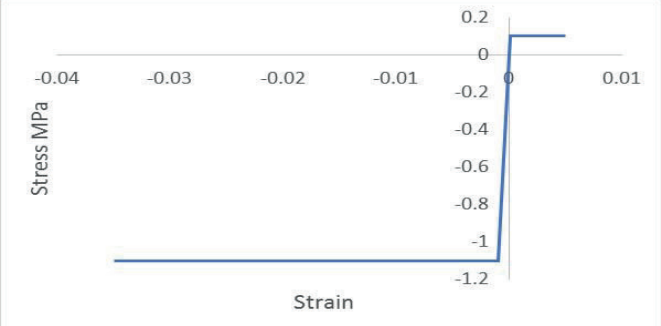


Figure 7. *Constitutive law for the masonry*

In order to simplify the treatment, in the following the results of the pushover analysis performed along the x axis are discussed but similar results can be obtained considering the y axis.

As a first step, two cases have been analysed: the church is able to fully restrain the bell tower up to the top of the church itself, and the second that there are no effective connections between the church and the bell tower, thus this one behaves as an isolated tower. In fig. 8 the yellow curve is the capacity curve related to the case of fully restrained tower and the blue one is the capacity curve for the isolated tower.

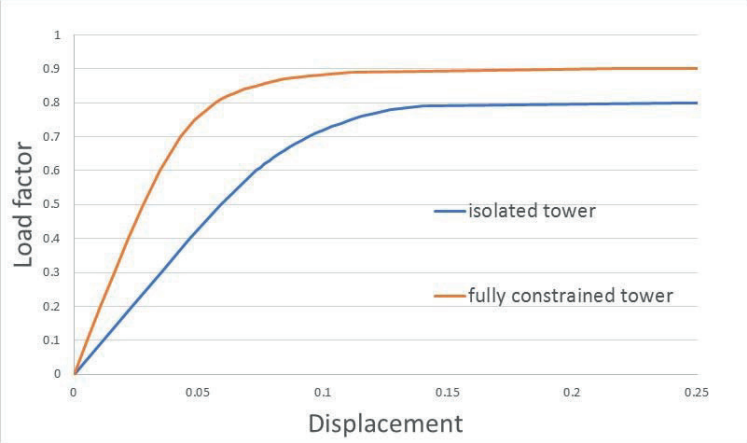


Figure 8. *Capacity curves of the bell tower*

Moreover, the pushover analysis has been performed also modelling the interaction between the church and the bell tower through the pinned beams introduced in section 4.

As aforementioned, the pinned beams model the stiffness contribution due to the church walls, as well known also these walls may manifest a nonlinear behaviour, consequently a correct evaluation of the nonlinear response of the bell tower has to take this behaviour into account. Therefore, a nonlinear static analysis has been performed also assuming a nonlinear constitutive law for the pinned beams. In detail, such constitutive laws have to guarantee in the elastic range the same elastic modulus evaluated through the updating procedure described in section 4, while the maximum compressive and tensile strengths have to be evaluated in accordance with the real behaviour of the church walls. As an experimental evaluation of these values was not possible, three different hypotheses have been done: the first is that the maximum compressive strength is equal to 7.0 MPa, the second assumes the maximum compressive strength equal to 3.5 MPa and the third equal to 0.7MPa; moreover, the tensile

strength has been set equal to 1/10 of the maximum compressive strength. In figure 9 the constitutive laws of the pinned beams aligned with the x axis for the first hypothesis are shown.

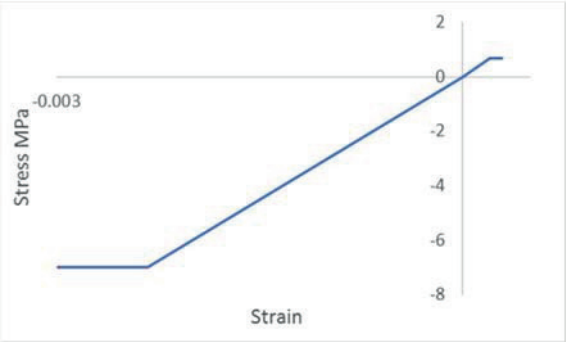


Figure 9. *Constitutive law of the pinned beams acting along the x axis.*

In fig. 9 the capacity curves evaluated for the three hypotheses are shown. As it can be easily seen, all the evaluated capacity curves are placed between the before evaluated capacity curves, consequently these latest ones can be considered as limit cases of the nonlinear static response of the bell tower. Moreover, the capacity curves related to the cases of maximum compressive strength equal to 7 MPa and 3.5 MPa are quite close each other and to the ones related to the case of fully restrained tower, it can be observed that only a significant reduction of the maximum compressive strength implies a substantial change of the capacity curve (see the capacity curve for the maximum compressive strength 0.7 MPa in fig. 10).

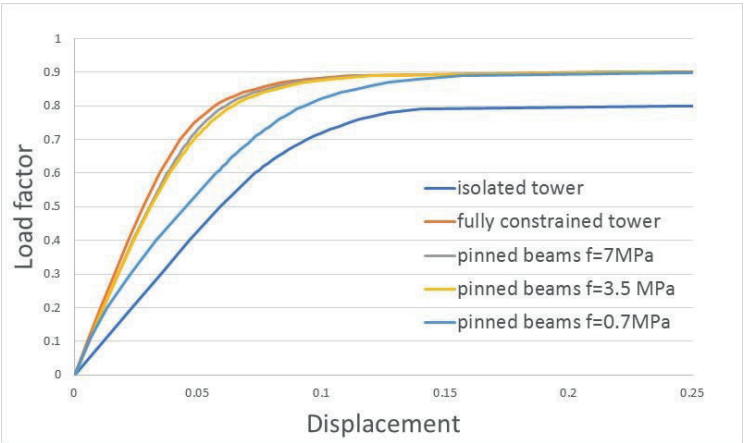
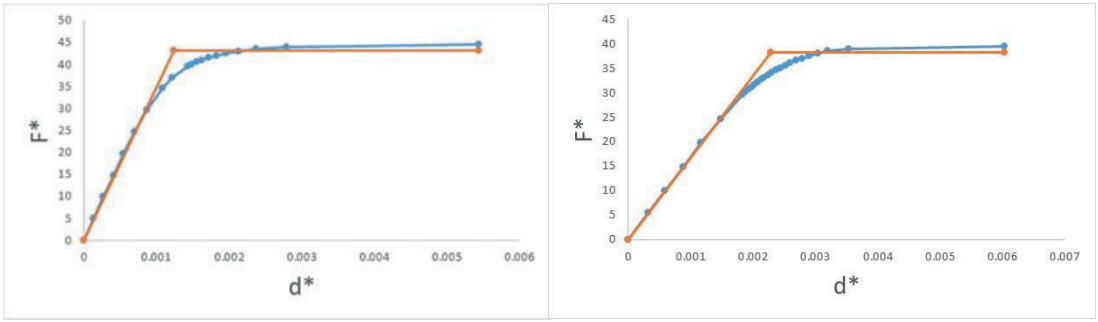


Figure 10. *Capacity curves for the bell tower*

On the basis of the aforementioned considerations, the subsequent evaluation of the seismic vulnerability has been carried out by taking into account the capacity curves evaluated for the two limit cases. In order to evaluate the equivalent Single Degree of Freedom bilinear system, the subsequent variables are introduced:

$$F^* = \frac{F}{\Gamma} \qquad d^* = \frac{d}{\Gamma} \qquad \text{where} \qquad \Gamma = \frac{\sum m_i \Phi_i}{\sum m_i \Phi_i^2} \tag{2}$$

In fig. 11 the capacity curves in the plane (F*, d*) and the equivalent bilinear curves are shown.



(a) (b)

Figure 11. *Equivalent capacity curves and bilinear curves of the bell tower of Santa Maria di Loreto (Mola di Bari, Italy):a) fully restrained bell tower; b) isolated tower.*

The periods of the equivalent single degree of freedom systems are 0.575 s and 0.831 s for the case of fully restrained and isolated tower, respectively. is The Italian building code [17] prescribes a behaviour factor equal to 2.25 while the pushover curves gives the values of 2.58 for the fully restrained case, and 2.66 for the isolated tower.

6. CONCLUSIONS

The present paper deals with the definition of a reliable 3 D finite element model of the bell tower of Santa Maria di Loreto in Mola di Bari (Italy). The model has been defined through an updating procedure performed with the aim of matching the results of a dynamic experimental test.

The validated finite element model has been utilised to study the influence of the interaction between the bell tower and the church on the nonlinear static response of the structure.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors gratefully acknowledge the funding by PRIN-MIUR 2015 research project entitled “Mitigating the impact of natural hazards on cultural heritage sites, structures and artefacts (MICHe)”. F. Paparella and the staff of the “Laboratorio M. Salvati” of the Polytechnic of Bari are gratefully acknowledged for their help during the tests.

REFERENCES

[1] Lourenço, P.B., (2002) Computations of historical masonry constructions. *Pro Structural Engineering*, 4 (3), 301-319.

[2] Gentile, C., Saisi, A..(2007) Ambient vibration testing of historic masonry towers for structural identification and damage assessment. *Construction and Building Material*, 21(6), 1311-21.

[3] Russo, G., Bergamo, O., Damiani, L., Lugato, D.. (2010) Experimental analysis of the ``Saint Andrea'' Masonry Bell Tower in Venice. A new method for the determination of ``Tower Global Young's Modulus E. *Engineering Structures*, 32, 353- 360.

[4] D'Ambrisi, A., Mariani, V., Mezzi, M.. (2012) Seismic assessment of a historical masonry tower with nonlinear static and dynamic analyses tuned on ambient vibration tests. *Engineering Structures*, 36, 210-219.

[5] Foti, D., Diaferio, M., Giannoccaro, NI, Ivorra, S. (2015) Structural identification and numerical models for slender historical structures. Handbook of Research on Seismic Assessment and Rehabilitation of Historic Structures, 674-703.

[6] Ivorra, S., Brotóns, V., Foti, D., Diaferio, M.. (2016) A preliminary approach of dynamic identification of slender buildings by neuronal networks. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 80, 183-189.

[7] Ramos, L., Marques, L., Lourenco, P., De Roeck, G., Campos-Costa, A., Roque, J.. (2010) Monitoring historical masonry structures with operational modal analysis: two case studies. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24 (5), 1291-1305.

[8] Diaferio, M., Foti, D., Gentile, C., Giannoccaro, N.I., Saisi, A.. Dynamic testing of a historical slender building using accelerometers and radar. Prooceedings of 6th International Operational Modal Analysis Conference, IOMAC 2015; Abba HotelGijon; Spain; 12-14 May 2015.

[9] M. Betti, M. Orlando and A. Vignoli. (2011) Static Behaviour of an Italian Medieval Castle: Damage Assessment by Numerical Modelling. *Computers and Structures*, 89, no. (21-22), 1956-1970.

[10] M. Diaferio, D. Foti, N.I. Giannoccaro. Identification of the modal properties of a squat historic tower for the tuning of a FE model. Proocedings 6th International Operational Modal Analysis Conference, IOMAC 2015; Abba Hotel Gijon; Spain; 12 - 14 May 2015; Code 112375

[11] C. Gentile, A. Saisi. (2013) Operational modal testing of historic structures at different levels of excitation. Construction and Building Materials, vol. 48, pp. 1273-1285.

[12] A. Tomaszewska, C. Szymczak. (2012) Identification of the Vistula Mounting tower model using measured modal data. Engineering Structures, vol. 42, pp. 342-348.

[13] Ivorra, S., Foti, D., Diaferio, M.,Carabellese, I. Preliminary OMA results on a soft calcarenite stone bell-tower in Mola di Bari (Italy). Prooceedings of 7th International Operational Modal Analysis Conference, IOMAC 2017; Ingolstadt - Germany; 10-12 May 2017.

[14] Diaferio, M., Foti, D., Giannoccaro, N.I., Ivorra, S. (2017) Model updating based on the dynamic identification of a baroque bell tower. International Journal of Safety and Security Engineering, DOI 10.2495/SAFE-V0-N0-1-12.

[15] Artemis Modal Pro v4.5. Structural Vibrations Solutions. Aalborg, Denmark. 2016

[16] Strauss 7 Finite element analysis system. Strand7 Pty Ltd. www.strauss7.com

[17] NTC. Norme tecniche per le costruzioni. D.M. Ministero Infrastrutture e Trasporti 14 gennaio 2008, G.U.R.I. February 4th 2008, Roma, Italy.

Discussion on Harmonic Dynamic Models of Pedestrian Loads for Footbridges

Cañada, Javier[1]; Iturregui, Carlos[1]; M. Díaz, Iván[1]; García Palacios, Jaime H.[1]; Goicolea, José M.[1]; Lorenzana Iban, Antolín[2]

ABSTRACT

The Eurocodes' specifications for the check of footbridges under human dynamic loads are being subjected to a profound revision in order to clarify the load models that should be used for vibration serviceability limit state assessment. Thus, this paper aims to compare the load models for vertical loads existing in different codes, focusing on those proposed in the JRC report "Design of Lightweight footbridges for Human Induced Vibrations". The load models included in the report are used in a case of study (Veterinary Faculty footbridge, Madrid) to analyse their application to a real structure model and their interaction with a structural analysis software (SAP2000). The practical issues associated with each load models will be discussed and different methods are analysed to implement them in a finite element model of a footbridge structure.

Keywords: footbridges, human dynamic models, Eurocodes, human-induced vibration.

1. INTRODUCTION

The Eurocodes' specifications for the check of footbridges under human dynamic loads are being subjected to a profound revision. New proposals on study for a novel version of the chapter 5.7 of the EN 1991-2 [1] include a series of load models taken from existing codes and design guidelines.

The implementation of these load models in the structural analysis software implies a certain degree of complexity since pedestrian streams and individuals or groups of runners on the structure have to be simulated. This paper explores the possibilities offered by one of the most widely spread structural software (SAP2000) for evaluating the structure's response to these kinds of loadings. This paper is focused on the vertical component of the vibration movements, and consequently, only the models describing the vertical actions on the structure will be addressed.

First, a brief comparison of the codes and guidelines currently used to evaluate vibration limit state is presented. Then the dynamic models in the JRC's document "Design of Lightweight Footbridges for Human Induced Vibrations" [2] will be summarised. This load models will be applied on a finite element model of Veterinary Faculty footbridge which is described in section 4. Finally, the results will be discussed on the basis of the existing dynamic studies for this structure [3], [4].

[1]*Department of Continuum Mechanics and Theory of Structures. E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid (SPAIN). jJ.canada@alumnos.upm.es (Javier Cañada)*
[2]*ITAP, EII. Universidad de Valladolid (SPAIN). ali@eii.uva.es*

2. LOAD MODELS IN CODES AND DESIGN GUIDES FOR PEDESTRIAN FOOTBRIDGES

Footbridge structures are commonly designed to comply with the requirements contained in the applicable codes. The codes specify the loading actions that the structure will have to withstand and the criteria to check both safety (ULS) and serviceability (SLS) of the footbridge. The vibration limit state is usually assessed by limiting the maximum acceleration of the structure under a given set of dynamic loads. The limit values of the acceleration, both vertical and horizontal, vary form one code to another. A summary of the values proposed by several different codes and design guides can be found in Casado-Sánchez et al. [5].

There are two common methods to obtain the predicted acceleration for a given structure in order to compare it with the standards' values. The first one consists in the use of simplified expressions that allow to estimate the values of acceleration from the characteristics of the structure, such as those contained in the British Standard BS 5400, Part 2 [6] and the Eurocode 5, Part 2 Annex B [7], which, although it was developed for wooden structures, can be applied for any footbridge. The second method requires the definition of a set of dynamic loads that have to be applied on the structure. These load models are defined in different codes and design guides. The following paragraphs summarize some of them.

2.1. Eurocodes

The Eurocodes include several chapters that apply to the verification of the vibration serviceability limit state (VSLS) for pedestrian bridges. The most general, is chapter 5.7 of EN 1991-2. Third paragraph of current version, states only that appropriate dynamic models should be defined, leaving any further definition of these for the National Annex of each country or for each project. It also refers to the chapter A2.4.3 of EN 1990-A2 [8]. This chapter indicates that the design situations should be selected depending on the pedestrian traffic considered on the individual footbridge during its working life and it proposes the presence of a group of about 8 to 15 people walking normally as the persistent design situation. Moreover, it explains that other traffic categories, such as streams of pedestrians or occasional festive events might be associated with persistent, transient or accidental design situations and should be specified when relevant. The definition of these last situations is responsibility of the owner or authority.

2.2. ISO 10137-2007 Basis for design of structures – Serviceability of buildings and walkways against vibrations

Annex A of the International Standard ISO 10137:2007 [9], proposes a series of load models for dynamic actions caused by human motion. These include repetitive coordinated activities, walking or running, ascending and descending of staircases and human impacts. The forces induced on the structure by a person jumping, walking or running are represented by a Fourier series:

$$F_v(t) = Q(1 + \sum_{n=1}^{k} \alpha_{n,v} \sin(2\pi f t + \phi_{n,v})) \quad (1)$$

In the preceding equation Q is the static load of the participating person, f is the frequency component of the repetitive loading, $\varphi_{n,v}$ is the phase angle for the nth harmonic, $\alpha_{n,v}$ is the numerical coefficient

corresponding to the n[th] harmonic and representing the load dynamic factor, and *k* is the number of harmonics that characterize the forcing function in the frequency range of interest. A similar expression is used for horizontal actions. The document proposes values for the common range of forcing frequencies and for the numerical coefficient or dynamic load factor (DLF) α. It also suggests a phase shift of 90° for harmonic contributions below the resonance frequency of the structure as a conservative approach.

ISO 10137:2007 introduces a coordination factor that affects the forces induced in the structure to evaluate the effect of the simultaneous action of a group of *N* people and to account for the synchronisation of their actions. For uncoordinated walking or running, the proposed expression for the coordination factor is:

$$C(N) = \sqrt{N}/N \tag{2}$$

2.3. FIB Bulletin 32: Guidelines for the design of footbridges

Chapter 5 of FIB Bulletin 32 2005 [10] is devoted to the dynamics of footbridge structures. Paragraph 5.2.2 defines a factor of synchronisation "*S*" that allows to compute the acceleration induced by the action of a group of pedestrians. This value is obtained differently for bridges with low and high pedestrian density, respectively.

The guide also gives values for the common range of frequencies for pedestrian movements and rhythmic exercises. The load model for walking induced vertical loads is also described in the article 5.3.3.1 of the FIB Bulletin 32, in terms of a Fourier series with a slightly different formulation from that of the ISO 10137:2007:

$$F(t) = F_o + \sum_i F_i \sin(2\pi i f_s t - \varphi_i) \tag{3}$$

The document also includes the load model proposed by the prenorm of Eurocode 1, Part 1, which has been deleted in the most recent versions of the Eurocodes. The model is divided into three parts to allow for different pedestrian configurations. The single pedestrian load model is the same as in the British Standard BS 5400, Part 2 [6] and the Ontario Highway Bridge Design Code OHBDC ONT 83 [11].

2.3.1. Single Pedestrian Load Model (DLM 1)

The dynamic action consists of a pulsating stationary force with vertical and horizontal components. It represents the effect of a pedestrian with a weight of 700 N walking at a velocity expressed in meters per second of 0.9 times the step frequency. The amplitude of the dynamic load is taken equal to the first harmonic of the ground reaction force measured under the action of a walking pedestrian. The value adopted for the vertical DLF is 0.4. The frequencies are chosen to match the fundamental frequencies of the structure and the load is applied at the most unfavourable position.

2.3.2. Load Model for a Pedestrian Group (DLM 2)

It accounts for the effect of a group with a limited number of pedestrians walking uncoordinatedly. The synchronisation of frequencies and phases is considered through the synchronisation factor k_v and k_h which are a function of the excitation frequency. A mass of 800 kg is applied at the same point as the force to represent the influence of the pedestrians on the dynamic properties of the bridge.

2.3.3. Load Model for a Continuous Pedestrian Stream (DLM 3)

It assumes a density of 0.6 pers/m^2. The action is applied as a uniformly distributed area load with vertical and lateral components. The load should only be applied to the unfavourable areas of the bridge depending on the mode shape. An additional evenly distributed mass of 40 kg/m^2 is to be considered on the same area. The synchronisation factor also applies.

2.4. SETRA Technical guide, Footbridges: Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading

The technical guide on footbridges of SETRA of 2006 [12] introduces a load model for pedestrian streams which is the basis of those included in the JRC's "Design of Lightweight Footbridges for Human Induced Vibrations", and will be explained more in detail in the next section. It fundamentally consists in substituting the pedestrian stream by the action of an equivalent number of pedestrians walking equally distributed on the structure at the same frequency and in phase. The sign of the loading matches the sign of the mode at every point. A synchronisation factor (Ψ) is used to account for the risk of resonance depending on the matching between the excitation frequency and the natural frequency of the structure.

Appendix 2 of the SETRA guide describes the proposed load models for walking and running pedestrians. The modelling of the walking pedestrian load is again based on the Fourier transformation of the ground reaction force under the action of a person walking, resulting in a formulation in accordance with that of the FIB Bulletin 32. Concerning running, to account for the discontinuous contact with the ground, the vertical component of the load is represented by a simple sequence of semi-sinusoids. However, this case is considered non-relevant due to the brief period the joggers remain on the deck.

3. JRC 2009 DESIGN OF LIGHTWEIGHT FOOTBRIDGES FOR HUMAN INDUCED VIBRATIONS

The Joint Research Centre's report on Design of Lightweight footbridges for human induced vibrations is the result of two European research projects funded by the Research Fund for Coal and Steel (RFCS): "Advanced Load Models for Synchronous Pedestrian Excitation and Optimised Design Guidelines for Steel Footbridges – SYNPEX" [13] and "Human induced vibrations of steel structures – HIVOSS" [14].

The design procedure proposed in the report begins with the definition of the design situations. The definition of these situations is made by the client together with the consultant, accounting for the predicted traffic classes and corresponding required comfort levels.

The design process regarding vertical vibrations will be fully addressed in a case of study, Veterinary Faculty footbridge, in the next sections. However, the mains steps to be followed are explained hereafter.

In a first step, the natural frequencies of the structure have to be calculated to check if they fall in the critical range corresponding to the usual frequencies of the human actions. The critical ranges for natural frequencies are from 1.25 to 2.3 Hz for vertical and longitudinal vibrations, and from 0.5 to 1.2 Hz for lateral vibrations. The second harmonic of the pedestrian loads might excite footbridges with natural frequencies between 2.5 and 4.6 Hz. The effect of the added mass of the pedestrians on the

structure is taken into account to obtain the natural frequencies when it exceeds 5% of the total mass of the structure.

The next step in the design process is the assessment of the design situation, defined as "set of physical conditions representing the real conditions occurring during a certain time interval". Each design situation will relate to an expected traffic class and the corresponding comfort level. The traffic classes are given in Table 4-3 of the JRC report, which is summarised in Table 1.

Table 1. Pedestrian traffic classes and densities

Traffic Class	Density d (P = pedestrian)	Description	Characteristics
TC 1	Group of 15 P; d=15P/(BL)	Very weak traffic	(B=width of deck; L=length of deck)
TC 2	d=0.2 P/m^2	Weak traffic	Comfortable and free walking. Overtaking is possible. Single pedestrians can freely choose pace.
TC 3	d=0.5 P/m^2	Dense traffic	Still unrestricted walking. Overtaking can intermittently be inhibited.
TC 4	d=1.0 P/m^2	Very Dense traffic	Freedom of movement is restricted. Obstructed walking. Overtaking is no longer possible.
TC 5	d=1.5 P/m^2	Exceptionally dense traffic	Unpleasant walking. Crowding begins. One can no longer freely choose pace.

The comfort classes are defined in Table 4-4 of the JRC report, which is shown in Table 2.

Table 2. Defined comfort classes with common acceleration ranges

Comfort Class	Degree of comfort	Vertical a_{limit}	Lateral a_{limit}
CL 1	Maximum	< 0.50 m/s^2	< 0.10 m/s^2
CL 2	Medium	0.50 – 1.00 m/s^2	0.10 – 0.30 m/s^2
CL 3	Minimum	1.00 – 2.50 m/s^2	0.30 – 0.80 m/s^2
CL 4	Unacceptable discomfort	> 2.50 m/s^2	> 0.80 m/s^2

One of the critical aspects for the design of a footbridge structure is the damping value to be used for the dynamic calculations. The JRC proposes a series of minimum and average values for the damping ratio for various materials. These values increase considerably for large vibrations.

Once all the precedent stages have been fulfilled, the maximum acceleration has to be computed for each relevant design situation. Three different methods are proposed: SDOF Method, Finite Element Method and Response Spectra Method. Only the two first require the application of dynamic load models.

The harmonic load models proposed by the JRC report are based on the definition of an equivalent number of pedestrians for streams, following the concept presented in SETRA guidelines. A stream of *n*

random pedestrians is represented by an idealised stream of *n'* perfectly synchronised pedestrians that cause the same effect on the structure. The idealised stream acts as a distributed harmonic load along the deck. It is always applied following the shape of the relevant mode of vibration of the structure. If the mode presents sags of different sign, the load is applied with the corresponding sign in each of them. The distributed harmonic load is given by the following expression:

$$p(t) = P \times \cos(2\pi f_s t) \times n' \times \psi \quad (4)$$

in which *P* is the component of the force due to a single pedestrian with a walking step frequency f_s, which is assumed to be equal to the footbridge natural frequency under consideration. *P* is taken as 280 N (0.4x700 N) for vertical loads, 140 N for longitudinal loads and 35 N for lateral loads.

The equivalent number of pedestrians n' is calculated differently for traffic classes from TC1 to TC3 and for traffic classes TC4 and TC5. The report states that when a stream becomes dense, the correlation between pedestrians increases, but the dynamic load tends to decrease, as walking becomes more difficult. The expressions giving the equivalent number of pedestrians are:

For classes TC1 to TC3 (density $d < 1.0$ P/m^2): $n' = \frac{10.8\sqrt{\xi \times n}}{S}$ [m^{-2}] (5)

For classes TC4 and TC5 (density $d \geq 1.0$ P/m^2): $n' = \frac{1.85\sqrt{n}}{S}$ [m^{-2}] (6)

The ψ factor accounts for the probability that the footfall frequency approaches the critical range of natural frequencies under consideration. It is given by the figure in Table 4-8 of the JRC report (see Figure 1).

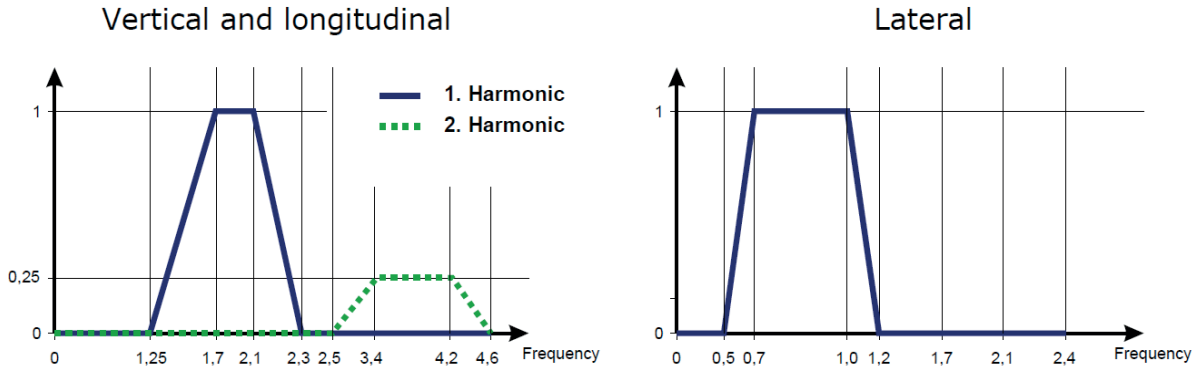


Figure 1. *JRC 2009 Design of lightweight footbridges for human induced vibrations. Table 4-8. Reduction coefficient ψ*

The appendix of the JRC report proposes additional load models for a single pedestrian, for a jogger and for intentional excitation by small groups. Walking is represented by a Fourier series similar to Eq. (1). This periodic force is not stationary, it moves with a constant speed along the deck. The value of the walking speed is taken from the results of the SYNPEX project and it is given by:

$$v_s = 1{,}271 f_s - 1 \quad (7)$$

Different values for the Fourier coefficients used to describe the forces produced by walking pedestrians are given in the report, including those proposed in the SYNPEX project.

The proposed load model for joggers consists of a single load moving across the bridge at a certain speed. In this case the suggested value is 3 m/s. The moving load follows the expression hereafter:

$$P(t.v) = P \times \cos(2\pi f t) \times n' \times \psi \quad (8)$$

in which *P* is the force component due to a single jogger, with a value of 1250 kN, f is the natural frequency under consideration and *n'* is the equivalent number of joggers. A group of joggers is considered to be perfectly synchronised in frequency and phase with the natural frequency of the bridge, therefore *n'* is taken equal to *n*, the actual number of joggers. The reduction coefficient ψ has the same meaning as for the pedestrian streams, but different values, that are given in Table 9-2 of the JRC report (Figure 2).

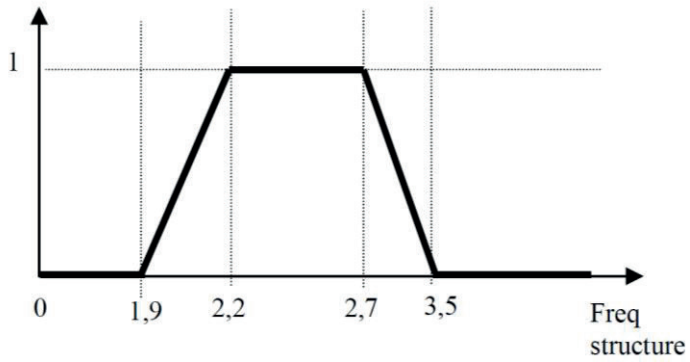


Figure 2. *JRC 2009 Design of lightweight footbridges for human induced vibrations. Table 9-2. Reduction coefficient ψ*

It is proposed to simplify the action of the joggers by applying the harmonic load stationary at the point corresponding to the maximum displacement amplitude of the shape modes.

4. CASE OF STUDY: VETERINARY FACULTY FOOTBRIDGE

Veterinary faculty footbridge is a structure located in Madrid, Spain, at kilometre 6 of the A-6 highway. It allows pedestrian traffic between Veterinary Faculty and "Ciudad Universitaria" campus over the highway.

This footbridge has been previously studied in [3], in which the dynamic properties of the structure were obtained experimentally, and in [4], in which a finite element model of the footbridge, and its updating according to experimental results, was developed.

4.1. Description of the structure

It consists of a metallic beam with hollow trapezoidal cross section 61 cm high and 80 to 150 cm wide. A 10 cm thick concrete slab covers 42.70 m of a total length of 45.65 m. The beam is embedded in a concrete pylon at the campus end, creating a semi-rigid joint. Two cables depart from the top of the pylon and support the structure close to mid-span. At the Veterinary Faculty end, there are a simple and an inverted support spaced 2.65 m. Fig. 3 below shows a general view of the structure. A more detailed description of the footbridge can be found in [3] and [4].

Figure 3. *Veterinary Faculty footbridge [15]*

The deck surface accessible for pedestrians is of 40 m^2.

4.2. Description of the model

The finite element model used for the analysis was originally developed in SAP2000 [16] by Rodríguez Aguilar, its complete description can be found in [4]. Only its key features will be discussed here.

The beam is modelled using shell elements for flanges and webs with 1 meter length in the longitudinal direction. Transverse diaphragms are disposed with a 3 m spacing.

Masses in the structure are obtained from materials' density and their respective volumes. An additional distributed mass on the structure is used to represent the dead loads of the railings and other elements of the superstructure. This additional mass was adjusted in order to match the model frequencies with those obtained experimentally. The total mass of the structure is estimated in 73.23 t.

Concerning the boundary conditions, vertical movement is restrained at the simple support on the Veterinary Faculty side. For the inverted support, both vertical and transverse displacements are fixed. The embedment in the pylon is represented by springs with rotational stiffness capacity. Translation movements are restrained at this section. Finally, the effect of the cables is introduced in the model through linear springs with vertical and longitudinal stiffness at the connection point of the cables in the beam. The stiffness values of all the spring elements in the structure was subjected to a model updating process that aimed to match the mode shapes obtained in the finite element model with the ones observed during the experimental tests.

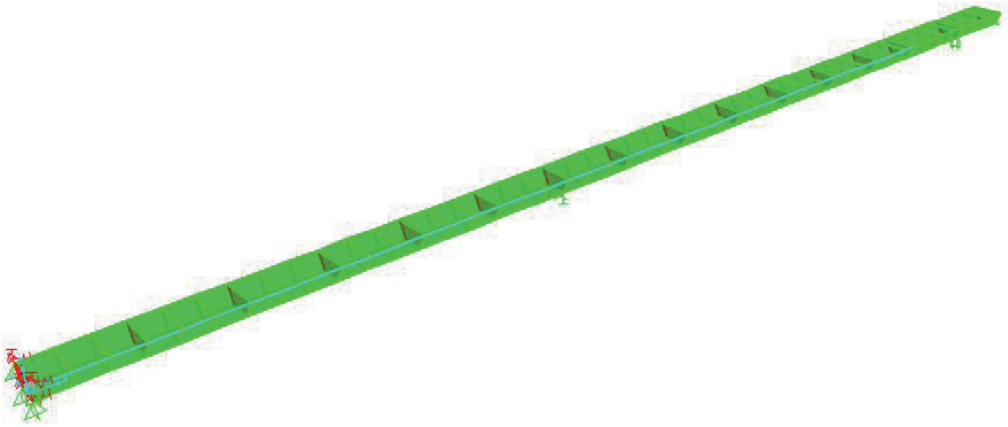


Figure 4. *Veterinary Faculty footbridge model in SAP2000*

4.3. Load models application

4.3.1. Design situations

The design situations considered in the case of study are listed in Table 3. Since this paper focuses on the implementation of the load models more than on the actual assessment of the VSLS, the comfort class is not defined for each of the design situations, nor its expected occurrence during the lifetime of the structure. A brief comment about these aspects will be included in the final conclusions.

Table 3. Pedestrian stream design situations

Traffic Class	Density	Number of pedestrians	Mass of Pedestrians	Mass percentage
TC 1	0.25 P/m^2	15	1200 Kg	1.60 %
TC 2	0.2 P/m^2	12	960 Kg	1.30 %
TC 3	0.5 P/m^2	30	2400 Kg	3.30 %
TC 4	1.0 P/m^2	60	4800 Kg	6.55 %
TC 5	1.5 P/m^2	90	7200 Kg	9.83 %

It is observed that, due to the surface width of the deck being considerably small, the traffic class TC-1 is more conditioning than the class TC-2. Therefore, it should be chosen which of the two represents best the pedestrian traffic on the footbridge. The calculations for classes TC-4 and TC-5, which introduce an additional mass superior to the 5 % of the mass of the structure, will be carried out taking into account the effect of the mass of the pedestrians on the natural frequencies of the structure. It is included in the model as a uniformly distributed mass over the accessible surface of the deck.

Additionally, situations with a jogger passing over the structure have also been calculated.

4.3.2. Natural frequencies

The natural frequencies of the vertical vibration modes of the structure are calculated using the eigenvector analysis tool in SAP2000. Twelve modes are obtained, but only the ones corresponding to

vertical flexural vibrations are studied. The natural frequencies for the first three modes of vibration of interest for each case are shown in the table below.

Table 4. Natural frequencies, linear calculation

Case	First vertical mode	Second vertical mode	Third vertical mode
TC 1, TC 2, TC 3 Jogger	1.8298 Hz	4.4809 Hz	8.6768 Hz
TC 4	1.7887 Hz	4.3836 Hz	8.4834 Hz
TC 5	1.7691 Hz	4.3358 Hz	8.3914 Hz

As expected, the frequencies diminish when the mass increases. The first two vertical modes of vibration of the structure are illustrated in Fig. 5.

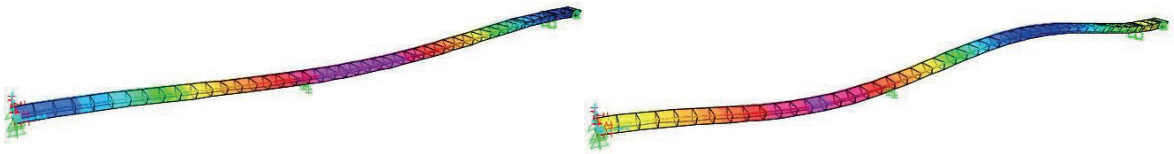


Figure 5. *Vertical vibration mode 1 (left) and mode 2 (right)*

4.3.3. Damping

A constant damping ratio of 1 % is taken for all modes, based on the experimental results in [3]. The mean value proposed by the JRC for composite structures is 0.6 %. Depending on the type of analysis developed in SAP2000 the damping model varies. Differences will be commented for each case.

4.3.4. *Pedestrian streams*

The load models corresponding to traffic classes from TC-1 to TC-5 are introduced accordingly with the indications of chapter 4.5.1 of the JRC report. The frequencies of both the first and the second modes fall in the critical range (see Fig. 1). Independent load cases have to be defined for each. The parameters defining this load models as shown in Eq. (4), Eq. (5) and Eq. (6) can be found in Table 5.

Table 5. Pedestrian stream load parameters

Case	Mode	*P*	Frequency	ψ	*n'*
TC 1	1	280 N	1.8298 Hz	1.000	0.0697
	2	280 N	4.4809 Hz	0.072	0.0697
TC 2	1	280 N	1.8298 Hz	1.000	0.0624
	2	280 N	4.4809 Hz	0.072	0.0624
TC 3	1	280 N	1.8298 Hz	1.000	0.0986
	2	280 N	4.4809 Hz	0.072	0.0986
TC 4	1	280 N	1.7887 Hz	1.000	0.2388
	2	280 N	4.3836 Hz	0.135	0.2388
TC 5	1	280 N	1.7691 Hz	1.000	0.2925
	2	280 N	4.3358 Hz	0.165	0.2925

The intensity of the load, in kN/m^2, is calculated following the expression of Eq. (4) using these parameters:

$$p = P \times n' \times \psi \tag{9}$$

The harmonic load is applied uniformly distributed over the deck surface, with the sign corresponding to the mode shape, as it is shown in Fig. 6.

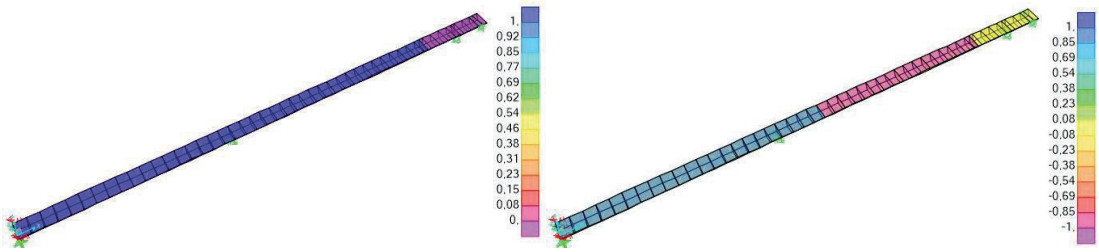


Figure 6. *Distributed load for mode 1 (left) and mode 2 (right)*

Two different analysis are developed in SAP2000 to verify the consistence of the results. The first is a steady-state analysis: a frequency domain analysis of the stationary response of the structure with the frequency of the harmonic load ranging from 0 to 5 Hz. The second does a linear modal integration in time (modal analysis and modal superposition) for the harmonic load vibrating at the natural frequencies of the structure previously calculated. A sine function in time, with the period related to the mode of vibration of the structure, is defined within SAP2000 to reproduce the harmonic behaviour of the loading.

For the steady-state analysis the damping matrix is given by a displacement-based model as follows:

$$D = \omega C = \omega(\alpha M + \beta K) \tag{9}$$

This allows to define a constant damping ratio for all modes, in this case 1 %, by adopting zero for the mass coefficient, and twice the damping ratio for the stiffness coefficient. For the modal integration analysis, the damping is also taken constant for all modes, which can be directly specified in the SAP2000 load case.

The curve frequency-acceleration obtained for a point at mid-span of the structure (point of maximum displacement) from the steady-state analysis for the case TC-1 is shown in Fig. 7.

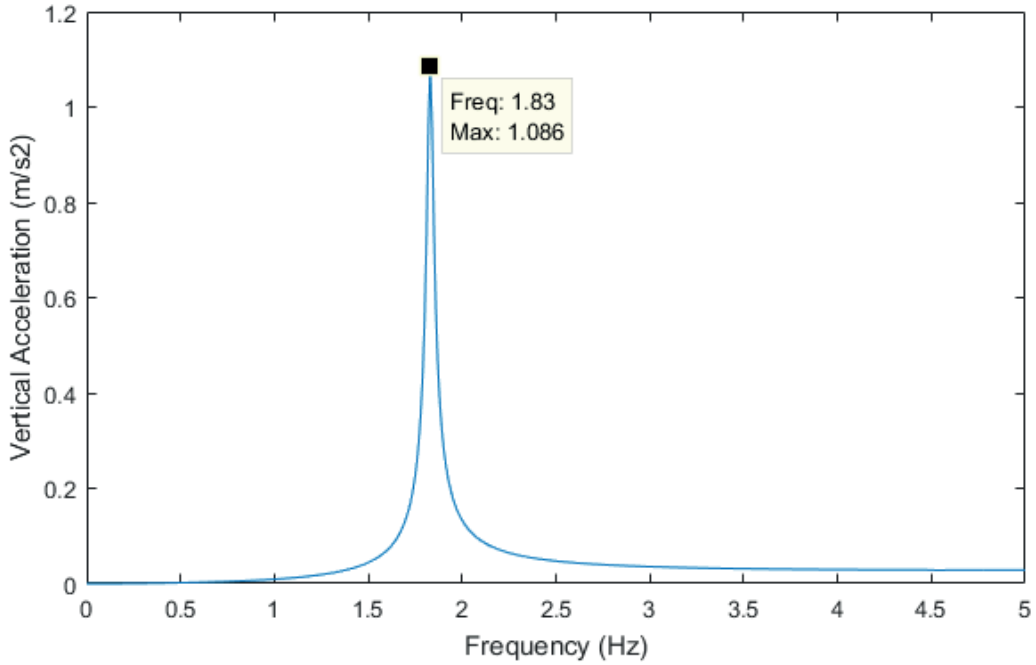


Figure 7. *Vertical acceleration for frequencies from 0 to 5 Hz, TC-1 pedestrian stream*

The results of the linear modal integration in time are shown in Fig. 8 for 60 second duration analysis.

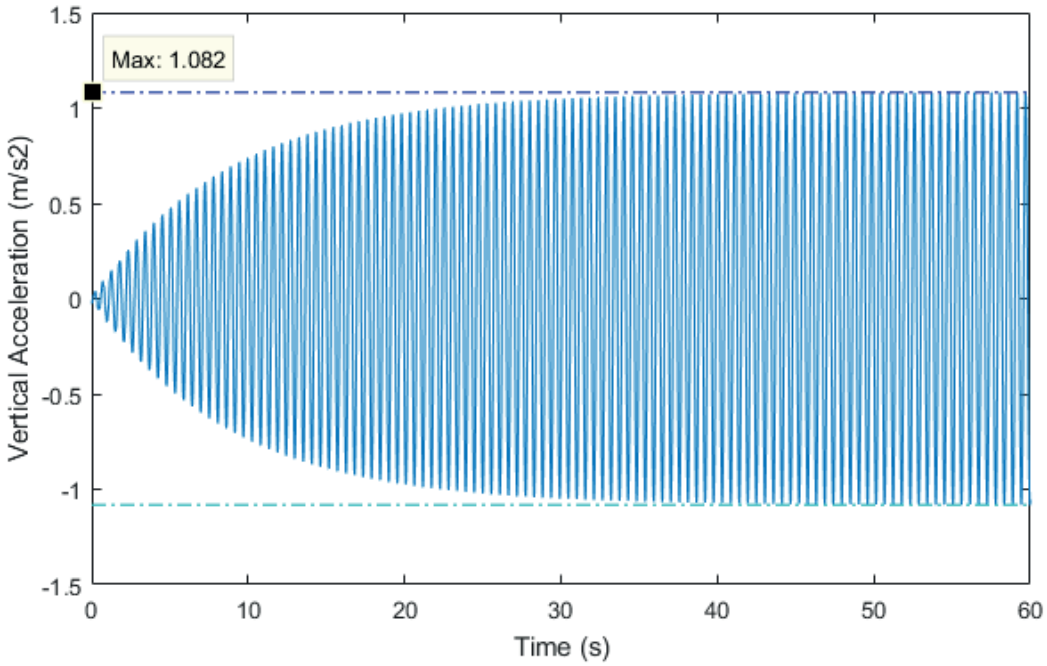


Figure 8. *Vertical acceleration from 0 to 60 s, TC-1 pedestrian stream*

As it can be observed from Figs. 7 and 8, both analysis lead to very similar results. Given that the pedestrian stream is considered to happen in a sustained manner, the resonance value obtained from the steady state analysis is likely to be reached.

It must also be pointed out that the value of the reduction coefficient ψ, which is frequency dependant, has been kept constant for the steady state analysis. This means that only the acceleration value at resonance has actual sense regarding the JRC report formulation.

Similar calculations for the remaining traffic classes result in the maximum vertical accelerations corresponding to excitations acting at the frequencies of the two first modes of vibration of the structure. The values obtained are summarised in Table 6.

Table 6. Pedestrian stream load parameters

Case	Mode	Vertical Acceleration	Comfort Level	Expected Occurrence
TC 1	1	1.086 m/s^2	Medium	Daily
	2	0.924e-3 m/s^2		
TC 2	1	0.971 m/s^2	Medium	Daily
	2	0.826e-3 m/s^2		
TC 3	1	1.535 m/s^2	Minimum	Rarely
	2	1.306e-3 m/s^2		
TC 4	1	3.551 m/s^2	Unacceptable	Unexpected
	2	5.699e-3 m/s^2		
TC 5	1	4.257 m/s^2	Unacceptable	Unexpected
	2	8.390e-3 m/s^2		

Acceptable levels of comfort are only verified for traffic classes from TC-1 to TC-3.

4.3.5. Application of the load model for joggers

As it has been previously commented, the action of a person running on the structure can be represented by a moving load applied on the deck. Implementing such a load in a structural analysis software is not always easy, that is the case for example of SAP2000. The JRC proposes a simplified approach where the load is considered stationary, it does not move, and applied at the point of maximum displacement. Both approaches have been studied, and the results will be commented hereafter.

In the case of Veterinary Faculty footbridge, the natural frequencies of the structure fall out of the critical range for running pedestrians. This has been ignored for the following analysis and the reduction factor ψ has been taken equal to one and the excitation frequency equal to that of the first mode of the structure for all the calculations. These assumptions pretend to make it possible to effectively test the application of the proposed load models. Therefore, the intensity of the load will be 1250 kN for a single pedestrian. The expression of the punctual harmonic load is given by Eq. (8).

The stationary application of the load at the maximum displacement point has been analysed again with the two methods used for pedestrian streams: steady state analysis and modal integration. For the steady state analysis, the range of frequencies studied ranges from 1.6 to 2.5 Hz. For modal integration, a sine function in time with the corresponding natural frequency of the structure has been applied during 55 s. The results in terms of vertical acceleration are shown in Fig. 9 and Fig. 10.

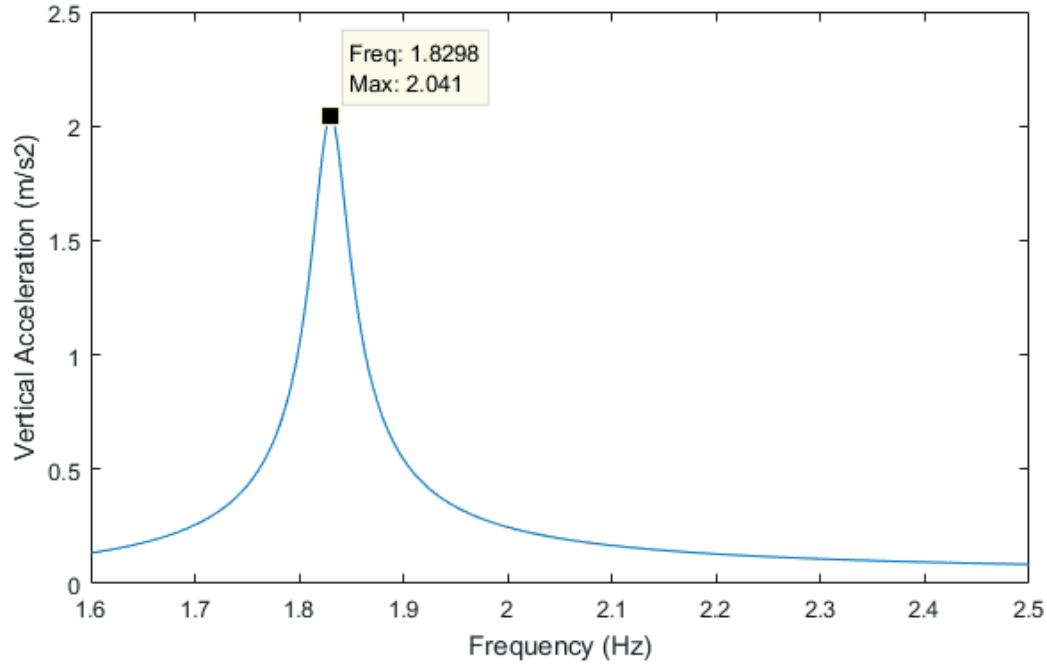


Figure 9. *Vertical acceleration for frequencies from 1,6 to 2,5 Hz, running loading*

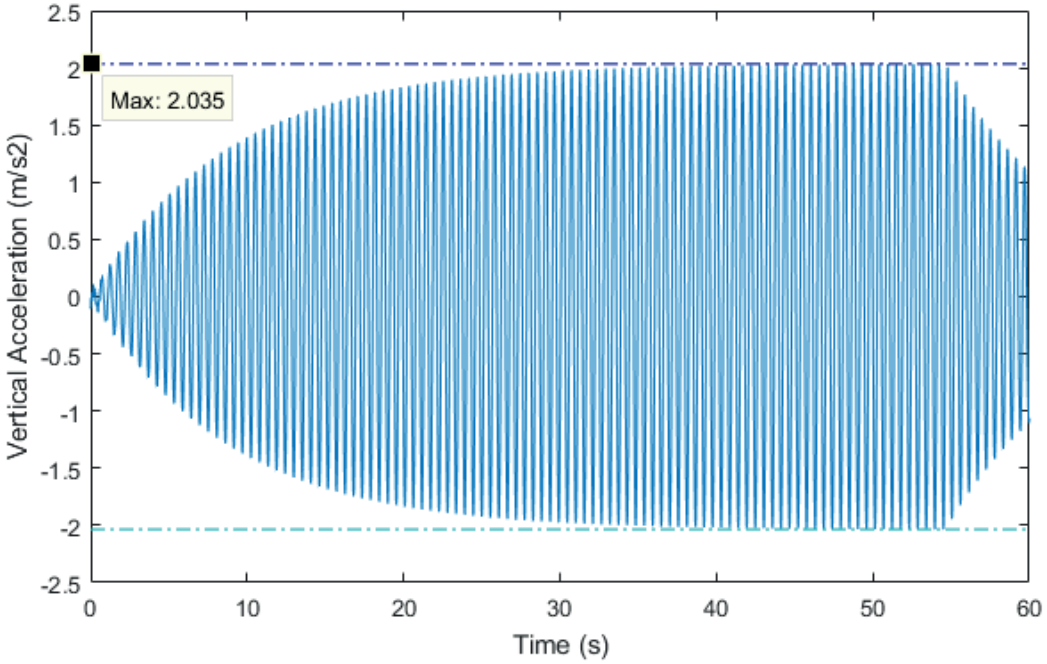


Figure 10. *Vertical acceleration from 0 to 60 s, running loading*

Other than the similarity of the results obtained with both methods, it can be inferred from Figs. 9 and 10 that the time of application of the load is of vital importance to determine the maximum value of the vertical acceleration that structure will suffer. To account for this effect, the modal integration calculation has been repeated limiting the time of application of the load to the time a jogger will need to run along the deck at the proposed speed of 3 m/s. Considering a length of deck of 40 m, the load will only act for 13,3 s. Consequently, the steady state analysis does not seem appropriate for the jogger case because the information about the time of application of the load is lost. The jogger case should

be considered transient. Taking into account this fact, Fig. 11 shows the acceleration plot. The value obtained for the vertical acceleration, when limiting the application of the load to 13.3 s, is reduced from 2.035 m/s^2 to 1.60 m/s^2.

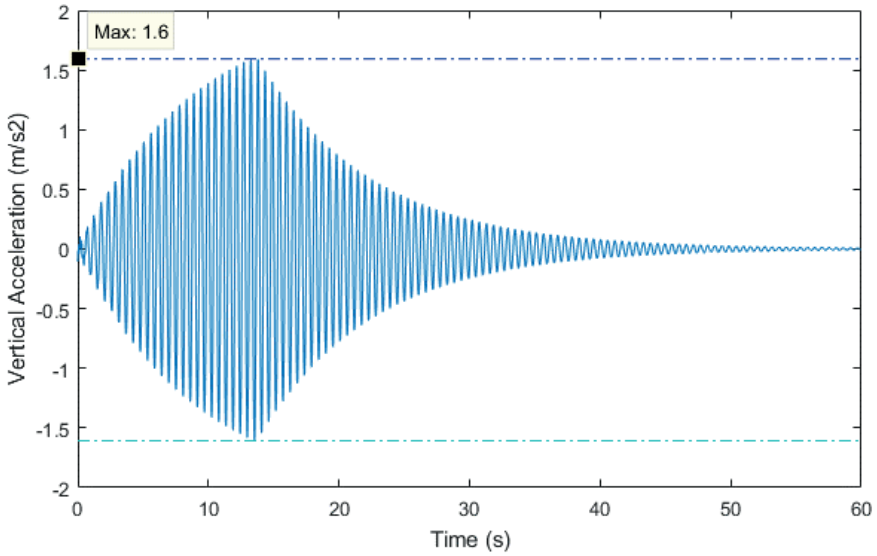


Figure 11. *Vertical acceleration from 0 to 60 s, running loading considering the time on the structure.*

In an effort to reproduce more accurately the effect of the moving load representing the jogger, while maintaining the simplicity of a stationary load applied at the point of maximum displacement, a new load model is defined. In this case, the intensity of the load is corrected taking into account the shape of the mode of vibration of the structure. The position of the load on the deck is calculated considering the velocity of the jogger and the intensity of the load applied is affected at each instant by a coefficient reflecting the ratio between the mode's amplitude at the point where the moving load would be considering its movement, and the amplitude of the mode at the point where it is effectively being applied. This method is further explained in [17]. The results are shown in Fig. 12.

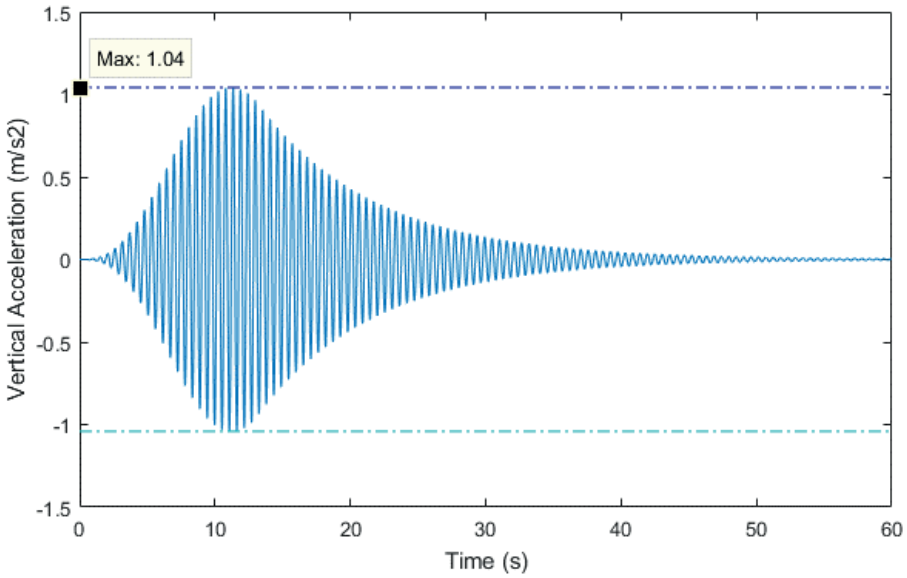


Figure 12. *Vertical acceleration from 0 to 60 s, running loading considering the time on the structure. Simplified method*

It can be observed that the maximum value of the vertical acceleration is notably inferior to that obtained previously without the modulation of the load (35% reduction).

Finally, the complete load model for the jogger, considering the movement of the load, has been implemented in SAP2000. To introduce the moving load, the load history at each node of the structures' model has to be defined. The choice of the nodes that will be loaded is done by defining "Paths" in SAP2000. Then the definition of the load history for each node is done in MATLAB [18], and later fed back to SAP2000. In its movement along the structure, the load is applied at only one node at each time. This is implemented by defining a step function for each node with value equal to unit whereas the position of the load, computed as a function of its velocity and the time passed, is comprised in the tributary length of the node, and null otherwise. This tributary length is taken as half the distance to the contiguous nodes at each side of the considered node. The step function for each node is then multiplied by the harmonic component of the load as defined in Eq. (8). The load history for a node is shown in Fig. 13.

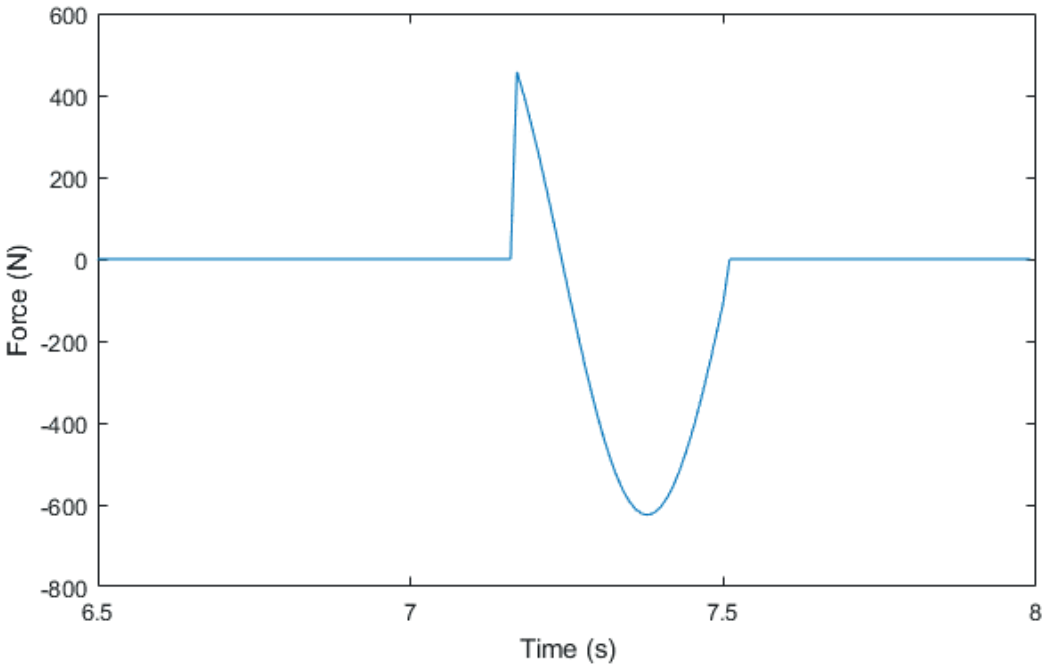


Figure 13. *Load history for a Veterinary Faculty footbridge model node*

Once the load history for each node of the Path has been defined, a single load case is created by adding the loads applied in all the nodes in the path. The calculations are done by directly integrating in time the effects of the load (Direct integration method). SAP2000 allows different methods to be used to compute the integration, in this case the Hilber-Hughes-Taylor method has been adopted. The integration coefficient used is $\alpha = 0$, which is equivalent to the Newmark method with $\beta = 0.25$ and $\gamma = 0.5$ (trapezoidal rule).

For direct integration in time using SAP2000, it is not possible to define a constant damping ratio for all modes. Instead, the Rayleigh damping model is used, fixing the mass and stiffness coefficients to obtain

a damping ratio of 1 % for the two first modes of vibration of the structure. For Veterinary Faculty footbridge, the values of these coefficients are: mass coefficient 0.1633; stiffness coefficient 5.04e-4.

The results obtained with this method are quite similar to those of the previous calculations as Fig.14 illustrates:

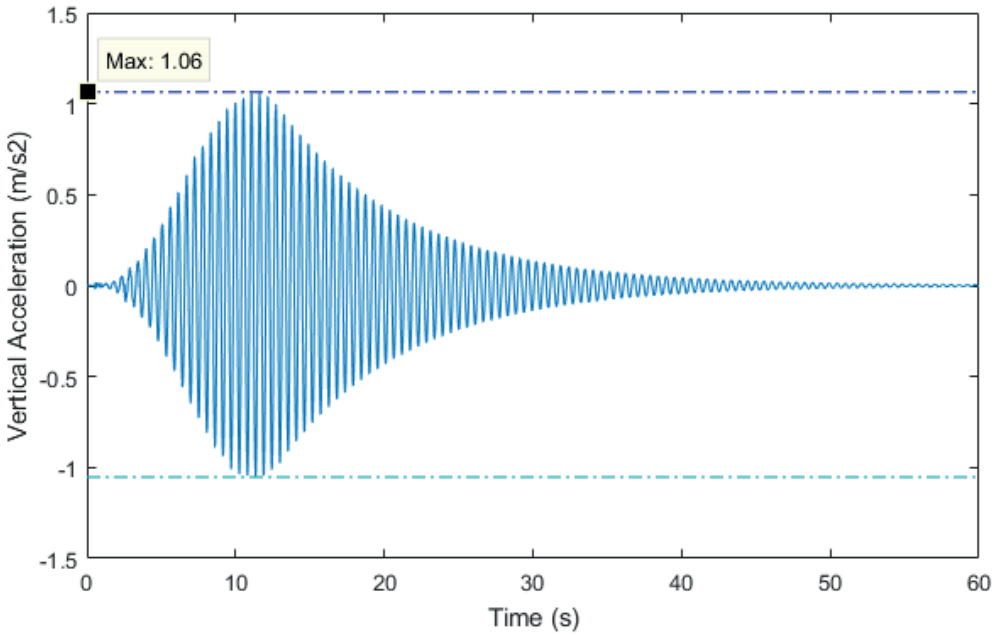


Figure 14. *Vertical acceleration from 0 to 60 s, running loading*

The results in terms of maximum vertical acceleration of the mid-span point for the different methods implemented above are compared in Table 7. Note that the three methods consider the time on the structure. It seems that the overestimation of the acceleration value when applying the simplified stationary load might be excessive and lead to a conservative design.

Table 7. Results comparison

Stationary load	Stationary modulated load	Moving load
1,60 m/s^2	1,04 m/s^2	1,06 m/s^2

To check the validity of the method used to implement the moving load in SAP2000, this same method has been applied to a simply supported beam spanning 40 m, and the results compared to the analytical solutions. Table 8, summarises the results in terms of maximum displacement obtained for the different calculations on the simply supported beam.

Table 8. Analytical and SAP2000 comparison for a simply supported beam

Case	Stationary load	Stationary modulated load	Moving load
SAP2000 model	0.0268 m	0.0183 m	0.0184 m
Equivalent SDOF model	0.0262 m	0.0183 m	-
Continuous beam model	0,0261 m	0,0183 m	0,0183 m

It is observed that the results for the moving load on SAP2000 estimate accurately the behaviour of the simply supported beam. The values reflected in Table 7 were obtained for a length of discretization of 1 m, and good convergence was observed for smaller element lengths. It must be pointed out that the modulated load method offers also very good estimations of the beam behaviour with a reduced computational effort.

5. CONCLUSSIONS

This paper has presented a summary of the different load models contained in some of the most relevant design codes representing the vertical loads of pedestrian traffic on footbridges. The different codes show very similar approaches for the definition of the load models. The SETRA guide and the JRC report, both include a load model representing pedestrian streams based on the substitution of the real traffic by an equivalent number of perfectly synchronised pedestrians.

The load models in the JRC guidelines have been applied to the case of study of Veterinary Faculty footbridge using the structural analysis software SAP2000. While the models for pedestrian streams do not imply excessive complexity for their implementation in the software, the definition of the moving load representing a person running on the structure requires external calculations, in this case developed in Matlab, as well as an extensive work importing and exporting data. A simplified approach using a stationary load which value is modulated accounting for the relevant mode shape seems much easier to implement and accurate enough.

Regarding the behaviour of Veterinary Faculty footbridge, it has been shown that for the heavier traffic classes it does not comply with the comfort requirements. Although, the experimental studies conducted on the structure [3] proposed 0.192 P/m^2 as value for the expected pedestrian density on the structure. This value is close to that defined for TC-2, 0,2 P/m^2, for which the corresponding comfort level following the JRC report guidelines would be medium (CL-2). The same study verified that the natural frequencies of the structure were not easily excited by a person running, which is in accordance with the critical range defined in the JRC report.

Future development of this study could address the horizontal load models for lightweight footbridges. Also, a more in-depth comparison with the experimental results seems necessary to better understand the behaviour of the structure and to check the results obtained with the different load models. This would require more precise numerical models and model updating techniques than those used for this study. Finally, the proposed methods for the implementation of the load models should be applied to other cases of study to validate the process and verify their adaptation to distinct types of structures.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge the financial support provided by Ministry of Economy and Competitiveness (Government of Spain) by funding the Research Project REVES-P (DPI2013-47441). The authors also acknowledge the partial financial support provided by the Research Net VIBRASTRUNET (BIA2015-71942-REDT).

REFERENCES

[1] EN 1991-2, Eurocode 1 – Actions on structures, Part 2: Traffic loads on bridges. European Committee for Standardization, (2003).

[2] Heinemeyer, C., Feldmann, M. (2009). Design of lightweight footbridges for human induced vibrations. JRC European Commission.

[3] García Cruz, A.A. (2016). Estudio del comportamiento dinámico de la pasarela peatonal PE0908 sobre la A-6 (Master's thesis). Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

[4] Rodríguez Aguilar, J.L. (2016) Análisis dinámico de una pasarela peatonal: modelo numérico y calibración (unpublished Master's thesis). Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

[5] Casado-Sánchez, C.M., De Sebastián-Sanz, J., M. Díaz, I. Poncela.Méndez, A., Lorenzana-Ibán. A. (2011). Control de vibraciones en pasarelas peatonales. *Dyna Ingeniería e Industria 86(3), 318-327.*

[6] British Standard BS 5400: Steel, Concrete and Composite Bridges, Part 2, Appendix C, Vibration Serviceability Requirements for Footbridges and Cycle Track Bridges. British Standards Institution, (1978).

[7] EN 1995-2, Eurocode 5 – Design of timber structures, Part 2: Bridges. European Committee for Standardization, (2005).

[8] EN 1990/A1, Eurocode 0 – Basis of structural design, Annex 2 – Application for bridges. European Committee for Standardization, (2005).

[9] ISO 10137 – 2007, Bases for design of structures – Serviceability of buildings and walkways against vibrations. International Organization for Standardization, (2007).

[10] FIB Bulletin 32: Guidelines for the design of footbridges. Fédération internationale du béton (FIB), (2005).

[11] Ontario Highway Bridge Design Code ONT 83, Ontario Government, (2000).

[12] SETRA, Technical guide – footbridges – Assessment of vibrational behavior of footbridges under pedestrian loading. Service d'Études Techniques des Routes et Autoroutes (2006.

[13] Butz, C. et al. (2007). Advanced load models for synchronous pedestrian excitation and optimized design guidelines for steel footbridges (SYNPEX), *Project RFS-CR-03019, Final Report*.

[14] HIVOSS (2008). Design of Footbridges. Guideline. Human Induced Vibrations of Steel Structure. *Hivoss-RFS2-CT-2007-00033*.

[15] Google Streetview ©2017 Google

[16] SAP2000® v18, Computers and Structures, Inc.

[17] De Sebastián J., M. Díaz, I., M. Casado, C., V. Poncela, A., Lorenzana, A. (2013). Evaluación de la predicción de aceleraciones debidas al tránsito peatonal en una pasarela en servicio. *Informes de la construcción, 65, 531, 335-348.*

[18] Matlab®, Mathworks.

FRP CONFINEMENT OF FIRE-DAMAGED CALCARENITE SAMPLES

Estevan, Luis[1]; Baeza, F. Javier[2]; Ivorra, Salvador[3]

ABSTRACT

In this work, experimental tests carried out on San Julian's stone samples (a calcarenite with which are constructed almost all the historical buildings of the city of Alicante, Spain) were made to assess the effect of FRP retrofitting after high temperature damage. Samples were exposed to real fire in the facilities of the Provincial Consortium of Firemen of Alicante. Besides, two different cooling methods were used: dry cooled at room temperature and fast cooling by spraying with cold water. In addition, two different FRP wrapping systems were used: carbon and glass unidirectional fibre fabrics, both embedded in epoxy resin. Fire-damaged specimens suffered a remarkable loss of strength and stiffness, greater in water cooled samples. The FRP jacket changes the mechanical behaviour and stress-strain curves showed an approximately bilinear response, with compressive stresses at failure in the order of 50 MPa and ultimate strain between 3-4%.

Keywords: FRP, confinement, fire-damaged, high temperature, stone.

1. INTRODUCCIÓN

Una buena parte de los edificios históricos que componen nuestro patrimonio están construidos con piedra. En muchas ocasiones se requiere intervenir sobre sus elementos estructurales por diferentes motivos: rehabilitaciones, cambios de uso, mejora de su respuesta ante acciones sísmicas o refuerzo tras un incendio u otras acciones accidentales.

Entre las distintas técnicas de intervención, una de las más habituales es el refuerzo de elementos comprimidos por confinamiento. Tradicionalmente estos refuerzos se han venido realizando con elementos metálicos o encamisados de hormigón, si bien en los últimos años se ha desarrollado notablemente la técnica del confinamiento mediante la aplicación de láminas de polímeros reforzados con fibras (FRP). Estos materiales presentan evidentes ventajas respecto de los sistemas tradicionales de acero u hormigón gracias a sus elevadas prestaciones mecánicas, no incrementan las cargas sobre la estructura ni alteran las rigideces originales de sus elementos, son materiales inalterables que apenas requieren mantenimiento, los productos son fácilmente transportables y manipulables y permiten una reducción de medios y plazos de ejecución.

[1] *Department of Civil Engineering. University of Alicante (SPAIN). luis.estevan@ua.es (Corresponding author)*
[2] *Department of Civil Engineering. University of Alicante (SPAIN). fj.baeza@ua.es*
[3] *Department of Civil Engineering. University of Alicante (SPAIN). sivorra@ua.es*

El confinamiento mediante FRP ha sido ampliamente estudiado en las últimas décadas para el caso de elementos de hormigón [1,2], lo que ha permitido el desarrollo de diferentes guías y códigos de diseño a disposición de arquitectos, ingenieros, investigadores o aplicadores en todo el mundo [3,4].

En comparación con la información disponible para el caso del hormigón, los estudios realizados en elementos de piedra o mampostería son, por el momento, muy escasos. En la mayoría de las investigaciones publicadas se ha trabajado con piezas de diversas geometrías formadas por fábricas de ladrillo de diferente naturaleza [5,6]. Sin embargo, apenas se han encontrado referencias para el caso de elementos de piedra [7].

Por otro lado, la pérdida de propiedades físicas y mecánicas de los materiales pétreos tras la exposición a elevadas temperaturas también ha sido objeto de numerosas investigaciones en los últimos años. En la mayoría de los estudios se analizan muestras de piedra sometidas a niveles de temperatura variables mediante el empleo de hornos eléctricos en laboratorio [8,9]. Sin embargo, las referencias en caso de exposición a fuego real son muy escasas [10].

Reuniendo los resultados de las dos líneas de investigación expuestas en los párrafos anteriores, se plantea el estudio del refuerzo por confinamiento con FRP de elementos pétreos comprimidos tras la exposición a elevadas temperaturas. Actualmente pueden encontrarse algunos estudios realizados en elementos de hormigón [11]. Sin embargo, las referencias en el caso de piezas de piedra o mampostería son prácticamente inexistentes [12] y en ningún caso sobre elementos expuestos a la acción de fuego real. Se considera importante ampliar el campo de conocimiento en este sentido, pues este tipo de refuerzos pueden suponer una técnica muy adecuada para el caso de soportes de piedra en edificios históricos que puedan haber quedado afectados por la acción de un incendio.

2. PROGRAMA EXPERIMENTAL

En este estudio se ha trabajado con probetas de piedra de San Julián, una calcarenita con la que están construidos la mayoría de los edificios históricos de la ciudad de Alicante. Las muestras proceden de los sondeos realizados para las obras de los túneles del tranvía en la Serra Grossa, al noreste de la ciudad. Se prepararon un total de 36 piezas cilíndricas, con un diámetro de 72 mm y 180 mm de altura, a fin de mantener una relación altura/diámetro de 2.5.

Algunas muestras se dejaron intactas como material de referencia y otras fueron sometidas a la acción de fuego real en las instalaciones del Consorcio Provincial de Bomberos de Alicante. En un contenedor destinado a ensayos y entrenamiento de los bomberos se generó un fuego controlado mediante la ignición de material combustible. Se instalaron sensores en distintos puntos que permitieron registrar las curvas de temperatura en el interior del contenedor, donde se alcanzaron valores máximos del orden de 850 °C. Se realizaron dos ensayos diferentes a fin de evaluar la influencia del sistema de extinción ante un eventual incendio: en el primero se mantuvieron las muestras durante 24 h en el interior del contenedor enfriándose lentamente hasta alcanzar la temperatura ambiente, mientras que en el segundo se procedió al enfriamiento brusco de las probetas mediante rociado con agua fría en el momento en que el fuego se encontraba plenamente desarrollado. En la Fig. 1 se muestran distintas imágenes de los ensayos realizados: probetas sometidas a la acción del fuego en el interior del

contenedor (a), proceso de rociado con agua fría para enfriamiento brusco de las muestras (b) y estado de las mismas a unos 25 °C una vez finalizado el proceso (c).

Figura 1. *Diferentes fases de la exposición al fuego de las probetas de piedra en las instalaciones del Consorcio Provincial de Bomberos de Alicante: etapa de calentamiento (a) y diferentes tipos de enfriamiento, rápido mediante rociado de agua fría (b) o lento mediante enfriamiento natural (c).*

Tras la exposición al fuego de las probetas, se procede al refuerzo de las mismas mediante confinamiento con FRP. Se ha empleado matriz de resina epoxi y tejidos unidireccionales de fibras de carbono (CFRP) o vidrio (GFRP). Las características mecánicas de los materiales compuestos fueron medidas de manera experimental, para lo cual se prepararon 5 probetas de cada tipo, de dimensiones 25x250 mm, que fueron ensayadas a tracción de acuerdo a la norma ASTM D3039 / D3039M-14 [13]. Los resultados se resumen en la *Tabla 1*, junto con los datos proporcionados por el fabricante para los tejidos y la resina epoxi.

Tabla 1. Propiedades de los materiales empleados en el refuerzo de las muestras.

Propiedad	Tejido fibra carbono [1]	Tejido fibra vidrio [1]	Resina epoxi [1]	CFRP [2]	GFRP [2]
Gramaje (g/m^2)	300	900	-	-	-
Espesor (mm)	0.166	0.480	-	0.81	1.08
Resistencia a tracción (MPa)	4830	2560	40	637	539
Módulo de elasticidad (MPa)	230000	80700	1400	56078	25344
Alargamiento en rotura (%)	2	3 – 4	1.8	1.16	2.21

[1] *Datos proporcionados por el fabricante*
[2] *Valores medios obtenidos experimentalmente*

El proceso de aplicación del refuerzo se resume en 5 etapas. Inicialmente se procede al cepillado y limpieza de la superficie lateral de la probeta. A continuación, se aplica mediante brocha una capa uniforme de resina epoxi en dicha superficie. Seguidamente se coloca una capa de tejido unidireccional de fibras de carbono o vidrio, que se dispone con un solape de 60 mm, lo que representa un porcentaje aproximado del 25% del perímetro de la probeta. Sobre el tejido se aplica una nueva capa de resina epoxi, prestando especial atención a la zona de solape. Finalmente se aplica presión mediante un rodillo ranurado de manera que la resina fluya a través de las fibras del tejido y éstas queden completamente impregnadas, cuidando que no queden burbujas de aire que puedan comprometer la resistencia del encamisado. Una vez reforzadas las probetas, se respeta un plazo mínimo de curado de 7 días antes de

proceder a su rotura, siguiendo las recomendaciones del fabricante. En la Fig. 2 se muestra el proceso de refuerzo de una de las probetas mediante CFRP.

Figura 2. *Procedimiento de refuerzo de las probetas mediante encamisado con CFRP.*

Las probetas reforzadas fueron sometidas a rotura por compresión uniaxial en una prensa de 300 kN de capacidad. Los ensayos se realizaron a una velocidad constante de 0.5 kN/s hasta rotura. Para el control de las deformaciones longitudinales se instalaron dos extensómetros en el plato superior de la prensa, mientras que las deformaciones transversales fueron obtenidas mediante dos galgas extensométricas por probeta, colocadas a mitad de altura y en puntos diametralmente opuestos. Los datos fueron registrados a una frecuencia de muestreo de 5 Hz mediante un equipo de adquisición de datos HBM Spider 8. En la Fig. 3(a) se muestran algunas probetas instrumentalizadas y listas para su rotura; en la Fig. 3(b) se detalla la prensa empleada en los ensayos y los dispositivos de medida de las deformaciones.

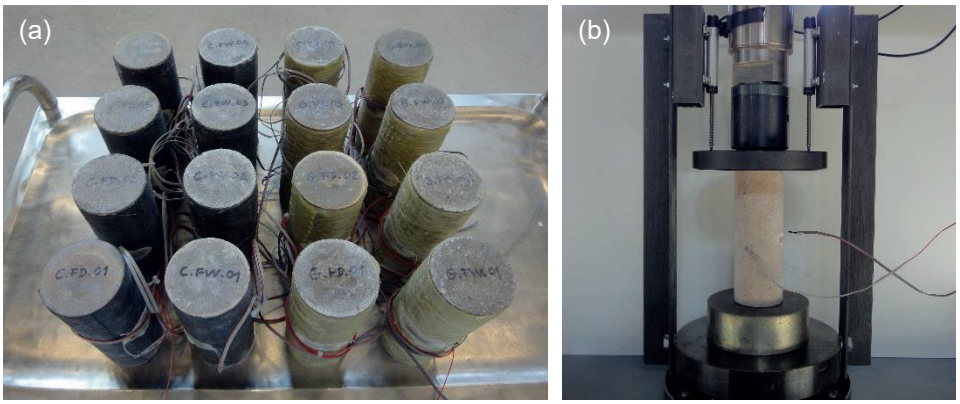


Figura 3. *Probetas instrumentalizadas listas para su rotura (a) y dispositivos empleados en los ensayos (b).*

Los ensayos se planificaron en base a 9 series compuestas por 4 probetas cada serie, tal y como se resume en la *Tabla 2*. Para la identificación de las diferentes muestras se ha adoptado la siguiente nomenclatura: la primera letra indica el sistema de refuerzo aplicado, N (sin reforzar), C (confinamiento mediante CFRP) y G (confinamiento mediante GFRP); las siguientes letras representan el proceso de exposición al fuego, N (sin exposición), FD (exposición a fuego real con enfriamiento lento) y FW

(exposición a fuego real con enfriamiento brusco); los números finales identifican el número de probeta en cada serie.

Tabla 2. Tipos de refuerzo y exposición de las muestras ensayadas.

Serie	Probetas [1]	Refuerzo	Exposición al fuego
01	N.N.XX	No	No
02	N.FD.XX	No	Si, enfriamiento lento
03	N.FW.XX	No	Si, enfriamiento brusco
04	C.N.XX	CFRP	No
05	C.FD.XX	CFRP	Si, enfriamiento lento
06	C.FW.XX	CFRP	Si, enfriamiento brusco
07	G.N.XX	GFRP	No
08	G.FD.XX	GFRP	Si, enfriamiento lento
09	G.FW.XX	GFRP	Si, enfriamiento brusco

[1] *Se preparan 4 probetas por serie, XX = 01, 02, 03, 04*

3. RESULTADOS

En la Fig. 4 se muestran los modos de rotura de las probetas sin reforzar (a) y confinadas con CFRP (b) o GFRP (c). Las probetas no reforzadas manifiestan una rotura frágil, con agrietamiento fundamentalmente en la dirección axial de la pieza. Las probetas confinadas presentan una rotura explosiva, súbita y sin previo aviso, con rotura de las fibras en la dirección perpendicular a las mismas y aproximadamente en la zona intermedia de la pieza; el material pétreo se muestra fuertemente disgregado y siempre aparece una fina capa adherida a la cara interior del encamisado, lo que pone de manifiesto la gran capacidad de adherencia de la resina epoxi empleada.

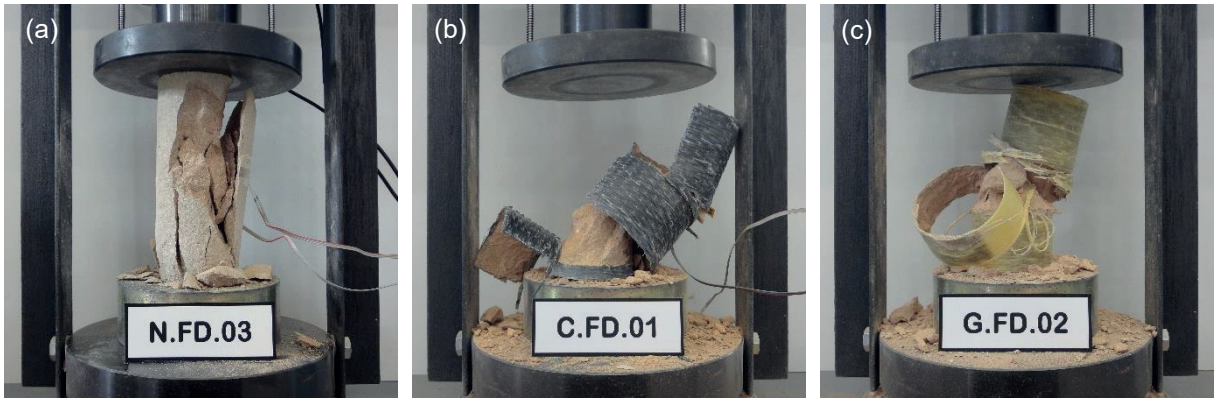


Figura 4. *Modos de rotura de las probetas sin reforzar (a) y confinadas con CFRP (b) o GFRP (c)*

Los resultados de los ensayos a compresión uniaxial se resumen en la *Tabla 3,* en la que se indican los valores medios de tensión y deformación de rotura obtenidos en cada serie de 4 probetas, así como los coeficientes de variación correspondientes (CV), a fin de evaluar la precisión alcanzada en dichos ensayos. Los incrementos de tensión y deformación de rotura se han calculado respecto de las series equivalentes sin confinar, con el objeto de analizar la eficacia cada uno de los sistemas de refuerzo empleados.

Tabla 3. Tensión y alargamiento de rotura para cada combinación de calentamiento y refuerzo.

Serie	Probetas	Tensión de rotura		Deformación de rotura		$\Delta\sigma_u$ (%)*	$\Delta\varepsilon_u$ (%)*
		σ_u (MPa)	CV (%)	ε_u (%)	CV (%)		
01	N.N.XX	19.84	6.97	0.21	2.29	-	-
02	N.FD.XX	6.94	8.54	0.84	11.19	-	-
03	N.FW.XX	5.90	20.60	0.69	15.14	-	-
04	C.N.XX	54.60	5.53	3.48	16.53	275	1657
05	C.FD.XX	52.23	10.57	3.64	9.75	752	433
06	C.FW.XX	52.40	1.13	3.63	9.02	888	526
07	G.N.XX	49.43	9.32	3.96	21.75	249	1885
08	G.FD.XX	49.68	8.51	4.21	12.63	716	501
09	G.FW.XX	46.31	9.64	4.54	22.48	785	658

* Incrementos calculados con respecto al valor sin refuerzo con el mismo tratamiento térmico.

3.1. Efecto de la velocidad de enfriamiento

En primer lugar, se discutirá el efecto del tipo de enfriamiento en las resistencias residuales de las muestras calentadas bajo condiciones de fuego real. En la Fig. 5 se han incluido las curvas tensión-deformación de cada una de las muestras que se ensayaron sin aplicar ningún refuerzo exterior con FRP. Se han representado tanto deformaciones longitudinales (acortamientos) como transversales (alargamientos, aunque expresándose estas últimas como valores negativos). Los resultados obtenidos con las probetas control, es decir, sin calentar ni reforzar, mostraron una baja dispersión, tal y como muestran las curvas representadas en la Fig. 5(a), y el CV por debajo del 7% para la tensión de rotura y del 2.3% para el acortamiento último (según *Tabla 3*). En este caso las deformaciones registradas mostraron un comportamiento prácticamente lineal hasta la rotura, que se produjo para una tensión media de 19.8 MPa, con un acortamiento en rotura del 0.2%.

Las curvas correspondientes para las probetas calentadas con fuego real ($T_{máx}$ = 850 °C) se incluyen en la Fig. 5(b) y 5(c), respectivamente para los casos de enfriamiento lento dentro del contenedor o enfriamiento rápido mediante rociado de agua fría. Lógicamente, en ambos casos la dispersión de resultados aumenta, sólo ligeramente en el caso de enfriamiento lento (pasando de un CV para la tensión de rotura del 7% hasta un valor del 8.5%), mientras que en el caso de enfriamiento con agua fría casi se triplica (llegando al 20.6%). Además, en ambos casos la dispersión de las deformaciones en roturas pasó del 2.3% hasta valores entre el 11% y 15% (*Tabla 3*). La resistencia a compresión de la roca sin reforzar bajó hasta los 5.90 y 6.94 MPa, lo que se corresponde con una resistencia residual del 29.7% en caso de enfriamiento rápido con agua, y del 35.0% si se deja enfriar de forma natural. Por otra parte, las deformaciones en rotura se vieron aumentadas hasta tres y cuatro veces del valor de la roca sana. Sin embargo, en este caso la tendencia vista para la tensión de rotura se invierte, siendo las muestras enfriadas lentamente las que mayor deformación presentaron (8.4%), mientras que las rocas más dañadas por un enfriamiento brusco rompieron sólo a una deformación del 0.69%. En cualquier caso, la pérdida de rigidez en el material resultó notable, como puede obtenerse comparando las curvas de la Fig. 5.

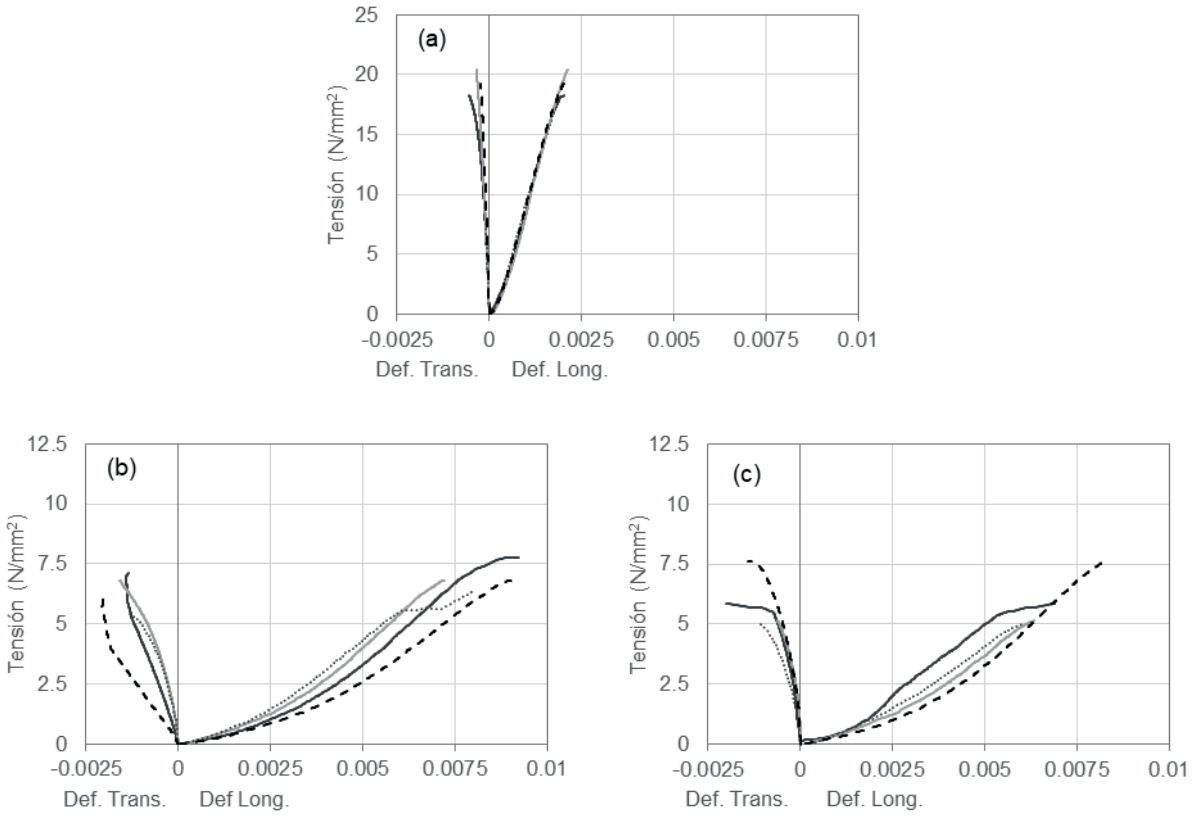


Figura 5. *Curvas tensión-deformación para muestras de calcarenita sin reforzar: (a) probetas de control sin calentar; (b) probetas quemadas y enfriadas lentamente; (c) probetas quemadas y enfriadas con agua. En todos los casos se representan las curvas de cuatro muestras diferentes ensayadas, con sus deformaciones longitudinales (positivas) y transversales (negativas).*

3.2. Efecto del refuerzo con FRP

Una vez se ha determinado la respuesta del material sin reforzar a los diferentes tipos de enfriamiento, la siguiente variable de estudio a considerar es la eficacia del refuerzo de las probetas con FRP, y si existen diferencias significativas entre el uso de los dos tipos de fibras en su fabricación (CFRP o GFRP). Para este fin, la Fig. 6 incluye las seis gráficas correspondientes a cada una de las condiciones de preparación restantes (series 4 a 9 en la *Tabla 2*), habiéndose aplicado una camisa de refuerzo de FRP en todas ellas una vez enfriadas hasta temperatura ambiente.

Comparando las curvas sobre rocas sin calentar, Fig. 6(a) y 6(b) para laminados de carbono y vidrio respectivamente, se aprecia ya a simple vista un cambio de comportamiento respecto al comentado en el apartado anterior (Fig. 5). En este caso, las probetas reforzadas presentan una rama de comportamiento plástico inexistente en muestras sin confinar. En ambos casos, la rama elástica se produce hasta tensiones del orden de 30 a 35 MPa, comenzando posteriormente la rama de plastificación hasta alcanzar deformaciones en rotura del 3.5% (CFRP) o 4% (GFRP). Esta mejora en la ductilidad queda más clara al compararla con la deformación en rotura de la roca sin refuerzo que fue sólo del 0.2%. Por otra parte, los límites elásticos observados están alrededor del 150% respecto de la tensión de rotura del material no confinado. Mientras que la camisa de FRP de refuerzo aumentó la resistencia de las probetas hasta el 275% (CFRP) o el 250% (GFRP) respecto del valor de la roca sin reforzar (19.8 MPa, *Tabla 3*). Por tanto, las probetas con una capa de laminado de carbono resistieron

tensiones de hasta 54.6 MPa, que fueron sólo de 49.4 MPa en caso de refuerzo con fibras de vidrio. Esta mejora de prestaciones como material de confinamiento se debe a las mejores características mecánicas del laminado de carbono como se indicaba en la *Tabla 1*. Por último, las muestras con CFRP también presentaron una mayor rigidez en su rama elástica.

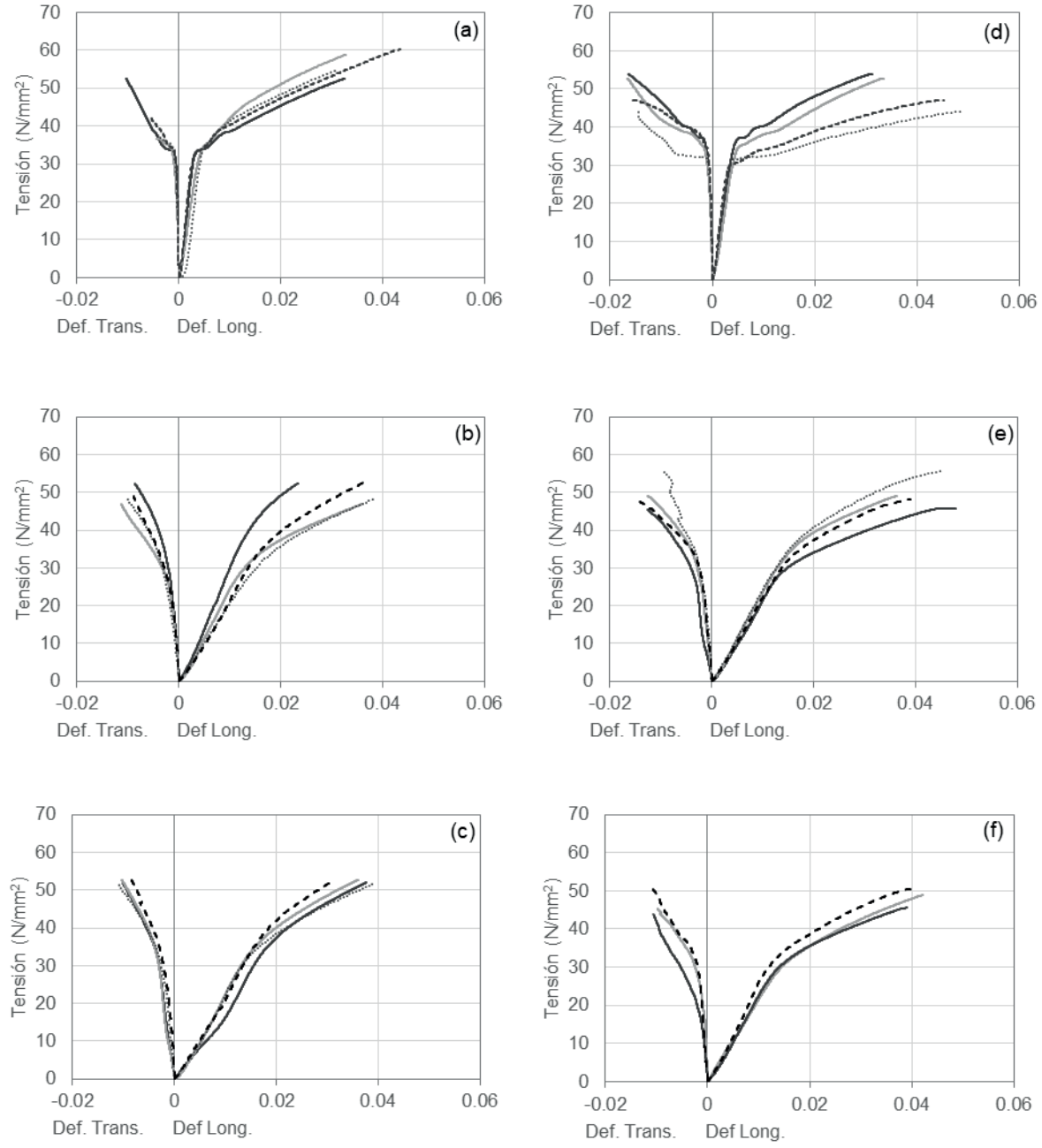


Figura 6. *Curvas tensión-deformación para muestras de calcarenita reforzadas: (a) CFRP sin calentar; (b) CFRP con enfriamiento lento; (c) CFRP con enfriamiento rápido; (d) GFRP sin calentar; (e) GFRP con enfriamiento lento; (f) GFRP con enfriamiento rápido. En todos los casos se representan las curvas de cuatro muestras diferentes ensayadas, con sus deformaciones longitudinales (positivas) y transversales (negativas).*

Asimismo, se puede observar patrones de comportamiento similares para las series sometidas a un enfriamiento natural, Fig. 6(b) y 6(e), o para las rociadas con agua fría (enfriamiento brusco), Fig. 6(c) y 6(f). En ambos casos se comprueba la eficiencia de las fibras para devolver al material dañado (tras ser expuesto a fuego real con temperaturas de hasta 850 °C) a un buen comportamiento mecánico, llegándose a obtener resistencias prácticamente idénticas a las del material no expuesto al efecto del fuego. Si se comparan los valores medios reflejados en la *Tabla 3*, la resistencia a compresión de las probetas con CFRP alcanzó 54.6 MPa (no quemadas), 52.2 MPa (enfriamiento lento) y 52.4 MPa (rociadas con agua fría). Las resistencias análogas en muestras reforzadas con GFRP fueron 49.4 MPa (no dañadas), 49.7 MPa (enfriamiento al aire) y 46.3 MPa (enfriamiento rápido). En este último caso, incluso las muestras con enfriamiento lento presentaron mayor resistencia que otras no quemadas, pero en cualquier caso, resulta necesario considerar la alta dispersión (CV casi del 10%) inherente al ensayo de materiales pétreos, y especialmente con exposición directa al fuego. A pesar de ser capaces de recuperar la tensión de rotura del material tras sufrir la exposición al fuego, el daño sí produjo cambios en el comportamiento mecánico, reduciendo el módulo de elasticidad y el límite elástico, y aumentando ligeramente la deformación en rotura de las muestras.

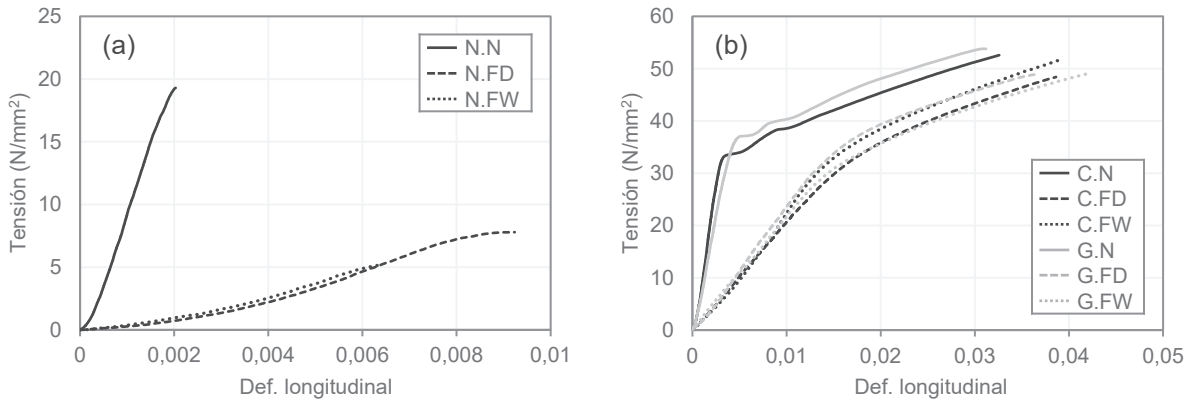


Figura 7. *Curvas tensión-deformación para probetas sin reforzar (a) y confinadas con CFRP o GFRP (b). Muestras sin quemar (N) y expuestas a fuego real con enfriamiento lento (FD) o brusco (FW).*

A modo de resumen, en la Fig. 7 se ha seleccionado una curva correspondiente a cada una de las series, representando esta vez sólo las deformaciones longitudinales para facilitar la comparación entre las distintas condiciones de refuerzo y exposición al fuego. En la Fig. 7(a) se puede observar la pérdida de resistencia y rigidez, y el aumento de la deformación que sufren las muestras de piedra no reforzadas al quemarse, independientemente del tipo de enfriamiento realizado. En la Fig. 7(b) se representan las curvas de las probetas reforzadas con los diferentes tratamientos térmicos empleados; puede comprobarse como todas las muestras alcanzan tensiones de rotura similares, aunque sí se aprecia una clara bajada del módulo de elasticidad en las piezas sometidas a la acción del fuego.

4. CONCLUSIONES

Las muestras de calcarenita empleadas se calentaron hasta 850 °C empleando fuego real, y enfriándose de forma natural o mediante rociado con agua fría, para posteriormente ser reforzadas con una camisa de material compuesto con fibras de vidrio o carbono y resina epoxi. Tras realizar ensayos de rotura a compresión de todas las muestras, y completar la discusión de resultados correspondiente, se pueden resumir las siguientes conclusiones:

En primer lugar, el método de enfriamiento no tiene excesiva influencia en la resistencia de las muestras sin refuerzo de FRP, ya que las tensiones de rotura residuales (una vez enfriada la roca) están entre el 30 y 35% respecto del valor de la roca sana. Sin embargo, las deformaciones en rotura si se vieron aumentadas hasta el triple o el cuádruple de su valor original.

Este patrón de comportamiento se repite en las muestras reforzadas, no existiendo diferencias significativas entre los distintos tipos de enfriamiento. Por el contrario sí se registraron ligeras diferencias entre ambos tipos de laminados de refuerzo. Las rocas encamisadas con laminados de carbono presentaron resistencias superiores, mientras que sus homólogas con fibras de vidrio mostraron una mayor deformación en rotura.

En cualquier caso, la principal consecuencia del refuerzo de este material pétreo con FRP fue que, independientemente del daño sufrido por la roca, su resistencia a compresión queda garantizada por el confinamiento con materiales compuestos, dependiendo su valor únicamente del tipo de refuerzo empleado y no del daño real sufrido por la probeta.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer al Consorcio Provincial de Bomberos de Alicante por su colaboración en la fase experimental del trabajo.

Asimismo se quiere reconocer el apoyo financiero de la Universidad de Alicante (VIGROB-212) para poder llevar a cabo la presente investigación.

REFERENCIAS

[1] Mirmiran, A., and Shahawy, M. (1997). Behavior of concrete columns confined by fiber composites. *Journal of Structural Engineering, 123(5), 583-590.*

[2] Lam, L., and Teng, J.G. (2003). Design-oriented stress-strain model for FRP-confined concrete. *Construction and Building Materials, 17(6-7), 471-489.*

[3] ACI (American Concrete Institute). (2017). Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening existing structures. ACI 440.2R-17, Farmington Hills, MI.

[4] CNR (National Research Council, Advisory Committee on Technical Recommendations for Construction). (2013). Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening existing structures. CNR-DT 200 R1/2013, Rome, Italy.

[5] Di Ludovico, M., D'Ambra, C., Prota, A., and Manfredi, G. (2010). FRP confinement of tuff and clay brick columns: Experimental study and assessment of analytical models. *Journal of Composites for Construction, 14(5), 583-596.*

[6] Krevaikas, T.D., and Triantafillou, T.C. (2005). Masonry confinement with fiber-reinforced polymers. *Journal of Composites for Construction, 9(2), 128-135.*

[7] Aiello, M.A., Micelli, F., and Valente, L. (2007). Structural upgrading of masonry columns by using composite reinforcements. *Journal of Composites for Construction, 11(6), 650-658.*

[8] Brotóns, V., Tomás, R., Ivorra, S., and Alarcón, J.C. (2013). Temperature influence on the physical and mechanical properties of a porous rock: San Julian's calcarenite. *Engineering Geology, 167, 117-127.*

[9] Hajpál, M. (2002). Changes in sandstones of historical monuments exposed to fire or high temperature. *Fire Technology, 38(4), 373-382.*

[10] Koca, M.Y., Ozden, G., Yavuz, A.B., Kincal, C., Onargan, T. and Kucuk, K. (2006). Changes in the engineering properties of marble in fire-exposed columns. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 43(4), 520-530.*

[11] Bisby, L.A., Chen, J.F., Li, S.Q., Stratford, T.J., Cueva, N., and Crossling, K. (2011). Strengthening fire-damaged concrete by confinement with fibre-reinforced polymer wraps. *Engineering Structures, 33(12), 3381-3391.*

[12] Estevan, L., Baeza, F.J., Brotóns, V., and Ivorra, S. (2016). FRP confinement of stone specimens after high temperature exposure: experimental tests. Euro-American Congress REHABEND, Burgos, Spain, 1457-1464.

[13] ASTM D3039 / D3039M-14. Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2014.

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

A tool for student's work and skills self-assessment

Sánchez, Jacobo[1]; Parra, José Antonio[2]; Alonso, Jesús[3]; Huerta, M. Consuelo[4]

ABSTRACT

This paper presents an automatic tool for students' personal work and competences assessment that has been applied in the course *Mechanics of Structures* with groups of more than hundred learners and for more than seven years. It is based on *Multiple Questions Sheets* (MQSs) adapted to an e-learning environment to complement the study of concepts currently implemented in AulaWeb (Web self-assessment tool developed by the ETSII-UPM, Madrid, Spain, to train engineers). With this tool it is easy to focus students' attention on the desired concepts while avoiding tasks that are not directly related to the desired learning like editing text, drawing figures or preparing presentations. As a result, study and continuous assessment activities can be easily and quickly generated and automatically corrected.

Keywords: Teaching method, Mechanics of Structures, e-learning, engineering competences, continuous assessment.

1. INTRODUCTION

The incorporation of new technologies to the engineering practice has led to the emergence of new technological fields considered important enough to be added to the university education, although its teaching is difficult to perform efficiently in the traditional way. For example, the computer use in structural engineering implies the extensive use of finite element calculation for which there is sometimes insufficient quality control of the results. Therefore, certain traditional methods used to calculate element forces should leave place in lectures for other activities that can improve the capacity for this task. Also, to bring uniformity to the engineering training among different countries, and especially in the European Space for Higher Education (ESHE), there is a current tendency towards learning based on competences and capacities (Bologna Declaration). Hence, it is necessary to update the traditional teaching method in order to ensure that students acquire basic concepts and are able to develop correct models and interpret results. Besides, the evolution of technological knowledge implies that students should attend classes covering new topics, like plastic materials. As a result, some classical subjects, like *Mechanics of Structures*, have seen reduced their number of lecture hours. Therefore, it is important to develop new tools that can continuously help students in their study and avoid any loss of main concepts. This should be done regardless of the number of students and imply no work overload for the instructor.

[1] *Dept. Mechanical Eng. ETSII UPM (SPAIN). jacobo.sanchez.herrera@gmail.com*
[2] *Dept. Mechanical Eng. ETSII UPM (SPAIN). jose.parra.hidalgo@alumnos.upm.es*
[3] *Dept. Mechanical Eng. ETSII UPM (SPAIN). j.alonso@alumnos.upm.es*
[4] *Dept. Mechanical Eng. ETSII UPM (SPAIN). mariaconsuelo.huerta@upm.es (Corresponding author)*

In 2004, the course lecture load of the course *Mechanics of Structures* at the *Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales* of the *Universidad Politécnica de Madrid* (ETSII-UPM) was reduced from ten to approximately five ECTS (Europe Credit Transfer System). It was necessary to rearrange the concepts and calculation methods, in an effort to avoid any omission, and to define the activities and tasks for the student's personal work in order to reinforce the efficiency of lectures. In addition, the number of students increased to more than one hundred in 2012. After reviewing the works of other authors, a method that seeks to address all these aims was developed and tested using an special tool that allows to define several activities for the students related to the main concepts in the course, avoiding the correction effort and promoting questions to be solved on tutorship.

In the classical approach, teaching activities put the emphasis on concepts and methods. At present, however, all learning activities should embrace the competences philosophy and transmit their corresponding concepts. There are numerous studies attempting to identify the competences that each student profile should develop and the subjects in which those competences should be gained, as well as studies assessing their learning. As Walther et al. [1] show, the engineering education is a complex process in where a range of influences outside the realm of explicit instruction contribute to the development of students. Instructors have to adapt the teaching-learning process with the aim of achieving a high degree of synergy between what is learned in the classroom and what actually satisfies the needs of the labor market. With this purpose, several works have appeared that attempt to define the competencies that students should acquire at university [2, 3, 4]. As Ball et al. [5] point out, the identification and validation of a set of global competencies ordered by their importance for engineering students also seeks to drive corporations to increasingly use a collaborative engineering process and teams to operate on a global scale.

Besides, the development of new technologies has significantly influenced the way in which teachers and students relate. The rapid evolution of computers and the Internet in recent years, in addition to the reduction in their costs, has made their access available to a large number of students. Hence, it is a requirement in many universities, whether at home or in their classrooms. This change in the way of interacting between the faculty and students is followed by another change in teaching methodology that has been adopted for some subjects that are taking advantage of automatic tools, distance learning, virtual labs, etc.

Currently, the implications of the use of several technologies are being studied in different groups of learners and there is a strong tendency to design new computer tools as new teaching methods that suit them. Such questions as the following arise: How is the continuous assessment done? What kind of works do students do? How is the effectiveness of the new tools being assessed? At what level is the Internet used? The teacher who wants to modify his teaching method and joins e-learning will seek a compromise between the complexity of the environment used and the time and dedication needed to develop the method.

In general, when more complex tools aimed at learning more specific skills are desired, the time and effort required for their development and implementation is greatly increased. For example, to generate exercises that assess student's programming ability, a tool has been developed that compiles

the program written by the student and compares some parameters, so that it is able to correct the program even if the solution is not unique [6, 7].

In many realms, especially in engineering, on-site practices developed in a laboratory remain central to students learning [8]. Sometimes, they also use some complex programs that, although not their main use, provide support to assimilate the desirable concepts [9]. There are often guidelines that help to prepare the practice and should be assimilated in advance by the student to attain maximum performance. In some cases, this means completing an initial test that represents an important correction effort for the teacher.

Frezzo et al. [10] emphasize that simulation environments are able to provide science and engineering students the possibility to interact with complex systems that otherwise would not be within their reach. Virtual practices are some of the most complex and specific works that use e-learning platforms. They attempt to simulate interactive labs with direct support to students covering different concepts and subjects. Many distance learning tools are being used to explain different experiments. These include those noted by Garcia-Beltran et al. [11] about industrial laser applications and techniques, and by Hashemi et al. [12], about the measurement of metal hardness and several calibration procedures. Other works attempt to cover in greater depth how to design the e-learning platform and the methodology used to show these experiments online [13, 14]. Nevertheless, there are some questions about their advantages versus traditional physical practices [15]. Sometimes the effort required to learn the handling procedure of the tool leads the student on a path that fails to materialize in the desired assimilation of concepts that the teacher seeks and the desirable practice of outcomes analysis.

This paper presents some of the tools used since 2006 in the half-year course of *Mechanics of Structures* at the ETSII-UPM for fourth year Mechanical Engineering students. The main guidelines are: (1) to focus the study on the basic concepts needed to cover the objectives for industrial Engeneering and (2) to offer the students the tools necessary to develop their *Personal Weekly Work* (PWW) on an e-learning platform (Aula-Web) with self correction capacity in a way that tutorships will be strengthened without an excessive correction effort by teachers.

2. METHODOLOGY

2.1. Didactic objectives

The program objectives for Industrial Engineering Degree of Spanish universities cover two main educational aims for their students:

1. They should acquire knowledge of the scientific and technological aspects of: mathematical, analytical and numerical methods in the engineering, physical foundations, electrical engineering, energetic engineering, chemical engineering, mechanical engineering, mechanics of continuous media, automatic electronics, manufacture, materials, quantitative methods of management and industrial computer science, which qualify them for the learning of new methods and theories, and provide with versatility to adapt to new situations.
2. They should develop the aptitude to solve problems with initiative, creativity, critical reasoning, and to report and transmit knowledge, ability and skills in the field of the industrial engineering

An important effort has been done since 2006 in the Department of Structural Mechanics and Industrial Constructions of ETSII-UPM for the assessment of one of the competences related to the Industrial

Engineering Degree, namely the "ability to apply scientific, mathematical and technological knowledge in systems related to the engineering practice." The associated indicators which allow a specific measurable statement identifying the performances required to meet the outcome are collected on table 1.

Table 1. An Industrial Engineering competence and its indicators (ETSII-UPM)

Competence	
Ability to apply scientific, mathematical and technological knowledge in systems related to engineering practice	
Indicators	
1	Identify and describe the fundamental scientific, mathematical and technologic principles applicable to various systems and processes
2	Identify the specific objectives proposed in the system
3	Formulate models that describe the system's behavior according to the identified objectives
4	Solve models following the most appropriate procedures
5	Evaluate the validity and reliability of the model solution applied

The subject selected to implement the methodology is Mechanics of Structures (4.8 ECTS). It is included in mechanics of continuous media and covers structures with line elements, with and without bending, and axisimetric shell elements, using equilibrium equations for isostatic cases and the stiffness matrix method as an introduction to the Finite Element Method (FEM). The procedure used is based on the preparation of self-assessment material that covers the competences following the indicators. Its specific purpose is to guide student learning in several activities outside the classroom, so in-classroom lessons are complemented. During the 14 weeks, more than one hundred students can attend many optional activities that are directly related to the concepts and methods that students should learn. Those activities can be classified in three groups: modeling seminar, physical model and numerical model practices and application to examples used in other subjects. On table 2 are collected the main educational goals followed by some didactic material used for each activity.

Table 2 Educational goals used to define activities in Mechanics of Structures

Nº	Educational goal
	Basic knowledge in the use of a computer program (FEM): Modeling Seminar
1	Modeling systems
2	Use of basic magnitudes
3	Virtual practice with audiovisual material: Review of concepts about structural typology
	Development of laboratory practices with physical and numerical models
4	Previous study of the practice material and results prediction
5	Analysis of results obtained during the practice
	Application to other subjects: Multidisciplinary
6	Review of concepts about physical models
7	Identification of elements in a set
8	Performing exercises with an important role of units

2.2. MQS: a tool for student's personal work

In attending to the current tendency that reduces the time for lectures, it has become very important in Mechanics of Structures to guide the student's personal work. This have been managed including complementary activities to cover some aspects of learning and testing its efficiency by some exercises. These activities have been proposed as off-site tasks complementary to on-site lectures. They are focused on intensifying some concepts and on reviewing the teaching material that doesn´t need to be covered in the class room. Examples of off-site practices include reviewing information on audiovisual media, with a subsequent exercise that checks if the proposed concepts have been well understood, and executing activities with computer programs, using a subsequent exercise to check the results and ensure that the analysis has been conducted correctly.

For large groups of students, the number of exercises that should be corrected increases significantly and an automatic tool becomes very useful as an aid in this task. Complex questionnaires with several formats and special designs are used in this regard. These exercises are quite different from those obtained with a random selection of simple questions database. Firstly, they differ due to the type of questions in the same exercise (i.e., texts, numbers, drop-down menus, etc.). Secondly, despite the necessary randomness, it is necessary to ensure that the same concepts are proposed to every student. To develop and update all of the exercises, it is important to have guidelines for their definition. The starting point is the Multiple Questions Sheets (MQSs). Every MQS is defined as a group of questions that covers different concepts with a concrete educational purpose and is chosen in relation to a specific competence. Each of these sheets can be very versatile, allowing the inclusion of: single-selection queries, in which one option should be chosen from those listed in a drop-down menu; multi-selection queries, in which there is more than one correct option; and numeric queries, where the answer is a numeric result that can be corrected using an exact solution or a variable margin. With an effective definition of the MQS, it is possible to use a database and, depending on different criteria, select some of them for each student to create a Personalized Sheet (PS) that can be similar for some students, but not exactly the same.

More than 25 basic MQS have been developed for this subject (Mechanics of Structures), some of which have been used with different databases. Only eight are presented below according with the educational goal on table 2: three correspond to those used for the modeling seminar, two for the laboratory practices; and three more show the multidisciplinary material used in conjunction with other subjects. All the developed material is based on eight forms implemented with java programs which use ASCI files and jpg files for figures.

3. MQS FOR MODELING SEMINAR

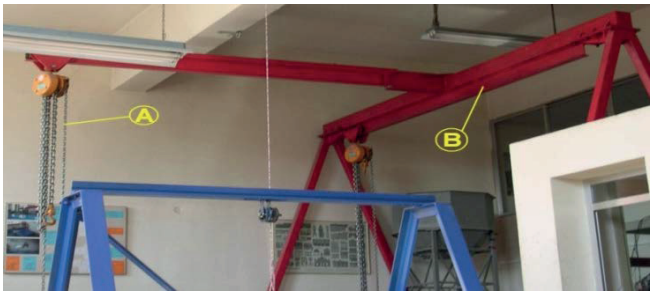
The MQSs that cover the indicators three and five of those defined in Table 1 do emphasis on the basic knowledge about the structures modeling by means of a finite element computer program. The MQSs related to the goals one and two of Table 2 are collected in one exercise that is proposed periodically, which is focused on increasing the modeling competences and helps in the continuous evaluation. Another MQS from those presented is related to a virtual practice in which students watch some videos that cover simple concepts about structural typology.

3.1. Modelling systems

The first MQS (Fig. 1) assesses the student's ability to *formulate models that describe the system behavior according to the identified objectives* (Indicator 3 of Table 1). From among the 20 different cases defined in a database, one PS is proposed to each student. It presents a photo of a structure to be modeled with a finite element program. There are several tables that the student should complete marking only some boxes. With this format, students are asked to decide which elements should be used for the model of the different parts of the structure, the physical variables required for its definition and the types of results that the element can present (i.e., forces and stresses) including always the units.

On the first occasion on which students are required to complete these MQSs, they must deal with difficulties such as the type of questions and the information included. The benefit is that, since the beginning of the subject, all of the structure types are present, as in a commercial program and, after 16 MQSs, they have become part of the students' knowledge.

FEM: STRUCTURAL MODEL DEFINITION



Complete the next sheet using the letters A and B for each element in the image and assuming a load of 120kg hung on each chain:
A-Chain
B-Red structure

ELEMENT'S BEHAVIOUR

	BAR 2D	BAR 3D	BEAM 2D	BEAM 3D		SHELL	SOLID 2D	SOLID 3D
Articulated					Slab			
Cables		A			Plate			
Girders					Membrane			
Others				B	Sheet			

Characteristics	E	G	υ	A-t	A*	I1	I2	J
BAR	A			A				
BEAM	B	B		B	B	B	B	B
SHELL								

FORCES AND STRESSES

Forces	Nx	Ny	Nxy	Qx	Qy	Qz	Mx	My	Mz	Mxy
BAR	A									
BEAM	B				B	B	B	B	B	
SHELL										
Units	N				N	N	Nm	Nm	Nm	

Stresses	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{xz}
BAR	A					
BEAM	B			B		B
SHELL						

Figure 1. *Systems modeling MQS: element types and variables in a structural model.*

3.2. Use of basic magnitudes

The second MQS (Fig. 2) focuses on the student's ability to *evaluate the validity and reliability of the model solution applied* (Indicator 5 of Table 1). Three different profiles of structural elements are presented in the PS, from among the seven defined in a database. Students should select the one that is consistent with the stress distribution and obtain the resultant forces on the section or, otherwise, obtain the stress distribution from the section forces.

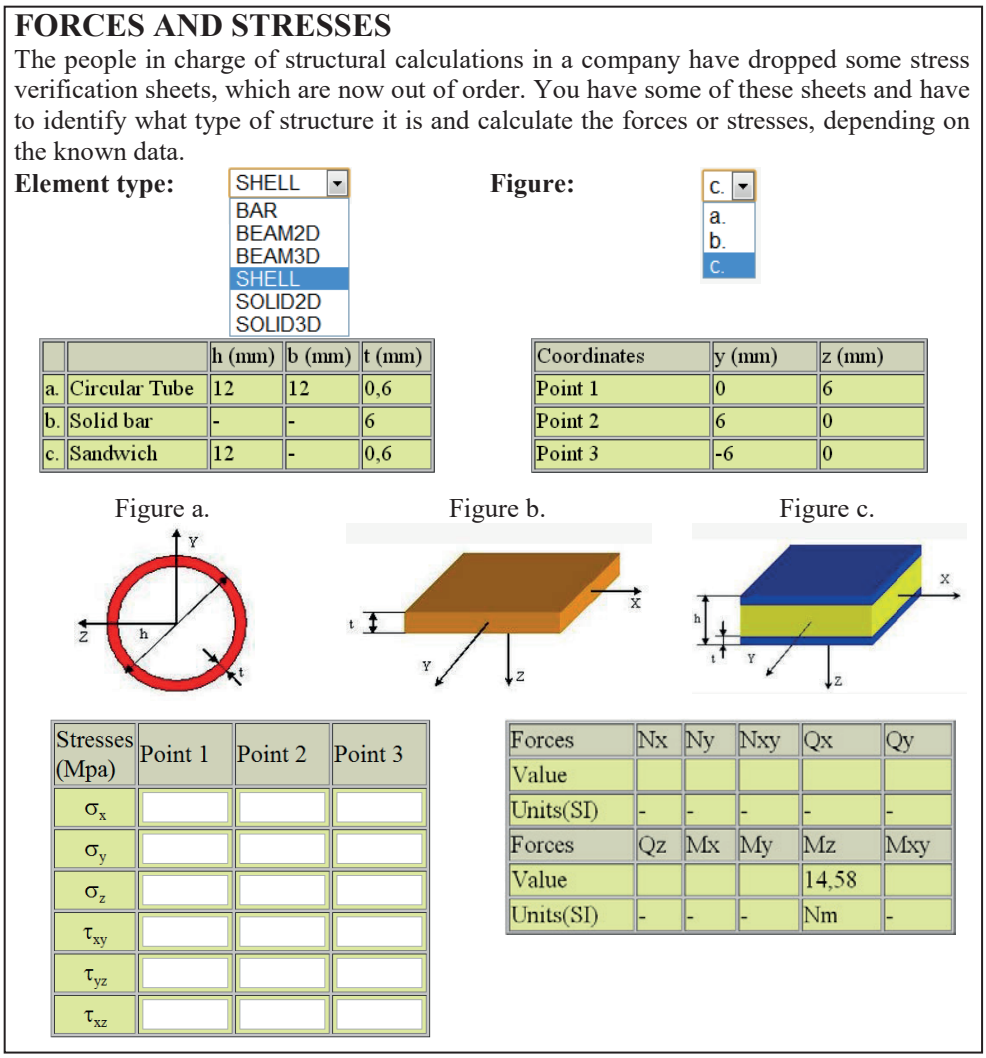


Figure 2. *Use of basic magnitudes MQS: relationship between forces and stress distributions.*

3.3. Virtual practice with audiovisual material: Review of basic concepts

Fig.3 shows an MQS applied to a task related to audiovisual review as a post exercise. Students have to review an audiovisual material and an MQS related to the covered concepts is proposed. This is a complement to the virtual practice guiding the student learning during the execution of off-site activities. Some multi-selection queries that are chosen randomly from a questions database are set out. Each question has different true/false queries, which also are chosen randomly from a queries database that is attached to each question. This MQS is the most similar to the questionnaires tools. The main difference is that each question is selected from a group that tries to cover one concept including several options for the phrases in such a way that every student has his/her own different PS with all important concepts. These Ps possibly contain some common questions but in different order.

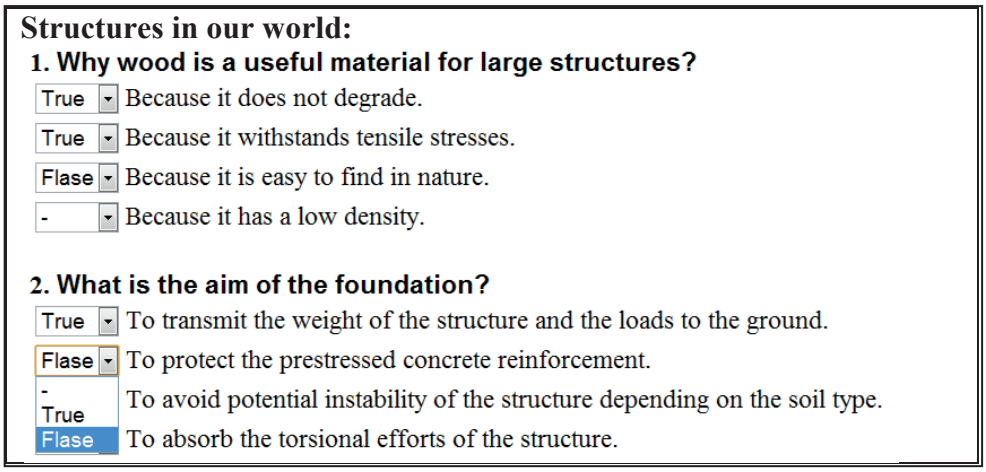


Figure 3. *Virtual practices MQS: checking the concepts learnt in an off-site practice.*

4. LABORATORY PRACTICES WITH PHYSICAL AND NUMERICAL MODELS

Another interesting field of application of this procedure is in student laboratory practices. When some teaching material is available (usually a practice outline), it is relatively easy to define MQSs which provides guidance on the most relevant aspects. In *Mechanics of Structures* a previous exercise is designed following three specific steps: (1) a review of the objectives and phases of the practice; (2) an identification of the used equipment; and (3) an estimation of results (solving simple problems). After the laboratory practice a post exercise is proposed with: (4) a summary of the practice with the analysis of some specific data and (5) queries about the important concepts.

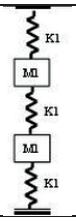
4.1. Previous study of the practice material and results prediction

For lab practices, a previous exercise that forces students to prepare for its execution can increase the benefit obtained during the activity. Inducing students to read and study the practice guide is often enough. They review in advance the theoretical aspects that they will use, the equipment to use and the different phases into which the activity is divided. In some occasions, the student must use a computer tool in the on-site activity to immerse himself more deeply in some theoretical concepts. In this case, carrying out a simple numeric exercise before the practice would induce him to use this tool, thereby avoiding elemental problems during the activity and preparing a prediction of the measurements.

Six practices are included in *Mechanics of Structures*: two from the laboratory with physical models and four undertaken in front of the computer with numerical models. Fig. 4 shows the MQS used in a previous exercise of the first practice in which the model concept is worked with simple tests correlated with numerical models. For each student (PS), four images appear and the student should complete the attached table with the objectives, the equipment used and the order of execution of each different activity that was going to be carried out in the on-site practice. This MQS is designed to cover steps 1 and 2.

In this practice, you are going to carry out activities in four stages. Fill out the attached table taking into account the group you could be assigned. Indicate which image is representative of each stage.

Group: 5

2 Degrees of Freedom	Xylophone	Stroke with cricket bat	Crankshaft
			
1	2	3	4

Stage	Image	Name	Objective	Tools	Schedule
II	-	Continuous systems modeling	Length of model and boundaries	-	-
III	-	Discrete systems modeling	Mass model and DOF associated	Chronometer	-
IV	-	Complex systems modeling	Forced vibration and resonances	-	-
V	-	Modal test	Dynamics characteristics: standard test	Tachometer	-
				Thermometer	
				Chronometer	
				Stroboscopic lamp	
				Accelerometer	
				Micrometer	
				None	

Figure 4. *Previous study of a practice material and results prediction.*

4.2. Analysis of results obtained during the practice

After the on-site practice, a new exercise is proposed to check each student's level, to reinforce the most important concepts and to cover the results analysis. In many engineering practices, not only the numerical data measured in a test or obtained from a calculation are important, but also the students should interpret their meaning.

Fig. 5 shows an MQS applied to a post exercise of a numerical modelling practice using the matrix stiffness method with a commercial computer program. Numerical data obtained during the execution of the on-site practice are requested, assuming a range of values for the correct answer (usually 5%). There are also several simple selection queries with a drop-down menu that differ for each student (PS), but are organized so that they are always asked for the same concepts. This sheet is designed to cover step 4 and 5.

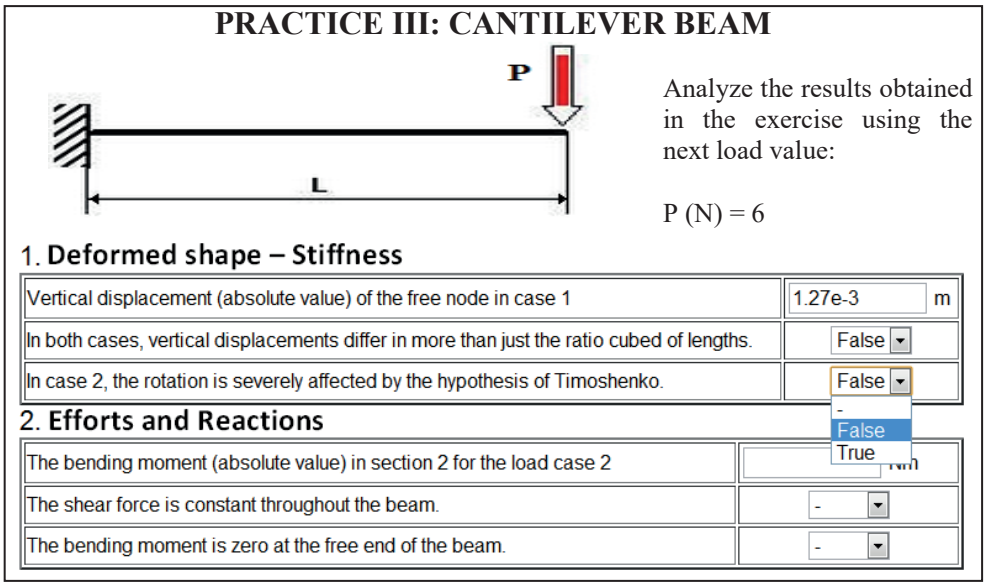


Figure 5. *Analysis of results obtained during the practice.*

5. RESULTS

The methodology applied to *Mechanics of Structures* has achieved successfully the objectives pursued. For the PWW of each student, 76 MQS should be worked around the different activities associated to different educational goals, similar to those indicated in Table 2. Every activity is usually checked by exercises, each of which consists of several MQSs that are based in certain templates but are proposed several times using different databases. On the whole, the MQSs are proposed via Aulaweb in the 35 exercises scheduled throughout the 14 weeks of the course. The knowledge acquired is checked in a specially designed exam called "*Skill and Knowledge Joint Test*" that is evaluated on ten points. A threshold of four points is necessary to add the mark achieved in the PWW, which is a maximum of 2 points. Two MQSs, that are similar to those proposed during the course in the modeling seminar, are included in this exam for a maximum of 2.2 points. Apart from that, three more exercises examine the application of equilibrium laws in articulated structures, the use of the stiffness matrix method in rigid nodes and the calculation of isostatic forces in axisymmetric tanks.

It is observed that a 90% of the students have more than 0.5 points in their PWW mark but the percentage of them that have more than 1.2 points are similar to the percentage that passed the exam. In the same way, almost all years the percentage of students attending the lectures is similar to those with more than 1.2 mark on the PWW and probably use the method for continues study. The high quantity of equivalent single personalized questions answered by each student at the end of the course is near 1100 proposed in a specific didactic way and shows the efficiency of the proposed tool that induce the student work without any correction effort to the teacher.

6. CONCLUSIONS

It has been more than seven years since the methodology using MQS was initiated for the subject of Mechanics of Structures at the ETSII-UPM. About 35 exercises are proposed every year as off-site tasks to guide the students' personal work throughout the course, focusing on intensifying some concepts and on reviewing the teaching material that does not need to be covered in the lecture room. Hence,

76 MQSs have been developed with special emphasis on the students' work, avoiding any additional effort not directly related to the kind of learning that is sought for the activity. From those, eight representative examples have been selected and presented according with the competence and the educational goals of the subject: modeling seminar, laboratory practices and multidisciplinary application. An important point is that every MQS has been defined with a concrete educational purpose selecting a group of questions that covers the desired concepts with some alternatives for each questions to allow differences between students. The main effort is the definition of the MQS because the implementation is easy with an ASCI and jpg files for the database

The MQSs are proposed in an accessible environment for the students through the Internet in Aulaweb making use of the new e-learning technologies. The most important aid for the methodology is a computer tool that corrects the MQS automatically, allowing better use of the teachers' time and encouraging tutorships. The final mark obtained by students correlates highly with the personal work mark during the last five years and the analysis of the opinion polls for the same years also shows the effectiveness of this teaching method.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are grateful for the support of the Universidad Politécnica de Madrid for projects "*Automatización de Preguntas de Varias Respuestas de Aulaweb utilizando Fichas de Múltiples Respuestas aplicables a distintas actividades de autoevaluación*" and "*Incorporación de las Fichas de Múltiples Respuestas de Aulaweb en la adecuación de varias asignaturas al plan de Bolonia desarrollando y actualizando las actividades de autoevaluación*". The authors also appreciate the support offered by the teachers responsible for the maintaining and updating of Aulaweb.

REFERENCES

[1] Walther, J., Kellam, N., Sochacka, N. & Radcliffe, D. (2011). Engineering competence? An interpretive investigation of engineering students' professional formation. Journal of Engineering Education, 100(4), 703-740.

[2] Ahn, Y. H., Pearce, A. R. & Kwon, H. (2012). Key competencies for US construction graduates: industry perspective. Journal of Professional Issues in Engineering Education and Practice, 138(2), 123-130.

[3] Fernandez, I. & Suarez, B. (2011). University competencies. Journal of Materials Education, 33(5-6), 255-262.

[4] Passow, H. J. (2012). Which ABET competencies do engineering graduates find most important in their work?. Journal of Engineering Education, 101(1), 95-118.

[5] Ball, A. G., Zaugg, H., Davies, R., Tateishi, I., Parkinson, A. R., Jensen, C. G. & Magleby, S. P. (2012). Identification and validation of a set of global competencies for engineering students. International Journal of Engineering Education, 28(1), 156-168.

[6] Garcia-Beltran, A. & Martinez, R. (2006). Web assisted self-assessment in computer programming learning using Aulaweb. International Journal of Engineering Education, 22(5), 1063-1069.

[7] Garcia-Beltran, A., Tapia, S., Martinez, R. & Jaen, J. A. (2009). Simulator for a multi-programming environment for computer science learning and teaching. International Journal of Engineering Education, 25(2), 221-227.

[8] Konstantinos, B. B. & konstantinos, D. K. (2009). Using laboratory experiments and circuit simulation IT tools in an undergraduate course in Analog Electronics. Journal of Science Education and Technology, 18(6), 546-555.

[9] Jimenez, F. & Consuelo Huerta, M. (2010). Educational software program for teaching modal testing. Computer applications in engineering education, 18(3), 485-494.

[10] Frezzo, D. C., Behrens, J. T. & Mislevy, R. J. (2010). Design patterns for learning and assessment: facilitating the introduction of a complex simulation-based learning environment into a community of instructors. Journal of Science Education and Technology, 19(2), 105-114.

[11] Garcia-Beltran, A., Ocana, J. L., Molpeceres, C., Morales, M., Gonzalez, J. M., Blasco, M. & Lordachescu, D. (2011). A virtual laboratory for laser transformation hardening. International Journal of Engineering Education, 27(4), 713-721.

[12] Hashemi, J., Chandrashekar, N. & Anderson, E. E. (2006). Design and development of an interactive Web-based environment for measurement of hardness in metals: A distance learning tool. International Journal of Engineering Education, 22(5), 993-1002.

[13] Jara, C. A., Candelas, F. A., Torres, F., Dormido, S., Esquembre, F. & Reinoso, O. (2009). Real-time collaboration of virtual laboratories through the Internet. Computers & Education, 52(1), 126-140.

[14] Andujar Marquez, J. M. & Mateo Sanguino, T. J. (2010). Design of virtual and/or remote laboratories. A practical case. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 7(1), 64-+.

[15] Lindsay, E. D. & Wankat, P. C. (2012). Going the way of the slide rule: Can remote laboratories fungibly replace the in-person experience?. International Journal of Engineering Education, 28(1), 192-201.

Families of free-standing pre-stressed pin-joined structures. Some remarks on stability.

Gil Martín, Luisa María[1]; Fernández Ruiz, M. Alejandro[2]; Carbonell Márquez, Juan Francisco[3]

ABSTRACT

The non-degeneracy condition for the *free-standing pre-stressed pin-joined structures leads to several solutions which correspond to* different relationships between the force-length coefficients adopted for the bars. Some of these solutions lead to full structures whereas that others ones correspond to folded shapes, in which nodes and bars overlap. It has been proven that it is not possible to obtain structures of the same family from purely geometric criteria.

From stability and global elastic buckling criteria has been proved that folded forms are more stable than the complete ones of the same family and can withstand a higher level of pre-stress. The stability improves and pre-stress level withstood increases if redundant elements are removed.

A matrix expression of the geometric stiffness matrix usually used in structures is presented in function of the blocks of the equilibrium matrix which correspond to the Cartesian coordinates defining the affine space.

The maximum pre-stress level which this type of structures can withstand is determined as the lower eigenvalue of the buckling problem.

Keywords: pin-joined free-standing structures, tensegrities, geometric stiffness matrix, stability, maximum pre-stress.

1. INTRODUCCIÓN

Las tensegridades son un caso particular de estructuras articuladas con todos los nodos libres y con las barras sometidas a esfuerzos que, al no existir cargas exteriores, están autoequibrados. Estas estructuras están formadas por cables, elementos a tracción, que dan continuidad a la estructura y por barras comprimidas que, en el caso de las tensegridades, constituyen un sistema discontinuo con la peculiaridad de que dos barras comprimidas no pueden confluir en el mismo nodo.

[1] *Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica. Universidad de Granada (ESPAÑA). mlgil@ugr.es (Corresponding author).*
[2] *Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica. Universidad de Granada (ESPAÑA). malejandrofr@ugr.es.*
[3] *Departamento de Mecánica. Universidad de Córdoba (ESPAÑA). jcarbonell@uco.es.*

Las tensegridades suelen ser tanto estática como cinemáticamente indeterminadas y para su cálculo se admite que no se produce plastificación ni pandeo, que todos los nudos son articulados y que el área de la sección transversal es constante.

Dadas las peculiaridades de este tipo de estructuras, principalmente su poco peso así como su carácter modular y desplegable, las tensegridades han sido aplicadas en las últimas décadas a campos tan diversos como biología [1], robótica [2] o ingeniería aeroespacial [3].

En este artículo se estudia la relación entre distintas estructuras que se han englobado en "familias". La peculiaridad de las estructuras de una misma familia es que todas surgen de un mismo patrón topológico pero la duplicidad de nodos y elementos da lugar a distintas formas de equilibrio. La familia de tensegridades que se estudia en este artículo incluye el octaedro expandido, ampliamente estudiado en el contexto de este tipo de estructuras [4][5]. En este artículo se analiza la estabilidad y se propone una formulación matricial para la matriz de ridigez geométrica tradicionalmente empleada en estructuras. El nivel máximo de pretensión a las que se puede someter este tipo de estructuras se fija como el menor autovalor del problema de pandeo.

2. CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO Y TENSIONES AUTOEQUILIBRADAS.

A diferencia de las estructuras convencionales, en las que los grados de libertad de algunos de los nodos están restringidos, en las estructuras que se analizan en este artículo las posiciones de los nodos en la configuración definitiva son incógnitas y, por tanto, las ecuaciones de equilibrio constituyen un problema no lineal en el que la configuración de equilibrio –o posiciones definitivas de los nodos- y las cargas axiales a las que están sometidas las barras están relacionadas entre sí.

Puesto que no se consideran cargas exteriores aplicadas, los axiles de las barras constituyen un sistema de fuerzas autoequibrado.

Uno de los métodos más extendidos para obtener la configuración de equilibrio de este tipo de estructuras es el Método de Densidad de Fuerzas [6,7] (FDM), que linealiza las ecuaciones de equilibrio imponiendo que las relaciones fuerza-longitud en los elementos sean constantes.

Las ecuaciones de equilibrio se pueden expresar de forma matricial como [8, 9, 10]:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{Dx}&=\mathbf{0}\\ \mathbf{Dy}&=\mathbf{0}\\ \mathbf{Dz}&=\mathbf{0}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

siendo **D** la matriz de densidad de fuerzas, definida como: $\mathbf{D} = \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}$ ($\in \mathbb{R}^{n\times n}$) y ***x***, ***y*** y ***z*** los vectores de las coordenadas de los *n* nodos de la estructura. La matriz **C** es la matriz de conectividad de la estructura que tiene tantas filas como elementos, *m*, y tantas columnas como nodos, *n*.

Si el elemento *k* une los nodos *i* y *j* (con *i*<*j*), entonces:

$$\mathbf{C}\,(k,r)=\begin{cases} +1 & si \quad r=i \\ -1 & si \quad r=j \\ 0 & si \; r \neq i, j \end{cases} \tag{2}$$

La matriz **Q** es la matriz diagonal del vector **q** que contiene los coeficientes fuerza-longitud de los *m* elementos, **q**=(q_1,q_2,...,q_m).

La dimensión espacial de la tensegridad está relacionada con el rango de la matriz de densidad de fuerzas (Eq. 1), Rank(**D**). Es evidente que Rank(**D**)<n, puesto que han de existir soluciones de ***x***, ***y*** y ***z*** distintas de la trivial. Si la tensegridad se va a desarrollar en el espacio de dimensión *d*, se ha de verificar que:

$$rank\,(\mathbf{D}) = n-(d+1) \tag{3}$$

Hernández-Montes et al. en [10] proponen obtener los valores de q_i requeridos para que se satisfaga la Eq.(3) a partir de la resolución del sistema de ecuaciones:

$$a_i(q_1, \ldots, q_m) = 0 \quad para \;\; i \;\; desde \; 1 \; a \; d \tag{4}$$

donde a_i son los coeficientes del polinomio característico de la matriz **D** expresado como:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots. + a_1\lambda \tag{5}$$

A partir de la resolución del sistema dado por la Eq.(4) se obtienen diferentes soluciones de q_i, algunas de las cuales conducen a formas completas y otras a formas plegadas [10]. En éstas últimas varios nodos y elementos se superponen y, por tanto, la configuración de equilibrio de una forma plegada de la estructura se podría haber obtenido a partir de otra topología con un número menor de nodos y elementos.

Para determinar si la configuración de equilibrio de la estructura para un valor concreto de q_i obtenido del sistema de ecuaciones de la Eq.(4) da lugar a una forma completa o plegada es necesario obtener el espacio nulo de la matriz **D**, ker(**D**), definido como el subespacio de los vectores **v** $\in$ R^n que verifican **Dv=0.** Si el espacio nulo en *3* dimensiones (*d*=3) queda definido por los vectores:

$$\ker(\mathrm{D}) = \begin{cases} \mathrm{v}_1 = \{\mathrm{v}_{11}, \mathrm{v}_{12}, \cdots, \mathrm{v}_{1n}\} \\ \mathrm{v}_2 = \{\mathrm{v}_{21}, \mathrm{v}_{22}, \cdots, \mathrm{v}_{2n}\} \\ \mathrm{v}_3 = \{\mathrm{v}_{31}, \mathrm{v}_{32}, \cdots, \mathrm{v}_{3n}\} \\ \mathrm{v}_4 = \{\mathrm{v}_{41}, \mathrm{v}_{42}, \cdots, \mathrm{v}_{4n}\} \end{cases} \tag{6}$$

Una forma muy sencilla de programar para comprobar que la forma de la tensegridad es completa consiste en verificar que no se repite ninguna combinación $\{v_{1k}, v_{2k}, v_{3k}, v_{4k}\}$ para *k*=1, 2, …, *n*.

3. GRADOS DE INDETERMINACIÓN ESTÁTICA Y DINÁMICA DE UNA TENSEGRIDAD

En relación al equilibrio de la tensegridad, éste se puede expresar matricialmente como:

$$\mathbf{Aq} = \mathbf{0} \quad con \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{dn \times m} \tag{7}$$

Siendo A la matriz de equilibrio, definida para *d*=3 como:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_x} \\ \mathbf{A_y} \\ \mathbf{A_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\, diag\,(\mathbf{Cx}) \\ \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\, diag\,(\mathbf{Cy}) \\ \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\, diag\,(\mathbf{Cz}) \end{pmatrix} \tag{8}$$

y **q** un vector columna que contiene los coeficientes fuerza-longitud de las barras de la estructura.

De (8) se deduce que el número de estados independientes de cargas axiles -también llamado grado de indeterminación estática, n_s- corresponde a la dimensión de Ker (**A**), que matemáticamente viene dada por:

$$n_s = Ker(\mathbf{A}) = m - Rank(\mathbf{A}) \tag{9}$$

Por otra parte, si **H** es la matriz de compatibilidad de la estructura se habrá de verificar que:

$$\mathbf{Hd} = \boldsymbol{\delta} \tag{10}$$

donde **d** es el vector que contiene los desplazamientos de los nodos y **δ** el vector que engloba los incrementos de longitud de los elementos. Consideremos unas cargas externas, **F,** que introducen un desplazamiento virtual, **Δd**, y sea **Δδ** el vector diferencial de incremento de longitud asociado a la carga axial **N**. Aplicando el PTV e introduciendo (10):

$$\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\,\Delta\mathbf{d} = \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\,\Delta\boldsymbol{\delta} \;\Rightarrow \mathbf{F}^{\mathbf{T}}\,\Delta\mathbf{d} = \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{H}\,\Delta\mathbf{d} \;\Rightarrow \mathbf{F}^{\mathbf{T}} = \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{H} \tag{11}$$

Por equilibrio, se ha de verificar que:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{q} + \mathbf{F} = 0 \;\Rightarrow \mathbf{F}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \tag{12}$$

Ignorando el signo en Eq.(12), comparando Eq. (11) con Eq. (12) y sustituyendo en Eq. (10):

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{d} = \boldsymbol{\delta} \tag{13}$$

con $\mathbf{L}$ el vector que contiene las longitudes de los elementos de la estructura.

Los mecanismos de la estructura corresponden a movimientos –distintos a los de sólido rígido- que no producen extensión o acortamiento de ninguno de los elementos, es decir:

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{14}$$

De la Eq. (14) se deduce que el número de mecanismos independientes o grado de indeterminación cinemática, n_m , corresponde a Ker ($\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$) menos 6 –que son los desplazamientos de la estructura en el espacio tridimensional como sólido rígido-, es decir:

$$n_m = Ker\left(\mathbf{A}^T\right) = d \cdot n - Rank\left(\mathbf{A}\right) - 6 \tag{15}$$

Combinando Eq. (9) y Eq. (15) se obtiene la denominada Regla de Maxwell modificada para tensegridades propuesta por Calladine [11]:

$$n_s - n_m = m - d \cdot n + 6 \tag{16}$$

4. ESTABILIDAD.

La estabilidad de una estructura se asocia al mínimo local de la energía de deformación elástica.

Una vez que los posibles valores de los coeficientes fuerza-longitud de los *m* elementos se han obtenido a partir de Eq. (4). La carga axial sobre cada barra, N_k , se obtiene como: $N_k = q_k \cdot L_k$. Si se admite un comportamiento lineal y pequeñas deformaciones, la fuerza N_k se puede expresar como:

$$N_k = E_k \cdot \Omega_k \cdot \varepsilon_k = E_k \cdot \Omega_k \cdot \frac{L_k - L_k^0}{L_k^0} \tag{17}$$

Siendo E_k y Ω_k el módulo de elasticidad y el área de la barra *k*, respectivamente y L_k y L_k^0 las longitudes final e inicial, respectivamente, de la barra *k*.

Sea **N** el vector que engloba las cargas axiles de todas las barras:

$$\mathbf{N} = \left\{N_1, \cdots, N_k, \cdots N_m\right\}^T \tag{18}$$

La energía de deformación de una estructura compuesta por *m* elementos biarticulados se puede expresar como:

$$\mathbf{\Pi}_{st} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} N_k \cdot \varepsilon_k \cdot L_k^0 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k \cdot \Omega_k \cdot \left(L_k - L_k^0\right)^2}{L_k^0} \tag{19}$$

La expresión de la Eq. (19) se puede aproximar empleando los dos primeros términos de expansión de la serie de Taylor en desplazamientos:

$$\mathbf{\Pi}_{st} \approx \sum_{i=1}^{dn} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_{st}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i} d\boldsymbol{\lambda}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{dn}\sum_{j=1}^{dn} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_{st}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i \partial \boldsymbol{\lambda}_j} d\boldsymbol{\lambda}_i\, d\boldsymbol{\lambda}_j \tag{20}$$

Siendo $\boldsymbol{\lambda}$ el vector de coordenadas nodales:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \left(x_1, \ \ldots\ , x_n, y_1, \ldots\ , y_n, z_1, \ \ldots\ , z_n\right)^T \tag{21}$$

Operando en Eq. (19), el primer sumando de Eq.(20) se puede re-escribir como:

$$\sum_{i=1}^{dn} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_{st}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i}} d\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i} = \sum_{i=1}^{dn} \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}\right) d\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i} \tag{22}$$

Siendo **Q** la matriz diagonal asociada a **q** y **A** la matriz de equilibrio definida en Eq. (8).

La energía de deformación se dice en posición estacionaria cuando una variación infinitesimal de la posición de los nodos no implica cambio de energía de la estructura, es decir, en un punto estacionario la derivada de la energía de deformación es cero. Según Eq. (22), la condición anterior corresponde al equilibrio de la tensegridad (Eq.(7)):

$$\frac{\partial \mathbf{\Pi}_{st}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{23}$$

En relación con el segundo sumando de la Eq. (20), teniendo en cuenta las Eqs. (19) y (22) y operando adecuadamente, éste se puede re-escribir como:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{dn}\sum_{j=1}^{dn}\frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_{st}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i}\partial \boldsymbol{\lambda}_j}d\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i}\,d\boldsymbol{\lambda}_j = \frac{1}{2}d\boldsymbol{\lambda}^T\left(\mathbf{I_d}\otimes\mathbf{D}+\mathbf{A}\,Diag\left(\frac{E\Omega}{L^3}\right)\mathbf{A}^T\right)d\boldsymbol{\lambda} \tag{24}$$

La estructura estará en equilibrio estable si la energía de deformación presenta un mínimo para esa configuración, para lo cual la derivada segunda ha de ser positiva. El valor de la Eq. (24) es positivo para todos los valores de $d\boldsymbol{\lambda}$ si y solo si la matriz **K**, definida en Eq. (25) es definida positiva.

$$\mathbf{K} = \mathbf{I_d}\otimes\mathbf{D}+\mathbf{A}\,Diag\left(\frac{E\Omega}{L^3}\right)\mathbf{A}^T = \mathbf{K_{ss}}+\mathbf{K_{Elast}} \tag{25}$$

La deducción detallada de las Eqs. (22) y (24) se puede ver en Zhang y Ohsaki [12] .

La matriz **K** en la Eq. (25) es la matriz de rigidez tangente de la estructura, suma de la matriz de tensiones iniciales o matriz de rigidez geométrica, $\mathbf{K_{ss}}$, y de la matriz de rigidez elástica o convencional, $\mathbf{K_{Elast}}$, que depende de la geometría de la estructura y que no se ve afectada por el estado de tensiones en sus elementos.

Si los desplazamientos $d\boldsymbol{\lambda}$ en Eq. (23) corresponden a un mecanismo, el término correspondiente a $\mathbf{K_{Elast}}$ es nulo por lo que la estructura será estable si y sólo si $\mathbf{K_{ss}}$ (o lo que es lo mismo, **D**) es definida positiva –i.e.: todos los autovalores positivos-. Esta segunda condición se denomina estabilidad de pretensado ("prestress-stability", *PS* en adelante) en el contexto de este tipo de estructuras.

Es interesante señalar que las matrices $\mathbf{K_{Elast}}$ y $\mathbf{K_{ss}}$ siempre tienen autovalores nulos que corresponden a los desplazamientos de la estructura como sólido-rígido. Estos autovalores nulos no han aparecido en la formulación anterior debido a que, al no implicar variaciones en las longitudes de las barras, no afectan a la energía de deformación.

5. SOBRE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA

La matriz de tensiones iniciales o matriz de rigidez geométrica, $\mathbf{K_{ss}}$, dada por la Eq. (25) es la que se obtiene a partir de la energía de deformación acumulada en un elemento elástico sometido a carga axil admitiendo que las posiciones final e inicial están suficientemente próximas, un campo de deformaciones lineal en el interior de un elemento y considerando el tensor de deformaciones unitarias de Green-Lagrange [13, 14].

Sin embargo en estructuras es habitual obtener la matriz de rigidez a partir del equilibrio en segundo orden de un elemento sometido a una carga axil (Fig. 1). Agrupando las fuerzas asociadas a la rigidez geométrica en forma matricial se obtiene la matriz, referida a los ejes locales del elemento, de la Eq. (26).

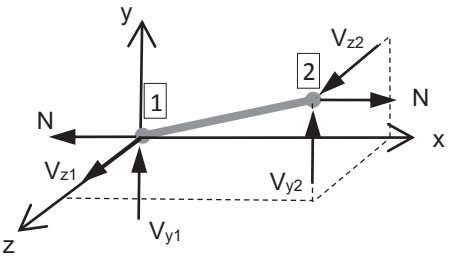


Figura 1. Fuerzas transversales en una barra biarticulada en 3D para satisfacer el equilibrio en configuración deformada

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Geom,Local}}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}_0}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0\\0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&-1&1\end{pmatrix} \tag{26}$$

Empleando la matriz de transformación, **T**, la matriz $\mathbf{K}_{\mathbf{Geom,Local}}$ de la Eq. (26) se puede expresar en coordenadas globales como:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Geom,Global}}=\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}_{\mathbf{Geom,Local}}\mathbf{T} \tag{27}$$

siendo:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}Cos\,\vartheta_{x_L-x_G}&0&Cos\,\vartheta_{x_L-y_G}&0&Cos\,\vartheta_{x_L-z_G}&0\\0&Cos\,\vartheta_{x_L-x_G}&0&Cos\,\vartheta_{x_L-y_G}&0&Cos\,\vartheta_{x_L-z_G}\\Cos\,\vartheta_{y_L-x_G}&0&Cos\,\vartheta_{y_L-y_G}&0&Cos\,\vartheta_{y_L-z_G}&0\\0&Cos\,\vartheta_{y_L-x_G}&0&Cos\,\vartheta_{y_L-y_G}&0&Cos\,\vartheta_{y_L-z_G}\\Cos\,\vartheta_{z_L-x_G}&0&Cos\,\vartheta_{z_L-y_G}&0&Cos\,\vartheta_{z_L-z_G}&0\\0&Cos\,\vartheta_{z_L-x_G}&0&Cos\,\vartheta_{z_L-y_G}&0&Cos\,\vartheta_{z_L-z_G}\end{pmatrix} \tag{28}$$

En la matriz de la Eq.(28) $\vartheta_{x_L-x_G}$ es el ángulo que forma el eje *x-local* con el *x-global*, $\vartheta_{x_L-y_G}$ el ángulo que forma el eje *x-local* con el *y-global*, etc.

Adoptando un sistema de coordenadas cartesiano y dextrógiro se obtiene que:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Geom,Global}} = \frac{N}{L_0}\begin{pmatrix} k_{G11} & k_{G12} & k_{G13} & k_{G14} & k_{G15} & k_{G16} \\ & k_{G22} & k_{G23} & k_{G24} & k_{G25} & k_{G26} \\ & & k_{G33} & k_{G34} & k_{G35} & k_{G36} \\ & & & k_{G44} & k_{G45} & k_{G46} \\ & SIM & & & k_{G55} & k_{G56} \\ & & & & & k_{G66} \end{pmatrix} \tag{29}$$

siendo:

$$\begin{aligned} k_{G11} &= k_{G22} = \frac{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{L_0^2} = -k_{G12} \\ k_{G13} &= k_{G24} = -\frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{L_0^2} = -k_{G14} = -k_{G23} \\ k_{G15} &= k_{G26} = -\frac{(x_2 - x_1)(z_2 - z_1)}{L_0^2} = -k_{G16} = -k_{G25} \\ k_{G33} &= k_{G44} = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{L_0^2} = -k_{G34} \\ k_{G35} &= k_{G46} = -\frac{(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}{L_0^2} = -k_{G36} = -k_{G45} \\ k_{G55} &= k_{G66} = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{L_0^2} = -k_{G56} \end{aligned} \tag{29}$$

La matriz de la Eq.(29) se puede re-escribir en función de la matriz de equilibrio de la estructura definida en la Eq. (8) como:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Geom,Global}} = \mathbf{K}_{\mathbf{Gxy}} + \mathbf{K}_{\mathbf{Gyz}} + \mathbf{K}_{\mathbf{Gxz}}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Gxy}} = \mathbf{A}_{\mathbf{Gxy}}\ diag\left(\frac{N}{L^3}\right)\mathbf{A}_{\mathbf{Gxy}}^{\mathbf{T}} \quad siendo \quad \mathbf{A}_{\mathbf{Gxy}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\ diag\,(\mathbf{Cy}) \\ \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\ diag\,(\mathbf{Cx}) \\ \mathbf{0}_{n\times m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Gyz}} = \mathbf{A}_{\mathbf{Gyz}}\ diag\left(\frac{N}{L^3}\right)\mathbf{A}_{\mathbf{Gyz}}^{\mathbf{T}} \quad siendo \quad \mathbf{A}_{\mathbf{Gyz}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n\times m} \\ -\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\ diag\,(\mathbf{Cz}) \\ \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\ diag\,(\mathbf{C}y) \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Gxz}} = \mathbf{A}_{\mathbf{Gxz}}\ diag\left(\frac{N}{L^3}\right)\mathbf{A}_{\mathbf{Gxz}}^{\mathbf{T}} \quad siendo \quad \mathbf{A}_{\mathbf{Gxz}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\ diag\,(\mathbf{Cz}) \\ \mathbf{0}_{n\times m} \\ \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\ diag\,(\mathbf{Cx}) \end{pmatrix}$$

Siendo $\mathbf{0}_{n\times m}$ la matriz cero de dimensión *n×m.* Gil-Martín et al. [15] dedujeron la expresión equivalente a la Eq. (30) para el caso de estructuras libres articuladas para el caso de *d*=2.

Se puede comprobar que la matriz $\mathbf{K_{ss}}$ dada por la Eq. (25) permanece invariable respecto del cambio de ejes.

Las expresiones de la matriz de rigidez geométrica dadas por las Eq. (25) y (26) difieren en que en la matriz de rigidez geométrica dada por la Eq.(25) aparece una rigidez axial que no existe en la obtenida a partir de la Eq.(26). Además de que es cuestionable que una carga axil introduzca un cambio en la rigidez del elemento en la dirección en la que actúa, la matriz $\mathbf{K_{ss}}$ obtenida a partir de la Eq.(25) da lugar a problemas de convergencia y a inexactitudes. De hecho, para compresiones mayores a un cierto valor, la matriz de rigidez geométrica correspondiente a $\mathbf{K_{ss}}$ conduce a rigideces axiales nulas o incluso negativas, lo que carece de sentido físico (por ejemplo: si $N \le -E\Omega \Rightarrow k_t = k_{elast} + k_{ss} = \frac{E\Omega}{L} - \frac{E\Omega}{L} \le 0$) [16].

Por lo comentado anteriormente, en estructuras se suele emplear la matriz de rigidez geométrica dada por las Eqs.(29) ó (30) en lugar de la $\mathbf{K_{ss}}$ dada por la Eq. (25).

6. FAMILIAS DE ESTRUCTURAS: FORMAS COMPLETAS Y PLEGADAS.

Consideremos los grafos de la Fig. 2 que fueron estudiados por Hernández-Montes et al. [10] y que corresponden a prisma octaédrico, cubo y tetraedro, respectivamente. Los coeficientes fuerza-longitud considerados para las barras, *q*, se indican en la Fig. (2): tres valores para el caso del prisma octaédrico y dos para cubo y tetraedro.

Resolviendo los sistemas de ecuaciones dados por la Eq. (4) se obtienen las posibles soluciones de **q** para las cuales se satisface el equilibrio (Eq. (7)). Una vez fijado **q,** los puntos que definen la estructura se obtienen como una combinación lineal de los vectores base del espacio nulo de la matriz de densidad de fuerzas **D**, Ker (**D**) –Eq. (6)-.

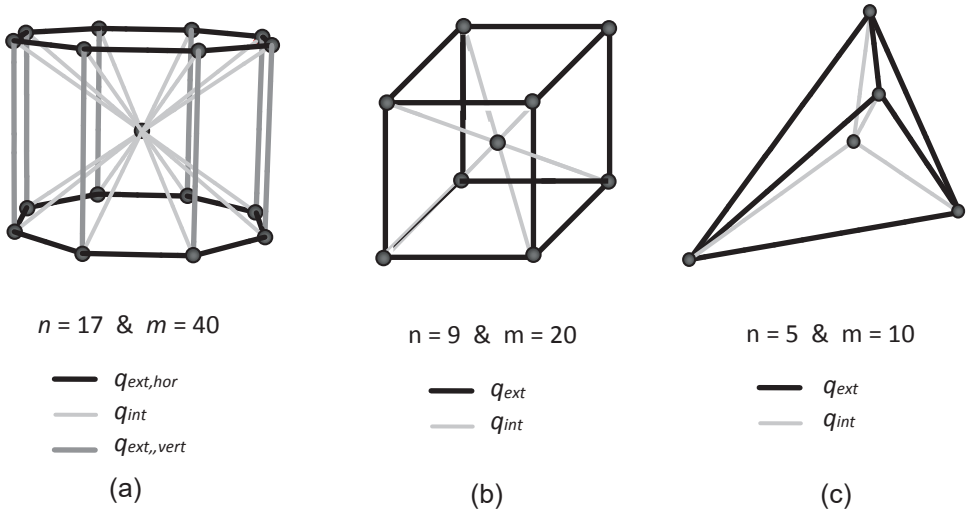


Figura 2. *Grafos considerados: a) prisma octaédrico, b) Cubo, c) Tetraedro*

En la Tabla 1 se resumen los valores de q, n_s (Eq.(9)) y n_m (Eq.(15)) y se indican, para distintos signos de q, las condiciones de estabilidad de las estructuras articuladas con nodos libres de la misma familia.

Tabla 1. Resumen de estructuras de una misma familia correspondientes a los grafos de la Fig. 2.

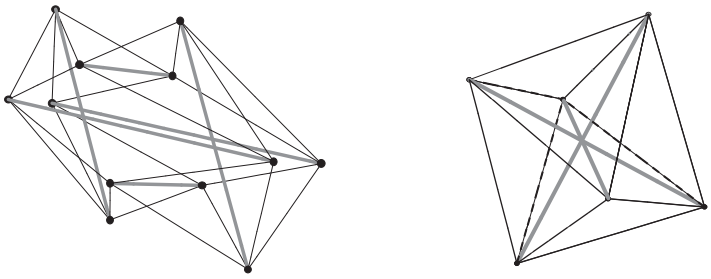
	Grafo Fig. (2.a)	Grafo Fig. (2.b)	Grafo Fig. (2.c)
n = 17 & *m* = 40	$q_{ext,hor} = \frac{1}{2}\left(-2q_{\text{int}} - \sqrt{2}q_{\text{int}}\right)$ & $q_{ext,vert} = -q_{\text{int}}/2$ *(Forma completa)* $n_s = 1$ & $n_m = 6$ Si $q_{\text{int}} < 0$: **Estable, no PS*** Si $q_{\text{int}} > 0$: **Inestable**	$q_{ext,hor} = q_{ext,vert} = -q_{\text{int}}/2$ *(Forma plegada)* $n_s = 1$ & $n_m = 6$ Si $q_{\text{int}} < 0$: **Estable , no PS** Si $q_{\text{int}} > 0$: **Inestable**	$q_{ext,hor} = q_{ext,vert} = -q_{\text{int}}/4$ *(Forma plegada)* $n_s = 1$ & $n_m = 6$ Si $q_{\text{int}} > 0$: **Estable , no PS** Si $q_{\text{int}} < 0$: **Inestable**
n = 9 & m = 20	---	$q_{ext} = -q_{\text{int}}/2$ *(Forma completa)* $n_s = 1$ & $n_m = 2$ Si $q_{\text{int}} < 0$: **Estable, no PS** Si $q_{\text{int}} > 0$: **Inestable**	$q_{ext} = -q_{\text{int}}/4$ *(Forma plegada)* $n_s = 1$ & $n_m = 2$ Si $q_{\text{int}} > 0$: **Estable, no PS** Si $q_{\text{int}} < 0$: **Inestable**
n= 5 & *m* = 10	---	---	$q_{ext} = -q_{\text{int}}/4$ *(Forma completa)* $n_s = 1$ & $n_m = 0$ Si $q_{\text{int}} > 0$: **Estable y PS** Si $q_{\text{int}} < 0$: **Estable , no PS**

* **PS**: Prestress-stable (con pretensado estable -definido en Apartado 4-)

En la Tabla 1 se puede apreciar cómo la eliminación de los elementos y nodos duplicados conlleva una mejora en la estabilidad de la estructura. El número de mecanismos independientes pasa de 6 a 2 para las dos formas plegadas de la Tabla 1 (Fig. 2.b y Fig. 2.c). En el caso de la Fig. 2.c existe determinación cinemática y la estructura es estable tanto para tracción interior como exterior aunque la condición de superestabilidad (estable y PS) sólo se presenta cuando las barras interiores son las traccionadas ($q_{int} > 0$).

En la Figura 3 se analizan dos elementos de una misma familia de tensegridades. La tensegridad de la Fig. 3.b, el octaedro expandido, ha sido ampliamente estudiada [5] y a partir de ella se han obtenido construcciones modulares [4].

En la Tabla 2 se resumen los valores de *q* para los que existe equilibrio, los valores de n_s , n_m así como las condiciones de estabilidad de las tensegridades en función de los autovalores de las matrices de rigidez tangente y geométrica.



n=12 & m=30 (a) *n=6 & m=15* (b)

Figura 3. *Tensegridades de una misma familia. a) Octaedro expandido. b) Octaedro.*

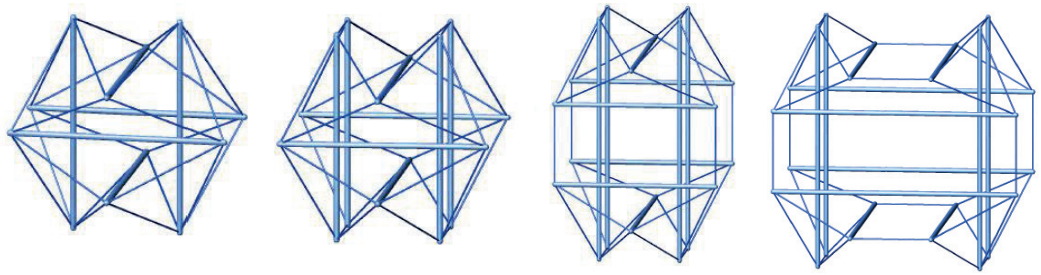
En la primera fila de la Tabla 2 se aprecia que la forma completa, correspondiente al tetraedro expandido, es superestable mientras que la forma plegada del grafo n=12 y m=30 es inestable. De hecho, por este motivo Tibert y Pellegrino [5] descartan esta solución. Si los elementos duplicados de la forma plegada se eliminan (grafo n=6 y m=15), la tensegridad con la topología de la Fig. 3.b pasa de ser inestable a ser superestable para la relación entre coeficientes indicada en la Tabla 2.

Tabla 2. Resumen de las tensegridades de una misma familia (Fig. 3).

	Grafo Fig. (3.a)	Grafo Fig. (3.b)
n = 12 & *m* = 30	$q_{strut} = -3/2\ q_{cable}$ *(Forma completa)* $n_s = 1$ & $n_m = 1$ **Estable y PS**	$q_{strut} = -2\, q_{cable}$ *(Forma plegada)* $n_s = 3$ & $n_m = 3$ **Inestable**
n = 6 & *m* = 15	---	$q_{strut} = -2\, q_{cable}$ *(Forma completa)* $n_s = 3$ & $n_m = 0$ **Estable y PS**

Sin embargo, el hecho de obtener una estructura a partir de otra por desdoblamiento de barras no implica que las estructuras obtenidas pertenezcan a la misma familia ni que estén en equilibrio manteniendo el mismo patrón para los valores de **q**. Micheletti [4] re-expande el octaedro expandido (Fig.3.a) para obtener el módulo a partir del cual construir una pasarela peatonal. La expansión se consigue aplicando criterios puramente geométricos: duplicando las barras comprimidas e introduciendo los cables necesarios. El proceso de expansión se resume en la Fig. 4, en la que aprecia cómo se van duplicando las barras comprimidas en pasos sucesivos hasta llegar al módulo final correspondiente a la tensegridad de la Fig. 4.d.

Si se impone que sean sólo dos los valores de los coeficientes carga-longitud, uno para las barras comprimidas y otro para las traccionadas, a partir del sistema de ecuaciones correspondiente a la Eq. (4) se obtienen los valores de *q* indicados en la Fig. 4. Para las configuraciones intermedias (Fig. 4.b y 4.c) no existen valores de *q* distintos de cero que satisfagan las eq. (4) y, por tanto, estas configuraciones intermedias no son tensegridades aunque Micheletti [4] sí las considera como tales. Además, a partir de la comparación de los valores de los coeficientes de densidades de fuerzas de los grafos representados en las Fig. 4.a y 4.d es evidente que la configuración Fig. 4.a no es una forma plegada de la Fig. 4.d, por lo que se puede concluir que los criterios puramente geométricos no permiten obtener tensegridades de una misma familia.



(a) (b) (c) (d)

$\mathbf{q_{strut} = -3/2 q_{cable}}$ $q_{strut} = q_{cable} = 0$ $q_{strut} = q_{cable} = 0$ $\mathbf{q_{strut} = -3/7\ q_{cable}}$

$q_{strut} = -2 q_{cable}$ $q_{strut} = -2.1754\ q_{cable}$

$q_{strut} = -0.5746\ q_{cable}$

Figura 4. *Expansión del octaedro expandido propuesta por Micheletti. Adaptada de [4].*

7. SOBRE EL ESTADO DE PRETENSADO.

Es obvio que la rigidez de la estructura, o de la tensegridad, dependerá del nivel de esfuerzos axiles al que estén sometidas las barras que la componen [17]. Kebiche et al. [18] llegaron a la conclusión de que cuanto mayor es el pretensado inicial más rígida es la estructura y proponen limitar el valor máximo del nivel de pretensado para evitar el pandeo de las barras comprimidas, analizadas como elementos aislados biarticulados.

Como se ha comentado anteriormente, el estado de pretensado para el cual la estructura está en equilibrio corresponde a la solución del sistema de ecuaciones dado por la Eq. (4), a partir del cual se obtienen una serie de relaciones entre los coeficientes fuerza-longitud de los elementos de la estructura (ver Tablas 1 y 2 y Fig. 4). Sin embargo, es obvio que debe de existir un valor máximo de las cargas de pretensado para el cual se producirá el pandeo de algún elemento comprimido o la plastificación del material, o ambos.

Para una estructura, el instante en el que se produce el pandeo (inestabilidad elástica) se puede expresar en función de los desplazamientos como:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Elast}}\,\boldsymbol{\delta}+\mathbf{K}_{\mathbf{Geom}}\,\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0} \tag{31}$$

siendo $\mathbf{K}_{\mathbf{Elast}}$ la matriz de rigidez elástica referida a la configuración original y $\mathbf{K}_{\mathbf{Geom}}$ la matriz de rigidez geométrica definida respecto de un patrón de carga determinado. El vector $\boldsymbol{\delta}$= {**u, v, w**}^{T} contiene los desplazamientos según los grados de libertad *x*, *y* y *z* de la estructura.

Puesto que $\mathbf{K}_{\mathbf{Geom}}$ es proporcional a la carga axial en los elementos de la estructura es posible expresarla como un multiplicador escalar que multiplica a la matriz correspondiente a una carga de referencia:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Geom}}=\mu\cdot\mathbf{K}_{\mathbf{Geom_0}} \tag{32}$$

La Eq.(32) implica que la distribución relativa de las cargas aplicadas a la estructura se mantiene constante. En el caso de estructuras articuladas de nodos libres no sometidas a acciones exteriores K_{Geom_0} corresponde a las fuerzas axiles autoequilibradas de pretensado obtenidas a partir de la Eq. (4), es decir: $N_i = q_i \cdot L_i$, siendo q_i y L_i el factor de densidad de fuerzas y la longitud, respectivamente, del elemento *i*.

Introduciendo (32) en (31) se obtiene el problema de autovalores de pandeo:

$$(\mathbf{K}_{\mathbf{Elast}}+\mu\mathbf{K}_{\mathbf{Geom_0}})\,\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0} \tag{33}$$

Y, para que exista solución no trivial de la Eq. (33) se ha de verificar que:

$$\left|\mathbf{K}_{\mathbf{Elast}}+\mu\mathbf{K}_{\mathbf{Geom_0}}\right|=\mathbf{0} \tag{34}$$

El menor valor de μ que verifica (34) se conoce como factor crítico de carga de la estructura y es el factor que determina el máximo pretensado que la estructura puede soportar.

En lo que sigue y sin pérdida de generalidad, para el estudio del pandeo global de la estructura se adopta como K_{Geom} la matriz dada por las Eqs. (29) o (30) y, con el fin de eliminar los desplazamientos de la estructura como sólido rígido, se ha fijado el nodo 1 en *x*, *y* y *z* eliminando las filas y columnas correspondientes de las matrices K_{Elast} y K_{Geom}.

Adoptando 100 mm^2 como el área de la sección transversal de todas las barras y considerando un módulo de elasticidad igual a 200000 MPa se ha intentado resolver el determinante de la Eq. (34) para las estructuras de las familias de las Tablas 1 y 2 con el programa Mathematica © [19]. Sin embargo, a pesar de que el número de elementos no era demasiado grande no ha sido posible porque la Eq. (34) es inestable. Por este motivo se ha recurrido a obtener el menor autovalor de

pandeo de las distintas estructuras mediante el software de análisis de elementos finitos ANSYS © [20]. Todos los elementos fueron modelizados mediante elementos tipo "link". Las cargas de pretensado se introdujeron como tensiones iniciales, positivas o negativas, dependiendo de si la barra está sometida a tracción o compresión, respectivamente. Los valores calculados con ANSYS para el multiplicador crítico, para una determinada carga de referencia, se resumen en las Tablas 3 y 4.

Tabla 3. Resumen de autovalores de pandeo para las estructuras de la Fig. 2.

	Grafo Fig. (2.a)	Grafo Fig. (2.b)	Grafo Fig. (2.c)
Coeficientes fuerza-longitud	$q_{\text{int}} = -1 \rightarrow$ $q_{ext,hor} = 1.707$ $q_{ext,vert} = 0.5$	$q_{\text{int}} = -2 \rightarrow$ $q_{ext} = 1$	$q_{\text{int}} = 4 \rightarrow$ $q_{ext} = -1$
Cargas axiles referencia (N)	$N_{\text{int}} = -165.73$ $N_{ext,hor} = 63.73$ $N_{ext,vert} = 164.68$	$N_{\text{int}} = -102.25$ $N_{ext} = 69.99$	$N_{\text{int}} = 6.93$ $N_{ext} = -3$
n = 17 & *m* = 40	$\mu = 2939$	$\mu = 7860$	$\mu = 3.63 \times 10^5$
n = 9 & m = 20	---	$\mu = 10554$	$\mu = 3.71 \times 10^5$
n= 5 & *m* = 10	---	---	$\mu = 1.26 \times 10^7$

Tabla 4. Resumen de autovalores de pandeo para las estructuras de la Fig. 3.

	Grafo Fig. (3.a)	Grafo Fig. (3.b)
Coeficientes fuerza-longitud	$q_{cable} = 1 \rightarrow$ $q_{strut} = -3/2$	$q_{cable} = 1 \rightarrow$ $q_{strut} = -2$
Cargas axiles referencia (N)	$N_{cable} = 2.165$ $N_{strut} = -5.613$	$N_{cable} = 1.732$ $N_{strut} = -4.472$
n = 12 & *m* = 30	$\mu = 1 \times 10^7$	$\mu = 600$ *
n = 6 & m = 15	---	$\mu = 1.3 \times 10^7$

* Estructura inestable (ver Tabla 2)

Puesto que el nivel máximo de pretensado que puede soportar una estructura está asociado al menor valor de los autovalores de pandeo, resumidos en las Tablas 3 y 4, la compresión y tracción máximas en la estructura se obtendrán como:

$$N_{tracc,\max} = \mu N_{tracc} = \mu q_t L_t \qquad (con\ \ q_t L_t = Max\left(q_i L_i\right)_{i=1,2,...m} \quad y \quad q_t > 0)$$
$$N_{comp,\max} = \mu N_{comp} = \mu q_c L_c \qquad (con\ \ q_c L_c = Min\left(q_i L_i\right)_{i=1,2,...m} \quad y \quad q_c < 0) \tag{35}$$

De la comparación de los autovalores de pandeo de las Tablas 3 y 4 es evidente que la mejora en las condiciones de estabilidad relacionadas con los autovalores de la matriz de rigidez tangente y con el número de mecanismos independientes, n_m , (ver Tablas 1 y 2) va asociada a un aumento del valor crítico de la carga obtenida a partir del pandeo global de la estructura.

8. CONCLUSIONES

La condición matemática a imponer a la matriz de densidades de fuerza de una estructura articulada de nodos libres para forzar a que se desarrolle en el espacio con una determinada dimensión *d* conduce a distintas relaciones entre los coeficientes fuerza-longitud adoptados para las barras. Algunas de estas soluciones corresponden a formas completas mientras que otras son formas plegadas en las que nodos y barras se superponen. Se ha comprobado que no es posible obtener estructuras de una misma familia a partir de criterios puramente geométricos.

Los resultados presentados confirman que las formas plegadas son más estables que las completas de la misma familia y pueden soportar mayor nivel de pretensado. La estabilidad y el nivel de pretensado se incrementan aún más si se eliminan los elementos redundantes.

En este artículo se presenta la expresión matricial de la matriz de rigidez geométrica habitualmente empleada en cálculo de estructuras combinando los bloques que componen la matriz de equilibrio y que corresponden a las coordenadas cartesianas que definen el espacio.

El nivel máximo de pretensado que este tipo de estructuras puede soportar se ha determinado a partir del menor autovalor del problema de pandeo.

AGRADECIMIENTOS

El segundo autor ha recibido una beca-contrato FPU del Plan Propio de la Universidad de Granada.

REFERENCIAS

[1] Boucher, E., Mandato, C.A. 2015. Plasma membrane and cytoskeleton dynamics during single-cell wound healing. Biochimica et Biophysica Acta - Molecular Cell Research Volume 1853, Issue 10, October. Pp. 2649-2661.

[2] Altuzarra O., Diez M., Corral J., Campa F.J. 2017. Kinematic analysis of a flexible tensegrity robot. Mechanisms and Machine Science 46. Pp. 457-464

[3] Tibert A.G. And Pellegrino S. 2002. Deployable tensegrity reflectors for small satellites. Journal of Spacecraft and Rockets 39(5). Pp. 701-709.

[4] Micheletti A. 2012. Modular Tensegrity Structures: The ”Tor Vergata” Footbridge. Mechanics, Models and Methods in Civil Engineering. Volume 61 of the series Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Pp 375-384.

[5] Tibert A.G. And Pellegrino S. 2003. Review of form-finding methods for tensegrity structures. International Journal of Space Structures, 18 (4). Pp. 209-223.

[6] Schek H.J. 1974. The force density method for form-finding and computation of general networks. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 3. Pp. 115–134.

[7] Linkwitz K. and Schek H. J. 1971. Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen. Ingenieur-Archiv. 40. Pp. 145–158.

[8] Veenendaal D. and Block P. 2012. An overview and comparison of structural form finding methods for general networks. International Journal of Solid and structures 49. Pp. 3741-3753.

[9] H. J. Schek. 1974. The force density method for form-finding and computation of general networks. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3. Pp. 115–134.

[10] Hernández-Montes E., Fernández-Ruiz M.A., Gil-Martín L.M., Merino L., Jara P. 2017. Full and Folded Forms, a compact review of the formulation of tensegrity structures. Mathematics and Mechanics of Solids. DOI: 10.1177/1081286517697372.

[11] Calladine, C. R. 1978. Buckminster Fuller's "Tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames. International Journal of Solids and Structures, 14(2). Pp. 161–172.

[12] Zhang JY, Ohsaki M. 2015. Tensegrity Structures: Form, Stability, and Symmetry. Ed. Springer. Japan.

[13] Celigüeta J. T. 2003. Curso de análisis estructural (2ª Ed.). Ed. EUNSA. Navarra.

[14] Celigüeta J. T. 2008. Introducción al análisis de estructuras con no linealidad geométrica. Tecnun. San Sebastian.

[15] Gil-Martín, L.M.; Fernández-Ruiz, M.A.; Hernández-Montes, E. 2017. A necessary discussion on the stiffness matrices used in tensegrity structures. Journal of Applied Engineering Science. Aceptado.

[16] Němec I., Trcala M., Ševčík I., Štekbauer H.. 2016. New Formula for Geometric Stiffness Matrix Calculation. Journal of Applied Mathematics and Physics, 4. Pp. 733-748.

[17] Tran H.C. And Lee J. 2011. Geometric and material nonlinear analysis of tensegrity structures. Acta Mechanica Sinica, Volume 27, Issue 6. Pp. 938–949.

[18] Kebiche K., Kazi-Aoual M.N., Motro R. 1999. Geometrical nonlinear analysis of tensegrity systems. Eng. Struct. 21(9). Pp. 864–876.

[19] Mathematica software. https://www.wolfram.com/mathematica/.

[20] ANSYS software.

DYNAMIC IDENTIFICATION OF HISTORICAL AND SINGULAR BAROQUE VAULTS DESIGNED BY BALTHASAR NEUMANN: BASILICA OF THE FOURTEEN HOLY HELPERS AND CHAPEL OF THE WÜRZBURG RESIDENCE (GERMANY).

Pachón, Pablo[1]; Compán, Víctor[2]; Cámara, Margarita[3]; Rottner, Matthias[4]; Moro, José Luis[5]

ABSTRACT

Balthasar Neumann was a German Baroque architect with a wide experience on the design and construction of geometrically singular masonry vaults. Understanding the complex behaviour of this masonry vaults appears as a fundamental aspect to ensure its proper preservation. It is well known that historical heritage has to be preserved and different technical analysis are usually necessary to achieve it. Before performing these analyses, non-destructive techniques are usually an indispensable tool to provide information about the current structural behavior of the building. The use of ambient vibration tests and operational modal analysis method are widespread as a process to identify dynamic properties of historical constructions from a global point of view, but not to identify these dynamic properties of specific elements. In this paper, these techniques are used to characterize dynamically concrete parts of the Basilica of the Fourteen Holy Helpers and Chapel of the Würzburg Residence, specifically its roofs.

Keywords: Ambient vibration testing, Operational modal analysis, historical construction, non-destructive technique, masonry structures.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento estructural de construcciones históricas se presenta como un hecho fundamental a la hora de preservar el patrimonio arquitectónico. Dicha afirmación se acentúa aún más en elementos estructurales de mayor singularidad arquitectónica, como las cubiertas históricas que nos ocupan en el presente caso de estudio. En este tipo de edificaciones es habitual el uso de complejos modelos numéricos para caracterizar fielmente su comportamiento estructural. Sin embargo, el mayor problema reside precisamente en caracterizar los elementos que definen dichos modelos numéricos. Pequeñas modificaciones de algunos de estos elementos conducen a resultados muy dispares, resultando por tanto fundamental su correcta definición [1]. En este sentido, encontramos técnicas no destructivas como las pruebas de vibración ambiental que resultan de gran utilidad para reducir considerablemente las diferencias entre el comportamiento estructural del modelo numérico y el real

[1]*Dep. of Building Structures and Geotechnical Engineering. University of Seville (Spain). ppachon@us.es. (Corresponding author)*
[2]*Dep. of Building Structures and Geotechnical Engineering. University of Seville (Spain). compan@us.es.*
[3]*Dep. of Building Structures and Geotechnical Engineering. University of Seville (Spain). mcamara@us.es.*
[4]*Ins. of Building Design and Construction. Uni. of Stuttgart (Germany). matthias.rottner@iek.uni-stuttgart.de.*
[5]*Ins. of Building Design and Construction. Uni. of Stuttgart (Germany). jose.moro@iek.uni-stuttgart.de.*

de la estructura [2]. A partir de las propiedades dinámicas de un objeto, los valores característicos de los elementos que definen el modelo numérico del mismo pueden ser actualizados de forma que el comportamiento dinámico de ambos sea similar. De esta forma, una vez que los parámetros modales de la construcción histórica han sido identificados experimentalmente, los errores existentes en el modelo de elementos finitos de la estructura pueden ser corregidos.

En el estudio se presenta el uso de pruebas de vibración ambiental sobre las cubiertas de dos construcciones barrocas diseñadas por el afamado arquitecto alemán Balthasar Neumann: La Basílica de Vierzehnheiligen (de los 14 Santos), y la Capilla del Palacio de Würzburg (Fig. 1). Se llevará a cabo un recorrido por los objetos de estudio para continuar con la caracterización dinámica de dichas construcciones mediante la obtención de datos con el uso pruebas de vibración ambiental, y el posterior tratamiento de los mismos a través de la técnica de Análisis Modal Operacional (OMA). Finalmente se discutirán los resultados obtenidos y se presentaran las principales conclusiones a los que dichos resultados nos han conducido.

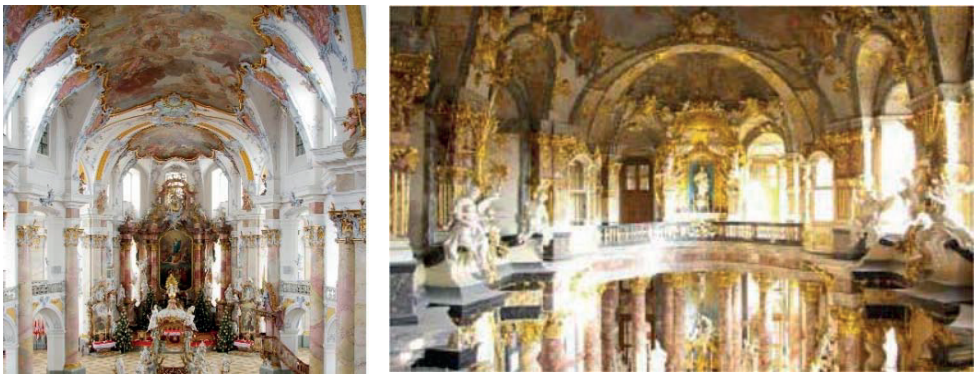


Figura 1. Basílica de Vierzehnheiligen (←) y Capilla del Palacio de Würzburg (→).

2. OBJETOS DE ESTUDIO

La Basílica de Vierzehnheiligen y la Capilla del Palacio de Würzburg, objetos de estudio, se encuentran integradas dentro de la obra diseñada por el arquitecto Balthasar Neumann [3]. Ambas construcciones se llevaron a cabo durante el s. XVIII, enmarcándose por tanto dentro del Barroco Alemán [4]. La basílica es un edificio exento situado en ciudad de Baviera, en la Alta Franconia, mientras que la capilla se inserta dentro de un complejo mayor, también diseñado y ejecutado por Neumann, el Palacio de la ciudad de Würzburg (Fig. 2).

Figura 2. Vistas exteriores de la Basílica de Vierzehnheiligen (←) y del Palacio de Würzburg (→).

En lo que se refiere a la configuración arquitectónica de los objetos de estudio, tanto la basílica como la capilla presentan una lectura espacial de claro carácter longitudinal. Ambas construcciones se organizan mediante la composición de tres celdas consistentes en tres grandes cúpulas con base ovalada de eje principal longitudinal, conectadas entre sí por otras, también de planta oval, orientadas a lo largo de un eje transversal (Fig. 3).

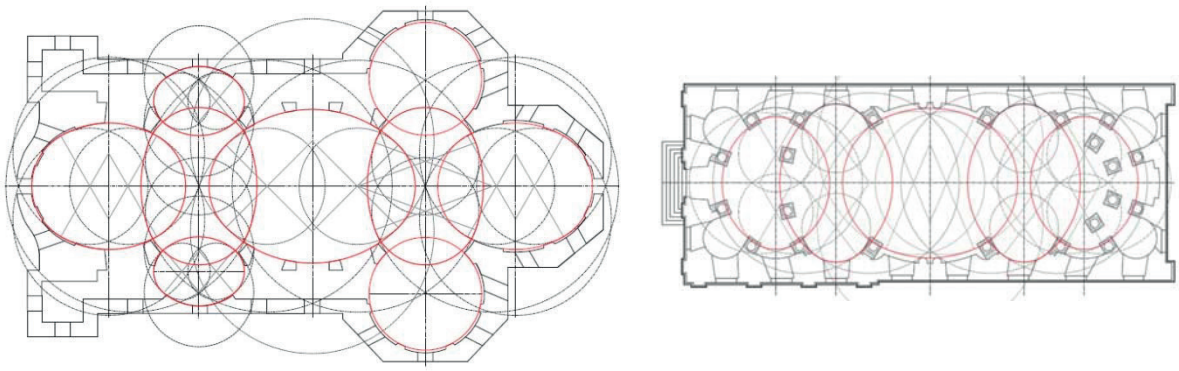


Figura 3. Estudio de la trazas de las plantas de la Basílica de Vierzehnheiligen (←) y de la Capilla del Palacio de Würzburg (→).

En cuanto a las cubiertas, la intersección de dichas celdas se resuelve utilizando el mismo recurso que desarrolló Christoph Dientzenhofer, es decir, según un nervio alabeado generado mediante la intersección de dos cilindros de distinto diámetro [5]. En ambos casos, se tratan, desde un punto de vista estructural, de falsos nervios de dudosa capacidad portante, ya que Neumann realiza superficies continuas sin esqueleto estructural. Sin embargo el uso arquitectónico del nervio alabeado que planteó Neumann en cada una de las iglesias es diferente. Mientras que en la basílica es simplemente un recurso constructivo, en la capilla se utiliza también como recurso compositivo, ya que organiza los espacios, marcando donde se encuentra su inicio y su final, idea de secuencia espacial que lleva a cabo mediante recrecidos de yeso (Fig. 4). Por su lado, en la basílica recurre al uso del color como elemento compositivo. El blanco utilizado en sus paredes amplifica su plasticidad y dinamismo, así como su desmaterialización (Fig. 4). Estos elementos soportan una cubierta con sombras mucho más oscuras, donde la curvatura real de la misma se pierde debido a la falta de perspectiva, lo que refuerza la idea de una cubierta que levita sobre los soportes verticales.

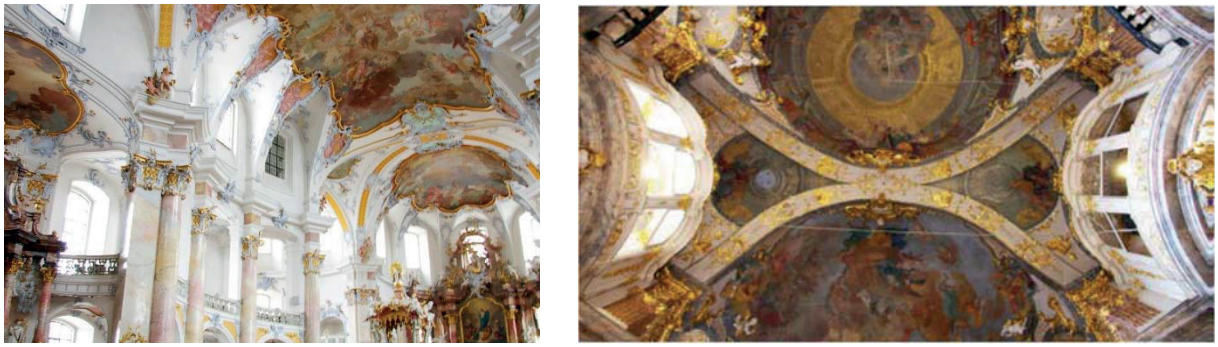


Figura 4. Vistas interiores de la Basílica de Vierzehnheiligen (←) y de la Capilla del Palacio de Würzburg (→).

Los espacios interiores de ambas iglesias son piezas que se diseñan independientemente de su embalaje. Esto provoca un desconocimiento total de lo que se aloja en el interior de esa caja hasta que

no pasamos el umbral. El nexo de unión se realiza a través de las ventanas, elementos cuya disposición está dominada por la composición de fachada. Llama la atención la importante desmaterialización de los muros, aspecto unido al innovador concepto sobre el tratamiento de la luz que incluye Neumann en sus obras.

Por último, destacar que las bóvedas de ambas iglesias son superficies de mampostería que con solo 30 cm de espesor desarrolladas en una única capa, llegan a cubrir grandes luces. En el caso de la basílica las superficies que conforman las bóvedas están conformada por fábrica de piedra y se presentan sin refuerzo alguno, mientras que en la capilla dichas superficies son de fábrica de ladrillo y se ven reforzadas en su base por medio del aumento del espesor en 15 cm, refuerzo que también se hace presente en nervios radiales, los cuales presentan una sección de 45x45 cm (Fig. 5).

Figura 5. Vistas de las bóvedas de la Basílica de Vierzehnheiligen (←) y de la Capilla del Palacio de Würzburg (→).

3. PRUEBAS DE VIBRACIÓN AMBIENTAL Y ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL

Las pruebas de vibración ambiental están consolidadas desde hace años como uno de los principales métodos experimentales para evaluar el comportamiento dinámico de estructuras a gran escala. La excitación artificial de grandes estructuras conlleva una gran complejidad, lo que hace recurrir al análisis modal operacional (OMA) para la identificación modal de las propiedades dinámicas de la estructura [6, 7]. En los últimos años son numerosas las aplicaciones de pruebas de vibración ambiental que podemos encontrar asociadas al mundo de la arquitectura. Los buenos resultados obtenidos de estas aplicaciones, el bajo coste económico que supone hacer este tipo de pruebas y la no interrupción del normal funcionamiento del edificio mientras las pruebas son realizadas, son algunos de los motivos que han hecho que éstas sean muy populares en los últimos años. Sin embargo, en el caso concreto de construcciones históricas de fábrica, donde el uso de técnicas no destructivas es un factor fundamental, los casos de aplicación de OMA son menos numerosos debido a dificultades añadidas. Aun menos extendida es la aplicación de la técnica OMA sobre elementos concretos [8, 9].

A continuación, se presenta las pruebas de vibración ambiental llevadas a cabo tanto en la Basílica de Vierzehnheiligen, entre el 25 y 29 de julio de 2016, como en la Capilla del Palacio de Würzburg, entre el 14 y 17 de julio de 2014.

3.1. Modelos de Elementos Finitos Iniciales

En la Fig. 10 se observan las formas modales asociadas a cada uno de los modos identificados en ambas iglesias.

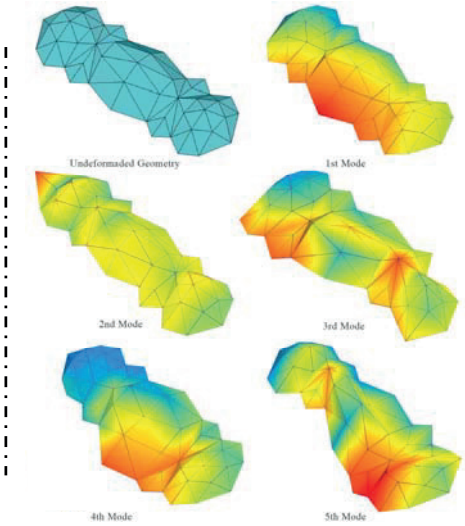


Figura 10. Formas modales identificadas en la Basílica de Vierzehnheiligen (←) y en la Capilla del Palacio de Würzburg (→).

En la basílica, los dos primeros modos identificados son causados por el efecto de las torres, elementos que por su esbeltez suelen presentar modos de vibración con frecuencias naturales asociadas bajas en relación a construcciones de fábrica (en torno a 1-1.5 Hz). El tercer y el cuarto modo muestran modos de traslación transversal y longitudinal, respectivamente, de todo el conjunto de la iglesia, mientras que el resto de los modos corresponden a modos locales de flexión de las bóvedas. Por su lado, en el caso de la capilla, el segundo modo muestra un modo de translación longitudinal del conjunto del palacio, mientras que los otros modos corresponden a modos locales de flexión de las bóvedas.

CONCLUSIONES

En el presente artículo se ha llevado a cabo la aplicación de pruebas de vibración ambiental sobre las bóvedas barrocas de dos construcciones históricas diseñadas y construidas por el arquitecto alemán Balthasar Neumann. El objetivo marcado fue caracterizar dinámicamente los objetos de estudio, para en fases posteriores poder actualizar nuestros modelos de elementos finitos y así analizar numéricamente el comportamiento estructural de las iglesias.

Una vez realizadas las campañas experimentales y el tratamiento de los datos obtenidos en la Basílica de Vierzehnheiligen y la Capilla del Palacio de Würzburg, ocho y cinco modos de vibración fueron identificados, respectivamente, en un rango de frecuencia de 0 a 7 Hz. Los porcentajes de diferencia entre los dos métodos de identificación modal utilizados (EFDD y SSI) siempre fueron menores al 4%, y el valor MAC de comparación entre ellos superior a 0.75, lo cual nos asegura la existencia de los mismos. Todo ello nos lleva a concluir la eficacia que presenta el Análisis Modal Operacional como técnica para identificar experimentalmente propiedades dinámicas en elementos concretos, es decir, con un carácter local.

A modo de comparación, se concluye cierta similitud en el comportamiento modal de las bóvedas estudiadas. Dicha conclusión se extrae de la comparación entre los modos de flexión identificados en cada una de las ellas. El primer modo de flexión identificado en cada una de las bóvedas presenta una gran similitud tanto a nivel de forma modal como por el valor de la frecuencia natural asociada. Mientras que en la basílica el valor de dicha frecuencia asociada al primer modo local de las bóvedas (modo 5) es de 2.79 Hz, en la capilla dicho valor (modo 1) corresponde a 2.77 Hz. Sin embargo, en lo que se refiere al segundo modo de flexión de las bóvedas (modo 6 de la basílica y modo 3 de la capilla), aunque la forma modal es realmente similar (fig. 10), la diferencia entre los valores de las frecuencias naturales es significativamente mayor (3.39 Hz en la basílica y 4.46 Hz en la capilla).

Como futuro trabajo, en la actualidad se están utilizando las propiedades dinámicas identificadas para actualizar los modelos tridimensionales de elementos finitos. De esta forma se minimizaría en gran medida el nivel de incertidumbre inicial que existe en las propiedades mecánicas reales de los materiales constituyentes. Una vez estos modelos estén actualizados se podrá hacer un análisis estructural exhaustivo del comportamiento estructural de las iglesias diseñadas por Balthasar Neumann, y más concretamente, se podrá estudiar la singularidad estructural de sus bóvedas de fábrica.

AGRADECIMIENTOS

Agradecer al Instituto de Diseño de Edificios y Construcción de la Universidad de Stuttgart y particularmente al Profesor Matthias Rottner la colaboración prestada para realizar el presente estudio. Este trabajo no hubiera sido posible sin su apoyo.

REFERENCIAS

[1] Atamturktur, S. & Laman, J. (2012). Finite Element Model Correlation and Calibration of Historic Masonry Monuments. *Structural Design of Tall and Special Building*, 21(2), 96-113.

[2] Ramos, L. (2007). *Damage Identification on Masonry Structures Based on Vibration Signatures* (PhD Thesis). University of Minho.

[3] Hansmann, W. Balthasar Neumann. Dumont 2003; 3-8321-7167-3.

[4] Compán, V. (2012). Comportamiento estructural de las geometrías arquitectónicas del Barroco Centroeuropeo (unpublished PhD. thesis). Sevilla: Universidad de Sevilla.

[5] Compán, V., Cámara, M. & González, F. (2015). The Geometric Principles of Warped Rib Vaults in Central European Baroque Architecture from Guarini to the Dientzenhofer Family and Balthasar Neumann. *Nexus Network Journal,* 17:183-206.

[6] Ramos, L. (2007). *Damage Identification on Masonry Structures Based on Vibration Signatures* (*PhD Thesis)*. University of Minho.

[7] Ramos, L. F., Aguilar, R., Lourenço, P., Moreira, S. (2012). *Dynamic Structural Health Monitoring of Saint Torcato Church. Portugal. Mechanical Systems and Signal Processing.*

[8] Atamturktur, S., Fanning, P. & Boothby, T. (2010). Traditional and Operational Modal Testing of Masonry Vaults. ICE. *Engineering and Computational Mechanics*, 163, 213-223.

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

Influence of different boundary conditions of glass plates on human impact resistance

Alberto Sanchidrián[1], José Antonio Parra[2], Jesús Alonso[3], Julián Pecharromán[4], Consuelo Huerta[5]

ABSTRACT

Glass is commonly used in buildings, in most facades a security glazing has to be used according to safety standards. In Europe the standard EN 12600 establishes an impact test procedure for classification of glass from the point of view of the human security. However, this test does not replicate the actual dimensions and boundary conditions used in many building configurations and so the real stress distribution is not determined with this test.

In order to obtain a test facility for human impact against glass plates, the behaviour of a dummy plate made of aluminium has been studied with different boundary conditions using an aluminium plate frame and a support structure. A mixed approach is applied with modal test results and updated finite element models.

***Keywords**: Glass plates, human impact test, modal test, plate boundary conditions.*

1. INTRODUCTION

In the field of glazing in buildings still does not exist an unique design solution for plates as here might be used a different number of glass layers and interlayers. In most facades the use of security glass is mandatory to be able to resist to human impact. The European Standard EN 12600 L establishes an impact test procedure for classification focusing on human security. This test is carried out on flat plates with different thickness, using a pendulum of two tires and 50 kg mass that impacts against the plate from different drop heights.

However, this test does not replicate many of the actual dimensions and boundary conditions used in building configurations. Therefore, it does not represent the real stress of the plates [2]. The influence of different boundary conditions, as the ones employed in construction sites, is not correctly taking into account when safety glazing behaviour is tested [3] There is not yet established a detailed procedure neither exist fixed criteria to determine glass resistance against human impact. In order to reproduce the real boundary conditions the pendulum test is performed "on-site". This brings up side effects such as lack of load control and stiffness. Despite that there is no standard procedure established as in the case of laboratory tests. [4] [5].

[1]*Dept. Mechanical ETSIDI. UPM. (SPAIN). alberto.sanchidrian@upm.es (corresponding author)*
[2]*Dept.Mechanical Eng. ETSII UPM (SPAIN). jose.parra.hidalgo@alumnos.upm.es*
[3]*Dept. Mechanical Eng. ETSII UPM (SPAIN). j.alonso@alumnos.upm.es*
[4]*Dept. Mechanical Eng., Chemistry and Industrial Design. ETSIDI. UPM. (SPAIN). j.pecharroman@upm.es*
[6]*Dept.Mechanical Eng. ETSII UPM (SPAIN). mariaconsuelo.huerta@upm.es*

The following two aspects have to be taken into account:

a) The definition of a standard procedure for the “On Site”-Test

b) The preparation of a laboratory procedure which allows more detailed analysis and testing based on more realistic stress distribution

A laboratory has been developed to work on both research fields and allows to test medium size test specimens with different boundary conditions. A special steel support structure enables a realistic reproduction of stiffness which can be found in many construction solutions, which includes as reference a rigid condition. The dynamic behaviour of this support structure has been studied using finite element models (FEM) optimized with modal tests results. The dynamic behaviour of the glass plate and its aluminium frame has also been characterized with modal tests using different boundary conditions and with a FEM correlated with those modal tests results.

To avoid problems with broken glass plates, the test has been done using a dummy consisting of an aluminium plate of 1000 mm x 700 mm main dimensions and 10 mm thickness supported on four sides. The support structure (red) used in the laboratory is shown on fig. 1 with the aluminium plate with the aluminium frame attached to its side (rigid set-up). Another test set-up of the aluminium plate without frame attached to two black stringers of 80mm x 40 mm x 2 mm section on the middle of the support structure is also plotted.

Figure 1. *Support structure and pendulum impact test on aluminum plate.*

The plate and both structures, plate frame and support structure, have been studied on free-free conditions in order to update each FEM including the stiffness of the connections. This facilitates the analysis of the final construction (fig.1) with different set-ups of support structure design and plate boundary conditions.

The objective is to analyze the behaviour of the plate with different boundary conditions for both, plate frame and support structure. A mixed approach has been performed with modal test results and optimized FEM. The results confirm the capacities of the laboratory to perform human impact against safety glass.

2. TEST CAMPAIGN

As shown in fig. 2 below, to study the free-free behaviour of the support structure it has to be hanged from a bridge crane and arranged according to two configurations: with and without cross bracing. To obtain the modal test results an impact hammer (Brüel & Kjær type 8202) is used to measure the applied load. By using several accelerometers (Brüel & Kjær type 4371) the response is recorded on 22 degrees of freedom (DOF) following a previously validated test method [6]. The time histories are registered with the data acquisition system of 32 channels using IDAS-SEDA self-made software which is developed on LabVIEW-environment [7]. With this equipment the Frequency Response Functions (FRF) are computed and the frequencies and mode shapes are obtained from a curve fitting procedure.

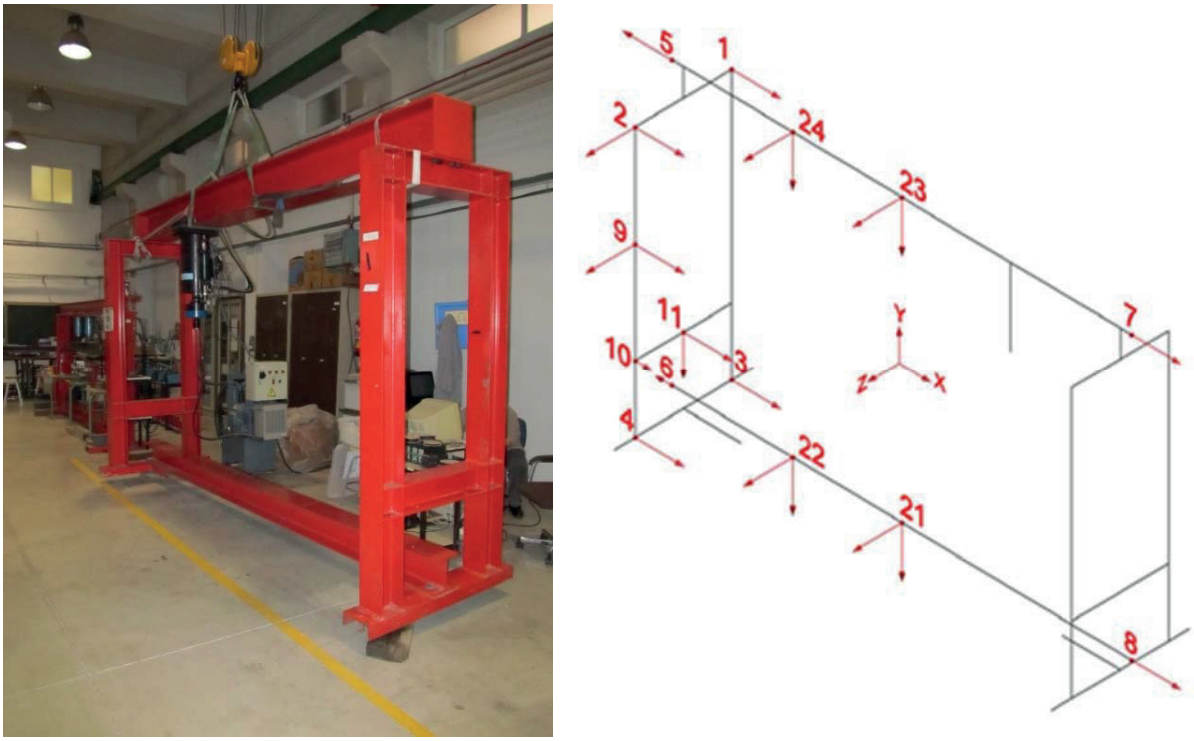


Figure 2. *Support Structure on free-free conditions and accelerometer locations (DOF)*

The main parts of the frame are plotted on fig. 3 . The frame situated on the side of the support structure is built with several HEB 160 profile beams welded to a UPN 200 beam which represents the ground support. This lateral frame is used to obtain rigid boundary conditions. Two main longitudinal beams (upper HEB 300 and lower HEB 200) join both frames and cross bracing (square tubes 50x4 mm) is added

for one of the configurations in order to increase the longitudinal stiffness along the x-axis. For another construction two vertical black stringers with dimensions of 80mm x 40 mm x 2 mm are attached to the two main longitudinal beams. A FEM is used to simulate the dynamic performance of the support structure on free-free condition. This FEM is correlated and updated with the test results in order to retrace more easily its dynamic behaviour.

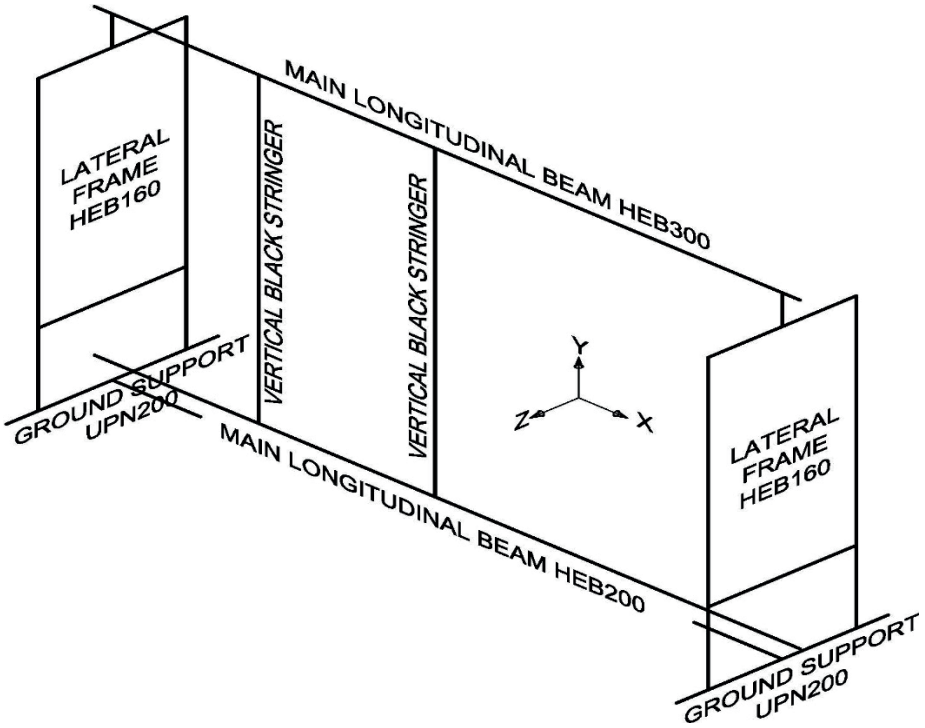


Figure 3. *Main parts schema of support structure.*

After this, the support structure is analysed with different simulations of the ground support over the concrete screed of the laboratory. Three different ground support scenarios are tested: Four screws; directly on U profile and four or eight steel cylinders.

The construction of aluminium plate with aluminium frame under free-free behaviour is studied separately. To study as well the plate + frame free-free behaviour the frame is joined to the plate to stiffen the four plate edges.

On fig. 4 are represented the three configuration scenarios. Three modal tests are performed to obtain the frequencies, damping and mode shapes. The result contains three vibration modes for the frame, five for the plate and four for plate + frame set-up.

Finally, each plate configuration (with and without aluminium frame) is attached to the rigid lateral frame of the support structure with cross bracing, called rigid set-up, or to the two vertical black stringers, called soft set up (see fig. 5).

Figure 4. *Free-Free modal test for Plate, frame and plate + frame.*

Figure 5. *Different boundary conditions to attach the plate to the support structure. a) rigid without frame b) rigid with frame c) soft without frame d) soft with frame*

3. MODAL TEST RESULTS: FREQUENCIES AND MODE SHAPES

For each modal test, time histories are registered with the data acquisition system using IDAS-SEDA software. Fig. 6 below shows the aluminium plate free-free modal test, in detail the measurement of two accelerometers on time domain and FRF on frequency domain for the same DoFs.

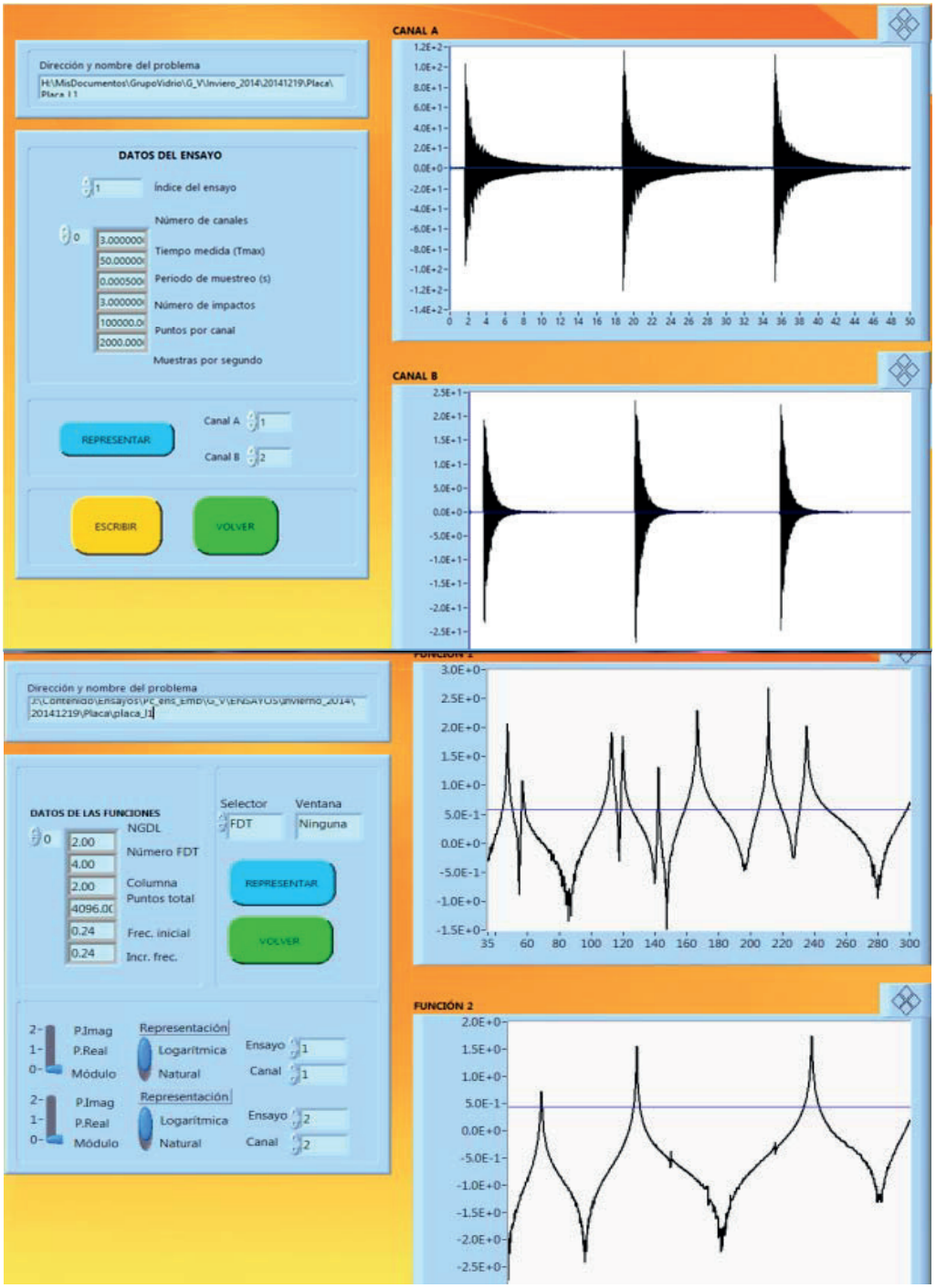


Figure 6. *IDAS-SEDA: Modal test of the plate on free-free conditions. Time history and FRF*

After the data measurement, IDAS-SEDA software is used to adjust all the measured FRF simultaneously on frequency domain to obtain the natural vibration frequencies, damping and mode shapes. As example, see Table 1 below with main results of frame on free-free *conditions* modal test.

On fig. 7 graphic FRFs are measured and adjusted (log scale and Nyquist plot) for the frame on free-free modal test.

Table 1. Modal test results for frame on free-free conditions.

IDAS-SEDA RESULTS	MODE		
	1	2	3
Frequency (Hz)	27.19	90.34	116.8
Damping (%)	0.16	0.06	0.10
DOF 1	1.01	0.319	0.693
DOF 2	2.3E-3	-1.08	-1.04
DOF 3	-0.871	0.317	0.658
DOF 4	-4.6E-3	0.706	2.7E-3

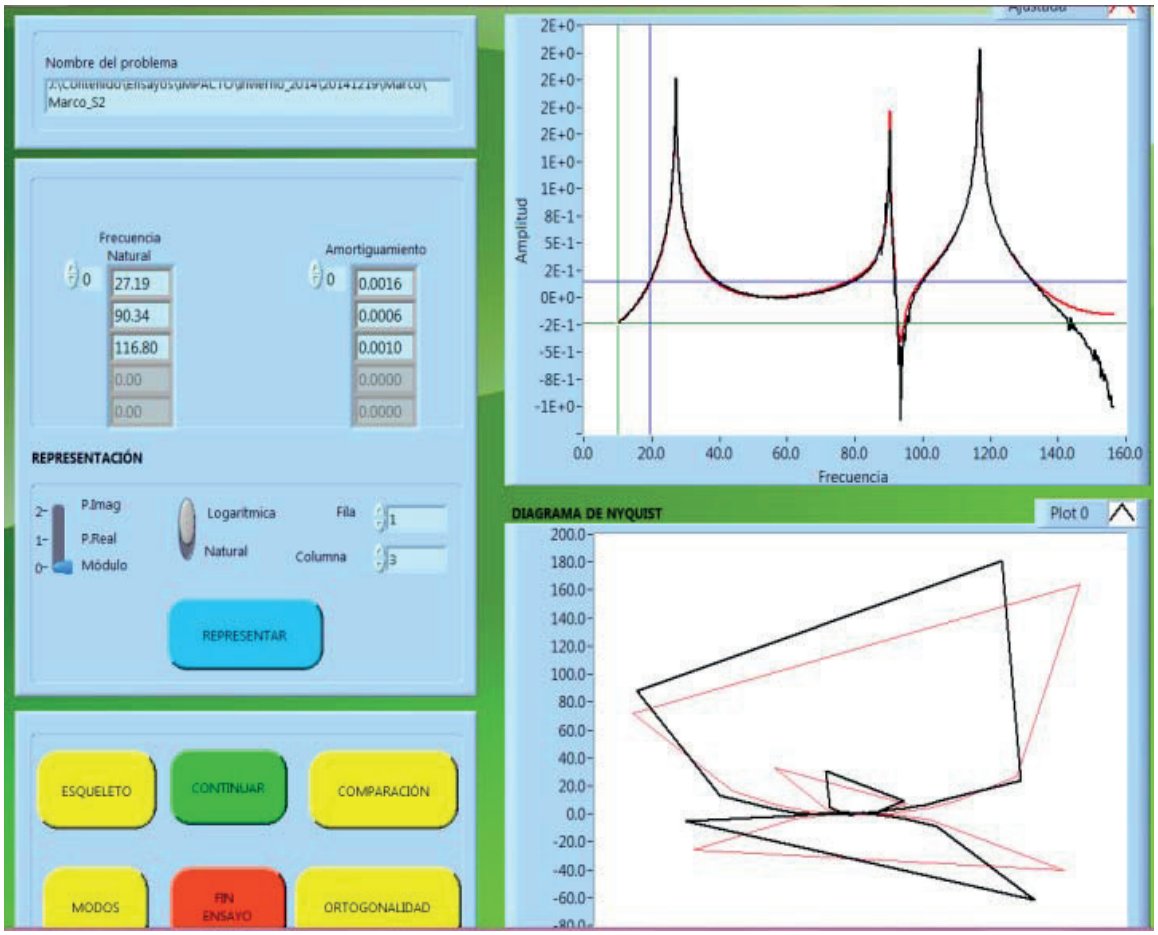


Figure 7. *IDAS-SEDA: Measured and adjusted FRF of frame on free-free conditions (log and Nyquist Plots)*

4. FINITE ELEMENT MODEL FOR FREE-FREE CONDITIONS

4.1. Support structure

The initial FEM of the support structure (fig. 8) is based on beam element with offset values to locate the centre of gravity of each beam. The lower beam is attached to the lateral frame through a "T" element on both sides (A, B). The connections between beams and frame are modelled with spring elements (translational and rotational) using different stiffness for the longitudinal upper and lower beams. Two different initials FEMs have been made, with and without cross bracing. Both FEMs are optimized taking into account the free-free modal results.

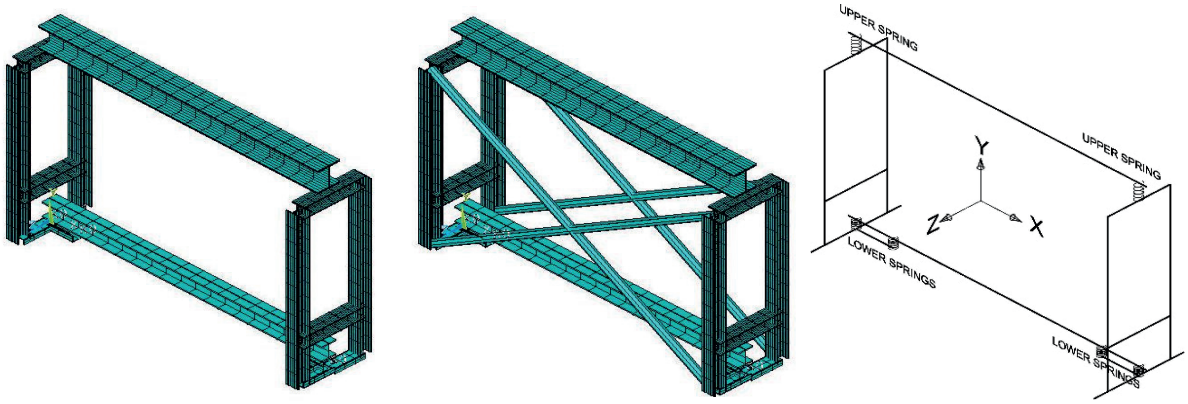


Figure 8. *FEM model: initial configuration with and without cross bracing. Connection detail.*

On Table 3 are included the values of the natural frequencies obtained with initial FEM for the support structure without the cross bracing. The mode shapes are plotted on fig. 9 using the design optimization module of ANSYS program, the connection spring stiffness are modified to obtain the same natural frequencies of the free-free modal test. After some iteration, the final values for the connection stiffness (see Table 2) are obtained for the updated model.

Table 2. Stiffness values of the connections for model updating of free-free frame.

		Displacement Stiffnes (MN/m)			Rotation Stiffnes (MN.m/rad)		
		Kdx	Kdy	Kdz	Kθx	Kθy	Kθz
Initial Model	Upper Springs	1.0E+09	1.0E+09	1.0E+09	1.0E+05	1.0E+05	1.0E+05
	Lower Springs	1.0E+09	1.0E+09	1.0E+09	1.0E+05	1.0E+05	1.0E+01
Updated Model	Upper Springs	2.0E+09	6.0E+09	2.0E+09	1.2E+07	2.0E+06	1.2E+07
	Lower Springs	5.0E+08	1.5E+09	5.0E+08	3.0E+06	4.0E+05	1.0E+01

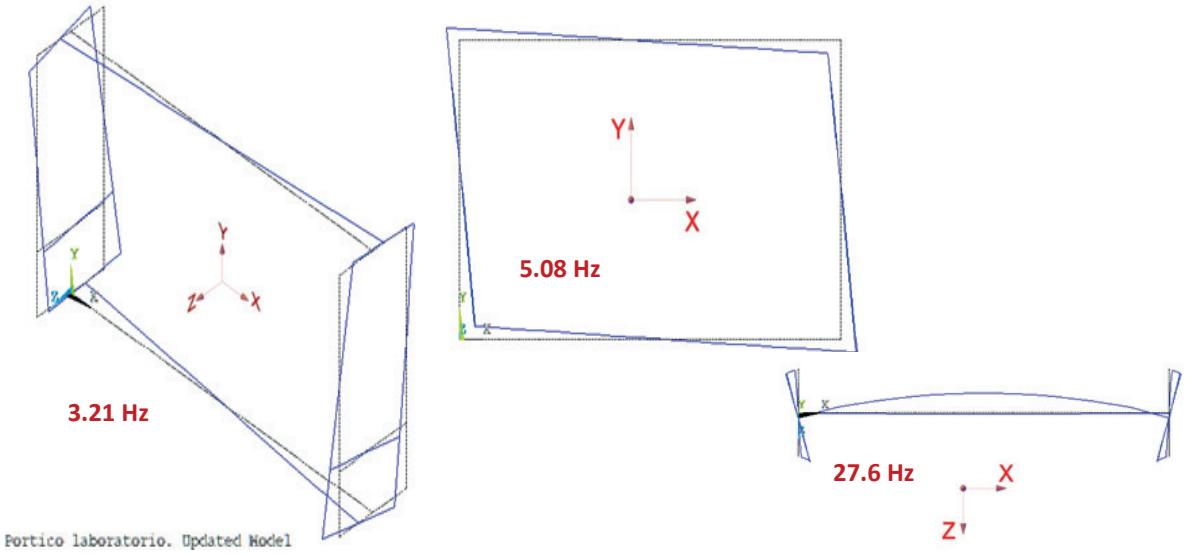


Figure 9. *Updated FEM model of the frame on free-free conditions. Mode shapes.*

Table 3. Initial and updated FEM frequencies for support structure on free-free conditions.

Mode	Modal test		Initial model	Updated model
	Freq. (Hz)	Damping (%)		
Torsion around X axis	3.18	-	2.69	3.21
Main frame lateral deformation	5.06	0.13	4.51	5.08
First bending on Z axis	27.54	0.16	29.33	27.65

The same process has been executed for the FEM of the support structure with the cross bracing attached. The behaviour of this support structure configuration changes: The torsional mode increases the frequency from 3.18 Hz up to 14.83 Hz. The second mode disappears and the third one increases slightly from 27.54 Hz to a 34.0 Hz.

4.2. Plate

For these FEMs, 2D shell elements are used for the aluminium plate and beam elements for aluminium frame. A Mesh with 20 elements for each side has been used in order to obtain an enough resolution for more than ten modes. On fig. 10 several mode shapes for plate and frame are plotted separately.

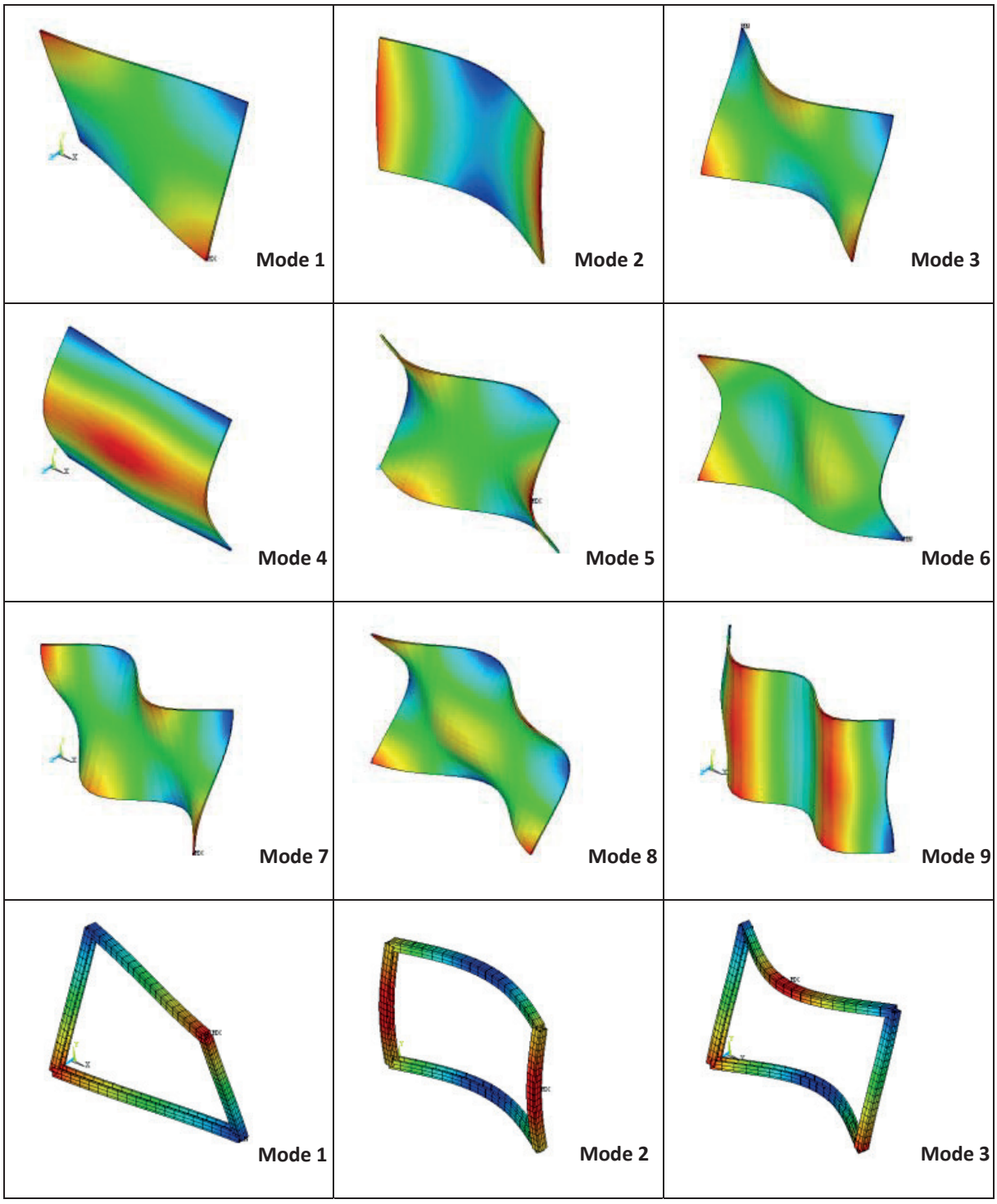


Figure 10. *Updated FEM model of the plate and the frame separately on free-free conditions. Mode shapes.*

The updating of the plate FEM is done using an optimization procedure of Ansys Program. The design variables for optimization of the plate are: thickness, the Young modulus, the Poisson coefficient and material density. For the frame the design variables are the area and the inertia moments of the beam. In both cases the objective function is the mean squared relative error (MSRE) of the differences

between the test and the model frequencies for the 10 lower modes for the plate and 3 lower modes for the frame and this objective function is minimized. In Table 4 are shown the initial and final values of the design variables and in Table 5 are collected the natural frequencies for the test of the initial and updated FEMs.

$$\mathrm{MSRE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(Ftest_i - Fmodel_i)}{Ftest_i}\right)^2 \quad (1)$$

Table 4. Design variable values for models updating of free-free plate and frame.

	Plate			Frame			
	E (GP/m^2)	**Nu**	**Dens (kg/m^3)**	**Area(cm^2)**	**Iy(cm^4)**	**Iz(cm^4)**	**J(cm^4)**
Initial Model	70	0.33	2800	2.428	680	10	150
Updated Model	73.4	0.35	2760	4.850	570	2750	290

Table 5. FEM updating for plate and frame on free-free conditions.

Mode	Modal test		Initial model	Updated model
	Freq. (Hz)	Damping (%)		
		PLATE		
1	47.55	0.06	46.17	47.34
3	56.93	0.57	51.86	53.50
3	112.92	0.23	108.00	111.02
4	119.90	0.13	111.73	115.86
5	142.13	0.41	135.33	139.13
6	166.68	0.12	157.73	163.79
7	211.22	0.03	203.31	209.48
8	235.22	0.11	227.24	234.05
9	308.40	0.09	293.62	304.40
10	322.89	0.08	304.01	314.65
MSRE			2.9E-3	0.67E-3
		Frame		
1	27.19	0.16	28.29	27.11
2	90.34	0.06	127.89	82.28
3	116.8	0.10	175.82	118.82
MSRE			143E-3	2.8E-3

When the frame is attached to the plate (called plate + frame), the boundary conditions of the edges change and the shape of the first mode is different (see fig. 11). To model the plate + frame, the two FEMs of the plate and frame are joined through the edge nodes. This assembled FEM is made for the

initial and updated FEMs. In Table 6 is presented the initial and the updated FEMs of the plate + frame to compare with the test results. As indicated below the new model adjusts with enough precision the natural frequencies of the test.

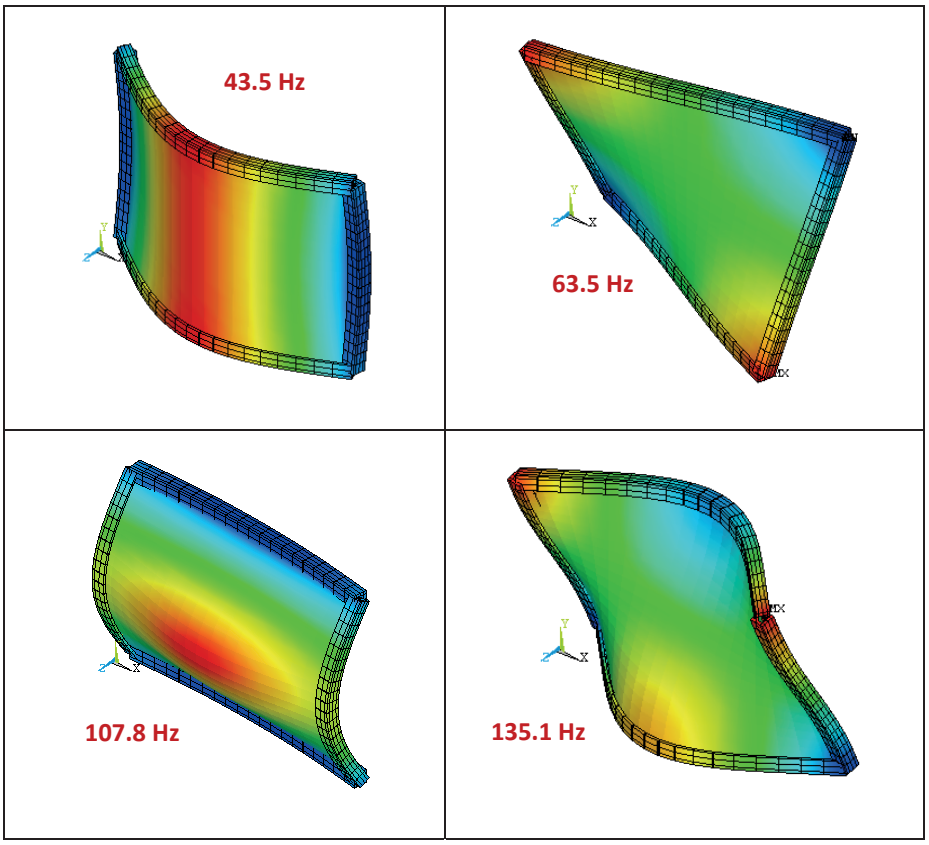


Figure 11. *Updated FEM model of the plate+frame on free-free conditions. Mode shape*

Table 6.FEM updating for plate + frame on free-free conditions.

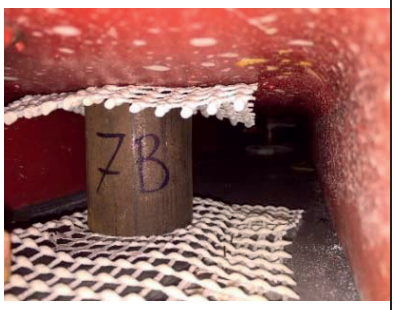
PLATE+ FRAME	Modal test		Initial model	Updated model
	Freq. (Hz)	Damping (%)	Freq. (Hz)	Freq. (Hz)
1	43.53	2.02	38.43	44.04
2	66.52	0.85	65.79	65.87
3	107.77	1.09	110.38	112.2
4	135.15	2.55	118.45	126.5
MSRE			7.4E-3	1.5E-3

5. OPERATIONAL CONDITIONS BEHAVIOUR

5.1. Support structure

In this case, operational conditions correspond with support structure placed over some ground supports on the laboratory floor. The ground supports used are: a) Four screws of M20, b) Directly on U profile, c) Four or eight steel cylinders of 80mm x Ø60mm; as shown on Table 7. The mass of the support structure avoids any type of slippage, but the stiffness of the ground supports should be taken into account.

Table 7. Boundary conditions for the support structure

Portax1 (four screws of M20)	Fromxux (U profile)	FronxCx (steel cylinders)
		

In fig. 12 are shown FRFs measured on the same DoF situated in the centre of the upper longitudinal main beam for different ground support configurations. Due to the low stiffness of the screws, the stiffness obtained to this configuration is the screws one (2,5 MN/m). However, for all other configurations, which are stiffer, the stiffness obtained corresponds to the concrete screed of the laboratory one (10 MN/m).

5.2. Plate

Four different set-ups have been studied to ensure the congruency of its dynamic behaviour under operational conditions. On fig. 13 are collected the FRF measured on the centre of the plate for different boundary conditions which are shown on fig. 5.

The stiffness of 0.2MN/m represented with a straight blue line corresponds with the plate supported on four points of the lateral frame with cross bracing (P_S_4P_CX op6). The first natural frequency is 29.5 HZ and the prediction with the FEM is 29.3Hz.

The other FRFs correspond to the plate+frame. The first natural frequency is different depending on the support structure location, but the stiffness for all of them represented with a straight rose line is the same, with a value of 0.5MN/m.

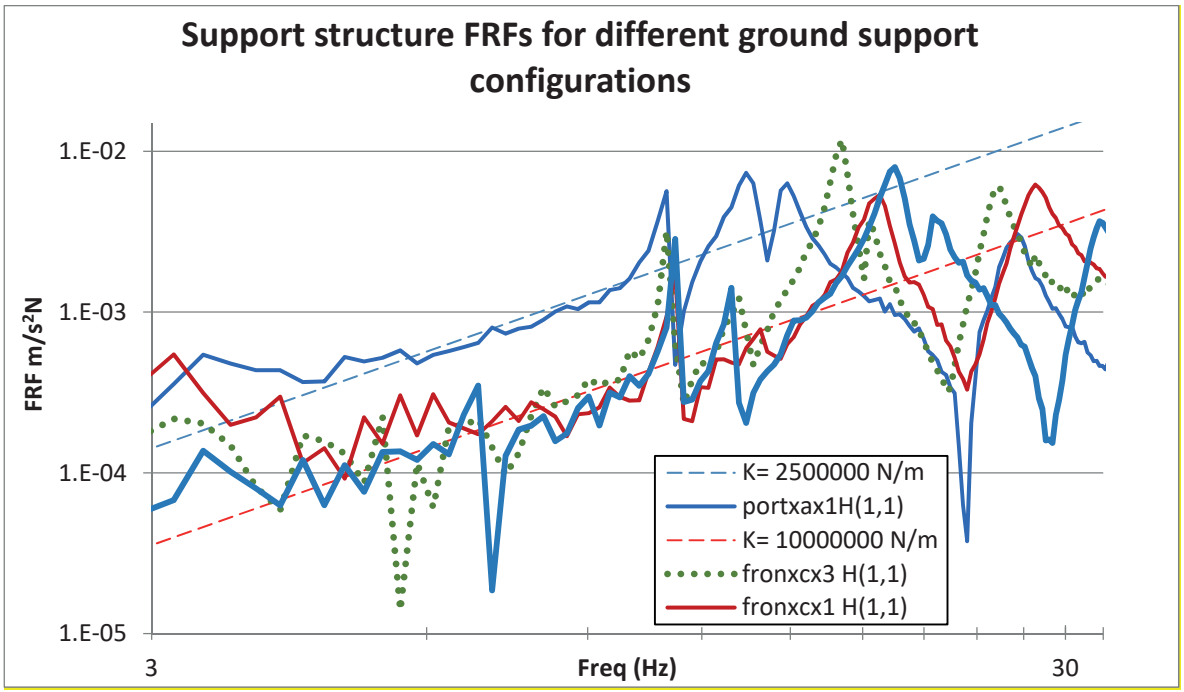


Figure 12. *FRFs of DOF 1 for different ground support conditions.*

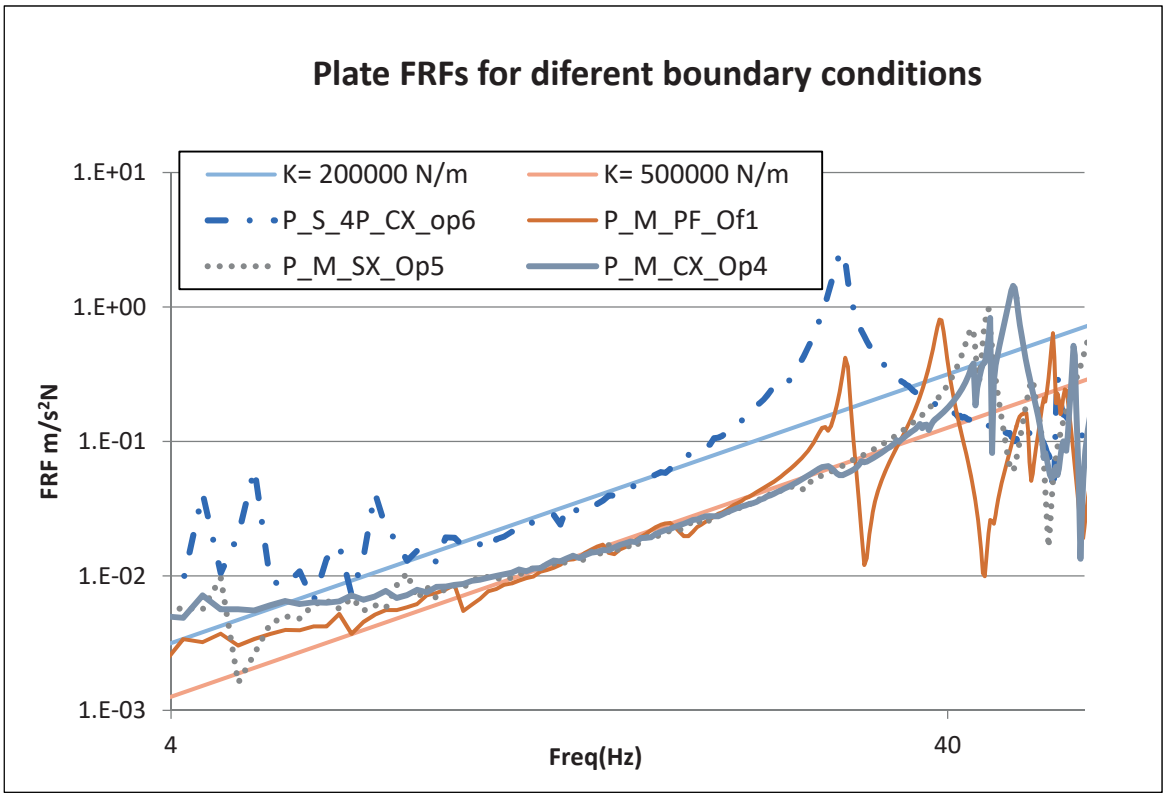


Figure 13. *FRFs of plate for different boundary conditions.*

6. IMPACT TESTS

As proof of capacity of the laboratory to test the human impact on safety glazing, in fig.14 are presented two time histories of the accelerations measured on the mass of the impact head for different set-ups with the pendulum defined by the standard EN 12600. For different test set-ups the time histories of the accelerations change significantly, this ensures a great versatility of the test facility.

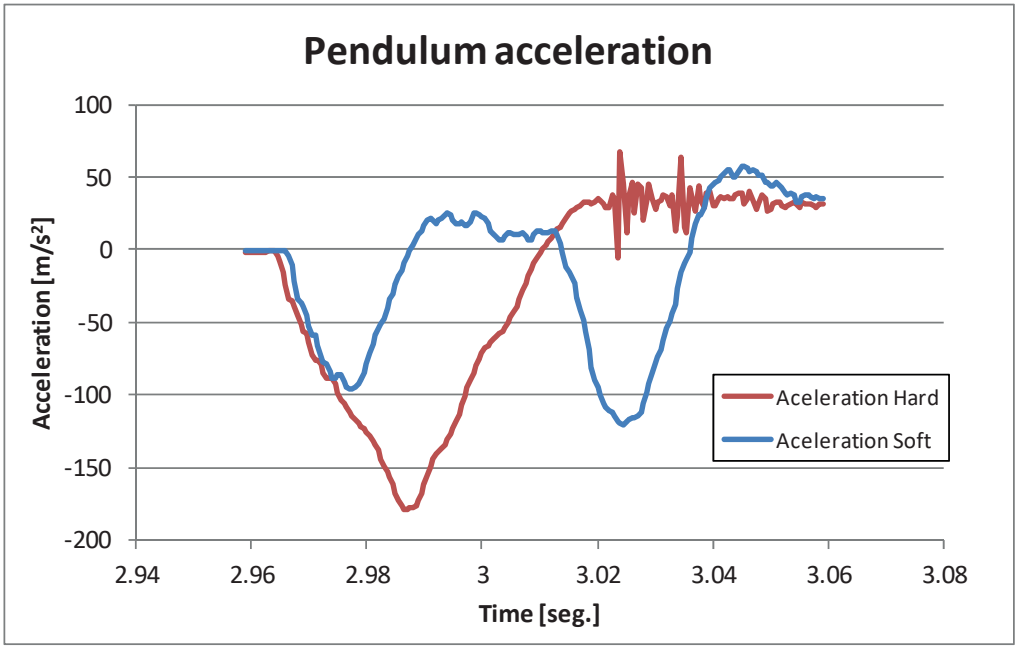


Figure 14. Accelerations of Pendulum impact for 2 set-ups.

7. CONCLUSIONS

This paper demonstrates the following:

- The testing laboratory enables realistic testing of different boundary conditions of glass plates with dimensions of up to 3 X 2 m and support structure glass plates.

- It is established a FEM of the support structure which characterizes its dynamic behavior according to different boundary conditions (on free-free, on U-profile support, four screws support and cylinder support). This dynamic behavior is set in comparison with modal tests resulting in natural frequencies, damping and mode shapes. The measure has been carried out simultaneously by several accelerometers. This FEM have been updated adjusting the stiffness of the joints between different parts using optimization techniques.

- It is studied an aluminum plate of 1000 X 700 X 10 mm with different set-ups in order to proof that the laboratory can be adapted in a flexible way; on one hand with a frame which simulates the four edges of the clamped plate, and on the other hand with different boundaries conditions for the support structure. In this case also have been developed updated FEMs with modal tests on free-free conditions for plate and frame separately, and finally plate + frame in one single FEM.

- Furthermore the congruence of the measured stiffness is proved through modal tests. This has been studied with different boundaries conditions of the support structure and with different plate set-ups.

- The capacity of the laboratory has been proved to perform human impact tests on safety glazing through a closely analysis of the phenomena dynamic behavior from two decisive points of view: Experimental and mathematical models (FEM).

REFERENCES

[1] CEN (2002) EN 12600: Glass in building – pendulum test – impact test method and classification for flat glass. CEN, Brussels, Belgium.

[2] Schneider, J. & Schula, S., 2016. Simulating soft body impact on glass structures. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings*, 169(6), pp.416–431.

[3] Pacios, A., Postigo, S. & Huerta, C., (2011). Relationship between characteristic parameters of impact test for safety glasses. *Stahlbau*, 80(SPEC. ISSUE), pp.61–66

[4] Postigo, S., Pacios, A., Huerta, C. (2007): Design of a pendulum impact to characterize safety glass. *XI International Congress on Project Engineering* (pp. 844-855). Lugo 26-28 September 2007

[5] Postigo, S., Pacios, A. & Huerta, C., (2011). Basic design criteria for an impact test frame for safety glazing. *Boletin de la Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio*, 50(5), pp.273–278

[6] Postigo, S. (2010). Estudio teórico experimental de impactos humanos contra vidrios de acristalamientos de edificación. (unpublished PhD. thesis). Madrid: Universidad Politécnica de Madrid

[7] Jiménez, F. & Huerta, M.C., 2010. Educational software program for teaching modal testing. *Computer Applications in Engineering Education*, 18(3).

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL EN SERVICIO DE EDIFICIOS INDUSTRIALES CON MAQUINARIAS

María H. Peralta[1], Norma L. Ercoli[2], Leonel O. Pico[3], Raúl Bacchiarello[4]

ABSTRACT

The design of industrial buildings requires an analisis of their structural behavior in order to obtain an adequate response during the life in service. Dynamic actions due to mechanical vibrations of industrial equipment affect the structural behavior. The origin of mechanical vibrations and their effects on structures requires experimental measurements for their validation.

In this work the analysis of two industrial buildings located one in a lime production plant and the other in a cement factory is presented. In both buildings experimental measurements of the vibrations in the structures and in the installed machines were realized detecting inadequate vibrations. The analysis was performed to develop the structural-mechanical intervention and to achieve an appropriate behavior. The own modes of vibration and their frequencies were obtained numerically. The structural response was analyzed and evaluated, which allowed corrective decisions to be taken, in accordance with normative standards.

Keywords: dynamic analysis, FEM, machine vibrations

[1] *Departamento de Ingeniería Civil. Fac. de Ingeniería, UNCPBA. Argentina. mperalta@fio.unicen.edu.ar (Corresponding author)*
[234] *Departamento de Ingeniería Civil. Fac. de Ingeniería, UNCPBA. Argentina. nercoli@fio.unicen.edu.ar; lpico@fio.unicen.edu.ar; rbacchiarello@fio.unicen.edu.ar*

1 INTRODUCCIÓN

Las acciones estáticas y dinámicas deben contemplarse en la evaluación y diseño de edificios industriales. Estas acciones se originan durante el desarrollo de los procesos involucrados según el destino y a la presencia de equipos. Las principales acciones dinámicas se deben a las vibraciones mecánicas originadas por los equipos industriales que pueden afectar al comportamiento estructural [1, 2, 3], lo cual requiere una visión integral de la interacción del conjunto máquina-estructura, que en algunos casos puede extenderse al suelo de fundación [4, 5, 6]

El origen de las vibraciones mecánicas y sus efectos sobre los componentes estructurales requiere mediciones experimentales para su validación. Para el diseño adecuado de edificios industriales se debe considerar la respuesta global de la estructura [7, 8].

Existen dos formas posibles para lograr un comportamiento estructural adecuado: por un lado desintonizar la estructura afectada por las vibraciones y por otro, actuar sobre el vínculo máquina-estructura a través del diseño del sistema de aislación, modificando la transmisibilidad [9]. En todo problema de vibraciones se pueden identificar tres componentes esenciales:

- La maquinaria en funcionamiento y la fuente que origina las vibraciones.
- La estructura de soporte de la maquinaria (piso, fundación, bancada, etc.).
- El montaje antivibratorio interpuesto entre la maquinaria y la estructura.

Las formas de intervención para mitigar problemas de vibraciones dependen de las condiciones de operación y limitaciones constructivas. Las opciones son las siguientes:

- *Intervención puramente mecánica*, sobre la fuente que produce las vibraciones (máquina o mecanismo) minimizando la generación de fuerzas vibratorias, por ejemplo a través del control del balanceo del rotor.

- *Intervención puramente estructural*, sobre la estructura afectada por vibraciones. Las opciones posibles con el objetivo de desintonizarla son: modificación de su masa o rigidez para cambiar sus frecuencias naturales, y/o incremento del amortiguamiento para minimizar la amplitud de las oscilaciones [5, 6].

- *Intervención estructural-mecánica*, sobre el vínculo entre máquina y fundación, con aislamiento de vibraciones y modificación de transmisibilidad [7].

En este trabajo se muestra el análisis de dos edificios industriales en servicio, emplazados uno en una planta de producción de cal y el otro en una fábrica de cemento, destinados al proceso de clasificación y trituración de piedra caliza por medio de una zaranda y trituradora con tolva. En ambos edificios se realizaron tareas de mantenimiento predictivo-proactivo, con mediciones experimentales de las vibraciones en las estructuras y en las maquinarias instaladas. En las mediciones efectuadas en ambos edificios se detectaron vibraciones inadecuadas, tanto de las maquinarias como en las estructuras sobre las que apoyan los equipos. Se analizaron estas problemáticas teniendo en cuenta las premisas

anteriores, para desarrollar una intervención estructural-mecánica y lograr un comportamiento adecuado. Desde el punto de vista estructural, a través del análisis numérico computacional de las estructuras se obtuvieron los modos propios de vibración y sus frecuencias. Se analizó la respuesta de los entrepisos, formados principalmente por losas de hormigón armado, sobre los que se apoyan las máquinas con sus correspondientes cargas dinámicas. Los resultados obtenidos permitieron evaluar el comportamiento estructural en condiciones de servicio y adoptar decisiones correctivas, de acuerdo con los estándares normativos [7, 8].

2 CONTEXTO TEÓRICO Y PAUTAS DE EVALUACIÓN ESTRUCTURAL

Las características dinámicas propias de las estructuras, modos y frecuencias de vibración, son indicadores del comportamiento estructural dinámico, incluyendo la posible afectación de la capacidad portante. Los parámetros involucrados en las estructuras son su masa m, su rigidez k y su amortiguamiento c [10], según la Ec. (1):

$$ma + cv + kx = F(t) \quad (1)$$

El comportamiento estructural se caracteriza determinando la respuesta estructural dinámica, obtenida mediante técnicas experimentales y/o numéricas y está dada en términos de aceleraciones y velocidades vibratorias. La evaluación se realiza comparando los resultados obtenidos de las mediciones “in situ” con los límites indicados por normativas y criterios internacionales [7, 8]. En este trabajo se adoptaron los criterios establecidos en normas internacionales (ISO, DIN) que se indican en la Figura 1, [7] . Se observa que los valores expresados en unidades de aceleración, m/s^2 y los niveles de velocidad vibratoria en mm/s, (rms), están relacionados con la frecuencia vibratoria y el daño sobre las estructuras. En Tabla 1, [8] se muestra otro criterio concordante.

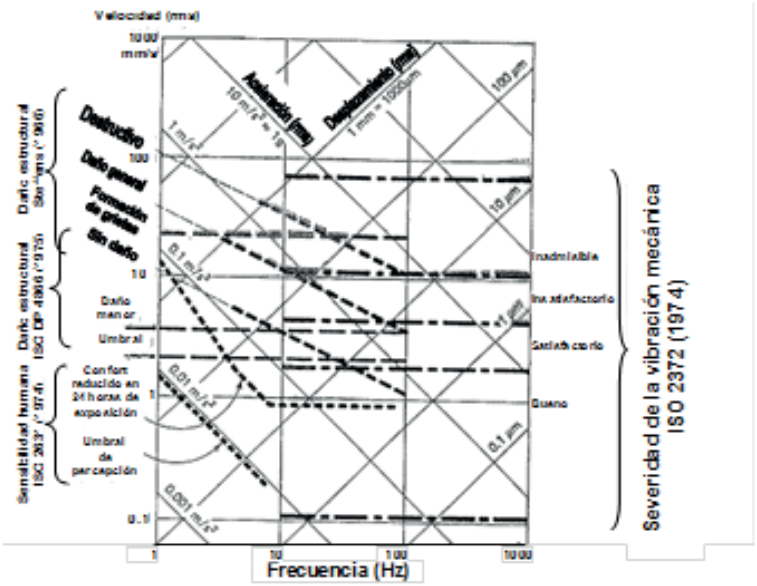


Figura 1: *Criterios de evaluación de daño por acciones dinámicas. [7]*

Tabla 1: Criterios de vibración según [8].

Rango	Velocidad rms (mm/s)	Efecto
I	menor que 2,5	no se produce daño
II	2,5 a 5,0	daño muy improbable
III	5,0 a 10,0	daño poco probable
IV	mayor que 10,0	daño posible; es necesaria la evaluación estructural

Según la Figura 1 y la Tabla 1, se considera que no se genera daño estructural cuando la velocidad vibratoria es menor que 10 mm/s (rms) y la aceleración es menor que 0,1 m/s^2. Esto implica un aceptable comportamiento estructural según los criterios de referencia.

3 CASOS DE ESTUDIO

3.1 Caso I: Edificio para trituradora en fábrica de cal

La estructura analizada forma parte del proceso de trituración primaria en una fábrica de cal. El edificio cuenta con diversos equipos mecánicos, en particular un alimentador Grizzly que transmite vibraciones al nivel 178.600 (expresado en mm respecto al nivel medio del mar). Es una estructura porticada espacialmente de hormigón armado en sus primeros niveles y metálica en los niveles superiores, como se muestra en las Figuras 2a y 2b. A partir de la puesta en marcha de los equipos se detectaron vibraciones en distintos puntos de la estructura fuera del rango considerado admisible de 10 mm/s, rms.

a) b)

Figura 2: *a) Vista general de la estructura durante la etapa de construcción; b) Vista del nivel 178.600 durante la instalación de los equipos de zaranda.*

Se realizó el análisis dinámico de la estructura existente, para lo cual se dispuso de información aportada por el comitente, referida a planos dimensionales y de armaduras y la referida al equipo que produce las vibraciones en dicha estructura. Los datos de los equipos son:

Características del motor sobre nivel 178.600:

- Potencia: 37 kW.
- Carga vertical: 4 kN (nodo 5).
- Frecuencia de operación: 1500 rpm (25 Hz).

Características del alimentador acarreador sobre nivel 178.600:

- Cargas estáticas verticales: 35 kN (nodo 2); 6 kN (nodo 3); 41 kN (nodo 4).
- Cargas dinámicas verticales: ±8 kN (nodo 2); ±1 kN (nodo 3); ±11 kN (nodo 4).
- Frecuencia de operación: 800 rpm (13,33 Hz).

3.1.1 Análisis dinámico estructural

Para evaluar el comportamiento dinámico se efectuó el análisis modal (formas modales y frecuencias) de la estructura existente en dos escenarios que se resumen a continuación:

1) Estructura existente sin cargas (peso propio solamente). Se analizaron los primeros 20 modos de vibración según se indican en la Tabla 2 y en las Figuras 3 a 5.
2) Estructura existente con cargas: peso propio + cargas de maquinarias + cargas sobre acarreador + carga de tolva al 70 %. Se analizaron los 20 primeros modos de vibración según se indican en la Tabla 3 y en las Figuras 6 a 9.

Tabla 2: Frecuencias naturales en Hz y tipo de modo, para estructura existente sin cargas.

Modo	Frecuencia (Hz)	Tipo de modo
1	2,78	Flexional global (por columnas) y traslacional horizontal de entrepisos según eje y
2	3,17	Flexional global (por columnas) y traslacional horizontal de entrepisos según eje x
3	3,87	Torsional global según eje z
4	5,48	Flexional de columnas de lado filtro
5	7,05	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
6	10,33	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
7	**14,20**	**Flexional de entrepisos de niveles 178.600 y 187.700**
8	14,70	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
9	15,46	Flexional de entrepiso de nivel 187.700
10	16,85	Flexional de columnas de lado tolva, torsional de entrepiso de sector tolva y flexional de entrepiso de nivel 178.600.
11	**17,57**	**Flexional de losa de nivel 178.600**
12	18,98	Flexional de losa de nivel 187.700
13	20,67	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
14	21,14	Flexional de losa de nivel 187.700
15	26,22	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
16	**26,79**	**Flexional de losa de nivel 178.600**
17	27,90	Flexional de columnas de lado filtro
18	28,37	Flexional de losas de niveles 178.600 y 187.700 y tolva
19	29,04	Flexional de vigas de nivel 178.600
20	30,31	Flexional de losa de nivel 178.600 y columnas

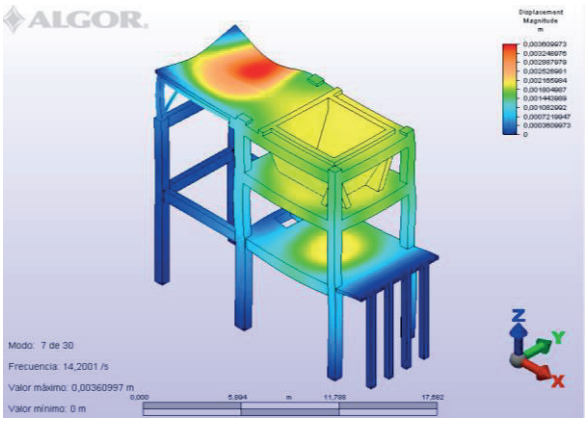


Figura 3: *Modo 7, flexional de losas de niveles 178.600 y 187.700; 14,20 Hz. Estructura existente sin carga.*

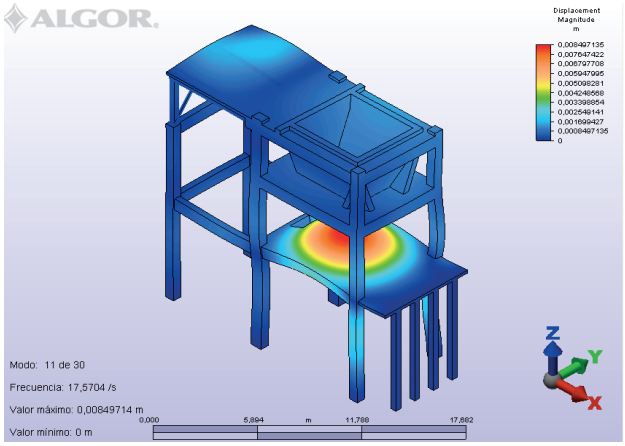


Figura 4: *Modo 11, flexional de losa de nivel 178.600; 17,57 Hz. Estructura existente sin carga.*

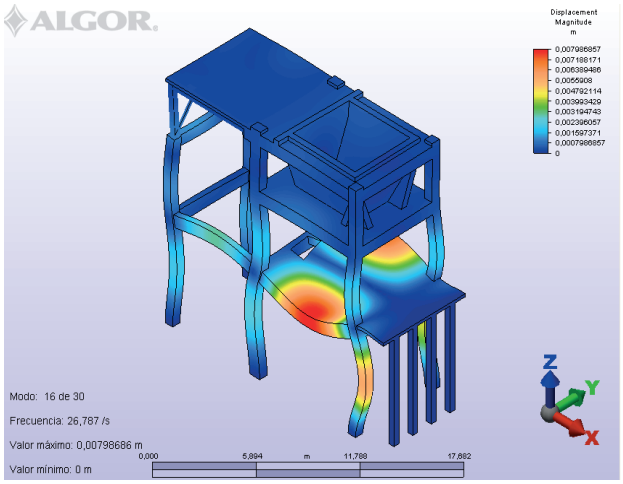


Figura 5. *Modo 16, flexional de losa de nivel 178.600; 26,79 Hz. Estructura existente sin carga.*

Tabla 3: Frecuencias naturales en Hz y tipo de modo, para estructura existente con cargas.

Modo	Frecuencia (Hz)	Tipo de modo
1	2,78	Flexional global (por columnas) y traslacional horizontal de entrepisos según eje y
2	3,17	Flexional global (por columnas) y traslacional horizontal de entrepisos según eje x
3	3,87	Torsional global según eje z
4	5,48	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
5	7,05	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
6	10,33	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
7	**12,14**	**Flexional de losa de nivel 178.600 (primer modo)**
8	**14,07**	**Flexional de entrepisos de niveles 178.600 y 187.700 (primer modo)**
9	14,70	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
10	15,12	Flexional de losa de nivel 187.700
11	16,59	Flexional de columnas de lado tolva, torsional de entrepiso de sector tolva y flexional de entrepisos de niveles 178.600 y 187.700
12	18,32	Flexional de losa de nivel 187.700
13	20,66	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
14	21,12	Flexional de losa de nivel 187.700
15	**23,14**	**Flexional de losa de nivel 178.600 (segundo modo)**
16	26,19	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
17	**27,32**	**Flexional de entrepisos de niveles 178.600 y 187.700 (segundo modo)**
18	27,95	Flexional de columnas y vigas de lado filtro
19	28,67	Flexional de losa de nivel 178.600 y columnas
20	29,09	Flexional de columnas y vigas de lado filtro

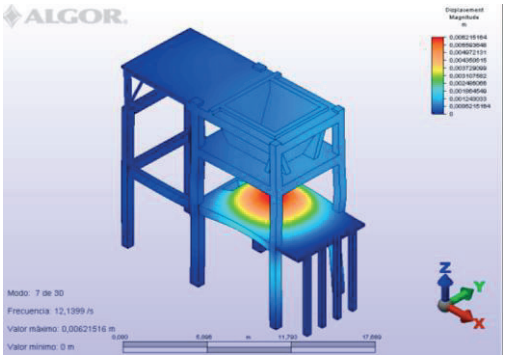


Figura 6: *Modo 7, flexional de losa de nivel 178.600 (primer modo); 12,14 Hz. Estructura existente con carga.*

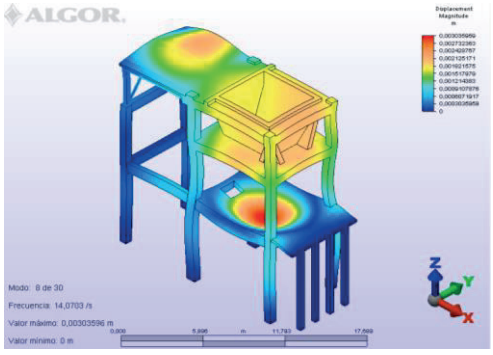


Figura 7: *Modo 8, flexional de entrepisos de niveles 178.600 y 187.700 (primer modo); 14,07 Hz. Estructura existente con carga.*

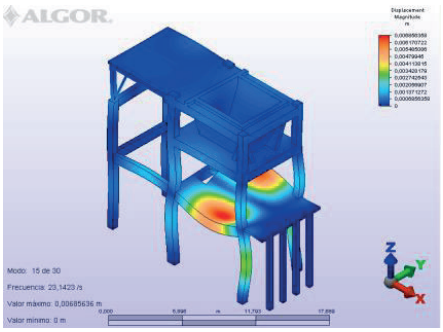


Figura 8. *Modo 15, flexional de losa de nivel 178.600 (segundo modo); 23,14 Hz. Estructura existente con carga.*

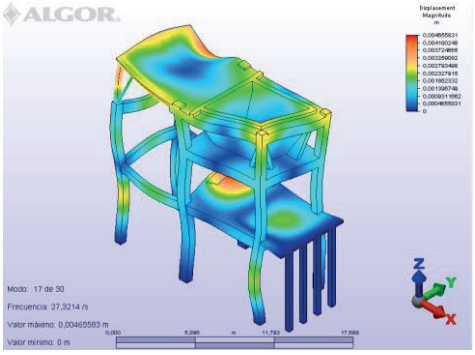


Figura 9. *Modo 17, flexional de entrepisos de niveles 178.600 y 187.700 (segundo modo); 27,32 Hz. Estructura existente con carga.*

3.1.2 Evaluación de los resultados del comportamiento dinámico

A partir de los resultados obtenidos para la estructura existente, según las Tablas 2 y 3, existen valores de frecuencias propias de las losas de los niveles 187.700 y 178.600 que se encuentran en el rango de operación de los equipos existentes, destacados con negrita y fondo gris en dichas tablas. Ellos corresponden a los modos 7, 11 y 16 de Tabla 2 (Figuras 3 a 5) y a los modos 7, 8, 15 y 17 de Tabla 3 (Figuras 6 a 9). Esta circunstancia implica que el conjunto estructura-equipo alimentador acarreador, en el nivel 178.600, se halla en zona resonante.

Sobre la base de lo expresado, se propuso una adecuación estructural con refuerzos de vigas, columnas y arriostramientos metálicos y su correspondiente análisis dinámico para determinar los modos y frecuencias propias de la estructura con refuerzos. Según las prácticas usuales de la ingeniería, se adoptó que las frecuencias propias del conjunto estructura-maquinaria se alejen preferentemente en ± 20 % del rango de operación de la máquina de 800 rpm o 13,3 Hz (10 a 16 Hz).

3.1.3 Propuesta de refuerzos estructurales y análisis dinámico de la estructura reforzada

En la Figura 10 se ilustra la vista general de la estructura con los refuerzos propuestos. La propuesta de refuerzos contempló en el nivel 187.700 la colocación de vigas de 800 mm de altura en todo su perímetro. Se plantearon diagonales de refuerzo entre los niveles, a saber IPN 280, según se muestra

en la Figura 10. Adicionalmente, se reforzó el nivel de la losa 178.600 con vigas UPN 260, según se detalla en la Figura 11, por debajo de la estructura existente de entrepiso. Se agregaron puntales IPN 500 hasta el nivel de fundación sobre una base de hormigón y se sugirieron diagonales de apoyo y arriostramiento, según lo mostrado en la Figura 12. Con todo lo anterior, se analizaron los 33 primeros modos de vibración, según se indican en la Tabla 4.

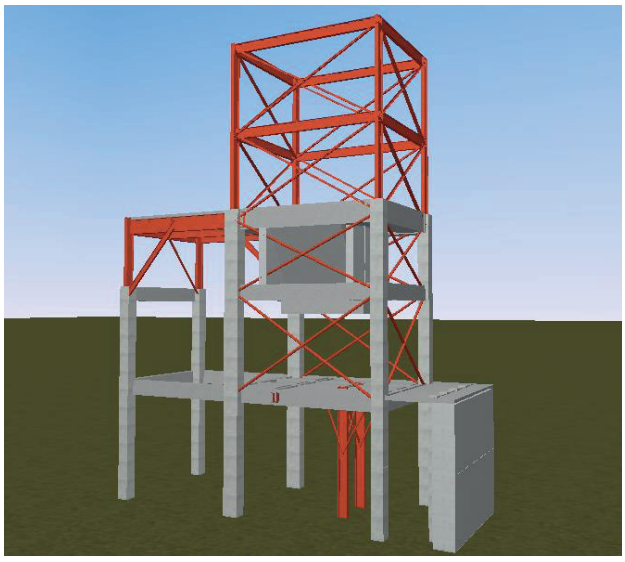


Figura 10: *Vista general de los refuerzos planteados.*

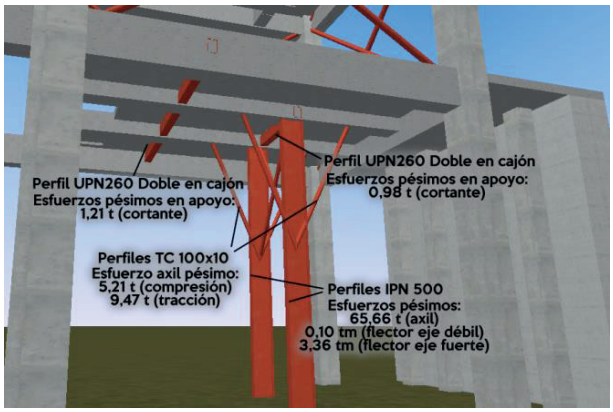


Figura 11: *Vista de los refuerzos planteados en el nivel 178.600.*

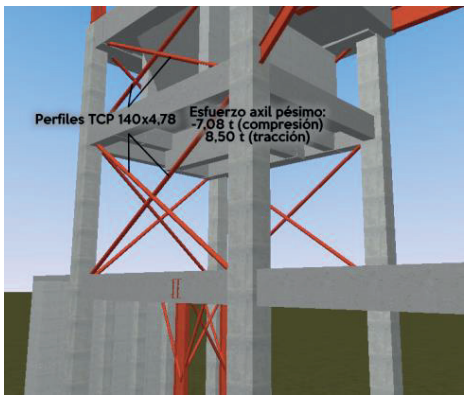


Figura 12: *Vista de diagonales de refuerzo.*

Tabla 4: Frecuencias naturales en Hz y tipo de modo, para estructura rigidizada y cargada.

Modo	Frecuencia (Hz)	Tipo de modo
1	2,93	Flexional global (por columnas) y traslacional horizontal de entrepiso de nivel 187.700 según eje y.
2	4,57	Flexional global (por columnas) y traslacional horizontal de entrepiso de nivel 187.700 según eje x.
3 y 4	4,90	Flexional. Se activan diagonales de rigidización.
5	5,40	Torsional según eje z.
6 y 7	5,82	Flexional. Se activan diagonales de rigidización.
8	6,58	Flexional de columnas y vigas de lado filtro.
9	6,74	Flexional. Se activan diagonales de rigidización.
10	7,68	Flexional de columnas y vigas de lado filtro.
11	8,59	Flexional. Se activan diagonales de rigidización.
12	11,97	Flexional de columnas y vigas de lado filtro.
13	13,66	Flexional de sector tolva.
14	14,41	Flexional de columnas y vigas de lado filtro.
15	15,83	Flexional de columnas y vigas de lado filtro.
16	16,68	Flexional de losa de nivel 187.700 (primer modo).
17	17,96	Flexional global en columnas de sector tolva y columnas de losa 178.600.
18 a 23	19,52	Se activan diagonales de rigidización.
24	19,79	Flexional de losas de niveles 178.600 y 187.700.
25	20,77	Flexional de columnas y vigas de lado filtro.
26	21,37	Flexional de losa de nivel 187.700.
27 a 32	23,12	Se activan diagonales de rigidización.
33	26,13	Flexional de columnas y vigas de lado filtro.

3.1.4 Análisis de los resultados obtenidos para la estructura reforzada

La alternativa de adecuación de la estructura planteada analizada mediante modelos numéricos computacionales permite el alejamiento de la zona resonante del conjunto estructura-equipamiento y contempla la factibilidad técnica de su realización en el espacio físico disponible. Las secciones de los refuerzos propuestos como adecuación estructural verifican las tensiones y deformaciones para el estado en servicio, cuyos valores significativos condicionan el posterior diseño de las uniones. En las Figuras 13 a 15 se muestra la materialización de los refuerzos propuestos en la estructura existente

Figuras 13, 14 y 15: *Ejecución de refuerzos estructurales.*

3.2 Caso II: Edificio para trituradora y zaranda en fábrica de cemento

3.2.1 Descripción de la estructura analizada

La estructura analizada es de hormigón armado porticada espacialmente, construida con hormigón elaborado, según se observa en Figura 16. Se detectaron vibraciones muy importantes en distintos puntos de los entrepisos que sirven de apoyo a los equipos mecánicos.

Figura 16: *Vista general de la estructura del edificio de trituradora secundaria y zaranda y su emplazamiento en la fábrica de cemento.*

La documentación técnica proporcionada por el comitente se muestra en la Figura 17, donde se observa que las dimensiones en planta son 11,20 m x 7,30 m, con columnas en cada esquina. La altura total del edificio es 19,90 m. La estructura posee una cubierta de hormigón armado con un sector donde descargan los apoyos de una cinta transportadora de alimentación de piedra caliza. El edificio consta de tres niveles de entrepisos con losas llenas de hormigón armado apoyadas sobre vigas, con

amplios sectores de aberturas exigidas por los equipos a instalar. El edificio se funda mediante una platea rígida de hormigón armado, de espesor 0,60 m, en el nivel 195.490 mm respecto al nivel medio del mar. El nivel de entrepiso 203.850 corresponde al apoyo de trituradora y tolva, mientras que el nivel 206.850 a la descarga del equipo de zaranda. El diseño y cálculo estructural se realizó según CIRSOC 201/05 [12]. Los materiales utilizados son hormigón H-30 y acero ADN 420. En el nivel 206.850, la zaranda se apoya sobre el entrepiso de losa de hormigón armado en cuatro puntos con acciones estáticas y dinámicas de 10,42 kN y de +1,372 kN, respectivamente. Los datos característicos del motor impulsor son: potencia de 30 kW y velocidad de 996 rpm (15 Hz). La trituradora y la tolva se encuentran en el nivel 203.850. La velocidad del motor impulsor es 960 rpm (15 Hz). La tolva se apoya en 4 puntos sobre la losa, con 110 t de peso total de la tolva llena de material.

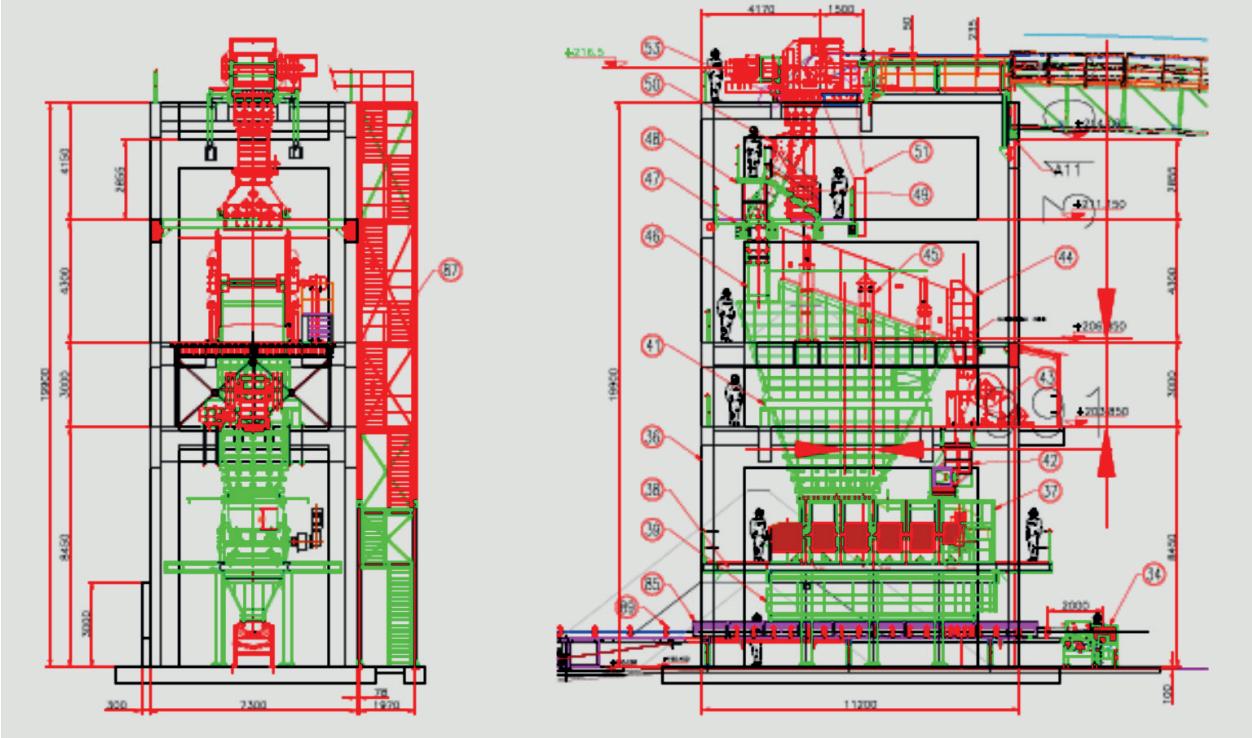


Figura 17: *Tipología estructural en altura y ubicación de los sistemas mecánicos.*

En la Figura 18 puede observarse la instrumentación de las mediciones experimentales. Se realizaron mediciones de velocidades y aceleraciones en diferentes puntos de interés cuyos resultados fueron de valores superiores a los adoptados como admisibles e indicados en el ítem 2 del presente trabajo, según lo mostrado en la Tabla 5 y en la Figuras 19 a), b), c) y d).

Figura 18: *Mediciones experimentales de las vibraciones en la estructura.*

Tabla 5: Puntos de mediciones y valores experimentales de velocidades vibratorias.

Punto de medición	Características	Frecuencia (cpm)	Frecuencia (Hz)	Velocidad pico (mm/s)	Velocidad rms (mm/s)
P1V	Posición 1 vertical	960	16	16,8	11,9
P2V	Posición 2 vertical	960	16	14,5	10,2
P3V	Posición 3 vertical	960	16	18,5	13,1
P4V	Posición 4 vertical	960	16	18,7	13,3
P5V	Posición 5 vertical	960	16	18,6	13,2

a) b)

Figura 19: *Ubicación de los puntos de mediciones experimentales de las vibraciones. a) P1V; b) P2V-P3V*

c) d)

Figura 19: *Ubicación de los puntos de mediciones experimentales de las vibraciones. c) P4V; d) P5V.*

3.2.2 Análisis numéricos

Se efectuó el análisis global para evaluar la incidencia de la instalación de los equipos de zaranda y de trituradora en el comportamiento estructural.

Se plantearon modelos numérico-computacionales del edificio de hormigón armado de dimensiones incluyendo la fundación sobre la platea de hormigón de 0,60 m de espesor, apoyada sobre suelo mejorado, con el agregado de clinker, de 4 m de espesor, Figura 20. Se analizó mediante software disponible [11], obteniendo las características dinámicas, los modos y las frecuencias de vibración de la estructura del edificio para las siguientes condiciones de carga con probabilidad de ocurrencia durante la vida en servicio operativa del edificio:

a) Peso propio del edificio.
b) Peso propio del edificio y de las masas de las máquinas y equipos correspondientes a los niveles de emplazamientos.
c) Condición b), pero incorporando en el nivel 203.850 la masa correspondiente a la situación de tolva llena.

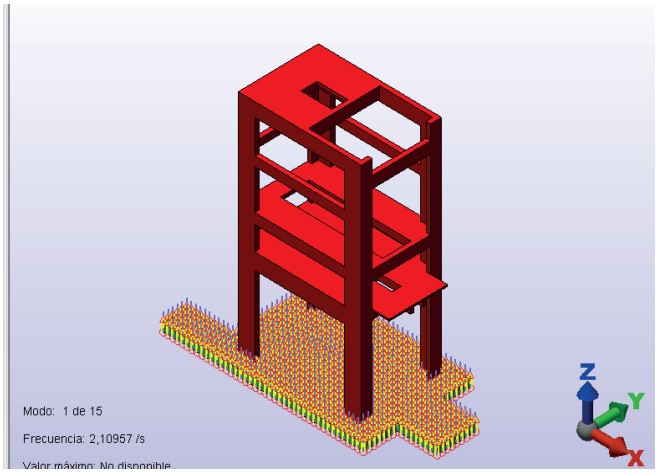


Figura 20. *Modelo numérico para el análisis de elementos finitos.*

3.2.3 Resultados obtenidos

En la Tabla 6 se indican los resultados obtenidos en términos de frecuencias naturales para cada uno de los 12 modos de vibración del edificio para las 3 condiciones analizadas. Se indica además el tipo de modo para cada caso. En la Figura 21 se muestra el primer modo de vibración para las condiciones a), b) y c) consideradas.

Tabla 6: Frecuencias naturales en Hz.

Modo	Estructura			Tipo de modo de vibrar
	Sin máquinas (a)	Con máquinas (b)	Con máquinas y tolva llena (c)	
1	2,11	2,11	2,11	Flexional ménsula yz.
2	3,08	3,08	3,08	Flexional ménsula xz.
3	3,77	3,77	3,77	Torsional según z.
4	5,80	5,80	5,80	Flexional yz.
5	8,94	8,94	8,93	Flexional xz.
6	10,62	10,62	10,61	Flexional vigas (215.300 y 211.150).
7	11,20	11,20	11,20	Torsional según z.
8	15,04	13,97	13,14	Flexional vigas xy (211,150).
9	15,77	14,81	14,64	Flexional vigas xy (211,150).
10	16,00	15,62	14,81	Flexional xz vigas, losas y columnas.
11	18,38	15,64	15,63	Flexional xz vigas, losas y columnas.
12	19,44	16,62	15,67	Flexional yz vigas, losas y columnas.

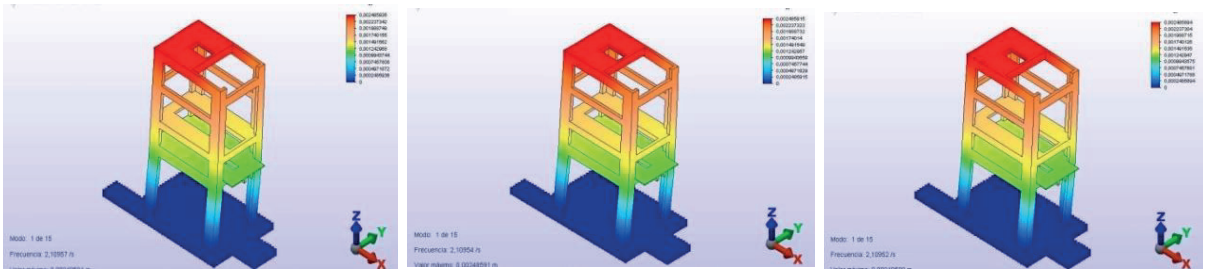


Figura 21: *Primer modo de vibración.*

3.2.4 Determinación de las características dinámicas de los entrepisos en los que se instalarán las máquinas

Se plantearon modelos, para el posterior análisis por el Método de los Elementos Finitos, de los entrepisos de hormigón armado de los niveles 203.850 y 206.850, donde se instalarán la trituradora y zaranda respectivamente. Las dimensiones fueron consideradas según planos incluyendo las discontinuidades geométricas correspondientes.

Se efectúo el análisis de las características dinámicas (modos y frecuencias de vibración) de cada entrepiso, considerando los primeros 10 modos de vibración para las condiciones:

a) Entrepisos sin máquinas (para ambos niveles).
b) Entrepisos con máquinas (para ambos niveles).

c) Entrepisos con máquinas y tolva llena (para el nivel 203.850).

En Tablas 7 y 8 se indican los resultados obtenidos para los primeros modos de vibración de cada uno de los entrepisos para las 3 condiciones analizadas. Se indica además el tipo de modo para cada caso. En Figuras 22 y 23 se muestra el primer modo de vibración para cada entrepiso.

Tabla 7: Frecuencias naturales en el nivel de trituradora y tolva (203.850), en Hz.

Modo	Estructura			Tipo de modo de vibrar
	Sin máquinas (a)	Con máquinas (b)	Con máquinas y tolva llena (c)	
1	22,60	18,56	12,06	Flexional vertical
2	25,71	25,61	15,00	Flexional horizontal
3	29,49	26,38	22,53	Flexional vertical voladizo
4	34,27	29,34	27,20	Flexional vertical voladizo
5	35,71	35,21	27,82	Flexional vertical
6	39,43	36,83	30,47	Flexional vertical voladizo
7	43,03	39,36	33,47	Flexional vertical voladizo

Tabla 8: Frecuencias naturales en nivel de zaranda (206.850), en Hz.

Modo	Estructura		Tipo de modo de vibrar
	Sin máquinas (a)	Con máquinas (b)	
1	16,03	12,16	Flexional vertical
2	17,35	13,28	Flexional vertical
3	26,25	25,10	Flexional vertical
4	28,40	25,56	Flexional horizontal
5	33,51	28,05	Flexional vertical
6	35,98	28,25	Flexional vertical
7	37,83	34,75	Flexional vertical

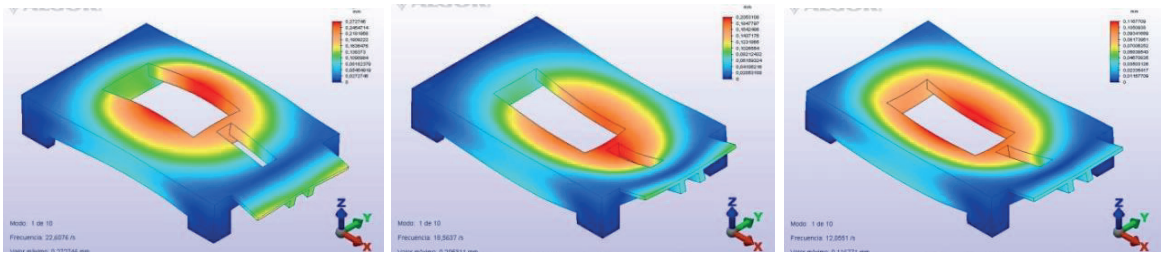


Figura 22: *Primer modo de vibración del entrepiso de nivel 203.850.*

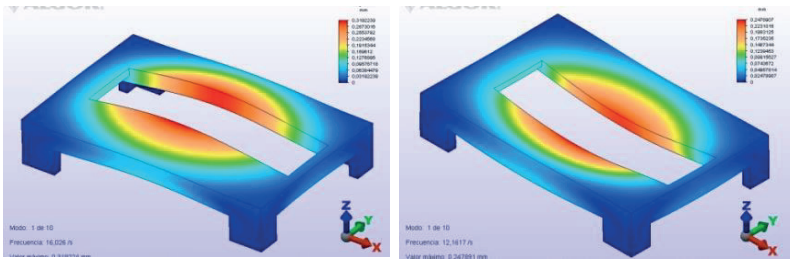


Figura 23. *Primer modo de vibración del entrepiso de nivel 206.850.*

3.2.5 Evaluación de las respuestas en los niveles 203.850 y 206.850

Se consideraron los mismos modelos geométricos para el análisis que los utilizados en el punto anterior. En los puntos de aplicación de las maquinarias se aplicó la acción correspondiente con los datos disponibles de la carga dinámica en función de la frecuencia.

Se efectuó el análisis correspondiente evaluando deformaciones y tensiones.

En Figuras 24 y 25 se muestran los desplazamientos en mm y las tensiones máximas principales en N/mm2 para los niveles 203.850 y 206.850, respectivamente.

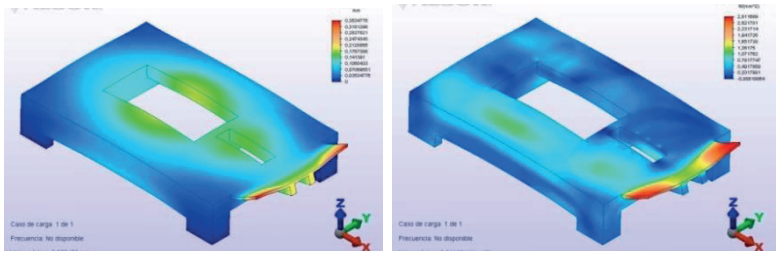


Figura 24: *Desplazamientos y tensiones del nivel 203.850.*

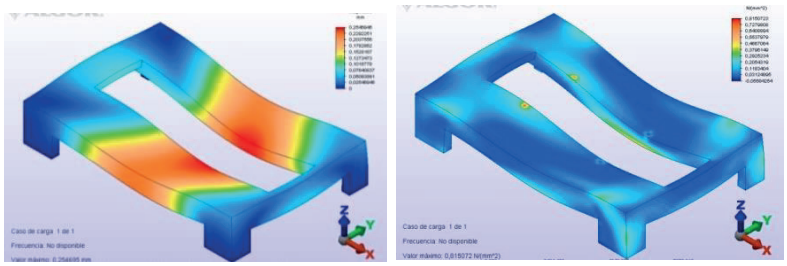


Figura 25: *Desplazamientos y tensiones del nivel 206.850.*

3.2.6 Análisis de resultados

La estructura global presentó algunos modos de vibración con frecuencias naturales cercanas a la frecuencia de la excitación de las máquinas. En el caso particular de los entrepisos analizados (niveles 203.850 y 206.850), los primeros modos presentaron frecuencias con valores cercanos a las frecuencias de la excitación (trituradora y zaranda). Esta situación permite suponer que pueden producirse amplitudes vibratorias por encima de los valores admisibles en los criterios internacionales. En la evaluación de la respuesta de las losas que presentaron importantes discontinuidades geométricas (aberturas) y zonas de alta flexibilidad (voladizos) se observaron valores que indican comportamientos dinámicos próximos a los límites admisibles.

4 CONCLUSIONES

La medición y el análisis de vibraciones, como técnica dinámica no destructiva, utilizada en conjunto con técnicas numéricas con instrumentación de modelos computacionales, constituyen una herramienta de interés para evaluar daño estructural y/o afectación de la capacidad portante de las estructuras durante su vida en servicio. Estos métodos de análisis dinámico constituyen técnicas muy prácticas en su aplicación, fundamentalmente antes y después de una intervención.

Los análisis efectuados permiten observar la importancia del uso de modelos tridimensionales que permiten una consideración más realista de la distribución de masas y rigideces, combinación de esfuerzos espaciales permitiendo evaluar modos superiores de vibración que pueden provocar amplificaciones de desplazamientos en resonancia.

Particularmente para el Caso I analizado, la metodología de análisis utilizada permite plantear la solución de adecuación estructural indicada con el objetivo de disminuir los niveles de vibración existentes actualmente y mejorar la prestación del conjunto estructura-equipamiento.

En el Caso II evaluado los resultados obtenidos del análisis numérico permiten inferir que podrían presentarse escenarios con amplificación de desplazamientos y velocidades no adecuados, en concordancia con los valores experimentales medidos en la estructura en servicio. A partir de los resultados de los estudios analíticos y de las mediciones in situ se pudieron analizar las condiciones de comportamiento estructural fuera de los límites establecidos por las normativas internacionales , y recomendar la adecuación de la estructura y/o la colocación de montajes anti vibratorios para obtener un comportamiento estructural adecuado en servicio.

Cabe mencionar que en el comportamiento real de las estructuras analizadas, con las máquinas en funcionamiento simultáneamente, pueden producirse fenómenos de acople y/o influencia de las condiciones de montaje. Ellos no son contemplados en los modelos numéricos, lo cual puede implicar la necesidad de una evaluación posterior a la adecuación estructural o incorporación de montajes antivibratorios con mediciones dinámicas in situ en los puntos de interés de la estructura. Esto posibilitará realizar posteriores ajustes a las adecuaciones propuestas.

REFERENCIAS

[1] Bathia, K.G., Foundations for Industrial Machines Handbook for Practising Engineers, D-CAD Publishers, New Delhi, 2008.
[2] Bowles, J. E., Foundation Analysis and Design, McGraw-Hill, inc. Fourth Edition, 1988.
[3] Ercoli N.L., Peralta M.H., Pico L., Analysis of the behavior of an industrial building with presence of vibrations due to machinery, Proceedings of the 1st Pan-American Congress on Computational Mechanics Panacm 2015 and XI Argentine Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, 27-29 April 2015.
[4] Ercoli N., Gamondi L., Respuesta dinámica de fundaciones de máquinas con formas arbitrarias, Actas del XV Congreso de Ingeniería Geotécnica, CAMSIG, Buenos Aires, octubre de 2000.
[5] Van Koten, H., Vibrations of machine foundations and surrounding soil, Heron Journal, 57:1:1-26, 2012. [6]Stuardi, J.E., Massa, J.C., Giró, J.F., Modificación estructural de edificios para evitar problemas vibratorios, Mecánica Computacional, Vol. XXV, pp. 1615-1631, 2006.
[6] Stuardi, J.E., Massa, J.C., Giró, J.F., Modificación estructural de edificios para evitar problemas vibratorios, Mecánica Computacional, Vol. XXV, pp. 1615-1631, 2006.
[7] Richart, F. E., Hall, J.R., Woods, R.D., Vibrations of soils and foundations, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
[8] Rades, M., Vibration Limits for Industrial Buildings, The Shock and Vibration Digest, 26:3, 1994.

[9] Garrido, H., Curadelli, O., Ambrosini, D., Equivalencia entre sistemas de control de vibraciones pasivos y semiactivos, Mecánica Computacional, Vol. XXXII, pp. 2153-2174, 2013.

[10] Clough, R. W., Penzien, J., Dynamics of Structures, McGraw-Hill, Inc. Second Edition, 1993.

[11] Algor Software V.20.3, Finite Element Analysis Software, 2007.

[12] CIRSOC 201-2005, Reglamento Argentino de Estructuras de Hormigón, 2005.

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

Normative approach to the mechanical behaviour of polyolefin fibre reinforced concrete

Picazo, Álvaro[1], Alberti, Marcos G.[2], Enfedaque, Alejandro[3] and Gálvez, Jaime C.[4]

ABSTRACT

Polyolefin fibre reinforced concrete (PFRC) can meet the structural requirements of some of the most relevant structural concrete codes such as Model Code [1, 2], that allow the substitution of steel rebars. Such recommendations include several constitutive models to consider the contribution of the fibres, mainly based on the experience with steel fibres. An alternative is obtaining the constitutive model by means of an inverse analysis. Bending tests were accurately reproduced by using a cohesive crack approach and trilinear functions in previous references [3]. The models proposed by the codes [1] and those obtained by the authors using polyolefin fibre reinforced concrete (PFRC) are discussed in this study. Moreover, shear formulations in the standards are also compared with experimental results of push-off tests performed in PFRC. The calculations have shown that the approach taken by the Model Code 2010 underestimate the capacities of PFRC when subjected to high strain states.

Keywords: Concrete, fibres, fibre-reinforced concrete, polyolefin fibres, structural concrete codes.

1. INTRODUCTION

Concrete has become the most used construction material for both buildings and infrastructure in our society. Its high compressive strength and low tensile strength [4] (approximately 10% of its compressive strength) are widely known, being a quasi-brittle material with low ductility. In order to improve the behaviour of concrete several reinforcement procedures have been used, from the traditional steel rebars to the use of modern technologies and materials such as the inclusion of fibres in its mass [5, 6]. Such fibre reinforcement may be considered in structural design, depending on the residual strength and the mechanical contributions of the fibres. Either way, the non-structural inclusion of fibres in the mass of concrete may prevent shrinkage cracking [7] at early ages or improve endogenous cracking control of the concrete at young age[8].

Various standard tests are used with the aim of assessing the behaviour of the fibre reinforced concrete (FRC): compressive strength, indirect tensile or bending tests (normally three or four point bending tests). Given that the most relevant contribution of the fibres are improving the concrete residual tensile strengths, flexural tensile tests on notched specimens are the most employed in order to find

[1] *Department of Building Technology. Universidad Politécnica de Madrid. a.picazo@upm.es*
[2] *Department of Civil Engineering: Construction. Universidad Politécnica de Madrid. marcos.garcia@upm.es*
[3] *Department of Civil Engineering: Construction. Universidad Politécnica de Madrid. alejandro.enfedaque@upm.es*
[4] *Department of Civil Engineering: Construction. Universidad Politécnica de Madrid. jaime.galvez@upm.es (Corresponding author)*

values for the influence of the fibres [9, 10]. Through these tests, tensile strength can be determined and performing an inverse analysis, constitutive models can be found. The standards [1, 2] take into consideration the structural contribution of randomly arranged fibres in the mass of the concrete. This consideration depends on other standards. Thus, EN 14889-1 [11] defines the minimum conditions to be met by steel fibres to consider their contribution in structural design: "*The manufacturer must declare the unitary volume of fibres, in kg/m^3, which can reach a residual flexural strength of 1.5 MPa at 0.5 mm CMOD and a residual flexural strength of 1 MPa at 3.5 mm CMOD*." Loads obtained from the test are transformed in residual tensile strengths at certain crack opening ($f_{R,j}$) by means of the equation (1) which can be easily deduced from the classical theories of strength of materials.

$$f_{R,j} = 3F_j l/2bh_{sp}^2 \quad (1)$$

Where: F_j is the load at different CMOD, l is the length of the span, b is the width of the test specimen and h_{sp} is the height of the section of ligament of the specimen.

Conversely, Model Code 2010 indicates that equations (2) and (3) must be met. In such a sense, Spanish structural concrete code, EHE-08, requires the verification of equations (2) and (4) to consider the structural contributions of the fibres.

$$f_{R1}/f_{LOP} > 0.4 \quad (2)$$

$$f_{R3k}/f_{R1k} > 0.5 \quad (3)$$

$$f_{R3}/f_{LOP} > 0.2 \quad (4)$$

As can be seen, these are requirements in terms of strengths and crack openings. Therefore, the load-CMOD curves obtained according to EN 14651:2007+A1 [9] supply not only the values of strength to be used in structural design but also the key values to consider fibre contributions.

Recent research has shown that modern polyolefin-based macro-fibres with improved mechanical properties and embossed surfaces can meet the requirements of some of the most applied structural recommendations such as Spanish Structural Concrete Code EHE-08 or the Model Code 2010 [12, 13]. This newly developed material has been termed polyolefin fibre reinforced concrete (PFRC).

In order to analyse the influence that the models proposed by the Model Code 2010 and the trilinear softening functions previously determined [3] in the mechanical modelling of PFRC, a series of numerical simulations have been carried out. Fracture three-point bending tests were performed and have been reproduced using a commercial software where a user defined material has been implemented. Such user material implementation had the possibility to change the constitutive relation of the material and therefore it enabled to compare the response of the material when it behaves as proposed by the Model Code 2010 and the one when it behaves as proposed by the authors. It has to be highlighted that the approach proposed by the authors have shown to be capable of reproducing with great accuracy the experimental results obtained in previous studies. The numerical calculations have shown that the approach taken by the Model Code 2010 seems to underestimate the mechanical capacities of PFRC when subjected to high strain states. On the contrary, the simulations have shown

that the requirements set for modelling small strain states comply to a greater extent with the experimental results.

The study was supplemented by further assessment of the shear strength by means of push-of tests and the correspondent analysis of the formulations of the codes. The results of the push-off tests showed that if the desired shear strengths are studied at the initial crack openings, the values of the standards seem to be conservative. Conversely, if the required shear strengths are for crack shear displacements closer to 2.5mm, the values of the standards can exceed the experimental results although both the codes and the tests were remarkably close.

2. FIBRE REINFORCED CONCRETE IN THE STANDARDS

Current regulations require the minimum conditions to be fulfilled by FRC to consider the structural contribution of fibres [1, 2, 11, 14]. This study shows an analysis of the constitutive models proposed for MC2010 and EHE-08.

Before describing the models proposed by the MC2010, it should be pointed out that the guidelines proposed by this standard are aimed for their application in SFRC. As can be seen in Figure 2, two types of behaviour are described, hardening or softening, depending on the volume of fibre that incorporates the concrete.

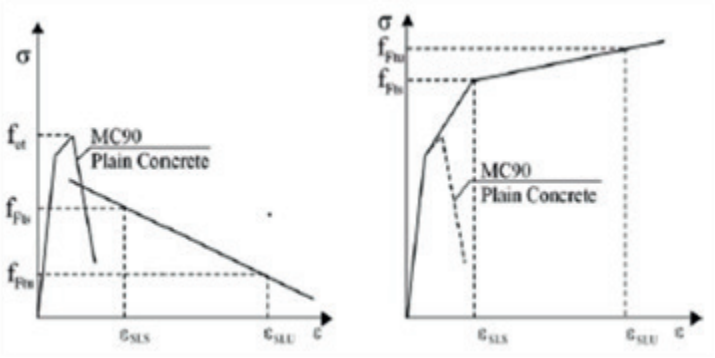


Figure 2. *(Left) and (right) hardening and softening SFRC behaviour (MC2010)*

The first model which proposes the MC2010 consider a rigid-plastic behaviour. This model only specifies a single value, f_{Ftu} (residual stress of concrete reinforced with fibres), which is determined by the residual strength with equation (5).

$$f_{Ftu} = f_{R3}/3 \tag{5}$$

Where: f_{R3} is residual strength for $CMOD_3$=2.5mm

The corresponding diagram to this rigid-plastic model is that shown in Figure 3. The dotted line indicates a hardening behaviour, while the solid line indicates the softening behaviour.

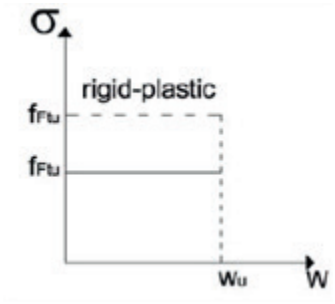


Figure 3. *Strength-crack opening model according to MC2010*

The second model is the linear model, as shown in Figure 4. This model uses two values: the strengths corresponding to the service limit state (SLS) and to the Ultimate Limit State (ULS). Both parameters must be defined through flexural tensile strength tests and according to equations (6) and (7).

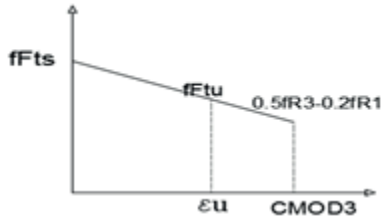


Figure 4. *Post-cracking linear constitutive law (MC2010)*

$$f_{Fts} = 0.45 f_{R1} \tag{6}$$

Where: f_{Fts} is service residual strength of FRC

f_{R1} is residual strength for $CMOD_1$

$$f_{Ftu} = f_{Fts} - \frac{w_u}{CMOD_3}(f_{Fts} - 0.5 f_{R3} + 0.2 f_{R1}) \geq 0 \tag{7}$$

Where: f_{Ftu} is latest residual strength of FRC

$w_u \leq 2.5$ mm

f_{R3} is residual strength for $CMOD_3$

Spanish structural concrete code (EHE-08) considers also structural macro synthetic fibres (with diameters higher than 0.30 mm) with the same structural requirements previously described. Two constitutive models are proposed. The first one is a rectangular stress-strain diagram, as shown in Figure 5 and similar to the rigid-plastic model of MC2010. In Figure 5 the value of $f_{ctR,d}$ is equal to $0.33 f_{R3,d}$, being the deformations of 20‰ for bending sections and 10‰ for tensile sections.

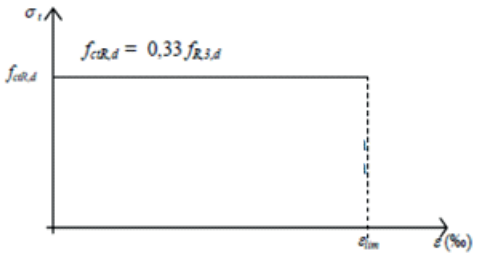


Figure 5. *Stress-strain curve as shown in (EHE-08)*

The second constitutive model is based on a multilinear stress-strain diagram, as shown in Figure 6. This model is typically used for cases in which small deformations occur in service state, which requires greater definition in the area of the graph between the points A-B-C.

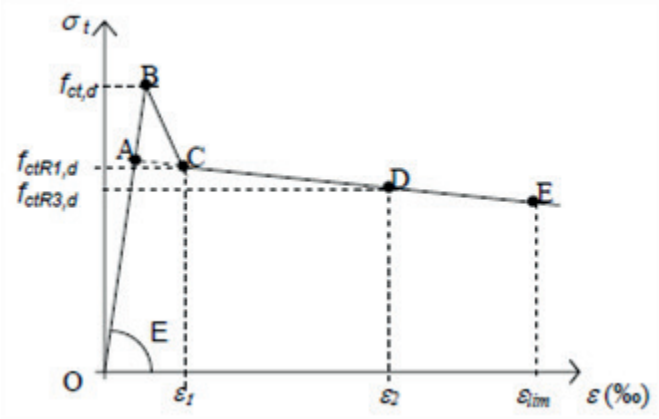


Figure 6. *Multilinear stress-strain diagram (EHE-08)*

Figure 6 defines a design tensile resistance $f_{ct,d}$ and two residual tensile resistances $f_{ctR1,d'}$ and $f_{ctR3,d'}$, associated with deformations ε_1 and ε_2, where:

$f_{ct,d} = 0.6\, f_{ct,fl,d}$

$f_{ctR1,d} = 0.45\, f_{R,1,d}$

$f_{ctR3,d} = k_1(0.5\, f_{r,3,d} - 0.2\, f_{R,1,d})$

$k_1 = 1$, for bending sections and 0.7 for tensile sections

$\varepsilon_1 = 0.1 + 1000\, f_{ct,d} / E_{c,0}$

$\varepsilon_2 = 2.5 / l_{cs}$

$\varepsilon_{lim} = 20‰$ for bending sections and 10‰ for tensile sections

l_{cs} is the critical length of the calculated element; $l_{cs} = \min(s_m, h\text{-}x)$

s_m is the average distance between cracks

h-x is the distance from the neutral axis to more extreme tensile point

In addition, EHE-08 indicates design values for elements subjected to bending stresses, tensile stresses and shear stresses. Below, Equation (8) shows the design conditions for bending and Equation (9) shows the design conditions to shear.

$$A_p f_{pd} \frac{d_p}{d_s} + A_s f_{yd} + \frac{z_f}{z} A_{ct} f_{ctR,d} > \frac{W_1}{z} f_{ctm} + \frac{P}{z}\left(\frac{W_1}{A} + e\right) \quad (8)$$

Where: $z_f A_{ct} f_{ctR,d}$ is fibres contribution

z_f is the mechanical branch to tensile of the concrete

A_{ct} is the tensile concrete area

$f_{ctR,d}$ is the design residual tensile strength in the rectangular diagram

$$V_{u2} = V_{cu} + V_{su} + V_{fu} \quad (9)$$

Where: V_{cu} is the shear contribution of concrete

V_{su} is the shear contribution of stirrups

V_{fu} is the shear contribution of fibres. According to Equation (10)

$$V_{fu} = 0.7 \varepsilon \tau_{fd} b_0 d \quad (10)$$

Where: $\varepsilon = 1 + \sqrt{200/d}$; *d* (mm) and $\varepsilon \leq 2$

$\tau_{fd} = 0.5 f_{ctR,d}$

3. NUMERICAL ANALYSIS AND DISCUSSION

3.1. Flexural tensile strength

Experimental results of SCC and VCC reinforced with 6 and 10 kg/m^3 of polyolefin fibres poured in standardised moulds have been used in this study. In reference [15] a wide range of variations were used to manufacture the specimens of PFRC. This was performed in order to analyse the influence of the flux, pouring methods and concrete rheology in the orientation and distribution of the fibres. Similarly, the influence of the possible floating effect on the positioning of the fibres was studied by manufacturing a series of vertical elements. Three-point bending tests were performed according to the standard EN 14651 and having the results shown in Figure 7. In reference [16] several fibre dosages were used to manufacture PFRC specimens and by means of such results, constitutive models were obtained by inverse analysis in reference [3] and as it is shown in Figure 8. Based on the post-cracking response of the experimental campaign of PFRC, it is possible to perform a numerical inverse analysis and obtain the parameters that define the material behaviour. It is possible to fit experimental data

with an iterative method and numerical simulations by using a cohesive crack approach. Using the results, a comparison of the models in the standards and those obtained by the authors is performed.

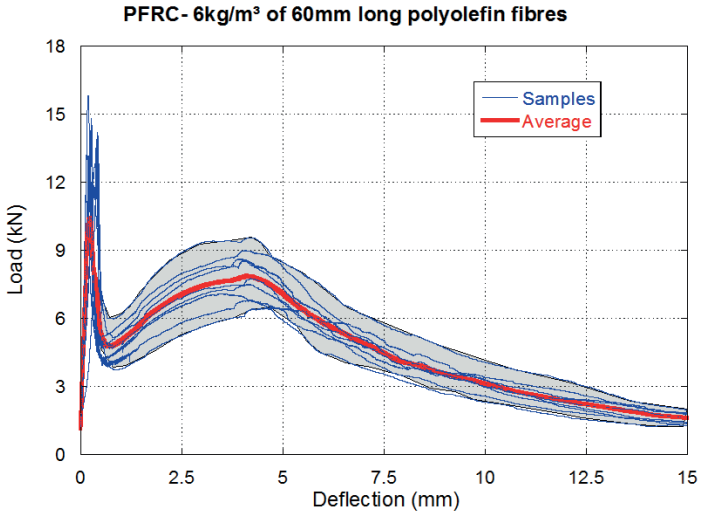


Figure 7. *Load-deflection curves of the PFRC6 with 60 mm long fibres*

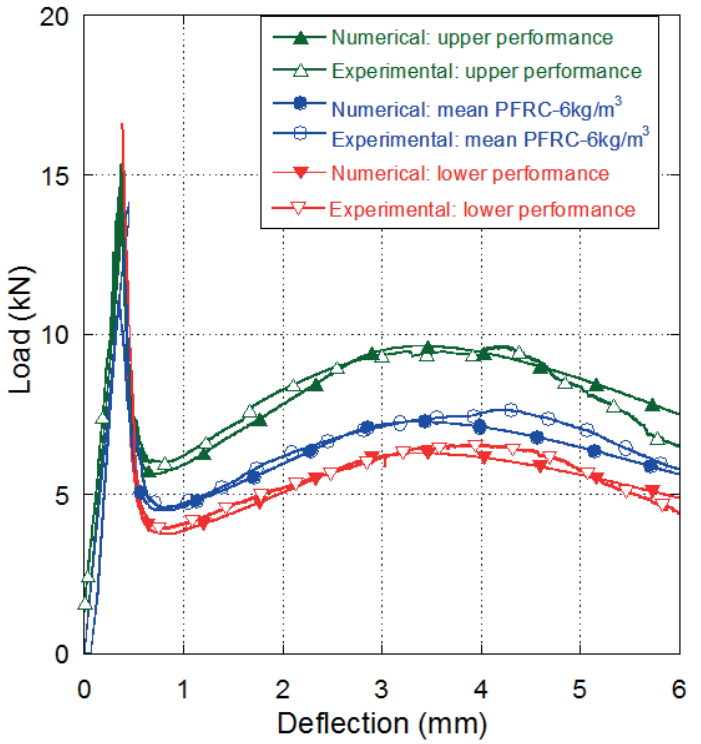


Figure 8. *Numerical calculations and mean experimental results for the upper, mean and lower performance of PFRC.*

The use of the cohesive crack model proposed by Hillerborg [17, 18] to approach the fracture behaviour of quasi-brittle materials was later extended to FRC and has successfully obtained results for concrete-

like materials. This requires the definition of a softening function as a material property that relates the stress across the crack "σ" with the crack opening "ω". The use of embedded crack models has allowed analysis to be performed in which the need of a tracking algorithm is avoided permitting the finite element to adapt itself in the stress field as long as the crack opening remains under a small threshold [19, 20]. In the present study, the model has been implemented in a commercial software where a user material has been implemented. Figure 8 show a sketch of the model performed in a commercial software with the geometry of the tests and the plane strain triangular elements. The results of the numerical calculations were remarkably close to those of the experimental campaign.

The model that has been implemented behaves elastically until the tensile strength of the material is reached. Up to this limit the crack width remains null. Once the tensile strength is exceeded, the material behaves according to the proposed softening function. As we mentioned before, the constitutive relations proposed by recommendations [1, 2] are bilinear or tri-linear softening functions that cannot adequately represent the reloading branch of PFRC in a fracture test. After the first unloading process [21] there is a branch that represents the fibre bridging. An intermediate stage is dependent on the type of fibres used and continues up to deformations in which the fibre fail or slip. This type of tri-linear curves have been successfully used for the cases of intermediate branches with soft-unloading or even flat stages. Figure 9 (a) and (b) show tri-linear constitutive relations used SFRC [22]. The need of a branch with recharging strength can be considered as a significant advance for the simulation of PFRC. The shape chosen for the numerical simulations presented may be seen in Figure 9 (c).

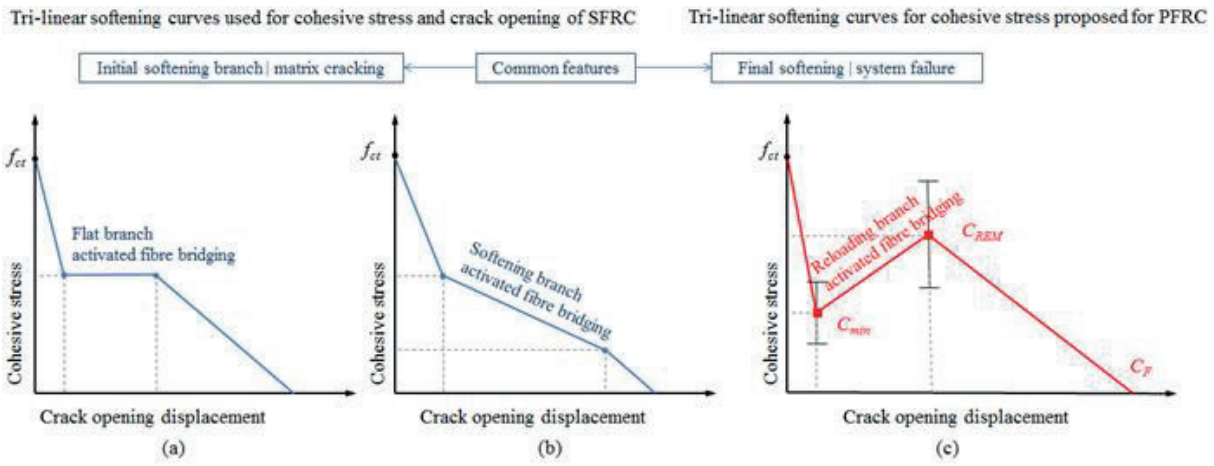


Figure 9. *Softening curves for cohesive stress and crack opening displacement relation of FRC: (a) tri-linear softening curve including an initial softening branch, (b) tri-linear softening curve including a kink point, (c) tri-linear softening curve proposed*

The approaches of the standards are based on research and publications developed with steel fibre reinforced concrete. Subsequently, it is of interest to perform a comparison of the constitutive relations found in this study with those proposed in the Model Code taking into account that the dimensions of the specimens are not the same. Such comparison can be seen in Figure 10 in which some new considerations may be performed in order to improve its structural applications when using PFRC. In Model Code, two constitutive models are recommended. One is a linear rigid-plastic model and the

other is a bilinear model. As can be seen in the figure, constitutive model overestimates the initial crack openings (generally related with Service Limit States) and underestimates the values for higher crack openings (commonly used for the Ultimate Limit States).

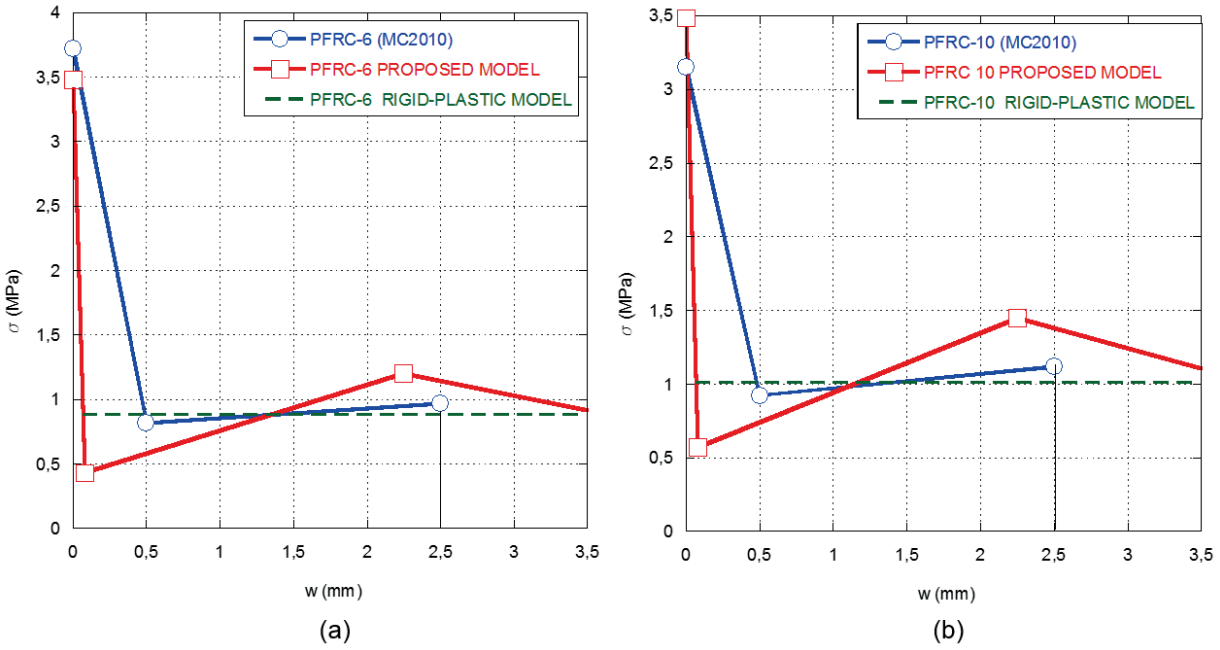


Figure 10. *Comparison of the constitutive relations of PFRC using the proposed model and the Model Code 2010 [6] [7].*

3.2. Shear

An experimental campaign seeking to assess the shear behaviour of PFRC was performed. Specimens of four types of PFRC were tested. The specimens were obtained from the remaining halves of references [15, 16]. The dimensions of the specimens were 270 x 150 x 150 mm^3. As can be seen in Figure 11, two notches 75mm depth which permit 9 mm of vertical displacements, leaving a vertical surface of ligament of size 150x75 mm were performed.

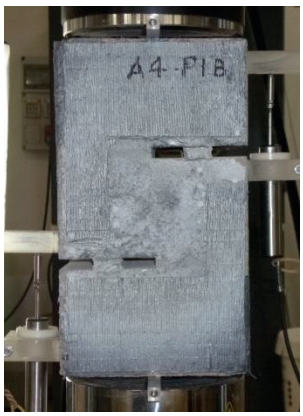


Figure 11. *Push-off specimen*

In the two notches two linear variable differential transformers (LVDT) were placed. Thus, by means of these two extensometers the crack shear displacement (CSD) was recorded. The use of two LVDT also allowed to record any possible relative rotation of the specimen. The specimen positioning was carefully made by means of laser devices to assure that the upper and below metallic supports of dimensions 200x10x10 mm³ were perfectly placed and aligned with the vertical plane of the ligament, as Figure 11 shown. With such a test setup, push-off tests [23] assured that the fracture mechanism failure was due to shear stress on a specific region of the specimens.

The main target of the experimental campaign was: determining PFRC post-peak behaviour under fracture to shear, assessing the contribution of the fibres as well as the influence of the fibre dosage in the post-cracking behaviour and correlating the residual strengths with the number of fibres in the fracture surface.

The resulting curves of every type of PFRC were obtained. Figure 12 shows the individual results for each specimen and the average curve of a self-compacting PFRC with amount of 10 kg/m^3 polyolefin fibres. Figure 12 show that after reaching the first crack, the presence fibres prevents the collapse of the specimen by means of a ductile behaviour. The maximum load is reached with a quasi-linear branch at the beginning of the test. In addition, such maximum load (L_{MAX}) is associated with the concrete matrix and does not depend on the fibre.

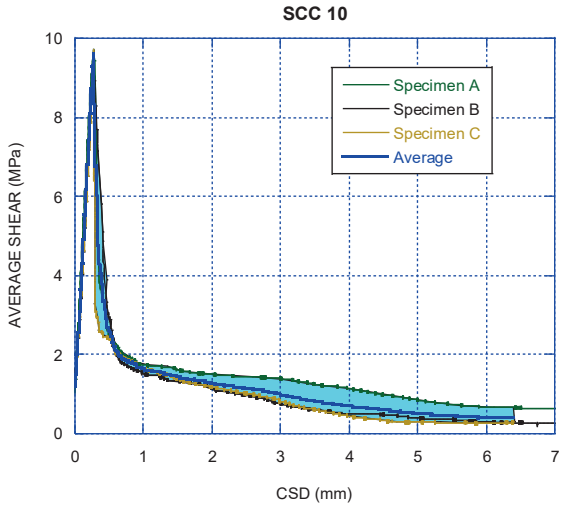


Figure 12. *Experimental curves CSD vs. average shear (τ_{aver}) of the SCC 10 specimens*

The following branches could be described in two differentiated stages. After the peak load was reached, a pronounced unloading softening stage took place up to an approximate CSD of 1 mm. The following unloading process occurred gradually while CSD grew with significantly lower slope.

The standards supply values for structural design under shear that are based on the residual flexural tensile strengths. Some authors have assumed that the interest in using PFRC for shear resistance is mainly related to the possibility of replacing all stirrups.

MC2010 [1] and Spanish structural code [2] propose an additive formulation for elements without stirrups. That is to say, the strength contributions of the concrete matrix, longitudinal reinforcement and fibres, are considered according to equation (11) and (12). In EHE-08, shear strength depends on the concrete matrix and the residual strength of the fibres. The final values are also dependent on the size effect of the structural element and the strength provided by the longitudinal reinforcement arranged in the element.

$$V_{Rd,F} = \left\{ \frac{0.18}{\gamma_c} k \left[100\rho_1 \left(1 + 7.5 \frac{f_{Ftuk}}{f_{ctk}} \right) f_{ck} \right]^{1/3} + 0.15\sigma_{cp} \right\} b_w d \quad (11)$$

$$V_{rd} = V_{cu} + V_{fu} = \left[\frac{0.18}{\gamma_c} \varepsilon (100\rho_1 f_{cv})^{1/3} + 0.15\sigma'_{cd} \right] b_0 d + 0.7\varepsilon\tau_{fd} b_0 d \quad (12)$$

Where: γ_c is the partial safety factor for the concrete

$k = \varepsilon$ is a factor that takes into account the size effect. $k = \varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2.0$

d [mm] is the effective depth of the cross section

ρ_1 is the reinforcement ratio for longitudinal reinforcement, ≤ 0.02

f_{Ftuk} [MPa] is the characteristic value of the ultimate residual tensile strength for FRC, considering w_u = 1.5 mm. Accepting a rigid-plastic model, as does the Spanish standard the value of $f_{FTu} = f_{R3} / 3$

f_{R3} is the tensile residual strength of the FRC at 2.5 mm CMOD

f_{ctk} [MPa] is the characteristic value of the tensile strength. $f_{ctk} = 0.3 f_{ck}^{2/3}$

f_{ck} [MPa] is the characteristic value of compressive strength

$\sigma_{cp} = \sigma'_{cd}$ [MPa] is the average stress acting on the concrete cross section, Ac [mm^2], for an axial force N_{Ed} [N], due to loading or prestressing actions. $\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c$

$b_w = b_0$ (mm) is the smallest width of the cross section in the tensile area.

V_{cu} the shear design value for the concrete matrix

V_{fu} the design value for the fibres

f_{cv} [MPa] the effective shear strength of concrete. $f_{cv} = f_{ck}$

τ_{fd} [MPa] calculation value of the increase of the shear stress due to the fibres. $\tau_{fd} = 0.5 f_{ctR,d}$

$f_{ctR,d}$ [MPa] calculation residual tensile strength in the rectangular diagram. $f_{ctR,d} = 0.33 f_{R,3,d}$

Such formulations in the standards are used for beams in which additional resistant mechanisms may appear. It is worth comparing the results of the theoretical contribution to shear of the FRC according the standards with the results of the push-off tests. So, several considerations were assumed. The first one was considering common dimensions of structural elements in construction practice. Then, the width were considered of 300 mm and the effective edge of the beam as a variable ranging from 200 mm to 550 mm. For each design situation, two values for longitudinal reinforcement were considered. The first one, highly reinforced piece and thus with a value of ρ_1 equal to 0.02. For the second design

situation, the beam whit moderately reinforced, therefore, ρ_1 being equal to 0.01. Finally, the average stress value was taken as 0.

In Table 2 the computed shear contribution of PFRC according to MC2010 and EHE-08 is shown. The results of the calculations for a beam of cross-section of size 300x400 mm^2 (depth-edge) and ρ_1 equal to 0.01 are shown in Table 1. Figure 13 shows the comparison of the results by using the formulations of MC2010 and EHE-08 and compared with the experimental results of the SCC10 PFRC tests of this study for CSD of 0.5 and 2.5 mm.

Table 1. Shear contribution of the fibres according to MC2010, EHE-08 and experimental results.

Concrete	f_{ck} (MPa)	$f_{R,3}$ (MPa)	$V_{Rd,c}$ (kN) [MC2010]	$V_{Rd,F}$ (kN) [MC2010]	V_{cu} (kN) [EHE-08]	V_{Rd} (kN) [EHE-08]	$V_{CSD\ 2.5mm}$ (kN) [Experimental]
MSC 6	15.0	1.75	90.94	136.71	90.94	132.34	124.80
MSC 7.5	13.8	2.15	88.45	141.72	88.45	139.32	172.80
SCC 10	37.0	3.87	122.87	193.48	122.87	214.44	138.00
VCC 10	28.3	2.87	112.37	171.82	112.37	180.27	204.00

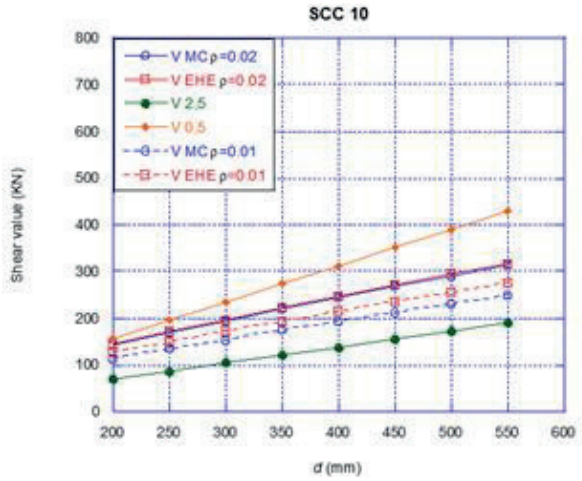


Figure 13. *Shear values according to MC2010, EHE-08 and from push-off tests for SCC10*

If Figure 13 is observed in more detail, it can be seen that SCC 10 specimens show that $V_{CSD\ 0.5mm}$ is also above the values calculated following the concrete codes although with reduced differences. In addition, the strength values for $V_{CSD\ 2.5mm}$ were remarkably more conservative.

4. CONCLUSIONS

A numerical model, based on the cohesive fracture approach, for modelling the PFRC fracture was proposed. The model has been implemented successfully when used in plain concrete and even with non-isotropic cohesive materials. In this work, it has also been extended to PFRC by means of an adapted tri-linear softening law. Numerical simulations of the experimental results show how the proposed model may simulate the PFRC fracture. In addition, the influence of the parameters studied

in the fracture tests were reproduced by modifying the turning points of the softening function assessing with accuracy the confidence interval observed in the tests.

The numerical calculations have shown that the approach taken by the Model Code 2010 seems to underestimate the mechanical capacities of PFRC when subjected to high strain states. On the contrary, the simulations have shown that the requirements set for modelling small strain states comply to a greater extent with the experimental results.

Push-off tests of PFRC concrete permit the achievement of shear strength values that can be used for structural design and the replacement of the shear reinforcement by the presence of fibres. The values of the residual shear strengths were associated with fibre dosage and positioning. Therefore, it could be concluded that the residual shear strength is governed by the presence of fibres. The results of the push-off tests showed that if the desired shear strengths are for the initial crack openings, the values of the standards are significantly conservative. Conversely, if the required shear strengths are for crack shear displacements closer to 2.5mm, the values of the standards exceeded the experimental results although the both results of the codes and the tests were remarkably close to each other.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors gratefully acknowledge the financial support provided by Ministry of Economy and Competitiveness of Spain by means of the Research Fund Project BIA 2016 78742-C2-2-R.

REFERENCES

[1] International Federation for Structural Concrete (fib), *The fib Model Code for Concrete Structures 2010*. Lausanne, Switzerland: International Federation for Structural Concrete, 2010.

[2] Spanish Minister of Public Works, *Spanish Structural Concrete Code EHE-08*. Madrid, Spain: Spanish Minister of Public Works, 2008.

[3] M. Alberti, A. Enfedaque, J. Gálvez, and E. Reyes, "Numerical modelling of the fracture of polyolefin fibre reinforced concrete by using a cohesive fracture approach," *Composites Part B: Engineering,* vol. 111, pp. 200-210, 2017.

[4] Z. Bazant and J. Planas, *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC press, 1997.

[5] J. P. Romualdi and J. A. Mandel, "Tensile strength of concrete affected by uniformly distributed and closely spaced short lengths of wire reinforcement," in *Journal Proceedings*, 1964, vol. 61, no. 6, pp. 657-672.

[6] R. F. Zollo, "Fiber-reinforced concrete: an overview after 30 years of development," *Cement and Concrete Composites,* vol. 19, no. 2, pp. 107-122, 1997.

[7] N. Banthia and R. Gupta, "Influence of polypropylene fiber geometry on plastic shrinkage cracking in concrete," *Cement and Concrete Research,* vol. 36, no. 7, pp. 1263-1267, 2006.

[8] A. M. Alani and D. Beckett, "Mechanical properties of a large scale synthetic fibre reinforced concrete ground slab," *Construction and Building Materials,* vol. 41, pp. 335-344, 2013.

[9] *Test Method for Metallic Fiber Concrete. Measuring the Flexural Tensile Strength (Limit of Proportionality (LOP), Residual; EN14651:2007+A1*. 2007.

[10] *Bending Test: Final Recommendations; RILEM TC-162-TDF,* S. a. S. R. International Unión of Laboratories and Experts in Construction Materials, 2002.

[11] *Fibers for Concrete. Steel Fibers. Definitions, Specifications and Conformity; EN 14889-1*. 2008.

[12] M. Alberti, A. Enfedaque, and J. Gálvez, "On the mechanical properties and fracture behavior of polyolefin fiber-reinforced self-compacting concrete," *Construction and Building Materials,* vol. 55, pp. 274-288, 2014.

[13] P. Pujadas *et al.*, "Plastic fibres as the only reinforcement for flat suspended slabs: Parametric study and design considerations," *Construction and Building Materials,* vol. 70, pp. 88-96, 2014.

[14] *Fibers for Concrete. Polymer Fibers. Definitions, Specifications and Conformity; EN 14889-2*. 2008.

[15] M. Alberti, A. Enfedaque, J. Gálvez, M. Cánovas, and I. Osorio, "Polyolefin fiber-reinforced concrete enhanced with steel-hooked fibers in low proportions," *Materials & Design,* vol. 60, pp. 57-65, 2014.

[16] M. Alberti, A. Enfedaque, and J. Gálvez, "Comparison between polyolefin fibre reinforced vibrated conventional concrete and self-compacting concrete," *Construction and Building Materials,* vol. 85, pp. 182-194, 2015.

[17] A. Hillerborg, M. Modéer, and P.-E. Petersson, "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements," *Cement and concrete research,* vol. 6, no. 6, pp. 773-781, 1976.

[18] A. Hillerborg, "Analysis of fracture by means of the fictitious crack model, particularly for fibre reinforced concrete," *International Journal of Cement Composites,* vol. 2, no. 4, pp. 177-184, 1980.

[19] J. Sancho, J. Planas, J. Gálvez, E. Reyes, and D. Cendón, "An embedded cohesive crack model for finite element analysis of mixed mode fracture of concrete," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures,* vol. 29, no. 12, pp. 1056-1065, 2006.

[20] J. M. Sancho, J. Planas, D. A. Cendón, E. Reyes, and J. Gálvez, "An embedded crack model for finite element analysis of concrete fracture," *Engineering Fracture Mechanics,* vol. 74, no. 1, pp. 75-86, 2007.

[21] J. A. Barros, V. M. Cunha, A. F. Ribeiro, and J. A. Antunes, "Post-cracking behaviour of steel fibre reinforced concrete," *Materials and Structures,* vol. 38, no. 1, pp. 47-56, 2005.

[22] D.-Y. Yoo, S.-T. Kang, and Y.-S. Yoon, "Effect of fiber length and placement method on flexural behavior, tension-softening curve, and fiber distribution characteristics of UHPFRC," *Construction and Building Materials,* vol. 64, pp. 67-81, 2014.

[23] J. Echegaray, "Upgrading the push-off test to analyze the contribution of steel fiber on shear transfer mechanisms," 2014.

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

Geometric and constructive models for verification of the equilibrium of masonry structures

Mencías - Carrizosa, David[1]

ABSTRACT

Limit Analysis of masonry structures allows the verification of the equilibrium from the exclusively geometric and constructive information because such structures are essentially subject of self-weight loads whose origin is in the constructive elements. This information is encoded in CAD models and is obtained from the geometric and constructive surveying. For that propose, the modelling techniques in geometric models in heritage constructions are studied, identifying the set of points that serve as the basis for geometric coding. On the other hand, it is concluded that assign the geometric elements one of the envelopes of each of the constructive layers is needed. In this way, after assigning the corresponding value of the specific weight, self-weight loads can be determined. Also the geometric model serves as support for the estimation of the geometric coefficient of security.

Keywords: CAD, geometry, masonry, equilibrium, restoration, limit analysis, geometric modelling, Building Heritage

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Análisis estructural de fábricas históricas

Dentro de la historia de la ciencia de las estructuras, el análisis de fábricas se ha desarrollado en paralelo y de forma independiente al del resto de los materiales, hasta prácticamente finales del s. XIX [1], ya sea porque no respondía a los planteamientos resistentes que desarrollaron esta ciencia desde Galileo, o bien porque el comportamiento del material se alejaba de las características más homogéneas que el acero y el incipiente hormigón mostraban. Las construcciones que hoy en día conforman la gran mayoría del Patrimonio Histórico, se levantaron mediante estructuras de fábrica que fueron diseñadas y concebidas por medio de planteamientos muy diferentes de los que hoy se emplean. Estas se han basado históricamente en primer lugar en reglas empíricas y de proporcionalidad para posteriormente emplearse planteamientos geométricos.

Desde la cadena colgante de Hooke hasta el desarrollo de las líneas de empujes, el análisis estructural se ha realizado por medio de planteamientos eminentemente geométricos. Estos han sido bien gráficos, por medio de la estática gráfica o bien analíticos, quedando esta última relegada a un segundo plano dada la dificultad práctica que el cálculo presentaba. Estos métodos, se engloban dentro de los denominados “métodos clásicos” [2] y han sido superados por los modernos enfoques computacionales especialmente en el análisis de elementos finitos (FEM) o elementos discretos

[1] Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid. Universidad Politécnica de Madrid (ESPAÑA). *dameca@gmail.com (Corresponding author)*

(DEM). Estos últimos han permitido la aplicación de análisis dinámico por medio del análisis límite, por medios computacionales desarrollándose fundamentalmente el colapso por fallo de equilibrio.

Sin embargo, si la construcción analizada se planteó en su origen por medio de métodos geométricos, parece bastante sensato, emplear, al menos en una primera aproximación, esos mismos métodos de manera que pueda ser más sencillo comprender el funcionamiento estructural global antes de pasar a realizar estudios más específicos.

1.2. Levantamiento y modelado informático

En toda actuación previa a la intervención en un edificio existente o simplemente para el estudio del mismo, el punto de partida pasa por el conocimiento en profundidad de su geometría. Para ello es necesario realizar un levantamiento adecuado del mismo. El objetivo final de este levantamiento es obtener la representación de la construcción del objeto estudiado, para poder luego servir de base a futuros trabajos. El empleo de herramientas informáticas casi en cualquier disciplina para realizar cualquier tarea, es un hecho innegable a día de hoy, por lo que la adquisición y tratamiento de la información tiene por objeto la elaboración de un modelo geométrico informático que reúna las dimensiones, forma y tamaño del objeto a estudiar.

Realizar la modelización geométrica pretende representar el objeto real mediante diversas técnicas computacionales, por medio de un software CAD, que puede servir de base para el análisis estructural. Los datos obtenidos del levantamiento geométrico no dejan de ser o bien ciertos puntos estimados como significativos o bien una gran cantidad de puntos tomados indiscriminadamente y proveen de la información necesaria para realizar el modelo en CAD, por medio de algoritmos automáticos o mediante procedimientos manuales.

Los programas informáticos de Diseño Asistido por Ordenador (Computer-Aided Design, CAD), se pusieron en marcha en los años 80 del siglo pasado y se han popularizado en la segunda mitad de la década de los 90. El diseño realizado en CAD se caracteriza por emplear geometría exacta con una precisión milimétrica, que queda constreñida a la formulación que se emplea en su modelización geométrica en función del propio software modelador. Su uso permite un control exhaustivo, a veces incluso, excesivo de la geometría y un nivel de detalle extraordinario, manteniendo una fidelidad completa al diseño realizado.

Para la realización de diversos análisis y simulaciones asociados a los diseños realizados en CAD se han empleado tradicionalmente módulos conectados a programas CAD, de manera que el modelado realizado anteriormente sea el punto de partida para los trabajo de análisis. Estas herramientas han sido habitualmente empleadas en ingeniería mecánica y su desarrollo máximo se ha obtenido en ese campo.

1.3. Antecedentes en el empleo de modelos geométricos

El empleo del análisis geométrico mediante técnicas computacionales ha seguido, curiosamente, un desarrollo paralelo al de la propia ciencia de las estructuras. La aplicación de la estática gráfica clásica de funiculares con un entorno virtual tridimensional para reproducir los modelos físicos de cables

colgantes [3] o la interactuación del polígono de fuerzas en tiempo real ha abierto la posibilidad de otra serie de herramientas muy didácticas e intuitivas como es el caso de Interative Thrust [4].

eQUILIBRIUM [5] es otra herramienta desarrollada a partir de la anterior con una finalidad didáctica, pero que amplía los casos estudiados a otros. El método empleado se reduce a la aplicación de polígonos funiculares y construcciones geométricas sencillas que proporcionan información visual muy intuitiva. La posibilidad de computación algebraica de métodos gráficos permite la creación de dichas herramientas informáticas [6].

Dentro del entorno didáctico la geometría dinámica se ha mostrado como una herramienta muy útil, que permite relacionar geometría-estructura-forma de manera muy notable [7]. Este procedimiento se realiza sobre el software de geometría dinámica libre Geogebra, que permite la visualización analítica y gráfica de manera simultánea.

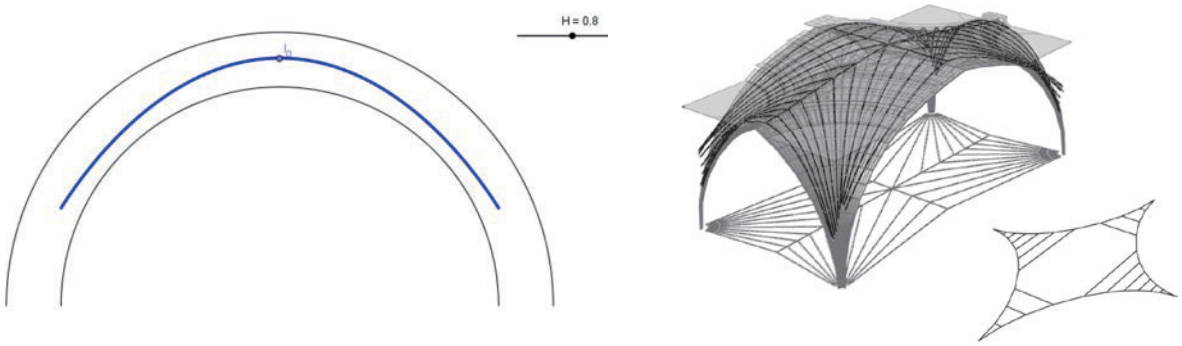


Figura 1a. *Análisis de un arco de medio punto mediante Geogegbra (Imagen del autor)* **Figura 1b.** *Análisis de la bóveda de la capilla del King's College de Cambridge, Inglaterra usando el Análisis de la Red de Empujes (Philippe Block)*

Estos ejemplos se basan bien en modelos geométricos preexistentes a partir de un catálogo más o menos extenso de soluciones habituales (Fig. 1a) o bien en estructuras geométricas altamente simplificadas (Fig. 1b). La realidad constructiva, en muchos casos, es difícil de encajar en estos modelos especialmente en construcciones históricas dado que la idealización de la geometría existente suele encontrarse de lado de la inseguridad.

2. VERIFICACIÓN DE LA ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS DE FÁBRICA

2.1. Análisis límite de fábricas

El estado "real" de la estructura es muy sensible a pequeñísimas variaciones de las condiciones de contorno, y es prácticamente imposible conocerlo con toda certeza. Los intentos históricos de aplicación del análisis elástico fue posible gracias a la introducción de ciertas simplificaciones en el modelo, tales como rótulas, que no se correspondían con una realidad constructiva.

Por otro lado, el cálculo plástico o teoría de análisis límite [8], se centra en la estabilidad de la estructura, que sí se puede determinar con enorme precisión, frente al estado tensional. Dicha aproximación es insensible a pequeñas variaciones de las condiciones de contorno, muy habituales en obras de fábrica históricas y especialmente en construcciones históricas que se han mantenido en pie (y en uso) a lo largo de los siglos. Esto permite validar una estructura en función del requisito de estabilidad, frente a la resistencia o la rigidez, en los que se centran otros planteamientos.

El análisis límite incluye tres teoremas fundamentales que constituyen la base para la aplicación en fábricas:

Teorema de la seguridad o del «límite inferior»: Una estructura de fábrica es segura (estable) si es posible encontrar una situación de equilibrio compatible con las cargas que no viole la condición de límite (esto es, las cargas se trasmiten siempre dentro de la fábrica).

Teorema de la inseguridad o del «límite superior». Una estructura de fábrica colapsará si es posible dibujar una línea de empujes que, tocando alternativamente el trasdós y el intradós, produce un número de articulaciones que lo convierta en mecanismo, esto es cuatro o más.

Teorema de la unicidad: Establece que la carga de colapso de una estructura es única.

Para poder aplicar el Análisis Límite en fábricas, se deben establecer las siguientes tres hipótesis [8] sobre el material y la estructura a analizar:

1. La fábrica no tiene resistencia a tracción.

2. Las tensiones son tan bajas que, a efectos prácticos, la fábrica tiene una ilimitada resistencia a compresión.

3. El fallo por deslizamiento es imposible.

El agrietamiento de la fábrica, permite conocer por dónde no se trasmiten las cargas, reduciendo las posibilidades de equilibrio y el abanico de soluciones compatibles. En los casos en los que dicha teoría es aplicable, el cálculo estructural pasa por establecer una de las situaciones compatibles. Las cargas a las que están sometidas este tipo de estructuras en estado de servicio, son, en la gran mayoría de casos, gravitatorias y su origen fundamental es el peso propio de los elementos constructivos, donde la magnitud de las sobrecargas, suelen ser mucho menores. La resolución de este tipo de análisis "[…] se basan en verificar, de forma geométrica y vectorial, el equilibrio estático de una estructura comprobando, de forma simple, su estabilidad global […]" [9].

2.2. Aplicación del análisis límite a construcciones históricas: la geometría analítica

La verificación del equilibrio de una estructura existente por sí no tiene ningún objetivo, dado que la experiencia demuestra que si esta se encuentra en pie, no es necesario comprobarla numéricamente. Sin embargo, en muchos casos es necesario determinar lo lejos o cerca que se encuentra del colapso una estructura o cómo van a afectar actuaciones posteriores sobre ella y es necesario evaluar el coeficiente de seguridad correspondiente.

Según el Análisis Límite, que la línea de empujes se encuentre en el interior de la fábrica y por tanteo trasmita sólo compresiones, indica que el coeficiente de seguridad al menos es la unidad. Para ello se define el coeficiente geométrico de seguridad como el cociente entre el espesor de la estructura y el espesor necesario para encajar la línea de empujes [8].

La determinación de la seguridad frente a la estabilidad mediante métodos gráficos de una estructura de fábrica, debe partir de un modelo geométrico adecuado de la construcción a estudiar. Este tipo de

estructuras están sometidas fundamentalmente y en muchos casos a las cargas de peso propio de origen constructivo que se obtienen directamente del levantamiento. Esto pasa por determinar su posición (mediante el levantamiento geométrico), su constitución (mediante el levantamiento constructivo) y su densidad (obtenida bien por ensayos empíricos o bien mediante tabulaciones teóricas).

Por tanto, si se posee el modelo geométrico y constructivo, se dispone de la información fundamental para realizar el análisis estructural. Para obtenerlo, es necesario transformar la información del modelo geométrico gráfico en geometría analítica. Todos los software CAD manejan geometría analítica para su representación, por lo que esa información ya está contenida en el modelo digital; tan sólo hay que extraerla y manipularla.

Frente al uso tradicional del cálculo vectorial, que discretiza los elementos constituyentes de la fábrica, la geometría analítica permite estudiar la construcción de manera global sin perder información ni precisión por el camino. La dificultad de trabajar con numerosos elementos constructivos se supera utilizando la potencia de cálculo informática. El cálculo de equilibrio mediante geometría analítica, sigue poseyendo la rapidez y simplicidad del cálculo vectorial y sigue siendo un método gráfico, con lo que de intuitivo e inmediato este método posee. Disponiendo del modelo geométrico y constructivo y conociendo los pesos específicos correspondientes, es posible disponer de la línea de empujes que verificar su equilibrio [10].

Por tanto para conocer, dentro del abanico de soluciones que el Análisis Límite permite, el coeficiente de seguridad geométrico sólo es necesario determinar una línea de empujes (que depende de los parámetros geométricos y constructivos de la estructura alojados en el modelo) y la parte que del espesor afectada (que es otro parámetro geométrico), por lo que toda la información necesaria está contenida en el propio modelo.

3. TÉCNICAS DE MODELADO GEOMÉTRICO Y CONSTRUCTIVO

En la actualidad, como se ha mencionado anteriormente, los sistemas de modelización están dominados por los entornos digitales en los que la información obtenida del levantamiento in situ, ya sea por un procedimiento u otro, se vuelca en un ordenador. La diferencia fundamental que existe entre las diversas técnicas de modelado radican en cómo se almacena la y si existen elementos adicionales que se le puede añadir a la información geométrica.

3.1. Modelado Geométrico

Las técnicas de modelado geométrico en las que se fundamentan los sistemas de representación CAD actuales se pueden clasificar en los siguientes:

- Modelado de Puntos
- Modelado Alámbrico
- Modelado de Curvas
- Modelado de Superficies
- Modelado de Sólidos

Todos ellos comparten la característica que la información puede ser obtenida de manera analógica o digital y que ésta se puede codificar bien mediante técnicas manuales, que correspondería con el procedimiento tradicional de delineación, bien mediante técnicas automáticas o semiautomáticas.

3.1.1. Modelado de Puntos

El modelo de puntos visualiza los puntos tomados mediante el levantamiento, en un entorno gráfico, generalmente tridimensional, que se puede almacenar como, Nubes de puntos o Mapas de profundidad (Fig. 2)

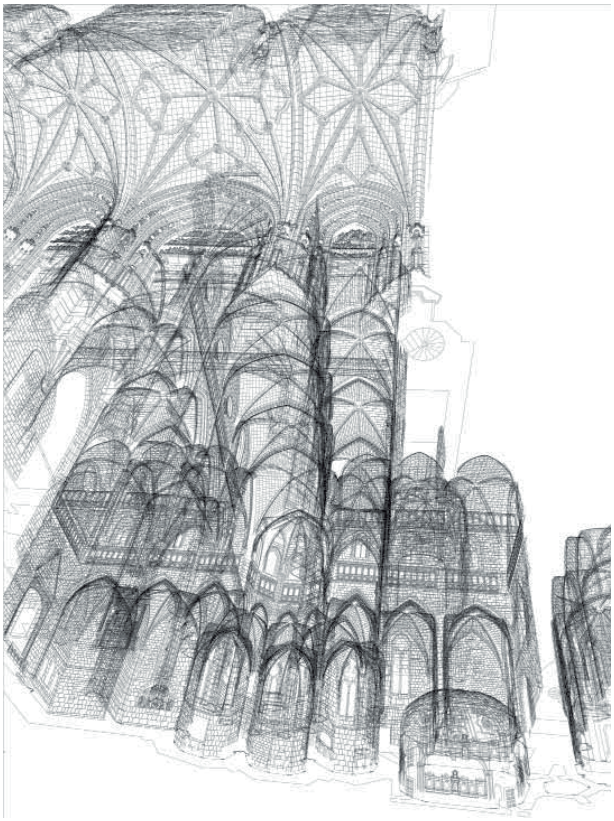


Figura 2. *Modelo de nube de puntos de la Catedral de Santa María la Blanca de Vitoria (Pablo Latorre)*

Las nubes de puntos son conjuntos de puntos no estructurados posicionados en un espacio 3D, que permiten una visualización por acumulación. La información almacenada es la más sencilla posible, una tabla con las coordenadas X, Y, Z de cada punto.

Los mapas de profundidad son una técnica que generalmente parte de la adquisición de la información por parte de un escáner láser que suele incluir la información del color, lo que permite una visualización muy realista, si la densidad de puntos así lo permite. Se obtiene añadiendo a la información anterior, los valores de los canales de color según el sistema elegido.

3.1.2. Modelado Alámbrico

Se tratan de los modelos tridimensionales más sencillos que existen, ya que representan el objeto exclusivamente mediante aristas y vértices. Los vértices son los puntos obtenidos del levantamiento

mientras las aristas se representan analíticamente mediante ecuaciones de rectas (Fig. 3). Tanto la representación en el plano como en el espacio, las curvas que se obtienen son poligonales que pasan por los puntos de control, por lo que realiza mediante interpolación lineal que es la más sencilla.

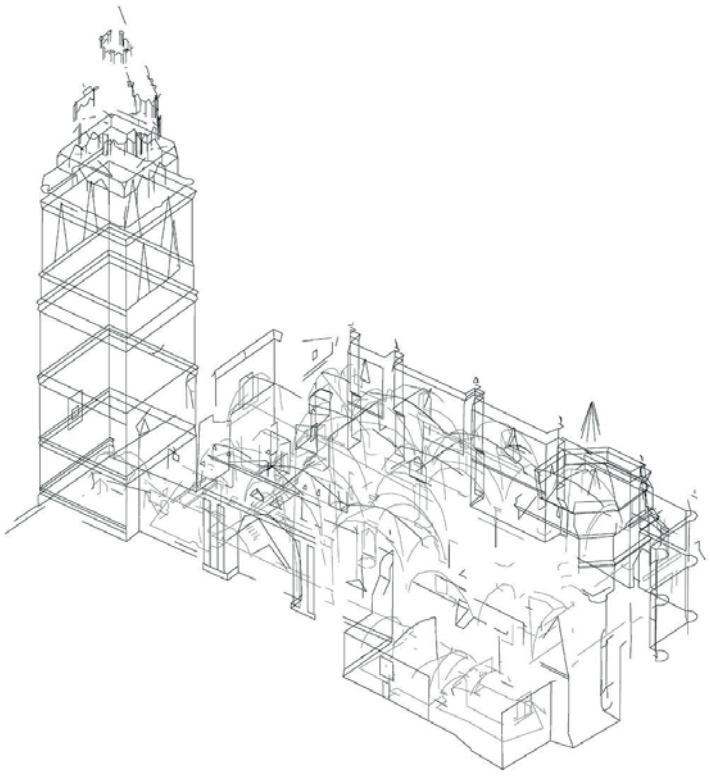


Figura 3. *Modelo alámbrico de la Iglesia de Santa María de Alejos, Valladolid (Rafael Martín Talaverano)*

Por tanto, los recursos informáticos necesarios son reducidos, ya que la base de datos solo almacena coordenadas de puntos, identificadores de líneas, ecuaciones de rectas y secuencia de conexión. Por ello se trata de la opción más fácil de redibujado y regenerado, y aquella en la que se requieren menos potencia computacional. Este tipo de representación posee la desventaja de la visualización de modelos tridimensionales, ya que aparecen ambigüedades y dificultades de representación derivadas de la salida de datos tridimensional en un monitor bidimensional.

3.1.3. Modelado de Curvas

El modelo geométrico plano mediante curvas es el más habitual en la representación en edificación y habitualmente es la que proporciona mayor exactitud y control sobre la forma. La información se almacena como elementos unidimensionales (puntos) o bidimensionales (curvas o segmentos). A partir de una curva primitiva, al idealizarse geométricamente la realidad o bien, en base a ciertos puntos que permiten la reconstrucción del elemento geométrico.

Matemáticamente, las curvas se almacenan como funciones geométricas ya sea mediante ecuaciones explícitas, implícitas o paramétricas. El uso más habitual para la descripción de curvas en el espacio es por medio de una descripción polinómica, dada la mayor facilidad de manipulación que suponen, siendo la representación paramétrica la que habitualmente emplean los programas CAD.

Dependiendo del grado de exactitud que se desee y de la información disponible, la técnicas de modelada puede ser mediante interpolación, aproximación y control de forma.

La interpolación construye la función matemática de manera que, para valores predeterminados de la variable independiente, tome ciertos valores conocidos. Se trata de la aplicación al modelado geométrico del procedimiento clásico de aproximación a funciones y a conjuntos.

Las curvas aproximadoras surgen a partir de las Splines (curvas que interpolan unas serie de puntos mediante segmentos polinómicos), donde se emplea como base polinomios tales que permite el control local de las curvas. Las curvas de Bézier se aproximan a partir de un número de puntos de control determinado que forma el polígono en control con la unión de dichos puntos (Fig. 4).

Las B-splines son curvas formadas por la sucesión de segmentos curvos de Bézier a partir de una serie de puntos de control, el grado de la curva y un vector de nodos. Estas curvas permiten un mayor control del diseño y la forma final y son muy habituales en el diseño industrial y náutico, así como en formas libres en arquitectura.

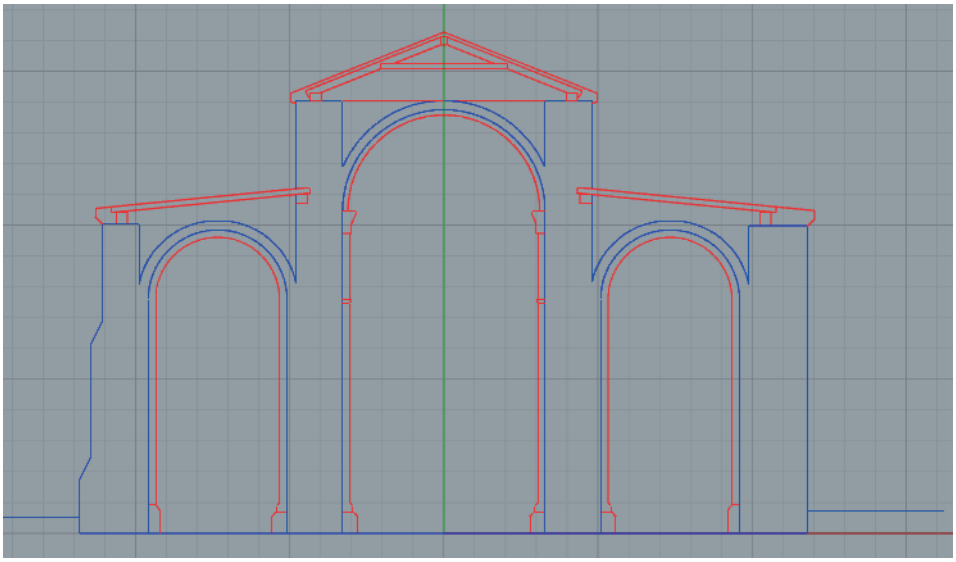


Figura 4. Modelo de curvas interpoladas de la reconstrucción idealizada de las bóvedas de la Iglesia de San Pedro de Ávila (Imagen del autor)

Para poder representar todo tipo de curvas, incluyendo las cónicas que no pueden ser representadas mediante polinomios., y que permita la edición rápida, inmediata y con efectos locales de los puntos de control, de todos los tipos de curvas se disponen de curvas de control de forma, que engloban a las de aproximación. Estas se denominan como curvas NURBS (Non Uniform Rational B-Splines, B-Splines Racionales No Uniformes), y se han popularizado rápidamente entre los programas de CAD debido a la versatilidad que produce su modelado. Además, en los últimas años se han empleado para confeccionar los modelos geométricos que realiza el análisis isogeométrico (IGA).

Su formulación parte de los mismos parámetros que las curvas B-spline como cociente de polinomios donde el numerador es la parametrizacion de una B-spline multiplicado por un coeficiente denominado peso, que tiene el efecto de desplazar localmente la curva. Las bases polinómicas

dependen del grado de la curva, pero se tratan de funciones fácilmente representables y obtenibles, de manera que el proceso de manipulación se simplifica de manera notable.

3.1.4. Modelado de Superficies

El modelado de superficies es el procedimiento más extendido tanto en edificación como en ingeniería civil, en elementos espaciales y esta es la tendencia que se están siguiendo en los procedimientos de análisis que parten de crear modelos tridimensionales. Las técnicas empleadas son: Superficies aproximadoras, de control de forma y mallas.

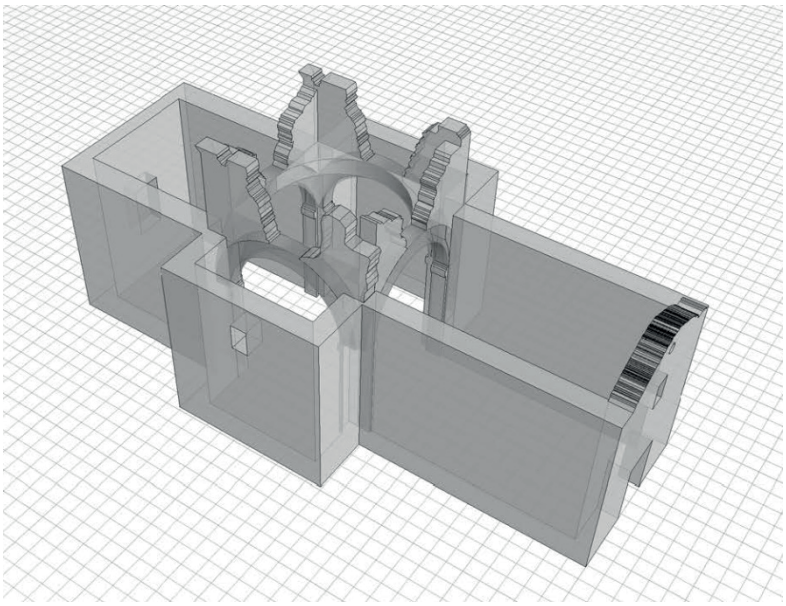


Figura 5. *Modelo geométrico de superficies aproximadas de las ruinas de la ermita de Santa María de Hontoba, Guadalajara (Imagen del autor)*

En las primeras se trata de la extensión al espacio de los procedimientos descritos anteriormente para curvas, Las superficies de Bézier, por tanto, requieren dos conjuntos de puntos de control. Del mismo modo, por extrapolación de las curvas NURBS, las superficies NURBS se modelizan mediante puntos de control y pesos en las dos direcciones (Fig. 5).

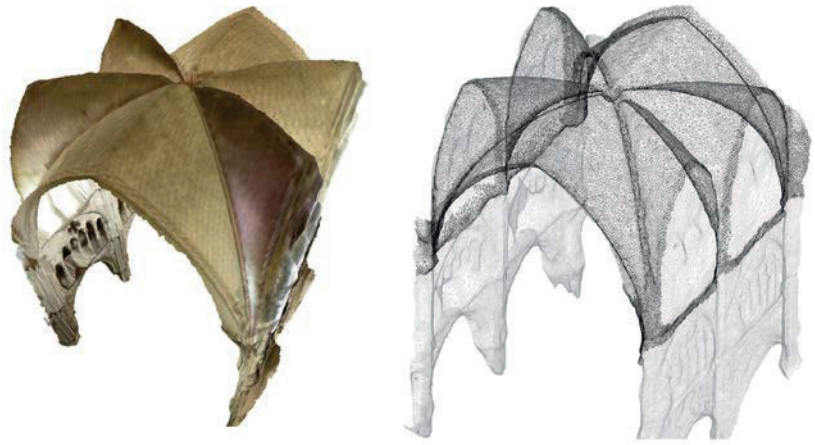


Figura 6. *Modelo fotográfico (izq) y malla triangulada (dch) de las bóvedas sexpartitas de la catedral de Burgos a partir de técnicas de fotogrametría (Rafael Martín Talaverano)*

El modelo de mallas (Fig. 6) realiza mediante la construcción de una serie de polígonos convexos a partir de un número de puntos dado. Por tanto permite crear la "piel" en el espacio de un objeto mediante elementos planos, que generalmente suelen ser triángulos aunque para determinadas geometrías son necesarios cuadriláteros o hexágonos. Permite el trabajo con diferentes resoluciones, ya sea tanto para la visualización como para el modelado matemático, lo que permite optimizar los recursos. La estructura de datos es similar a la de los modelos alámbricos, ya que se almacena por un lado los vértices, por otro las aristas y finalmente las caras o polígonos. La creación de las mallas, se puede realizar mediante diferentes procedimientos.

3.1.5. Modelado de Sólidos

Por último cabe destacar el modelo de sólidos también denominado BIM (Building information Model), que se encuentra mucho más extendido en el diseño de obra nueva que en la intervención en edificación existente. Esta metodología se basa en la creación de modelos virtuales mediante elementos constructivos paramétricos y la vinculación a bases de datos externas.

Se trata de un sistema actualmente poco extendido en Patrimonio fundamentalmente por dos dificultades. La primera es la caracterización de los materiales, ya que siendo muy fácil en obra nueva, en edificación existente no suele ser tan sencilla y en especial en fábricas dado que existe gran variabilidad de algunas características. Por otra parte la estandarización y parametrización de elementos constructivos en construcción histórica es mucho más complicada, dada la extensa cantidad de variables existentes, controlables y no controlables, y que además cuenta con la dificultad de la excesiva simplificación geométrica que es necesario realizar para adaptarse a los parámetros del software BIM existente.

3.2. Modelado Constructivo

Para la realización de un modelo constructivo, es necesario en primer lugar, obtener la información constructiva necesaria. En muchos casos esta se obtiene mediante la toma de muestras para la realización de ensayos de laboratorio o de pruebas in situ. En todos los casos es necesario posicionar espacialmente los resultados, por lo que esta información debe estar ligada inevitablemente al modelo geométrico. Por otra parte, con anterioridad a esta fase, es necesario confeccionar

3.2.1. Levantamiento constructivo

El levantamiento constructivo tiene por objeto la catalogación y clasificación constructiva y de los materiales que conforman los paramentos de una construcción, a partir de su identificación previa. Se trata por tanto de un apartado de la fase documental, previa al diagnóstico y la intervención, que incluye, al igual que en el levantamiento geométrico, una primera parte de identificación y una segunda de documentación.

El análisis estratigráfico tiene su origen en la década de 1970 en Italia y consiste en aplicar el método Harris a la lectura de muros, con "una utilización análoga a las prácticas llevadas a cabo en los estratos arqueológicos horizontales, permiten ampliar el conocimiento del contexto, que por analogía podemos llamar de la estratigrafía vertical: las técnicas constructivas, los motivos decorativos, el acabado de los elementos, la factura de los huecos, etcétera" [11].

El objeto de estudio se divide en tres niveles: el primero la determinación de la masa muraria (denominada Unidades Estratigráficas Murarias, UEM), la segunda la posición vertical, sus contornos y dimensiones macroscópicas y la tercera la caracterización de sus componentes constructivos. Todo ello reflejado gráfica y documentalmente.

Dentro de los paramentos verticales los elementos a estudiar se dividen a su vez, en revestimientos, muros de fábrica y cimentaciones. Cada elemento se compone de uno o más volúmenes, que con características comunes, se relaciona con los demás, estableciéndose un perímetro delimitador y grafiándolo sobre una representación geométrica o fotográfica. Además a la información de cada unidad, se le asocia una ficha o base de datos, donde se registra toda la información obtenida.

3.2.2. Modelo constructivo

Conseguir un modelo constructivo, lo más fidedigno con la realidad posible, es fundamental para realizar un análisis correcto. Una dificultad importante en este tipo de edificios es separar en sistemas constructivos siguiendo la visión actual. Separar estructura del cerramiento no es posible en la edificación histórica y determinar claramente sus funciones tampoco.

Por ello, para construir el modelo constructivo se debe definir geométricamente cada uno de los estratos, tal y como se establece en el levantamiento, de manera que se puedan asimilar propiedades y funciones de manera homogénea en cada unidad. Dada la complejidad de las estructuras de fábrica, cuyo comportamiento en muchos casos no resulta evidente, es necesaria la valoración de su "complejidad estática […] para la modelización del edificio con el fin de entender su comportamiento y la respuesta a los posibles accidentes imprevisto" [11].

Este paso no es necesario emplear software específico, ya que muchos programas de CAD disponibles en el mercado en la actualidad, permiten la agrupación de determinados conjuntos de elementos geométricos asignándolas una característica común, ya sea de visualización (color, capa, tipo de línea,…) como de codificación (subconjuntos geométricos).

4. REQUISITOS DE LOS MODELOS PARA EL ANÁLISIS GEOMÉTRICO ANALÍTICO

Por un lado, los modelos según codifiquen su información con una u otra técnica, deben almacenar la información mínima necesaria para que con posterioridad pueda verificarse el equilibrio mediante el análisis límite. Asimismo, debe incorporarse una información mínima constructiva que se relacione con el modelo geométrico y que permita el análisis estructural, ya que únicamente la información geométrica descontextualizada no permite estudio alguno.

4.1.1. Requisitos geométricos

Como se ha comentado todas las técnicas existentes tienen como punto de partida un número finito de puntos obtenidos del levantamiento previo que se pueden expresar como un conjunto P, que son los almacenados en los modelos de puntos, tanto en el caso de nubes de puntos como de mapas de profundidad. En este último, la información del color queda descartada, ya que no es relevante a la hora de realizar el análisis y su función está orientada a la visualización.

En los modelos alámbricos, la obtención de los conjuntos de las coordenadas es inmediata ya que el conjunto de puntos se obtiene directamente de los vértices del modelo. Si ese conjunto representa

los puntos de paso de una función interpoladora, se pueden denominar nodos de interpolación y soportes de interpolación respectivamente.

En los casos que las curvas o superficies representadas en el modelo estén interpoladas, la obtención también inmediata, ya que el propio conjunto de puntos de interpolación pasa a ser los puntos de soporte y la imagen o imágenes (según sea en el plano o el espacio) de los mismos. Si la geometría se encuentra modelada con curvas o superficies por aproximación, la información almacenada es la lista del polígono de control, la lista de pesos de los nodos (en caso de NURBS o una lista de valores unitarios para curvas de Bézier), el grado de la curva y el vector de nudos. Como se puede comprobar, la información con la que se trabaja aumenta de manera importante al emplear NURBS, pero a cambio se consigue mayor versatilidad e incluir todos los tipos anteriores. Por último, en modelos de mallas los propios vértices suponen los nodos de interpolación, algo similar al modelo alámbrico.

En la *Tabla 1,* se resumen los parámetros necesarios según el tipo de modelo para la codificación analítica.

Tabla 1. Información geométrica necesaria según la técnica empleada

Tipo de Modelo	Información geométrica	Descripción
Modelo de Puntos		
Nube de Puntos	P	Puntos de la nube
Mapa de profundidad	P	Puntos de la nube sin color
Modelo alámbrico	P	Vértices
Modelo de Curvas		
Interpolación	P	Nodos de interpolación
Aproximación	P, k, n	Polígono de control, nodos, grado
Control de forma	P, k, n, w	Polígono de control, nodos, grado y pesos
Modelo de Superficies		
Aproximación	P, k, n	Polígono de control, nodos, grado
Control de forma	P, k, n, w	Polígono de control, nodos, grado y pesos
Mallas	P	Vértices de los polígonos

4.1.2. Requisitos constructivos

Para la definición de las cargas cuyo origen se encuentra en el peso propio de los elementos constructivos, por otra parte fundamentales para el análisis del equilibrio de estructuras de fábrica, es necesario por un lado acotar espacialmente cada elemento constructivo y asignarles un valor de peso propio. La incorporación de la información modelada no tiene ninguna aplicación en cuanto no esté asociada a las curvas o superficies que forman la envolvente de la construcción a estudiar. Si la información modelada tiene su fundamentación en un conjunto de puntos, será necesario discriminar previamente qué conjunto de puntos pertenece a qué envolvente. Asimismo si esta se realiza con curvas o superficies, cada conjunto de curvas se asociará al conjunto correspondiente.

Este es el caso, por ejemplo, del relleno del trasdós de una bóveda, que tendrá una envolvente geométrica superior y una inferior y tendrá asociado un valor de peso específico, obtenido bien por análisis in situ, bien por pruebas de laboratorio bien por estimaciones. En el caso de diversos estratos y elementos constructivos superpuestos, circunstancia muy habitual en la construcción histórica de fábrica, cada estrato estará delimitado por una envolvente que coincidirá con los estratos adyacentes. Este es el caso del relleno, cuyo envolvente inferior coincidirá a su vez con la envolvente superior de la bóveda sobre la que descansa.

Por ello, es necesario definir qué puntos, curvas o superficies que forman parte de ella y esto puede realizarse directamente desde el modelo geométrico. Esta circunstancia representa una ventaja ya que no requiere el manejo de otro software diferente y se puede almacenar dentro del mimo modelo.

Para poder realizar la verificación del equilibrio, al menos será necesario establecer un conjunto que forme la envolvente superior y otro conjunto que forme la cara inferior que coincidan en las proyecciones horizontales, ya que, como es lógico, un elemento estructural tiene que estar definido por un contorno cerrado ya sea este cóncavo o convexo.

Por otra parte, se debe establecer una relación previa al análisis entre los subconjuntos de puntos y el elemento geométrico al que pertenece, de manera que se pueda establecer fácilmente una correlación entre elementos geométricos y propiedades físicas.

Los modelos geométricos pueden contener mucha más información que no es requerida para el análisis, tales como la inclusión de mobiliario, decoración, detalles, huecos,... así como el color. Si esta no se asocia a ningún elemento de la envolvente, pasará desapercibida a efectos del análisis y no requerirá su eliminación para el desarrollo posterior. El modelo geométrico permanece sin modificación y es su incorporación a una envolvente determinada lo que permite que sea analizado como parte de la estructura.

5. CONCLUSIONES

El Análisis Limite de estructuras de fábrica históricas permite evaluar el requisito del equilibrio y determinar el coeficiente de seguridad geométrico a partir de la información geométrica y constructiva que se encuentra contenida en los modelos CAD, dado que estas se ven sometidas fundamentalmente a las acciones de origen interno generadas por el peso propio de los elementos constructivos.

A partir del estudio de las diversas técnicas informáticas de modelado geométrico, que son las empleadas por los softwares de diseño asistido por ordenador, se puede concluir que la información contenida en dichos modelos obtenida a partir del levantamiento, se codifica a partir de un conjunto finitos de puntos. Dicho conjunto, corresponde con los propios puntos de la nube de puntos y de los mapas de profundidad, los vértices de los modelos alámbricos, los nodos de interpolación, el polígono de control de curvas de aproximación y de control de forma y con los vértices de las mallas.

Asimismo se puede concluir que para poder determinar geométricamente los elementos constructivos que intervienen en el análisis, es necesario identificar las envolventes, tanto superior como inferior que conforman cada estrato constructivo. Una vez asignada a cada una el peso

específico correspondiente, se podrá determinar una o varios de las líneas de empujes posibles, que verificará geométricamente el correspondiente equilibrio empleando para ello la geometría analítica.

AGRADECIMIENTOS

El autor quiere agradecer a la Fundación Juanelo Turriano, el apoyo a este trabajo por medio de la concesión de la beca para la realización de la tesis doctoral de la que esta comunicación forma parte.

REFERENCIAS

[1] Heyman, J. (2004) Análisis de estructuras: Un estudio histórico. Ed. Ricardo Aroca Hernández-Ros. Madrid: Instituto Juan de Herrera.

[2] Roca, P., Cervera, M. y Gariup, G. (2010) Structural Analysis of Masonry Historical Constructions. Classical y Advanced Approaches. *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (3): 299-325.

[3] Kilian, A. & Ochsendorf, J. (2005) Particle-Spring Systems for Structural Form Finding. *Journal of International Association for Shell and Spatial Structures* 148 (77): 30.

[4] Block, P., T. Ciblac, & J. Ochsendorf, J. (2006) Real-Time Limit Analysis of Vaulted Masonry Buildings. *Computers & Structures* 84 (29): 1841-1852.

[5] Lachauer, L. y P. Block. 2014. Interactive Equilibrium Modelling. *International Journal of Sapce Structures* 29 (1) 25-37

[6] Van Mele, T.J. y P. Block. 2014. Algebraic graph statics. *Computer-Aided Design*, 53 (2014): 104-116

[7] Mencías, D. 2013. La geometría analítica dinámica como herramienta de enseñanza de arcos y bóvedas. In III Jornadas Internacionales de Enseñanza de la Ingeniería Estructural Valencia, 12 y 13 de Junio. Valencia: Asociación Científico Técnica del Hormigón Estructural.

[8] Heyman, J. 1966. The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures*. 2: 249– 79.

[9] Heyman, J. 1995. Estructuras de Fábrica: Colección de ensayos. Madrid: Instituto Juan de Herrera.

[10] Mencías, D. (2017). La geometría analítica como herramienta de análisis estructural de fábricas históricas (unpublished PhD. thesis). Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

[11] Francovich, R. y Parenti. R. (1988). Archeologia e Restauro Dei Monumenti. Florencia: All'Insegna del Giglio.

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

Yield design based numerical analysis of three-dimensional reinforced concrete structures

H. Vincent [1,2], M. Arquier[1], J. Bleyer[2], P. de Buhan[2]

[1]*Strains. France. 23 Avenue d'Italie 75013, Paris, France*
[2]*Laboratoire Navier, UMR 8205, Ecole des Ponts ParisTech, IFSTTAR, CNRS, UPE, Champs-sur-Marne, France*
Contact : **hugues.vincent@strains.fr**

ABSTRACT

The purpose of this contribution is to present some new recent developments regarding the evaluation of the ultimate bearing capacity of massive reinforced concrete structures which cannot be modelled as 1D (beams) or 2D (plates) structural members. The approach is based on the implementation of the lower bound static approach of yield design through a discretization of the three-dimensional structure into tetrahedral finite elements, on the one hand, the formulation of the corresponding optimization problem in the context of Semidefinite Programming (SDP) techniques, on the other hand. Another key feature of the method lies in the treatment of the concrete embedded reinforcing bars not as individual elements, but by resorting to an extension of the homogenization approach. The whole procedure is first validated on a rather simple illustrative problem, then applied to the design of a bridge pier cap taken as an example of more complex and realistic structure.

Keywords: reinforced concrete structures, yield design, semidefinite programming, homogenization

1. INTRODUCTION

The yield design [1] or limit analysis [2] approach provides a suitable theoretical as well as computational framework for the Ultimate Limit State Design of reinforced concrete structures. In the situation when the structure is made of an assemblage of 1D (beams or arches) or 2D (plates or shells) structural members, its ultimate bearing capacity may be evaluated from the previous determination of interaction yield criteria involving generalized stresses such as axial-membrane forces and bending moments. This method, which proves particularly attractive from an engineering point of view, has been quite recently used for spatial frame structures [3] and reinforced concrete plates [4] in combination with efficient convex optimization procedures.

On the other hand, assessing the ultimate load bearing capacity of constructions incorporating massive three-dimensional reinforced concrete components, which can no more be modelled as beams or plates, requires a specific analysis, such as the widely acknowledged "strut-and-tie" model which, in some way, can be related to the lower bound static approach of yield design. With a special attention to evaluating the ultimate shear capacity of reinforced concrete deep beams, both the lower and upper bound methods of yield design have been implemented in the context of a finite element formulation with the help of linear programming techniques [5]. In this study, reinforced concrete was described according to a "mixed modelling" approach, in which plain concrete was modelled as a two-dimensional

continuous medium under plane stress, while the reinforcement bars were treated as one dimensional flexible beams embedded in the concrete material.

The generalization to the more realistic situation of linear reinforcing inclusions placed into three-dimensional concrete bodies is posing a somewhat serious challenge as regards the possibility of treating such a case in a 1D-3D mixed modelling approach. Some attempts to circumvent this problem have already been proposed either in the context of the finite element formulation [6] or making use of an implicit homogenization method [7] or multiphase model [8].

The present contribution is devoted to applying the previously mentioned multiphase model, initially developed for reinforced soils, to the yield design of three-dimensional reinforced concrete structures. It is based on the combination of the following elements.

- Formulation of the plain concrete three-dimensional strength properties by means of a tension cut-off Mohr-Coulomb condition, characterized by the uniaxial tensile and compressive strengths of the concrete, along with its friction angle.
- Modelling the strength of each individual reinforcement with its surrounding concrete volume as an anisotropic continuum accounting for the axial strength of the reinforcing inclusion.
- Finite element formulation of the lower bound static approach of yield design based on a discretization of the structure into tetrahedral elements with a piecewise linear variation of the stresses.
- The final optimization procedure is carried out by means of Semidefinite Programming (SDP).

The whole design procedure will be illustrated on the typical example of evaluating the ultimate bearing capacity of a reinforced concrete bridge pier cap subjected to concentrated vertical loads.

2. MODELLING STRENGTH PROPERTIES OF PLAIN AND REINFORCED CONCRETE

2.1. Plain concrete and reinforcing bars

Following the approach of [2] and [5] or quite recently [4], the unreinforced or plain concrete will be modelled as a 3D homogeneous continuous medium, the strength properties of which will be described by means of a *tension cut-off Mohr-Coulomb* yield condition which may be formulated as:

$$F^c(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup\left\{K_p\sigma_M - \sigma_m - f_c; \sigma_M - f_t\right\} \leq 0 \tag{1}$$

In the above condition, σ_M and σ_m are the major and minor principal stresses, respectively (tensile stresses are counted positive throughout the text), f_t and f_c denote the uniaxial tensile and compressive resistances and $K_p=(1+\sin\varphi)/(1-\sin\varphi)$ where φ is the internal friction angle which is usually taken equal to 37° ($K_p\approx4$). This criterion is thus defined by three strength parameters. It may be represented by means of an intrinsic curve in the Mohr-plane by as shown in Fig. 1, where the three material parameters defining the strength condition (1) are clearly apparent.

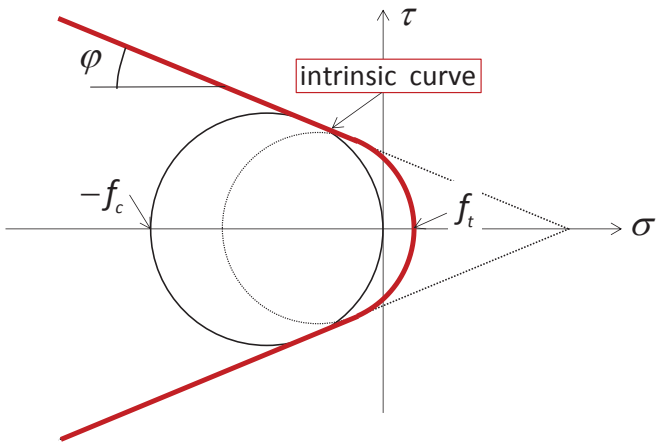


Figure 1. *Geometrical representation of the tension-cutoff Mohr-Coulomb criterion in the Mohr-plane*

The concrete material is reinforced by one dimensional steel bars or rods, the strength condition of which may be expressed in terms of axial force *N* only, since their resistance to shear force *V* and bending moment *M* is neglected:

$$-kN_0 \le N \le N_0,\ V = M = 0 \tag{2}$$

In the above condition, N_0 denotes the tensile resistance of each individual reinforcing bar, while *k* is a non-dimensional parameter, ranging from 0 to 1, which accounts for a reduced resistance under compression, due to buckling for instance.

2.2. Reinforced concrete: a homogenized strength condition

Some significant zones of the reinforced concrete structure (such as deep beams: see for instance [2]) may be reinforced by such uniformly distributed bars (case of stirrups or open frames). Provided that the spacing between two neighbouring reinforcements is sufficiently small as compared with the size of the reinforced zone, the latter may be replaced by a zone where the homogenized constituent material obeys a *macroscopic strength condition* (see [9] for composite materials, or [10] for reinforced soils and [5] for reinforced concrete).

This macroscopic strength condition, which can be derived from using the *yield design homogenization method* [11], may be expressed as follows:

$$F^{rc}(\underline{\underline{\sigma}}) \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^c + \sigma^r \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \\ \text{with} \quad F^c(\underline{\underline{\sigma}}^c) \le 0 \ \text{ and } \ -k\sigma_0 \le \sigma^r \le \sigma_0 \end{cases} \tag{3}$$

where $\underline{e}_1$ is the unit vector parallel to the reinforcing bar, and σ_0 is defined as the tensile resistance of the bars *per unit transverse area*:

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{s^2} \tag{4}$$

which may also be expressed as:

$$\sigma_0 = \frac{A^s f_y^s}{s^2} = \eta f_y^s \tag{5}$$

where f_y^s denotes the uniaxial strength of the bar constituent material (steel) and A^s the bar cross-sectional area, so that η represents the *reinforcement volume fraction* (see Fig. 2(*a*) where $s^2 = A^s + A^c$).

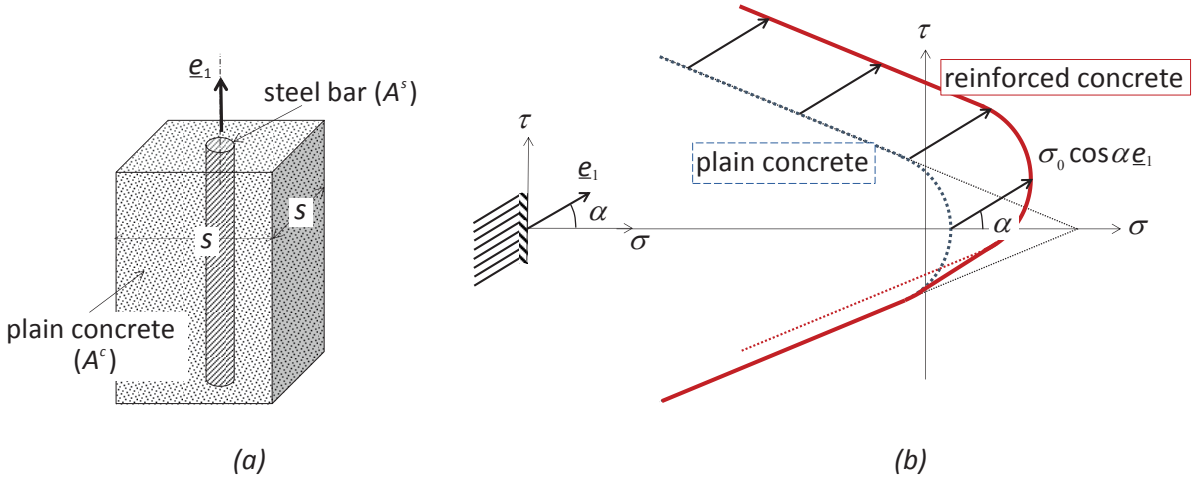


Figure 2. *(a) Representative volume of reinforced concrete; (b) macroscopic strength condition relative to an oriented facet (case k=0)*

It is to be noted that the validity of the above macroscopic strength criterion (3) is subject to the verification of two important conditions (see [11] for more details).

- The reinforcing bars are perfectly bonded to the surrounding concrete material, which means for instance that no slippage occurs at the bar/concrete interface.
- The reinforcement volume fraction remains sufficiently small (η<<1), whereas the resistance of the reinforcing material is much higher than that of the concrete material and notably its tensile strength ($f_y^s >> f_t$).

Figure 2(*b*) illustrates the macroscopic strength condition (3) expressed on an oriented facet of the homogenized reinforced concrete in the particular case when *k*=0 (no compressive resistance of the reinforcements). The corresponding strength domain in the (σ,τ)-plane can be drawn simply as the convex envelope of the plain concrete intrinsic failure curve and of the curve derived from that one through a translation of vector $\sigma_0 \cos\alpha \underline{e}_1$. Such a geometric representation thus gives a clear evidence of the *strength anisotropy* of the homogenized reinforced concrete in exactly the same way as for fibre composite materials.

It should be pointed out that, without any reference to the limit analysis or yield design homogenization theory, some authors [7] did make use of a strength criterion quite similar to (3), that is based on an intuitive additive decomposition of the total stress in reinforced concrete zones into stress components relating to the plain concrete and the reinforcements, each one complying with independently specified strength conditions.

2.3. The "mixed modelling" approach to reinforced concrete structures: a serious limitation

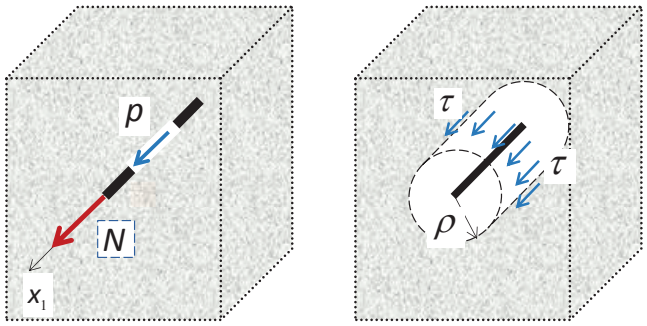
Referring to the frequently encountered situation where only a small number of differently oriented reinforcements are incorporated in the concrete structure (case of longitudinal reinforcements in deep beams for instance), the above mentioned homogenization method is no more applicable and the so-called *"mixed modelling" approach* should be advocated. According to this approach, the reinforcements are treated as 1D structural elements with a strength condition defined by (2)

embedded in the concrete material modelled as a 3D continuum, the strength of which is specified by (1).

Unfortunately, this 1D-3D mixed modelling approach comes against a serious limitation concerning the establishment of equilibrium equations for such a composite system. Indeed, the equilibrium equation at any point of the reinforcing bar may be written as:

$$\frac{\mathrm{d}N(x_1)}{\mathrm{d}x_1} + p(x_1) = 0 \tag{6}$$

where p represents the density of axial force exerted by the surrounding concrete material onto the reinforcing bar (Fig. 3(*a*)).



(*a*) (*b*)

Figure 3. Interaction forces between concrete and reinforcement in the context of 1D-3D mixed modelling

Now, the impossibility of connecting such a 1D distribution p of interaction forces with the three-dimensional stress fields prevailing in the concrete material may be illustrated from the following simple reasoning. Considering a circular cylindrical "control surface" of radius ρ with its axis placed along the reinforcement, as shown in Fig. 3(*b*), the interaction force density p may be obtained from applying along this surface a longitudinal shear stress τ, the average value of which along the circle drawn on this surface at point x_1, could be expressed as:

$$\langle \tau \rangle (x_1) = \frac{p(x_1)}{2\pi\rho} \tag{7}$$

According to the latter equation, the shear stress which should be developed in the concrete along the control surface for applying a given value of interaction force density p increases to infinity as the radius ρ tends to zero, so that the stress field in the concrete material would tend to infinity along the reinforcement axis. Such a singularity could possibly be taken into account in the context of a linear elastic behavior of the concrete, but definitely not as soon as yielding and failure of the latter is concerned, since in this case the yield strength condition (1) of the concrete would be systematically violated when approaching the 1D reinforcing bar.

2.4. An extended homogenization-based model

Of course, the only fully mechanically consistent and rigorous way of circumventing the above limitation, would be to model each reinforcing bar as a three-dimensional volume body. But, on account of the small diameter of such bars along with the sharp contrast between the reinforcing steel and the surrounding concrete in terms of strength properties, this would undoubtedly imply prohibitive computational costs, due for instance to the highly refined discretization required when employing finite element techniques.

An alternative approach for the finite element modelling of 1D steel inclusions in 3D concrete volumes has been recently proposed by [6]. Likewise, in a more explicit reference to the homogenization procedure, three dimensional fem elastoplastic analyses on reinforced concrete structural elements have been performed by [8]. Their approach, which will be adopted in this contribution, may be described as follows.

Considering one individual 1D-inclusion embedded in a 3D-concrete block, a cylindrical volume of concrete with the inclusion placed along its axis is defined, as shown in Fig. 4(a). The intuitive idea is to replace the composite cylindrical volume, thus obtained, by a homogenized cylinder, at any point of which the strength condition is defined by Eqs. (3) and (4), where *s* represents the side of the squared cross-section of the cylindrical volume.

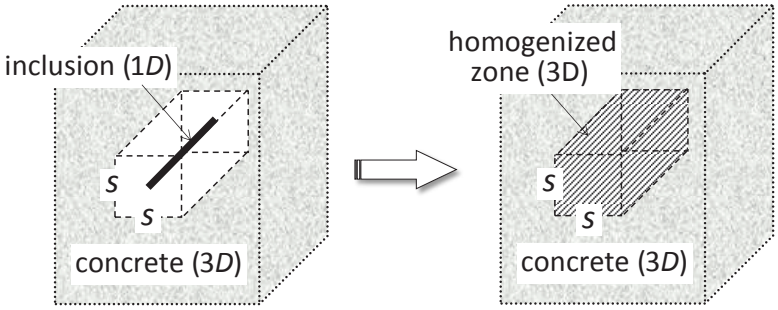


Figure 4. *Construction of a homogenized reinforced zone around an individual inclusion*

The advantage of such a modelling procedure, is that the characteristic size of the homogenized zone (namely *s*) is significantly larger than the inclusion's diameter, thus allowing for example a much easier finite element discretization of the reinforced concrete structure as a 3D-3D composite, since a refinement of the mesh around the inclusion is no more required for obtaining accurate and reliable predictions. Of course, the choice of *s* being arbitrary, it will be necessary to make sure that the results of the computations performed on the basis of this model, remain rather insensitive to the value of *s*.

3. NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE LOWER BOUND STATIC APPROACH

3.1. Statement of the yield design problem

Assuming that the reinforced concrete structure under consideration is subject to *one single loading parameter Q*, the *ultimate* or *failure load value* Q^+ is defined, in the context of the yield design theory, as the maximum value of *Q* for which one can exhibit any stress field $\underline{\underline{\sigma}}$:

- ✓ *statically admissible* (S.A.) with *Q*, *i.e.* verifying the equilibrium equation at any point of the structure:

$$\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) + \rho\underline{F}(\underline{x}) = 0,\ \forall \underline{x} \in V \tag{8}$$

where $\rho\underline{F}$ denotes the body force volume density (material specific weight for example), along with the continuity of the stress-vector across possible stress jump surfaces Σ:

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\right].\underline{n}(\underline{x}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \tag{9}$$

as well as the stress boundary conditions associated with the loading *Q*;

- ✓ and complying with the *strength conditions* assigned to the plain concrete and reinforced concrete zones of the structure, respectively*:*

$$F^c(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \le 0 \ \forall \underline{x} \in V^c \ \text{ and } \ F^{rc}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \le 0 \ \forall \underline{x} \in V^{rc}, \ \ V = V^c \cap V^{rc} \tag{10}$$

where V^c (respectively V^{rc}) represents the part of the structure occupied by the plain concrete (resp. by the homogenized reinforced concrete).

3.2. 3D finite element discretization

Applying the *lower bound static approach* consists in considering S.A. stress fields depending either on a small number of parameters in an analytical approach, or on a large but finite number of stress variables in a numerical approach, such as the finite element method. According to the latter, the geometrical domain V occupied by the three-dimensional structure is discretized into N_e tetrahedral finite element V^e, such as the one depicted in Fig. 5(*a*), with a *linear variation* of the stress field inside each element so that the stress at any point inside such an element may be classically written as:

$$\forall \underline{x} \in V^e, \ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{4} N^k(\underline{x}) \underline{\underline{\sigma}}^k \tag{11}$$

where N^k are four linear interpolation functions and $\underline{\underline{\sigma}}^k$ is the value of the stress tensor at the node n°k of the element. It is to be noted that there are as many stress tensors attached to any geometrical node of the mesh as there are tetrahedral elements sharing this node as an apex.

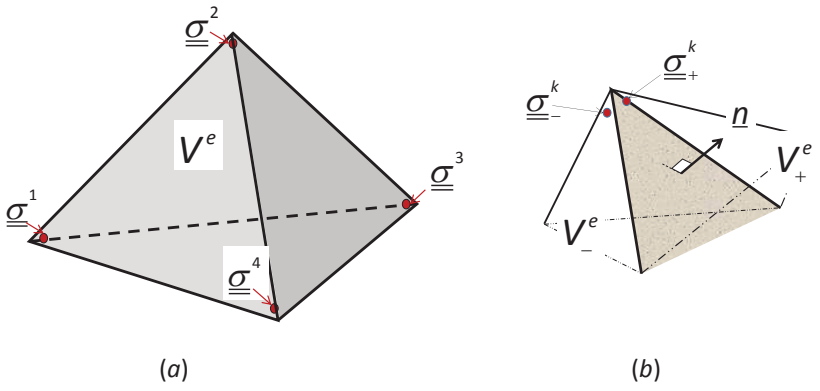


Figure 5. *Four nodded tetrahedral finite element used in the discretization of the reinforced concrete structure*

Furthermore, one may come across two situations.

- ✓ The considered element is located in the *unreinforced plain concrete* zone V^c of the structure, so that the stress state at any node of this element is defined by one single tensor which should comply with the strength condition (1).
- ✓ The element is located in the *homogenized reinforced concrete* zone V^{rc}, and, as suggested by the corresponding homogenized strength condition (3), the stress state is defined by a stress tensor and an additional scalar stress variable which must satisfy separate independent strength conditions.

It follows that a total of, either 4x6=24 or 4x7=28 stress variables are attached to each element V^e of the mesh.

3.3. Formulation of equilibrium conditions as linear constraints on the stress variables

On account of (11), the equilibrium equation (8) inside each element may be rewritten as:

$$\forall \underline{x} \in V^e,\ \mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{4} \underline{\mathrm{grad}N^k}.\underline{\underline{\sigma}}^k = -\rho \underline{F} \tag{12}$$

where it is assumed that the body force density is constant over the element. Since the gradient of each interpolation function is constant, Eq. (11) represents a *linear constraint* on the nodal stress variables $\underline{\underline{\sigma}}^k$ of each element. It is worth noting that the linear equilibrium condition (11) involves the *total* stress in the homogenized reinforced concrete and not the "partial" stresses $\underline{\underline{\sigma}}^c$ and σ^r which appear in the definition (3) of the reinforced concrete strength condition.

Likewise, Eq. (8) expresses the continuity of the (total) stress vector across any triangular facet common to two adjacent elements (see Fig. 5(*b*)). It also leads to *linear constraints* of the form:

$$(\underline{\underline{\sigma}}_+^k - \underline{\underline{\sigma}}_-^k).\underline{n} = 0 \tag{13}$$

where $\underline{n}$ is the unit normal to the triangular facet connecting two such adjacent elements V_+^e and V_-^e. Owing to the linear variation of the stress fields, checking the jump condition (13) at the nodal points is sufficient to make sure that it is verified at any point of the discontinuity triangular facet.

It follows that all the conditions that a discretized stress field must satisfy for being statically admissible with a load value *Q* may be formulated in a generic matrix form as:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{fem}} \text{ S.A. with } Q \Leftrightarrow \begin{cases} Q = {}^T\{A\}\{\Sigma\} \\ \text{with } [B]\{\Sigma\} = \{C\} \end{cases} \tag{14}$$

where $\{\Sigma\}$ is a column-vector which collects all the nodal stress variables associated with the mesh discretization of the structure, that is the total stresses in the plain concrete zones and the partial stresses in the homogenized reinforced parts.

Consequently, the finite element implementation of the lower bound static approach of yield design reduces to the following maximisation problem:

$$Q^+ \geq Q^{lb} = \underset{\{\Sigma\}}{\mathrm{Max}}\ Q = {}^T\{A\}\{\Sigma\} \text{ subject to } \begin{cases} [B]\{\Sigma\} = \{C\} & \text{equilibrium} \\ F(\{\Sigma\}) \leq 0 & \text{strength criteria} \end{cases} \tag{15}$$

where $F(\{\Sigma\}) \leq 0$ represents the conditions expressing the different *strength criteria* to be satisfied. Again, due to the linear variations (11) of the considered stress fields and to the *convexity* of the strength conditions, the latter have only to be verified at the nodal stress points.

3.4. Formulation as a SDP problem

Unlike the equilibrium conditions which involve the total stresses only, the strength criteria in the homogenized reinforced zones concern the partial stresses as shown by (3). While the condition relating to the reinforcement writes in the form of a simple *linear* constraint ($-k\sigma_0 \leq \sigma^r \leq \sigma_0$), the strength

condition of the plain concrete defined by (1) involves the maximal and minimal principal stress components. The latter thus needs a specific treatment so that the optimization problem (15) may be treated as a *Semidefinite programming* (SDP) optimization problem [12] as briefly explained below.

Semidefinite Programming allows to formulate optimization problems in terms of constraints on eigenvalues of symmetric matrices. It therefore provides a suitable framework for the tension cut-off Mohr-Coulomb criterion (1) which involves the maximal and minimal principal stress components (eigenvalues). Thus, the three-dimensional Mohr-Coulomb criterion can be enforced by applying the two *linear matrix inequalities* (LMI):

$$t_M \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\sigma}} \succeq 0 \quad \text{and} \quad t_m \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\sigma}} \preceq 0 \,^{1} \tag{16}$$

in conjunction with the equality constraint:

$$K_p t_M - t_m - f_c = 0 \tag{17}$$

where t_M and t_m are auxiliary variables. Eliminating t_M from Eq. (17) yields:

$$\underline{\underline{\sigma}} - K_p^{-1} t_m \underline{\underline{1}} \preceq K_p^{-1} f_c \underline{\underline{1}} \quad \text{and} \quad t_m \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\sigma}} \preceq 0 \tag{18}$$

The second inequality of (18) can be expressed as:

$$t_m \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{X}} = 0 \ \text{ and } \ \underline{\underline{X}} \succeq 0 \tag{19}$$

where $\underline{\underline{X}}$ is an auxiliary symmetric matrix included in the convex cone of positive semidefinite matrices. It allows the stress variable to be eliminated using the relationship:

$$\underline{\underline{\sigma}} = t_m \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{X}} \tag{20}$$

so that the first inequality of (18) becomes:

$$\underline{\underline{X}} + (1 - K_p^{-1}) t_m \underline{\underline{1}} \preceq K_p^{-1} f_c \underline{\underline{1}} \tag{21}$$

Introducing $\underline{\underline{Y}}$ as a second auxiliary symmetric matrix variable, the three-dimensional Mohr-Coulomb strength criterion may finally be reformulated as:

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{Y}} + (1 - K_p^{-1}) t_m \underline{\underline{1}} \ = \ K_p^{-1} f_c \underline{\underline{1}} \\ &\text{with} \ \ \underline{\underline{X}} \succeq 0 \ \text{ and } \ \underline{\underline{Y}} \succeq 0 \end{aligned} \tag{22}$$

which lends itself very easily to the numerical treatment by a SDP solver such as [13].

Similarly, the Rankine-type cut-off strength criterion which limits the tensile stresses in the plain concrete material:

$$\sigma_M - f_t \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} - f_t \underline{\underline{1}} \preceq 0 \tag{22}$$

may be recast into the following constraints:

$$\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{Z}} - f_t \underline{\underline{1}} = 0 \ \text{ and } \ \underline{\underline{Z}} \succeq 0 \tag{23}$$

where a third auxiliary symmetric matrix variable has been introduced.

[1] where $\underline{\underline{A}} \succeq 0 \Leftrightarrow \underline{x}.\underline{\underline{A}}.\underline{x} \geq 0 \ \forall \underline{x}$

4. A FIRST ILLUSTRATIVE TEST EXAMPLE

A specific computer code implementing the whole above described numerical procedure, has been devised for calculating *optimized lower bounds* to the ultimate loads of three dimensional reinforced concrete structures. A first illustrative application of this code is performed on the illustrative example of a beam of length L=4 m and rectangular cross-section (H=0.5 m, b=0.2 m), subject to a uniform surface loading q applied onto the top of the beam (Fig. 6). The left end (X=0) of the beam is perfectly *clamped* (velocity vector equal to zero: $\underline{U}$=0), while the boundary conditions at the right end (X=L) are:

$$T_x = \sigma_{xx} = 0,\ U_y = U_z \tag{24}$$

which, within the framework of a 1D model of the beam, would correspond to a simple support free to mode horizontally (no axial force and bending moment are applied).

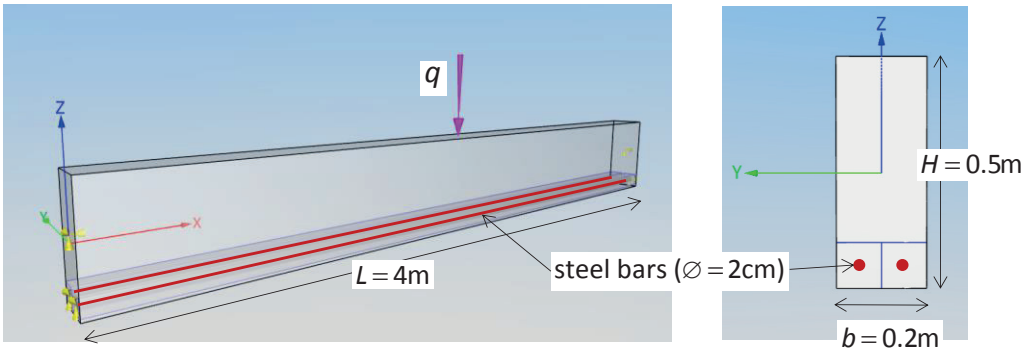


Figure 6. Reinforced concrete beam under uniform loading

The beam is made of a homogeneous concrete material, with the following uniaxial tensile and compressive strength characteristics:

$$f_t = 0.5 \text{ MPa} \quad \text{and} \quad f_c = 40 \text{ MPa} \tag{25}$$

keeping in mind that, referring to a tension cut-off Mohr-Coulomb condition, the value of the internal friction angle φ is taken equal to 37°.

The beam is reinforced by two longitudinal rebars of diameter equal to 2cm, made of a steel with a uniaxial strength equal to f_y^s =400 MPa. The bars are placed at the bottom part of the beam cross section as shown in Fig.5. According to the method described in 2.4, each bar with its surrounding volume of concrete material is replaced by a homogenized material obeying the macroscopic strength condition (3) with:

$$\sigma_0 = \frac{\pi \varnothing^2 f_y^s}{4 s^2} \tag{26}$$

where s^2 is the cross-section area of the homogenized volume, which is varied between $s^2=(b/2)^2=0.01$ m^2 (case of Fig. 6) and $s^2=0.005$ m^2.

The whole structure being discretized into less than 3 000 tetrahedral finite elements (2 656 for the case presented in Fig. 7), the SDP maximization procedure described earlier, is performed for four configurations associated with decreasing values of the homogenized area s^2. A longitudinal view of the

optimized stress field is represented for instance in Fig. 7 for s^2=0.01 m^2. The top figure shows the distribution of the *principal compressive stresses* prevailing in the plain concrete material, while the intermediate figure represents the *principal tensile stresses* mobilized in the (homogenized) reinforcement. Both distributions are superimposed in the bottom figure. Calculations were performed on a laptop computer with an INTEL CORE i7 – CPU @ 2.4 GHz in about 250 seconds (four minutes) depending on the case.

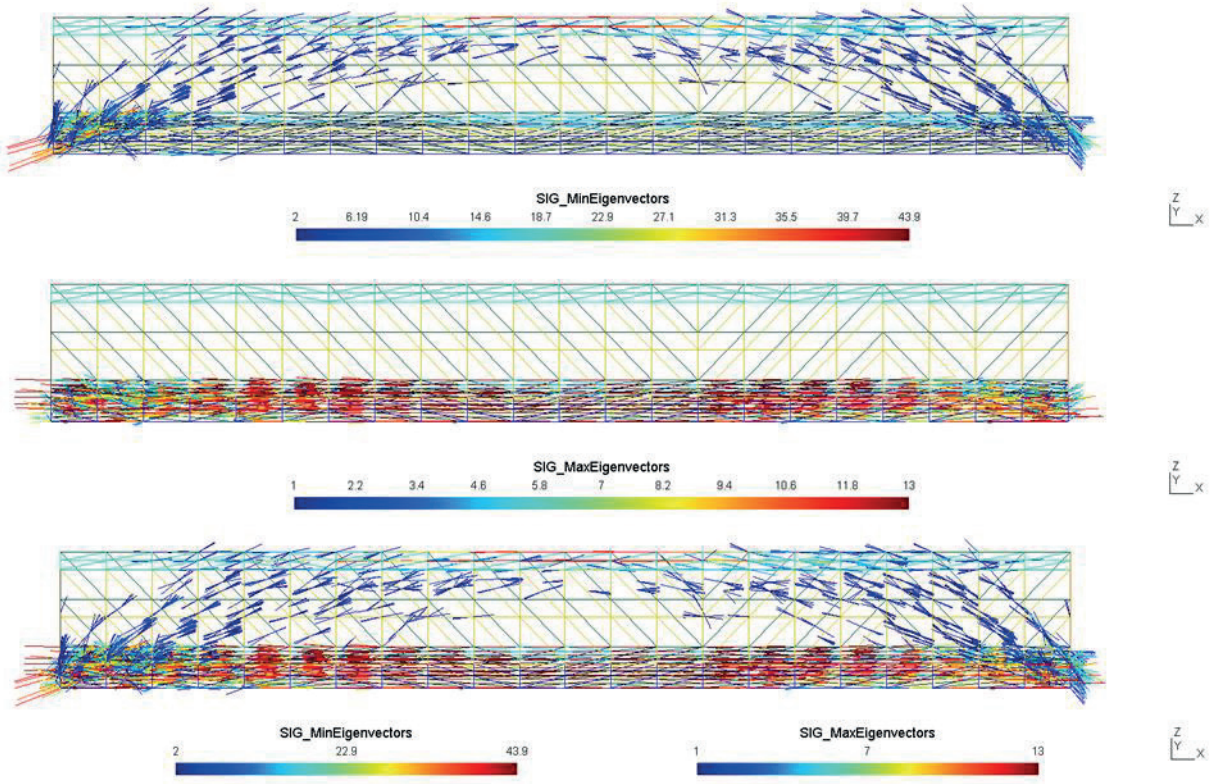


Figure 7. Longitudinal view of the optimized stress field in the concrete

The most important and relevant results obviously concern the obtained lower bound evaluation of the ultimate bearing capacity of the reinforced concrete beam. These are reported in Fig. 8 in the form of curves giving this evaluation for the un-reinforced and reinforced beam as a function of the homogenized area, the same mesh being used for the un-reinforced and reinforced cases.

Two comments are worth being made from observing this graph:

- ✓ Even if it should be recalled that the obtained results are *lower bound estimates* for the exact ultimate bearing capacity of the beam, the strengthening effect due to the presence of the bars in the concrete beam is striking, since the evaluation of the ultimate failure load, equal to q=40 kPa for the plain concrete beam is increased to more than q=300 kPa when the reinforcement by two longitudinal bars is taken into account.

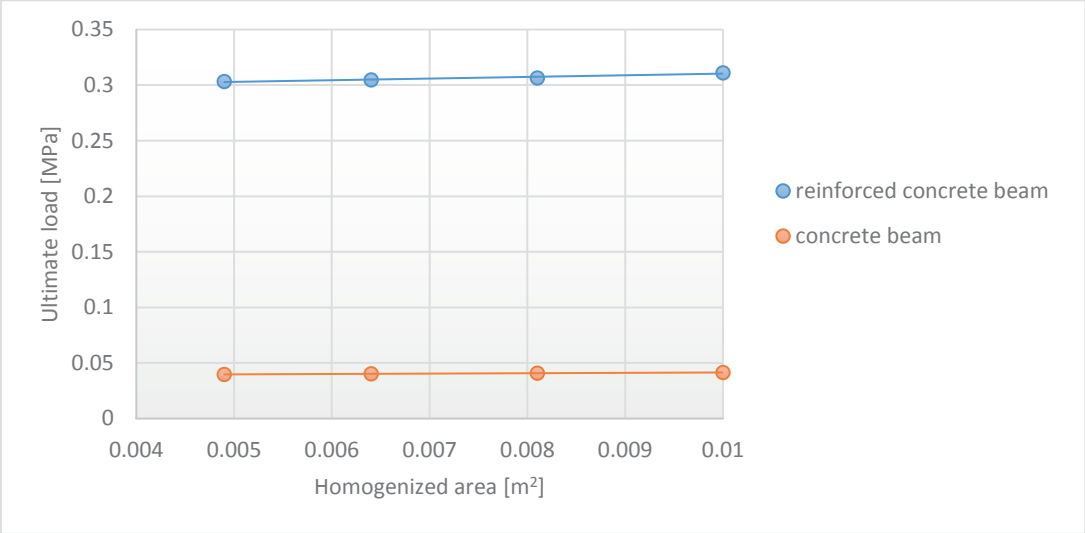


Figure 8. Lower bound evaluation of the beam ultimate bearing capacity as a function of the homogenization area

- ✓ Furthermore, the validity of the proposed homogenization method for treating the case of a reinforcement by few individual inclusions, is clearly demonstrated by the upper curve. Indeed, the latter is nearly horizontal (very slight increase), which means that the numerical lower bound estimate is almost insensitive to the size of the homogenised area. This underlines the decisive advantage of the proposed homogenization method over a direct approach where the inclusion should be finely discretized, thus leading to an oversized numerical problem.

5. A PRACTICAL CASE STUDY: FAILURE DESIGN OF A BRIDGE PIER CAP

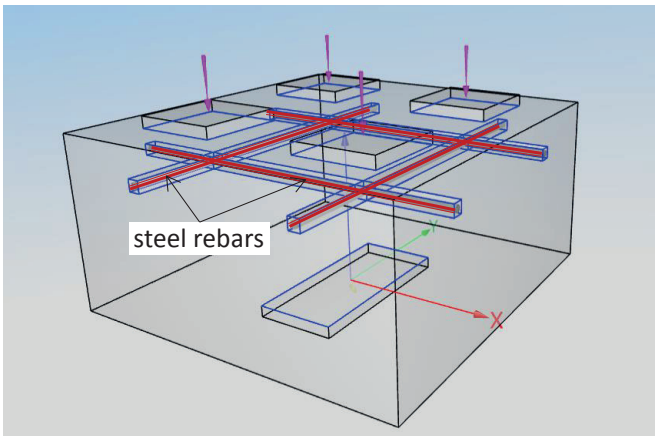


Figure 9. Reinforced concrete pier cap subject to bridge deck loading

In order to assess the performance of the yield design numerical tool in situations where truly massive three dimensional structures are involved, the following representative design case is now examined: a 3x3x1.5 m^3 parallelepipedic concrete block is considered as a simplified model of bridge pier cap. The finite element lower bound static approach is performed on this structure subject to four vertical loads representing the action of the overlying bridge deck, as shown in Fig. 9. These loadings are applied in the form of a uniform pressure applied on top of small rigid square pads of 0.7x 0.7 m^2. The interaction

with the underlying bridge pier is modelled by imposing a rigid connection on a 1.5x0.7 m^2 rectangular area placed at the centre of the bottom surface.

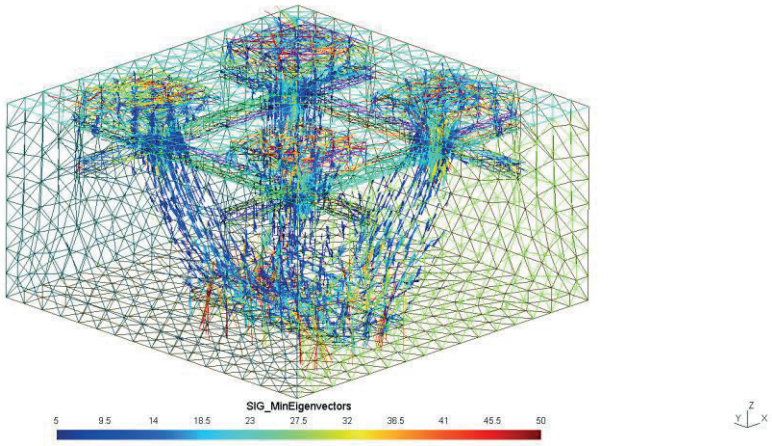


Figure 10. Perspective view of the optimized stress field in the concrete

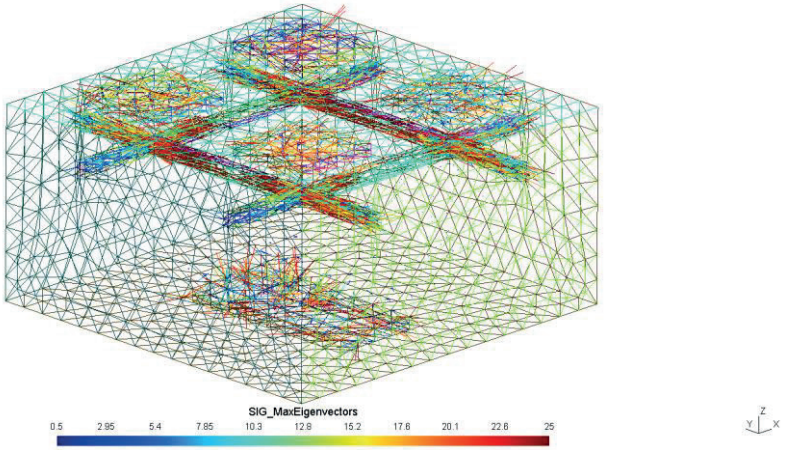


Figure 11. Optimized stress field in the homogenized zone

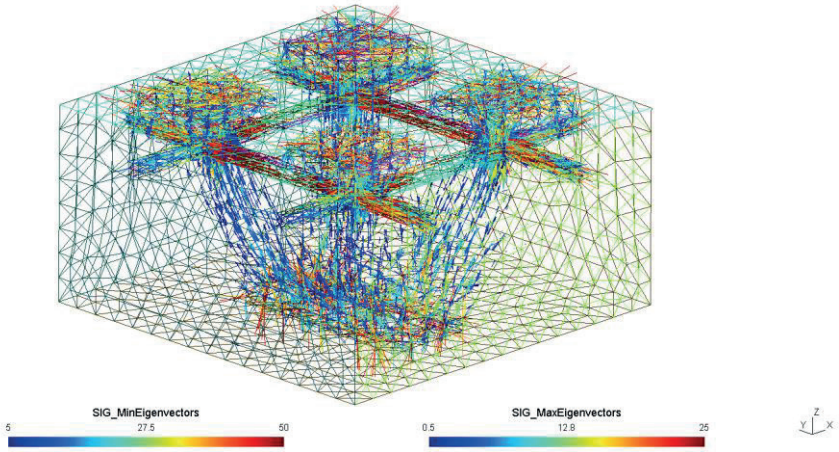


Figure 12. View of the optimized stress field in the whole pier cap

The concrete block is made of a homogeneous plain concrete material, with $f_c = 40$ MPa and $f_t = 0.5$ MPa. It is strengthened by four steel rebars of diameter equal to 3cm, placed just below the

loading pads as shown in Fig. 9, with a uniaxial strength equal to f_y^s =400 MPa. According to the above described procedure procedure, each of the four rebars is replaced by an homogenized volume of square cross section equal to s^2=0.01 m^2.

The whole structure being discretized into 33 632 tetrahedral finite elements, an optimal lower bound estimate for its ultimate load bearing capacity has been obtained using the SDP maximization procedure. Fig. 10 represents the distribution of the *principal compressive stresses* prevailing in the plain concrete material, while Fig. 11 the *principal tensile stresses* mobilized in the (homogenized) reinforcement. Both distributions have been superimposed in Fig. 12. Calculations were performed on the same laptop computer in approximately 4 000 seconds (one hour).

The thus obtained lower bound estimate for the ultimate bearing capacity of the reinforced concrete structure is equal to 4.56 MPa on each of the four loading pads. By way of comparison, the lower bound evaluation of the ultimate bearing capacity of the same *non-reinforced* concrete structure is equal to 3.18 MPa. This means that the presence of the reinforcements increases the global resistance of the pier cap by as much as 44 %.

The proposed model of three-dimensional reinforced concrete structures advocated in this contribution, as well as the feasibility of the related numerical approach in the context of the finite element method, have thus been successfully tested here on a more complex 3D case. Fig. 12 in particular gives a clear intuition of the optimized stress field equilibrating the applied loading, exhibiting compressive stresses (*struts*) in the concrete material and tensile stresses in the homogenized reinforced zones (*ties*).

6. CONCLUSION

A specifically dedicated finite element computer code has been set up aimed at producing rigorous lower bound (*i.e.* conservative) estimates for the ultimate load bearing capacity of three-dimensional reinforced concrete structures in the context of the yield design approach. It relies upon two recent decisive breakthroughs: the numerical formulation of the corresponding optimization problem using Semidefinite Programming, on the one hand, the adoption of a homogenization-inspired model for describing the mechanical behaviour of individual reinforcing inclusions embedded in a surrounding three-dimensional concrete matrix, on the other hand. The procedure may be further extended on two important points.

- The development of the same kind of numerical method and related computer tool in the framework of the yield design kinematic approach, which will provide upper bound estimates. Comparing the latter with the already determined lower bound estimates, will considerably help improve the accuracy and reliability of the design procedure.
- The adoption of a multiphase model, which may be perceived as an extension of the homogenization method [11], making it possible to take a specific interaction failure condition between the reinforcements and the concrete material, into account.

REFERENCES

[1] Salençon J. (2013) Yield Design, ISTE Ltd, Wiley, London.

[2] Chen W.F. (1982) Plasticity in reinforced concrete, McGraw-Hill, New-York.

[3] Bleyer J., de Buhan P. (2013). Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3D composite frame structures, *Computers and Structures*, 129, pp. 86-98.

[4] Bleyer J., Pham D.T., de Buhan P. (2015). Failure design of high-rise concrete panels under fire loading, *Engineering and Computational Mechanics*, Volume 168 Issue EM4, pp. 178-185.

[5] Averbuch D., de Buhan P. (1999). Shear Design of Reinforced Concrete Deep Beams: A Numerical Approach, *Jl. of Structural Engineering*, Volume 125, N°3, pp. 309-318.

[6] Llau A., Jason L., Dufour, F., Baroth J. (2016). Finite element modelling of 1D steel components in reinforced and pre-stressed concrete structures, *Engineering Structures*, 127, pp. 769-783.

[7] Nielsen M.P., Hoang L.C. (2010). Limit Analysis and Concrete Plasticity, CRC Press, Taylor & Francis.

[8] Figueiredo M.P., Maghous S., Filho A.C. (2013). Three-dimensional finite element analysis of reinforced concrete structural elements regarded as elastoplastic multiphase media, *Materials and Structures*, 46, pp. 383-404.

[9] de Buhan P., Taliercio A. (1991). A homogenization approach to the yield strength of composite materials, *European Journal of Mechanics*, A/Solids, 10, n°2, pp. 129-150.

[10] Michalowski P.V., Zhao A. (1996). Failure of fiber-reinforced granular soils, *Jl. Geotech. Eng.,* ASCE, 122(3), pp. 226-234.

[11] de Buhan P., Bleyer J., Hassen G. (2017). Elastic, Plastic and Yield Design of Reinforced Structures, ISTE Ltd, Wiley, London.

[12] Martin C.M., Makrodimopoulos A. (2008). Finite–Element Limit Analysis of Mohr-Coulomb Materials in 3D Using Semidefinite Programming, *Jl. Eng Mech.,* ASCE, Vol. 134, N°4, pp. 339-347.

[13] The Mosek optimization software: available from http://www.mosek.com

Modeling of sleeve semi rigid joints of Z cold formed profiles

Gutierrez, Ruth[1]; Loureiro, Alfonso; Reinosa, Jose Manuel; Lopez, Manuel

ABSTRACT

This paper addresses the problem of sleeve connections modelling, employed for mounting multi span purlins from cold-formed Z cross section profiles. Connections are located on the purlins support points, over the rafters. This kind of union makes the assembly simple and efficient. The transmission of forces in the overlap zone is based on two mechanisms, the embrace of the flanges (contact and friction) and the bolting of the webs. The overlap length to depth ratio is the key design parameter.

This paper consist of a numerical study for estimating stiffness and strength of this type of connection, considering profiles with different thickness cross sections, for several connections with different lap length to depth ratios. These parameters are important to include the semi-rigid behavior of connections on a global analysis of the multi span purlins. The work is developed in the framework of the multi span purlins design optimization.

Keywords: semi rigid joints, finite element, cold formed profiles, thin-walled structures.

1. INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la construcción industrial, el montaje de las correas a partir de perfiles conformados en frío es una práctica habitual. Las uniones se sitúan sobre los puntos de apoyo de las correas sobre las vigas de la estructura primaria. Existen dos formas habituales de realizar la unión: mediante solape y mediante casquillo.

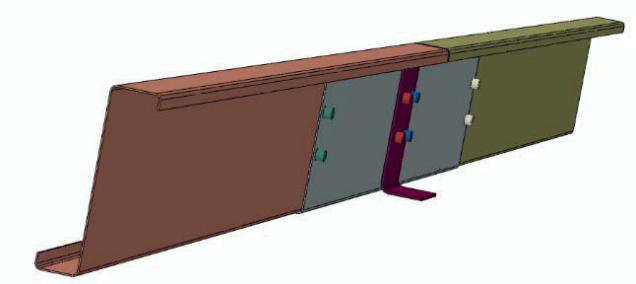


Figura 1. *Disposición de los elementos de la unión mediante casquillo en el apoyo de una correa multivano.*

En la unión mediante solape los elementos longitudinales se superponen y se atornillan en la zona de las almas. Para la unión mediante casquillo se emplea un trozo de perfil como elemento de unión, que solapa ambos perfiles. Como los perfiles tienen las alas de distinta longitud, el casquillo se sitúa

[1] *Departamento de ingeniería naval e industrial. Universidade da Coruña (ESPAÑA).* ruth.gutierrez@udc.es

invertido, para hacerlo encajar en la zona de solape. Finalmente, las almas del casquillo y de ambos perfiles se atornillan. Esta unión presenta ventajas en el proceso de montaje, haciéndolo más sencillo y eficiente.

El diseño de uniones mediante solape y mediante casquillo presenta similitudes y diferencias. La transmisión de esfuerzos en las zonas de solape se basa en dos mecanismos, el abrazo de las alas (contacto y rozamiento) y la unión atornillada de las almas. Ambas uniones tienen una zona de solape entre elementos, siendo la relación entre la longitud de solape, 2Lp, y el canto, D, el parámetro fundamental de diseño [1, 2 y 3].

Previamente, los autores han desarrollado un trabajo en el que se describe un estudio numérico y experimental de una unión de casquillo con perfiles Z conformados de 300mm de canto y 3mm de espesor [4]. En él se propone un modelo numérico fiable para la simulación del comportamiento de uniones mediante casquillo, calibrado experimentalmente, empleando el programa comercial Abaqus. Recientemente los autores han presentado otro trabajo, en el que se realiza un estudio paramétrico de este tipo de uniones y se propone un modelo analítico que permite el análisis de correas multivano considerando el comportamiento semirrígido de las uniones [5].

La manera tradicional de abordar el análisis de una correa es a partir de un modelo de viga continua con múltiples apoyos. Ante carga gravitatoria, este sistema estructural produce un diagrama de esfuerzos cortantes y flectores bien establecido, en el que el momento flector máximo positivo se produce en el primer vano y los máximos negativos sobre los apoyos, siendo el más importante sobre el segundo apoyo. Un pre diseño para este tipo de sistemas considera un perfil de espesor superior en el primer vano para soportar los momentos flectores máximos positivos. Así, se consideran dos tipos de unión: las uniones principales, sobre el segundo apoyo, que involucran perfiles de igual canto pero de distinto espesor y las uniones secundarias, sobre el resto de apoyos, que conllevan perfiles de igual canto y espesor. Las primeras requieren una longitud de solape mayor que las segundas, para soportar los momentos negativos más elevados.

En este trabajo se presenta un estudio numérico, ampliando el realizado en [5], para analizar el comportamiento de la unión principal de casquillo, es decir, cuando ésta se efectúa entre perfiles de distinto espesor. Se va a estudiar la unión de perfiles Z de 200 mm de canto y espesor de 2.5mm unidos mediante casquillo del mismo canto y 2.0 mm de espesor. Son perfiles habituales en el contexto de construcción de naves industriales en Europa para la formación de correas. El estudio considera variaciones del parámetro principal, la longitud de solape frente al canto, que determina la rigidez y la resistencia de las uniones.

El objetivo a largo plazo es incluir el comportamiento semirrígido de las uniones en un análisis global de las correas, lo que permite una estimación más precisa del estado de tensión y deformación de la unión.

2. DEFINICIÓN DEL ESTUDIO NUMÉRICO

Para estudiar experimentalmente las uniones de casquillo, se considera un ensayo de tres puntos, de una viga, simplemente apoyada, compuesta por dos perfiles Z enfrentados que no se tocan, pero se unen en dirección transversal en dos puntos en el ala superior y otros 2 en la inferior. Con este montaje

se hace trabajar la viga a flexión, evitando que cada uno de los perfiles en Z se salga de su plano de trabajo. La unión de casquillo se materializa en el centro de vano. El ensayo reproduce las condiciones reales de trabajo de las uniones en ambas correas.

La figura 2 muestra un ejemplo del ensayo descrito en el párrafo anterior, en la que se puede apreciar los dos planos de simetría existentes: el primero se sitúa entre las dos zetas enfrentadas, paralelo a los planos de deformación de ambas zetas y el segundo en el punto medio del vano, perpendicular a la dirección longitudinal de las zetas. Una explicación detallada del mismo se puede encontrar en [4].

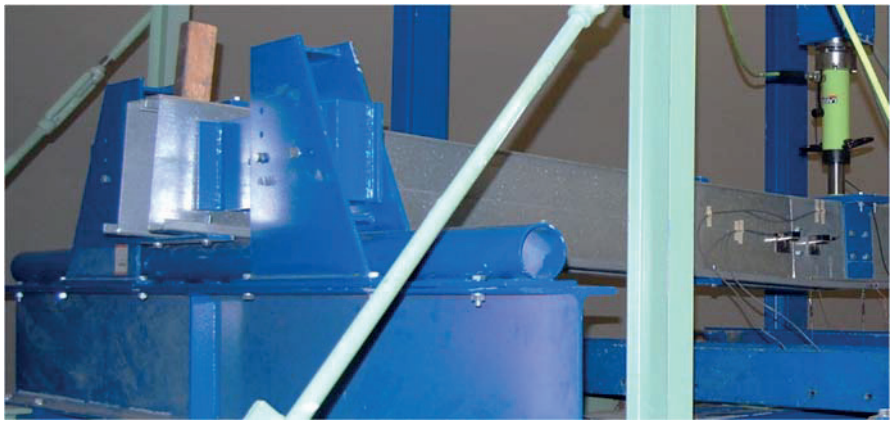


Figura 2. *Ejemplo del ensayo de tres puntos para análisis del comportamiento estructural de la unión de casquillo*

Para estudiar paramétricamente estas uniones, se considera la simulación numérica de este ensayo de tres puntos, con dos planos de simetría perpendiculares a los ejes X y Z respectivamente. La disposición se muestra en la figura 3.

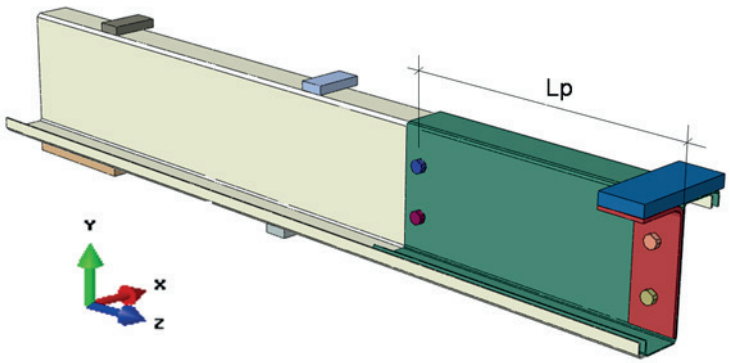


Figura 3. *Disposición de la simulación del ensayo de 3 puntos (doble simetría)*

La unión principal de una correa multivano es una unión asimétrica ya que enlaza dos perfiles de igual canto pero distinto espesor: la zeta del primer vano y la del resto de vanos. El casquillo se supone del mismo espesor que los perfiles que integran la mayor parte de la correa.

En la simulación del ensayo de tres puntos, la unión de casquillo enlaza perfiles de canto 200 mm y espesor 2.5 mm, siendo el casquillo un perfil del mismo canto y espesor 2.0 mm, como se indica en la tabla 1. El modelo incluye los dos planos de simetría del sistema. La carga sobre la unión se transmite

desde la placa de carga al ejión, y de este al casquillo y a la correa a través de los tornillos. Así, el modelo propuesto permite estudiar la conexión de la unión principal de una correa multivano que involucra zetas de distinto espesor y resulta más eficiente para un estudio paramétrico que un modelo de mayor tamaño que considere un único plano de simetría.

El estudio numérico incluye 6 modelos de uniones de casquillo. Se va variando el parámetro fundamental (el ratio longitud de solape frente al canto) entre valores de 4.20 y 6.70. Esto conduce a las longitudes de solape indicadas en la tabla 2 en valores totales y en porcentaje del vano de la correa.

Tabla 1. Elementos y geometría básica de la simulación

Perfiles	Casquillo	L vano ensayo	L vano correa
Z200t2.5	Z200t2	2,40 m	6 m

Tabla 2. Definición del estudio numérico

Unión	2Lp/D	2Lp (mm)	%
1	4,20	840	14,00
2	4,70	940	15,67
3	5,20	1040	17,33
4	5,70	1140	19,00
5	6,20	1240	20,67
6	6,70	1340	22,33

3. MODELOS NUMÉRICOS Y SIMULACIÓN

Los modelos de las uniones de casquillo se basan en el modelo realizado en [4], calibrado a partir de ensayos experimentales. Se emplean elementos sólidos, con grado de aproximación lineal y modos incompatibles (C3D8I).

Son modelos realizados con el paquete Explicit de Abaqus; aunque resuelve un problema dinámico se asegura que el proceso de carga sea cuasi-estático en todo momento. Esta estrategia facilita la convergencia del problema de contacto, que incluye todas las superficies exteriores de las instancias implicadas, con comportamiento tangencial impuesto mediante penalizadores, con un coeficiente de fricción de 0.3 y comportamiento normal tipo “hard”, permitiendo la separación de superficies después del contacto.

Los pequeños pasos empleados por los algoritmos explícitos de integración permiten la simulación de los movimientos de sólido rígido y de deformación de la parte inicial de la simulación, donde se produce el ajuste de las diferentes partes de la unión, previo al desarrollo de los mecanismos de resistencia.

Los aspectos más destacados del modelado de la unión, que resultan importantes para capturar su rigidez y su resistencia, son la geometría de la unión, con diferentes longitudes de solape, y la inclusión de agujeros rasgados, de aproximadamente el doble del diámetro del agujero.

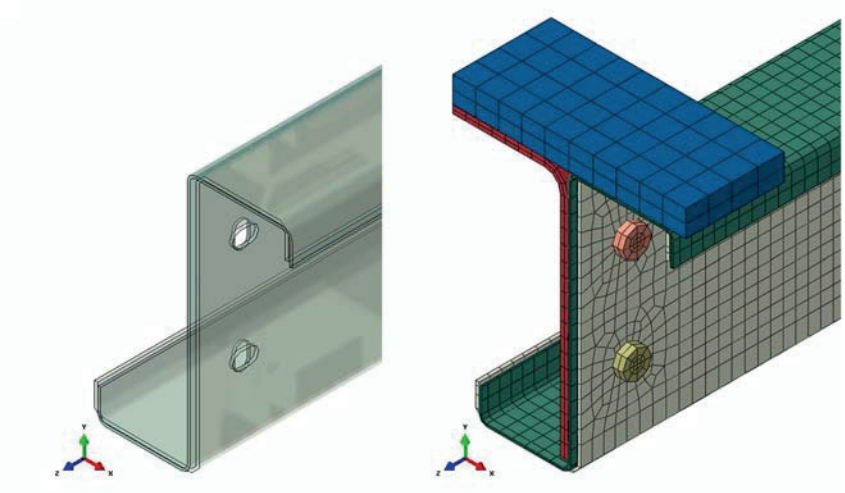


Figura 4. *(a)Detalle de los agujeros rasgados horizontalmente en la correa y verticalmente en el casquillo; (b) Detalle de malla en los distintos elementos*

4. RESULTADOS

Los resultados de cada simulación se recogen a través de la curva fuerza desplazamiento (por viga) de las simulaciones, mostrado en la figura 5.

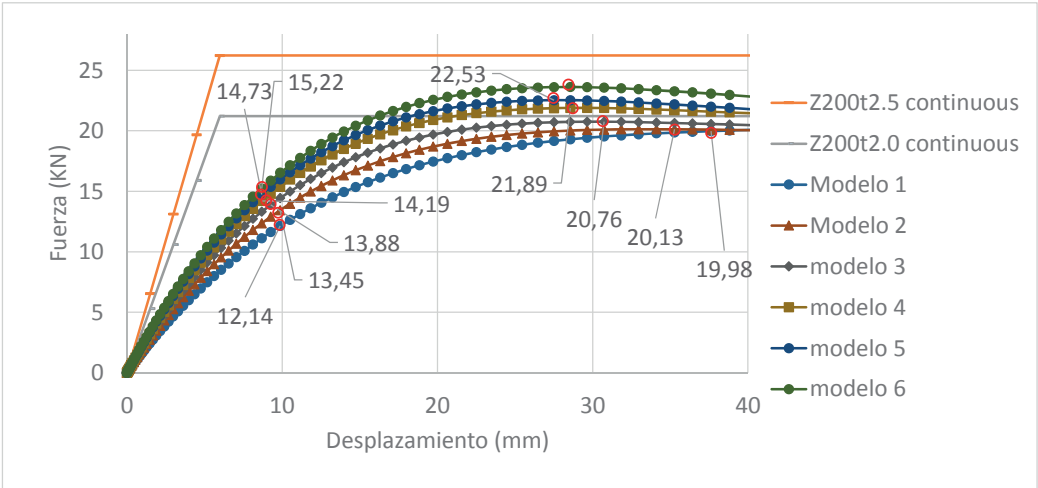


Figura 5. *Curvas fuerza – desplazamiento de las uniones de casquillo.*

En esta gráfica se inserta también la curva fuerza desplazamiento de una viga continua, de longitud igual al vano del ensayo, con un comportamiento elástico-plástico. Como la unión emplea 2 secciones distintas correspondientes a dos perfiles del mismo canto y distinto espesor, se introducen las dos curvas de modelo continuo correspondientes a estas dos secciones. Si la unión fuese capaz de aportar una continuidad perfecta entre perfiles, la curva fuerza desplazamiento tendría una pendiente inicial igual a la del modelo continuo del perfil.

Observando la figura 5, en cada curva se destacan dos puntos: el punto 1 que marca el final del comportamiento elástico de la unión y el punto 2 que marca la resistencia última de la unión. En las figuras 6, 7, 8 y 9, como ejemplo ilustrativo, se presentan las tensiones de Von Mises para la unión 2 en esos dos puntos.

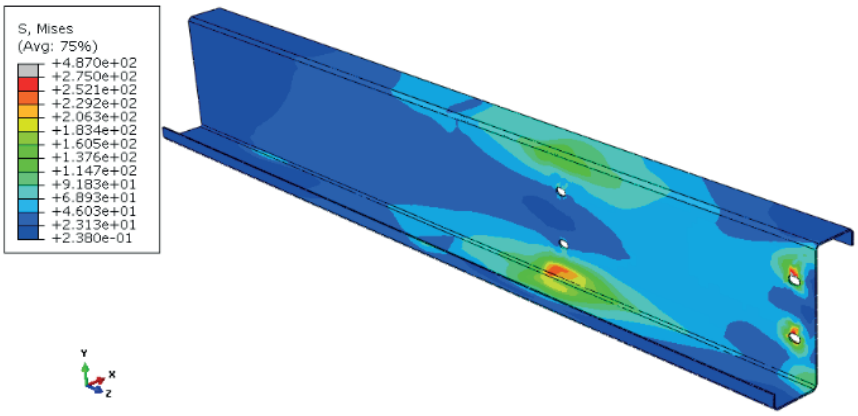


Figura 6. *Tensiones de Von Mises sobre el perfil de la unión 2, en el punto final del comportamiento elástico de la unión (punto 1 de la curva fuerza-desplazamiento)*

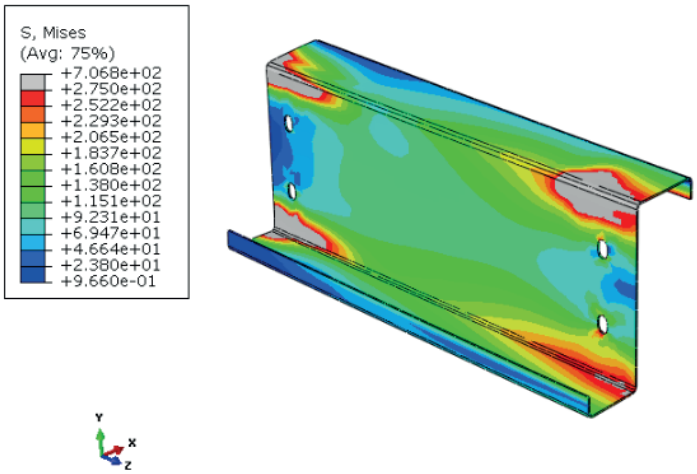


Figura 7. *Tensiones de Von Mises sobre el casquillo de la unión 2, en el punto final del comportamiento elástico de la unión (punto 1 de la curva fuerza-desplazamiento)*

La unión mediante casquillo tiene un comportamiento semirrígido. Las holguras propias de la fabricación de estos perfiles, que facilitan el montaje de las correas, y el propio proceso de carga que provoca la concentración de tensiones en torno de los agujeros de los tornillos que unen las almas de los perfiles, hacen que el proceso de plastificación comience en estas dos zonas: la zona de plegado de las alas y en torno a los agujeros de las chapas.

Este estado tensional provoca el cese del comportamiento lineal de la unión, como se aprecia en el punto 1 de la curva fuerza-desplazamiento (figura 5).

El modo de fallo de la unión se puede apreciar en la figura 9. Ocurre en el elemento más débil de la unión que es el casquillo. La plastificación completa de la zona de doblado de las alas se extiende hacia la línea de tornillos más próxima al centro del vano, que es la sección de mayor momento flector, provocando una pérdida completa de la rigidez del sistema.

Este estado tensional se corresponde con el punto 2 de la curva fuerza desplazamiento, en el que la pendiente a dicha curva se vuelve horizontal (figura 5).

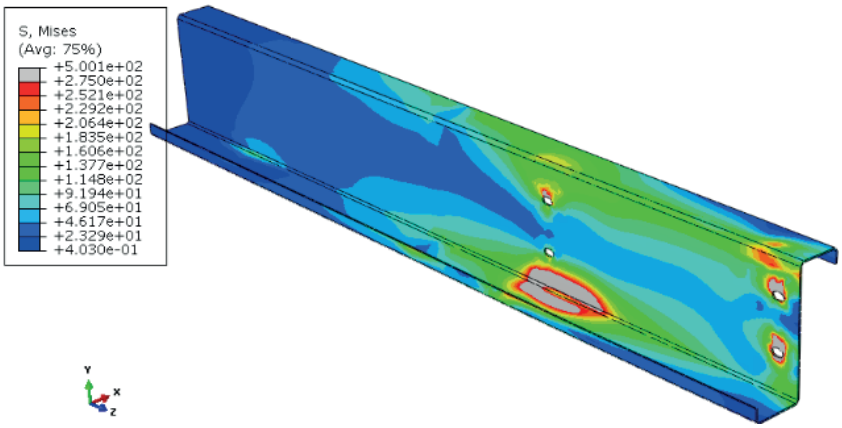


Figura 8. *Tensiones de Von Mises sobre el perfil de la unión 2, en el punto de resistencia última de la unión (punto 2 de la curva fuerza-desplazamiento)*

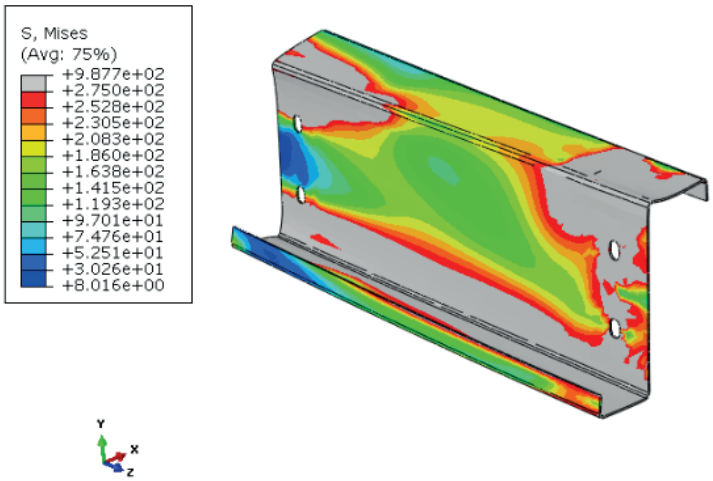


Figura 9. *Tensiones de Von Mises sobre el casquillo de la unión 2, en el punto de resistencia última de la unión (punto 2 de la curva fuerza-desplazamiento)*

5. CONCLUSIONES

Se ha hecho un estudio numérico de la unión de casquillo, empleada en las uniones principales entre perfiles en Z para el montaje de correas multivano. Este tipo de unión implica perfiles de igual canto y distinto espesor. Se ha realizado el estudio para uniones de casquillo con perfiles de 200 mm de canto y espesores de 2.5 y 2.0 mm. El estudio permite valorar el comportamiento estructural de las uniones de casquillo estudiadas. La rigidez y la resistencia crecen con el incremento de la longitud de solape de las mismas.

Todas las simulaciones presentan una rigidez inferior a la del modelo continuo, indicando que el comportamiento de esta unión es semirrígido. La resistencia de unión depende también de la longitud de solape. Ninguna de las uniones estudiadas tiene una resistencia superior al perfil de mayor capacidad incluido en la unión. Solo las uniones con mayor longitud de solape alcanzan un valor de resistencia

superior al del perfil de menor capacidad incluido en la unión. En [4] se pone de manifiesto que un diseño tradicional de la correa (viga continua con múltiples apoyos) que no tenga en cuenta el comportamiento de las uniones de casquillo puede conducir a diseños incorrectos, del lado de la inseguridad

Los resultados numéricos de este estudio amplían el trabajo desarrollado por los autores [5], al considerar las uniones de casquillo con perfiles de distinto espesor. El comportamiento del nudo influye en las tensiones y deformaciones desarrolladas por el sistema y la correcta caracterización del mismo permite establecer modelos estructurales más precisos. Así, el análisis realizado permite valorar el comportamiento semirrígido de estas uniones para su posterior utilización en modelos de análisis global. El trabajo constituye una aportación necesaria en el establecimiento de estos modelos, contribuyendo al proceso de optimización del diseño de correas multivano.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Economía y Competitividad de España la ayuda financiera a este trabajo, a través del proyecto de investigación "Caracterización, modelado y diseño automático de uniones 3D semirrígidas en estructuras de acero" BIA2013-48069-C2-2-P.

REFERENCIAS

[1] Ho, H.C., & Chung, K.F. (2004). Experimental investigation into structural behavior of lapped connections between cold-formed steel Z sections. *Thin-walled Structures, 42, 10131-1033.*

[2] Chung, K.F., & Ho, H.C. (2005). Analysis and design of lapped connections between cold formed steel Z sections. *Thin-walled Structures, 43, 1071-1090.*

[3] Liu, J., Xu, L., & Fox, S. (2015). Lapped cold-formed steel Z-shaped purlin connections with vertical slotted holes. *Journal of Constructional Steel Research 107, 150–161*.

[4] Gutierrez, R., Loureiro, A., Lopez, M., & Moreno, A. (2011). Analysis of cold formed purlins with slotted sleeve connections. *Thin-Walled Structures 49(7), 833–841.*

[5] Gutierrez, R., Loureiro, A., Reinosa, J.M., & Lopez, M. (2015). Numerical study of purlin joints with sleeve connections. *Thin-Walled Structures 94, 214–224.*

Construcción, análisis dinámico y cancelación de vibraciones de un forjado mixto ligero

Marinas-Sanz, Gonzalo[1]; Díaz, Iván M.[1]; Soria, José Manuel[1]; García-Palacios, Jaime H.[1]; Zanuy, Carlos[1]

ABSTRACT

It is well known that, in structural design, buildings are enough reliable and, consequently, there is not a relevant probability of collapse. However, in some kind of structures, vibration sensitivity take an important role, even being the critical limit state.

Along this paper, it has been conducted the study of a slender composite floor deck, which verifies the ultimate limit states but not the service limit states. In order to correct the excessive floor vibrations, a passive tuned mass damper is designed. The effectiveness of this type of devices in a specific excitation frequency band has been widely proved, both theoretically and experimentally.

Keywords: vibration control, vibration serviciability limit state, composite floor deck, passive structural control, tuned mass damper.

1. INTRODUCCIÓN

Normalmente, en ingeniería civil, se desarrollan cálculos estáticos para comprobar la viabilidad de las estructuras diseñadas. Este procedimiento puede resultar incorrecto con la presencia de acciones rápidamente variables en el tiempo, siendo necesario abordar el problema de forma dinámica. La existencia de estructuras flexibles puede llegar al extremo de ser excitadas por personas, mediante actividades tan usuales como caminar o correr, teniéndose que evaluar el comportamiento en servicio a través de los cálculos dinámicos mencionados [1].

En el contexto descrito, se plantea en este artículo el diseño y construcción de un sistema estructural esbelto con frecuencias propias en el rango problemático de afección a los peatones: un forjado mixto de chapa colaborante. Seguidamente, se estudia el cálculo y construcción de un dispositivo de control pasivo de vibraciones (un TMD -Tuned Mass Damper- [2], [3]) y se describen las diferencias del comportamiento de la estructura con y sin control.

2. FORJADO MIXTO DE CHAPA COLABORANTE

Los forjados mixtos de chapa nervada, o chapa colaborante, son un tipo de forjado ampliamente utilizados en edificación, y constan de los elementos señalados en la Fig. 1. El funcionamiento estructural es el de una sección mixta de hormigón y acero trabajando solidariamente, con

[1] *Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid (ESPAÑA). gonzalo.msvf@gmail.com (Gonzalo Marinas Sanz)*

comportamiento global de forjado unidireccional en el sentido de los nervios. El acero de la chapa actúa como armadura del hormigón, soportando las tensiones de tracción en las zonas de momentos positivos. La sección se completa con un mallazo en la zona superior que reparte las cargas y absorbe los esfuerzos de retracción y temperatura, y una armadura de negativos en caso de existencia de momentos de ese signo.

Para garantizar el comportamiento como sección mixta, la chapa contiene una serie de resaltos en su superficie, que otorgan la resistencia suficiente a las tensiones tangenciales que se producen en la superficie de contacto del acero y del hormigón, evitando el deslizamiento entre ambos materiales. Esta resistencia se puede aumentar introduciendo conectadores.

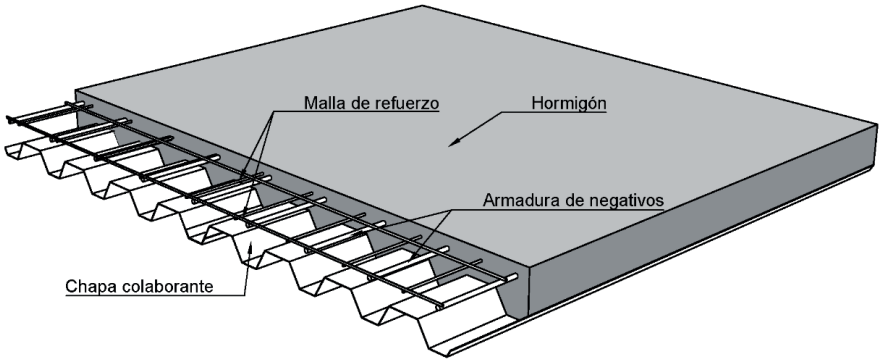


Figura 1. *Elementos básicos de un forjado mixto de chapa colaborante.*

2.1. Descripción de la estructura

El forjado objeto de estudio de este artículo se diseña para que tenga un comportamiento de viga biapoyada con luz de 5.5 m (en el sentido de los nervios), un ancho de sección de 1.84 m y un canto de solo 14 cm (6 cm de altura de chapa y 8 cm de espesor de hormigón por encima de ella). Las Figs. 2 y 3 muestran estas dimensiones.

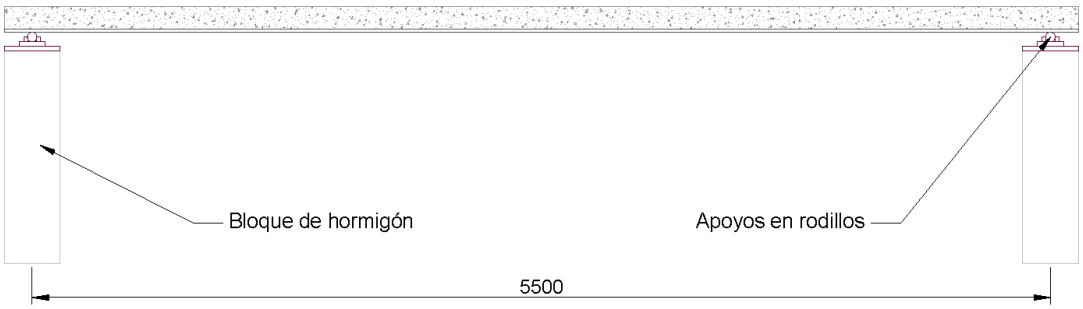


Figura 2. *Alzado de la estructura (cotas en milímetros).*

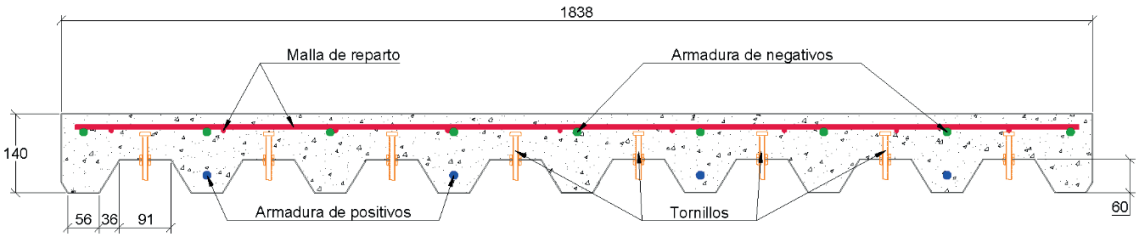


Figura 3. *Sección tipo del forjado (cotas en milímetros).*

Las dimensiones se eligen para garantizar el cumplimiento de los estados límite últimos, no así necesariamente los de servicio.

La estructura cuenta con una serie de peculiaridades:

- Disposición de armadura de negativos. El modelo planteado solo tiene momentos positivos, pero se añade esta armadura por si se decide cambiar las condiciones de contorno en el futuro.
- Armadura de positivos. Aunque se ha mencionado que la chapa colaborante hace las veces de armadura de positivos, se añaden unos redondos de refuerzo para aumentar el momento resistente.
- Sustitución de pernos conectadores por tornillos, por razones constructivas y económicas.
- Posición de los tornillos en la zona superior de la chapa y no en los valles. Esto no supone ningún problema dado que la fibra neutra de la sección homogeneizada (donde son mayores las tensiones tangenciales) queda por encima de la chapa.
- Colocación de los tornillos distribuidos por la chapa, no solo en los extremos (Fig. 4). Esto se hace así para asegurar que la acción mixta no se deteriora en servicio debido a la aplicación de cargas repetitivas que puedan producir efectos dinámicos.

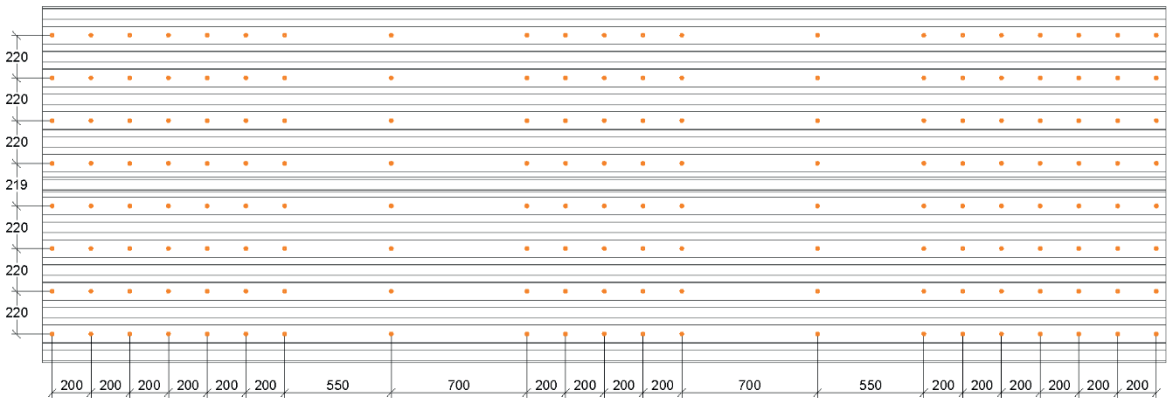


Figura 4. *Vista en planta de chapas y tornillos (cotas en milímetros).*

2.2. Construcción del forjado y propiedades de los materiales

En las Figs. 5, 6 y 7 se muestran algunas fases del proceso constructivo. Cabe destacar la construcción apeada que se llevó a cabo, lo cual no es habitual dado que la principal ventaja de estos forjados es que la chapa es autoportante.

Figura 5. *Alzado de la chapa sobre apoyos finales y cimbra.*

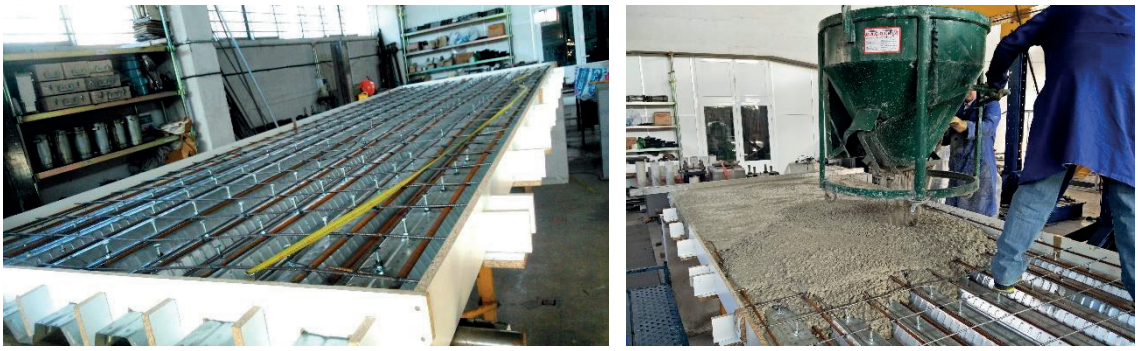


Figura 6. *Encofrado y hormigonado.*

Figura 7. *Forjado en servicio.*

Del ensayo de probetas se extrajo que la resistencia media a compresión del hormigón es 18.8 MPa (lo que equivale en la práctica a una resistencia característica de unos 10.8 MPa [4]). El resto de propiedades de los materiales se indica en la *Tabla 1*, donde: f_{ck} indica resistencia característica, f_{yk} límite elástico, f_{ub} resistencia última a tracción, E módulo de elasticidad, ρ peso específico, e espesor y ϕ diámetro.

Tabla 1. Propiedades de los materiales

	f_{ck} [MPa]	f_{yk} [MPa]	f_{ub} [MPa]	E [GPa]	ρ [kN/m^3]	e [mm]	ϕ [mm]	Clase
Hormigón	10.8	-	-	22.6	25	-	-	-
Chapa	-	320	-	210	78.5	1	-	-
Tornillo	-	-	400	-	-	-	10	4.6
Armadura pasiva	-	500	-	210	-	-	12	-
Malla de reparto	-	500	-	210	-	-	6	-

2.3. Comprobación de los estados límite últimos

Para el cálculo de los estados límite últimos, se considera una sección de forjado de ancho igual a 1 m, por lo que se simplifica el modelo de cálculo a una viga biapoyada con esa sección sometida a su peso

propio (2.75 kN/m) y a una sobrecarga uniforme de 2 kN/m, valor típico que está recogido en la normativa como el CTE [5].

A continuación se estudian los estados límite de flexión positiva, rasante y cortante, de acuerdo con las recomendaciones de la Monografía M-14 de ACHE [6].

2.3.1. Flexión positiva

Empleando un cálculo plástico para obtener la resistencia de la sección, en situación de rotura a flexión, habrá una parte comprimida y otra traccionada separadas por la fibra neutra plástica, de forma que ambos materiales trabajan con tensiones que alcanzan su límite elástico. Despreciando la contribución de la armadura pasiva en compresión, las tensiones se reparten como se describe en la Fig. 8.

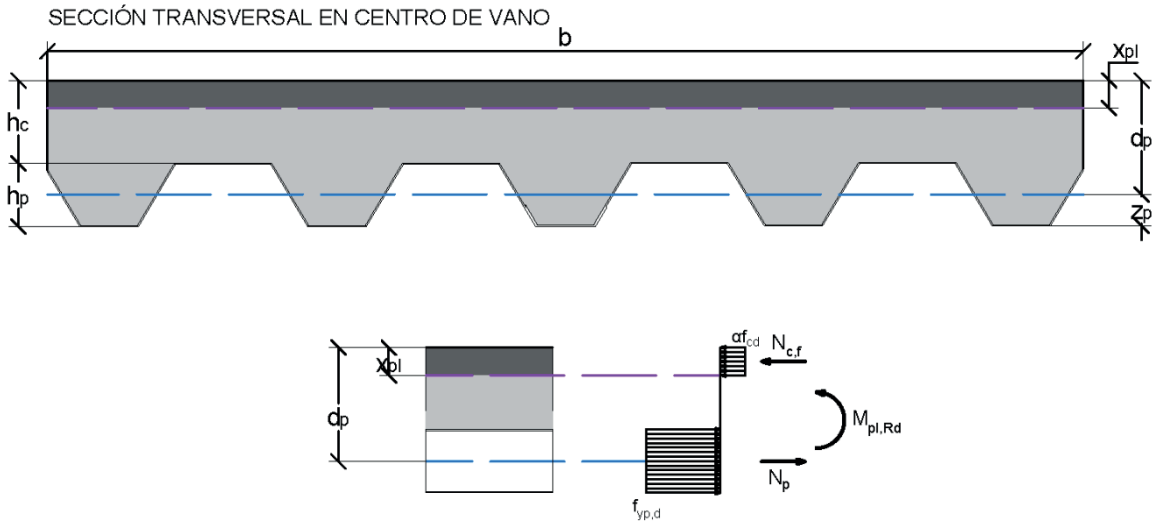


Figura 8. *Momento último positivo con la fibra neutra plástica encima de la chapa.*

El valor de cálculo del momento resistente positivo se obtiene mediante la Eq. 1 [6], donde $N_{c,f}$ es la resultante de compresiones en el hormigón, calculada considerando una tensión constante de valor $0.85f_{cd}$ (siendo f_{cd} la resistencia de cálculo del hormigón) sobre toda la altura entre la fibra neutra plástica y el borde superior de la losa; d_p es la profundidad del centro de gravedad de la chapa y la armadura de positivos con respecto al borde superior de la losa de hormigón (110 mm) y x_{pl} es la profundidad del bloque comprimido de hormigón, igual a la profundidad de la fibra neutra.

$$M_{pl,Rd} = N_{c,f}\left(d_p - 0.5x_{pl}\right) \quad (1)$$

Dado que la resultante de compresiones en el hormigón debe ser igual a la resultante de tracciones en la chapa y la armadura de positivos, igual a 479.60 kN, se obtiene que la profundidad de la fibra neutra debe ser de 78.4 mm, inferior a los 80 mm de hormigón sobre la chapa de acero. Con estos valores, se obtiene un momento resistente de 33.19 mkN.

El momento solicitante se obtiene a través de la Eq. 2, donde q_d es la carga mayorada obtenida a partir de los valores detallados anteriormente, con un valor de 6.71 kN/m, y L es la luz del forjado (5.5 m).

$$M_{Ed} = \frac{q_d L^2}{8} \tag{2}$$

El momento solicitante resulta 25.37 mkN, por lo que se comprueba el estado límite último de flexión positiva al ser inferior al momento resistente de la sección (33.19 mkN).

2.3.2. Rasante

La resitencia a rasante viene condicionada por el cortante resistente del perno y la resistencia de la chapa. Al no usar pernos conectadores convencionales, se estima la resistencia realizando una aproximación a las ecuaciones del Eurocódigo 4 [7] adecuando las fórmulas al uso de tornillos en vez de pernos en los valles (Fig. 9), siendo los valores de las variables para el caso del tornillo las que se definen a continuación: a = 46.5 mm, c_0 = 93 mm, $h_{tornillo}$ = 45 mm y d = 10 mm.

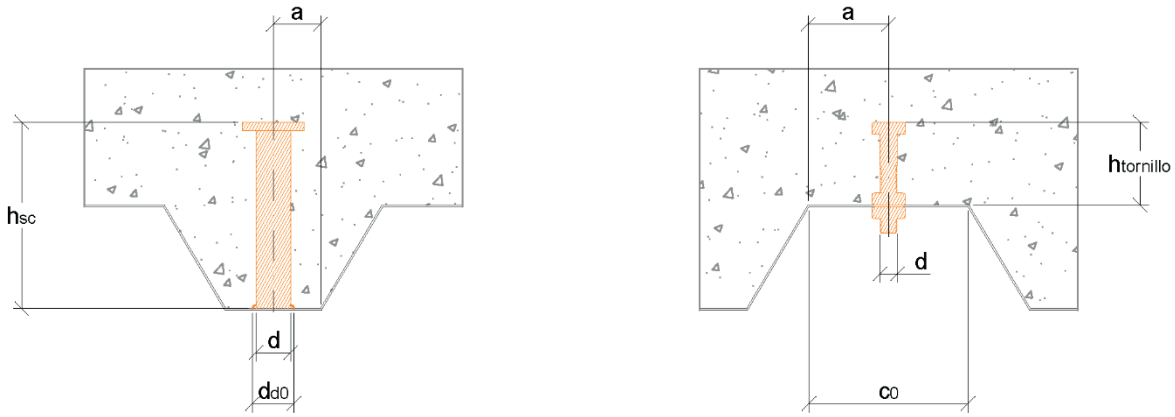


Figura 9. *Comparación de las variables geométricas para el cálculo a rasante.*

Aplicando la formulación del Eurocódigo, el cortante resistente es el menor de los tres que se citan a continuación:

- Cortante resistente del tornillo, condición de rotura del mismo: 14.85 kN
- Cortante resistente del tornillo, condición de rotura del hormigón: 9.33 kN
- Cortante resitente de la chapa: 17.21 kN

El cortante de cálculo, al ser una viga biapoyada, resulta 18.45 kN que, dividido entre los cuatro tornillos existentes en una sección de 1 m de ancho, queda 4.61 kN. Este valor es menor que el cortante resistente del tornillo, en la situación de rotura del hormigón, por lo que se verifica el estado límite último de rasante.

2.3.3. Cortante

El cortante resistente se determina mediante la formulación del Eurocódigo 2 [4] (ver Eq. 3), donde $C_{Rd,c}$ es un coeficiente de valor 0.12, k es un parámetro con valor 2.0, ρ_l es la cuantía de armadura (0.049), σ_{cp} es la carga axil de pretensado (nula en este caso), b_w es el ancho menor de la sección en la zona traccionada (cinco valles, 280 mm) y d_p ya ha sido definido (110 mm).

$$V_{Rd,c} = \left(C_{Rd,c}k(100\rho_l f_{ck})^{1/3} + 0.15\sigma_{cp}\right) b_w d_p \quad (3)$$

El cortante resistente resulta 27.06 kN, por lo que se comprueba el estado límite último de cortante al ser este superior al solicitante (18.45 kN).

2.4. Estudio de los estados límite de servicio

En este apartado se tratan los estados límite de flechas y vibraciones, teniendo en cuenta los fenómenos reológicos del hormigón, que se pueden sintetizar en un coeficiente de fluencia (para 10000 días) de 2.84 y en una deformación por retracción (para la misma edad) de $4 \cdot 10^{-4}$.

Las características mecánicas de la sección completa (es decir, con el ancho de 1.84 m), homogeneizada a hormigón, se resumen en las *Tablas 2 y 3*.

El momento que fisura la sección se puede estimar en 6.3 mkN.

Tabla 2. Características mecánicas de la sección a tiempo cero

	Área [mm²]	**Distancia de la fibra neutra a la fibra superior de hormigón [mm]**	**Inercia [mm⁴]**
Sección bruta	232725.1	61.1	336635303
Sección fisurada	-	42.5	180000283

Tabla 3. Características mecánicas de la sección a tiempo infinito

	Área [mm²]	**Distancia de la fibra neutra a la fibra superior de hormigón [mm]**	**Inercia [mm⁴]**
Sección bruta	343833.6	68.8	556767509
Sección fisurada	-	61.7	465055056

2.4.1. Flechas

El valor de la flecha se puede determinar integrando las curvaturas que producen las cargas (peso propio y sobrecarga), a partir del segundo teorema de Mohr, obteniéndose los siguientes valores:

- Flecha a tiempo cero debida al peso propio: 14.4 mm
- Flecha diferida debida al peso propio: 21.7 mm
- Flecha debida a la sobrecarga: 10.6 mm
- Flecha debida a la retracción (a tiempo infinito): 11.0 mm

Esos valores se han calculado teniendo en cuenta la contribución del hormigón entre fisuras (tension stiffening) pero, analizando los resultados mostrados en la Fig. 10, se observa que prácticamente se puede despreciar dicha contribución y emplear la fórmula simplificada de la Eq. 4, donde q es la carga uniformemente distribuida para la que se calcula la flecha, L la luz del forjado, E el módulo de elasticidad del hormigón e I la inercia fisurada de la sección.

$$v = \frac{5qL^4}{384EI} \tag{4}$$

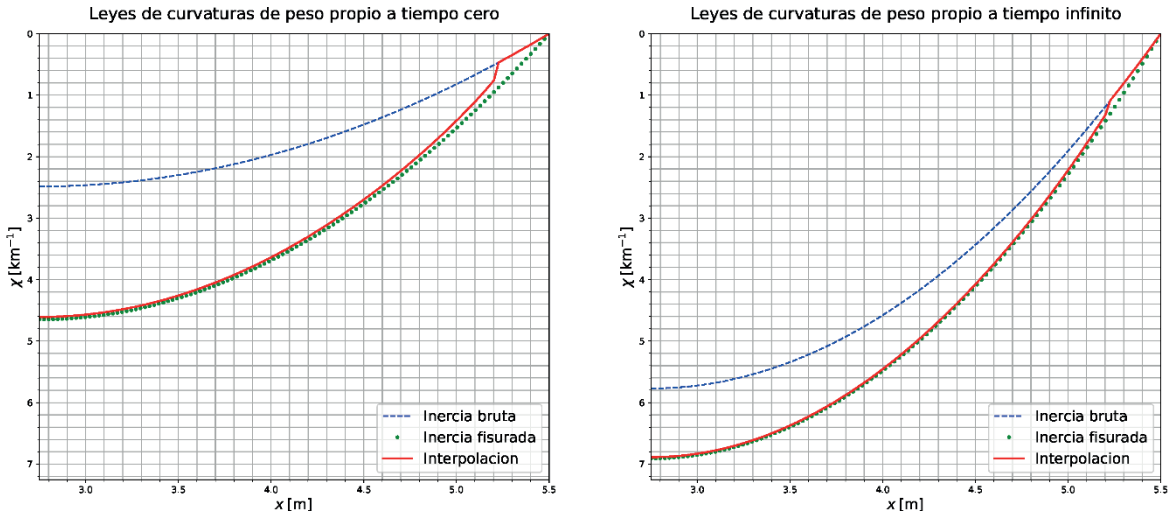


Figura 10. *Diagrama de curvaturas en medio forjado para la carga de peso propio.*

Tras un año de la construcción del forjado, se midió una flecha bajo peso propio de 40 mm (Fig. 11, en deformada y en azul la línea recta teórica del forjado no deformado), lo cual es peor de lo estimado teóricamente. Asimismo, este valor es excesivo para cumplir el estado límite de flechas (L / 138).

Figura 11. *Deformada del forjado tras un año después de la puesta en obra.*

2.4.2. Vibraciones

Un estudio analítico de las frecuencias de vibración del forjado requeriría un esfuerzo de cálculo importante si se tienen en cuenta la variabilidad de la inercia a lo largo de la viga (fisuración), así como otra variabilidad del mismo parámetro en función de la deformación que va adquiriendo el forjado durante las oscilaciones.

Sin embargo, se puede obtener un resultado bastante aproximado de la frecuencia del primer modo de vibración (el que tiene un valor más bajo) empleando la Eq. 5 [8], donde L es el vano del forjado (5.5

m), E es el módulo de elasticidad del hormigón para cargas instantáneas o rápidamente variables (28.06 GPa), I es la inercia fisurada a tiempo cero ($1.8 \cdot 10^{-4}$ m^4), ya que de la Fig. 10 se extrae que el comportamiento predominante es el de la sección fisurada en casi toda la longitud del forjado, y m es la masa por unidad de longitud del forjado (500 kg/m).

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{5}$$

Operando, se obtiene una frecuencia de 5.22 Hz, valor muy parecido al obtenido experimentalmente (ver *Tabla 4*). Para obtener estos resultados, se llevó a cabo un análisis modal experimental, excitando la estructura con un actuador electrodinámico (por lo que hay que tener en cuenta una pequeña disminución de la frecuencia del primer modo al incorporar a la masa movilizada el peso de los equipos).

Tabla 4. Resultados experimentales del primer modo de vibración

	Frecuencia [Hz]	Amortiguamiento relativo [%]	Masa movilizada [kg]
Primer modo	5.367	0.636	1920.09

La FRF (frequency response function) de la estructura se muestra en la Fig. 12.

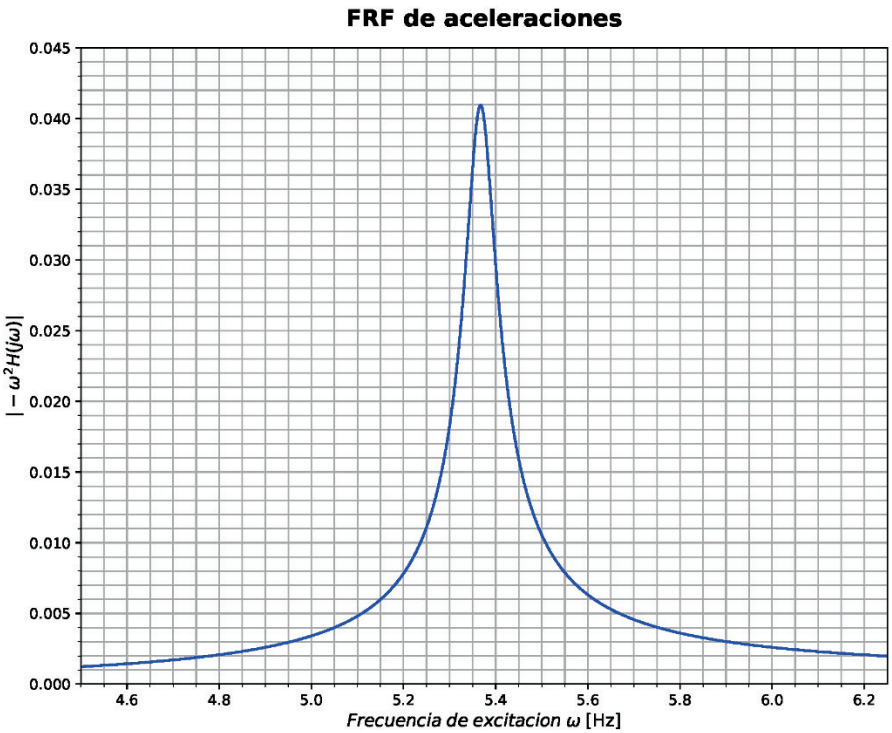


Figura 12. *FRF teórica del forjado sin control para los parámetros de la Tabla 4.*

Con este valor tan bajo de la frecuencia del primer modo, en la estructura pueden manifestarse efectos dinámicos debidos a cargas generadas por peatones, incurriéndose en aceleraciones fuera de los niveles de tolerancia [9] y, consecuentemente, no verificándose el estado límite de servicio de vibraciones. Para disminuir esos efectos dinámicos, se dispone un dispositivo de control con el objetivo de reducir las vibraciones.

3. ABSORBEDOR DE VIBRACIONES (TMD)

Los TMD son aparatos que se pueden emplear para reducir vibraciones en estructuras. Estos dispositivos consisten en una masa acoplada a la estructura principal mediante muelles y amortiguadores, de tal forma que se produce una transmisión de energía a este nuevo grado de libertad del sistema conjunto.

3.1. Cálculo de los parámetros del TMD

El comportamiento de una estructura con un TMD se puede simplificar a un sistema de dos grados de libertad, en el que uno de ellos está constituido por los parámetros del modo del que se quieren absorber las vibraciones, y el otro por los parámetros del TMD (masa, rigidez y amortiguamiento).

La manera de obtener los parámetros óptimos del TMD es minimizar el máximo valor del módulo de la función de transferencia (Eq. 6 [3]), que no es más que el cociente de la aceleración en el centro de vano del forjado entre la amplitud de la excitación armónica aplicada a la estructura. En dicha función de transferencia, las variables que entran en juego son la frecuencia del modo de vibración de la estructura (ω); la masa, rigidez y amortiguamiento del TMD (m_t, k_t y c_t respectivamente); y la masa, rigidez y amortiguamiento del modo a cancelar de la estructura (m_p, k_p y c_p).

$$-\omega^2 G(j\omega) = \frac{-\omega^2\left(k_t - m_t\omega^2 + jc_t\omega\right)}{\left((k_p+k_t) - m_p\omega^2 + j(c_p+c_t)\omega\right)(k_t - m_t\omega^2 + jc_t\omega) - (k_t + jc_t\omega)^2} \quad (6)$$

Los métodos habituales de optimización para resolver el problema emplean el ratio de frecuencias del TMD y la estructura primaria, así como el ratio másico de los mismos. La guía SAMCO [3], entre otros métodos, recoge la optimización mediante la norma H-infinito, a partir de la cual se puede demostar que se alcanza el mínimo valor del módulo de la función de transferencia si y solo si existen dos máximos locales y ambos tienen la misma amplitud.

Empleando un ratio másico de un 2.5% (valor razonable según la guía SAMCO [3]), se obtiene que los parámetros de dimensionamiento del TMD deben ser:

- Masa: 48 kg
- Rigidez: 53282 N/m
- Amortiguamiento: 320 N·s/m

3.2. Construcción del dispositivo

3.2.1. Diseño

A la hora de fabricar el TMD, hay que adaptar los valores teóricos de sus parámetros a los que se pueden conseguir con las piezas existentes en el mercado. Por ello, partiendo de cuatro muelles de rigidez total de 60 kN/m, se ha de realizar una nueva minimización de la función de transferencia para calcular con exactitud la masa y el amortiguamiento requeridos, 54 kg y 320 N·s/m respectivamente.

Puesto que es inevitable realizar un ajuste empírico para evaluar el correcto comportamiento del absorbedor, el diseño se plantea para conseguir una máxima versatilidad, estableciéndose la masa mediante un número variable de pletinas de acero. Asimismo, se incorporan amortiguadores magnetorreológicos, en los cuales se puede modificar el valor nominal de resistencia al movimiento que ofrecen.

La Fig. 13 muestra una perspectiva del TMD diseñado, en el que destacan los siguientes elementos:

- Pletinas de lastre, muelles y amortiguadores.
- Cajón en el que disponer las masas.
- Barras guía, situadas en el interior de los muelles para asegurar la verticalidad del movimiento del absorbedor. Se encuentran roscadas en la parte inferior y superior para la conexión al forjado.
- Rodamientos lineales para coaccionar el movimiento del cajón a la dirección de las barras guía, y evitar desplazamientos transversales indeseados, así como la fricción intrínseca del mecanismo.
- Placa base, unida solidariamente al forjado mediante las barras guía, para sostener todos los componentes del TMD.
- Varilla de ajuste de masas, para asegurar mediante tuerca el comportamiento monolítico de la masa vibrante del absorbedor. Además, tiene la función auxiliar de permitir el bloqueo del TMD al atravesar el cajón hasta la placa base.
- Pieza de ajuste de elevación del cajón, para variar la altura de este con respecto a la base, independientemente de la masa que se cargue, con objeto de tener siempre el máximo rango de movimiento posible.

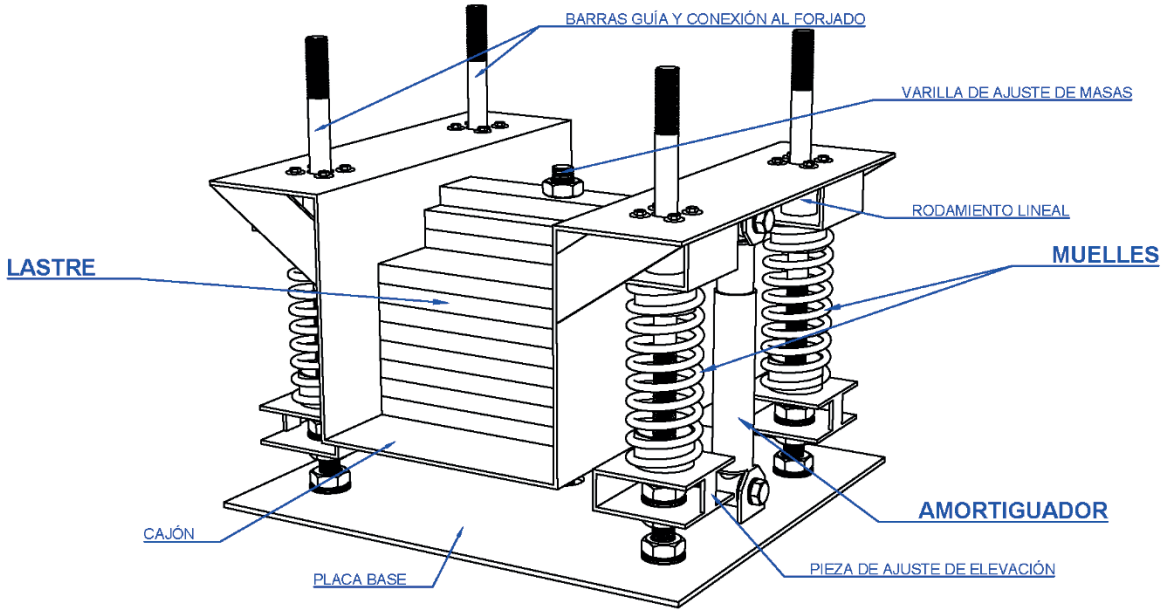


Figura 13. *Diseño y componentes del TMD para el forjado.*

En la Fig. 14 se muestran detalles del alzado y la sección del TMD, con algunas cotas representativas del mismo.

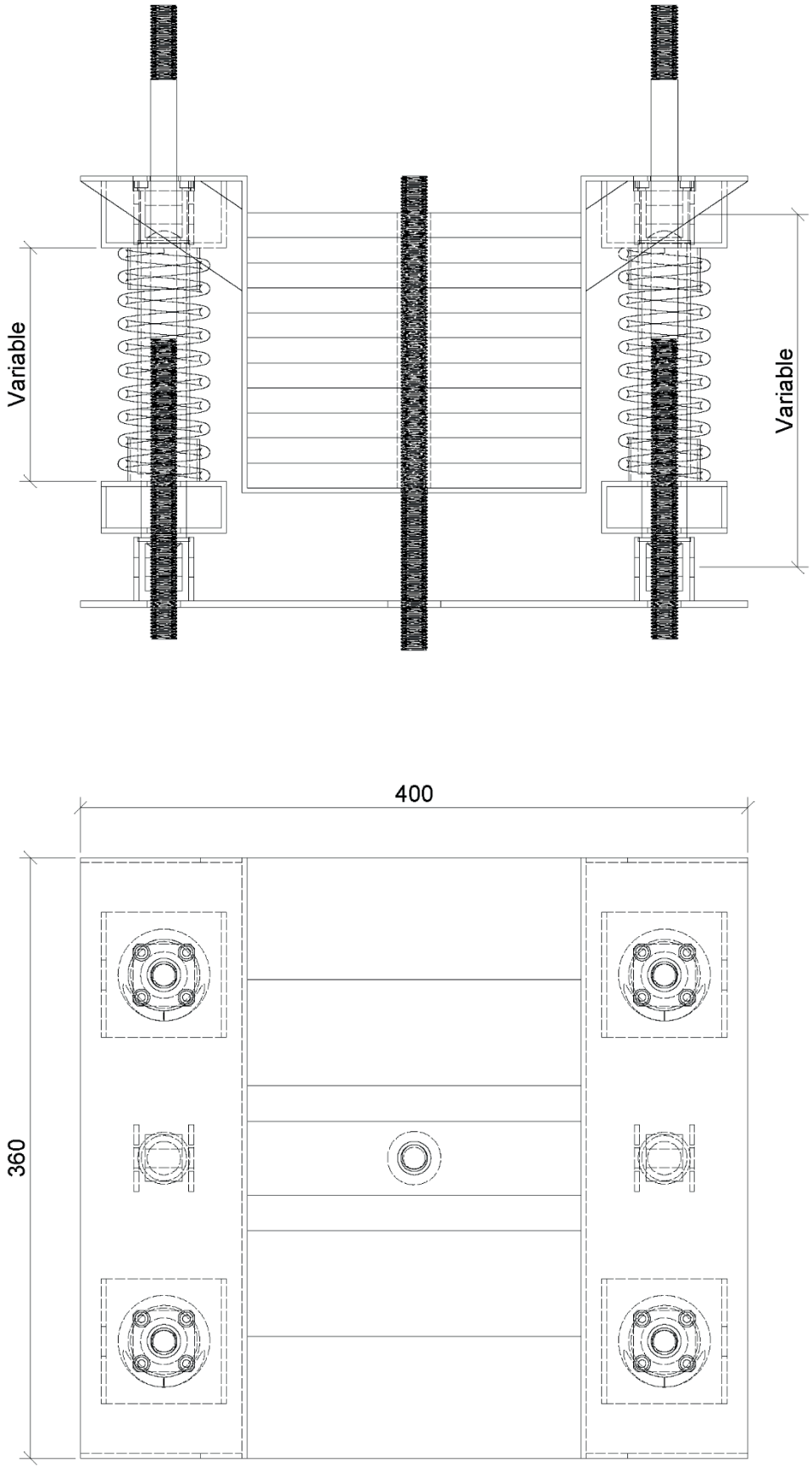


Figura 14. *Alzado y planta del TMD (cotas en milímetros).*

3.2.2. Fabricación

En las Figs. 15, 16, 17 y 18 se muestran algunas fases del proceso constructivo del TMD y su colocación final bajo el forjado.

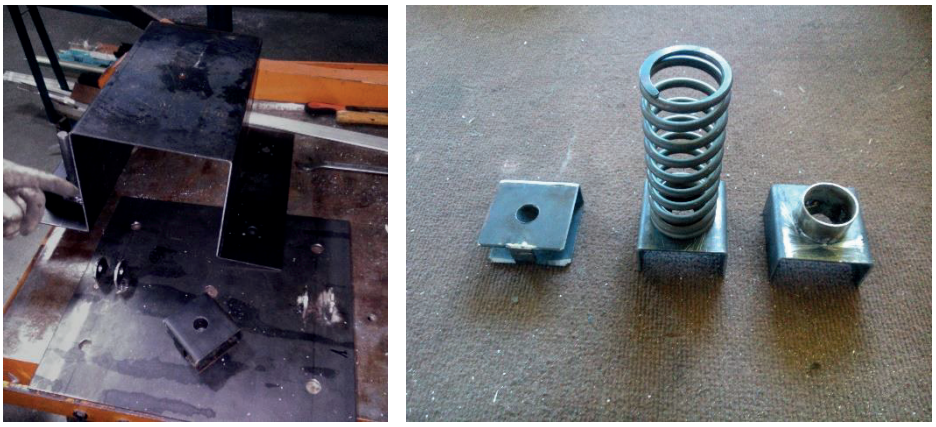


Figura 15. *Piezas del cajón, de la base y de la sujeción de los muelles.*

Figura 16. *Submontaje previo.*

Figura 17. *TMD montado.*

Figura 18. *TMD acoplado al forjado.*

4. COMPORTAMIENTO DEL FORJADO CON CONTROL

El acoplamiento del TMD a la estructura genera una variación muy importante en la respuesta de la misma. Si se realiza una simulación numérica y se superponen las FRFs del forjado sin control (Fig. 12) con el TMD de diseño (48 kg, 53282 N/m y 320 N·s/m) y con el TMD realmente construido y sintonizado (54 kg, 60000 N/m y 370 N·s/m), se obtiene el gráfico de la Fig. 19.

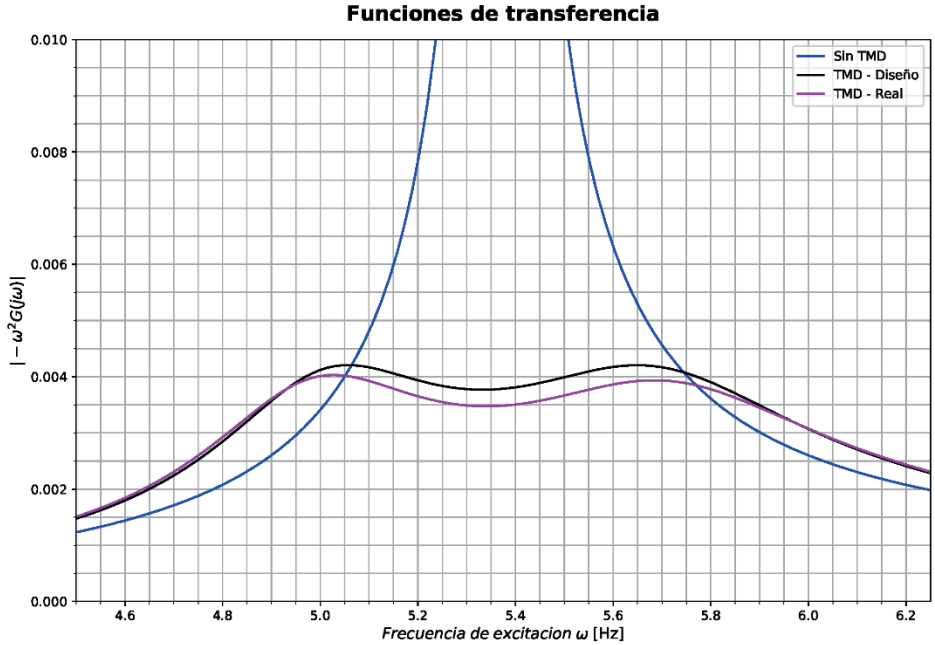


Figura 19. *Funciones de transferencia para el TMD de diseño y el TMD real.*

Se pone de manifiesto que teóricamente, con el TMD instalado, se obtienen reducciones de casi el 90% en las aceleraciones en centro de vano del forjado cuando se excita con una carga armónica que produciría resonancia en la estructura sin control.

La Fig. 20 muestra las FRF experimentales con y sin TMD, y la Fig. 21 hace lo propio comparando resultados experimentales y teóricos.

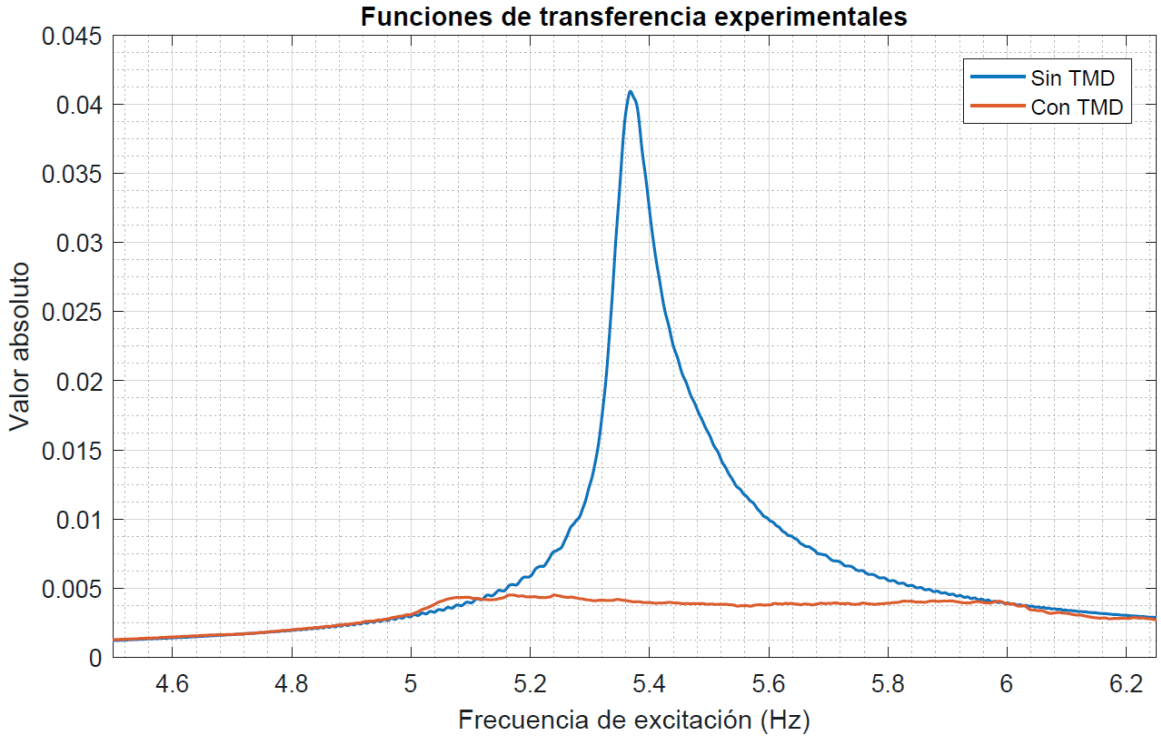


Figura 20. *Funciones de transferencia obtenidas experimentalmente.*

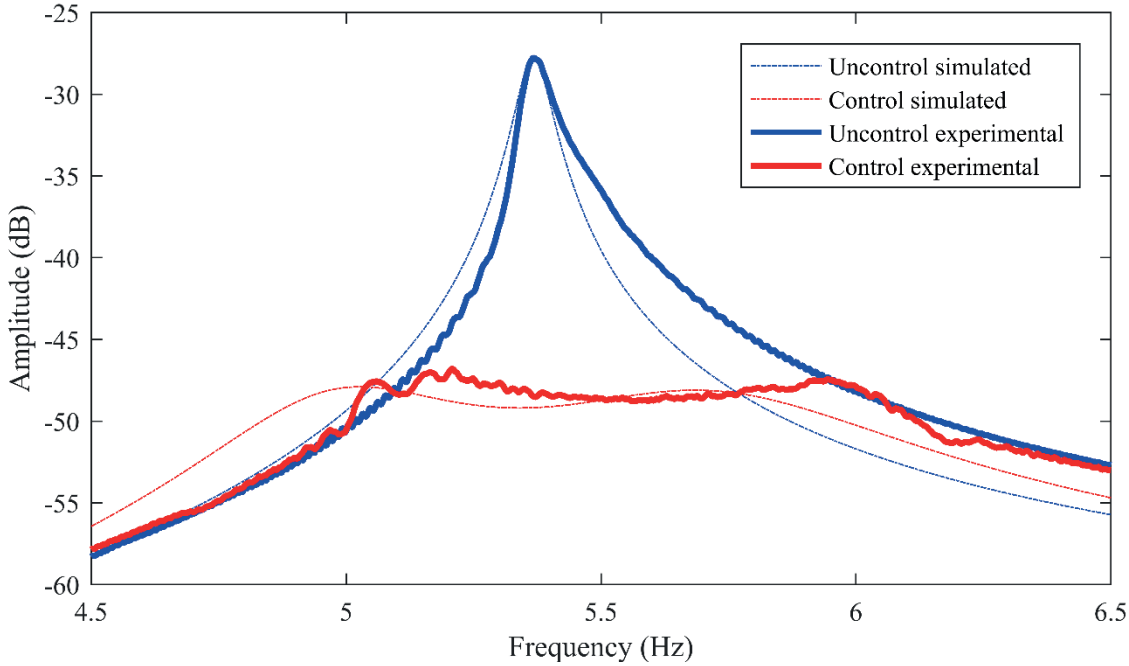


Figura 21. *Comparación de la simulación teórica y los resultados experimentales.*

5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado el cálculo y la construcción de un forjado mixto de chapa colaborante esbelto que, verificando los estados límite últimos básicos de resistencia, no verifica los estados límite de servicio. Por otra parte, se ha expuesto el diseño y fabricación de un dispositivo absorbedor de vibraciones (tipo TMD) para mejorar el comportamiento de la estructura ante la acción de cargas dinámicas.

Las principales conclusiones que se extraen son que, por una parte, no hay que descuidar las comprobaciones de los estados límite de servicio y, por otra parte, que si se detectan problemas de vibraciones en estructuras ya construidas, existe la posibilidad de incorporar un TMD como solución para la amortiguación de dichas vibraciones (reduciéndose las molestias ocasionadas en los usuarios).

Hay que destacar que los TMD son unos dispositivos muy eficientes, pero en una estrecha banda de frecuencias. La capacidad de absorción disminuye rápidamente según se va alejando la excitación de la frecuencia de resonancia del modo que se desea amortiguar, por lo que si cambia la acción exterior o varían las frecuencias propias de la estructura (desintonizándose el TMD), las mejorías en la respuesta estructural no serán tan evidentes.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del Ministerio de Economía y Competitividad (Gobierno de España) financiando el Proyecto de Investigación REVES-P (DPI2013-47441). Los autores agradecen también la financiación parcial de la Red de Investigación VIBRASTRUNET (BIA2015-71942-REDT).

REFERENCIAS

[1] IAP-11. Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera.

[2] Den Hartog, J. P. (1947). Mechanical Vibrations. Third edition, Nueva York, Estados Unidos. McGraw-Hill Book Company, Inc.

[3] Weber, F., Feltrin, G., & Huth, O. (2006). SAMCO Final Report 2006. F05 Guidelines for Structural Control.

[4] EN 1992-2-2 Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings.

[5] Código Técnico de la Edificación. Documento Básico Seguridad Estructural: Acciones en la edificación.

[6] Grupo de trabajo 5/6 "Forjados Mixtos de Chapa Nervada" de ACHE (2008). Monografía M-14: Recomendaciones para el Proyecto y Construcción de Forjados Mixtos de Chapa Nervada (F.M.C.N.).

[7] EN 1994-1-1 Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings.

[8] Blevins R. D. (2001). Formulas for natural frequency and mode shape. Krieger Publishing.

[9] Simth A. L., Hicks S. J., Devine, P. J. (2007). Design of floors for vibration: a new approach. The Steel Construction Institute.

Skills of artificial vision and machine learning to locate (in space and time) the footsteps of a pedestrian while walking

Cosido, Óscar J.[1]; Salcines, Alberto[2] ; Ruiz, Óscar[2]; Lorenzana, Antolín[3]

ABSTRACT

The objective of this paper is to show the preliminary work carried on to achieve a computer vision based methodology for helping the identification of the forces induced on structures when people walk over them. The proposed methodology throws promising results in using multiple-object video tracking techniques to track the footwear of a person in order to estimate the location of each foot on the surface. Although the studied scenario in this paper is constrained to laboratory conditions, its analysis will establish an initial point for the improvement of the methodology and its application in real scenarios.

Keywords: computer vision, tracking, foot location, dynamic load identification.

1. INTRODUCCIÓN

La estabilidad dinámica de algunas estructuras es especialmente sensible a las fuerzas a las que son sometidas cuando una persona o multitud interactúan con ellas. El modelado de la influencia que ejercen las personas sobre el comportamiento dinámico de estructuras ligeras es un verdadero reto para la ingeniería debido fundamentalmente a la naturaleza imprevisible del comportamiento humano. Por ejemplo, las fuerzas que ejerce una única persona desplazándose sobre una pasarela son pequeñas fuerzas locales de magnitud y orientación variables que no dependen únicamente de las características físicas de la persona sino también de su comportamiento.

En el ámbito del estudio de la dinámica de estructuras, se han presentado muchos problemas relacionados con las vibraciones de suelos, escaleras, estructuras ensambladas (gradas, escenarios, etc.), puentes y pasarelas debido a la influencia ejercida por grupos de personas que saltan, corren o caminan sobre ellas. Algunos de los casos más recientes y famosos de problemas derivados de la interacción humano-estructura son el del *Millennium Bridge* en Londres [1] y el Puente Solferino en París [2]. Además, las estructuras modernas tienden a ser más ligeras y flexibles y por tanto más proclives a dicha influencia. Esta situación ha fomentado la investigación en torno al concepto de interacción humano-estructura, convirtiéndose ésta en un terreno multidisciplinar en el que convergen áreas como en cálculo de vibraciones estructurales, la biomecánica para el modelado del comportamiento cinemático y dinámico del cuerpo humano, desarrollo de sensores para la medición y localización de fuerzas o la psicología para el modelado del comportamiento de grupos de personas ante determinados eventos.

[1] *Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación. Universidad de Cantabria (SPAIN).* oscar.cosido@unican.es

[2] *3DINTELLIGENCE (SPAIN).* alberto.salcines@3dintelligence.es, oscar.ruiz@3dintelligence.es

[3] *ITAP, EII . Universidad de Valladolid, Valladolid (SPAIN).* ali@eii.uva.es

El objetivo de este trabajo es buscar una metodología basada en visión por computador que ayude a la identificación de las fuerzas inducidas sobre estructuras cuando personas caminan sobre ellas. Concretamente, se persigue la localización del punto de aplicación de dichas fuerzas mediante la estimación del punto de apoyo de las personas en la superficie sobre la que se desplazan. Con este método se pretende facilitar el estudio del efecto de las pisadas en la deformación de estructuras ligeras.

2. ESTADO DEL ARTE

2.1 Técnicas de localización de las GRF

Una revisión de las técnicas disponibles para la medición y caracterización de las fuerzas ejercidas al caminar por las personas o GRF (*Ground Reaction Forces*) puede consultarse en [3]. En este trabajo se dividen éstas técnicas en técnicas de medida directa e indirecta.

La medida directa de las GRF es frecuentemente utilizada para modelar las fuerzas generadas por los sujetos. Se utilizan dispositivos sensorizados con transductores de fuerza y presión como cintas de correr, plataformas de fuerza y plantillas con sensores de presión.

La medida indirecta de las GRF se basa en los modelos obtenidos mediante los experimentos realizados con medida directa. Una vez obtenidos los modelos que describen el comportamiento dinámico del movimiento humano, la medida indirecta consiste en utilizar técnicas de captura de movimiento o rastreo (*tracking*) tanto activas como pasivas para posicionar a las personas sobre la estructura durante el experimento.

El problema de localización de las GRF sobre la estructura es interesante en cuanto a que el efecto que éstas tienen en la dinámica del sistema es dependiente del punto de aplicación. Las técnicas habituales para localizar a los sujetos en entornos fuera de laboratorio son el *tracking* óptico basado en marcadores pasivos o activos y el *tracking* mediante sistemas microelectromecánicos inalámbricos.

2.2 Visión por computador aplicada al estudio de la interacción persona-estructura

Con el fin de estudiar en profundidad la influencia de las personas sobre una estructura es necesario conocer, al margen de la intensidad y dirección, el origen de los vectores de las GRF. Eliminar la necesidad de dianas o marcadores en la tarea de localizar a las personas permitiría suprimir las limitaciones de coste, tiempo y espacio requeridas por un hardware de captura de movimiento tradicional. Las técnicas actuales que permiten el trabajo en esta dirección son los sensores inalámbricos y la visión por computador.

El seguimiento de objetos sin marcadores basado en visión artificial es considerado como la solución definitiva al tracking del movimiento humano. Aunque lleva más de una década siendo una de las áreas más activas en investigación, la aplicación de estos métodos en la interacción humano-estructura tanto dentro como fuera de laboratorio no es común debido a los retos técnicos que supone su uso: cambios de iluminación, oclusiones, abarrotamiento, sombras, etc.

Aun siendo compleja la tarea de obtener la pose y localización de personas a través de visión artificial, esto no ha impedido utilizar técnicas de procesado de imagen para llevar a cabo estudios de influencia persona-estructura. Por ejemplo, en [4], se realiza un seguimiento del balanceo de las cabezas de un flujo de personas que circulan sobre una pasarela de prueba con el fin de calcular la influencia de la sincronización de los peatones en la vibración de la estructura. Para ello utilizan una cámara situada a 3 m sobre el nivel de la pasarela cuyas imágenes son procesadas posteriormente de forma manual fotograma a fotograma, buscando el punto central entre los ojos de cada peatón. La información resultante son señales que representan el balanceo de los peatones y que permiten

calcular su ritmo de marcha y el posible efecto de sincronización entre grupos que circulan por la pasarela.

En [5] se busca de nuevo estudiar el efecto de la sincronización de peatones sobre la vibración y oscilación de una pasarela, esta vez sobre el puente T-Park en Tokio. Una cámara de alta resolución es situada en la cubierta de un estadio colindante de modo que un tramo de la pasarela sea visible. Se trata de un caso de afluencia masiva de peatones por lo que la localización exacta de cada peatón es impracticable. La solución adoptada es de nuevo el tracking de cabezas. Esta vez se propone una técnica de procesado de imágenes que automatiza el rastreo de los elementos de interés, siendo estos tanto el centroide de las cabezas de los peatones como puntos específicos de la pasarela para medir su desplazamiento. La solución propuesta está basada en correspondencia de plantillas o *template matching* optimizada mediante un algoritmo genético y un clasificador final para distinguir entre cabeza-pasarela-otro.

Un último ejemplo de aplicación es el llevado a cabo en [6]. En este trabajo se comprueba la viabilidad de utilizar el tracking sin marcadores para estudios de vibraciones inducidas por personas mediante la comparación de los resultados obtenidos a través de hardware comercial de tracking con marcadores (Codamotion) y sensores inalámbricos (Opal). La solución propuesta es un algoritmo de tracking acompañado de un clasificador basado en aprendizaje automático [7]. Con un método de rastreo adaptativo como este se consiguen atenuar los problemas de deriva que tendría un clasificador estático originados por los cambios de perspectiva, escala e iluminación de los objetos a seguir.

2.3 Seguimiento de objetos en video

El seguimiento o tracking visual de objetos es una amplia área dentro de los campos de la visión por computador y procesamiento de imagen. El planteamiento de un problema de tracking es el siguiente: Dada una secuencia de imágenes $I_1, I_2 \dots I_n$, estimar el estado x_k de uno o varios objetivos de interés para la imagen I_k, donde x_k pueden ser las coordenadas sobre la imagen del centroide del objeto, área o información sobre su movimiento, por ejemplo. Es por ello una tecnología muy útil aplicable en ámbitos variados como en vigilancia y seguridad, robótica industrial, vehículos autónomos, interfaces hombre-máquina y reconocimiento de actividad o comportamiento.

Según el nivel de interacción con el usuario, los algoritmos de tracking pueden ser *manuales*, donde el usuario selecciona fotograma a fotograma el objetivo [4], o *automáticos*, donde es el propio sistema quien rastrea al objetivo en base a una información inicial dada [5]. Indistintamente, un algoritmo de tracking tiene que lidiar con una serie de dificultades las cuales han inspirado en gran parte el interés por la investigación en esta área. La primera de ellas es el *abarrotamiento* o *clutter*. Este problema se da cuando las características que definen al objetivo son similares a las de los objetos de su entorno. Otro problema son los *cambios de apariencia*. Se denominan *cambios de apariencia intrínsecos* a los cambios en la forma del objeto debido a desplazamientos o plasticidad. Los *cambios de apariencia extrínsecos* son las variaciones producidas por la iluminación, movimiento de la cámara y punto de vista de ésta. Los cambios en apariencia son de gran importancia ya que son causantes de *deriva* o *drift* [7] en los trackers que no actualizan periódicamente las características o descriptores que emplean para identificar a los objetivos. Resolver este problema implica alcanzar un equilibrio entre la información que se conserva entre fotogramas y la que es actualizada mediante técnicas de aprendizaje. Este dilema es conocido como *Dilema de Estabilidad-Plasticidad* [8]. Otros factores que dificultan el tracking son las *oclusiones* parciales o totales del objetivo, los *movimientos complejos* y cambios bruscos de *velocidad*, el *ruido en la imagen* y los requisitos de velocidad del sistema si se necesita una ejecución en *tiempo real*.

Otra clasificación de los algoritmos de tracking puede hacerse según su modo de funcionamiento: *Tracking recursivo*, *tracking por detección* y *tracking por detección adaptativo*.

El *tracking recursivo* consiste en estimar el estado actual x_t del objetivo mediante transformación de su estado anterior x_{t-1}. Estos métodos son propensos a deriva debido a la acumulación del error en

sucesivos estados. Ejemplos de trabajos de tracking recursivo son el de Lukas y Kanade [9] que predice la nueva posición del objetivo mediante análisis de *flujo óptico*, y [10] donde se propone emplear el algoritmo de clusterizado *mean-shift* [11] para detectar la nueva posición del objeto buscando el máximo de similitud entre histogramas de color de fotogramas sucesivos.

El *tracking por detección* estima x_t según mediciones tomadas en I_t, lo que reduce el problema de deriva por acumulación de error. La contrapartida de la detección es la necesidad de tener un detector-clasificador previamente entrenado. Entrenar un detector requiere una fuente de información previa, imágenes en este caso, correctamente anotadas y lo más ricas en información posible: diferentes perspectivas del objeto a detectar, diferentes formas, colores, niveles de ruido, etc. Toda aquella información que permita encontrar un objeto se codifica en *descriptores*, los cuales deben poseer robustez suficiente para identificar al objeto frente a cambios de apariencia.

La detección puede realizarse *offline*, usando el mismo detector para toda la secuencia, u *online,* actualizándose el detector-clasificador conforme a la evolución del objeto a lo largo del video. Este último caso se trata de un *rastreo por detección adaptativo*. En [12], una *máquina de vectores de soporte SVM o clasificador de margen máximo* es entrenado *offline* para modelar el fondo (*background*) y poder distinguirlo del objetivo (*foreground*) y puesto a trabajar en cascada con un tracker basado en *flujo óptico*. En [13], mediante un *detector adaptativo,* el algoritmo *mean-shift* es mejorado reduciendo considerablemente las restricciones de éste en rastreos de larga duración (con oclusiones, cambios de escala, pose, iluminación, etc.). Se utiliza también un *filtro de Kalman* [14] [15] para reducir el entorno de búsqueda del detector y poder implementar el sistema en *tiempo real*. Los algoritmos de *autoaprendizaje* como este utilizan sus propias predicciones para actualizarse por lo que no están exentos de deriva.

Se han realizado numerosos trabajos en cuanto a reducir la deriva de los trackers basados en detección. En [16] se utiliza *entrenamiento cooperativo* o *co-training*. El sistema consiste en utilizar dos clasificadores entrenados para procesar características diferentes del objetivo. La respuesta de ambos es combinada para actualizar los datos de entrenamiento de uno de ellos (*boosted classifier*). En [17] mejoran la estabilidad en el tiempo utilizando un sistema basado en tres componentes: *template matching* mediante *correlación* como parte no adaptativa (*tracking por detección*), *mean-shift* mediante *flujo óptico* (*tracking recursivo*) y un *Random Forest* como clasificador *adaptativo*. Por último, en [18] proponen un modelo llamado TMD (*Tracking-Modeling-Detection*) en el que el objeto es rastreado por un tracker adaptativo a corto plazo basado en el método de Lukas-Kanade [9]. Durante el rastreo la apariencia es modelada de forma no supervisada analizando parches de la imagen con alta probabilidad de contener el objetivo. Estos parches son utilizados para entrenar un detector *online* que trabaja en paralelo con el tracker. La peculiaridad es que la salida del detector es utilizada únicamente para reinicializar el tracker en caso de pérdida del objetivo, haciendo al sistema robusto frente a oclusiones.

3. CASO DE ESTUDIO Y METODOLOGÍA

Este trabajo centra su investigación en la localización de las GRF mediante técnicas de visión artificial monocular, esto es, mediante el uso de una cámara de video y técnicas de seguimiento sin marcadores. Puede considerarse un método innovador ya que en la revisión bibliográfica realizada no se han encontrado trabajos previos en este sentido.

La aplicación de un método de estas características supondrá un abaratamiento en los costes de equipamiento debido a la utilización de una cámara convencional, así como una reducción en los tiempos de captura de la información ya que el hardware es convencional (cámara de video y ordenador) y los sujetos no necesitan equiparse con trajes especiales de marcadores.

3.1 Caso de estudio

El trabajo reflejado en esta publicación es el resultado de la primera aproximación realizada hacia la consecución del objetivo descrito anteriormente.

El escenario o caso de estudio sobre el que se ha trabajado se restringe a condiciones de laboratorio. Esto es, la detección de pisadas sobre una superficie plana en un área interior y restringida (figura 1). Se han minimizando la aparición de sombras y cambios en la iluminación, así como la variación en escala de los objetos a detectar. La cámara está situada sobre un trípode en una posición favorable para minimizar las oclusiones y solo se detectan las pisadas de un único sujeto por lo que el abarrotamiento o cluttering es mínimo, dándose únicamente entre ambas zapatillas del sujeto. En este caso de estudio, el sujeto utiliza unas zapatillas con un color de alta luminosidad que las hace destacar del entorno. Éstas son los objetivos del algoritmo de rastreo. Sobre la superficie de prueba se han localizado 24 puntos de coordenadas conocidas con el fin de poder establecer un sistema de referencia métrico en la escena y cuantificar el error cometido en las detecciones de pisadas.

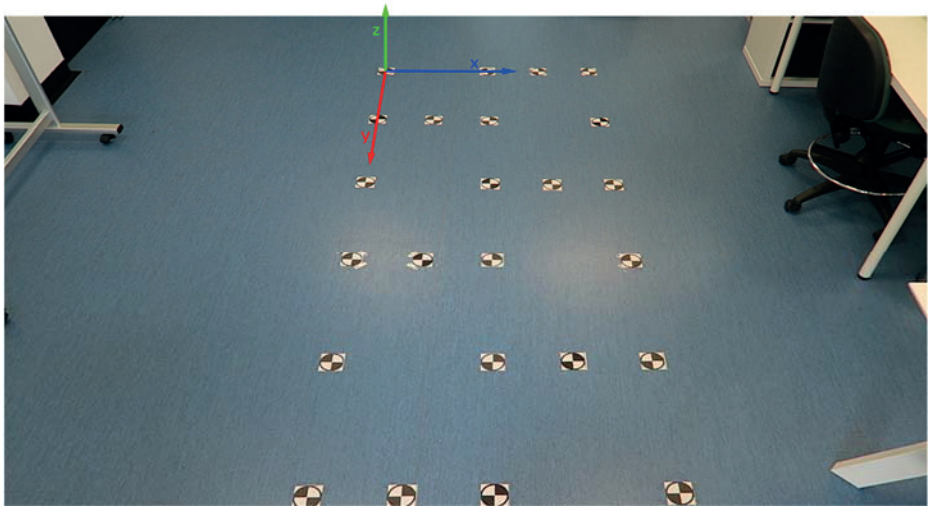


Figura 1. *Imagen del escenario de prueba.*

La cámara utilizada es una Canon PowerShot G7 X. Tanto la secuencia de imágenes de calibración como las capturas de información para procesado se han tomado con la cámara configurada en modo video a una resolución de 1920x1080 píxeles y 60 fps. En este escenario no se han utilizado plantillas sensorizadas para obtener información del módulo y distribución de fuerzas por lo que no fue necesario un método de sincronización entre la captura de video y las plantillas.

Toda la información se procesa *offline*.

3.1 Metodología

El método de trabajo puede resumirse en estas cinco fases: Calibración de la cámara, captura de información, aplicación de un algoritmo de rastreo multiobjeto de visión por computador, filtrado/extracción de información y análisis de resultados.

3.1.1 Calibración de la cámara

El proceso de calibración de la cámara permite obtener los parámetros internos de la misma, denominados intrínsecos, y los parámetros externos o localización de la cámara respecto al sistema

de referencia métrico externo, denominados extrínsecos. Conocidos ambos conjuntos de parámetros se obtiene un modelo único que define la cámara y otro modelo único para su localización. La utilidad de estos modelos es que posibilitan realizar las proyecciones de puntos del espacio a píxeles en la imagen, proyección directa, y de píxeles a coordenadas espaciales, proyección inversa.

La obtención de parámetros intrínsecos se realizó con el método habitual, esto es, tomando una serie de imágenes de un patrón de calibración del tipo tablero de ajedrez en diferentes orientaciones respecto de la cámara. Para realizar este proceso se utilizó *Camera Calibration Toolbox* [19]. Esta *toolbox* contiene funciones para obtener un modelo lineal de cámara o un modelo con distorsiones de lentes basado en el modelo de Heikkilä-Silvén [20]. La obtención de los parámetros extrínsecos se realizó tomando como puntos de referencia las coordenadas de las marcas realizadas en el suelo. Este hecho es importante ya que en un futuro entorno exterior donde no sea posible establecer marcas, pueden utilizarse como referencias puntos de la geometría del lugar cuyas posiciones respecto de un sistema de referencia establecido sean conocidas.

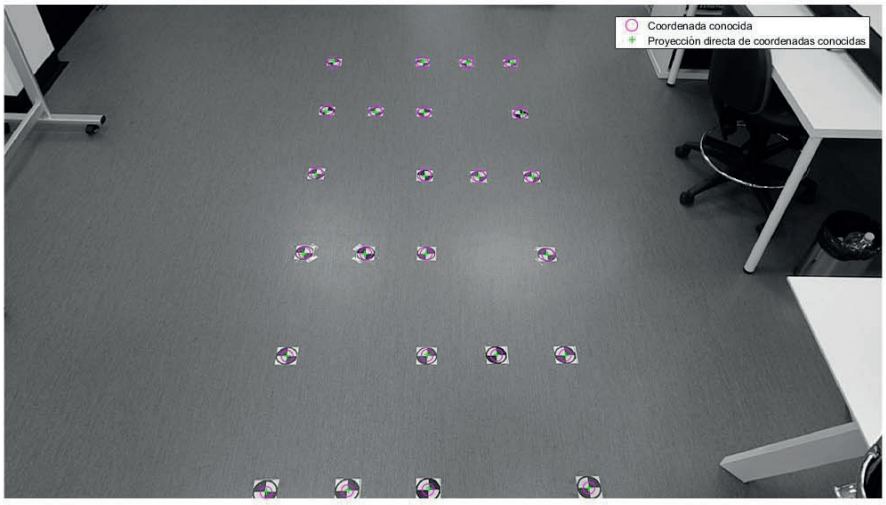


Figura 2. *Puntos de localizaciones conocidas sobre el suelo y su proyección directa a través del modelo de cámara lineal.*

3.1.2 Captura de la información

Para este trabajo se capturaron varias secuencias de una persona caminando sobre el área restringida desde el punto de vista de las figuras 1 y 2. Se han seleccionado 3 de ellas para ver el comportamiento del algoritmo en diferentes situaciones. En todas ellas el sujeto avanza en sentido positivo del eje y (ver figura 1).

- Secuencia 1: El sujeto camina hacia la cámara pisando sobre las dianas evitando oclusiones de las zapatillas.
- Secuencia 2: El sujeto camina en línea recta pisando sobre dianas situadas a la misma distancia x. Hay oclusiones parciales de los objetivos y abarrotamiento.
- Secuencia 3: El sujeto realiza un camino aleatorio con variaciones de velocidad. Presencia de abarrotamiento y oclusiones parciales y totales.

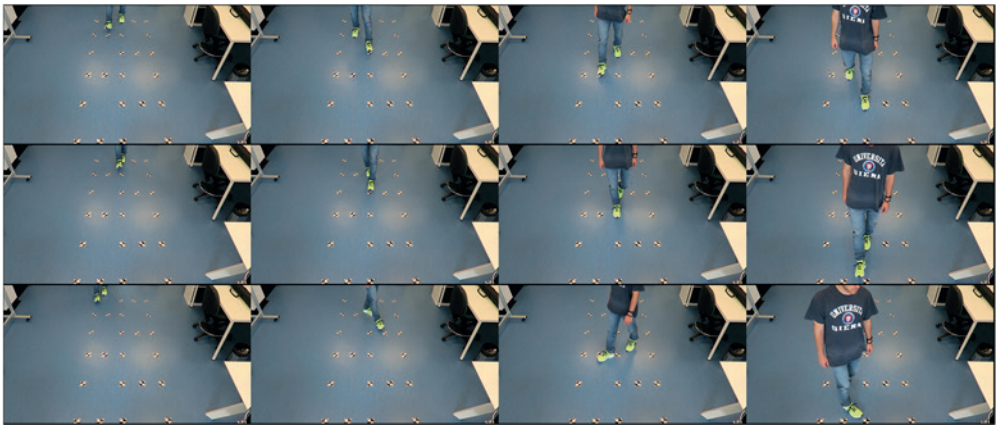


Figura 3. *Fotogramas de secuencias utilizadas. De arriba a abajo y en filas, secuencia-1…secuencia-3.*

Como se dijo con anterioridad, la información se captura con una resolución de 1920 x 1080 píxeles a 60 fotogramas por segundo en RGB.

3.1.3 Algoritmo de rastreo

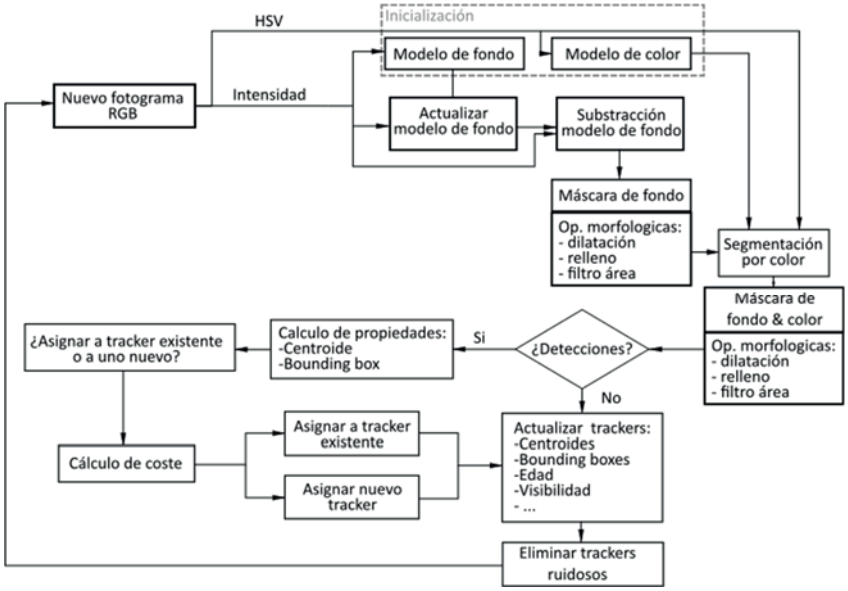


Figura 4: *Diagrama del algoritmo de visión artificial.*

El método de rastreo utilizado en esta primera aproximación al problema es un algoritmo de tracking por detección, esto es, que la detección no depende de los estados anteriores del objeto, sino que se analiza la situación de los objetos de interés en cada fotograma. En este caso, los objetos de interés son las zapatillas del sujeto.

La detección de objetos en cada fotograma se realiza en dos etapas: La primera consiste en identificar en la imagen todos aquellos píxeles que representan objetos en movimiento mediante la comparación del fotograma actual con un modelo de fondo. La segunda etapa consiste en extraer de los resultados de la etapa anterior aquellos píxeles cuyas características de color son semejantes a las buscadas.

3.1.3.1 Modelo de fondo

El modelado de fondo es una técnica muy recurrida en visión por computador para detectar movimiento en secuencias de imágenes tomadas desde cámaras estáticas. Se basa en el principio de que las características de color o intensidad de píxeles que representen un movimiento variarán respecto de las condiciones que tenían antes de que éste se produjera. Por ello, puede modelarse el estado de los píxeles cuando no se produce un movimiento y comparar este modelo con cada nuevo fotograma. Existen gran cantidad de técnicas de modelado y substracción de fondo [21]. El elegido en este caso ha sido el modelo de media ponderada móvil, o *weigthed moving mean* del valor de intensidad de los píxeles.

Este modelo conlleva una fase de inicialización consistente en obtener un modelo BM inicial a partir de N fotogramas I en los que no se produce movimiento. La ecuación de inicialización es Eq. (1).

$$BM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I_i \quad (1)$$

Una vez inicializado el modelo éste se tiene que actualizar a lo largo de la secuencia para que sea capaz de integrar las variaciones que suceden en el fondo: objetos añadidos al fondo, cambios de luz, etc. Esta fase de mantenimiento se realiza cada nuevo fotograma mediante la expresión Eq. (2)

$$BM_t = (1 - \alpha) BM_{t-1} + \alpha I_t \quad (2)$$

El parámetro α es el factor de aprendizaje del modelo. Si es alto, el modelo asimilará como fondo rápidamente objetos del primer plano que se desplacen lentamente. Si es bajo, los objetos del primer plano que se muevan no llegarán a ser asimilados como fondo, pero nuevos objetos del fondo tardarán en ser asimilados, aunque permanezcan estáticos.

Una vez conseguido el modelo de fondo, la discriminación entre píxeles de fondo/primer plano (*Background/Foreground*)se realiza estableciendo un umbral a la diferencia en valor absoluto entre la intensidad de los píxeles de I y del BM.

$$Foreground_{(x,y)} \begin{cases} 1 \; si \; \left| I_{(x,y)} - BM_{(x,y)} \right| > Umbral \\ 0 \; si \; \left| I_{(x,y)} - BM_{(x,y)} \right| \leq Umbral \end{cases} \quad (4)$$

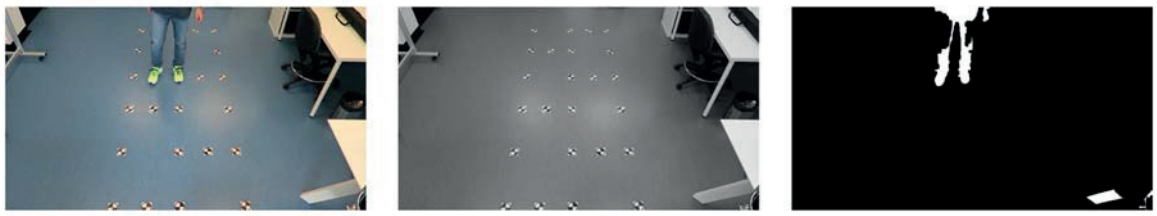


Figura 5. *De izquierda a derecha: Fotograma de secuencia 1, modelo de fondo y máscara de foreground. Se observa ruido en la esquina inferior derecha de la máscara de foreground debido al balance automático de blancos de la cámara. Estas detecciones se filtrarán en la etapa de segmentación por color.*

3.1.3.2 Modelo de color

El modelo de color sirve para conseguir una referencia de características de color frente a las que comparar el color de los objetos detectados. De este modo, estableciendo un criterio de similitud y un umbral puede determinarse si una detección es positiva o no.

En [22] , se realiza una comparativa de diferentes descriptores de color, resultando los más útiles en cuanto a equilibrio entre sencillez y robustez los basados en tonalidad H y saturación s (*Hue* y *Saturation*). Trabajar con H y s implica transformar la imagen del espacio de color RGB al modelo Hsv.

Para determinar la discrepancia entre la H y s de los píxeles detectados y el modelo se utiliza la distancia de Mahalanobis según la Eq. (5). La ventaja de utilizar esta distancia frente a la euclídea es que tanto H como s quedan equiparadas en el cálculo al estar ponderadas según su varianza.

$$d_{Mahal.}{}^2 = (X-\mu)^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(X-\mu) \quad (5)$$

Dónde μ y $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ son un vector con la media de H y s del modelo y la inversa de la matriz de covarianzas entre H y s del modelo respectivamente, y X es un vector con el valor de H y s del píxel a comparar. Los valores de μ y $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ se calculan previamente tomando los píxeles que representan a las zapatillas en 5 fotogramas aleatorios a lo largo de la secuencia.

Figura 6. *Izquierda: fotograma de secuencia 1. Derecha: Distancia de Mahalanobis para dicho fotograma. Los píxeles más oscuros son más parecidos al modelo.*

3.1.3.3 Rastreo

Tras la etapa de detección comienza el rastreo. Una vez detectados los objetos, idealmente uno por cada zapatilla visible, se calcula y almacena su posición en la imagen como el centroide de las áreas que ocupan en píxeles. El objetivo de la etapa de rastreo es almacenar las sucesivas posiciones e instantes de tiempo (fotogramas) de los centroides de cada objeto a lo largo de la secuencia. El algoritmo tiene que identificar si un objeto detectado es nuevo para asignarle un identificador y comenzar a rastrear sus posiciones o, por el contrario, el objeto ya está siendo rastreado y tiene que asignarse su posición a un rastreador o tracker ya iniciado. La etapa de rastreo también se encarga de conservar o eliminar los tracker según su fiabilidad, calculada ésta en base a la visibilidad del objeto a lo largo del tiempo.

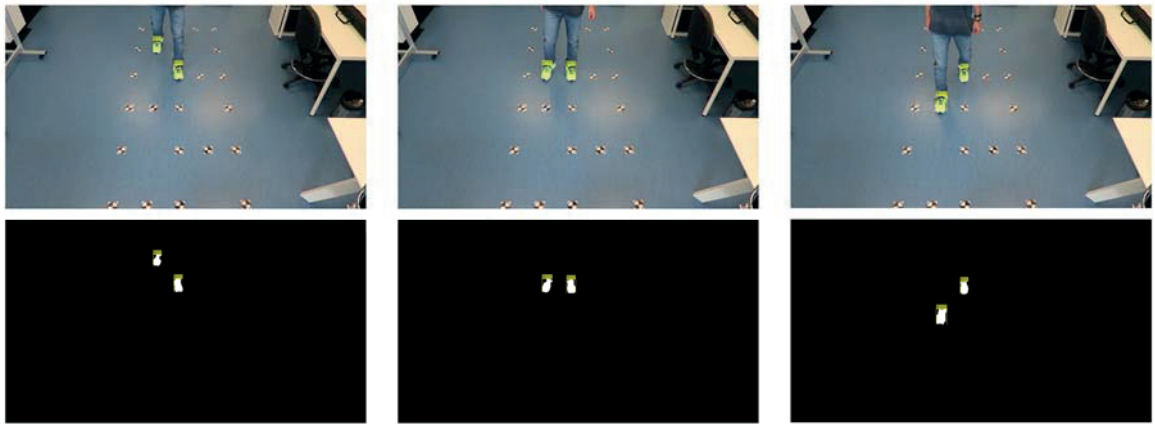


Figura 7. *Fotogramas y máscaras de foreground de la secuencia 1 con resultados de rastreo.*

Cuando un objeto es detectado, se utiliza la distancia euclídea entre su centroide y los últimos centroides registrados en cada tracker como función de coste a minimizar para asignarlo a alguno de los tracker existentes o a uno nuevo. La resolución de este problema de asignación se realiza mediante el método Húngaro o de Kuhn-Munkres [23].

Una vez analizada toda la secuencia, el resultado es para cada objeto detectado una matriz con las posiciones (x, y) en píxeles de los sucesivos centroides del objeto, así como el nº de fotograma en que cada uno de esos centroides fue encontrado.

Tratando estos datos como una serie temporal, es posible encontrar aquellos centroides que se corresponden con las pisadas mediante el análisis de la varianza móvil de la distancia euclídea entre un centroide y su anterior. Aquellos centroides correspondientes a pisadas serán muy próximos entre si pues el pie permanece estático unos instantes. Este hecho se ve reflejado en que la varianza de su posición se ve drásticamente reducida (Figura 8).

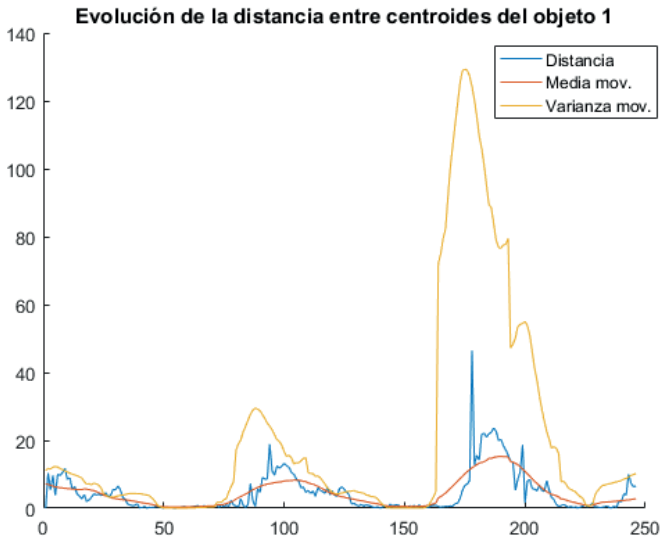


Figura 8. *Evolución de la distancia entre centroides, media y varianza móviles (intervalo de 30 fotogramas) para resultados del tracker 1 de la secuencia 1. Obsérvese que la varianza es mejor discriminador que la media.*

Estableciendo un umbral de varianza es posible detectar conjuntos de centroides correspondientes a pisadas, y a partir de éstos, estimar la localización de la pisada como la media entre las localizaciones de los centroides de dichos conjuntos.

En la figura 9 se muestran los resultados de los trackers antes y después del filtrado para las 3 secuencias. Todas las secuencias han sido analizadas con los mismos parámetros y un único modelo de color entrenado en la secuencia 1.

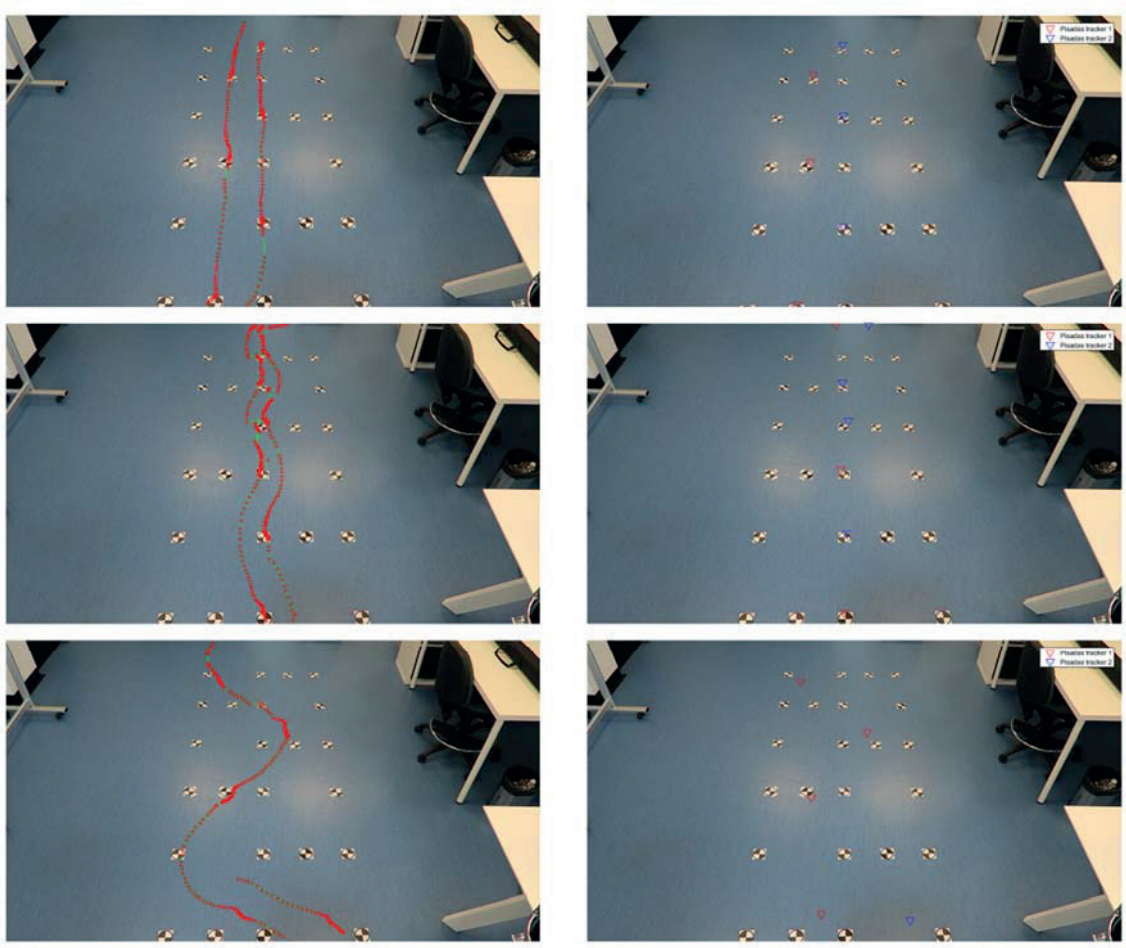


Figura 9. *Izquierda: Centroides devueltos por los trackers en secuencias 1, 2 y 3. Derecha: Pisadas obtenidas tras filtrado.*

La secuencia 1 ha sido rastreada con éxito. Se muestran todas las pisadas y cada una se corresponde con un tracker diferente. En la secuencia 2, a pesar de haber suficientes detecciones, la pisada en la primera diana no ha sido detectada tras filtrar los centroides. Puede verse además cómo dos pisadas consecutivas son de color azul. Esto es debido al efecto de clutter que se da en esta escena. En la escena 3 hay una importante pérdida de información en el rastreo. Esto es debido a la larga oclusión que se da en el pie izquierdo del sujeto cuando éste realiza el último cambio de dirección.

3.1.4 Extracción de coordenadas métricas de los centroides

Una vez obtenidas las posiciones en coordenadas de imagen de los puntos de interés, se realiza la proyección inversa de estos puntos para conseguir sus coordenadas métricas en el plano del suelo.

Cuando se realiza la proyección de puntos de un espacio tridimensional al plano como sucede al capturar información con una cámara, la información sobre profundidad y escala se pierde. Realizar la proyección inversa, esto es, obtener las coordenadas tridimensionales a partir de las coordenadas en el plano de imagen, es imposible ya que resultarían infinitas soluciones a lo largo de los rayos de proyección mundo-cámara. El problema de proyección inversa tiene solución si se añade al sistema información adicional, en este caso, una restricción de coordenada $z = 0$. Se considera asumible el error cometido con esta restricción.

Los resultados para las 3 secuencias se muestran en la figura 10.

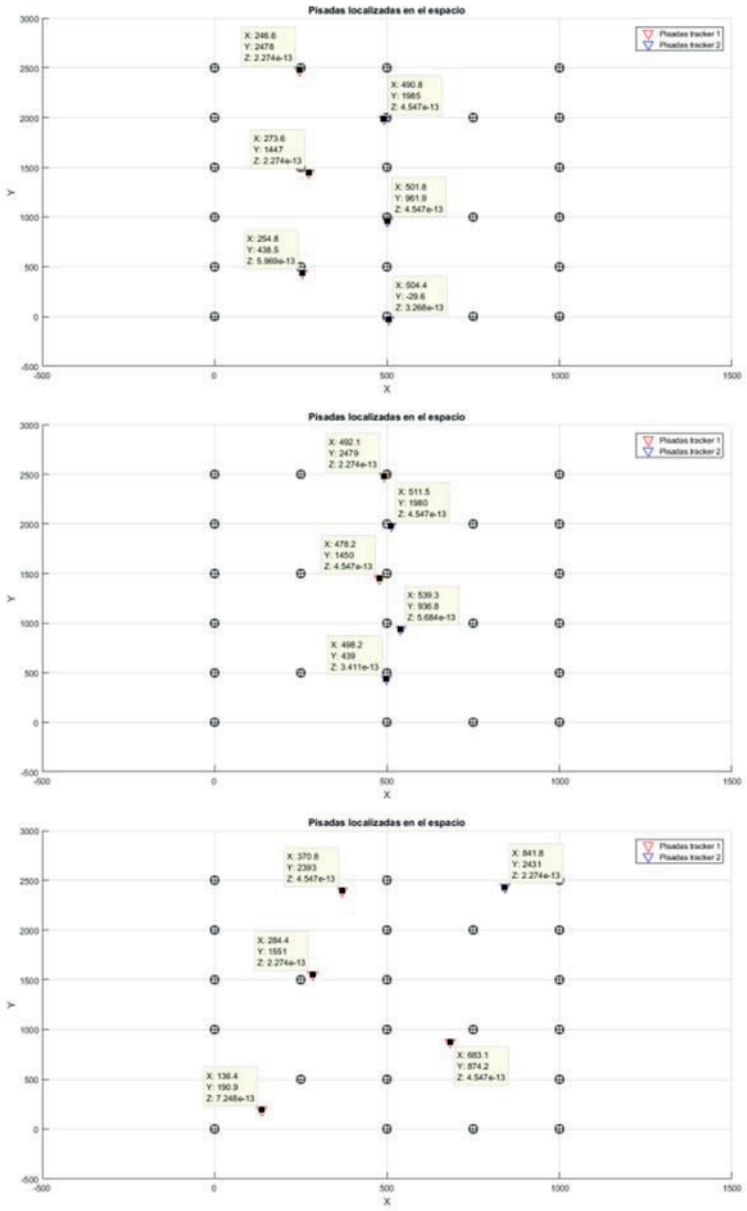


Figura 10. *Representación en el espacio métrico de las pisadas obtenidas (con coordenadas en mm) y las dianas de coordenadas conocidas. De arriba abajo: secuencias 1, 2 y 3.*

Las secuencias con información más relevante sobre la exactitud del método son la 1, 2 ya que en ellas cada pisada se realiza sobre un punto conocido. En la tabla 1 se muestra el error cometido para

estas dos secuencias por cada pisada (pisadas numeradas en sentido creciente de coordenada *y*) medido como distancia a la diana más cercana.

Tabla 1. Error de distancia cometido [mm]

Secuencia	Error P1	Error P2	Error P3	Error P4	Error P5	Error P6
1	29.9	61.7	38.1	58.0	17.6	22.3
2	No detectada	61.0	75.3	45.5	23.0	22.4

4. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Con este estudio se ha realizado una primera aproximación a la localización de pisadas mediante visión por computador. El objetivo final es poder encontrar una metodología barata y eficaz, que sirva de ayuda a la identificación de las fuerzas inducidas por personas cuando se desplazan sobre estructuras.

Este trabajo preliminar se ha centrado en el estudio de una situación muy restringida de laboratorio con la que se pretende establecer unas bases para la continuidad en esta investigación.

Concretamente, se han utilizado las técnicas de substracción de fondo, segmentación por color, rastreo multiobjeto por detección y análisis de señal para detectar las zapatillas de un sujeto a lo largo de una secuencia de video y localizar espacialmente los lugares donde este pisaba. Los resultados para secuencias sin ocultamiento ni abarrotamiento han sido muy buenos, en cambio en secuencias con ocultamiento además de éste, se acentúa el problema de abarrotamiento ya que el descriptor utilizado para ambas zapatillas, el color, es el mismo, provocando pérdidas de información. Estos problemas pueden solventarse ajustando los parámetros de rastreo para cada secuencia en detrimento de alcanzar una metodología más generalista.

Como se ha visto en el apartado *Estado del Arte* y a lo largo del documento, existen numerosas técnicas que pueden aplicarse a este problema. En este estudio nos decantamos por un detector básico basado en técnicas sencillas de substracción de fondo y semejanza de color. A la vista de los resultados, se considera necesario avanzar hacia algoritmos más complejos que generen menos detecciones falsas y tengan mayor robustez en cuanto al mantenimiento de los objetos rastreados.

Otro problema a resolver en un futuro es la obtención de las coordenadas de las pisadas en el espacio tridimensional. Para resolver este problema posiblemente sea necesario añadir una cámara al sistema, pudiendo ser útil además para reforzar los algoritmos de detección y rastreo.

Con todo esto, según el estado actual de la investigación es posible la aplicación del método en situaciones restringidas de laboratorio o exteriores controlados, donde puede ser de gran interés.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la empresa 3DIntelligence s.l. por ceder el equipamiento para este proyecto de investigación y a las Escuelas de Ingeniería Industrial de la Universidad de Cantabria y de la Universidad de Valladolid por cedernos sus instalaciones. Agradecemos también su colaboración al Grupo de Tratamiento Avanzado de la Señal de la Universidad de Cantabria.

También agradecemos la financiación parcial del Ministerio de Economía y Competitividad a través del proyecto BIA2015-71942-REDT.

REFERENCIAS

[1] P. Dallard, A. J. Fiztpatrick, A. Flint, S. Le Bourva, A. Low, R. M. ridsdill Smith y M. Willford, «The London Millennium Footbridge,» *The Structural Engineer,* vol. 79, nº 22, pp. 17-33, 2001.

[2] A. N. Bleckherman, «Autoparametric Resonance in a Pedestrian Steel Arch Bridge: Solferino Bridge, Paris,» *Journal of Bridge Engineering,* vol. 12, nº 6, pp. 669-676, 2007.

[3] V. Racic, A. Pavic y J. M. William Brownjohn, «Moder facilities for experimental measurement of dynamic loads induced by humans: A literature review,» *Shock and Vibration,* vol. 20, pp. 53-67, 2013.

[4] M. C. Araújo Jr, H. M. Braga Fernandes Brito y R. Leal Pimentel, «Experimental evaluation of synchronisation in footbridges due to crowd density,» *Structural Engineering International,* nº 3, pp. 298-303, 2009.

[5] J. Yoshida, Y. Fujino y T. Sugiyama, «Image processing for capturing motions of crowd and its application to pedestrian-induced lateral vibration of a footbridge,» *Shock and Vibration,* nº 14, pp. 251-260, 2007.

[6] F. Zheng, S. Ling, V. Racic y J. Brownjohn, «Measuring human-induced vibrations of civil engineering structures via vision-based motion tracking,» *Measurement,* nº 83, pp. 44-56, 2016.

[7] R. Elwell y R. Plokar, «Incremental Learning of concept Drift in Nonstationary Environments,» *Transactions on Neural Networks,* vol. XXII, nº 10, pp. 1517-1531, 2011.

[8] S. Grossberg, «Competitive Learning: From Interactive Activation to Adaptive Resonance,» *Cognitive Science,* nº 11, pp. 23-63, 1987.

[9] B. D. Lukas y T. Kanade, «An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision,» de *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Vancouver, 1981.

[10] D. Comaniciu, V. Ramesh y P. Meer, «Real-Time Tracking of Non-Rigid Objects using Mean Shift,» de *IEEE COnference on Computer Visiona and Pattern Recognition*, 2000.

[11] K. Fukunaga y L. D. Hostetler, «The Estimation of the Gradient of a Density Function, with Applications in Pattern Recognition,» *Transactions on Information Theory,* vol. 21, nº 1, pp. 32-40, 1975.

[12] S. Avidan, «Support Vector Tracking,» *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,* vol. 26, nº 8, pp. 1064-1072, 2004.

[13] J. Jeong, T. Sung Yoon y J. Bae Park, «Mean shift tracker combined with online learning-based detector and Kalman filtering for a real-time tracking,» *Expert Systems With Applications,* nº 79, pp. 194-206, 2017.

[14] R. E. Kalman, «A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,» *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering,* nº 82, pp. 35-45, 1960.

[15] R. Faragher, «Understanding the Basis of the Kalman Filter Via a simple and Intuitive Derivation,» *IEEE Signal Processing Magazine,* pp. 128-132, 2012.

[16] O. Javed, S. Ali y M. Shah, «Online Detection and Classification of Moving Objects Using Progressively Improving Detectors,» de *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision abnd Patter Recognition*, San Diego, 2005.

[17] J. Santner, C. Leistner, A. Saffari, T. Pock y H. Bischof, «PROST: Parallel Robust Online Simple Tracking,» de *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Francisco, 2010.

[18] Z. Kalal, J. Matas y K. Mikolajczyk, «Online learning of robust object detectors during unstable tracking,» de *3rd On-line Learning for Computer Vision Workshop*, Kyoto, 2009.

[19] J.-Y. Bouguet, «http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/,» [En línea]. Available: http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/.

[20] J. Heikkilä y O. Silvén, «A four-step camera calibration procedure with implicit image correction.,» *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1997. Proceedings.,* 1997.

[21] A. Sobral y A. Vacavant, «A comprehensive review of background subtraction algorithms evaluated with synthetic and real videos.,» *Computer Vision and Image Understanding,* nº 122, pp. 4-21, 2014.

[22] K. E. A. van De Sande, T. Gevers y C. G. M. Snoek, «Evaluation of color descriptors for object detection and scene recognition.,» *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition: CVPR 2008,* pp. 1-8, 2008.

[23] M. L. Miller, H. S. Stone y I. J. Cox, «Optimizing Murty's Ranked Assignment Method,» *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,* vol. XXXIII, nº 3, pp. 851-862, 1997.

Different criteria for tuning TMDs: performance considering frequency and time simulations

Magdaleno, Álvaro[1]; Cara, Javier[2]; Pérez, Elena[3]; Casado, Carlos[4]; Lorenzana, Antolín[3]

ABSTRACT

Structures subjected to non-deterministic excitations can undergo relevant stresses and accelerations that can compromise some limit state criteria. This can happen, for example, in lightweight footbridges under pedestrian crossing or in skyscrapers withstanding typhoon winds or earthquake tremors. Passive, semi-active and active vibration control devices have been proposed as solutions to reduce the level of vibration. This study is focused on two Tuned Mass Dampers (TMD) installed on a two degree of freedom building model subjected to a deterministic seismic load (El Centro earthquake). Their tuning parameters are obtained through the minimization of some scalar values (called "indicators") calculated from the time domain response of the ensemble as well as from its frequency response functions. The genetic algorithm of Matlab is used for solving the optimization problems and both frequency and time domain approaches are compared in order to draw some conclusions about the performance of each indicator.

Keywords: Tuned Mass Damper, seismic excitation, shear building model, optimization

1. INTRODUCTION

During the last years, the structural and construction industries have undergone a huge improvement of their techniques, which has led to build lighter and more slender structures. Therefore, their response in terms of displacements and accelerations became significant when dynamic loads (wind, earthquake or human-induced forces) are applied to them. Many solutions have already been sought to deal with this problem including active and semi-active control and passive devices. In this work, only the passive approach with the Tuned Mass Damper (TMD) is taken into consideration for reducing the level of vibration induced by a seismic excitation applied on the basement of a two-storey building model.

TMDs were born during the 1920s in the naval engineering domain and where presented by Hermann Frahm as a solution to reduce the lateral movements of big ships [5]. Since then, their interaction with the structures to which they are attached has been under study with the aim of improving their efficiency and design. One of the most important and known works about it is the one written by J.P. Den Hartog in 1928 which established the basics of the theory of TMDs [3]. He performed a deep research about the Frequency Response Function (FRF) of a single degree of freedom (SDOF)

[1] *ITAP. Universidad de Valladolid (SPAIN). alvaro.magdaleno@uva.es (Corresponding author)*
[2] *ETSII. Universidad Politécnica de Madrid (SPAIN). fjcara@etsii.upm.es*
[3] *ITAP. Universidad de Valladolid (SPAIN). elena@eii.uva.es; ali@eii.uva.es*
[4] *Centro Tecnológico CARTIF. Boecillo, Valladolid (SPAIN). carcas@cartif.es*

undamped model subjected to variety of loads in order to show the influence of the addition of a passive mitigation device on them. With his approach, G.B. Warburton [6] obtained, during the 1980s, a set of closed-form formulae to estimate the properties of a single TMD attached to a SDOF system which minimize some representative value of a FRF.

Since then, and following the research line opened by Den Hartog and Warburton, more complex structural models have been studied to optimize the properties of one or multiple TMDs, but almost always considering only the frequency response of the system [7][8][9]. The time domain responses have had a negligible impact on the further works. The aim of this paper is to show two simple time domain indicators used to obtain the optimal parameters of a set of TMDs and compare their performance with the traditional frequency approach. Those indicators are the maximum of the acceleration responses $\ddot{x}(t)$ and the area under their curve. Both are obtained by calculating the response of the model subjected to the El Centro (1940) earthquake accelerogram (Figure 1).

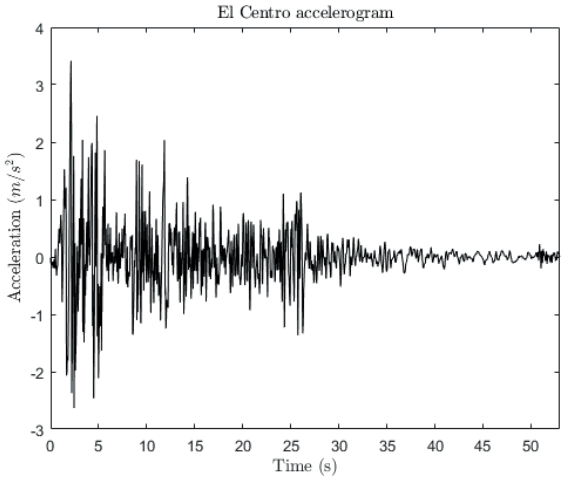


Figure 1: *El Centro accelerogram.*

Yet another two time-based indicators will be calculated with the purpose of comparing the solutions: the total amount of energy dissipated by the TMDs and the Maximum Transient Vibration Value (MTVV) of the acceleration response of the model. Both will be defined in following sections together with the criteria to decide whether a solution is better than another.

2. MODELLING AND IDENTIFICATION

2.1. Building identification and mathematical modelling

To perform some tests, a model representing a scaled two-story building prototype has been manufactured (Figure 2, right). It is fully modular, being possible to join any number of units to form a N degrees of freedom model. In this case, only two modules are joint together: one of 0.5 m and the other 0.75 m height, making a 1.25 m height model. For the sake of obtaining its physical and modal properties it is placed on a seismic table. The motion mechanism of the table is declutch so the test is performed by applying an impact in the base (measured input acceleration) and recording the

response of every floor (output accelerations). By correlating both output signals to the input one the FRFs of the system can be directly computed to update a mathematical model.

The physical properties of the model are obtained by performing a curve fitting between the experimental FRFs and the analytical ones. The latter ones are obtained through a state-space description of the system, which is schematically represented in Figure 2, left. It can be easily described by a matrix approach, with the mass (M), stiffness (K) and damping matrix (C) shown in Equations 1 and 2. Here, m_1 and m_2 are the floor masses and k_1 and k_2 are the stiffness constants of the columns under each floor. Using the mass and stiffness matrix, the eigen problem $\left(-\omega_i^2 M + K\right)\phi_i = 0$ can be computed to calculate the natural frequencies (ω_i) and mode shapes (ϕ_i), the latter ones put together columnwise in the V matrix. Finally, in this work, and without loss of generality, damping is defined through the modal damping ratios (ξ_i). $\tilde{C}$ is the modal damping matrix, a diagonal matrix whose elements are equal to $2\xi_i\omega_i$. Equation 2 provides the way to obtain the damping matrix C from the modal one making use of the modal matrix V.

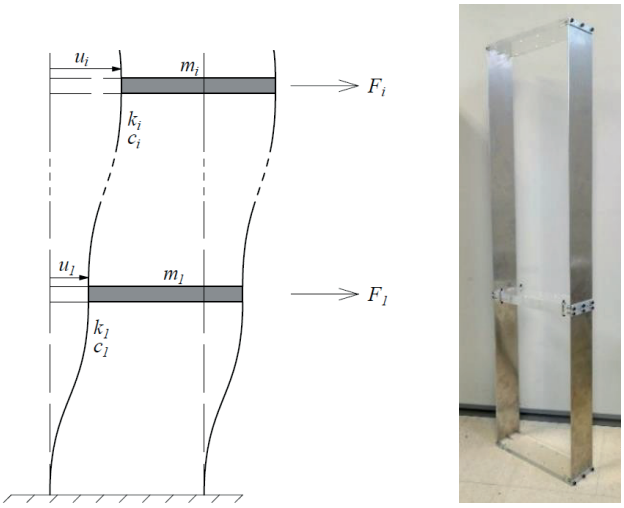


Figure 2: *Scale structure: left, the 2-floor schematic model; right, actual 2-floor building.*

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$C = V^{-T}\,\tilde{C}\,V^{-1} \tag{2}$$

The equations of motion of the system can be easily written with the matrices described above as shown in Equation 3, where q is the degrees of freedom column vector: $q = [u_1, u_2]^T$. Here, the seismic excitation is already considered through the mass matrix (M), the vector r which distributes the excitation through every degree of freedom of the model (a ones column vector in this case) and the ground acceleration a_b.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = -Mr\,a_b \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{4}$$

$$A = \begin{bmatrix} \emptyset_{2x2} & I_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \emptyset_{2x1} \\ r \end{bmatrix} \qquad C = [-M^{-1}K \quad -M^{-1}C] \qquad D = \emptyset_{2x1}$$

As stated before, a state-space description is sought to calculate the FRFs of the system and to perform the time simulations. The state-space model is shown in Equation 4, where A is the state matrix, B is the input matrix, C is the output matrix and D is the feedforward matrix, all calculated from the physical matrices M, C and K. For doing so, the state vector x is designed containing both the displacements and velocities of the system: $x = [q, \dot{q}]^T$. The input vector u is the ground acceleration ($u = a_b$) and the output vector is the acceleration of each floor ($y = \ddot{q}$), so the correlations between output and input of this model are the correlations between the measured accelerations. Finally, $\emptyset_{mxp}$ is a $m\ x\ p$ zeros matrix and I_m is the m-dimensional identity matrix.

This approach has been programmed in the Matlab programming environment making use of its native modelling functions: *ss()* for creating the model, *tf()* to calculate its transfer functions (FRFs) and *lsim()* to perform the time simulations. To obtain the physical properties of the real model, a curve fitting must be carried out. In this way, the squared errors between analytical and experimental FRFs are minimized to get its six unknown properties: m_1, m_2, k_1, k_2, ξ_1 and ξ_2. To help to obtain a good solution as fast as possible, all parameters are constrained so as the masses are only positive and less or equal to $5\ kg$, stiffness constants are comprised between 100 and $6000\ N/m$ and damping ratios can take values between 0.01 and $5\ \%$. The properties of the identified model are shown in Table 1 and the curve fitting is shown in Figure 3.

Table 1: Properties of the identified model

$M_1 = \ 2.17\ kg$	$K_1 = \ 1210\ N/m$	$\xi_1 = \ 0.41\ \%$
$M_2 = \ 1.76\ kg$	$K_2 = \ 341.4\ N/m$	$\xi_2 = \ 0.11\ \%$

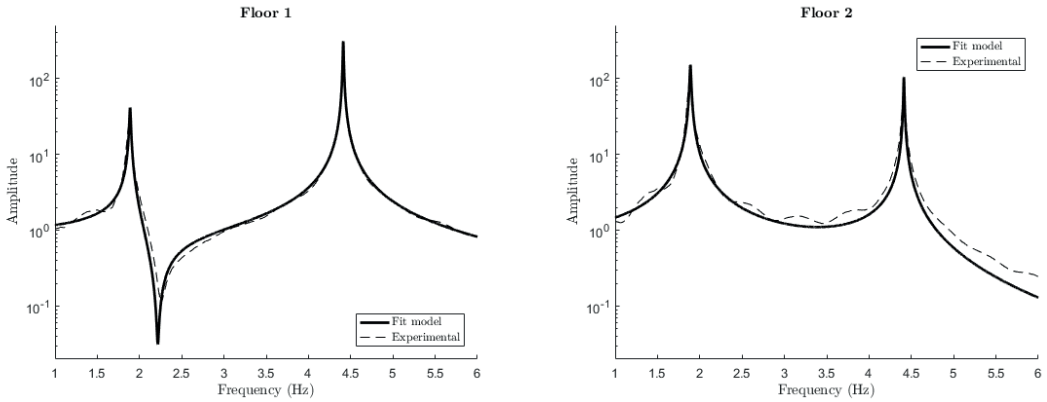


Figure 3: *Result of the curve fitting of the experimental FRF*

Finally, solving the eigen problem presented above, these physical properties lead to the natural frequencies $f_1 = 1.89\ Hz$ and $f_2 = 4.41\ Hz$ ($\omega_1 = 11.88\ rad/s$ and $\omega_2 = 27.71\ rad/s$) and the mass normalized natural mode shapes shown in Figure 4, where the maximum of the first mode corresponds to the second floor (as expected) and the maximum of the second mode corresponds to the first floor.

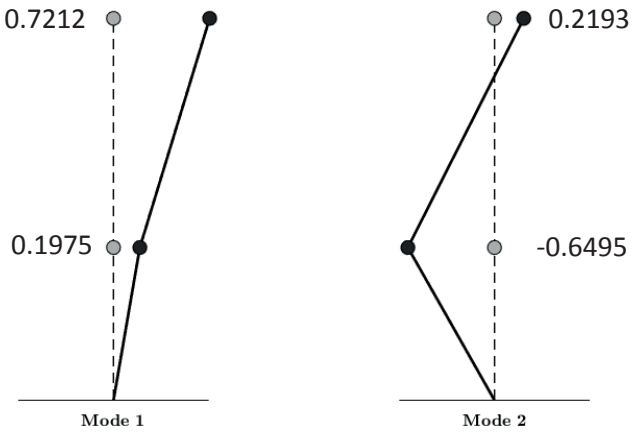


Figure 4: *Natural mode shapes of the model*

2.2. TMD modelling

For this work, the conceptual model of a TMD is shown in Figure 5 and easily included in the mathematical model presented previously. The addition of a TMD involves the addition of a degree of freedom to the system and thus the three physical matrices M, C and K increase by a row and a column. The mass m_j of the TMD is directly added in the new diagonal position of M. Its stiffness k_j is put in the new diagonal position of the stiffness matrix, summed up to the corresponding diagonal position of the floor to which the TMD is attached (floor j) and two more negative terms ($-k_j$) are placed in the intersections of the rows and columns affected by the previous operations. The damping constant c_j is added exactly in a similar way. In other words, adding a TMD to the physical matrices involves the assembly of the original matrices and the TMD matrices shown in Equation 5. In order to add a second TMD, the same procedure must be followed.

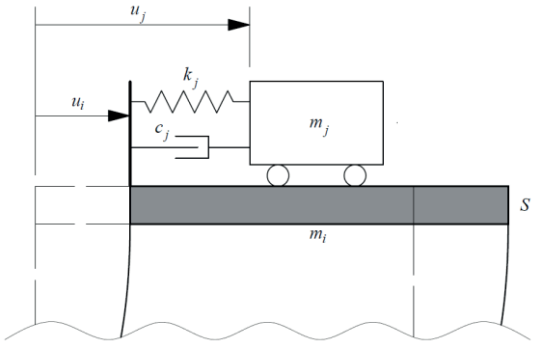


Figure 5: *TMD number j attached to the floor number i*

$$M_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_t \end{bmatrix} \qquad K_t = \begin{bmatrix} k_t & -k_t \\ -k_t & k_t \end{bmatrix} \qquad C_t = \begin{bmatrix} c_t & -c_t \\ -c_t & c_t \end{bmatrix} \tag{5}$$

The state-space model of the assembled system is calculated in the same way as before, including the TMDs accelerations in the output vector. This model is used through the entire work to perform the necessary optimizations and it is programmed inside the cost functions which provide the value of the indicators for each set of TMDs properties.

3. FREQUENCY DOMAIN APPROACH

In this section, only the most common indicator in the frequency domain is considered. It is the peak of a FRF, also known as the H-infinity norm of the function. Regarding only the accelerances of the system (FRFs in accelerations), four major combinations can be thought of: the maximum of a single FRF in a limited range of frequencies around a natural frequency, maximum of every FRF in a limited range around a natural frequency, maximum of a single FRF in a broader range of frequencies including several natural frequencies and maximum of all the FRFs in the same broader range. In addition, when more than one FRF is taken into consideration the sum of all maxima may be also computed and minimized. All this leads to a great number of scenarios as the optimizations can be carried out also for one or two TMDs. To simplify the task of managing the results, the cases to discuss will be named after the number of FRFs considered ('*Si*' for a single, i^{th} floor, and '*A*' for both floors) and the range of frequency considered ('*Lj*' for limited range around the j^{th} natural frequency and '*W*' for the whole range), preceded by an 'F' (from Frequency domain).

As commented before, when the ranges of frequencies are limited they are established around a natural frequency of the original structure. The range must include also all the double peaks caused by the addition of the TMD. Because only a two degrees-of-freedom model is considered, only two limited ranges will be taken into consideration: L1 with frequencies between 0.5 and 3 Hz and L2 between 3 and 6 Hz. When no limits are established for the range, maxima are searched all over the range from 0.5 to 6 Hz.

The case in which only one TMD is tuned to reduce the maximum of a FRF in a limited range of frequencies is the problem solved by Den Hartog and Warburton [3][6], leading them to propose a set of formulae for a one DOF undamped system. For the case of seismic excitation, formulas in Equation 6 may be applied, where f_{opt} is the ratio between the tuning frequency and the natural frequency of the system, ξ_{opt} is the damping ratio and μ is the mass ratio, the ratio between the TMD mass and the structural modal mass*. Just for the sake of comparison, those formulas will be applied and, for results management reasons, the next terminology will be used: '*DHij*', where i means where the TMD is placed and j which mode is to be reduced.

$$f_{opt} = \frac{1}{1+\mu}\left(\sqrt{\frac{2-\mu}{2}}\right) \qquad \xi_{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}\sqrt{\frac{2}{2-\mu}} \tag{6}$$

4. PROPOSAL OF TIME DOMAIN APPROACH

The aim of this work is to present a set of indicators based on the time response of the structure with TMDs. Two different types are proposed, each having different possibilities for calculating: the

* Here, the modal mass of a structure at a certain degree of freedom for a certain mode is the mass of the equivalent one degree of freedom model whose response is the same than the one of the DOF of the structure when both are subject to the same harmonic excitation at the natural frequency of the considered mode.

maximum of the response acceleration (TM) and the area under its curve (TA). In brackets the acronym for each case, starting both by T (for Time) and following the identifier: M for maximum or A for area.

4.1. Peak acceleration value

The philosophy of this indicator is the same than the frequency case: to minimize the peak response but in the time domain after computing the corresponding responses through the state-space formulation presented in Chapter 2. A notable reduction of the response is expected, especially around the regions with a higher response, but, globally, it may not be minimal. Once again, the number of different cases is high: it can be computed for a single response ('S1','S2') or for all of them ('A'); in the latter situation, the indicator may contain the maximum of all the maximum values of each floor ('AM') or, alternatively, the sum of them all ('AS'). And again, one or two TMDs can be sought to perform the optimization. Equation 7 show the mathematical definition for each case.

$$TMSj = \max(\ddot{x}_j) \quad ; \quad TMAM = \max\left(\max_{j}(\ddot{x}_j)\right) \quad ; \quad TMAS = \max\left(\sum_{j}\max(\ddot{x}_j)\right) \tag{7}$$

4.2. Area under the acceleration response curve

To perform a global minimization of the response, the area under the curve of the time history of the response can be computed and minimized. Unlike in the previous situation, the maximum value of the time response may not be minimal this time but rather the total amount of movement during the whole simulation time. The indicator is named TA and, once again, it can be computed for a single floor ('S1','S2') or the sum of them all ('AS').

$$TASj = \int_0^T \ddot{x}_j(t)dt \quad ; \quad TAAS = \sum_j \int_0^T \ddot{x}_j(t)dt \tag{8}$$

Once these four criteria (F, DH, TM, TA) are used to tune the TMDs, a bunch of solutions will be obtained and to make some decisions their performance must be evaluated. For doing so, two standard quality indicators are to be computed: the dissipated energy by the TMDs and the Maximum Transient Vibration Value.

4.3. Dissipated energy

One of the main objectives of a TMD is to dissipate part of the energy which enters the structure. For doing so, it must be properly tuned to make the energy enter the TMD and, during the exchange, a part of it is evacuated. Its elastic parts (k_t) help to redistribute the energy around the system, its mass (m_t) collect a part of this energy and, finally, the damping system (c_t) dissipates the other part. One way to evaluate the performance of a TMD can be to compute the amount of energy dissipated by its damping parts using the Equation 9, where $\dot{x}_j$ is the velocity of the TMD relative to the ground, $\dot{x}_i$ is

the velocity of the floor where the TMD is attached to (also relative to the ground) and T is the total simulation time.

$$W_{Cj} = \int_0^T c_j \left(\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t)\right)^2 dt \tag{9}$$

This equation shows that the indicator increases with the damping constant but it also depends on the relative velocity between both TMD and its floor. So, if c_t is too high the relative velocities may experience a notable reduction and, thus, a reduction of the indicator (of the dissipated energy). It is for this reason that it exists an optimum value for the damping constant.

This indicator is named WC and followed by a number indicating the number of the TMD to which it refers in the considered scenario.

4.4. Maximum Transient Vibration Value

Finally, the Maximum Transient Vibration Value (MTVV) is also very interesting to compare the performance of each solution. It is a standard indicator defined in the ISO 2631 in relation to the human perception of vibration. It is calculated as the maximum of the RMS trend curve of a signal (here, the response of the structure). The RMS trend curve is obtained, point by point, as the root mean square (RMS) of a one second window of the acceleration response (Equation 10) and, for assuring a good likeness with the original data, each window will be overlapped 50% (0,5 s). This result in a smooth enough curve whose points are separated 0.5 s and whose maximum is the indicator sought. As an example, Figure 6 shows an acceleration signal (grey) and its RMS trend curve (black) calculated as explained above, together with its maximum: the MTVV.

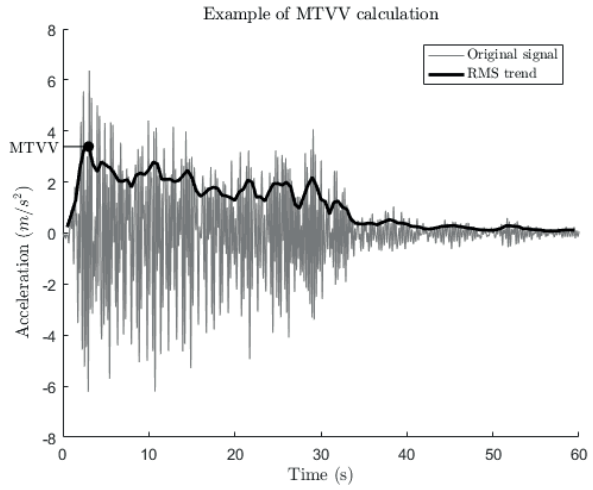


Figure 6: *Example of RMS trend and MTVV calculation*

$$MTVV = \max_{\mathrm{j}} \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i \ddot{x}\left(\Delta t_j\right)^2} \qquad with\ \Delta t_j = [t_1 \quad \dots \quad t_i \quad \dots \quad t_N] \tag{10}$$

This indicator is, of course, very close to the TM indicator and a great correlation between both is expected to be found. However, the RMS calculation reduces enormously the peaks, making the signal smoother, and if the original signal contains a narrow enough peak, it may disappear when calculating the RMS trend. Nevertheless, and in general terms, low values of MTVV are expected when the TM criteria will be used.

5. RESULTS

All the optimizations are computed using the general genetic algorithm included in Matlab (*ga()* function) with each cost function of every case presented here programmed separately. For almost every problem solved two situations have been thought of: the installation of one TMD (solutions ended by '_1T') or two TMDs (ended by '_2T'), except for Den Hartog ones, which only accepts the addition of one TMD. In all cases, the variables to optimize are the same: masses, tuning frequencies, tuning damping ratios and position of every TMD. It results in 4 variables per TMD. To have a better quality and faster convergence some constraints are applied to the optimization problems: the sum of the masses is limited to the 3% of the total mass of the structure; they must be, of course, strictly positive; frequencies are bounded to 0.5 and 6 Hz; damping ratios must be comprised between 0 and 1; and finally, the position values must be the integers 1 or 2.

The following tables of solutions do not contain the whole set of solutions, but rather a representative selection for discussion. In the case of frequency domain (Table 2), first one TMD is first optimized to minimize the FRF of the 2nd floor (S2) around first mode (L1) (FS2L1_1T) and another TMD for the second mode (L2) on the 1st floor (S1) (FS1L2_1T). Both solutions are compared with those computed using Den Hartog formula (DH12 and DH21). Then, two TMDs are put on the structure to minimize simultaneously the first mode on the 2nd floor and the second mode on the 1st floor (FS2L1_S1L2_2T). After that, two TMDs are obtained for minimizing the whole 2nd floor FRF (FS2W_2T) and another two TMDs for reduce the first mode in all FRFs as much as possible (FAL1_2T). Finally, two TMDs are obtained to minimize the maximum of all the FRFs in the whole range (FAWM_2T) and another two to minimize the sum of all those maxima (FAWS_2T). For every case, both comparing indicators are computed as well: the energy indicator for every TMD and the MTVV for both floors of the structure.

In the time domain, also a reduced set of solutions is shown. Firstly, one and two TMDs have been sought to minimize the maximum of the 2nd floor's response (TMS2_1T and TMS2_2T). In the case of two TMDs, also the stroke[†] of the TMDs has been minimized because the optimization led to zero damping and, consequently, very high strokes. After that, one and two TMDs are designed to reduce the maximum of both responses (1st and 2nd floors simultaneously, TMAM_1T and TMAM_2T). The sum of all of them is also minimized but only with two TMDs (TMAS_2T). Then, one and two TMDs are considered to reduce the area under the curve response of the top floor (TAS2_1T and TAS2_2T) and finally one and two TMDs have been put on the structure to reduce the total area of all responses (TAAS_1T and TAAS_2T).

[†] The stroke is defined here as the relative displacement between a TMD and the floor to which it is attached. For doing so, the corresponding data from the state vector are extracted during the optimization.

Table 2: Solutions from optimizations in the frequency domain

Case	$m_j\ (kg)$	$f_j\ (Hz)$	$\xi_j\ (\%)$	p_j	$W_{Cj}\ (J)$	$MTVV_j\ (m/s^2)$
FS2L1_1T	0.119	1.79	14.63	2	2.51	8.08 ; 6.07
FS1L2_1T	0.119	4.21	13.04	1	0.31	3.97 ; 12.64
DH12	0.119	4.15	13.55	1	0.87	5.39 ; 13.44
DH21	0.119	1.75	15.01	2	2.50	8.10 ; 6.10
FS2L1_ S1L2_2T	0.064 0.055	1.83 4.31	10.79 9.26	2 1	2.50 0.22	3.66 ; 6.80
FS2W_2T	0.115 0.004	1.79 4.40	14.7 2.66	2 1	2.45 0.22	4.10 ; 6.13
FAL1_2T	0.038 0.081	1.98 1.71	9.83 10.93	2 2	0.82 1.70	8.25 ; 5.94
FAWM_2T	0.087 0.032	1.81 4.36	12.66 7.18	2 1	2.46 0.21	3.72 ; 6.47
FAWS_2T	0.069 0.050	1.83 4.32	11.66 8.67	2 1	2.50 0.22	3.68 ; 6.73

Table 3: Solutions from optimizations in the time domain

Case	$m_j\ (kg)$	$f_j\ (Hz)$	$\xi_j\ (\%)$	p_j	$W_{Cj}\ (J)$	$MTVV_j\ (m/s^2)$
TMS2_1T	0.119	1.85	2.87	2	1.94	8.59 ; 5.42
TMS2_2T	0.011 0.108	4.39 1.81	0.0 11.99	1 2	0.0 1.53	7.04 ; 5.91
TMAM_1T	0.119	1.86	29.45	2	2.75	7.54 ; 6.53
TMAM_2T	0.107 0.012	1.81 4.40	1.34 0.07	2 1	1.51 0.07	5.92 ; 5.97
TMAS_2T	0.105 0.014	1.80 4.24	2.02 4.82	2 1	0.19 1.65	3.46 ; 5.54
TAS2_1T	0.119	1.81	23.87	2	2.69	7.75 ; 6.38
TAS2_2T	0.112 0.007	1.83 4.36	12.22 2.56	2 1	2.41 0.20	3.77 ; 6.05
TAAS_1T	0.119	2.08	47.42	2	2.78	7.01 ; 8.61
TAAS_2T	0.091 0.028	1.83 4.36	11.04 5.37	2 1	2.42 0.21	3.71 ; 6.33

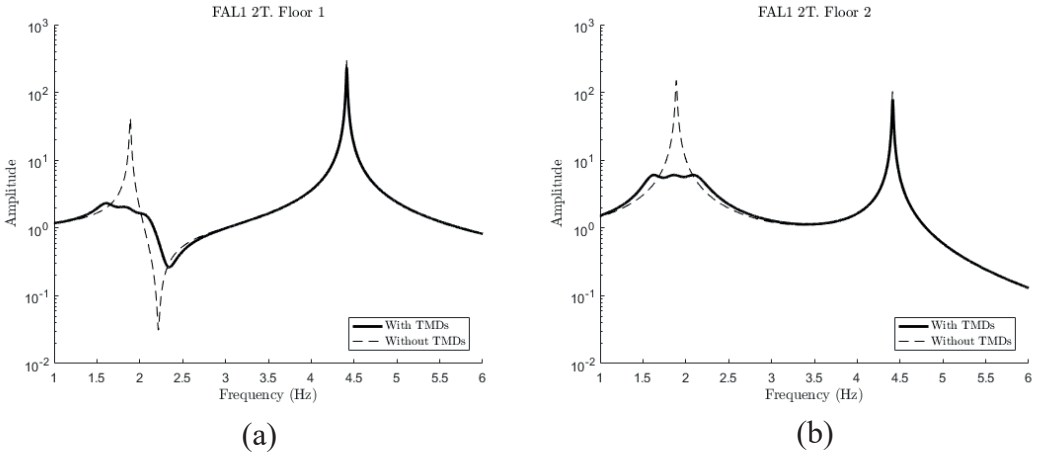


***Figure 7**: FRFs of the FAL1_2T case. (a) floor 1; (b) floor 2*

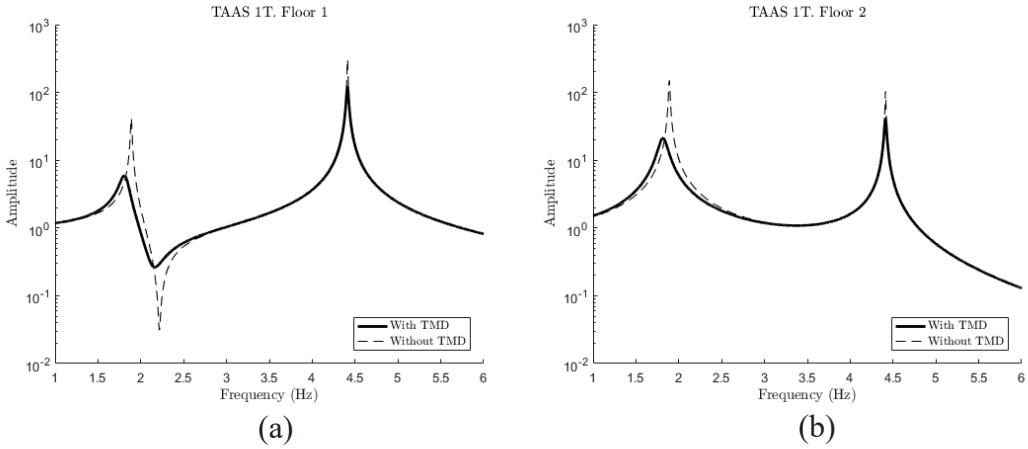


***Figure 8**: FRFs of the TAAS_1T case. (a) floor 1; (b) floor 2*

By observing the whole set of solutions, it can be stated that all tuning frequencies are focused always to one of the two natural frequencies of the structure, no matter what the objective to minimize was. In fact, TMDs placed on the top floor have their natural frequency a little below 1.89 Hz and the others, placed on the 1st floor have their frequency close to 4.41 Hz. The traditional approach of the problem considered already this fact, but the time domain optimizations (in which the frequencies do not take part explicitly) confirms the theory. There are only two exceptions. The first one is FAL1_2T case, which has two TMDs placed on the 2nd floor and both tuned to the first mode, one of them over 1.89 Hz. This is because of the Multi TMD effect: instead of resulting in a couple of peaks, this optimization leads to three perfectly levelled maxima in the proximity of the first natural frequency (Figure 7). The other exception is TAAS_1T, with the only TMD tuned at 2.08 Hz. (Figure 8) and with a very high damping ratio (0.4742) that does not affect meaningfully.

For showing an example of time responses, TAAS_2T case is shown in Figure 9. Figure 9a and 9b show (black line) the accelerations in the 1st and 2nd floor (respectively), compared with the response of the building without TMDs (dotted line). Figure 9c shows the energy dissipated by both TMDs, a function which grows monotonically and reaches an asymptote at the end of the simulation. This maximum, the sum of them all for each cases, is approximately the amount of energy that arrives to

the structure by its ground. Of course, the TMDs cannot dissipate more energy than that. Only a very small (almost negligible) amount of energy is gone through the damping of the structure itself.

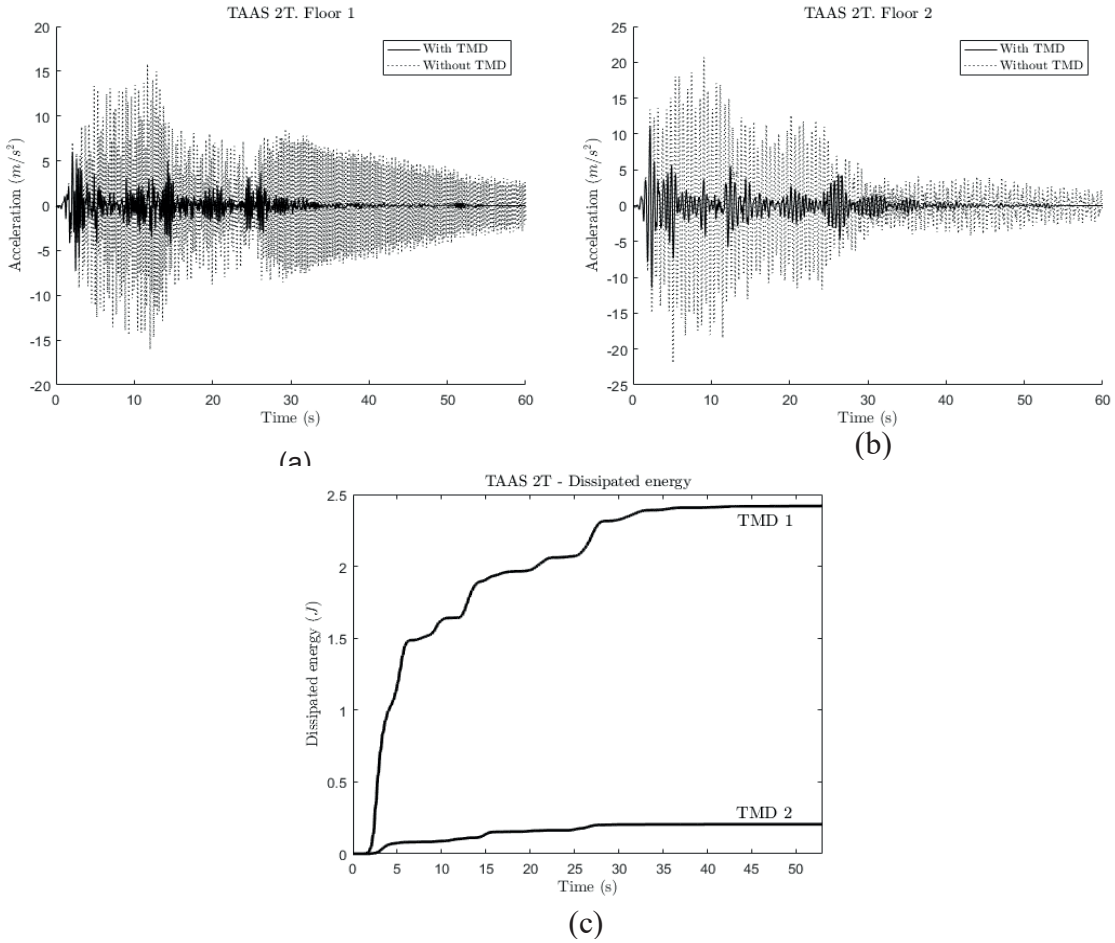


***Figure 9**: Example for time responses in terms of acceleration (m/s^2) and dissipation of energy (J)*

6. CONCLUSIONS

According to frequency domain indicators, the solution for the FS2L1_S1L2_2T case is the one that dissipates more ($2.72\ J$), together with FAWS_2T case, having both very similar tuning parameters (mass, frequency and damping ratio). FS2W_2T case is the solution with less MTVV ($6.13\ m/s^2$). Note that, in this case, although two TMDs are considered, a notable amount of mass is assigned to the one whose tuning frequency is close to the structure's first natural one.

FS1L2_1T and DH12 cases (TMD tuned to mode 2) are the worst, according not only to their low dissipation of energy (less than $0.88\ J$) but also to the high values for the MTVV (more than $12.6\ m/s^2$). From this point of view, both indicators seem to be correlated. Also, almost the rest of the "F" cases dissipate the same amount of energy (around $2.6\ J$) and the highest MTVV is around $6\ m/s^2$.

Regarding time domain indicators, TMAS_2T case is the one with less MTVV ($5.54\ m/s^2$) and, unexpectedly, the case which dissipates the biggest amount of energy is TAAS_1T ($2.78\ J$). However, TMAS_2T evacuates only $1.89\ J$ and the highest MTVV is the corresponding to TAAS_1T solution ($8.61\ m/s^2$), which is contradictory and shows that both indicators are not correlated.

For both families of indicators, Tables 2 and 3 show that many different optimizations lead to a similar amount of dissipated energy (around $2.7\ J$). According to Figure 9c, where W_{Cj} curves become asymptotic when given enough time, this quantity seems to be the quantity of energy injected from the ground to the structure during the earthquake. This result reveals that W_{Cj} indicator do not provide information about performance since this quantity of energy is reached for a lot of cases and it should be replaced by another value accounting not for the total dissipation during the whole simulation time ($60\ s$) but rather for the velocity of dissipation, changing the criteria to one where the more quickly energy dissipates the better.

Finally, TMAS_2T case is the one with less maximum MTVV ($5.54\ m/s^2$) so, for the El Centro loading, it is the best solution, but it remains to be checked if it is also the best solution for other types of seismic excitations. There are 9 cases (FS2L1_S1L2_2T, FS2W_2T, FAWM_2T, FAWS_2T, TMS2_2T, TMAM_2T, TMAS_2T, TAS2_2T and TAAS_2T) where the maximum MTVV values are under $7.1\ m/s^2$ and all of them require 2 TMDs, being the most massive one tuned to mode 1 and placed in the 2nd floor and the other tuned at mode 2 and placed in the 1st floor. This is a reasonable strategy, having in mind that the 2nd floor has the maximum modal coordinate for mode 1, 0.7212 and the 1st floor the maximum for mode 2, 0.6495.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to acknowledge to the partial support through Research Projects BIA2014-59321 and BIA2015-71942-REDT (Ministerio de Economía y Competitividad, Spanish Goverment).

REFERENCES

[1] G. W. Housner, L. A. Bergman, T. K. Caughey, A. G. Chassiakos, R. O. Claus, S. F. Masri, R. E. Skelton, T. T. Soong, B. F. Spencer, and J. T. P. Yao, “Structural control: past, present and future.,” J. Eng. Mech., vol. 127, pp. 887–971, 1997.

[2] M. D. Symans and M. C. Constantinou, “Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review,” Eng. Struct., vol. 21, pp. 469–487, 1999.

[3] J. P. Den Hartog, Mechanical vibrations. New York: McGraw-Hill Book Company, 1934.

[4] M. Abé and T. Igussa, “Tuned Mass Dampers for structures with closely spaced natural frequencies.,” Earthq. Eng. Struct. Dyn., vol. 24, pp. 247–261, 1995.

[5] H. Frahm, “Device for damping vibrations of bodies.” Google Patents, 1911.

[6] G. B. Warburton, “Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters,” Earthq. Eng. Struct. Dyn., vol. 10, no. 3, pp. 381–401, 1982.

[7] H. Yamaguchi and N. Harnpornchai, "Fundamental characteristics of Multiple Tuned Mass Dampers for suppressing harmonically forced oscillations," Earthq. Eng. Struct. Dyn., vol. 22, no. 1, pp. 51–62, 1993.

[8] F. Sadek, B. Mohraz, A. W. Taylor, and R. M. Chung, "A method of estimating the parameters of tuned mass dampers for seismic applications," Earthq. Eng. Struct. Dyn., vol. 26, no. 6, pp. 617–635, 1997.

[9] J. C. Miranda, "On tuned mass dampers for reducing the seismic response of structures," Earthq. Eng. Struct. Dyn., vol. 34, no. 7, pp. 847–865, 2005.

Adjustable TMD (in stiffness and damping) using magnets and coils

Hernández Ovidio[1], Poncela Alfonso[2] , López, Pablo[2] and , Ibán Norberto[2]

ABSTRACT

The work focuses on an adjustable tuned mass damper TMD, consisting of a moving mass, a spring and a damper with different pairs of magnets and coils attached. Where initial natural frequencies vary significantly in structural systems, it would be desirable to retune the inertial vibration mitigation devices. If the frequency of the system where the TMD is installed varies significantly, up or down, it will be possible to adapt the stiffness and damping by acting on the electromagnetic fields. Two magnets in opposition to two coils, placed symmetrically, whose field can be controlled by the variation of voltage, can change the stiffness of the spring. Depending on the polarity of the coils, a homogeneous response in repulsion or attraction can be stablished. When the magnets with the coils are in attraction the frequency decreases and when they are in repulsion the frequency increases, being the variation of the module of the frequency dependent on the intensity of the magnetic field. Likewise, the damping will be also adjusted to the new conditions of the structure, by the Eddy currents principle. For that, the interaction between an aluminium plate moving inside a magnetic field is modified by the voltage of another coil, allowing control of the damping.
These phenomena are applied in the lab case shown in Fig. 14, in order to provide a feasible benchmark to test.

Keywords: Tuned mass damper, passive and semiactive vibration control, repulsion or attraction, coils, electromagnetic fields.

1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día algunas estructuras civiles tienen diseños estéticamente muy llamativos y en ocasiones son sensibles a cargas de uso habitual como caminar, correr, etc. A resultas de todo esto los usuarios pueden llegar a experimentar incomodidad durante el tránsito e incluso sensación de inseguridad que es necesario corregir.

El origen del problema radica en que estas estructuras poseen frecuencias naturales bajas (entre 1 y 10 Hz), que son coincidentes con las frecuencias que puedan generar los peatones, de ahí el problema suscitado. Cuando esto ocurre, se perciben oscilaciones y vibraciones que pueden resultar molestas.
La solución más común para mitigar tales vibraciones es el ya conocido TMD (amortiguador de masas sintonizado, Tuned Mass Damper), que básicamente es un conjunto formado por una masa principal, resorte y amortiguador.

[1]*ITAP, EII,Universidad de Valladolid,(SPAIN). ovidio.hernandez@alumnos.uva.es, Poncela@eii.uva.es.*
[2]*Centro Tecnológico CARTIF, Boecillo, Boecillo Valladoli(SPAIN). pablop@cartif.es,noriba@catif.es*
NOTA: hdez_96@hotmail.com

Cuando este mecanismo (una vez adaptado a la estructura afectada) funciona correctamente, el sistema principal (estructura) se mueve en una dirección tal que excita al TMD (cuya masa móvil sigue con retraso el movimiento), logrando mitigar la vibración hasta niveles significativamente inferiores y posiblemente aceptables por los usuarios.

Este dispositivo lo que hace es desdoblar el pico de la función de respuesta en frecuencia FRF del sistema principal, disminuyendo por tanto el factor de amplificación de la respuesta en amplitudes y aceleraciones. Si el sistema principal no evoluciona a lo largo de su vida útil y mantiene sus características (masas, rigidez, amortiguamiento), el funcionamiento del TMD resulta efectivo. En caso contrario, las prestaciones decaen a medida que se desintoniza. Por esta razón, en este trabajo se plantea como solución la posibilidad de ajustarlo en todo momento a la situación particular de la estructura donde se halle instalado.

El TMD adaptable (de aquí en adelante lo llama AEM-TMD) va a permitir que, aunque a lo largo de la vida útil de la estructura puedan aparecer fenómenos que cambien sus propiedades modales y comportamiento dinámico (por envejecimiento de los materiales, modificación de la masa no estructural, etc.) el AEM-TMD siga teniendo el máximo rendimiento en la reducción de vibraciones y oscilaciones.

La frecuencia se va a variar mediante un doble conjunto imán-electroimán cuyo punto de trabajo se controlará mediante la tensión aplicada desde el sistema de control asociado.

Para modificar el amortiguamiento se usará un dispositivo similar a un freno electromagnético, consistente en una placa metálica no ferro-magnética a la que se aplicará el campo magnético generado un par de electroimanes cuya intensidad se controla (de nuevo desde el sistema de control asociado) para modificar el campo aplicado y por ende la fuerza de frenado.

El trabajo está organizado de la siguiente forma: tras esta introducción, se plantean los objetivos para seguidamente mostrar la evolución del desarrollo del dispositivo propuesto. Se finalizará con las conclusiones derivadas del trabajo realizado.

2. OBJETIVOS

Los objetivos particulares planteados son los siguientes:

- Exponer los fundamentos teóricos y matemáticos de los principios físicos que se van a usar.
- Diseñar dispositivos capaces de responder con los principios propuestos.
- Fabricar el dispositivo ideado: AEM-TMD.
- Modelar el conjunto AEM-TMD para su aplicación en un lazo de control.

3. DISEÑO PROPUESTO

3.1. Prototipo propuesto

El punto de partida va a ser un TMD tipo ménsula (voladizo horizontal) consistente en una pletina de aluminio (30mm de ancho, 440mm de largo y 2mm de espesor), empotrada en un extremo y con una placa (también de aluminio) en el otro a modo de masa principal (ver modelo en Fig. 1 y prototipo en Fig. 14). El amortiguamiento original del conjunto se ajustará situando un imán en las proximidades de la placa de tal manera que el movimiento relativo entre ambos induzca corrientes de Foucault que disipan energía proporcional a la velocidad relativa y por tanto generan amortiguamiento viscoso fácilmente modelable [Wikipedia].

Figura 1. *Ménsula*

Con el fin de evaluar experimentalmente la rigidez del prototipo (mediante la relación de Hooke), se aplican tres cargas (F) conocidas al extremo libre y mediante un sensor de desplazamiento tipo láser se mide la deformada estática. Los resultados se muestran en la *Tabla 1*. Para la configuración indicada la rigidez a flexión resulta ser de 61.617 N/m, siendo el coeficiente de regresión entre los tres valores tomados de 0.9992, como se indica en la Fig. 2.

Tabla 1. Datos para determinación de la rigidez del voladizo.

DISTANCIA(m)	FUERZA(N)
-0,00324	0,1962
-0,00628	0,3934
-0,00965	0,5915

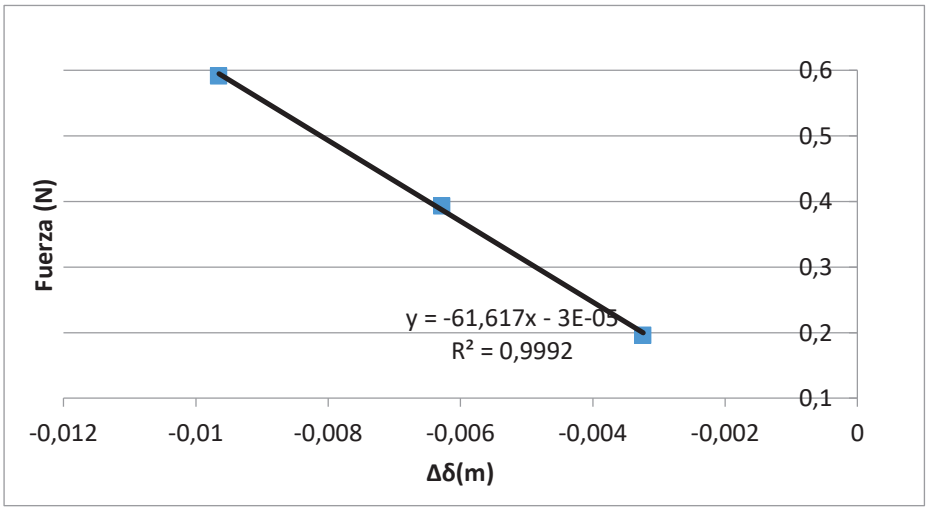


Figura 2. *Cálculo de la rigidez*

Para el cálculo experimental de la frecuencia y amortiguamiento se utiliza la respuesta temporal del sistema a un pequeño impulso. Para ello, se desplaza una cierta distancia el extremo libre de la ménsula y se libera. Con el láser se registran las oscilaciones. La medición de las frecuencias de dichas señales y el decaimiento exponencial permite determinar los parámetros buscados. De los cálculos se obtienen una frecuencia de 3.513Hz y, sin ningún imán en las cercanías de la placa, un coeficiente de amortiguamiento de 0.001. Con la instalación del sistema de rigidez, bobinas e imanes,

y amortiguamiento mínimo, se consigue un sintonizado adecuado de constante de rigidez 3.5332 Hz y un coeficiente de amortiguamiento 0.053 "base", Fig. 3.

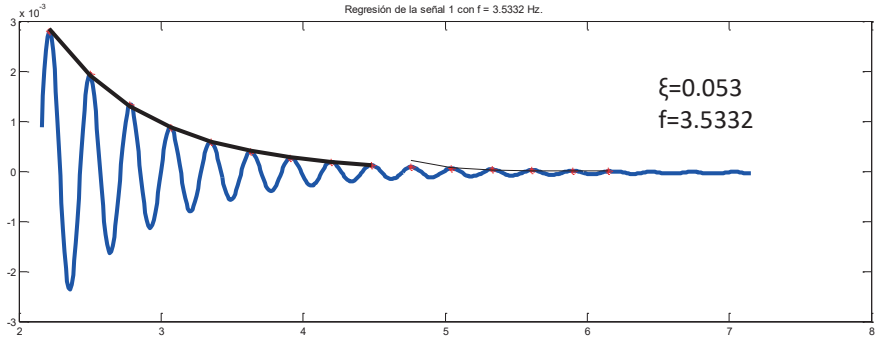


Figura 3. *Decaimiento exponencial de la señal para un sintonizado adecuado*

3.2. Ajuste del amortiguamiento mediante bobinas tipo “lapa”

El fenómeno físico de las corrientes de Foucault (corrientes parásitas también conocida como "corrientes torbellino", o eddy current en inglés), descubierto por el francés Léon Foucault en 1851, se usará para aumentar el amortiguamiento por encima del 0.053 establecido como “base”. Cuanto más fuerte sea el campo magnético aplicado, o mayor la conductividad del conductor, o mayor la velocidad relativa de movimiento, mayores serán las corrientes de Foucault y los campos opositores generados [Wikipedia].
En la placa metálica, al moverse dentro de un campo magnético, se generan corrientes que provocan una fuerza que se opone al movimiento, comportándose la misma como un amortiguamiento viscoso según la Eq.(1).

$$f_{frenado} = C\ v \tag{1}$$

donde la constante de proporcionalidad C depende del campo magnético del imán y de otros factores como la superficie, la conductividad del material y su espesor. También depende de σ1 y α2, parámetros que se mencionan en [1].

$$C = \sigma \delta B^2 S(\alpha_1 + \alpha_2) \tag{2}$$

En el caso bajo estudio, el valor de B depende del imán permanente instalado en las cercanías de la placa y de la tensión aplicada en las bobinas correspondientes, denominadas “lapas” (ver Fig.6 y Fig. 7. Como se observa en Eq. (1) (2), el valor de la fuerza de frenado es directamente proporcional a la velocidad de movimiento relativo y depende de la inducción del campo magnético (B) elevada al cuadrado, por eso se espera experimentalmente que el amortiguamiento tenga forma parabólica.
En la Fig. 4 se puede ver el primer prototipo montado. Incluye ménsula, placa y bobina correspondiente, aunque dispuestos de distinta forma a la definitiva mostrada en la Fig. 14.

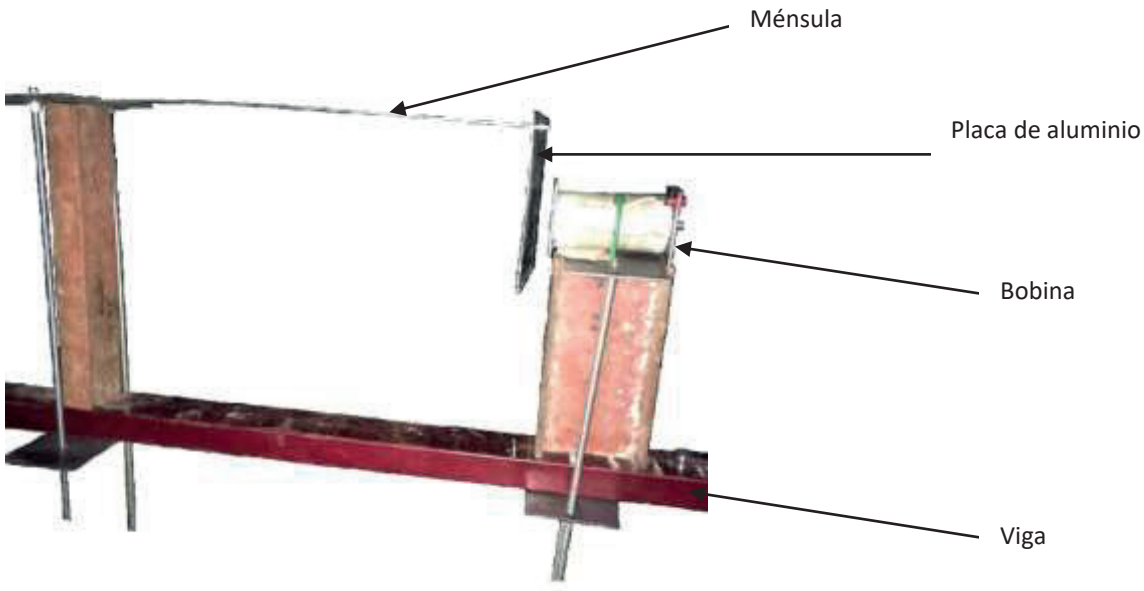


Figura 4. Versión 01 del AEM-TMD

Esta primera versión resultó ser poco práctica. La separación entre la bobina y la placa no se mantenía constante al moverse libremente el conjunto afectando negativamente al efecto del campo magnético sobre la placa. Adicionalmente la bobina resultaba muy pesada y con un alto consumo de corriente.

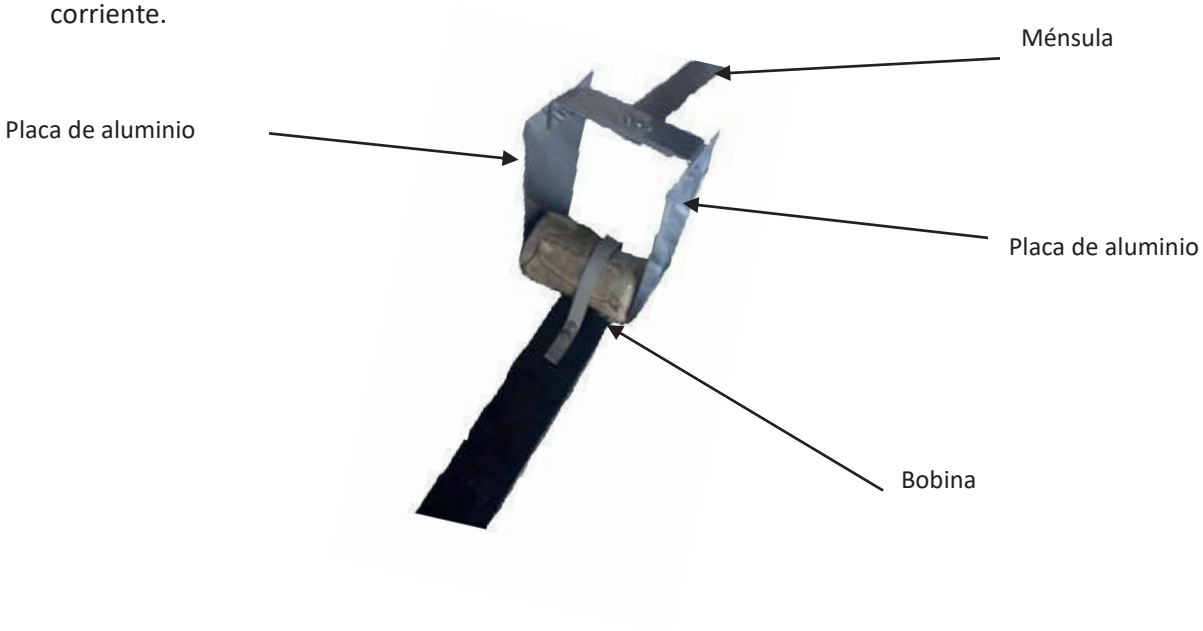


Figura 5. *Versión 02 AEM-TMD*

Con el fin de eliminar el problema de la falta de paralelismo del movimiento relativo placa bobina, se cambia el diseño inicial por el de la Fig. 5 en donde puede verse como en lugar de una placa se usan dos situadas a ambos lados de los polos de la bobina. El sistema mejora pero sigue siendo muy pesado y consumiendo mucha corriente.

Con el fin de solventar el problema de peso de la bobina y su alto consumo se recurre a electroimanes tipo lapa eléctrica mostrados en la Fig. 6, que con su disposición geométrica logran cerrar el campo electromagnético y ser más eficientes. Se disponen 2, como se muestra en la Fig. 7, logrando de esta manera un prototipo suficientemente funcional.

Figura 6. *Bobina lapa para el control del amortiguamiento (Soline Sucked Elecric Lifting Magnet Electromagnet) amazon*

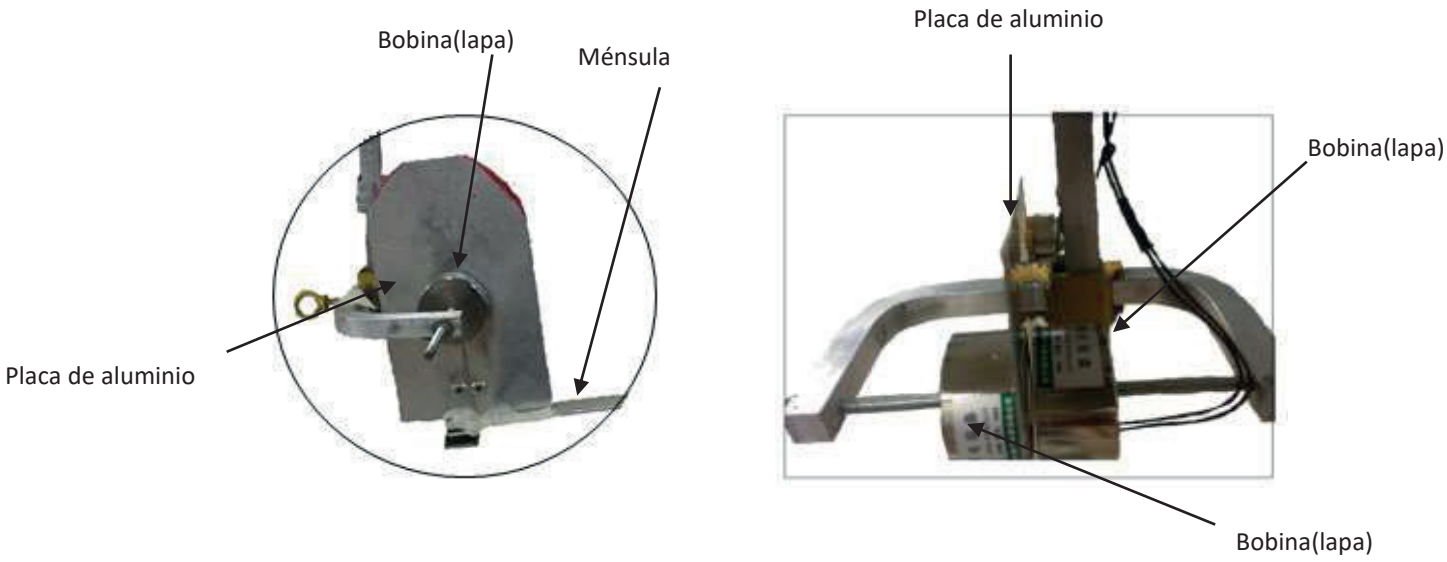


Figura 7. *Versión 03 AEM-TMD*

Sobre esta solución se realizaron pruebas para su caracterización. Se toman valores de tensión desde 0 hasta +24 V, obteniéndose los resultados mostrados en la *Tabla 2* y en la Fig. 8. Se ve cómo se pasa

de 0.053 a 0.094, consiguiendo un incremento del amortiguamiento del 77.35%. En la propia Fig. 8 se muestra el ajuste cuadrático resultante.

Tabla 2. Medición de amortiguamiento de las lapas

Bobinas (Vcc)	Amortiguamiento	Bobinas (Vcc)	Amortiguamiento
0	0,053	13	0,068
1	0,053	14	0,07
2	0,053	15	0,072
3	0,053	16	0,075
4	0,054	17	0,077
5	0,056	18	0,079
6	0,056	19	0,081
7	0,059	20	0,085
8	0,059	21	0,087
9	0,061	22	0,089
10	0,062	23	0,091
11	0,063	24	0,094
12	0,067		

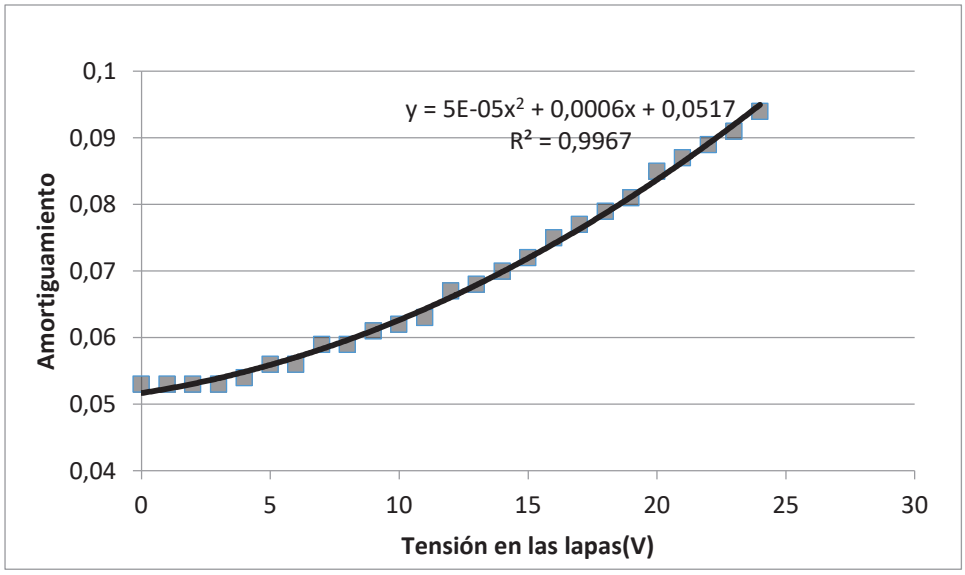


Figura 8. *Amortiguamiento vs tensión en las lapas*

3.3. Ajuste de la rigidez mediante combinación de bobinas e imanes permanentes

Se ha conseguido variar la rigidez de la ménsula mediante dos imanes permanentes y dos bobinas enfrentados en un punto dado de la ménsula, consiguiendo un apoyo "virtual" sin contacto cuya rigidez puede variarse en función de la interacción entre los campos magnéticos presentes. En la Fig. 9, puede verse la representación esquemática y en la Fig. 10 el efecto mecánico equivalente.

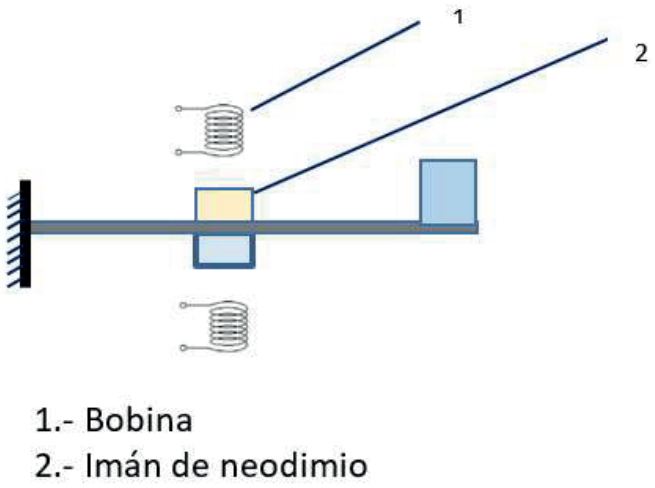


Figura 9. *Representación de la propuesta par variar la rigidez del TMD*

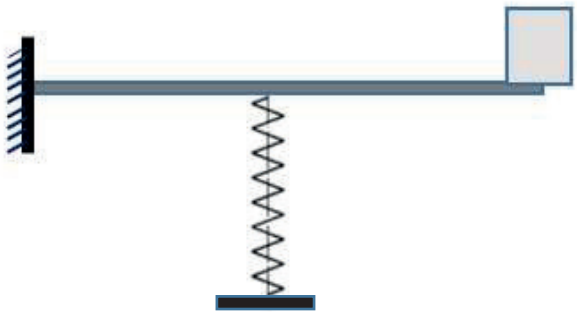


Figura 10. *Modelo ideal teórico de la propuesta para variar la rigidez del TMD*

En la Fig. 11 puede verse la primera tentativa de solución para control de la rigidez. Incluye una bobina y un imán. Se descarta, entre otras razones, por el bajo campo aportado por la bobina y por la elevada tensión de alimentación.

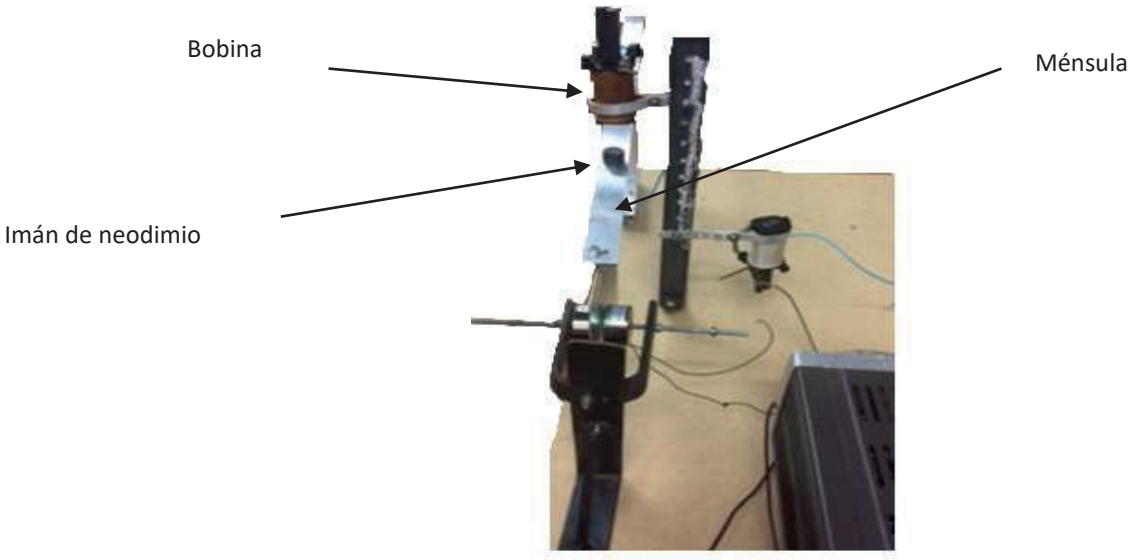


Figura 11. *Version 04 del AEM-TMD*

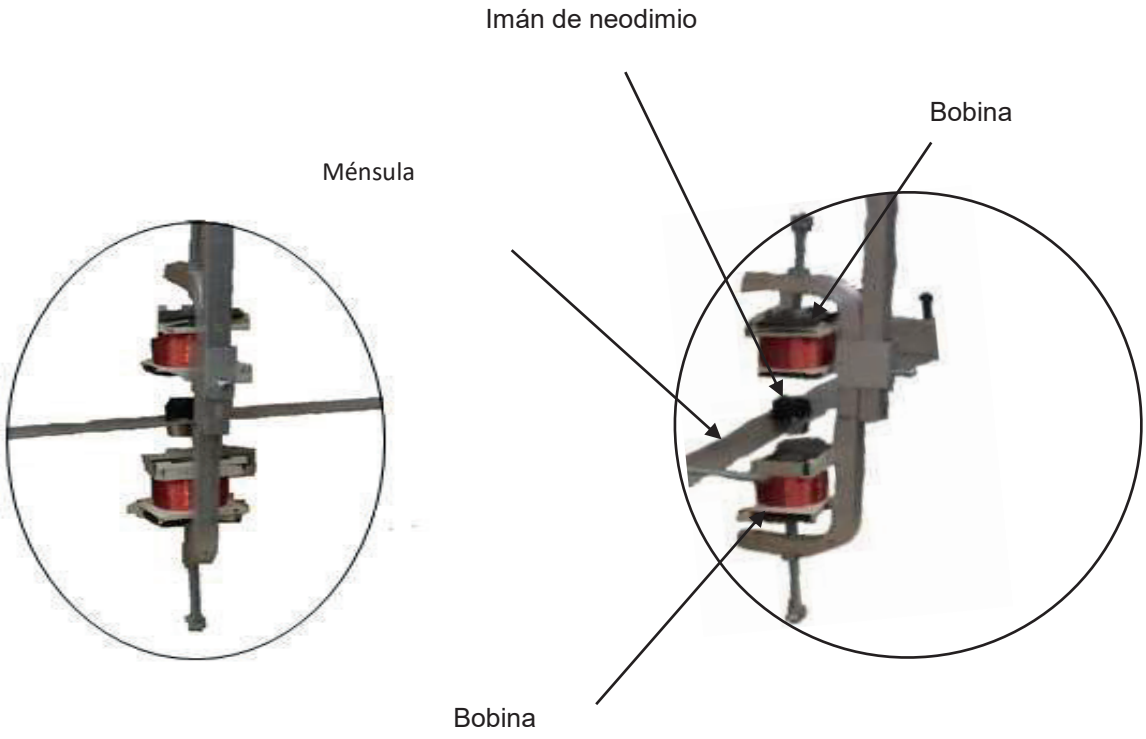


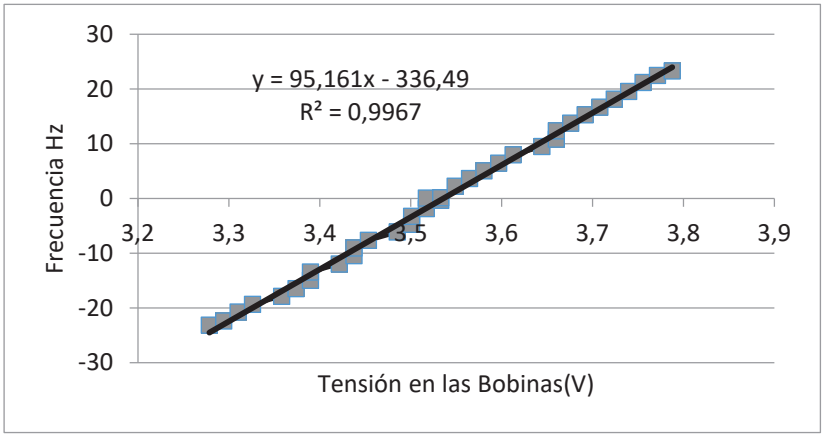
Figura 12. *Versión 05 del AEM-TMD para control de la rigidez (dos bobinas, dos imanes)*

Esos problemas se solucionaron mediante bobinas de contactores de bajo consumo (0.1A) y con tensión de alimentación de 24 V (para unificar tensiones respecto de las bobinas "lapa" presentadas previamente). Se eligió un montaje simétrico de bobinas-imanes para que la variación de la rigidez fuera más uniforme Fig. 12.

Mediante procedimientos ya indicados previamente, se registra la frecuencia del sistema tanto para tensiones positivas como negativas. La *Tabla 3* muestra los resultados obtenidos y la Fig. 13 el correspondiente ajuste a una recta [2].

Tabla 3. Datos de la frecuencia en función de la tensión en las bobinas

Tensión(V)	Frecuencia(Hz)	Tensión(V)	Frecuencia(Hz)
-23,2	3,2785	0	3,5332
-22,4	3,2945	0,07	3,5332
-20,8	3,3104	2,2	3,5491
-19,4	3,3263	3,6	3,565
-17,9	3,3581	5	3,5809
-16,5	3,374	6,4	3,5969
-15	3,39	7,9	3,6128
-13,5	3,39	9,4	3,6446
-12	3,4218	10,8	3,6605
-10,5	3,4377	12,3	3,6605
-9,1	3,4377	13,7	3,6764
-7,7	3,4536	15,2	3,6923
-6,2	3,4854	16,6	3,7083
-4,8	3,5014	18,1	3,7242
-3,3	3,5014	19,5	3,7401
-1,9	3,5173	21,1	3,756
-0,4	3,5332	22,4	3,7719
0	3,5332	23,2	3,7878



Como

Figura 13. *Curva de la variación de frecuencia en las bobinas*

conclusiones, se tiene que si la tensión es de 23.2 V la frecuencia aumenta un 7.2% y para -23.2 V la frecuencia disminuye también un 7.2%. Resulta por tanto que con el dispositivo realizado el rango de ajuste de frecuencia es de un 14.4%

3.4. Prestaciones del prototipo

La versión final del sistema diseñado (Fig. 14) se pueden resumir así: "dispositivo dotado de dos entradas de tensión que permiten aumentar su amortiguamiento hasta un 77.35%, y modificar su rigidez en un +/- 7.2%. Todo ello respecto de los valores de referencia 0.053 y 3,533 Hz". Dicho dispositivo es instalado sobre una viga biapoyada cuyo primer modo a flexión está en torno a 3.5 Hz. Además se pueden modificar ciertos parámetros de dicha viga de modo que se barre el rango del +/- 7.2% indicado y por tanto poder sintonizar el prototipo de TMD en cada escenario.

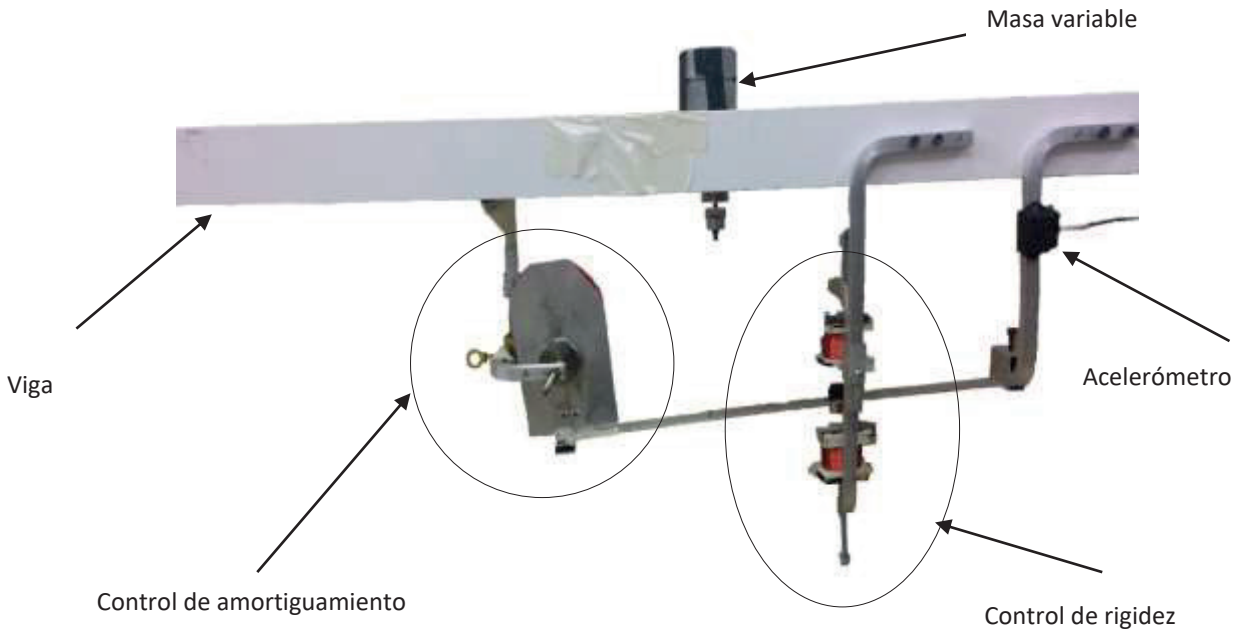


Figura 14. *AEM-TMD v06 acoplada a maqueta de laboratorio*

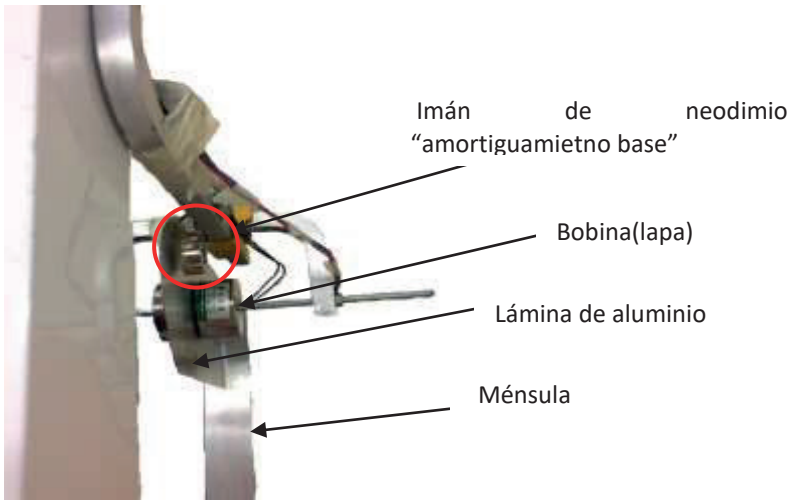


Figura 15. Imán de neodimio de amortiguamiento base

La Fig. 14 muestra el prototipo final AEM-TMD y en la Fig. 15 el detalle de imán de neodimio para conseguir el coeficiente de amortiguamiento base.

4. CONCLUSIONES

Como conclusiones del trabajo presentado se tiene que se ha conseguido materializar un dispositivo TMD en el que actuando sobre bobinas se puede ajustar la frecuencia y el amortiguamiento en un determinado rango.
La inclusión del dispositivo en la estructura precisaría un sistema de ajuste automático. Dicho sistema necesitaría al menos un sensor para conocer la frecuencia de la estructura y la correspondiente unidad de proceso para determinar los voltajes necesarios para cada bobina de tal manera que el TMD quede sintonizado en cada escenario.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación parcial del Ministerio de Economía y Competitividad a través de los proyectos BIA2014-59321 y BIA2015-71942-REDT

REFERENCIAS

[1] Bae, J., Kwak, M. and Inman, D. (2005). Vibration suppression of a cantilever beam using eddy current damper. Journal of Sound and Vibration, [online] 284(3-5), pp.805-824

[2] Magdaleno González, Á., Cacho Pérez, M., Ibán Lorenzana, N., Hernández Gómez, O., Poncela Méndez, A. and Lorenzana Ibán, A. (2016). TMD ajustable en frecuencia aportando rigidez positiva o negativa mediante imanes permanentes. Universidad de Elche

Maximum likelihood methods for finite element model updating of civil engineering structures: A comparative study

Jiménez-Alonso, J.F.[1]; Hudson, E.J.[2], Pavic, A.[3], Saéz, A.[4]

ABSTRACT

FE model updating of civil engineering structures is usually carried out via the maximum likelihood approach. According to this, the updating process is treated as an optimization problem, where the relative differences between the numerical and experimental modal parameters are minimized to ensure a good characterization of the actual structural behaviour. Nature-inspired computational algorithms have been used successfully to solve optimization problems in several fields of civil engineering. In all cases, it becomes necessary to select the highest performance algorithm for each particular application. This decision is made via a comparative study. In this manuscript, three nature-inspired computational algorithms (genetic algorithms, particle swarm and harmony search) are compared to determine the most appropriate method for FE model updating of civil engineering structures. A laboratory footbridge has been considered as benchmark. In particular, the simple computation and scheme of the harmony search method guarantees faster convergence speed which may be advantageous for the updating applications considered herein.

Keywords: finite element model updating, single-objective global optimization, footbridges, nature-inspired computational algorithms.

1. INTRODUCTION

The finite element (FE) model updating, based on the modal-domain data (natural frequencies and vibration modes), has been widely employed to improve the numerical models of existing structures [1]. Subsequently, these updated models, which adequately reflect the actual behaviour of these structures, have been used for their structural assessment, damage detection or even making key decisions about the future of these constructions (retrofitting or replacing) [2]. The FE model updating method is usually formulated via the maximum likelihood approach. According to this proposal, the updating process is transformed into a global optimization problem, whose main objective is the minimization of the relative differences between the numerical and experimental modal parameters of the structure. As global optimization method, nature-inspired computational algorithms are the most widely used. Concretely, genetic algorithms have been utilized successfully for the model updating of civil engineering structures [2, 3]. Nevertheless, the FE model, employed to assess the actual behaviour of these structures, are often quite complex with even millions of degrees of freedom. This fact increases exponentially the simulation time required to perform the FE model

[1] *Department of Building Structures. Universidad de Sevilla (SPAIN). jfjimenez@us.es (Corresponding author)*
[2] *College of Engineering, Mathematics & Physical Sciences. University of Exeter (U.K.). E.J.Hudson@exeter.ac.uk*
[3] *College of Engineering, Mathematics & Physical Sciences. University of Exeter (U.K.). A.Pavic@exeter.ac.uk*
[4] *Department of Continuum Mechanics & Structural Analysis. Universidad de Sevilla (SPAIN). andres@us.es*

updating. Under these circumstances, the selection of an optimization algorithm, which maximizes the convergence speed, can advantageously improve the performance of the updating process. For this purpose, three nature-inspired computational (NIC) algorithms (genetic algorithms, particle swarm and harmony search) are compared in this study. In this way, the conventional genetic algorithms [4] are compared with two more recent proposals, the particle swarm optimization successfully employed for the FE model updating of mechanical structures [5] and the harmony search optimization which has shown high convergence speed for the solution of other optimization problems in civil engineering [6].

The manuscript is organized as follows. In the second section, the basics of FE model updating are summarized. Subsequently, in the third section, the general layout of the three considered NIC algorithm is presented. Then, in the fourth section, the model updating of a laboratory footbridge, adopted as benchmark, is performed considering the three optimization methods. The accuracy, the convergence speed and the computational time employed are compared among the different methods. Finally, some concluding remarks are drawn to close the paper.

2. BASICS OF FINITE ELEMENT MODEL UPDATING

The FE model updating, under the maximum likelihood approach, may be formulated as an iterative problem [7, 8]. According to this proposal, the model updating arises from the changes applied on some well-defined structural physical parameters of the structure previously selected by the users. As the modified parameters are not usually linearly related to the modal parameters, the adjustment process requires the use of iterative techniques [7, 8]. In this way, a usual manner to carry out a model updating process is to pose it as a global optimization problem [8].

Thus, the FE model updating consists in minimizing an objective function defined as a least square problem between the numerical and experimental modal parameters [7] and considering as design variables the physical parameters of the structure with a greater influence on its dynamic behaviour. The relative differences between the numerical and experimental modal parameters are called residuals. Several types of residuals may be considered in the updating process. If only a single-objective is considered for the definition of the objective function, the residuals must be weighted to account for the relative contribution of each modal parameter. The value of the weighting factors associated with the different residuals is determined by a trial and error procedure to guarantee the best correlation between the numerical and experimental modal parameters or may be established by engineering judgement [9, 10].

The general formulation of the single-objective function approach may be stated as follows:

$$\min f(\theta) = min\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} w_j r_j(\theta)^2 = min\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_f} w_j^f r_j^f(\theta)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_m} w_j^m r_j^m(\theta)^2$$
$$\theta_l \leq \theta \leq \theta_u \quad \sum w_j = \sum w_j^f + w_j^m = 1 \quad w_j \geq 0 \tag{1}$$

where

$f(\theta)$ is the objective function.

m_f is the size of the residuals vector related to the natural frequencies, $r^f(\theta)$.

m_m is the size of the residuals vector related to the vibration modes, $r^m(\theta)$.

m is the size of the residuals vector, $r(\theta)$.

w_j is the weighting factor of the element *j* of the residuals vector.

$r_j(\theta)$ is the element j of the residuals vector.

w_j^f is the weighting factor of the element *j* of the residuals vector related to the natural frequencies.

$r_j^f(\theta)$ is the element *j* of the residuals vector related to the natural frequencies.

w_j^m is the weighting factor of the element *j* of the residuals vector related to the vibration modes.

$r_j^m(\theta)$ is the element *j* of the residuals vector related to the vibration modes.

θ_l is the lower constraint vector of the physical parameter vector.

θ_u is the upper constraint vector of the physical parameter vector.

The residuals should be defined in a normalized way in order to guarantee an adequate balance among them:

$$r_j^f(\theta) = \frac{f_{num,j}(\theta) - f_{exp,j}}{f_{exp,j}} \quad j = 1,2,\dots,m_f \tag{2}$$

$$r_j^m(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\left(1 - \sqrt{MAC_j(\theta)}\right)^2}{MAC_j(\theta)}\right)} \quad j = 1,2,\dots,m_m \tag{3}$$

where $f_{num,j}(\theta)$ and $f_{exp,j}$ are the numerical and experimental *j* natural frequency of the structure, θ is the physical parameter vector and $MAC_j(\theta)$ is the modal assurance criterion that it is defined as:

$$MAC_j(\theta) = \frac{\left(\emptyset_{num,j}^T(\theta)\emptyset_{exp,j}\right)^2}{\left(\emptyset_{num,j}^T(\theta)\emptyset_{num,j}(\theta)\right)\left(\emptyset_{exp,j}^T\emptyset_{exp,j}\right)} \tag{4}$$

where $\emptyset_{num,j}(\theta)$ and $\emptyset_{exp,j}$ are the numerical and experimental *j* vibration mode, and ^{T} denotes transpose.

The FE model updating process is illustrated in the flowchart of Fig. 1. The unknown physical parameters of the model, θ, are adjusted, in an iterative process with the aim of reducing the relative differences between the numerical and experimental modal parameters. The numerical modal parameters are extracted from a FE model of the structure. The experimental modal parameters are estimated through the signal processing of the measurements recorded during the development of a forced/ambient vibration test. The process allows improving the FE model in such a way that it better reflects the actual behaviour of the structure. Additionally, an estimation of the physical parameters is obtained as a result of this process. In this study, the FE model updating process has been implemented via the linking of a global optimization package [11] to a commercial finite element package [12]. The FE model updating process may be summarized in the following seven steps [13]: (i)

create an initial FE model of the structure; (ii) perform a preliminary modal analysis to obtain the numerical modal parameters; (iii) design the field test based on the results of this preliminary modal analysis; (iv) perform the field test; (v) identify the modal parameters via the signal processing of the measured data; (vi) select the physical parameters of the FE model with a greater influence in the dynamic behaviour of the structure and (vii) modify the value of these parameters in order to reduce the relative differences between the numerical and experimental modal parameters (Fig.1).

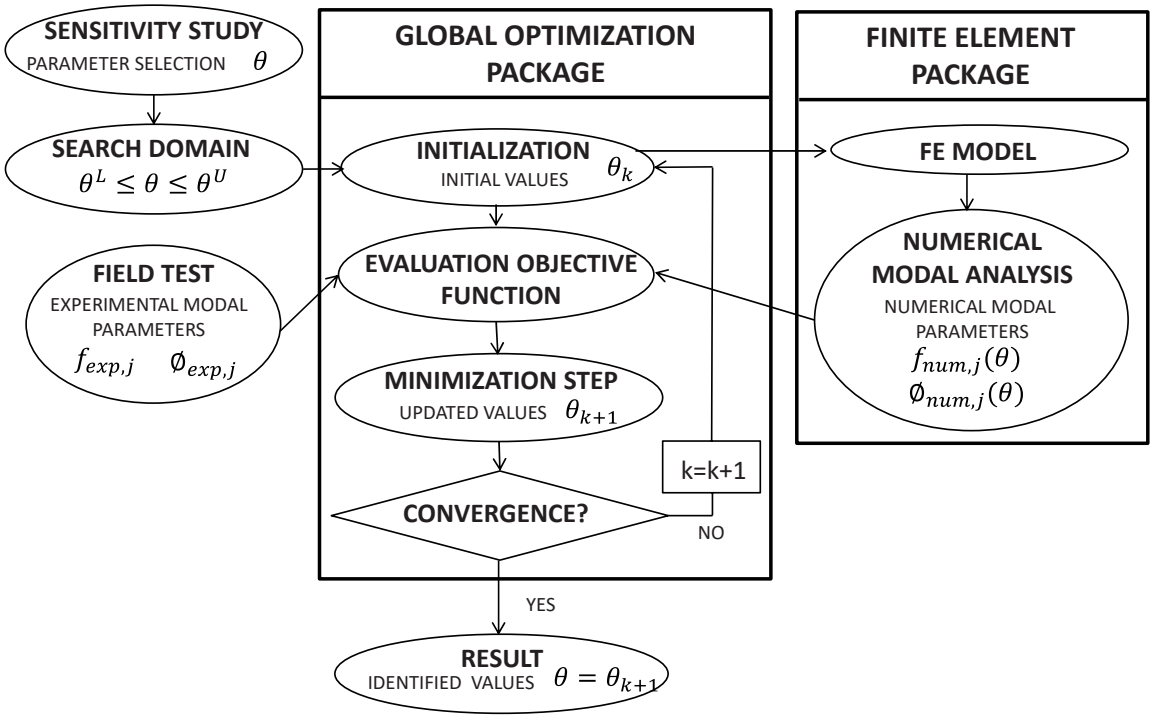


Figure 1. *Flowchart of the FEM updating method based on optimization problems [13].*

3. NATURE-INSPIRED COMPUTATIONAL ALGORITHMS FOR NUMERICAL OPTIMIZATION

As most population-based algorithms, genetic algorithms, particle swarm and harmony search mimic the physical principles and natural phenomena, sharing both the same general structure (initialization, operation and renewal) and similarities in adaptation, learning and evolution during the optimization process. The general evolving process can be summarized as follows: (i) an initial collection of candidates is generated randomly, (ii) new candidates are produced by making changes to the selected candidates, (iii) all the candidates are evaluated and (iv) those candidates that are outdated are replaced by the improved ones. In order to produce new candidates two are the usual operations, either merging two or more existing candidates or introducing random variations to a selected member. The main basic operation associated with NIC algorithms are candidate generation, evaluation, selection and population update [6]. The renewal mechanisms decide the inherent characteristics of each optimization algorithm including its advantages and drawbacks. In the following paragraphs a brief summary of the layout of the three mentioned algorithms is described.

3.1. Genetic Algorithms Optimization Method

The genetic algorithms (GA) optimization method is based on Darwin's theory about natural selection and survival of the fittest. According to this, competition exists among the individual due to the limited resources affecting their matting and reproduction. To mimic this biological process, the solution to the given problem is characterized as a chromosome. In order to improve the solution in a sequent generation two types of operators are considered, mutation and crossover. Fig.2 illustrates the flowchart of the basic GA optimization method [4]. The main steps of this optimization algorithm are: (i) choose an encoding method and evaluation function, (ii) initialize a population of candidates randomly, (iii) evaluate these candidates and calculate their fitnesses based on the evaluation function, (iv) create new candidates by applying the mutation and crossover operation on the current population, (v) evaluate the new candidates and calculate their corresponding fitnesses, (vi) combine all the candidates and select only the ones with higher fitnesses in order to keep the population size fixed, and (vii) repeat step (iv) to step (vii) until a pre-selected criterion of the evaluation function is met. A more detailed description of the genetic algorithms method may be found in Ref. [4]. Genetic algorithms have been widely used for the FE model updating of civil engineering structures [2, 10].

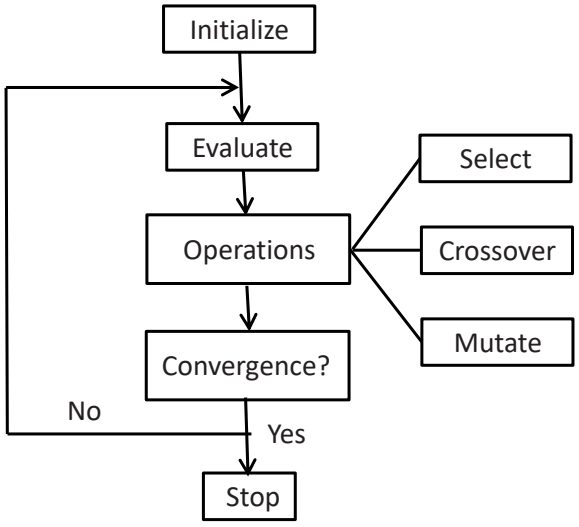


Figure 2. *Flowchart of the genetic algorithms (GA) optimization method.*

3.2. Particle Swarm Optimization Method

The particle swarm (PS) optimization method is inspired by the social behaviour of biological organisms, specifically the ability of groups of animals to work as a whole in locating a desirable position in a given area (for instance, birds flocking to a food source) [5]. In the PS method, particles move through the search domain using a combination of two attraction factors that depend on the best solutions found by both each particle individually and any particle in its neighbourhood. The position and the velocity of the different particles are the key factors of this optimization process. Fig.3 illustrates the flowchart of the basic particle swarm (PS) optimization method [5]. Four steps are needed to perform the optimization process: (i) initialize randomly a population of particles' position and velocity, (ii) calculate the velocity for each particle in the swarm, (iii) update the position of each particle and (iv) repeat step (ii) to step (iii) until a pre-selected criterion is met. A more detailed

description of the particle swarm method may be found in Ref. [5].The particle swarm optimization method has been used effectively for FE model updating of mechanical structures [5].

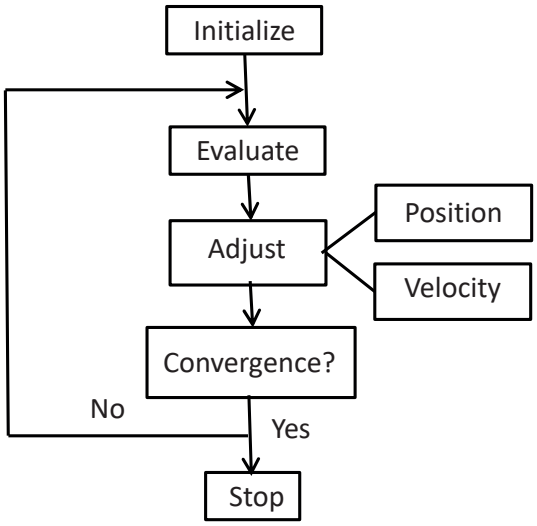


Figure 3. *Flowchart of the particle swarm (PS) optimization method.*

3.3. Harmony Search Optimization Method

The harmony search (HS) optimization method is inspired in the musical process of searching for a perfect state of harmony according to aesthetic requirements. The process, where musicians compose the harmony trying various possible combination of pitches stored in their memory, is analogous to the process to solve an optimization problem. Two essential parameters are used by the harmony search method to mimic the music improvisation: (i) the harmony memory considering rate (HMCR) and (ii) the pitch adjusting rate (PAR). Fig.4 illustrates the flowchart of the basic harmony search (HS) optimization method [6]. Four are the steps involved: (i) initialize the harmony search memory (HM), (ii) improvise a new solution from the mentioned memory (HM), (iii) update the harmony search memory and (iv) repeat step (ii) to step (iii) until a pre-selected criterion is met. A more detailed description of the harmony search method may be found in Ref. [6].

The improvisation (generation) of the new solutions (step 2) is performed based on the HMCR and PAR parameters. The HMCR is defined as the probability of selecting a component of the new solutions from the present HM candidates. The PAR is defined as the probability of a candidate from the HM to be mutated. Subsequently, the updating of the HM is performed after the evaluation of the new solutions. Those solutions that yield a better fitness than the worse members of the harmony memory will replace these last ones. Otherwise, they will be eliminated. The ratios, HMCR and PAR, have been fixed in 0.90 and 0.30 respectively in this study.

The main difference among the three considered population-based evolutionary algorithms (GA, PS and HS) is that PS and HS methods evolve using only a single search memory. Therefore, the PS and HS methods have the characteristic of algorithm simplicity which can be advantageous in the case where the convergence speed is a key point. On the other hand, the same simplicity may originate several drawbacks in relation to the solution of highly complex optimization problems. In order to assess the

performance of these methods to be used for FE model updating of civil engineering structures, in the same following section, these three NIC methods will be compared when they are applied to a case study.

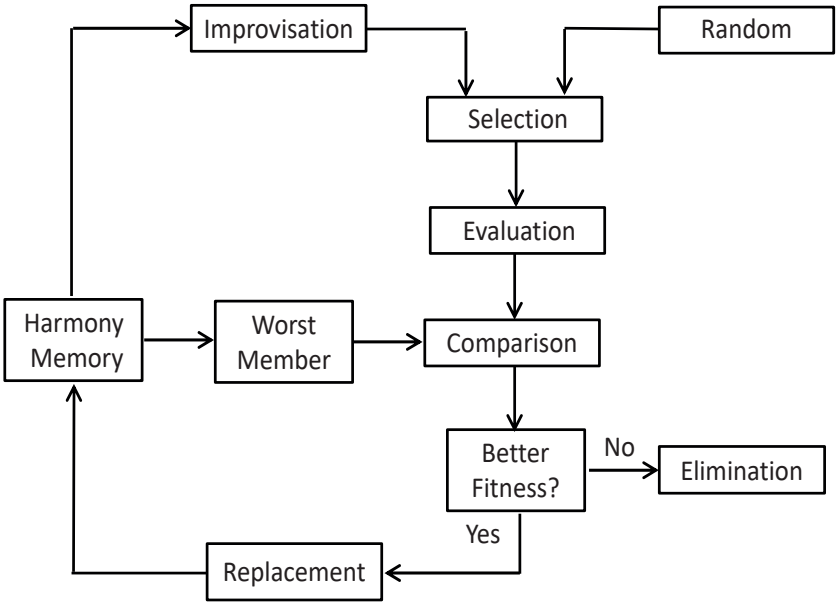


Figure 4. *Flowchart of the harmony search (HS) optimization method.*

4. PERFORMANCE COMPARISONS AMONGS GA, PS AND HS FOR FINITE ELEMENT MODEL UPDATING

For the comparison process, a reconfigurable steel footbridge, located at the laboratory of the Vibration Engineering Section at the University of Exeter (U.K.) has been considered as benchmark. The numerical modal parameters of the footbridge have been obtained from a numerical modal analysis based on a FE model of the structure. The experimental modal parameters have been estimated via the signal processing of the measurements recorded in a forced vibration test. The updating process is performed considering indistinctly the three mentioned NIC algorithms. The simulation time, the convergence speed and the accuracy of the solution are compared in terms of the number of candidates considered in the optimization process.

4.1. Laboratory footbridge: Initial FE model and numerical modal analysis

The laboratory footbridge is configured by two simple-supported lateral steel beams braced laterally by several steel beams which constitute the diaphragms. These structural elements are covered by a composite panel (SPS panel). The connection among the panel and the lower is achieved by bolts. This structure has been modelled with three types of finite elements in the package ANSYS [11]. The mesh consisted of 31903 elements (Fig.5). For our purpose the FE modelling was performed according to the following scheme: (i) the two main lateral beams and the transversal plates have been modelled with a four node shell elements with six degrees of freedom at each node (SHELL181), (ii) the SPS panels have been modelled with the same type of element (SHELL181) considering its sandwich behaviour through the first-order shear-deformation theory, (iii) the bolts that configure the connection between the SPS panel and the steel structure have been modelled by 3-D beam elements (BEAM188); and (iv) the supports were modelled by means of longitudinal (equivalent stiffness of

$k_{lon} = 5.50 \cdot 10^7$ N/m) and lateral (equivalent stiffness of $k_{lat} = 1.90 \cdot 10^7$ N/m) spring elements (COMBIN14) and considering that the vertical displacement was constrained. As mechanical properties of the materials of the model, a Young's modulus of $E_s = 2.10 \cdot 10^5$ MPa and density of 7850 kg/m^3 were considered for the steel and Young's modulus of $E_p = 750$ MPa and density of 1100 kg/m^3 for the polyurethane. A numerical modal analysis is performed based on this model. The first seven numerical vibration modes (in vertical direction) and their associated numerical natural frequencies ($f_{num,j}(\theta)$ being j the vibration mode number) are shown in Fig. 5.

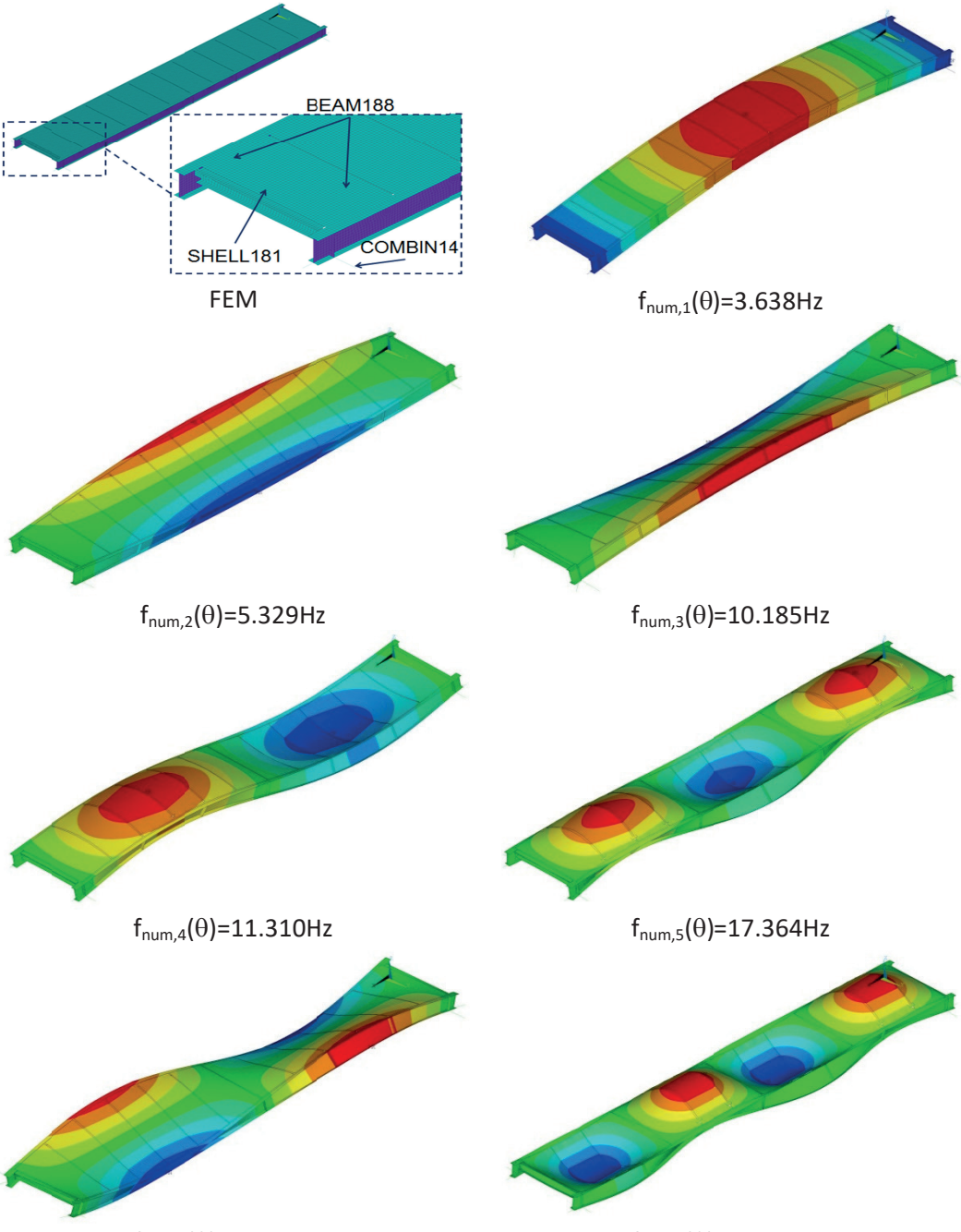


Figure 5. *FE model and initial first seven vertical numerical vibration modes.*

4.2. Experimental modal parameters

The modal properties of the structure were experimentally determined through forced vibration testing. A set of proof-mass actuators and rowing accelerometers has been used for this purpose. The actuators were simultaneously driven with uncorrelated random signals in a Multiple Input-Multiple Output (MIMO) configuration [14]. The frequency response functions (FRFs) for all the test points were determined with an overlap of 50%. Subsequently, the FRFs were curve fitting and a complex mode indicator function was used to identify probable mode locations that later they were used by a global polynomial curve fitting method [14] to identify the experimental natural frequencies and their corresponding vibration modes. In Table 1, as reference, the first seven experimental vertical natural frequencies of the structure are shown.

4.3. Finite element model correlation

The numerical and experimental natural frequencies and vibration modes shapes of the laboratory footbridge are compared in Table 1. In order to validate the correlation between the numerical and experimental modal parameters both the relative difference (Δf) between the numerical and experimental frequencies and the modal assurance criterion ($MAC_j(\theta)$) are analysed [10].

Table 1. First seven vertical numerical ($f_{num}(\theta)$) and experimental (f_{exp}) natural frequencies of the footbridge. Initial FE model

Modes	$f_{num}(\theta)$[Hz]	f_{exp} [HZ]	Δf [%]	M.A.C.
1 (1st Bending)	3.638	3.810	-4.509	0.999
2 (1st Torsional)	5.329	5.144	3.600	0.994
3 (2nd Torsional)	10.185	8.485	20.033	0.990
4 (2nd Bending)	11.310	12.366	-8.540	0.877
5 (3rd Bending)	17.364	18.605	-6.670	0.985
6 (3rd Torsional)	20.238	20.459	-1.080	0.993
7 (4th Bending)	21.105	22.980	-8.159	0.910

Although the shapes of the six of the seven vertical identified vibration modes are in good agreement (with M.A.C. ratios greater than 0.90), the relative differences, Δf, between the numerical and experimental natural frequencies of all the vibration are still large. Therefore, it becomes necessary to adjust the FE model to improve the correlation between the numerical and experimental modal parameters and, subsequently, to obtain a FE model that better characterizes the dynamic behaviour of this laboratory footbridge.

4.4. Finite element model updating

The FE model updating process was conducted through the implementation of the mentioned algorithms (see Fig.1) in the software programs ANSYS [11] and Matlab [12]. Three populations of 10, 20 and 50 candidates have been considered that using the rules of the three considered NIC algorithms (GA, PS and HS) have minimized the value of the proposed objective function. In each iteration, the values of the selected physical parameters have been modified in order to reduce the

relative differences between the numerical and experimental modal parameters of the laboratory footbridge. The parameter selection was based on a sensitivity study. The influence of several physical parameters of the FE model in the dynamic behaviour has been compared. Ten physical parameters have been selected as results of this study: (i) the Young's modulus of the steel at six sections of the lateral beams, (ii) the Young's modulus of the different layers (steel and polyurethane) of the SPS panel, (iii) the stiffness of the bolts, and (iv) the equivalent stiffness of the supports in longitudinal and lateral direction (Fig. 6 and Table 2).

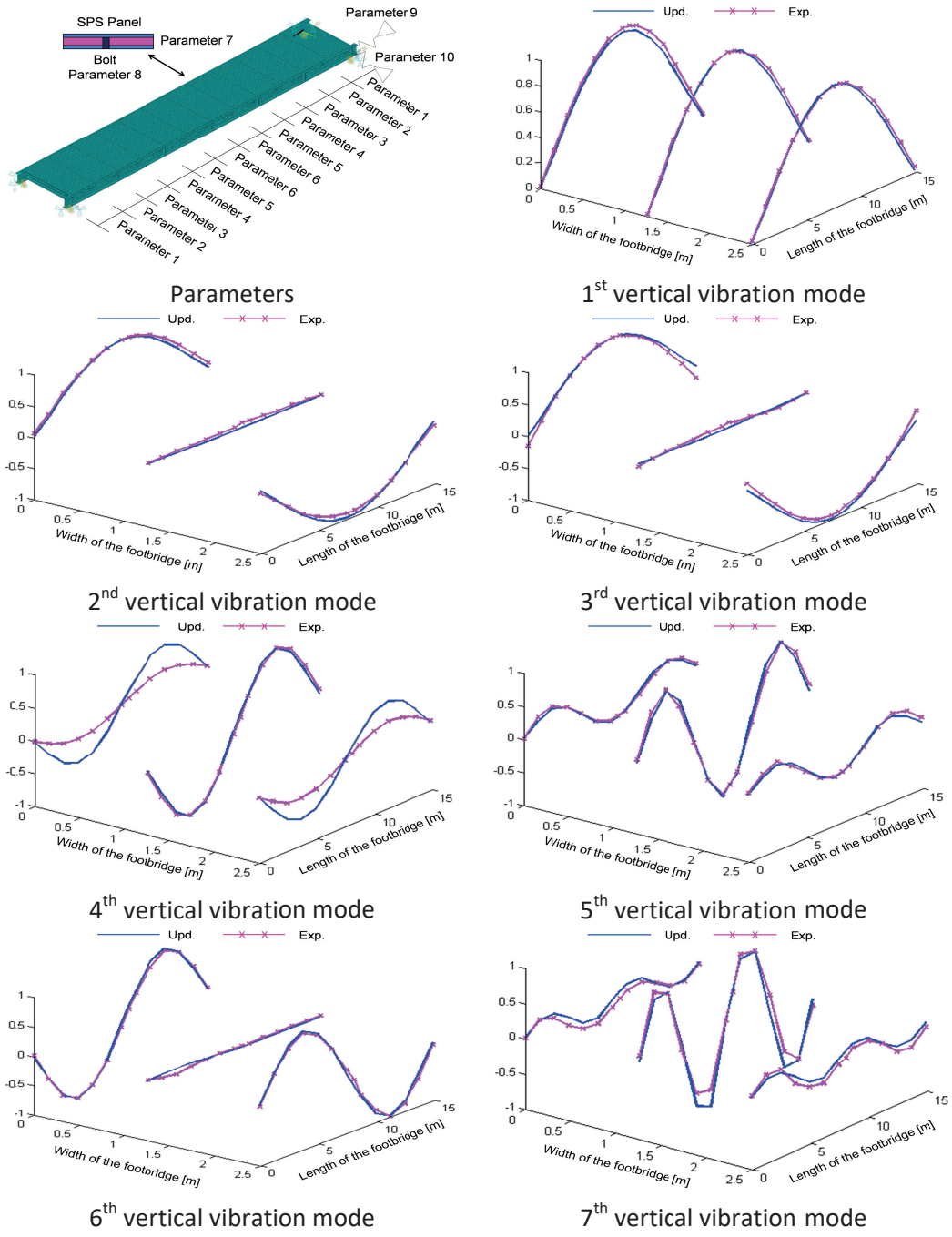


Figure 6. *Parameter selection and first seven vertical updated numerical and experimental vibration modes.*

The weighting factors for the residuals of the natural frequencies, $\sum w_j^f = 0.90$, and vibration modes, $\sum w_j^m = 0.10$, have been fixed according to the recommendations reported by previous studies [10]. Additionally a search domain has been established for each physical parameter (see Table 2). The addition of a search domain guarantees that the updated model corresponds to a solution with physical engineering sense. An additional stopping criterion was considered for each optimization algorithm, the tolerance of the maximum variation of the objective function has been fixed in 10^{-5}.

Table 2. Range of variation of the considered physical parameters and updated parameters under the HS method (20 candidates).

Number	Parameters (Fig.6)	Minimum	Updated	Maximum
1	Young's modulus steel. Section 1/12 [MPa]	$1.89 \cdot 10^5$	$2.23 \cdot 10^5$	$2.31 \cdot 10^5$
2	Young's modulus steel. Section 2/11 [MPa]	$1.89 \cdot 10^5$	$2.01 \cdot 10^5$	$2.31 \cdot 10^5$
3	Young's modulus steel. Section 3/10 [MPa]	$1.89 \cdot 10^5$	$2.08 \cdot 10^5$	$2.31 \cdot 10^5$
4	Young's modulus steel. Section 4/9 [MPa]	$1.89 \cdot 10^5$	$1.89 \cdot 10^5$	$2.31 \cdot 10^5$
5	Young's modulus steel. Section 5/8 [MPa]	$1.89 \cdot 10^5$	$2.21 \cdot 10^5$	$2.31 \cdot 10^5$
6	Young's modulus steel. Section 6/7 [MPa]	$1.89 \cdot 10^5$	$2.17 \cdot 10^5$	$2.31 \cdot 10^5$
7	Young's modulus polyurethane [MPa]	$0.75 \cdot 10^3$	$1.48 \cdot 10^3$	$1.50 \cdot 10^3$
8	Young's modulus steel of the bolts [MPa]	$2.10 \cdot 10^5$	$4.94 \cdot 10^3$	$2.10 \cdot 10^6$
9	Longitudinal stiffness spring [N/m]	$1.38 \cdot 10^7$	$4.12 \cdot 10^7$	$1.10 \cdot 10^8$
10	Lateral stiffness spring [N/m]	$4.75 \cdot 10^6$	$1.46 \cdot 10^7$	$3.80 \cdot 10^7$

The updating process has been run 10 times in order to take the random generation of the initial population into account. Table 3 shows the average simulation time and the average value of the objective function of the three considered NIC algorithms (GA, PS and HS). Fig.7 illustrates the average convergence procedure of the GA, PS and HS considering a population of 10, 20 and 50 candidates.

Table 3. Comparison of the average simulation time and the average value of the objective function among the three considered NIC algorithms (GA, PS and HS).

Number of candidates	Average simulation time [sec.]			Average value $f(\theta)$		
	GA	PS	HS	GA	PS	HS
10	9169.50	8738.92	6228.12	0.00405	0.00347	0.00348
20	21199.60	13960.80	12561.91	0.00350	0.00347	0.00347
50	52610.10	29970.90	32594.80	0.00349	0.00347	0.00347

4.5. Discussion of the results

The previous results show that if the selection of the population size is adequate, the HS method reduces the simulation time and yet maintains the accuracy of the adjustment (minimum value of the objective function). However, the efficiency of the algorithm is reduced against PS method when the population size increases. Additionally, the GA method reflects the worst behaviour in all the cases, in terms of simulation time and accuracy.

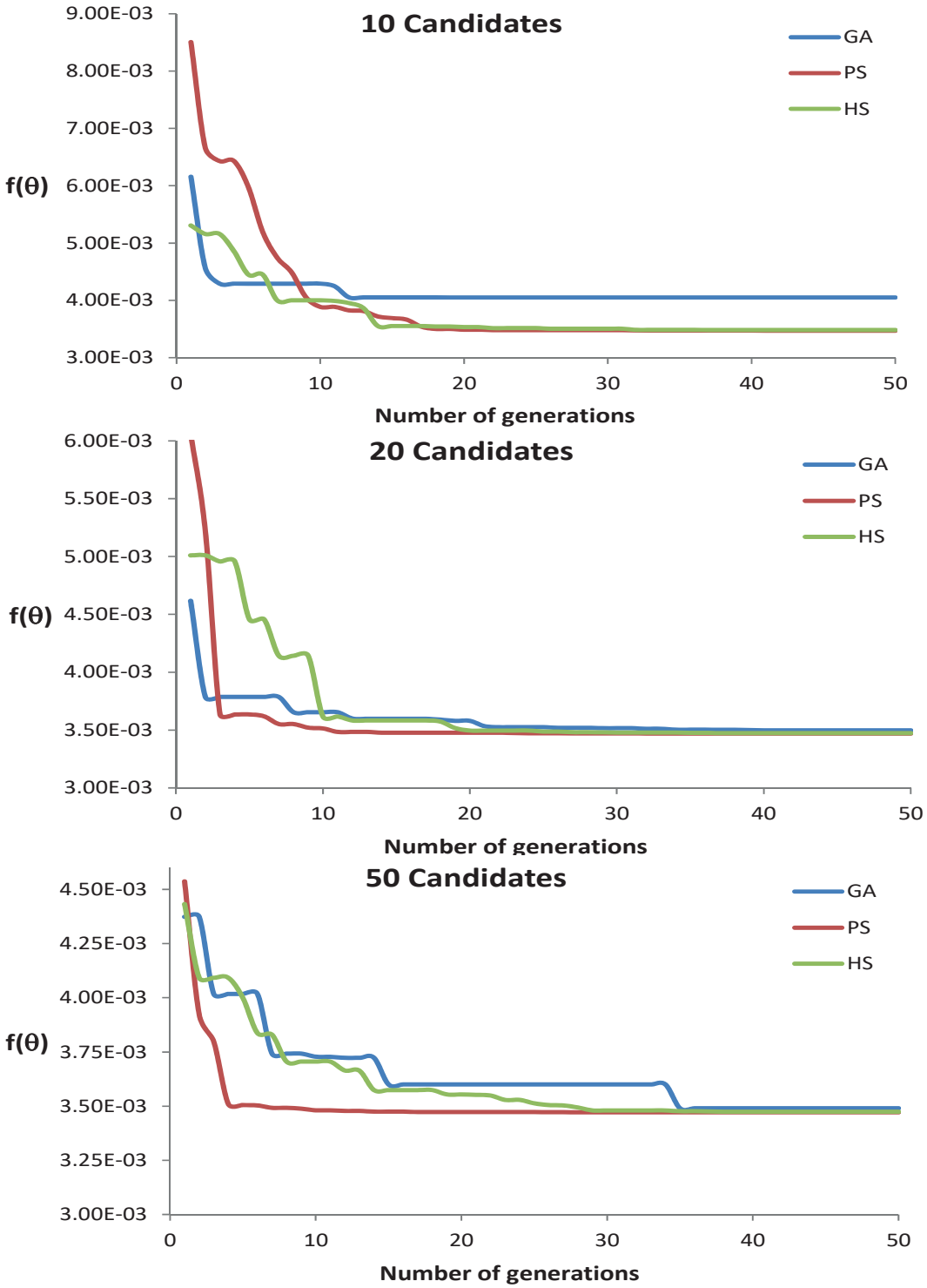


Figure 7. *Convergence procedures of GA, PS and HS in FEM updating for different number of candidates.*

Finally, in order to assess the performance of the updating process, the results corresponding to the HS method with a population of 20 candidates were analyzed.. The relative differences between the updated numerical ($f_{upd}(\theta)$) and experimental (f_{exp}) modal parameters and the *M.A.C.* values achieved after the model updating process are summarized in Table 4 and Fig. 6.

Table 4. First seven vertical updated ($f_{upd}(\theta)$) and experimental (f_{exp}) natural frequencies of the footbridge. Updated model under the HS method (20 candidates).

Modes	$f_{upd}(\theta)$[Hz]	f_{exp} [HZ]	Δf [%]	*M.A.C.*
1 (1st Bending)	3.854	3.810	1.155	0.999
2 (1st Torsional)	5.489	5.144	6.707	0.994
3 (2nd Torsional)	8.365	8.485	-1.414	0.988
4 (2nd Bending)	11.896	12.366	-3.800	0.875
5 (3rd Bending)	18.662	18.605	0.306	0.987
6 (3rd Torsional)	20.016	20.459	-2.163	0.993
7 (4th Bending)	22.506	22.980	-2.063	0.957

Subsequently, the results of the updated values of the selected parameters are shown in Table 2. It is checked that the value of the updated physical parameters is inside the established search domain which ensures that the final solution maintains a physical engineering sense.

5. CONCLUSIONS

In this manuscript, the performance of three NIC algorithms (GA, PS and HS) is compared when they are used for the FE model updating of civil engineering structures. The basics of FE model updating based on modal data (natural frequencies and vibrations modes) have been presented. According to this approach, the updating process may be transformed into an optimization problem. The main objective of this optimization problem is to minimize the relative differences between the numerical and experimental modal parameters of the structure. The general layout of the three mentioned NIC algorithms has been described briefly. Subsequently, a laboratory footbridge has been chosen as benchmark. The numerical modal parameters of the structure have been obtained from a FE model of the structure. The experimental modal parameters of the structure have been estimated from the signal processing of the measurements recorded during a forced vibration test. Then, the FE model updating of the structure has been conducted under the three mentioned algorithms. The accuracy of the adjustment (minimum value of the objective function), the convergence speed and the simulation time of the FE model updating process considering the three NIC algorithms have been compared in terms of the number of candidates of the population (10, 20 and 50). As results of this study, the HS method allows reducing the simulation time yet maintaining the accuracy in the adjustment, if the population size is adequately selected. Nevertheless, further studies are recommended, via the FE model updating of different types of civil engineering structures, in order to guarantee the performance of the HS method when it is used for the FE model updating of these structures.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was partially supported by the Ministerio de Economía y Competitividad of Spain under the projects DPI2014-53947-R and BIA2015-71942-REDT.

REFERENCES

[1] Jiménez-Alonso, J.F., Sáez, A. Application of operational modal analysis and model updating technique for the validation and characterization of structural models. In Ist International Congress on Mechanical models in structural engineering (pp. 51-59). Granada: Glodel Editorial.

[2] Jiménez-Alonso J.F., Sáez A. (2016). Model Updating for the Selection of an Ancient Bridge Retrofitting Method. *Structural Engineering International*, 26 (1), 17-26.

[3] Brownjohn, J.M.W., Xia, P.-Q., Hao, H., Sia, Y. (2001). Civil structure condition assessment by FE model updating: methodology and case studies. *Finite Elements in Analysis and Design*, 37, 761-775.

[4] Koh Ghee C., Perry M.C., (2010). Structural Identification and Damage Detection using Genetic Algorithms p. 140. CRC Press, Taylor and Francis Group, London.

[5] Marwala T. (2010). Finite-Element-Model Updating Using Computational Intelligence Techniques. Applications to Structural Dynamics, p. 231. Springer, London.

[6] Wang X., Gao X.-Z., Zenger, K. (2015). An Introduction to Harmony Search Optimization Method, p. 88 Springer, London.

[7] Teughels, A., Maeck, J., De Roeck, G. (2002). Damage assessment by FE model updating using damage functions. *Computers and Structures*, 80, 1869-1879.

[8] Mottershead, J.E., Link M., & Friswell M.I. (2011). The sensitivity method in finite element model updating: a tutorial. *Mechanical System and Signal Processing*, 25, 2275-2296.

[9] Macias Infantes, M. (2015). Estudio Comparativo de Técnicas de Optimización para la Actualización de Modelos de Elementos Finitos. Master Thesis. Universidad de Sevilla.

[10] Zivanovic, S., Pavic A., Reynolds P. (2007). Finite element modelling and updating of a lively footbridge: The complete process. *Engineering Structures*, 301(1-2), 126-145.

[11] ANSYS Mechanical Release.

[12] Matlab R2016b (2017), http://www.mathworks.com/

[13] Costa C, Ribeiro D, Jorge P, Silva R, Arêde A, Calçada R (2016). Calibration of the numerical model of a stone masonry railway bridge. *Engineering Structures*, 123, 345-371.

[14] Maia N.M.M., Silva J.M.M., He J. and et al.(1997). Theoretical and Experimental Modal Analysis. Research studies Press Ltd., Somerset, England.

STATISTICAL MODELLING OF STEP VARIABILITY IN HUMAN WALKING

Marta García-Diéguez[1], Jose Luis Zapico-Valle[1], José María García-Terán[2]

[1]*Department of Construction and Manufacturing Engineering University of Oviedo (SPAIN).*
[2] *Escuela de Ingenierías Industriales. University of Valladolid (SPAIN). teran@uva.es*

ABSTRACT

Human walking is a decisive excitation when checking vibration serviceability of several kinds of structures. Advanced models of walking loads are needed to obtain realistic serviceability checks. This paper is an extension of a previous study on the statistical modelling of the spatiotemporal parameters of human walking. The paper is focused on the statistical modelling of the coefficients of the second-order autoregressive process that reproduces the deviations of the step interval. An enhanced model containing both deterministic and stochastic parts is proposed to reproduce the parameters. Results were successful. The proposed model can replicate accurately the experimental results.

Keywords: vibration serviceability, human walking, treadmill test, step interval variability, spatiotemporal walking parameters.

Corresponding author: jzapico@uniovi.es.

1. INTRODUCTION

The development of new materials and construction techniques has enabled engineers to design more innovative structural forms in recent decades. These are generally lighter, more slender and less damped than conventional structures. As a consequence of these features, new structures are prone to vibrate when subjected to dynamic loads, and excessive vibration may affect their serviceability. Thus, a realistic serviceability limit state check is essential in the design stage to guarantee the structural functioning. Otherwise, costly rectifying measures should be applied in many cases after building to fit the structural requirements. This is the case of footbridges and long-span floors under human walking excitation. Many cases of excessive vibration of structures have occurred in the last decades, the most famous being the London Millennium Bridge. These reported cases have motivated the research interest in vibration serviceability for the aforementioned kinds of structures.

One of the key aspects in this research is the definition of the walking process itself. Racic et al. (2009) [1] published a comprehensive literature review including 271 references related to identification and modelling of walking forces. They indicate that models of walking forces have evolved from deterministic periodic formulations to more sophisticated statistical approaches. Deterministic models provide unrealistic predictions of the structural response [2]. Statistical approaches account for both the inter- and intra-subject variability of walking forces. Several advanced models have been established to describe the vertical walking forces so far [3-5]. The main drawback of these models is that the temporal and spatial walking parameters are considered independently for the same subject. In fact, these parameters are functionally related once a subject is chosen. Moreover, the variability of the step period is considered constant and independent of the subject and her/his walking speed in the first two papers, which constitutes a very poor formulation.

In a previous paper [6], the authors studied the relationships between spatiotemporal parameters of human walking under rigid conditions. An original statistical model simulating the evolution of these parameters was inferred from the results of a campaign of treadmill tests. In this model, the intra-subject deviations of the step interval with respect to their average are decomposed into a deterministic part due to asymmetry and a random part described by a second-order autoregressive process. The mathematical formulation of the deviations, $\tilde{T}_i$, is as follows:

$$\tilde{T}_i = c_3(-1)^i + c_4\,\tilde{T}_{i-1} + c_5\,\tilde{T}_{i-2} + z_i \quad (1)$$

where c_3 denotes the asymmetry parameter, c_4 and c_5 represent the autoregressive parameters and z_i are the disturbances, which are described by a normal distribution with zero mean. The influence of the walking speed on the values of the individual parameters of the model and their inter-subject variability were also studied and statistically formulated.

The present study is focused on the autoregressive parameters, c_4 and c_5. A thorough study of their variability and an enhanced statistical description are sought.

2. EXPERIMENTS

Experiments are detailed in [6]. A brief description is presented here. A testing device containing a treadmill was specifically designed and manufactured to acquire vertical walking forces. Fifty healthy adult subjects (25 men and 25 women) took part in the experiments. Each subject walked around 100 m at six different speeds. The experiments consisted of 300 tests and more than 30 km walked. In each test, the total walking force was measured and sampled at a frequency of 1 kHz. The time series were segmented into consecutive intervals corresponding to the right and left cycles for further analysis. For this purpose, an original procedure of segmentation was developed.

3. AUTOREGRESSIVE PARAMETERS

As the model structure (1) is linear in the parameters, they can be estimated through the least squares method from the observed deviations, $\tilde{T}_i$, [7]. The proposed model structure (1) was found to fit all the tests pretty well. Estimates of the parameters of all the tests, c_{e4} and c_{e5}, are depicted in Fig. 1 as a function of walking speed.

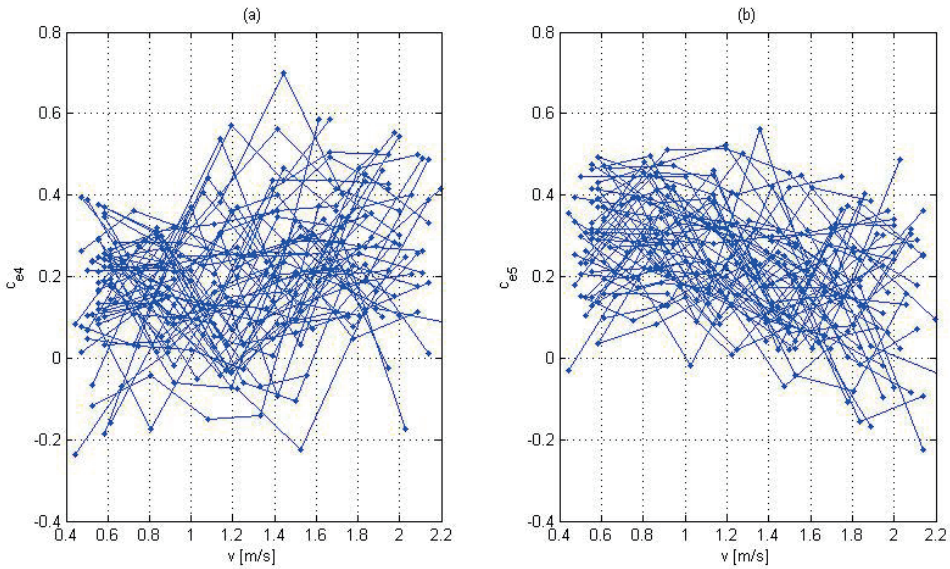


Figure 1. *Autoregressive parameters identified from the experimental data vs. walking speed. Experimental results for all the test subjects. a) parameter c_{e4} b) parameter c_{e5}.*

Globally these parameters had a clear trend: c_{e4} increased with the walking speed, v, while c_{e5} diminished (Fig. 1). In addition, there was a noticeable trial-to-trial variability for each test subject. Both the trend and the variability will be studied in turn in the following paragraphs.

The trend of these parameters, $\hat{c}_{e4}(v)$ and $\hat{c}_{e5}(v)$, has been modeled by a second-order polynomial. The parameters of the polynomial were estimated through the least squares method, giving rise to the following values:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{e4}(v) &= 0.0469v^2 - 0.0291\,v + 0.1552 \\ \hat{c}_{e5}(v) &= -0.0370\,v^2 - 0.0122\,v + 0.3155 \end{aligned} \tag{2}$$

The fitted curves are shown in Fig. 2 along with the experimental results

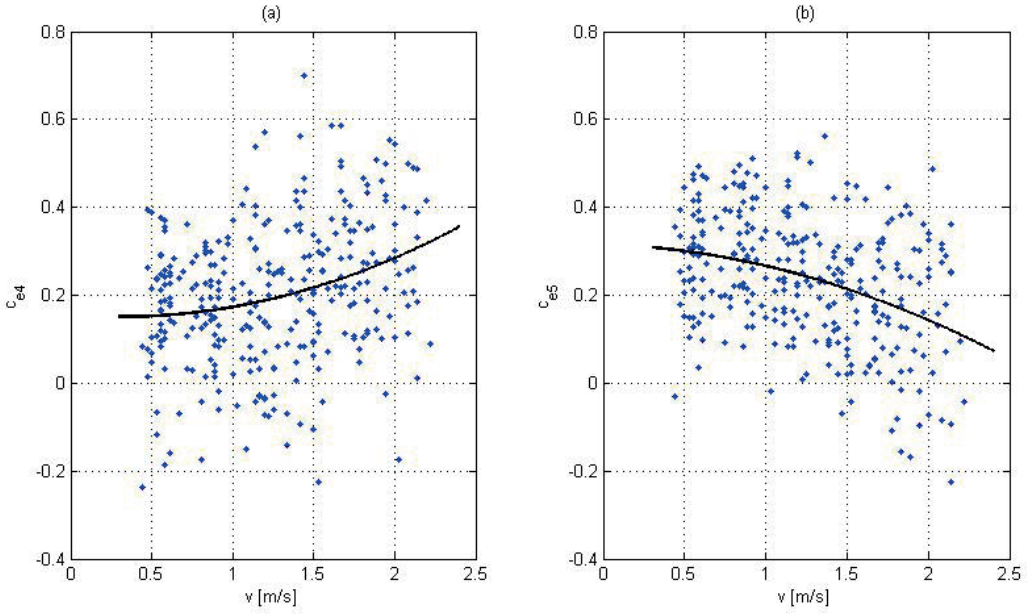


Figure 2. *Autoregressive parameters identified from the experimental data vs. walking speed. Dots: experimental results. Line: quadratic trend. a) parameter c_{e4} b) parameter c_{e5}.*

Lets $X_{e4}(v)$ and $X_{e5}(v)$ be random variables that represent the deviations of the identified parameters c_{e4} and c_{e5}, with respect to the experimental trend, $\hat{c}_{e4}(v)$ and $\hat{c}_{e5}(v)$, for the same speed, v, that is:

$$\begin{aligned} X_{e4}(v) &= c_{e4}(v) - \hat{c}_{e4}(v) \\ X_{e5}(v) &= c_{e5}(v) - \hat{c}_{e5}(v) \end{aligned} \tag{3}$$

The experimental realizations of these variables are shown in Fig. 3.

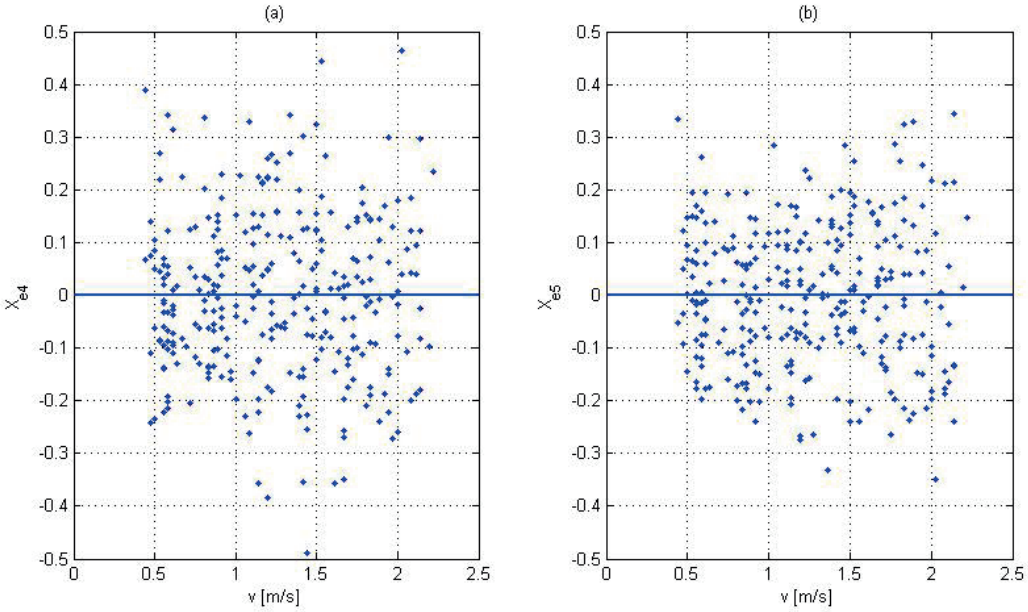


Figure 3. *Deviations of the experimental parameters* c_{e4} and c_{e5} *with respect to the quadratic trend,* $\hat{c}_{e4}$ and $\hat{c}_{e5}$, *vs. walking speed. a)* X_{e4} *b)* X_{e5}.

The scatter of these variables seems to be quite uniform in the measured range of speed. Consequently, it is assumed in the following that the variance of $X_{e4}(v)$ and $X_{e5}(v)$ is speed-independent. Under this assumption, the variances σ_4^2 and σ_5^2 were computed from all the experimental realizations. The obtained values were: $\sigma_{e4}^2 = 0.0237$ and $\sigma_{e5}^2 = 0.0183$.

A question arises at this stage: the trial-to-trial variance of the autoregressive coefficients is inherent to the pedestrians or/and to the identification inaccuracies? To address this issue, several numerical simulations of the experiments were performed with the model (1). The values identified form the experimental data were chosen for the asymmetry parameter, c_3, and the variance of the disturbances, z_i, while the autoregressive *parameters* c_{e4} and c_{e5} where set to the experimental quadratic trend, $\hat{c}_{e4}$ and $\hat{c}_{e5}$, for the same speed. Thus, the randomness inherent to the pedestrians is not included in the simulations. From these simulated series, the parameters of the model (1), c_{n4} and c_{n5}, were identified by the least squares method. Results are shown in Fig. 4.

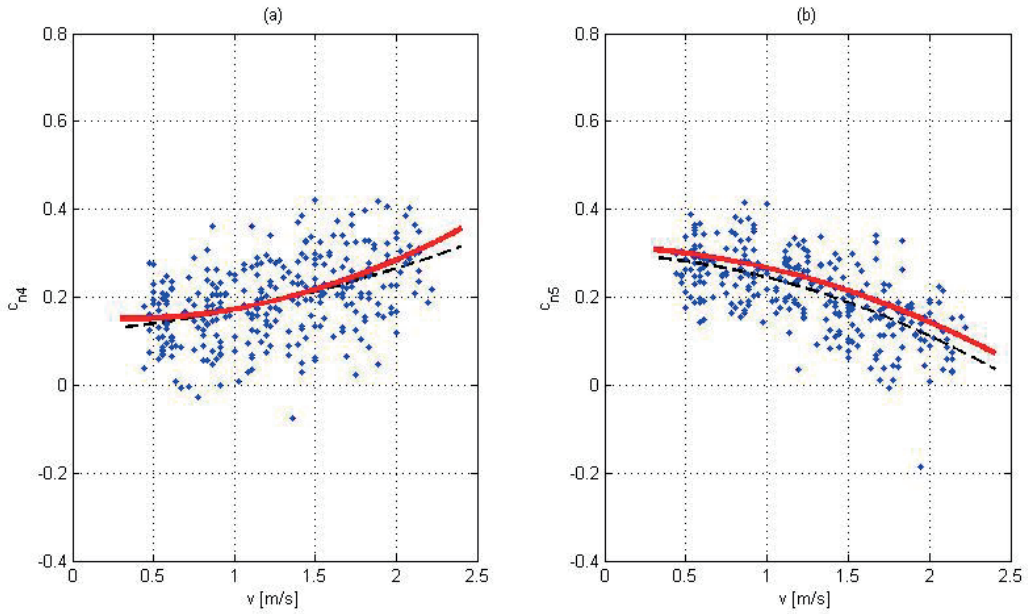


Figure 4. *Autoregressive parameters identified from the simulated data vs. walking speed. Dots: results from simulated data. Lines: quadratic trend. Discontinuous: Experiments. Continuous: Simulations. a) parameter c_{n4} b) parameter c_{n5}.*

As expected, the trend of the obtained parameters is very close to that of the experimental data (Fig. 4). Lets $X_{n4}(v)$ and $X_{n5}(v)$ be random variables that represent the deviations of the identified parameters c_{n4} and c_{n5}, with respect to the experimental trend, $\hat{c}_{e4}(v)$ and $\hat{c}_{e5}(v)$, for the same speed, v, that is:

$$X_{n4}(v) = c_{n4}(v) - \hat{c}_{e4}(v)$$
$$X_{n5}(v) = c_{n5}(v) - \hat{c}_{e5}(v) \quad (3)$$

The simulated realizations of these variables are shown in Fig. 5.

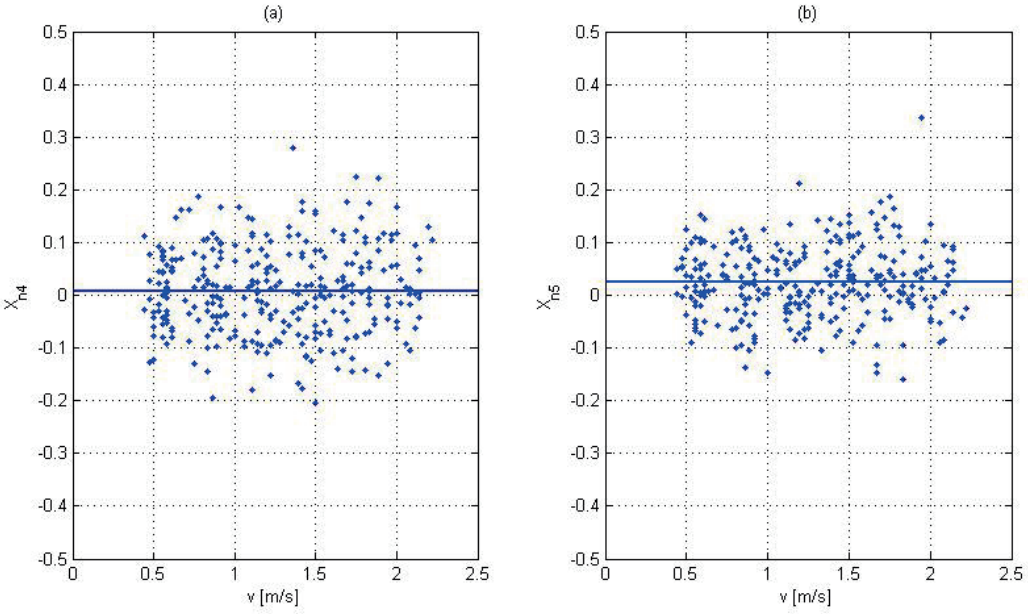


Figure 5. *Deviations of the simulated parameters c_{n4} and c_{n5}* with respect to the experimental quadratic trend $\hat{c}_{e4}$ and $\hat{c}_{e5}$ vs. walking speed. *a) X_{n4} b) X_{n5}.*

As the experimental counterpart, the variances of the obtained deviations, X_{n4} and X_{n5}, can be considered speed-independent. The variances of the deviations computed from all the simulations were: $\sigma_{n4}^2 = 0.0065$ and $\sigma_{n5}^2 = 0.0066$. These variances are due exclusively to the identification inaccuracies because the variability inherent to the pedestrians was not present in the simulated data. Results indicate that the identification inaccuracies account for around 30% of the variance of experimental deviations. The rest of the deviations are attributable to the variability inherent to the pedestrians, X_t. Assuming these two causes of variability are independent, the total experimental deviations, X_e, are equal to the identification component, X_n, plus the inherent component, X_t,

$$X_e = X_n + X_t \tag{4}$$

Under this condition, the relationship between variances is

$$\sigma_e^2 = \sigma_n^2 + \sigma_t^2 \tag{5}$$

From this, the values of σ_t^2 can be calculated from the obtained values of σ_e^2 and σ_n^2

$$\begin{aligned} \sigma_{t4} &= \sigma_{e4} - \sigma_{n4} = 0.0172 \\ \sigma_{t5} &= \sigma_{e5} - \sigma_{n5} = 0.0118 \end{aligned} \tag{6}$$

Assuming a Gaussian distribution of the deviations of the autoregressive parameters with respect to the quadratic trend, the statistical models describing the autoregressive parameters, c_4 and c_5, as a function of the walking speed are

$$\begin{aligned} c_4(v) &= 0.0469v^2 - 0.0291\, v + 0.1552 + N(0\,, 0.1311) \\ c_5(v) &= -0.0370\, v^2 - 0.0122\, v + 0.3155 + N(0\,, 0.1086) \end{aligned} \tag{7}$$

4. Verification of the model

For the verification of the model 100, numerical simulations of the experiments were carried out with the model (1) taking the values identified from experimental data for the asymmetry parameter, c_3 , and the variance of the disturbances, z_i . As for the autoregressive parameters, they were calculated through the model (7) as a function of the walking speed. From the simulated series the parameters of the model (1) were identified. Each series of results was fitted to a quadratic polynomial and the variance of the deviations was calculated.

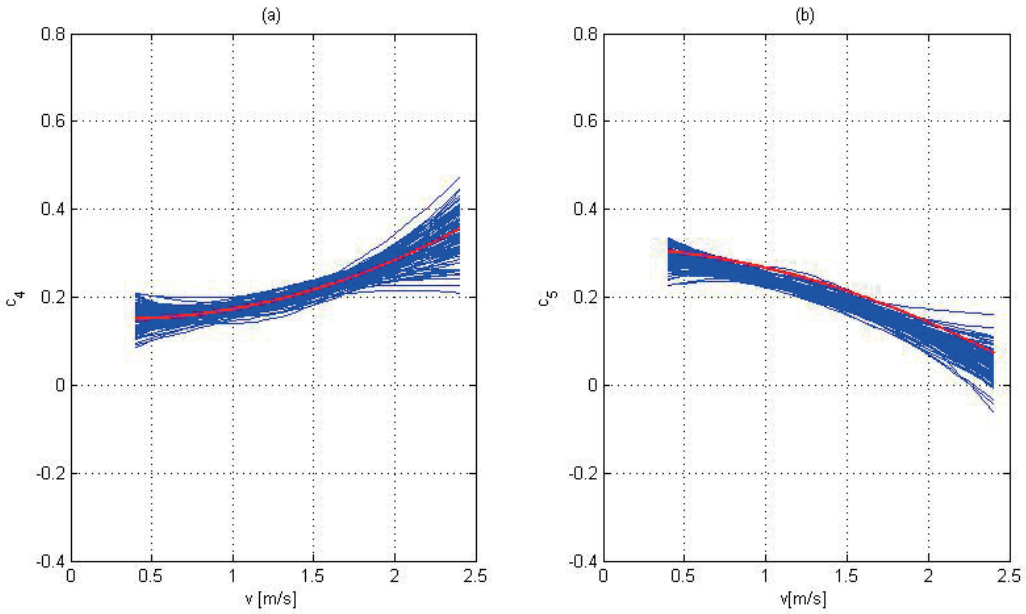


Figure 6. *Quadratic trends of the autoregressive parameters* vs. walking speed. Bold line: experiments. Fine lines: simulations *a)* c_4 *b)* c_5.

Fig. 6 shows the obtained quadratic trends along with the experimental trend. As can be seen, the simulated trends are very close to the experimental one, the trend of parameter c_5 having a certain bias. As for the variance of the deviations, its histogram is depicted in Fig. 7.

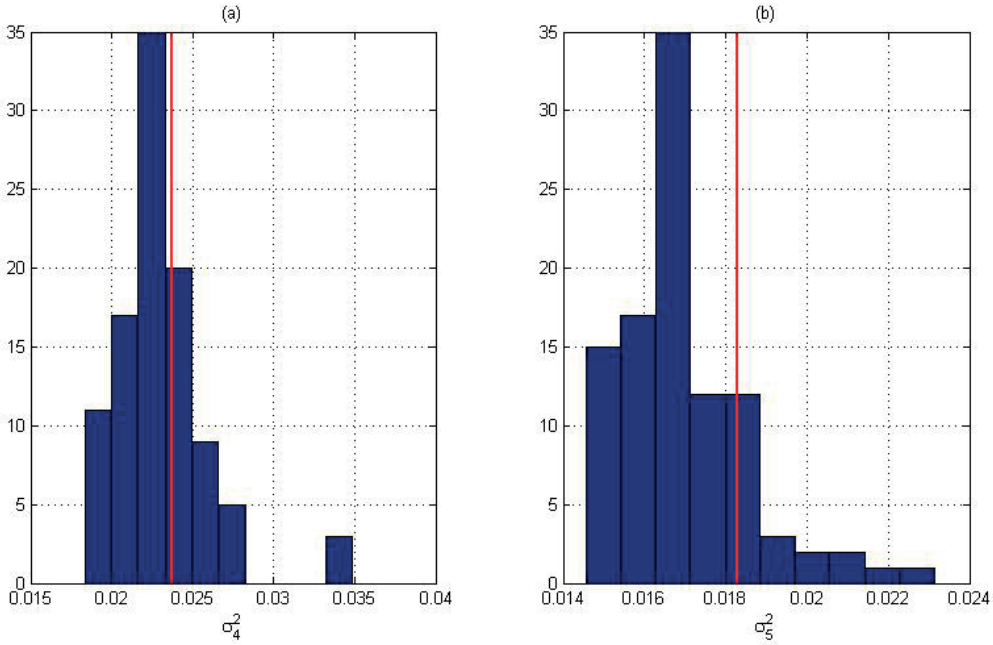


Figure 7. *Histogram of the variances of the simulations*. Line: experimental value *a)* σ_4 *b)* σ_5.

The obtained values of the variances were sorted in an increasing order. From these, the 5:100 and 95:100 order statistics were extracted. These order statistics constitute the 90% confidence interval

for an experimental realization. Results are shown in Table 1. All the experimental results are within the confidence interval.

Table 1: Statistics of the simulations.

	5:100	95:100	Experiment
$\boldsymbol{\sigma_4^2}$	0.0193	0.0270	0.0237
$\boldsymbol{\sigma_5^2}$	0.0148	0.0197	0.0183

5. Conclusions

This study on the intra-subject variability of the human walking allows several conclusions to be drawn. The coefficients of the second-order autoregressive process that reproduces the deviations of the step interval have a clear trend with the walking speed. This trend can be approximated by a second-order polynomial. In each trial, there exists a random deviation of the autoregressive coefficients with respect to the trend. It is found that the variance of these deviations is speed-independent. The deviations can be statistically described by a Gaussian distribution.

REFERENCES

[1] Racic V., Pavic A. & Brownjohn J.M.W. (2009). Experimental identification and analytical modelling of human walking forces: Literature review. *Journal of Sound and Vibration* 326 pp. 1-49.

[2] Zivanovic S., Pavic A. & Ingolfsson E. T. (2010). Modeling spatially unrestricted pedestrian traffic on footbridges. *Journal of Structural Engineering* 136(10) pp. 1296-1308.

[3] Brownjohn J.M.W., Pavic A. & Omenzetter P. (2004). A spectral density approach for modelling continuous vertical forces on pedestrian structures due to walking, *Canadian Journal of Civil Engineering* 31 pp. 65-77.

[4] Zivanovic S., Pavic A., & Reynolds P. (2007). Probability Based Prediction of Multi Mode Vibration Response to Walking Excitation. *Engineering Structures*, 29 (6), 942-954.

[5] Racic V. & Brownjohn J.M.W. (2011). Stochastic model of near-periodic vertical loads due to humans walking. *Advanced engineering informatics* 25 pp. 259-275.

[6] García-Diéguez M., & Zapico-Valle J.L. (2017). Statistical modelling of the relationships between spatiotemporal parameters of human walking and their variability. *Journal of Structural Engineering*. Accepted for publication.

[7] Ljung L. (1999). System Identification, Prentice Hall PTR.

Vibration control strategies for pedestrian structures

Díaz, Iván M.[1], García-Palacios, Jaime H.[1], Soria, José M.[1], Pereira, Emiliano[2]

ABSTRACT

Lightweight and high-span pedestrian structures are usually prone to vibrate excessively. Although current codes may be fulfilled, these structures are not usually comfortable in any way. Control devices can mitigate vibration and improve significantly the comfortability. Damping systems for civil structures have being continuously proposed; however, the civil engineering community has not generally accepted these damping systems although they have shown great potential for cancelling vibrations. The research project *Development of novel systems for reducing vibrations in pedestrian structures* has been addressed by the *Structural Engineering Group* of Universidad Politécnica de Madrid. Thus, this paper gives an overview of the achievements accomplished, summarized in (i) software and hardware developments, (ii) description of the structures under study, (iii) design and placement of tuned mass dampers (TMDs), (iv) design and placement of active mass dampers, and (vi) development of semi-active TMDs.

Keywords: Structural vibration control; Human-induced vibrations; Tuned Mass Dampers; Active Mass Dampers; Semi-Active Tuned Mass Dampers.

1. INTRODUCTION

Advances in construction materials and technologies are leading to the design of lighter and more slender civil structures which are constructed with less material, less human resources and less time of construction. These structures might be prone to excessive vibration. More precisely, structures, such as long-span floors, footbridges or cantilevered grandstands, could be excited under human-induced excitations [1], [2]. The vibration caused might be excessive in such a way that recommended levels by codes and guidelines might be clearly exceeded. Under these circumstances, the critical design issue is the vibration serviceability state (VSS) such that the design and structure efficiency are compromised.

During the last decades, control techniques, which have being used in robotics, automation or aeronautics [3]–[6], have been proposed to develop novel damping systems for civil structures. These damping systems, which can be classified into passive, active, semi-active an hybrid dampers, have not been generally accepted by the civil engineering community although they have shown great potential for cancelling vibrations, such as those caused by human excitation. Thus, in 2012, the authors decided

[1] *Department of Continuum Mechanics and Theory of Structures. E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (SPAIN). ivan.munoz@upm.es (Corresponding autor), jaime.garcia.palacios@upm.es, jm.soria@upm.es*

[1] *Department of Signal Theory and Communications, Escuela Politécnica Superior, Universidad de Alcalá de Henares, Alcalá de Henares (Madrid) (SPAIN). emiliano.pereira@uah.es*

to apply to a research project *Development of novel systems for reducing vibrations in pedestrian structures* focused on the development of damping devices. These devices might be considered within new civil structures and/or to retrofit existing structures that exhibit excessive vibration, improving the VSS and increasing their useful lifetime [7]. At that moment, there were no research Spanish projects tackling vibration cancelation of pedestrian structures. The main goals were the development of: (i) active vibration control (AVC) systems with several inertial actuators and sensors distributed along the structure and (ii) semi-active control systems with variable damping and stiffness, with a global objective: contributing to the acceptation of these emerging technologies within the civil engineering community.

Actually, the main goals have been achieved only partially. However, the following actions/achievements/developments have been achieved:

i) Long-term dynamic analysis of structures with time-varying modal parameters [8], [9], [10], including the assessment of the VSS.
ii) Construction of a slender composited floor to test control strategies [11].
iii) A common design framework to design passive and active strategies with multiple controller [12]–[14]. This is a feedback-based design methodology with input-output frequency weighting that are introduced to account for human-induced vibrations.
iv) Combining the above design framework with meta-heuristic optimization algorithms in order to obtain a global optimum solution in an affordable computation time for passive and active control strategies [15].
v) Test the active vibration control in simple (slab) and complex floor structures (dining hall floor) [16], [17], [18].
vi) Exploring semi-active control laws for structures with time-varying modal parameters [19], [20].
vii) Construction of a tuned mass damper (TMD) to be upgraded to a semi-active tuned mass damper (STMD) via magneto-rheological dampers (MR) [11].
viii) Construction of an eddy-current TMD with permanent magnets to be upgraded to a STMD via current-varying coils. A preliminary design was presented in [15]: a cantilever beam with adjustable length mounted in the frame with a magnet close to an aluminium plate.

Thus, this paper describes the outcomes of this project up to now and provides perspectives for the near future. New challenges and tasks that should be faced sooner to actually get these technologies to be incorporated into future structures as a part of the design are highlighted.

This paper is accompanied by the following papers also submitted in *Fourth International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering*:

i) Construcción, análisis dinámico y cancelación de vibraciones de un forjado mixto ligero
ii) Identifying a TMD and its final tuning once installed on a lively composited slab
iii) Discussion on Harmonic Dynamic Models of Pedestrian Loads for Footbridges

2. SOFTWARE AND HARDWARE DEVELOPMENT

During these three years, the group has carried out an important effort in the development of a MATLAB-based software for experimental dynamic analysis (see Fig. 1 for illustrating), including: prepossessing of raw data, operational modal analysis (OMA), frequency-response-function (FRF) based modal analysis and vibration serviceability assessment. Three OMA methods are included. All of them are based of the Stochastic Subspace Identification technology. This fact allows to analyse uncertainties due to the identification process (the method employed and input parameters for the method) and due to changes in the pre-processing (such as time intervals, decimations, filtering, etc.) [21], [22].

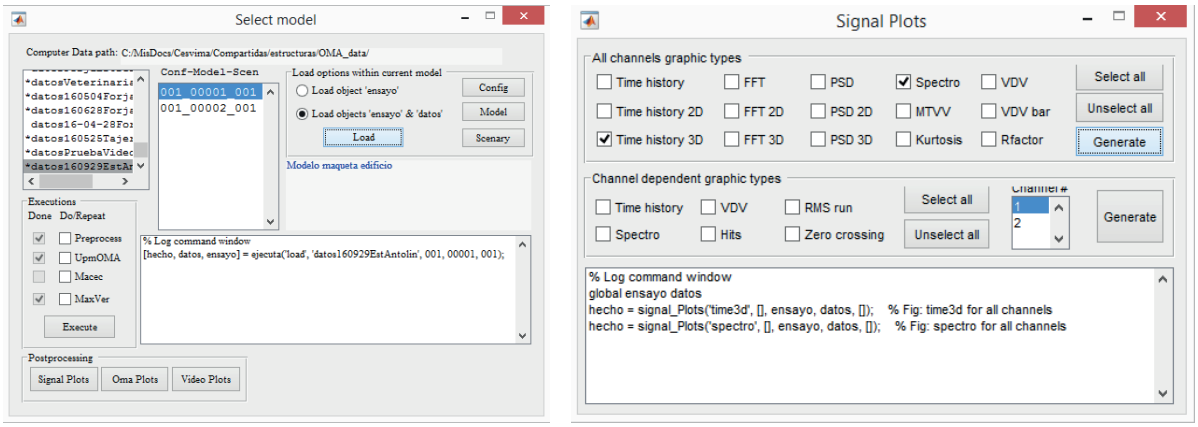


Figure 1. *Screenshots of Graphical User Interface (GUI) of the MATLAB-based software for experimental dynamic analysis.*

A cuasi-distributed acquisition system is being developed based on several stand-alone acquisition systems synchronized by Ethernet cables. Different sensors can be used, such as strain gages, accelerometers or displacement sensors. An ad hoc software is also being developed. The system is totally scalable and especially suitable for semi-permanent installation for long-term-based dynamic analysis. Fig. 2 depicts system trials carried out in the lab.

3. STRUCTURES STUDIED THROUGHOUT THE PROJECT

The structures studied throughout the project are briefly describe here. The evaluation of the VSS has also been carried out although it is not shown here.

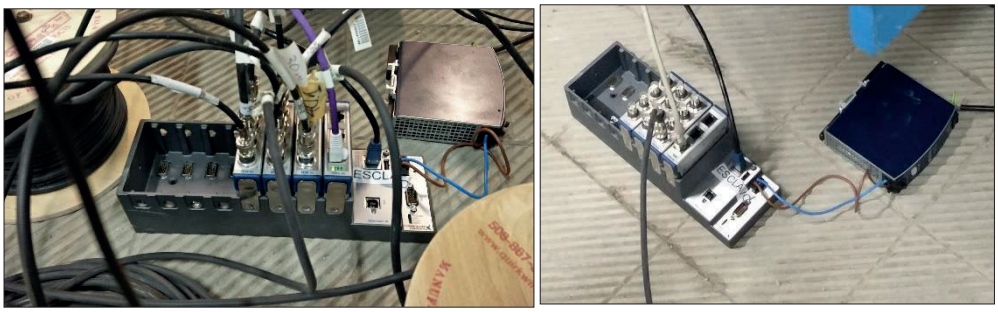
3.1. Steel-plated stress-ribbon footbridge

A steal-plated stress-ribbon sited in Valladolid has been analysed throughout the project. This is a slender and light-weight structure born by a pre-tensioned catenary-shape steel band of only 30 mm thick. The structure has only one span of 85 m. This is particularly lively in vertical direction exhibiting several closely-space vibration modes with similar natural frequencies that might be excited by human excitation. A continuous vibration monitoring system [23] that measures the acceleration and the environmental factors was installed and one-year measuring raw data was analysed in [1]. The modal analysis of the structure was carried out. The most perceptible vibration mode of the structure at approximately 1.8 Hz changes up to 20%. Finally, the long-term VSS was carefully analysed in [10], [24]. Fig. 3 illustrates the vibration monitoring system installed inside the handrail and the tracked vibration

modes over a year. Table 3 shows how modal parameters (estimated during a year) change significantly with both daily and seasonal trends. Finally, Fig. 4 shows the first six modal shapes.

a) Simplified scheme

b) Full deployment of wiring for measurement



c) CompactRIO (cRIO) of National Instruments. Data acquisition system.

Figure 2. *Photos of the quasi-distributed acquisition system for dynamic measurement.*

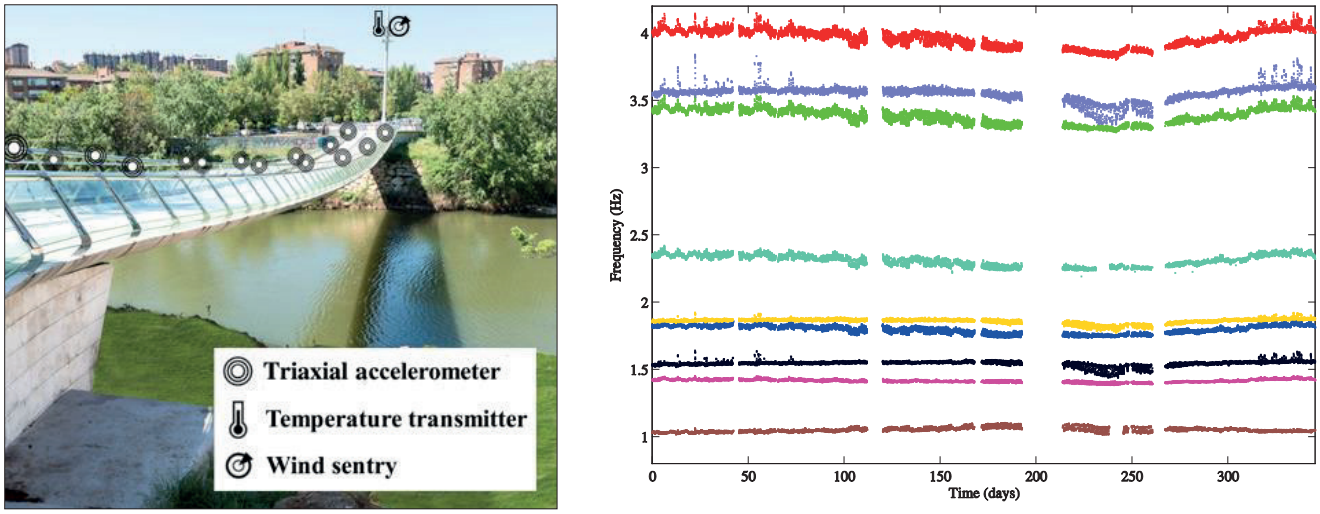
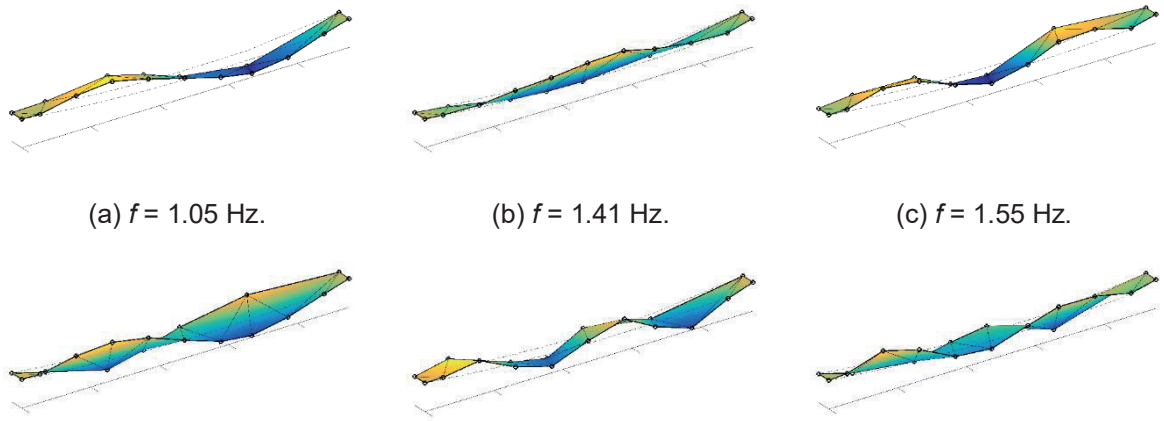


Figure 3. *Left, footbridge view and sensor distribution. Right, tracked frequency estimates for the whole year.*

Table 3. Summary of identified natural frequencies and damping ratios for one year monitoring and their statistics: mean frequency, mean damping, standard deviation and corresponding variation.

Mode	Frequency			Damping			Repeatability
	$\bar{f}$ (Hz)	Std	v (%)	$\bar{\zeta}$ (%)	Std	v (%)	
1	1.0482	0.0152	14.23	0.3665	0.1710	147.89	9667 (44.7%)
2	1.4145	0.0107	35.26	0.3381	0.1513	110.74	10619 (49.1%)
3	1.5440	0.0181	27.63	0.6498	0.2357	133.62	9886 (45.7%)
4	1.7937	0.0291	20.27	0.4192	0.1502	221.88	**13817 (63.8%)**
5	1.8594	0.0168	6.87	0.5718	0.1605	234.74	9936 (45.9%)
6	2.3117	0.0425	15.01	0.3753	0.1474	128.54	8746 (40.4%)
7	3.3821	0.0549	42.95	0.3868	0.1191	103.96	12210 (56.4%)
8	3.5512	0.0524	51.87	0.7226	0.1884	157.48	9237 (42.7%)
9	3.9619	0.0624	8.95	0.3853	0.1185	230.82	10183 (57.8%)



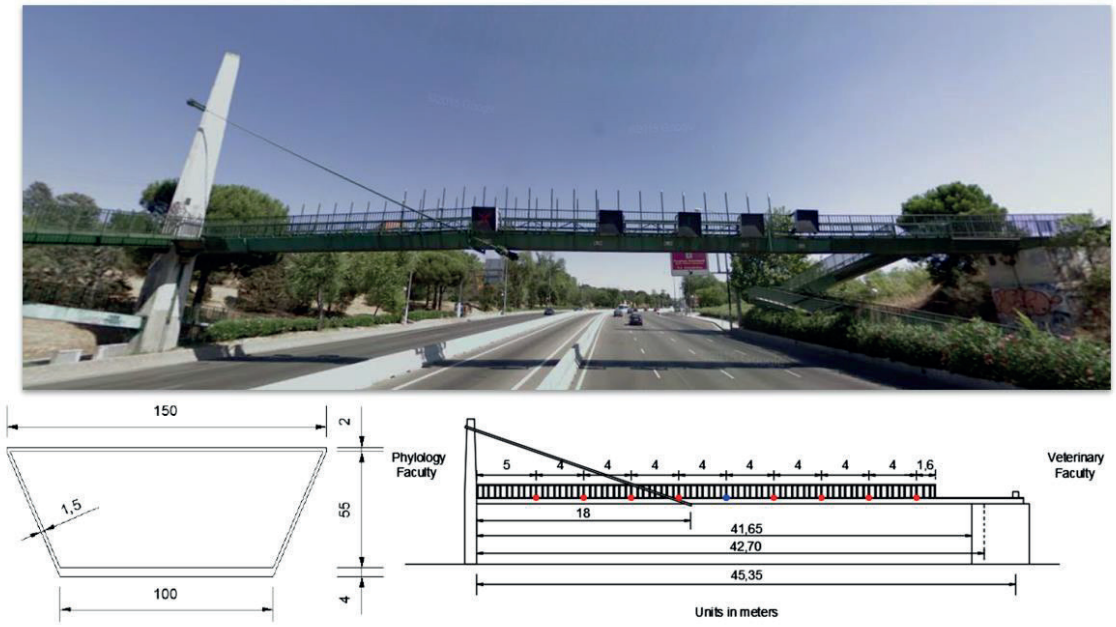
(a) f = 1.05 Hz. (b) f = 1.41 Hz. (c) f = 1.55 Hz.

(d) f = 1.79 Hz. (e) f = 1.86 Hz. (f) f = 2.31 Hz.

Figure 4. *First six modal shapes for vibration modes of Table 1.*

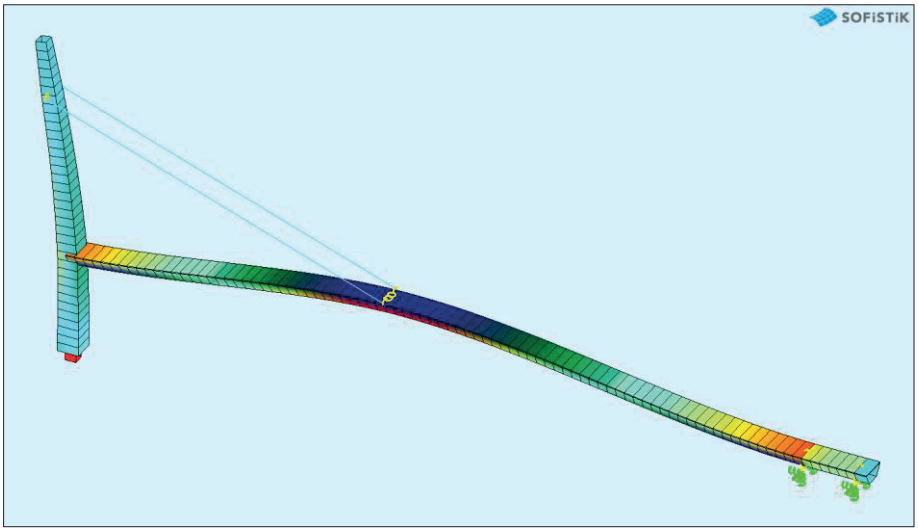
3.2. Veterinary footbridge

This footbridge can be seen as cable-stayed box-girder bridge with a main span of 42.70 m. It is a steel-concrete composite footbridge with box cross section. Due to its slenderness, it can be considered as a lively bridge, making it interesting for the vibration serviceability analysis. Fig. 5 illustrates the experimental campaign and Finite Element Method (FEM) model that has been calibrated from experimental results. Additionally, the analysis of the structure with damping devices from the pre-project design is being carried out.



a) Veterinary Footbridge sited over the A-6 motorway in Madrid: on-road view and sensor placement.

b) Experimental campaign. Three high sensitivity accelerometers measuring the three spatial directions.



c) FEM model.

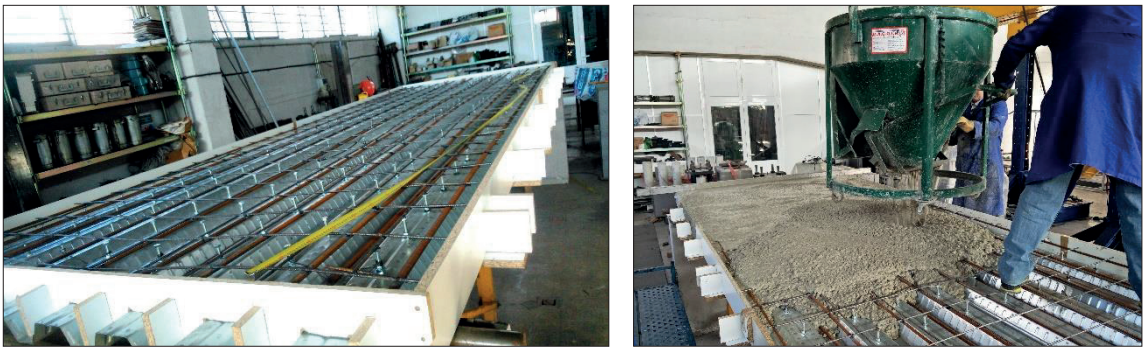
Figure 5. *Studyies on Veterinary Footbridge.*

The first natural frequency estimate is 1.83 Hz and the damping associated to this mode is only 0.8 %. Clearly, the first vibration mode is the one most likely to be excited. Additionally, the second mode might be excited by the second harmonic of walking (frequency of 3.83 Hz and but with higher damping ratio, 1.39%). On the other hand, the lateral frequencies are beyond the critical range [25].

3.3. Composite steel-concrete slab

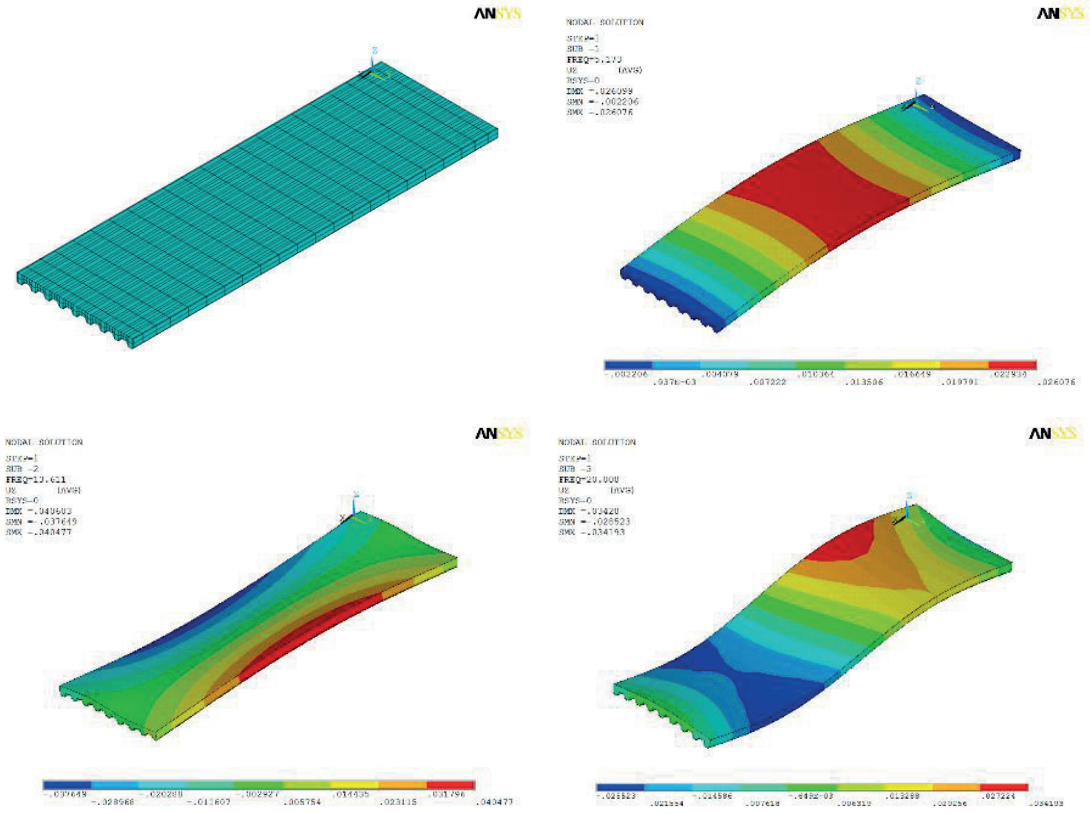
A full scale lab structure has been constructed. The lab structure is a composite steel-concrete slender slab of a span-to-depth ratio of only 1/40 (1/20 is the common value) resulting in a very light structure that does not fulfill the VSS, as expected when it was designed. The structure has 5.5 m span, 4 cm depth and weighs only 3000 kg. Fig. 6 shows pictures of the casting process and a FEM model developed.

The structure dynamics is modified in two ways: adding masses and changing supports conditions. FRF-based test were carried out to identify the structure and calibrate a FEM model. APS 400 model electrodynamic shaker was used a measured force input for this purpose and the corresponding modal extraction parameters were undertaken. The structure has its first vibration mode at approximately 5.2Hz, that may be changed up to 25%. The nominal case is the first configuration with the structure with two electrodynamic shakers onto it weighting approximately 210 kg. Apart from this configuration, other two configurations are studied. The second configuration consists of adding masses (4 blocks of 150 kg, a total mass of 600 kg). The latter configuration is obtained by changing the support conditions (reducing 30 cm the span of the slab). Fig. 7 shows the FRF (including the first vibration mode only) for the three configurations [11].



a) Casting the structure.

b) Bare structure with accelerometers installed underneath



c) Finite Element model and vibration modes

Figure 6. *Composite steel-concrete structure.*

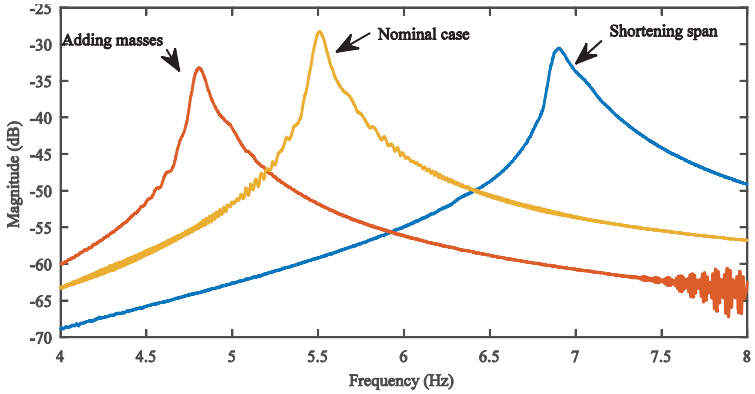
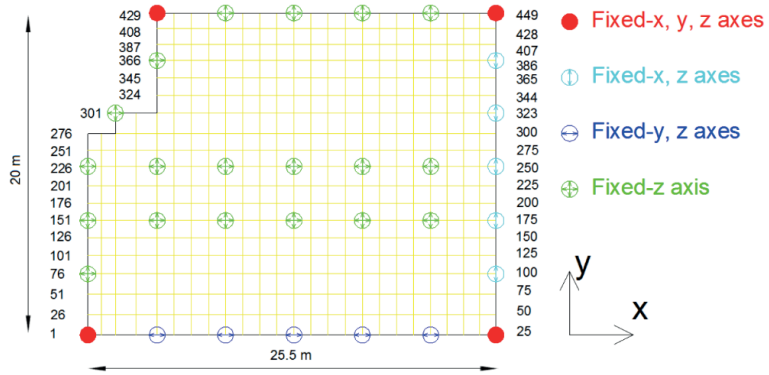


Figure 7. *FRF for three different configurations.*

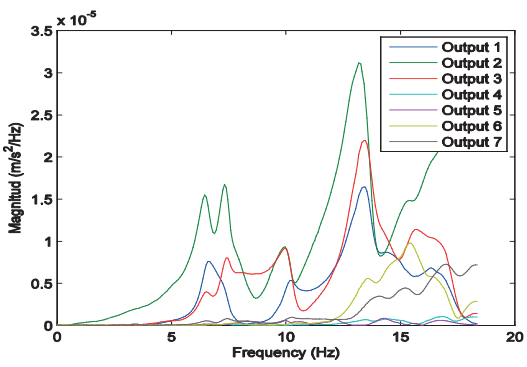
3.4. Dining hall

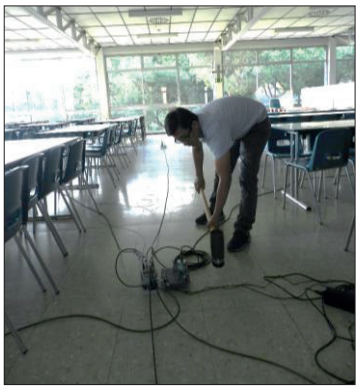
This structure is a long-span dining room floor of a primary-secondary school sited in Madrid (Spain). It is an irregular rectangular composite floor with dimension of 25.5 m x 20 m. The general arrangement of beams and columns is shown in Fig. 8. This structure is considered by its user as lively.



a) Floor layout

b) Panoramic picture





c) Impact tests

Figure 8. *Dining hall studies.*

A FEM model calibrated with experimental tests was carried out. Fig. 9 shows the first four vibration modes. This structure is a good example of a floor with vibration modes with closely-spaced natural frequencies. Vibration control of these structures is not an easy task, since vibration comes from several coupled modes. Active multi-input multi-output (MIMO) strategies are of special interest in this situation [16], [17].

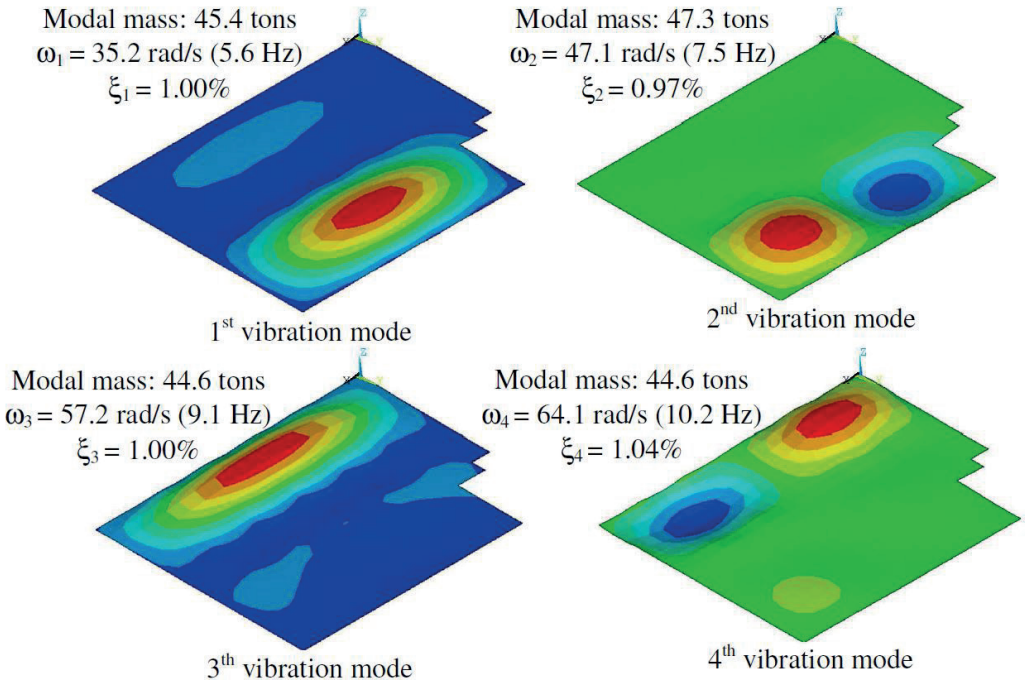


Figure 9. *Dining hall studies.*

4. DESIGNING TMDs

A TMD the lab structure has been design and built (see Fig. 10). The TMD is equipped with two MR dampers in order to upgrade the TMD to a STMD. Fig. 11 shows the TMD installed under the structure. The construction and assembly of the device has been carried out and the tuning process [26] as well as the detuning process have been studied in detail, changing for this purpose, the dynamic properties of the lab structure (see Fig. 12). The tuning process follows these steps: i) TMD identification for different mass values under its inherent damping, ii) TMD installation and tuning to the structure by changing the TMD mass, and iii) introduction of the necessary damping to maximize robustness.

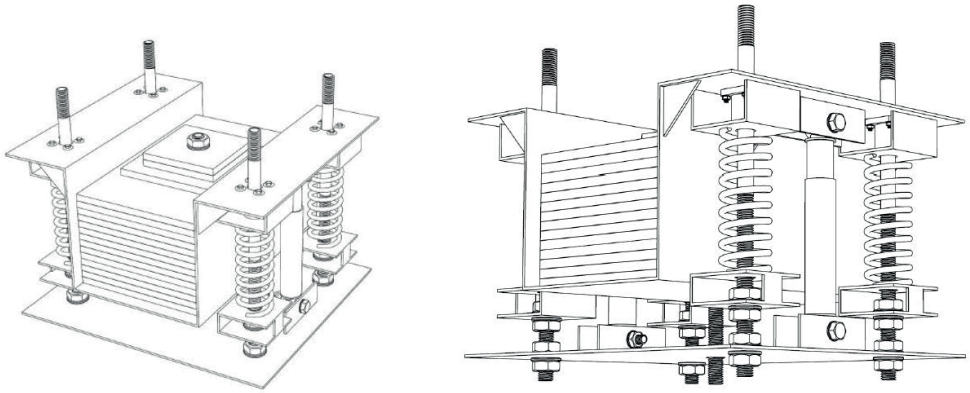
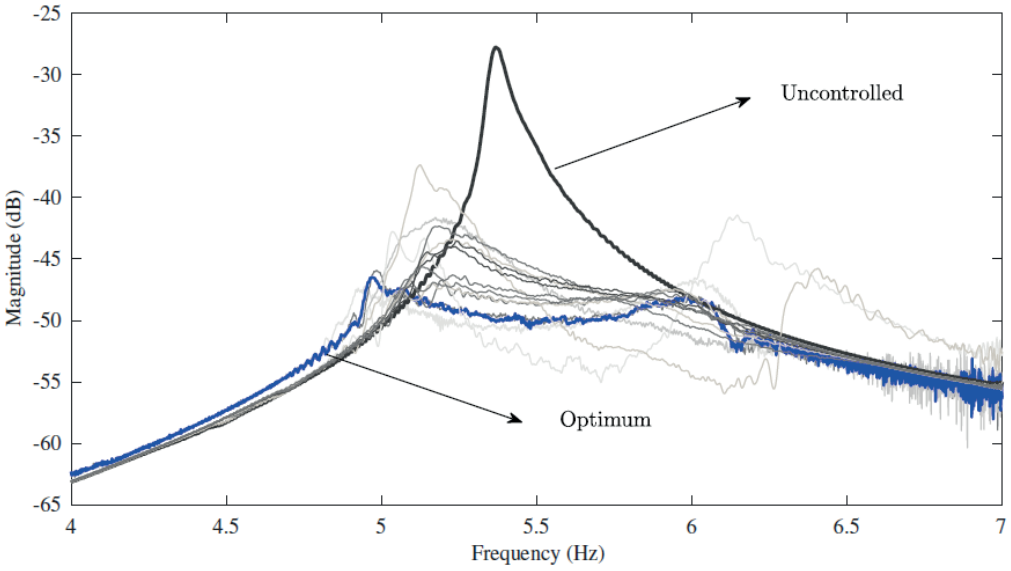
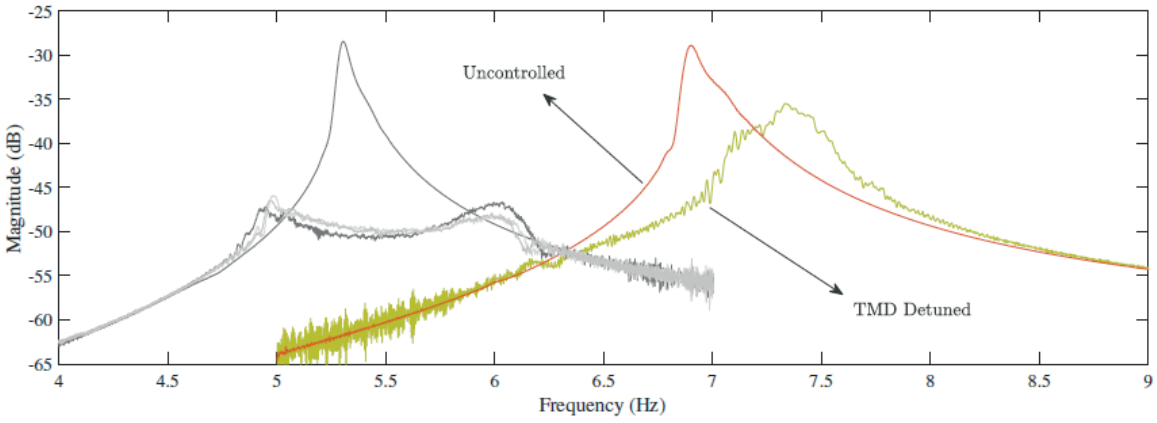


Figure 10. *TMD design. CAD model.*

Figure 11. *Light-weight composite slab equipped with a STMD.*



a) TMD tuning



b) TMD performance under structures changes

Figure 12. *Light-weight composite slab equipped with STMD.*

Construction of an eddy-current TMD with permanent magnets to be upgraded to a STMD via current-varying coils [27]. A preliminary design was presented in [15]: a cantilever beam with adjustable length mounted in the frame with a magnet close to an aluminium plate. Fig. 13 shows the experimental setup.

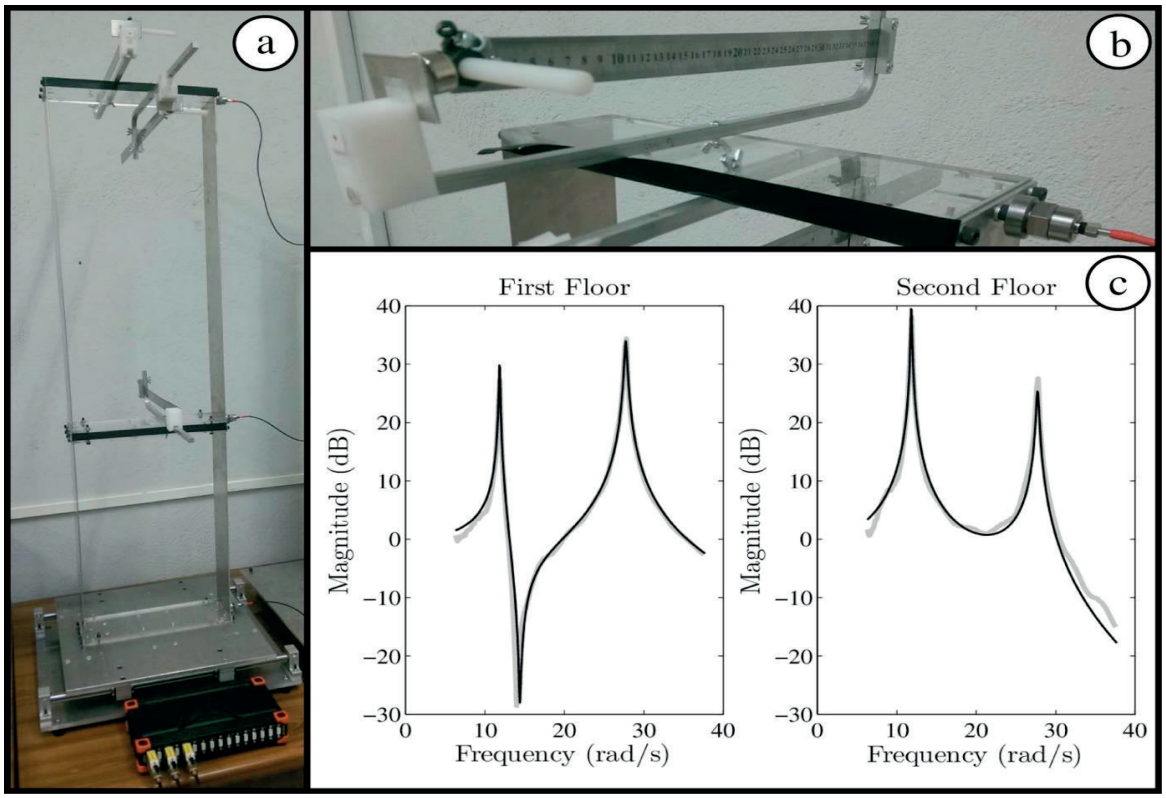


Figure 13. *Experimental set-up; a) N=2 floor building with TMD frames; b) Detail of the experimental TMD; c) Structure Identification, where ((—)-black) shows the FRF of the identified model, ((—)-gray) shows the experimental FRF.*

5. DESIGNING AMDs

AVC via inertial-mass actuators has been shown to be a viable technique to mitigate human-induced vibrations in civil structures. When several vibration modes have to be cancelled and modal properties may change, an active solution may be a competitive alternative [28]. Moreover, if the structure is only used during a short period of time (like concert hall, dining hall, etc.), the solution of AVC via inertial mass actuators is quite attractive (since no significant structure modifications are needed, i.e., reduction costs). In addition, AVC has been shown to significantly reduce the level of response, allowing structures to satisfy vibration serviceability limits.

Several single-input single-output (SISO) control techniques have been applied successfully [2], [29]–[33] up to now. However, MIMO control strategies that consider the vibration control of the whole structure globally perform better. The MIMO design involves an optimization problem that finds simultaneously the sensor/actuator pairs' optimal placements and tunes the control gains. Fig. 14 shows the general control scheme that is mainly based on the theoretical velocity feedback control, introducing elements that makes the control scheme implantable in practice (filters, saturation, etc.).

Fig. 15 shows SISO controllers studies in the lab. Interesting conclusions on the practical design have been reported [34]. A MIMO control have been designed for the dining hall described previously [17] and the practical implementation is an imminent future work.

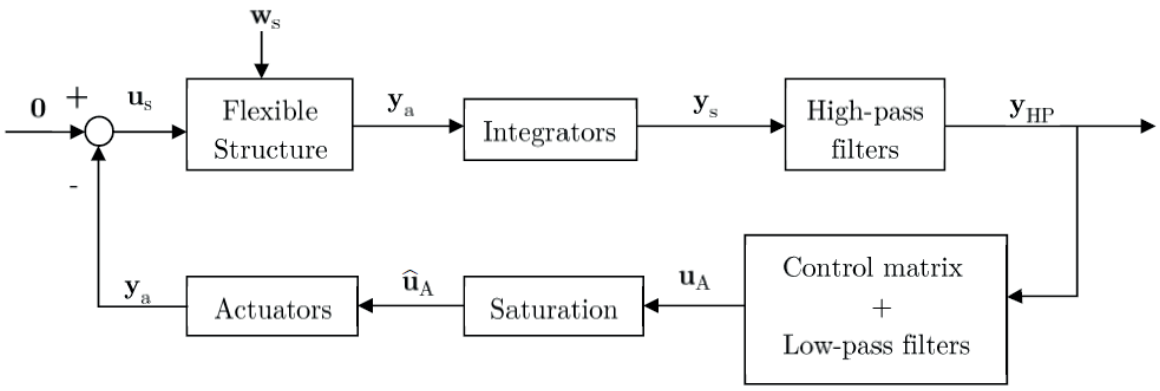


Figure 14. *General control scheme.*

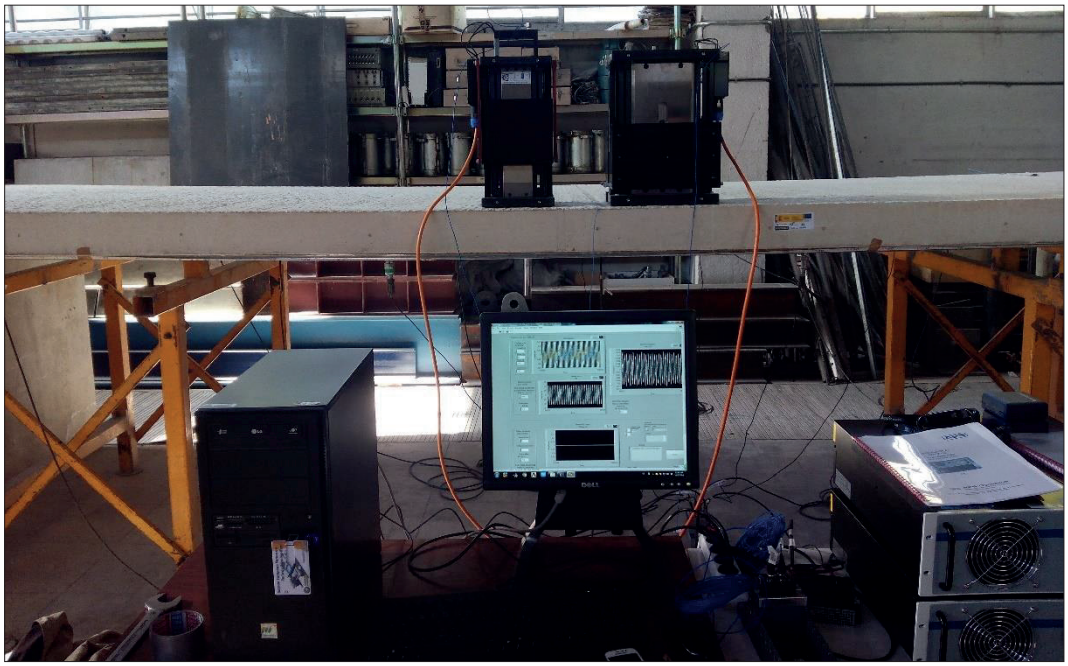
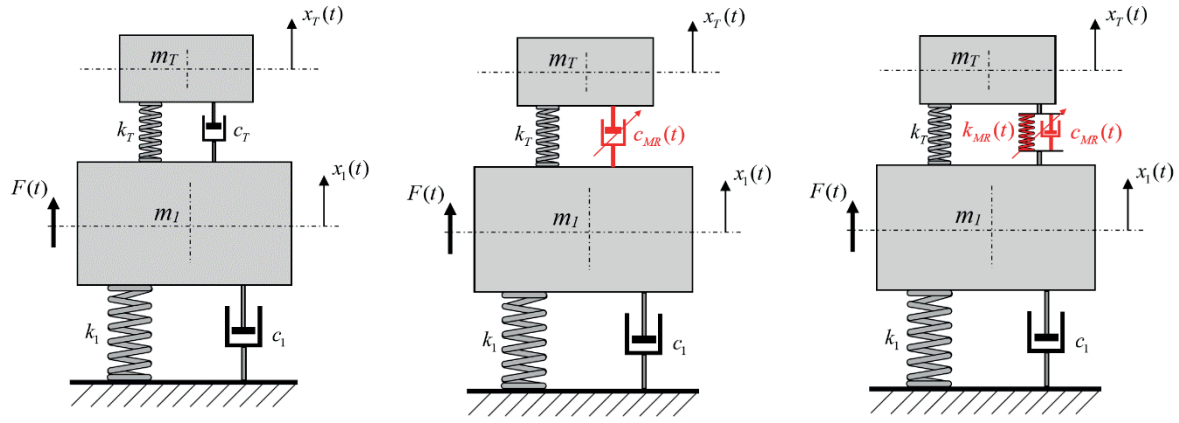


Figure 15. *SISO control trials on the lab structure.*

6. DESIGNING STMDs

A semi-active control devices should be able to adapt in real time structure changes or excitation changes. That is, when structures show modal properties changing over time, and/or several vibration modes must be cancelled by the same device, passive devices may detune and experience a significant loss of efficacy. Under these circumstances, the use of semi-active devices is a solution to be explored. Fig. 16 shows: i) a classical TMD installed on a structure modelled as a single-degree-of-freedom system, ii) a STMD with variable damping, and iii) a STMD with variable damping and stiffness.

On the one hand, two different control laws based on the use of MR dampers have been studied. i) STMD with an on-off control law (i.e, normal and blocking functioning) that can be seen as a phase control [35], and ii) STMD with a MR that emulates damping and stiffness changes, i.e, tries to keep the TMD tuned all the time [36]. Fig 17 shows the studies carried out on the lab slab for three different supports' configurations of the structure.



(a) Passive. *(b) STMD 1.* *(c) STMD 2.*

Figure 16. *Model of the devices installed on a primary structure. Red symbol (↗) means changing over time.*

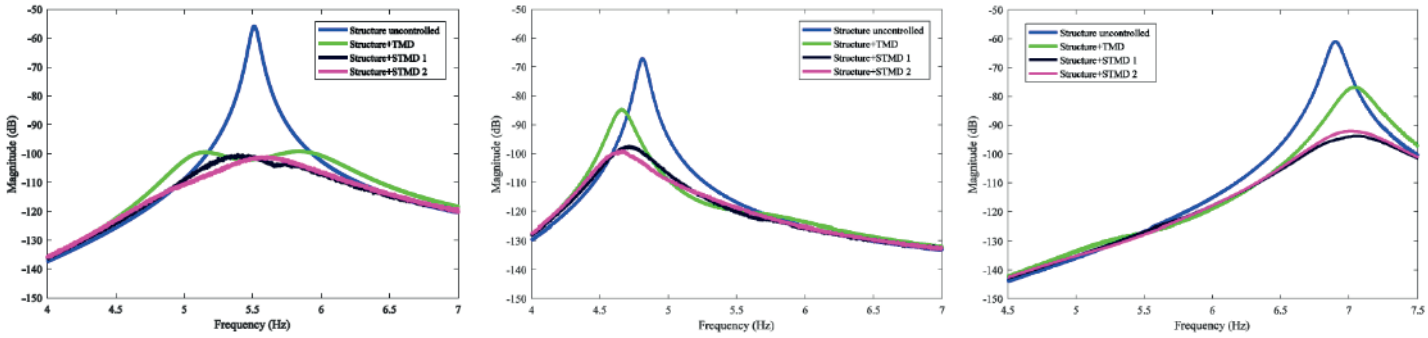


Figure 17. *Frequency response spectra for SDOF nominal case (lef), configuration 2 (center) and configuration 3 (right).*

On the other hand, simulations have been undergone using the results obtained in the modal identification of the Pedro Gómez Bosque footbridge, discussed above [8]. In this case, in addition to the typical SDOF model, a MDOF model has also been obtained in order to study how the semi-active interacts with other modes of vibration different from the target one [19]. Different from TMDs, the STMD shows an excellent performance being able to cope with several vibration modes simultaneously, as it is shown in Fig 18.

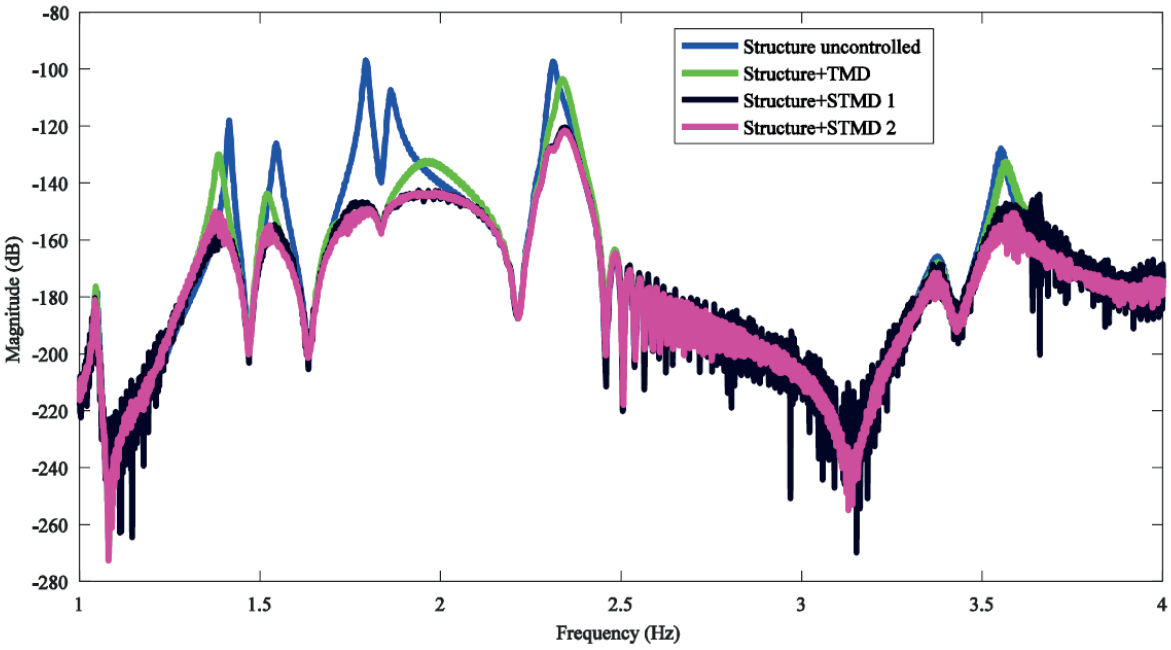


Figure 18. Frequency domain, frequency spectrum *of MDOF system.*

7. PERSPECTIVES FOR THE NEAR FUTURE

Throughout this project, the issues are still opened:

- Even MIMO controllers have been studied, their implementation in an in-service floor is still an open issue. Cope with spillover effects (instabilities due to uncontrolled high-order modes), actuator nonlinearities, etc. makes the problem challenging.
- Carry on working in optimization procedure for MIMO design more efficient and effective.
- A STMD should install in an in-service structure to shows its advantages apart from lab structures, and structure models.
- Explore different STMD in both senses: hardware development and control laws.
- Develop a low-cost stand-alone vibration monitoring system to be used for long-term vibration serviceability assessment or structural health monitoring.
- Complete and make more robust the software under development.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge the financial support provided by Ministry of Economy and Competitiveness (Government of Spain) by funding the Research Project REVES-P (DPI2013-47441). The authors also acknowledge the partial financial support provided by the Research Net VIBRASTRUNET (BIA2015-71942-REDT).

REFERENCES

[1] J. de Sebastián, I. M. Díaz, C. Casado, A. Poncela, and A. Lorenzana, “Evaluación de la predicción de aceleraciones debidas al tránsito peatonal en una pasarela en servicio,” *Informes de la Construcción*, vol. 65, no. 531, pp. 335–348, 2013.

[2] I. M. Díaz and P. Reynolds, "Acceleration feedback control of human-induced floor vibrations," *Engineering Structures*, vol. 32, no. 1, pp. 163–173, 2010.

[3] V. Feliu, E. Pereira, and I. M. Díaz, "Passivity-Based Control of Single-Link Flexible Manipulators using a Linear Strain Feedback: a New Methodology," *Mechanisms and Machine Theory*, vol. 71, pp. 191–208, 2014.

[4] E. Pereira, J. R. Trapero, I. M. Díaz, and V. Feliu, "Adaptive input shaping for single-link flexible manipulators using an algebraic identification," *Control Engineering Practice*, vol. 20, pp. 138–147, 2012.

[5] E. Pereira, J. R. Trapero, I. M. Díaz, and V. Feliu, "Algebraic identification of the first two natural frequencies of flexible- beam-like structures," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 25, pp. 2324–2335, 2011.

[6] I. M. Díaz, E. Pereira, V. Feliu, and J. J. López-Cela, "Concurrent design of multi-mode input shapers and link dynamics for flexible manipulators," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 15, no. 4, pp. 646–651, 2010.

[7] A. Caro-Ruano, "Estudio de vibraciones y análisis a fatiga de una torre de telecomunicaciones de 40 metros con dispositivos de amortiguamiento," Universidad Politénica de Madrid, 2017.

[8] J. M. Soria, I. M. Díaz, J. H. García-palacios, and N. Ibán, "Vibration Monitoring of a Steel-Plated Stress-Ribbon Footbridge: Uncertainties in the Modal Estimation," *Journal of Bridge Engineering*, vol. 21, no. 8, pp. 1–13, 2016.

[9] I. M. Díaz, J. M. Soria, N. Ibán, M. Cacho, and J. H. García-Palacios, "Vibration monitoring of a steel-plated stress-ribbon footbridge: effects of environmental and operational factors on modal properties," in *6th World Conference on Structural Control and Monitoring*, 2014, pp. 457–466.

[10] J. M. Soria, I. M. Díaz, J. H. García-Palacios, and A. Lorenzana, "LONG-TERM VIBRATION SERVICEABILITY ASSESSMENT OF A STEEL- PLATED STRESS-RIBBON FOOTBRIDGE," in *Footbridge 2017*, 2017, pp. 384–393.

[11] J. M. Soria, I. M. Díaz, and J. H. García-palacios, "DESIGNING A SMART TMD FOR A COMPOSITE STEEL-CONCRETE SLENDER SLAB," in *VIII ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials (SMART 2017)*, 2017, pp. 764–775.

[12] X. Wang, I. M. Díaz, E. Pereira, and Q. Xu, "Optimal TMD-based control strategy for human-induced vibrations," in *3rd International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering, CMMoST'15*, 2015, pp. 494–507.

[13] I. M. Díaz, E. Pereira, C. Zanuy, and C. Alén, "A comparative study of SISO and MIMO control strategies for floor vibration damping," in *6th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials (SMART2013)*, 2013.

[14] E. Pereira, I. M. Díaz, E. J. Hudson, and P. Reynolds, "Optimal control-based methodology for active vibration control of pedestrian structures," *Engineering Structures*, vol. 80, pp. 153–162, 2014.

[15] S. Salcedo-Sanz, C. Camacho-Gómez, Á. Magdaleno, E. Pereira, and A. Lorenzana, "Structures vibration control via tuned mass dampers using a co-evolution coral reefs optimization algorithm," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 393, pp. 62–75, 2017.

[16] J. García-Palacios, J. M. Soria, X. Wang, I. M. Díaz, and E. Pereira, "Vibration control of a dining hall: structure modelling," in *VIII ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and*

Materials (SMART 2017), 2017.

[17] E. Pereira, X. Wang, C. Alén, J. García-Palacios, and I. M. Díaz, "Vibration control of a dining hall: MIMO and SISO design," in *VIII ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials (SMART 2017)*, 2017, pp. 839–849.

[18] X. Wang, I. M. Díaz, and E. Pereira, "MIMO control design including input-output frequency weghting for human-induced vibrations," in *EACS 2016 -- 6th European Conference on Structural Control*, 2016.

[19] J. M. Soria, I. M. Díaz, and J. García-Palacios, "Vibration control of a time-varying modal-parameter footbridge: study of semi-active implementable strategies," *Smart Structures and Systems*, vol. 20, no. 5, 2017.

[20] J. M. Soria, I. M. Díaz, E. Pereira, J. H. García-Palacios, and X. Wang, "Exploring vibration control strategies for a footbridge with time-varying modal parameters," in *MOVIC & RASD 2016*, 2016.

[21] I. M. Díaz, J. García-Palacios, C. A. Barrera, J. M. Soria, and O. Nieto-Taladriz, "Quantification of uncertainties in modal parameter estimation on two buildings," in *6th International Operational Modal Analysis Conference, IOMAC'15*, 2015, pp. 333–341.

[22] J. H. García-Palacios, I. M. Díaz, J. M. Soria, F. J. Cara, S. García, I. M. Díaz, J. M. Soria, F. J. Cara, and S. García, "Uncertainty optimization of Automated Operational Modal Analysis applied to Structural Health Monitoring techniques," in *6th World Conference on Structural Control and Monitoring*, 2014, pp. 1420–1427.

[23] J. de Sebastián, A. Escudero, R. Arnanz, I. M. Díaz, A. Poncela, and A. Lorenzana, "A low-cost vibration monitoring system for a stress-ribbon Footbridge," in *6th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials (SMART2013)*, 2013.

[24] I. M. Díaz, J. de Sebastián, C. Zanuy, A. Lorenzana, and A. Poncela, "Long-term vibration serviceability assessment of a steel-plated stress ribbon footbridge," in *37th IABSE Symposium Madrid 2014*, 2014, pp. 2618–2625.

[25] I. M. Díaz, J. H. García-palacios, A. García-Cruz, and J. M. Soria, "COMPUTING SERVICEABILITY PREDICTORS FOR AN IN-SERVICE FOOTBRIDGE," in *Footbridge 2017*, 2017, pp. 426–435.

[26] Á. Magdaleno, N. Ibán, M. Cacho-Pérez, F. J. Cara, I. M. Díaz, A. Lorenzana, and E. Pereira, "A new procedure based on time domain indicators for optimal TMD tuning on footbridges," in *X International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2017*, 2017, pp. 2850–2855.

[27] Á. Magdaleno, E. Pereira, J. Castaño, N. Ibán, I. M. Díaz, and A. Lorenzana, "Optimal design and practical implementation of eddy-current tuned mass dampers with permanent magnets for multi-storey buildings," in *EACS 2016 – 6th European Conference on Structural Control*, 2016.

[28] P. Reynolds, I. M. Díaz, and D. Nyawako, "Vibration testing and active control of an office floor," in *27th International Modal Analysis Conference (SEM-Society for Experimental Mechanics)*, 2009.

[29] C. M. Casado, I. M. Díaz, J. De Sebastián, A. V. Poncela, and A. Lorenzana, "Implementation of passive and active vibration control on an in-service footbridge," *Structural Control and Health Monitoring*, vol. 20, pp. 70–87, 2013.

[30] I. M. Díaz, E. Pereira, M. J. Hudson, and P. Reynolds, "Enhancing active vibration control of pedestrian structures using inertial actuators with local feedback control," *Engineering Structures*, vol. 41, pp. 157–166, 2012.

[31] I. M. Díaz, E. Pereira, and P. Reynolds, "Integral resonant control scheme for cancelling human-induced vibrations in light-weigth pedestrian structures," *Structural Control and Health Monitoring*, vol. 19, pp. 55–69, 2012.

[32] I. M. Díaz and P. Reynolds, "On-off nonlinear active control of floor vibrations," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 24, no. 6, pp. 1711–1726, 2010.

[33] I. M. Díaz and P. Reynolds, "Robust saturated control of human-induced floor vibrations via a proof-mass actuator," *Smart Materials and Structures*, vol. 18, no. 12, p. 125024, 2009.

[34] X. Wang, E. Pereira, I. M. Díaz, and J. García-Palacios, "Band-pass filter design to implement direct velocity control of human-induced vibrations," *Smart Materials and Structures*.

[35] C. Moutinho, "Testing a simple control law to reduce broadband frequency harmonic vibrations using semi-active tuned mass dampers," *Smart Materials and Structures*, vol. 24, no. 5, p. 55007, 2015.

[36] F. Weber, "Dynamic characteristics of controlled MR-STMDs of Wolgograd Bridge," *Smart Materials and Structures*, vol. 22, no. 9, p. 95008, 2013.

AN APPROACH OF THE SEISMIC CALCULATION METHODOLOGIES COMPARED TO CODES BASED ON NON LINEAR ENERGY BALANCE

Carlos Iturregui Arranz[1], José M. Soria[1], Iván M. Díaz[1],Jaime H. García-Palacios[1].

Keywords: energy input, inelastic displacement, push-over, Direct Displacement Based Design.

ABSTRACT

During the last few years, the appearances of new seismic calculation methodologies has led to certain dispersions in the final results, especially related to the damage control parameters programmed with different codes.

This paper presents a control exercise containing the modal dynamic, Forced, Direct Displacement Based Design-DDBD and push-over methodology, both of which, show the contrast of energy balance for buildings with a RC frame type, subjected to different intensities seismic actions.

Two different buildings are evaluated, 3th and 5th floors, respectively. The demand capacity spectrum is evaluated in both forces and energies, the linear and non-linear distribution of equivalent external displacement profile, the evolution of the fundamental inelastic period, as well as the geometric and mechanical system non-linearity.

1. INTRODUCCIÓN

La ingeniería sísmica comenzó en los años 20, después del terremoto de Kanto, y a lo largo de estos casi 100 años de estudios han sido muchas las metodologías de aplicación en el campo profesional.

Las limitaciones computacionales hasta hace pocos años permitieron un gran desarrollo de modelos de fuerzas equivalentes basadas en la dinámica lineal corregida según los diferentes tipos de no linealidad.

Desde los años 90, precisamente gracias al conocimiento heredado, y unido a la capacidad de cálculo de sistemas estructurales complejos, han aparecido metodologías de cálculo de mucho interés, como el análisis estático no lineal pushover [1]. Esta metodología ponía hincapié en probablemente la parte más "débil" del análisis sísmico, como era el factor de comportamiento-ductilidad para recoger en un cálculo lineal un comportamiento claramente no lineal en su concepción. En cualquier caso, por su sencillez, la mayor parte de nuevas metodologías, con excepción de la integración dinámica no lineal (Inelastic Time History Analisis –ITHA), que todavía dista mucho de ser competitiva en tiempos computacionales, además de presentar una relevancia cuestionable en estructuras sin elementos especiales como aisladores o disipadores, han tratado de condensar la información de la respuesta estructural del edificio frente a terremoto en un grado de libertad equivalente-SDOF y parámetros de daño derivados esencialmente de la deriva entre plantas o drift en lengua inglesa[2].

El método DDBD (Direct Displacement Based Design) [3] fue introducido por Calvi, Priestley y Sullivan, y posteriormente Kowalsky realizó interesantes aportaciones [4]. Sin ser un método finalista si supone una clara referencia de contraste en la labor profesional por su sencillez en la medida en que es el drift el parámetro de entrada y el perfil inelástico de desplazamientos viene derivado de él. De nuevo la metodología supone una condensación en una estructura SDOF equivalente.

[1]*Department of Continuum Mechanics and Theory of Structures. E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid. carlos.iturregui@upm.es*

Por último, y en cierta medida en paralelo, Akiyama [5] recogió la experiencia de Housner y otros autores, procediendo a establecer un marco general para el proyecto sismo resistente basado en el balance energético.

2. EDIFICIOS DE CÁLCULO.

Se introduce en este apartado los edificios de cálculo y las acciones exteriores, con objeto de que sea más ilustrativo en la presentación de resultados en la medida en que se va observando cada uno de ellos según diversas metodologías. En él se va a proceder a contrastar el cálculo por 4 métodos diferentes, analizando "debilidades y fortalezas" de cada uno de ellos, además de establecer una aproximación al balance energético del método DDBD y la metodología push-over.

Se proponen 2 edificios de cálculo de bajo más 3, 5 plantas respectivamente cuyo esqueleto resistente está constituido a base de pórticos de hormigón armado.

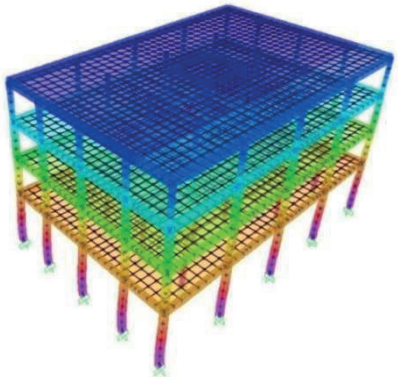


Figura 1.a. *Edificio de Bajo + 3 Plantas.*

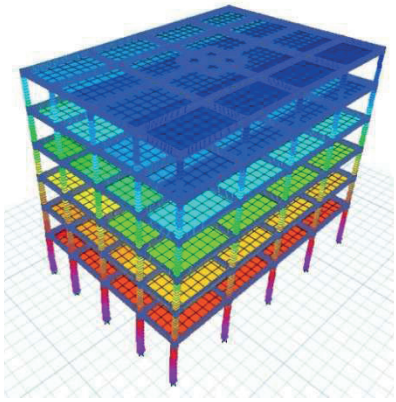


Figura 1.b. *Edificio de Bajo + 5 Plantas.*

Los elementos comunes al diseño son los siguientes:

- Hormigón en elementos verticales. HA-40, hormigón en elementos horizontales. HA-30.
- Aceleración básica de cálculo: $a_b = 0.25g$; $a_b = 0.50g$; $a_b = 0.75g$
- Factor de comportamiento/Ductilidad: q=1 en el caso de B+3 y q=2 en el caso de B+5.
- Altura de planta baja: 6 metros, con objeto de favorecer el mecanismo de colapso de planta baja flexible. Altura de planta tipo: 4 metros.
- Carga Permanente: 3 $\frac{KN}{m^2}$. Carga de cubierta: 2 $\frac{KN}{m^2}$ (Efectiva el 50%).
- Tipo de Suelo: D (Coeficiente 1.8)
- Períodos: T_A=0.1 seg; T_B=0.3 seg; T_D=1.2 seg (Espectro tipo II).
- Armados: Según cálculo con programa convencional de cálculo de estructuras.
- El mecanismo planteado para el colapso es el fallo en la planta baja, la más flexible, con objeto de poder valorar la variación de propiedades modales y la pérdida de rigidez del sistema. El análisis es tridimensional con el objeto de observar diferencias entre pórticos en un análisis plano, y se ha llevado a cabo con el programa ETABS.[6]

- En el dimensionamiento se han hecho las combinaciones establecidas en el Eurocódigo 8,[7] mientras que en el análisis pushover y los métodos DDBD y FBD se han planteado sólo en la dirección X.
- Se ha tenido en cuenta el efecto P-Delta en la evaluación de la matriz de rigidez geométrica.[8]
- En el caso del método DDBD se han compuesto los espectros inelásticos de desplazamiento a partir de la formulación del Eurocódigo 8.[7]

3. REPASO INTRODUCTORIO A LAS DISTINTAS METODOLOGÍAS DE CÁLCULO SÍSMICO DE ESTRUCTURAS DE PÓRTICOS DE HORMIGÓN ARMADO.

A lo largo del presente documento se va a proceder a evaluar los citados edificios de hormigón armado sometidos a acciones sísmicas usando 4 métodos diferentes y con un contraste energético.

3.1. Método de Fuerzas equivalentes-Forced Based Design (FDB).

Es el método más simple para edificios de cierta simplicidad y regularidad geométrica.

El cortante basal se calcula de la siguiente forma:

$$F_b = S_d(T_1) * m * \lambda \tag{1}$$

Donde $S_d(T_1)$ es la ordenada en el espectro de aceleraciones para el período fundamental.

m es la masa total de la estructura.

λ es un factor de corrección, asociado a la contribución de modos superiores.

No procede en estos edificios el factor de importancia, puesto que solo puede llevarse a cabo esta metodología con edificios de importancia normal.

La distribución de fuerzas de piso i hasta n, siendo n el número total, considera triangular.

$$F_i = F_b \frac{m_i h_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i h_i} \tag{2}$$

3.2. Método Modal Espectral.

A partir de la ecuación matricial que regula el comportamiento de edificios de cortante, el cálculo modal espectral se basa en el cambio de base de las matrices, mediante una descomposición.

$$M * \ddot{U}(t) + C * \dot{U}(t) + K * U(t) = -M * J * a(t) \tag{3}$$

U(t)=Φ*Y(t), donde Φ es una matriz constante, de dimensiones *pxn*, con *p* número de modos considerados y n número de grados de libertad.

Aplicando la derivación y la semejanza ortogonal, obtenemos *n* ecuaciones desacopladas correspondientes a cada grado de libertad:

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\,\dot{y}_i(t) + \omega_i^2\,y_i(t) = -\frac{\Phi_i^T MJ}{[\Phi_i^T M\Phi_i]}\,a(t) \qquad (4)$$

Vector de frecuencias = $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_i, \ldots \omega_n]$ Se corresponde con la raíz cuadrada de los autovalores de la diagonalización de [$M^{-1}K$]

Descompuesta la base en el espacio de configuración modal es posible obtener la respuesta desacoplada para cada grado de libertad modal, y posteriormente hacer la composición, que usualmente suele ser cuadrática.

3.3. Método directo basado en espectros de desplazamientos (DDBD).

El método DDBD, se resume en calcular una estructura SDOF sustituta con una fase elástica y una fase inelástica en general con endurecimiento. En el caso de un edificio de pórticos de hormigón armado tal y como se muestra en las figuras 2:

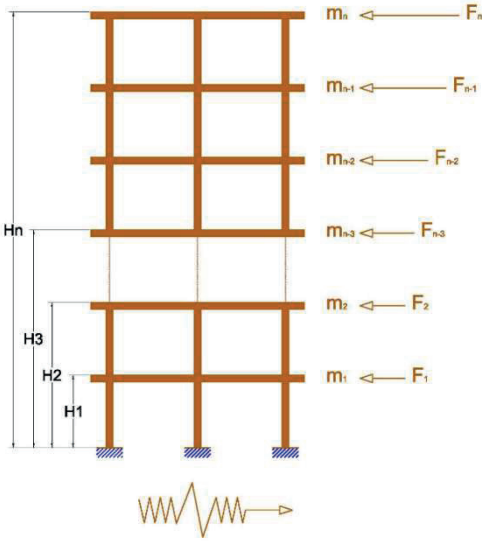


Figura 2.a. *Edificio real.*

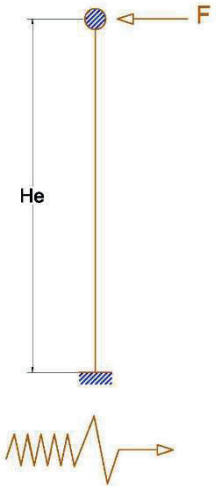


Figura 2.b. *SDOF sustituta.*

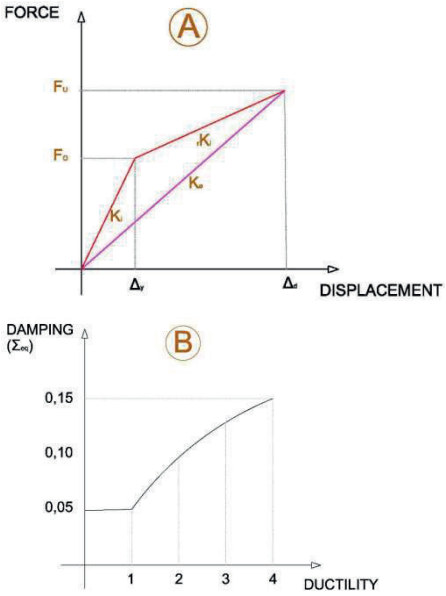


Figura 2.c. *Esquema resistente y relación ductilidad-amortiguamiento equivalente.*

El desplazamiento inelástico propuesto es:

$$\Delta_i = \delta_i\left(\frac{\Delta_c}{\delta_c}\right) = \left(\frac{\Delta_c}{\delta_c}\right)\left[\frac{4}{3}\left(\frac{H_i}{H_n}\right)\left(1 - \frac{H_i}{4H_n}\right)\right] \qquad (5)$$

El desplazamiento equivalente es: $\Delta_d = \dfrac{\sum_1^n m_i\Delta^2{}_i}{\sum_1^n m_i\Delta_i}$ (6), la masa equivalente es: $m_e = \dfrac{\sum_1^n m_i\Delta_i}{\Delta_d}$ (7)

la altura equivalente: $H_e = \frac{\sum_1^n m_i \Delta_i H_i}{\sum_1^n m_i \Delta_i}$ (8), el desplazamiento elástico del SDOF equivalente: $\Delta_y = \theta_y H_e$, (9),con $\theta_y = 0.5\varepsilon_{ys}\frac{L_b}{h_b}$ (10). L_b es la longitud del vano del pórtico y h_b en canto.

Si se conociese el período equivalente T_e se podrían fijar todos los parámetros del sistema:

Rigidez Equivalente: $K_e = \frac{F}{\Delta_d} = \frac{4\pi^2 m_e}{T^2{}_e}$ (11)

Distribución de fuerzas en los grados de libertad del sistema: $F_i = F\frac{m_i\Delta_i}{\sum_1^n m_i\Delta_i}$ (12)

El período equivalente del sistema se obtiene introduciéndose la demanda de deformación del sistema equivalente Δ_d en el espectro, basado en un amortiguamiento equivalente.

Tabla 1. Resumen de parámetros elásticos método DDBD. SDOF equivalente.

Parámetro	Valor	
	B+3	B+5
Δ_y	122	233
m_e	3257	4839
K_e	180533	141744
F_y	21439	32947
d_y (drift elástico)	1.06%	1.47%

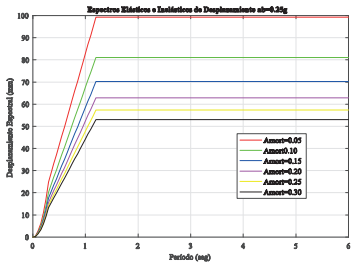


Figura 3.1. Espectros de desplazamientos para distintas ductilidades. a_b=0.25g.

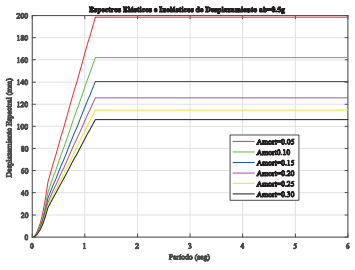


Figura 3.2. Espectros de desplazamientos para distintas ductilidades. a_b=0.50g.

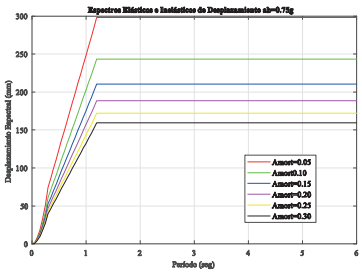


Figura 3.3. Espectros de desplazamientos para distintas ductilidades. a_b=0.75g.

El método introduce algunas mejoras conceptuales como la asociación de una ductilidad de desplazamiento proporcional al daño o coherencia desde un punto de vista del balance de amortiguamiento equivalente, en la medida en que se relaciona directamente este con la ductilidad.

En cualquier caso el procedimiento de resolución es iterativo, fijando en general un desplazamiento inelástico, lo cual determina la demanda de ductilidad, el amortiguamiento equivalente y el cortante basal de diseño.

Uno de los problemas habituales en el cálculo mediante este método es que, en determinadas estructuras, esencialmente flexibles, el espectro inelástico está indeterminado ya que o bien la deformación elástica supera el valor máximo del espectro (caso elástico), o bien no es compatible con el espectro de demanda. En ese caso la solución no es única, y parece razonable hacer un balance energético de contraste.

3.4. Método estático no lineal (Push-Over).

Es un método que por su sencillez y la gran cantidad de información que aporta a efectos profesionales es de gran aplicación. Fue creado por Kilar and Fajfar [1] a partir de varios estudios previos de Chopra [9] en el análisis inelástico de estructuras sometidas a acciones sísmicas.

La filosofía de diseño trata de buscar una estructura SDOF equivalente con la información condensada a partir de la información que genera una curva cortante-deformación obtenida cargando al edificio en una dirección de forma monótona creciente según un patrón de cargas.

El cortante basal se calcula de la siguiente forma:

$$F_b = \gamma_{eI} * S_d(T_1) * m * \lambda \tag{13}$$

Los patrones de carga pueden ser triangular, según el primer modo o similar.

La metodología Push-Over se resume a la concatenación de los siguientes pasos:

Paso 0. Definición de las propiedades geométricas y parámetros de cálculo de la estructura.

- Masas, Geometría, Materiales, Armados.

Paso 1. Determinación del Espectro de Aceleraciones de cálculo.

Paso 2. El factor de reducción por ineslasticidad es planteada como dependiente del período, función de la ductilidad, de tal forma que:

A diferencia del FEMA 356 [10] y [11], que trabaja mucho más con el concepto de amortiguamiento equivalente, el Eurocódigo [7] prioriza en el encuentro con el espectro elástico de respuesta y la reducción de cortante basal por inelasticidad, si bien todas las metodologías de pushover pueden ser justificadas.

Como la metodología está planteada en coordenadas planas S_a,S_d, con lo que se usa la ecuación que relaciona el espectro de aceleraciones con el de desplazamientos: $S_d = \frac{T^2}{4\pi^2} S_a$

Despejando el período de la cada ecuación obtenemos las curvas S_a,S_d.

Paso 3. Si se asume una distribución de la deformada lateral Φ.

A continuación se procede a la distribución de fuerzas de piso en función de la misma.

$F_i = m_i * \Phi_{1i}$ o matricialmente $[F] = [M][\Phi]$

Con ello, es posible determinar el cortante basal y la curva de deformación en función de la citada fuerza resultante.

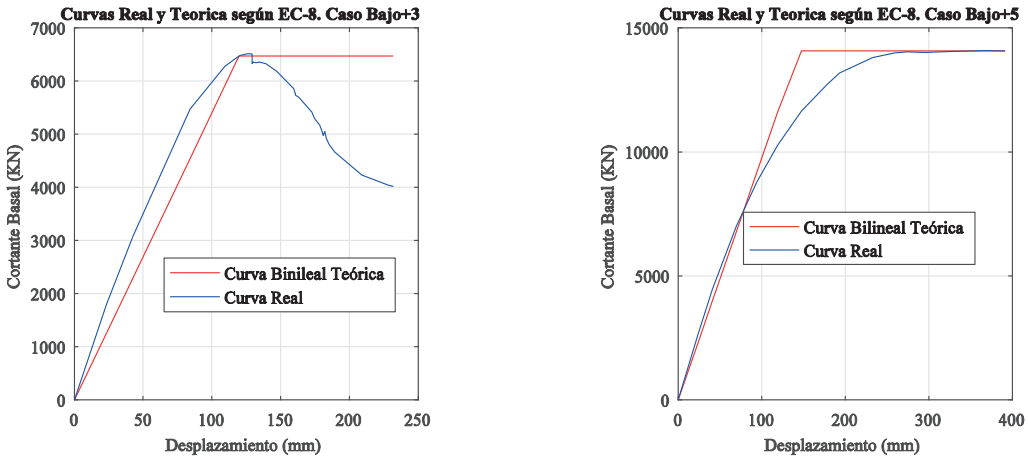
Nótese que la fuerza es una variable, dado que la forma no está escalada.

Paso 4. Equivalencia de un grado de libertad. SDOF equivalente.

La masa equivalente es $m^* = \sum_{i=1}^{i=n} m_i * \Phi_i$

El resto de variables con "condesadas" con el factor $\Gamma = \frac{m^*}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i * \Phi^2{}_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i * \Phi_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i * \Phi^2{}_i}$ (14)

A continuación se determina una curva elastoplástica del SDOF equivalente (F*,D*)



Figuras 4ay 4b. Respuesta Cortante deformación para pórtico central en edificio Bajo+3 (no dúctil), y Bajo+5 (dúctil) considerando no linealidad geométrica. Método de curva bilineal.

Se puede determinar el período el sistema SDOF equivalente $T^* = 2\pi\sqrt{\frac{m^* D_y^*}{F_y^*}}$ (15)

La capacidad del sistema: Espectro de Aceleración $S_a = \frac{F^*}{m^*}$ y desplazamiento $S_d = D^*$

Paso 5. Determinación de la demanda sísmica del SDOF equivalente. Se comentan las diversas metodologías más adelante.

Paso 6. Determinación de parámetros equivalentes en el MDOF.

Paso 7. Determinación de la demanda local del MDOF.

A partir del desplazamiento target u objetivo para la demanda solicitada en la parte superior del edificio es posible determinar la deformada lateral de la estructura y por consiguiente su distribución de fuerzas según la metodología propuesta.

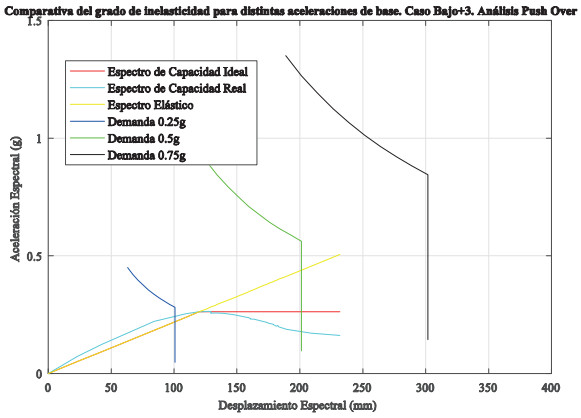


Figura 5. *Espectro de capacidad y demanda para aceleraciones 0.25, 0.50 y 0.75g. Edificio Bajo+3. Por ello se elimina el caso de aceleración 0.75g en el B+3.*

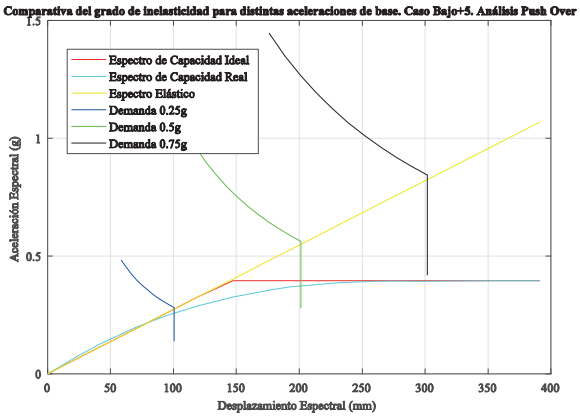


Figura 6. *Espectro de capacidad y demanda para aceleraciones 0.25, 0.50 y 0.75g. Edificio Bajo+5.*

Como se ha citado antes, el push-over alberga dos aspectos débiles en su concepción:

a) No es un cálculo dinámico y por consiguiente no puede contemplar la disipación energética a través de ciclos de histéresis de la estructura, aunque si puede estimarla mediante un balance global indirecto.

b) El hecho de establecer un patrón fijo de cargas no permite valorar el grado de variación en la rigidez de la estructura, o lo que es similar en sus propiedades modales.

Con objeto de paliar en la medida de lo posible el punto anterior surge el pushover adaptativo[12] y [13] ,basado en la obtención de la matriz tangente en cada estadio de cargas, se propone con una solución. La realidad es que, siendo en efecto una mejora, el esfuerzo computacional es muy alto y no exenta de problemas en el entorno de punto estacionario-máximo de la curva, ya que el algoritmo de Newton Raphson que suele acompañar al cálculo tiene problemas de convergencia.

El punto débil de esta metodología, añadida a que no es un cálculo dinámico, reside en la falta de convergencia y en el coste computacional.

3.5. Métodos basados en el balance energético.

A partir de la ecuación dinámica de un grado de libertad se puede establecer la ecuación fundamental del balance energético:

Multiplicando por $dx = \dot{x}\,dt$ e integrando entre el tiempo inicial y un tiempo t se obtiene:

$$\int_0^t m\,\ddot{x}(t)\,\dot{x}(t)dt + \int_0^t c\,\dot{x}(t)^2 dt + \int_0^t f(x,t)\,\dot{x}(t)dt = -\int_0^t ma(t)\,\dot{x}(t)dt \qquad (16)$$

$W_{ek} + W_d + W_f = E_I$, El último término es el input de energía $E_I(t) = -m\int_0^t a(t)\,\dot{x}(t)dt$

La energía cinética a la conclusión del terremoto suele ser un término despreciable, con lo que haciendo: $W_{ek} \approx 0$ $W_e = W_{el} + W_p$

La ecuación queda reducida a tres tipos de trabajos:

- W_d trabajo viscoso debido al amortiguamiento.
- W_e trabajo de las fuerzas del sistema, que se divide a su vez en parte elástica W_{el} y plástica W_p.

Akiyama [5] demostró que el input de energía de un sistema de múltiples grados de libertad es la suma de los inputs de energía de los sistemas de un grado de libertad que la componen, y en el caso de un sistema elástico-plástico perfecto el input de energía del sistema es aproximadamente equivalente al de un sistema SDOF con la misma masa y período de oscilación.

Con lo que la ecuación queda $W_{el} + W_p = E_I - W_d = \frac{1}{2} m V_D{}^2$ (17)

El término $E_I - W_d$ es lo que Housner denominó parte del Input de Energía que contribuye a los daños del edificio, medido en términos de velocidad equivalente V_D. No es exactamente así debido a que alberga la parte elástica, pero sí que en su mayor parte representa la derivada de la suma de las fuerzas resistentes en el sistema, y dado que en muchos casos la energía elástica es muy baja se asume de forma simplificada que el input de energía se divide entre el trabajo plástico y la disipación viscosa [14]. En el presente documento sí se tiene en cuenta, con objeto de ver la parte de los edificios que desarrolla inelasticidad.

Sobre la parte de la energía dinámica que se disipa de forma viscosa durante el terremoto, y en presencia de respuestas no lineales, se han hecho varios estudios en España para intensidad moderada [15] y en otros países [16] y [17]. Por otro lado existen estudios que demuestran como el input de energía es un valor bastante estable independientemente de las no linealidades contenidas en el[18], dependiendo mucho más del tipo de suelo que de la organización estructural interna.

Asumiendo de forma simplificada según [19] $W_d = \left(1 - \frac{1}{12\pi\zeta_o}\right) E_I$ (18) y suponiendo un espectro de input de energía que contribuye a daños según [15] se puede definir la acción exterior.

Por último, cabe comentar que el método basado en el balance energético no sólo es finalista, en la medida en que proporciona distribuciones de deformación, fuerza y energía en el sistema estructural, sino que además supone un elemento de contraste de cualquiera de los métodos que se planteen.

Por ejemplo para el método DDBD el trabajo elástico sería:

$$W_{el} = \frac{1}{2}\frac{4\pi^2}{T^2{}_0} d^2{}_y \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left(\frac{4H_n - H_i}{4H_n - H_1}\right)^2 H^2{}_i \quad (19)$$

Y el trabajo plástico:

$$W_p = \frac{4\pi^2}{T^2{}_e} d_r (d_r - d_y) \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left(\frac{4H_n - H_i}{4H_n - H_1}\right)^2 H^2{}_i \qquad (20)$$

Con lo que una vez formulado los términos de la ecuación del trabajo para "una distribución de daño determinada" se puede hacer un balance energético global, de tal forma la capacidad de la estructura será la que marque la deformación de la misma y la demanda la del espectro, con la consideración del período que se hará en el siguiente apartado sobre el período inelástico. Nótese que el trabajo elástico depende de parámetros elásticos y el trabajo plástico de parámetros inelásticos y elásticos. Para este ejercicio se ha adoptado de forma simplificada para la demanda de energía el valor de $V_D{}^2 = 0.34 S_a$, siendo S_a la aceleración espectral para un período dado.

En el caso del push over se puede establecer una metodología similar, si bien no será tan sistemática, sino para cada paso en función del perfil inelástico de la estructura y de las fuerzas horizontales, formando una curva de capacidad similar a la de fuerzas.

4. PERÍODO FUNDAMENTAL INELÁSTICO.

En el caso de un sistema SDOF se puede considerar un periodo de vibración en función de las "respuesta no lineal" de la curva push-over a través del concepto de rigidez tangente. Para ello no es necesario que la respuesta sea bilineal. Solamente es preciso conocer el desplazamiento elástico del sistema. El período se puede evaluar como un factor de amplificación en función del trabajo *W* y del trabajo de las fuerzas complementarias *W** según la siguiente formulación [20].

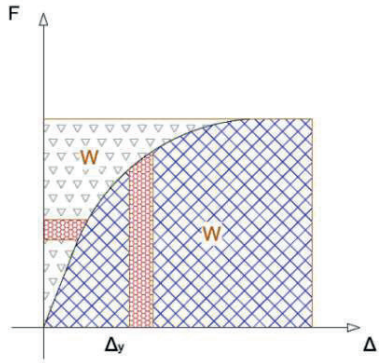


Figura 7.1. *Esquema no lineal fuerza-desplazamiento.*

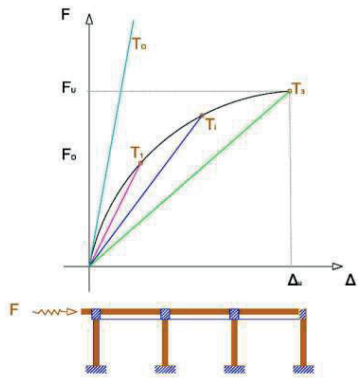


Figura 7.2. *Esquema de pórtico dúctil*

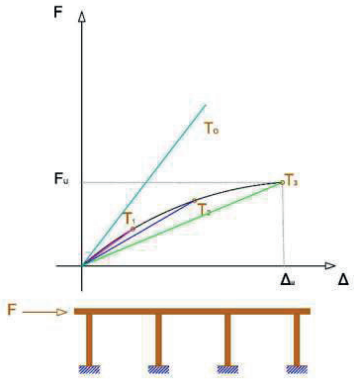


Figura 7.3. *Esquema de pórtico no dúctil.*

Para $W = \int_0^{\Delta} F(\Delta) d\Delta$ y $W^* = \int_0^{F} \Delta(F) dF$, con $\mu(\Delta) = \frac{\Delta}{\Delta_y}$

$$T_e = T_o \left(1 + \frac{W - W^*}{W + W^*} \mu\right)^{0.5} \qquad (21)$$

En el caso de un sistema elástico perfectamente plástico la fórmula coincidiría con la establecida en la norma americana [21] $T_e = T_o\sqrt{\mu}$

En el caso de un sistema MDOF se puede considerar un periodo de vibración en función de las "formas modales no lineales" compuestas que suponen el espectro inelástico de desplazamientos, bien a través de cálculos dinámicos no lineales o bien a través de la observación directa de la respuesta estructural.

Aplicando la formulación de Ritz para el modo fundamental:

$$\omega^2 = \frac{X^T{}_1 K X_1}{X^T{}_1 M X_1} = \frac{X^T{}_1 F}{X^T{}_1 M X_1} = \frac{\sum_1^N F_i v_i}{\sum_1^N m_i v^2{}_1} = \frac{\sum_1^N F \dfrac{m_i \Delta^2{}_i}{\sum_i^N m_i \Delta_i}}{\sum_1^N m_i \Delta^2{}_i}$$ donde F es el cortante basal.

Para una distribución dada de desplazamientos en una situación de inelasticidad concreta la fórmula puede simplificarse hasta:

$$\omega^2 = \frac{F}{\sum_i^N m_i \Delta_i} \text{ o de forma equivalente } T_{eq,NL} = 2\pi\sqrt{\frac{\sum_i^N m_i \Delta_i}{F}} \qquad (22)$$

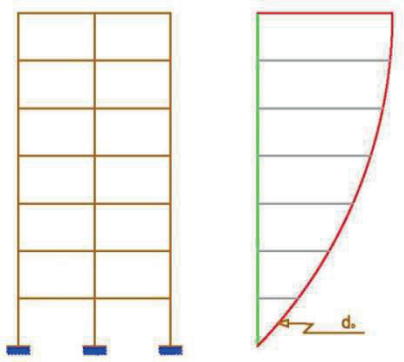


Figura 8.a. Esquema de perfil Elástico según el método DDBD.

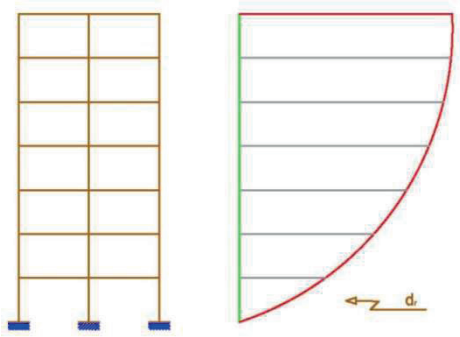


Figura 8.b. Esquema de perfil Inelástico según el método DDBD.

Kowlasky, Calvi y Priestley proponen una distribución de desplazamientos definida en la fórmula anterior, donde $\frac{\Delta_c}{\delta_c}$ es el coeficiente que delimita el valor máximo de daño de la planta crítica, que vincula el grado de plasticidad compatible del sistema. Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$T_{eq,NL} = 2\pi\sqrt{\frac{4(\frac{\Delta_c}{\delta_c})\sum_1^N m_i H_i (1 - \frac{H_i}{4H_n})}{3H_n F}} \qquad (23)$$

La fórmula depende de tres factores; a) Distribución de masas y alturas del edificio, b) Parámetro de daño y c) Cortante en la Base.

En el caso en que el máximo daño se concentre en la primera planta:

$$\frac{\Delta_c}{\delta_c}=\frac{H_1 d_r}{\delta_1}=\frac{H_1}{\frac{4}{3}\frac{H_1}{H_n}(1-\frac{H_1}{H_n})}d_r=\frac{3H_n}{4(1-\frac{H_1}{H_n})}d_r$$

Con lo que la fórmula quedaría reducida a:

$$T_{eq,NL}=2\pi\sqrt{\frac{d_r}{F}}\sqrt{\frac{\sum_1^N m_i H_i(1-\frac{H_i}{4H_n})}{1-\frac{H_1}{H_n}}}=2\pi\sqrt{d_r}\sqrt{\frac{\sum_1^N m_i H_i(1-\frac{H_i}{4H_n})}{(1-\frac{H_1}{H_n})F}} \quad (24)$$

Esta formulación es algo más expresiva, ya que determina que el período en un sistema no lineal, para un drift mayor que el que produce la primera plastificación, depende de un coeficiente de forma en función de la distribución de masas y alturas, y de la relación entre el drift inelástico y el cortante basal. Más aún, en el caso de un sistema bilineal el período equivalente sólo dependerá del drif y de la geometría del edificio.

Por último, la relación entre períodos inelástico y elástico, en el caso de que la deformada tuviera el máximo drift en la primera planta, sería $T_{eq,NL}=T_0\sqrt{\frac{d_r}{F}\frac{F_y}{d_y}}$, que en el caso de aproximación elástica perfectamente plástica se simplificaría a $T_{eq,NL}=T_0\sqrt{\frac{d_r}{d_y}}=T_0\sqrt{\mu}$, fórmula propuesta por Kowlasky, Calvi y Priestley, y muchas normativas como el ASCE 7-10 (18.5-8). [21]

La citada normativa (18.6-6) propone la siguiente formulación en su apartado de cálculo de períodos simplificados con estructuras amortiguadas (es decir en el caso en el que no se haga un análisis modal inicial).

$T_{eq,NL}=2\pi\sqrt{\frac{\sum_1^N w_i\Delta^2{}_i}{g\sum_1^N F_i\Delta_i}}$ una simple operación a partir de la distribución de fuerzas del método DDBD permite ver que es la misma formulación para el perfil propuesto, y que sin perder generalidad puede servir para otros perfiles inelásticos.

$$T_{eq,NL}=2\pi\sqrt{\frac{\sum_1^N w_i\Delta^2{}_i}{g\sum_1^N F_i\Delta_i}}=2\pi\sqrt{\frac{\sum_1^N m_i g\Delta^2{}_i}{g\sum_1^N F\frac{m_i\Delta_i}{\sum_1^n m_i\Delta_i}\Delta_i}}\Rightarrow T_{eq,NL}=2\pi\sqrt{\frac{\sum_1^N m_i\Delta_i}{F}}$$ (coincide con (22)).

Aplicaciones:

1. Una de los aspectos más imprecisos del método DDBD es la determinación del drift elástico de la estructura d_y. Un control de periodos supone poder acotar de forma precisa el trabajo elástico del sistema en función del parámetro limitante.

2. En la medida en que se tienen los períodos elásticos e inelásticos de una estructura es posible estimar el grado de daño de la misma, y derivado de ello, los cortantes entre plantas y desplazamientos totales, y de ahí el trabajo total, en el caso de un sistema elástico perfectamente plástico, descontado el perfil elástico de cálculo.

3. En muchos casos un método necesita contraste y para ello correlacionar daño, fuerzas laterales y períodos inelásticos puede ser necesario. Se plantea aquí una metodología de ejemplo.

5. RESULTADOS DEL EJERCICIO DE APLICACIÓN.

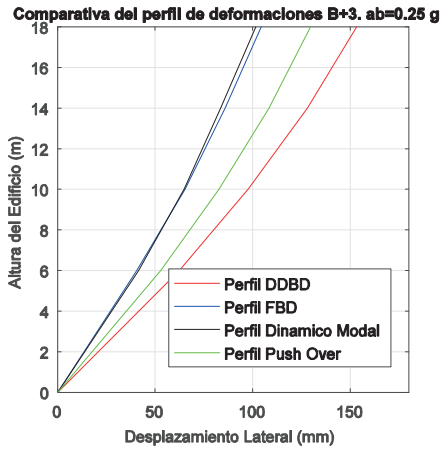
Con el fin de analizar de forma crítica el grado de adecuación y seguridad en la interpretación se muestra a continuación los resultados más relevantes:

1. En un primer cálculo se va a obtener los desplazamientos para el método FDB, DDBD dinámico Modal para el espectro elástico de respuesta de aceleración básica 0.25g.

2. A continuación se procede al cálculo por capacidad mediante la metodología push-over, con intersección en las curvas S_a,S_d correspondientes a 0.25g, 0.5g y 0,75g.

Se ha mostrado en las figuras 8 y 9.

Como el método DDBD no alberga una solución única, debido a que considera las estructuras muy flexibles, se procede a exponer el perfil elástico en el primer espectro (0.25g), y al perfil correspondiente al equivalente a la curva push-over en los otros dos casos. En estos, la respuesta no lineal se producirá, pero al no haber una solución única se puede igualar el período inelástico para ese nivel de deformación, corrigiéndolo con el cociente de la masa equivalente entre el método DDBD y Push-Over.



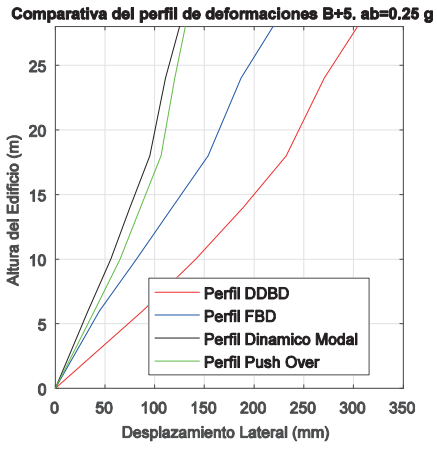


Figura 9.a.1. *Perfil de Desplazamientos B+3. a_b=0.25g*

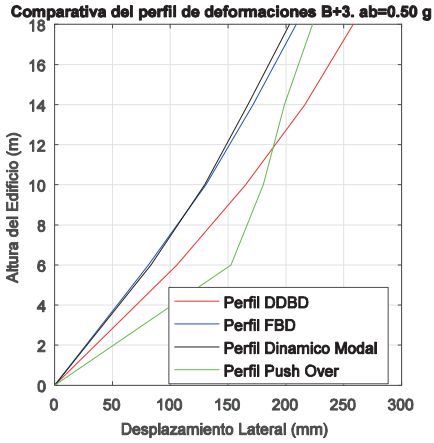


Figura 9.a.2. *Perfil de Desplazamientos B+5. a_b=0.25g*

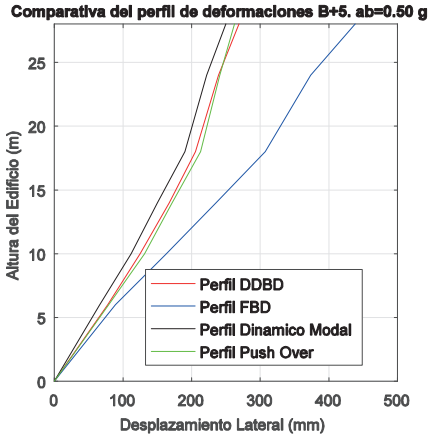
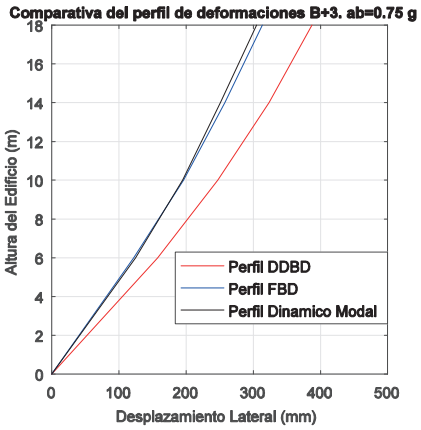


Figura 9.b.1. *Perfil de Desplazamientos B+3. a_b=0.50g*

Figura 9.b.2. *Perfil de Desplazamientos B+5. a_b=0.50g*



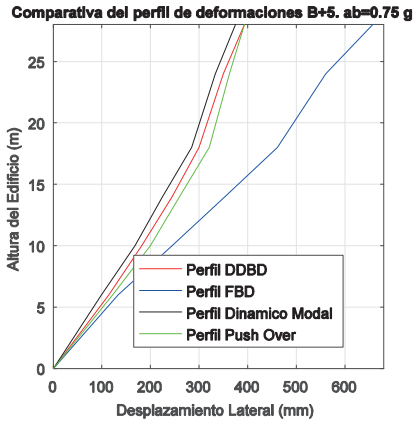


Figura 9.c.1. *Perfil de Desplazamientos B+3. a_b=0.75g*

Figura 9.c.2. *Perfil de Desplazamientos B+5. a_b=0.75g*

Es interesante conocer la distribución de drift, que guarda relación directa con el daño.

En este caso el EC-8 requeriría para ELS, bajo un coeficiente entre 0.4 y 0.5, un drift máximo de entre 0.4% y 0.6%, con lo que la limitación para el terremoto de cálculo sería de entre 0.8% y 1.25% en valores extremos.

Los edificios se encuentran en situación elástica para el terremoto de 0.25 g, y habría que ampliar el desplazamiento elástico en el resto de casos para considerar la inelasticidad, o disminuir la rigidez de cálculo, lo cual no sería un cálculo lineal puesto que el período cambia la coordenada espectral de forma hiperbólica. Las normas americanas y algunas normas europeas[22] estableces este aspecto, pero no el EC-8, que establece sólo el coeficiente de respuesta por ductilidad, en orden de que los desplazamientos no se vean reducidos como el cortante basal. Por ello en el presente documento se analiza con intensidad las deformaciones.

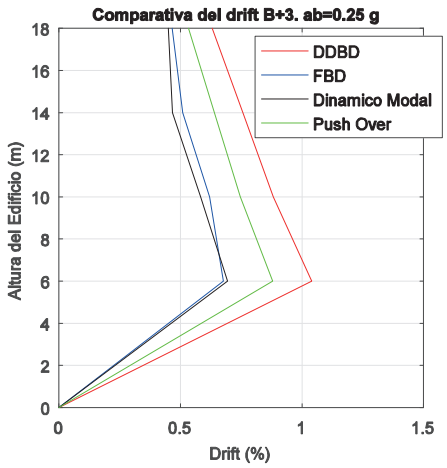


Figura 10.a.1 *Deriva relativa entre plantas. B+3. a_b=0.25g*

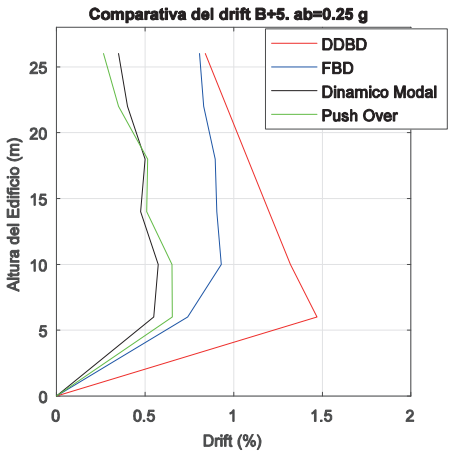


Figura 10.a.2 *Deriva relativa entre plantas. B+5. a_b=0.25g*

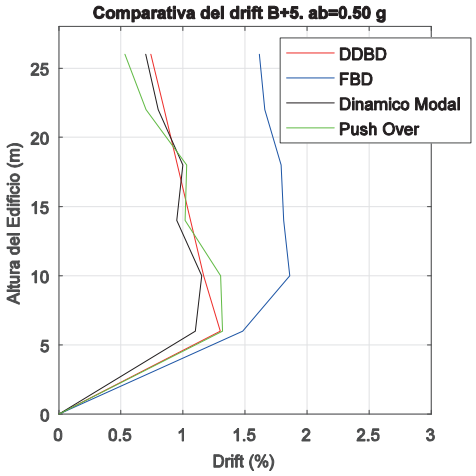


Figura 10.b.1 *Deriva relativa entre plantas. B+3. a_b=0.50g*

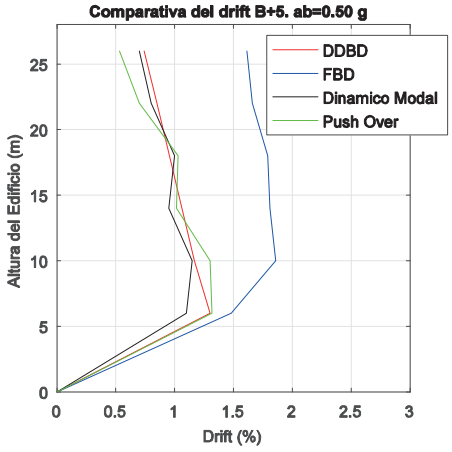


Figura 10.b.2 *Deriva relativa entre plantas. B+5. a_b=0.50g*

No procede este caso porque se produce el colapso anterior.

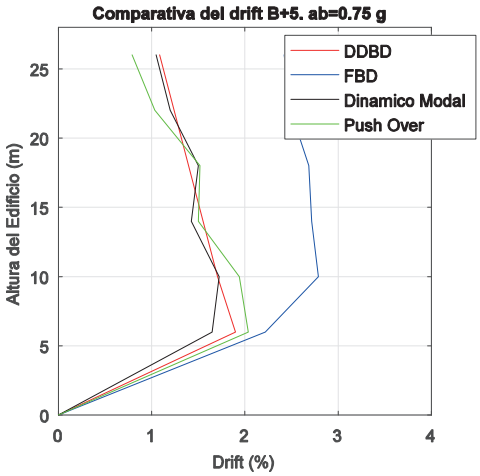


Figura 10.c.1 *Deriva relativa entre plantas. B+3. a_b=0.75g*

Figura 10.c.2 *Deriva relativa entre plantas. B+5. a_b=0.75g*

Nota: El Drift se corresponde en el primer caso con el del límite de cedencia del DDBD, no con la aplicación del método, pues no existe solución única.

3. Se observa el grado de inelasticidad provocado en la curva pushover.

Tabla 2. Resumen del punto de funcionamiento. 0.25 g

Parámetro	Value	
	B+3	**B+5**
S_d(mm)	100	100
S_a (g)	0.215	0.275
u (mm)	129.56	131.23
F (Kn)	7278	11975
m_e (Ton)	2518	3634

Tabla 3. Resumen del punto de funcionamiento. 0.50 g

Parámetro	Value	
	B+3	**B+5**
S_d(mm)	200	200
S_a (g)	0.182	0.391
u (mm)	259.12	262.46
F (Kn)	6007	17420
m_e (Ton)	2518	3634

Tabla 4. Resumen del punto de funcionamiento. 0.75 g

Parámetro	Value	
	B+3	**B+5**
S_d(mm)	No	300
S_a (g)	No	0.395
u (mm)	No	393.69
F (Kn)	No	18380
m_e (Ton)	No	3634

4. Se efectúa un análisis modal y un control de períodos de vibración para la matriz de rigidez tangente y secante de la curva pushover, y según la formulación planteada para el método DDBD se evalúa el perfil inelástico final de los distintos estadios de carga.
5. Se ajusta el drift de la planta baja según el método DDBD para los distintos casos de inelasticidad derivado de la curva push-over.
Los puntos 4 y 5 se muestran en los gráficos anexos.
6. Se establece el balance de energía, a modo de ejemplo, para el método DDBD y el Push-Over, en el Bajo +5, con la formulación desarrollada en el punto 4.

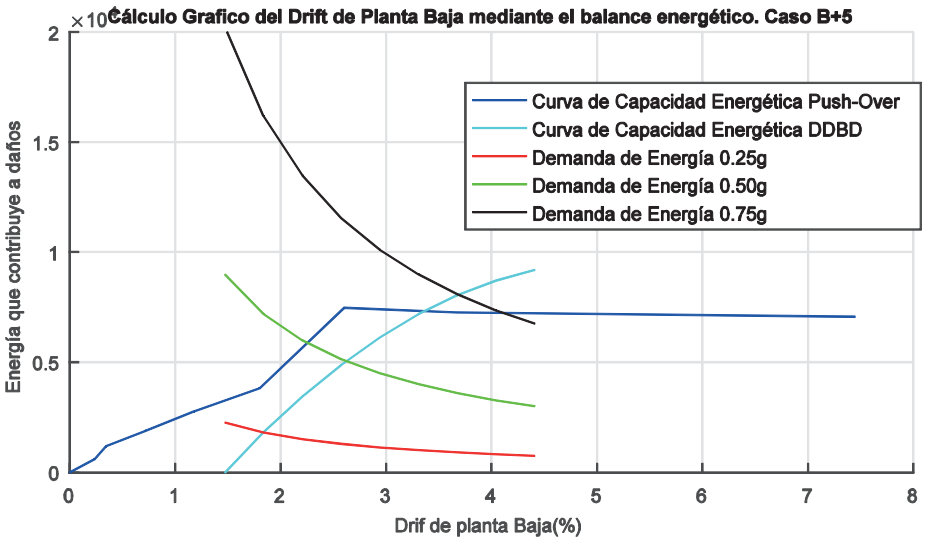


Figura 11 *Curva de demanda y capacidad energética*

Tabla 5. Resumen del punto de funcionamiento. 0.25 g

Parámetro	Valor	
	DDBD	Push-Over
Drift en planta baja (%)	1.75%	1.2%
Período Efectivo (s)	1.099	1.13
Trabajo Plástico (KNm)	1700	1890

Tabla 6. Resumen del punto de funcionamiento. 0.50 g

Parámetro	Valor	
	DDBD	Push-Over
Drift en planta baja (%)	2.56%	2.2%
Período Efectivo (s)	1.66	1.62
Trabajo Plástico (KNm)	5100	7250

Tabla 7. Resumen del punto de funcionamiento. 0.50 g

Parámetro	Valor	
	DDBD	Push-Over
Drift en planta baja (%)	3.7%	4.1%
Período Efectivo (s)	2.194	1.912
Trabajo Plástico (KNm)	7600	7071

6. CONCLUSIONES DEL TRABAJO.

Se ha planteado una formulación para la obtención del período inelásticos de un edificio, bien en coordenadas reales o como sistema SDOF sustituta, en función del trabajo y el trabajo complementario desarrollado por el sistema.

En el caso de un sistema MDOF se ha propuesto, a partir de la formulación de Ritz, una expresión para el cálculo del período fundamental en función de las distribuciones de pesos y desplazamientos entre plantas, y el cortante basal inelástico.

Usualmente, aplicando el método DDBD existen muchos casos en los que no es posible la determinación de una solución única. Para ello pueden adoptarse dos alternativas de contraste de forma relativamente sencilla:

a) Un contraste en fuerzas suponiendo el mismo desplazamiento en cabeza a partir de la curva de push-over, y corrigiendo los períodos inelásticos ya que las masas de los SDOF de cada método son diferentes.

b) Un balance energético a partir de la formulación del período inelástico, que servirá a su vez para ajustar la demanda de energía que contribuye a daños en función del espectro de input de energía.

El desplazamiento elástico o de cedencia es uno de los parámetros más conflictivos en la formulación del método DDBD, en especial en estructuras flexibles con sólo una viga de borde, o vigas de cantos diferentes en planta baja. Corregir este método daría cortantes más ajustados al resto de métodos (o lo que es lo mismo períodos para un determinado nivel de daño), sin perder generalidad.

No se ha tratado en este artículo de hacer un dimensionamiento clásico. Sin embargo sacamos una serie de conclusiones del trabajo:

- Los métodos tradicionales de cálculo estático equivalente –FDB y Dinámico Modal-, dentro de su simplicidad, ajustan bastante bien la respuesta estructural del sistema mientras las no linealidades son moderadas.

- El método Push-Over, dentro de sus limitaciones, y debido a su sencillez, supone un salto cualitativo importante a efectos de conocimiento de cortantes basales máximos y grado de inelasticidad con la deformación.

- El método DDBD supone una mejora cualitativa en la medida en que el parámetro de entrada es el propio grado de daño, a través del drift basal, ya que presupone un perfil inelástico.

- En cualquiera de los casos es evidente que para edificios bajos el método DDBD sobreestima las deformaciones y las fuerzas estáticas equivalentes. Esto ya había sido analizado en algunos congresos anteriores [23].

- El contraste energético es muy sensible a la velocidad que contribuye a daños, así como a si ese valor consideraría la parte elástica o no, por no contribuir esta a daños. En el caso del balance según el método DDBD, dados los altos cortantes y desplazamientos hasta llegar a la fluencia, esta es bastante elevada.

La precisión de los resultados depende en gran medida del calibrado de los datos de entrada, además de la sensibilidad de los mismos en función del grado de no linealidad y la normativa o criterio de aplicación.

Es por ello por lo que en la práctica profesional, dado que el condicionante esencial es el drift para el terremoto de servicio en orden de mantener la calidad de los elementos no estructurales para una cierta frecuencia de ocurrencia, es indispensable la comparación con diversas metodologías, como se ha expuesto en el presente documento.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge the financial support provided by Ministry of Economy and Competitiveness (Government of Spanish Kingdom) by funding the Research Project REVES-P (DPI2013-47441). The authors also acknowledge the partial financial support provided by the Research Net VIBRASTRUNET (BIA2015-71942-REDT).

REFERENCES

[1] V. Kilar and P. Fajfar, “Simplified push-over analysis of building structures,” *Eleventh World Conference on Earthquake Engineering*. 1996.

[2] T. S. Eom, S. M. Kang, H. G. Park, T. W. Choi, and J. M. Jin, “Cyclic loading test for reinforced concrete columns with continuous rectangular and polygonal hoops,” *Eng. Struct.*, vol. 67, pp. 39–49, 2014.

[3] T. J. Sullivan, G. M. Calvi, and M. J. N. Priestley, “Initial Stiffness Versus Secant Stiffness in Displacement Based Design,” *13th World Conf. Earthq. Eng.*, no. 2888, 2004.

[4] A. L. Vidot-vega and M. J. Kowalsky, “Drift , strain limits and ductility demands for RC moment frames designed with displacement-based and force-based design methods,” *Eng. Struct.*, vol. 51, pp. 128–140, 2013.

[5] H. Akiyama, “Collapse modes of structures under strong motions of earthquake,” *Ann. Geophys.*, vol. 45, no. 6, pp. 791–798, 2002.

[6] Computers and Structures Inc., “CSi Analysis Reference Manual,” p. 556, 2016.

[7] Comité Técnico AEN/CTN 140 Eurocódigos estructurales, “Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance. Part 1: General r ules, seismic actions and rules for buildings,” p. 208, 2006.

[8] E. L. Wilson, *Análisis Estático y Dinámico de Estructuras.* .

[9] A. Chopra, “Modal analysis of linear dynamic systems: physical interpretation,” *J. Struct. Eng.*, vol. 122, no. May, pp. 517–527, 1996.

[10] FEMA, “Improvement of Nonlinear Static Seismic Analysis Procedures,” *FEMA 440, Fed. Emerg. Manag. Agency, Washingt. DC*, vol. 440, no. June, p. 392, 2005.

[11] FEMA, “Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Buildings,” *Rehabil. Requir.*, no. 1, pp. 1–518, 2000.

[12] A. K. Chopra, “Dynamics of Structures. Theory and Aplication to Earthquake Engineering.” .

[13] E. Kalkan, S. M. Asce, S. K. Kunnath, and M. Asce, “Adaptive Modal Combination Procedure for

Nonlinear Static Analysis of Building Structures," vol. 132, no. November, pp. 1721–1731, 2006.

[14] M. A. Foyouzat and H. E. Estekanchi, "Application of rigid-perfectly plastic spectra in improved seismic response assessment by Endurance Time method," *Eng. Struct.*, vol. 111, pp. 24–35, 2016.

[15] A. Benavent-Climent, "Espectros de Input de Energía en Zonas de Sismicidad Moderada." .

[16] F. Lopez-Almansa, A. U. Yazgan, and A. Benavent-Climent, "Design energy input spectra for high seismicity regions based on Turkish registers," *Bull. Earthq. Eng.*, vol. 11, no. 4, pp. 885–912, 2013.

[17] P. Khashaee and J. L. Gross, "NISTIR 6903 Distribution of Earthquake Input Energy in Structures NISTIR 6903 Distribution of Earthquake Input Energy in Structures."

[18] L. D. Decanini and F. Mollaioli, "An energy-based methodology for the assessment of seismic demand," *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, vol. 21, no. 2, pp. 113–137, 2001.

[19] H. Akiyama, *Metodología de proyecto sismorresistente de edificios basada en el balance energético*. Reverté, 2003.

[20] C. Iturregui Arranz, I. Muñoz Diaz, J. M. Soria Herrera, and J. H. García Palacios, "ENERGY BALANCE ANALYSYS IN NON LINEAR DYNAMIC EQUIVALENT SYSTEMS.," *Int. Conf. Eng. Vib. | Bulg. - 7 Sept. 2017*, no. September, 2017.

[21] A. Sei, *ASCE 7-10 Minimum Loads for Buildings*. .

[22] UTCB and MDRAP, "P100-1/2013: Cod de proiectare seismică – Partea I – Prevederi de proiectare pentru clădiri," 2013.

[23] I. Muljati, F. Asisi, and K. Willyanto, "Performance of force based design versus direct displacement based design in predicting seismic demands of regular concrete special moment resisting frames," *Procedia Eng.*, vol. 125, pp. 1050–1056, 2015.

Aeroelastic coefficients for cross-section cable-stayed bridge using CFD analysis and comparison with wind tunnel tests

José M. Soria[1]; Joaquín Arroyo[2]; Juan Calvo[2]; Iván M. Díaz[1]; Jaime H. García-Palacios[1]

ABSTRACT

In the field of bridge engineering, the development of materials, systems of construction and computers leads to cable-stayed and suspension bridges lighter and with longer span. This fact makes these structures susceptible to aeroelastic instabilities. These types of instabilities are difficult to predict at design phase. For this reason, the cross-section of the structure (or even an integral model of the structure) is usually tested in wind tunnels in order to prevent its occurrence. Given the high cost of the experimental test, it is interesting to be able to perform simulations using Computational Fluid Dynamics (CFD) analysis in order to optimize the aeroelastic design of the cross-section bridge before testing it in a wind tunnel. Through the CFD analysis, the aeroelastic coefficients are calculated for a given cable-stayed cross-section bridge using XFlow software and a comparison is made against the results obtained in a wind tunnel with a reduced scale model.

Keywords: CFD; cross-section cable-stayed bridge; aerolastic coefficients; wind analysis.

1. INTRODUCTION

The development of materials, systems of construction and software causes that structures are becoming lighter. In the field of bridge engineering this fact leads to the appearance of suspension and cable-stayed bridges lighter and with longer spans. This fact makes these structures are susceptible to aeroelastic instabilities [1]. These types of instabilities are very difficult to predict.

For this reason, the cross-section of the structure (or even an integral model of the structure) is usually tested in wind tunnels in order to prevent its occurrence. The typical cost of a wind tunnel test can range from 8000 to 24000 euros and the execution time, including the construction of the scale-reduced model, between three and five weeks, depending on its complexity.

Given the high cost of the experimental test, it is interesting to be able to perform simulations to optimize the aeroelastic design of the cross-section before testing it in a wind tunnel. For this purpose, the Computational Fluid Dynamics (CFD) analysis is suitable for this kind of calculations. The problem until short time ago was that its computational cost was unattainable for most of engineering. A new approach replaces the meshing of the environment by the use of particles in order to decreasing this drawback, although the calculation time remains high. This recent alternative to the wind tunnel test is the computer modelling of the wind forces by means of particles models, which permit to obtain with

[1] *ETSICCP, Universidad Politécnica de Madrid (SPAIN). jm.soria@upm.es (J.M. Soria)*
[2] *Pondio Ingenieros (http://www.pondio.com).*

great precision the force coefficients, as well as the maximum pressures and suctions in the structure. In this article, a first approximation to the problem is made. Through the CFD analysis, the aeroelastic coefficients are calculated for a given cable-stayed cross-section using XFlow software [2] and a comparison is made against the results obtained in a wind tunnel with a reduced scale model. A similar research work to the one proposed in this article but for buildings can be found in [3]. Similar experimental work has been done for other types of bridges [4]. The main objective of this research work is to study if CFD analysis is a good option prior to testing reduced models in a wind tunnel. The equations to compute the aeroelastic coefficients, c_d (horizontal, c_x) and c_l (vertical, c_y) are showed in [1] and they are the following:

$$c_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}, \quad c_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D} \tag{1}$$

F_d and F_l are the horizontal (drag) and vertical (lift) forces respectively, D is the projected area of influence, U_∞ is the wind speed, and ρ is the air density. The cross-section studied in this paper owns to Pumarejo cable-stayed bridge (Colombia). The bridge has the following geometric characteristics: the central span of the bridge has 380 meters between high pylons of 80 meters. Three lanes for vehicles as well as a pedestrian area (2 m) and bike path (1.50 m) at both ends of the cross-section with a final width of 38.1 meters. The project has been carried out by CFCSL and will be executed by SACYR.

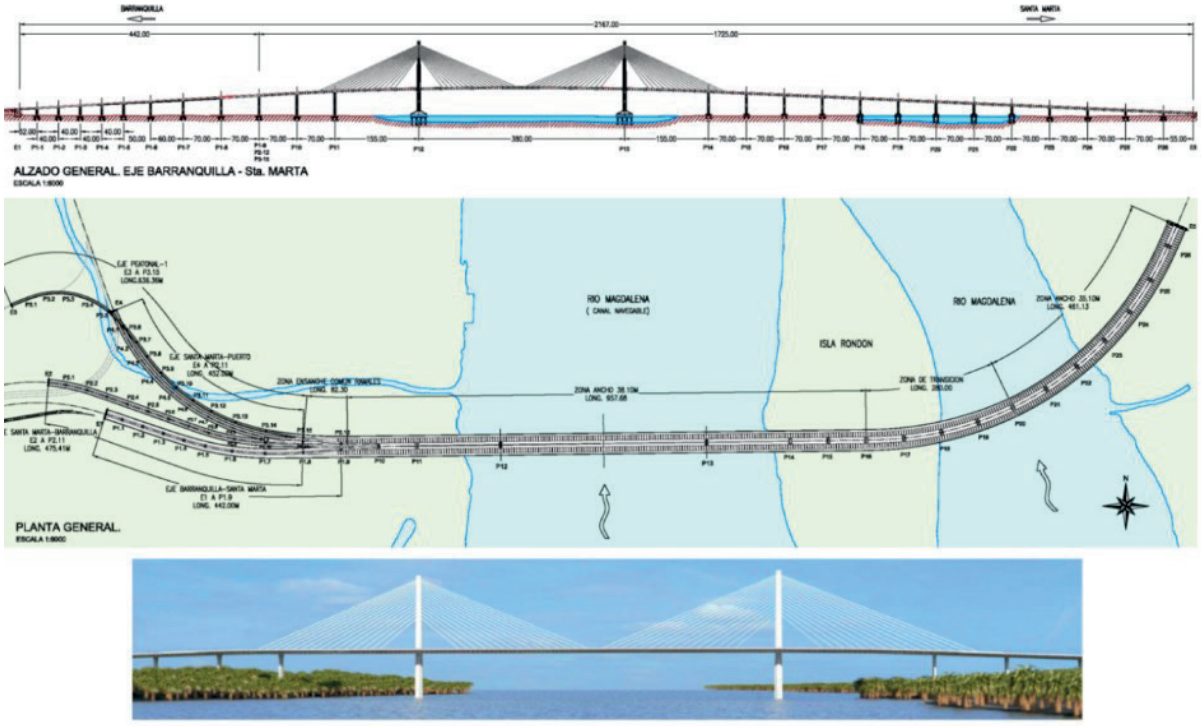


Figure 1. *Different views of the Pumarejo cable-stayed bridge, Colombia.*

The paper continues showing the experimental results obtained in the wind tunnel. In section 3 the simulation of the reduced geometric model is described, which coincides with the one tested experimentally. A simulation is also performed that matches the actual scale of the bridge section. In section 4 the comparison of the experimental and simulated results is made. Finally, it describes the conclusions obtained and the future work.

2. WIND TUNNEL TEST RESULTS

The experimental results used in this paper have been tested in the Wind Tunnel of the Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos (ETSIA) at Universidad Politécnica de Madrid (UPM), in the Instituto Uniersitario de Microgravedad "Ignacio Da Riva" (IDR). These results [5] are posted on the Internet and are freely accessible. Figure 2 shows a diagram of the section and Figure 3 shows photographs of the model tested. The results of the test are shown in the section where the comparison is made. The registered wind speed is 10 m/s, laminar flow.

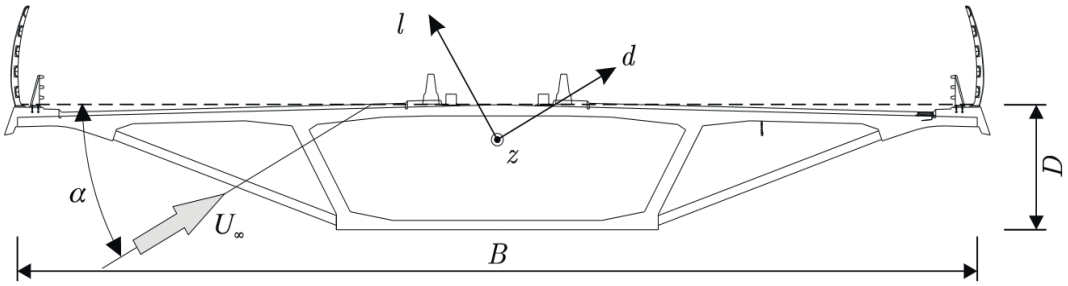


Figure 2. *Sketch of the cross-section tested experimentally* [5].

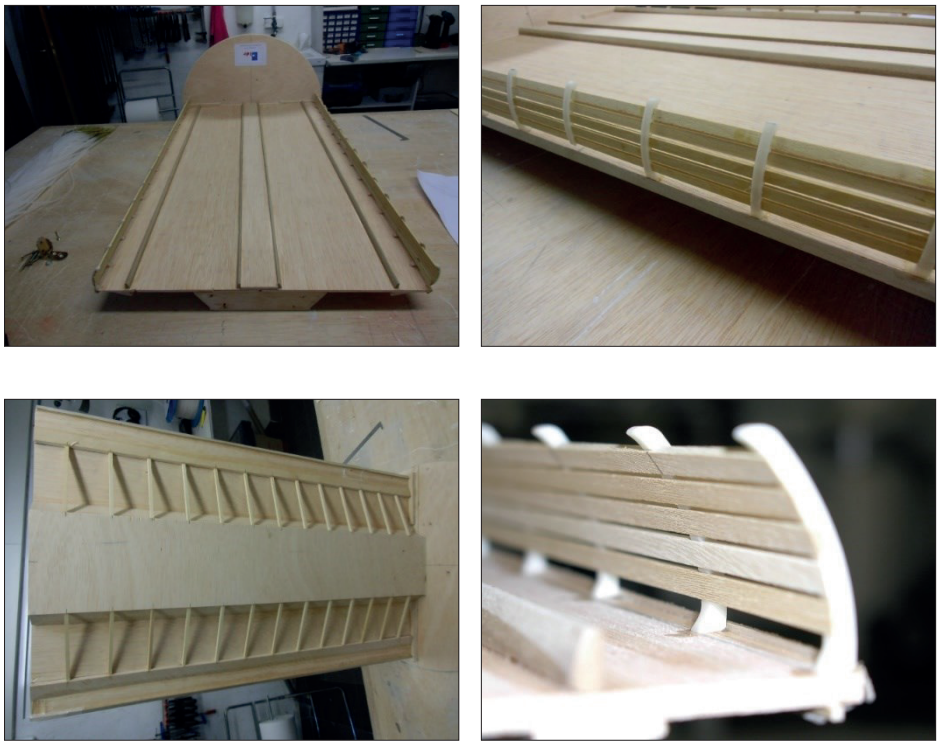


Figure 3. *Photographs of the tested model in the wind tunnel* [5].

2. SIMULATIONS: CFD ANALYSIS

NextLimit Technologies has developed Xflow's software [2] for the analysis of multi-physical systems, which is a tool that can model solids and fluids. For the CFD simulation analysis, two different computer models were made: 1) a model that matches with the model tested experimentally in the wind tunnel, and 2) a scaled model with the real geometry of the cross-section of the bridge. The main dimensions of both models are shown in Table 1.

Table 1. Geometry properties of the bridge models simulated.

Property	Simulated models	
	Reduced-scale	Real-scale
Vertical dimension, D (m)	4.29×10^{-2}	3.65
Horizontal dimension, B (m)	44.82×10^{-2}	38.1

2.1 Reduced-scale model

Different speeds are simulated for the reduced-scale model, since this scale is the one that is experienced in the wind tunnel. Figure 4 shows the appearance of the geometry of the model.

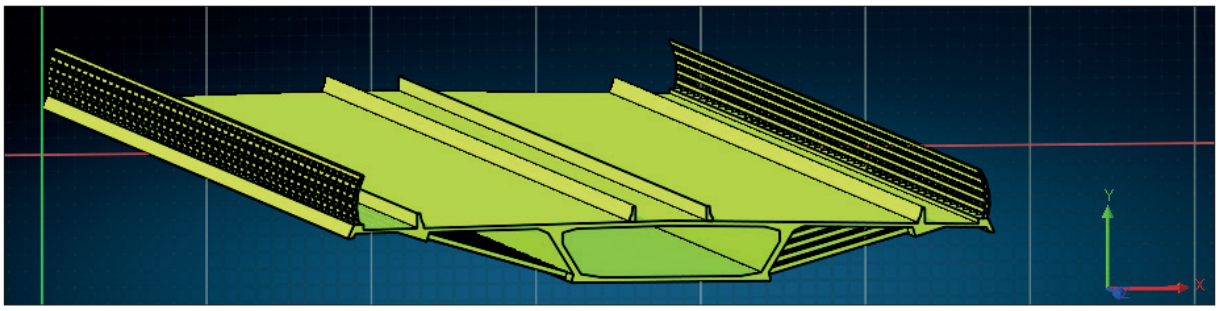


Figure 4. *Geometric model.*

Figure 5 shows the distribution of wind flow velocities for an instant of time and an angle of attack of -6 degrees. Figure 5b shows a zoom of the velocity field around the safety barrier of the cross-section of the bridge, where a suitable wind flow velocities are observed through it. On the other hand, Figure 6 shows the temporal history of horizontal forces for the reduced scale model according to different wind speeds. It should be noted how the turbulence increases around the average value applied as speed increases. With all the simulations performed according to different angles of attack and wind speeds, a surface can be created through the points obtained. The surfaces created for c_x and c_y are shown in Figure 7.

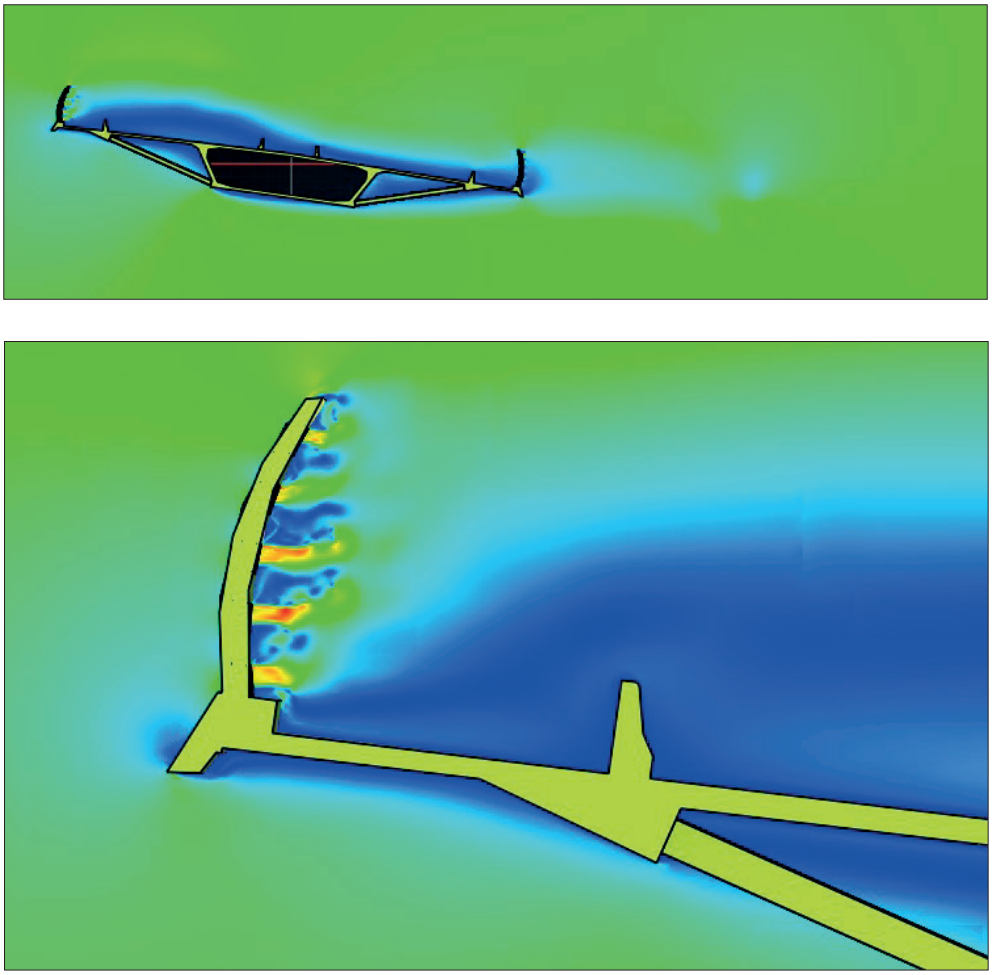


Figure 5. *Wind velocity distribution for a selected time of simulation.*

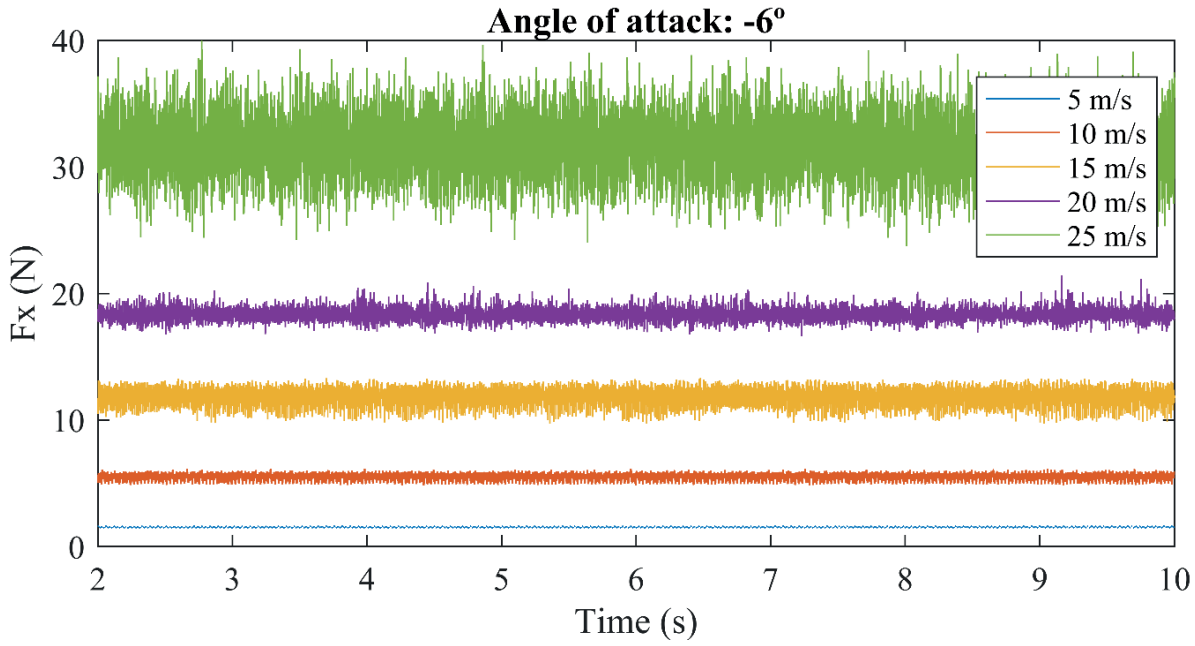


Figure 6. *Time histories of horizontal forces for different wind velocities and for an angle of attack of -6.*

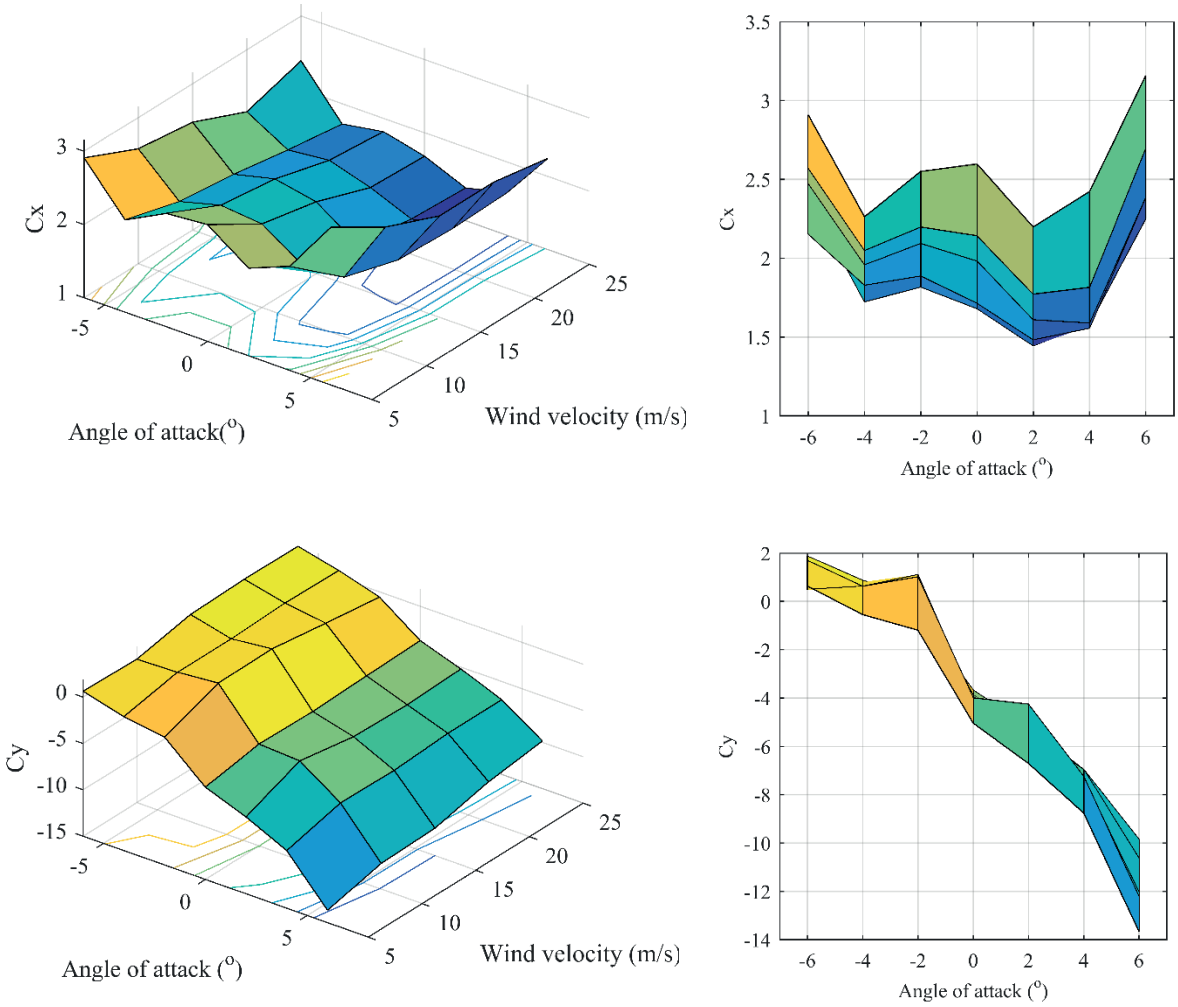


Figure 7. *Aeroelastic coefficients surfaces.*

Figure 8 shows a summary of the values obtained for the reduced scale model and each of the velocities simulated according to a bar diagram. A slight decrease in the value of c_x as the wind speed increases may be due to the turbulence generated. For its part, the coefficient c_y seems to remain constant with the wind speed.

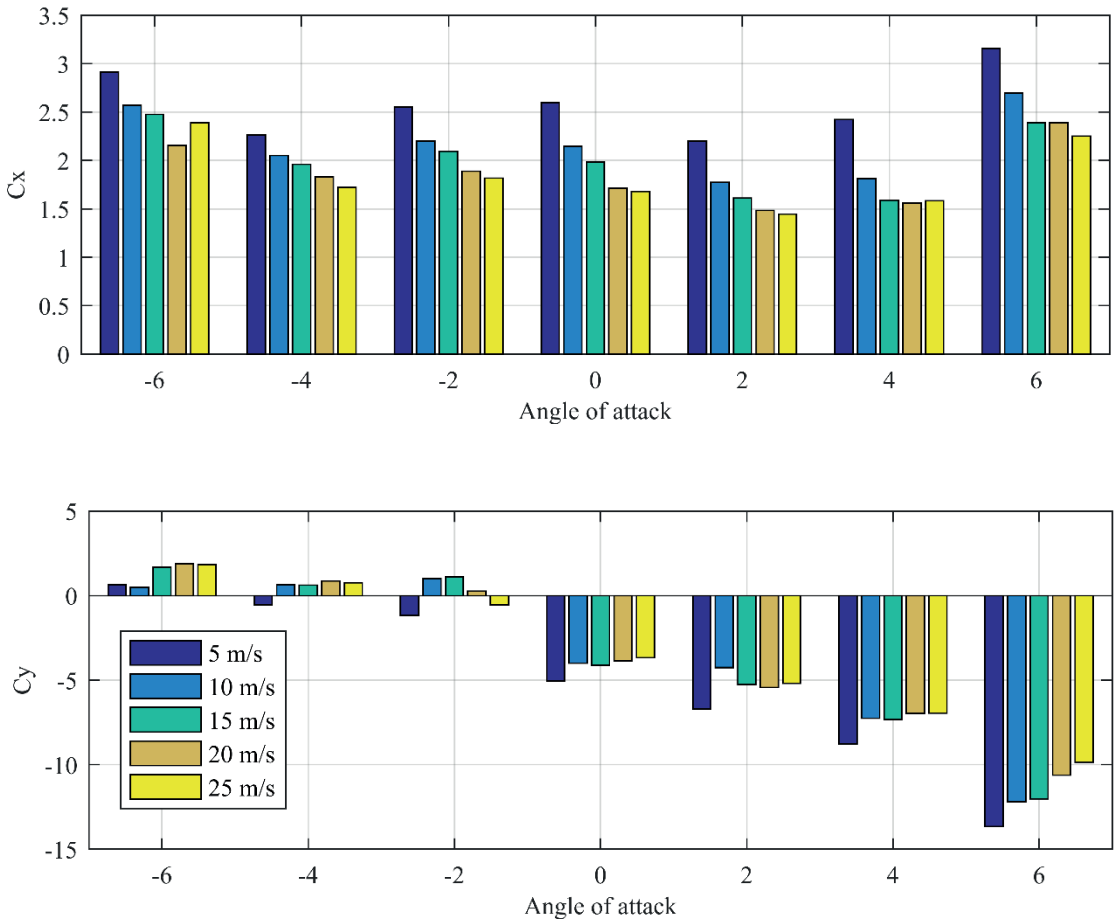


Figure 8. *Aeroelastic coefficients calculated for reduced-scale model and different wind flow velocities.*

Performing 3D simulations has not been feasible due to the high computing time required to achieve a stable simulation for this structure and the features of the computer used (see Figure 9). This fact because the selected particle size is very small due to they should pass through the gaps of the protection barrier of the cross-section. As a future work, it will be necessary to eliminate the protection barrier in order to increase the size of the particles and to study if there is a transversal influence of the flow in 3D CFD simulation.

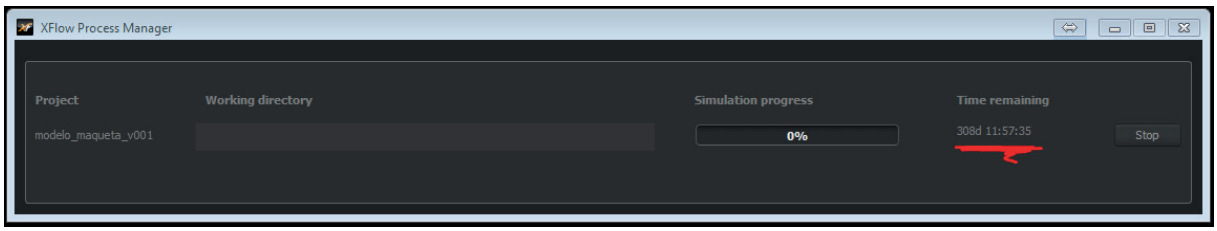


Figure 9. *Process Manager of the program showing the computational time needed for a stable 3D simulation.*

2.1. Real-scale model

The real-scale model is only varied from the reduced size, as well as the size of the wind tunnel and particles for the simulation. This case is only studied for a wind speed of 10 m/s, which is the one used in wind tunnel results. As in the reduced model, 3D simulation has not been performed. The results of

this real-scale simulation are shown together with those of the reduced-scale model as well as with the experimental ones in the next section of the paper.

3. COMPARISON WITH WIND TUNNEL TESTS

Finally, the aeroelastic coefficients obtained for the velocity of 10 m/s are presented, both for the small scale case with the case at real size, together with the experimental results. The aim is to be able to determine if a good approximation has been achieved.

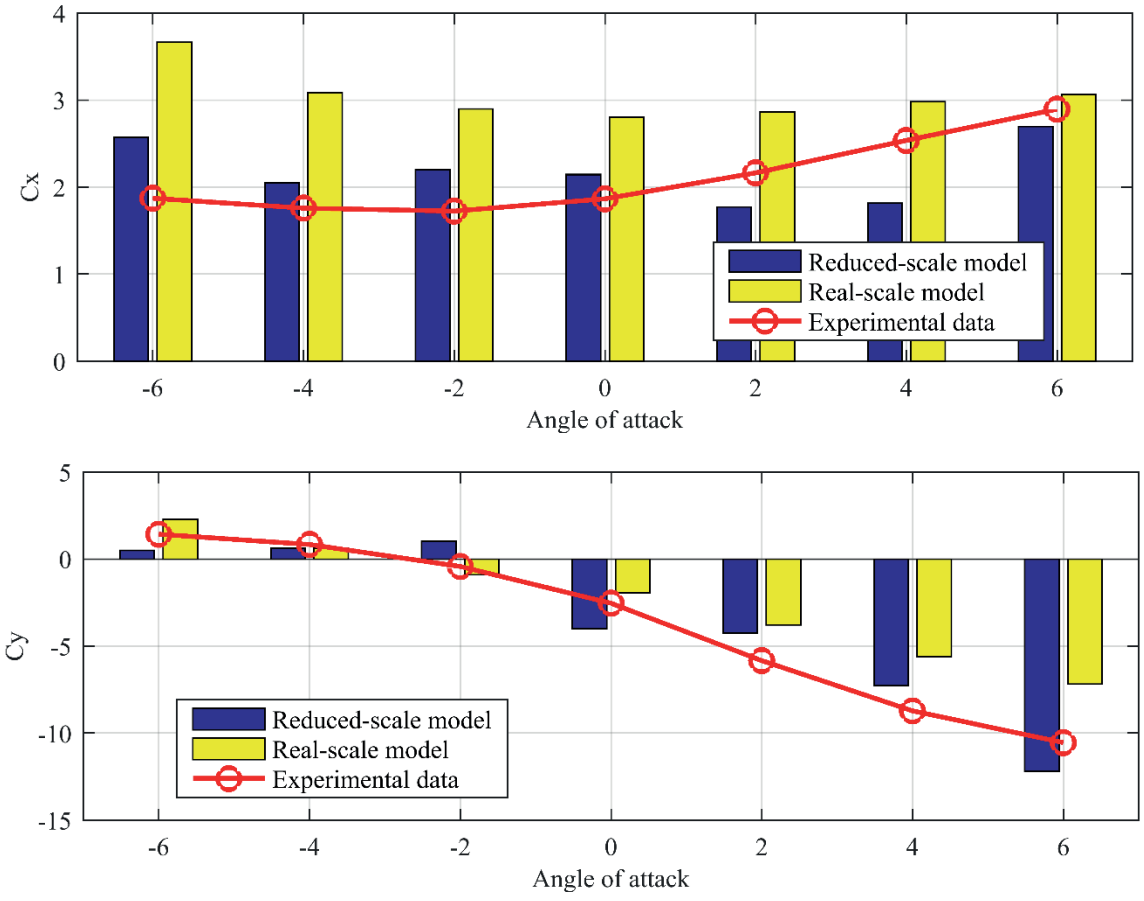


Figure 10. *Comparison between simulated results (reduced and real scale) and experimental results.*

Figure 10 shows the comparison between the results obtained in the wind tunnel test and both simulation, reduced and real scaled models. It can be said that a very good approximation of the problem has been obtained by these CFD simulations. Between the two simulations, reduced-scale and real-scale model, slight differences are observed, being larger values for c_x and smaller for c_y.

4. CONCLUSIONS

The advantages of the simulation are:

- A reduced-scale model can be studied in order to achieve that the comparisons with the structure tested in the wind tunnel are faithful, but it is also possible to test the real scale model (removing possible scale factors).
- Although the CFD simulations do not intend to replace wind tunnel tests, they allow to obtain an improved prototype to be tested in practice according to numerical results.

In other hand, the disadvantages are:

- Computational time, although it has greatly reduced in recent years, remains high, especially if it is intended to perform a 3D simulation.
- Except in some cases, the results obtained in the simulations do not coincide perfectly with those obtained experimentally, so the simulation only serve as a guide in the design phase. In some cases, the results are not conservative being out of the security side.

Future works should be to calculate the flutter derivatives, with the aim of taking into account the influence of the self-excited forces as well as to test possible differences between the reduced-scale and real-scale models. It would also be interesting to do a 3D simulation taking into account fluid-structure-interaction (CFD-FSI).

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors gratefully acknowledge the financial support of the company PONDIO INGENIEROS, S.L. (http://www.pondio.com) and they also thank the Colombia Government for holding the data and reports of this Project's bridge in open access placed in his website (https://www.invias.gov.co). The authors also want to thank the help provided by Francesco Galuccio, from TRAZA S.L., for the creation of the geometry of the model.

REFERENCES

[1] Simiu E, Scanlan RH. Wind effects on structures. Wiley; 1996.

[2] XFlow CFD (http://www.xflowcfd.com/).

[3] Cornejo MO, Aller LML. Análisis de acciones de viento en edificios singulares . Aplicación al Hotel Vela de Barcelona. Hormigón Y Acero 2009:37–64.

[4] Terres-Nicoli JM, Kong L, King JPC, Mans C. Study of the wind effects on a 384m concrete arch span bridge during different construction phases. Eng Progress, Nat People 2014;102:324–31. doi:10.2749/222137814814027738.

[5] Ogueta M, Franchini S, Meseguer J. Estudio experimental del comportamiento aerodinámico y aeroelastico de una sección del puente sobre el rio Magdalena en Barranquilla (Colombia). Madrid: 2013.

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

FINITE ELEMENTS MODELS FOR THE STRUCTURAL ANALYSIS OF IMPOSITION VAULTS: SANTA ANA CHURCH IN SEVILLE

J.A. Valseca[1]; M.T. Rodríguez-León[2], Compán Cardiel, Víctor Jesús[3], Vázquez, Enrique[4], Sánchez, J.[5]

[1]Departamento de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno.

Universidad de Sevilla (ESPAÑA). jav@us.es

[2]Departamento de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno.

Universidad de Sevilla (ESPAÑA). mtrl@us.es

[3]Departamento de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno.

Universidad de Sevilla (ESPAÑA). compan@us.es

[4]Departamento de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno.

Universidad de Sevilla (ESPAÑA). ev@us.es

[5]Departamento de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno.

Universidad de Sevilla (ESPAÑA). josess@us.es

ABSTRACT

Santa Ana Church has a lot of aspects that represent the socio-cultural situation in the city after the reconquest (1.248). The primitive plan (1.266) is a typical rectangular floor from Cordoba and burgalese influences, which was built by Christian master builders, that worked with stone masonry and muslim master builders, who did it with brick masonry in a lot of works during Alfonso X reign.

In order to do the structure analysis of the named building, we make the next theorical models for their calculation: first, a finite elements model (FEM) using surface elements (SHELLS) to characterize the global real model with a linear elastic analysis. We make the second model to verificate how the structure works in the nerves beginning, named Cul de Lampe. This second model is made with solids elements to simulate the tickness of the differents constructive solutions, with a linear and non linear calculation in a reduced model.

Keywords: obra de fábricamasonry, góticogothic, thrust line, vaults geometry, FEM.

1. INTRODUCCIÓN

Analizar el estado de conservación de las construcciones históricas desde un punto de vista estructural es un aspecto que ha preocupado a lo largo de la historia tanto a maestros de obras como a arquitectos y demás especialistas en estructuras de cara a la preservación del patrimonio histórico. En el caso que nos ocupa, será la arquitectura religiosa la que por su singularidad, presente aspectos de mayor interés tanto geométrico como estructural de cara a su comportamiento.

Hoy día, con las potentes herramientas informáticas de que se dispone, tanto para la generación de superficies como para el análisis estructural, se facilita enormemente el acercamiento a la geometría de la obra de fábrica como a su comportamiento. No obstante, desde el punto de vista histórico se debe hacer un ejercicio de reflexión y de interpretación de la ejecución tal como lo hicieron los constructores de la época.

Será este punto de vista de la generación de la geometría para posteriormente establecer un modelo numérico de cálculo uno de los principales problemas que se presentan a la hora de abordar el análisis del comportamiento de las construcciones históricas. Desde el punto de vista de la caracterización de los materiales y puesto que en caso que nos ocupa resulta compleja la realización de ensayos destructivos que nos aporte información de las propiedades mecánicas de los materiales, se adoptarán valores teóricos para simular, con carácter cualitativo, el comportamiento estructural.

El estudio que se realiza en el presente documento aborda, la traza de la iglesia primitiva, la generación teórica de la geometría mediante elementos superficiales que nos aporten una idea del comportamiento del conjunto (modelo 1). Posteriormente, se realiza un modelo más detallado del tramo central de la iglesia para analizar con mayor profundidad cómo se comportan los diferentes elementos que integran la estructura: nervios, plementería, muros, arranque de nervios, cul de lampe; tanto en régimen elástico lineal (modelo 2) como considerando la no linealidad del material (modelo 3)

Se presenta en este artículo la descripción del comportamiento de una estructura que surge como resultado de un trazado en planta de la edificación condicionado por unas necesidades socioculturales que se desarrollan en una situación muy específica de la ciudad de Sevilla. Recién conquistada y con las miras puestas en los constantes asedios a los que aún estaba sometida la ciudad por parte de la población recién expulsada hacia los terrenos del Aljarafe, se presenta la Iglesia de Santa Ana de Triana como ejemplo de arquitectura religiosa con un marcado carácter defensivo por su situación más allá de las murallas de la ciudad.

Partiendo de estos condicionantes se justifica la construcción de una geometría de bóvedas que condicionará el comportamiento de la estructura, tanto a nivel de conjunto como a nivel singular de algunos aspectos constructivos traídos desde Burgos previo paso por Córdoba tras su conquista en 1.236.

2. ASPECTOS ARQUITECTÓNICOS

2.1 Antecedentes y condicionantes urbanos

Tras la conquista de la ciudad en 1.248 serían muchos los cambios que habría que adoptar para establecer cierto orden sobre los nuevos terrenos ocupados. Serán los aspectos de la Iglesia donde primero se intervenga con un doble objetivo. Por un lado el de ejercer como aparato administrativo para censar a la nueva poblaciónn cristiana que ocuparía el territorio y por otro, tener cierto control sobre la población musulmana conversa. Será esta la principal razón por la que el rey Fernando III (1.199-1.252) asignaría a la Iglesia la totalidad de las Mezquitas existentes para establecer en ellas las parroquias o collaciones (Figura 1) y así establecer el orden que la ciudad requería y así poder ir generando los nuevos núcleos de población.

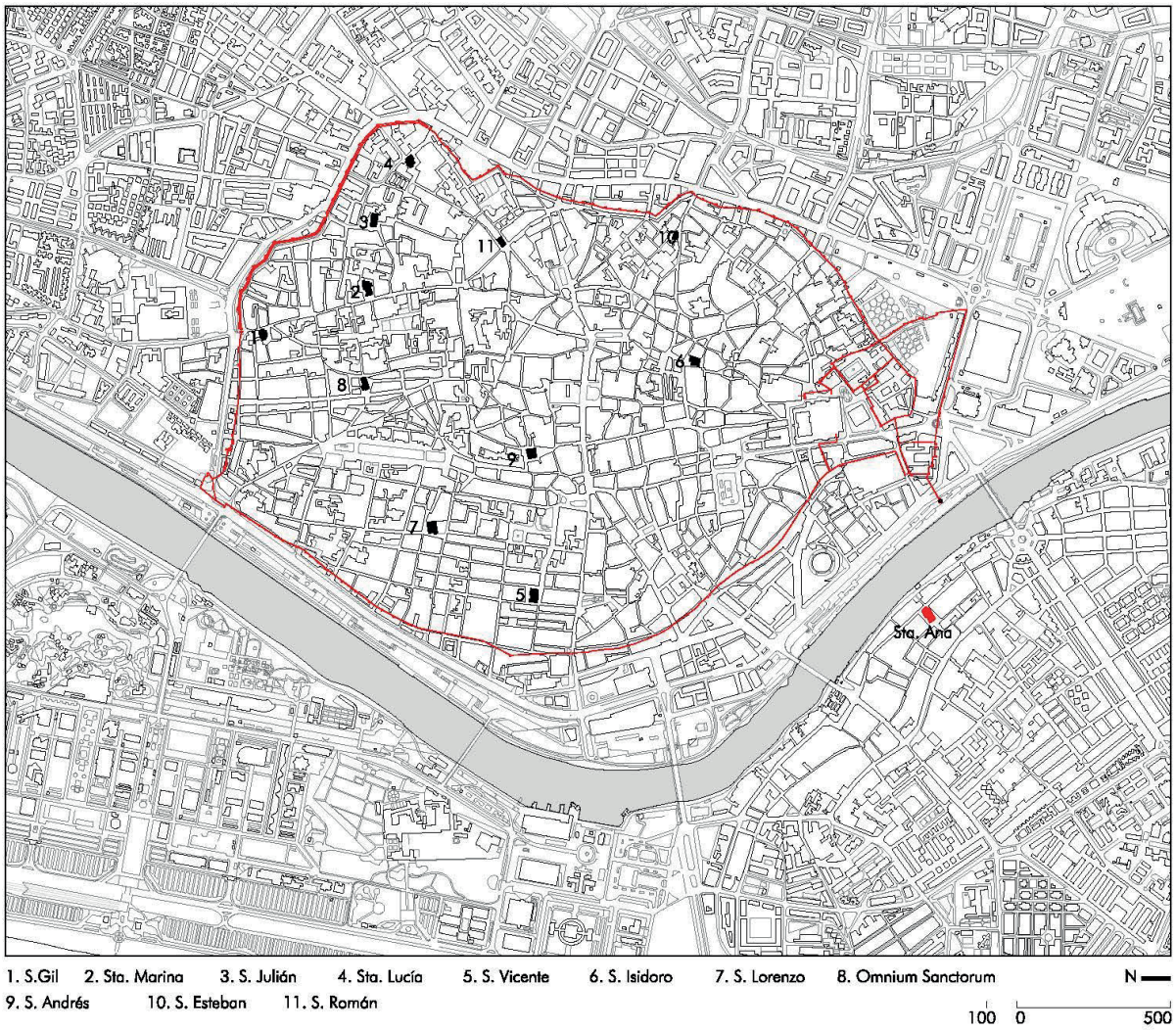


Figura 1. *Sevilla. Localización de las Iglesias Parroquiales*

Será en este contexto en el que surgiría la Iglesia de Santa Ana dada la entidad que adquirió también la puebla de Triana, a la que la Iglesia de San Jorge se le había quedado pequeña. Dada su situación estratégica por su ubicación extramuros y siendo punto de paso cercano por el que la población conquistada continuaba asediando a la ciudad desde los terrenos del aljarafe donde se habían afincado

tras ser expulsados de la ciudad, sería la primera iglesia cristiana que se construiría de nueva planta, al contrario que las restantes parroquiales que lo harían sobre las trazas de las anteriores mezquitas.

Este aspecto junto a la necesidad de defenderse harían que la Iglesia se convirtiera en una auténtica fortaleza desde la que defenderse y que requeriría de un auténtico patio de armas en las cubiertas [Gómez de Cózar, J. C. & Benítez Bodes, R. M.]. Para tal fin y al contrario de le que se venía haciendo en las parroquiales cordobesas, en las que las cubiertas se ejecutaban con el sistema de par y nudillo, sería necesario la ejecución de un sistema de bóvedas que permitiera la ejecución de un elemento de cubrición con la inclinación suficiente para poder ser transitada.

2.2 Traza y Geometría

De nueva planta, la que fuera planta primitiva (Figura 2) contaría con tres naves seguidas, sin indicación alguna de crucero, cubiertas prácticamente a la misma altura pero sin constituir un único ámbito como sucedería posteriormente en las iglesias de salón del siglo XV. Sobre los arcos apuntados que separan las naves y gracias a la ligera elevación de la nave central sobre las laterales, aparecerán muros muy opacos con una galería en su interior.

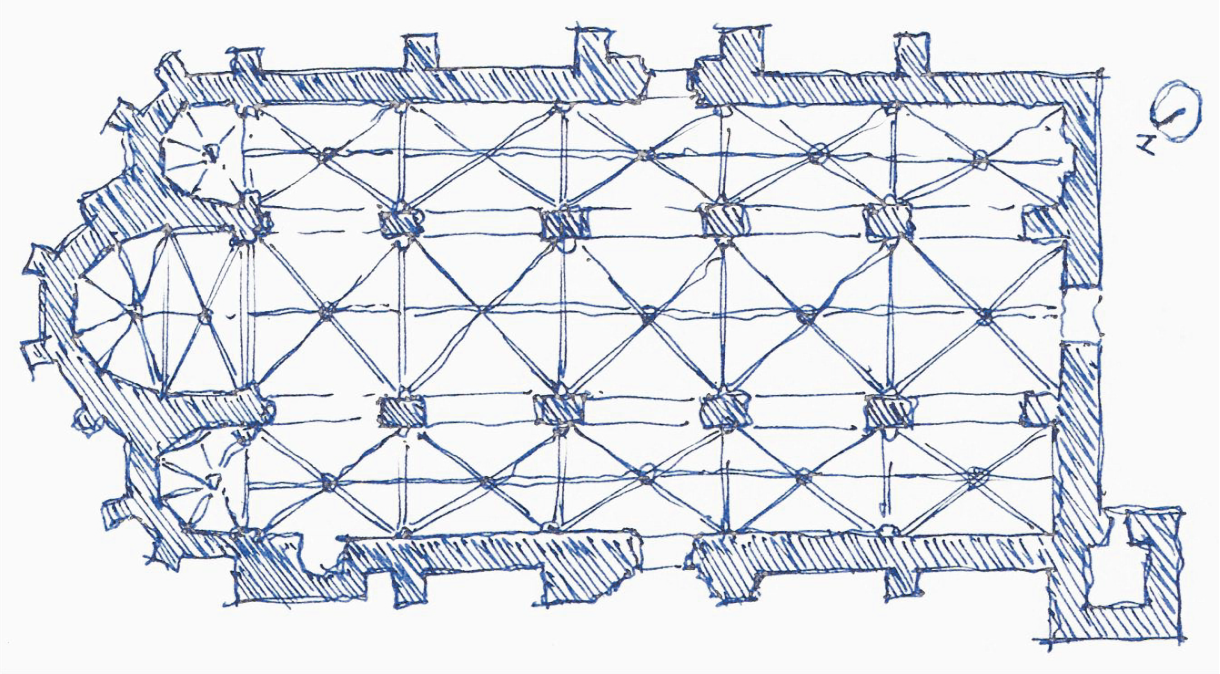


Figura 2. *Planta del posible estado primitivo*

En sección, resulta interesante la aparición del hueco sencillo en el triforio que comunica ambas naves hecho posible éste por ser la altura de las naves laterales casi idénticas a la de la mayor, quedando en todo momento estas aberturas por debajo de las bóvedas de las naves. Es esta altura de naves prácticamente a la misma altura la que permita ejecutar una cubierta transitable (Figura 3).

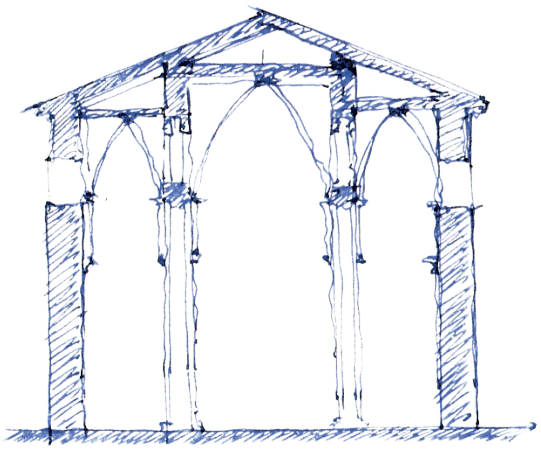


Figura 3. *Sección transversal de la Iglesia según V. Lampérez*

Los arcos apuntados descansan sobre pilares rectangulares de clara influencia almohade y sobre los que arrancarán, en ménsulas voladas (cul de lampe), los nervios de los arcos de las bóvedas siguiendo la fórmula tradicional cisterciense. Con respecto a los nervios de las bóvedas y al espinazo central que las cose longitudinalmente en los tres cuerpos de naves, existen referencias de diversos autores que señalan a la escuela burgalesa como principal foco de influencia para su construcción, aunque sí bien, ayudados por algún alarife moro y sus albañiles, que desde un primer momento tras la reconquista, recibirán el beneplácito de Alfonso X al apreciar éste lo majestuoso de sus construcciones.

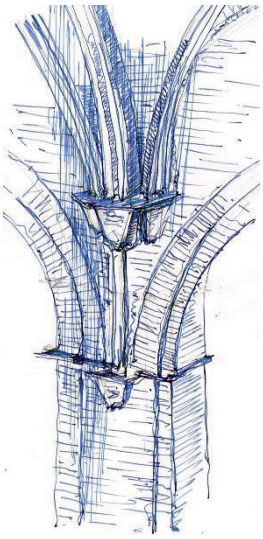


Figura 4. *Recreación virtual del interior de la Iglesia en su estado primitivo. Cul de Lampe*

Atendiendo a la traza y partiendo del hecho de que la Iglesia de Santa Ana de Sevilla se va a construir de nueva planta, nos lleva a plantearnos qué criterios siguieron sus constructores para la definición de su trazado, al no poder apoyarse, como ocurriría en las iglesias parroquiales posteriores, sobre la trama preexistente musulmana. Como se ha comentado, la influencia europea a través de la escuela burgalesa, se hizo evidente en la arquitectura andaluza en los períodos de reconquista, dando origen a una multitud de iglesias construidas a partir de finales del siglo XIII que presentan una serie de semejanzas entre sí y de las que, en general, se extrae un modus operandi a partir del diseño de la planta.

Si analizamos el sistema de medida empleado para su trazado, la vara burgalesa, de 83,59 cm. de longitud y de la que se tomaban múltiplos sencillos para la configuración de los espacios, sería empleada para la modulación de las proporciones de la Iglesia en la que se ha podido establecer unas relaciones de proporción entre la bóveda central y las laterales de 7/10/7 varas [Ortega, J. 2001].

Con estas reglas de proporción para la planta y siguiendo la configuración de los nervios, trazados los perpiaños mediante arco ojival de cuarto agudo y ojival equilátero en la nave central y en las laterales respectivamente, y semicircular peraltado hasta alcanzar la altura de clave en los formeros; lo que resulta es un bóveda por imposición cuya superficie se pliega hacia el interior aportando gran rigidez al conjunto en el encuentro de nervios en el arranque.

Será este arranque de nervios en ménsula mediante la solución que se denominaría Cul de Lampe uno de los aspectos más interesantes de analizar desde el punto de vista del comportamiento estructura.

3. DESCRIPCIÓN DEL EDIFICIO EN TÉRMINOS DE OBRA DE FÁBRICA

De entre las acepciones que podemos encontrar en el término fábrica, nos quedaremos con aquélla que hace referencia a su composición material y que nos permiten describir tanto el comportamiento de cada uno de los elementos que la componen como de su conjunto, entendiendo por tanto que será *"aquella construcción o parte de ella hecha con piedra o ladrillo y argamasa".* El mortero, ejecutado con cal aérea y empleado en las fábricas mediante tendel grueso, va a adquirir un papel relevante en el comportamiento estructural debido a sus propiedades plásticas, permitiendo grandes deformaciones en el conjunto sin que se llegue a producir fisuración.

En el caso concreto de la Iglesia de Santa Ana, encontramos fábrica de ladrillo con ladrillo de arcilla y mortero de cal aérea para la ejecución de muros y plementería de bóvedas (salvo la de la cabecera) siguiendo la tradición alfarera de la collación de Triana que se mantiene hasta nuestros días, y fábrica de piedra, calcarenita proveniente de la cantera de la Sierra de San Cristóbal y que se reservó para la ejecución de los nervios de las bóvedas, arcos, columnillas y en aquellas zonas en las que se requería una mayor resistencia, como en la unión de la cabecera con el cuerpo de nave o en los encadenados en la base de la torre.

En el caso que nos ocupa, la imposibilidad de realizar ensayos destructivos para la extracción de probetas que nos permitan determinar las propiedades de cada caso (fábrica de piedra y de ladrillo) nos lleva a fijar los parámetros mecánicos de los materiales de forma teórica, a partir de bibliografía específica y de construcciones en las que por su proximidad y similitud constructivas sí se han podido realizar. Para el caso concreto de la fábrica de cantería, se han adoptado los valores a los que se ha tenido acceso [Mayorga, E; Yanes-Bustamante, E.; Sáez-Pérez, A.; 2.015], extraídos a partir de los ensayos realizados por la empresa VORSEVI S.A. durante las obras de rehabilitación del Templo Parroquial de Santiago Apóstol en Jerez de la Frontera, Cádiz; ejecutada con piedra de la misma cantera (Tabla 1). Los valores obtenidos corresponden al comportamiento conjunto piedra-mortero (macromodelo), siendo este valor de comportamiento conjunto el que realmente nos interese para su introducción en el modelo de cálculo tanto para la fábrica de piedra como para la de ladrillo [Lourenço, P. B].

Tabla 1. *Características mecánicas de los materiales*

	ρ (N/m³)	E (N/m²)	ν (N/m²)	σ_c (N/m²)	σ_t (N/m²)	G_f (N/m²/m)
Fábrica de Piedra	1.900	3e+09	0,2	4,0e+06	0,1e+06	18
Fábrica de Ladrillo	1.800	1,5e+09	0,2	1,5-3,0e+06	0,1e+06	18
Material de Relleno	800	3e+08	0,3	-		

ρ: Densidad E: Mód. Elasticidad Longitudinal. ν: coef. Poisson. σ_c: tensión rotura compresión. σ_t: tensión rotura tracción. Gf: energía fractura

Respecto al comportamiento de la fábrica, se considera la resistencia a compresión con una ley de comportamiento cuasi frágil como la que se adjunta (Figura 5), pudiéndose aceptar un comportamiento isótropo del ladrillo. En el caso de la resistencia a tracción y debido al comportamiento por geometría de la fábrica, consideraremos una ley de comportamiento con rotura y redistribución de tensiones (concrete damage).

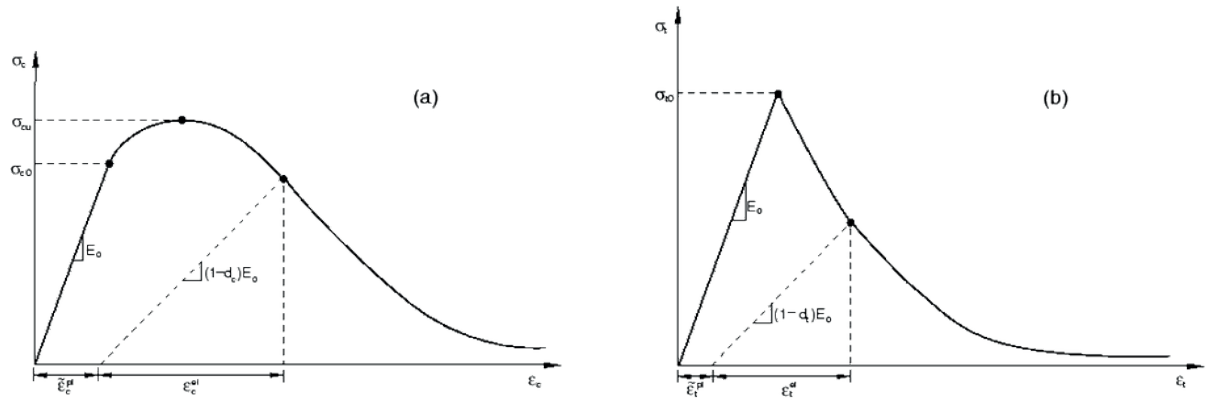


Figura 5. *Diagrama tensión deformación de un material quasi-frágil bajo carga uniaxial de compresión (a). Diagrama tensión deformación de un material bajo cargas uniaxiales de tracción (b)*

Si atendemos a la deformabilidad de las fábricas, diferentes autores parecen coincidir en considerar su valor en función de su resistencia a compresión. No obstante, como dicha resistencia resulta compleja de determinar por la inexistencia de ensayos que puedan aportar mayor información y que en caso de existir, son múltiples los factores (presencia de humedad, tamaño de junta, etc.) que pueden hacer que dichos valores se vean modificado considerablemente en algunas zonas de la fábrica respecto a otras, resulta igualmente conflictivo establecer un criterio único a la hora de determinar el módulo de deformación longitudinal. Como se ha indicado, los datos de la fábrica de piedra se han extraído de ensayos experimentales mientras que los correspondientes a la fábrica de ladrillo se han considerado de forma teórica [Tabla 1].

4. ANÁLISIS ESTRUCTURAL Y MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

Uno de los factores que más preocupa a la hora de realizar un modelo numérico de cálculo es que su comportamiento sea lo más aproximado a como lo hace el modelo real. En el caso que nos ocupa y dada la complejidad de la geometría de bóvedas, se pretende llegar a un conocimiento de lo general a lo particular, identificando aquellas zonas que precisan de una mayor definición para conocer su comportamiento. De esta forma se opta por la realización de un modelo completo de la Iglesia Primitiva hasta llegar a definir con mayor detalle un tramo transversal de la Iglesia que nos aporte

mayor información sobre el comportamiento de bóvedas y el arranque de nervios en lo que se ha denominado Cul de Lampe (Modelo 1).

4.1 Modelo de la Iglesia Primitiva

Para el análisis del comportamiento del conjunto se ha realizado un modelo mediante elementos tipo shell para los elementos superficiales (muros y bóvedas) y tipo frame para los nervios de las bóvedas. Para ello, aparte de suprimir los elementos que tienen un mero carácter ornamental y no estructural, se han realizado algunas simplificaciones estructurales en puntos singulares, que entendemos no afectarán al comportamiento de conjunto y que serán objeto de análisis en un modelo posterior con mayor definición.

Respecto a la discretización de los muros exteriores, los cuales, por su dimensión y a falta de ensayos y documentación que aporte mayor información, estarían ejecutados mediante dos hojas trabadas con relleno interior de cascotes, se ha optado por su definición mediante unas propiedades físicas y mecánicas equivalentes correspondientes a las dos hojas de fábrica de ladrillo. No así en la cabecera, donde se opta por definir las dos hojas de la fábrica y trabar dichas hojas en aquellas zonas donde realmente existe físicamente, esto es, en recercados de puertas y ventanas [Escrig &Varcárcel]. De igual forma se ha trabajado con la definición de los pilares, obtándose por simular su sección mediante las hojas exteriores y traba interior, lo que ha permitido una definición geométrica más aproximada. La plementería de las bóvedas y los contrafuertes se han definido de una sola hoja con el espesor correspondiente (Tabla 1). Los nervios de han definido mediante la simplificación de la sección ornamental a una sección rectangular y discretizados mediante elementos tipo frame, cuyas dimensiones se adjuntan.

Tabla 2. Dimensiones de los elementos estructurales considerados (cm)

	MUROS		**CONTRAFUERTES**	**PLEMENTERÍA**	**NERVIOS (bxh)**
	EXT.	**INT.**			
ESPESOR (e)	100	25	150	20	30X50

Más compleja ha sido la adaptación del cul de lampe en el encuentro del arranque de bóvedas con los muros exteriores y los de las naves debido principalmente a que, si geométricamente las superficies y los nervios convergen en un punto, no ocurre lo mismo al definir constructivamente el arranque de estos. Para eliminar dicha convergencia y con ella la definición de elementos shells muy distorsionados, se ha seccionado la bóveda por un plano horizontal paralelo al arranque de los nervios y se ha discretizado una ménsula “infinitamente rígida” que permita discretizar la solución pero que no introduzca acciones adicionales, en este caso flexiones en el muro de forma que se comporte de forma análoga al modelo real. En cualquier caso, el empuje real de la bóveda y la línea de empuje de los nervios actúa a una altura sobre el arranque ésta [Heyman; 1.995] por lo que la resultante tenderá a alejarse de la ménsula debiendo quedar en el interior del muro para evitando así excentricidades. Se analiza este aspecto con mayor detalle en apartados posteriores.

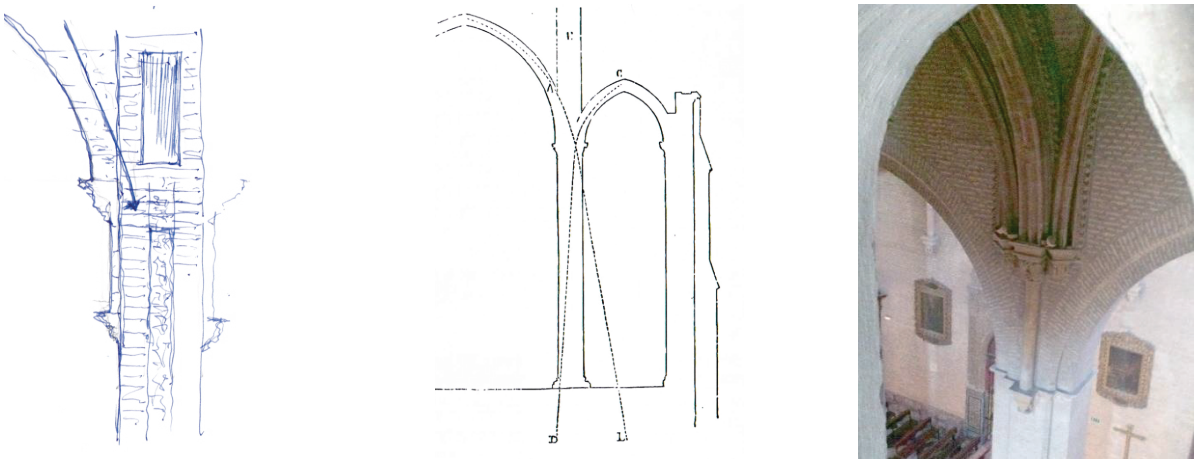


Figura 6. *Cul de Lampe. Línea de empujes*

Para dicho modelo se ha realizado un cálculo elástico lineal que nos permita una primera aproximación al edificio así como la determinación de aquellos elementos que por su geometría y propiedades aportan una mayor rigidez al conjunto. Para su validación se ha atendido a la identificación de los desplazamientos verticales (Figura *7*) y de los modos fundamentales de vibración, donde se puede apreciar la rigidez que aportan al conjunto tanto la cabecera como la torre a los pies de la nave y analizar el comportamiento en relación a posibles afecciones de fisuración en el contacto entre los diferentes elementos constructivos: cabecera-nave, nave-torre.

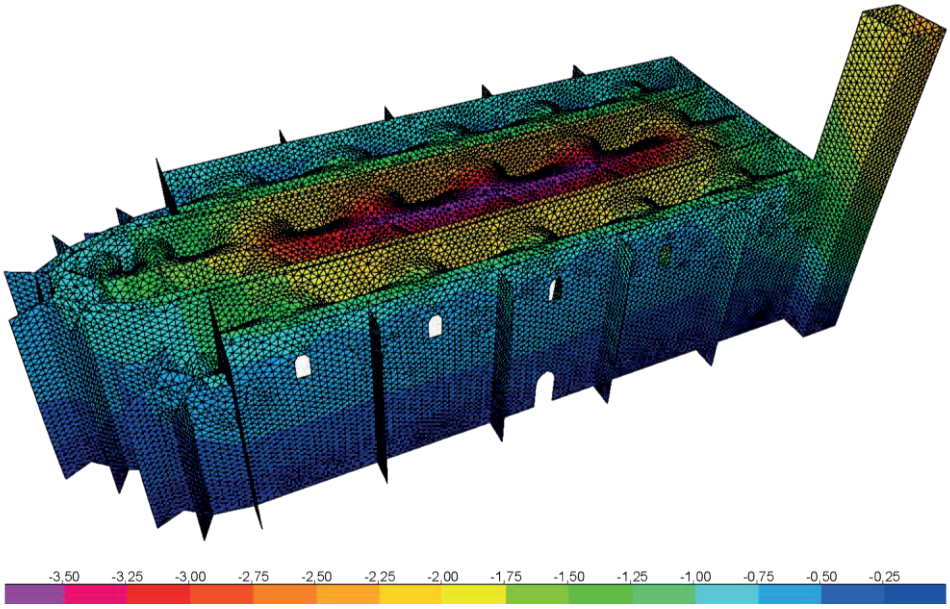


Figura 7. *Modelo 1. Desplazamientos verticales Uz (mm).*

Otro de los aspectos a destacar es el comportamiento transversal del cuerpo de naves (Figura 8) donde resulta relevante el empuje de la bóveda central sobre las laterales, de menor dimensión, siendo especialmente relevantes los desplomes de los pilares por su gran esbeltez, sobre los cuales se han llegado a medir desplazamientos de hasta 19 cm sin que se detecten síntomas de fisuración debido al gran espesor de los tendeles ejecutados con morteros de cal aérea y a la gran capacidad de deformación de la fábrica [Huertas, S.; 2.005].

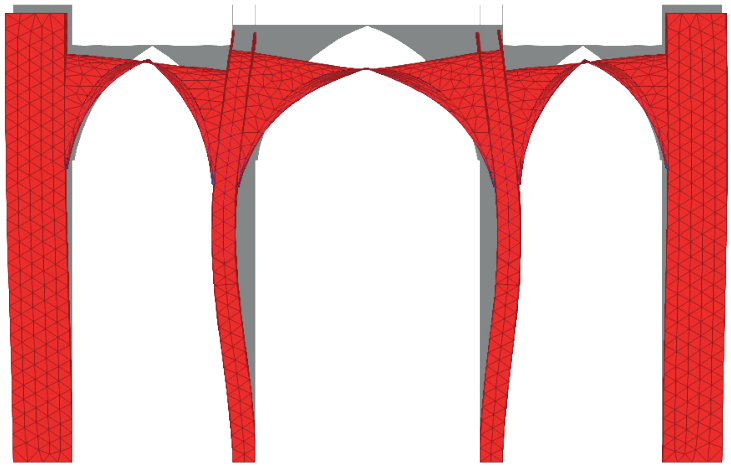


Figura 8.*Modelo 1. Tramo Central. Deformada*

4.2 Tramo Transversal de la Iglesia. Análisis

Atendiendo al comportamiento analizado en el modelo mediante elementos superficiales del modelo 1, se realiza un segundo modelo de un tramo transversal de la iglesia para el análisis más detallado de aquellos elementos constructivos que se habían simplificado por su complejidad para ser discretizado mediante elementos superficiales. Se ha realizado un levantamiento tridimensional con una definición más precisa del cul de lampe que simule realmente la rigidez que aportan al arranque de bóvedas. Debido a la complejidad de la forma, se ha optado por un mallado mediante elementos volumétricos (continuum elements) mediante tetraedros de 4 nodos de integración reducida, manteniendo como criterio la introducción de al menos 4 elementos en el espesor.

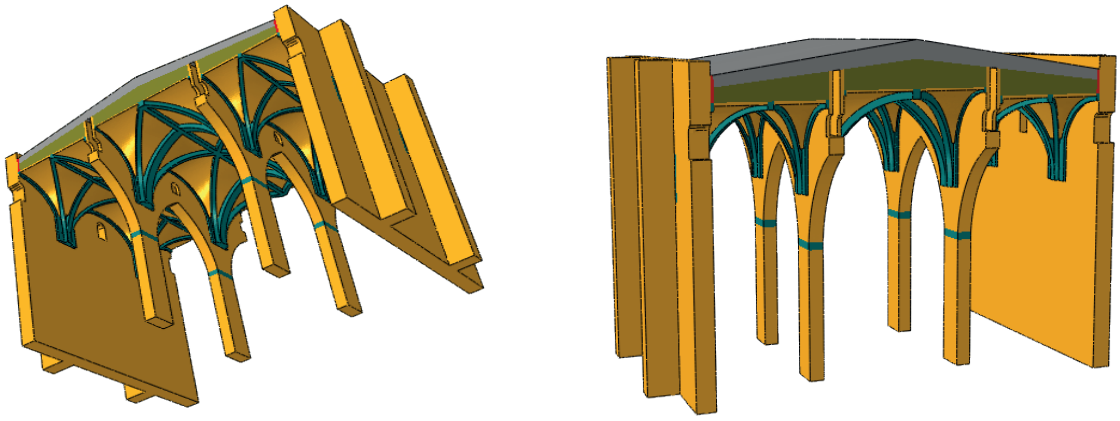


Figura 9. *Modelo generado mediante elementos sólidos*

Se ha considerado en este modelo el relleno de las bóvedas mediante la inclusión del material con una solución de terminación mediante una losa de hormigón cuya carga se ha considerado aplicada en una etapa posterior respecto a la construcción inicial de la fábrica, tras tener conocimiento de dicha solución en las obras de consolidación en el año 1.969. Se ha tenido en consideración el contacto que se produce entre dicha los de hormigón y los muros exteriores para que no transmitan flexiones sobre

éstos. Así mismo y con objeto de reducir el modelo, se han aplicado condiciones de contorno de doble simetría, entendiendo que con dicha condición no se afecta al comportamiento transversal del cuerpo de naves analizado.

En un primer análisis elástico lineal (modelo 2) se aprecia el desplome que se origina en los pilares debido a una geometría de bóvedas de diferente dimensión que arrancan a la misma altura, generándose empujes que no están compensados. Consecuencia de esto y también debido a la necesidad de realizar un gran relleno para poder definir una cubierta transitable, se origina un descenso de la clave en toda la longitud del espinazo, con desplazamientos del orden de 2 cm, con aparición de Tensiones Principales Máximas o de Tracción (a partir de ahora S_{max}) por encima del valor estimado de su resistencia de 0,1MPa en prácticamente todo el cuerpo de bóvedas. Debido al gran peso de la cubierta, se generan flexiones en el espinazo arrastran a la plementerías de las bóvedas en el entorno de éste, de ahí la aparición de tracciones también en dichas zonas (Figura 10). Apréciese también las tracciones que se generan en el exterior de los contrafuertes debido al empuje de las bóvedas. Respecto al desplome que presentan los pilares, se extraen valores de deformación elástica de 0,7 cm.

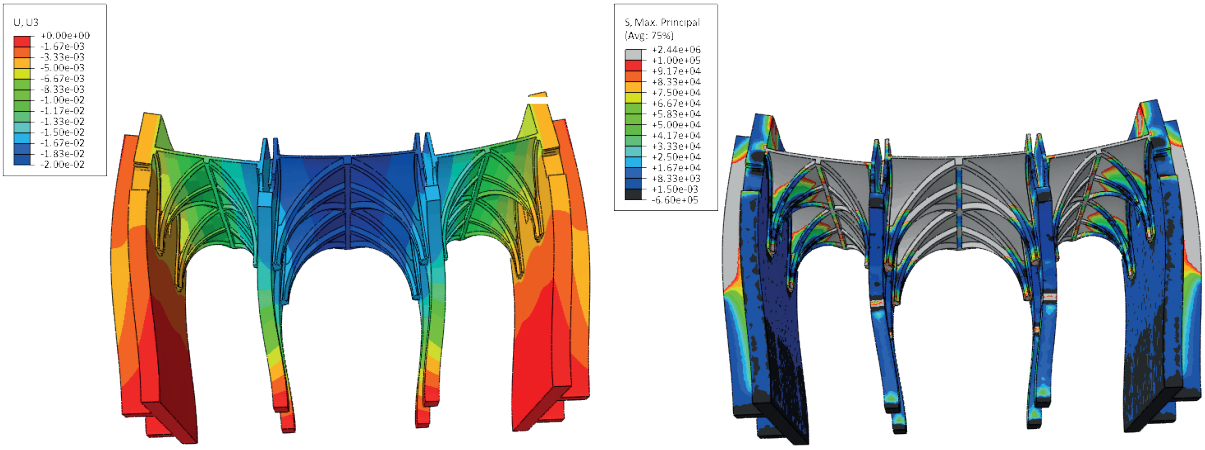


Figura 10. *Modelo 2. Desplazamientos verticales U_z (m). Tensiones Principales de Tracción S_{max}. (N/m^2)*

En relación al comportamiento del encuentro de nervios en el cul de lampe y extrayendo las Tensiones Máximas de Compresión (S_{min}) verificamos que toda la zona se encuentra comprimida, con valores de tensiones por debajo del estimado para la fábrica de piedra de σ_c=4,0 MPa (Figura 11, izquierda). Como era de esperar, los pilares se encuentra más solicitados debido a su esbeltez, localizándose una concentración de tensiones en la cara interior en el punto de inflexión de la deformada que se generan debido al empuje de bóvedas y con valores cercanos a la resistencia estimada para la fábrica de ladrillo, σ_c=1,5-3.0MPa (Figura 11, derecha)

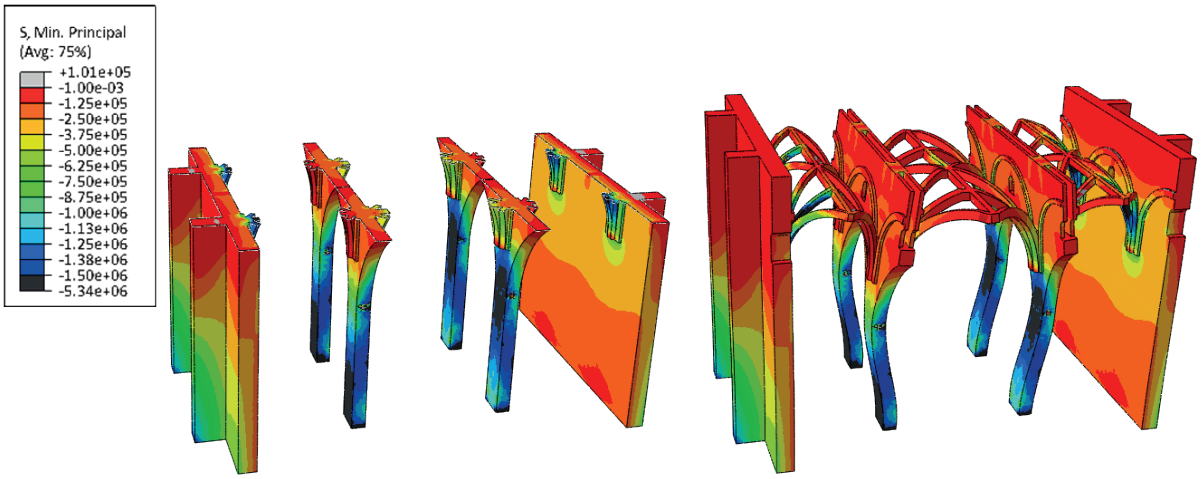


Figura 11. *Tensiones Principales de Compresión Smin (N/m²)*

A partir de los resultados obtenidos y del particular comportamiento que presentan las bóvedas, se realiza un cálculo no línea para analizar con mayor detalle el comportamiento del material en dichas zonas de la plementería (modelo 3).

Se observa en el análisis no lineal una disminución del estado tensional (Smax) en el cuerpo de bóvedas debido a la redistribución de tensiones (donde se empieza a alcanzar la plastificación del material prácticamente con el 20% de aplicación de la carga de peso propio debido al peso que le induce la gran capa de relleno. La disposición de la losa de hormigón que se ejecuta con posterioridad no hace sino agravar dicha situación aumentando las deformaciones.

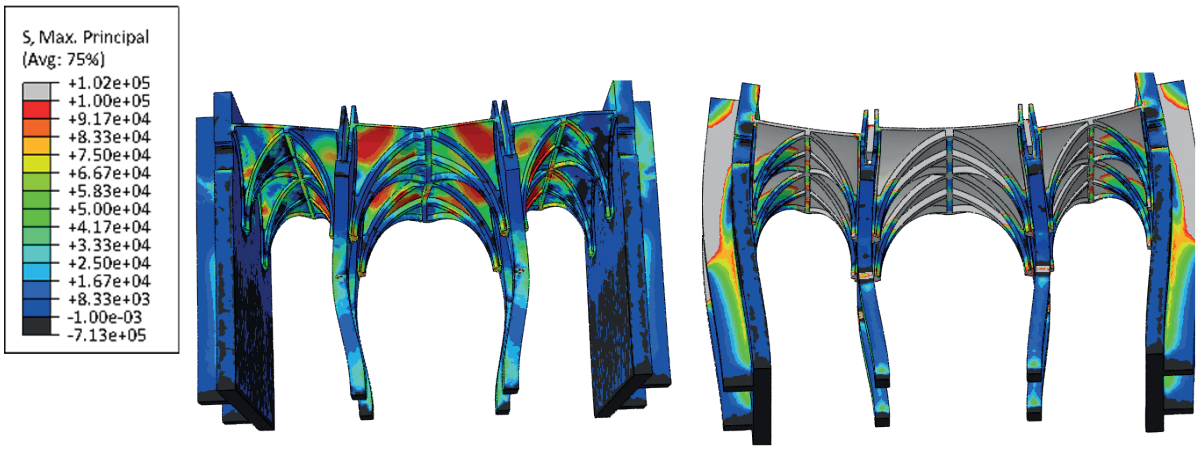


Figura 12. *Tensiones Principales de Tracción, Smax (N/m²). Régimen No Lineal, iizquierda. Elástico, derecha.*

En relación a las deformaciones, los descensos en la clave pasan de los 2 cm obtenidos en el análisis elástico a 7 cm en régimen no lineal. Del mismo modo, los desplomes de los pilares se acercan más a la realidad obtenida in situ donde se llegan a medir en el nuevo cálculo deformaciones en dirección transversal del orden de 6 cm, a falta de una mayor precisión en el ajuste de las propiedades mecánicas de los materiales a partir de la realizaciónn de ensayos.

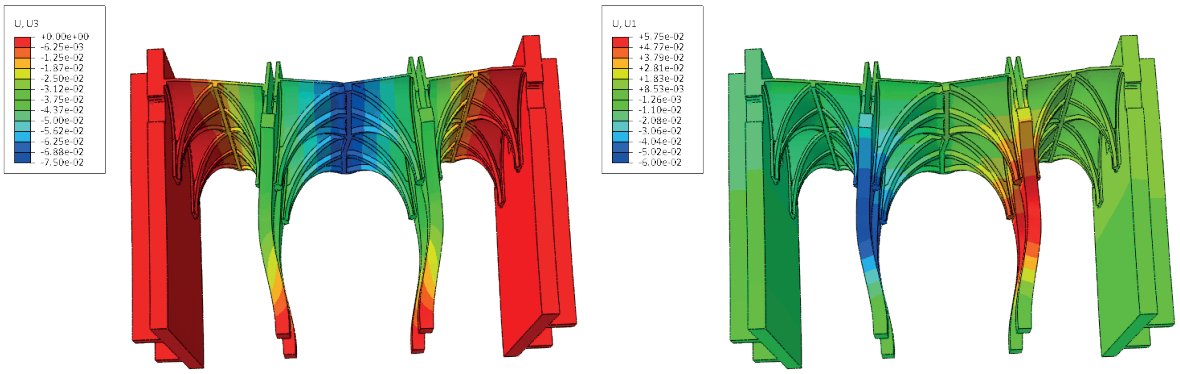


Figura 13. *Modelo 3. Desplazamientos Verticales U3, izquierda y Horizontales U1,derecha (m).*

Analizando el encuentro de nervios en el Cul de Lampe (Figura 14) encontramos las dovelas en el arranque de nervios comprimidas y con valores de tensiones por debajo de los estimados para la resistencia de la fábrica de piedra (4 MPa). Debido al aumento de las deformaciones en los pilares apreciamos valores cercanos a los límites resistentes de la fábrica de ladrillo (1,5-3 MPa).

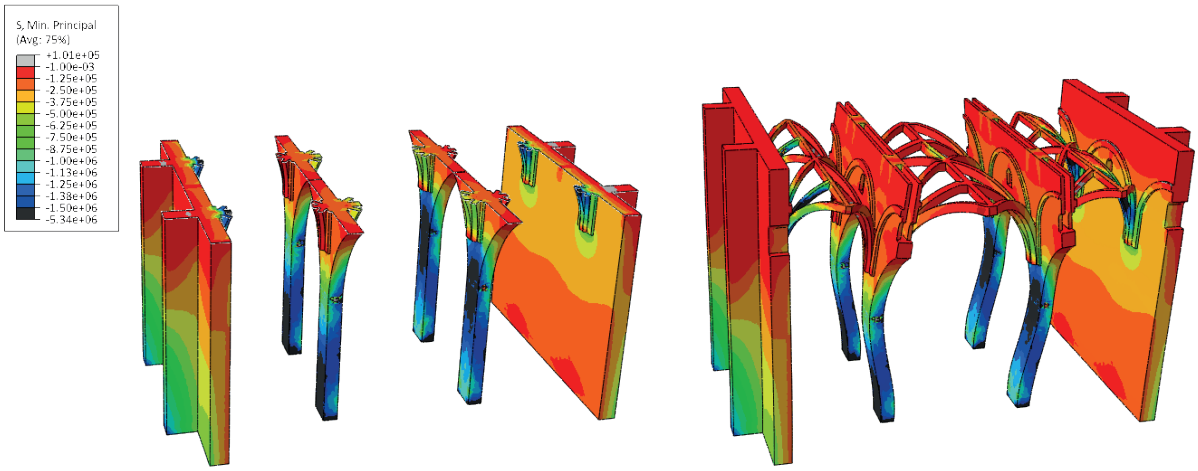


Figura 14. *Tensiones Principales de Compresión Smin (N/m²).*

5. CONCLUSIONES

En relación al modelo realizado de la fábrica primitiva mediante la discretización mediante elementos superficiales del modelo 1, se extrae la información suficiente para conocer el comportamiento de conjunto y detectar aquellas zonas que precisan de una mayor definición para su análisis. A la vista de los resultados, se estima que las simplificaciones realizadas en el modelo primitivo son coherentes y compatibles con el comportamiento de conjunto. Respecto a la simulación de los muros exteriores y comparando con otros modelos en los que se opta por doblar también los muros exteriores, se han obtenido reducciones en el número de elementos del orden del 70% siendo análogo el comportamiento de la estructura para los datos que se pretendía obtener en cuanto al comportamiento del conjunto y con el consiguiente ahorro computacional así como la manipulaciónn gráfica de los modelos. Concretamente, el modelo que se presenta contiene 66.179 elementos y 94.977 grados de libertad.

Del análisis del tramo de naves calculado en régimen elástico (modelo 2) se extraen modos de comportamiento compatible con el modelo completo y una aproximación a cómo trabajan este tipo de bóvedas, siendo el modelo calculado en régimen no lineal (modelo 3) el que más se ha ajustado, en términos de deformaciones y a falta de mayores ensayos que aporten datos sobre las propiedades de los materiales, a la apariencia que presenta la fábrica hoy día, tanto a nivel de descenso en las claves de las bóvedas como en los desplomes de pilares.

Así mismo, se desprende del cálculo del modelo 3, que la necesidad de elevar la nave central para poder realizar la ejecución de una cubierta transitable, obliga a realizar un relleno en los rinónes de las naves laterales que introducen cargas de tal consideración, que hacen que el comportamiento de dichas bóvedas presenten plastificación en el material prácticamente desde poco después de realizar el descimbrado. No obstante, la geometría de las bóvedas ejecutadas por imposición de la plementería sobre los nervios ojivales en los perpiaños y semicirulares perlatados en los formeros, hace que en el encuentro de la geometría en el arranque de nervios se produzca un pliege hacia el interior en la superficie donde en los estribos se dota de mayor rigidez a la estructura.

Analizando el estado tensional en el Cul de Lampe encontramos las dovelas en ménsula trabajando a compresión, lo que nos lleva verificar que la línea de empujes se desvía de los nervios a medida que se acerca al arranque en las dovelas en ménsula.

Resulta destacable cómo una determinada situación socio-cultural en un momento determinado de la ciudad tras la reconquista, define el trazado de una edificación que hará las veces de fortaleza condicionando la geometría de sus bóvedas para adaptarse a unas necesidades defensivas que influirán de forma considerable en el comportamiento estructural de la obra de fábrica. Esta situación pone de manifiesto el poco conocimiento que poseían los maestros de obra que intervinieron en las primeras obras que se llevaron a cabo tras la reconquista de Sevilla, en su mayoría, constructores de segunda línea provenientes de la escuela burgalesa.

6. AGRADECIMIENTOS

Agradecemos todo el apoyo proporcionado a D. Francisco González de Canales, Arquitecto y Maestro Mayor de la Iglesia, y a Dña. Amparo Rodríguez Bavío por compartir sus conocimientos sobre la Iglesia. Del mismo modo, al Padre Eugenio por permitirnos deambular por el recinto y a todas las personas que ayudan a mantener, de una u otra forma, que la Iglesia de Santa Ana mantenga el aspecto que presenta hoy día.

REFERENCIAS

1. Atamturkur, s & Laman, J. (2012). Finite Element Model Correlation and Calibration of Historic Masonry Monument. Structural Design of Tall and Special Building, 21(2), 96-113
2. Compán, V. (2012). Comportamiento estructural de las geometrías arquitectónicas del Barroco Centroeuropeo (unpublished PhD. thesis). Sevilla: Universidad de Sevilla.
3. D. Villegas, M. Cámara, V. Compán (2014). Análisis estructural de la torre del homenaje de la Alhambra de Granada. Informes de la construcción. Vol. 66, extra 1, m017.

4. Escrig Pallares, F., & Pérez Valcárcel, J. (2004). La Modernidad del Gótico. Sevilla: Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

5. García Ortega, A. J. & Ruiz de la Rosa, J.A. (2009). Diseño estructural en el primer gótico andaluz (I): Reglas y proporción. EGA: revista de expresión gráfica arquitectónica, 100-107.

6. Gómez de Cózar, J. C. & Benítez Bodes, R. M. (2.008). Las soluciones inconclusas de los Templos Medievales del Reino de Sevilla. Informes de la Construcción. Vol. 60, 57-67

7. Heyman, J. (1995). Teoría, historia y restauración de Estructuras de Fábrica. Ministerio de obras públicas, Transportes y Medio Ambiente. Secretaría General Técnica. Centro de Publicaciones

8. Heyman, J. (1999). El esqueleto de piedra: Mecánica de la arquitectura de fábrica. Reverte.

9. Huerta, S. (2005). Mecánica de las bóvedas de fábrica: el enfoque del equilibrio. Informes de la Construcción. Informes de la Construcción, 56(496) 73-89.

10. Lourenço, P. B. (2001). Analysis of historical constructions: from thrust-lines to advanced simulations. In III International Seminar Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques.

11. Rodríguez-Mayorga, E., Yanes, E., Compán, V., Sáez, A. (2013). La restauración del templo parroquial de San Dionisio (Jerez de la Frontera, España). La inyección como método de reparación de estructuras de fábrica. Informes de la Construcción.

12. Rodríguez-Mayorga, E., Yanes, V., Sáez, A. (2015). Análisis y Diagnóstico de la Iglesia de Santiago en Jerez de la Frontera. Informes de la construcción. Vol. 67, 540, e127.

Identifying a TMD and its final tuning once installed on a lively composite slab

Canales Sánchez-Castro, Fernando[1]; Soria, José M.[1]; Díaz, Iván M.[1]

; Marinas-Sanz, Gonzalo [1]; García-Palacios, Jaime H.[1]

ABSTRACT

The research group has constructed a light-weight composite steel-concrete slab which does not fulfill vibration serviceability requirements. A passive tuned mass damper (TMD) was designed and installed. This paper analysis practical issues related to the in situ tuning of a TMD.

Before any installation, tests to predict/identify the TMD behavior should be carried out, in such a way that the final tuning can be easily done. Hence, the isolated TMD was testing by carrying out free response tests for different inertial mass values. Natural frequency and damping ratio are estimated. A first configuration is obtained and assessed as compared with the theoretical TMD parameter.

Once installed different tests will be carried out using a chirp waveform. Hence relations between the signal variables are obtained in order to save future test time. Finally, a peered analysis of the TMD behavior, such as amplification factors and effects of detuning are studied.

Keywords: Tuned mass damper; Vibration control; Experimental identification; Dynamic characteristics; Floor vibrations

1. INTRODUCTION

Over the last years, improvements in materials and construction technology have led to lighter and slender structures than in the pass, which might have increased susceptibility to vibration, these phenomena are especially significant in footbridges and long-span floor [1] [2].

Most of the previous studies have concentrated on the estimation of TMD properties in order to construct the vibration absorber. A substantial literature exists on the optimal choice of parameters of a tuned mass absorber (stiffness, applied damping, mass ratio, etc)[3]–[7]. However, once them are selected in the design phase and the TMD is to be installed a final tuning is needed in order to verify or modify the device since theoretical behaviour might be substantially different to real. Thus, the easiest parameter to modify if needed is the TMD mass and so different properties of the isolated TMD and their relation with the mass have been carefully studied. The paper focuses on practical issues related to the final tuning of TMDs, its performance evaluation through a chirp waveform and effects of detuning once installed.

[1] *Department of Continuum Mechanics and Theory of Structures. E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid (SPAIN). f.canales@alumnos.upm.es, jm.soria@upm.es, ivan.munoz@upm.es gonzalo.msvf@gmail.com, jaime.garcia.palacios@upm.es*

As part of the research project "*Development of novel systems for reducing vibrations in pedestrian structures*", the research group has constructed a very light-weight floor deck, consisting in a composite slab of 5.5 m x 1.85 m and a depth of only 14 cm (see Figure 1). This structure does not fulfill vibration serviceability requirements, and therefore, a vibration control device was planned to be installed to improve its dynamic behavior. Thus, a passive tuned mass damper (TMD) was designed and installed in the structure. The damping of the TMD is achieved by a couple of magnetorheological dampers, which allows an effective damping tuning (a future upgraded to a semi-active TMD is also planned).

Firstly isolated TMD identification is done, frequency and damping ratio relationship with the inertial mass are derived in order to obtain the mass value to tune it with the structure. This identification has been done without the magnetorheological dampers so the damping obtained due to inherent damping (mainly dry friction and bearing friction). Theoretical relation of mass – frequency is also assessed with the experimental results.

Once installed, the final tuning has been carried out using a continuous sweep input, chirp signal, for Frequency Response Function (FRF) estimation (faster and easier than swept sine). In order to save future test time the quality of the results obtained and its dependency on the test time have been evaluated. Then other input variables of the signal have been studied considering a parameter that involve them with the test time, this parameter has shown potential to reduce future test time and having no significant result difference with longer test.

The paper ends with an analysis of the effects that a change in the structure conditions produces on the previous TMD tuning. As a passive TMD, the vibration reduction performance decraes significantly.

Figure 1. *General view of the composite slab. Laboratory of structures, ETSI Caminos (Madrid).*

2. TMD IDENTIFICATION

2.1. Methodology

As part of the characterization of the device different tests have been carried out on the isolated TMD. The objectives of these tests are to obtain the relationship between the mass value and natural frequency and inherent damping. Thus, a first configuration is obtained and assessed as compared with the theoretical TMD parameters. Hence, the isolated TMD was testing by carrying out free response tests (see Figure 2) for different mass values without dampers.

Figure 2. *Test performed in the laboratory. Isolated TMD*

A total of ten tests have been performed varying the TMD mass, from 54 kg to 9 kg reducing the mass in each test in five kilograms. Two piezoelectric accelerometers were used with a sampling frequency of 5120 Hz, different series of impulses were monitored in a total of thirty seconds each test. The recorded raw data were low-pass filtered using a second order Butterworth filter with a cut off frequency at 30 Hz, this is applied to reduce the high frequency noise before signal processing.

TMD free responses have been considered as an underdamped single degree of freedom (SDOF) in order to obtain the frequency and damping. Damping is obtained analyzing the logarithmic decrement of the decaying (see Figure 3) the number of cycles *n* between two maxima is counted and considering amplitude *u* on them the Eq. (1) is applied. The first maximum is the absolute while the other is variable (in order to have a clear peak) therefore the number of cycles *n* is different in each impulse.

$$\zeta = \frac{1}{2\pi n} ln \frac{u_1}{u_{n+1}} \tag{1}$$

Frequency is obtained considering the elapsed time between two maxima and the number of cycles. Hence in each test a number of results equal to the number of impulses are obtained (see Figure 3) and taking in account the two accelerometers the number of results are duplicated, therefore a statistical analysis of results is undertaken in order to obtain a single value for each mass test

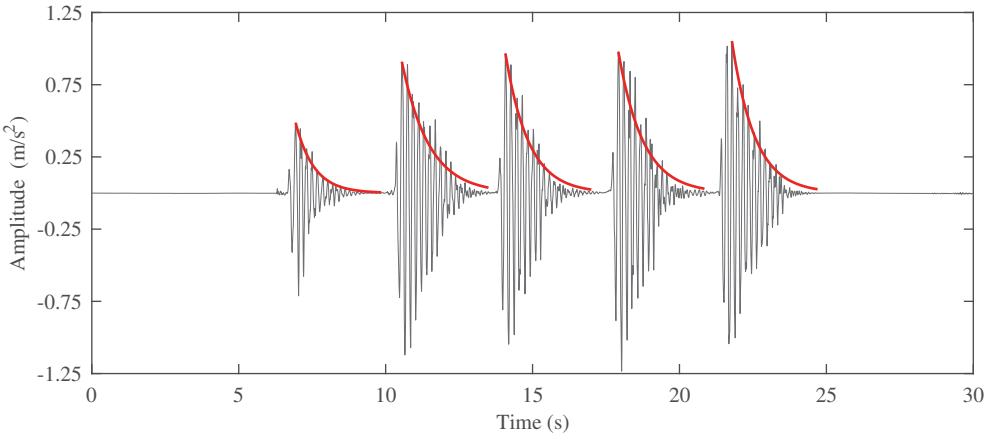


Figure 3. *Logarithmic decrements of one accelerometer. One estimation is obtained in each impulse*

Chauvenet's criterion is used to asses if an estimation (natural frequencies and damping ratios) is an outlier that should not be considered within a set of estimates. This identification of the outliers will be achieved by finding the number of standard deviations that correspond to the bounds of a probability band around the mean and comparing that value to the absolute value of the difference between the suspected outliers and the mean, this task is simplified using Chauvenet's coefficients k_n as Eq. (2) shows.

$$X_i - \bar{X} > k_n \sigma \qquad Then\ the\ value\ is\ discarded \tag{2}$$

In which $\bar{X}$ is the mean, σ the standard deviation and X_i the estimation under analysis. Chauvenet's coefficients are tabulated.

Following this criterion, two different paths have been made for calculating a single mean value in each test, these two paths were named as segregated mean and integrated mean. Figure 4 explains the differences between these two paths.

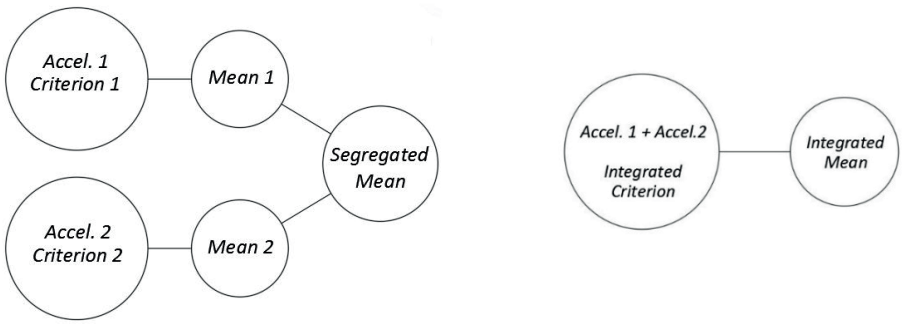


Figure 4. *Two paths for calculate the mean value*

2.2. Results and analysis

With this method the following results have been obtained. Furthermore, the mean in each accelerometer (the mean obtained before calculating the segregated mean) is plotted along the two paths (Figure 5 and 6). No significant differences have been observed between the two paths, hence any of them can be taken. Other conclusion is that variance of results is highly larger in damping than in frequency, the most remarkable difference is between channel 1 and channel 2 in the damping – mass relation, however means values are much closer.

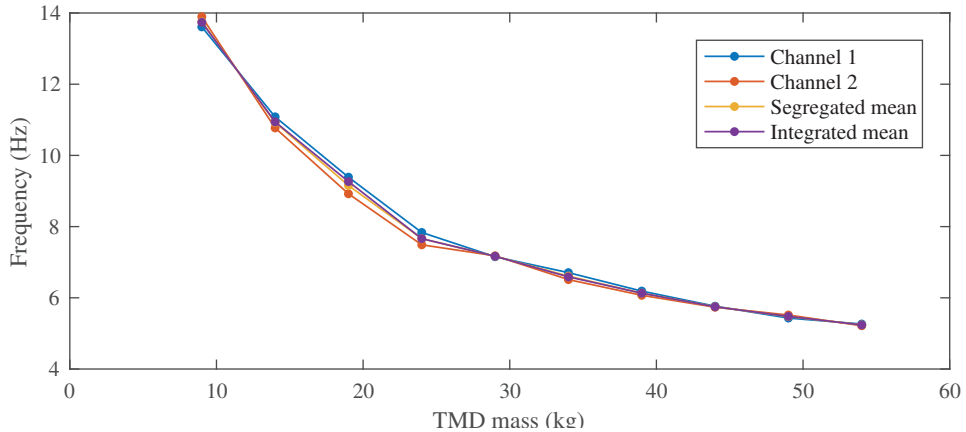


Figure 5. *Frequency – Mass relationship*

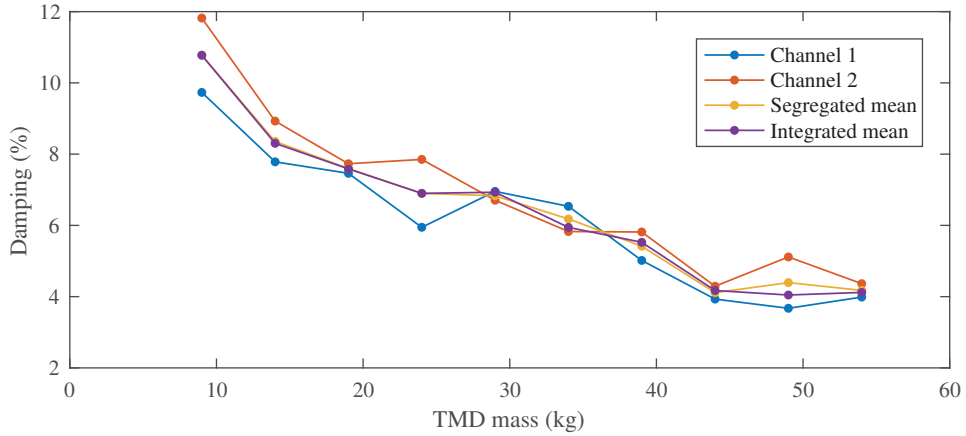


Figure 6. *Damping – Mass relationship*

Regression analysis has been undertaken. For frequency – mass relationship a power curve has been adjusted with an R^2 equals to 0.9966, hence perfect matching has been archived.

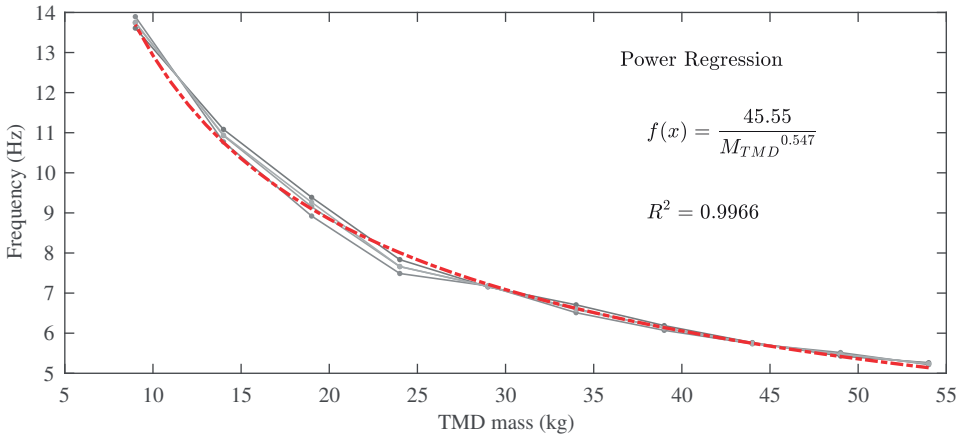


Figure 7. *Power regression for frequency – mass relationship*

For the damping – mass relationship, other regression curves have been explored. Decent values of R^2 are archived with a logarithmic regression (R^2 = 0.9637) and linear regression (R^2 = 0.9107). Both regression have the same slope sign so when frequency raises damping also raises, this might be explained considering that the energy lost by friction increases with higher frequencies. Finally, as it is shown in Figure 7, frequency depends on mass by a power of -0.547, close to -0.5, as a SDOF system (see Equation (3)).

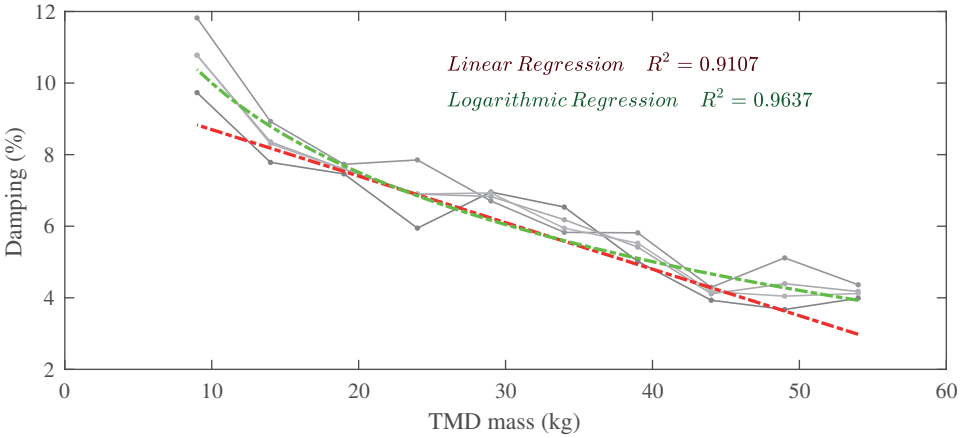


Figure 8. *Possible regression curves for damping – mass relationship*

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}\sqrt{1-\zeta^2} \tag{3}$$

A power regression of the form a^(-0.5) can be considered, and the R2 value is slightly reduced to 0.9871 (see Figure 9).This approximation has not as perfect matching as previous curve has, however it still having a remarkable value for R2 really close to 1. If the expression shown in Figure 9 is equated with the Equation 3 and considering that ζ have values from 12% to 5% so the third term of the equation is

almost one the result obtained K is equal to 62.755 N/m. Our TMD have four springs with a K near 15.000 N/m so the K of the TMD have a value close to 60.000 N/m that fit in with the K of this curve.

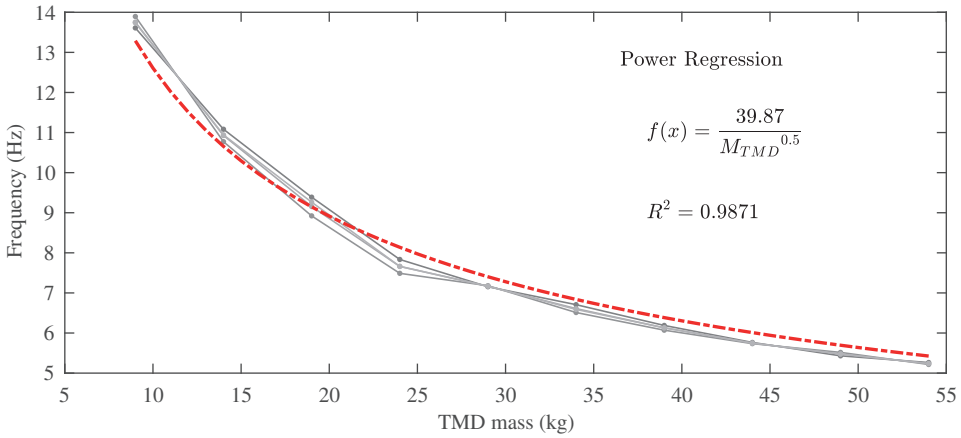


Figure 9. *Power regression for frequency – mass relation with a power of -0.5*

2.3. Tuning

Once previous study has been done, the TMD has been installed on the structure. In order to obtain the necessary device mass Nishihara and Asami [8] expressions have been evaluated, then the cut between the experimental isolated properties and the theoretical tuning will be the point of best performance. Finally, this point corresponds to a mass of 52.8 kg and a frequency of 5.295 Hz (see Figure 10).

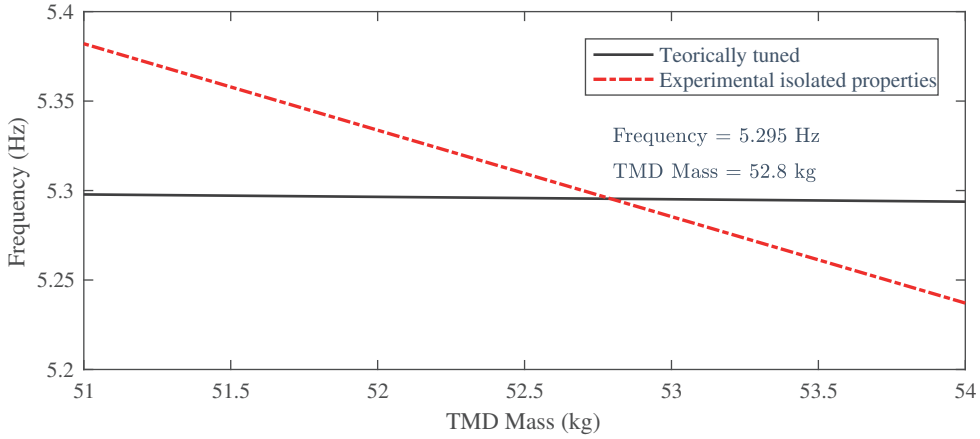


Figure 10. *Final tuning before installing the TMD*

3. TMD PERFORMANCE

3.1. Loading case

The force used to evaluate the TMD performance has been a chirp waveform whose frequency increases at a linear range with time, f(t), as follows.

$$F(t) = F_O \sin\left(2\pi f(t)\right) \qquad with \quad f(t) \in \left(f_{inf}; f_{sup}\right) \text{Hz}; \text{ and } t \in [0; T_f] \text{ s} \tag{4}$$

The frequency range and the final time T_f has been studied in order to optimize present and future tests. The initial tests have been done with a constant gain F_O, further tests will explore gain variations.

3.2. Frequency range and test time effect

Initially a total of six tests with different duration have been carried out (see Figure 11). Damping ratio (%), modal participation (kg) and resonance frequency (Hz) are estimated in each one. In order to verify the quality of the results a seventh test with long duration (2000 s) has been done, the estimations obtained from this test will be considered as the exact solution. The frequency range (f_{inf} - f_{sup}) in all test is 5 Hz (3 Hz to 8 Hz). The results of these seven tests are shown in Figure 12 and 13 including a possible regression. Both figures reveal two horizontal asymptotes, the value in the ordinate axis of the asymptote is the real value so the results tend to stabilize when the test time is increased. Furthermore peak frequency has been estimated too, however the frequency is captured with no significant difference between the different test time (see Table 1).

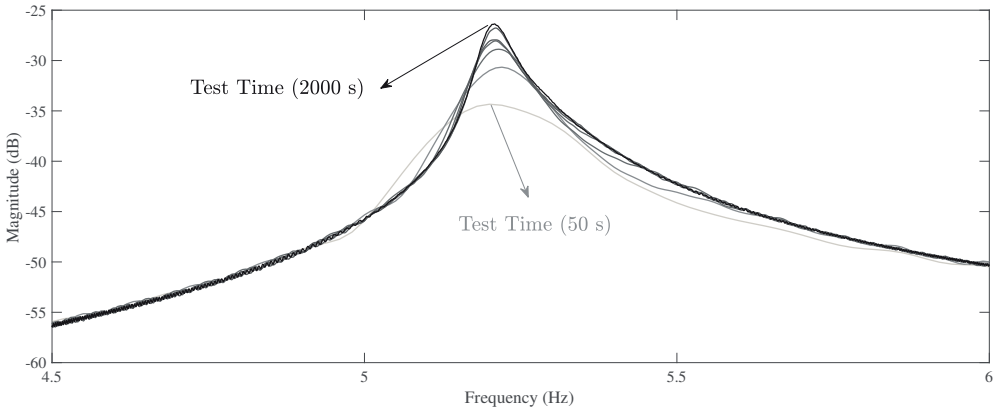


Figure 11. *Magnitude of the transfer function between the structure acceleration and the excitation force*

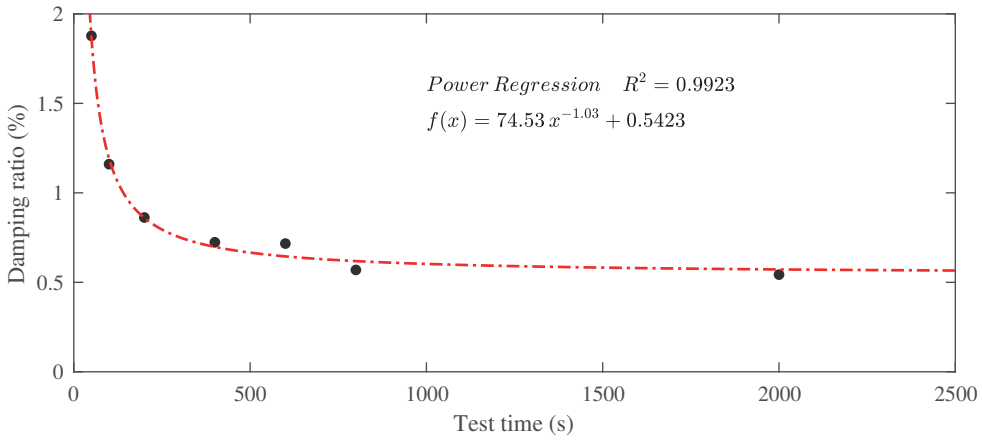


Figure 12. *Power regression for test time – damping ratio*

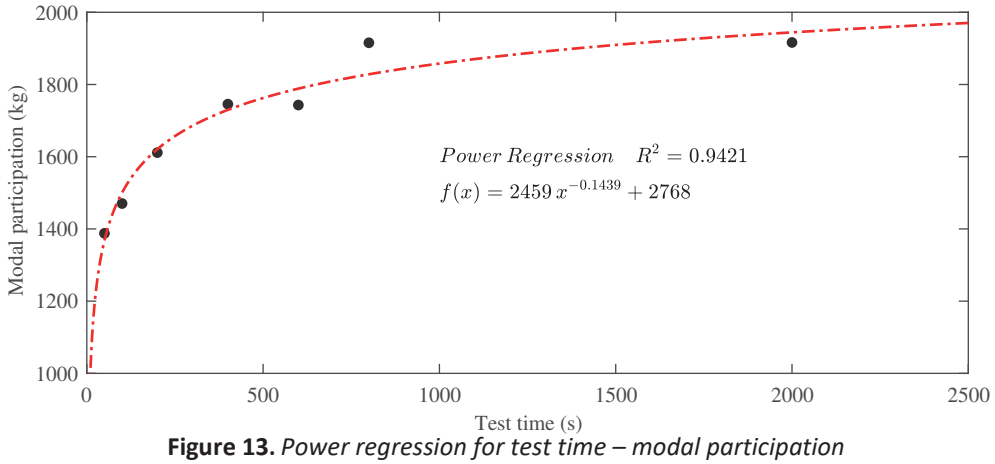


Figure 13. *Power regression for test time – modal participation*

Table 1. *Frequency values obtained in the different test*

Test Time *(s)*	Frequency *(Hz)*
50	5.20
100	5.22
200	5.21
400	5.21
600	5.21
800	5.21
2000	5.21

This analysis only indicates the influence of the test time, to include the effect of the frequency range a new variable has been defined:

$$\mu = \frac{T_f}{f_{sup} - f_{inf}} \tag{5}$$

This variable can be seen as the time spent by the chirp in each hertz studied. Requirements such as that a shorter frequency range (f_{inf} - f_{sup}) should outcome a shorter T_f when the μ value is constant or the μ value tend to increase with the decrease of the error (in order to discrimate , otherwise the points would tend to concentrate with similar μ values but strong differences in their error) are fulfilled with this variable. Other variables have been explored however these requirements were not fulfilled.

The relative error respect the seventh test has been calculated following Eq. (6).

$$Error = \left|\frac{V_i - V_e}{V_e}\right| \tag{6}$$

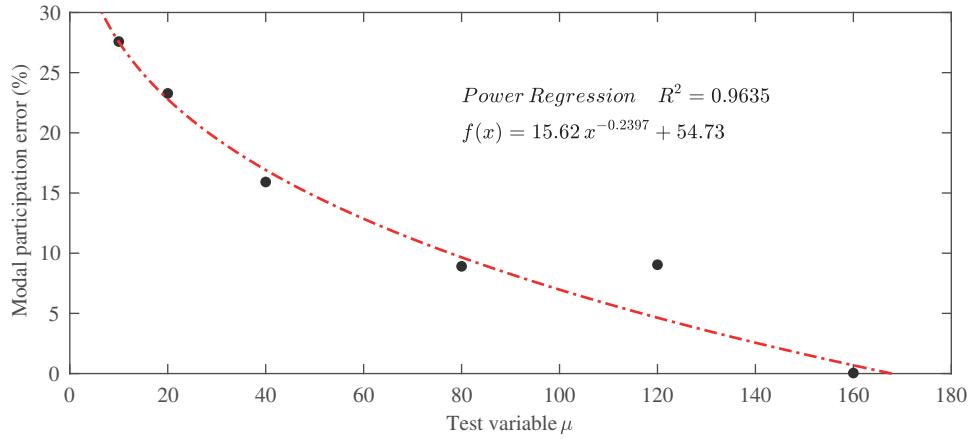


Figure 14. *Relation between relative error in damping ratio and test variable μ*

Where V_i is the considered value and V_e is the exact value, in this case the seventh test. Figure 13 and 14 show the damping ratio and modal participation factor errors versus μ. Thus, as both Figures illustrate the error decreases rapidly in both cases with the increase of μ. A value that seems to have a good efficiency is 160 s/Hz this value corresponds to a T_f of 800 seconds. Figure 11 illustrates that the transfer functions tends to the exact curve, the curve with a T_f of 800 seconds is almost the same as the exact.

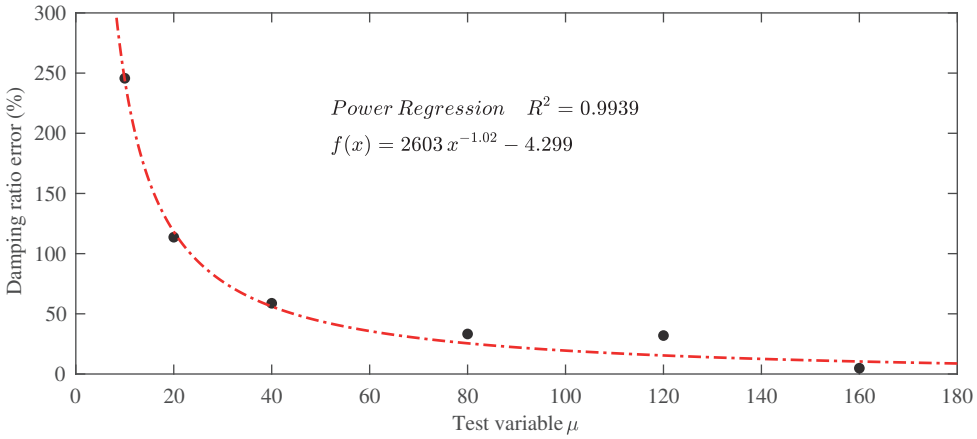


Figure 15. *Relation between relative error in modal participation and test variable μ*

The performance of μ has been tested maintaining the same μ value (160) and the same gain, the frequency range has been changed to 3 *Hz* (4 *Hz* to 7 *Hz*) hence the T_f in this test will be of 480 seconds this represent a save of 320 seconds respect the previous tests. The results obtained and its comparison with the previous and the curve adjustment (replacing in the equations shown on Figure 14 and 15) are displayed in Table 2.

Table 2. *Changes in error maintaining the same μ value*

Relative Error	μ = 160 = 800/5	μ = 160 = 480/3	Curve Adjustment
Modal participation	0,04 %	2,51 %	0,68 %
Damping ratio	4,82 %	12,27 %	10,40 %

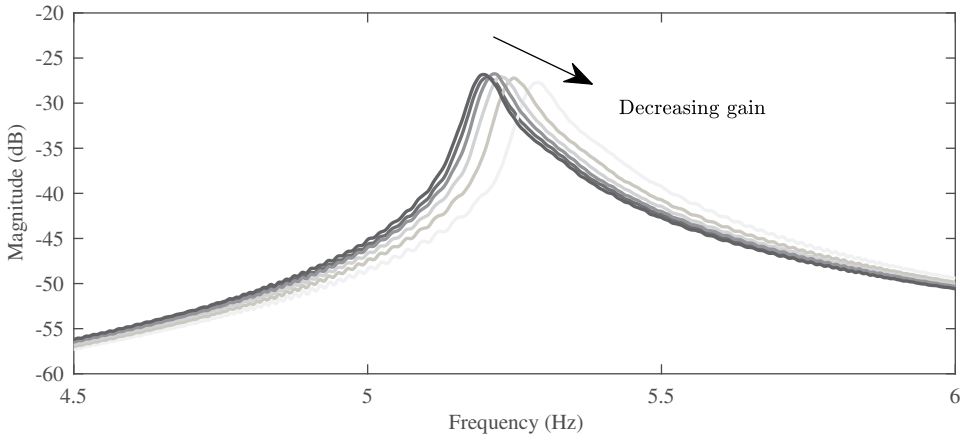


Figure 16. *Transfer functions of the test*

In both variables error has increased, however the performance still significantly better in this new configuration than in the previous with *μ = 120,* modal participation error was equal to 9,04 % and damping ratio error was equal to 31,95 %. This previous test need a time of 600 seconds so we got considerable better results using 120 seconds less. The results also show that curve adjust have a good performance. The frequency in the peak has not changed on a remarkable way.

3.3. Gain effect

The gain allows us to introduce different energy into the system. This variable has an upper limit imposed by the accelerometers saturation, this limit has been experimentally located. Once this limit is known a total of six tests changing the gain have been done, the results of the different transfers functions obtained is shown in Figure 16.

The most remarkable difference is the frequency change, as Figure 16 illustrates the frequency increases when the gain decreases, the peak decreases but in a not so considerable value. The others variables obtained, modal participation and damping ratio, have not been so influenced by the change and their values are in a range of ± 5 % compared with the mean

4. TUNING AND DETUNING

Once the TMD is installed several configurations have been proved until the final, Figure 17 shows that the tuning of the TMD was successful, approaching clearly to the theoretical results with two peaks at the same height [9]. Some of these configurations are displayed in the following figure.

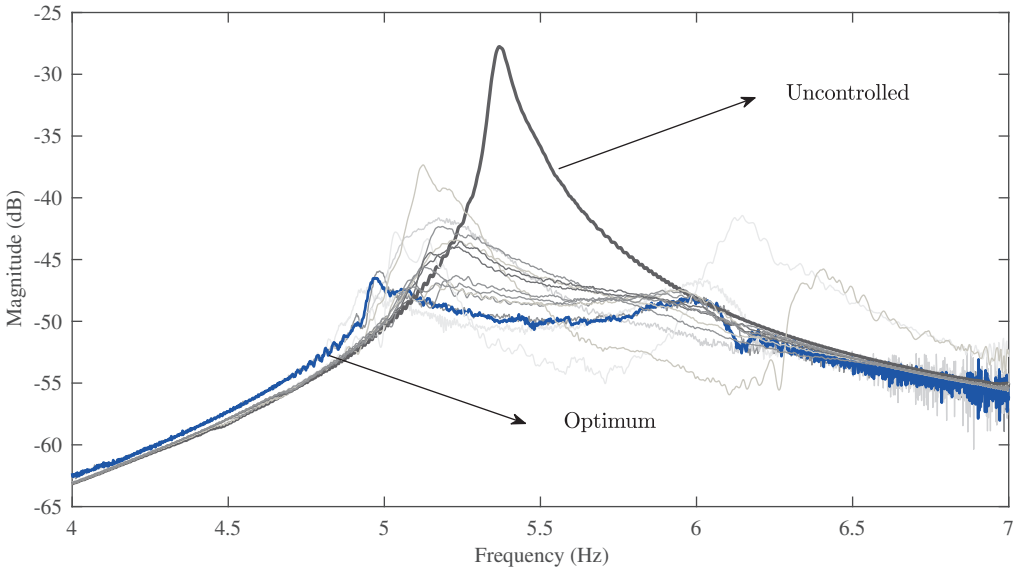


Figure 17. *Magnitude of the transfer function of different configurations. In blue an optimal configuration*

To prove the effects that a change in the structure will produce to the TMD tuning, a second structure configuration has been obtained by changing the support conditions (reducing 60 cm the span of the slab). Figure 18 shows a picture illustrating the structure modification.

Figure 18. *Second configuration with a shorter span*

Thus, the resonance frequency increase however the TMD configuration remain the same. Hence as Figure 19 shows the TMD performance degrades significantly.

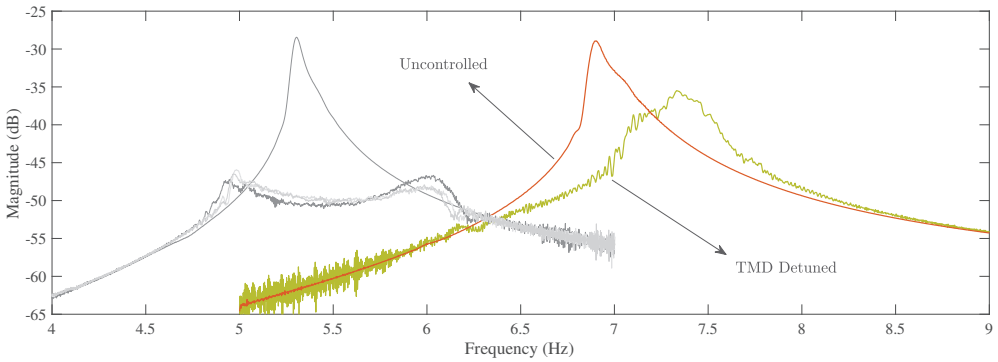


Figure 19. *Effect of detuning*

5. CONCLUSIONS

From the studies carried out throughout the paper, the following conclusions can be drawn:

- The relation between TMD frequency and mass of the device follows a clear power curve, the theoretical relation is not exactly the same as the experimental although it is a good approximation.

- The relation between TMD damping and mass is not so clear however the damping increase with lower mass values.

- The chirp waveform used to evaluate the TMD performance once installed could be optimized in order to save time in future tests.
- The test variable μ might be a good option to obtain a test time when the frequency range is known and vice versa.

- The gain effect is remarkable in its change of the resonance frequency, increasing it when the gain decrease. The other modal parameters are not influenced.

- If the characteristics of the structure change and the TMD has not a way to readjust its performance degrades significantly.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge the financial support provided by Ministry of Economy and Competitiveness (Government of Spain) by funding the Research Project REVES-P (DPI2013-47441). The authors also acknowledge the partial financial support provided by the Research Net VIBRASTRUNET (BIA2015-71942-REDT).

REFERENCES

[1] W. D. Varela and R. C. Battista, “Control of vibrations induced by people walking on large span composite floor decks,” *Eng. Struct.*, vol. 33, no. 9, pp. 2485–2494, 2011.

[2] C. M. Casado, I. M. Díaz, J. De Sebastián, A. V Poncela, and A. Lorenzana, “Implementation of passive and active vibration control on an in - service footbridge,” 2011.

[3] R. Rana and T. T. Soong, “Parametric study and simplified design of tuned mass dampers,” vol.

20, no. 3, pp. 193–204, 1998.

[4] M. S. and R. P. Hector Jensen, “TMDs FOR VIBRATION CONTROL OF SYSTEMS WITH UNCERTAIN PROPERTIES,” vol. 118, no. 12, pp. 3285–3296, 1993.

[5] H. Li and X. N. Ã, “Optimization of non-uniformly distributed multiple tuned mass damper,” vol. 308, pp. 80–97, 2007.

[6] F. Weber, G. Feltrin, and O. Huth, “Guidelines for Structural Control”, 2006.

[7] G. C. Kefu Liu, “OPTIMAL DESIGN OF DAMPED DYNAMIC VIBRATION ABSORBER FOR DAMPED PRIMARY SYSTEMS,” vol. 34, no. 1, pp. 119–135, 2010.

[8] A. T. and N. O., “Closed-form exact solution to H∞ optimization of dynamic vibration absorbers (application to different transfer functions and damping systems),” *ASME J. Vib. Acoust.*, vol. 125, no. 3, pp. 398–405, 2003.

[9] J. P. Den Hartog, “Mechanical vibrations,” vol. 0, 1947.

Slender structures: vibration supression in, by electromagnetic adaptive contacless solution

Hernández Ovidio[1], Vasallo Ali[2], Pereira Emiliano[3] and , Poncela Alfonso V.[1]

ABSTRACT

This paper presents a solution to mitigate vibrations in slencer structrures that does not add energy and that has the ability of adapting itself continuously to the structure. The system has not moving parts and components without contact. These features make it especially interesting because involve almost lack of maintenance.

The system has two signals to adjust frequency and damping of the mass damper (TMD) attached to the structure and initially tuned to the main vibration mode. His control unit, processes the vibration of the structure, and based on it and the corresponding control algorithm, find the levels of the two both signals, in such way that keep the TMD in the optimum working point at all time, regardless the variations in structure parameters. The device can also work unplugged, although losing some performance. When plugged, the proposed system (AEM-TMD) drives the TMD to its optimal performance state.

Keywords: vibrations, semiactive control, TMD, AEM-TMD, control algorithm.

[1] *ITAP, EII,Universidad de Valladolid, (SPAIN) poncela@eii.uva.es. (corresponding author)*
[2] *Centro Tecnológico CARTIF, Boecillo, Valladolid (SPAIN). alivas@catif.es*
[3] *EPS, Universidad de Alcalá de Henares, Madrid (SPAIN), Emiliano.pereira@uah.es*

1. INTRODUCCIÓN

Ciertas estructuras con frecuencias naturales bajas, entre 1 y 10 Hz, pueden ser susceptibles a exhibir respuestas dinámicas significativas debidas al tráfico, al oleaje o al viento, entre otras causas. Una de las soluciones tradicionales para reducir su respuesta dinámica es instalar un TMD (Tuned Mass Damper) convenientemente sintonizado, consistente en una masa móvil unida mediante un resorte y un amortiguador instalado en un lugar apropiado de la estructura. Este dispositivo actuando de forma inercial, modifica el comportamiento de la estructura disminuyendo el factor de ampliación dinámica, aumentando el amortiguamiento, consiguiendo que la respuesta disminuya en más de un 90% para relaciones de masas tan bajas como un 2%. Ahora bien cuando las propiedades de la estructura sobre la que ~~se~~ instalan cambian en el tiempo, el correspondiente TMD, para estar sintonizado, tiene que ir cambiando también. Varias propuestas tratan de mejorar el rendimiento de estos dispositivos en estas situaciones cambiantes (debidas a la ocupación, a factores ambientales, etc.). Algunas soluciones planteadas han sido TMDs con control automático del amortiguamiento mediante fluidos magnetorreológicos. La solución que se plantea en este estudio es un TMD adaptable en frecuencia y en amortiguamiento mediante tensión aplicada a ciertas bobinas convenientemente combinadas con imanes permanentes.
En el presente paper se trabaja sobre un montaje experimental consistente en una viga biapoyada y un TMD central sintonizado al primer modo de flexión. El TMD consiste en un resorte tipo ménsula que sujeta la masa en su extremo libre y que tiene 2 imanes en una posición intermedia. Frente a los imanes se han colocado dos bobinas. Con esta disposición, con la tensión aplicable a las bobinas se puede generar atracción o repulsión, lo cual supone un apoyo extra (sin contacto) en dicha ménsula cuya rigidez va a depender del campo magnético entre bobinas e imanes [2]. La masa del extremo libre es una lámina de aluminio. Para tener cierto control sobre el amortiguamiento se disponen otras dos bobinas más, tipo lapa en esta ocasión. Al aplicar tensión en ellas y haber movimiento relativo entre las partes, se generan corrientes inducidas que provocan disipación de energía proporcional a la velocidad y por tanto amortiguamiento modelable como viscoso.

En este trabajo se va a valorar el rendimiento dinámico de este TMD ajustable. En primer lugar se va a determinar la efectividad ante cambios de la masa de la estructura, llevándolo a situaciones alejadas del sintonizado ideal. En segundo lugar se utilizarán sensores para estimar ciertos parámetros nodales y tras ello aplicar las tensiones que hagan que el TMD pase a estar convenientemente sintonizado.

2. OBJETIVO

El objetivo evidente del presente trabajo es evaluar las prestaciones del TMD ajustable (AEM-TMD), por comparacion con un TMD fijo no ajustable (TMD pasivo).

3. RANGO DE AJUSTE DEL PROTOTIPO DE AEM-TMD

Se parte del montaje descrito en [1], mostrado en la Fig. 5, y modelado simbólicamente en la Fig. 1. El rango de ajuste del amortiguamiento y de frecuencia se la resume en las Figs. 2 y 3. Se parte de un amortiguamiento base de 0.053 (obtenido mediante un imán permanente convenientemente colocado en las proximidades de la placa y destinado asímismo a reducir el consumo de las lapas), y que aplicando tensión a las lapas puede aumentar hasta 0.093 (con respecto al crítico citado). Análogamente con tensión nula en las bobinas se tiene una frecuencia de 3.533 Hz que se puede aumentar hasta 3.788 Hz o disminuir hasta 3.278 Hz

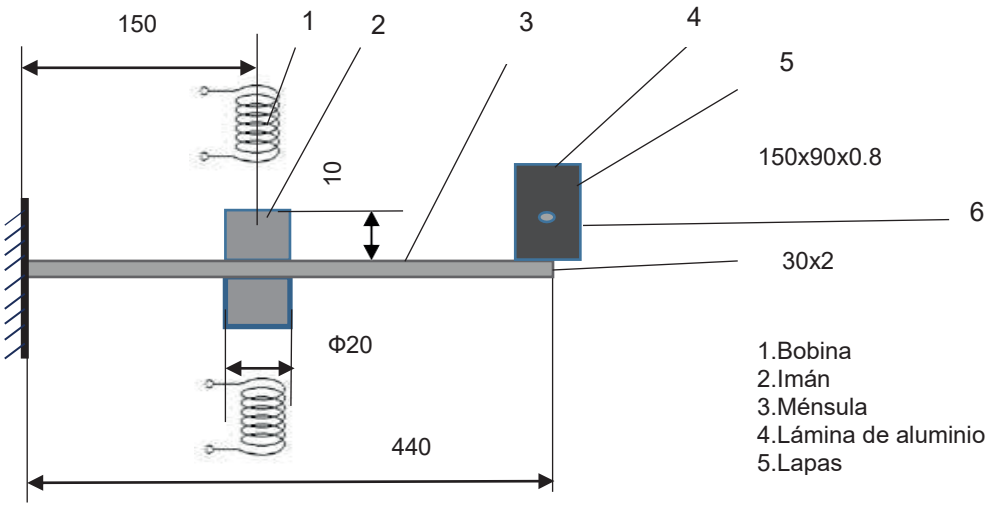


Figura 1. *Modelo del TMD adaptable en frecuencia y amortiguamiento*

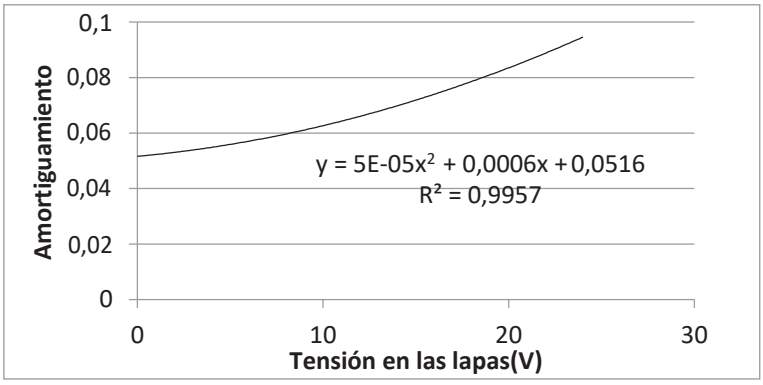


Figura 2. *Relación entre tension en las lapas y el amortiguamiento*

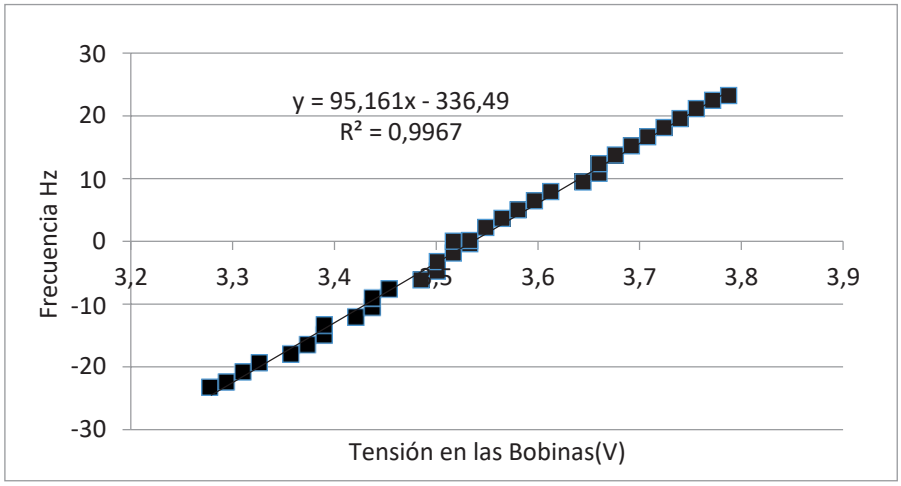


Figura 3.Relación entre la tension en las bobinas y la frecuencia

4. ESTUCTURA CON EL AEM-TMD ENSAMBLADO

En la Fig. 4 se muestra esquemáticamente la viga (perfil de aluminio de 60x60x1.5) de 6 metros de longitud, biapoyada, sobre la que se instala el dispositivo AEM-TMD. La masa de la viga es de 4.80 kg y el prototipo del TMD añade 1.72 kg, correspondiendo la mayor parte al bastidor y a las bobinas. La masa móvil es de tan solo 0.10 kg. Sobre la viga se dispone de un excitador de 0.17 kg. El conjunto tiene una frecuencia de vibración 3.915Hz, correspondiente al primer modo de flexión vertical) y un amortiguamiento de 0.0024. No obstante, para tener cierta maniobrabilidad y poder evaluar las prestaciones del TMD ajustable, se acoplarán en la parte central hasta un total de 6 módulos (T) de masa 0.329kg cada uno de tal manera que con todos ellos (los seis) la frecuencia baja hasta los 3.262Hz. El conjunto se completa con un acelerómetro tipo MEMS.

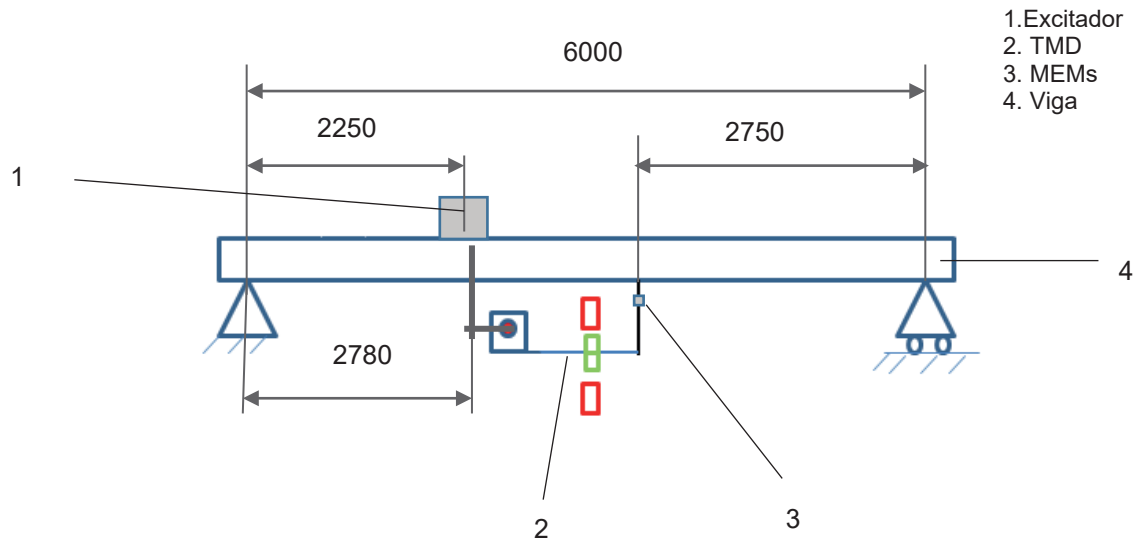


Figura 4. *Dimensiones de la maqueta experimental (ME)*

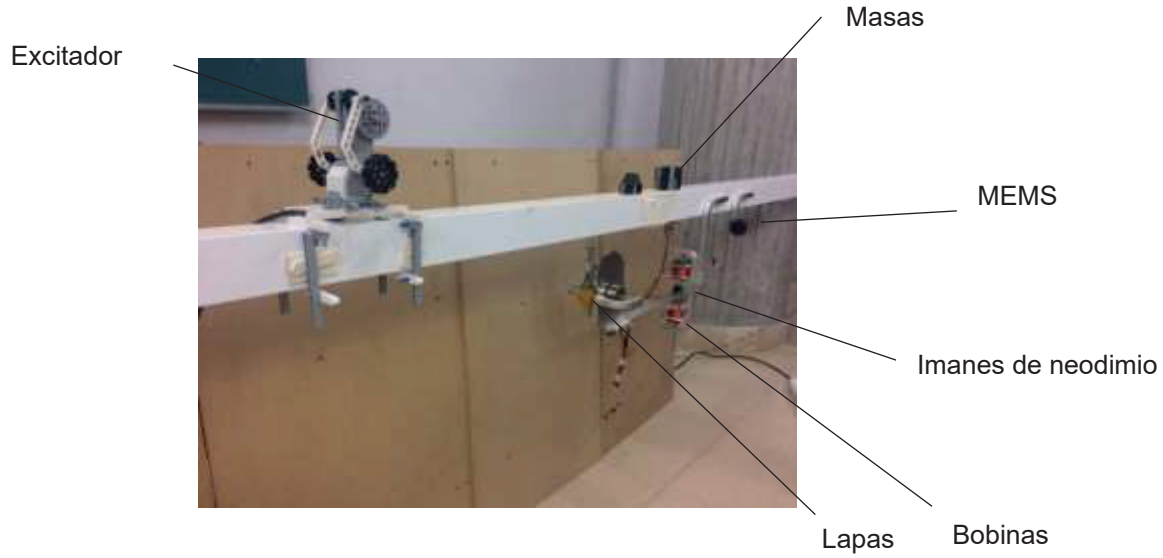


Figura 5. *Montaje completo viga y AEM-TMD (incluye excitador)*

5. RESPUESTA DE LOS DIFERENTES ESCENARIOS SIN AJUSTE (TMD pasivo)

Sobre el montaje descrito se realizan varios experimentos consistentes en llevar a resonancia al sistema. Se toma como referencia la estructura con tres módulos de masa (3T) y se fija el TMD (ajustando manualmente la longitud de la ménsula y la cercanía del imán a la placa de aluminio) de manera que sin aplicación de ninguna tensión en las bobinas se consiga un buen sintonizado. Las correspondientes funciones de respuesta en frecuencia (FRF) se muestran en la figura 6: en rojo sin TMD (realmente TMD bloqueado), en azul con TMD. Por motivos de facilidad experimental, en vez de desinstalar el TMD se procede bloquear la masa móvil disponiendo una cuña entre la placa de aluminio y las lapas. Estas FRF se obtienen del correspondiente modelo numérico calibrado. Nótese que el pico con el TMD bloqueado (3.545 Hz, 51.81 m/s2/N) se desdobla en dos con frecuencias de 3.34 y 3.75Hz y amplificaciones de 1.601 m/s2/N, lo que supone una disminución de la respuesta en aceleraciones de un 96.9% y correcto sintonizado.

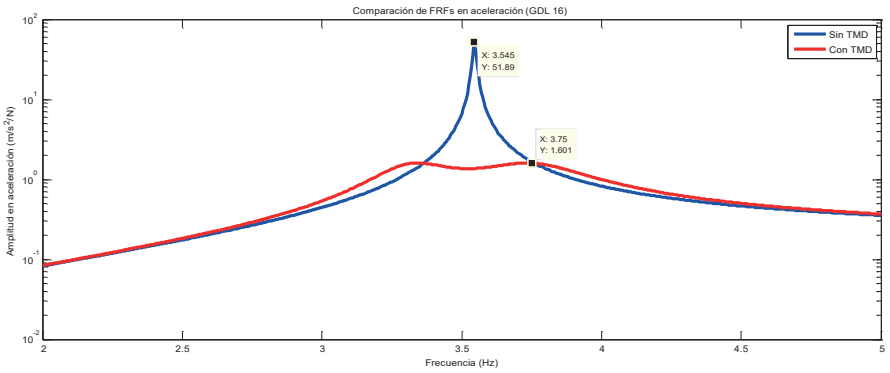


Figura 6. *FRF con el TMD bloqueado y con el TMD sintonizado*

En este escenario se hace girar al excitador a 3.5 Hz (frecuencia muy próxima a la del modo original). La Fig. 7 muestra la respuesta temporal en aceleraciones en ambos casos (TMD bloqueado y libre), apreciándose que se consigue una disminución considerable (en torno al 94%) lo que demuestra el que sintonizado es bueno. En nuestros casos, en las respuestas temporales se consiguen menores reducciones por no excitar justo a las frecuencias teóricas y por efectos transitorios.

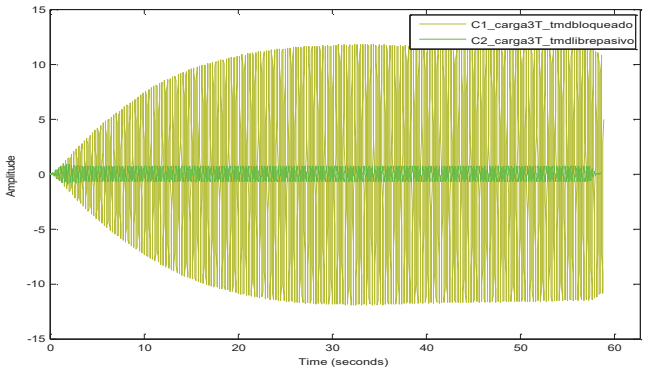


Figura 7. *RT(Respuesta temporal) de la estructura de referencia con TMD y si TMD de la ME(Maqueta experimental)*

A partir de este escenario de referencia, (viga con 3T), se presentan seguidamente dos escenarios de rango de control mínimo y máximo del AEM-TMD: Cmin 381 gramos de masa sobre la viga; y Cmax 1754 gramos de masa sobre la viga. En ambos no se modifica el TMD ajustado para el escenario de referrencia (3T). En la fig.8 pueden verse (caso escenario Cmin 381 gramos de masa), curvas FRF para los casos considerados (TMD bloqueado y TMD libre modo pasivo). Se aprecia cómo el TMD ahora no está sintonizado. No obstante la disminución del factor de amplificación es del 95% .

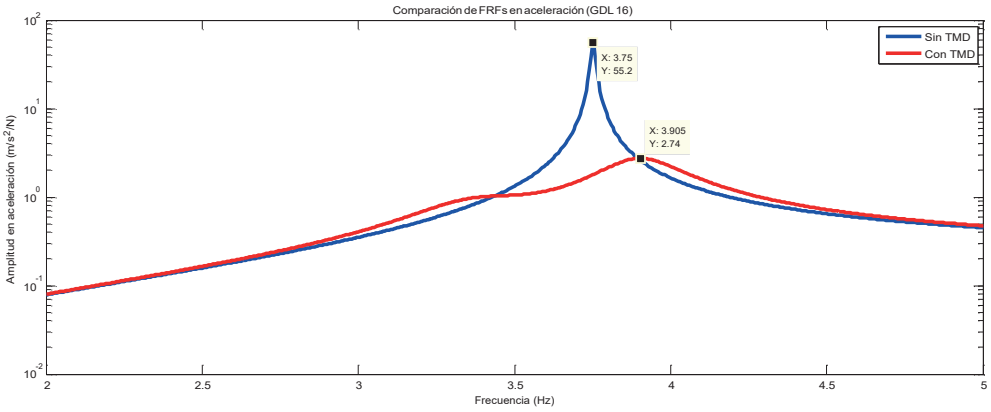


Figura 8. *Escenario Cmin: FRF sin TMD y con TMD*

En ambos casos se activa el excitador a la frecuencia 3.7Hz (próxima a la del modo 1 en este escenario Cmin). En las Fig.9 Fig.10 se muestran las correspondientes respuestas temporales (RT), consiguiéndose disminuciones del 90% en las aceleraciones experimentadas.

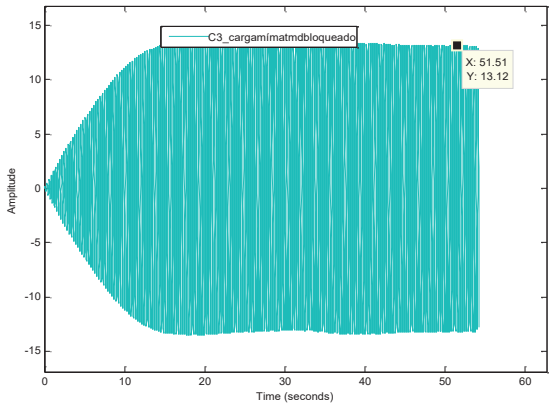


Figura 9. *RT para el escenario Cmin con el TMD bloqueado (ME)*

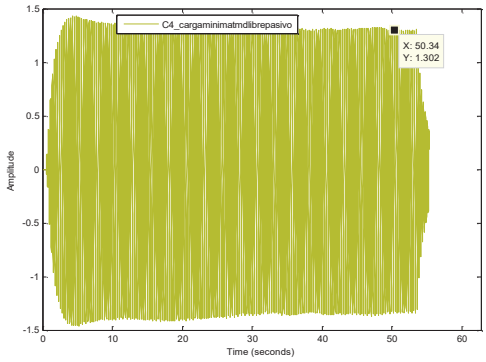


Figura 10. *RT para el escenario Cmin con el TMD pasivo (ME)*

De manera análoga se muestra en la Fig. 11 la FRF para el escenario Cmax. Ahora la frecuencia baja hasta 3.32Hz y de nuevo el TMD deja de estar sintonizado. Aun así, la reducción sigue siendo muy significativa (93.4%). Las Fig. 12 y 13 muestran la respuesta temporal con el exitador girando a 3.3 Hz y tras su comparación se observan mejoras del 86.85%.

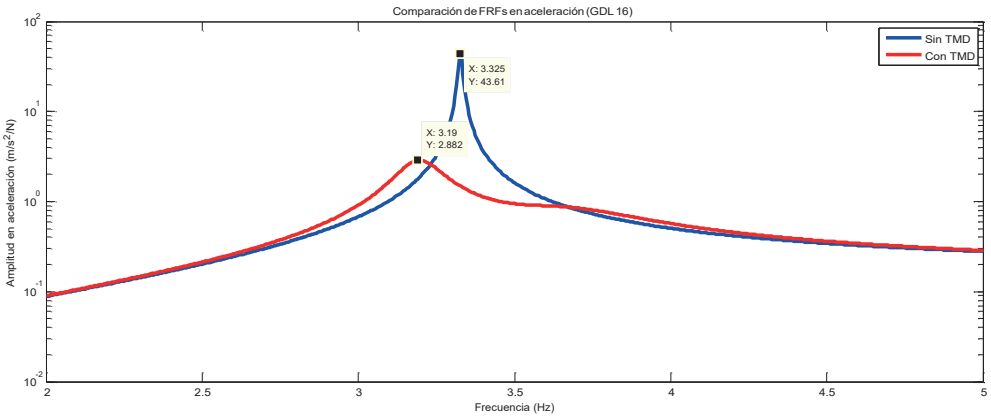


Figura 11. *Escenario Cmax: FRF sin TMD y con TMD pasivo*

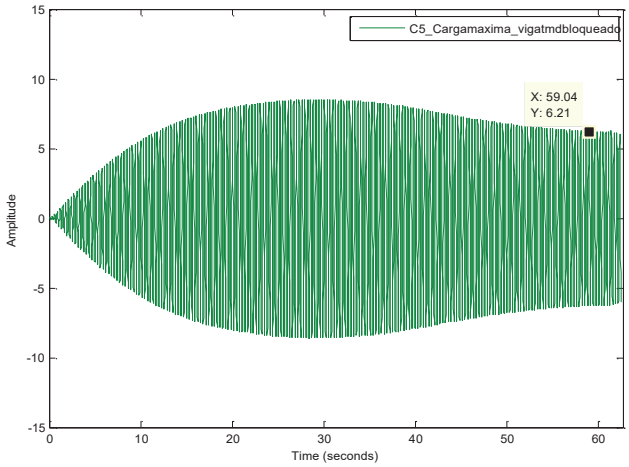


Figura 12. *RT para escenario Cmax con el TMD bloqueado (ME)*

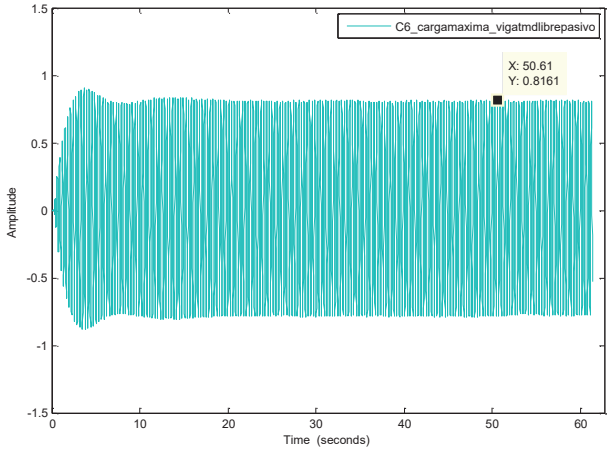


Figura 13. *RT para el escenario Cmax con el TMDpasivo(ME)*

6. PROCEDIMIENTO DE AJUSTE (Diagrama de flujo)

El sistema permite trabajar en modo manual o automático e incluso detenerse (modo pasivo). Los ajustes se llevan a cabo suministrando tensión a las bobinas (VB) y a las lapas (VL), en función de la frecuencia y amortiguamiento que se quiera conseguir dentro del rango disponible. El sistema automático usa como entrada el registro del acelerómetro. Dicho registro se procesa (filtrado, eliminación de valores medios y tendencias, etc.) para deducir la frecuencia del movimiento mediante un conteo de 10 pasos por cero y la evaluación de la media móvil. Por distintas razones se han descartado cálculos basados en FFTs. Estimada la frecuencia de esta manera, se decide si inyectar tensión a las bobinas y lapas para llevar el ajuste al punto óptimo de sintonizado. Dicho punto está tabulado (tanto en frecuencia de sintonizado como en amortiguamiento) para cada frecuencia estimada de la estructura. Nótese que el cambio en la frecuencia viene definido por el número de masas dispuestas sobre la viga y que para cada caso se puede sintonizar el TMD teórico del mismo modo que se ha presentado en la Fig. 6, haciendo que los valores máximos correspondiente al desdoble de la FRF sean mínimos. En la Fig. 14 se presenta el correspondiente diagrama de flujo del esquema de control implementado.

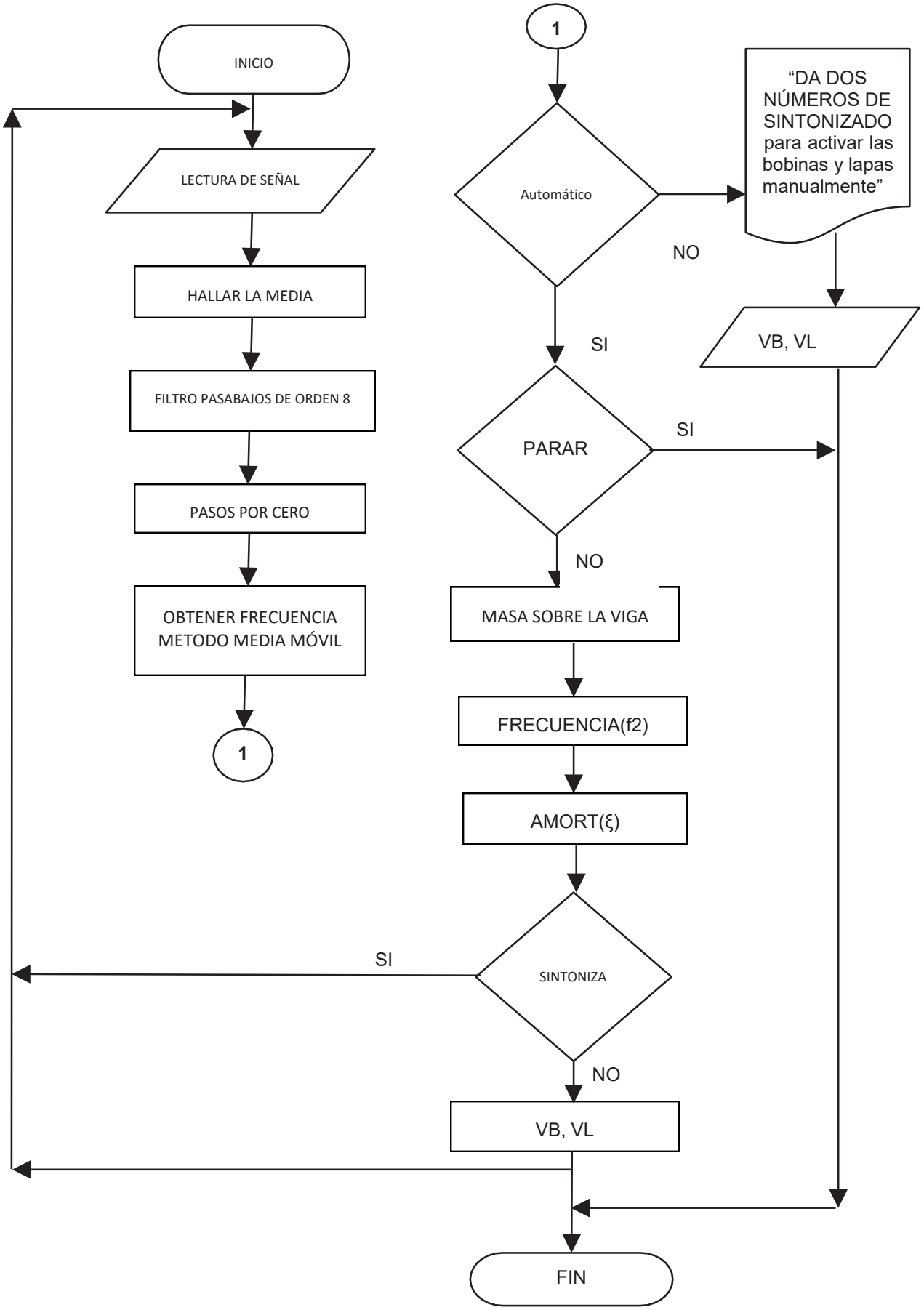


Figura 14. *Diagrama de flujo del algoritmo de control del sintonizado de bobinas y lapas*

7. PRUEBA PARA LOS ESCENARIOS Cmax(1754gramos) y Cmin(381.6gramos)

7.1 Ajuste automatico de 3T a Cmin

El primer ensayo a realizar consiste en dejar que el sistema de control ajuste automáticamente el TMD para llevarlo al punto óptimo correspondiente. Partiendo del caso 3T se pasa al Cmin quitando masas de la viga. Durante el ensayo se mantiene inicialmente el excitador girando a 3.5Hz y tras 28s en 3T se pasa a Cmin (modificando la frecuencia a 3.7Hz). En la Fig. 15 se muestra como en Cmin, ajustando tensiones en bobinas y lapas, se puede pasar de la curva en rojo (no sintonizada) a la curva en azul (sintonizada). La Fig. 16 muestra el registro temporal correspondiente al caso con el TMD bloqueado y la Fig. 17 cuando se activa el TMD. Nótese como en torno al segundo 37 el control ajusta el TMD y se reduce la respuesta con respecto a aquella registrada en torno al segundo 34.

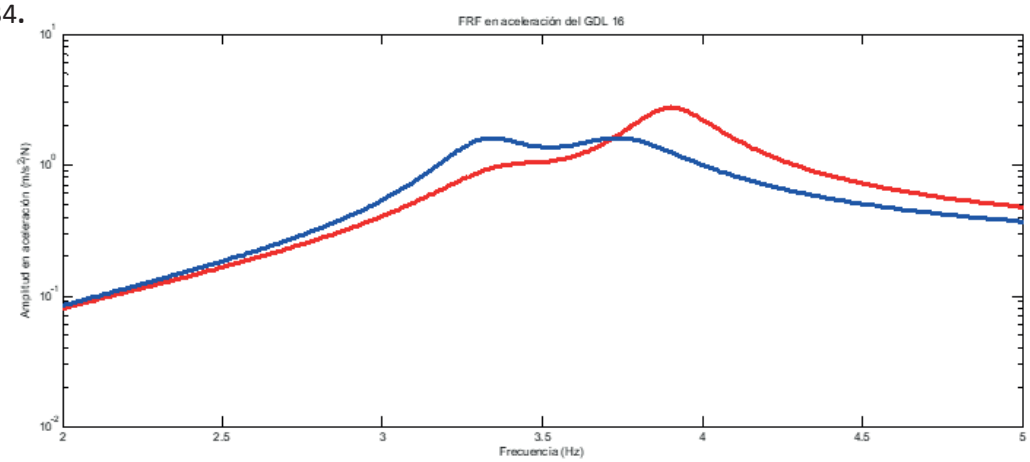


Figura 15. *Sintonizado del TMD para el escenario Cmin*

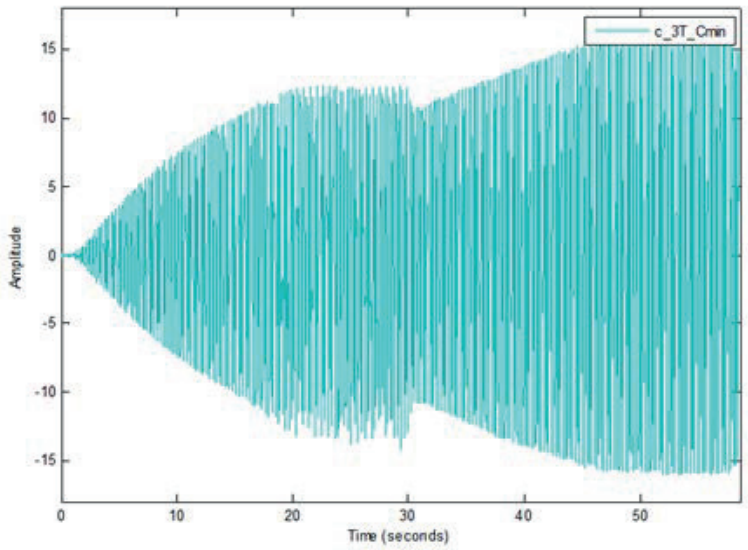


Figura 16.Respueta temporal con el cambio 3T a Cmin y TMD bloqueado

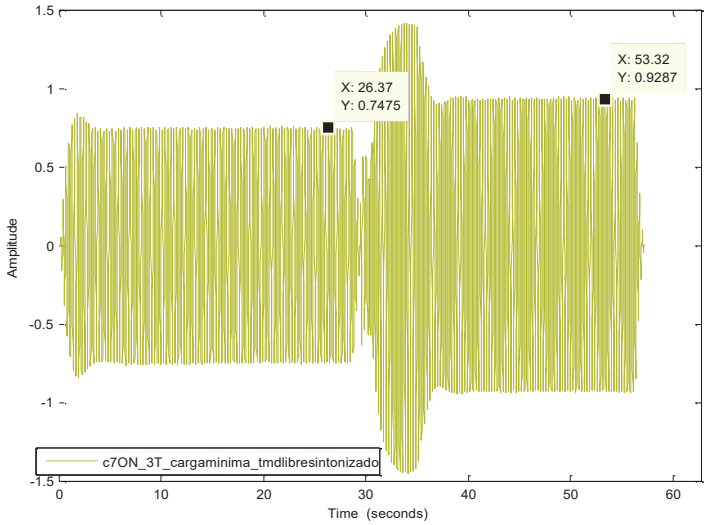


Figura 17. *Respuesta temporal con cambio 3T a Cmin y TMD automático*

7.2 Ajuste automatico de 3T a Cmax

En el segundo ensayo se procede de forma similar pero ahora se provoca un tránsito del escenario 3T al Cmax. En este caso, en la Fig.18 se ve como el sistema lleva la curva roja (desintonizada) a la azul (sintonizada). Las correspondientes respuestas temporales se muestran en las figuras 19 y 20 (para los casos con el TMD pasivo y TMD automático, respectivamente).

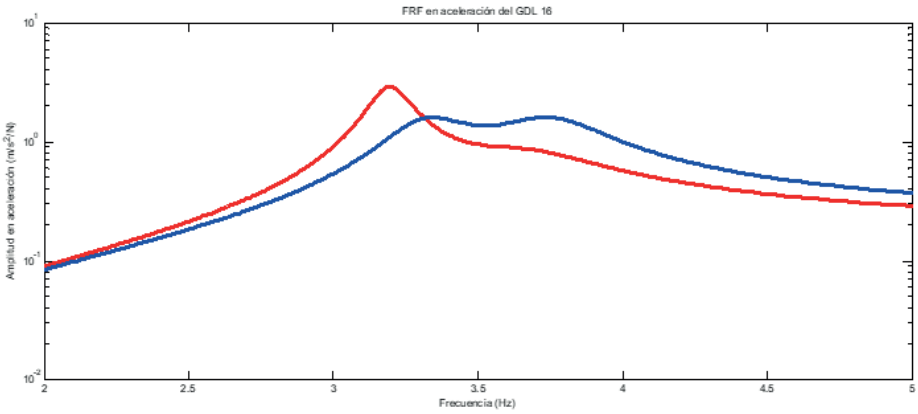


Figura 18. Sintonizado del TMD para el escenario 3T a Cmax

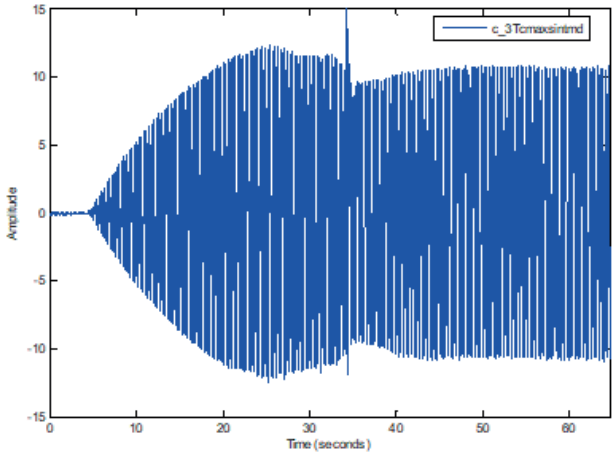


Figura 19. *Respuesta temporal con el cambio 3T a Cmax y TMD bloqueado*

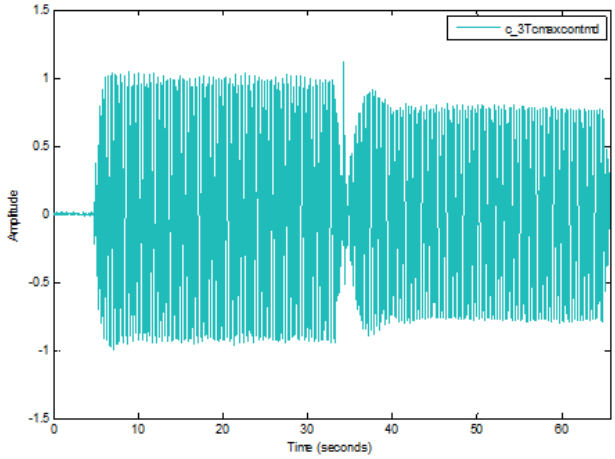


Figura 20. *Respuesta temporal con el cambio 3T a Cmax y TMD* automático

8. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos se muestran en la *Tabla 1.* Se incluyen los valores de los picos de las FRFs en cada caso, los porcentajes de reducción, así como las aceleraciones estacionarias. En el escenario 3T con el conjunto sintonizado la reducción es del 96.9% (FRF). Si desde el escenario 3T se pasa al Cmin, sin realizar ajustes, se tiene que el porcentaje de reducción baja al 94.98%, y tras el ajuste automático aumenta al 96.91%. Tenemos por tanto una mejora 1.93 puntos porcentuales.

Si desde el escenario 3T se pasa al Cmax, sin realizar ajustes, se tiene que el porcentaje de reducción baja al 93.37 %, y tras el ajuste automático aumenta al 96.54%. Tenemos por tanto una mejora 3.17 puntos porcentuales, habiendo variado la frecuencia de oscilación de 3.54Hz a 3.19Hz.

En la respuesta temporal para el caso 3T a Cmin, la reducción sin sintonizado se queda en 90.07%, y tras el ajuste automático aumenta a 92.63%. Se consigue una mejora de 2.80 puntos porcentuales.

En la respuesta temporal para el caso 3T a Cmax, la reducción sin sintonizado se queda en 86.85%, y tras el ajuste automático aumenta a 89.65%. Se consigue una mejora de 2.80 puntos porcentuales.

Tabla 1. Resumen de resultados comparativos en los 3 escenarios

		FRF		Respuesta
		AMP(resp)	Frecuencia	Temporal
EST 3T (0.987 kg)	SIN TMD	51.89 $m/s^2/N$	3.545 Hz	11.41 m/s^2
	CON TMD pasivo	1.601 $m/s^2/N$	3.34/3.75 Hz	0.691 m/s^2
% VARIACIÓN		96.9%		93.9%
Cmin (0.381 kg)	SIN TMD	55.2 $m/s^2/N$	3.75 Hz	13.12 m/s^2
	CON TMD pasivo	2.74 $m/s^2/N$	3.905 Hz	1.302 m/s^2
	CON AEM-TMD	1.703 $m/s^2/N$	3.52/3.965 Hz	0.9297 m/s^2
% VARIACIÓN	Pas vs AEM-TMD	95.03% a 96.91%		90.07% a 92.9%
Cmax (1.754 kg)	SIN TMD	43.61 $m/s^2/N$	3.325 Hz	6.21 m/s^2
	CON TMD pasivo	2.88 $m/s^2/N$	3.19 Hz	0.816 m/s^2
	CON AEM-TMD	1.505 $m/s^2/N$	3.155/3.485 Hz	0.6427 m/s^2
% VARIACIÓN	Pas vs AEM-TMD	93.39% a 96.54%		86.85% a 89.65%

Como conclusión final se tiene que el poder ajustar el sistema de forma automática permite recuperar los altos niveles de eficiencia iniciales del TMD. La mejora conseguida con el prototipo y sistema usados en laboratorio oscila entre dos y tres puntos porcentuales, conseguidos por resintonizar el sistema automáticamente, y que se perderían al producirse cambios en el sistema respecto del usado como referencia con TMD pasivo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación parcial del Ministerio de Economía y Competitividad a través de los proyectos BIA2014-59321 y BIA2015-71942-REDT

REFERENCIAS

[1] O. Hernández Gómez. A. Poncela Méndez. P. López and N. Ibán. "Adaptación de frecuencia y amortiguamiento de un Tmd. mediante soluciones magnéticas". Madrid. 2017

[2] Magdaleno González, Á., Cacho Pérez, M., Ibán Lorenzana, N., Hernández Gómez, O., Poncela Méndez, A. and Lorenzana Ibán, A. (2016). TMD ajustable en frecuencia aportando rigidez positiva o negativa mediante imanes permanentes. Universidad de Elche

[3] Inauguración Millenium Bridge (Londres) https://www.youtube.com/watch?v=eAXVa XWZ8

[4] Housner GW, Bergman LA, Caughey TK, Chassiakos AG, Claus RO, Masri SF, Skelton RE, Soong TT, Spencer, BF, Yao JTP. (1997) Structural control: past, present, and future. Journal of Engineering Mechanics 1997; 123:897–971.

STATISTICAL ANALYSIS OF THE GROUND REACTION FORCES ON VIBRATING PAVEMENTS

García-Terán, José María[1]; García-Diéguez, Marta[2]; Magdaleno, Álvaro[3]; Fraile, Alberto[4]

ABSTRACT

The vibratory effect interaction between a particular moving pavement and the human walking on it is studied using statistical tools. The experimental data has been recorded using the pedar® system (pressure distribution measuring local loads between the foot and the shoe) and trublu® software. The data has been recorded in June 2016 in Valladolid (Spain) in two footbridges where the vibrating effect are remarkable: the Pedro Gómez Bosque (PGB) and the Science Museum (MC) footbridges. As is known, the ground reaction forces (GRF) are influenced by different variables, some associated with the subject (weight, foot size, type of footwear, walking pacing, ...), that have been controlled in this study, and others depending on the environment, such as the slope or the oscillation of the pavement. The analysis demonstrates the influence of vibrating pavement on the duration of the passage and the transmission of forces through the soles of the feet.

Keywords: Vibration, gateways, human actions, statistical process control.

1. INTRODUCCIÓN.

La capacidad para caminar de forma bípeda es extraordinariamente compleja. Durante la marcha actúan todos los órganos del cuerpo de forma coordinada mediante la aplicación de unas habilidades para cuyo desarrollo han sido necesarios miles de años de evolución, que incluyen cambios de tamaño de los huesos de los pies, rodillas, cadera y modificación en la orientación de la columna vertebral.

Esta actividad está influenciada por múltiples variables asociadas al entorno, entre las que se encuentra la capacidad de vibración de la superficie sobre la que se camina. Cualquier persona que lo haya experimentado conoce la sensación de incomodidad generada por la interacción entre la oscilación producida al caminar y la fuerza de contacto en los pies [1, 2].

Un caso paradigmático se produjo en Londres en el año 2000, en el puente peatonal del Milenio (Fig. 1), diseñado por Foster and Partners. El día de su inauguración, 10 de junio del 2000, fue cruzado simultáneamente por una multitud de personas, lo que produjo importantes vibraciones y motivó que los viandantes caminaran de forma sincronizada. El puente se cerró tres días después de la inauguración, no siendo reabierto hasta febrero de 2002.

[1] *ITAP, EII, Universidad de Valladolid (SPAIN). teran@uva.es* (Corresponding author)
[2] *Dpto. Construction and Manufacturing Engineering, University of Oviedo (SPAIN). garciadmarta@uniovi.es*
[3] *ITAP, EII, Universidad de Valladolid (SPAIN). alvaro.magdaleno@uva.es*
[4] *ETSII, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (SPAIN) afraile@etsii.upm.es*

Figura 1. *Puente del Milenio en Londres* (*Fuente: http: // www.cambridge2000. com*).

Distintos autores [3, 4] han analizado la influencia biomecánica de las variables que influyen en la resultante de fuerzas verticales de la interacción entre la planta del pie y el terreno, conocida como *GRF* (ground reaction forces). El objetivo de este estudio es fijar las variables controlables para definir experimentalmente los patrones de fuerzas *GRF* y fuerzas plantares generadas por un individuo específico al andar. A partir de ellas poder realizar una comparación con las fuerzas equivalentes producidas por la modificación de alguna variable de la marcha, centrándose en el caso de marcha sobre una superficie vibratoria.

2. AQUISICIÓN DE DATOS.

2.1. Instrumentación.

La fiabilidad de los instrumentos para la obtención de datos experimentales es fundamental. Existen distintos métodos de captación de los efectos generados durante la marcha. Se basan tanto en la medida de las fuerzas generadas en el terreno (mediante plataformas dinamométricas con sensores extensométricos o piezoelétricos), de los impactos (mediante acelerómetros que, en función de la tecnología utilizada, pueden ser piezoeléctricos, galgas extensométricas, laser, térmico o capacitivo) o de las presiones plantares (mediante obtención de registros estáticos o dinámicos usando mantas de presión o plantillas estáticas o dinámicas). El uso de plantillas elimina problemas de targeting generados por las plataformas, debido a la modificación de la longitud de paso para hacer coincidir el pie con su localización.

Para la obtención de los registros de este trabajo se han usado plantillas dinámicas instrumentalizadas [5] con 99 captadores piezoeléctricos por pie que obtienen la presión (en *kPa*) realizada cada centésima de segundo en la interfase pie-plantilla-calzado, utilizando para la transferencia de la información el sistema telemétrico pedar® (Fig. 2) y para la calibración de los captadores el método trublu® mediante presión de aire de magnitud conocida.

Figura 2. *Sistema telemétrico pedar-insole-shoe* (*Fuente: http://www.novelusa.com*).

2.2. Localización.

El trabajo de campo fue realizado en junio de 2016 en Valladolid (España) en la que se obtuvieron muestras de marcha sobre una superficie dura y fija, que se utilizarán para la obtención de los patrones. La obtención de datos en superficies vibrantes se realizó en dos estructuras singulares: las pasarelas peatonales Pedro Gómez Bosque (*PGB*) diseñada por Carlos Fernández Casado; y Museo de la Ciencia (*MC*) diseñada por Rafael Moneo y Enrique de Teresa (Fig. 3), ambas sobre el río Pisuerga.

Figura 3. *Pasarelas* (*Fuente: valladolidmonumental.blogspot.com.es*).

La pasarela *PGB*, inaugurada el 14 de marzo de 2011, es una estructura colgada a tracción formada por una banda tesa (spand band), con geometría de catenaria de *30 mm* de espesor, *3,6 m* de anchura y *86 m* de luz (dimensión que estableció un record mundial para este tipo de pasarelas), con una longitud total de *100 m* que salva un desnivel de *3 m* entre las márgenes.

La pasarela *MC*, inaugurada el 28 de julio de 2004, tiene una longitud total de *234 m* dividida en cuatro tramos. El primero es de hormigón armado y se integra en el edificio del Museo con el que comparte cimentación, mientras que los otros tres son de celosía tubular de sección hexagonal.

3. FACTORES DE INFLUENCIA EN LA DISTRIBUCIÓN DE FUERZAS DURANTE LA MARCHA.

Las variables que condicionan las fuerzas transmitidas durante la marcha son múltiples, pudiéndose clasificar en intrínsecas y extrínsecas. Las variables intrínsecas están relacionadas con factores humanos [6] y se pueden dividir en “entre sujetos” asociadas a grupos de personas, entre las que se pueden destacar el peso, estatura, edad, sexo y características anatómicas como movilidad articular o estructura del pie; e “intra-sujeto” asociadas a las personas de forma individual como movilidad, patologías, estado de ánimo, cansancio, alimentación (consumo de bebidas alcohólicas o fármacos) o actividad (profesional, deportiva, lúdica o transporte de objetos).

Las variables extrínsecas están asociadas al entorno [7] y se pueden dividir en instrumentales (aparatos de medición), cinemáticas (marcha normal, marcha nórdica [8], carrera, frecuencia de paso), de vestimenta (calzado, ropa, accesorios), climatológicas (viento, lluvia) y de superficie (dureza, pendiente, vibración).

3.1. La marcha.

Existe un amplio conocimiento científico del análisis de la marcha. Autores como Hessert (2005) dividen la anatomía del pie en distintas zonas plantares. En la Fig. 4 se muestra la distribución de las zonas del pie: dedos (*D*), metatarsos (*MT*), mediopie (*MP*) y talón (*T*), y su relación con los receptores de las plantillas.

El proceso de marcha se divide en distintas fases y sub fases donde el primer nivel de análisis es el ciclo (Fig. 5) entendido como las acciones que se suceden entre los sucesivos contactos del talón de un pie con el suelo. Autores como Perry [9] clasifican las acciones realizadas por cada pierna durante el ciclo de marcha en dos fases:

- Apoyo: Se caracteriza por el contacto del pie con el suelo. Comienza con el impacto del talón y finaliza con el despegue de los dedos.
- Oscilación: Se produce cuando el pie se desplaza por el aire. Comienza con el despegue de los dedos y metatarsos y finaliza con el contacto del talón.

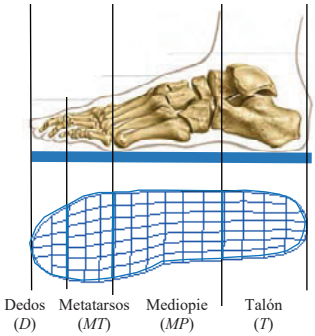


Figura 4. *División en zonas de la planta del pie* (*Fuente: Modificado de Hessert*).

En función de la sustentación el ciclo se puede dividir en cuatro intervalos: dos bipodales, en los que los dos pies están en contacto con el suelo; y dos monopodales, en los que solo existe contacto con un pie. El ciclo se divide a su vez en subfases (Fig. 5):

- Apoyo inicial (*AI*). Desde el contacto inicial (*CI*) hasta que acaba el doble apoyo.
- Apoyo medio (*AM*). Desde el *AI* hasta el despegue del talón (*T*) del suelo.
- Apoyo final (*AF*). Desde el *AM* hasta que los dedos despegan del suelo.
- Preoscilación (*PO*). Desde *AF* hasta que acaba el doble apoyo.
- Oscilación inicial (*OI*). Desde *PO* hasta que alcanza a la pierna contraria.
- Oscilación media (*OM*). Desde *OI* hasta que la pierna contraria se posiciona verticalmente.
- Oscilación final (*OF*). Desde *OM* hasta el comienzo del nuevo paso

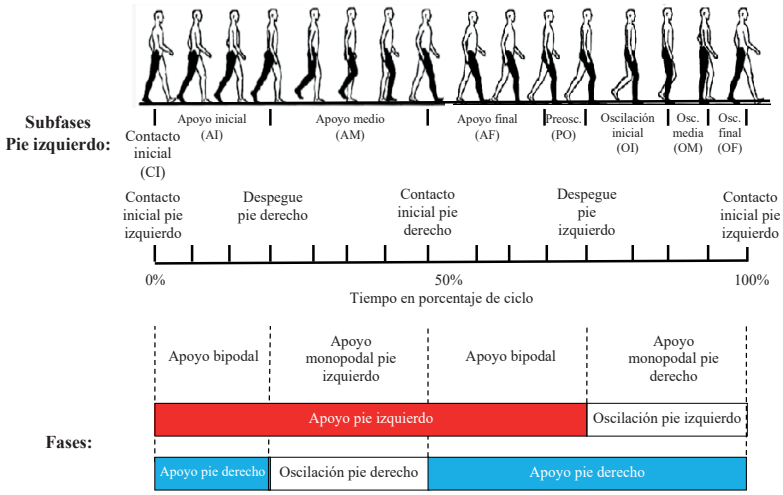


Figura 5. *Fases y subfases del ciclo de marcha* (*Fuente: Modificado de Racic*).

Para caracterizar la marcha se utiliza también el paso (acciones entre el contacto del talón de cada pie) estando un ciclo formado por dos pasos. Cada paso se define mediante su longitud o zancada (distancia recorrida medido en *m*), frecuencia (número de pasos por unidad de tiempo medido en pasos por minuto -*BPM*, bit per minute- o herzios –*Hz*-), periodo (tiempo de un paso medido en centésimas de segundo -*cs*-) y velocidad (distancia recorrida por unidad de tiempo medido en metros por minuto -*m/min*- o kilómetros por hora -*Km/h*-).

4. CARACTERÍSTICAS BIOMECÁNICAS.

Como ya se ha indicado, el objetivo del trabajo es determinar la influencia en las fuerzas que aparecen en la marcha cuando se realiza sobre una superficie oscilante. Para obtener dicha influencia se va a realizar el siguiente plan de trabajo: En la primera fase se recopilan las aportaciones sobre el estudio de la marcha. En la segunda fase se determina el procedimiento a desarrollar para reducir y ajustar las variables de influencia. En la tercera fase se obtienen las distintas muestras biomecánicas. Y en la cuarta y última fase se realiza el tratamiento de la información recopilada para definir los patrones de fuerza de un sujeto específico, y analizar los resultados obtenidos, comparando los correspondientes a las superficies vibrantes con dichos patrones.

Para reducir las variables intrínsecas se monitoriza a una única persona (varón de *35* años, *1,77 m* de altura y *666 N* de peso), perfecto conocedor de la instrumentación a utilizar. Las variables extrínsecas se reducen tomando las muestras en un intervalo de tiempo corto (se fijan la vestimenta –calzado deportivo- y variables climatológicas), utilizando un único instrumento de medida, y realizando un análisis independiente para cada pasarela (se fijan las variables de superficie).

Los patrones de marcha se obtuvieron mediante siete muestras (identificadas de *1* a *7*). Las seis primeras con distintas frecuencias inducidas mediante un metrónomo, y la última con libertad de marcha. El muestreo en las pasarelas se realizó con libertad de marcha para facilitar su adaptación a la pendiente. Además, las muestras sobre las pasarelas se realizaron sin y con vibración inducida.

El estudio se realiza individualizando los valores para cada paso (*i*), muestra (*j*) y pie (izquierdo y derecho), utilizando un código de color para su identificación (rojo - pie izquierdo, azul - pie derecho).

Los resultados de las muestras se van a analizar con distintos niveles: a nivel de parámetros característicos (θ) se definen y determinan sus magnitudes (θ_{ij}) para cada GRF_{ij} independiente [10, 11, 12] y se generan los patrones correspondientes; a nivel de *GRF* se determina un patrón localizando los GRF_{ij} en sus centros de fuerzas (G_{ij}); a nivel plantar se determinan las fuerzas de cada captador, se agrupan en las distintas zonas plantares, y se generan los patrones resultantes de cada zona.

En todos los niveles del análisis los patrones se definen mediante su tendencia central y desviación, con los que se obtienen los límites de referencia que permitan determinar si el comportamiento de algún parámetro del sistema, que como se comprobará inicialmente sigue una distribución normal específica, influido por la modificación de alguna variable mantiene o modifica ese comportamiento.

4.1. *GRF* y fuerzas en las zonas plantares.

A partir del principio de acción y reacción, cuando una persona camina se generan fuerzas recíprocas entre el pie y el terreno, de forma que al andar el pie ejerce sobre el suelo una fuerza igual y de sentido contrario a la que ejerce el suelo. A estas fuerzas de reacción del suelo se las denomina con el acrónimo en inglés *GRF* (ground reaction forces).

Han sido diversos los estudios realizados para obtener un patrón de los *GRF* [13] con el objetivo de poder aplicarlos a cualquier individuo. Debido a la influencia de las múltiples variables que afectan a la marcha los patrones obtenidos son genéricos y no incluyen variables del entorno.

En los muestreos utilizados en este trabajo para la obtención de los patrones, tanto la pendiente como la vibración del terreno son nulas, por lo que la única variable influyente es la frecuencia de marcha. Aunque esta ha estado marcada con un metrónomo en las seis primeras muestras, en cada paso tiene

una magnitud distinta. Las medias ($\overline{y_{f,j}}$) y desviaciones estándar ($s_{n\text{-}1,j,f}$) de las frecuencias (en *BPM*) de los pasos de cada muestra aparecen reflejadas en la *Tabla 2*.

Tabla 2. Media y desviación estándar de las frecuencias de los pasos de cada muestra.

	Muestra (j)						
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
$\overline{y_{f,j}}$ **(BPM)**	*94,0*	*88,4*	*86,3*	*68,4*	*99,3*	*100,7*	*75,1*
$s_{n\text{-}1,f,j}$ **(BPM)**	*2,53*	*3,27*	*3,16*	*4,47*	*2,00*	*2,11*	*6,19*

A partir de los datos de los captadores se determinaron los GRF_{ij}, a las que se aplicó un procedimiento para la eliminación de las incidencias en los registros de presión, identificando y aislando posteriormente los pasos de cada muestra (Fig. 6).

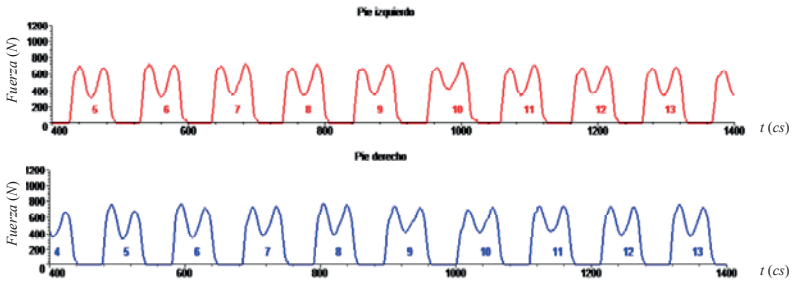


Figura 6. GRF_{i3} (*Fuente: Propia del autor*).

Se definen una serie de parámetros (θ_{ij}) que permiten caracterizar cada GRF_{ij}, como son (Fig. 7):

- Duración (t_{ij})
- Área o impulso total (A_{ij}).
- Área desde el comienzo del GRF_{ij} hasta el primer pico singular ($P1_{ij}$) o impulso de frenada (IF_{ij}).
- Área desde el segundo pico singular ($P2_{ij}$) hasta el final del GRF_{ij} o impulso de impulsión (II_{ij}).
- Localización ($t_{G,ij}$) y fuerza ($F_{G,ij}$) del centro de fuerzas (G_{ij}) del área o impulso total.
- Fuerza de impacto del talón ($F_{IT,ij}$).
- Localización ($t_{P1,ij}$) y fuerza máxima en el apoyo ($F_{P1,ij}$) en el instante ($P1_{ij}$).
- Localización ($t_{P2,ij}$) y fuerza máxima en el despegue ($F_{P2,ij}$) en el instante ($P2_{ij}$).
- Intervalo de tiempo entre fuerzas máximas ($t_{P2,ij}$ -$t_{P1,ij}$) y diferencia de dichas fuerzas ($F_{P2,ij}$-$F_{P1,ij}$).
- Localización ($t_{V,ij}$) y fuerza mínima ($F_{V,ij}$) en el valle (V_{ij}).

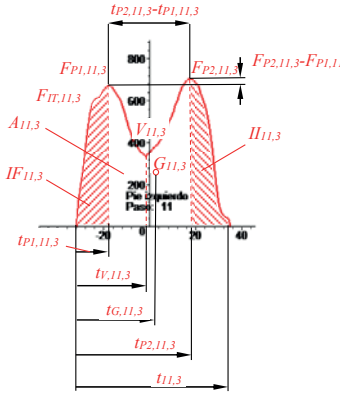


Figura 7. *Parámetros característicos ($\theta_{11,3}$) de la $GRF_{11,3}$ (Fuente: Propia del autor).*

Entre los parámetros característicos existen algunos singulares como son las fuerzas en el primer pico F_{P1}, el segundo pico F_{P2} y el valle entre picos F_V. En la Fig. 8 se representa la $GRF_{5,3}$ del pie izquierdo en la que se indican las fuerzas e instantes en los que aparecen los parámetros singulares $F_{P1,5,3}$, $F_{V,5,3}$, $F_{P2,5,3}$. Además se añaden los instantes *IT* (impacto del talón) e *IFD* (igualdad de fuerzas de los pies en el despegue). Se muestran también las fuerzas de cada zona de las plantillas en dichos puntos obtenidas a partir de las presiones plantares de los sensores.

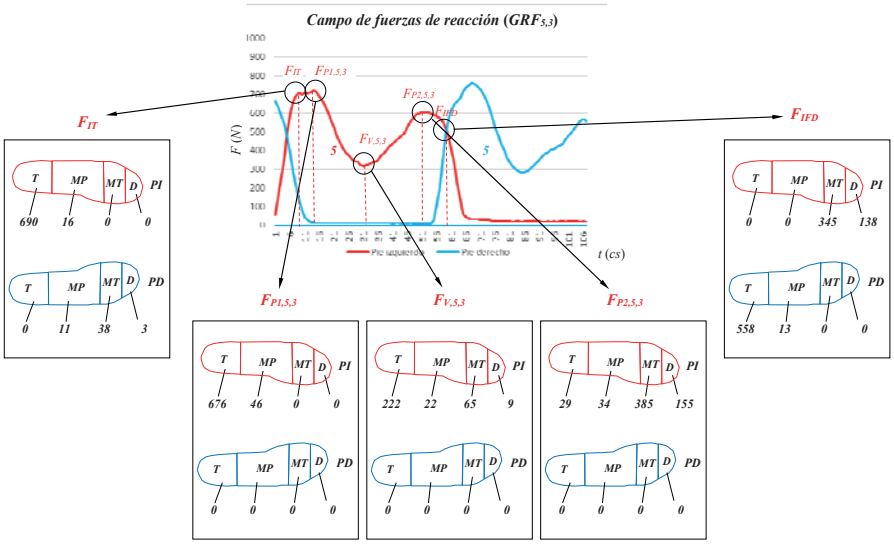


Figura 8. *$GRF_{5,3}$ de ambos pies. Fuerzas en las zonas plantares* (*Fuente: Propia del autor*).

En la Fig. 9 izquierda se representan la $GRF_{5,3}$ del pie izquierdo (*GRF, PI*) y las correspondientes fuerzas en las zonas plantares localizando los puntos singulares. A su derecha la $GRF_{5,3}$ sobre su baricentro con posición variable en el tiempo respecto de los sensores de la planta del pie y la velocidad de variación de dicho baricentro. Se comprueba que en las zonas plantares en las que aparecen mayores fuerzas (F_{P1} y F_{P2}) las velocidades del baricentro son bajas, mientras que en el mediopie donde las fuerzas son inferiores (F_V) las velocidades son más elevadas.

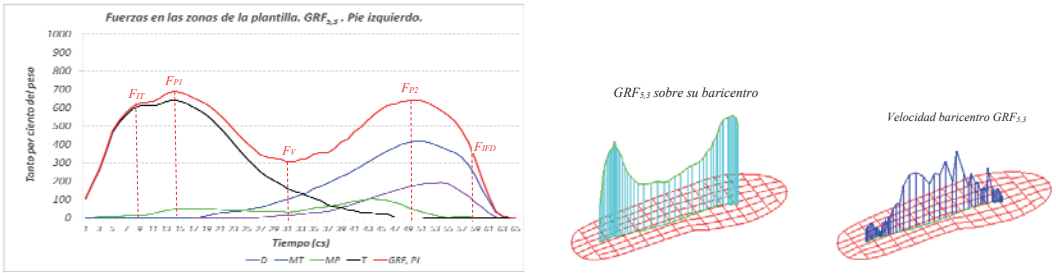


Figura 9. *$GRF_{5,3}$, fuerzas en las zonas plantares. $GRF_{5,3}$ sobre su baricentro y velocidad del baricentro. Pie izquierdo.* (*Fuente: Propia del autor*).

Se comprueba también que son las zonas del talón y metatarsos (*T, MT*) las que soportan mayores fuerzas e impulsos, siendo la influencia del mediopie y los dedos (*MP*, *D*) mucho menores.

En la Fig. 10 se representan los GRF_{i3} (muestra *3*) de cada pie localizado en el centro de fuerzas del impulso (G_{i3}). A partir de la media y la desviación estándar ($\overline{y_{\theta,3}}$, $s_{n-1,\theta,3}$) de cada parámetro característico se obtienen sus coeficientes de variabilidad ($CV_{\theta,j}$) mediante la Eq. (1), no considerando los valores extremos para evitar distorsiones.

$$CV_{\theta,3} = \frac{s_{n-1,\theta,3}}{\overline{y_{\theta,3}}} \times 100 \tag{1}$$

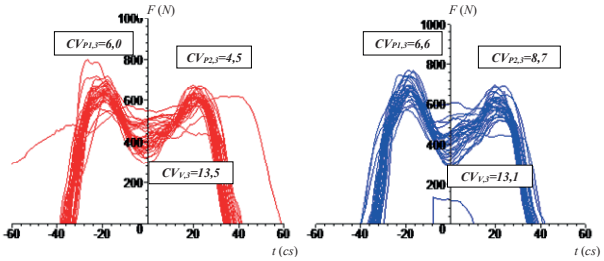


Figura 10. *GRF_{i3} y $CV_{\theta,3}$ de los parámetros F_{P1}, F_{P2} F_V (Fuente: Propia del autor).*

4.2. Eliminación de valores atípicos.

En cada muestra se eliminan los GRF_{ij} con parámetros característicos (θ_{ij}) atípicos (outlier) utilizando el test de Tukey. Para ello se determinan el primer y tercer cuartil ($Q_{1,\theta j}$ y $Q_{3,\theta j}$, respectivamente) cuya diferencia (rango intercuartílico $IQR_{\theta j}$) multiplicada por un coeficiente k determina los valores atípicos según la Eq. (2). Los GRF_{ij} sin atípicos serán utilizados en los análisis, denominados GRF_{ij} truncados.

$$\begin{aligned} \theta_{ij}^{atíp.} &< Q_{1,\theta j} - k \cdot IQR_{\theta j} \\ \theta_{ij}^{atíp.} &> Q_{3,\theta j} + k \cdot IQR_{\theta j} \end{aligned} \tag{2}$$

La Fig. 11 muestra los histogramas de $F_{P1,i,3}$ de cada pie, reflejando mediante círculos los extremos del comportamiento atípico para $k=1,5$. El eje vertical muestra la frecuencia relativa y el horizontal las fuerzas (en N). Se comprueba que ambos comportamientos tienen forma acampanada simétrica.

A la derecha de los histogramas se muestran las gráficas QQPlot y los coeficientes de correlación de Pearson ($r_{P1,3}$) cuyos valores son próximos a *1*, asociados a comportamiento normal. Estos resultados se repiten en todos los parámetros de los GRF_{ij}, comprobándose dicho comportamiento.

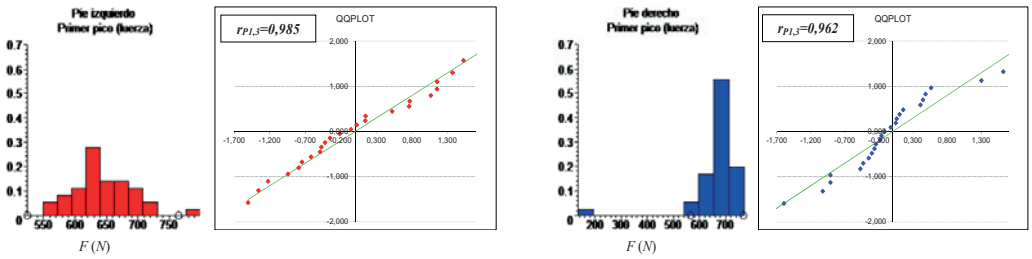


Figura 11. *Histogramas de las fuerzas $F_{P1,i,3}$ de* las *GRF_{i3} y QQPlot con coeficientes de correlación de Pearson ($r_{P1,3}$) para cada pie. Muestra 3 (Fuente: Propia del autor).*

4.3. Influencia de la frecuencia de paso.

Es conocido que la frecuencia de paso influye en los *GRF* lo que se verifica utilizando técnicas de regresión y análisis de varianza (ANOVA).

Para la regresión se agrupan para cada pie los GRF_{ij} truncados de todas las muestras y se determinan los parámetros característicos de cada una en función de la frecuencia de paso (en *BPM*). En la Fig. 12 se muestran las nubes de puntos correspondientes a las fuerzas F_{P1}, F_V, F_{P2} para el pie izquierdo. Los valores de los coeficientes de Pearson son bajos ($r_{f,P1}$=0,440, $r_{f,V}$=-0,795, $r_{f,P2}$=0,426, respectivamente) evidenciando la falta de correlación lineal entre la frecuencia y la fuerza correspondiente.

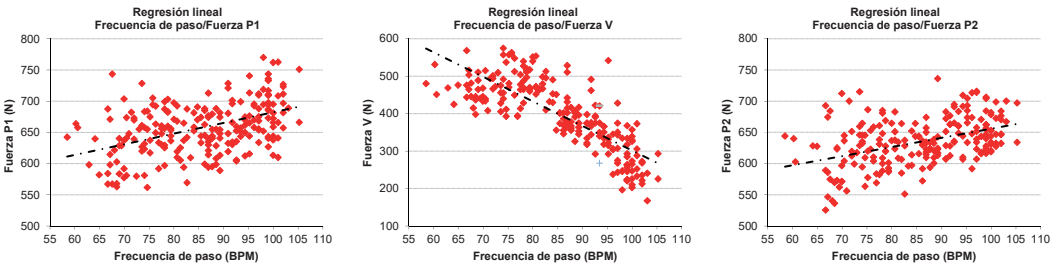


Figura 12. *Regresión lineal. F_{P1}, F_V, F_{P2} respecto de la frecuencia de paso. Pie izquierdo* (*Fuente: Propia del autor*).

Se analiza la existencia de variaciones significativas en las medias de los parámetros característicos ($\mu_{\theta,j}$) de las muestras truncadas con frecuencia inducida (de la *1* a la *6*) usando la prueba de hipótesis Eq. (3).

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{\theta,1} = \mu_{\theta,2} = \mu_{\theta,3} = \mu_{\theta,4} = \mu_{\theta,5} = \mu_{\theta,6} \\ H_1 : \mu_{\theta,k} \neq \mu_{\theta,m} \ para\, al\ menos\ un\ par\ de\ valores \end{cases} \tag{3}$$

Para tomar la decisión se utiliza el análisis de varianza (*ANOVA*) para cada pie con modelo de efectos fijos y muestras desequilibradas (de distintos tamaños) en las que el tratamiento diferenciador entre muestras es la frecuencia de paso. En la Tabla 3 se indican los resultados del *ANOVA* para el parámetro característico F_{P1} del pie izquierdo con un nivel de significación α=0,10.

Tabla 3. *ANOVA* del conjunto de las muestras. Fuerza en el primer pico singular (*P1*). Pie izquierdo.

Fuente de variación	*Suma de cuadrados*	*Grados de libertad*	*Cuadrados medios*	F_o	F
Niveles	*204968,10*	*5,00*	*40993,62*	*37,03*	*1,89*
Error	*160536,02*	*145,00*	*1107,14*		
Total	*365504,12*	*150,00*			

Se comprueba que no cumple el criterio de aceptación (Eq. 4) y se concluye que la variación de la media de las muestras truncadas del parámetro F_{P1} está influenciada por la frecuencia de paso.

$$p\{F_0 \leq F_{\alpha,a-1,N-a}\} = 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad p\{37{,}03 \not\leq 1{,}89\} = 0{,}90 \tag{4}$$

Realizando los *ANOVA* de los demás parámetros característicos de cada pie se obtuvo en todos los casos el mismo resultado de rechazo, por lo que se concluye que la frecuencia influye de manera sustancial en los parámetros característicos de los GRF_{ij} de los pasos.

Para evitar la influencia de la frecuencia en los patrones a determinar y al mismo tiempo no generar un exceso de dispersión por considerar frecuencias excesivamente altas (marcha rápida) o bajas (marcha lenta), se van a obtener dichos patrones a partir de los GRF_{ij} truncados de las muestras con un rango de frecuencias entre *80* y *95 BPM* que cubre las generadas en la marcha libre.

4.4. Obtención de patrones.

A nivel de parámetros característicos (θ) de los GRF_{ij} truncados, se ha comprobado que tienen comportamiento normal, por lo que se obtienen las tendencias centrales y los límites que serán usados como patrón. De esta forma, si la marcha no está influida sustancialmente por la variable modificada, el valor de cada parámetro (θ) se encontrará con una probabilidad muy elevada (*0,9973*) dentro de los límites de referencia $\pm 3\sigma_\theta$.

La tendencia central y las desviación estándar poblacional ($\hat{\mu}_\theta, \hat{\sigma}_\theta$) de cada parámetro (θ) se estiman mediante la media, varianza y desviación estándar muestrales ($\overline{y_\theta}, s^2_{n-1,\theta}, s_{n-1,\theta}$) obtenidas mediante las expresiones Eq. (5)

$$\overline{y_\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_\theta}{n} \qquad s^2_{n-1,\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_\theta - \overline{y_\theta}\right)^2}{n-1} \qquad s_{n-1,\theta} = \sqrt{s^2_{n-1,\theta}} \tag{5}$$

La tendencia central y los límites superior e inferior de cada parámetro (TC_θ, LCS_θ, LCS_θ) se obtienen mediante las expresiones Eq. (6)

$$TC_\theta = \overline{y_\theta} \qquad LCS_\theta = \overline{y_\theta} + 3s_{n-1,\theta} \qquad LCI_\theta = \overline{y_\theta} - 3s_{n-1,\theta} \tag{6}$$

En la Fig. 13 se representan el patrón de la fuerza F_{P2} mediante el valor medio y los límites, y los valores correspondientes de una serie de *GRF* truncados para el pie izquierdo. Este proceso se repitió con cada parámetro característico (θ).

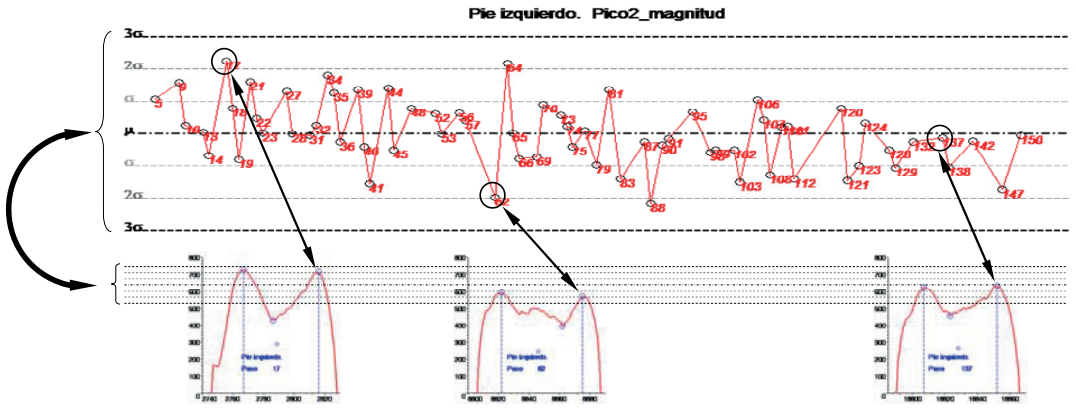


Figura 13. F_{P2} *de GRF truncados* (*Fuente: Propia del autor*).

A nivel de *GRF*, en la Fig. 14 parte superior se representan los patrones de la tendencia central y los límites de las fuerzas transmitidas en cada instante ($\overline{y_i} \pm k \cdot s_{n-1,i}$, *k=1..3*) llevados sobre la vertical de la *GRF* media. A nivel de cada zona plantar (*D, MT, MP* y *T*) el procedimiento se repitió de forma análoga.

Estos serán los patrones de comportamiento obtenidos mediante marcha en suelo rígido fijo que se utilizarán para la comparación con los valores obtenidos en la marcha sobre pasarelas.

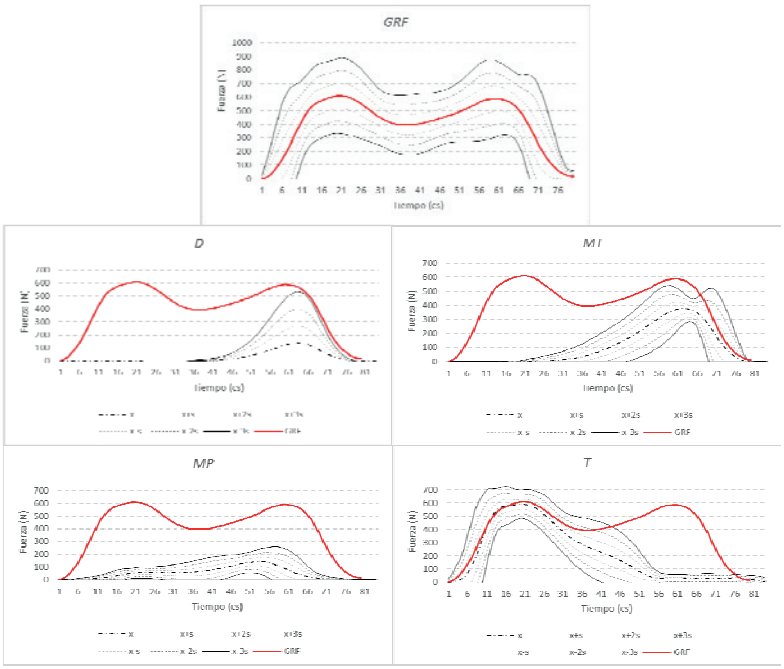


Figura 14. *Patrones de fuerzas GRF y fuerzas de las zonas plantares* (*Fuente: Propia del autor*).

5. RESULTADOS PASARELA PEDRO GOMEZ BOSQUE (*PGB*).

La pasarela *PGB* tienen las siguientes características:

- Su superficie está recubierta por una capa elástica.
- La pendiente es distinta en cada punto.
- Los extremos están a distinta altura (las trayectorias de ida y vuelta no son equivalentes).

Las variables modificadas respecto de la referencia son la superficie dura y fija existente en el patrón que cambia a elástica vibratoria; y la pendiente nula en el patrón que cambia a variable en cada punto.

Se realizaron tres muestreos sin excitación (identificados del *12* al *14*) y ocho con excitación inducida (del *15* al *22*). El análisis se dividió en dos trayectorias (ida y vuelta) con cuatro tramos: estribo *1* (*E*), descendente (*D*), central (*C*) y ascendente (*A*) (Fig. 15) cuyas características se indican en la Tabla 5.

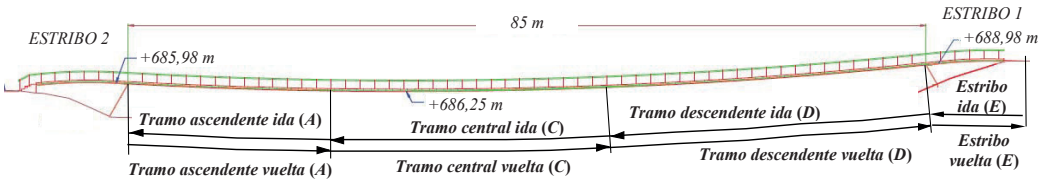


Figura 15. *Pasarela PGB. Tramos.* (*Fuente: A. J. Narros*).

Tabla 5. Tipo de base y pendiente de los tramos de la pasarela *PGB*.

Denominación tramo ida	***Características***		***Denominación tramo vuelta***	***Características***	
	Base	***Pendiente***		***Base***	***Pendiente***
***Estribo* (*E*)**	*Rígida*	*Nula*	***Descendente* (*D*)**	*Vibratoria*	*Negativa*
***Descendente* (*D*)**	*Vibratoria*	*Negativa*	***Central* (*C*)**	*Vibratoria*	*Nula*
***Central* (*C*)**	*Vibratoria*	*Nula*	***Ascendente* (*A*)**	*Vibratoria*	*Positiva*
***Ascendente* (*A*)**	*Vibratoria*	*Positiva*	***Estribo* (*E*)**	*Rígida*	*Nula*

5.1. Resultados sin vibraciones inducidas.

A nivel de parámetros característicos aparecen tendencias claramente distintas a las de los patrones. En la Fig. 16 se muestran para la fuerza F_{P1} los límites de referencia y los resultados de las muestras sin vibración inducida (*12, 13 y 14*) para el pie izquierdo en los tramos de ida (*D, C* y *A*). Se comprueba que los resultados de las distintas muestras tienen las mismas tendencias, con valores alejados de la media patrón, e incluso claramente fuera de los límites en el tramo descendente (*D*).

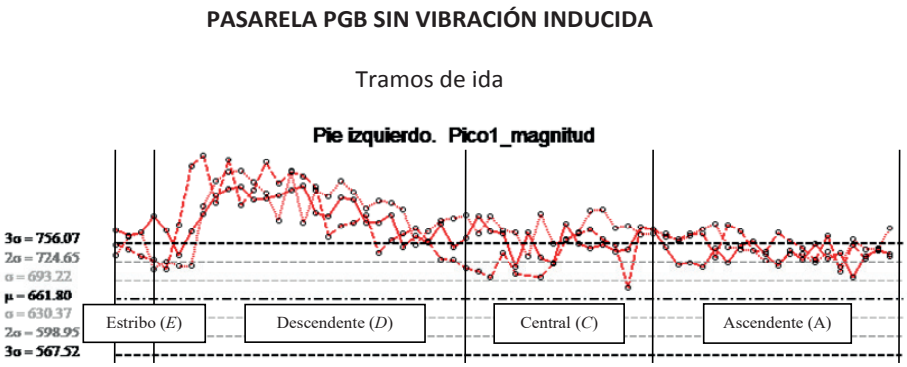


Figura 16. *Pasarela PGB sin vibración inducida. F_{P1} de las muestras 12, 13 y 14 respecto de la referencia para el pie izquierdo. Tramos de ida* (*Fuente: Propia del autor*).

A nivel de *GRF*, en la Fig. 17 parte superior se muestran los valores medios en el tramo descendente de ida de la muestra *12* (color rojo) respecto del patrón. Se comprueba que la duración media del paso es menor (un *10,7%*), y que los valores de F_{P1} son mayores (un *30,9%*), los de F_V menores (un *30,1%*) y los de F_{P2} prácticamente iguales a la media patrón, sin salirse de los límites (el intervalo *26-31* fuera del límite es debido a la diferente localización de las curvas por la menor duración media del paso).

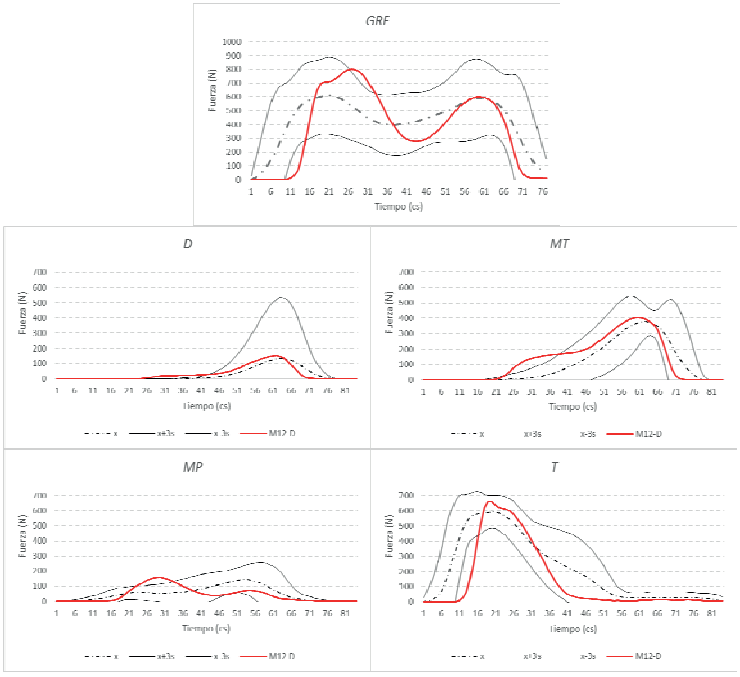


Figura 17. *Pasarela PGB sin vibración inducida. Valores medios de las fuerzas de la muestra 12. GRF y zonas plantares. Tramo descendente ida* (*Fuente: Propia del autor*).

A nivel de las zonas plantares, en la Fig. 17 también se muestran sus magnitudes (color rojo) respecto de los patrones. Es de resaltar que las fuerzas en las zonas *MT* y *MP* en el intervalo *26-31* (correspondiente a F_{P1}) se encuentran por encima del límite, y que en la zona *T* es muy inferior a la media en el intervalo *36-56* (correspondiente a F_V).

En la Fig. 18 se muestran los valores medios de las *GRF* y las fuerzas en las zonas plantares de la muestra *12* comparando los tramos descendente, central y ascendente de la ida (*D*-rojo, *C*-azul, *A*-verde) respecto del patrón.

A nivel de *GRF* se comprueban tiempos de contacto menores que el del patrón en todos los tramos, siendo menor en el tramo descendente y mayor en el ascendente. Los valores F_{P1} y F_{P2} son superiores a la media patrón en los tres tramos, y los valores de F_V inferiores.

A nivel se zonas plantares se encuentran marcadas diferencias entre los valores existentes en las zonas *MT* (intervalo *26-46*), *MP* (intervalos *21-61*) y *T* (intervalo *31-56*) en los tramos descendente (rojo) y ascendente (verde).

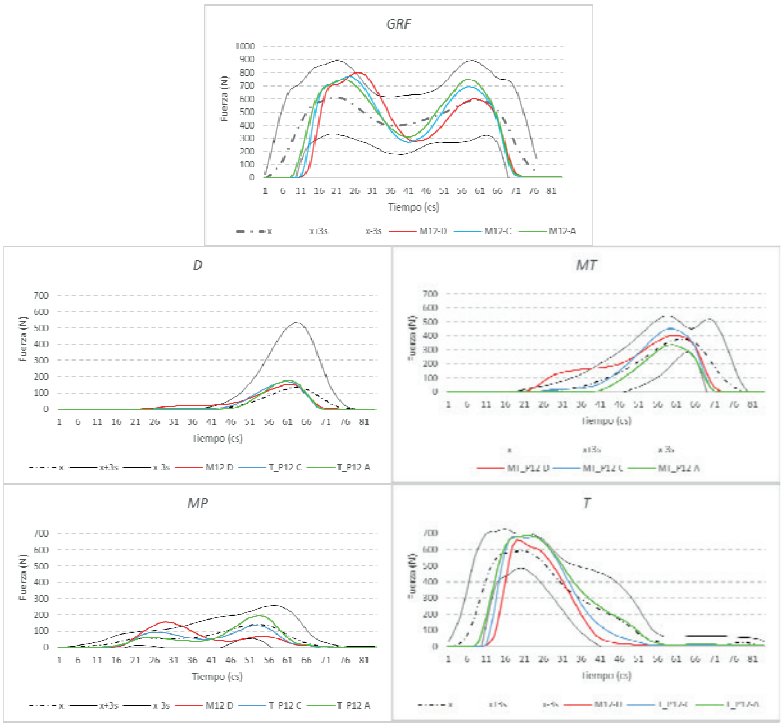


Figura 18. *Pasarela PGB sin vibración inducida. Valores medios de las fuerzas de los GRF y en las zonas plantares. Tramos D, C y A ida. Muestra 12* (*Fuente: Propia del autor*).

5.2. Resultados con vibraciones inducidas.

Se realizaron ocho registros de ida y vuelta (identificados del *15* al *22*) sobre la pasarela con distintas excitaciones inducidas. Se van a analizar algunos resultados.

A nivel de parámetros característicos en la Fig. 19 se muestran para las fuerzas F_{P1} los valores del patrón, los resultados de las tres muestras (*12*, *13* y *14*) sin vibración inducida (color gris) y los de la muestra *21* con vibración inducida para el pie izquierdo en los distintos tramos de ida. Se reproducen las mismas tendencias que las existentes sin vibración inducida pero con valores inferiores.

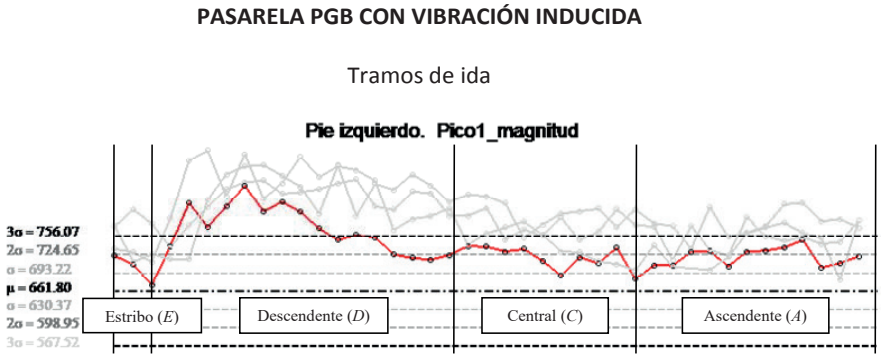


Figura 19. *Pasarela PGB con vibración inducida. F_{P1} de la muestra 21 respecto del patrón y de las muestras sin vibración inducida para el pie izquierdo. Tramo de ida* (*Fuente: Propia del autor*).

A nivel de *GRF*, en la parte superior de la Fig. 20 se muestran los valores medios en el tramo descendente de ida de la muestra *21* (con vibración inducida, color amarillo) y *12* (sin vibración inducida, color rojo) respecto del patrón. Se comprueba que las fuerzas de la muestra *21* son menores que las de la *12* en *P1* y *P2*, pero sobre todo en *V* (*55,1%* respecto de la referencia y *36,0%* respecto de la muestra *12*).

A nivel de las zonas plantares, en la Fig. 20 se muestran los valores medios de las fuerzas con vibración inducida (color amarillo) y sin vibración inducida (color rojo) respecto de los patrones, comprobándose que son próximos entre si, con la aparición de una fluctuación acusada en el talón en el intervalo *21-26*.

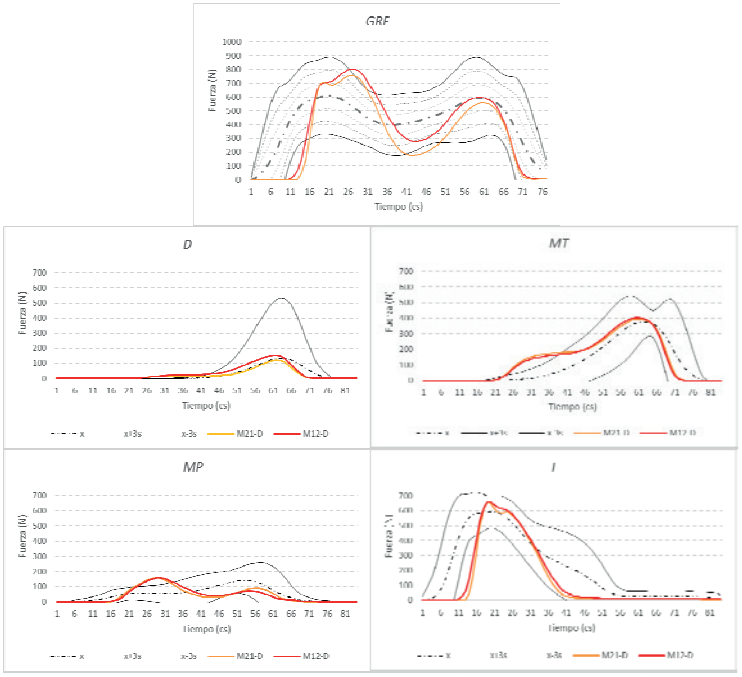


Figura 20. *Pasarela PGB con vibración inducida. Valores medios de las fuerzas de la muestra 21 respecto de la muestra 12 y el patrón. GRF y zonas plantares. Tramo descendente ida* (*Fuente: Propia del autor*).

6. RESULTADOS PASARELA MUSEO DE LA CIENCIA (*MC*).

La pasarela *MC* tienen las siguientes características:

- El análisis se realizó en el tramo más próximo al *MC*.
- Su superficie es de chapa de aluminio.
- La pendiente es constante no nula, con extremos a distinta altura (ida y vuelta no equivalentes).

Las variables modificadas respecto de la referencia son la superficie dura y fija en el patrón que cambia a elástica y vibratoria; y la pendiente nula en el patrón que cambia a no nula constante.

Se realizaron tres muestreos sobre la pasarela sin excitación (identificados del *38* al *40*) y tres con excitación inducida (del *41* al *43*). El análisis se dividió en trayectorias de ida (ascendente *A*) y vuelta (descendente *D*) (Fig. 21).

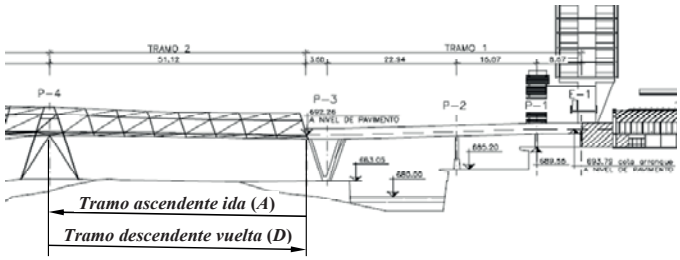


Figura 21. *Pasarela MC. Tramos* (*Fuente: P Ladret y A. González, Freyssinet, S.A.*)

6.1. Resultados sin vibraciones inducidas.

A nivel de parámetros característicos en la Fig. 22 se muestran para las fuerzas F_{P1} los límites de referencia y los resultados de las muestras sin vibración inducida (*38, 39* y *40*) para el pie izquierdo en el tramo descendente de vuelta. Se comprueba que los valores tienen un comportamiento más aleatorio que en la pasarela *PGB* aunque con tendencia por encima de la media patrón.

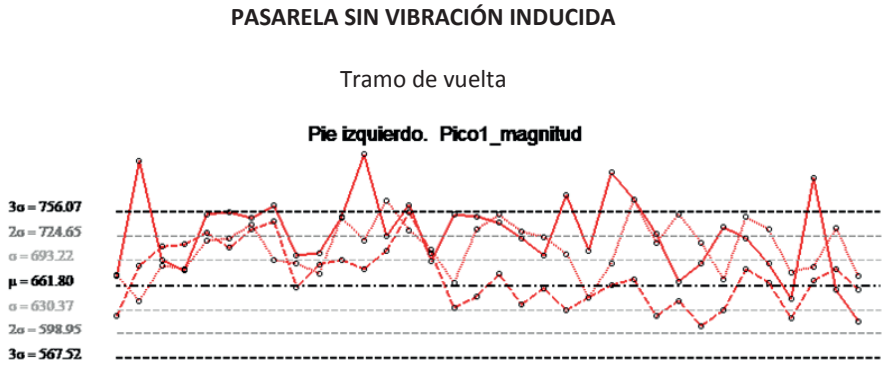


Figura 22. *Pasarela MC sin vibración inducida.* F_{P1} *de las muestras 38, 39 y 40 respecto de la referencia para el pie izquierdo. Tramo Descendente.* (*Fuente: Propia del autor*).

A nivel de *GRF*, en la parte superior de la Fig. 23 se muestran los valores medios en el tramo descendente de la muestra *38* (color rojo) respecto del patrón. Se comprueba que la duración media del paso es menor (un *14,3%*) y que los valores de las fuerzas F_{P1} y F_{P2} son mayores (un *18,6%* y *2,0%*

respectivamente), mientras que la fuerza F_V es menor (un *35,6%*), de forma semejante a lo que ocurría en la pasarela *PGB*.

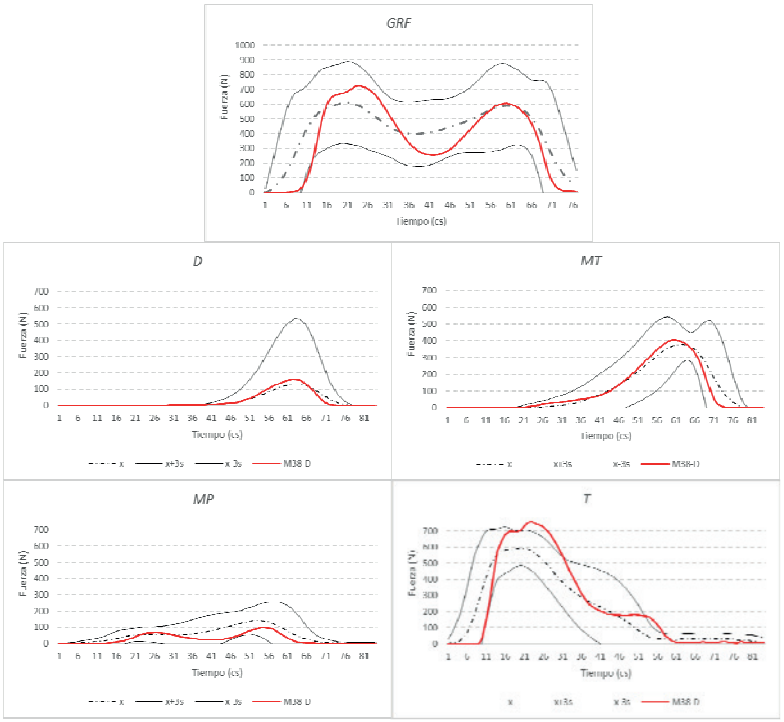


Figura 23. *Pasarela MC sin vibración inducida. Valores medios de las fuerzas de la muestra 38. GRF y en zonas plantares. Tramo ida.* (*Fuente: Propia del autor*).

A nivel de las zonas plantares, en la Fig. 23 también se muestran los valores medios de las fuerzas del tramo descendente (color rojo) respecto de los patrones. En los dedos (*D*) las fuerzas son superiores a la media en el intervalo *51-66* (apoyo final), e inferiores en el intervalo *66-76* (apoyo final). En la zona *MT* son inferiores a la media en el intervalo *66-76*, y superiores en los intervalos *21-36* y *46-66*. En la zona *MP* son inferiores a la media en los intervalos *11-21* y *31-71* y superiores en *21-31*. En la zona *T* son inferiores a la media en los intervalos *1-11* y *36-46*, y superiores en el *11-36* y *46-61*, estando por encima del límite superior en el intervalo *21-31*.

La aparición de una mayor fuerza del impulso de frenada F_{P1} respecto de la media patrón, en el intervalo *26-31*, es debido a valores por encima del límite patrón en la zona *T* del mismo intervalo, mientras que el valor por debajo de la media patrón en F_V, en el intervalo *41-46*, es debido a valores por debajo de la media en las zonas *MP* y *T*.

6.2. Resultados con vibraciones inducidas.

Se realizaron tres registros de ida y vuelta (identificados del *41* al *43*) sobre la pasarela con distintas excitaciones inducidas. Se van a analizar algunos resultados.

A nivel de parámetros característicos en la Fig. 24 se visualizan para F_{P1} la media y los límites del patrón, los resultados de las muestras sin vibración inducida (*38, 39* y *40*, color gris) y de la muestra *41* con vibración inducida para el pie izquierdo del tramo de ida. Se comprueba que el comportamiento es más aleatorio que en las muestras de la pasarela *PGB*.

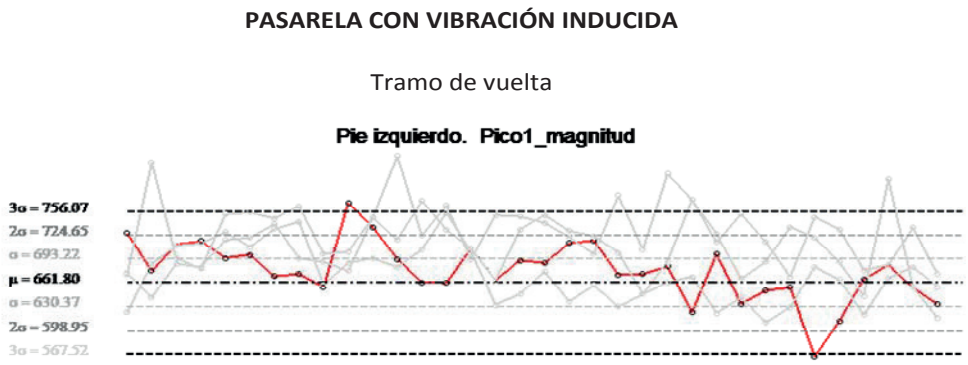


Figura 24. *Pasarela MC con vibración inducida. F_{P1} de la muestra 41 respecto de las muestras 38, 39 y 40, y la referencia para el pie izquierdo Tramo descendente.* (*Fuente: Propia del autor*).

A nivel de *GRF*, en la parte superior de la Fig. 25 se muestran los valores medios de las fuerzas en el tramo de vuelta de las muestras *41* (con vibración inducida, color amarillo) y *38* (sin vibración inducida, color rojo) respecto del patrón. Se comprueba que las fuerzas de ambas muestra son próximas en los puntos *P1* y *P2*, pero la de la muestra *41* es menor en *V* (*68,7%* respecto de la media de referencia y *50,6%* respecto de la muestra *38*), estando por debajo del límite.

A nivel de las zonas plantares, en la Fig. 25 se muestran también los valores medios de las fuerzas con y sin vibración inducida (colores amarillo y rojo respectivamente) respecto de los patrones. Se comprueba que los resultados de las fuerzas con vibración inducida son iguales o menores a los correspondientes sin vibración inducida en todas las zonas.

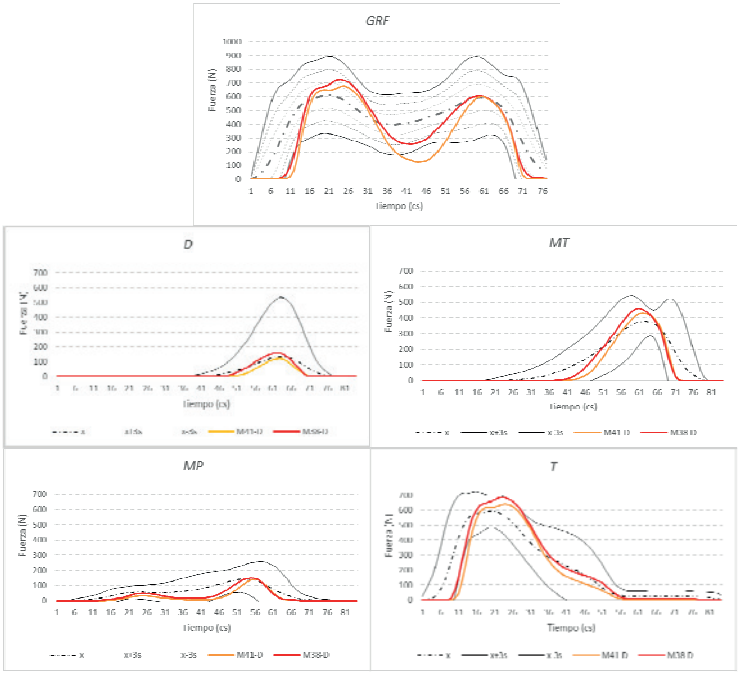


Figura 25. *Pasarela MC con vibración inducida. Valores medios de las fuerzas de la muestra 41 respecto de la muestra 38 y el patrón. GRF y zonas plantares. Tramo ida* (*Fuente: Propia del autor*).

El mínimo de la *GRF* de la muestra *41* en el intervalo *41-46* correspondiente a la F_V es debido a las menores fuerzas en ese intervalo en las zonas plantares *MT*, *MP*, y *T*.

7. CONCLUSIONES.

A partir del análisis realizado se desprende que al fijar las magnitudes de ciertas variables, la variabilidad de las fuerzas asociadas a los parámetros característicos de las *GRF* se comporta de forma normal, permitiendo obtener patrones de comportamiento para unas variables específicas. Para profundizar en el análisis de las fuerzas que aparecen en el contacto entre la planta del pie y el suelo es necesario utilizar la información con el nivel de detalle adecuado (parámetros característicos, *GRF* o zonas plantares).

En los instantes en los que las fuerzas del *GRF* son más elevadas (F_{P1} y F_{P2}) la velocidad del baricentro es menor, y en los que las fuerzas son menores (F_V) la velocidad es mayor.

Cuando la marcha se realiza sobre superficies vibratorias, el tiempo de contacto pie-superficie se reduce respecto del obtenido sobre superficie rígida, al mismo tiempo el comportamiento de las fuerzas de contacto se ve influido por la magnitud de la pendiente.

Al caminar sobre una superficie vibratoria sin vibración inducida con pendiente negativa (descendente) se produce un aumento de la fuerza F_{P1} debido a las mayores magnitudes de fuerzas transmitidas por las zonas plantares *MT*, *MP* y *T*; y una importante disminución de la fuerza F_V debido a las menores fuerzas transmitidas por la zona *MP* y *T* efectos repetidos en las dos superficies vibratorias analizadas.

El talón es la zona plantar más sensible a la vibración, de forma que las fuerzas transmitidas por él están claramente diferenciadas para los casos de superficie rígida y superficie vibratoria.

Si en la superficie vibrante se induce una vibración, se produce una disminución en los valores de las fuerzas F_{P1}, F_{P2} y F_V respecto de las existentes sin vibración inducida. La disminución de la fuerza F_V es especialmente singular, localizándose por debajo de los valores límites de la referencia patrón. Los bajos valores de F_V son debidos a las menores fuerzas transmitidas por las zonas plantares del mediopie y talón (*MP* y *T* respectivamente) respecto de la referencia.

8. AGRADECIMIENTOS.

Los autores agradecen la financiación parcial del Ministerio de Economía y Competitividad a través de los proyectos BIA2014-59321 y BIA2015-71942-REDT.

9. REFERENCIAS.

[1] Fernandez, J. (2015). Acciones humanas sobre estructuras (pp. 213). Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

[2] Archbold, P., Mullarney, B. (2011). The influence of selected gait parameters on vertical pedestrian. 4th International Conference. (pp. 759-798). Wroclaw: Poland.

[3] Racic, V., Mark, J., Brownjohn & W. (2011). Stochastic model of near-periodic vertical loads due to humans walking. Advanced Engineering Informatics *25, 259–275*.

[4] Thór Ingólfsson, E. (2011). *Pedestrian-induced lateral vibrations of footbridges. Experimental studies and probabilistic modelling.* UK: DTU Civil Engineering Report.

[5] Morris, S.*,* Benbasat, A., Moxley, D., Krebs, D. and Paradiso, J. (2008) Gait Analysis Using a Shoe-Integrated Wireless Sensor System. IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, *12, 413-425*.

[6] Hernández-Stengele, F., (2008). *Diseño y construcción de prototipo neumático de prótesis de pierna humana*. México: Universidad de las Américas.

[7] Collado, S., Pascual, F., Álvarez, A., Rodríguez, L., (2003) Análisis de la marcha. Factores moduladores. Revista de la Facultad de Ciencias de la Salud. *1. 1-22*.

[8] Encarnación, A. (2012) *Análisis biomecánico de la marcha nórdica: Efectos de la experiencia y de la velocidad de práctica sobre el patrón de presión plantar, las fuerzas de reacción del suelo y los niveles de impacto*. Valencia. Universidad de Valencia.

[9] Perry, J. (2010) Gait analysis: normal and pathological function. p 551. US. Journal of Sports Science and Medicine.

[10] Figueiredo, F., da Silva, J., de Lima, L., Vellasco, P., Andrade, S., (2008). A parametric study of composite footbridges under pedestrian walking loads, Engineering Structures. *30. 605–615.*

[11] Caprani, C., Keogh, J., Archbold, P. & Fanning, P. (2011) Characteristic Vertical Response of a Footbridge Due to Crowd Loading. 8th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2011 (pp. 978-985). Belgium.

[12] Racic, V., Pavic, A., Brownjohn, J. (2009) Experimental identification and analytical modelling of human walking forces: Literature review. Journal of Sound and Vibration (pp. 1–49). UK.

[13] Sanderson, D., Cavanang, P. (1987). An investigation of the in-shoe pressure distribution during cycling in cycling or running shoes, Biomechanics X-B (pp 903-907). Illinois.

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

Fibre reinforced high strength concrete subjected to elevated temperatures

Varona, Francisco de Borja[1]; Baeza, Francisco Javier[2]; Ivorra, Salvador[3]; Bru, David[4]

ABSTRACT

The current version of the European standard for concrete structures gives tabulated data for the evolution of the mechanical properties of normal strength concrete subjected to elevated temperatures. However, the standard acknowledges the lack of sufficient data for the case of high strength concrete with limestone aggregate and there are no provisions for fibre-reinforced concrete at high temperatures. This paper presents the experimental results obtained on four batches of normal and high strength fibre reinforced concrete made with limestone aggregates and tested after exposure to high temperatures. Those results gave a good correlation with previous research and were worked to equations describing the evolution of the compressive strength and the flexural strength at elevated temperatures. Ductility was also measured in the flexural strength tests and results suggested that the use of steel fibres with higher aspect ratio may lead to lower ductility after exposure to temperatures higher than 650 °C.

Keywords: fibre reinforced concrete; high performance concrete; elevated temperatures; fire design.

1. INTRODUCTION AND OBJECTIVES

Within the context of the most usual construction materials for building and civil infrastructures, concrete stands out because of its excellent behaviour when exposed to high temperatures and fire condition. All the variables that assess this performance are defined in the International Standards, which also include some advices to fulfil the structural requirements in these cases, such as minimum concrete covers for each particular fire resistance, simplified methods for the determination of the structural resistance of each type of section, or even some basis for advanced numerical modelling methods. Reinforced concrete became a structural material during the second half of 19th century. One of the main reasons was actually its good behaviour during accidental fires, especially when compared to the other usual construction material of that age, cast iron. Even today concrete presents better performance than modern structural steel. Two appropriate examples of this assertion are the Windsor Tower fire in Madrid in 2005 and the Grenfell Tower fire in London in 2017.

In the 1970's concrete research focus shifted towards the structural behaviour of the material under high temperatures [1]–[4], because of the development of nuclear power plants, whose reactors were initially and currently made in concrete. In the late 1980's the focus was turned towards high strength concrete (HSC), with a more compact microstructure than normal strength concrete (NSC) [5]–[10]. This

[1] *Department of Civil Engineering. University of Alicante (SPAIN). borja.varona@ua.es (Corresponding author)*
[2] *Department of Civil Engineering. University of Alicante (SPAIN). fj.baeza@ua.es*
[3] *Department of Civil Engineering. University of Alicante (SPAIN). sivorra@ua.es*
[4] *Department of Civil Engineering. University of Alicante (SPAIN). david.bru@ua.es*

dense internal structure makes HSC more sensitive to the splitting of the concrete cover in the hottest elements. One of the causes of structural spalling, as this phenomenon is known, is the thermal gradients and the thermal incompatibility of the different components of the reinforced concrete elements: the cement paste, the aggregates, the steel rebars and tendons, which have different coefficients of thermal expansion. Another cause of spalling is the dehydration of the C-S-H gel and the portlandite, which generates water steam and provokes an increase of the pore pressure within the concrete elements. Fig. 1 shows the remains of several concrete specimens that exploded during heating at about 500 °C due to explosive spalling as reported in [11]. Spalling is one of the greatest concerns when dealing with concrete structures exposed to fire. In this regard, notable fire catastrophes can be mentioned, such as fire in the Eurotunnel of the English Channel in 1996, the Tauern tunnel in 1999 (Austria) and the Mont Blanc tunnel in 1999 (France) [12]–[15]. In these examples, the thermal exposure in a confined environment, and with a high combustible charge, caused a fast temperature rise, therefore leading to severe concrete damage and explosive spalling. Thus, the structural section is rapidly reduced and exposed and the structural safety may be compromised for the design loading values.

Figure 1. *Explosive spalling failure during heating at 500 °C, in University of Alicante*.

In the last two decades research has been focused on studying the influence of the addition of fibres to the concrete subjected to high temperatures. Polypropylene fibres, which melt at approximately 170 °C, have been proven adequate to control the spalling of concrete; their melting creates an additional capillary pore network inside the concrete, which allows the releasing of the water steam generated by dehydration reactions [11], [16]. Thus, the main objective of polypropylene fibres is not the structural reinforcement but the improvement of the fire resistance of concrete. Instead, steel fibres can be used in order to increase the residual strength of concrete after exposure to elevated temperatures [17], [18]. However, some research [19] argues that the benefit of adding steel fibres may not be so obvious, since they contribute to speeding up the heating of the concrete and may be prone to producing internal micro-cracking because of thermal incompatibility with the concrete matrix. Recent research [19]–[21] has studied hybrid fibre reinforced concrete, which incorporates both polypropylene and steel fibres. Experimental results suggest a synergy of both types of fibre in enhancing the mechanical properties of concrete subjected to high temperatures.

The current version of the European standard for concrete structures [22] gives tabulated data for the evolution of the mechanical properties of NSC subjected to elevated temperatures, accounting for the case of quartz aggregates and for the case of calcareous aggregates. However, the standard acknowledges the lack of sufficient data for the case of high strength concrete (HSC), making no distinction between the use of different types of aggregate. Furthermore, this standard gives no provisions for fibre-reinforced concrete at high temperatures. This paper presents the experimental results obtained on four batches of normal and high strength fibre reinforced concrete, made with limestone aggregates and subjected to high temperatures up to 825 °C. The mechanical properties studied are the compressive strength, the tensile splitting strength and the flexural strength and ductility after natural cooling.

2. MATERIALS AND METHODOLOGY

2.1. Materials

Four different fibre reinforced concrete batches were prepared, divided in two different types of concrete: two of them were designed to obtain normal strength concrete (NSC), while the other two were high strength concretes (HSC), i.e. compressive strength higher than 50 MPa. The base mix design of the four batches is illustrated in Table 1, which also includes the cubic compressive strength at 28 days at room temperature. Limestone aggregates were used for both coarse and fine fractions; CEM II/B-M (S-L) 42.5R according to UNE-EN 197-1:2001 was used for NSC, while a combination of silica fume and CEM I 52.5R was used for HSC. In order to obtain an adequate workability of the fresh mix, different water reducing agents were used and even combined: in NSC Chryso Plast Delta 21 (type 1) was used, while in HSC a mixture of Sikament 165 (type 2) and Sika Viscocrete 5980 (type 3) was included. Moreover, polypropylene (PP) fibres were used to avoid integrity problems due to explosive spalling when samples were exposed to temperatures higher than 400-500°C (as observed in previous research even for NSC [11]). These PP fibres had a diameter of 31-35 mm and a length of 12 mm, with a melting point of 163 °C. On the other hand, two different types of hook-end steel fibres were used: type A with a diameter of 0.75 mm and an aspect ratio of 46.7; and type B with a diameter of 0.35 mm and an aspect ratio of 85.7. To sum up, the following four concrete types were prepared:

- FR-NSC-1: normal strength concrete with PP fibre + steel fibre type A.
- FR-NSC-2: normal strength concrete with PP fibre + steel fibre type B.
- FR-HSC-3: high strength concrete with PP fibre + steel fibre type A.
- FR-HSC-4: high strength concrete with PP fibre + steel fibre type B.

Table 1. Mix design and compressive strength of concrete batches

Material	FR-NSC-1	FR-NSC-2	FR-HSC-3	FR-HSC-4
Cement (+ silica fume, in HSC)	262 kg/m^3	272 kg/m^3	491 kg/m^3	469 kg/m^3
Water/binder ratio	0.6	0.6	0.36	0.36
Limestone aggregates (fine + coarse agg.)	1683 kg/m^3	1772 kg/m^3	1716 kg/m^3	1638 kg/m^3
Polypropylene fibre (PF) (31-35 μm diam.)	1.4 kg/m^3	1.4 kg/m^3	2.6 kg/m^3	2.5 kg/m^3
Steel fibre (SF) (diameter = 0.75 mm)	18 kg/m^3	–	20 kg/m^3	–
Steel fibre (SF) (diameter = 0.35 mm)	–	19 kg/m^3	–	19 kg/m^3
Total fibre volume fraction	0.4%	0.4%	0.53%	0.53%
Cubic compressive strength (28 days, 20 °C)	15.6	22.3	87.7	72.8

For each batch 45 specimens were prepared and tested: 15 cubic specimens with dimensions 15×15×15cm were used for compressive strength tests; 15 cylinders, with diameter 15 cm and 30 cm high were used for splitting tensile strength tests; and 15 prismatic 15×15×60 cm specimens were used for flexural strength tests. The preparation process comprised the following phases: first, all aggregates, cement materials and fibres were mixed; afterwards, water and water reducing agents were added; finally, concrete was poured into the moulds and kept for 24 hours, when they were demoulded and conserved in ambient controlled room (20°C and RH > 95%) until 28 days age. Compressive strength tests for control purposes were performed on three of the specimens at 28 days age. The remaining twelve specimens were stored at room conditions until high temperature tests were made at 60 days age. This delay is based in [23]–[25], in which lower residual strengths after high temperature exposure were observed, due to a higher degree of hydration of concrete paste, which makes for a more severe damage.

2.2. Test methods

The objective of this work is aimed at the evaluation of the mechanical properties of fibre reinforced concrete after high temperature exposure. For this purpose the following tests were made under five different conditions (28 days ambient temperature, 60 days ambient temperature, 60 days 450 °C, 60 days 650 °C, 60 days 825 °C): compressive strength tests according to UNE-EN 12390-3:2009; splitting tensile strength tests according to UNE-EN 12390-6:2009; bending strength tests according to UNE-EN 14651:2007+A1:2008.

Exposure to elevated temperatures was made inside an electric oven with a maximum heating capacity of 2000 °C. Fig. 2 includes the heating curves corresponding to each target temperature (450 °C, 650 °C and 825 °C), and the ISO834 standard curve for gas temperature for fully developed fire inside buildings.

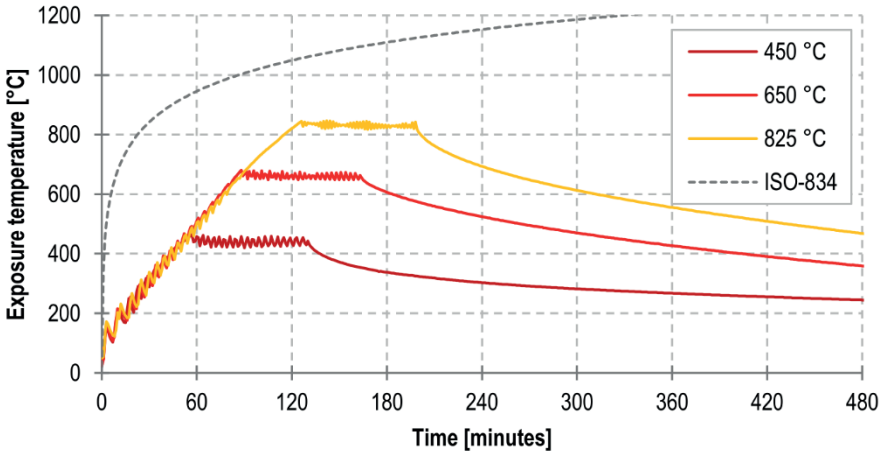


Figure 2. *Exposure temperature curves for heating tests and ISO-834 curve.*

Experimental heating curves were registered using a K-type thermocouple and a Spider 8 HBM data logger. Each heating curve was composed of three different phases: first the heating stage, with

different average heating ratios, 8.3 °C/min for [20°C → 450°C], 6.7 °C/min for [450°C → 650°C] and 4.6 °C/min for [650°C → 825°C]; secondly, once the target temperature had been reached it was maintained for 75 minutes; finally, the oven was shut down and samples were kept inside for a natural cooling process. All samples were tested after cooling up to ambient temperature, according to IR camera measures (Fig. 3). Therefore, the mechanical properties measured in this work correspond to residual properties and not high temperature properties (i.e., properties measured in still heated samples). According to the existing literature [26], residual properties are always lower than their high temperature counterparts, hence these results would be conservative. Besides, from a point of view of a structural retrofitting after a fire, residual properties are the actual strength of the damaged structure. Nonetheless, the cooling process also has a crucial effect on the results, and an accelerated cooling (e.g. water immersion or spraying) will lead to even lower residual properties, despite some references point to the contrary [23].

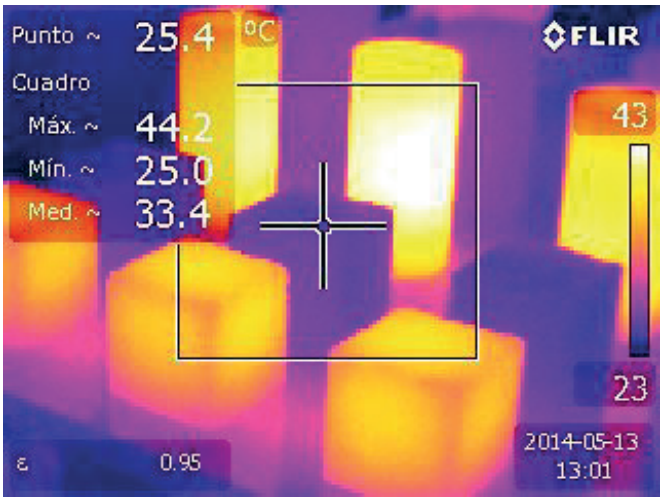


Figure 3. *Thermographic image for controlling the test temperature after exposure to high temperature.*

3. RESULTS AND DISCUSSION

The results obtained in the 60 days age tests are given in Table 2 (for the case of NSC) and Table 3 (for the case of HSC). Concerning the bending tests results, $f_{ct,L}$ corresponds to the concrete strength at the limit of proportionality (LOP), which is the highest stress attained before reaching a crack opening displacement of 0.05 mm; $f_{ct,R3}$ is the concrete strength when crack opening displacement is 2.5 mm. No spalling was observed in the heating phases, which is attributed to the melting of the polypropylene fibres.

Table 2. Residual mechanical properties of FR-NSC after high temperature exposure, at 60 days

Batch	Property	20 °C	450 °C	650 °C	825 °C
FR-NSC-1	Compressive strength (MPa)	19.1	13.4	8.1	2.2
	Tensile splitting strength (MPa)	2.02	1.25	0.67	0.25
	Flexural strength, $f_{ct,L}$ (MPa)	3.11	1.94	1.01	0.47
	Flexural strength, $f_{ct,R3}$ (MPa)	0.83	0.46	0.45	0.17
FR-NSC-2	Compressive strength (MPa)	24.6	20.5	12.5	3.6
	Tensile splitting strength (MPa)	2.26	1.20	0.70	0.28
	Flexural strength, $f_{ct,L}$ (MPa)	3.48	2.58	1.39	0.76
	Flexural strength, $f_{ct,R3}$ (MPa)	0.90	0.91	0.42	0.14

Table 3. Residual mechanical properties of FR-HSC after high temperature exposure, at 60 days

Batch	Property	20 °C	450 °C	650 °C	825 °C
FR-HSC-3	Compressive strength (MPa)	97.6	81.7	45.2	32.7
	Tensile splitting strength (MPa)	6.22	4.08	1.87	1.32
	Flexural strength, $f_{ct,L}$ (MPa)	4.07	3.65	2.27	1.37
	Flexural strength, $f_{ct,R3}$ (MPa)	0.69	0.69	0.41	0.90
FR-HSC-4	Compressive strength (MPa)	83.4	68.3	42.5	25.3
	Tensile splitting strength (MPa)	6.84	3.92	1.85	1.20
	Flexural strength, $f_{ct,L}$ (MPa)	4.03	3.76	1.82	1.23
	Flexural strength, $f_{ct,R3}$ (MPa)	2.16	1.42	0.27	0.11

3.1. Residual compressive strength after exposure to elevated temperature

Fig. 4 represents the evolution of the compressive strength at high temperatures in the FR-NSC. The vertical axis corresponds to the normalized compressive strength, that is, the percentage of the original compressive strength at room temperature after exposure and cooling to high temperature. The hybrid fibre mix that made use of the steel fibre with higher aspect ratio gave the better results up to 625 °C.

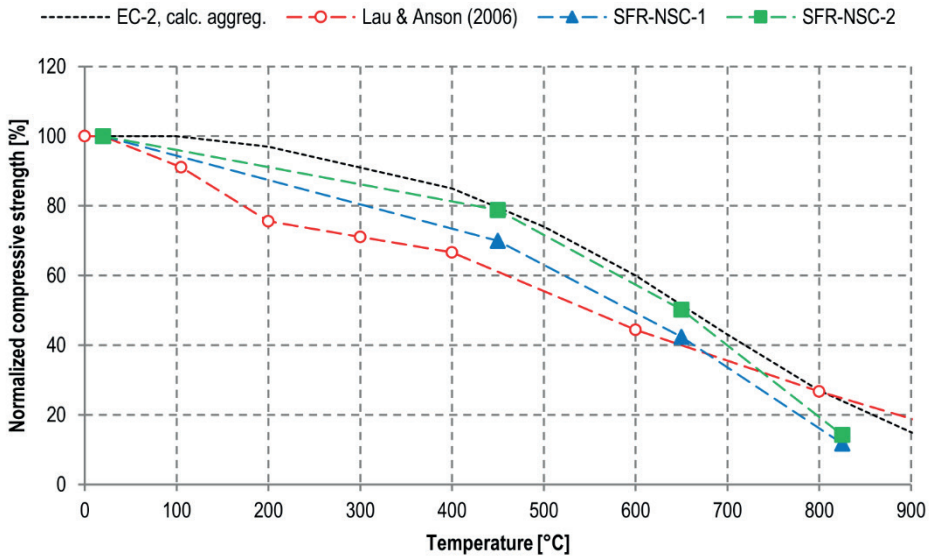


Figure 4. *Evolution of the residual compressive strength after exposure to high temperature in fibre reinforced normal strength concrete.*

Results are compared in Fig. 4 with the Eurocode 2 curve for NSC made with calcareous aggregate and without fibres of any type. Fig 4 also compares the experimental results with those reported in [18] for NSC with steel fibres (volume fraction of 1%) and without polypropylene fibres. It can be observed that NSC with hybrid fibres gave better residual strength up to 650 °C than NSC with steel fibres only, despite

being attained with a hybrid fibre volume fraction roughly half of the steel fibre volume fraction. This would support the thesis of the synergy of steel and polypropylene fibres suggested in [20], [21]. On the contrary, at 825 °C, hybrid fibre NSC kept half the residual normalized compressive strength than the steel fibre counterpart. Overall results for hybrid fibre and steel fibre only predicted lower residual compressive strengths than in Eurocode 2. Only the hybrid fibre mix with the highest aspect ratio gave almost exactly the same prediction, except for the highest temperature range.

The evolution of the normalized compressive strength of SF-HSC at high temperature is shown in Fig. 5. Experimental results from the present research (with total fibre volume fraction of 0.53%) are compared with:

- The Eurocode 2 [22] curve for Class 2 HSC, i.e. HSC with 60 MPa < f_c ≤ 80 MPa, in Fig. 5(a). This curve does not specify the type of aggregate and corresponds to plain concrete, without fibre content.
- Results obtained by Antonius et al. (2014) [27] for HSC with steel fibre (SF, 0.5%), in Fig. 5(a).
- Results obtained by Peng et al. (2008) [25] for HSC with polypropylene fibre (PF, 0.3%) and with hybrid fibre (HF, total volume fraction of 1%), in Fig. 5(b).
- Results obtained by Poon et al. (2004) [21] for HSC with HF (1.22%), in Fig. 5(c).
- Results obtained by Ding et al. (2012) [19] for HSC with HF (0.8%), in Fig. 5(c).

Experimental results from the present research predicted higher residual compressive strength than Eurocode 2, but so did some of the other references [19], [25]. The reason for it may not necessarily be the addition of fibres, but the use of calcareous aggregate, which performs better than siliceous aggregate under high temperature. Quartz content in siliceous aggregates experiments a crystalline transformation from α-quartz to β-quartz at 500-650 °C; this transformation entails a volumetric expansion of the aggregates which generates micro-cracks in the concrete matrix and weakens its behaviour [26]. Despite using half the hybrid fibre volume fraction, the present experimental results offered good correlation with those reported by [25], , especially in the 450-650 °C range.

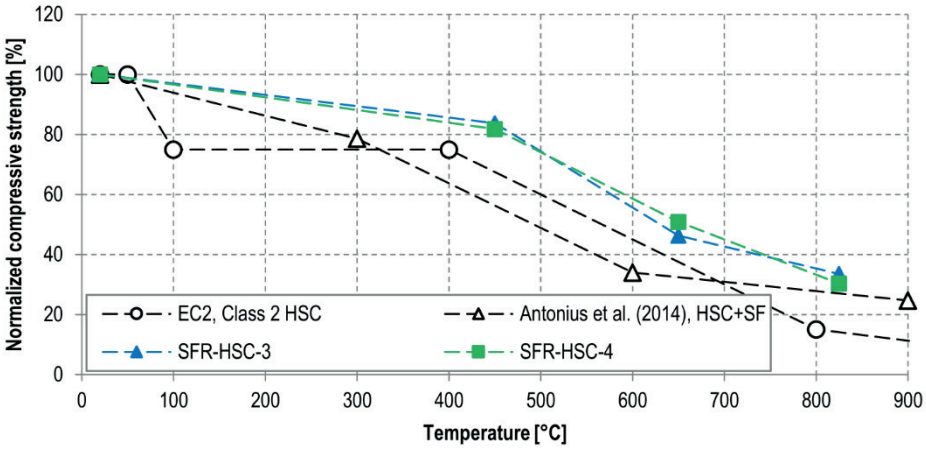
Concerning the influence of the different aspect ratios of the SF used in the present research, there was no clear conclusion, with the highest aspect ratio giving a slightly better residual compressive strength at 650 °C.

The experimental results were worked to design equations by means of a linear fit. Eq. (1) corresponds to NSC with fibre volume fraction of 0.15% (PF) and 0.25% (SF), with a coefficient of determination R^2 = 0.9927. Eq. (2) corresponds to HSC with fibre volume fraction of 0.28% (PF) and 0.25% (SF), with a coefficient R^2 = 0.9994. In both cases, results from the SF with an aspect ratio of 85.7 were used.

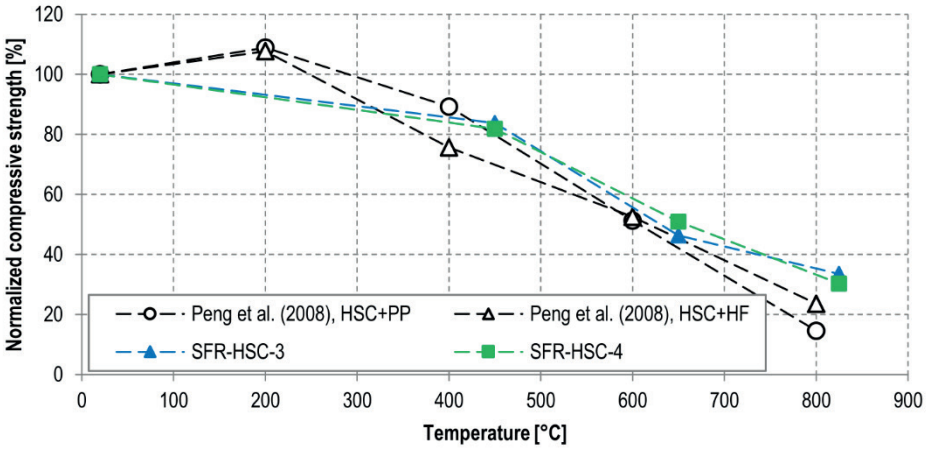
$$\frac{f_{c,T}}{f_{c,20\,^\circ\mathrm{C}}} = \begin{cases} 0.994 + 4.11\cdot10^{-4}T - 1.75\cdot10^{-6}T^2 \not> 1 & \text{for } 20\,^\circ\mathrm{C} \le T \le 880\,^\circ\mathrm{C} \\ 0 & \text{for } T > 880\,^\circ\mathrm{C} \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{f_{c,T}}{f_{c,20\,^\circ\mathrm{C}}} = \begin{cases} 1.01 - 1.99\cdot10^{-5}T - 1.04\cdot10^{-6}T^2 \not> 1 & \text{for } 20\,^\circ\mathrm{C} \le T \le 975\,^\circ\mathrm{C} \\ 0 & \text{for } T > 975\,^\circ\mathrm{C} \end{cases} \quad (2)$$

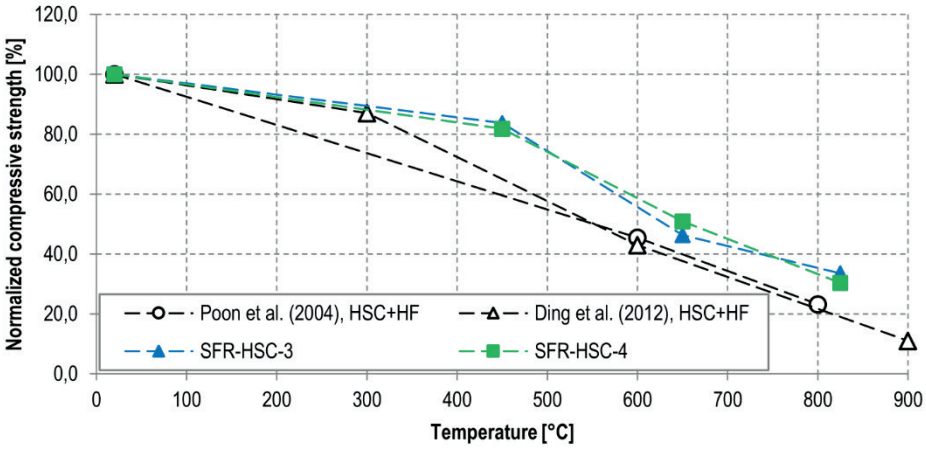
Both curves for the normalized compressive strength at high temperatures are illustrated in Fig. 6.



(a)



(b)



(c)

Figure 5. *Evolution of the residual compressive strength after exposure to high temperature in fibre reinforced high strength concrete.*

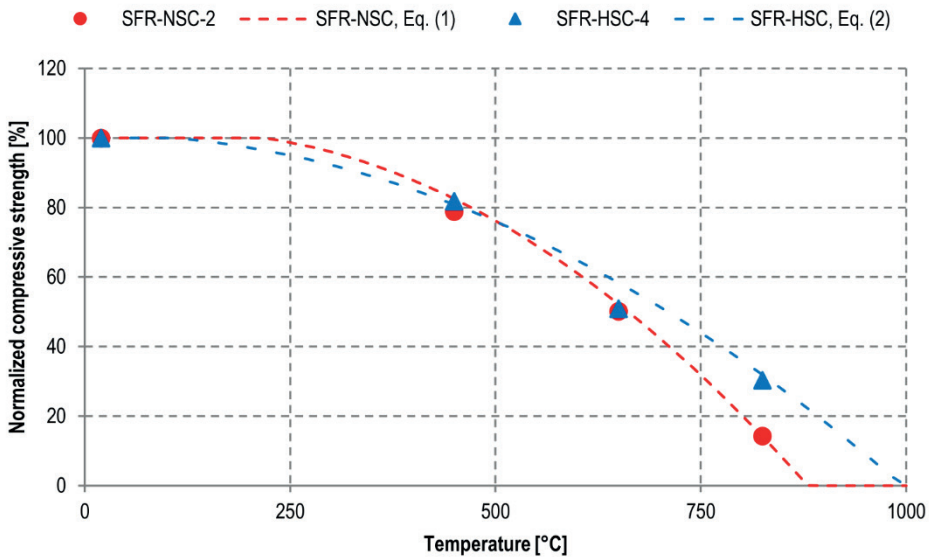


Figure 6. *Linear fit curves for fibre reinforced normal and high strength concretes after exposure to elevated temperatures.*

3.2. Residual flexural strength and ductility after exposure to elevated temperature

In order to derive equations for predicting the flexural behaviour of fibre reinforced concrete in the bending test after high temperature exposure, the influence of the compressive strength was studied. Fig. 7 and Fig. 8 represent the evolution of the compressive strength versus the flexural strength at high temperature. The behaviour of SF-NSC is represented in Fig. 7 whereas SF-HSC is illustrated in Fig. 8.

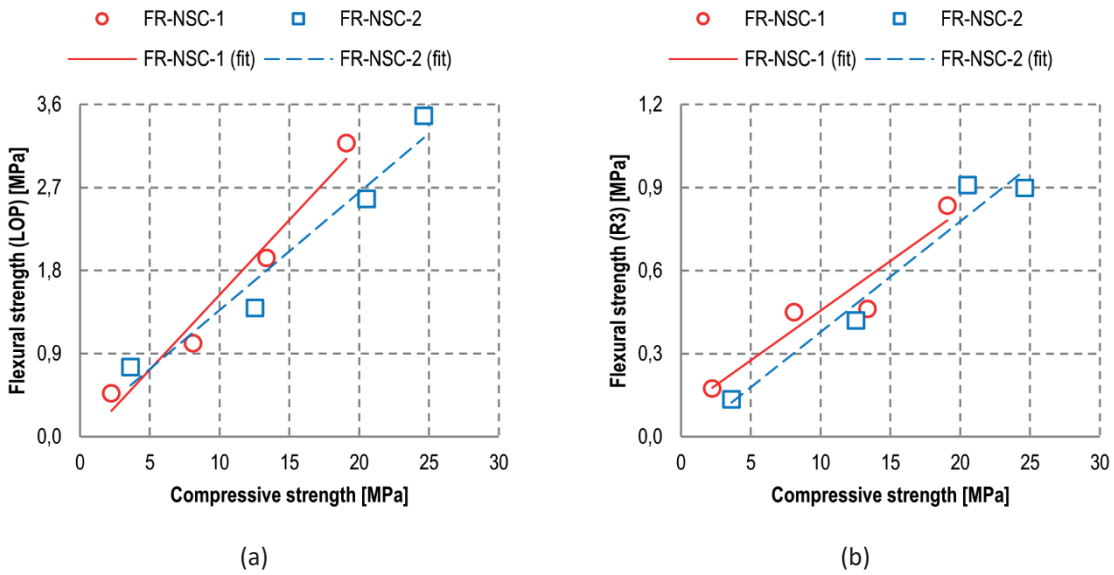
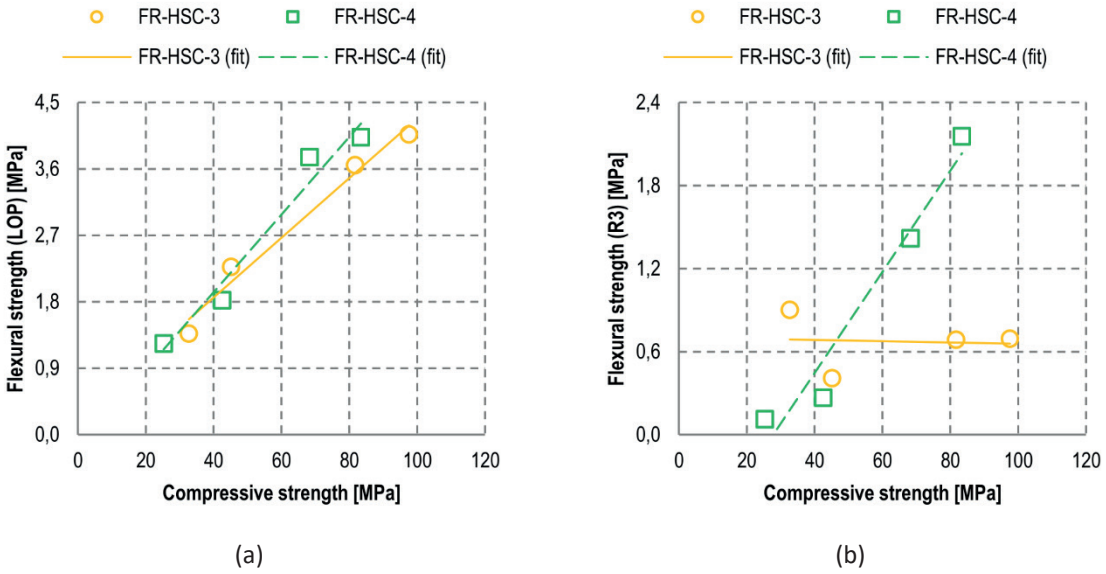


Figure 7. *Compressive versus flexural strength after exposure of SF-NSC to elevated temperatures, including linear fit: LOP flexural strength (a); R3 flexural strength (b).*



(a) (b)

Figure 8. *Compressive versus flexural strength after exposure of SF-HSC to elevated temperatures, including linear fit: LOP flexural strength (a); R3 flexural strength (b).*

The coefficients of determination R^2 for the linear fits performed in Figs. 7 and 8 are illustrated in Table 4. It can be observed, both graphically and numerically, the poor fit for the experimental results of fibre reinforced HSC with lower aspect ratio of SF.

Table 4. Coefficients of determination R^2 for the linear fit for compressive versus flexural strength at high temperatures

Flexural strength	SFR-NSC-1	SFR-NSC-2	SFR-HSC-3	SFR-HSC-4
Fit for LOP	0.9682	0.9537	0.9779	0.9630
Fit for R3	0.9093	0.9537	0.0049	0.9531

This leads to the following design equations for predicting the flexural strength after exposure to elevated temperatures. Eq. (3) corresponds to NSC with fibre volume fraction of 0.15% (PF) and 0.25% (SF) and Eq. (4) corresponds to HSC with fibre volume fraction of 0.28% (PF) and 0.25% (SF). Because of the poor fit for SF with an aspect ratio of 46.7, these equations are based in the results from the SF with an aspect ratio of 85.7 (batches SF-NSC-2 and SF-HSC-4).

$$f_{ct,L,T} = 0.1276 \cdot f_{c,T} + 0.0954 \quad (3.a)$$

$$f_{ct,R3,T} = 0.0399 \cdot f_{c,T} - 0.0212 \quad (3.b)$$

$$f_{ct,L,T} = 0.0526 \cdot f_{c,T} - 0.1749 \quad (4.a)$$

$$f_{ct,R3,T} = 0.0366 \cdot f_{c,T} - 1.0168 \quad (4.b)$$

The ductility of the fibre reinforced concrete beams in the bending test according to EN 14651:2007+A1:2008 can be measured as the area below the curve of flexural strength versus crack mouth opening displacement (CMOD). Fig. 9 illustrates two examples of these curves: Fig. 9(a) corresponds to SF-HSC-4 at room temperature; Fig. 9(b) corresponds to SF-HSC-4 after exposure to 650 °C. In both cases, the mean curve for the three test specimens is included as well as the curves for the bi-directional 90% confidence interval.

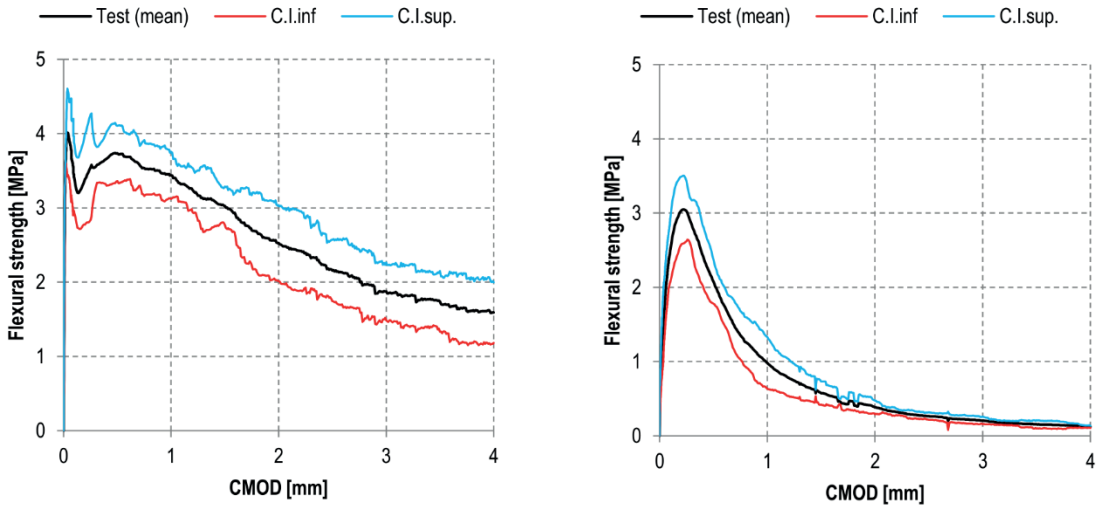


Figure 9. *Examples of flexural strength versus CMOD curves: SF-HSC-4 at room temperature (a); SF-HSC-4 after exposure to 650 °C (b).*

The area below these curves measures the energy absorbed by the fibre reinforced concrete 15×15×60 cm beams. Table 5 illustrates the energy for a CMOD of 2.5 mm that was attained by these four batches of fibre reinforced concrete.

Table 5. Energy absorbed in the bending test at a CMOD of 2.5 mm

Concrete batch	20 °C	450 °C	650 °C	825 °C
SF-NSC-1	9.13 J	5.80 J	5.74 J	2.18 J
SF-NSC-2	8.92 J	8.58 J	5.75 J	2.85 J
SF-HSC-3	16.8 J	15.8 J	10.3 J	10.7 J
SF-HSC-4	24.0 J	18.2 J	8.5 J	4.7 J

Fig. 10 represents the evolution at high temperatures of the energy absorbed by the standard specimens during the bending tests for the crack mouth opening displacement of 2.5 mm. In the case of NSC it can be observed a similar behaviour regardless of the steel fibre aspect ratio (length/diameter). However, in the case of HSC up to 450 °C, a higher aspect ratio allows for greater ductility. Unexpectedly, for higher temperatures higher aspect ratios seem to loose ductility, especially after exposure to 825 °C. This could be attributed to lower diameters being more prone to loose bond to concrete matrix due to oxidation [11], [19].

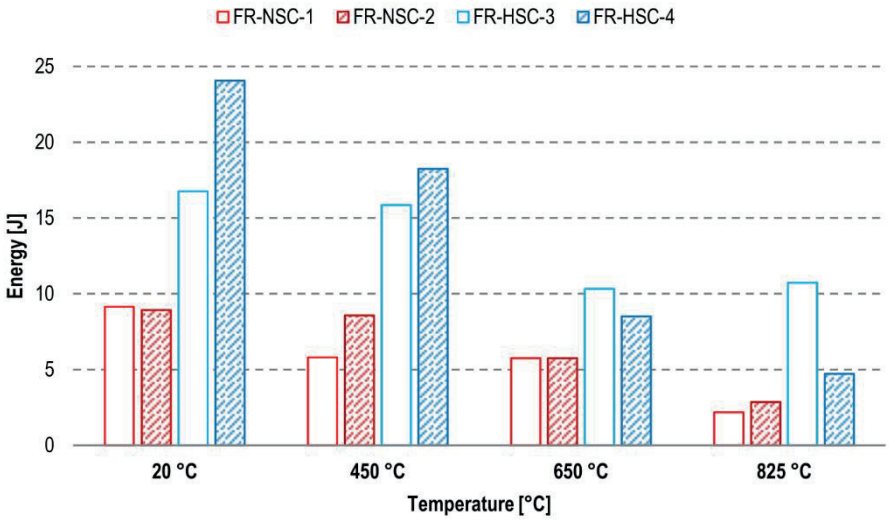


Figure 10. *Evolution of the bending test energy for a crack opening displacement of 2.5 mm after exposure to elevated temperatures.*

4. CONCLUSIONS

The current report showed an experimental methodology for the study of the behaviour of hybrid fibre reinforced normal and high strength concrete after being exposed to high temperatures. The effect of high temperature on the residual mechanical properties of hybrid fibre reinforced concretes is less severe than in steel fibre reinforced concretes. Polypropylene fibres proved appropriate for controlling the explosive spalling during heating processes. Despite using a total fibre volume content lower than in previous research background, the synergy of polypropylene and steel fibres contributed to similar evolution trends at high temperature.

Based on the experimental results, design equations have been proposed for predicting the compressive strength after cooling from high temperatures as well as the flexural strength.

The ductility of fibre reinforced concrete test-beams was also studied. The principal conclusion is that higher aspect ratio steel fibres with small diameters could be more prone to lose bond to the concrete matrix since they may be prone to oxidation. Therefore, whereas high aspect ratio steel fibres are more efficient at ambient temperature, they may not provide the same degree of ductility after exposure to elevated temperatures.

Therefore, this research should continue considering different fibre dosages, which could be compared with recent reports. Furthermore, the effect of fibre geometry and aspect ratio (length/diameter) on the residual properties at high temperatures should continue to be studied.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors want to acknowledge Mr. Gabriel Seguí Ramos for his indispensable collaboration in this research, as well as SIKA, Grupo Ferroatlántica, Aridur Hormigones S.L. and Prefabricados Saval Hermanos S.L.

REFERENCES

[1] D. R. Lankard, D. L. Birkimer, F. F. Fondriest, and M. J. Snyder, "Effects of moisture content on the structural properties of Portland cement concrete exposed to temperatures up to 500 °F," *ACI Spec. Publ.*, vol. 25, pp. 59–102, 1971.

[2] M. S. Abrams, "Compressive strength of concrete at temperatures of 1600 °F," *ACI Spec. Publ.*, vol. 25, pp. 33–58, 1971.

[3] S. Thelandersson, "Effect of high temperatures on tensile strength of concrete," *Nord. Betong*, vol. 2, pp. 1–28, 1972.

[4] Y. Anderberg and S. Thelandersson, "Stress and deformation characteristics of concrete at high temperatures - 2. Experimental investigation and material behaviour model.," 1976.

[5] C. Castillo and A. J. Durrani, "Effect of transient high temperature on high strength concrete," *ACI Mater. J.*, vol. 87, no. 1, pp. 47–53, 1987.

[6] S. Y. N. Chan, G. F. Peng, and J. K. W. Chan, "Comparison between high strength concrete and normal strength concrete subjected to high temperature," *Mater. Struct.*, vol. 29, no. 194, pp. 616–619, 1996.

[7] V. K. R. Kodur and M. A. Sultan, "Structural behaviour of high strength concrete columns exposed to fire," in *International Symposium on High Performance and Reactive Powder Concrete*, 1998, pp. 217–232.

[8] S. Y. N. Chan, G. F. Peng, and M. Anson, "Residual strength and pore structure of high-strength concrete and normal strength concrete after exposure to high temperatures," *Cem. Concr. Compos.*, vol. 21, no. 1, pp. 23–27, 1999.

[9] S. Y. N. Chan, G. F. Peng, and M. Anson, "Fire behavior of high-performance concrete made with silica fume at various moisture contents," *ACI Mater. J.*, vol. 96, no. 3, pp. 405–409, 1999.

[10] G. Sanjayan and L. J. Stocks, "Spalling of high-strength silica fume concrete in fire," *ACI Mater. J.*, vol. 90, no. 2, pp. 170–173, 1993.

[11] F. B. Varona, F. J. Baeza, S. Ivorra, and D. Bru, "Experimental analysis of the loss of bond between rebars and concrete exposed to high temperatures," *Dyna*, vol. 90, no. 1, pp. 78–86, 2015.

[12] A. N. Beard, "A theoretical model of major fire spread in a tunnel," *Fire Technol.*, vol. 42, no. 4, pp. 303–328, Oct. 2006.

[13] Y. Msaad and G. Bonnet, "Analyses of heated concrete spalling due to restrained thermal dilation: application to the 'Chunnel' Fire," *J. Eng. Mech.*, vol. 132, no. 10, pp. 1124–1132, Oct. 2006.

[14] C. J. Kirkland, "The fire in the Channel Tunnel," *Tunn. Undergr. Sp. Technol.*, vol. 17, no. 2, pp. 129–132, Apr. 2002.

[15] R. M. Faure and M. Karray, "Investigation of the concrete lining after the Mont Blanc Tunnel fire," *Struct. Eng. Int.*, vol. 17, no. 2, pp. 123–132, May 2007.

[16] L. T. Phan, "Pore pressure and explosive spalling in concrete," *Mater. Struct.*, vol. 41, no. 10, pp.

1623–1632, 2008.

[17] F. P. Cheng, V. K. R. Kodur, and T. C. Wang, "Stress-strain curves for high strength concrete at elevated temperatures," *J. Mater. Civ. Eng.*, vol. 16, no. 1, pp. 84–90, 2004.

[18] A. Lau and M. Anson, "Effect of high temperatures on high performance steel fibre reinforced concrete," *Cem. Concr. Res.*, vol. 36, no. 9, pp. 1698–1707, 2006.

[19] Y. Ding, C. Azevedo, J. B. Aguiar, and S. Jalali, "Study on residual behaviour and flexural toughness of fibre cocktail reinforced self compacting high performance concrete after exposure to high temperature," *Constr. Build. Mater.*, vol. 26, no. 1, pp. 21–31, 2012.

[20] P. Kalifa, G. Chéné, and C. Gallé, "High-temperature behaviour of HPC with polypropylene fibres," *Cem. Concr. Res.*, vol. 31, no. 10, pp. 1487–1499, Oct. 2001.

[21] C. S. Poon, Z. H. Shui, and L. Lam, "Compressive behavior of fiber reinforced high-performance concrete subjected to elevated temperatures," *Cem. Concr. Res.*, vol. 34, no. 12, pp. 2215–2222, 2004.

[22] European Committee for Standarisation, *Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-2: General rules - Structural fire design*. Madrid: AENOR, 2011.

[23] A. E. Ahmed, A. H. Al-Shaikh, and T. I. Arafat, "Residual compressive and bond strengths of limestone aggregate concrete subjected to elevated temperatures," *Mag. Concr. Res.*, vol. 44, no. 159, pp. 117–125, 1992.

[24] G. F. Peng, W. W. Yang, J. Zhao, Y. F. Liu, S. H. Bian, and L. H. Zhao, "Explosive spalling and residual mechanical properties of fiber-toughened high-performance concrete subjected to high temperatures," *Cem. Concr. Res.*, vol. 36, no. 4, pp. 723–727, 2006.

[25] G. F. Peng, S. H. Bian, Z. Q. Guo, J. Zhao, X. L. Peng, and Y. C. Jiang, "Effect of thermal shock due to rapid cooling on residual mechanical properties of fiber concrete exposed to high temperatures," *Constr. Build. Mater.*, vol. 22, no. 5, pp. 948–955, 2008.

[26] Z. P. Bazant and M. F. Kaplan, *Concrete at High Temperatures: Material Properties and Mathematical Models*. Harlow, Essex: Longman Group, Ltd., 1996.

[27] Antonius, A. Widhianto, D. Darmayadi, and G. D. Asfari, "Fire resistance of normal and high-strength concrete with contains of steel fibre," *Asian J. Civ. Eng.*, vol. 15, no. 5, pp. 655–669, 2014.

4th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering
CMMoST 2017
29 nov-01 dec 2017 Madrid SPAIN

SEISMIC RESPONSE OF A THREE-STOREY BUILDING WITH CROSS-LAMINATED TIMBER PANELS: LESSONS LEARNED FROM NUMERICAL SIMULATION

González Rodrigo, Beatriz[1], Fraile de Lerma, Alberto[2] y Mosquera Feijoo, Juan Carlos[3]

[1]Depto. Ingeniería Civil: Construcciones, Infraestructuras y Transportes. ETSI Civil. Universidad Politécnica de Madrid (España). beatriz.gonzalez.rodrigo@upm.es
[2]Depto. Ingeniería Mecánica. ETSI Industriales. Universidad Politécnica de Madrid (España). alberto.fraile@upm.es
[3]Depto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. ETSI Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid (España). juancarlos.mosquera@upm.es

ABSTRACT

Structural systems with cross-laminated timber (CLT) panels present good ductility and capacity of dissipation of energy, related to their metallic connections. This study validates a linear numerical model of a multi-storey CLT structure in response to seismic actions. CLT panel is considered as an orthotropic material with properties equivalent to those of its layers. Angle brackets are simulated from the stiffness of their fasteners. Besides, the hold-downs are represented by the rotational stiffness created by rotating the panel with a connections working at one end and the wood being compressed in the other.

The results obtained from the simulation are very close those of the prototype. The displacements caused by three earthquakes, scaled to PGA = 0.15g, are very close to laboratory tests. The numerical procedure presented for the linear dynamic analysis of CLT buildings is valid whenever the seismic load maintains the structure within the elastic range.

Keywords: Connections, ductility, numerical models, CLT

1. INTRODUCCIÓN

1.1. El sistema constructivo

El sistema constructivo con paneles estructurales de madera contralaminada (Cross laminated timber, CLT o X-lam) ha tenido un gran desarrollo reciente tras su diseño inicial en la década de los 90. La edificación con madera estructural se enfrenta al reto de la construcción en altura a un precio que le permita competir con el acero y hormigón. La población mundial está creciendo y se prevé que se duplique en las ciudades para el año 2050. Por lo tanto, se requiere desarrollar edificación en altura sostenible para dar cabida al creciente número de ciudadanos y mantener los precios de las viviendas en un límite razonable. Los sistemas constructivos con madera han experimentado avances considerables en el diseño y desarrollo de materiales que permiten una edificación con buenas prestaciones ante fuego y acciones horizontales dinámicas. La experiencia europea demuestra que la construcción con CLT puede ser competitiva, sobre todo en edificios de media altura. La facilidad de

manejo durante la construcción y su alto grado de prefabricación aceleran la ejecución de la obra. El bajo peso del producto permite cimentaciones más sencillas y puestas en obras menos costosas.

El sistema constructivo usual es del tipo plataforma (Fig. 1) y puede ser considerado como una estructura en caja en la cual muros y forjados están formados por paneles de madera sólidos con alta resistencia y rigidez en el plano y conectados, unos con otros, mediante uniones metálicas. Cada fachada puede estar formada por un solo panel de CLT, siempre que su longitud no sea superior a la máxima transportable, o compuesta de un número de paneles con una longitud media de 2.5 m para facilitar y reducir los costes del transporte. En este último caso, las conexiones entre los paneles de pared se suelen realizar: a) mediante la interposición de una tablilla, normalmente microlaminada, que se puede insertar en ranuras cortadas dentro de la pared o en una de sus caras y se une a los paneles mediante clavijas; b) mediante una conexión de unión tipo "media madera". Los diafragmas horizontales consisten en paneles de madera CLT conectados a través de las juntas horizontales sobre las que se coloca una tablilla que va unida a los paneles mediante clavijas mecánicas. Los paneles de forjado se apoyan sobre los de pared y están conectados a ellos, por lo general, con tornillos o herrajes de tipo escuadras. En el diseño de edificios sometidos a acciones accidentales dinámicas, la unión entre sí de paneles de forjado y entre paneles de forjado con los paneles del muro inferior es calculada, usualmente, considerando el coeficiente de sobrerresistencia (γ_{SR}) para impedir la rotura frágil de las clavijas. Las paredes superiores se apoyan sobre los paneles de forjado, y están conectados al forjado inferior utilizando conectores metálicos de tipo angular. Estos herrajes se agrupan, según su función, en escuadras y herrajes de tracción o de tipo *hold down* (Fig. 1). Los primeros tienen la finalidad de evitar el deslizamiento y los últimos el levantamiento.

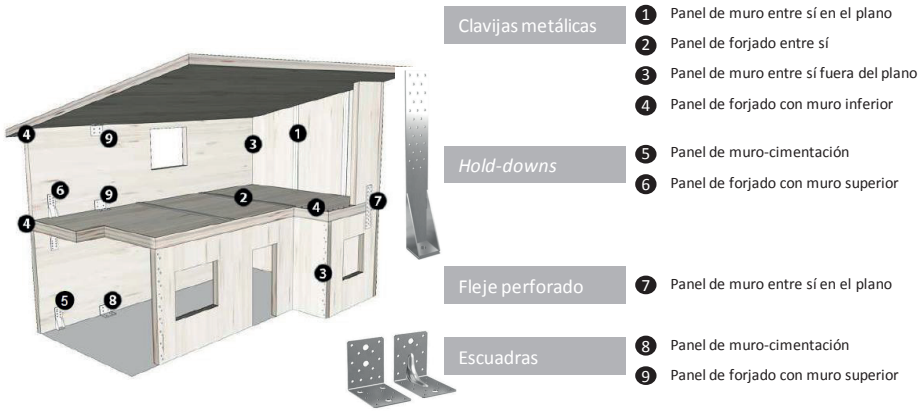


Figura 1. *Construction system with contralaminated panels and joining elements*

1.2. Diseño de una estructura considerando las cargas dinámicas

El diseño de una estructura con CLT debe conjugar de forma apropiada resistencia y disipación de energía, que puede ser asegurada sólo si se consigue un comportamiento dúctil [1]. Los elementos de conexión muestran una buena ductilidad y capacidad de disipación gracias al fenómeno simultáneo de plastificación del acero de las clavijas, la resistencia al aplastamiento de la madera y la resistencia al

arranque del medio de fijación. Para comprobar el tipo de fallo se puede usar las ecuaciones de Johanssen [2]. Los modos de fallo que no presentan formación de rótulas plásticas son considerados como frágiles y deben ser evitados.

Los mecanismos de fallo de grandes paneles de madera sometidos a cortante se han caracterizado en varios ensayos [3] en los que se somete a los elementos de pared a cargas cíclicas con el fin de poder predecir modelos analíticos. Partiendo de la base que los elementos de muro de CLT tienen un rigidez significativamente alta en el plano en comparación con sistemas de entramado ligero de madera, se considera que la deformación más importante que se presenta es debida al deslizamiento y al levantamiento del panel [4], [5], [6], [3], [7], [8] y [9], mientras que la deformación debida al cortante y flexión es significativamente baja.

Los resultados de las pruebas cuasi-estáticas en los paneles de fachada de CLT muestran que la disposición de las conexiones, su diseño [4] y la fuerza de fricción provocada por el muro con el elemento de forjado [10], [11], [12] tienen una fuerte influencia en el comportamiento general de la pared. Un aspecto crítico en el análisis estructural es el modelo utilizado para describir e idealizar el comportamiento de las conexiones. En este proceso se requiere: a) idealizar la respuesta monótona (curva envolvente) y b) idealizar la respuesta cíclica (histéresis).

El objetivo de este estudio es aplicar y validar un modelo numérico lineal de una estructura de tres plantas elaborada con paneles CLT y herrajes metálicos ante acciones sísmicas. Con ello se elaboran recomendaciones para la simulación numérica de este tipo de estructuras.

2. METODOLOGÍA EMPLEADA PARA LA SIMULACIÓN

2.1. Edificio simulado

Se procede a simular el comportamiento de un edificio residencial de tres plantas sin sótano y levantado sobre una losa de hormigón reforzado sin juntas. Las plantas del edificio son simétricas y tienen un tamaño de 6.935 x 6.935 metros y una altura máxima de 10.26 m. La totalidad de los elementos estructurales de soporte de cargas verticales son paneles de CLT que son miembros sísmicos primarios ya que se emplean para transmitir acciones horizontales. Para el estudio se han empleado como elementos de muros y de cubiertas paneles de CLT de 5 láminas (17-17-17-17-17) con 85 mm de espesor y para los forjados paneles de 6 láminas (27-17-27-27-17-27) con 142 mm. En este segundo caso, las láminas de espesor de 17 mm se sitúan en sentido transversal. Todas las láminas son de madera de clase resistente C24.

Para la calibración y validación del modelo se dispone de los datos de los ensayos realizados de un prototipo de edificio similar ante cargas sísmicas horizontales direccionadas en el *National Research Institute for Earth Science and Disaster Prevention* (NIED-Japón 2006) en el seno del proyecto SOFIE [13](Fig. 2). La simulación numérica se realiza en el programa de elementos finitos RFEM 5.08 [4] de la empresa Dlubal y sus módulos adicionales RF-Laminated y RF-Dynam Pro.

La combinación de cargas y la rigidez en los nodos obtenida del valor de los herrajes se establecen mediante hipótesis de partida. Se analizan los periodos naturales de la estructura y, si estos se corresponden con los de la estructura original. Considerando el amortiguamiento de Rayleight se

procederá a determinar, mediante el método directo en el dominio del tiempo, los desplazamientos del modelo en los puntos de control cuando se le somete a la acción sísmica. Los eventos analizados, normalizados a PGA=0.15g son Umbro-Marchigiano (estación de Nocera Umbra), El Centro (estación de Imperial Valley) y Kobe (estación JMA).

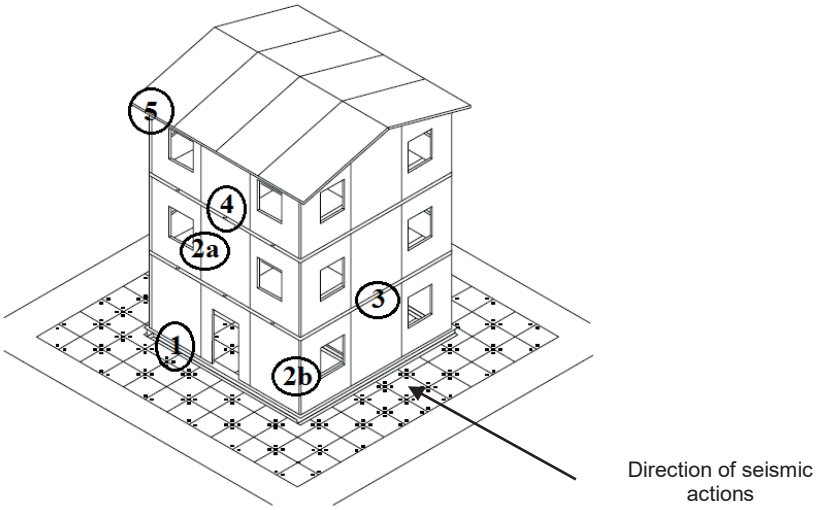


Figura 2. *Three-storey CLT prototype tested in the SOFIE PROJECT and type of connection between panels* [6]

2.2. Hipótesis de partida

Para modelizar la estructura se parte de una serie de hipótesis:

- Se considera que la acción sísmica está actuando en la dirección indicada en la Fig. 2, al ser el eje donde se aplicó la acción dinámica en los ensayos de referencia.
- Los paneles estructurales de madera son simulados mediante elementos finitos cuadrangulares de cuatro nodos con propiedades iguales a un panel ortótropo con características equivalentes al tablero CLT de referencia. Los paneles se mallan en elementos de 0.5 x 0.5 m.
- Al igual que modelos previos realizados sobre el mismo edificio se consideran rígidas las siguientes uniones:
    a. conexión entre muros perpendiculares (Fig. 2, unión número 2b).
    b. conexión entre los forjados o cubiertas y los muros inferiores (Fig. 2, unión número 3 y 5)
    c. conexión entre los elementos de forjado (Fig. 2, unión número 2)
    d. conexión entre los elementos de cubierta
- La rigidez de las uniones entre muros en el plano (Fig. 2, unión número 2a) y paneles de forjado con paneles de muro superior (Fig. 2, unión número 4) será simulada por el herraje metálico y las clavijas sobre la estructura. Se asume únicamente la rigidez a cortante de la escuadra y el aporte a tracción del *hold down* y a aplastamiento del panel del muro y de suelo. En la *Tabla 1* se representan el coeficiente de deslizamiento y rigidez de cada uno de los herrajes empleados en la estructura.

2.3. Determinación de la rigidez de las uniones entre elementos estructurales

Conociendo el número de herrajes necesarios se puede determinar el módulo de deslizamiento en el plano horizontal, en el plano vertical (entre muros) y la rigidez rotacional del tablero que simula el comportamiento del muro ante el levantamiento.

Encuentro entre forjado-muro superior.

- La rigidez horizontal de la unión (K_H). Para la simulación se considerará, únicamente, la aportación de los herrajes de escuadras. La rigidez horizontal de la conexión se calcula basándose en el módulo de deslizamiento en estado límite de servicio de cada elemento de fijación.
- La rigidez rotacional (K_φ). Se calcula considerando que es el resultado de un momento de flexión que afecta de forma perpendicular al eje de la pared mediante la combinación de la curvatura de la pared con la flexibilidad del anclaje (*hold-down*) y la deformación a la compresión del contacto "madera-hormigón" o "madera-madera". Para su obtención se emplea el método de Shickhofer & Ringhofer [14].

Para la simulación, la rigidez horizontal y rotacional por unidad de superficie será introducida en los nodos de unión entre el elemento de muro y forjado.

Encuentro entre dos paneles.

La rigidez vertical (K_V) de la conexión se calcula basada en el módulo de deslizamiento en estado límite de servicio de cada elemento de fijación del panel de conexión de la madera. La articulación entre paneles de contralaminado de muro en un mismo plano se simula considerando la rigidez vertical provocada en el encuentro. La rigidez vertical por unidad de longitud es introducida en el modelo como característica de los nodos de unión de los elementos de muro.

2.4. Obtención de la fuerza de fricción

La fuerza de fricción se opone al desplazamiento de los muros permitiendo el empleo de menos elementos de unión a cortante. Se considera la fuerza de fricción entre el panel de forjado y el del muro superior. De acuerdo a la bibliografía existente se tomará como coeficiente de fricción 0.7 entre panel de madera y losa de hormigón y de 0.4 entre paneles de madera [10]. Para determinar la rigidez provocada por la fuerza de rozamiento Follesa *et al.* [12] calculan el límite elástico del desplazamiento dividiendo la resistencia característica a cortante de la conexión ($R_{c,k}$) entre el coeficiente de deslizamiento obtenido a partir de la EN 1995 [15]. Para determinar el valor de $R_{c,k}$, en ausencia de ensayos de laboratorio, Follesa *et al*. [12] proponen obtenerlo a partir de las ecuaciones de Uibel & Blass [16][17]. De esta forma, el desplazamiento en su límite elástico tiene un valor Eq (6):

$$u_y = \frac{R_{c,k}}{2\rho_m^{1.5} d_f/23} = \frac{2370}{2994} = 0.79 \text{ mm} \quad (6)$$

Y la rigidez provocada por la fuerza de fricción se obtiene (Eq. 7):

$$K_f = \frac{F_f}{u_y} \quad (7)$$

Para obtener la rigidez horizontal y vertical total de la unión debe considerarse el valor de rigidez por fricción.

Tabla 1.Types of connections in the prototype and their mechanical properties

TIPO DE ELEMENTO ESTRUCTURAL		Tipo de conexión horizontal	Tipo de conexión vertical	Resistencia tracción diseño(kN)(1)	Resistencia a cortante de diseño (kN)(1)	Módulo de deslizamiento Kser(MN/m)
HOLD DOWN	**WHT340** (Unión de forjado y muro lateral en el piso 2 y 3)	1 perno clase 4.6 de Φ 16mm	14 clavos tipo anker de Φ 4x60 mm	36.5		7.86(2)
	WHT440 (Unión de forjado y muro lateral en el piso 1)	1 perno clase 4.6 de Φ 16mm	18 clavos tipo anker de Φ 4x60 mm	46.9		11.91(3)
ESCUADRAS	**WB90** (Unión de forjado y muro lateral en el piso 2 y 3)	8 clavos tipo anker de Φ 4x60 mm	8 clavos tipo anker de Φ 4x60 mm		5.8	11.98 (4)
	WVS90110 (Unión de forjado y muro lateral en el piso 1)	1 perno clase 4.6 de φ 16mm	11 clavos tipo anker de φ4x60 mm		11.5	32.93 (5)

(1) Valores obtenidos a partir de ensayos previos

(2) Obtenido a partir de UNE EN1995 (ap.7.1) (Eq. (1)) a partir de las Eq. (2) y Eq. (3)

$$K_{ser} = \frac{1}{\frac{1}{K_{ser,1}} + \frac{1}{K_{ser,2}}} \quad (1)$$

$$K_{ser,1} = n\frac{1}{30} \cdot \rho_m^{1.5} d^{0.8} \quad (2)$$

$$K_{ser,2} = 2E_{90.mean} \cdot A_{90}/h \quad (3)$$

n= número de clavijas en la pared vertical; d= diámetro de la clavija en la pared vertical

ρ_m= la densidad media del contralaminado (350 kg/m^3); h= espesor del panel de horizontal del CLT

$E_{90.mean}$.= Módulo de elasticidad perpendicular a la fibra del CLT

A_{90} Área bajo la zona de compresión perpendicular a las fibras (área del herraje en su zona horizontal)

(3) Obtenido a partir de la Eq. (1)

(4) $K_{ser} = n\,\rho_m^{1.5} d/23$ [18] (4)

(5) $K_{ser} = n\,2 \cdot \rho_m^{1.5} d/23$ (5)

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

Los resultados de la rigidez horizontal y vertical obtenidos en el modelo se presentan en la *Tabla 2* y han sido calculados conforme a lo introducido en el Apartado 2.3 añadiendo la rigidez provocada por la fuerza de fricción

Tabla 2- Values of slip modulus K_{ser} between wall and panel and between panels in the same plane considering the connections used in the prototype 1: 1 of the SOFIE project and the friction force

Tipo de muros (Fig. 3)	Longitud de la pared (m)	Altura del panel (m)	Número de escuadra	$K_{escuadras}$ (kN/m)	K_f (kN/m)	K_H/m (kN/m^2)	K_V (kN/m)
F1x-1-1	6.94	2.95	6	197597	237690	62721	10479
F1x-2-1	6.94	2.95	6	197597	237690	62721	10479
F1Y-1-1	2.29	2.95	3	98798	237690	146938	
F1Y-1-2	2.29	2.95	3	98798	237690	146938	
F1Y-2-1	2.34	2.95	3	98798	237690	143798	
F1Y-2-2	2.34	2.95	3	98798	237690	143798	
F1Y-3-1	2.29	2.95	3	98798	237690	146938	
F1Y-3-2	2.29	2.95	3	98798	237690	146938	
F2x-1-1	6.94	2.95	4	47902	146461	28006	7485
F2x-2-1	6.94	2.95	4	47902	146461	28006	7485
F2Y-1-1	6.94	2.95	4	47902	146461	28006	7485
F2Y-2-1	2.34	2.95	2	23951	146461	72826	
F2Y-2-2	2.34	2.95	2	23951	146461	72826	
F2Y-3-1	6.94	2.95	4	47902	146461	28006	7485
F3x-1-1	6.94	3.4	3	35927	68324	15022	4491
F3x-2-1	6.94	3.4	3	35927	68324	15022	4491
F3Y-1-1	6.94	2.75	3	35927	68324	15022	4491
F3Y-2-1	2.34	3.7	2	23951	68324	39434	
F3Y-2-2	2.34	3.7	2	23951	68324	39434	
F3Y-3-1	6.94	2.75	3	35927	68324	15022	4491

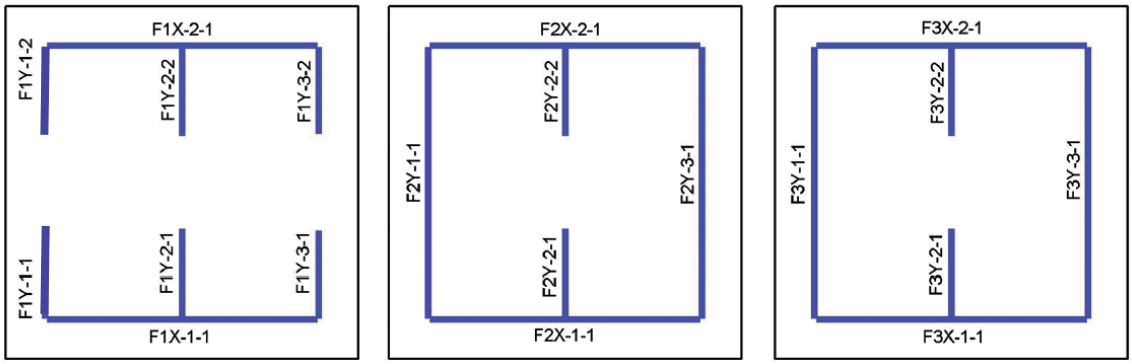


Figura 3- *Identification of first, second and third floor wall panels* [12]

Se ha procedido a determinar los periodos naturales y modos de vibración del modelo obteniendo los valores ($T_{1,x}$ =0.169s). La representación gráfica del modo 1 se presenta en la Fig. 4. Este modo moviliza el 81% de la masa. El periodo natural en el eje X es un 2.4% superior al del modelo ensayado[19]. Siendo mejor el ajuste (4,9%,) al obtenido Rinaldin & Fragiacomo [20] en una simulación no lineal. Se considera, por tanto, que el modelo propuesto está próximo al periodo del prototipo.

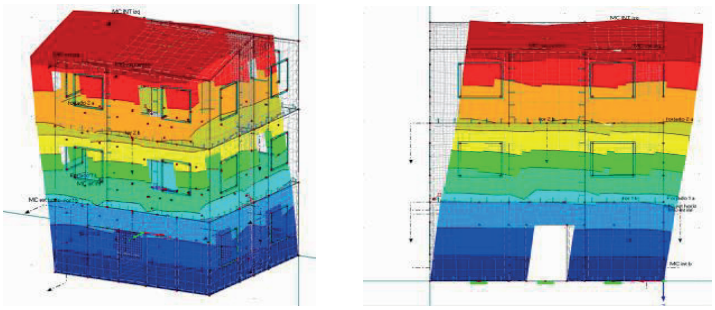


Figura 4- *Representation of the first vibration mode for the three storey prototype* [12]

Los máximos desplazamientos y el cortante en la base del modelo analizado se contrastaron con los resultados de una modelización previa llevada a cabo por Follesa *et al.* [12] y con los resultados obtenidos de laboratorio (*Tabla 3*).

Tabla 3- Maximum displacements and shear force at the base obtained in the model in comparison to previous models and laboratory tests

			Máximo Cortante en la base (kN)	***Máximos desplazamientos relativos (mm)***		
				Piso 1	***Piso 2***	***Piso 3***
Sismo de Nocera-Umbra 26/09/97 Escalado PGA=0.15 g	Ensayo prototipo 1:1 [19]		156.08	1.5	3.62	5.08
	Valores obtenidos por Follesa et al [12]		165.9	1.55	3.62	5.41
	MODELO NUMÉRICO	Análisis dinámico directo	255.37	1.4	3.6	5.4
		% de diferencia	63.61%	-6.67%	-0.55%	6.30%
Sismo de El Centro 18/05/40 Escalado PGA=0.15 g	Ensayo prototipo 1:1 [19]		129.1	1.15	2.80	3.90
	Valores obtenidos por Follesa et al [12]		123.3	1.15	2.74	4.05
	MODELO NUMÉRICO	Análisis dinámico directo	210.01	0.9	2.3	3.5
		% de diferencia	63.61%	-21.7%	-17.9%	-10.3%
Sismo de Kobe 16/01/95 Escalado PGA=0.15 g	Ensayo prototipo 1:1 [19]		82.3	0.49	1.29	1.54
	Valores obtenidos por Follesa et al [12]		87.6	0.76	1.75	2.54
	MODELO NUMÉRICO	Análisis dinámico directo	115.18	0.6	1.2	1.7
		% de diferencia	40.0%	22.4%%	-7.0%	10.4%

4. CONCLUSIONES

El modelo propuesto para simular el edificio se aproxima a los periodos naturales del prototipo ensayado en laboratorio, por lo tanto, es adecuado para determinar la rigidez del sistema. Este aspecto es crucial para dimensionar correctamente las paredes que trabajan a cortante. Por lo tanto, se consideran válidas las hipótesis de partida: a) el panel de CLT puede simularse a partir de un material ortótropo equivalente a las características de cada lámina que lo componen y el mallado cuadrangular de 0.5 m de lado es suficiente para aproximar su comportamiento; b) los herrajes a cortante (escuadras) pueden ser simulados a partir de la rigidez horizontal que aportan al sistema, pudiendo despreciarse su rigidez vertical; c) la no linealidad de comportamiento del panel al elevarse puede ser tratada a partir de la rigidez rotacional equivalente que aporta al sistema (se puede despreciar, igualmente, la rigidez horizontal del herraje de tipo *hold down)* y d) las uniones entre elementos muro inferior-forjado, forjado-cubierta y paneles de forjado entre sí se consideran rígidas.

La fricción entre el forjado y muro juega un papel importante en el comportamiento de la estructura, siendo necesario introducir la rigidez que aporta dicha fricción en los nodos de unión forjado-muro. Despreciar el efecto de fricción puede llevar a realizar estructuras mucho más rígidas de lo deseado o a incorporar más herrajes que los necesarios. Los coeficientes de fricción empleados (0.4 para el

contacto entre madera y 0.7 para hormigón-madera) han permitido obtener buenas aproximaciones. La tendencia actual es colocar una banda acústica en las uniones entre elementos, este aislante disminuye la fricción y por lo tanto exige un mayor número de elementos de unión metálica.

Los resultados obtenidos demuestran que los procedimientos numéricos presentados para el análisis dinámico lineal de edificios CLT son válidos siempre que la carga sísmica mantenga a la estructura dentro del rango elástico. Por lo tanto, es un sistema adecuado para determinar el comportamiento de las estructuras ante los sismos más frecuentes.

Este modelo no es válido cuando las cargas sísmicas llevan a la estructura fuera del rango elástico. Para simular el comportamiento de la estructura ante este tipo de acción se requiere un análisis dinámico no lineal consistente en reproducir el comportamiento histerético de las uniones mediante muelles y/o amortiguadores que permitan simular la evolución de la estructura ante un terremoto y analizar zonas de fallo por fragilidad.

REFERENCIAS

[1] Follesa, M., Fragiacomo, M. and Lauriola, M. P. (2011). A proposal for revision of the current timber part (Section 8) of Eurocode 8 Part" *Int. Counc. Res. Innov. Build. Construction*, *W18* vol. 1, August. 1–13,

[2] Johansen, K. W. (1949). Theory of Timber Connections*Int. Assoc. Bridg. Struct. Eng.*, 9, *249–262*.

[3] Gavric, I., Fragiacomo, M. and Ceccotti, A. (2015).Cyclic behaviour of typical metal connectors for cross-laminated (CLT) structures. *Materials and Structures*. *Springer Netherlands, 48, 1841–1857,*

[4] Ceccotti, A., Follesa, M., Kawai, N., Lauriola, M. P., Minowa, C., Sandhaas, C. and Yasumura M. (2006). Which seismic behaviour factor for multi-storey buildings made of cross-laminated wooden panels *Proceedings of 39th CIB W18 Meeting, paper*, *1–8.*

[5] Dujic, B. and Aicher, S. (2006) Testing of Wooden Wall Panels Applying Realistic Boundary Conditions. In. *9th World Conf. Timber Eng. Portl. OR USA*

[6] Gavric, I. (2012). Seismic Behaviour of Cross-Laminated Timber Buildings. (PhD Thesis) Trieste, Univerità di Trieste.

[7] Popovski, M., Schneider, J. and Schweinsteiger, M. (2010). Lateral Load Resistance of Cross-Laminated Wood Panels in *World Conference on Timber Engineering*.

[8] Seim, W., Hummel, J. Vogt, T., and Schick, M. (2013). Guideline Seismic Design of Timber Structures, p 23. Universitat de Kassel.

[9] Gavric, I., Fragiacomo, M., and Ceccotti, A. (2015) Cyclic Behavior of CLT Wall Systems : Experimental Tests and Analytical Prediction Models. *Journal of Structural Engineering*, 5, 1–14.

[10] Dujic, B., Strus, K., Zarnic, R., and Ceccotti, A. (2010). Prediction of dynamic response of a 7-storey massive XLam wooden building tested on a shaking table. *11th World Conference on*

Timber Engineering 2010, WCTE 2010, vol. 4, no. March 2016. (pp. 3450–3457), Miyazaki, Japan

[11] Sustersic, I. and Dujic, B.(2012). Simplified cross-laminated timber wall modelling for linear-elastic seismic analysis. *Int. Counc. Res. Innov. Build. Construction*, *W18*, vol. 1, August. 1–7.

[12] Follesa, M., Christovasilis, I. P., Vassallo, D., Fragiacomo, M., and Ceccotti, A. (2013). Seismic design of multi-storey cross laminated timber buildings according to Eurocode 8. *Ingegneria Sismica*, 4, 27–42.

[13] IVALSA-CNR Trees and Timber Institute., "SOFIE Project – new architecture with wood, http://www.progettosofie.it

[14] Shickhofer, G., and Ringhofer, A. (2012). The seismic behaviour of buildings erected in Solid Timber Construction Seismic design according to EN 1998 for a 5-storey reference building in CLT (report) Graz.

[15] CEN European Committee for Standardization. (2006). Design of timber structures—Part 1-1: General—Common rules and rules for buildings. UNE-EN 1995-1-1." Brussels, Belgium..

[16] Uibel, T. and Blaß, H. J. (2006). Load carrying capacity of joints with dowel type fasteners in solid wood panels. *Int. Counc. Res. Innov. Build. Construction*, vol. 18, August, 1–11.

[17] Uibel, T. and Blaß, H. J. (2007). Edge joints with dowel type fasteners in cross laminated timber. *Int. Counc. Res. Innov. Build. Constr. Work. Comm. W18 - Timber Struct.*, August, 2007.

[18] Ceccotti, A., Follesa, M., Lauriola, M. P., and Sandhaas C. (2015) Sofie Project – Test Results on the Lateral Resistance of Cross-Laminated Wooden Panels. In *First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*, July, (pp. 1–10).

[19] Ceccotti, A. (2008). New technologies for construction of medium-rise buildings in seismic regions: The XLAM case. *Structural Engineering International: Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, vol. 18, 2, 156–165.

[20] Rinaldin, G. and Fragiacomo M.(2016). Non-linear simulation of shaking-table tests on 3- and 7-storey X-Lam timber buildings. *Engineering Structures,113,133-148.*

UPDATING MODELS OF FINITE ELEMENTS BY MODAL OPERATIONAL ANALYSIS AND GENETIC ALGORITHMS. APPLICATION TO ARCHITECTURAL HERITAGE BUILT

Estefanía A. Chaves[1], Pablo Pachón[2], Víctor Compán[3], J. Ramón Baeza[4]

[1]Gerencia de ingeniería y Edificación, Departamento de Estructuras. Tragsatec (España). achaves1.ext@tragsa.es

[2]Dpto. de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno. Universidad de Sevilla (España). ppachon@us.es

[3]Dpto. de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno. Universidad de Sevilla (España). compan@us.es

[4]Dpto. de Construcciones Arquitectónicas II. Universidad de Sevilla (España). jbaeza@us.es

ABSTRACT

The use of Operational Modal Analysis is establishing as an acceptable tool to estimate the dynamic properties of heritage buildings as a non-destructive technique. Through its application, mechanical properties of structural elements, as stiffness or mass, can be obtained with great accuracy. The information obtained can be used to update finite element models, however this process is complicated due to presently it is made manually. This work wants to develop a technique which expects improve the effort and the time invert in this process.

The genetic algorithms are going to be used to update tow finite element models of tow patrimonial buildings, the Pavilion of Charles V and the San Jeronimo Monastery both located in Seville, in which variables like elasticity module or boundary conditions are going to be updating in order to have a real behaviour model to carry out the structural assessment of the buildings.

Keywords: OMA, FEM, updating, algorithms, heritage

1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día la preservación del patrimonio arquitectónico es una cuestión de relevante interés en nuestra sociedad, por lo que es imprescindible que el estado de sus estructuras sea óptimo. Para ello hay que realizar análisis estructurales adecuados y así poder contar con información fiable que nos ayude a establecer los distintos planes de conservación o rehabilitación [1]. El estudio de este tipo de edificaciones presenta un gran desafío debido a que conlleva el análisis de numerosas variables, las cuales presentan un elevado grado de incertidumbre [2].

La importancia de estas edificaciones, y el estado en el que algunas se encuentran, hace inviable el uso de técnicas invasivas para llevar a cabo el análisis estructural. Actualmente se está desarrollando una técnica basada en el empleo de la respuesta dinámica que presenta la estructura ante la vibración ambiental. Hablamos del análisis modal operacional [03, cap. 6], una técnica no destructiva mediante la que obtenemos las propiedades dinámicas reales de la estructura, las cuales dependen de parámetros como la masa, la rigidez y la capacidad de disipación de energía.

Hoy en día existen numerosas aplicaciones para esta técnica dentro del campo de las estructuras. Una de las más importantes es la realización de modelos numéricos en base a la información obtenida con este método. En este caso se va a trabajar con algoritmos de tipo genético [4] para la optimización del error entre los valores reales y los valores numéricos.

Para aplicar la metodología se han elegido dos edificios de gran valor patrimonial con peculiaridades concretas que los hacen interesantes para este tipo de estudio. En primer lugar, contamos con el Cenador de Carlos V [5], que se encuentra ubicado en el Alcázar de Sevilla y se caracteriza por ser un edificio exento que está constituido por elementos con propiedades dinámicas muy diferentes.

Por otro lado, vamos a trabajar con el claustro del Monasterio de San Jerónimo [6], ubicado también en Sevilla. De este edificio se ha tomado un fragmento de una de las cuatro crujías que forman parte del claustro. En este caso contaremos con una pieza monolítica donde las condiciones de contorno serán el objeto principal de análisis.

2. METODOLOGÍA

2.1. Modelo de elementos finitos

Una vez analizado constructivamente el edificio caso de estudio se desarrolla el modelo numérico de elementos finitos. Para ello se modeliza la geometría y los volúmenes según los diferentes materiales y se introduce en el programa ICEM donde se realiza la malla [7].

2.2. Análisis modal operacional

2.2.1. Planificación de la campaña experimental

Una buena práctica es realizar un primer análisis del comportamiento dinámico de la estructura para obtener información sobre las formas modales y cuáles son los puntos que aportarán más información en la medición. En base a ellos se definen los puntos a medir y cuáles son los puntos de referencia más adecuados para poder unir las diversas mediciones.

2.2.2. Toma de datos

El equipo de medición que se ha empleado está compuesto por un sistema de adquisición de datos, modelo Granite de doce canales, de la compañía Kinemetrics, y por acelerómetros de fuerza balanceada caracterizados por poseer un sistema de masa-resorte que, bajo excitación, transforman la aceleración en una señal diferencial eléctrica proporcional.

Un parámetro importante que definir es la duración de cada medida ya que de ello depende obtener información suficiente y que esta sea fiable. Para la realización de las campañas de nuestros casos de estudio el tiempo definido para cada medición se estima suficiente en 12 minutos [8].

2.2.3. Tratamiento de datos

Los datos obtenidos se han de analizar y filtrar, en este caso se ha programado este proceso con Matlab, para obtenerlo de manera más automática. Lo datos tratados se analizan con Artemis, que es el

programa que usamos para la identificación modal. Este programa trae implementado varios métodos, en nuestro caso aplicaremos los dos que presentan resultados más fiables y que actualmente son los más destacados en este campo de la investigación para el rango de frecuencias en el que trabajamos. En primer lugar, vamos a utilizar el método de descomposición mejorada en el dominio de la frecuencia, EFDD [9]. Este establece los parámetros modales mediante la aplicación de la transformada de Fourier. En este caso el programa analiza los picos de la gráfica, ya que estos son los que nos darán los valores de las frecuencias de cada modo. Por otro lado, tenemos el método de identificación en el subespacio estocástico (SSI) [10] que se diferencia del anterior porque se realiza la identificación en el dominio del tiempo.

La validación de estos métodos se realiza mediante el Modal Assurance Criterion (MAC) Eq. (1), proceso con el que se comparan los desplazamientos modales que identifican los dos modos, de manera que si la correlación es perfecta obtendremos un valor 1, mientras que, si no existe correlación, cosa que ocurre cuando los desplazamientos son perpendiculares, el valor es cero.

$$MAC\ (\rho_a, \rho_b) = \left\{ \frac{(\rho_a^t \rho_b)^2}{(\rho_a^t \rho_a)(\rho_b^t \rho_b)} \right\} \quad (1)$$

Tras estos procedimientos tendremos ya la información modal correspondiente a las frecuencias, formas modales y amortiguamientos reales de la estructura analizada que se usará para realizar la actualización del modelo de elementos finitos.

2.3. Actualización del modelo de elementos finitos

Es necesario establecer cuáles son las variables que más influyen sobre los resultados del cálculo. Para ello se realiza un ajuste manual para obtener una base para la actualización automática.

Para la actualización automática hay que determinar qué información modal de la campaña vamos a utilizar y cuáles van a ser las variables. Además, se ha de establecer un rango dentro del cual se van a encontrar los posibles valores de estos parámetros de actualización.

Para actualizar el modelo se establece la función objetivo, que es la que define el error que existe entre los valores experimentales y reales, y para ello se usa el método de mínimos cuadrados Eq. (2) [11].

$$y = (fFEM^2 - fexp^2 \ / \ fexp^2)^2 \quad (2)$$

2.3.1. Algoritmo genético

En este trabajo se ha optado por un método de optimización basado en algoritmos genéticos [4]. Estos algoritmos hacen evolucionar una población de individuos sometiéndola a acciones aleatorias semejantes a las que actúan en la evolución biológica como cruces y combinaciones genéticas, así como también a una selección de acuerdo con algún criterio, en función del cual se decide cuáles son los individuos más adaptados. En este caso hemos usado la herramienta de optimización del programa Matlab para desarrollar los cálculos [12].

Uno de los conceptos base a definir es el número de individuos que forman la población en cada generación. Es importante definir bien este parámetro ya que mientras mayor sea el tamaño de la

población, el algoritmo podrá buscar dentro de un mayor espacio, de manera que se reduzcan las posibilidades de encontrar un mínimo local, pero el coste computacional será mayor. En este caso vamos a trabajar con una población de 50 individuos ya que el número de variables no es mayor a cinco.

Por otro lado, hemos de elegir el tipo selección de los individuos que van a ser los padres de los individuos de la nueva generación. Aunque para el caso del algoritmo genético, el programa trae implementados cinco tipos diferentes, vamos a tomar la selección por torneo ya que es la única opción para el caso de los algoritmos genéticos multiobjetivo que es el objetivo de los futuros trabajos. La idea principal de este tipo consiste en escoger a los individuos genéticos en base a comparaciones directas entre sus ajustes.

Tras la selección pasamos al proceso de reproducción. Cuando los individuos son recombinados para producir la descendencia que se insertará en la siguiente generación hablamos de cruce, es un tipo de reproducción sexual y es la más relevante generando, en nuestro caso, el 80% de la siguiente población. La otra estrategia reproductiva para la obtención de una nueva generación es la copia y dentro de ella encontramos el tipo llamado elitismo, que se basa en copiar siempre los mejores individuos de una generación en la generación siguiente, estableciendo en nuestro caso para ello un coeficiente de 0,05.

Hablamos ahora de la mutación, que consiste en realizar pequeños cambios aleatorios en los individuos de la población, en nuestro caso, debido a que tenemos un problema con restricciones, el tipo aconsejable es Adaptive Feasible que trae implementado el programa Matlab.

3. CENADOR DE CARLOS V

El Cenador de Carlos V es una edificación que forma parte de los Reales Alcázares de Sevilla. Se encuentra dentro de lo que se denominaba la huerta de la Alcoba, espacio que fue intervenido a partir del 1542. El jardín se encuentra centrado en el Pabellón de Carlos V, remodelación posiblemente de una qubba (oratorio musulmán) que presidía el cementerio real, de donde derivaría el nombre de Huerta de la Alcoba [13].

Figura 1. *Imagen exterior del Cenador de Carlos V.*

3.1. Descripción del edificio

El edifico está formado por el núcleo central compuesto por muros de fábrica y veinte columnas, presentando doble simetría. La plataforma queda delimitada por un muro de un metro aproximado de altura que separa el área del pabellón del resto del jardín. La puerta de acceso se encuentra en la cara sur, que es por donde atraviesa el canal de la fuente el edificio.

Tanto el espacio interior como la galería quedan delimitados superiormente por una cubierta inclinada de tejas. En la parte de la galería, bajo la cubierta inclinada, tenemos un paño vertical y en el volumen interior central, bajo la cubierta inclinada, se encuentra una cúpula de 6 metros de diámetro. Esta genera una disminución de sección en el muro perimetral de unos 12 cm en cada lado. En este caso la altura libre, de más de nueve metros en la zona central, se impone sobre la dimensión horizontal que supera por poco los 5,70 metros en cada dirección.

Exteriormente se crea una galería que se desarrolla en todo el perímetro, con una dimensión de poco más de dos metros desde el muro hasta la basa de las columnas. Estas columnas soportan una arcada con luces de 2,30 metros aproximadamente, quedando un espacio de paso entre ellas de dos metros. Por último, tenemos el espacio que está entre las columnas y el murete que delimita la plataforma, donde se genera un espacio, no cubierto, de un metro y medio de ancho aproximadamente.

Con lo que respecta a las soluciones constrictivas, el edificio se resuelve con elementos masivos y monolíticos, para los que se usa la fábrica y la piedra. Junto a estos elementos aparecen las cubiertas, que contrastan con el resto por tratarse de un elemento ligero ya que se resuelven con un entramado de vigas de madera de sección esbelta. Junto a estas soluciones de cubierta aparece la cúpula de madera que, junto a la cubierta inclinada, remata el espacio interior [5].

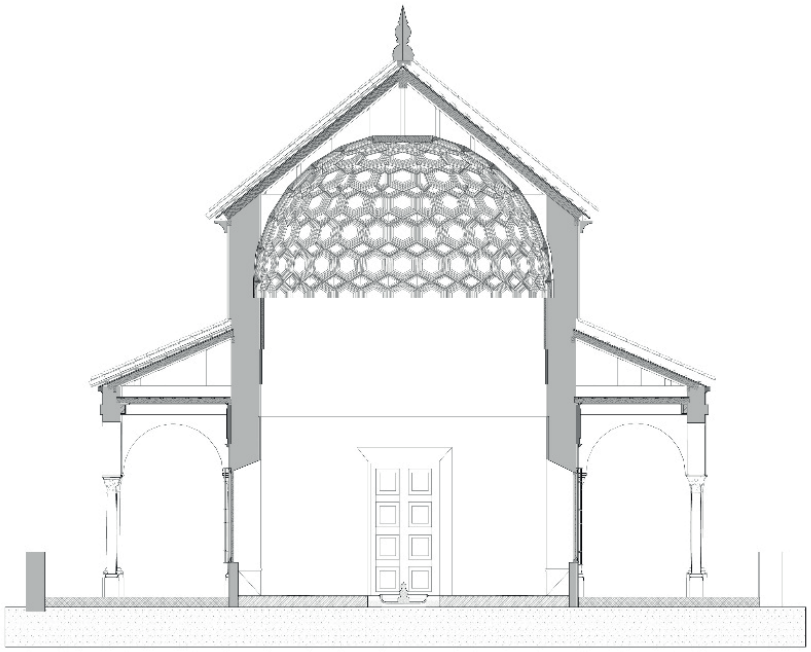


Figura 2. *Sección del Cenador de Carlos V.*

3.2. Modelo de elementos finitos

3.2.1. Modelado

Para realizarlo de una forma adecuada se ha utilizado el programa de modelado paramétrico CATIA. Aquí se han generado volúmenes para los diferentes elementos de fábrica y piedra, y elementos de tipo superficial para las partes de madera de la cubierta y la cúpula del espacio central y sus pechinas.

3.2.2. Mallado

El modelo de elementos finitos se genera usando el programa comercial ICEM perteneciente a la casa ANSYS. Se han usado elementos de tipo shell para las superficies correspondientes a las cubiertas y a la cúpula. Estos elementos superficiales se definen mediante 3 nodos, sin nodos intermedios y 6 grados de libertad (Ux, Uy, Uz, Rot x, Rot y, Rot z). Por otro lado, al resto de elementos, columnas, arquería y muro interior, que se han modelado como sólidos, se les asocia un elemento de tipo volumétrico, de 4 nodos, sin nodos intermedios y 3 grados de libertad (Ux, Uy, Uz).

La densidad de la malla se ha establecido por elementos según la geometría de cada elemento, obteniendo un modelo final de 586642 elementos, 128090 nodos y 405321 grados de libertad.

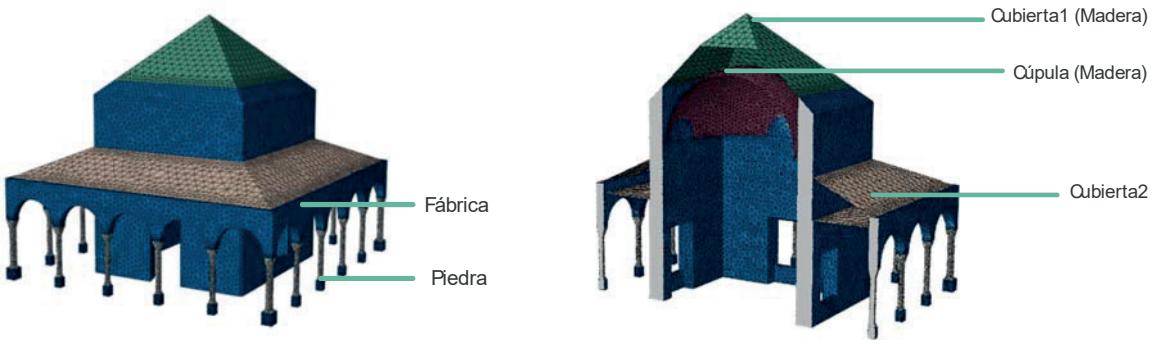


Figura 3. *Modelo de elementos finitos del Cenador de Carlos V y especificación de materiales.*

3.3. Campaña experimental

3.3.1. Toma de datos

Para obtener la información modal del pabellón han utilizado tres acelerómetros triaxiales y dos acelerómetros uniaxiales. El punto de referencia se sitúa en la sección superior de una de las columnas, en la zona de contacto de la fábrica de ladrillo con la arquería.

La campaña se realizó durante siete días, en los que se realizaron más de 30 medidas de 12 minutos de duración, obteniéndose información de 98 puntos, definidos en la fig. 4.

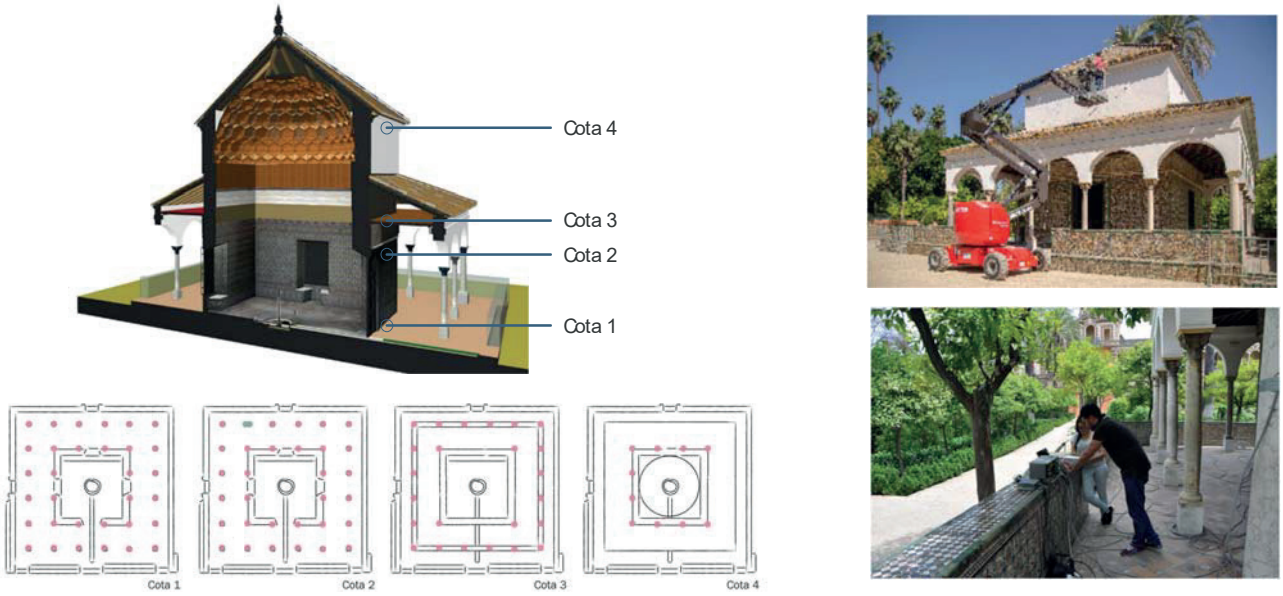


Figura 4. *Izquierda: definición de los puntos de medición. Derecha: imágenes de la campaña de toma de datos del Cenador de Carlos V.*

3.3.2. Tratamiento de datos

Cada fichero obtenido en cada medición se filtra y se analiza la señal gráficamente con el programa Matlab; eliminando la tendencia lineal y aplicando filtros para reducir el ruido de la señal.

Para realizar la identificación modal se van a utilizar dos métodos, el método de descomposición mejorada en el dominio de la frecuencia (EFDD) y el método de identificación en el subespacio estocástico (SSI), y su comparativa mediante el Modal Assurance Criterion (MAC) implementados todos en Artemis. Para este caso se han obtenido seis modos registrando todos ellos por debajo de los 10 Hz.

Nos encontramos con dos modos de flexión simple, uno en la dirección del eje X y otro en el eje Y. Como tercer modo encontramos un movimiento de torsión en el que tanto la galería exterior como el núcleo interior, giran en la misma dirección.

Nos encontramos ahora con un salto de casi tres hercios de frecuencia hasta obtener el cuarto modo. Esto puede deberse a la aparición de modos locales de los elementos de madera, cuya medición no era posible. En este cuarto modo el edificio tiene un movimiento diagonal donde dos de las esquinas opuestas se abren y las otras dos se desplazan hacia el punto central.

Los dos siguientes modos se han identificado mediante los dos métodos con frecuencias muy próximas, 0,2 Hz de diferencia. Nos encontramos con dos modos que corresponden a una flexión cruzada, entre la galería y el núcleo central, uno en el eje X y otro en Y. El valor MAC en este caso vuelve a ser demasiado bajo, pero se cree que es debido a que la identificación mediante el método EFDD no ha sido del todo precisa ya que al analizar las formas modales observamos bastante ruido en los desplazamientos.

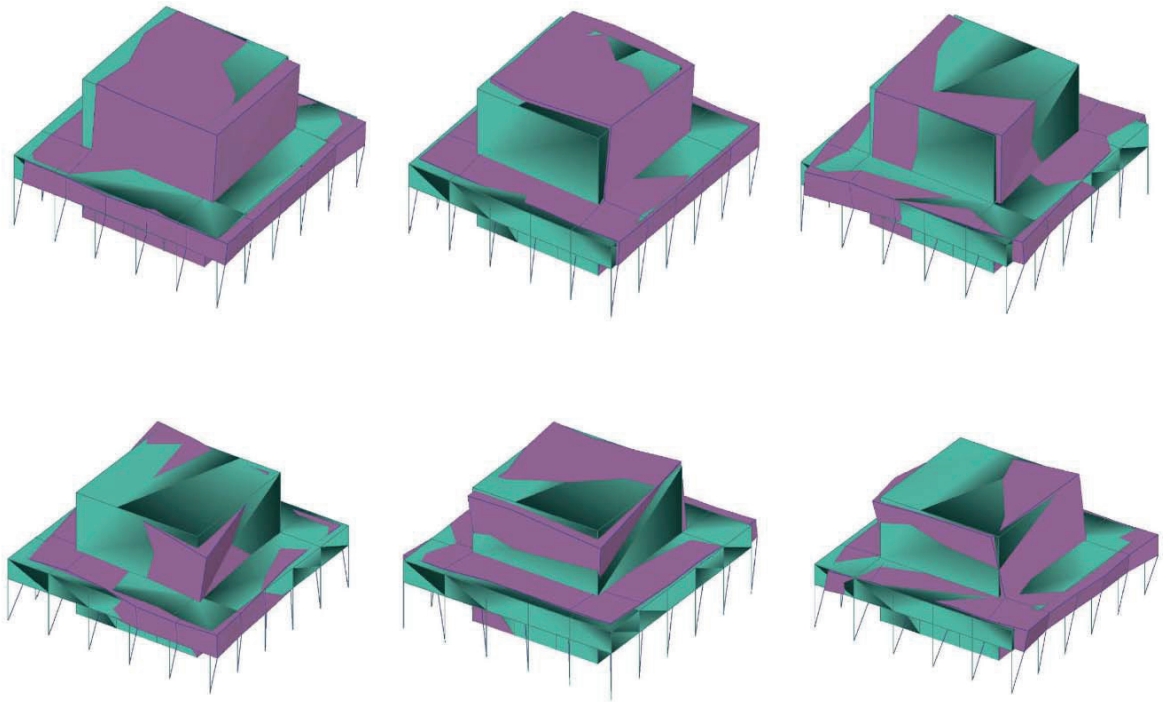


Figura 5. *Formas modales experimentales del Cenador de Carlos V, modos del 1 al 6 por orden. Geometría base morada, geometría deformada verde.*

3.4. Actualización

Comparando los valores reales y los numéricos observamos como todos los modos obtenidos de la medición realizada son modos generales del edificio, mientras que con Abaqus las cubiertas presentan modos propios que se intercalan entre los modos globales. Esto es debido a la imposibilidad de colocar acelerómetros en las cubiertas ya que habría que haber colocado los acelerómetros de referencia en las distintas cubiertas simultáneamente.

Mediante el análisis de sensibilidad se observa como los módulos de elasticidad cobran mayor importancia en los resultados de los cálculos, así que se definen como variables de cálculo.

3.4.1. Algoritmo genético de actualización

Tras el primer ajuste manual se define el algoritmo genético. Es aquí donde la existencia de modos locales supone un problema debido a la automatización del algoritmo. El algoritmo compara los valores de las frecuencias de manera ordenada, por lo que va a comparar valores que no definen los mismos modos ya que va a asimilar los modos locales que se intercalan con los modos globales que hemos introducido nosotros.

La solución que se plantea es utilizar los tres primeros modos, que Abaqus si respeta, y actualizar tres valores. Se establecen valores máximos y mínimos para las variables, que definan un rango dentro del cual no aparezca ningún modo local entre los tres primeros.

Se realiza un primer cálculo tomando como valores de partida los estimados en la actualización manual y se definen unos valores límites a las variables. Tras actualizar los módulos de elasticidad de las cubiertas inclinadas y la fábrica de ladrillo, se obtiene un valor 0,002566 como resultado de la función objetivo, reduciendo notablemente el valor inicial de 0,16.

A continuación, se realiza una serie de actualizaciones consecutivas basadas en los valores actualizados de las anteriores cuyos resultados quedan reflejados en la *Tabla1*. En el Algoritmo 4 se dividen los dos paños de la cubierta de la galería para intentar obtener valores más precisos. El error del último cálculo supone una reducción del error entorno al 13% con respecto al valor del primer algoritmo, por lo que, a pesar de poder actualizar solo tres valores, con este procedimiento que ha podido ajustar aún más el error.

Tabla 1. Variables actualizadas y error final tras la finalización de cada algoritmo.

Cálculo	Variable 1	Variable 2	Variable 3	Error
Algoritmo 1	Cubierta 1	Cubierta 2	Ladrillo	0.002566
Algoritmo 2	Cubierta 1	Cubierta 2	Piedra	0.002512
Algoritmo 3	Cubierta 1	Cubierta 2	Cúpula	0.002456
Algoritmo 4	Cubierta 1	Cubierta 2a	Cubierta 2b	0.002316
Algoritmo 5	Cubierta 1	Cúpula	Ladrillo	0.0022750
Algoritmo 6	Cubierta 1	Cubierta 2a	Cubierta 2b	0.0022409

Tabla 2. Valores de las variables actualizados mediante la aplicación de los algoritmos.

Material	M. de elasticidad MPa
Cubierta 1	903
Cubierta 2a	1706
Cubierta 2b	335
Cúpula	2200
Ladrillo	512
Piedra	1380

3.4.2. Modelo actualizado

Finalmente introducimos los valores de las variables actualizados en Abaqus para analizar si la actualización mediante el algoritmo se ha realizado correctamente. Para ello tomamos los tres primeros modos que son en base a los cuales se han actualizado las variables.

Tabla 3. Comparativa de los valores de las frecuencias tras la actualización mediante el algoritmo del Cenador de Carlos V.

Modo	EFDD	SSI	Numérico
Modo 1	4.614 Hz	4.823 Hz	4.807 Hz
Modo 2	5.054 Hz	4.902 Hz	4.917 Hz
Modo 3	5.854 Hz	5.834 Hz	5.834 Hz

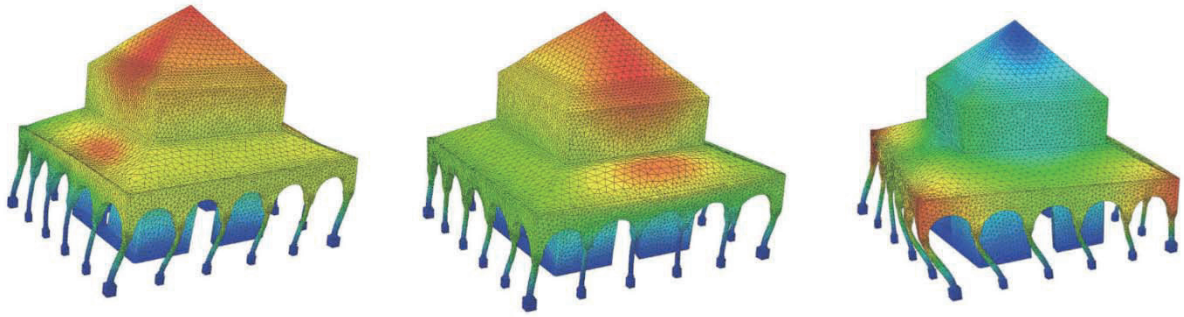


Figura 6. *Modelo de elementos finitos actualizado del Cenador de Carlos V. Tres primeros modos por orden.*

3.5. Conclusiones

La actualización manual se define como un método válido ya que hemos obtenido valores de frecuencias muy similares a los experimentales y se han podido actualizar los modos globales independientemente de si aparecían los modos locales de los elementos ligeros intercalados o no.

La limitación encontrada a la hora de aplicar la actualización mediante el algoritmo se ha intentado solventar mediante la realización de varios cálculos, y aunque contábamos solo con tres frecuencias, se han actualizado seis módulos de elasticidad de los materiales.

En lo referente a los valores de las variables obtenidos tras la actualización, siendo en este caso los valores del módulo de elasticidad de los materiales, podemos sacar una serie de conclusiones con respecto al estado de los materiales y a la definición del modelo de elementos finitos.

En el caso de la fábrica tenemos un valor de 512 MPa, que es bastante inferior al estimado antes de realizar las actualizaciones, por lo que suponemos que el estado de la fábrica ha degenerado. Con respecto a la piedra, también se obtiene un valor bajo. En este caso se supone que el valor viene condicionado por el modelado de la unión con la fábrica ya que no existe discontinuidad entre los dos elementos como realmente sucede por lo que el valor no llega a ser representativo del material.

En el caso de los elementos ligeros vemos como, aunque tratándose de piezas realizadas con el mismo material, la madera, los resultados son muy dispares. Se entiende que la simplificación de la geometría de estos elementos, tanto de las cubiertas como de la cúpula, invalidan la opción de obtener un resultado real en lo que respecta al valor del módulo de elasticidad.

Lo importante es entender que los valores obtenidos no son representativos de los materiales constructivos pero que si son válidos para establecer un modelo de cálculo que responda a la realidad.

4. CLAUSTRO DEL MONASTERIO DE SAN JERÓNIMO

El origen del monasterio de San Jerónimo de Buenavista de Sevilla se remonta al 1414, cuando fue fundado por fray Diego Martínez de Medina. Se levantó en su tiempo extramuros de la ciudad, muy próximo al río Guadalquivir [15]. El monasterio se diseñó en estilo gótico flamígero y su construcción se

llevó a cabo entre 1414 y mediados del siglo XVII, siendo la composición final la que se aprecia en la figura 7.

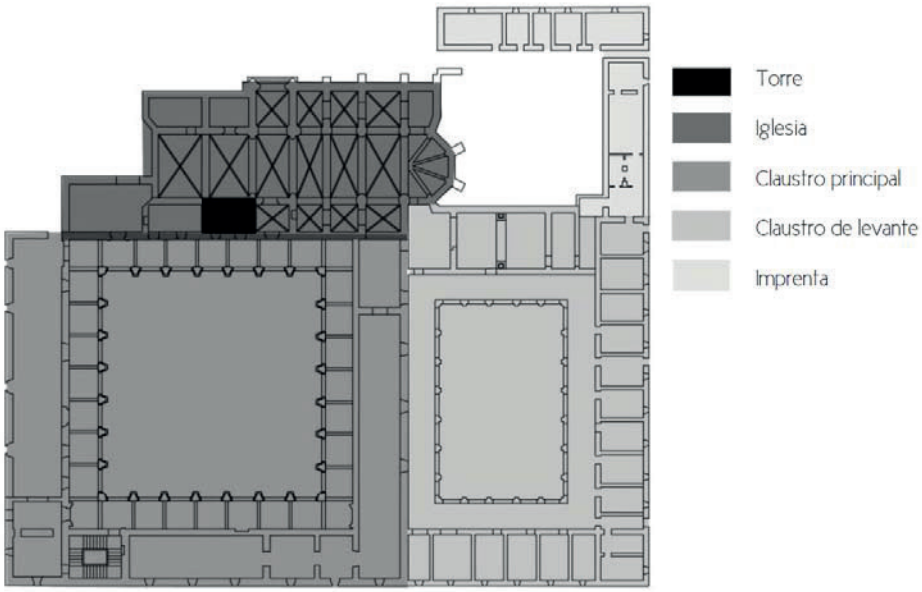


Figura 7. *Planta completa del Monasterio de San Jerónimo.*

4.1. Descripción del edificio

El módulo a estudiar presenta dos alturas, con una arcada cada una, en la parte inferior la geometría define un arco de medio punto y en la superior un arco carpanel. Estos arcos se apoyan en las semicolumnas que se adosan a los laterales de los pilares, que presentan planta cuadrada y que también presentan otra semicolumnas adosada en la parte frontal, esta de mayor altura que las laterales. El orden empleado es el toscano en planta baja y el jónico en la primera. Se remata la composición con un antepecho de lacería morisca en piedra martelilla [14].

Los arcos transversales del deambulatorio, al igual que los frontales, son de medio punto en la planta baja, y carpaneles en la primera y se apoyan en ménsulas con decoración diversa. En el caso de la planta baja, el módulo está cubierto por una bóveda vaída, mientras que en la planta alta no se conserva.

Este modelo se compone en su totalidad de elementos masivos, por lo que se estima que su comportamiento tenga un carácter monolítico. Básicamente consta de dos materiales principales, la piedra, que resuelve los pilares, los arcos de planta primera y las bóvedas de planta baja, y la fábrica que resuelve el revestimiento del muro perimetral. A estos hay que sumarles dos materiales más, el correspondiente al relleno del muro y el que corresponde al relleno de las bóvedas de planta baja.

4.2. Modelo de elementos finitos

4.2.1. Modelado

Se han modelado los elementos de piedra, las bóvedas de planta baja, los pilares y los arcos que se conservan en planta alta. También se ha generado un volumen el relleno de las bóvedas. Para la definición del muro perimetral se han establecido distintos volúmenes, dos exteriores que

corresponden a la fábrica de ladrillo y un volumen para el núcleo interior al que se le asociarán las propiedades del relleno. También se ha considerado importante modelar los huecos generando los volúmenes de los premarcos que están resueltos con fábrica de ladrillo.

4.2.2. Mallado

Para generar la malla de elementos se usan elementos tetraédricos para los sólidos, elementos de 4 nodos, sin nodos intermedios y 3 grados de libertad (Ux, Uy, Uz).

En este caso se ha establecido una malla con un menor tamaño de semilla para las secciones menores como son los arcos de planta primera o la sección de las bóvedas de piedra de planta baja. Se obtiene de este modo una malla con un total de 189426 elementos, 37487 nodos y 112461 grados de libertad.

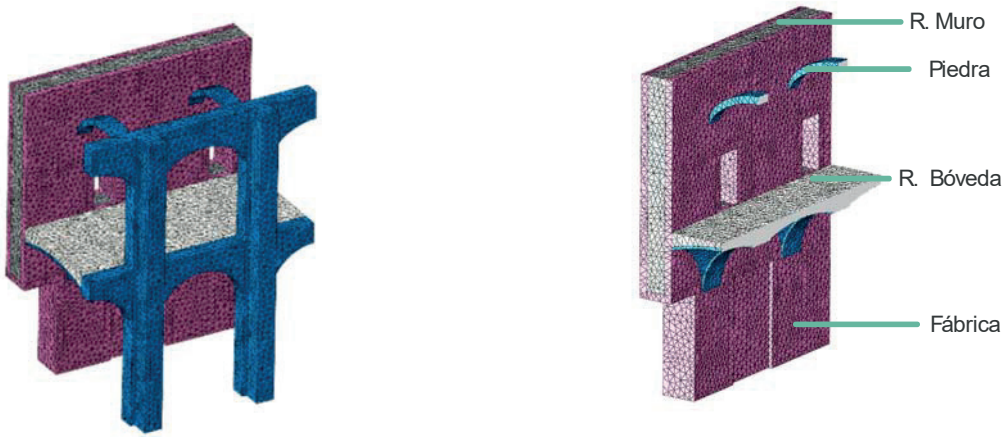


Figura 8. *Modelo de elementos finitos del Monasterio de san Jerónimo.*

4.2.3. Análisis dinámico previo

Se ha contado con una campaña de OMA donde se tomaron medidas de todo el claustro [6]. Esta nos va a servir como base para estimar el comportamiento del módulo de la crujía que se está estudiando.

Como trabajo previo, y gracias a la información de la campaña, se realizó una actualización del modelo completo. Gracias a esta se ha podido contar con datos bastante fiables en lo que respecta a las propiedades de los materiales.

Tabla 4. Materiales. Valores actualizados tras la campaña experimental del conjunto.

Material	Densidad kg/m^3	Elasticidad MPa	C. Poisson
Piedra	1800	1200	0,2
Fábrica	1800	950	0,2
Relleno muro	1500	500	0,2
Relleno bóveda	500	300	0,2

4.3. Campaña experimental

4.3.1. Toma de datos

Para la toma de datos se utilizaron tres acelerómetros triaxiales. Se midieron los puntos del límite de la pieza para obtener información precisa de las condiciones de contorno. Por otro lado, como los puntos más representativos estarían en cotas superiores, se estimó oportuno definir dos cotas diferentes en la planta superior tal y como se representa en la fig. 9. Los acelerómetros de referencia se colocaron en cotas diferentes y en la cara que da al patio, ya que esta parte es menos maciza que el muro y presenta mayores desplazamientos modales.

La campaña realizada supuso un total de 27 puntos de medida, dos de ellos como referencia. Cada medida se realizó durante doce minutos, completándose la campaña en un único día.

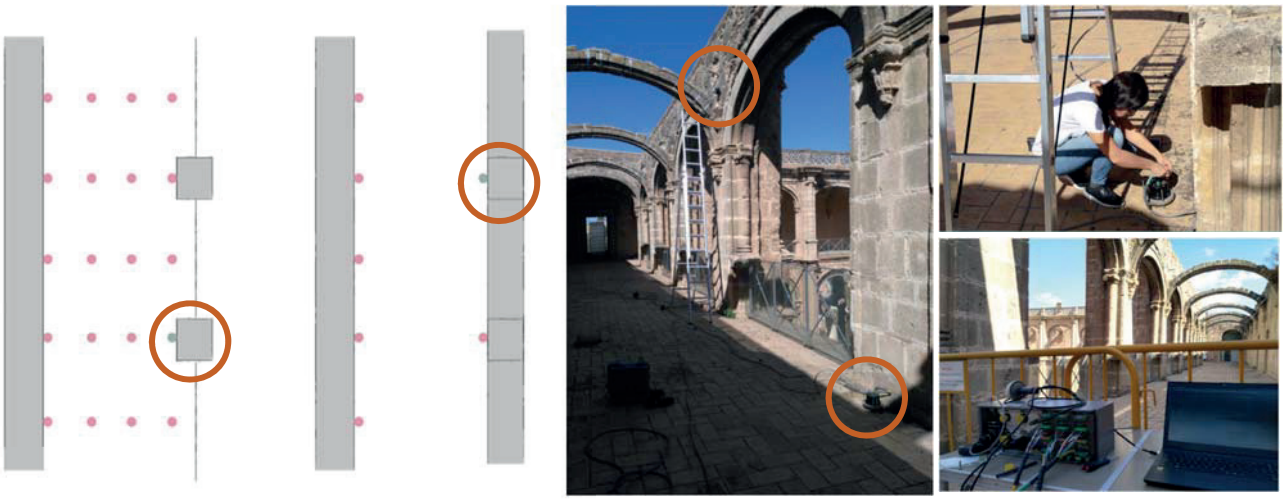


Figura 9. *Izquierda: definición de los puntos de medición. Derecha: imágenes de la campaña de toma de datos del fragmento del claustro del Monasterio de San Jerónimo.*

4.3.2. Tratamiento de datos

Tras tratar inicialmente la información mediante Matlab, pasamos a realizar la identificación modal y el análisis comparativo con Artemis, obteniendo un total de cinco modos con valores de frecuencias no superiores a los cinco hercios y valores MAC bastante próximos a la unidad.

El primero es un movimiento de flexión simple que corresponde al primer modo y en el segundo encontramos un movimiento de giro. En lo referente al tercer modo identificado, la forma modal presenta un movimiento de apertura de los arcos de la parte superior, lo que genera un movimiento de flexión tanto en el muro como en la arcada paralela, pero en sentido opuesto y un cuarto modo similar al anterior, donde los arcos perpendiculares al muro se abren y se cierran, pero en este caso la forma modal también presenta cierto giro por lo que no se produce una flexión simple en los dos soportes paralelos donde apoyan. Por último, ambos métodos, identifican un quinto modo con una forma modal más compleja. Por un lado, presenta un movimiento de giro muy similar al que se produce en el segundo

modo al que se le suma un desplazamiento en el eje Y que corresponde a un movimiento transaccional de la pieza.

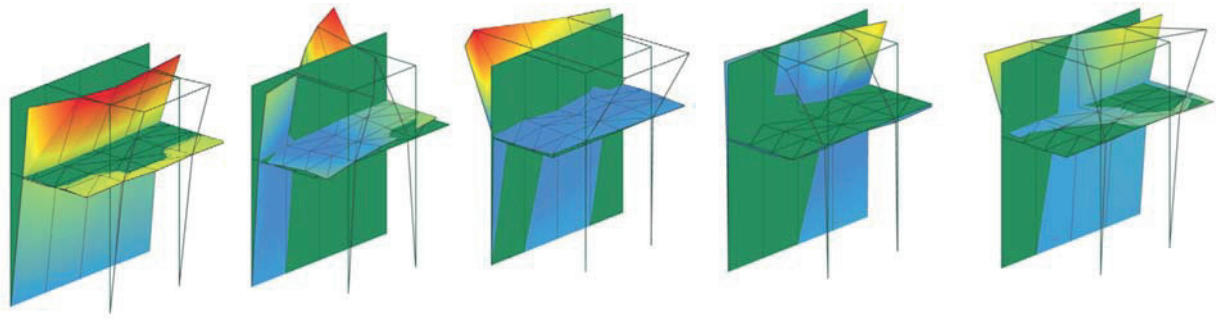


Figura 10. *Formas modales experimentales del fragmento del claustro, modos del 1 al 5 por orden. Geometría base verde.*

4.4. Actualización

En este modelo nos vamos a centrar principalmente en la actualización de las condiciones de contorno, ya que los valores de las propiedades de los materiales están bastante ajustados tras la actualización que se realizó del modelo global del Monasterio.

En primer lugar, introducimos los valores de las propiedades de los materiales y en segundo lugar definimos las condiciones de contorno mediante muelles en cada una de las direcciones. Tras varios cálculos, vemos como los muelles definidos para el eje Z no son muy representativos en las variaciones de los resultados. Por ello se estima oportuno trabajar con los muelles en el eje X e Y.

Tras analizar las frecuencias y las formas modales, se consigue ajustar de forma manual bastante bien los cuatro primeros modos, siendo el quinto modo el que presenta mayor diferencia en cuanto a frecuencias y a forma modal ya que el movimiento traslacional del modo registrado en la campaña no aparece en el modelo numérico. Esto es debido a que el diseño de las condiciones de contorno debería estar más detallado, pero entonces aparecían más variables y no se podría establecer la función objetivo para la actualización mediante el algoritmo.

4.4.1. Algoritmo genético de actualización

Se van a tomar los valores de las frecuencias de los cuatro primeros modos para realizar la actualización del modelo. Las variables que se establecen van a ser los coeficientes que definen los cuatro grupos de muelles que se han definido en el modelo virtual.

Todos estos parámetros nos van a definir la función objetivo de la actualización, por lo que pasamos ahora a establecer las definiciones del algoritmo.

En primer lugar, establecemos el campo de búsqueda del algoritmo, para lo que definimos los valores límites de las variables. En este caso, como los valores que definen los muelles presentan mucha

incertidumbre se establece un rango amplio, siendo 0,2 el coeficiente del límite inferior y 3 el del límite superior.

Tras realizar el cálculo, el programa ha resuelto la ecuación de error con un valor de 0,03744 definiendo como coeficientes mayores a la unidad en la sección uno y menores a 1 en la sección dos. Esto nos sirve para validar estos resultados ya que se partía de valores simétricos para ambas secciones.

Tabla 5. Constante de elasticidad. Valores actualizados tras la optimización mediante algoritmo.

Muelle	K algoritmo
Sección 1X	169800
Sección 1Y	70515
Sección 2X	39700
Sección 2Y	36500

4.4.2. Modelo actualizado

Tras introducir las nuevas constantes en Abaqus se ha realizo el cálculo para validar el proceso de actualización mediante el algoritmo. Los resultados obtenidos son bastantes buenos ya que las frecuencias, aunque ya estaban bastante ajustadas, se aproximan aún más a los valores reales.

Por otro lado, al tener valores diferentes de las constantes de los muelles en las dos secciones, las formas modales se ajustan mejor a las del modelo experimental.

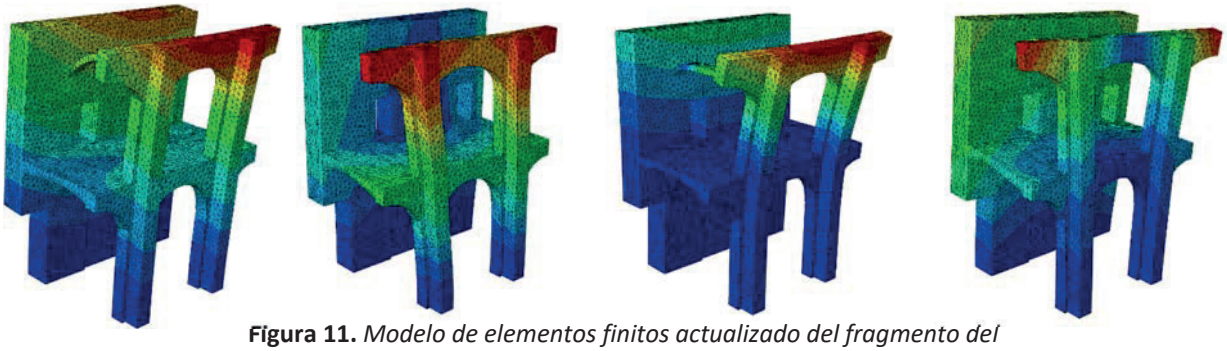


Figura 11. *Modelo de elementos finitos actualizado del fragmento del claustro. Cuatro primeros modos por orden.*

Tabla 6. Comparativa de los valores de las frecuencias tras la actualización mediante el algoritmo del fragmento del claustro del Monasterio de San Jerónimo.

Modo	EFDD	SSI	Numérico
Modo 1	2.346 Hz	2.346 Hz	2.389 Hz
Modo 2	3.356 Hz	3.385 Hz	3.351 Hz
Modo 3	4.036 Hz	3.907 Hz	3.744 Hz
Modo 4	4.363 Hz	4.398 Hz	4.381

4.5. Conclusiones

En este caso destacan los buenos resultados obtenidos en la campaña experimental ya que se registraron cinco modos mediante los dos métodos (EFDD y SSI) de manera bastante clara, con valores de frecuencias prácticamente idénticos y valores MAC por encima de 0,8.

Referente al modelo de elementos finitos, se puede mencionar la complejidad que supone la definición de las condiciones de contorno, sobre todo si tenemos en cuenta que en nuestro caso dos caras completas y opuestas del modelo se encuentran conectadas a un conjunto de mayor entinad referente a la crujía del claustro, que condiciona en gran medida su comportamiento estructural.

En lo que respecta a la actualización, la que se ha realizado de manera manual aproximó bastante los valores de las frecuencias experimentales y numéricas, pero mediante el algoritmo genético se han ajustado aún más los valores de las frecuencias y las formas modales de manera más precisa. Haber definido diferentes grupos para las constantes de los muelles dentro de la misma sección podría haber supuesto un mayor ajuste, pero esto habría generado un gran número de variables que no era posible actualizar simplemente ajustando en base a las frecuencias.

A pesar de haber simplificado los valores de los muelles en cuatro grupos, y de no haber introducido una masa inercial que hubiera hecho posible el análisis de movimientos transversales, los resultados tras la actualización automática han generado un modelo con un comportamiento muy similar al experimental.

5. CONCLUSIONES GENERALES

La aplicación del análisis modal experimental resulta idónea en el caso de edificaciones de carácter histórico para obtener información referente de los valores reales de la estructura mediante un procedimiento no agresivo.

Los modelos de elementos finitos generados presentan un buen ajuste tras su actualización, por lo que se concluye que las simplificaciones tomadas para su definición se han verificado como válidas.

El ajuste de los modelos de elementos finitos conseguido en base a la frecuencia ha resultado adecuado. En lo referente al ajuste basado en dos objetivos, frecuencias y formas modales no se han obtenido valores válidos debido al ruido que presentan las formas modales que se obtienen de la campaña experimental.

Establecer como variables de actualización los módulos de elasticidad ha resultado valido para el ajuste del modelo de elementos finitos. Por el contrario, estableciendo las condiciones de contorno como variables no se han conseguido resultados tan ajustados debido a que requieren una definición numérica más precisa que se ajuste mejor a la realidad.

El empleo de técnicas de actualización automáticas como las aquí expuesta, ha supuesto una herramienta bastante interesante ya que se produce una minimización del coste humano durante el

proceso y un mayor ajuste entre los valores numéricos y experimentales. Sin embargo, presentan el inconveniente de necesitar recursos computacionales bastante elevados.

REFERENCIAS

[1] ICOMOS. Committee, Recommendations for the analysis, Conservation andStructural Restoration of Architectural Heritage, in: ICOMOS InternationalCommittee for Analysis and Restoration of Structures of Architectural Heritage,2005.

[2] Peña, Fernando. 2010. "Estrategias para el Modelado y el Análisis Sísmico de Estructuras Históricas" 83 (83): 43–63.

[3] Rodríguez Súnico, Manuel. 2005. "Análisis Modal Operacional: Teoría y Práctica."

[4] Gestal, Marcos, Daniel Rivero, Juan Ramón Jr Rabuñal, Julián Dorado, and Alejandro Pazos. 2010. Introducción a los Algoritmos Genéticos y la Programación Genética.

[5] Nieto Julian, Juan Enrique. 2014 Generación de modelos de información para la gestión de una intervención en el patrimonio arquitectónico. Tesis Doctoral.

[6] Compán, Víctor, Pachón, Pablo, Cámara, Margarita, Sáez, Andrés. 2014. "Análisis Estructural Del Monasterio De San Jerónimo De Buenavista. Sevilla" REHABEND 2014 Abr. Santander, Spain.

[7] Pachón, Pablo, Víctor Compán, Esperanza Rodríguez Mayorga, and Andrés Sáez. 2015. "Control of Structural Intervention in the Area of the Roman Theatre of Cadiz (Spain) by Using Non-Destructive Techniques." Construction and Building Materials 101: 572–83. doi:10.1016/j.conbuildmat.2015.10.141.

[8] Gentile, Carmelo, Antonella Saisi, and Alessandro Cabboi. 2014. "Structural Identifi cation of a Masonry Tower Based on Operational Modal Analysis." International Journal of Architectural Heritage 9 (2): 98–110. doi:10.1080/15583058.2014.951792. Freire Obregón, Cristina. 2011.

[9] Implementación y validación del método mejorado de descomposición en el dominio de la frecuencia (EFDD) para la identificación de los parámetros modales de estructuras genéricas utilizando ruido ambiente. Estudio del rango de aplicabilidad en función del modelo estructural y las condiciones de uso.

[10] Castillo, A E, and R L Boroschek. 2002. "Uso Del Método De Frecuencia No Parametrica Y SSSI Para La Identificación De Propiedades."

[11] Zordan, Tobia, Bruno Briseghella, and Tao Liu. 2014. "Finite Element Model Updating of a Tied-Arch Bridge Using Douglas-Reid Method and Rosenbrock Optimization Algorithm." Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition) 1 (4): 280–92. doi:10.1016/S2095-7564(15)30273-7.

[12] "Optimize Using Ga - MATLAB & Simulink - MathWorks España." n.d. https://es.mathworks.com/help/gads/performing-a-genetic-algorithm-optimization.html.

[13] Marín Fidalgo, Ana, Carlos 1983- Plaza, and Antonio 1948- Almagro Gorbea. 2015. Los Jardines Del Real Alcázar de Sevilla: Historia Y Arquitectura Desde El Medievo Islámico Al Siglo XX. [Sevilla]: Patronato del Real Alcázar de Sevilla y de la Casa Consistorial.

[14] Riau Arenas, Belén. 2012. "La Arquitectura Monacal y la Bóveda Tabicada. Reconstrucción de la sala Capitular del Monasterio de San Jerónimo de Buenavista."

[15] "Patrimonio Inmueble de Andalucía. Antiguo Monasterio de San Jerónimo de Buenavista". http://www.iaph.es/patrimonio-inmueble-andalucia/resumen.do?id=i4572

Automatic process of optimization of shell-type behaviour on a free form structure

España, Esther[1]; Cámara, Margarita[2]; González de Canales, Francisco[3]

ABSTRACT

En este trabajo se lleva a cabo la optimización del comportamiento laminar de una superficie mediante la modificación únicamente de su forma. La forma de hacerlo será minimizando las deformaciones que se producen, para lo que se toma como parámetro de control el desplazamiento máximo sobre la estructura.

Se define un algoritmo que modifica de forma independiente la posición de cada punto de la superficie en función de los desplazamientos que se producen, teniendo en cuenta las acciones combinadas de peso propio y viento. Para aplicar este algoritmo fue necesario utilizar un modelo paramétrico, automatizar el proceso, y hacer uso de un algoritmo genético de optimización.

Finalmente, los resultados obtenidos verifican una mejora en los desplazamientos y en las tensiones sobre la superficie.

1. INTRODUCCIÓN

Se propone en este trabajo un proceso de optimización del comportamiento laminar. Este se aplica sobre una superficie que equivale a la forma continua de la cubierta de un pabellón de exposición que posteriormente se realizaría mediante una malla de barras de una capa. La forma proyectada del pabellón colabora en el proyecto expositivo, por lo que deben mantenerse los requerimientos arquitectónicos a la vez que se trabaja en la lógica estructural a la forma.

La optimización de esta estructura permitirá mejorar el uso de la sección estructural y reducir el material necesario en su construcción. En este tipo de estructuras la forma es la base para el funcionamiento de la lámina como tal, que se puede diseñar a partir de los procesos de form-finding, en los que se obtiene una forma ideal en función de las solicitaciones, y dentro de estos, mediante los procesos de optimización de la forma, como el aquí propuesto, en los que se busca mejorar el comportamiento estructural mediante pequeñas modificaciones que no influyan en la apariencia de la geometría del proyecto.

El objetivo de esta optimización es la minimización de los desplazamientos máximos. Se busca una superficie final que suponga una mejora de estos valores en las distintas combinaciones de carga, que incluyen el peso propio y el viento, teniendo en cuenta dos sentidos opuestos. Para lo que se diseña un algoritmo que modifica la geometría en función de los valores de los desplazamientos.

Este algoritmo se desarrolla en dos pasos diferenciados, uno compuesto por pasos lógicos basados en los procesos de form-finding y otro en el que para llegar a la solución buscada se hace uso de un algoritmo genético.

[1] *Dpto. de Estructuras de Edificación e Ingeniería del terreno. Universidad de Sevilla (SPAIN). esthespana@gmail.com (Corresponding author)*
[2] *Dpto. de Estructuras de Edificación e Ingeniería del terreno. Universidad de Sevilla (SPAIN). mcamara@us.es*
[3] *Dpto. de Historia Teoría y Composición Arquitectónicas. Universidad de Sevilla (SPAIN). currocanales@us.es*

Para la implementación del proceso es necesario hacer uso de un modelo paramétrico, que en este caso se ha llevado a cabo en Grasshopper (Tedeschi 2014; "Grasshopper - Algorithmic Modeling for Rhino" 2017). Este entorno permitió vincular los resultados del cálculo estructural y la definición de la geometría, utilizando Karamba para el cálculo por elementos finitos ("Karamba 3d" 2017), automatizar el proceso, mediante la extensión Hoopsnake, y hacer uso de la herramienta integrada de optimización genética Galapagos.

2. ANTECEDENTES

Las estructuras laminares y de membrana tienen un largo recorrido en la historia de la arquitectura, y los métodos de form-finding y de optimización necesarios para construir una estructura estable han ido variando y haciéndose más complejos a medida que el panorama de herramientas para el diseño y el cálculo adquirían más capacidades.

Los primeros diseños producto de procesos de form-finding se basaban en la mayoría de los casos en la experimentación con modelos físicos y utilizaban principalmente formas derivadas de la inversión de fuerzas, como es el caso de diferentes obras de Gaudí de principios del siglo XX o de Heinz Isler o Frei Otto a mediados de siglo (Chilton 2000; Otto, Rasch, and Schanz 2006). La investigación se centró después en el desarrollo de métodos numéricos para la simulación informática de estos mismos experimentos, que ya se utilizan en obras como el Multihalle de Mannheim (1975), o en la cubierta del Patio del Museo de Historia de Hamburgo (1989) (Liddell 2015; Schober 2015).

Más adelante, entre los tipos de form-finding, aparecen los procesos de optimización estructural de la forma, estos pueden enfocarse de distinta manera en función de los principales problemas que plantee la forma, de sus características, o del grado en que se prioriza la mejora o modificar el proyecto lo menos posible. Son interesantes, y de características muy diferentes, las optimizaciones llevadas a cabo en el caso de la Nueva Feria de Milán de Fuksas (2005) (Schober, Kürschner, and Jungjohann 2004) o el Sensitivity Analysis (Sasaki 2005; Sasaki 2007), método desarrollado por Mutsuro Sasaki y aplicado en diferentes proyectos.

3. OPTIMIZACIÓN

3.1 Objetivo de la optimización

El objetivo de esta optimización es reducir la deformación de la superficie modificando únicamente su geometría para acercarla de este modo lo máximo posible a un comportamiento de membrana, con lo que se busca reducir la cantidad de material necesario en su construcción.

Para reducir la deformación de la superficie se toman como referencia los desplazamientos máximos, que será concretamente el valor que se minimiza.

3.2 Definición de la geometría inicial

La forma inicial de la cubierta se obtiene de la simulación de una maqueta invertida utilizando Kangaroo, con pequeñas modificaciones para adecuarla al proyecto. Esto proporciona una forma base que tendrá un buen comportamiento frente a la carga de peso propio, trabajando casi exclusivamente con esfuerzos de compresión.

Se trata de un tipo de bóveda de sección aproximada a una parábola, con zonas de diferentes alturas, y con un ligero vuelo en los bordes libres. Su longitud es de 90 metros, con una altura entre 13.70 y 9.5

m, y una luz de 18.6 (figura 1). Tiene un apoyo continuo sobre el suelo en uno de sus bordes longitudinales, y apoyos puntuales en el borde opuesto, elevados 7 metros.

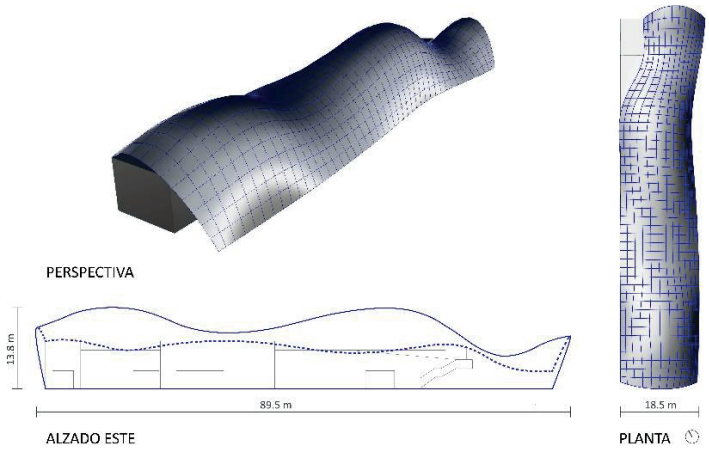


Figura 1. *Definición de la geometría inicial de la cubierta*

3.3 Descripción del proceso de optimización

Para llevar a cabo la optimización se calcula el modelo de la superficie como una lámina muy fina de hormigón (4 cm), y se incluyen las cargas de peso propio y viento en la dirección transversal a la bóveda.

Se tienen en cuenta los dos sentidos opuestos del viento, que no pueden considerarse simultáneamente, por lo que se divide el proceso en dos pasos. En el primero se optimiza la superficie frente a cada sentido del viento por separado, y en el segundo se busca la forma óptima a partir de las dos soluciones anteriores.

En el primer paso, se realiza un algoritmo de optimización basado en que el comportamiento de la estructura en un punto concreto mejorará si se corrige la posición de ese punto trasladándolo en la dirección opuesta al desplazamiento que se produce. Esta idea se basa en los procesos de form-finding y de optimización nombrados en el apartado de antecedentes, como el método de inversión de fuerzas, o el Sensitivity Analysis.

Se utiliza la suma vectorial de los desplazamientos en las dos combinaciones consideradas, peso propio (p) y peso propio + viento (w), para mover el punto en la dirección opuesta a este vector suma una distancia igual a un porcentaje de su módulo (se establece un 50%).

Se lanza la hipótesis de que mediante la modificación de la superficie de este modo el vector suma de los desplazamientos se minimizará progresivamente. Esto supone que los dos vectores de las dos combinaciones se igualarán en dirección y sentido y se minimizarán progresivamente o se igualarán en su dirección y módulo, pero con sentidos opuestos. En ambos casos, los desplazamientos máximos, por tener más peso sobre la suma, y por lo tanto sobre el movimiento del punto para la optimización, se reducirán.

La comprobación de esta hipótesis en el modelo se hace mediante la suma total de los desplazamientos en todos los puntos que conforman la superficie. Si el total es el mismo en las dos combinaciones la superficie habrá llegado a un punto en el que efectivamente los desplazamientos en cada punto tienen el mismo módulo para las dos combinaciones, con lo que se finaliza el proceso de transformación de la superficie.

Durante este primer paso de la optimización se aprecia que el desplazamiento máximo se reduce, pero no se hace progresivamente menor, por lo que es necesario escoger la mejor solución respecto a los desplazamientos máximos entre las correspondientes a las diferentes iteraciones, resultado de Eq (1).

$$Mínimo\ B = \sqrt{\left(\left|\overrightarrow{dpp}_i\right|_{max} - \left|\overrightarrow{dv}_i\right|_{max}\right)^2} + \left|\overrightarrow{dpp}_i\right|_{max} + \left|\overrightarrow{dv}_i\right|_{max} \quad (1)$$

donde:
$\overrightarrow{dpp}$: desplazamiento en la combinación pp; $\overrightarrow{dv}$: desplazamiento en la combinación de viento correspondiente; i: iteración.

El segundo paso que permitirá obtener la forma final optimizada para las tres hipótesis de carga, consiste en unir los puntos equivalentes de las dos superficies mejoradas y situar un nuevo punto en una posición relativa sobre esa línea. Para encontrar estos puntos de la forma final se hace uso del algoritmo genético incluido en Galapagos. En este algoritmo el valor de los genes son las posiciones relativas sobre las líneas que unen puntos equivalentes de ambas superficies mejoradas, con un valor entre 0 y 1, y la función objetivo que se minimiza será la Eq. (2).

$$Minimizar\ B = \sqrt{\left(\left|\overrightarrow{dpp}\right|_{max} - \left|\overrightarrow{dv}\right|_{max}\right)^2} + \sqrt{\left(\left|\overrightarrow{dpp}\right|_{max} - \left|\overrightarrow{dw}\right|_{max}\right)^2} + \left|\overrightarrow{dpp}\right|_{max} + \left|\overrightarrow{dv}\right|_{max} + \left|\overrightarrow{dw}\right|_{max} \quad (2)$$

donde:
$\overrightarrow{dpp}$: desplazamiento en la combinación pp; $\overrightarrow{dv}$: desplazamiento en -w; $\overrightarrow{dw}$: desplazamiento en +w

La parametrización que se ha establecido para la aplicación del algoritmo genético es una población de 50 individuos, que será el doble en la primera generación, un porcentaje de mantenimiento de resultados del 5% y un porcentaje de endogamia del 75%.

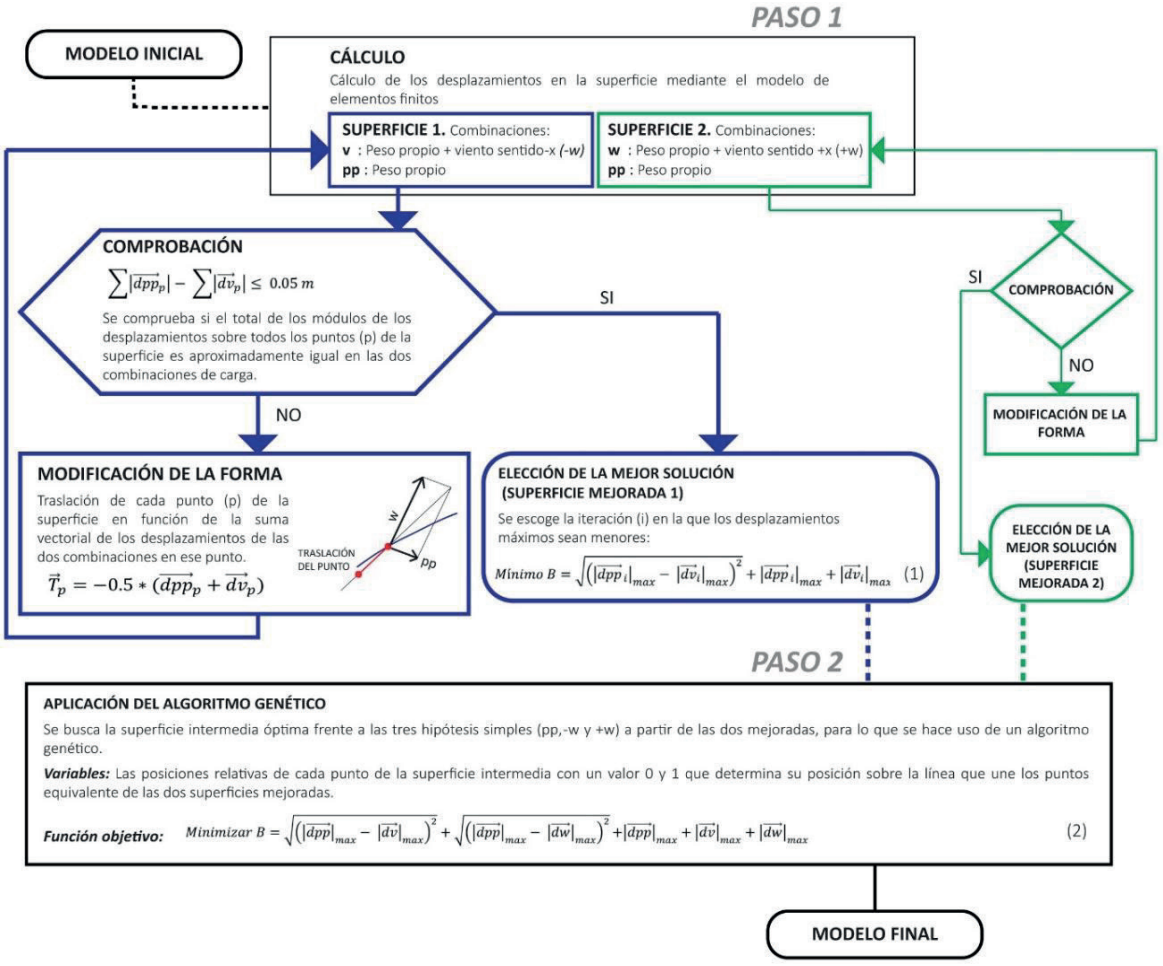


Figura 2. *Proceso de optimización de la geometría*

4. RESULTADOS

4.1 Resultados durante la aplicación del algoritmo.

4.1.1 Paso 1. Optimización diferenciada para cada sentido de viento.

Se observa la evolución del desplazamiento máximo y del total de desplazamientos durante el primer paso de la optimización (figura 3). En esta figura se puede ver que tanto en el desplazamiento máximo como en el total de desplazamientos los valores de ambas combinaciones convergen.

La evolución de la superficie durante este proceso corrobora la hipótesis planteada respecto a la evolución de los desplazamientos en cada punto. Se aprecia a través de las sucesivas iteraciones que llevan a la solución, definida por la Eq (1), como los desplazamientos máximos se minimizan y como la deformación de la estructura se iguala progresivamente en ambas combinaciones (figura 4).

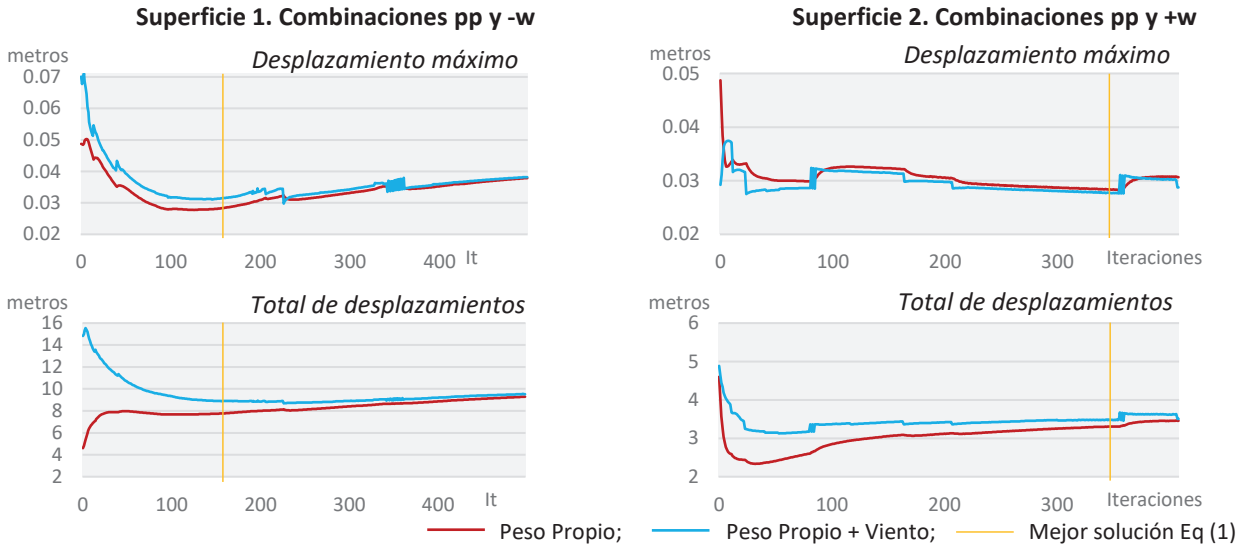


Figura 3. *Evolución de los valores del desplazamiento máximo y del total de desplazamientos durante el proceso iterativo.*

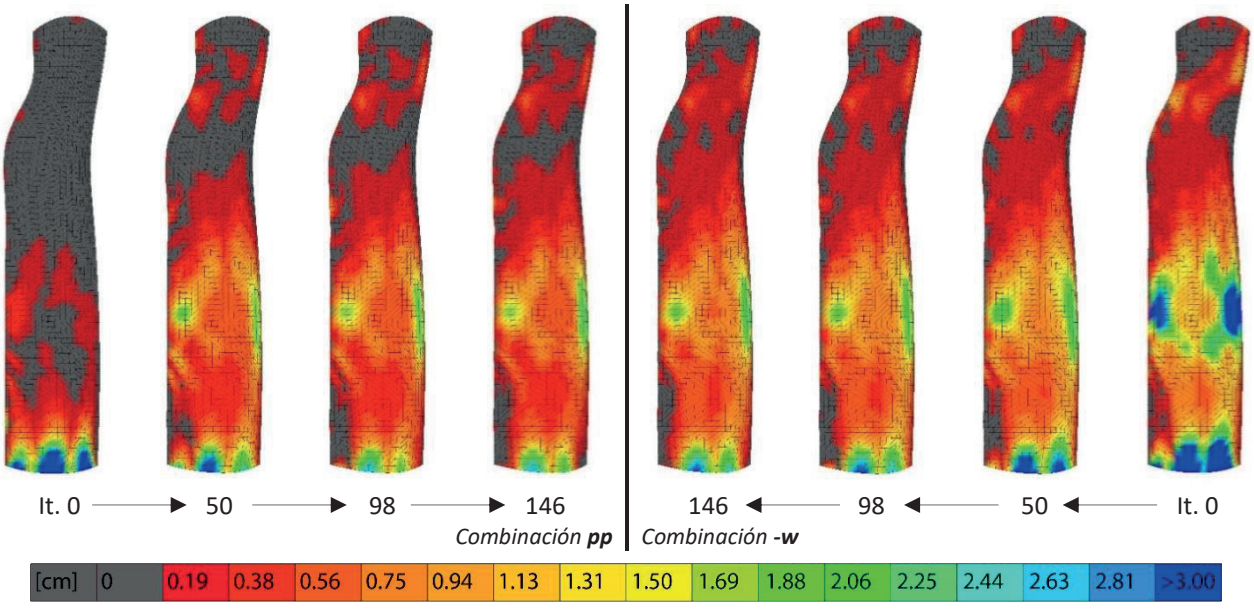


Figura 4. *Evolución de los desplazamientos en las diferentes iteraciones durante la aplicación del algoritmo sobre la superficie 1.*

4.1.2 Paso 2. Forma óptima a partir de las soluciones anteriores.

Se aplica el algoritmo genético para obtener la superficie final. Se observa como los valores de los desplazamientos máximos evolucionan durante la aplicación del algoritmo (figura 5) hasta llegar a un punto en el que se paraliza la minimización de la función objetivo, Eq (2). En ese momento se considera que la superficie ha llegado a una geometría óptima según el objetivo buscado, la minimización de los desplazamientos máximos.

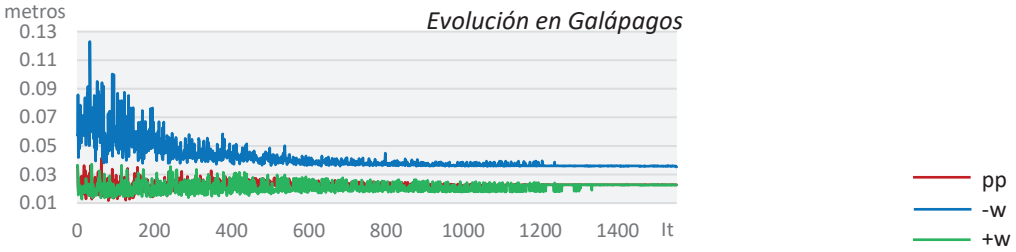


Figura 5. *Variación de los valores del desplazamiento máximo en cada una de las tres combinaciones de carga durante la aplicación del algoritmo genético.*

4.2 Comparación superficies inicial y final.

4.2.1 Deformación

Tabla 2. Comparación de desplazamientos máximos

	Superficie Inicial	Superficie Final	Mejora
pp: *Peso propio (ELU)*	4.88 cm	2.17 cm	55%
-w: *Peso propio + viento (-x) (ELU)*	7.01 cm	3.22 cm	54%
+w: *Peso propio + viento (x) (ELU)*	2.92 cm	2.05 cm	30%

En la tabla 2 se puede ver la importante mejora que se obtiene respecto a los desplazamientos máximos. Todos los valores son menores que los que se daban en la superficie inicial, y en las combinaciones peores (pp y -w), se ha conseguido reducirlos a más de la mitad del valor inicial.

En la comparación de las deformaciones de las superficies inicial y final (figura 6). Se puede ver cómo se reducen notablemente las grandes zonas con deformaciones por encima de 2 y 3 centímetros, situadas principalmente en el borde libre y en la zona central de la estructura.

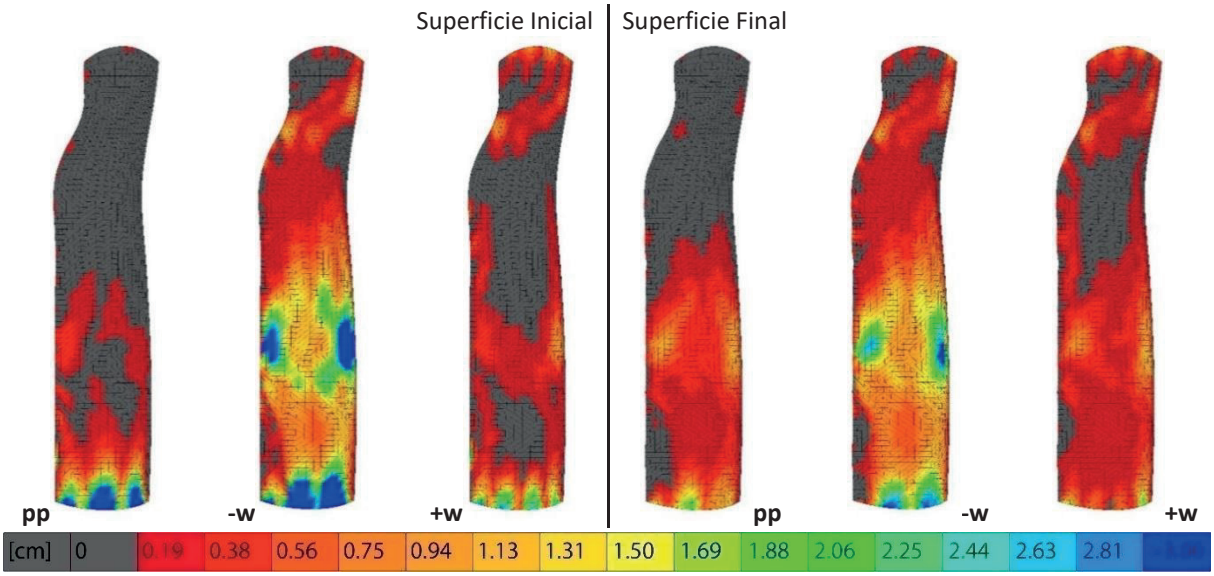


Figura 6. *Comparación de la deformada de las superficies inicial y final*

4.2.2. Tensiones

Con la comparación de las tensiones sobre los modelos inicial y final se puede ver que los valores máximos tanto de tracciones como de compresiones sobre la superficie se reducen en el modelo final respecto al modelo inicial. Se reducen entre un 13 y un 34% coincidiendo una reducción mayor en las combinaciones que tenían valores mayores (tabla 3).

En cuanto a la distribución de tensiones sobre la superficie, las zonas con las concentraciones de mayor magnitud, tanto en las tensiones máximas como en las mínimas se hacen más pequeñas (figura 8).

Esta mejora se debe a la reducción de las deformaciones y por lo tanto de las tensiones que estas mismas causaban. Pero la disminución de las tensiones no se da en el mismo grado que la mejora de los desplazamientos, lo que es debido a que algunos de los esfuerzos exteriores a la superficie que provocaban estas deformaciones se han transformado en tensiones en la misma lámina.

Tabla3. Comparación de tensiones máximas y mínimas

	Tensión mínima (kN/m^2)			Tensión máxima (kN/m^2)		
	S. Inicial	S. Final	Mejora	S. Inicial	S. Final	Mejora
pp: *Peso propio*	-11993	-9224	23%	7922	6876	13%
-w: *Peso propio + viento (-x)*	-30653	-20585	33%	17882	12906	28%
+w: *Peso propio + viento (x)*	-13529	-11065	18%	14141	9280	34%

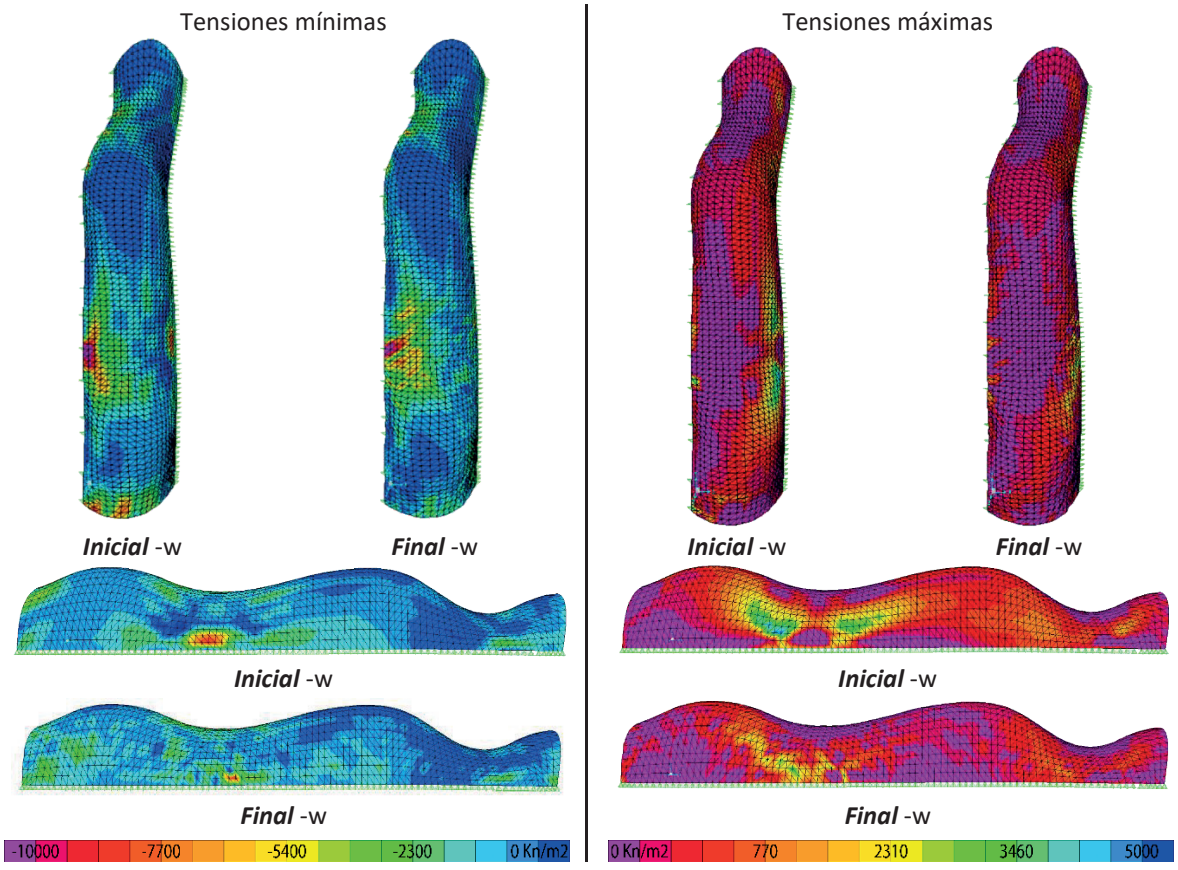


Figura 7. *Comparación de las tensiones sobre las superficies inicial y final*

4.2.3 Distorsión de la superficie final respecto a la inicial

Tras aplicar el proceso de optimización se puede ver que la diferencia entre las geometrías inicial y final no es apreciable a simple vista. Para comprobar la distorsión de la superficie final respecto a la inicial se dan valores negativos al movimiento de los puntos hacia el interior, y positivos hacia el exterior, y se obtiene un rango de movimiento entre -0.36 y 0.47 metros.

La transformación de la superficie respecto a la inicial es principalmente exterior en el lateral derecho e interior en el izquierdo (figura 9). Lo que coincide con el hecho de que la combinación más desfavorable provocaba presiones sobre el frente derecho y succiones en la parte superior (izquierda).

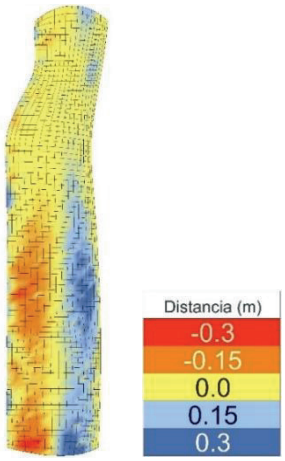


Figura 9. *Distancia entre las superficies inicial y final*

5. CONCLUSIONES

El proceso de optimización que se aplica sobre esta superficie ha resultado eficaz para la reducción de los desplazamientos, y también en la reducción de las tensiones. Los resultados obtenidos permiten validar el uso de los desplazamientos como valor de referencia para la mejora del comportamiento estructural en las superficies laminares.

La presencia de dos modos diferentes de plantear la optimización, reflejados en los dos pasos, dificulta valorar la influencia de cada uno de ellos en el resultado final. Es necesario realizar una comparación y un análisis en profundidad de los métodos para simplificar este proceso de cara a un posible desarrollo futuro.

Las herramientas paramétricas utilizadas han permitido automatizar un algoritmo que no era posible realizar manualmente. Este tipo de herramientas permiten implementar con facilidad y rapidez algoritmos sencillos, como el aquí propuesto, y son claves para extender un nuevo tipo de diseño apoyado en algoritmos.

6. REFERENCIAS

[1] Chilton, John. 2000. *Heinz Isler*. London : Thomas Telford.

[2] Liddell, Ian. 2015. “Frei Otto and the Development of Gridshells.” *Case Studies in Structural Engineering*, no. 4: 39–49. http://www.elsevier.com/locate/csse.

[3] Otto, Frei, Bodo Rasch, and Sabine Schanz. 2006. *Freí Otto, Bodo Rasch : Finding Form : Towards an Architecture of the Minimal /*. Fellbach : Axel Menges.

Authors

Víctor Compán Cardiel
Andrés Sáez Pérez
Enrique Hernández Montes
Luisa Mª Gil Martín
Mª Dolores Gómez Pulido
Margarita Cámara Pérez

Topics

Models for structural analysis

Models in structural rehabilitation

Models in structural damage evaluation

Structural materials characterization

Load characterization in structural models

Comparison between innovative and traditional structural models

Innovative elements in higher education of architectural and engineering structures

POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

GRUPO ESPAÑOL DE IABSE

ETSI CAMINOS CANALES Y PUERTOS