

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física Aplicada



DOTIG1, UN PROGRAMA PARA EL ESTUDIO
EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE LA INTERACCION
DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS
CON ESTRUCTURAS DE HILO

AMELIA RUBIO BRETONES



TESIS DOCTORAL

GRANADA, 1988



UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS

DON JUAN DE DIOS PEREZ JIMENEZ, PROFESOR TITULAR
Y SECRETARIO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA
UNIVERSIDAD DE GRANADA,

Núm. 910

C E R T I F I C O: Que la presente Tesis
Doctoral corresponde a la presentada
en esta Facultad por D^a Amelia Rubio
Bretones que fué calificada el día -
30 de Mayo de 1988 con la califica--
ción de APTO "CUM LAUDE" por el Tri-
bunal correspondiente que fué aproba-
do en Comisión de Doctorado celebra-
da el día 11 de Mayo de 1988, siendo
el título " Dotigl, un programa para
el estudio en el dominio del tiempo
de la interacción de ondas electro--
magnéticas con estructuras de hilo".

Y para que así conste y surta los efec-
tos correspondientes se extiende la presente cer-
tificación con el visto bueno del Il^{mo}. Sr. De-
cano en Granada a seis de septiembre de mil nove-
cientos ochenta y ocho.

Vº. Bº.

EL DECANO,

Carlos Herrera



Tesis Doctoral dirigida por el profesor Dr. D. Rafael Gómez Martín, Catedrático de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada. Fue leída el 30 de Mayo de 1988 ante el Tribunal formado por los profesores: D. Bernardo García Olmedo, D. Vicente Such Belenguer, Dña M. Carmen Carrión Pérez, D. Elías de los Reyes y D. Angel Cardama. Obtuvo la calificación de Apto "Cum Laude".

~~Refund~~

Refund
to
the
order
of
L. H. B.

R. 35.661

T
12
7

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 8 SET. 1988
SALIDA NUM. 910

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA APLICADA



BIBLIOTECA	
FACULTAD DE CIENCIAS	
GRANADA	
Estante	<u>17</u>
Tabla	
Núm.	<u>43</u>

DOTIG1: UN PROGRAMA PARA EL ESTUDIO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE LA INTERACCION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS CON ESTRUCTURAS DE HILO.

TESIS DOCTORAL
AMELIA RUBIO BRETONES
GRANADA, 1988.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA	
GRANADA	
Nº Documento	<u>619599183</u>
Nº Copia	<u>12118060x</u>

DOTIG1: UN PROGRAMA PARA EL ESTUDIO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE LA INTERACCION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS CON ESTRUCTURAS DE HILO.

D. Rafael Gómez Martín, Doctor en Ciencias Físicas y Catedrático del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada,

MANIFIESTA: Que la presente Memoria, presentada por Amelia Rubio Bretones para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas, ha sido realizada bajo mi dirección en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Con esta fecha autorizo la presentación de la misma.

Granada a 6 de Mayo de 1988



Fdo: Rafael Gómez Martín.

Memoria presentada por Amelia Rubio Bretones para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada.



Fdo: Amelia Rubio Bretones.

Quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que han contribuido a la realización de esta Memoria:

A D. Rafael Gómez Martín por su eficaz dirección e inestimable ayuda sin las cuales no hubiera sido posible el desarrollo de este trabajo.

Y a mis compañeros D. Bernardo García, Juan Antonio Morente, Alfonso, Antonio, Jorge, M^a Carmen, Safwan, Juan Antonio Muñoz e Ignacio Plaza por su colaboración e interés.

INDICE

CAPITULO 1: INTERES, OBJETIVOS Y ORGANIZACION
DE LA MEMORIA.

1.1	Introducción.	3
1.2	Posibles dominios de análisis	4
1.3	Posibles enfoques del estudio de OEMT en DT.	8
1.4	Objetivo de esta Memoria.	9
1.5	Posibles planteamientos numéricos . .	10
1.6	Contenido y organización de la Memoria	12

CAPITULO 2: ECUACIONES INTEGRALES Y DESCRIPCION
DEL METODO NUMERICO. APLICACION A
ESTRUCTURAS DE UN SOLO HILO.

2.1	Ecuaciones integrales	17
2.2	Resolución numérica de la ecuación EFIE (2.4) mediante el MM	28
	2.2.1 Interpolación de la carga. .	34
	2.2.2 Expresión numérica operacional de la EFIE	46

	Página	
2.3	Expresión numérica del campo creado por un hilo recto	51
2.4	Tratamiento de extremos	55
2.5	Punto de partida y final de cálculo .	57
2.6	Consideraciones numéricas	58
2.7	Consideraciones sobre el análisis en DT comparado con DF.	62
2.8	Resultados.	68

CAPITULO 3: APLICACION DEL METODO NUMERICO
A VARIOS HILOS SIN CONECTAR.

3.1	Extensión del método numérico a varios hilos sin conectar.	87
3.2	Tratamiento de uniones.	96
	3.2.1 Desarrollo del método numérico	99
3.3	Efecto de un plano conductor perfecto.	105

CAPITULO 4: RESULTADOS.

4.1	Estructuras de un solo hilo	110
4.2	Estructuras de dos hilos de igual radio	112
4.3	Estructuras de más de dos hilos de igual radio	116
4.3.1	Tres hilos.	116
4.3.2	Dos ramas perpendiculares (Cuatro hilos).	117
4.3.3	Dos ramas no perpendicula- res (Cuatro hilos).	118
4.4	Estructuras formadas por hilos con radios diferentes	120
4.4.1	Estructuras de dos hilos con diferentes radios	120
4.4.2	Estructuras de cuatro hilos con diferentes radios	123
4.5	Estructuras frente a tierra	124
4.5.1	Estructuras formadas por unión de dos hilos frente a tierra.	124
4.5.2	Estructuras de cuatro hilos frente a tierra	125

	Página
4.6 Modelos sencillos de aviones.	129
<u>CAPITULO 5</u> : CONCLUSIONES..	279
<u>APENDICE A</u> : Obtención de las ecuaciones de los campos creados por una distribución de fuentes en DT..	285
A.1 Ecuaciones para el campo eléctrico. .	287
A.2 Ecuacion para el campo magnético. . .	298
<u>APENDICE B</u> : Aproximación de hilo delgado	299
<u>APENDICE C</u> : Descripción del método de los momentos..	307
C.1 Formulación generalizada del MM en DF.	310
C.2 Método de los momentos en DT.	314
<u>APENDICE D</u> : Desarrollo numérico de la ecuación EFIE con los tratamientos Q1, Q2, Q3 y Q4 de la carga.	321

<u>APENDICE E</u> : Desarrollo analítico de las funciones F y G para las distintas formas de expresar la carga en (2.14) . . .	329
<u>APENDICE F</u> : Descripción del programa DOTIG1. . .	349
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	425

CAPITULO 1. INTERES, OBJETIVOS Y ORGANIZACION DE LA
MEMORIA

1.1 INTRODUCCION

La disponibilidad actual de medios de cálculo muy potentes y el desarrollo de la tecnología necesaria para generar pulsos cortos de gran amplitud (hasta 10^3 V) con tiempos de subida muy pequeños (anchos del pulso del orden de 1 ns) y de la consiguiente instrumentación de medida compatible con este tipo de señales tales como osciloscopios de muestreo y digitalizadores de señales transitorias han hecho posible por un lado, que pueda abordarse la solución numérica de las complejas ecuaciones que resultan al plantear la interacción de señales electromagnéticas transitorias (OEMT)* con estructuras (blancos o antenas) [1]-[12] y por otro, la aplicación práctica de los resultados a áreas tan importantes como son el estudio, clasificación e identificación de blancos de radar [13] y la prevención de los efectos de pulsos nucleares electromagnéticos (NEMP) [14], [15] y rayos (LEMP) [16].

Dentro de este contexto, el objetivo de esta memoria es desarrollar un método numérico basado en la resolución por el método de los momentos de una ecuación integral para el campo eléctrico (EFIE) que

* Denominamos OEMT a señales electromagnéticas que tienen un contenido espectral que se extiende desde frecuencias cero o muy pequeñas hasta la región de las microondas.

permita el estudio en el dominio del tiempo (DT) de la interacción de OEMT con estructuras complejas modeladas por hilos delgados. Antes de entrar en detalles sobre el método numérico desarrollado, lo que se deja para capítulos posteriores, comentaremos algunos aspectos fundamentales que sitúen y justifiquen nuestro trabajo.

1.2 POSIBLES DOMINIOS DE ANALISIS.

Desde el punto de vista numérico y debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell el estudio de OEMT se plantea usualmente en el dominio de la frecuencia (DF), esto es, haciendo uso de la simplificación matemática de imponer que todas las magnitudes físicas varíen armónicamente con el tiempo lo que en notación compleja se expresa mediante el factor exponencial $e^{j\omega t}$. La enorme ventaja de este planteamiento, justificado porque cualquier ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo admite autofunciones de la forma $e^{j\omega t}$, es que de esta forma sólo tenemos que resolver un conjunto de ecuaciones en las variables espaciales en DF en contraposición a tener que resolver en DT ecuaciones en variables espaciales y temporales.

El análisis en DF puede extenderse a fuentes con variación temporal arbitraria mediante el cálculo de soluciones armónicas sobre el rango de frecuencias adecuado y posteriormente haciendo uso de

la transformada de Fourier. Una alternativa a este enfoque es plantear el problema directamente en DT y resolver para las variables espaciales mediante un proceso de cálculo escalonado en el tiempo de forma que se verifique el principio de causalidad.

Naturalmente, y a la inversa, pueden obtenerse resultados en DF a partir de DT mediante la transformada de Fourier [17]-[20]. De hecho puede resultar en algunos casos más conveniente y económico desde el punto de vista computacional conseguir resultados en DF vía DT.

La conveniencia de utilizar un tipo de análisis u otro no debe fundamentarse exclusivamente en la comparación del coste computacional de ambos métodos ya que existen problemas que por su propia naturaleza pueden ser muy ventajosamente, e incluso exclusivamente, tratados planteando su solución en DT. A continuación citamos algunos ejemplos.

a) Mayor eficiencia en la solución de determinados problemas.

El análisis en el dominio del tiempo es intrínsecamente capaz de suministrar información, vía FFT, en una amplia zona del espectro correspondiente a armónicos de la excitación con suficiente energía.

Para obtener la misma información en DF es necesario resolver para muestras consecutivas del espectro de frecuencias. Por tanto es necesario elegir a priori aquellas frecuencias donde se piensa que la

estructura tendrá un comportamiento interesante. Si se escoge incorrectamente debe proseguirse el análisis hasta conseguir la información necesaria y poder estar razonablemente convencido de que han sido obtenidos los aspectos principales del problema. Este es especialmente el caso cuando se trata de estudiar estructuras que tienen resonancias muy estrechas o un factor de calidad Q muy alto |21|-|25|.

b) Problemas no lineales.

El comportamiento de antenas y dispersores o blancos puede ser modificado significativamente mediante cargas no lineales. Tales no linealidades pueden ser debidas por ejemplo a una impedancia dependiente de la intensidad de corriente o a una variación temporal de la impedancia. Aunque tales problemas podrían ser analizados en el dominio de la frecuencia |26| su estudio resulta más sencillo y natural en DT |18|, |27|-|29|.

c) Obtención de las frecuencias complejas de resonancia del objeto.

Fundamentalmente, todos los métodos de identificación de blancos de radar están basados en la adaptación de los parámetros obtenidos de la señal dispersada por el blanco con los correspondientes a modelos de los posibles blancos esperados (librería de firmas). El modelo almacenado cuyo conjunto de parámetros sea más próximo en un sentido preestablecido al obtenido de la señal reflejada por el blanco real se considera que es el blanco detectado. Esta operación

de correlación es muy problemática en la práctica a menos que los parámetros sean independientes del aspecto que el blanco presente a la señal-radar. En este sentido resulta fundamental el resultado demostrado por Baum de que las frecuencias complejas de resonancia o polos del blanco presentan esta independencia (Singularity expansion method) |30|-|36|.

d) Separación temporal (Time gating).

Una característica que resulta muy atractiva en el tratamiento en el dominio del tiempo es la separación temporal con que aparece la contribución de los centros de radiación y eco de las diferentes partes de un objeto. Esta separación temporal ocurre debido a la velocidad finita de la propagación de la luz (principio de causalidad) y puede ser explotada tanto experimental como computacionalmente para incrementar la calidad de los datos y la eficiencia de la solución. En la experimentación en el dominio del tiempo se pueden obtener, haciendo uso de la separación temporal, medidas no contaminadas dentro del "tiempo limpio" previo a la llegada de reflexiones al sistema de medida. En el dominio de la frecuencia esto se traduce en desplazamientos de fases que dan lugar a efectos de interferencias |11|, |12|, |17|, |37|.

e) Mayor claridad en la interpretación de algunos fenómenos electromagnéticos.

El análisis en DT ofrece una perspectiva diferente de la que se obtiene en DF y ello permite profundizar y obtener un mayor entendimiento de muchos

fenómenos electromagnéticos |1|-|4|, |27|, |38|-|43|.

1.3. POSIBLES ENFOQUES DEL ESTUDIO DE OEMT EN DT.

Desde la perspectiva del análisis en DT de OEMT es posible elegir entre diferentes formas de abordar el problema. Estas incluyen:

a) Técnicas de aproximación.

Muchos de los primeros trabajos de análisis en DT y que motivaron el estudio posterior mediante métodos más potentes están basados en la aproximación de la física óptica |44|.

b) Análisis teórico.

Algunos problemas básicos pueden ser resueltos de forma analítica. Son ejemplos el análisis de los campos asociados a sistemas radiantes elementales o antenas de hilo recto |1|, |45|-|53|.

c) Métodos numéricos.

Es bien conocido el tremendo impacto que el desarrollo de los modernos ordenadores ha tenido sobre muchas áreas de la ciencia y la tecnología. Gracias a ellos ha sido posible resolver problemas científicos y técnicos que de otra forma serían o bien inabordables o bien áreas exclusivas de métodos experimentales. Dentro de estas áreas se encuentran muchos problemas electromagnéticos y concretamente la radiación y dis-

persión de OEMT. Efectivamente, si queremos conocer el resultado de la interacción de OEMT con estructuras más realistas que las elementales mencionadas anteriormente, los métodos analíticos resultan inviables y se ha de recurrir necesariamente al desarrollo de métodos numéricos que permitan resolver las ecuaciones del modelo matemático que describe el problema físico que tenemos planteado.

b) Métodos experimentales.

Junto al desarrollo de los ordenadores y de los métodos numéricos ha tenido lugar el de la tecnología necesaria para generar señales electromagnéticas transitorias y el de la instrumentación compatible necesaria para tomar medidas directas de la respuesta a OEMT de diferentes antenas y blancos [1]-[12].

1.4 OBJETIVO DE ESTA MEMORIA

El objetivo concreto que nos planteamos en esta memoria es el de estudiar en DT la interacción de una OEMT con una estructura conductora arbitraria siendo el medio que rodea a dicha estructura el espacio libre. El contenido espectral de la OEMT se extiende desde frecuencias cero o bajas hasta frecuencias máximas correspondientes a longitudes de onda tales que $L/\lambda \sim 5$. Esta situación presenta gran interés práctico porque en ella se encuentran muchos problemas relacionados con el estudio de antenas y característi-

cas de blancos de radar. De hecho es el rango de frecuencias correspondientes a longitudes de onda comenzando con la mitad del tamaño del objeto e incrementando hasta varias veces su máxima dimensión, el que transporta la información esencial con respecto a la dimensión total, forma aproximada y composición material del objeto [54] por lo que resulta el más adecuado para la determinación de las características físicas de la estructura. La razón es que a estas frecuencias tiene lugar la máxima interacción entre las diferentes partes del objeto.

1.5 POSIBLES PLANTEAMIENTOS NUMERICOS.

Todos los fenómenos electromagnéticos derivan de las ecuaciones de Maxwell por lo que éstas suponen el punto de partida lógico a la hora del planteamiento de un determinado problema. Desde este punto de vista hay que recordar que las ecuaciones de Maxwell pueden postularse en dos formas básicas, la diferencial original y la integral en términos de fuentes.

La diferencia fundamental entre ambas es el propagador de campo empleado. La forma diferencial usa las ecuaciones rotacionales para propagar los campos, lo que en sentido computacional significa que el campo en un punto es un "promedio pesado" de los campos vecinos. Por otra parte la forma integral usa la función de Green como propagador, en cuyo caso el

campo en un punto dado viene determinado por una integración sobre las fuentes que lo causan.

Debido al carácter local del operador diferencial los métodos basados en la formulación diferencial permiten un tratamiento del problema más general en términos de las propiedades del medio comparado con las posibilidades que presenta la formulación integral en la que el operador tiene carácter más global.

La formulación integral se caracteriza por el uso de la función de Green del problema y presenta la ventaja de que lo reduce en una dimensión e incluso permite reducir un problema tridimensional a monodimensional mediante la modelación por una malla de hilos de la superficie del objeto cuya interacción con una señal electromagnética queremos conocer. Consecuentemente la formulación integral y su solución mediante el método de los momentos (MM) se considera como la forma más efectiva para tratar problemas de interacción de OEM con estructuras que cumplan que su dimensión máxima L sea menor o igual que 5λ y cuya función de Green pueda ser utilizada eficientemente como es el caso de superficies conductoras en el espacio libre. Para el caso de más altas frecuencias aunque el MM es aplicable en principio, su uso en la práctica es inviable incluso para los ordenadores más modernos debido a la gran cantidad de información que es necesario manejar para tener en cuenta la interacción mutua entre diferentes partes de la estructura.

Otra ventaja de la formulación integral es que el proceso de integración es más estable que el de diferenciación [55].

Como consecuencia de lo comentado en este apartado y en el 1.4, desde el punto de vista numérico la forma más adecuada de abordar el problema que nos planteamos es el de la formulación integral y su solución mediante el MM.

Dentro de este enfoque es posible elegir diversas alternativas que corresponden a la posibilidad de plantear las condiciones de contorno en la superficie de la estructura en términos del campo magnético (ecuación integral para el campo magnético MFIE) o el eléctrico (ecuación integral para el campo eléctrico EFIE). Como se comentó anteriormente nuestro trabajo se ha enfocado hacia la resolución numérica mediante la ecuación EFIE. La ventaja fundamental que presenta esta ecuación frente a la MFIE es que permite tratar mediante una modelación por malla de hilos conductores delgados cualquier estructura. Aunque éste no es el único método posible para tratar con superficies cerradas y perfectamente conductoras, ya que también puede utilizarse la ecuación MFIE y la modelación por parches de la estructura, si parece ser el mejor método posible actualmente para tratar con configuraciones arbitrarias, con o sin aberturas, formada realmente o no por hilos delgados y con conductividad finita o no [21], [56]-[58].

1.6 CONTENIDO Y ORGANIZACION DE LA MEMORIA.

De acuerdo con los comentarios anteriores

podemos resumir el contenido de la Memoria diciendo que se ha desarrollado un programa denominado DOTIG1 basado en la resolución numérica mediante el método de los momentos de la ecuación integral para el campo eléctrico en el dominio del tiempo que permite obtener la respuesta de una estructura conductora modelada por hilos delgados a una OEMT.

Con objeto de presentar los fundamentos y características del método numérico y los resultados obtenidos de una forma coherente el contenido de los capítulos se ha ordenado de la siguiente forma:

En el próximo capítulo se comentan las posibles ecuaciones integrales que pueden utilizarse como punto de partida en el método numérico y se justifica la elección de la que aquí utilizaremos cuya expresión concreta para un hilo delgado es

$$\hat{s} \cdot \vec{E}^i(s,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{C(s')} \left[\frac{\hat{s} \cdot \hat{s}'}{c^2 R} \frac{\partial}{\partial t'} I(s',t') + \right. \\ \left. + \frac{\hat{s} \cdot \vec{R}}{c R^2} \frac{\partial}{\partial s'} I(s',t') - \frac{\hat{s} \cdot \vec{R}}{R^3} q(s',t') \right] ds'$$

A continuación se desarrolla el método numérico y se analizan las diferentes alternativas del tratamiento del término de carga en el núcleo de la integral. Todo el contenido de este capítulo se refiere a estructuras formadas por un solo hilo.

En el capítulo 3 se extiende el método numérico a estructuras más complejas considerando los

casos de varios hilos unidos o sin unir. Por último se considera el efecto de la tierra supuesta conductora perfecta.

En el capítulo 4 se presentan los resultados para diferentes estructuras y su comparación con los existentes en la bibliografía (tanto numéricos como experimentales).

Muchos de los desarrollos matemáticos así como el programa completo DOTIG1 se muestran en los apéndices al final de la memoria.

CAPÍTULO 2. ECUACIONES INTEGRALES Y DESCRIPCION DEL
METODO NUMERICO. APLICACION A ESTRUCTURAS
DE UN SOLO HILO.

En este capítulo se justifica la elección de la ecuación integral a resolver y se exponen los fundamentos y desarrollos del método numérico en que se basa su solución.

2.1 ECUACIONES INTEGRALES.

Para obtener las ecuaciones integrales tomaremos como referencia la Fig. 2.1 donde se representa de forma general el problema de la dispersión de una onda electromagnética por un cuerpo conductor*. El campo incidente \vec{E}^i se define como el que debería existir si el blanco no estuviese presente. El campo dispersado \vec{E}^s queda entonces definido como:

$$\vec{E}^s = \vec{E} - \vec{E}^i$$

Aplicando el principio de equivalencia [22] el problema de la Fig. 2.1.a puede reemplazarse por uno equivalente en que las corrientes radian en el espacio libre, como en la Fig. 2.1.b.

* La diferencia entre un sistema funcionando como dispersor (blanco) o radiador (antena) reside únicamente en que la fuente de excitación esté distante del sistema o contenida en él. Por esta razón los razonamientos serán válidos para uno u otro caso con pequeñas modificaciones.

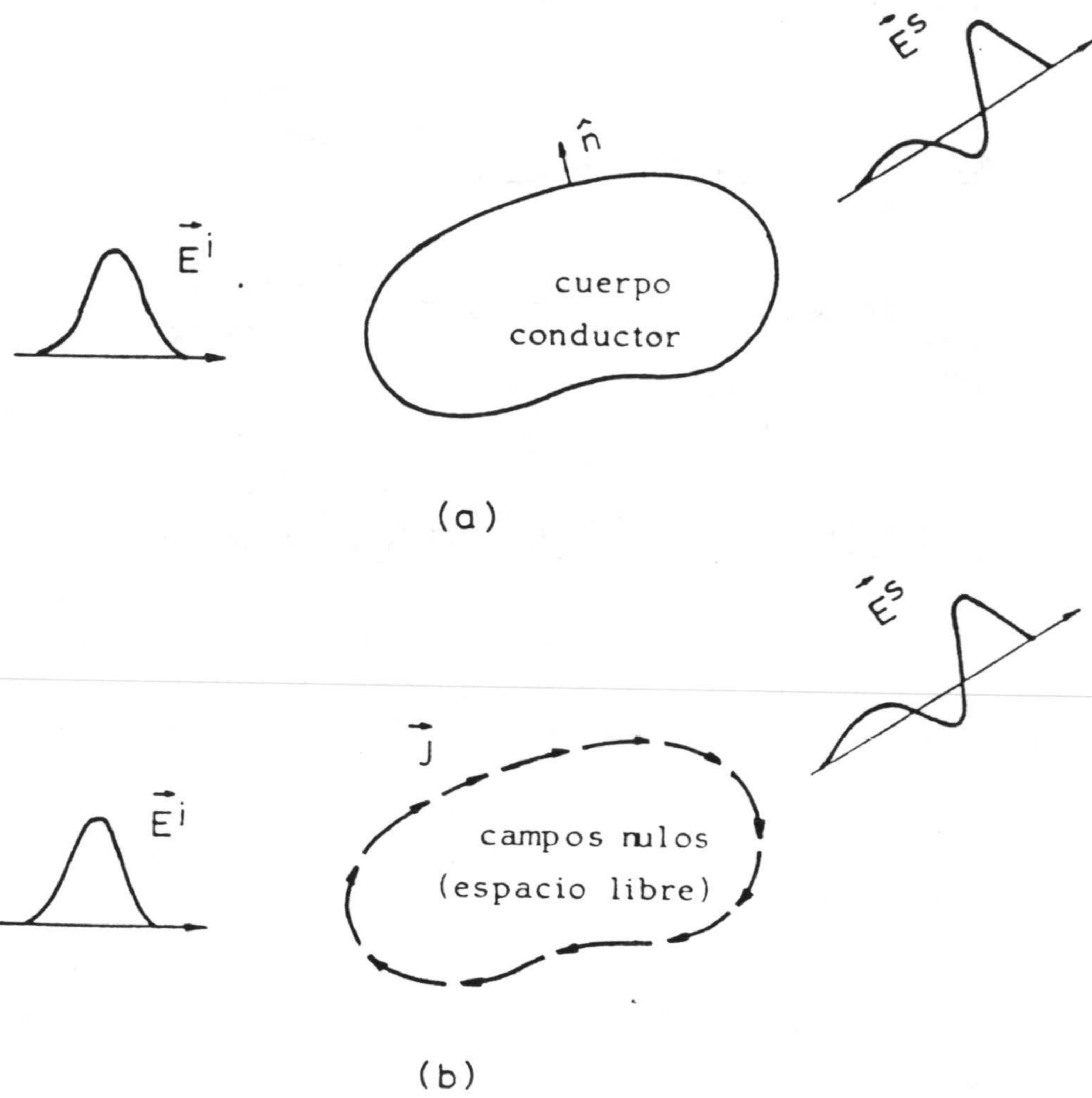


Fig.2.1.- (a) Problema general de la dispersión.
 (b) Equivalencia del problema general de la dispersión.

El problema que nos planteamos es, partiendo de un supuestamente conocido campo electromagnético incidente, obtener el campo dispersado. Esta es una cuestión no trivial que requiere como paso previo el cálculo de la distribución de corriente inducida en la superficie del cuerpo. Para ello es necesario resolver numéricamente la ecuación integral que resulta de imponer, de acuerdo con el teorema de unicidad, las condiciones de contorno en la superficie del blanco bien a la componente tangencial del campo eléctrico o del magnético.

La condición de contorno sobre la superficie del blanco para el campo eléctrico es:

$$\hat{n} \wedge \vec{E} = \hat{n} \wedge (\vec{E}^s + \vec{E}^i) = 0 \quad (2.1)$$

y para el campo magnético:

$$\hat{n} \wedge \vec{H} = \hat{n} \wedge (\vec{H}^s + \vec{H}^i) = \vec{J} \quad (2.2)$$

donde \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie del blanco.

Si imponemos las condiciones de contorno al campo eléctrico, substituyendo en la ecuación (2.1) \vec{E}^i por la expresión del campo creado por una distribución superficial de fuentes (Apendice A) se obtienen las siguientes ecuaciones integrales EFIE:

$$\hat{n} \wedge \vec{E}^i = \frac{-\hat{n}}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \left\{ \frac{3([\vec{\Sigma}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\vec{\Sigma}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{R^5} + \frac{3([\vec{J}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\vec{J}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{c R^4} + \frac{([\dot{\vec{J}}] \wedge \vec{R}) \wedge \vec{R}}{c^2 R^3} \right\} ds' \quad (2.3)$$

$$\hat{n} \wedge \vec{E}^i = \frac{-\hat{n}}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \left\{ \frac{[\rho] \vec{R}}{R^3} - \frac{(\nabla' \cdot [\vec{J}])_t' \vec{R}}{c R^2} - \frac{[\dot{\vec{J}}]}{c^2 R} \right\} ds' \quad (2.4)$$

$$\hat{n} \wedge \vec{E}^i = \frac{-\hat{n}}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \left\{ \frac{[\rho] \vec{R}}{R^3} + \frac{([\vec{J}] \cdot \vec{R})\vec{R} - \vec{R} \wedge ([\vec{J}] \wedge \vec{R})}{c R^4} + \frac{([\dot{\vec{J}}] \wedge \vec{R}) \wedge \vec{R}}{c^2 R^3} \right\} ds' \quad (2.5)$$

$$\hat{n} \wedge \vec{E}^i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\hat{n} \wedge \int_{V'} \left\{ \frac{\nabla' [\rho]_t'}{R} + \frac{[\dot{\vec{J}}]}{c^2 R} \right\} dv' - \int_A \frac{[\rho]}{R} dA \Big|_{\vec{A}_a}^{\vec{A}_b} \right] \quad (2.5')$$

De forma análoga, para el campo magnético se obtiene la ecuación integral [6]

$$\hat{n} \wedge \vec{H} = \vec{J} = \epsilon \hat{n} \wedge \vec{H}^i + \frac{1}{2\mu} \hat{n} \wedge \int_{S'} \left(\frac{([\vec{J}] \wedge \vec{R}) \wedge \vec{R}}{R^3} + \frac{[\dot{\vec{J}}] \wedge \vec{R}}{c R^2} \right) ds' \quad (2.6)$$

En estas ecuaciones las magnitudes entre corchetes deben ser evaluadas en el tiempo retardado $t' = t - R/c$; siendo R la distancia desde el punto fuente al punto campo (Fig.2.2). Las magnitudes ρ y \vec{J} representan las densidades de carga y corriente respectivamente. Las variables con "prima" se refieren a puntos fuentes.

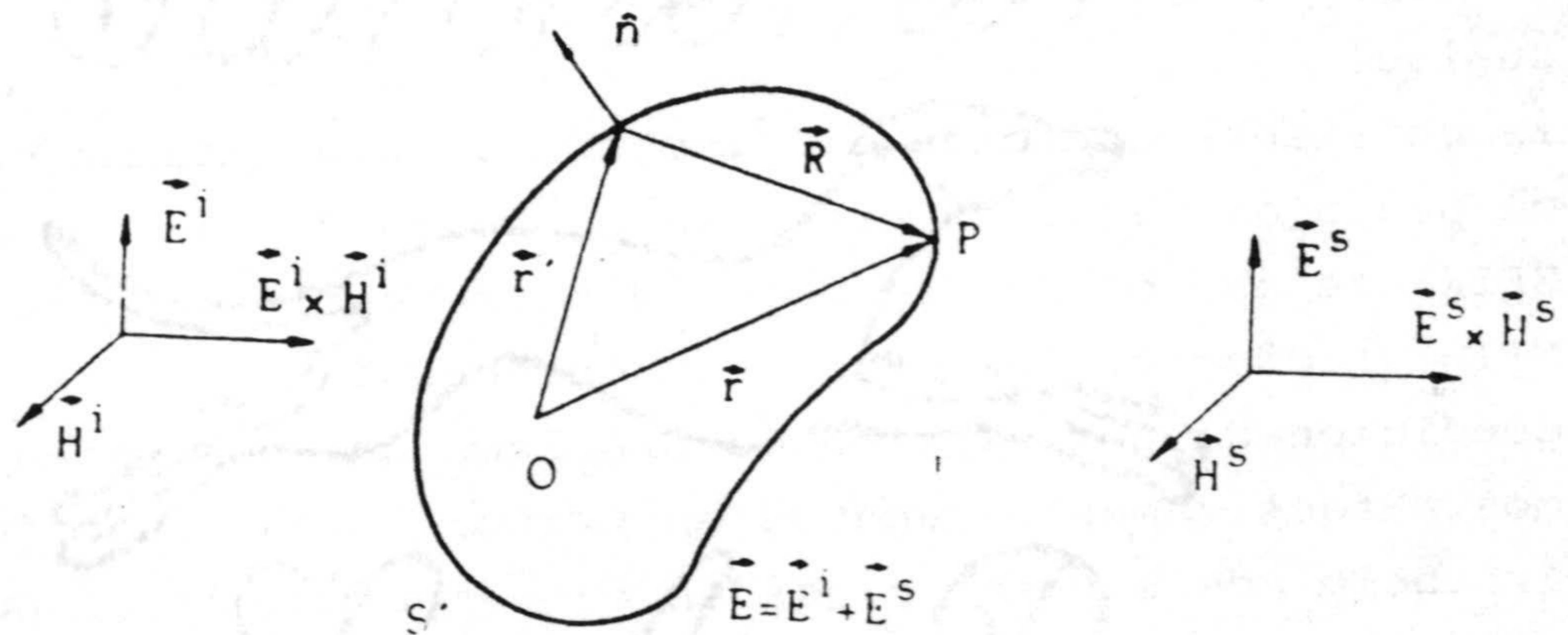


Fig. 2.2.- Geometría del problema.

Estas ecuaciones integrales deben de cumplir unas condiciones iniciales específicas para que exista una única solución:

1) El estado inicial en $t = 0$ debe ser conocido en todo punto en el dominio computacional, esto es, $\vec{E}(\vec{r}, 0)$ y $\vec{H}(\vec{r}, 0)$ son dados en S (Fig. 2.1.a).

2) Las componentes tangenciales de \vec{E} o \vec{H} sobre los contornos de el dominio computacional deben

ser conocidas para todo $t \geq 0$. Por ejemplo, para el caso de un conductor perfecto debe cumplirse en su superficie que $\hat{n} \wedge \vec{E}(t) = 0$. Para el contorno en el infinito debe verificarse la condición de radiación de Sommerfeld, esto es, el campo dispersado debe de ser del tipo de onda viajera saliente.

Desde el punto de vista teórico y de acuerdo con el teorema de unicidad [22] puede utilizarse cualquiera de las ecuaciones EFIE o MFIE para hallar la corriente inducida en el blanco. Sin embargo desde el punto de vista numérico la elección de la ecuación EFIE (ecuación de Fredholm de primera clase) o de la MFIE (ecuación de Fredholm de segunda clase) está condicionada por el tipo de problema que nos planteemos. Efectivamente, aunque en principio la ecuación de Fredholm de segunda clase en el campo magnético puede parecer preferible porque la función incógnita aparece a la vez fuera y dentro de la integral y su núcleo no contiene derivadas espaciales, en el caso de hilos y superficies delgadas la MFIE plantea problemas computacionales. Concretamente en el caso de hilos delgados en el núcleo de la integral aparecen senos de ángulos muy pequeños [59].

Dado que el objetivo que nos proponemos es el estudio de la interacción de OEMT con hilos delgados, nuestro interés se enfocará hacia la solución de una ecuación de la clase EFIE. La razón por la que nos limitamos al tratamiento de hilos delgados es que estos constituyen la base de una técnica muy generalizada a la hora de estudiar la interacción de una señal electromagnética con un cuerpo cuyo tamaño electromag-

nético corresponde a la región de las bajas frecuencias o primeras resonancias. Esta técnica consiste en simplificar el problema modelando la superficie del objeto mediante una red apropiada de hilos delgados interconectados |58|, |60|.

En este tipo de modelación hay que considerar dos aspectos diferentes |23|, |58|, |60|, |61|.

1) Para que la malla de hilo se comporte desde el punto de vista electromagnético aproximadamente como si fuera una superficie sólida, debe verificarse que el tamaño de la malla sea pequeño comparado con la longitud de onda.

Las limitaciones de este modelado de una superficie cerrada han sido analizadas teóricamente por Lee et al. |61| y corroboradas experimentalmente por |59|.

En el desarrollo teórico de Lee se parte de las expresiones teóricas de la inductancia y capacitancia de una unidad teórica (tamaño de malla), de la red de hilo, supuesta cuadrada y de la del correspondiente parche cuadrado de la superficie sólida modelada por la red. El análisis demuestra que cada unidad básica del modelo de malla de hilo tiene un exceso de autoinductancia dado por una expresión cuyo término principal es:

$$\Delta L \approx \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \left(\frac{d}{2\pi a} \right) \quad (2.7)$$

donde d es el espaciado entre hilos, a es el radio del hilo y μ_0 la permeabilidad del espacio libre. La inductancia y capacitancia definida por la unidad básica de la red debe ser aproximadamente igual a las de la sección equivalente de superficie sólida para que la corriente generada sobre el hilo sea una buena aproximación a la de dicha superficie sólida. De acuerdo con (2.7) para conseguir que las inductancias sean aproximadamente iguales es necesario que la circunferencia de los hilos sea aproximadamente igual al espaciado entre ellos. Ya que esto se aplica a hilos en ambas direcciones de la malla, el requerimiento resultante es que la red de hilo debería tener dos veces el área de la superficie externa de la superficie sólida a ser modelada. No existe un tratamiento adecuado para corregir la diferencia de autocapacitancia entre la superficie continua y la red de hilo. No obstante, como resultado empírico puede concluirse en general que la utilización de la regla de "doble superficie" para corregir la diferencia de autoinductancia del modelo de hilo es suficiente para obtener buenos resultados [58], [60]-[62].

2) Aproximación de hilo delgado.

Esencialmente en las aproximaciones de hilo delgado se considera la corriente axialmente dirigida y centrada en el eje del hilo. Con esta aproximación se consigue separar puntos fuentes y puntos campos con lo que en el núcleo de la ecuación integral desaparecen las singularidades. Concretamente se supone:

I) Las corrientes azimutales son despreciables.

II) Se desprecia la dependencia azimutal de la corriente.

III) El núcleo exacto de la ecuación se sustituye por un núcleo aproximado que reduce la integral de superficie a una integral de línea a lo largo del eje del hilo. Esto equivale a suponer las fuentes eléctricas inducidas sobre la superficie como localizadas en el eje de los hilos dando por tanto lugar a una representación filamental de la corriente.

IV) La condición de contorno del campo eléctrico se aplica sobre la superficie del conductor.

V) La corriente al final del hilo se toma como cero, independientemente del diametro del hilo.

Para considerar aceptable esta aproximación se requiere:

i) El diametro del hilo debe ser menor que la menor longitud de onda. Generalmente se usa como cota para el diametro 0.2λ .

ii) El cociente longitud entre extremos o uniones de la estructura y diametro (L/D) debe ser mayor que 10 ó 20, puesto que en caso contrario pueden afectar significativamente a la distribución de corriente [58].

En el apéndice B se hace un estudio en TD que permite estimar el grado de validez y error cometido en la aproximación de hilo delgado.

Con esta aproximación las ecuaciones integrales toman la forma:

$$\hat{s} \cdot \vec{E}^i(\vec{r}, t) = \frac{\hat{s}}{4\pi\epsilon} \int_{C(s')} \left\{ \left(\frac{\hat{s}'}{R^3} - \frac{3(\hat{s}' \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} \right) \Sigma(s', t') + \left(\frac{\hat{s}'}{cR^2} - \frac{3(\hat{s}' \cdot \vec{R})\vec{R}}{cR^4} \right) I(s', t') + \left(\frac{\hat{s}'}{c^2 R} - \frac{(\hat{s}' \cdot \vec{R})\vec{R}}{c^2 R^3} \right) \frac{\partial I(s', t')}{\partial t'} \right\} ds' \quad (2.8)$$

$$\hat{s} \cdot \vec{E}^i(\vec{r}, t) = \frac{\hat{s}}{4\pi\epsilon} \int_{C(s')} \left\{ -\frac{q(s', t')\vec{R}}{R^3} + \frac{\vec{R}}{cR^2} \frac{\partial I(s', t')}{\partial s'} + \frac{1}{c^2 R} \frac{\partial I(s', t')}{\partial t'} \right\} ds' \quad (2.9)$$

$$\hat{s} \cdot \vec{E}^i(\vec{r}, t) = \frac{\hat{s}}{4\pi\epsilon} \int_{C(s')} \left\{ -\frac{q(s', t')\vec{R}}{R^3} + \left(\frac{\hat{s}'}{cR^2} - \frac{2(\hat{s}' \cdot \vec{R})\vec{R}}{cR^4} \right) I(s', t') + \left(\frac{\hat{s}'}{c^2 R} - \frac{(\hat{s}' \cdot \vec{R})\vec{R}}{c^2 R^3} \right) \frac{\partial I(s', t')}{\partial t'} \right\} ds' \quad (2.10)$$

$$\hat{s} \cdot \vec{E}^i(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{C(s')} \left\{ \frac{\hat{s}'}{R} \frac{\partial q(s', t')}{\partial s'} + \frac{\hat{s}' \cdot \hat{s}}{c^2 R} \frac{\partial I(s', t')}{\partial t'} \right\} ds' - \frac{\hat{s} \cdot \hat{s}'}{4\pi\epsilon} \frac{q(s', t')}{R} \Big|_{s'=0}^{s'=L} \quad (2.10')$$

válidas para cualquier punto del espacio que cumpla $|r-r'| \geq a$ y donde $C(s')$ es la trayectoria seguida por las cargas en la aproximación de hilo delgado, s y s' las variables de longitud en el punto campo y fuente respectivamente, \hat{s} y \hat{s}' los vectores unitarios tangen-

tes a $C(s')$ en \bar{r} y \bar{r}' , $t' = t - R/c$, $\vec{E}^i(r,t)$ el campo incidente o aplicado y a es el radio del hilo (Fig. 2.3).

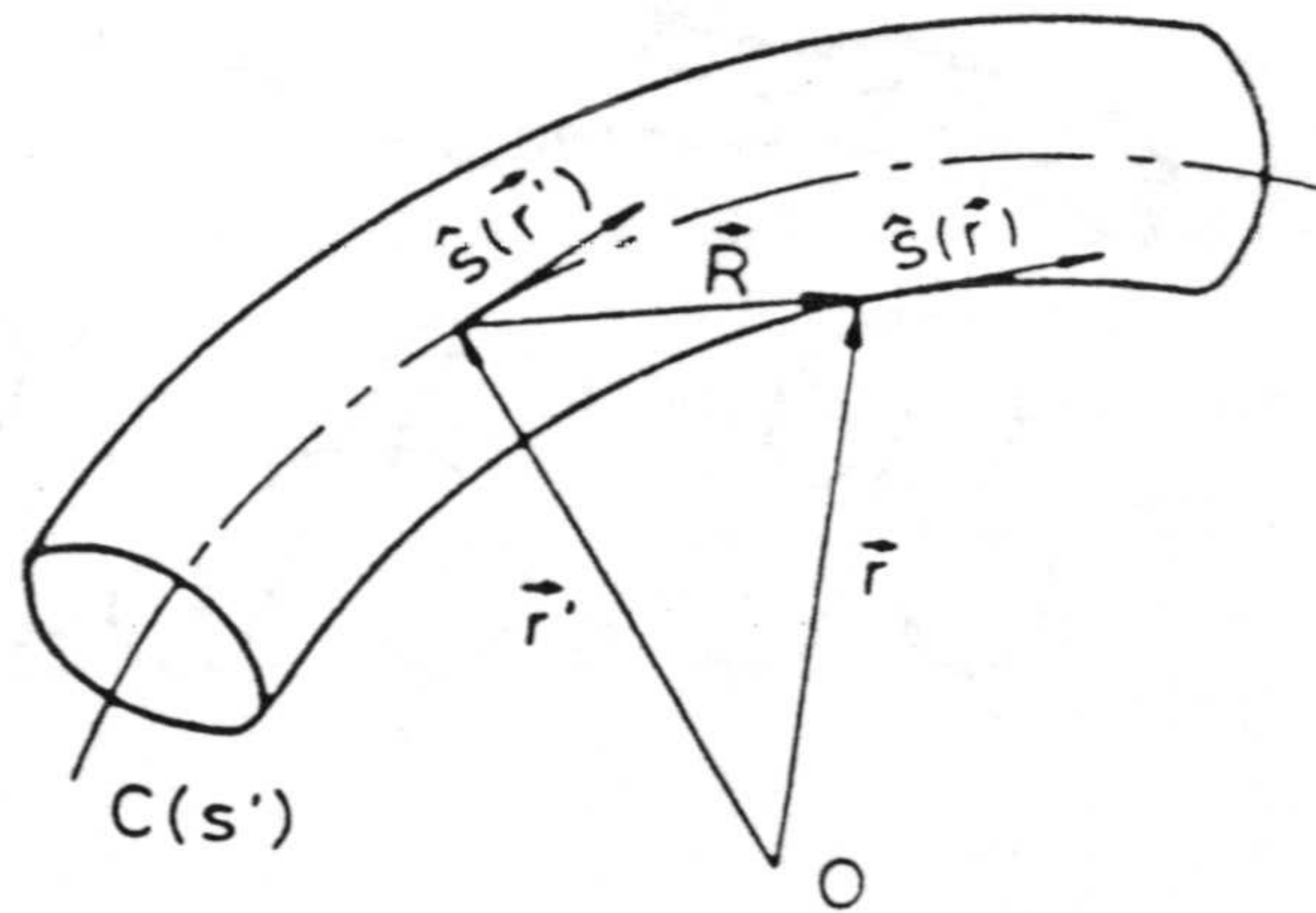


Fig. 2.3.- Coordenadas para la estructura de hilo delgado.

De las diferentes posibilidades para la ecuación EFIE puede demostrarse que es la que tiene menor orden de pseudosingularidad en el núcleo, esto es la (2.9), la que conduce a la forma de solución numérica que resulta más eficiente desde el punto de vista computacional [63].

Por estas razones utilizaremos la ecuación EFIE (2.9) para el estudio, mediante su solución numé-

rica, de las corrientes inducidas en una estructura formada por interconexión de hilos delgados cuando se excita con una OEMT. Concretamente, en este segundo capítulo se resuelve numéricamente dicha ecuación para encontrar la distribución de corriente en un hilo conductor delgado excitado por una señal arbitraria. Esta ecuación constituye una versión en DT de la de Pocklington en DF [58], [64]-[66].

2.2 RESOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION EFIE (2.4) MEDIANTE EL MM.

De acuerdo con lo que se ha comentado en apartados anteriores nuestra intención es resolver, mediante el MM en DT la ecuación EFIE (2.4) particularizada para estructuras de hilo con objeto de calcular numéricamente la distribución de corriente inducida en un hilo conductor cuando se le excita con una señal de variación temporal arbitraria. Aunque se supone al lector familiarizado con la técnica del MM, en el apéndice C se hace una breve exposición del método en DF y su extensión a DT.

Por razones de comodidad, reescribimos la ecuación integral EFIE (2.4) en (2.11). Esto es:

$$\hat{s} \cdot \vec{E}^i(s,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{C(s')} \left[\frac{\hat{s} \cdot \hat{s}'}{c^2 R} \frac{\partial}{\partial t'} I(s',t') + \frac{\hat{s} \cdot \vec{R}}{cR^2} \frac{\partial}{\partial s'} I(s',t') - \frac{\hat{s} \cdot \vec{R}}{R^3} q(s',t') \right] ds' \quad (2.11)$$

donde $C(s')$ es la trayectoria seguida por las cargas en la aproximación de hilo delgado, s y s' las variables de longitud en el punto campo y fuente respectivamente y \hat{s} y \hat{s}' los vectores unitarios tangentes al eje del hilo de contorno C en \vec{r} y \vec{r}' (Fig. 2.3).

La variable $I(s', t')$ representa la corriente en el punto fuente s' en el tiempo retardado $t' = t - R/c$ y $\vec{E}^i(s, t)$ al campo incidente en el punto de observación \vec{r} .

Resolviendo numéricamente la ecuación (2.11) es posible hallar la distribución de corriente a lo largo del hilo mediante un proceso de solución escalonada en el tiempo basado en la técnica de adaptación por puntos del método de los momentos. En lo que sigue se describe, en diferentes subapartados, los pasos y consideraciones más importantes relativas al método numérico desarrollado.

- 1) Aproximación de la estructura mediante una poligonal.

Para obtener la solución numérica de (2.11) el primer paso es aproximar la estructura de hilo mediante una poligonal formada por N_s segmentos rectos C_i de longitud Δ_i [66] (Fig. 2.4). Análogamente se considera el tiempo dividido en N_T intervalos de duración δ_j que, sin pérdida de generalidad se pueden suponer constantes e independientes de j .

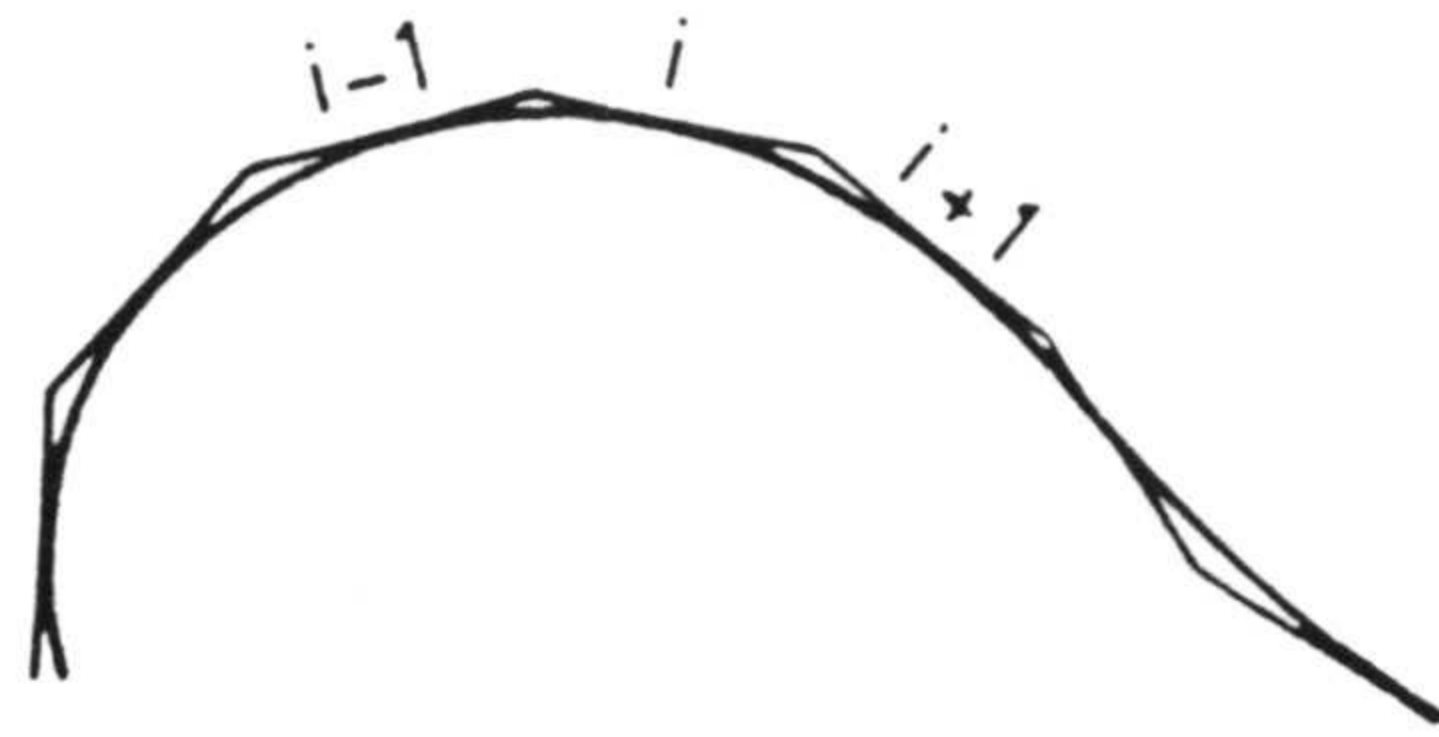


Fig. 2.4.- Aproximación de un hilo delgado por una poligonal.

Si \hat{s}_i es el vector unitario tangente al segmento ΔC_i y \vec{R}_i es el vector que une al punto fuente en el intervalo i , con el punto campo, la ecuación (2.11) queda:

$$\hat{s} \cdot \vec{E}^i(\vec{r}, t) \approx \frac{\hat{s}}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^{N_s} \int_{\Delta C_i} \left[\frac{\hat{s}_i}{c^2 R_i} \frac{\partial}{\partial t'} I(s', t') + \frac{\vec{R}_i}{c R_i^2} \frac{\partial}{\partial s'} I(s', t') - \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} q(s', t') \right] ds' \quad (2.12)$$

La corriente puede ser desarrollada aproximadamente por:

$$I(s', t') \approx \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_T} I_{i,j}(s'-s_i, t'-t_j) U(s'-s_i) V(t'-t_j) \quad (2.13)$$

donde

$$U(s', s_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s''| \leq \Delta_i/2; s'' = s' - s_i \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

$$V(s', t_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t''| \leq \delta_j/2 = \delta/2; t'' = t' - t_j \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

y $I_{ij}(0,0) = I_{ij}$ es el valor de la intensidad de corriente en el centro del intervalo espacio-temporal (i,j) .

2) Elección de funciones base y peso.

Un aspecto inherente al método de los momentos es la elección de las funciones base con las que desarrollar la función incógnita y las funciones peso con las que forzar el cumplimiento de las condiciones de contorno en la superficie de la estructura [21], [23], [58].

De acuerdo con [19]-[21], [23], [63], [66] la elección de funciones peso delta de Dirac resulta muy eficaz por su sencillez, calidad de los resultados y rapidez respecto a los mismos problemas estudiados con funciones peso diferentes. Por ello hemos elegido este tipo de función para nuestros desarrollos.

Así pues, sustituyendo (2.13) en (2.12) y utilizando funciones peso delta de Dirac $\delta(s-s_u)$

$\delta(t-t_v)$ ($u = 1, \dots, N_S; v = 1, \dots, N_T$) para adaptar la ecuación a los centros de los intervalos espacio-temporales u, v , se obtiene

$$\hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(s_u, t_v) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^{N_S} \hat{s}_u \cdot \int_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2} \left[\frac{\hat{s}_i}{c^2 R_{iu}} \frac{\partial}{\partial t_j''} I_{ij}(s_i'', t_j'') + \frac{\vec{R}_{iu}}{c R_{iu}^2} \frac{\partial}{\partial s_i''} I_{ij}(s_i'', t_j'') - \frac{\vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} q_{ij}(s_i'', t_j'') \right] ds_i'' \quad (2.14)$$

$u = 1 \dots N_S$
 $v = 1 \dots N_T$

donde como se muestra en la Fig. 2.5 R_{iu} es la distancia entre el punto fuente, en el intervalo espacial i , y el punto campo en el centro del intervalo espacial u , y t_j'' esta ligado con t_v por el principio de causalidad mediante la relación:

$$t_v = t_j + t_j'' + R_{iu}/c; \quad \vec{R}_{iu} = \vec{r}_u - \vec{r}_i - \hat{s}_i \quad (2.15)$$

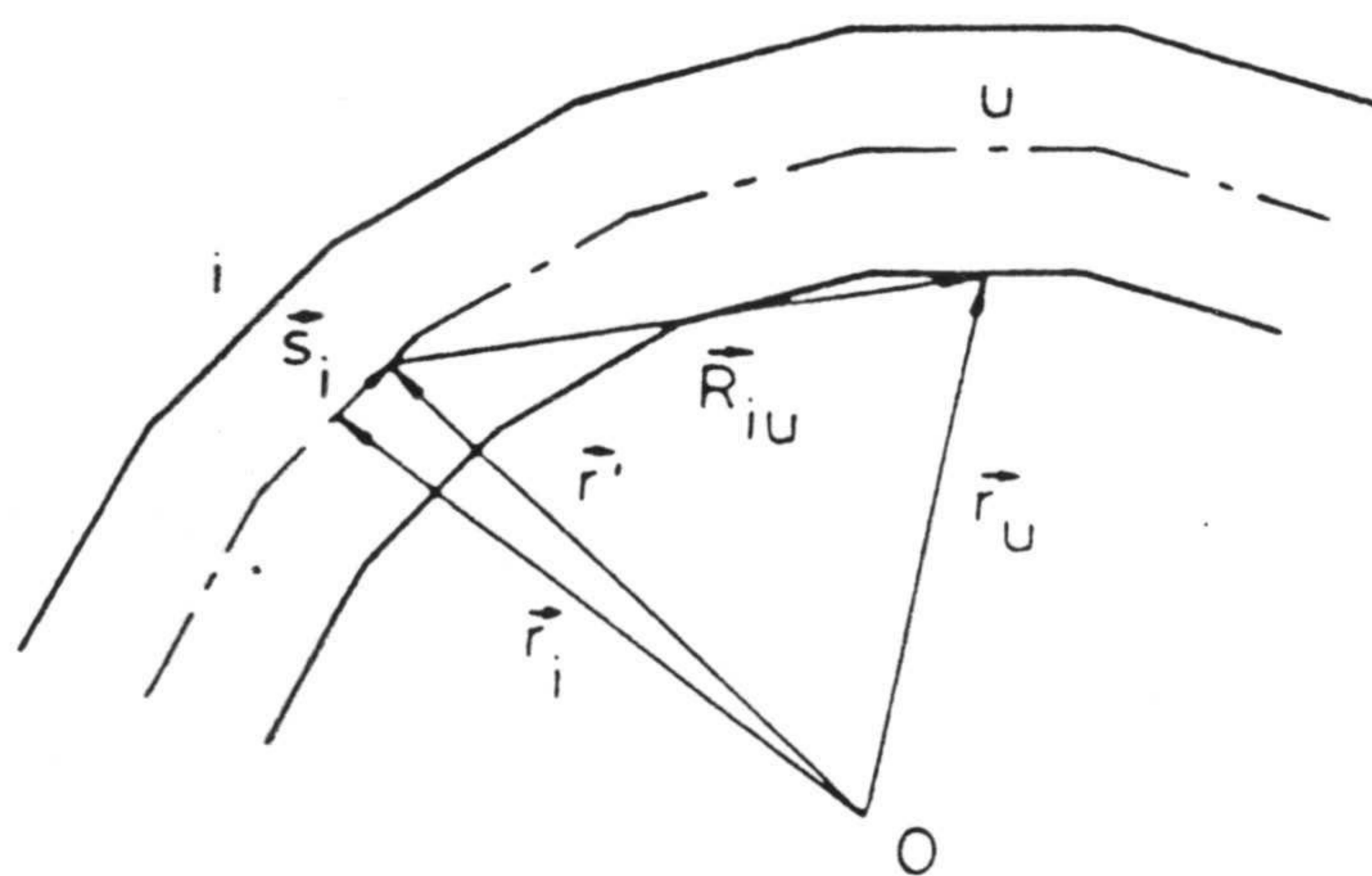


Fig. 2.5.- Coordenadas utilizadas en la poligonal.

De acuerdo con los datos conocidos en DF, donde ha dado muy buenos resultados la elección de funciones base consistente en una constante en una constante, una función seno y una coseno, escogeremos como función base equivalente en el dominio del tiempo, para segmentos pequeños comparados con la longitud de onda, una función interpolación lagrangiana de dos dimensiones y orden tres en cada dimensión [18]-[20], [27], [67]. Esto es, la dependencia funcional de $I_{ij}(s'-s_i, t'-t_j)$, con $s'-s_i = s_i''$ y $t'-t_j = t_j''$ dentro del intervalo i, j , vendrá dada por

$$I_{i,j}(s_i'', t_j'') = \sum_{\ell=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} B_i^{(\ell,m)} I_{i+\ell, j+m} \quad (2.16)$$

con

$$B_i^{(\ell,m)} = \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq \ell}}^1 \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{s_i'' + s_i - s_{i+p}}{s_{i+\ell} - s_{i+p}} \frac{t'' - q\delta}{(m-q)\delta} \quad (2.17)$$

donde $|s_i''| \leq \Delta_i/2$ y $|t''| \leq \delta/2$.

Para evitar interpolaciones al futuro cuando v sea igual a j , n tomará el valor -2 para $R_{iu}/c \leq 0.5$ y -1 en los demás casos.

En el diagrama espacio temporal de la Fig. 2.6 se ilustra la forma en que esta interpolación relaciona la corriente en un intervalo espacio temporal con la que existe en el centro de los intervalos vecinos.

La elección de este tipo de funciones base y peso es equivalente a la usada en el método numérico NEC (Numerical Electromagnetic Code) en DF [17], [68].

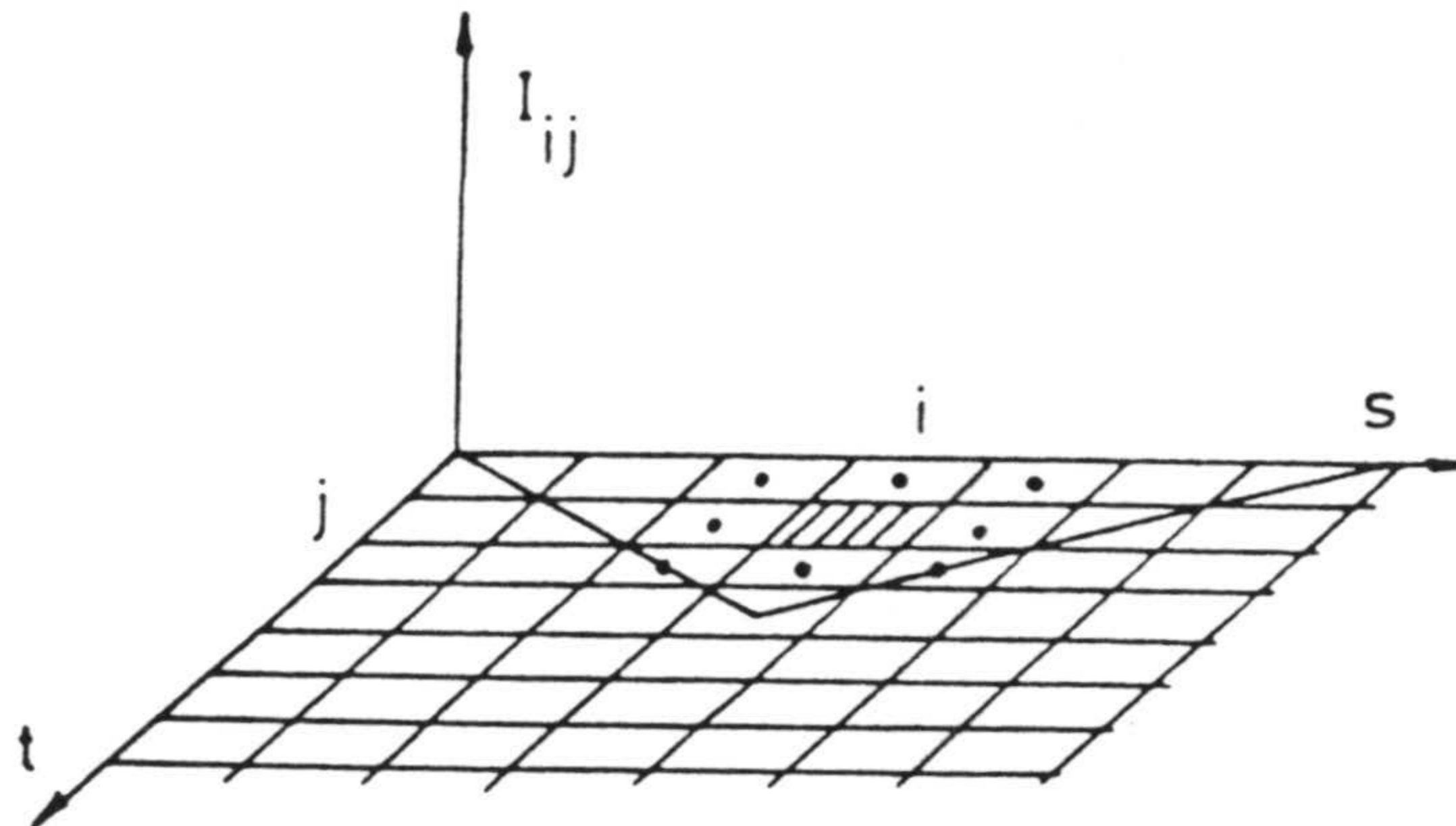


Fig. 2.6.- Diagrama espacio-tiempo. La intensidad en el intervalo rayado es función de las intensidades en los centros de los intervalos punteados. La línea continua separa el pasado del futuro.

2.2.1 Interpolación de la carga.

El tercer sumando del segundo miembro de la ecuación (2.14) corresponde al término de carga. No contribuye directamente al campo de radiación puesto que varía con $1/R^2$ pero sí al campo total de cercanía. Estos campos, rápidamente variables con la distancia, toman valores apreciables en la superficie de la antena. Por esta razón el término de carga tiene un peso

muy importante entre los sumandos que componen la ecuación (2.14).

En este apartado exponemos diferentes alternativas para expresar la carga en función de la intensidad de corriente por medio de la ecuación de continuidad. El objetivo es comparar posteriormente los resultados obtenidos y el tiempo de computación empleado al utilizar las diferentes alternativas en el cálculo de la intensidad de corriente inducida sobre un hilo delgado excitado por una OEMT.

1ª Posibilidad (Q1) |19|.

Consiste en interpolar la carga $q_{i,j}$ (s_i'', t_j'') en un punto cualquiera (s_i'', t_j'') del intervalo espacio temporal ij en función de la carga $q_{i,j}$ en el centro de los intervalos vecinos, usando la misma interpolación lagrangiana que en el caso de la intensidad

$$q_{i,j}(s_i'', t_j'') = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n'}^{n'+2} B_i^{(l,m)} q_{i+l, j+m} \quad (2.18)$$

La ecuación de continuidad nos permite expresar la carga en los centros de los intervalos espacio temporales i, j en función de las intensidades en los mismos a través de una integración en el tiempo:

$$q_{i,j} = \sum_{s=1}^j - \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{\partial}{\partial s_i''} I_{i,s}(s_i'', t'') dt'' \Big|_{s_i''=0} \quad (2.19)$$

Sustituyendo (2.16) en (2.19) se obtiene:

$$q_{i,j} = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} \sum_{s=1}^j {}^1 C_i^{(l,m)} I_{i+l, s+m} \quad (2.20)$$

donde

$${}^1 C_i^{(l,m)} = - \frac{\partial}{\partial s_i''} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} B_i^{(l,m)} dt'' \Big|_{s_i''=0} \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.17) en (2.21)

$${}^1 C_i^{(l,m)} = - \left[\frac{\partial}{\partial s_i''} \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \frac{s_i'' + s_i - s_{i+p}}{(s_{i+l} - s_{i+p})} \right]_{s_i''=0} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{t'' - q\delta}{(m-q)\delta} dt'' \quad (2.22)$$

y realizando la integral y la derivada se obtiene:

$${}^1 C_i^{(l,m)} = - \sum_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \frac{1}{s_i - s_{i+p}} \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{s_i - s_{i+p}}{(s_{i+l} - s_{i+p})(m-q)} \cdot \left[\frac{t''^3}{3} - \frac{t''^2}{2} \sum_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} q\delta + t'' \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} q\delta \right]_{-\delta/2}^{\delta/2} \quad (2.23)$$

Operando y definiendo las variables siguientes

$$SP_i^l = \sum_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} (S_i - S_{i+p}) \quad (2.24)$$

$$PQ^m = \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} q \delta \quad (2.25)$$

$$D_i^{(l,m)} = \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (S_{i+l} - S_{i+p}) (m-q) \delta \quad (2.26)$$

se obtiene

$$C_i^{(l,m)} = - \sum_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} (S_i - S_{i+p}) \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{1}{(S_{i+l} - S_{i+p}) (m-q) \delta} \cdot \delta.$$

$$\left(\frac{\delta^2}{12} + \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} q \delta \right) = \frac{SP_i^l}{D_i^{(l,m)}} \delta \left(\frac{\delta^2}{12} + PQ^m \right) \quad (2.27)$$

Evaluando la carga $q_{i+1, j+m}$ de la expresión (2.18) con ayuda de (2.20), obtenemos la carga en un punto cualquiera $q_{ij}(s_i'', t_j'')$ en función de valores de intensidades en los centros de los intervalos espacio temporales.

$$q_{i,j}(s_i'', t_j'') = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n'}^{n'+2} B_i^{(l,m)}$$

$$\sum_{s=1}^{j+m} \sum_{r=-1}^{+1} \sum_{t=n}^{n+2} C_{i+l}^{(r,t)} I_{i+l+r, s+t} \quad (2.28)$$

donde para evitar interpolar con el futuro

$$n' = \begin{cases} -2 & \text{si } R_{iu}/c < 1.5 \\ -1 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

$$n = \begin{cases} -2 & \text{si } R_{iu}/c < 0.5 \\ -1 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

y

$$B_i^{(l,m)} = \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \frac{s_i'' + s_i - s_{i+p}}{s_{i+l} - s_{i+p}} \prod_{\substack{q=n' \\ q \neq m}}^{n'+2} \frac{t'' - q\delta}{(m-q)\delta}$$

2ª Posibilidad (Q2).

Consiste en despreciar los términos de tercer orden en (2.23), dado que la interpolación lagrangiana que estamos usando es de segundo orden.

Todas las expresiones que hemos visto para la 1ª posibilidad seguirán siendo válidas salvo (2.27) que ahora se escribe:

$${}^2 C_i^{(l,m)} = \frac{S P_i^l}{D_i^{(l,m)}} \delta P Q^m \quad (2.29)$$

y (2.28)

$$q_{i,j}(s_i, t_j) = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n'}^{n'+2} B_i^{(l,m)} \cdot \sum_{s=1}^{j+m} \sum_{r=-1}^{+1} \sum_{t=n}^{n+2} {}^2 C_{i+l}^{(r,t)} I_{i+l+r, s+t} \quad (2.30)$$

3ª Posibilidad (Q3) |19|.

Miller, en un apéndice de su artículo |19| propone un desarrollo alternativo que en algunos casos le ha dado mejores resultados.

El primer paso es definir una nueva función $\mathcal{H}(s', t')$ que cumpla:

$$q(s', t') = \frac{\partial}{\partial s'} \mathcal{H}(s', t') \quad (2.31)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad se verificará

$$\mathcal{H}(s', t') = - \int_{-\infty}^{t'} I(s', \tau) d\tau \quad (2.32)$$

Partiendo de esta nueva función $\mathcal{H}(s', t')$ relacionamos su valor en un punto cualquiera de un intervalo espacio temporal i, j ($\mathcal{H}_{ij}(s_i'', t_j'')$) con el valor en el centro de los intervalos vecinos mediante una interpolación lagrangiana de la forma:

$$\mathcal{H}_{ij}(s_i'', t_j'') = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n'}^{n'+2} B_i^{(l,m)} \mathcal{H}_{i+l, j+m} \quad (2.33)$$

Teniendo en cuenta (2.31) la carga puede expresarse como:

$$\begin{aligned} q_{i,j}(s_i'', t_j'') &= \frac{\partial}{\partial s_i''} \mathcal{H}_{ij}(s_i'', t_j'') = \\ &= \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n'}^{n'+2} s B_i^{(l,m)} \mathcal{H}_{i+l, j+m} \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde

$$s B_i^{(l,m)} = \frac{\partial}{\partial s_i''} B_i^{(l,m)}$$

Por otro lado la nueva variable \mathcal{H} está relacionada con la intensidad mediante la ecuación (2.32) con lo cual el valor de \mathcal{H} en el centro del intervalo i, j debe cumplir:

$$\mathcal{H}_{ij} = - \sum_{s=1}^j \int_{-\delta/2}^{\delta/2} I_{i,s}(s_i'', t'') dt'' \Big|_{s_i''=0} \quad (2.35)$$

Sustituyendo (2.35) en (2.34) y definiendo ${}^3C_i^{(l,m)}$ como:

$${}^3C_i^{(l,m)} = - \int_{-\delta/2}^{\delta/2} B_i^{(l,m)} dt'' \Big|_{s_i''=0} \quad (2.36)$$

se obtiene:

$$q_{i,j}(s_i'', t_j'') = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n'}^{n'+2} s B_i^{(l,m)} \cdot \sum_{s=1}^{j+m} \sum_{r=-1}^{+1} \sum_{t=n}^{n+2} C_{i+l}^{(r,t)} I_{i+l+r, s+t} \quad (2.37)$$

donde se ha tenido en cuenta (2.16) para la expresión de $I_{i,s}(s_i'', t'')$:

$$I_{i,s}(s_i'', t'') = \sum_{r=-1}^{+1} \sum_{t=n}^{n+2} B_i^{(r,t)} I_{i+r, s+t} \quad (2.38)$$

y donde al igual que en (2.28) y con objeto de no interpolar en el futuro

$$n' = \begin{cases} -2 & \text{si } R_{iu}/c < 1.5 \\ -1 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

$$n = \begin{cases} -2 & \text{si } R_{iu}/c < 0.5 \\ -1 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

y

$$s B_i^{(l,m)} = \frac{\partial}{\partial s_i''} \left[\prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \frac{t''+1}{s_i''+s_i-s_{i+p}} \prod_{\substack{q=n' \\ q \neq m}}^{n'+2} \frac{t''-q\delta}{(m-q)\delta} \right]$$

Substituyendo (2.17) en (2.36) y realizando la integración podemos evaluar el coeficiente ${}^3C_i^{(1,m)}$

$$\begin{aligned} {}^3C_i^{(l,m)} &= \frac{- \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} (s_i - s_{i+p})}{\prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (s_{i+l} - s_{i+p})(m-q)\delta} \left[\frac{t''^3}{3} - \frac{t''^2}{2} \sum_{q=n}^{n+2} (q\delta) + t'' \prod_{q=n}^{n+2} (q\delta) \right]^{\delta/2} = \\ &= \frac{- \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} (s_i - s_{i+p})}{\prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (s_{i+l} - s_{i+p})(m-q)\delta} \delta \left[\frac{\delta^2}{12} + \prod_{q=n}^{n+2} q\delta \right] = \\ &= - \frac{PP_i^l}{D_i^{(l,m)}} \delta \left[\frac{\delta^2}{12} + PQ^m \right] \quad (2.39) \end{aligned}$$

donde

$$PP_i^l = \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} (s_i - s_{i+p}) \quad (2.40)$$

4a Posibilidad (Q4).

Esta posibilidad es igual que Q3 sin más que despreciar en (2.39) los términos de tercer orden con lo cual

$$C_i^{(l,m)} = - \frac{PP_i^l}{D_i^{(f,m)}} \delta PQ^m \quad (2.41)$$

5a Posibilidad (Q5).

Por la ecuación de continuidad, la carga se puede expresar como función de la intensidad a través de una integración en el tiempo

$$q(s', t') = - \int_{-\infty}^{t'} \frac{\partial}{\partial s'} I(s', \tau) d\tau = - \int_0^{t'} \frac{\partial}{\partial s'} I(s', \tau) d\tau \quad (2.42)$$

Descomponemos la integral en suma de integrales extendidas a los intervalos temporales

$$q(s', t') = - \sum_{s=1}^{j-1} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{\partial}{\partial s'} I(s', \tau) d\tau - \int_{-\delta/2}^{t_j''} \frac{\partial}{\partial s'} I(s', \tau) d\tau \quad (2.43)$$

Es decir

$$q_{i,j}(s_i'', t_j'') = - \sum_{s=1}^{j-1} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{\partial}{\partial s_i''} I_{i,s}(s_i'', \tau) d\tau -$$

$$- \int_{-\delta/2}^{t_j''} \frac{\partial}{\partial s_i''} I_{i,j}(s_i'', \tau) d\tau \quad (2.44)$$

Sustituyendo (2.16) en (2.44) y definiendo

$$\int s B_i^{(l,m)} = \frac{\partial}{\partial s_i''} \int B_i^{(l,m)} dt''$$

se obtiene la siguiente expresión para $q_{ij}(s_i'', t_j'')$

$$q_{i,j}(s_i'', t_j'') = - \sum_{s=1}^{j-1} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{\partial}{\partial s_i''} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} B_i^{(l,m)} I_{i+l, s+m} -$$

$$- \int_{-\delta/2}^{t_j''} \frac{\partial}{\partial s_i''} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} B_i^{(l,m)} I_{i+l, j+m} =$$

$$= - \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \sum_{s=1}^{j-1} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} s B_i^{(l,m)} I_{i+l, s+m} + \right. \quad (2.45)$$

$$\left. + \int_{-\delta/2}^{t_j''} s B_i^{(l,m)} I_{i+l, j+m} \right\}$$

Nos aparecen dos términos en la interpolación de la carga. Uno que depende de t'' y otro que no. El primero aparece en la contribución a la integral del intervalo temporal j , el cual debe verificar el principio de causalidad:

$$t_v - t_j = t_j'' + R_{iu}/c$$

de manera que $t'' + R_{iu}/c$ debe ser un múltiplo entero de δ , con lo que nos aparece una ligadura entre s_i'' y t_j'' que obliga a que ambos aparezcan en la ecuación en el intervalo temporal j . Por el contrario el otro término, que no depende de t'' , corresponde a la suma de todos los intervalos anteriores al j . Durante estos intervalos temporales han interactuado por completo los intervalos espaciales relacionados con (s_u, t_v) por el principio de causalidad.

Esta forma de interpolación de la carga es distinta a las explicadas anteriormente (Q1 a Q4) que se basa en una descomposición de la integral temporal de la forma

$$\Sigma_{ij} = \sum_{k=1}^j \int_{-\delta/2}^{\delta/2} I_{ik}(s_i'', t_j'') \Big|_{s_i''=0} \quad (2.46)$$

y a partir de estos coeficientes se efectúa una nueva interpolación

$$\Sigma_{ij}(s_i'', t_j'') = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} B_i^{(l,m)} \Sigma_{i+l, j+m} \quad (2.47)$$

Al hacer esto estamos primero despreciando la ligadura que existe entre s_i'' y t_j'' y quitando toda dependencia en estas variables para volver a tomarla posteriormente con una nueva interpolación.

Como se verá más adelante el desarrollo de la carga que nos ha dado mejores resultados ha sido Q5

y por tanto es con el que seguiremos a partir de aquí desarrollando la ecuación EFIE. (En el apéndice D se explica como se resuelve la ecuación EFIE con los otros tratamientos para la carga).

2.2.2. Expresión numérica operacional de la EFIE.

Si sustituimos (2.16) y (2.45) en (2.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{S}_u \cdot \vec{E}^i(S_u, t_u) = & \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \sum_{i=1}^{N_s} \int_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2} \left[\sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \frac{\hat{S}_i \cdot \hat{S}_u}{R_{iu}} t B_i^{(l,m)} + \right. \right. \\ & + c \frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^2} s B_i^{(l,m)} + c^2 \frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} s B_i^{(l,m)} \left. \left. \right]_{-\delta/2}^{t''} \right\} I_{i(l, j+m)} + \\ & + c^2 \frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} \sum_{s=1}^{\nu-r_{iu}-1} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} s B_i^{(l,m)} \left[I_{i(l, s+m)} \right] dS_i'' \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde

$$t B_i^{(l,m)} = \frac{\partial}{\partial t_j''} B_i^{(l,m)}$$

Puesto que $t_v = v\delta$ y $t_j = j\delta$ con v y j números enteros podemos definir

$$r_{iu} = \nu - j = \frac{t_j''}{\delta} + \frac{R_{iu}(S_i'')}{c\delta} = \text{Entero más proximo} \left(\frac{R_{iu}}{c\delta} \right) \quad (2.49)$$

Evaluando los términos siguientes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{iu,lm} = & \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \left[\frac{\hat{s}_i \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}} {}_s B_i^{(l,m)} + c \frac{\hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^2} {}_s B_i^{(l,m)} + \right. \\
 & \left. + c^2 \frac{\hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} \int_{{}_s B_i^{(l,m)}} \Big|_{-\delta/2}^{t''} \right] ds_i'' \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_{iu,lm} = \frac{1}{4\pi\epsilon c} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \left[c^2 \frac{\hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} \int_{{}_s B_i^{(l,m)}} \Big|_{-\delta/2}^{\delta/2} \right] ds_i'' \quad (2.51)$$

cuyo desarrollo analítico se da en el apéndice E, la ecuación queda

$$\hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(s_u, t_u) = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=-n}^{n+2} \{ \mathcal{F}_{iu,lm}$$

$$\cdot I_{i+l, \sigma - \tau_{iu} + m} + \mathcal{G}_{iu,lm} \sum_{s=1}^{u - \tau_{iu} - 1} I_{i+l, s+m} \quad (2.52)$$

Por simplicidad en la notación definimos un término de la forma

$$\mathcal{Y}_{i+l, \sigma - \tau_{iu} - 1 + m} = \sum_{s=1}^{u - \tau_{iu} - 1} I_{i+l, s+m} = \sum_{s=1}^{u - \tau_{iu} - 1} I_{i+l, \sigma - \tau_{iu} - s + m} \quad (2.53)$$

que sustituido en la ecuación (2.52)

$$\hat{S}_u \cdot \vec{E}^i(S_u, t_v) = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ F_{i,u,l,m} I_{i+l, v-r_{iu}+m} + \right. \\ \left. + G_{i,u,l,m} Y_{i+l, v-r_{iu}-1+m} \right\} \quad (2.54)$$

La introducción en el programa de una matriz Y que almacene la suma de intensidades en lugar de evaluar la sumatoria en s en cada instante será decisivo para un ahorro considerable en tiempo de CPU.

De los dos sumandos del segundo miembro de la igualdad en la ecuación (2.54) el primero incluye el término $I_{i+1,v}$ cuando $r_{iu} = m$. En el segundo sumando todas las intensidades que aparecen son en instantes anteriores a v por ser un término de retraso puro en el principio de causalidad.

Despejando el término de corriente en t_v obtenemos

$$\sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^1 \delta(r_{i-l,u}-p) F_{i-l,u,l,p} I_{i,v} = \hat{S}_u \cdot \vec{E}^i(S_u, t_v) - \\ - \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=-1}^1 \left[\sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{iu}}}^{n+2} F_{i,u,l,m} I_{i+l, v-r_{iu}+m} + \right. \\ \left. + \sum_{m=n}^{n+2} G_{i,u,l,m} Y_{i+l, v-r_{iu}-1+m} \right] \quad (2.55)$$

Llamando

$$E_u^i(t_v) = \hat{S}_u \cdot \vec{E}^i(S_u, t_v)$$

$$Z_{u,i} = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^l \delta(r_{i-l,u} - p) F_{i-l,u,l,p}$$

$$E_u^s(t_v) = - \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=-1}^{+1} \left[\sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{iu}}}^{n+2} F_{i,u,l,m} I_{i+l,v-r_{iu}+m} + \right. \\ \left. + \sum_{m=n}^{n+2} G_{i,u,l,m} Y_{i+l,v-r_{iu}-1+m} \right]$$

la ecuación (2.55) se reduce a

$$\sum_{i=1}^{N_s} Z_{u,i} I_{i,v} = E_u^i(t_v) + E_u^s(t_v) = \tilde{E}_u(t_v) \quad (2.56)$$

$$u = 1 \dots N_s \\ v = 1 \dots N_T$$

o matricialmente

$$\tilde{Z} \tilde{I}_v = \tilde{E}(t_v) = \tilde{E}_v^i + \tilde{E}_v^s \quad (2.57)$$

$$v = 1 \dots N_T$$

Los elementos de \tilde{E}_v^s son las componentes tangenciales del campo eléctrico dispersado cuyas fuentes son los valores retardados de la corriente en puntos y tiempos determinados por el principio de causalidad. Los elementos de \tilde{E}_v^i son las componentes tangenciales del campo incidente en los puntos de observación r_i y en el tiempo $t_v = v \delta$. La matriz Z

es una matriz de interacción cuyos elementos son independientes del tiempo y dependen exclusivamente de la estructura del sistema. $\tilde{Z} \cdot \tilde{I}_v$ es el campo instantáneo de reacción que fuerza a que se cumpla en cada instante la condición de contorno en toda la estructura (en este caso sólo se cumplirá de forma exacta en los centros de los intervalos: técnica de adaptación por puntos).

Como consecuencia, la solución de la ecuación (2.11) se lleva a cabo mediante un proceso escalonado en el tiempo. Efectivamente es posible, resolviendo la ecuación para cada intervalo temporal, calcular la corriente en un cierto instante y punto del hilo, en función de: a) sus valores ya calculados en instantes anteriores determinados, para cada punto, por el principio de causalidad; b) de la excitación en cada punto en ese instante.

La ecuación (2.57) puede modificarse fácilmente para poder considerar antenas cargadas lineal o no linealmente por simple inclusión de una carga \tilde{Z}_j^L a lo largo de la antena, esto es:

$$\tilde{E}_j^s + \tilde{E}_j^i = [\tilde{Z} + \tilde{Z}_j^L] \tilde{I}_j \quad (2.58)$$

Por ejemplo, para una antena cargada con un diodo de $R_1 \Omega$ en un sentido y $R_2 \Omega$ en el inverso, el valor de \tilde{Z}_j^L que debe introducirse en (2.58) está determinado por el signo de la corriente obtenida de (2.57).

El estudio de efectos no lineales es importante en antenas con circuitos integrados o limitadores de voltaje que son excitados por señales de gran potencia, por ejemplo, rayos o pulsos nucleares electromagnéticos. El estudio de antenas cargadas con elementos lineales o no lineales, puede también ser útil para conseguir formas de ondas específicas y para minimizar efectos de acoplamientos entre las diferentes antenas de una agrupación [18], [27], [67].

2.3 EXPRESION NUMERICA DEL CAMPO CREADO POR UN HILO RECTO.

El campo de radiación creado por una distribución arbitraria de fuentes, viene dado de la ecuación (2.5) por

$$\vec{E}_{\text{rad}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\{[\ddot{\vec{J}}] \wedge \vec{R}\} \wedge \vec{R}}{c^2 R^3} dV' \quad (2.59)$$

Particularizando para un hilo recto delgado de longitud L y situado a lo largo del eje z (Fig. 2.7).

$$\vec{E}_{\text{rad}}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{\theta} \sin\theta}{4\pi\epsilon c^2} \int_{L'} \frac{\dot{I}(z', t - R/c)}{R} dz' \quad (2.60)$$

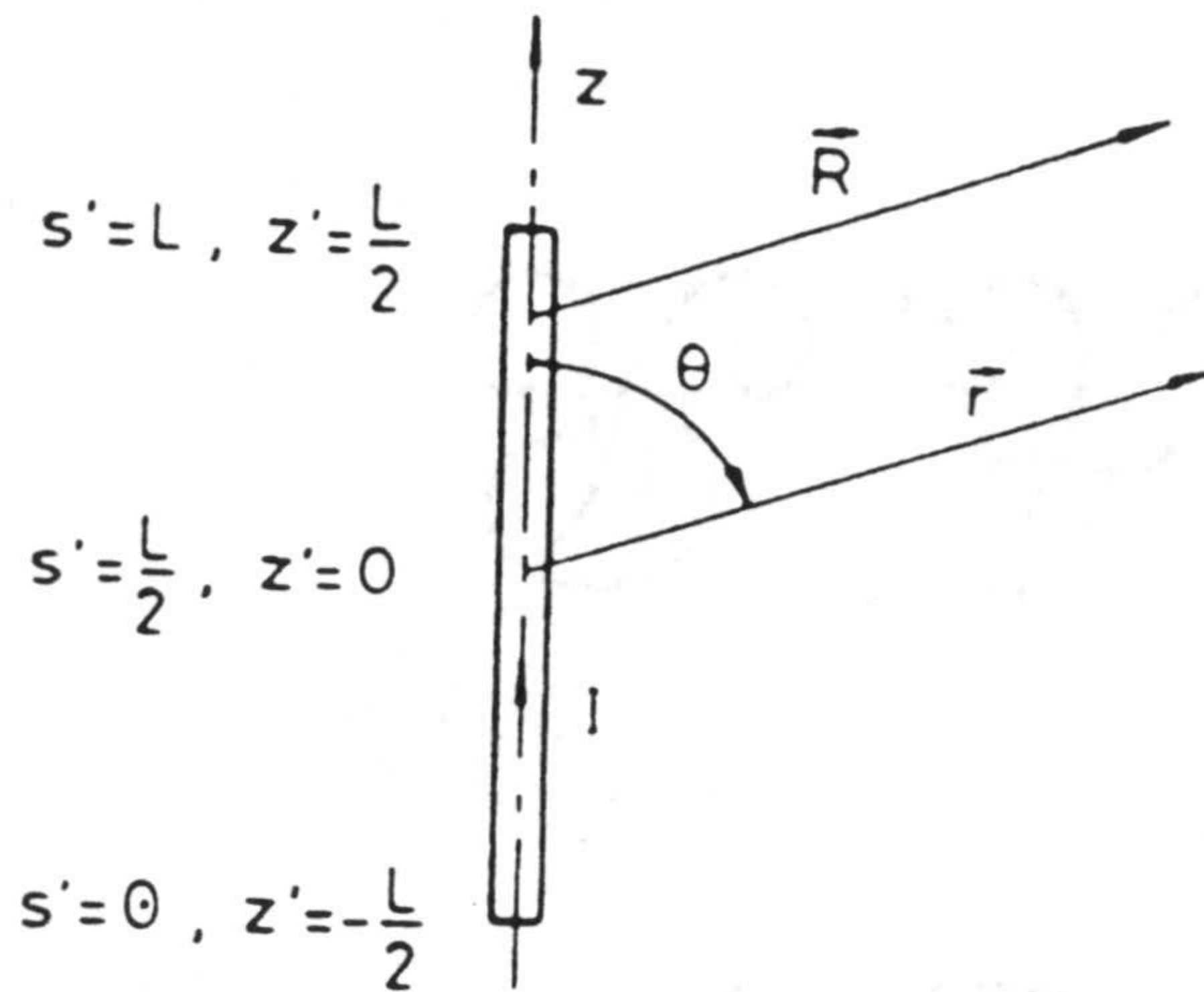


Fig. 2.7.- Coordenadas utilizadas para el cálculo del campo de radiación de un hilo recto.

Haciendo $R \approx r$ en la amplitud del campo eléctrico y $R \approx r - z' \cos \theta$ en el argumento de la intensidad, la expresión (2.60) queda

$$E_{\theta} \left(\frac{1}{r}, t \right) = \frac{1 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \int_{L'} \dot{I} \left(z', t - \frac{r}{c} + \frac{z'}{c} \cos \theta \right) dz' \quad (2.61)$$

Con el cambio de variable

$$z' = s' - \frac{L}{2} \rightarrow dz' = ds' \quad (2.62)$$

y calculando el campo de radiación a partir del tiempo

$t+r/c$ que es cuando la señal llega al punto campo, la ecuación (2.70) se transforma en

$$r E_{\theta} \left(\frac{1}{r}, t + \frac{r}{c} \right) = \frac{\text{sen } \theta}{4\pi \epsilon c^2} \int_{L'} \dot{I}(s', t') ds' \quad (2.63)$$

donde $t' = t + (s' - L/2) \cos \theta / c$.

De forma similar al proceso seguido en el cálculo numérico de la ecuación integrodiferencial, se desarrolla la corriente mediante (2.16) y se ajusta la ecuación (2.61) a los centros de los intervalos temporales de observación en el punto campo. Con esto, el campo eléctrico radiado es

$$r E_{\theta} \left(\frac{1}{r}, t_v + \frac{r}{c} \right) = \frac{\text{sen } \theta}{4\pi \epsilon c^2} \sum_{i=1}^{N_s} \left[\frac{\partial}{\partial t''} I_{ij}(s_i'', t'') \right] ds_i'' \quad (2.64)$$

con $t_v = t_j + t'' - (s_i + s_i'' - L/2) \cos \theta / c$.

Para poder efectuar la integración sobre cada intervalo de las fuentes, desarrollamos la derivada temporal mediante la interpolación lagrangiana.

$$r E_{\theta} \left(\frac{1}{r}, t_v + \frac{r}{c} \right) = \frac{\text{sen } \theta}{4\pi \epsilon c^2} \sum_{i=1}^{N_s} \int_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=-1}^{+1} \frac{1}{D_i^{(l,m)}} \cdot [s_i''^2 + s_i'' \sum_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} (s_i - s_{i+p}) + \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} (s_i - s_{i+p})] \cdot \left[2r_i \delta + \frac{2 \cos \theta}{c} (s_i + s_i'' - \frac{L}{2}) - \delta^2 \sum_{\substack{q=-1 \\ q \neq m}}^{+1} q \right] I_{i+l, v-r_i+m} \quad (2.65)$$

con

$$t'' = \delta r_i + (s_i - s_i'' - \frac{L}{2}) \frac{\omega \theta}{c} \quad (2.66)$$

y

$$r_i = \nu - j = \text{ANINT} \left\{ \left(\frac{L}{2} - s_i \right) \frac{\omega \theta}{c \delta} \right\} \quad (2.67)$$

donde la función ANINT redondea su argumento al valor más próximo tal como actúa en el lenguaje de programación Fortran.

Las integrales que aparecen en (2.65) son inmediatas, quedando finalmente el campo eléctrico de radiación de un hilo recto como

$$\begin{aligned} r E_{\theta} \left(\frac{1}{r}, t_0 + \frac{r}{c} \right) &= \frac{\text{sen} \theta}{4\pi \epsilon c^2} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=-1}^{+1} \frac{1}{D_i^{(l,m)}} \\ &\cdot \left[\frac{\Delta_i^3}{12} \left\{ \frac{2 \omega \theta}{c} \sum_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} (s_i - s_{i+p}) + 2 r_i \delta + \frac{2 \omega \theta}{c} \left(s_i - \frac{L}{2} \right) - \right. \right. \\ &- \delta \sum_{\substack{q=-1 \\ q \neq m}}^{+1} q \left. \right\} + \Delta_i \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} (s_i - s_{i+p}) \cdot (2 r_i \delta + \\ &+ \frac{2 \omega \theta}{c} \left(s_i - \frac{L}{2} \right) - \delta \sum_{q=-1}^{+1} q) \left. \right] I_{i+l, \nu - r_i + m} \quad (2.68) \end{aligned}$$

2.4 TRATAMIENTO DE LOS EXTREMOS.

Cuando la estructura de hilo es abierta (por ejemplo el caso de un hilo recto) y radia en un medio de conductividad nula hay que imponer la condición de contorno de que la intensidad se anula en los extremos del hilo (aproximación de hilo delgado). Con el desarrollo aproximado de la intensidad que hemos tomado, sólo tenemos soluciones en los centros de los intervalos y por tanto esta condición de contorno no se puede aplicar directamente, sino que es necesario alguna consideración especial.

En la interpolación de la corriente, ecuación (2.16), cuando $i+1$ es mayor que N_s o menor que 1 hacemos cero el valor de la corriente $I_{i+1,v}$, lo que supone condición necesaria aunque no suficiente para el cumplimiento de la condición de contorno. Por tanto para $i = N_s$ ó $i = 1$ debemos eliminar el caso $l=1$ ó $l=-1$, respectivamente, en la sumatoria. Sin embargo en la ecuación (2.17) se sigue buscando un s_0 y s_{N_s+1} debido a que la variable p puede tomar valores -1 ó 1 ; esto es, siempre se busca un intervalo más en los extremos como consecuencia de la interpolación.

Con esto caben tres posibilidades de tratamiento de los extremos: dos de ellas suponen una aproximación a la condición de contorno, mientras que la otra supone un ajuste perfecto de la condición, Fig. 2.8).

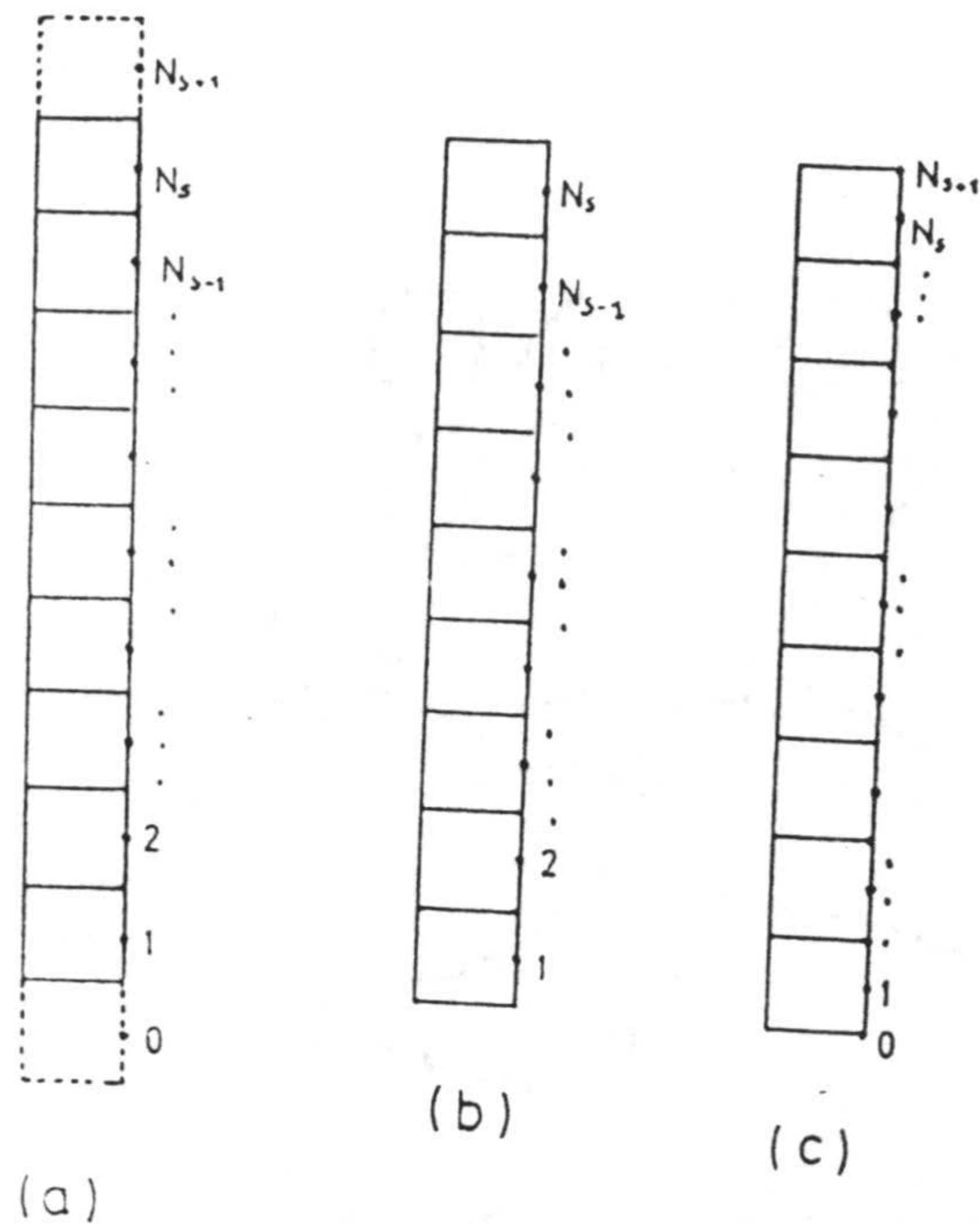


Fig. 2.8.- Tres posibilidades en el tratamiento de los extremos.

a) En el primer caso hacemos cero la corriente en el centro de un intervalo virtual que se añade en cada extremo. La antena será un poco más larga que su longitud real con lo que las resonancias se producirán a longitudes de onda ligeramente mayores. Este tratamiento es el que se ha tomado en anteriores trabajos de este Departamento [39] [69]. El sistema de ecuaciones que resulta es de dimensión $N_s \times N_s$.

b) En el segundo caso anulamos la corriente en los intervalos extremos reales de la antena, lo que conlleva un acortamiento de la misma y resonancias para longitudes de onda menores que las reales. Por otra parte supone una reducción en el sistema de ecuaciones que resulta de dimensión $(N_s - 1) \times (N_s - 1)$. Esto es lo usual en DF cuando se resuelve la ecuación de Hallen por MM [67], [70].

c) El tercer caso es el límite del primero cuando la longitud del intervalo tiende a cero. El centro del intervalo virtual tiende hacia el extremo físico de la antena y la condición de contorno se ajusta de forma exacta. La singularidad que resulta del paso al límite no plantea problemas numéricos, ya que no es necesario integrar en este intervalo virtual debido a que la corriente es nula por la propia condición de contorno.

Estudios de este Departamento en DF de la ecuación de Hallen resuelta con MM demuestran que elegir una u otra alternativa de las tres anteriores supone una variación no en la forma de la corriente sino en la impedancia de entrada, puesto que ésta es una función muy sensible de la longitud de onda en las resonancias [67], [71].

En este Capítulo se aplican los tres diferentes tratamientos de extremos al estudio vía DT de la impedancia de entrada de un hilo recto delgado encontrándose que es el caso c) el que da mejores resultados comparados con los obtenidos experimentalmente por otros autores.

2.5 PUNTO DE PARTIDA Y FINAL DE CALCULO.

Una vez que la ecuación integral ha sido puesta en la forma

$$\tilde{Z} \cdot \tilde{I}_v = \tilde{E}_v^i + \tilde{E}_v^s$$

comienza el cálculo de la historia temporal de las

corrientes inducidas. Para la mayoría de los problemas, esto implica suponer que todas las incógnitas son cero antes de algún tiempo de referencia o tiempo de partida y el uso de un comienzo "suave" de la excitación. Esto conlleva el empezar el cálculo para un nivel de la fuente menor que una fracción, por ejemplo, de 0.01 de su valor máximo. El tiempo en que el cálculo puede terminarse depende de los requerimientos del problema. Por ejemplo para la estimación espectral de la respuesta usando la transformada de Fourier, el cálculo puede terminarse cuando la señal respuesta ha convergido adecuadamente. Si lo que se desea estimar son las frecuencias complejas de resonancia del objeto, el cálculo necesitaría continuarse hasta 2 ó 4 veces L/c más allá del tiempo en que $E^i \simeq 0$ |17|.

En cualquier clase de modelo numérico, especialmente cuando el número de incógnitas incrementa más allá de algún escalón que depende a la vez de la longitud de palabra del ordenador y del tratamiento numérico utilizado, los resultados pueden presentar efectos de la acumulación de error debido al redondeo. Este tipo de error es claramente de tipo acumulativo en el tratamiento numérico en DT dando generalmente lugar a una divergencia en el tiempo de la solución numérica |17|-|20|, |27|, |28|, |45|-|47|, |72|, |73|.

2.6 CONSIDERACIONES NUMERICAS. |17|, |19|, |20|, |39|

Ya que para encontrar una solución de la ecuación integrodiferencial hemos tenido que forzarla

a que se cumpla en un número finito de puntos, la forma en que se muestreen las señales, tanto en el tiempo como en el espacio, son factores que determinan la exactitud de la aproximación numérica.

Para el muestreo en el tiempo, el teorema de Shannon impone que para reconstruir una señal a partir de sus muestras, la frecuencia de muestreo debe ser como mínimo doble de la mayor frecuencia f_{\max} que presenta la señal original. Sin embargo es posible usar una frecuencia de muestreo más pequeña sin apreciable error de solapamiento (aliasing), siempre que su valor mitad corresponda a una frecuencia por encima de la cual el espectro de la señal tenga poca energía.

Por tanto, si Δt es el periodo de muestreo, las frecuencias o longitudes de onda significativas de la señal muestreada deben cumplir

$$f_{\max} \leq \frac{1}{2\Delta t} \quad \text{ó} \quad \lambda_{\min} \geq 2c\Delta t \quad (2.69)$$

Sin embargo en la práctica, y teniendo en cuenta que las funciones bases son polinomios que sólo aproximan a funciones armónicas, el criterio aconsejable es

$$\lambda_{\min} \geq 6c\Delta t$$

En cuanto al muestreo en el espacio, para una señal monocromática de longitud de onda λ_{\min} , la longitud de cada intervalo espacial Δs debe ser

$$\Delta s \leq \lambda_{\min} / N \quad (2.70)$$

donde N oscila entre 6 y 10 para lograr un diez por ciento de exactitud en hilos rectos, anillos circulares y otras estructuras de curvatura suave y puede alcanzar el valor de 20 en estructuras con recodos y curvas cerradas [6] [20]. La frecuencia y el inverso de la longitud de onda estarán acotados por

$$\lambda_{\min} \geq N \Delta s \quad (2.71)$$

Agrupando (2.70) y (2.71)

$$f_{\max} \leq \min \left\{ \Delta t/2, c/(N \Delta s) \right\}$$

ó

$$\lambda_{\min} \geq \max \left\{ 6c \Delta t, N \Delta s \right\} \quad (2.72)$$

Particularizando para un hilo recto de 1 m de longitud aproximado por una poligonal de 24 lados, con $\Delta s = c \cdot \Delta t$ y $N = 6$ queda $f_{\max} \leq 1.2$ GHz.

Otra posible fuente de error que puede afectar a los resultados numéricos es el muestreo de la señal excitación. La excitación más comúnmente usada en análisis en TD es un pulso gaussiano, debido a que como en el límite es una función delta Dirac, la respuesta del sistema puede considerarse como su función ponderatriz y por tanto permite calcular la respuesta a cualquier otra señal por simple convolución. Actualmente existen técnicas de análisis deno-

minadas "técnicas de aumentación de la respuesta impulso", que permiten corregir el error cometido por utilizar la función gaussiana como aproximación de la delta [74].

El pulso gaussiano

$$G(t) = e^{-t^2 g^2} \quad (2.73)$$

tiene un espectro en frecuencias dado por

$$\tilde{G}(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{g} e^{-\pi^2 f^2 / g^2} \quad (2.74)$$

de forma que el parámetro g determina su duración temporal y anchura espectral.

Si se define el ancho de banda efectivo como la frecuencia a la que $\tilde{G}(f)$ alcanza la décima parte de su valor máximo, entonces $f_{\max} = 0.5 g$ y de acuerdo con la ecuación (2.72) habría que elegir

$$\Delta t \approx \frac{1}{G f_{\max}} = \frac{1}{3g} \quad (2.75)$$

Ya que el pulso definido en (2.73) alcanza la décima parte de su valor máximo para $t \approx 1.5/g$, el número mínimo de muestras que hay que extraer del pulso excitación es $t/\Delta t \approx 10$.

Para aumentar la frecuencia máxima válida de la solución de la ecuación integrodiferencial, hay que aumentar el número de intervalos espaciales y

temporales. Esto lleva consigo un deterioro de la aproximación de hilo delgado (Apéndice B) y un aumento de la memoria y tiempo de ejecución en el computador, siendo necesario alcanzar un compromiso entre ambas situaciones.

2.7 CONSIDERACIONES SOBRE EL ANALISIS EN DT COMPARADO CON DF.

Un paso necesario tanto en el dominio de la frecuencia como en el tiempo es resolver un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los valores muestreados de las corrientes inducidas en el hilo. Sin embargo las soluciones numéricas obtenidas a partir de estas ecuaciones son sustancialmente diferentes debido a que existen diferencias fundamentales entre ambos planteamientos.

En el tratamiento de la ecuación integral en DF por ejemplo, las interacciones mutua entre las muestras de corriente incógnitas son globales, esto es, el campo total en un punto campo dado es debido a las fuentes incógnitas distribuidas sobre el contorno completo. La separación espacial entre las fuentes y sus campos se traduce en una atenuación de los campos con la distancia y en un desfase. Como consecuencia, todas las incógnitas son mutuamente dependientes y deben ser resueltas simultaneamente. Las soluciones se obtienen normalmente vía una factorización matricial o inversión.

En el tratamiento en el dominio del tiempo por otro lado, las interacciones entre las muestras de corriente están desplazadas en el tiempo por una cantidad igual a la requerida por el campo electromagnético para propagarse entre ellas a la velocidad de la luz. Este desplazamiento (tiempo de retardo) significa que cada muestra de corriente en un punto dado en el espacio y tiempo está esencialmente determinada por el campo de excitación en ese mismo punto espacio temporal y por el campo dispersado existente asociado a tiempos anteriores y que ya son conocidos. El problema en el dominio del tiempo es entonces resuelto via un proceso escalonado en el tiempo y sin inversión matricial o con una inversión matricial inicial sí, como es el caso del método desarrollado en esta Memoria, usamos funciones base de tres términos, lo que en definitiva implica permitir interacciones dentro del mismo escalon temporal de dos o más muestras espaciales.

Como consecuencia de lo anterior podemos establecer que las principales diferencias entre el análisis en DT y DF para obtener resultados asociados a excitaciones transitorias son:

1) El dominio de la frecuencia suministra resultados independientes de la configuración fuente-sistema para una única frecuencia, por lo que debe resolverse el problema para muchas frecuencias y transformar via FFT a DT para obtener resultados transitorios.

Analíticamente esto significa que una vez puesta la ecuación integral de la forma $[E] = [Z] [I]$ únicamente es necesario hallar la matriz inversa $[Z]^{-1}$

que es solamente dependiente de la geometría de la estructura y de la frecuencia.

2) El dominio del tiempo suministra resultados dependientes de la configuración fuente-sistema sobre la banda de frecuencias comprendida en la excitación, pero el método debe ser aplicado para cada configuración diferente fuente-objeto. De aquí que el proceso completo de solución debe ser repetido para cada configuración diferente.

A continuación se hace siguiendo a K. Miller [6], [17], [19], [20], [23], [59], una evaluación del tiempo de computación aproximado asociado al cálculo en DT y DF de la respuesta a una señal transitoria de un objeto para N_I configuraciones diferentes.

Para el problema de múltiples fuentes, el tiempo requerido para calcular la historia temporal de la corriente inducida viene dado aproximadamente por

$$T_{t1} = A_t N_I N^2 N_T$$

donde N es el número de muestras espaciales y N_T el de muestras temporales. A_t es el tiempo típico requerido para calcular el campo dispersado E_v^s por corrientes previamente calculadas y obtener I_v en (2.58)

Una vez que las corrientes son conocidas, hallar la historia temporal del campo radiado en N_A ángulos de observación, requiere el tiempo adicional:

$$T_{t2} = B_t N N_I N_T N_A$$

siendo B_t el tiempo típico para calcular el campo lejano a partir de I. En general se cumple que $T_{t2} \ll T_{t1}$, por lo que el tiempo total

$$T = T_{t2} + T_{t1} \approx T_{t1}$$

Dado que la transformada rápida de Fourier (FFT) permite calcular la respuesta en frecuencia sin un incremento de tiempo significativo sobre T, no tendremos en cuenta su contribución.

Con objeto de hallar el espectro de la función intensidad inducida usando cálculos en el dominio de la frecuencia, es necesario realizar el cálculo en N_F frecuencias de forma que la respuesta espectral sea representada adecuadamente. De aquí la cantidad total de tiempo T_f será N_F multiplicado por el tiempo de cálculo para una sola frecuencia, y vendrá dado por

$$T_f = T_{f1} + T_{f2}$$

donde

$$T_{f1} = (A_f N^2 + B_f N^3 + C_f N^2 N_I) N_F$$

y

$$T_{f2} = D_f N N_I N_A N_F$$

donde

A_f = tiempo requerido para calcular un elemento típico de la matriz de impedancias.

B_f = tiempo requerido para resolver $[Z_{mn}] [I_n] = [V_m]$ para I_n mediante la inversión de la matriz $[I_n] = [Z_{mn}]^{-1} [V_m]$ para un sistema de orden N .

C_f = tiempo requerido para llevar a cabo la operación $[Z_{mn}]^{-1} [V_m]$.

D_f = tiempo para calcular el campo lejano a partir de $[I_n]$.

Es interesante observar que para diferentes configuraciones de la fuente solo el tiempo de evaluación de la corriente se multiplica por N_I y que $T_{f2} \ll T_{f1}$ por lo que podemos escribir

$$T_f = N_F (A_f N^2 + B_f N^3 + C_f N^2 N_I) \cancel{N_F}$$

Particularizando los valores de los coeficientes anteriores a los obtenidos por K. Miller para una computadora CDC-6600 [19], [20], se obtiene una razón entre tiempos de cálculo requerido para obtener la historia temporal o el espectro de frecuencias de la corriente a partir del dominio de la frecuencia, dada por

$N_F = \frac{N}{e/T}$

$$\left(\frac{T_t}{T_f}\right)^{-1} \approx \left(\frac{T_{t1}}{T_{f1}}\right)^{-1} = 0.077 + (7.7 + 1.9 \cdot 10^{-2} N) / N_I$$

que para $N < 100$ se reduce a

$$\left(\frac{T_t}{T_f}\right)^{-1} \approx 0.077 + \frac{7.7}{N_I}$$

La ventaja del dominio del tiempo sobre el de la frecuencia para una geometría de fuente fija ($N_I = 1$) es evidente a partir de esta expresión. Sin embargo, cuando N_I aumenta, la ventaja decrece. Para el cálculo de la corriente, la razón se reduce a la unidad cuando $N_I \simeq 8.4 + 2.1 \cdot 10^{-2} N_s$.

Las expresiones utilizadas tienen sólo un valor a nivel de estimación aproximada. Por ejemplo se ha supuesto que N es constante para el rango de frecuencias completo para el cálculo en el dominio de la frecuencia. Así, escribiendo N_s como función de la frecuencia se hallaría que de esta manera se consigue solo una reducción del orden de un tercio [19], [20]. Esta reducción llevará a hacer el dominio de la frecuencia algo más competitiva con respecto al dominio del tiempo. Existe sin embargo una circunstancia en el dominio del tiempo que no ha sido tomada en cuenta. Esto es que la respuesta en el tiempo tiende a un comportamiento de la forma $e^{-\alpha t} \sin \omega t$, es decir de tipo señal armónica exponencialmente atenuada [13]. Esto conduce a que puede acortarse el tiempo de cálculo mediante extrapolación de los resultados. El número de intervalos N_T se ve por tanto reducido y con ello el tiempo de cálculo. Factores de este tipo y otros que podrán depender de la estructura particular analizada no han sido tenidos en cuenta.

Podrá resumirse las anteriores consideraciones diciendo que, desde el punto de vista de tiempo de cálculo, el tratamiento en DT es más eficiente para calcular respuestas espectrales o temporales, cuando lo que interesa son secciones rectas de radar biestá-

tico o diagrama de radiación de antenas para pocas configuraciones de fuente. Por otro lado, el tratamiento en el dominio de la frecuencia es más eficiente cuando en lo que estamos interesados es en sección recta de radar para muchas direcciones de incidencia o diagrama de antena para muchas configuraciones de fuentes.

Otra característica importante relacionada con las necesidades computacionales que diferencian el cálculo de la respuesta de un sistema a una OEMT en DT o DF es la necesidad de memoria requerida. Debido a que en DT las muestras de corriente sólo son necesarias durante el tiempo que sus campos interactúan con el resto del objeto, el almacenamiento requerido puede ser considerablemente menor que el NN_T que sería en principio requerido.

2.8 RESULTADOS.

En este apartado se comparan los resultados obtenidos utilizando los distintos desarrollos de carga (Q1 a Q5) para el estudio de las intensidades inducidas sobre la superficie de una antena de hilo recto excitada en su centro. Así mismo se estudia el efecto de los diferentes tratamientos de los extremos sobre los resultados.

En todos los casos la longitud del hilo

estudiado ha sido $L = 1$ m y su radio $a = 0.00674$ ($\Omega^* = 10$). La estructura se ha dividido en N_s segmentos rectos iguales de longitud Δ y se han utilizado intervalos temporales de duración $\delta = \Delta/c$.

La alimentación ha sido un pulso gaussiano $V(t) = \exp[-g^2(t-t_{\max})^2]$ con $t_{\max} = 2.145/g$ aplicado en los dos intervalos espaciales centrales de la antena, por lo que el campo en esos intervalos vale

$$E^i(t) = \frac{V(t)}{2\Delta} = \frac{N_s}{2L} \exp[-g^2(t-t_{\max})^2]$$

Las Figuras 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 representan la corriente en la alimentación frente al tiempo, así como la conductancia y susceptancia en función de la longitud normalizada (L/λ) para los casos Q1, Q2, Q3, Q4 y Q5 de desarrollo de la carga respectivamente. El número de intervalos en que se ha dividido la antena es $N_s = 24$ y la varianza $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$. La admitancia se ha calculado dividiendo la transformada de Fourier de la intensidad obtenida por la del voltaje aplicado. Para comparar se han utilizado los resultados de King-Middleton [20] que se han dibujado en línea de puntos. En todos los casos el tratamiento de extremos se ha hecho considerando la intensidad nula en los finales del hilo ($s=0$ y $s=L$).

* Ω es el parámetro de antena definido como

$$\Omega = 2 \ln(L/a)$$

Se observa que es el desarrollo de carga Q5 el que da mejor concordancia con los resultados de King-Middeton. En todos los demás casos el desacuerdo a partir de $L/\lambda > 1$ es evidente. Es por tanto Q5 el desarrollo que nos permite obtener resultados favorables a más alta frecuencia.

Análogamente las figuras 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18 representan los resultados obtenidos por Q1, Q2, Q3, Q4 y Q5 respectivamente cuando se divide el hilo en $N_s = 48$ segmentos y se excita con una gaussiana de varianza $g = 3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$. En este caso vuelve a ser el desarrollo de carga Q5 el que da mejores resultados comparando con King-Middleton, llegándose con esta interpolación para la carga hasta la novena resonancia ($(L/\lambda)_{\text{max}} \sim 8.5$) en el espectro de frecuencias mientras que con los demás tratamientos de la carga $(L/\lambda)_{\text{max}} \sim 4$ (4ª resonancia). Los tratamientos Q1 y Q2 siguen los resultados de King-Middeton hasta $L/\lambda \sim 2.5$ mientras que Q3 y Q4 solo llegan bien hasta $L/\lambda \sim 1$. Además es Q5 el método que resulta computacionalmente más ventajoso como puede verse en la Tabla 2.1 que nos da el tiempo de CPU empleado por los diferentes programas con $N_s = 24$ y $N_s = 48$ para llegar hasta el intervalo temporal $v = 100$. El ordenador empleado ha sido un MV 10.000 de Data General.

Es por tanto el desarrollo Q5 el que elegimos para nuestro estudio de estructuras de hilo más complejas.

	CPU (minutos) $N_s = 48$	CPU (minutos) $N_s = 24$
Q1	40.0	10.5
Q2	40.0	10.5
Q3	42.7	11.0
Q4	42.7	11.0
Q5	14.0	3.7

Tabla 2.1.- Tiempo de CPU empleado por (Q1-Q5) hasta $NT = 100$.

En las Figuras 2.19 y 2.20 se muestran los resultados obtenidos con Q5 y diferentes tratamientos de extremos. Concretamente en la Fig. 11 se ha considerado la intensidad nula en el centro de los intervalos espaciales 1 y N_s , mientras que en la Fig. 12 la corriente se hace cero en el centro de los intervalos 0 y $N_s + 1$ (suponiendo que existieran). Puede verse que el tratamiento de extremos con el que obtuvimos los resultados de la Figura 5 da una mejor concordancia con los de King-Middleton por lo que es el que impondremos en adelante.

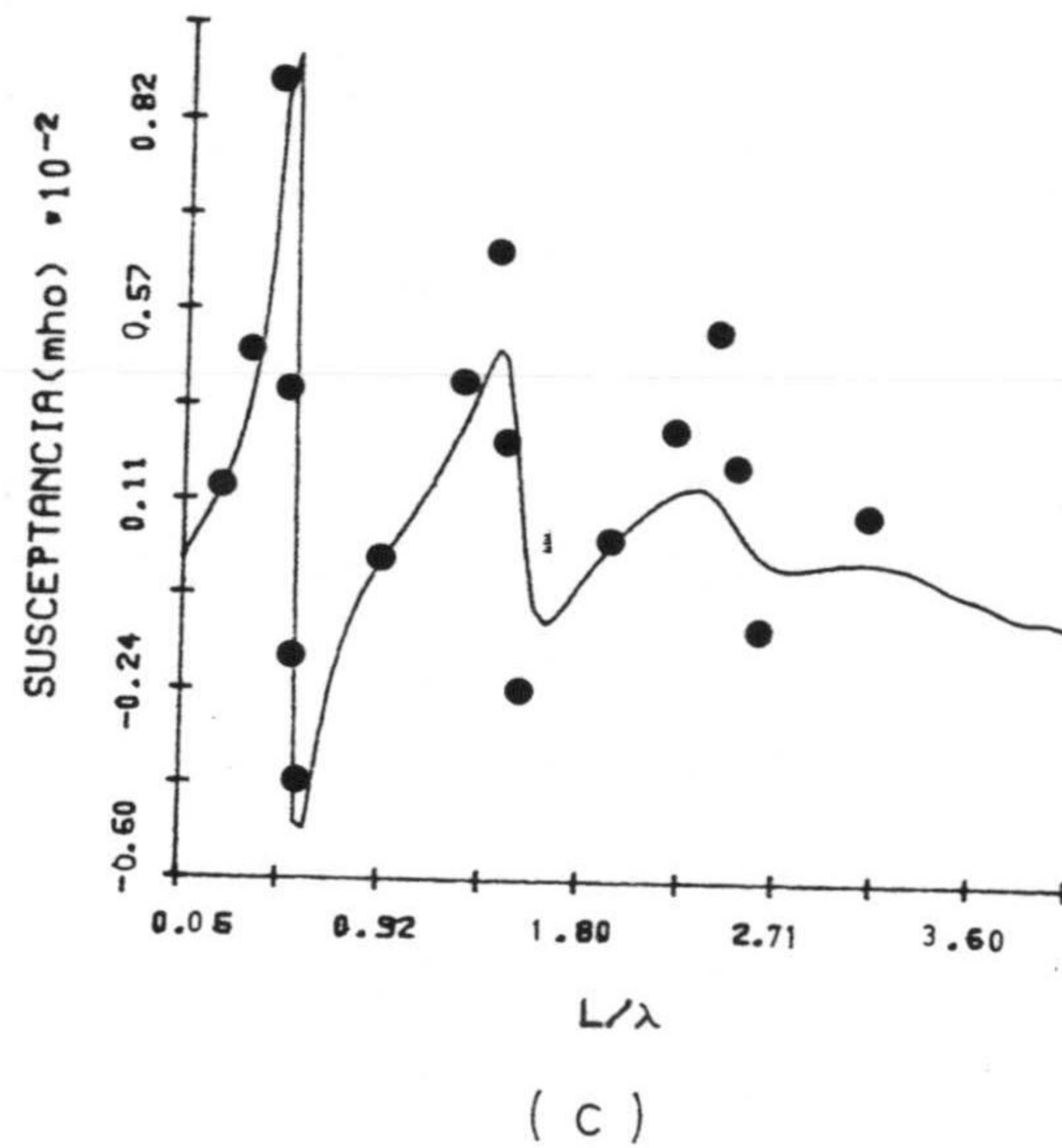
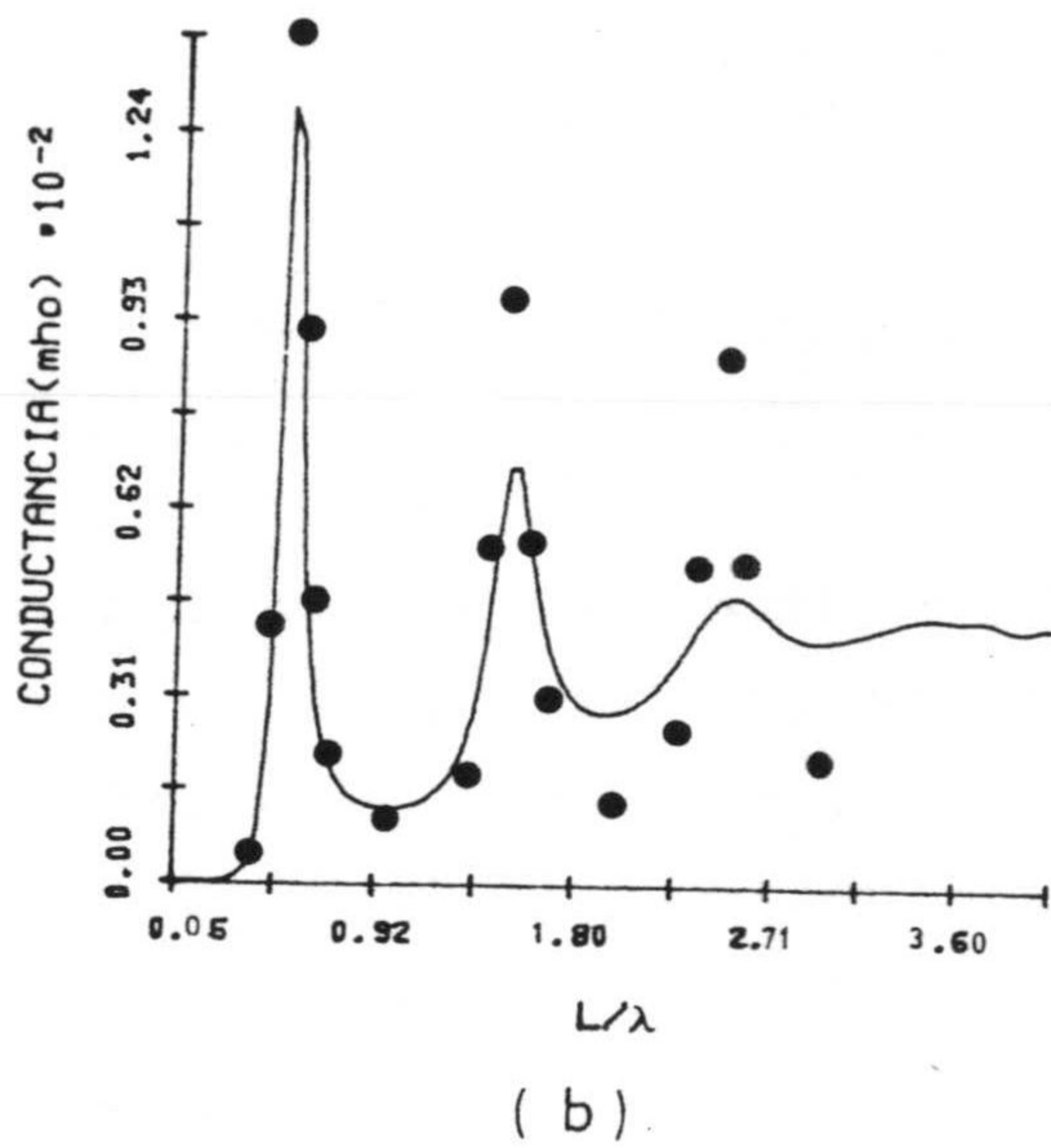
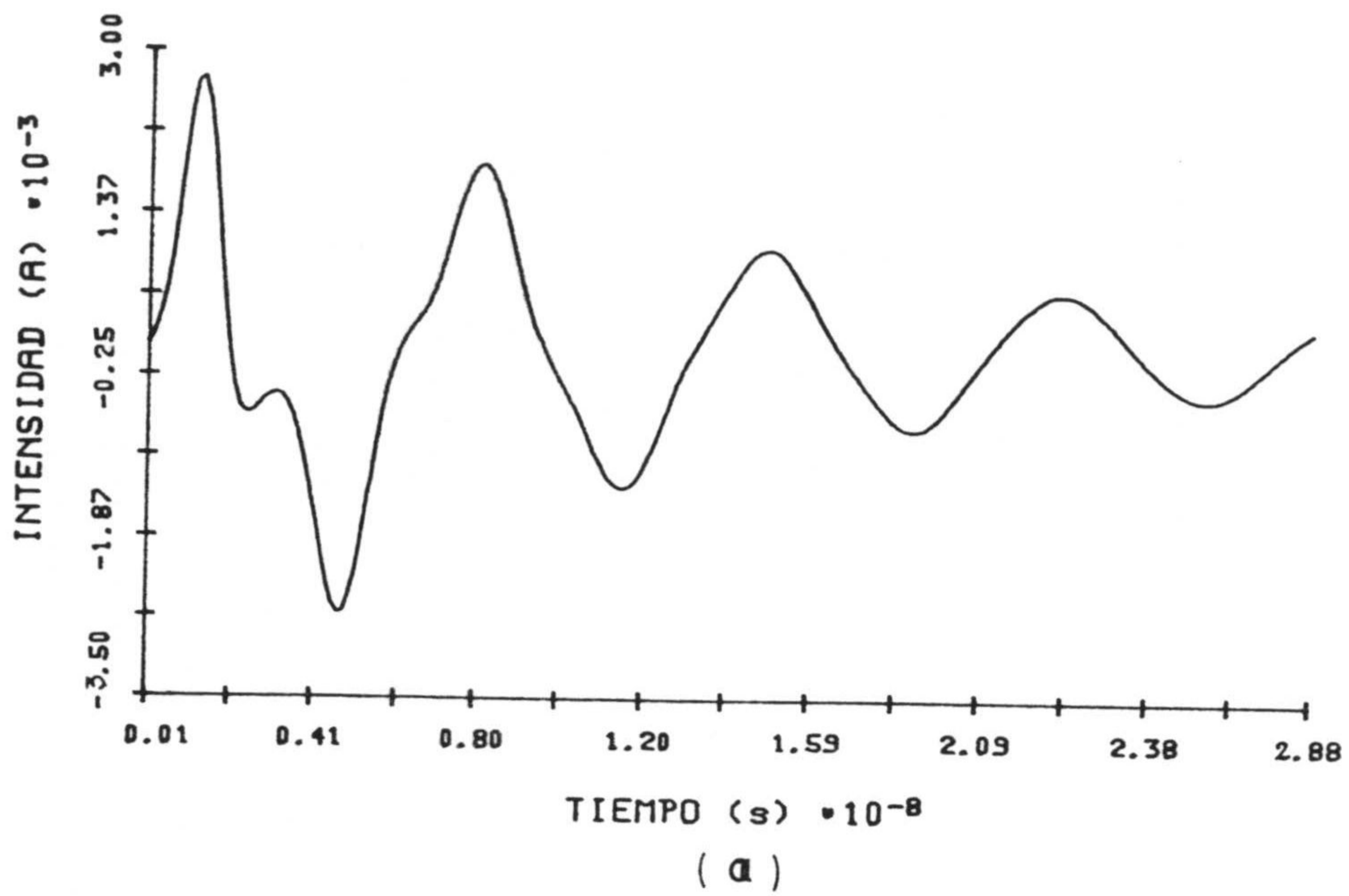


Fig. 2.9.- Tratamiento de carga Q1. Hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m. a) Intensidad en la alimentación en función de tiempo. b) Conductancia en función de L/λ c) Susceptancia en función de L/λ . $N_s = 24$, $g = 1.5 \cdot 10^9$ s⁻¹.

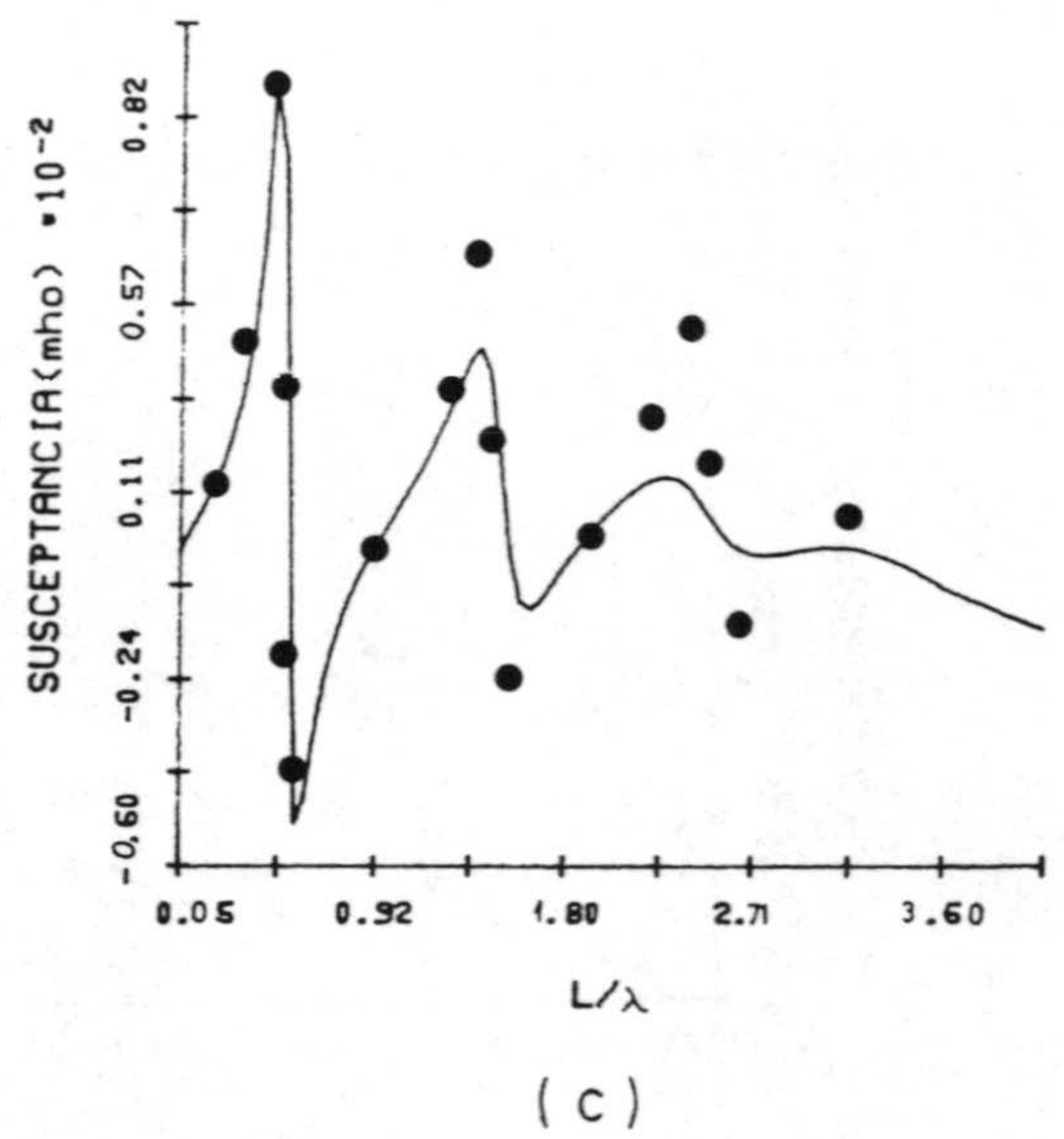
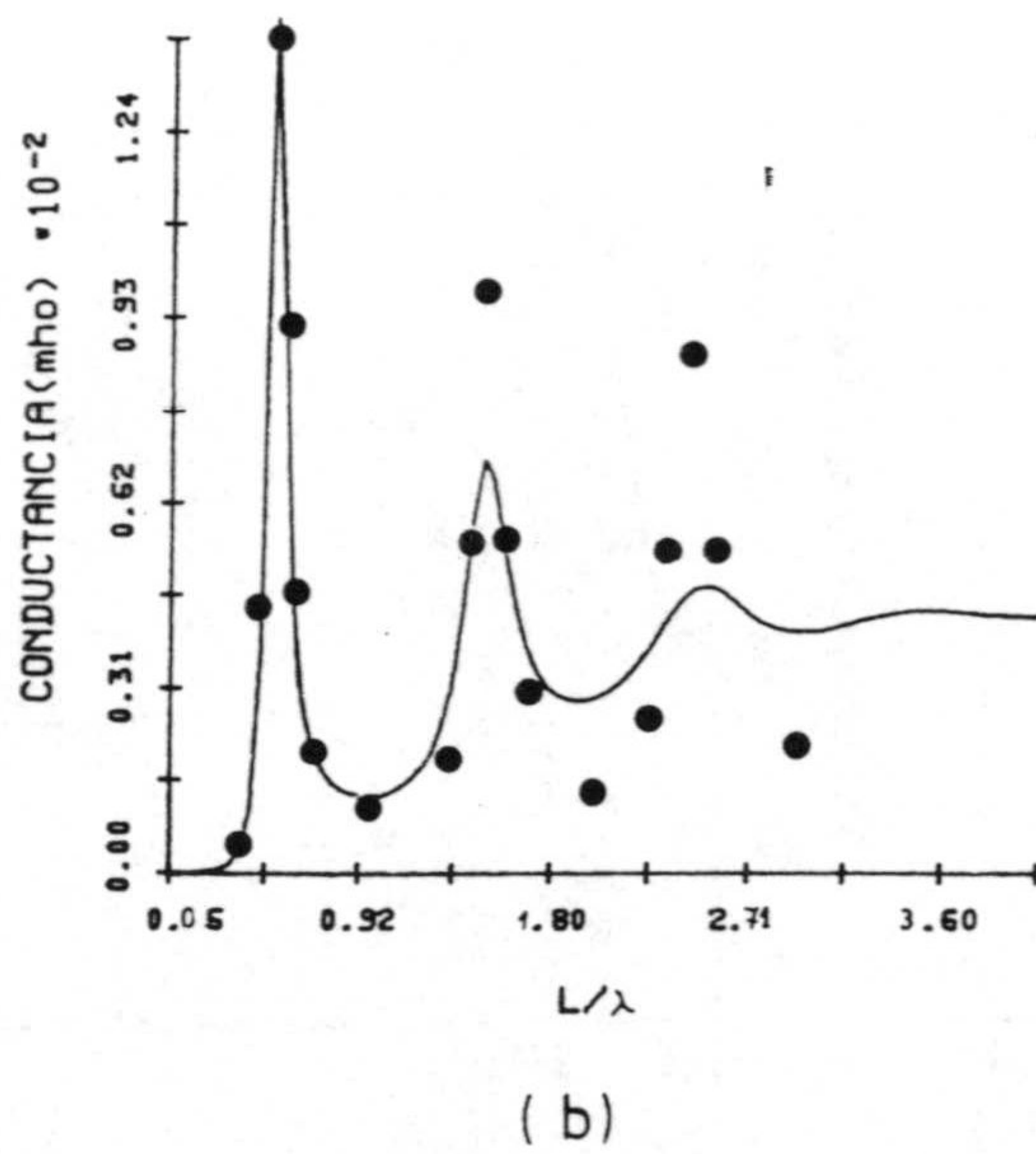
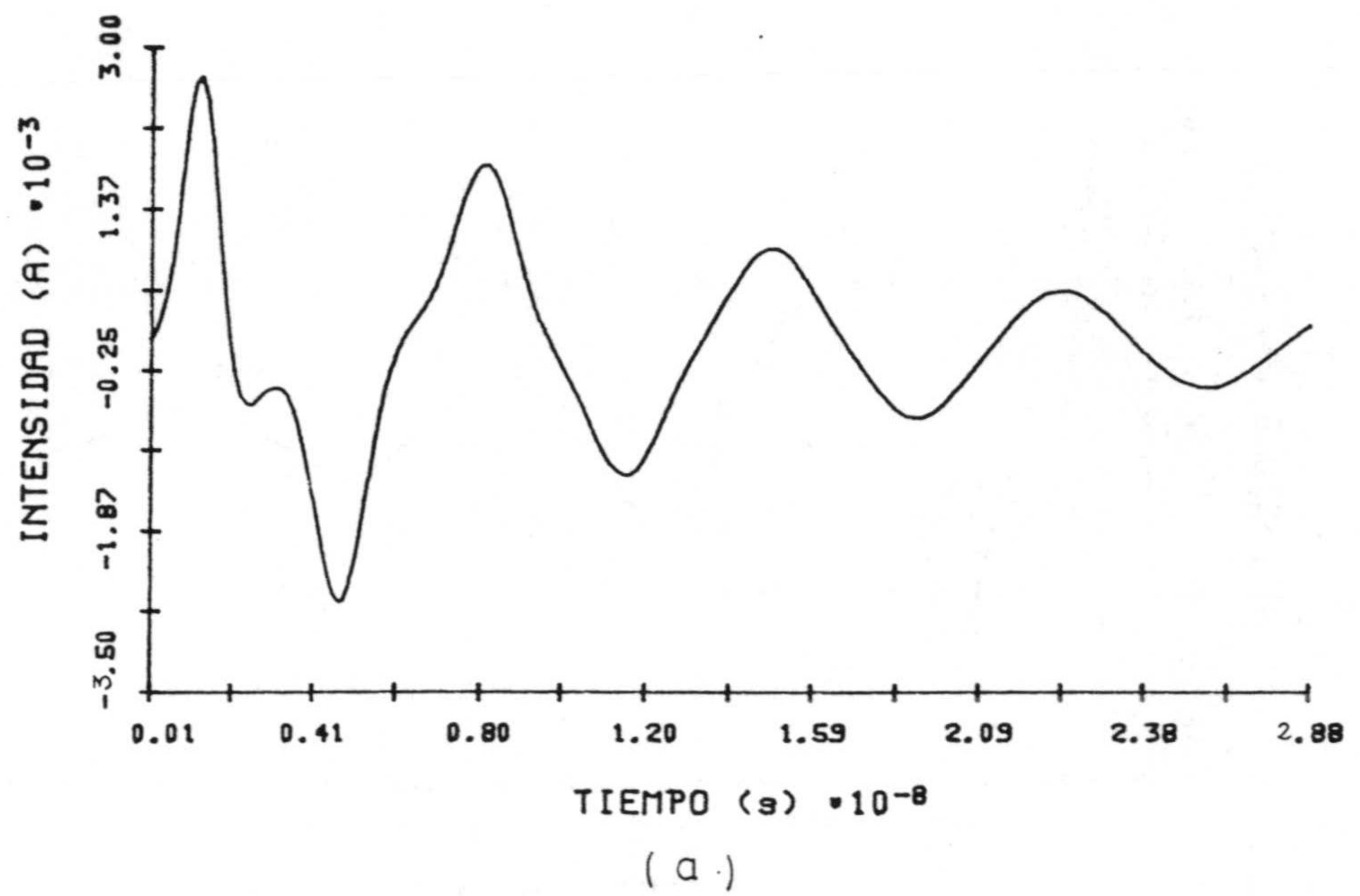


Fig. 2.10.- Tratamiento de carga Q2. Hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m. a) Intensidad en la alimentación en función de tiempo. b) Conductancia en función de L/λ . c) Susceptancia en función de L/λ . $N_b = 24$, $g = 1.5 \cdot 10^9$ s⁻¹.

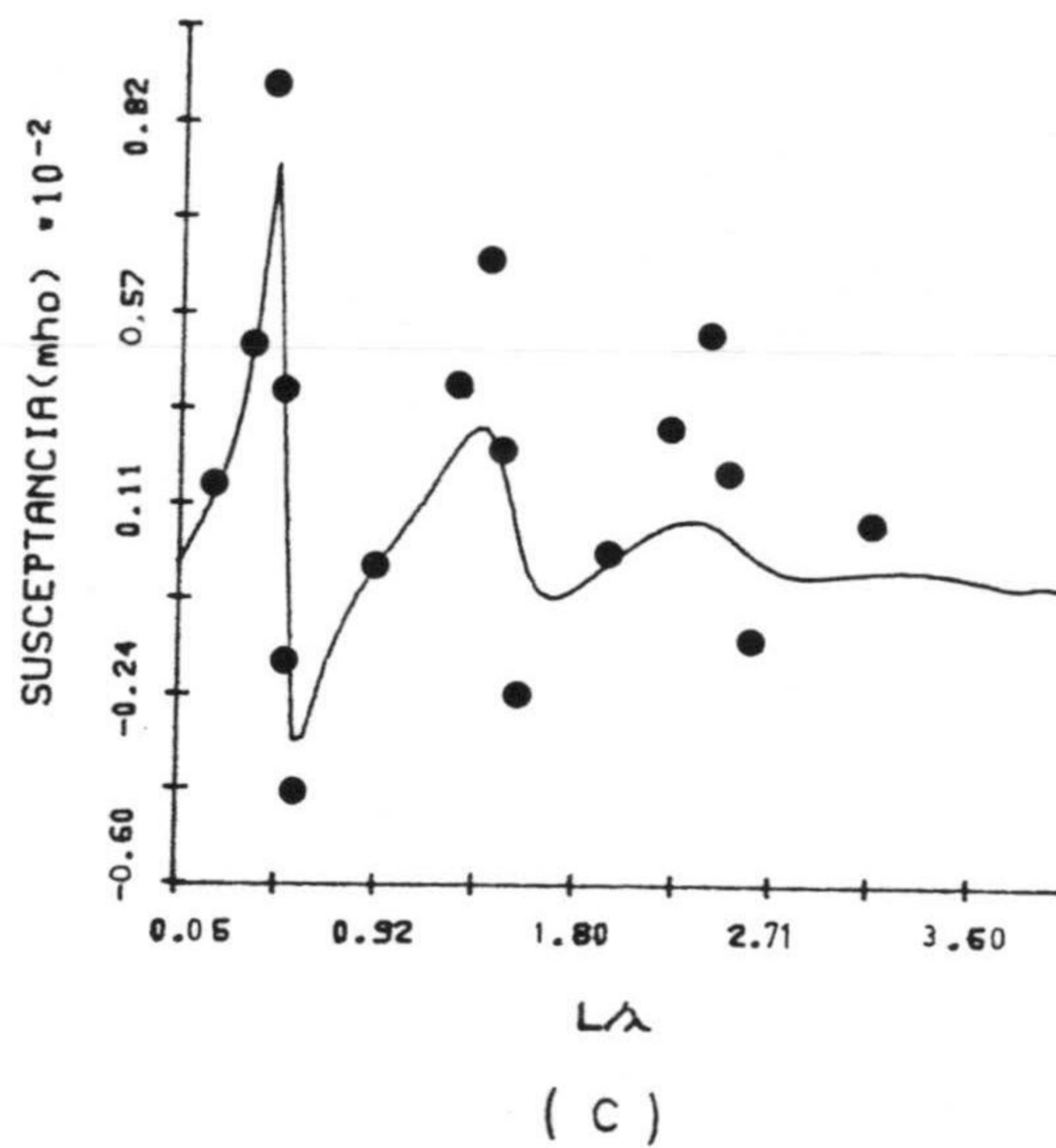
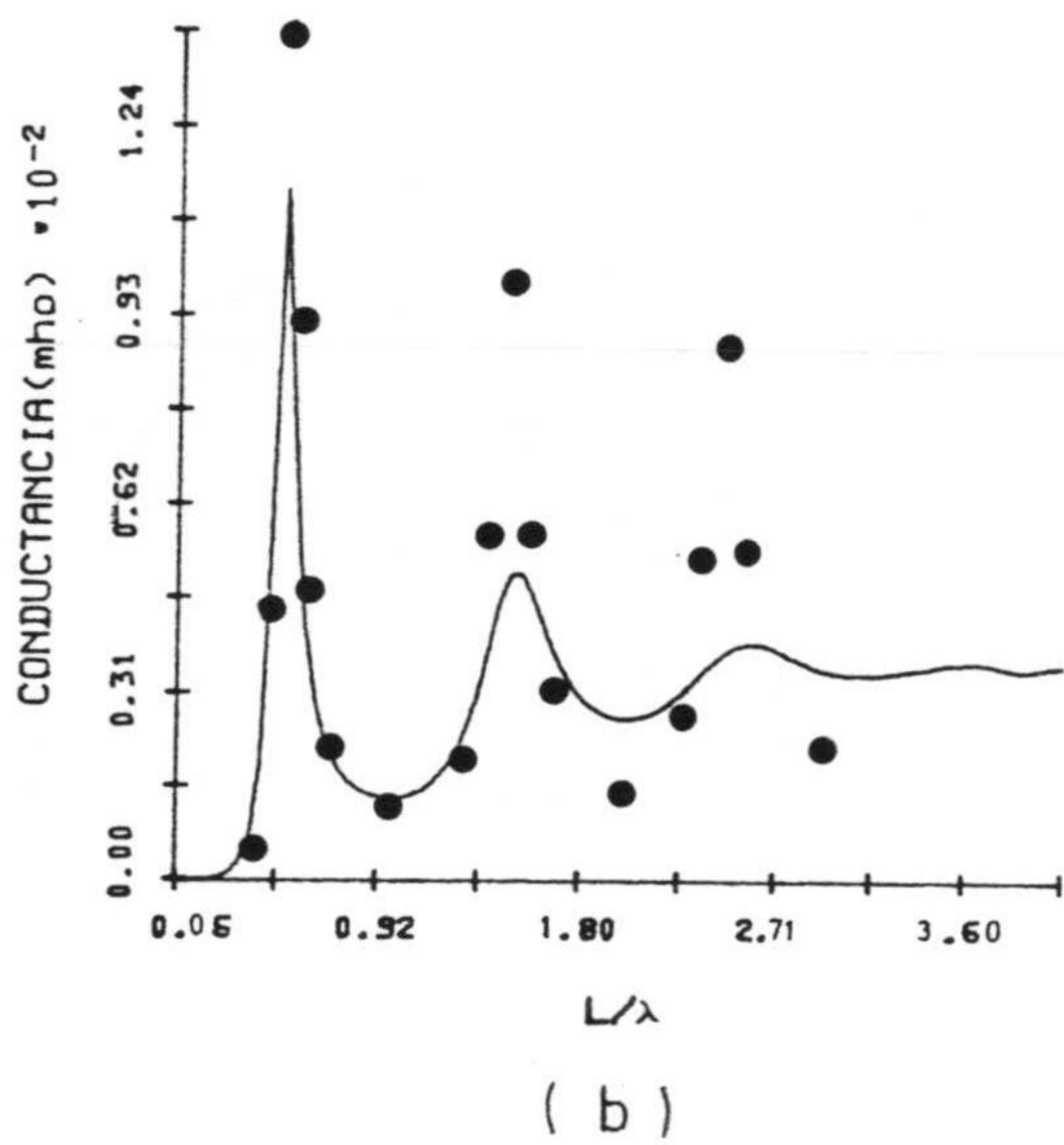
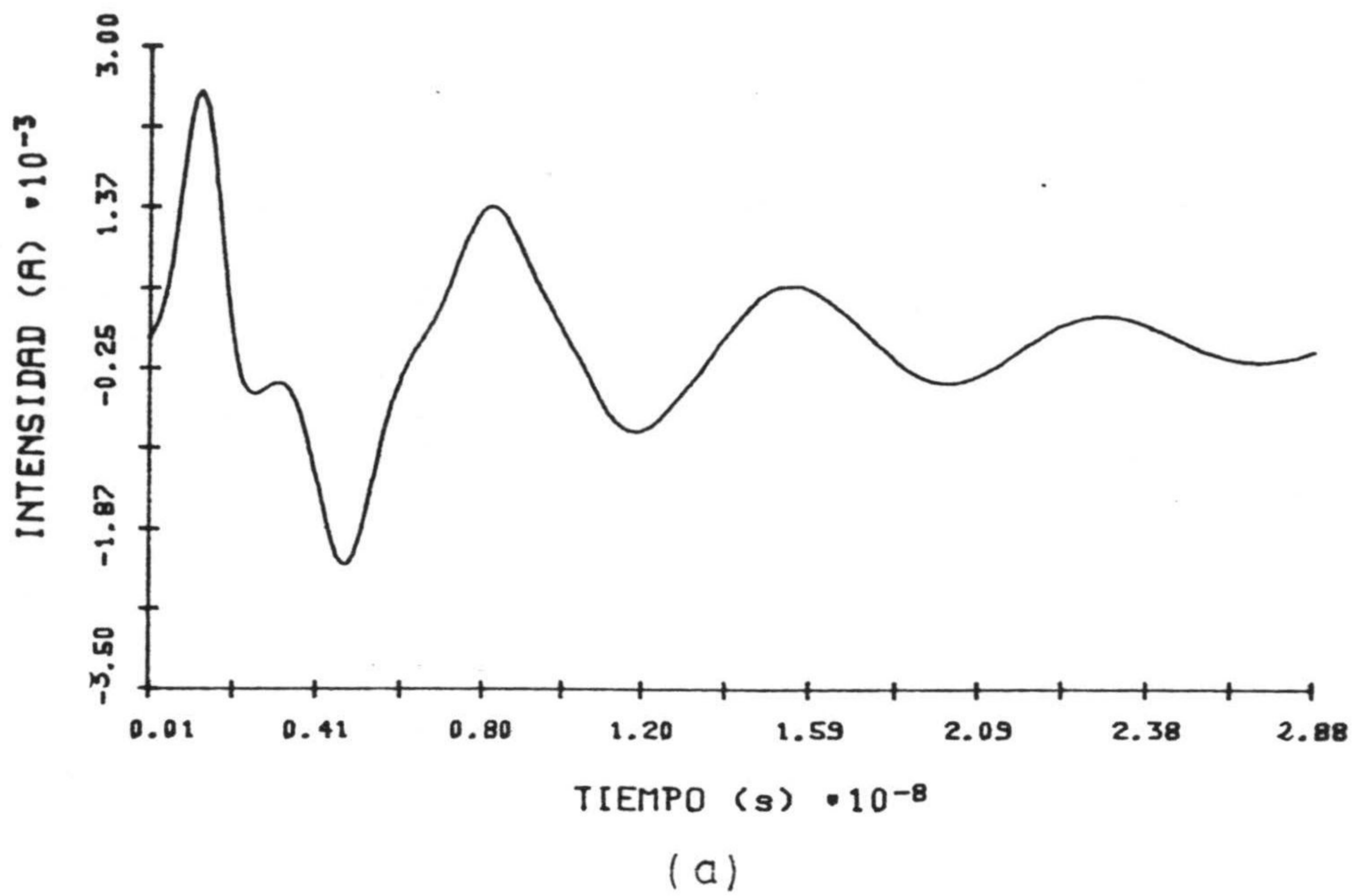


Fig. 2.11.- Tratamiento de carga Q3. Hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m. a) Intensidad en la alimentación en función de tiempo. b) Conductancia en función de L/λ c) Susceptancia en función de L/λ . $N_s = 24$, $g = 1.5 \cdot 10^9$ s⁻¹.

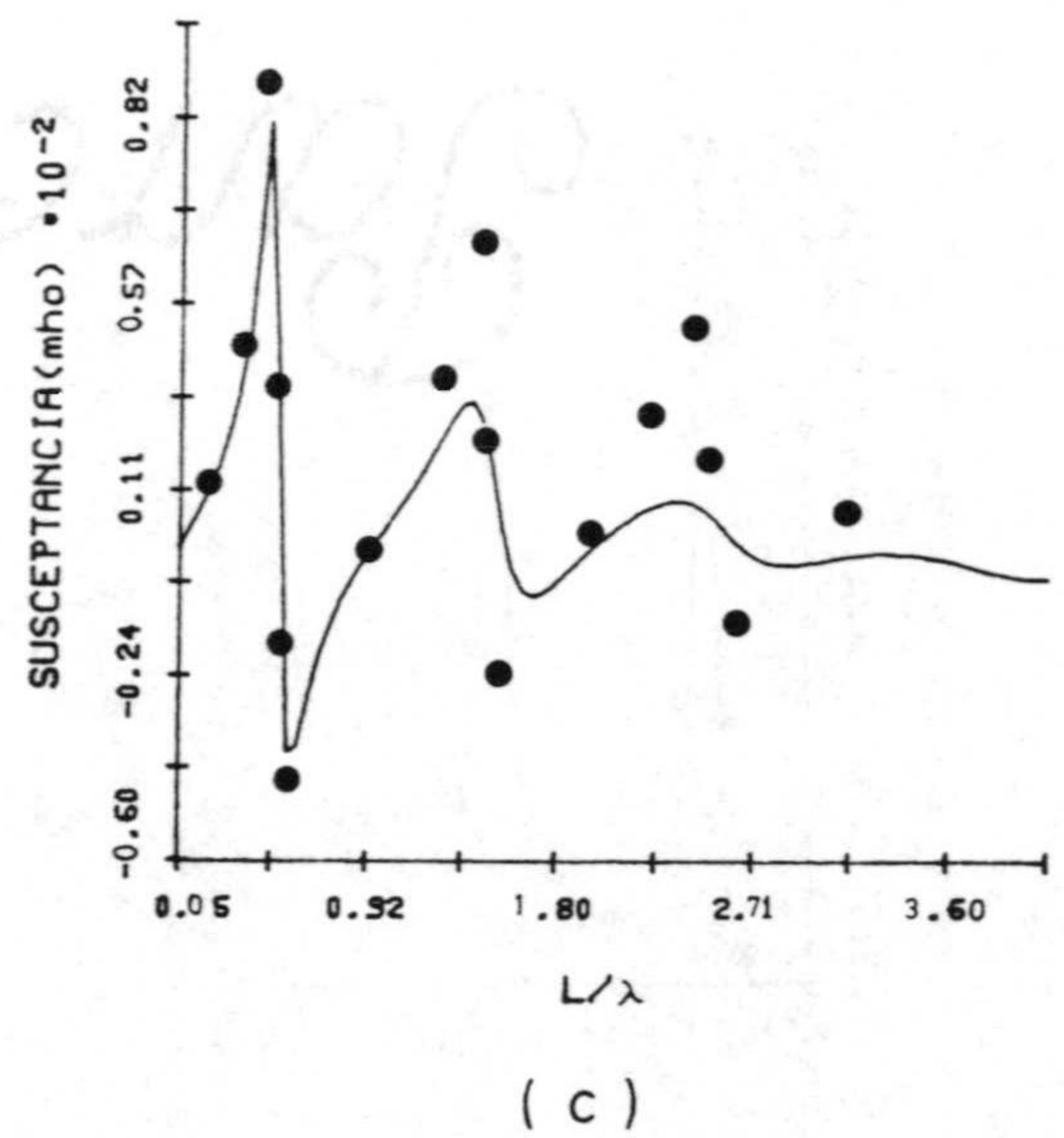
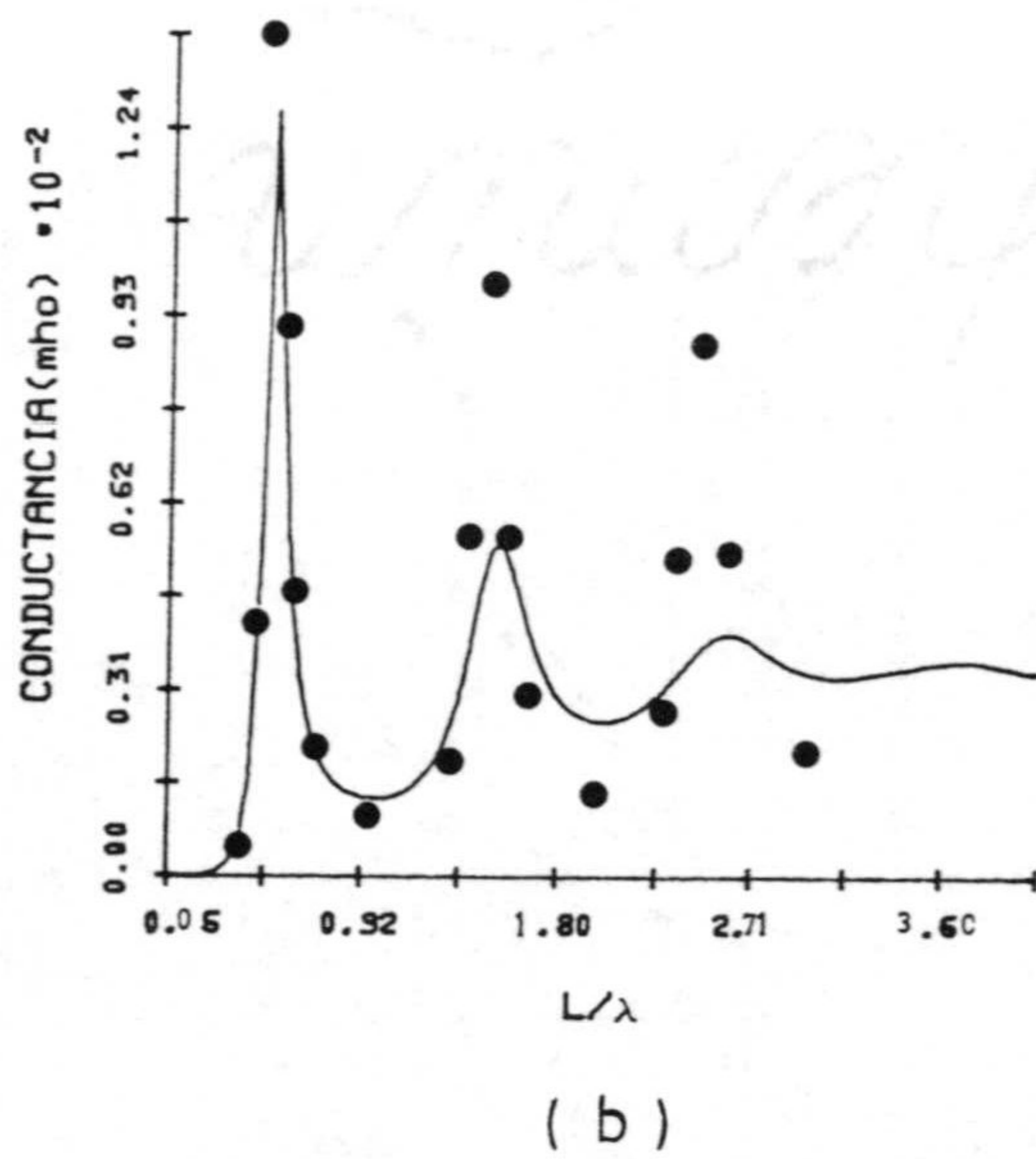
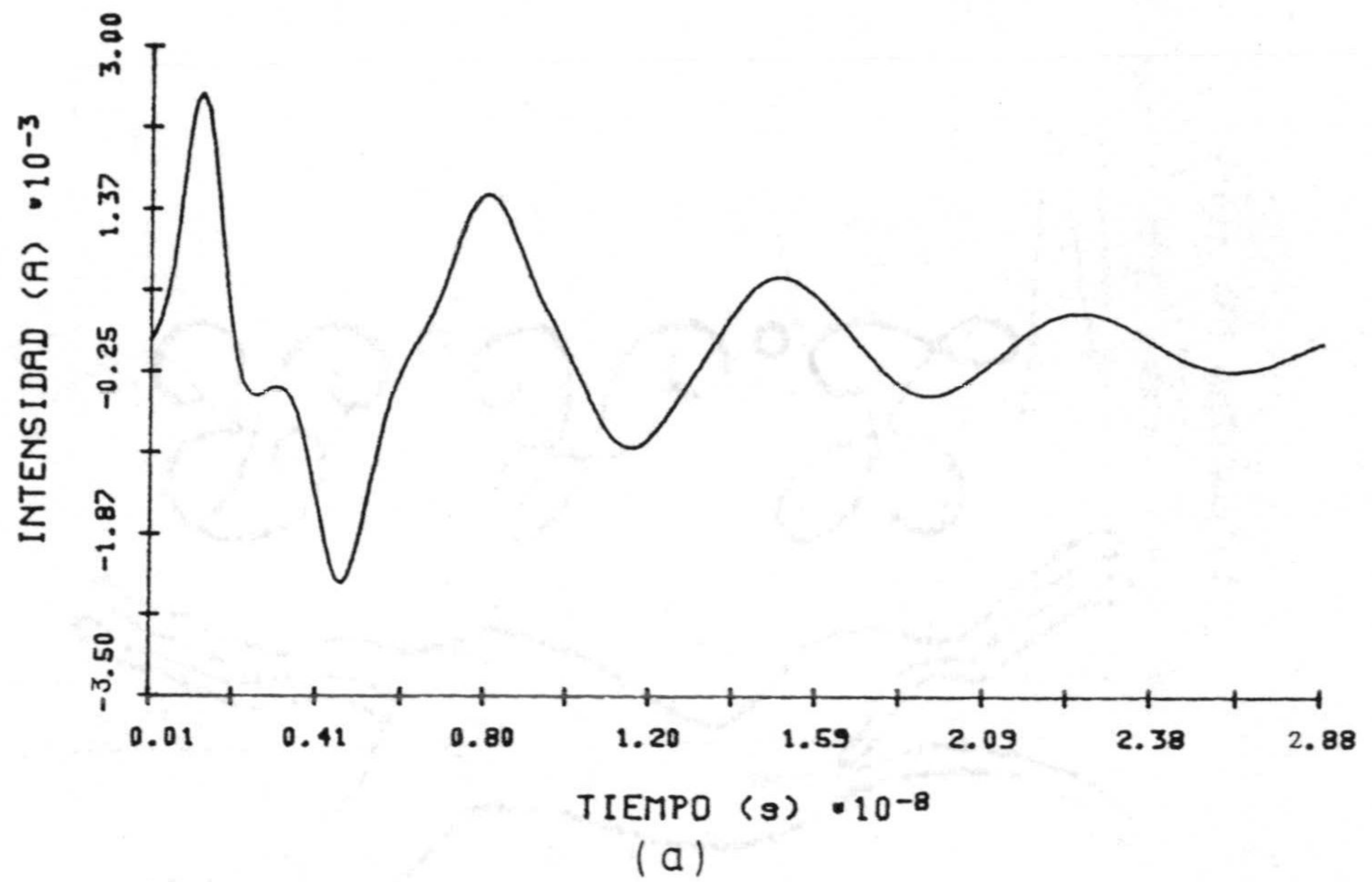


Fig. 2.12.- Tratamiento de carga Q4. Hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m. a) Intensidad en la alimentación en función de tiempo. b) Conductancia en función de L/λ c) Susceptancia en función de L/λ . $N_s = 24$, $g = 1.5 \cdot 10^9$ s^{-1} .

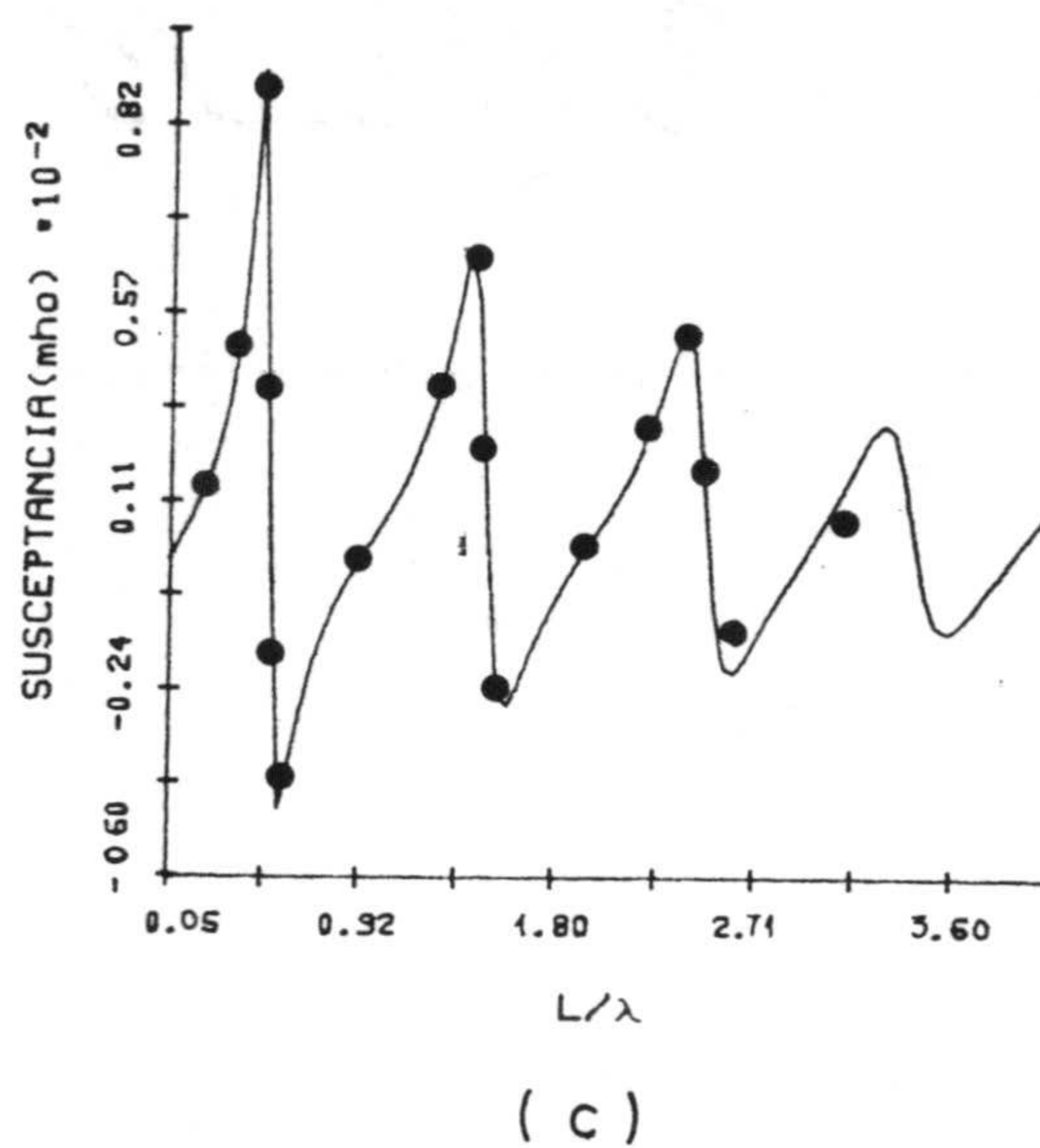
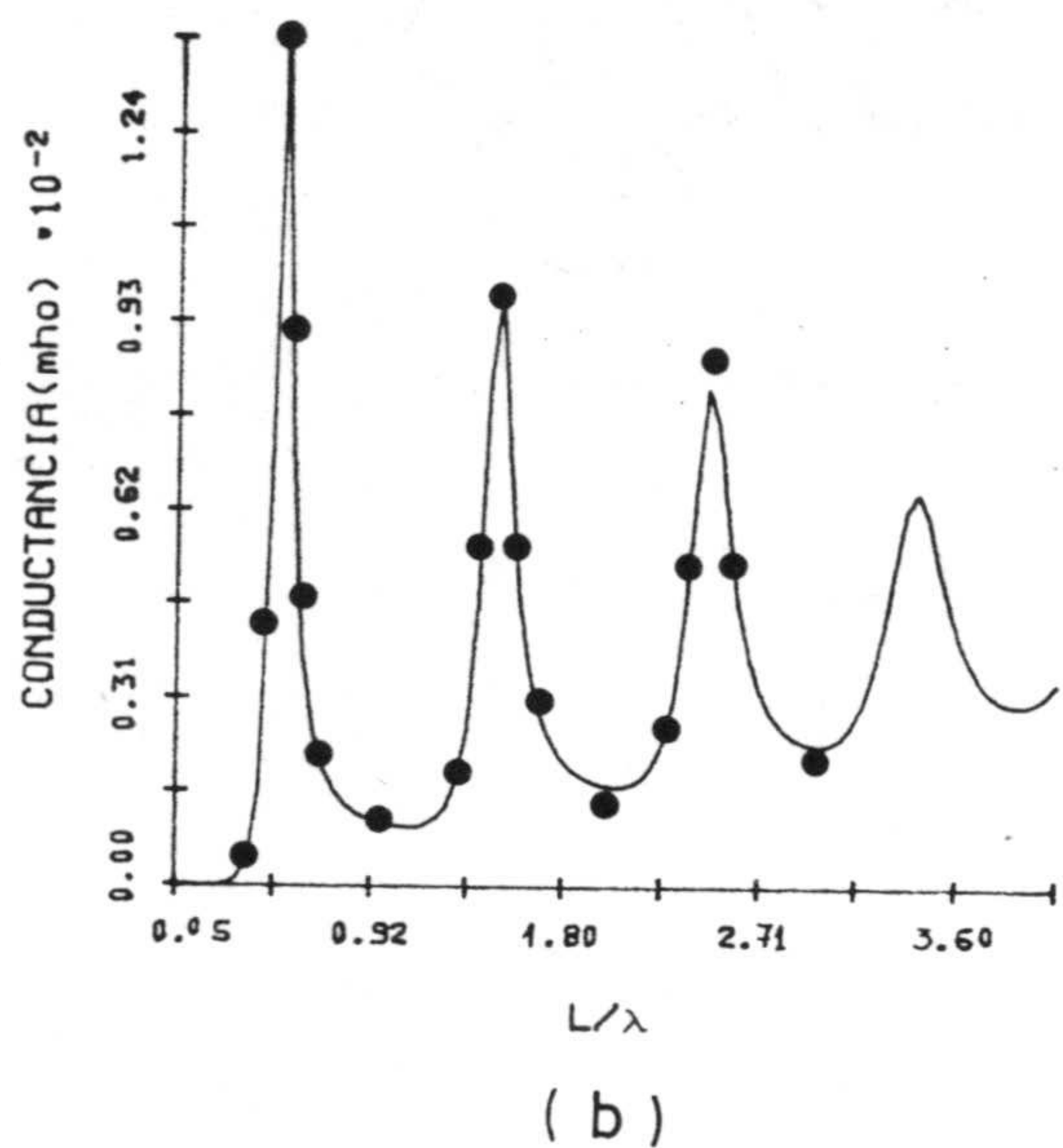
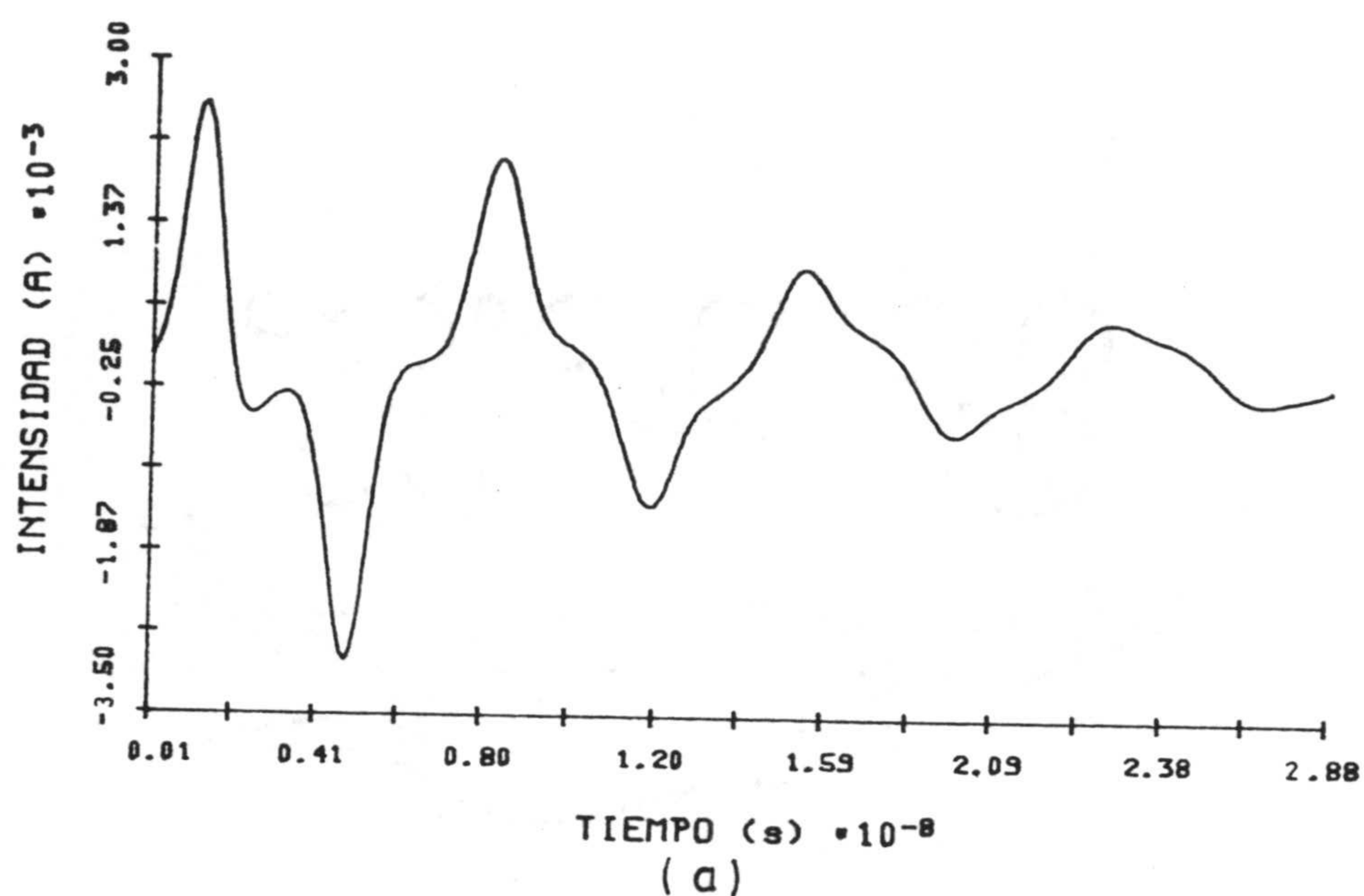


Fig. 2.13.- Tratamiento de carga Q5. Hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m. a) Intensidad en la alimentación en función de tiempo. b) Conductancia en función de L/λ c) Susceptancia en función de L/λ . $N_s = 24$, $g = 1.5 \cdot 10^9$ s⁻¹.

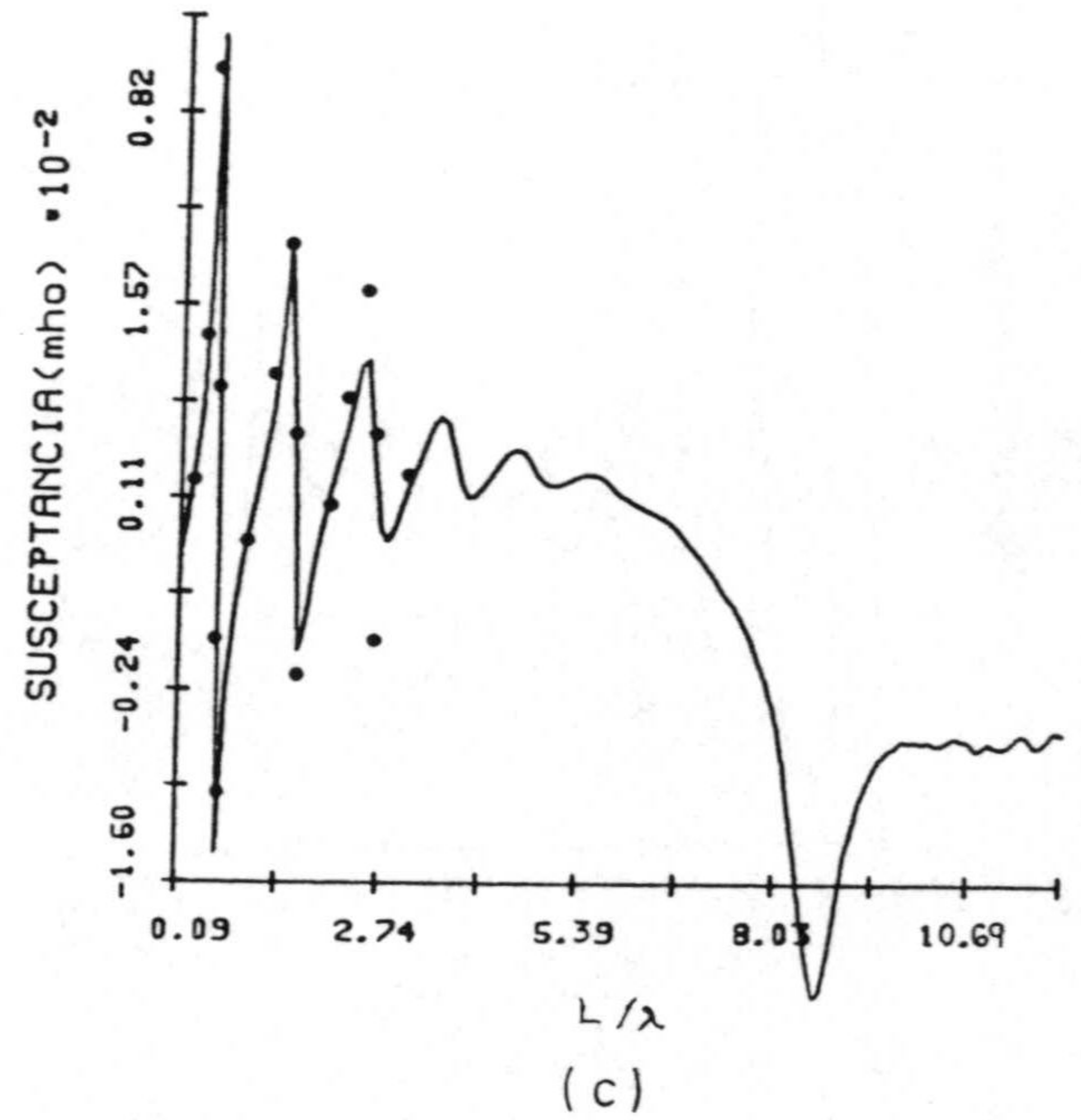
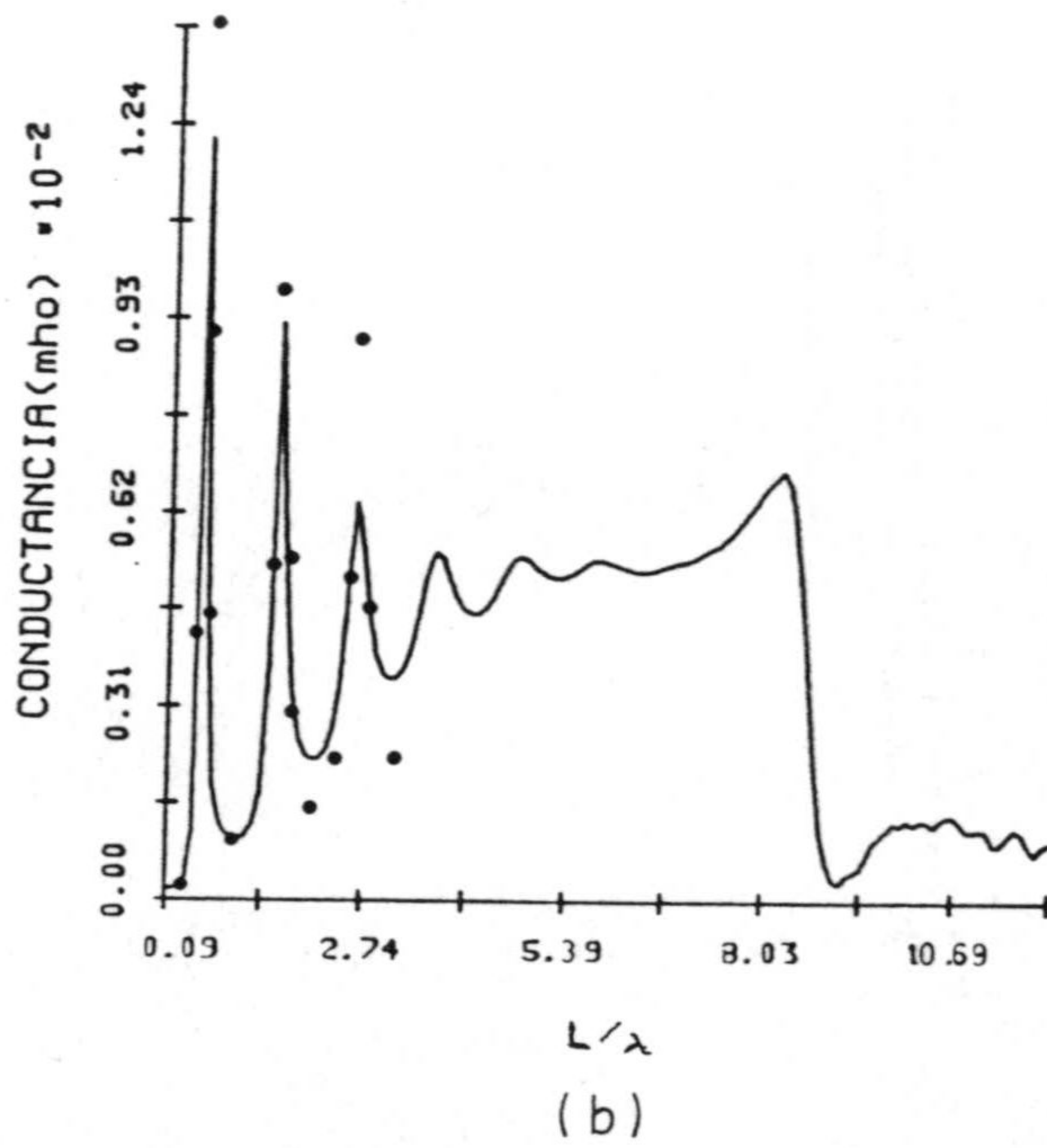
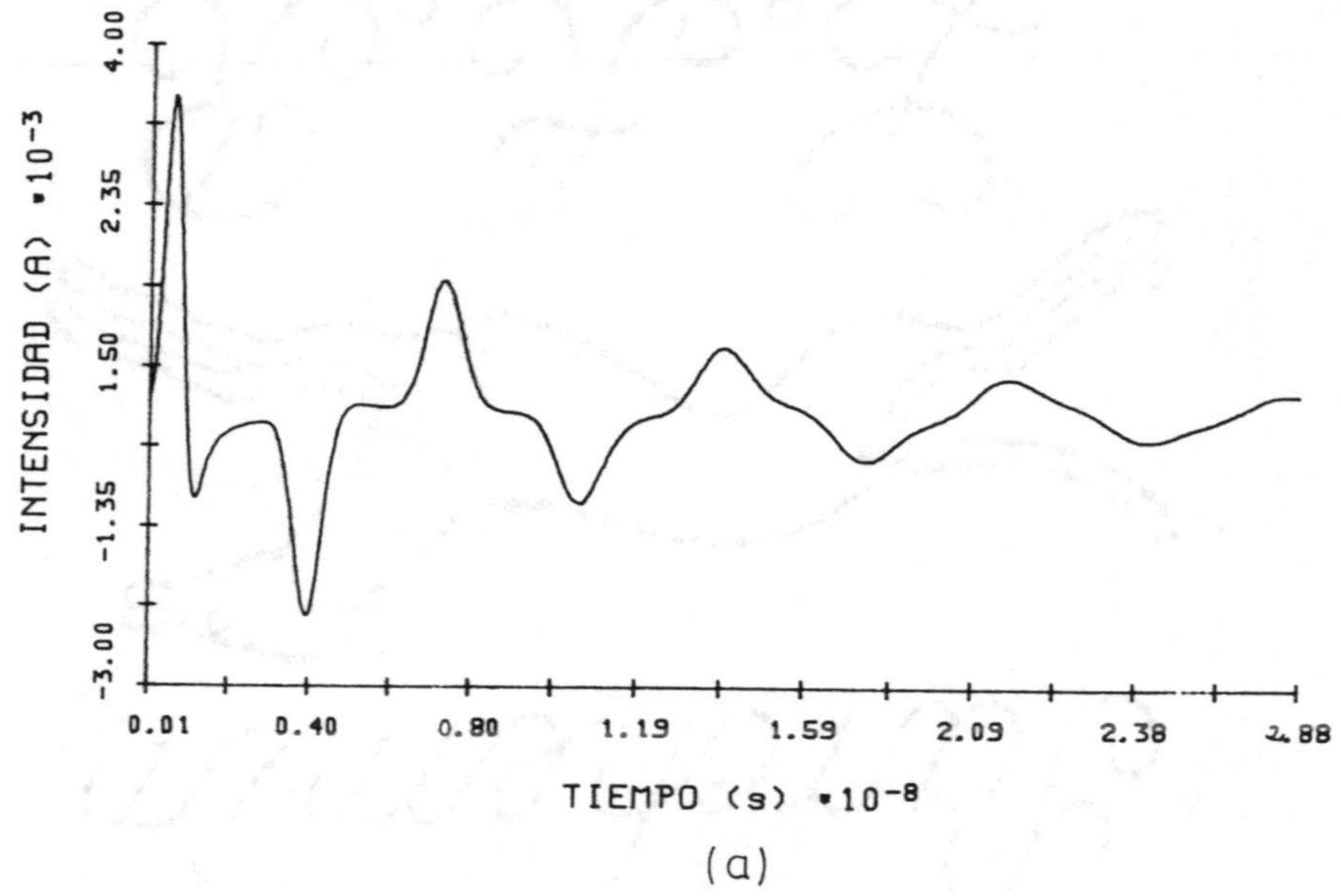
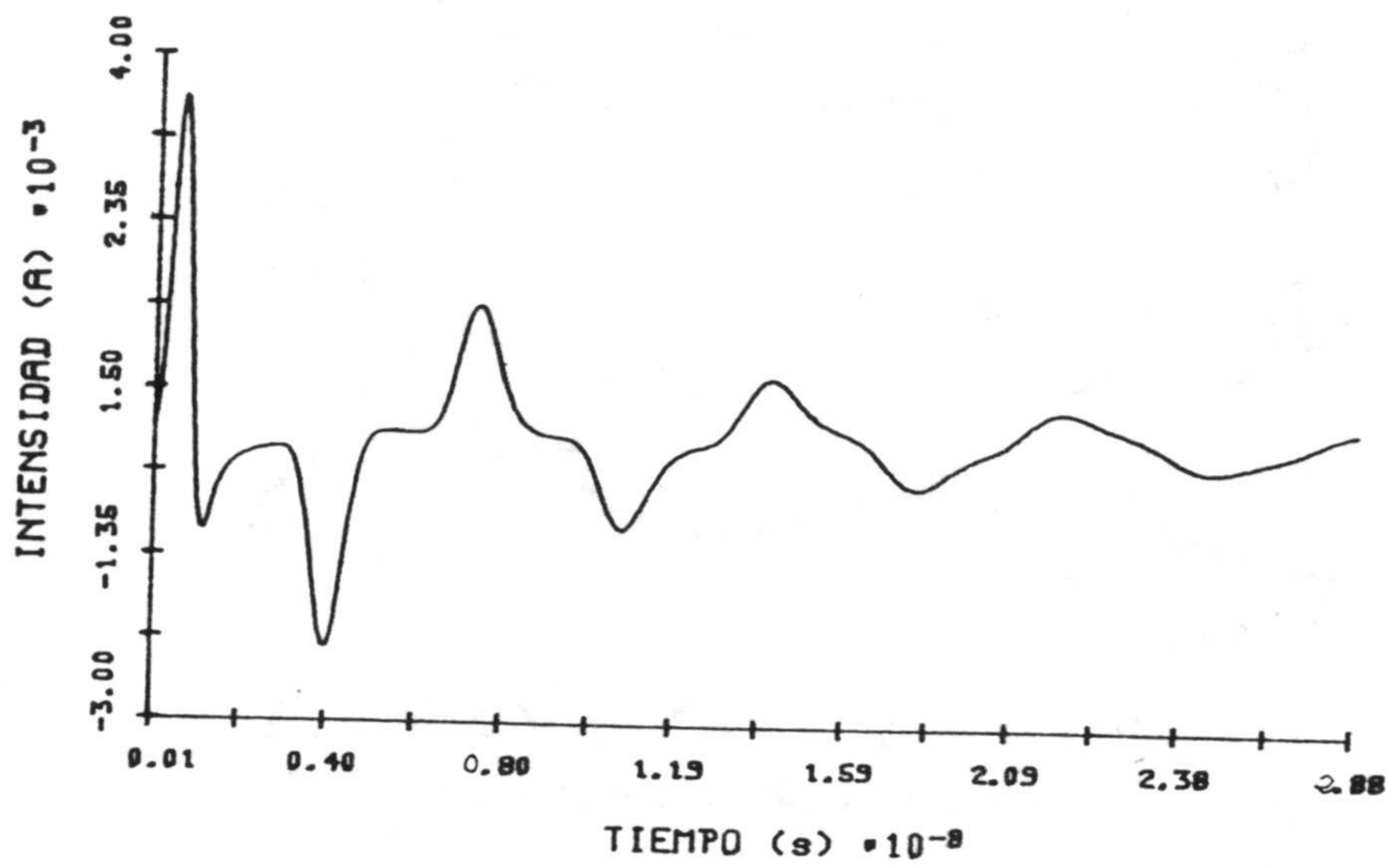
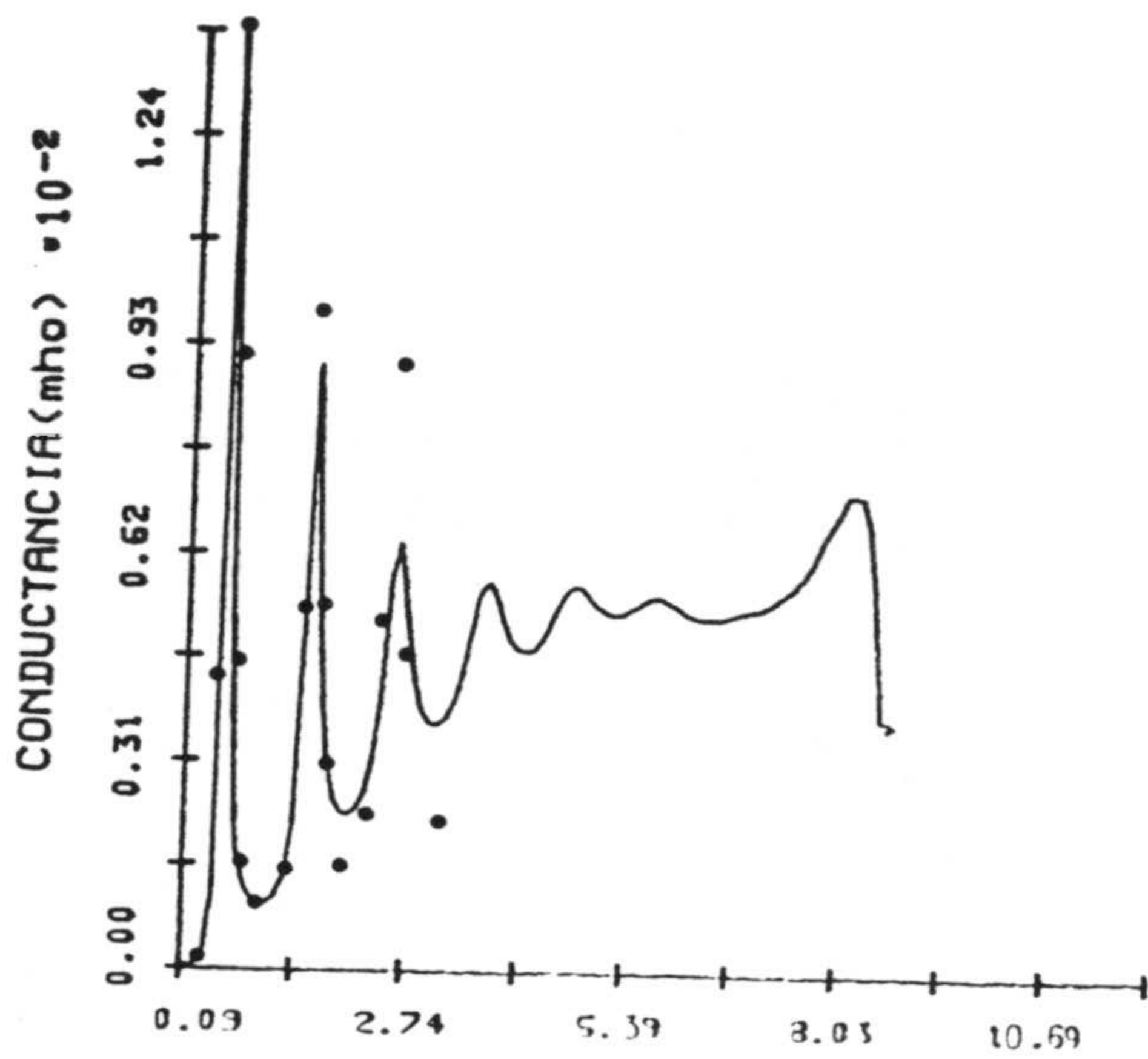


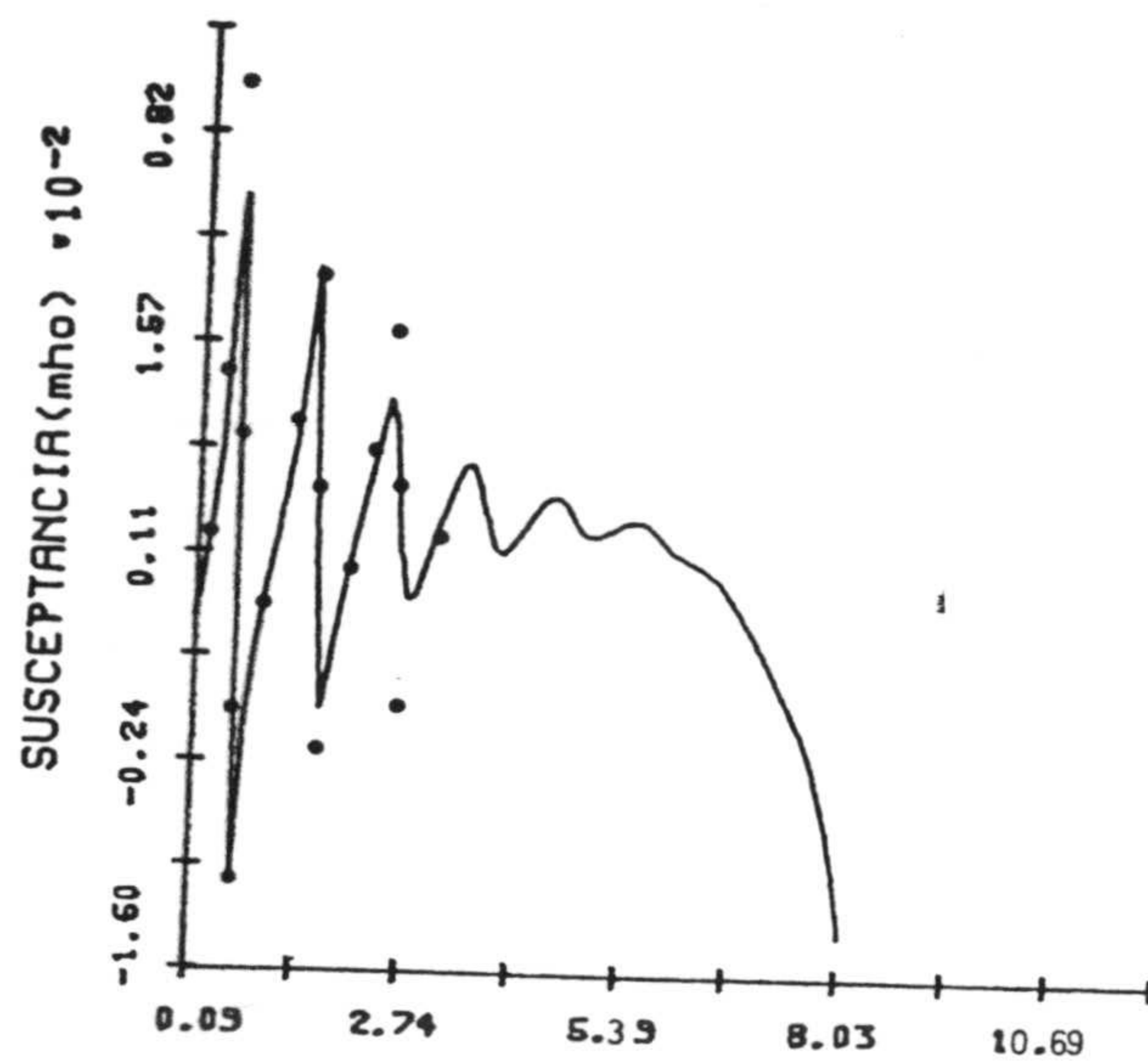
Fig. 2.14.- Tratamiento de carga Q1. Hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m. a) Intensidad en la alimentación en función de tiempo. b) Conductancia en función de L/λ . c) Susceptancia en función de L/λ . $N_s = 48$, $g = 3.0 \cdot 10^9$ s $^{-1}$.



(a)

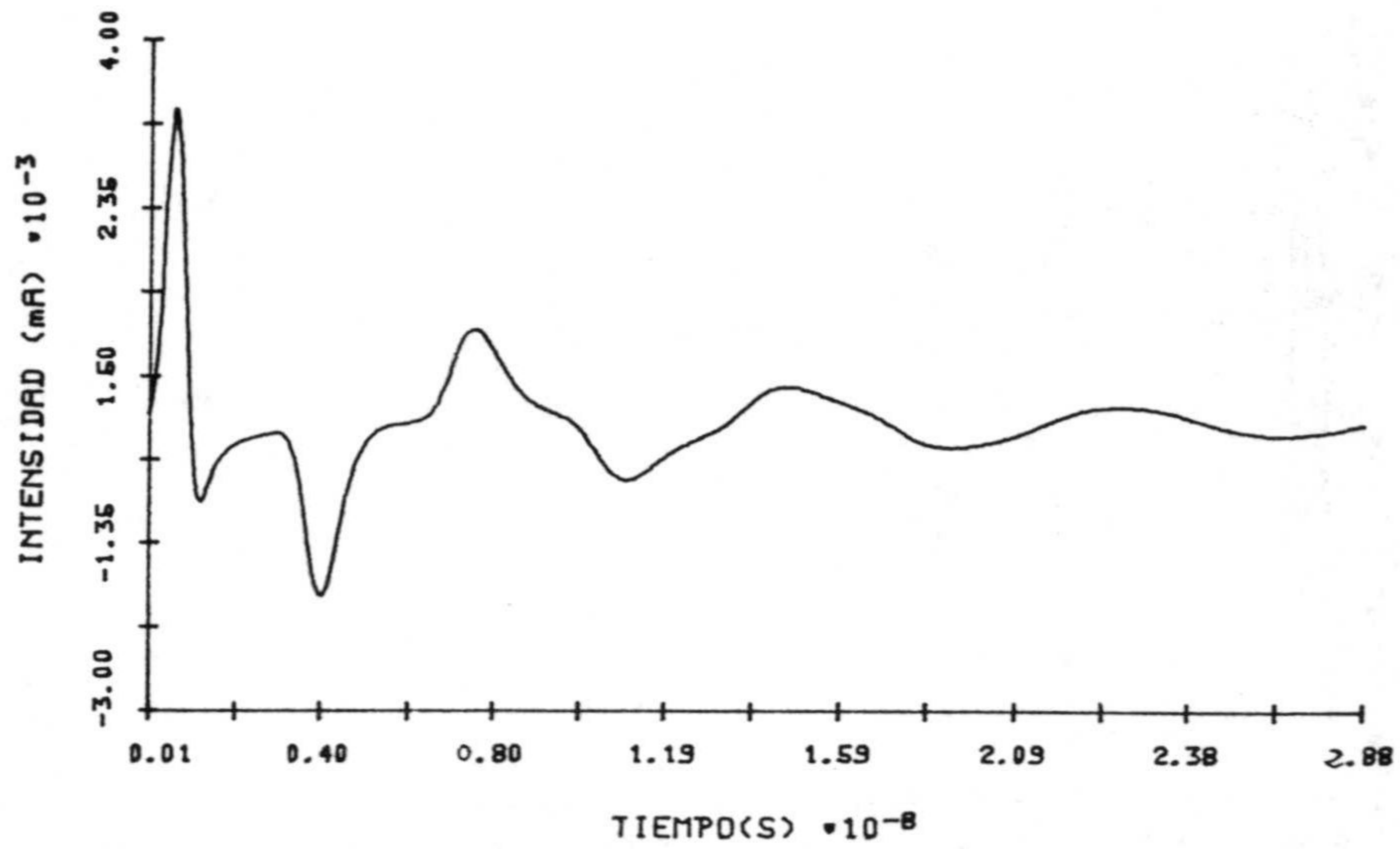


(b)

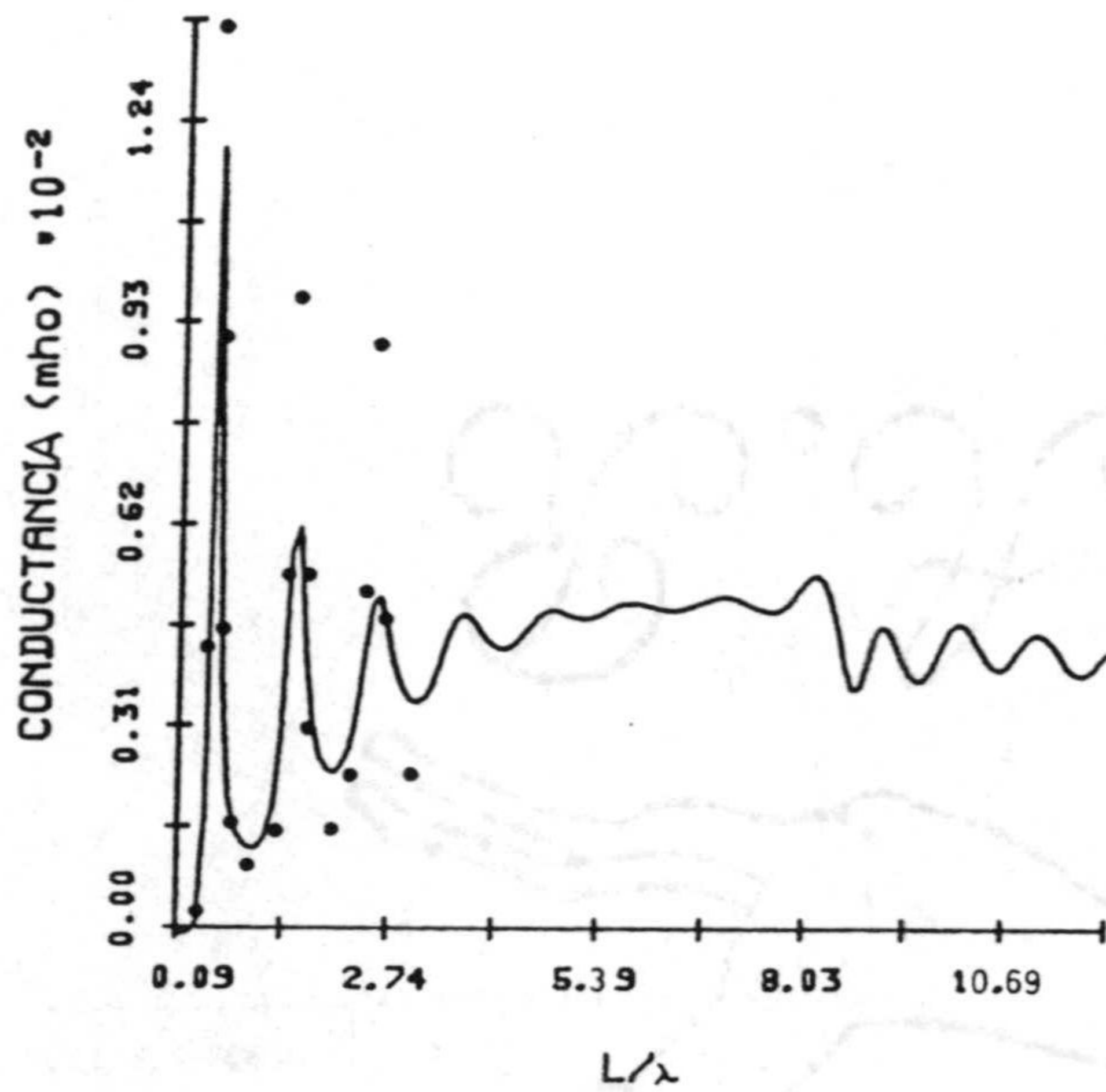


(c)

Fig. 2.15.- Tratamiento de carga Q2. Hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m. a) Intensidad en la alimentación en función de tiempo. b) Conductancia en función de L/λ c) Susceptancia en función de L/λ . $N_s = 48$, $g = 3.0 \cdot 10^9$ s^{-1} .

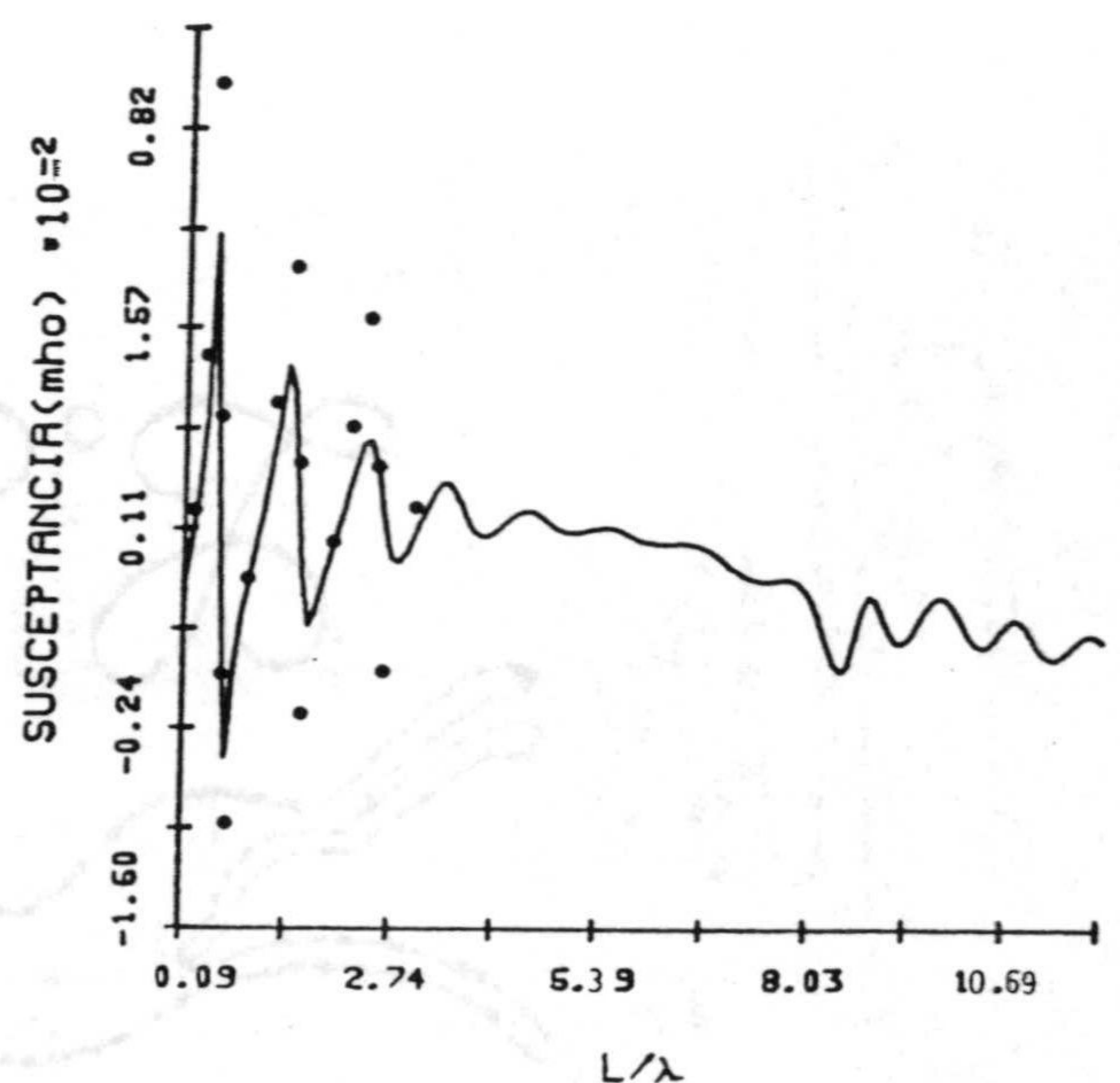


(a)



L/λ

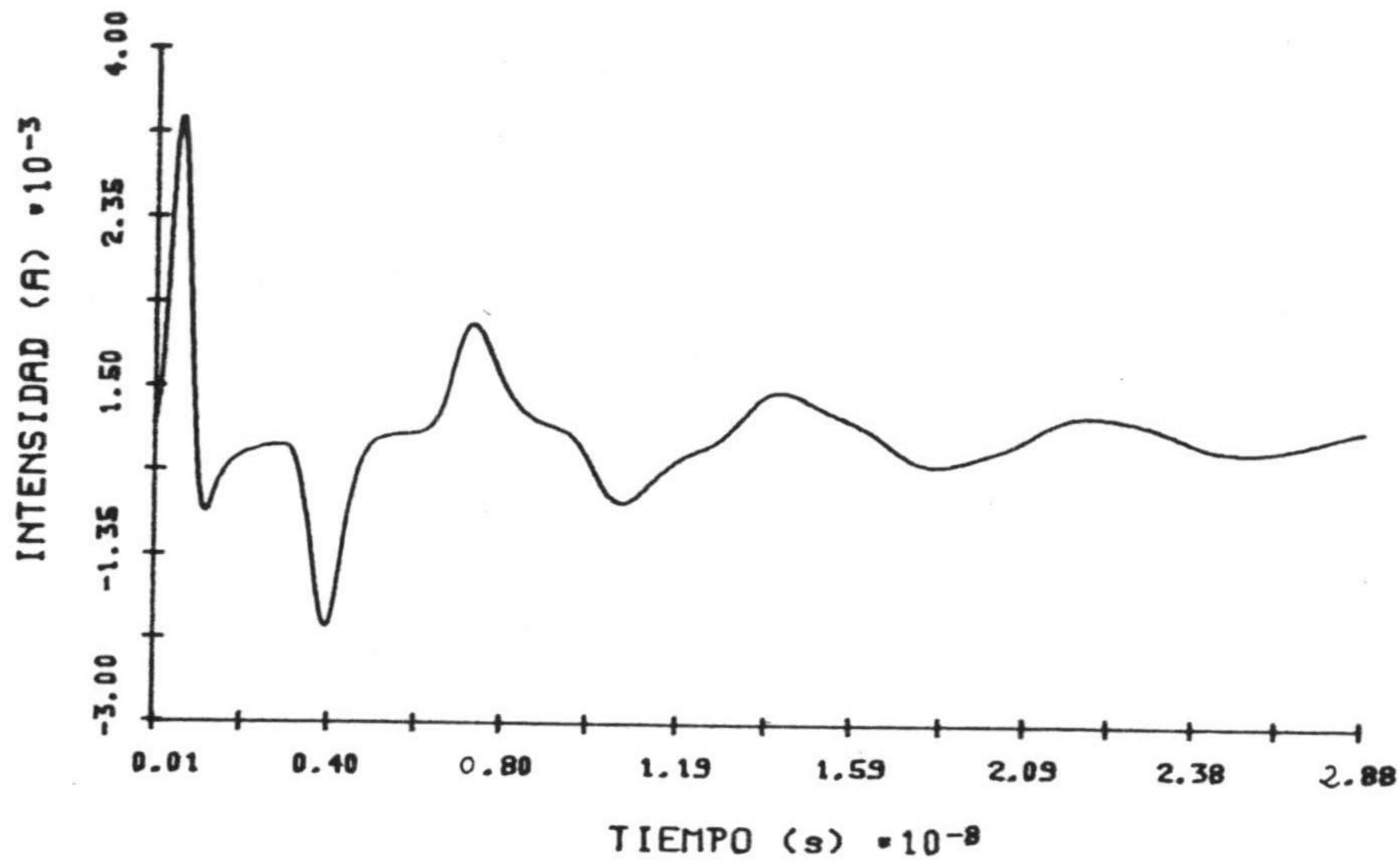
(b)



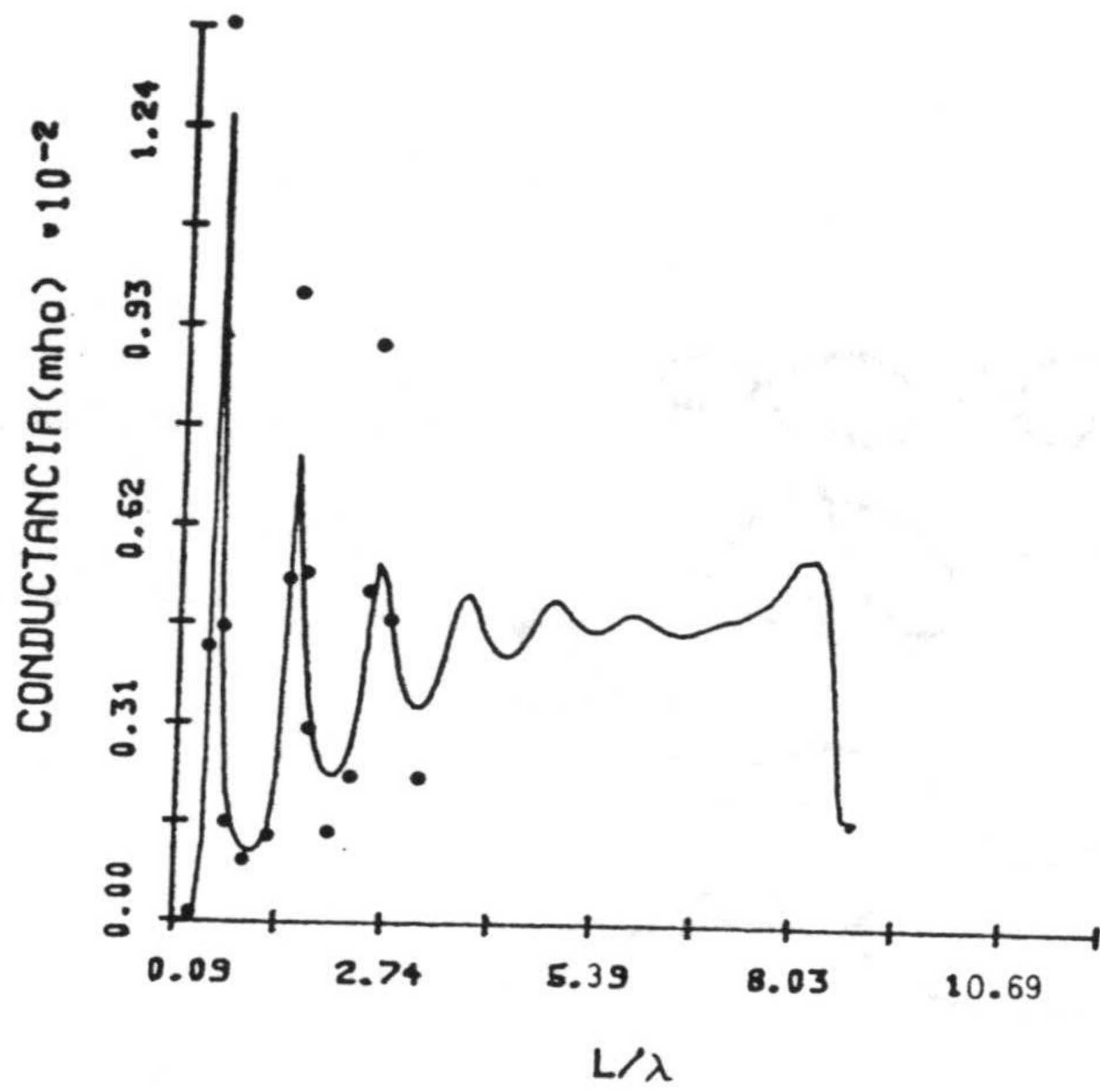
L/λ

(c)

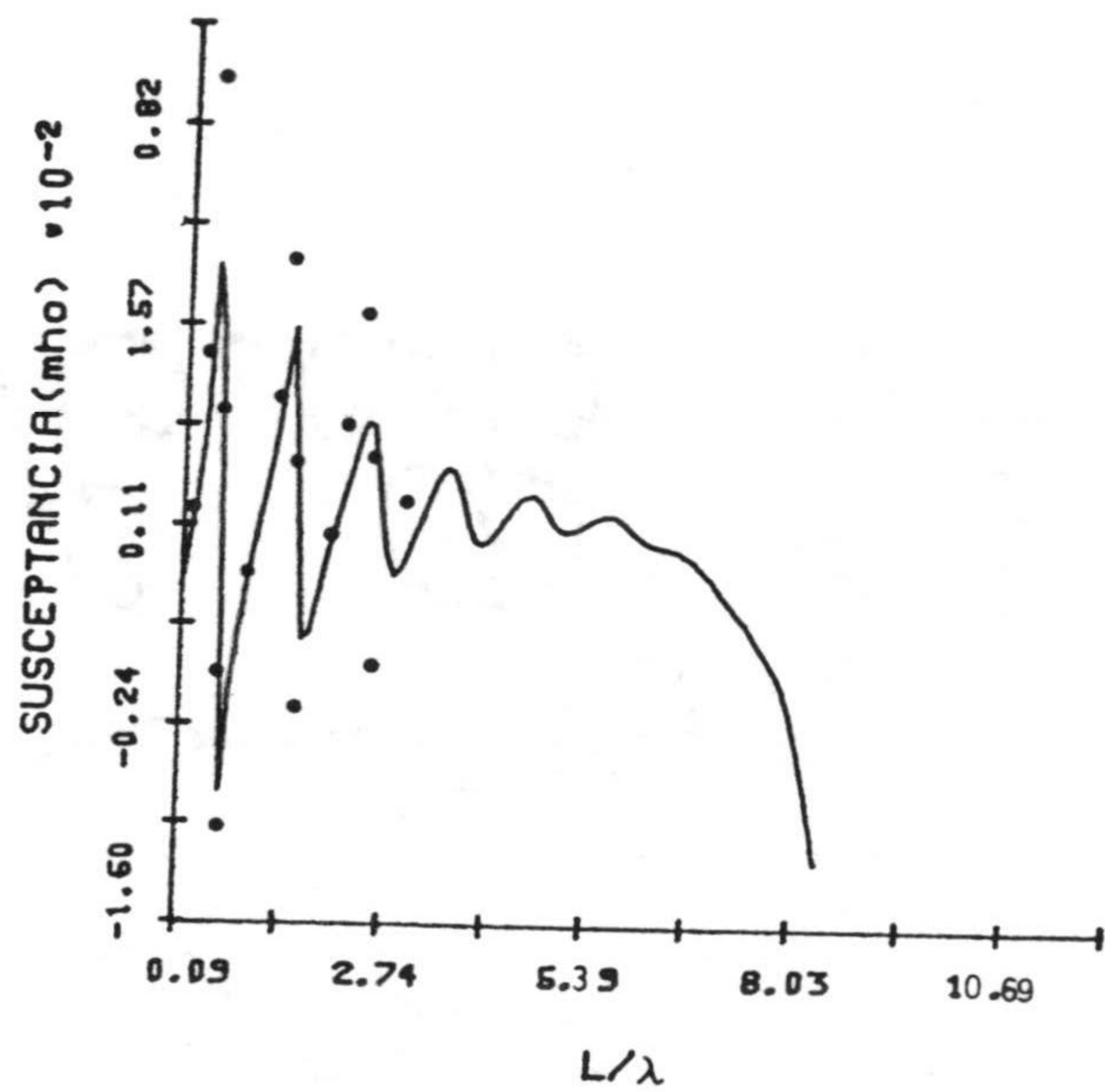
Fig. 2.16.- Tratamiento de carga Q3. Hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m. a) Intensidad en la alimentación en función de tiempo. b) Conductancia en función de L/λ . c) Susceptancia en función de L/λ . $N_s = 48$, $g = 3.0 \cdot 10^9$ s⁻¹.



(a)

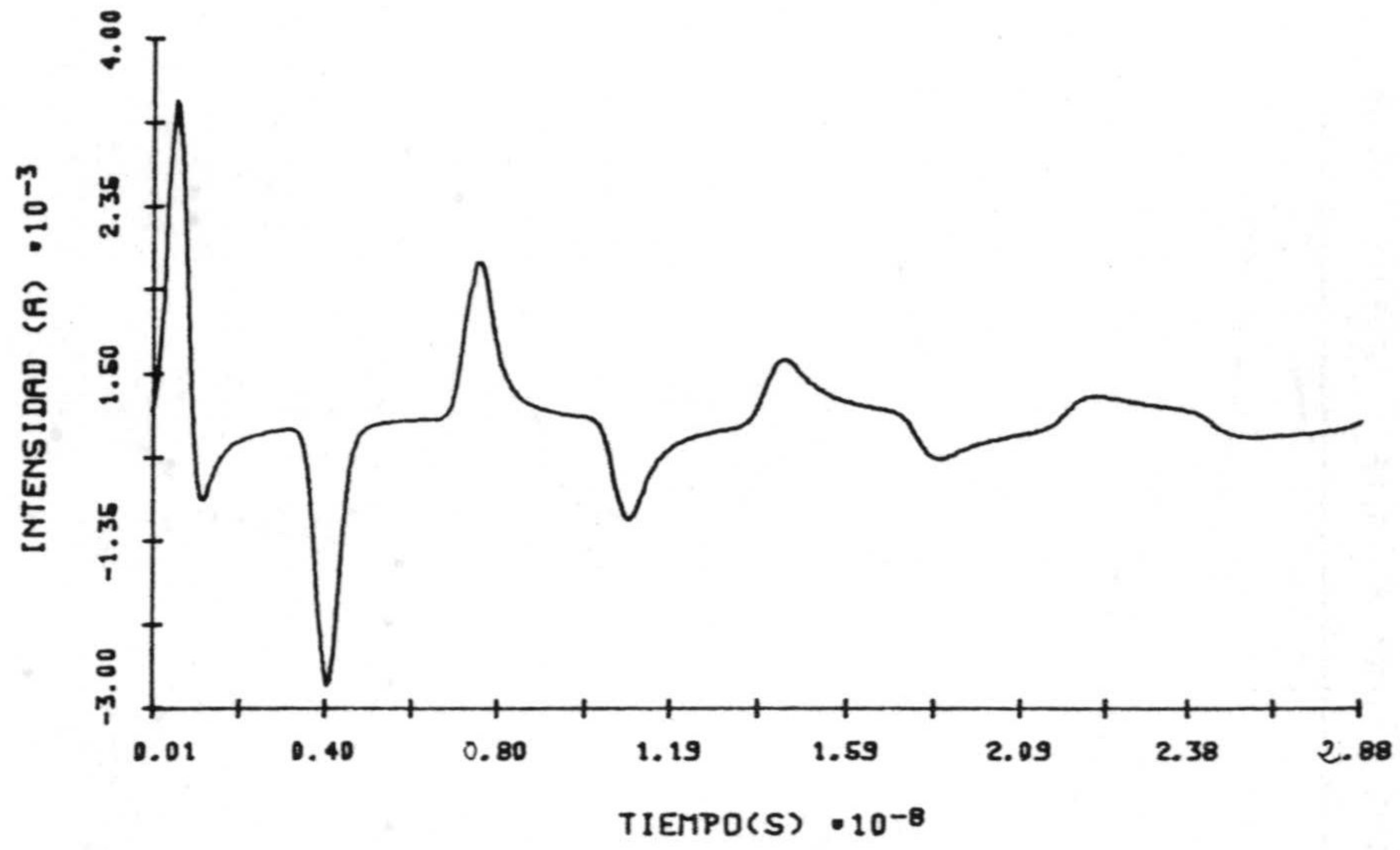


(b)

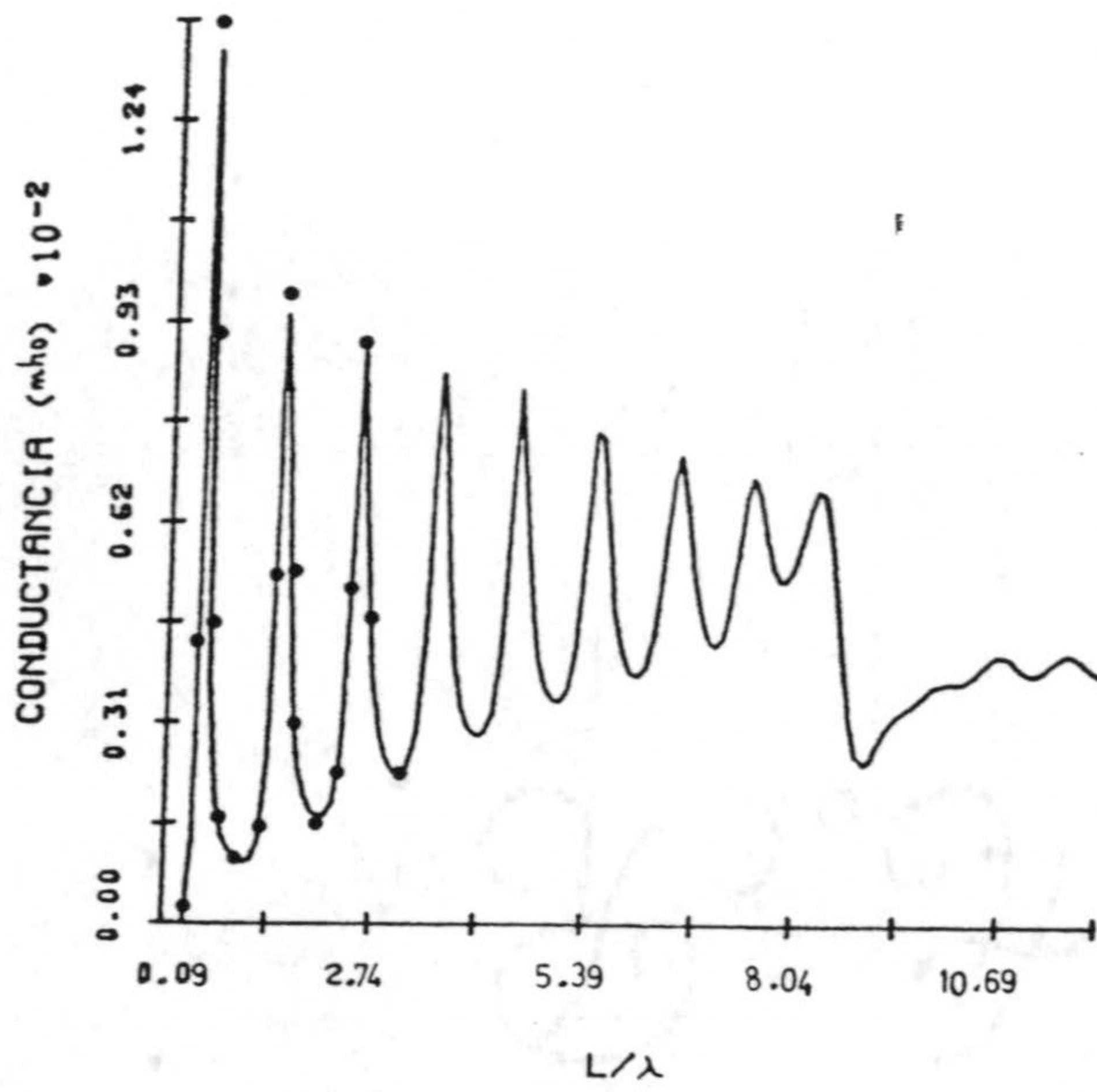


(c)

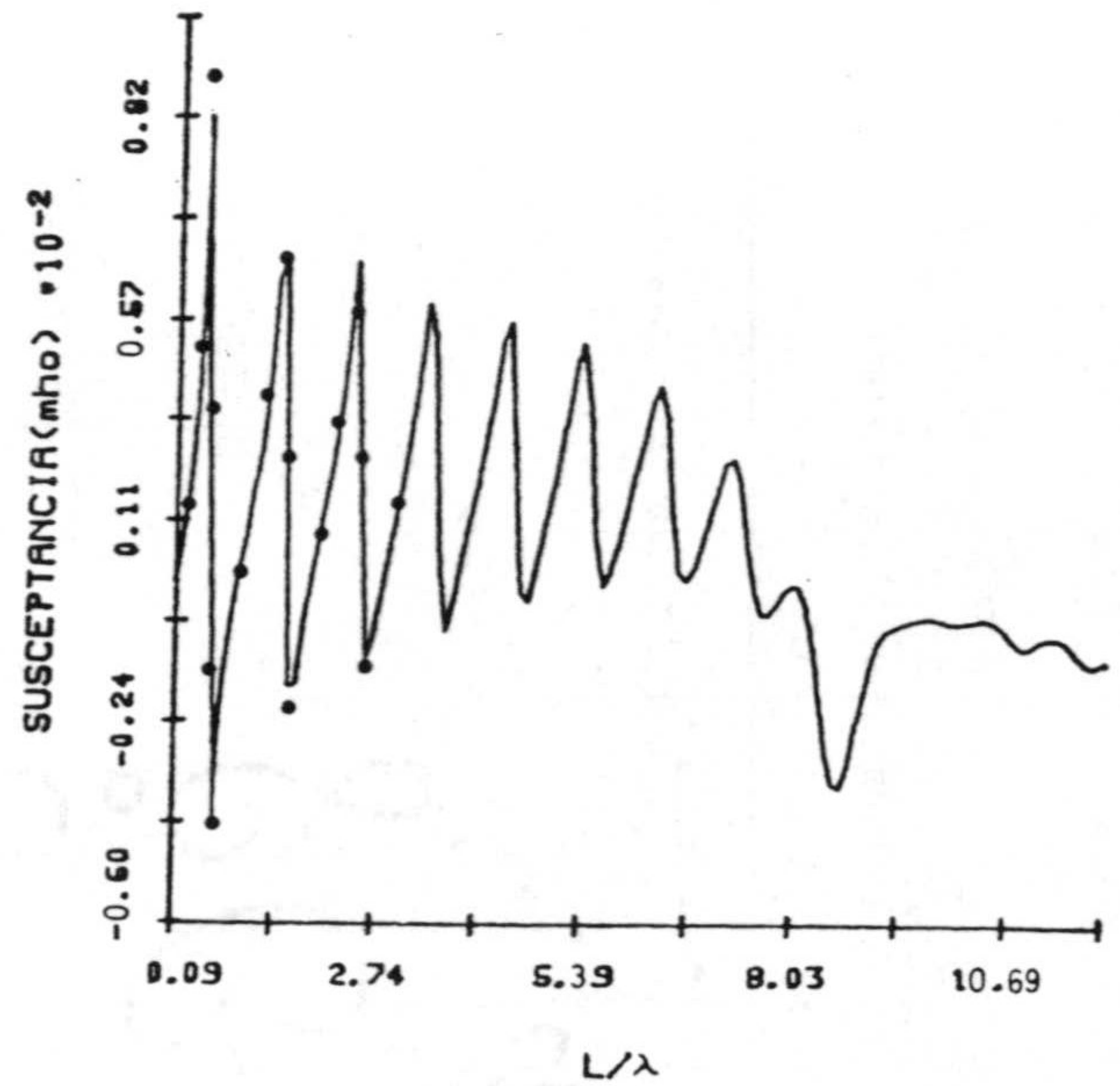
Fig. 2.17.- Tratamiento de carga Q4. Hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m. a) Intensidad en la alimentación en función de tiempo. b) Conductancia en función de L/λ c) Susceptancia en función de L/λ . $N_s = 48$, $g = 3.0 \cdot 10^9$ s $^{-1}$.



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.18.- Tratamiento de carga Q5. Hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m. a) Intensidad en la alimentación en función de tiempo. b) Conductancia en función de L/λ . c) Susceptancia en función de L/λ . $N_s = 48$, $g = 3.0 \cdot 10^9$ s $^{-1}$.

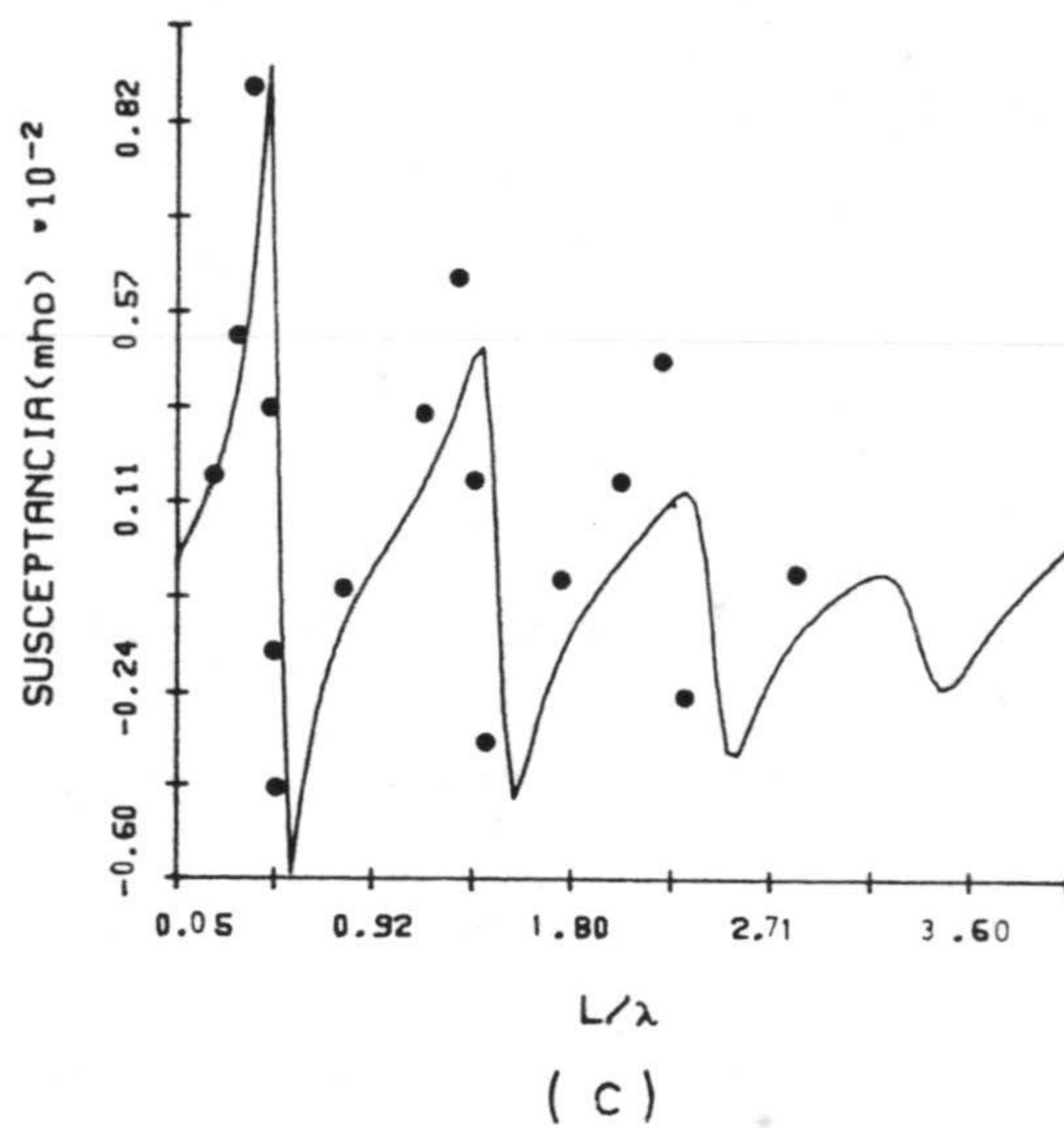
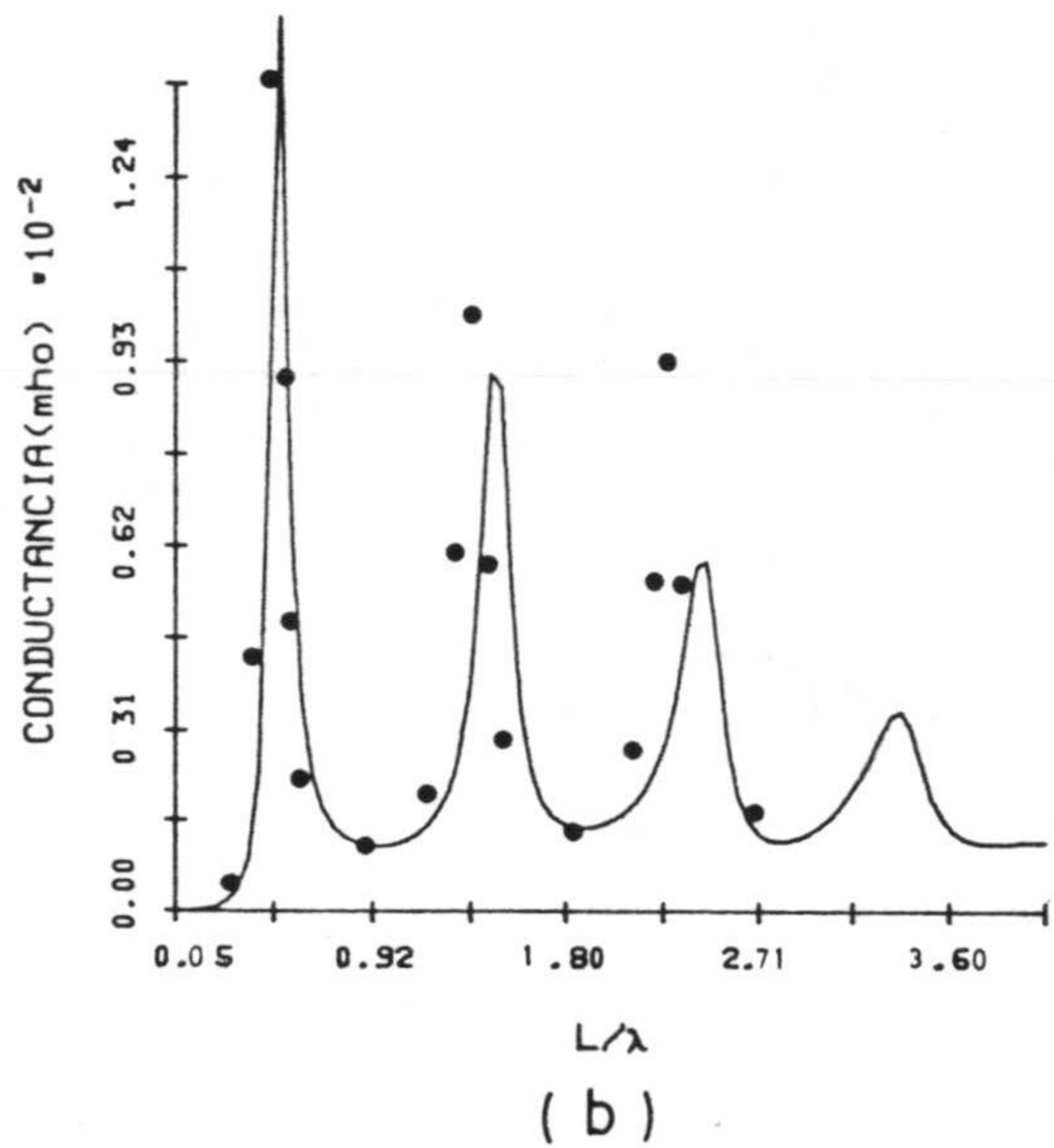
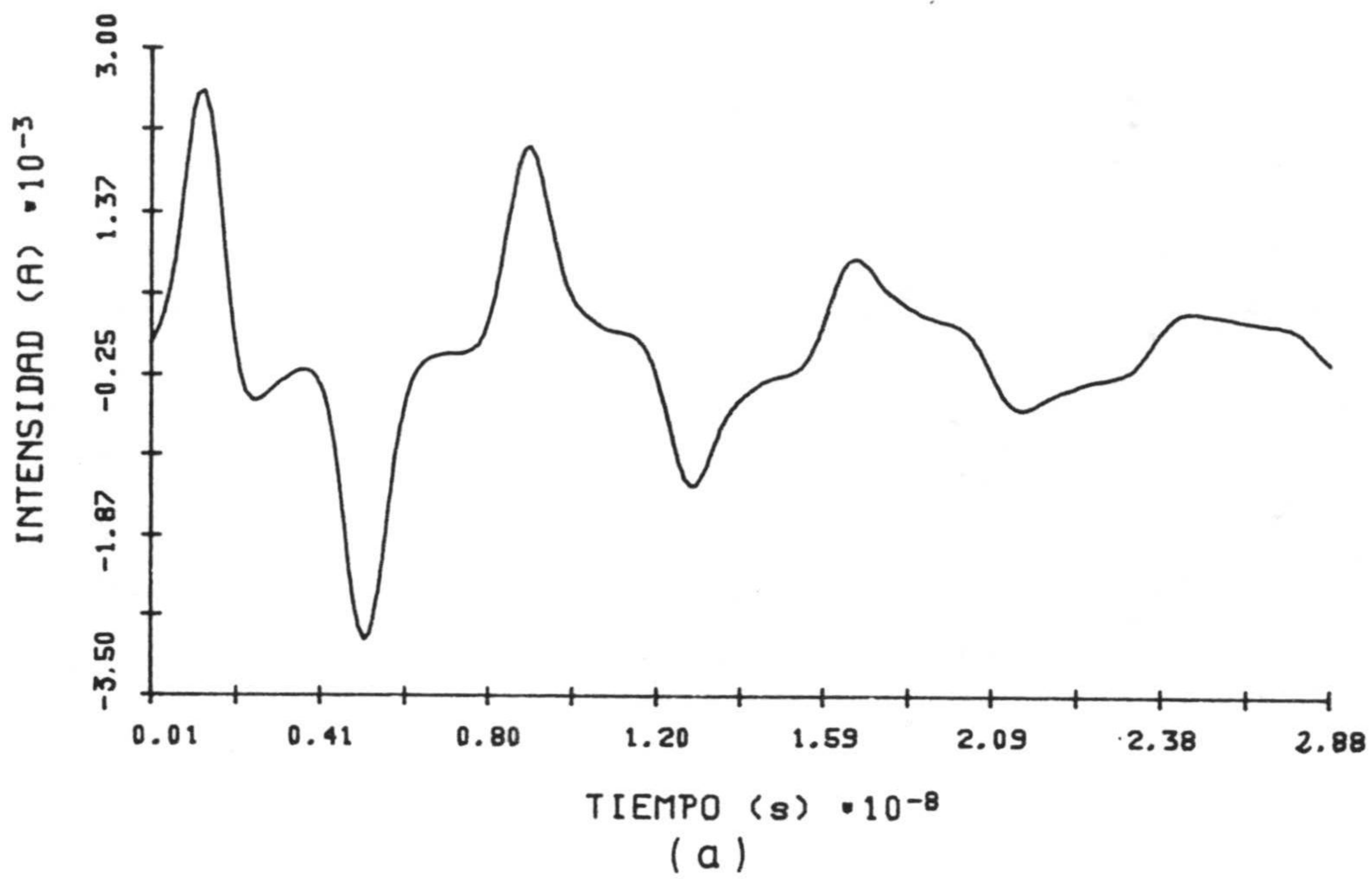
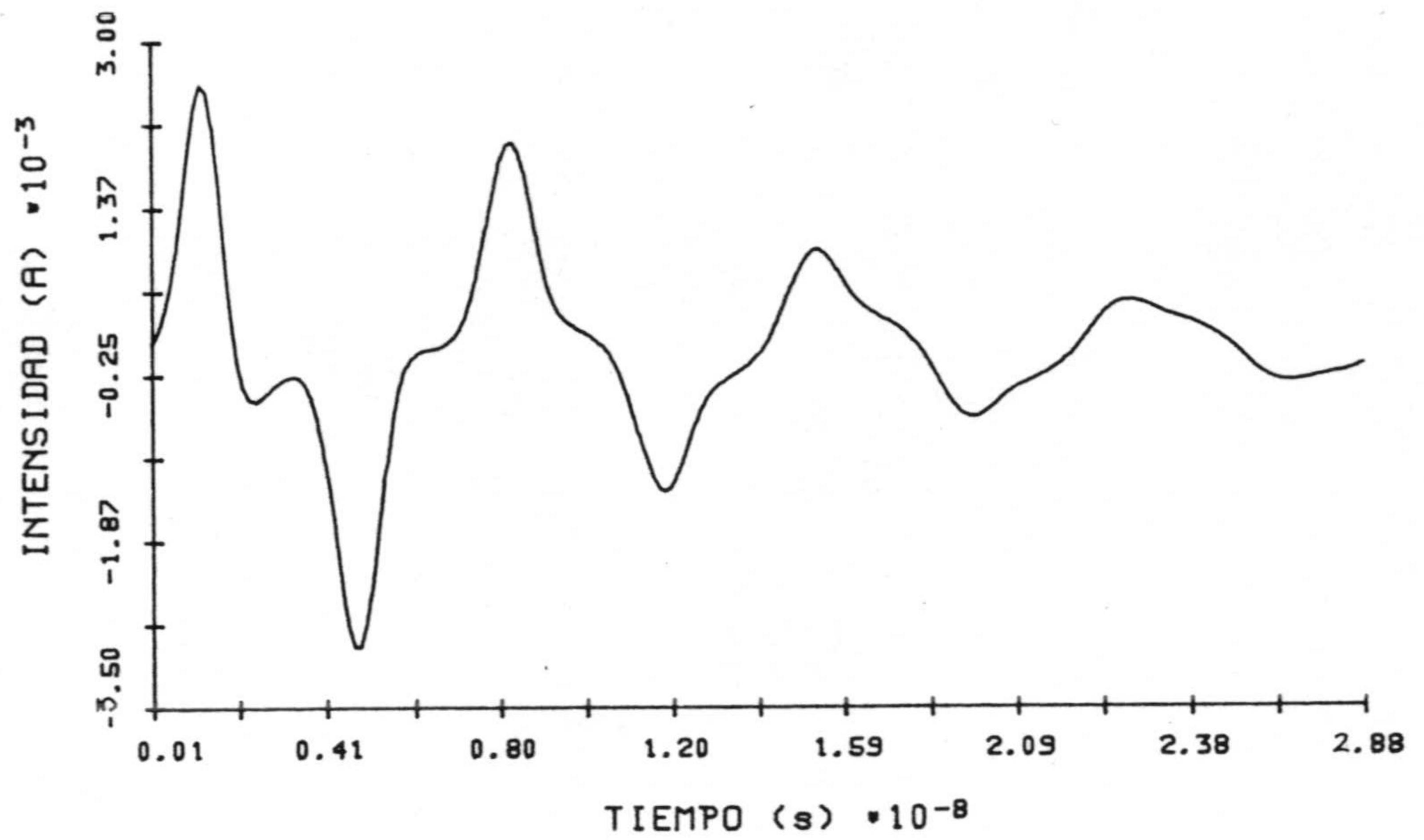
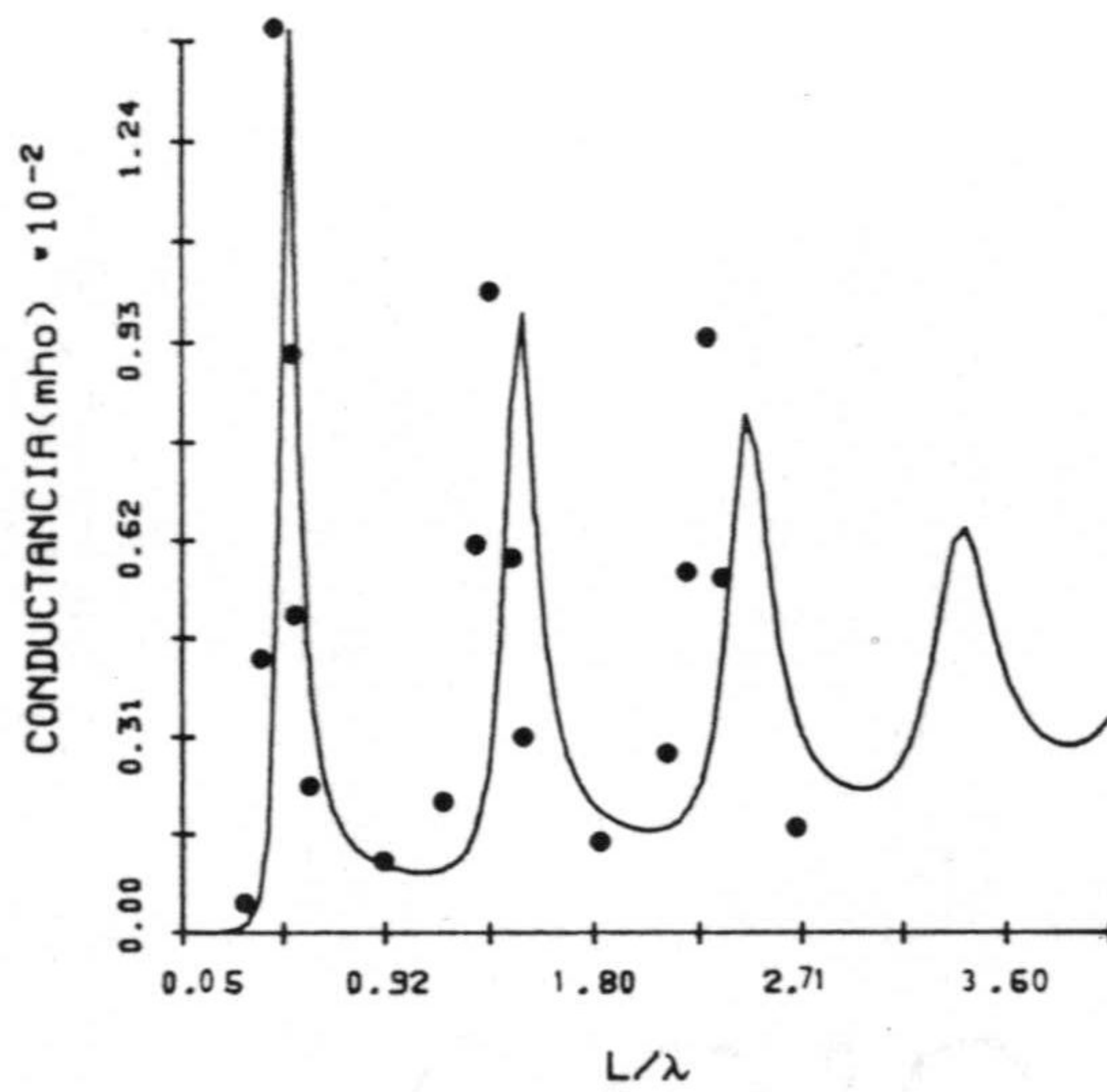


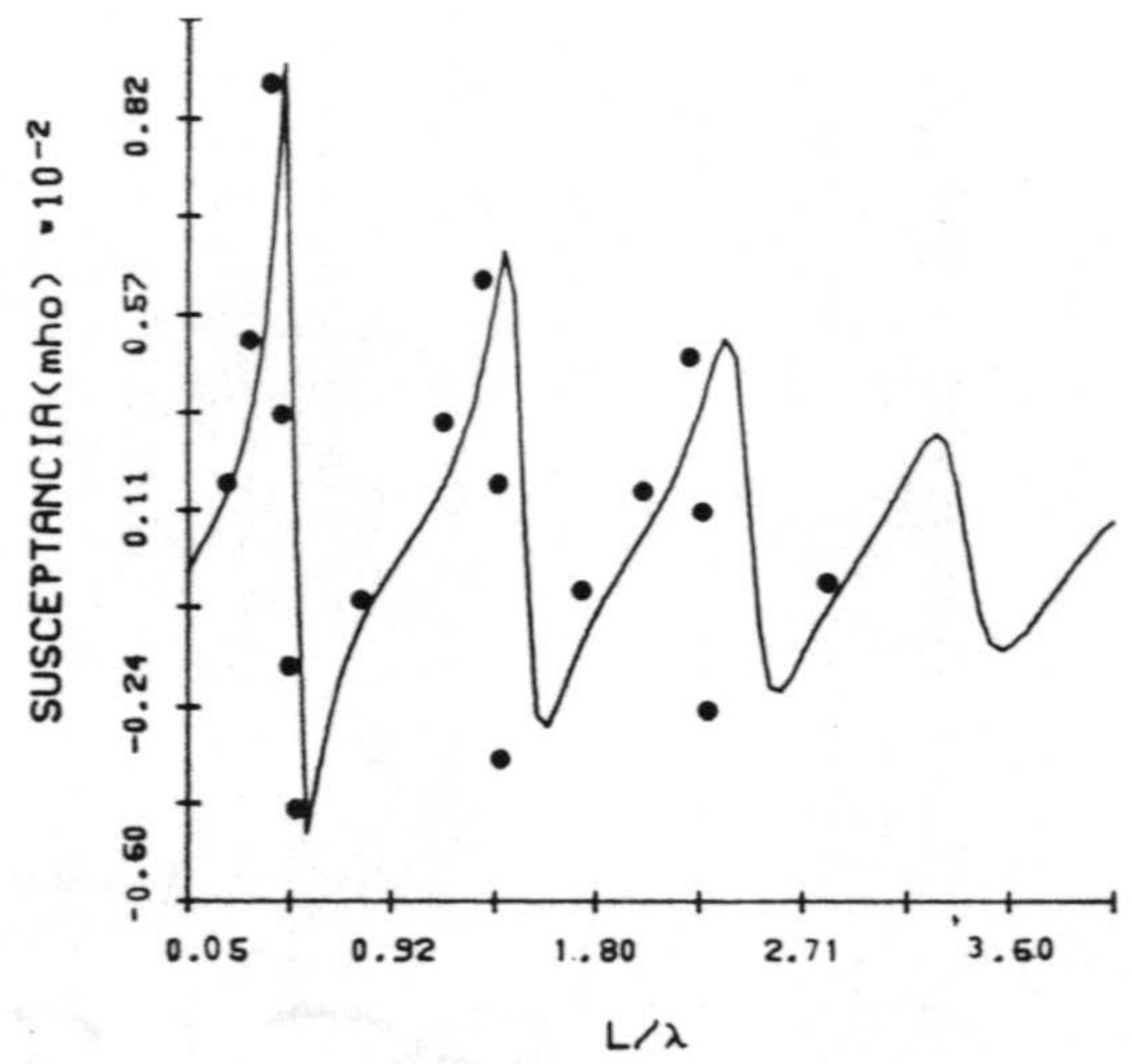
Fig. 2.19.- Resultados con el tratamiento de carga Q_5 y tratamiento de extremos $I = 0$ en $u = 1$ $\omega = N_s$, para un hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m, $N_s = 24$ y $g = 1.5 \cdot 10^9$ s^{-1} .



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.20.- Resultados con el tratamiento de carga Q5 y tratamiento de extremos $I = 0$ en $u = 0$ $u = N_s + 1$, para un hilo recto $L = 1$ m, $a = 0.00674$ m, $N_s = 24$ y $g = 1.5 \cdot 10^9$ s⁻¹.

^f
CAPITULO 3. APLICACION DEL METODO NUMERICO A ESTRUCTU-
RAS DE VARIOS HILOS.

En este Capítulo se extiende el método numérico desarrollado para un solo hilo, al caso de varios hilos, con o sin unir por sus extremos. También se considera el efecto de la existencia de un plano conductor actuando como tierra.

3.1 EXTENSION DEL METODO NUMERICO A VARIOS HILOS SIN CONECTAR.

Supongamos una agrupación de NH hilos delgados excitados con señales arbitrarias en el tiempo $\vec{E}^i(t)$ y fijémonos en el hilo h de la agrupación. El campo eléctrico incidente en un punto (\vec{r}) de la superficie de este hilo puede considerarse formado por tres contribuciones:

- a) El campo incidente $\vec{E}^i(\vec{r}, t)$
- b) El campo dispersado por las corrientes inducidas en el propio hilo $\vec{E}_{h,h}^s(\vec{r}, t)$
- c) El campo dispersado por las corrientes que circulan en el resto de los hilos

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{NH} \vec{E}_{k,h}^s(\vec{r}, t)$$

donde $\vec{E}_{k,h}^s$ es el campo creado por las corrientes que circulan en el hilo k.

Así el campo total en un punto sobre la superficie del hilo h será:

$$\vec{E}_h(\vec{r}, t) = \vec{E}^i(\vec{r}, t) + \sum_{k=1}^{NH} \vec{E}_{k,h}^s(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

Como el hilo h es un conductor perfecto, sobre su superficie deberá cumplirse que la componente tangencial del campo total \vec{E}_h sea nula. Es decir:

$$\hat{s}_h \cdot \vec{E}_h(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.2)$$

donde \hat{s}_h es el vector tangencial a la superficie del hilo h.

Teniendo en cuenta esta condición y multiplicando (3.1) escalarmente por \hat{s}_h podemos despejar la componente tangencial del campo incidente sobre el hilo h:

$$\hat{s}_h \cdot \vec{E}^i(\vec{r}, t) = - \hat{s}_h \cdot \sum_{i=1}^{NH} \vec{E}_{k,h}^s(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

La expresión del campo $\vec{E}_{k,h}^s$ creado en un punto (\vec{r}) por una distribución de corriente $I_k(s_k', t_k')$ a lo largo del hilo k (suponiendo que se cumple la aproximación de hilo delgado) es:

$$\vec{E}_k^s(\vec{r}, t) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{C_k(s_k')} \frac{\hat{s}_k}{R_k} \frac{\partial}{\partial t_k'} I_k(s_k', t_k') + c \frac{\vec{R}_{k,h}}{R_{k,h}^2} \cdot$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial s_k'} I_k(s_k', t_k') - c^2 \frac{\vec{R}_{k,h}}{R_{k,h}^3} q_k(s_k', t_k') \right] ds' \quad (3.4)$$

donde $C_k(s_k')$ es la trayectoria seguida por las cargas al moverse en el hilo k (según la aproximación de hilo delgado), s_k' la variable de longitud a lo largo del hilo k , \hat{s}_k' el vector unitario en dicha dirección, y \vec{R}_k es el vector que une el punto s_k' con el punto campo P , $\vec{R}_{k,h} = \vec{r} - \vec{r}_k'$ (ver figura 3.1).

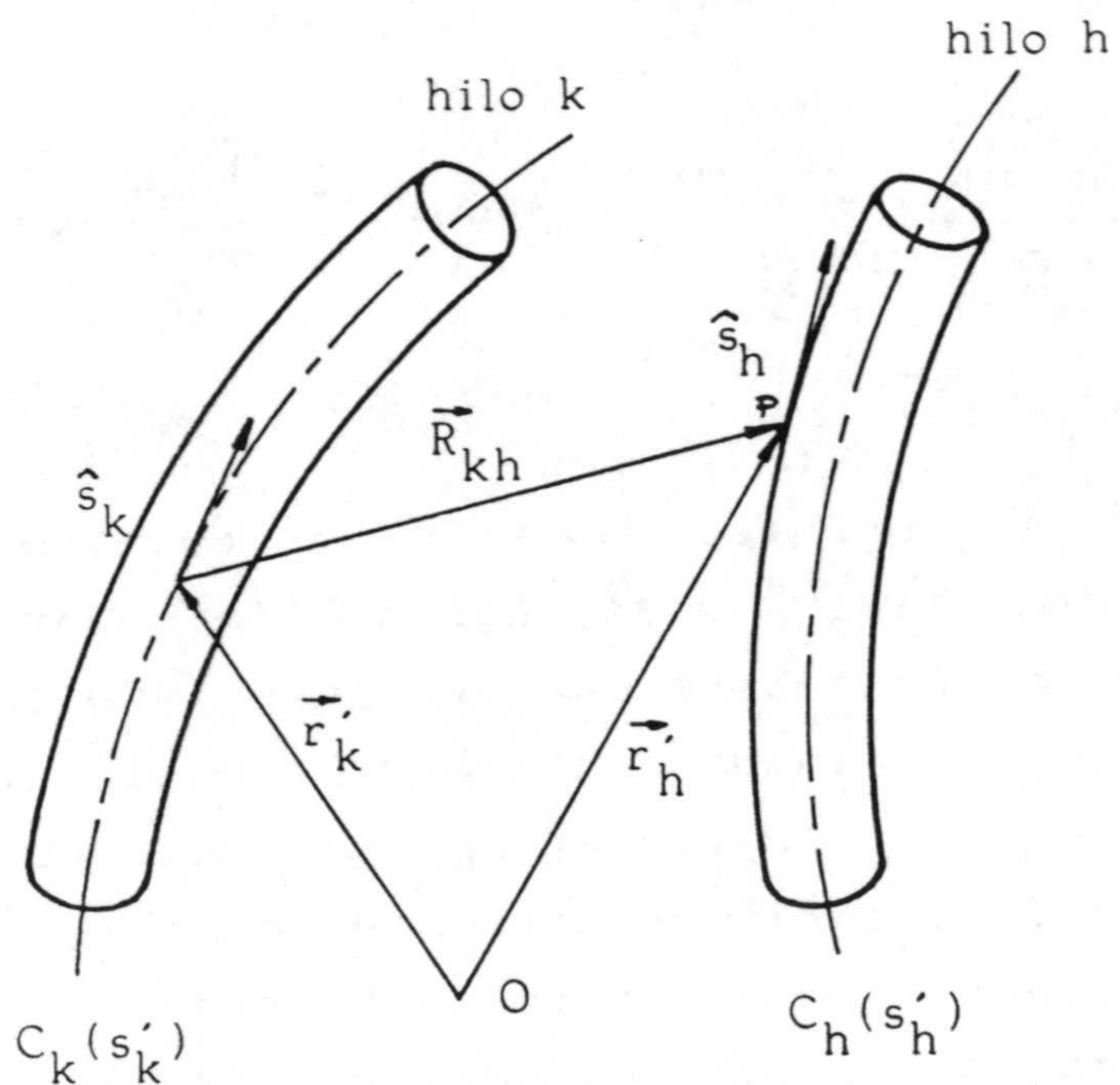


Fig. 3.1.- Geometría de dos hilo sin conectar.

La variable $I_k(s_k', t_k')$ representa la corriente en el punto fuente s_k' del hilo k , en el tiempo retardado $t_k' = t - R_{k,h}/c$, y $q_k(s_k', t_k')$ la carga en ese punto y en el mismo tiempo, que está relacionada con la intensidad de corriente a través de la ecuación de continuidad:

$$q_k(s_k', t_k') = - \int_{-\infty}^{t_k'} \frac{\partial}{\partial s_k'} I_k(s_k', \tau) d\tau \quad (3.5)$$

Substituyendo (3.4) en (3.3), el campo en un punto \vec{r} sobre la superficie del hilo h se puede expresar

$$\hat{s}_h \cdot \vec{E}^i(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sum_{k=1}^{NH} \hat{s}_h \cdot \int_{C_k(s_k')} \left[\frac{\hat{s}_k'}{R_{kh}} \frac{\partial}{\partial t_{k,h}'} I_k(s_k', t_{k,h}') + c \frac{\vec{R}_{k,h}}{R_{k,h}^2} \frac{\partial}{\partial s_k'} I(s_k', t_{k,h}') - c^2 \frac{\vec{R}_{k,h}}{R_{k,h}^3} q(s_k', t_{k,h}') \right] ds_k' \quad (3.6)$$

Nuestro objetivo es resolver esta ecuación para cada hilo h de la agrupación. Para ello hay que tener en cuenta que la corriente inducida en cada hilo viene determinada tanto por la corriente propia como por las que circulan por el resto de los hilos en instantes anteriores determinados por el principio de causalidad. Con objeto de aclarar la notación que se utiliza en las siguientes expresiones recordaremos que los pasos necesarios para resolver la ecuación (3.6) son:

1º) Cada uno de los hilos k ($k = 1, \dots, NH$) lo aproximamos por una poligonal de $N_s(k)$ segmentos rectos $\Delta C_{i,k}$ de longitud $\Delta_{i,k}$ donde i varia desde $i = 0$ hasta $N_s(k)$

2º) El tiempo se divide en NT intervalos temporales de duración δ .

3º) Se desarrolla la corriente en cada uno de los hilos k ($k = 1, \dots, NH$) como

$$I_k(s_k', t_k') \approx \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{j=1}^{NT} I_{i,j,k}(s_k' - s_{i,k}, t_k' - t_j) \cdot U(s_k' - s_{i,k}) \dot{V}(t_k' - t_j)$$

donde $s_{i,k}$ es la variable de longitud del centro del intervalo espacial i en el hilo k , t_j el centro del intervalo temporal j y las funciones U y V están definidas en el Capítulo 2, (ecuación 2.13). $I_{i,j,k}(0,0) = I_{i,j,k}$ es el valor de la intensidad de corriente en el centro del intervalo espacio temporal (i,j) del hilo k .

4º) Forzamos a que se cumpla la ecuación (3.6) en los puntos centrales espacio temporales de cada hilo h ($h = 1, \dots, NH$) multiplicando por las funciones peso δ de Dirac $\delta(s_h - s_{u,h}) \delta(t - t_v)$. Siendo $s_{u,h}$ la variable longitud del punto campo centro del intervalo u en el hilo h , y s_h la variable longitud a lo largo de todo el hilo h .

5º) Se expresa la carga en función de la intensidad de corriente haciendo uso de la ecuación de continuidad de acuerdo con el desarrollo Q5 indicado en el Capítulo 2.

6º) El siguiente paso es expresar para cada hilo k ($k=1, \dots, NH$) la dependencia de la intensidad de corriente en ese hilo $I_{i,j,k}(s_k' - s_{ik}', t_k' - t_j)$ con las variables $s_{i,k}'' = s_k' - s_{i,k}$ y $t'' = t_k' - t_{j,k}$ utilizando como función base la interpolación lagrangiana definida para un solo hilo en las ecuaciones (2.16) y (2.17).

$$I_{i,j,k}(s_{i,k}'', t'') = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} B_{i,k}^{(l,m)} I_{i+l,j+m,k} \quad (3.8)$$

con

$$B_{i,k}^{(l,m)} = \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{s_{i,k}'' - s_{i,k} - s_{i+p,k}}{s_{i+l,k} - s_{i+p,k}} \frac{t'' - q\delta}{(m-q)\delta} \quad (3.9)$$

donde se ha supuesto que los hilos no están conectados entre sí, y por tanto la intensidad en sus extremos es nula ($I_{0,j,k} = I_{Ns+1,j,k} = 0$ y $\Delta_{0,k} = \Delta_{Ns+1,k} = 0$). En el próximo apartado veremos como cambian estas ecuaciones para el caso de una estructura con hilos interconectados.

De esta forma, la ecuación (3.6) puede escribirse:

$$\hat{S}_{u,h} \cdot \vec{E}_h^i(S_{u,h}, \nu) = \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ F_{i,k,u,h,l,m} \right.$$

$$\cdot \left. \left\{ I_{i,l, \nu - r_{i,k,u,h} + m, k} + G_{i,k,u,h,l,m} Y_{i,l, \nu - r_{i,k,u,h} - 1 + m, k} \right\} \right.$$

$$h = 1 \dots NH$$

$$u = 1 \dots N_s(h)$$

$$\nu = 1 \dots NT$$

(3.10)

con $r_{i,k,u,h} =$ entero más próximo a $R_{i,u,k,h}/c\delta$

$$Y_{i,l, \nu - r_{i,k,u,h} - 1 + m, k} = \sum_{s=1}^{\nu - r_{i,k,u,h} - 1} I_{i,l, \nu - r_{i,k,u,h} + m - s, k} \quad (3.11)$$

$$F_{i,k,u,h,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left[\frac{\hat{S}_{i,k} \cdot \hat{S}_{u,h}}{R_{i,k,u,h}} \frac{\partial}{\partial t''} B_{i,k}^{(l,m)} + c \frac{\hat{S}_{u,h} \cdot \vec{R}_{i,k,u,h}}{R_{i,k,u,h}^2} \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial S_{i,k}''} B_{i,k}^{(l,m)} + \frac{c^2 \hat{S}_{u,h} \cdot \vec{R}_{i,k,u,h}}{R_{i,k,u,h}^3} \frac{\partial}{\partial S_{i,k}''} \int_{-\delta/2}^{t''} B_{i,k}^{(l,m)} dt'' \right] dS_{i,k}'' \quad (3.12)$$

y

$$G_{i,k,u,h,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left[c^2 \frac{\hat{S}_{u,h} \cdot \vec{R}_{i,k,u,h}}{R_{i,k,u,h}^3} \left\{ \frac{\partial}{\partial S_{i,k}''} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} B_{i,k}^{(l,m)} dt'' \right\} dS_{i,k}'' \right. \quad (3.13)$$

expresiones que se encuentran desarrollados en el Apendice E para el caso de un hilo, y que son válidas para una agrupación sin más que añadir los subíndices k y h para indicar sobre que hilo se encuentran respectivamente el punto fuente y el punto campo.

Despejando el término de la intensidad en el instante v

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} Z_{i,k,u,h} I_{i,v,k} = \hat{S}_{u,h} \cdot \vec{E}_h^i(S_{u,h}, t_v) - \\
 & - \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{l=-1}^{+1} \left\{ \sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{i,k,u,h}}}^{n+2} F_{i,k,u,h,l,m} I_{i+l, v-r_{i,k,u,h}+m, k} + \right. \\
 & \left. + \sum_{m=n}^{n+2} G_{i,k,u,h,l,m} Y_{i+l, v-r_{i,k,u,h}-1+m, k} \right\} \\
 & \hspace{25em} (3.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 1 \dots NH \\
 u &= 1 \dots N_s(h) \\
 v &= 1 \dots NT
 \end{aligned}$$

Siendo

$$Z_{i,k,u,h} = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^1 \delta(r_{i,k,u,h}-p) \hspace{10em} (3.15)$$

La ecuación (3.14) puede resolverse mediante un proceso escalonado en el tiempo. Si suponemos que los hilos están separados al menos una distancia mayor que el menor de los intervalos espaciales $\Delta_{i,k}$ se cumple que $Z_{i,k,u,h} = 0$ si $k \neq h$ y por tanto resolveremos en cada paso temporal v independientemente para cada uno de los hilos k un sistema de $N_s(k)$ ecuaciones y $N_s(k)$ incógnitas que son las corrientes en el instante v en cada uno de los pedazos en que se ha dividido el hilo k .

Podemos escribir la ecuación (3.14) para un hilo cualquiera h como

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N_s(h)} Z_{i,u,h} I_{i,h,v} = \hat{S}_{u,h} \cdot \vec{E}_h^i(s_{u,h}, t_v) - \\
 & - \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{l=-1}^H \left\{ \sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{i,k,u,h}}}^{n+2} J_{i,k,u,h,l,m} I_{i+l, v-r_{i,k,u,h}+m, k} + \right. \\
 & \left. + \sum_{m=n}^{n+2} G_{i,k,u,h,l,m} Y_{i+l, v-r_{i,k,u,h}-1+m, k} \right\} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

O en forma matricial

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}_h \cdot \tilde{I}_{v,h} &= \tilde{E}^i(t_v) + \tilde{E}_h^s(t_v) \quad (3.17) \\
 & h = 1, \dots, NH
 \end{aligned}$$

Esta ecuación que resolveremos para cada hilo difiere de la (2.56) en que en el campo dispersado aparece la contribución de todos los hilos que forman la estructura.

3.2 TRATAMIENTO DE UNIONES.

En el apartado anterior se ha ampliado el método numérico desarrollado en el Capítulo 2 de forma que sea posible analizar agrupaciones arbitrarias de hilos sin conectar. El tratamiento de los extremos de cada hilo (uniones hilo - espacio libre) se ha realizado imponiendo la condición de contorno de intensidad cero tal y como se explicó en el apartado 2.5 del Capítulo 2. Esta condición deja de ser válida en las uniones de varios hilos que por lo tanto deben ser tratadas de forma diferente. Concretamente hemos abordado su análisis trasladando a DT un método que ha sido empleado con éxito por algunos autores en DF [58], [66]. Este método consiste en sustituir la configuración inicial Fig. 3.2.a, que representa una unión de NH hilos, por la dada en la Fig. 3.2.b en la que cada hilo se solapa con el adyacente.

Esto supone considerar que los hilos terminan no en unión sino en un solapamiento (Fig. 3.2.b) que se trata como una unión hilo-espacio libre. De esta forma son válidas las ecuaciones del Capítulo 2.

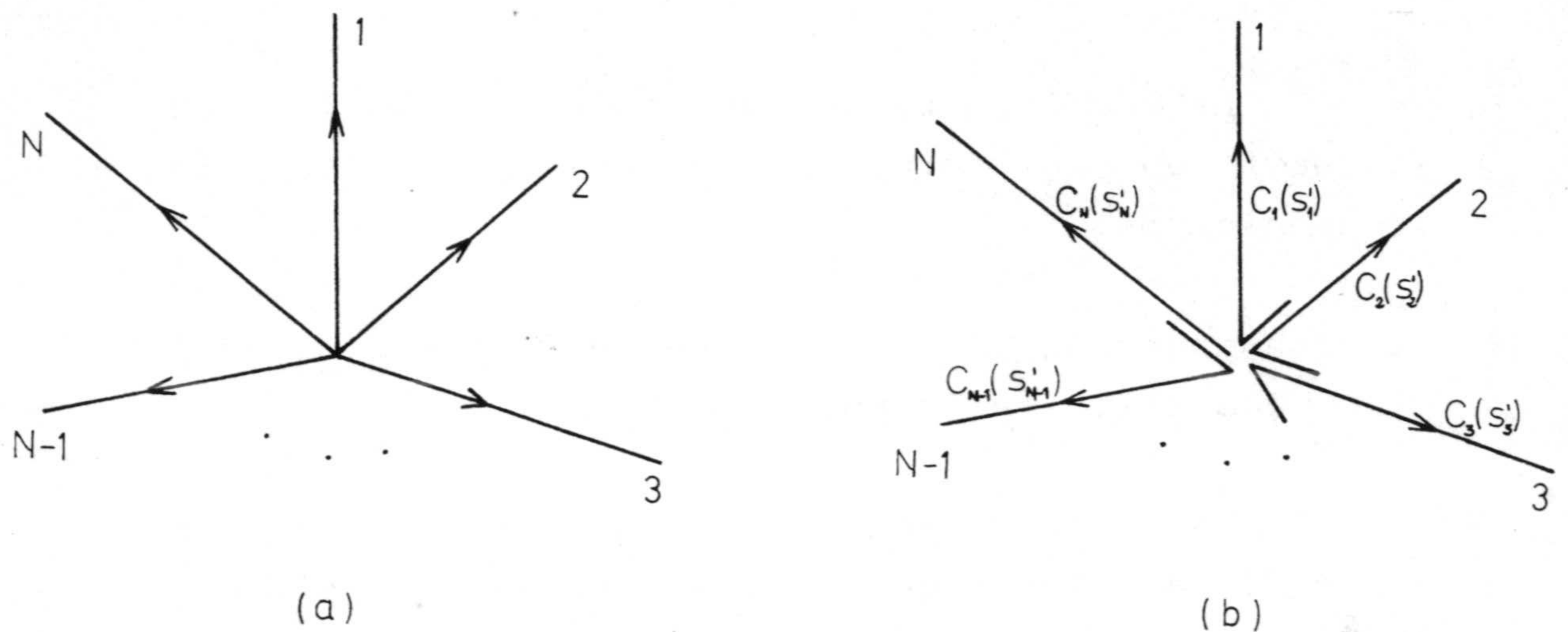


Fig. 3.2.- Esquema de solapamiento en la unión.

La intensidad de corriente en cada zona de solapamiento será, de acuerdo con el convenio de signos que se muestra en las figuras, la diferencia entre la de los segmentos que se solapan.

El tratamiento de extremos en la unión elegido ha sido el que impone $I = 0$ en el centro de un intervalo virtual añadido al hilo.

La elección de los solapamientos en los hilos deberá hacerse de manera que en la unión se cumplan dos condiciones |58|, |75|-|78|.

- 1) La Ley de Kirchoff (*) que establece que la suma de las corrientes que entran a la unión es igual a la suma de las que salen.

Es fácil comprobar que se cumple la ley de Kirchoff en la forma en que hemos elegido los solapamientos.

- 2) La conservación de la componente tangencial del campo eléctrico en la unión.

Esta condición se traduce en que en la unión de NH hilos deben verificarse las igualdades
|77|

$$q_1 \psi_1 = q_2 \psi_2 = \dots = q_{NH} \psi_{NH} \quad (3.18)$$

donde el parámetro ψ_i viene dado por

$$\psi_i = e \left[\ln \left(\frac{e}{ka_i} \right) - 0.5772 \right] \quad (3.19)$$

y q_i es la carga por unidad de longitud sobre un conductor de radio a_i .

* Si las dimensiones de la unión son pequeñas comparadas con la longitud de onda los campos cercanos a la unión serán casi cuasiestáticos y puede aplicarse la ley de Kirchoff.

Cuando los conductores son todos electricamente muy finos los parámetros ψ_i toman valores muy altos y la expresión (3.18) se hace aproximadamente equivalente a

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{NH} \quad (3.20)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial I(s)}{\partial s} + j\omega q(s) = 0 \quad (3.21)$$

se obtiene la formulación alternativa a la expresión (3.20)

$$\frac{\partial I_1(s)}{\partial s_1} = \frac{\partial I_2(s)}{\partial s_2} = \dots = \frac{\partial I_{NH}(s)}{\partial s_{NH}} \quad (3.22)$$

que establece la continuidad de la derivada espacial de la intensidad de corriente en la unión.

3.2.1 Desarrollo del método numérico.

Aplicaremos a la ecuación (3.6) el método de los momentos en DT para calcular la intensidad de corriente en un conjunto de NH hilos que confluyen en una unión. Seguiremos los pasos que se explican en el

apartado 3.1 modificándolos en lo que sea necesario.

En primer lugar en el caso de uniones la función base interpolación lagrangiana debe modificarse para puntos cercanos a la unión:

$$I_{i,k,j}(s_{i,k}^{\prime\prime}, t_j^{\prime\prime}) = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} B_{i,k,j}^{(l,m)} \left\{ I_{i+l,k,j+m} - \right. \\ \left. - g(i,k,l,NH) I_{i,k-1,j+m} - r(i,k,l,NH) I_{i,k+1,j+m} \right\} \quad (3.23)$$

donde

$$B_{i,k,j}^{(l,m)} = \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{s_{i,k}^{\prime\prime} + s_{i,k} - s_{i+p,k}}{s_{i+l,k} - s_{i+p,k}} \frac{t_j^{\prime\prime} + t_j - t_{j+q}}{t_{j+m} - t_{j+q}} \quad (3.24)$$

$$g(i,k,l,NH) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} NH=2, k=2, i=2 \text{ y } l=-1 \\ 0 \\ NH > 2 \text{ y } \begin{cases} k \neq 1, k \neq NH, i=3 \text{ y } l=-1 \\ k=NH, i=2 \text{ y } l=-1 \end{cases} \end{cases} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$r(i,k,l,NH) = \begin{cases} 1 & \text{si } NH=2, k=1, i=2 \text{ y } l=-1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (3.26)$$

donde consideraremos que $I_{0,k,j} = 0$ k y j .

Es decir en todos los segmentos en que se ha dividido la estructura (incluyendo los solapados) se expresa la dependencia espacial de la corriente por medio de la interpolación lagrangiana que relaciona la intensidad de corriente en un segmento con las vecinas de su propio hilo, salvo en los segmentos pintados en línea discontinua en la Fig. 3.3, en los que cuando $l = -1$ se interpola con la intensidad de corriente diferencia de los dos intervalos solapados que indica la flecha.

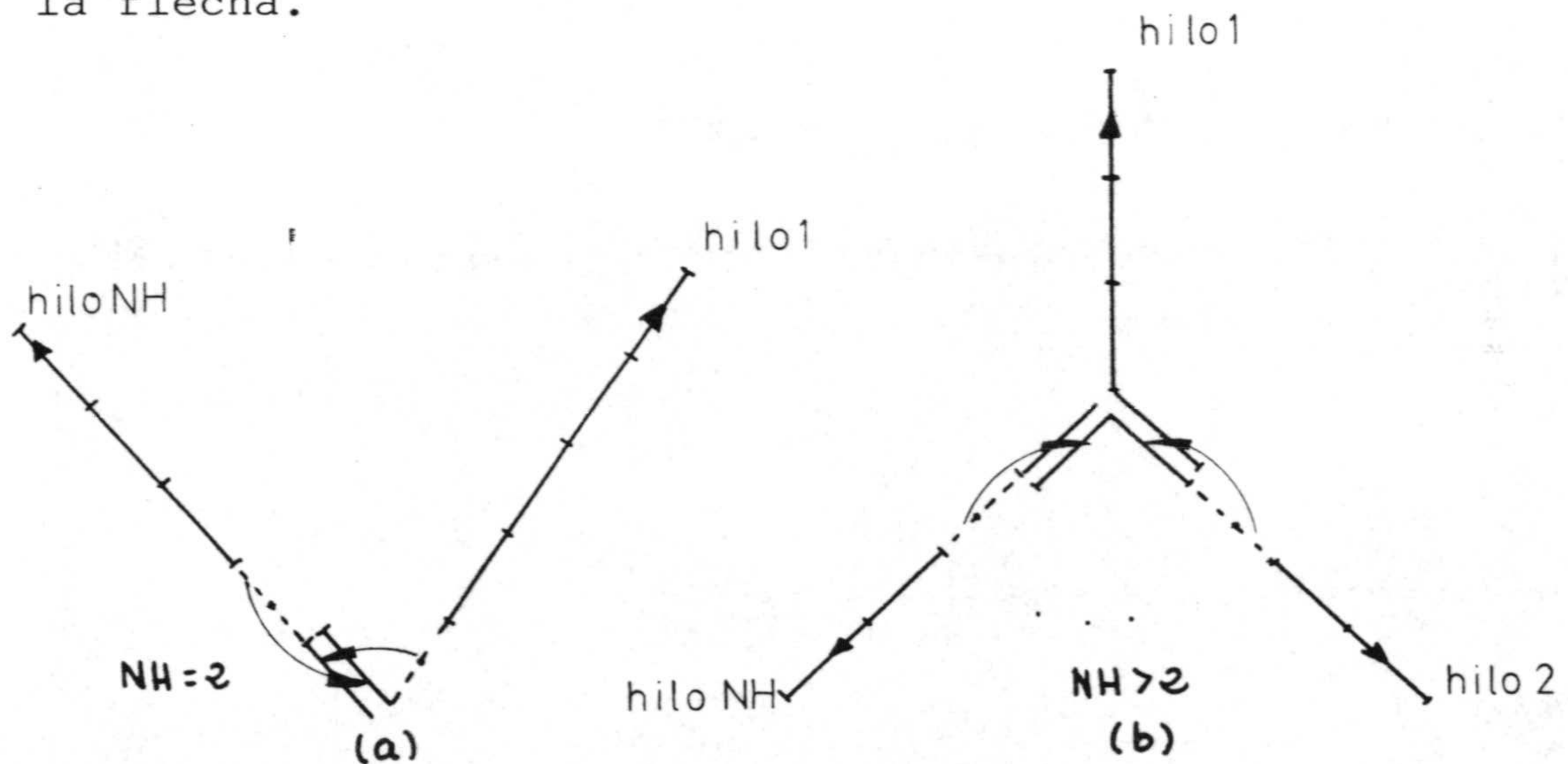


Fig.3.3.- Esquema de la interpolación en los segmentos próximos a la unión.

Sustituyendo (3.23) en (3.6), despejando el término más alto en v , y usando la notación definida en (3.11), (3.12) y (3.13) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^1 \delta(\tau_{i,k,u,h} - p) \hat{F}_{i,k,u,h,l,p} [I_{i,l,\sigma,k} - g(i,k,l,NH) \\
& \cdot I_{i,\sigma,k-1} - r(i,k,l,NH) I_{i,\sigma,k+1}] = \hat{S}_{u,h}^i \cdot \vec{E}^i(S_{u,h}, t_0) - \\
& \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{l=-1}^{+1} \left\{ \sum_{\substack{m=n \\ m \neq \tau_{i,k,u,h}}}^{n+2} \hat{F}_{i,k,u,h,l,m} [I_{i,l,\sigma-\tau_{i,k,u,h}+m,k} - \right. \\
& - g(i,k,l,NH) I_{i,\sigma-\tau_{i,k,u,h}+m,k-1} - r(i,k,l,NH) I_{i,\sigma-\tau_{i,k,u,h}+m,k+1}] + \\
& + \sum_{m=n}^{n+2} \hat{G}_{i,k,u,h,l,m} [Y_{i,l,\sigma-\tau_{i,k,u,h}+m-s,k} - \\
& \left. - g(i,k,l,NH) Y_{i,\sigma-\tau_{i,k,u,h}+m,k-1} - r(i,k,l,NH) Y_{i,\sigma-\tau_{i,k,u,h}+m,k+1}] \right\}
\end{aligned}$$

(3.27)

O bien expresado en forma matricial

$$\sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} Z_{i,k,u,h} I_{i,\sigma,k} = E_{u,h}^i(t_0) + E_{u,h}^s(t_0)$$

$h = 1 \dots NH$
 $u = 1 \dots N_s(h)$
 $\sigma = 1 \dots N_T$

(3.28)

donde

$$\begin{aligned}
Z_{i,k,u,h} = & \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^1 \delta(\tau_{i,k,u,h} - p) \hat{F}_{i,k,u,h,l,p} [I_{i,l,\sigma,k} - \\
& - g(i,k,l,NH) I_{i,\sigma,k-1} - r(i,k,l,NH) I_{i,\sigma,k+1}]
\end{aligned}$$

(3.29)

$$E_{u,k}^i = S_{u,k}^A \cdot \vec{E}^i (S_{u,k}, t_0) \quad (3.30)$$

$$E_{u,v}^s = - \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)+1} \sum_{l=-1}^{n+2} \left\{ \sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{i,k,u,h}}}^{n+2} F_{i,k,u,h,l,m} [I_{i+l, \sigma-r_{i,k,u,h}+m, k} - \right.$$

$$- g(i,k,l,NH) I_{1, \sigma-r_{i,k,u,h}+m} - r(i,k,l,NH) I_{1, \sigma-r_{i,k,u,h}+m, k+1}] +$$

$$+ \sum_{m=n}^{n+2} G_{i,k,u,h,l,m} [Y_{i+l, \sigma-r_{i,k,u,h}+m-s, k} - g(i,k,l,NH) \cdot$$

$$\left. \cdot Y_{1, \sigma-r_{i,k,u,h}+m, k-1} - r(i,k,l,NH) Y_{1, \sigma-r_{i,k,u,h}+m, k+1}] \right\} \quad (3.31)$$

Si definimos unos índices i j que recorra toda la estructura la ecuación (3.28) puede escribirse como (i puntos fuente, j puntos campo):

$$\sum_{i=1}^N Z_{i,j} I_{i,v} = E_j^i + E_j^s \quad (3.32)$$

donde N es el número total de intervalos espaciales, (incluyendo los añadidos en los solapamientos). Sistema de N ecuaciones y N incógnitas que son las intensidades en los intervalos espaciales en que se han dividido todos los hilos.

Dado que la matriz Z solo depende de las características geométricas de la estructura, y que son iguales el campo incidente y dispersado en dos

intervalos solapados, las ecuaciones (3.32) correspondientes a dichos intervalos serán iguales. Tenemos por tanto $NH-1$ incógnitas más que ecuaciones, por ello hemos de buscar $NH-1$ nuevas condiciones. Este problema lo hemos resuelto imponiendo la condición (3.20) ó (3.22), que es válida aunque los hilos tengan distintos radios [77] donde I_i es la intensidad del hilo i próxima a la unión y s_i' la variable longitud correspondiente a dicho hilo.

Para una unión de NH hilos (Fig. 3.3), si empezamos a numerar cada hilo empezando por los pedazos solapados $|i=0$ e $i=1|$, la ecuación (3.22) se expresará

$$\left. \frac{\partial I_{2,k}}{\partial s_2''} \right|_{s_2'' = -\Delta/2} - \left. \frac{\partial I_{1,k-1}}{\partial s_1''} \right|_{s_1'' = \Delta/2} = \left. \frac{\partial I_{A,k+1}}{\partial s_A''} \right|_{s_A'' = -\Delta/2} - \left. \frac{\partial I_{1,k}}{\partial s_1''} \right|_{s_1'' = \Delta/2} \quad (3.33)$$

siendo

$$A = \begin{cases} 2 & \text{si } NH > 2 \text{ y } k \neq NH-1 \\ 1 & \text{si } NH > 2 \text{ y } k = NH-1 \text{ ó } NH = 2 \end{cases}$$

$$\text{y } I_{1,0} = 0$$

Con (3.32) y (3.33) tenemos un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, que resuelto para cada tiempo nos proporciona la intensidad de corriente en todos los pedazos en que se ha dividido la estructura.

3.3 EFECTO DE UN PLANO CONDUCTOR PERFECTO.

El efecto de un plano de tierra formado por un conductor perfecto es importante en la práctica debido a que suministra el aislamiento necesario del equipo y cableado con respecto a la estructura para que las medidas realizadas no esten contaminadas [1].

El estudio de estructuras de hilo frente a conductores perfectos se ha hecho mediante el método de las imágenes [23]. Una estructura de hilo frente a un conductor perfecto puede substituirse por la estructura y su imagen. Si la estructura se divide en N segmentos espaciales (en total) junto con la imagen tendremos 2N segmentos espaciales y por tanto 2N incógnitas en el sistema de ecuaciones (3.32) que escribiríamos

$$\sum_{i=1}^{2N} Z_{i,j} I_{i,v} = E_j^i + E_j^s \quad \begin{matrix} j=1 \dots 2N \\ v=1 \dots NT \end{matrix} \quad (3.34)$$

Ya que las corrientes imagenes (I_{N+1}, \dots, I_{2N}) son iguales a las corrientes (I_1, \dots, I_N) de la estructura original solo necesitamos la mitad de las ecuaciones del sistema anterior que puede entonces escribirse

$$\sum_{i=1}^N Z'_{i,j} I_{i,v} = E_j^i + E_j^s \quad \begin{matrix} j=1 \dots N \\ v=1 \dots NT \end{matrix} \quad (3.35)$$

donde

$$Z'_{i,j} = Z_{i,j} + Z_{i,2N-j+1}$$

CAPITULO 4. RESULTADOS.

En este Capítulo se presentan los resultados obtenidos utilizando el programa DOTIG1 para calcular en DT las intensidades inducidas sobre estructuras sencillas de hilo excitadas por OEMT, y se comparan utilizando la transformada de Fourier con los calculados teórica o experimentalmente por otros autores en DF o bien, en los pocos casos que existen en DT.

En la tabla 4.1 se presenta un esquema de los programas utilizados por distintos autores cuyos resultados se han usado para la comparación.

Todos los ejemplos se han analizado también en DF mediante una variante del programa MININEC. Sin embargo con objeto de no complicar la presentación de los resultados, sólo se compara con MININEC en aquellos casos de estructuras cuyo estudio no se ha encontrado en la bibliografía.

En nuestro análisis de diferentes estructuras de hilo frente a O.E.M.T. empezaremos por las más sencillas formadas por unión de hasta cuatro hilos del mismo radio con ángulos arbitrarios. Seguidamente se consideran estructuras formadas por unión de dos y cuatro hilos con radios diferentes o situadas frente a un plano de tierra. En último lugar estudiaremos dos modelos de avión formados por interconexión de hilos delgados.

4.1 ESTRUCTURAS DE UN SOLO HILO.

En primer lugar se han estudiado diversas estructuras formadas por un hilo recto actuando como antena o dispersor, bien como un solo hilo o como la unión de dos, encontrándose que los resultados coinciden en ambos casos.

La primera estructura estudiada ha sido un hilo recto de longitud $L = 1\text{m}$ y radio $a = 0.00667\text{m}$ sobre la que incide una onda tipo pulso gaussiano

$$E^i(t) = \exp \left| -g^2 (t-t_{\max})^2 \right|$$

polarizada según el eje z , con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. La geometría de la estructura se muestra en la Fig. 4.1. El parámetro N_s representa el número de intervalos espaciales en que se ha dividido el hilo. En la Fig. 4.2 se ha dibujado la intensidad de corriente en el intervalo espacial $u = 12$ (centro del hilo) en función del tiempo. Los campos dispersados en las direcciones a) $\theta = 30^\circ$ y b) $\theta = 60^\circ$ se muestran en la Fig. 4.3. En la Fig. 4.4 podemos ver el campo radiado en la dirección $\theta = 90^\circ$ así como la sección recta de radar σ en esa dirección definida por

$$\frac{\sigma}{\lambda^2} = \frac{\omega^2}{\pi c^2} \frac{|E_{\text{rad}}(\omega)|^2}{|E^i(\omega)|^2}$$

y calculada dividiendo el espectro del campo radiado $E_{\text{rad}}(\omega)$ por el del campo incidente $E^i(\omega)$. Donde ω es la frecuencia angular y λ la longitud de onda. Los

resultados se comparan con los obtenidos por King [20] trabajando en el dominio de la frecuencia y por Miller [20] en DT obteniéndose una buena concordancia en la zona del espectro que ellos presentan (hasta $L/\lambda \leq 1.5$).

En las Fig. 4.5 a 4.8 se han representado los resultados obtenidos para un hilo recto actuando como antena dipolar alimentada en su centro. La longitud de la antena L y el radio a varían en los distintos casos. La estructura se ha dividido en N_s intervalos espaciales siendo N_s impar en todos los casos. Se ha alimentado en el intervalo central con un voltaje

$$V_s(t) = 1/2 \exp \left[-g^2 (t - t_{\max})^2 \right] \quad (\text{V})$$

con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Por tanto el campo aplicado en ese intervalo es

$$E^i(t) = \frac{V_s(t)}{\Delta} = \frac{1}{2\Delta} \exp \left[-g^2 (t - t_{\max})^2 \right]$$

siendo $\Delta = \frac{L}{N_s}$ la longitud del intervalo.

Los diferentes casos analizados han sido:

1º) $L = 0.5 \text{ m}$, $a = 0.0002 \text{ m}$ con $N_s = 25$.

2º) $L = 0.5 \text{ m}$, $a = 0.02 \text{ m}$. En este caso como el radio del hilo es mayor, para que se cumpla la aproximación de hilo delgado hemos tenido que dividir el hilo en un número menor de pedazos $N_s = 11$ de forma que Δ sea

mayor que varias veces el radio del hilo.

3º) $L = 1 \text{ m}$, $a = 0.0001 \text{ m}$ con $N_s = 25$.

4º) $L = 1 \text{ m}$, $a = 0.01 \text{ m}$ con $N_s = 25$.

En las Fig. 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 se muestran para cada uno de los casos anteriores la intensidad de corriente en la alimentación en función del tiempo y el módulo y la fase de la componente espectral de la intensidad dividida por la del voltaje aplicado (para $\lambda = 2 \text{ m}$ en los dos primeros casos y $\lambda = 1 \text{ m}$ en los restantes) para cada punto de la antena. (Por simetría sólo se han dibujado los resultados para media antena). En línea discontinua se presentan los resultados obtenidos por Elliot [79] para esas frecuencias, resolviendo en el dominio de la frecuencia la ecuación de Hallen mediante el MM con funciones base y peso pulsos.

4.2 ESTRUCTURAS DE DOS HILOS CON EL MISMO RADIO.

Las Figuras 4.9 a 4.22 muestran los resultados para diversas configuraciones de dos hilos que forman un ángulo θ arbitrario.

En la Figura 4.9 se ha dibujado la geometría del primer hilo en forma de ele estudiado. Las longitudes de cada brazo son $l_1 = 1.8288 \text{ m}$, $l_2 = 9.144$ y el radio $a = 1.905 \cdot 10^{-4}$. La estructura se ha dividido

en 24 pedazos iguales de longitud Δ y el campo eléctrico incidente se propaga según la dirección del eje x, siendo \vec{E}^i

$$E^i = 1.4 * \exp \left[-g^2 (t - t_{\max})^2 \right] \hat{z}$$

con $g = 3 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 7.15 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. La Figura 4.10 representa la intensidad en función del tiempo en un punto de la estructura de coordenadas ($x = 0$, $z = \Delta/2$), y la Fig. 4.11 la transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del campo E^i para la longitud de onda $\lambda = 30 \text{ m}$. El valor de la transformada se compara con el obtenido en la Universidad de Ohio [66] resolviendo la ecuación de Pocklington en DF mediante el MM con funciones base y peso senoidales.

El siguiente ejemplo analizado ha sido un dipolo en V cuya geometría puede verse en la Figura 4.12. La longitud de los dos brazos ha sido $l_1 = l_2 = 0.645 \text{ m}$, el ángulo entre ellos $\theta = 40^\circ$ y el radio $a = 6.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. La excitación presenta la dependencia temporal

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\Delta} \exp \left[-g^2 (t - t_{\max})^2 \right] \hat{z}$$

propagándose según la dirección positiva del eje x, donde Δ es la longitud de un intervalo espacial ($\Delta = (l_1 + l_2) / N_s$). Se ha dividido la estructura en 24 pedazos. En la Figura 4.13 se ha dibujado la intensidad de corriente en función del tiempo para el centro del intervalo espacial más próximo a la unión. Con objeto de comparar con los resultados obtenidos por Sayre [86] en el DF usando funciones base pulsos y funciones

peso δ de Dirac, se ha calculado la razón entre el valor de la transformada de Fourier de la intensidad y el del campo incidente para $\lambda = 4.3$ m, en cada punto de la estructura. En la Figura 4.14 se han representado estos datos para medio hilo ya que hay simetría, y en línea discontinua se han dibujado los de Sayre. Se observa una buena concordancia entre nuestros resultados y los del dominio de la frecuencia.

En la Figura 4.15 se muestra otra estructura en L que se ha analizado en los siguientes casos:

$$a) l_1 = 0.333 \text{ m}, \quad l_2 = 0.166 \text{ m}, \quad a = 0.001 \text{ m}$$

$$b) l_1 = 0.4167 \text{ m}, \quad l_2 = 0.0833 \text{ m}, \quad a = 0.001 \text{ m}$$

En ambos casos se ha dividido la estructura en N_s intervalos espaciales de longitud Δ y la excitación tiene la forma:

$$\vec{E}^i(t) = \frac{1}{2\Delta} \exp[-g^2(t-t_{\max})^2] \hat{z}$$

propagándose según la dirección positiva del eje x , con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

La intensidad de corriente en función del tiempo para el punto central del intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 se representa en las Figuras 4.16 y 4.18 para los casos a y b respectivamente. Las Figuras 4.17 y 4.19 muestran para ambos casos el valor de la transformada de Fourier de la

intensidad dividido por el del campo E^i para $\lambda = 1$ m en cada punto del hilo. En línea discontinua se muestran los resultados obtenidos por Mittra [87] resolviendo mediante el método de las diferencias finitas la ecuación integral de Pocklington, con funciones base pulsos y peso δ de Dirac.

A continuación se han calculado las intensidades inducidas en un dipolo en V cuya geometría se presenta en la Figura 4.20 ($l_1 = l_2 = 0.5$ m, $a = 0.00667$ m) cuando se alimenta en los dos intervalos centrales con una fuente de dependencia temporal:

$$V(t) = \exp \left[-g^2 (t - t_{\max})^2 \right]$$

con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9}$ s. En la figura 4.21 se ha dibujado la intensidad en la alimentación en función del tiempo y en la Figura 4.22 la conductancia y susceptancia de entrada en función de L/λ calculadas dividiendo las transformadas de Fourier de intensidad y voltaje. En línea punteada se muestran los resultados obtenidos por Miller [56] trabajando también en DT.

Todos los ejemplos de hilo doblado estudiados fueron analizados suponiéndolos un solo hilo y dos hilos conectados con el correspondiente tratamiento de uniones. Solo hemos presentado los resultados para uno de los casos dado que la concordancia entre ellos fue total.

4.3 ESTRUCTURAS DE MAS DE DOS HILOS CON EL MISMO RADIO.

El siguiente paso ha sido estudiar diversas configuraciones formadas por unión de más de dos hilos de igual radio. En concreto analizaremos una unión de tres hilos, y varias cruces con ángulos diferentes entre sus brazos.

4.3.1 Tres hilos.

En la Figura 4.23 puede verse la geometría de una unión de tres hilos, donde $l_2 = 0.33$ m, $l_1 = l_3 = 0.11$ m y $a = 0.00222$ m. La estructura se ha dividido en $N_s = 30$ segmentos de longitudes iguales (Δ) y el campo incidente

$$\vec{E}^i(t) = \frac{1}{2\Delta} \exp[-g^2(t-t_{\max})^2] \hat{z} \quad (4.1)$$

con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. La Figura 4.24 muestra la intensidad en función del tiempo para el centro del intervalo espacial más cercano a la unión en el hilo 2, y la figura 4.25 la parte real, imaginaria y módulo del valor de la transformada de Fourier de la intensidad dividida por la de E^i para $\lambda = 1\text{m}$, para cada uno de los hilos. En línea discontinua aparecen en cada gráfica los resultados de Chao and Strait [88] obtenidos mediante el MM en DF con

funciones base y peso triangulares.

4.3.2 Dos ramas perpendiculares (cuatro hilos).

A continuación se analiza el caso de dos ramas perpendiculares en forma de cruz (Fig. 4.26) para cuatro longitudes distintas de los brazos.

a) $l_1 = l_2 = l_4 = 0.11 \text{ m}, l_3 = 0.22 \text{ m}$

b) $l_1 = l_3 = 0.165 \text{ m}, l_2 = l_4 = 0.11 \text{ m}$

c) $l_1 = 0.2 \text{ m}, l_2 = 0.3 \text{ m}, l_3 = 0.15 \text{ m}, l_4 = 0.25 \text{ m}$

d) $l_1 = l_2 = 0.3 \text{ m}, l_3 = l_4 = 0.2 \text{ m}$

En los dos primeros casos el radio de los hilos fue $a = 0.00222 \text{ m}$ y en los dos últimos $a = 0.001 \text{ m}$. La excitación es la misma onda incidente definida en (4.1).

En las Figuras 4.27 a) y b) 4.28 y 4.29 se muestra la intensidad de corriente en el segmento del hilo 1 más próximo a la unión para los casos a, b, c y d respectivamente. La transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del campo incidente para $\lambda = 1 \text{ m}$ se representa en las Figuras 4.30 a 4.34, para cada uno de los casos y de los hilos en función de la longitud de los mismos. Para el hilo horizontal en los casos b y d la intensidad resultó ser nula por lo que

no se incluye en los dibujos. Sobre los resultados obtenidos por DOTIG1 se han dibujado en línea discontinua los obtenidos por otros autores [87]-[89]. En la Figura 4.30 b se observa que los resultados difieren hasta en un 10 por ciento de unos autores a otros. Los diferentes métodos con los que se ha comparado se resumen en la tabla 4.1.

4.3.3 Dos ramas no perpendiculares (cuatro hilos).

El siguiente ejemplo estudiado ha sido una cruz de dos ramas (cuatro hilos de longitudes l_1 , l_2 , l_3 y l_4) que forman un ángulo (ver Fig. 4.35) frente a un campo eléctrico incidente

$$\vec{E}^i(t) = \frac{1}{2\Delta} \exp[-g^2(t-t_{\max})^2] \hat{z}$$

con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$, donde $\Delta = (l_1+l_2+l_3+l_4) / N_s$ siendo N_s el número total de intervalos espaciales en que se ha dividido la estructura. Se han analizado las corrientes inducidas sobre dicha cruz en los siguientes casos:

A) $l_1 = l_3 = l_4 = 0.11 \text{ m}$, $l_2 = 0.22 \text{ m}$, $a = 0.00222 \text{ m}$,
 $N_s = 30$, $\theta = 30^\circ$

B) $l_1 = l_3 = l_4 = 0.11 \text{ m}$, $l_2 = 0.22 \text{ m}$, $a = 0.00222 \text{ m}$,
 $N_s = 30$, $\theta = 60^\circ$

$$\text{C) } l_1 = 0.2 \text{ m, } l_2 = 0.3 \text{ m, } l_3 = 0.15 \text{ m, } l_4 = 0.25 \text{ m,} \\ a = 0.001 \text{ m, } N_s = 36, \theta = 30^\circ$$

$$\text{D) } l_1 = 0.2 \text{ m, } l_2 = 0.3 \text{ m, } l_3 = 0.15 \text{ m, } l_4 = 0.25 \text{ m,} \\ a = 0.001 \text{ m, } N_s = 36, \theta = 60^\circ$$

$$\text{E) } l_1 = l_2 = 0.3 \text{ m, } l_3 = l_4 = 0.2 \text{ m, } a = 0.001 \text{ m,} \\ N_s = 40, \theta = 30^\circ$$

$$\text{F) } l_1 = l_2 = 0.3 \text{ m, } l_3 = l_4 = 0.2 \text{ m, } a = 0.001 \text{ m,} \\ N_s = 40, \theta = 60^\circ$$

En las Figs. 4.36 a 4.41 se ha dibujado la intensidad en función del tiempo para el centro del intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 de la estructura para los casos (A) a (F) respectivamente.

Para cada uno de los casos descritos y con objeto de comparar con los resultados obtenidos por Butler [89] se ha calculado la transformada de Fourier de la intensidad para $\lambda = 1 \text{ m}$ y se ha dividido su valor por el del campo incidente E^i para la misma longitud de onda. El resultado se muestra en las figuras 4.42 a 4.47. En línea discontinua se han dibujado los resultados obtenidos por Butler, también para $\lambda = 1 \text{ m}$, trabajando en DF observándose una buena concordancia con los obtenidos por nosotros con el programa DOTIG1.

4.4 ESTRUCTURAS FORMADAS POR HILOS CON RADIOS DIFERENTES.

4.4.1 Estructuras de dos hilos con diferentes radios.

En primer lugar estudiaremos el caso de un campo eléctrico

$$\vec{E}^i = \frac{1}{\epsilon \Delta} \exp[-g^2 (t - t_{\max})^2] \quad (4.2)$$

incidiendo normalmente sobre una estructura formada por la interconexión de dos hilos con radios diferentes a y b como se muestra en la Fig. 4.48. Donde $g = 1.9 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ y $\Delta = (l_1 + l_2) / N_s$ siendo N_s el número total de segmentos en que se han dividido los dos hilos.

Distinguimos varios casos:

- A) $l_1 = l_2 = 0.5 \text{ m}$, $a = 0.002 \text{ m}$, $b = 0.004 \text{ m}$ y $N_s = 24$
- B) $l_1 = 0.3 \text{ m}$, $l_2 = 0.2 \text{ m}$, $a = 0.001 \text{ m}$, $b = 0.002 \text{ m}$ y $N_s = 30$
- C) $l_1 = 0.25 \text{ m}$, $l_2 = 0.15 \text{ m}$, $a = 0.001 \text{ m}$, $b = 0.002 \text{ m}$ y $N_s = 40$
- D) $l_1 = 0.4 \text{ m}$, $l_2 = 0.3 \text{ m}$, $a = 0.001 \text{ m}$, $b = 0.002 \text{ m}$ y $N_s = 28$

$$E) \text{ }^* l_1 = 0.5 \text{ m}, l_2 = 0.5 \text{ m}, a = b = 0.001 \text{ m y } N_s = 24$$

$$F) l_1 = 0.5 \text{ m}, l_2 = 0.5 \text{ m}, a = 0.001 \text{ m}, b = 0.002 \text{ m y } N_s = 24$$

En las Figs. 4.49, 4.51, 4.53, 4.55, 4.57 y 4.59 se representa la intensidad de corriente en función del tiempo en el intervalo espacial del hilo 1 más cercano a la unión para los casos (A) a (F) respectivamente.

Los resultados de dividir el valor la transformada de Fourier de intensidad y campo incidente para $\lambda = 2\text{m}$ en el caso A y $\lambda = 1\text{ m}$ en el resto de los casos se muestran en las Figs. 4.50, 4.52, 4.54, 4.56, 4.58 y 4.60. En línea punteada se han dibujado los resultados de Butler [76].

En segundo lugar hacemos incidir el campo eléctrico (4.2) oblicuamente sobre la estructura de dos hilos de distinto radio que se muestra en la Fig. 4.61 ($l_1 = l_2 = 0.35 \text{ m}$, $a = 0.001 \text{ m}$ y $b = 0.002 \text{ m}$) con ángulos $\theta = 90^\circ$, 60° y 30° .

* Aunque este caso es un ejemplo de unión de dos hilos con el mismo radio se ha incluido en este apartado para compararlo con el caso F y ver como influye en la intensidad de corriente un cambio en el radio de uno de los hilos.

En las Figs. 4.62, 4.64 y 4.66 se ha dibujado la intensidad de corriente en función del tiempo para el centro del intervalo espacial del primer hilo más próximo a la unión para $\theta = 90^\circ$, 60° y 30° respectivamente.

La razón entre el valor de la transformada de Fourier de la intensidad y el de la componente del campo incidente según la dirección z para $\lambda = 1$ m se ha representado en las Figs. 4.63, 4.65 y 4.67 para $\theta = 90^\circ$, 60° y 30° respectivamente. Los resultados de Butler [76] se han dibujado en línea discontinua para comparar.

Hemos estudiado también varios ejemplos de unión de dos hilos de diferentes radios excitados en la mitad de cada hilo por una fuente de tensión de dependencia temporal

$$V(t) = \exp \left| -g^2 (t - t_{\max})^2 \right|$$

con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. La geometría se muestra en las Figs. 4.68 (excitación simétrica) y 4.73 (excitación antisimétrica). Los distintos casos analizados han sido

- A) $l_1 = 0.5 \text{ m}$, $l_2 = 0.5 \text{ m}$, $a = b = 0.001 \text{ m}$ (excitación simétrica)
- B) $l_1 = 0.5 \text{ m}$, $l_2 = 0.5 \text{ m}$, $a = 0.001 \text{ m}$, $b = 0.002 \text{ m}$ (excitación simétrica)

- C) $l_1 = 0.5 \text{ m}$, $l_2 = 0.5 \text{ m}$, $a = b = 0.001 \text{ m}$ (excitación antisimétrica)
- D) $l_1 = 0.5 \text{ m}$, $l_2 = 0.5 \text{ m}$, $a = 0.001 \text{ m}$, $b = 0.002 \text{ m}$ (excitación antisimétrica)

En todos los casos el número de intervalos espaciales en que se han dividido los dos hilos ha sido $N_s = 26$.

La intensidad de corriente en el intervalo más próximo a la unión del primer hilo en función del tiempo se muestra en las Figs. 4.69, 4.71, 4.74 y 4.76 para los casos A, B, C y D respectivamente.

La transformada de Fourier de intensidad dividida por la del voltaje para $\lambda = 1 \text{ m}$ en los casos A, B, C y D se ha representado en las Figs. 4.70, 4.72, 4.75 y 4.77. a) Módulos b) Parte Real y c) Parte Imaginaria. Los resultados de Butler [76] se han dibujado en línea discontinua.

4.4.2 Estructuras de cuatro hilos con radios diferentes.

En la Fig. 4.78 se muestra la geometría de la unión de cuatro hilos con radios diferentes que hemos estudiado. Las dimensiones han sido $l_1 = l_2 = l_4 = 0.11 \text{ m}$, $l_3 = 0.22 \text{ m}$, $a = 0.00222 \text{ m}$ y $b = 0.00111 \text{ m}$). El campo incidente

$$\vec{E}^i(t) = \frac{1}{2\Delta} \exp[-g^2(t-t_{\max})^2]$$

con $\Delta = 1/N_s$, $N_s = 30$, $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$, incide con un ángulo $\theta = 30^\circ$, 60° y 90° en cada uno de los casos analizados.

En las Figs. 4.79, 4.81 y 4.83 se representa la intensidad de corriente frente al tiempo para el segmento más próximo a la unión del hilo 1, en los casos $\theta = 30^\circ$, 60° y 90° respectivamente.

Las Figs. 4.80, 4.82 y 4.84 nos muestran el cociente entre el valor de la transformada de Fourier de la intensidad y el del campo incidente para $\lambda = 1 \text{ m}$ en cada punto de la estructura, para los casos $\theta = 30^\circ$, 60° y 90° respectivamente.

4.5 ESTRUCTURAS FRENTE A TIERRA.

4.5.1 Estructuras formadas por unión de dos hilos frente a tierra.

En este apartado se presentan los resultados obtenidos para una unión de dos hilos frente a un conductor perfecto. La geometría del problema se muestra en la Fig. 4.85 donde $l = h = 0.5 \text{ m}$ y $a = 0.00635 \text{ m}$. Se analizan los casos $\theta = 90^\circ$, 65° , 60° , 55° y 30° todos ellos correspondientes a una onda electromagnética incidiendo perpendicularmente al plano del dibujo

con el vector E en la dirección del eje z:

$$E^i = \exp \left| -g^2 (t-t_{\max})^2 \right|$$

donde $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. La estructura se ha dividido en $N_s = 24$ intervalos espaciales.

En las Figs. 4.86, 4.88, 4.90, 4.92 y 4.94 se representa: a) la intensidad de corriente en el centro del intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1, y b) en el intervalo más próximo a tierra, para los ángulos de la estructura $\theta = 90^\circ, 65^\circ, 60^\circ, 55^\circ$ y 30° respectivamente.

La transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del campo incidente para $\lambda = 1 \text{ m}$ se ha dibujado para los diferentes ángulos en las Figs. 4.87, 4.89, 4.91, 4.93 y 4.95. En línea de puntos se han representado los resultados obtenidos por BUTLER [76] que coinciden con los obtenidos por nosotros con el programa DOTIG1.

4.5.2 Estructura de cuatro hilos frente a tierra.

En este apartado vamos a comparar los resultados obtenidos por el programa DOTIG1 con los calculados por diferentes autores [66], [90], [91] (teóricos y experimentales). Las características geométricas de la estructura (Fig. 4.96) son $l_1 = l_3 = l_4$

= 0.25 m, $l_2 = 0.5$ m y el radio $a = 0.018$ m*. El campo incidente presenta una dependencia temporal en la forma:

$$E^i(t) = \exp \left[-g^2 (t - t_{\max})^2 \right] z$$

con $g = 1.5 \cdot 10^9$ s⁻¹ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9}$ s.

En la Fig. 4.97 se muestra la intensidad de corriente en función del tiempo en dos puntos de la estructura: a) en el centro de intervalo espacial más próximo a la unión perteneciente al hilo 1 y b) en el centro del segmento más próximo al plano conductor.

Con objeto de comprobar con los resultados obtenidos por otros autores (en DF) [66], [90], [91] para esta misma estructura, hemos representado en las Figs. 4.98 a 4.103 la razón entre las transformadas de Fourier de la intensidad y campo incidente para $\lambda = 1$ m en cada intervalo de la estructura. En el caso del módulo el valor representado ha sido $|10 \log I|$. Los valores calculados se trasladaron verticalmente en cada gráfica para obtener el mejor ajuste con los resultados experimentales de Burton [91].

Todos los programas utilizados por los otros autores usan la aproximación de hilo delgado y

* Es interesante notar que el valor del parámetro de antena $\Omega \approx 3$ para el hilo de longitud 0.25 m.

resuelven mediante el MM. En la Tabla 4.1 se resumen las diferentes funciones base y peso que emplean.

En cada figura se han representado los resultados experimentales y los de DOTIG1 y el correspondiente a uno de los de los demás autores. Se observa:

1.- El programa BIGANT es el que mejores resultados ha dado al calcular el módulo de la corriente en el hilo horizontal, seguido con diferencia por DOTIG1 y MINI-NEC3 en ese orden. Sin embargo BIGANT es el que muestra unos resultados más alejados de los experimentales para la fase en ese mismo hilo. Los resultados más aceptables son los de OSU, DOTIG1, SYRACUSE y TCI aunque ninguno de ellos se adapta perfectamente a los experimentales.

2.- Para el hilo vertical los datos experimentales nos dan una subida de 1.5 dB al pasar a través de la unión en la dirección extremo --> tierra que no se observa en ninguno de los resultados teóricos, en todos ellos hay una diferencia entre 2 y 5 dB en ese punto. El programa de SYRACUSE no solo no prevee esa subida sino que tiene una bajada justo en la unión de unos 8 dB. También hay una diferencia en el punto de tierra entre todos los programas y los resultados de BURTON de unos 12 dB.

3.- La fase del hilo vertical debe mostrar una bajada en la unión y otra mayor alrededor de la mitad del hilo 2. Todos los programas predicen esa bajada en el segundo hilo, pero solo OSU, NEC3 y DOTIG1 se aproxi-

man también a la bajada en la unión. TCI y BIGANT dan los peores resultados.

El segundo ejemplo de una unión de cuatro hilos frente a tierra analizado se muestra en la Fig. 4.104. El estudio de este tipo de estructuras es importante porque asemeja la forma de un avión modelado por hilos interconectados. Trataremos tres casos diferentes:

$$A) h_1 = h_2 = 0.5 \text{ m}, l_1 = l_2 = 0.25 \text{ m}, N_s = 24$$

$$B) h_1 = 0.75 \text{ m}, h_2 = 0.5 \text{ m}, l_1 = l_2 = 0.25 \text{ m}, N_s = 28$$

$$C) h_1 = 0.5 \text{ m}, h_2 = 0.75 \text{ m}, l_1 = l_2 = 0.25 \text{ m}, N_s = 28$$

en todos ellos el radio de los hilos vale $a = 6.37 \cdot 10^{-3}$ m y la excitación ha sido una onda electromagnética propagándose en dirección perpendicular al plano del dibujo polarizada según la dirección z :

$$E^i = \exp \left[-g^2 (t - t_{\max})^2 \right] z$$

con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Los dos primeros casos son ejemplos de un máximo de corriente y un mínimo en la unión respectivamente.

En las Figs. 4.105, 4.107 y 4.109 se representa la intensidad de corriente en el intervalo más próximo a) a la unión en el hilo 1, b) a tierra en el hilo 2 para los casos A B y C respectivamente.

La razón entre los valores de la transfor-

mada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1\text{m}$ para cada uno de los casos se muestra en las Figs. 4.106, 4.108 y 4.110. Los resultados se han comparado con los de Butler obtenidos experimentalmente [76] en los dos primeros casos y con los obtenidos por nosotros mismos usando el programa MINIMEC en DF en el tercer caso.

En los casos A y B se observa una gran diferencia para algunas ramas entre nuestros datos y los experimentales. Esta diferencia puede deberse a que la excitación no haya sido exactamente una onda plana y también a errores en las medidas próximas a la unión.

4.6 MODELOS SENCILLOS DE AVIONES.

A la hora de estudiar mediante métodos numéricos o analíticos la interacción de O.E.M.T. con estructuras tales como aviones, un modelo exacto del avión, con todos los detalles de su geometría, sería un problema muy complicado de resolver, por lo que se hacen modelos simplificados de dichas estructuras tales como:

- a) Modelos de "stick"
- b) Modelos con cuerpos de revolución
- c) Modelos con "parches" de superficie

d) Modelos con mallas de hilos delgados

El modelo más sencillo es el "stick" que consiste en reemplazar el avión por un conjunto de cilindros interconectados, representando cada una de las partes de la estructura tales como el fuselaje, las alas o los estabilizadores. Este modelo, aunque pierde gran cantidad de detalles geométricos nos da información sobre las corrientes axiales inducidas a bajas frecuencias y puede servir como un primer paso para análisis posteriores más detallados.

En este apartado presentamos los resultados que hemos obtenido analizando con DOTIG1 las intensidades inducidas en dos modelos "stick" de aviones. La geometría para ambos casos puede verse en las Figs. 4.111 y 4.116. La excitación ha sido una O.E.M. con el vector campo eléctrico paralelo al ala 2 y propagándose perpendicularmente a la misma, con una dependencia temporal:

$$E(t) = \exp[-g^2 (t-t_{\max})^2]$$

con $g = 1.2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.8 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ para el primer caso y $g = 2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.07 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ en el segundo.

En la Fig. 4.112 se muestra la intensidad de corriente en función del tiempo en el centro del segmento más próximo a la unión del hilo 1 en la geometría del avión representado en la Fig. 4.111.

Con objeto de comparar con los resultados

obtenidos por nosotros mediante el programa MININEC en DF para la misma configuración de la estructura y excitación unidad, hemos calculado la razón entre el valor de la transformada de Fourier de la intensidad calculada con DOTIG1 y el del campo incidente para cada intervalo espacial. Los resultados se muestran en las Figs. 4.113, 4.114 y 4.115 para las frecuencias $\omega = 0.5$ MHz, 1 MHz y 1.5 MHz, en línea continua los de DOTIG1 y en la línea de puntos los de MININEC, que como puede verse coinciden con los anteriores.

Por último, para el avión de ocho hilos de la Fig. 4.116 hemos representado en la Fig. 4.117 la intensidad de corriente en función del tiempo para el segmento más próximo a la unión en el hilo 1, y en la Fig. 4.118 la intensidad de corriente en toda la estructura para diferentes instantes de tiempo.

<u>Autor/Nombre del Programa</u> <u>[Referencia]</u>	<u>Método</u>	<u>Funciones base</u>	<u>Funciones Peso</u>
Miller et al. [19]	MM en DT	Interpolación Lagrangiana	δ
Elliot et al. [79]	MM en DF	Pulsos	Pulsos
Richmond/ OSU [90] y [66]	MM en DF	Seno	Seno
Sayre [86]	MM en DF	Pulsos	δ
Mittra et al. [87]	Diferencial Finitas	Pulsos	δ
Poggio y Miller [59]	MM en DT	Interpolación Lagrangiana	δ
Chao y Strait / SYRACUSE [88]	MM en DF	Triangular	Triangular
Butler [76] y [89]	MM en DF	Pulsos	Triangular
Burton [90]	Experimentales	—	—
Butler [76]	Experimentales	—	—
Logan et al./ MININEC3 [90]	MM en DF	Pulsos	Pulsos
Tanner y Andreason / TCI [90]	MM en DF	Tres Términos	δ
Arens / BIGANT [90]	MM en DF	Tres Términos	δ
Burked et al. / NEC3 [90]	MM en DF	Tres Términos	δ

Tabla 4.1.- Métodos con los que se ha comparado

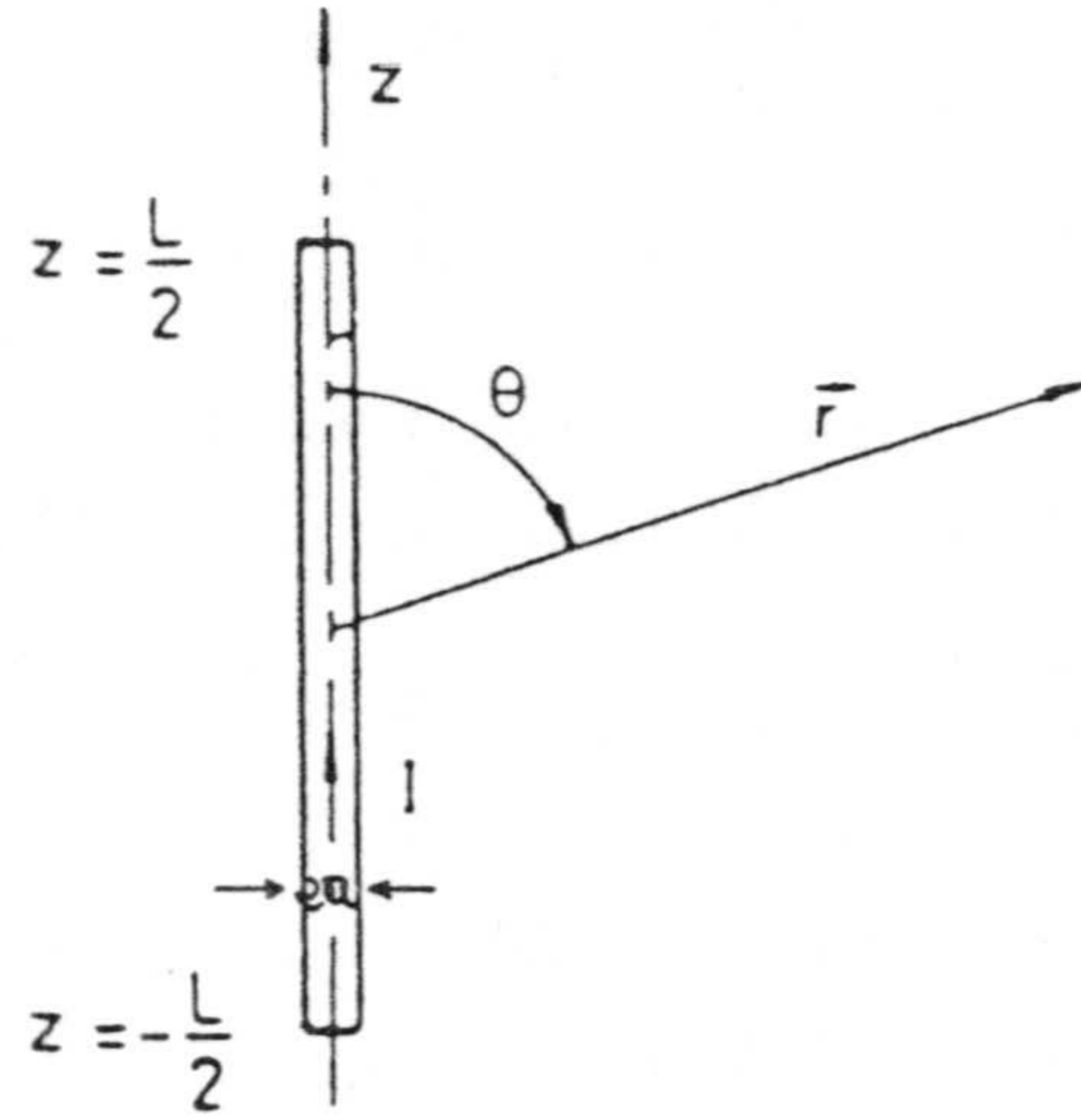


Fig. 4.1.- Geometría hilo recto dispersor. $L = 1$ m; $a = 0.00667$ m.

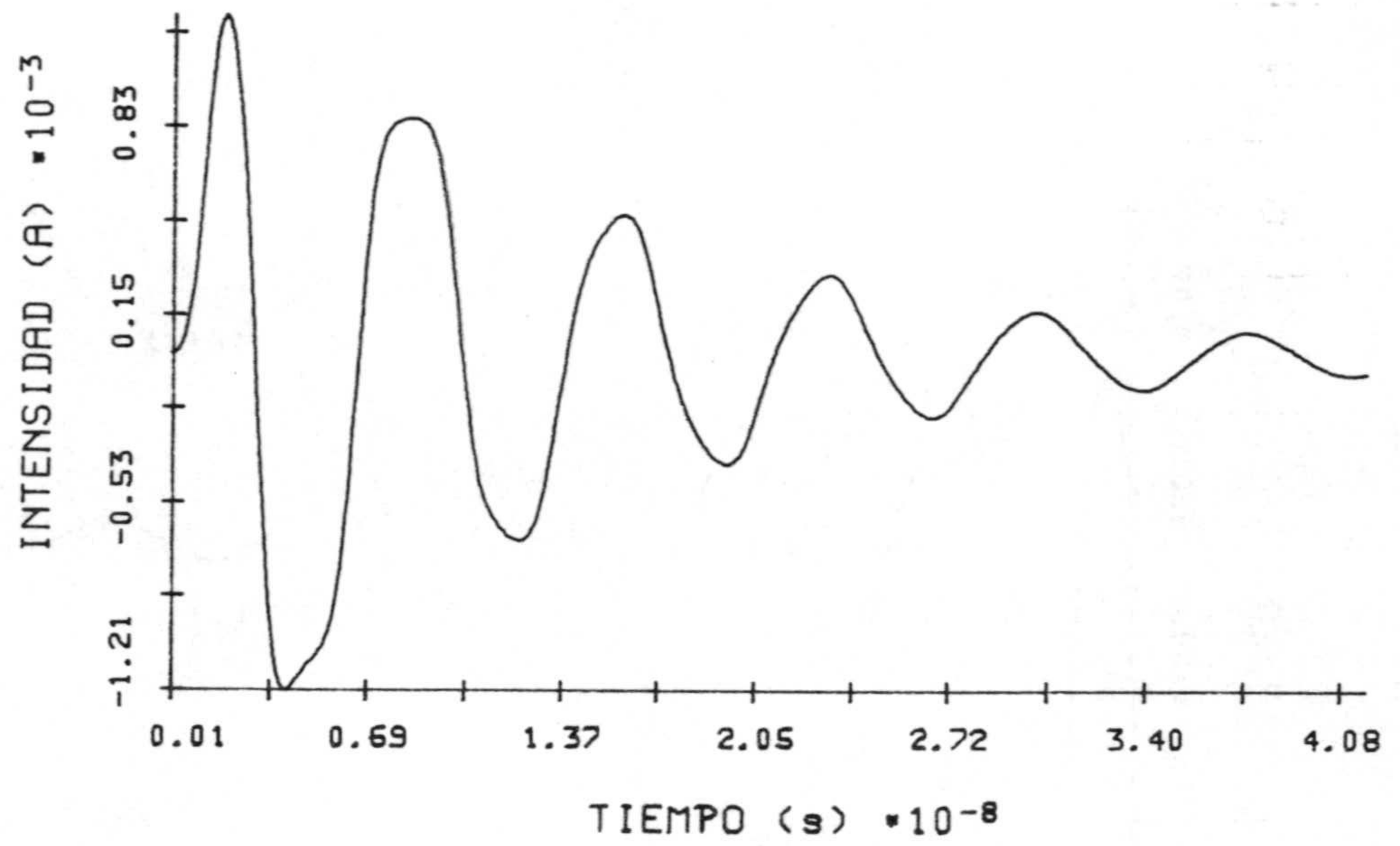
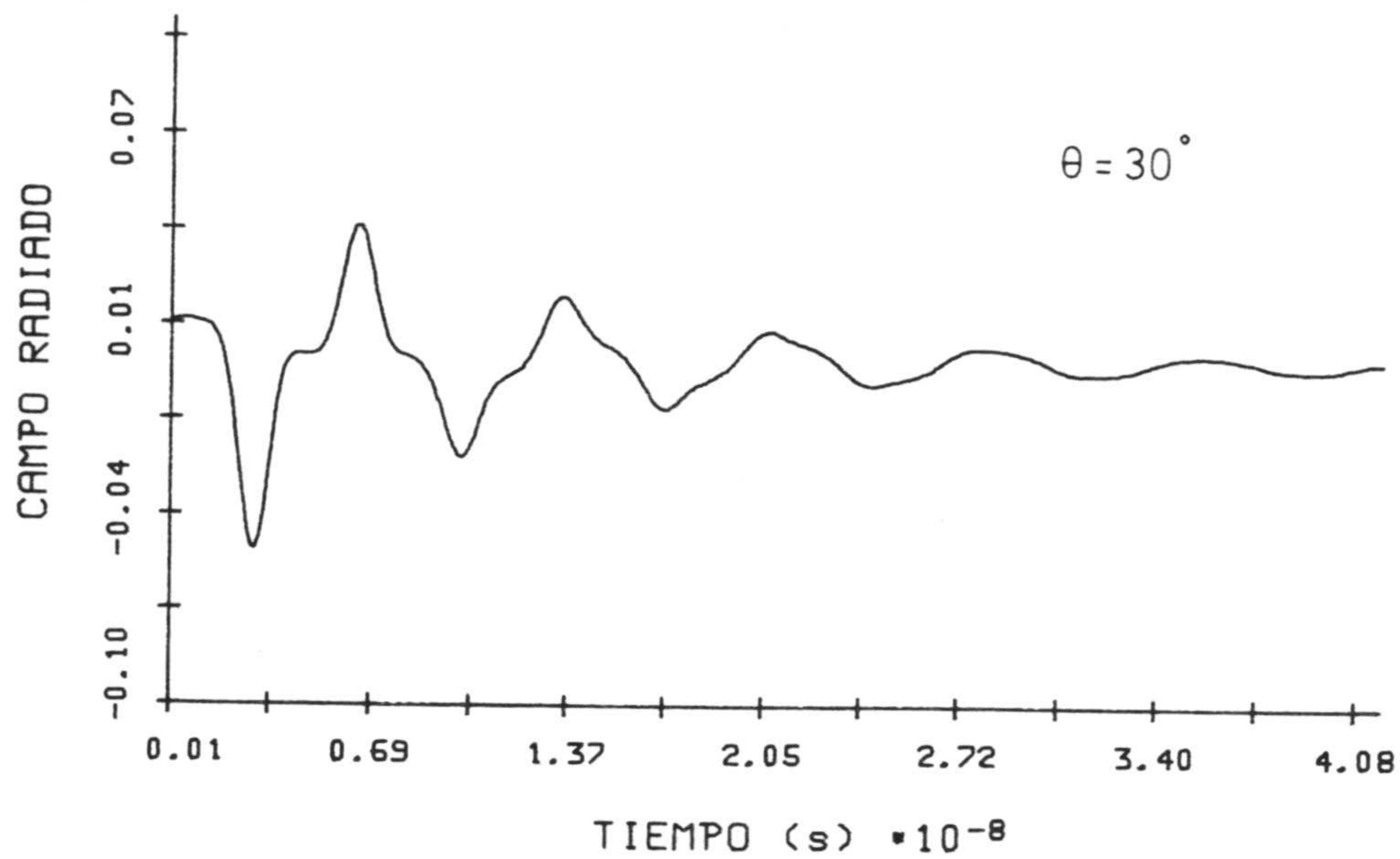
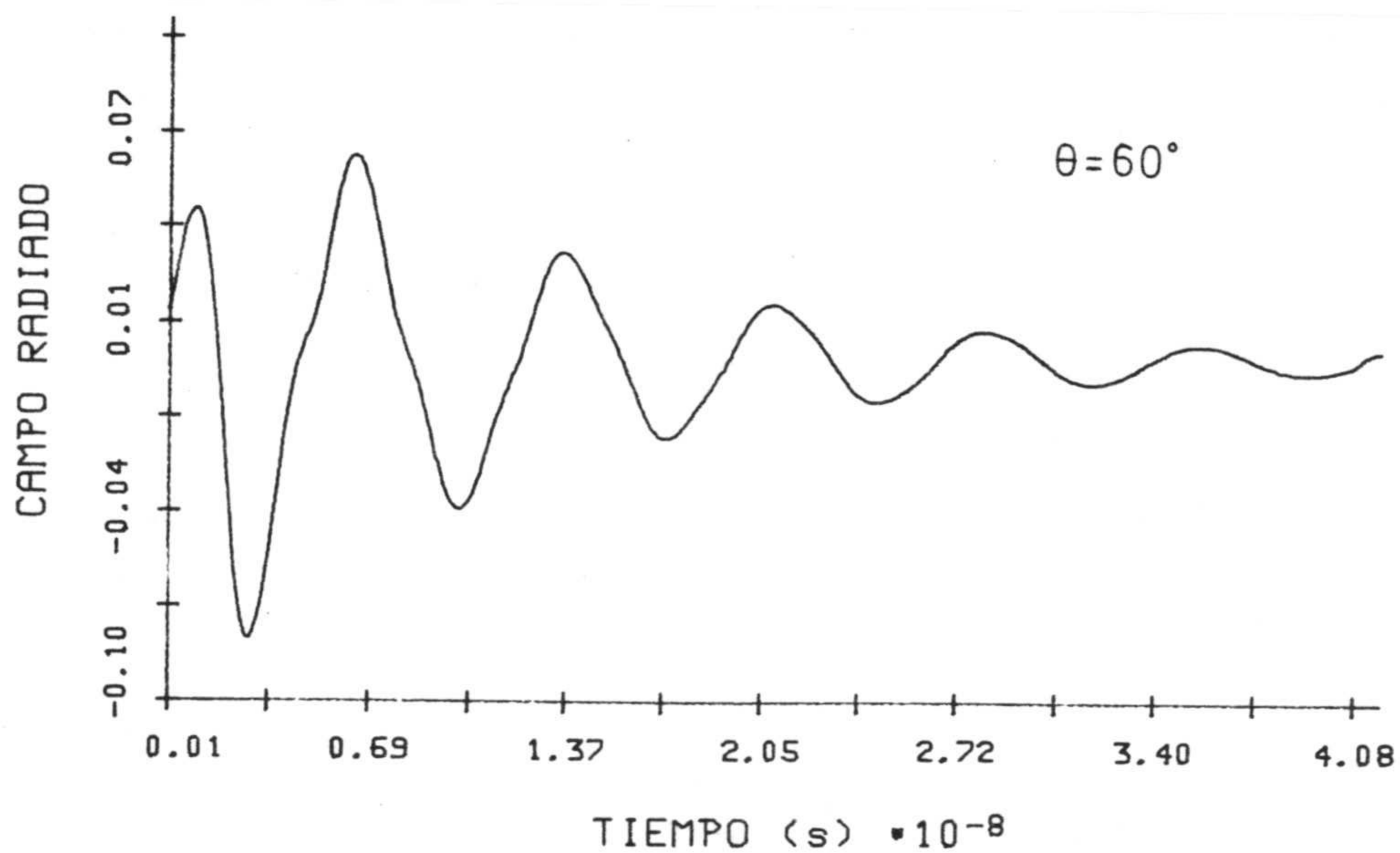


Fig. 4.2.- Intensidad en el centro del hilo. $L = 1$ m; $a = 0.00667$ m.

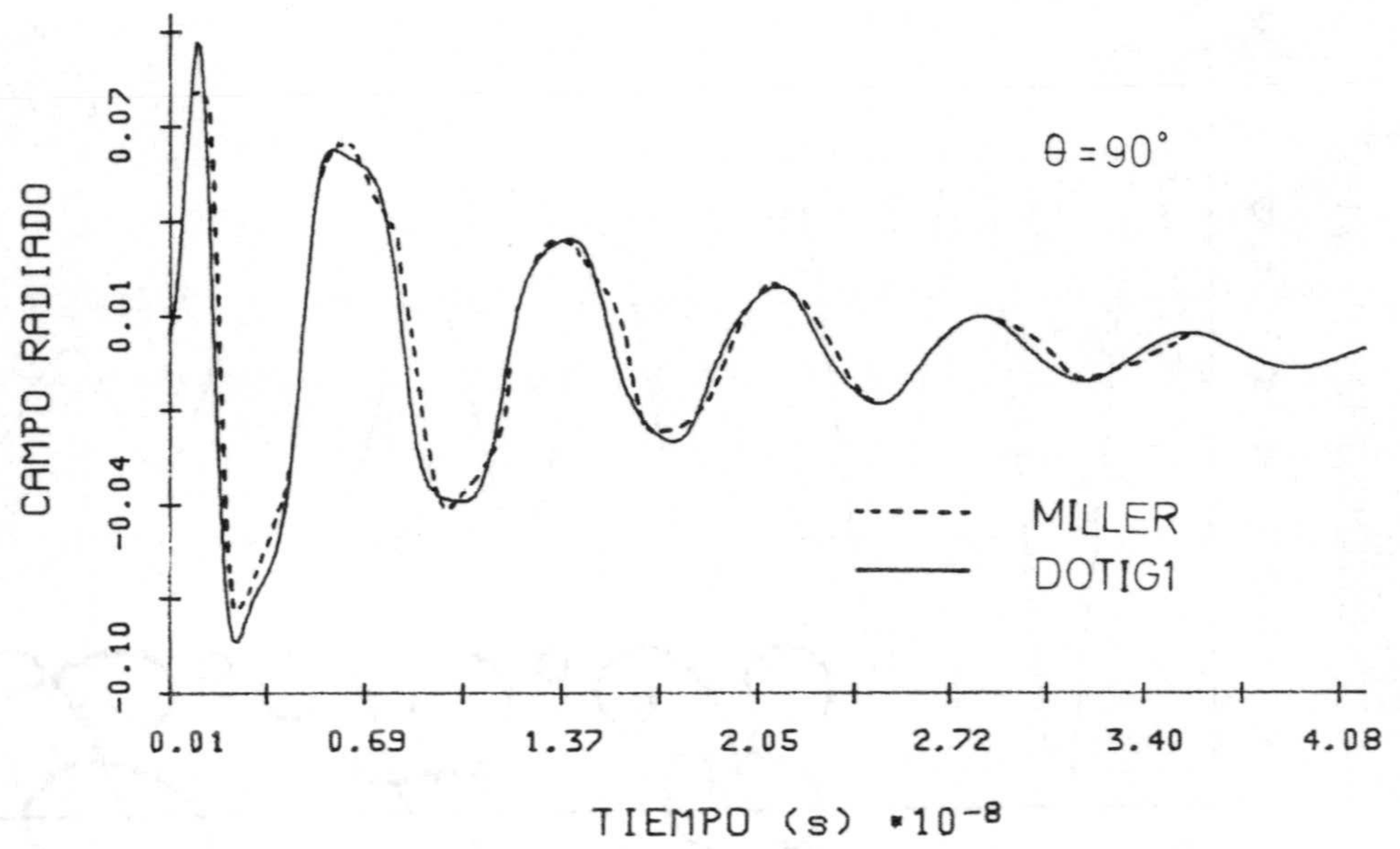


(a)

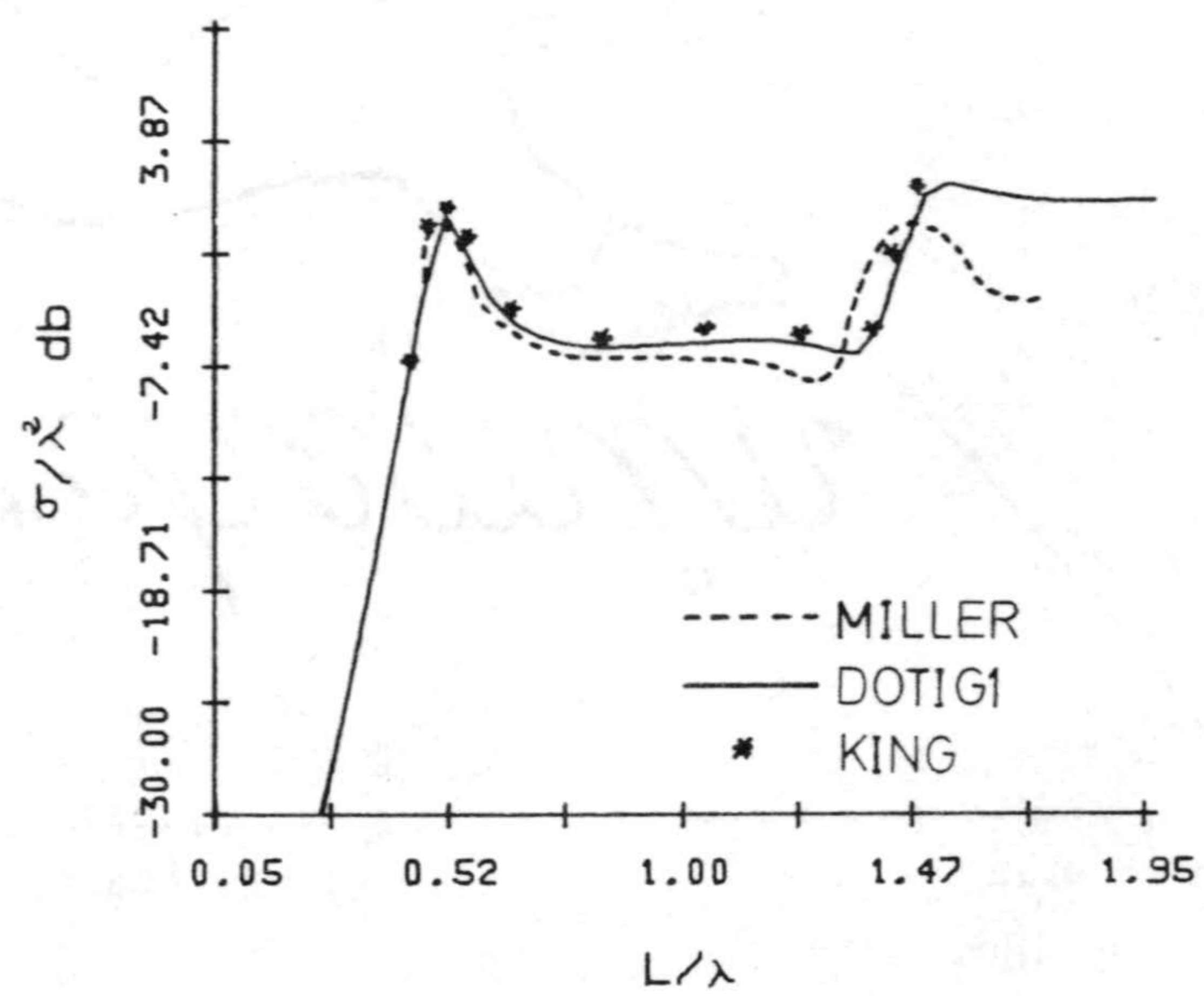


(b)

Fig. 4.3.- Campo dispersado por un hilo recto ($L = 1$ m; $a = 0.00667$ m) en las direcciones a) $\theta = 30^\circ$ b) $\theta = 60^\circ$.

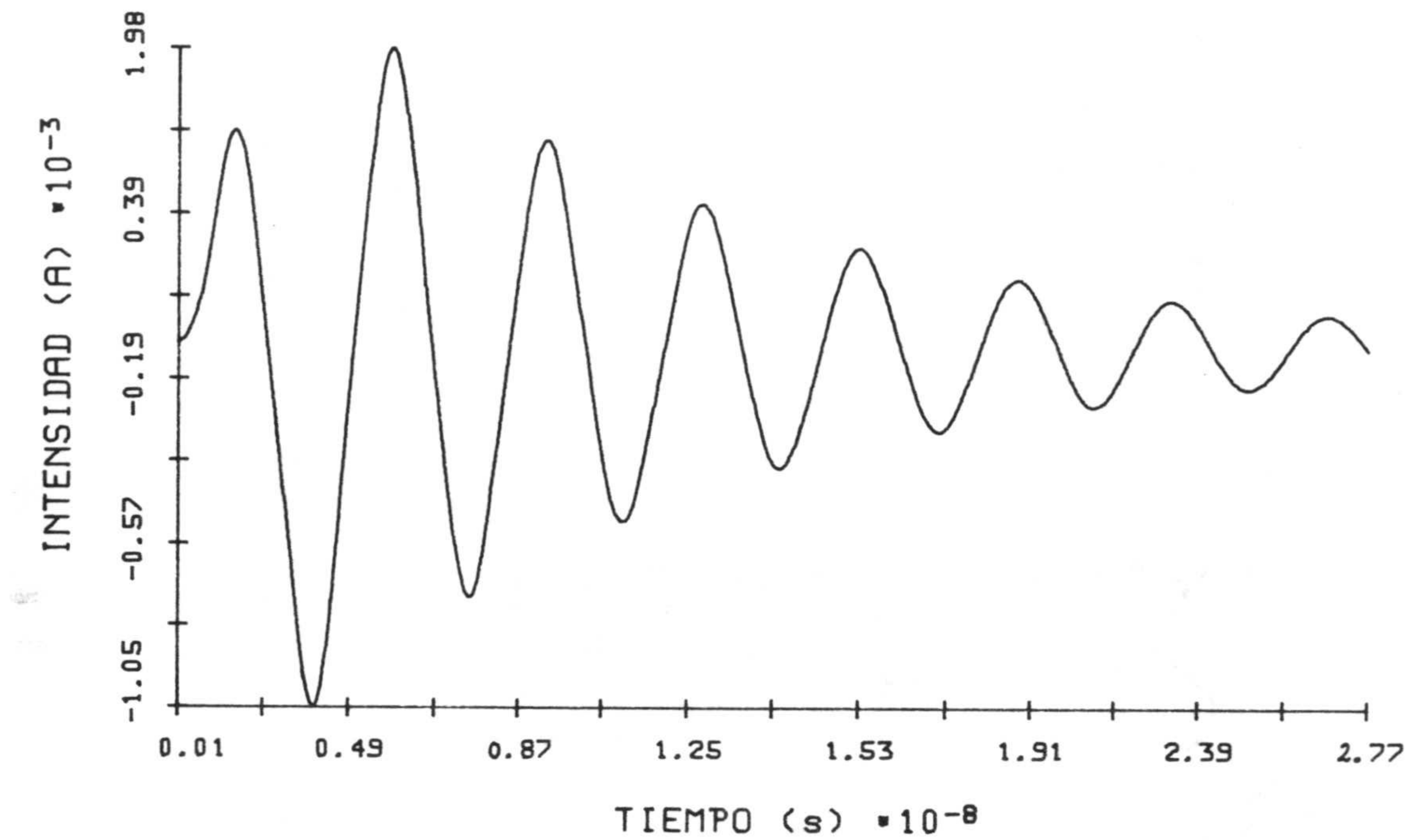


(a)

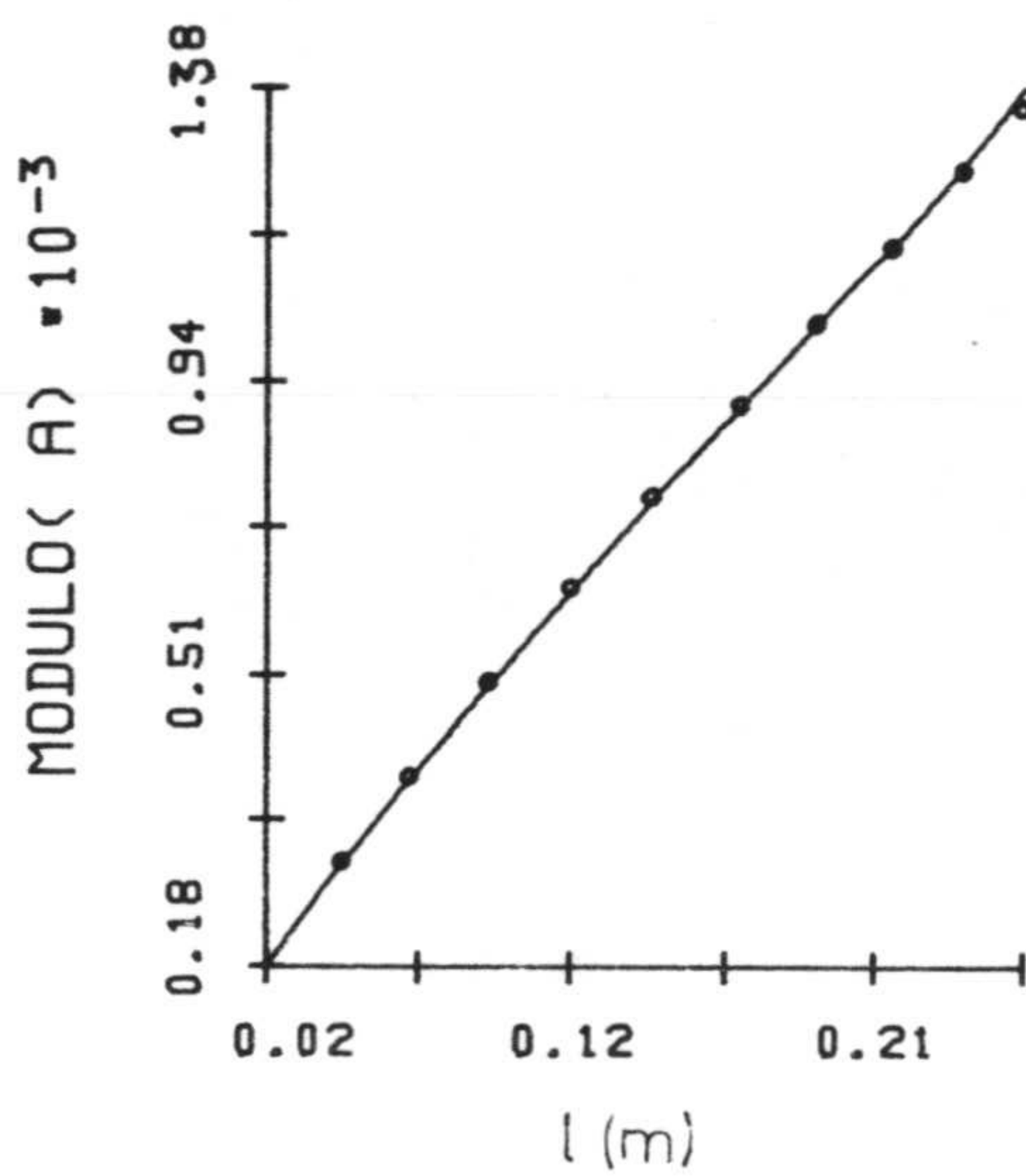


(b)

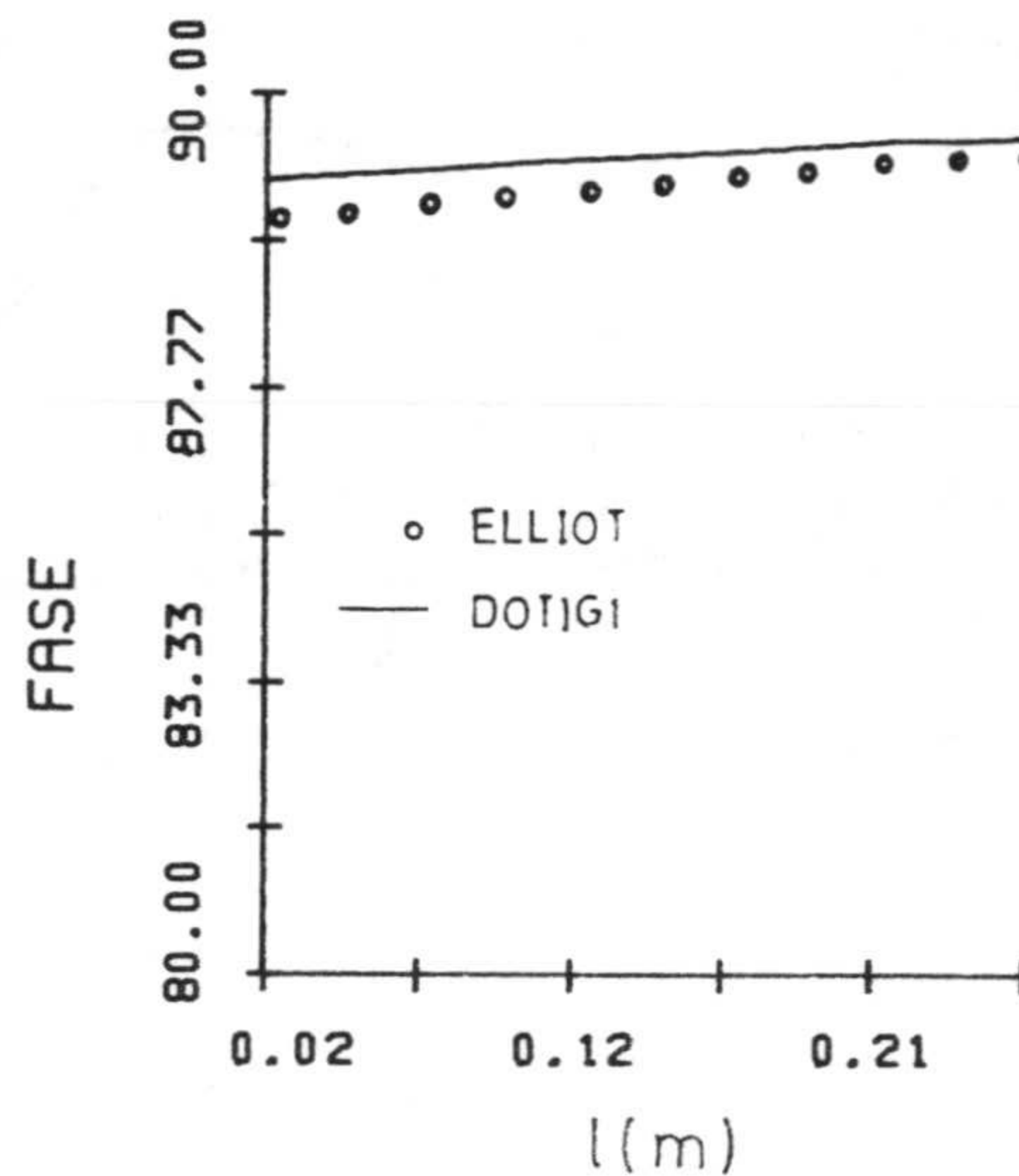
Fig. 4.4.- a) Campo dispersado por un hilo recto a $\theta = 90^\circ$; b) Sección recta de radar para $\theta = 90^\circ$. $L = 1$ m; $a = 0.00667$ m.



(a)

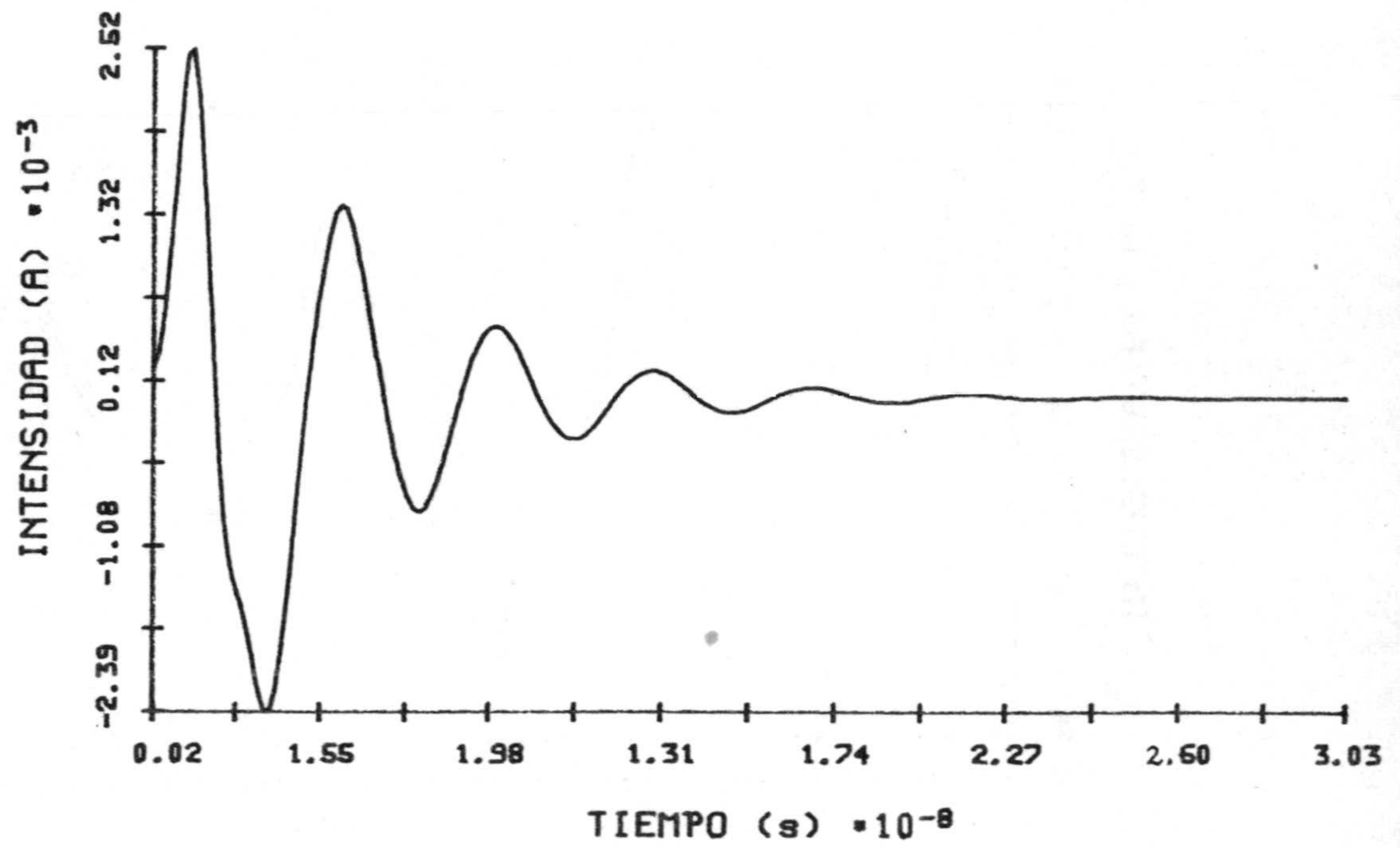


(b)

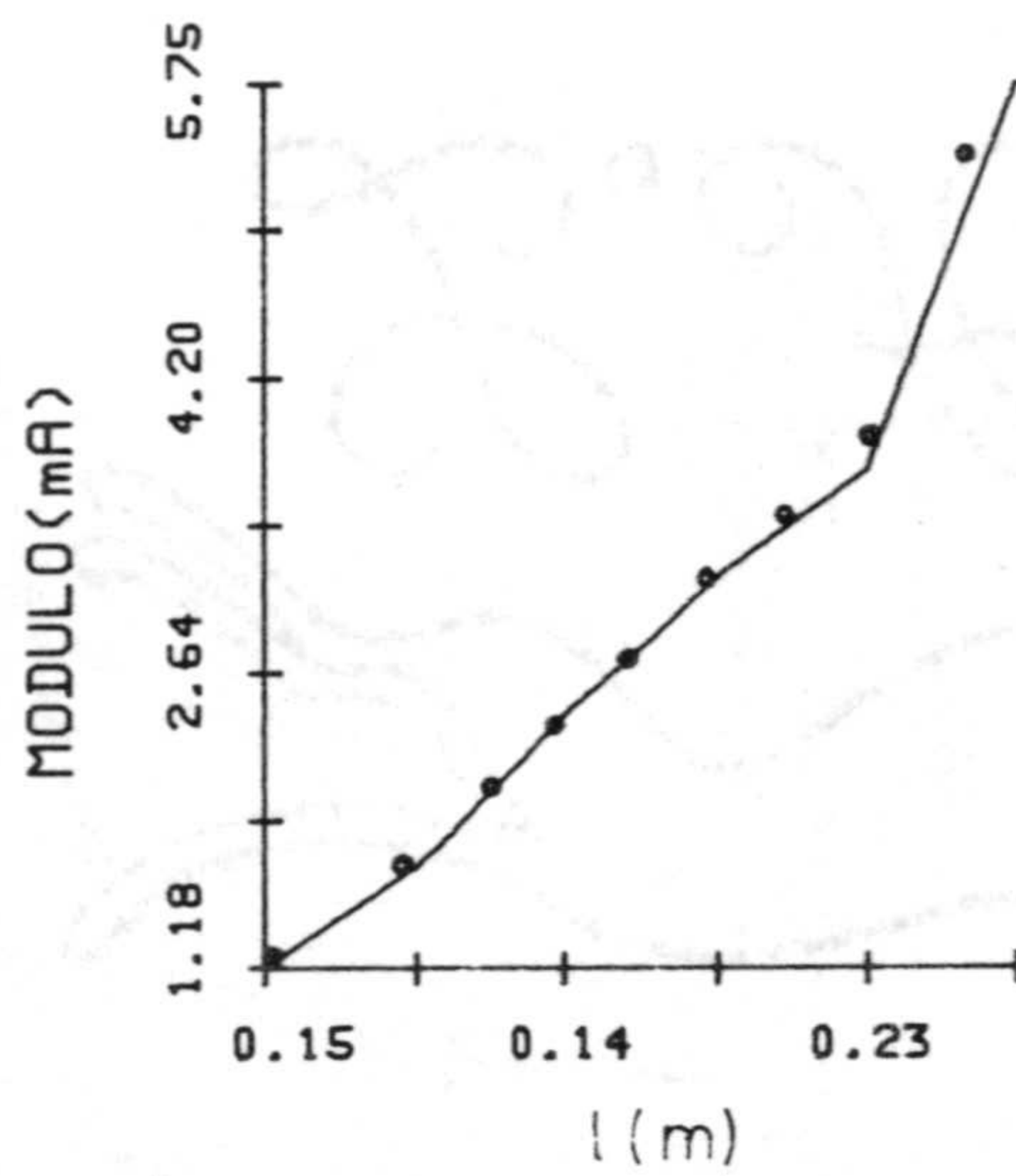


(c)

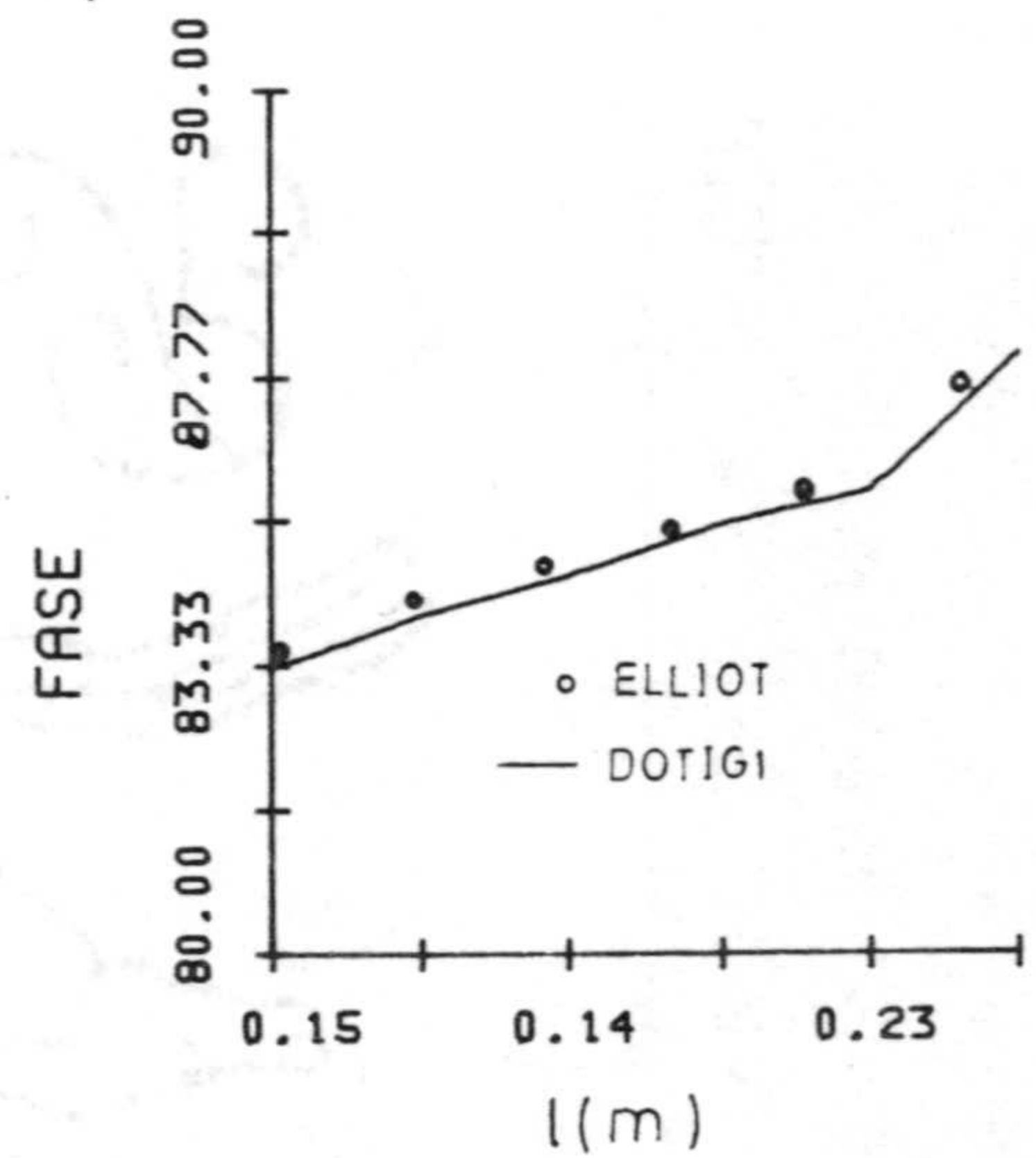
Fig. 4.5.- a) Intensidad en la alimentación de un hilo recto excitado en su centro por una fuente $V_s(t) = 0.5 \exp [g^2(t-t_{\max})^2]$ con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Longitud del hilo $L = 0.5 \text{ m}$ y radio $a = 0.0002 \text{ m}$; b) Módulo de la transformada de Fourier de la intensidad dividida por la de $V_s(t)$ en cada punto de la mitad de la antena para $\lambda = 2 \text{ m}$; c) Fase.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.6.- a) Intensidad en la alimentación de un hilo recto excitado en su centro por una fuente $V_s(t) = 0.5 \exp [g^2(t-t_{\max})^2]$ con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Longitud del hilo $L = 0.5 \text{ m}$ y radio $a = 0.02 \text{ m}$; b) Módulo de la transformada de Fourier de la intensidad dividida por la de $V_s(t)$ en cada punto de la mitad de la antena para $\lambda = 2 \text{ m}$; c) Fase.

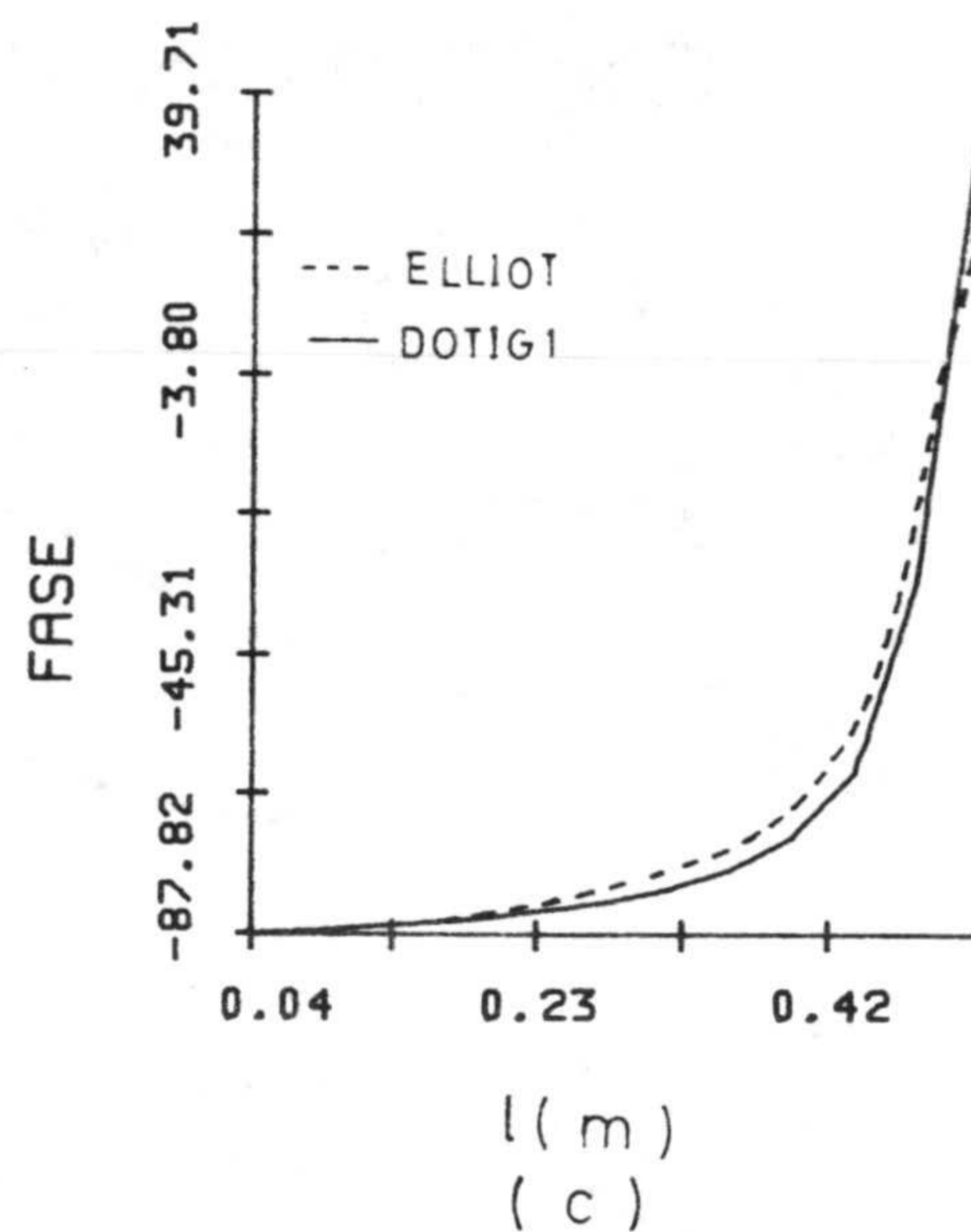
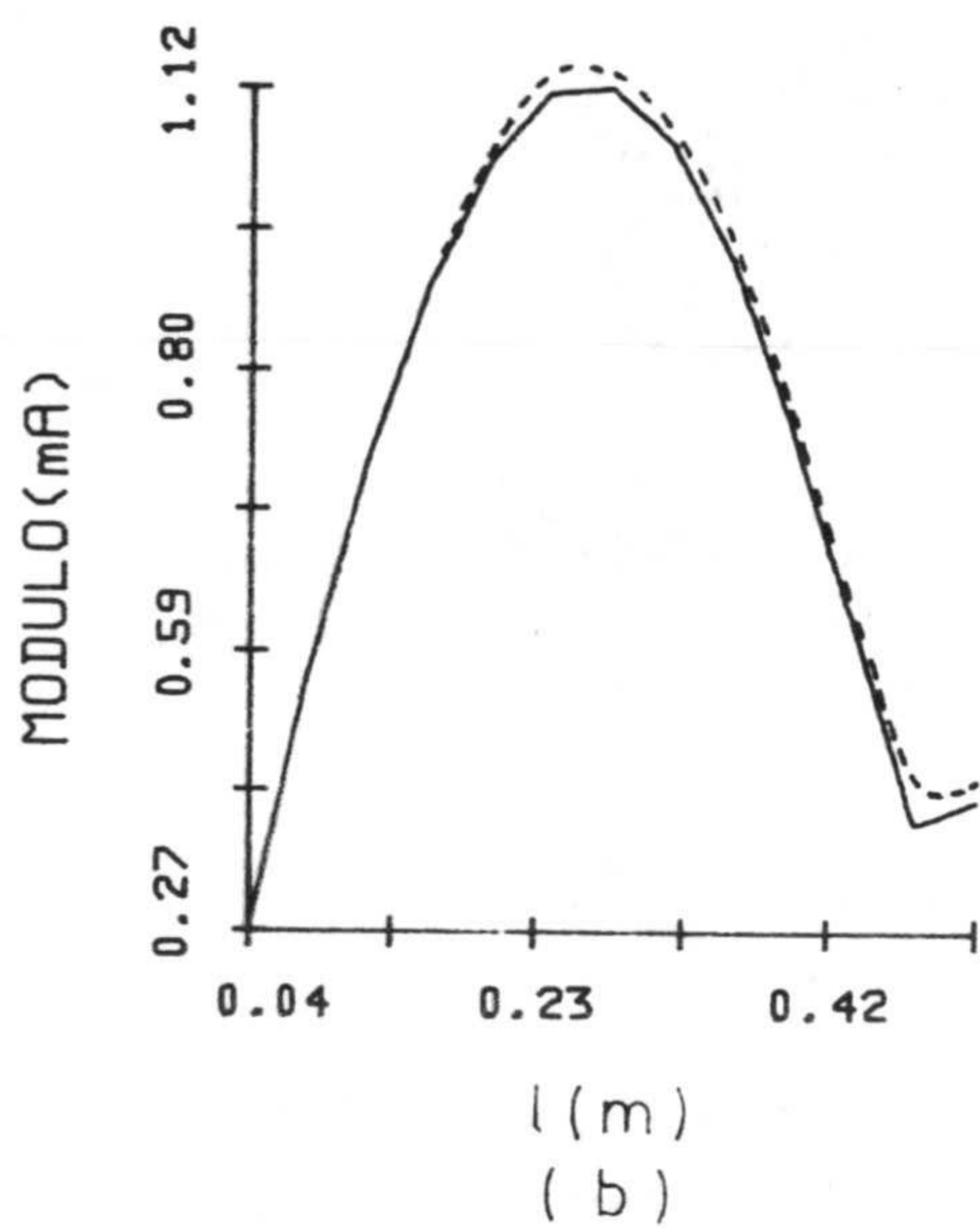
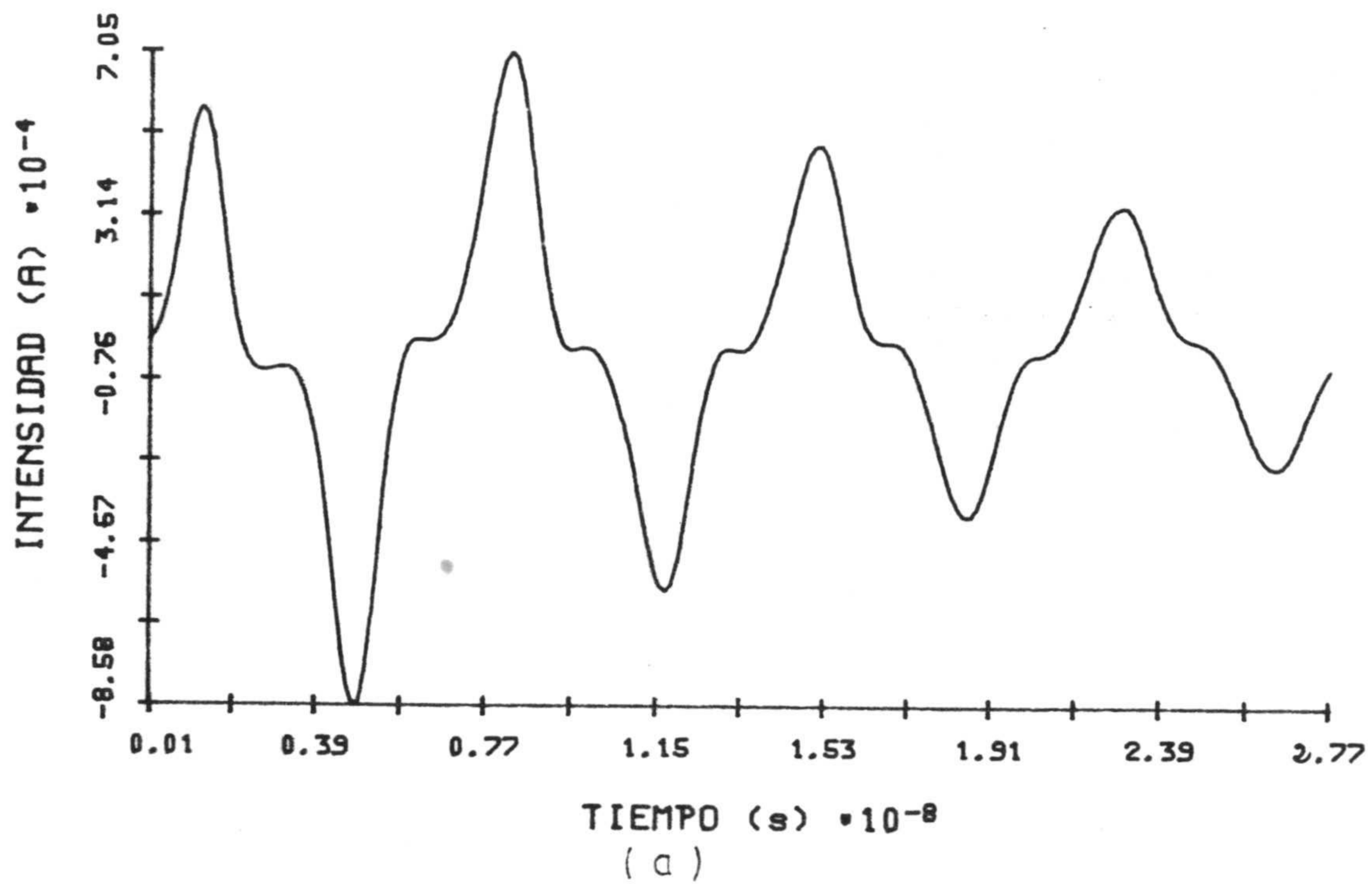
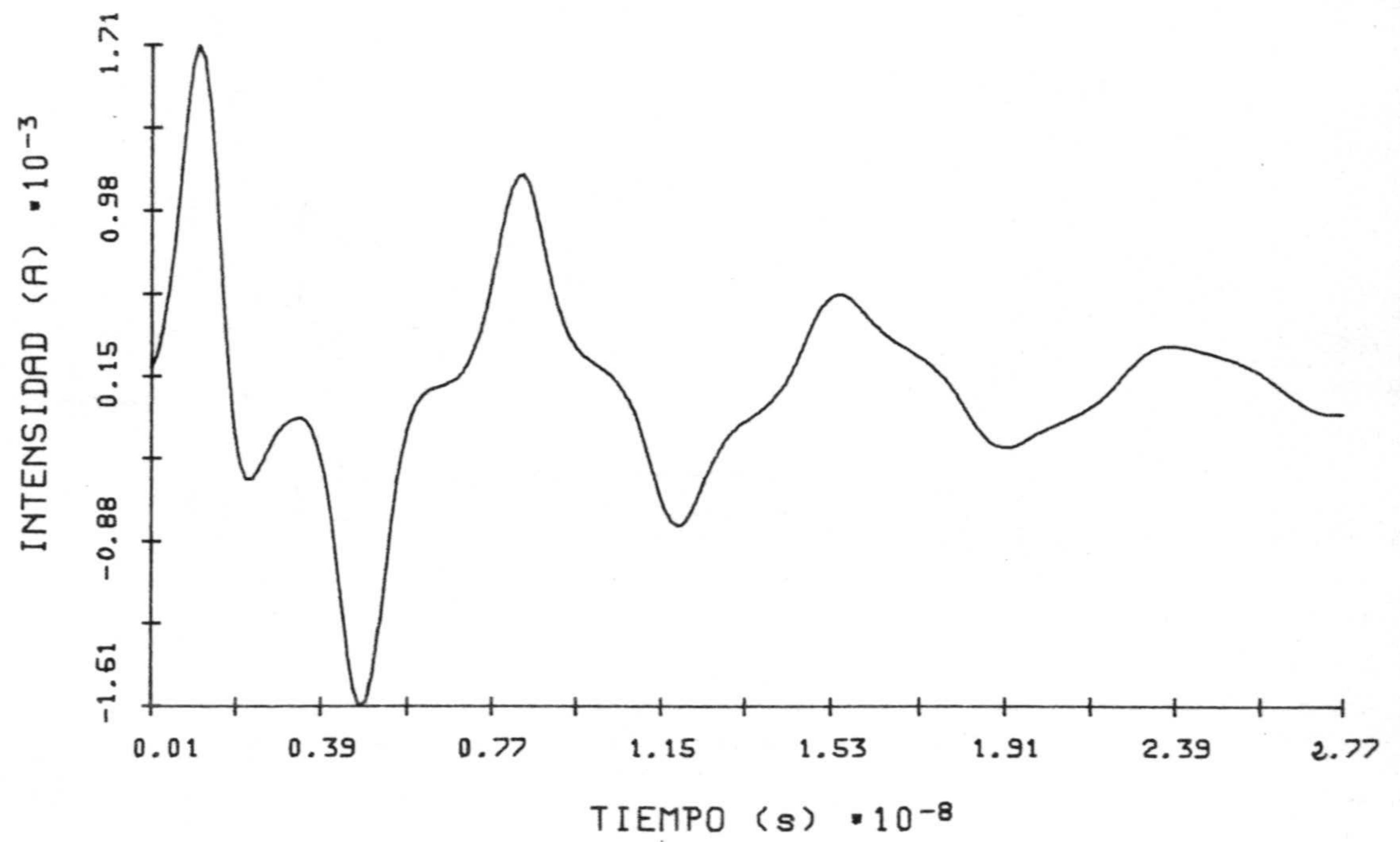
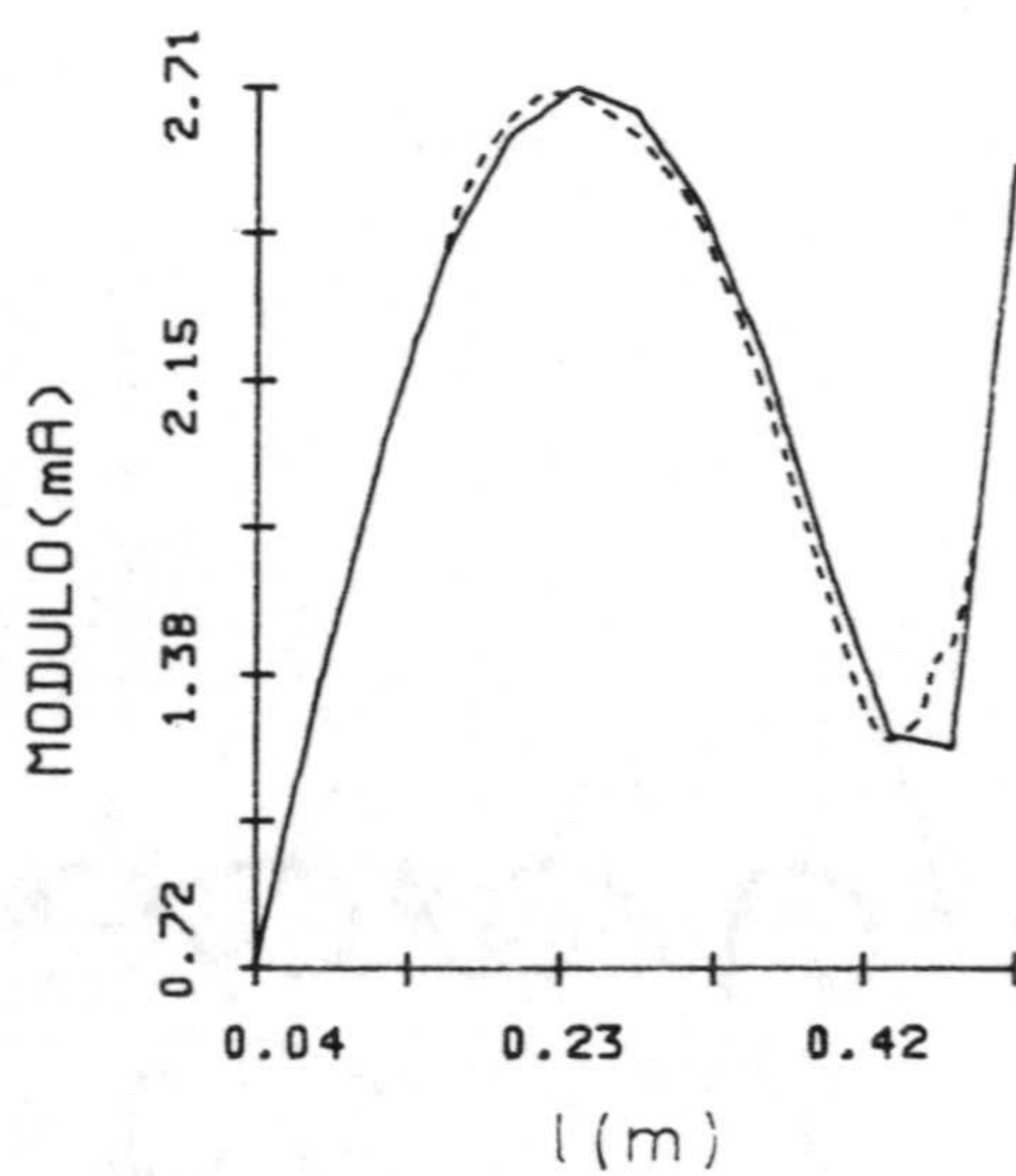


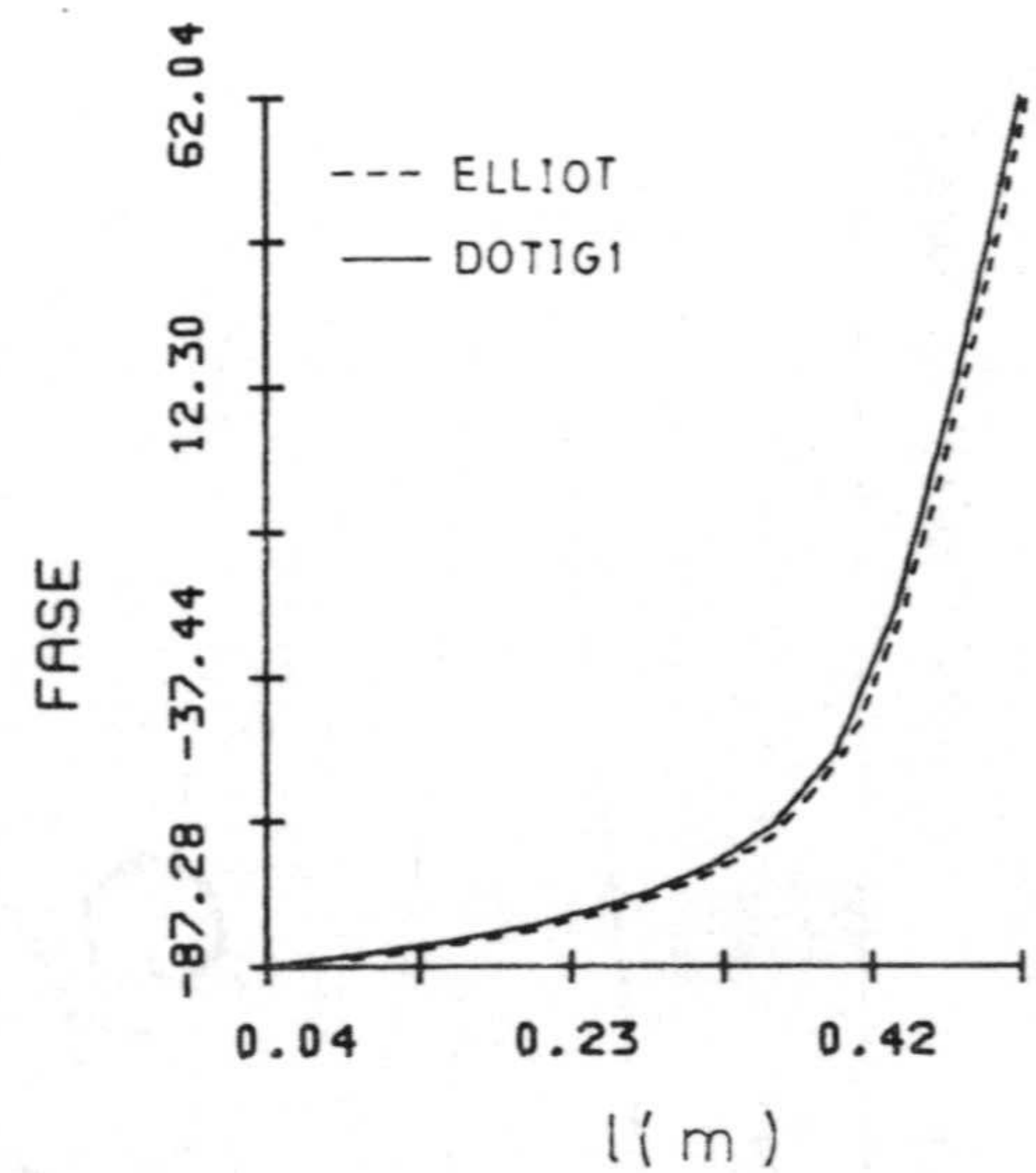
Fig. 4.7.- a) Intensidad en la alimentación de un hilo recto excitado en su centro por una fuente $V_s(t) = 0.5 \exp [g^2(t-t_{\max})^2]$ con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Longitud del hilo $L = 1 \text{ m}$ y radio $a = 0.0001 \text{ m}$; b) Módulo de la transformada de Fourier de la intensidad dividida por la de $V_s(t)$ en cada punto de la mitad de la antena para $\lambda = 1 \text{ m}$; c) Fase.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.8.- a) Intensidad en la alimentación de un hilo recto excitado en su centro por una fuente $V_s(t) = 0.5 \exp [g^2(t-t_{\max})^2]$ con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Longitud del hilo $L = 1 \text{ m}$ y radio $a = 0.01 \text{ m}$; b) Módulo de la transformada de Fourier de la intensidad dividida por la de $V_s(t)$ en cada punto de la mitad de la antena para $\lambda = 1 \text{ m}$; c) Fase.

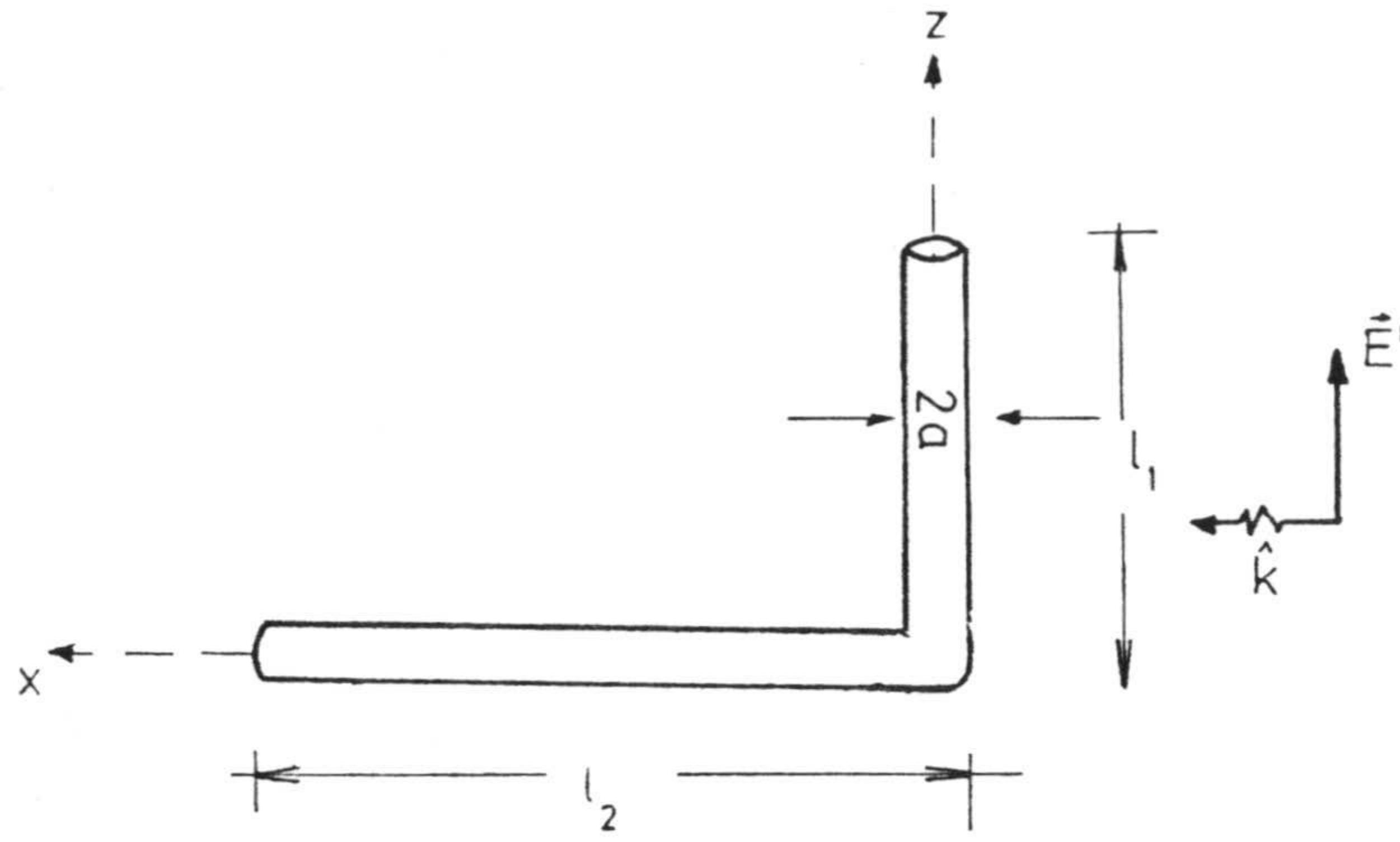


Fig. 4.9.- Geometría de la estructura en "L".
 $l_1 = 1.8288 \text{ m}$; $l_2 = 9.144 \text{ m}$; $a = 1.902 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

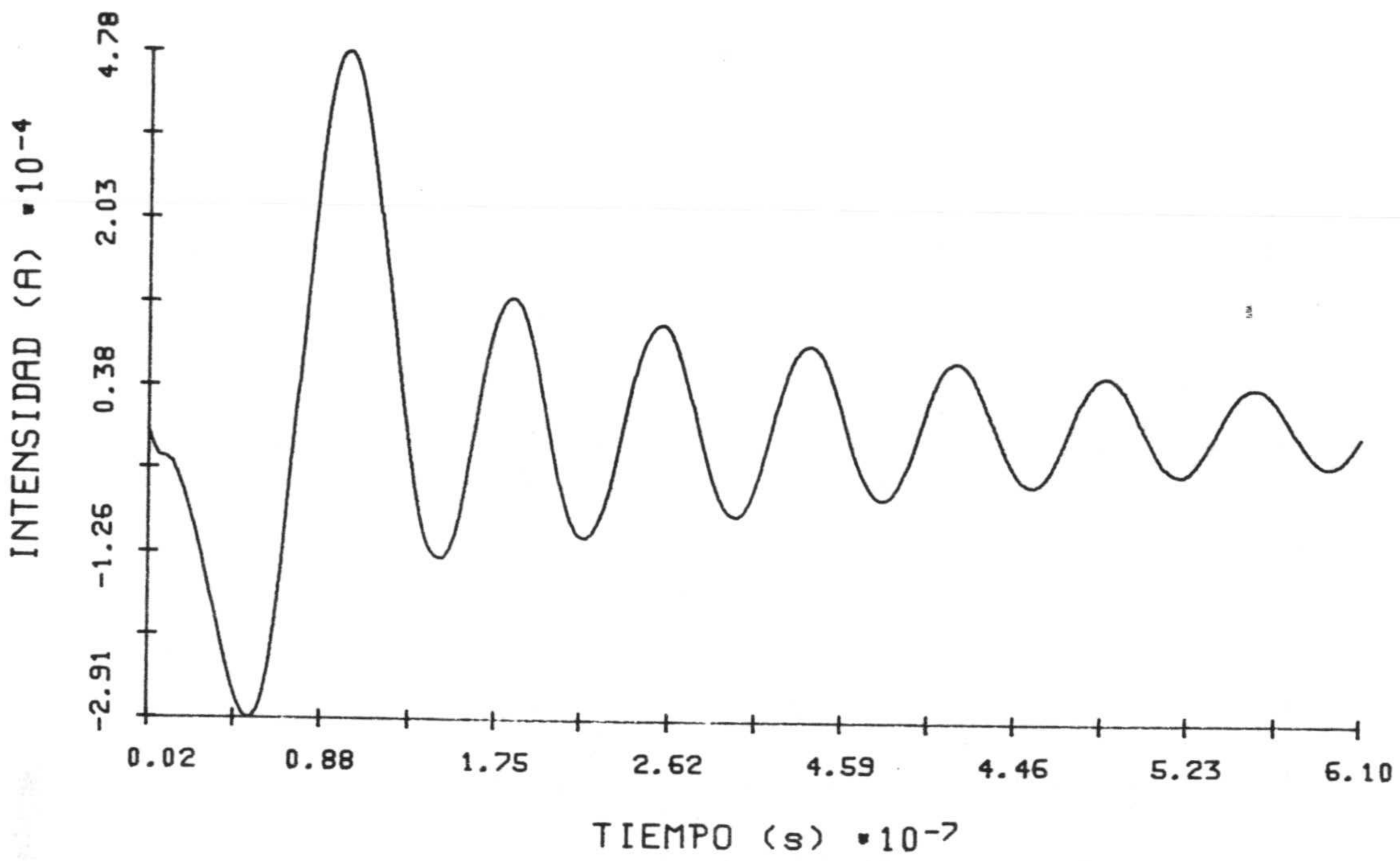


Fig. 4.10.- Intensidad en $(x = 0, z = \Delta/2)$ en función del tiempo para la estructura de la figura 4.9 ($l_1 = 1.8288 \text{ m}$; $l_2 = 9.144 \text{ m}$; $a = 1.902 \cdot 10^{-4} \text{ m}$).

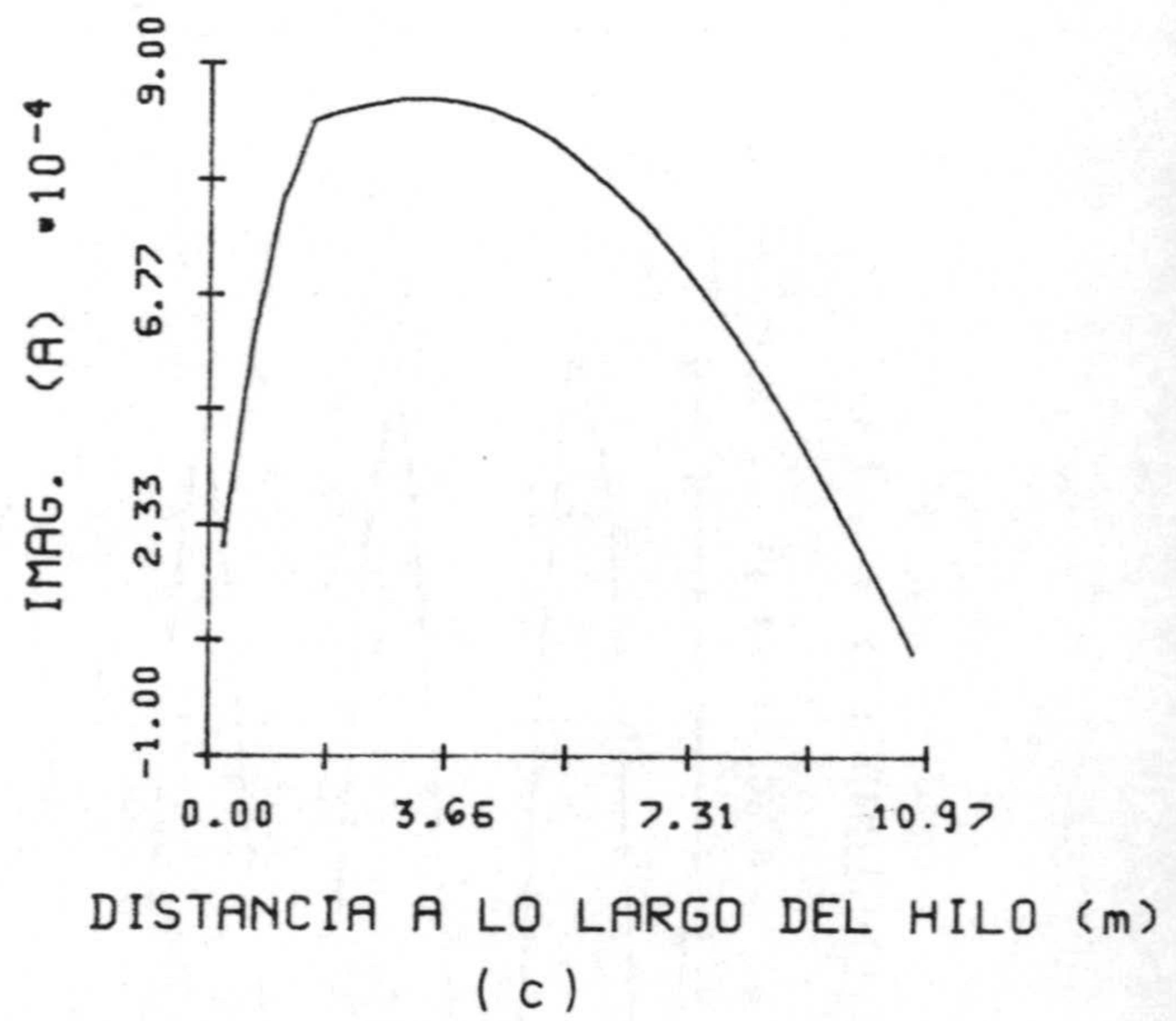
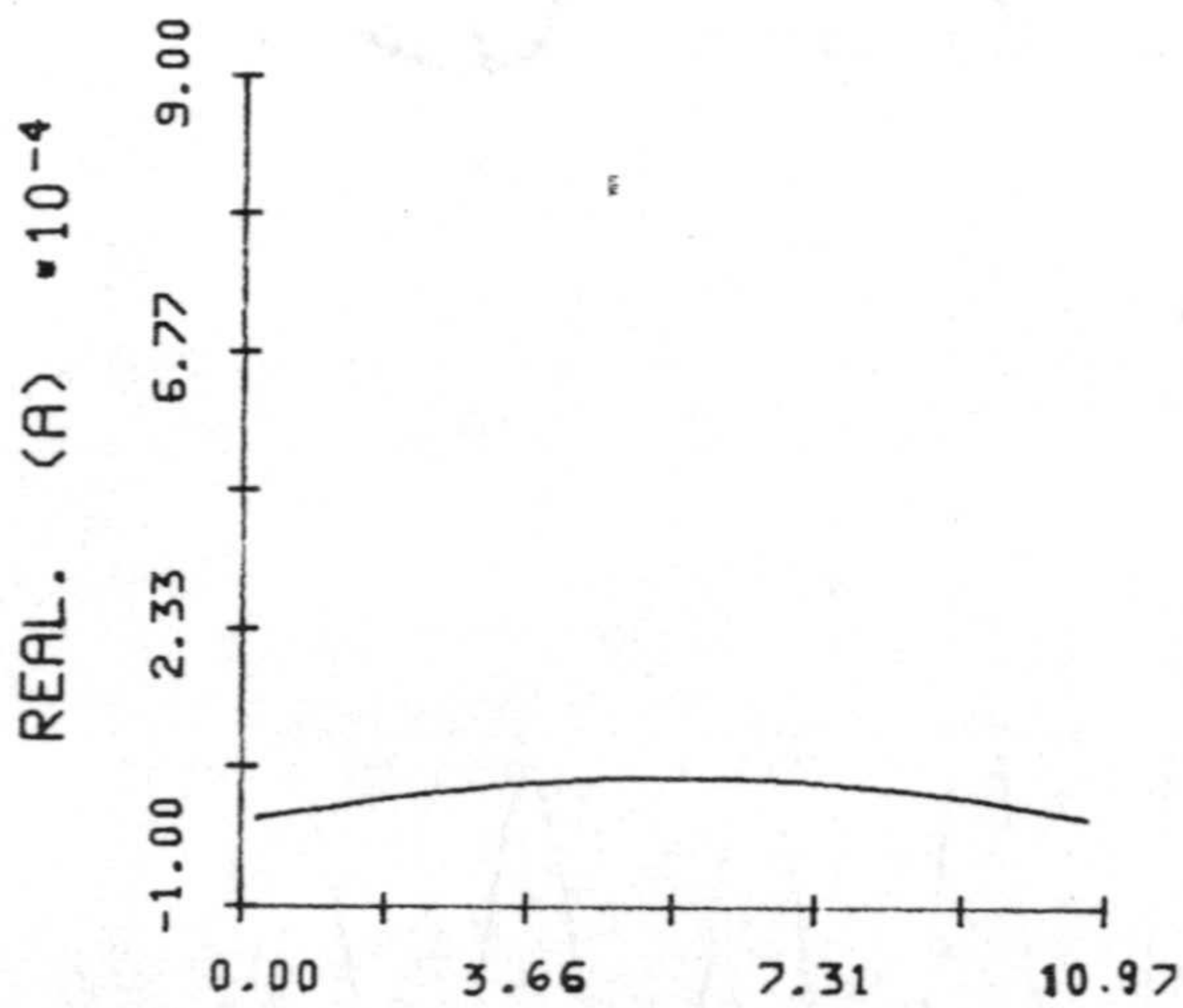
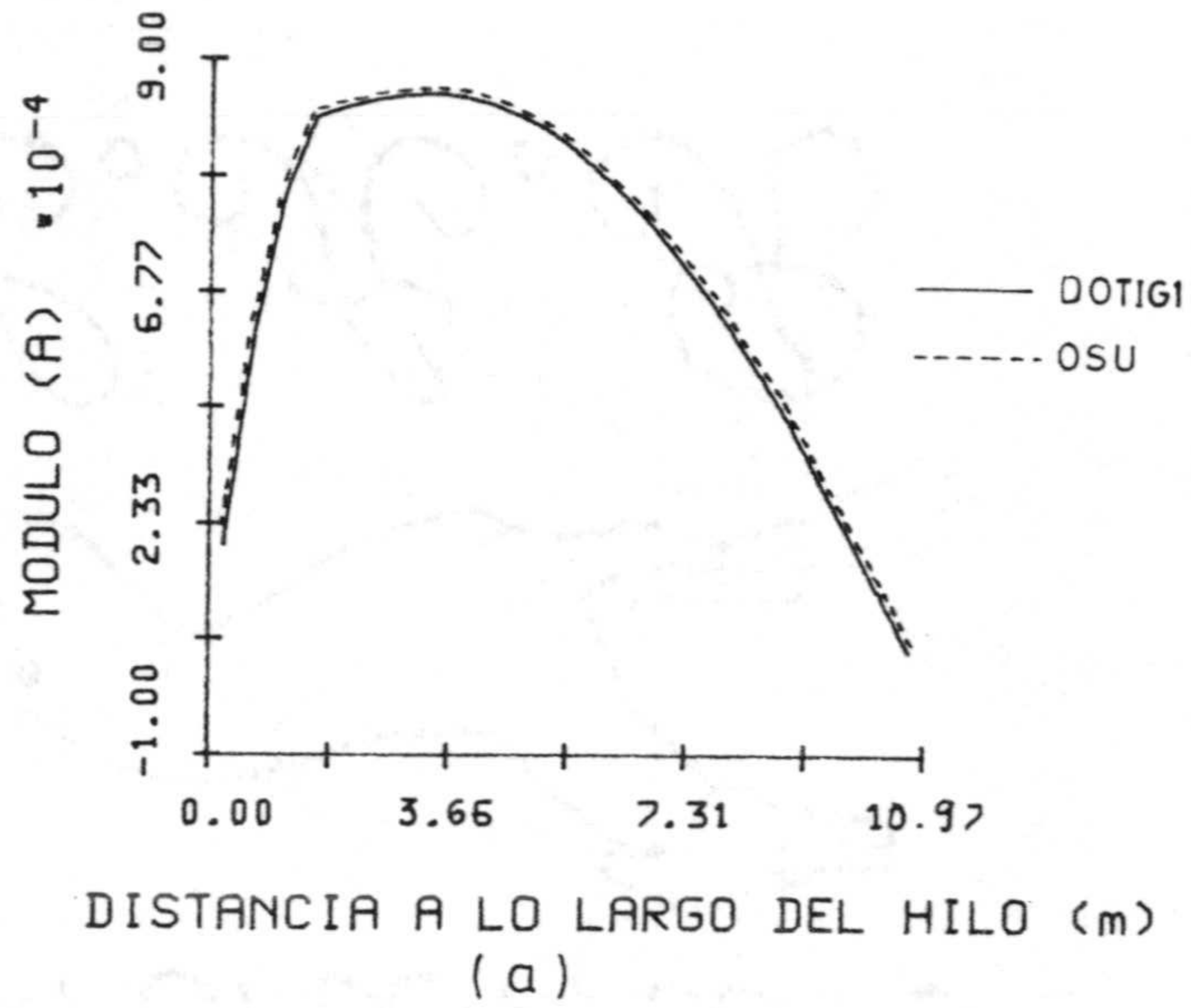


Fig. 4.11.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la de E^1 para $\lambda = 30$ m en función de la longitud del hilo. a) Módulo; b) Parte real; c) Parte imaginaria. Los resultados de la Universidad de Ohio (OSU) se han pintado en línea discontinua.

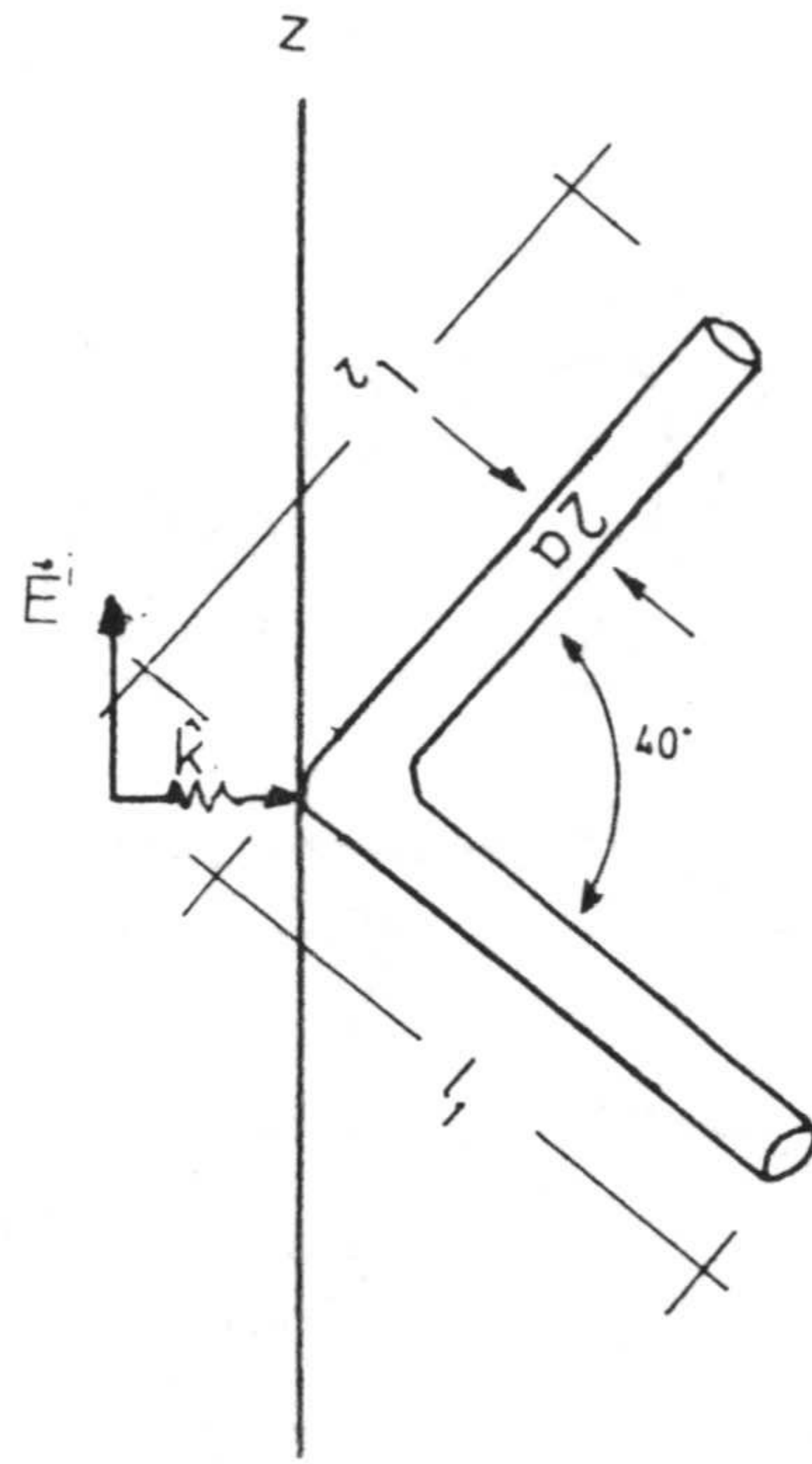


Fig. 4.12.- Geometría del dipolo en "V". $l_1 = l_2 = 0.645$ m; $a = 6.5 \cdot 10^{-3}$ m.

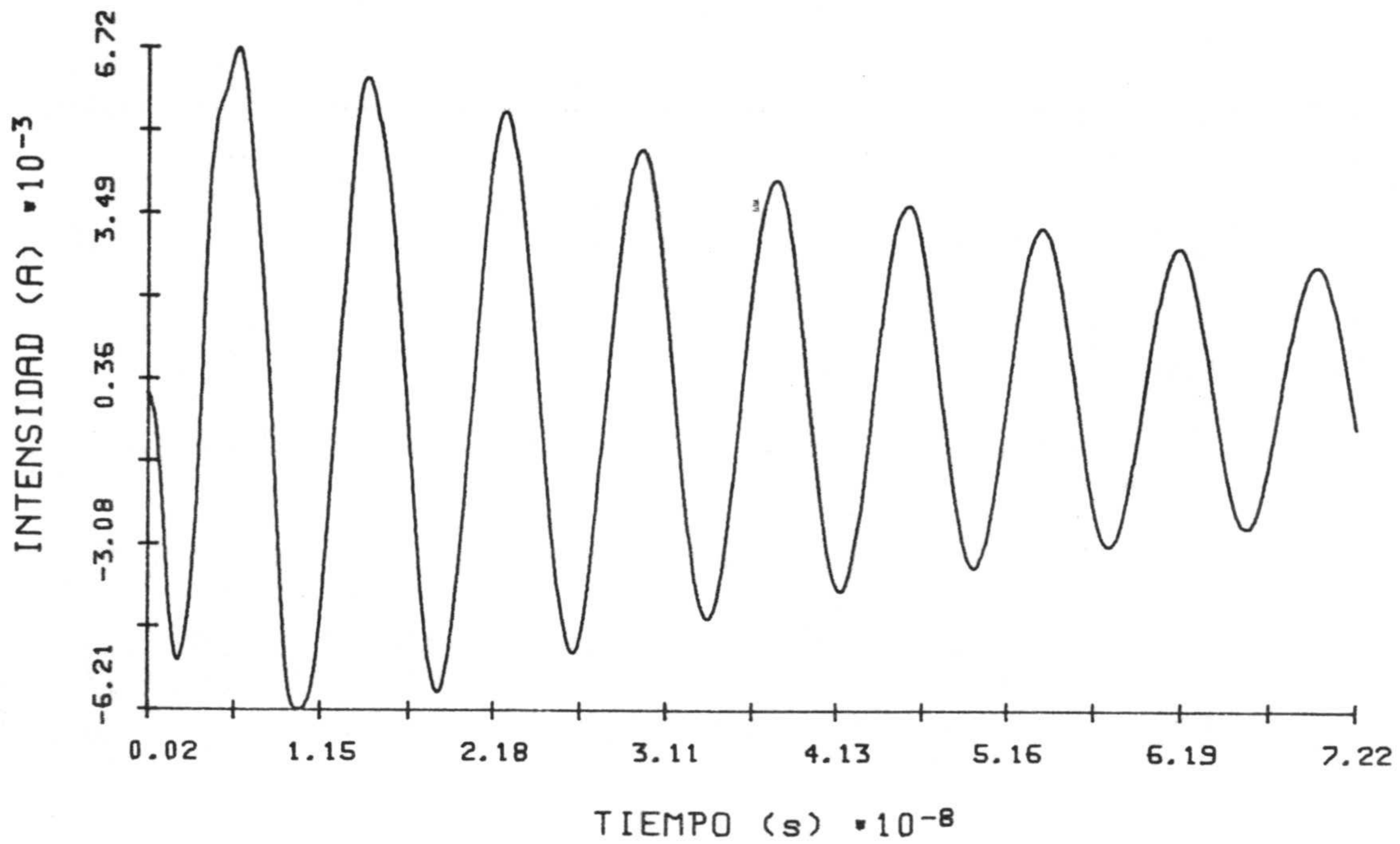


Fig. 4.13.- Intensidad de corriente en un punto del hilo 1 situado a $\Delta/2$ de la unión en función del tiempo, para la geometría de la Fig. 4.12.

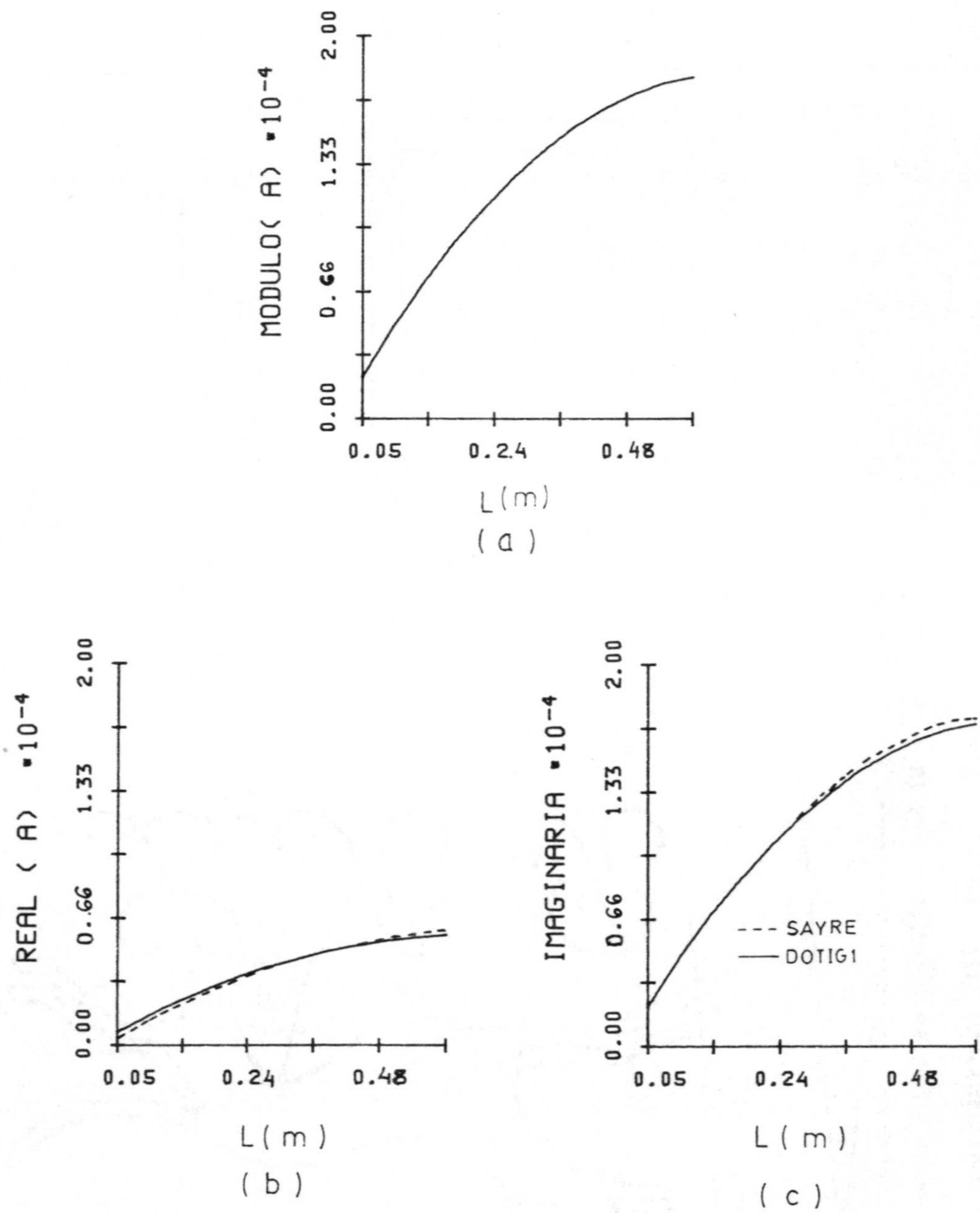


Fig. 4.14.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del campo incidente para $\lambda = 4.3$ m en función de media longitud del hilo. a) Módulos; b) Parte real; c) Parte imaginaria.

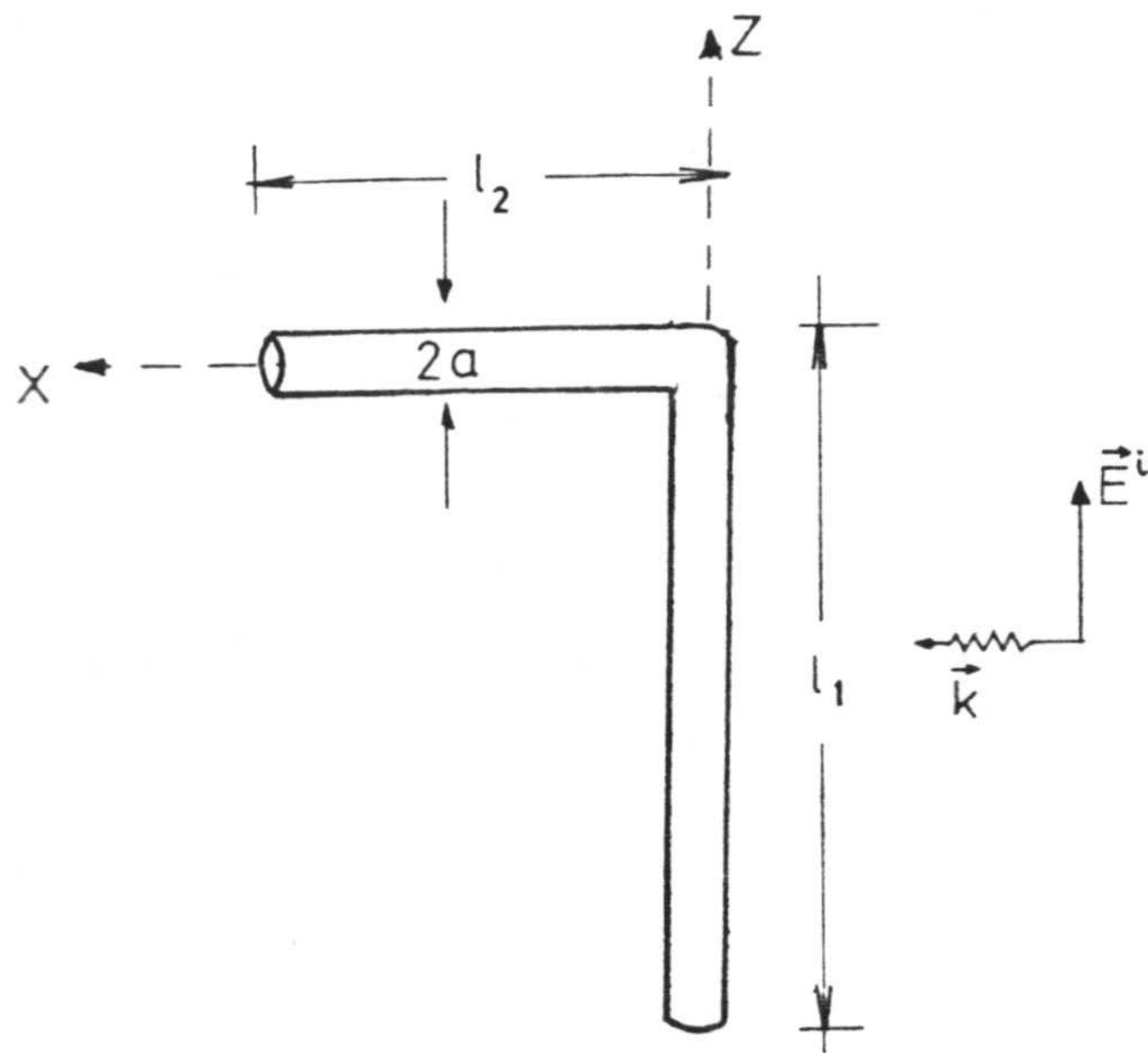


Fig. 4.15.- Geometría de la estructura de hilo.

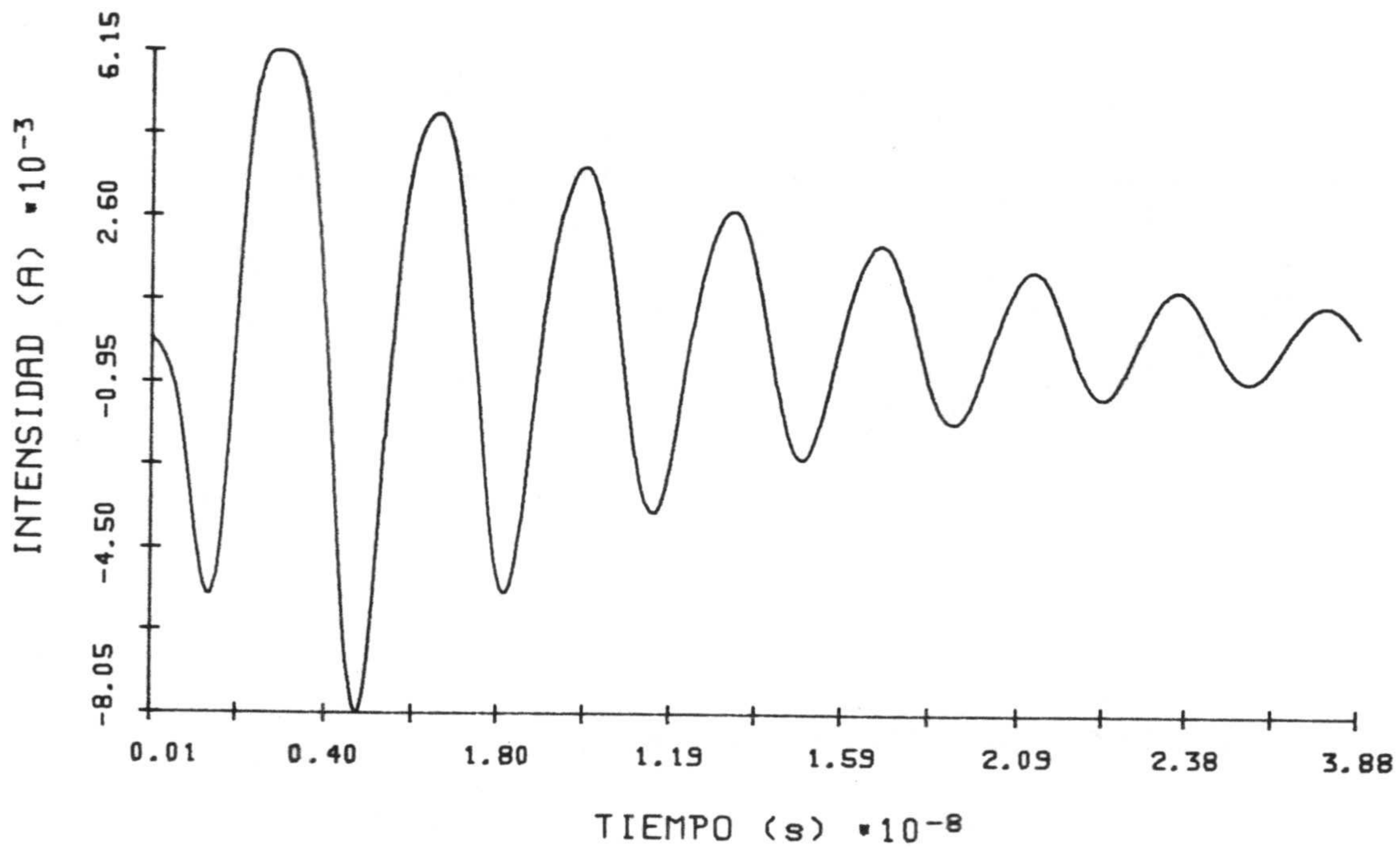


Fig. 4.16.- Intensidad en el centro del intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1, en la geometría de la Fig. 4.15, en función del tiempo (caso a) $l_1 = 0.333$ m; $l_2 = 0.166$ m).

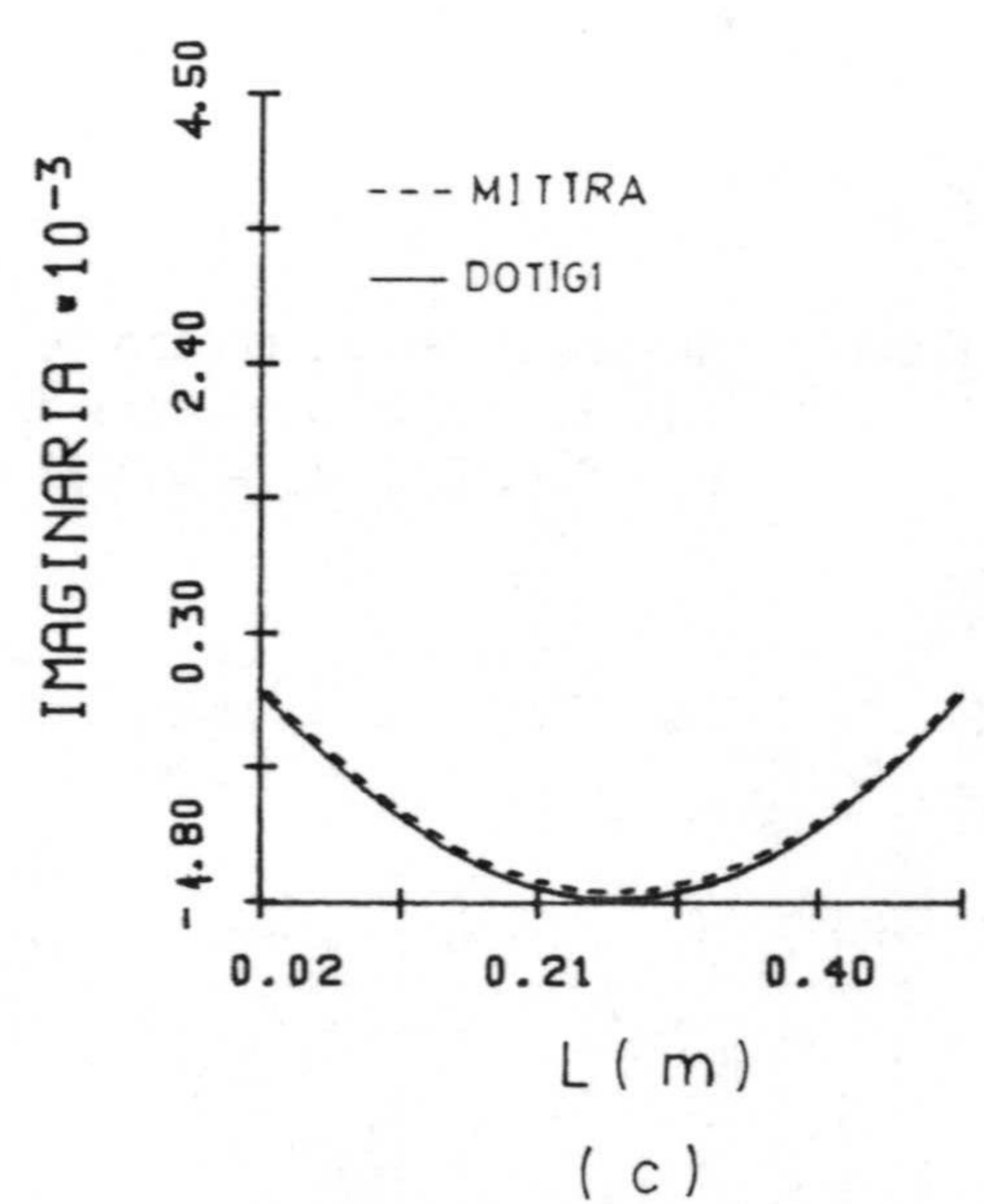
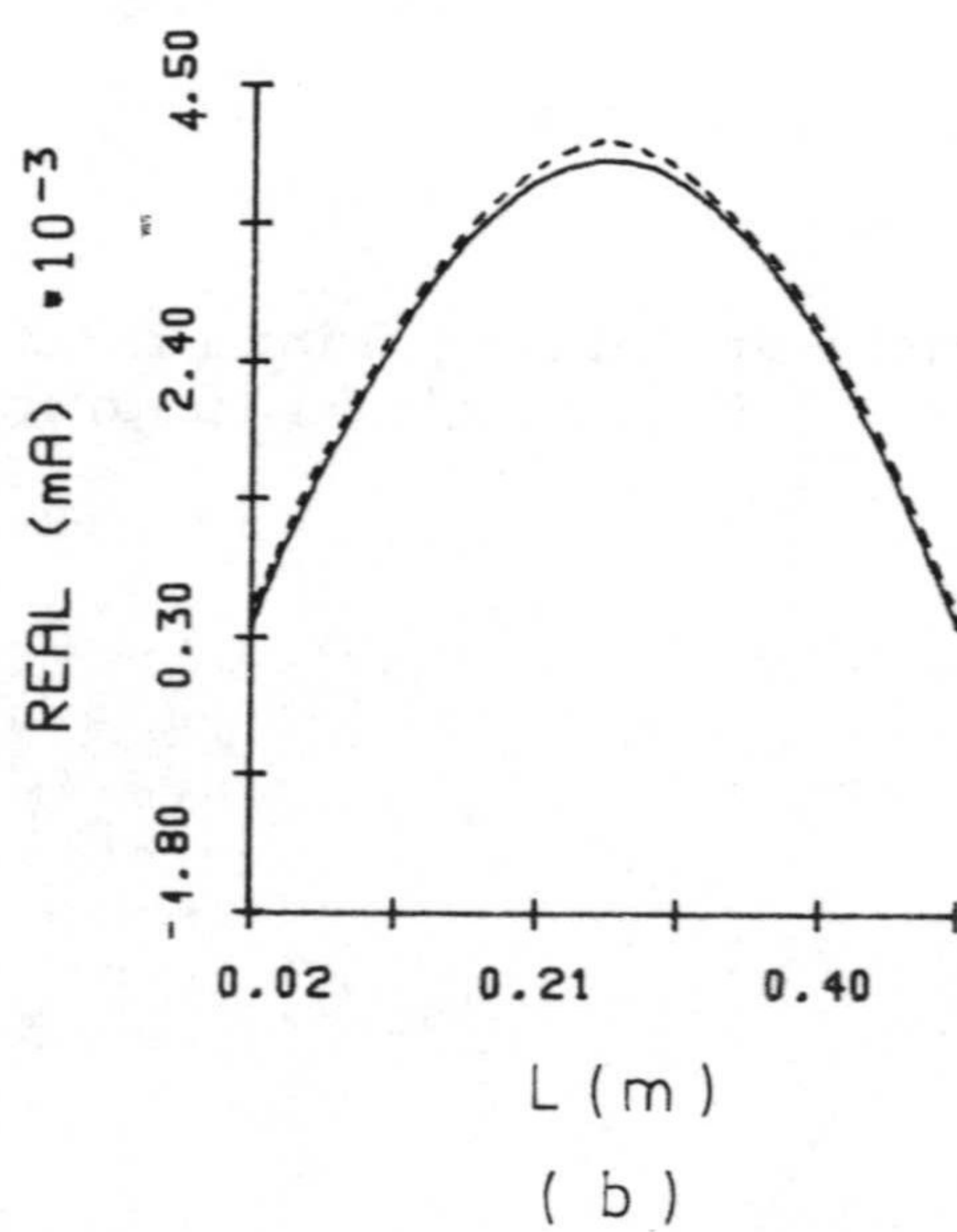
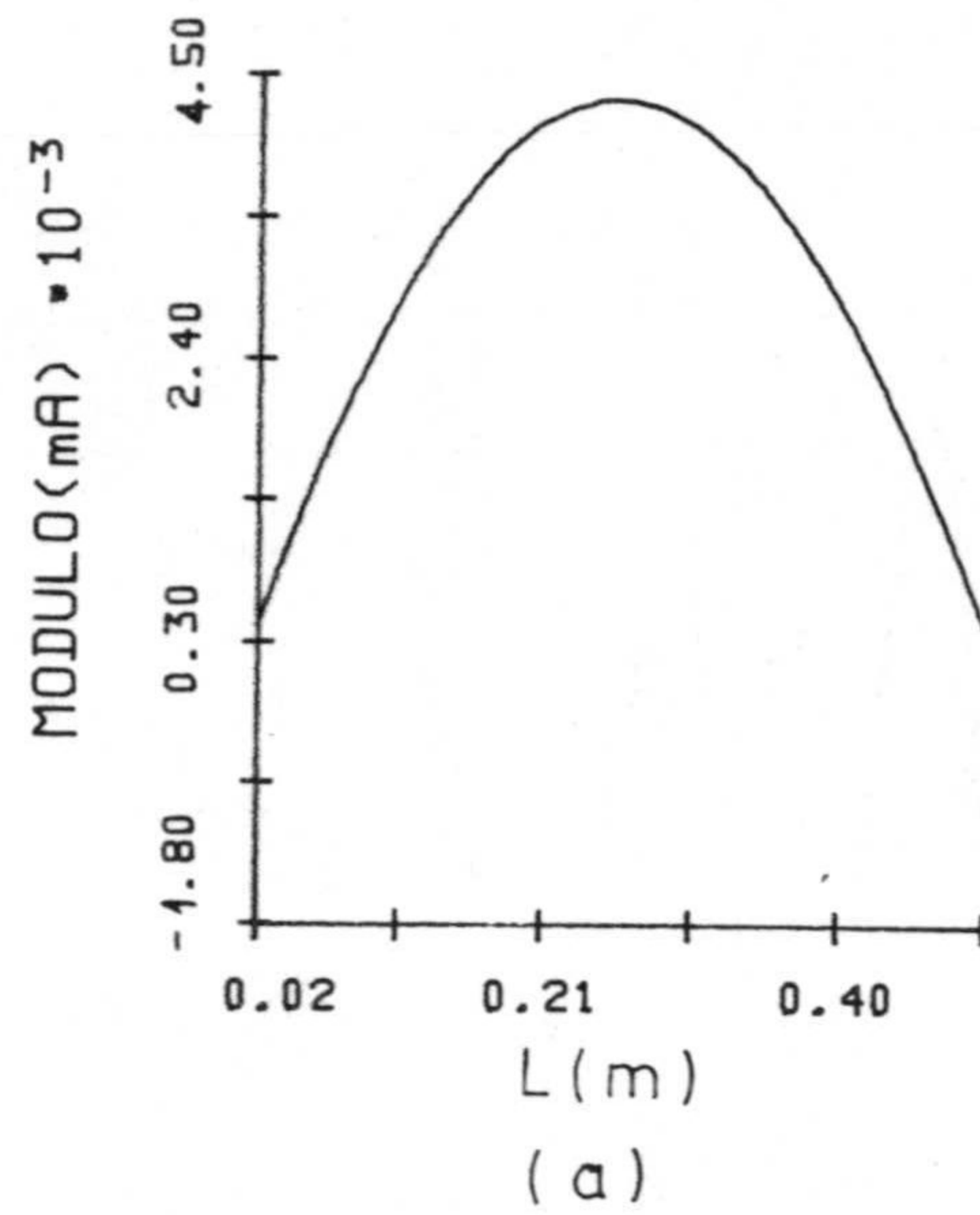


Fig. 4.17.- a) Módulo; b) Parte Real; c) Parte Imaginaria de la razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y campo incidente para $\lambda = 1$ m y para cada punto del hilo (Caso a) $l_1 = 0.333$ m; $l_2 = 0.166$ m).

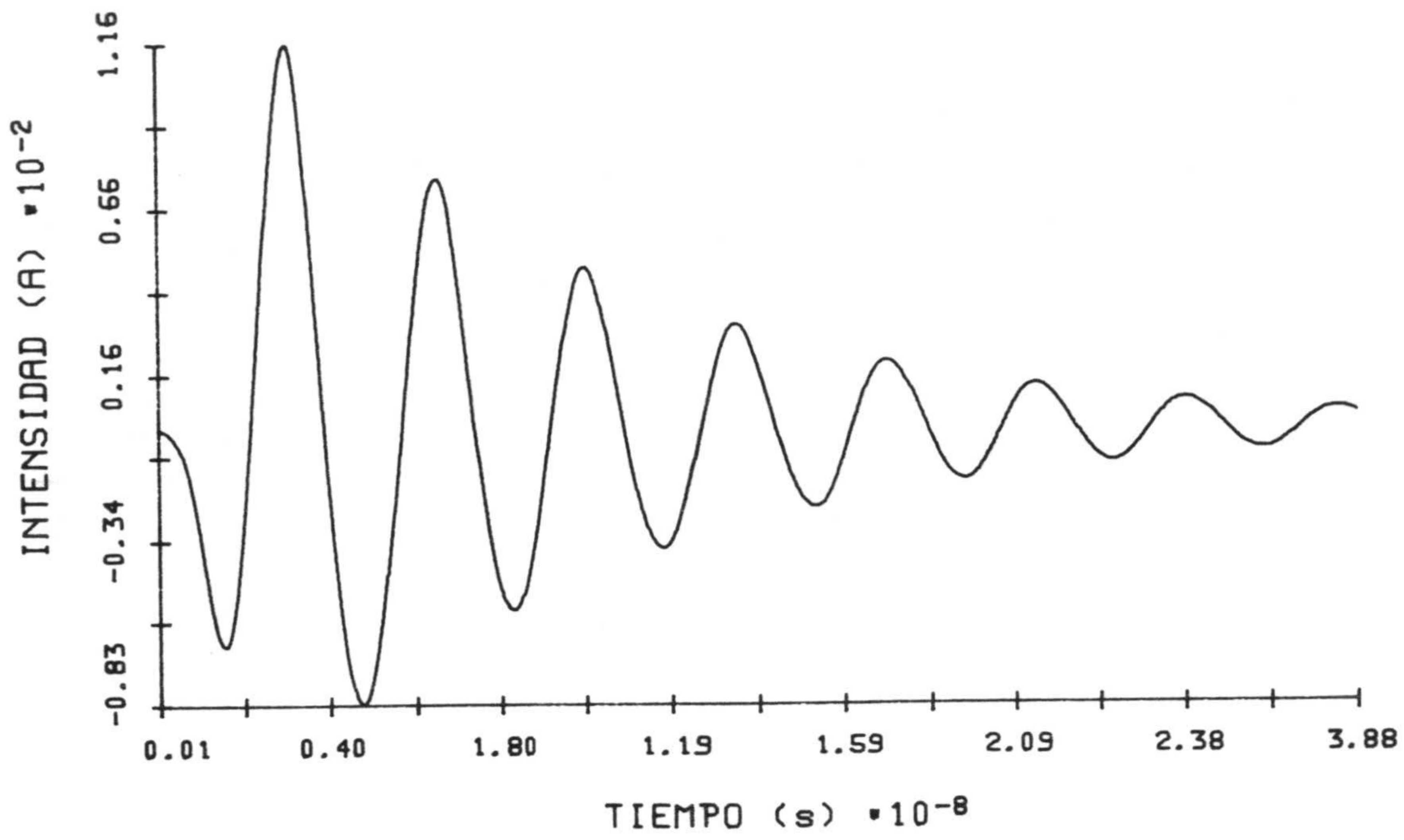
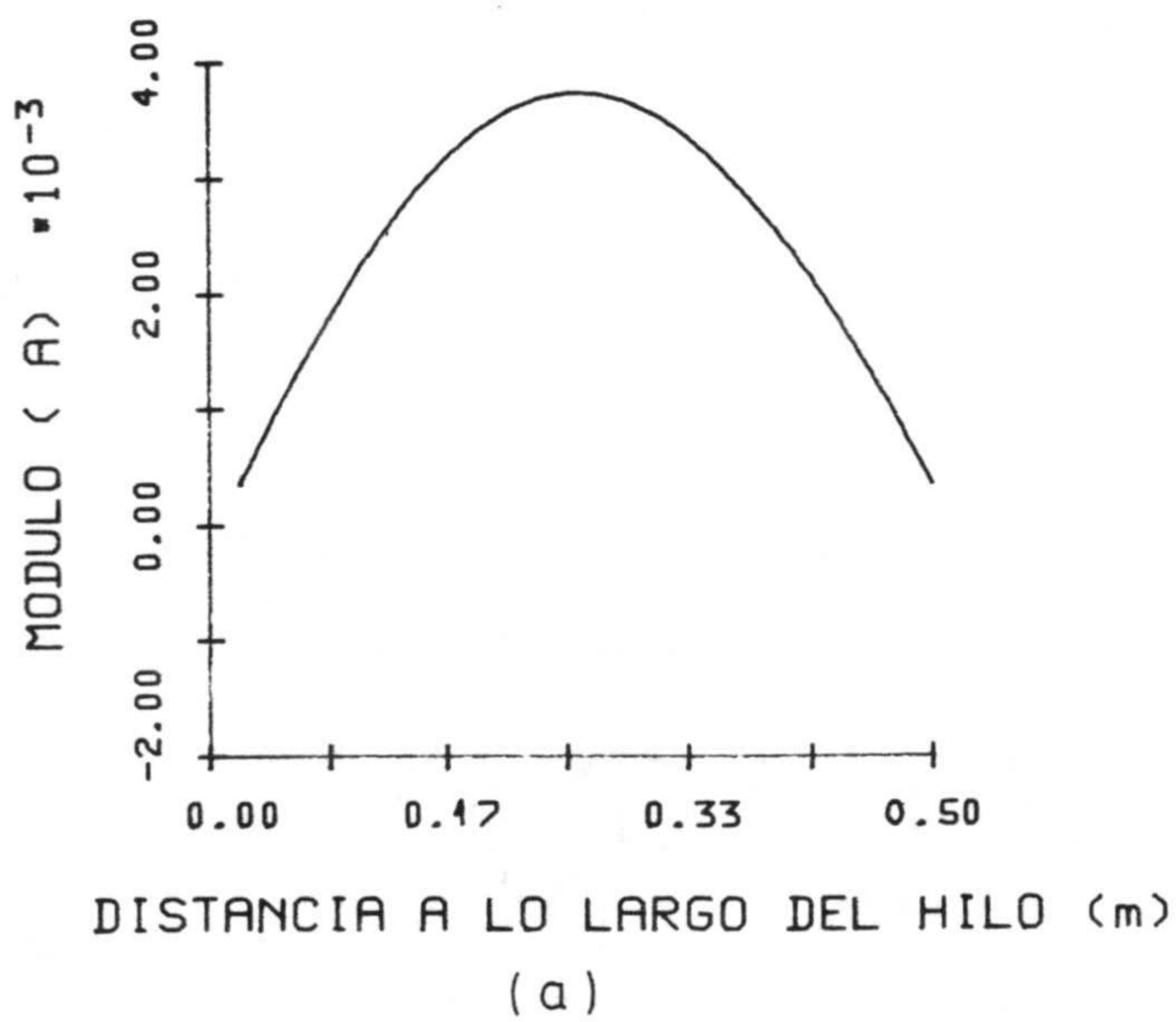


Fig. 4.18.- Intensidad en el centro del intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1, en la geometría de la Fig. 4.15, en función del tiempo (caso a) $l_1 = 0.4167$ m; $l_2 = 0.0833$ m).



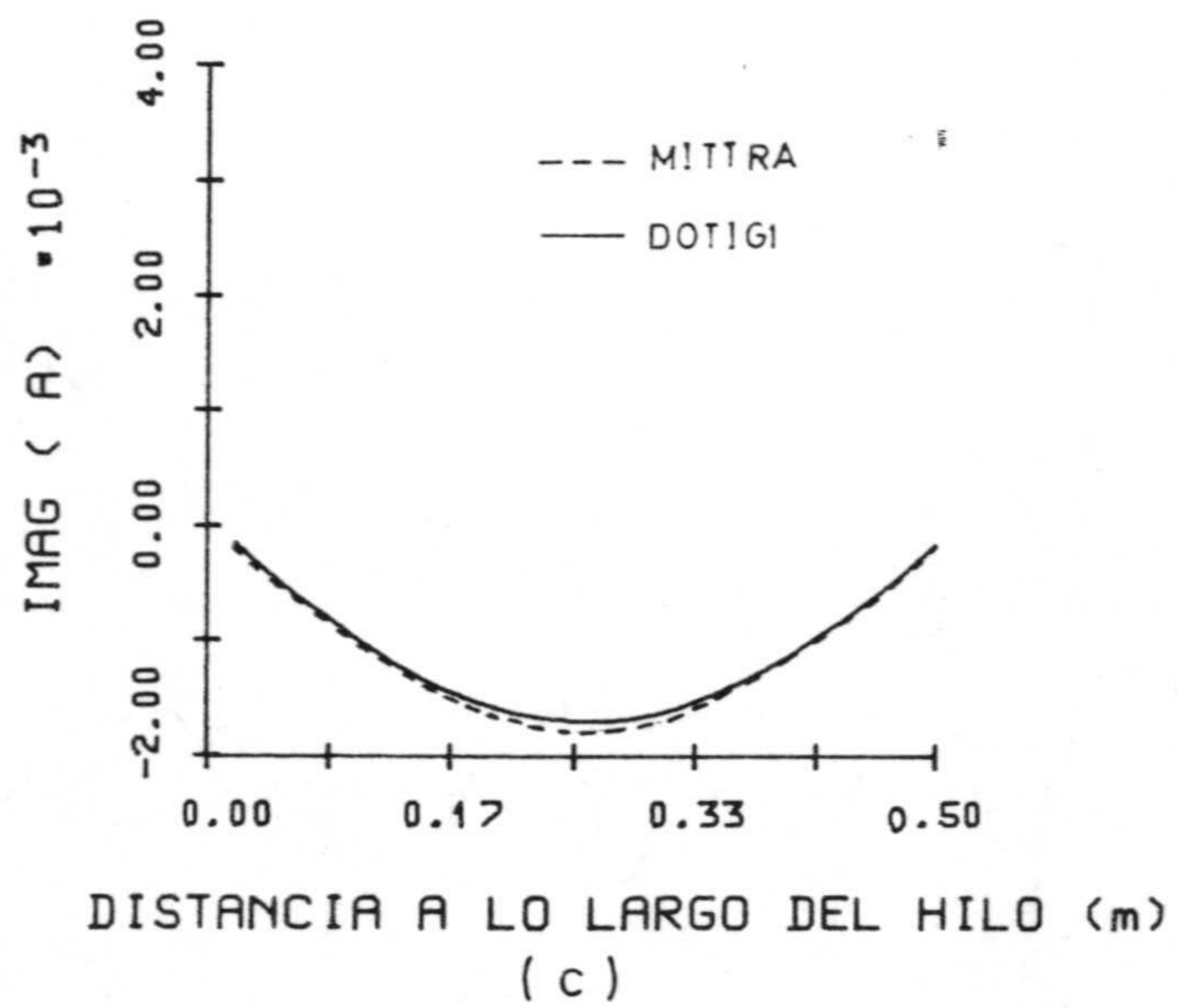
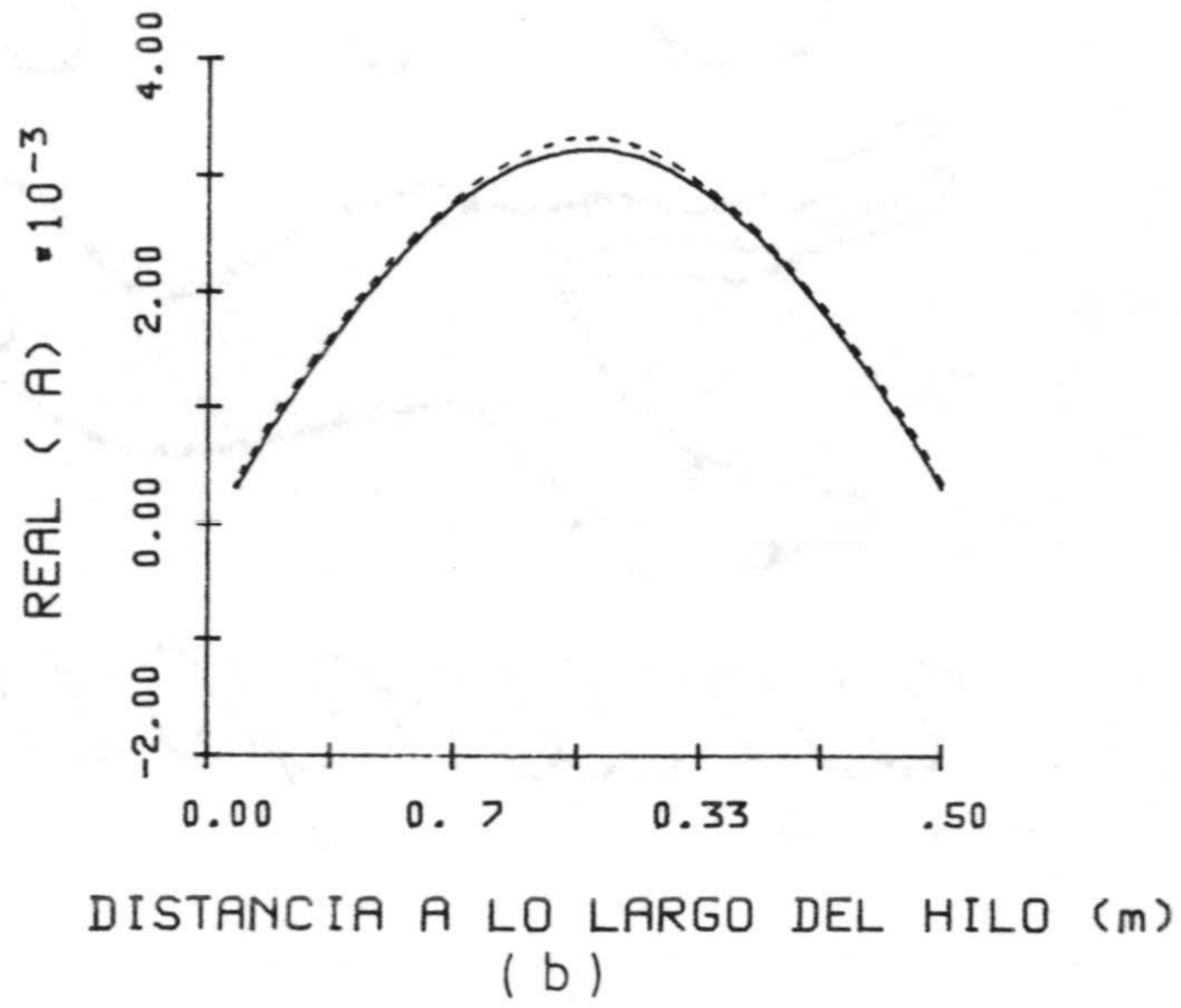


Fig. 4.19.- a) Módulo b) Parte Real c) Parte Imaginaria de la razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y campo incidente para $\lambda = 1$ m y para cada punto del hilo (Caso a) $l_1 = 0.4167$ m; $l_2 = 0.0833$ m).

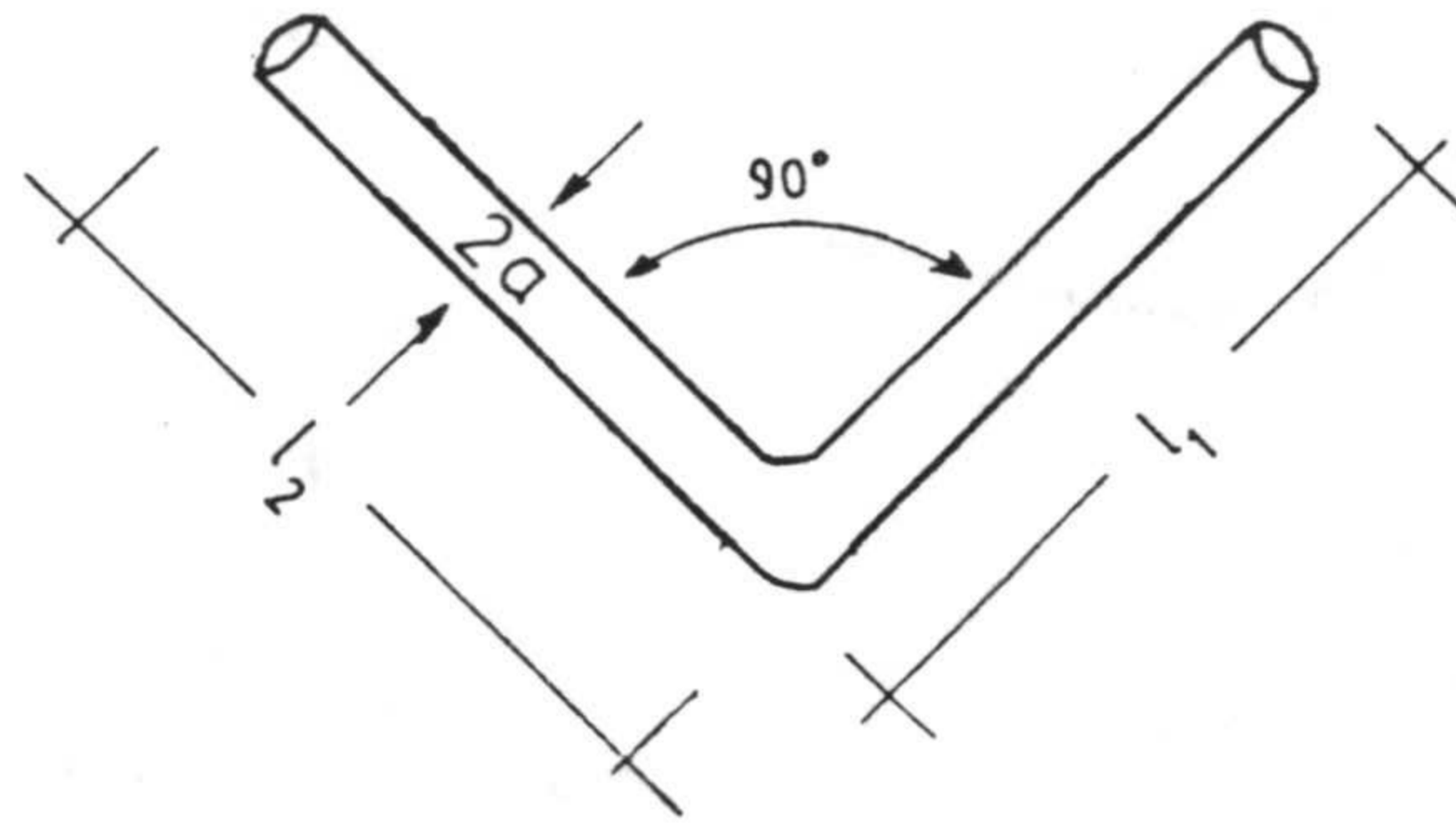


Fig.4.20.- Geometría del dipolo en "V". $l_1 = l_2 = 0.5$ m; $a = 0.00667$ m; $V_s(t) = \exp[-g^2(t-t_{\max})^2]$ con $g = 1.5 \cdot 10^9$ s⁻¹ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9}$ s.

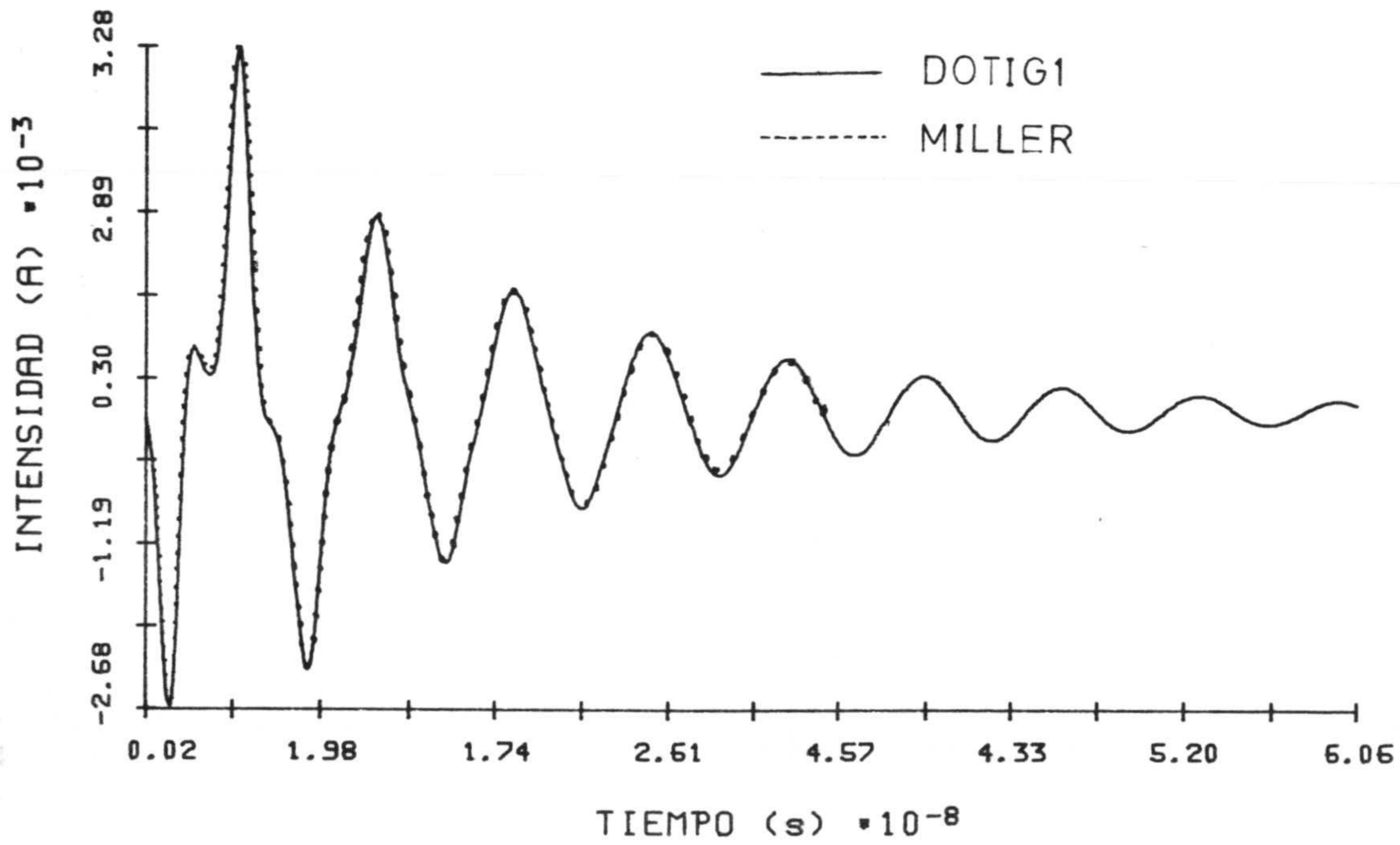
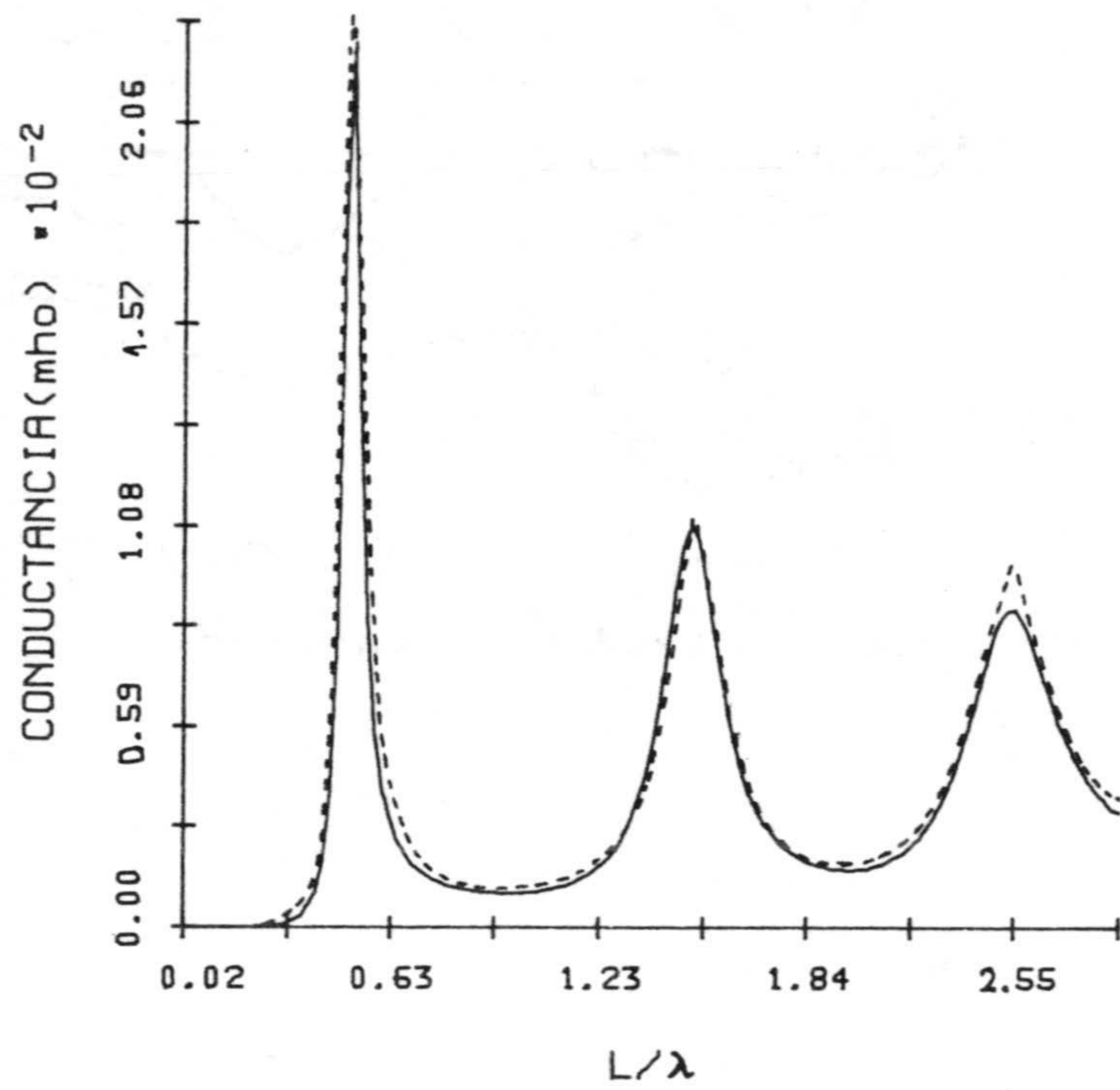
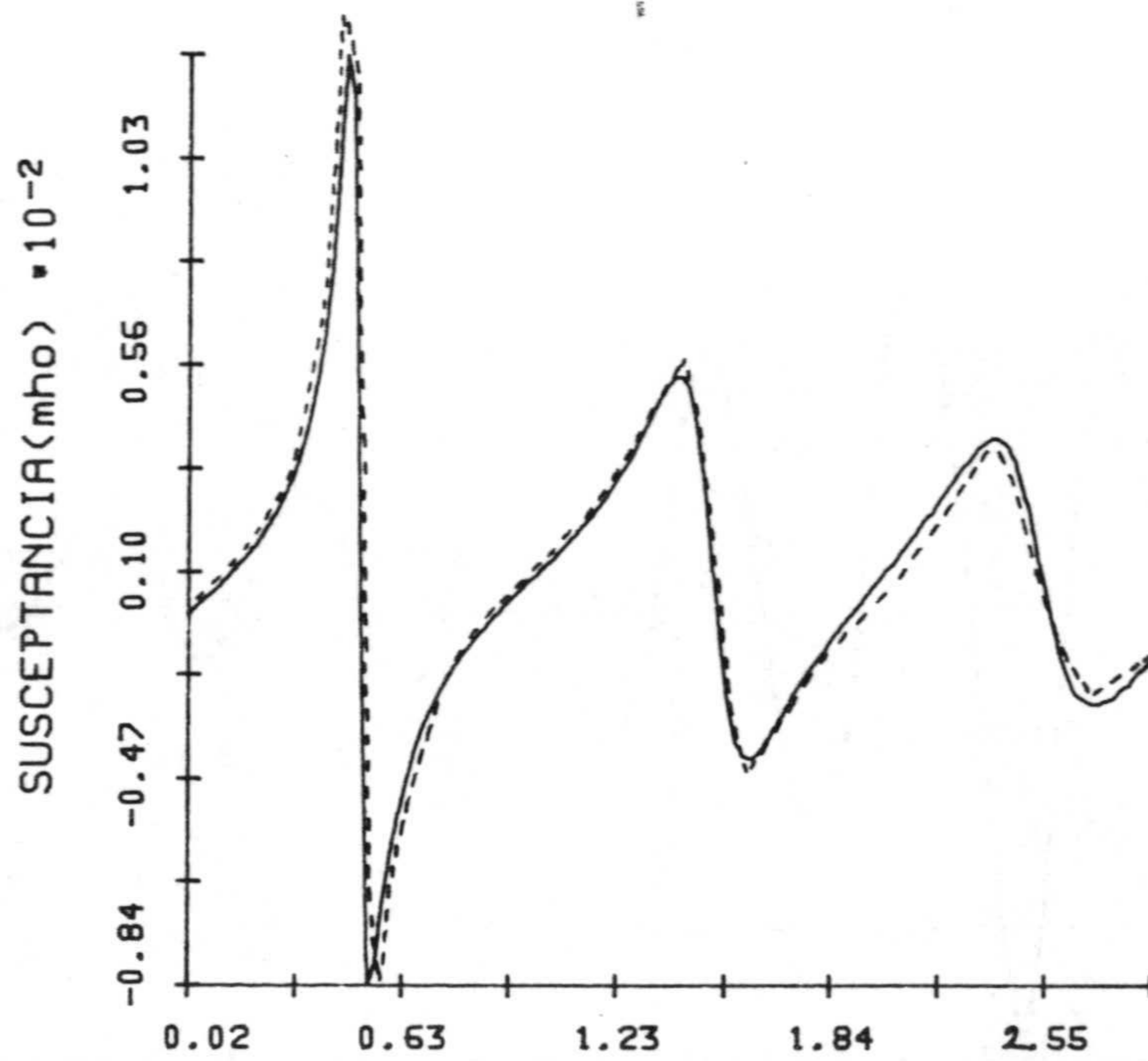


Fig. 4.21.- Intensidad de corriente en la alimentación en función del tiempo para el dipolo en "V" de la Fig. 4.20.



L/λ
(a)

— DOTIG1
- - - MILLER



L/λ
(b)

Fig. 4.22.- a) Conductancia b) Susceptancia de la entrada en función de L/λ para el dipolo en "V" de la Fig. 4.20.

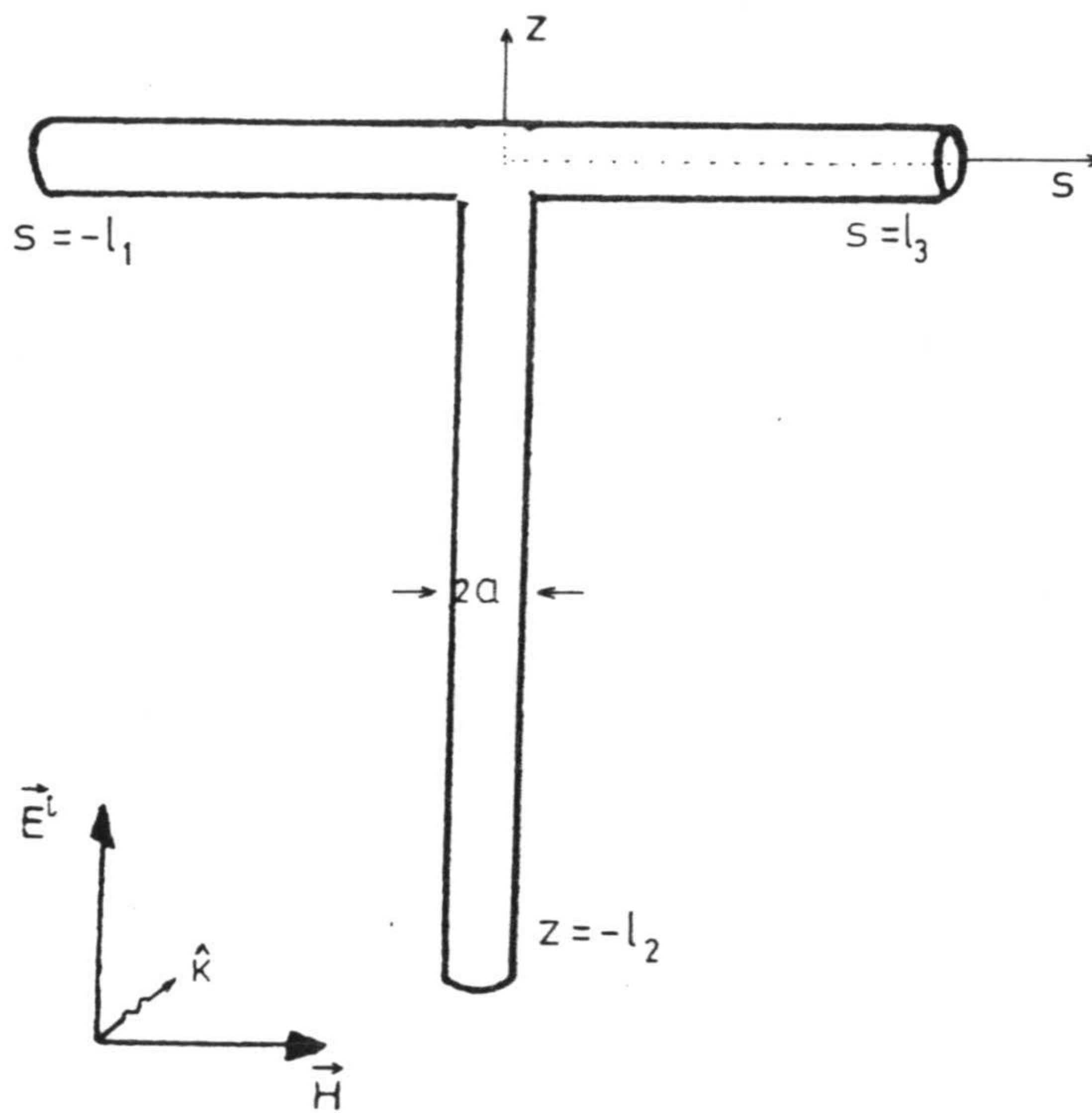


Fig. 4.23.- Geometría para una unión de tres hilos $l_1 = l_3 = 0.11$ m; $l_2 = 0.33$ m y $a = 0.00222$ m.

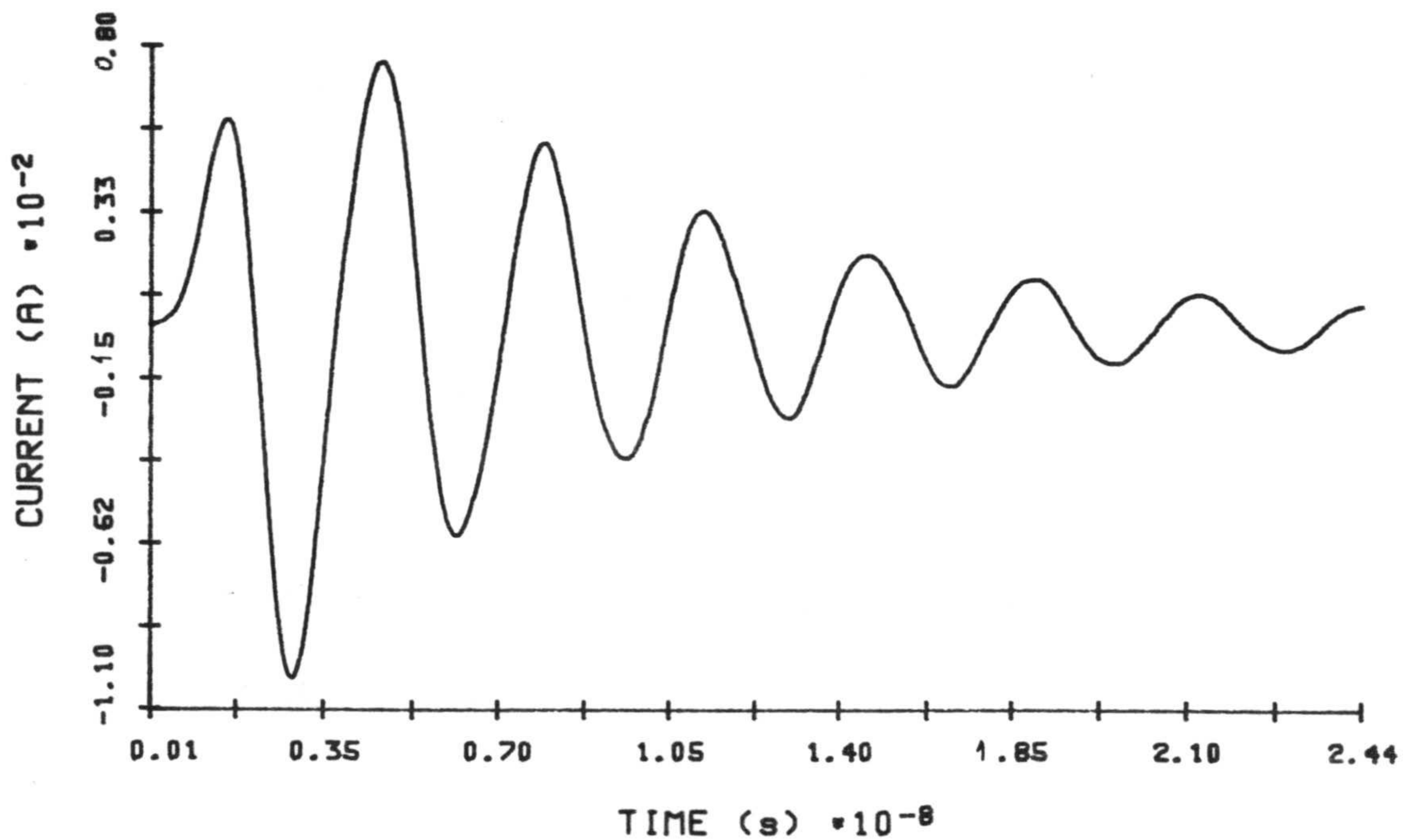
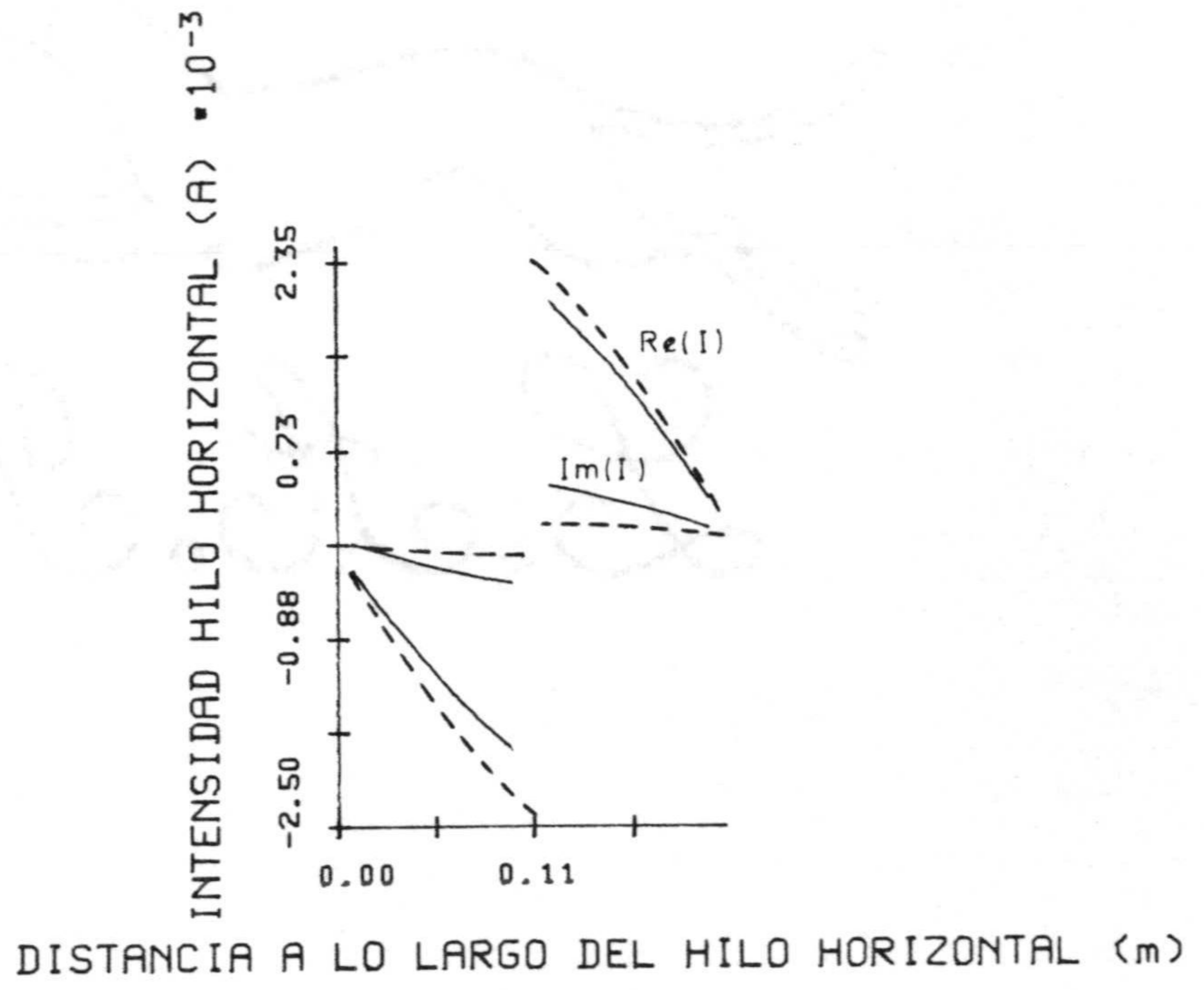
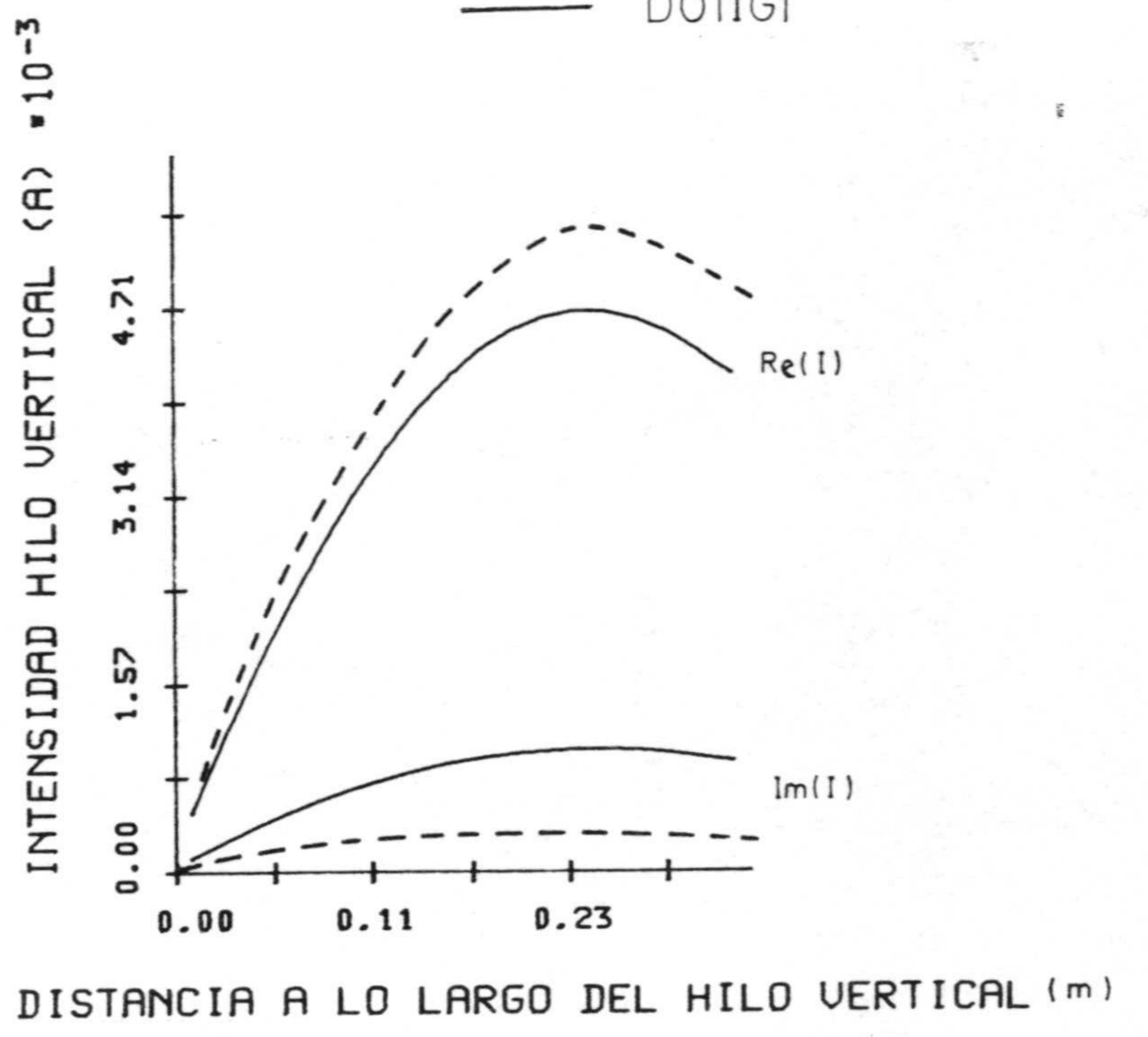


Fig. 4.24.- Intensidad en el intervalo más próximo a la unión del hilo 2 para el caso de la Fig. 4.23.

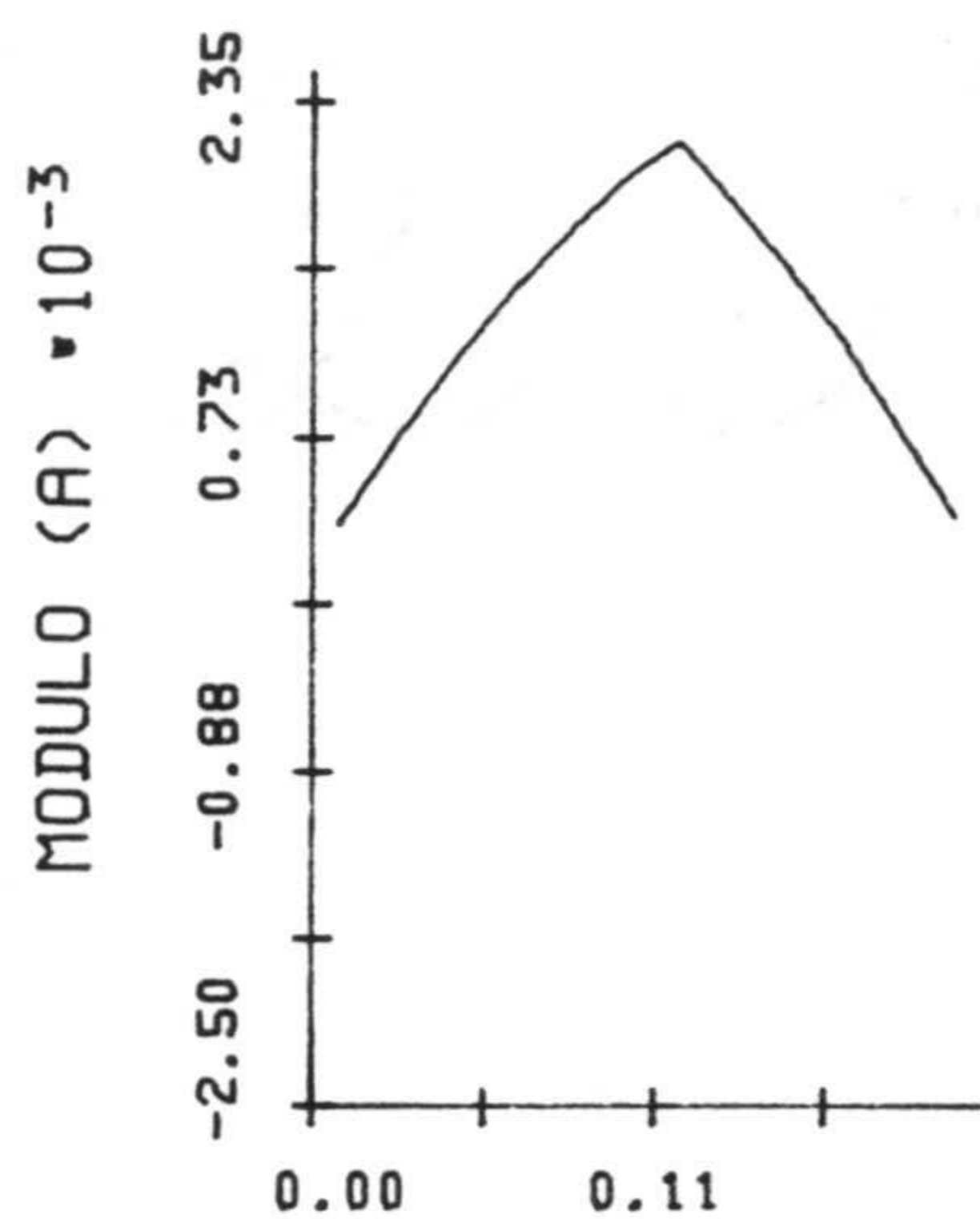


(a)

- - - CHAO
 ——— DOTIG1

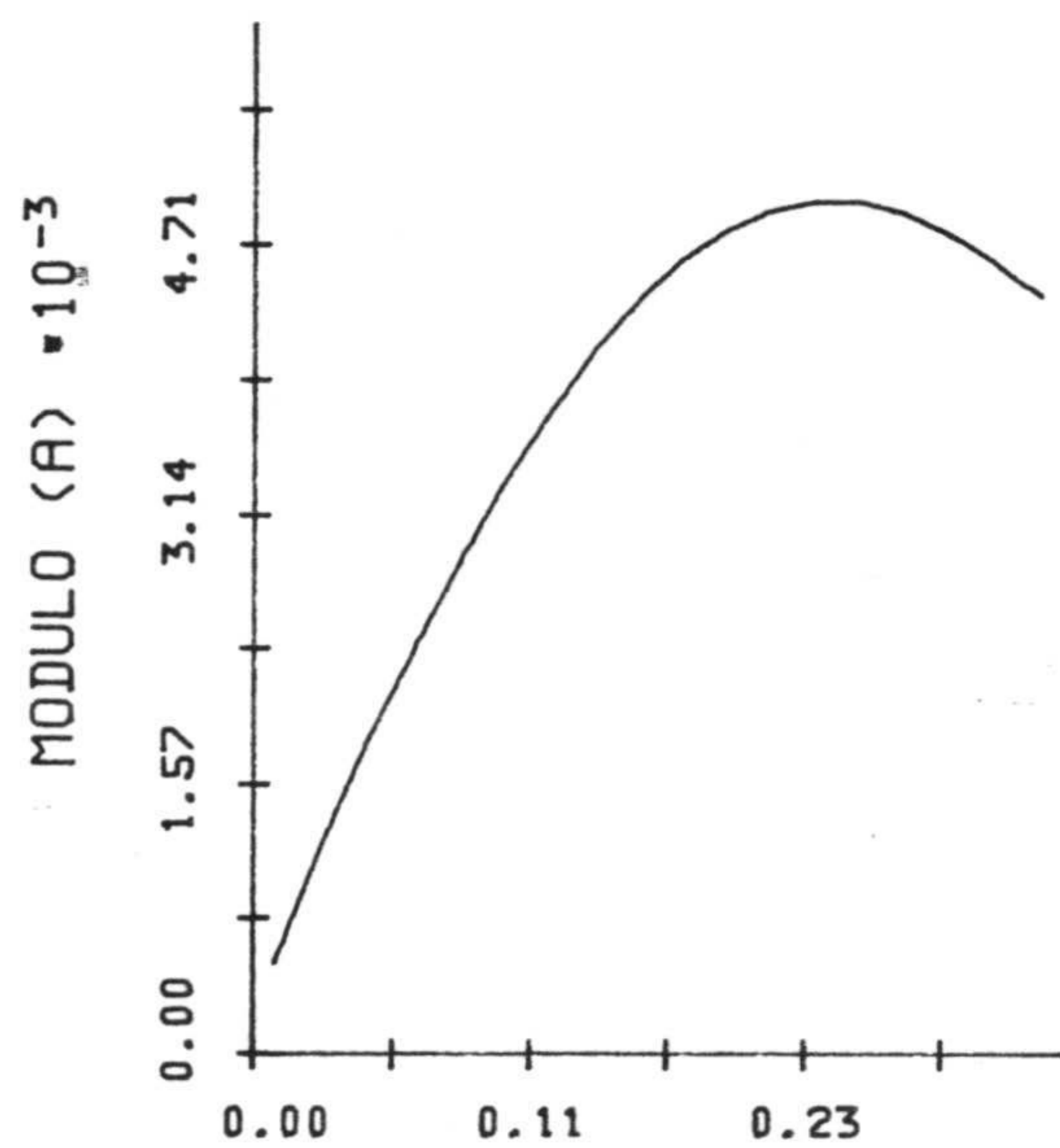


(b)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO HORIZONTAL (m)

(c)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO VERTICAL

(d)

Fig. 4.25.- Transformada de Fourier para $\lambda = 1$ m y campo unidad a) Real e Imaginaria hilo horizontal; b) Real e Imaginaria hilo vertical; c) Módulo hilo horizontal; d) Módulo hilo vertical (Ejemplo de la Fig. 4.23.).

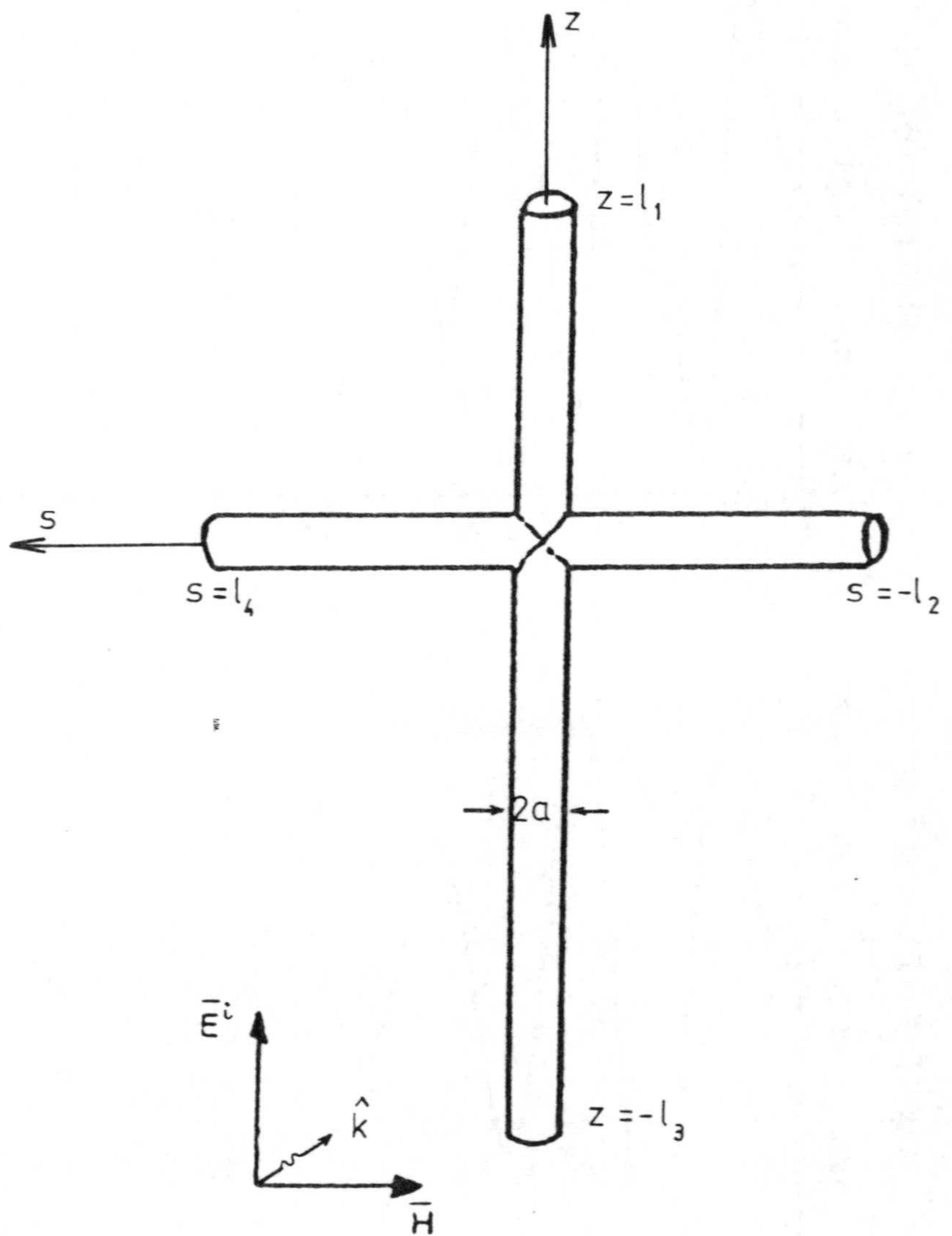
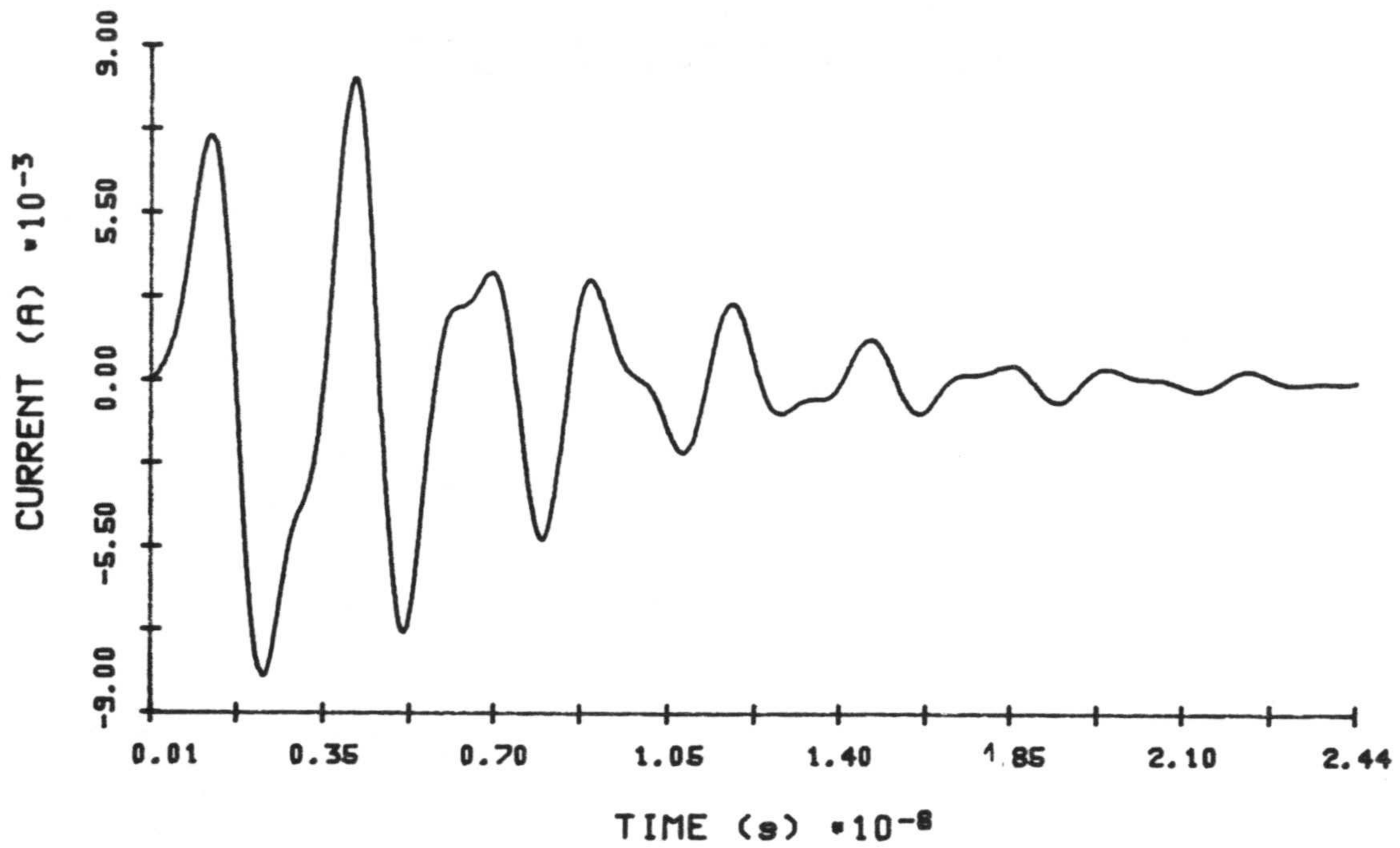
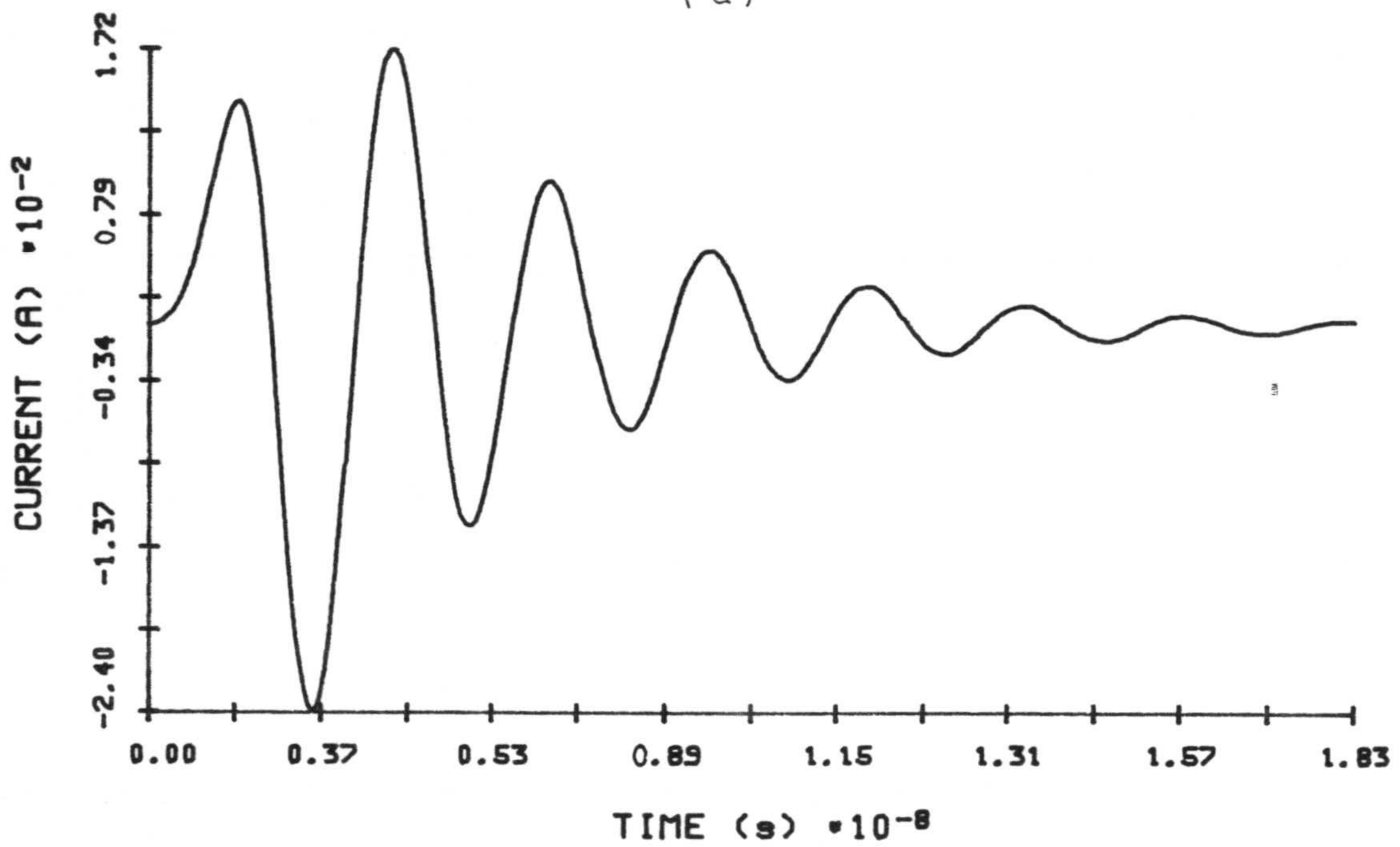


Fig. 4.26.- Geometría de una configuración de 4 hilos perpendiculares.



(a)



(b)

Fig. 4.27.- Intensidad en el segmento más próximo a la unión del hilo 1 en función del tiempo a) Caso $l_1 = l_2 = l_4 = 0.11$ m; $l_3 = 0.22$ m; b) Caso $l_1 = l_3 = 0.165$ m; $l_2 = l_4 = 0.11$ m.

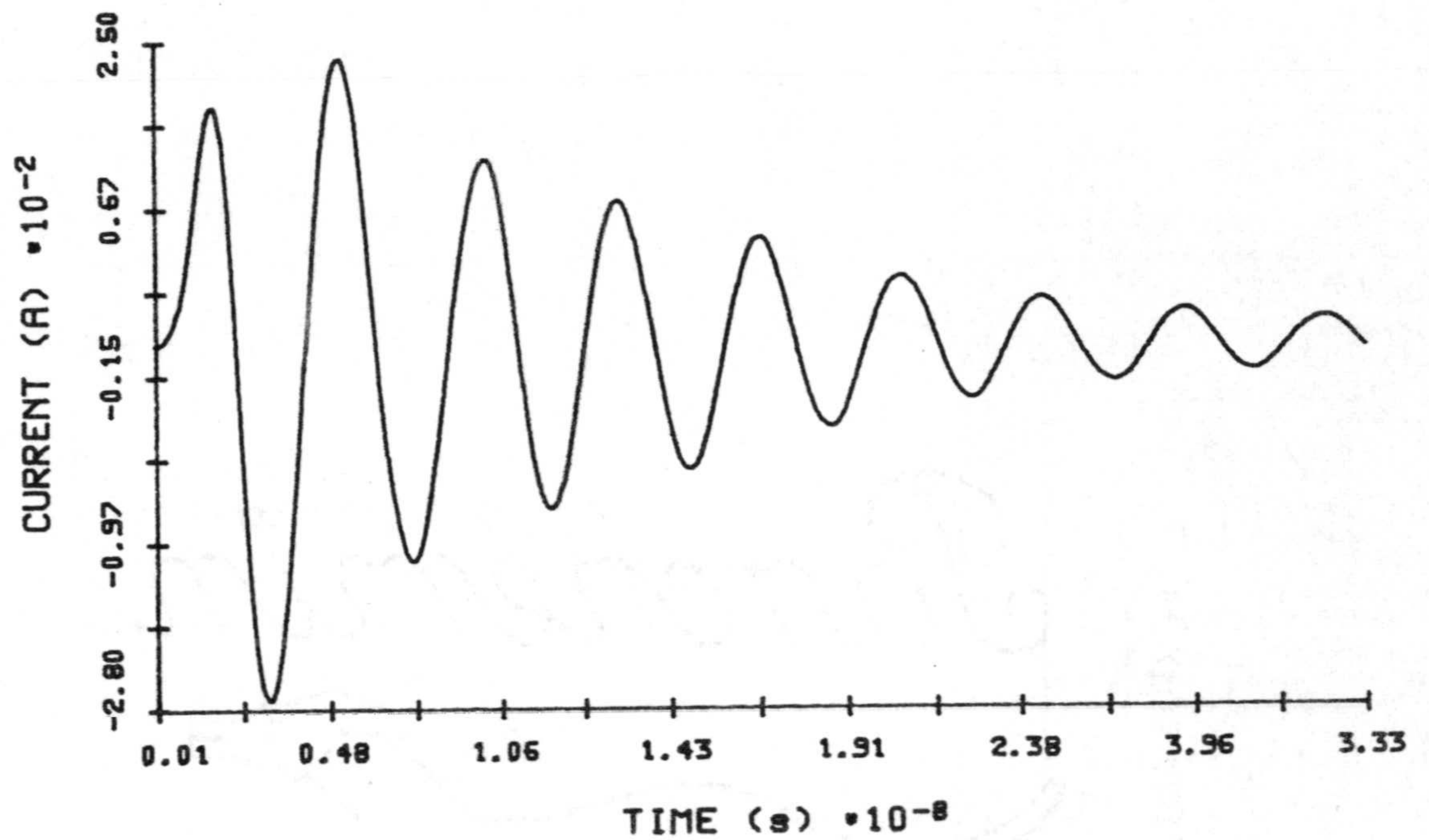


Fig. 4.28.- Intensidad en el segmento más próximo a la unión del hilo 1 en función del tiempo para la cruz de la Fig. 4.26 y el caso c ($l_1 = 0.2$ m; $l_2 = 0.3$ m; $l_3 = 0.15$ m; $l_4 = 0.25$ m; $a = 0.001$ m).

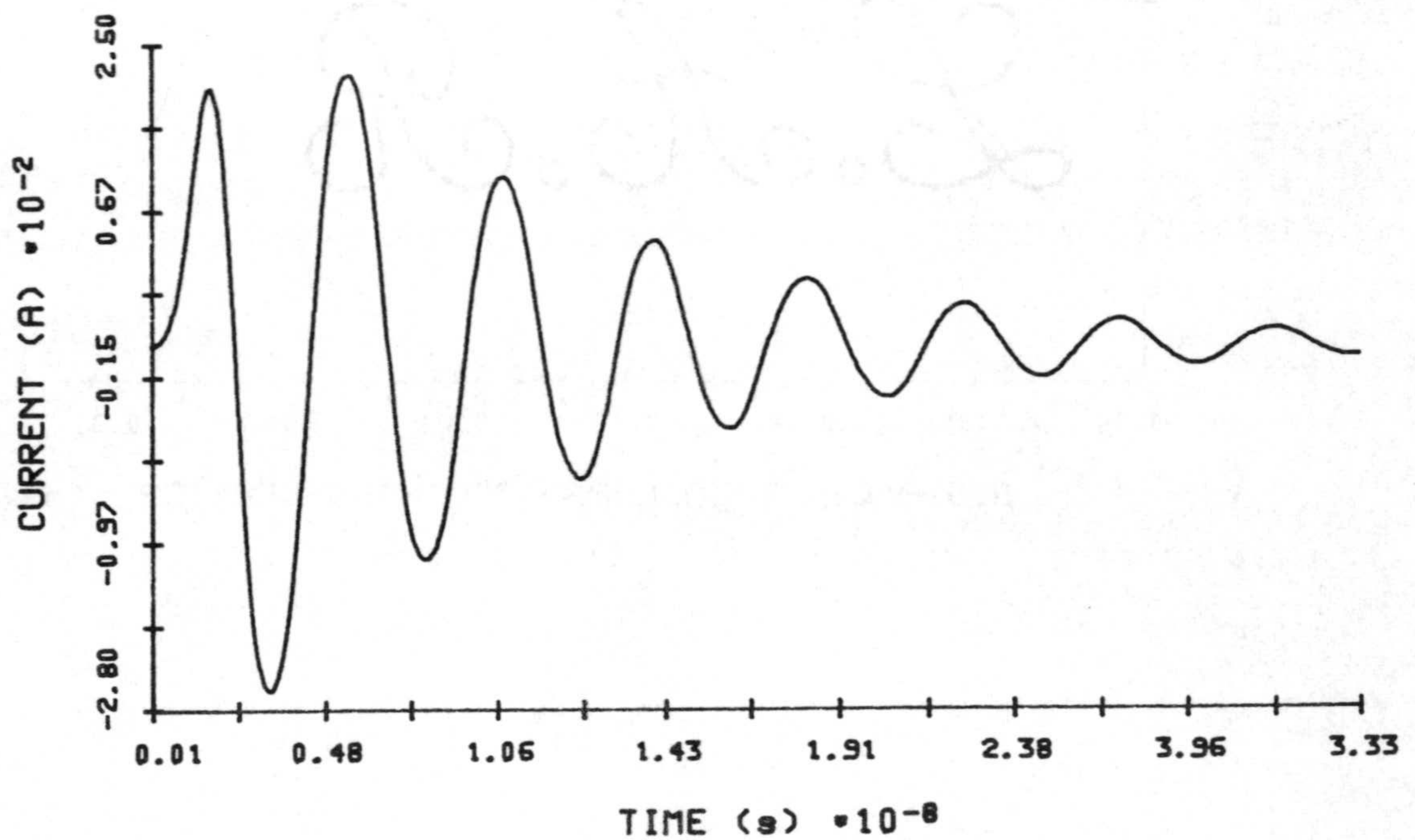
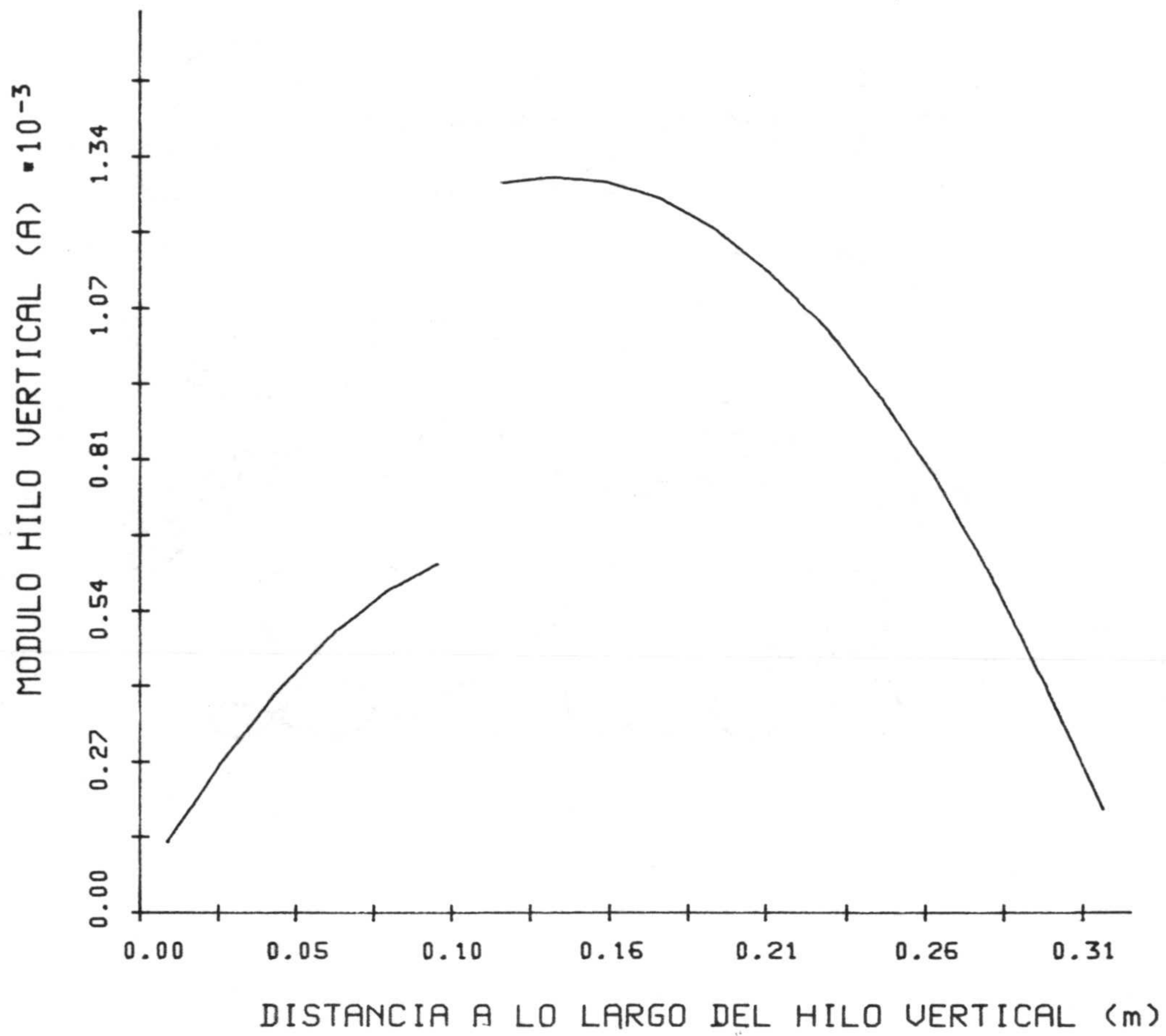
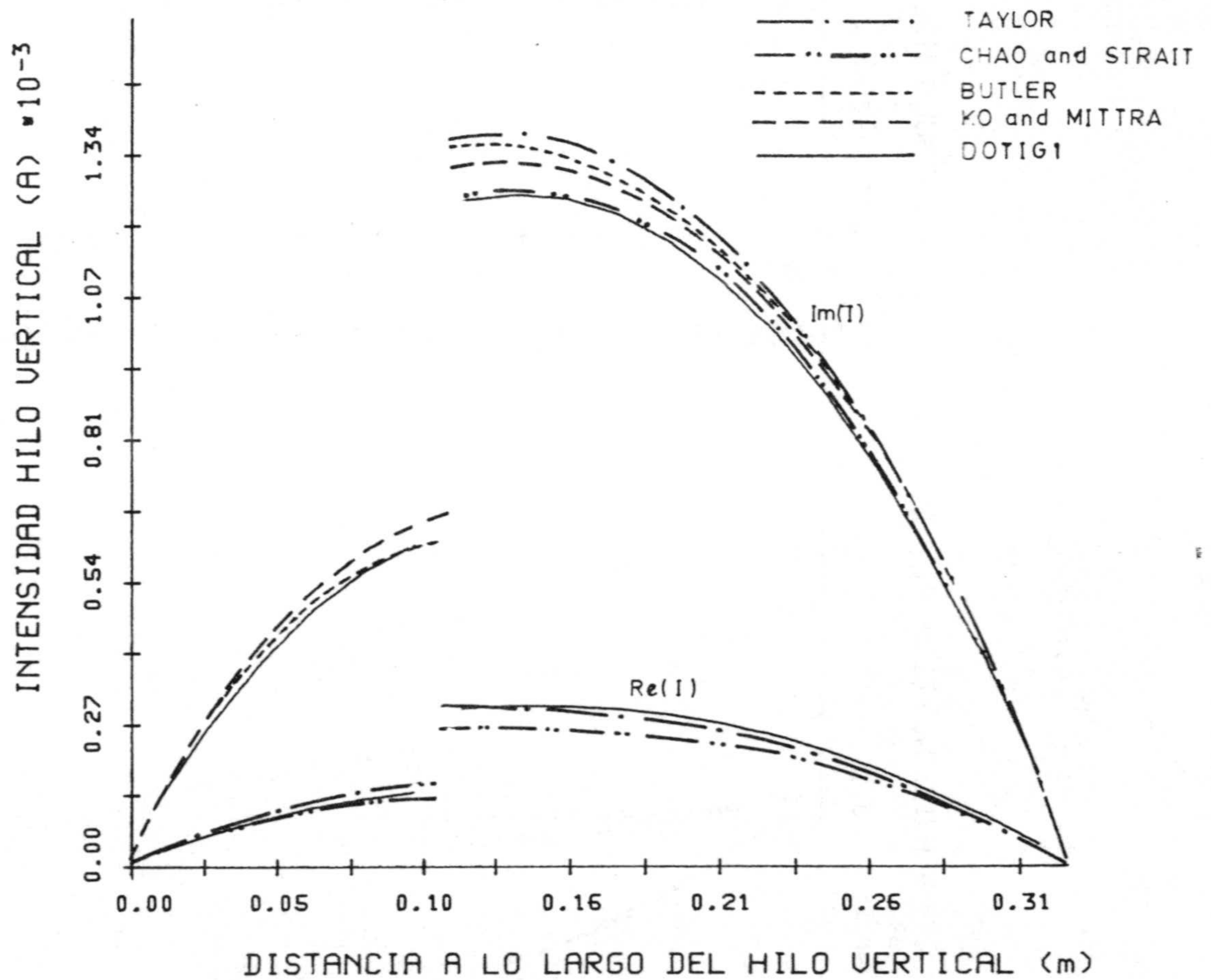


Fig. 4.29.- Intensidad en el segmento más próximo a la unión del hilo 1 en función del tiempo para la cruz de la Fig. 4.26 y el caso d ($l_1 = l_2 = 0.3$ m; $l_3 = l_4 = 0.2$ m; $a = 0.001$ m).



(a)



(b)

Fig. 4.30.- a) Módulo; b) Real e Imaginaria para $E^i = 1V/m$ y $\lambda = 1 m$ en el hilo vertical de la cruz de la Fig. 4.26 obtenidos dividiendo la transformada de Fourier de la intensidad por la del campo incidente E^i . ($l_1 = l_2 = l_4 = 0.11 m$; $l_3 = 0.22 m$).

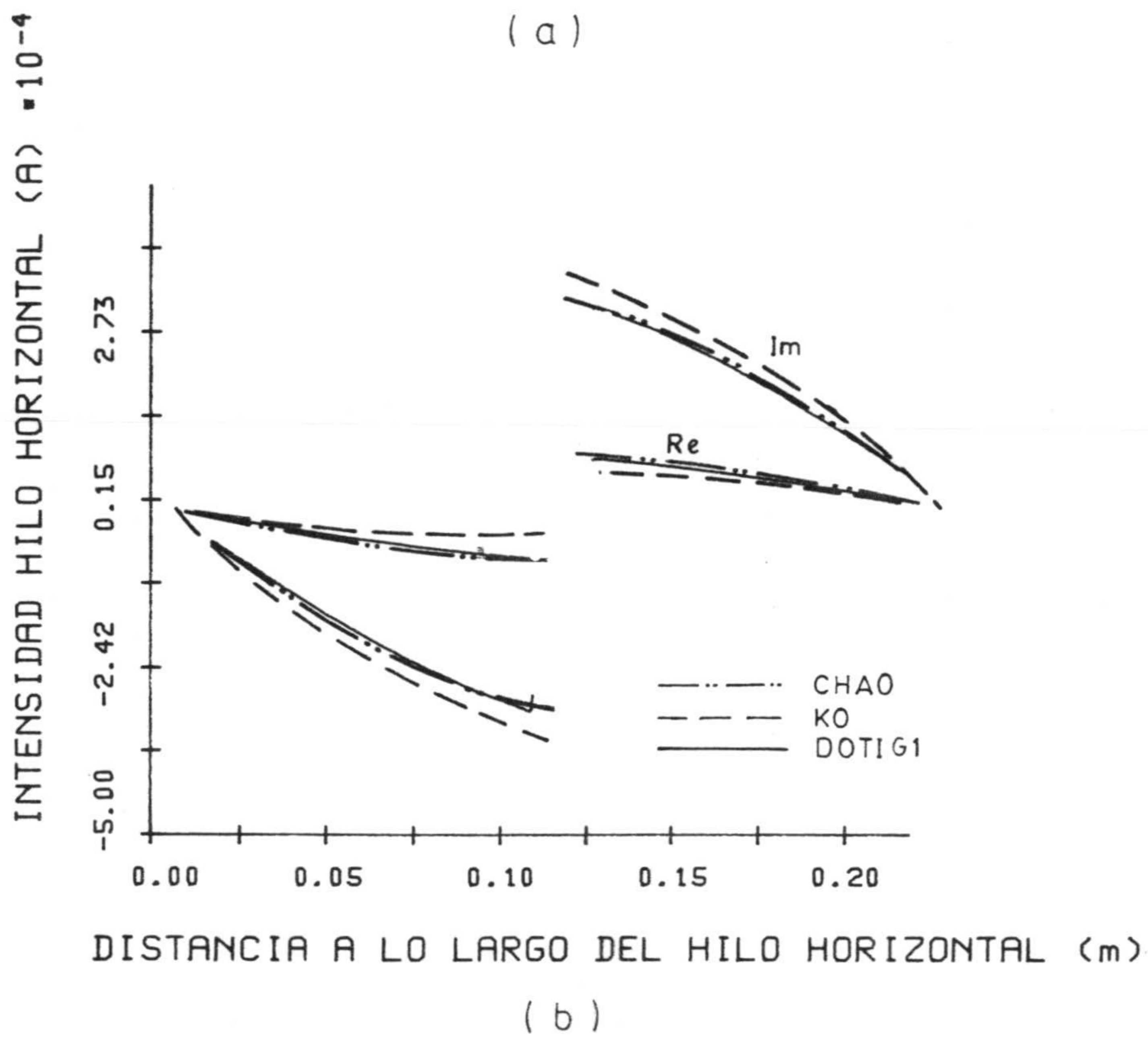
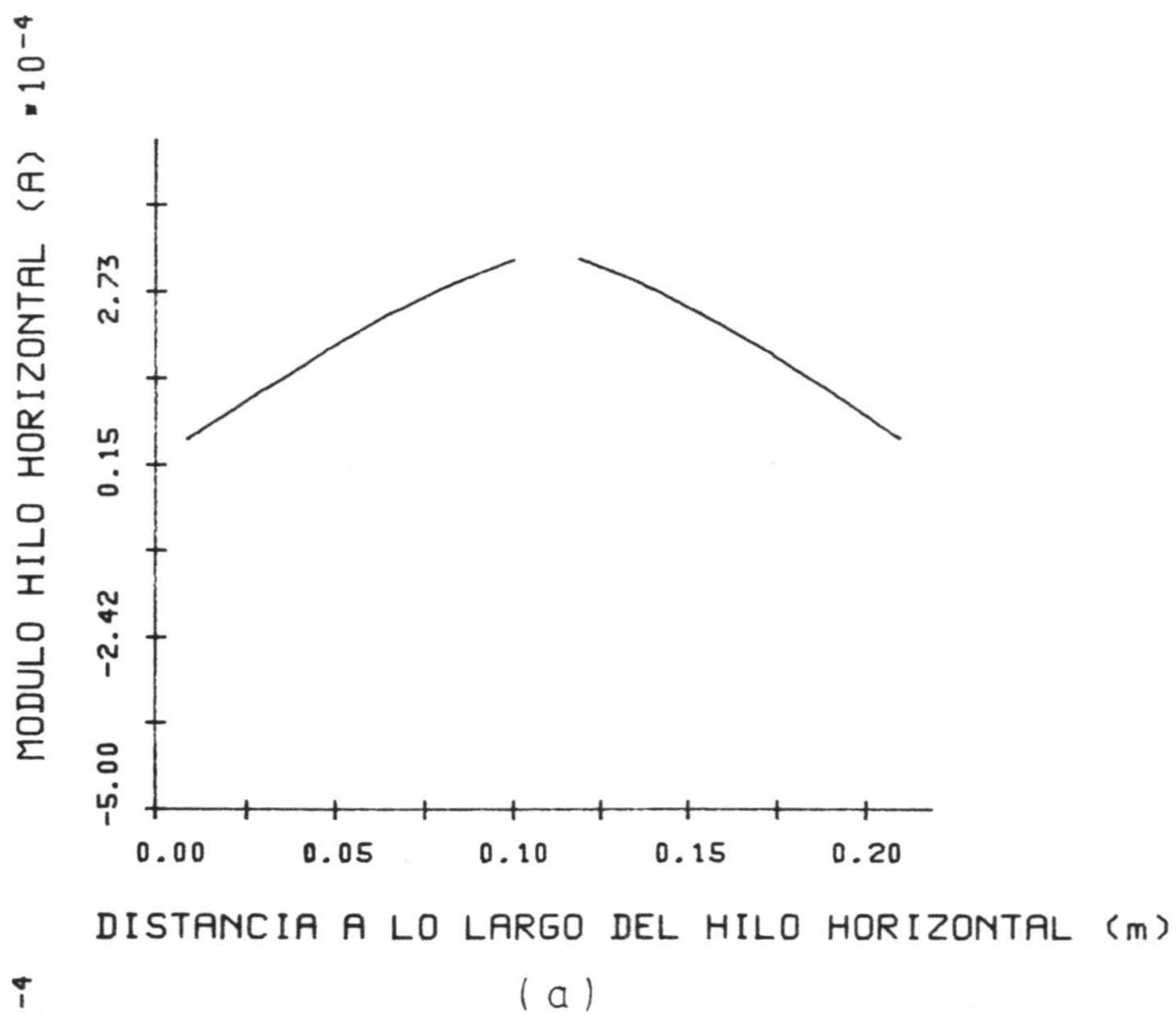
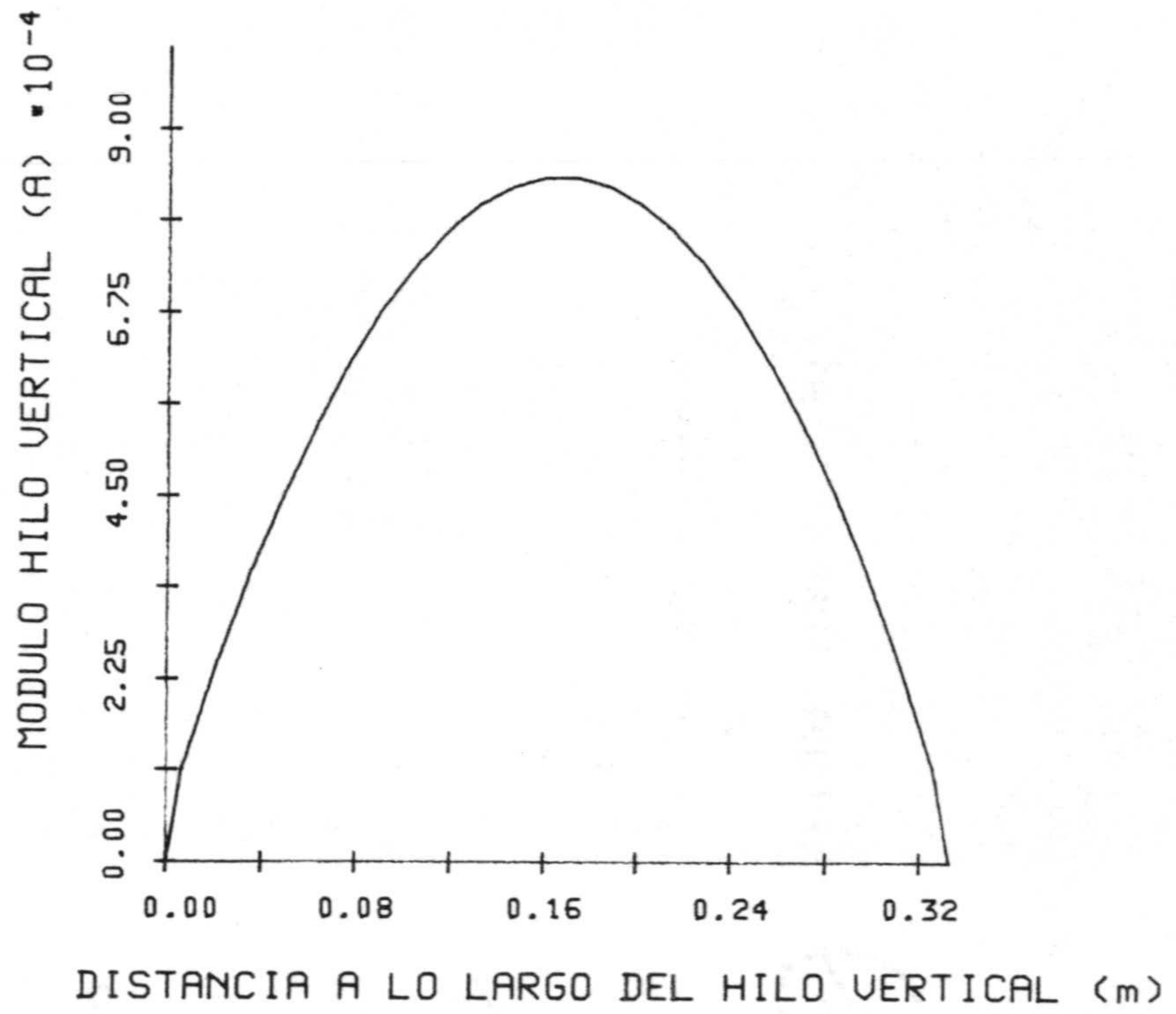
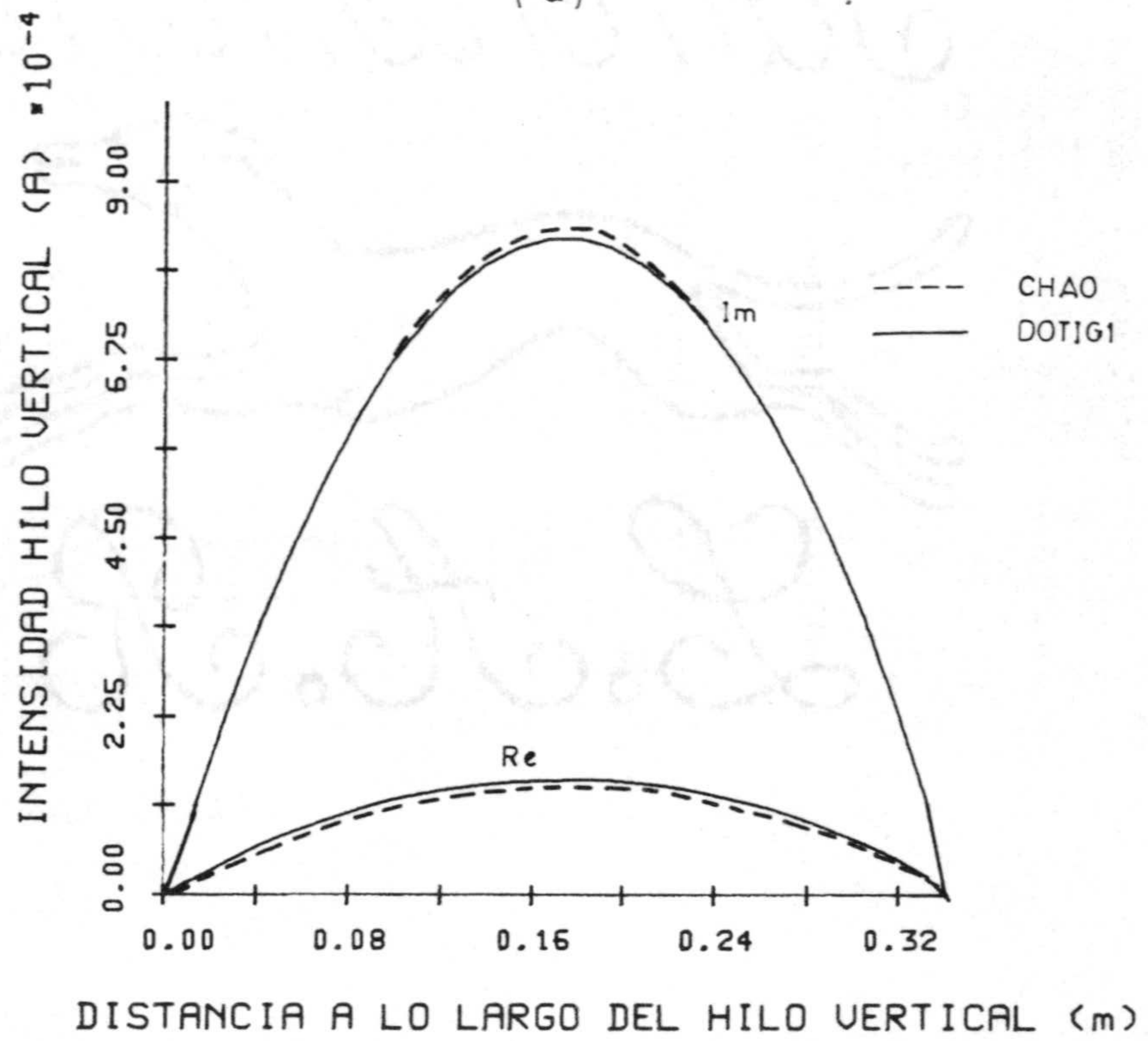


Fig. 4.31.- a) Módulo; b) Real e Imaginaria para $E^i = 1V/m$ y $\lambda = 1 m$ en el hilo horizontal de la cruz de la Fig. 4.26 obtenidos dividiendo la transformada de Fourier de la intensidad por la del campo incidente E^i . ($l_1 = l_2 = l_4 = 0.11 m$; $l_3 = 0.22 m$).



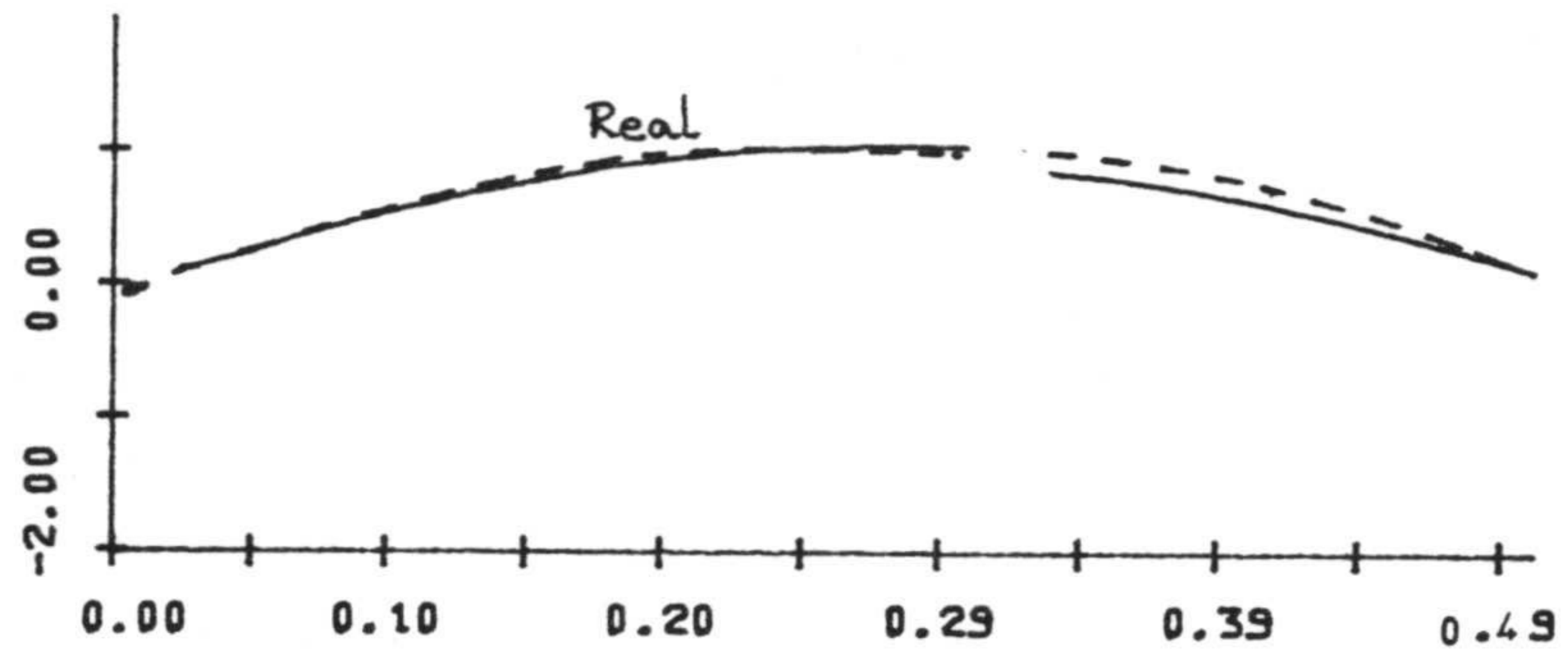
(a)



(b)

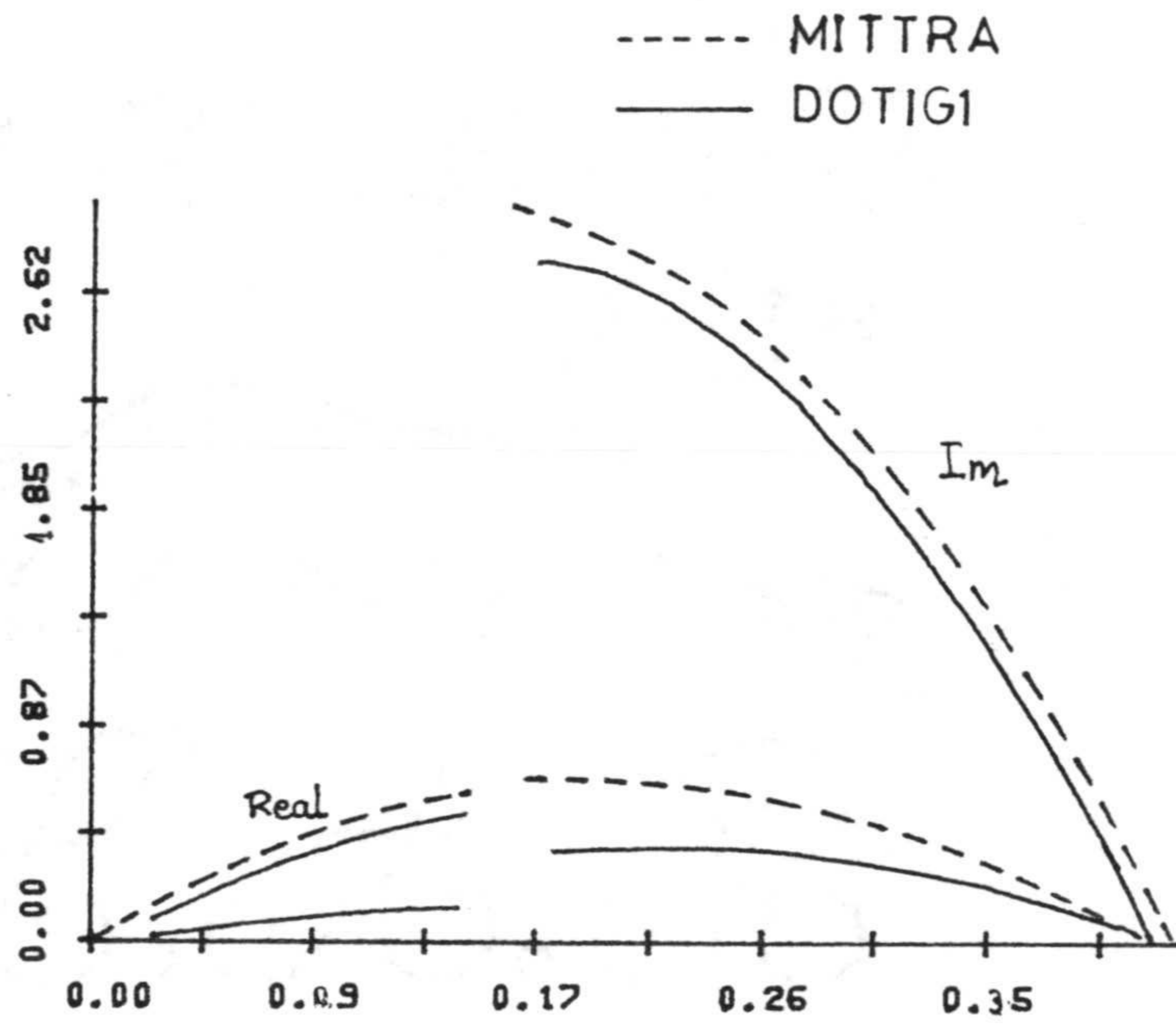
Fig. 4.32.- a) Módulo; b) Real e Imaginaria para campo unidad y $\lambda = 1$ m en el hilo vertical de la cruz de la Fig. 4.26, obtenidos de la razón entre las transformadas de Fourier de la intensidad y el campo aplicado E^1 . ($l_1 = l_3 = 0.165$ m; $l_2 = l_4 = 0.11$ m).

VERTICAL CURRENT (A) $\cdot 10^{-3}$



(a)

HORIZONTAL CURRENT (A) $\cdot 10^{-3}$



(b)

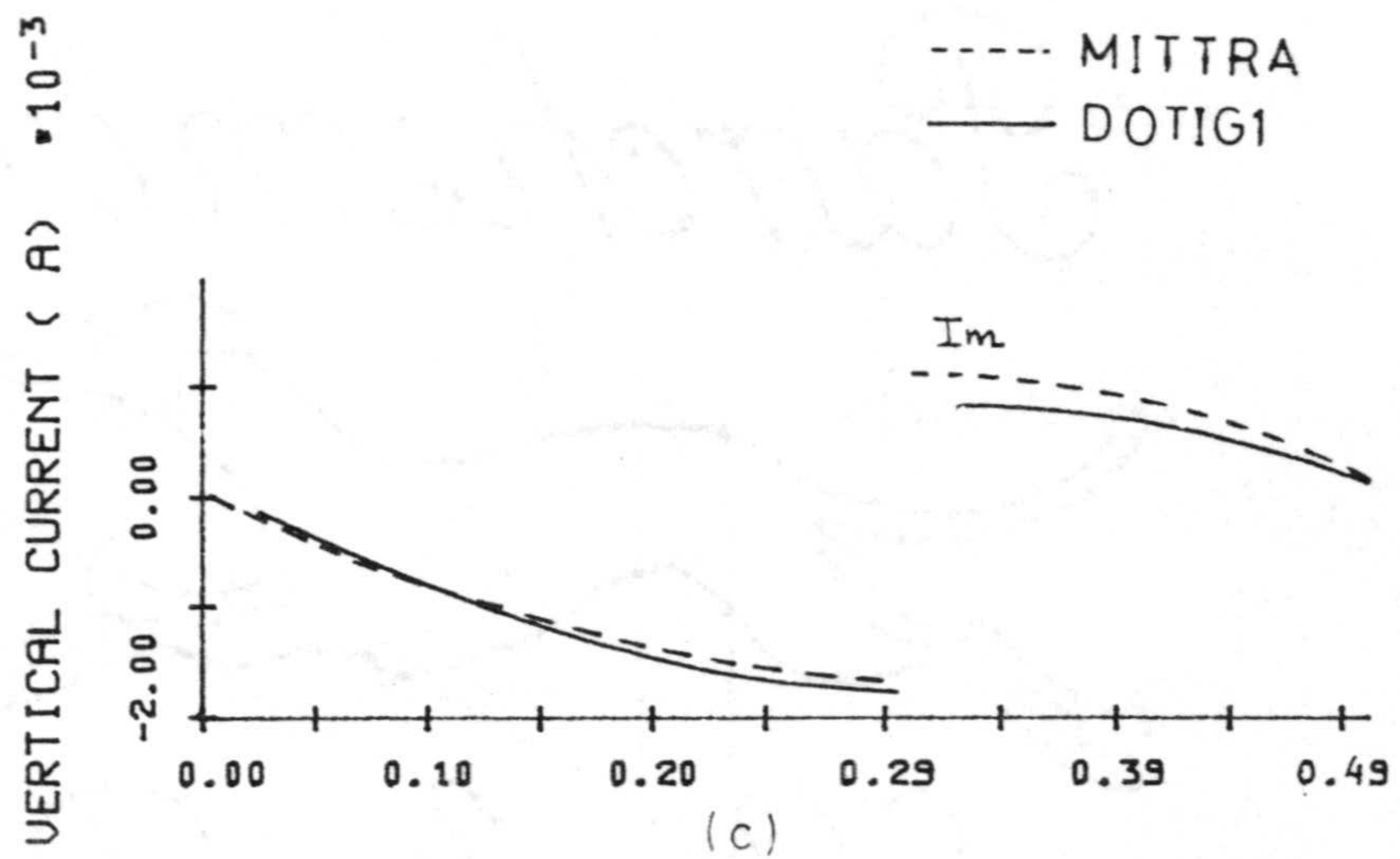


Fig. 4.33.- Raz3n entre la transformada de Fourier de la intensidad I y el campo incidente E^i para $\lambda = 1\text{m}$ en el caso c) para la cruz de la Fig. 4.26 ($l_1 = 0.2\text{ m}$; $l_2 = 0.3\text{ m}$; $l_3 = 0.15\text{ m}$; $l_4 = 0.25\text{ m}$; $a = 0.001\text{ m}$); a) Parte Real en el hilo vertical; b) Real e Imaginaria en el hilo horizontal; c) Parte imaginaria en el hilo vertical.

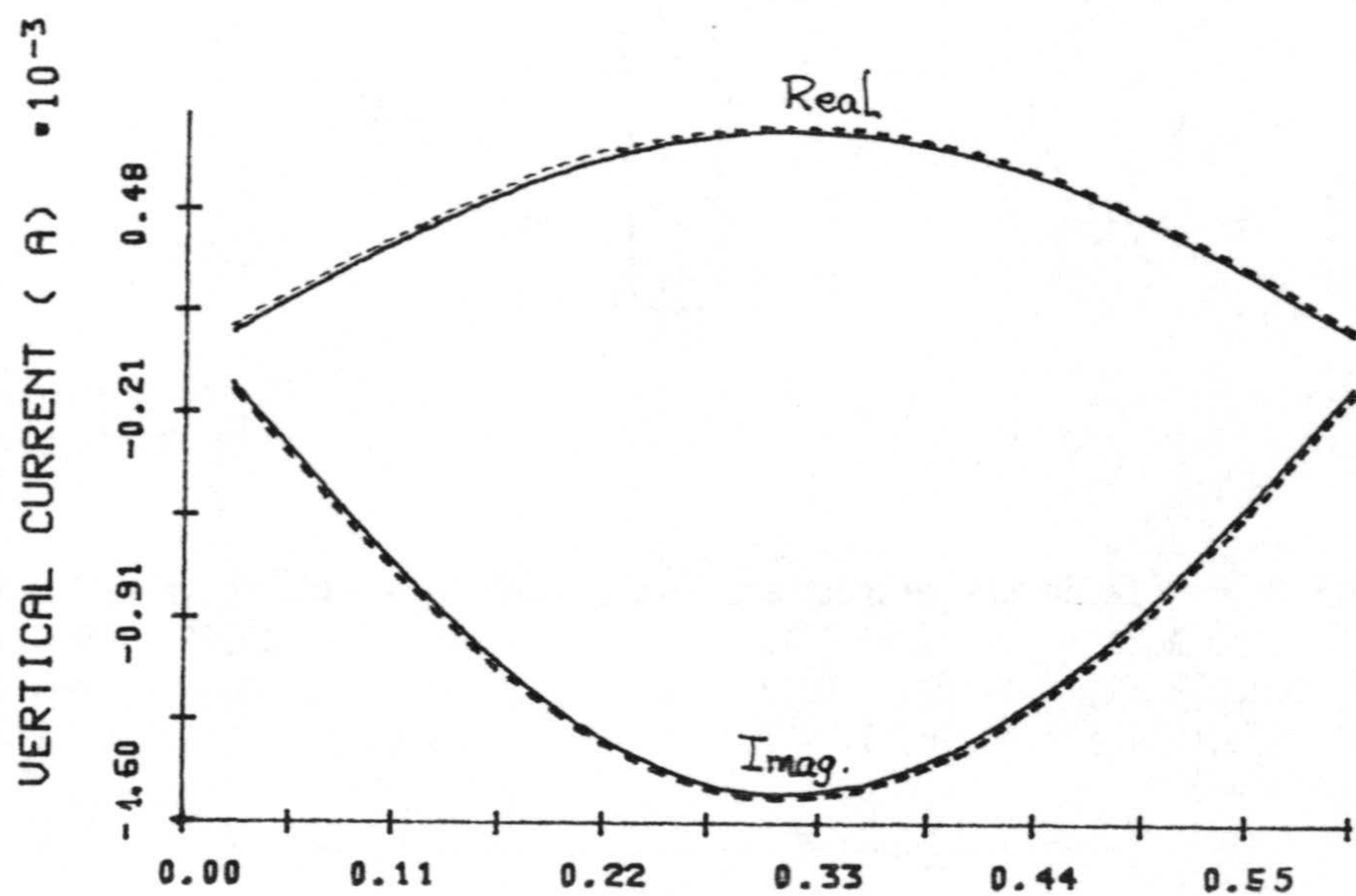


Fig. 4.34.- Parte Real e Imaginaria de la raz3n entre la transformada de Fourier de la intensidad I y el campo incidente E^i para $\lambda = 1\text{m}$ en el caso c) para la cruz de la Fig. 4.26 ($l_1 = l_2 = 0.3\text{ m}$; $l_3 = l_4 = 0.2\text{ m}$; $a = 0.001\text{ m}$).

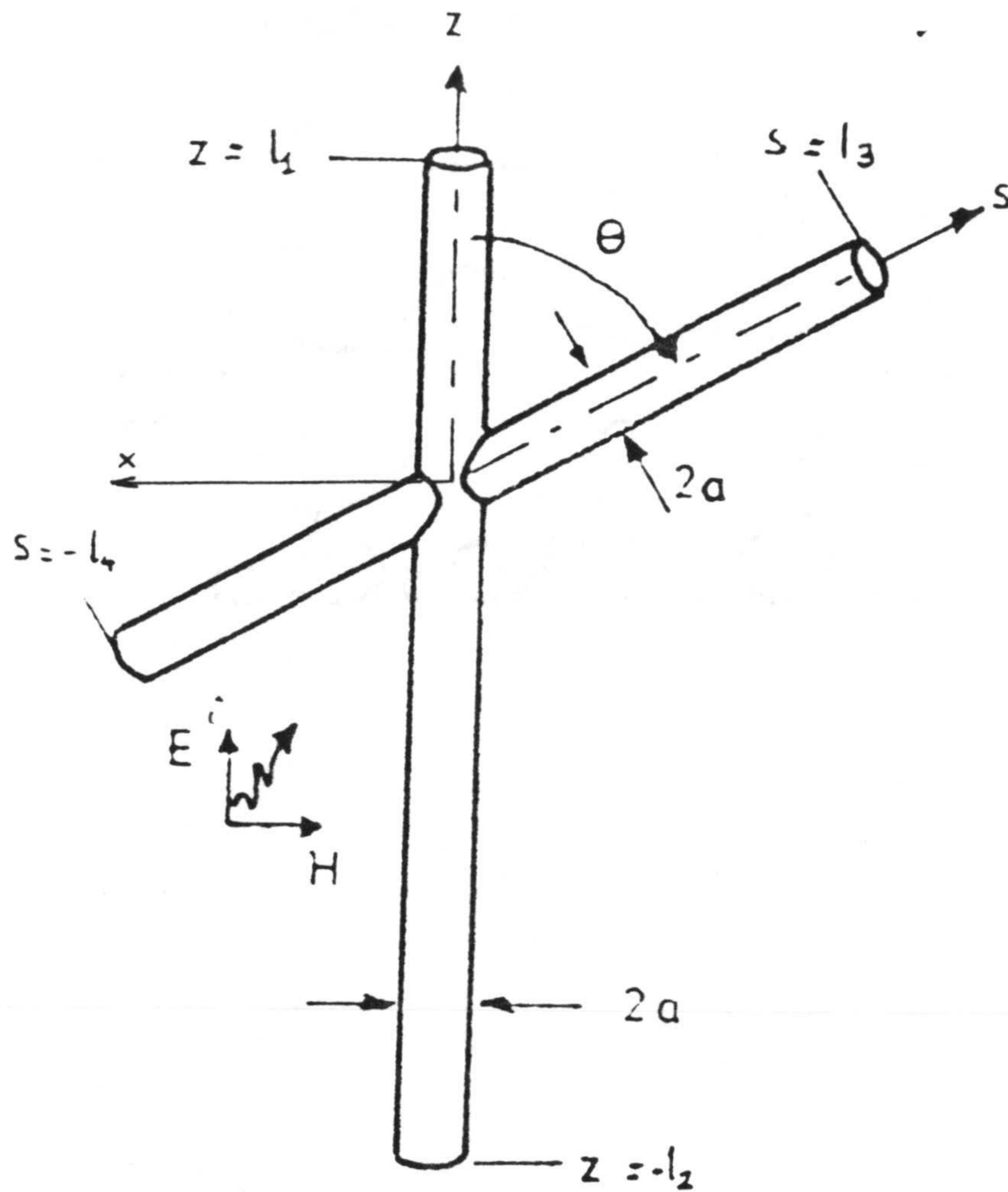


Fig. 4.35.- Geometría de una estructura de dos hilos cruzados formando un ángulo.

Caso A ($l_1 = l_3 = l_4 = 0.11$ m, $l_2 = 0.22$ m, $a = 0.00222$ m, $\theta = 30^\circ$)

Caso B ($l_1 = l_3 = l_4 = 0.11$ m, $l_2 = 0.22$ m, $a = 0.00222$ m, $\theta = 60^\circ$)

Caso C ($l_1 = 0.2$ m, $l_2 = 0.3$ m, $l_3 = 0.15$ m, $l_4 = 0.25$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 30^\circ$)

Caso D ($l_1 = 0.2$ m, $l_2 = 0.3$ m, $l_3 = 0.15$ m, $l_4 = 0.25$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 60^\circ$)

Caso E ($l_1 = l_2 = 0.3$ m, $l_3 = l_4 = 0.2$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 30^\circ$)

Caso F ($l_1 = l_2 = 0.3$ m, $l_3 = l_4 = 0.2$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 60^\circ$)

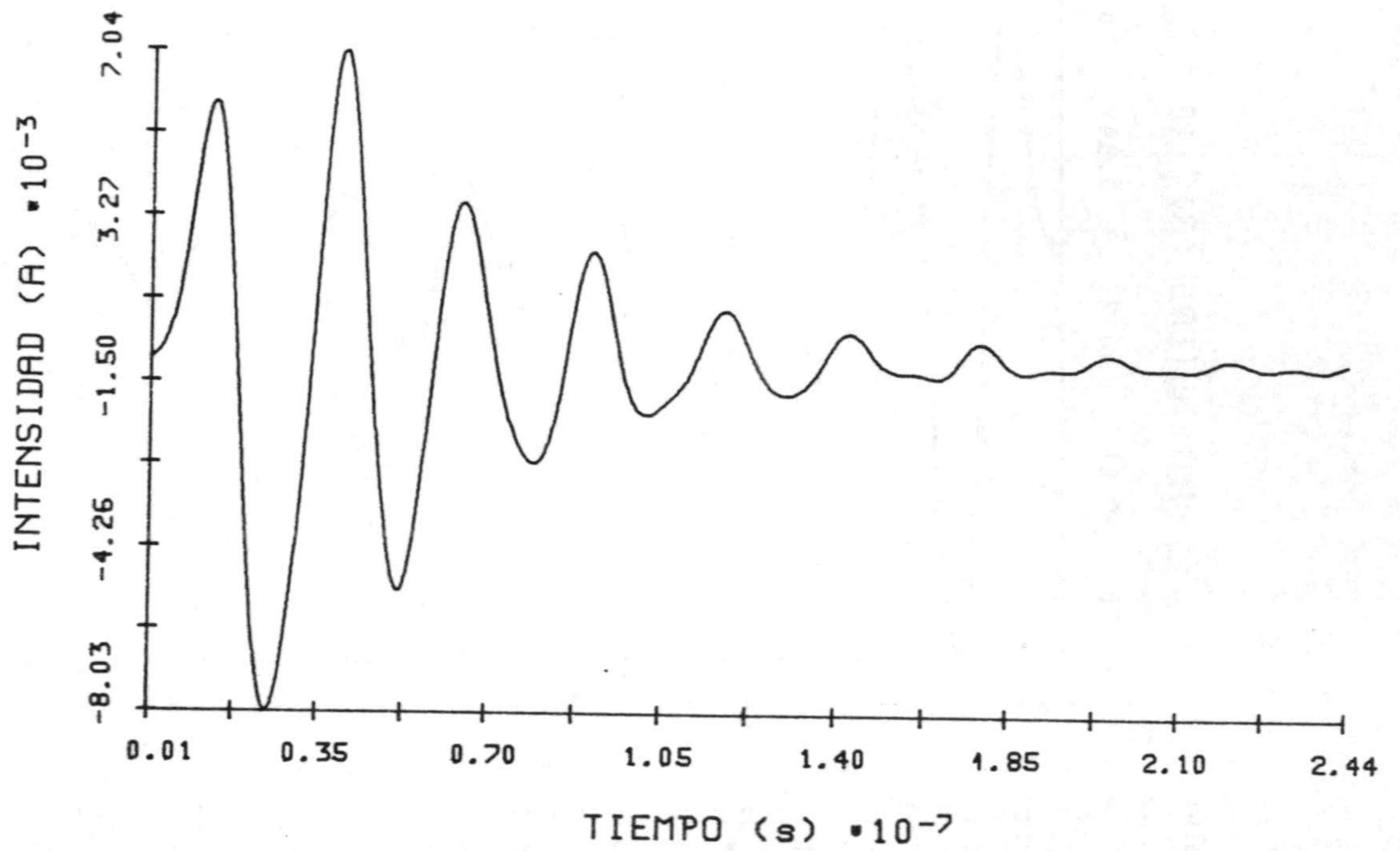


Fig. 4.36.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la cruz de la Fig. 4.35.
 Caso A ($l_1 = l_3 = l_4 = 0.11$ m, $l_2 = 0.22$ m, $a = 0.00222$ m, $\theta = 30^\circ$)

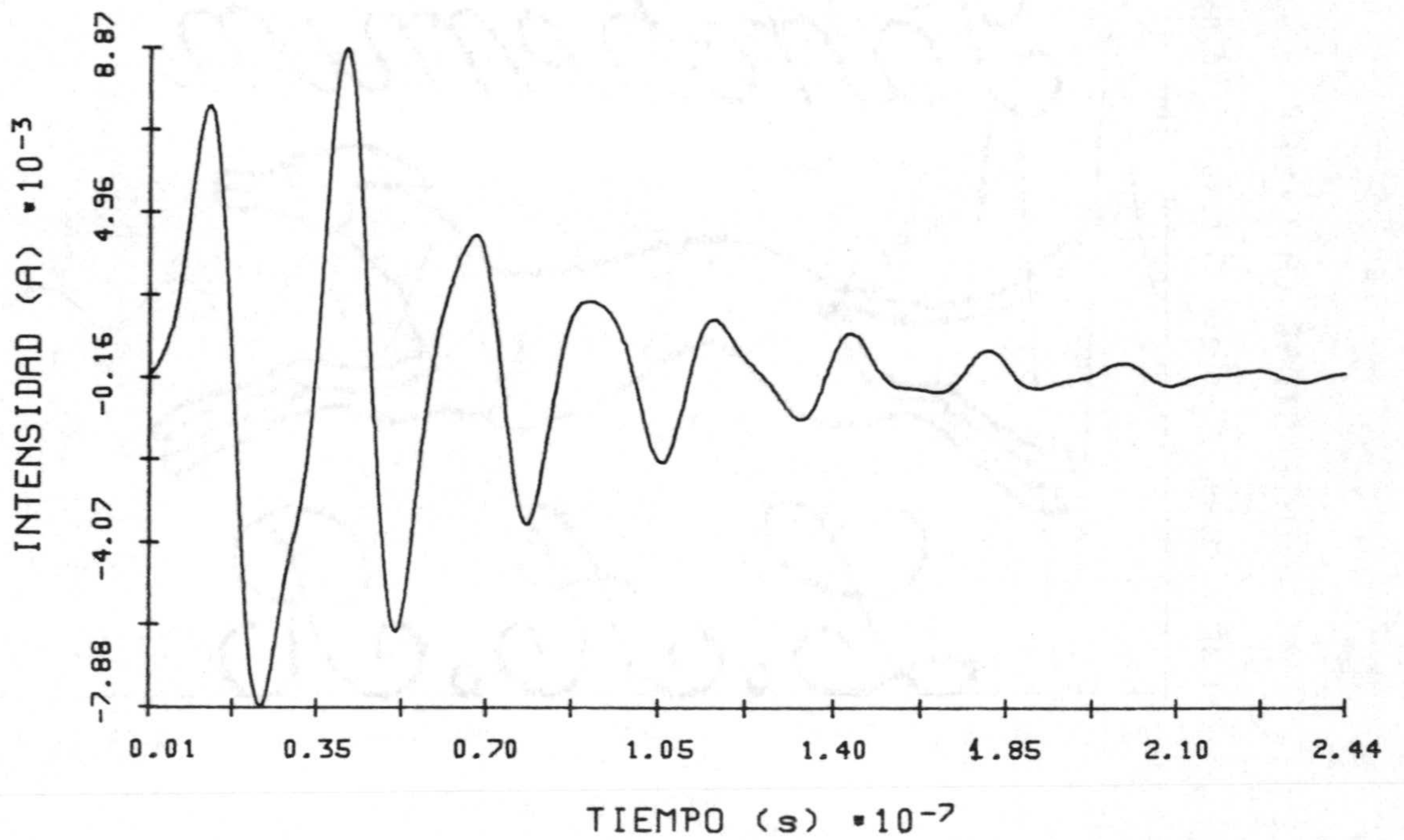


Fig. 4.37.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la cruz de la Fig. 4.35.
 Caso B ($l_1 = l_3 = l_4 = 0.11$ m, $l_2 = 0.22$ m, $a = 0.00222$ m, $\theta = 60^\circ$)

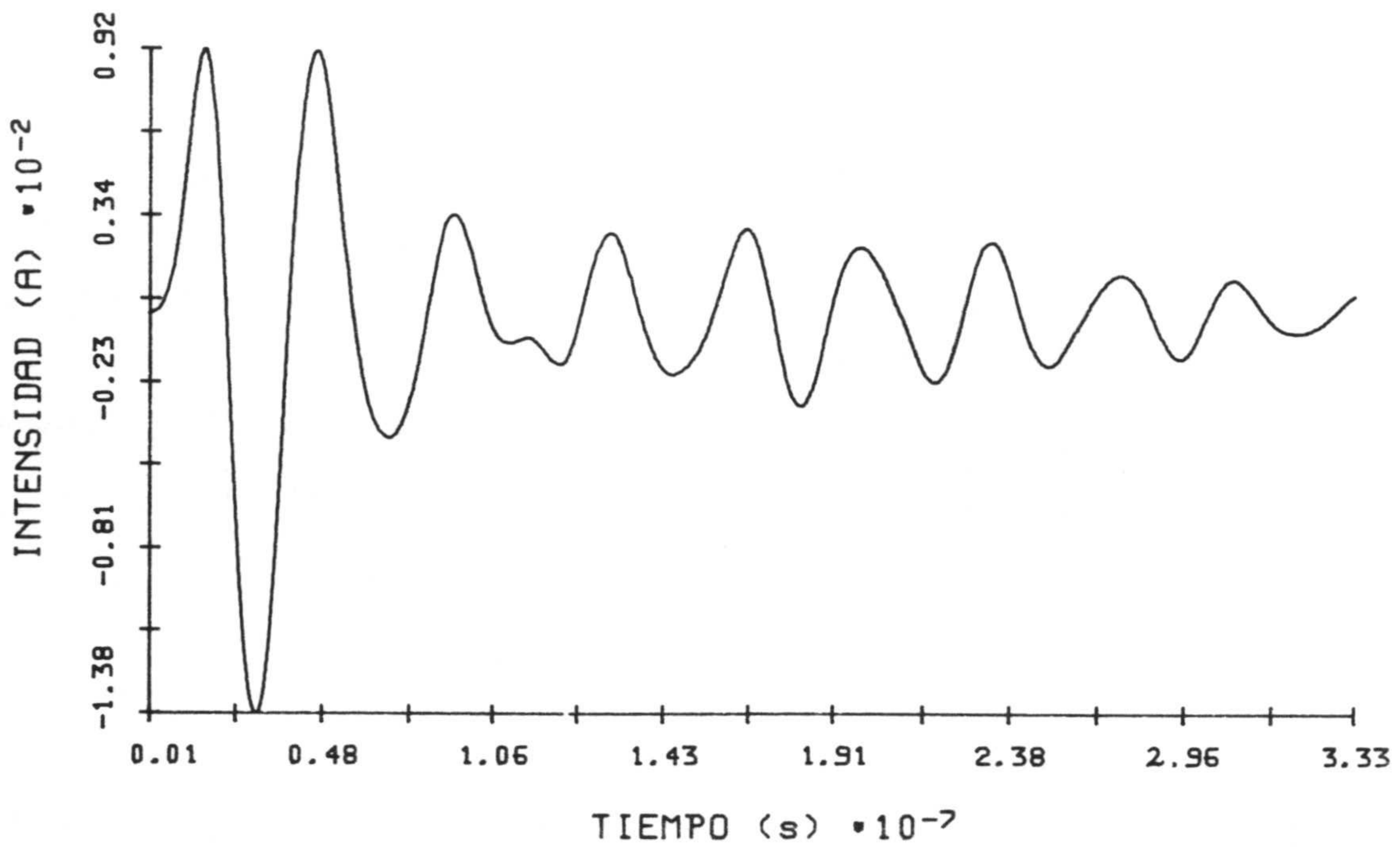


Fig. 4.38.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la cruz de la Fig. 4.35.
 Caso C ($l_1 = 0.2$ m, $l_2 = 0.3$ m, $l_3 = 0.15$ m, $l_4 = 0.25$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 30^\circ$)

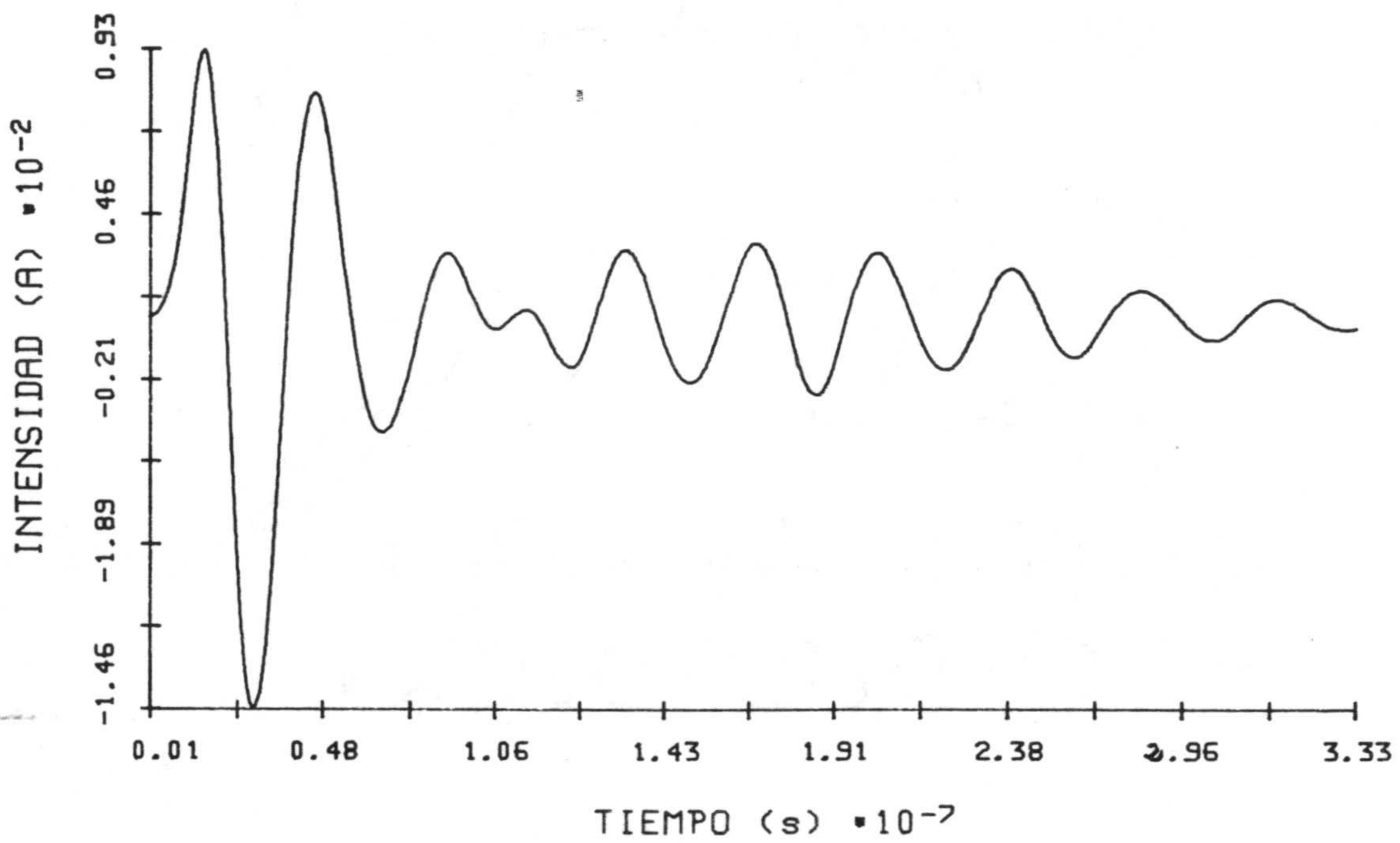


Fig. 4.39.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la cruz de la Fig. 4.35.
 Caso D ($l_1 = 0.2$ m, $l_2 = 0.3$ m, $l_3 = 0.15$ m, $l_4 = 0.25$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 60^\circ$)

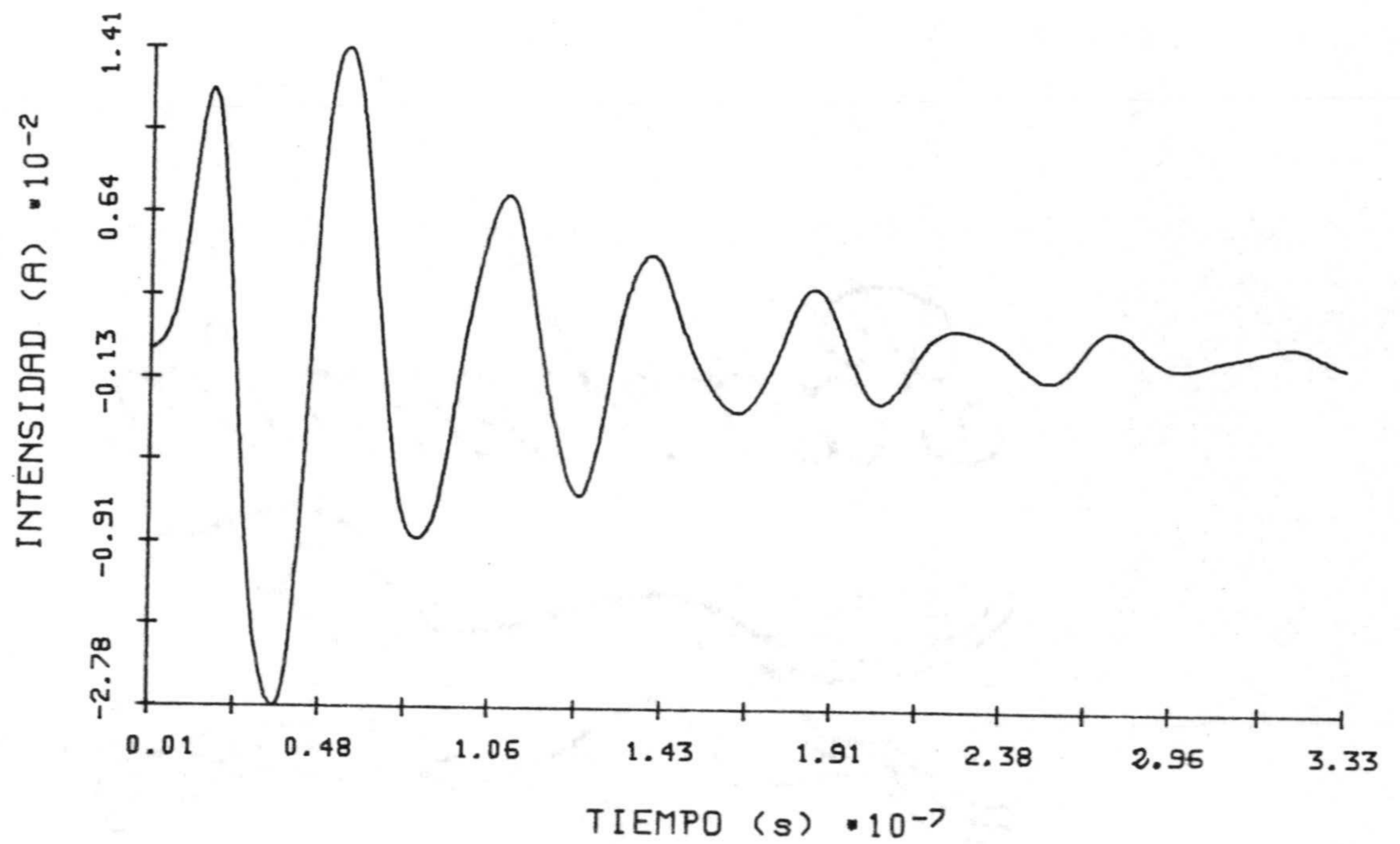


Fig. 4.40.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la cruz de la Fig. 4.35.
 Caso E ($l_1 = l_2 = 0.3$ m, $l_3 = l_4 = 0.2$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 30^\circ$)

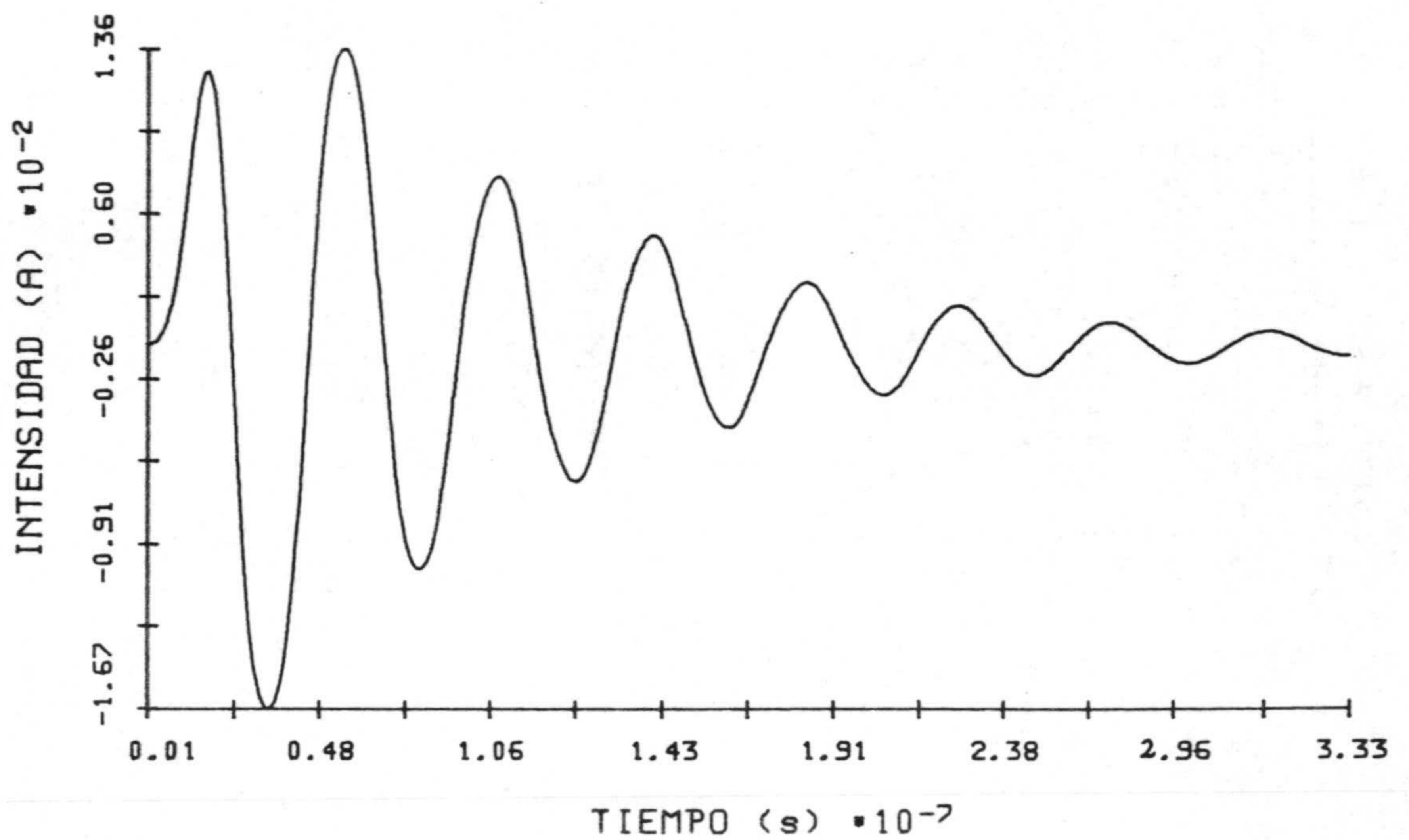
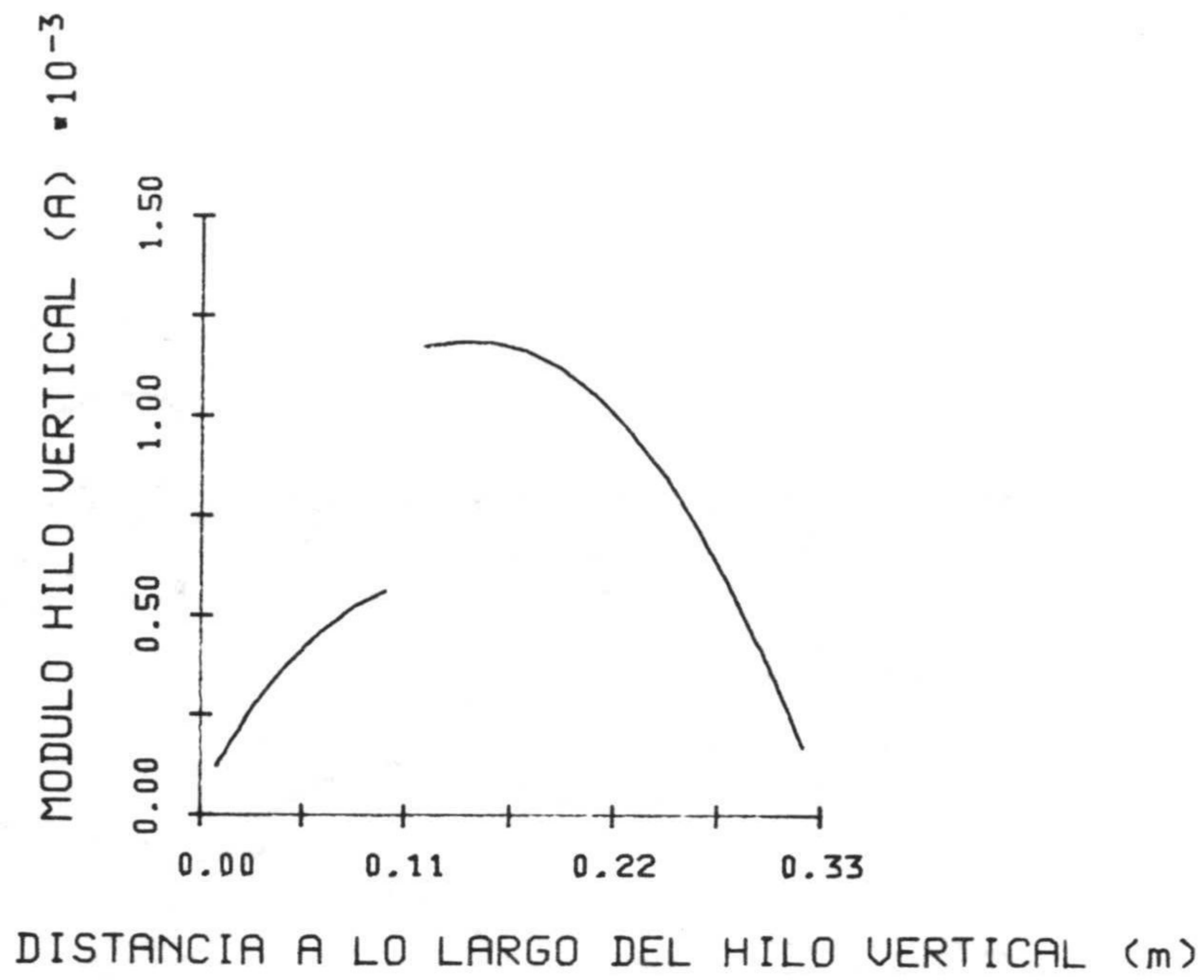
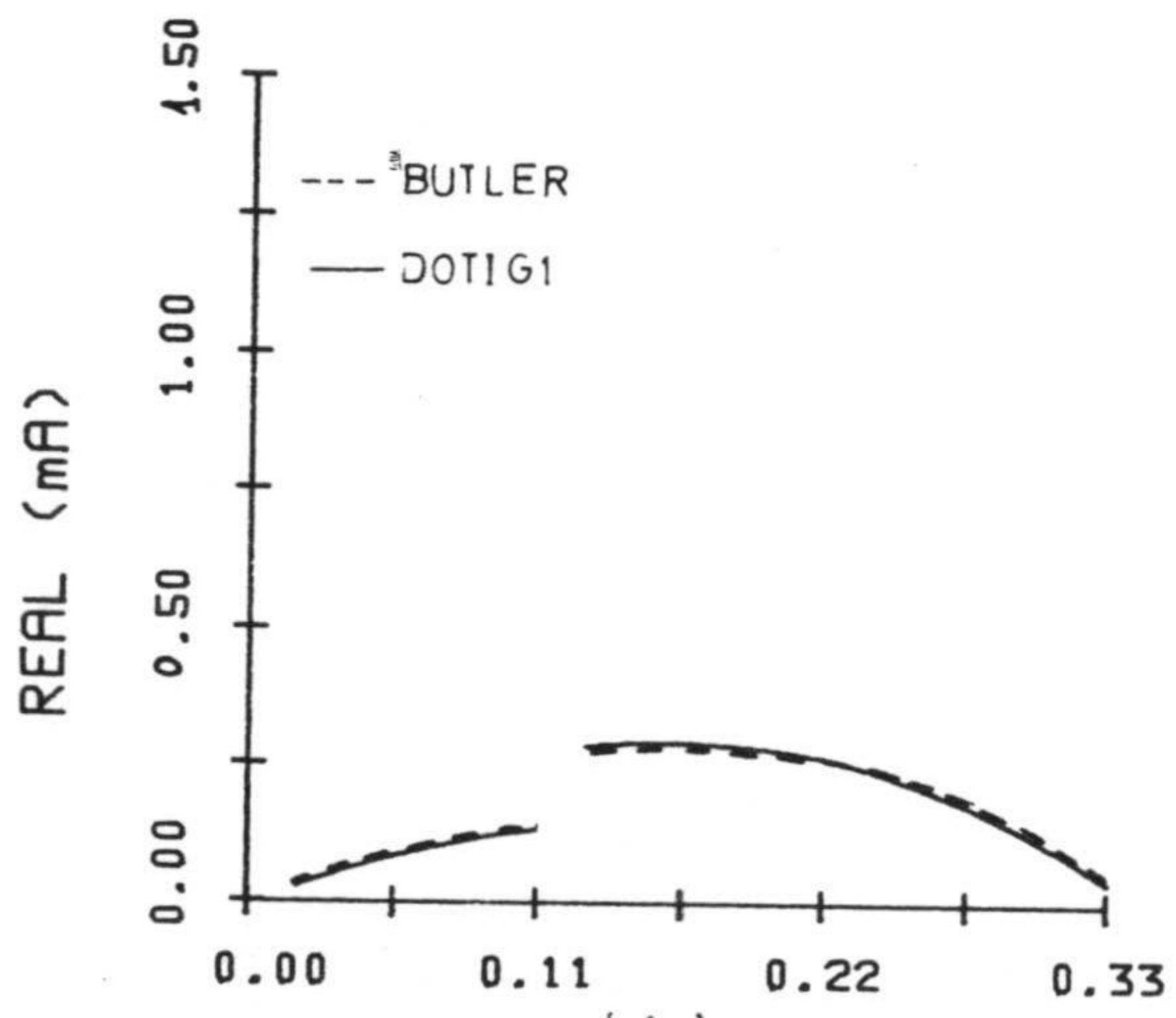


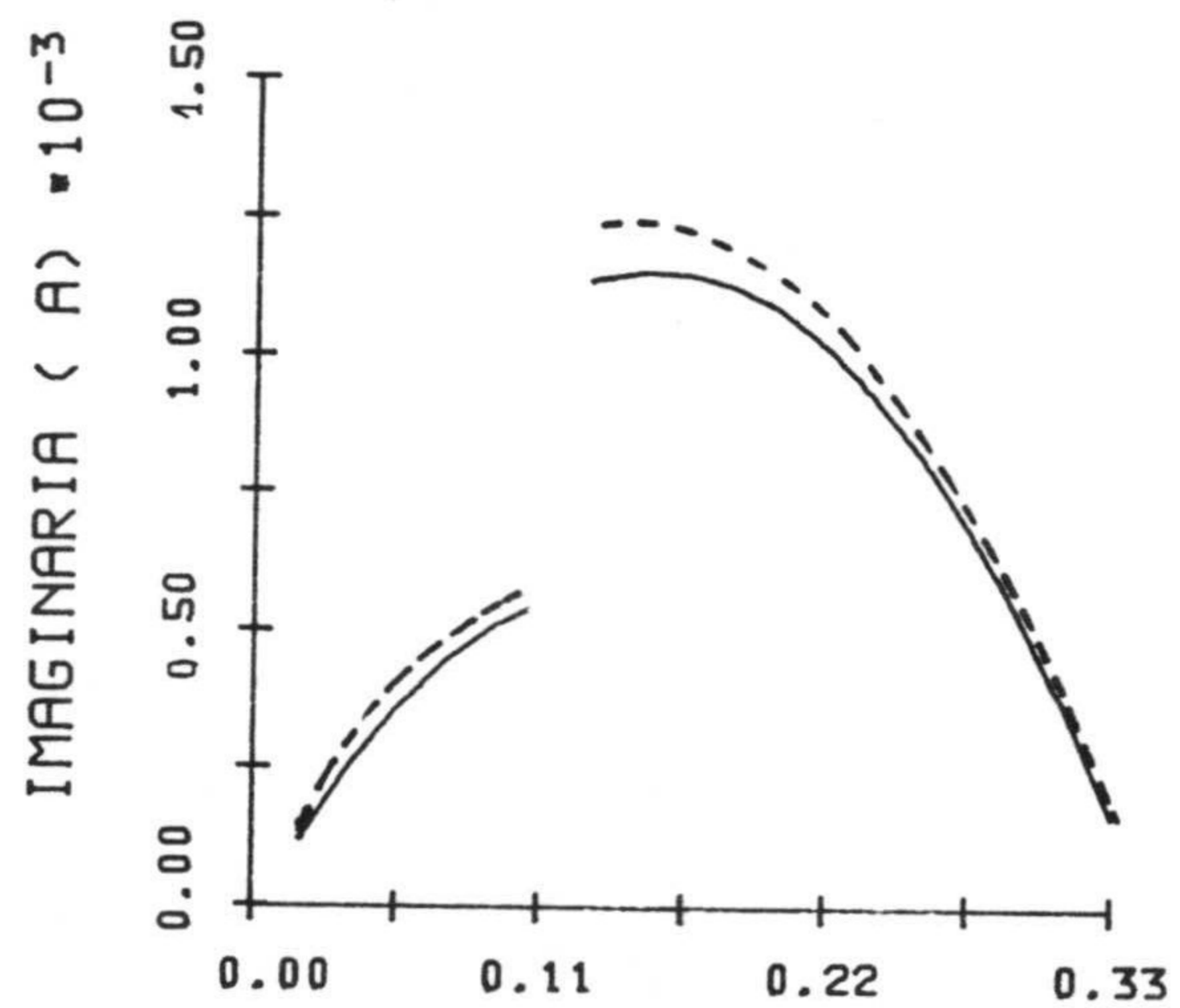
Fig. 4.41.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la cruz de la Fig. 4.35.
 Caso F ($l_1 = l_2 = 0.3$ m, $l_3 = l_4 = 0.2$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 60^\circ$)



(a)



(b)



(c)

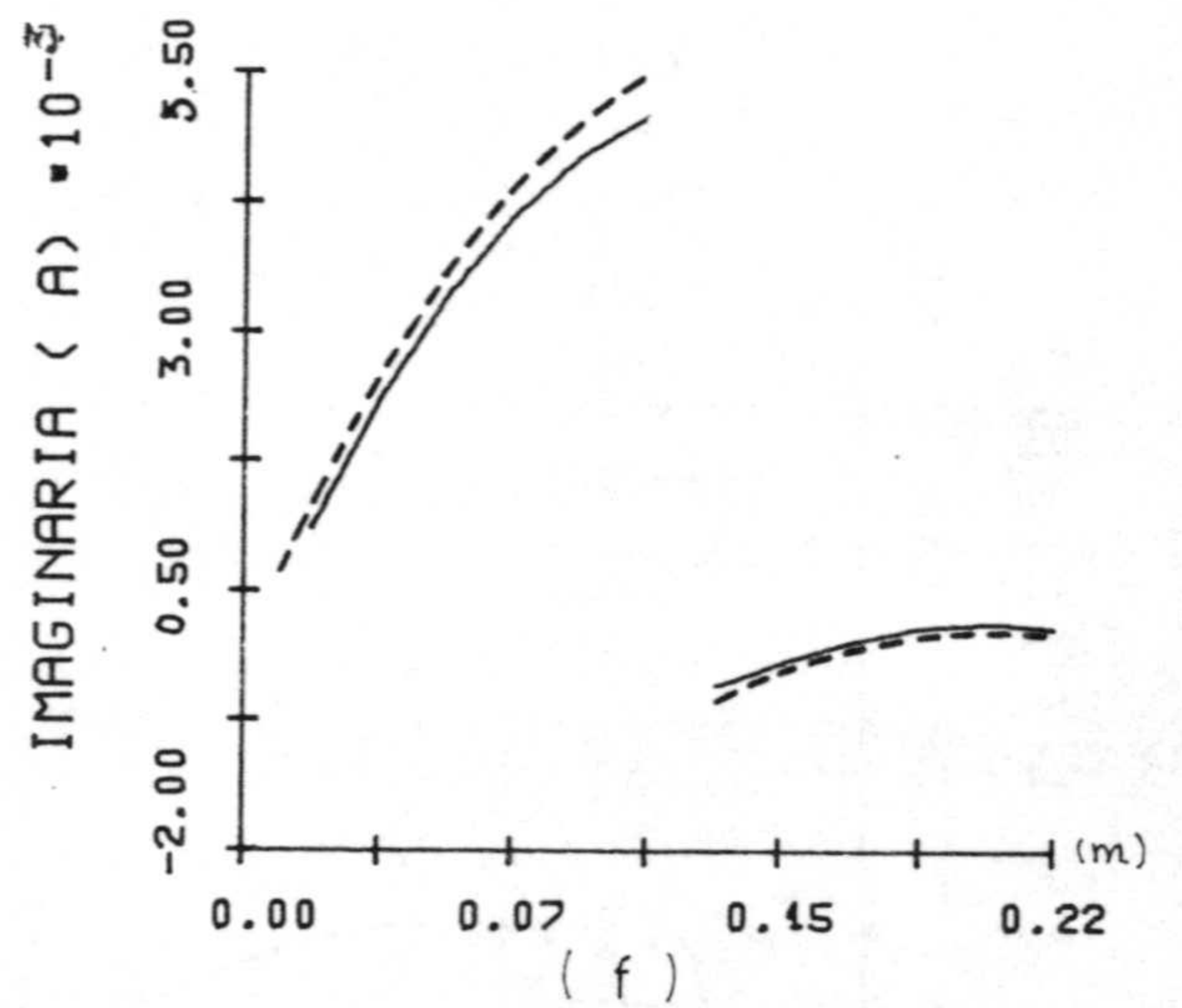
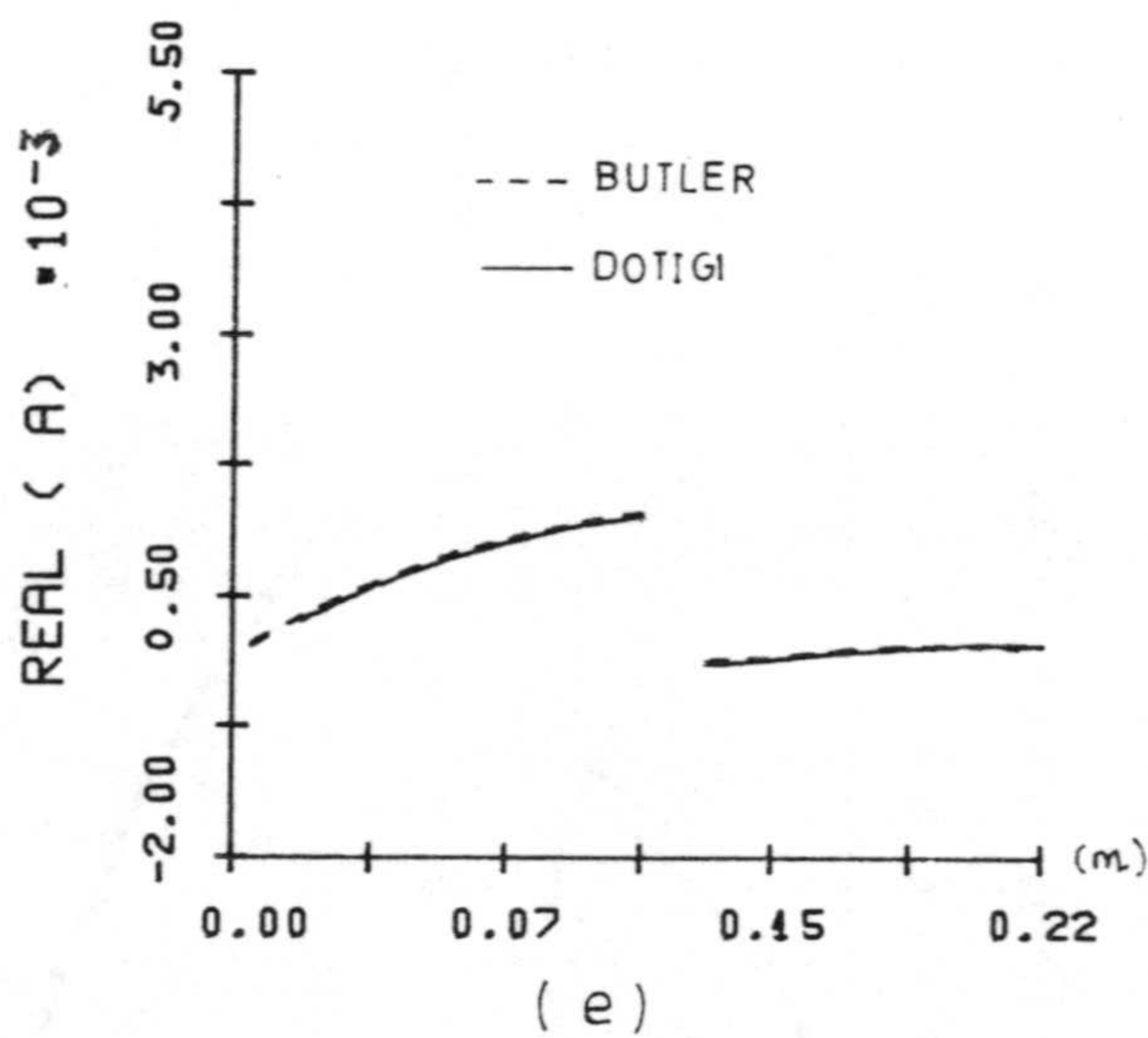
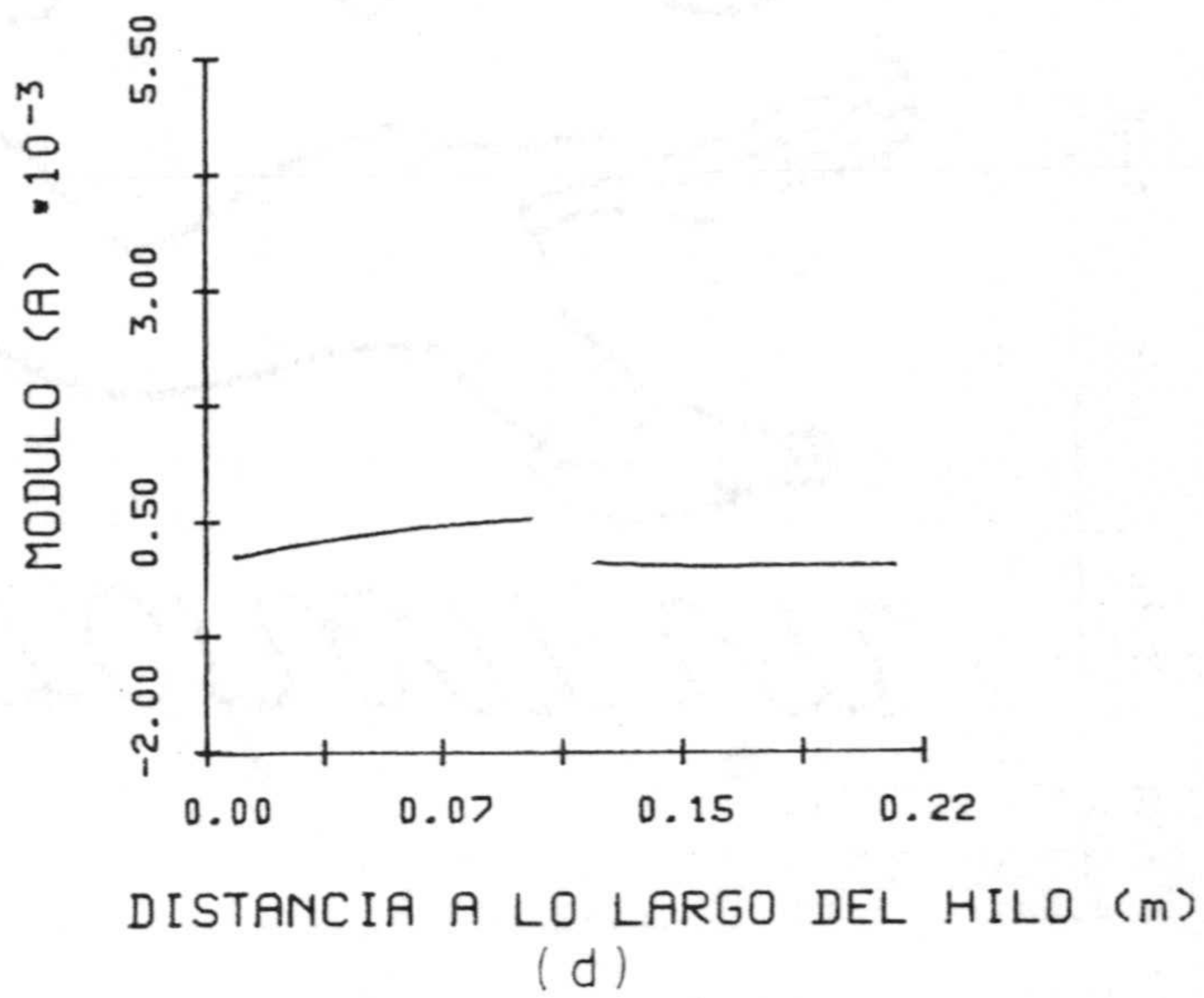
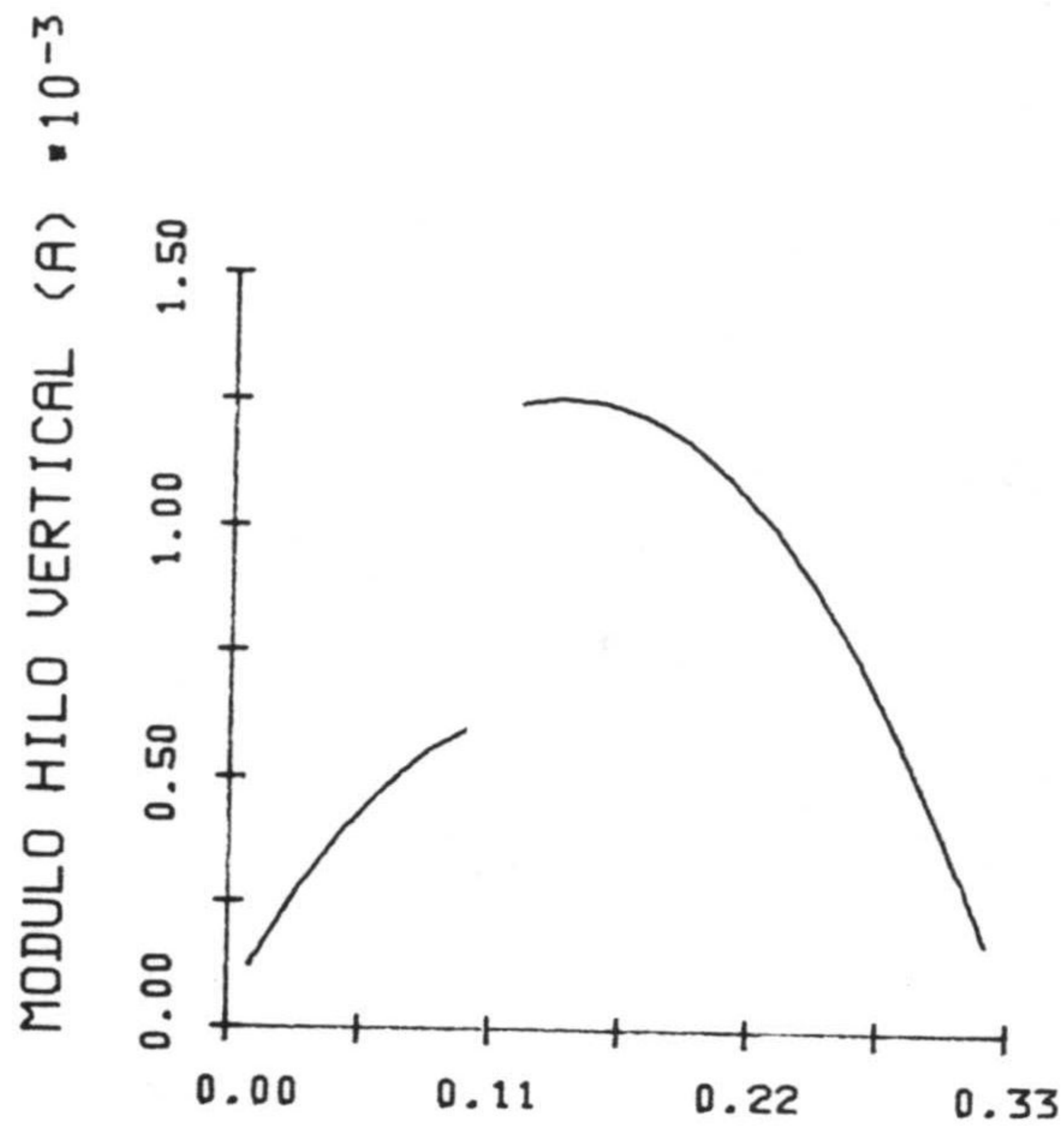
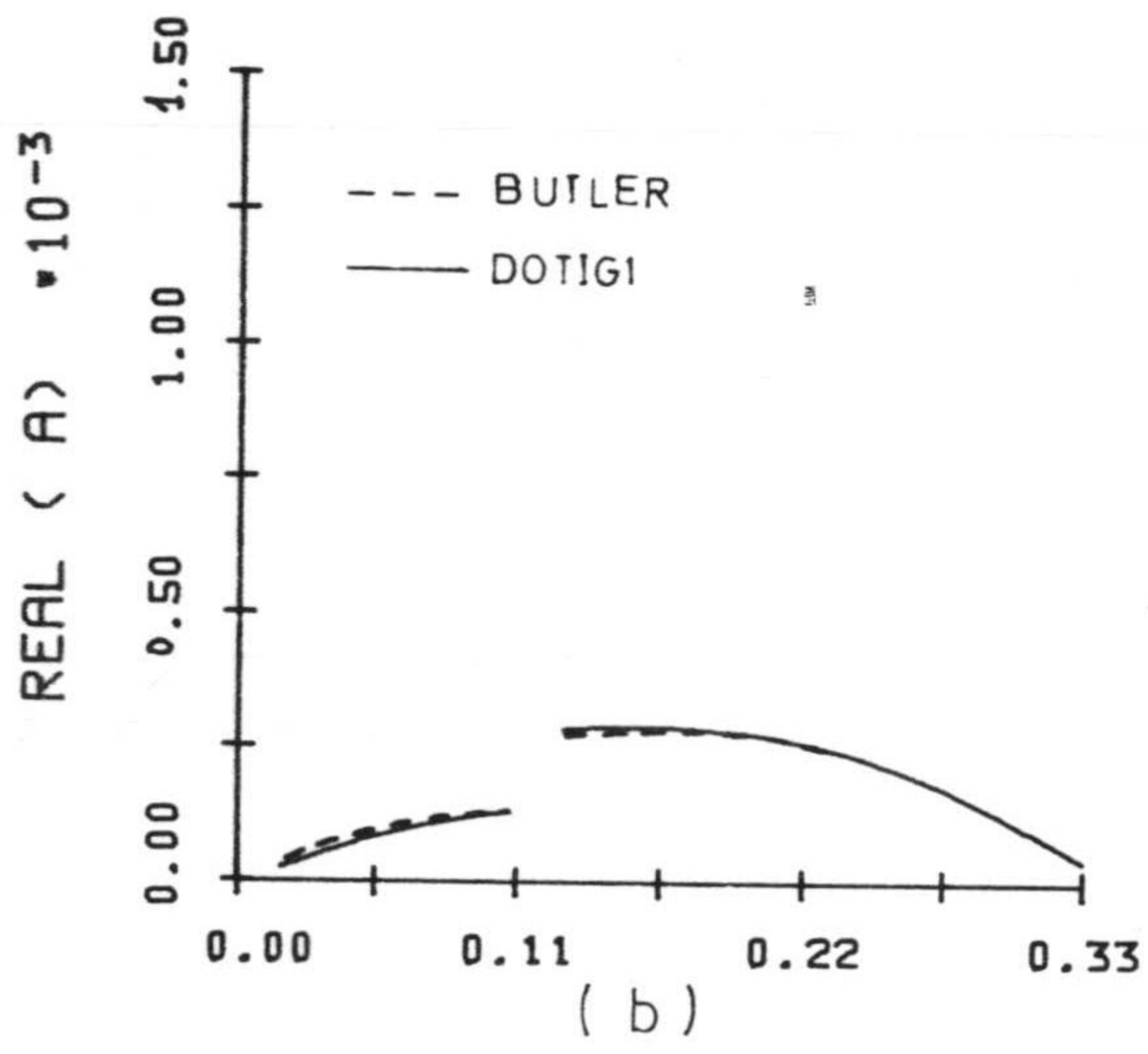


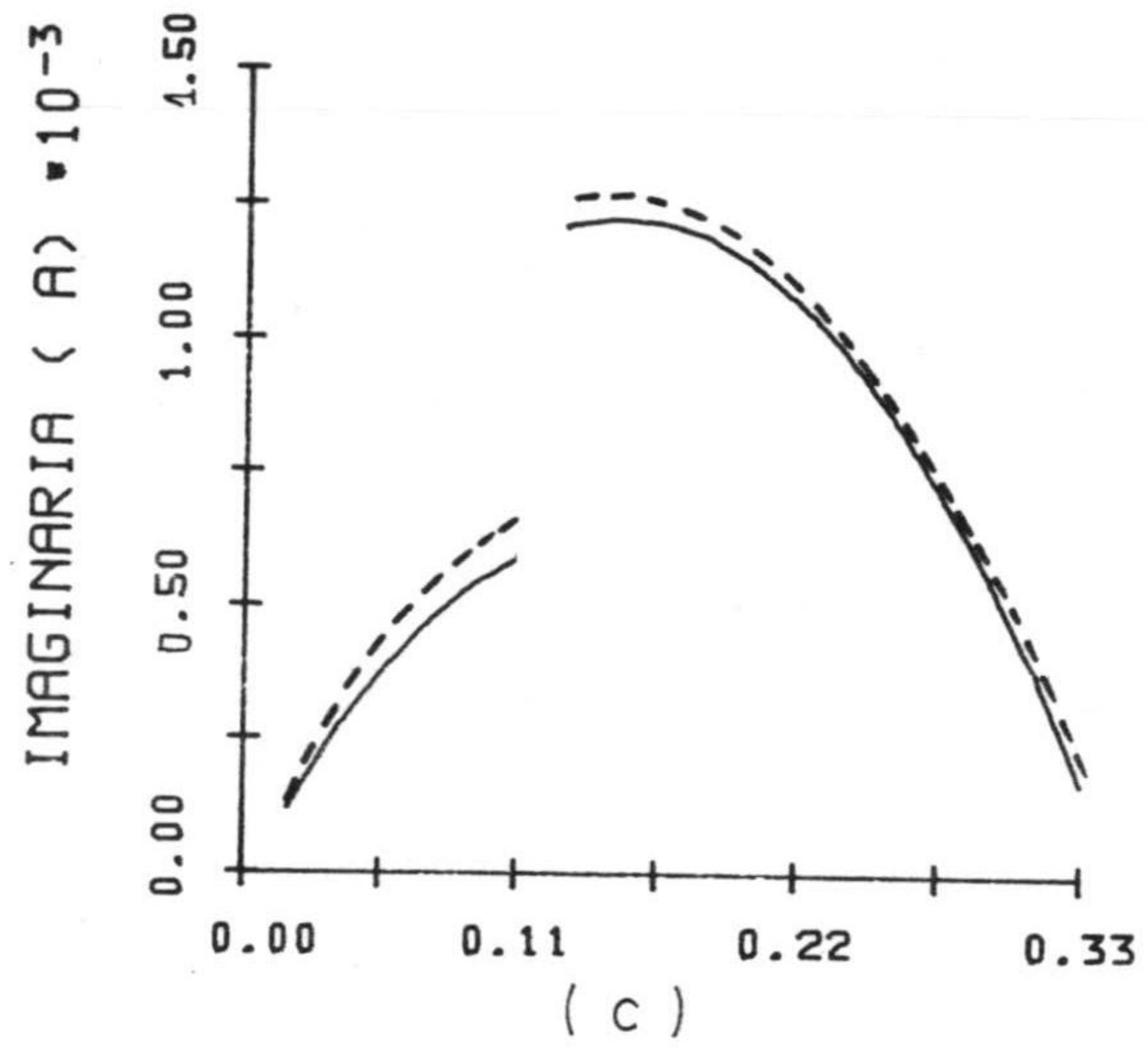
Fig. 4.42.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el caso A para la cruz de la Fig. 4.35. Caso A ($l_1 = l_3 = l_4 = 0.11$ m, $l_2 = 0.22$ m, $a = 0.00222$ m, $\theta = 30^\circ$) a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte imaginaria en el hilo vertical, d) Módulo, e) Parte Real y f) Parte imaginaria en el hilo horizontal.



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO VERTICAL (m)
(a)



(b)



(c)

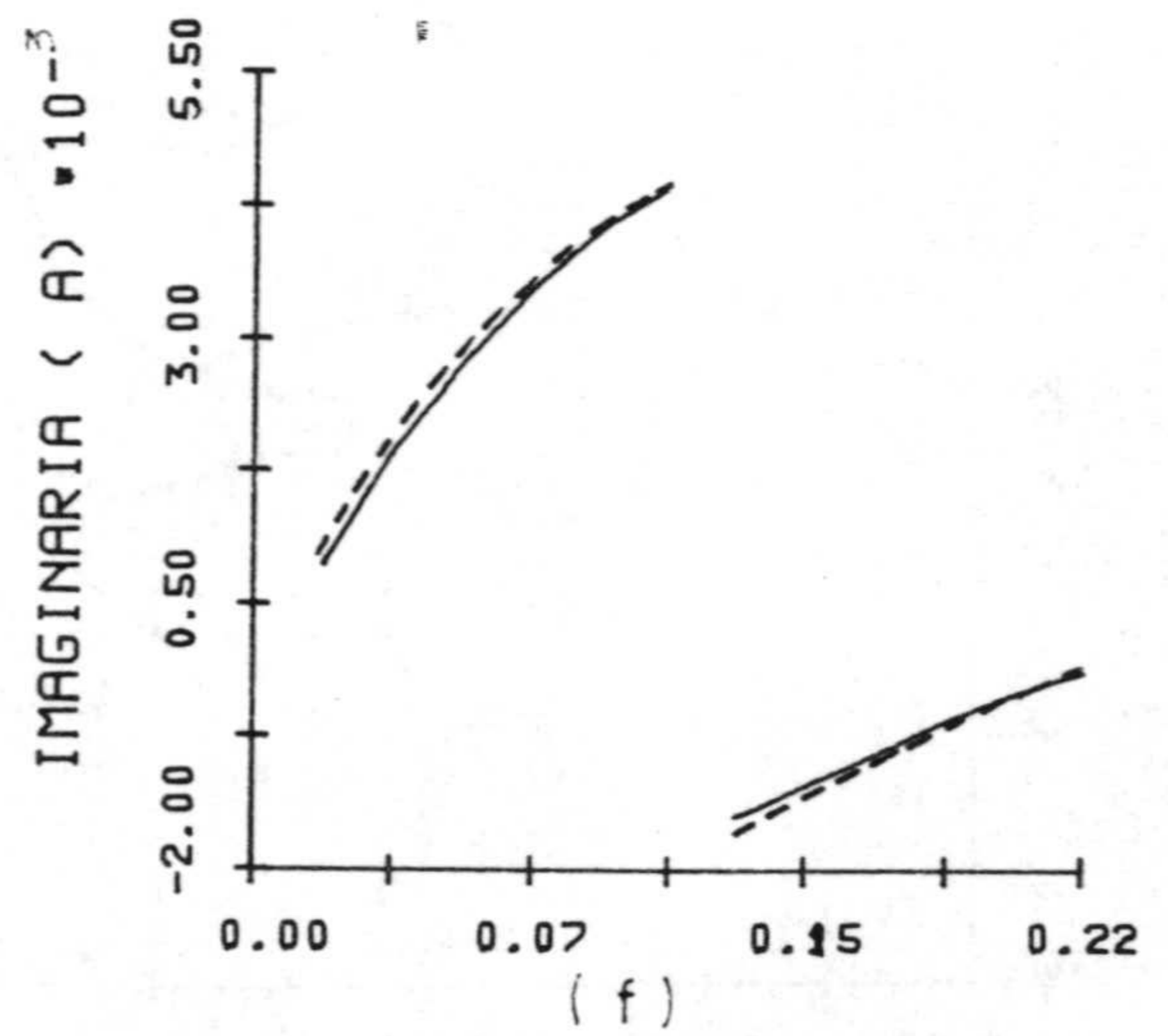
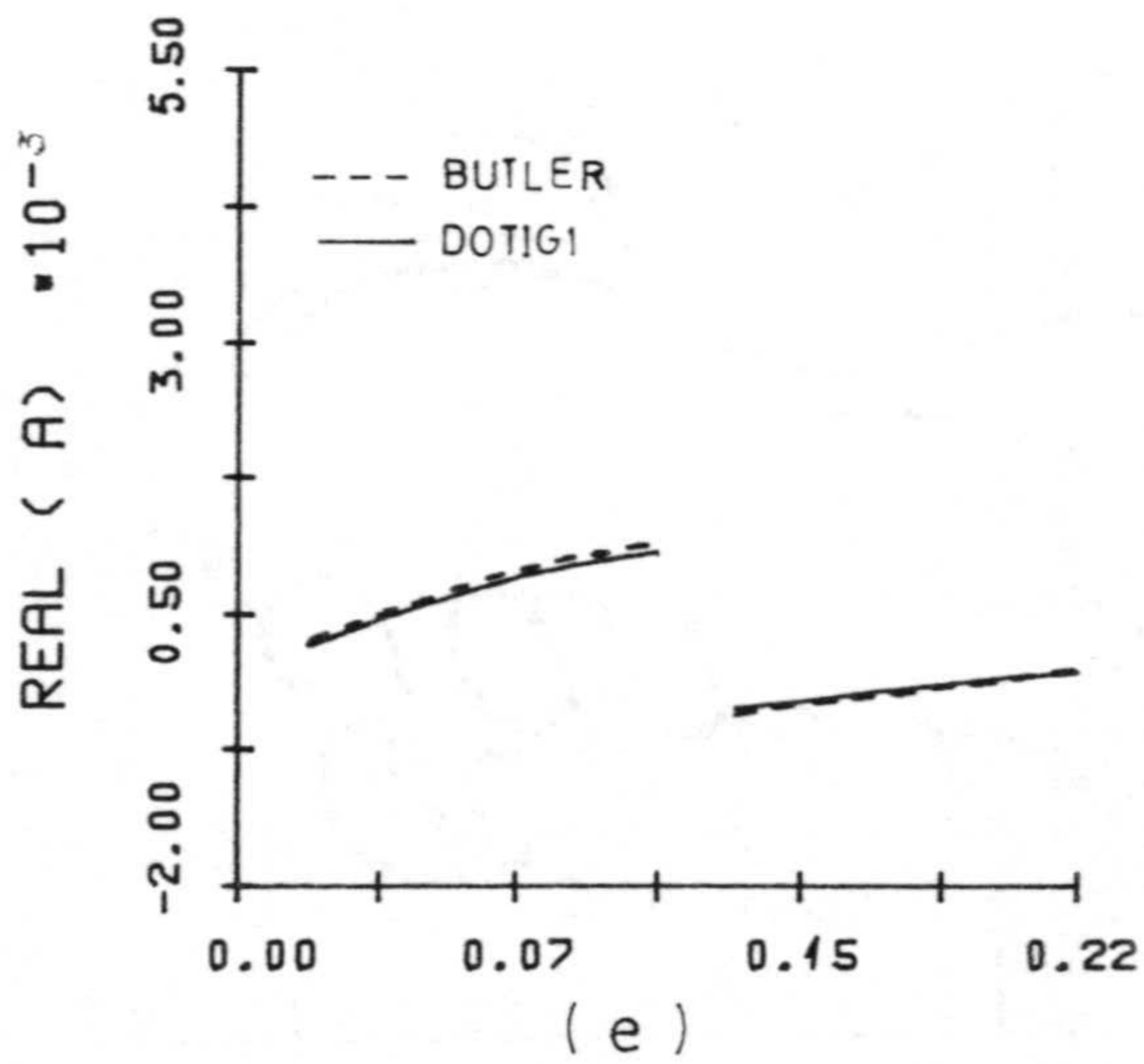
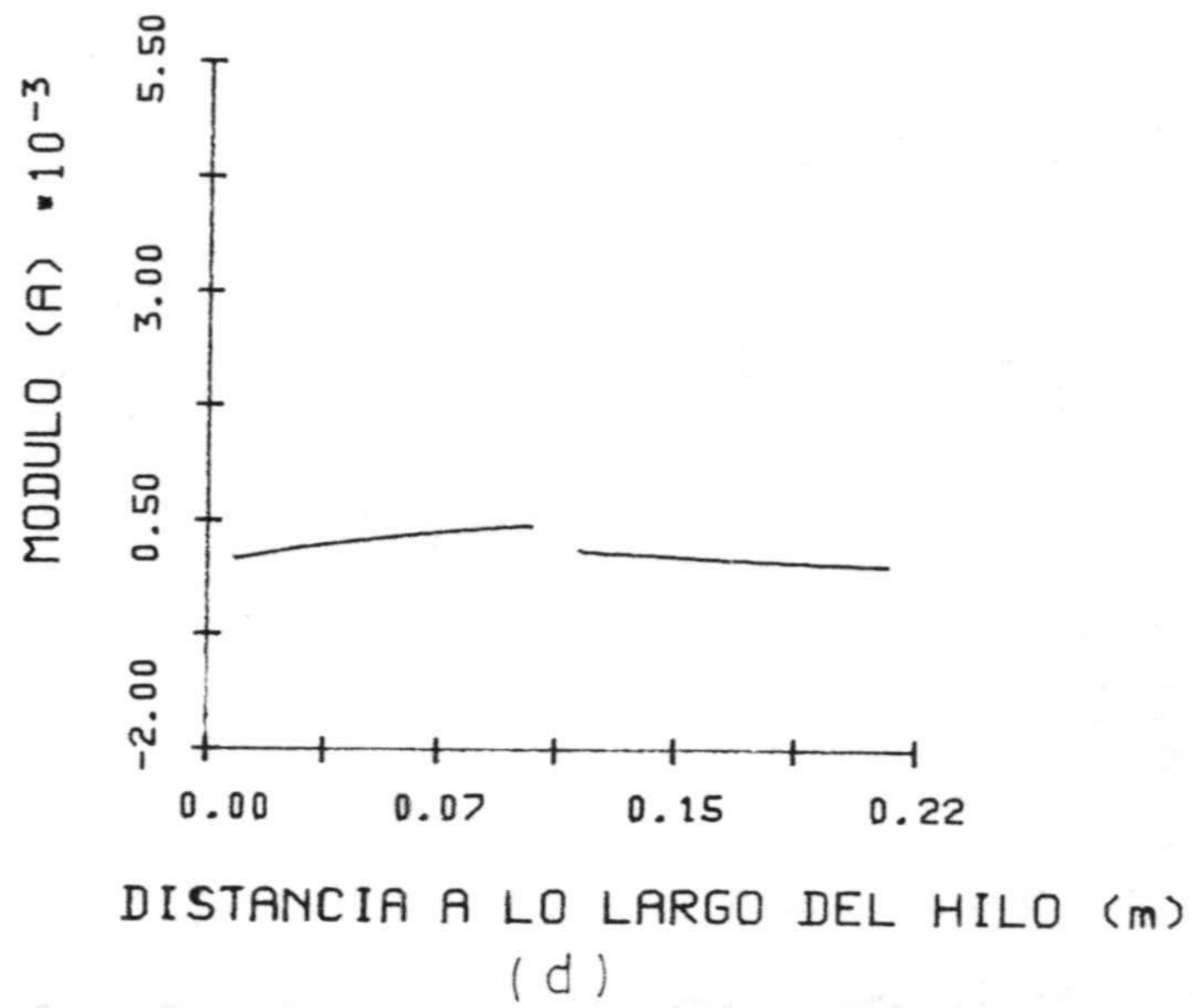
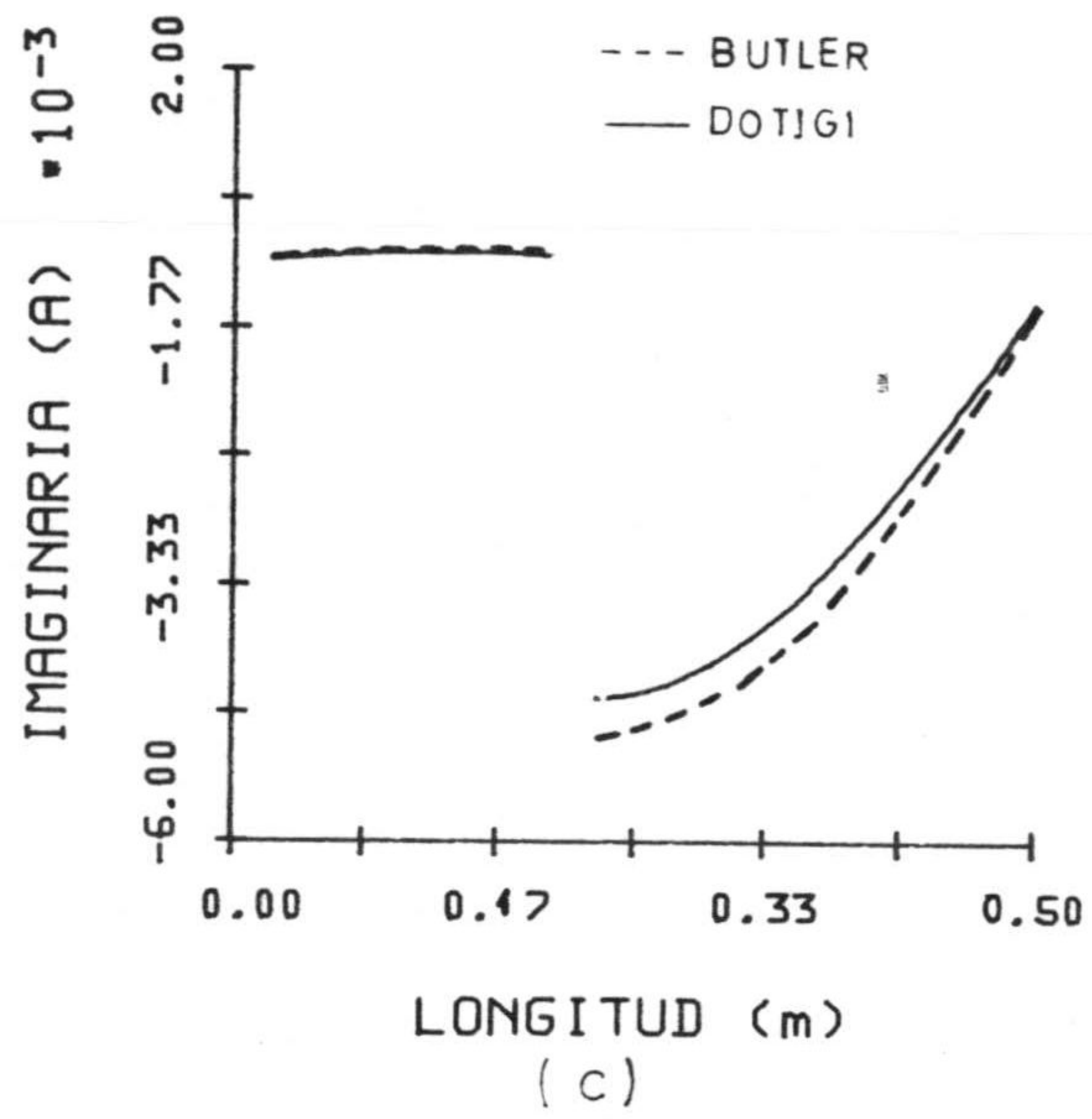
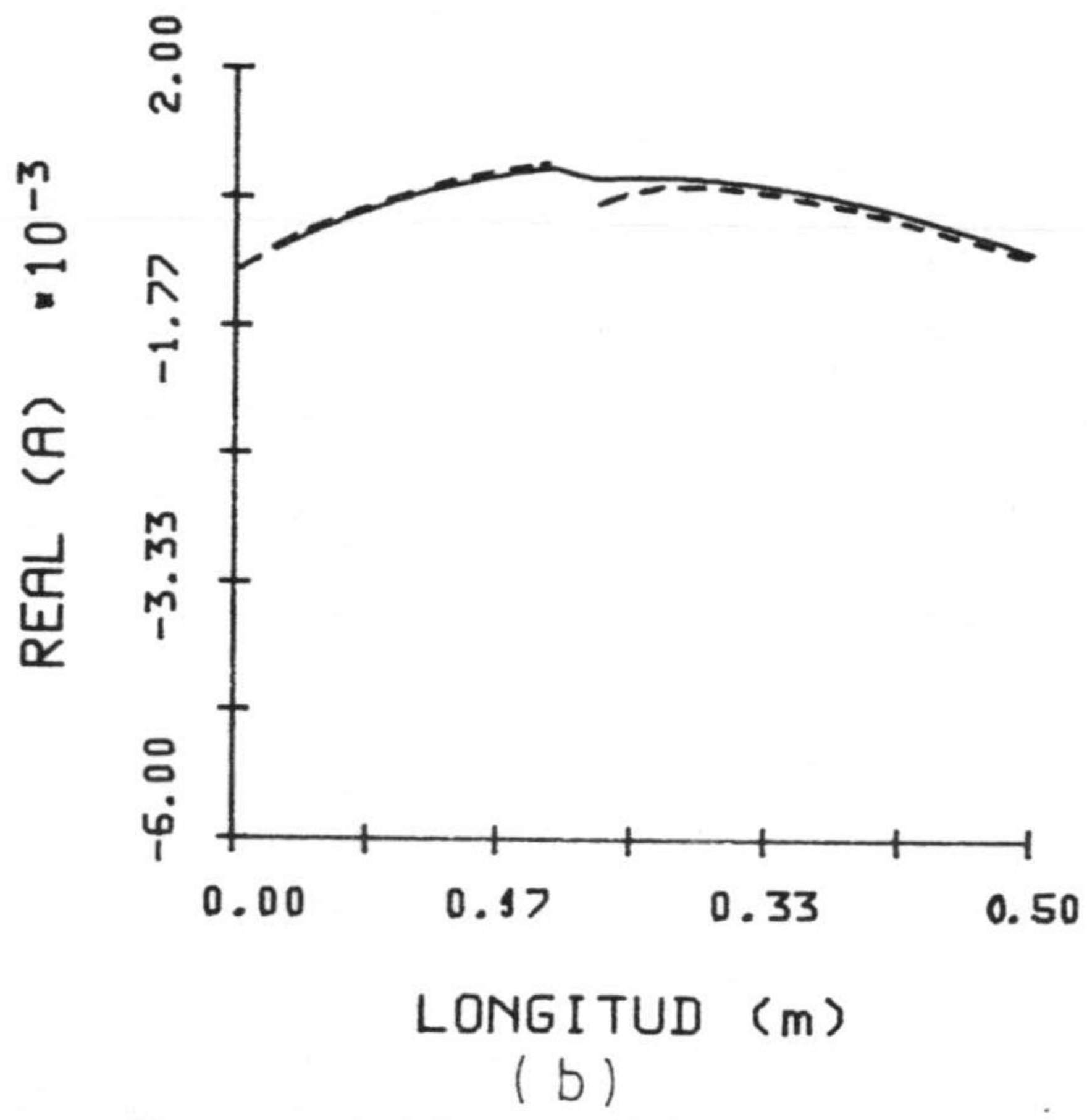
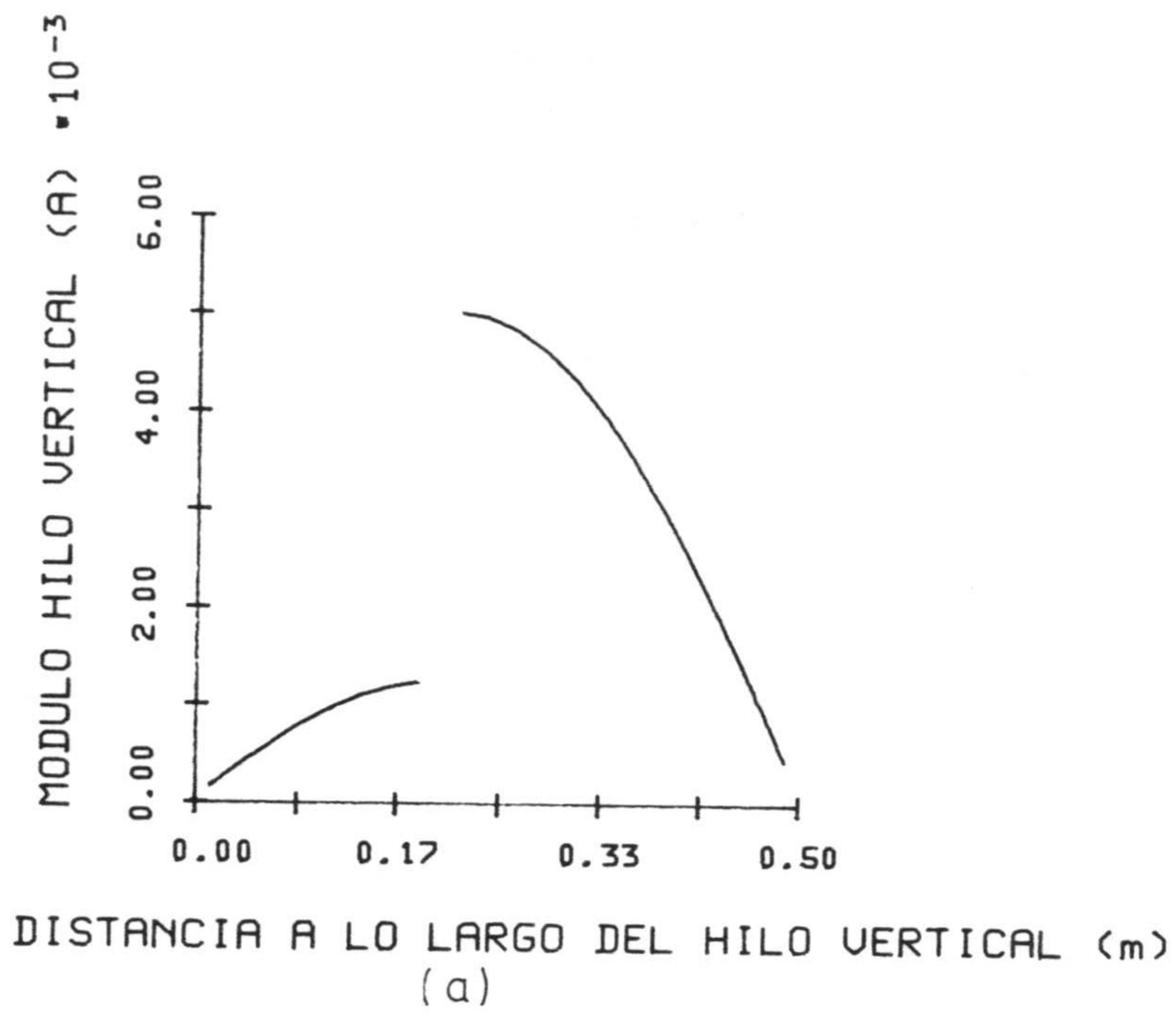
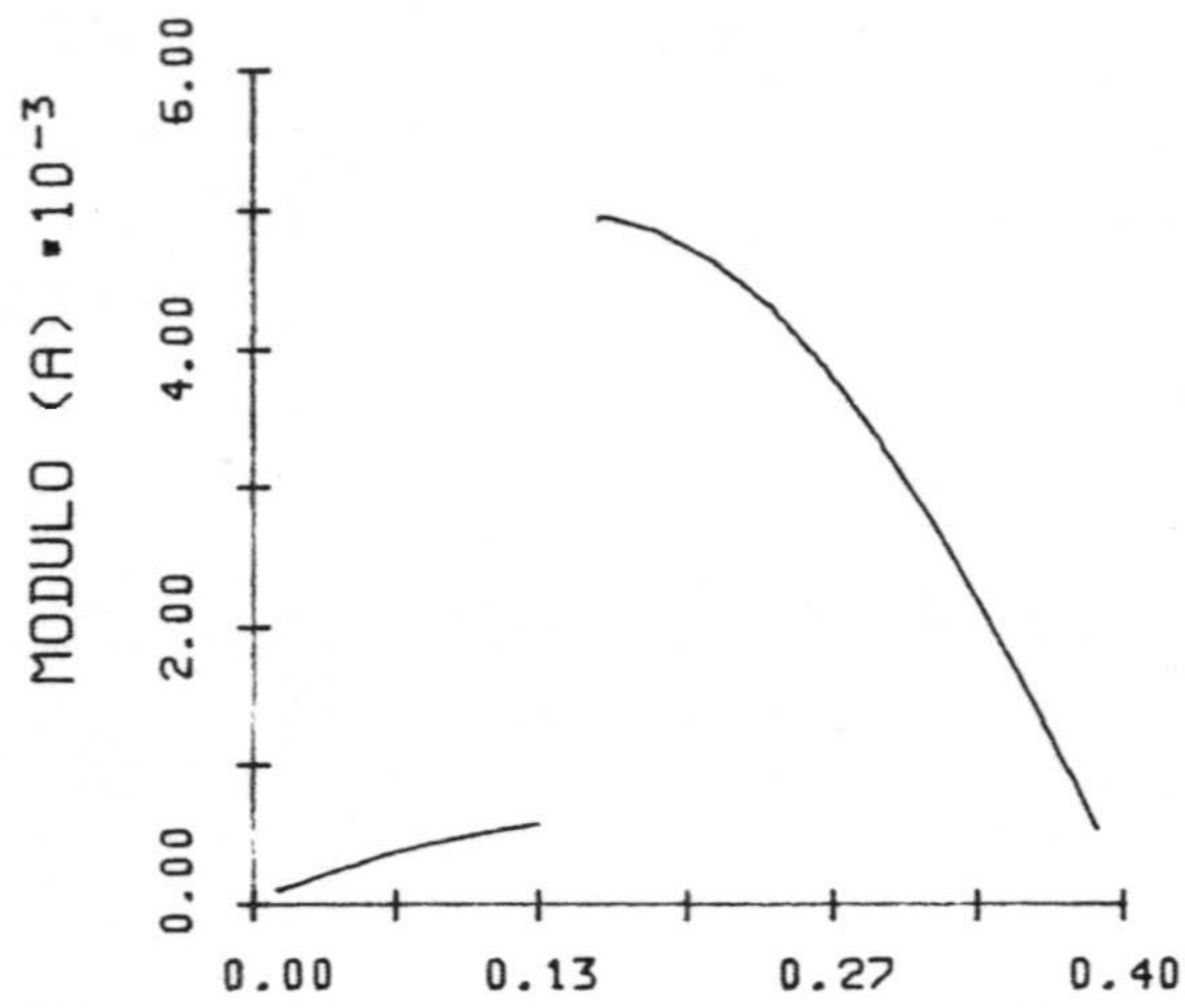
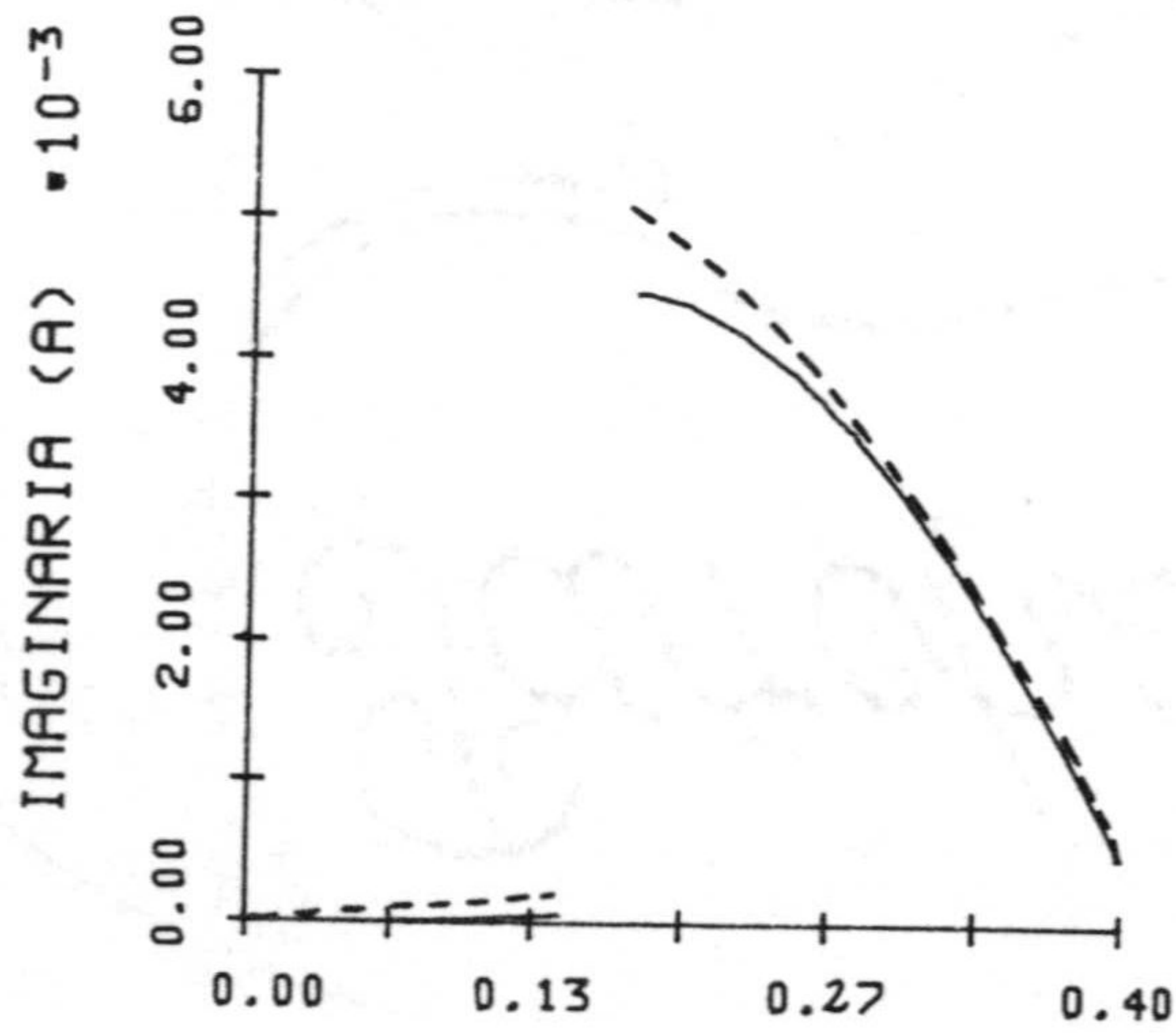


Fig. 4.43.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el caso A para la cruz de la Fig. 4.35. Caso B ($l_1 = l_3 = l_4 = 0.11$ m, $l_2 = 0.22$ m, $a = 0.00222$ m, $\theta = 60^\circ$) a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte imaginaria en el hilo vertical, d) Módulo, e) Parte Real y f) Parte imaginaria en el hilo horizontal.

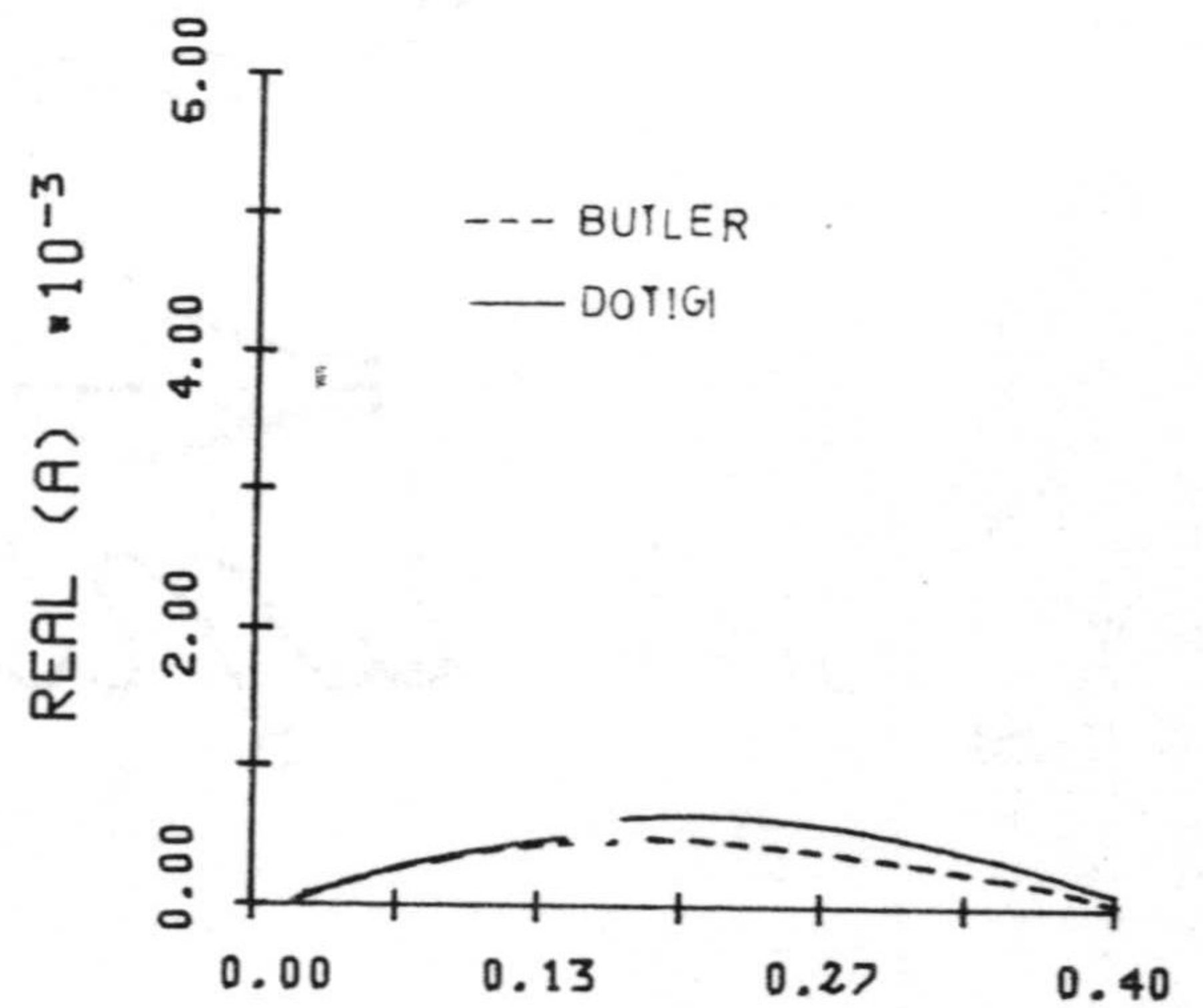




DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)
(d)

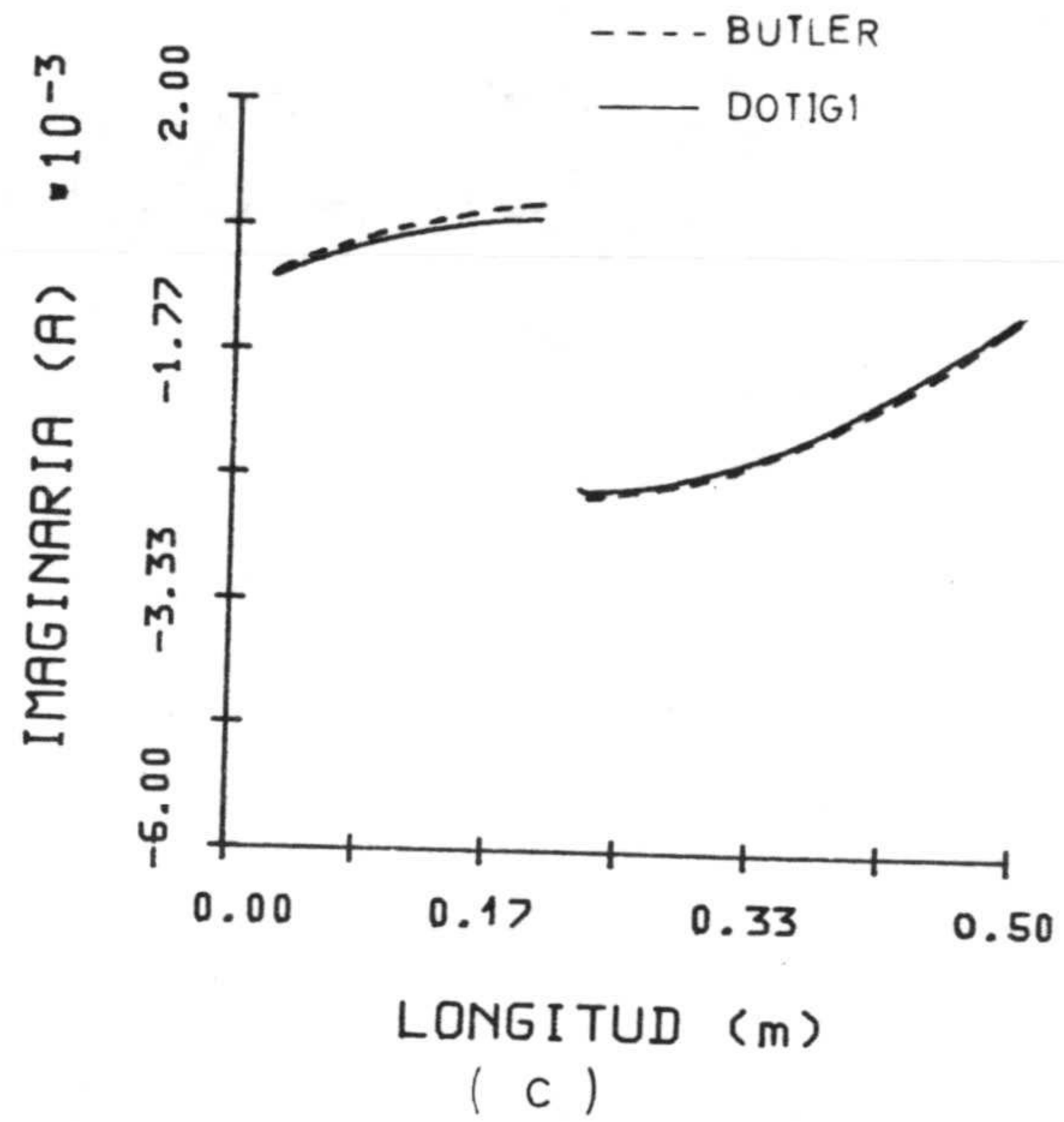
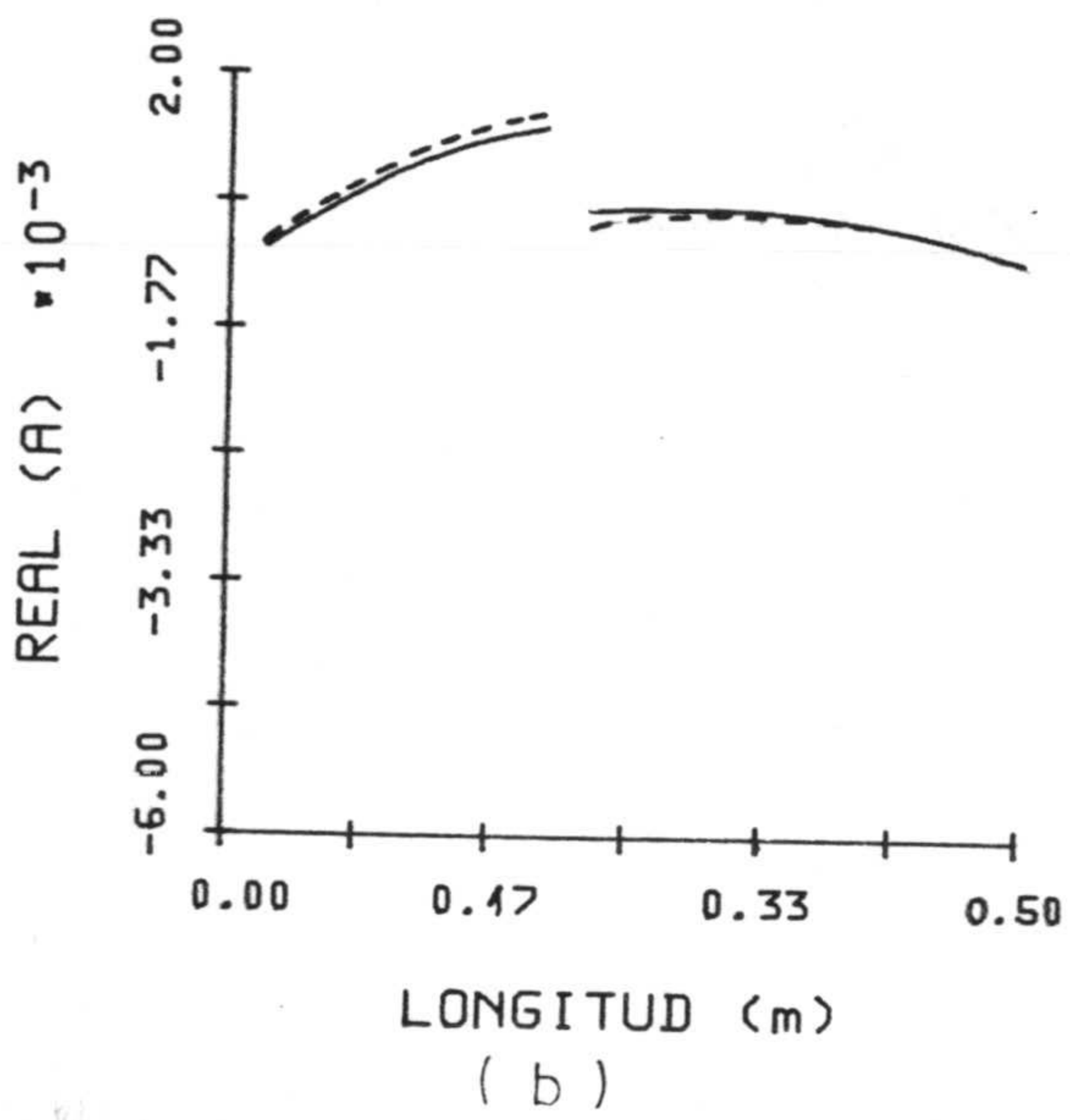
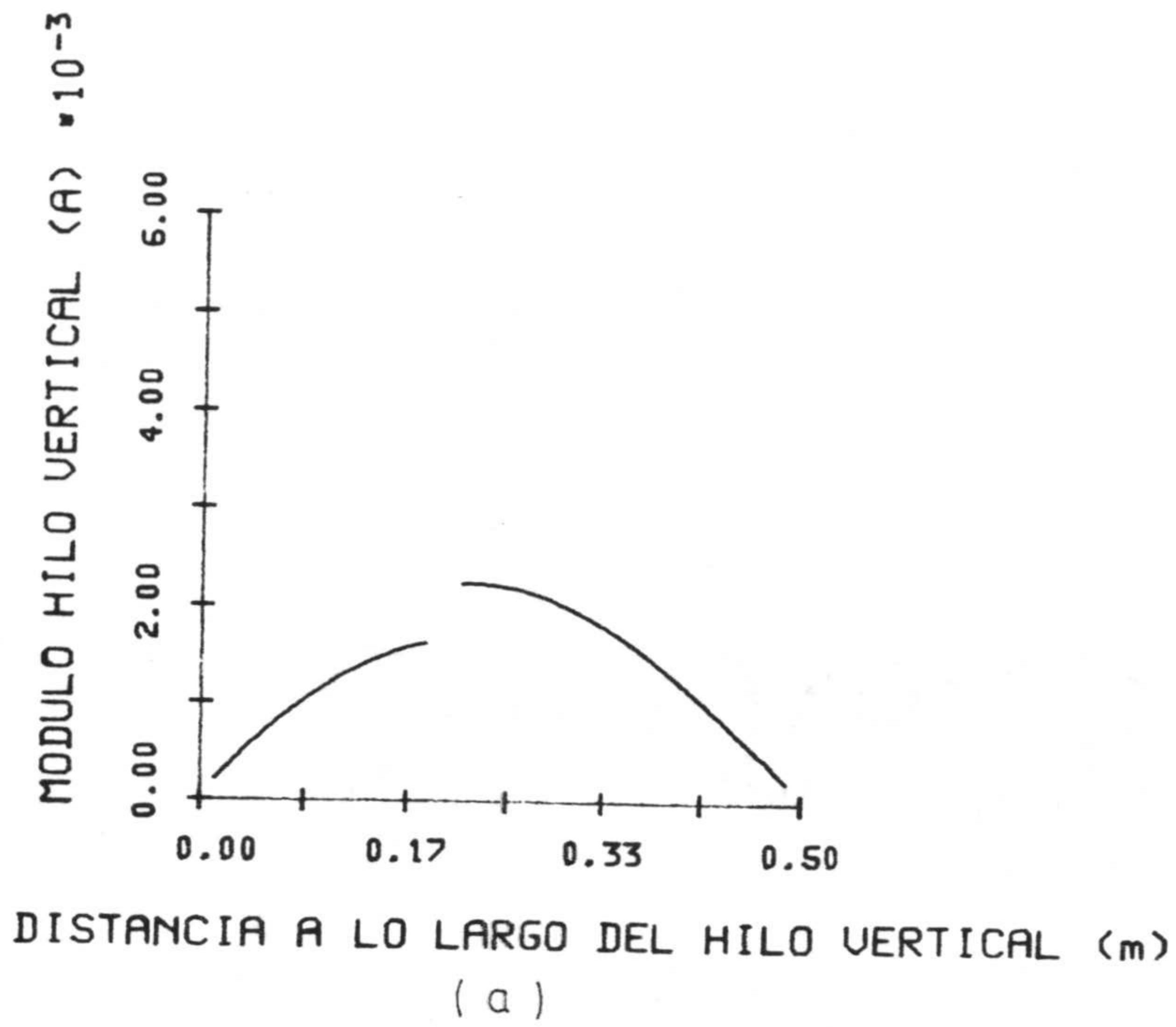


LONGITUD (m)
(f)



LONGITUD (m)
(e)

Fig. 4.44.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el caso A para la cruz de la Fig. 4.35. Caso C ($l_1 = 0.2$ m, $l_2 = 0.3$ m, $l_3 = 0.15$ m, $l_4 = 0.25$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 30^\circ$) a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte imaginaria en el hilo vertical. d) Módulo, e) Parte Real y f) Parte imaginaria en el hilo horizontal.



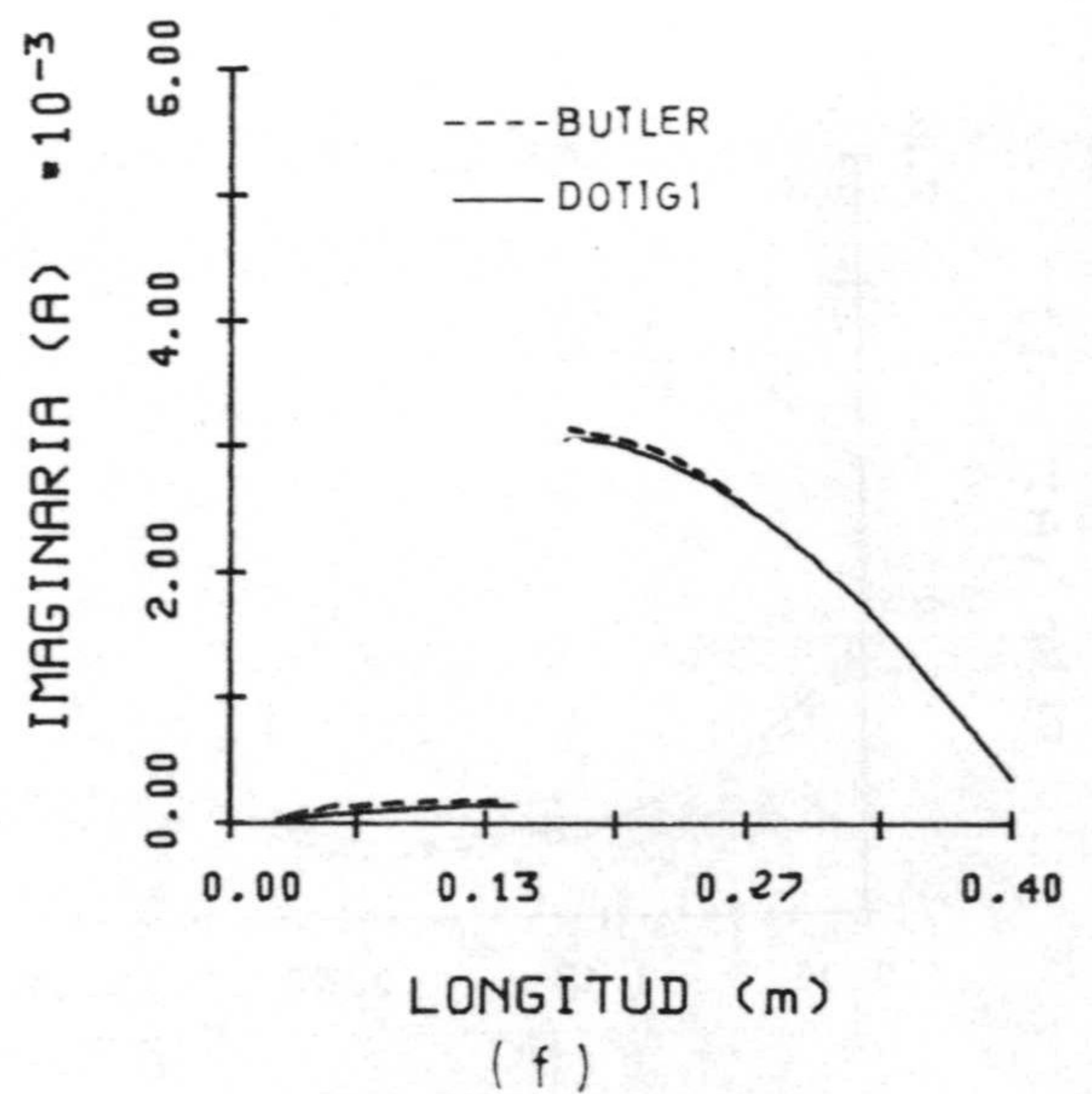
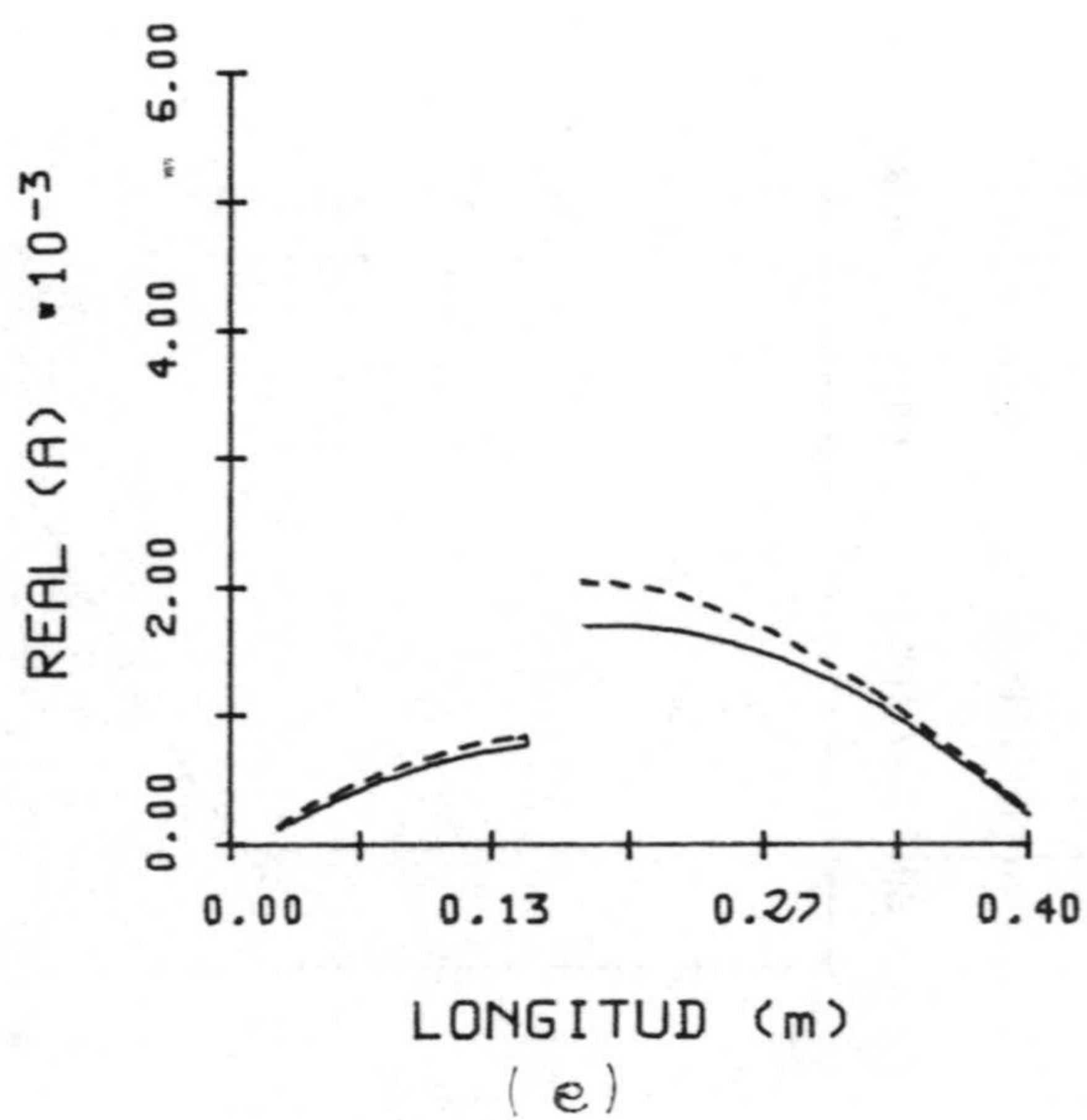
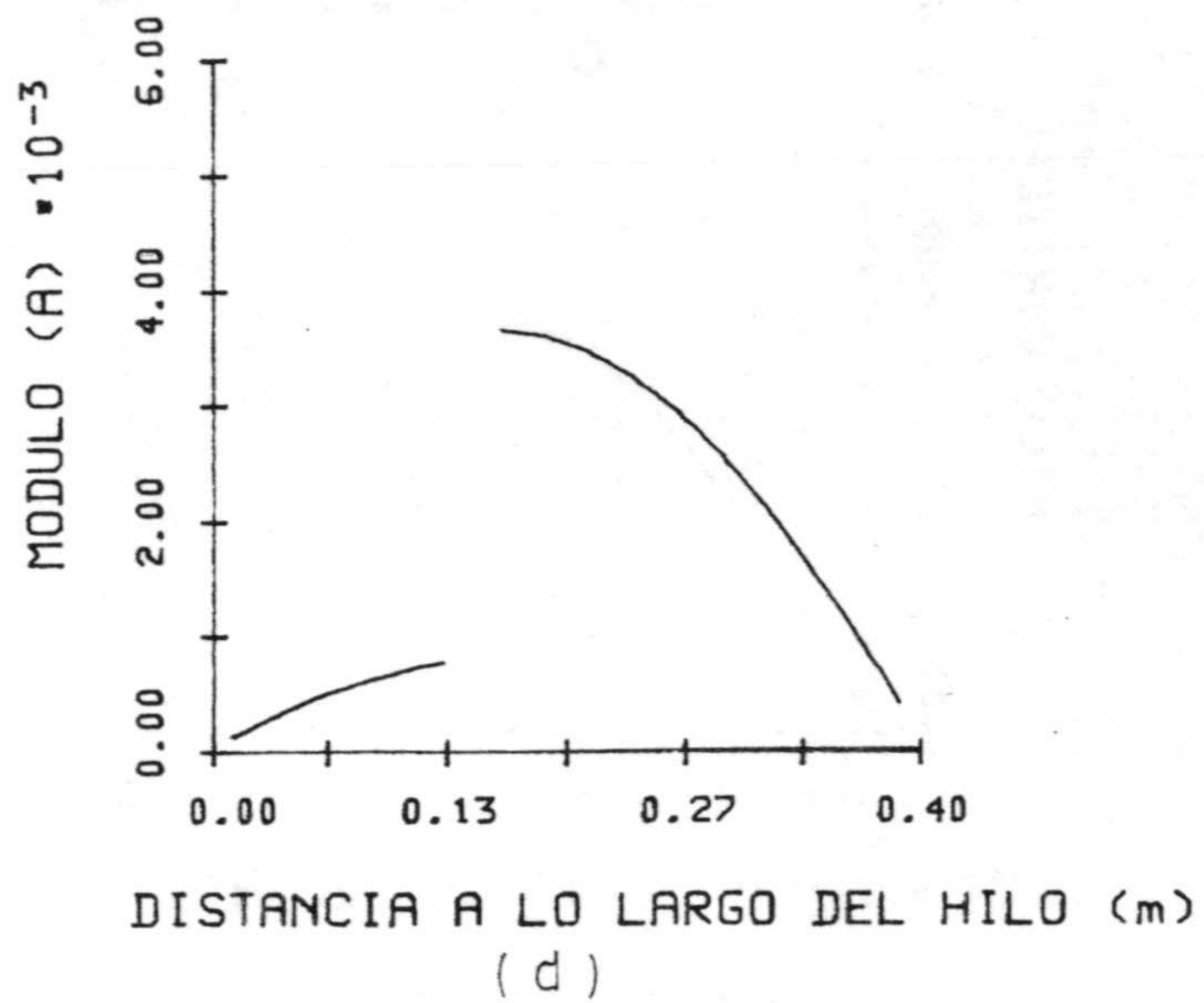
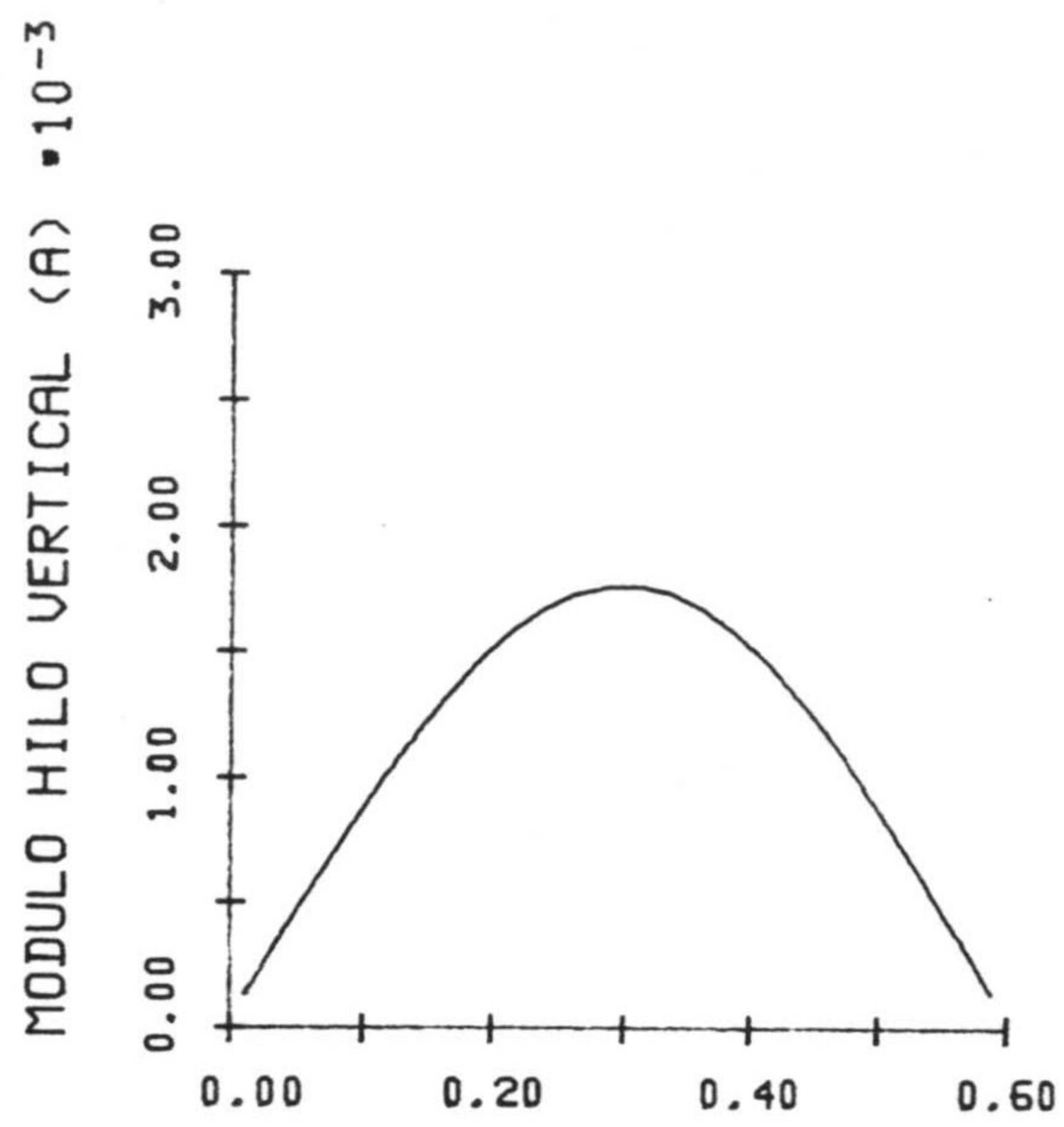
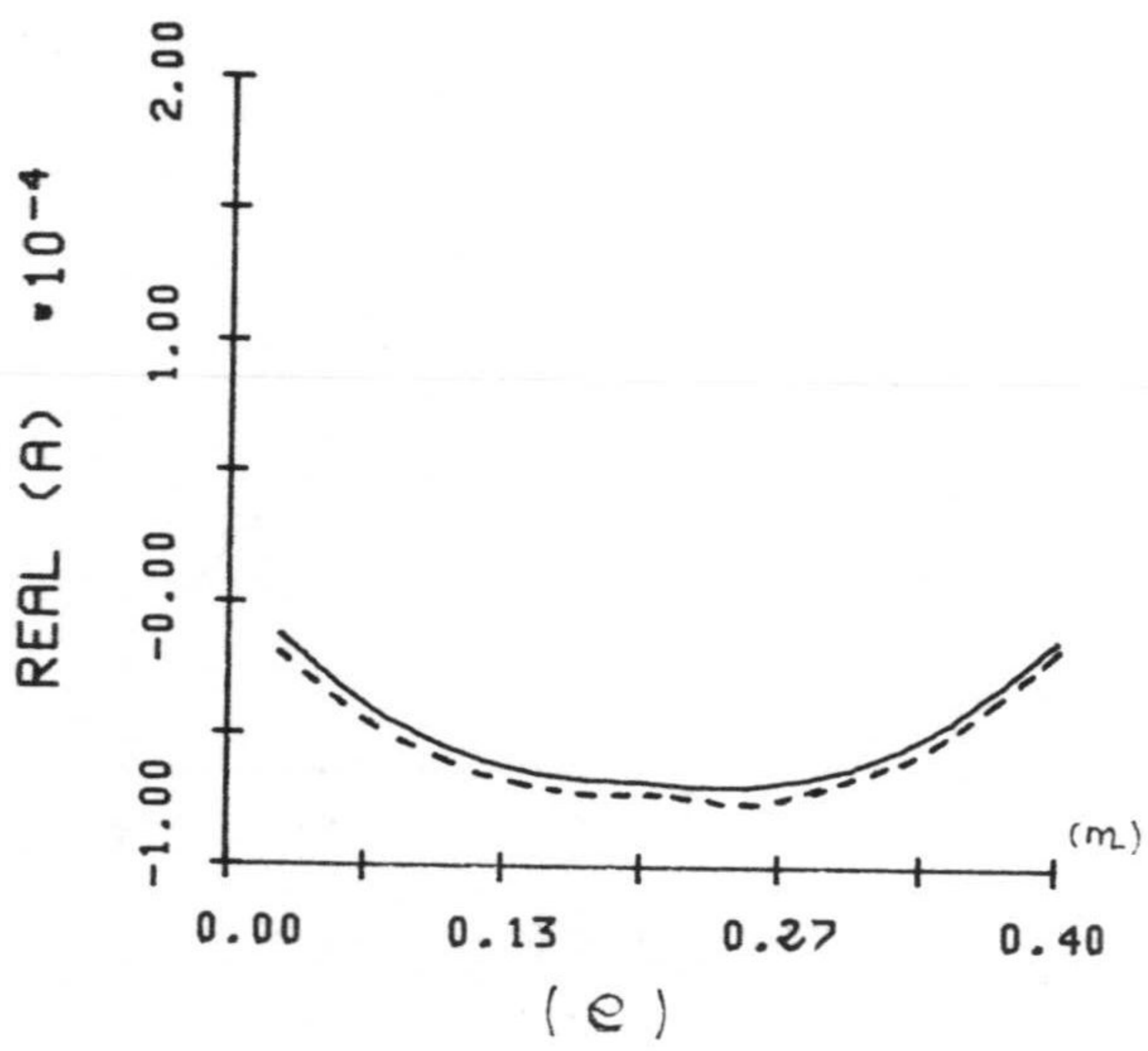


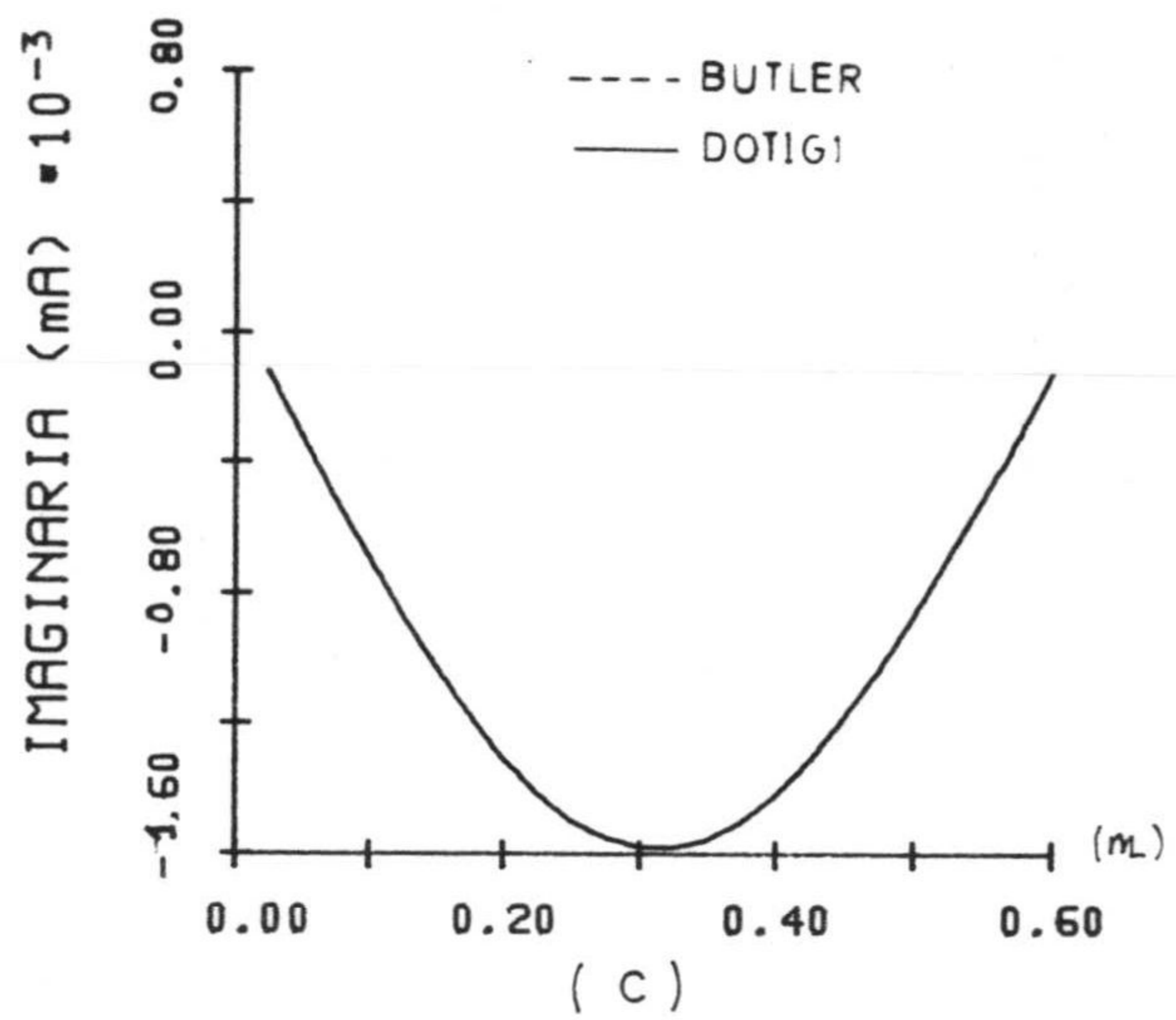
Fig. 4.45.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el caso A para la cruz de la Fig. 4.35. Caso D ($l_1 = 0.2$ m, $l_2 = 0.3$ m, $l_3 = 0.15$ m, $l_4 = 0.25$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 60^\circ$) a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte imaginaria en el hilo vertical. d) Módulo, e) Parte Real y f) Parte imaginaria en el hilo horizontal.



(a)



(e)



(c)

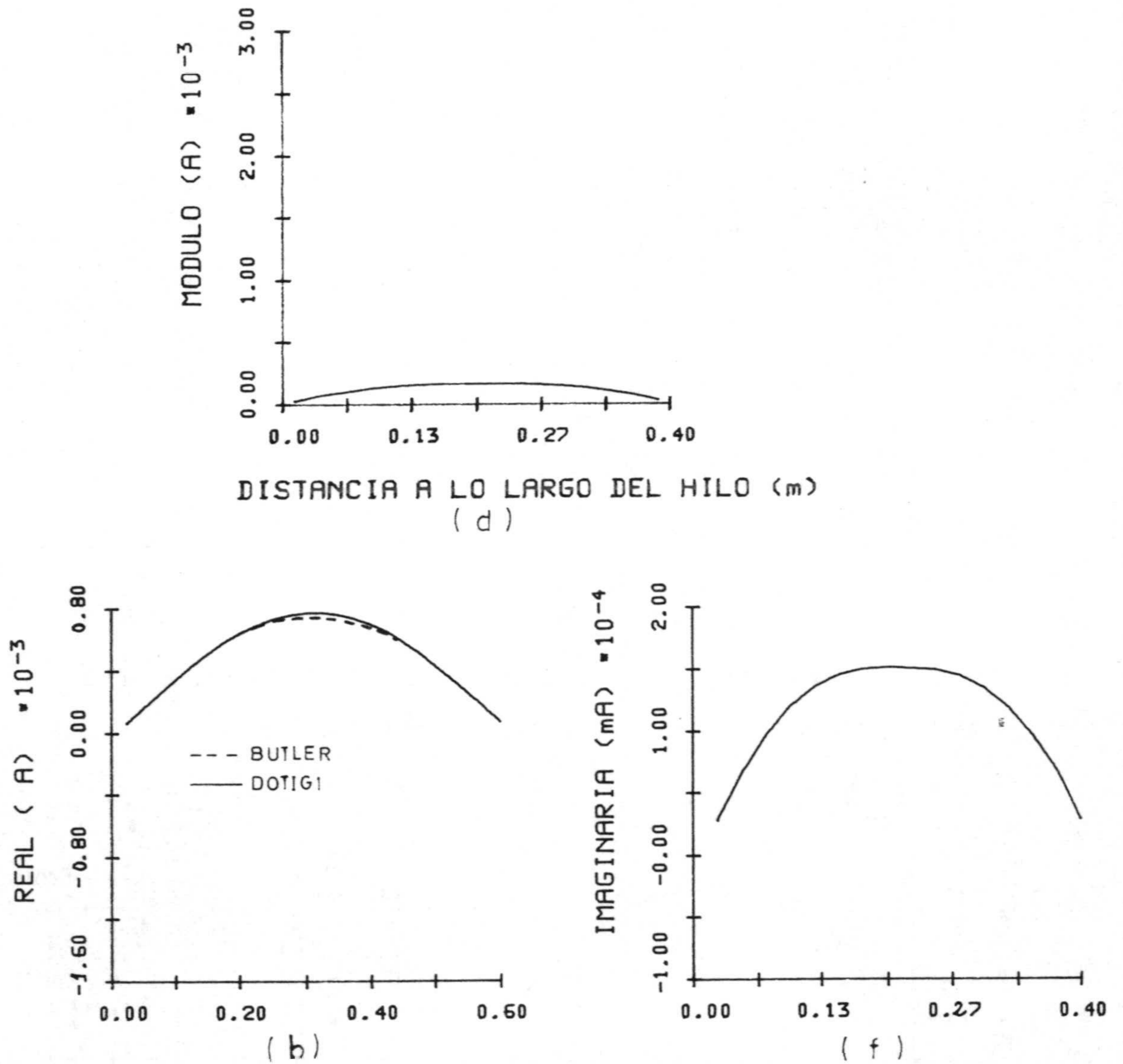
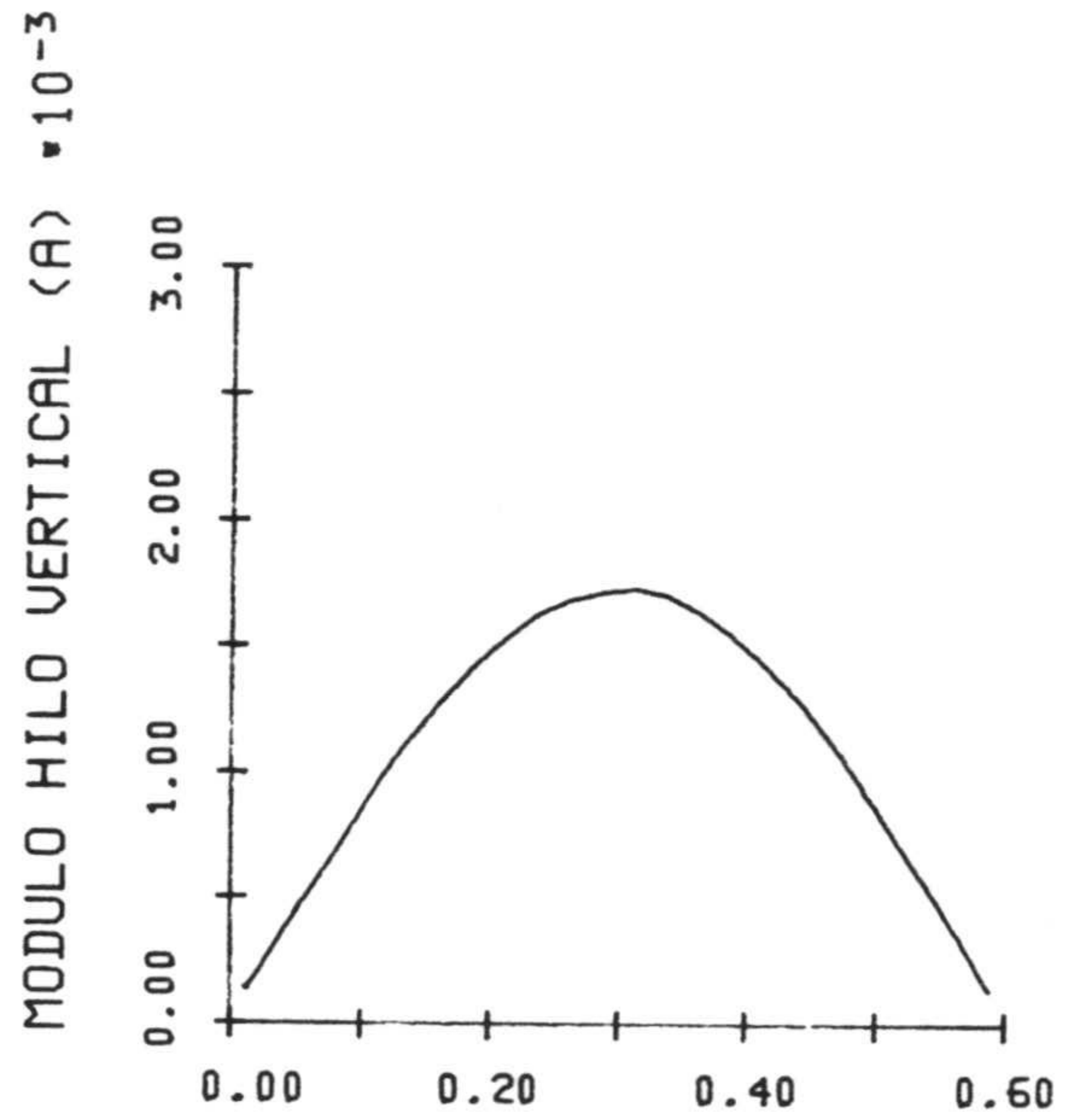
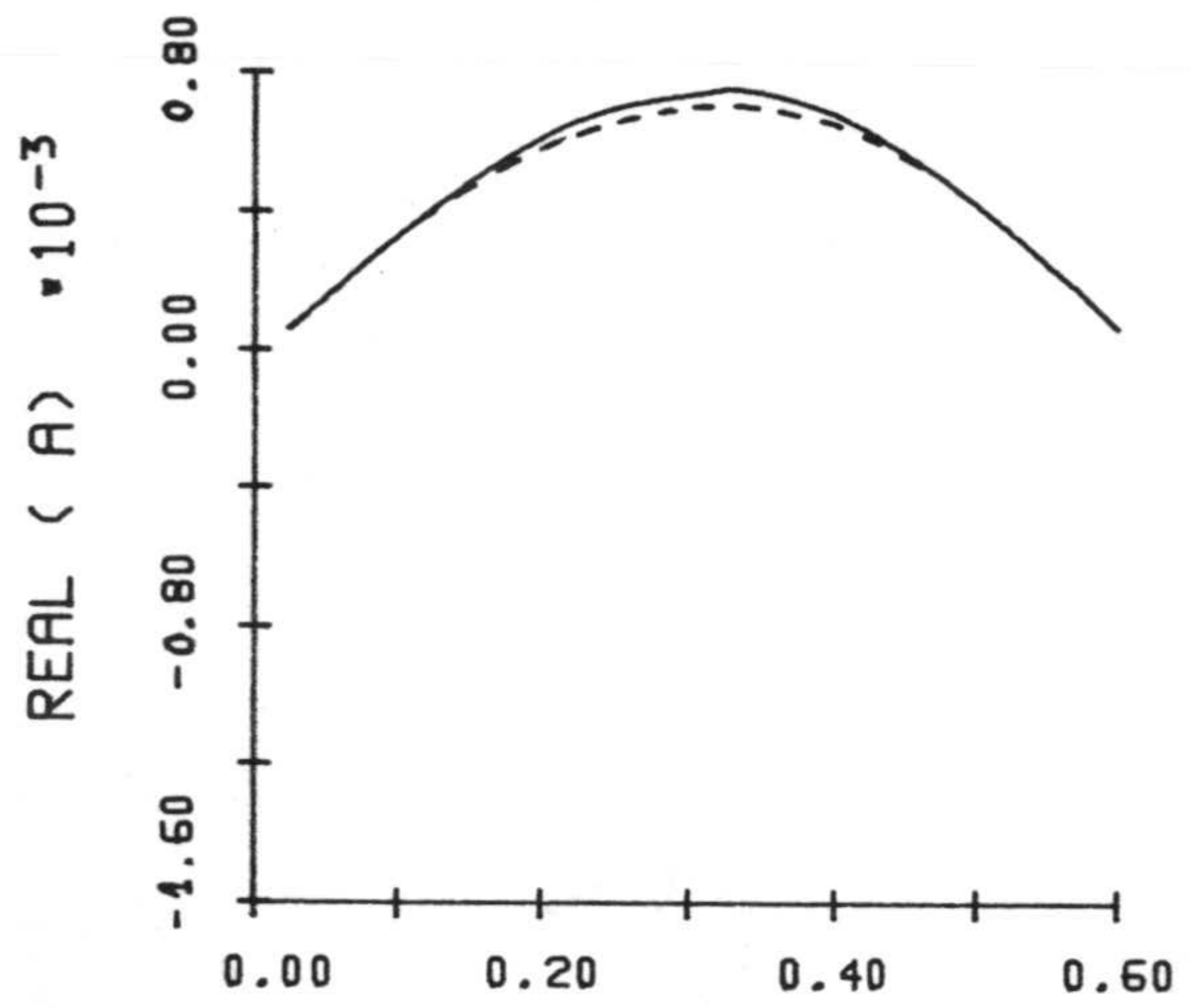


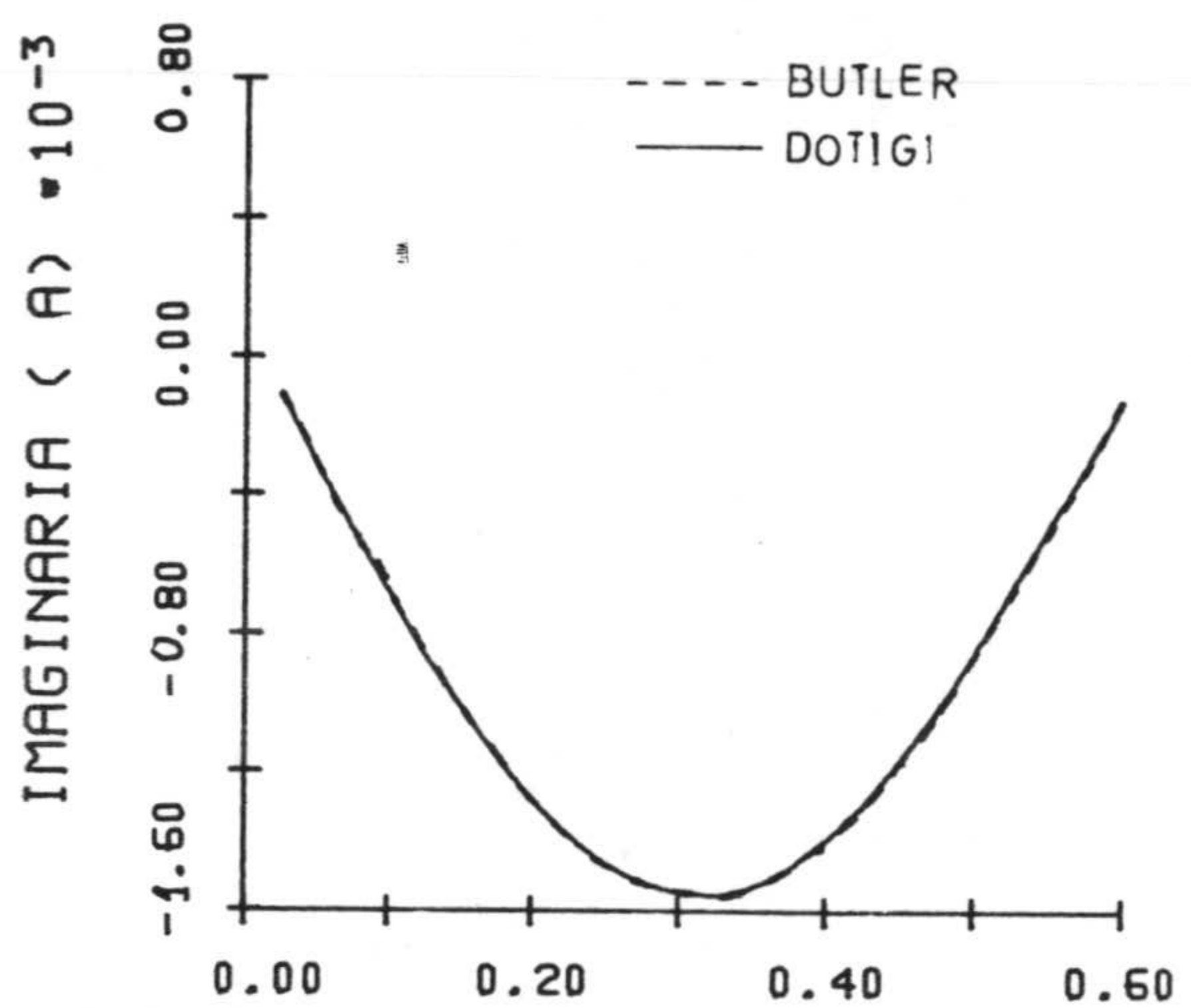
Fig. 4.46.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el caso A para la cruz de la Fig. 4.35. Caso E ($l_1 = l_2 = 0.3$ m, $l_3 = l_4 = 0.2$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 30^\circ$) a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte imaginaria en el hilo vertical. d) Módulo, e) Parte Real y f) Parte imaginaria en el hilo horizontal.



(a)



(b)



(c)

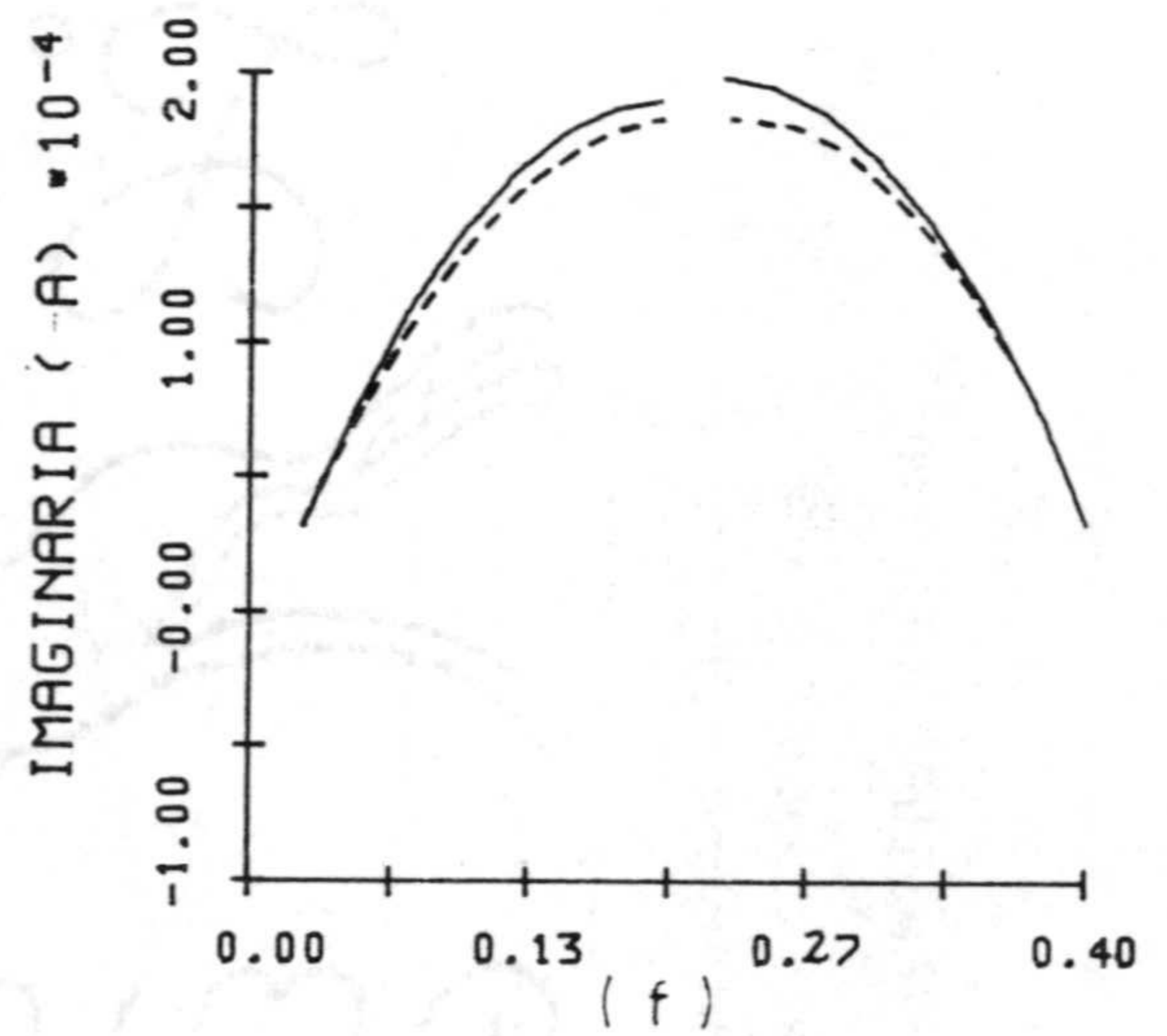
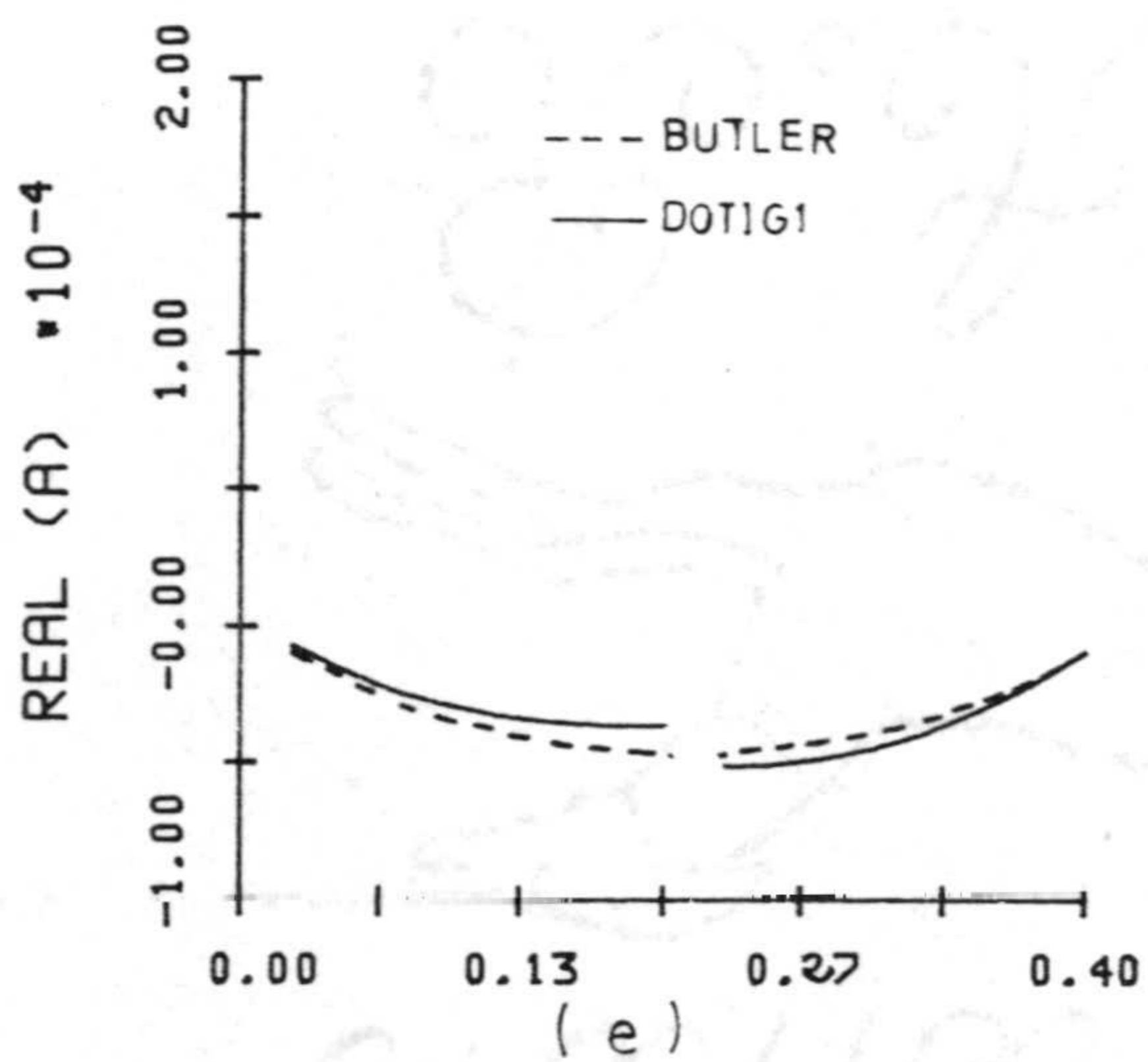
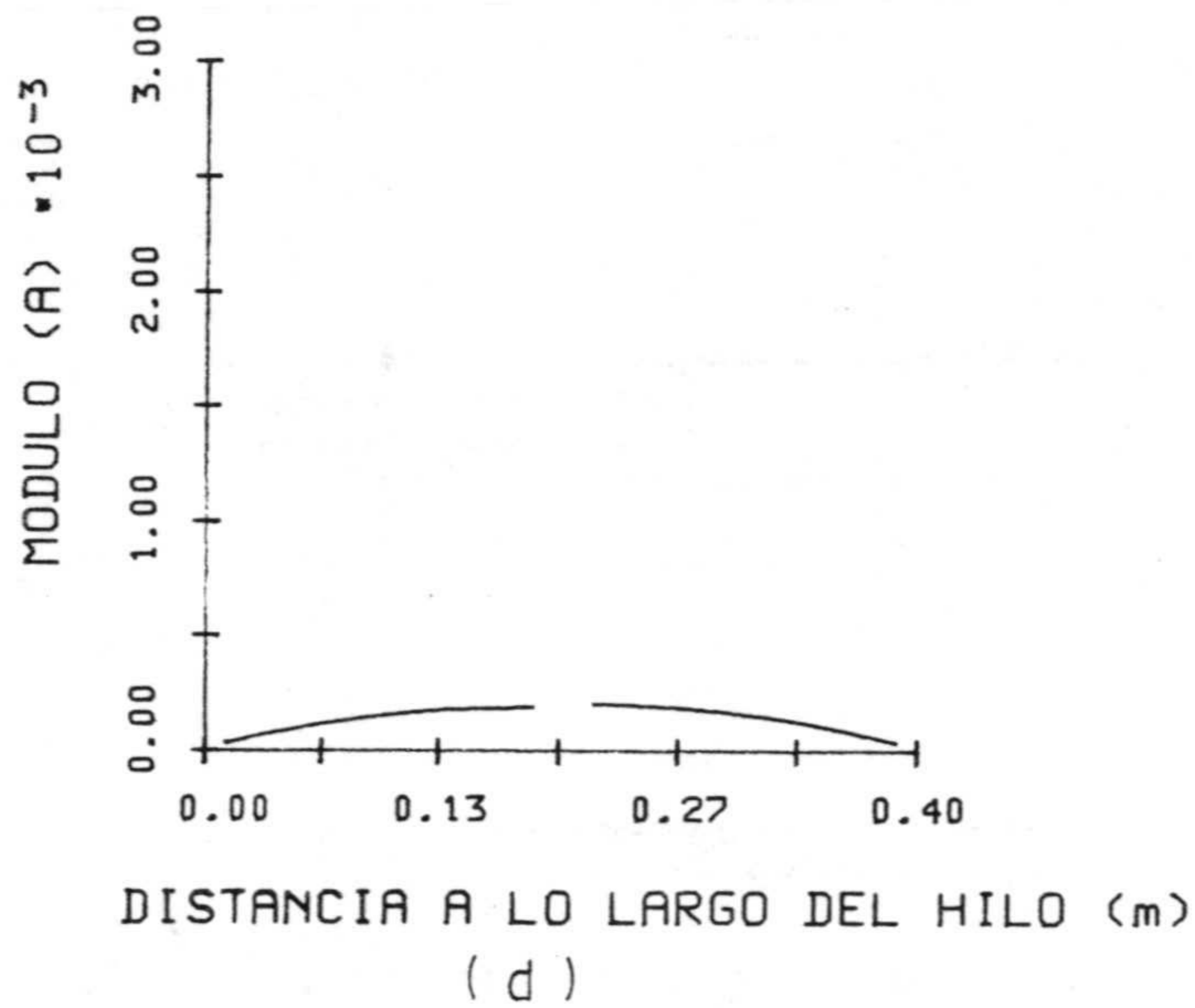


Fig. 4.47.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el caso A para la cruz de la Fig. 4.35. Caso F ($l_1 = l_2 = 0.3$ m, $l_3 = l_4 = 0.2$ m, $a = 0.001$ m, $\theta = 60^\circ$) a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte imaginaria en el hilo vertical. d) Módulo, e) Parte Real y f) Parte imaginaria en el hilo horizontal.

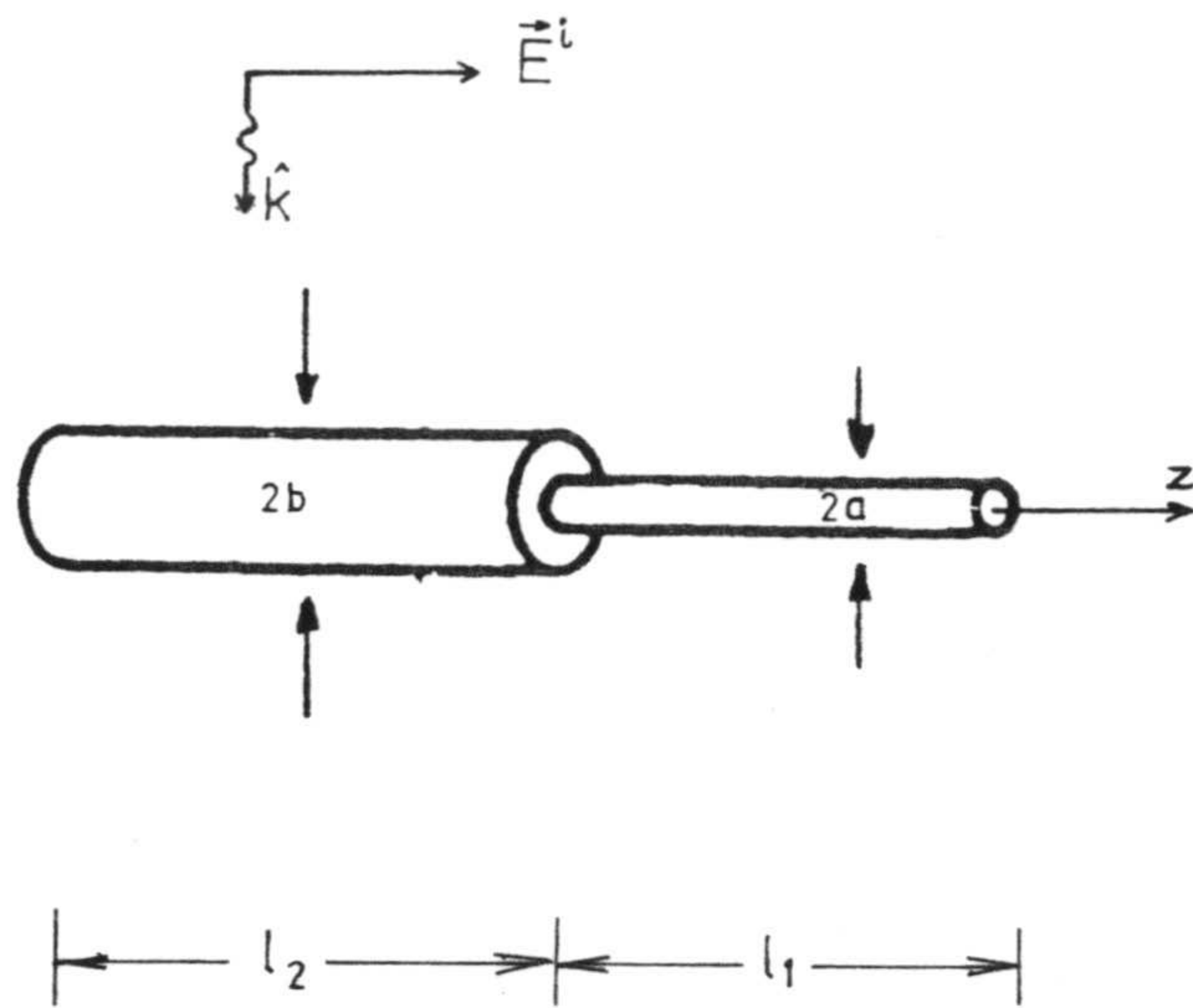


Fig. 4.48.- Geometría de una estructura formada por dos hilos de diferentes radios. Incidencia normal.

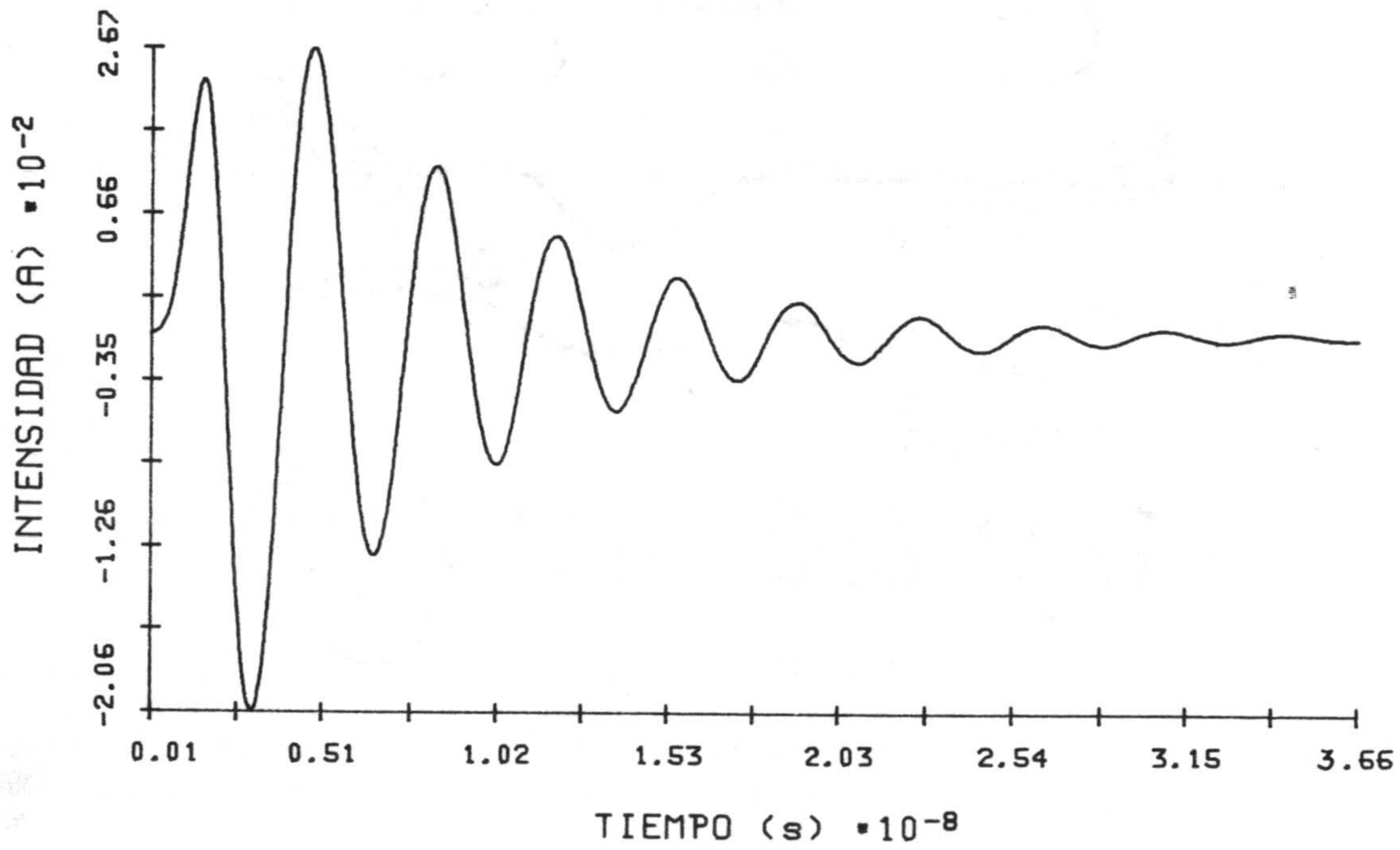


Fig. 4.49.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la estructura de la Fig. 4.48. (Caso A $l_1 = l_2 = 0.5$ m, $a = 0.002$ m y $b = 0.004$ m).

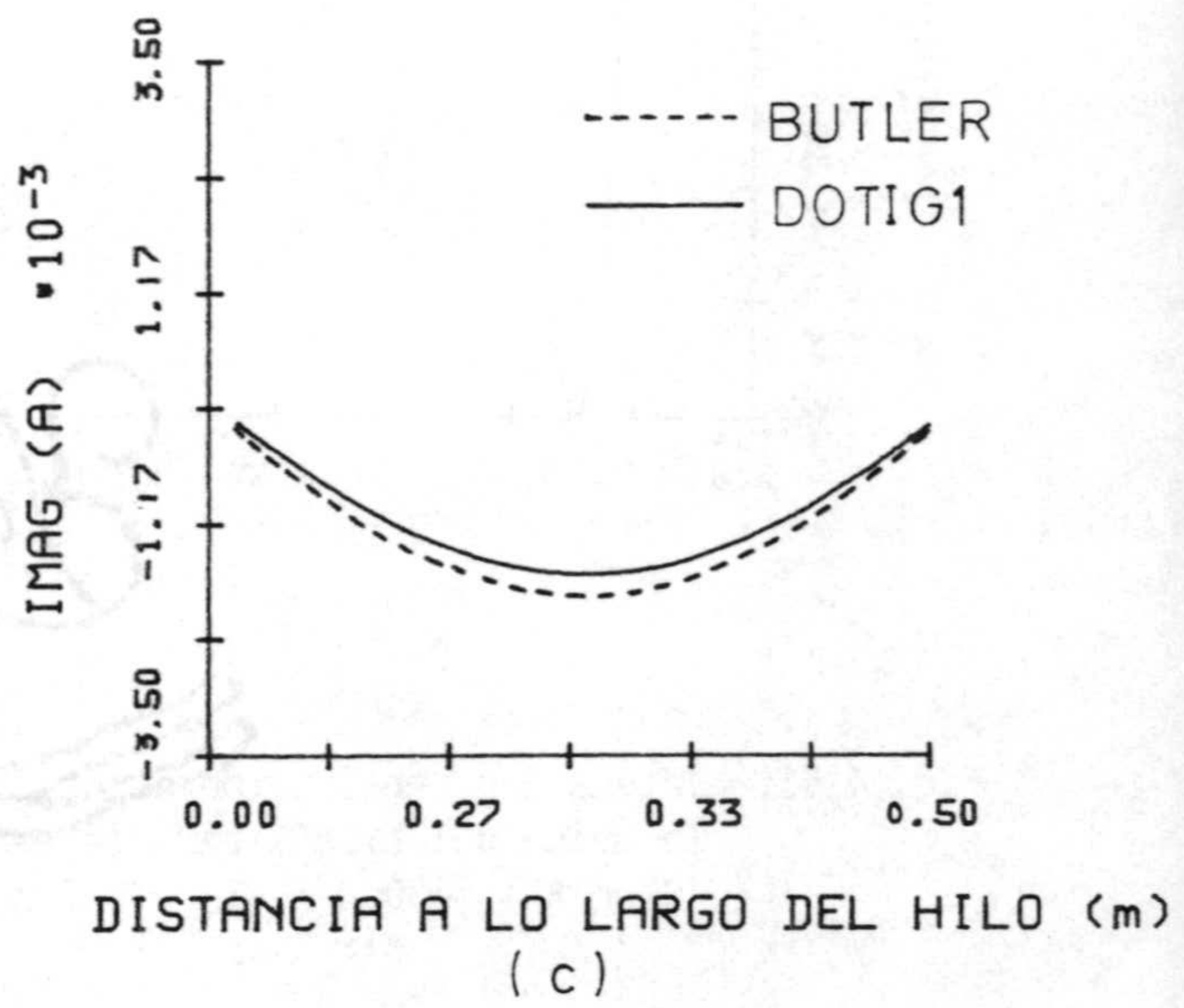
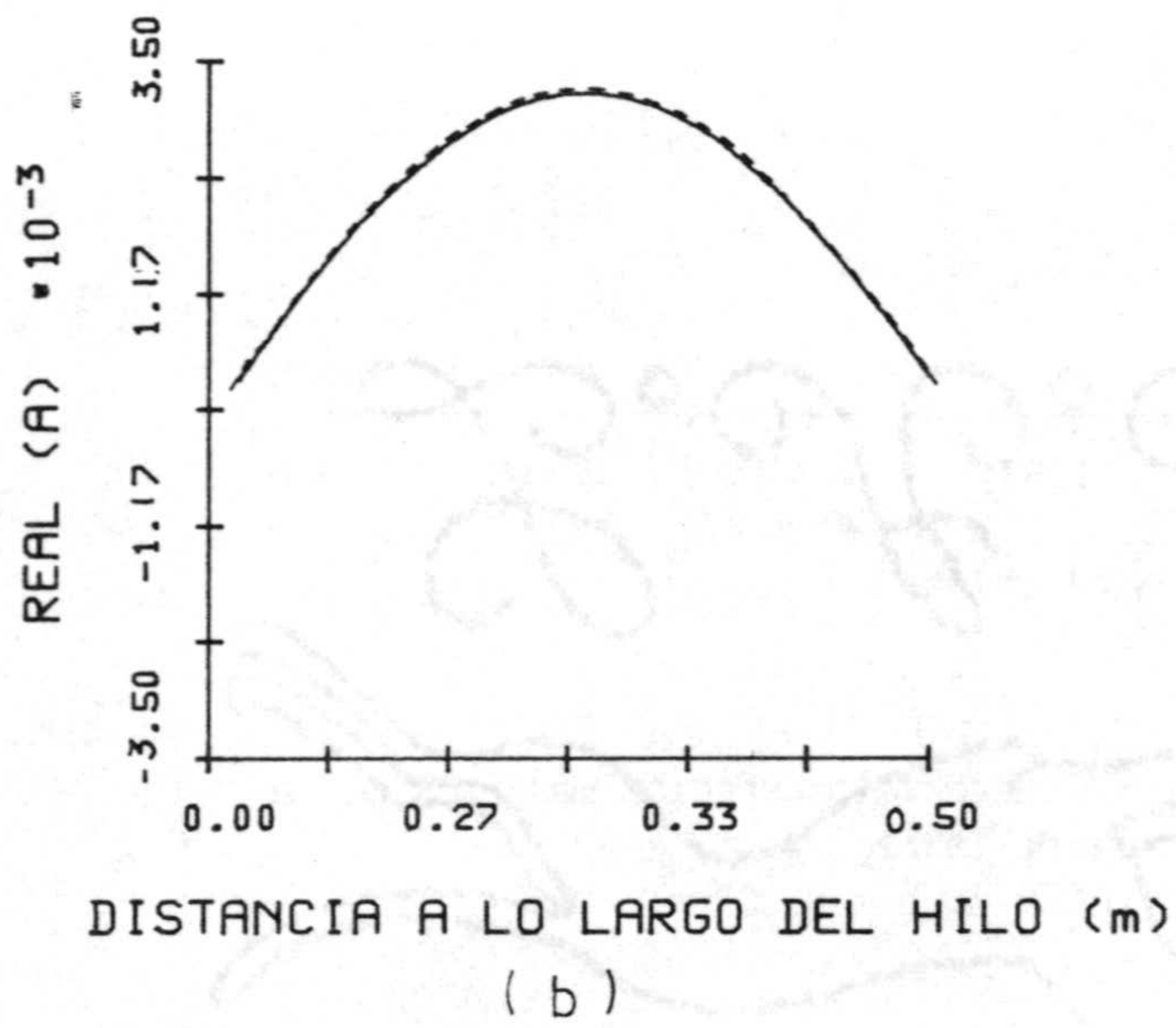
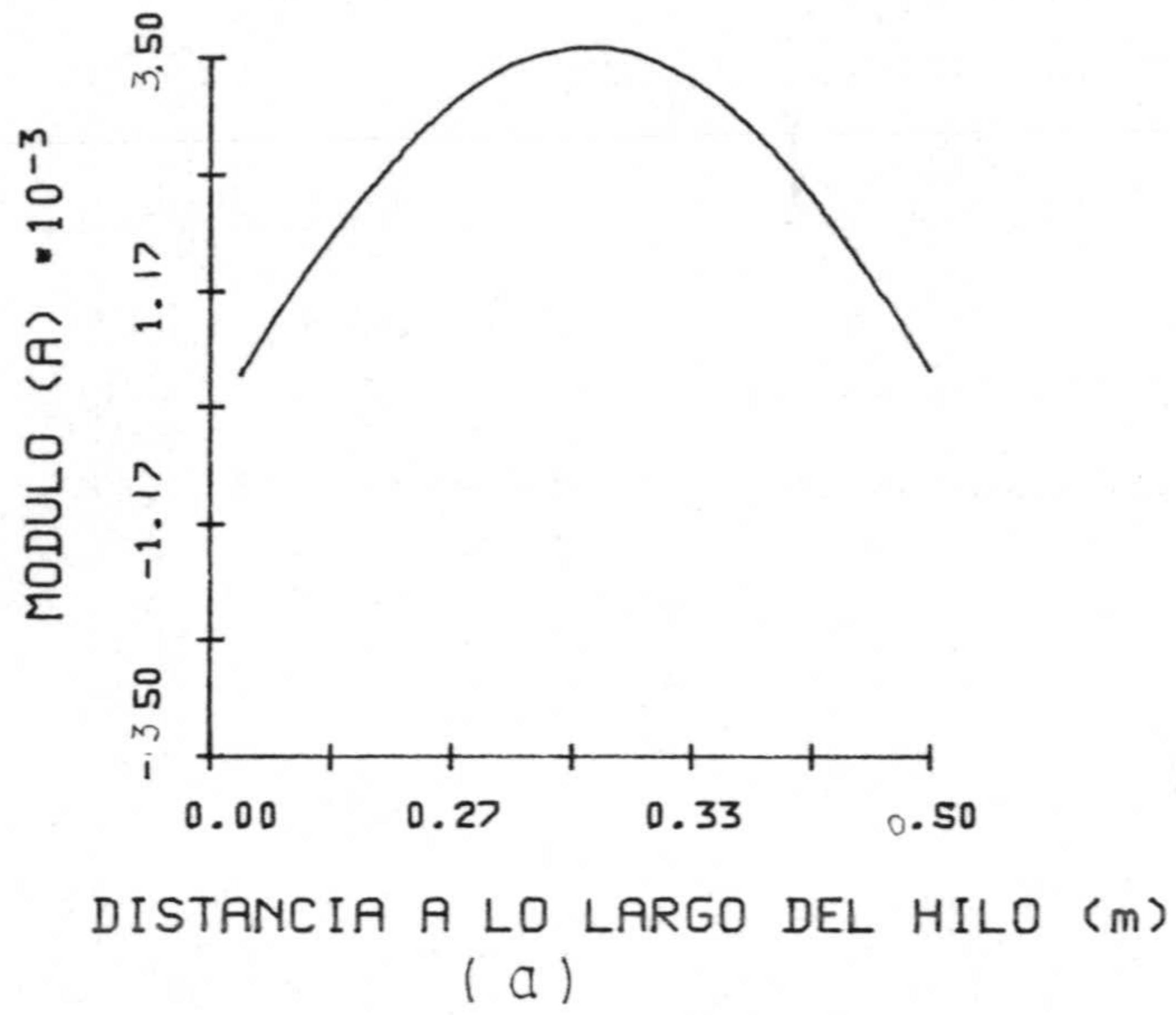


Fig. 4.50.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 2$ m en el Caso A para la estructura de la Fig. 4.48 a) Módulo, b) Parte Real, c) Parte Imaginaria.

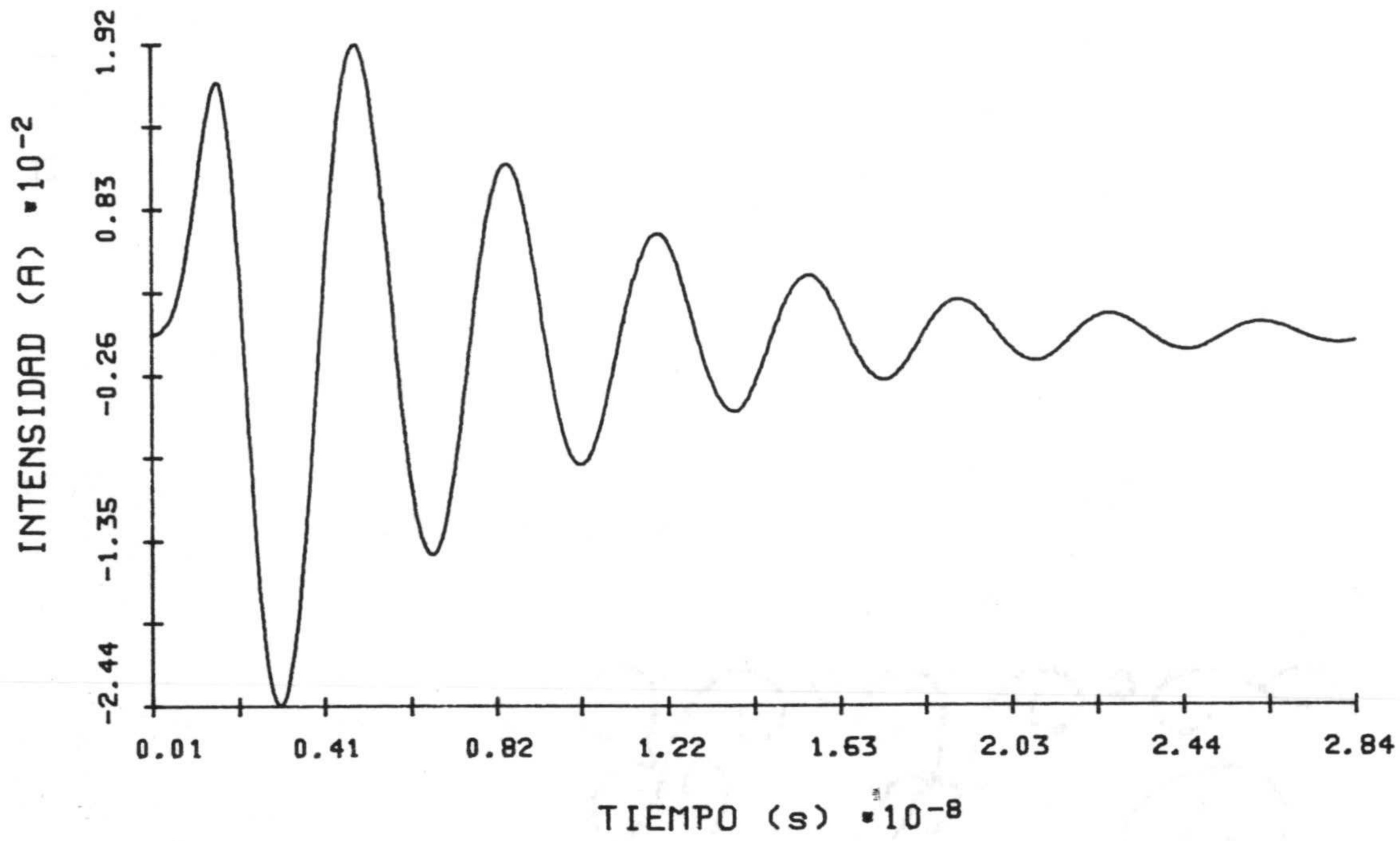


Fig. 4.51.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la estructura de la Fig. 4.48.
 (Caso B $l_1 = 0.3$ m, $l_2 = 0.2$ m, $a = 0.001$ m, $b = 0.002$ m).

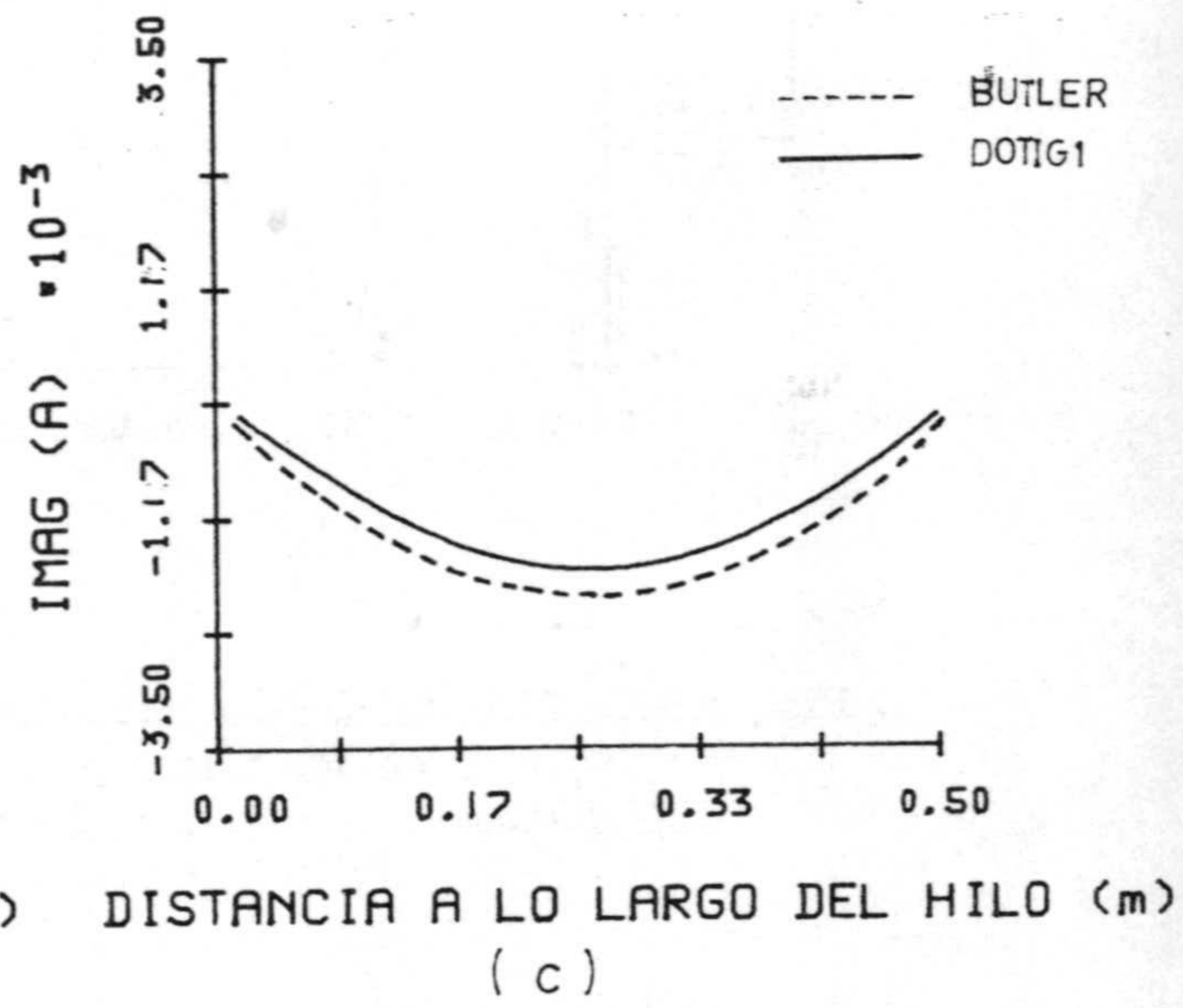
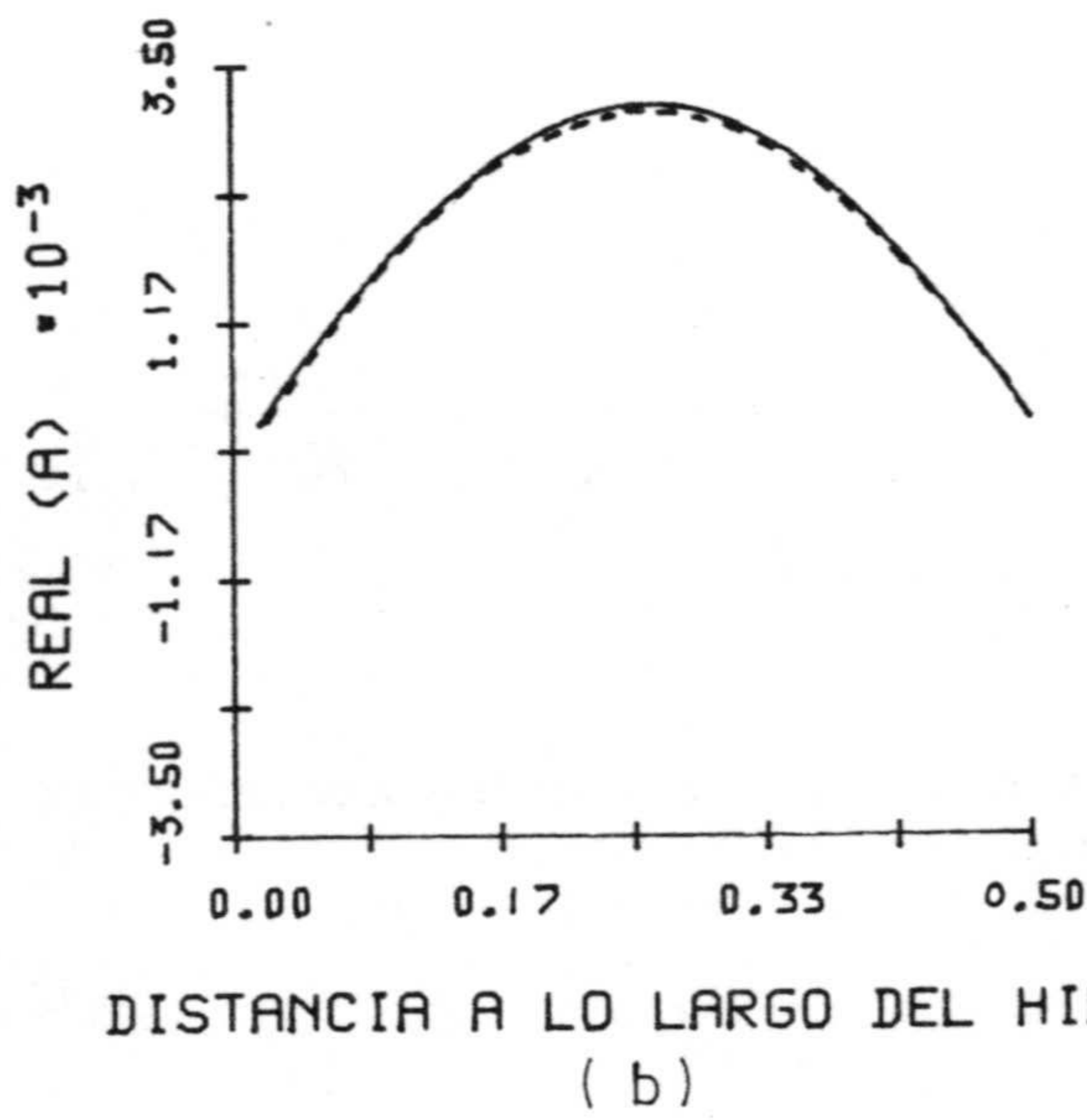
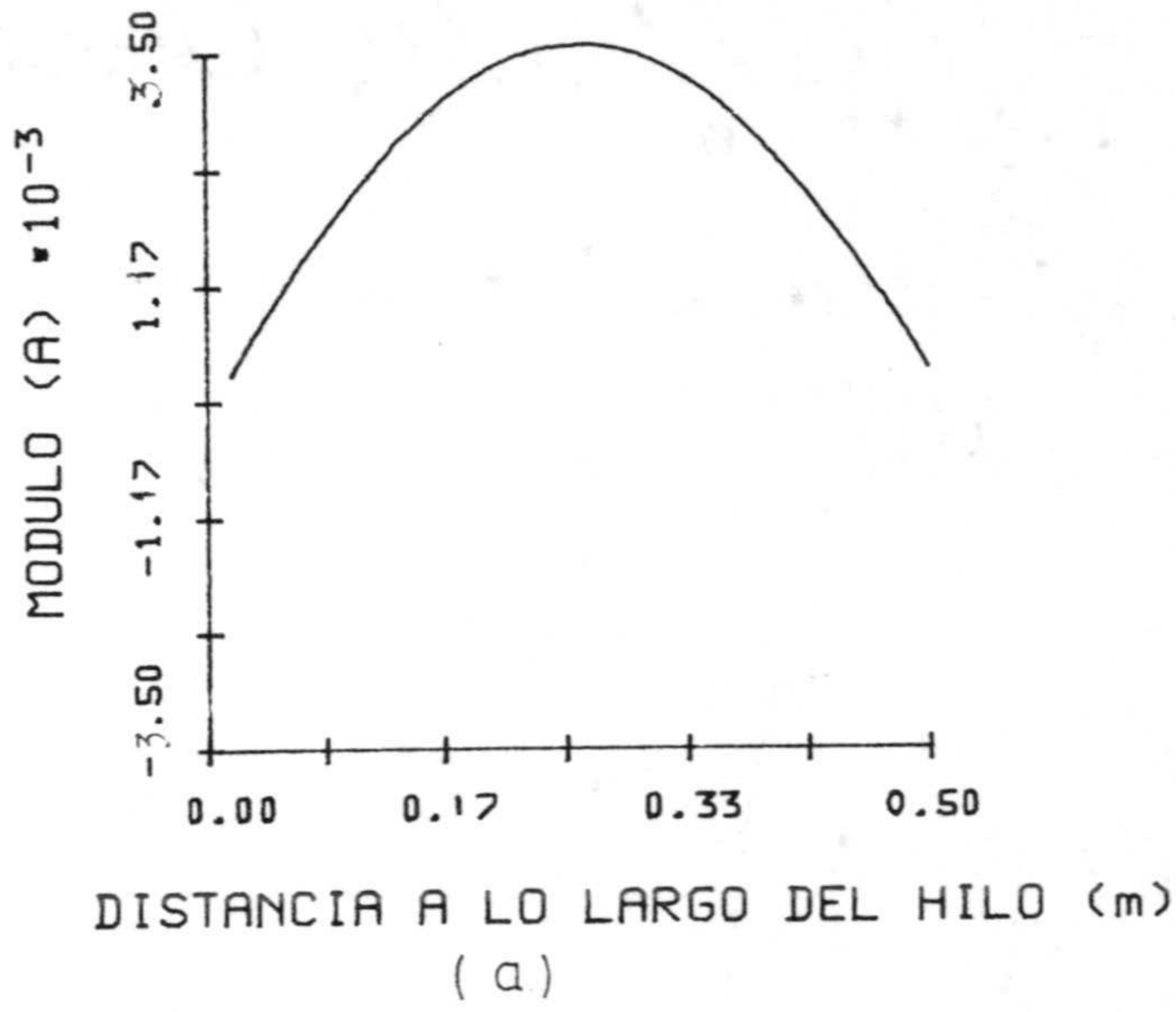


Fig. 4.52.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el Caso B para la estructura de la Fig. 4.48 a) Módulo, b) Parte Real, c) Parte Imaginaria.

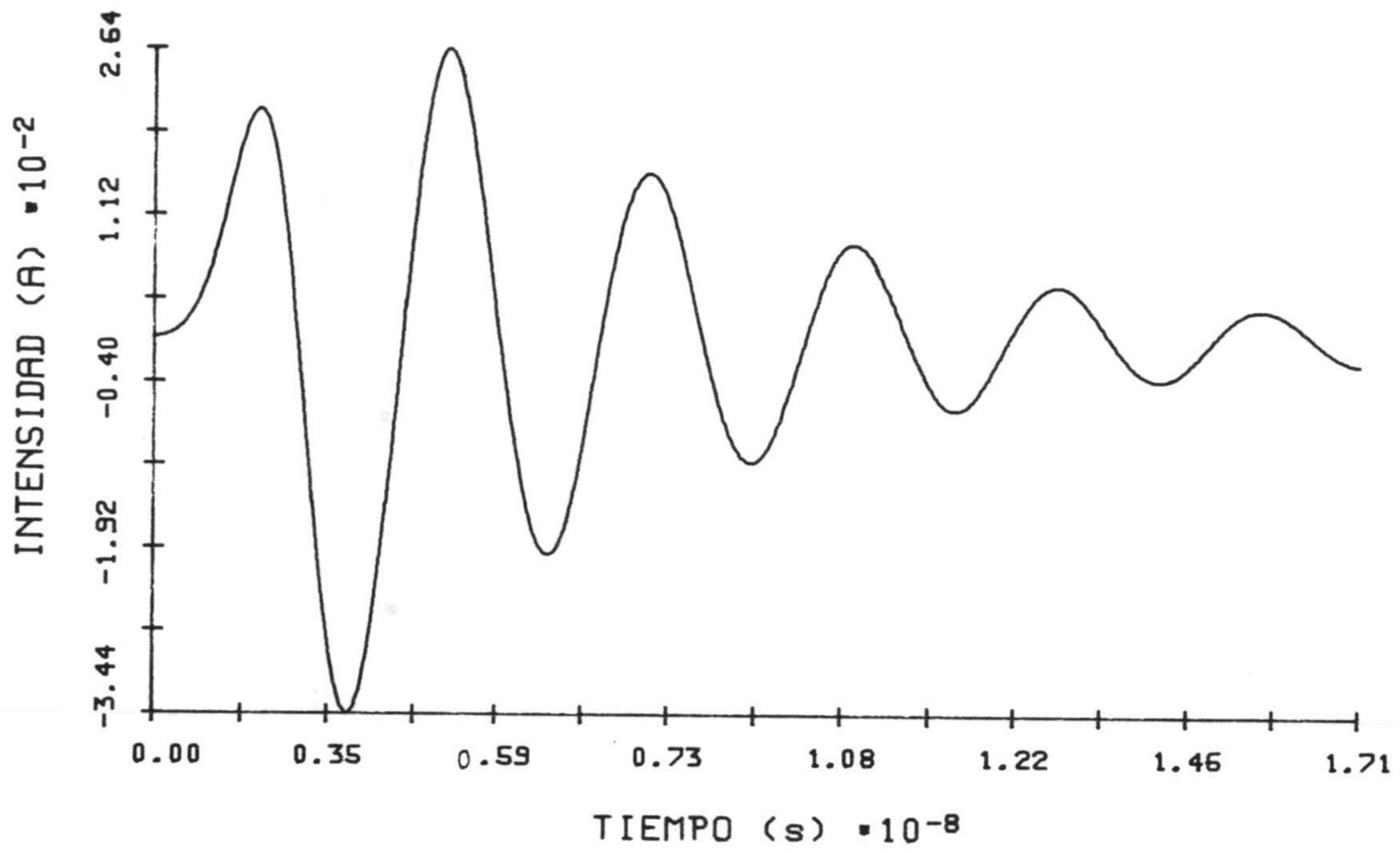
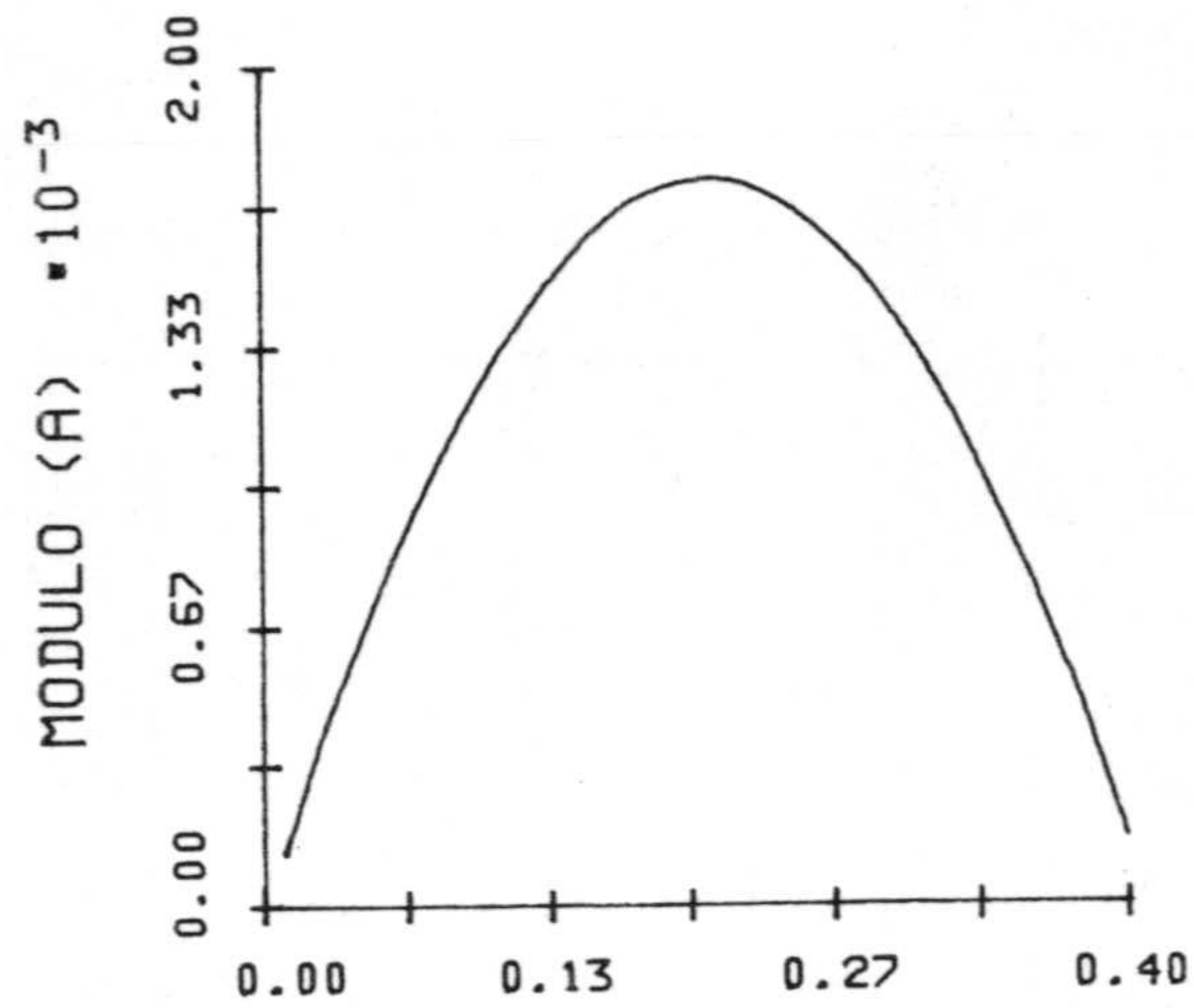
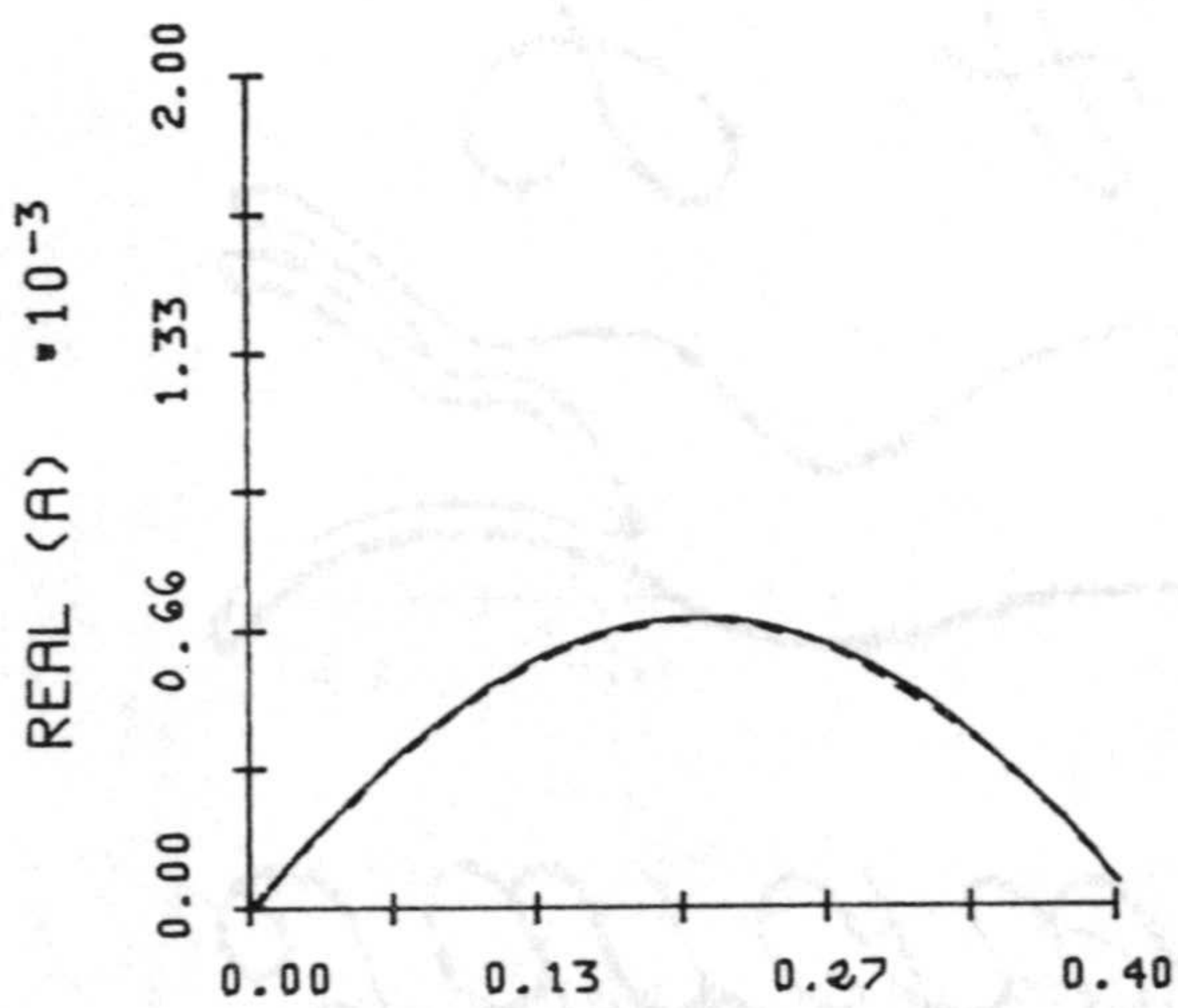


Fig. 4.53.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la estructura de la Fig. 4.48.
 (Caso C $l_1 = 0.25$ m, $l_2 = 0.15$ m, $a = 0.001$ m y $b = 0.002$ m).



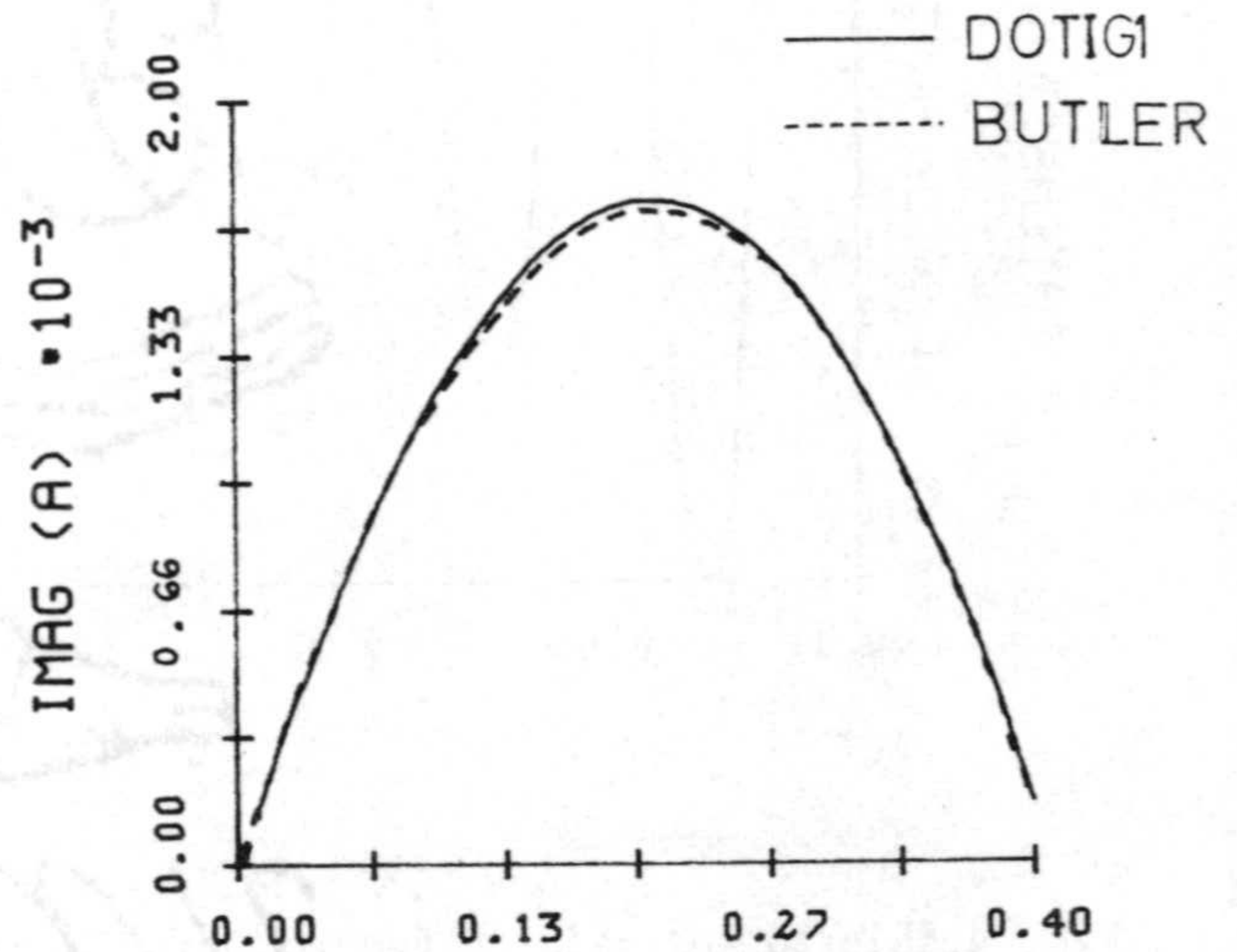
DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(a)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(b)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(c)

Fig. 4.54.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el Caso C para la estructura de la Fig. 4.48 a) Módulo, b) Parte Real, c) Parte Imaginaria.

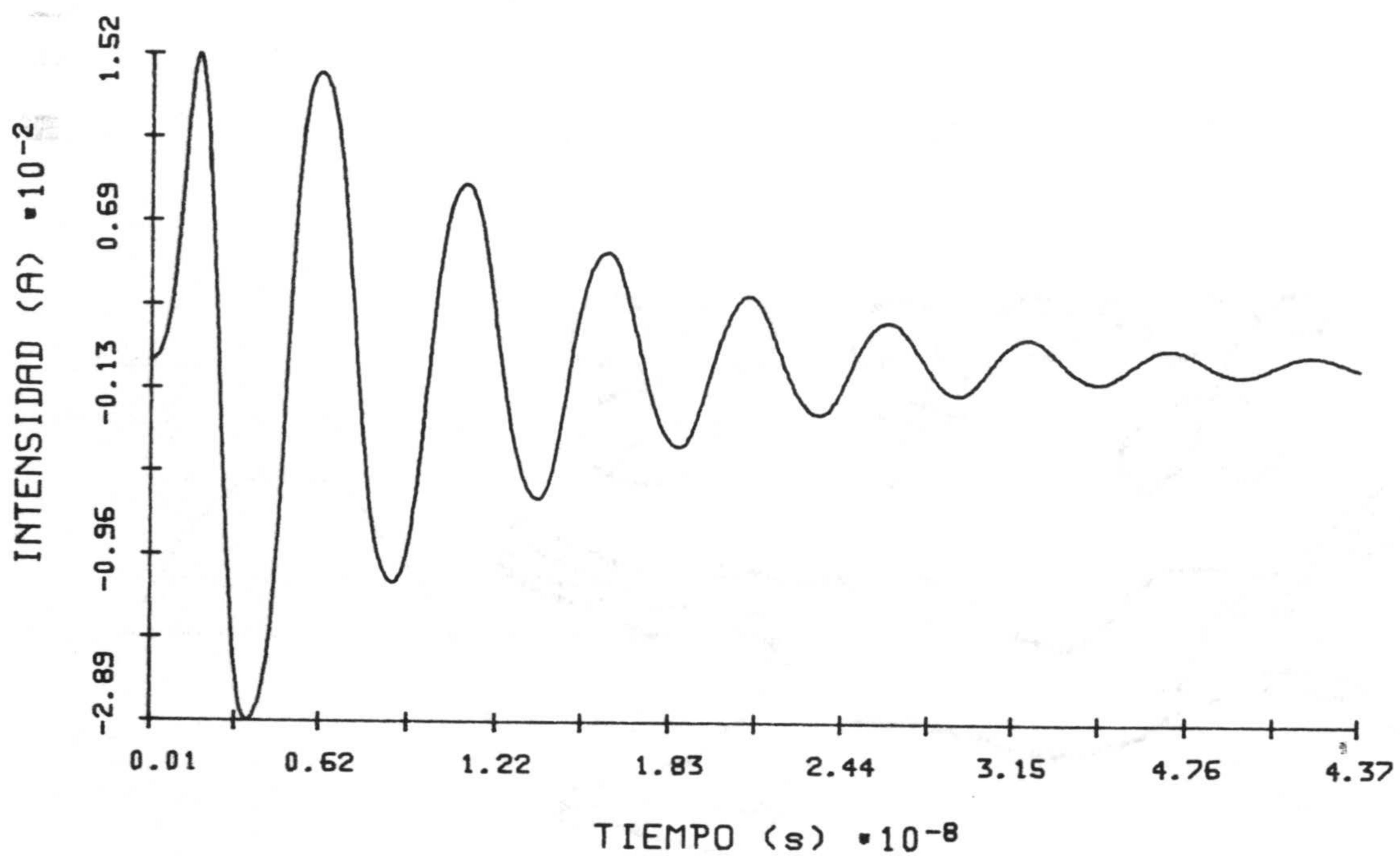
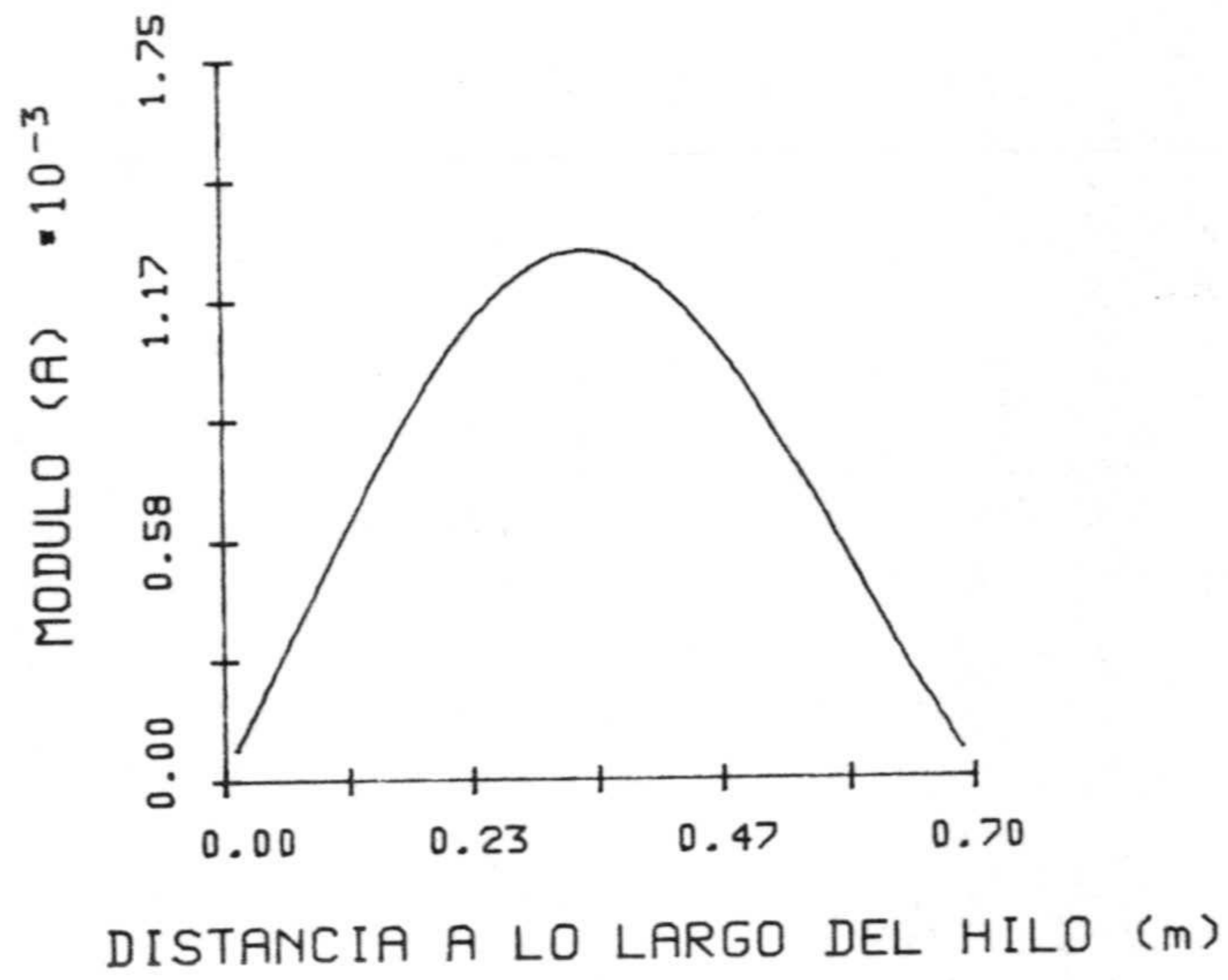
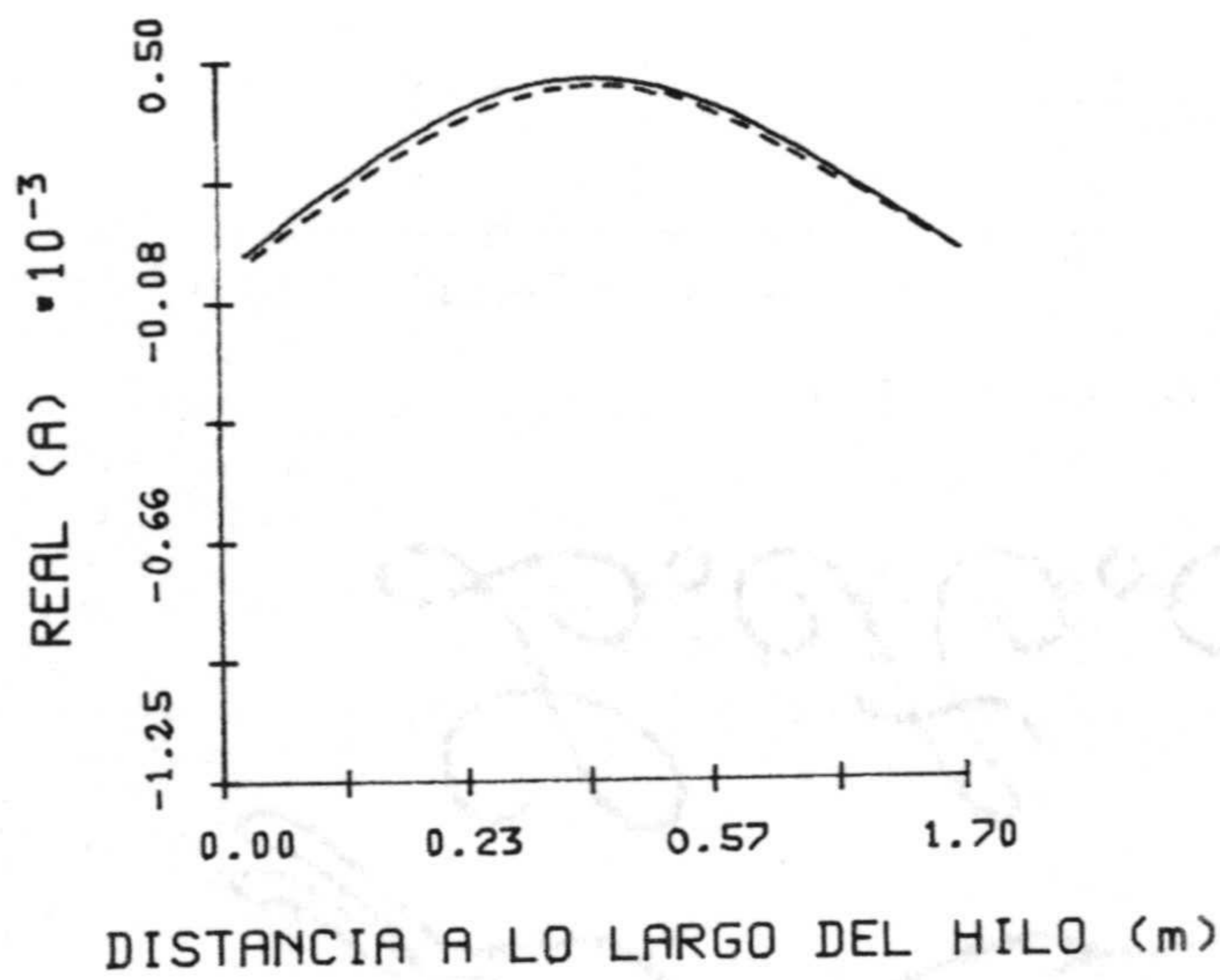


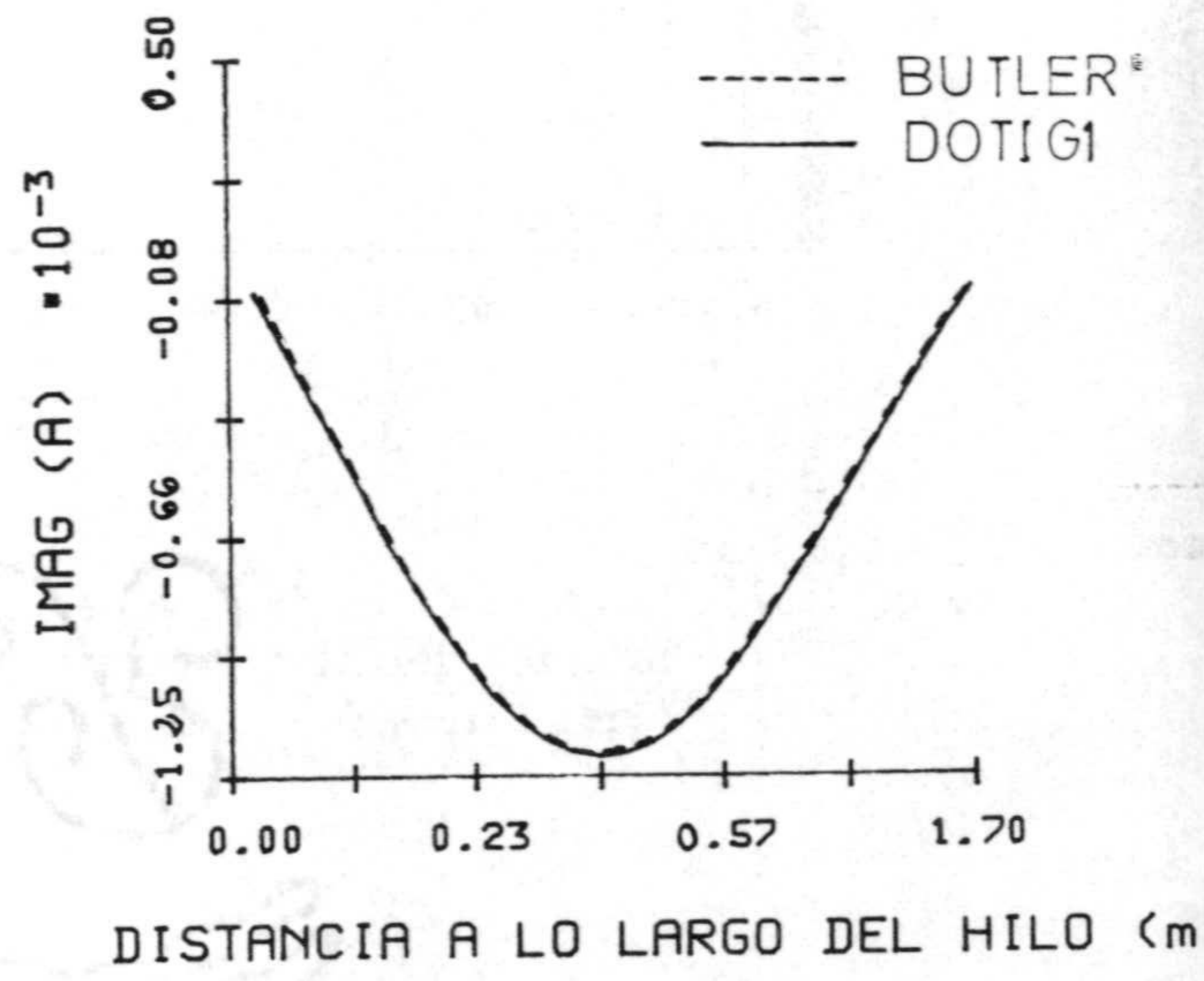
Fig. 4.55.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la estructura de la Fig. 4.48. (Caso D $l_1 = 0.4$ m, $l_2 = 0.3$ m, $a = 0.001$ m y $b = 0.002$ m).



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.56.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el Caso D para la estructura de la Fig. 4.48 a) Módulo, b) Parte Real, c) Parte Imaginaria.

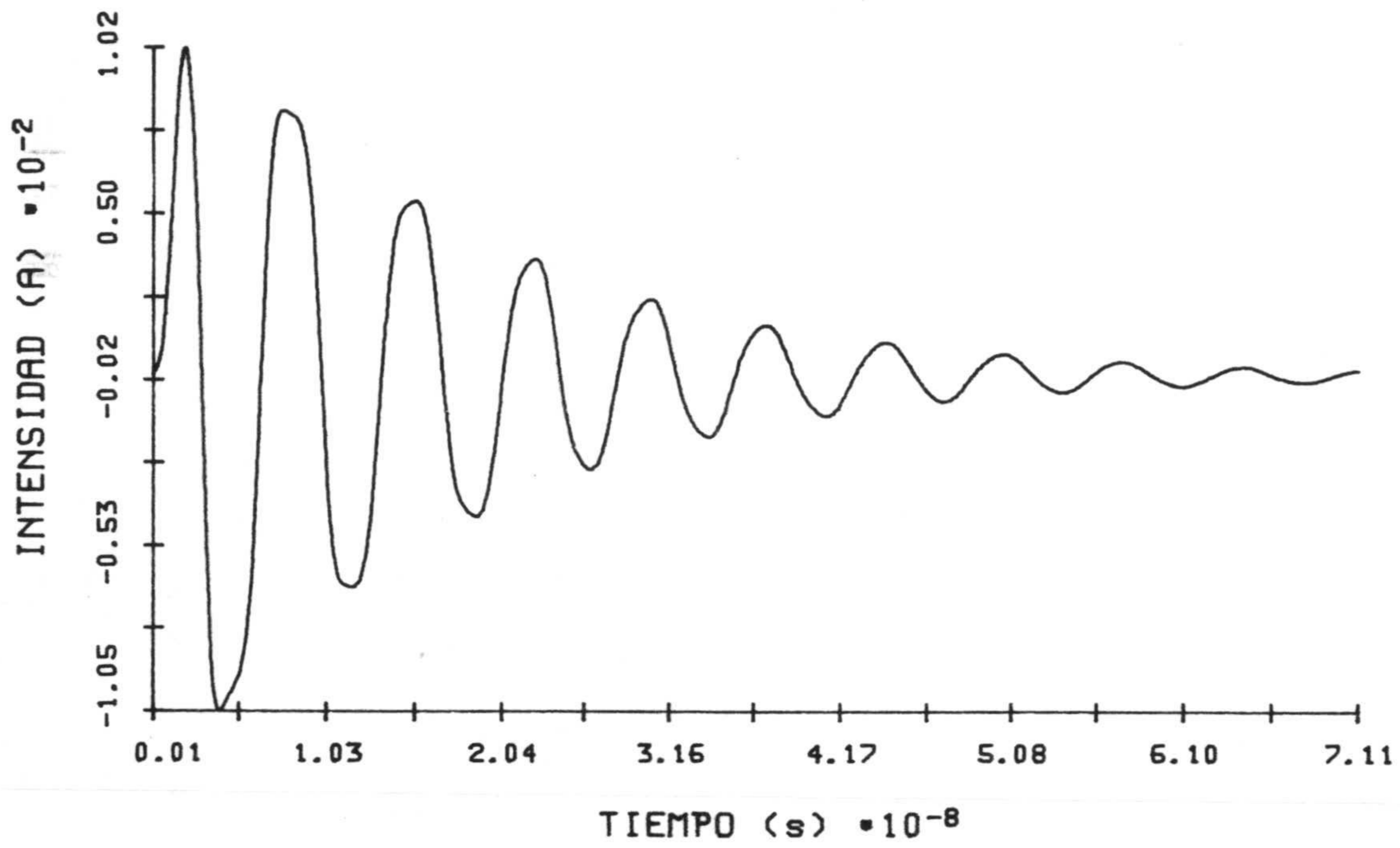
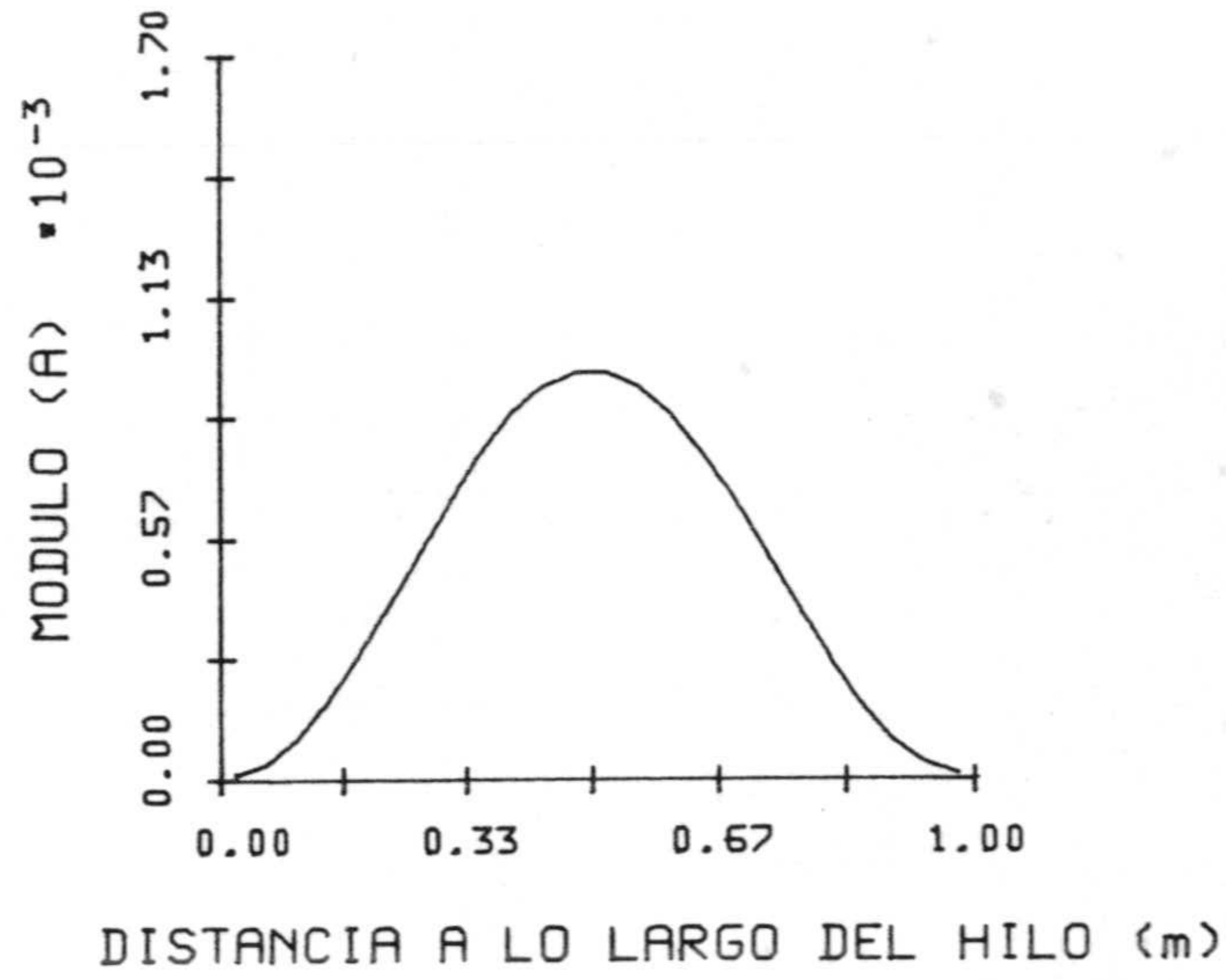
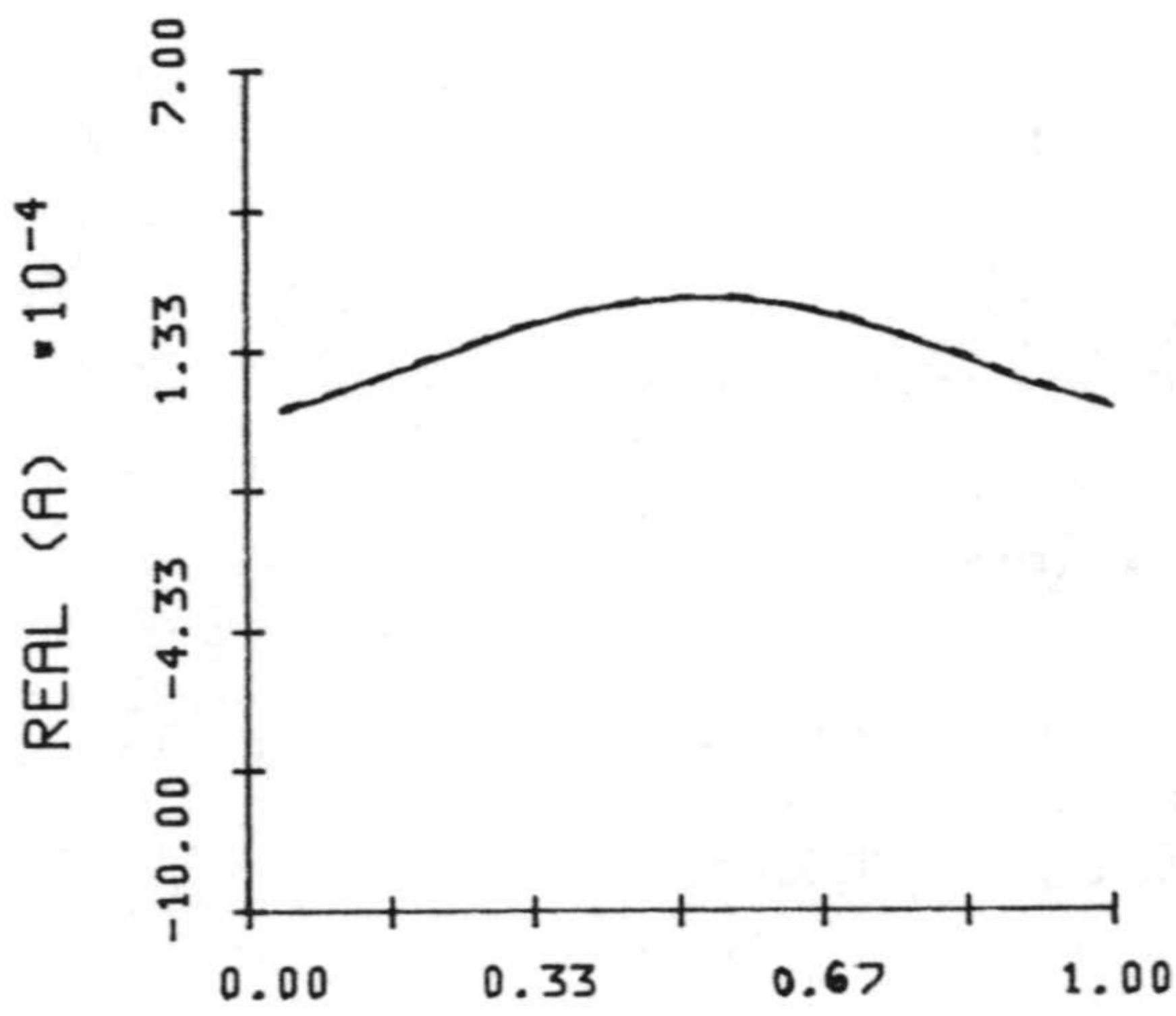


Fig. 4.57.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la estructura de la Fig. 4.48.
 (Caso E $l_1 = 0.5$ m, $l_2 = 0.5$ m, $a = b = 0.001$ m).

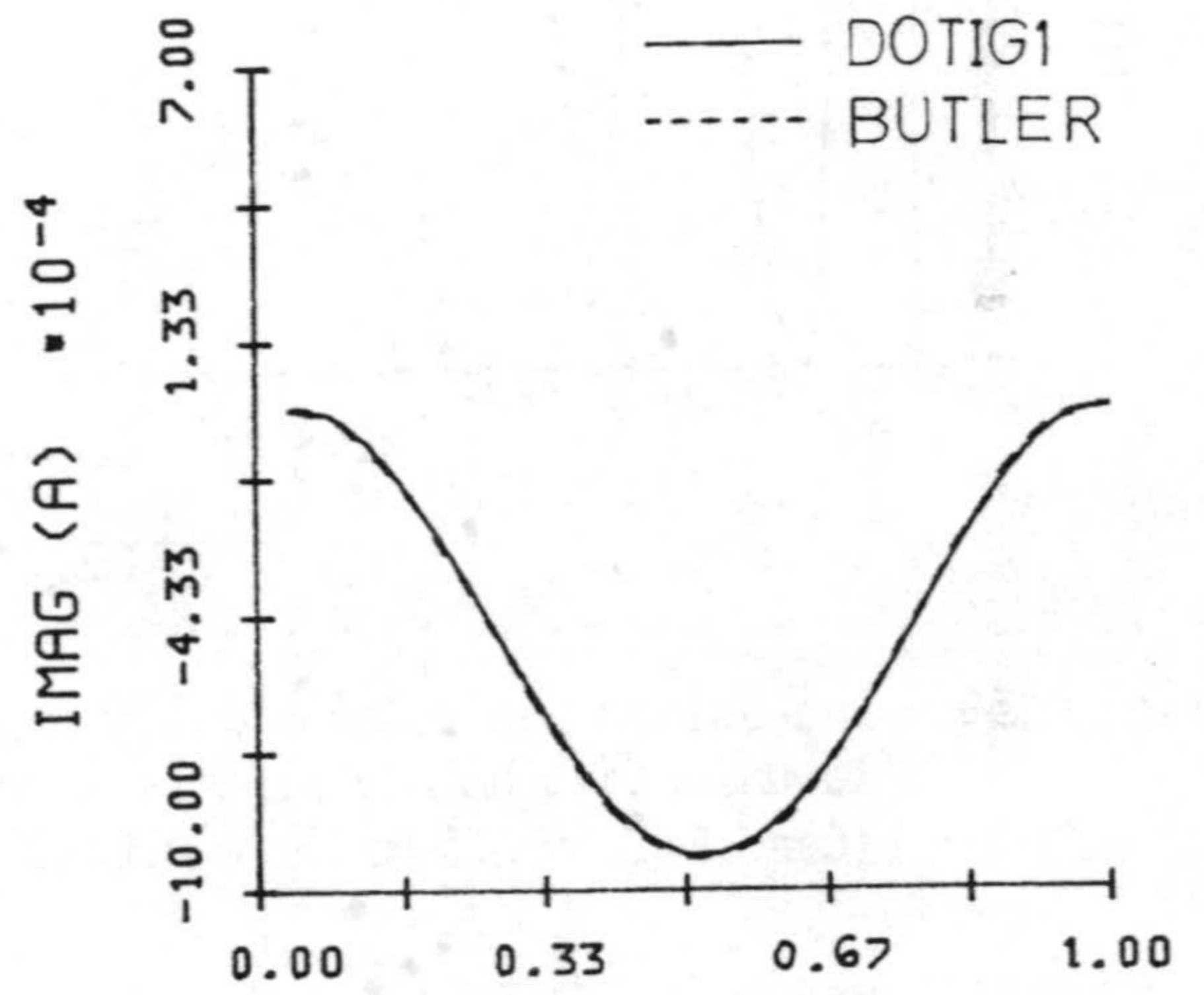


(a)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(b.)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(c)

Fig. 4.58.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el Caso E para la estructura de la Fig. 4.48 a) Módulo, b) Parte Real, c) Parte Imaginaria.

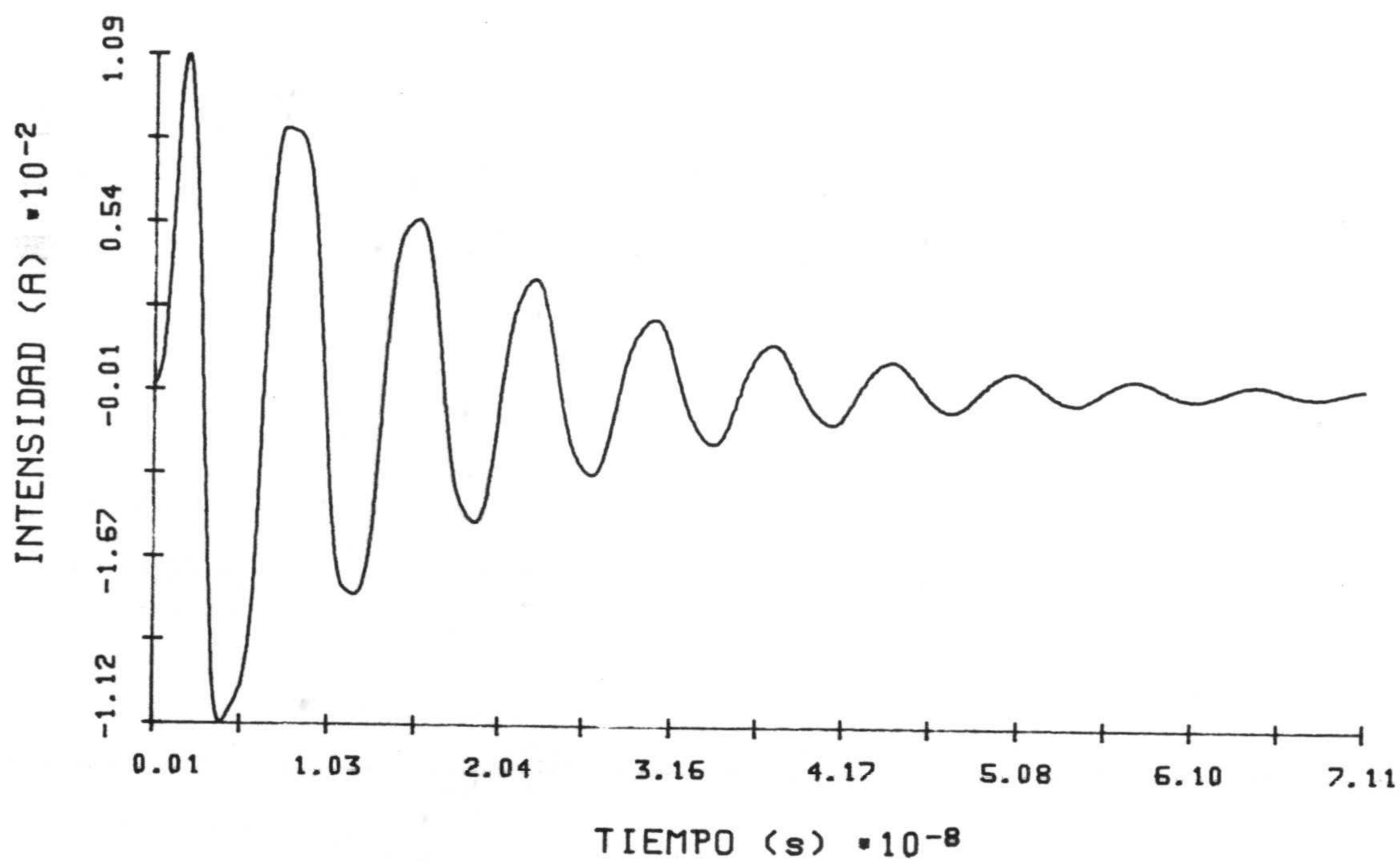
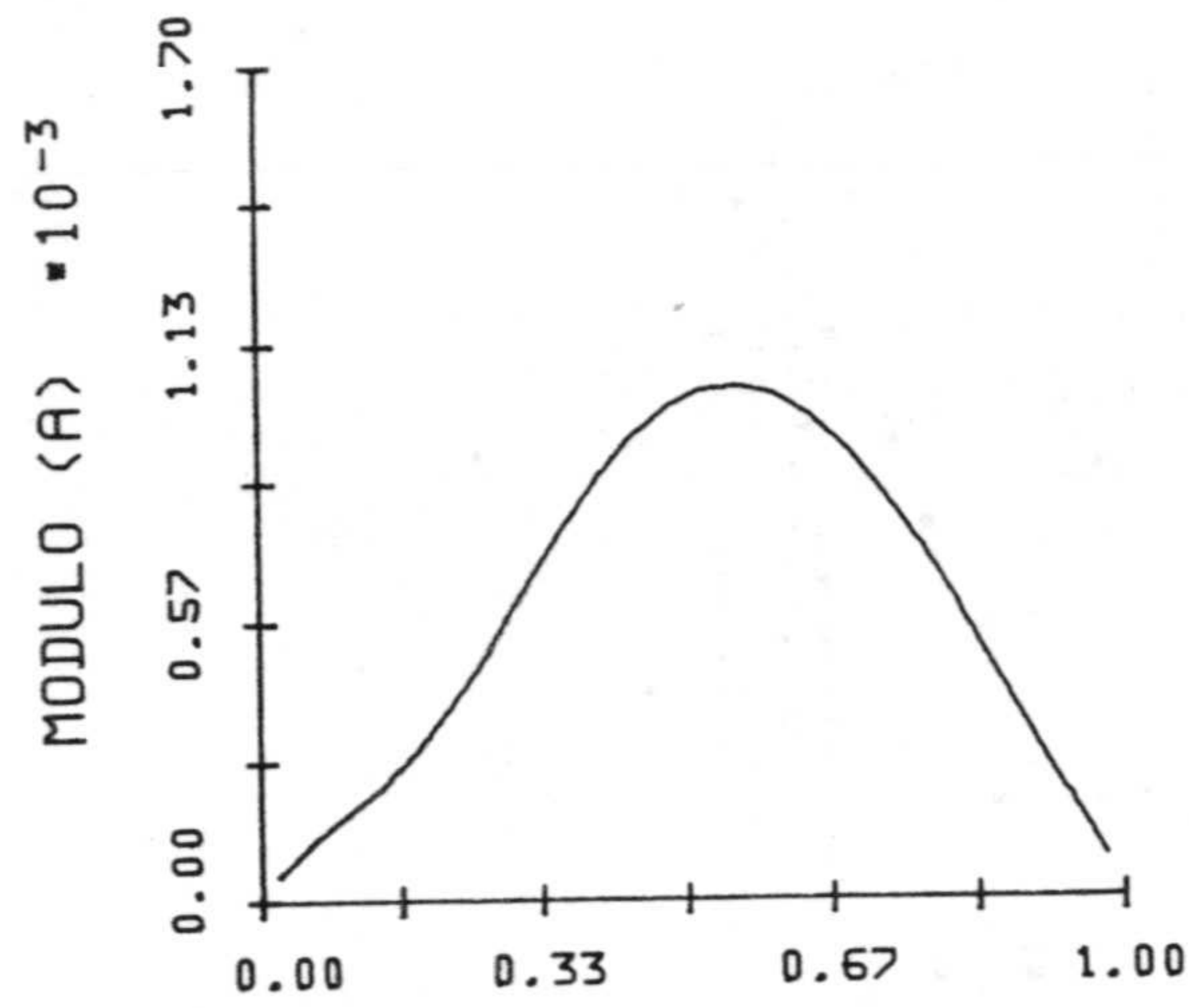
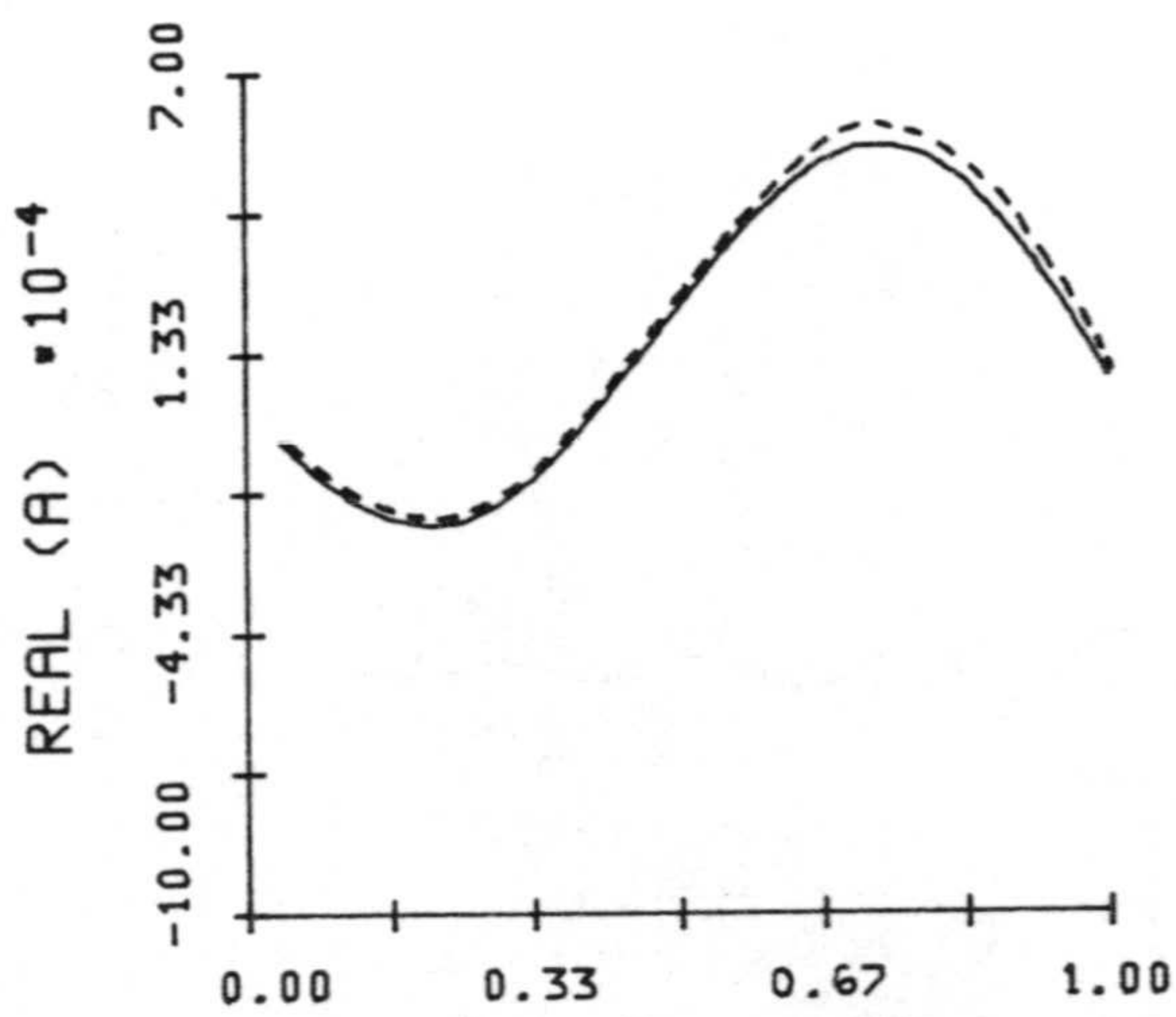


Fig. 4.59.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 para la estructura de la Fig. 4.48.
 (Caso F $l_1 = 0.5$ m, $l_2 = 0.5$ m, $a = 0.001$ m y $b = 0.002$ m).



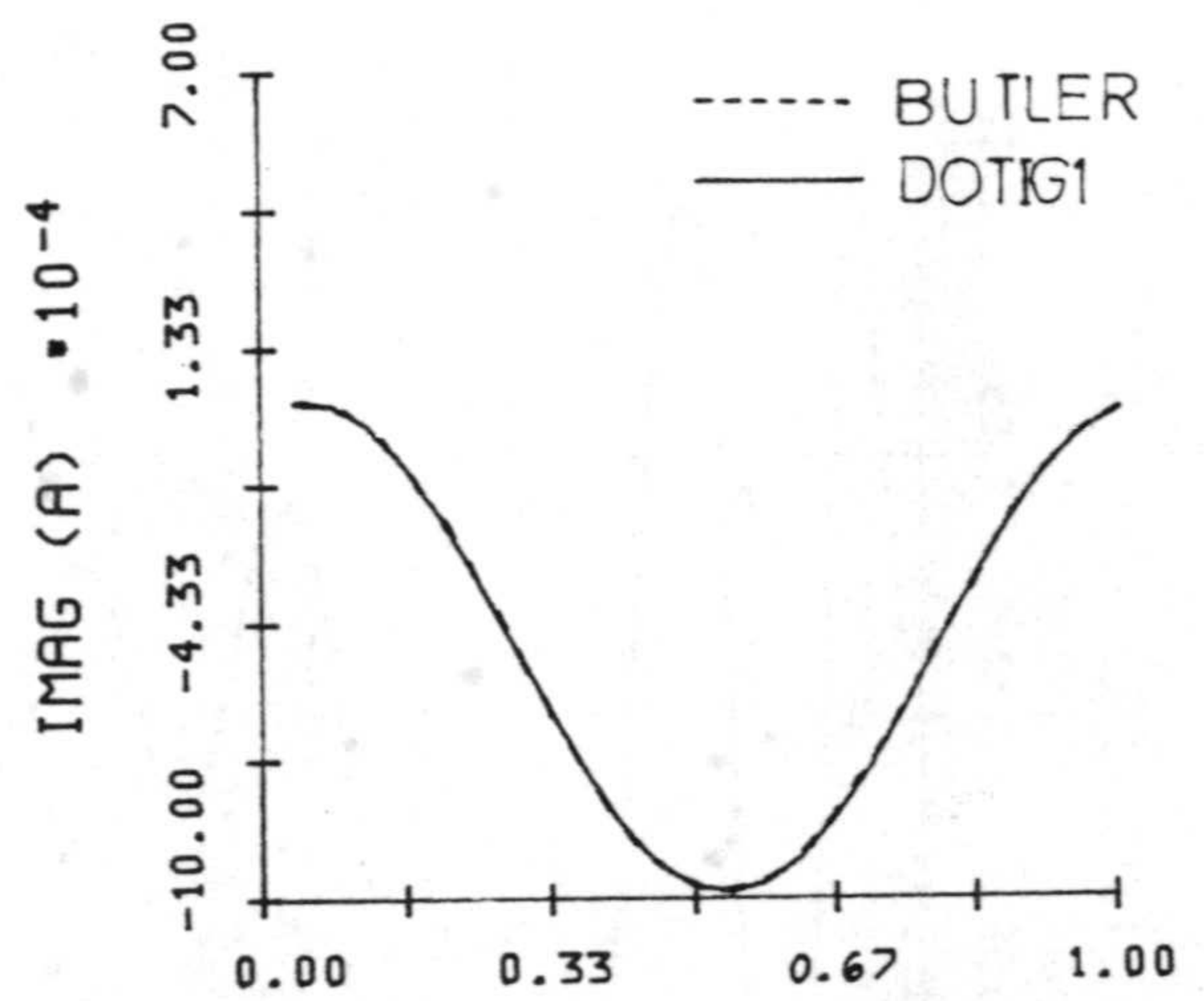
DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(a)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(b)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(c)

Fig. 4.60.- Razón entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m en el Caso F para la estructura de la Fig. 4.48 a) Módulo, b) Parte Real, c) Parte Imaginaria.

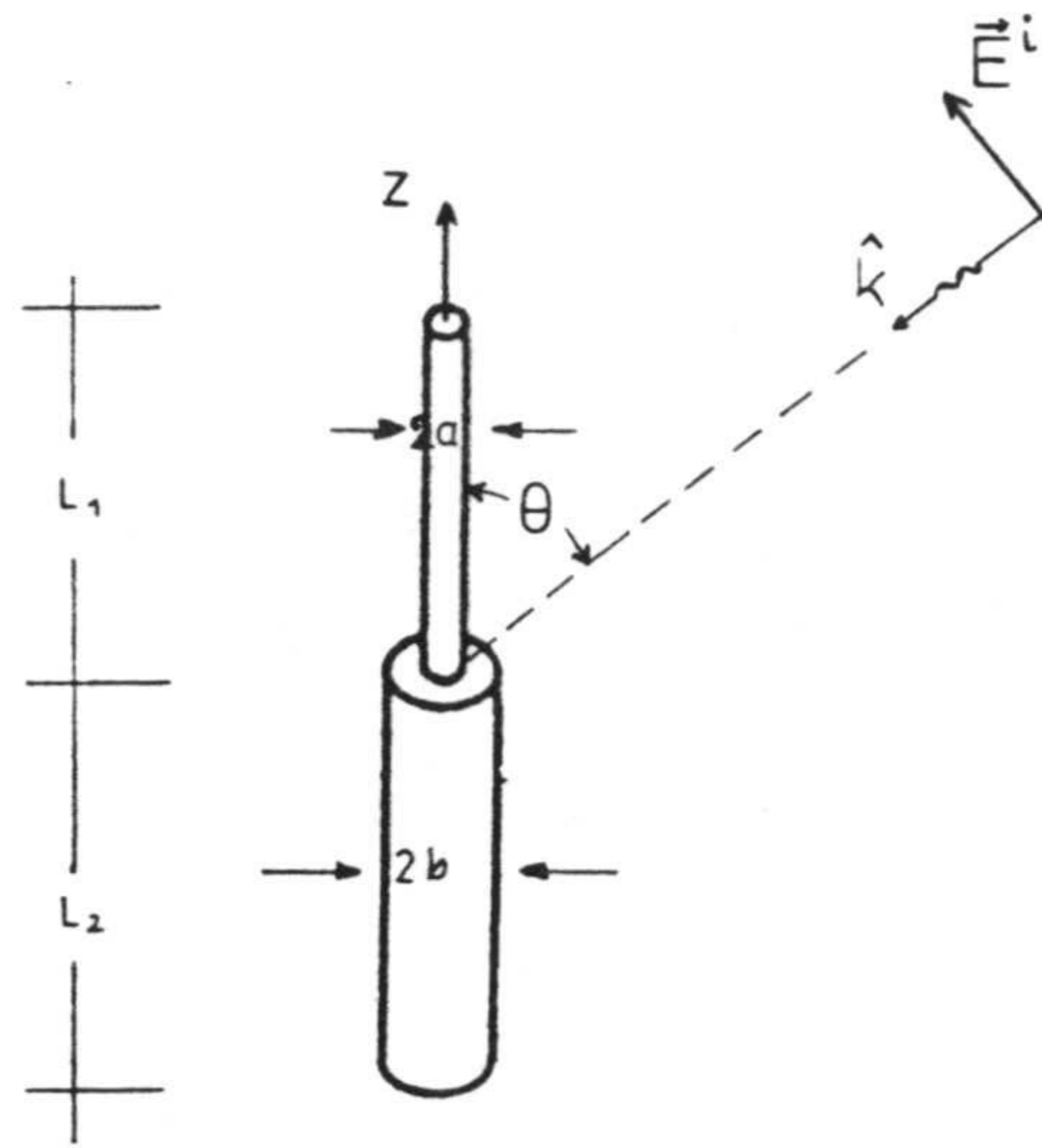


Fig. 4.61.- Geometría de una estructura formada por dos hilos de diferentes radios. Incidencia oblicua. ($l_1 = l_2 = 0.35$, $a = 0.001$ m y $b = 0.002$ m).

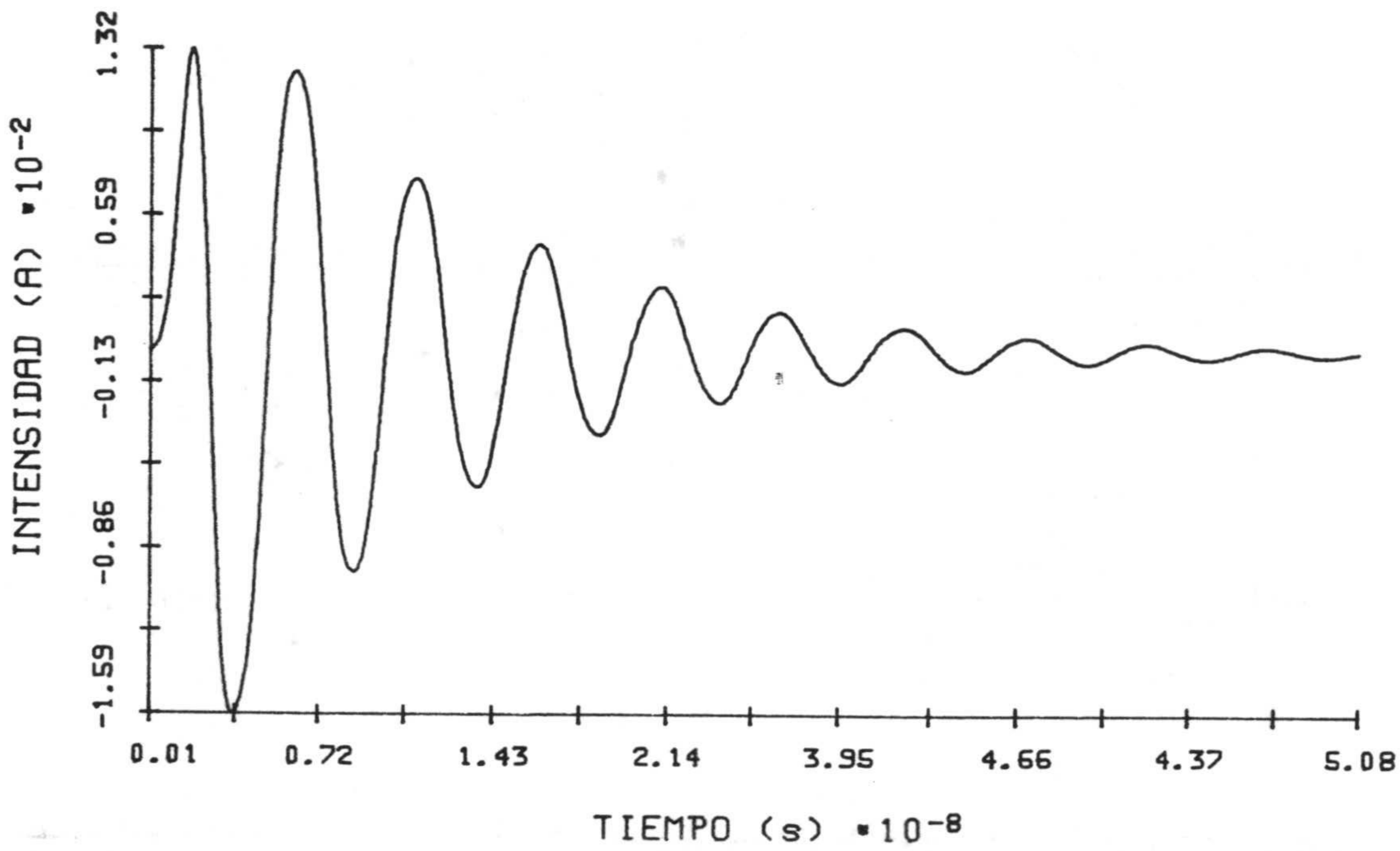
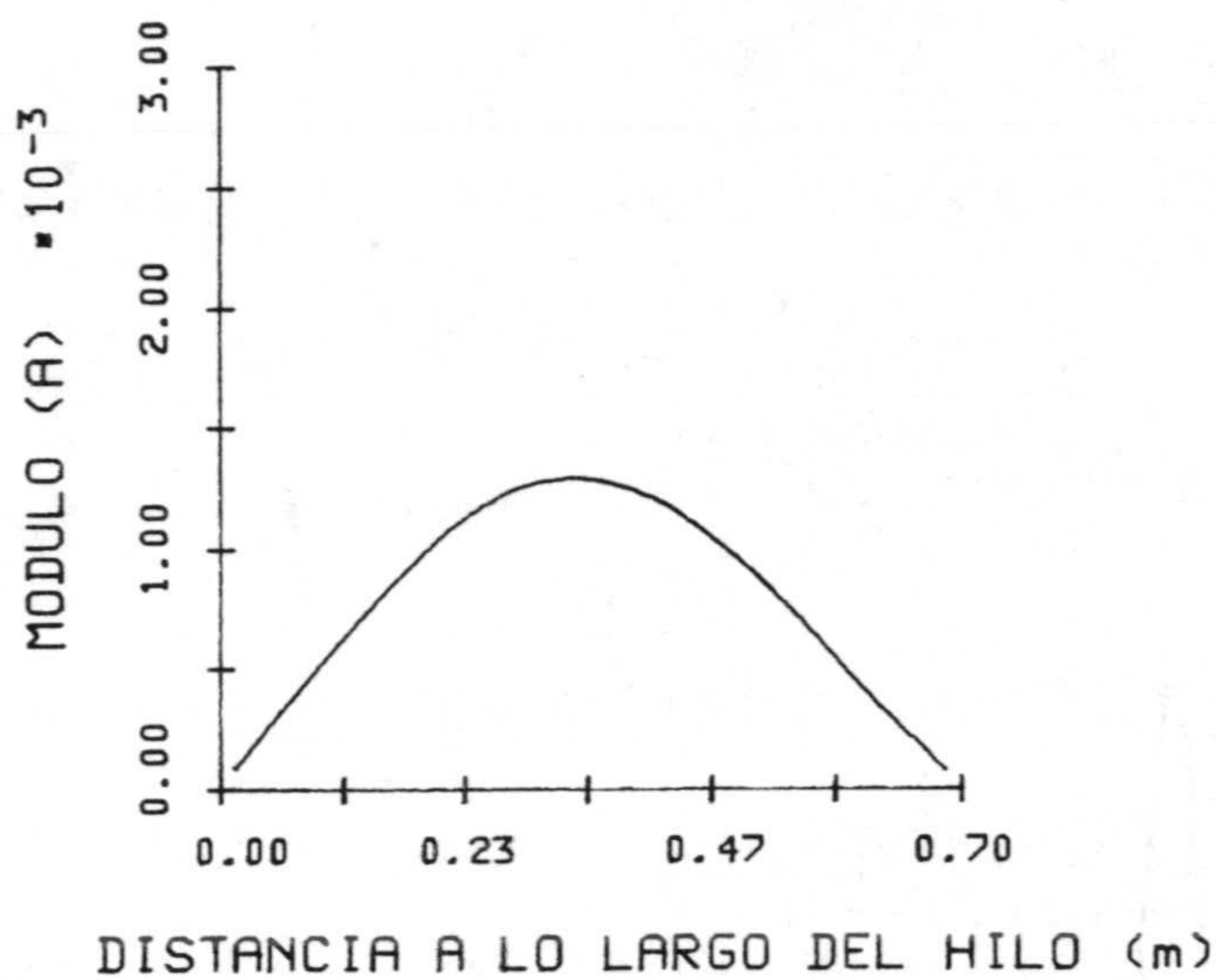
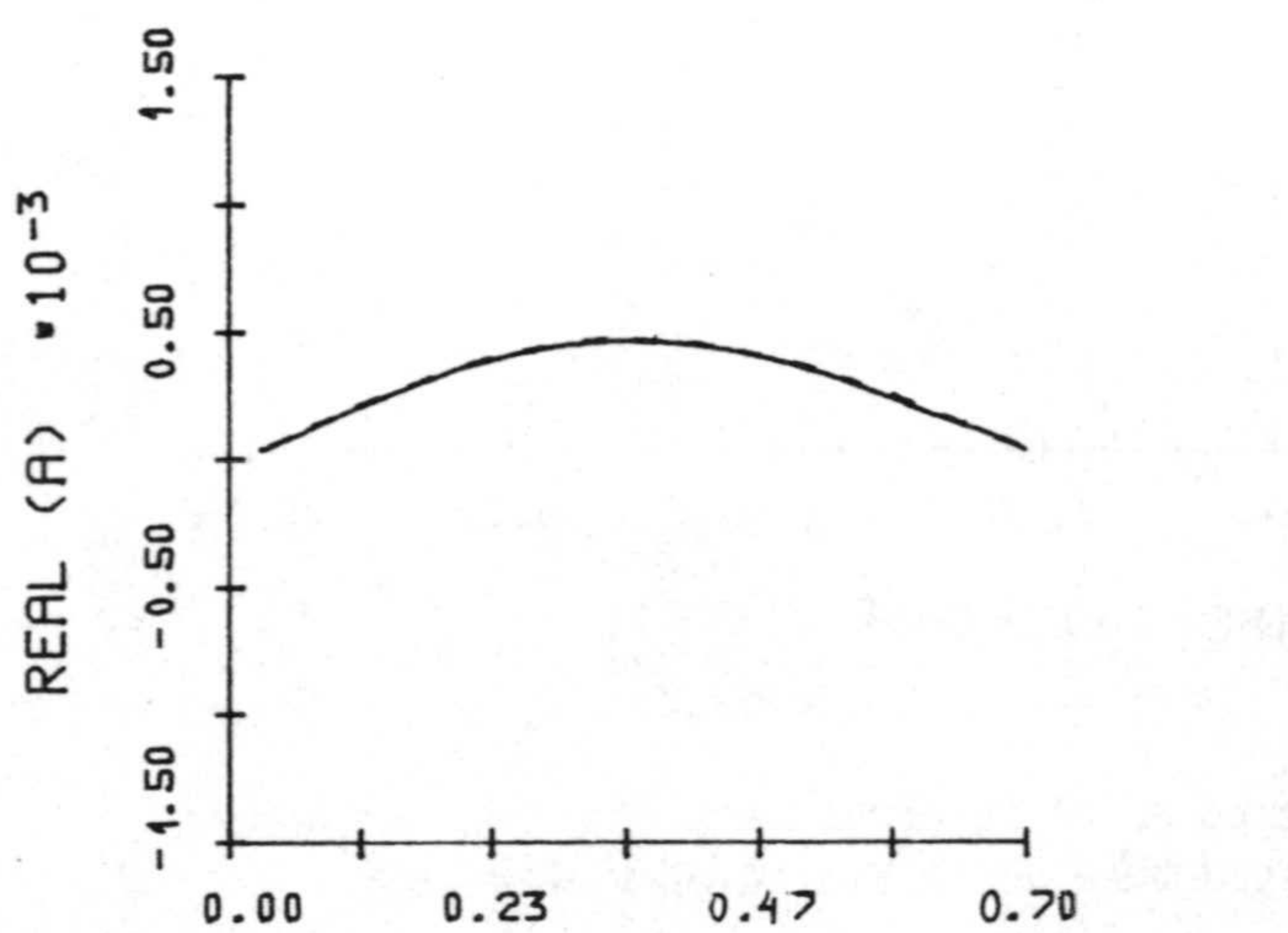


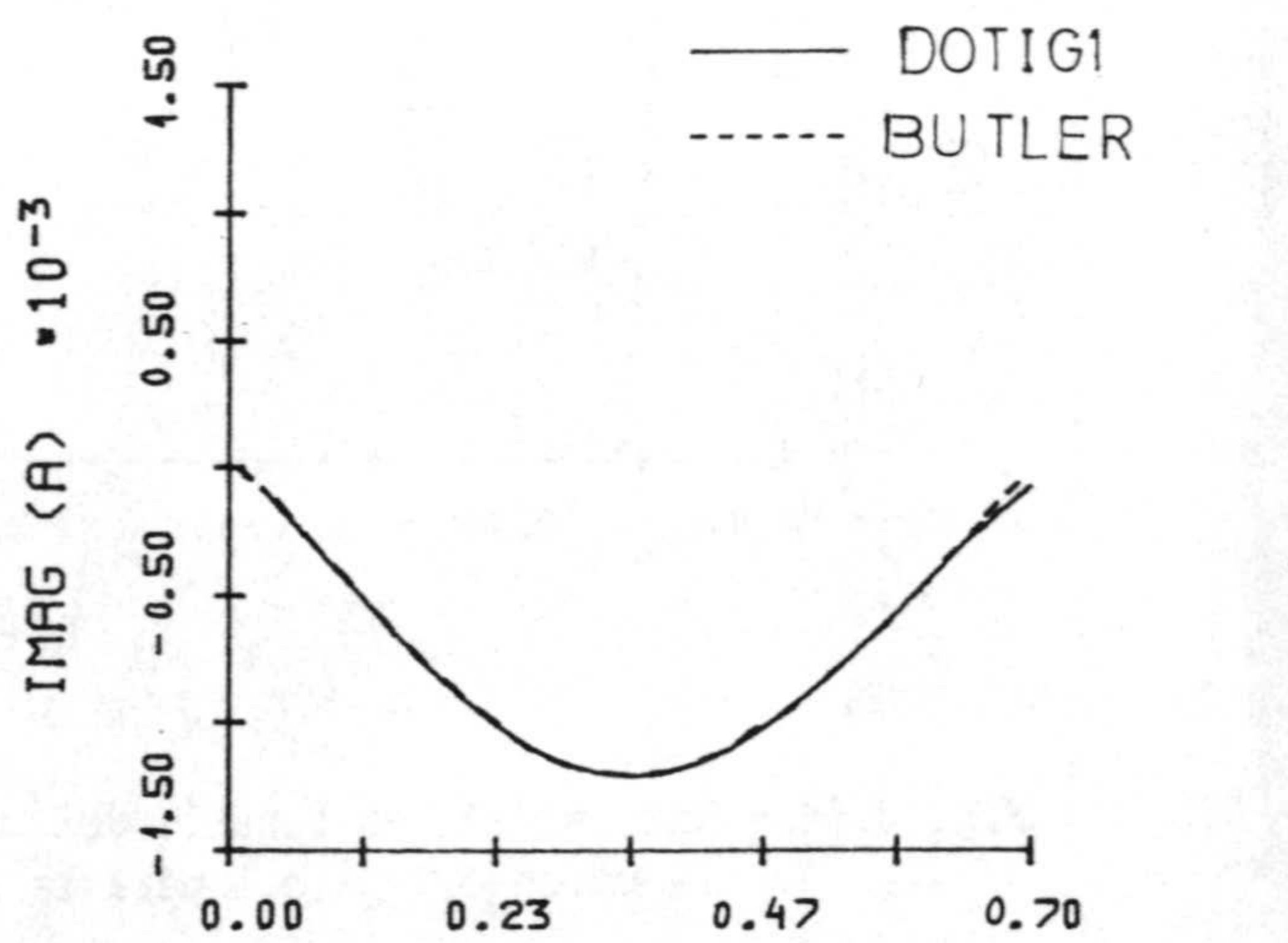
Fig. 4.62.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más cercano a la unión del hilo 1 para la estructura de la Fig. 4.61 y $\theta = 90^\circ$.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.63.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la de la componente z del campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Parte Real, c) Parte Imaginaria $\theta = 90^\circ$.

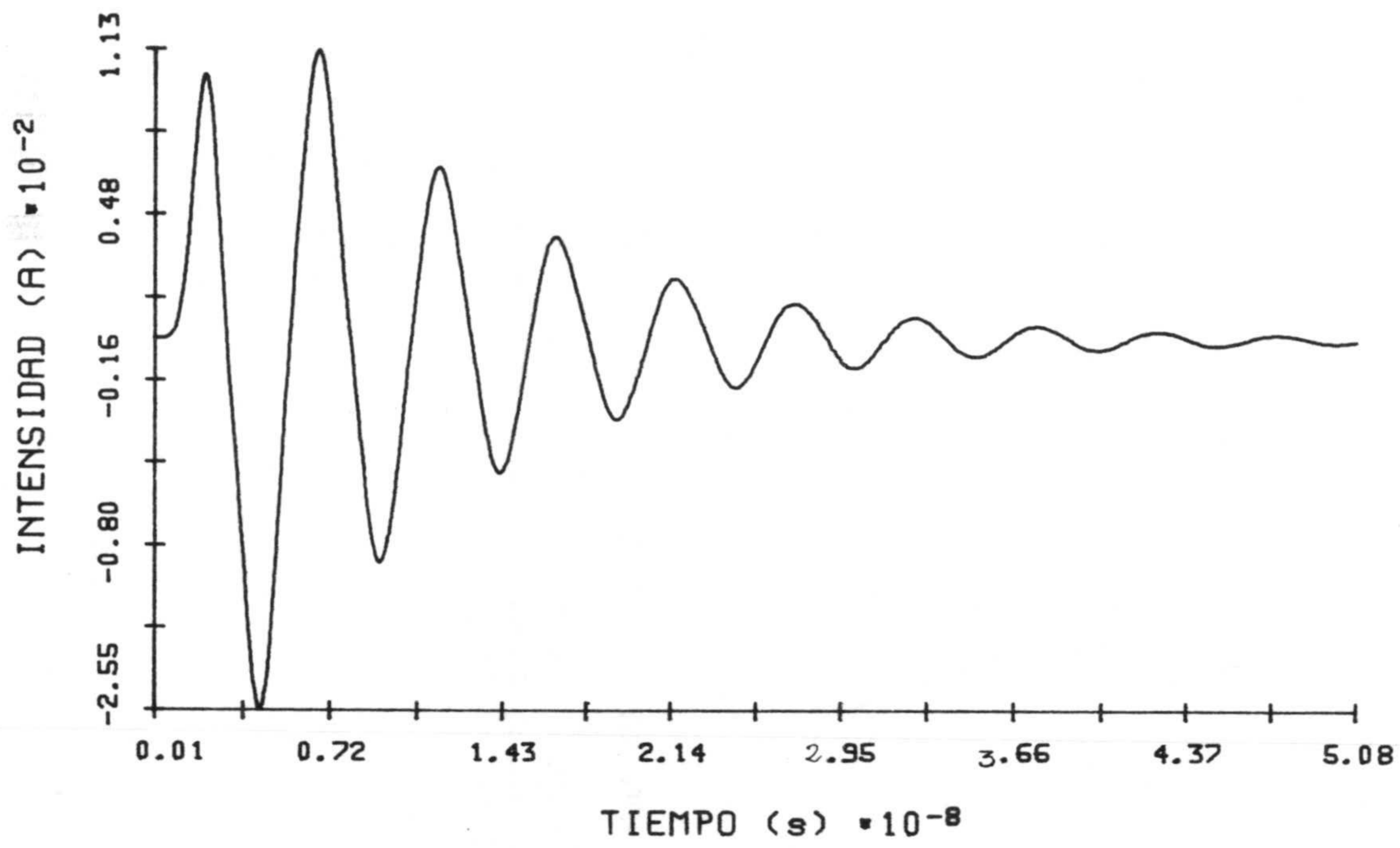
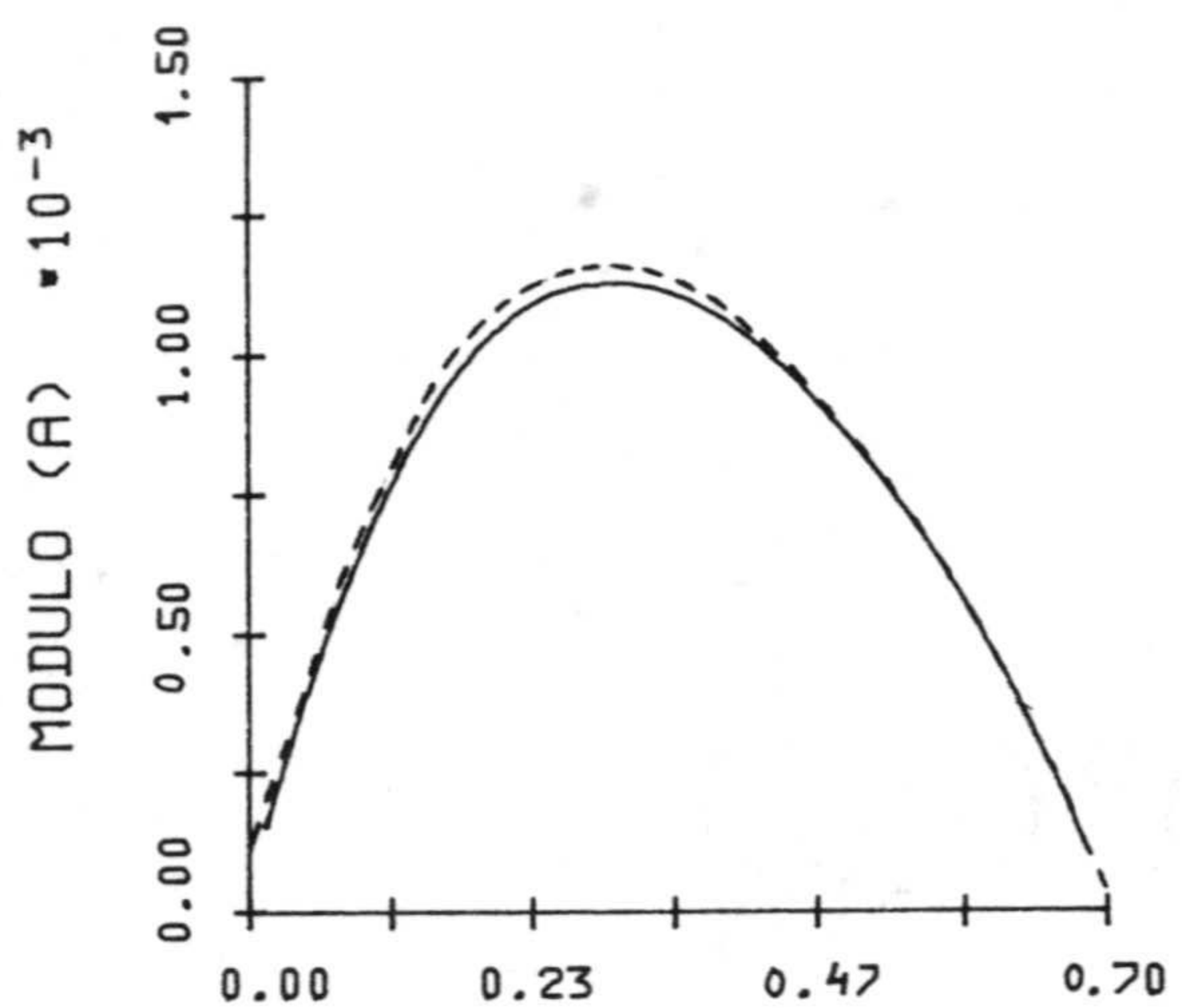
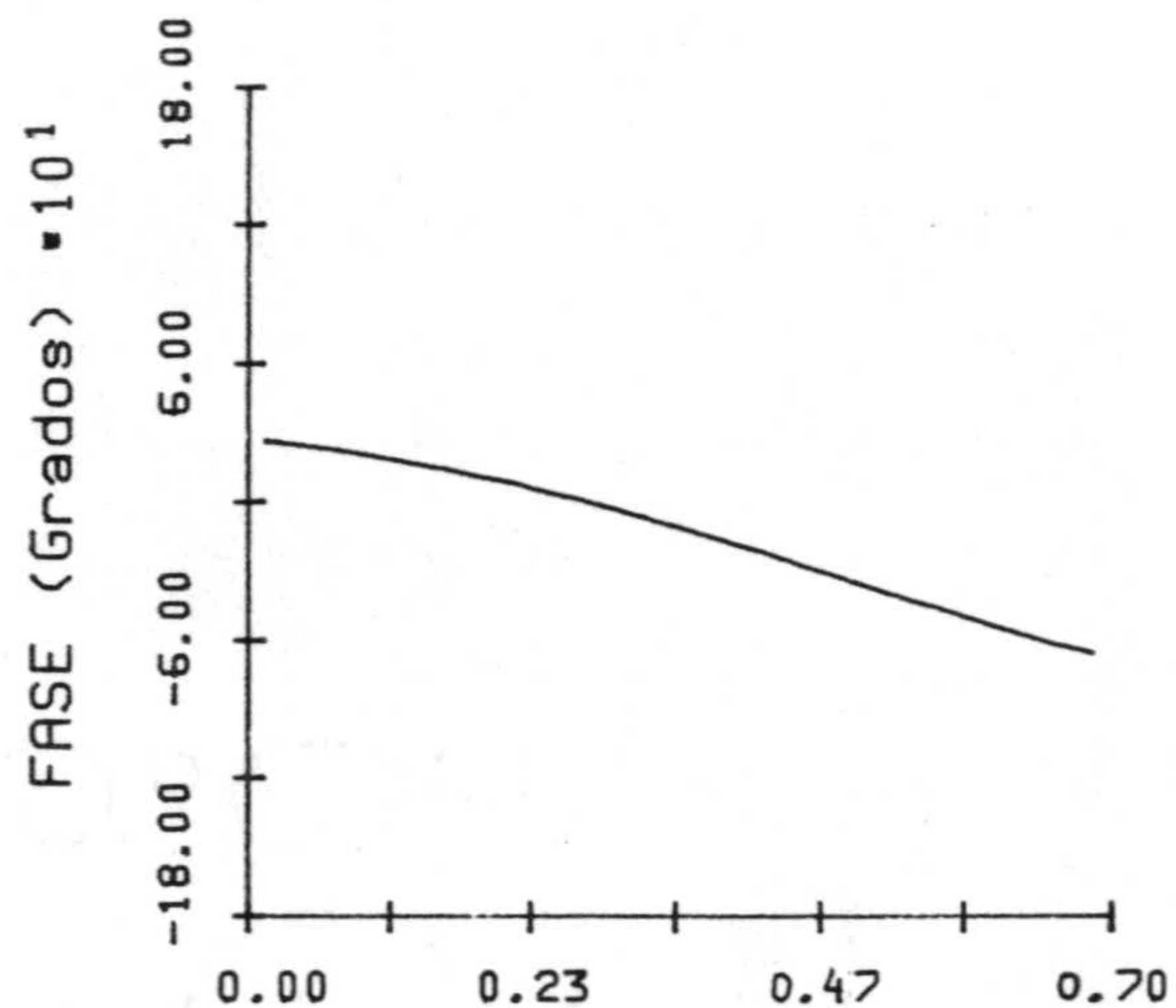


Fig. 4.64.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más cercano a la unión del hilo 1 para la estructura de la Fig. 4.61 y $\theta = 60^\circ$.



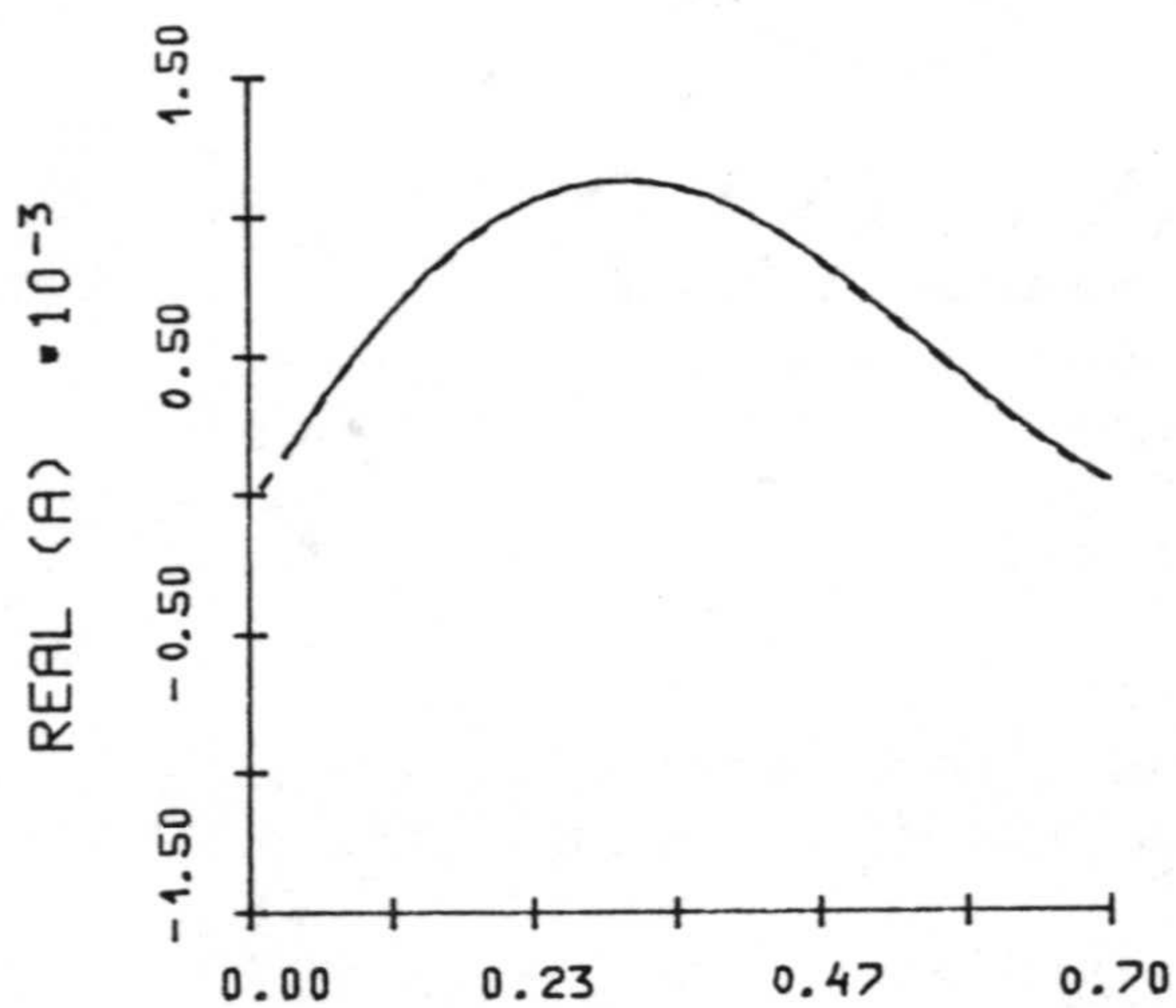
DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(a)



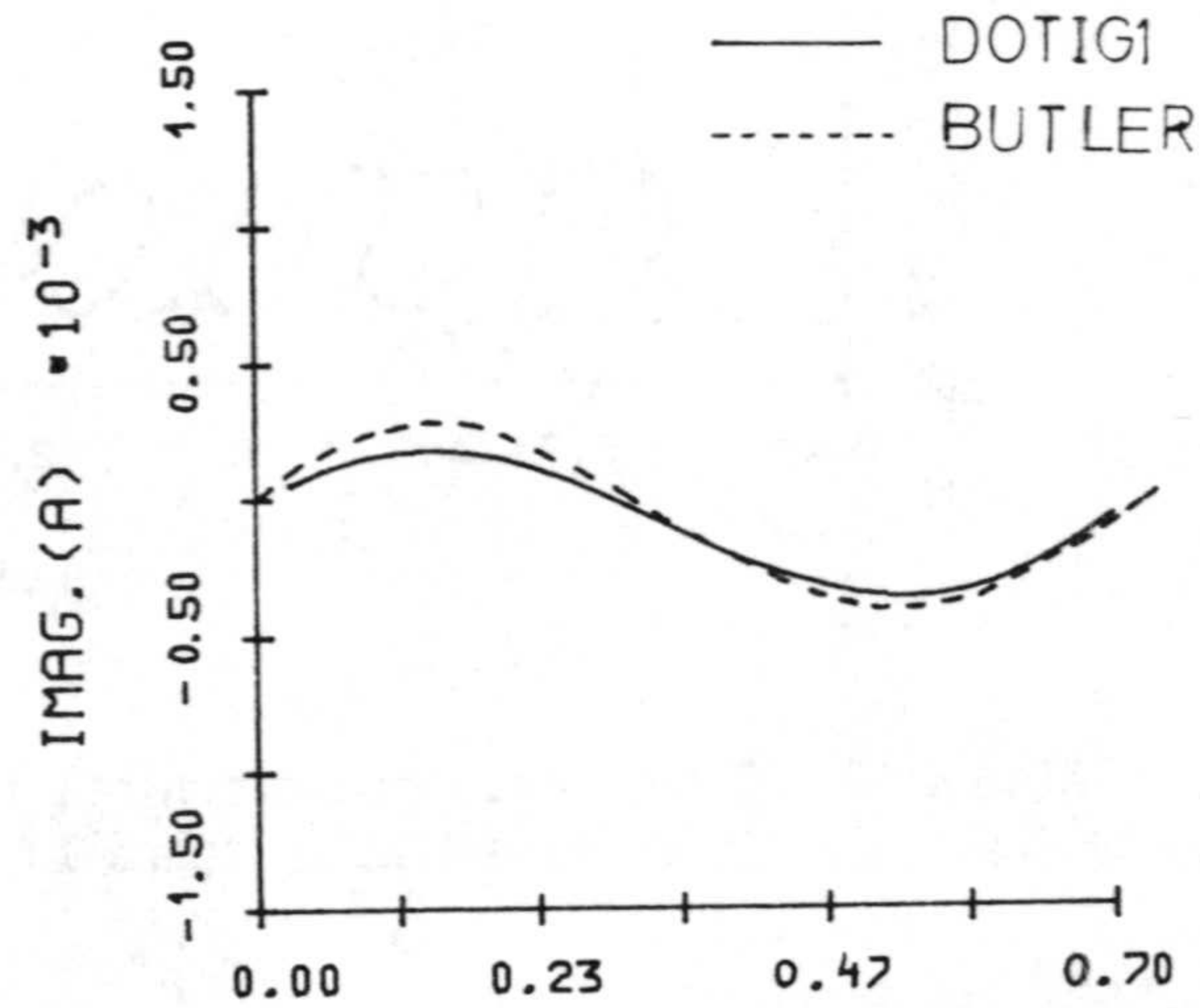
DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(b)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(c)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(d)

Fig. 4.65.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la de la componente z del campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Fase, c) Parte Real, d) Parte Imaginaria $\theta = 60^\circ$.

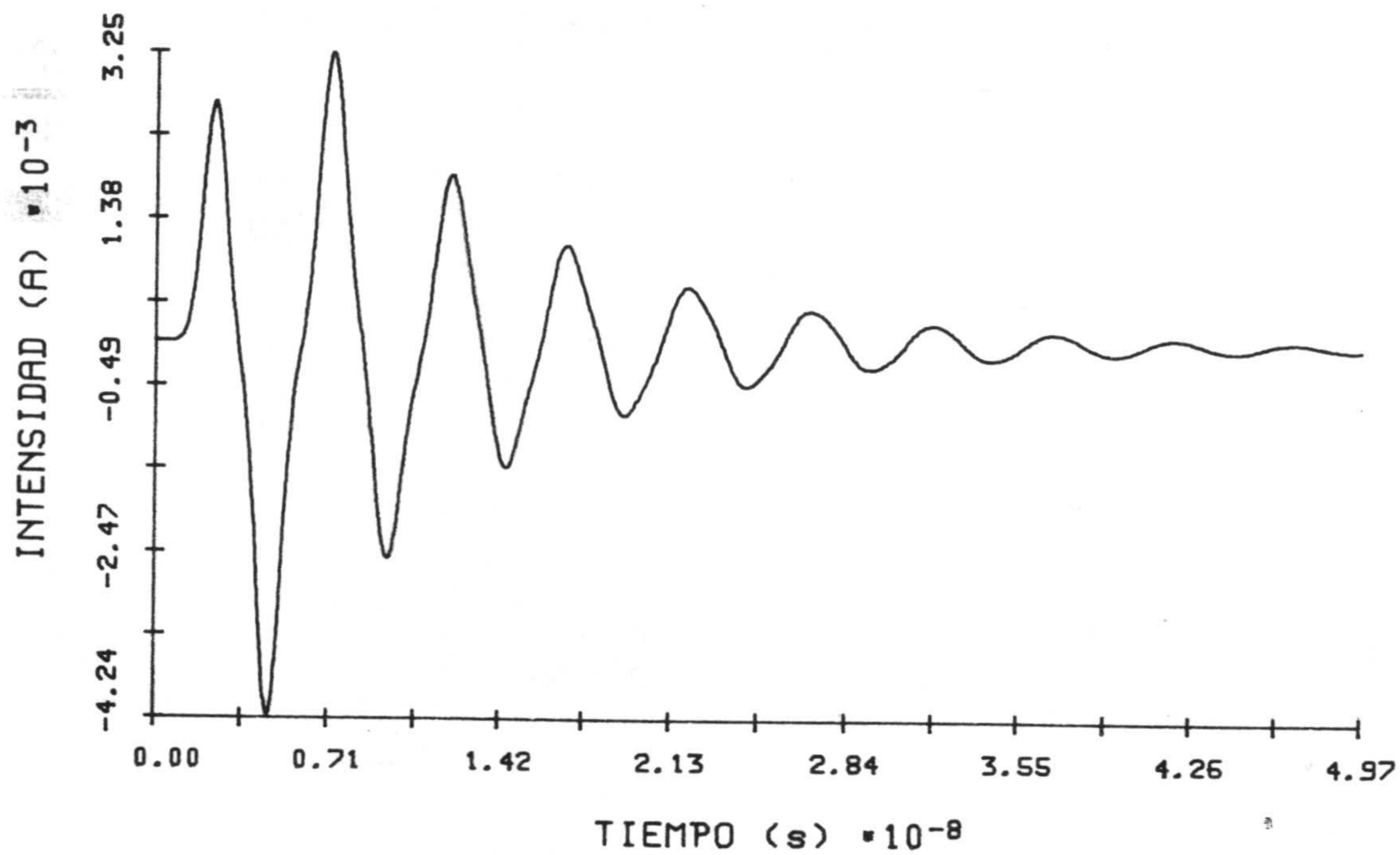
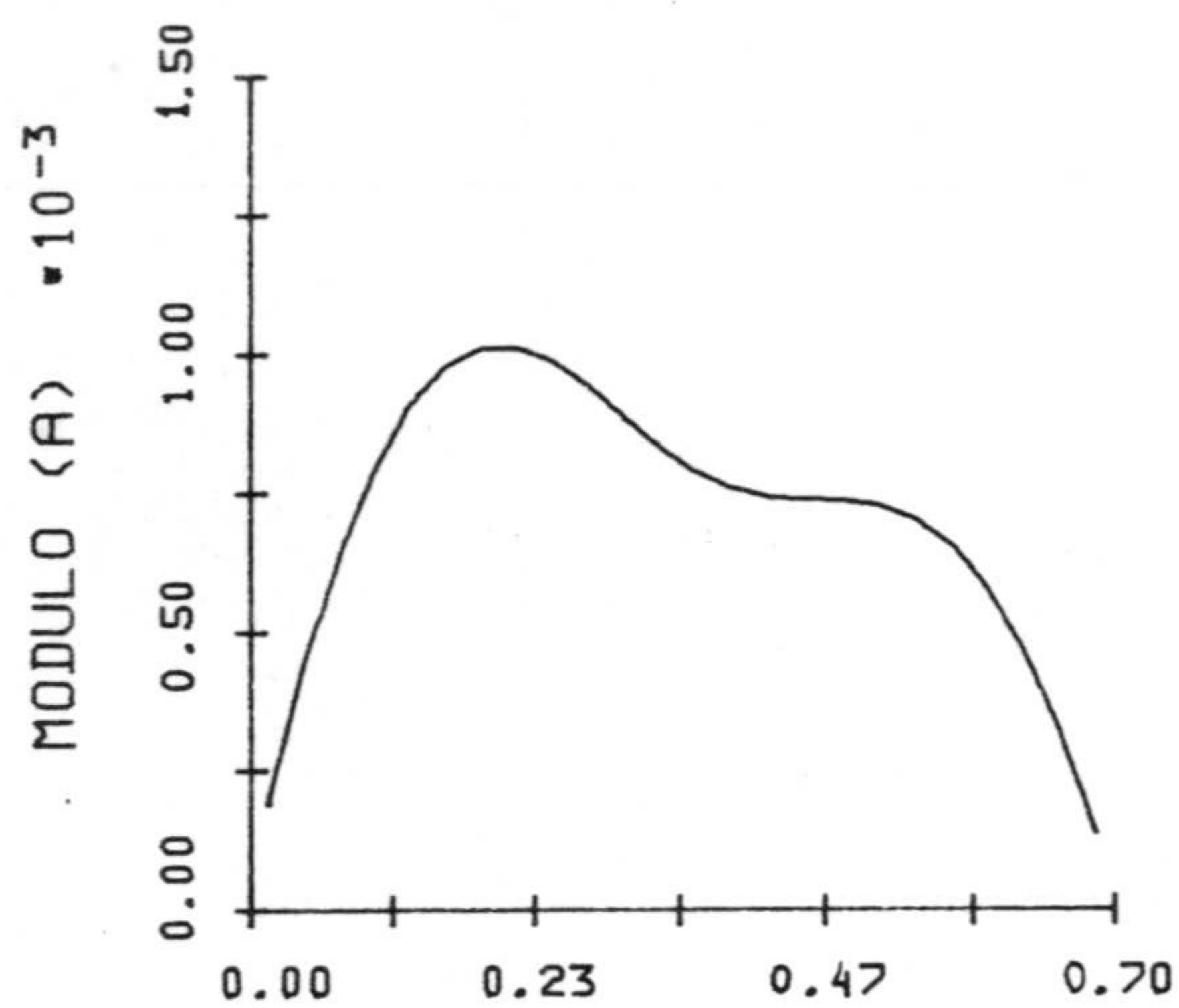
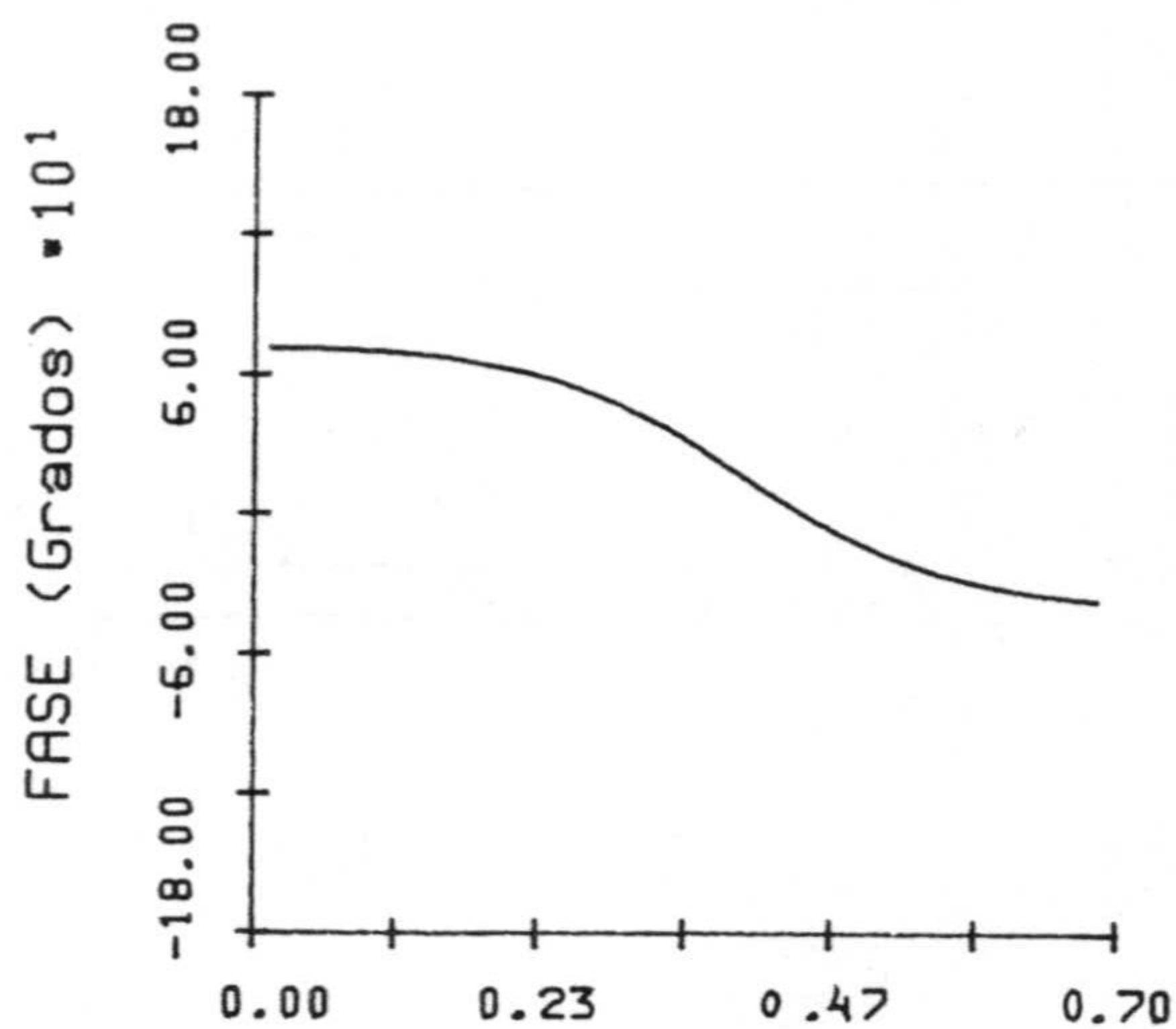


Fig. 4.66.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más cercano a la unión del hilo 1 para la estructura de la Fig. 4.61 y $\theta = 30^\circ$.



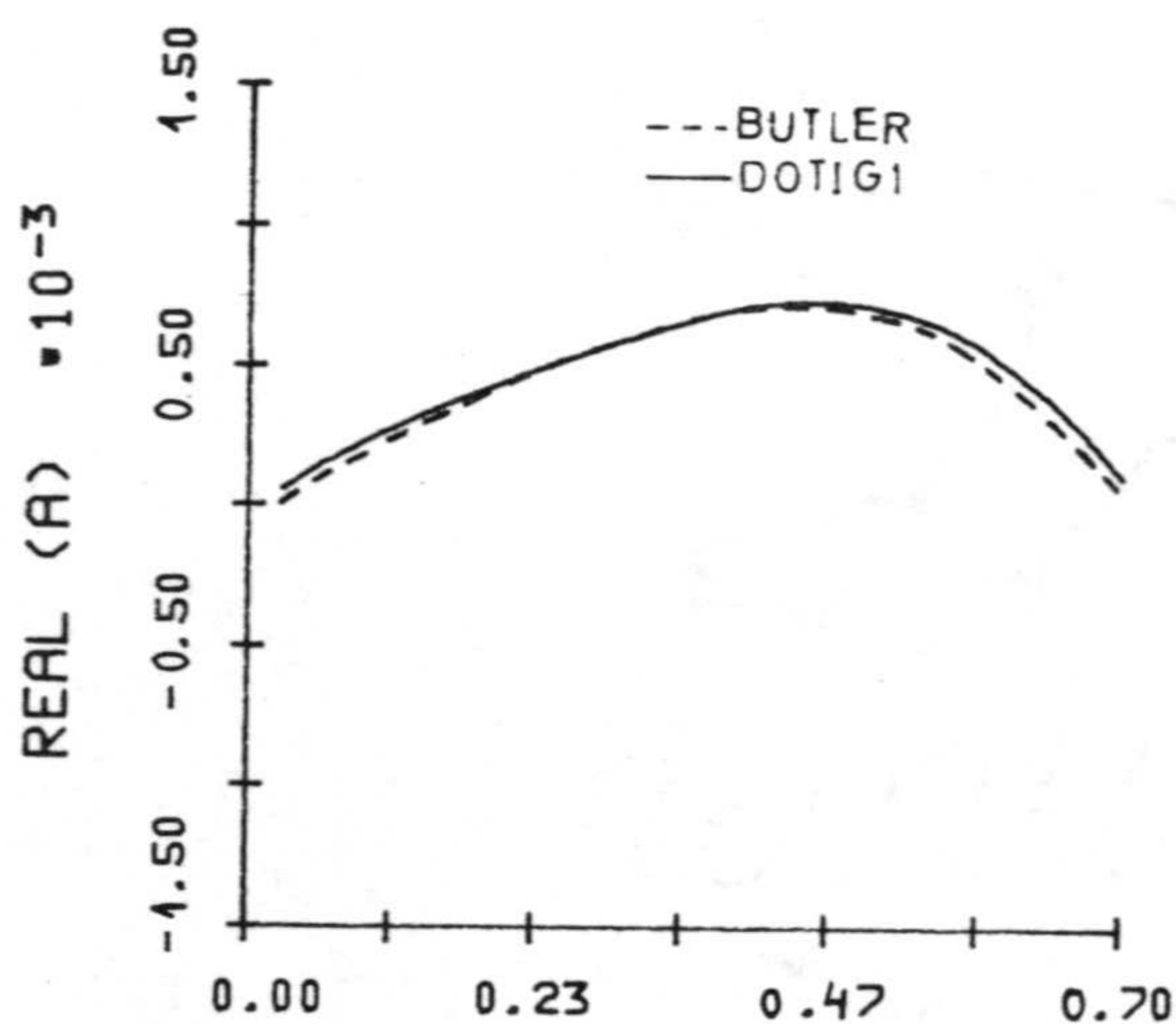
DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(a)



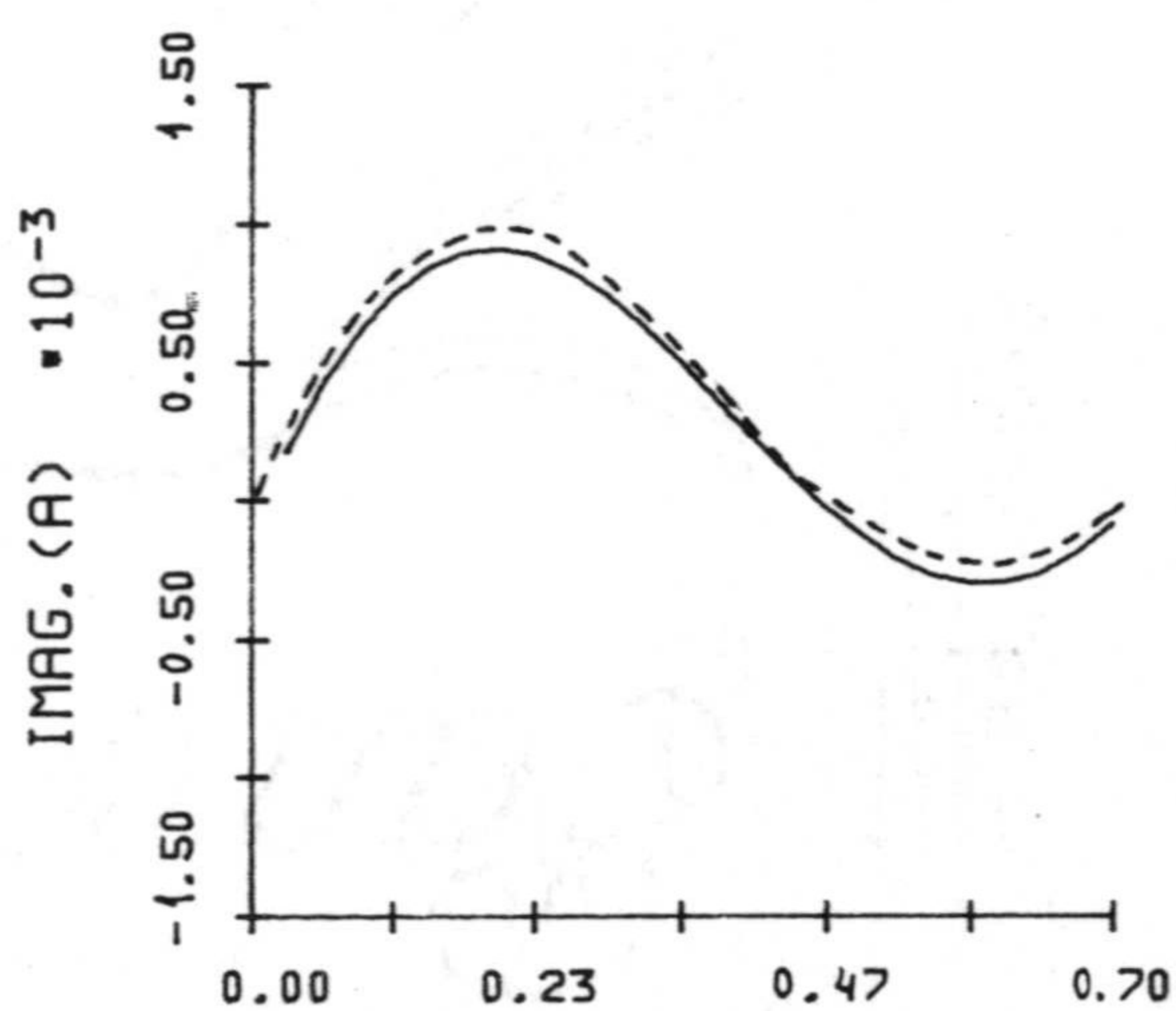
DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(b)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(c)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(d)

Fig. 4.67.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la de la componente z del campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Fase, c) Parte Real, d) Parte Imaginaria $\theta = 30^\circ$.

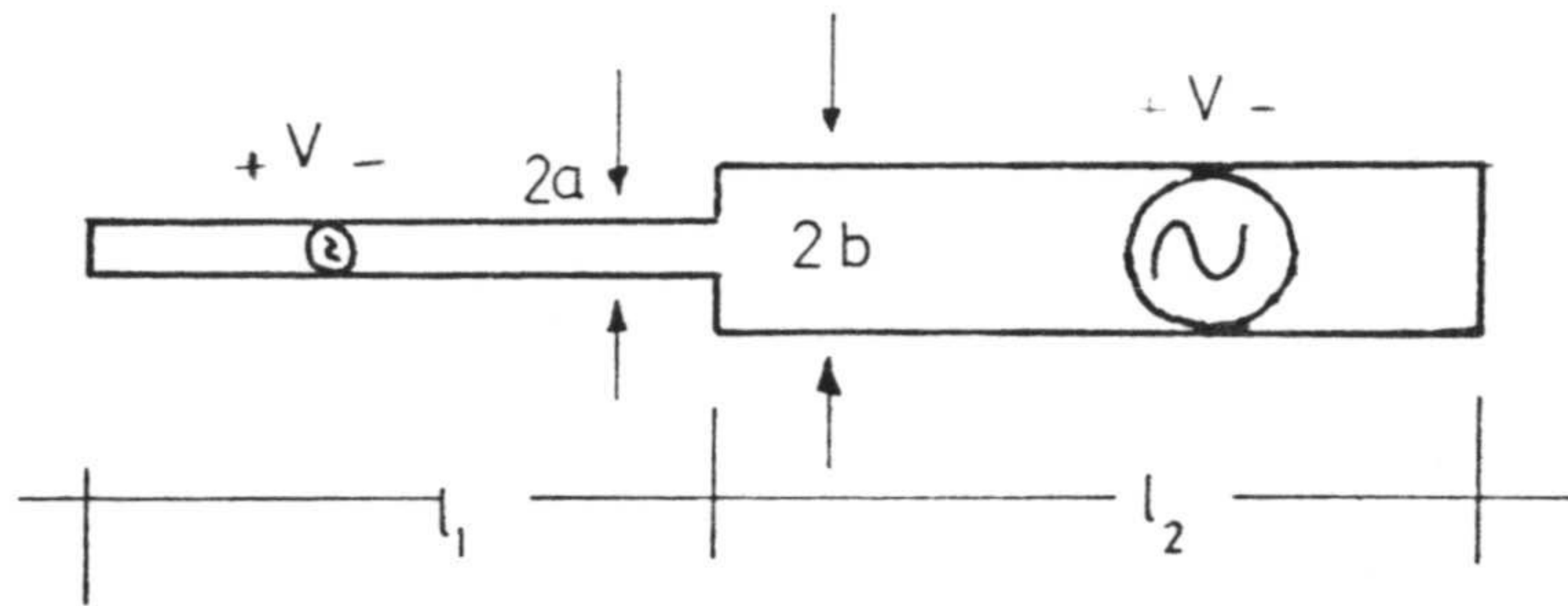


Fig. 4.68.- Geometría para una unión de dos hilos de distinto radio excitados simétricamente.

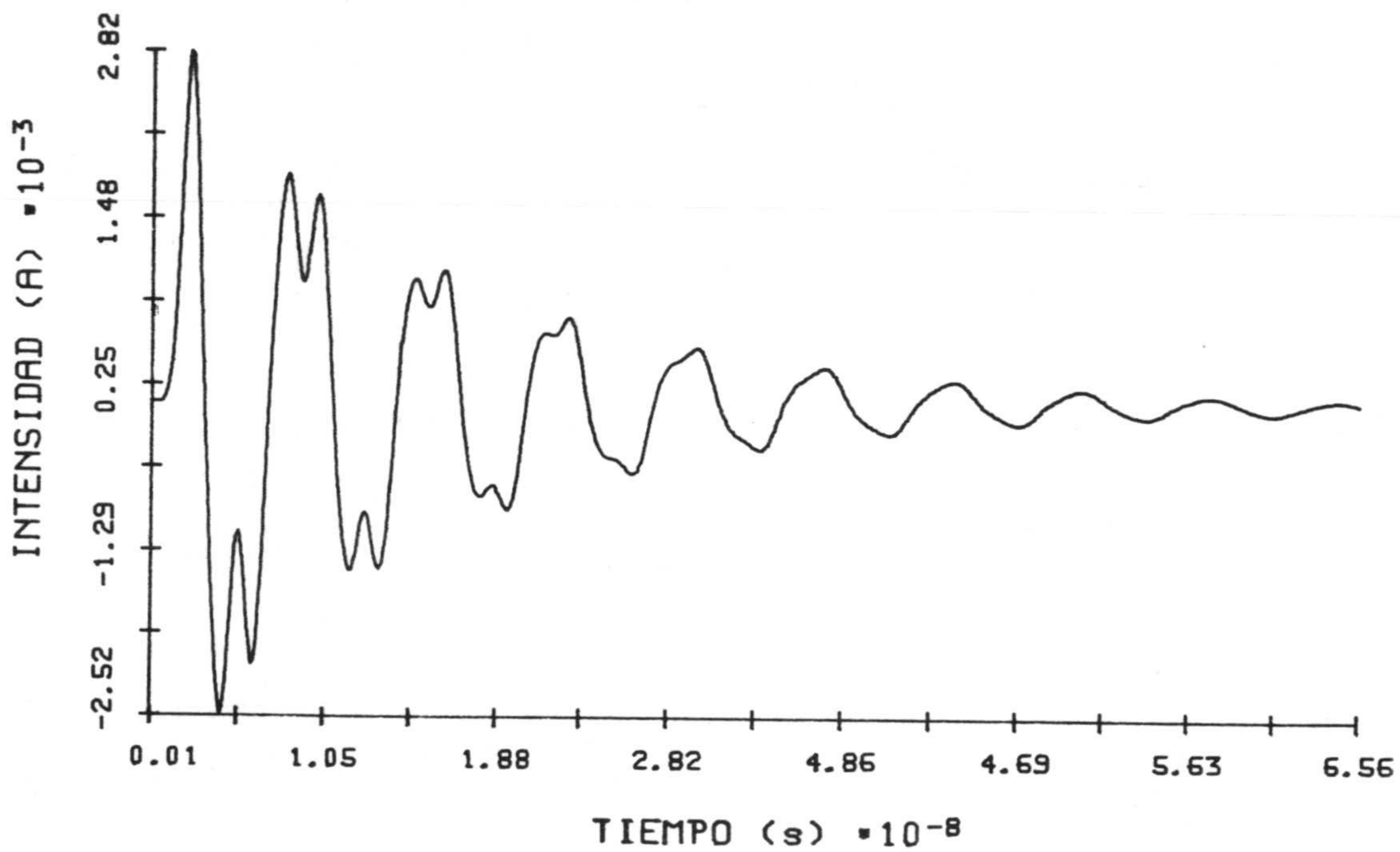
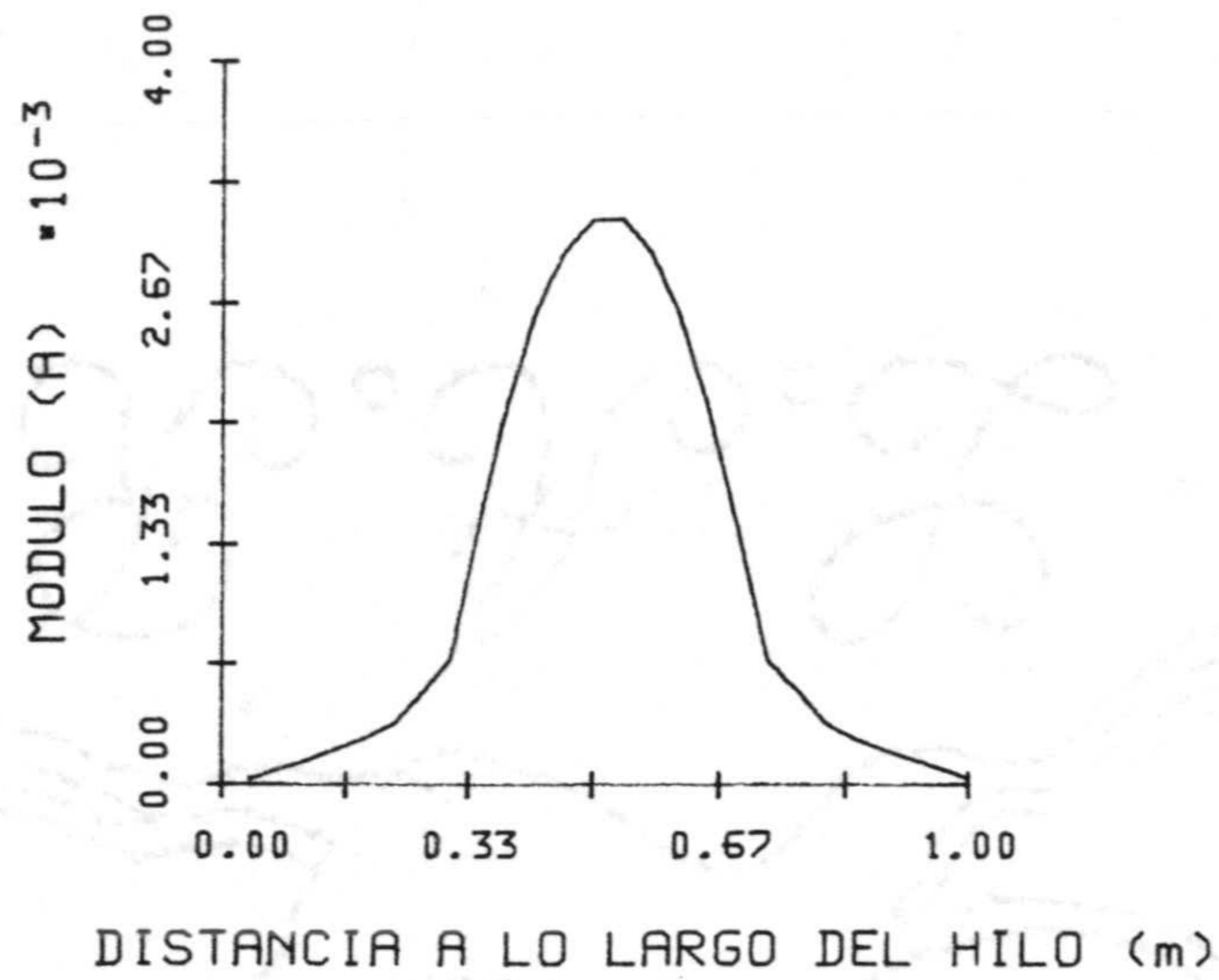
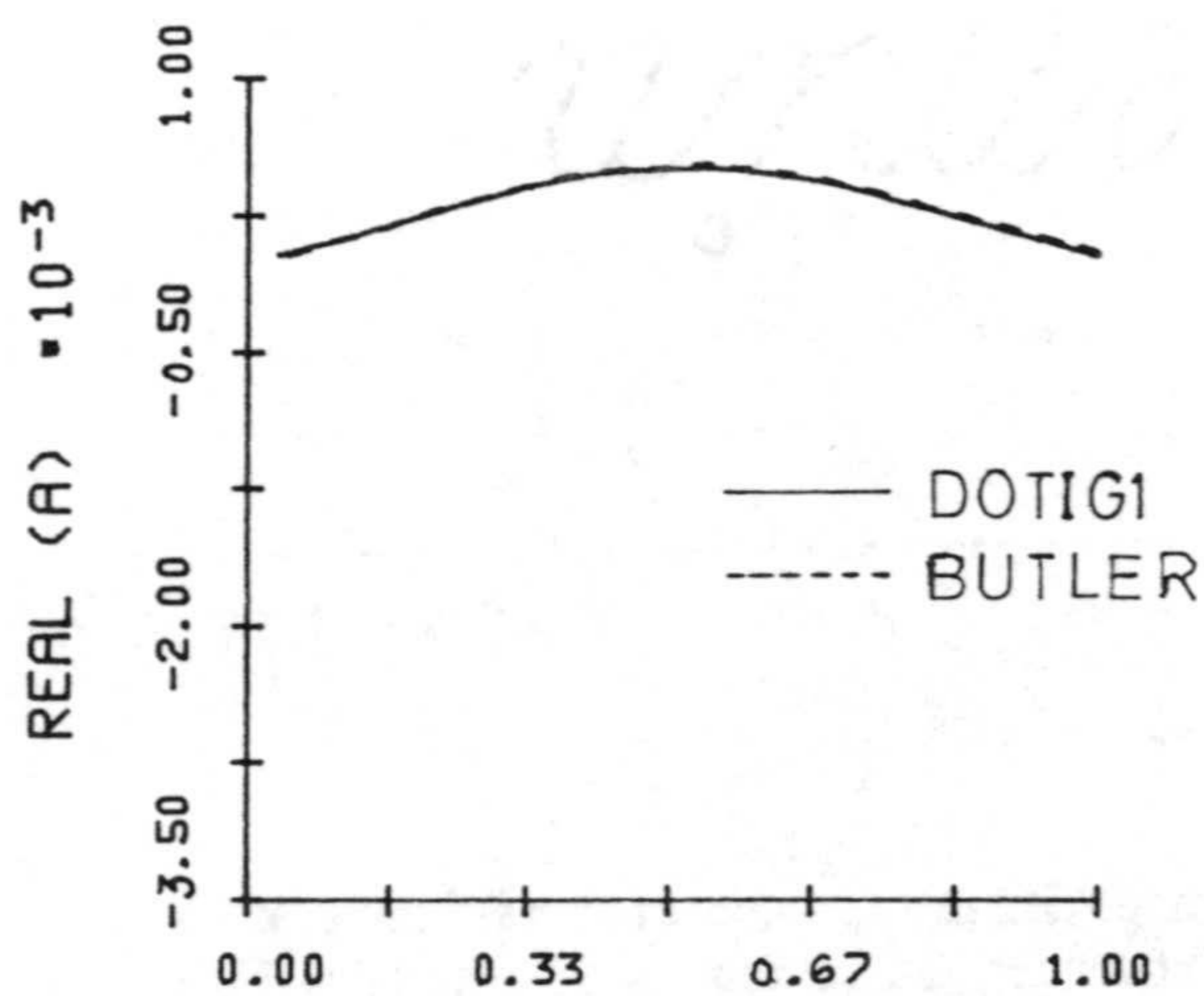


Fig. 4.69.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del primer hilo para la estructura de la fig. 4.68 con $l_1 = l_2 = 0.5$ m y $a = b = 0.001$ m.

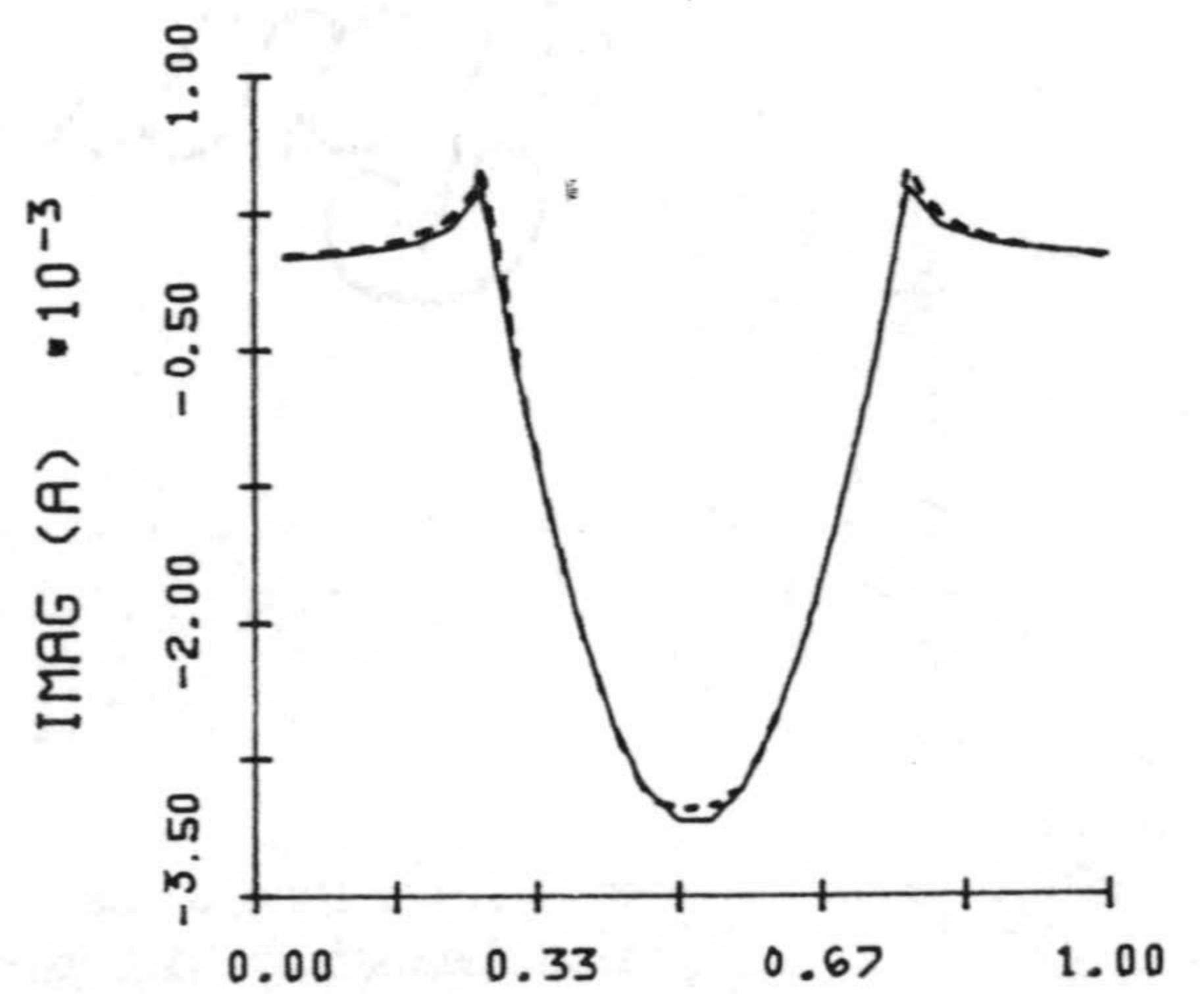


(a)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(b)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(c)

Fig. 4.70.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del voltaje aplicado y para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte Imaginaria ($l_1 = l_2 = 0.5$ m, $a = b = 0.001$ m y excitación simétrica).

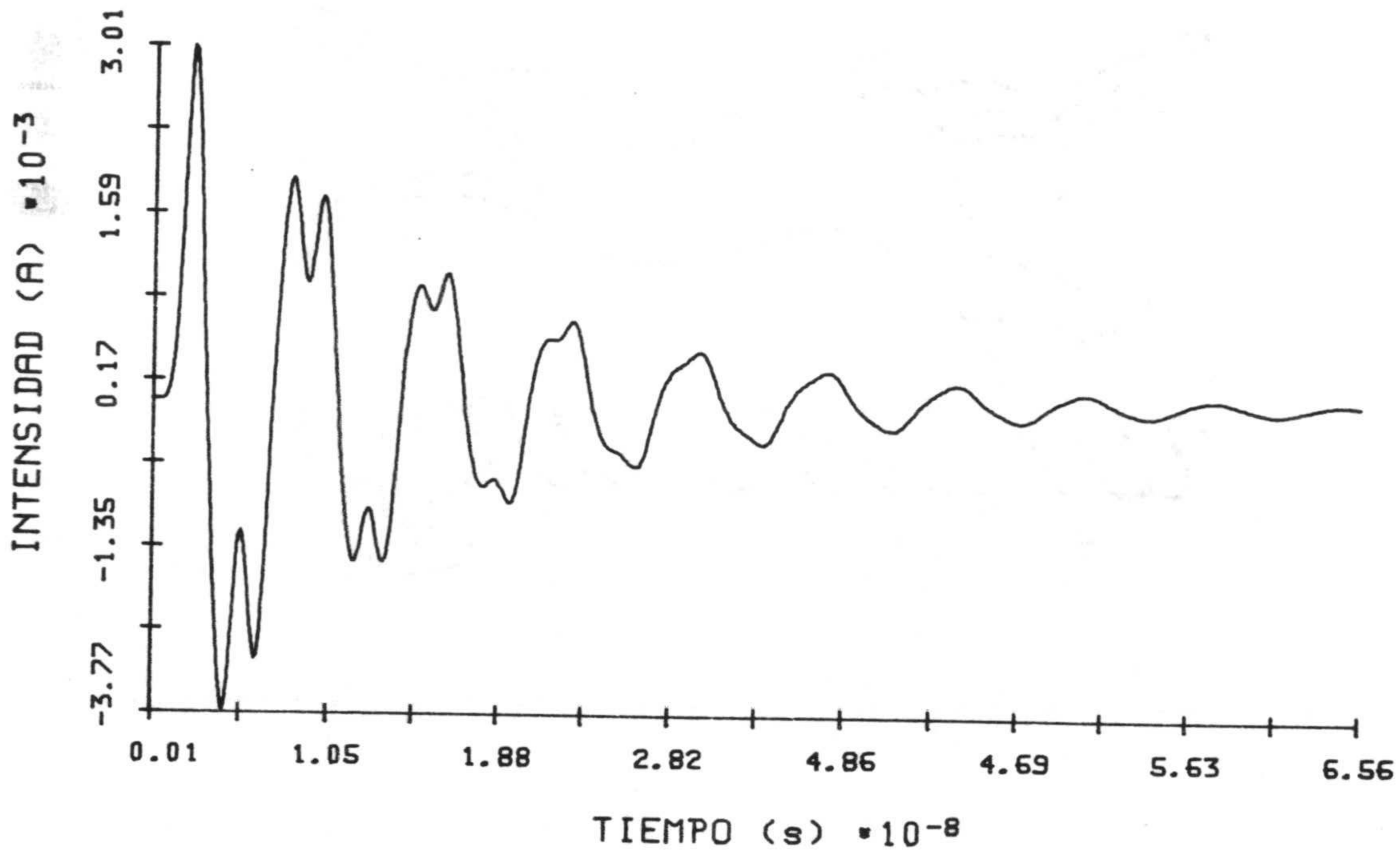
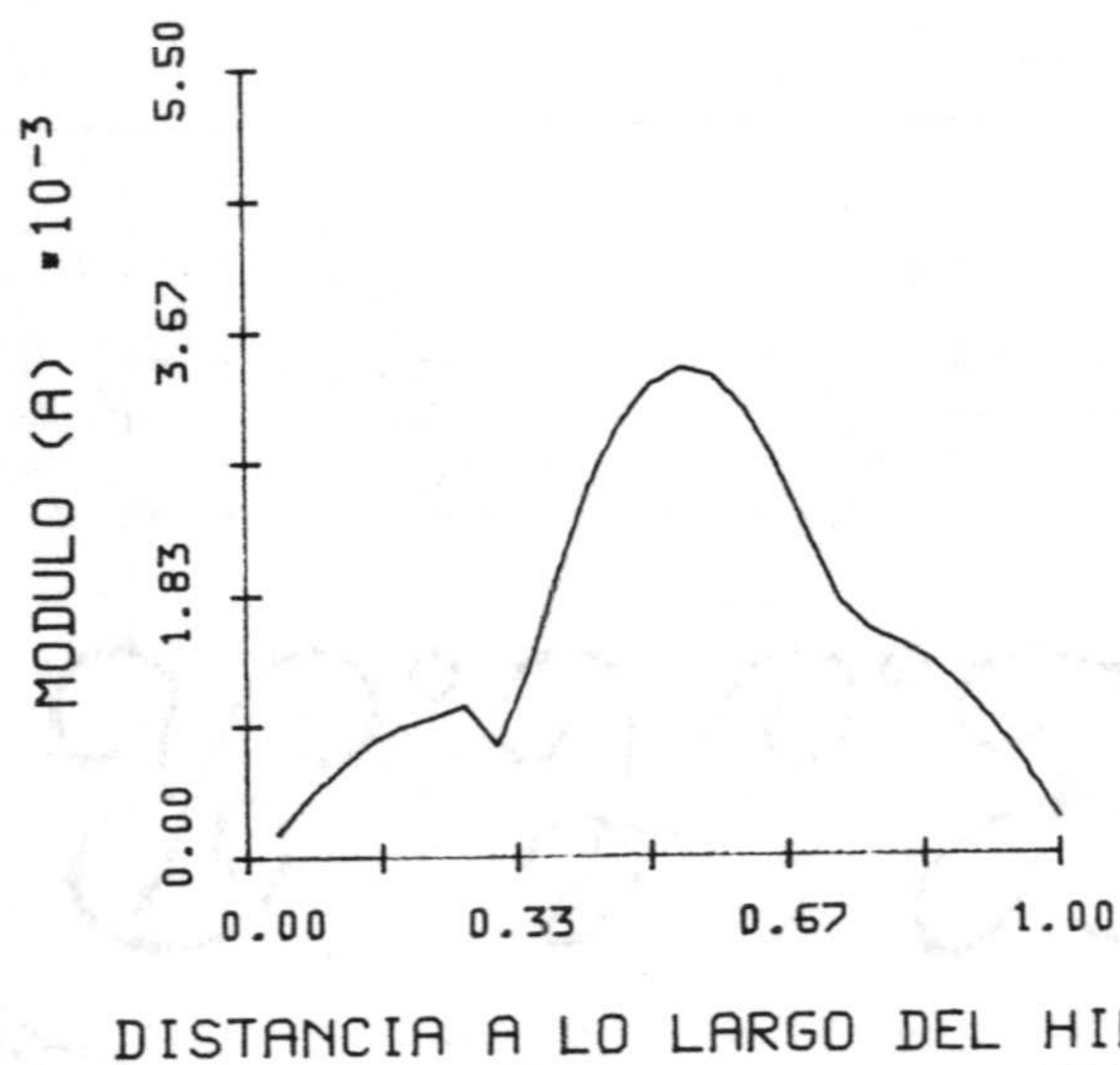
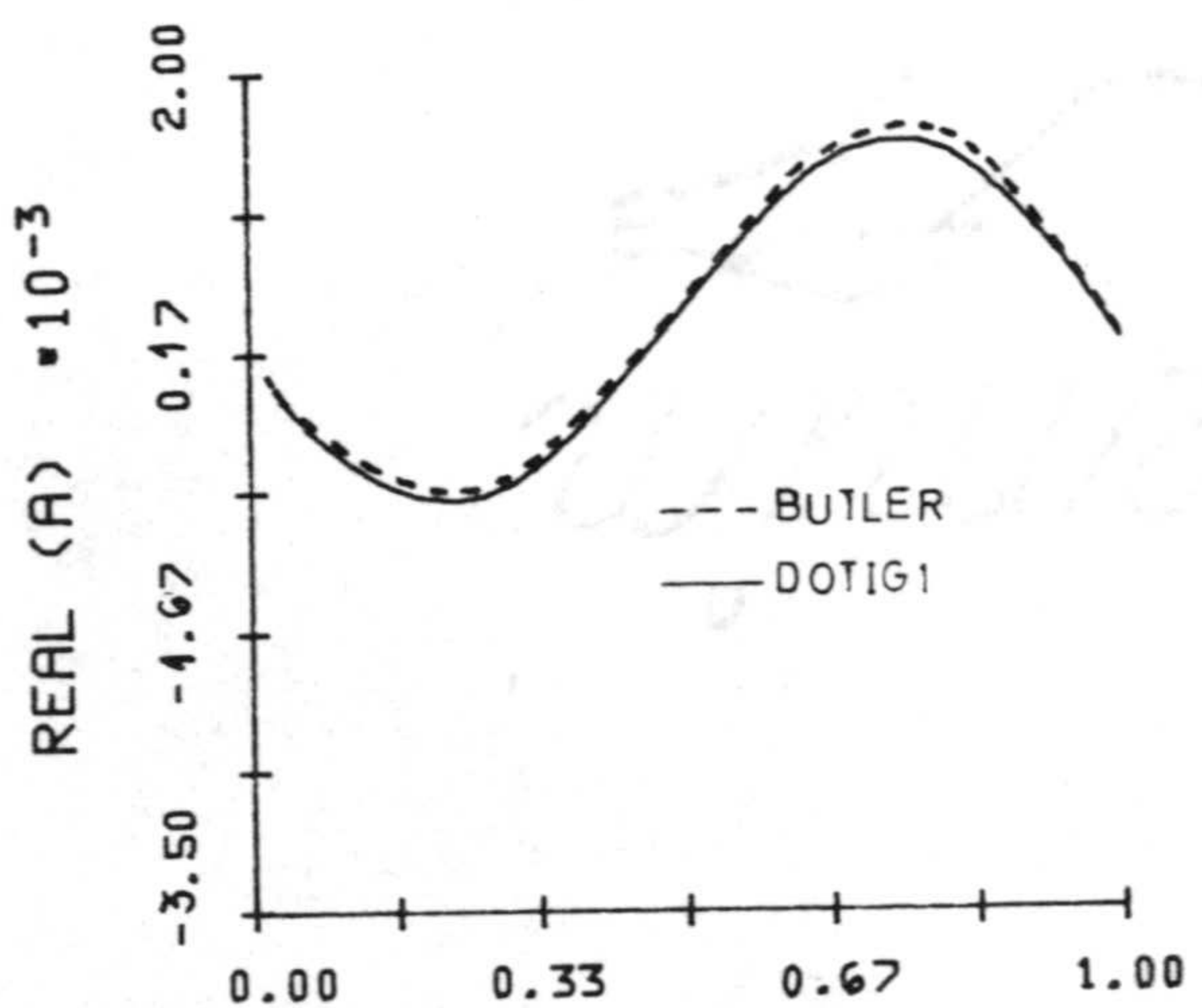


Fig. 4.71.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del primer hilo para la estructura de la fig. 4.68 con $l_1 = l_2 = 0.5$ m, $a = 0.001$ y $b = 0.002$ m.

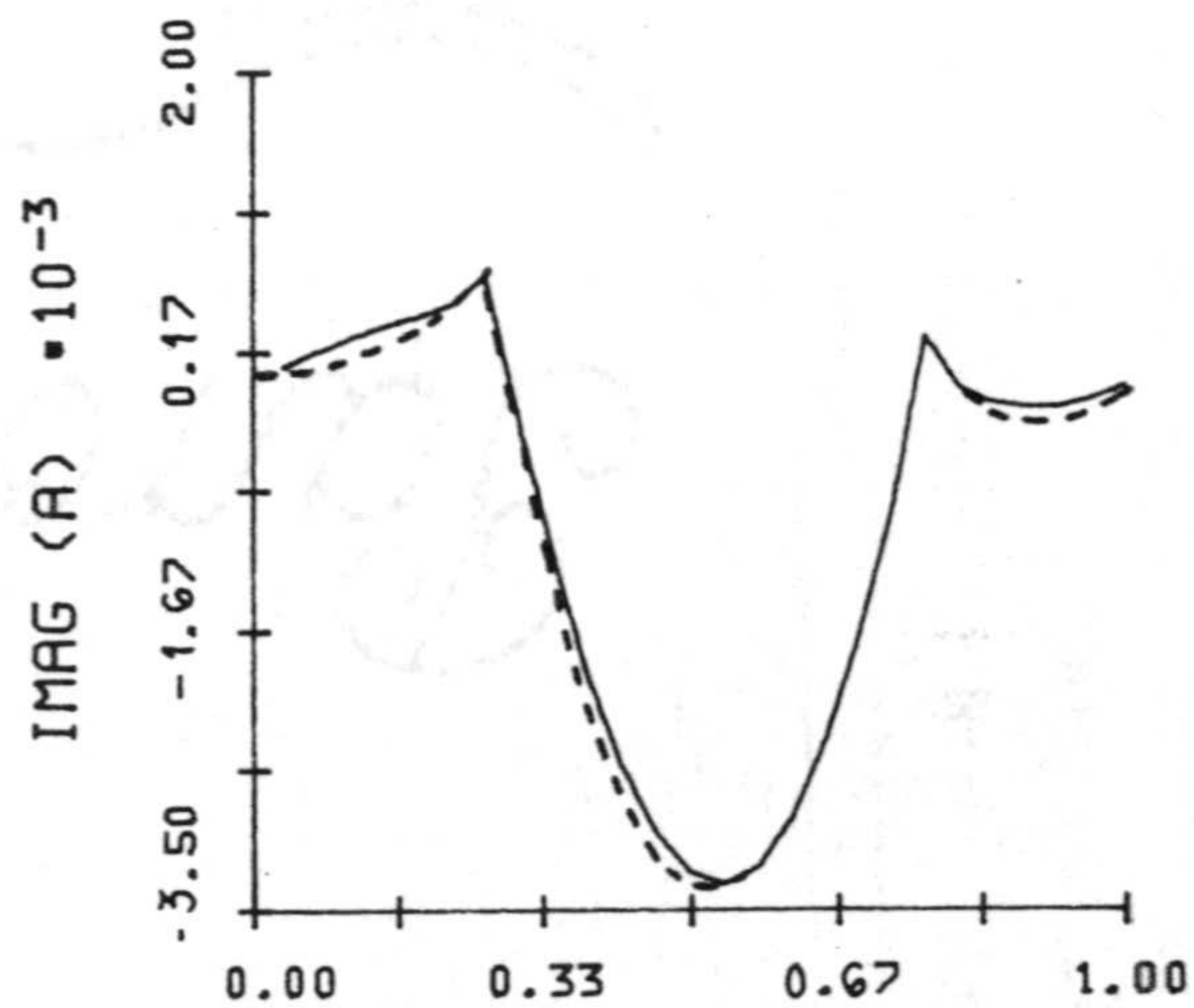


(a)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(b)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(c)

Fig. 4.72.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del voltaje aplicado y para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte Imaginaria ($l_1 = l_2 = 0.5$ m, $a = 0.001$ m, $b = 0.002$ m y excitación simétrica).

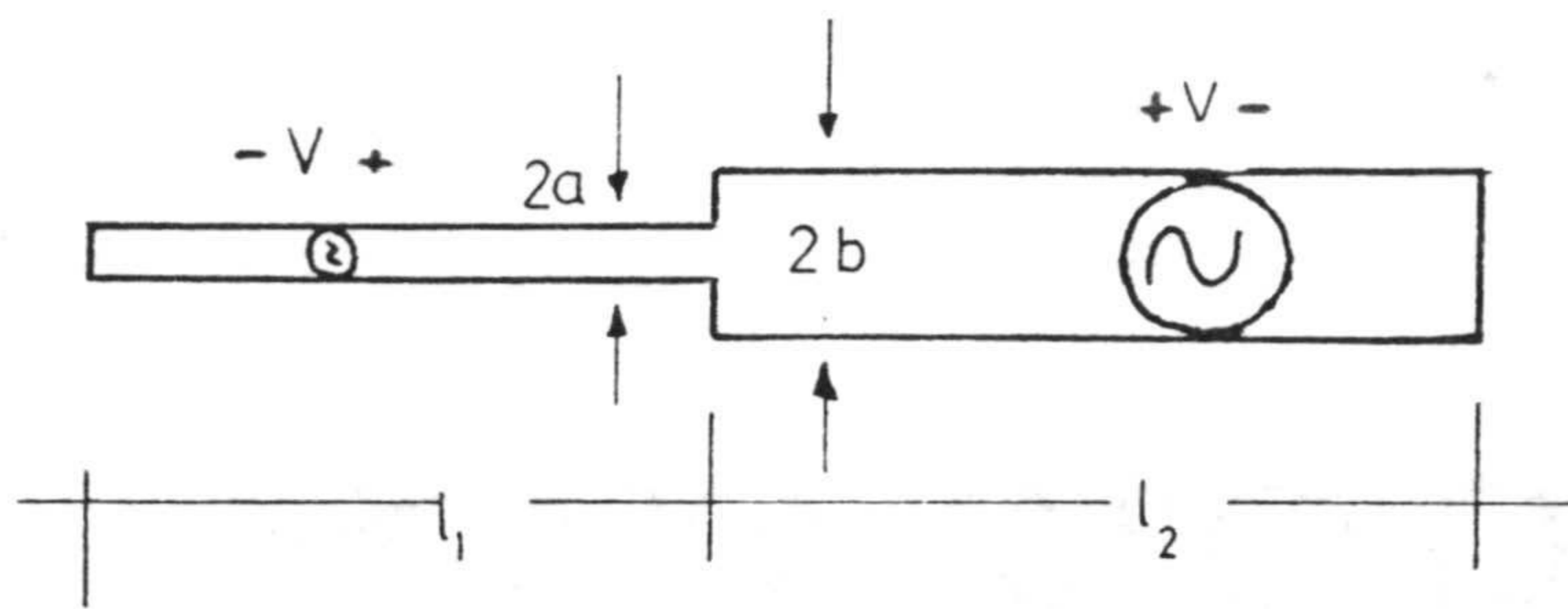


Fig. 4.73.- Geometría para una unión de dos hilos de distinto radio excitados de forma antisimétrica.

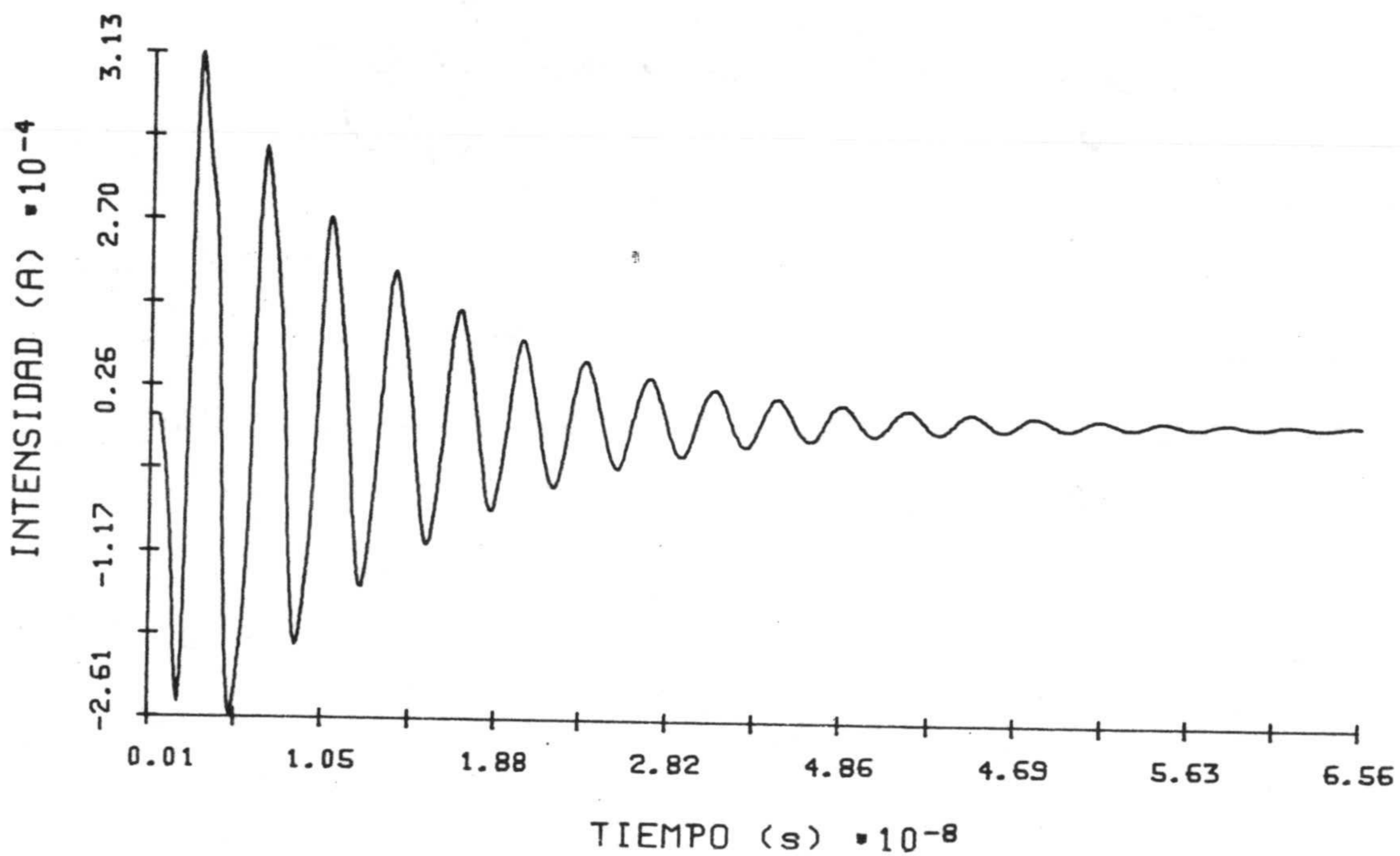


Fig. 4.74.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del primer hilo para la estructura de la fig. 4.73 con $l_1 = l_2 = 0.5$ m y $a = b = 0.001$ m.

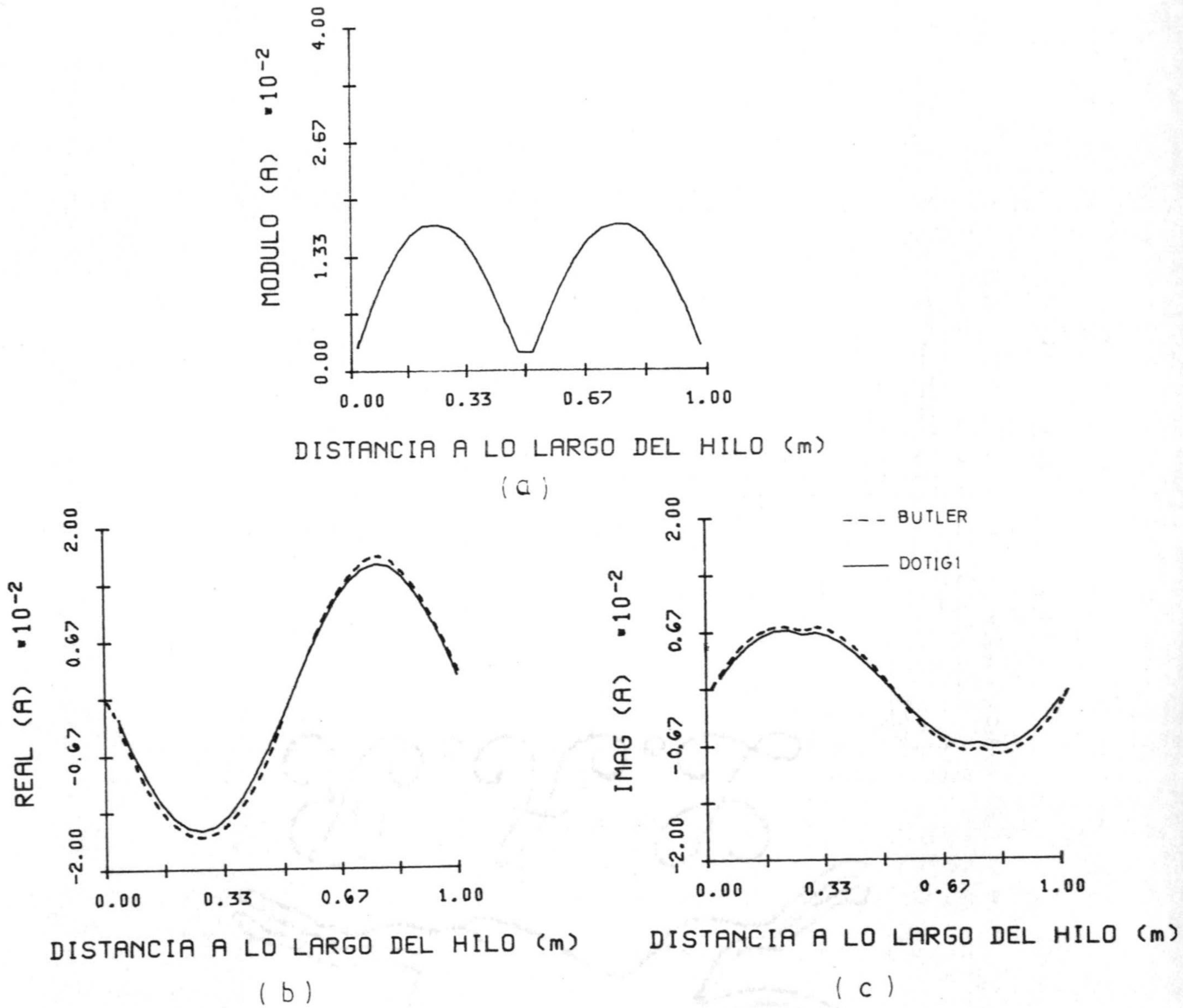


Fig. 4.75.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del voltaje aplicado y para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte Imaginaria ($l_1 = l_2 = 0.5$ m, $a = b = 0.001$ m y excitación antisimétrica).

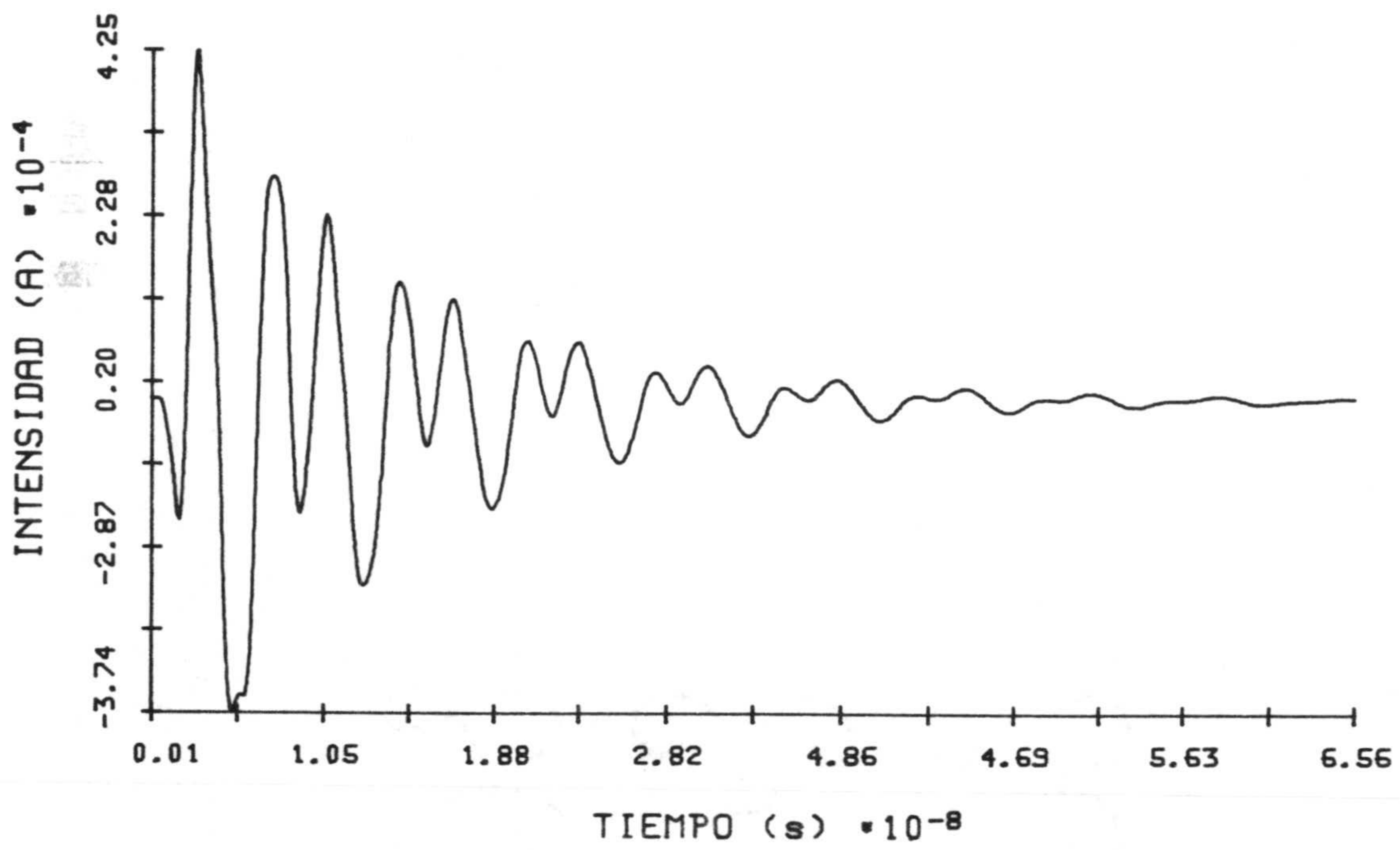


Fig. 4.76.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión del primer hilo para la estructura de la fig. 4.73 con $l_1 = l_2 = 0.5$ m, $a = 0.001$ y $b = 0.002$ m.

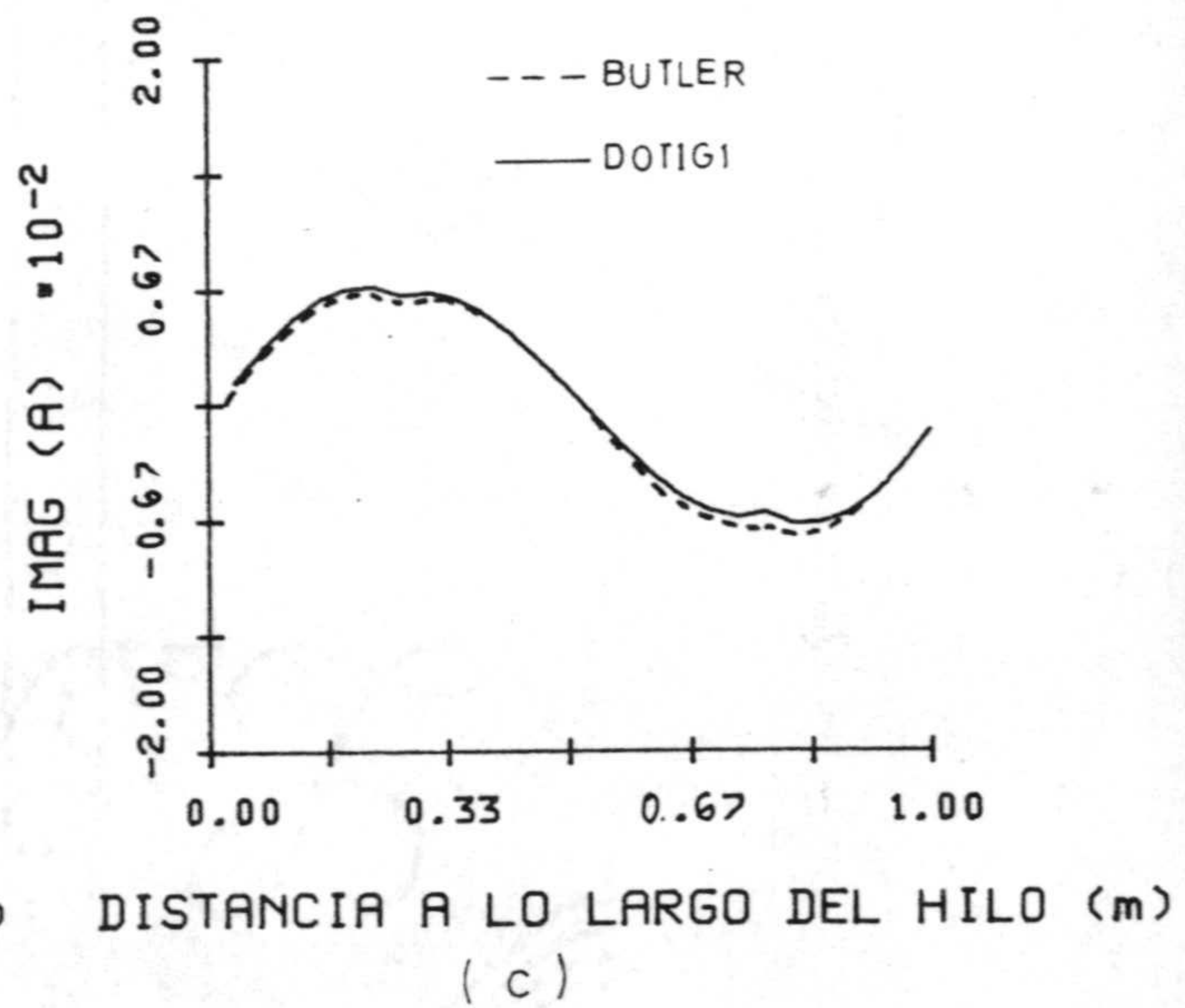
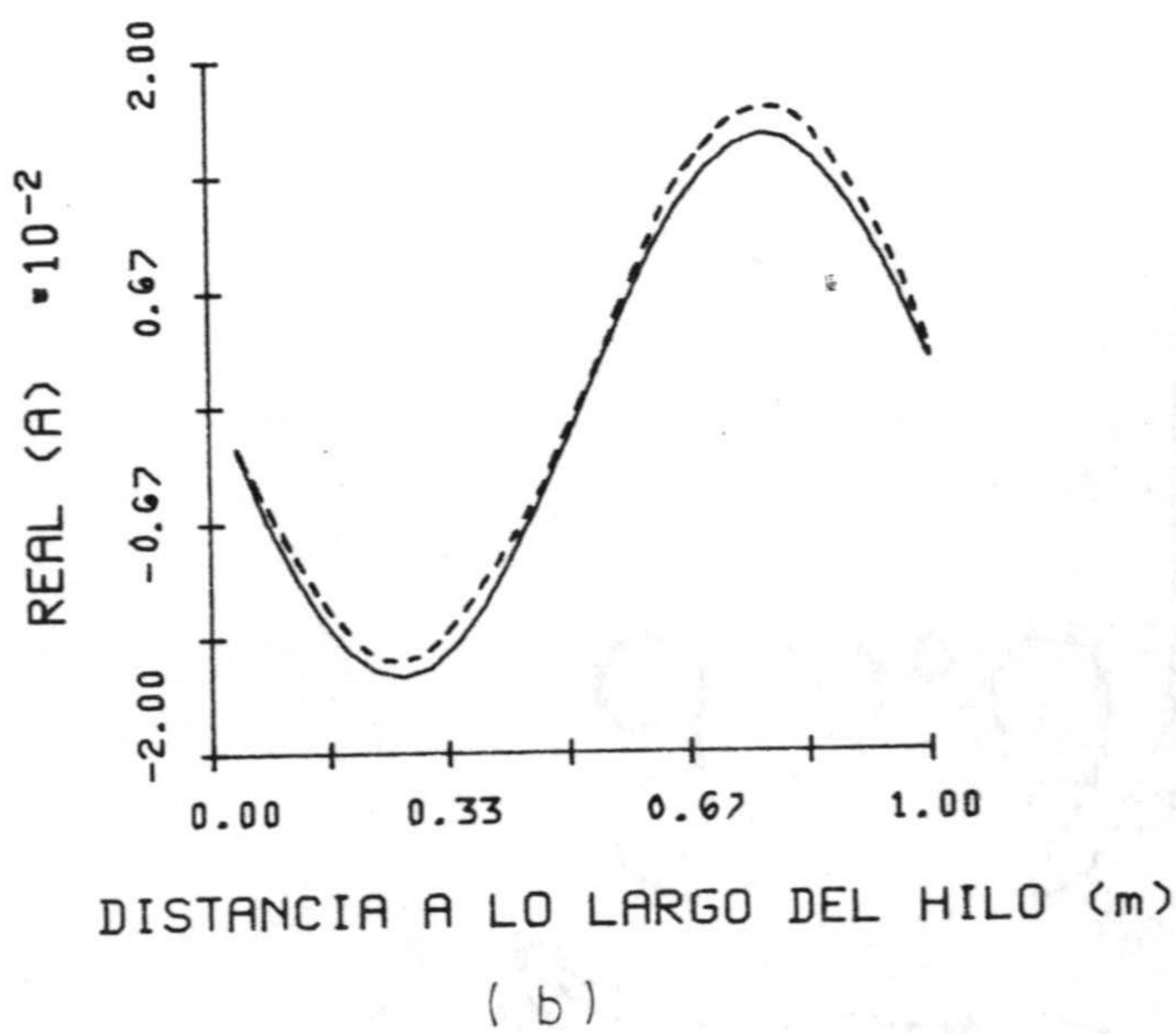
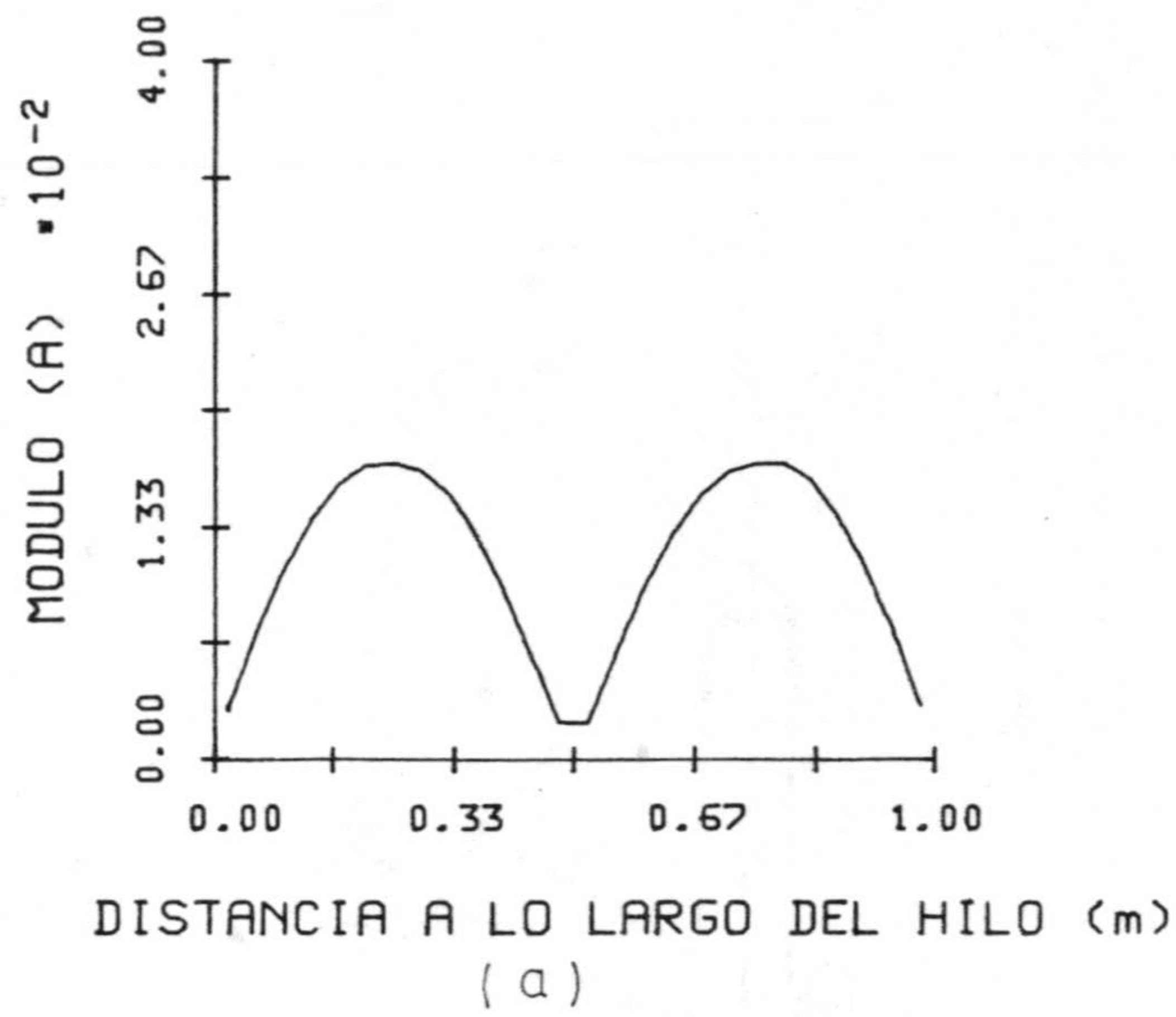


Fig. 4.77.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del voltaje aplicado y para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte Imaginaria ($l_1 = l_2 = 0.5$ m, $a = 0.001$ m, $b = 0.002$ m y excitación antisimétrica).

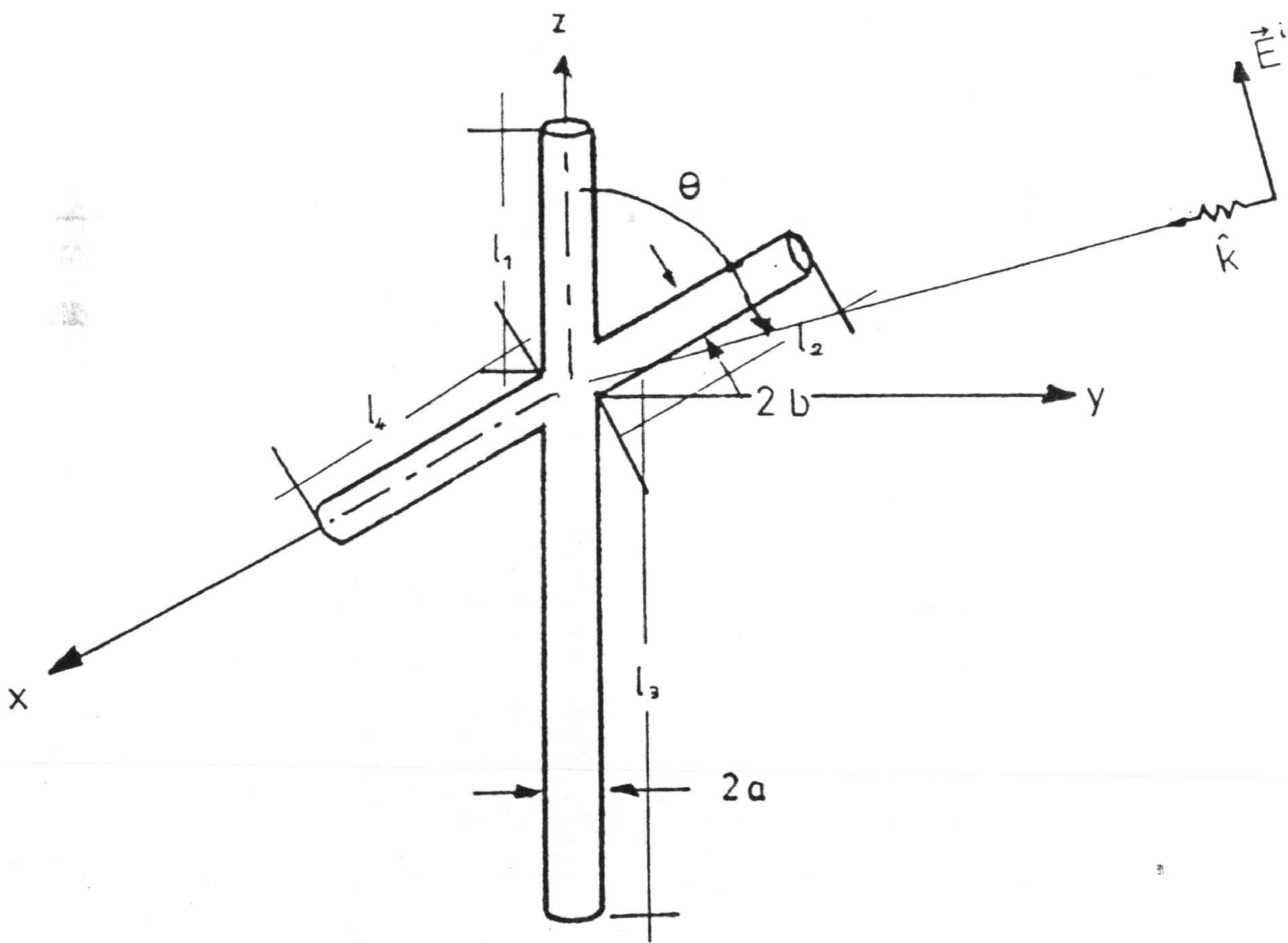


Fig. 4.78.- Geometría de la estructura de cuatro hilos con radios diferentes ($l_1 = l_2 = l_4 = 0.11$ m, $l_3 = 0.22$ m, $a = 0.00222$ m y $b = 0.00111$ m).

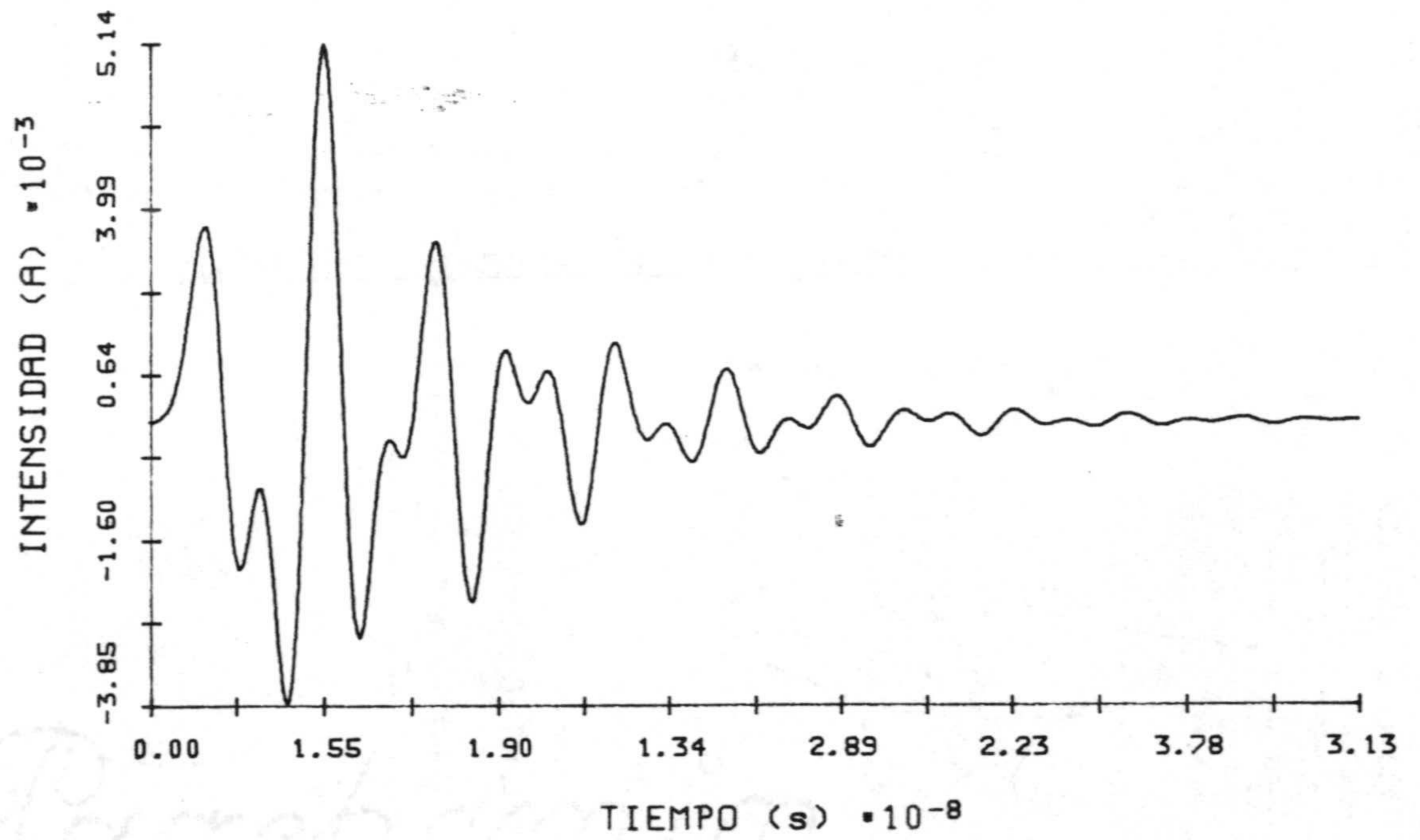
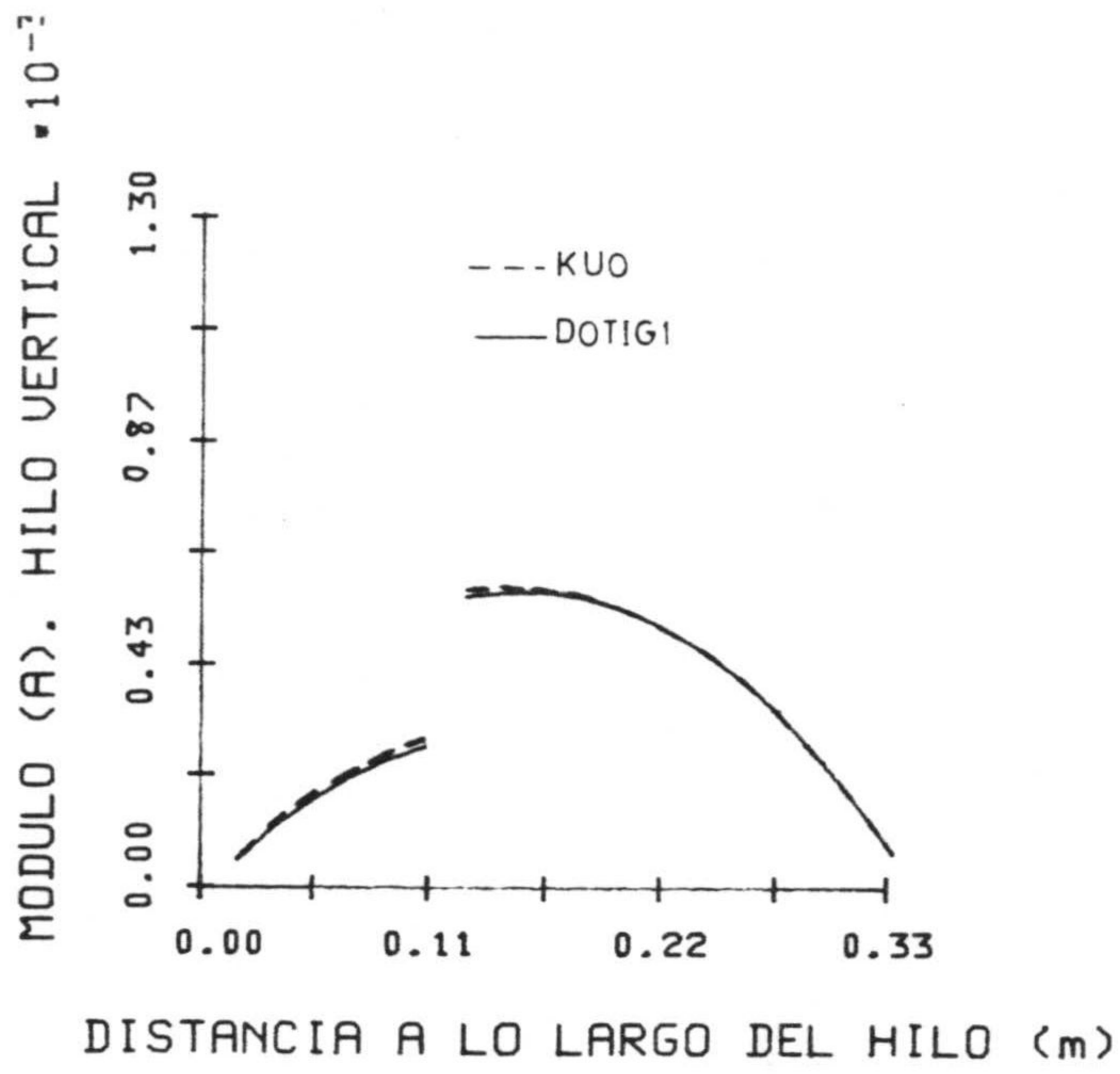
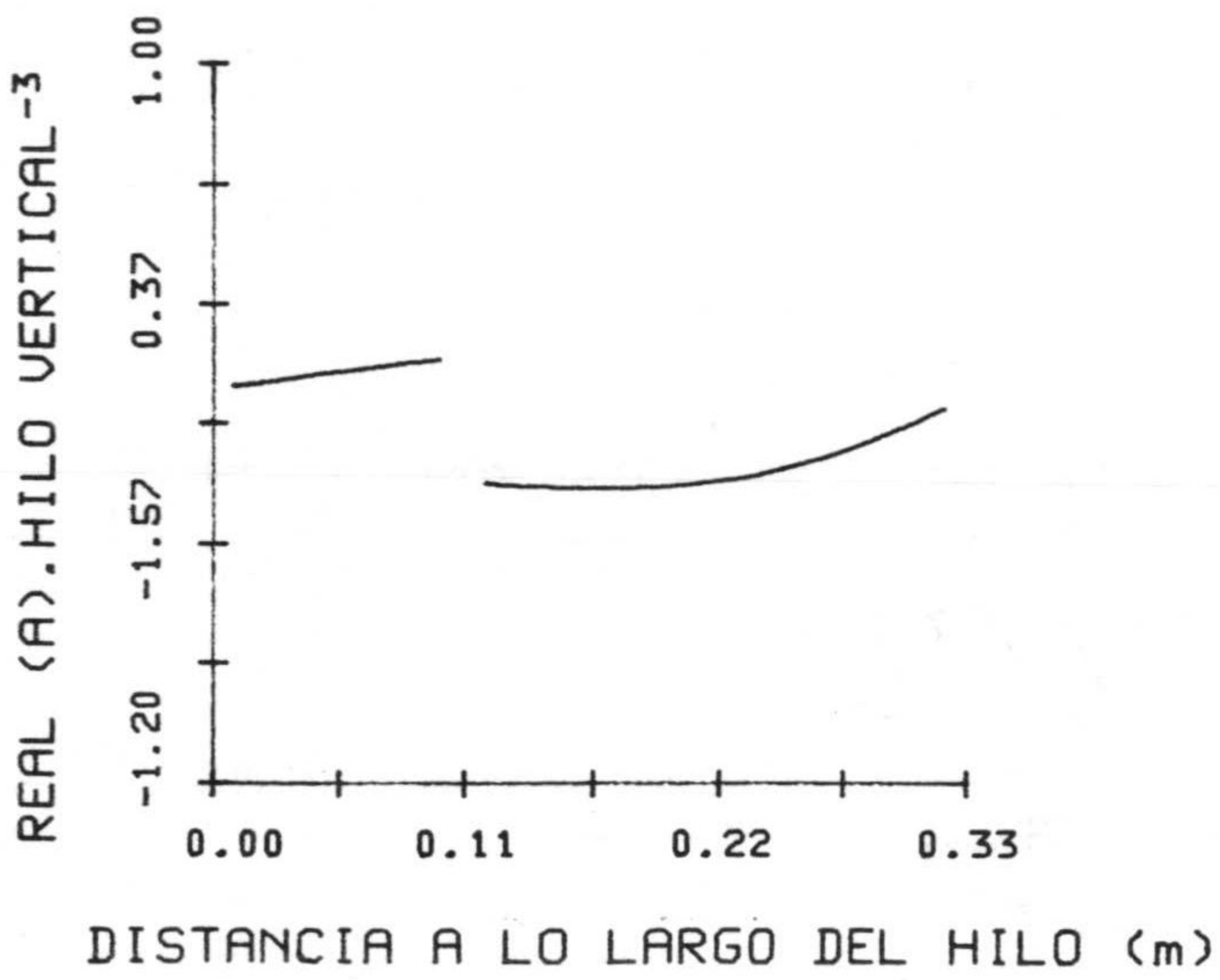


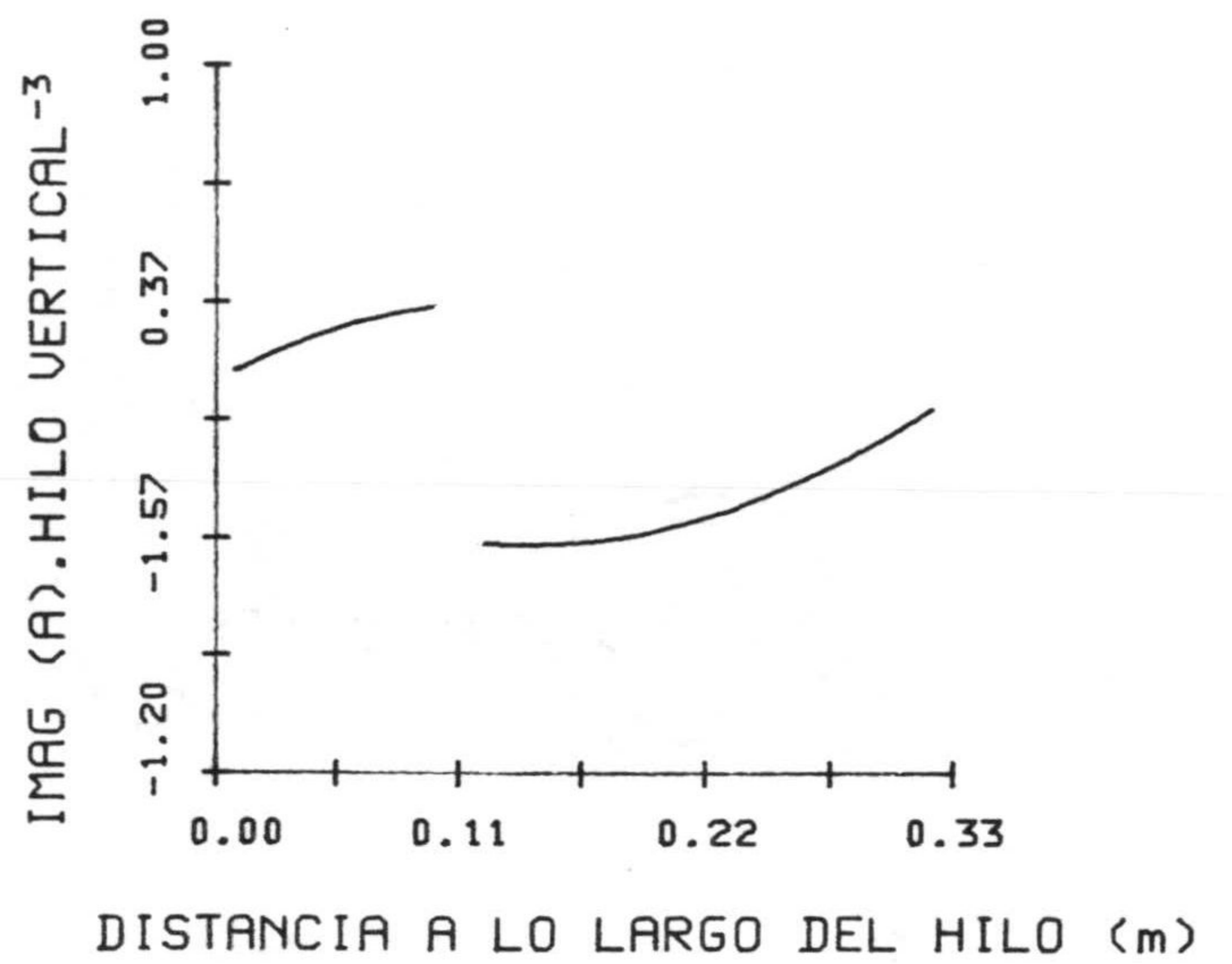
Fig. 4.79.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión para la estructura de la fig. 4.78 y $\theta = 30^\circ$.



(a)



(b)



(c)

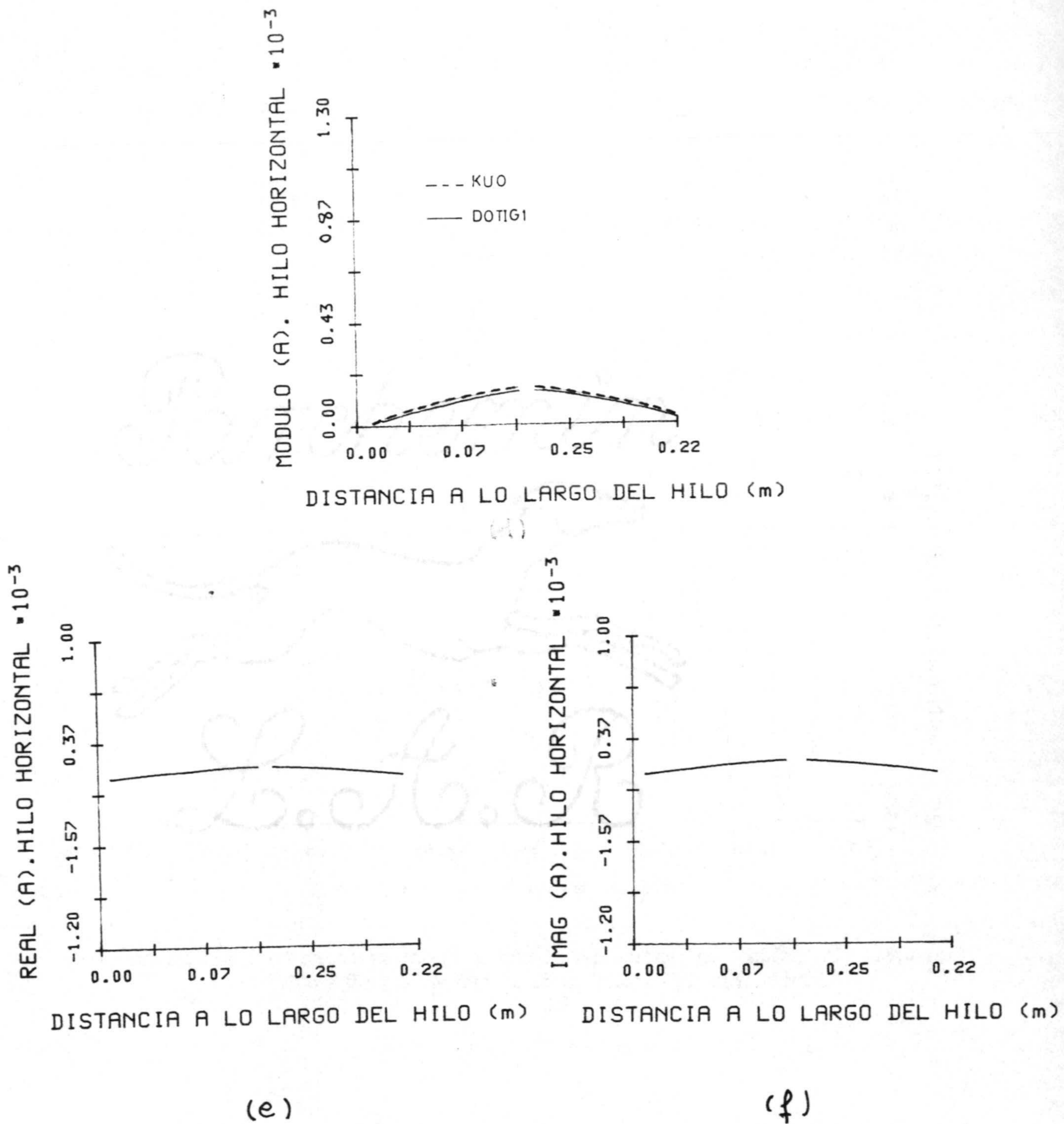


Fig. 4.80.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo hilo vertical, b) Parte Real hilo vertical, c) Parte Imaginaria hilo vertical, d) Módulo hilo horizontal, e) Parte Real hilo horizontal, f) Parte Imaginaria hilo horizontal. Angulo de incidencia $\theta = 30^\circ$.

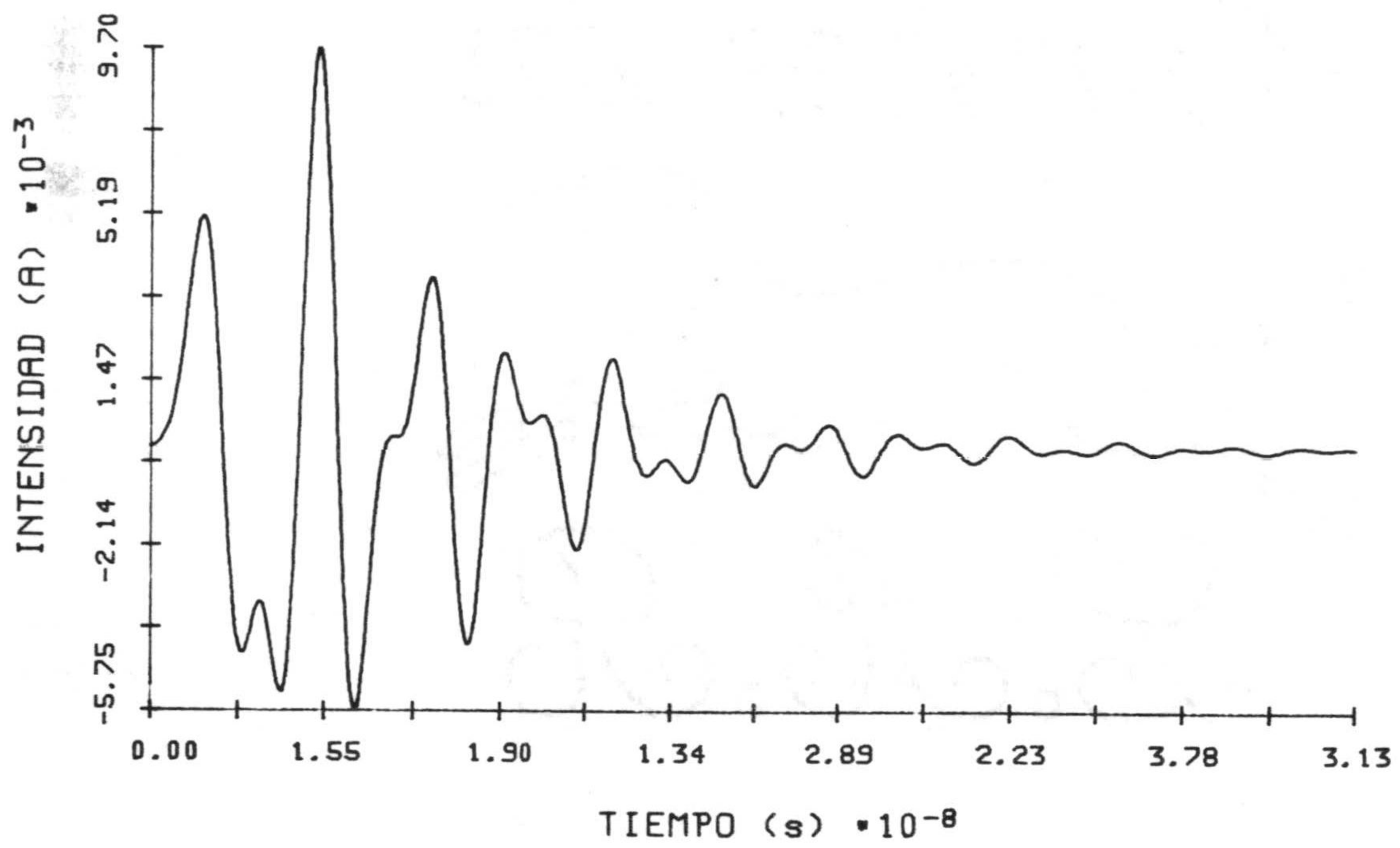
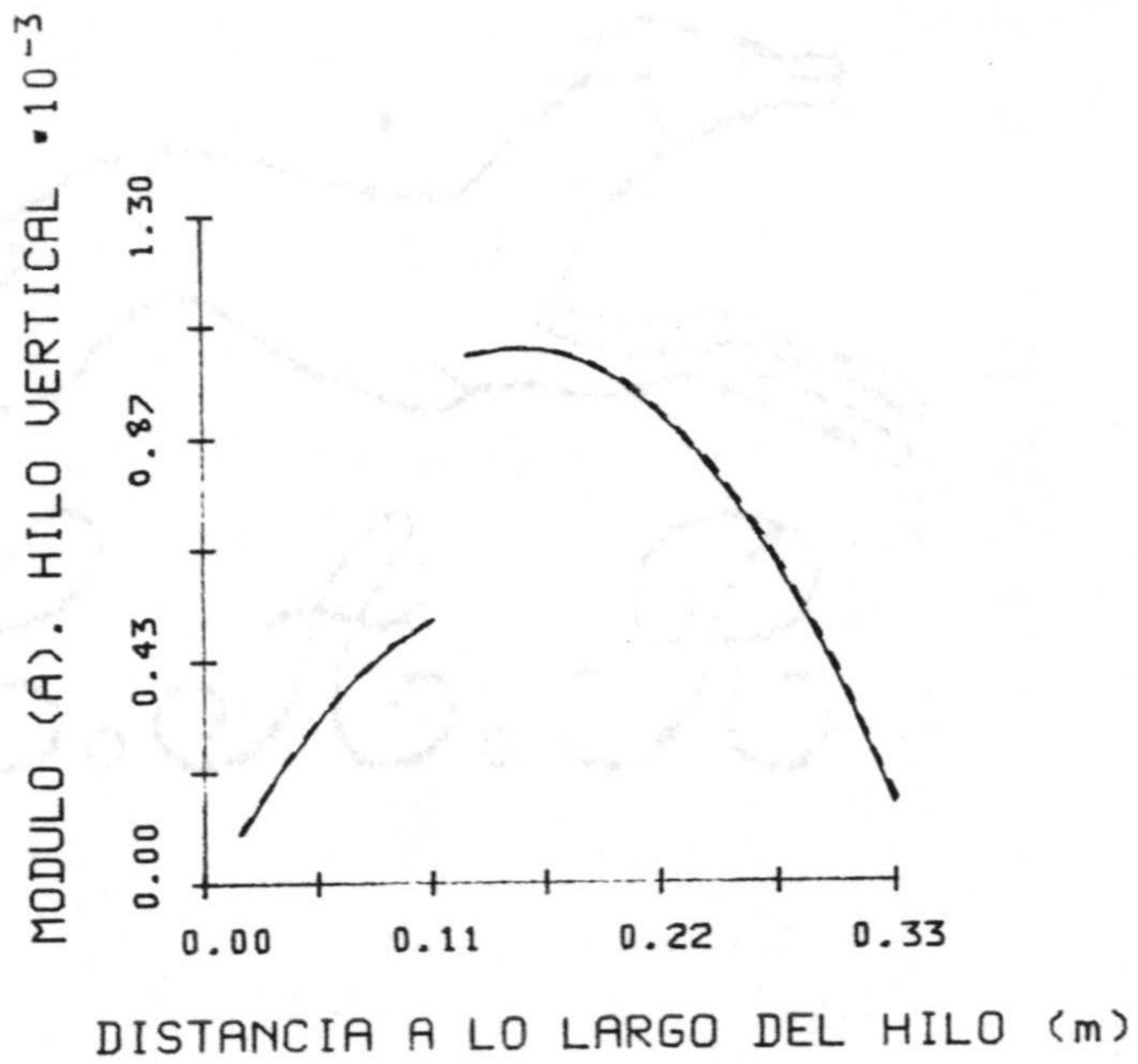
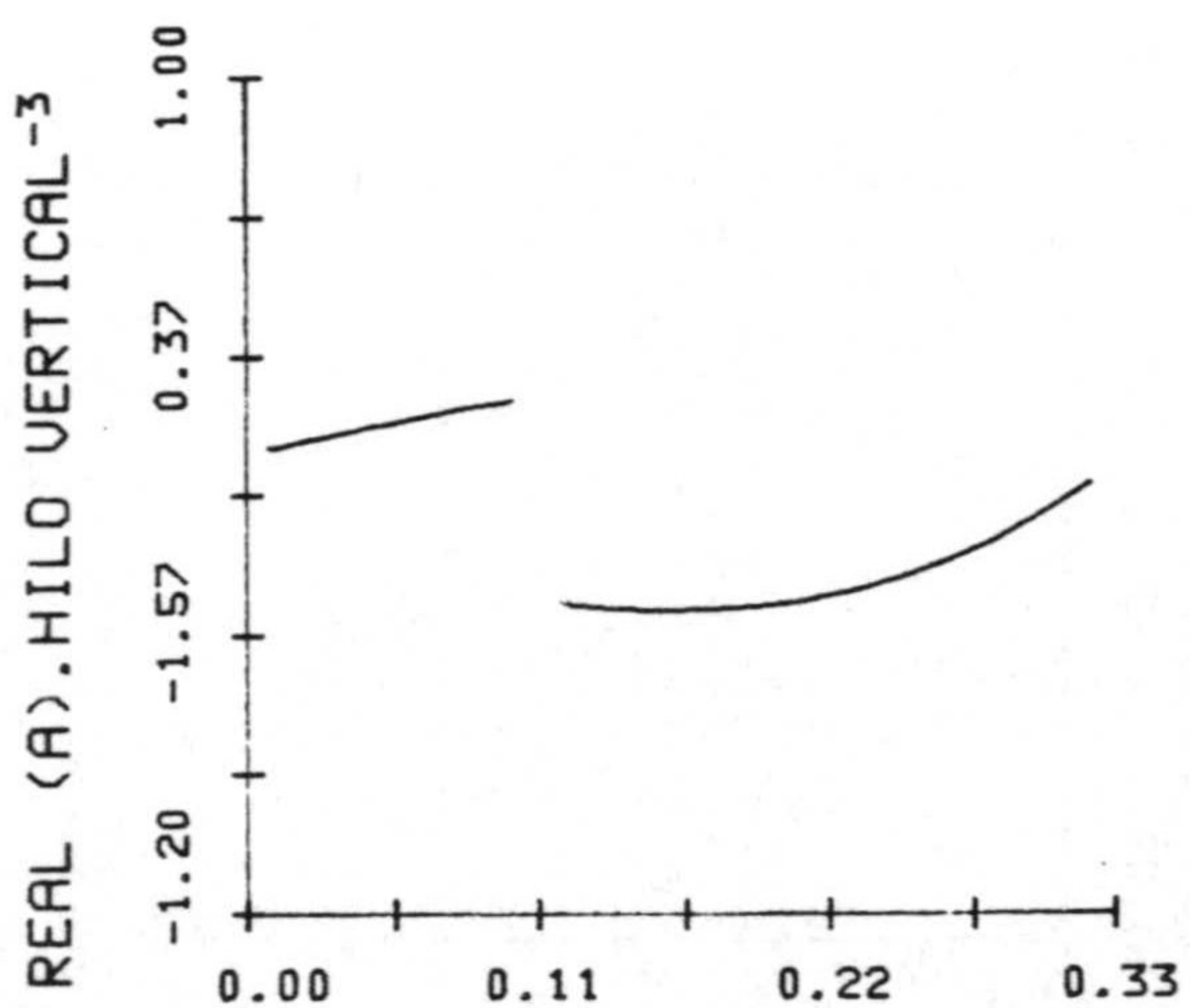


Fig. 4.81.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión para la estructura de la fig. 4.78 y $\theta = 60^\circ$.

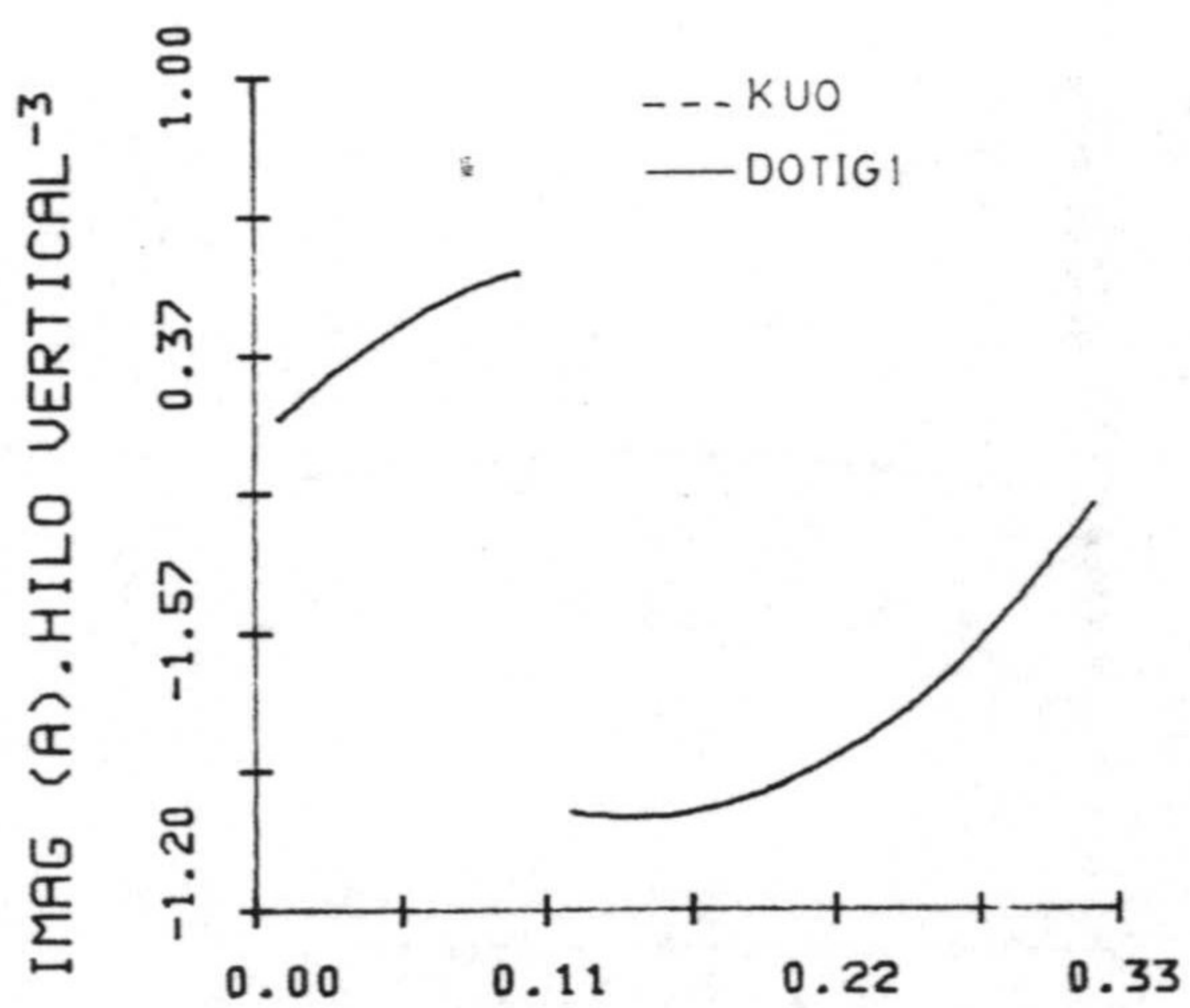


(a)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(b)



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(c)

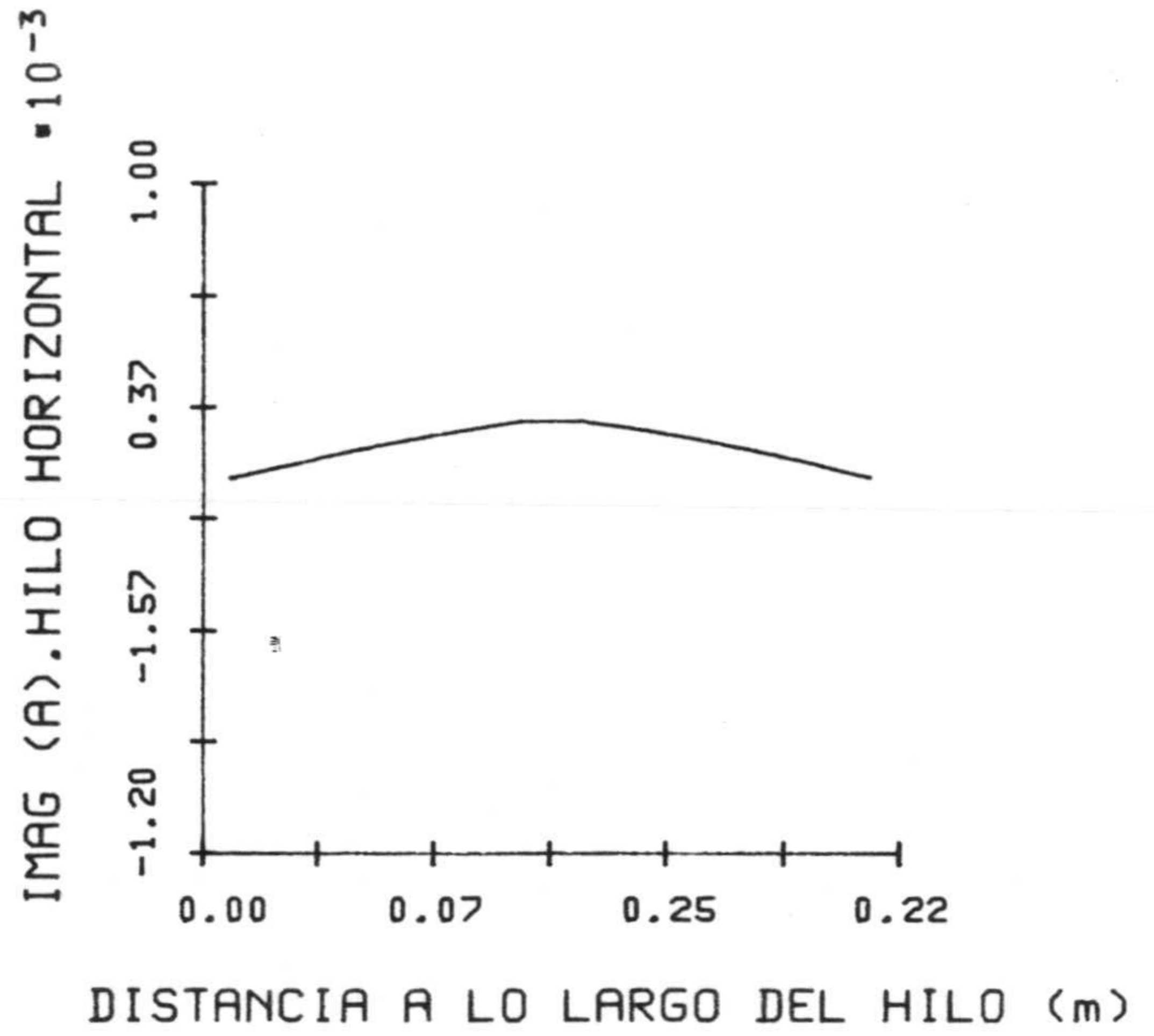
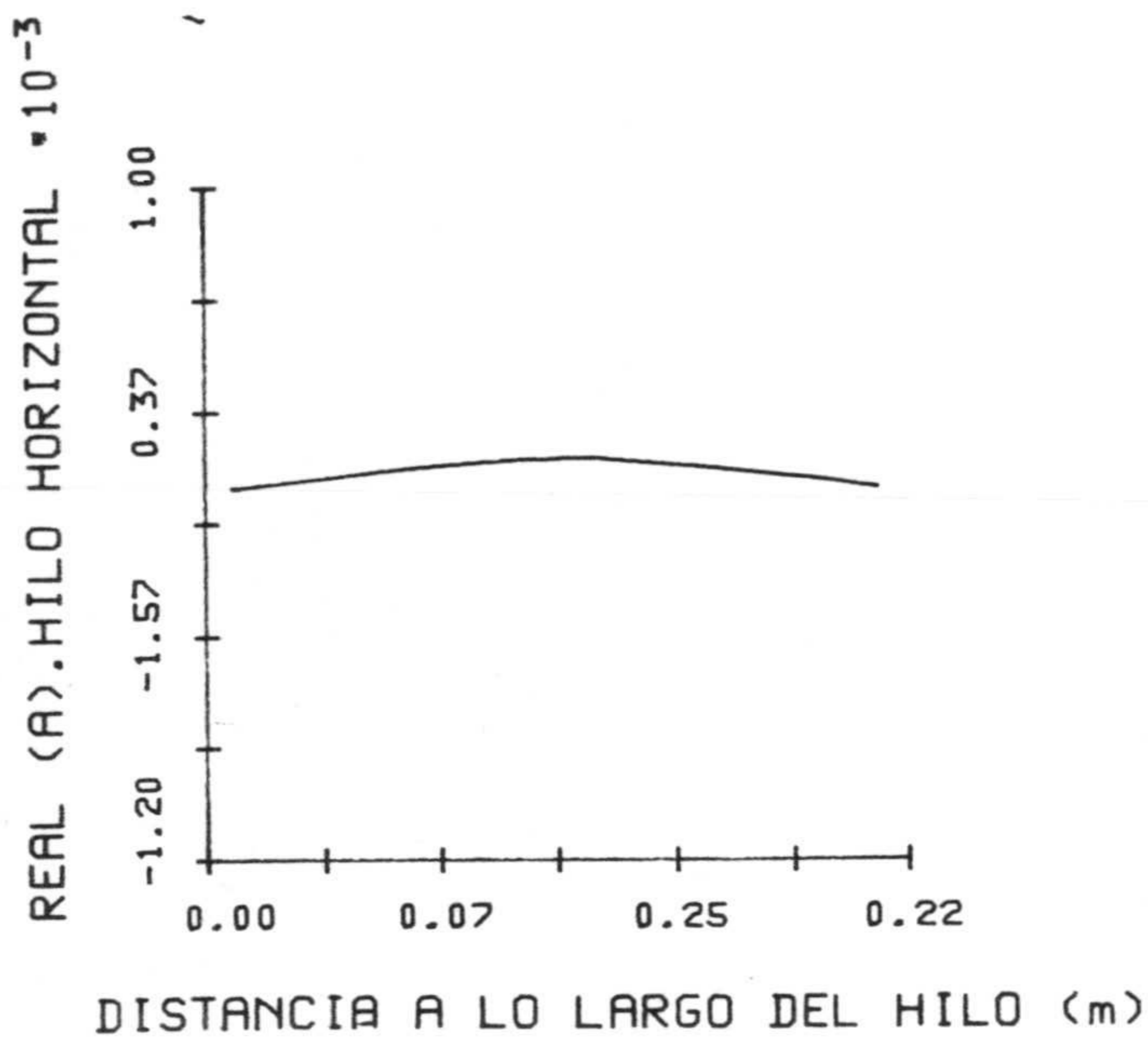
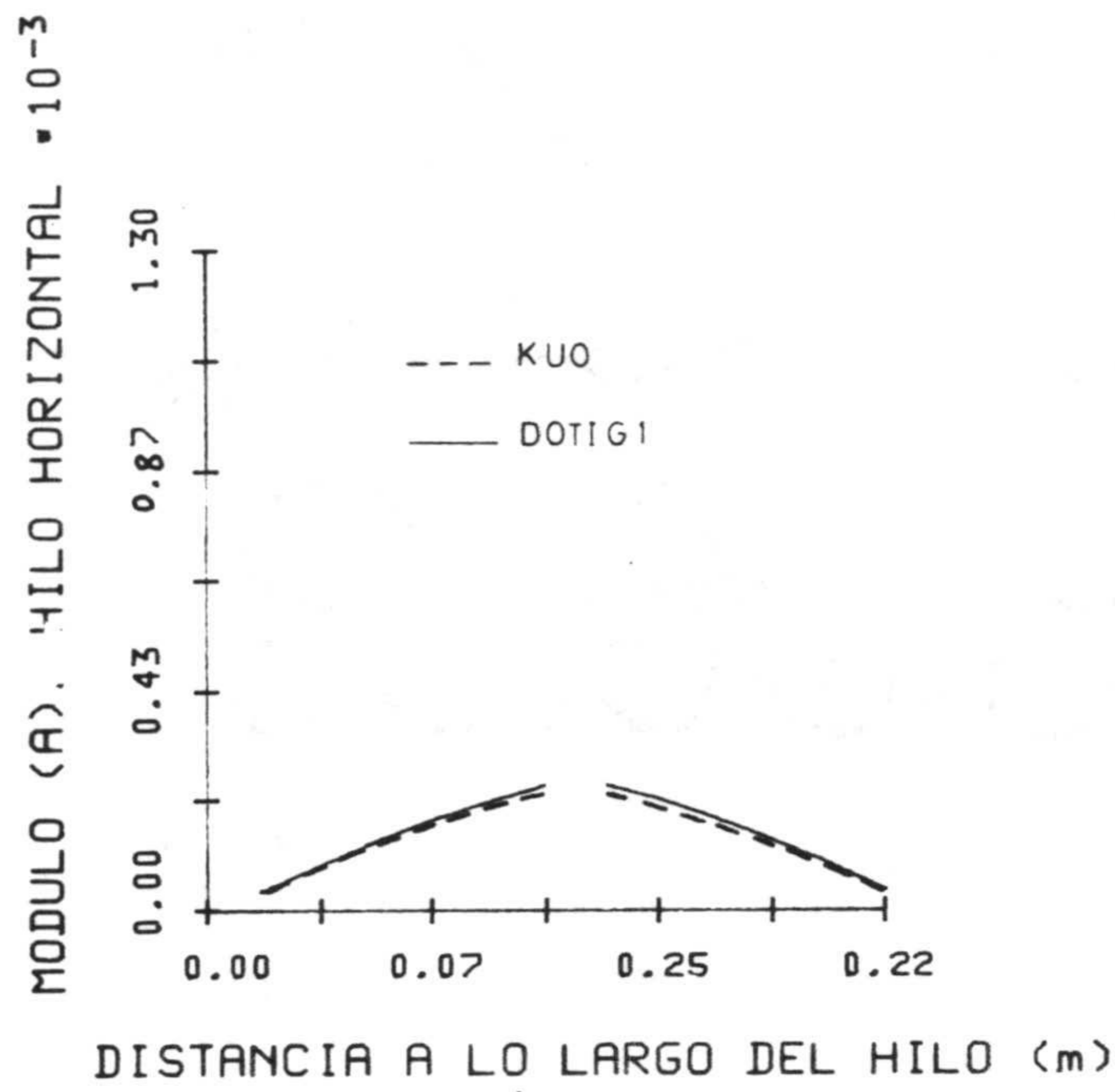


Fig. 4.82.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo hilo vertical, b) Parte Real hilo vertical, c) Parte Imaginaria hilo vertical, d) Módulo hilo horizontal, e) Parte Real hilo horizontal, f) Parte Imaginaria hilo horizontal. Angulo de incidencia $\theta = 60^\circ$.

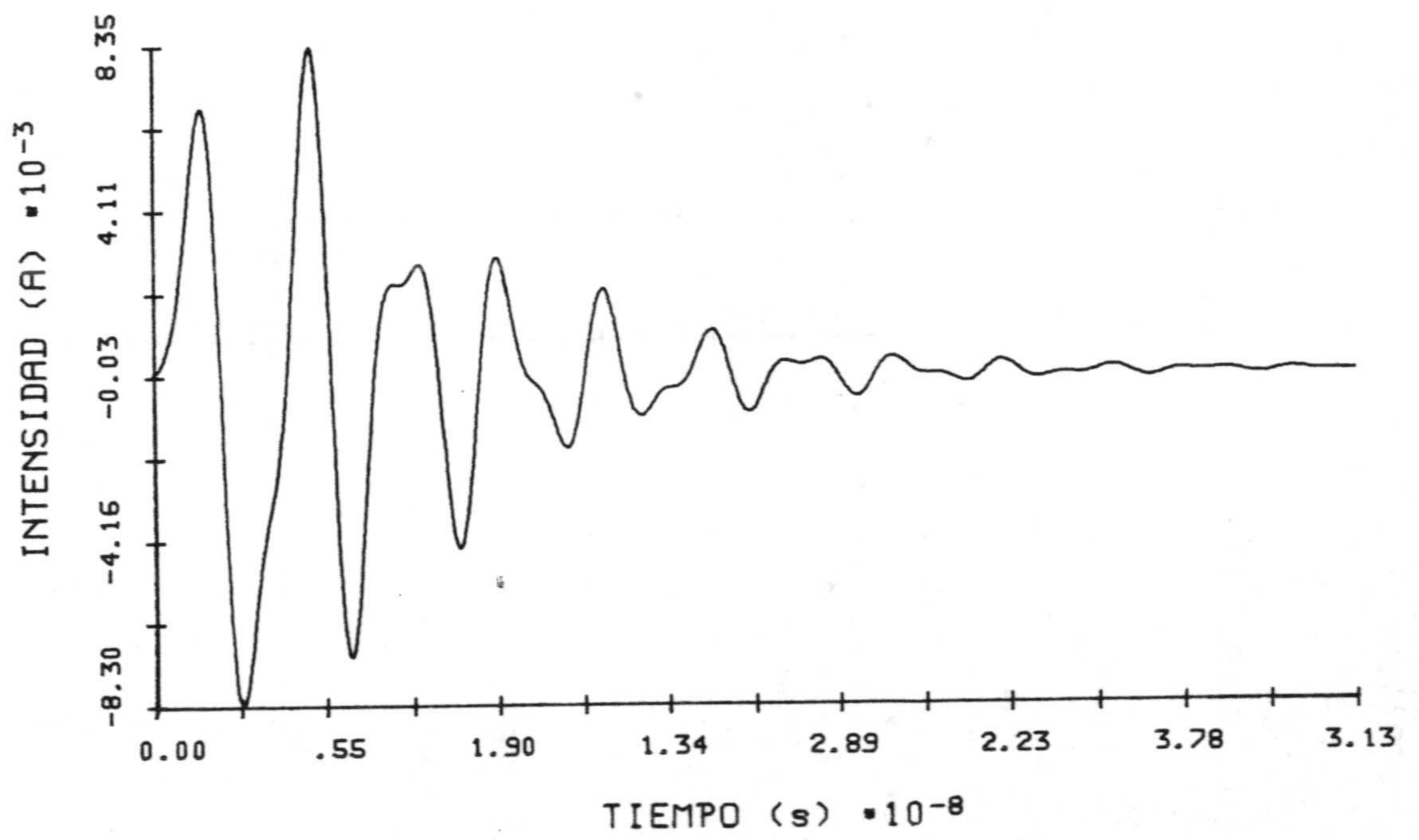
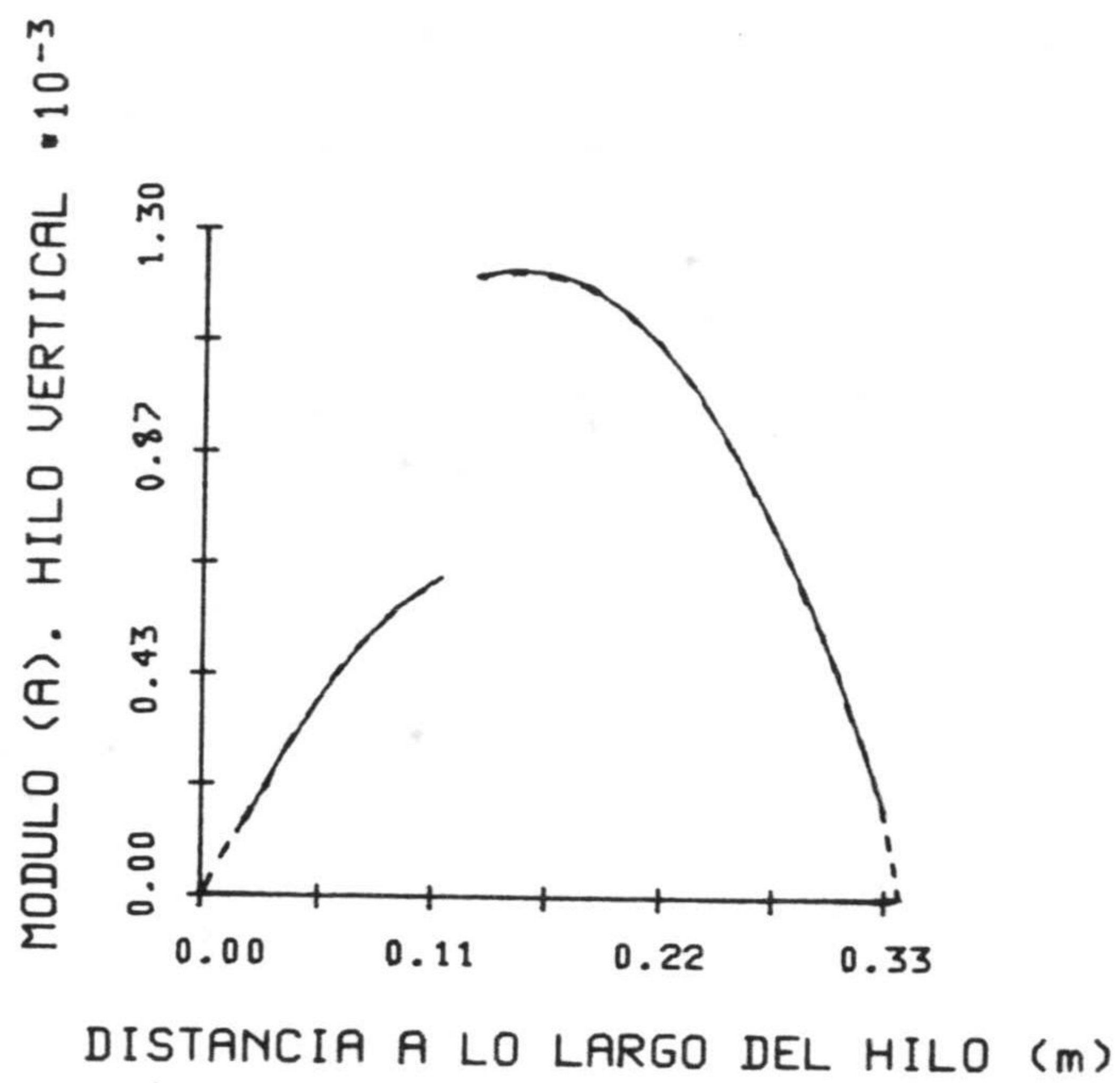
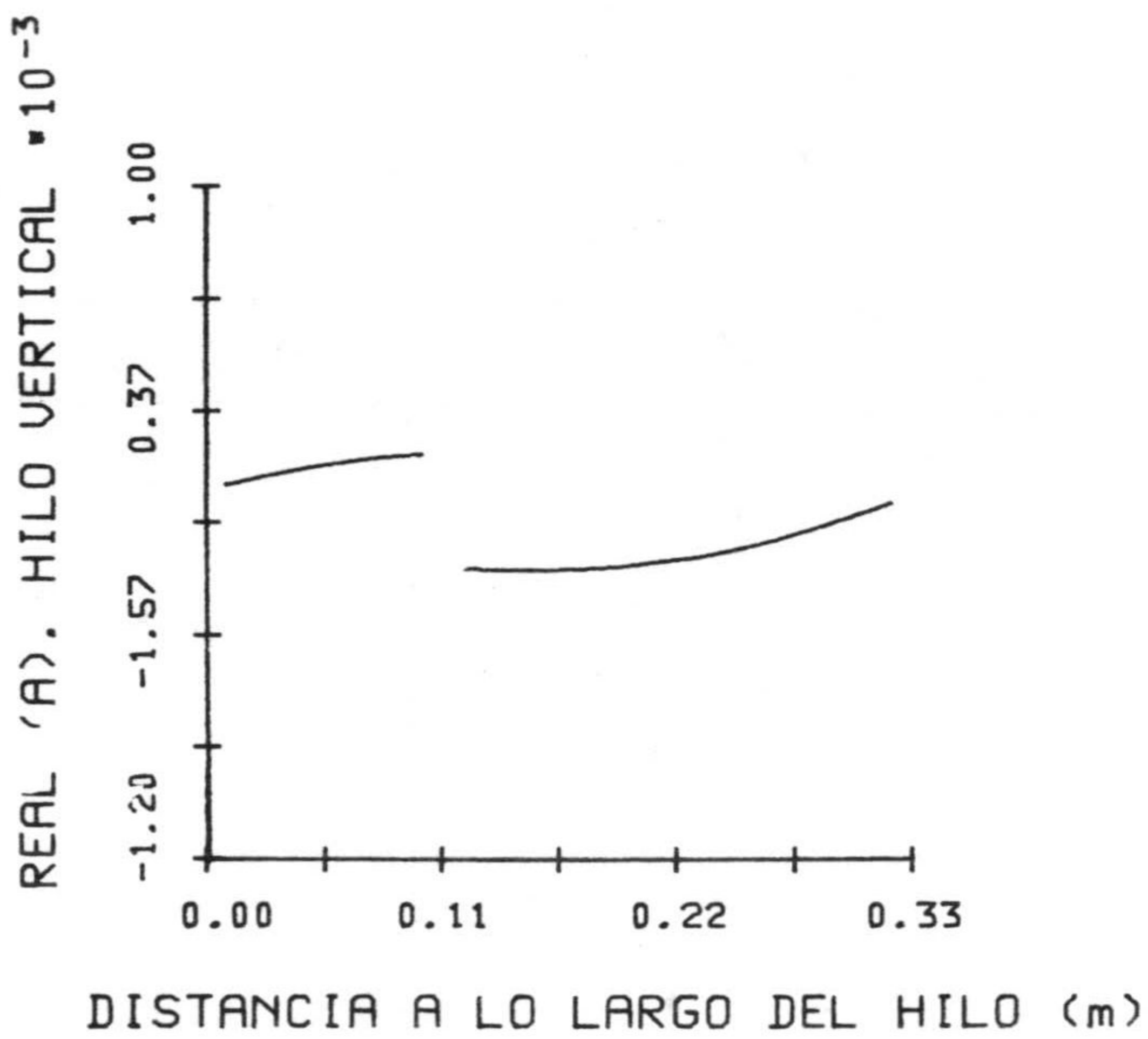


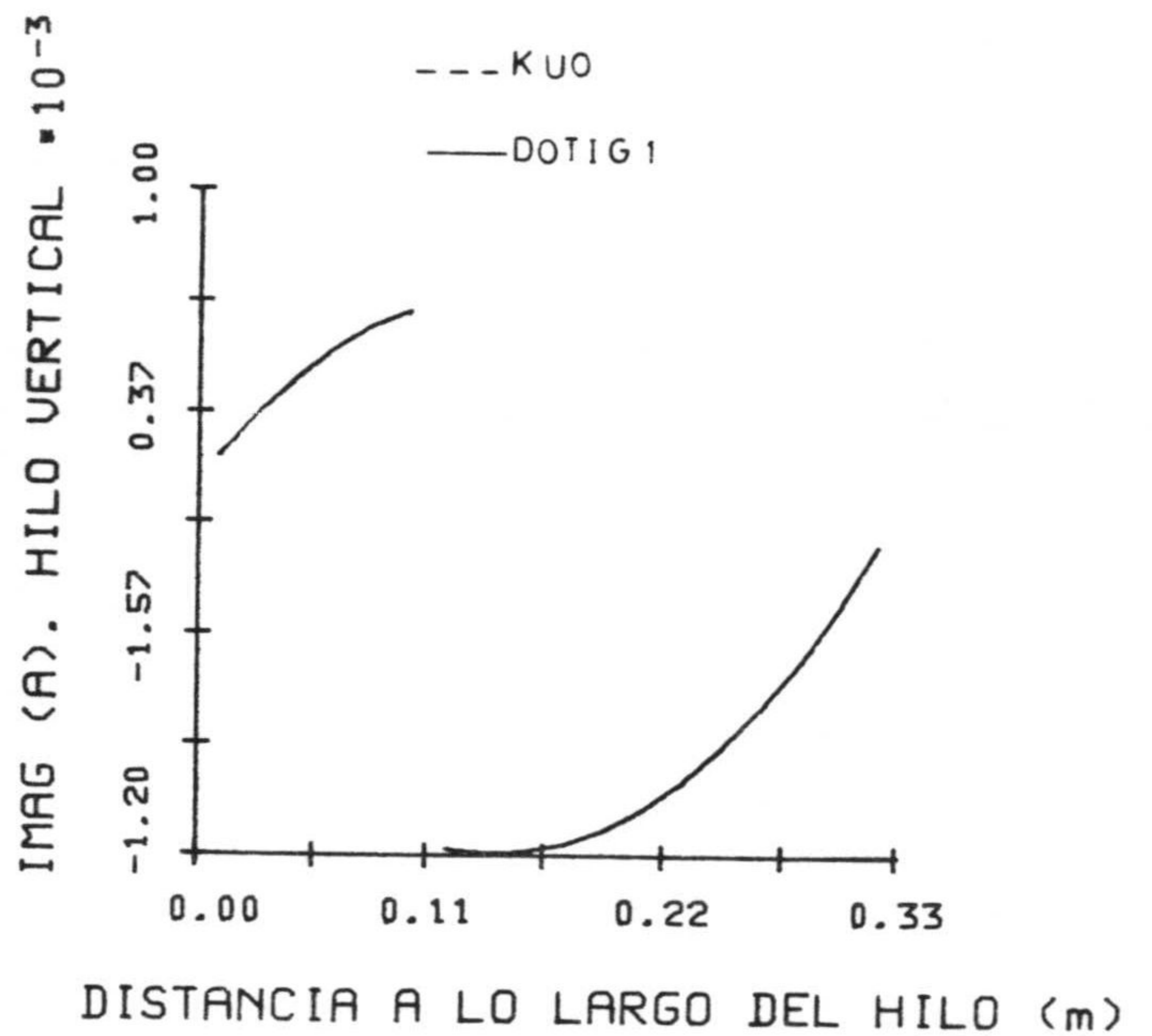
Fig. 4.83.- Intensidad en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a la unión para la estructura de la fig. 4.78 y $\theta = 90^\circ$.



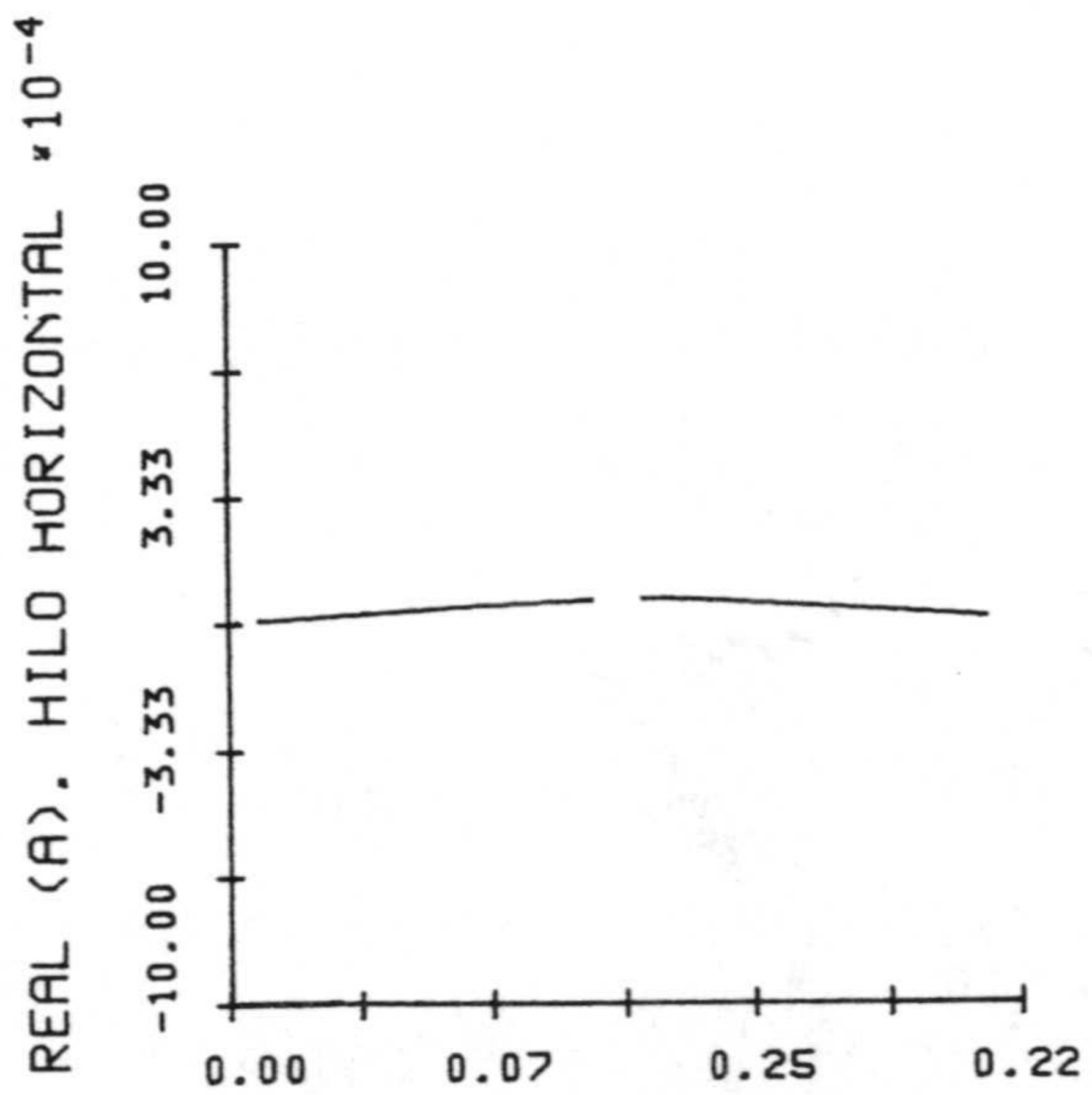
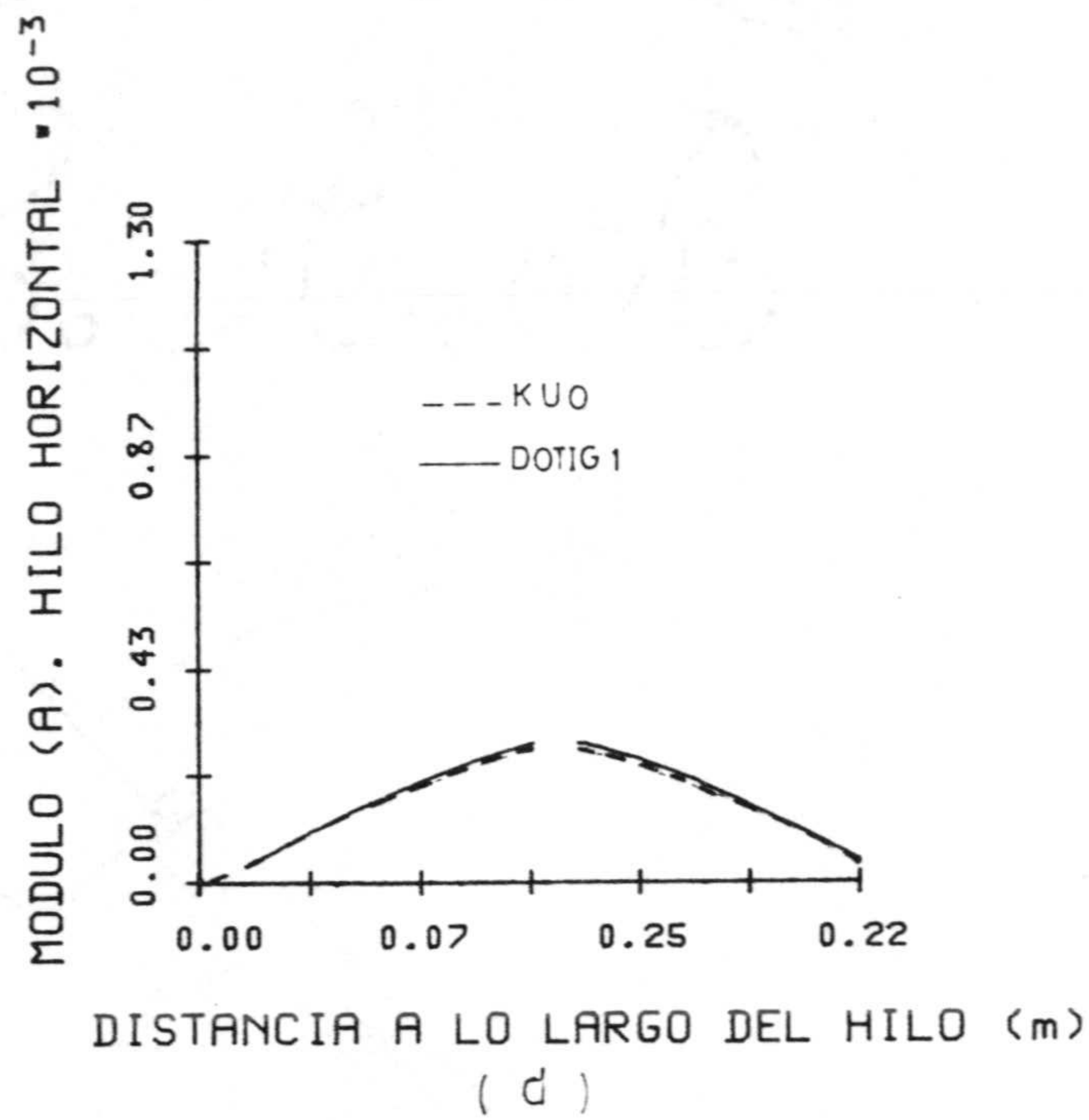
(a)



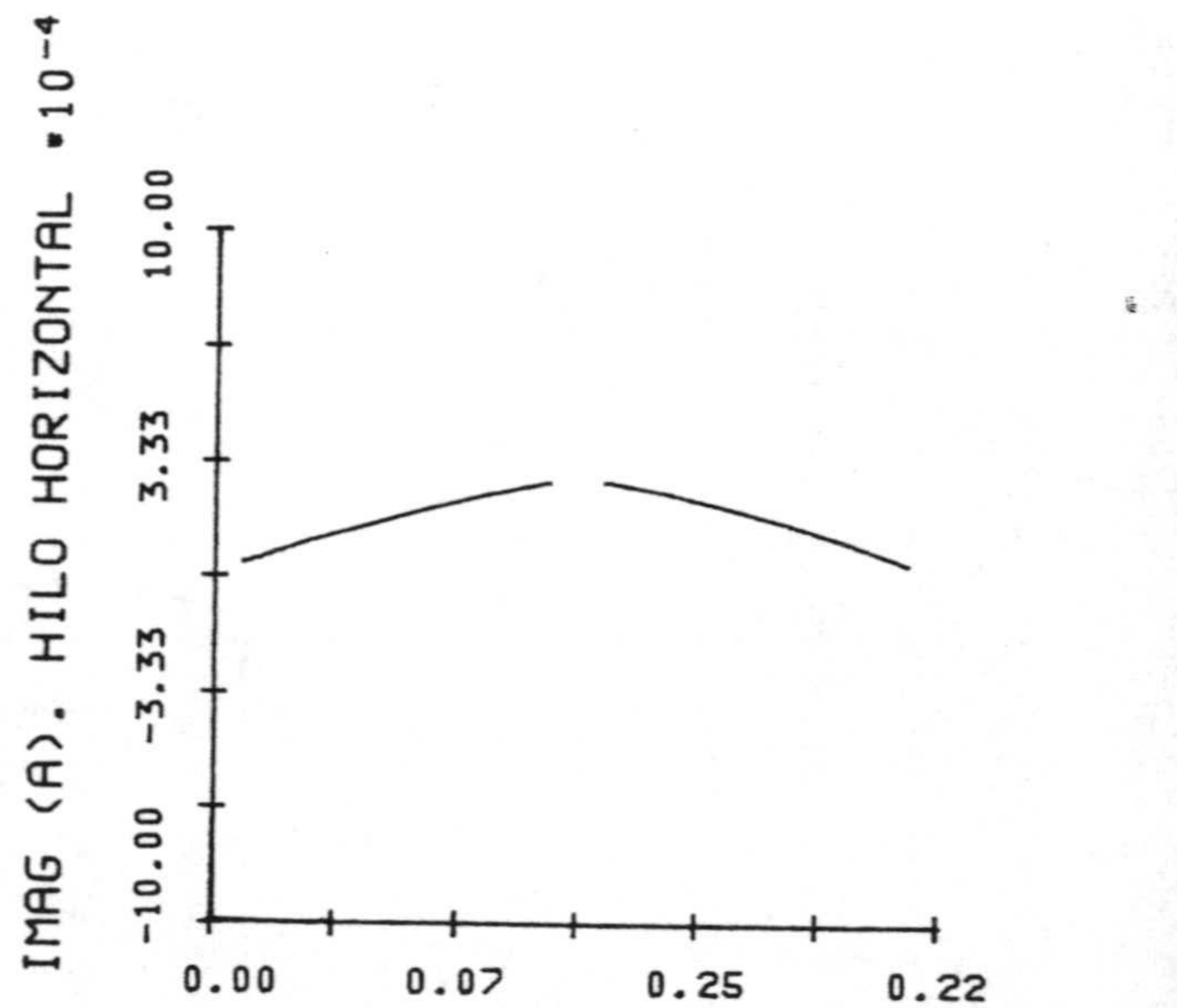
(b)



(c)



(e)



(f)

Fig. 4.84.- Transformada de Fourier de la intensidad dividida por la del campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo hilo vertical, b) Parte Real hilo vertical, c) Parte Imaginaria hilo vertical, d) Módulo hilo horizontal, e) Parte Real hilo horizontal, f) Parte Imaginaria hilo horizontal. Angulo de incidencia $\theta = 90^\circ$.

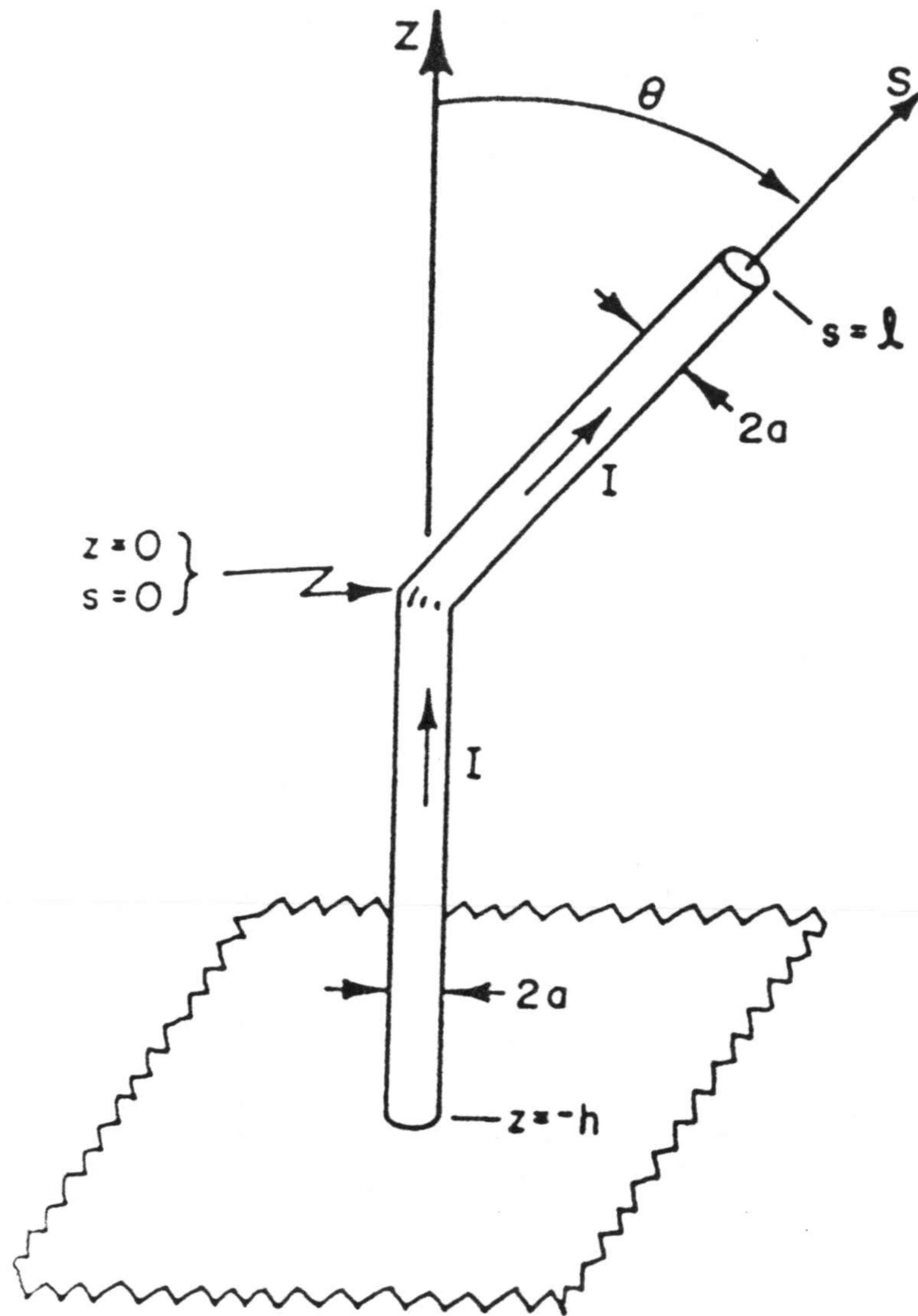
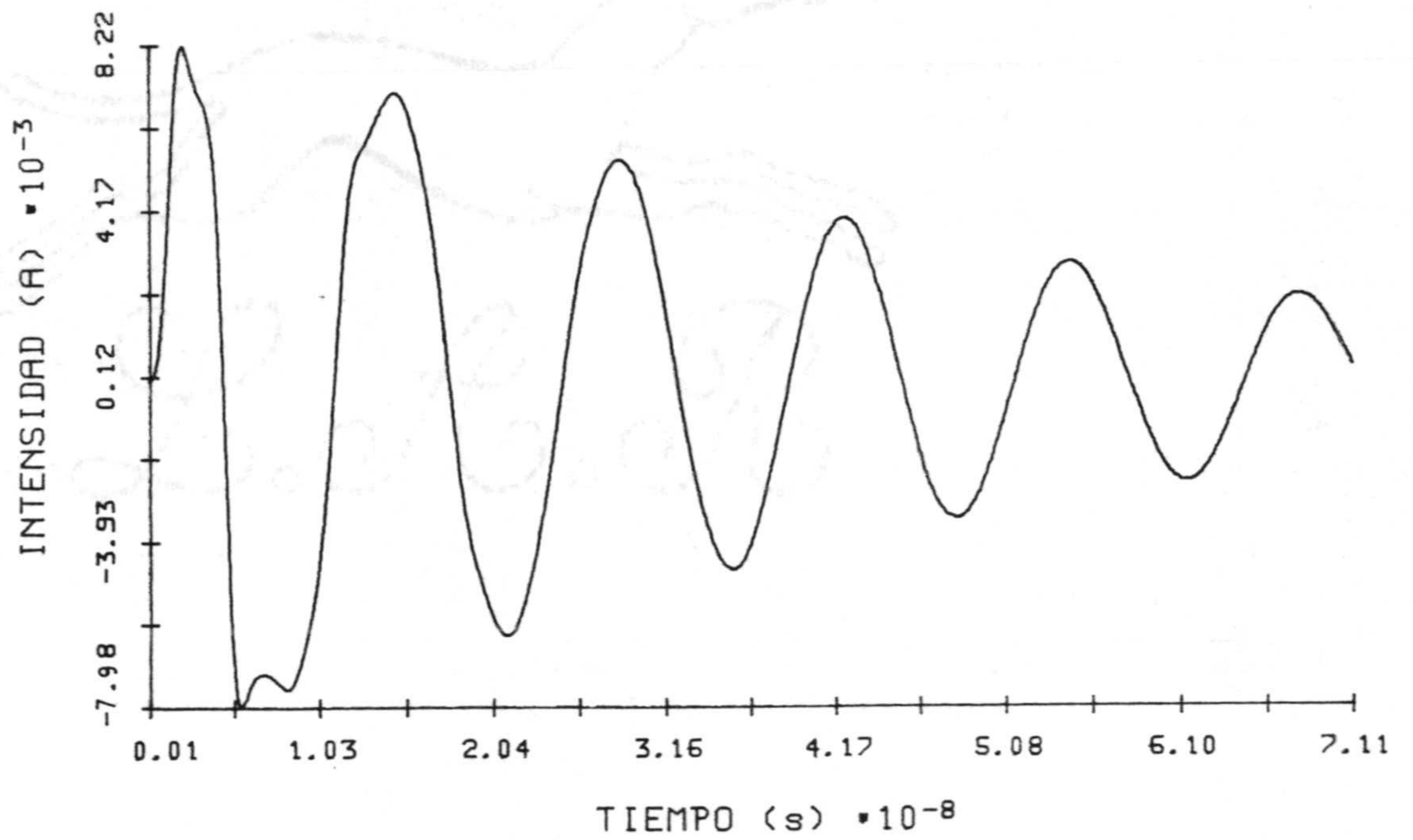
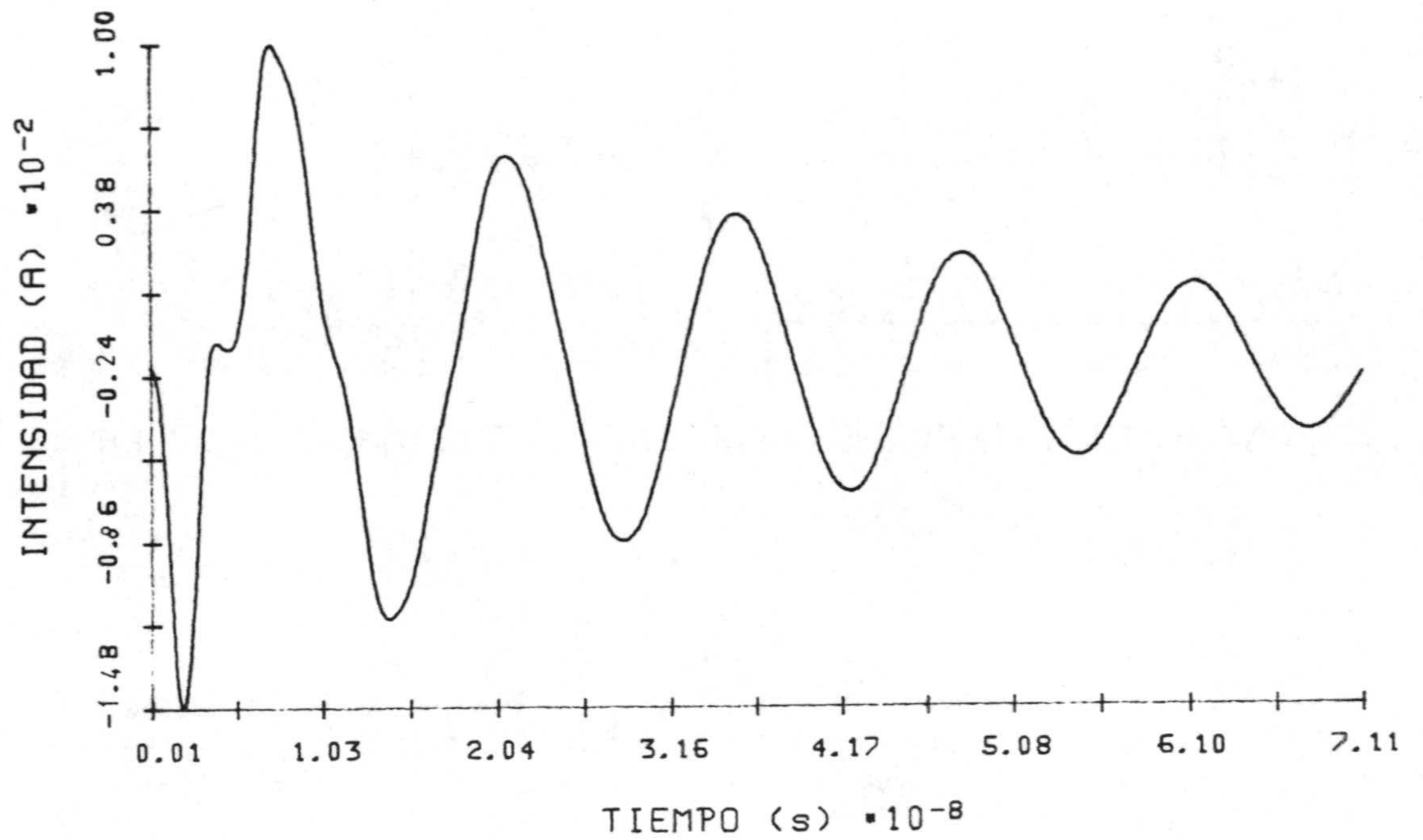


Fig. 4.85.- Geometría de la estructura formada por una unión de dos hilos frente a tierra ($l = h = 0.5$ m y $a = 0.00635$ m).

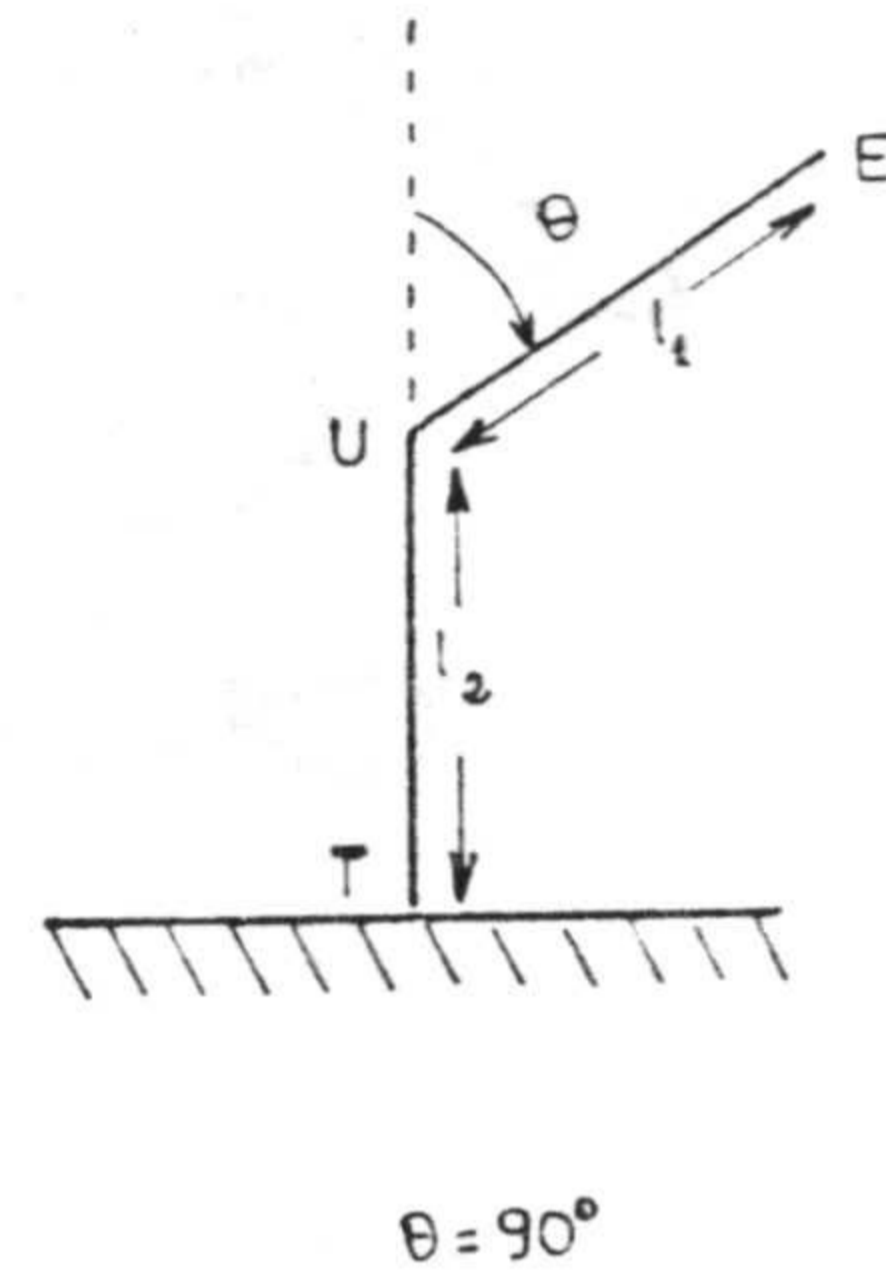
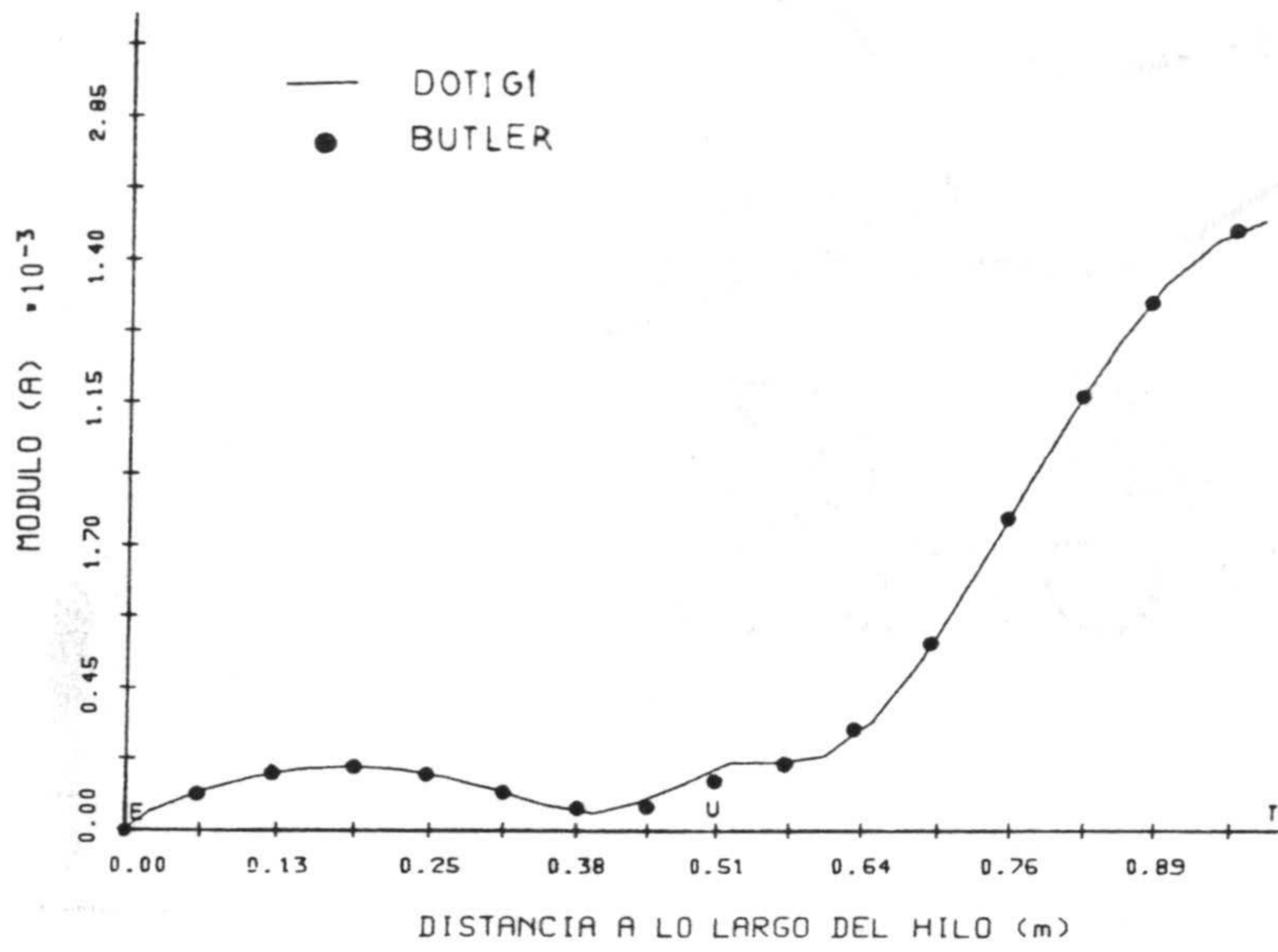


(a)

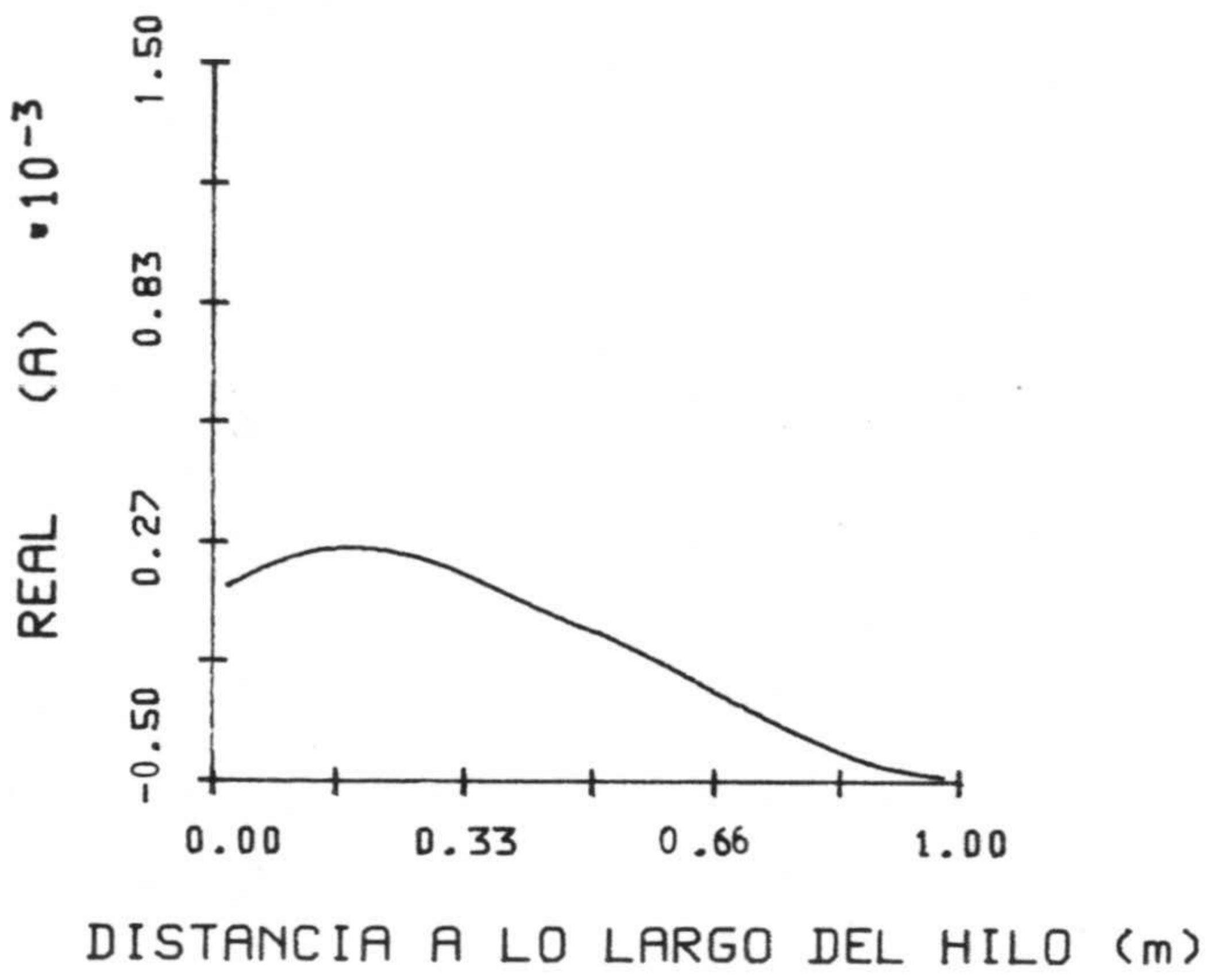


(b)

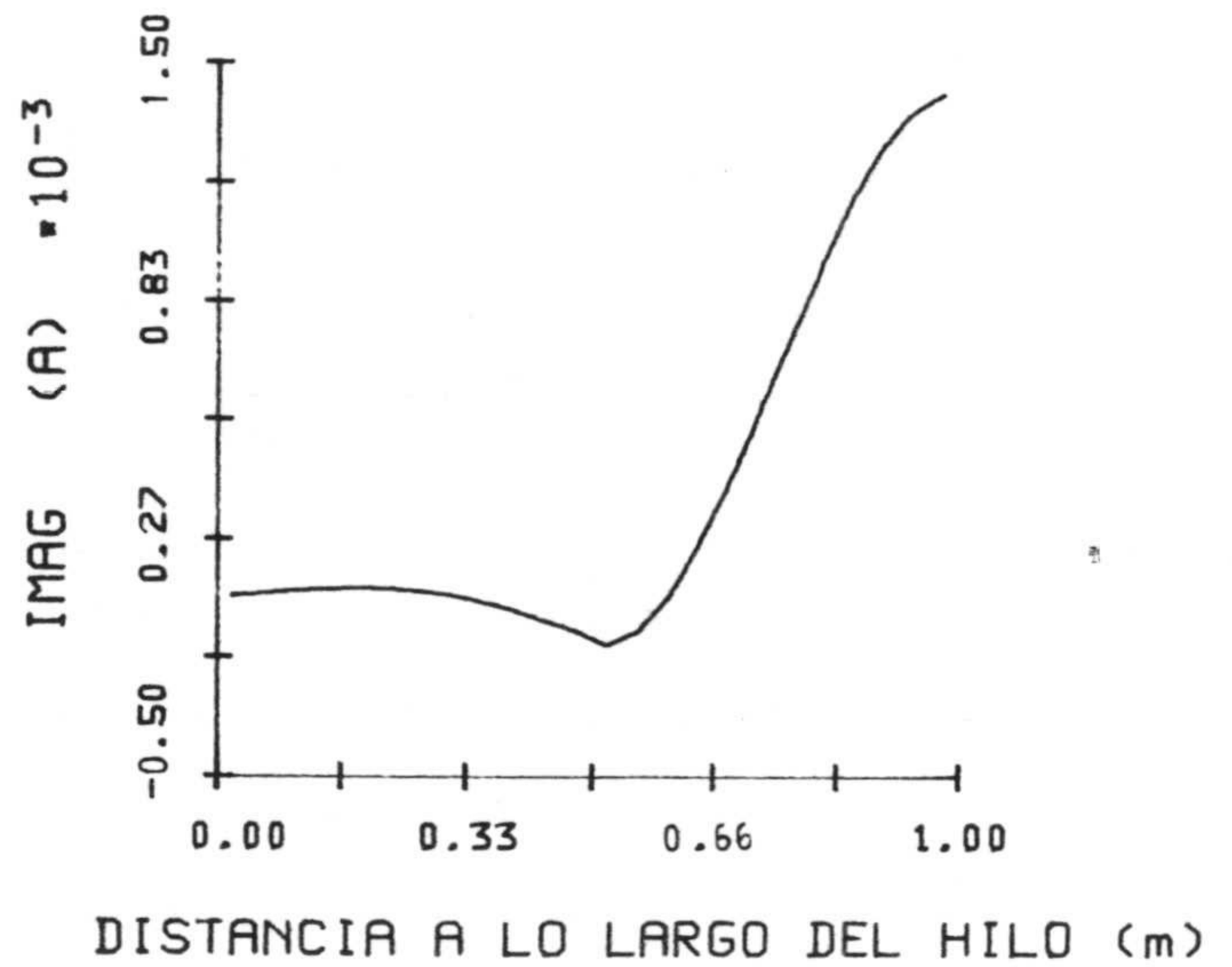
Fig. 4.86.- Intensidad de corriente frente al tiempo en el centro del intervalo espacial más próximo a: a) la unión en el hilo 1, b) a tierra en el hilo 2, para el ejemplo de la fig. 4.85, con $\theta = 90^\circ$.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.87.- Cociente entre las transformadas de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte Imaginaria. Angulo de incidencia $\theta = 90^\circ$, $l_1 = l_2 = 0.5$ m y $a = 0.00635$ m.

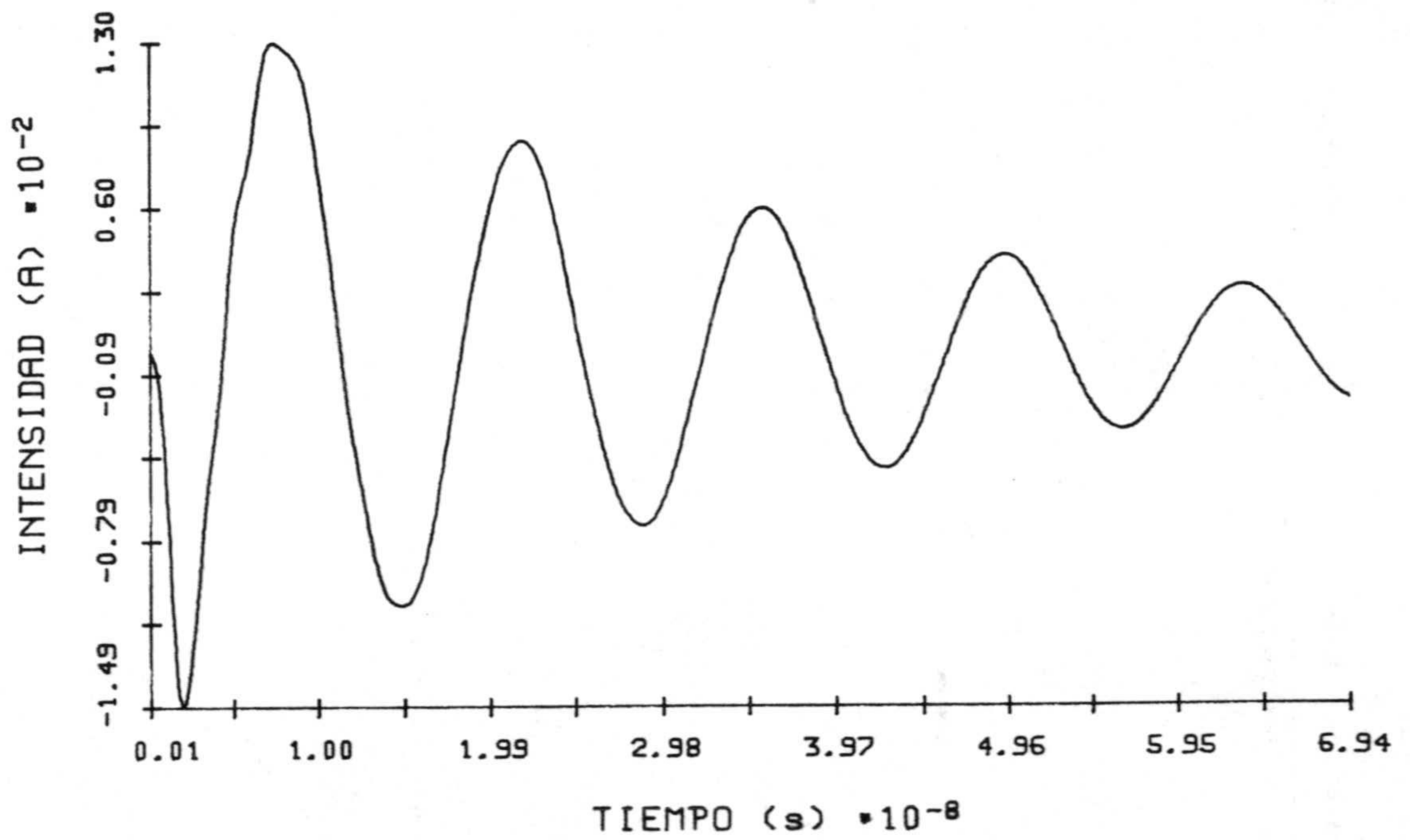
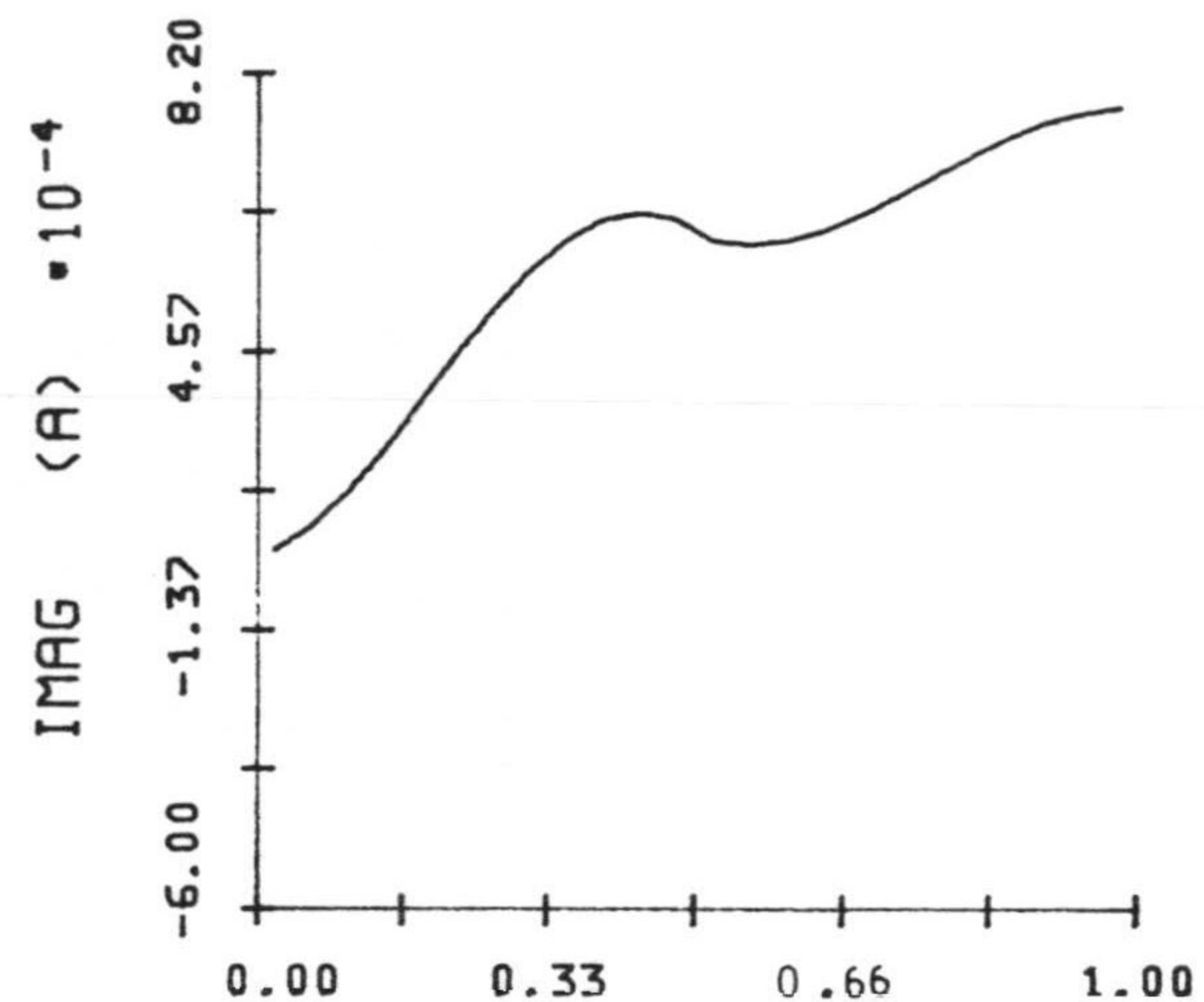
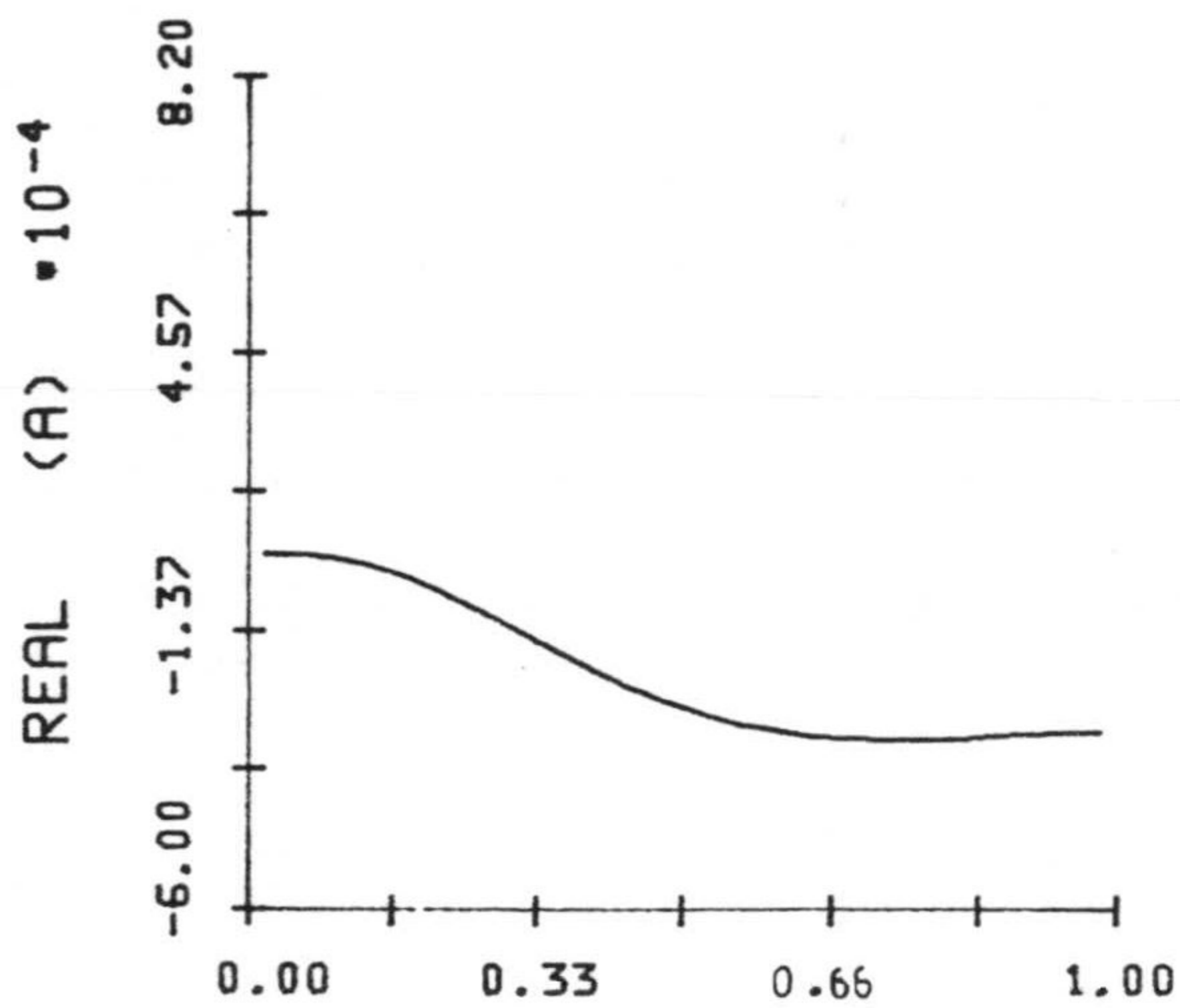
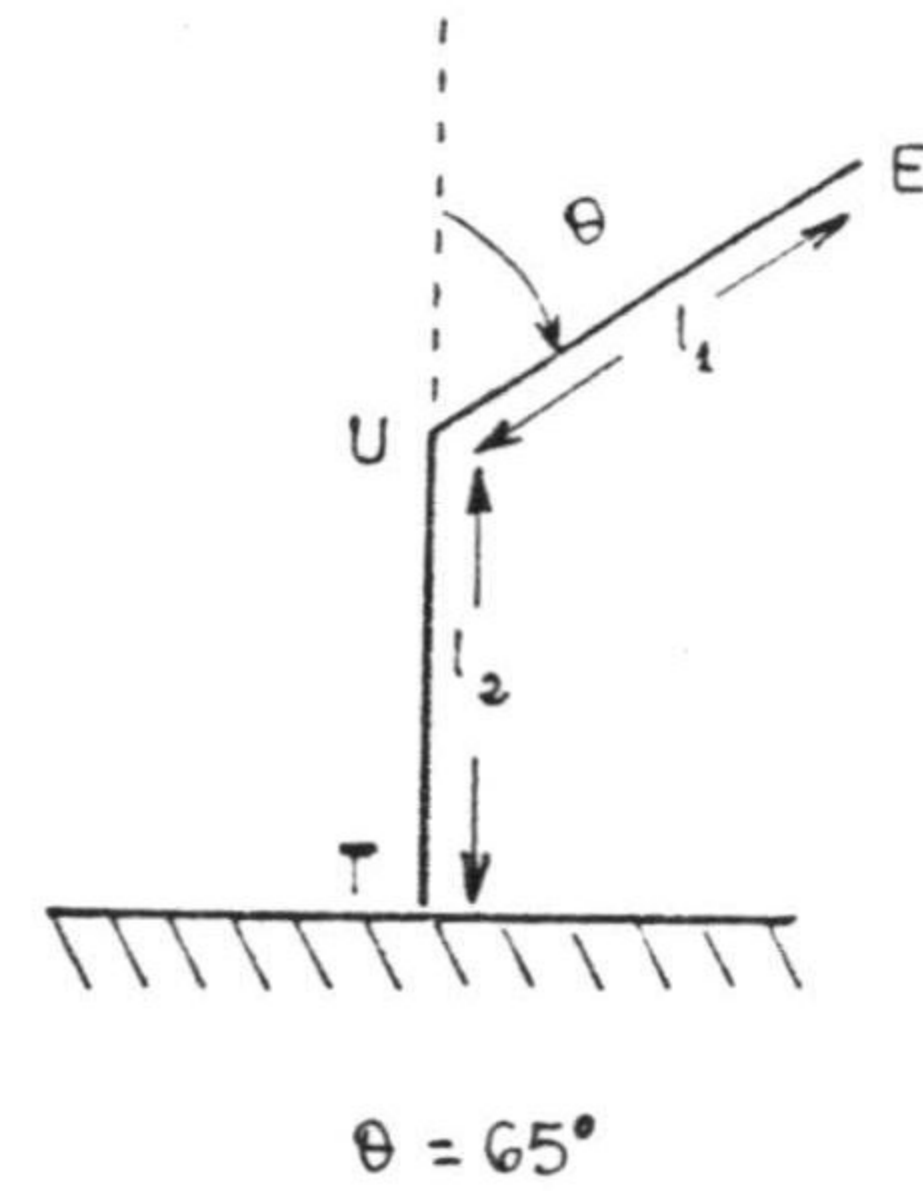
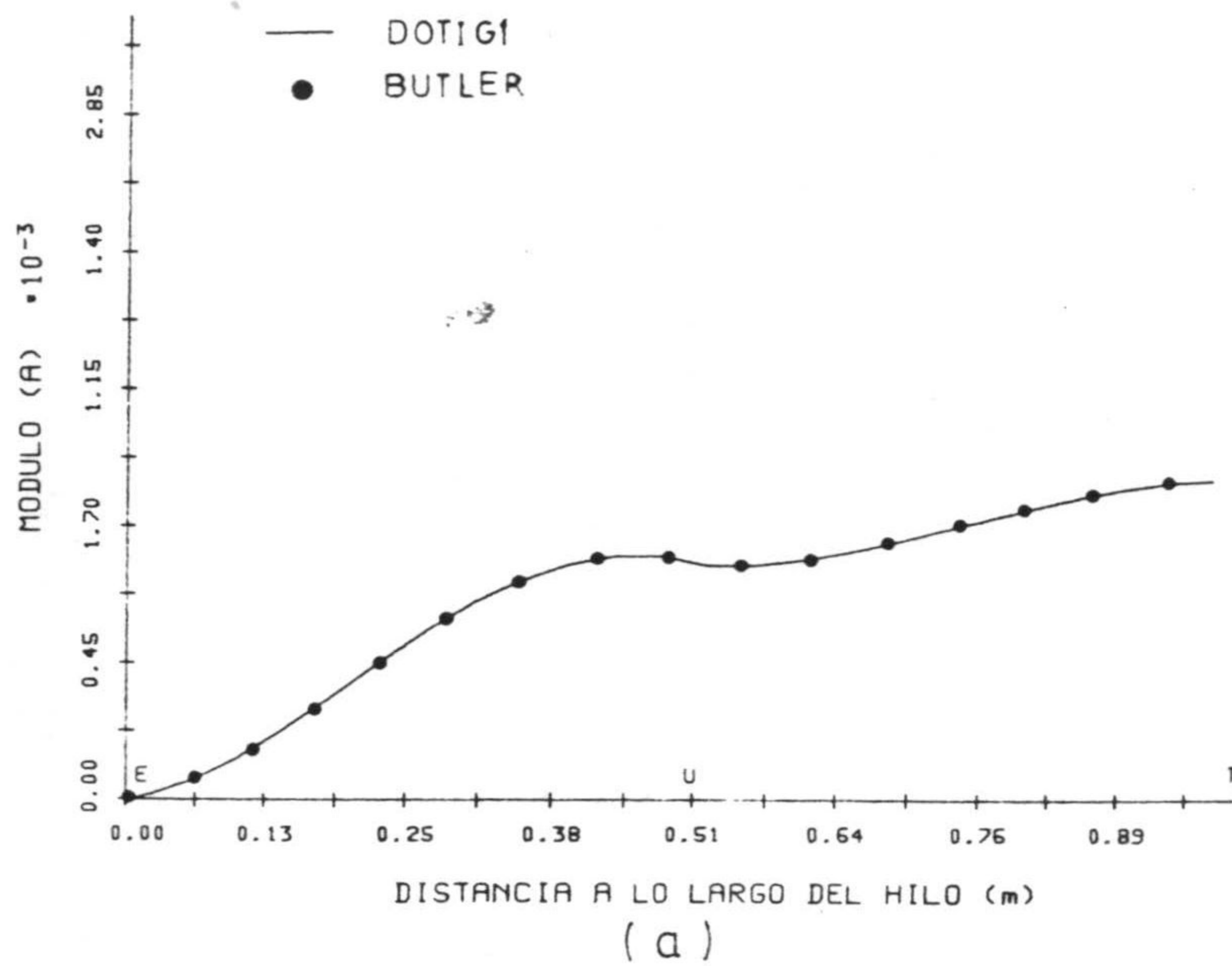


Fig. 4.88.- Intensidad de corriente frente al tiempo en el centro del intervalo espacial más próximo a la unión en el hilo 1, para el ejemplo de la fig. 4.85, con $\theta = 65^\circ$.



(b)

(c)

Fig. 4.89.- Cociente entre las transformadas de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte Imaginaria. Angulo de incidencia $\theta = 65^\circ$, $l_1 = l_2 = 0.5$ m y $a = 0.00635$ m.

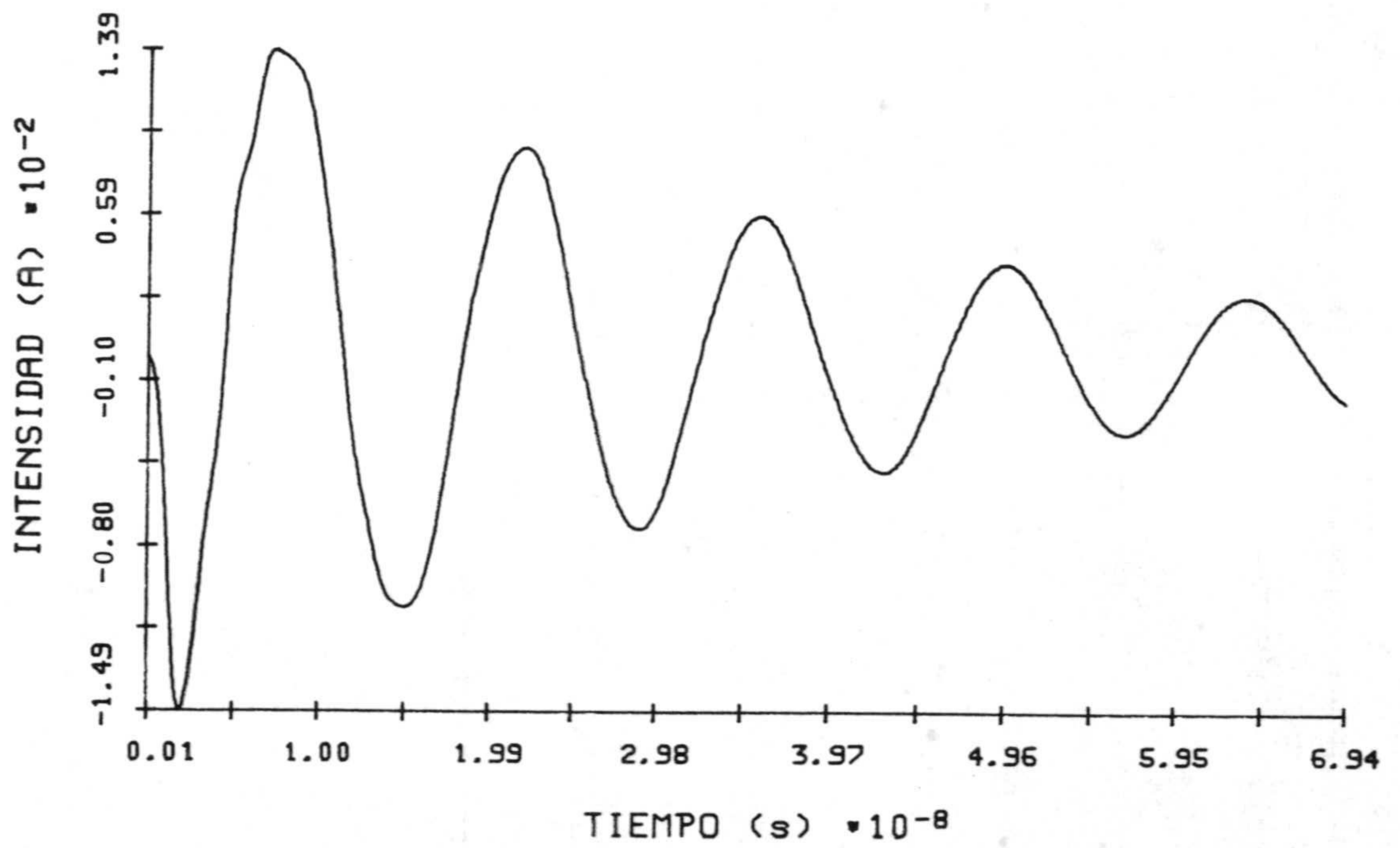


Fig. 4.90.- Intensidad de corriente frente al tiempo en el centro del intervalo espacial más próximo a la unión en el hilo 1, para el ejemplo de la fig. 4.85, con $\theta = 60^\circ$.

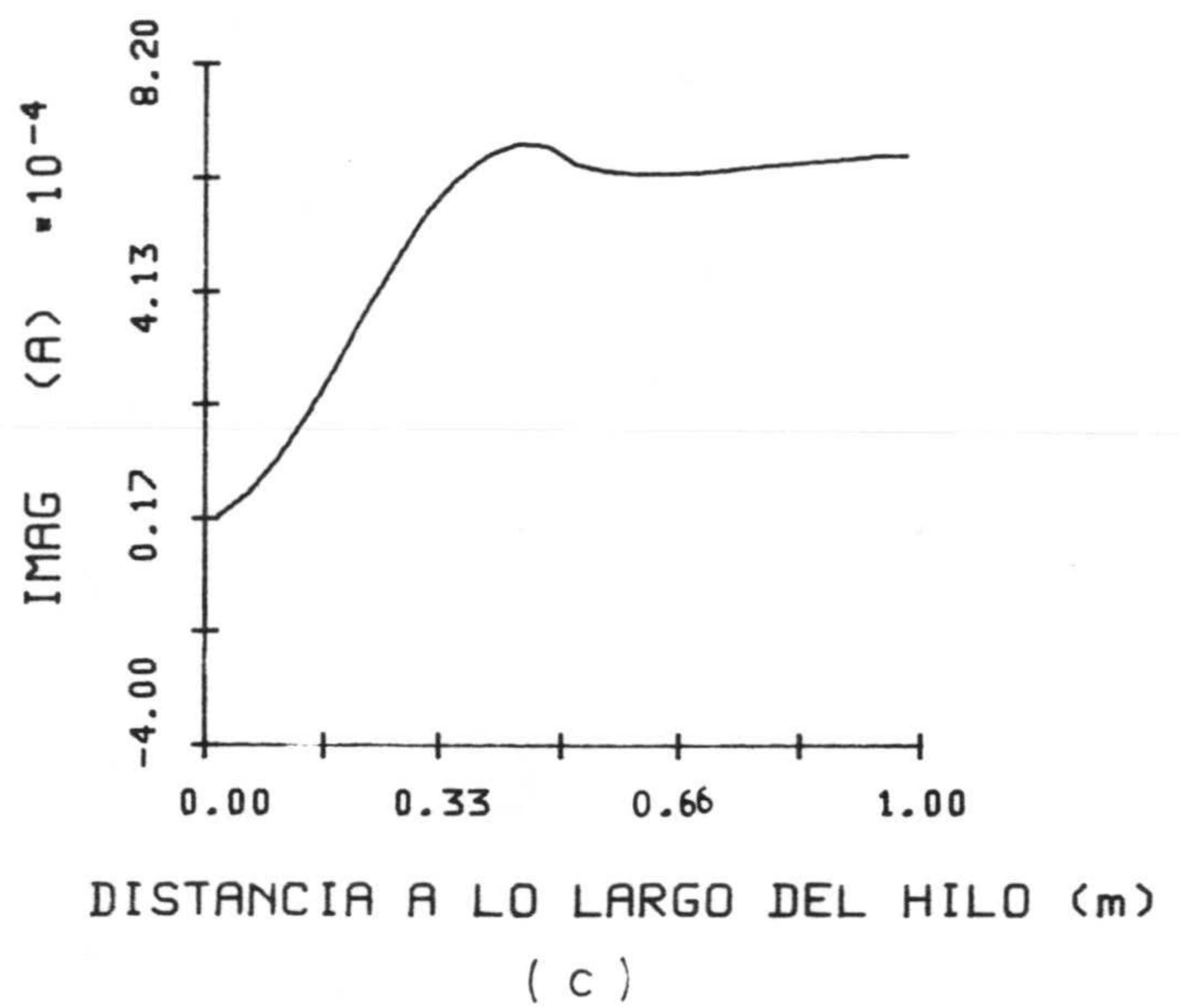
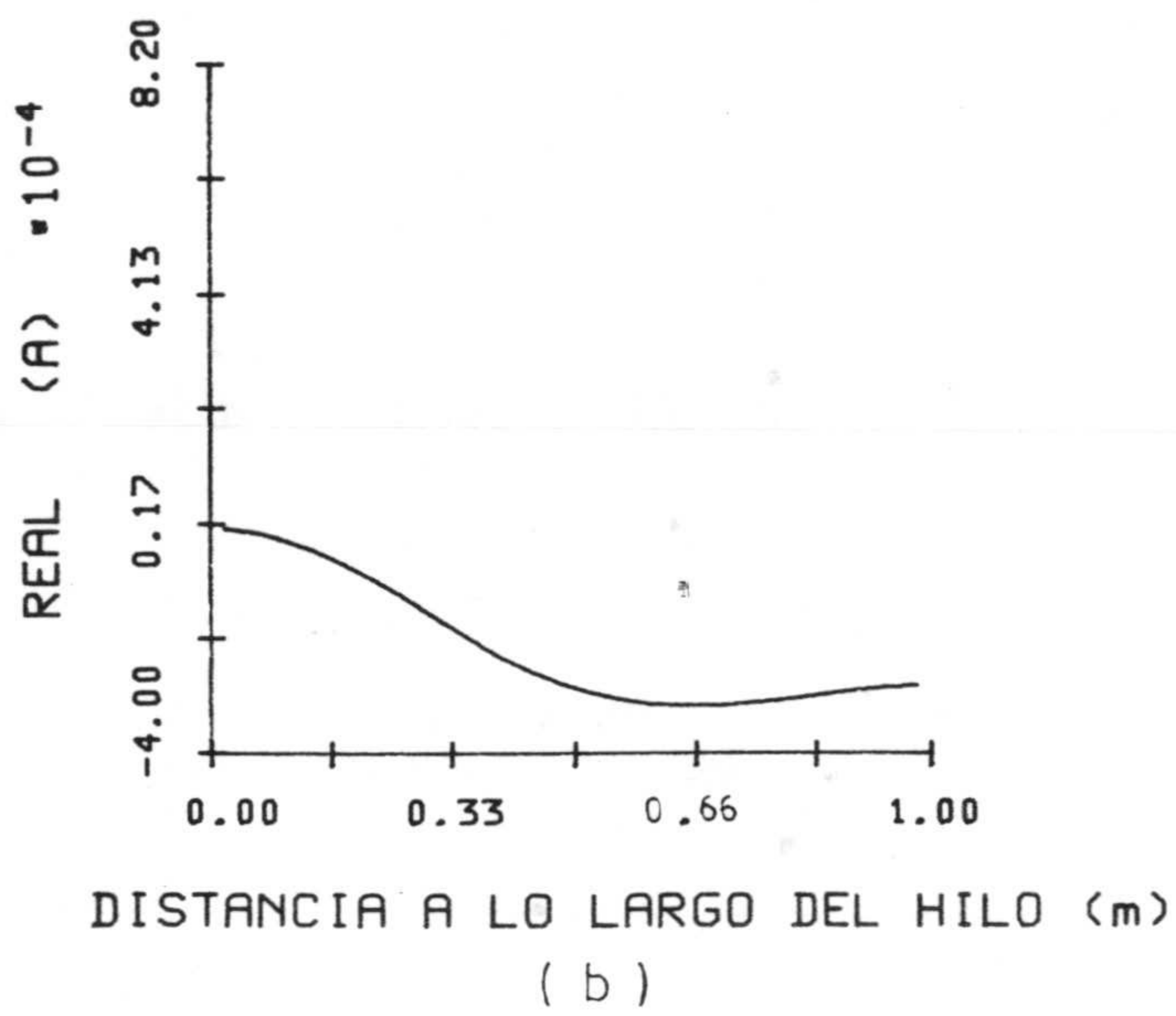
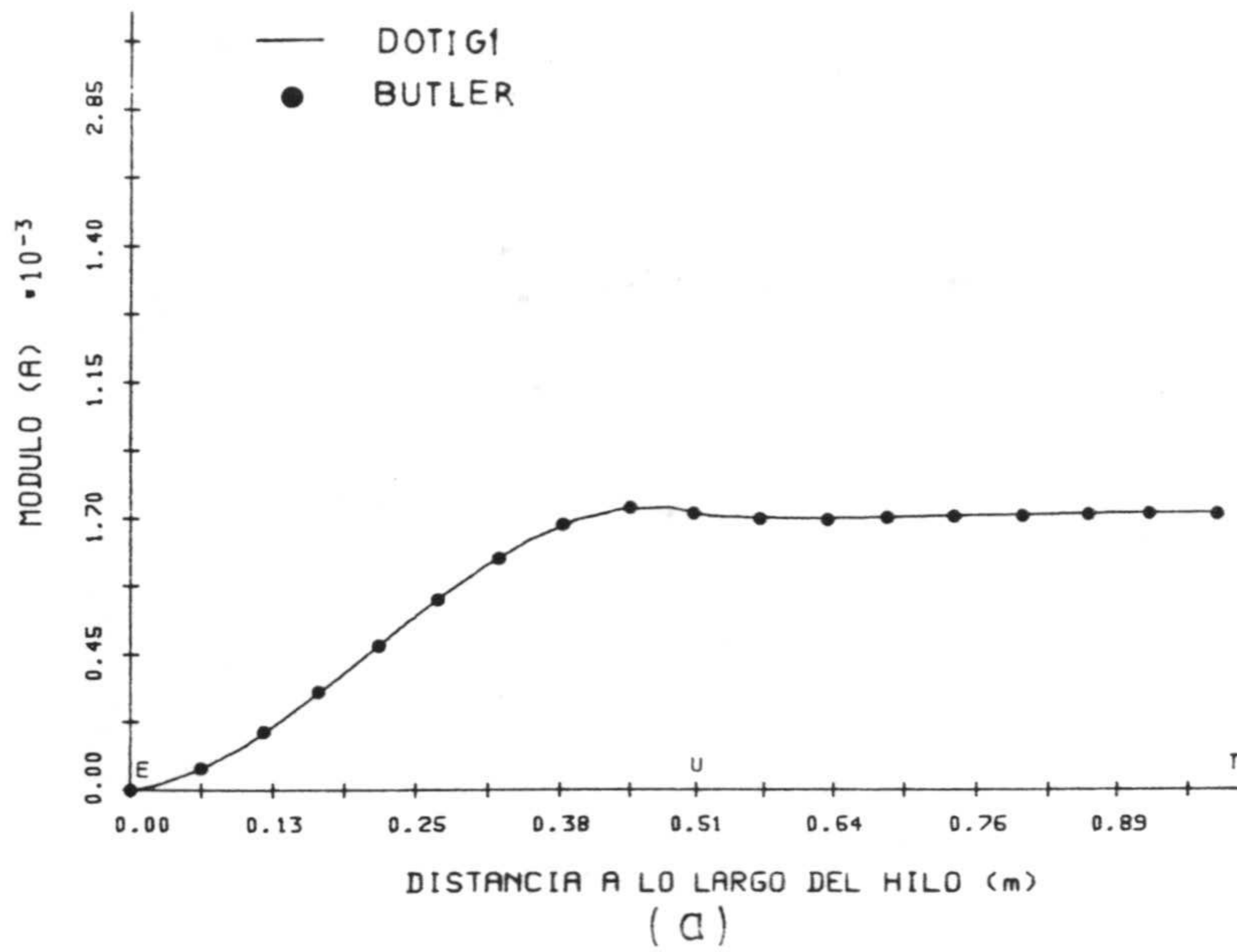


Fig. 4.91.- Cociente entre las transformadas de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte Imaginaria. Angulo de incidencia $\theta = 60^\circ$, $l_1 = l_2 = 0.5$ m y $a = 0.00635$ m.

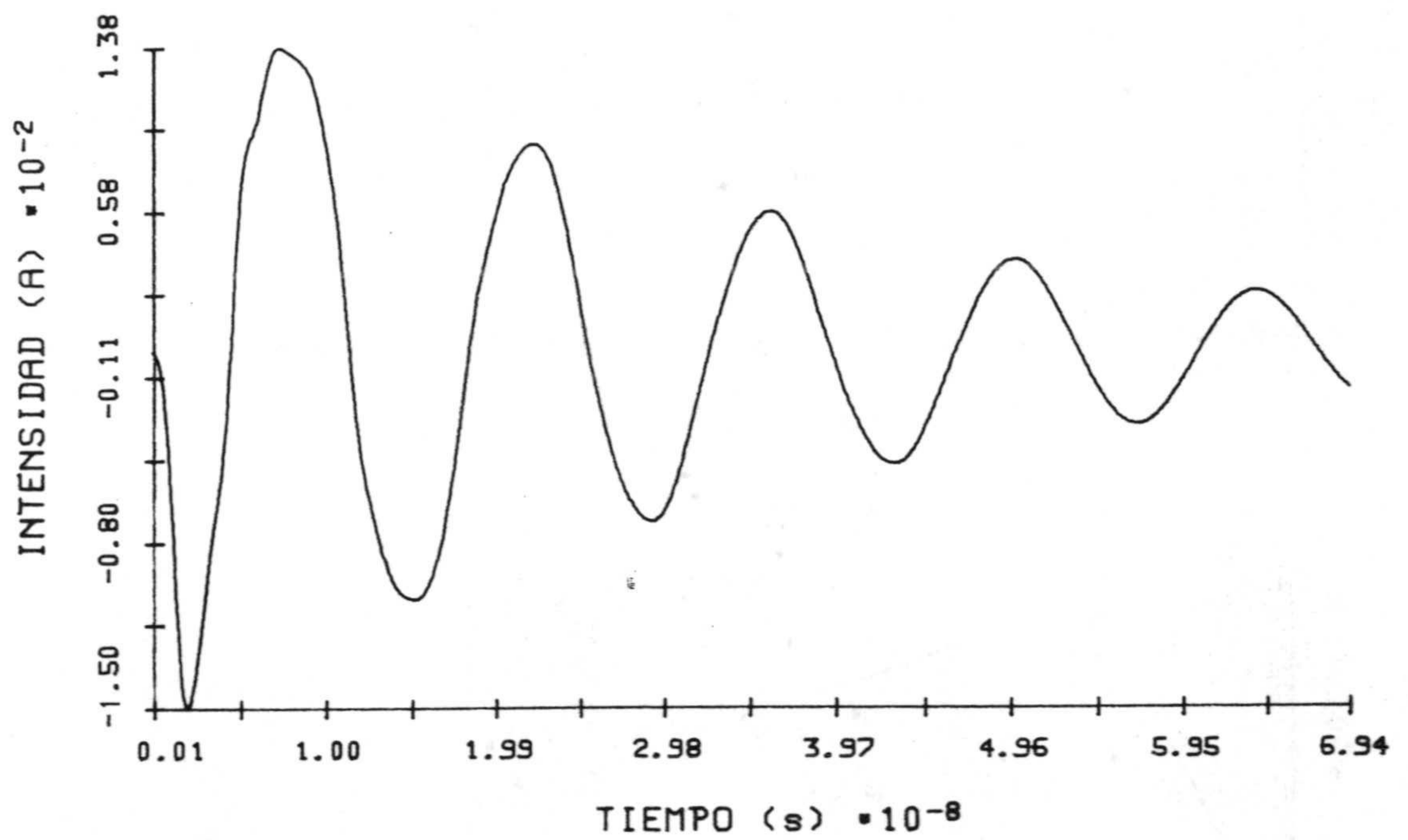


Fig. 4.92.- Intensidad de corriente frente al tiempo en el centro del intervalo espacial más próximo a la unión en el hilo 1, para el ejemplo de la fig. 4.85, con $\theta = 55^\circ$.

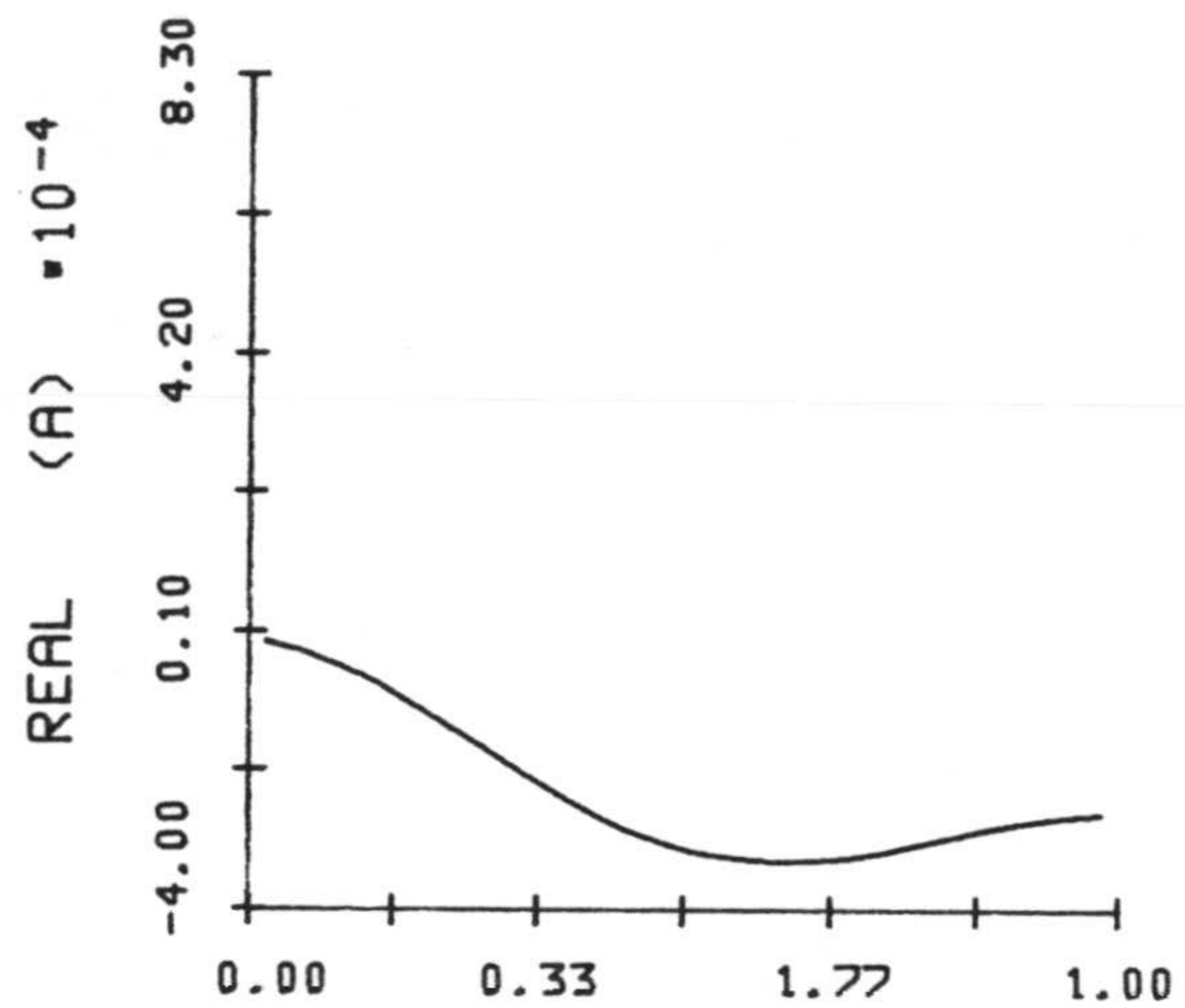
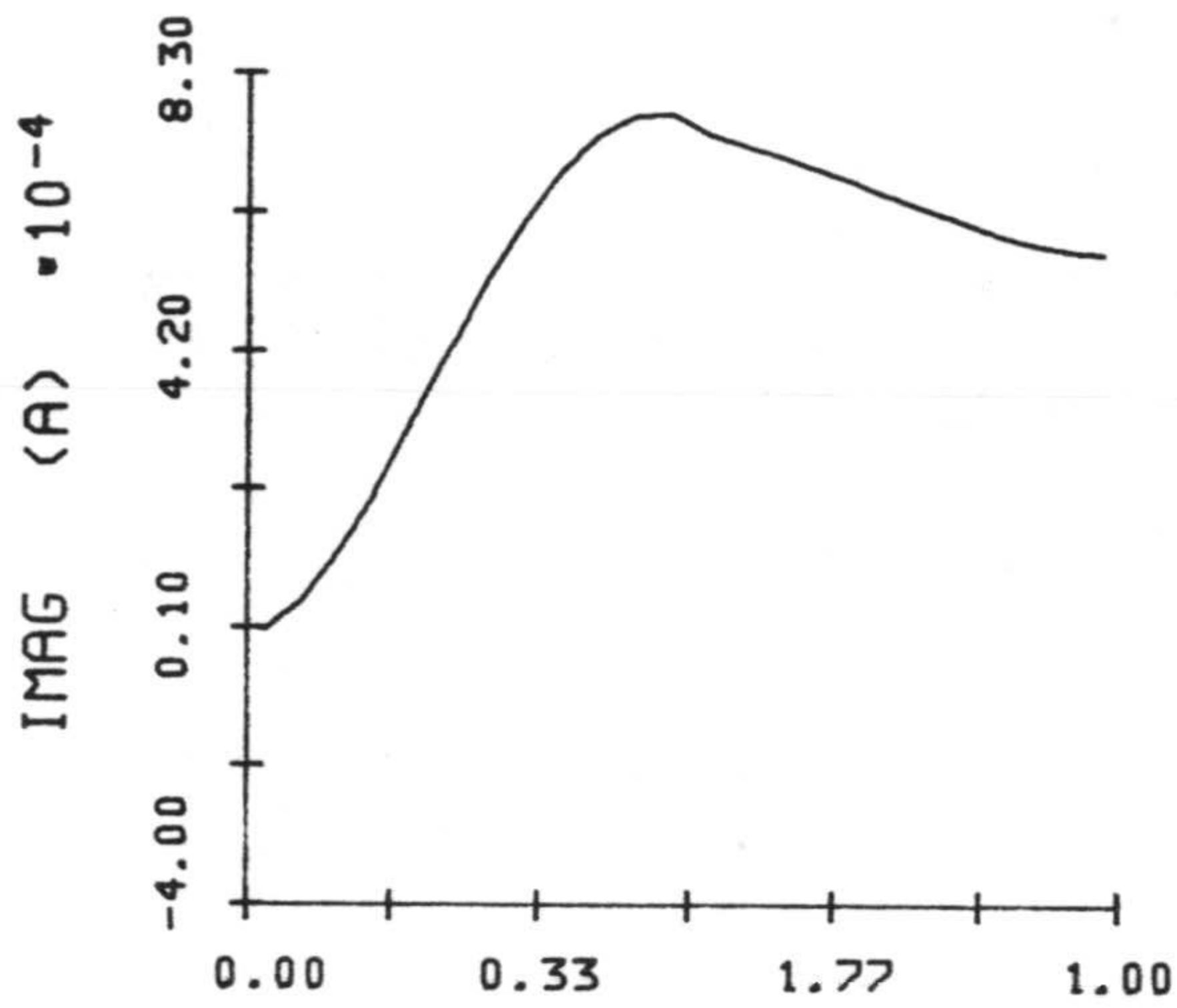
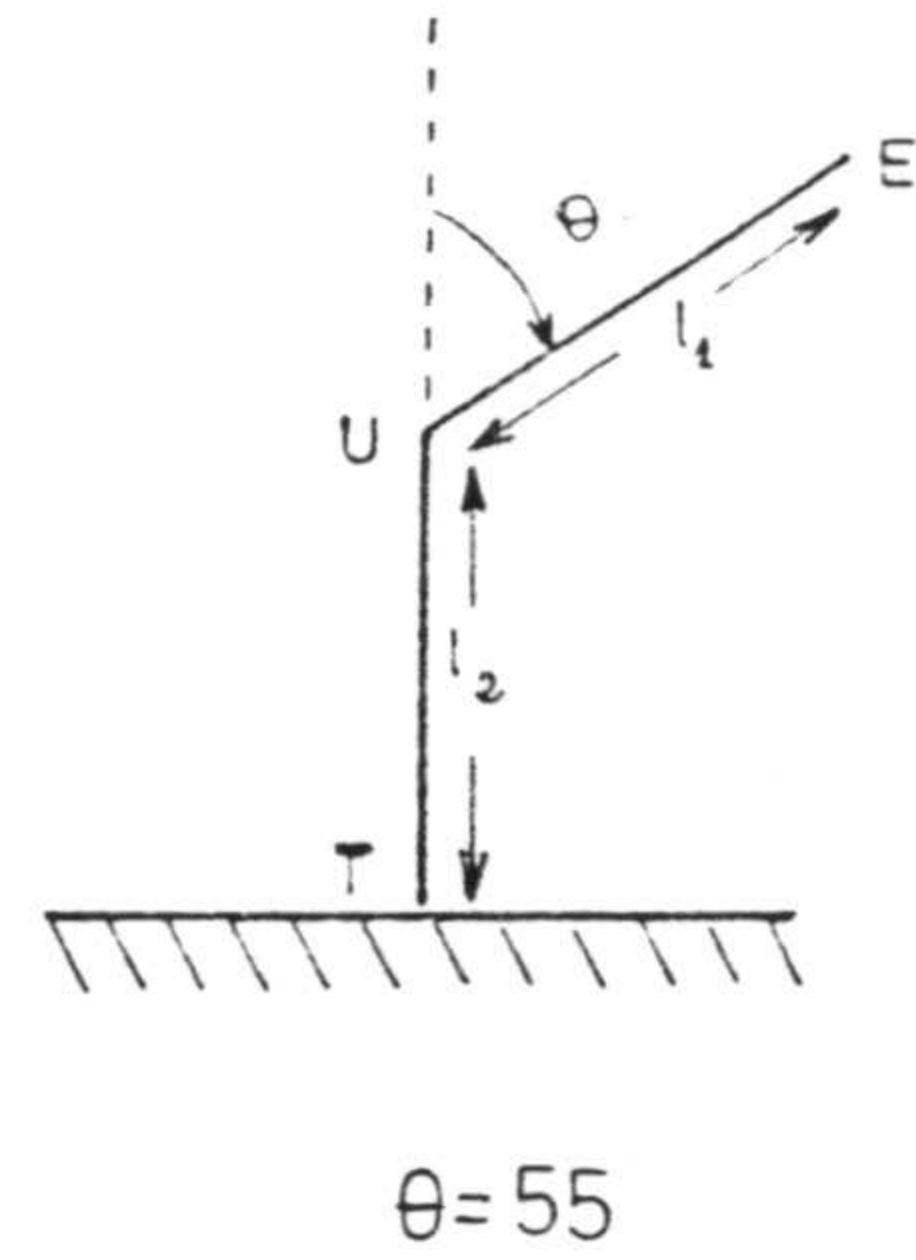
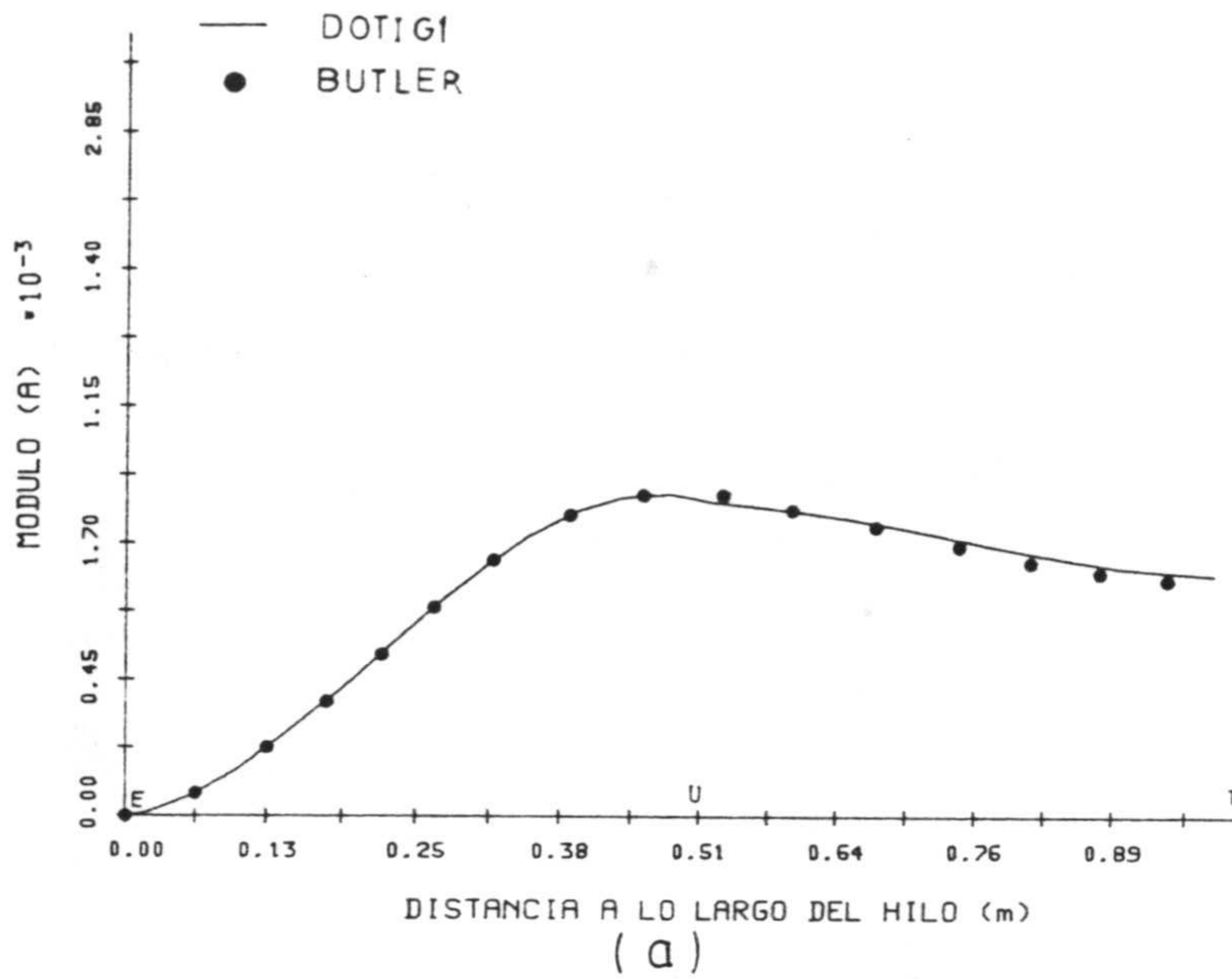


Fig. 4.93.- Cociente entre las transformadas de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte Imaginaria. Angulo de incidencia $\theta = 55^\circ$, $l_1 = l_2 = 0.5$ m y $a = 0.00635$ m.

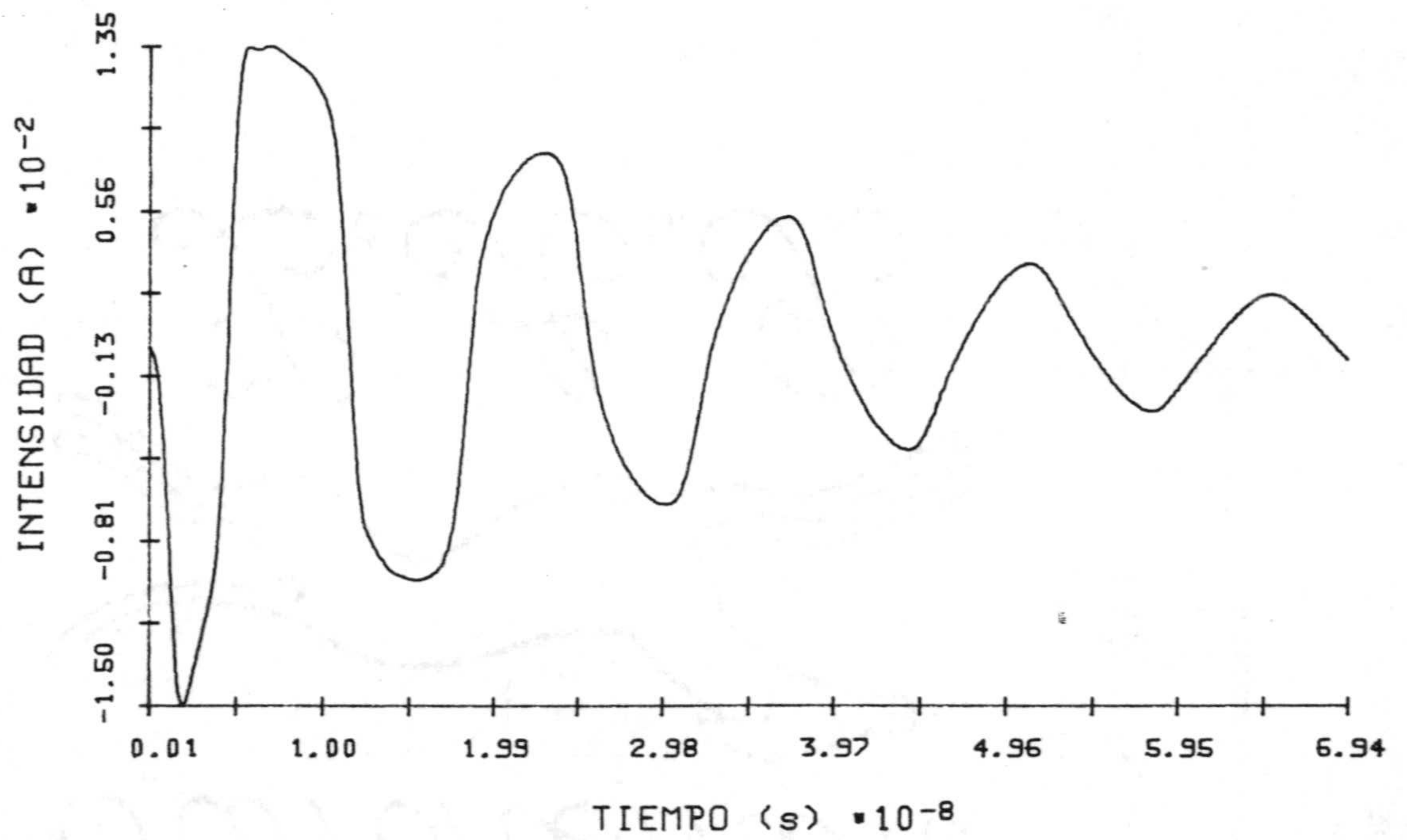


Fig. 4.94.- Intensidad de corriente frente al tiempo en el centro del intervalo espacial más próximo a la unión en el hilo 1, para el ejemplo de la fig. 4.85, con $\theta = 30^\circ$.

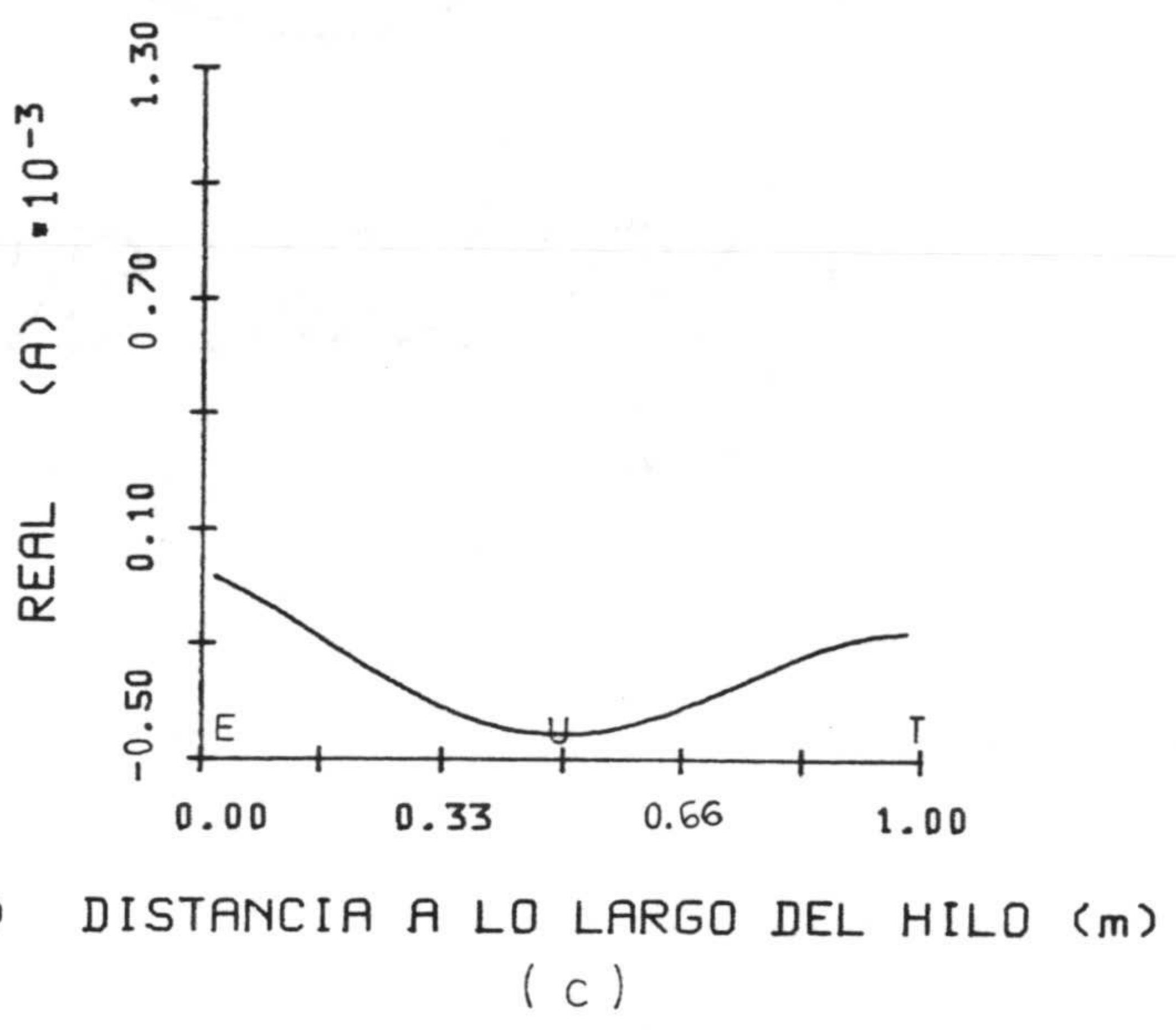
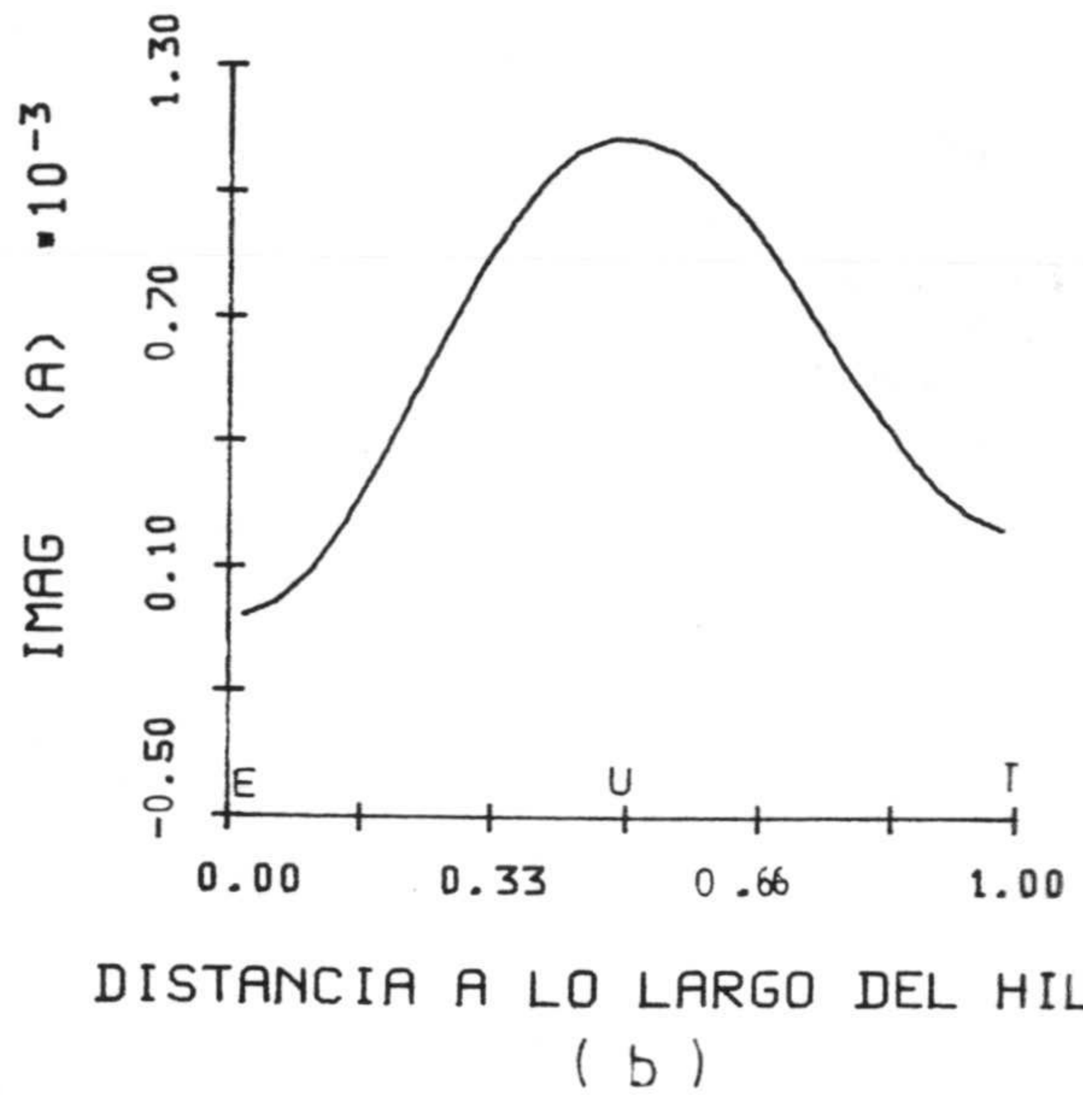
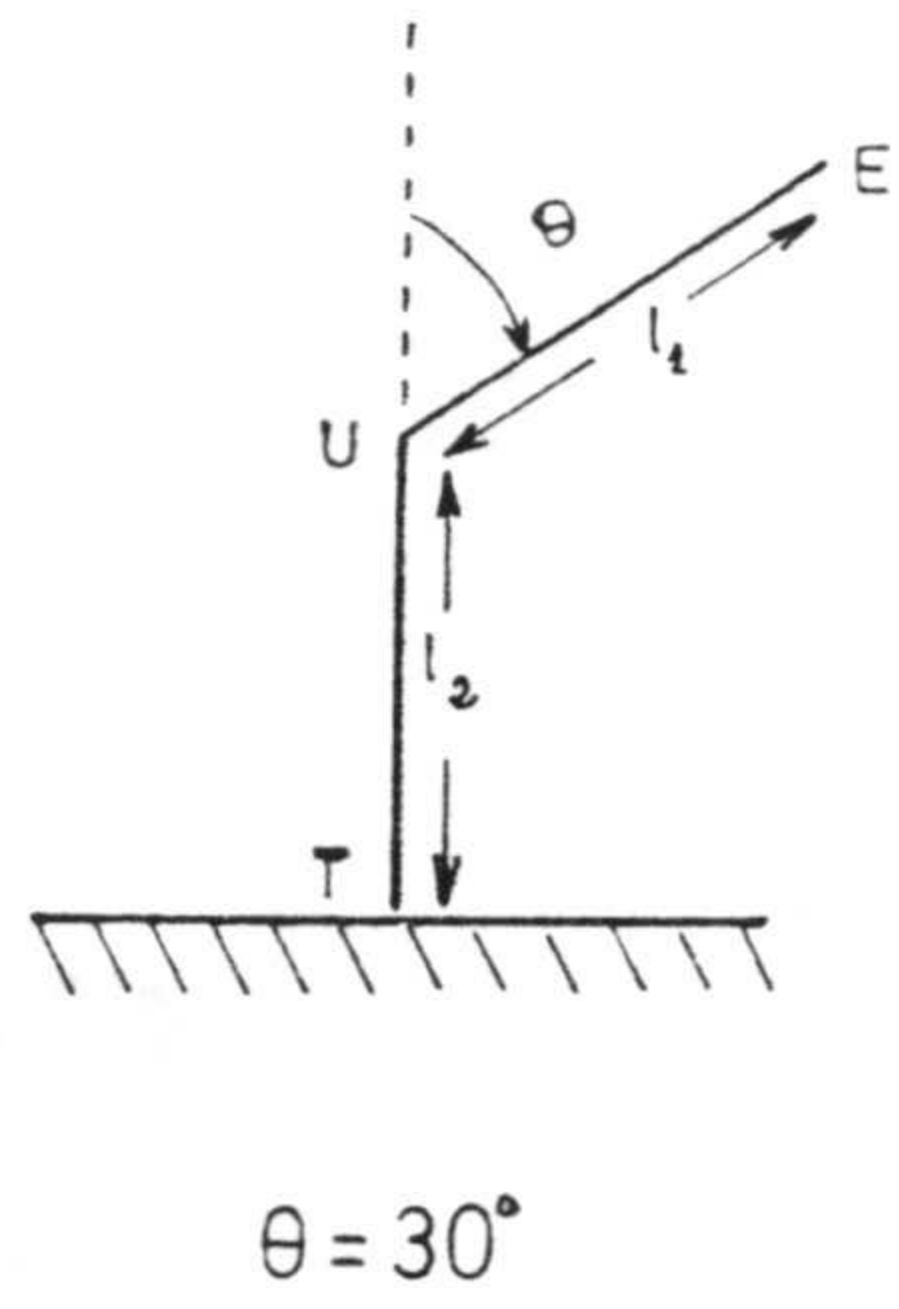
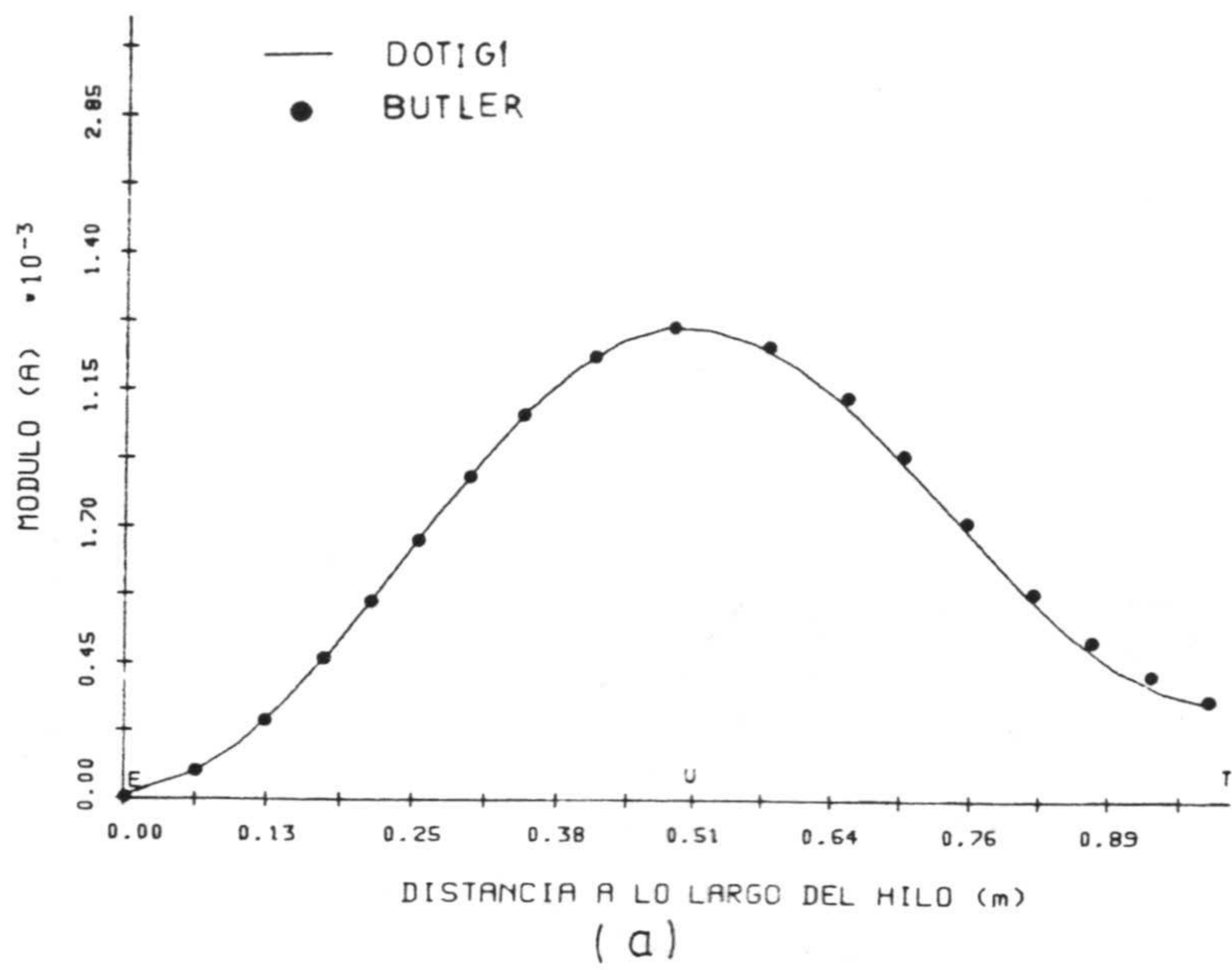


Fig. 4.95.- Cociente entre las transformadas de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m; a) Módulo, b) Parte Real y c) Parte Imaginaria. Angulo de incidencia $\theta = 30^\circ$, $l_1 = l_2 = 0.5$ m y $a = 0.00635$ m.

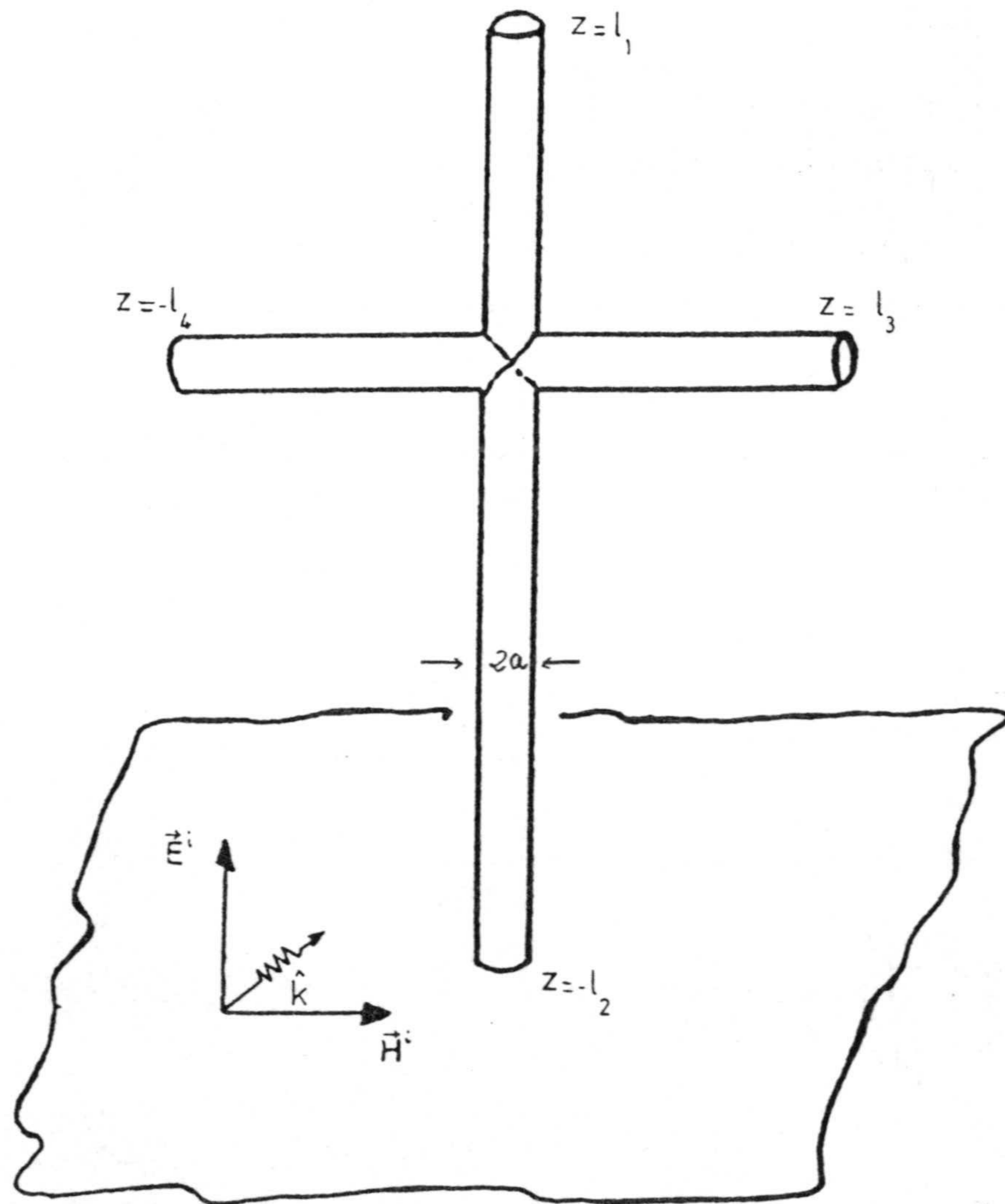
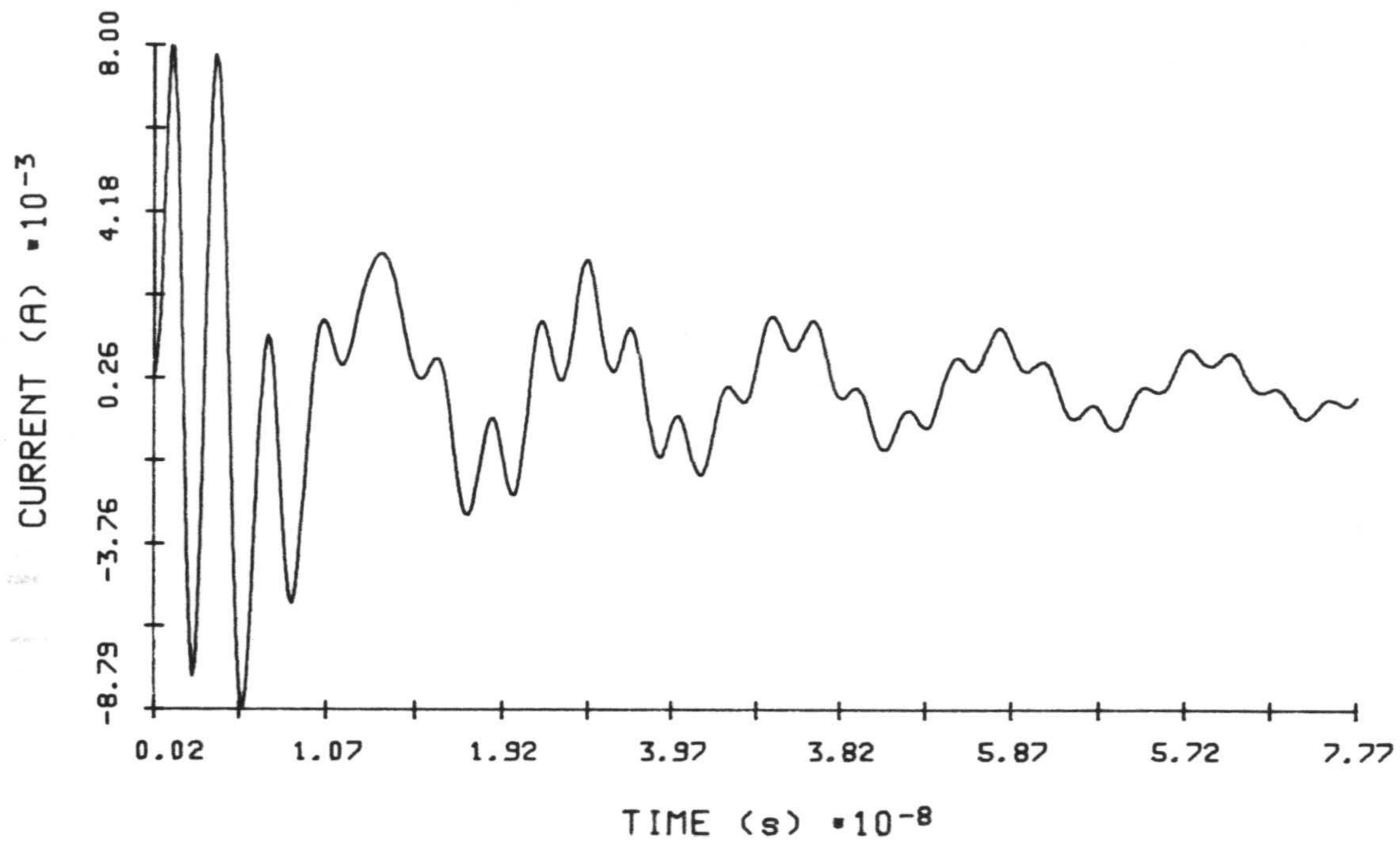
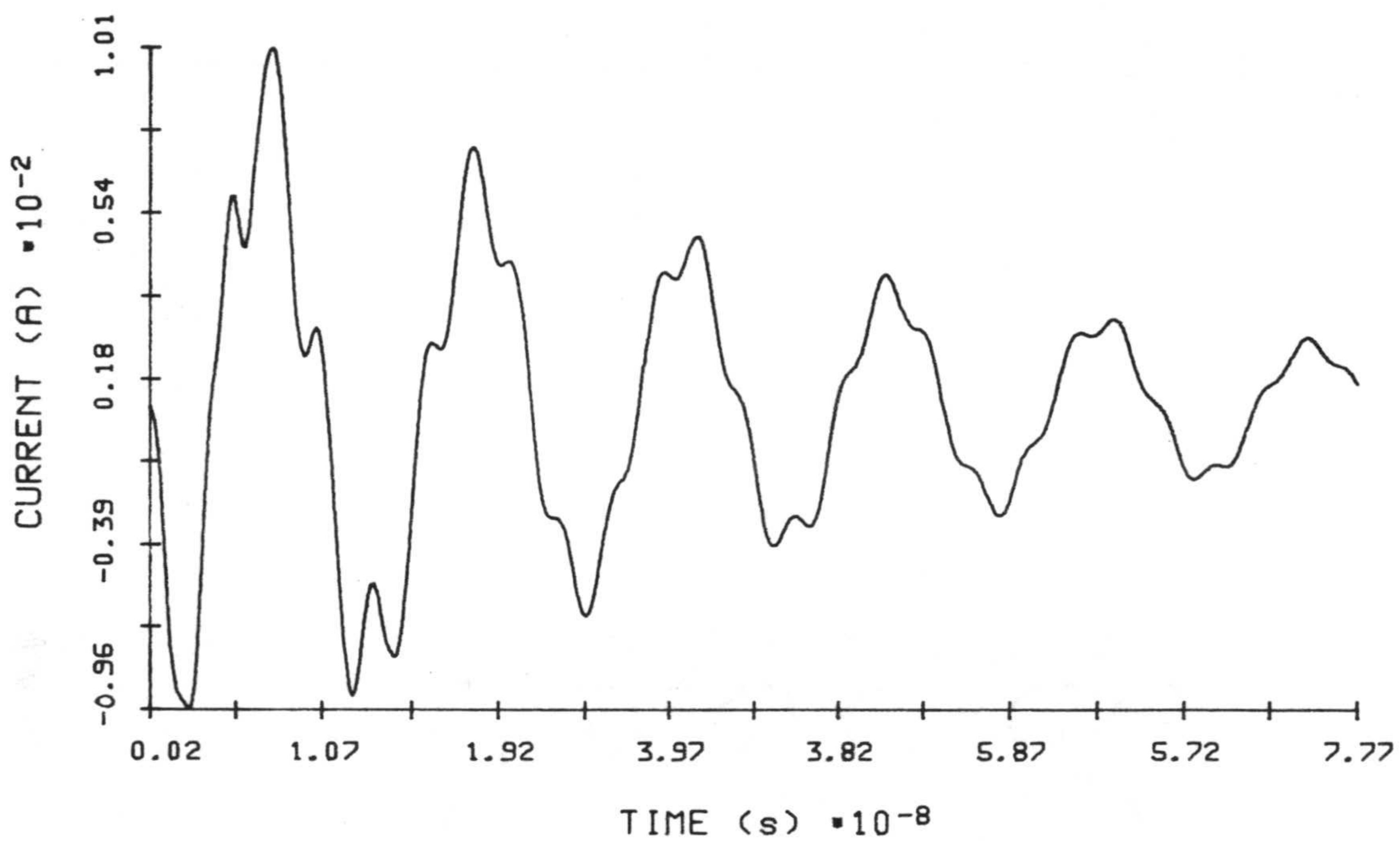


Fig. 4.96.- Geometría de una cruz frente a tierra ($l_1 = l_3 = l_4 = 0.25$ m, $l_2 = 0.5$ m y $a = 0.018$ m). $E^i = \exp[-g^2(t-t_{\max})^2] z$ con $g = 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ y $t_{\max} = 1.43 \cdot 10^{-9}$ s.

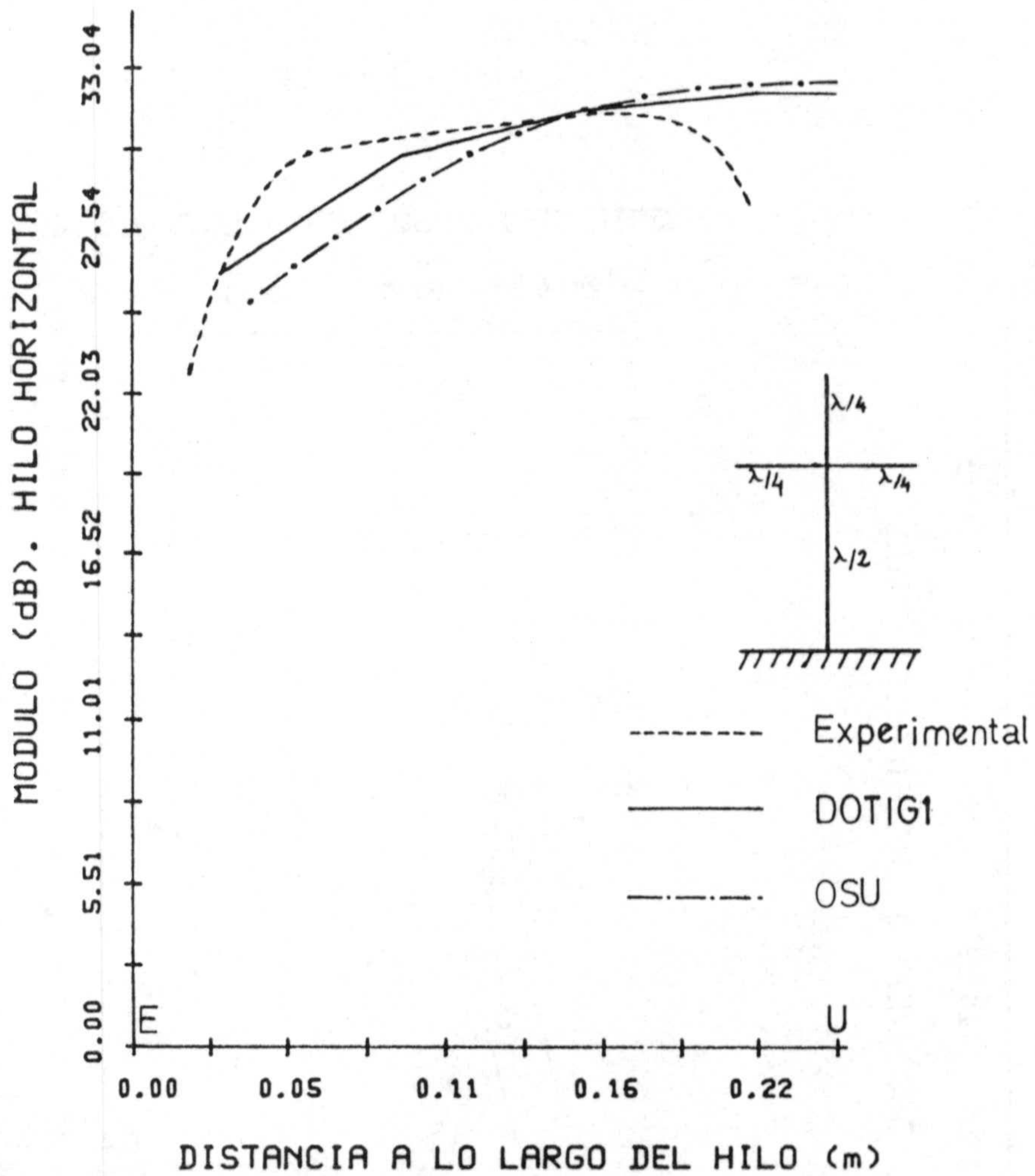


(a)

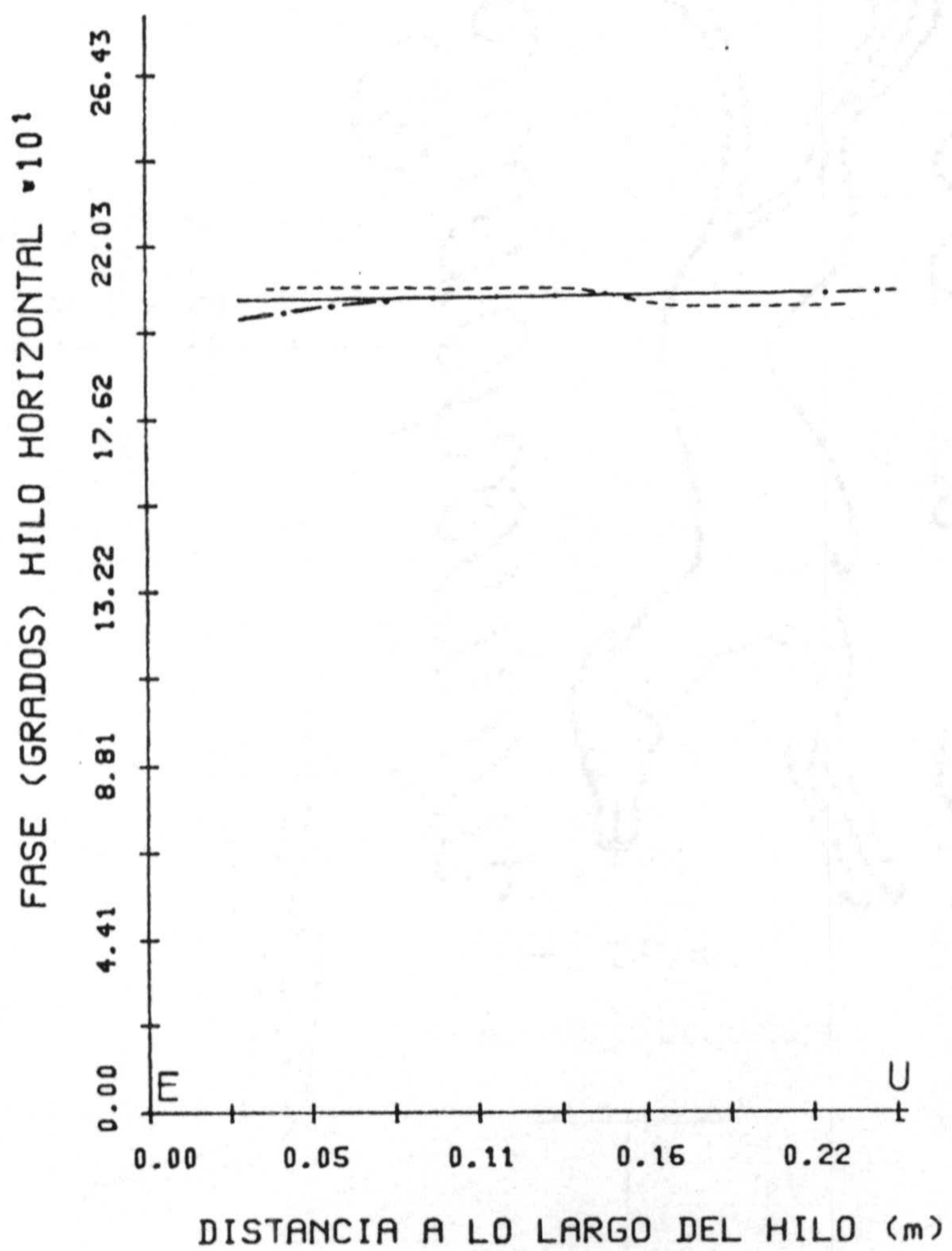


(b)

Fig. 4.97.- Intensidad de corriente en función del tiempo para el ejemplo de la figura 4.96, en el punto central del intervalo espacial más cercano a: a) la unión en el hilo 1 y b) a tierra en el hilo 2.

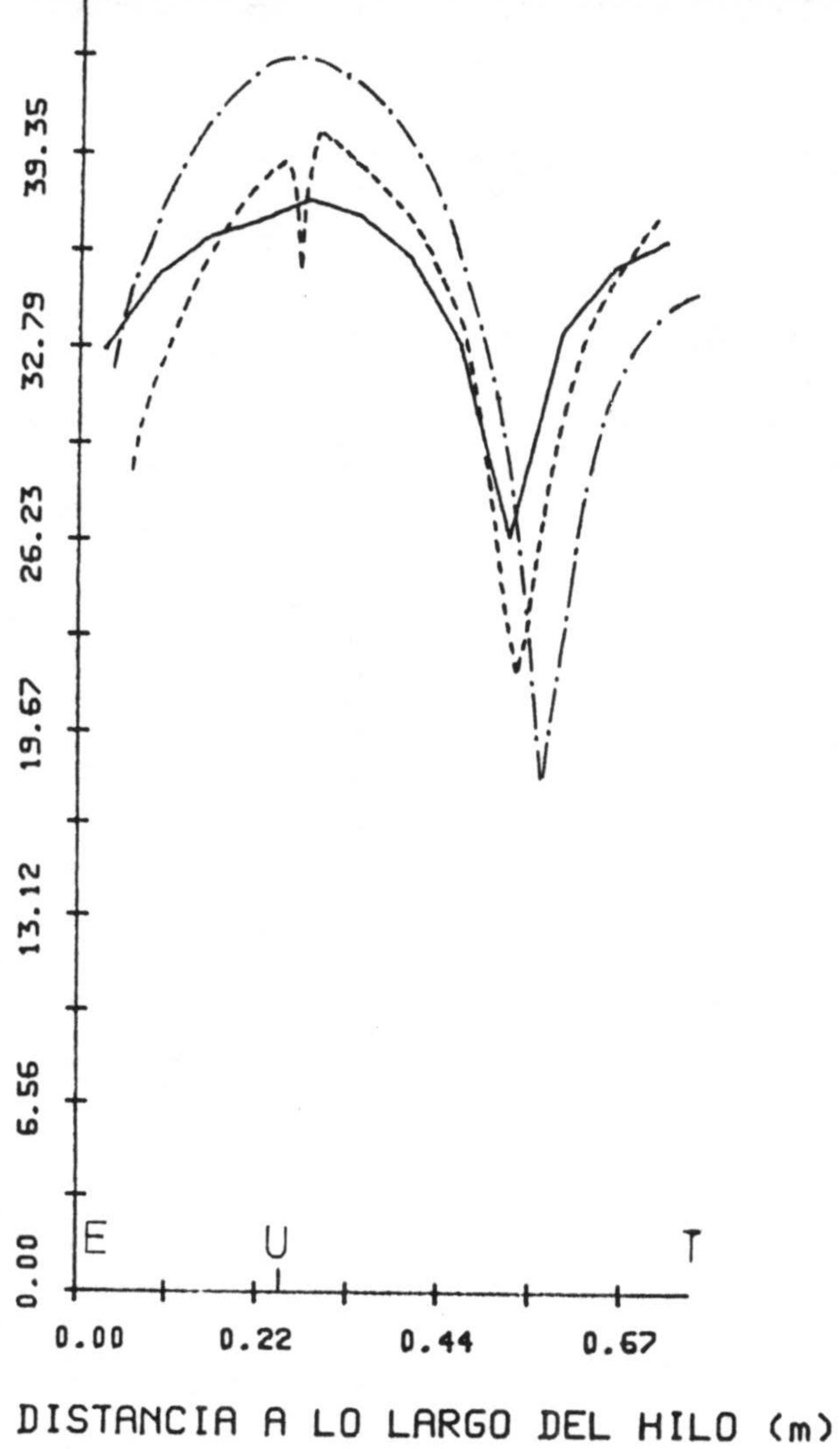


(a)

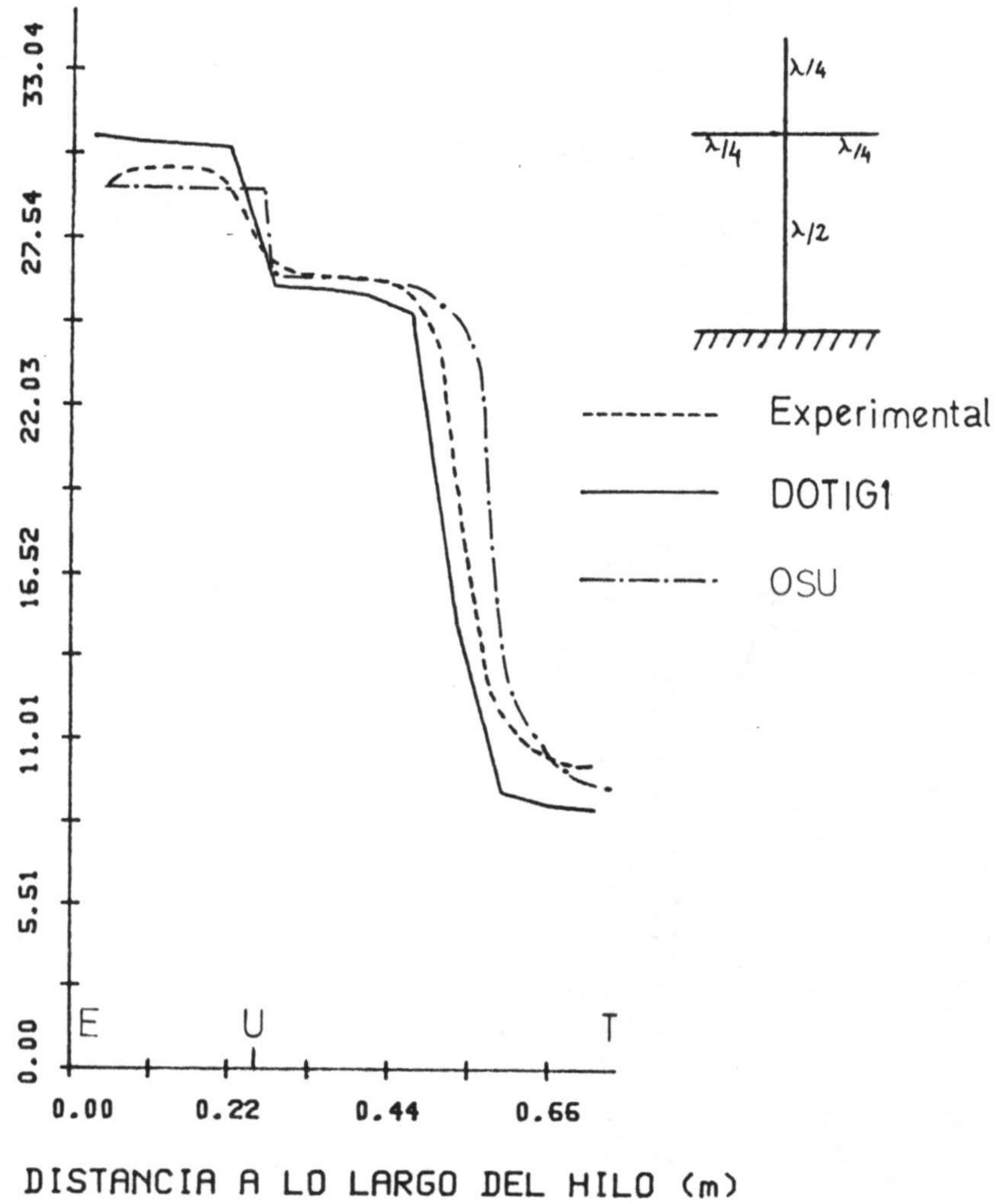


(b)

MODULO (dB). HILO VERTICAL

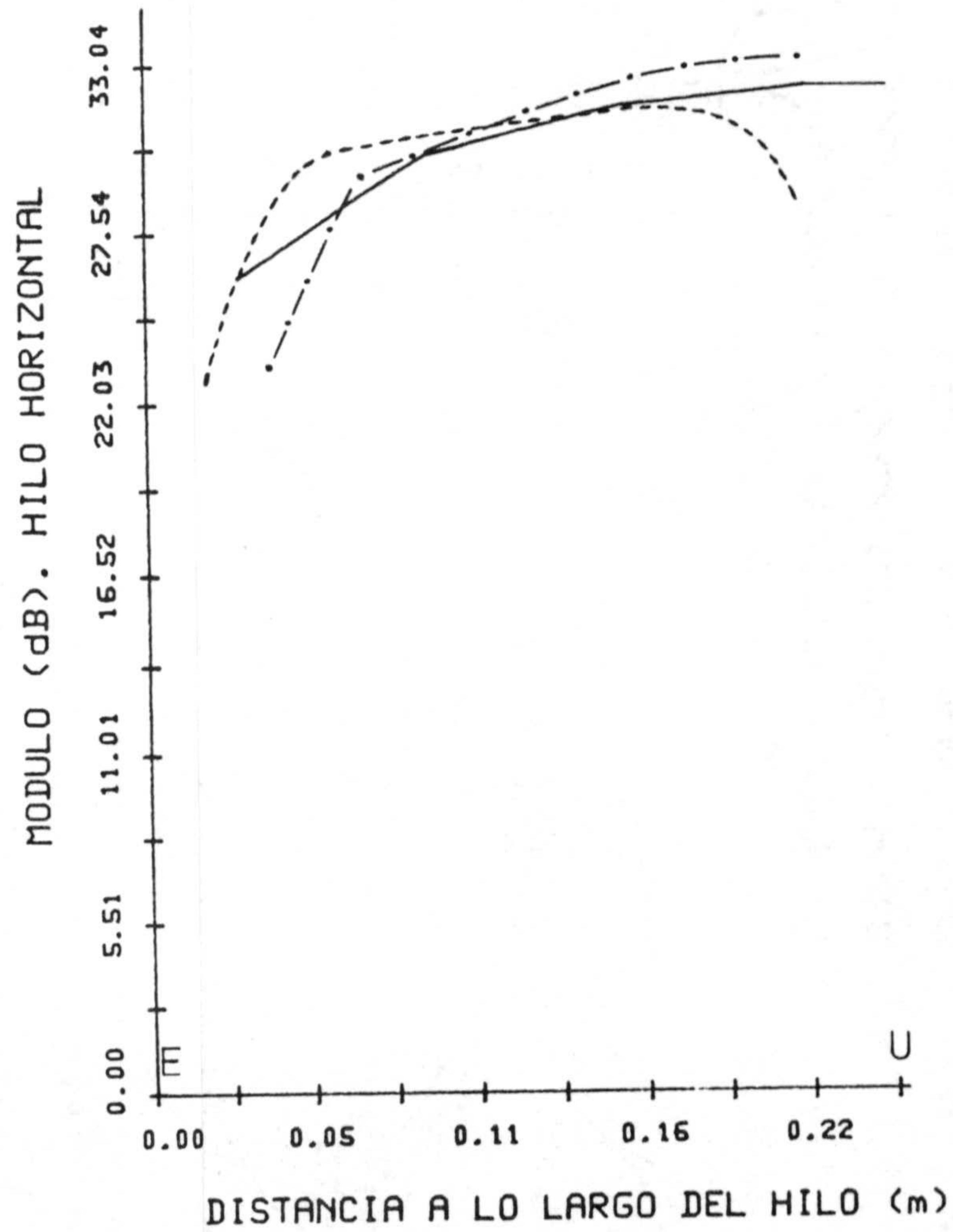


(c)

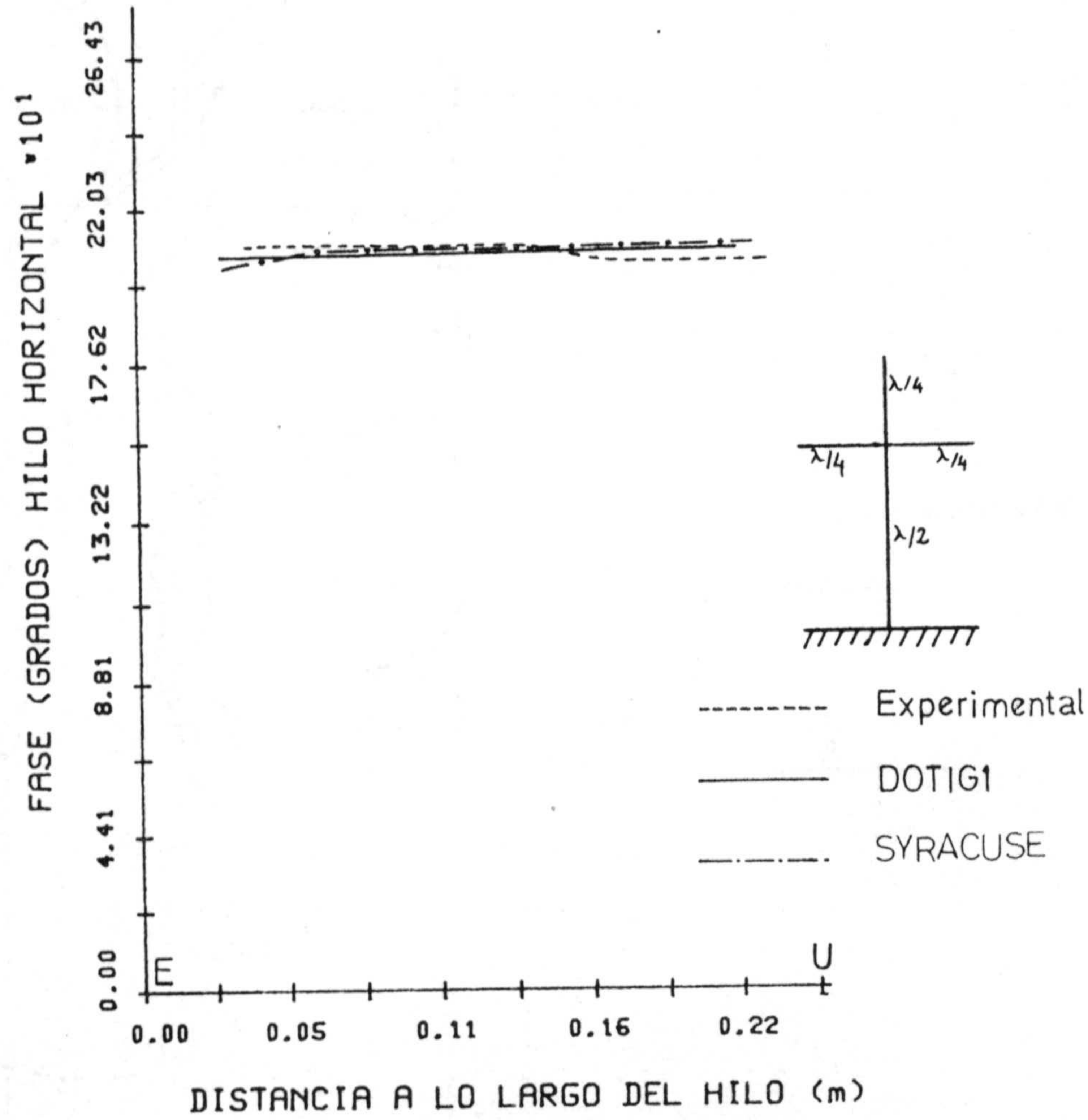
FASE (GRADOS). HILO VERTICAL $\cdot 10^1$ 

(d)

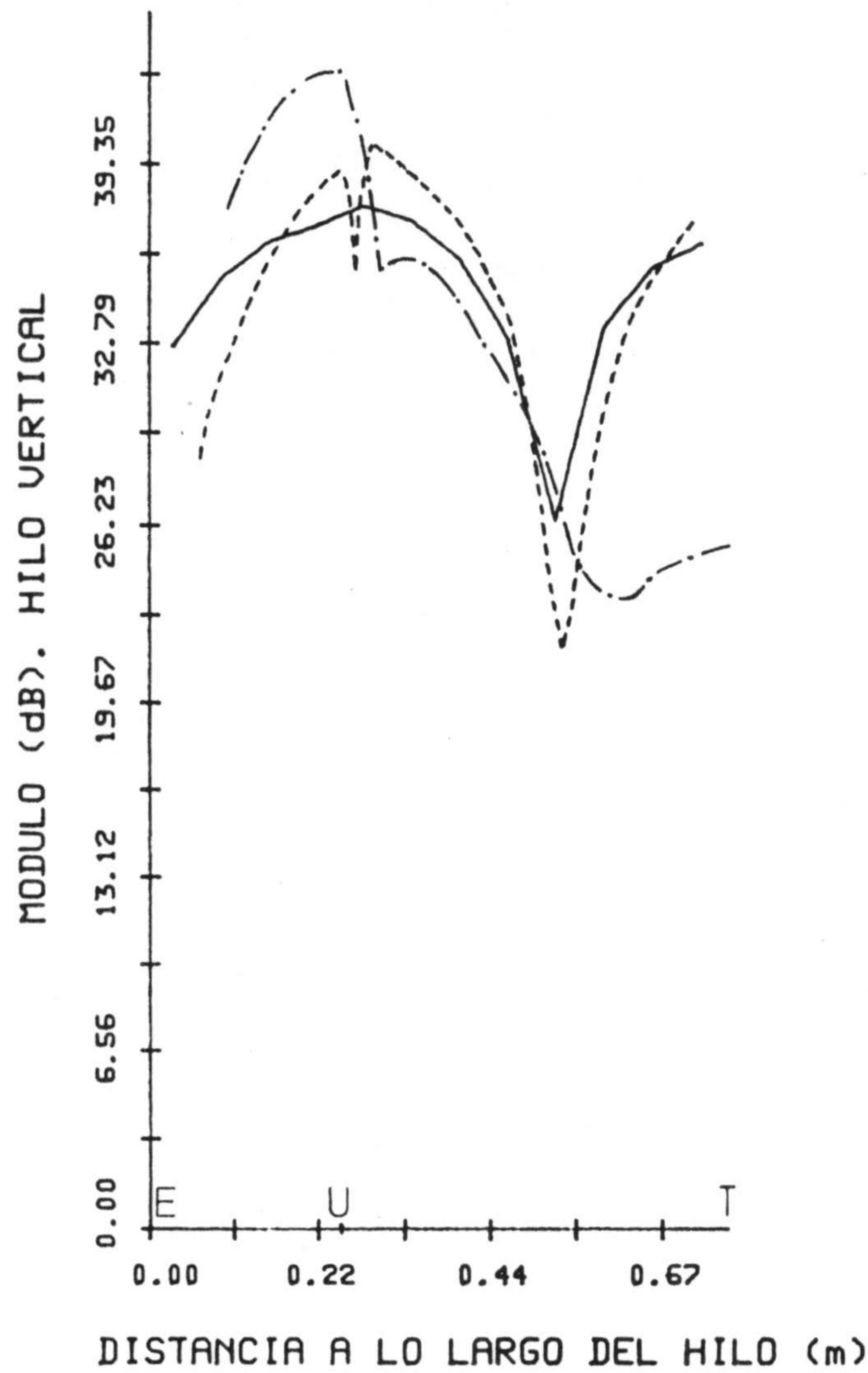
Fig. 4.98.- a) Módulo en db relativo, b) Fase relativa, hilo horizontal, c) Módulo en db relativo y d) Fase relativa, hilo vertical. Programas OSU, transformada de Fourier de los resultados obtenidos por DOTIG1 y resultados experimentales; ($l_1 = l_3 = l_4 = \lambda/4$, $l_2 = \lambda/2$ y $a = 0.018\lambda$. $\lambda = 1m$).



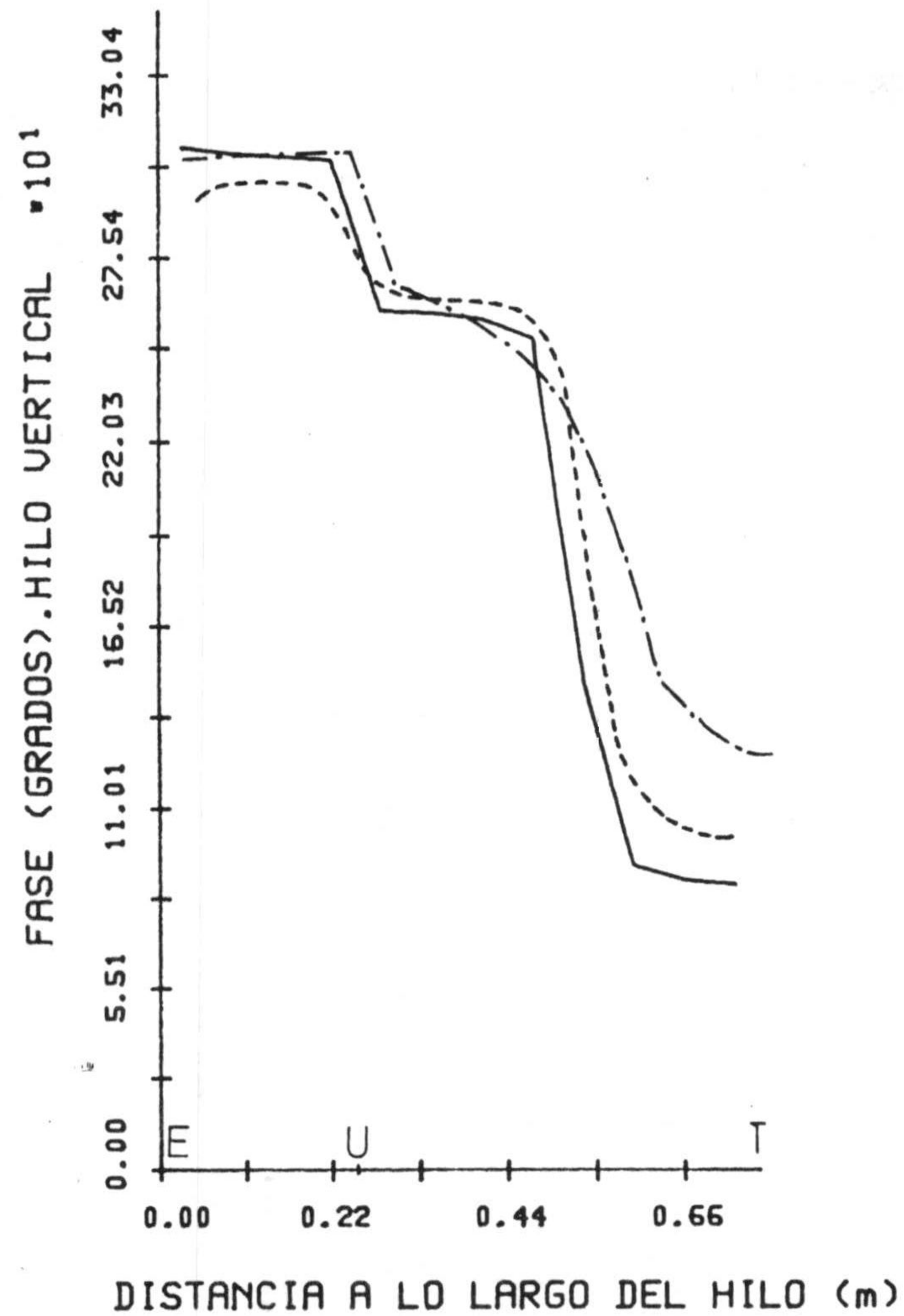
(a)



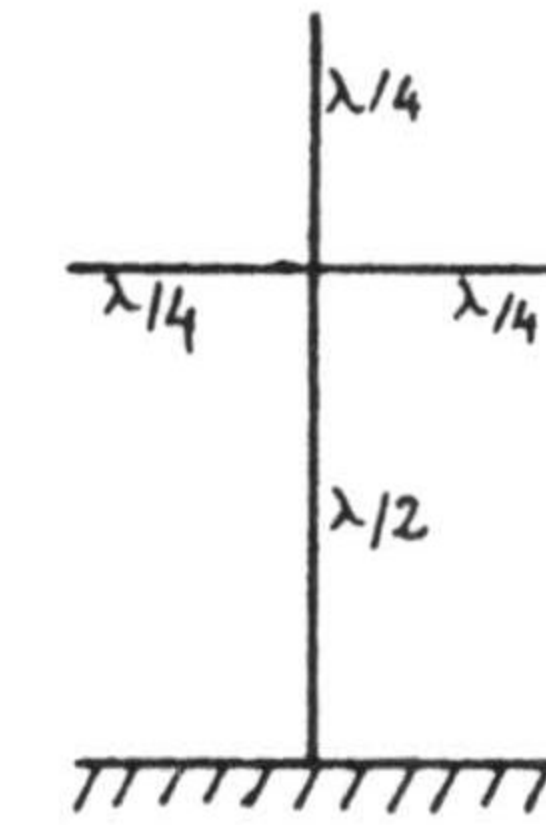
(b)



(c)

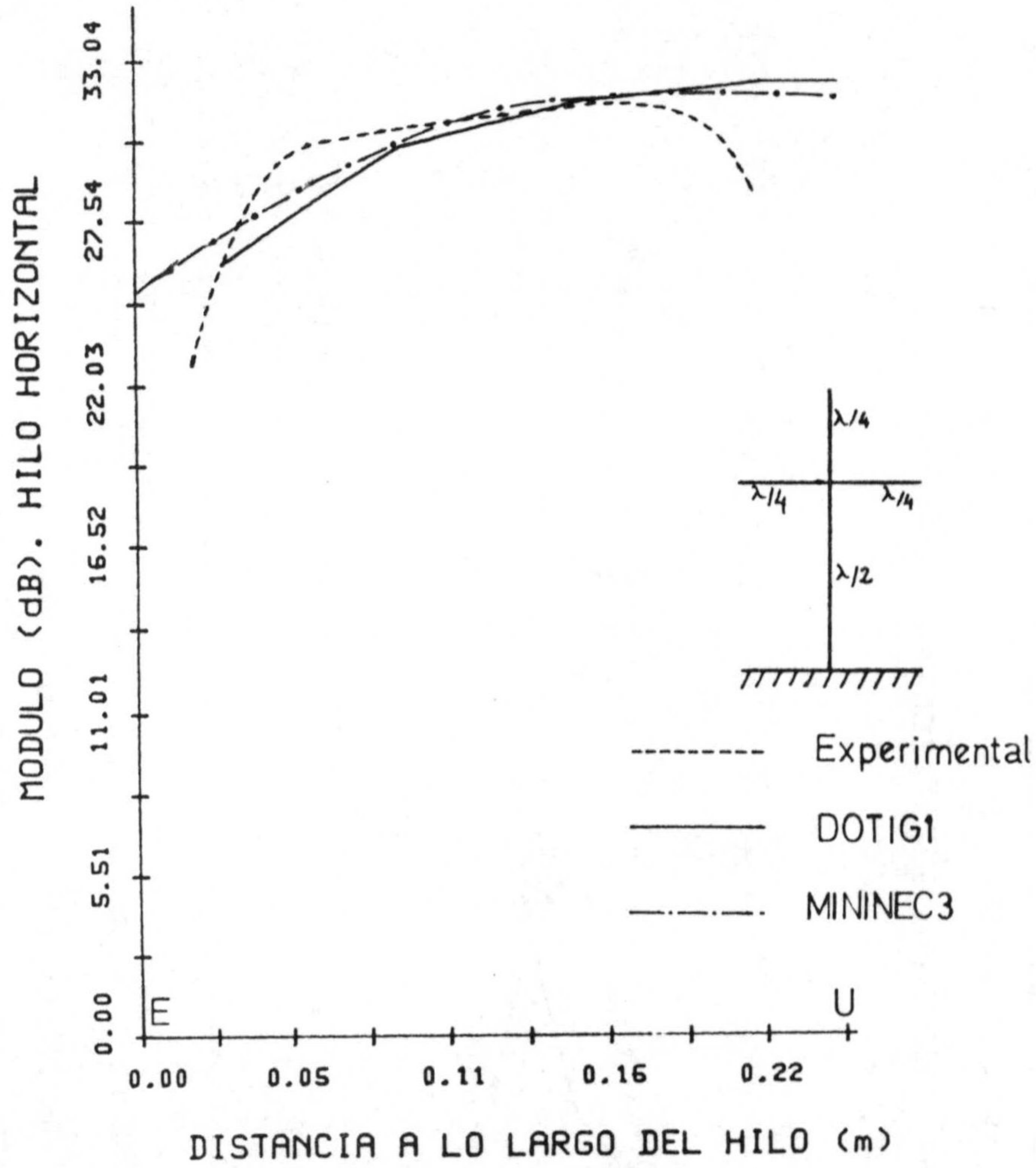


(d)

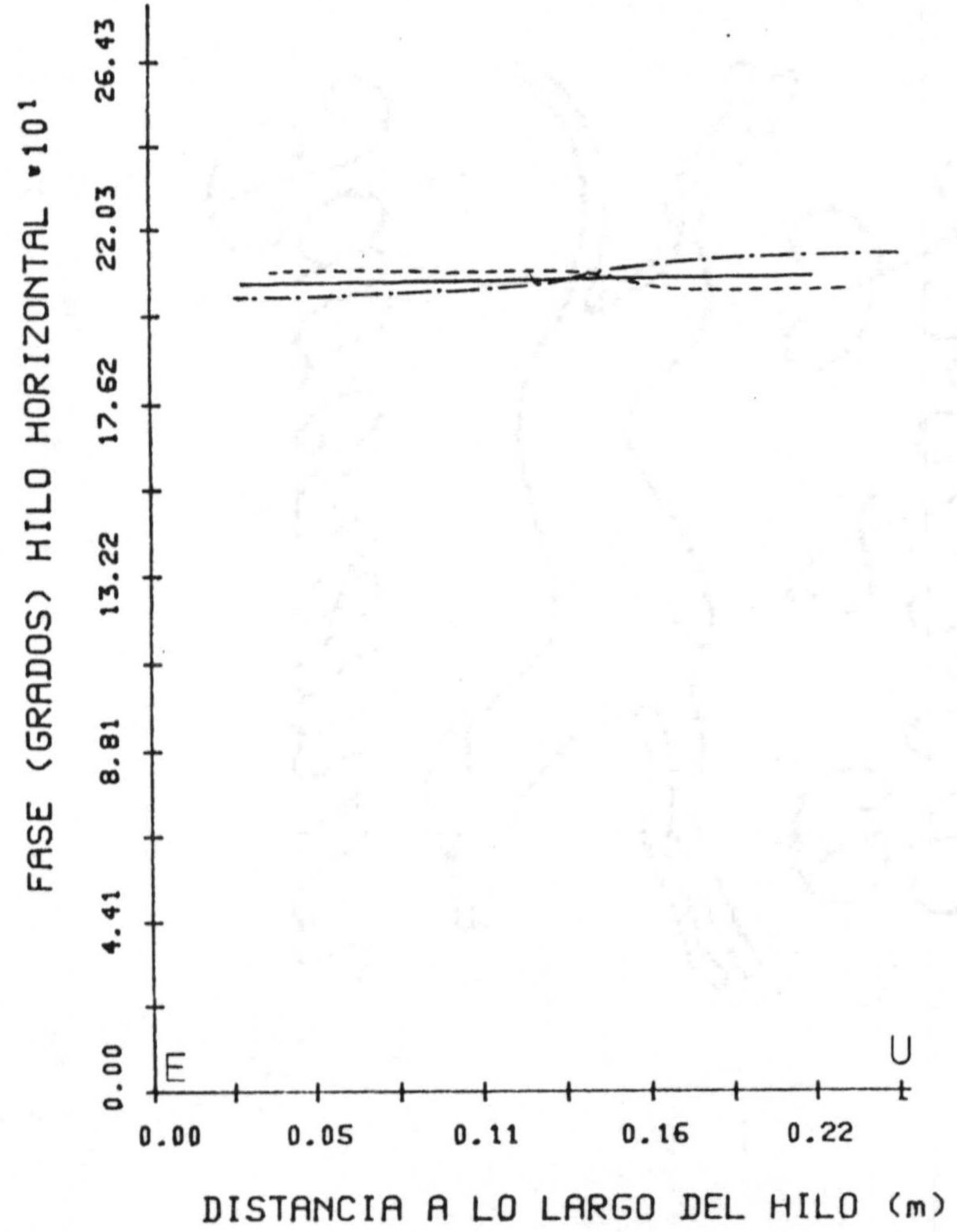


----- Experimental
 ——— DOTIG1
 - · - · - SYRACUSE

Fig. 4.99.- a) Módulo en db relativo, b) Fase relativa, hilo horizontal, c) Módulo en db relativo y d) Fase relativa, hilo vertical. Programas SYRACUSE, transformada de Fourier de los resultados obtenidos por DOTIG1 y resultados experimentales; $(l_1 = l_3 = l_4 = \lambda/4, l_2 = \lambda/2$ y $a = 0.018 \lambda$. $\lambda = 1m$.

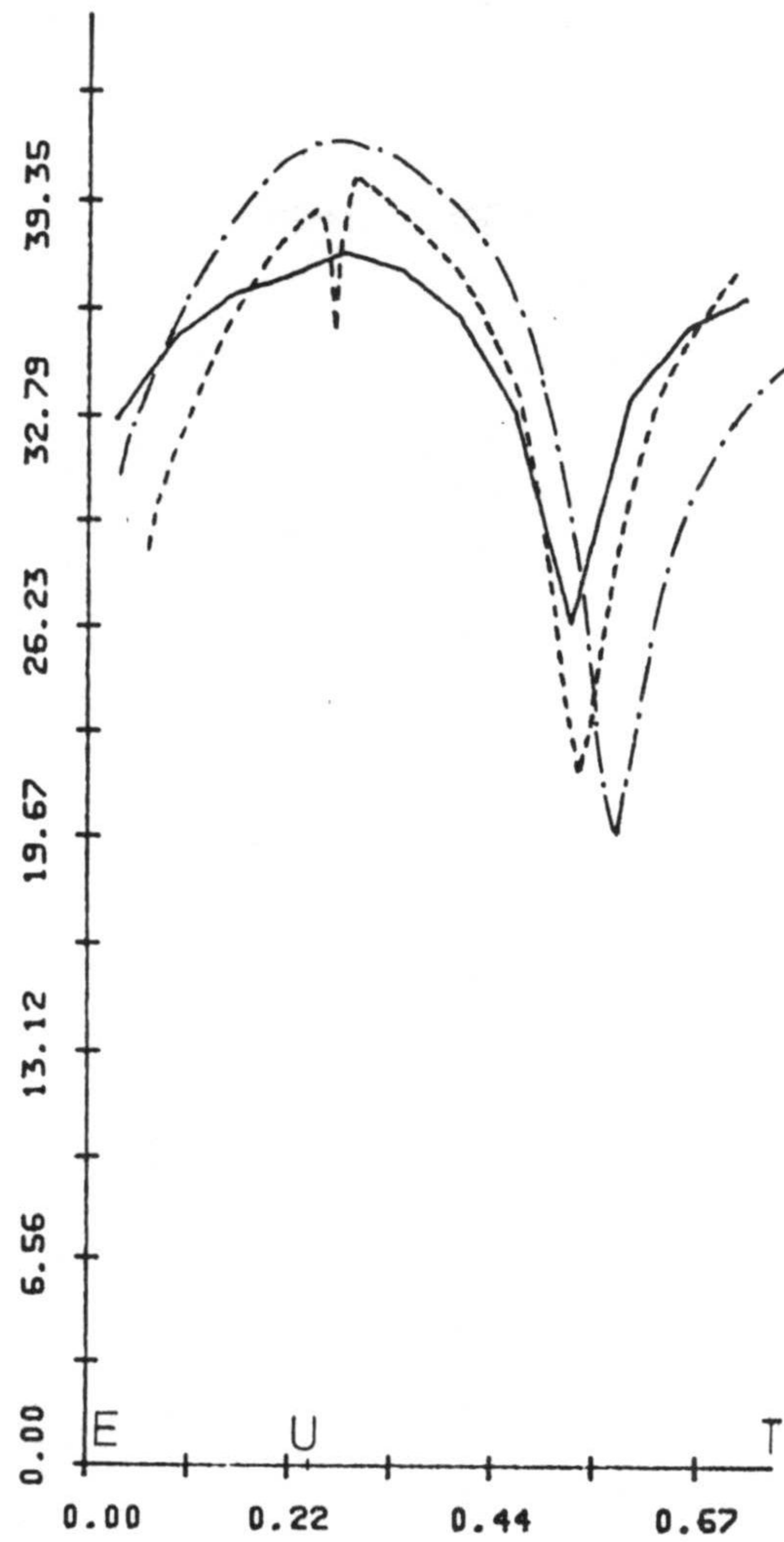


(a)



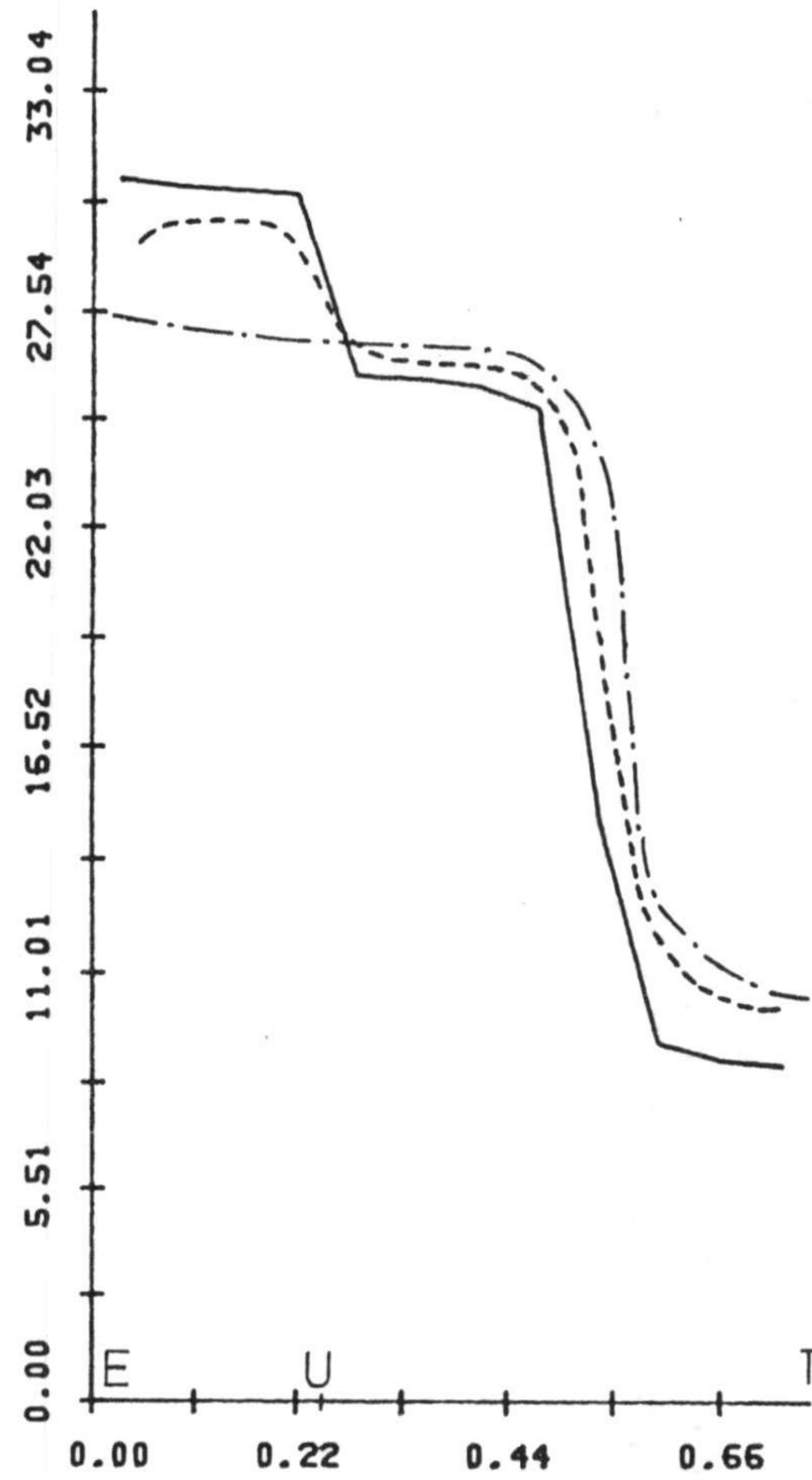
(b)

MODULO (dB). HILO VERTICAL



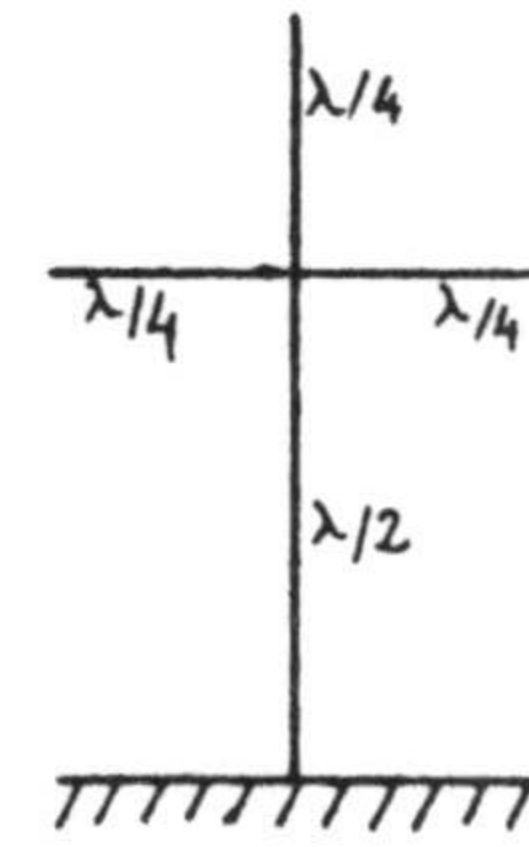
DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(c)

FASE (GRADOS). HILO VERTICAL $\times 10^1$ 

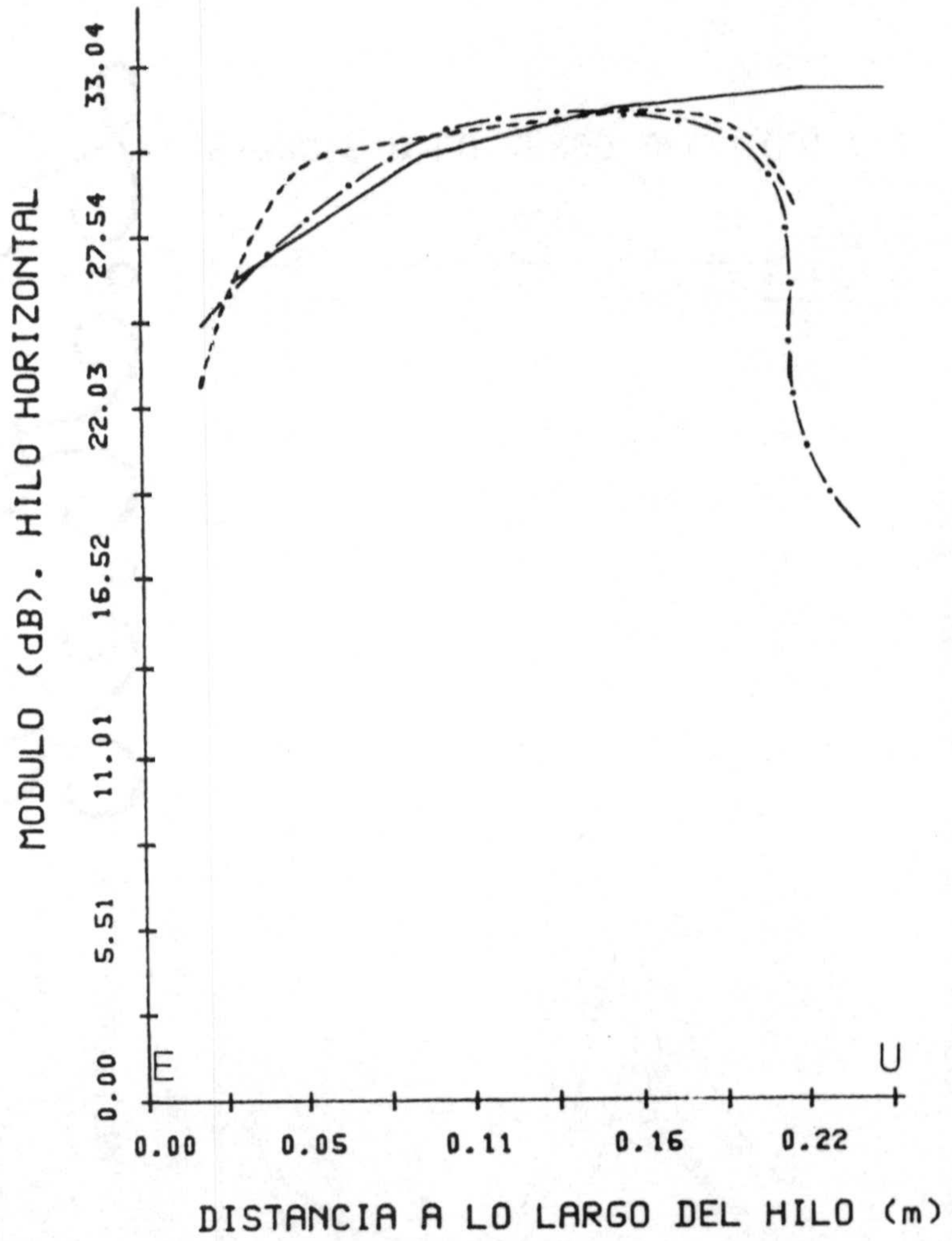
DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(d)

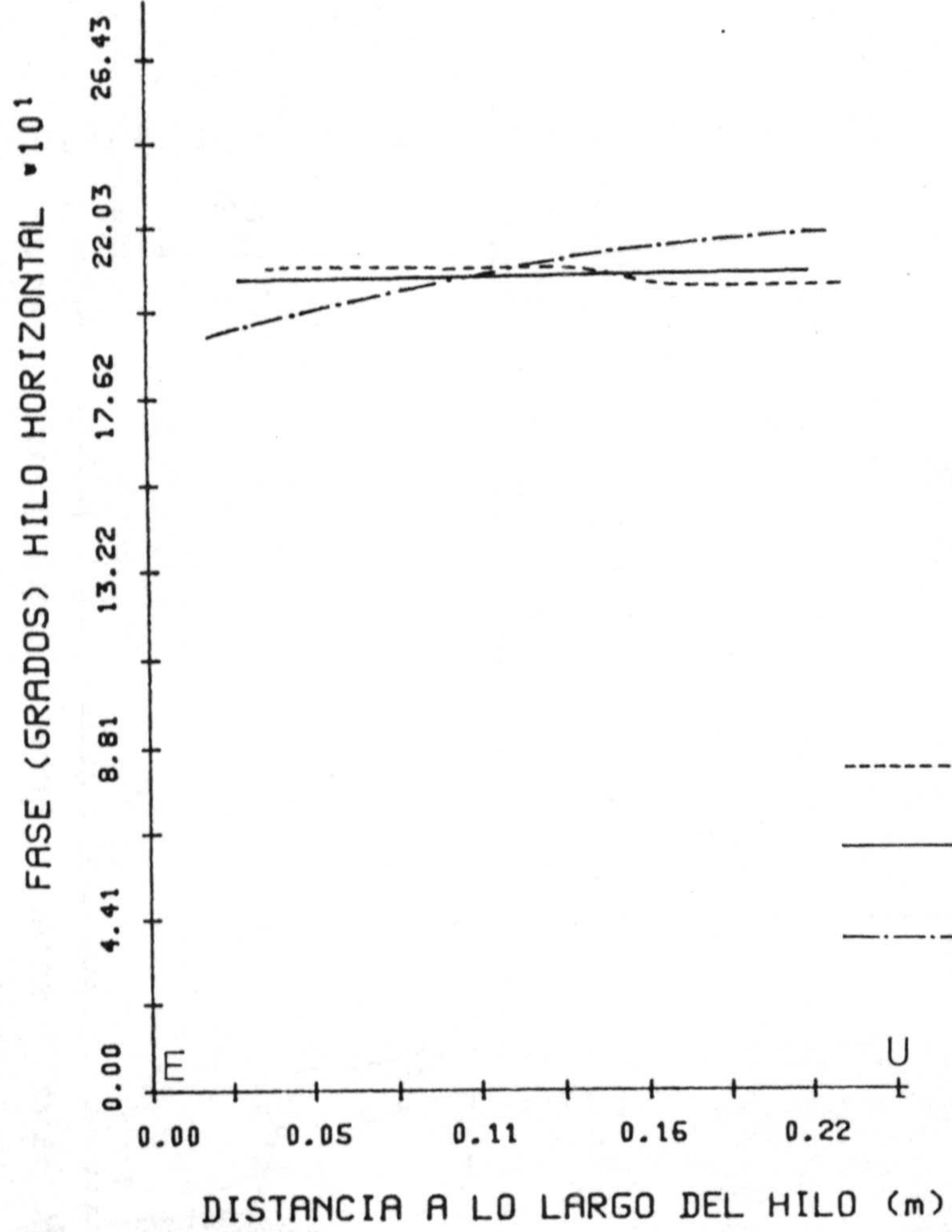


----- Experimental
 ————— DOTIG1
 - · - · - · MININEC3

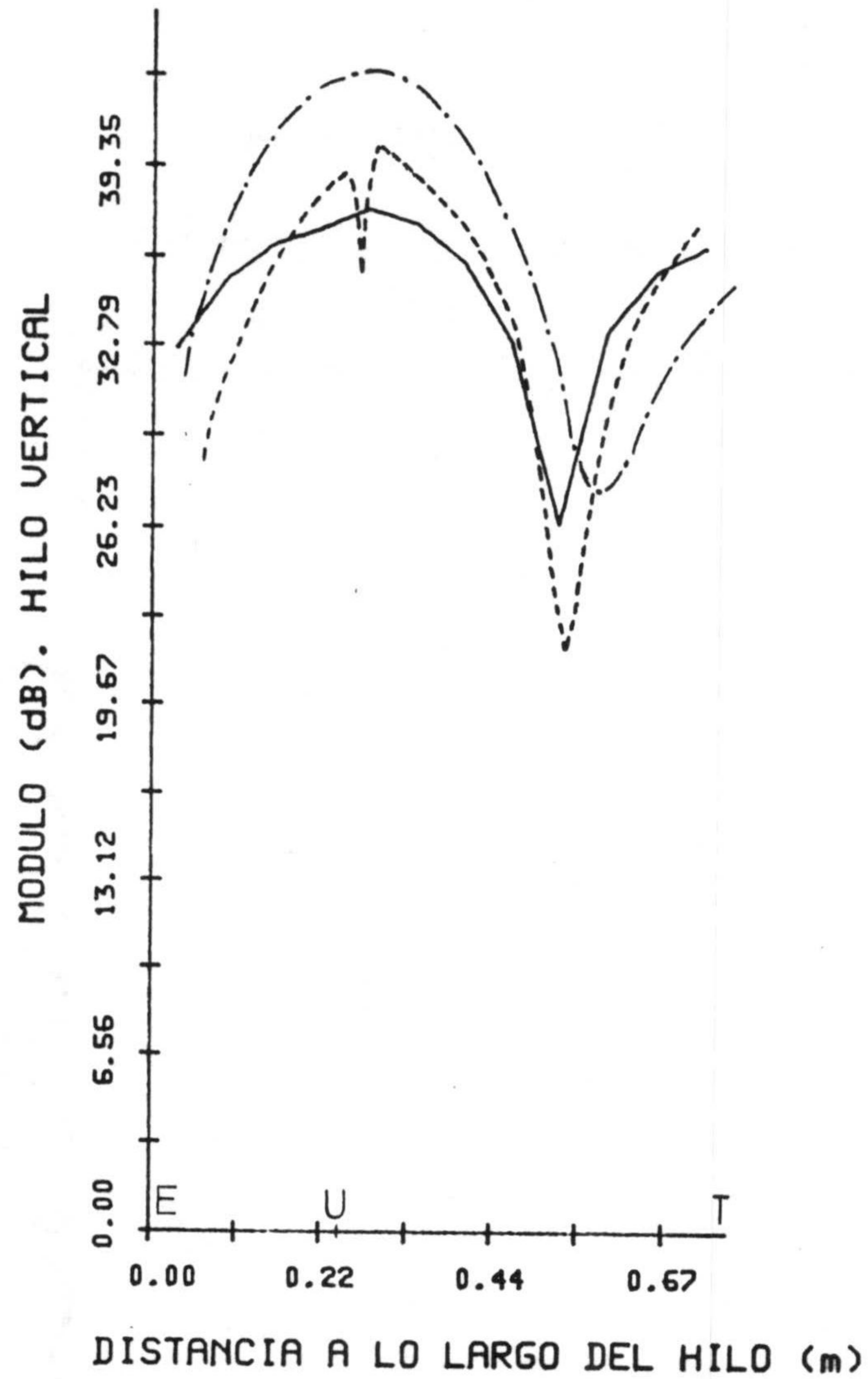
Fig. 4.100.- a) Módulo en db relativo, b) Fase relativa, hilo horizontal, c) Módulo en db relativo y d) Fase relativa, hilo vertical. Programas MININEC3, transformada de Fourier de los resultados obtenidos por DOTIG1 y resultados experimentales; ($l_1 = l_3 = l_4 = \lambda/4$, $l_2 = \lambda/2$ y $a = 0.018 \lambda$. $\lambda = 1m$.)



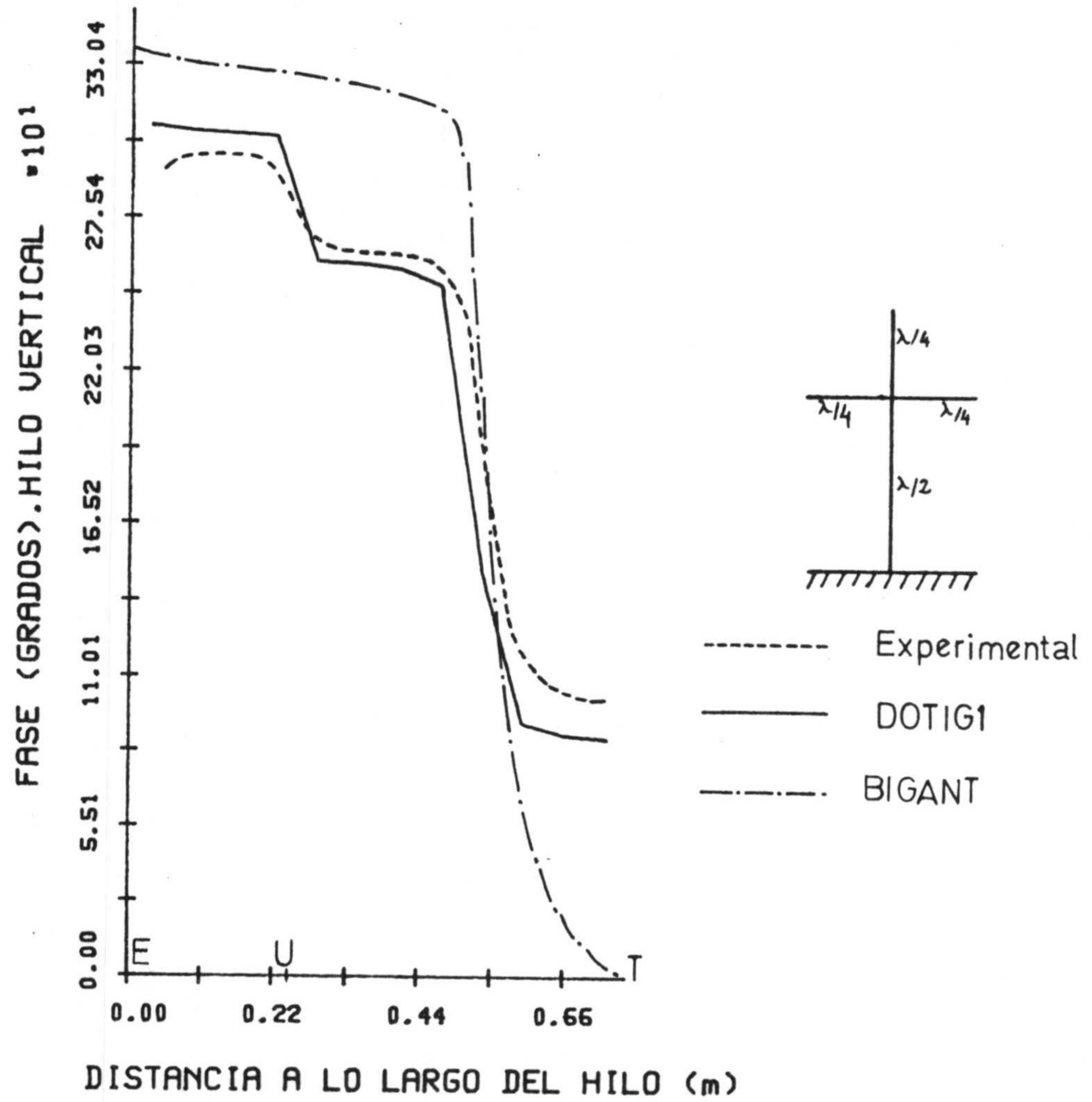
(a)



(b)

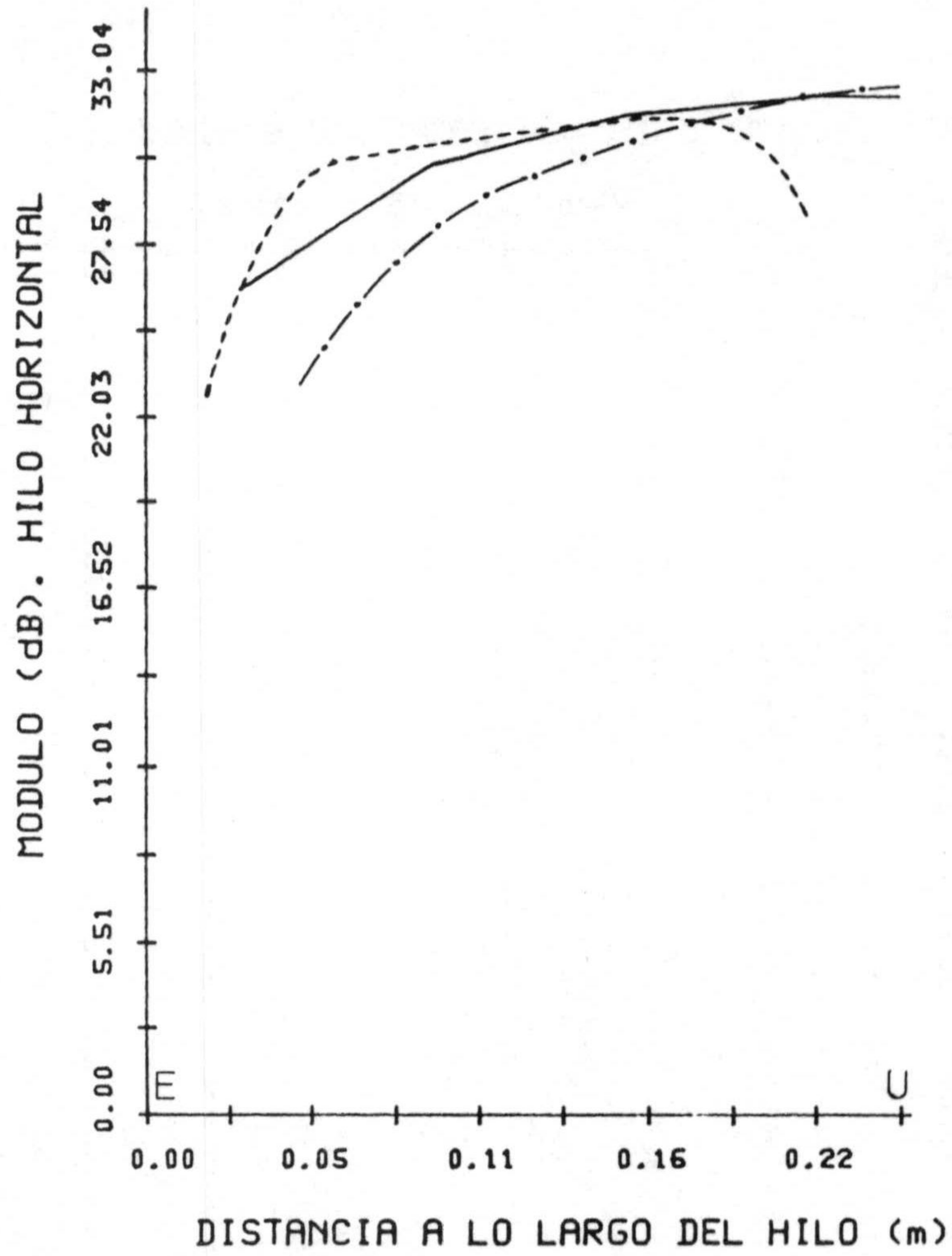


(c)

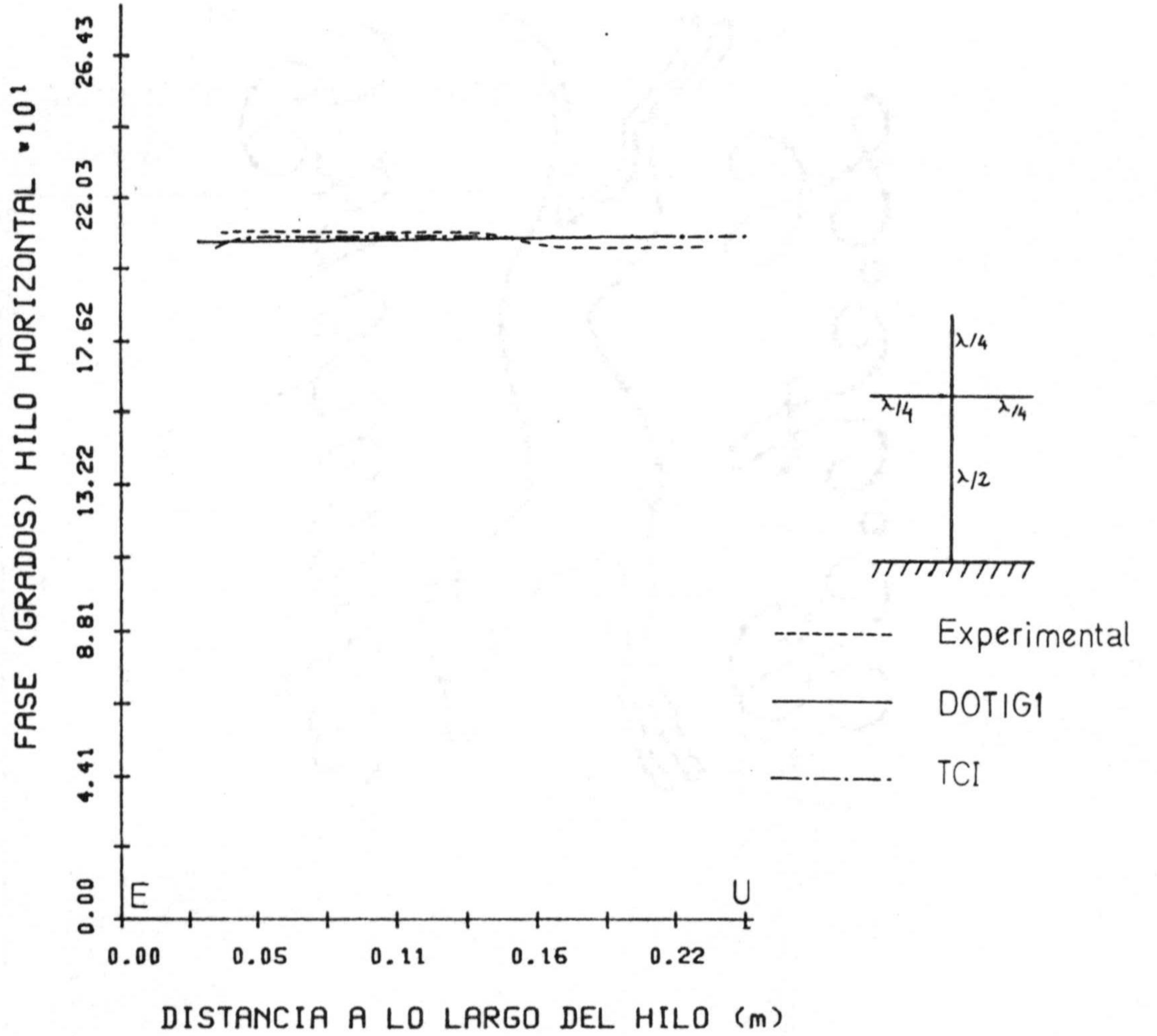


(d)

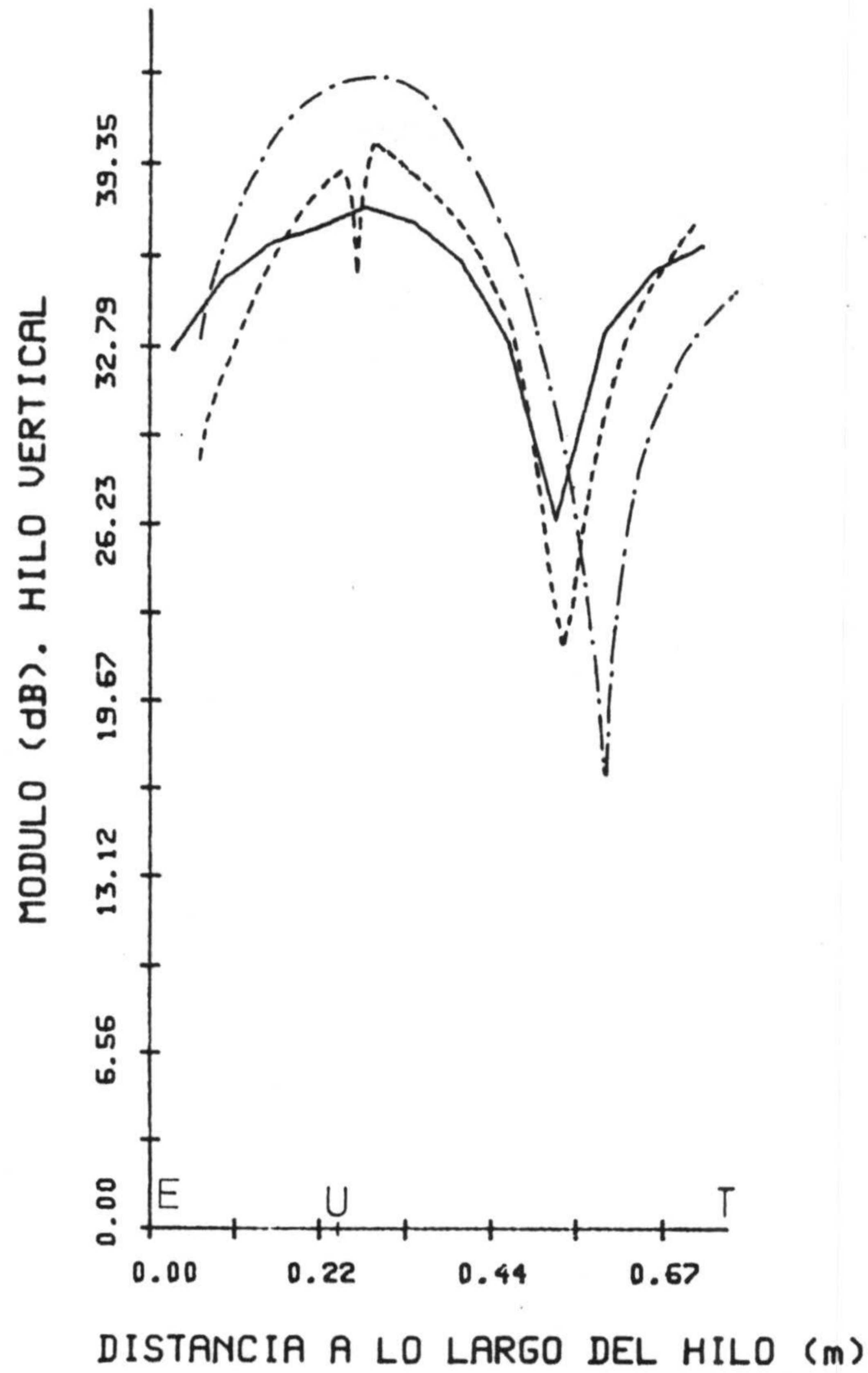
Fig. 4.101.- a) Módulo en db relativo, b) Fase relativa, hilo horizontal, c) Módulo en db relativo y d) Fase relativa, hilo vertical. Programas BIGANT, transformada de Fourier de los resultados obtenidos por DOTIG1 y resultados experimentales; ($l_1 = l_3 = l_4 = \lambda/4$, $l_2 = \lambda/2$ y $a = 0.018\lambda$).



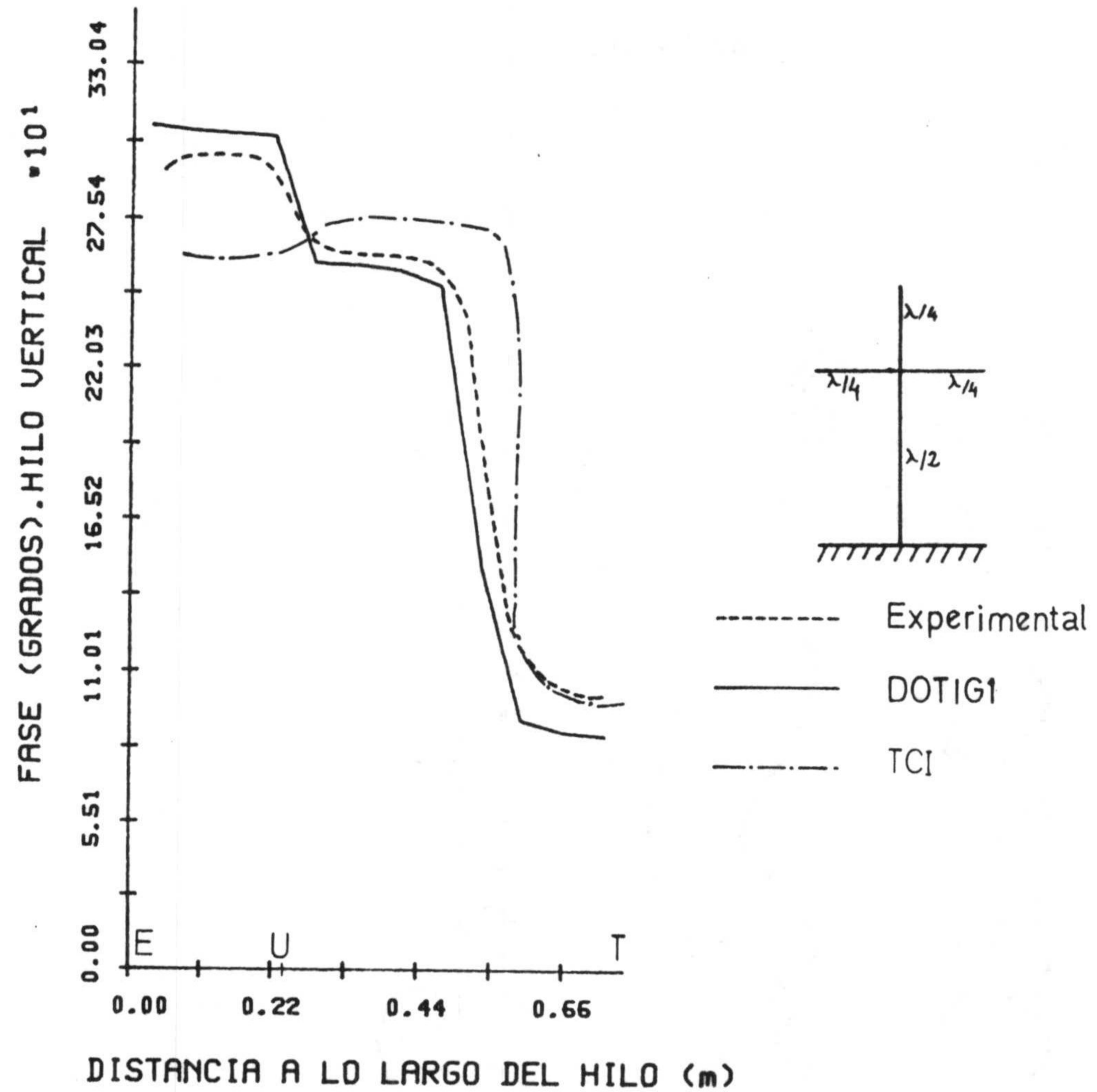
(a)



(b)

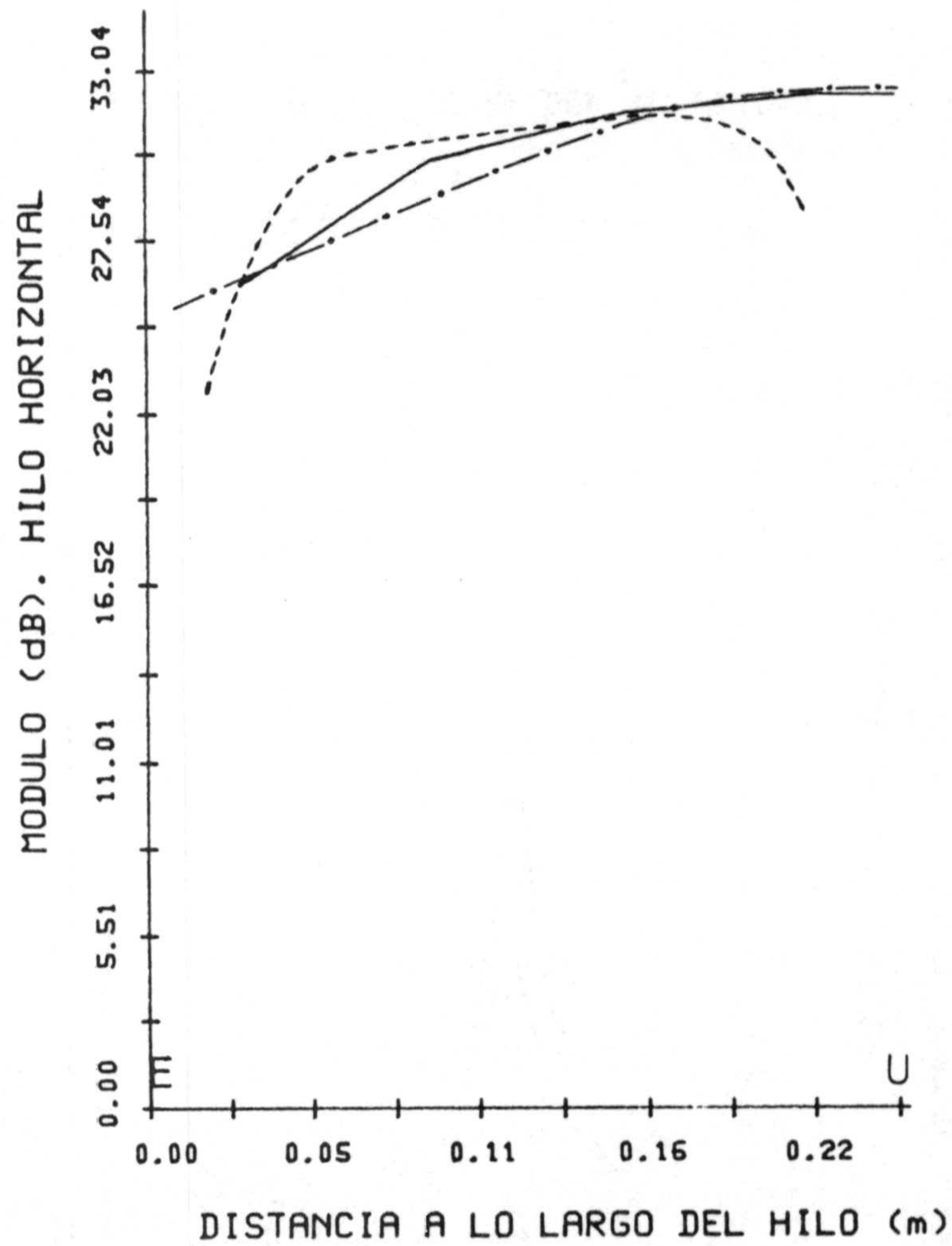


(c)

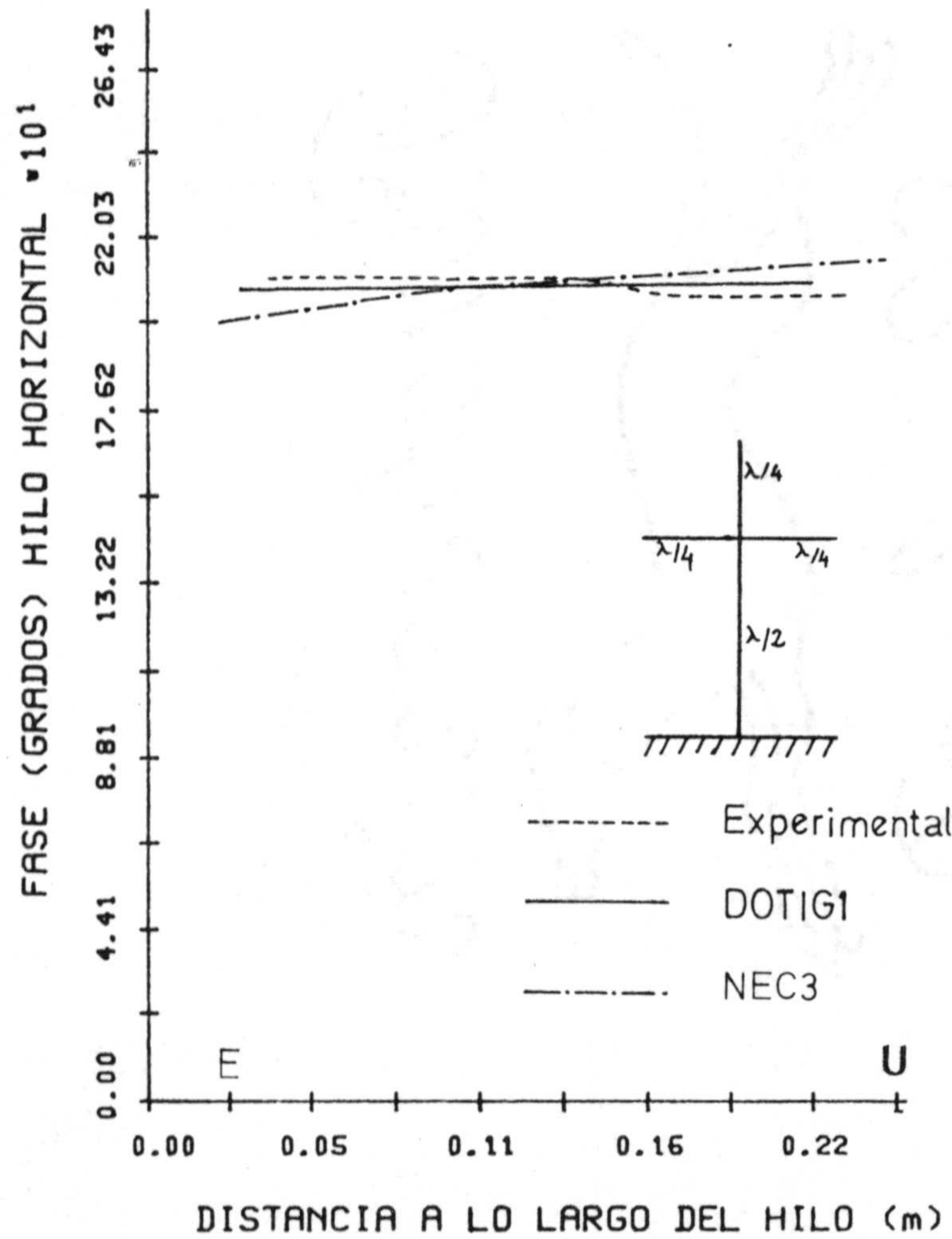


(d)

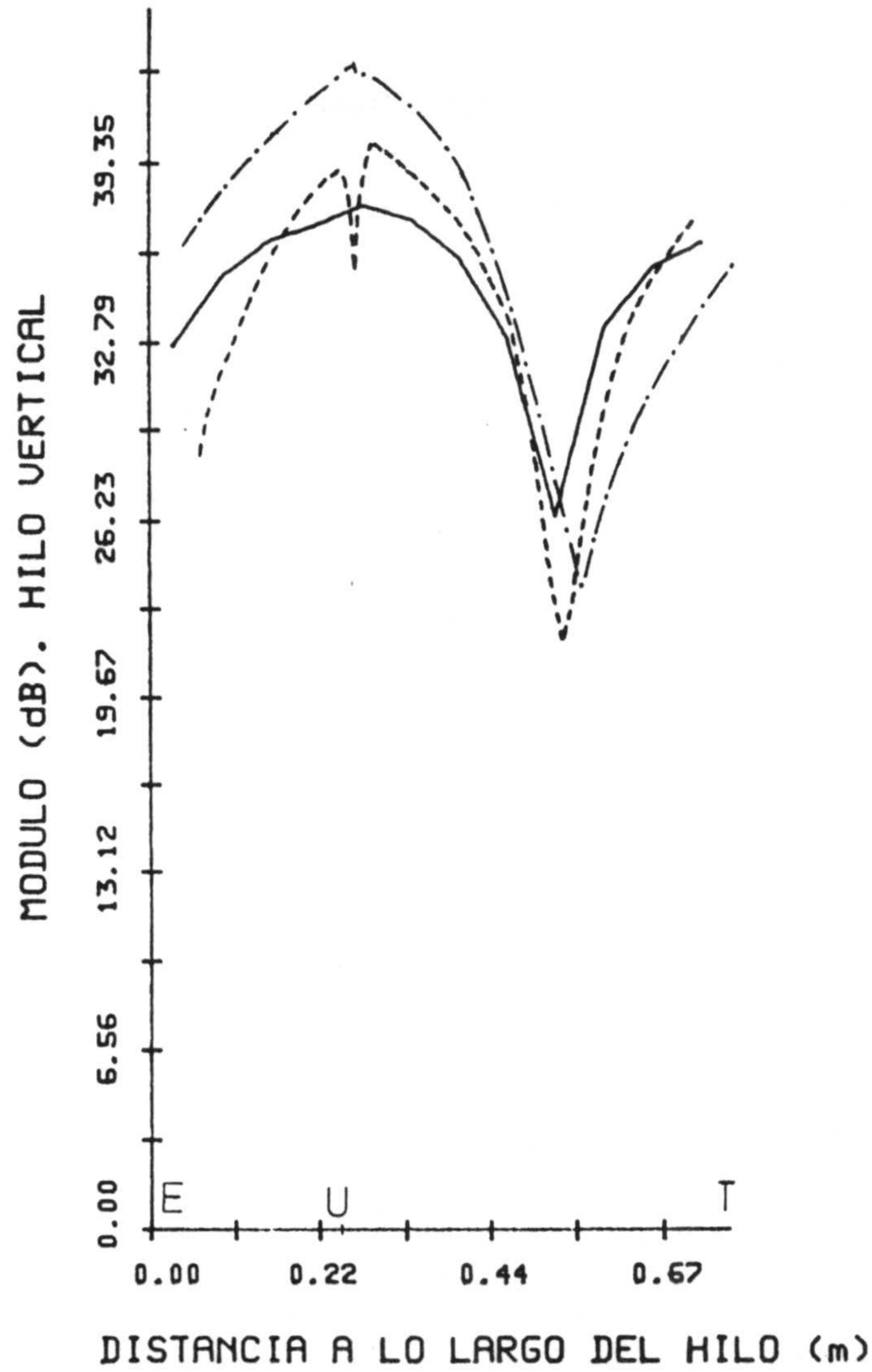
Fig. 4.102.- a) Módulo en db relativo, b) Fase relativa, hilo horizontal, c) Módulo en db relativo y d) Fase relativa, hilo vertical. Programas TCI, transformada de Fourier de los resultados obtenidos por DOTIG1 y resultados experimentales; ($l_1 = l_3 = l_4 = \lambda/4$, $l_2 = \lambda/2$ y $a = 0.018 \lambda$. $\lambda = 1m$).



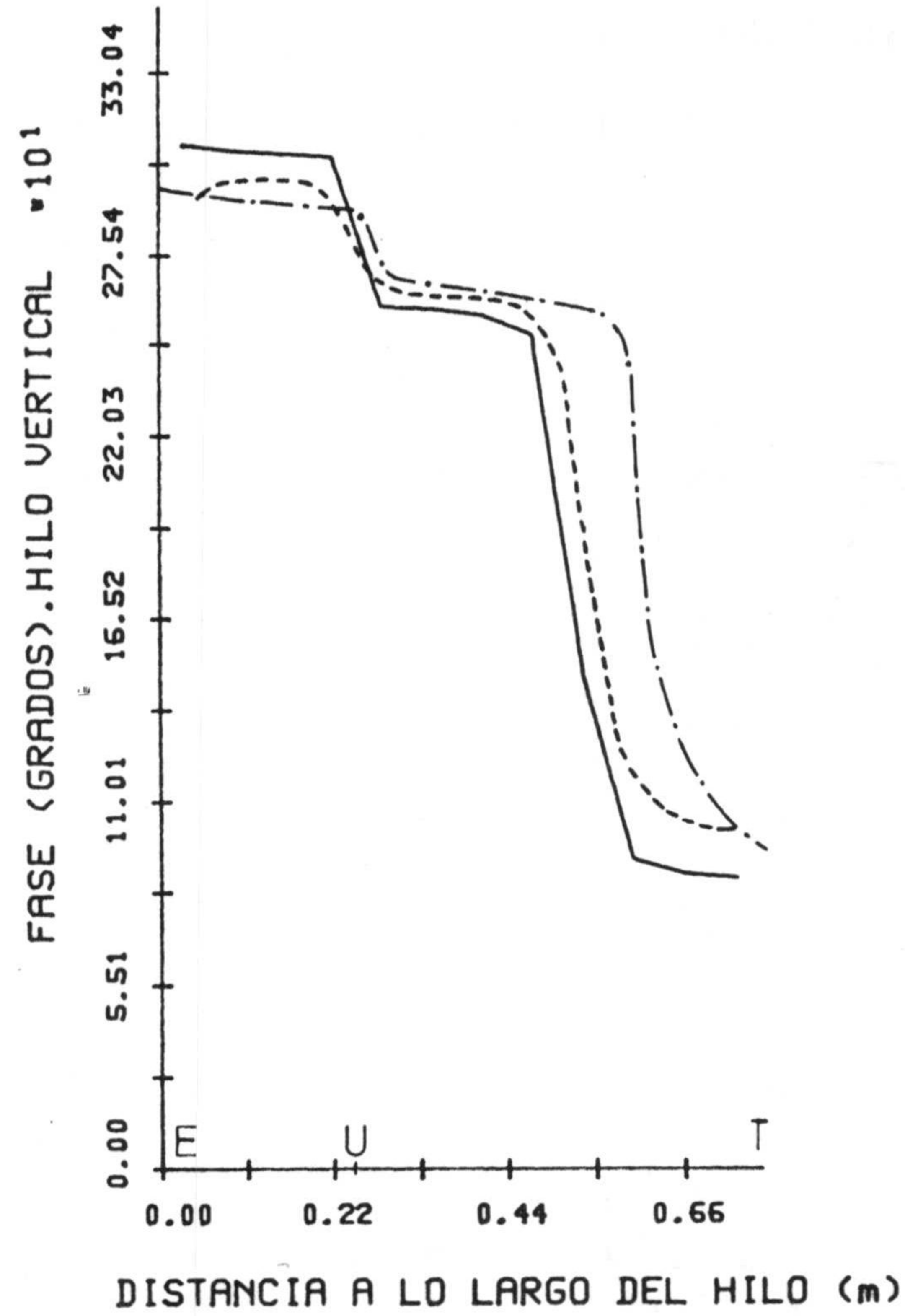
(a)



(b)



(c)



(d)

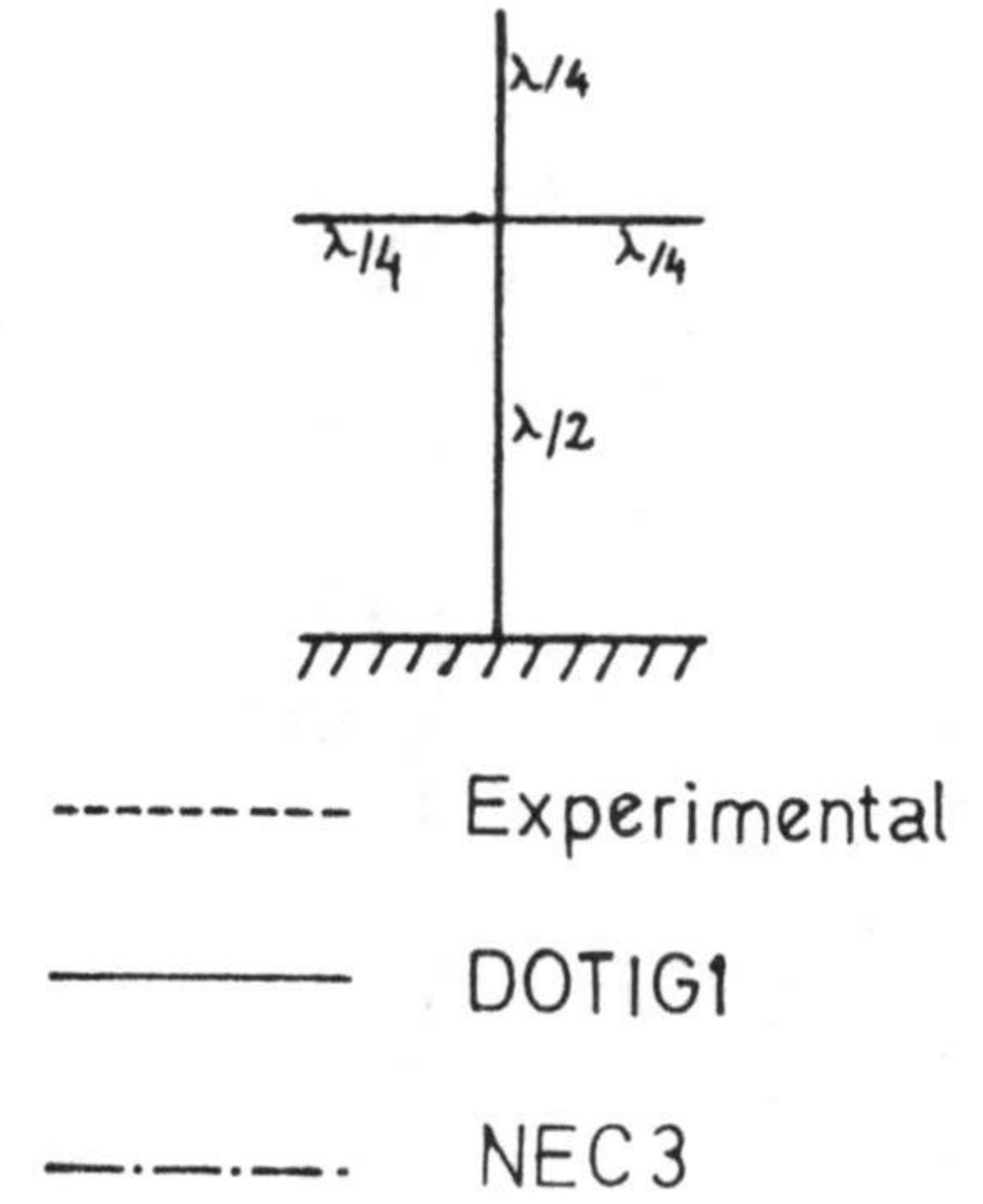


Fig. 4.103.- a) Módulo en db relativo, b) Fase relativa, hilo horizontal, c) Módulo en db relativo y d) Fase relativa, hilo vertical. Programas NEC3, transformada de Fourier de los resultados obtenidos por DOTIG1 y resultados experimentales; ($l_1 = l_3 = l_4 = \lambda/4$, $l_2 = \lambda/2$ y $a = 0.018\lambda$. $\lambda = 1m$.)

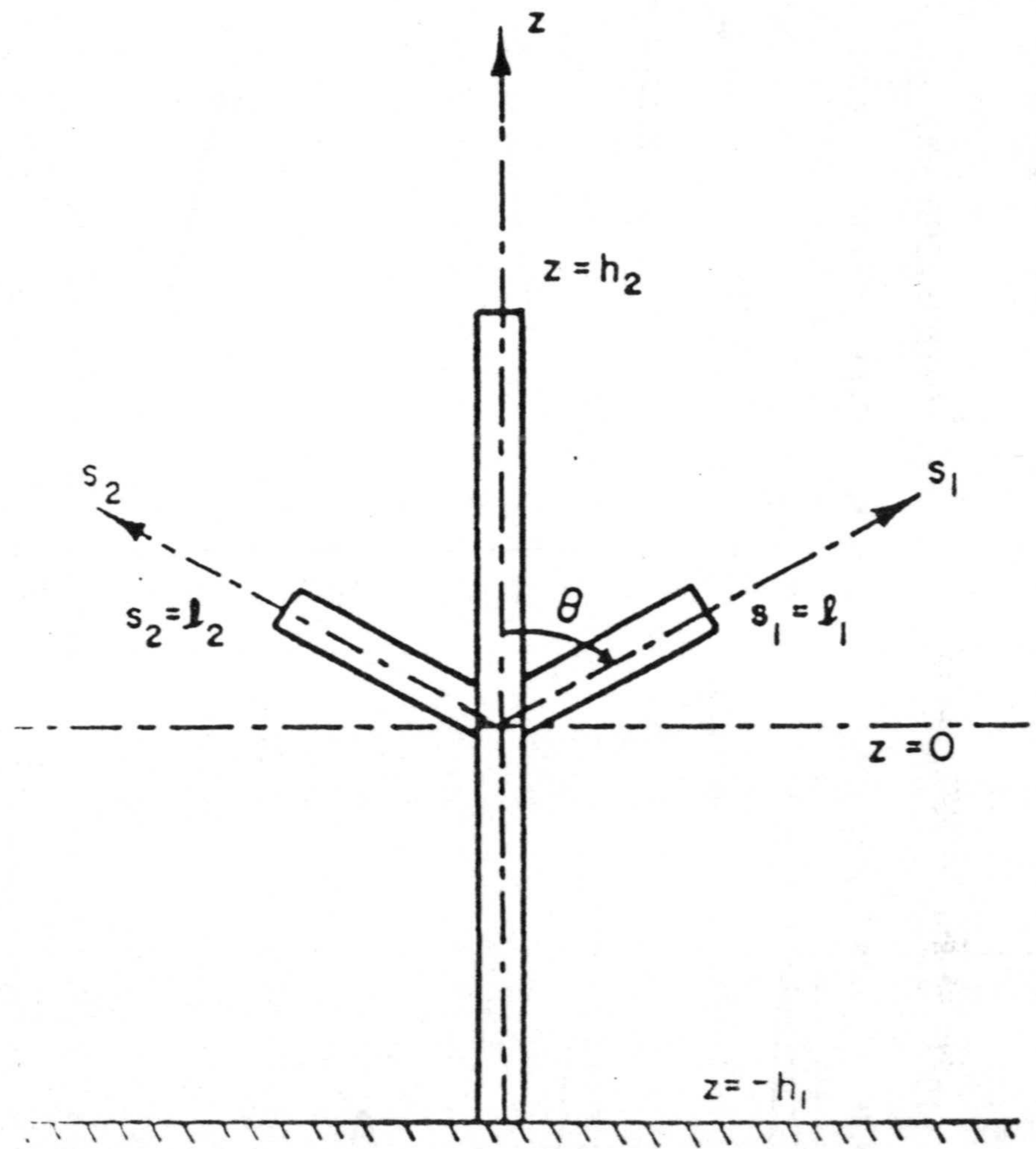


Fig. 4.104.- Geometría de la cruz en uve frente a tierra.

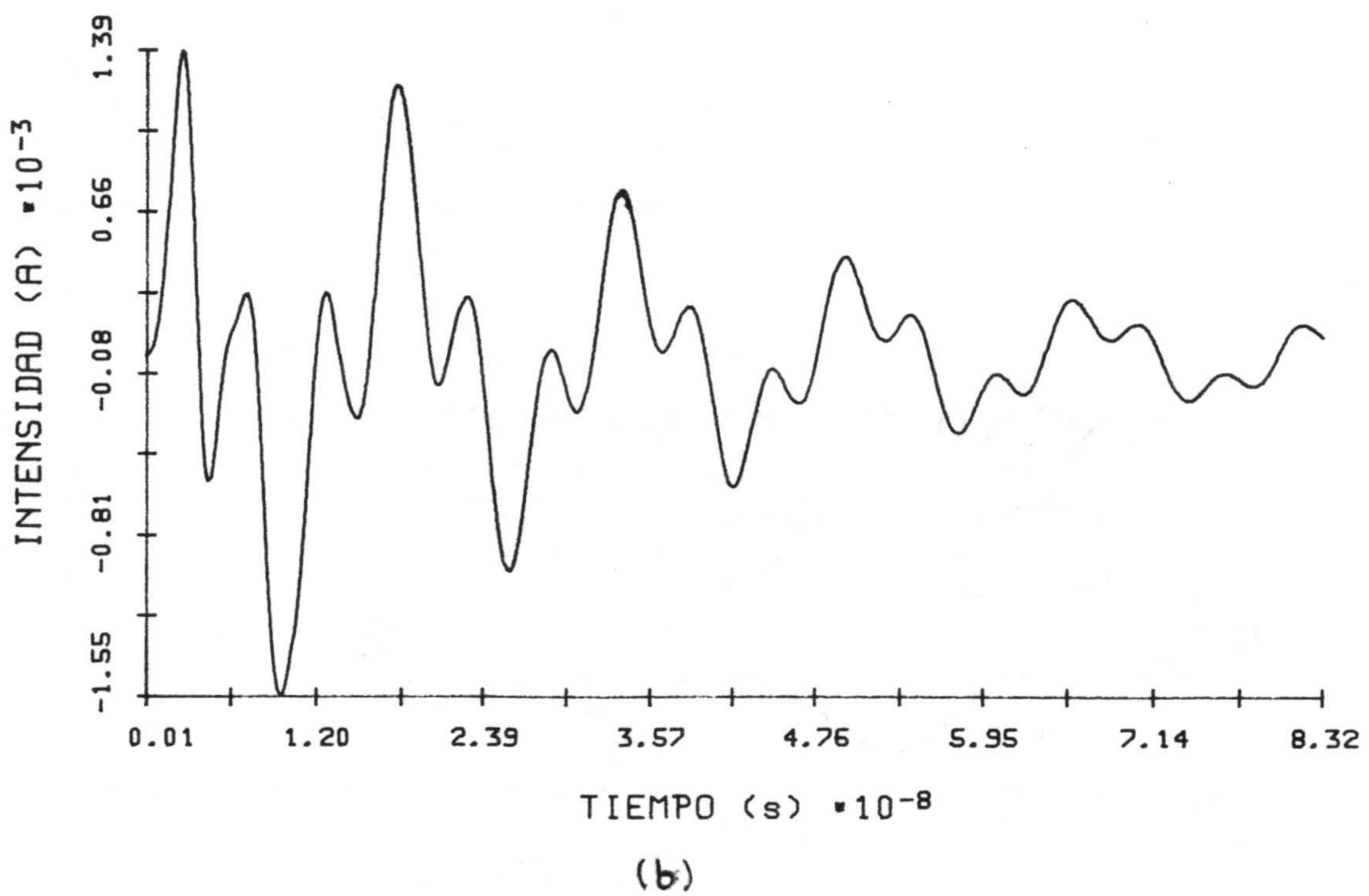
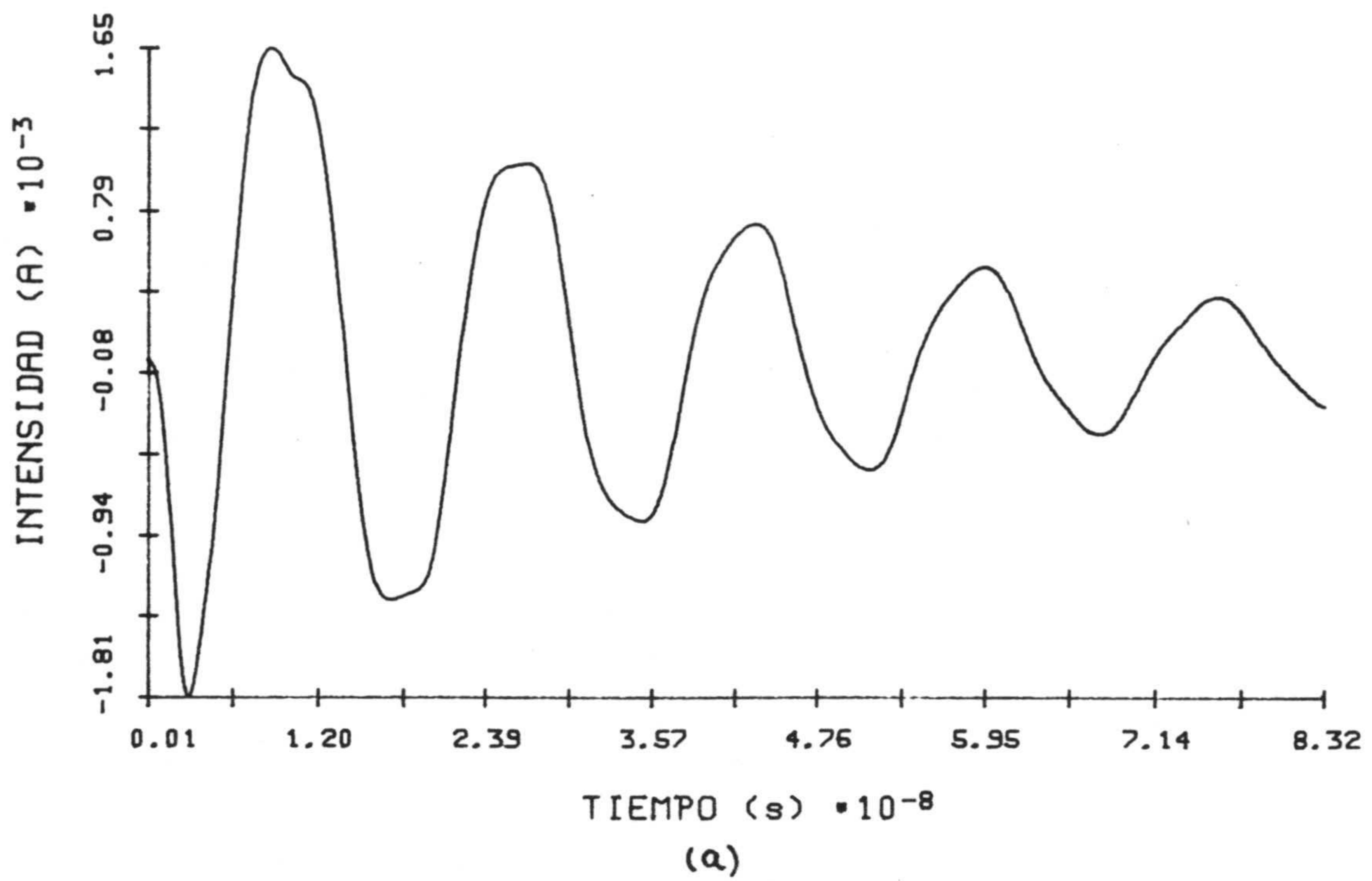
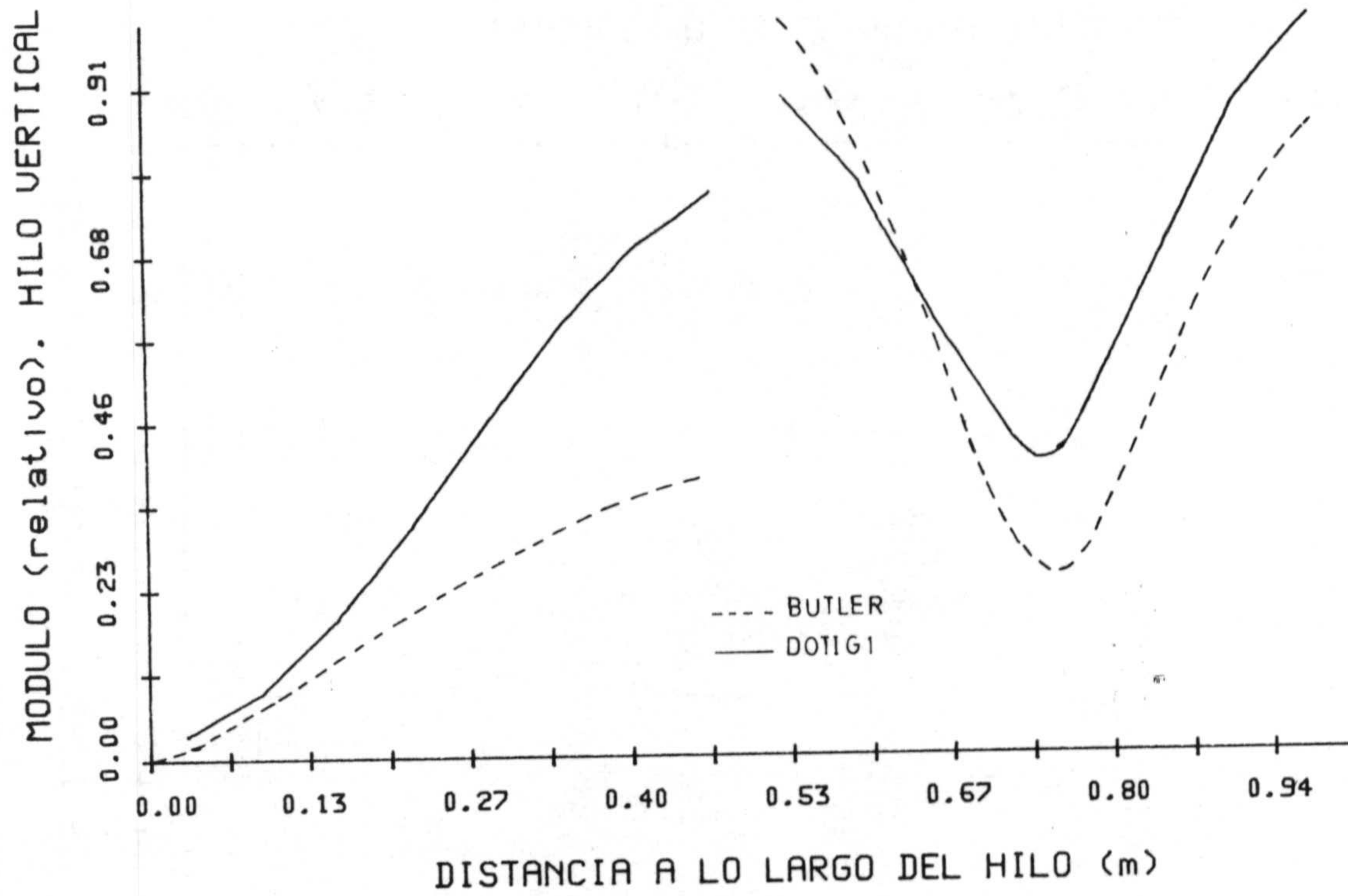
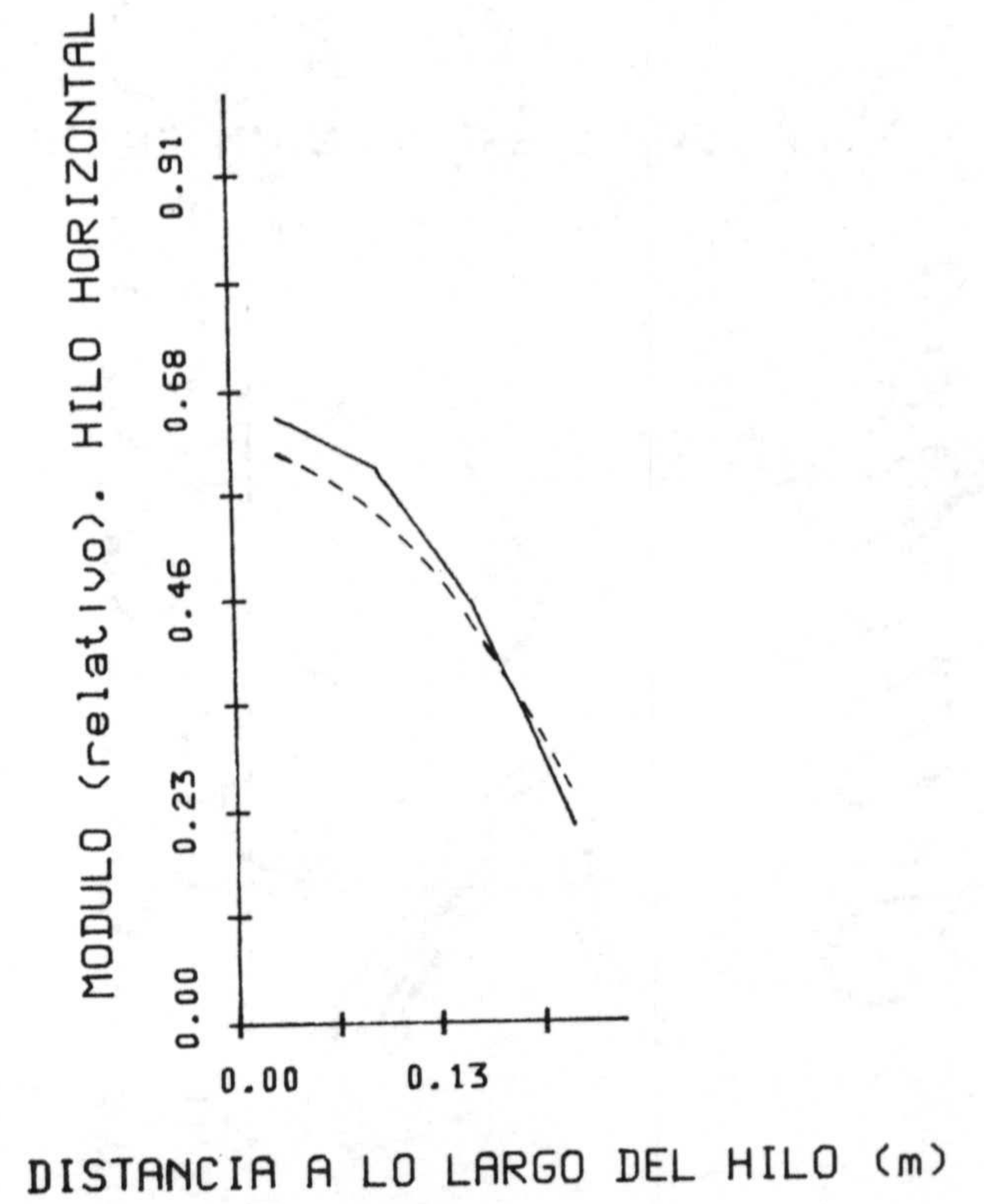


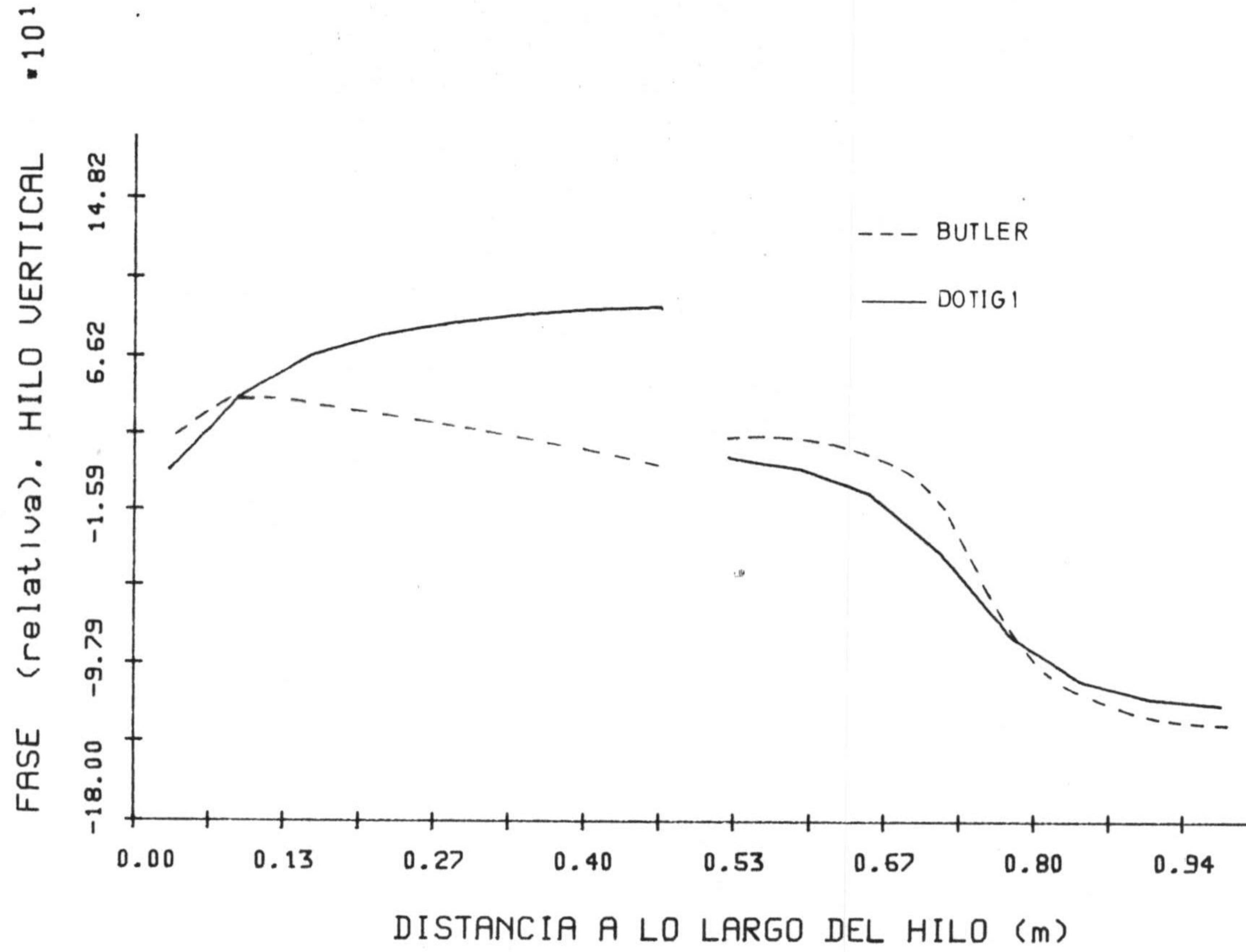
Fig. 4.105.- Intensidad de corriente en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a: a) la unión en el hilo 1, b) tierra en el hilo 2, ($l_1 = l_2 = 0.25$ m, $h_1 = h_2 = 0.5$ m).



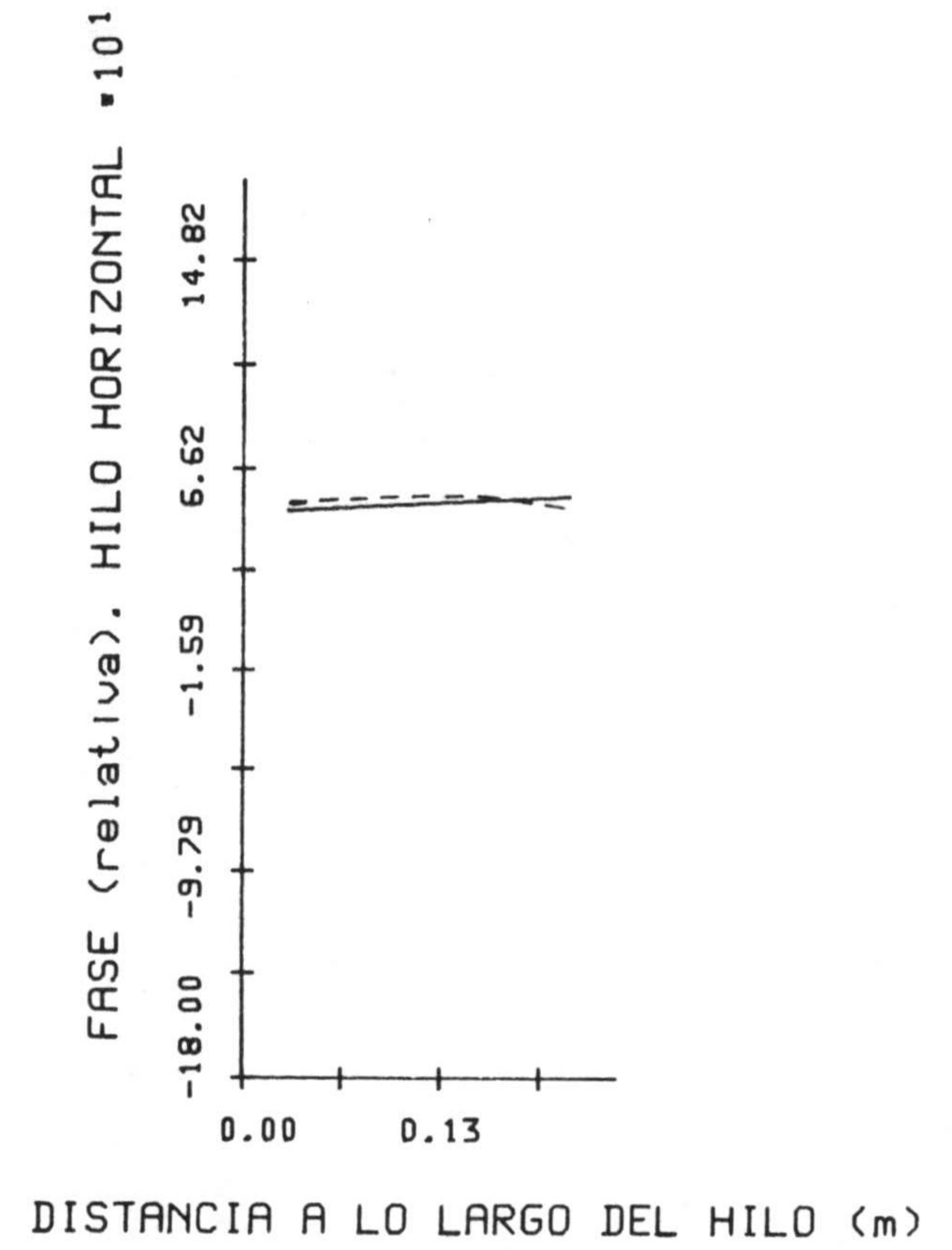
(a)



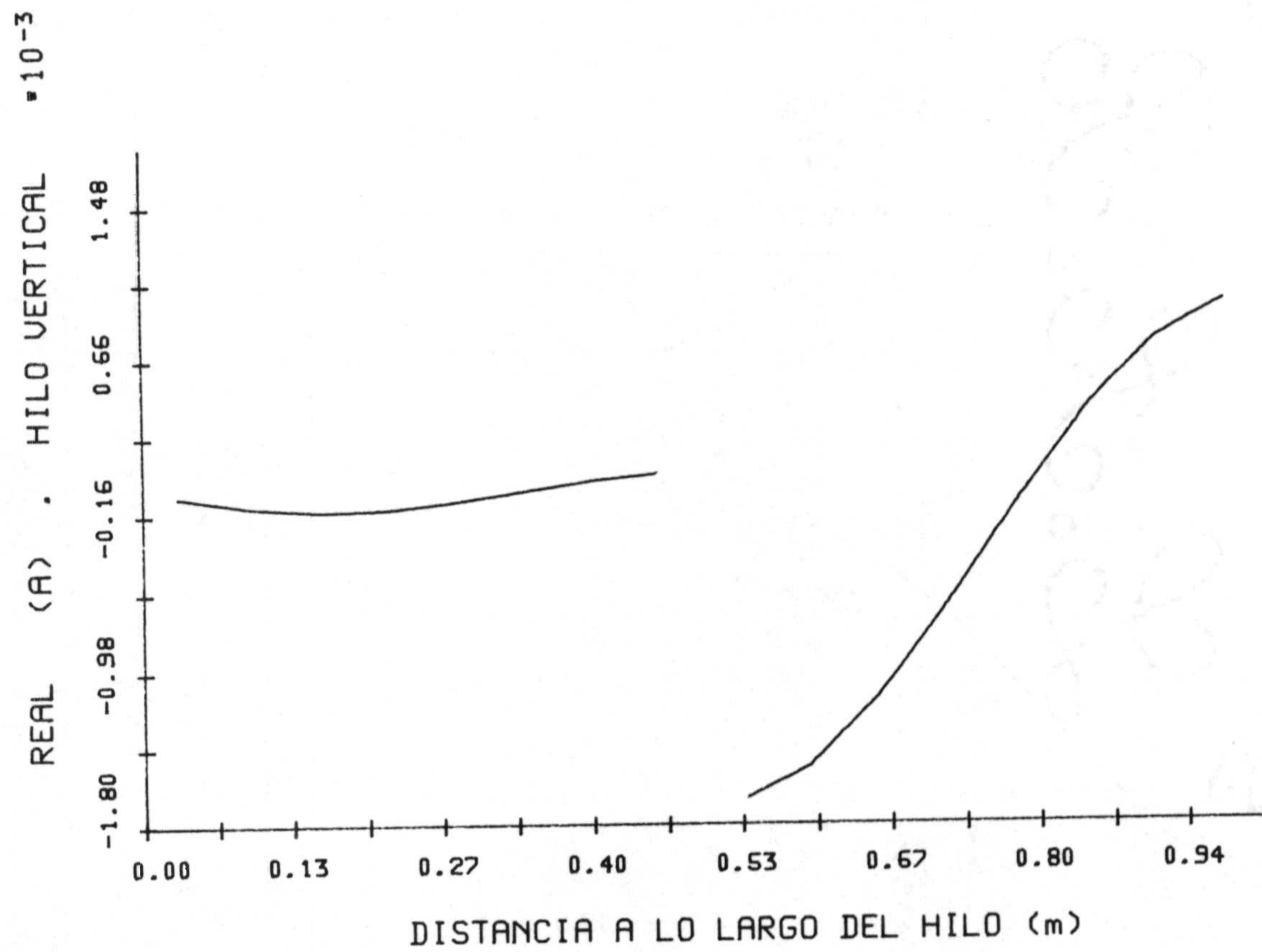
(b)



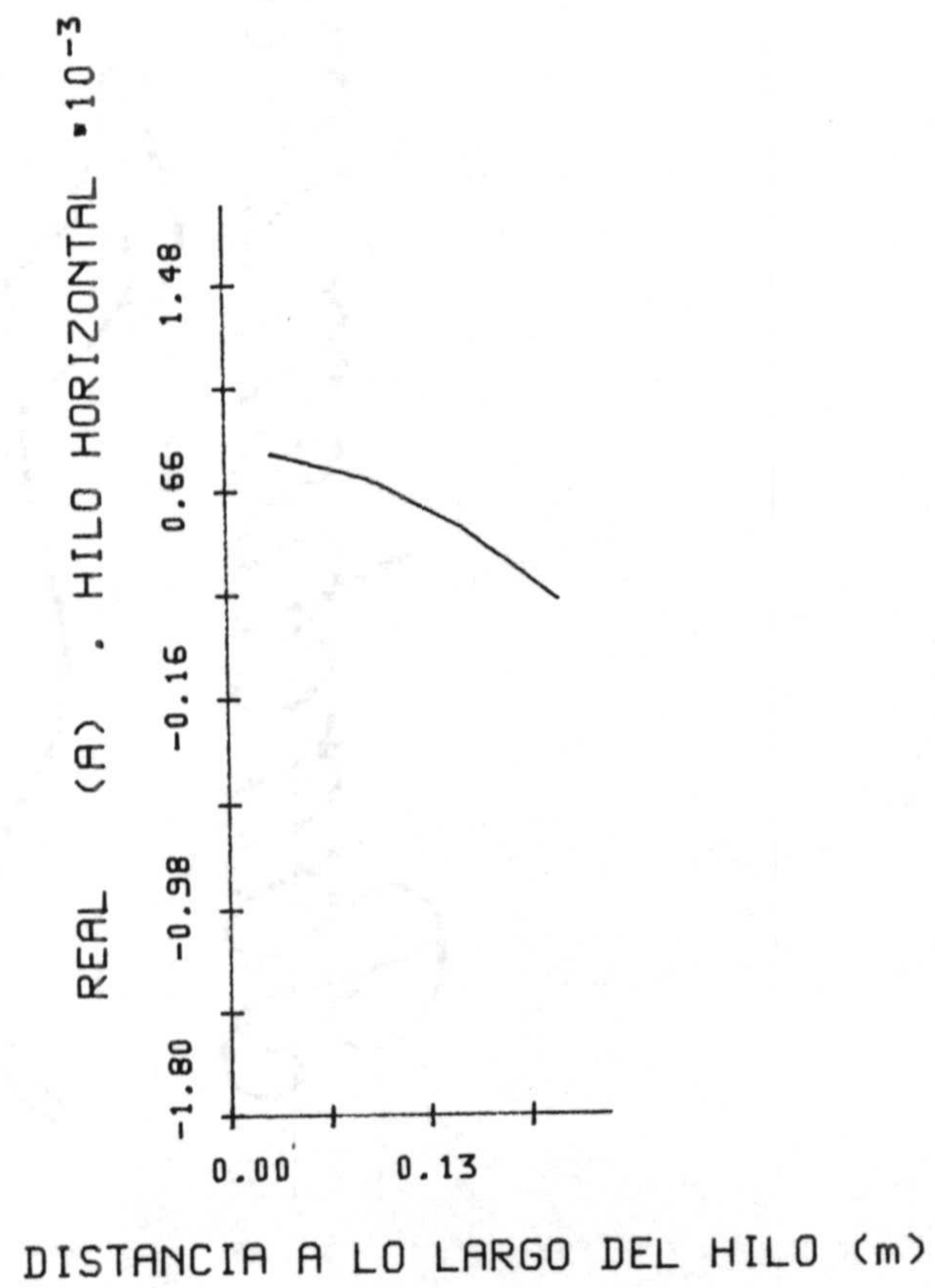
(c)



(d)

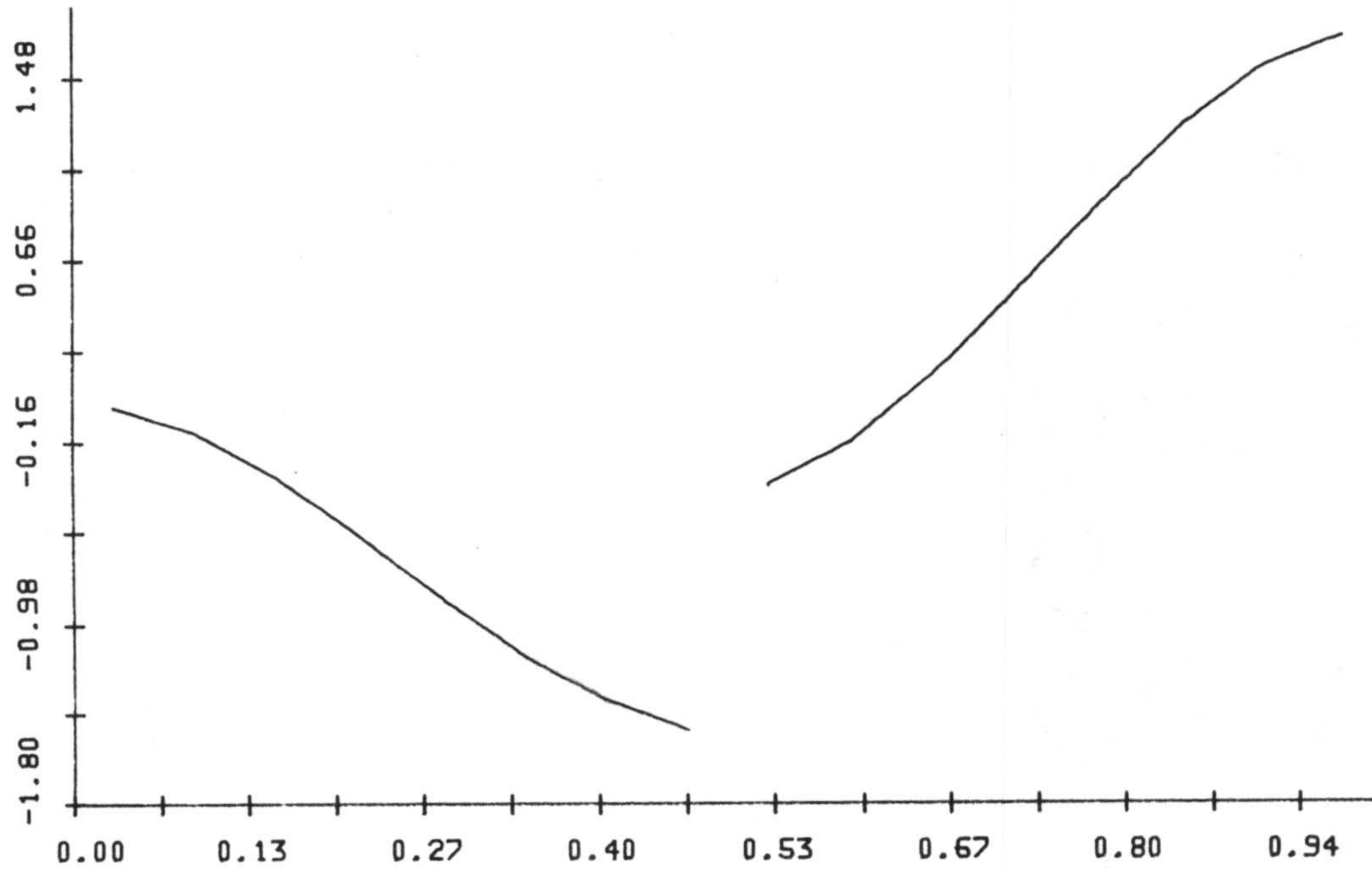


(e)



(f)

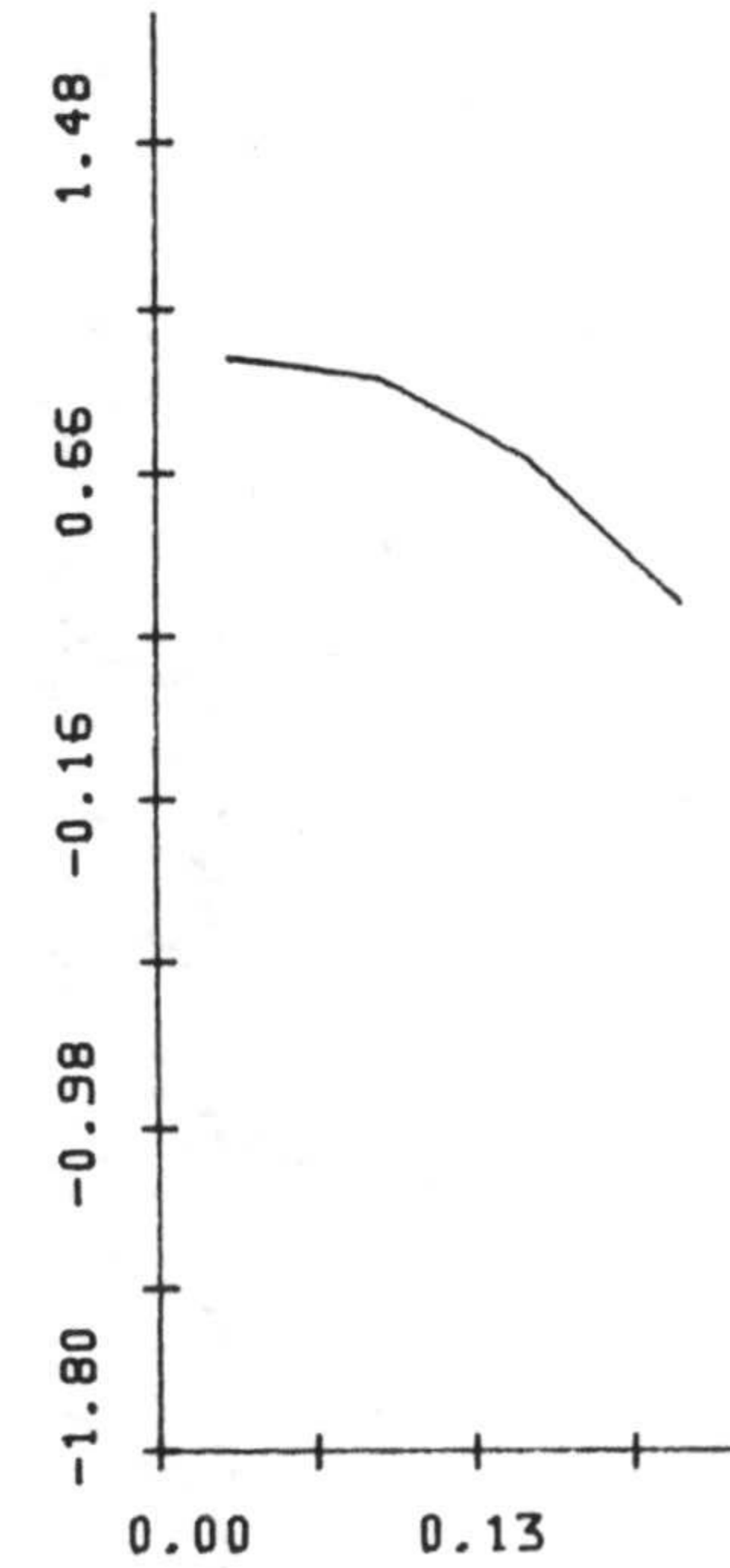
IMAGINARIA (A) . HILO VERTICAL $\cdot 10^{-3}$



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(g)

IMAGINARIA (A) . HILO HORIZONTAL $\cdot 10^{-3}$



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(h)

Fig. 4.106.- Cociente entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m. a) Módulo hilo vertical b) Módulo hilo horizontal c) Fase hilo vertical d) Fase hilo horizontal e) Parte Real hilo vertical f) Parte Real hilo horizontal g) Parte Imaginaria hilo vertical h) Parte Imaginaria hilo horizontal. ($l_1 = l_2 = 0.25$ m, $h_1 = h_2 = 0.5$ m).

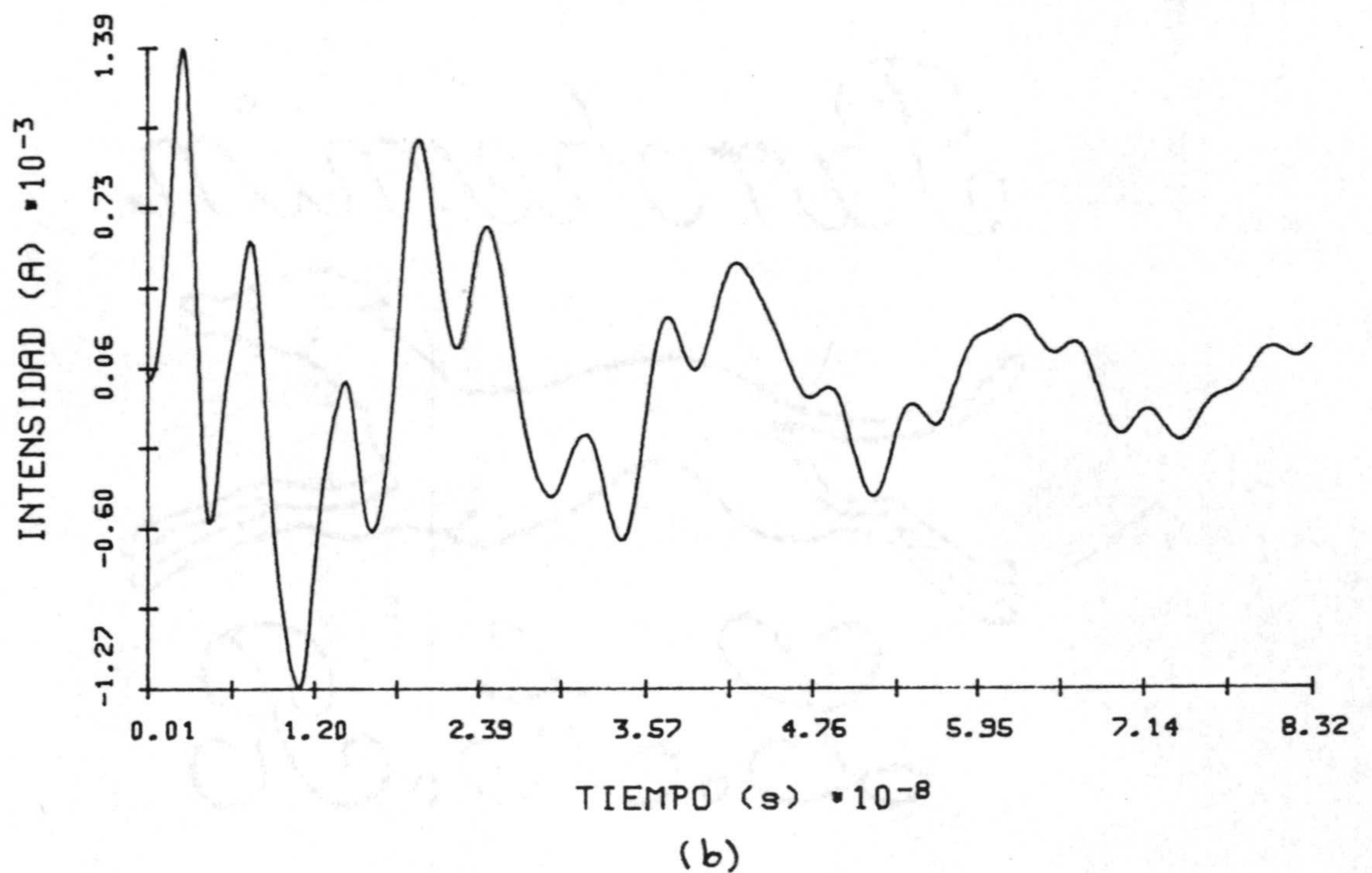
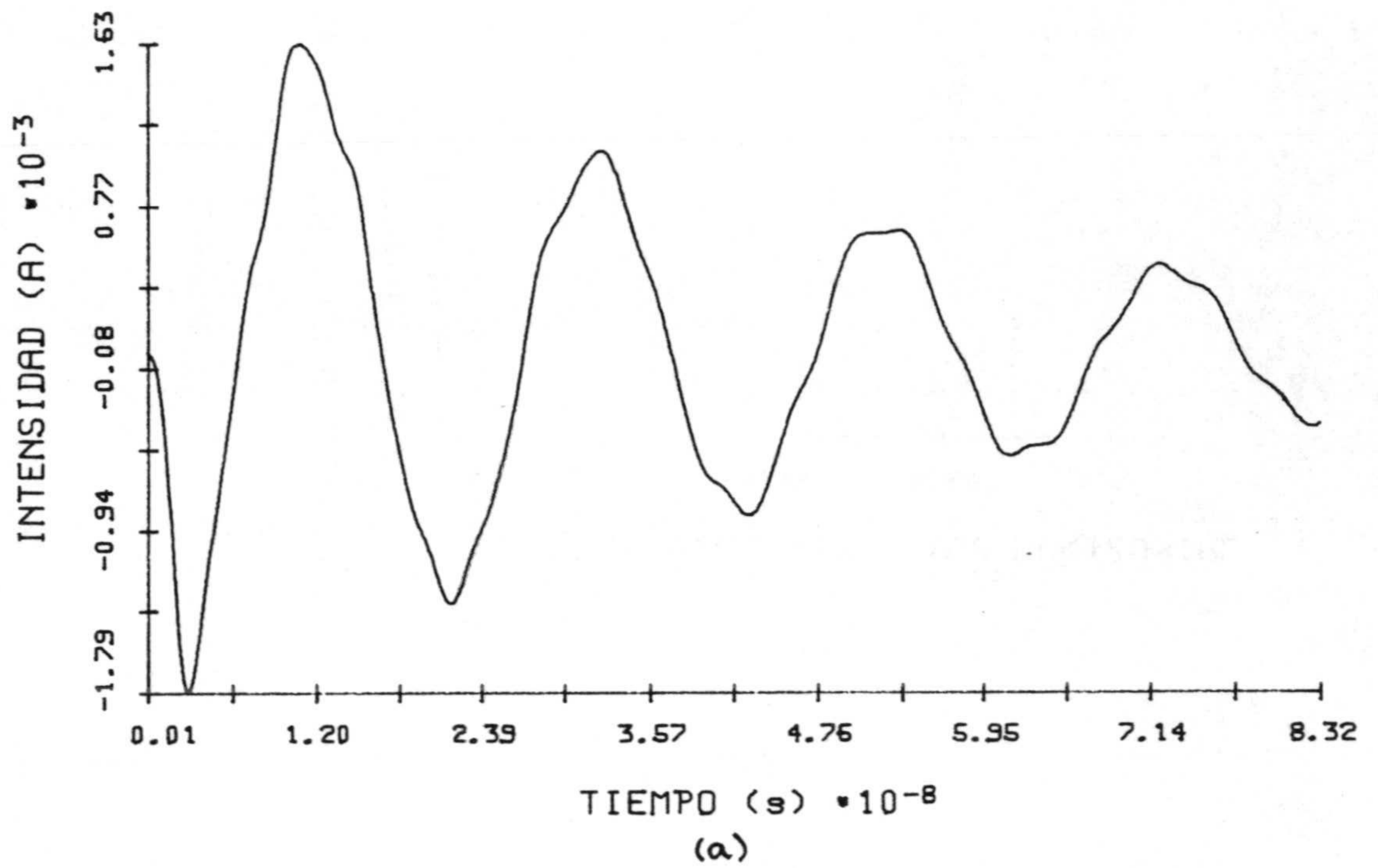
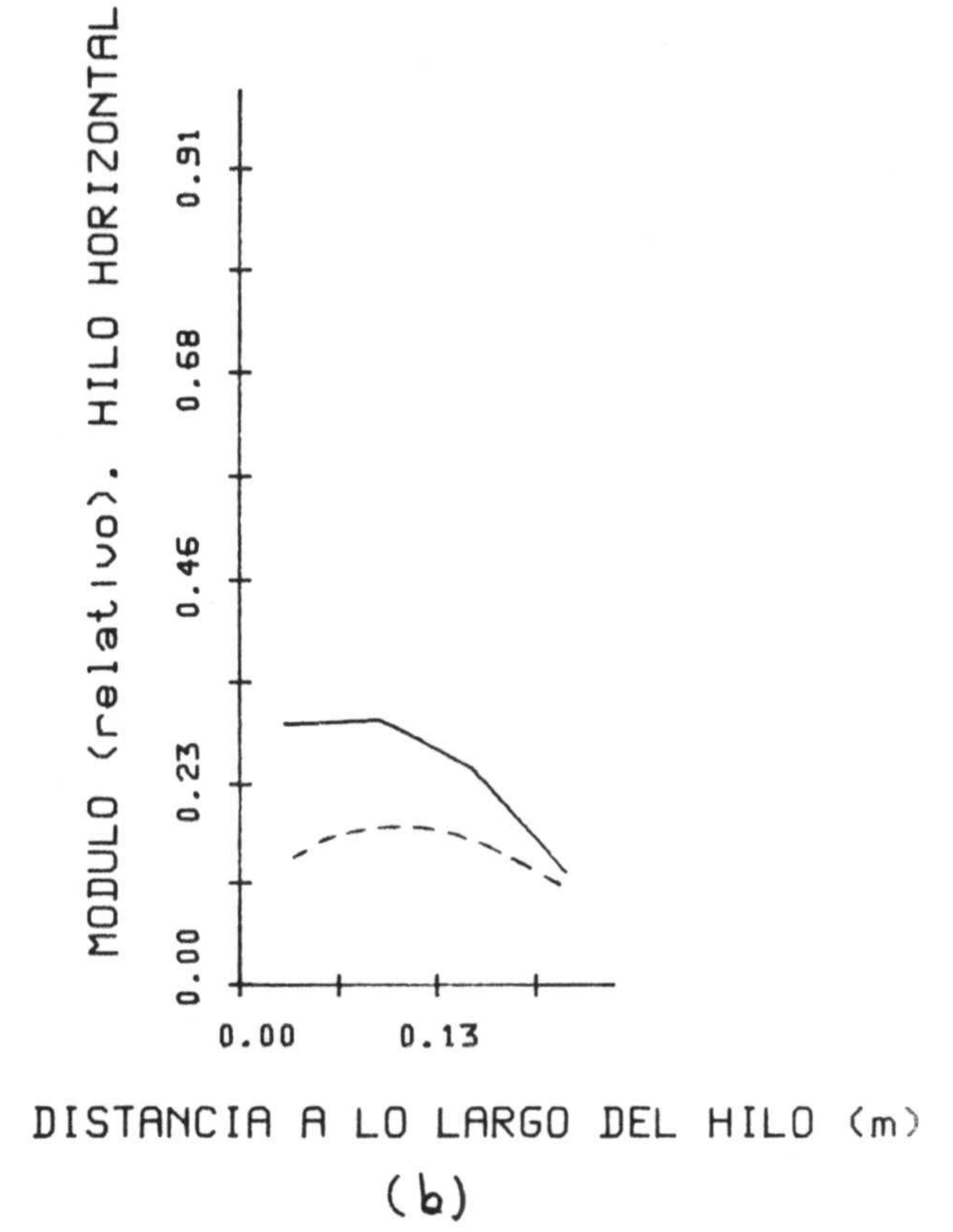
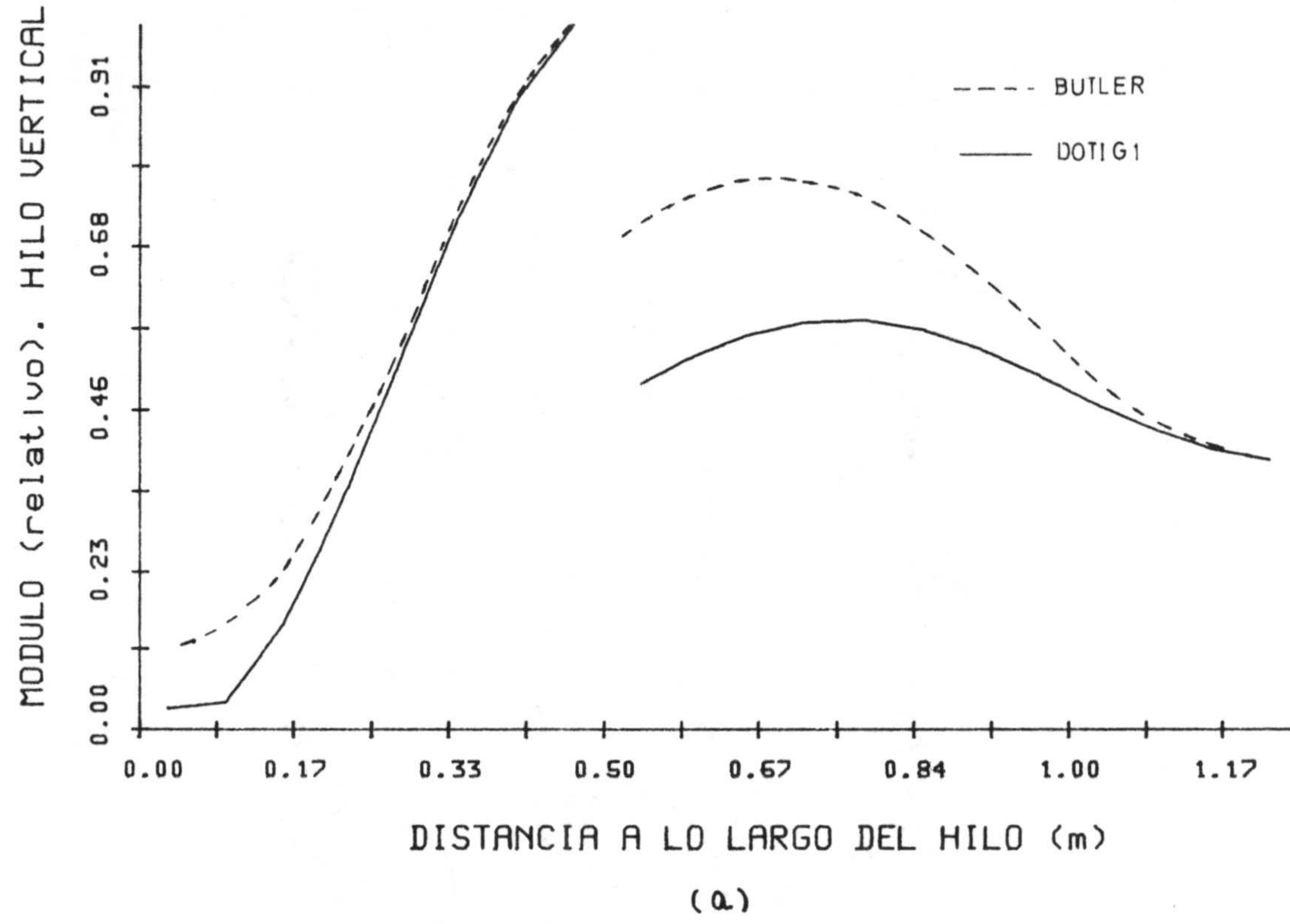
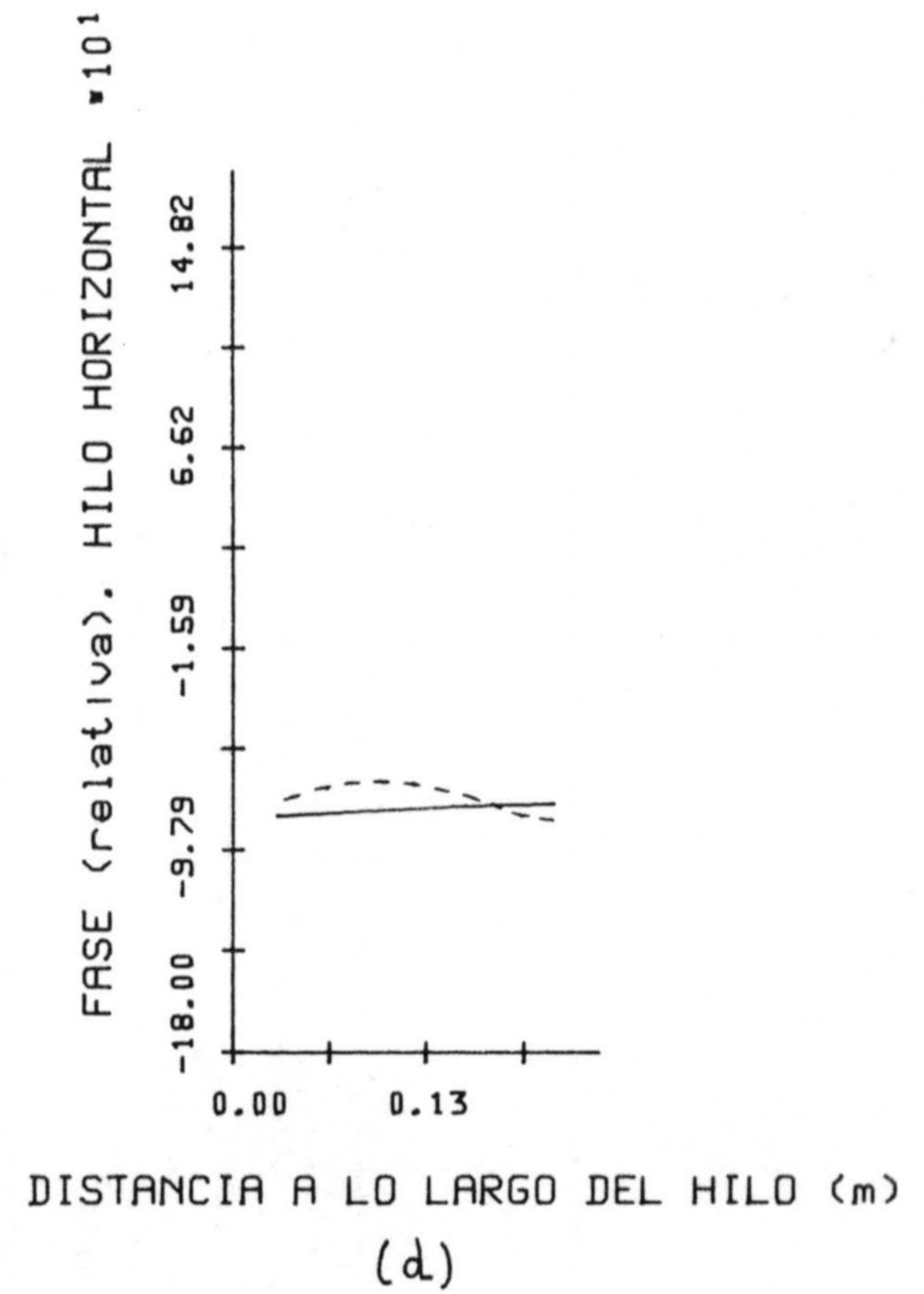
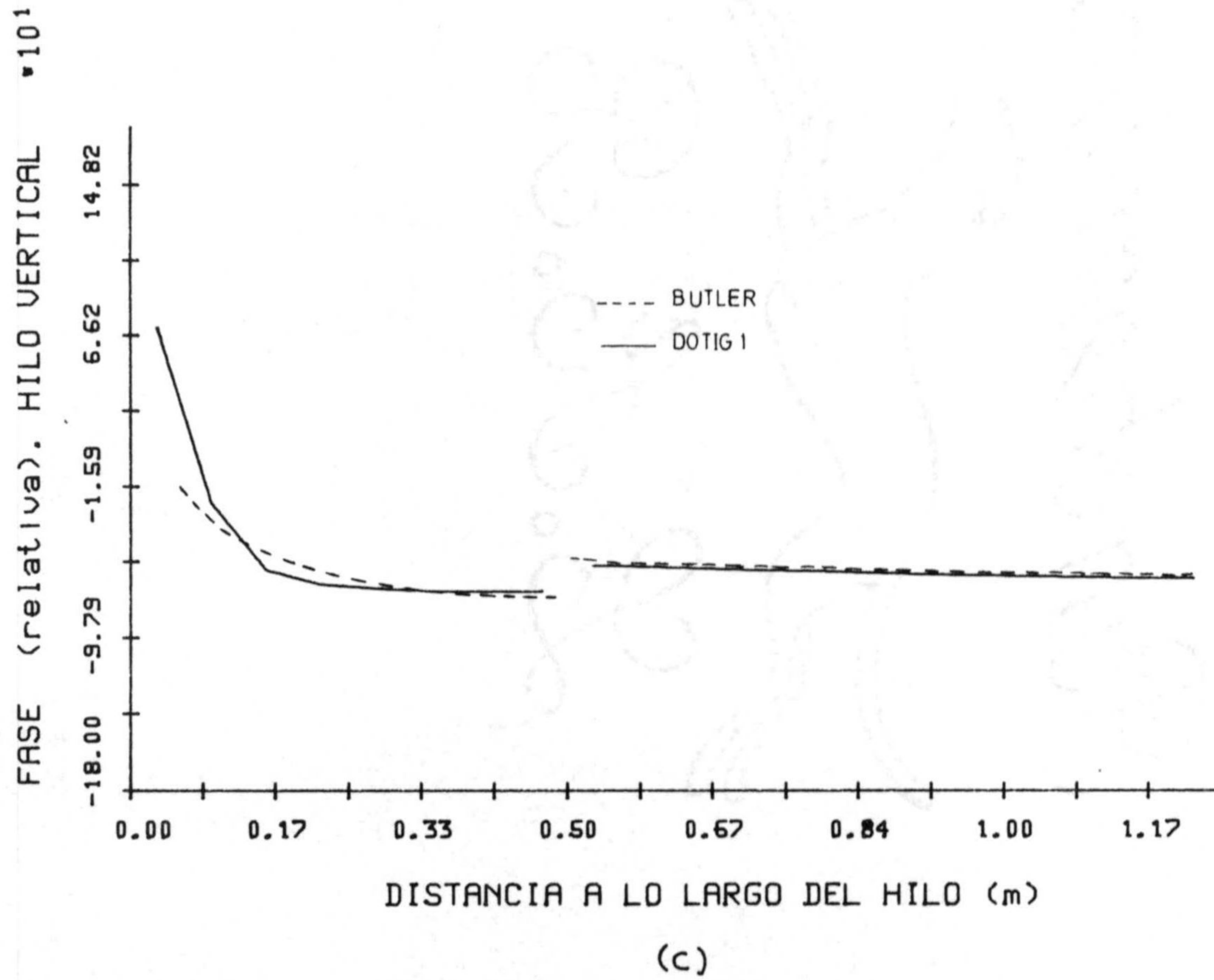
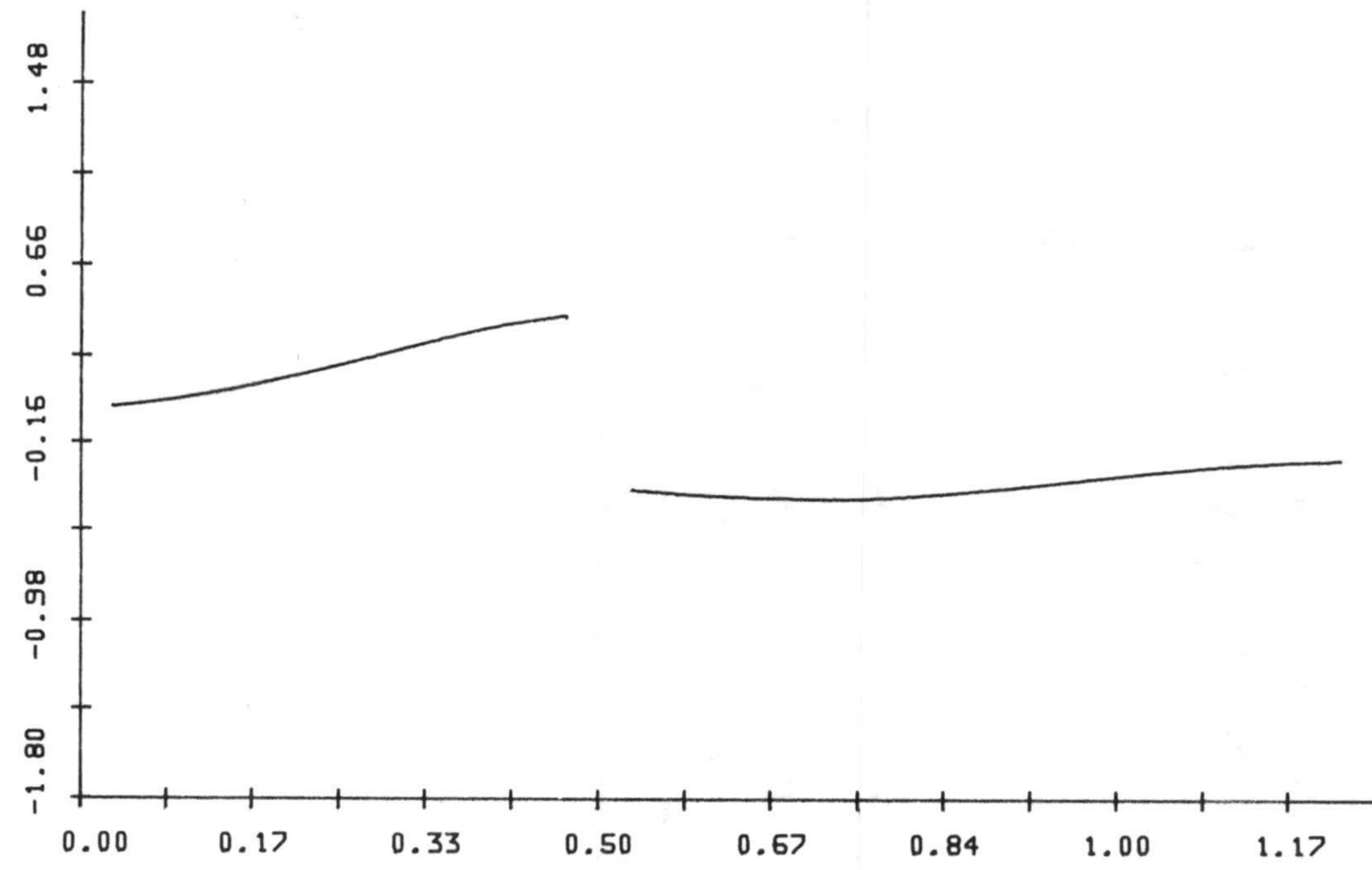


Fig. 4.107.- Intensidad de corriente en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a: a) la unión en el hilo 1, b) tierra en el hilo 2, ($l_1 = l_2 = 0.25$ m, $h_1 = 0.75$ m, $h_2 = 0.5$ m).





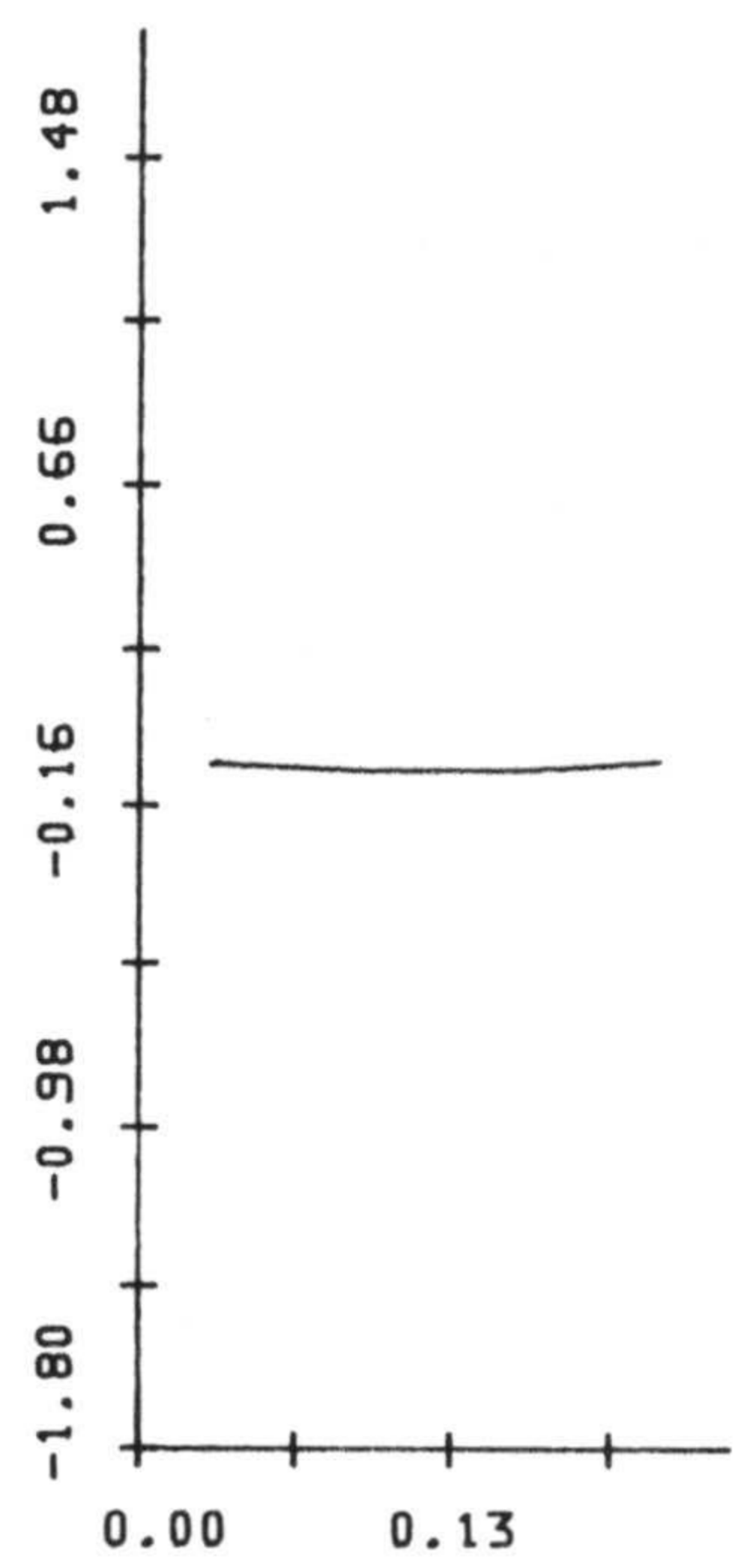
REAL (A) . HILO VERTICAL $\cdot 10^{-3}$



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(e)

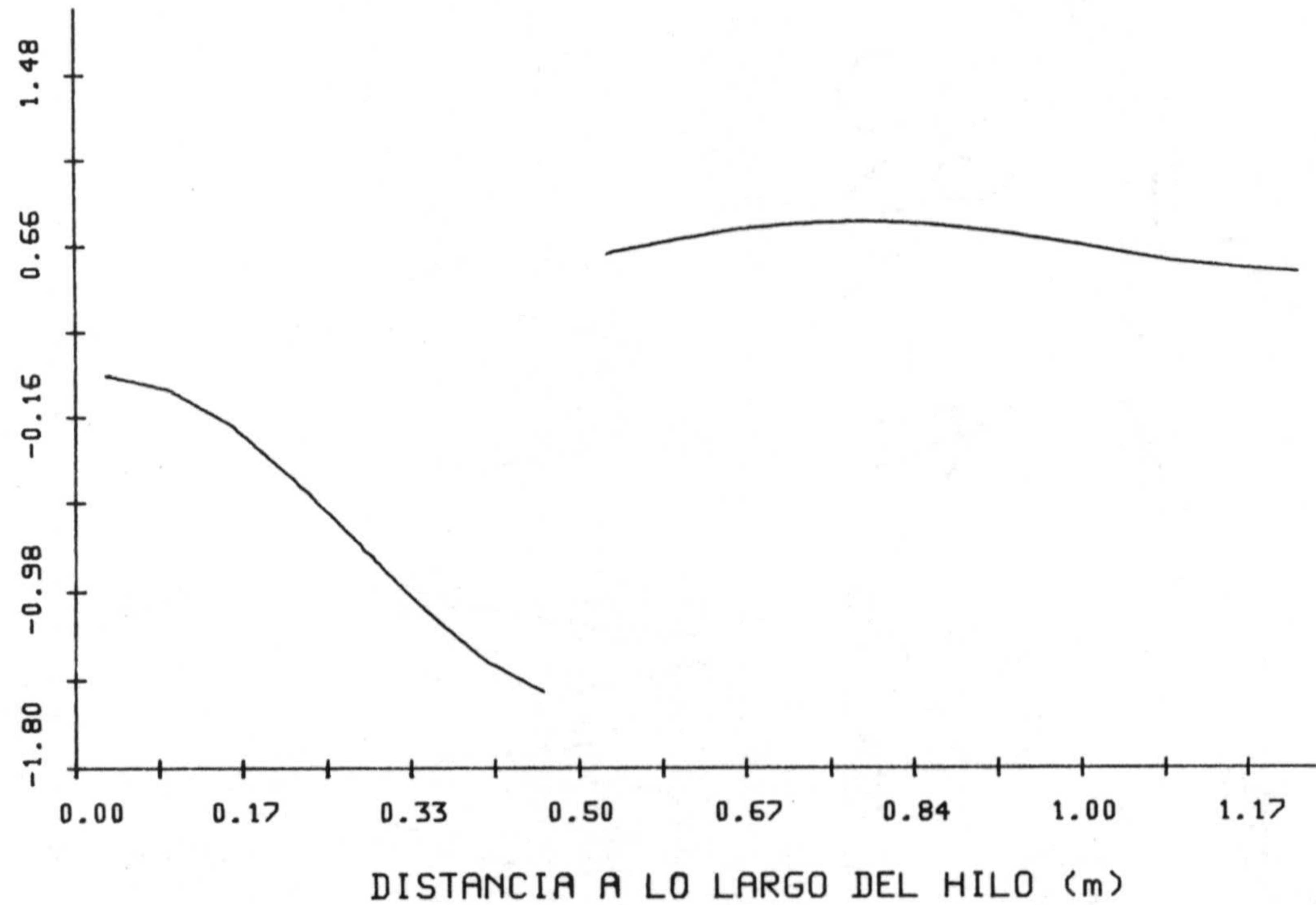
REAL (A) . HILO HORIZONTAL $\cdot 10^{-3}$



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

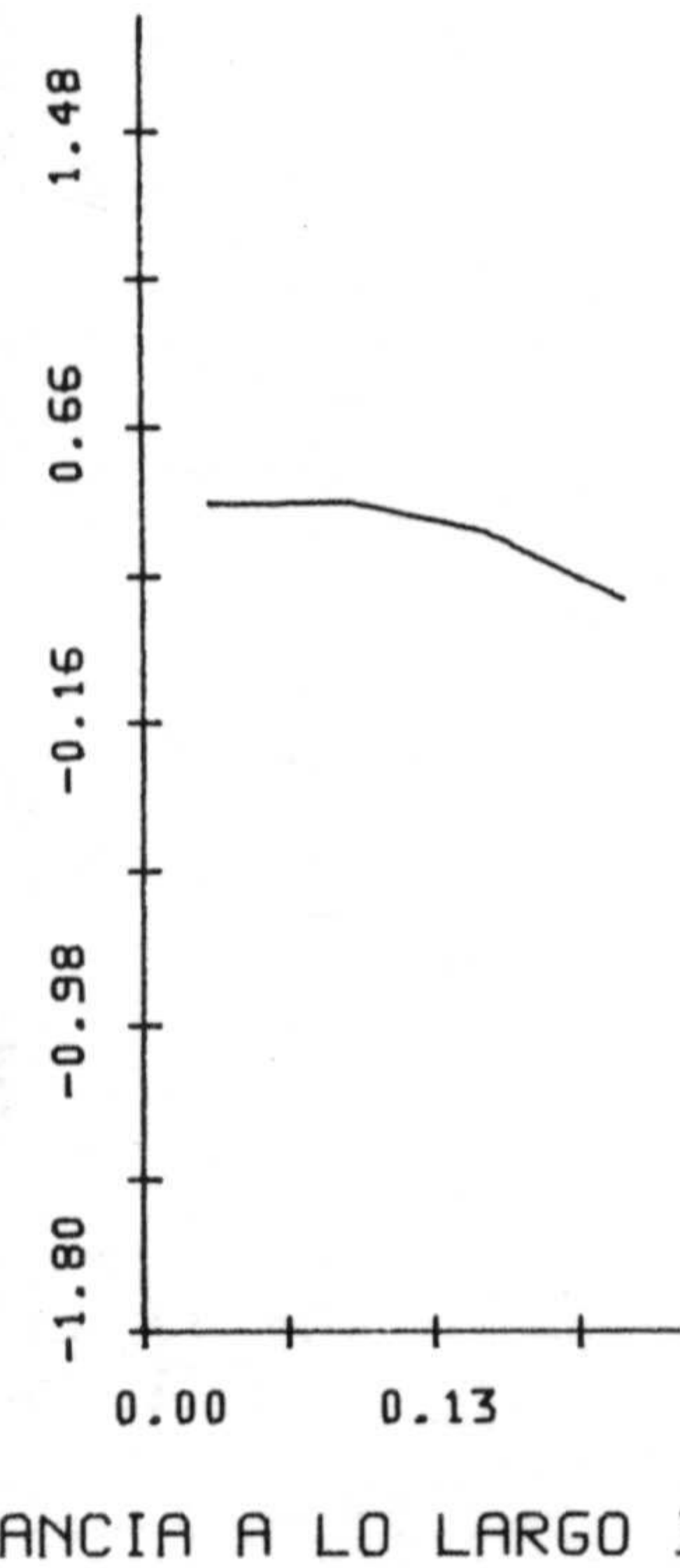
(f)

IMAGINARIA (A) . HILO VERTICAL $\cdot 10^{-3}$



(g)

IMAGINARIA (A) . HILO HORIZONTAL $\cdot 10^{-3}$



(h)

Fig. 4.108.- Cociente entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m. a) Módulo hilo vertical b) Módulo hilo horizontal c) Fase hilo vertical d) Fase hilo horizontal e) Parte Real hilo vertical f) Parte Real hilo horizontal g) Parte Imaginaria hilo vertical h) Parte Imaginaria hilo horizontal. ($l_1 = l_2 = 0.25$ m, $h_1 = 0.75$ m, $h_2 = 0.5$ m).

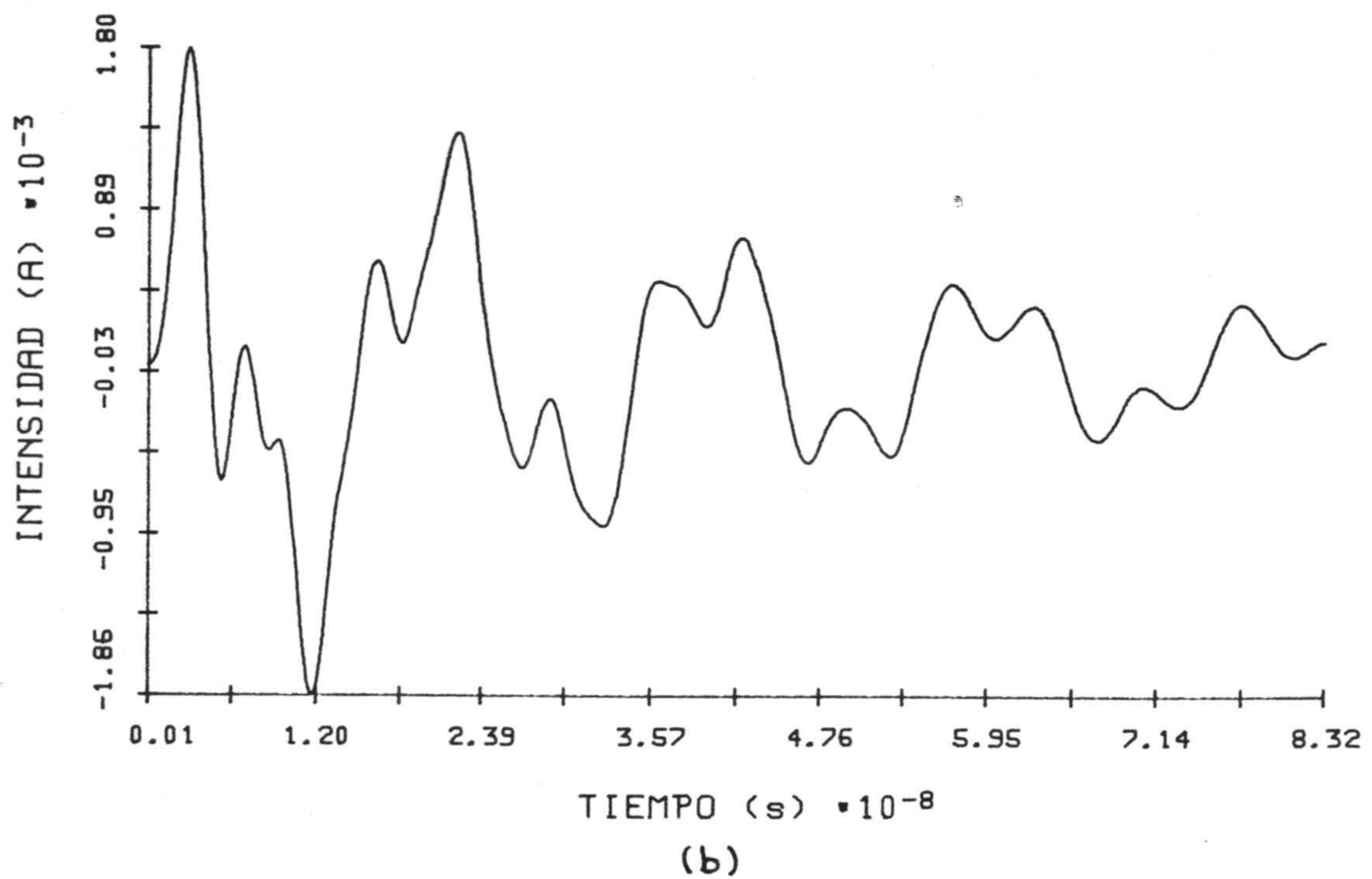
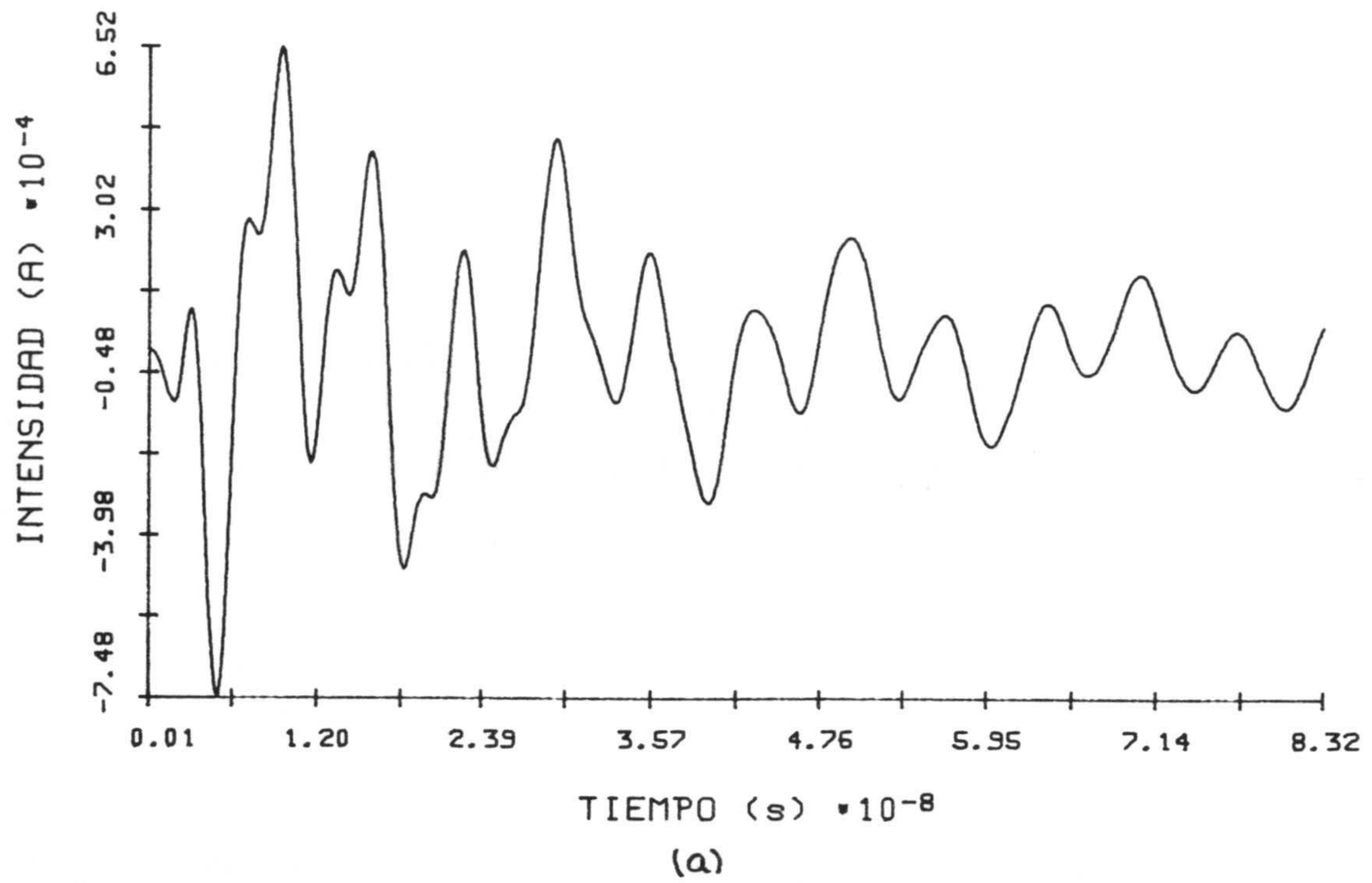
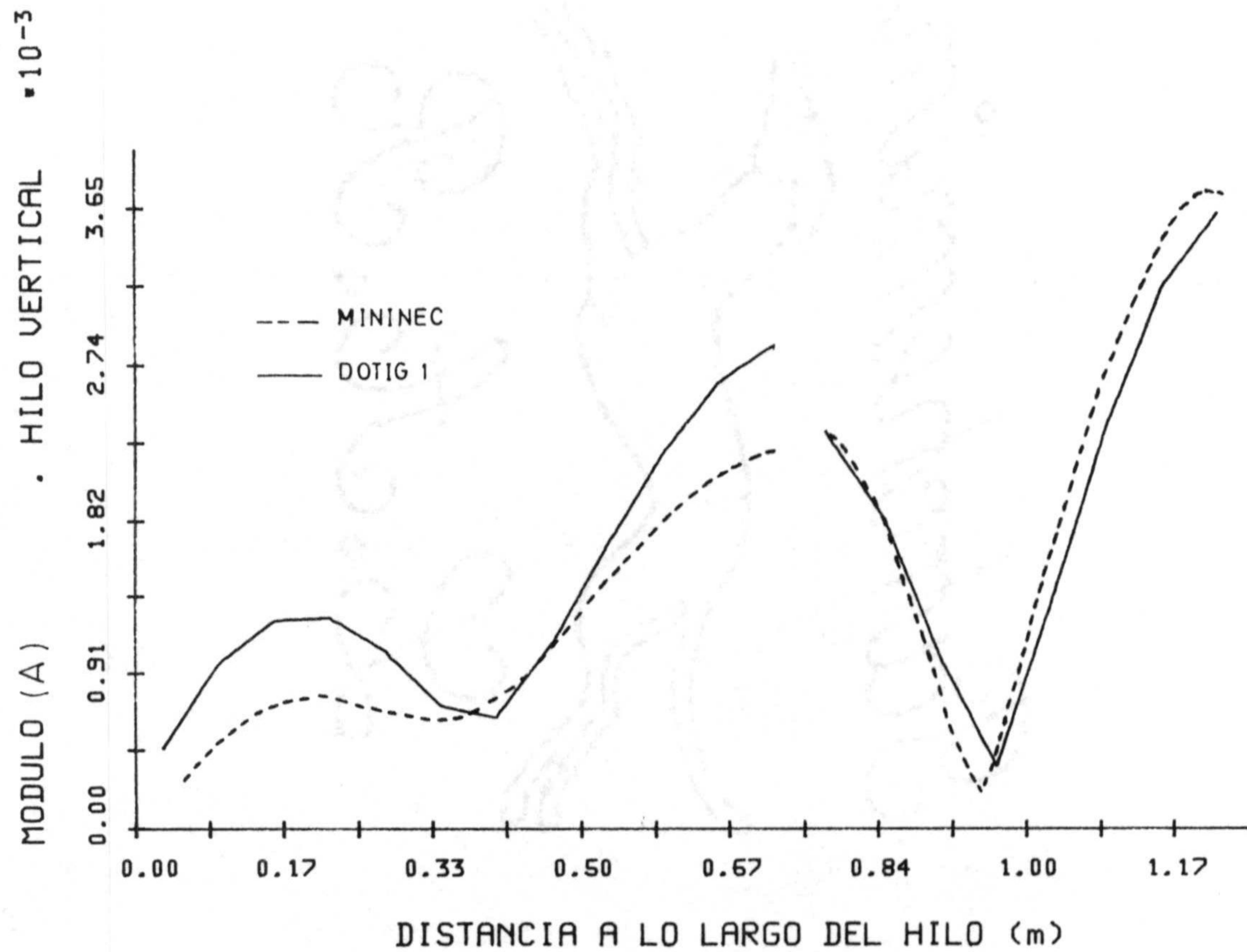
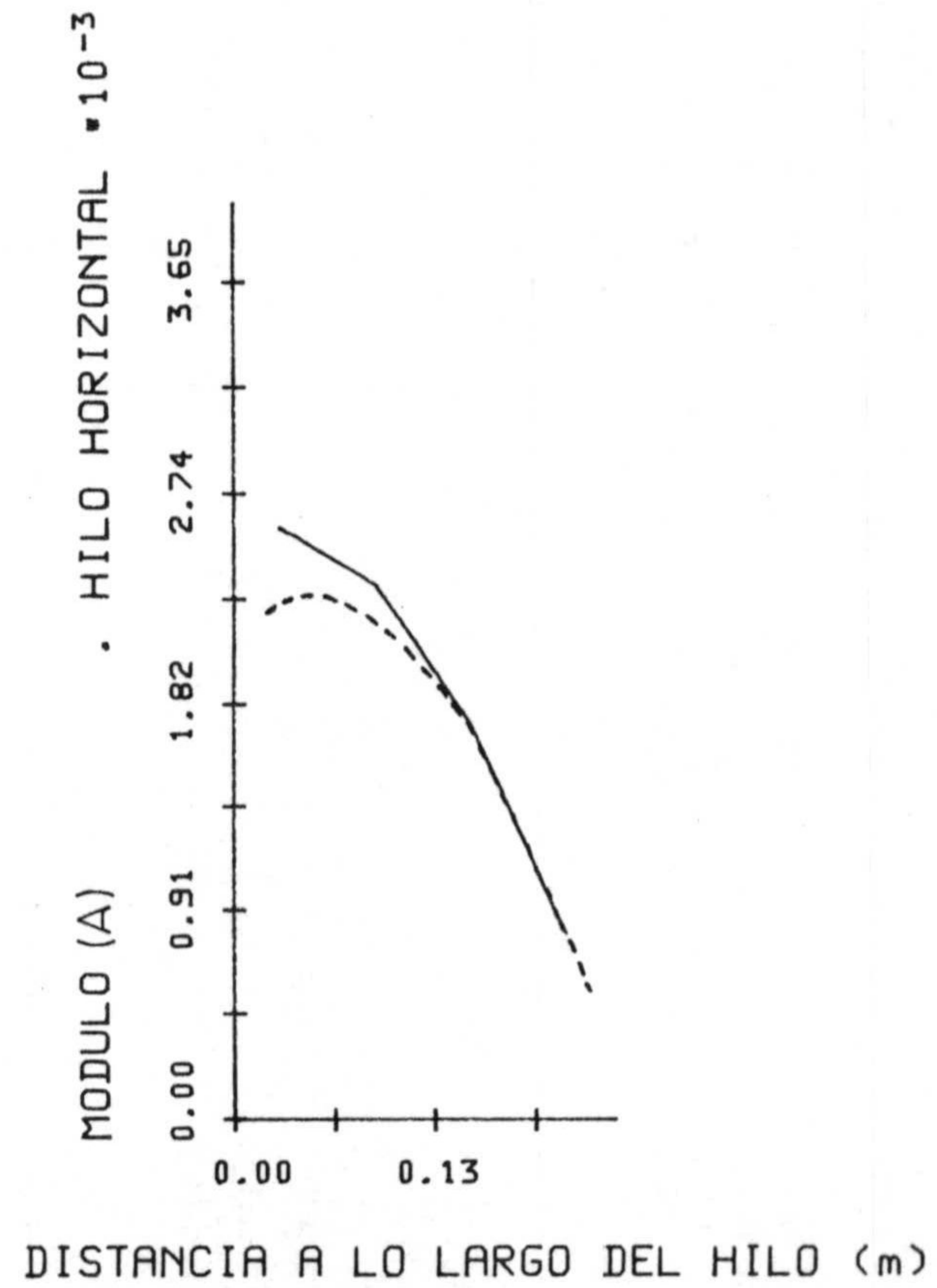


Fig. 4.109.- Intensidad de corriente en función del tiempo en el intervalo espacial más próximo a: a) la unión en el hilo 1, b) tierra en el hilo 2, ($l_1 = l_2 = 0.25$ m, $h_1 = 0.75$ m, $h_2 = 0.5$ m).

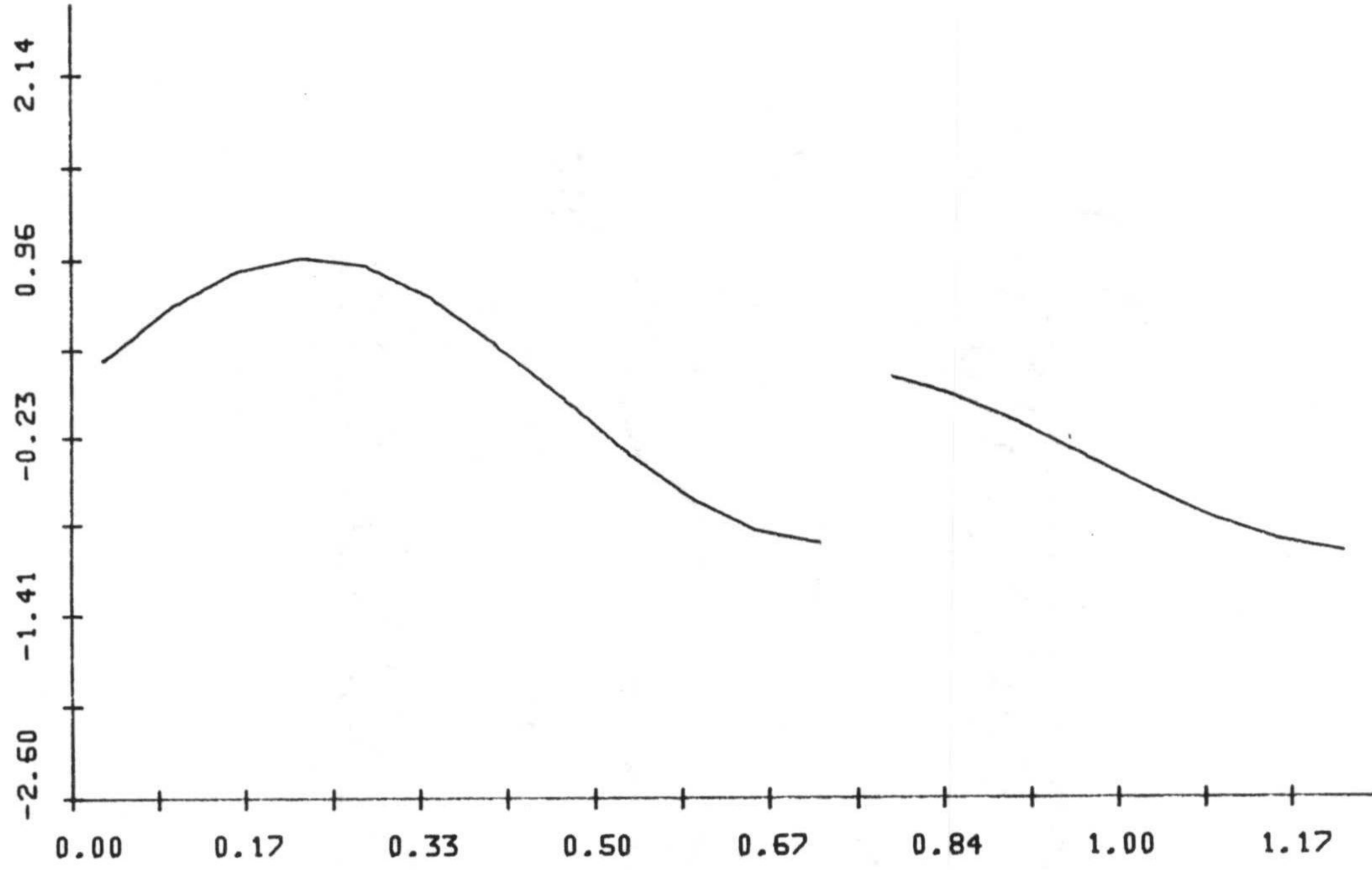


(a)



(b)

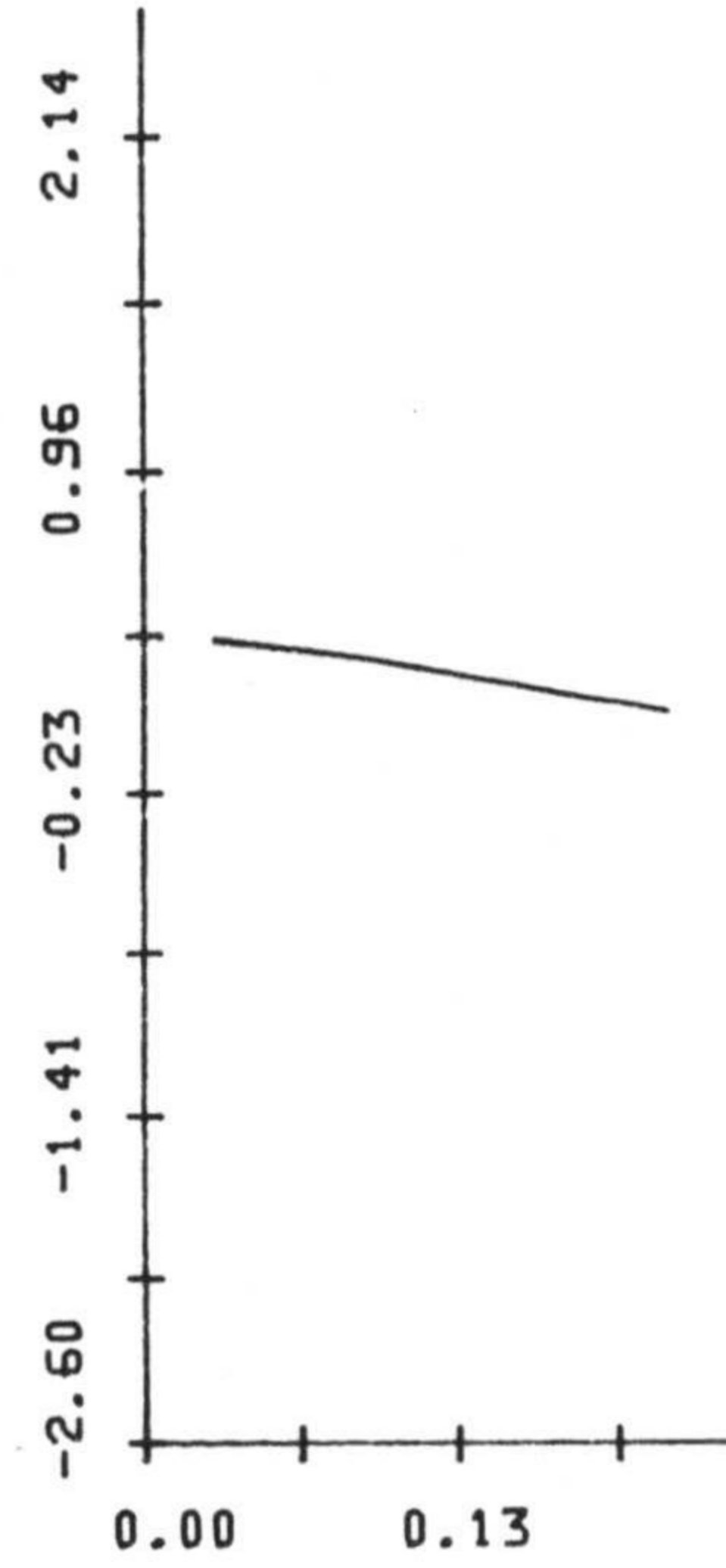
REAL (A) . HILO VERTICAL $\cdot 10^{-3}$



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(c)

REAL (A) . HILO HORIZONTAL $\cdot 10^{-3}$



DISTANCIA A LO LARGO DEL HILO (m)

(d)

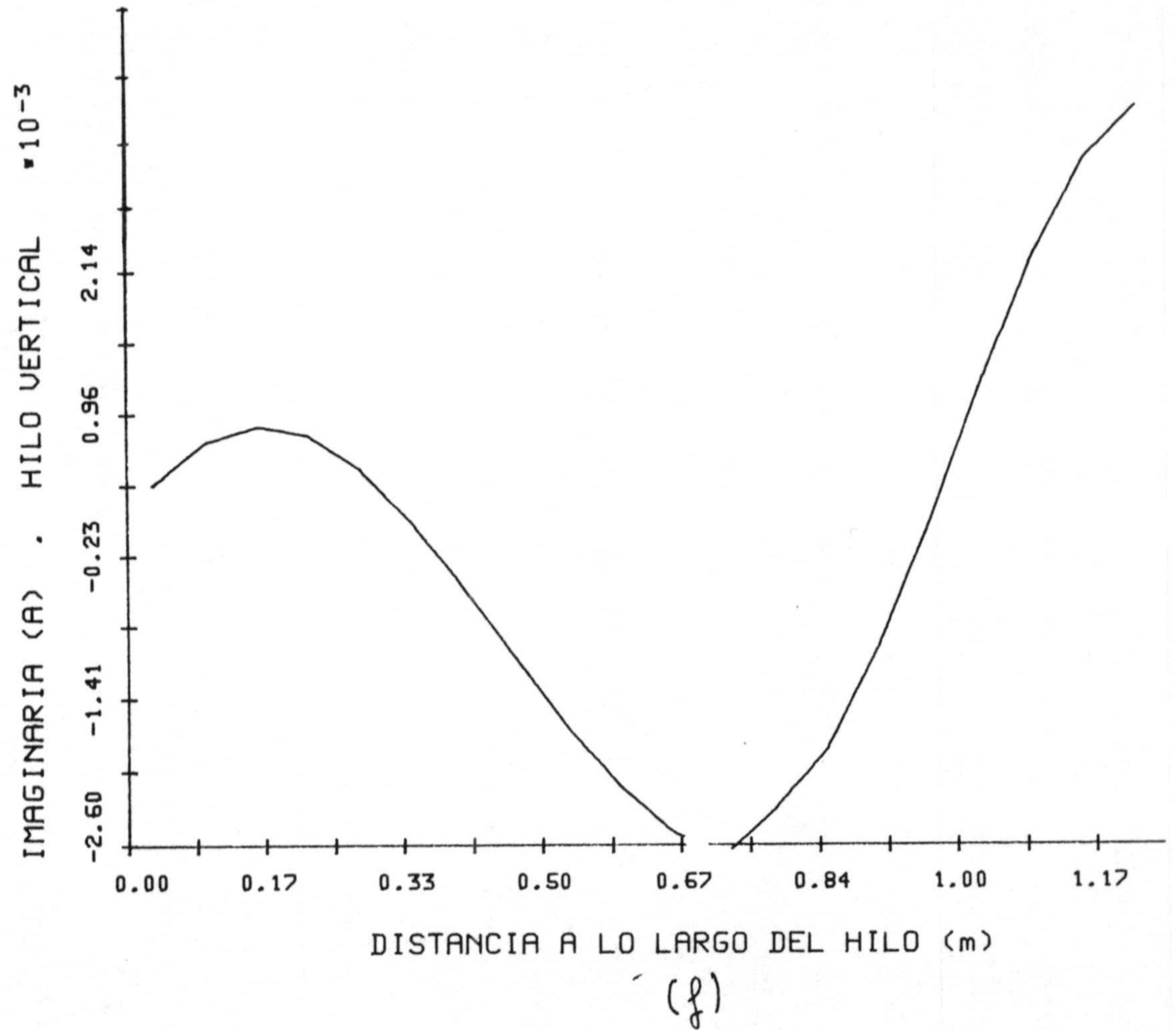
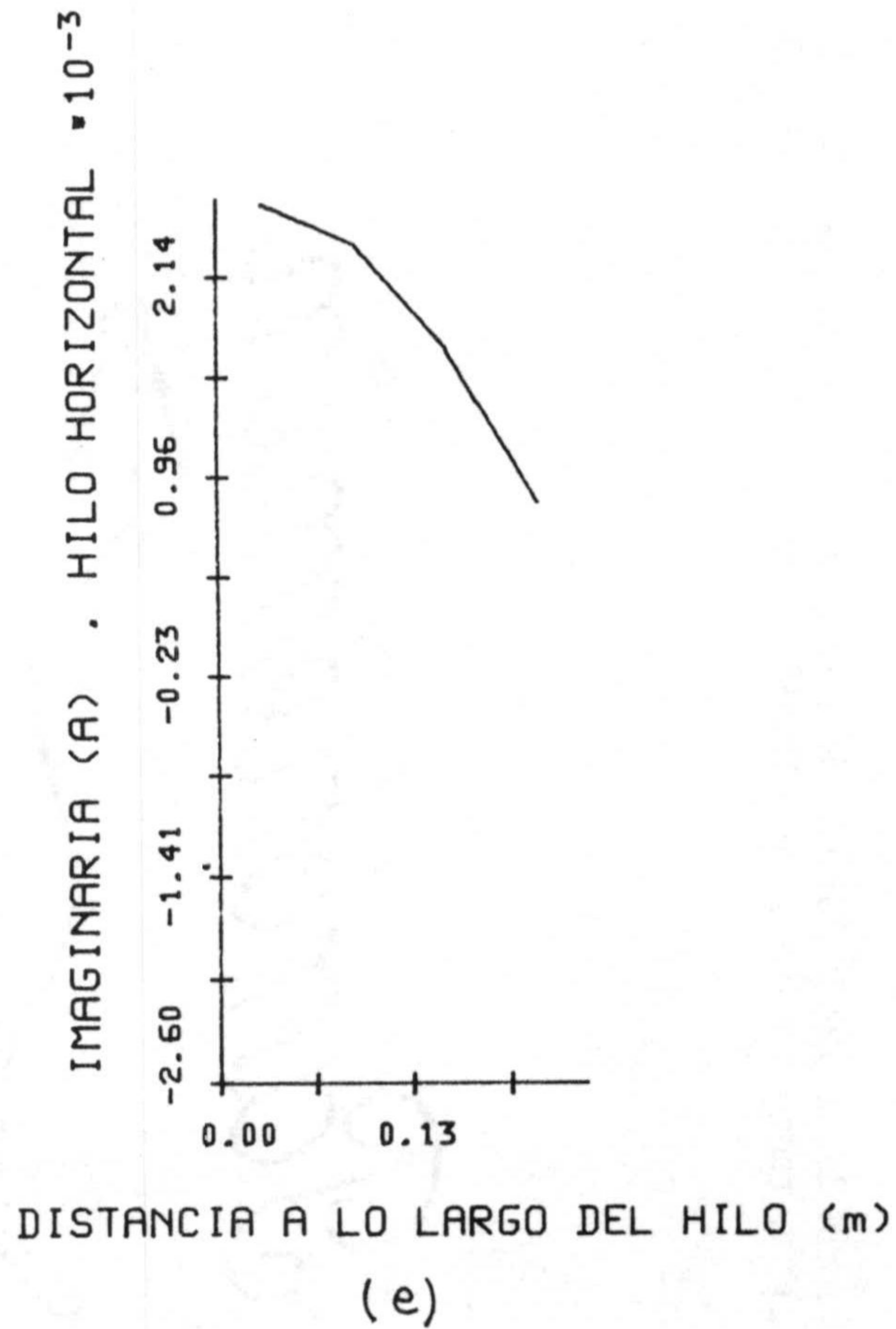


Fig. 4.110.- Cociente entre la transformada de Fourier de la intensidad y el campo incidente para $\lambda = 1$ m. a) Módulo hilo vertical b) Módulo hilo horizontal c) Parte Real hilo vertical d) Parte Real hilo horizontal e) Parte Imaginaria hilo vertical f) Parte Imaginaria hilo horizontal. ($l_1 = l_2 = 0.25$ m, $h_1 = 0.5$ m, $h_2 = 0.5$ m).

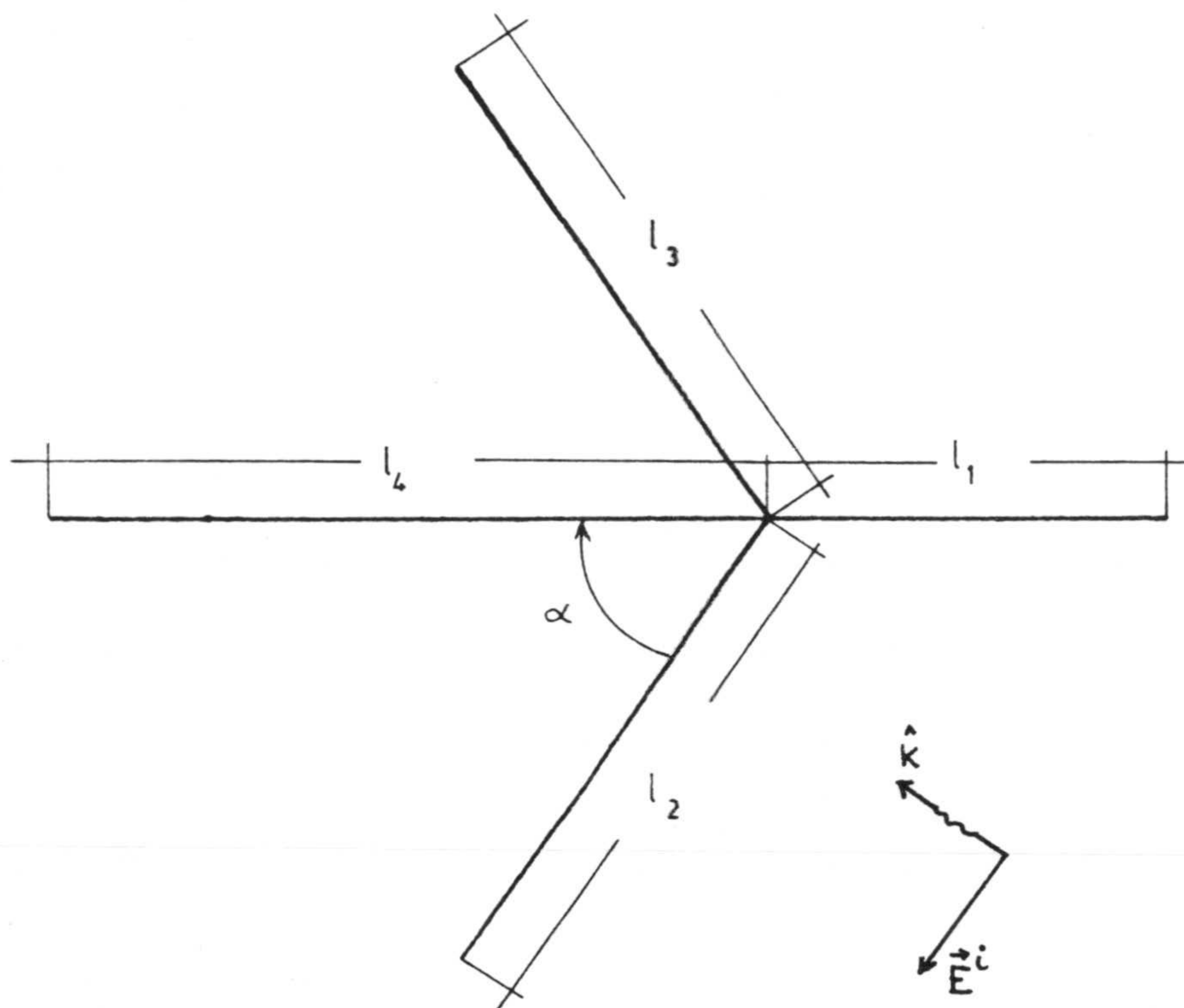


Fig. 4.111.- Geometría de un módulo "stick" de avión. $l_1 = 25.811$ m, $l_2 = l_3 = l_4 = 36.136$ m, radio $a = 0.9$ m, $\alpha = 55.61^\circ$.

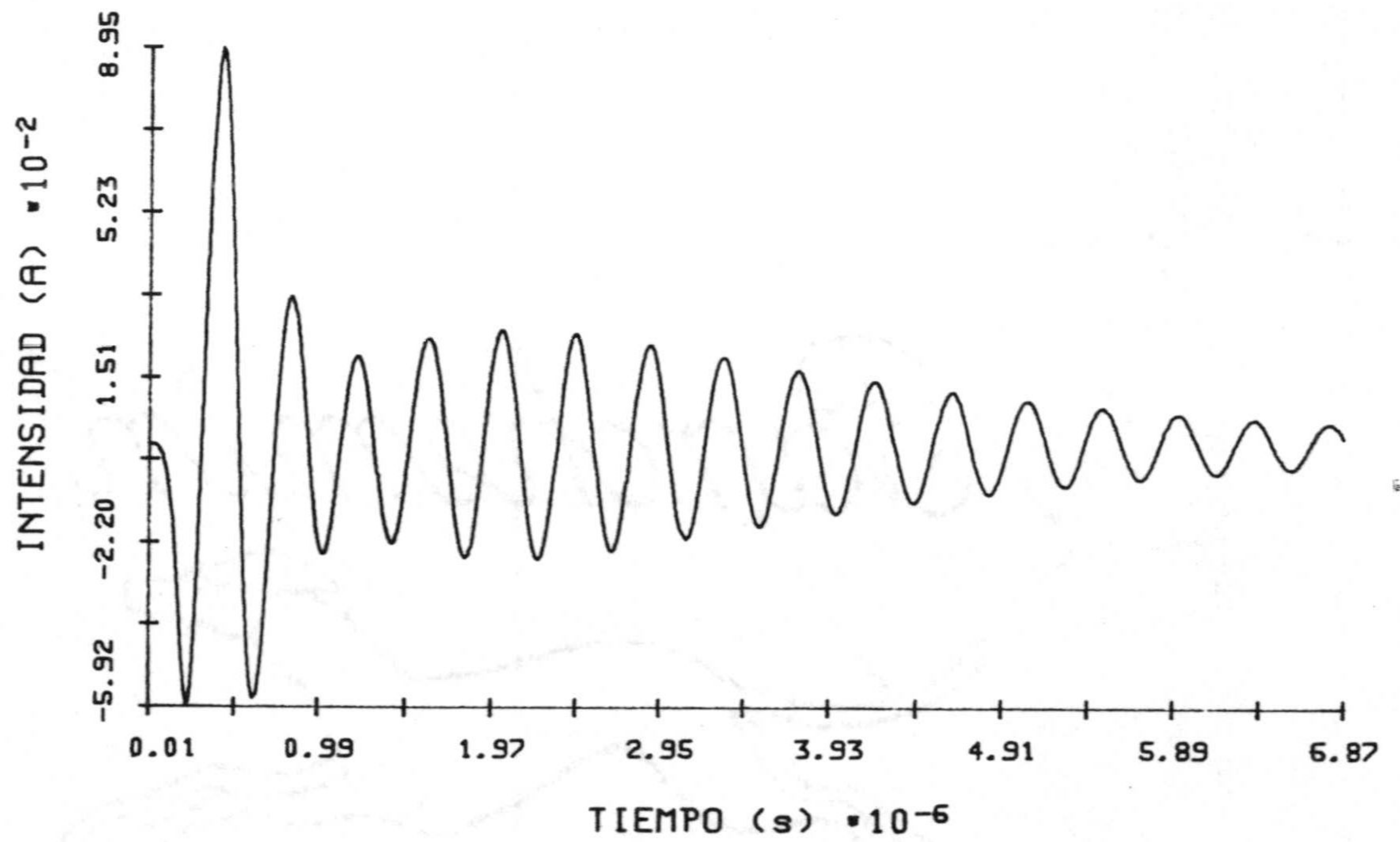


Fig. 4.112.- Intensidad de corriente en función del tiempo en el centro del segmento más próximo a la unión del hilo 1 del avión de la Fig. 4.111.

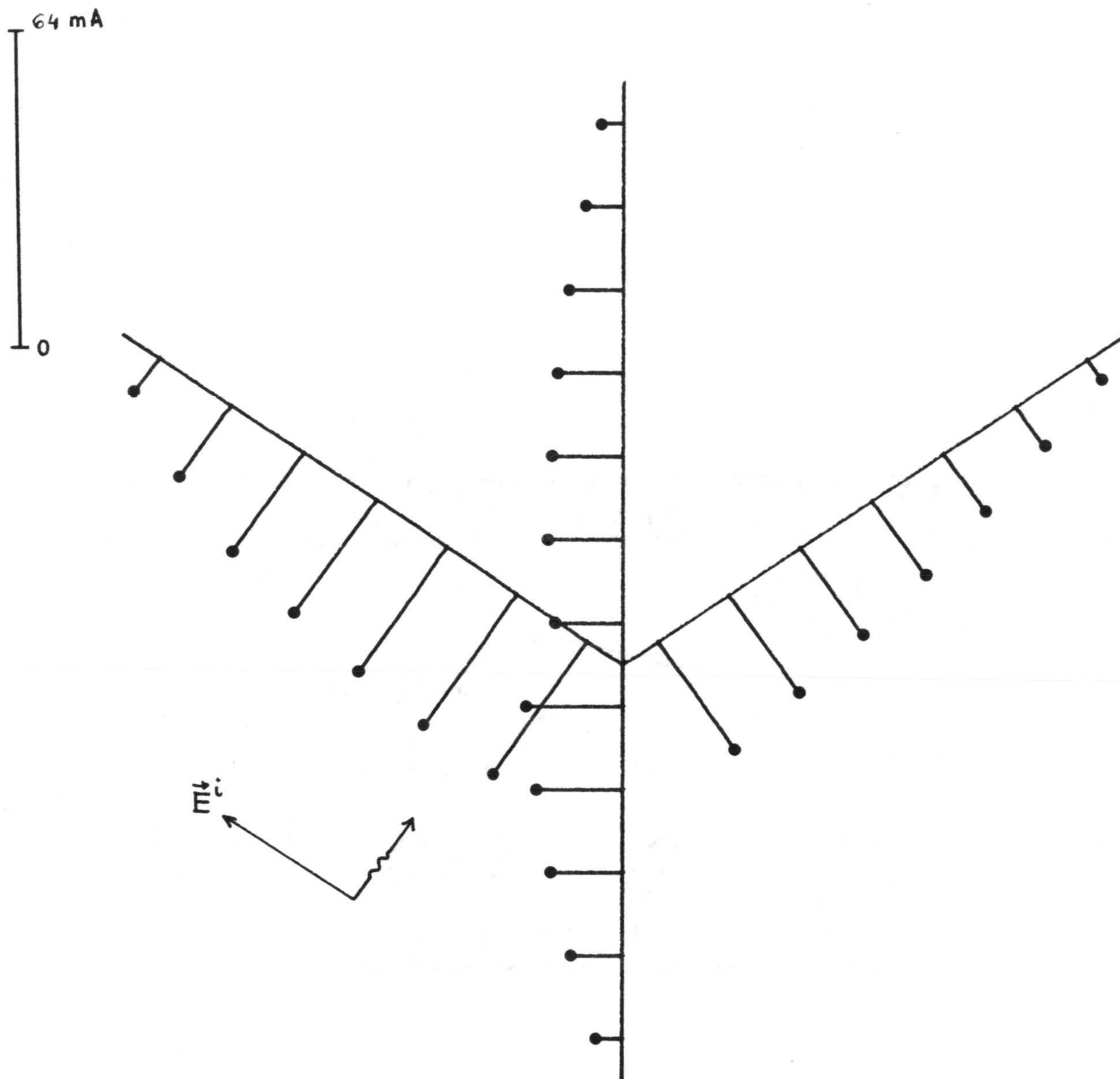


Fig. 4.113.- Razón entre las amplitudes de las transformadas de Fourier de la intensidad y campo incidente a una frecuencia $\omega = 0.5$ MHz para el ejemplo de la Fig. 4.111.

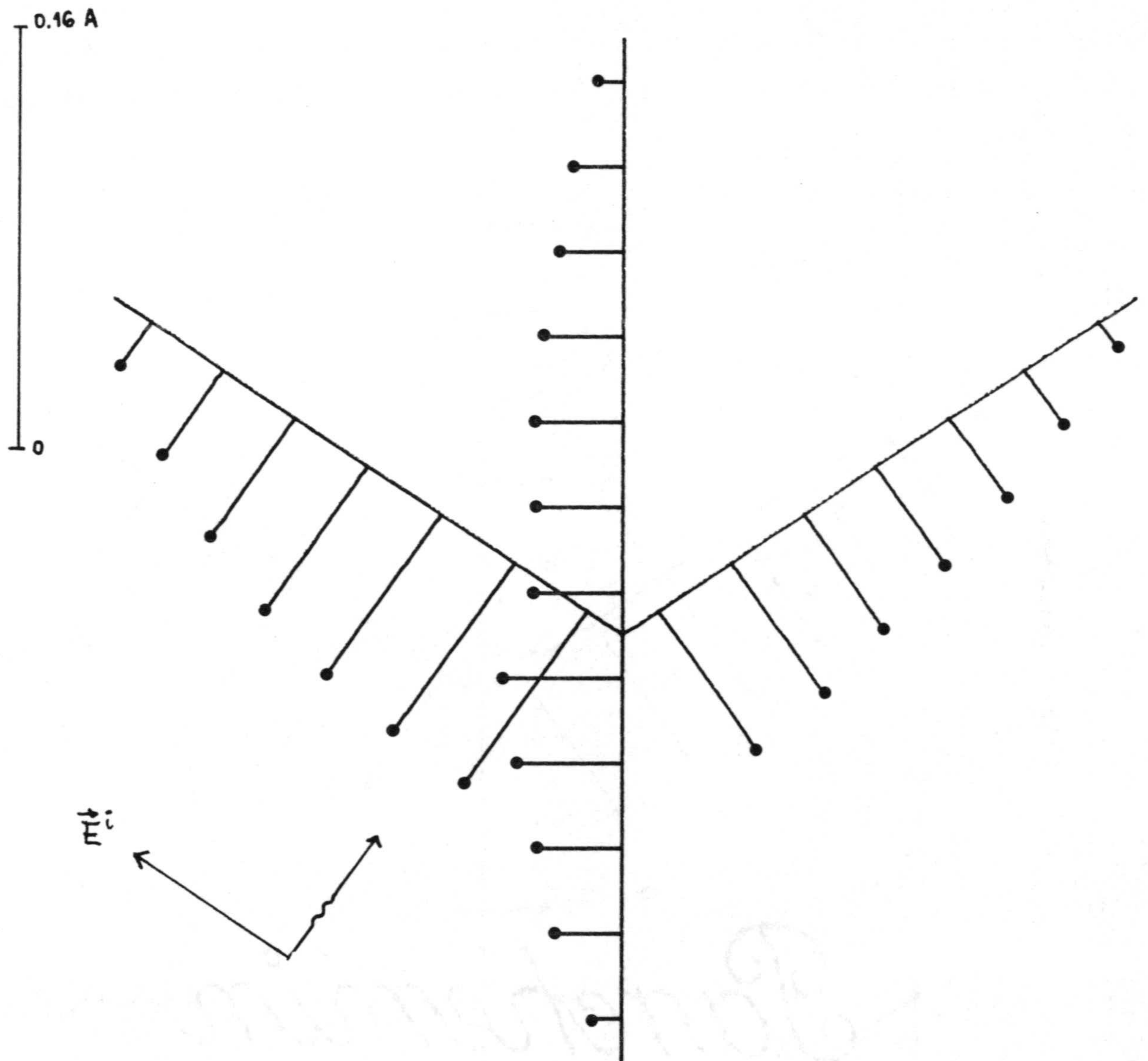


Fig. 4.114.- Razón entre las amplitudes de las transformadas de Fourier de la intensidad y campo incidente a una frecuencia $\omega = 1.0$ MHz para el ejemplo de la Fig. 4.111.

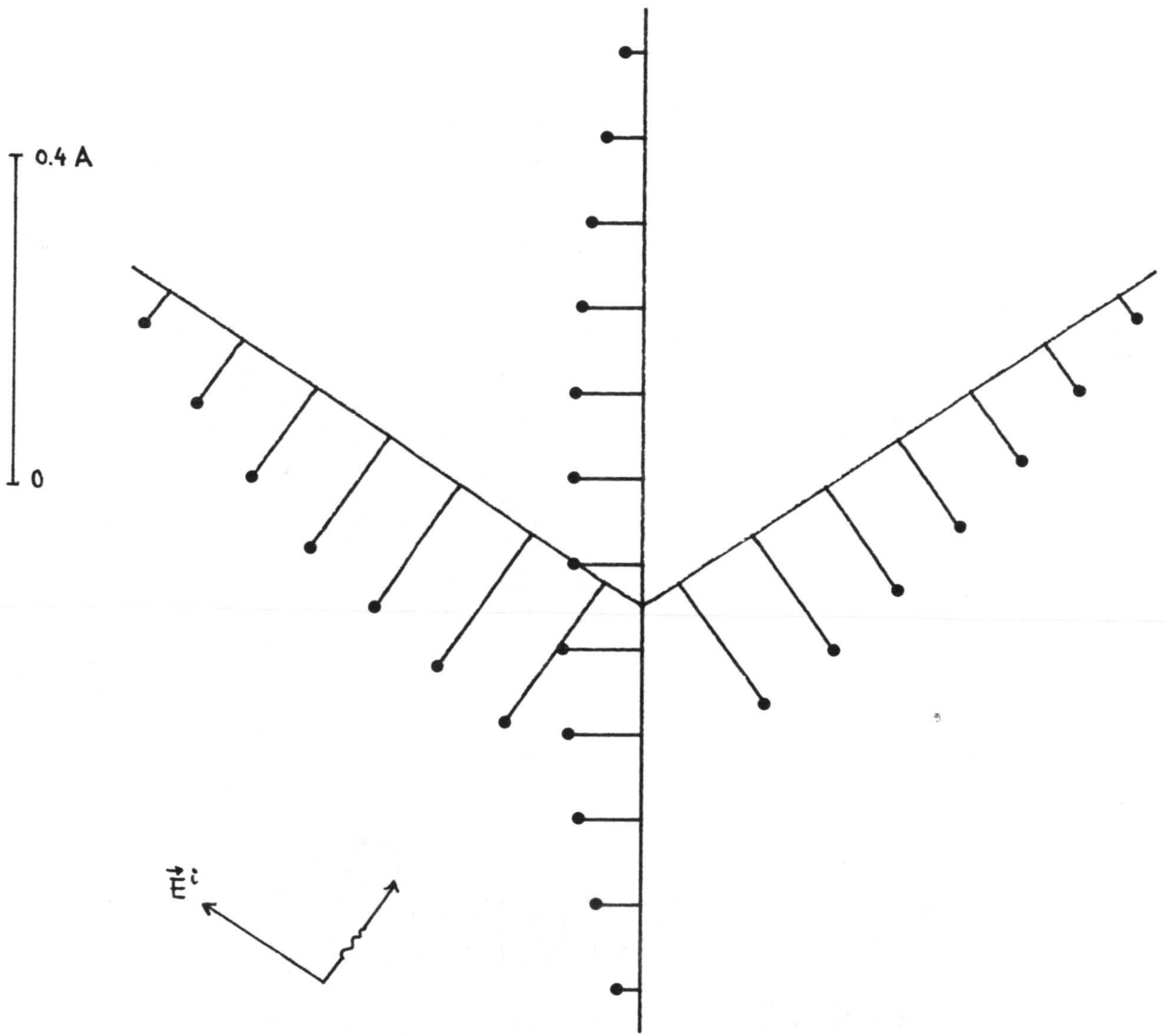


Fig. 4.115.- Razón entre las amplitudes de las transformadas de Fourier de la intensidad y campo incidente a una frecuencia $\omega = 1.5$ MHz para el ejemplo de la Fig. 4.111.

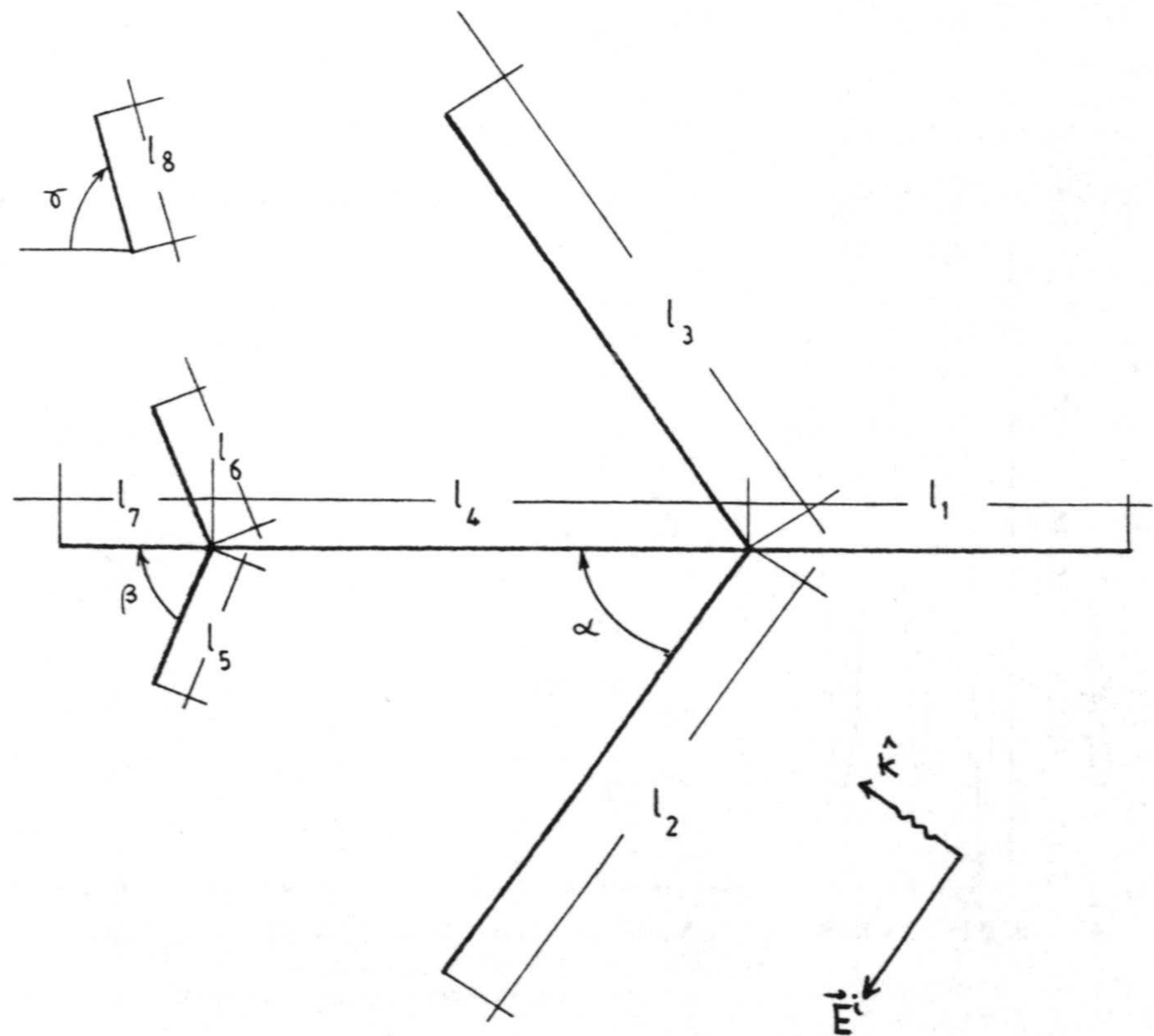


Fig. 4.116.- Geometría de un modelo "stick" de avión con las siguientes dimensiones:
 $l_1 = 25.811$ m, $l_2 = l_3 = l_4 = 36.136$ m, $l_5 = l_6 = l_7 = l_8 = 10.325$ m,
radio $a = 0.9$ m, $\alpha = 55.61^\circ$, $\beta = 64.49^\circ$ y $\gamma = 64.39^\circ$.

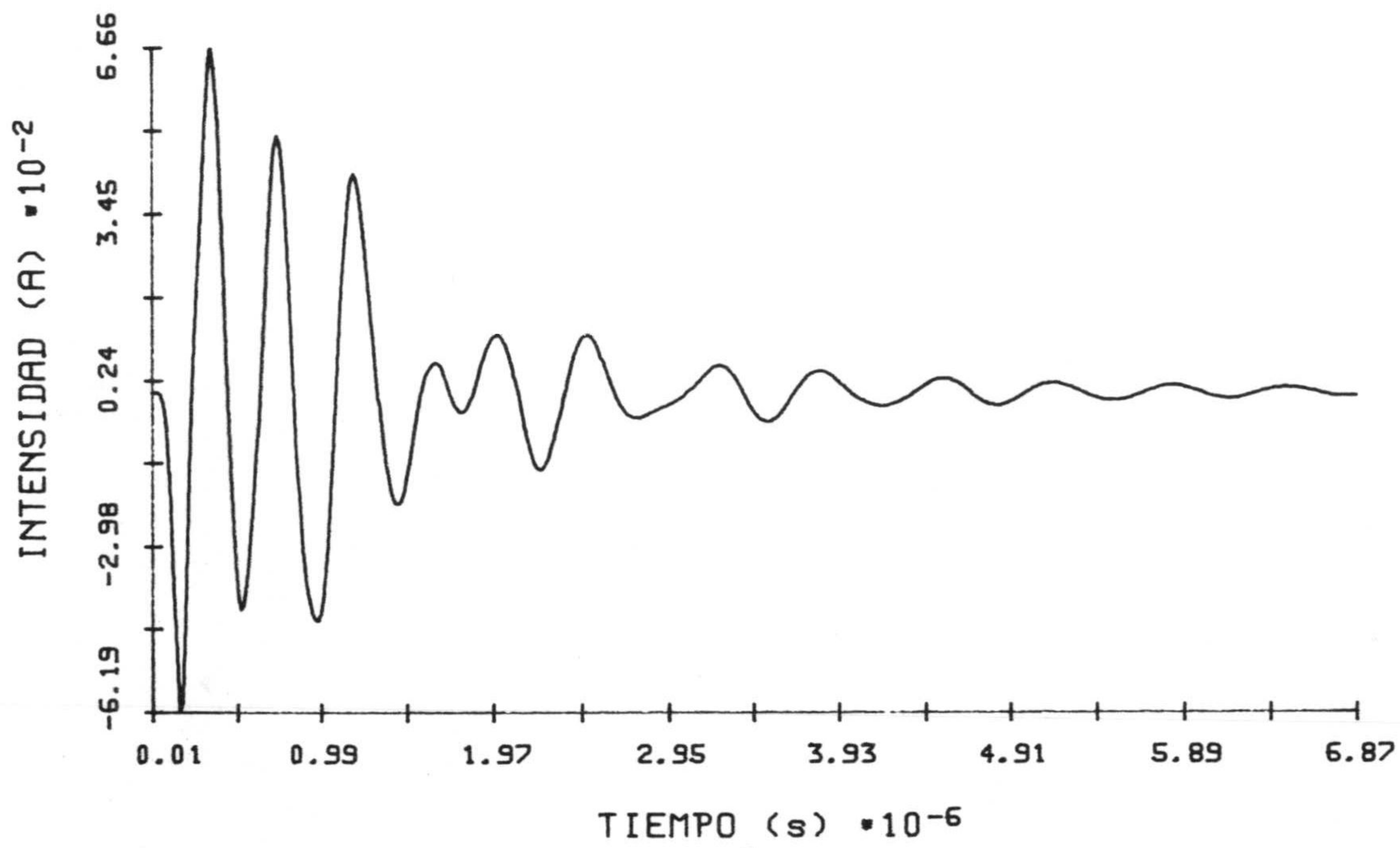
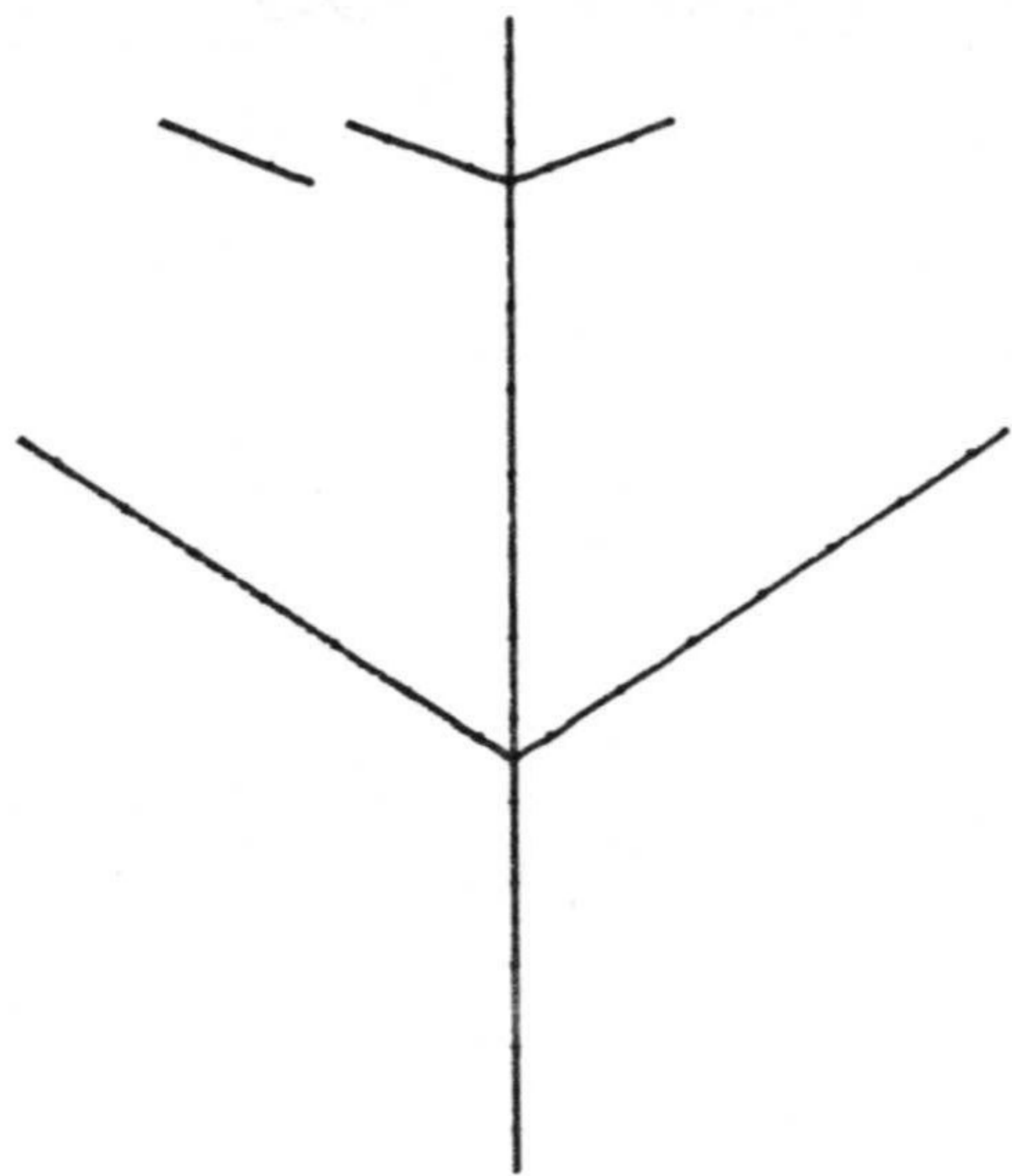
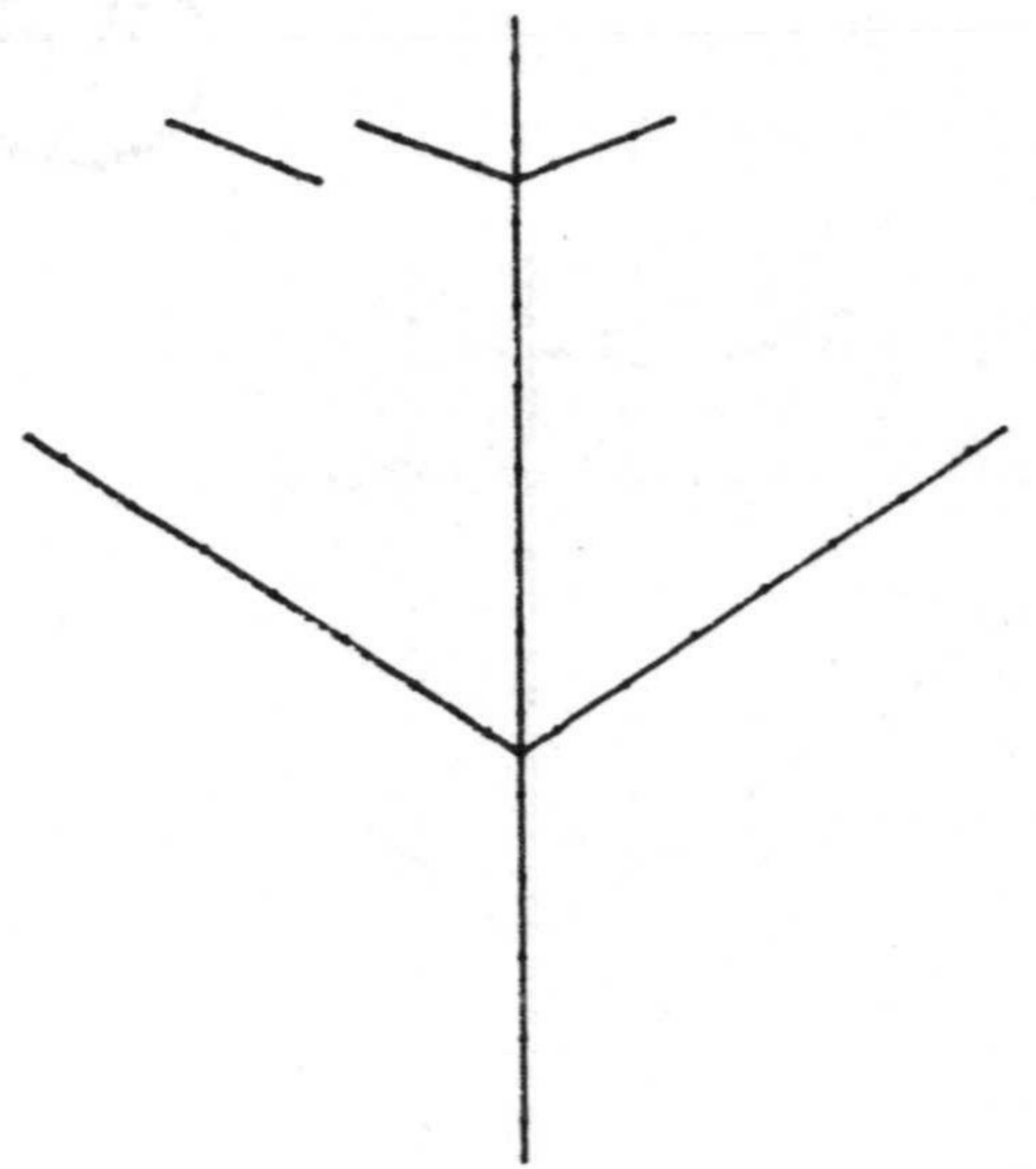


Fig. 4.117.- Intensidad de corriente en función del tiempo en el centro del intervalo espacial más próximo a la unión del hilo 1 del modelo de avión de la Fig. 4.116.

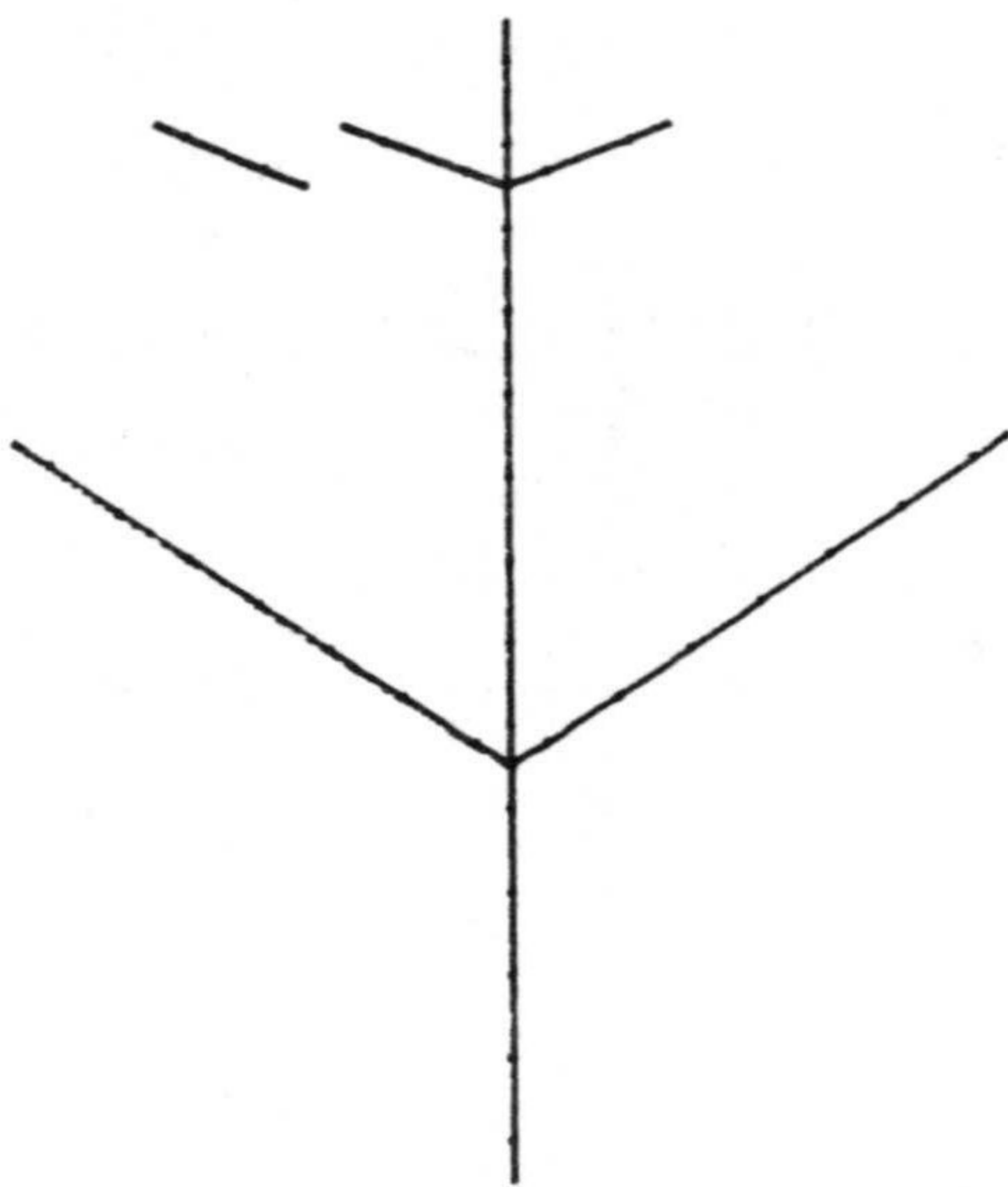


U=1

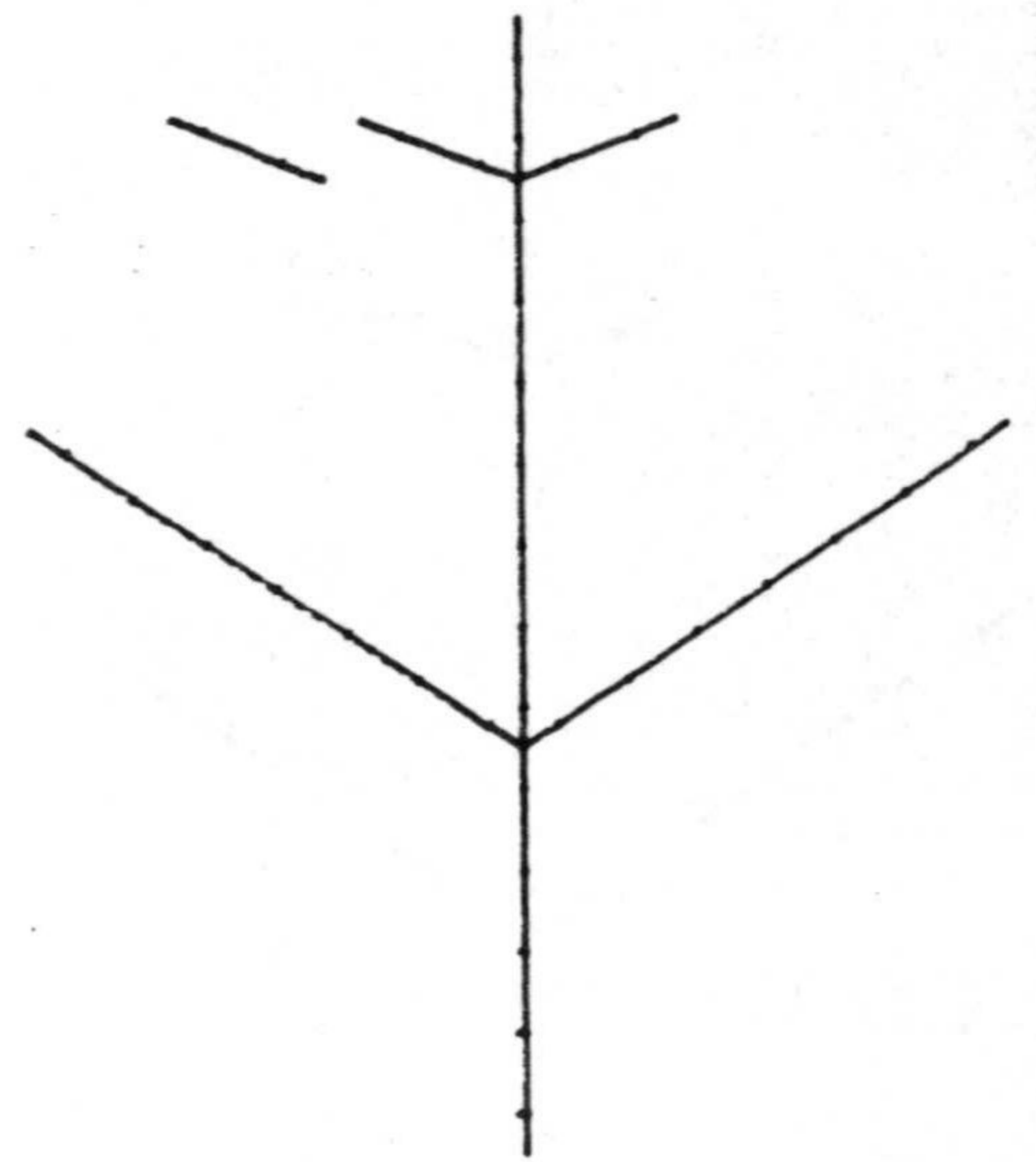


U=2

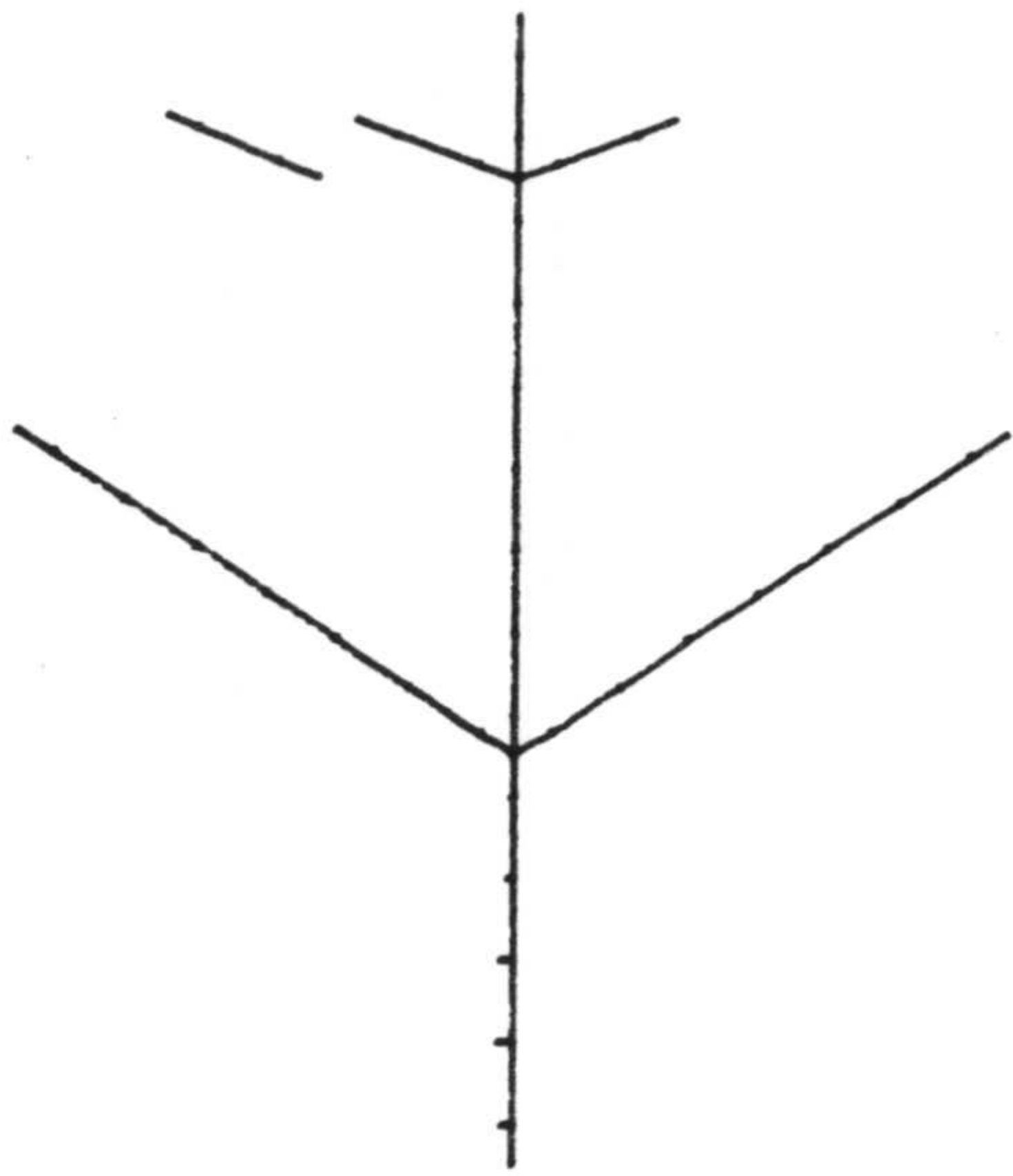
96.7 mA



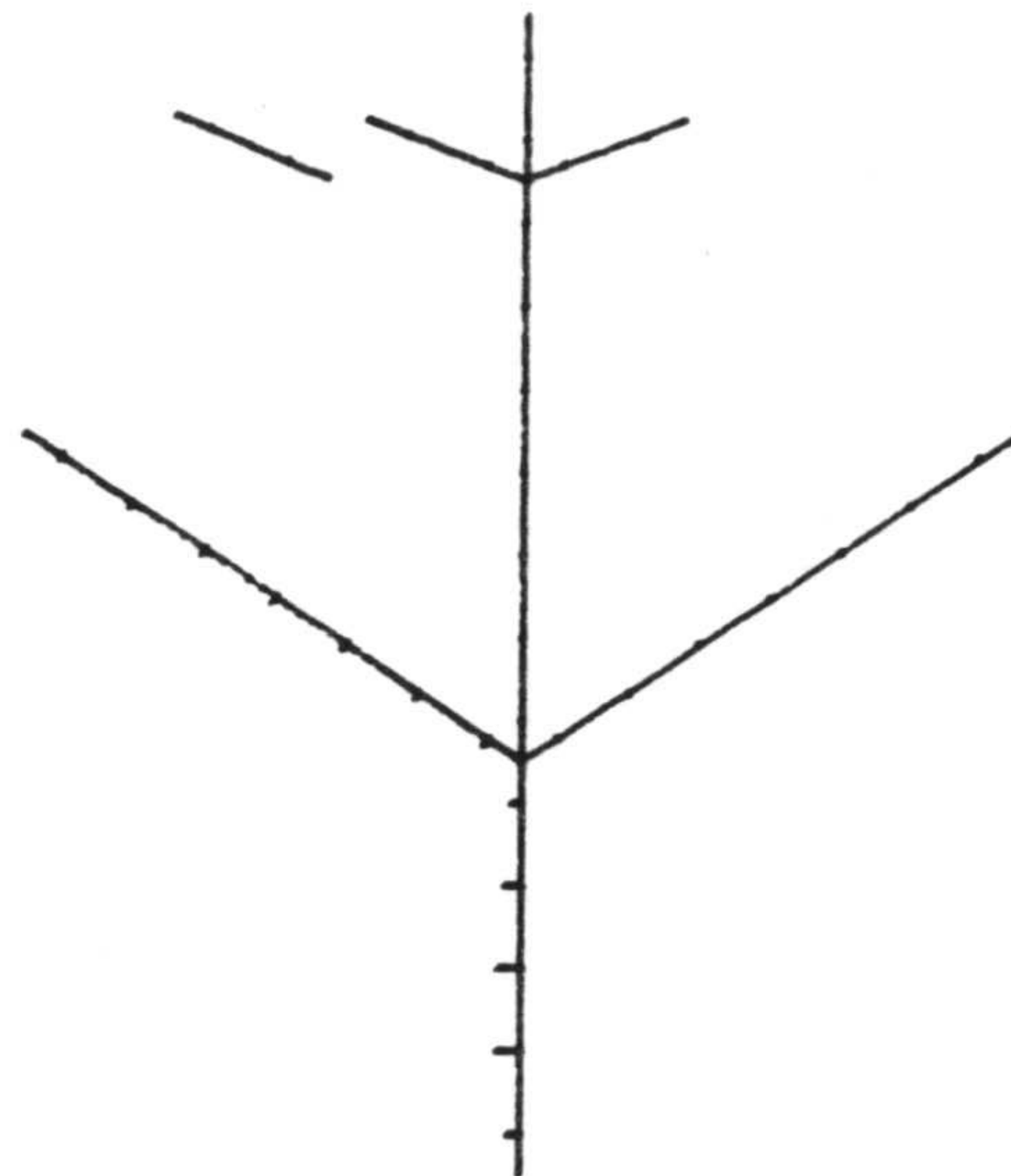
U=3



U=4

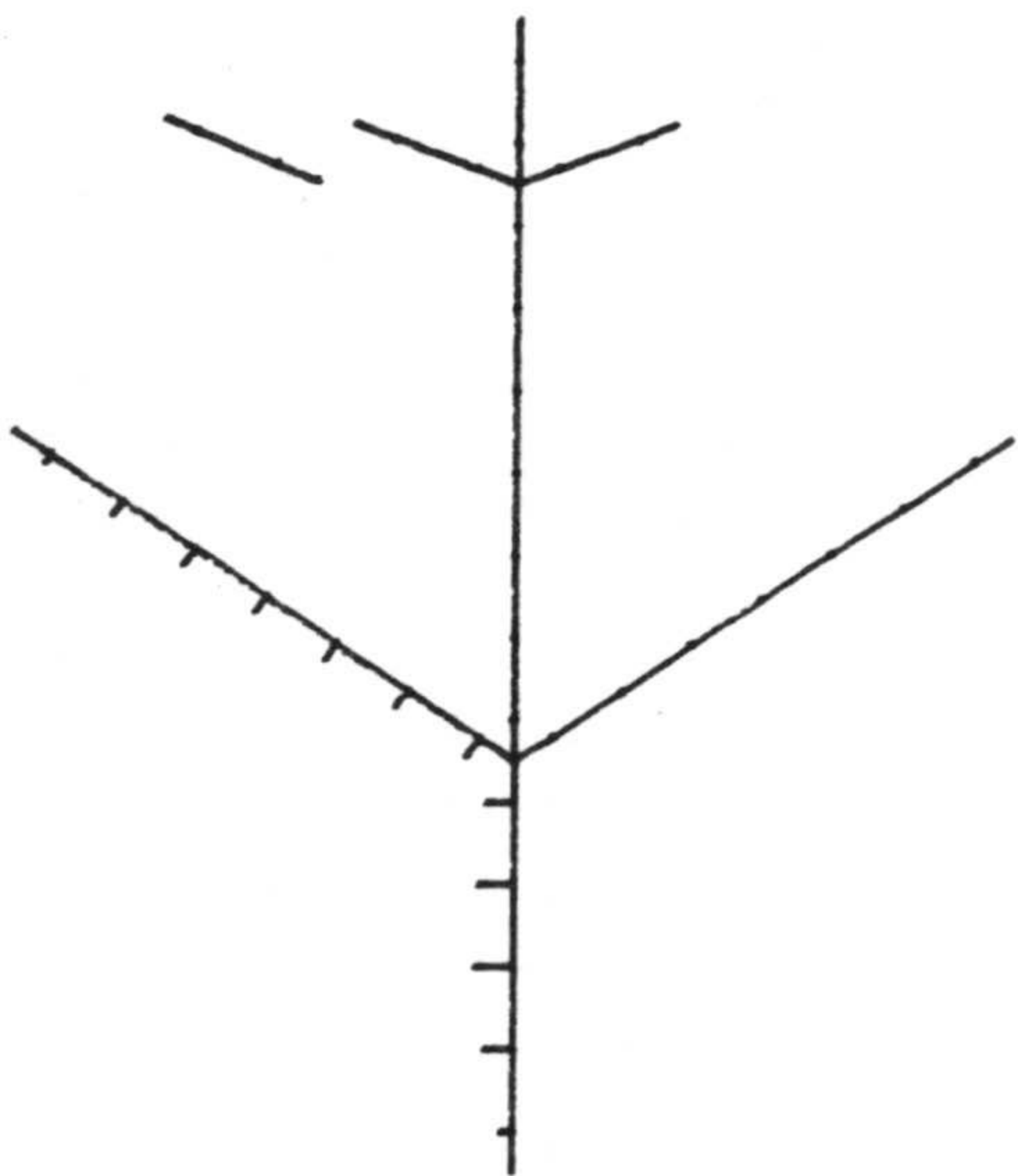


U=5

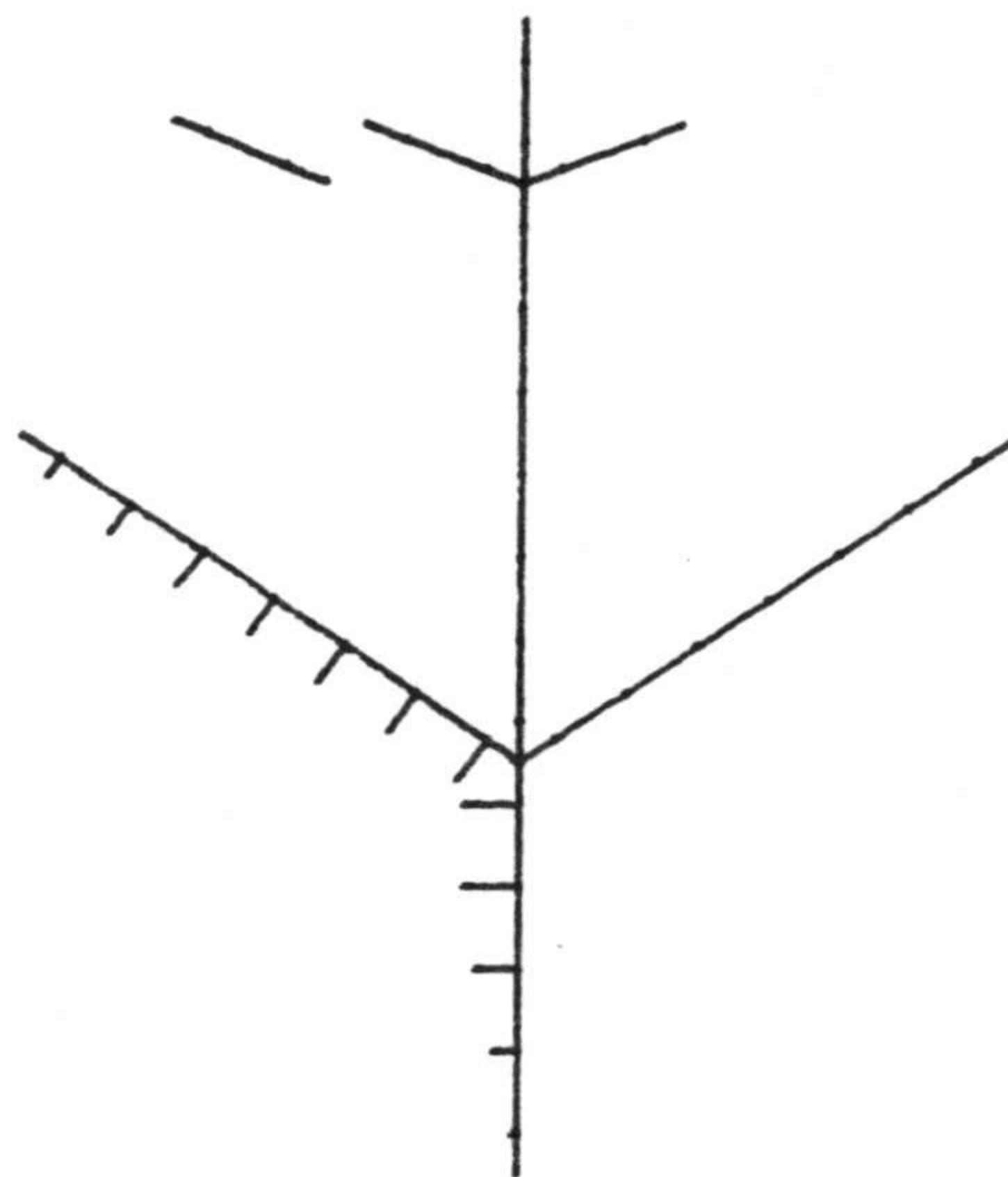


U=5

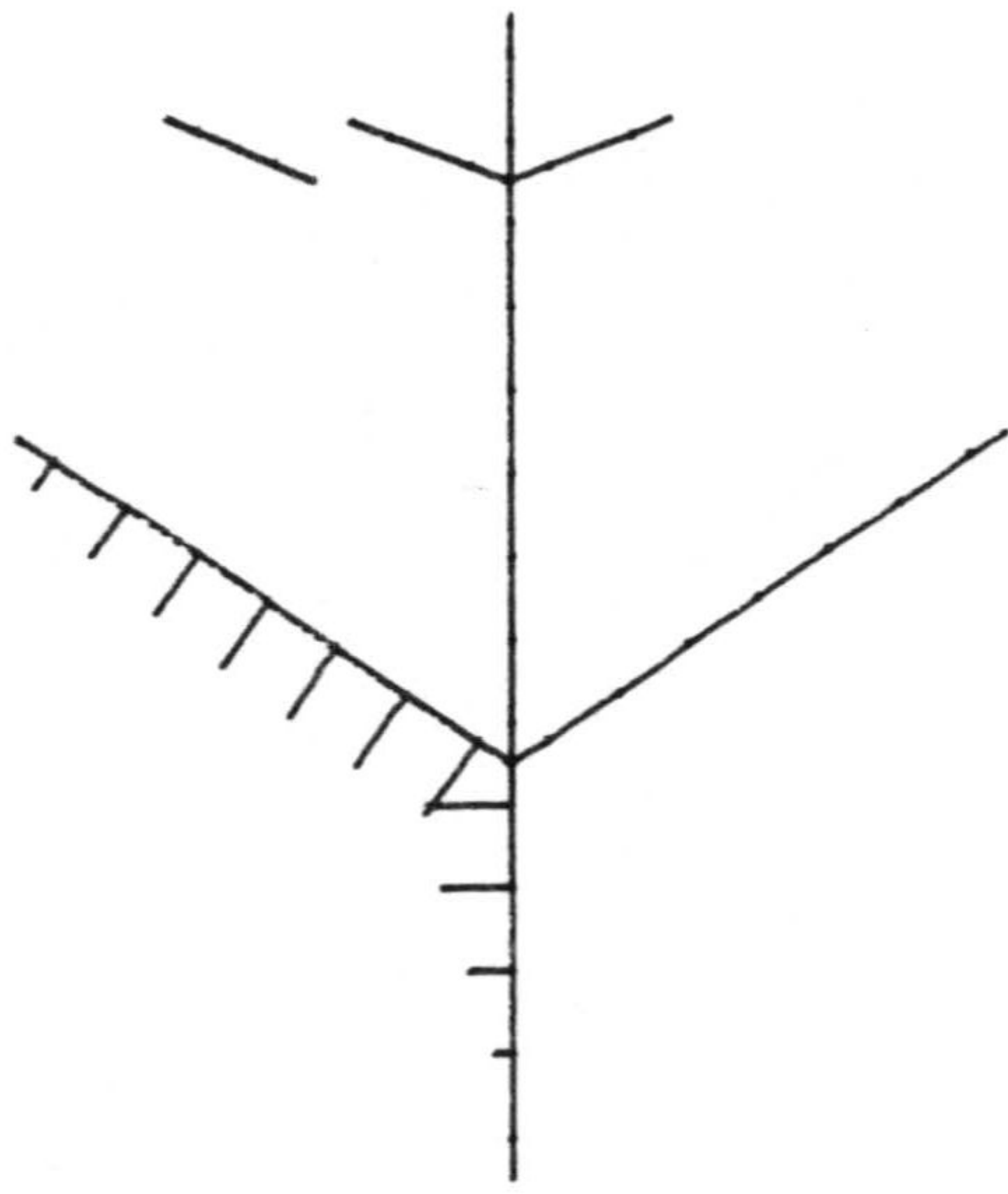
96.7 mA



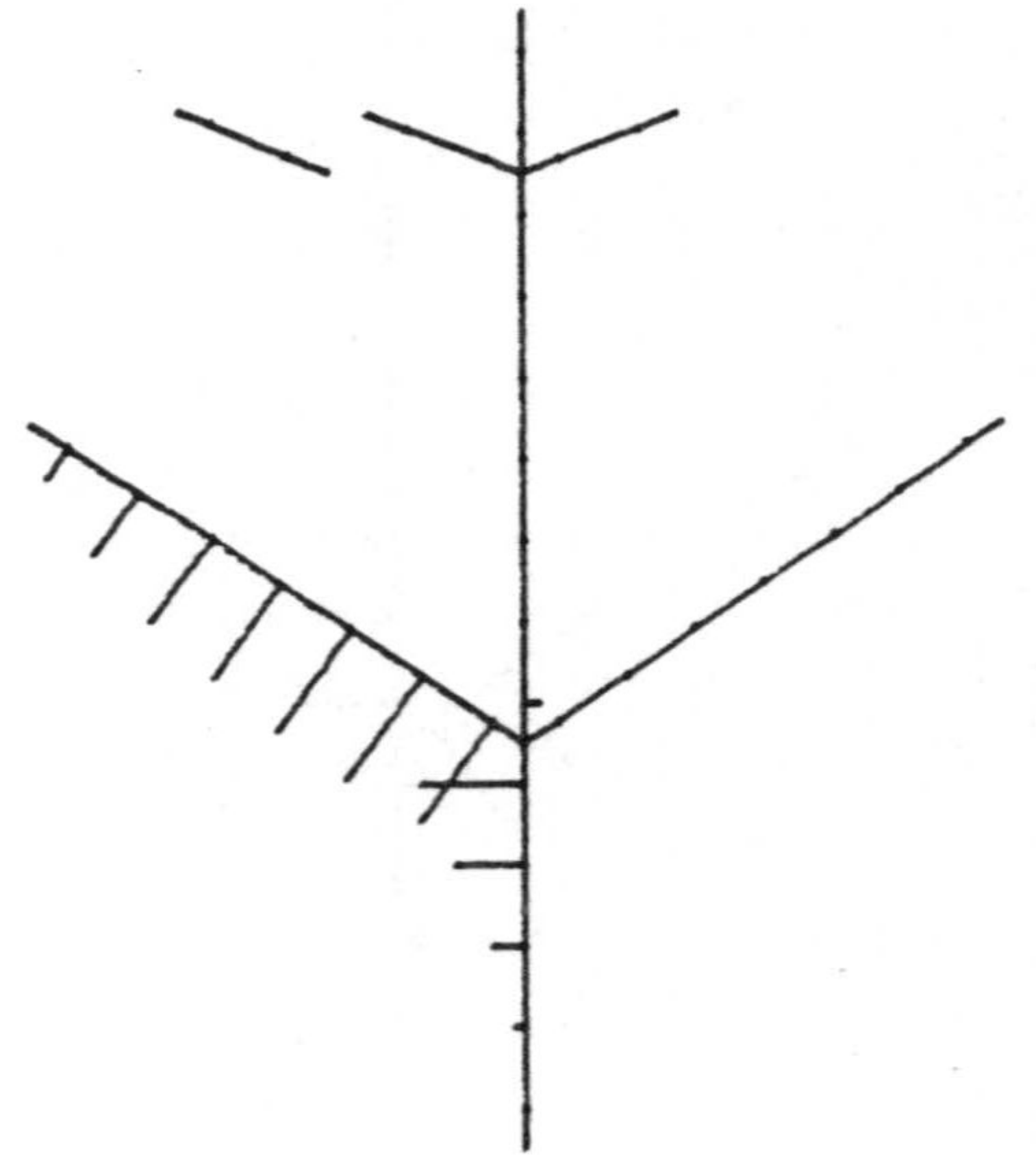
U=7



U=8

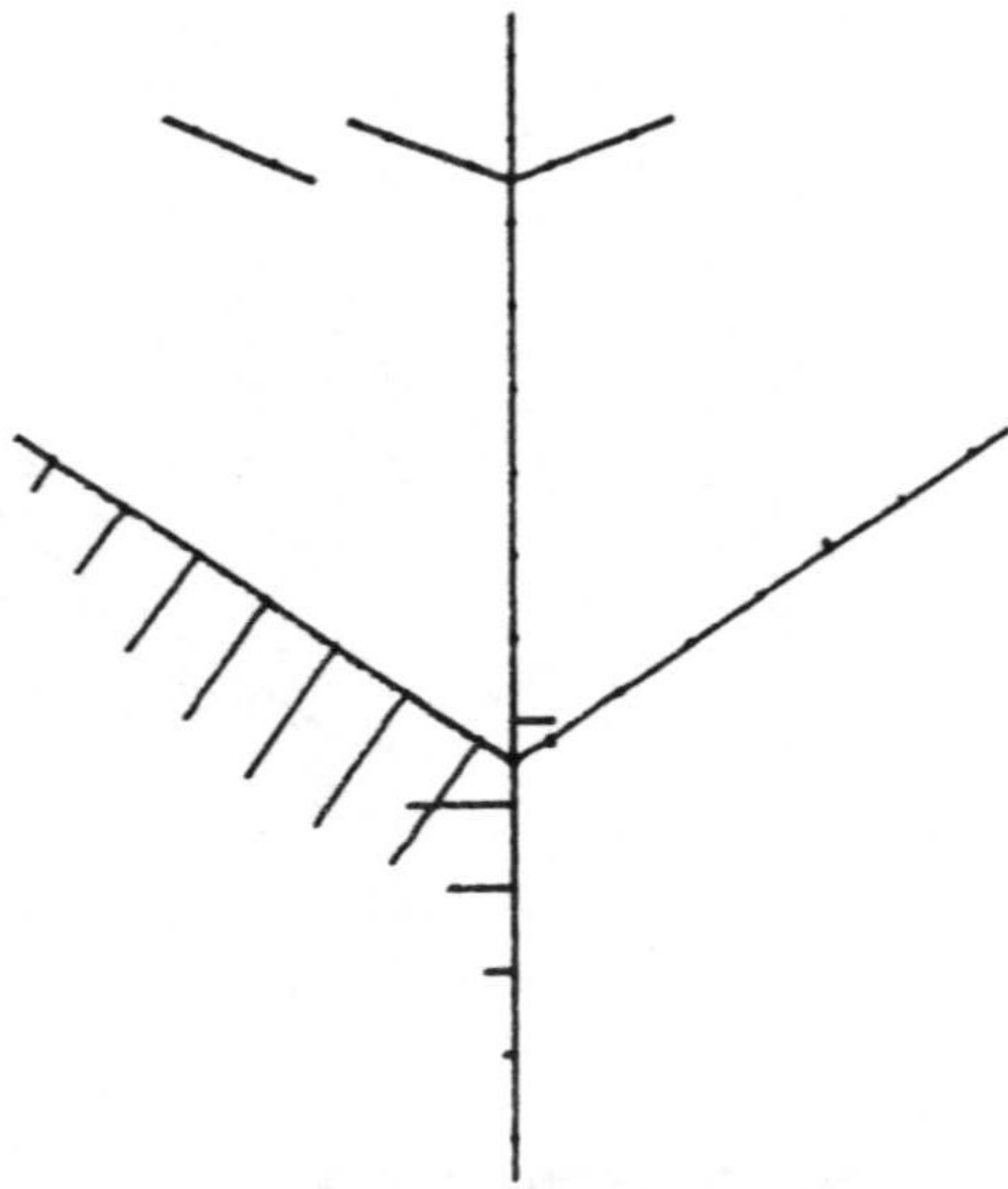


U=9

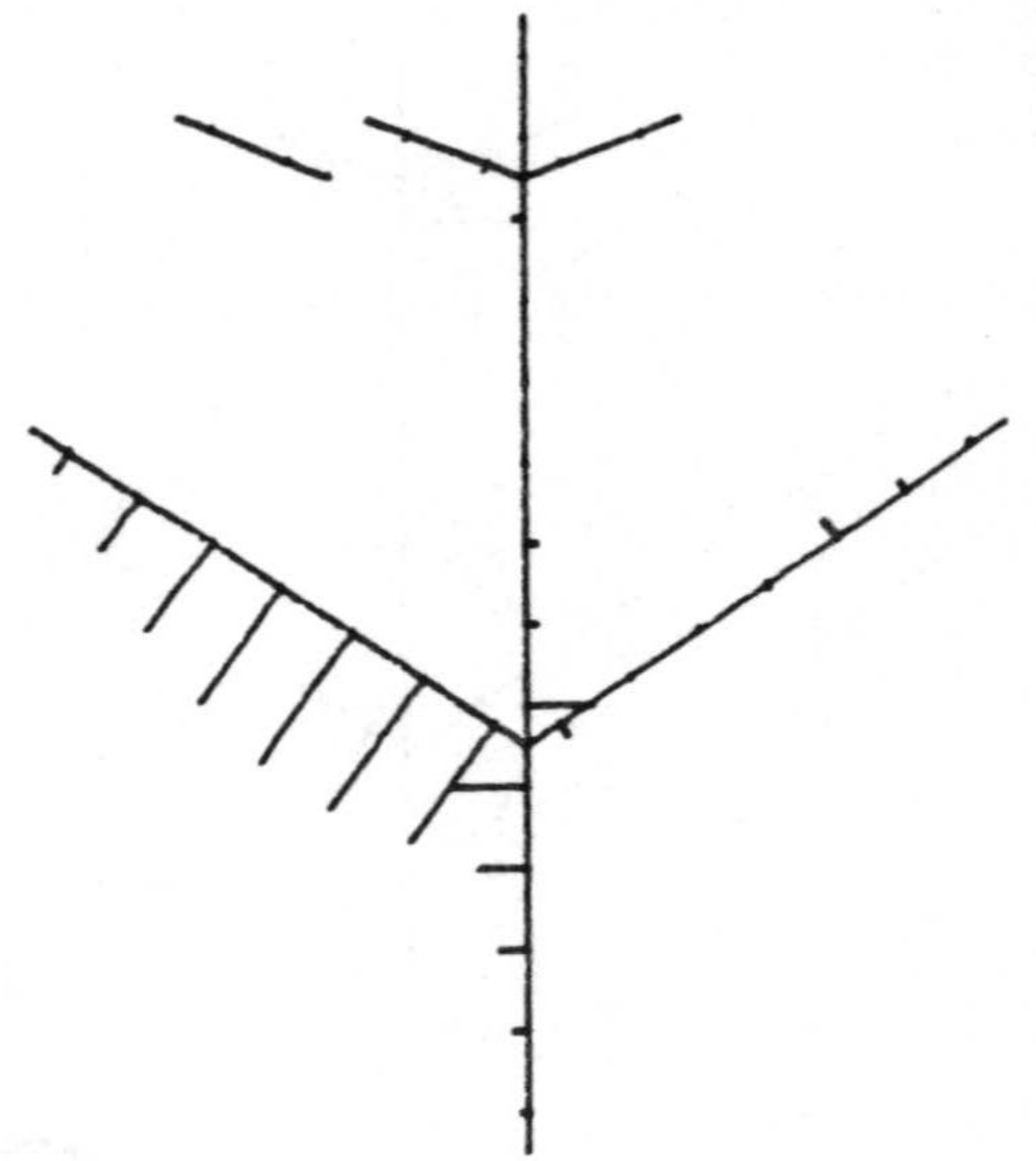


U=10

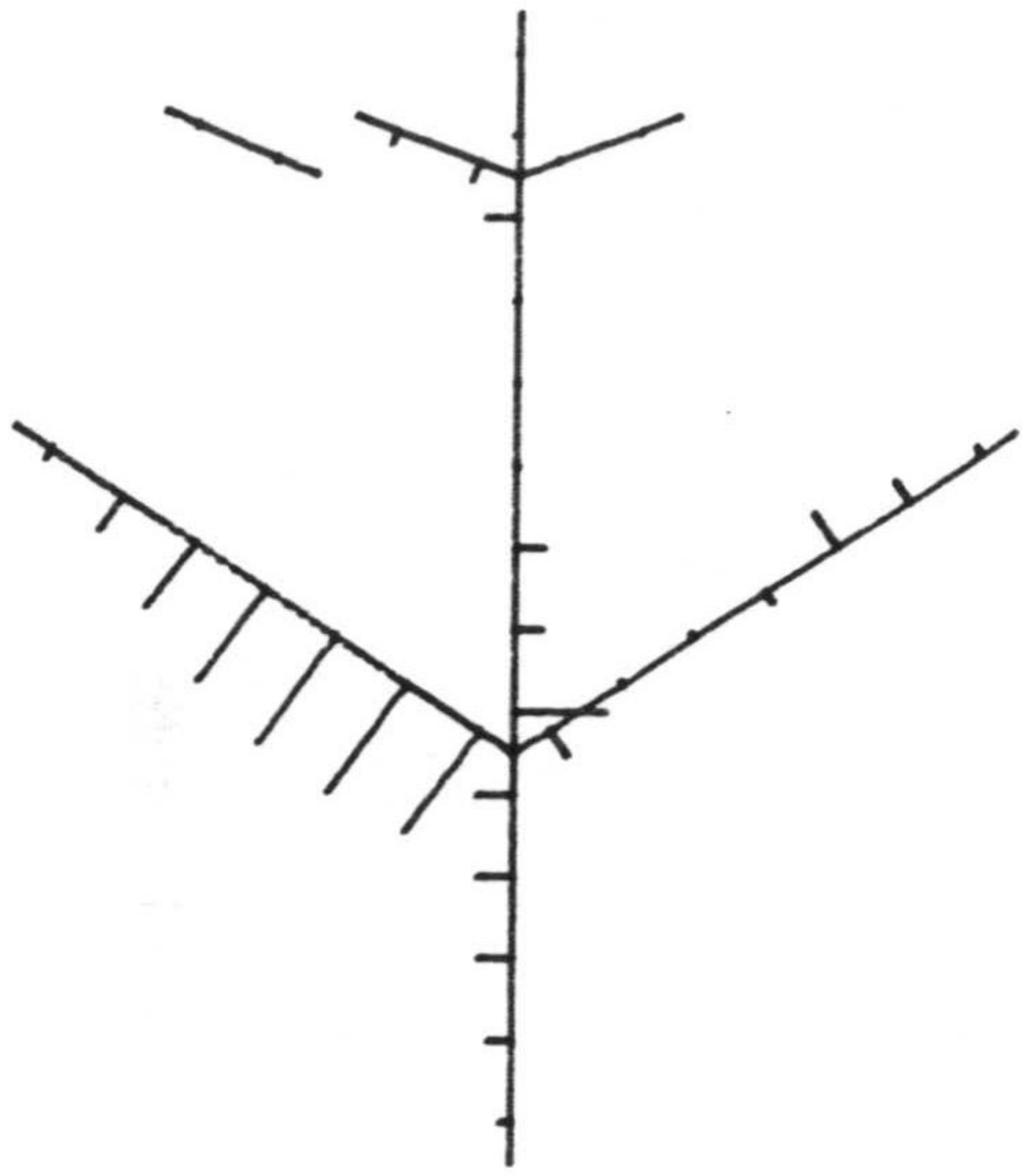
96.7 mA



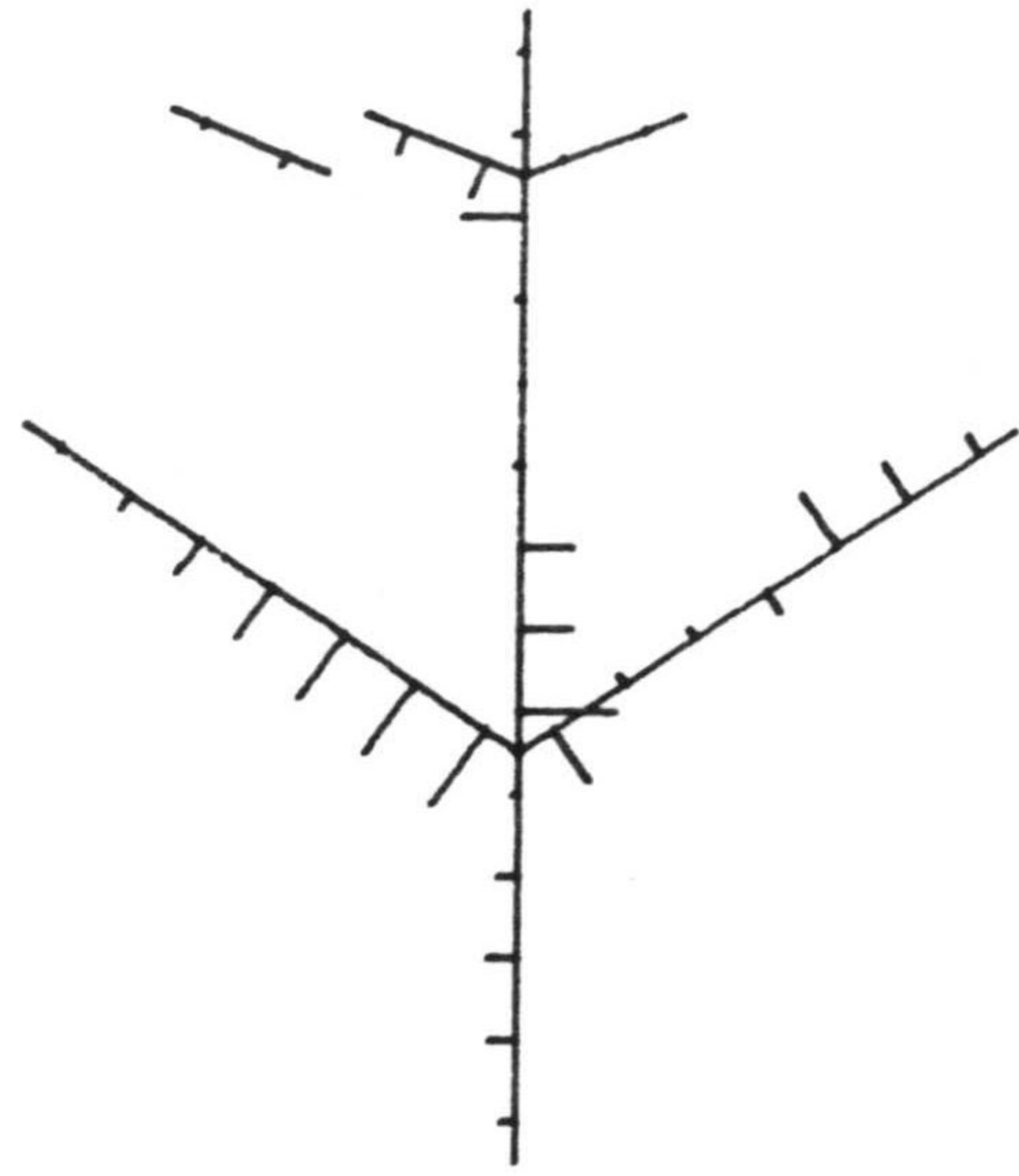
U=11



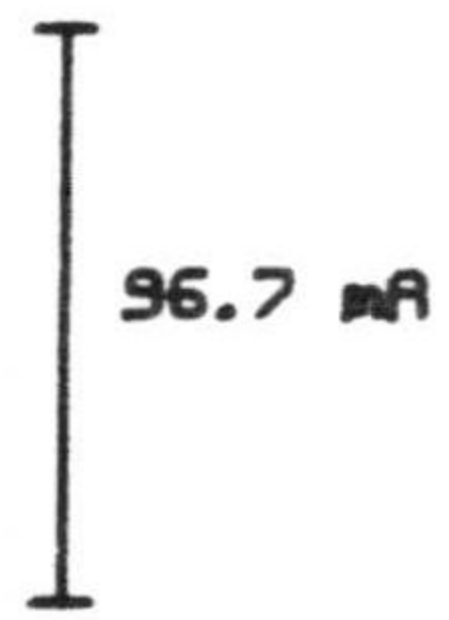
U=12



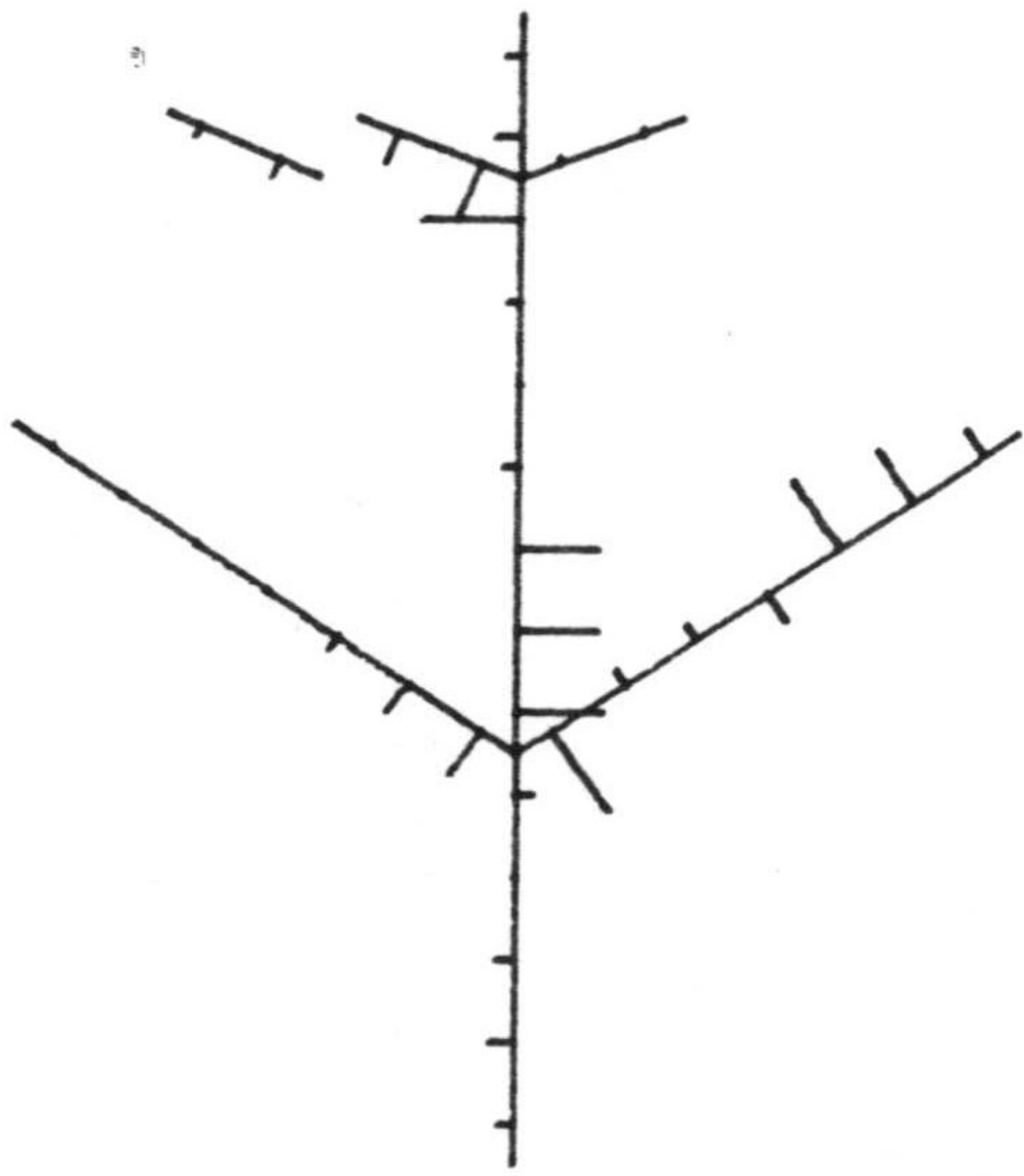
U=13



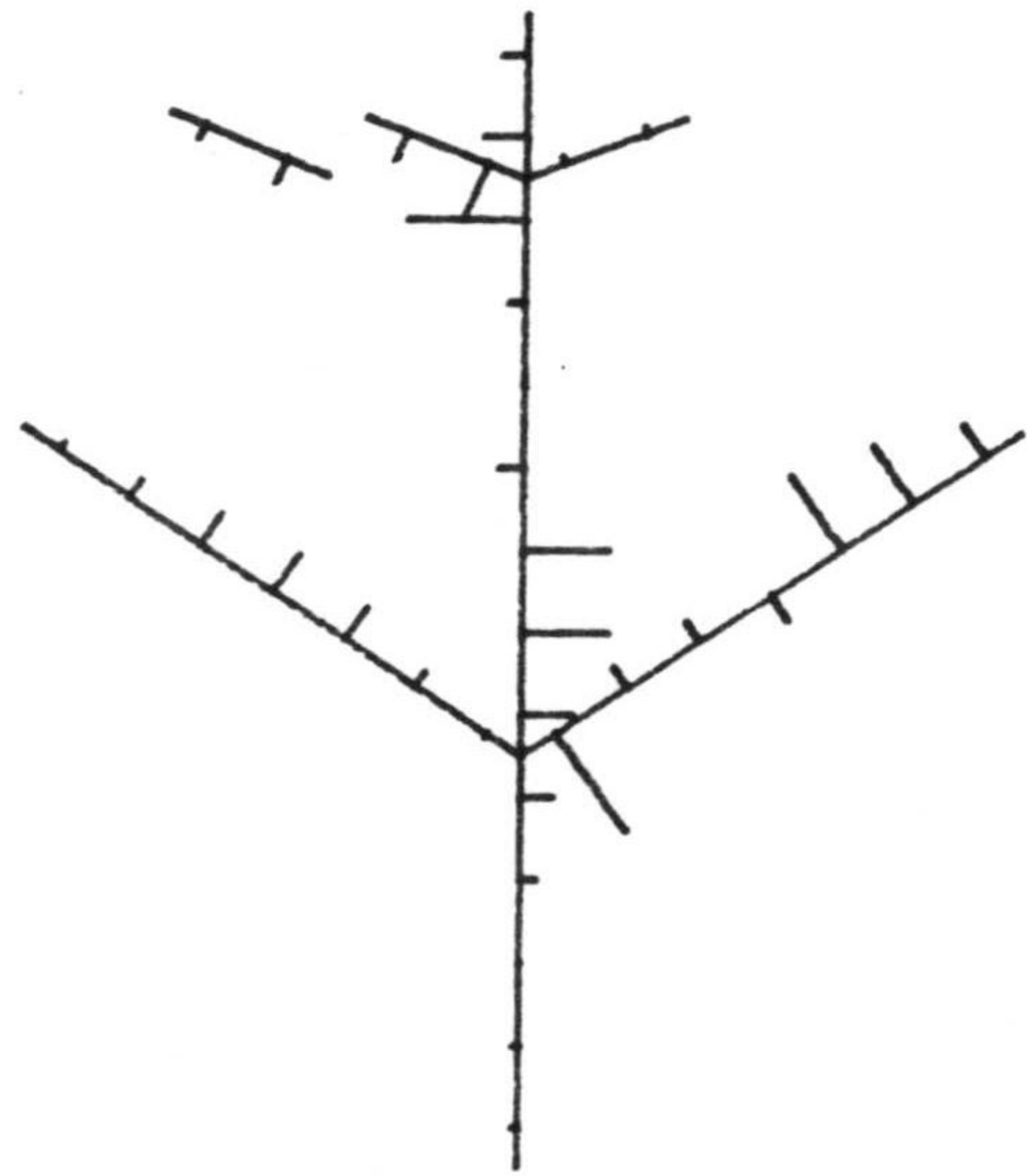
U=14



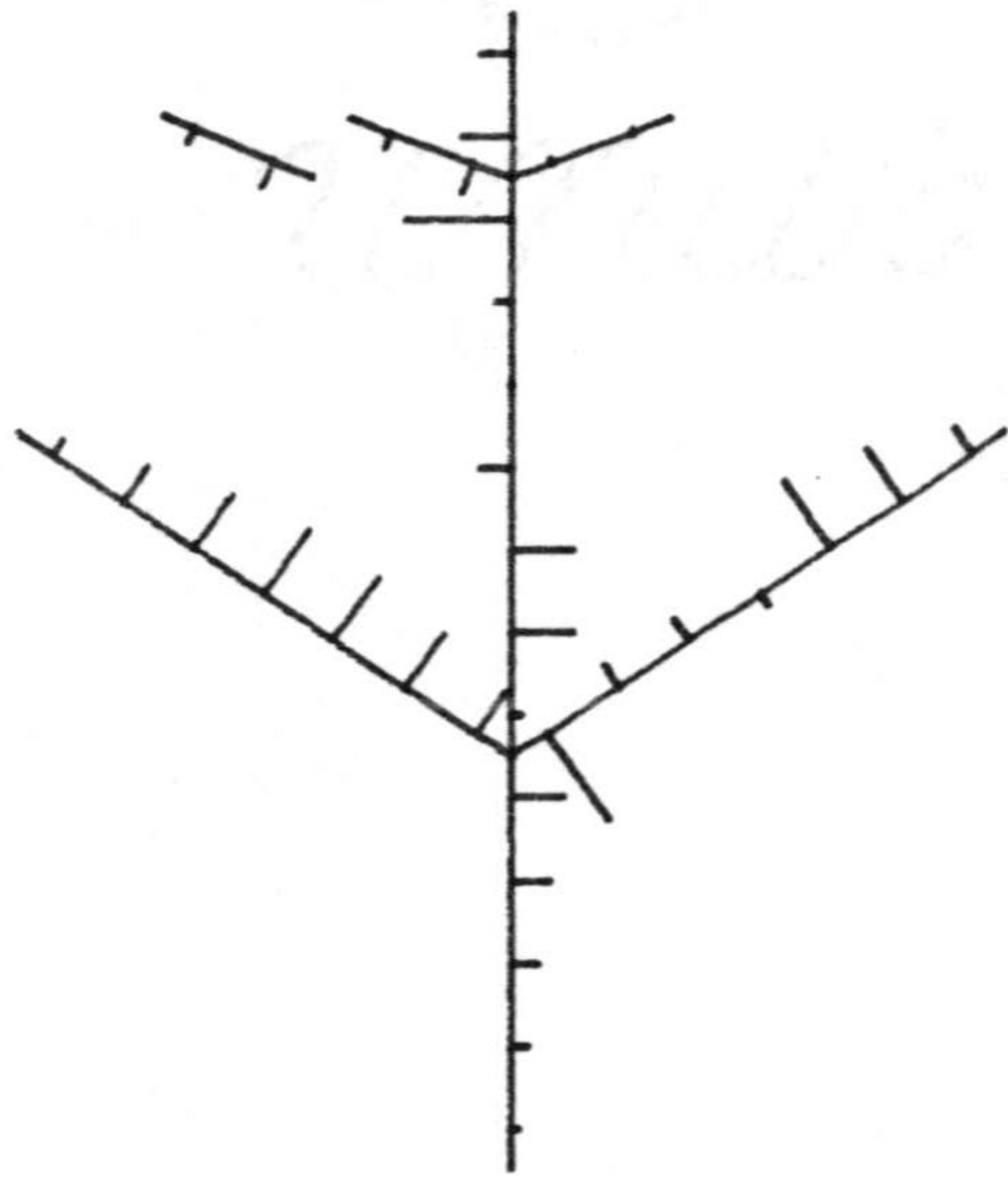
96.7 mA



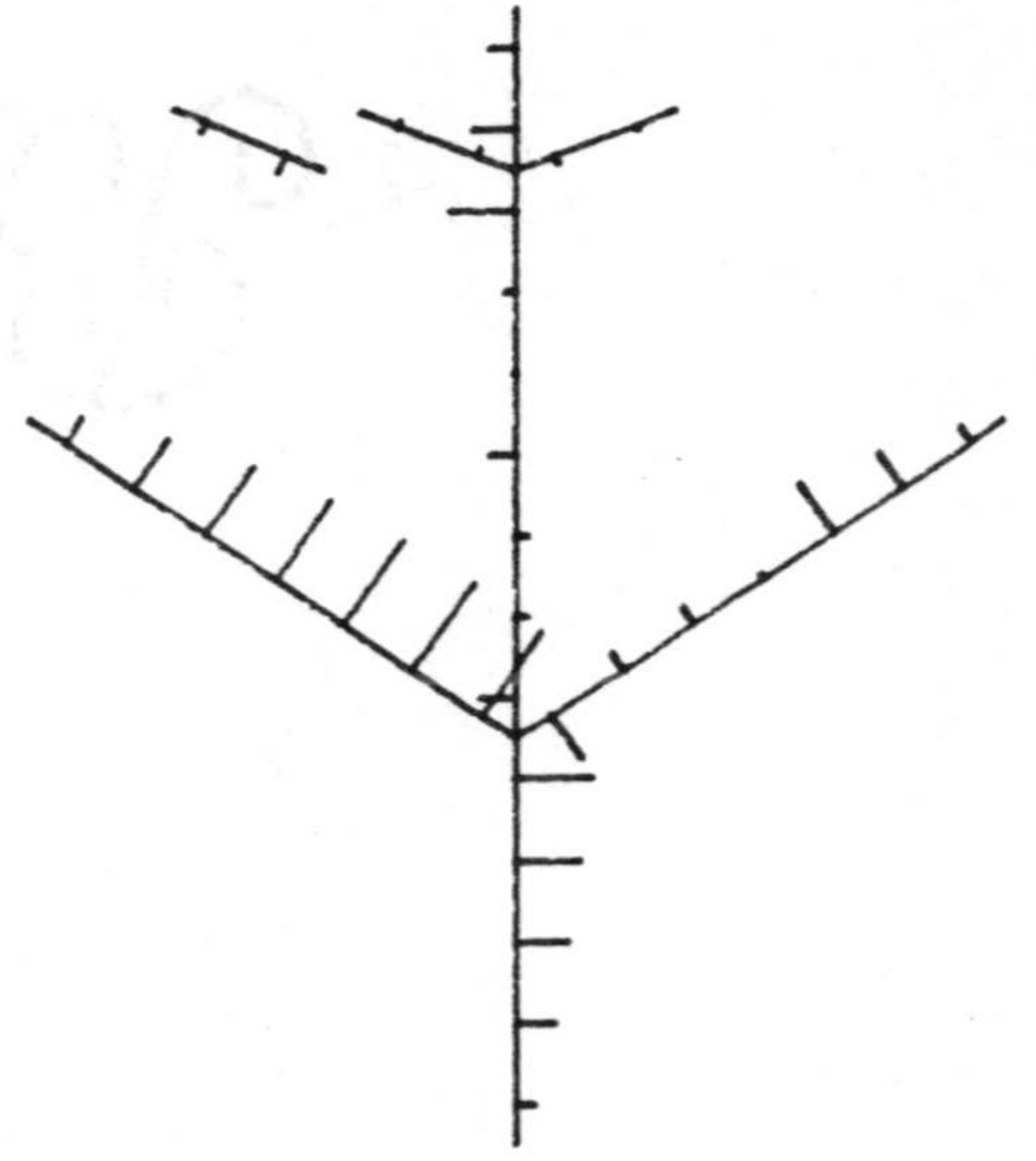
U=15



U=16

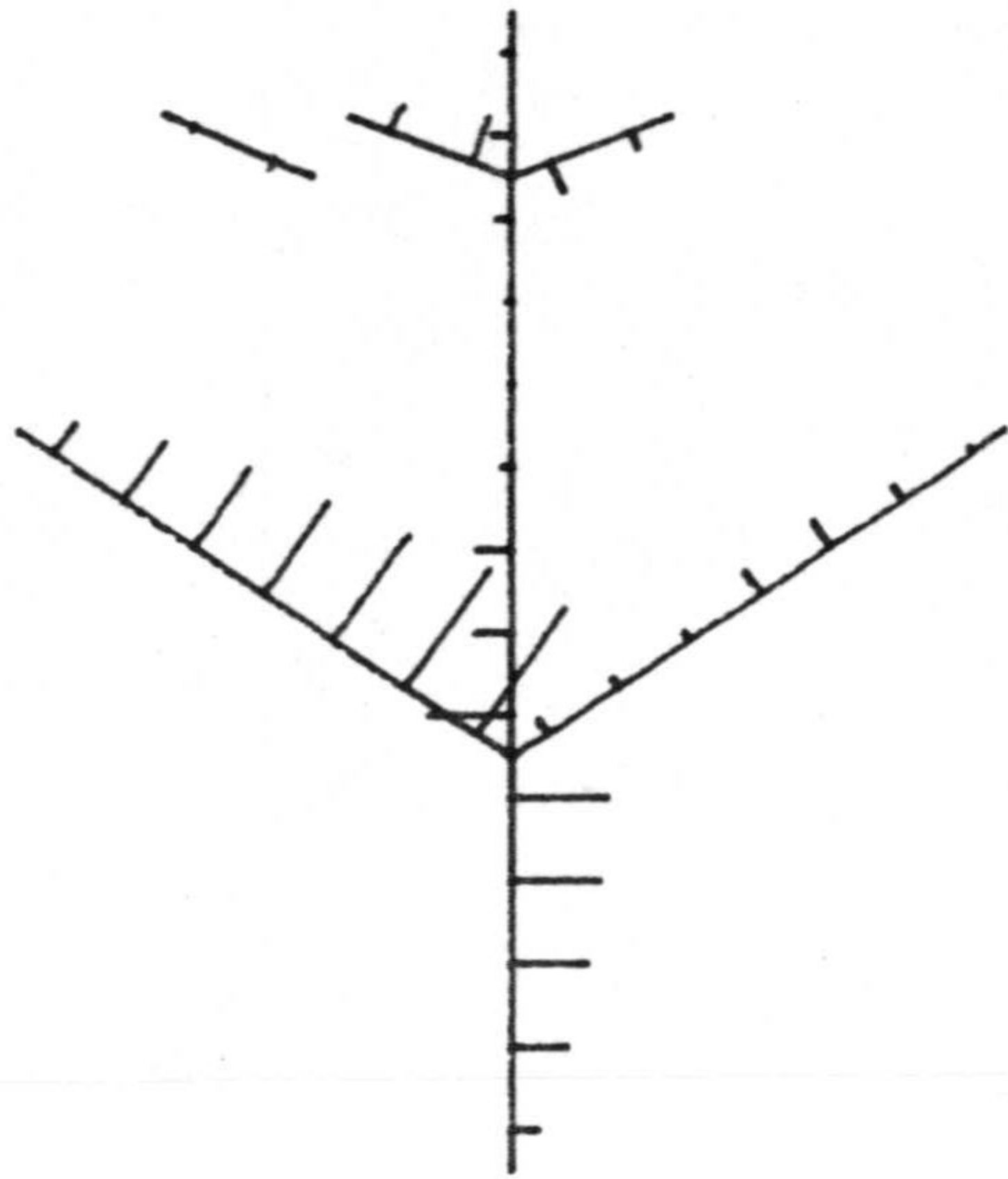


U=17

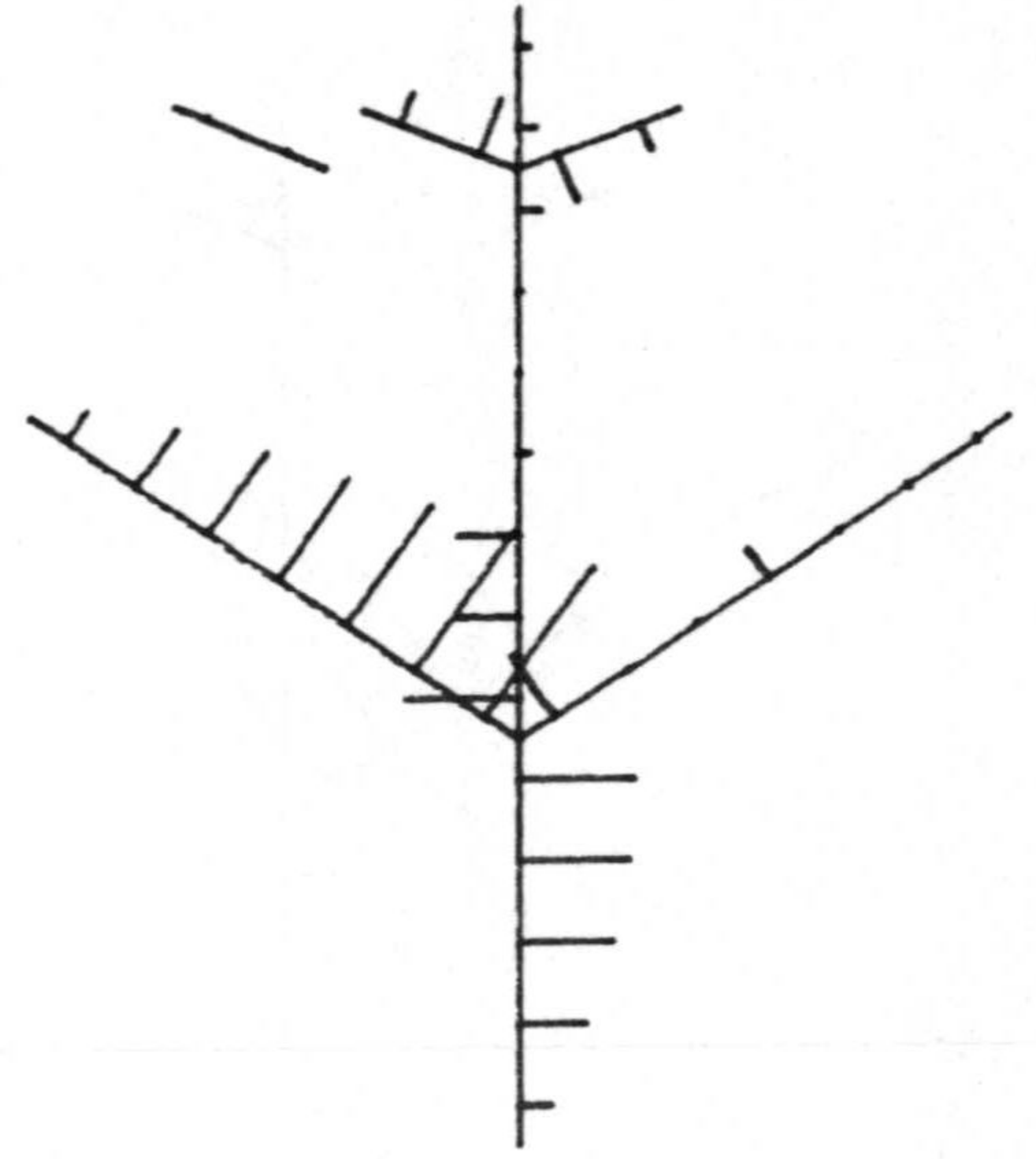


U=18

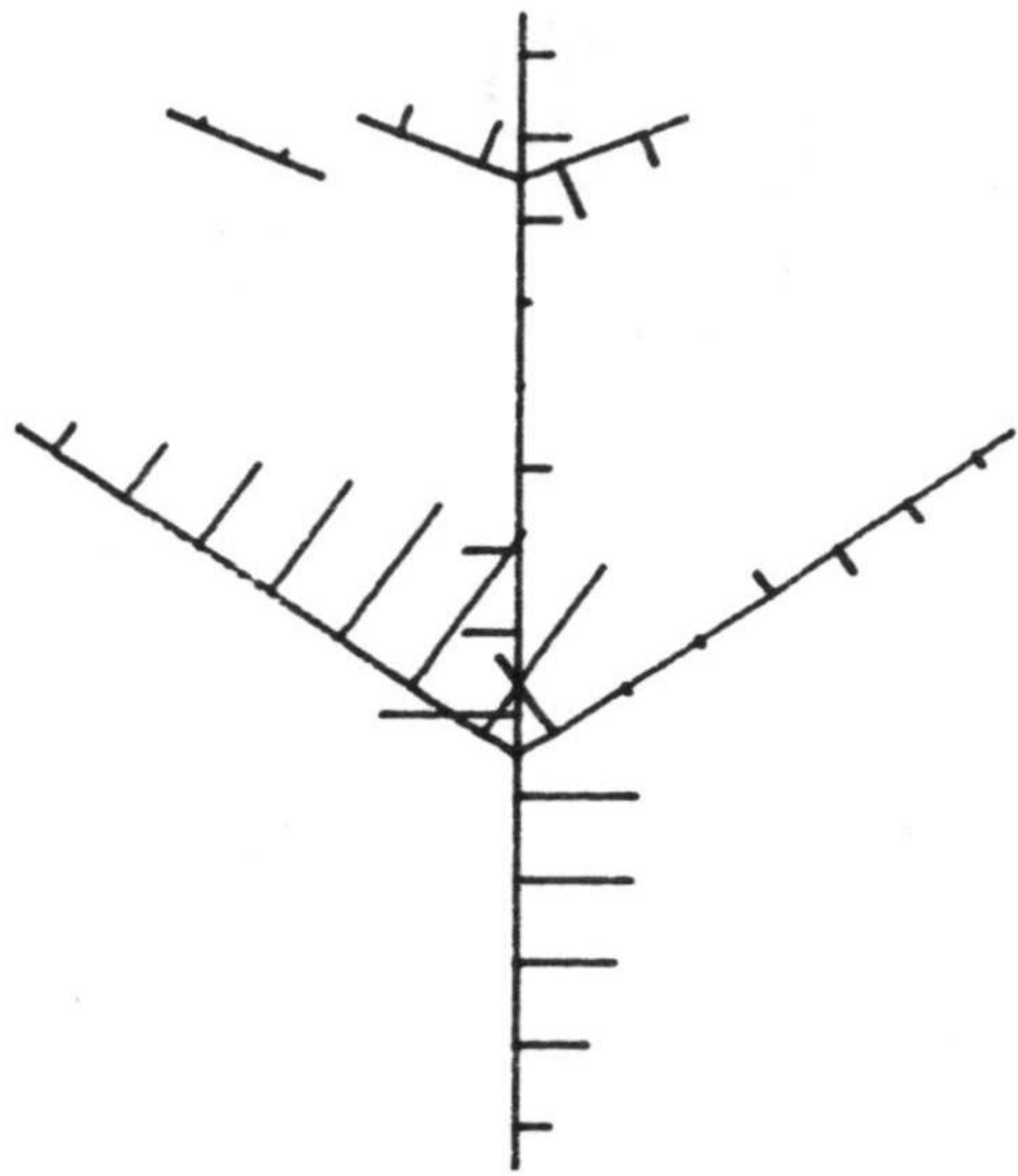
96.7 mA



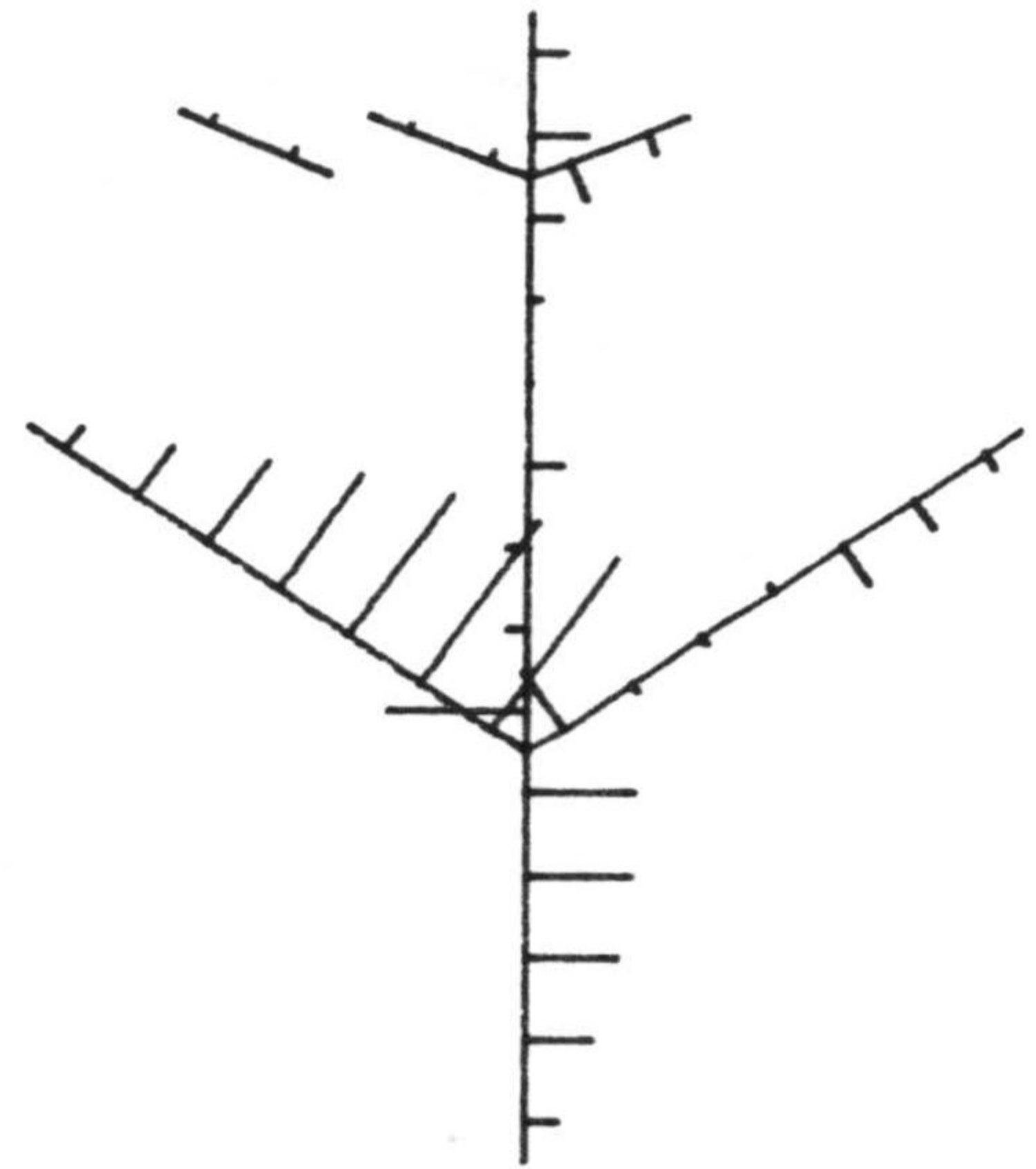
U=19



U=20

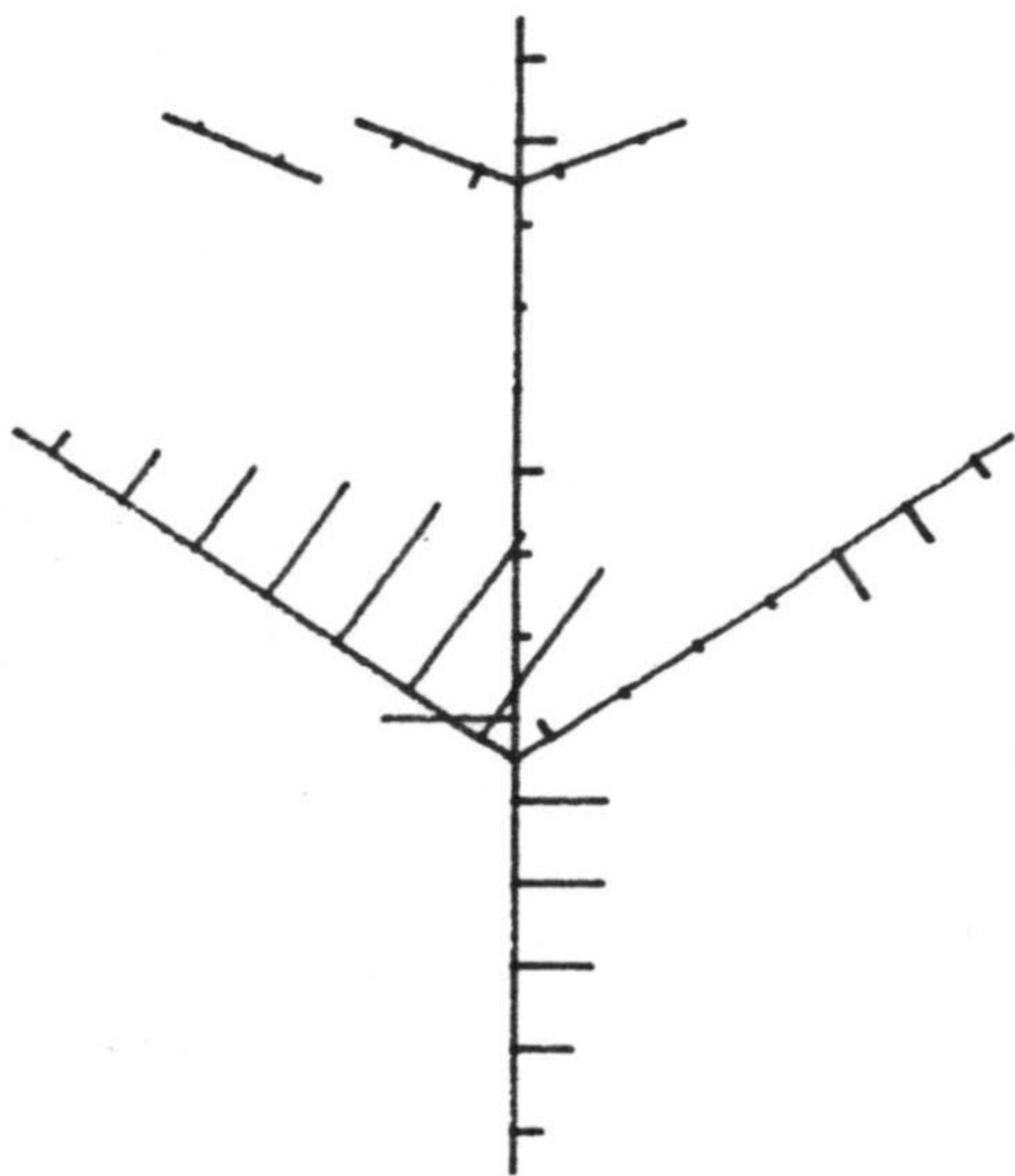


U=21

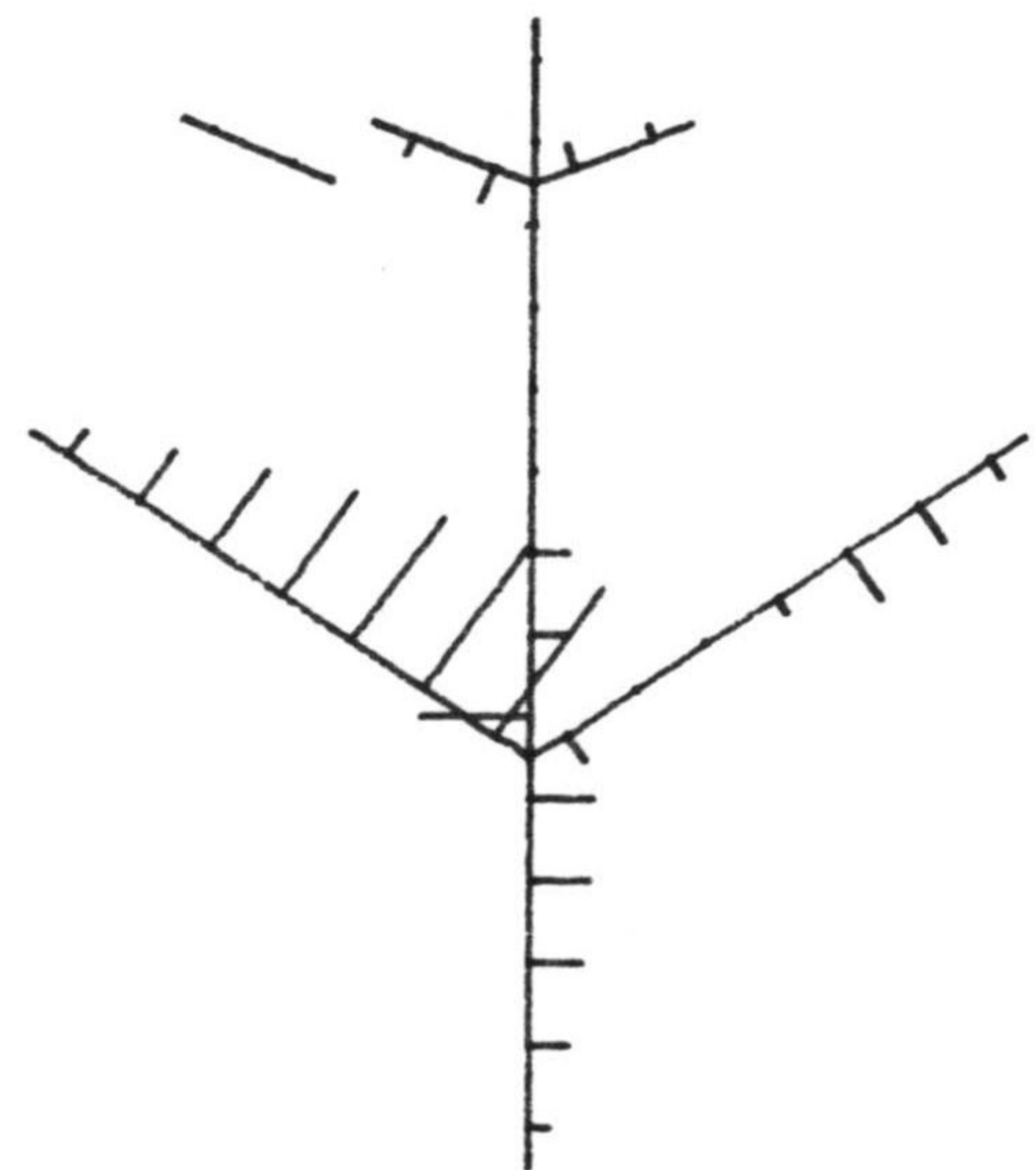


U=22

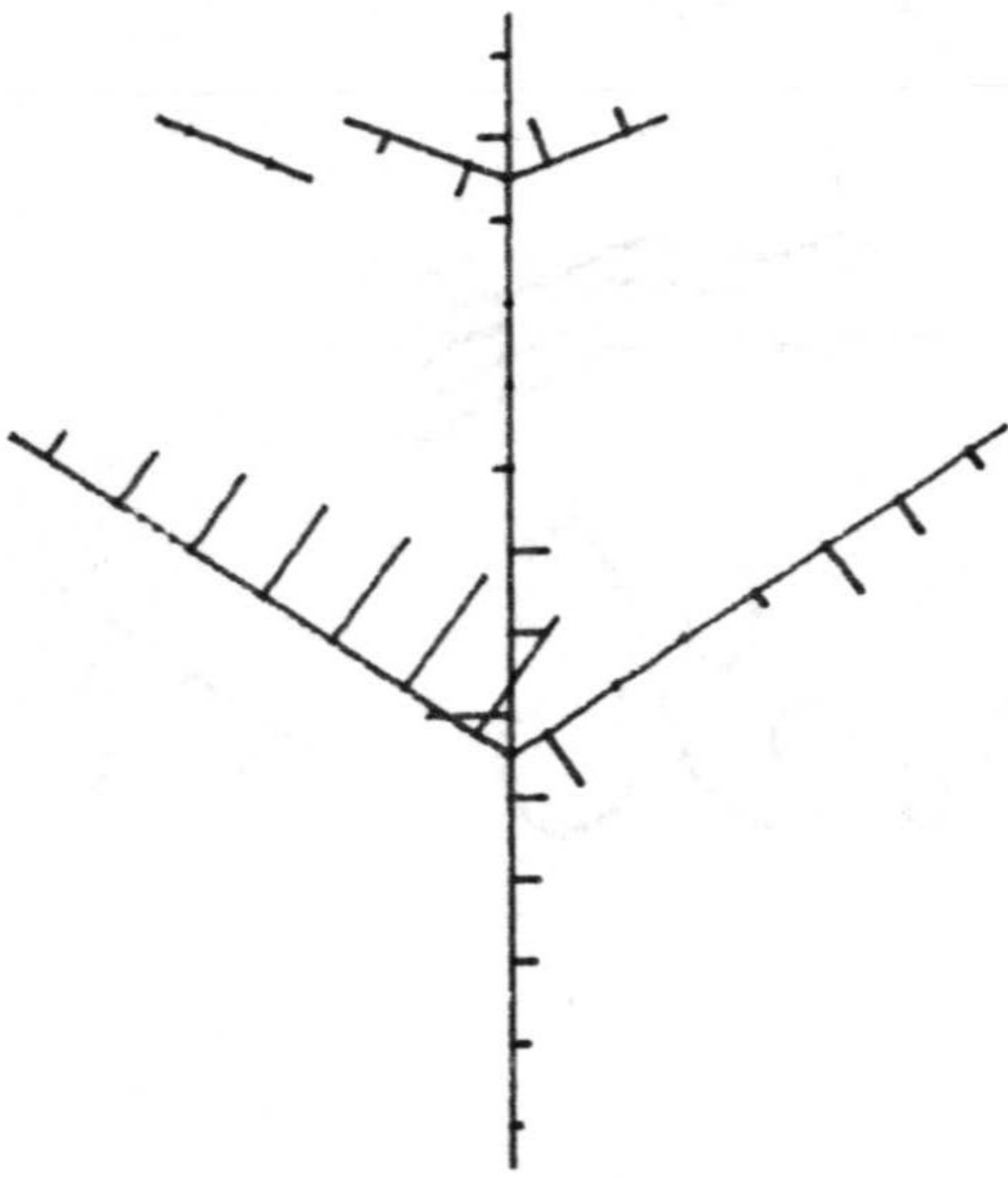
96.7 mR



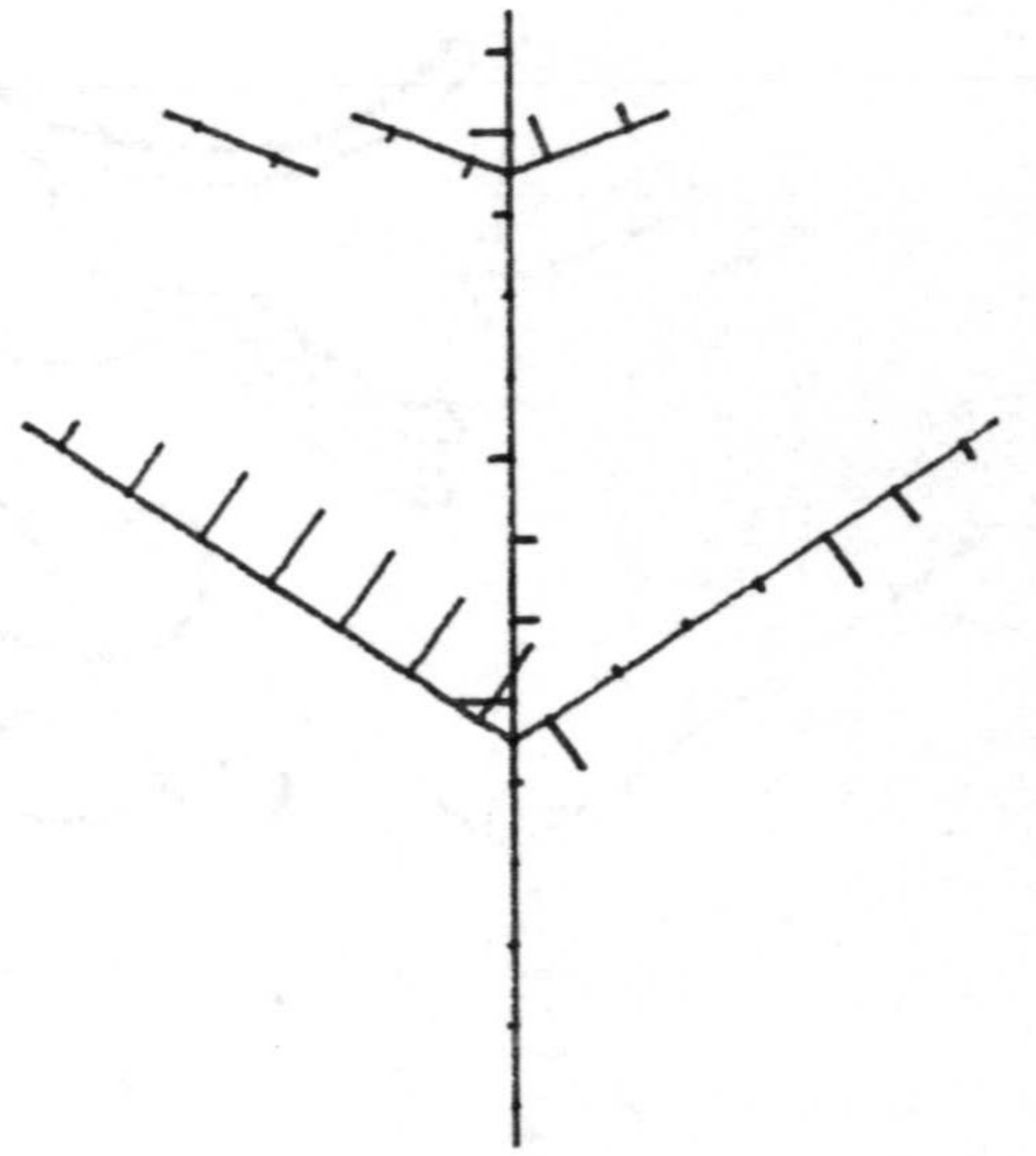
U=23



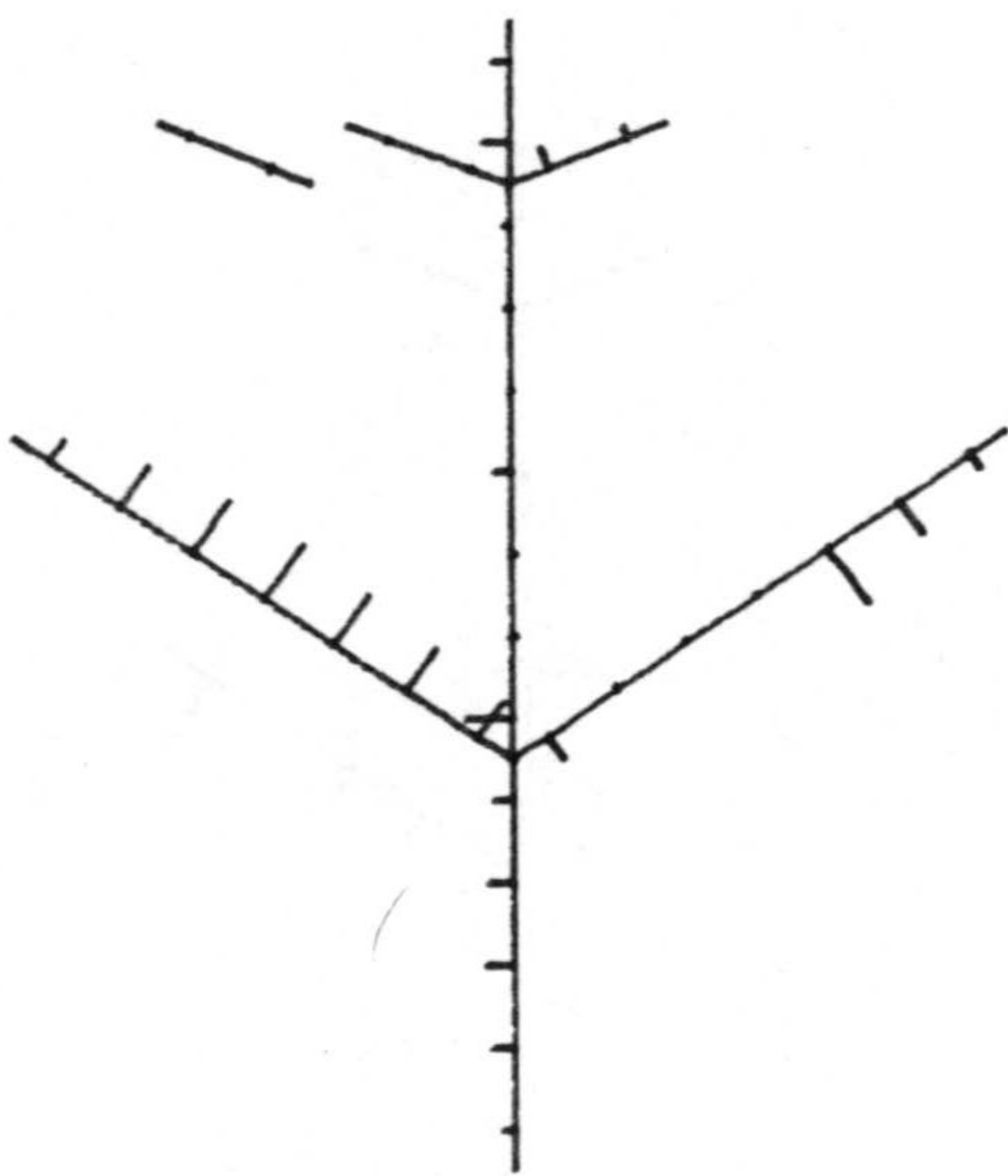
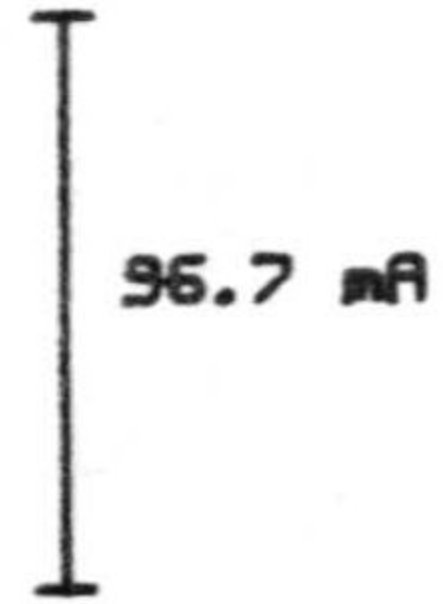
U=24



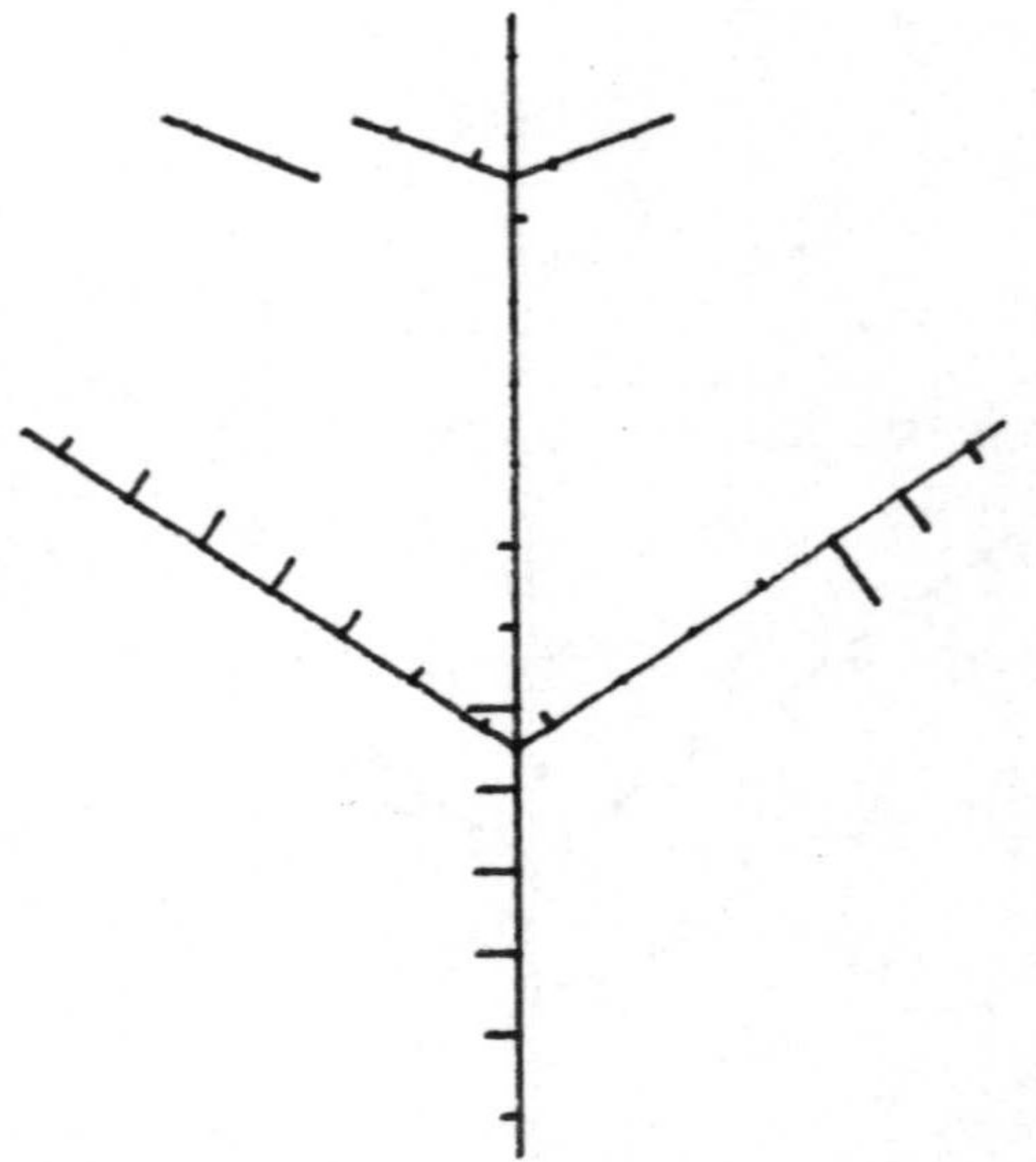
U=25



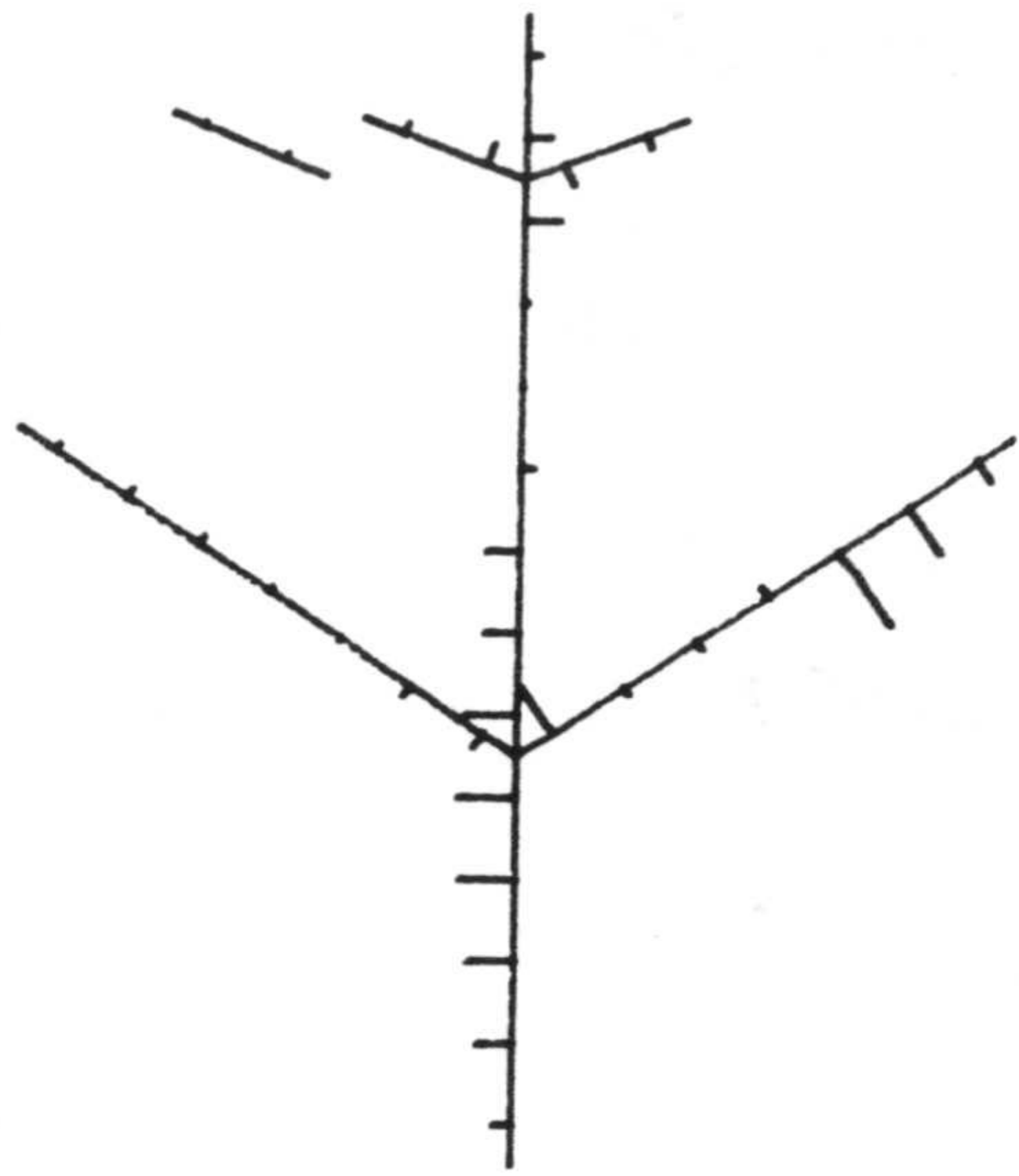
U=26



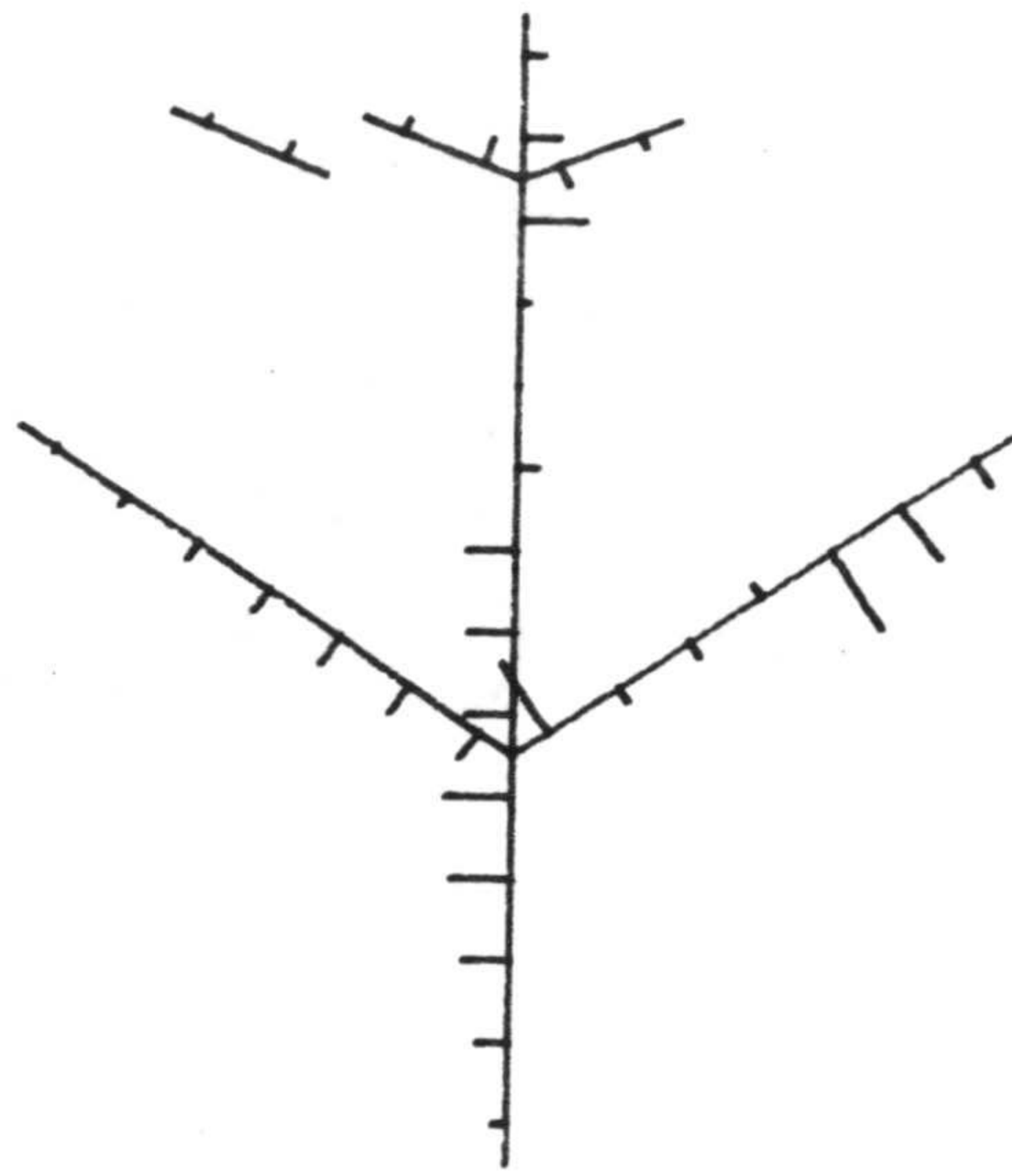
U=27



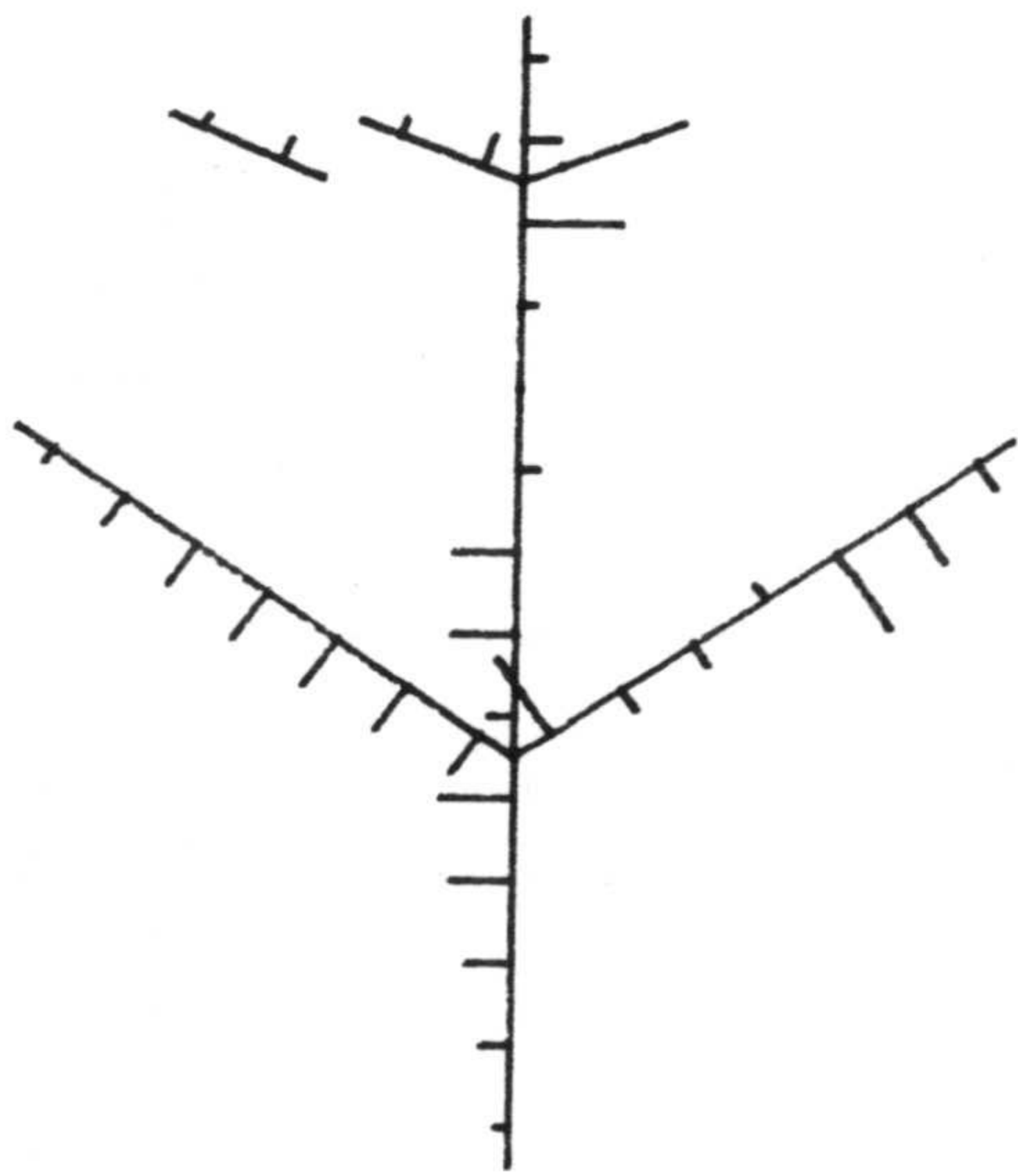
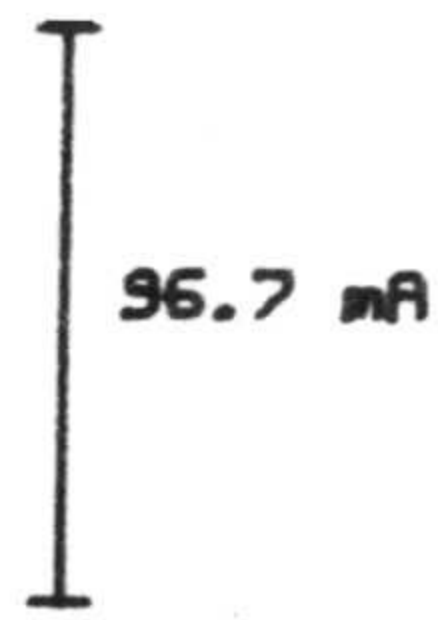
U=28



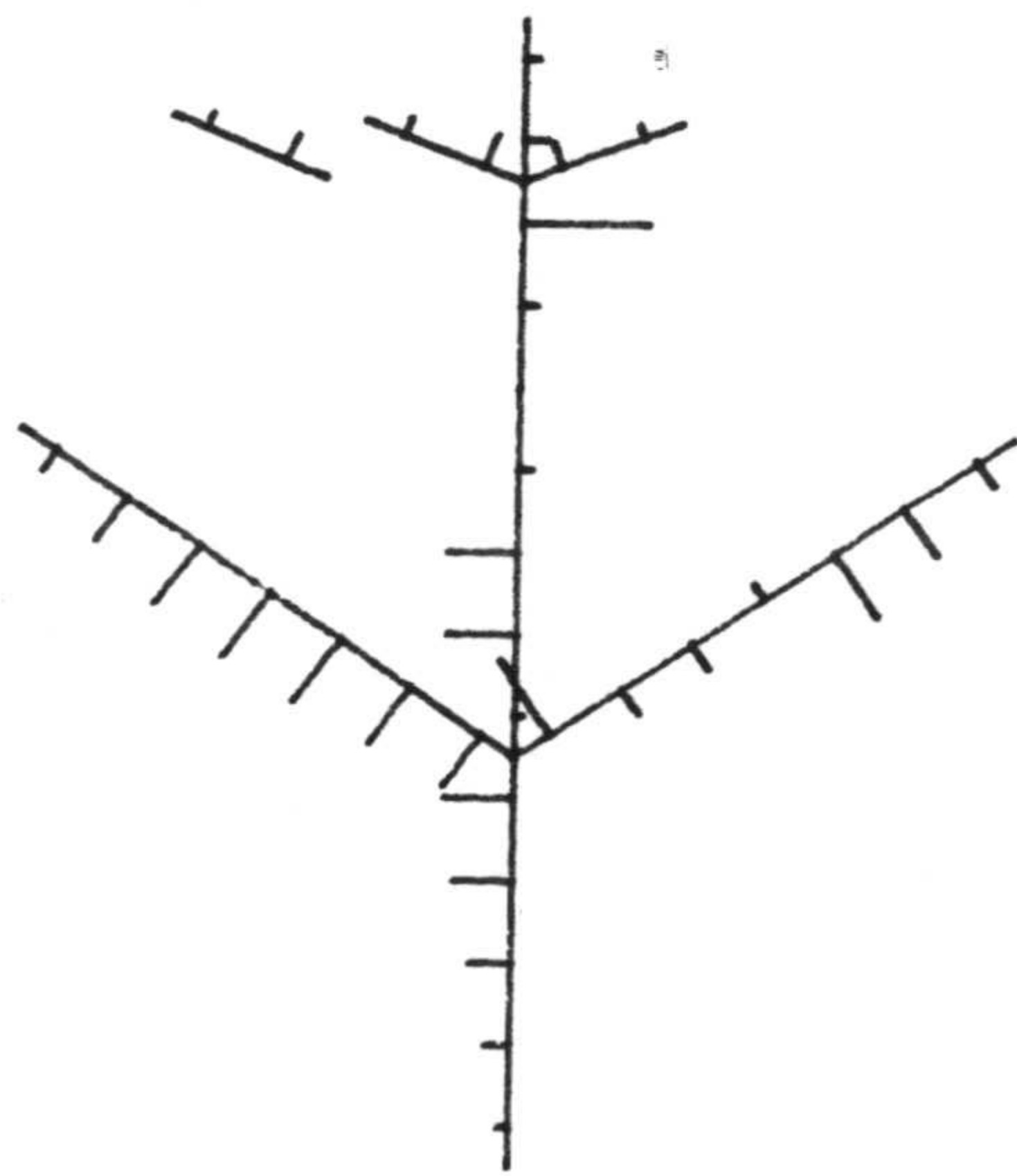
U=29



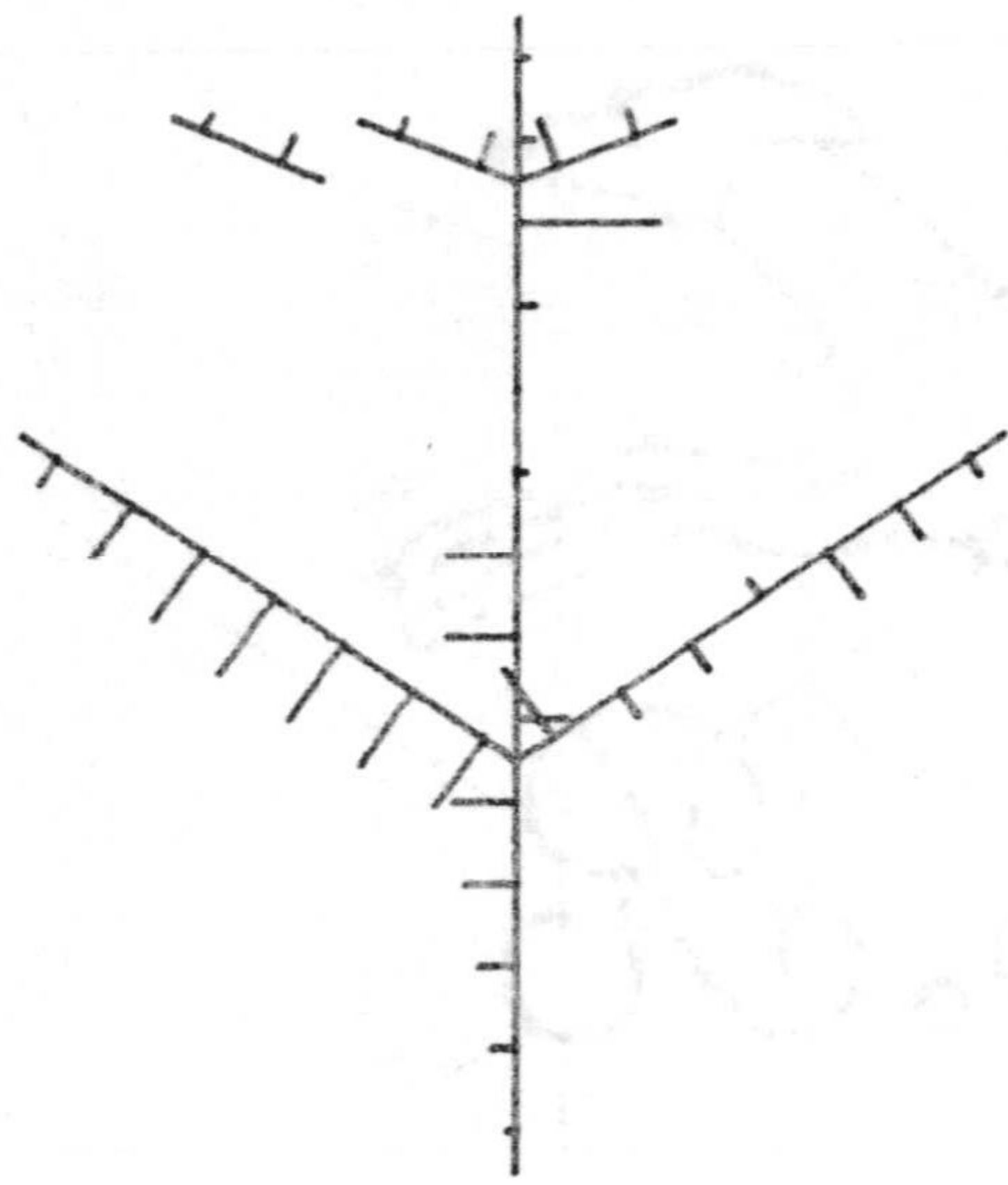
U=30



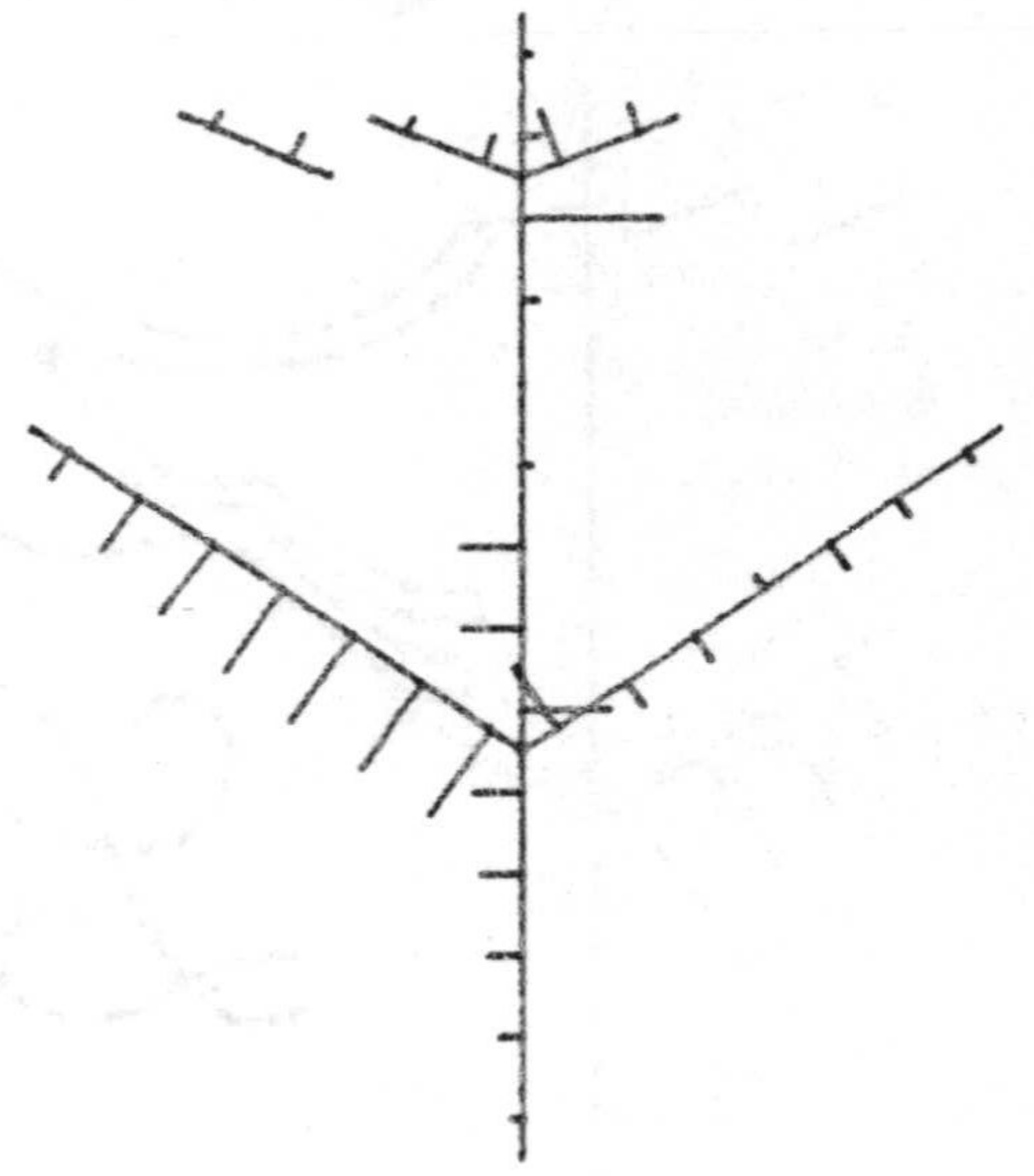
U=31



U=32

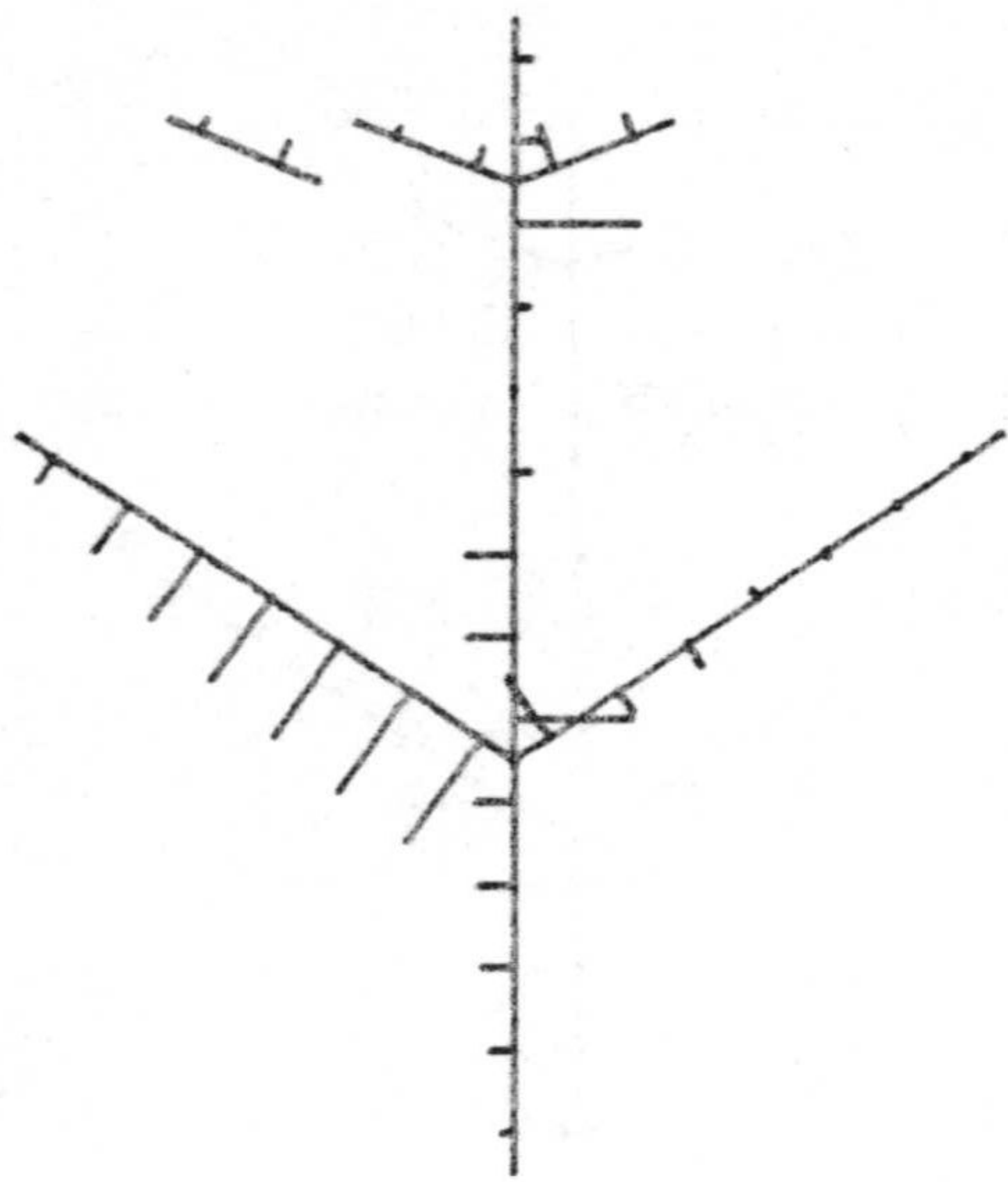


U=33

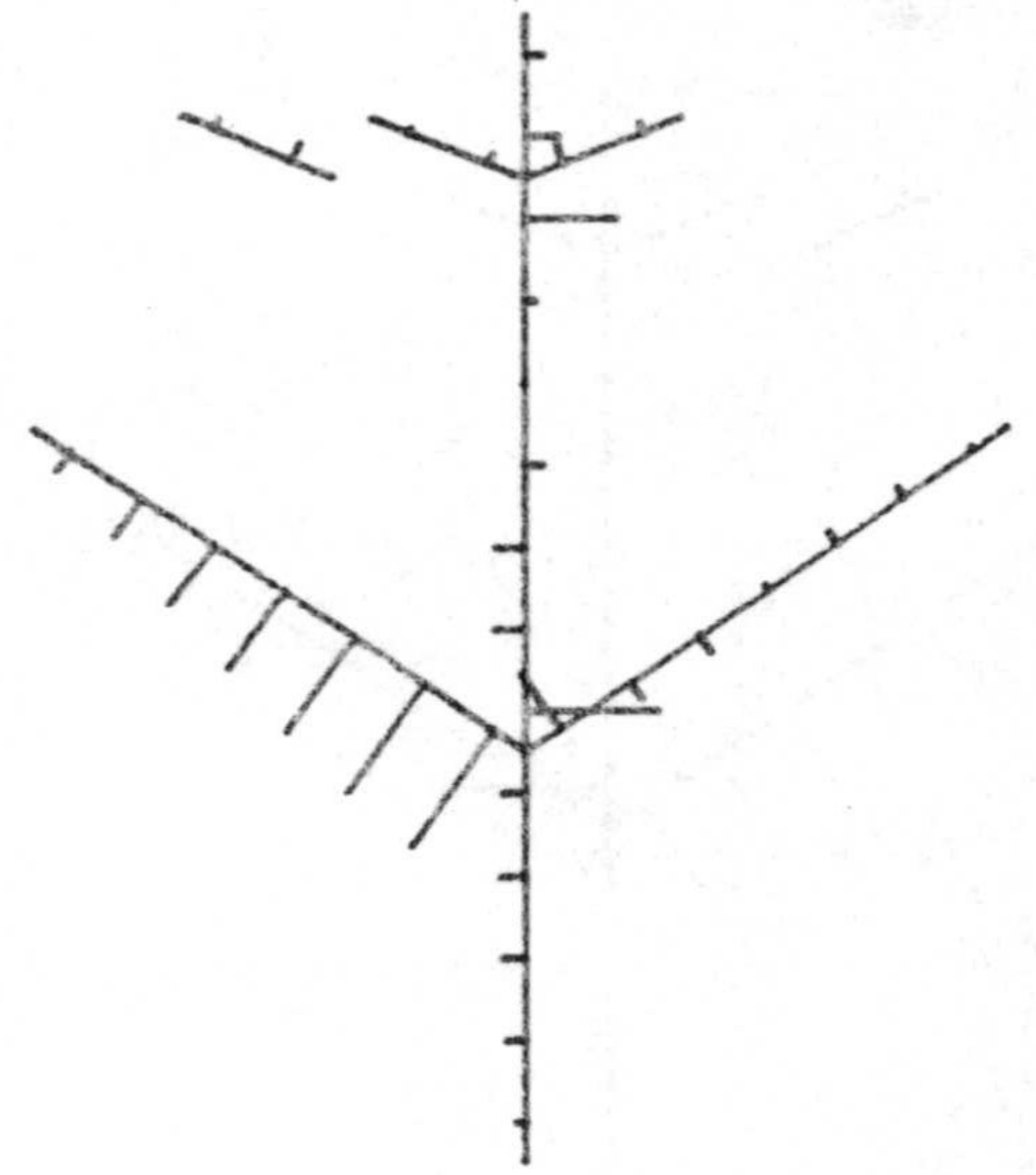


U=34

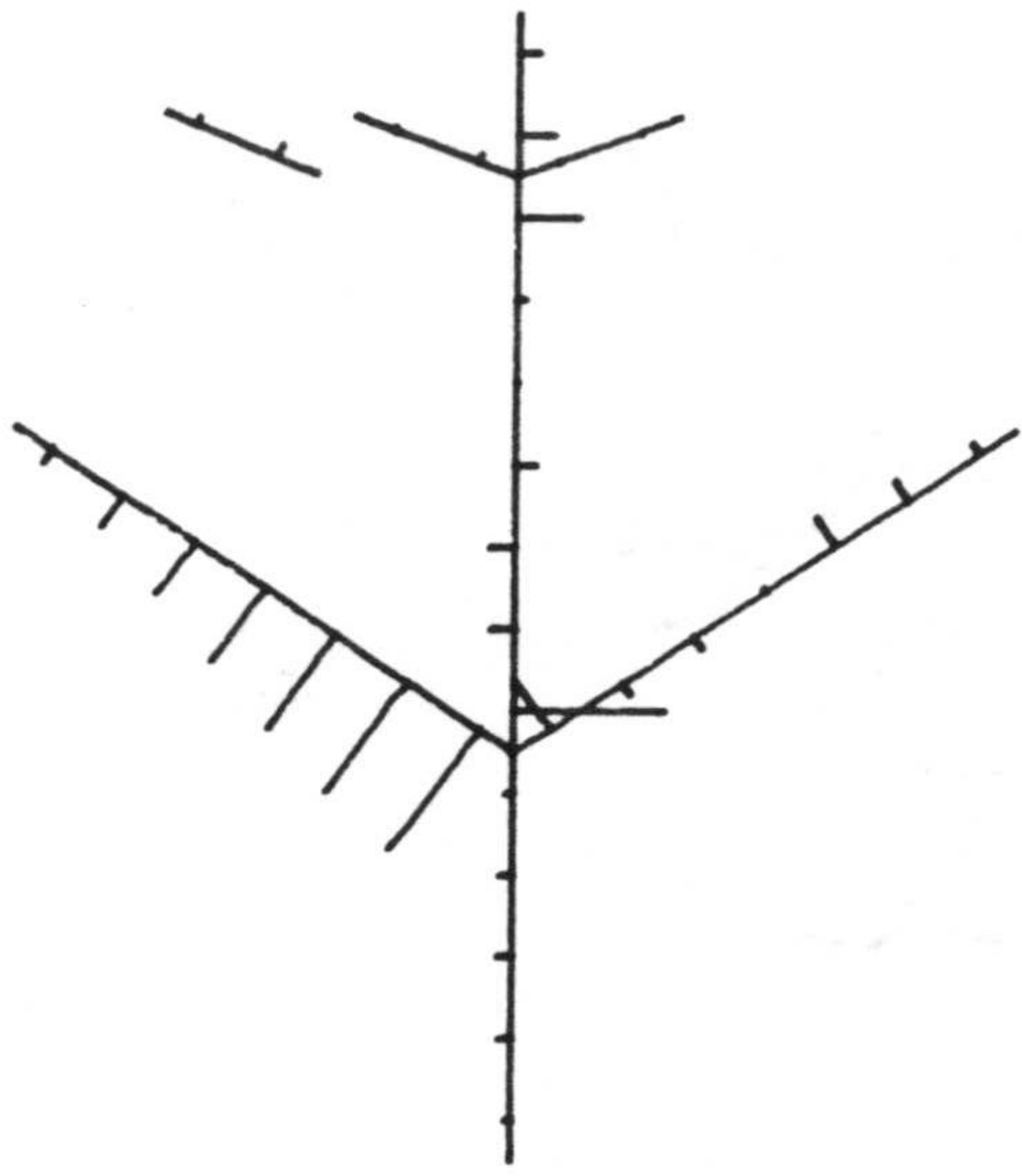
36.7 m



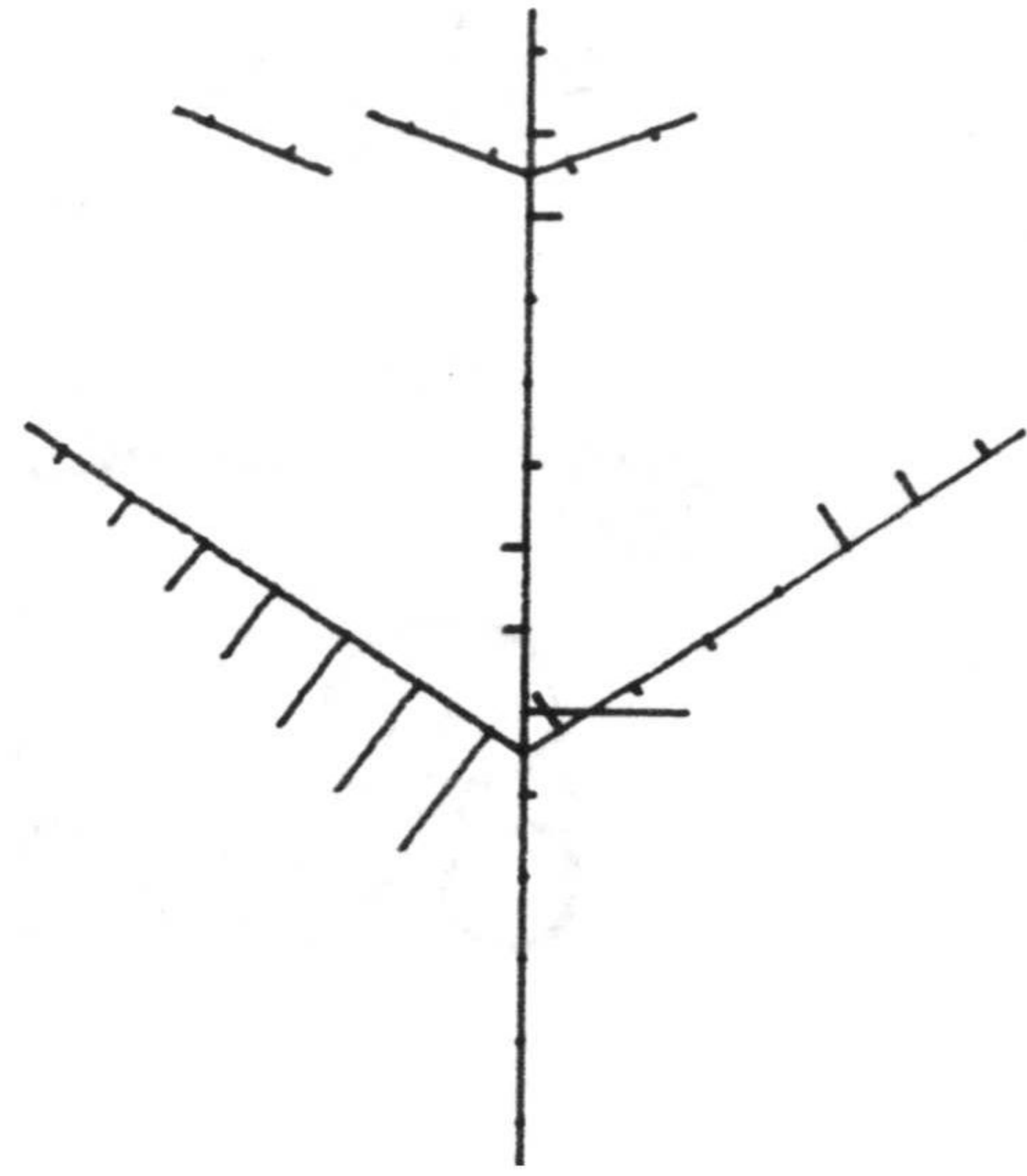
U=35



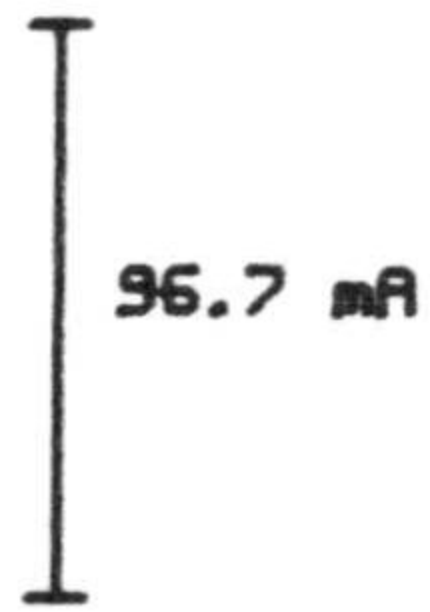
U=36



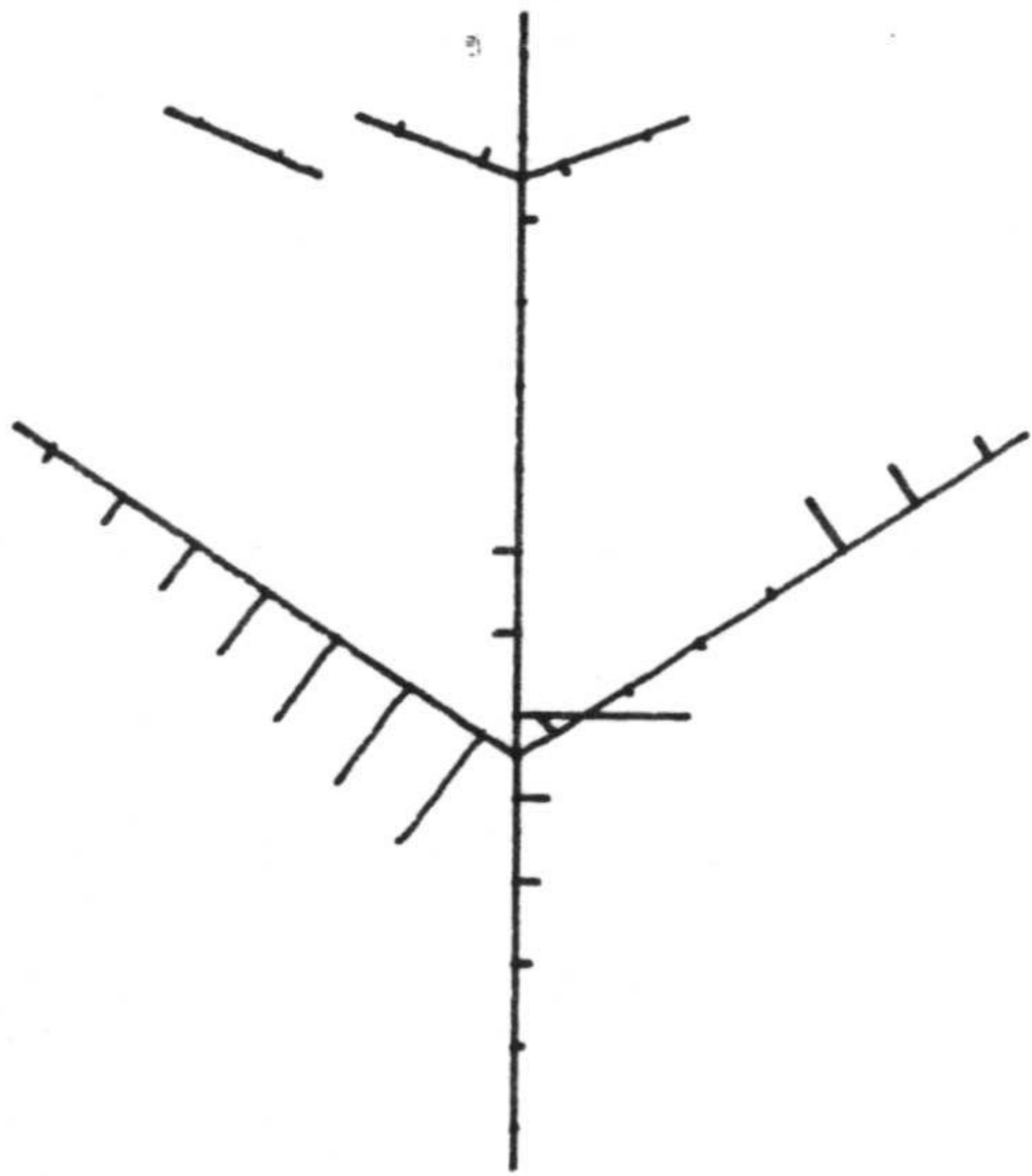
U=37



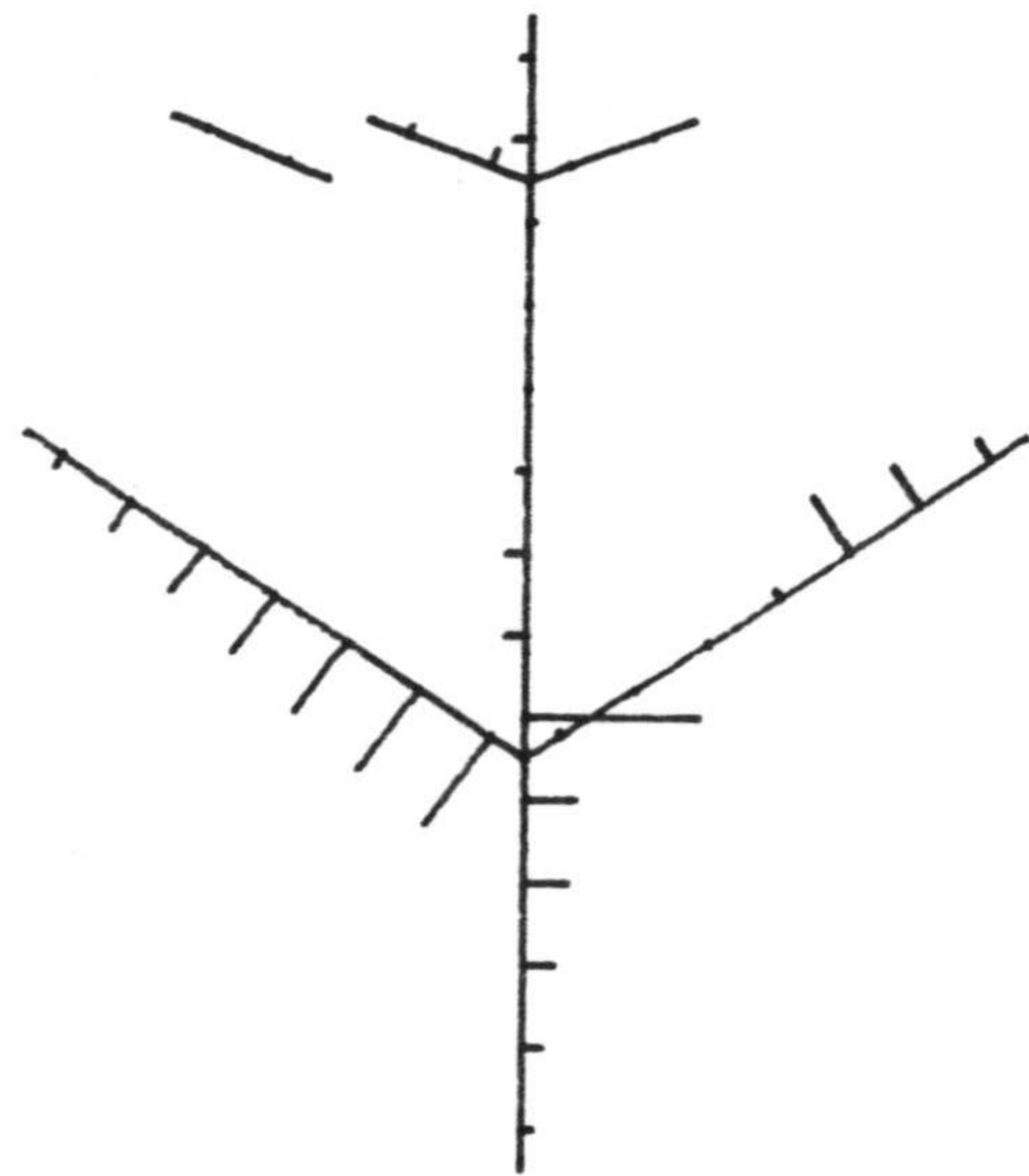
U=38



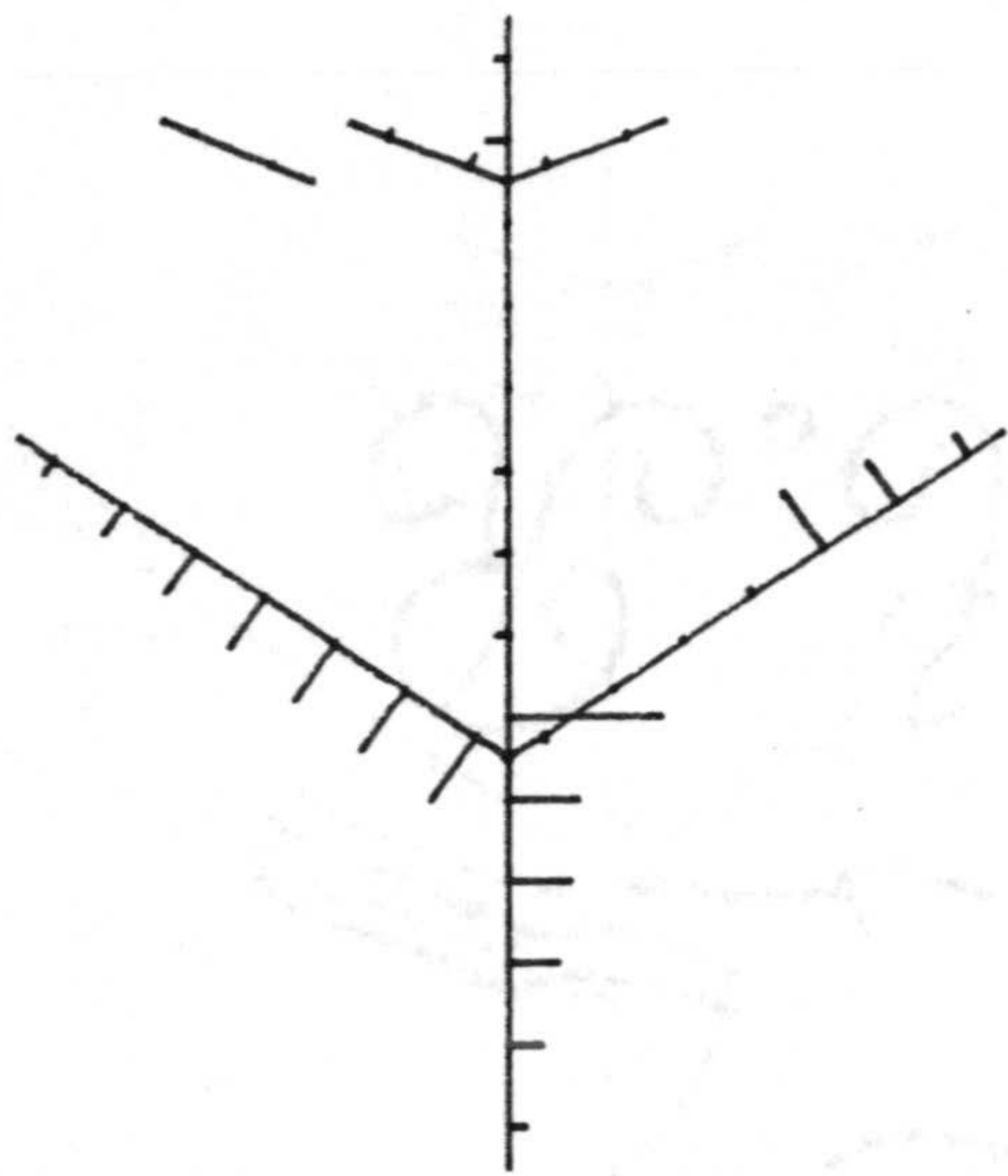
96.7 mR



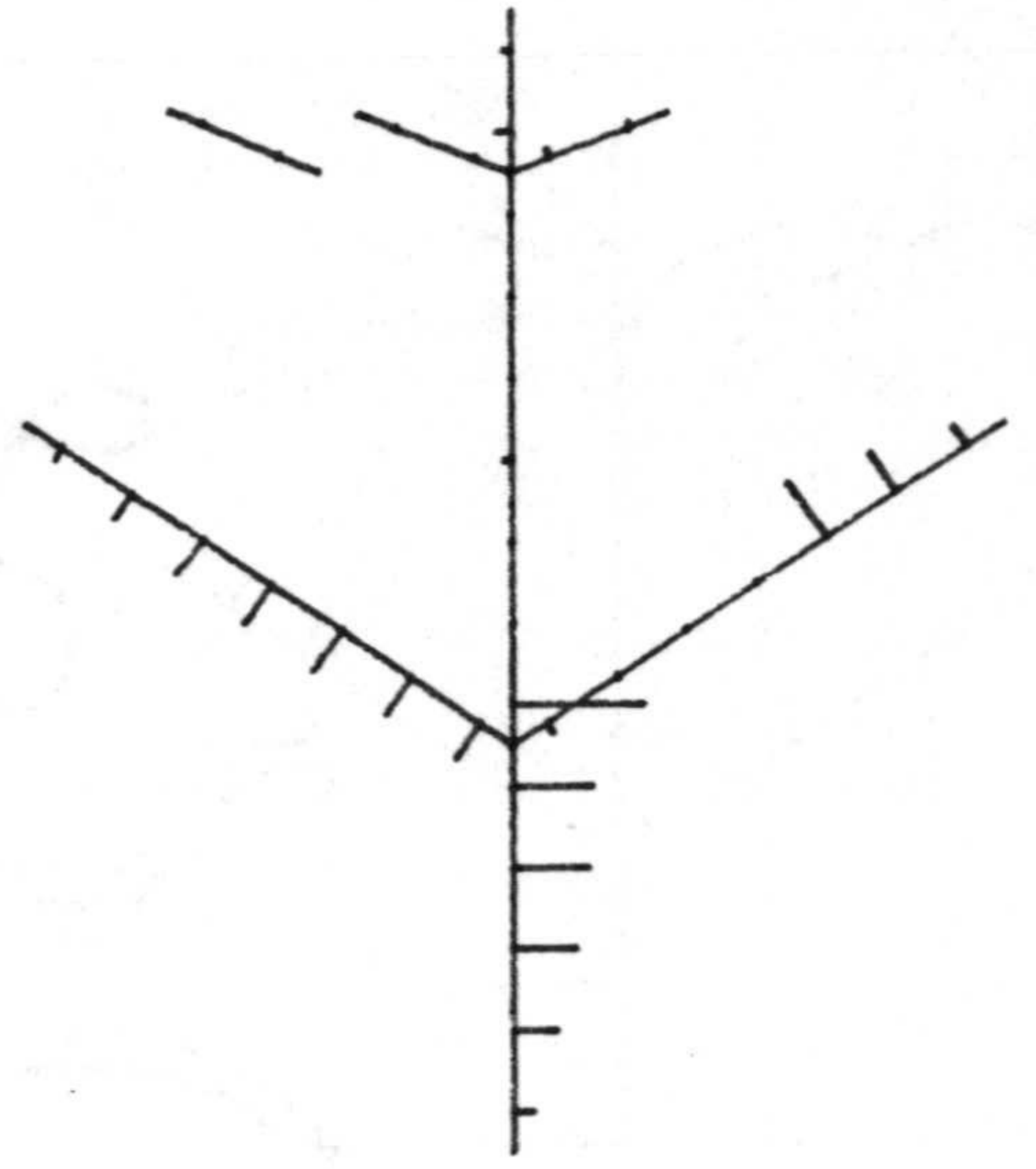
U=39



U=40

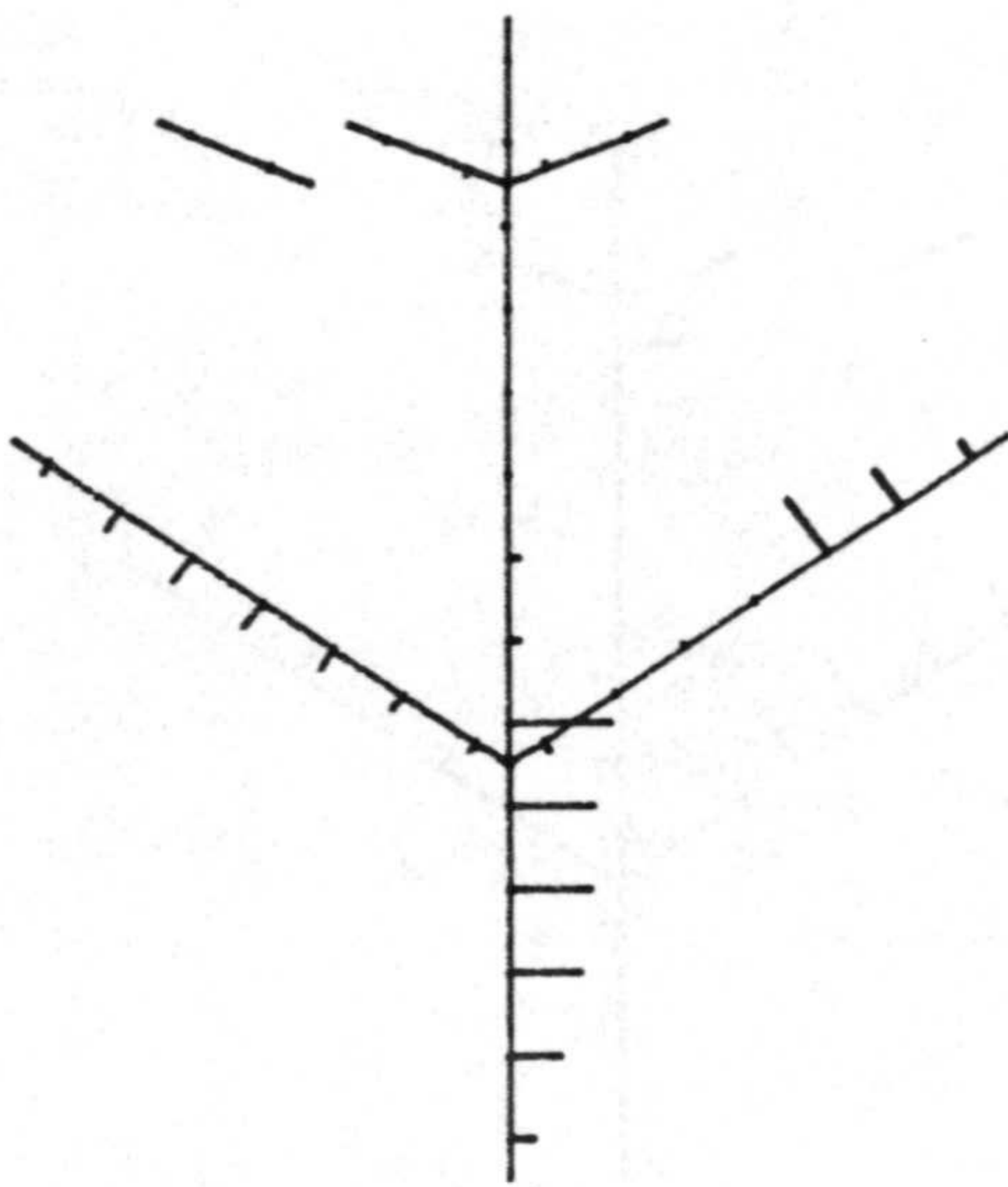


U=41

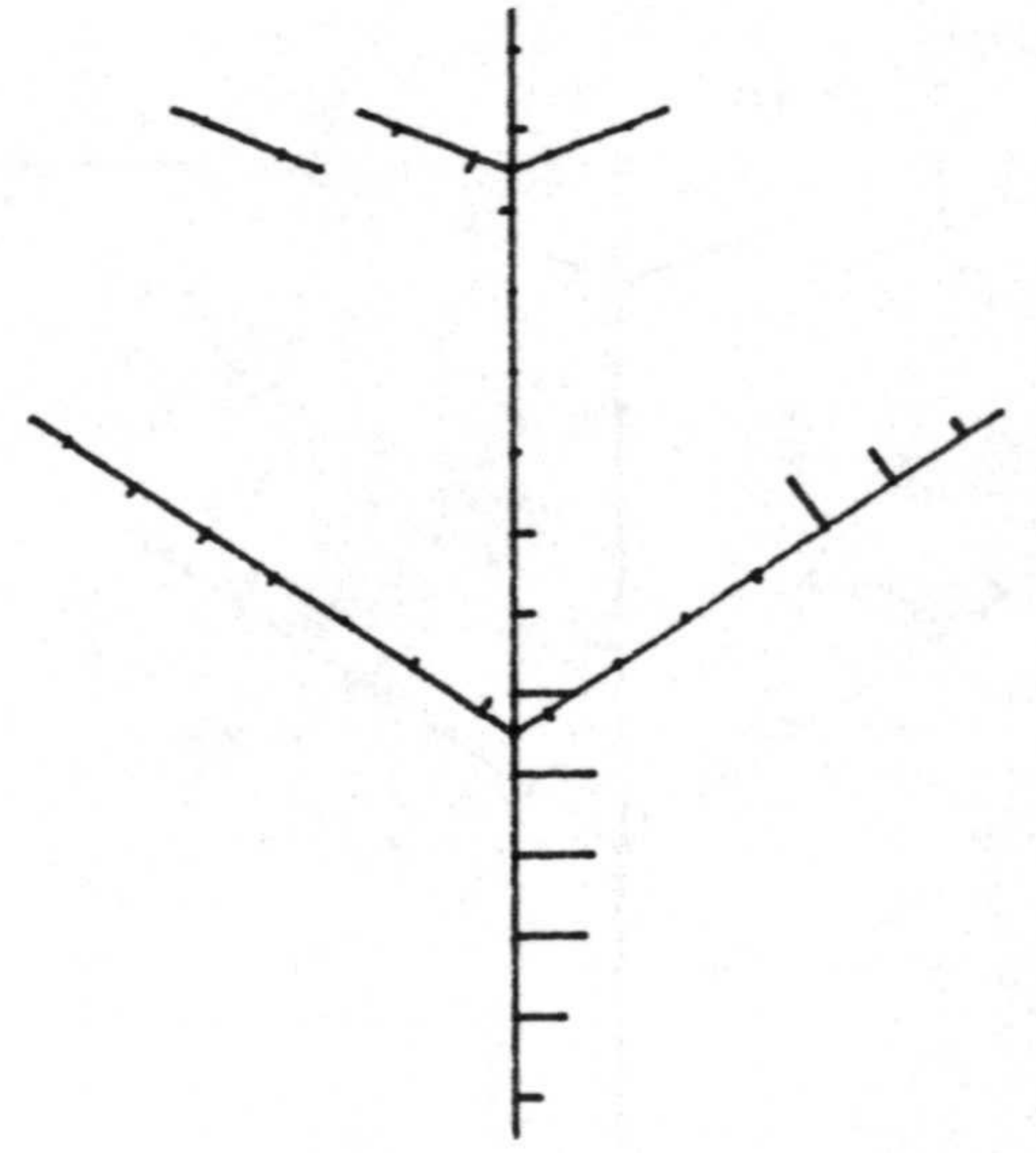


U=42

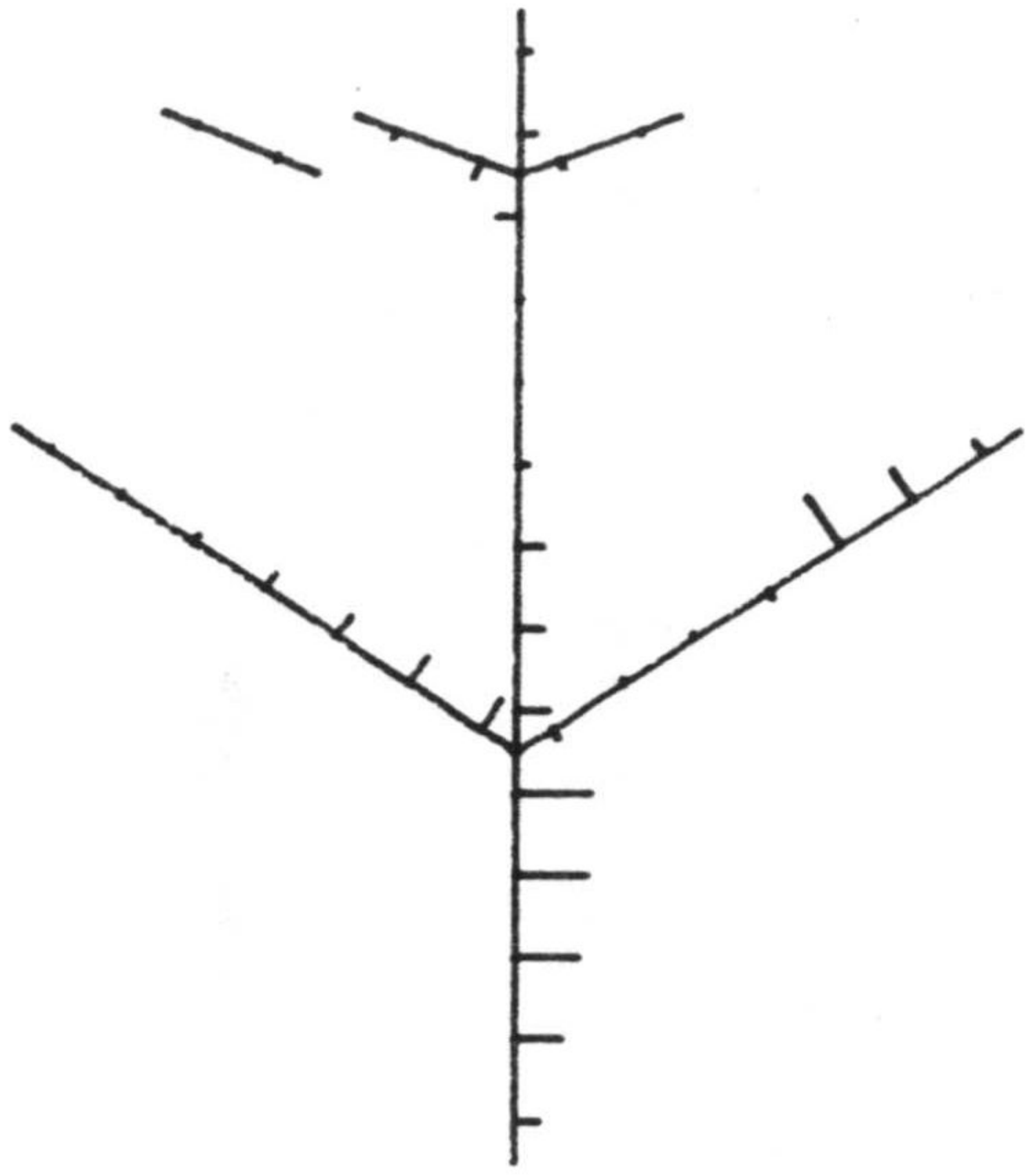
96.7 mA



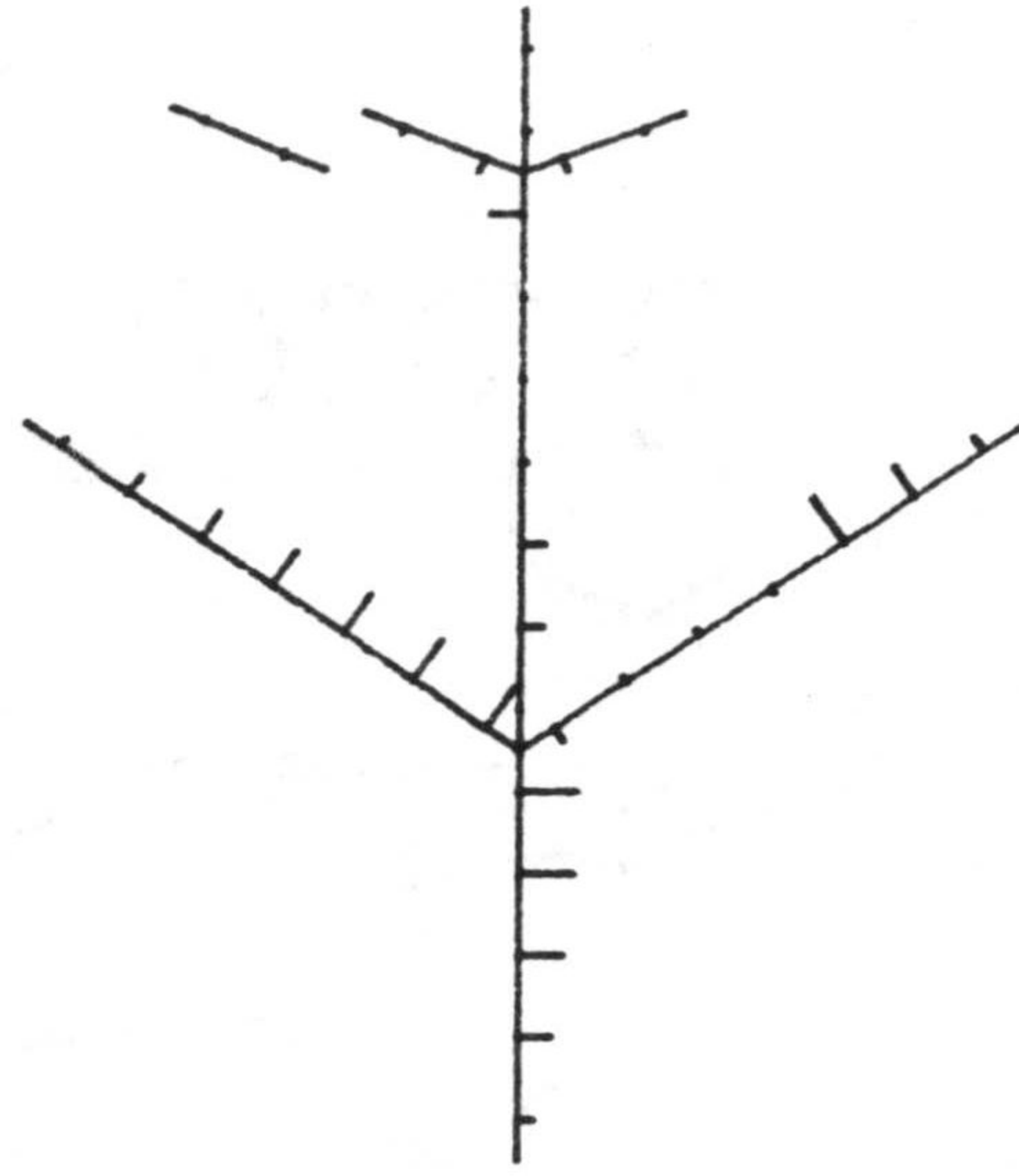
U=43



U=44

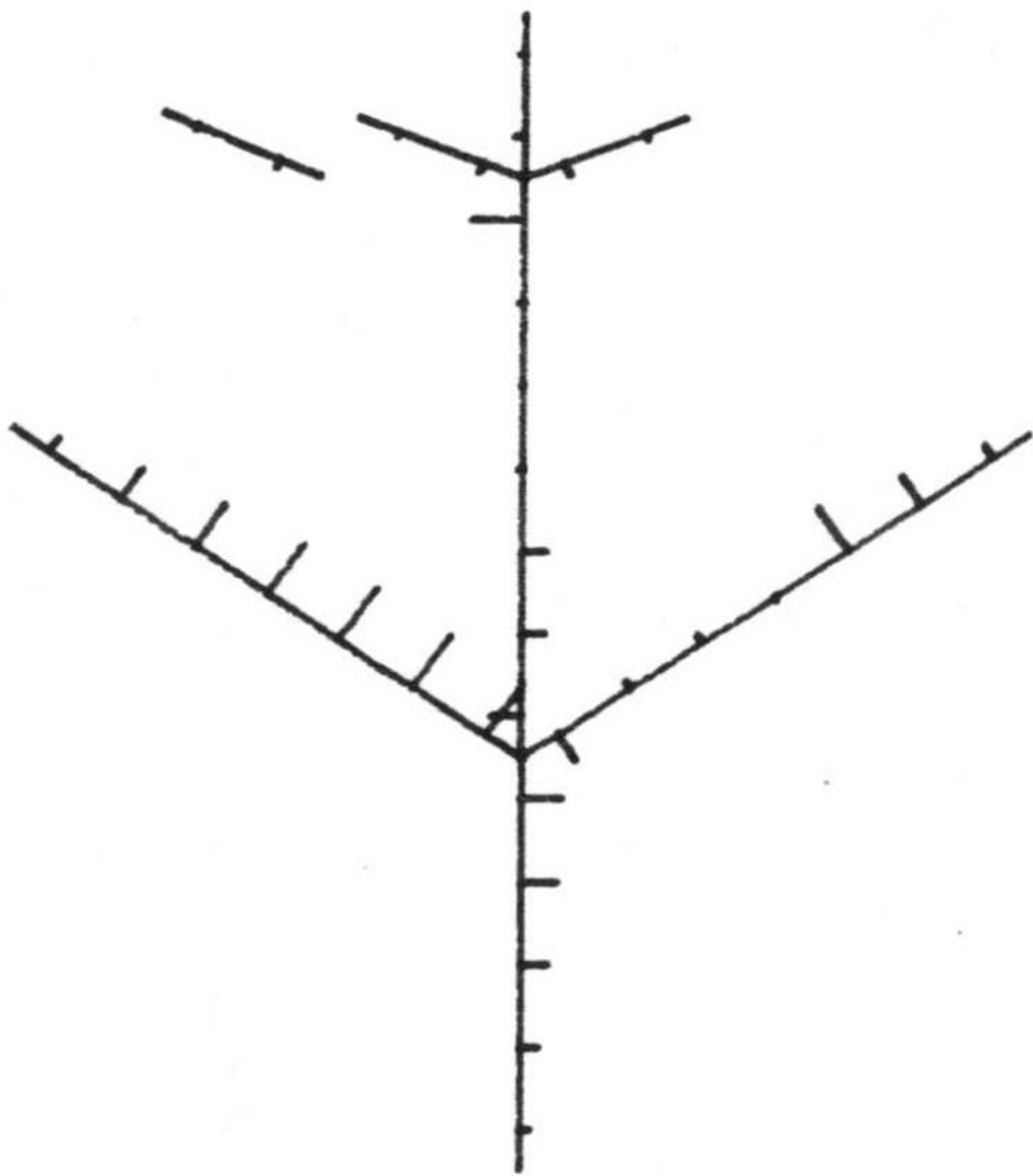


U=45

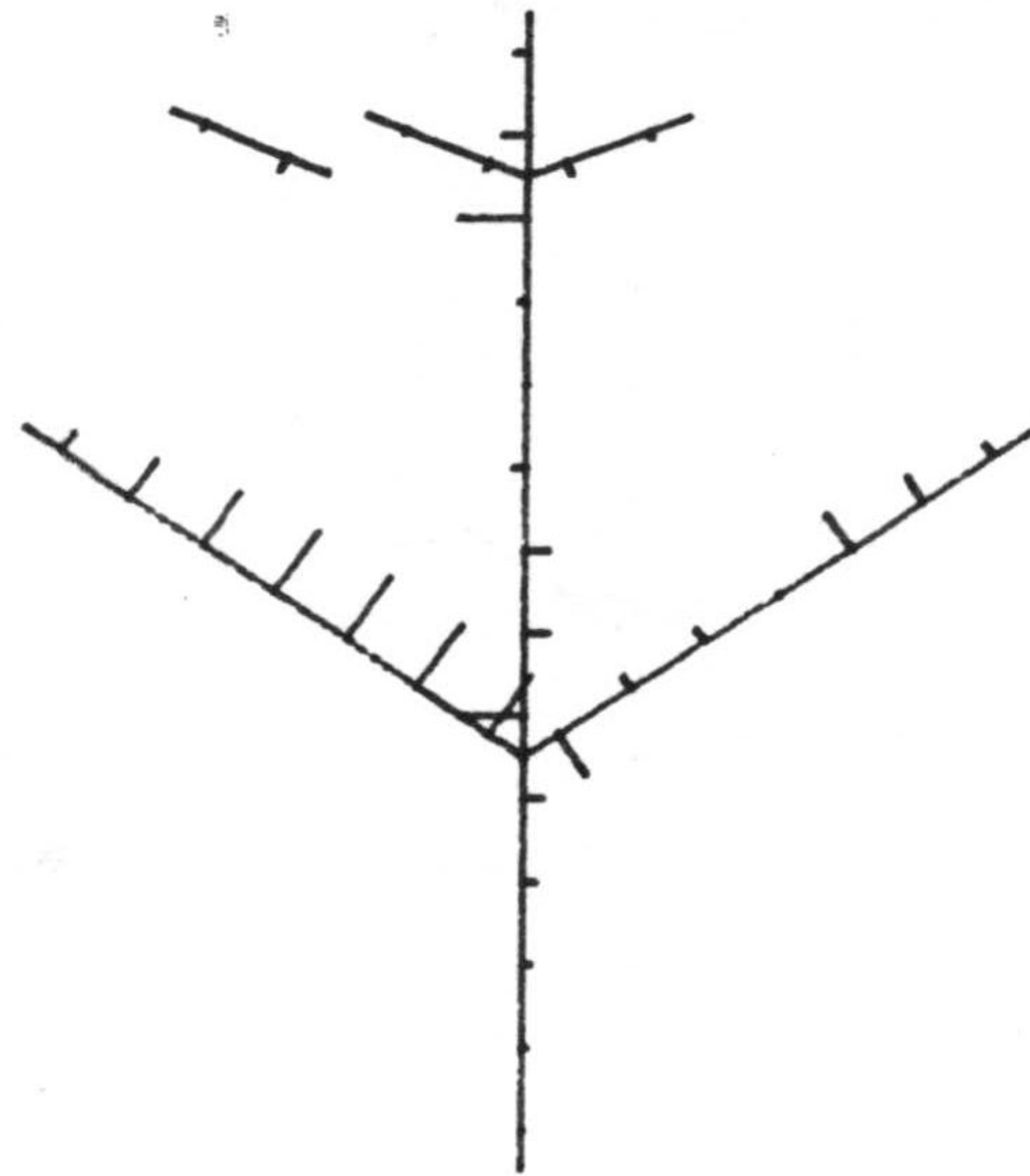


U=46

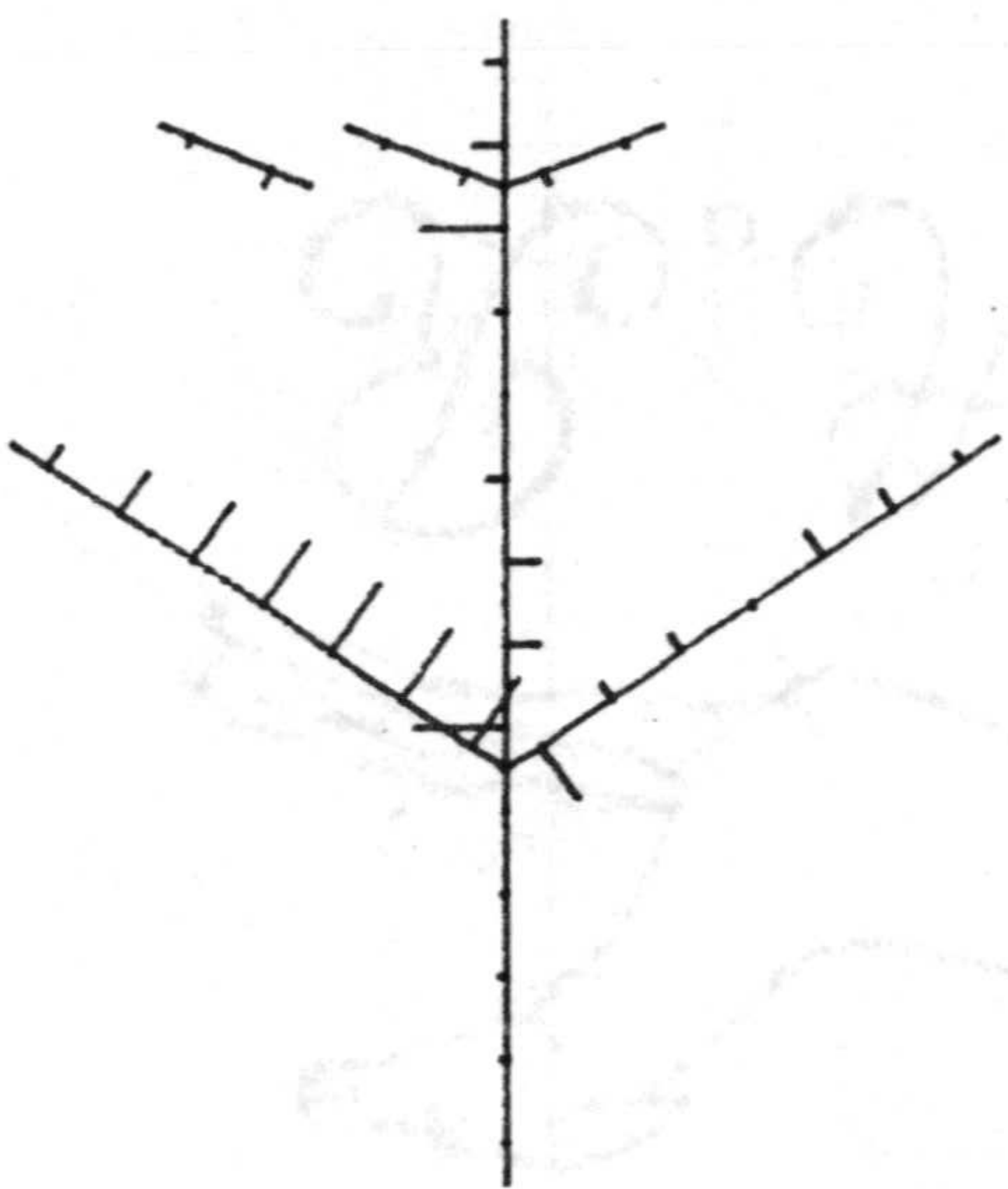
96.7 mfl



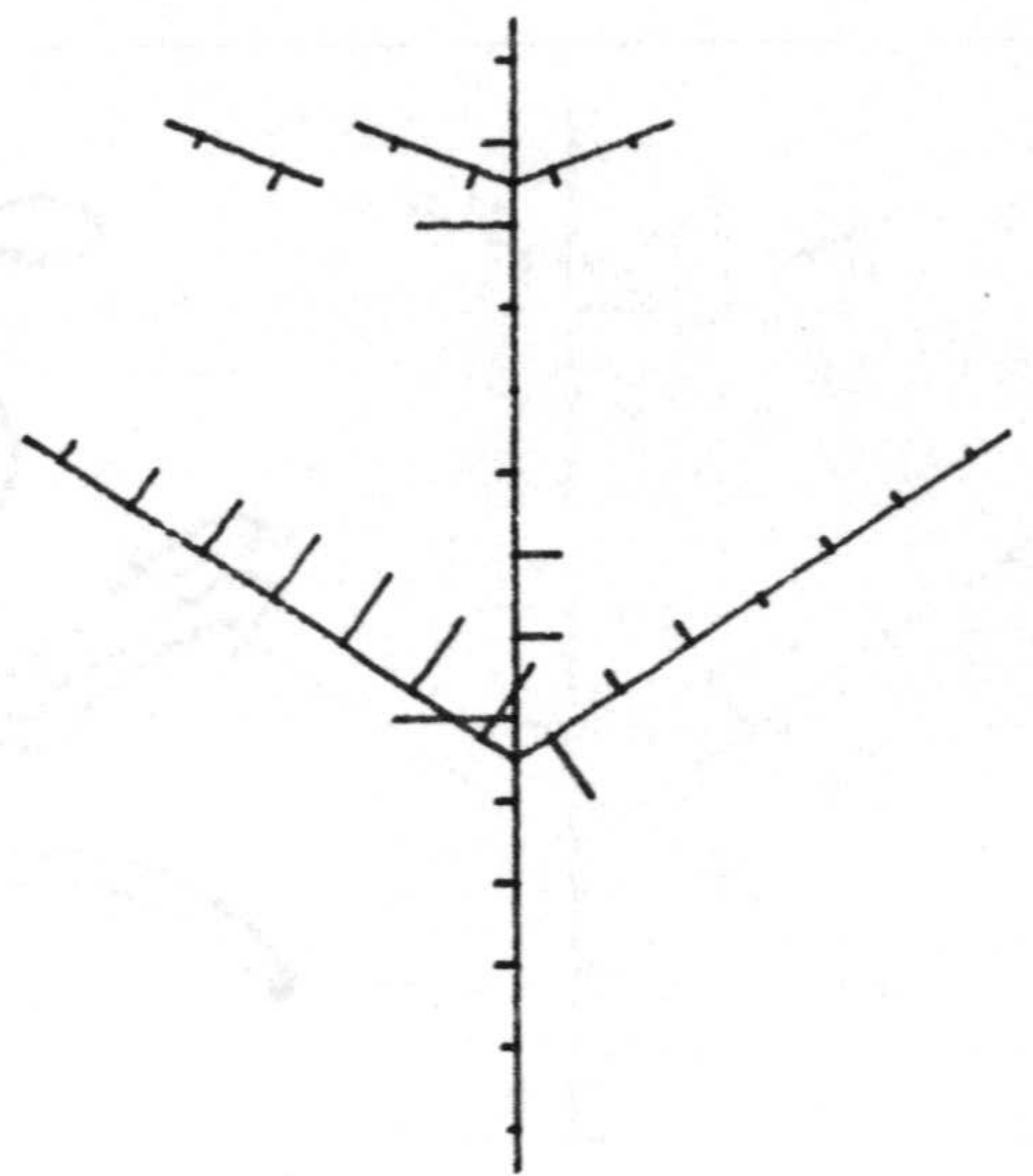
U=47



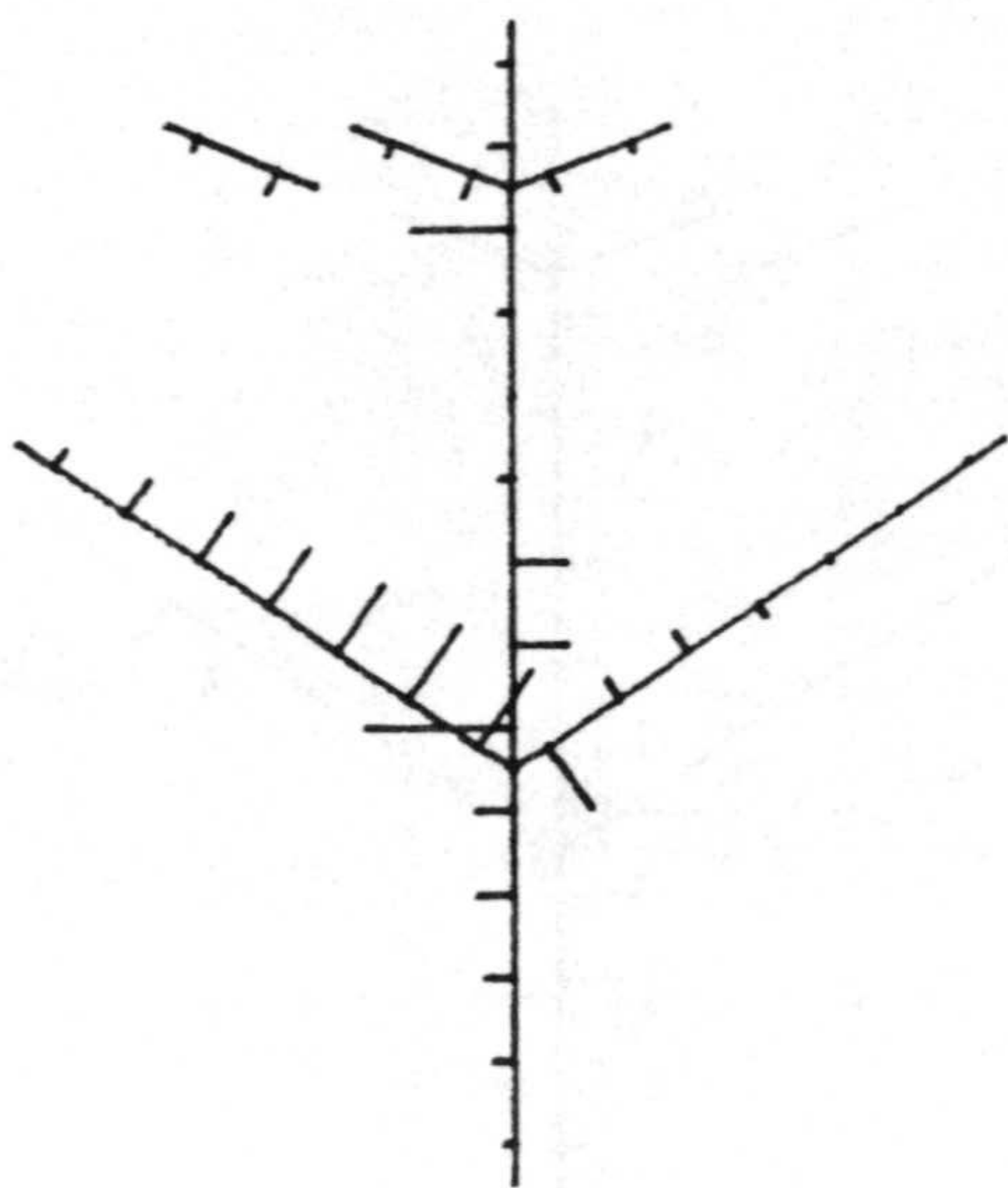
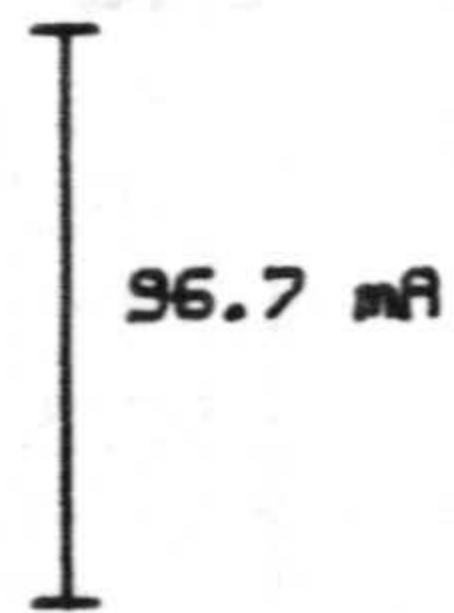
U=48



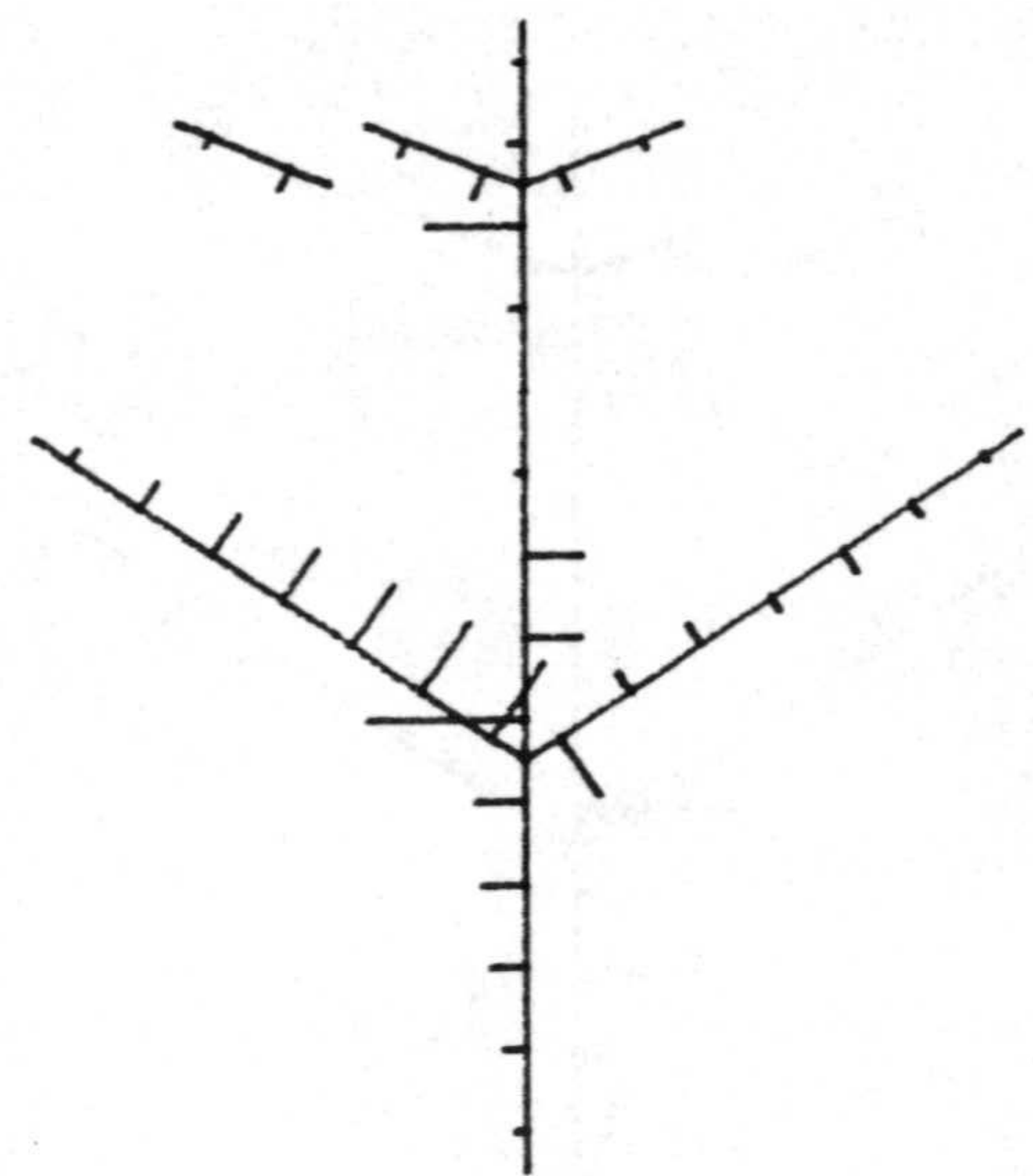
U=49



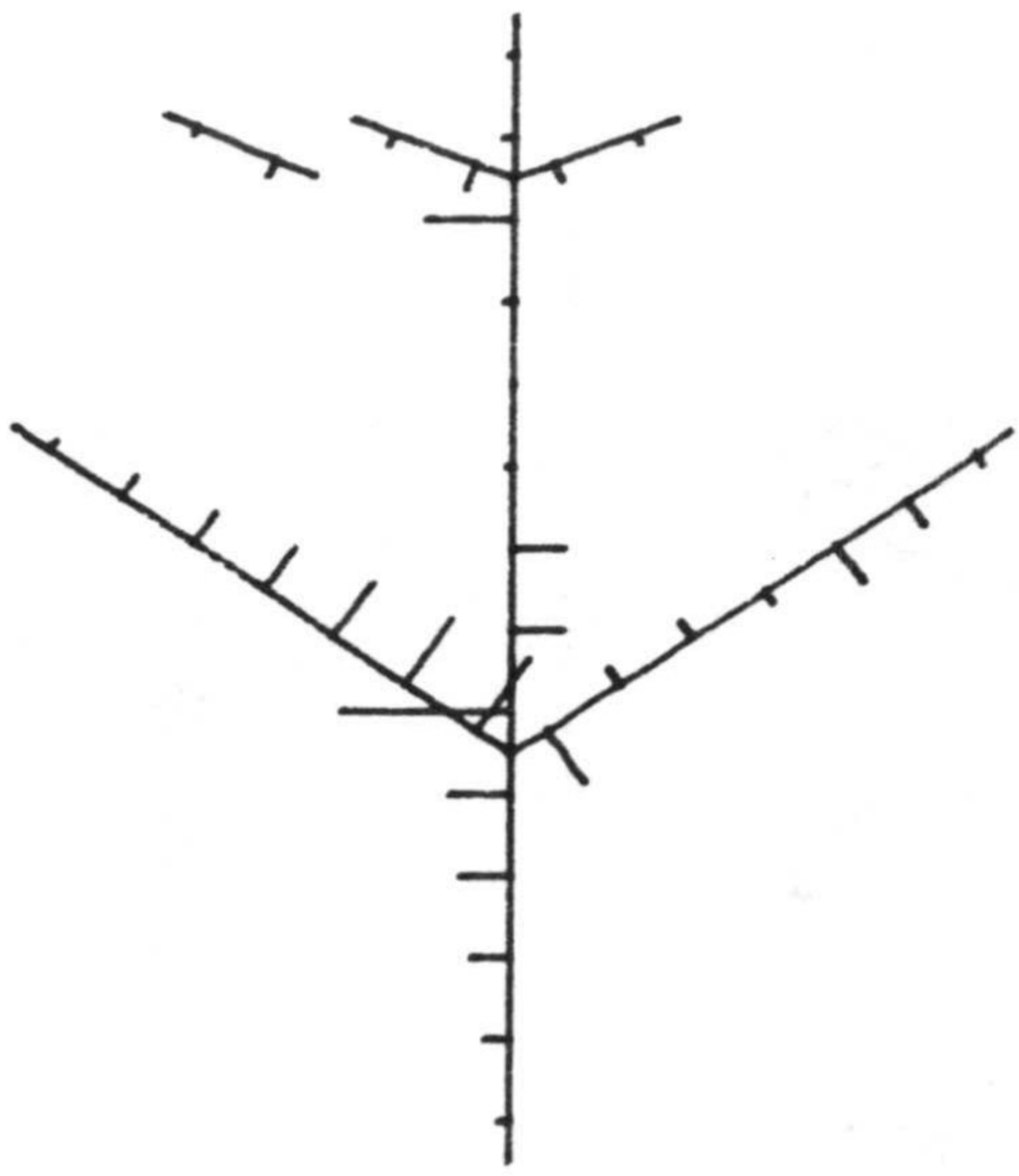
U=50



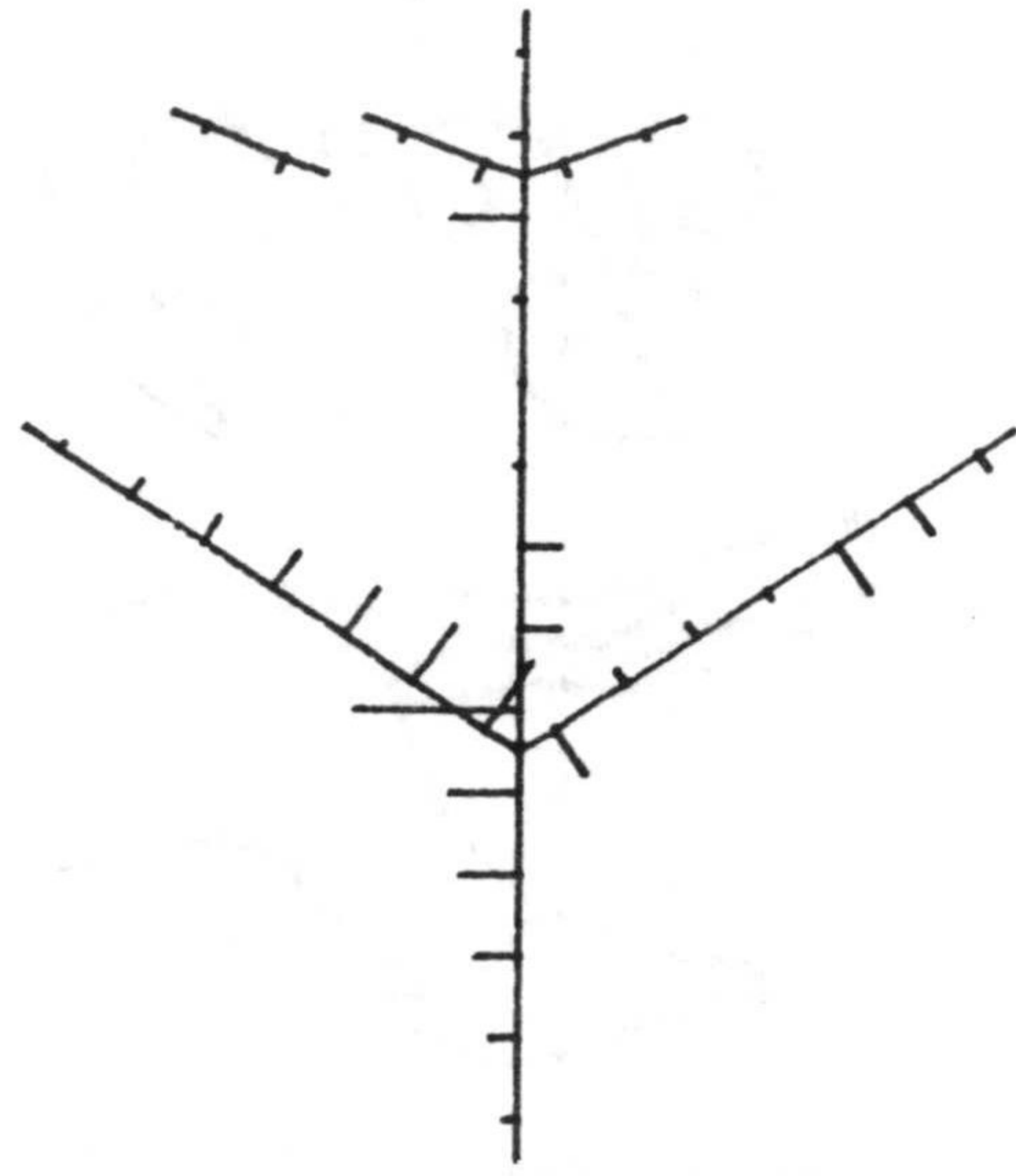
U=51



U=52

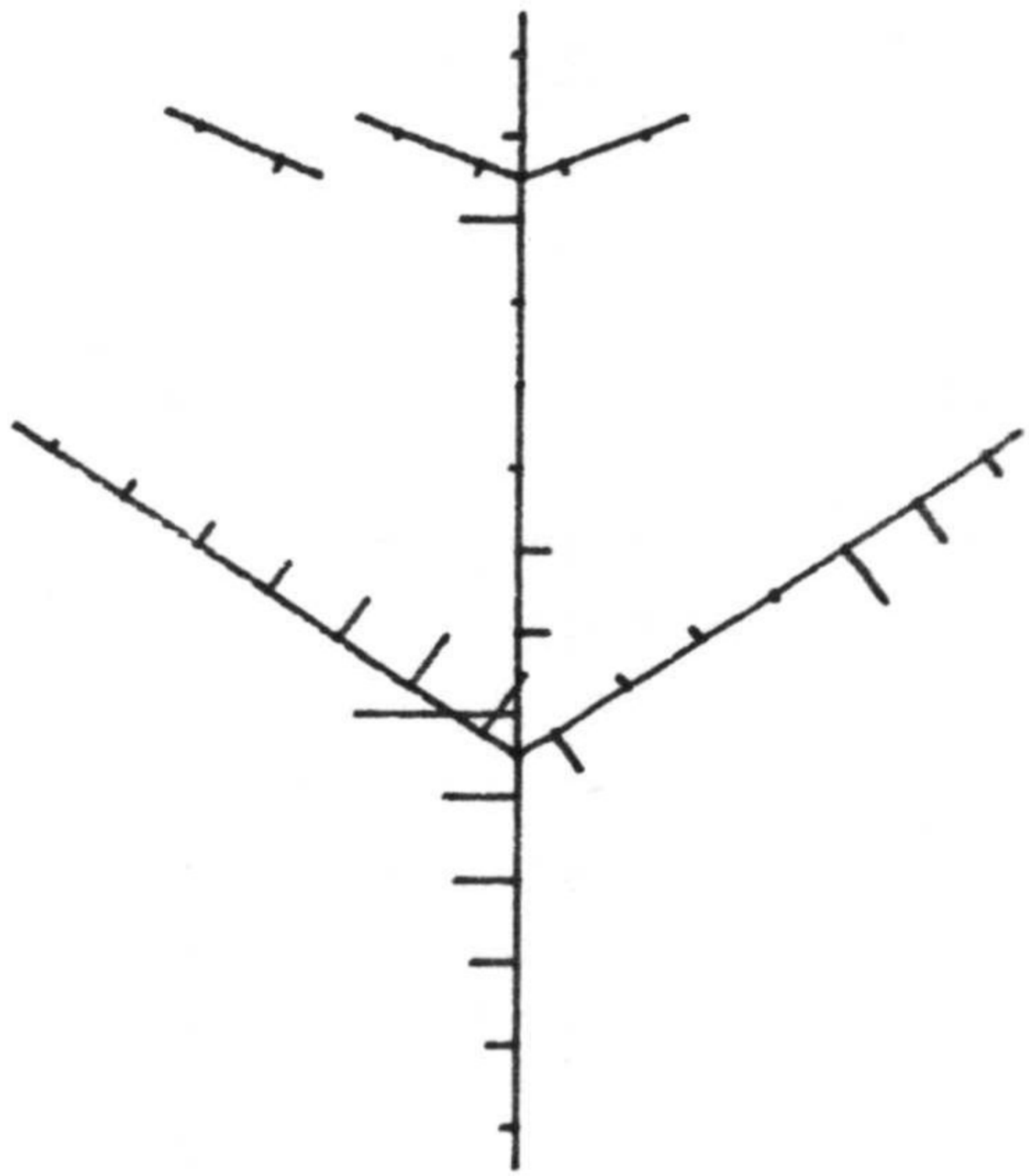


U=53

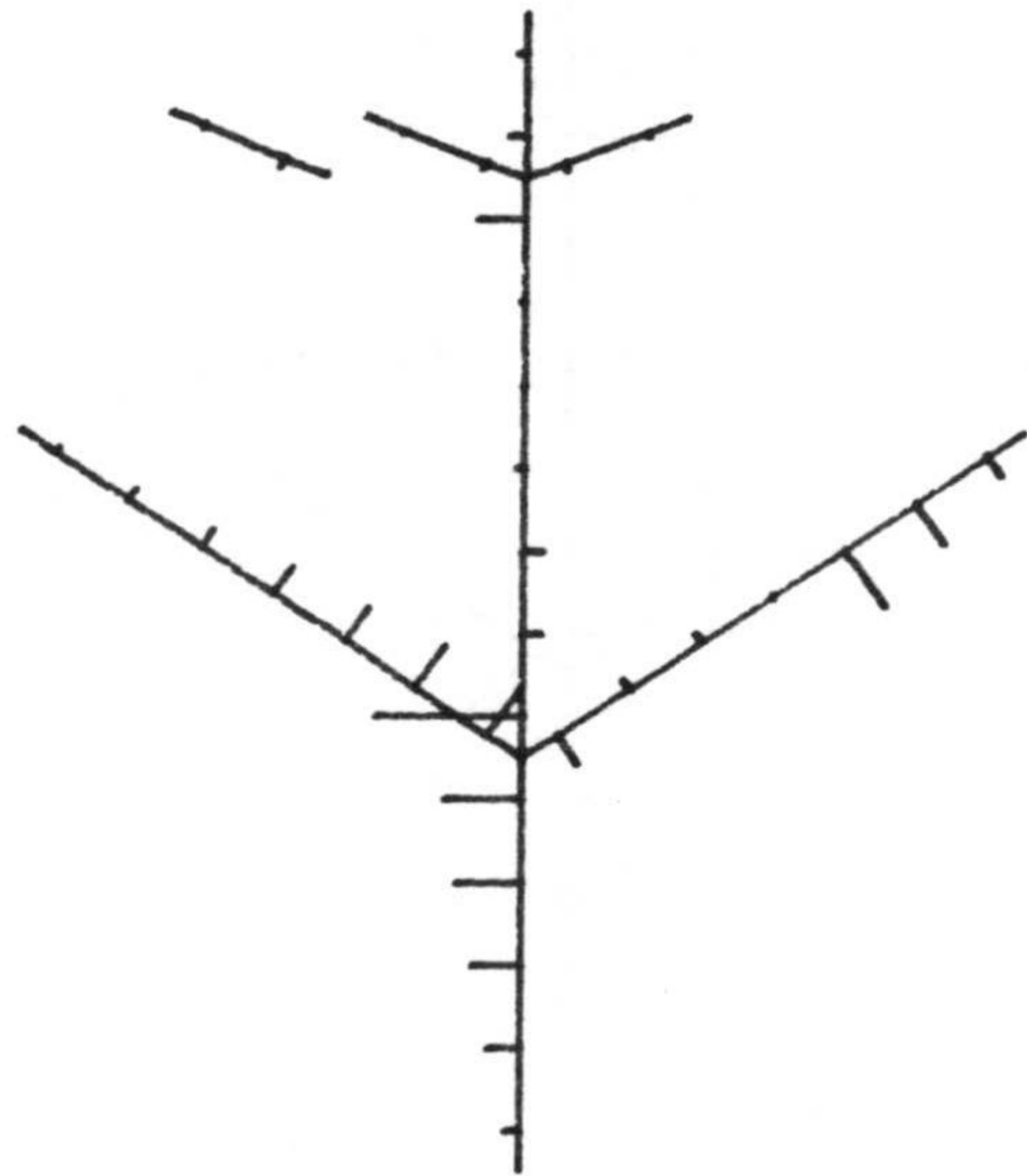


U=54

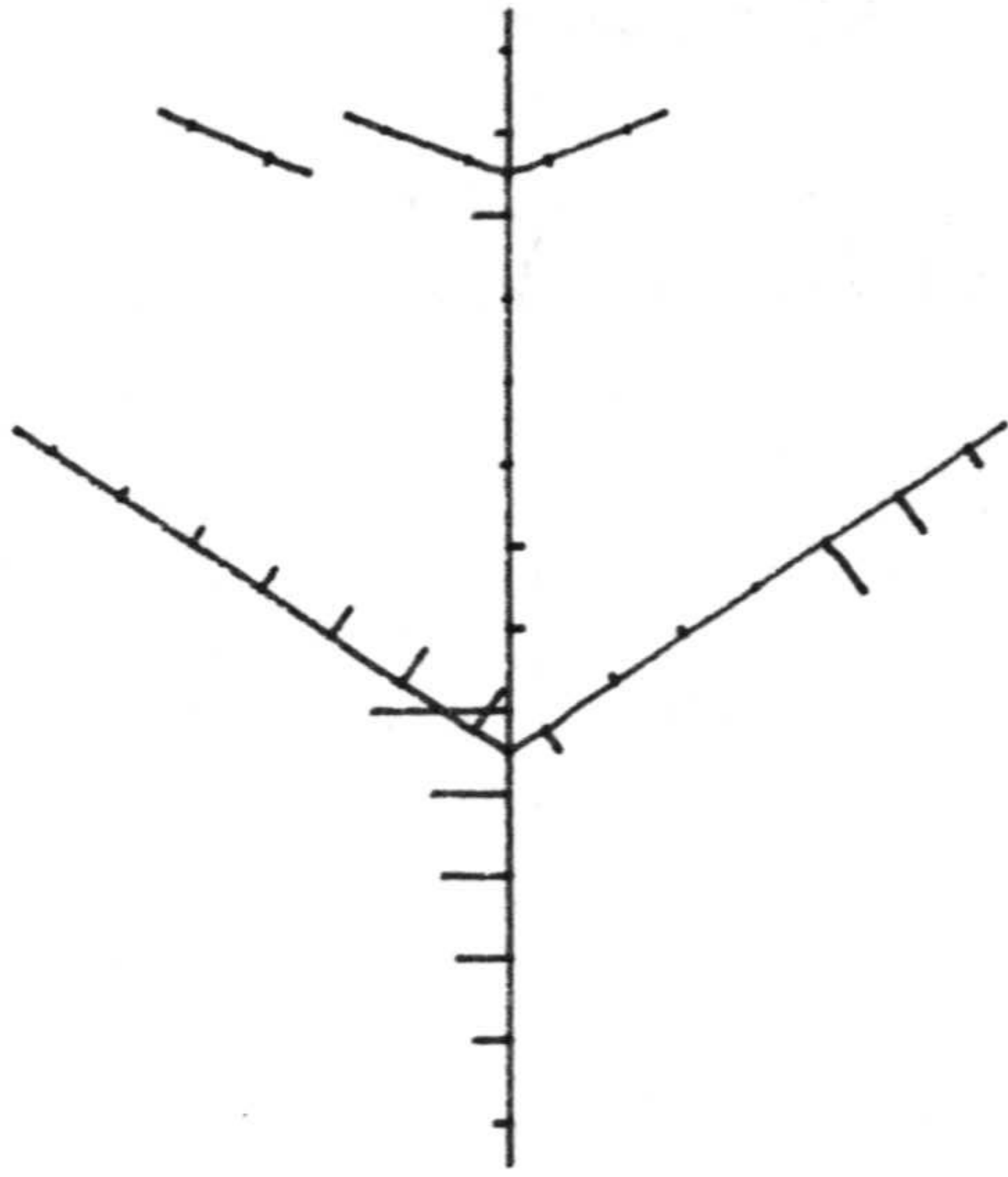
96.7 mA



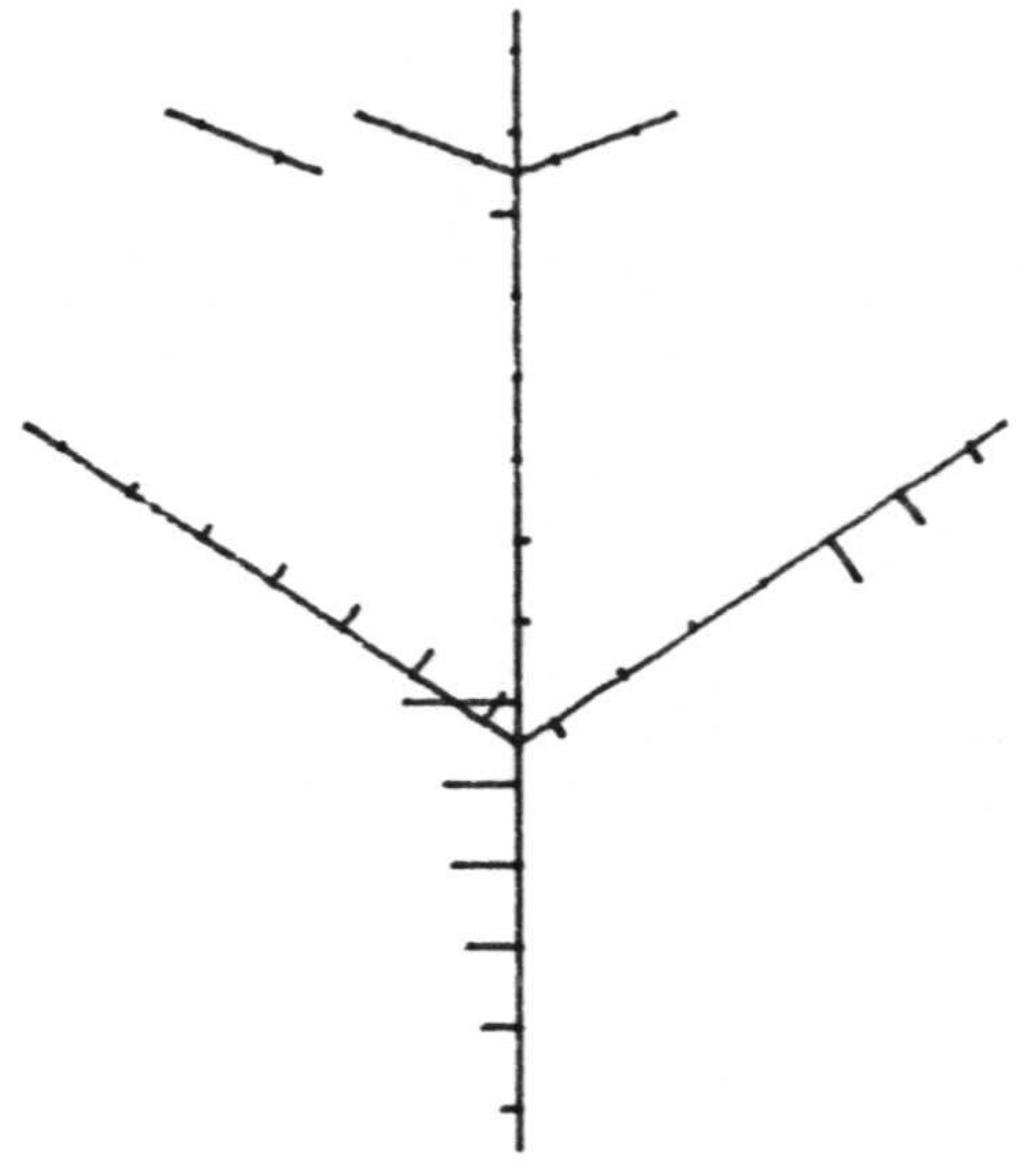
U=55



U=56

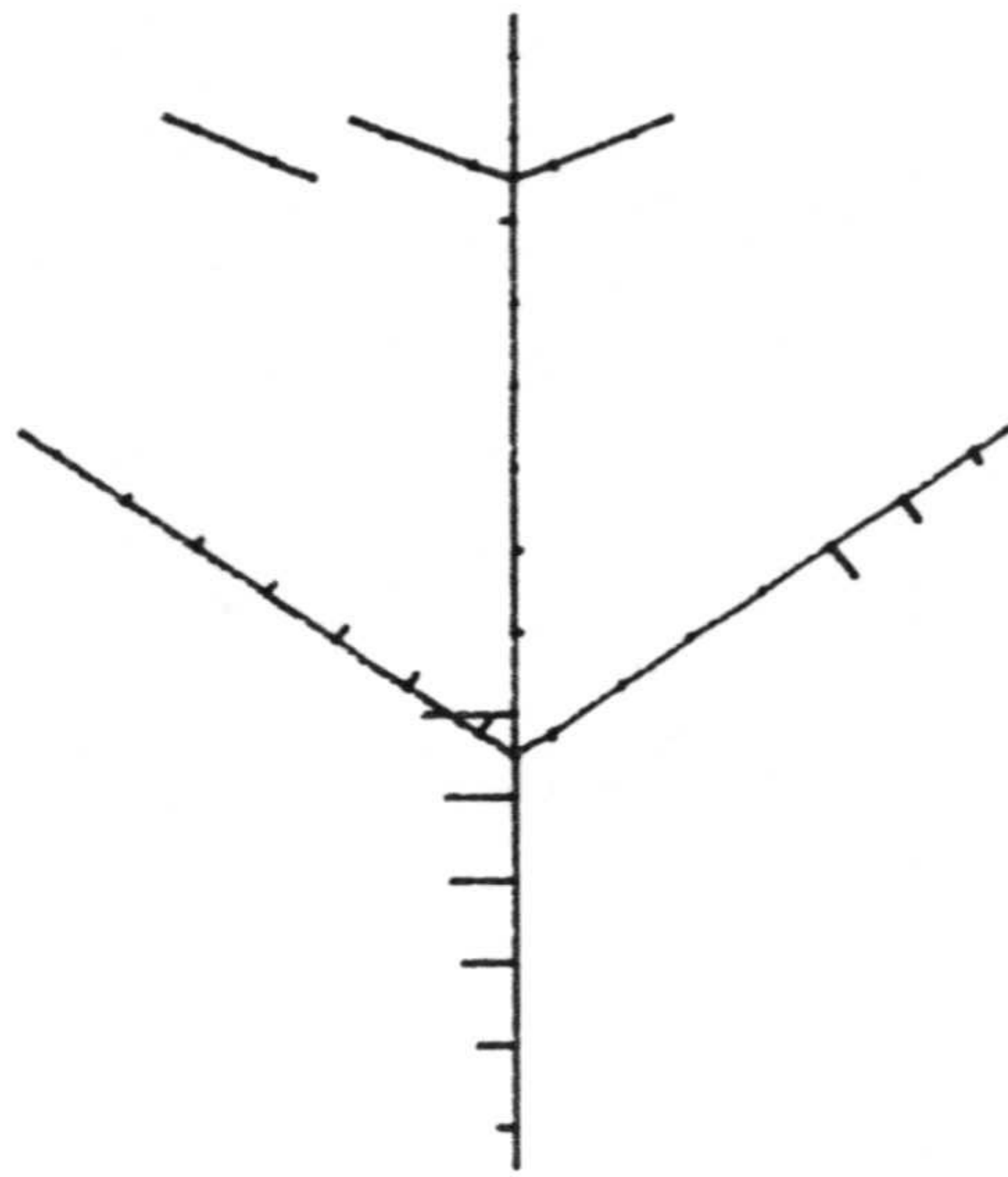


U=57

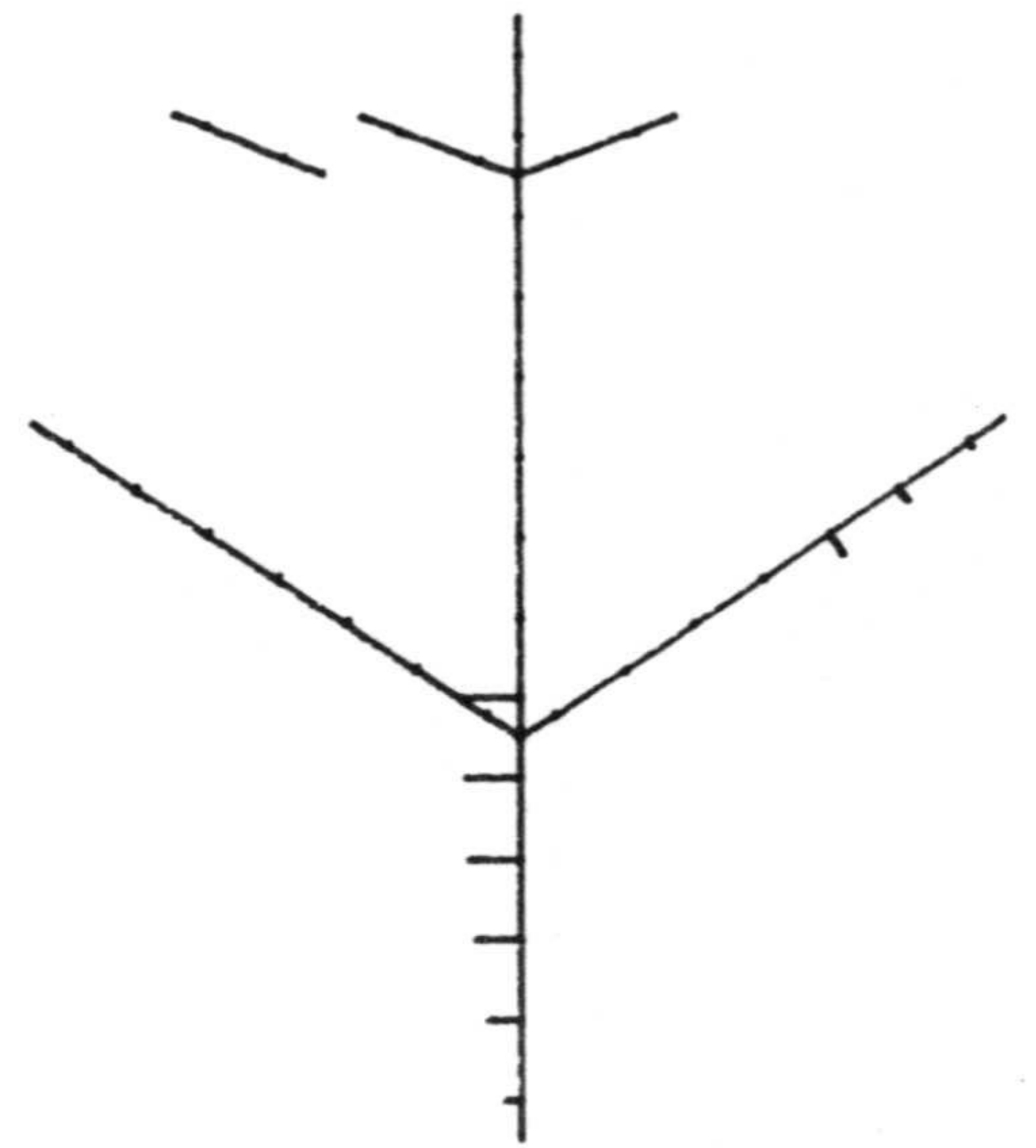


U=58

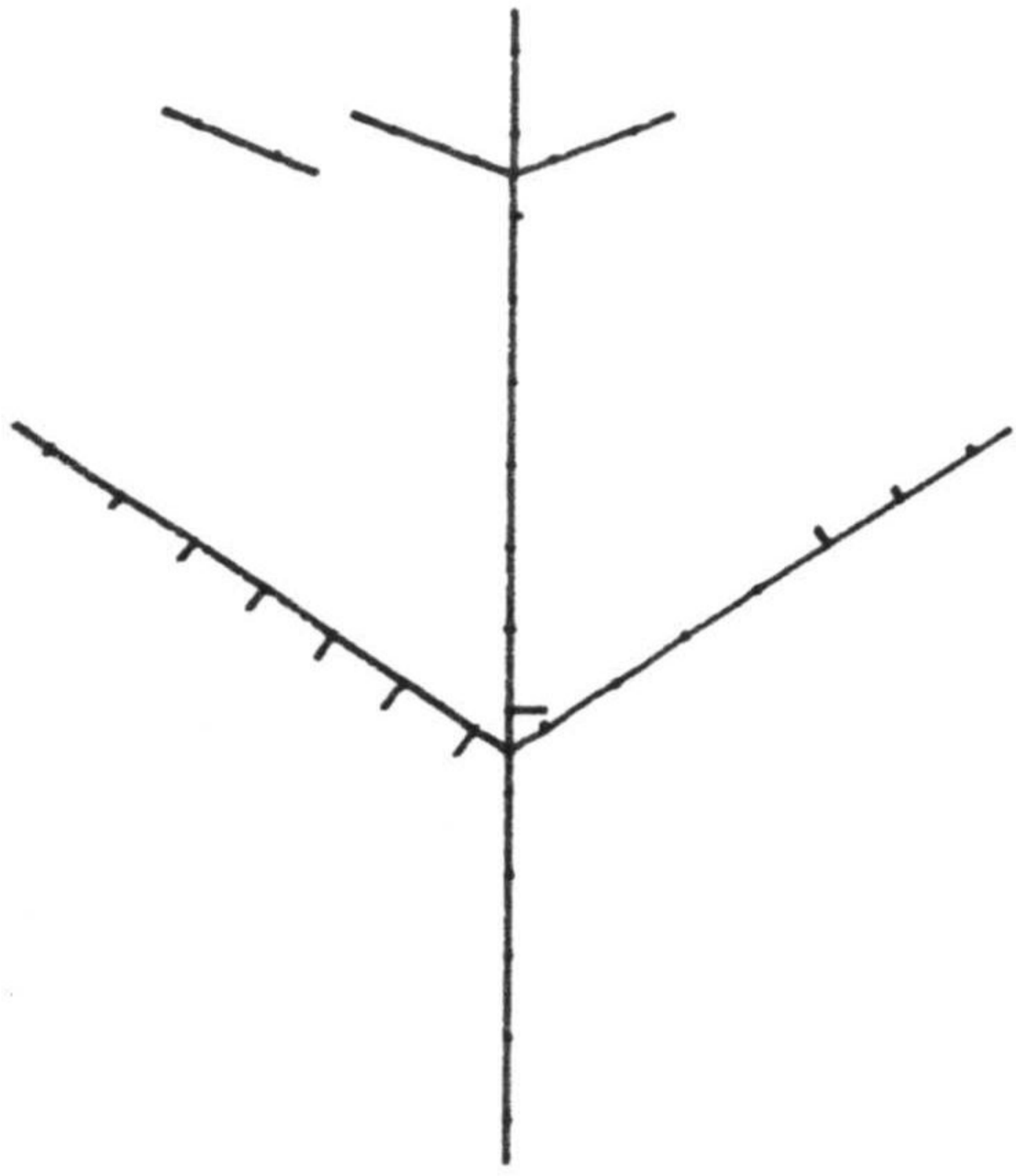
96.7 mF



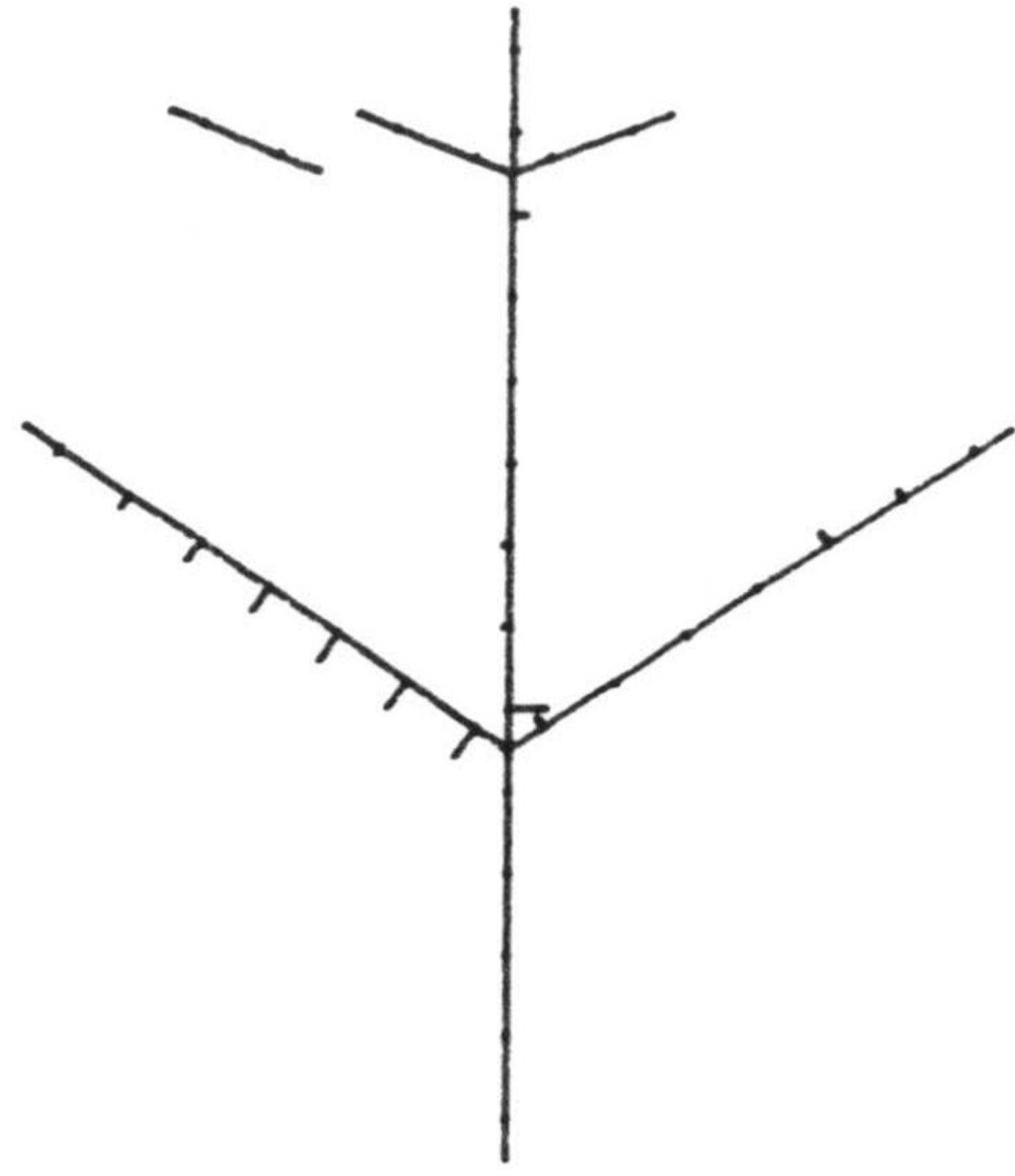
U=59



U=60

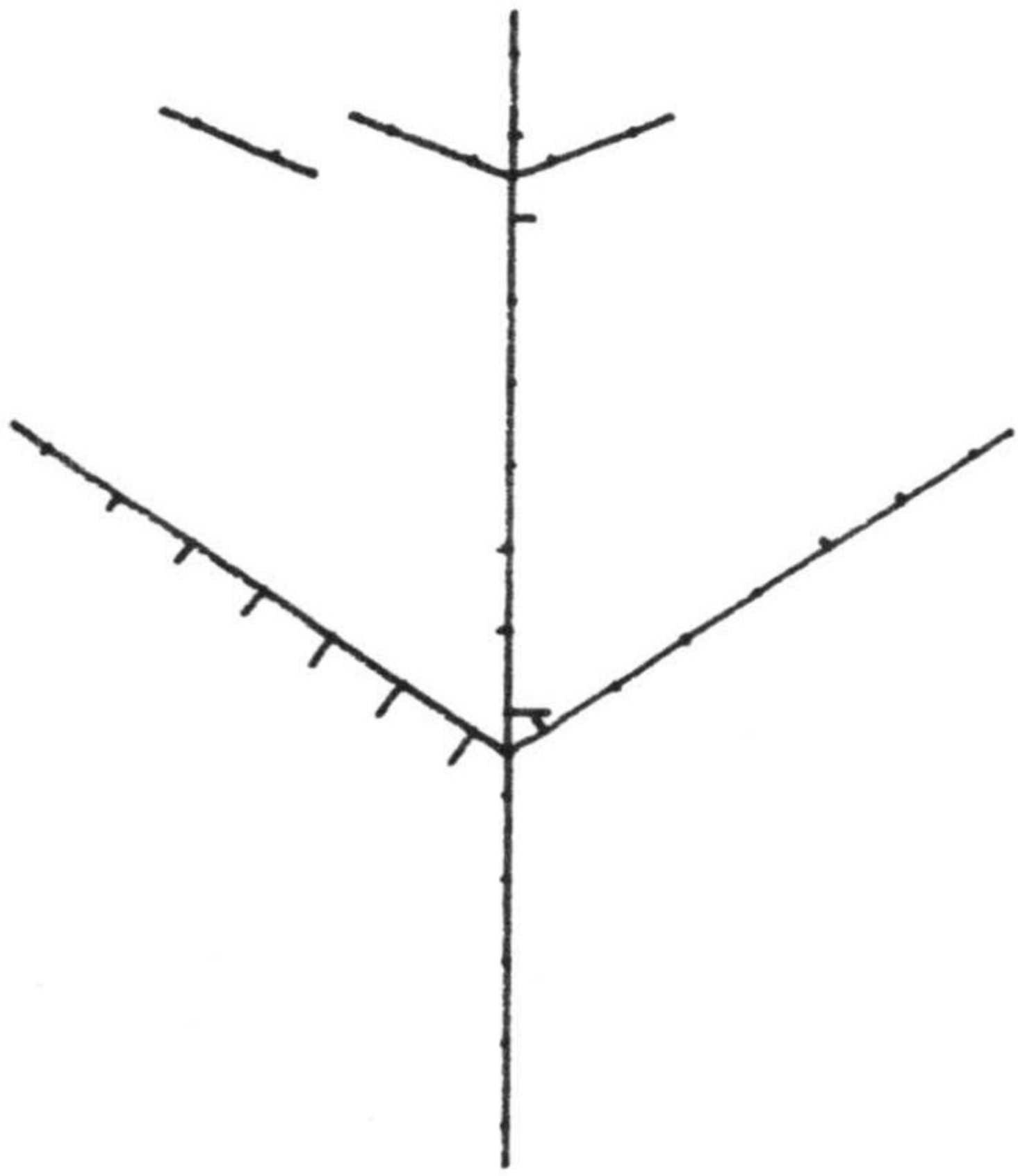


U=100

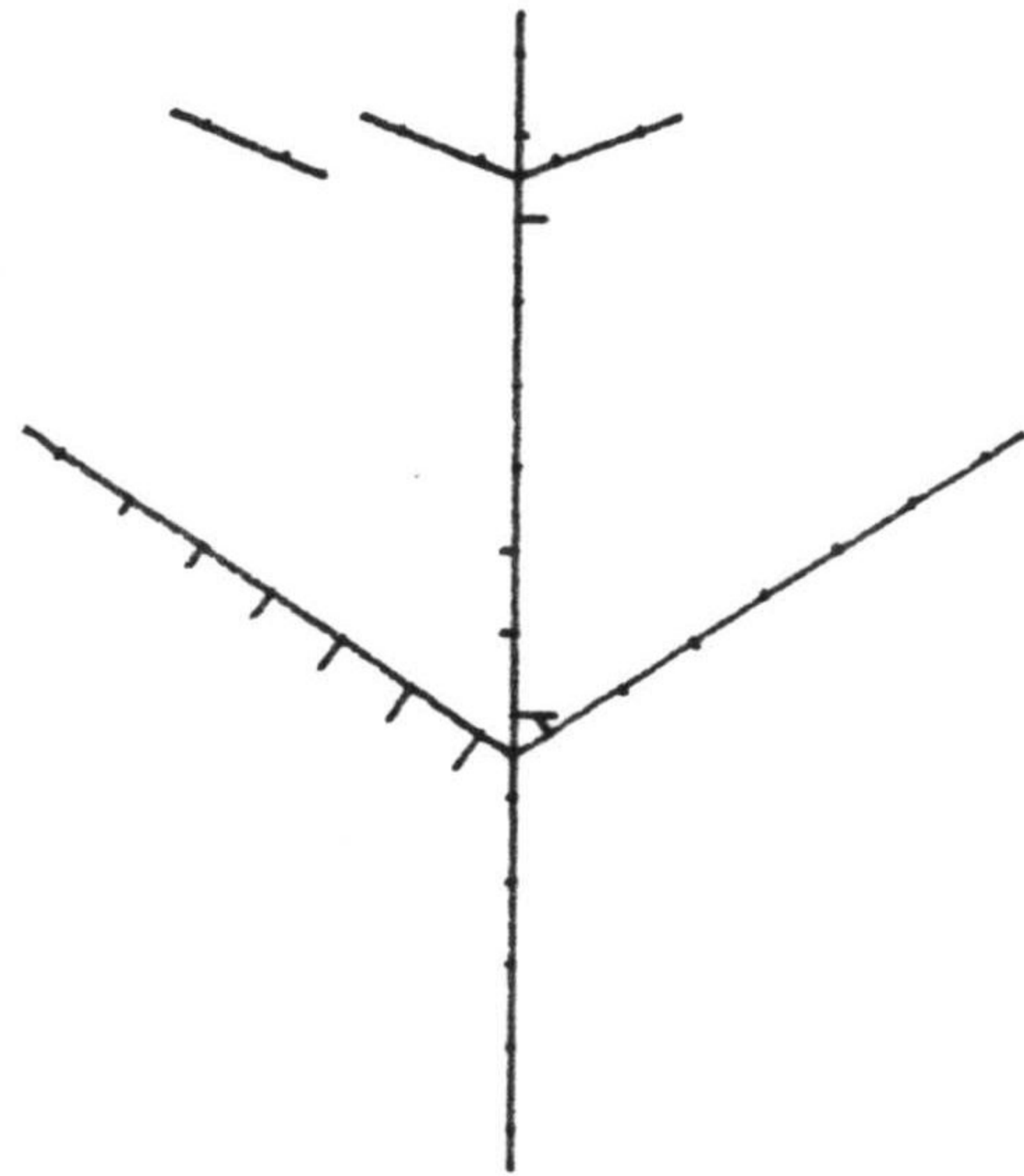


U=101

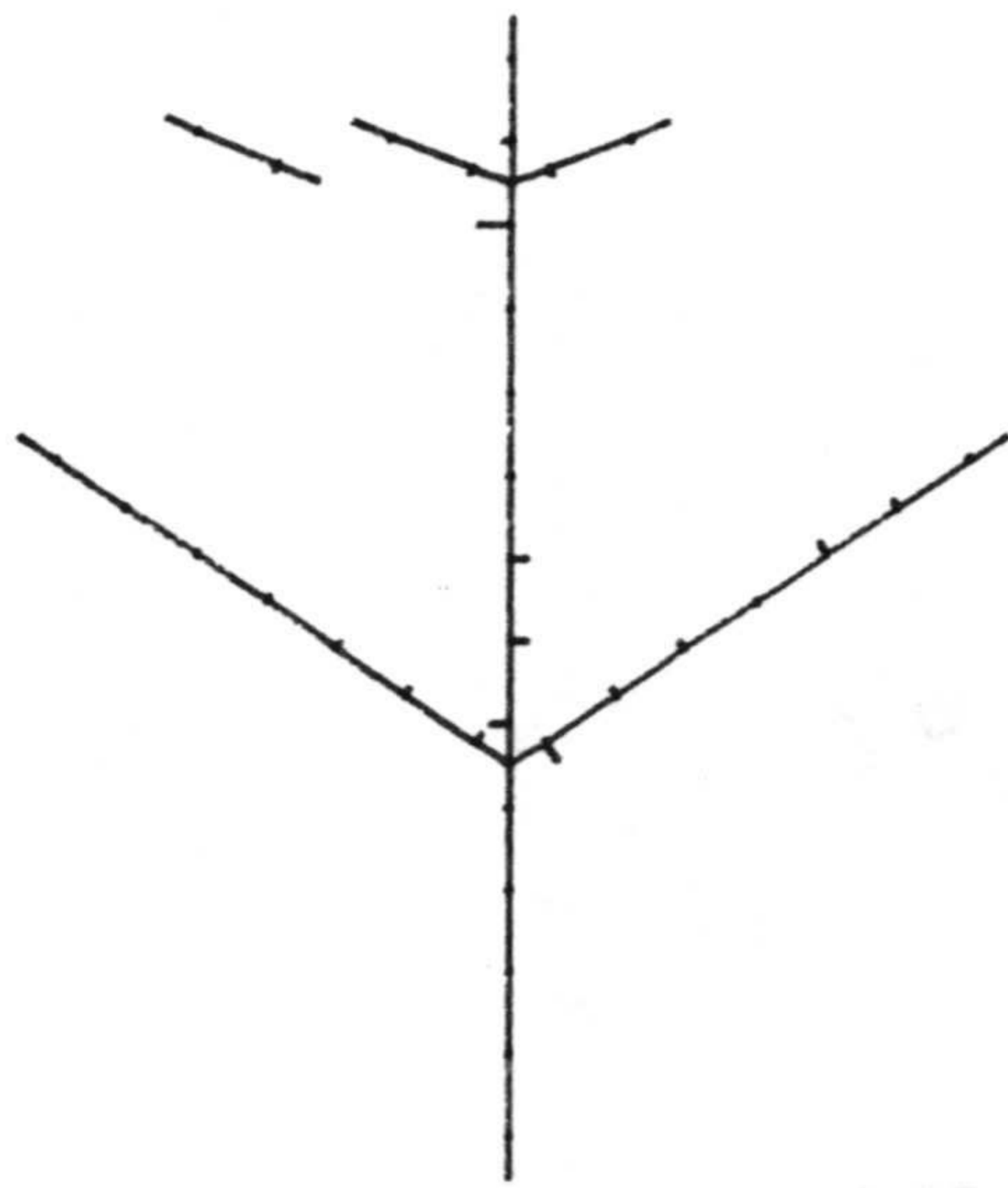
96.7 mfi



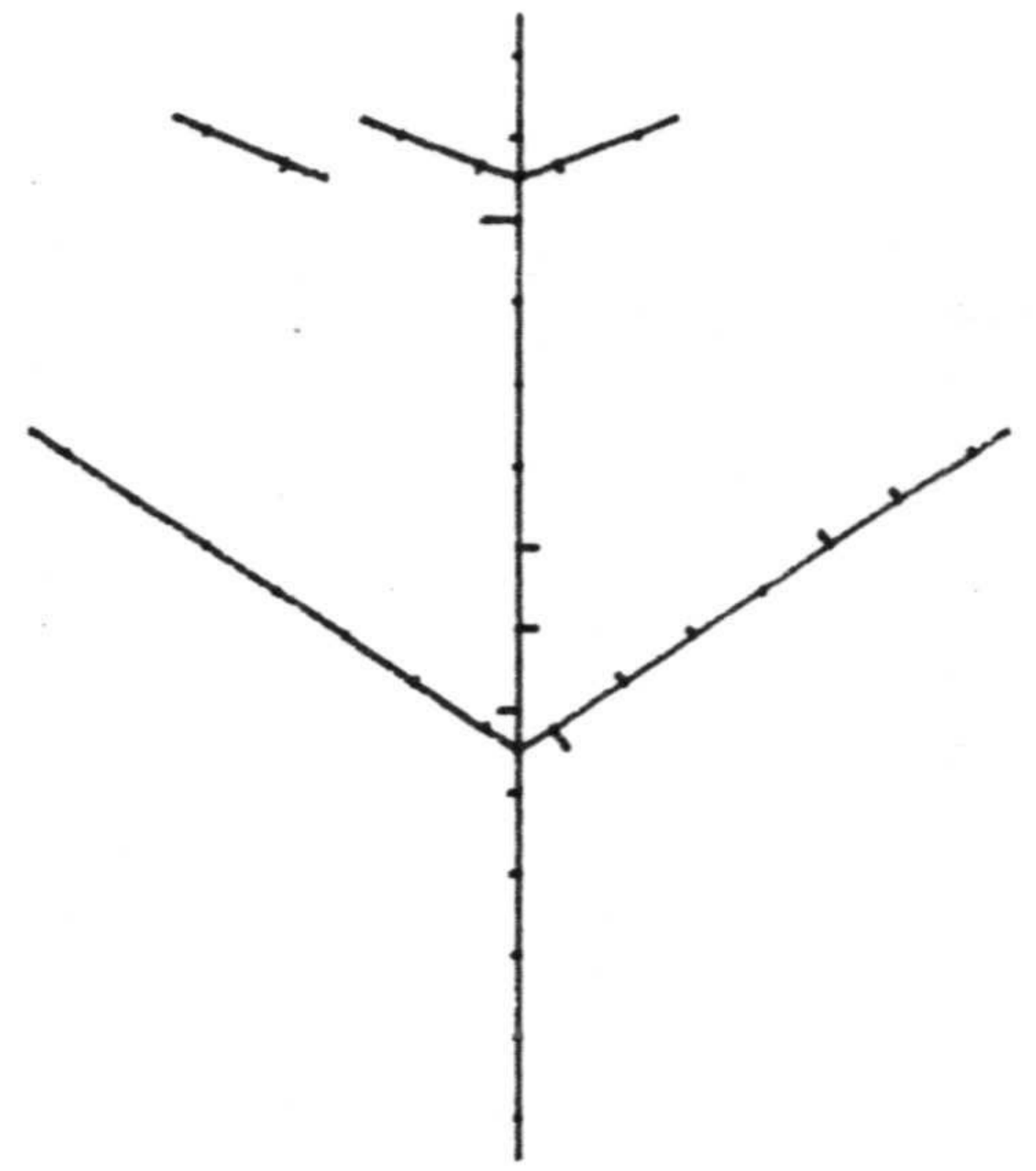
U=102



U=103

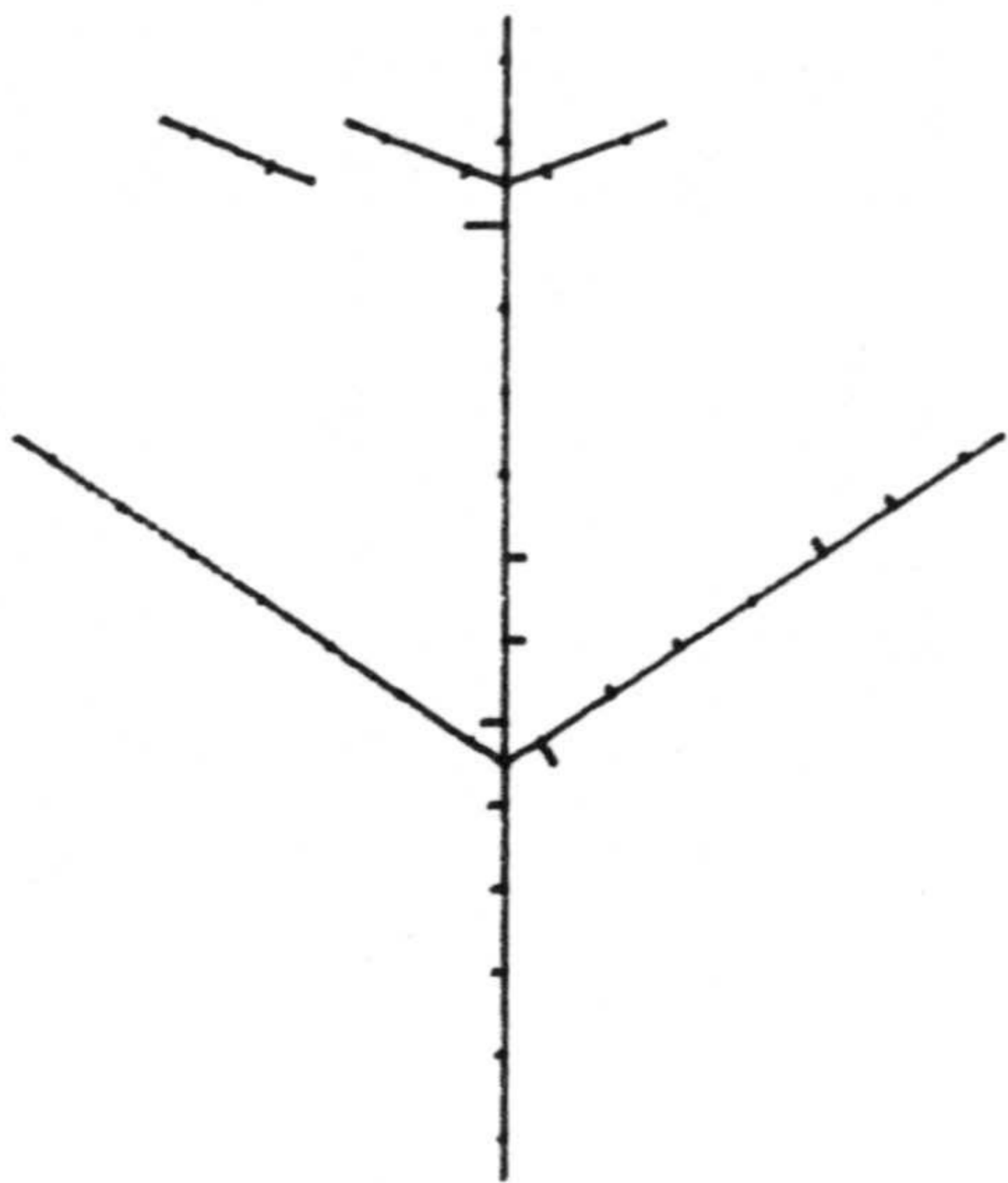


U=124

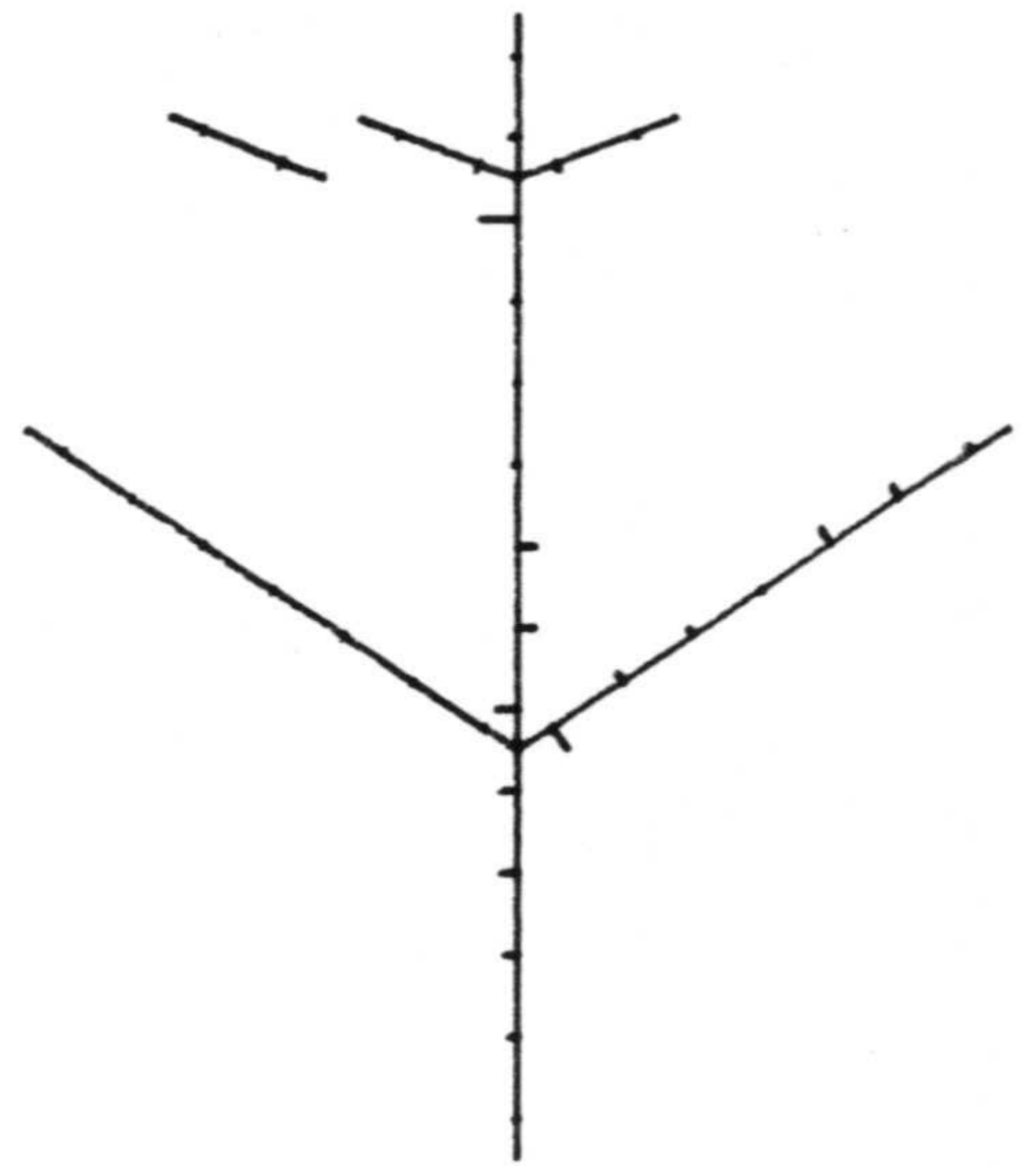


U=125

96.7 mA



U=126



U=127

Fig. 4.118.- Intensidad de corriente inducida en el modelo de avión de la Fig. 4.116 en diferentes instantes de tiempo.

CONCLUSIONES.

Como resumen del contenido de esta Memoria podemos considerar los siguientes puntos que muestran los resultados y conclusiones más importantes.

- 1.- Se ha desarrollado un programa para ordenador (DOTIG1) para el estudio en DT de la interacción de O.E.M.T. con estructuras modeladas por hilos delgados. El programa se basa en la solución numérica de la ecuación integral EFIE (2.4) mediante el método de los momentos utilizando funciones peso delta de Dirac y funciones base interpolación lagrangiana de dos dimensiones y orden tres en cada dimensión.
- 2.- El programa DOTIG1 permite el tratamiento de estructuras de hilo con múltiples uniones y con hilos del mismo o diferente radio.
- 3.- El tratamiento de uniones se ha llevado a cabo extendiendo a DT la técnica de solapamientos de los hilos que confluyen en la unión e imponiendo la condición adicional de conservación de la componente tangencial del campo eléctrico en la unión.
- 4.- En el desarrollo numérico se han contemplado diferentes tratamientos del término de carga en el núcleo de la integral. La conclusión ha sido que el más apropiado es el que hemos denominado Q5. Esto es así no solo para estructuras de hilos sin conectar sino también para el tratamiento de uniones.

- 5.- Se han considerado diferentes formas de analizar las uniones hilo-espacio libre y se ha encontrado que en los extremos "reales" de los hilos el mejor resultado se obtiene imponiendo la condición de intensidad cero justo en el extremo del hilo. Sin embargo en los extremos asociados a los solapamientos, se obtiene mayor estabilidad numérica imponiendo la condición de intensidad cero en el centro de un intervalo virtual añadido al hilo.
- 6.- El método numérico permite el tratamiento, mediante el método de las imágenes de estructuras frente a un plano conductor de tierra.
- 7.- La validación del método se ha llevado a cabo comparando los resultados, vía FFT, con los encontrados en la bibliografía en DF y que han sido obtenidos mediante diferentes métodos numéricos o experimentales, y con los calculados por nosotros mediante el uso de una variante del programa MININEC para DF. Nuestros resultados se encuentran en general en concordancia con todos ellos.
- 8.- Como aplicación final de nuestro programa hemos estudiado la interacción de un pulso electromagnético con estructuras que representan modelos sencillos (tipo "stick") de aviones formados por la unión de diferentes hilos. Los resultados constituyen aproximaciones válidas cuando la dimensión transversal es pequeña en términos de

la longitud de onda. La extensión a situaciones que no resultan apropiadas para un modelo tipo "stick" de hilo delgado puede hacerse mediante el desarrollo de un modelo de mallas de la estructura. De esta forma es posible extender el rango de validez en frecuencia de los resultados.

APENDICE A. OBTENCION DE LAS ECUACIONES DE LOS CAMPOS
CREADOS POR UNA DISTRIBUCION DE FUENTES EN
DT.

En este Apéndice se deducen, razonando en el dominio del tiempo las diferentes expresiones de los campos creados por distribuciones arbitrarias de fuentes.

A.1 ECUACIONES PARA EL CAMPO ELECTRICO.

El campo eléctrico en términos del potencial escalar eléctrico V y vectorial magnético \vec{A} , viene dado por

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

estando los potenciales definidos en función de las fuentes por

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{1}{R} [\rho(\vec{r}', t')] dV' \quad (\text{A.2})$$

y

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{R} [\vec{j}(\vec{r}', t')] dV' \quad (\text{A.3})$$

donde las variables entre corchetes deben ser evaluadas en el tiempo retardado $t' = t - (R/c)$ (Fig. A.1)

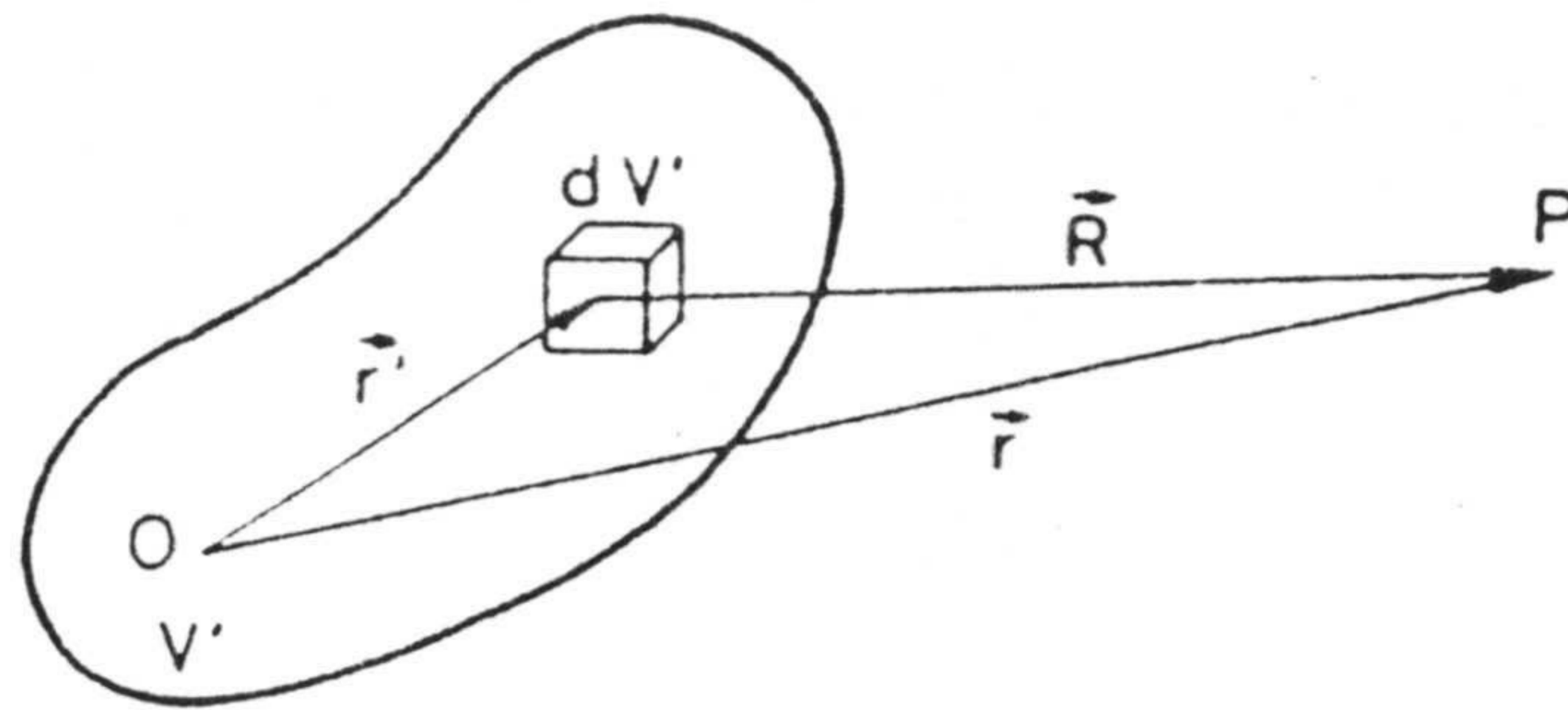


Fig. A.1.- Coordenadas utilizadas en el cálculo de los campos.

Sustituyendo (A.2) y (A.3) en la ecuación (A.1), el campo eléctrico puede expresarse

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \nabla \left(\frac{[\rho]}{R} \right) dV' - \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{[\vec{j}]}{R} \right) dV' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left\{ -\frac{\nabla[\rho]}{R} - \left(\nabla \frac{1}{R} \right) [\rho] - \frac{[\dot{\vec{j}}]}{c^2 R} \right\} dV' \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso, para obtener la última igualdad, de la relación $\nabla(ab) = a(\nabla b) + b(\nabla a)$.

Teniendo en cuenta que

$$\nabla \rho = \nabla R \frac{\partial \rho}{\partial R} = \frac{\vec{R}}{R} \frac{\partial \rho}{\partial R} = \frac{\vec{R}}{R} \frac{\partial t'}{\partial R} \dot{\rho} = -\frac{\vec{R}}{cR} \dot{\rho} \quad (\text{A.5})$$

y la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} = - [\nabla' \cdot \vec{J}]_{t'} \quad (\text{A.6})$$

se obtiene la expresión (2.4)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left\{ \frac{[\rho]\vec{R}}{R^3} - (\nabla' \cdot [\vec{J}]) \frac{\vec{R}}{cR^2} - \frac{[\dot{J}]}{c^2 R} \right\} dV' \quad (\text{A.7})$$

actuando el operador ∇' sobre las coordenadas del punto fuente.

Desarrollamos los términos de la ecuación (A.7) para obtener la ecuación EFIE (2.5). Dado que $[\vec{J}] = \vec{J}(\vec{r}', t')$ se verifica que:

$$\nabla' [\vec{J}] = (\nabla' [\vec{J}])_{t'} + \frac{\partial [\vec{J}]}{\partial t'} \cdot \nabla t' = (\nabla' [\vec{J}])_{t'} + \frac{\vec{R}}{cR} \frac{\partial [\vec{J}]}{\partial t'} \quad (\text{A.8})$$

o bien

$$(\nabla' [\vec{J}])_{t'} = \nabla' [\vec{J}] - \frac{\vec{R} \cdot [\dot{J}]}{cR} \quad (\text{A.9})$$

Con la ecuación anterior, el sumando de (A.7) que contiene el operador ∇' puede expresarse como

$$- \int_{V'} (\nabla' [\vec{J}])_{t'} \frac{\vec{R}}{cR^2} dV' = - \int_{V'} (\nabla' [\vec{J}]) \frac{\vec{R}}{cR^2} dV' + \int_{V'} \frac{([\dot{J}] \cdot \vec{R}) \vec{R}}{c^2 R^3} dV' \quad (\text{A.10})$$

Si se desarrolla la componente α del término central de la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
 & - \int_{V'} \left(\frac{\partial}{\partial r'_\beta} [J_\beta] \frac{R_\alpha}{cR^2} \right) dV' = \\
 & = \int_{V'} \frac{[J_\beta]}{c} \frac{\partial}{\partial r'_\beta} \left(\frac{R_\alpha}{R^2} \right) dV' - \int_{V'} \frac{\partial}{\partial r'_\beta} \left([J_\beta] \frac{R_\alpha}{cR^2} \right) dV' \quad (\text{A.11})
 \end{aligned}$$

donde la última integral de volumen es equivalente por el teorema de Gauss a una de superficie. Si las fuentes están acotadas dentro del volumen V' , esta integral será nula y la ecuación (A.11) queda de la forma

$$\begin{aligned}
 & - \int_{V'} \left(\frac{\partial}{\partial r'_\beta} [J_\beta] \frac{R_\alpha}{cR^2} \right) dV' = \int_{V'} \frac{[J_\beta]}{c} \left\{ \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial r'_\beta} R_\alpha \right) + \right. \\
 & \left. + R_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial r'_\beta} \frac{1}{R^2} \right) \right\} dV' = \int_{V'} \frac{[J_\beta]}{c} \left\{ -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{R^2} + \frac{2R_\alpha R_\beta}{R^4} \right\} dV' = \\
 & = \int_{V'} \left\{ \frac{[\vec{J}]}{cR^2} + \frac{e([\vec{J}] \cdot \vec{R})\vec{R}}{cR^4} \right\}_\alpha dV' \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

Llevando (A.12) a la ecuación (A.10) y ésta última a (A.7) se obtiene finalmente para el campo eléctrico la expresión (2.5)

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left\{ \frac{[\rho]\vec{R}}{R^3} + e \frac{([\vec{J}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\vec{J}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{cR^4} + \right. \\
 & \left. + \frac{([\dot{\vec{J}}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\dot{\vec{J}}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{c^2 R^3} \right\} dV' \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

Otra expresión de la EFIE puede obtenerse teniendo en cuenta la condición de Lorentz para medios de conductividad nula

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\epsilon} \nabla \cdot \vec{A} = -c^2 \nabla \cdot \vec{A} \quad (\text{A.14})$$

la derivada temporal del campo eléctrico puede ser expresada en términos de \vec{A} solamente, como

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (\text{A.15})$$

El potencial vector \vec{A} viene determinado por la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}')$, mediante

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{J}(\vec{r}')] }{R} dV' \quad (\text{A.16})$$

donde las variables entre corchetes deben ser evaluadas en el tiempo retardado $t' = t - (R/c)$ (ver Fig. A.1).

Ya que \vec{A} es una función de $R(r)$, para el desarrollo de la ecuación (A.15) son necesarias las siguientes expresiones vectoriales para funciones compuestas

$$\nabla \cdot \vec{F}[R(r)] = \nabla R \cdot \frac{d\vec{F}}{dR} \quad (\text{A.17.a})$$

$$\nabla \vec{F}[R(r)] = \nabla R \frac{d\vec{F}}{dR} \quad (\text{A.17.b})$$

$$\nabla \wedge \vec{F} [R(t)] = \nabla R \wedge \frac{d\vec{F}}{dR} \quad (\text{A.17.c})$$

Utilizando (A.17.a) la divergencia de \vec{A} es

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} (\nabla R) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial R} \frac{[\vec{j}]}{R} \right) dV' \quad (\text{A.18})$$

con $\nabla R = \frac{\vec{R}}{R}$ y $\frac{\partial}{\partial R} [\vec{j}] = \frac{\partial t'}{\partial R} \frac{\partial [\vec{j}]}{\partial t'} = -\frac{1}{c} \frac{\partial [\vec{j}]}{\partial t'}$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{R} \cdot \frac{[\vec{j}] + \left(\frac{R}{c}\right) [\dot{\vec{j}}]}{R^3} dV' \quad (\text{A.19})$$

donde $\dot{\vec{j}} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'}$, por ser $\frac{\partial t}{\partial t'} = 1$

El gradiente de la divergencia de \vec{A} es

$$\nabla \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \nabla \left(\vec{R} \cdot \frac{[\vec{j}] + \left(\frac{R}{c}\right) [\dot{\vec{j}}]}{R^3} \right) dV' \quad (\text{A.20})$$

que con la identidad $\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\nabla \vec{A}) \cdot \vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot \vec{A}$, puede escribirse

$$\nabla \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \left\{ \int_{V'} (\nabla \vec{R}) \cdot \left(\frac{[\vec{j}] + \left(\frac{R}{c}\right) [\dot{\vec{j}}]}{R^3} \right) dV' + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{V'} \left[\nabla \left(\frac{[\ddot{\mathbf{J}}] + \left(\frac{R}{c}\right) [\dot{\mathbf{J}}]}{R^3} \right) \right] \cdot \vec{R} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \\
& \cdot \int_{V'} \left\{ - \left(\frac{[\ddot{\mathbf{J}}] + \left(\frac{R}{c}\right) [\dot{\mathbf{J}}]}{R^3} \right) + \left(\frac{\vec{R}\vec{R}}{R^2} \right) \cdot \left(\frac{3[\ddot{\mathbf{J}}] + 3\left(\frac{R}{c}\right) [\dot{\mathbf{J}}] + \left(\frac{R}{c}\right)^2 [\ddot{\mathbf{J}}]}{R^3} \right) \right\} dV' \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad se ha tenido en cuenta que

$$\nabla (a\vec{A}) = (\nabla a)\vec{A} + a(\nabla\vec{A})$$

$$\nabla (R^n) = n R^{n-2} \vec{R}$$

$$\nabla [\dot{\mathbf{J}}] = -\frac{1}{c} \frac{\vec{R}}{R} [\dot{\mathbf{J}}]$$

$$\nabla \vec{R} = \tilde{\mathbf{I}}$$

donde $\tilde{\mathbf{I}}$ es el tensor unidad de orden dos.

La derivada segunda de \vec{A} en el tiempo es

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\ddot{\mathbf{J}}]}{R} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\left(\frac{R}{c}\right)^2 [\ddot{\mathbf{J}}]}{R^3} dV' \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo (A.21) y (A.22) en (A.15), la derivada temporal del campo eléctrico queda

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left\{ \frac{3[\ddot{\mathbf{J}}] + 3\left(\frac{R}{c}\right) [\dot{\mathbf{J}}] + \left(\frac{R}{c}\right)^2 [\ddot{\mathbf{J}}]}{R^3} \cdot \frac{(\vec{R}\vec{R})}{R^2} - \right.$$

$$- \frac{[\vec{J}] + \left(\frac{R}{c}\right) [\dot{\vec{J}}] + \left(\frac{R^2}{c^2}\right) [\ddot{\vec{J}}]}{R^3} \} dV' \quad (\text{A.23})$$

integrando en el tiempo y con la relación tensorial $\vec{F} \cdot (\vec{R}\vec{R}) = (\vec{F} \cdot \vec{R}) \vec{R}$, se obtiene finalmente la expresión (2.3) de esta Memoria

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left\{ \frac{3([\vec{\Sigma}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\vec{\Sigma}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{R^5} + \frac{3([\dot{\vec{J}}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\dot{\vec{J}}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{cR^4} + \right. \\ & \left. + \frac{([\ddot{\vec{J}}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\ddot{\vec{J}}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{c^2 R^3} \right\} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left\{ \frac{3([\vec{\Sigma}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\vec{\Sigma}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{R^5} + \right. \\ & \left. + \frac{3([\dot{\vec{J}}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\dot{\vec{J}}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{cR^4} + \frac{([\ddot{\vec{J}}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\ddot{\vec{J}}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{c^2 R^3} \right\} dV' \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

donde el símbolo $\vec{\Sigma}$, representa la integral

$$\vec{\Sigma}(\vec{r}', t) = \int_{-\infty}^t \vec{J}(\vec{r}', t) dt$$

Para la deducción de la ecuación (2.5) partimos de la ecuación (A.1) que liga el campo eléctrico con los potenciales V y \vec{A} . Desarrollamos primero el término dependiente del potencial escalar. Para ello sustituimos dicho potencial por su expresión en función de la densidad de carga eléctrica y desarrollamos el gradiente con lo cual obtenemos

$$-\nabla V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \nabla \left(\frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} \right) dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left\{ \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \rho(\vec{r}', t') + \right.$$

$$+ \frac{1}{R} \nabla (p(\vec{r}', t')) \} dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left\{ \nabla \left(\frac{1}{R} \right) p(\vec{r}', t') - \frac{\vec{R}}{R^2 c} \dot{p} \right\} dV' \quad (\text{A.25})$$

donde

$$dV' = \prod_{i=1}^3 d\alpha_i' \quad (\text{A.26})$$

Desarrollando la componente i -ésima del primer sumando del segundo miembro de (A.25) resulta

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \nabla_i \left(\frac{1}{R} \right) p(\vec{r}', t') dV' &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\partial}{\partial \alpha_i'} \left(\frac{1}{R} \right) p(\vec{r}', t') \prod_{j=1}^3 d\alpha_j' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \iiint \frac{1}{R} p(\vec{r}', t') \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 d\alpha_j' \Big|_{\alpha_{ia}'}^{\alpha_{ib}'} - \iiint \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_i'} (p(\vec{r}', t')) \prod_{j=1}^3 d\alpha_j' \right\} \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

donde α_{ia}' y α_{ib}' son los valores iniciales y finales de integración de la coordenada i -ésima.

De la expresión (A.27) se deduce:

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \nabla \left(\frac{1}{R} \right) p(\vec{r}', t') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{V'} \frac{1}{R} \nabla p dV' - \int_{A'} \frac{1}{R} p dA' \right\} \quad (\text{A.28})$$

donde el vector superficie $d\vec{A}'$ viene dado por la siguiente expresión

$$d\vec{A}' = (d\alpha_2' d\alpha_3', d\alpha_1' d\alpha_3', d\alpha_1' d\alpha_2') \quad (\text{A.29})$$

El término $\nabla' p$ vendrá dado por

$$\nabla' p(\vec{r}', t') = \left(\nabla' p(\vec{r}', t') \right)_{t'} + \nabla' t' \cdot \frac{\partial p(\vec{r}', t')}{\partial t'} = \left(\nabla' p(\vec{r}', t') \right)_{t'} + \frac{\vec{R}}{cR} \dot{p} \quad (\text{A.30})$$

ya que $\frac{\partial t'}{\partial t} = 1$.

Sustituyendo (A.30) en (A.28) obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \nabla \left(\frac{1}{R} \right) p(\vec{r}', t') dV' &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{A'} \frac{p(\vec{r}', t')}{R} \left[\begin{array}{l} \vec{A}_b' \\ \vec{A}_a' \end{array} \right] dA' - \right. \\ &\left. - \int_{V'} \left\{ \frac{1}{R} \left(\nabla' p(\vec{r}', t') \right)_{t'} - \frac{\vec{R}}{R^2 c} \dot{p} \right\} dV' \right\} \quad (\text{A.31}) \end{aligned}$$

y esta última expresión en (A.25) llegamos a

$$-\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A'} \frac{1}{R} p(\vec{r}', t') \left[\begin{array}{l} \vec{A}_b' \\ \vec{A}_a' \end{array} \right] dA' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{R} \left(\nabla' p(\vec{r}', t') \right)_{t'} dV' \quad (\text{A.32})$$

Teniendo en cuenta (A.1), (A.32) y que el potencial vectorial magnético se expresa mediante

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R} dV' \quad (\text{A.33})$$

podemos expresar el campo eléctrico como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A'} \frac{1}{R} p(\vec{r}', t') \left[\begin{array}{l} \vec{A}_b' \\ \vec{A}_a' \end{array} \right] dA' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{R} \left(\nabla' p(\vec{r}', t') \right)_{t'} dV' -$$

$$-\frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t')}{R} dV' \quad (\text{A.34})$$

Para expresar el campo eléctrico en función de la densidad de corriente hacemos uso de la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho}(\vec{r}', t') = -(\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t'))_{t'} \quad (\text{A.35})$$

expresión de la que deducimos

$$\rho(\vec{r}', t') = -\left(\nabla' \cdot \int_{-\infty}^{t'} \vec{J}(\vec{r}', \tau) d\tau\right)_{t'} \quad (\text{A.36})$$

que, sustituida en (A.34) nos lleva a

$$\begin{aligned} \vec{E}^s(\vec{r}, t) = & -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{A'} \frac{1}{R} \left(\nabla' \cdot \int_{-\infty}^{t'} \vec{J}(\vec{r}', \tau) d\tau\right)_{t'} d\vec{A} \begin{pmatrix} \vec{A}_b \\ \vec{A}_a \end{pmatrix} + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{1}{R} \left(\nabla' \left(\nabla' \cdot \int_{-\infty}^{t'} \vec{J} d\tau\right)_{t'}\right)_{t'} dV' - \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t')}{R} dV' \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación de Schelkunoff formulada en el dominio de la frecuencia.

A.2 ECUACION PARA EL CAMPO MAGNETICO.

De la relación puntual que liga al campo magnético con el potencial vector, se tiene

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \nabla \wedge \left(\frac{[\vec{J}(\vec{r}')] }{R} \right) dV' \quad (\text{A.39})$$

Desarrollando el integrando de acuerdo con (A.17.c)

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \left(\frac{[\vec{J}]}{R} \right) &= \frac{\nabla R}{R} \wedge \frac{\partial [\vec{J}]}{\partial R} + [\vec{J}] \wedge \frac{\vec{R}}{R^3} = \\ &= \frac{[\dot{\vec{J}}] \wedge \vec{R}}{cR^2} + \frac{[\vec{J}] \wedge \vec{R}}{R^3} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

se obtiene

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{[\vec{J}] \wedge \vec{R}}{R^3} + \frac{[\dot{\vec{J}}] \wedge \vec{R}}{cR^2} \right) dV' \quad (\text{A.41})$$

APENDICE B. APROXIMACION DE HILO DELGADO.



Para un hilo cilíndrico recto de longitud $2l$ y radio a que supondremos conductor perfecto, el potencial vector viene dado por

$$A_1(z,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} \frac{K_z(z',\tau_1)}{R} a d\phi dz' \quad (B.1)$$

donde $\tau_1 = t - R_1/c$ es el tiempo retardado. $K_z(z',\tau_1)$ es la densidad de corriente en la superficie del hilo y es independiente de ϕ por ser circular la sección transversal del hilo. R_1 es la distancia entre el punto campo de coordenadas cilíndricas (a, β, z) y el punto fuente de coordenadas cilíndricas (a, ϕ, z') , ambos sobre la superficie del cilindro como muestra la Fig. B.1.a

$$R_1 = [2a^2 - 2a^2 \cos(\phi - \beta) + (z - z')^2]^{1/2} \quad (B.2)$$

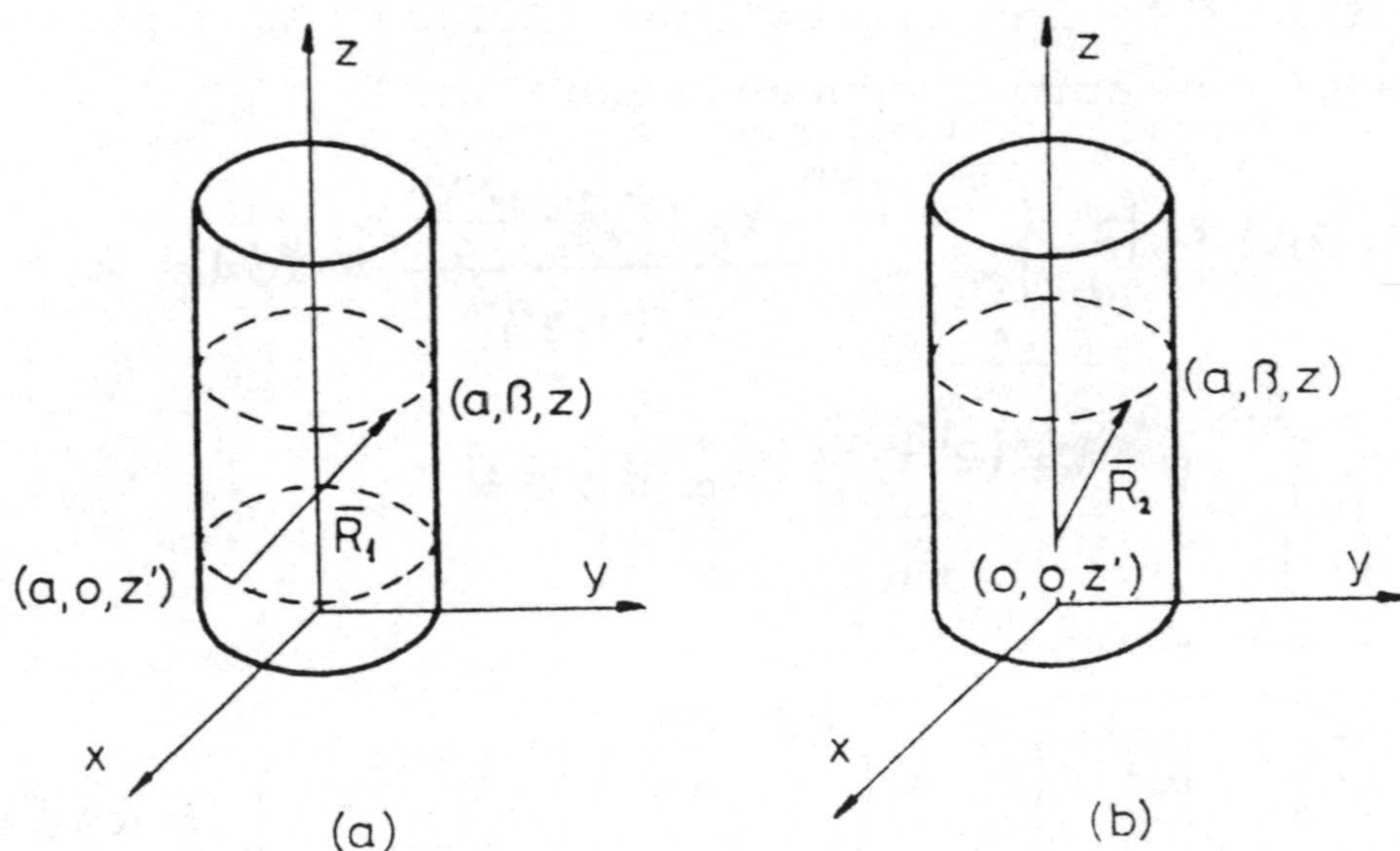


Fig.B.1.- Coordenadas utilizadas en la discusión de la aproximación de hilo delgado.

Debido a la simetría podemos hacer $\beta = 0$ eligiendo convenientemente los ejes, sin ninguna pérdida de generalidad.

En la aproximación de hilo delgado se suponen las corrientes y cargas concentradas sobre el eje z , el potencial vector en un punto campo (a, β, z) vendrá dado para esta aproximación por

$$A_2(z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{I(z', \tau_2)}{R_2} a d\phi dz' \quad (\text{B.3})$$

con $\tau_2 = t - R_2/c$ y $I(z', t)$ la corriente total sobre el eje. R_2 vendrá expresado por (Fig. B.1.b)

$$R_2 = [a^2 + (z - z')^2]^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

Con $a \ll 1$, las expresiones (B.1) y (B.3) pueden venir dadas muy aproximadamente por

$$\begin{aligned} A_1(z, t) = & \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l}^{z-b} \int_0^{2\pi} \frac{k_z(z', t - \frac{|z-z'|}{c})}{|z-z'|} a d\phi dz' + \\ & + \frac{\mu}{4\pi} \int_{z-b}^{z+b} \int_0^{2\pi} \frac{k_z(z', t - \frac{R_1}{c})}{R_1} a d\phi dz' + \\ & + \frac{\mu}{4\pi} \int_{z+b}^l \int_0^{2\pi} \frac{k_z(z', t - \frac{|z-z'|}{c})}{|z-z'|} a d\phi dz' \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned}
A_2(z,t) = & \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l}^{z-b} \frac{I(z', t - \frac{|z-z'|}{c})}{|z|} dz' + \frac{\mu}{4\pi} \int_{z-b}^{z+b} \frac{I(z', t - \frac{R_2}{c})}{R_2} dz' + \\
& + \frac{\mu}{4\pi} \int_{z+b}^l \frac{I(z', t - \frac{|z-z'|}{c})}{|z-z'|} dz' \quad (B.6)
\end{aligned}$$

donde se ha supuesto $b \gg a$.

La primera y tercera integral de las dos ecuaciones anteriores son iguales, pudiéndose expresar la diferencia entre ambas expresiones del potencial vector como

$$\begin{aligned}
A_1(z,t) - A_2(z,t) \simeq & \frac{\mu}{4\pi} \int_{z-b}^{z+b} \int_0^{2\pi} \frac{k(z', t - \frac{R_1}{c})}{R_1} a d\phi dz' - \\
& - \frac{\mu}{4\pi} \int_{z-b}^{z+b} \frac{I(z', t - \frac{R_2}{c})}{R_2} dz \quad (B.7)
\end{aligned}$$

Si en el intervalo $z - b \leq z' \leq z + b$, $K(z', t - R_1/c)$ y $I(z', t - R_2/c)$ pueden ser aproximadas por

$$\begin{aligned}
k(z', t - \frac{R_1}{c}) & \simeq k(z', t) - \frac{R_1}{c} \dot{k}(z', t) \\
I(z', t - \frac{R_2}{c}) & \simeq I(z', t) - \frac{R_2}{c} \dot{I}(z', t) \quad (B.8)
\end{aligned}$$

sustituyendo (B.8) en (B.7) se cancelan las integrales asociadas con las derivadas temporales de la intensidad, quedando

$$A_1(z,t) - A_2(z,t) \approx \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \int_{z-b}^{z+b} \int_0^{2\pi} \frac{K(z',t) a d\phi dz'}{R_1} - \int_{z-b}^{z+b} \frac{I(z',t) dz'}{R_2} \right\} \quad (\text{B.9})$$

Asumiendo que las funciones $K(z',t)$ y $I(z',t)$ son lentamente variables en el intervalo $2b$ |79|

$$A_1(z,t) - A_2(z,t) \approx \frac{\mu I(z,t)}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_{z-b}^{z+b} \frac{dz'}{R_1} - \int_{z-b}^{z+b} \frac{dz'}{R_2} \right\} \quad (\text{B.10})$$

Ejecutando la integral en z' , se obtiene

$$A_1(z,t) - A_2(z,t) \approx \frac{\mu I(z,t)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \cdot \left[b + \sqrt{b^2 + 2a^2(1-\cos\phi)} \right] d\phi - \ln \left[b + \sqrt{b^2 + a^2} \right] \right\} \quad (\text{B.11})$$

que puede ser expresada de forma más compacta por

$$A_1(z,t) - A_2(z,t) \approx \frac{\mu I(z,t)}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + 2a^2(1-\cos\phi)}}{b + \sqrt{b^2 + a^2}} d\phi \quad (\text{B.12})$$

Ya que el integrando de (B.12) es el logaritmo de un número que no será nunca mayor que la unidad, podemos desarrollarlo en serie de potencias

$$\ln \frac{b + \sqrt{b^2 + 2a^2(1 - \cos\theta)}}{b + \sqrt{b^2 + a^2}} = \ln \left[1 + \frac{a^2}{4b^2} (1 - 2\cos\phi) + \dots \right] \approx \frac{a^2}{4b^2} (1 - 2\cos\phi) \quad (\text{B.13})$$

Introduciendo (B.13) en (B.12), la integración sobre ϕ en (B.12) es fácil de ejecutar y se obtiene

$$A_1(z,t) - A_2(z,t) \approx \frac{\mu a^2 I(z,t)}{8\pi b^2} \quad (\text{B.14})$$

En la ecuación (B.6), $A_2(z,t)$ tiene su principal contribución en la segunda integral [79], pudiéndose aproximar por

$$A_2(z,t) \approx \frac{\mu I(z,t)}{4\pi} \int_{z-b}^{z+b} \frac{dz'}{R_2} \approx \frac{\mu I(z,t)}{2\pi} \ln \frac{2b}{a} \quad (\text{B.15})$$

Una buena medida de la validez de la aproximación de hilo delgado vendrá dado por

$$\frac{A_1(z,t) - A_2(z,t)}{A_2(z,t)} \approx \frac{(a/b)^2}{4 \ln(2b/a)} \quad (\text{B.16})$$

Si $b = 10a$, el valor de la relación (B.16) es 0.0008. Y aún para $b = 4a$, la relación vale solamente 0.0075, menor que 1% de error. Así es aceptable la aproximación de hilo delgado, aproximando la ecua-

ción (B.1) por la (B.3), cuando el cálculo incluya una integración que se extienda sobre una longitud del hilo que sea como mínimo de entre menos y más varios radios del hilo. Esto es posible para cualquier valor de z , excepto en los extremos del hilo, pero en esta región el valor de la corriente es despreciable y el error que se comete no es por tanto importante |39|.

APENDICE C. DESCRIPCION DEL METODO DE LOS MOMENTOS.

Como se comentó en el apartado 1 del Capítulo 2, la ecuación integrodiferencial EFIE surge de aplicar la condición de contorno del campo eléctrico $\vec{E}_t^s + \vec{E}_t^i = 0$ donde \vec{E}_t^s y \vec{E}_t^i son respectivamente las componentes tangenciales del campo dispersado e incidente en la superficie S del sistema. Expresando \vec{E}^i en términos de las fuentes inducidas en S y particularizando para la superficie de un hilo en la aproximación de hilo delgado se obtienen las ecuaciones (2.8)-(2.10).

Todas estas ecuaciones son lineales y por tanto expresables en la forma generalizada

$$L\phi = g \quad (C.1)$$

donde L es un operador lineal, en nuestro caso un operador integrodiferencial, g una función conocida (función excitación) y ϕ , función incógnita, la respuesta a la excitación.

Para excitaciones armónicas ϕ y g serán función de las coordenadas espaciales y de la frecuencia y el operador L actuará únicamente sobre las variables espaciales. En el caso más general de interacción señal transitoria - sistema en TD, el operador actuará sobre variables espaciales y temporales. Variables de las que lógicamente dependerán ϕ y g. Por otro lado, en general ϕ y g pueden ser magnitudes vectoriales.

Nuestro objetivo en este apéndice es desarrollar un método numérico de solución de este tipo de

ecuación inhomogénea para una excitación $g(\vec{r}, t)$. Como veremos, va a suponer que, con objeto de mantener el principio de causalidad, su solución debe hacerse mediante un proceso escalonado en el tiempo.

La solución de la ecuación (C.1) puede conseguirse mediante el método de los momentos (MM) que es un procedimiento general que resulta extraordinariamente potente para la solución numérica de las ecuaciones integrales que resultan en muchos problemas físicos [21], [80] y por supuesto del Electromagnetismo en general [21], [81] y de la radiación y dispersión de señales electromagnéticas en particular [1], [23], [57], [58], [70], [79], [82].

Con objeto de exponer claramente la diferencia de aplicar el MM para excitaciones armónicas (DF) y transitorias (DT), expondremos brevemente en el apartado que sigue la formulación generalizada del MM para el primer caso y en el apartado siguiente el fundamento de su aplicación al DT.

C.1. FORMULACION GENERALIZADA DEL MM EN DF.

El MM consiste en expresar ϕ como una combinación lineal de un número finito de funciones base

$$\phi = \sum_n \alpha_n \phi_n \quad (C.2)$$

donde las constantes α_n son cantidades a determinar.

Definimos ahora el producto interno sobre el espacio en consideración (por ejemplo la superficie de un cuerpo conductor en el cual la función ha de determinarse). Al conjunto de funciones w_m se les denomina funciones peso o testigo. Un ejemplo de producto interno puede ser

$$\langle w_m, \phi \rangle = \int_S w_m \phi dS \quad (C.3)$$

de la expresión (C.1), teniendo en cuenta la linealidad del sistema, se obtiene, al hallar el producto interno de ϕ por cada una de las funciones del conjunto w_m , el sistema de ecuaciones

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, L\phi_n \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad (C.4)$$

que en notación matricial se escribe

$$[Z_{m,n}] [I_n] = [V_m] \quad (C.5)$$

con

$$[Z_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, L\phi_1 \rangle & \langle w_1, L\phi_2 \rangle & \dots \\ \langle w_2, L\phi_1 \rangle & \langle w_2, L\phi_2 \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[I_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} ; \quad [V_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Las matrices $|Z_{mn}|$, $|I_n|$ y $|V_m|$ reciben el nombre de matrices generalizadas de impedancia, intensidad y tensión respectivamente y el sistema de ecuaciones (C.5) puede resolverse por los métodos usuales.

Es frecuente elegir funciones que estén solo definidas sobre una región pequeña comparada con la dimensión total del sistema y con la longitud de onda y que por tanto no necesitan depender de la geometría total del sistema. Consecuentemente el método es versátil, permitiendo tratar formas arbitrarias y de gran complejidad.

Si tomamos N valores de n y m , entonces en (C.5) existen N^2 términos que han de evaluarse y cada término puede requerir dos o más operaciones (al menos una para evaluar $L\phi_n$ y otra para llevar a cabo el producto interno). Para resolver numéricamente estas integrales se necesita una gran cantidad de cálculo.

Existe, sin embargo, un conjunto único de funciones peso que reduce el número de integraciones requeridas. Este conjunto es el de las funciones δ de Dirac.

$$W_m = \delta(p - p_m) ; m = 1 \dots N \quad (C.6)$$

Usando (C.3) y (C.6), la ecuación (C.4) se reduce a

$$\sum_n \alpha_n \langle \delta(p - p_m), L\phi_n \rangle = \langle \delta(p - p_m), g \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_n \alpha_n \int_S \delta(p-p_m) L\phi_n ds = \int_S \delta(p-p_m) g ds = \\
&= \sum_n \alpha_n L\phi_n \Big|_{p=p_m} = g \Big|_{p=p_m}
\end{aligned}
\tag{C.7}$$

Analíticamente, elegir funciones peso δ equivale a forzar la ecuación (C.1) a que se verifique exactamente solo en los puntos p_m (técnica de adaptación por puntos) y permitir una relajación de las condiciones de contorno en puntos distintos de los p_m^* . Esta técnica por sus ventajas computacionales y precisión de los resultados obtenidos (eligiendo un número conveniente de puntos p_m), es muy utilizada en problemas de Electromagnetismo [23], [58], [63], [83]-[85].

* En la ecuación EFIE, la técnica de adaptación por puntos implica hacer la función residuo $\bar{R}(\bar{r})$, definida por $\bar{E}_t^s(\bar{r}) + \bar{E}_t^i(\bar{r}) = \bar{R}(\bar{r})$, igual a cero únicamente en los puntos $p = p_m$. Sin embargo, en los demás puntos no se cumple en general que $\bar{R}(\bar{r}) = 0$, $p \neq p_m$.

Una función peso $W_m(\vec{r})$ tal que $\langle W_m, \bar{R}(\bar{r}) \rangle = 0$ hace que la condición de contorno se verifique en media en el dominio de integración.

La diferencia fundamental de aplicar el método de los momentos en DF o DT es debida a que en DF las funciones presentan dependencia espacial y en DT espacial y temporal.

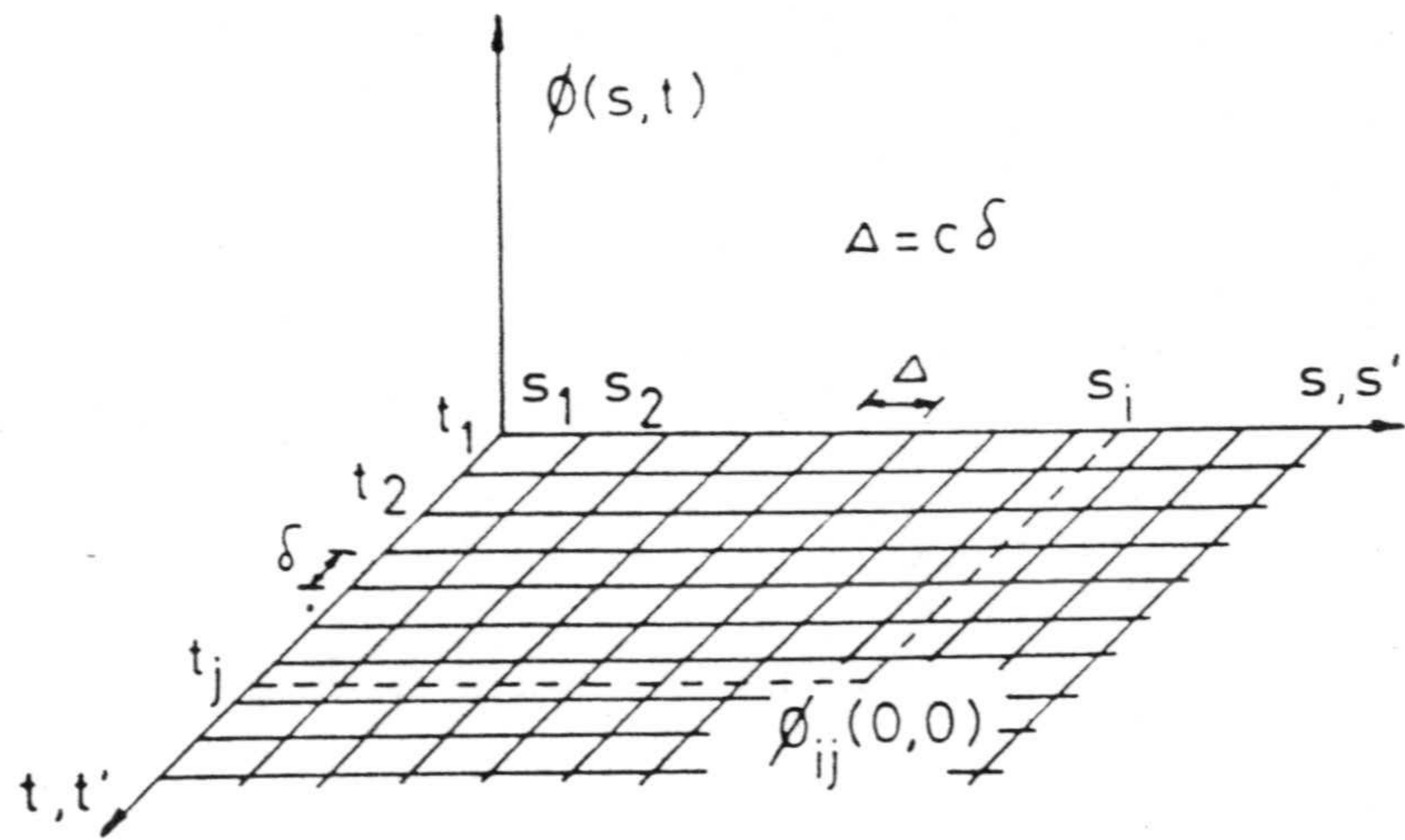
Con objeto de ilustrar lo que esta circunstancia implica en el procedimiento de solución en DT mediante el MM, consideraremos el siguiente modelo de ecuación integral

$$g(s,t) = \int_{-l}^l \phi(s',t') k(s,s') ds' \quad (C.8)$$

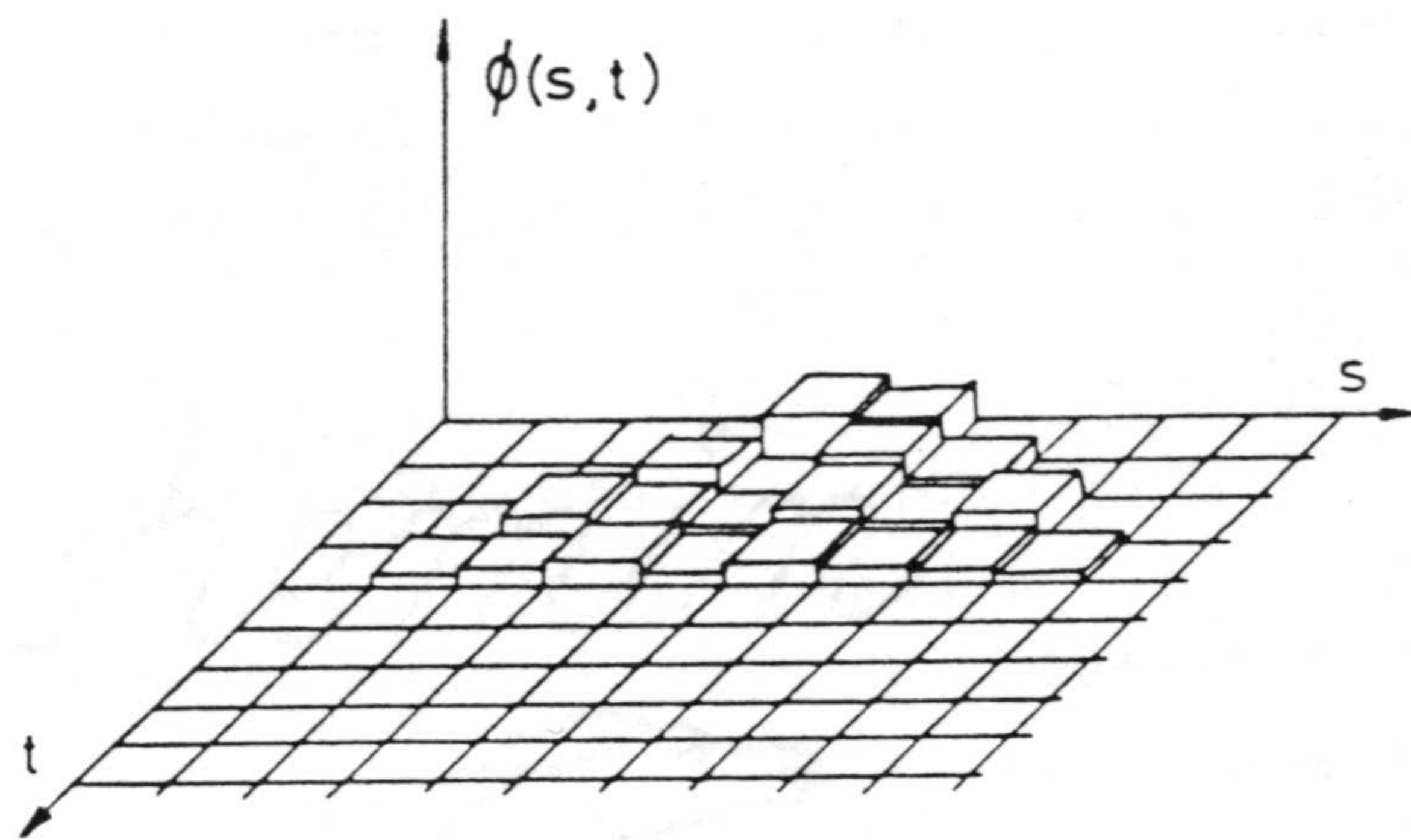
donde la dependencia espacial se expresa mediante la variable s , utilizando la prima para indicar puntos fuentes, $t'(s,s') = t - |s - s'|/c$, $g(s,t)$ es la función excitación, el núcleo $K(s,s')$ es una función conocida y $\phi(s',t')$ la función incógnita.

Expresemos ahora $\phi(s',t')$ en términos de las funciones base ϕ_{ij} definidas en cada intervalo espacio-temporal, representado por una cuadrícula en la Fig. C.1.a, esto es *

* En este apartado supondremos que el sistema excitado es un hilo delgado de radio $a \approx 0$, de forma que puntos fuentes y campos son prácticamente colineales. Supondremos además el hilo dividido en dominios iguales de valor $\Delta = c\delta$ (Fig. C.1.a).



(a)



(b)

Fig. C.1.- (a) Diagrama espacio-tiempo. (b) Forma aproximada de la función incognita (s, t) .

$$\phi(s', t') = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_T} \phi_{ij}(s' - s_i, t' - t_j) U_{ij} \quad (C.9)$$

donde

$$U_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i - \frac{\Delta}{2} \leq s' \leq s_i + \frac{\Delta}{2} \text{ y } t_j - \frac{\delta}{2} \leq t' \leq t_j + \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{en los demas casos} \end{cases}$$

Aunque en nuestros desarrollos definitivos la función base $\phi_{ij}(s_i'', t_j'')$ con $s_i'' = s' - s_i$ y $t_j'' = t' - t_j$, será elegida como una función interpolación lagrangiana de orden tres, en este apartado, con objeto de claridad en la descripción del método, la haremos una función pulso de valor $\phi_{ij}(0,0)$, esto es, el valor de ϕ en los centros de los intervalos s_i y t_j (Fig. C.1.a), y que son los puntos en los que adaptamos la solución haciendo la función residuo $R(s,t) = 0$. Esto lo conseguimos mediante la función peso delta de Dirac $\delta(s - s_u) \delta(t - t_v)$, con lo que la función $\phi(s,t)$ quedará aproximada en la forma indicada en la Fig.C.1.b.

Introduciendo (C.9) en (C.8) y con la aproximación

$$\phi_{ij}(s_i'', t_j'') = \phi_{ij}(0,0) = \phi_{ij}$$

se obtiene

$$g(s_u, t_v) = g_{u,v} = \sum_{i=1}^{N_s} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta}^{(i+\frac{1}{2})\Delta} \sum_{j=1}^v U_{ij} \phi_{ij} k(s_u, s') ds' \quad (C.10)$$

donde $u = 1, \dots, N_s$, $v = 1, \dots, N_T$.

Teniendo en cuenta que $t' = t - |s - s'|/c$ $j = v - (u - i)^*$ y que $\Delta = c\delta$, la ecuación (C.10) se simplifica a

$$g_{uv} = \sum_{i=1}^{N_s} \phi_{i, v-u-i} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta}^{(i+\frac{1}{2})\Delta} k(s_u, s') ds' \quad (C.11)$$

ecuación que asocia con cada ϕ_{ij} una integral espacial (o coeficiente de interacción) sobre el segmento i . Es interesante notar que este coeficiente de interacción es independiente del tiempo.

Denominando a los coeficientes de interacción por

$$Z_{u,i} = \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta}^{(i+\frac{1}{2})\Delta} k(s_u, s') ds' \quad (C.12)$$

* Esta relación es válida solo en la hipótesis ya comentada de radio del hilo $a \approx 0$, si no fuese así, entonces $t' = t - \sqrt{\rho^2 + (s-s')^2}/c \neq t - |s-s'|/c$, lo que supondría una complicación computacional considerable que en nuestra aproximación de hilo delgado no se presenta.

se tiene que

$$g_{uv} = \sum_{i=1}^{N_s} Z_{ui} \phi_{ij} = \sum_{i=1}^{N_s} Z_{ui} \phi_{i,v-|u-i|} \quad (C.13)$$

con $u = 1, \dots, N_s$ y $v = 1, \dots, N_T$.

Despejando ϕ_{uv} de la ecuación anterior (que resulta de hacer $i = u$), se obtiene

$$\phi_{uv} = \frac{g_{uv} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{N_s} Z_{ui} \phi_{i,v-|u-i|}}{Z_{u,u}} \quad (C.14)$$

La relación (C.14) expresa la respuesta en un punto e instante como función de la excitación externa en ese punto e instante más el efecto de excitación debido a las fuentes creadas en el sistema en instantes anteriores, con el consiguiente tiempo de retardo.

Como consecuencia, la solución de la ecuación integral puede llevarse a cabo mediante un proceso de avance escalonado en el tiempo de forma que ϕ_{uv} está completamente especificada por sus valores anteriores ϕ_{uk} , $k < v-1$ y el valor de la excitación g_{uv} . La expresión (C.14) muestra explícitamente el efecto del principio de causalidad y de la velocidad finita de propagación de las señales EM, en término de los retardos $v - |u-i|$.

Es interesante notar que este procedimiento

de marchar escalonadamente en el tiempo para hallar la solución a una excitación arbitraria trabajando en DT, no tiene su contrapartida en DF debido a que la interacción entre diferentes elementos en que se considera dividido el sistema es global en su conjunto, esto es, el campo total en un punto de observación dado es debido a las fuentes incógnitas distribuidas sobre todo el contorno y todas las incógnitas son independientes siendo necesaria una inversión matricial [39].

APENDICE D. DESARROLLO NUMERICO DE LA ECUACION EFIE
CON LOS TRATAMIENTOS Q1, Q2, Q3 Y Q4 DE LA
CARGA.

El desarrollo de la carga en estos cuatro casos es de la forma

$$q_{ij}(s_i, t_j) = \sum_{l=1}^{j+1} \sum_{m=n}^{n+2} B_i^{(l,m)} \sum_{s=1}^{j+m} \sum_{r=1}^{j+1} \sum_{t=n}^{n+2} C_{i+l}^{(r,t)} I_{i+l+r, s+t} \quad (D.1)$$

donde para el desarrollo Q1

$$B_i^{(l,m)} = B_i^{(l,m)}$$

$$C_i^{(l,m)} = C_i^{(l,m)}$$

para el Q2

$$B_i^{(l,m)} = B_i^{(l,m)}$$

$$C_i^{(l,m)} = {}^2 C_i^{(l,m)}$$

para el Q3

$$B_i^{(l,m)} = {}^s B_i^{(l,m)}$$

$$C_i^{(l,m)} = {}^3 C_i^{(l,m)}$$

y para el Q4

$$B_i^{(l,m)} = {}^s B_i^{(l,m)}$$

$$C_i^{(l,m)} = {}^4 C_i^{(l,m)}$$

Substituyendo (D.1), (2.16), (2.17) en (2.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{S}_u \cdot \vec{E}^i(S_u, t_u) &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \sum_{i=1}^{N_s} \hat{S}_u \cdot \int_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2} \left\{ \left[\frac{\hat{S}_i}{R_{iu}} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} {}_t B_i^{(l,m)} + \right. \right. \\ &+ c \frac{\vec{R}_{iu}}{R_{iu}^2} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} {}_s B_i^{(l,m)} \left. \right] I_{i+l, j+m} - c^2 \frac{\vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} B_i^{(l,m)} \\ &\cdot \left. \sum_{s=1}^{j+m} \sum_{r=-1}^{+1} \sum_{t=n}^{n+2} C_{ite}^{(r,t)} I_{i+l+r, s+t} \right\} dS_i'' \quad (D.2) \end{aligned}$$

Evaluando los siguientes términos

$$F_{iu, l, m} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2} \left[\frac{\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i}{R_{iu}} {}_t B_i^{(l,m)} + c \frac{\vec{R}_{iu}}{R_{iu}^2} {}_s B_i^{(l,m)} \right] dS_i'' \quad (D.3)$$

$$G_{iu, l, m} = -\frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2} \frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} B_i^{(l,m)} dS_i'' \quad (D.4)$$

podemos volver a escribir (D.2)

$$\begin{aligned} \hat{S}_u \cdot \vec{E}^i(S_u, t_u) &= \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=-1}^{+1} \left\{ \sum_{m=n}^{n+2} F_{iu, l, m} I_{i+l, v-r_{iu}+m} + \right. \\ &+ \sum_{m=n}^{n+2} G_{iu, l, m} \sum_{s=1}^{v-r_{iu}+m+1} \sum_{r=-1}^{+1} \sum_{t=n}^{n+2} C_{ite}^{(r,t)} I_{i+l+r, s+t} \left. \right\} \quad (D.5) \end{aligned}$$

Hacemos el cambio $s_{\text{NUEVO}} = v - r_{iu} + m + 1 - s$ con lo cual

$$\begin{aligned}
s_u^{\wedge} \cdot \vec{E}^i(s_u, t_0) &= \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=-1}^{+1} \left\{ \sum_{m=n}^{n+2} \mathcal{F}_{i,u,l,m} I_{i+l, \sigma-r_{i,u+m}} + \right. \\
&+ \sum_{m=n'}^{n'+2} \mathcal{G}_{i,u,l,m} \sum_{s=1}^{\sigma-r_{i,u+m}} \sum_{r=-1}^{+1} \sum_{t=n}^{n+2} e_{i+l}^{(r,t)} I_{i+l+r, \sigma-r_{i,u+m+1}-s+t} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Reorganizamos y pasamos al primer término la intensidad en el intervalo v

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N_s} \left\{ \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^1 \delta(r_{i,u}-p) \mathcal{F}_{i,u,l,p} I_{i+l, \sigma} + \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^2 \delta(r_{i,u}-p) \right. \\
&\mathcal{G}_{i,u,l, \langle \frac{p}{2} \rangle} \sum_{r=-1}^{+1} e_{i+l}^{(r, \langle \frac{p+1}{2} \rangle)} I_{i+l+r, \sigma} = s_u^{\wedge} \cdot \vec{E}^i(s_u, t_0) - \\
&- \sum_{i=1}^{N_s} \left\{ \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{i,u}}}^{n+2} \mathcal{F}_{i,u,l,m} I_{i+l, \sigma-r_{i,u+m}} + \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n'}^{n'+2} \mathcal{G}_{i,u,l,m} \right. \\
&\cdot \left. \sum_{r=-1}^{+1} \sum_{t=n}^{n+2} e_{i+l}^{(r,t)} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t+m+1-r_{i,u}}}^{\sigma-r_{i,u+m}} I_{i+l+r, \sigma-r_{i,u+m}-s+1+t} \right\}
\end{aligned} \tag{D.7}$$

donde $\langle \rangle$ significa el entero más próximo.

Haciendo el cambio de i por $i+1$ en el primer sumando del primer término de (D.7), de i por $i+1+r$ en el segundo sumando de dicho término y definiendo

$$y_{i+l+r, v-r_{iu}+m-s+1+t} = \sum_{s=1}^{v-r_{iu}+m} I_{i+l+r, v-r_{iu}+m-s+1+t} \quad (D.8)$$

$$s \neq t+m+1-r_{i,u}$$

la ecuación (D.7) puede escribirse

$$\sum_{i=1}^{N_s} \left\{ \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^1 \delta(r_{i-l,u}-p) F_{i+l,u,l,p} + \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^2 \delta(r_{i-l-r,u}-p) \right.$$

$$G_{i-l-r,u,l,\langle \frac{p}{2} \rangle} \sum_{r=-1}^{+1} e_{i-r}^{(r, \langle \frac{p+1}{2} \rangle)} \left. \right\} I_{i,v} = \hat{S}_u \cdot \vec{E}^i(S_u, t_0) -$$

$$- \sum_{i=1}^{N_s} \left\{ \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{i,u}}}^{n+2} F_{i,u,l,m} I_{i+l, v-r_{iu}+m} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n'}^{n'+2} G_{i,u,l,m} \sum_{r=-1}^{+1} \sum_{t=n}^{n+2} e_{i+l}^{(r,t)} y_{i+l+r, v-r_{iu}+m-s+1+t} \right. \quad (D.9)$$

que podemos escribir matricialmente como

$$\tilde{Z} \cdot \tilde{I}_v = \tilde{E}(t_0) \quad (D.10)$$

siendo

$$Z_{u,i} = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^1 \delta(r_{i-l,u}-p) F_{i-l,u,l,p} + \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{p=0}^2 \delta(r_{i-l-r,u}-p)$$

$$G_{i-l-r,u,l,\langle \frac{p}{2} \rangle} \sum_{r=-1}^{+1} e_{i-r}^{(r, \langle \frac{p+1}{2} \rangle)}$$

$$\vec{\xi}(t_0) = \vec{E}^i + \vec{E}^s$$

$$E_u^i = \hat{S}_u \cdot \vec{E}^i(s_u, t_0)$$

$$E_u^s = - \sum_{i=1}^{N_s} \left\{ \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{iu}}}^{n+2} \mathcal{F}_{i,u,l,m} I_{i+l, \nu - r_{iu} + m} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n'}^{n'+2} \mathcal{G}_{i,u,l,m} \sum_{r=-1}^{+1} \sum_{t=n}^{n+2} C_{i+l}^{(r,t)} y_{i+l+r, \nu - r_{iu} + m - s + 1 + t} \right.$$

APENDICE E. DESARROLLO ANALITICO DE LAS FUNCIONES F Y
G PARA LAS DISTINTAS FORMAS DE EXPRESAR LA
CARGA EN (2.14).

Obtendremos en este apartado el desarrollo explícito de las funciones F y G para las distintas expresiones de la carga. Veremos además la particularización para el caso en que los intervalos espaciales sean de igual longitud, así como el caso de hilos rectos.

En primer lugar calculamos las variables $B_i^{(p,m)}$, $sB_i^{(p,m)}$, $tB_i^{(p,m)}$, $\int sB_i^{(p,m)}$ va-

$$B_i^{(p,m)} = \frac{1}{D_i^{(p,m)}} (s_i^{n+2} + SP_i^l s_i^n + PP_i^l) (t^{n+2} - SQ^m t^n + PQ^m) \quad (E.1)$$

Derivando e integrando la ecuación (2.17) tenemos

$$sB_i^{(p,m)} = \frac{\partial}{\partial s_i^n} B_i^{(p,m)} = \frac{1}{D_i^{(p,m)}} (2s_i^n + SP_i^l) (t^{n+2} - SQ^m t^n + PQ^m) \quad (E.2)$$

$$tB_i^{(p,m)} = \frac{\partial}{\partial t_j^n} B_i^{(p,m)} = \frac{1}{D_i^{(p,m)}} (s_i^{n+2} + SP_i^l s_i^n + PP_i^l) (2t^n - SQ^m) \quad (E.3)$$

$$\int sB_i^{(p,m)} = \frac{\partial}{\partial s_i^n} \int B_i^{(p,m)} dt^n = \frac{1}{D_i^{(p,m)}} (2s_i^n + SP_i^l) \left(-SQ^m \frac{t^{n+2}}{2} + PQ^m t^n \right) \quad (E.4)$$

donde

$$D_i^{(p,m)} = \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^{+1} \prod_{\substack{q=2 \\ q \neq m}}^{n+2} (s_{i+l} - s_{i+p}) (m-q) \delta$$

Y

$$SQ^m = \sum_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} q\delta$$

Las definiciones de las funciones F y G vienen dadas por las ecuaciones (D.3) y (D.4) para los tratamientos de carga Q1 a Q4 y por (2.50) y (2.51) para Q5. Ponemos de forma explícita la dependencia de \vec{R}_{iu} con la variable de integración s_i'' . Para ello redefinimos \vec{R}_{iu} como indica la Fig. D.1

$$\vec{R}_{iu} = \vec{r}_u - \vec{r}_i \quad (E.5)$$

Llamando $\vec{R}_{iu}(s_i'')$ a la antigua variable \vec{R}_{iu}

$$\vec{R}_{iu}(s_i'') = \vec{r}_u - \vec{r}_i - \vec{s}_i = \vec{R}_{iu} - s_i'' \hat{s}_i \quad (E.6)$$

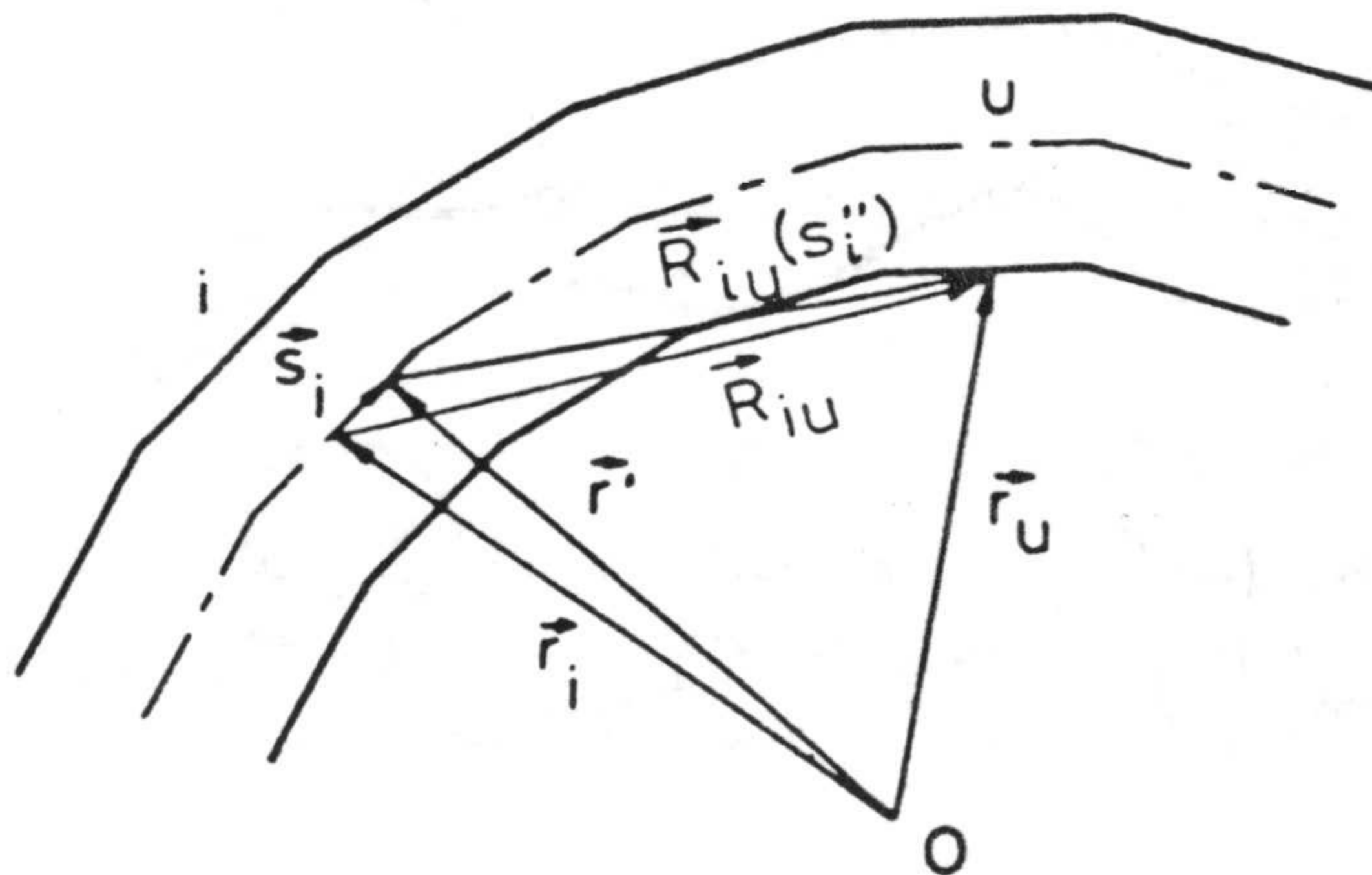


Fig. D.1.- Coordenadas utilizadas en la estructura de hilo.

Teniendo en cuenta que la variable t'' es también función de s_i'' a través de $R_{iu}(s_i'')$

$$t'' = \delta \tau_{iu} - R_{iu}(s_i'')/c$$

desarrollamos cada uno de los términos que aparecen en las definiciones de las funciones F y G.

$$tB_i^{(p,m)} = \frac{1}{D_i^{(p,m)}} (s_i'' + SP_i^l s_i'' + PP_i^l) \cdot \left(-\frac{e R_{iu}(s_i'')}{c} - (SQ^m - e\delta\tau_{iu}) \right) \quad (E.7)$$

Llamando

$$B_{iu}^m = SQ^m - e\delta\tau_{iu}$$

tendremos

$$tB_i^{(p,m)} = \frac{1}{D_i^{(p,m)}} \cdot (s_i''^2 + SP_i^l s_i'' + PP_i^l) \cdot \left(-\frac{e R_{iu}(s_i'')}{c} - B_{iu}^m \right) \quad (E.8)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i}{c R_{iu}(s_i'')} tB_i^{(p,m)} &= \frac{\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i}{D_i^{(p,m)}} (s_i''^2 + SP_i^l s_i'' + PP_i^l) \left(-\frac{e}{c^2} - \frac{B_{iu}^m}{c R_{iu}(s_i'')} \right) = \\ &= \frac{\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i}{D_i^{(p,m)}} \left\{ \frac{s_i''^2}{R_{iu}(s_i'')} \left(-\frac{B_{iu}^m}{c} \right) + \frac{s_i''}{R_{iu}(s_i'')} \left(-\frac{B_{iu}^m}{c} SP_i^l \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{R_{iu}(s_i'')} \left(-\frac{B_{iu}^m}{c} P P_i^l \right) + s_i''^2 \left(-\frac{2}{c^2} \right) + s_i'' \left(-\frac{2}{c^2} S P_i^l \right) + \left(-\frac{2}{c^2} P P_i^l \right) \quad (\text{E.9})$$

$$s B_i^{(l,m)} = \frac{1}{D_i^{(l,m)}} (2s_i'' + S P_i^l) \left[\frac{R_{iu}^2(s_i'')}{c^2} + \frac{R_{iu}(s_i'')}{c} (S Q^m - 2\delta r_{iu}) + (\delta^2 r_{iu}^2 - S Q^m \delta r_{iu} + P Q^m) \right] \quad (\text{E.10})$$

$$B_i^{(p,m)} = \frac{1}{D_i^{(p,m)}} (s_i''^2 + s_i'' S P_i^l + P P_i^l) \left[\frac{R_{iu}^2(s_i'')}{c^2} + \frac{R_{iu}(s_i'')}{c} (S Q^m - 2\delta r_{iu}) + (\delta^2 r_{iu}^2 - S Q^m \delta r_{iu} + P Q^m) \right] \quad (\text{E.11})$$

Llamando

$$A_{iu}^m = \delta^2 r_{iu}^2 - S Q^m \delta r_{iu} + P Q^m$$

tendremos

$$s B_i^{(l,m)} = \frac{1}{D_i^{(l,m)}} \cdot (2s_i'' + S P_i^l) \cdot \left(\frac{R_{iu}^2(s_i'')}{c^2} + \frac{R_{iu}(s_i'')}{c} B_{iu}^m + A_{iu}^m \right) \quad (\text{E.12})$$

y

$$B_i^{(p,m)} = \frac{1}{D_i^{(p,m)}} (s_i''^2 + s_i'' S P_i^l + P P_i^l) \cdot \left(\frac{R_{iu}^2(s_i'')}{c^2} + \frac{R_{iu}(s_i'')}{c} B_{iu}^m + A_{iu}^m \right) \quad (\text{E.13})$$

con lo cual:

$$\frac{\hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}(s_i'')}{R_{iu}^2} B_i^{(l,m)} = \frac{\hat{s}_u \cdot (\vec{R}_{iu} - s_i'' \hat{s}_i)}{D_i^{(l,m)} R_{iu}^2(s_i'')} \left((2s_i'') + SP_i^l \right).$$

$$\cdot \left(\frac{R_{iu}^2(s_i'')}{c^2} + \frac{R_{iu}(s_i'')}{c} B_{iu}^m + A_{iu}^m \right) = \frac{\hat{s}_u}{D_i^{(l,m)}} \left\{ -2\hat{s}_i s_i''^2 + s_i'' (2\vec{R}_{iu} - \hat{s}_i SP_i^l) + \right.$$

$$\left. + \vec{R}_{iu} SP_i^l \right\} \cdot \left(\frac{1}{c^2} + \frac{B_{iu}^m}{c R_{iu}(s_i'')} + \frac{A_{iu}^m}{R_{iu}^2(s_i'')} \right) = \frac{\hat{s}_u}{D_i^{(l,m)}} \left\{ \frac{s_i''^2}{R_{iu}^2(s_i'')} (-2\hat{s}_i A_{iu}^m) + \right.$$

$$\left. + \frac{s_i''^2}{R_{iu}(s_i'')} \left(\frac{-2\hat{s}_i B_{iu}^m}{c} \right) + s_i''^2 \left(\frac{-2\hat{s}_i}{c^2} \right) + \frac{s_i''}{R_{iu}^2(s_i'')} \left\{ A_{iu}^m \cdot \right.$$

$$\left. (2\vec{R}_{iu} - \hat{s}_i SP_i^l) \right\} + \frac{s_i''}{R_{iu}(s_i'')} \left\{ \frac{B_{iu}^m}{c} (2\vec{R}_{iu} - \hat{s}_i SP_i^l) + s_i'' \right\} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot$$

$$\cdot (2\vec{R}_{iu} - \hat{s}_i SP_i^l) \right\} + \frac{1}{R_{iu}^2(s_i'')} (A_{iu}^m \vec{R}_{iu} SP_i^l) + \frac{1}{R_{iu}(s_i'')} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{B_{iu}^m \vec{R}_{iu} SP_i^l}{c} \right) + \left(\vec{R}_{iu} SP_i^l \frac{1}{c^2} \right) \quad (E.14)$$

y

$$\frac{\hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}(s_i'')}{R_{iu}^2} B_i^{(l,m)} = \frac{\hat{s}_u \cdot (\vec{R}_{iu} - s_i'' \hat{s}_i)}{D_i^{(l,m)} R_{iu}^2(s_i'')} [s_i''^2 + s_i'' SP_i^l + PP_i^l]$$

$$\cdot \left(\frac{R_{iu}^2(s_i'')}{c^2} + \frac{R_{iu}(s_i'')}{c} B_{iu}^m + A_{iu}^m \right) = \left\{ s_i''^2 A_{iu}^m + \frac{s_i''^2 R_{iu}^2}{c^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{s_i''^2 R_{iu}}{c} B_{iu}^m + s_i'' S P_i^\ell A_{iu}^m + s_i'' \frac{R_{iu}^2}{c^2} S P_i^\ell + \\
& + s_i'' S P_i^\ell \frac{R_{iu}}{c} B_{iu}^m + P P_i^\ell A_{iu}^m + P P_i^\ell \frac{R_{iu}^2}{c} + \\
& + P P_i^\ell \frac{R_{iu}}{c} B_{iu}^m \cdot \left[\frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} + s_i'' \frac{\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i}{R_{iu}^3} \right] \frac{1}{D_i^{(l,m)}} \quad (E.15)
\end{aligned}$$

Para el tercer sumando:

$$\begin{aligned}
\int_{S B_i}^{(l,m)} \Big|_{-\delta/2}^{t''} &= \frac{1}{D_i^{(l,m)}} (2s_i'' + S P_i^\ell) \left[-S Q^m \frac{t''^2}{2} + P Q^m t'' \right]_{-\delta/2}^{t''} = \\
&= \frac{1}{D_i^{(l,m)}} (2s_i'' + S P_i^\ell) \left[-S Q^m \frac{t''^2}{2} + P Q^m t'' - \left\{ -S Q^m \frac{\delta^2}{8} - P Q^m \frac{\delta}{2} \right\} \right] = \\
&= \frac{1}{D_i^{(l,m)}} (2s_i'' + S P_i^\ell) \left[-S Q^m \frac{t''^2}{2} + P Q^m t'' + T N \right] \quad (E.16)
\end{aligned}$$

donde

$$T N = S Q^m \frac{\delta^2}{8} + P Q^m \frac{\delta}{2}$$

con lo cual:

$$\begin{aligned}
c \frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}(s_i'')}{R_{iu}^3(s_i'')} \int_{s B_i^{(l,m)}} \Big|_{-\delta/2}^{t''} &= \frac{\hat{S}_u}{D_i^{(l,m)}} (\vec{R}_{iu} - s_i'' \hat{S}_i) (2s_i'' + SP_i^l) \cdot \left[-\frac{SQ^m}{2c} \right. \\
&+ \frac{1}{R_{iu}^2(s_i'')} + \delta r_{iu} SQ^m \frac{1}{R_{iu}^2(s_i'')} - \frac{SQ^m \delta^2 r_{iu}^2 c}{2 R_{iu}^3(s_i'')} - \frac{PQ^m}{R_{iu}^2(s_i'')} + \frac{\delta r_{iu} PQ^m c}{R_{iu}^3(s_i'')} + \\
&+ \frac{c TN}{R_{iu}^3(s_i'')} = \frac{1}{D_i^{(l,m)}} \left\{ -2 \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u s_i''^2 + (2 \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} - SP_i^l \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) s_i'' + \right. \\
&+ \left. \vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u SP_i^l \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{R_{iu}^3(s_i'')} \left[-\delta^2 r_{iu}^2 c \frac{SQ^m}{2} + \delta r_{iu} PQ^m c + c TN \right] + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{R_{iu}^2(s_i'')} \left\{ \delta r_{iu} SQ^m - PQ^m \right\} + \frac{1}{R_{iu}(s_i'')} \left\{ -SQ^m \cdot \frac{1}{2c} \right\} \right\} \quad (E.17)
\end{aligned}$$

Llamando

$$E_{iu}^m = -\delta^2 r_{iu}^2 c \frac{SQ^m}{2} + \delta r_{iu} PQ^m c + c TN$$

$$H_{iu}^m = PQ^m - \delta r_{iu} SQ^m$$

tendremos

$$\begin{aligned}
c \frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3(s_i'')} \int_{s B_i^{(l,m)}} \Big|_{-\delta/2}^{t''} &= \frac{1}{D_i^{(l,m)}} \left\{ \frac{s_i''^2}{R_{iu}^3(s_i'')} (-2 \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) E_{iu}^m + \right. \\
&+ \frac{s_i''}{R_{iu}^3(s_i'')} \cdot (2 \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} - SP_i^l \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) E_{iu}^m + \frac{1}{R_{iu}^3} \vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u \cdot
\end{aligned}$$

$$\cdot SP_i^e E_{iu}^m + \frac{S_i''^2}{R_{iu}^2(S_i'')} (2\hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) H_{iu}^m + \frac{S_i''}{R_{iu}^2(S_i'')} \cdot (2\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} -$$

$$- SP_i^e \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) (-H_{iu}^m) + \frac{1}{R_{iu}^2(S_i'')} (\vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u SP_i^e) (-H_{iu}^m) + \frac{S_i''^2}{R_{iu}(S_i'')} (2\hat{S}_i \cdot \hat{S}_u)$$

$$\cdot \frac{SQ^m}{2c} + \frac{S_i''}{R_{iu}(S_i'')} ((2\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}) - SP_i^e \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) \left(-\frac{SQ^m}{2c}\right) +$$

$$+ \frac{1}{R_{iu}(S_i'')} (\vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u SP_i^e) \left(-\frac{SQ^m}{2c}\right) \quad (E.18)$$

$$\int_{S_{Bi}^{(P,m)}} \Big|_{-\delta/2}^{\delta/2} = \frac{1}{D_i^{(P,m)}} (2S_i'' + SP_i^e) \left[-SQ^m \frac{t''^2}{2} + PQ^m t''\right] \Big|_{-\delta/2}^{\delta/2} =$$

$$= \frac{1}{D_i^{(P,m)}} (2S_i'' + SP_i^e) PQ^m \delta \quad (E.19)$$

con lo cual:

$$c \frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}(S_i'')}{R_{iu}^3} \int_{S_{Bi}^{(P,m)}} \Big|_{-\delta/2}^{\delta/2} = \frac{c \hat{S}_u \cdot PQ^m \delta}{D_i^{(P,m)} R_{iu}^3(S_i'')} \cdot$$

$$\cdot (\vec{R}_{iu} - S_i'' \hat{S}_i) (2S_i'' + SP_i^e) =$$

$$= \frac{c \hat{s}_u PQ^m \delta}{D_i^{(f,m)} R_{iu}^3(s_i'')} \left\{ -2 \hat{s}_i s_u''^2 + (2 \vec{R}_{iu} - SP_i^e \hat{s}_i) s_i'' + \vec{R}_{iu} SP_i^e \right\} \quad (E.20)$$

Con estos desarrollos podemos escribir:

$$F_{i,u,l,m} = \sum_{a=0}^2 \sum_{b=0}^3 F_{i,u,l,m}^{(a,b)} I_{i,u}^{(a,b)} \quad (E.21)$$

$$G_{i,u,l,m} = \sum_{a=0}^2 \sum_{b=0}^3 G_{i,u,l,m} I_{i,u}^{(a,b)} \quad (E.22)$$

donde

$$I_{i,u}^{(a,b)} = \int_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2} \frac{s_i''^a}{R_{iu}^b(s_i'')} ds_i'' = \int_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2} \frac{s_i''^a}{[R_{iu}^2 - 2s_i'' \hat{s}_i \cdot \vec{R}_{iu} + s_i''^2]^{b/2}} ds_i'' \quad (E.23)$$

Estas integrales $I_{i,u}$ son analíticamente integrables. Con los cambios de variables $g = -2\hat{s}_i \cdot \vec{R}_{iu}$ y $e = R_{iu}^2$, estas integrales toman la fórmula

$$I_{i,u}^{(0,0)} = \Delta_i$$

$$I_{i,u}^{(0,1)} = \ln \left[2 R_{iu}(s_i'') + 2s_i'' + g \right]_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2}$$

$$I_{i,u}^{(0,2)} = \begin{cases} \frac{2}{(4e-g^2)^{1/2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2s_i'' + g}{(4e-g^2)^{1/2}} \Big|_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} & \text{Si } g^2 \neq 4e \\ -\frac{2}{2s_i'' + g} \Big|_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} & \text{Si } g^2 = 4e \end{cases}$$

$$I_{i,u}^{(0,3)} = \begin{cases} \frac{4s_i'' + 2g}{(4e-g^2) \operatorname{Riu}(s_i'')} \Big|_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} & \text{Si } g^2 \neq 4e \\ \frac{1}{2} \cdot \operatorname{signo}(g) \left[\frac{-1}{(s_i'' + g/2)^2} \right] \Big|_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} & \text{Si } g^2 = 4e \end{cases}$$

$$I_{i,u}^{(0,4)} = \begin{cases} \frac{2s_i'' + g}{(4e-g^2) \operatorname{Riu}^2(s_i'')} \Big|_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} + \frac{2 I_{i,u}^{(0,2)}}{4e-g^2} & \text{Si } g^2 = 4e \\ \frac{-1}{3(s_i'' + g/2)^3} \Big|_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} & \text{Si } g^2 \neq 4e \end{cases}$$

$$I_{i,u}^{(1,0)} = 0$$

$$I_{i,u}^{(1,1)} = \operatorname{Riu}(s_i'') \Big|_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} - \frac{1}{2} g I_{i,u}^{(0,1)}$$

$$I_{i,u}^{(1,2)} = \ln \operatorname{Riu}(s_i'') \Big|_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} - \frac{1}{2} g I_{i,u}^{(0,2)}$$

$$I_{i,u}^{(1,3)} = \begin{cases} \left. -\frac{2q s_i'' + 4e}{(4e - q^2) R_{iu}(s_i'')} \right|_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} & \text{Si } q^2 \neq 4e \\ \operatorname{signo}(q) \left[\frac{q}{4} \frac{1}{(s_i'' + q/2)^2} - \frac{1}{s_i'' + q/2} \right]_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} & \text{Si } q^2 = 4e \end{cases}$$

$$I_{i,u}^{(2,0)} = \Delta i^3 / 12$$

$$I_{i,u}^{(2,1)} = \left[\left(\frac{1}{2} s_i'' - \frac{3}{4} q \right) R_{iu}(s_i'') \right]_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} + \frac{1}{2} (3q^2 - 4e) I_{i,u}^{(0,1)}$$

$$I_{i,u}^{(2,2)} = \left[s_i'' - q \ln R_{iu}(s_i'') \right]_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} + \frac{1}{2} (q^2 - 2e) I_{i,u}^{(0,2)}$$

$$I_{i,u}^{(2,3)} = I_{i,u}^{(0,1)} - q I_{i,u}^{(1,3)} - e I_{i,u}^{(0,3)}$$

Para los desarrollos de la carga Q1 y Q2 las funciones $F_{i,u,l,m}$ y $G_{i,u,l,m}$ vienen definidas por

$$F_{i,u,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} \left[\frac{\hat{s}_u \cdot \hat{s}_i}{R_{iu}} + t B_i^{(l,m)} + c \frac{\vec{R}_{iu}}{R_{iu}^2} \cdot s B_i^{(l,m)} \right] ds_i'' \quad (\text{E.24})$$

$$G_{i,u,l,m} = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \int_{-\Delta i/2}^{\Delta i/2} \frac{\hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} B_i^{(l,m)} ds_i'' \quad (\text{E.25})$$

Teniendo en cuenta (E.2), (E.3) y (E.21) las funciones $F_{i,u,l,m}^{(a,b)}$ son:

$$F_{i,u,l,m}^{(0,0)} = \frac{1}{4\pi EC^3 D_i^{(l,m)}} (SP_i^l \vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u - e PP_i^l \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i)$$

$$F_{i,u,l,m}^{(1,0)} = \frac{1}{4\pi EC^3 D_i^{(l,m)}} [3 SP_i^l \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i - e \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}]$$

$$F_{i,u,l,m}^{(2,0)} = \frac{-1}{\pi EC^3 D_i^{(l,m)}} \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i$$

$$F_{i,u,l,m}^{(3,0)} = 0$$

$$F_{i,u,l,m}^{(0,1)} = \frac{B_{iu}^m}{4\pi EC^2 D_i^{(l,m)}} [\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i PP_i^l - \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} SP_i^l]$$

$$F_{i,u,l,m}^{(1,1)} = \frac{e B_{iu}^m}{4\pi EC^2 D_i^{(l,m)}} (\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i SP_i^l - \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu})$$

$$F_{i,u,l,m}^{(2,1)} = \frac{3 B_{iu}^m}{4\pi EC^2 D_i^{(l,m)}} \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i$$

$$F_{i,u,l,m}^{(3,1)} = 0$$

$$F_{i,u,l,m}^{(0,2)} = \frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{4\pi EC^2 D_i^{(l,m)}} SP_i^l A_{iu}^m$$

$$F_{i,u,l,m}^{(1,2)} = \frac{A_{iu}^m}{4\pi EC D_i^{(l,m)}} [e \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} - \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i SP_i^l]$$

$$F_{i,u,l,m}^{(2,2)} = \frac{-e \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i A_{iu}^m}{4\pi EC D_i^{(l,m)}}$$

$$F_{i,u,l,m}^{(2,3)} = F_{i,u,l,m}^{(3,0)} = F_{i,u,l,m}^{(3,1)} = F_{i,u,l,m}^{(3,2)} = F_{i,u,l,m}^{(3,3)} = 0$$

Sustituyendo (2.17) en (E.25) y teniendo en cuenta (E.22), obtenemos los valores de las

funciones $G_{i,u,l,m}$ para los desarrollos de la carga Q1 y Q2.

$$G_{i,u,l,m}^{(0,1)} = \frac{-1}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} PP_i^l$$

$$G_{i,u,l,m}^{(1,1)} = \frac{-1}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} [\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} SP_i^l - \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i PP_i^l]$$

$$G_{i,u,l,m}^{(2,1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} [\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} - \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i SP_i^l]$$

$$G_{i,u,l,m}^{(3,1)} = \frac{\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}}$$

$$G_{i,u,l,m}^{(0,2)} = \frac{c \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} PP_i^l B_{iu}^m$$

$$G_{i,u,l,m}^{(1,2)} = -\frac{c B_{iu}^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} [\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i PP_i^l - \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} SP_i^l]$$

$$G_{i,u,l,m}^{(2,2)} = \frac{c B_{iu}^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} [\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} - \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i SP_i^l]$$

$$G_{i,u,l,m}^{(3,2)} = -\frac{c B_{iu}^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i$$

$$G_{i,u,l,m}^{(0,3)} = \frac{-c A_{iu}^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} PP_i^l$$

$$G_{i,u,l,m}^{(1,3)} = \frac{c A_{iu}^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} [\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i PP_i^l - \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} SP_i^l]$$

$$G_{i,u,l,m}^{(2,3)} = \frac{c A_{iu}^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} [\hat{s}_u \cdot \hat{s}_i s P_i^l - \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}]$$

$$G_{i,u,l,m}^{(3,3)} = \frac{c \hat{s}_u \cdot \hat{s}_i A_{iu}^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}}$$

Para los desarrollos de la carga Q3 y Q4 las funciones $\mathcal{F}_{i,u,l,m}$ vienen definidas por las mismas expresiones que en Q1 y Q2. Y las funciones

$$G_{i,u,l,m} = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \int_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2} \frac{\hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} s B_i^{(l,m)} d s_i \quad (E.26)$$

Sustituyendo (E.2) en (E.26) y teniendo en cuenta (E.22) se obtiene

$$G_{i,u,l,m}^{(0,1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} s P_i^l \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}$$

$$G_{i,u,l,m}^{(1,1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} (s P_i^l \hat{s}_u \cdot \hat{s}_i - e \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu})$$

$$G_{i,u,l,m}^{(2,1)} = \frac{e \hat{s}_u \cdot \hat{s}_i}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}}$$

$$G_{i,u,l,m}^{(0,2)} = \frac{c B_{iu}^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} s P_i^l \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}$$

$$G_{i,u,l,m}^{(1,2)} = \frac{c B_{iu}^m}{4\pi E D_i^{(l,m)}} (\varepsilon \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} - \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i SP_i^l)$$

$$G_{i,u,l,m}^{(2,2)} = \frac{-\varepsilon c}{4\pi E D_i^{(l,m)}} B_{iu}^m \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i$$

$$G_{i,u,l,m}^{(0,3)} = \frac{-c}{4\pi E D_i^{(l,m)}} A_{iu}^m SP_i^l \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}$$

$$G_{i,u,l,m}^{(1,3)} = \frac{c A_{iu}^m}{4\pi E D_i^{(l,m)}} (\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i SP_i^l - \varepsilon \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu})$$

$$G_{i,u,l,m}^{(2,3)} = \frac{\varepsilon c}{4\pi E D_i^{(l,m)}} A_{iu}^m \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i$$

Para el caso Q5 :

$$F_{i,u,l,m} = \frac{1}{4\pi E c^2} \int_{-b_i/2}^{b_i/2} \left[\frac{\hat{S}_i \cdot \hat{S}_u}{R_{iu}} \varepsilon B_i^{(l,m)} + c \frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^2} \varepsilon B_i^{(l,m)} + c^2 \frac{\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} \varepsilon B_i^{(l,m)} \right]_{-t''}^{t''} ds_i''$$

donde teniendo en cuenta (E.8), (E.14) y (E.17)

$$F_{i,u,l,m}^{(0,0)} = \frac{1}{4\pi E c^3 D_i^{(l,m)}} (SP_i^l \vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u - \varepsilon PP_i^l \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u)$$

$$F_{i,u,l,m}^{(0,1)} = \frac{1}{4\pi E c^2 D_i^{(l,m)}} \left\{ B_{iu}^m (SP_i^l \vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u - PP_i^l \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) - \frac{1}{2} \vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u SP_i^m SQ^m \right\}$$

$$F_{i,u,l,m}^{(0,2)} = \frac{1}{4\pi E c D_i^{(l,m)}} \left\{ A_{iu}^m SP_i^m \vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u - H_{iu}^m \vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u SP_i^m \right\}$$

$$F_{i,u,l,m}^{(0,3)} = \frac{1}{4\pi E c D_i^{(l,m)}} \left\{ \vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u SP_i^l E_{iu}^m \right\}$$

$$F_{i,u,l,m}^{(1,0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^3 D_i^{(l,m)}} \left\{ 2 \vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u - 3 SP_i^l \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u \right\}$$

$$F_{i,u,l,m}^{(1,1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2 D_i^{(l,m)}} \left\{ e B_{iu}^m (\vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u - SP_i^l \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) - \frac{SQ^m}{e} (e \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} - SP_i^l \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) \right\}$$

$$F_{i,u,l,m}^{(1,2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon c D_i^{(l,m)}} \left\{ A_{iu}^m (\vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u - SP_i^l \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) - H_{iu}^m (e \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} - SP_i^l \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) \right\}$$

$$F_{i,u,l,m}^{(1,3)} = \frac{1}{4\pi\epsilon c D_i^{(l,m)}} E_{iu}^m (e \hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} - SP_i^l \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u)$$

$$F_{i,u,l,m}^{(2,0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^3 D_i^{(l,m)}} \left\{ -4 \hat{S}_u \cdot \hat{S}_i \right\}$$

$$F_{i,u,l,m}^{(2,1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2 D_i^{(l,m)}} \left\{ -3 B_{iu}^m (\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i) + SQ^m (\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i) \right\}$$

$$F_{i,u,l,m}^{(2,2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon c D_i^{(l,m)}} \left\{ -e A_{iu}^m (\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i) + e H_{iu}^m (\hat{S}_u \cdot \hat{S}_i) \right\}$$

$$F_{i,u,l,m}^{(2,3)} = \frac{1}{4\pi\epsilon c D_i^{(l,m)}} \left\{ -e E_{iu}^m (\hat{S}_i \cdot \hat{S}_u) \right\}$$

Las funciones $G_{i,u,l,m}$ vienen dadas por:

$$G_{i,u,l,m} = \sum_{a=0}^2 G_{i,u,l,m}^{(a,3)} I_{i,u}^{(a,3)}$$

$$G_{i,u,l,m}^{(0,3)} = \frac{\delta PQ^{ue}}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} (\vec{R}_{iu} \cdot \hat{S}_u)$$

$$G_{i,u,l,m}^{(1,3)} = \frac{\delta PQ^u}{4\pi\epsilon D_i^{(p,m)}} (2\hat{S}_u \cdot \vec{R}_{iu} - \hat{S}_i \cdot \hat{S}_u SP_i^l)$$

$$G_{i,u,l,m}^{(2,3)} = \frac{\delta PQ^u}{4\pi\epsilon D_i^{(p,m)}} (-2\hat{S}_i \cdot \hat{S}_u)$$

Generalmente los hilos se dividen en segmentos espaciales Δ_i de igual longitud: $\Delta_i = \Delta = c\delta$. Para este caso las ecuaciones (2.24)-(2.26) y (2.40) toman la forma siguiente

$$D_c^{(l,u)} = \begin{cases} (3l^2-1) \Delta^2 (3m^2+6m+2) \delta^2 & i \neq 1, i \neq N_s, n=-2 \\ (3l^2-1) \Delta^2 (3m^2-1) \delta^2 & i \neq 1, i \neq N_s, n=-1 \\ (2l^2-\frac{1}{2}) \Delta^2 (3m^2+6m+2) \delta^2 & i=1, i=N_s, n=-2 \\ (2l^2-\frac{1}{2}) \Delta^2 (3m^2-1) \delta^2 & i=1, i=N_s, n=-1 \\ \frac{\Delta^2}{2} (3m^2-1) \delta^2 & i=0, i=N_s+1, n=-1 \\ \frac{\Delta^2}{2} (3m^2+6m+2) \delta^2 & i=0, i=N_s+1, n=-2 \end{cases}$$

$$SP_i^{(l,u)} = \begin{cases} -2\Delta & i=0 \\ \Delta l & i \neq 1, i \neq N_s, i \neq 0, i \neq N_s+1 \\ -\Delta/2 & i=1, l=0; \text{ o } i=N_s, l=-1 \\ \Delta/2 & i=1, l=1 \text{ o } i=N_s, l=0 \\ 2\Delta & i=N_s+1 \end{cases}$$

$$SQ^m = \begin{cases} -\delta(m+3) & n=-2 \\ -\delta m & n=-1 \end{cases}$$

$$PP_i^l = \begin{cases} -\Delta^2 \text{AINT} \left(\frac{2-|l|}{2} \right) & i \neq 1; i \neq N_s; i \neq 0; i \neq N_s+1 \\ \frac{\Delta^2}{2} \text{AINT} \left(\frac{2-|l|}{2} \right) & i=1 \text{ o } i=N_s \\ \Delta^2 \cdot 3/4 & i=0 \text{ o } i=N_s+1 \end{cases}$$

$$PQ^m = \begin{cases} 2\delta^2 \text{AINT} \left(\frac{2-|m|}{2} \right) & m=-2 \\ -\delta^2 \text{AINT} \left(\frac{2-|m|}{2} \right) & m=-1 \end{cases}$$

Por otra parte, si la antena es un hilo recto como el que se muestra en la Fig. E.2 tendremos:

$$\hat{s}_i = (i - \frac{1}{2}) \Delta$$

$$s_u = (u - \frac{1}{2}) \Delta$$

$$\hat{s}_u = \hat{s}_i = \hat{k}$$

$$\vec{R}_{iu} = (u-i) \Delta \hat{k} + \vec{a}$$

$$\hat{s}_i \cdot \hat{s}_u = 1$$

$$\hat{s}_i \cdot \vec{R}_{iu} = \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu} = (u-i) \Delta$$

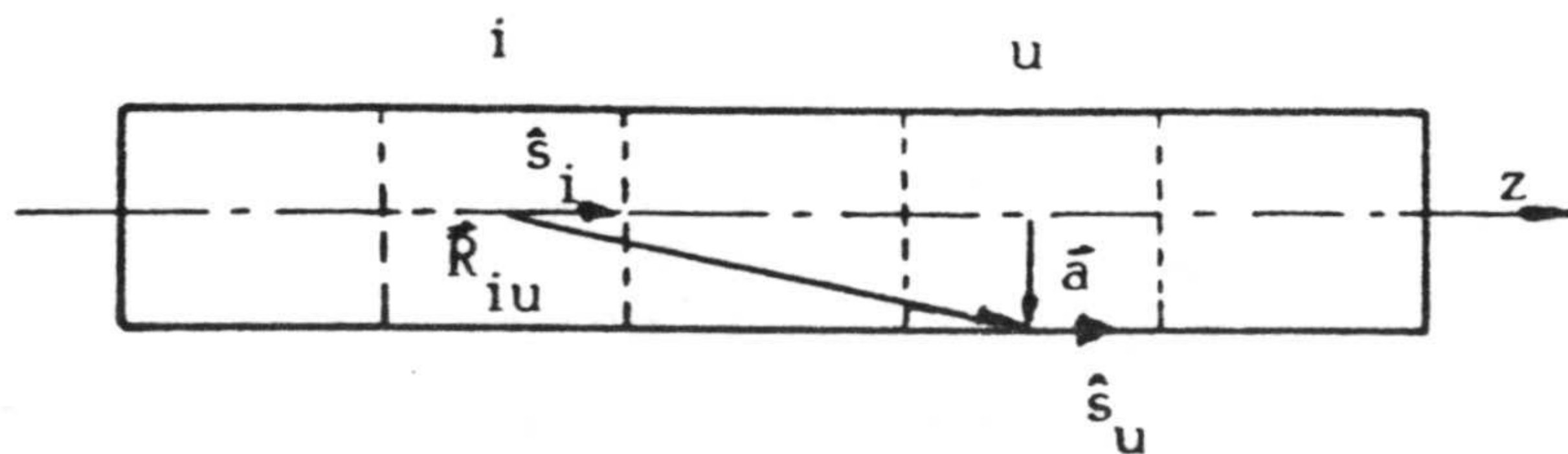


Fig. E.2.- Coordenadas utilizadas para un hilo recto.

Handwritten signature or scribble at the top of the page.

APENCICE F: DESCRIPCION DEL PROGRAMA DOTIG1

Handwritten signature or scribble at the bottom of the page.

En este apéndice se muestra el organigrama y programa en Fortran 77 DOTIG1 que se ha utilizado en la realización de esta memoria. El ordenador utilizado ha sido un MV10000 de DATA GENERAL que posee un sistema operativo de memoria virtual (AOS/VS).

El programa DOTIG1 calcula la intensidad inducida en una estructura de hilo cuando se excita con una OEM arbitraria. Para su ejecución necesita las subrutinas E_A, que nos da el campo incidente sobre la estructura y las subrutinas FUNF_A, FUNG_A y FUNINT_A que calculan respectivamente las funciones $F_{i,u,l,m}$, $G_{i,u,l,m}$ y las integrales $I_{i,u}$ que se definieron en el apéndice D. En la figura F.1 se muestra el diagrama de flujo para este programa, y a continuación se presentan los listados del programa principal y de las subrutinas. Tanto la inversión de la matriz Z como la transformada de Fourier de los datos en el dominio del tiempo se han llevado a cabo utilizando programas de la librería matemática disponibles en el ordenador.

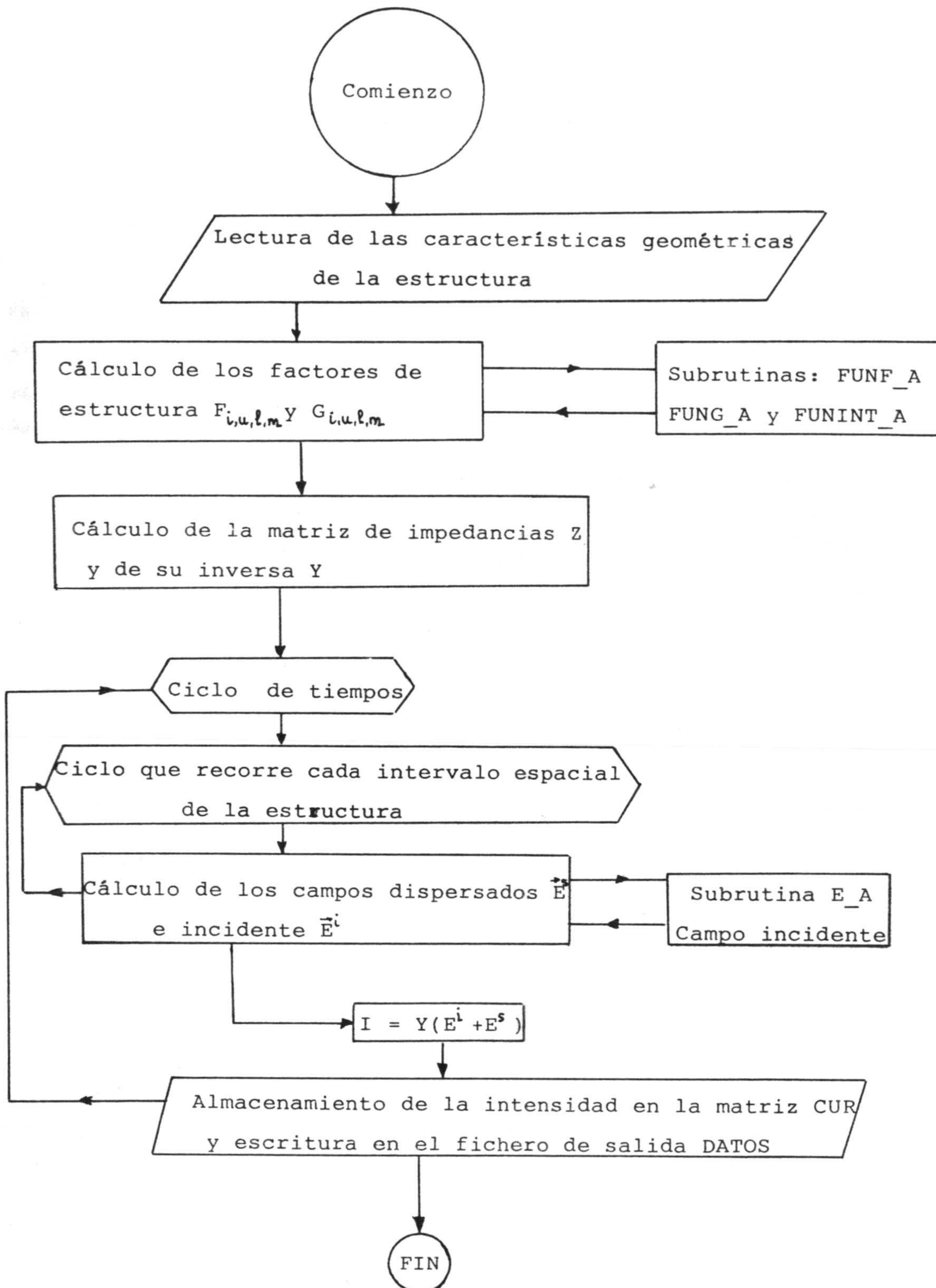


Fig. F.1 Diagrama de flujo del programa DOTIG1

```

C *****
C
C          PROGRAMA DOTIG1
C
C *****
C
C ESTE PROGRAMA CALCULA LA INTENSIDAD EN UNA ESTRUCTURA DE HILO
C PARA SU EJECUCION NECESITA LAS SUBROUTINAS FUNF_A FUNG_A
C FUNINT_A Y LA FUNCION EXTERNA E_A; ASI COMO LAS SUBRRUTINAS DE
C INVERSION MATRICIAL DE LA LIBRERIA :UTILIB:IMSL_F77_DP_REV_9.LB.
C EL ANALISIS SE LLEVA A CABO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.
C
C ENCUADERNAR:
C F77LINK PLANE...
C
C *****
C
C DEL FICHERO ENTRADA SE LEE EL ULTIMO INTERVALO TEMPORAL
C CALCULADO (VIN), Y EL NUMERO DE HILOS EN LA ESTRUCTURA (NH).
C DE DATOS SE LEEN LAS INTENSIDADES HASTA V=VIN.
C DE GEOMETRIA LOS EXTREMOS DE CADA HILO Y SU RADIO
C
C EL FICHERO DE SALIDA ES: DATOS, DONDE SE ESCRIBE
C CUR(U,V) (U=1,...,NS(Totales) ; V=1,...,NT).
C SI (VIN.NE.0) EL FICHERO DE SALIDA SERA DATOSS.
C
C *****
C
C ESTE PROGRAMA ADMITE DOS OPCIONES PARA SU EJECUCION:
C
C OPCION A : SE OCUPA MENOS MEMORIA, PERO AUMENTA EL TIEMPO DE
C CPU EMPLEADO.

```

C OPCION B : SE CONSIGUE UNA DISMINUCION DEL TIEMPO DE CPU A
C COSTA DE OCUPAR MAS ESPACIO EN LA MEMORIA.

C CON LA VARIABLE NOP INDICAREMOS QUE OPCION QUEREMOS:

C NOP=0 (OPCION A)

C NOP=1 (OPCION B)

C *****

c NGRAUX=1 SI LA ESTRUCTURA ESTA FRENTE A TIERRA

C NGRAUX=0 EN CASO CONTRARIO

C Introduciomes NGRAUX mediante un PARAMETER

C *****

PARAMETER (NOP=0) !1-OPCION B, 0-OPCION A.

PARAMETER (NGRAUX=0) !1-TIERRA, 0-NO TIERRA.

DOUBLE PRECISION DT,DS,C,RA(10),LONG(10),PI,T,Q,WP,XP,Z1(2*99)

DOUBLE PRECISION XI(10),YI(10),ZI(10),XF(10),YF(10),ZF(10)

DOUBLE PRECISION XC(99),YC(99),ZC(99),ATH(10),AFI(10)

DOUBLE PRECISION DISI,DISF,ATP,ATF,AFP,AFF,PTTH,PTFI,XN,YN,ZN

INTEGER U,P,A,B,R,S,V,V1,VIN,H,HH,NS(0:10),SUM(0:10),VV

INTEGER NSP(0:10),VTRP,VAR,V2(5,5),NHU(5),VSIG(5,5),UN

INTEGER P1K,P2K,P1KM,P2KM,P1KL,P2KL,P1L,INU(2),INO(2)

DOUBLE PRECISION F(0:2,0:3),G(0:2,0:3),INT(0:2,0:3)

DOUBLE PRECISION Z(99,99),FI,WW

DOUBLE PRECISION R1,G1,BB2(99),BB(99+2),CURR

!DOUBLE PRECISION FM(-2:1,-1:1,63,63),CM(-2:1,-1:1,63,63)

```

COMMON /A1/NSP/A3/DT/A4/DS/A5/C/A6/RA/A8/PI/A12/NH/A13/XC/A14/YC
| /A15/ZC/A16/ATH/A17/AFI/A18/NS/A19/NU/A20/NHU/A21/V2/A23/VSIG
| /A24/NGR
REAL CUR(99,-99-2:0),YCAR(99,-99-2:-1)
DATA YCAR,CUR/20097*0.0/

```

```
EXTERNAL E
```

C

C
C

```

R(I,U)=FUNCION QUE CALCULA LA DISTANCIA ENTRE EL PUNTO FUENTE
(I) Y EL PUNTO CAMPO (U)

```

```

RI(I,U)=(XC(I)-XC(U))**2+(YC(I)-YC(U))**2+(ZC(I)-ZC(U))**2
R(I,U)=IDNINT((DSQRT(RI(I,U)+RA(NTR)**2))/(C*DT))

```

```
PI=200*DASIN(100)
```

```
NGR=NGRALX
```

C

```
OPEN(21,FILE="DATOS")
```

C

C

```
CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LA ESTRUCTURA
```

```

OPEN (22,RECFM="DS",FILE="ENTRADA")
READ(22,500) VIN,NH
CLOSE (22)

```

C

C

```

.....
.....DATOS DEL PLANO DE TIERRA.....

```


C

```

IF(NGR.EQ.1) THEN !PTTH y PTFI son los angulo teta y fi
PTTH=0D0*PI/180D0 !del plano de tierra respecto al plano XZ
PTFI=0D0*PI/180D0
XN=0D0 !XN,YN,ZN es el punto de corte entre el
YN=0D0 !plano de tierra y la estructura
ZN=0D0
END IF !Solo puede haber un hilo unido a tierra

```

C

C

!NUMERO DE PEDAZOS (sin incluir solapamientos) EN QUE SE
!DIVIDE CADA UNO DE LOS HILOS

```

NS(0)=0 !Siempre igual a cero
NS(1)=12
NS(2)=16
NS(3)=24
NS(4)=16
NS(5)=8
NS(6)=8
NS(7)=8
NS(8)=2
!NS(9)=3

```

!NUMERO DE PEDAZOS (incluyendo solapamientos) EN QUE SE
!DIVIDE CADA UNO DE LOS HILOS

```

NSP(0)=0 !Siempre igual a cero
NSP(1)=13
NSP(2)=17
NSP(3)=26
NSP(4)=16

```

NSP(5)=9
NSP(6)=9
NSP(7)=8
NSP(8)=2
!NSP(9)=3

NU=2 !n. uniones (CAMBIAR OTRA ESTRUCTURA)
!Para un solo hilo NU=1

!Union 1 :

NHU(1)=4 !Numero de hilos de la union1
V2(1,1)=1 !En esta union los hilos se han ordenado :
V2(1,2)=2 !V2(1,1);V2(1,2);V2(1,3)...V2(1,NHU(1))
V2(1,3)=3 !Cada hilo solapa un segmento con el siguiente
V2(1,4)=4
VSIG(1,1)=1 !Se le asigna sentido positivo a los hilos que
VSIG(1,2)=1 !salgan de la union
VSIG(1,3)=1 !VSIG(I,J) nos da el sentido (+1,-1) del hilo
VSIG(1,4)=1 !J, con respecto a la union I.

!Union 2

NHU(2)=4
V2(2,1)=3
V2(2,2)=5
V2(2,3)=6
V2(2,4)=7
V2(2,5)=8
VSIG(2,1)=-1
VSIG(2,2)=1
VSIG(2,3)=1
VSIG(2,4)=1
VSIG(2,5)=1

```

!Union 3
!NHU(3)=2
!V2(3,1)=5
!V2(3,2)=7
!V2(3,3)=8
!V2(3,4)=9
!VSIG(3,1)=-1
!VSIG(3,2)=1
!VSIG(3,3)=1
!VSIG(3,4)=1

```

```

!Union 4
!NHU(4)=2
!V2(4,1)=7
!V2(4,2)=9
!V2(4,3)=8
!V2(4,4)=9
!VSIG(4,1)=-1
!VSIG(4,2)=-1
!VSIG(4,3)=1
!VSIG(4,4)=1

```

```

C   DEL FICHERO GEOMETRIA SE LEEN LAS COORDENADAS INICIALES
C   XI,YI,ZI y FINALES XF,YF,ZF DE CADA HILO, Y SU RADIO RA(J).
C   A PARTIR DE LAS COORDENADAS SE CALCULAN:
C   LONG(J)=LONGITUD DEL HILOJ
C   ATH(J)=ANGULO THETA
C   AFI(J)=ANGULO FI

```

```

OPEN(3,FILE="GEOMETRIA")

```

```

DO J=1,NH
READ(3,100) XI(J),YI(J),ZI(J)

```

```
READ(3,110) XF(J),YF(J),ZF(J)
```

```
READ(3,110) RA(J)
```

```
XI(J)=2D0*XI(J)
```

```
YI(J)=2D0*YI(J)
```

```
ZI(J)=2D0*ZI(J)
```

```
XF(J)=2D0*XF(J)
```

```
YF(J)=2D0*YF(J)
```

```
ZF(J)=2D0*ZF(J)
```

```
RA(J)=2D0*RA(J)
```

```
END DO
```

```
RMAX=0.0
```

```
DO J=1,NH
```

```
LONG(J)=DSQRT((XI(J)-XF(J))**2+(YI(J)-YF(J))**2+(ZI(J)-ZF(J))**2)
```

```
ATH(J)=DACOS((ZF(J)-ZI(J))/LONG(J))
```

```
IF(XF(J).EQ.XI(J).AND.YF(J).EQ.YI(J)) THEN
```

```
AFI(J)=0D0 !Realmente seria una indeterminacion 0/0
```

```
ELSE
```

```
AFI(J)=DATAN2((XF(J)-XI(J)),(YF(J)-YI(J)))
```

```
END IF
```

```
IF(LONG(J).GT.RMAX) RMAX=LONG(J)
```

```
IF(NGR.EQ.1) THEN !Vamos a calcular las imagenes de los puntos
```

!inicial y final del hilo J, respecto al

!plano de tierra.

c Empezamos calculando los angulos (ATP,ATF,AFP,AFF) de los
c puntos inicial y final del hilo J con respecto al sistema
c de coordenadas centrado en XN,YN,ZN.

c Estos angulos no tienen por que coincidir con ath y afi
c del hilo J, que estan relacionados con los sentidos asignados

c a cada hilo.

c $DISI =$ Distancia del punto inicial del hilo J a (XN, YN, ZN)

c $DISF =$ Distancia del punto final del hilo J a (XN, YN, ZN)

$DISI = \text{DSQRT}((XI(J) - XN)**2 + (VI(J) - YN)**2 + (ZI(J) - ZN)**2)$

$DISF = \text{DSQRT}((XF(J) - XN)**2 + (VF(J) - YN)**2 + (ZF(J) - ZN)**2)$

C Quiero conocer cual es el hilo pinchado en tierra (JTIERRA)

C $JSIGNO = 1$ si toca con el extremo inicial del hilo JTIERRA

C $JSIGNO = -1$ si toca con el extremo final del hilo JTIERRA

IF(J.EQ.1) THEN

DO JJ=1, NH

IF(ZI(JJ).EQ.ZN) THEN

IF(VI(JJ).EQ.YN) THEN

IF(XI(JJ).EQ.XN) THEN

JTIERRA=JJ

JSIGNO=1

END IF

END IF

END IF

IF(ZF(JJ).EQ.ZN) THEN

IF(VF(JJ).EQ.YN) THEN

IF(XF(JJ).EQ.XN) THEN

JTIERRA=JJ

JSIGNO=-1

END IF

END IF

END IF

END DO

END IF

IF(ZI(J).NE.ZN) THEN

ATP=DACOS((ZI(J)-ZN)/DISI) !ATP es el angulo teta del prin-

ELSE !cipio del hilo J respecto al

ww=1D0

IF(YI(J).NE.0) ww=YI(J)/DABS(YI(J))

ATP=90D0*PI*ww/180D0 !nuevo sistema XN,YN,ZN.

END IF

IF(ZF(J).NE.ZN) THEN

ATF=DACOS((ZF(J)-ZN)/DISF) !ATF es el angulo teta del final

ELSE !del hilo J respecto al

ww=1D0

IF(YF(J).NE.0) ww=YF(J)/DABS(YF(J))

ATF=90D0*PI*ww/180D0 !nuevo sistema XN,YN,ZN.

END IF

IF(XI(J).EQ.XN.AND.YI(J).EQ.YN) THEN

AFP=0D0

!AFP angulo fi principio

ELSE

!hilo J respecto al

AFP=DATAN2((XI(J)-XN),(YI(J)-YN))

!sistema XN,YN,ZN.

END IF

IF(XF(J).EQ.XN.AND.YF(J).EQ.YN) THEN

AFF=0D0

!AFF angulo fi final

ELSE

!hilo J respecto al

AFF=DATAN2((XF(J)-XN),(YF(J)-YN))

!sistema XN,YN,ZN.

END IF

c Utilizo las mismas variables para los angulos imagen

ATP=2D0*PTTH-ATP

```

ATF=2D0*PTTH-ATF
AFP=PI-AFP+2D0*PTFI
AFF=PI-AFF+2D0*PTFI

```

- C Las coordenadas de los puntos inicial y final del hilo imagen
c del J (hilo NH+J) seran:

```

IF(J.LE.JTIERRA) JIND=0
IF(J.GT.JTIERRA) JIND=-1

```

```

ZF(NH+J+JIND)=ZN+DISI*DCOS(ATP)
ZI(NH+J+JIND)=ZN+DISF*DCOS(ATF)
XF(NH+J+JIND)=XN+DISI*DABS(DSIN(ATP))*DSIN(AFP)
XI(NH+J+JIND)=XN+DISF*DABS(DSIN(ATF))*DSIN(AFF)
YF(NH+J+JIND)=YN+DISI*DABS(DSIN(ATP))*DCOS(AFP)
YI(NH+J+JIND)=YN+DISF*DABS(DSIN(ATF))*DCOS(AFF)

```

- C Tambien tenemos que conocer la longitud del hilo imagen
c y sus angulos:

```

LONG(NH+J+JIND)=LONG(J)
ATH(NH+J+JIND)=PI-DABS(2D0*PTTH-ATH(J))
AFI(NH+J+JIND)=-AFI(J)+2D0*PTFI

```

!Hago un solo hilo con JTIERRA y su imagen

```

IF(J.EQ.JTIERRA) THEN

```

```

LONG(J)=2D0*LONG(J)

```

```

IF(ISIGNO.EQ.1) THEN

```

```

  ZI(J)=ZI(NH+J)

```

```

  YI(J)=YI(NH+J)

```

```
XI(J)=XI(NH+J)  
END IF
```

```
IF(ISIGNO.EQ.-1) THEN  
  ZF(J)=ZF(NH+J)  
  YF(J)=YF(NH+J)  
  XF(J)=XF(NH+J)  
END IF
```

```
END IF
```

```
END IF
```

```
END DO
```

```
NDIM=99
```

```
C=2.99793D08
```

```
NSF=24
```

```
NT=250
```

```
DS=RMAX/DBLE(FLOAT(NSF))
```

```
DT=DS/C
```

```
IF(NGR.EQ.1) THEN
```

```
  DO J=1,NH
```

```
    IF(J.LE.JTIERRA) IND=0
```

```
    IF(J.GT.JTIERRA) IND=-1
```

```
    NS(NH+J+IND)=NS(J)
```

```
    NSP(NH+J+IND)=NSP(J)
```

```
    IF(J.EQ.JTIERRA) NSP(J)=NSP(J)*2
```

```
    IF(J.EQ.JTIERRA) NS(J)=NS(J)*2
```


END DO

DO U=1,NU

NHU(U+NU)=NHU(U)

DO K=1,NHU(U)

IF(V2(U,K).LT.JTIERRA) IND=0

IF(V2(U,K).GT.JTIERRA) IND=-1

IF(V2(U,K).EQ.JTIERRA) IND=-NH

V2(U+NU,K)=V2(U,K)+NH+IND

VSIG(U+NU,K)=-VSIG(U,K)

END DO

END DO

END IF

SUM(0)=0

DO 228 K=1,NH+NGR*(NH-1)

SUM(K)=SUM(K-1)+NSP(K)

228 CONTINUE

C SUM(NH)=NUMERO TOTAL DE PEDAZOS DE LA ESTRUCTURA (INCLUYENDO
C SOLAPAMIENTOS)
C TAMBIEN USAREMOS LA VARIABLE VTRP PARA ESTE CONCEPTO.

C
C CALCULAMOS LAS COORDENADAS XC,YC,ZC DE LOS CENTROS DE TODOS
C LOS INTERVALOS ESPACIALES.

DO J1=1,NU+NGR*NU

DO J2=1,NHU(J1)

JJ=V2(J1,J2)

JS=VSIG(J1,J2)

```
VIRP=SUM(JJ)
NDIF=NSP(JJ)-NS(JJ)
NDIF2=NDIF
IF(NDIF.EQ.2) NDIF2=1
```

```
IF(JJ.NE.V2(J1,NHU(J1))) THEN
JJM=V2(J1,J2+1)
JSM=VSIG(J1,J2+1)
```

c IPN es el numero del pedazo que solapa el hilo J2 en la union
c J1.

c XZP,YZP,ZZP son las coordenadas de la union mas cercana al
c pedazo solapado que estamos calculando.

```
IF(JS.GT.0) THEN
IPN=VIRP-NSP(JJ)+1
ELSE
IPN=VIRP
END IF
```

```
IF(JSM.GT.0) THEN
ZZP=ZI(JJM)
YZP=VI(JJM)
XZP=XI(JJM)
ELSE
ZZP=ZF(JJM)
YZP=YF(JJM)
XZP=XF(JJM)
END IF
```

```
END IF
```

```

NEX=0
NEX2=0
IF(NDIF.EQ.1) THEN
DO K=1,NU+NGR*NU
DO I=1,NHU(K)
IF(JJ.EQ.V2(K,I).AND.J1.NE.K) THEN
NEX=1
IF(JJ.EQ.V2(J1,NHU(J1))) THEN
NEX2=1
END IF
END IF
END DO
END DO
END IF

```

```
IF(NDIF.EQ.1.AND.NEX.NE.1) THEN
```

- c *Calculo de las coordenadas del pedazo solapado del hilo J2*
- c *en la union J1, para el caso de que el hilo no pertenezca*
- c *a dos uniones ni sea el ultimo de la union J1.*

```

ZC(IPN)=ZP+(1D0/2D0)*DS*DCOS(ATH(JJM))*JSM
YC(IPN)=YP+(1D0/2D0)*DS*DSIN(ATH(JJM))*DCOS(AFI(JJM))*JSM
XC(IPN)=XP+(1D0/2D0)*DS*DSIN(ATH(JJM))*DSIN(AFI(JJM))*JSM
END IF

```

- ```
IF(NDIF.EQ.2.OR.NEX.EQ.1) THEN
```
- c *!Calculamos el pedazo solapado*
  - c *del hilo JJ de la union J1, en el caso de que JJ pertenezca*
  - c *a dos uniones*
  - c *Si NEX2=1 no hacemos el calculo ya que se trata del ultimo*
  - c *hilo de la union J1 y por tanto no tiene pedazo solapado.*

```
IF(NEX2.NE.1) THEN
```

```

ZC(IPN)=ZYP+(1D0/2D0)*DS*DCOS(ATH(JJM))*JSM
YC(IPN)=YZP+(1D0/2D0)*DS*DSIN(ATH(JJM))*DCOS(AFI(JJM))*JSM
XC(IPN)=XZP+(1D0/2D0)*DS*DSIN(ATH(JJM))*DSIN(AFI(JJM))*JSM
END IF
END IF

```

c En lo que sigue se calculan las coordenadas de los segmentos  
c de la estructura que no sea solapamientos.

```

551 IF(NEX2.EQ.1) NDIF2=0

```

```

IF(JS.GT.0.OR.NDIF.EQ.0) THEN
DO I=VIRP-NSP(JJ)+1,VIRP-NDIF
ZC(I+NDIF2)=ZI(JJ)+(I-VIRP+NSP(JJ)-1D0/2D0)*DS*DCOS(ATH(JJ))
YC(I+NDIF2)=YI(JJ)+(I-VIRP+NSP(JJ)-1D0/2D0)*DS*DSIN(ATH(JJ))*DCOS(AFI(JJ))
XC(I+NDIF2)=XI(JJ)+(I-VIRP+NSP(JJ)-1D0/2D0)*DS*DSIN(ATH(JJ))*DSIN(AFI(JJ))
END DO
END IF

```

```

NDIF3=NDIF
IF(NDIF.EQ.1.AND.NEX2.EQ.1) NDIF3=2

```

```

IF(JS.LT.0.AND.NDIF.NE.0) THEN
DO I=VIRP-NSP(JJ),VIRP-NDIF-1
ZC(I+NDIF3)=ZI(JJ)+(I-VIRP+NSP(JJ)+1D0/2D0)*DS*DCOS(ATH(JJ))
YC(I+NDIF3)=YI(JJ)+(I-VIRP+NSP(JJ)+1D0/2D0)*DS*DSIN(ATH(JJ))*DCOS(AFI(JJ))
XC(I+NDIF3)=XI(JJ)+(I-VIRP+NSP(JJ)+1D0/2D0)*DS*DSIN(ATH(JJ))*DSIN(AFI(JJ))
END DO
END IF

```

```

END DO
END DO

```

c .....

C TERMINADO EL CALCULO DE LA GEOMETRIA DE LA ESTRUCTURA

C \*\*\*\*\*

C VIN ES EL ULTIMO INTERVALO ANTERIORMENTE CALCULADO  
IF(VIN.EQ.0) GOTO 323

C EMPIEZA LA LECTURA DE LOS DATOS CALCULADOS ANTERIORMENTE

OPEN (23,FILE="DATOSS")

NSMAX=SUM(NH)

NDC=VIN

DO I=1,NDC-NSMAX-3

DO J=1,NSMAX

READ(21,600) CURR

WRITE(23,400) J,I,CURR

BB(J)=BB(J)+CURR

END DO

END DO

IND=NDC-NSMAX-3

DO I=NSMAX+2,1,-1

IND=IND+1

DO J=1,NSMAX

READ(21,600) CURR

WRITE(23,400) J,IND,CURR

BB(J)=BB(J)+CURR

YCAR(J,-I)=BB(J)

CUR(J,-I)=CURR

```

END DO
END DO

DO I=1,NSMAX
BB(I)=0.0
END DO

CLOSE (21)

C TERMINADA RELECTURA DE DATOS

C *****

C CALCULAMOS LAS FUNCIONES FM Y CM:

323 IF(NOP.EQ.1) THEN

 DO 108 ULI=1,SUM(NH)
 U=ULI

 IF(NGR.EQ.1) THEN
 IF(ISIGNO.LT.0) THEN
 IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.U.AND.U.LE.
 | SUM(JTIERRA)) GOTO 108
 END IF

 IF(ISIGNO.GT.0) THEN
 IF(SUM(JTIERRA-1).LT.U.AND.U.LE.
 | SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) GOTO 108
 END IF
 END IF

 DO 103 II=1,SUM(NH+NGR*(NH-1))

```

```

I=II
CALL FUNINT(INT,I,U)
DO 103 LL=-1,1
L=LL
DO 103 MM=1,3
M=MM
T=0D0
TC=0D0
CALL FUNF(F,I,U,L,M)
CALL FUNG(G,I,U,L,M)

```

```

113 DO 113 B=0,3
 DO 113 A=0,2
 T=T+F(A,B)*INT(A,B)
 TC=TC+G(A,B)*INT(A,B)
 CONTINUE

```

```

!FM(M,L,I,U)=T
!CM(M,L,I,U)=TC

```

```

103 CONTINUE

```

```

108 CONTINUE

```

```

END IF

```

```

C

```

```

C CALCULAMOS LA MATRIZ Z(U,I)

```

```

C U=1...SUM(NH)

```

```

C I=1...SUM(NH).

```

```

C DICHA MATRIZ ES INDEPENDIENTE DEL INTERVALO TEMPORAL V EN
C QUE NOS ENCONTREMOS.

```

```
DO 29 UU=1,SUM(NH)
```

```
U=UU
```

```
IF(NGR.EQ.1) THEN
```

```
IF(ISIGNO.LT.0) THEN
```

```
IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.U.AND.U.LE.
```

```
| SUM(JTIERRA)) GOTO 29
```

```
END IF
```

```
IF(ISIGNO.GT.0) THEN
```

```
IF(SUM(JTIERRA-1).LT.U.AND.U.LE.
```

```
| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) GOTO 29
```

```
END IF
```

```
END IF
```

```
!NTR es la rama en que estamos
```

```
!NPOS posicion dentro de esa rama
```

```
VAR=0
```

```
DO JR=1,NH
```

```
VAR=VAR+NSP(JR)
```

```
IF(U.LE.VAR) THEN
```

```
NTR=JR
```

```
NPOS=U-VAR+NSP(JR)
```

```
GOTO 105
```

```
END IF
```

```
END DO
```

```
105 NDIF=NSP(NTR)-NS(NTR)
```

```
!NUE (union en la que estamos)
```

```
!NOU (orden del hilo en que estamos dentro de esa union)
```

```
!El calculo de NUE NOU es valido para los solapados.
```



```

DO J1=1,NU
DO J2=1,NHU(J1)
IF(NTR.EQ.V2(J1,J2)) THEN
NUE=J1
NOU=J2
N1S=VSIG(J1,J2)
IF((NPOS.EQ.1.AND.N1S.GT.0).OR.(NPOS.EQ.NSP(NTR).AND.N1S.LT.0)) GOTO 2800
END IF
END DO
END DO

```

```

2800 N1=V2(NUE,NOU)
IF(NOI.NE.NHU(NUE)) N2=V2(NUE,NOU+1)
IF(NOI.NE.1) N0=V2(NUE,NOU-1)
N1X=V2(NUE,NHU(NUE))
N1S=VSIG(NUE,NOU)
IF(NOI.NE.NHU(NUE)) N2S=VSIG(NUE,NOU+1)
IF(NOI.NE.1) N0S=VSIG(NUE,NOU-1)
N1US=VSIG(NUE,NHU(NUE))
IF(N1S.GT.0) THEN
P1K=SUM(N1)-NSP(N1)+1
P2K=SUM(N1)-NSP(N1)+2
ELSE
P1K=SUM(N1)
P2K=SUM(N1)-1
END IF
IF(NOI.NE.NHU(NUE)) THEN
IF(N2S.GT.0) THEN
P1KM=SUM(N2)-NSP(N2)+1
P2KM=SUM(N2)-NSP(N2)+2
ELSE
P1KM=SUM(N2)
P2KM=SUM(N2)-1

```

```

END IF
END IF
IF(NOU.NE.1) THEN
IF(NOS.GT.0) THEN
P1KL=SUM(NO)-NSP(NO)+1
P2KL=SUM(NO)-NSP(NO)+2
ELSE
P1KL=SUM(NO)
P2KL=SUM(NO)-1
END IF
END IF
IF(NUS.GT.0) THEN
P1L=SUM(NUX)-NSP(NUX)+1
ELSE
P1L=SUM(NUX)
END IF

NEX=0
NEX2=0
DO K=1,NU
DO I=1,NHU(K)
IF(V2(NUE,NOU).EQ.V2(K,I).AND.NUE.NE.K) THEN
NEX=1
IF(V2(NUE,NOU).EQ.V2(NUE,NHU(NUE))) THEN
NEX2=1
END IF
END IF
END DO
END DO

NVU=0
IF(NDIF.EQ.2.AND.(NPOS.EQ.1.OR.NPOS.EQ.NSP(NTR))) NVU=1

```

```
IF(NDIF.EQ.1.AND.NEX.EQ.0) THEN
 IF(N1S.GT.0.AND.NPOS.EQ.1) NVU=1
 IF(N1S.LT.0.AND.NPOS.EQ.NSP(NTR)) NVU=1
END IF
```

```
IF(NDIF.EQ.1.AND.NEX.EQ.1) THEN
 IF(NEX2.EQ.0) THEN
 IF(N1S.GT.0.AND.NPOS.EQ.1) NVU=1
 IF(N1S.LT.0.AND.NPOS.EQ.NSP(NTR)) NVU=1
 END IF
END IF
```

```
DO 25 II=1,SUM(NH+NGR*(NH-1))
 I=II
 BB2(I)=0D0
```

```
IF(NVU.EQ.1) THEN
```

```
IF(NOU.EQ.1.AND.NHU(NUE).NE.2) THEN
 IF(I.EQ.P1K) BB2(I)=2D0*N1S
 IF(I.EQ.P2K) BB2(I)=-2D0*N1S
 IF(I.EQ.P1KM) BB2(I)=-1D0*N2S
 IF(I.EQ.P2KM) BB2(I)=1D0*N2S
 IF(I.EQ.P1L) BB2(I)=1D0*NUS
END IF
```

```
IF(NOU.NE.1.AND.NOUE.NE.NHU(NUE)-1) THEN
 IF(I.EQ.P1K) BB2(I)=2D0*N1S
 IF(I.EQ.P2K) BB2(I)=-2D0*N3S
 IF(I.EQ.P1KM) BB2(I)=1D0*N2S
 IF(I.EQ.P2KM) BB2(I)=1D0*N2S
 IF(I.EQ.P1KL) BB2(I)=1D0*NOS
 IF(I.EQ.P2KL) BB2(I)=1D0*NOS
```

END IF

IF(NOU.EQ.NHU(NUE)-1) THEN

IF(I.EQ.P1K) BB2(I)=2D0\*N1S

IF(I.EQ.P2K) BB2(I)=-2D0\*N1S

IF(NHU(NUE).NE.2) THEN

IF(I.EQ.P1KL) BB2(I)=-1D0\*NOS

IF(I.EQ.P2KL) BB2(I)=1D0\*NOS

END IF

IF(I.EQ.P1L) BB2(I)=1D0\*NUS

END IF

GOTO 258

END IF

C VAMOS A CALCULAR EL ELEMENTO Z(U,I) DE LA MATRIZ Z

T=0D0

!NTRI Rama en que esta el pedazo I

VAR=0

DO JR=1,NH+NGR\*(NH-1)

VAR=VAR+NSP(JR)

IF(I.LE.VAR) THEN

NTRI=JR

GOTO 32

END IF

END DO

32 DO 30 LL=-1,1

L=LL

IF(I-L.LT.SUM(NTRI-1)+1.OR.I-L.GT.SUM(NTRI)) GO TO 30

IF (NOP.EQ.0) THEN !Opcion A

```

CALL FUNINT(INT,I-L,U)
END IF

DO 35 PP=0,1
P=PP

IF(P.NE.R(I-L,U)) GOTO 35

IF(NOP.EQ.0) THEN
 CALL FUNF(F,I-L,U,L,P)
 DO 36 A=0,2
 DO 36 B=0,3
 T=T+TNT(A,B)*F(A,B)
36 CONTINUE
ELSE
 ! T=T+FM(P,L,I-L,U)
END IF

35 CONTINUE
30 CONTINUE
 BB2(I)=T
258 IF(NGR.EQ.0) Z(u,I)=BB2(I)
25 CONTINUE

IF(NGR.EQ.1) THEN
DO 11 I=1,SUM(NH)

IF(ISIGNO.LT.0) THEN
IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.I.AND.I.LE.
| SUM(JTIERRA)) GOTO 11
END IF

IF(ISIGNO.GT.0) THEN

```

```
IF(SUM(JTIERRA-1).LT.I.AND.I.LE.
| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) GOTO 11
END IF
```

```
!NTRI es la rama en que estamos
!NPOSI posicion dentro de esa rama
VAR=0
DO JR=1,NH
VAR=VAR+NSP(JR)
IF(I.LE.VAR) THEN
NTRI=JR
NPOSI=I-VAR+NSP(JR)
GOTO 1858
END IF
END DO
```

```
1858 IF(NTRI.LT.JTIERRA) INEW=SUM(NH)+SUM(NTRI)-NPOSI+1
IF(NTRI.EQ.JTIERRA) INEW=SUM(JTIERRA)-NPOSI+1
IF(NTRI.GT.JTIERRA) INEW=SUM(NH)+SUM(NTRI)-NPOSI+1-NSP(JTIERRA)
```

```
Z(U,I)=BB2(I)+BB2(INEW)
```

```
11 CONTINUE
END IF
```

```
29 CONTINUE
```

```
IF(NH.EQ.1) GOTO 448
```

```
C Modificaciones debido a la forma de interpolar cerca de las
C uniones
```

```
DO 42 U=1,SUM(NH)
U=U+1
```

```

IF(NGR.EQ.1) THEN
IF(ISIGNO.LT.0) THEN
IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.U.AND.U.LE.
| SUM(JTIERRA)) GOTO 42
END IF

```

```

IF(ISIGNO.GT.0) THEN
IF(SUM(JTIERRA-1).LT.U.AND.U.LE.
| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) GOTO 42
END IF
END IF

```

*!NT es la rama en que estamos*

*!NP posicion dentro de esa rama*

VAR=0

DO JR=1,NH

VAR=VAR+NSP(JR)

IF(U.LE.VAR) THEN

NTR=JR

NPOS=U-VAR+NSP(JR)

GOTO 1058

END IF

END DO

1058 NDIF=NSP(NTR)-NS(NTR)

DO J1=1,NU

DO J2=1,NHU(J1)

IF(NTR.EQ.V2(J1,J2)) THEN

NUE=J1

NOU=J2

NIS=VSIG(J1,J2)

```
IF((NPOS.EQ.1.AND.N1S.GT.0).OR.(NPOS.EQ.NSP(NTR).AND.N1S.LT.0)) GOTO 2830
```

```
END IF
```

```
END DO
```

```
END DO
```

```
2830 NEX=0
```

```
NEX2=0
```

```
DO K=1,NU
```

```
DO I=1,NHU(K)
```

```
IF(V2(NUE,NOU).EQ.V2(K,I).AND.NUE.NE.K) THEN
```

```
NEX=1
```

```
IF(V2(NUE,NOU).EQ.V2(NUE,NHU(NUE))) THEN
```

```
NEX2=1
```

```
END IF
```

```
END IF
```

```
END DO
```

```
END DO
```

```
NWU=0
```

```
IF(NDIF.EQ.2.AND.(NPOS.EQ.1.OR.NPOS.EQ.NSP(NTR))) NWU=1
```

```
IF(NDIF.EQ.1.AND.NEX.EQ.0) THEN
```

```
IF(N1S.GT.0.AND.NPOS.EQ.1) NWU=1
```

```
IF(N1S.LT.0.AND.NPOS.EQ.NSP(NTR)) NWU=1
```

```
END IF
```

```
IF(NDIF.EQ.1.AND.NEX.EQ.1) THEN
```

```
IF(NEX2.EQ.0) THEN
```

```
IF(N1S.GT.0.AND.NPOS.EQ.1) NWU=1
```

```
IF(N1S.LT.0.AND.NPOS.EQ.NSP(NTR)) NWU=1
```

```
END IF
```

```
END IF
```



IF(NVU.EQ.1) GOTO 42

DO 48 II=1,SUM(NH+NGR\*(NH-1))

I=II

Q=000

*!NTRI es la rama en que esta el pedazo I*

*!NPOS posicion dentro de esa rama*

VAR=0

DO JR=1,NH+NGR\*(NH-1)

VAR=VAR+NSP(JR)

IF(I.LE.VAR) THEN

NTRI=JR

NPOST=I-VAR+NSP(JR)

GOTO 1053

END IF

END DO

1053 NDIFI=NSP(NTRI)-NS(NTRI)

MMA=0

DO J1=1,NU+NGR\*NU

DO J2=1,NHU(J1)

IF(NTRI.EQ.V2(J1,J2)) THEN

MMA=MMA+1

INU(MMA)=J1

INO(MMA)=J2

END IF

END DO

END DO

DO 49 KK=1,MMA

NUEI=INU(KK)

NOUT=INO(KK)

NUX1=V2(NUEI,NOUT)

NUS1=VSIG(NUEI,NOUT)

IF(NOUT.NE.1) THEN

NUX=V2(NUEI,NOUT-1)

NUS=VSIG(NUEI,NOUT-1)

END IF

IF(NUS.GT.0) N7=1

IF(NUS.LT.0) N7=NSP(NUX)

IF(NOUT.NE.NHU(NUEI)) THEN

NUX2=V2(NUEI,NOUT+1)

NUS2=VSIG(NUEI,NOUT+1)

END IF

IF(NUS2.GT.0) N8=1

IF(NUS2.LT.0) N8=NSP(NUX2)

DO 49 LL=-1,1

L=LL

G1=000

R1=000

IF(L.EQ.-1\*NUS1) THEN

IF(NUS1.GT.0) THEN

IF(NOUT.EQ.NHU(NUEI).AND.NPOST.EQ.2) G1=100

IF(NOUT.NE.1.AND.NOUT.NE.NHU(NUEI)) THEN

IF(NPOST.EQ.3) G1=100

END IF

END IF

IF(NUS1.LT.0) THEN

IF(NOUT.EQ.NHU(NUEI).AND.NPOST.EQ.NSP(NUX1)-1) G1=100

```

IF(NOUT.NE.1.AND.NOUT.NE.NHU(NUEI)) THEN
IF(NPOSI.EQ.NSP(NUX1)-2) G1=1D0
END IF
END IF
IF(NHU(NUEI).EQ.2) THEN
IF(NUS1.GT.0) THEN
IF(NOUT.EQ.1.AND.NPOSI.EQ.2) R1=1D0
END IF
IF(NUS1.LT.0) THEN
IF(NOUT.EQ.1.AND.NPOSI.EQ.NSP(NUX1)-1) R1=1D0
END IF
END IF
END IF

```

```

IF(G1.EQ.0) THEN
IF(R1.EQ.0) THEN
GOTO 49
END IF
END IF

```

```

IF(NOP.EQ.0) THEN
CALL FUNINT(INT,I,U)
END IF

```

```

DO 735 PP=0,1
P=PP
IF(P.NE.R(I,U)) GOTO 735

```

```

IF(NOP.EQ.0) THEN
CALL FUNF(F,I,U,L,P)
DO 736 A=0,2
DO 736 B=0,3
Q=Q+INT(A,B)*F(A,B)
CONTINUE

```

736

```

ELSE
! Q=Q+FM(P,L,I,U)
END IF

```

735 CONTINUE

NAME7=SUM(NUX)-NSP(NUX)+N7

NAME8=SUM(NUX2)-NSP(NUX2)+N8

IF(NGR.EQ.1) THEN

S7A=0

IF(NAME7.GT.SUM(NH)) S7A=1

IF(ISIGNO.LT.0) THEN

IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.NAME7.AND.

| NAME7.LE.SUM(JTIERRA)) S7A=1

END IF

IF(ISIGNO.GT.0) THEN

IF(SUM(JTIERRA-1).LT.NAME7.AND.NAME7.LE.

| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) S7A=1

END IF

IF(S7A.NE.1) GOTO 886

VAR=0

DO JR=1,NH+NGR\*(NH-1)

VAR=VAR+NSP(JR)

IF(NAME7.LE.VAR) THEN

NTRI7=JR

NPOSI7=NAME7-VAR+NSP(JR)

GOTO 333

END IF

END DO

333 IF(NTRI7.EQ.JTIERRA) NAME7=SUM(JTIERRA)-NPOSI7+1

IF(NTRI7.GT.NH-1+JTIERRA) NAME7=NSP(JTIERRA)+SUM(NTRI7)-NPOSI7+1-SUM(NH)

IF(NTRI7.LE.NH-1.AND.NTRI7.GT.NH) NAME7=SUM(NTRI7)-NPOSI7+1-SUM(NH)

886 S8A=0

IF(NAME8.GT.SUM(NH)) S8A=1

IF(ISIGNO.LT.0) THEN

IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.NAME8.AND.

| NAME8.LE.SUM(JTIERRA)) S8A=1

END IF

IF(ISIGNO.GT.0) THEN

IF(SUM(JTIERRA-1).LT.NAME8.AND.NAME8.LE.

| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) S8A=1

END IF

IF(S8A.NE.1) GOTO 882

*!Ahora hay que saber tramo y posición de NAME8*

VAR=0

DO JR=1,NH+NGR\*(NH-1)

VAR=VAR+NSP(JR)

IF(NAME8.LE.VAR) THEN

NTRI8=JR

NPOSI8=NAME8-VAR+NSP(JR)

GOTO 393

END IF

END DO

*!Si NAME8 es de la imagen calculamos su original y lo  
!volvemos a meter en NAME8.*

393 IF(NTRI8.EQ.JTIERRA) NAME8=SUM(JTIERRA)-NPOSI8+1

IF(NTRI8.GT.NH-1+JTIERRA) NAME8=NSP(JTIERRA)+SUM(NTRI8)-NPOSI8

```

| +1-SUM(NH)
IF(NTRI8.LE.NH-1+JTIERRA.AND.NTRI8.GT.NH) NAME8=SUM(NTRI8)
| -NPOSI8+1-SUM(NH)

```

```
END IF
```

```

882 IF(G1.NE.0) Z(U,NAME7)=Z(U,NAME7)
| -Q*G1*NUS*NUS1
IF(R1.NE.0) Z(U,NAME8)=Z(U,NAME8)
| -Q*R1*NUS2*NUS1

```

```
49 CONTINUE
```

```
48 CONTINUE
```

```
42 CONTINUE
```

```
C *****
```

```
C
```

```
C LA SUBRRUTINA LIN3VF NOS INVIERTE LA MATRIZ Z.
```

```
C LA MATRIZ INVERTIDA VUELVE A ESCRIBIRLA OTRA VEZ EN Z.
```

```
IF(NGR.EQ.1) THEN
```

```
DO U=1,SUM(NH)
```

```
DO I=1,SUM(NH)
```

```
UN=U
```

```
IN=I
```

```
IF(ISIGNO.LT.0) THEN
```

```
IF(U.GT.SUM(JTIERRA)) UN=U-NSP(JTIERRA)/2
```

```
IF(I.GT.SUM(JTIERRA)) IN=I-NSP(JTIERRA)/2
```

```
END IF
```

```
IF(ISIGNO.GT.0) THEN
```

```
IF(U.GT.SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2) UN=U-NSP(JTIERRA)/2
```

```
IF(I.GT.SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2) IN=I-NSP(JTIERRA)/2
```

```
END IF
```

```

Z(UN,IN)=Z(U,I)
END DO
END DO
END IF

448 IF(NGR.EQ.0) JTIERRA=0
CALL LINV3F(Z,BB,1,SUM(NH)-NGR*NSP(JTIERRA)/2,NDIM,-1,0,Z1,IER)

IF(NGR.EQ.1) THEN
DO U=SUM(NH)-NSP(JTIERRA)/2,1,-1
DO I=SUM(NH)-NSP(JTIERRA)/2,1,-1
UN=U
IN=I
IF(ISIGNO.LT.0) THEN
IF(U.GT.SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2) UN=U+NSP(JTIERRA)/2
IF(I.GT.SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2) IN=I+NSP(JTIERRA)/2
END IF
IF(ISIGNO.GT.0) THEN
IF(U.GT.SUM(JTIERRA-1)) UN=U+NSP(JTIERRA)/2
IF(I.GT.SUM(JTIERRA-1)) IN=I+NSP(JTIERRA)/2
END IF
Z(UN,IN)=Z(U,I)
IF(ISIGNO.LT.0) THEN
IF(U.GT.SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.AND.U.LE.SUM(JTIERRA))
| Z(U,I)=0.0
END IF
IF(ISIGNO.GT.0) THEN
IF(SUM(JTIERRA-1).LT.U.AND.U.LE.SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2)
| Z(U,I)=0.0
END IF
END DO
END DO
END IF

```

C \*\*\*\*\*

C VAMOS A CALCULAR LA MATRIZ BB2(U) SUMA DEL CAMPO INCIDENTE  
C EN EL INSTANTE V Y DE LOS CAMPOS DISPERSADOS POR EL  
C RESTO DE LA ESTRUCTURA EN INSTANTES ANTERIORES.

IF(VIN.EQ.0) VIN=1

DO 1 VV=VIN,NT

V=VV

PRINT\*,"V=",V

DO 15 UUI=1,SUM(NH)

U=UUI

BB2(U)=000

IF(NGR.EQ.1) THEN

IF(ISIGNO.LT.0) THEN

IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.U.AND.

| U.LE.SUM(JTIERRA)) GOTO 15

END IF

IF(ISIGNO.GT.0) THEN

IF(SUM(JTIERRA-1).LT.U.AND.U.LE.

| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) GOTO 15

END IF

END IF

VAR=0

DO JR=1,NH

VAR=VAR+NSP(JR)

IF(U.LE.VAR) THEN

NTR=JR

NPOS=U-VAR+NSP(JR)



```

GOTO 195
END IF
END DO

195 NDIF=NSP(NTR)-NS(NTR)

DO J1=1,NU
DO J2=1,NHU(J1)
IF(NTR.EQ.V2(J1,J2)) THEN
NUE=J1
NOU=J2
N1S=VSIG(J1,J2)
IF((NPOS.EQ.1.AND.N1S.GT.0).OR.(NPOS.EQ.NSP(NTR).AND.N1S.LT.0)) GOTO 2620
END IF
END DO
END DO

2620 N1S=VSIG(NUE,NOU)

NEX=0
NEX2=0
DO K=1,NU
DO I=1,NHU(K)
IF(V2(NUE,NOU).EQ.V2(K,I).AND.NUE.NE.K) THEN
NEX=1
IF(V2(NUE,NOU).EQ.V2(NUE,NHU(NUE))) THEN
NEX2=1
END IF
END IF
END DO
END DO

```

NVU=0

IF(NDIF.EQ.2.AND.(NPOS.EQ.1.OR.NPOS.EQ.NSP(NTR))) NVU=1

IF(NDIF.EQ.1.AND.NEX.EQ.0) THEN

IF(NIS.GT.0.AND.NPOS.EQ.1) NVU=1

IF(NIS.LT.0.AND.NPOS.EQ.NSP(NTR)) NVU=1

END IF

IF(NDIF.EQ.1.AND.NEX.EQ.1) THEN

IF(NEX2.EQ.0) THEN

IF(NIS.GT.0.AND.NPOS.EQ.1) NVU=1

IF(NIS.LT.0.AND.NPOS.EQ.NSP(NTR)) NVU=1

END IF

END IF

IF(NVU.EQ.1) THEN

BB2(U)=0.0

GOTO 15

END IF

T=000

Q=000

DO 506 II=1,SUM(NH+NGR\*(NH-1))

I=II

IF(R(I,U).EQ.0) N=-2

IF(R(I,U).NE.0) N=-1

VAR=0

DO JR=1,NH+NGR\*(NH-1)

VAR=VAR+NSP(JR)

IF(I.LE.VAR) THEN

NTRI=JR

NPOST=I-VAR+NSP(JR)

GOTO 2053

END IF

END DO

2053 NDIFI=NSP(NTRI)-NS(NTRI)

MMA=0

DO J1=1,NU+NGR\*NU

DO J2=1,NHU(J1)

IF(NTRI.EQ.V2(J1,J2)) THEN

MMA=MMA+1

INU(MMA)=J1

INO(MMA)=J2

END IF

END DO

END DO

IF(NOP.EQ.0) THEN

CALL FUNINT(INT,I,U)

END IF

DO 50 LL=-1,1

L=LL

IF(I+L.LT.SUM(NTRI-1)+1.OR.I+L.GT.SUM(NTRI)) GOTO 50

IL=I+L

IF(NGR.EQ.1) THEN

SLA=0

IF(IL.GT.SUM(NH)) SLA=1

IF(ISIGNO.LT.0) THEN

```

IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.I+L.AND.
| I+L.LE.SUM(JTIERRA)) SLA=1
END IF

```

```

IF(ISIGNO.GT.0) THEN
IF(SUM(JTIERRA-1).LT.I+L.AND.I+L.LE.
| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) SLA=1
END IF

```

```

IF(SLA.NE.1) GOTO 1543

```

*!Ahora hay que saber tramo y posicion de I+L*

```

VAR=0
DO JR=1,NH+NGR*(NH-1)
VAR=VAR+NSP(JR)
IF(I+L.LE.VAR) THEN
NTRIL=JR
NPOSTIL=I+L-VAR+NSP(JR)
GOTO 1793
END IF
END DO

```

*!Si IL es de la imagen calculamos su original y lo  
!volvemos a meter en IL.*

```

1793 IF(NTRIL.EQ.JTIERRA) IL=SUM(JTIERRA)-NPOSTIL+1
IF(NTRIL.GT.NH-1+JTIERRA) IL=NSP(JTIERRA)+SUM(NTRIL)-NPOSTIL
| +1-SUM(NH)
IF(NTRIL.LE.NH-1+JTIERRA.AND.NTRIL.GT.NH) IL=SUM(NTRIL)
| -NPOSTIL+1-SUM(NH)
END IF

```

```

1543 NUI=INU(1)
 NOUI=INO(1)

 IF(MMA.EQ.2) THEN
 IF(L*VSIG(INU(1),INO(1)).GT.0) THEN
 NUI=INU(2)
 NOUI=INO(2)
 END IF
 END IF

 NUX1=V2(NUI,NOUI)
 NUS1=VSIG(NUI,NOUI)
 IF(NOUI.NE.1) THEN
 NUX=V2(NUI,NOUI-1)
 NUS=VSIG(NUI,NOUI-1)
 END IF
 IF(NUS.GT.0) N7=1
 IF(NUS.LT.0) N7=NSP(NUX)
 IF(NOUI.NE.NHU(NUI)) THEN
 NUX2=V2(NUI,NOUI+1)
 NUS2=VSIG(NUI,NOUI+1)
 END IF
 IF(NUS2.GT.0) N8=1
 IF(NUS2.LT.0) N8=NSP(NUX2)

 NAME7=SUM(NUX)-NSP(NUX)+N7
 NAME8=SUM(NUX2)-NSP(NUX2)+N8

 R1=0D0
 G1=0D0

 IF(NH.EQ.1) GOTO 543

```

```

IF(L.EQ.-1*NUS1)THEN
IF(NUS1.GT.0) THEN
IF(NOUT.EQ.NHU(NUEI).AND.NPOSTI.EQ.2) G1=1D0
IF(NOUT.NE.1.AND.NOUT.NE.NHU(NUEI)) THEN
IF(NPOSTI.EQ.3) G1=1D0
END IF
END IF
IF(NUS1.LT.0) THEN
IF(NOUT.EQ.NHU(NUEI).AND.NPOSTI.EQ.NSP(NUX1)-1) G1=1D0
IF(NOUT.NE.1.AND.NOUT.NE.NHU(NUEI)) THEN
IF(NPOSTI.EQ.NSP(NUX1)-2) G1=1D0
END IF
END IF
IF(NHU(NUEI).EQ.2) THEN
IF(NUS1.GT.0) THEN
IF(NOUT.EQ.1.AND.NPOSTI.EQ.2) R1=1D0
END IF
IF(NUS1.LT.0) THEN
IF(NOUT.EQ.1.AND.NPOSTI.EQ.NSP(NUX1)-1) R1=1D0
END IF
END IF
END IF

```

```

IF(G1.NE.0.OR.R1.NE.0) THEN

```

```

IF(NGR.EQ.1) THEN

```

```

S7A=0

```

```

IF(NAME7.GT.SUM(NH)) S7A=1

```

```

IF(ISIGNO.LT.0) THEN

```

```

IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.NAME7.AND.

```

```

| NAME7.LE.SUM(JTIERRA)) S7A=1

```

END IF

IF(ISIGNO.GT.0) THEN

IF(SUM(JTIERRA-1).LT.NAME7.AND.NAME7.LE.

| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) S7A=1

END IF

IF(S7A.NE.1) GOTO 786

VAR=0

DO JR=1,NH+NGR\*(NH-1)

VAR=VAR+NSP(JR)

IF(NAME7.LE.VAR) THEN

NTRI7=JR

NPOSI7=NAME7-VAR+NSP(JR)

GOTO 733

END IF

END DO

*!Si NAME7 es de la imagen calculamos su original y lo  
!volvemos a meter en NAME7.*

733 IF(NTRI7.EQ.JTIERRA) NAME7=SUM(JTIERRA)-NPOSI7+1

IF(NTRI7.GT.NH-1+JTIERRA) NAME7=NSP(JTIERRA)+SUM(NTRI7)-NPOSI7+1-SUM(NH)

IF(NTRI7.LE.NH-1.AND.NTRI7.GT.NH) NAME7=SUM(NTRI7)-NPOSI7+1-SUM(NH)

786 S8A=0

IF(NAME8.GT.SUM(NH)) S8A=1

IF(ISIGNO.LT.0) THEN

IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.NAME8.AND.

| NAME8.LE.SUM(JTIERRA)) S8A=1

END IF

```

IF(ISIGNO.GT.0) THEN
IF(SUM(JTIERRA-1).LT.NAME8.AND.NAME8.LE.
| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) S8A=1
END IF

```

```

IF(S8A.NE.1) GOTO 543

```

*!Ahora hay que saber tramo y posición de NAME8*

```

VAR=0
DO JR=1,NH+NGR*(NH-1)
VAR=VAR+NSP(JR)
IF(NAME8.LE.VAR) THEN
NTRI8=JR
NPOS18=NAME8-VAR+NSP(JR)
GOTO 793
END IF
END DO

```

*!Si NAME8 es de la imagen calculamos su original y lo  
!volvemos a meter en NAME8.*

```

793 IF(NTRI8.EQ.JTIERRA) NAME8=SUM(JTIERRA)-NPOS18+1
IF(NTRI8.GT.NH-1+JTIERRA) NAME8=NSP(JTIERRA)+SUM(NTRI8)-NPOS18
| +1-SUM(NH)
IF(NTRI8.LE.NH-1+JTIERRA.AND.NTRI8.GT.NH) NAME8=SUM(NTRI8)
| -NPOS18+1-SUM(NH)

END IF

```

```

END IF

```

```

543 DO 58 MM=N,N+2
M=MM

```



```
IF(M.EQ.R(I,U)) GOTO 58
ICO=V-R(I,U)+M
IF(ICO.LT.1) GOTO 58
```

```
IF(NOP.EQ.0) THEN
 CALL FUNF(F,I,U,L,M)
 XP=0D0
 DO 98 A=0,2
 DO 98 B=0,3
 XP=XP+F(A,B)*INT(A,B)
 CONTINUE
```

98

```
ELSE
 ! XP=FM(M,L,I,U)
END IF
```

```
T=T+XP*(CUR(IL,-R(I,U)+M)-G1*NUS*NUS1*
| CUR(NAME7,-R(I,U)+M)
| -R1*NUS2*NUS1*CUR(NAME8,-R(I,U)+M))
```

58

```
CONTINUE
```

```
DO 70 MM=N,N+2
M=MM
ICO=V-R(I,U)+M
IF(ICO.LT.1) GOTO 70
```

```
IF(NOP.EQ.0) THEN
 CALL FUNG(G,I,U,L,M)
 WP=0D0
 DO 90 A=0,2
 DO 90 B=0,3
 WP=WP+G(A,B)*INT(A,B)
 CONTINUE
```

90

```

ELSE
! WP=CM(M,L,I,U)
END IF

S=1
IF(V-R(I,U)-1.GE.1) THEN
ICOP=V-R(I,U)+M-S
IF(ICOP.GE.1.AND.ICOP.LT.V) THEN
Q=Q+WP*(YCAR(IL,-R(I,U)+M-S)-G1*NUS*NUS1
| *YCAR(NAME7,-R(I,U)+M-S)-R1*NUS2*NUS1
| *YCAR(NAME8,-R(I,U)+M-S))
END IF
END IF

70 CONTINUE
50 CONTINUE
506 CONTINUE
BB2(U)=E(U,V)-Q-T
15 CONTINUE

C TERMINADO EL CALCULO DE LA MATRIZ DE EXCITACION BB2(U)

C *****

C *****

C MULTIPLICAMOS LA INVERSA DE LA MATRIZ DE IMPEDANCIAS
C POR LA DE EXCITACION BB2 PARA OBTENER LAS CORRIENTES
C EN LA ESTRUCTURA Y LAS ALMACENAMOS EN LA MATRIZ BB.

DO 200 U=1,SUM(NH)
BB(U)=0D0

IF(NGR.EQ.1) THEN

```

```

IF(ISIGNO.LT.0) THEN
IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.U.AND.
| U.LE.SUM(JTIERRA)) GOTO 200
END IF

```

```

IF(ISIGNO.GT.0) THEN
IF(SUM(JTIERRA-1).LT.U.AND.U.LE.
| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) GOTO 200
END IF
END IF

```

```

TC=000
DO 210 I=1,SUM(NH)

```

```

IF(NGR.EQ.1) THEN
IF(ISIGNO.LT.0) THEN
IF(SUM(JTIERRA)-NSP(JTIERRA)/2.LT.I.AND.
| I.LE.SUM(JTIERRA)) GOTO 210
END IF

```

```

IF(ISIGNO.GT.0) THEN
IF(SUM(JTIERRA-1).LT.I.AND.I.LE.
| SUM(JTIERRA-1)+NSP(JTIERRA)/2) GOTO 210
END IF
END IF

```

```

TC=TC+Z(U,I)*BB2(I)
210 CONTINUE
BB(U)=TC
200 CONTINUE

```

```

C *****

```

```

DO 133 K=1,SUM(NH)

DO II=SUM(NH)+2,2,-1
YCAR(K,-II)=YCAR(K,-II+1)
END DO
YCAR(K,-1)=YCAR(K,-1)+BB(K)
DO II=SUM(NH)+2,2,-1
CUR(K,-II)=CUR(K,-II+1)
END DO
CUR(K,-1)=BB(K)
IF(VIN.EQ.1) WRITE(21,400) K,V,BB(K)
IF(VIN.NE.1) WRITE(23,400) K,V,BB(K)

C IF(NH.EQ.1) GOTO 630
C IF(H.NE.1.AND.H.NE.NH) THEN
C IF(K.EQ.2) THEN
C PRINT*,"CUR(",K-1,",",V,",",H,")=",BA(K,H)
C | -BA(1,H-1)

C END IF
C IF(K.GT.2) THEN
C PRINT*,"CUR(",K-1,",",V,",",H,")=",BA(K,H)

C END IF
C END IF

C IF(H.EQ.1.AND.K.GT.1) THEN
C PRINT*,"CUR(",K-1,",",V,",",H,")=",BA(K,H)

C END IF
C IF(H.EQ.NH) THEN
C IF(K.EQ.1) THEN
C PRINT*,"CUR(",K,",",V,",",H,")=",BA(K,H)

```

```

C | -BA(1,H-1)

C END IF
C IF(K.GT.1) THEN
C PRINT*,"CUR(",K,",",",V,",",",H,")=",BA(K,H)

C END IF
C END IF
C GOTO 133
C630 PRINT*,"CUR(",K,",",",V,",",",H,")=",BA(K,H)
133 CONTINUE

```

```

 OPEN (22,FILE="ENTRADA")
 WRITE(22,650) V-2
 WRITE(22,650) NH
 close (22)
1 CONTINUE

```

STOP

```

100 FORMAT(/,7X,D11.5,1X,D11.5,1X,D11.5)
110 FORMAT(7X,D11.5,1X,D11.5,1X,D11.5)
400 FORMAT(14X,"CUR(",I2,",",",I4,")=",E12.6)
800 FORMAT(I3)
600 FORMAT(27X,E12.6)
500 FORMAT(I4,/,I4)
650 FORMAT(I4)

```

END

```

C *****
C
C SUBRRUTINA E_A
C
C *****
C
C Calcula la proyeccion del campo incidente en cada intervalo
C de la estructura y en cada tiempo.
C
C *****
C
C REAL FUNCTION E(U,V)
C INTEGER U,V,NS(0:10),NSP(0:10),VAR,NHU(5)
C DOUBLE PRECISION DT,TMAX,G,C,XC(99),YC(99),ZC(99),AE,PI
C DOUBLE PRECISION D,STHU,SFIU,ATH(10),AFI(10),PROY,SX,SY,SZ
C DOUBLE PRECISION EX,EY,EZ,DS,ANG,THU,FIU,ANG2,AE2
C COMMON /A3/DT/A5/C/A13/XC/A14/YC/A15/ZC/A8/PI/A1/NSP
C | /A18/NS/A4/DS/A12/NH/A16/ATH/A17/AFI
C | /A19/NU/A20/NHU
C
C *****
C !PARAMETRO DE LA GAUSSIANA DE EXCITACION
C
C G=1.509
C
C
C
C EN PRIMER LUGAR DAREMOS LOS ANGULOS DEL PLANO EH CON RESPECTO
C AL PLANO XZ. (DEFINO COMO PLANO EH EL QUE CONTIENE AL
C VECTOR E Y ES PERPENDICULAR A LA DIRECCION DE PROPAGACION)
C
C ANG=0.*PI/18000 !Angulo teta de K (OJO INCLLVE SIGNO)

```

!Esta comprendido entre -180 y 180  
AE=0.\*PI/180D0 !Angulo fi de K

c DAMOS AHORA LOS ANGULOS DEL VECTOR E DENTRO DEL PLANE EH

ANG2=90.\*PI/180D0 !Angulo de E con z (OJO INCLUYE SIGNO)

!Esta comprendido entre -180 y 180

AE2=-90.\*PI/180D0 !Angulo que la proyeccion de E en el plano XY  
!forma con el eje Y.

C \*\*\*\*\*

C CON EL SIGUIENTE VALOR DE TMAX SE INICIA LA EXCITACION

C CON 0.01 DEL VALOR MAXIMO DEL PULSO GAUSSIANO

TMAX=2.145D0/G

TU=DT\*DBLE(V)-(XC(U)\*DSIN(ANG)\*DCOS(AE)+YC(U)\*DSIN(ANG)\*  
| DSIN(AE)+ZC(U)\*DCOS(ANG))/C

VAR=0

DO JR=1,NH

VAR=VAR+NSP(JR)

IF(U.LE.VAR) THEN

NTRLI=JR

GOTO 3

END IF

END DO

3 THU=ATH(NTRLI)

FIU=AFI(NTRLI)

C EN LOS PEDAZOS SOLAPADOS NO NECESITAMOS EL VALOR  
C DEL CAMPO

SX=DSIN(THU)\*DSIN(FIU)

SY=DSIN(THU)\*DCOS(FIU)

SZ=DCOS(THU)

EX=DSIN(ANG2)\*DCOS(AE2)

EY=DSIN(ANG2)\*DSIN(AE2)

EZ=DCOS(ANG2)

PROY=EX\*SX+EY\*SY+EZ\*SZ

E=0.0

IF(U.EQ.43.OR.U.EQ.44) THEN

E=(1.1126D-10)

| \*(DEXP(-(G\*\*2)\*((TU-TMAX)\*\*2)))

END IF

C CON LA SIGUIENTE SENTENCIA SE ANULAN LAS EXCITACIONES QUE SEAN

C MENORES DE 1.6E-28 VECES EL VALOR DE LA EXCITACION MAXIMA

IF ((G\*(TU-TMAX)).GT.10) E=0.

IF ((ABS(E).LT.1D-40.OR.ABS(E).GT.1D40).AND.ABS(E).NE.0E0)

| PRINT\*, "ATENCION A LA EXCITACION, E(",V,")=",E

RETURN

END



```

C *****
C
C SUBRRUTINA FUNF_A
C *****

SUBROUTINE FUNF(F,I,U,L,M)
INTEGER A,B,ERIU,U,NS(0:10),NSP(0:10),VAR,NHU(5)
INTEGER V2(5,5),VSIG(5,5)
DOUBLE PRECISION RIU,D2C,DLM,MRIU,PROP,SUMP,D3R,THU,FIU,FII,THI
DOUBLE PRECISION XC(99),YC(99),ZC(99),ATH(10),AFI(10),PI
DOUBLE PRECISION RIUX,RIUY,RIUZ,SIUX,SIUY,SIUZ,SIX,SIU,SIZ
DOUBLE PRECISION DT,DS,C,CRIU,SRIU,RA(10),PROQ,SUMQ,RQ1,TN2
DOUBLE PRECISION F(0:2,0:3),F1(0:2,0:3),F2(0:2,0:3)
COMMON /A1/NSP/A3/DT/A4/DS/A5/C/A6/RA/A12/NH/A13/XC
| /A14/YC/A15/ZC/A16/ATH/A17/AFI/A18/NS/A19/NU/A20/NHU
| /A21/V2/A23/VSIG/A8/PI/A24/NGR

RIU=(XC(U)-XC(I))**2+(YC(U)-YC(I))**2+(ZC(U)-ZC(I))**2
RIUX=XC(U)-XC(I)
RIUY=YC(U)-YC(I)
RIUZ=ZC(U)-ZC(I)

VAR=0
DO JR=1,NH
VAR=VAR+NSP(JR)
IF(U.LE.VAR) THEN
NTRU=JR
NPOSU=U-VAR+NSP(JR)
GOTO 3
END IF
END DO

```

```

3 NDIFU=NSP(NTRU)-NS(NTRU)

 MRIU=DNINT((DSQRT(RIU+RA(NTRU)**2))/(C*DT))
 IRIU=IDNINT(MRIU)
 N=-1
 IF(IRIU.EQ.0) N=-2

 DO J1=1,NU
 DO J2=1,NHU(J1)
 IF(NTRU.EQ.V2(J1,J2)) THEN
 NIEU=J1
 NOUJ=J2
 NIS=VSIG(J1,J2)
 IF((NPOSU.EQ.1.AND.NIS.GT.0).OR.(NPOSU.EQ.
| NSP(NTRU).AND.NIS.LT.0)) GOTO 3000
 END IF
 END DO
 END DO

3000 NEX=0
 NEX2=0
 DO K=1,NU
 DO II=1,NHU(K)
 IF(V2(NIEU,NOUJ).EQ.V2(K,II).AND.NIEU.NE.K) THEN
 NEX=1
 IF(V2(NIEU,NOUJ).EQ.V2(NIEU,NHU(NIEU))) THEN
 NEX2=1
 END IF
 END IF
 END DO
 END DO

```

```

NVU=0
IF(NDIFU.EQ.2.AND.(NPOSU.EQ.1.OR.NPOSU.EQ.NSP(NTRU))) NVU=1
IF(NDIFU.EQ.1.AND.NEX.EQ.0) THEN
IF(N1S.GT.0.AND.NPOSU.EQ.1) NVU=1
IF(N1S.LT.0.AND.NPOSU.EQ.NSP(NTRU)) NVU=1
END IF
IF(NDIFU.EQ.1.AND.NEX.EQ.1) THEN
IF(NEX2.EQ.0) THEN
IF(N1S.GT.0.AND.NPOSU.EQ.1) NVU=1
IF(N1S.LT.0.AND.NPOSU.EQ.NSP(NTRU)) NVU=1
END IF
END IF

```

```

THU=ATH(NTRU)
FIU=AFI(NTRU)

```

```

JS=-1
JV=0
IF(VSIG(NUEU,NOULI).EQ.VSIG(NUEU,NOULI+1)) JV=1
IF(VSIG(NUEU,NOULI).EQ.VSIG(NUEU,NOULI+1)) JS=1
IF(NVU.EQ.1) THEN
THU=PI*JV-JS*ATH(V2(NUEU,NOULI+1))
FIU=PI*JV+AFI(V2(NUEU,NOULI+1))
END IF

```

```

VAR=0
DO JR=1,NH+NGR*(NH-1)
VAR=VAR+NSP(JR)
IF(I.LE.VAR) THEN
NTRI=JR
NPOSI=I-VAR+NSP(JR)
GOTO 33
END IF

```

END DO

33 NDIFI=NSP(NTRI)-NS(NTRI)

DO J1=1,NU+NGR\*NU

DO J2=1,NHU(J1)

IF(NTRI.EQ.V2(J1,J2)) THEN

NUEI=J1

NOUI=J2

NIS=VSIG(J1,J2)

IF((NPOSTI.EQ.1.AND.NIS.GT.0).OR.(NPOSTI.EQ.

| NSP(NTRI).AND.NIS.LT.0)) GOTO 3001

END IF

END DO

END DO

3001 NEX=0

NEX2=0

DO K=1,NU+NGR\*NU

DO II=1,NHU(K)

IF(V2(NUEI,NOUI).EQ.V2(K,II).AND.NUEI.NE.K) THEN

NEX=1

IF(V2(NUEI,NOUI).EQ.V2(NUEI,NHU(NUEI))) THEN

NEX2=1

END IF

END IF

END DO

END DO

MU=0

IF(NDIFI.EQ.2.AND.(NPOSTI.EQ.1.OR.NPOSTI.EQ.NSP(NTRI))) MU=1

IF(NDIFI.EQ.1.AND.NEX.EQ.0) THEN

IF(NIS.GT.0.AND.NPOSTI.EQ.1) MU=1

```

IF(N1S.LT.0.AND.NPOSI.EQ.NSP(NTRI)) NVU=1
END IF
IF(NDIFI.EQ.1.AND.NEX.EQ.1) THEN
IF(NEX2.EQ.0) THEN
IF(N1S.GT.0.AND.NPOSI.EQ.1) NVU=1
IF(N1S.LT.0.AND.NPOSI.EQ.NSP(NTRI)) NVU=1
END IF
END IF

```

```

THI=ATH(NTRI)
FII=AFI(NTRI)
JS=-1
JV=0
IF(VSIG(NUEI,NOUT).EQ.VSIG(NUEI,NOUT+1)) JV=1
IF(VSIG(NUEI,NOUT).EQ.VSIG(NUEI,NOUT+1)) JS=1
IF(NVU.EQ.1) THEN
THI=PI*JV-JS*ATH(V2(NUEI,NOUT+1))
FII=PI*JV+AFI(V2(NUEI,NOUT+1))
END IF

```

```

SUX=DSIN(THU)*DSIN(FIU)
SUY=DSIN(THU)*DCOS(FIU)
SUZ=DCOS(THU)
SIX=DSIN(THI)*DSIN(FII)
SIY=DSIN(THI)*DCOS(FII)
SIZ=DCOS(THI)

```

```

CRIU=SUX*SIX+SUY*SIY+SUZ*SIZ
SRIU=SUX*RIUX+SUY*RIUY+SUZ*RIUZ

```

```

D2C=(DT**2)*((MRIU**2)+MRIU*(M+3D0)+2D0*DINT((M+2D0)/2D0))*C
IF(N.EQ.-1)D2C=C*(DT**2)*((MRIU**2)+M*MRIU-DINT((2D0-IABS(M)
| /2D0))

```

!NTE ES LA POSICION EN LA QUE SE HACE EL TRATAMIENTO  
!DE EXTREMOS

IF(NIS.GT.0) NTE=NSP(NTRI)

IF(NIS.LT.0) NTE=1

c

C

c

Para un solo hilo hay que hacer el tratamiento de sus  
dos extremos (1 y NSP(NTRI))

IF(NH.EQ.1) THEN

IF(NPOSI.EQ.1) NTE=1

IF(NPOSI.EQ.NSP(NTRI)) NTE=NSP(NTRI)

END IF

IF(NDIFI.EQ.2.OR.NPOSI.NE.NTE) THEN

DLM=((DT\*DS)\*\*2)\*(3D0\*(L\*\*2)-1D0)\*(3D0\*(M\*\*2)+6D0\*M+2D0)

IF(N.EQ.-1) DLM=((DT\*DS)\*\*2)\*(3D0\*L\*\*2-1D0)\*(3D0\*M\*\*2-1D0)

ELSE

IF(N.EQ.-2) DLM=((DT\*DS)\*\*2)\*(3D0\*M\*\*2+6D0\*M+2D0)\*(2D0\*L\*\*2-5D-1)

IF(N.EQ.-1) DLM=((DT\*DS)\*\*2)\*(3D0\*M\*\*2-1D0)\*(2D0\*L\*\*2-5D-1)

END IF

DLM=DLM\*C\*\*2

IF(NDIFI.EQ.2.OR.NPOSI.NE.NTE) THEN

PROP=-1D0\*(DS\*\*2)\*DINT((2D0-IABS(L))/2D0)

SUMP=L\*DS

ELSE

PROP=-1D0\*(DS\*\*2)\*DINT((2D0-IABS(L))/2D0)/2D0

SUMP=(5D-1-(L\*\*2))\*DS

IF(NTE.EQ.1) SUMP=-SUMP

END IF

```

D3R=DT*(2D0*MRIU+M+3D0)
IF(N.EQ.-1) D3R=DT*(2D0*MRIU+M)
F1(0,0)=(SUMP*SRIU-2D0*PROP*CRIU)/(C*DLM)
F1(1,0)=(2D0*SRIU-3D0*SUMP*CRIU)/(C*DLM)
F1(2,0)=-4D0*CRIU/(C*DLM)

```

```

F1(0,1)=D3R*(PROP*CRIU-SRIU*SUMP)/DLM
F1(1,1)=2D0*D3R*(SUMP*CRIU-SRIU)/DLM
F1(2,1)=3D0*D3R*CRIU/DLM

```

```

F1(0,2)=D2C*SRIU*SUMP/DLM
F1(1,2)=D2C*(2D0*SRIU-SUMP*CRIU)/DLM
F1(2,2)=-2D0*D2C*CRIU/DLM

```

```

DO 80 J=0,2
F1(J,3)=0D0
CONTINUE

```

80

```

SUMQ=-DBLE(M)
IF(N.EQ.-2) SUMQ=-(DBLE(M)+3D0)
PROQ=-DINT((2D0-IABS(M))/2D0)
IF(N.EQ.-2) PROQ=2D0*DINT((M+2D0)/2D0)
RQ1=MRIU*SUMQ-PROQ
TN2=DT**3*((1D0/8D0-(MRIU**2)/2D0)*SUMQ+
| (1D0/2D0+MRIU)*PROQ)

```

```

DO 79 J=0,2
F2(J,0)=0.0
CONTINUE

```

79

```

F2(0,1)=-((1D0/2D0)*(SRIU/DLM)*SUMP*DT*SUMP)
F2(0,2)=(C*SRIU*SUMP*DT**2*RQ1)/DLM

```

```
F2(0,3)=(C**2*SUMP*TN2*SRIU)/DLM
F2(1,1)=DT*SUNQ*(CRIU*SUMP/2D0-SRIU)/DLM
F2(1,2)=-C*DT**2*RQ1*(SUMP*CRIU-2D0*SRIU)/DLM
F2(1,3)=TN2*C**2*(2D0*SRIU-SUMP*CRIU)/DLM
F2(2,1)=DT*CRIU*SUNQ/DLM
F2(2,2)=-2D0*C*CRIU*RQ1*DT**2/DLM
F2(2,3)=-2D0*TN2*C**2*CRIU/DLM
```

```
DO 20 J=0,3
DO 20 I2=0,2
F(I2,J)=F1(I2,J)+F2(I2,J)
```

```
20 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```



```

C *****
C
C SUBRRUTINA FUNG_A
C *****

```

```

SUBROUTINE FUNG(G,I,U,L,M)
INTEGER A,B,ERIU,U,NS(0:10),NSP(0:10),VAR,NHU(5)
INTEGER V2(5,5),VSIG(5,5)
DOUBLE PRECISION RIU,D2C,DLM,MRIU,PROP,SUMP,D3R,THU,FIU,FII,THI
DOUBLE PRECISION XC(99),YC(99),ZC(99),ATH(10),AFI(10)
DOUBLE PRECISION RIUX,RIUY,RIUZ,SUX,SUY,SUZ,SIX,SIU,SIZ
DOUBLE PRECISION DT,DS,C,CRIU,SRIU,RA(10),PROQ,SUMQ,RQ1,TN2
DOUBLE PRECISION G(0:2,0:3),PI
COMMON /A1/NSP/A3/DT/A4/DS/A5/C/A6/RA/A12/NH/A13/XC
| /A14/YC/A15/ZC/A16/ATH/A17/AFI/A18/NS/A19/NU/A20/NHU
| /A21/V2/A23/VSIG/A8/PI/A24/NGR

```

```

RIU=(XC(U)-XC(I))**2+(YC(U)-YC(I))**2+(ZC(U)-ZC(I))**2
RIUX=XC(U)-XC(I)
RIUY=YC(U)-YC(I)
RIUZ=ZC(U)-ZC(I)

```

```

VAR=0
DO JR=1,NH
VAR=VAR+NSP(JR)
IF(U.LE.VAR) THEN
NTRU=JR
NPOSU=U-VAR+NSP(JR)
GOTO 3
END IF
END DO

```

```

3 NDIFU=NSP(NTRU)-NS(NTRU)

 MRIU=DNINT((DSQRT(RIU+RA(NTRU)**2))/(C*DT))
 IRIU=IDNINT(MRIU)
 N=-1
 IF(IRIU.EQ.0) N=-2

 DO J1=1,NU
 DO J2=1,NHU(J1)
 IF(NTRU.EQ.V2(J1,J2)) THEN
 NIEU=J1
 NOUJ=J2
 NIS=VSIG(J1,J2)
 IF((NPOSU.EQ.1.AND.NIS.GT.0).OR.(NPOSU.EQ.
| NSP(NTRU).AND.NIS.LT.0)) GOTO 3000
 END IF
 END DO
 END DO

3000 NEX=0
 NEX2=0
 DO K=1,NU
 DO II=1,NHU(K)
 IF(V2(NIEU,NOUJ).EQ.V2(K,II).AND.NIEU.NE.K) THEN
 NEX=1
 IF(V2(NIEU,NOUJ).EQ.V2(NIEU,NHU(NIEU))) THEN
 NEX2=1
 END IF
 END IF
 END DO
 END DO

 NVU=0

```

```

IF(NDIFU.EQ.2.AND.(NPOSU.EQ.1.OR.NPOSU.EQ.NSP(NTRU))) NVU=1
IF(NDIFU.EQ.1.AND.NEX.EQ.0) THEN
IF(NIS.GT.0.AND.NPOSU.EQ.1) NVU=1
IF(NIS.LT.0.AND.NPOSU.EQ.NSP(NTRU)) NVU=1
END IF
IF(NDIFU.EQ.1.AND.NEX.EQ.1) THEN
IF(NEX2.EQ.0) THEN
IF(NIS.GT.0.AND.NPOSU.EQ.1) NVU=1
IF(NIS.LT.0.AND.NPOSU.EQ.NSP(NTRU)) NVU=1
END IF
END IF

```

```

THU=ATH(NTRU)
FIU=AFI(NTRU)

```

```

JS=-1
JV=0
IF(VSIG(NUEU,NOUL).EQ.VSIG(NUEU,NOUL+1)) JV=1
IF(VSIG(NUEU,NOUL).EQ.VSIG(NUEU,NOUL+1)) JS=1
IF(NVU.EQ.1) THEN
THU=PI*JV-JS*ATH(V2(NUEU,NOUL+1))
FIU=PI*JV+AFI(V2(NUEU,NOUL+1))
END IF

```

```

VAR=0
DO JR=1,NH+NGR*(NH-1)
VAR=VAR+NSP(JR)
IF(I.LE.VAR) THEN
NTRI=JR
NPOST=I-VAR+NSP(JR)
GOTO 33
END IF

```

```

END DO

33 NDIFI=NSP(NTRI)-NS(NTRI)

DO J1=1,NU+NGR*NU
DO J2=1,NU(J1)
IF(NTRI.EQ.V2(J1,J2)) THEN
NUEI=J1
NQUI=J2
NIS=VSIG(J1,J2)
IF((NPOSI.EQ.1.AND.NIS.GT.0).OR.(NPOSI.EQ.
| NSP(NTRI).AND.NIS.LT.0)) GOTO 3001
END IF
END DO
END DO

3001 NEX=0
NEX2=0
DO K=1,NU+NGR*NU
DO II=1,NU(K)
IF(V2(NUEI,NQUI).EQ.V2(K,II).AND.NUEI.NE.K) THEN
NEX=1
IF(V2(NUEI,NQUI).EQ.V2(NUEI,NU(NUEI))) THEN
NEX2=1
END IF
END IF
END DO
END DO

NU=0
IF(NDIFI.EQ.2.AND.(NPOSI.EQ.1.OR.NPOSI.EQ.NSP(NTRI))) NU=1
IF(NDIFI.EQ.1.AND.NEX.EQ.0) THEN

```

```

IF(N1S.GT.0.AND.NPOSTI.EQ.1) NVU=1
IF(N1S.LT.0.AND.NPOSTI.EQ.NSP(NTRI)) NVU=1
END IF
IF(NDIFI.EQ.1.AND.NEX.EQ.1) THEN
IF(NEX2.EQ.0) THEN
IF(N1S.GT.0.AND.NPOSTI.EQ.1) NVU=1
IF(N1S.LT.0.AND.NPOSTI.EQ.NSP(NTRI)) NVU=1
END IF
END IF

THI=ATH(NTRI)
FII=AFI(NTRI)

JS=-1
JV=0
IF(VSIG(NUEI,NOUI).EQ.VSIG(NUEI,NOUI+1)) JV=1
IF(VSIG(NUEI,NOUI).EQ.VSIG(NUEI,NOUI+1)) JS=1
IF(NVU.EQ.1) THEN
THI=PI*JV-JS*ATH(V2(NUEI,NOUI+1))
FII=PI*JV+AFI(V2(NUEI,NOUI+1))
END IF

SUX=DSIN(THU)*DSIN(FIU)
SUY=DSIN(THU)*DCOS(FIU)
SUZ=DCOS(THU)
SIX=DSIN(THI)*DSIN(FII)
SIY=DSIN(THI)*DCOS(FII)
SIZ=DCOS(THI)

CRIU=SUX*SIX+SUY*SIY+SUZ*SIZ
SRIU=SUX*RIUX+SUY*RIUY+SUZ*RIUZ

IF(N1S.GT.0) NTE=NSP(NTRI)

```

```
IF(N1S.LT.0) NTE=1
```

```
IF(NH.EQ.1) THEN
```

```
IF(NPOSTI.EQ.1) NTE=1
```

```
IF(NPOSTI.EQ.NSP(NTRI)) NTE=NSP(NTRI)
```

```
END IF
```

```
IF(NDIFI.EQ.2.OR.NPOSTI.NE.NTE) THEN
```

```
DLM=((DT*DS)**2)*(3D0*(L**2)-1D0)*(3D0*(M**2)+6D0*M+2D0)
```

```
IF(N.EQ.-1) DLM=((DT*DS)**2)*(3D0*L**2-1D0)*(3D0*M**2-1D0)
```

```
ELSE
```

```
IF(N.EQ.-2) DLM=((DT*DS)**2)*(3D0*M**2+6D0*M+2D0)*(2D0*L**2-5D-1)
```

```
IF(N.EQ.-1) DLM=((DT*DS)**2)*(3D0*M**2-1D0)*(2D0*L**2-5D-1)
```

```
END IF
```

```
DLM=DLM*C**2
```

```
IF(NDIFI.EQ.2.OR.NPOSTI.NE.NTE) THEN
```

```
PROP=-1D0*(DS**2)*DINT((2D0-IABS(L))/2D0)
```

```
SUMP=L*DS
```

```
ELSE
```

```
PROP=-1D0*(DS**2)*DINT((2D0-IABS(L))/2D0)/2D0
```

```
SUMP=(5D-1-(L**2))*DS
```

```
IF(NTE.EQ.1) SUMP=-SUMP
```

```
END IF
```

```
SUMQ=-DBLE(M)
```

```
IF(N.EQ.-2) SUMQ=-(M+3D0)
```

```
PROQ=-DINT((2D0-IABS(M))/2D0)
```

```
IF(N.EQ.-2) PROQ=2D0*DINT((M+2D0)/2D0)
```

```
RQ1=MRILU*SUMQ-PROQ
```

```
TN2=DT**3*((1D0/8D0-(MRIU**2)/2D0)*SUMP+
| (1D0/2D0+MRIU)*PROQ)
```

```
DO 10 J=0,2
```

```
DO 10 I2=0,3
```

```
G(J,I2)=0.0
```

```
10 CONTINUE
```

```
G(1,3)=(DT**3)*(C**2)*PROQ*(2D0*SRIU-SUMP*CRIU)/DLM
```

```
G(0,3)=(DT**3)*(C**2)*SUMP*SRIU*PROQ/DLM
```

```
G(2,3)=-2D0*(DT**3)*(C**2)*CRIU*PROQ/DLM
```

```
RETURN
```

```
END
```

C \*\*\*\*\*

C SUBRRUTINA FUNINT\_A

C \*\*\*\*\*

```
SUBROUTINE FUNINT(INT,I,U)
DOUBLE PRECISION INT(0:2,0:3)
DOUBLE PRECISION CI,BI,RP,RN,I0,I1,I2,I3,X1,X2,RE,A3,B3
DOUBLE PRECISION DS,RA(10),RIU,FIU,FI,DT,C
INTEGER ERIU,U,SGN,H
INTEGER NS(0:10),NSP(0:10),VAR,NHU(5)
INTEGER V2(5,5),VSIG(5,5)
DOUBLE PRECISION FII,THI,PI
DOUBLE PRECISION XC(99),YC(99),ZC(99),ATH(10),AFI(10)
DOUBLE PRECISION RIUX,RIUY,RIUZ,SIX,SIU,SIZ
COMMON /A1/NSP/A3/DT/A4/DS/A5/C/A6/RA/A12/NH/A13/XC
| /A14/YC/A15/ZC/A16/ATH/A17/AFI/A18/NS/A19/NU/A20/NHU
| /A21/V2/A23/VSIG/A8/PI/A24/NGR

RIU=(XC(U)-XC(I))**2+(YC(U)-YC(I))**2+(ZC(U)-ZC(I))**2
RIUX=XC(U)-XC(I)
RIUY=YC(U)-YC(I)
RIUZ=ZC(U)-ZC(I)

VAR=0
DO JR=1,NH
VAR=VAR+NSP(JR)
IF(U.LE.VAR) THEN
NTRU=JR
GOTO 34
END IF
END DO
```



34 CI=RIU+RA(NTRU)\*\*2

VAR=0

DO JR=1,NH+NGR\*(NH-1)

VAR=VAR+NSP(JR)

IF(I.LE.VAR) THEN

NTRI=JR

NPOST=I-VAR+NSP(JR)

GOTO 33

END IF

END DO

33 NDIFI=NSP(NTRI)-NS(NTRI)

DO J1=1,NU+NGR\*NU

DO J2=1,NU(J1)

IF(NTRI.EQ.V2(J1,J2)) THEN

NUEI=J1

NOUI=J2

NIS=VSIG(J1,J2)

IF((NPOST.EQ.1.AND.NIS.GT.0).OR.(NPOST.EQ.

| NSP(NTRI).AND.NIS.LT.0)) GOTO 3001

END IF

END DO

END DO

3001 NEX=0

NEX2=0

DO K=1,NU+NGR\*NU

DO II=1,NU(K)

IF(V2(NUEI,NOUI).EQ.V2(K,II).AND.NUEI.NE.K) THEN

NEX=1

```
IF(V2(NUEI,NOUT).EQ.V2(NUEI,NHU(NUEI))) THEN
NEX2=1
END IF
END IF
END DO
END DO
```

```
NVU=0
IF(NDIFI.EQ.2.AND.(NPOSI.EQ.1.OR.NPOSI.EQ.NSP(NTRI))) NVU=1
IF(NDIFI.EQ.1.AND.NEX.EQ.0) THEN
IF(N1S.GT.0.AND.NPOSI.EQ.1) NVU=1
IF(N1S.LT.0.AND.NPOSI.EQ.NSP(NTRI)) NVU=1
END IF
IF(NDIFI.EQ.1.AND.NEX.EQ.1) THEN
IF(NEX2.EQ.0) THEN
IF(N1S.GT.0.AND.NPOSI.EQ.1) NVU=1
IF(N1S.LT.0.AND.NPOSI.EQ.NSP(NTRI)) NVU=1
END IF
END IF
```

```
THI=ATH(NTRI)
FII=AFI(NTRI)
```

```
JS=-1
JV=0
IF(VSIG(NUEI,NOUT).EQ.VSIG(NUEI,NOUT+1)) JV=1
IF(VSIG(NUEI,NOUT).EQ.VSIG(NUEI,NOUT+1)) JS=1
N1S=VSIG(NUEI,NOUT)
```

```
IF(NVU.EQ.1) THEN
THI=PI*JV-JS*ATH(V2(NUEI,NOUT+1))
FII=PI*JV+AFI(V2(NUEI,NOUT+1))
```

END IF

SIX=DSIN(THI)\*DSIN(FII)

SIY=DSIN(THI)\*DCOS(FII)

SIZ=DCOS(THI)

BI=-2D0\*(SIX\*RIUX+SIZ\*RIUZ+SIY\*RIUY)

RP=DSQRT((DS\*\*2)/4D0+BI\*DS/2D0+CI)

RN=DSQRT((DS\*\*2)/4D0-BI\*DS/2D0+CI)

RE=DSQRT(CI-(BI/2D0)\*\*2)

INT(0,0)=DS

INT(1,0)=0D0

INT(2,0)=(DS\*\*3)/12D0

I0=DLOG(DABS((2D0\*RP+DS+BI)/(2D0\*RN-DS+BI)))

I2=(DS-3D0\*BI)\*RP\*(1D0/4D0)+(DS+3D0\*BI)\*RN\*(1D0/4D0)

+ (1D0/8D0)\*(3D0\*(BI\*\*2)-4D0\*CI)\*I0

INT(0,1)=I0

INT(1,1)=RP-RN-(BI/2D0)\*I0

INT(2,1)=I2

I0=(1D0/RE)\*(DATAN((BI+DS)/(2D0\*RE))-DATAN((BI-DS)/(2D0\*RE)))

I1=DLOG(RP/RN)-0.5D0\*BI\*I0

I2=DS+BI\*DLOG(RN/RP)+0.5D0\*((BI\*\*2)-2D0\*CI)\*I0

INT(0,2)=I0

INT(1,2)=I1

INT(2,2)=I2

I0=2D0\*(1D0/((2D0\*RE)\*\*2))\*((DS+BI)/RP+(DS-BI)/RN)

I1=(1D0/((2D0\*RE)\*\*2))\*(((4D0\*CI-BI\*DS)/RN)-((4D0\*CI+BI\*DS)/RP))

X1=DLOG(DABS((2D0\*RP+DS+BI)/(2D0\*RN-DS+BI)))

I2=X1-BI\*I1-CI\*I0

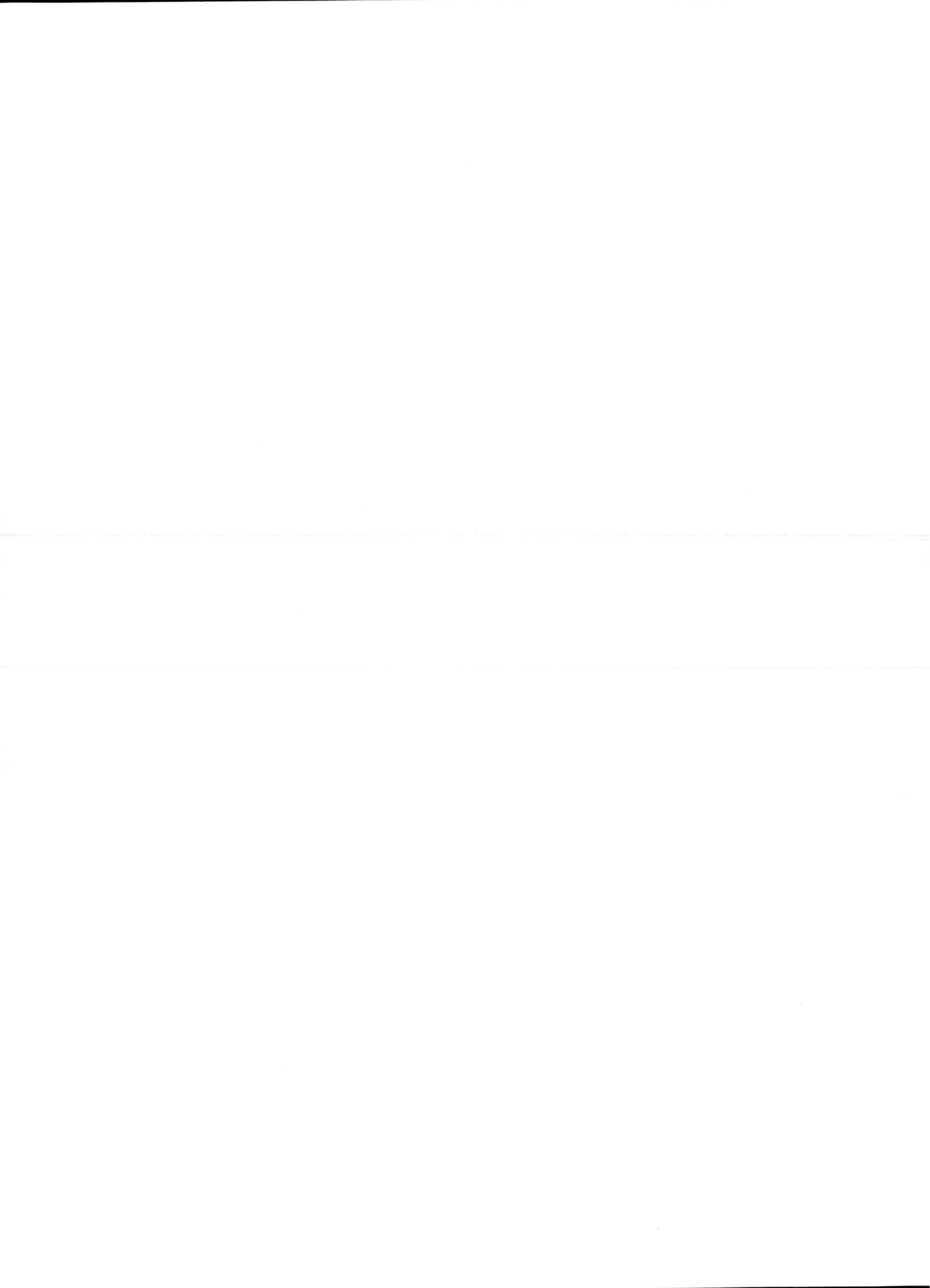
INT(0,3)=10

INT(1,3)=11

INT(2,3)=12

RETURN

END







- |1| E.K. Miller and J.A. Landt  
"Direct time-domain techniques for transient radiation and scattering from wires"  
Proc. IEEE, vol. 68, pp. 1396-1423, 1980.
- |2| A.M. Nicolson, C.L. Bennett, D. Lamensdorf, and L. Susman  
"Applications of time domain metrology to the automation of broad band measurements"  
IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT 20, pp. 3-9, Jan. 1972.
- |3| R.M. Bevensee, F.J. Deadrack, E.K. Miller, and J.T. Okada  
"Validation and calibration of the LLL transient-electromagnetic measurement facility"  
Lawrence Livermore Laboratory, Livermore CA, UCRL-52225, 1977
- |4| C.L. Bennett  
"Time-domain electromagnetics and its applications"  
Proc. IEEE, vol. 66, pp. 299-317, 1978.
- |5| C.E. Baum  
"Emerging technology for transient and broad-band analysis and synthesis of antennas and scatterers"  
Proc. IEEE, vol. 64, pp. 1598-1615, 1976.
- |6| R. Mittra  
"Integral equation methods for transient



scattering"

Topics in Applied Physics, vol. 10, cap. 2, New York: Springer Verlag, 1976.

- |7| T.K. Sarkar, D.D. Weiner, V.K. Jain and S.A. Dianat  
"Impulse response determination in the time-domain theory"  
IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 30, pp. 657-664, 1982.
  
- |8| P. Van Etten  
"The present technology of impulse radars"  
Proc. Int. Conf. Radar, pp. 535-539, London, 1972.
  
- |9| H.F. Harmuth  
"Antennas and Waveguides for Nonsinusoidal Waves"  
New York: Academic Press, 1984.
  
- |10| H.F. Harmuth  
"Antennas for nonsinusoidal waves. III. Arrays"  
IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 25, pp. 346-357, 1983.
  
- |11| M.A. Morgan  
"Time-Domain Scattering Measurement"  
IEEE Antennas and Prop. Society Newsletter, pp. 5-10, 1984.
  
- |12| E.K. Miller  
"Time-Domain Measurements in Electromagnetics"

Van Nostrand Reinhold Company, NY, 1986.

- |13| C.E. Baum  
"The singularity expansion method"  
Topics in Applied Physics, vol. 10, cap. 3, New York: Spring Verlay, 1976.
  
- |14| "Special joint issue on the nuclear electromagnetic pulse"  
IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 26, 1978.
  
- |15| K.S.H. Lee, Ed.  
EMP Interaction  
Report n<sup>o</sup> AFWL-TR-80-402, 1980.
  
- |16| R.A. Perala, T. Rudolph and F. Eriksen  
"Electromagnetic interaction of lightning with aircraft"  
IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 24, pp. 173-203, 1982.
  
- |17| E.K. Miller  
"An overview of Time-Domain Integral Equations Models in Electromagnetics"  
Journal of Electromagnetic waves and Application, p 269-293, 1987.
  
- |18| R. Gómez Martín, J.A. Morente and A. Salinas  
"Time-Domain Analysis of an array of straight-wire"  
Electronics Letters, p 316-318, 1986.
  
- |19| E.K. Miller, A.J. Poggio and G.J. Burke

"An integro-differential equation technique for the Time-Domain analysis of thin-wire structures Part. I. The numerical method"  
J. Comput. Phys., vol. 12, pp. 24-48, 1973.

|20| E.K. Miller, A.J. Poggio and G.J. Burke  
"An integro-differential equation technique for the Time-Domain analysis of thin-wire structures Part. II. Numerical results"  
J. Comput. Phys., vol. 12, pp. 210-233, 1973.

|21| R.F. Harrington  
Field Computation by Moment Methods  
New York: McMillan, 1968.

|22| R.F. Harrington  
Time-Harmonic Electromagnetic Fields  
New York: McGraw-Hill, 1961.

|23| W.L. Stuzman and G.A. Thiele  
Antenna Theory and Design  
New York: John Wiley, 1981.

|24| J.D. Kraus  
Antennas  
New York: McGraw-Hill, 1950.

|25| R. Gómez Martín  
Campo Electromagnético. Propagación y Radiación  
Granada: Publicaciones de la Universidad, 1984.

|26| T.K. Sarkar and D.D. Weiner

- "Scattering analysis of straight wire scatterers and antennas"  
IEEE Trans. on Antennas and Prop., AP-24, 125-131, 1976.
- |27| R. Gómez Martín, J.A. Morente and A. Salinas  
"Applications of the monopulse technique to a planar array of nonlinear loaded straight-wire coupled antennas"  
IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, p 169-174, May 1987.
- |28| R. Gómez Martín, J.A. Morente and A. Salinas  
"Monopulse technique for an array of linear wire antennas"  
8th Int. Symposium on Electromagnetic Compatibility, June, Wroclaw, Poland 1986.
- |29| J.A. Landt and E.K. Miller  
"Time-Domain modeling of non-linear loads"  
IEEE Trans., AP-31, pp. 121-125, 1983.
- |30| C.E. Baum  
"On the singularity expansion method for the solution of electromagnetic interaction problems"  
Interaction note 88, 1971.
- |31| S.M. Kay and S.L. Marple  
"Spectrum analysis, a modern perspective"  
Proc. IEEE, 69, pp. 1380-1419, 1981.
- |32| M.L. Van Blaricum

"An analysis of existing Prony's method techniques"

1977 Spring Fulmen Meeting, 1977.

- |33| R. Gómez Martín and M.C. Carrión  
"Prony's method applied to processing electromagnetic transient data"  
EMC-86 international Wroclaw symposium on electromagnetic compatibility, Poland 1986.
- |34| S. Al Khouri Ibrahim, R. Gómez Martín and B. García Olmedo  
"New contributions to the spectral estimation by means of parametric modelling using rational transfer functions"  
Signal Processing, 12, pp. 231-241, 1987.
- |35| R. Gómez Martín, M.C. Carrión  
"Extended Prony Method Applied to Noisy Data"  
Electronics Letters, vol. 22, pp. 613-614, 1986.
- |36| R. Gómez Martín, M.C. Carrión, S. Al Khoury, B. García Olmedo  
"Application of maximum entropy spectral analysis to estimation of parameters of ARMA models by the ITIF method"  
Electronics Letter, p 11-613, Jul. 1985.
- |37| E.F. Knott, J.F. Shaeffer and M.T. Tuley  
Radar Cross Section  
Artech House, 1985.
- |38| R. Gómez Martín, J.A. Morente and B. García

Olmedo

"Some thoughts about the radiation of the antennas excited by non-sinusoidal currents"  
Int. J. Electronics, vol. 57, pp. 617-625, 1984.

- |39| J.A. Morente  
"Estudio de la radiación y dispersión de pulsos electromagnéticos (EMP) en el dominio del tiempo"  
Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1985.
- |40| J.A. Morente and R. Gómez Martín  
"Arrays para señales no sinusoidales"  
IV Congreso de la U.R.S.I. española, pp. 123-128, Sevilla, 1984.
- |41| J.A. Morente and R. Gómez Martín  
"Comments on antennas for nonsinusoidal waves. Radiators"  
IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 26, pp. 50, 1984.
- |42| R. Gómez Martín y J.A. Morente  
"Radiación y propagación de señales no sinusoidales"  
IV Congreso de la U.R.S.I. española, pp. 117-122, Sevilla, 1984.
- |43| R. Gómez Martín y J.A. Morente  
"Analysis of the electric quadrupole radiation in time domain: application to the large-current radiator"  
Int. J. Electronics, vol. 58, pp. 921-931, 1985.

- |44| Kennaugh and Moffat  
"Transient and Impulse Response Approximation"  
Proceeding of the IEEE, vol 53, pp. 893-901, 1965
- |45| R. Gómez Martín, J.A. Morente and A.R. Bretones  
"Arrays of hertzian electric dipoles for nonsinusoidal signals"  
Int. J. Electronics, vol. 59, pp. 435-438, 1985.
- |46| R. Gómez Martín, J.A. Morente and A.R. Bretones  
"An approximate analysis of transient radiation from linear antennas"  
Int. J. Electronics, vol. 61, nº 3, pp. 343-353, 1986.
- |47| R. Gómez Martín, J.A. Morente and A.R. Bretones  
"Array of matched, linear antennas fed by pulsed signals"  
Int. J. Electronics, vol. 61, nº 5, pp. 639-646, 1986.
- |48| E.K. Miller and M.L. Van Blaricum  
"The short-pulse response of a straight wire"  
IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 21, pp. 396-398, 1973.
- |49| G. Franceschetti and C.H. Pappas  
"Pulsed antennas"  
IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-22, pp. 651, 1974.

- [50] L.B. Felsen  
"Diffraction of the pulsed field from an  
arbitrarily oriented electric or magnetic dipole  
by a perfectly conducting wedge"  
SIAM J. Appl. Math., vol. 26, no 2, p. 306,  
1973.
- [51] L.B. Felsen and N. Marcuvitz  
"Radiation and Scattering of Waves"  
Englewood Cliffs, New York: Prentice Hall, 1973.
- [52] V.H. Weston  
"Pulse return from a sphere"  
IEEE Trans. Antennas Propagat (Special  
Supplement), vol. AP 7, p. S43-S51, 1959.
- [53] D.L. Sengupta and Y.P. Liu  
"Analytical investigation of wave forms radia-  
tion by a resistively loaded linear antenna  
excited by a Gaussian pulse"  
Radio Sci., vol. 9, no 6, pp. 621-630, June  
1974.
- [54] H. Lin and A.A. Ksienski  
"Optimum frequencies for aircraft classification"  
IEEE Trans. on aerospace and electronic systems,  
vol. AES-17, no 5, pp. 656-665, 1981.
- [55] Modern topics in electromagnetic antennas  
Peter Peregrinus Ltd, 1987.
- [56] Computer Techniques for Electromagnetics  
R. Mittra Ed, Pergamon Press, 1973.



- |57| D.S. Jones  
Method in Electromagnetic Wave Propagation  
Oxford Engineering Science Series, Clarendon  
Press, Oxford, 1979.
- |58| J. Moore and R. Pizer  
Moment Methods in Electromagnetics. Techniques  
and Applications  
Research Studies Press LTD., John Wiley and Sons  
INC, 1983.
- |59| A.J. Poggio and E.K. Miller  
"Integral equation solution of three-dimensional  
scattering problems"  
Computer Techniques for Electromagnetics. Cap.  
4, New York: Pergamon Press, 1973.
- |60| Theoretical methods for determining the interac-  
tion of electromagnetic waves with structures.  
J.K. Skwirzynski Ed.  
Nato Advanced Study Institutes Serie, Series E  
nº 40, 1981.
- |61| K.S.H. Lee, Marin and J.P. Castillo  
"Limitations of wire-grid modeling of a closed  
surface"  
IEEE Trans. Electromagnetic Compat., vol. EMC-  
18, nº 3, PP. 123-129, Aug. 1976.
- |62| A.C. Ludwig  
"Wire Grid Modeling of Surfaces"  
IEEE Trans. Antennas and Propagat., vol. AP-35,

nº 9, pp. 1045-1048, Sep. 1987.

- |63| J. Portí  
Estudio Comparativo de Diferentes Ecuaciones Integrales para el campo eléctrico en el dominio del tiempo. Aplicación al cálculo del campo de cercanías.  
Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, 1988.
- |64| R. Gómez Martín  
Ecuaciones integrales en el dominio del tiempo  
Comunicación interna, 1988.
- |65| G.A. Thiele  
"Wire Antennas"  
Computer Techniques for Electromagnetics. Cap. 2, New York: Pergamon Press, 1973.
- |66| E.K. Miller, R.M. Bevensee, A.J. Poggio, R. Adams and F.J. Deadrick  
"An evaluation of computer programs using integral equations for the electromagnetic analysis of thin wire structures"  
Interaction Notes, Note March 1974.
- |67| A. Salinas  
Aplicación de la técnica monopulso a una agrupación plana de antenas lineales excitadas por pulsos electromagnéticos.  
Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, 1986.

- |68| G.J. Burke  
The numerical electromagnetic code NEC. Application of the method of moment to electromagnetic fields.  
The SCEE Press, 1980.
- |69| A. Rubio  
Estudio en el dominio del tiempo de agrupaciones de antenas lineales adaptadas, excitadas por EMP.  
Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, 1985.
- |70| C.A. Balanis  
"Antenna Theory. Analysis and Design"  
New York: Harper and Row, 1982.
- |71| R. Torres  
Optimización de la impedancia de carga en una antena lineal para radiación de pulsos electromagnéticos.  
Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, 1986.
- |72| S.M. Rao, T.K. Sarkar and S.A. Dianat  
"A novel technique to the solution of transient electromagnetic scattering from thin wire"  
IEEE Trans. Antennas and Propagat, vol. AP-34, pp. 630-634, 1986.
- |73| A.G. Tijhuis  
"Toward a stable marching-on-in-time method for two-dimensional transient electromagnetic sca-

attering problems"

Radio Science, vol. 19, 1311-1317, 1984.

- |74| C.L. Bennett, A.M. Auckenthaler, R.S. Smith and J.D. DeLorenzo  
"Space-time integral equation approach to the large body scattering problem"  
Rome Air Development Center, Final Tech. Rep. AD-763794, 1973.
- |75| B.D. Popovic, M.B. Dragovic and A.R. Djordjevic  
"Analysis and Synthesis of Wire Antennas"  
London: Research Studies Press, 1982.
- |76| C.M. Butler, B.M. Duff, R.W.P. King and E. Yung  
"Theoretical and experimental investigations of thin-wire structures: Junction conditions, Currents and charges"  
Interaction Notes, Note 238, February 1975.
- |77| T.T. Wu and R.W.P. King  
"The Tapered Antenna and Its Application to the Junction Problem for Thin-Wires"  
IEEE Trans. on Antennas and Propagat., vol. AP-24, no1, 1976.
- |78| R.W.P. King and T.T. Wu  
"Analysis of crossed wires in a plane-wave field"  
Office of Naval Research, Technical Report No. 653, July 1974.
- |79| R.S. Elliot  
"Antenna Theory and Design"

New Jersey: Prentice Hall, 1981.

- |80| B.A. Finlayson  
"The method of weighted residuals and variational Principles"  
New York: Academic Press, 1972.
- |81| R.F. Harrington  
"Matrix methods for field problems"  
Proc. IEEE, vol. 55, pp. 136-149, 1967.
- |82| P.L.E. Uslenghi, Ed.  
Electromagnetic Scattering  
New York: Academic Press, 1978.
- |83| R.M. Bevensee, J.N. Brittingham, F.J. Deadrack,  
T.H. Lehman, E.K. Miller and A.J. Poggio  
"Computer codes for EMP interaction and coupling"  
IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 26, pp.  
156-165, 1978.
- |84| M. Bevensee  
"A thin-wire computer code for antennas or  
scatterers with pulse expansion functions for  
currents"  
Lawrence Livermore Laboratory, Livermore CA,  
UCRL-52028, 1976.
- |85| J. Moore and P.G. Denholm  
"Electromagnetic scattering by arrays of thin  
parallel wires"  
Ministry of Defense, London, AWRE REPORT NO.

016/76, 1976.

- |86| E.P. Sayre  
"Junction Discontinuities in Wire Antennas and Scattering Problems"  
IEEE Trans on Antennas and Propagat., pp. 216-217, March, 1973.
- |87| R. Mittra and W.L Ko  
"A finite difference approach to the wire junction problem"  
IEEE Trans. on Antennas and Propagat., pp. 435-437, May 1975.
- |88| H.H. Chao, B.J. Strait  
"Radiation and Scattering by configurations of bent wires with junctions"  
IEEE Trans. on Antennas and Propagat., pp. 701-702, Sep. 1971.
- |89| C.M. Butler  
"Currents induced on a pair of skew crossed wires"  
IEEE Trans. on Antennas and Propagat., vol. Ap-20, no 6. pp. 731-736, Nov. 1972.
- |90| R.W. Adler  
"A comparison of thin-wire EM modeling codes for the case of scattering from a cross"  
Naval Postgraduate School Code 62AB, Monterey CA 93943.
- |91| R.W. Burton and R.W.P. King

"Measured Current and Charges on thin Crossed  
Antennas in a Plane Wave Field"  
IEEE Trans on Antennas and Prop., AP-23,n<sup>o</sup>s, pp.  
657-664, Sept. 1975