



UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha ..16-9-94..
ENTRADA NUM. 1324

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento 615154646
Nº Copia 16345873

DOTIG-3:
**PROGRAMA PARA EL ESTUDIO DE LA
INTERACCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS
CON ESTRUCTURAS CONDUCTORAS MODELADAS
POR HILOS.**

Memoria presentada por Ignacio F. Sánchez García para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada.

Fdo. Ignacio F. Sánchez García

Dña. Amelia Rubio Bretones, Doctora en Ciencias Físicas, Profesora Titular del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada,
y

D. Alfonso Salinas Extremera, Doctor en Ciencias Físicas, Profesor Titular del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada

CERTIFICAN

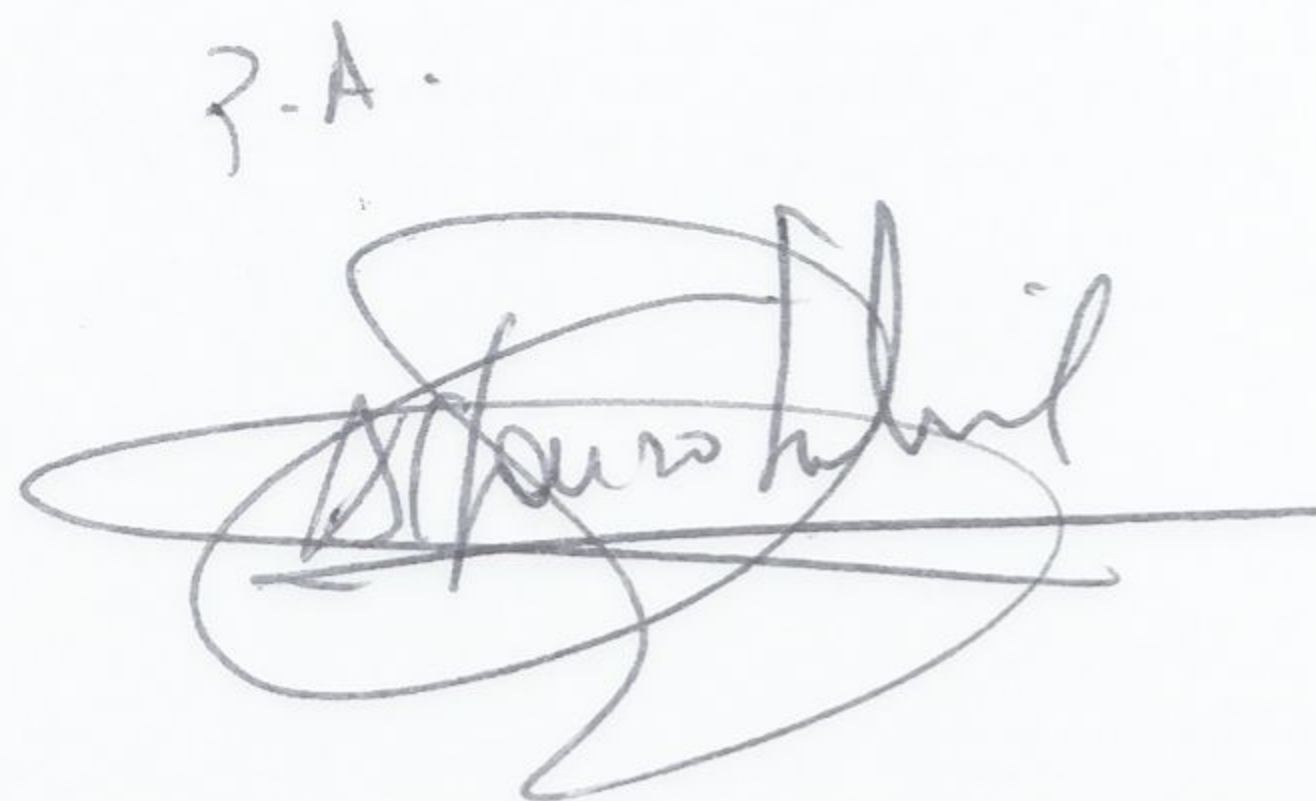
Que el trabajo de investigación que se presenta en esta Memoria, titulado *DOTIG-3: PROGRAMA PARA EL ESTUDIO DE LA INTERACCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS CON ESTRUCTURAS CONDUCTORAS MODELADAS POR HILOS*, ha sido realizado en este Departamento por el Licenciado en Ciencias Físicas D. Ignacio F. Sánchez García bajo nuestra dirección, y constituye su Tesis Doctoral.

Con esta fecha autorizamos su presentación ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Granada.

Granada, seis de Septiembre de mil novecientos noventa y cuatro.



Fdo. Alfonso Salinas Extremera

3-A.


Fdo. Amelia Rubio Bretones

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a los Doctores Dña. Amelia Rubio Bretones y D. Alfonso Salinas Extremera, directores de esta Memoria, sin su interés, entusiasmo y dedicación no hubiese sido posible la realización de la misma.

A D. Rafael Gómez Martín y D. Bernardo García Olmedo, por su confianza, apoyo, e interés dedicados durante mi preparación académica en el Grupo de Electromagnetismo de Granada.

A mis compañeros Salvador Gonzalez García y Jesús Fornieles Callejón, por toda su ayuda, colaboración y paciencia prestadas.

Y, a todas aquellas personas que directa o indirectamente me apoyaron y animaron en los momentos difíciles.

*A mis padres
y
hermanos*

ESTE TRABAJO HA SIDO PARCIALMENTE FINANCIADO POR LA
COMISIÓN INTERMINISTERIAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA A
TRAVÉS DE LOS PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN TIC-92-0396.

Índice

1	Introducción	1
2	Fundamentos teóricos	5
2.1	Planteamientos numéricos de la dispersión de OGMT	5
2.1.1	Formulación de la ecuación integral para el campo eléctrico EFIE	6
2.2	Consideraciones sobre la ecuación integral EFIE	9
2.2.1	Aproximación de hilo delgado. Núcleo reducido	9
2.2.2	Aproximación de núcleo estirado	10
2.2.3	Condición	11
2.3	Desarrollo de la EFIE	12
2.3.1	Tratamiento de las superficies de las tapas	12
2.3.2	Tratamiento de las superficies de las tapas	15
3	Fundamentos numéricos	19
3.1	Introducción	19
3.2	Desarrollo analítico del método numérico	21
3.2.1	Discretización espacio-temporal	23
3.3	Desarrollo explícito de las funciones F , C , T , S	28
3.3.1	Función F	28
3.3.2	Función C	33
3.3.3	Función T	34
3.3.4	Función S	36
3.4	Uniones de hilos	36
3.4.1	Uniones formadas por hilos coaxiales	37
3.5	Modelado de estructuras con carga no lineal	45
4	Desarrollo del programa DOTIG-3	49
4.1	Estructura del programa DOTIG-3	49
4.1.1	Subrutina GEOMET	55

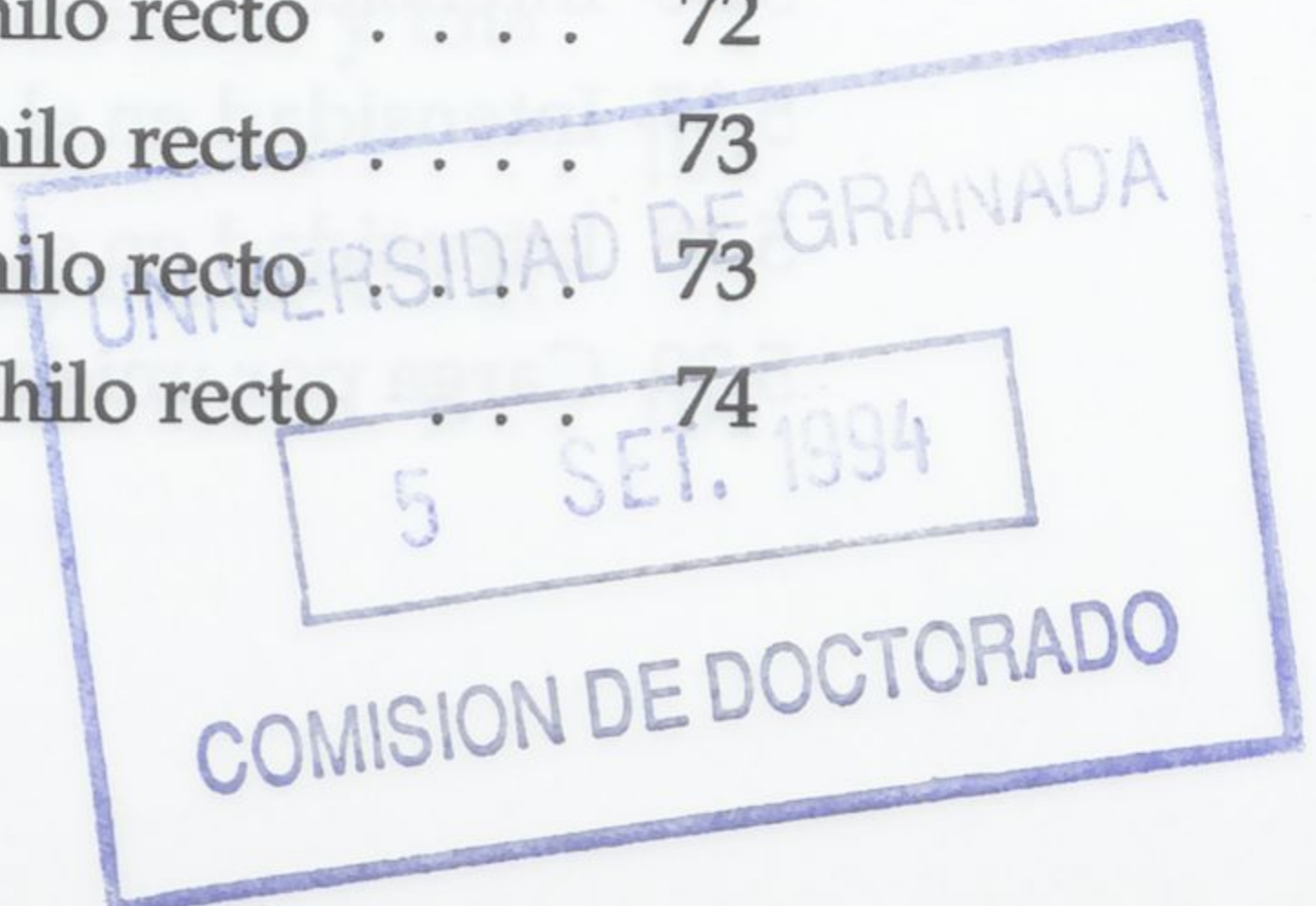
Indice

1	Introducción	1
2	Fundamentos teóricos	5
2.1	Planteamientos numéricos de la dispersión de OEMT	5
2.1.1	Formulación de la ecuación integral para el campo eléctrico EFIE.	6
2.2	Consideraciones sobre la ecuación integral EFIE	9
2.2.1	Aproximación de hilo delgado. Núcleo reducido	9
2.2.2	Aproximación de núcleo extendido	10
2.2.3	Condición de contorno extendida (EBC)	11
2.3	Desarrollo de la EFIE a partir de las EBC	13
2.3.1	Tratamiento de las superficies laterales	13
2.3.2	Tratamiento de las superficies de las tapas	15
3	Fundamentos numéricos	19
3.1	Introducción	19
3.2	Desarrollo analítico del método numérico	21
3.2.1	Discretización espacio-temporal	23
3.3	Desarrollo explícito de las funciones \mathcal{F} , \mathcal{C} , \mathcal{T} , \mathcal{S}	28
3.3.1	Función \mathcal{F}	28
3.3.2	Función \mathcal{C}	33
3.3.3	Función \mathcal{T}	34
3.3.4	Función \mathcal{S}	36
3.4	Uniones de hilos	36
3.4.1	Uniones formadas por hilos coaxiales	37
3.5	Modelado de estructuras con carga no lineal	45
4	Desarrollo del programa DOTIG-3	49
4.1	Estructura del programa DOTIG-3	49
4.1.1	Subrutina GEOMET	55

4.1.2	Función FUNINT1	57
4.1.3	Subrutinas FUNFG1 y FUNFG2	57
4.1.4	Función CAMPO	57
4.1.5	Subrutina LIBRO	58
4.2	Desarrollo del programa PREDOTIG-3	59
4.2.1	Lectura de DOTIG-3	62
4.2.2	Lectura de AWAS	62
4.2.3	Lectura de NEC-2	63
4.3	Desarrollo del programa POSDOTIG-3	63
4.3.1	Procesado de corrientes inducidas	64
4.3.2	Cálculo de campos de radiación	65
4.3.3	Cálculo de campos cercanos	66
4.3.4	Cálculo de la sección recta radar (RCS)	67
4.3.5	Cálculo de cargas inducidas	68
5	Resultados	69
5.1	El hilo recto	69
5.1.1	Hilo recto como dispersor	69
5.1.2	Hilo recto como antena	84
5.1.3	Intensidad y carga en una antena de hilo	94
5.1.4	Agrupaciones de antenas de hilo	99
5.2	Uniones	106
5.2.1	Unión en hilos coaxiales de distinto radio	106
5.2.2	Malla de doce hilos	108
5.2.3	Cruz de cuatro hilos	113
5.2.4	Modelo de cubo	115
5.2.5	Modelado de superficies	118
5.3	Limitaciones y rango de aplicación.	122
5.3.1	Limitación en el número de segmentos	124
5.3.2	Limitación de radios	124
	Conclusiones	127
A	Cálculo de campos de radiación	129
B	Cálculo de campo cercanos	133
C	Cálculo de cargas inducidas	137

Indice de Figuras

2.1	Problema general de la dispersión de ondas electromagnéticas	6
2.2	Conversión del problema general de la dispersión	12
2.3	Distribución de superficies a lo largo del hilo	13
2.4	Aproximación monopolar de la tapa	17
3.1	Discretización espacial	24
3.2	Esquema gráfico para la discretización temporal	25
3.3	Coordenadas utilizadas en la estructura de hilo.	29
3.4	Uniones de hilos coaxiales de igual radio	38
3.5	Unión con puntos fuente inicial y final	41
3.6	Unión con puntos fuente final e inicial	42
3.7	Unión con puntos fuentes finales	42
3.8	Unión de hilos coaxiales de diferente radio	43
3.9	Diagrama de una antena de hilo con carga no lineal	45
3.10	Diagrama de un hilo dispersor con carga no lineal	46
4.1	Estructura general de los programas	50
4.2	Diagrama de bloques de DOTIG-3	51
4.3	Diagrama de bloques de GEOMET	56
4.4	Geometría de una malla	60
4.5	Diagrama de bloques del programa POSDOTIG-3	64
4.6	Mapa de campos cercanos	67
5.1	Geometría de un hilo como dispersor	70
5.2	Corriente en el segmento central del hilo en el tiempo	71
5.3	Corriente en el segmento central del hilo en frecuencia	72
5.4	Campo de radiación en el tiempo a $\theta = 30$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto	72
5.5	Campo de radiación en el tiempo a $\theta = 60$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto	73
5.6	Campo de radiación en el tiempo a $\theta = 90$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto	73
5.7	Campo de radiación en frecuencia a $\theta = 30$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto	74



5.8	Campo de radiación en frecuencia a $\theta = 60$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto . . .	74
5.9	Campo de radiación en frecuencia a $\theta = 90$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto . . .	75
5.10	Campo cercano en el tiempo a $X=0\text{m.}$, $Y=1\text{m.}$, $Z=0\text{m.}$ en un hilo recto . .	77
5.11	Campo cercano en el tiempo a $X=5\text{m.}$, $Y=5\text{m.}$, $Z=5\text{m.}$ en un hilo recto . .	77
5.12	Campo cercano en frecuencia a $X=0\text{m.}$, $Y=1\text{m.}$, $Z=0\text{m.}$ en un hilo recto . .	78
5.13	Campo cercano en frecuencia a $X=5\text{m.}$, $Y=5\text{m.}$, $Z=5\text{m.}$ en un hilo recto . .	78
5.14	Sección recta radar de un hilo	79
5.15	Antena de hilo dispersora cargada con una resistencia	80
5.16	Intensidad en el segmento central del hilo con distintos valores de resistencia	81
5.17	Antena de hilo dispersora cargada con dos resistencia	81
5.18	Intensidad en el segmento central del hilo con dos resistencias de distintos valores	82
5.19	Sección recta radar de una antena de hilo dispersora cargada con una resistencia de $Z_L = 75\Omega$	82
5.20	Sección recta radar de una antena de hilo dispersora cargada con una resistencia de $Z_L = 300\Omega$	83
5.21	Sección recta radar de una antena de hilo dispersora cargada con una resistencia de $Z_L = \infty$	83
5.22	Antena alimentada en su centro	84
5.23	Intensidad en función del tiempo en el segmento central de una antena .	85
5.24	Conductancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 7$	86
5.25	Conductancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 8$	87
5.26	Conductancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 9$	88
5.27	Conductancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 10$	89
5.28	Conductancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 11$	89
5.29	Susceptancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 7$	90
5.30	Susceptancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 8$	90
5.31	Susceptancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 9$	91
5.32	Susceptancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 10$	91
5.33	Susceptancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 11$	92
5.34	Antena de hilo cargada con una resistencia	92
5.35	Intensidad en el antenas con varias cargas	93
5.36	Intensidad en el instante 5 sobre una antena de hilo	95
5.37	Intensidad en el instante 13 sobre una antena de hilo	95
5.38	Intensidad en el instante 25 sobre una antena de hilo	95
5.39	Carga por unidad de longitud en el instante 5 sobre una antena de hilo .	95

5.40	Carga por unidad de longitud en el instante 13 sobre una antena de hilo .	95
5.41	Carga por unidad de longitud en el instante 25 sobre una antena de hilo .	95
5.42	Intensidad en el instante 29 sobre una antena de hilo	96
5.43	Intensidad en el instante 33 sobre una antena de hilo	96
5.44	Intensidad en el instante 37 sobre una antena de hilo	96
5.45	Carga por unidad de longitud en el instante 29 sobre una antena de hilo .	96
5.46	Carga por unidad de longitud en el instante 33 sobre una antena de hilo .	96
5.47	Carga por unidad de longitud en el instante 37 sobre una antena de hilo .	96
5.48	Intensidad en el instante 45 sobre una antena de hilo	97
5.49	Intensidad en el instante 53 sobre una antena de hilo	97
5.50	Intensidad en el instante 61 sobre una antena de hilo	97
5.51	Carga por unidad de longitud en el instante 45 sobre una antena de hilo .	97
5.52	Carga por unidad de longitud en el instante 53 sobre una antena de hilo .	97
5.53	Carga por unidad de longitud en el instante 61 sobre una antena de hilo .	97
5.54	Intensidad en el instante 81 sobre una antena de hilo	98
5.55	Intensidad en el instante 89 sobre una antena de hilo	98
5.56	Carga por unidad de longitud en el instante 81 sobre una antena de hilo .	98
5.57	Carga por unidad de longitud en el instante 89 sobre una antena de hilo .	98
5.58	Agrupación de antenas lineales	99
5.59	Intensidad en el segmento central del hilo dos en un array con $d=0.125$ m.	100
5.60	Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.125$ m. y una dirección $\theta = 45$ y $\varphi = 0$	100
5.61	Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.125$ m. y una dirección $\theta = 90$ y $\varphi = 0$	101
5.62	Intensidad en el segmento central del hilo dos en un array con $d=0.25$ m.	101
5.63	Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.25$ m. y una dirección $\theta = 45$ y $\varphi = 0$	102
5.64	Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.25$ m. y una dirección $\theta = 90$ y $\varphi = 0$	102
5.65	Intensidad en el segmento central del hilo dos en un array con $d=0.5$ m. .	103
5.66	Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.5$ m. y una dirección $\theta = 45$ y $\varphi = 0$	103
5.67	Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.5$ m. y una dirección $\theta = 90$ y $\varphi = 0$	104
5.68	Intensidad en el segmento central del hilo dos en una array con $d=0.5$ m y cargas resistivas en ambos brazos de cada antena de 200Ω	104

5.69	Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.5$ m. y una dirección $\theta = 90$ y $\varphi = 0$ con cargas resistivas en ambos brazos de cada antena de 200Ω	105
5.70	Dos hilos coaxiales de distinto radio.	106
5.71	Intensidad en el tiempo para una estructura de diferente radio $R_1=0.001$ m. y $R_2=0.002$ m.	107
5.72	Intensidad en frecuencia para una estructura de diferente radio $R_1=0.001$ m. y $R_2=0.002$ m.	107
5.73	Modelo de malla formado por 12 hilos.	108
5.74	Intensidad en el segmento central del primer hilo en una malla	109
5.75	Intensidad en un segmento proximo a una unión en una malla	109
5.76	Intensidad en frecuencia del segmento central del primer hilo en una malla	110
5.77	Intensidad en frecuencia del segmento próximo a una unión en una malla	110
5.78	Campo de cercanías en el tiempo para $X=10$ m. , $Y=10$ m. y $Z=10$ m. en una malla	111
5.79	Campo de cercanías en frecuencia para $X=10$ m. , $Y=10$ m. y $Z=10$ m. en una malla	111
5.80	Campo lejano en tiempo de una malla en la dirección $\theta = 180$, $\varphi = 0$	112
5.81	Campo lejano en frecuencia de una malla en la dirección $\theta = 180$, $\varphi = 0$	112
5.82	Modelo de cruz formado por 4 hilos.	113
5.83	Intensidad en el tiempo de una cruz en el segmento central del primer hilo	114
5.84	Intensidad en frecuencia de una cruz en el segmento central del primer hilo	114
5.85	Modelo de cubo formado por 12 hilos.	115
5.86	Intensidad en el tiempo de un cubo en el segmento central del primer hilo	116
5.87	Intensidad en el tiempo de un cubo en el segmento central del cuarto hilo	116
5.88	Intensidad en el tiempo de un cubo en el segmento central del quinto hilo	117
5.89	Modelado de superficies reales por una malla de hilos	120
5.90	Campo de radiación de una placa de lado 1.4 m. modelada por hilos	121
5.91	Intensidad en el punto central de un hilo con distintos segmentos.	125
5.92	Intensidad en el punto central de un hilo con distintos radios.	126
A.1	Diagrama de coordenadas para el campo dispersado	130
A.2	Coordenadas locales para el campo dispersado	131
B.1	Diagrama de coordenadas para el campo total	134

Indice de Tablas

2.1	VARIABLES LOCALES DEFINIDAS EN EL HILO	10
3.1	TIEMPO DE CPU INVERTIDOS PARA DIFERENTES FUNCIONES PESO	22
3.2	COEFICIENTES $F(p,q)$	33
3.3	COEFICIENTES $C(p,q)$	35
4.1	ENTRADA-SALIDA DE GEOMET	55
4.2	ENTRADA-SALIDA DE FUNFG1	58
4.3	ENTRADA-SALIDA DE FUNFG2	58
4.4	ENTRADA-SALIDA DE LIBRO	59
5.1	TIEMPO DE CPU INVERTIDOS PARA UN HILO POR DIFERENTES PROGRAMAS	76
5.2	TIEMPO DE CPU INVERTIDOS PARA UNA ANTENA POR DIFERENTES PROGRAMAS	88

3.69 Campo de radiación para una distancia entre antenas de 0.5 m, y una
dirección $\theta = 90^\circ$ y $\phi = 0^\circ$ con ángulos relativos en ambos ejes de cada
antena de 200° 105

3.70 Una línea de radiación de longitud 106

3.71 Intensidad en el tiempo para una estructura de diferente radio $R = 0.001$
m, y $\theta = 0^\circ$ y $\phi = 0^\circ$ 107

3.72 Intensidad en frecuencia para una estructura de diferente radio $R = 0.001$
m, y $\theta = 0^\circ$ y $\phi = 0^\circ$ 107

3.73 Medio de radiación formado por 11 hilos 108

3.74 Variables locales definidas en el hilo del segmento central 109

3.75 Intensidad en el tiempo para una estructura de diferente radio $R = 0.001$
m, y $\theta = 0^\circ$ y $\phi = 0^\circ$ 109

3.76 Intensidad en frecuencia para una estructura de diferente radio $R = 0.001$
m, y $\theta = 0^\circ$ y $\phi = 0^\circ$ 109

3.77 Campo de radiación para una distancia entre antenas de 0.5 m, y una
dirección $\theta = 90^\circ$ y $\phi = 0^\circ$ con ángulos relativos en ambos ejes de cada
antena de 200° 109

3.78 Una línea de radiación de longitud 109

3.79 Intensidad en el tiempo para una estructura de diferente radio $R = 0.001$
m, y $\theta = 0^\circ$ y $\phi = 0^\circ$ 109

3.80 Intensidad en frecuencia para una estructura de diferente radio $R = 0.001$
m, y $\theta = 0^\circ$ y $\phi = 0^\circ$ 109

4.1 Diagrama de radiación para el campo disperso 130

4.2 Constantes locales para el campo disperso 131

B.1 Diagrama de radiación para el campo total 134

Capítulo 1

Introducción

Suele ser común que al enunciar las ecuaciones de Maxwell en un curso básico de Electromagnetismo, el estudiante plantee la pregunta de si existe una solución general de estas ecuaciones. Esta cuestión contrasta con la incredulidad manifiesta al explicarles cómo una determinada función de transferencia representa tanto a un circuito de parámetros localizados, como a un sistema mecánico al mismo tiempo. También les resulta difícil de entender cómo es necesario un proceso de simplificación para obtener soluciones analíticas o para contrastar los datos obtenidos en el laboratorio con las predicciones teóricas.

Esto es un ejemplo de cómo las maneras tradicionales de abordar los problemas electromagnéticos: i) análisis matemático ii) experimentación, conllevan una cierta falta sistemática de método, lo que hace que el estudiante tenga una sensación de arbitrariedad e incapacidad de abordar el problema.

Partiremos de la hipótesis de que el electromagnetismo computacional (EMC) constituye una tercera herramienta en el Electromagnetismo, junto al análisis matemático y la experimentación. Podemos definir el EMC como aquella herramienta en la que para el análisis, resolución y validación de un problema electromagnético se hace uso de forma intrínseca y necesaria de un computador. [1]

El método al que hemos aludido en el EMC viene definido por los siguientes pasos:

- Proceso de conceptualización o definición matemática del problema físico.
- Formulación del problema en base a un formalismo que teóricamente está resuelto.
- Implementación numérica: método numérico.
- Validación de los resultados, tanto con otros métodos como con resultados experimentales.

Cualquier problema electromagnético podemos enmarcarlo en la definición de una relación cuantitativa entre causa (función de entrada) y efecto (función de salida o respuesta). A esta relación se le llama función de transferencia y es derivada directamente

de las ecuaciones de Maxwell. Aunque la citada función de transferencia puede ser la incógnita (junto con la geometría del problema) en los problemas inversos, nos plantearemos al contrario un problema directo en el cual la incógnita es la respuesta del sistema a partir de una función de entrada.

En esta memoria se presenta el desarrollo de un programa de ordenador cumpliendo una triple finalidad:

i) Análisis de sistemas electromagnéticos radiantes o dispersores con señales de entrada con gran contenido espectral, es decir, señales transitorias de corta duración.

ii) Visualización de fenómenos electromagnéticos, lo que conlleva una mejor interpretación y entendimiento.

iii) Labor de método, en cuanto a cómo se debe desarrollar y presentar un programa de ordenador que pretenda ser útil.

Proceso de conceptualización: Un primer paso es la elección del modelo de función de transferencia según el operador propagador de campo elegido que puede ser:

i) Operadores integrales obtenidos mediante la función de Green apropiada aplicada a las ecuaciones de Maxwell.

ii) Operadores diferenciales implícitos en las propias ecuaciones de Maxwell.

iii) Desarrollos en modos basados en propiedades de simetría del problema.

iv) Descripción óptica basada en rayos y coeficientes de difracción.

En nuestro caso la elección ha sido un formalismo integral basado en la función escalar de Green junto con unas determinadas condiciones de contorno en las superficies delimitadoras de la geometría. Esto nos lleva, como veremos más adelante, a una ecuación integro-diferencial (referida generalmente como ecuación integral) de Fredholm de primera o segunda clase, según se fueren condiciones de contorno para el campo eléctrico (EFIE) o para el magnético (MFIE). Este formalismo integral se amolda muy bien al caso de geometrías con conductores perfectos puesto que la integral se extiende a la superficie del dispersor. De forma muy parecida se abordaría materiales homogéneos, si bien en esta memoria nos hemos centrado en conductores perfectos.

En cualquier caso la ecuación integral se puede formular con dependencia temporal explícita (dominio del tiempo DT) o con dependencia temporal armónica (dominio de la frecuencia DF).

Hemos optado por el dominio del tiempo por las siguientes razones: [2]

- Permite trabajar fácilmente con señales de corta duración, lo que da información directa (vía transformada de Fourier) en un rango de frecuencias que puede caracterizar el comportamiento electromagnético del sistema.

- Permite el análisis de problemas no lineales cuya solución natural cae fuera del dominio de la frecuencia.

- Análisis de transitorios y visualización de fenómenos mediante un tratamiento posterior de los resultados obtenidos.

Formulación: Del problema general de la dispersión y radiación de señales electromagnéticas transitorias por estructuras conductoras perfectas: ¿Qué queremos calcular y a qué estamos dispuestos a renunciar en la solución?. Nos interesa poder abordar geometrías arbitrarias, lo que conlleva que las superficies delimitadoras puedan ser abiertas o cerradas. Esto nos elimina a la ecuación MFIE, limitándonos a la ecuación EFIE. [3] [4],[5].

La EFIE es una ecuación mucho más complicada que la MFIE en todos los aspectos. Sin embargo es posible simplificarla, si se modela la superficie dispersora o radiante mediante una adecuada malla de hilos. Igualmente las estructuras de hilos tienen interés por sí mismas.

Este análisis, evidentemente nos limitará la validez de los resultados obtenidos hasta aproximadamente aquellas longitudes de onda que sean del orden del tamaño físico del dispersor. La validez del modelo en términos cualitativos y su dependencia con parámetros del modelado está por determinar y debe ser objeto de estudio.

En la formulación de la ecuación EFIE, se aplica las condiciones de contorno en la superficie de los hilos, lo que conlleva una integral con dominio bidimensional. Para simplificarla a una integral unidimensional se puede aplicar la aproximación de hilo delgado, tanto en sus versiones de núcleo reducido como de núcleo extendido, o bien aplicar condiciones de contorno extendidas según veremos más adelante.

Implementación numérica: Utilizaremos el método de los momentos (MM) en el dominio del tiempo, para el cual tres operaciones de muestreo son necesarias para que el método genere un sistema algebraico de ecuaciones: [3], [4], [6]-[7]

- Desarrollo de la función incógnita en funciones base.
- Discretización de la ecuación mediante funciones peso.
- Muestreo del propio operador integro-diferencial.

El sistema lineal de ecuaciones obtenido deberá ser resuelto (computacionalmente) mediante inversión matricial, puesto que la matriz resultante, matriz de impedancias, es independiente del tiempo.

Resuelto el sistema, para cada instante obtenemos los coeficientes que definen la función de salida en términos de las funciones base.

Validación: Finalizados todos estos pasos aún no podemos dar por terminado nuestro programa. Queda el último paso, que también suele ser el más largo: la validación. De hecho este paso debemos considerarlo como un final abierto que añade puntos suspensivos a nuestro trabajo.

Un programa de ordenador debe atender a tres atributos fundamentalmente: [1]

Exactitud en los resultados obtenidos, tanto en la función incógnita como en magnitudes asociadas. Eficiencia, en el sentido de necesitar un mínimo coste en el desarrollo de entradas y salidas e interpretación de los resultados. Útil en el sentido de máximo de aplicabilidad.

Por todo esto, se ha desarrollado esta Memoria desarrollándose un programa, DOTIG-3, basado en la resolución numérica de la ecuación integral para el campo eléctrico en el dominio del tiempo que permite obtener la respuesta de una estructura conductora modelada por hilos a una onda electromagnética transitoria.

El contenido de los diferentes capítulos de los que consta dicha Memoria se ha ordenado de la siguiente forma:

En el capítulo segundo, se hace un estudio del problema a resolver y se plantea las diferentes ecuaciones que describen el suceso, encontrándose la ecuación más idónea para su implementación, llamada ecuación EFIE.

$$\hat{n} \times \left[\epsilon_0 \partial_t \vec{E}^i(\vec{r}, t) + \nabla (\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A}(\vec{r}, t) \right] = 0$$

Una vez fijado los objetivos, el siguiente punto consistirá en dar una breve introducción histórica al método numérico utilizado (Método de los Momentos) así como su implementación a las estructuras de interés (capítulo 3). Es en este capítulo donde se abordan los problemas de uniones de hilos, efectuándose una clasificación de los mismos así como su diferente tratamiento.

El capítulo cuarto se centra en el desarrollo del programa DOTIG-3 cara al usuario. En él se analizan el programa principal DOTIG-3, así como los programas auxiliares de preproceso (modelación), PREDOTIG-3, como de postproceso (tratamiento de las corrientes para la obtención de campos cargas, etc) POSDOTIG-3.

Por último, se desarrolla una validación y comprobación de los resultados obtenidos con DOTIG-3, frente a resultados teóricos, experimentales y numéricos (éstos últimos de renombrado prestigio en el ámbito del Electromagnetismo). En este capítulo se abordan estructuras canónicas como el hilo recto en sus diferentes formas (antena o dispersor), se tratan estructuras en el plano y en el espacio complejas formadas por uniones de hilos (cruz, malla, cubo, etc) así como un estudio de la modelación de superficies por hilos.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1 Planteamientos numéricos de la dispersión de OEMT

Todos los fenómenos electromagnéticos derivan de las ecuaciones de Maxwell por lo que éstas suponen el punto de partida lógico a la hora del planteamiento de un determinado problema. Desde este punto de vista hay que recordar que las ecuaciones de Maxwell pueden postularse en dos formas básicas, la diferencial original y la integral en términos de fuentes. A la hora de elegir una u otra formulación juega un papel importante la forma, composición y tamaño eléctrico del objeto.

La diferencia fundamental entre ambos es el propagador de campo empleado. La forma diferencial usa las ecuaciones rotacionales para propagar los campos, lo que en un sentido computacional significa que el campo en un punto es un 'promedio pesado' de los campos vecinos. Por otra parte la forma integral usa la función de Green como propagador, en cuyo caso el campo en un punto viene determinado por una integración sobre las fuentes que lo causan.

Debido al carácter local del operador diferencial los métodos basados en la formulación diferencial permiten un tratamiento del problema más general en términos de las propiedades del medio comparado con las posibilidades que presenta la formulación integral en la que el operador tiene carácter más global. Como contrapartida estos métodos son computacionalmente muy costosos [8], [9] y además no llevan implícita la condición de radiación por lo que para problemas abiertos se hace necesario aproximar dicha condición para que sea posible truncar la red en la que se resuelven las ecuaciones diferenciales.

La formulación integral lleva implícita la condición de radiación y se caracteriza por el uso de la función de Green del problema. Presenta la ventaja de que cuando se conoce la función de Green apropiada al problema, éste puede reducirse en una dimensión (una excepción es un cuerpo penetrable inhomogéneo donde no es posible la reducción). Es

posible incluso transformar un problema tridimensional en monodimensional mediante la modelación por una malla de hilos de la superficie del objeto cuya interacción con una señal electromagnética queremos conocer. Esta aproximación es especialmente válida para cuerpos conductores. Consecuentemente la formulación integral y su solución mediante el método de los momentos (MM) se considera como la forma más efectiva para tratar problemas de interacción de ondas electromagnéticas (OEM) con estructuras que cumplan que su dimensión máxima L sea menor o igual que 3λ (zona de resonancia) y cuya función de Green pueda ser utilizada eficientemente como es el caso de superficies conductoras en el espacio libre. Para el caso de más altas frecuencias aunque el MM es aplicable en principio, su uso en la práctica es inviable incluso para los ordenadores más modernos debido a la gran cantidad de información que es necesario manejar para tener en cuenta la interacción mutua entre diferentes partes de la estructura.

2.1.1 Formulación de la ecuación integral para el campo eléctrico EFIE.

El problema planteado es el cálculo de la densidad de corriente inducida en la superficie de un cuerpo conductor perfecto arbitrario, cuando sobre él incide una onda electromagnética transitoria (OEMT), y por consiguiente el campo eléctrico en cualquier punto del espacio. (Fig.2.1)

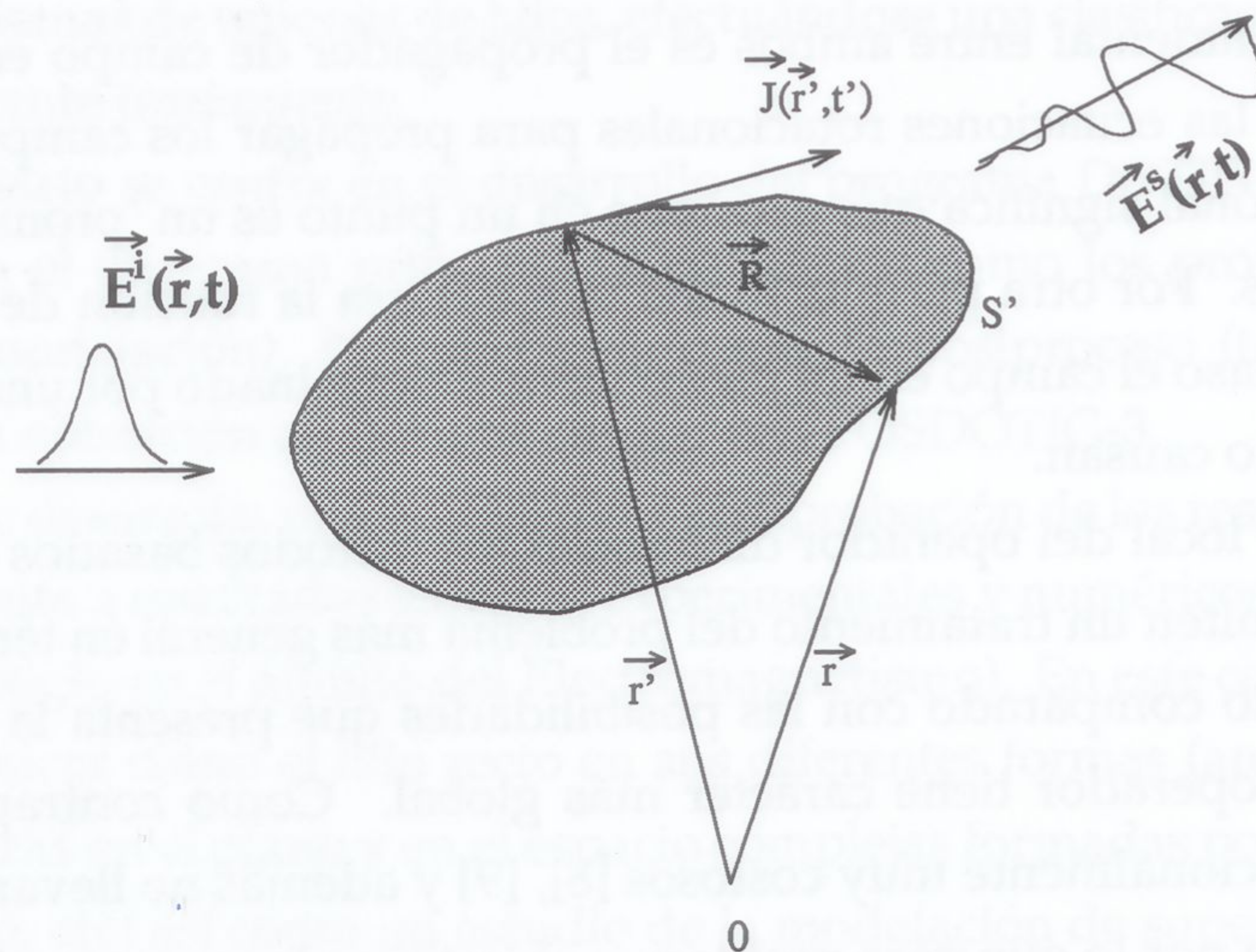


Figura 2.1: Problema general de la dispersión de ondas electromagnéticas

Planteando la condición de contorno a la componente tangencial del campo eléctrico total \vec{E} para que ésta sea nula, tenemos

$$\hat{n} \times [\vec{E}(\vec{r}, t)] = \hat{n} \times [\vec{E}^i(\vec{r}, t) + \vec{E}^s(\vec{r}, t)] = 0 \quad \forall \vec{r} \in S' \quad (2.1)$$

donde \vec{E}^s es el campo eléctrico dispersado y cuyas fuentes son las densidades superficiales de corriente y carga eléctrica inducidas sobre la superficie del objeto, \vec{E}^i es el campo incidente, \vec{E} es el campo total y \hat{n} es el vector normal a la superficie.

El campo eléctrico dispersado puede expresarse en términos de los potenciales eléctrico V y magnético \vec{A} :

$$\hat{n} \times \left[\epsilon_0 \vec{E}^i - \nabla V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (2.2)$$

donde:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R} dS' = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{[\vec{J}]}{R} dS' \quad (2.3)$$

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dS' = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{[\rho]}{R} dS' \quad (2.4)$$

En estas ecuaciones las magnitudes entre corchetes $[\rho]$ y $[\vec{J}]$ representan las densidades de carga y corriente retardadas respectivamente. Estas magnitudes deben ser evaluadas en el tiempo retardado $t' = t - R/c$, tiempo que tarda la excitación en alcanzar el punto campo desde el punto fuente.

La ecuación 2.2 se denomina ecuación en potenciales, que puede ser escrita exclusivamente, en función del potencial vector usando la ligadura de Lorenz ¹

Sustituyendo la ecuación integral de la ligadura de Lorenz en la ecuación 2.2 y derivando temporalmente resulta la denominada ecuación para el potencial vector

$$\hat{n} \times \left[\epsilon_0 \partial_t \vec{E}^i(\vec{r}, t) + \nabla (\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A}(\vec{r}, t) \right] = 0 \quad (2.5)$$

donde se denota por $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ La ecuación 2.5 puede ser escrita en su forma integral como:

$$\hat{n} \times \left[\epsilon_0 \vec{E}^i(\vec{r}, t) + \nabla \nabla \cdot \int_{-\infty}^t \vec{A}(\vec{r}, t') dt' - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{A}(\vec{r}, t) \right] = 0 \quad (2.6)$$

A partir de la ecuación 2.6 se puede obtener diferentes ecuaciones integrales [2]:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{E}^i &= -\frac{\hat{n}}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \frac{3([\vec{\Sigma}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\vec{\Sigma}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{R^3} + \frac{3([\vec{J}] \cdot \vec{R})\vec{R} - [\vec{J}](\vec{R} \cdot \vec{R})}{cR^4} + \\ &+ \frac{([\vec{J}] \times \vec{R}) \times \vec{R}}{c^2 R^3} dS' \end{aligned} \quad (2.7)$$

¹Nos unimos al Profesor J. Van Bladel en su intento de diferencia Lorenz y Lorentz. (Véase pg. 69 de Antennas and Propagation Magazine. vol. 33, num. 2, April 1991)

$$\hat{n} \times \vec{E}^i = -\frac{\hat{n}}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \left\{ \frac{[\rho]\vec{R}}{R^3} - \frac{(\nabla' \cdot [\vec{J}])_{t'}\vec{R}}{cR^2} - \frac{[\dot{\vec{J}}]}{c^2 R} \right\} dS' \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{E}^i &= -\frac{\hat{n}}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \frac{[\rho]\vec{R}}{R^3} + \frac{([\vec{J}] \cdot \vec{R})\vec{R} - \vec{R} \times ([\vec{J}] \times \vec{R})}{cR^4} + \\ &+ \frac{([\dot{\vec{J}}] \times \vec{R}) \times \vec{R}}{c^2 R^3} dS' \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\hat{n} \times \vec{E}^i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\hat{n} \times \int_{V'} \left\{ \frac{\nabla'[\rho]_{t'}}{R} + \frac{[\dot{\vec{J}}]}{c^2 R} \right\} dV' - \hat{n} \times \int_A \frac{[\rho]}{R} dA \right]_{\vec{A}_a}^{\vec{A}_b} \quad (2.10)$$

donde \sum representa:

$$\sum(\vec{r}', t) = \int_{-\infty}^t \vec{J}(\vec{r}', t) dt$$

De las diferentes posibilidades para la ecuación EFIE, puede demostrarse que de la que posee más ventajas computacionales es la ecuación 2.8, siendo ésta la que más retrasa los fenómenos de inestabilidad [10]. La formulación que se presenta en esta memoria parte de la ecuación 2.5 y obtiene una ecuación con todas las ventajas computacionales de la ecuación 2.8.

Análogamente, imponiendo condiciones de contorno al campo magnético, se obtendrá la ecuación MFIE:

$$\hat{n} \times \vec{H} = \vec{J} = 2\hat{n} \times \vec{H}^i + \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \int_{S'} \left(\frac{[\vec{J}] \times \vec{R}}{R^3} + \frac{[\dot{\vec{J}}] \times \vec{R}}{cR^2} \right) dS' \quad (2.11)$$

Desde el punto de vista teórico y de acuerdo con el teorema de unicidad [3], puede usarse cualquiera de las ecuaciones integrales anteriores, tanto la EFIE (ecuación integral para el campo eléctrico) como la MFIE (ecuación integral para el campo magnético). Sin embargo, desde el punto de vista computacional, la elección de una u otra ecuación viene condicionada a las características del blanco. En principio la ecuación MFIE puede parecer más cómoda para su programación, pues la función incógnita aparece dentro y fuera de la integral, y además su núcleo no posee derivadas espaciales. El hecho de aplicar esta ecuación a estructuras de hilos conllevaría al cálculo de senos y cosenos de ángulos muy pequeños, difícilmente tratable numéricamente. En general, la ecuación MFIE, ecuación de Fredholm de segunda especie, sólo es aplicable a estructuras cerradas y con curvaturas suaves.[11].

2.2 Consideraciones sobre la ecuación integral EFIE

2.2.1 Aproximación de hilo delgado. Núcleo reducido

Una aproximación frecuentemente usada al aplicar la ecuación 2.6 a estructuras de hilo es la de hilo delgado. Dicha aproximación nos establece un rango de validez en la solución numérica obtenida, ya que nos limita la mayor frecuencia, a la cual los resultados obtenidos son admisibles.

La aproximación de hilo delgado establece básicamente:

- Las corrientes azimutales son despreciables.
- Se desprecia la dependencia azimutal de la corriente.
- El núcleo exacto de la integral, puede substituirse por uno aproximado, llamado núcleo reducido, el cual permite separar los puntos fuente (en el eje del hilo) y campo (en la superficie), consiguiéndose una representación filamental de la estructura, y evitando por tanto singularidades en el propio núcleo de la integral [12],[13],[14].

El núcleo reducido convierte pues una integración en superficie a una integración a lo largo del eje del hilo, convirtiendo así el problema bidimensional en unidimensional.

- La condición de contorno del campo eléctrico se aplica a la superficie del conductor.
- La corriente al final (libre) del hilo se toma como cero, independientemente del radio del hilo.

Para obtener una solución fiable, a partir de la aproximación de hilo delgado es necesario tener en cuenta ciertas normas de modelado:

◦ El diámetro del hilo ha de ser mucho menor que la mínima longitud de onda de la excitación ($D \ll \lambda$). Usualmente, diámetros del orden de 0.2λ son usados bajo esta aproximación.

◦ Una relación que se deriva de dicha aproximación, relaciona el cociente entre la longitud del hilo y su diámetro. Relaciones entre 10 y 20 son frecuentemente utilizadas. Si la relación $\frac{L}{D}$ es grande, con respecto a los valores mencionados anteriormente, los campos producidos por las densidades de carga y corrientes inducidas en los extremos del hilo, ya sean tapas o uniones, pueden ser despreciables frente a las corrientes a lo largo de dicho hilo. En el caso de razones $\frac{L}{D}$ menores, los efectos producidos a consecuencias de dichos extremos pueden ser bastante significativas, alterando la solución para dichos campos obtenidos a partir de dichas corrientes. [15]

Aplicando la aproximación de hilo delgado, así como la aproximación de núcleo reducido a la ecuación de los potenciales (ecuación 2.5), ésta puede ser escrita como:

$$\hat{s} \cdot \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}^i(s, t) = \hat{s} \cdot \left[-\partial_s^2 + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \vec{A}(s, t) \quad (2.12)$$

donde el potencial viene dado por:

Variables locales	
$C(s')$	Eje de los hilos
s y s'	Coordenadas locales para puntos campo y fuente
\hat{s} y \hat{s}'	Vectores unitarios tangentes a $C(s')$ en \vec{r} y \vec{r}'
$t' = t - \frac{R}{c}$	Tiempo retardado
$R = \vec{r} - \vec{r}' $	Distancia entre punto fuente y campo
a	Radio del hilo
φ'	Angulo azimutal en una sección transversal del hilo
$\hat{\rho} = \hat{\rho}(\varphi)$	Vector unitario en la dirección transversal al hilo

Tabla 2.1: Variables locales definidas en el hilo

$$\vec{A}(s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{C(s')} \frac{I(s', t')}{r \text{oot}(s - s')^2 + a^2} ds' \quad (2.13)$$

$$I(s', t') = a \int_{-\pi}^{\pi} \vec{J}_s(s' \hat{s}' + a \hat{\rho}, t') d\varphi' \quad (2.14)$$

donde las variables usadas, vienen definidas en la tabla 2.1

2.2.2 Aproximación de núcleo extendido

Como se ha visto en el apartado anterior, la introducción del núcleo reducido en las integrales de campo produce un efecto sobre las cargas y corrientes en los extremos del hilo que pueden ser despreciables o afectar considerablemente a las corrientes en puntos próximos al extremo.[16], [17],[18]

A fin de analizar las influencias de estas cargas y corrientes en el caso de $\frac{a}{\lambda}$ superiores (donde a es el radio y λ es la longitud de ondas), se ha introducido un nuevo nivel de aproximación en el núcleo exacto de la integral. Dicha aproximación es la de núcleo extendido.

La aproximación de hilo delgado con núcleo extendido supone la densidad de corriente uniformemente distribuida a lo largo de la superficie S' del hilo. Como consecuencia los puntos campo y fuente están situados sobre la superficie S' .

La corriente axial a lo largo del hilo puede entonces aproximarse por:

$$\vec{I}_\varphi(l) = 2\pi a \vec{J}_s(r') \quad (2.15)$$

donde a es el radio del hilo en cuestión.

La densidad de corriente superficial será entonces:

$$\vec{J}(s) = \frac{I(s, t)}{2\pi a} \hat{s} \quad (2.16)$$

sustituyendo la ecuación 2.16 en la ecuación de los potenciales 2.5 se obtiene:

$$\hat{s} \cdot \epsilon_0 \partial_t \vec{E}^i(s, t) = (-\partial_s^2 + \frac{1}{c^2} \partial_t^2) \int_{C(s')} \int_0^\pi \frac{I(s', t - \frac{R}{c})}{4\pi^2 R} d\varphi' ds' \quad (2.17)$$

donde

$$R = \sqrt{(s - s')^2 + 4a^2 \text{sen}^2 \varphi'} \quad (2.18)$$

Esta ecuación posee una singularidad inherente en $R=0$, por lo que puede descomponerse el integrando en potencias del radio, al ser éste de un valor pequeño (aproximación de hilo delgado). El primer término de la serie, que es independiente del radio, es idéntico al obtenido en la aproximación de núcleo normal o reducido, mientras que el segundo término extiende la precisión a valores mayores del radio. [19],[20].

La distribución tubular de corriente que recorre el hilo da lugar a cargas anulares cuando los extremos de los segmentos no están alineados, como ocurre en la mayoría de los casos de estructuras con uniones. Los campos asociados a estas cargas anulares empeoran la solución y es por esto, por lo que se hará necesario tratar los segmentos próximos a la unión con la aproximación de núcleo reducido o normal. La validez de estas dos aproximaciones depende tanto del tamaño eléctrico del radio (relación a / λ) como de la tendencia de la excitación a producir corriente circunferencial.

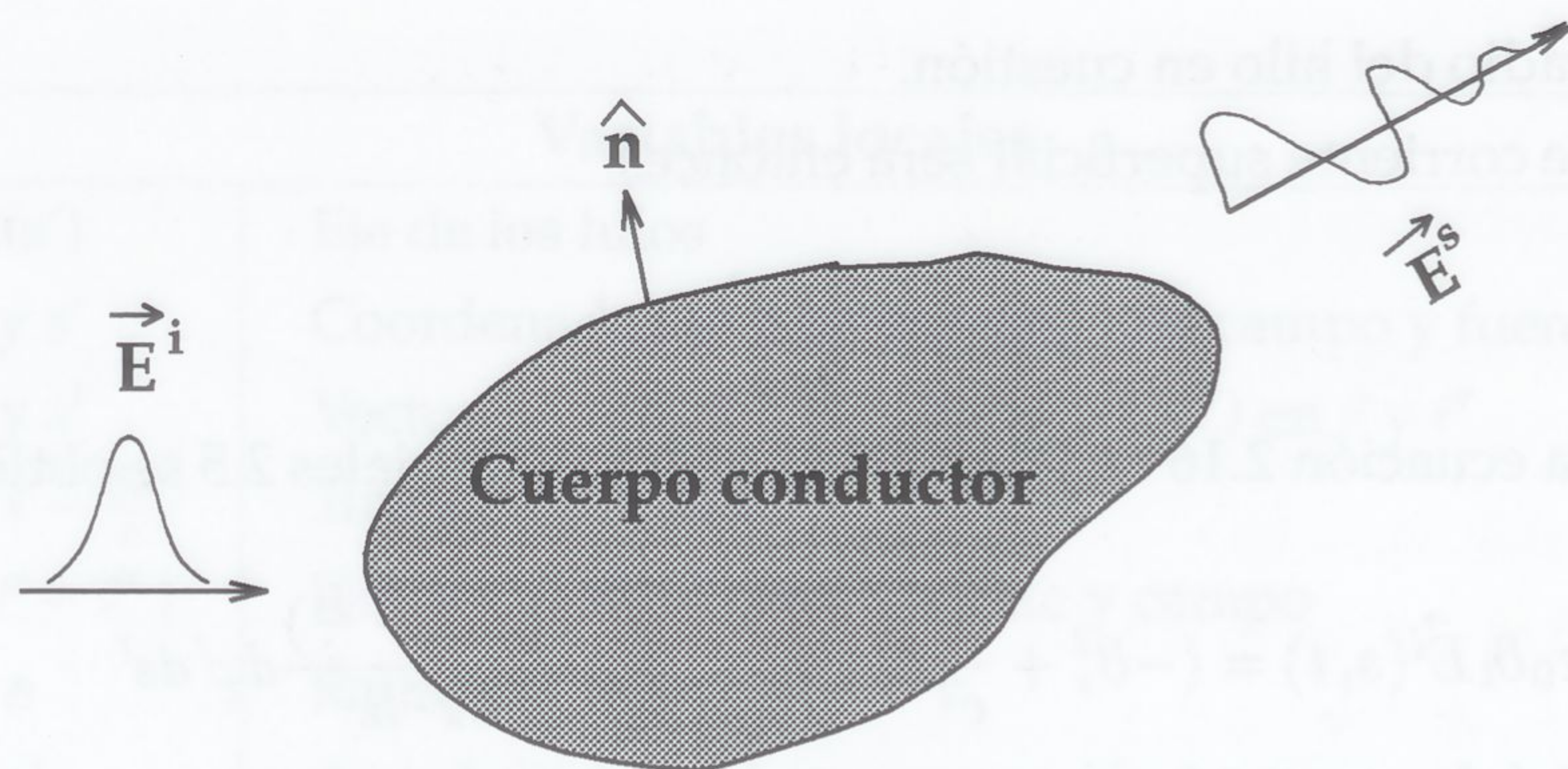
2.2.3 Condición de contorno extendida (EBC)

La condición de contorno extendida (EBC) surge como una particularización de las condiciones de contorno generalizadas (GBC) a las que se le imponen el teorema de equivalencia (fig. 2.2).

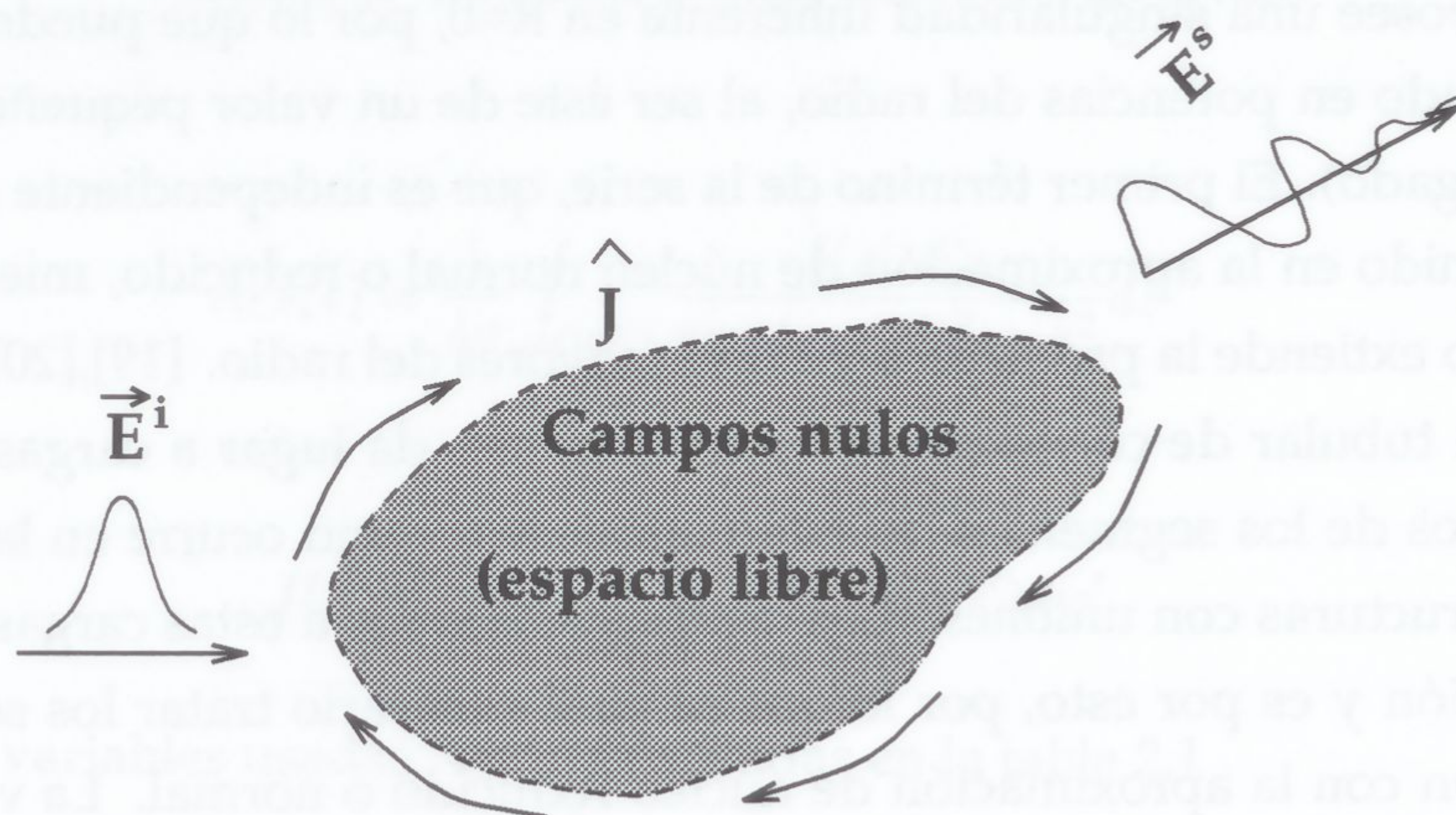
La condición de contorno extendida establece, basandose en la continuidad analítica de la ecuación integral, que es rigurosamente válido imponer la condición de contorno al campo en el eje del hilo en vez de en la superficie, ya que lo primero conlleva lo segundo [21],[22].

Para aplicar este teorema es condición necesaria que las superficies de los objetos a estudiar sean cerradas.

En el caso de hilos rectos para poder aplicar el teorema de EBC es necesario cerrar la estructura y por tanto incluir el efecto de las cargas y corrientes en la superficie de la tapa así como en las superficies anulares de las uniones de hilos de distinto radio.



a) Problema general de la dispersión



b) Equivalencia del problema general de la dispersión

Figura 2.2: Conversión del problema general de la dispersión

El estudio de las tapas y las uniones es un problema complejo, debido a que en ellas y en los segmentos próximos deja de cumplirse que la corriente es axial. Esto nos introducirá una serie de errores que pueden ser minimizados imponiendo que el tamaño eléctrico de la estructura sea pequeño, por lo cual podemos suponer un comportamiento cuasiestático en la señal [7].

2.3 Desarrollo de la EFIE a partir de las EBC

Partiendo de la ecuación 2.5 y forzando dicha ecuación al eje del hilo obtenemos:

$$-\varepsilon_0 \partial_t E_s^i(\vec{r}, t) = \partial_s \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A_s(\vec{r}, t) \quad (2.19)$$

utilizando coordenadas locales (fig. 2.3)

$$-\varepsilon_0 \partial_t E_s^i(s, t) = \partial_s \nabla \cdot \vec{A}(s, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A_s(s, t) \quad s_1 \leq s \leq s_2 \quad (2.20)$$

Integrando a lo largo de toda la superficie S' del hilo.

$$S' = \bigcup_{i=1}^3 S_i' \quad (2.21)$$

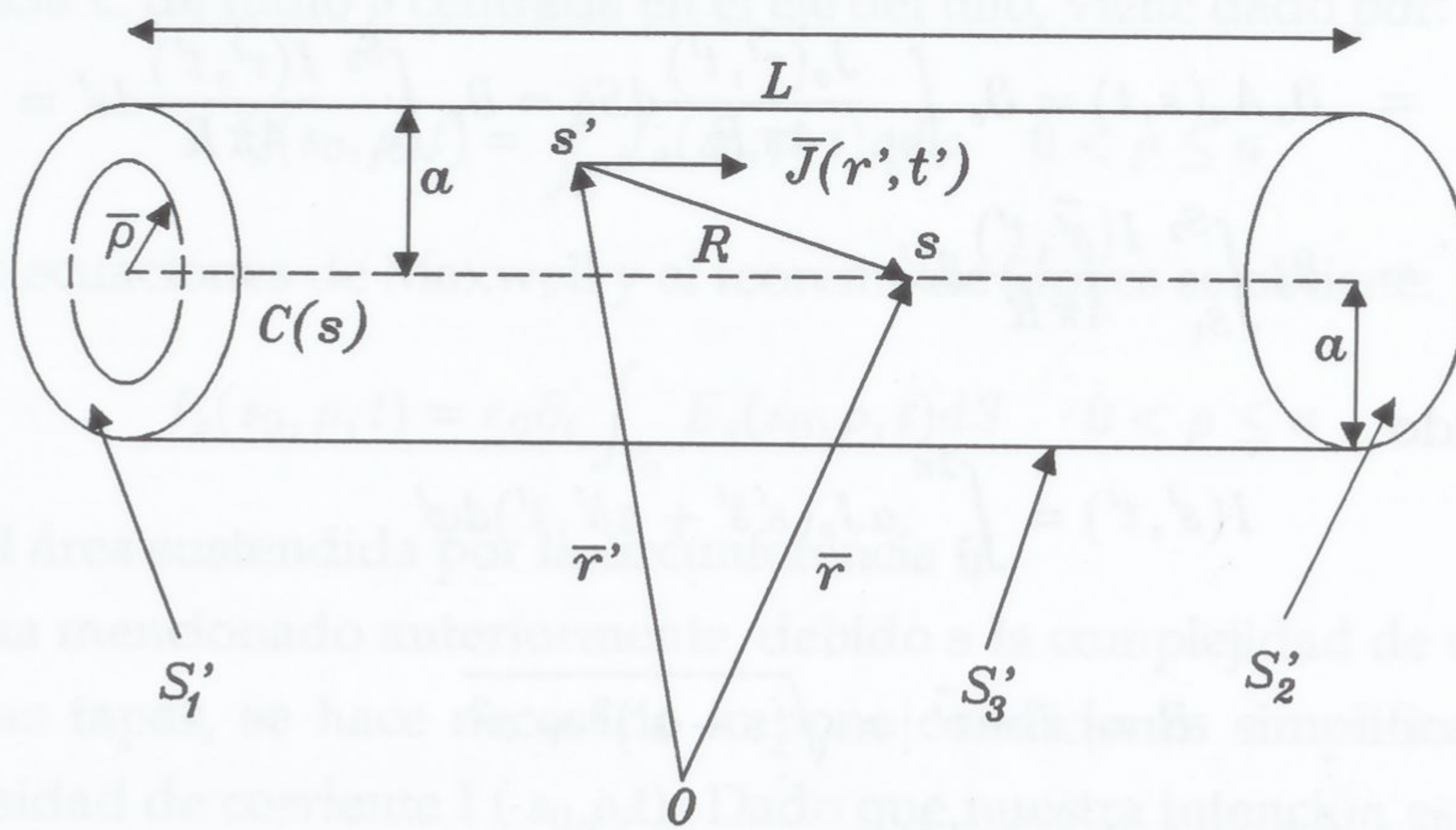


Figura 2.3: Distribución de superficies a lo largo del hilo

Las superficies en cuestión son las dos tapas y la superficie lateral del hilo (fig 2.3).

La ecuación 2.20 es rigurosamente válida pues no se han impuesto ningún tipo de aproximaciones.

El siguiente paso deberá ser tratar todas las superficies en particular.

2.3.1 Tratamiento de las superficies laterales

Descomponiendo el operador divergencia que aparece en la ecuación 2.20

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla_T \cdot \vec{A} + \partial_s(\vec{A} \cdot \hat{s}) \quad (2.22)$$

en su componente transversal y longitudinal, y donde el subíndice T denota las componentes transversales $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$. De la definición del potencial vector dada en la ecuación 2.3

se tiene

$$\begin{aligned}\nabla_T \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) &= \nabla_T \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R} dS_3 \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} \left\{ \frac{-\partial_t \vec{J}(\vec{r}', t')}{cR} - \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R^2} \right\} \cdot \nabla_T R dS_3\end{aligned}\quad (2.23)$$

como

$$\nabla_T R = a \frac{\vec{\rho} - \vec{\rho}'}{R} \quad (2.24)$$

y para puntos del eje $\vec{\rho}=0$ y $\hat{\rho}'$ es perpendicular a \vec{J} , y en todo punto de S'_3 queda

$$\nabla_T \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.25)$$

Por tanto sólo queda la contribución de la componente longitudinal de la divergencia:

$$\begin{aligned}\partial_s(\vec{A} \cdot \hat{s}) &= \partial_s A_s(s, t) = \partial_s \int_{S'_3} \frac{J_s(\vec{r}', t')}{4\pi R} dS_3 = \partial_s \int_{S_1}^{S_2} \frac{I(\vec{r}', t')}{4\pi R} ds' = \\ &= \partial_s \int_{S_1}^{S_2} \frac{I(s', t')}{4\pi R} ds'\end{aligned}\quad (2.26)$$

donde se ha definido

$$I(s', t') = \int_0^{2\pi} a J_s(s' \hat{s}' + a \hat{\rho}', t') d\varphi' \quad (2.27)$$

con

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(s - s')^2 + a^2} \quad (2.28)$$

Cambiando el operador ∂_s por $\partial_{s'}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\partial_s A_s(s, t) &= - \int_{S_1}^{S_2} \partial_{s'} \left\{ \frac{I(s', t')}{4\pi R} \right\} ds' - \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial_{t'} q(s', t')}{4\pi R} ds' = \\ &= \left[\frac{I(s', t')}{4\pi R} \right]_{S_1}^{S_2} - \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial_{t'} q(s', t')}{4\pi R} ds'\end{aligned}\quad (2.29)$$

donde

$$q(s', t) = - \int_0^t a \int_0^{2\pi} \partial_s J_s(s, t'') dt'' d\varphi' = - \int_0^t \partial_s I(s, t'') dt' \quad (2.30)$$

Derivando una segunda vez

$$\begin{aligned}\partial_s^2 A_s(s, t) &= \frac{s - s'}{4\pi R^2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_{t'} + \frac{1}{R} \right\} [I(s', t')]_{S_1}^{S_2} + \\ &+ \int_{S_1}^{S_2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_{t'} + \frac{1}{R} \right\} \partial_{t'} q(s', t') ds'\end{aligned}\quad (2.31)$$

por tanto, para S'_3 , la ecuación integral queda:

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_0 \partial_t E_s^i(s, t) &= \frac{s - s'}{4\pi R^2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_{t'} + \frac{1}{R} \right\} [I(s', t')]_{S_1}^{S_2} + \\
&+ \int_{S_1}^{S_2} \frac{s - s'}{4\pi R^2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_{t'} + \frac{1}{R} \right\} \partial_{t'} q(s', t') ds' - \\
&- \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \int_{S_1}^{S_2} \frac{I(s', t')}{4\pi R} ds'
\end{aligned} \quad (2.32)$$

2.3.2 Tratamiento de las superficies de las tapas

La ecuación 2.19 particularizada para S_1' o S_2' se reduce a:

$$-\varepsilon_0 \partial_t \vec{E}_s^i(s, t) = \partial_s \nabla_T \cdot \vec{A}(\vec{r}', t) \quad \vec{r}' \in S_1' \text{ o } S_2' \quad (2.33)$$

Sea $s_0 = s_1, s_2$ según integremos en S_1' o S_2' . El flujo de corriente superficial a través de la circunferencia C de radio ρ centrada en el eje del hilo, viene dado por:

$$I_\rho(s_0, \rho, t) = \oint_C J_\rho(s_0, \rho, t) \rho d\varphi \quad 0 < \rho \leq a \quad (2.34)$$

Aplicando las ecuaciones de Maxwell y el teorema de Stokes se obtiene:

$$I_\rho(s_0, \rho, t) = \varepsilon_0 \partial_t \int_{S_0} E_s(s_0, \rho, t) dS \quad 0 < \rho \leq a \quad (2.35)$$

donde S_0 es el área sustentada por la circunferencia C.

Como se ha mencionado anteriormente, debido a la complejidad de un tratamiento riguroso de las tapas, se hace necesario imponer condiciones simplificadoras para la función intensidad de corriente $I(s_0, \rho, t)$. Dado que nuestra intención es considerar un grado de aproximación mayor que la usual de imponer $I(s_0, \rho, t) = 0$, supondremos una de primer orden en la que la densidad de superficial de carga es uniforme en la tapa, $\sigma(s_0, t) = \text{cte}(t)$. Esta diferencia se justifica debido al pequeño tamaño eléctrico de las tapas. Además un desarrollo de σ en potencias de ρ sólo contendrá potencias pares, por lo que una aproximación lineal carece de sentido. Si se considera la densidad superficial de carga constante en toda la tapa, tendremos que la componente s del campo eléctrico también lo es y por tanto tendremos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a E_s(s_0, \rho, t) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^a E_s(s_0, 0, t) \rho d\rho d\varphi = \pi a^2 E_s(s_0, 0, t) \quad (2.36)$$

Debido a la discontinuidad que presenta la componente s del campo eléctrico en la superficie, la contribución de la tapa en un punto situado en s_0 , es decir en la propia superficie será la mitad del valor dado en 2.36

$$\frac{1}{2} E_s(s_0, 0, t) = \frac{1}{2\pi a^2 \varepsilon_0} \int_0^t I_\rho(s_0, a, t'') dt'' \quad (2.37)$$

De la ecuación de continuidad en el borde de la unión de S'_1 o S'_2 con S'_3 se tiene:

$$I(s_1, t) = -I_\rho(s_1, a, t) \quad (2.38)$$

$$I(s_2, t) = I_\rho(s_2, a, t)$$

Así pues para el punto de adaptación (point-matching) situado en la misma superficie S'_1 o S'_2 , la contribución de la superficie al campo viene determinada por 2.37.

Para calcular la contribución de las tapas al campo E_s^i en la ecuación 2.19 sólo hay que tener en cuenta el término:

$$\begin{aligned} [\nabla_T \cdot \vec{A}]_{\vec{r}' \in S'_1 \cup S'_2} &= \frac{1}{4\pi} \int_{S'_1 \cup S'_2} \nabla_T \cdot \left[\frac{\vec{J}}{R} \right] dS' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ - \int_{S'_1 \cup S'_2} \nabla_{T'} \cdot \left[\frac{\vec{J}}{R} \right] dS' - \int_{S'_1 \cup S'_2} \frac{\partial_{t'} \sigma}{R} dS' \right\} \quad (2.39) \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la divergencia para la primera integral, queda:

$$\begin{aligned} [\nabla_T \cdot \vec{A}]_{\vec{r}' \in S'_1 \cup S'_2} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{I_\rho(s_1, a, t')}{\sqrt{(s-s_1)^2 + a^2}} - \int_{S_1} \frac{\partial_{t'} \sigma}{R} dS' \right\} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{I_\rho(s_2, a, t')}{\sqrt{(s-s_2)^2 + a^2}} - \int_{S_2} \frac{\partial_{t'} \sigma}{R} dS' \right\} \quad (2.40) \end{aligned}$$

Es evidente que el primer término de esta ecuación cancela el análogo que aparece en 2.33 y por tanto, los extremos del hilo contribuyen al campo eléctrico únicamente a través del potencial escalar. Un nuevo grado de aproximación que simplifica considerablemente los cálculos es suponer $R \approx R_a$ en 2.40 con lo que se reduce a:

$$\begin{aligned} [\nabla_T \cdot \vec{A}]_{\vec{r}' \in S'_1 \cup S'_2} &\approx \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{I_\rho(s_1, a, t')}{\sqrt{(s-s_1)^2 + a^2}} - \frac{\partial_{t'} Q_{S_1}}{\sqrt{(s-s_1)^2 + a^2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{I_\rho(s_2, a, t')}{\sqrt{(s-s_2)^2 + a^2}} - \frac{\partial_{t'} Q_{S_2}}{\sqrt{(s-s_2)^2 + a^2}} \right\} = 0 \quad (2.41) \end{aligned}$$

donde

$$Q_{(1 \circ 2)} = \int_{S_{(1 \circ 2)}} \sigma dS$$

La aproximación $R \approx R_a$ es tanto más válida cuando más alejado del extremo esté el punto campo, fig 2.4. Como consecuencia para puntos situados a una distancia de la tapa $s \gg a$, la contribución al campo de las tapas es equivalente al de un anillo de carga.

Como consecuencia de todos los razonamientos anteriores, la ecuación EFIE monodimensional teniendo en cuenta la contribución de las tapas, viene dada por

$$-\varepsilon_0 \partial_t E_s^i(s, t) = \frac{s - s'}{4\pi R^2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_{t'} + \frac{1}{R} \right\} [I(s', t')]_{S_1}^{S_2} + \int_{S_1}^{S_2} \frac{s - s'}{4\pi R^2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_{t'} + \frac{1}{R} \right\} \partial_{t'} q(s', t') ds' - \quad (2.42)$$

$$- \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2 \int_{S_1}^{S_2} \frac{I(s', t')}{4\pi R} ds' - \frac{1}{2\pi a^2} I(s_1, t') \delta(s - s_1) - \frac{1}{2\pi a^2} I(s_2, t') \delta(s - s_2) \quad (2.43)$$

e integrando respecto a la variable t:

$$\varepsilon_0 E_s^i(s, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial_{t'} I(s', t')}{R} dS' - \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_1}^{S_2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_{t'} + \frac{1}{R} \right\} q(s', t') ds' - \frac{s - s'}{4\pi R^2} [I(s', t')]_{S_1}^{S_2} - \frac{s - s'}{4\pi R^3} \int_0^{t'} [I(s', t'')]_{S_1}^{S_2} dt'' + \quad (2.44)$$

$$+ \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^{t'} \{ I(s_1, t'') \delta(s - s_1) + I(s_2, t'') \delta(s - s_2) \} dt''$$

Otra forma alternativa y útil de escribir esta ecuación, es mediante los vectores \hat{s} y \hat{s}' , (fig. 3.1) y escribiendo \vec{E}_s^i como una proyección sobre \hat{s} . Esto es:

$$\hat{s} \cdot \vec{E}_s^i(s, t) = \frac{\hat{s}}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \int_{S_1}^{S_2} \left[\frac{\hat{s}' \partial_{t'} I(s', t')}{c^2 R} + \frac{\vec{R}}{c R^2} \partial_{s'} I(s', t') - \frac{\vec{R}}{R^3} q(s', t') \right] ds' - \frac{\hat{s} \cdot \vec{R}}{4\pi \varepsilon_0 R^2} [I(s', t')]_{S_1}^{S_2} - \frac{\hat{s} \cdot \vec{R}}{4\pi \varepsilon_0 R^3} \int_0^{t'} [I(s', t'')]_{S_1}^{S_2} dt'' + \quad (2.45)$$

$$+ \frac{\hat{s} \cdot \vec{R}}{2\pi \varepsilon_0 a^2} \int_0^{t'} \{ I(s_1, t'') \delta(s - s_1) + I(s_2, t'') \delta(s - s_2) \} dt''$$

Es interesante observar que el caso de radio muy pequeño y dado el valor finito de \vec{E}_s^i , se tiene que, de 2.37,

$$I_\rho(s_0, a, t') = \theta(a^2), \quad a \rightarrow 0 \quad (2.46)$$

y por tanto es razonable suponer que

$$I_\rho(s_0, a, t') \approx 0 \quad (2.47)$$

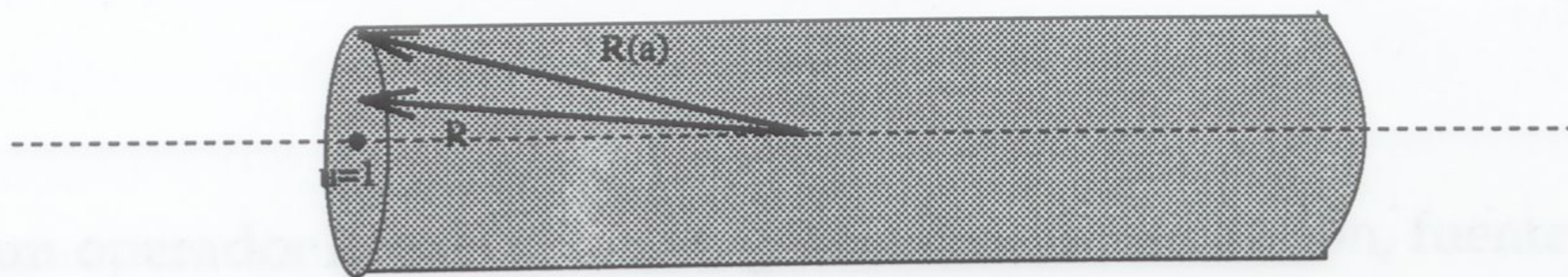


Figura 2.4: Aproximación monopolar de la tapa

o bien, de 2.39,

$$I(s_1, t') = I(s_2, t') = 0 \quad (2.48)$$

Bajo estas consideraciones la ecuación 2.43 se hace idéntica a la que se obtiene directamente de la ecuación 2.12, es decir, a la ecuación de hilo delgado con núcleo reducido. Como consecuencia cabe entender, que estrictamente, en el desarrollo de la ecuación de núcleo normal o reducido, la única aproximación ha sido la inclusión de la ecuación 2.48. Desde otro punto de vista queda pues más justificada, para hilos muy delgados, la aproximación de núcleo reducido que la de extendido.

La aproximación de núcleo extendido puede interpretarse como una aproximación basada en la modelación del hilo mediante un tubo conductor con una densidad de corriente dada por la ecuación 2.15.

Capítulo 3

Fundamentos numéricos

3.1 Introducción

Fundamentado la elección del método, así como el tipo de ecuación integral a usar, el siguiente paso será resolver dicha ecuación integral por el MM.

Una de las razones para escoger dicho método, está en que todos los fenómenos inherentes a un problema electromagnético están incluidos en las ecuaciones de Maxwell y por consiguiente, en la ecuación integral, pudiendo, por tanto, ser estudiados con el MM.

Por ejemplo las soluciones obtenidas con el MM incluyen efectos como ondas superficiales, ondas deslizantes (creeping wave), difracciones múltiples, efectos de sombras (shadowin effects), etc.

Otra ventaja que presenta el MM frente a otros métodos, es que puede ser usado en un amplio rango de complejidad geométrica, o sea, estudiar desde dipolos hasta modelos de aviones [23],[24].

La principal limitación que presenta el MM es la expansión de la respuesta del sistema en funciones base, puesto que el número términos en la expansión N , afectará a la precisión del método, debido a que dichos términos dependen directamente del tamaño eléctrico de la estructura. Por consiguiente, el tiempo de CPU es proporcional a N^2 (matriz de impedancias de orden N) [1].

Partiremos pues de una ecuación lineal general inhomogénea de la forma:

$$L(f) = g \quad (3.1)$$

donde L es un operador lineal conocido, g es la función excitación, fuente conocida, y f es la incógnita o función respuesta del sistema. En electromagnetismo, f corresponderá a las corrientes inducidas sobre el objeto, $L(f)$ es el operador campo electromagnético

generado por las corrientes f y g será el campo incidente sobre la estructura. Efectuando una expansión en series de la función respuesta f , se obtiene:

$$f \approx f^N = \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (3.2)$$

donde f^N es una expansión en N términos de f , f_n son una serie de N variables lineales conocidas, llamadas *funciones base* definidas en el dominio de L y a_n serán una serie de N incógnitas constantes que determinará el MM. Sustituyendo la ecuación (3.2) en la ecuación (3.1) y usando la linealidad del operador L (linealidad en los campos electromagnéticos), obtenemos:

$$L f^N = \sum_{n=1}^N a_n L(f_n) = g \quad (3.3)$$

Para un N finito, f^N generalmente no será una expansión completa de f , y en la práctica no es posible encontrar un conjunto de a_n que satisfagan a la vez la ecuación (3.1) y por extensión a la ecuación (3.3). Para evitar esta imprecisión en el método, suele escogerse dichas constantes de tal forma que la media ponderada de la ecuación (3.3) sea satisfecha. Definimos una serie de N funciones peso linealmente independientes o funciones Test, definidas en el dominio de L y denotadas por w_m con $m=1,2,..N$. Si dichas funciones peso son definidas iguales a las funciones base, o sea, $f_m = w_m$, esta formulación del MM es conocida como Método de Galerkin.

Denotamos como $\langle u, w_m \rangle$ el producto interior entre la función u y w_m y definido por:

$$\langle u, w_m \rangle = \int_m u w_m^* dr \quad (3.4)$$

donde la integral se extiende a lo largo del objeto (superficie, línea o volumen) y w_m^* es el complejo conjugado de w_m .

Aplicando este producto interior a ambos lados de la ecuación 3.3 y usando la linealidad de L en su dominio de definición, se tiene:

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle L f_n, w_m \rangle = \langle g, w_m \rangle \quad m = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.5)$$

que puede ser escrita como:

$$\langle L f^N - g, w_m \rangle = 0 \quad m = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.6)$$

El MM determinará los coeficientes a_n de forma que la diferencia entre $L f^N$ y g sea ortogonal a las N funciones peso.

La ecuación anterior puede ser escrita en forma matricial

$$[L]A = G \quad (3.7)$$

donde [L] es una matriz NxN coeficientes, G es un vector de N coeficientes y A es el vector solución. La matriz [L] y G, pueden escribirse también como:

$$L_{mn} = \langle Lf_n, w_m \rangle \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.8)$$

$$G_m = \langle g, w_m \rangle \quad m = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.9)$$

Una vez obtenido una ecuación lineal matricial, la solución a la misma, puede hacerse aplicando cualquier método de algebra matricial, en particular la inversión matricial.

Otro problema que suele plantearse en cualquier algoritmo de métodos numéricos en el campo de la física y las matemáticas, es la convergencia numérica, esto es:

$$N \rightarrow \infty \implies f^N \rightarrow f$$

Para el caso especial del método de Galerkin, esta convergencia está asegurada, siempre y cuando el operador $\langle Lf, f \rangle$ sea positivo para todo f distinto de cero. [25],[26]

En electromagnetismo el operador L, es siempre negativo, y por consiguiente no podemos asegurar, en principio, que dicho método sea convergente. Sin embargo, la experiencia demuestra que escogiendo de forma apropiada la expansión y las funciones peso, el MM converge. [27],[28],[29]

3.2 Desarrollo analítico del método numérico

En esta sección introduciremos para la resolución de la ecuación EFIE, una discretización en N_s segmentos espaciales por hilo y N_t segmentos temporales lo suficientemente grande como para que la solución haya tenido tiempo de converger a cero.

Con respecto a las funciones peso, existen diversas posibilidades en su elección, procurando que dichas funciones no resalten el comportamiento anómalo de las funciones base. Existen varias clasificaciones de la funciones peso con respecto al dominio de definición, estas son:

- Funciones peso definidas nulas en un número finito de puntos.

Tiempos de CPU			
	$N_s=20$	$N_s=40$	$N_s=60$
Delta	390 seg.	711 seg.	1265 seg.
Cosenoidales	2602 seg.	4407 seg.	8351 seg.

Tabla 3.1: Tiempo de CPU invertidos para diferentes funciones peso

- Funciones definidas no nulas en dos intervalos del hilo.
- Funciones definidas no nulas en un intervalo.

Las más utilizadas son las definidas en un solo intervalo, ya que las primeras son de difícil implementación numérica en casos complejos, y las segundas al poseer dominios comunes, no condicionan correctamente la matriz de impedancias si el conjunto de ecuaciones no forman un conjunto ortogonal. La matriz de impedancias se hace simétrica, usando dichas funciones con el método de Galerkin. [30], [31],[32]

Con respecto a las funciones peso definidas no nulas en un intervalo, decir que son las más utilizadas debido a que simplifican el número de cálculos y por tanto su complejidad. Ejemplos de funciones de éste tipo son:

- Funciones delta de Dirac.
- Funciones pulso cuadrado.
- Funciones coseno nulas en los extremos de los intervalos espaciales

El uso de las funciones delta de Dirac, evitan la evaluación de integrales doble o triples, con lo que se simplifican enormemente el cálculo de los coeficientes derivados del MM. Físicamente, el uso de funciones delta de Dirac, equivale a forzar las condiciones de contorno en un número finito de puntos, llamados puntos de muestreo. Como se puede ver en [10], el uso de funciones delta de Dirac, es aconsejable debido a su fácil implementación numérica, así como un aumento en la velocidad de CPU y, aunque los mejores resultados han sido obtenidos con funciones cosenoidales, la diferencia de estas con las deltas de Dirac, no es substancial. [33]

En la tabla 3.1, puede verse un estudio comparativo de tiempos de CPU, para algunas funciones pulso, corroborando lo dicho anteriormente.

La expresión de la dependencia espacio temporal de los términos de corrientes $I_{ij}(s''_i, t''_j)$ viene dada por las funciones base.

Con respecto a las funciones base, existen una gran diversidad, aplicables a nuestro problema, en el dominio de la frecuencia, pero el hecho de que las derivadas en el dominio del tiempo no se puedan expresar como productos, exige que las derivadas de las funciones base que aparecen en las ecuaciones integrales no sean nulas, con lo

cual podremos descartar una serie de funciones base como pulsos cuadrados, etc. Otras funciones muy usadas en el dominio de la frecuencia son las triangulares y senoidales, pero debido a las discontinuidades que presentan hacen que esta elección no sea la más correcta. Además estas funciones han de ser evaluadas en multiples subintervalos complicando enormemente el metodo numérico. [34]

Una combinación de funciones seno, cosenos y constantes definidas en intervalos pequeños constituyen una buena aproximación de las funciones polinómicas de segundo grado. En particular usaremos funciones polinómicas de interpolación Lagrangiana bidimensional de orden dos en cada dimensión espacial y temporal.

Por lo comentado anteriormente, podemos desarrollar los términos de corrientes en la forma: [35],[36]

$$I_{i,j}(s''_i, t''_j) = \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} B_{i,j}^{(l,m)} I_{i+l,j+m} \quad (3.10)$$

donde el coeficiente $B_{i,j}^{(l,m)}$ se define como:

$$B_{i,j}^{(l,m)} = \prod_{\substack{p=k \\ p \neq l}}^{k+2} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{s''_i + s_i - s_{i+p}}{s_{i+l} - s_{i+p}} \cdot \frac{t''_j + t_j - t_{j+q}}{t_{j+m} - t_{j+q}} \quad (3.11)$$

Para evitar interpolaciones con instantes no calculados en el caso de $v = j$, n tomará el valor de -2 y el valor -1 para $v > j$.

Con respecto a la interpolación espacial se toma los limites de $k=0$ para el primer segmento y el valor $k=-1$ si es el último segmento de cada hilo. Para puntos distintos ($1 < i < N_s$) puede elegirse cualquiera de los valores anteriores para k , pues ambas posibilidades son igualmente válidas. Por esta razón se tomarán ambos desarrollos y se efectuará una media aritmética. Esto aumenta el tiempo de CPU, pero da mayor estabilidad a la solución, al corregir pequeñas asimetrías surgidas de tomar uno u otro valor para k . Para el desarrollo en las tapas del hilo, las intensidades I_1 e I_{N_s+1} han de desarrollarse únicamente en la variable temporal, es por eso por lo que en los desarrollos se utilizarán estos mismos polinomios en esta variable únicamente.

3.2.1 Discretización espacio-temporal

Las variables locales correspondientes a los puntos campo y fuente pueden discretizarse en la forma:

$$\begin{aligned} s_u &= (u - 1)\Delta s & u &= 1, \dots, N_{s+1} \\ s_i &= (i - 1)\Delta s & i &= 1, \dots, N_{s+1} \\ t_v &= (v)\Delta t & v &= 0, 1, \dots, N_t \end{aligned} \quad (3.12)$$

con

$$\Delta s = c\Delta t$$

y donde N_s es el número de intervalos espaciales en los que subdividimos el hilo, N_t

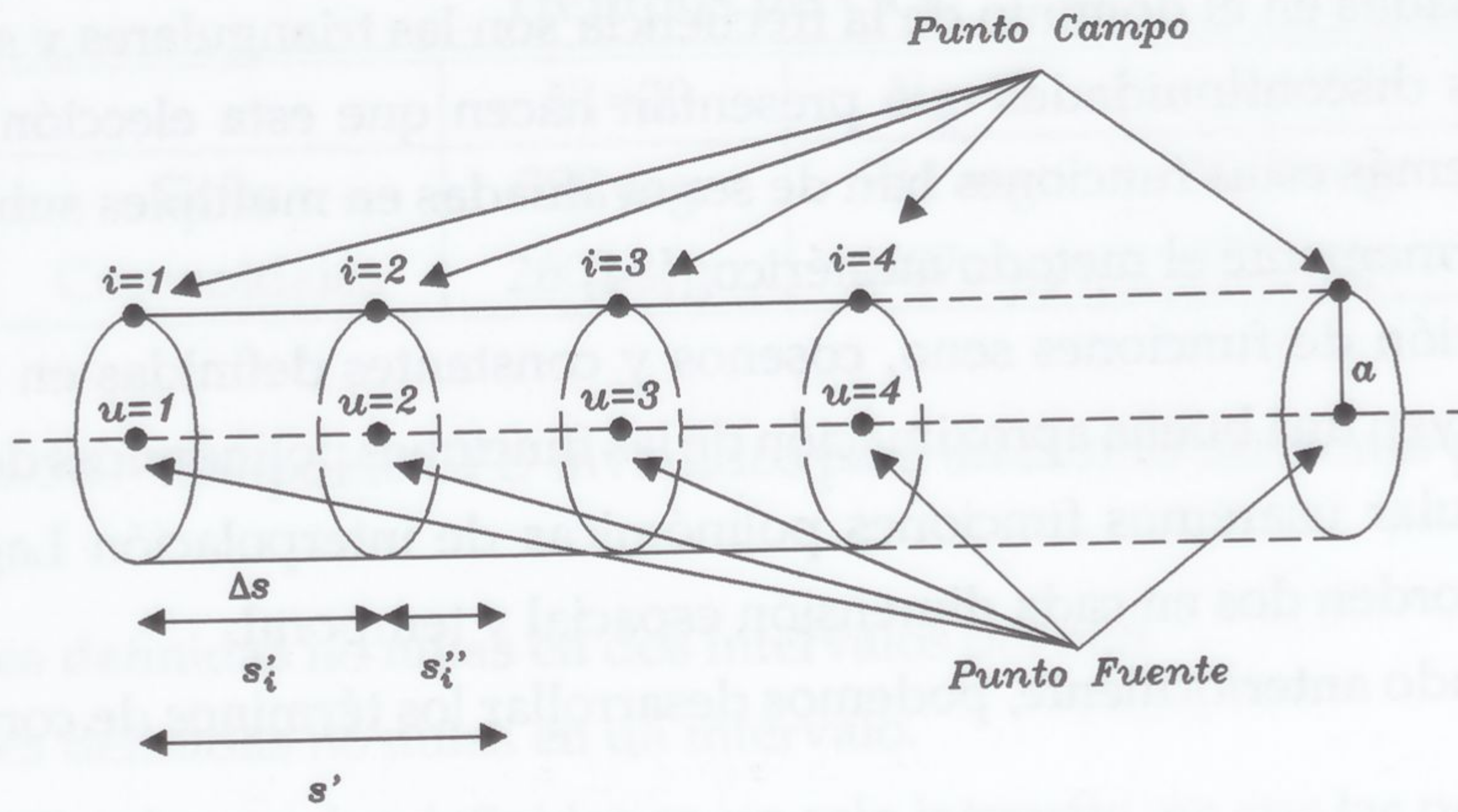


Figura 3.1: Discretización espacial

es el número de instantes temporales de la solución. N_t ha de ser lo suficientemente grande para que la solución haya tenido tiempo de tender a cero.

Esta discretización espacio-temporal define unas variables locales en cada intervalo i - j :

$$\begin{aligned} s' &= s'_i(s''_i) = s'_i + s''_i \\ t' &= t_j + t''_j \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tomando el instante de observación $t = v\Delta t + \frac{a}{c}$, donde a es el radio del hilo, para que la evaluación de la corriente se aproxime lo más posible a $v\Delta t$ entonces:

$$t' = t - \frac{R}{c} = v\Delta t + \frac{a}{c} - \frac{R}{c} \quad (3.14)$$

y definiendo j como el entero mayor y más cercano a $\frac{t'}{\Delta t}$:

$$\begin{aligned} j &= EMMC \left[\frac{t'}{\Delta t} \right] = EMMC \left[v - \frac{R}{c\Delta t} + \frac{a}{c\Delta t} \right] = \\ &= v - \text{truncar} \left[\frac{R}{c\Delta t} - \frac{a}{c\Delta t} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} t''_j &= t' - t_j = v\Delta t + \frac{a}{c\Delta t} - \frac{R}{c\Delta t} - v\Delta t + \Delta t * \text{truncar} \left[\frac{R}{c\Delta t} - \frac{a}{c\Delta t} \right] = \\ &= r_{iu}\Delta t - \frac{R}{c\Delta t} \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde

$$r_{iu} = \text{truncar} \left[\frac{R}{c\Delta t} - \frac{a}{c\Delta t} \right] + \frac{a}{c\Delta t} \quad (3.17)$$

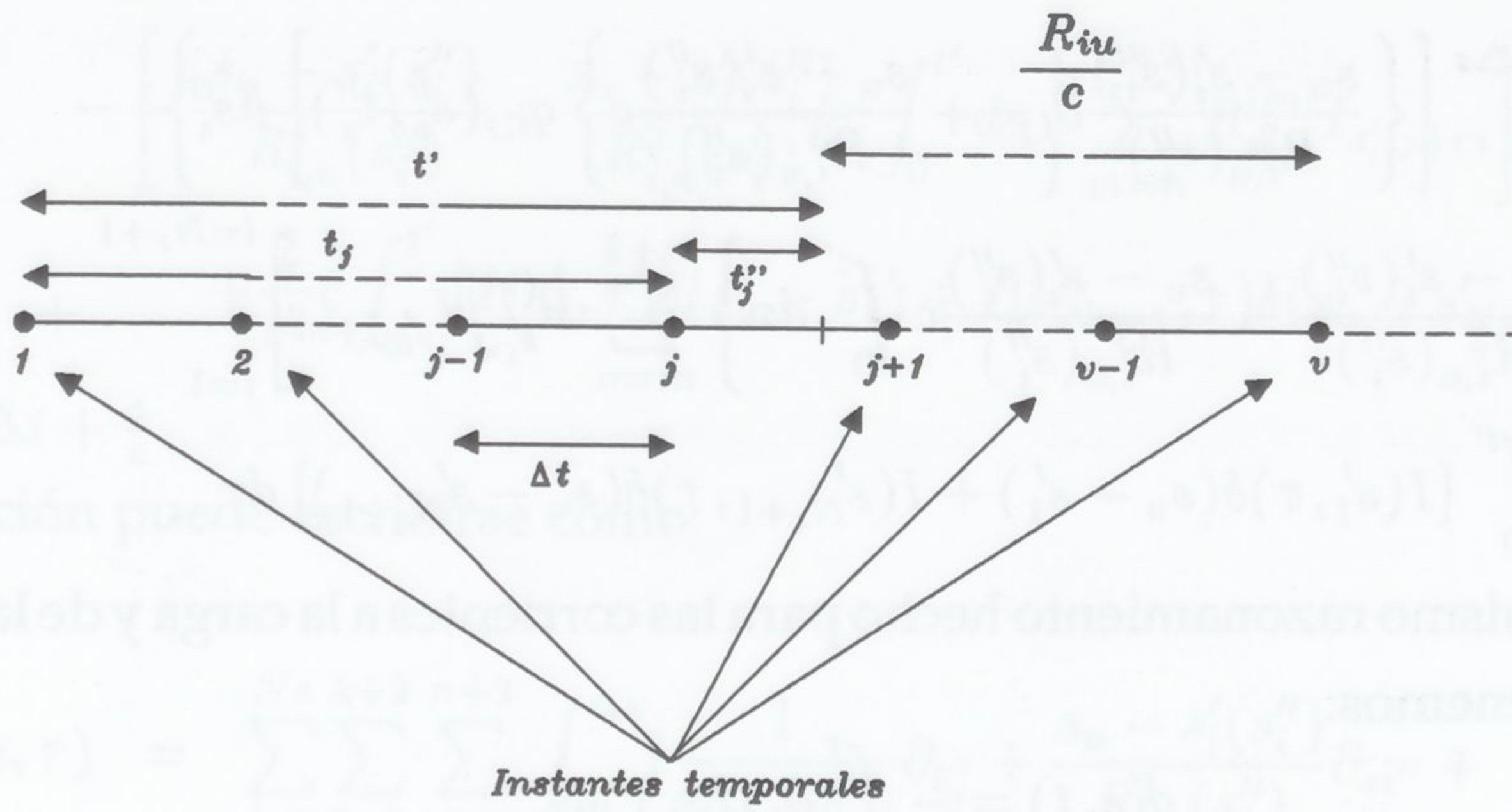


Figura 3.2: Esquema gráfico para la discretización temporal

Para poder aplicar la discretización anterior (figura 3.2) es fundamental que j sea constante en el intervalo donde está colocado el punto campo, debido a que condiciona la matriz de impedancias. Esto está asegurado tomando el instante temporal actual en el punto campo como $t = v\Delta t + \frac{a}{c}$

Si introducimos la discretización espacio-temporal en la ecuación de los potenciales 2.46 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (4\pi\epsilon_0 c)E_s^i(u, v\Delta t + \frac{a}{c}) &= \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^{\Delta s} \left[\frac{\partial_{t_j''} I_{i,j}(s_i'', t_j'')}{cR_{i,u}(s_i'')} \right] ds_i'' - \\
 &- \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^{\Delta s} \left[\left\{ \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{i,u}^2(s_i'')} \partial_{t_j''} + \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{i,u}^3(s_i'')} c \right\} q_{i,j}(s_i'', t_j'') \right] ds_i'' - \\
 &- \left[\left\{ \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{i,u}^2(s_i'')} - \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{i,u}^3(s_i'')} c \int_0^{t'} d\tau \right\} I_{i,j}(s_i'', \tau) \right]_{i=1}^{i=N_s+1} + \\
 &+ \frac{2}{c^2} c \int_0^{t'} [I(s_1', \tau)\delta(s_u - s_1) + I(s_{N_s+1}', \tau)\delta(s_u - s_{N_s+1})] d\tau \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

donde $\vec{R}_{i,u} = \vec{r}_u - \vec{r}_i$ que en coordenadas locales puede escribirse como $\vec{R}_{i,u} = \vec{s}_u - \vec{s}_i(s_i'')$.

Desarrollando la intensidad como polinomios de interpolación Lagrangiana bidimensional de orden dos, según la ecuación 3.10 y sustituyendo el desarrollo de la intensidad en la ecuación 3.18 tenemos:

$$(4\pi\epsilon_0 c)E_s^i(u, v\Delta t + \frac{a}{c}) = \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^{\Delta s} \left[\frac{\partial_{t_j''} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} B_{i,j}^{(l,m)} I_{i+l,j+m}}{cR_{i,u}(s_i'')} \right] ds_i'' -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^{\Delta s} \left[\left\{ \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^2(s''_i)} \partial_{t_j''} + \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} c \right\} q_{i,j}(s''_i, t''_j) \right] ds''_i - \\
& - \left[\left\{ \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^2(s''_i)} - \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} c \int_0^{t'} d\tau \right\} \sum_{m=n}^{n+2} B_{s'_i, j}^{(m)} I_{s'_i, j+m} \right]_{i=1}^{i=N_s+1} + \\
& + \frac{2}{c^2} c \int_0^{t'} [I(s'_1, \tau) \delta(s_u - s'_1) + I(s'_{N_s+1}, \tau) \delta(s_u - s'_{N_s+1})] d\tau \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Aplicando el mismo razonamiento hecho para las corrientes a la carga y de la ecuación de continuidad, tenemos:

$$q(s, t) = - \int_0^t \partial_s I(s, \tau) d\tau \quad (3.20)$$

descomponiendo la integral con respecto al tiempo,

$$q(s, t) = - \sum_{s=1}^{v-1} \left\{ \int_{-\Delta t}^0 \partial_s I(s, \tau) d\tau - \int_{-\Delta t}^{t''_v} \partial_s I(s, \tau) d\tau \right\}$$

y aplicando la interpolación a la corriente

$$\begin{aligned}
q_{i,j}(s''_i, t''_j) &= - \sum_{s=1}^{j-1} \left[\int_{-\Delta t}^0 \partial_{s''_i} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} B_{i,s}^{(l,m)} I_{i+l,s+m} d\tau \right] - \\
& - \int_{-\Delta t}^{t''_j} \partial_{s''_i} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} B_{i,j}^{(l,m)} I_{i+l,j+m} d\tau = \\
& - \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left[\underbrace{\sum_{s=1}^{j-1} \left[\int_{-\Delta t}^0 \partial_{s''_i} B_{i,s}^{(l,m)} I_{i+l,s+m} d\tau \right]}_1 + \underbrace{\int_{-\Delta t}^{t''_j} \partial_{s''_i} B_{i,j}^{(l,m)} I_{i+l,j+m} d\tau}_2 \right] \quad (3.21)
\end{aligned}$$

En la ecuación de continuidad, aparecen dos integrales que cubren todo el espacio temporal. El primer término, denotado por "1", corresponde a la contribución sobre la carga de todos los instantes anteriores al instante actual. El término "2" está evaluado en el instante actual, pues el límite superior de la integral, es la variable que contiene al instante j .

Substituyendo la ecuación 3.21 en la ecuación 3.19 tenemos:

$$\begin{aligned}
(4\pi\epsilon_0 c) E_s^i(u, \tau) &= \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^{\Delta s} \left[\frac{\partial_{t_j''} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} B_{i,j}^{(l,m)} I_{i+l,j+m}}{c R_{i,u}(s''_i)} \right] ds''_i - \\
& - \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^{\Delta s} \left\{ \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^2(s''_i)} \partial_{t_j''} + \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} c \right\} * \\
& \left\{ - \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left[\sum_{s=1}^{j-1} \left[\int_{-\Delta t}^0 \partial_{s''_i} B_{i,s}^{(l,m)} I_{i+l,s+m} d\tau \right] + \int_{-\Delta t}^{t''_j} \partial_{s''_i} B_{i,j}^{(l,m)} I_{i+l,j+m} d\tau \right] \right\} ds''_i -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[\left\{ \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^2(s''_i)} - \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} c \int_0^{t'} d\tau \right\} \sum_{m=n}^{n+2} B_{s'_i, j}^{(m)} I_{s'_i, j+m} \right]_{i=1}^{i=N_s+1} + \\
 & + \frac{2}{c^2} c \int_0^{t'} [I(s'_1, \tau) \delta(s_u - s'_1) + I(s'_{N_s+1}, \tau) \delta(s_u - s'_{N_s+1})] d\tau \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

donde $\tau = v\Delta t + \frac{a}{c}$.

Esta ecuación puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 (4\pi\epsilon_0 c) E_s^i(u, \tau) & = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \int_0^{\Delta s} \left[\frac{1}{c R_{i,u}(s''_i)} \partial_{t''_j} + \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^2(s''_i)} \partial_{s''_i} + \right. \\
 & + \left. c \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} \int_{-\Delta t}^{t''_j} \partial_{s''_i} \right] B_{i,j}^{(l,m)} I_{i+l, j+m} ds''_i + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \sum_{s=1}^{j-1} \int_0^{\Delta s} \left\{ c \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s''_i} \right\} B_{i,s}^{(l,m)} I_{i+l, s+m} ds''_i + \\
 & + \sum_{i=N_s+1}^{n+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left[\beta_i \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^2(s''_i)} + \right. \\
 & + \left. \beta_i c \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} \int_{-\Delta t}^{t''_j} \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i) \int_{-\Delta t}^{t''_j} \right] B_j^{(m)} I_{i, j+m} + \\
 & + \sum_{i=N_s+1}^{n+2} \sum_{m=n}^{n+2} \sum_{s=1}^{j-1} \left[\beta_i \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^2(s''_i)} + \right. \\
 & + \left. \beta_i c \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} \int_{-\Delta t}^0 \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i) \int_{-\Delta t}^0 \right] B_s^{(m)} I_{i, s+m} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Con $\beta_i = 1$ si $i=1$ y $\beta_i = -1$ si $i = N_s + 1$

Podemos definir las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{i,u,l,m} & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^{\Delta s} \left[\frac{1}{c R_{i,u}(s''_i)} \partial_{t''_j} + \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^2(s''_i)} \partial_{s''_i} + \right. \\
 & + \left. c \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} \int_{-\Delta t}^{t''_j} \partial_{s''_i} \right] B_{i,j}^{(l,m)} ds''_i \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}_{i,u,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^{\Delta s} \left\{ c \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s''_i} \right\} B_{i,s}^{(l,m)} ds''_i \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{i,u,m} & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \beta_i \frac{s_u - s_i}{R_{i,u}^2} + \left[\beta_i c \frac{s_u - s_i}{R_{i,u}^3} \int_{-\Delta t}^{t''_j} \right] \right\} B_j^{(m)} + \\
 & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i) \int_{-\Delta t}^{t''_j} \right\} B_j^{(m)} \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{i,u,m} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \beta_i \frac{s_u - s_i}{R_{i,u}^2} + \left[\beta_i c \frac{s_u - s_i}{R_{i,u}^3} \int_{-\Delta t}^0 \right] \right\} B_s^{(m)} + \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i) \int_{-\Delta t}^0 \right\} B_s^{(m)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Podemos definir la variable $\mathcal{Y}_{i,j}$ como la suma de todas las corrientes anteriores al instante j , o sea,

$$\mathcal{Y}_{i,j} = \sum_{s=1}^j I_{i,s} \quad (3.28)$$

Tomando como instante j el valor de $v - r_{i,u} + \frac{a}{c\Delta t} = v - \tilde{r}_{iu}$ y como B no depende de j al tomar todos los instantes iguales, la ecuación integral queda:

$$\begin{aligned} E_s^i(u, v\Delta t + \frac{a}{c}) &= \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \mathcal{F}_{i,u,l,m} I_{i+l,v-\tilde{r}_{i,u+m}} + \mathcal{C}_{i,u,l,m} \mathcal{Y}_{i+l,v-\tilde{r}_{i,u+m-1}} \right\} + \\ &+ \sum_{\substack{i=1 \\ i=N_s+1}}^{n+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \mathcal{T}_{i,u,m} I_{i,v-\tilde{r}_{i,u+m}} + \mathcal{S}_{i,u,m} \mathcal{Y}_{i+l,v-\tilde{r}_{i,u+m-1}} \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.3 Desarrollo explícito de las funciones \mathcal{F} , \mathcal{C} , \mathcal{T} , \mathcal{S} .

En este apartado, desarrollaremos las funciones definidas anteriormente para expresarlas en su forma más elemental. Para ello introduciremos, vía el principio de causalidad, la relación existente entre las variables espacio-temporales. Del principio de causalidad, el instante t_j'' viene dado en función de las variables espaciales locales s_i'' como $t_j'' = r_{i,u}\Delta t - \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c}$, donde $R_{i,u}(s_i'')$ viene definido en la figura 3.3

Introduciendo la variable t_j'' en los distintos operadores derivados de $B_{i,j}^{(l,m)}$ que aparecen en las funciones anteriormente definidas (ecuaciones 3.24 - 3.27).

En los siguientes apartados analizaremos cada función en particular.

3.3.1 Función \mathcal{F}

La función \mathcal{F} viene definida (ecuación 3.24)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i,u,l,m} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^{\Delta s} \left[\frac{1}{cR_{i,u}(s_i'')} \partial_{t_j''} + \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{i,u}^2(s_i'')} \partial_{s_i''} + \right. \\ &+ \left. c \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{i,u}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^{t_j''} \partial_{s_i''} \right] B_{i,j}^{(l,m)} ds_i'' \end{aligned}$$

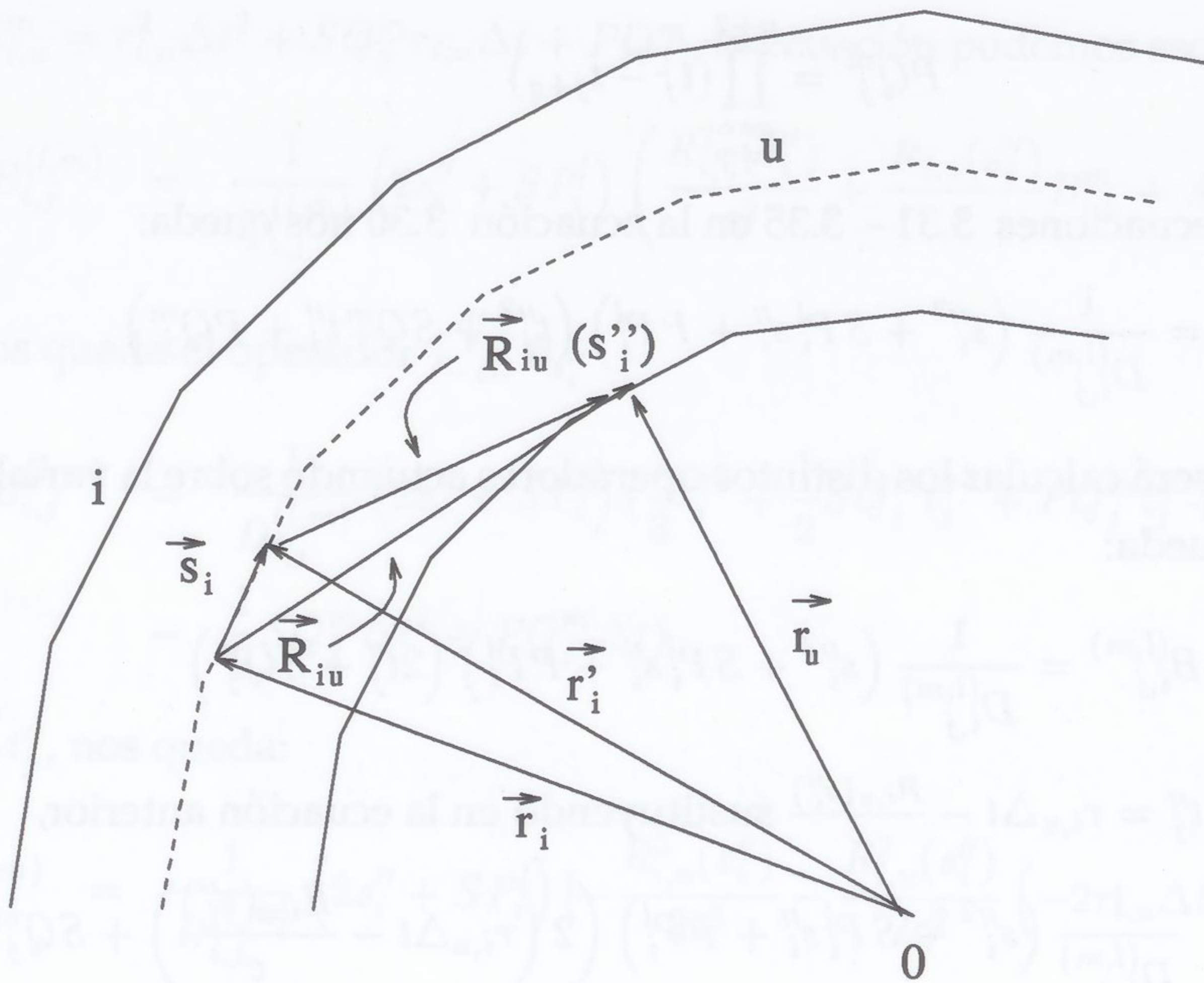


Figura 3.3: Coordenadas utilizadas en la estructura de hilo.

De la definición de la variable $B_{i,j}^{(l,m)}$ tenemos:

$$B_{i,j}^{(l,m)} = \prod_{\substack{p=k \\ p \neq l}} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}} \frac{s_i'' + s_i - s_{i+p} \quad t_j'' + t_j - t_{j+q}}{s_{i+l} - s_{i+p} \quad t_{j+m} - t_{j+q}} \quad (3.30)$$

Utilizando como notación:

$$D_{i,j}^{(l,m)} = \prod_{\substack{p=k \\ p \neq l}}^{k+2} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (s_{i+l} - s_{i+p})(t_{j+m} - t_{j+q}) \quad (3.31)$$

$$SP_i^l = \sum_{\substack{p=k \\ p \neq l}}^{k+2} (s_i - s_{i+p}) \quad (3.32)$$

$$PP_i^l = \prod_{\substack{p=k \\ p \neq l}}^{k+2} (s_i - s_{i+p}) \quad (3.33)$$

$$SQ_j^m = \sum_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (t_j - t_{j+q}) \quad (3.34)$$

$$PQ_j^m = \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (t_j - t_{j+q}) \quad (3.35)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.31 - 3.35 en la ecuación 3.30 nos queda:

$$B_{i,j}^{(l,m)} = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(s_i''^2 + SP_i^l s_i'' + PP_i^l \right) \left(t_j''^2 + SQ_j^m t_j'' + PQ_j^m \right) \quad (3.36)$$

El siguiente paso será calcular los distintos operadores actuando sobre la variable $B_{i,j}^{(l,m)}$. El operador $\partial_{t_j''}$ queda:

$$\partial_{t_j''} B_{i,j}^{(l,m)} = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(s_i''^2 + SP_i^l s_i'' + PP_i^l \right) \left(2t_j'' + SQ_j^m \right)$$

Como la variable $t_j'' = r_{i,u} \Delta t - \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c}$ sustituyendo en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \partial_{t_j''} B_{i,j}^{(l,m)} &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(s_i''^2 + SP_i^l s_i'' + PP_i^l \right) \left(2 \left(r_{i,u} \Delta t - \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} \right) + SQ_j^m \right) = \\ &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(s_i''^2 + SP_i^l s_i'' + PP_i^l \right) \left(2r_{i,u} \Delta t - 2 \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} + SQ_j^m \right) = \\ &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(s_i''^2 + SP_i^l s_i'' + PP_i^l \right) \left(-2 \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} - \left(-2r_{i,u} \Delta t - SQ_j^m \right) \right) \end{aligned}$$

Si definimos la variable $B_{i,u}^m = -2r_{i,u} \Delta t - SQ_j^m$, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\partial_{t_j''} B_{i,j}^{(l,m)} = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(s_i''^2 + SP_i^l s_i'' + PP_i^l \right) \left(-2 \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} - B_{i,u}^m \right) \quad (3.37)$$

Para el operador $\partial_{s_i''}$ queda:

$$\partial_{s_i''} B_{i,j}^{(l,m)} = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(2s_i'' + SP_i^l \right) \left(t_j''^2 + SQ_j^m t_j'' + PQ_j^m \right)$$

Sustituyendo el valor de t_j'' , tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_{s_i''} B_{i,j}^{(l,m)} &= \\ &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(2s_i'' + SP_i^l \right) \left(\left(r_{i,u} \Delta t - \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} \right)^2 + SQ_j^m \left(r_{i,u} \Delta t - \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} \right) + PQ_j^m \right) = \\ &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(2s_i'' + SP_i^l \right) \left(r_{i,u}^2 \Delta t^2 + \frac{R_{i,u}^2(s_i'')}{c^2} - 2r_{i,u} \Delta t \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} + SQ_j^m r_{i,u} \Delta t - \right. \\ &\quad \left. - SQ_j^m \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} + PQ_j^m \right) = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(2s_i'' + SP_i^l \right) \left(\frac{R_{i,u}^2(s_i'')}{c^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} \left(-2r_{i,u} \Delta t - SQ_j^m \right) + \left(r_{i,u}^2 \Delta t^2 + SQ_j^m r_{i,u} \Delta t + PQ_j^m \right) \right) \end{aligned}$$

Definiendo $A_{i,u}^m = r_{i,u}^2 \Delta t^2 + SQ_j^m r_{i,u} \Delta t + PQ_j^m$, la ecuación podemos escribirla como:

$$\partial_{s_i''} B_{i,j}^{(l,m)} = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} (2s_i'' + SP_i^l) \left(\frac{R_{i,u}^2(s_i'')}{c^2} + \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} B_{i,u}^m + A_{i,u}^m \right) \quad (3.38)$$

Por último nos queda el operador $\int_{-\Delta t}^{t_j''} \partial_{s_i''}$

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta t}^{t_j''} \partial_{s_i''} B_{i,j}^{(l,m)} &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} (2s_i'' + SP_i^l) \left(\frac{1}{3} t_j''^3 + \frac{1}{2} SQ_j^m t_j''^2 + PQ_j^m t_j'' + \frac{1}{3} \Delta t^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} SQ_j^m \Delta t^2 + PQ_j^m \Delta t \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo t_j'' , nos queda:

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta t}^{t_j''} \partial_{s_i''} B_{i,j}^{(l,m)} &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} (2s_i'' + SP_i^l) \left[-\frac{R_{i,u}^3(s_i'')}{3c^3} - \frac{R_{i,u}^2(s_i'')}{2c^2} (-2r_{i,u} \Delta t - SQ_j^m) - \right. \\ &\quad - \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} (2r_{i,u}^2 \Delta t^2 + SQ_j^m r_{i,u} \Delta t + PQ_j^m) + \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{r_{i,u}^3 \Delta t^3}{3} + SQ_j^m \frac{r_{i,u}^2 \Delta t^2}{2} + PQ_j^m r_{i,u} \Delta t \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\Delta t^3}{3} - SQ_j^m \frac{\Delta t^2}{2} + PQ_j^m \Delta t \right) \right\} \end{aligned}$$

Si definimos las variables:

$$K^m = \frac{\Delta t^3}{3} - SQ_j^m \frac{\Delta t^2}{2} + PQ_j^m \Delta t$$

$$E_{i,u}^m = \frac{r_{i,u}^3 \Delta t^3}{3} + SQ_j^m \frac{r_{i,u}^2 \Delta t^2}{2} + PQ_j^m r_{i,u} \Delta t + K^m$$

la ecuación anterior nos queda:

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta t}^{t_j''} \partial_{s_i''} B_{i,j}^{(l,m)} &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} (2s_i'' + SP_i^l) \left(-\frac{R_{i,u}^3(s_i'')}{3c^3} - \frac{R_{i,u}^2(s_i'')}{2c^2} B_{i,u}^m - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} A_{i,u}^m + E_{i,u}^m \right) \quad (3.39) \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.37 - 3.39, se tiene para cada término de la ecuación 3.24:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c R_{i,u}(s_i'')} \partial_{t_j''} B_{i,j}^{(l,m)} &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(-\frac{s_i''^2}{R_{i,u}(s_i'')} \frac{B_{i,u}^m}{c} - \frac{s_i''}{R_{i,u}(s_i'')} \frac{B_{i,u}^m SP_i^l}{c} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R_{i,u}(s_i'')} \frac{B_{i,u}^m PP_i^l}{c} - \frac{2s_i''^2}{c^2} - s_i'' \frac{2SP_i^l}{c^2} - \frac{2PP_i^l}{c^2} \right) \quad (3.40) \end{aligned}$$

En el siguiente términos aparece el factor $s_u - s'_i(s''_i)$ que puede expresarse como:

$$s_u - s'_i(s''_i) = s_u - (s'_i + s''_i) = (s_u - s_i) - s''_i$$

sustituyendolo en el segundo término, nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^2(s''_i)} \partial_{s''_i} B_{i,j}^{(l,m)} &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(\frac{s''_i{}^2}{R_{i,u}^2(s''_i)} (-2A_{i,u}^m) + \right. \\ &+ \frac{s''_i}{R_{i,u}^2(s''_i)} (2(s_u - s_i) - SP_i^l) A_{i,u}^m + \\ &+ \frac{1}{R_{i,u}^2(s''_i)} ((s_u - s_i)A_{i,u}^m - SP_i^l) + \frac{s''_i{}^2}{R_{i,u}(s''_i)} \left(-\frac{2B_{i,u}^m}{c} \right) + \\ &+ \frac{s''_i}{R_{i,u}(s''_i)} (2(s_u - s_i) - SP_i^l) \left(\frac{B_{i,u}^m}{c} \right) + \quad (3.41) \\ &+ \frac{1}{R_{i,u}(s''_i)} \left(\frac{(s_u - s_i)B_{i,u}^m SP_i^l}{c} \right) + s''_i{}^2 \left(-\frac{2}{c^2} \right) + \\ &+ s''_i (2(s_u - s_i) - SP_i^l) \left(\frac{1}{c} \right) + \frac{(s_u - s_i)SP_i^l}{c^2} \end{aligned}$$

El tercer término de la ecuación 3.24 es:

$$\begin{aligned} c \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{i,u}^3(s''_i)} \int_{-\Delta t}^{t''_j} \partial_{s''_i} B_{i,j}^{(l,m)} &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(\frac{s''_i{}^2}{R_{i,u}^3(s''_i)} (-2cE_{i,u}^m) + \right. \\ &+ \frac{s''_i}{R_{i,u}^3(s''_i)} (2(s_u - s_i) - SP_i^l) (cE_{i,u}^m) + \\ &+ \frac{1}{R_{i,u}^3(s''_i)} ((s_u - s_i)cE_{i,u}^m SP_i^l) + \\ &+ \frac{s''_i{}^2}{R_{i,u}^2(s''_i)} (2A_{i,u}^m) + \\ &+ \frac{s''_i}{R_{i,u}^2(s''_i)} (2(s_u - s_i) - SP_i^l) (-A_{i,u}^m) + \\ &+ \frac{1}{R_{i,u}^2(s''_i)} (-(s_u - s_i)A_{i,u}^m SP_i^l) + \frac{s''_i{}^2}{R_{i,u}(s''_i)} \left(\frac{B_{i,u}^m}{c} \right) + \\ &+ \frac{s''_i}{R_{i,u}(s''_i)} (2(s_u - s_i) - SP_i^l) \left(-\frac{B_{i,u}^m}{2c} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_{i,u}(s''_i)} \left(-\frac{(s_u - s_i)B_{i,u}^m SP_i^l}{2c} \right) + s''_i{}^2 \left(\frac{2}{3c^2} \right) + \\ &+ s''_i (2(s_u - s_i) - SP_i^l) \left(-\frac{1}{3c^2} \right) - \frac{(s_u - s_i)SP_i^l}{3c^2} \quad (3.42) \end{aligned}$$

donde:

$$\vec{R}_{i,u}(s''_i) = \vec{r}_u - \vec{r}_i - \vec{s}_i = \vec{R}_{i,u} - s''_i \hat{s}_i \quad (3.43)$$

Coeficientes F(p,q)				
P Q	0	1	2	3
0	$-\frac{2PP_i^l}{c^2} + \frac{2(s_u-s_i)SP_i^l}{3c^2}$	$\left(-PP_i^l + \frac{SP_i^l(s_u-s_i)}{2}\right) \frac{B_{i,u}^m}{c}$	0	$(s_u - s_i)SP_i^l c E_{i,u}^m$
1	$\frac{-8SP_i^l + 4(s_u-s_i)}{3c^2}$	$\left(-\frac{3SP_i^l}{2} + (s_u - s_i)\right) B_{i,u}^m$	0	$\left(2(s_u - s_i) - SP_i^l\right) c E_{i,u}^m$
2	$-\frac{10}{3c^2}$	$-\frac{2B_{i,u}^m}{c}$	0	$-2c E_{i,u}^m$

Tabla 3.2: Coeficientes F(p,q)

El siguiente paso consistirá en sustituir las ecuaciones 3.40 - 3.42 en la ecuación 3.24. Seguidamente integraremos en la variable s_i'' . Observando estas últimas integrales todas poseen la forma general:

$$I(p, q) = \frac{x^p}{[x^2 + bx + c]^{\frac{q}{2}}}$$

donde $b = -2(\hat{s} \cdot \hat{R}_{i,u})$, $c = |R_{i,u}|^2$, $p = 0, 1, 2$ y $q = 0, 1, 2, 3$. La ecuación 3.24 puede escribirse como:

$$\mathcal{F}_{i,u,l,m} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^3 F(p, q) I(p, q)$$

Los coeficientes F(p,q) vienen dados en la tabla 3.2.

Con respecto a las integrales, al ser estas iguales para todos los términos de las distintas funciones antes definidas, se expondrán en un apartado posterior.

3.3.2 Función \mathcal{C}

La definición de la función \mathcal{C} viene dada en la ecuación 3.25, que por comodidad vamos a repetir:

$$\mathcal{C}_{i,u,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^{\Delta s} \left\{ c \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{i,u}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s_i''} \right\} B_{i,s}^{(l,m)} ds_i''$$

al igual que hicimos con la función \mathcal{F} , sustituiremos las ecuaciones 3.31 - 3.35 en el coeficiente $B_{i,u}^m$ y calcularemos los términos asociados a esta ecuación.

Del apartado anterior demostramos que:

$$\partial_{s_i''} B_{i,j}^{(l,m)} = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(2s_i'' + SP_i^l \right) \left(t_j''^2 + SQ_j^m t_j'' + PQ_j^m \right)$$

luego la integral asociada al término en nuestra función sera:

$$\int_{-\Delta t}^0 \partial_{s_i''} B_{i,j}^{(l,m)} = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} (2s_i'' + SP_i^l) \left(\frac{\Delta t^3}{3} - \frac{SQ_j^m \Delta t^2}{2} + PQ_j^m \Delta t \right)$$

El último factor corresponde al coeficiente K^m , con lo que la ecuación puede escribirse como:

$$\int_{-\Delta t}^0 \partial_{s_i''} B_{i,j}^{(l,m)} = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} (2s_i'' + SP_i^l) K^m$$

multiplicando por el factor:

$$\begin{aligned} c \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{i,u}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s_i''} B_{i,s}^{(l,m)} &= c \frac{(s_u - s_i) - (s_i'')}{R_{i,u}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s_i''} B_{i,s}^{(l,m)} = \\ &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(\frac{s_i''^2}{R_{i,u}^3(s_i'')} (-2cK^m) + \right. \\ &+ \frac{s_i''}{R_{i,u}^3(s_i'')} (2(s_u - s_i) - SP_i^l) (cK^m) + \quad (3.44) \\ &+ \left. \frac{1}{R_{i,u}^3(s_i'')} ((s_u - s_i)SP_i^l 2cK^m) \right) \end{aligned}$$

Integrando sobre la variable s_i'' , obtenemos integrales de la misma forma que las anteriores, o sea

$$I(p, q) = \frac{x^p}{[x^2 + bx + c]^{\frac{q}{2}}}$$

La ecuación 3.25 quedaría entonces como:

$$C_{i,u,l,m} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^3 C(p, q) I(p, q)$$

donde los coeficientes $C(p, q)$ vienen dados en la tabla 3.3

3.3.3 Función \mathcal{T}

La función \mathcal{T} viene definida en la ecuación 3.26 como:

$$\mathcal{T}_{i,u,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \beta_i \frac{s_u - s_i}{R_{i,u}^2(s_i'')} + \left[\beta_i c \frac{s_u - s_i}{R_{i,u}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^{t_j''} \right] + \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i) \int_{-\Delta t}^{t_j''} \right\} B_j^{(m)}$$

Analizando cada término que aparece en esta ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} \beta_i \frac{s_u - s_i}{R_{i,u}^2(s_i'')} B_j^{(m)} &= \beta_i \frac{(s_u - s_i)}{D_j^{(m)}} \left(\frac{1}{R_{i,u}^2(s_i'')} (r_{iu}^2 \Delta t^2 + SQ_j^m r_{iu} \Delta t + PQ_j^m) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{c R_{i,u}(s_i'')} (SQ_j^m - 2r_{iu} \Delta t) + \frac{1}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Coeficientes C(p,q)				
P Q	0	1	2	3
0	0	0	0	$SP_i^l(s_u - s_i)cK^m$
1	0	0	0	$(2(s_u - s_i) - SP_i^l)cK^m$
2	0	0	0	$-2cK^m$

Tabla 3.3: Coeficientes C(p,q)

donde se ha sustituido el valor de t_j'' por el de $r_{iu}\Delta t - \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c}$.

Analogamente para el segundo término:

$$\begin{aligned} \beta_i c \frac{(s_u - s_i)}{R_{i,u}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^{t_j''} B_j^{(m)} &= \beta_i c \frac{(s_u - s_i)}{D_j^m} \left(-\frac{1}{3c^3} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_{i,u}(s_i'')} \left(-2r_{iu}\Delta t - SQ_j^m \right) \left(-\frac{1}{2c^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_{i,u}^2(s_i'')} \left(r_{iu}^2 \Delta t^2 + SQ_j^m r_{iu} \Delta t + PQ_j^m \right) \left(-\frac{1}{c} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_{i,u}^3(s_i'')} \left(\frac{r_{iu}^3 \Delta t^3}{3} + \frac{SQ_j^m r_{iu}^2 \Delta t^2}{2} + PQ_j^m r_{iu} \Delta t + K^m \right) \end{aligned}$$

Identificando los términos definidos anteriormente, la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} \beta_i c \frac{(s_u - s_i)}{R_{i,u}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^{t_j''} B_j^{(m)} &= \beta_i \frac{(s_u - s_i)}{D_j^m} \left(-\frac{1}{3c^2} \right) + \frac{1}{R_{i,u}(s_i'')} \left(-\frac{B_{i,u}^m}{2c} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_{i,u}^2(s_i'')} \left(-A_{i,u}^m \right) + \frac{1}{R_{i,u}^3(s_i'')} c E_{i,u}^m \end{aligned} \quad (3.45)$$

El último término de esta función es:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i) \int_{-\Delta t}^{t_j''} B_j^{(m)} &= \frac{2}{a^2} \frac{c \delta(s_u - s_i)}{D_j^m} \int_{-\Delta t}^{t_j''} \left(t_j''^2 + SQ_j^m t_j'' + PQ_j^m t_j'' \right) = \\ &= \frac{2}{a^2} \frac{c \delta(s_u - s_i)}{D_j^m} \left(\frac{r_{iu}^3 \Delta t^3}{3} - r_{iu}^2 \Delta t^2 \frac{R_{i,u}}{c} + r_{iu} \Delta t \frac{R_{i,u}^2(s_i'')}{c^2} - \right. \\ &- \frac{R_{i,u}^3(s_i'')}{3c^3} + \frac{SQ_j^m r_{iu}^2 \Delta t^2}{2} + \frac{SQ_j^m R_{i,u}^2}{2c^2} - \\ &- \left. SQ_j^m r_{iu} \Delta t \frac{R_{i,u}}{c} + PQ_j^m r_{iu} \Delta t - PQ_j^m \frac{R_{i,u}(s_i'')}{c} + K^m \right) \end{aligned}$$

si $s_u - s_i$ es cero, la función delta de Kronecker toma el valor 1, mientras que el vector $R_{i,u}$ toma el valor cero, por lo que los únicos términos que influyen son aquellos que no

poseen el término $R_{i,u}$, o sea,

$$\frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i) \int_{-\Delta t}^{t_j''} B_j^{(m)} = \frac{2c}{a^2 D_j^m} \left(\frac{r_{iu}^3 \Delta t^3}{3} + \frac{SQ_j^m r_{iu}^2 \Delta t^2}{2} + PQ_j^m r_{iu} \Delta t + K^m \right)$$

Expresando esta ecuación en función de los coeficientes antes definidos, queda:

$$\frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i) \int_{-\Delta t}^{t_j''} B_j^{(m)} = \frac{2}{a^2 D_j^m} (c E_{i,u}^m) \quad (3.46)$$

3.3.4 Función S

La función S fue definida en la ecuación 3.27 como:

$$S_{i,u,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \beta_i \frac{s_u - s_i}{R_{i,u}^2(s_i'')} + \left[\beta_i c \frac{s_u - s_i}{R_{i,u}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^0 \right] + \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i) \int_{-\Delta t}^0 \right\} B_s^{(m)}$$

El primer término es igual al calculado en la función T , por lo que nos limitaremos a copiarlo tal cual

$$\begin{aligned} \beta_i \frac{s_u - s_i}{R_{i,u}^2(s_i'')} B_s^{(m)} &= \beta_i \frac{(s_u - s_i)}{D_s^{(m)}} \left(\frac{1}{R_{i,u}^2(s_i'')} (r_{iu}^2 \Delta t^2 + SQ_j^m r_{iu} \Delta t + PQ_j^m) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c R_{i,u}(s_i'')} (SQ_j^m - 2r_{iu} \Delta t) + \frac{1}{c^2} \right) \end{aligned}$$

El segundo término es:

$$\beta_i c \frac{(s_u - s_i)}{R_{i,u}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^0 B_s^{(m)} = \beta_i c \frac{(s_u - s_i)}{D_s^m R_{i,u}^3(s_i'')} \left(\frac{\Delta t^3}{3} - \frac{SQ_j^m \Delta t^2}{2} + PQ_j^m \Delta t \right)$$

Identificando términos:

$$\beta_i c \frac{(s_u - s_i)}{R_{i,u}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^0 B_s^{(m)} = \beta_i c \frac{(s_u - s_i)}{D_s^m R_{i,u}^3(s_i'')} (K^m)$$

El último término es:

$$\frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i) \int_{-\Delta t}^0 B_s^{(m)} = \frac{2c K^m}{a^2 D_s^m}$$

3.4 Uniones de hilos

Se denomina unión a la estructura física donde se interconectan entre sí hilos rectos con características de longitud y radios arbitrarios.

Un tratamiento riguroso de la unión implica un conocimiento exacto de su geometría y de su naturaleza, así como los efectos que en ella se producen. Sin embargo, si el tamaño eléctrico de la unión es pequeño, se pueden plantear unas ciertas hipótesis que hagan el estudio sólo dependiente de la geometría de los hilos que la determinan.

Procederemos pues hacer un estudio del tratamiento de uniones distinguiendo tres casos:

1. Uniones donde confluyen hilos paralelos con radios iguales.
2. Uniones de hilos paralelos con distinto radio.
3. El resto de uniones. Ley de Kirchhoff.

3.4.1 Uniones formadas por hilos coaxiales

Consideremos una unión donde convergen N_H hilos. El campo eléctrico total vendrá determinado por [7]:

$$\vec{E}^i + \sum_{j=1}^{N_H} \vec{E}_j^s + \vec{E}_U = 0 \quad (3.47)$$

donde \vec{E}_j^s es el campo dispersado por cada hilo y \vec{E}_U es el campo creado por la estructura física de la unión.

Se particulariza la ecuación 3.47 para el eje del hilo k , y se desarrolla \vec{E}_k^s como se ha expuesto en las secciones anteriores de este capítulo.

El campo dispersado por el resto de los hilos se obtiene a partir del potencial aproximado, esto es, con la aproximación de hilo delgado. El campo dispersado por la unión se desarrollará más adelante.

Discretizando las ecuaciones obtenidas siguiendo los mismos pasos que se expusieron en las secciones anteriores de éste capítulo (ecuación 3.29), tenemos que:

$$E_s^i(u, v\Delta t + \frac{a}{c}) = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \mathcal{F}_{i,u,l,m} I_{i+l,v-\tilde{r}_{i,u+m}} + \mathcal{C}_{i,u,l,m} \mathcal{Y}_{i+l,v-\tilde{r}_{i,u+m-1}} \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_s+1} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \mathcal{T}_{i,u,m} I_{i,v-\tilde{r}_{i,u+m}} + \mathcal{S}_{i,u,m} \mathcal{Y}_{i+l,v-\tilde{r}_{i,u+m-1}} \right\}$$

Generalizando para varios hilos:

$$E_{s_k}^i(u, v\Delta t + \frac{a}{c}) + E_{s_k}^U(u, v\Delta t + \frac{a}{c}) = \sum_{j=1}^{N_H} \left\{ \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \mathcal{F}_{i,u,l,m}^{k,j} I_{i+l,v-\tilde{r}_{i,u+m}}^j + \right. \right.$$

$$+ \left. \mathcal{C}_{i,u,l,m}^{k,j} \mathcal{Y}_{i+l,v-\tilde{r}_{i,u+m-1}}^j \right\} + \sum_{i=1}^{N_s+1} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \mathcal{T}_{i,u,m}^{k,j} I_{i,v-\tilde{r}_{i,u+m}}^j + \right.$$

$$+ \left. \mathcal{S}_{i,u,m}^{k,j} \mathcal{Y}_{i+l,v-\tilde{r}_{i,u+m-1}}^j \right\} \quad (3.48)$$

Donde el entero k denota el hilo donde resolvemos la ecuación. Los superíndices k, j en los términos de \mathcal{F} , \mathcal{C} , \mathcal{T} y \mathcal{S} denotan puntos campo en el hilo k y fuentes en el hilo j .

Veamos los distintos casos de unión que pueden plantearse con este método:

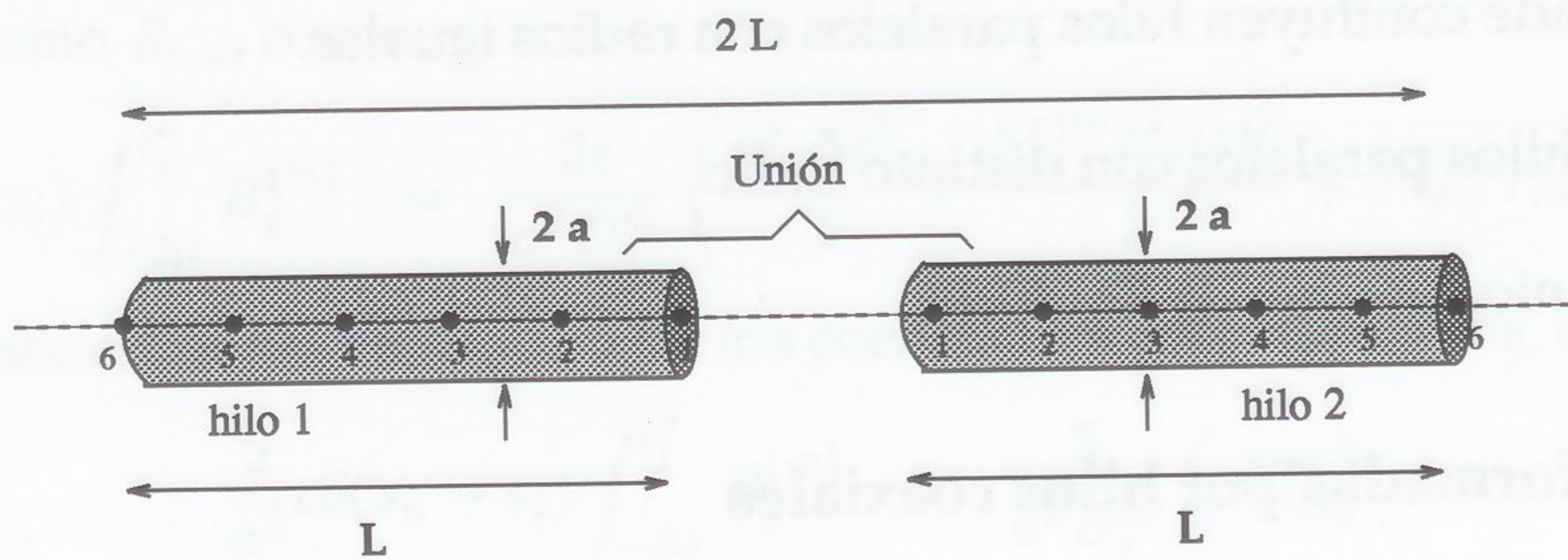


Figura 3.4: Uniones de hilos coaxiales de igual radio

1. Uniones donde confluyen hilos coaxiales de igual radio

En el caso de hilos coaxiales (fig 3.4), los elementos de la matriz de impedancias correspondientes a cada punto campo de cada hilo que confluye en unión serán iguales, y por tanto la matriz se hará singular. Para evitar dicha singularidad, substituiremos los elementos de la matriz por un nuevo conjunto de ecuaciones obtenidas al imponer la igualdad en las variaciones espaciales de la corriente [37].

En este caso, puede darse cuatro posibles configuraciones según que la unión la conforme un punto campo extremo o inicio.

Supongamos una unión como la figura 3.4, en el que los puntos campo que forman la unión, son inicio de hilo. En este caso necesitamos una nueva ecuación en derivadas espaciales de la corriente.

$$\left[\frac{\partial I_1^1}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow 0} = \left[\frac{\partial I_1^2}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow 0} \quad (3.49)$$

donde I_1^1 e I_1^2 son las intensidades de corriente que circulan por el hilo 1 y 2 respectivamente.

De la interpolación en la corriente y de la definición de los coeficientes de interpolación se tiene:

$$\frac{\partial I_i}{\partial s_i''} = \frac{\partial}{\partial s_i''} \sum_{l=k}^{k+2} B_i^l I_{i+l} = \sum_{l=k}^{k+2} \partial_{s_i''} B_i^l I_{i+l} \quad (3.50)$$

Como esta derivada sólo contiene componente espacial en la variable B_i^l se tiene que:

$$\partial_{s_i''} B_i^l I_{i+l} = \frac{1}{D_i^l} (2s_i'' S P_i) \quad (3.51)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.50 nos queda:

$$\frac{\partial I_i}{\partial s_i''} = \sum_{l=k}^{k+2} \frac{I_{i+l}}{D_i^l} (2s_i'' S P_i) \quad (3.52)$$

Tomando el límite cuando $s_i'' \rightarrow 0$ el coeficiente k toma el valor cero y por tanto la suma se extiende desde cero hasta dos. Para el valor $l=0$ los coeficiente D y SP toman los valores:

$$\begin{aligned} D_i^0 &= -\Delta s (-2\Delta s) = 2\Delta s^2 \\ SP_i^0 &= -3\Delta s \end{aligned} \quad (3.53)$$

Análogamente para el valor de $l=1$

$$\begin{aligned} D_i^1 &= -\Delta s^2 \\ SP_i^1 &= -2\Delta s \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para $l=2$

$$\begin{aligned} D_i^2 &= 2\Delta s^2 \\ SP_i^2 &= -\Delta s \end{aligned} \quad (3.55)$$

Sustituyendo los coeficientes 3.53 a 3.55 en la ecuación 3.50 se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial I_i}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow 0} &= \frac{I_i}{2\Delta s^2} (-3\Delta s) + \frac{I_{i+1}}{-\Delta s^2} (-2\Delta s) + \frac{I_{i+2}}{2\Delta s^2} (-\Delta s) \\ &= -\frac{1}{\Delta s} \left(\frac{3}{2}I_i - 2I_{i+1} + \frac{1}{2}I_{i+2} \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Como la corriente, cuando $s_i'' \rightarrow 0$, entra en la unión y , tomando el convenio de que intensidades que entran en la unión son negativas respecto a las que salen, tenemos que:

$$\left[\frac{\partial I_i}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow 0} = \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{3}{2}I_i - 2I_{i+1} + \frac{1}{2}I_{i+2} \right) \quad (3.57)$$

Si en la ecuación 3.50 hacemos tender $s_i'' \rightarrow N_s + 1$, el coeficiente k toma el valor de -1 y por tanto los coeficientes de interpolación D y SP tomarán los valores de:

$$\begin{aligned} D_i^{-1} &= 2\Delta s^2 \\ SP_i^{-1} &= -\Delta s \end{aligned} \quad (3.58)$$

Análogamente para el valor de $l=0$

$$\begin{aligned} D_i^0 &= -\Delta s^2 \\ SP_i^0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Para $l=2$

$$\begin{aligned} D_i^1 &= 2\Delta s^2 \\ SP_i^1 &= \Delta s \end{aligned} \quad (3.60)$$

Sustituyendo los coeficientes 3.58 a 3.60 en la ecuación 3.50 se tiene:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial I_i}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow \Delta s_i''} &= \frac{I_{N_s-1}}{2\Delta s^2} (\Delta s) + \frac{I_{N_s}}{-\Delta s^2} (2\Delta s) + \frac{I_{N_s+1}}{2\Delta s^2} (3\Delta s) \\ &= \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{1}{3} I_{N_s-1} - 2I_{N_s} + \frac{3}{2} I_{N_s+1} \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Para este caso la corriente sale de la unión y según el convenio anterior, ésta sería positiva.

$$\left[\frac{\partial I_1^1}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow 0} = \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{3}{2} I_1^1 - 2I_2^1 + \frac{1}{2} I_3^1 \right) \quad (3.62)$$

Sustituyendo los coeficientes de interpolación 3.62 en la ecuación 3.49, tenemos:

$$\frac{1}{\Delta s} \left(\frac{3}{2} I_1^1 - 2I_2^1 + \frac{1}{2} I_3^1 \right) = \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{3}{2} I_1^2 - 2I_2^2 + \frac{1}{2} I_3^2 \right) \quad (3.63)$$

obteniendose

$$\frac{3}{2}I_1^1 - 2I_2^1 + \frac{1}{2}I_3^1 - \frac{3}{2}I_1^2 + 2I_2^2 - \frac{1}{2}I_3^2 = 0 \quad (3.64)$$

Otra posible configuración podría ser la de la figura 3.5. En este caso la unión la conforman un punto fuente inicial y uno final.

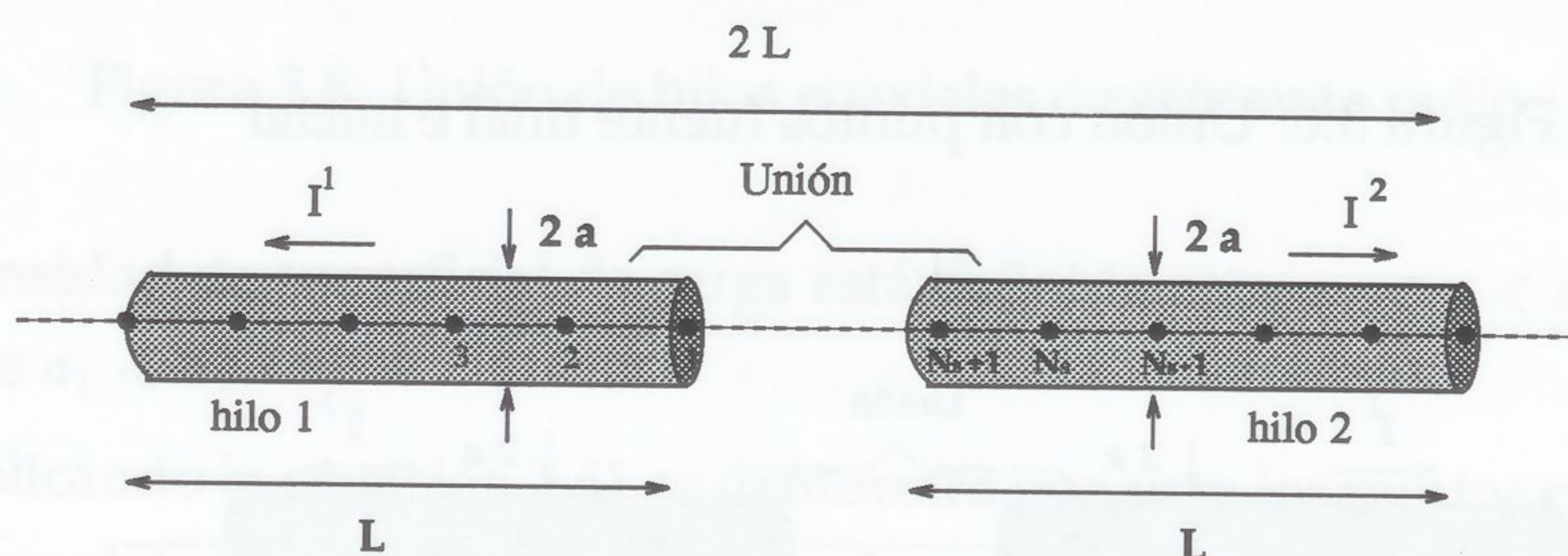


Figura 3.5: Unión con puntos fuente inicial y final

Las derivadas de las corrientes han de cumplir ahora:

$$\left[\frac{\partial I_1^1}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow 0} = \left[\frac{\partial I_{N_s+1}^2}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow \Delta s} \quad (3.65)$$

Análogamente al caso anterior

$$\left[\frac{\partial I_{N_s}^2}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow \Delta s} = \frac{1}{\Delta s} \left(-\frac{1}{2}I_{N_s-1}^2 + 2I_{N_s}^2 - \frac{3}{2}I_{N_s+1}^2 \right) \quad (3.66)$$

Substituyendo los coeficientes de interpolación 3.66 y 3.62 en la ecuación 3.65, tenemos:

$$\frac{1}{\Delta s} \left(\frac{3}{2}I_1^1 - 2I_2^1 + \frac{1}{2}I_3^1 \right) = \frac{1}{\Delta s} \left(-\frac{1}{2}I_{N_s-1}^2 + 2I_{N_s}^2 - \frac{3}{2}I_{N_s+1}^2 \right) \quad (3.67)$$

obteniendose

$$\frac{3}{2}I_1^1 - 2I_2^1 + \frac{1}{2}I_3^1 + \frac{1}{2}I_{N_s-1}^2 - 2I_{N_s}^2 + \frac{3}{2}I_{N_s+1}^2 = 0 \quad (3.68)$$

El tercer caso de unión que puede plantearse es como el de la figura 3.6

La ecuación que se obtiene es:

$$-\frac{1}{2}I_{N_s-1}^1 + 2I_{N_s}^1 - \frac{3}{2}I_{N_s+1}^1 - \frac{3}{2}I_1^2 + 2I_2^2 - \frac{1}{2}I_3^2 = 0 \quad (3.69)$$

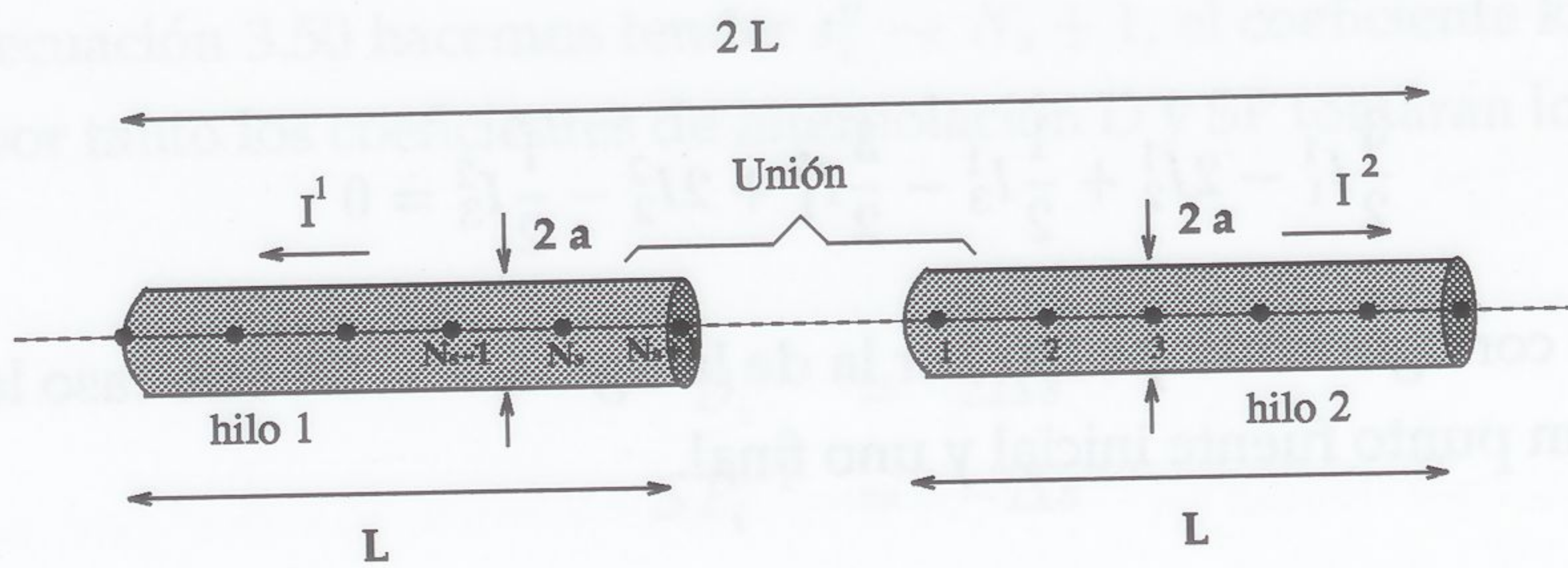


Figura 3.6: Unión con puntos fuente final e inicial

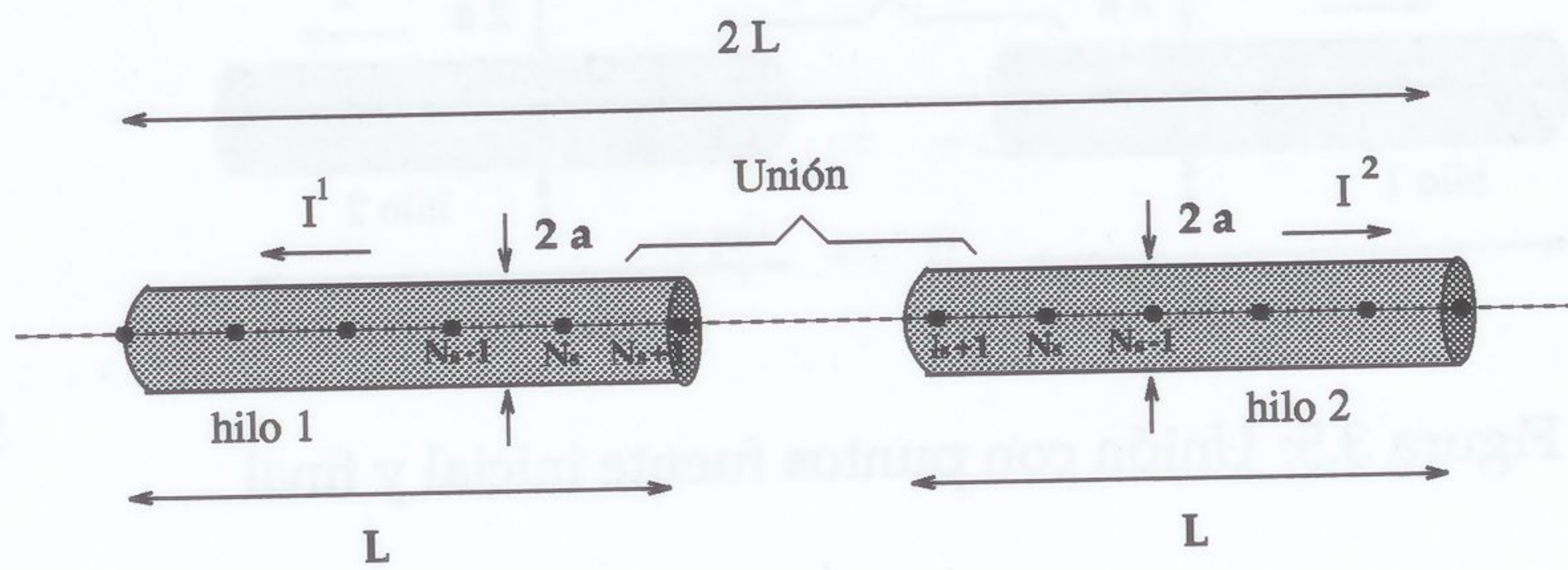


Figura 3.7: Unión con puntos fuentes finales

Por último la figura 3.7 muestra la última posibilidad de unión cuya ecuación puede expresarse por

$$-\frac{1}{2}I_{N_s-1}^1 + 2I_{N_s}^1 - \frac{3}{2}I_{N_s+1}^1 + \frac{1}{2}I_{N_s-1}^2 - 2I_{N_s}^2 + \frac{3}{2}I_{N_s+1}^2 = 0 \quad (3.70)$$

2. Uniones de hilo coaxiales con distinto radio

Sean a_1 y a_2 los radios de los hilos de longitudes L_1 y L_2 respectivamente (fig. 3.8) segmentados en N_{s_1} y N_{s_2} segmentos que determinan N_{s_1+1} y N_{s_2+1} puntos campo en el eje de la estructura. En el plano de la unión se sitúan dos puntos campo, aunque ocupan la misma posición espacial, formalmente pertenecen a hilos diferentes y llevan asociadas como incógnitas las intensidades de hilo que confluyen en la unión. Sean $I_{N_{s_1+1}}^1 = I_1$ y $I_1^2 = I_2$ las corrientes que circulan por cada hilo (fig 3.8).

Para evaluar la contribución de la superficie lateral de la unión, se aplican los mismos razonamientos que en la tapa final del hilo (sección 2.3.2). Distinguiendo esta contribución para puntos campo situados en el plano de la unión y puntos fuera de él, se tiene:

- (a) La tapa no da contribución a la componente axial del campo eléctrico en ambos puntos campo situados en el plano de la unión, puesto que ahora la

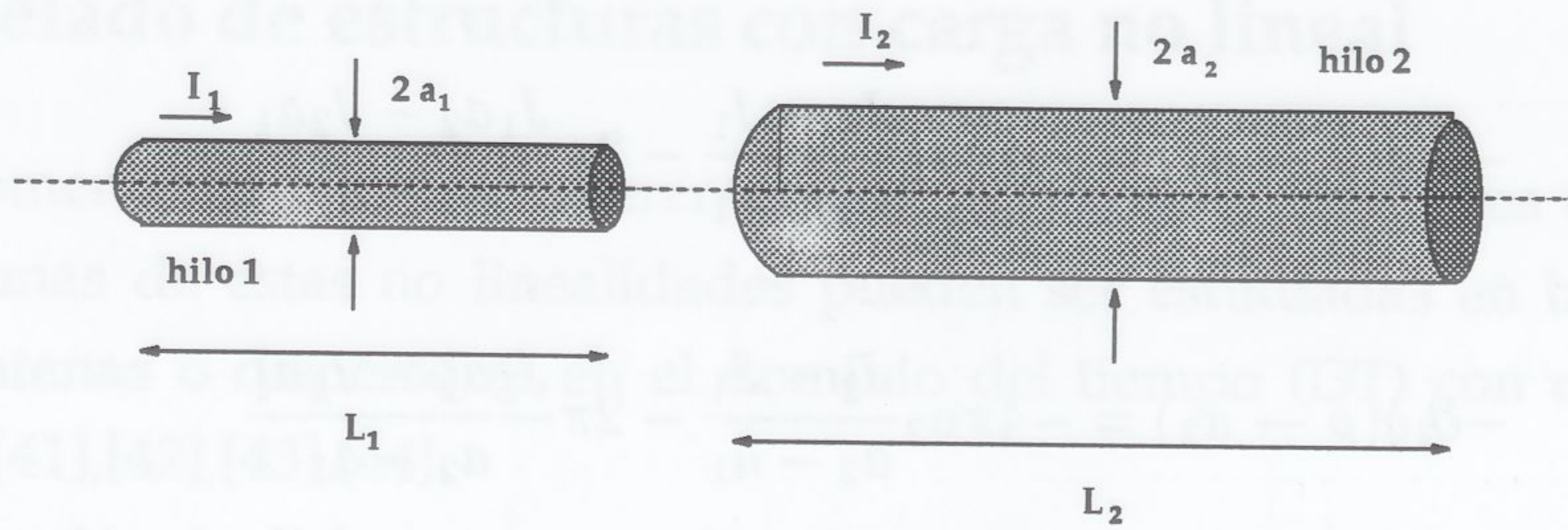


Figura 3.8: Unión de hilos coaxiales de diferente radio

densidad de superficial de carga está definida para $a_1 < \rho < a_2$, suponiendo que $a_1 < a_2$.

- (b) Aplicando la ecuación 2.41 se demuestra que para los puntos campo situados fuera del plano, podemos recoger la contribución de las tapas en forma de anillos de carga con radios a_1 y a_2 .

Así pues el campo generado por la tapa de unión podemos tomarla en la ecuación 3.49 a través de los operadores T y S que poseen el término de carga anular.

Análogamente a la subsección anterior, al ocupar dos puntos campo la misma posición espacial, la matriz de impedancias se hará singular. necesitamos pues una nueva ecuación linealmente independiente con las del resto del sistema para poder describir, sin ambigüedad, las corrientes en la misma unión.

Supongamos que las corrientes que confluyen en la unión, son las de la figura 3.8, ambas positivas. Se define:

$$\vec{J}_1 = \frac{I_1}{2\pi a_1} \hat{\rho} \quad (3.71)$$

$$\vec{J}_2 = \frac{I_2}{2\pi a_2} \hat{\rho} \quad (3.72)$$

La densidad lineal de carga en la superficie de la unión, se expresa como:

$$q(\rho, t) = - \int_0^{2\pi} \rho \int_0^t \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho J_\rho) d\varphi dt = - \int_0^t \rho \int_0^{2\pi} \partial_\rho(\rho J_\rho) = - \int_0^t 2\pi \partial_\rho(\rho J_\rho) \quad (3.73)$$

Tomando una aproximación lineal para la densidad de carga, se tiene:

$$\vec{J}_\rho(\rho) = \frac{J_2 - J_1}{a_2 - a_1} \rho + \frac{J_1 a_2 - J_2 a_1}{a_2 - a_1} \quad (3.74)$$

y por tanto, sustituyendo 3.74 en 3.73 se puede escribir:

$$-\partial_t q(\rho \rightarrow a_1) = -4\pi a_1 \frac{J_2 - J_1}{a_2 - a_1} - 2\pi \frac{J_1 a_2 - J_2 a_1}{a_2 - a_1} \quad (3.75)$$

$$-\partial_t q(\rho \rightarrow a_2) = -4\pi a_2 \frac{J_2 - J_1}{a_2 - a_1} - 2\pi \frac{J_1 a_2 - J_2 a_1}{a_2 - a_1} \quad (3.76)$$

que expresadas en términos de las intensidades de corriente:

$$-\partial_t(\rho \rightarrow a_1) = \frac{I_1(2 - \frac{a_2}{a_1}) - I_2(\frac{a_1}{a_2})}{a_2 - a_1} \quad (3.77)$$

$$-\partial_t(\rho \rightarrow a_2) = \frac{I_2(2 - \frac{a_1}{a_2}) - I_1(\frac{a_2}{a_1})}{a_2 - a_1} \quad (3.78)$$

se efectuaría por tanto el mismo límite por cada hilo, es decir se evalúan:

$$\left[\frac{\partial I_{ij}}{\partial s_i''} \right]_{\substack{s_i'' \rightarrow 0 \\ s_i'' \rightarrow \Delta s}} \quad (3.79)$$

Sustituyendo los coeficientes de interpolación:

$$\left[\frac{\partial I_1}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow \Delta s} = \frac{1}{\Delta s} \left(-\frac{1}{2} I_{N_{s_1}-1}^1 + 2I_{N_{s_1}}^1 - \frac{3}{2} I_{N_{s_1}+1}^1 \right) \quad (3.80)$$

$$\left[\frac{\partial I_2}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' \rightarrow 0} = \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{3}{2} I_1^2 - 2I_2^2 + \frac{1}{2} I_3^2 \right) \quad (3.81)$$

Se obtiene dos posibles ecuaciones, igualando 3.77 y 3.80 y por otra parte 3.78 y 3.81. Ambas ecuaciones son válidas. Como sólo se necesita una ecuación, se aplica aquella que tiene más peso, o sea la correspondiente al hilo cuyo radio sea mayor.

3. Uniones de hilos con orientaciones y radios diferentes. Ley de Kirchhoff en la unión.

Para el resto de los casos que se nos puede presentar, el tratamiento es análogo, pero simplificaremos el problema aplicando las leyes de Kirchhoff [2] a la unión para plantear un sistema de ecuaciones linealmente independiente. Supongamos que N_H hilos conforman la unión. Para cada hilo aparece una incógnita relativa al punto de geométrico que define la unión por lo que necesitamos N_H ecuaciones adicionales. Utilizando las ecuaciones 3.49 y 3.65 nos aparecen $N_H - 1$ ecuaciones. La otra ecuación se obtiene haciendo nula la suma de las N_H intensidades.

3.5 Modelado de estructuras con carga no lineal

Algunos fenómenos físicos son inherentemente no lineales. En el área de electromagnetismo, algunas de estas no linealidades pueden ser estudiadas en base a la modelación de antenas o dispersores en el dominio del tiempo (DT) con carga no lineal [38],[39],[40],[41],[42],[43],[44].

La introducción de dichas cargas no lineales en la propia estructura del objeto (tanto antenas como dispersores), nos permitirá modelar la distribución de corriente inducida, y por tanto los campos radiados, según las necesidades del problema a estudiar.

La técnica numérica del MM, permite el estudio de estos fenómenos de una forma simple, debido al proceso de solución escalonado en el tiempo. El tratamiento numérico, es independiente del dispersor.

Supongamos una antena (fig. 3.9) o un dispersor (fig. 3.10)

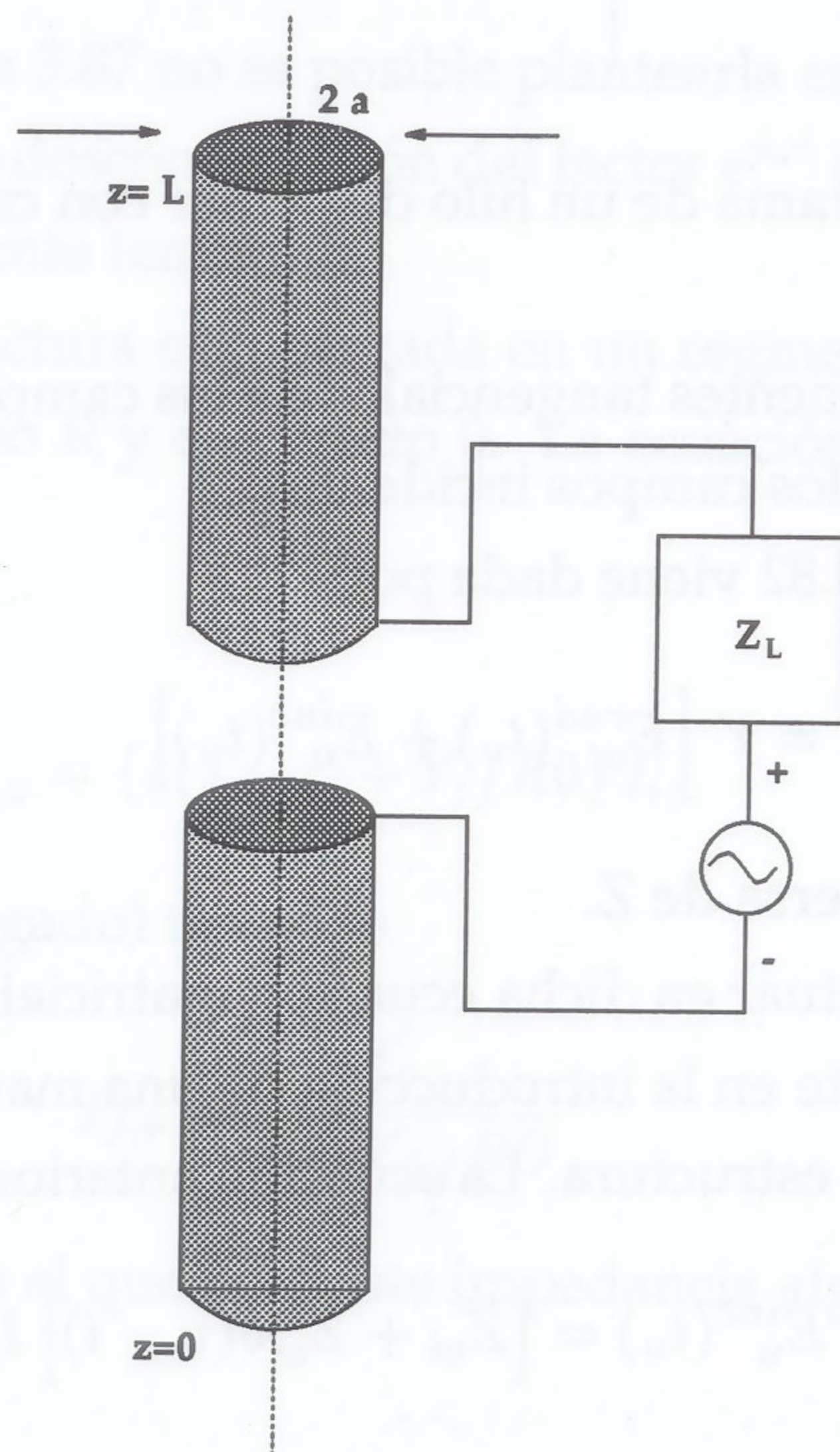


Figura 3.9: Diagrama de una antena de hilo con carga no lineal

En todos los razonamientos posteriores, no se hará ninguna distinción entre estructuras radiadoras y dispersoras, pues la única diferencia reside en que la fuente generadora de energía (fuente de excitación) esté contenida en ella o no.

La ecuación integral 3.29, que puede ser escrita en términos matriciales de la forma:

$$E_u^{rad}(t_v) + E_u^{inc}(t_v) = Z_{ui} I_{i,v} \quad u = 1, \dots, N \quad (3.82)$$

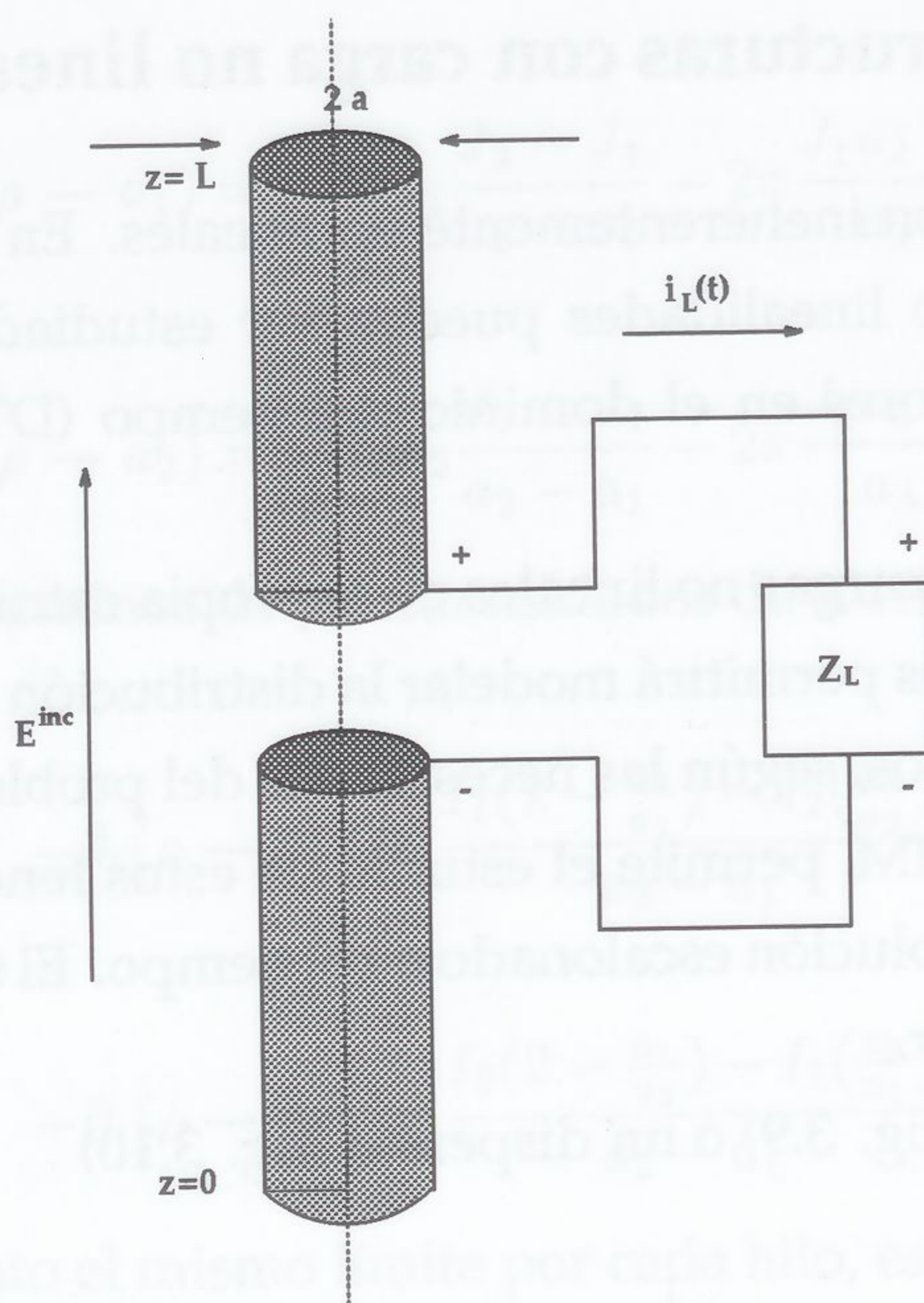


Figura 3.10: Diagrama de un hilo dispersor con carga no lineal

donde $E_u^{rad}(t_v)$ son las componentes tangenciales de los campos radiados y $E_u^{inc}(t_v)$ las componentes tangenciales de los campos incidentes.

La solución a la ecuación 3.82 viene dada por:

$$I_{i,v} = Y \left[E_u^{rad}(t_v) + E_u^{inc}(t_v) \right] \quad (3.83)$$

donde $Y=Z^{-1}$ es la matriz inversa de Z .

Las modificaciones a efectuar en dicha ecuación matricial para contemplar los efectos de carga no lineales consiste en la introducción de una matriz diagonal conteniendo los elementos no lineales de la estructura. La ecuación anterior queda en este caso como:

$$E_u^{rad}(t_v) + E_u^{inc}(t_v) = \left[Z_{ui} + Z_{ui}^L \delta(u-i) \right] I_{i,v} \quad (3.84)$$

multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por Y , matriz inversa de Z , tenemos:

$$Y_{ju} \left[E_u^{rad}(t_v) + E_u^{inc}(t_v) \right] = I_{i,v} + Y_{ju} Z_{ui}^L I_{i,v} \quad (3.85)$$

donde se ha utilizado el convenio de índices repetidos.

En el caso de que alguna de las impedancias de carga dependan de la intensidad, la matriz Z^L será un operador no lineal que actuará sobre la intensidad de corriente.

En el intervalo espacial en el que la impedancia de carga sea distinta de cero, no se cumplirá la condición de conductor perfecto [39], por lo que tendremos que discernir las ecuaciones anteriores a dos casos distintos, segmento con carga o sin ella.

Llamaremos

$$I'_{j,v} = Y_{ju} \left[E_u^{rad}(t_v) + E_u^{inc}(t_v) \right] \quad (3.86)$$

a la corriente que recorrería la estructura si no existiese impedancia de carga en ningún intervalo de la misma. Introduciendo esta definición en la ecuación 3.85, y evaluando el segundo miembro, la ecuación que resulta es:

$$I'_{j,v} = \left\{ \delta(j - i) + Y_{ju} Z_{ii}^L \right\} I_{i,v} \quad (3.87)$$

que se reduce a un sistema de ecuaciones lineales o no lineales según lo sea la impedancia de carga ¹ Z_{ii}^L .

Una ecuación análoga a la 3.87 no es posible plantearla en DF, ya que la impedancia de carga no lineal no permite descomposición del factor $e^{j\omega t}$ en las ecuaciones y con ello la eliminación de la componente temporal.

Supongamos que la estructura está cargada en un segmento del hilo, con un diodo ideal de resistencia en inverso R y en directo 0 . La ecuación anterior puede escribirse entonces como:

$$I'_{j,v} = \left\{ \delta(j - i) + Y_{jf} R0 \right\} I_{i,v} \quad (3.88)$$

Para un $j=f$ (segmento cargado) tenemos

$$I_{f,v} = \frac{I'_{f,v}}{1 + Y_{f,f} R0} \quad (3.89)$$

y para $j \neq f$ (segmento en el que no existe impedancia alguna), se tiene:

$$I_{j,v} = I'_{j,v} - \frac{Y_{j,f} R0 I'_{f,v}}{1 + Y_{f,f} R0} \quad (3.90)$$

donde se ha utilizado la nomenclatura $R0$ para indicar la carga en inverso y en directo respectivamente, dependiendo del signo de $I'_{f,v}$.

¹Esta solución es estrictamente válida para una sola carga. Si aparecen varias cargas en la estructura la solución exacta se complica. Sin embargo la ecuación 3.87 sigue siendo numéricamente válida si las cargas están separadas por más de un segmento debido al carácter cuasi-diagonal de la matriz de impedancias Z

Capítulo 4

Desarrollo del programa DOTIG-3

El programa DOTIG-3 calcula, en el dominio de tiempo, las intensidades de corriente inducidas sobre un blanco modelado por hilos. Una vez obtenidas dichas corrientes, el programa POSDOTIG-3 proporciona una serie de salidas como campos cercanos, de radiación, sección recta radar (RCS), etc. El programa principal, posee un subprograma auxiliar PREDOTIG-3 que permite de una forma más fácil generar el fichero de entrada (entrada.xxx) con las especificaciones sobre el modelo a estudiar, la excitación, etc. En este capítulo, nos centraremos en el desarrollo software de los distintos programas (fig. 4.1).

4.1 Estructura del programa DOTIG-3

El módulo del programa principal es DOTIG-3 que se compone de una serie de subrutinas y funciones como FUNFG1, FUNFG2, GEOMET, FUNINT, PULSO, MODULO, ESCALAR, LIBRO. En los apartados sucesivos, se explicarán con más detalle cada una de las subrutinas y funciones. La organización del programa puede esquematizarse en el diagrama de bloques de la figura 4.2.

Como puede verse en la figura 4.2, el primer paso, después de la declaración de variables es la lectura de la geometría. El programa obtiene la información del fichero denominado "entrada.xxx", donde xxx, es un conjunto de tres caracteres, que puede ser utilizado para la identificación del problema a estudiar.

El fichero de entrada, generado por el programa PREDOTIG-3 es el siguiente:

1. Ancho del pulso gaussiano.
2. En el caso de dispersores, dirección de propagación de la onda incidente. En caso de antenas, se tiene tres ceros.

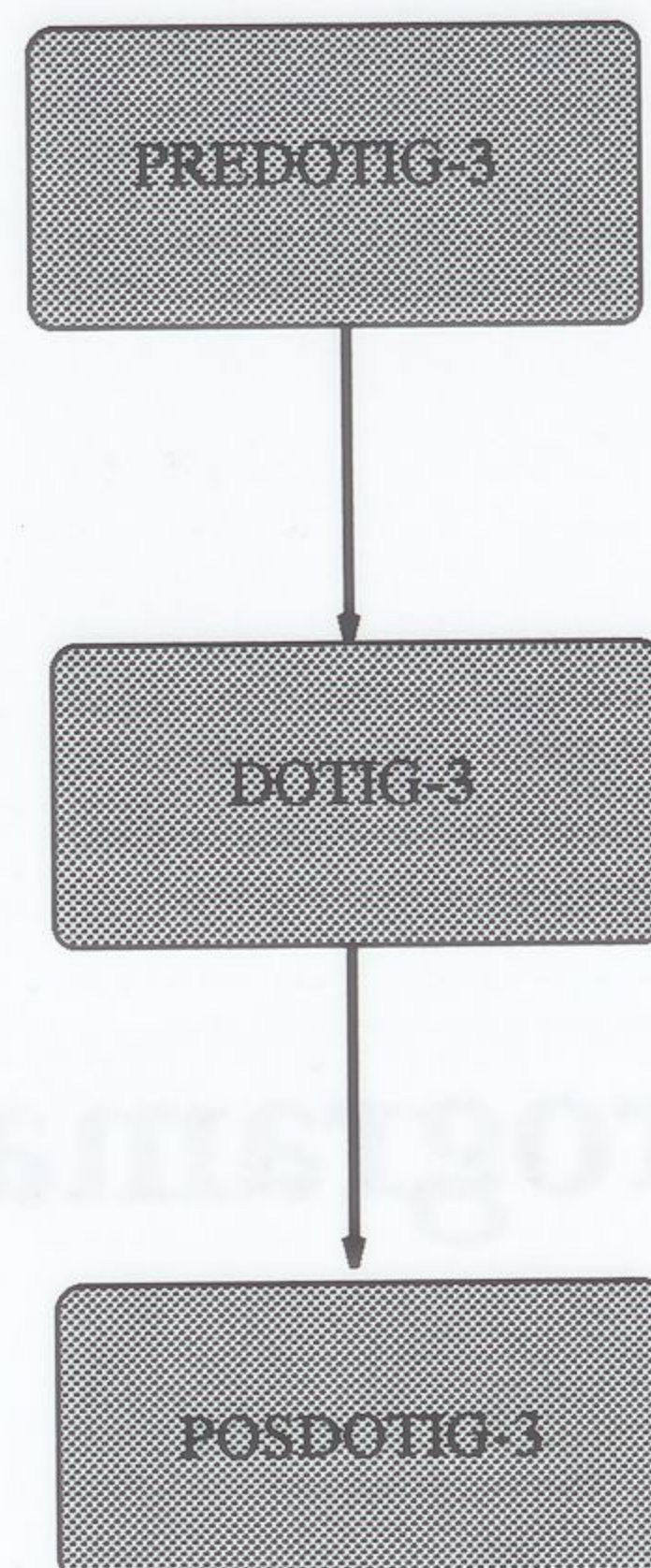


Figura 4.1: Estructura general de los programas

3. En el caso de dispersores, polarización del campo incidente. En el caso de antenas, análogamente al caso anterior, tres ceros.
4. Características de la onda incidente, que puede ser un pulso gaussiano:

$$E^i(t) = e^{-g^2(t-t_{max})^2} \quad (4.1)$$

o, para el caso de estructuras que presenten caminos cerrados, proporcional a su derivada temporal.

$$E^i(t) = 2g(t - t_{max})e^{-g^2(t-t_{max})^2} \quad (4.2)$$

5. Tipo de estructura:
0 = antena. 1 = dispersor.
6. Numero de fuentes de alimentación que se desea introducir en la estructura (arrays de antenas).
7. Carga no lineal de la estructura:
0 = sin elementos de carga.
1 = con elementos de carga.
8. Si la opción siete es uno, se lee:
Hilo alimentado, segmento del hilo alimentado, valor del voltaje de alimentación

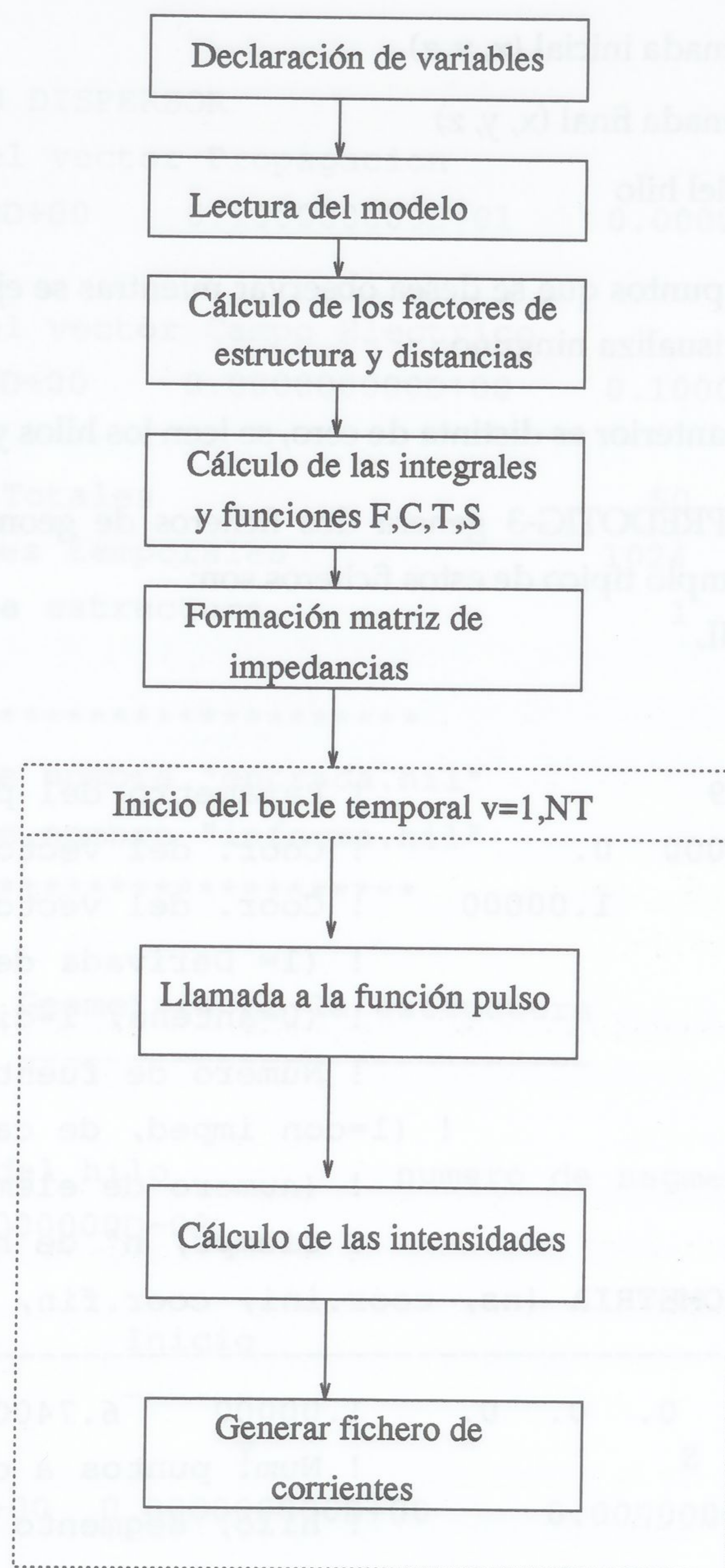
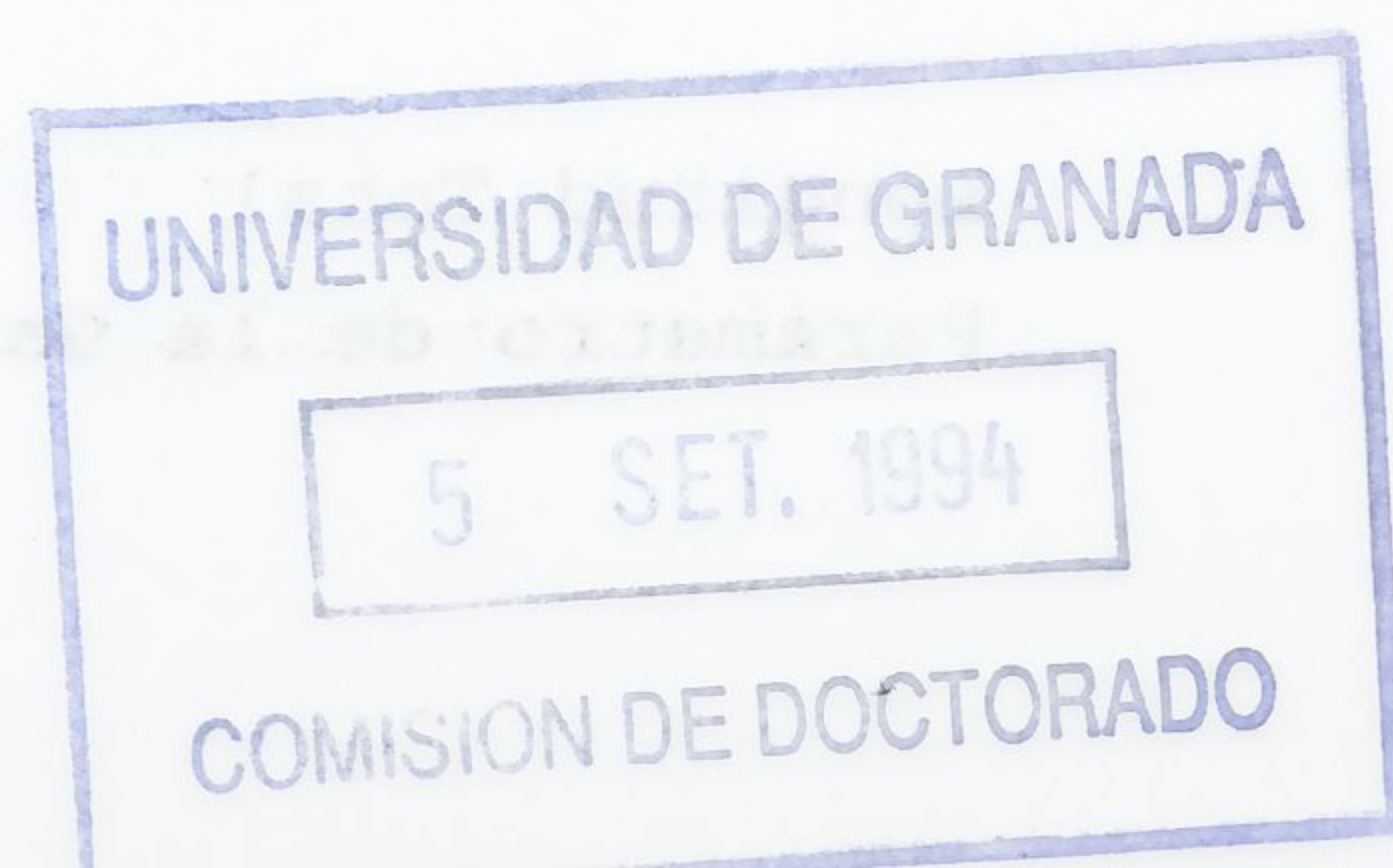


Figura 4.2: Diagrama de bloques de DOTIG-3

9. Si la opción ocho es uno, se lee:
Hilo cargado, segmento donde se ubica la carga, carga en directo, carga en inverso
10. Instante temporal y número de hilos de la estructura.
11. Geometría, la cual se compone, por hilo, de:
 - (a) Número de segmentos de cada hilo.



(b) Coordenada inicial (x, y, z)

(c) Coordenada final (x, y, z)

(d) Radio del hilo

2. Número de puntos que se desea observar mientras se ejecuta el programa. Si es cero, no se visualiza ninguno.

3. Si la opción anterior es distinta de cero, se leen los hilos y segmentos a visualizar.

El programa PREDOTIG-3 genera dos ficheros de geometría, entrada.xxx e informa.xxx. un ejemplo típico de estos ficheros son:

ENTRADA.HIL

```

5.000000E+09          ! Parametro del pulso
0.    1.00000    0.    ! Coor. del vector propaga.
0.    0.    1.00000    ! Coor. del vector E incid.
0          ! (1= Derivada del pulso, 0= Pulso)
1          ! (0=antena, 1=dispersor)
0          ! Numero de fuentes
0          ! (1=con imped, de carga, 0= sin carga)
0          ! (numero de elementos de carga)
1024  1          ! tiempo, n" de hilos
          GEOMETRIA (ns, coor.ini, coor.fin, radio)
-----
50  0.  0.  0.  0.  0.  1.00000    6.74000E-03
1          ! Num. puntos a observar
1  25          ! hilo, segmento

```

INFORMA.HIL

Datos sobre la estructura

```

Longitud Total          0.1000000000D+01
Parametro de la Gaussiana g(1/s.)= 0.5000000000D+10

```

LA ESTRUCTURA ES UN DISPERSOR

Coordenadas X,Y,Z del vector Propagacion

0.000000000D+00 0.100000000D+01 0.000000000D+00

Coordenadas X,Y,Z del vector Campo Electrico

0.000000000D+00 0.000000000D+00 0.100000000D+01

Numero de Segmentos Totales 50

Numero de Iteracciones temporales 1024

Numero de hilos de la estructura 1

Se crea el fichero de nombre "entrada.hil"

Se crea el fichero de nombre "informa.hil"

Geometría de la estructura

Hilo	radio del hilo	numero de segmentos
1	0.674000000D-02	50

Inicio

Hilo	X	Y	Z
1	0.000000000D+00	0.000000000D+00	0.000000000D+00

Final

Hilo	X	Y	Z
1	0.000000000D+00	0.000000000D+00	0.100000000D+01

Características de la estructura

Se excita con un pulso gaussiano

Los segmentos no tienen impedancias de carga

Visualización de resultados

```
-----
Hilo Numero          Segmento
    1                  25
```

Una vez leída la estructura, el siguiente paso será el cálculo de las distancias. Esto lo efectúa la subrutina GEOMET.

Una vez calculados todos los términos de distancias, el siguiente paso consistirá en el cálculo de las integrales asociadas a los funciones \mathcal{F} , \mathcal{C} , \mathcal{T} , \mathcal{S} . Estas integrales, como se vió en capítulos anteriores, poseen la forma:

$$I(p, q) = \int \frac{x^p}{[x^2 + bx + c]^{\frac{q}{2}}}$$

La variable matricial bidimensional que contiene a estas integrales es INT.

Seguidamente, se calculan las funciones FM, CM, FM2, CM2 que corresponden a \mathcal{F} , \mathcal{C} , \mathcal{T} , \mathcal{S} respectivamente.

Con el cálculo de estas funciones se completa el desarrollo de la estructura. El último paso antes de entrar en el bucle temporal será rellenar la matriz de impedancias.

Para obtener dicha matriz de impedancias, hay que distinguir si la fila correspondiente a los puntos fuente o campo a tratar es una tapa o por el contrario está contenido en el hilo.

Los elementos de la matriz corresponderán a las sumas de los productos de las integrales por los coeficientes de estructura para cada punto fuente y campo que no conformen unión.

El tratamiento para uniones, se especificó en la sección 3.4 del capítulo 3.

Una vez obtenida la matriz y almacenada en la variable WK, procederemos a la inversión de la misma. La función encargada de efectuar esta inversión es LIBRO.

Como se ha comentado en capítulos anteriores DOTIG-3 resuelve el problema de la interacción de una OEM con una estructura llevando a cabo un proceso escalonado en el tiempo. Es decir, resuelve la ecuación

$$ZI_{i,v} = E_{i,v}^i + E_{i,v}^s \quad (4.3)$$

para los instantes "V" desde V=1 hasta el número de instantes totales NT.

Entrada-Salida de GEOMET	
ENTRADA	SALIDA
N1 = número máximo de Point-matching Ra = radio de los hilos DS = incremento espacial COOIF = coordenadas geométricas NSM = número de segmentos por hilo NHILOS = número máximo de segmentos NHILOSP = número máximo de hilos NS = número de segmentos	R = matriz de distancias SVEC = matriz de vectores unitarios $IUN = \begin{cases} 0 & \text{tapa} \\ 1 & \text{unión} \end{cases}$ RK = matriz de retrasos en la iluminación

Tabla 4.1: Entrada-Salida de GEOMET

DOTIG-3 permite ejecutar el programa hasta un cierto tiempo $V=INSTFI$, mayor al calculado en ejecuciones anteriores, sin más que leer las corrientes en la estructura en todos los tiempos anteriores del fichero DOTIGOUT.xxx

Si al iniciar el programa, se desea relanzar una estructura ya calculada, es en este momento en el que se actualiza el fichero de configuración para corregir el nuevo instante temporal final.

DOTIG-3 está organizado de forma que todos los cálculos o parámetros independientes del tiempo, se realicen antes de comenzar el bucle temporal. A continuación, se llama a la función CAMPO, para calcular el campo incidente, ya sea producido por una fuente exterior a la estructura (dispersor) o sea la propia estructura la que la genere (antena radiando). En la sección 4.1.4 se explica el funcionamiento de dicha función más específicamente.

Una vez calculado dicho campo incidente, es almacenado en la matriz de términos independientes **BB** del sistema de ecuaciones anteriores.

El proceso escalonado en el tiempo termina cuando el índice V alcanza el valor NT correspondiente al instante temporal final.

4.1.1 Subrutina GEOMET

Como se ha comentado en el programa principal, la subrutina GEOMET, básicamente calcula los términos de distancias. El diagrama de bloques de GEOMET corresponde a la figura 4.3

Las entradas y salidas de la subrutina vienen dadas en la tabla 4.1

La subrutina comienza calculando los vectores unitarios en las direcciones de cada

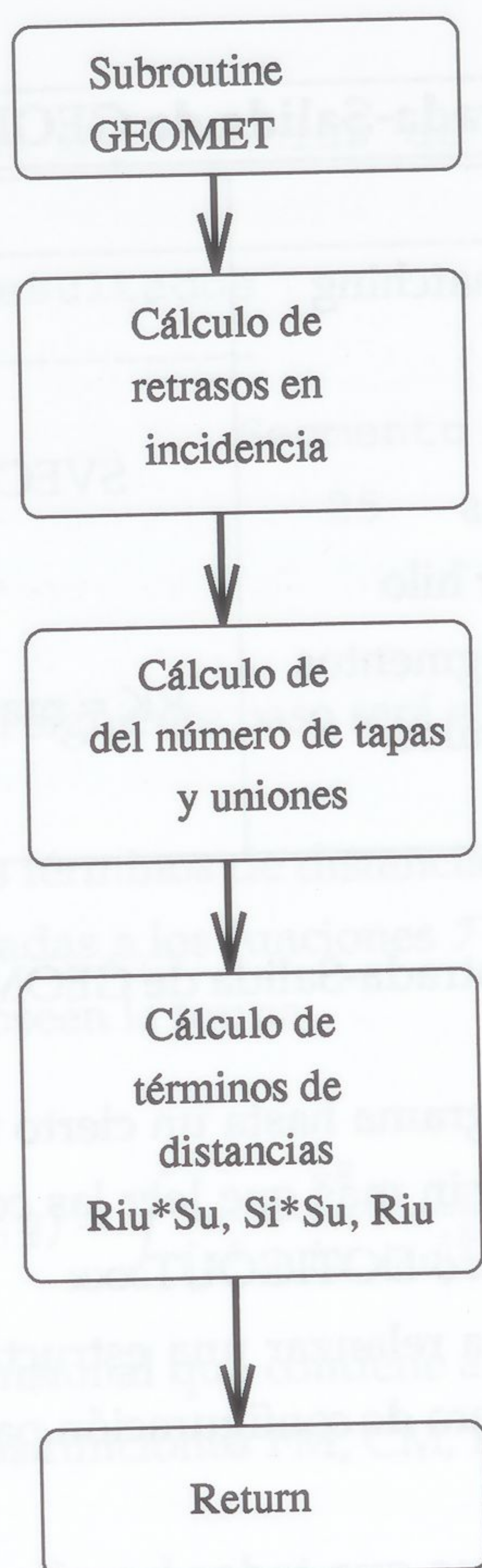


Figura 4.3: Diagrama de bloques de GEOMET

uno de los hilos de la estructura. Estos vectores son almacenados en la matriz SVEC.

A continuación se evalúan los retrasos que hay que introducir en la función campo incidente en cada punto campo.

Otro de los aspectos que aborda esta subrutina, es la clasificación de los finales de los hilos. Tomando como convenio que la distancia entre un extremos y otro de un hilo adyacente sea menor a 0.0001 metros, la bandera iun tomará los valores cero si es una tapa, entendiendo por tapa un extremo sin unión, o uno si dicho extremo conforma una unión.

Los términos de distancias, se almacenan en la variable R , cuyos índices estan en el rango de uno a tres. El primer índice corresponde a:

$$R = \begin{cases} 1 = \vec{R}_{iu} \cdot \hat{s}_u \\ 2 = \hat{s}_i \cdot \hat{s}_u \\ 3 = R_{iu} \end{cases}$$

el segundo y el tercer índice corresponden a puntos campo y fuente.

4.1.2 Función FUNINT1

4.1.3 Subrutinas FUNFG1 y FUNFG2

Las funciones FUNFG1 y FUNFG2 calculan los coeficientes definidos en el capítulo 3 correspondientes a las tablas 3.2 y 3.3, así como los coeficientes necesarios para el cálculo de las funciones \mathcal{T} , \mathcal{S} .

Estas subrutinas están definidas en dominios diferentes, o sea la subrutina FUNFG1 corresponde a puntos fuente y campo dentro de la estructura filamental, sin incluir tapas o uniones. Para puntos que conformen tapa o unión, es utilizada la subrutina FUNFG2.

Es en estas subrutinas donde se calculan los factores:

$$D_{i,j}^{(l,m)} = \prod_{\substack{p=k \\ p \neq l}}^{k+2} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (s_{i+l} - s_{i+p})(t_{j+m} - t_{j+q}) \quad (4.4)$$

$$SP_i^l = \sum_{\substack{p=k \\ p \neq l}}^{k+2} (s_i - s_{i+p}) \quad (4.5)$$

$$PP_i^l = \prod_{\substack{p=k \\ p \neq l}}^{k+2} (s_i - s_{i+p}) \quad (4.6)$$

$$SQ_j^m = \sum_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (t_j - t_{j+q}) \quad (4.7)$$

$$PQ_j^m = \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (t_j - t_{j+q}) \quad (4.8)$$

Las llamadas a estas subrutinas vienen dadas en las tablas 4.2 y 4.3

4.1.4 Función CAMPO

La función CAMPO es la encargada de generar el campo incidente para cada instante temporal.

Si la estructura es diseñada como dispersor y su geometría no posee caminos cerrados, el campo incidente es:

$$E = e^{-g^2(t-t_{max}-rk)^2} \quad (4.9)$$

Entrada-Salida de FUNFG1	
ENTRADA	SALIDA
$SS = s_i \cdot s_u$ $SR = R_{iu} \cdot S_u$ MRIUNF = incremento espacial L, K = factores de estructura espacial M, N = factores de estructura temporal	F = matriz de funciones \mathcal{F} CAR = matriz de funciones \mathcal{C}

Tabla 4.2: Entrada-Salida de FUNFG1

Entrada-Salida de FUNFG2	
ENTRADA	SALIDA
$SS = s_i \cdot s_u$ $SR = R_{iu} \cdot S_u$ MRIUNF = incremento espacial M, N = factores de estructura temporal	FC = matriz de funciones \mathcal{T} CARC = matriz de funciones \mathcal{S} TA1 = TA2 =

Tabla 4.3: Entrada-Salida de FUNFG2

Si la estructura con caminos cerrados, el campo será:

$$E = 2g(t - t_{max} - rk)e^{-g^2(t-t_{max}-rk)^2} \quad (4.10)$$

donde g corresponde al parámetro del pulso, t el instante en el que se evalúa el campo, t_{max} inicia la excitación con un cienavo del valor máximo del pulso gaussiano, o sea:

$$t_{max} = \frac{\sqrt{\log 100}}{g} \quad (4.11)$$

La variable rk , corresponde al retraso en incidencia comentado en la subrutina GEOMET.

4.1.5 Subrutina LIBRO

Como se ha comentado anteriormente, el proceso de solución escalonado en el tiempo sólo requiere invertir la matriz del sistema una sola vez. El algoritmo de inversión utilizado es el de Gauss-Jordan que se basa en la diagonalización de un sistema formado por la matriz del sistema y la matriz identidad [45]. Este algoritmo ha sido perfeccionado en los siguientes puntos:

Entrada-Salida de LIBRO	
ENTRADA	SALIDA
WK = matriz a invertir N1L = Num. de ptos. campo o fuente en la estruc. N1 = Num. máximo de puntos fuente o campo	Z = matriz impedancias BB = vector de términos indep.

Tabla 4.4: Entrada-Salida de LIBRO

i) Sin costo computacional adicional se puede invertir una matriz, resolver un sistema, evaluar los autovalores y calcular el determinante.

ii) No se necesita ninguna memoria de trabajo.

Por otra parte el algoritmo es de los más eficientes en cuanto a tiempo de cálculo, pues sólo necesita operar N^3 veces (siendo N el orden del sistema), mientras que los algoritmos habituales necesitan N^4 operaciones.

La entrada y salidas a esta función vienen dadas en las tabla 4.4

4.2 Desarrollo del programa PREDOTIG-3

Como ya hemos comentado, PREDOTIG-3, es un programa auxiliar de DOTIG-3, encargado de gestionar el preproceso, así como de la generación de los ficheros de entrada ya comentados (entrada.xxx e informa.xxx).

El programa comienza preguntando al usuario, si desea modificar una estructura ya generada o por el contrario, desea generar una nueva.

Si lo que deseamos es modificar una estructura ya modelada, PREDOTIG-3 preguntará en qué formato se encuentra de los siguientes:

1. Ficheros DOTIG-3
2. Ficheros AWAS
3. Ficheros NEC-2

El análisis de cada uno de estas opciones, se efectuará en sucesivas secciones.

Si por el contrario, el usuario decide modelar una nueva estructura, el programa comenzará pidiendo la extensión para los ficheros de salida. Como se ha comentado anteriormente, dicha extensión constará de tres caracteres (para compatibilizar con programas de visualización bajo entorno "DOS").

Supongamos que deseamos modelar una malla de hilos como la de la figura 4.4 donde todos los hilos tienen de radio 0.00674 metros y todos de longitud 0.2 metros.

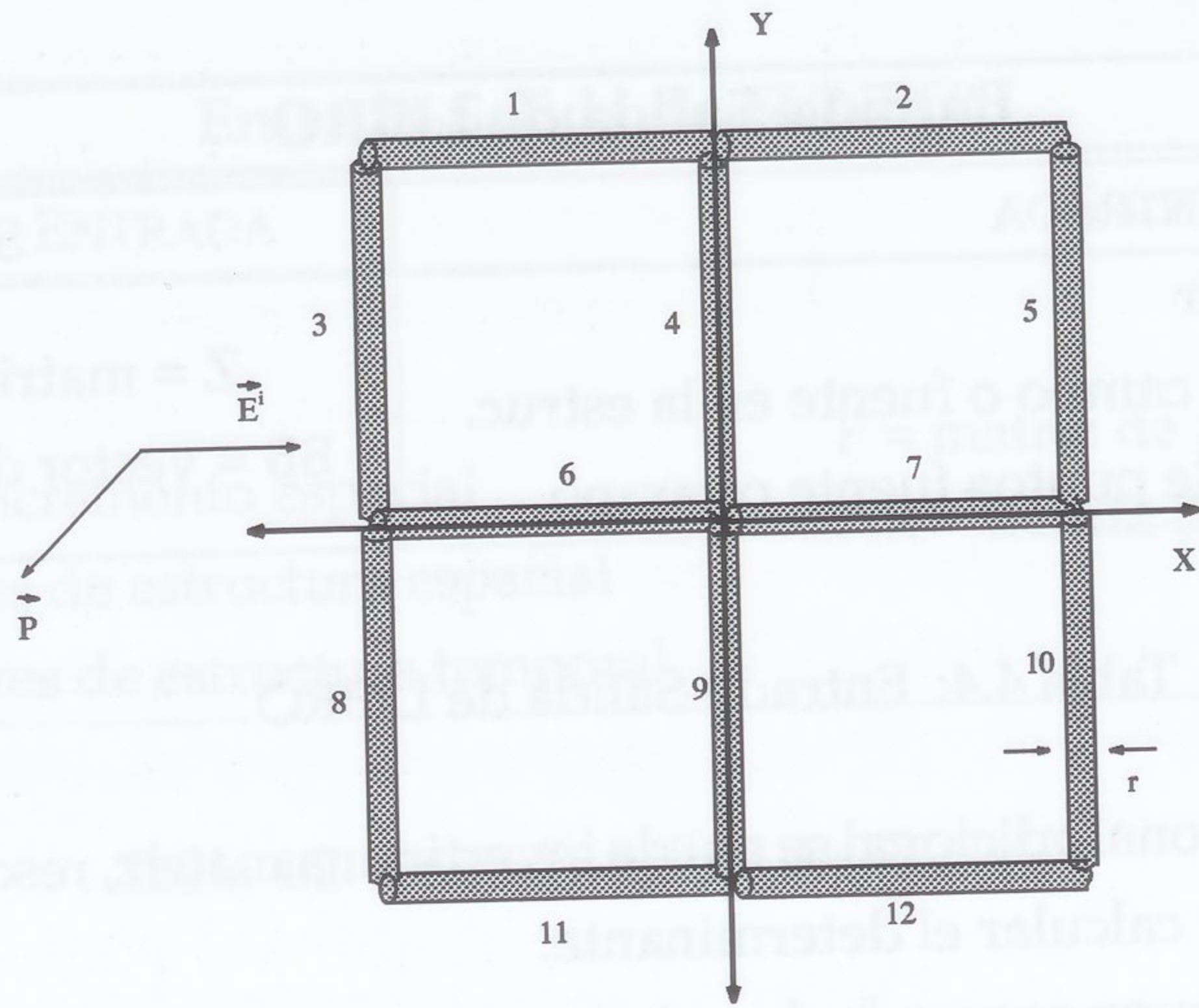


Figura 4.4: Geometría de una malla

La estructura es un dispersor con 12 hilos interconectados entre sí. El número de segmentos por hilo es de 5. Una vez introducida la extensión (mal), el programa nos pedirá el número de instantes temporales (1024), el número de hilos de la estructura (12), los radios de todos y cada uno de los hilos, (todos = 0.00674).

El siguiente punto será las coordenadas iniciales y finales, expresadas en metros, de cada uno de los hilos. En nuestro caso son:

INICIAL			FINAL		
X	Y	Z	X	Y	Z
-0.200000	0.200000	0.000000	0.000000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.000000	0.200000	0.200000	0.000000
-0.200000	0.200000	0.000000	-0.200000	0.000000	0.000000
0.000000	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.200000	0.200000	0.000000	0.200000	0.000000	0.000000
-0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.200000	0.000000	0.000000
-0.200000	0.000000	0.000000	-0.200000	-0.200000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.200000	0.000000
0.200000	0.000000	0.000000	0.200000	-0.200000	0.000000
-0.200000	-0.200000	0.000000	0.000000	-0.200000	0.000000
0.000000	-0.200000	0.000000	0.200000	-0.200000	0.000000

A medida que se van introduciendo las coordenadas inicial y final por hilos, el programa pedirá en el número de segmentos con que se quiere mallar el mismo.

Una vez introducida la geometría del problema, hemos de decidir, si ésta es una antena o un dispersor. En nuestro caso particular, esta será un dispersor.

La excitación, como se comentó en el desarrollo del programa, siempre será un pulso gaussiano, o su derivada temporal para el caso de caminos cerrados. En nuestro caso, la malla conforma caminos cerrados, por lo que se escogerá iluminar con su derivada. El parámetro del pulso es modificable por el usuario ($g=3e^9$).

Si la opción anterior, fue la de una estructura dispersiva, la onda incidente es una OEMT plana desplazándose sobre la dirección definida por el usuario (en nuestro ejemplo en la dirección \hat{x}) y cuya dirección del campo eléctrico, es también definida por el usuario (en el ejemplo, en la dirección \hat{z}).

Si la opción elegida es una antena, el programa pedirá el número de fuentes de alimentación, así como en el segmento y en el hilo que se desee introducir. En este caso la excitación es de la forma

$$E = \frac{e^{-g^2(t-t_{max})^2}}{2\Delta s}$$

siendo Δs , el incremento espacial del segmento del hilo donde se ubica la fuente de alimentación.

Para el caso de caminos cerrados, la alimentación será:

$$E = \frac{2g(t - t_{max})e^{-g^2(t-t_{max})^2}}{2\Delta s}$$

Con respecto a las fuentes de alimentación posibles, decir que es la que menos dependencia con la geometría de la estructura presenta, no así fuentes de alimentación tipo $\delta - gap$ que como pueden verse en [46] y en [47] la dependencia es mayor que en el caso de suponer que la alimentación ocupa todo un segmento.

Una vez analizada la excitación, el siguiente apartado es el tratamiento de las tapas, pues puede considerarse los efectos de las carga en dichos extremos, o por el contrario, considerar que en dichas tapas la intensidad de corriente será cero.

Por último, el programa, permite introducir cargas no lineales en algunos de los segmentos que componen la estructura. Las cargas no lineales permitidas, pueden ser:

1. Resistencias
2. Diodos

En el caso de los diodos, la carga puede ser en directo, en inverso o ambas (diodo real).

Con respecto a la visualización de resultados, puede observarse la obtención de las corrientes a medida que son calculadas en uno o varios segmentos de los hilos. Si se

introduce en el número de puntos a observar un cero, el programa no visualizará las corrientes (ejecución por colas).

4.2.1 Lectura de DOTIG-3

Si la opción escogida fue la de ficheros de DOTIG-3, el programa le pedirá al usuario la extensión de los ficheros, y tras leer del fichero entrada.xxx, mostrará toda la información por pantalla. Por último pedirá al usuario, si desea modificar la estructura. El menú de modificación es el siguiente:

1. VOLVER AL MENU ANTERIOR
2. EXCITACION
3. GEOMETRIA Y MODELACION
4. IMPED. DE CARGA Y TRAT. UNION
5. VISUALIZACION DE RESULTADOS

Una vez seleccionada la opción deseada, el programa volverá a las subrutinas del programa principal, presentando en pantalla las posibles modificaciones efectuadas, generando un nuevo fichero de entrada, cuya extensión es en principio de la misma, salvo que el usuario desee modificarla también.

4.2.2 Lectura de AWAS

Si la opción elegida fué adaptar los ficheros de entrada del programa **Analysis of Wire Antennas and Scatterers (AWAS)** [48], el programa pedirá información del tipo de ficheros a leer, geometría e información de la frecuencia inicial y final de cálculo. Una vez leído los ficheros anteriores, el programa da un listado del contenido de dichos ficheros, pasando a completar la información necesaria para la ejecución de DOTIG-3.

A partir de las frecuencias obtenidas con AWAS, el programa aconseja un parámetro del pulso tal que el número de frecuencias obtenidas con AWAS y DOTIG-3 sean los mismos.

Dependiendo de que la estructura sea una antena o un dispersor, el programa se bifurca, pidiendo datos característicos de cada estructura, hasta completar toda la información necesaria.

4.2.3 Lectura de NEC-2

Analogamente al apartado anterior, PREDOTIG-3 permite crear ficheros de entrada a DOTIG-3 procedentes del programa Numerical Electromagnetic Code (NEC) [49]. Al iniciar el programa de preproceso y tras pedir modificación de una estructura existente, el programa informa de las distintas posibilidades de conversión de fichero de otros programas hacia DOTIG-3. Si se elige la opción tres, correspondiente a ficheros tipo NEC en su versión 2, el preproceso pedirá el nombre del fichero tipo NEC. Una vez leído la información del mismo, el programa pedirá al usuario información no contenida en el mismo hasta completar el fichero tipo DOTIG-3. Toda la información es visualizada por pantalla, así como la creación de los archivos necesarios (entrada.xxx e informa.xxx).

4.3 Desarrollo del programa POSDOTIG-3

POSDOTIG-3 es el tercer programa que componen el paquete de ecuaciones integrales en el dominio del tiempo. Es un programa de postproceso, que apartir de las corrientes calculadas por DOTIG-3 permite obtener campos de radiación, campos cercanos, corrientes en cualquier segmento de cualquier hilo, secciones rectas de radar (RCS), cargas inducidas en la estructura, etc.

Tras introducir la extensión del fichero que se desea procesar, nos aparece un menú de opciones tal como:

MENU DE OPCIONES GENERALES

- 0.- Salida del programa
- 1.- Corrientes
- 2.- Campos de radiacion
- 3.- Campos cercanos
- 4.- RCS
- 5.- Cargas
- 6.- Nueva estructura

(elige opcion)

del que comentaremos en subsecciones posteriores.

El diagrama de bloques de POSDOTIG-3 es el siguiente:

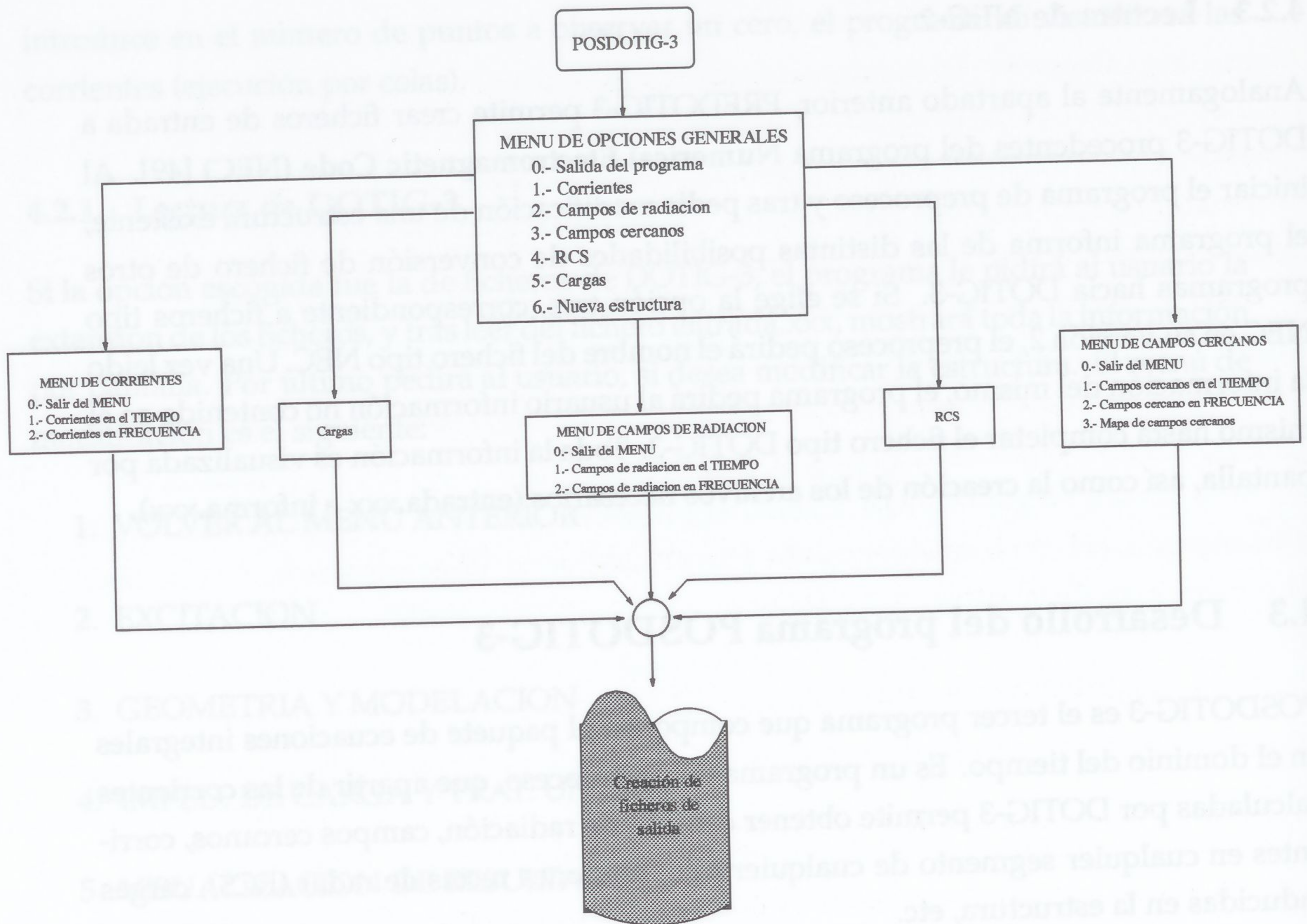


Figura 4.5: Diagrama de bloques del programa POSDOTIG-3

4.3.1 Procesado de corrientes inducidas

El programa DOTIG-3, tras ser ejecutado, crea un fichero llamado "dotigout.xxx" en el cual están contenidas todas las corrientes en cada uno de los puntos campo de la estructura.

Esta subrutina es la encargada de la extracción de las corrientes del archivo "dotigout.xxx" en el hilo y segmento especificado por el usuario.

Una vez leídas dichas corrientes en el punto de interés, éstas pueden ser almacenadas en función del tiempo transcurrido (ficheros "tcurrent.xxx") o su tratamiento en frecuencia vía transformada de Fourier (ficheros "fcurrent.xxx")

Para el tratamiento de las corrientes en frecuencia, es utilizada la subrutina REALFT y FOUR1 procedentes de Numerical Recipes "The art of scientific computing" [50]

4.3.2 Cálculo de campos de radiación

El programa POSDOTIG3 permite al usuario calcular campos de radiación, tanto en el tiempo como en la frecuencia.

El desarrollo teórico de dichos campos de radiación puede verse en el apéndice A.

El programa presenta el siguiente menú de opciones:

MENU DE CAMPOS DE RADIACION

- 0.- Salir del MENU
- 1.- Campos de radiacion en el TIEMPO
- 2.- Campos de radiacion en FRECUENCIA

(elige opcion)

Seguidamente, enumeramos cada una de estas opciones.

- 0.- Con esta opción volvemos al menú principal de opciones.
- 1.- En esta opción son calculados los campos radiados en las direcciones que a continuación se piden.
- 2.- Por último, pueden calcularse campos de radiación en frecuencia a partir de los campo en el tiempo vía transformada de Fourier.

Una vez escogido la opción deseada, se pide al usuario la dirección de radiación en coordenadas esféricas, dirección θ y φ .

Introduce el angulo THETA de observacion

0
Incremento angular (en grados)

90
Cuantos angulos ?

4
Introduce el angulo FI de observacion

0
Incremento angular (en grados)

90

Cuantos angulos ?

4

En el ejemplo anterior, se ha efectuado un barrido angular en direcciones θ y φ desde 0 grados hasta 360 grados de 90 en 90 grados.

Si la opción 2 es escogida, además se pide al usuario de número de muestras temporales a transformar, así como una ampliación con ceros del número de muestras en el tiempo.

Los ficheros generados por esta subrutina se denominan "teinc.xxx" para el tiempo y "feinc.xxx" en frecuencia. Después de una breve información acerca del modelado, se presentan 5 columnas de datos correspondientes a: tiempo, componente X,Y,Z de los campos de radiación y módulo de los mismos. Para la opción en frecuencia, es substituido el tiempo por la frecuencia.

4.3.3 Cálculo de campos cercanos

Si la opción de campo cercanos es escogida, el menú que presenta el programa es el siguiente:

MENU DE CAMPOS CERCANOS

- 0.- Salir del MENU
- 1.- Campos cercanos en el TIEMPO
- 2.- Campos cercano en FRECUENCIA
- 3.- Mapa de campos cercanos

(elige opcion)

La opción 0, nos devuelve al menú principal. Las opciones 1 y 2 poseen el mismo significado que en los campo de radiación, salvo la dirección donde se desea calcular los campos, que estarán expresadas en coordenadas cartesianas. La opción 3, permite al usuario definir una región espacial en la que es centrado el modelo a estudiar y calculados los campos cercanos en toda la región cuadrada de longitud d definida a incrementos espaciales por el usuario (figura 4.6). Los vectores \hat{u} y \hat{i} son respectivamente los ejes X,Y,Z o cualquier combinación ortogonal de ellos.

Un análisis numérico de esta subrutina, puede verse en el apéndice B

Los ficheros generados por esta subrutina se denominan "tcercano.xxx" para el tiempo y "fcercano.xxx" en frecuencia. Después de una breve información acerca del modelado,

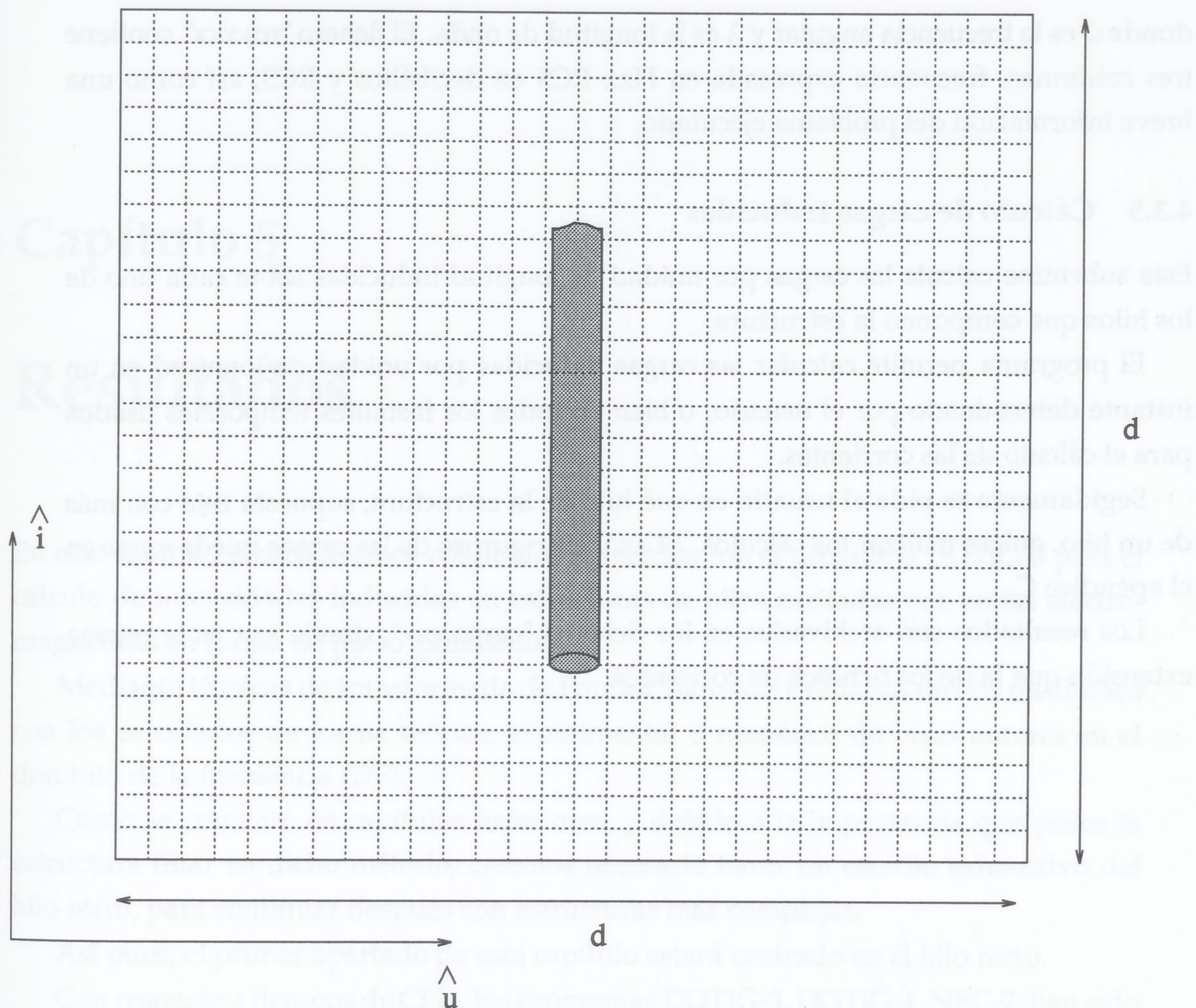


Figura 4.6: Mapa de campos cercanos

se presentan 5 columnas de datos correspondientes a: tiempo, componente X,Y,Z de los campos totales y módulo de los mismos. Para la opción en frecuencia, es substituido el tiempo por la frecuencia.

4.3.4 Cálculo de la sección recta radar (RCS)

Para el cálculo de la sección recta radar (RCS), el programa necesita conocer del usuario, la dirección θ y φ del campo radiado, puesto que la RCS, σ viene definida como cociente del espectro del campo radiado, $E_{rad}(\omega)$ en las direcciones θ y φ y el espectro en frecuencia del campo incidente $E^i(\omega)$.

$$\frac{\sigma}{\lambda^2} = \frac{\omega^2}{\pi c^2} \frac{|E_{rad}(\omega)|^2}{|E^i(\omega)|^2} \quad (4.12)$$

donde ω es la frecuencia angular y λ es la longitud de onda. El fichero "rca.xxx" contiene tres columnas, frecuencia expresada en Hz., RCS en decibelios y RCS, así como una breve información del problema ejecutado.

4.3.5 Cálculo de cargas inducidas

Esta subrutina calcula las cargas por unidad de longitud inducidas sobre cada uno de los hilos que componen la estructura.

El programa permite calcular las cargas inducidas por unidad de longitud en un instante determinado por el usuario, o bien en todos los instantes temporales usados para el cálculo de las corrientes.

Seguidamente se pide al usuario en qué hilo de la estructura, supuesta esta con más de un hilo, quiere realizar los cálculos. El análisis riguroso de las cargas puede verse en el apéndice C.

Los resultados son archivados en los ficheros "carga.xxx", donde xxx es la misma extensión que la de los ficheros de corrientes.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo presentaremos resultados obtenidos con el programa DOTIG-3 para el cálculo de intensidades inducidas en estructuras de hilos excitadas por ondas electromagnéticas en forma de pulso gaussiano.

Mediante técnicas de transformada de Fourier, han sido validados dichos resultados con los calculados de forma teórica, experimental o numérico de otros autores en el dominio de la frecuencia (DF).

Como se comentó en capítulos anteriores, y debido a la importancia que posee la estructura filiar en dicho método, creemos necesario hacer un estudio exhaustivo del hilo recto, para continuar después con estructuras más complejas.

Así pues, el primer apartado de este capítulo estará centrado en el hilo recto.

Con respecto a tiempos de CPU, los programas DOTIG-3, DOTIG-1, NEC-2, han sido ejecutados en un ordenador SUN¹ modelo SPARC-10/41 con un procesador a 15 Mflops y 192 Mbyte de memoria principal RAM.

5.1 El hilo recto

En primer lugar se han estudiado estructuras formadas por un hilo recto actuando como antena o como dispersor.

5.1.1 Hilo recto como dispersor

La primera estructura estudiada ha sido un hilo recto de longitud $L=1$ m. y de radio $a=0.00674$ m. (figura 5.1) sobre la cual incide un pulso gaussiano de la forma:

$$E^i(t) = e^{-g^2(t-t_{max})^2} \quad (5.1)$$

¹SUN es una marca registrada de SUN Microsystem

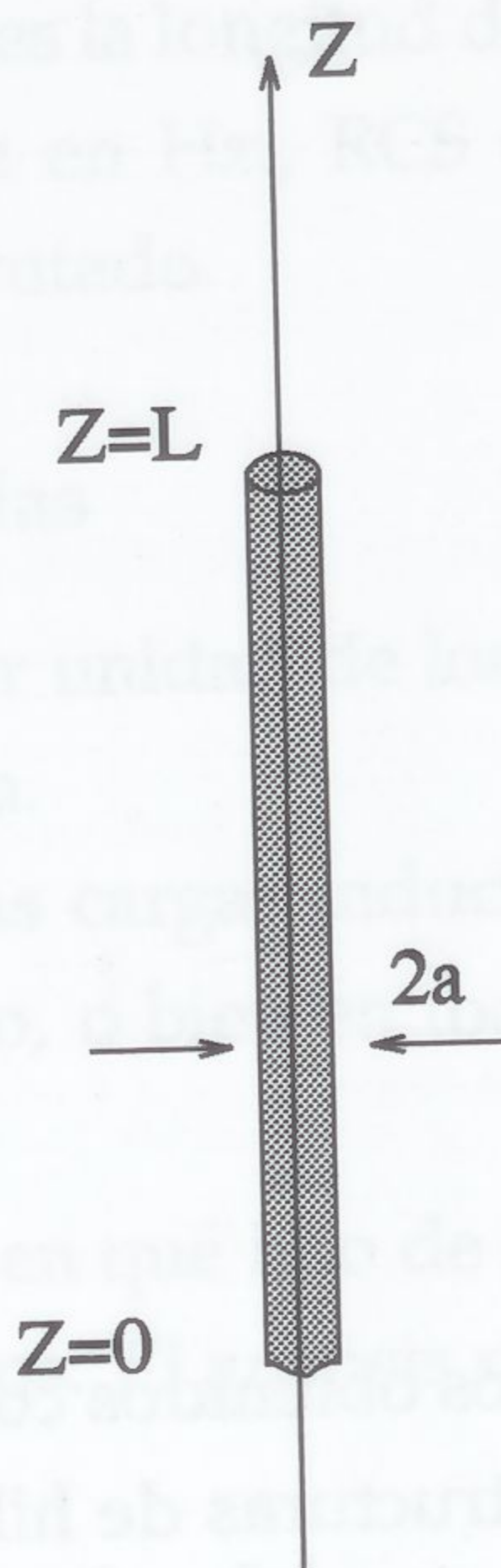


Figura 5.1: Geometría de un hilo como dispersor

con el campo eléctrico polarizado sobre el eje z y propagándose en la dirección del eje y , con un parámetro de pulso $g = 5.0 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ y t_{max} definido por:

$$t_{max} = \frac{\sqrt{\log 100}}{g} \quad (5.2)$$

de valor $t_{max} = 2.8284 \times 10^{-10}$.

La geometría ha sido modelada mediante 50 segmentos correspondientes a un incremento espacial de $\Delta s = 0.02 \text{ m}$. y un incremento temporal de $\Delta t = 6.66 \times 10^{-11} \text{ s}$.

En la figura 5.2 se presenta la corriente inducida en el segmento central del hilo en función del tiempo comparado con DOTIG-1.[2]

La figura 5.3 representa la corriente de la figura 5.2 en el dominio de la frecuencia comparada con NEC-2 [49]. El análisis en frecuencia se ha realizado en intervalos de 14.63 Mhz., desde 14.63 Mhz. hasta 2.47388 Ghz. (máxima componente espectral del pulso incidente).

En las figuras 5.4 a 5.6 se presentan los campos radiados a diferentes direcciones:

1. $\theta = 30$ y $\phi = 0$
2. $\theta = 60$ y $\phi = 0$
3. $\theta = 90$ y $\phi = 0$

y en las figuras 5.7 a 5.9, se presentan los campos radiados en función de la frecuencia comparadas además con NEC-2 a distintas direcciones.

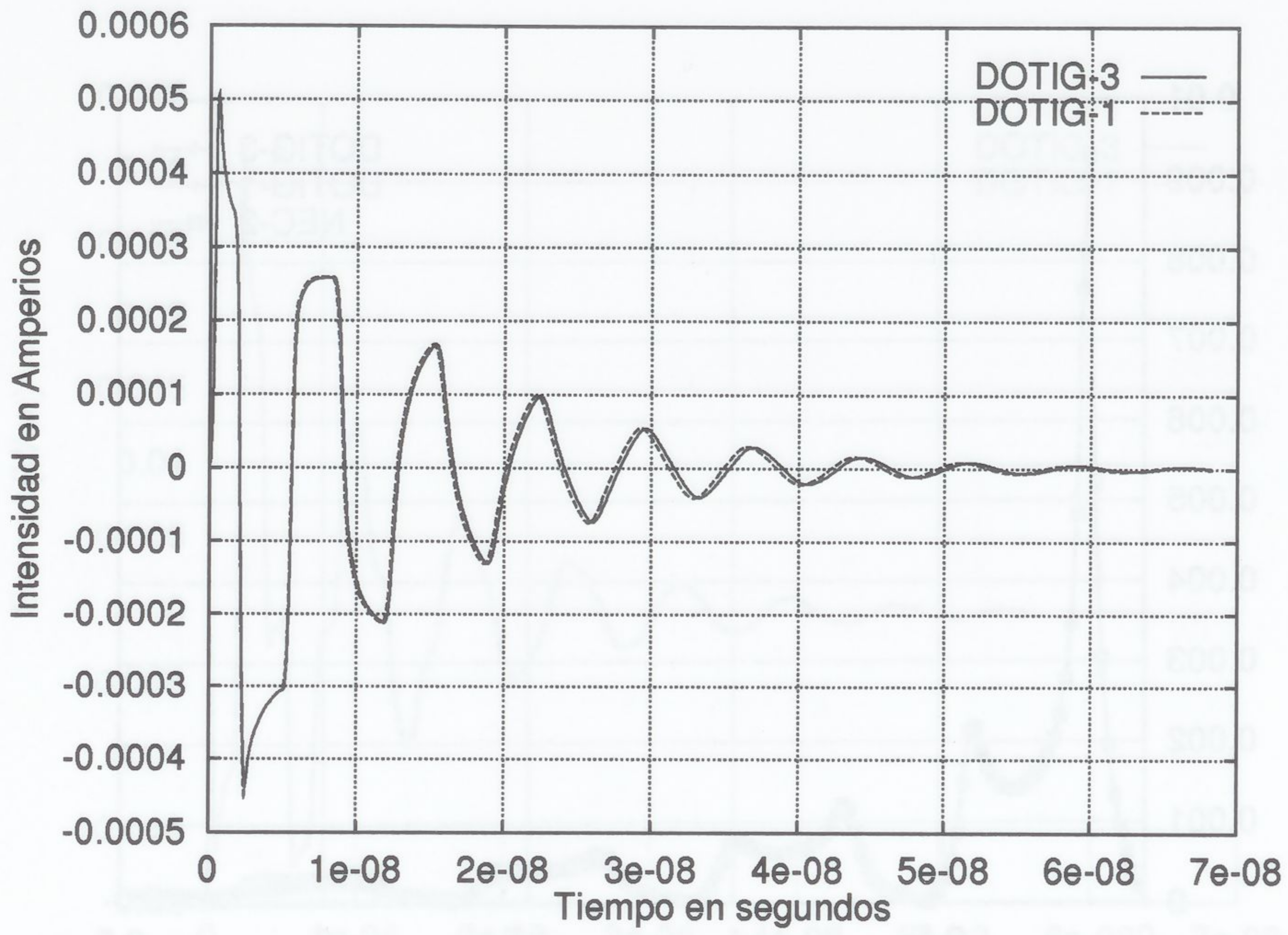


Figura 5.2: Corriente en el segmento central del hilo en el tiempo

1. $\theta = 30$ y $\phi = 0$
2. $\theta = 60$ y $\phi = 0$
3. $\theta = 90$ y $\phi = 0$



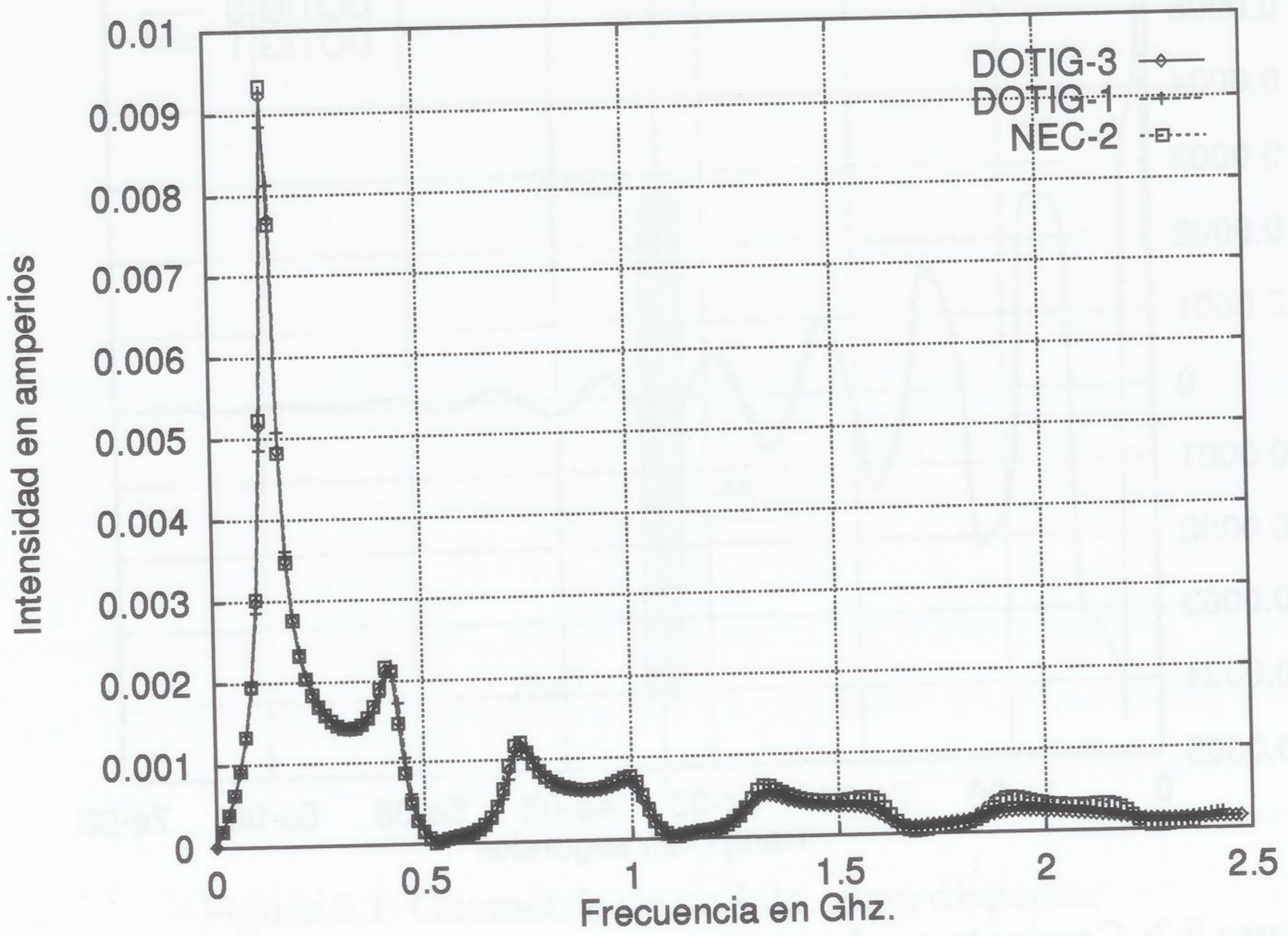


Figura 5.3: Corriente en el segmento central del hilo en frecuencia

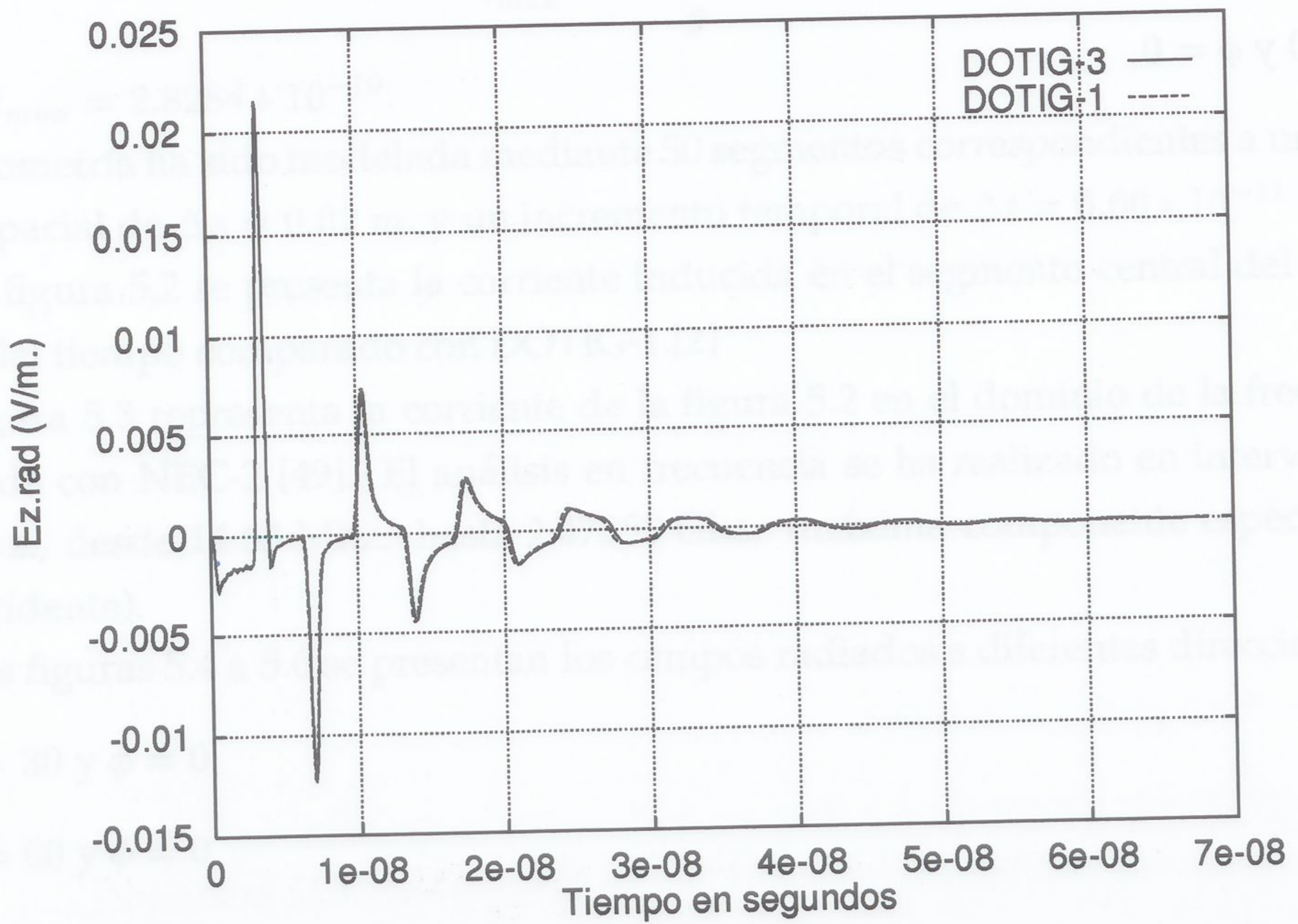


Figura 5.4: Campo de radiación en el tiempo a $\theta = 30$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto

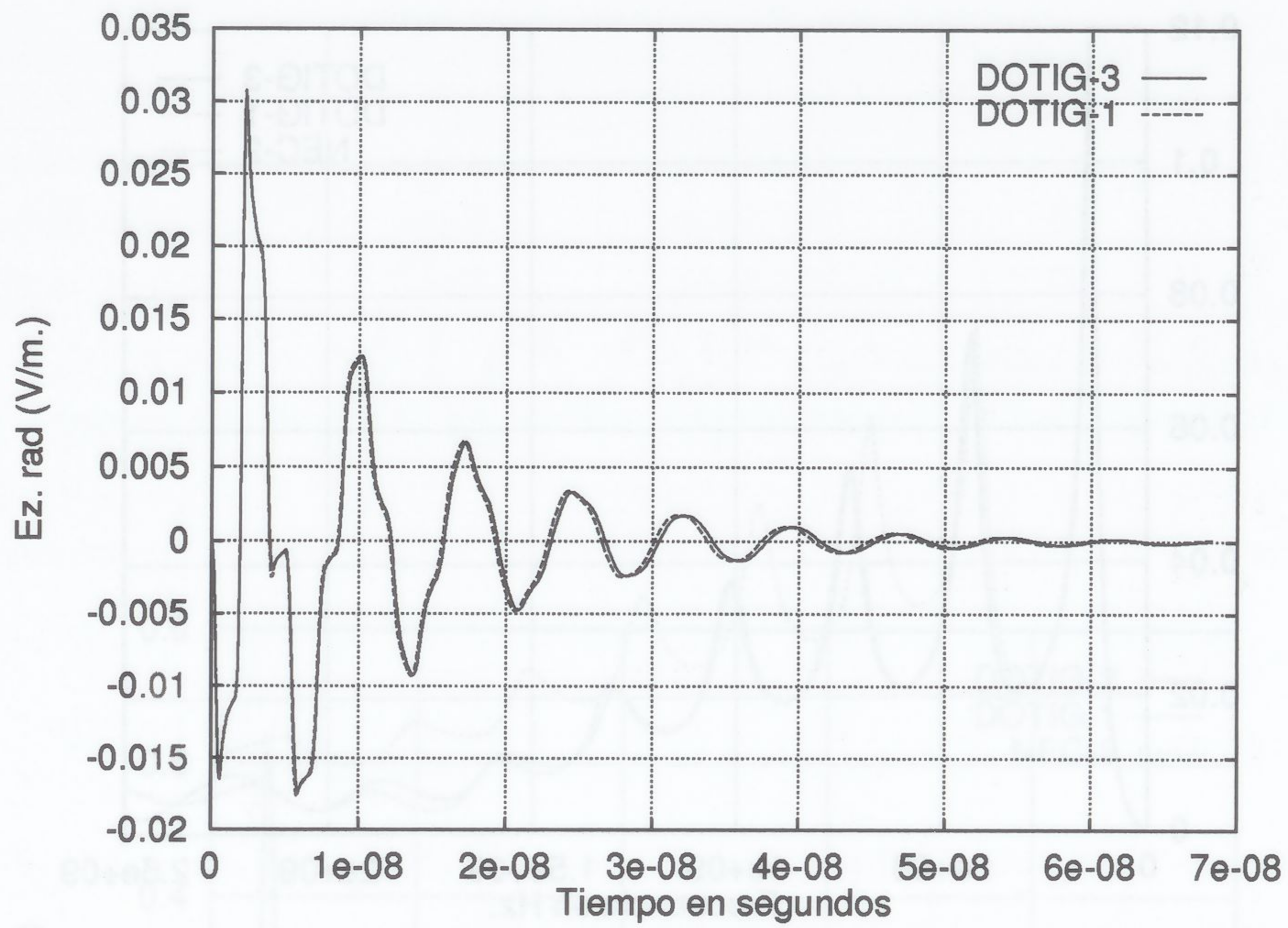


Figura 5.5: Campo de radiación en el tiempo a $\theta = 60$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto

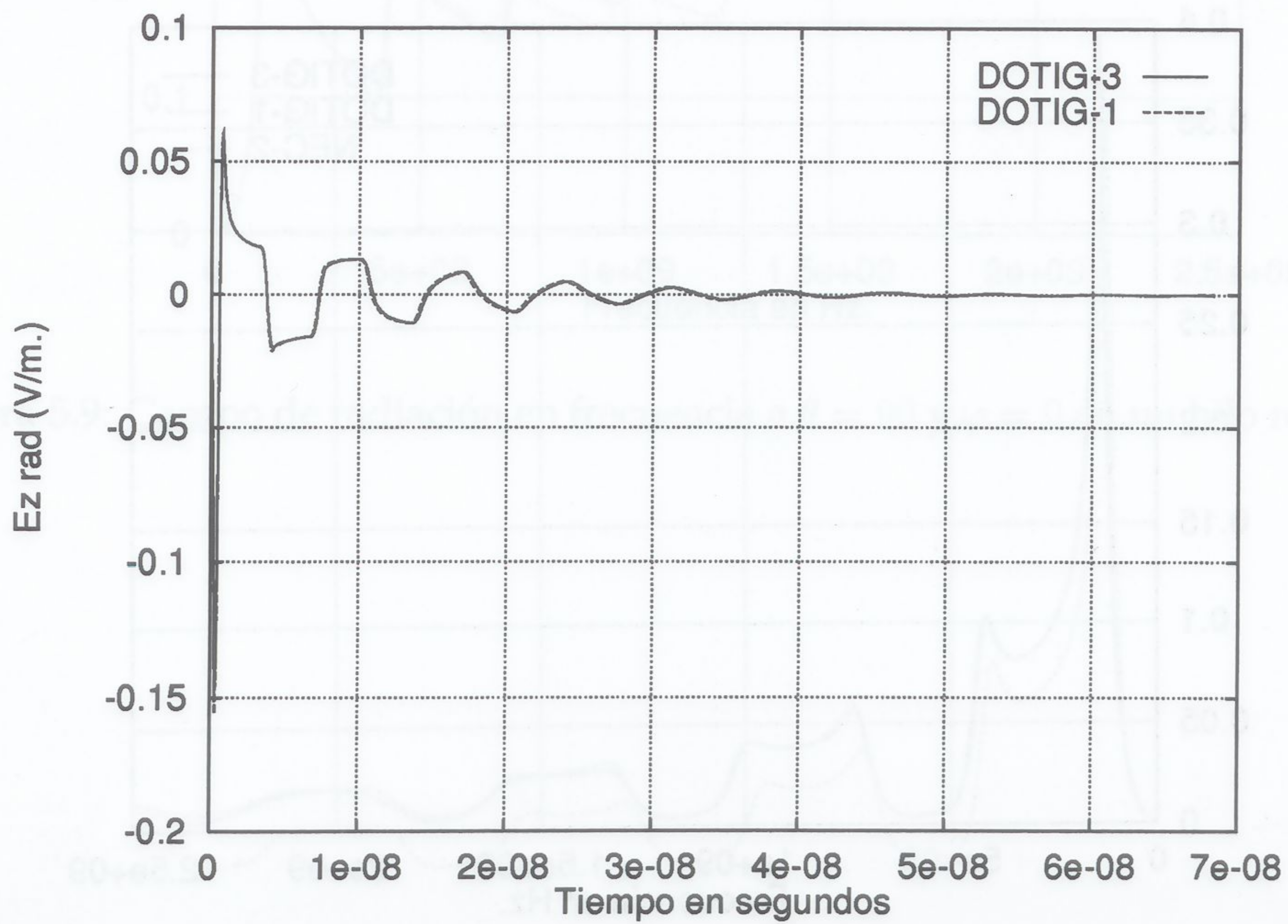


Figura 5.6: Campo de radiación en el tiempo a $\theta = 90$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto

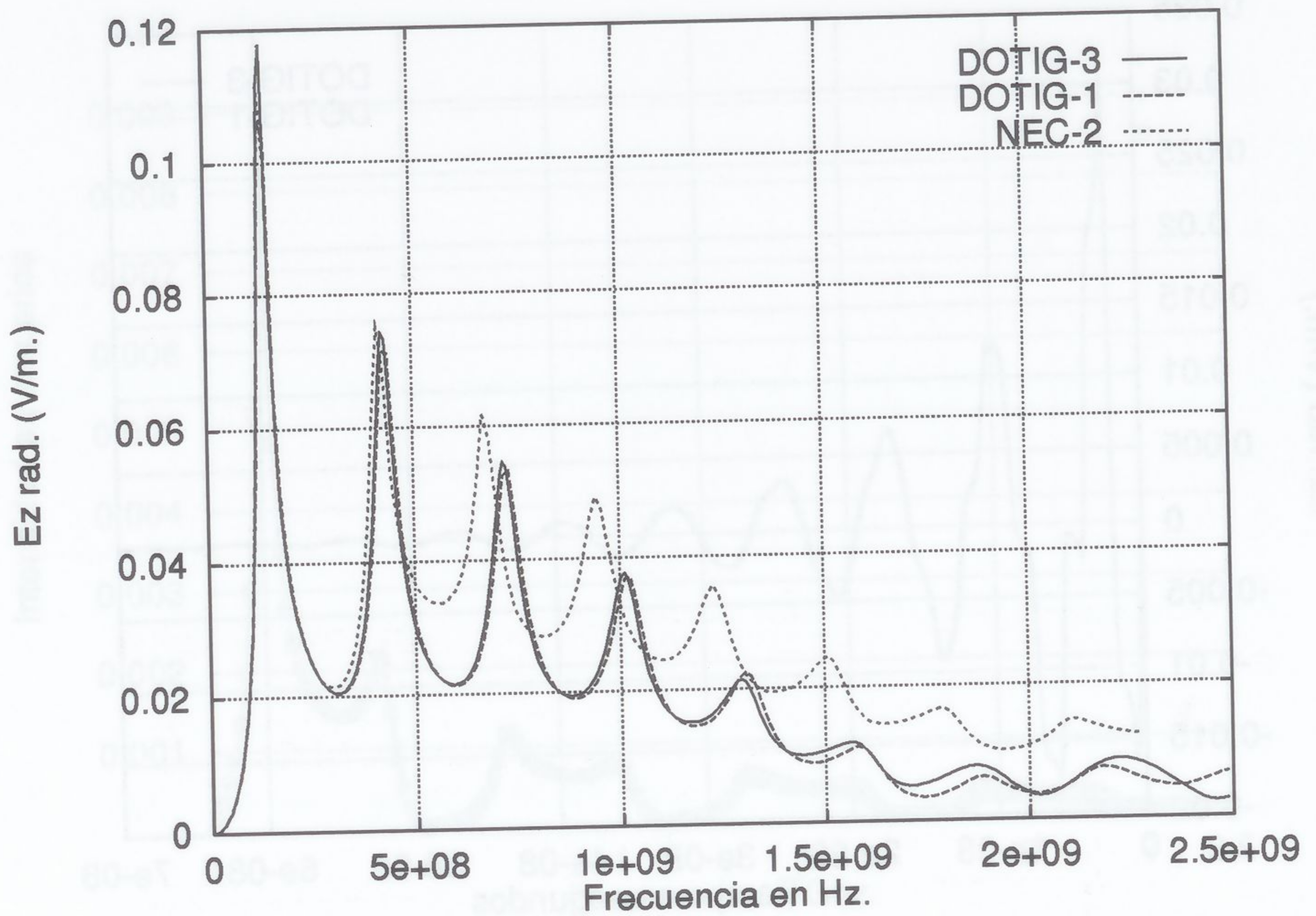


Figura 5.7: Campo de radiación en frecuencia a $\theta = 30$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto

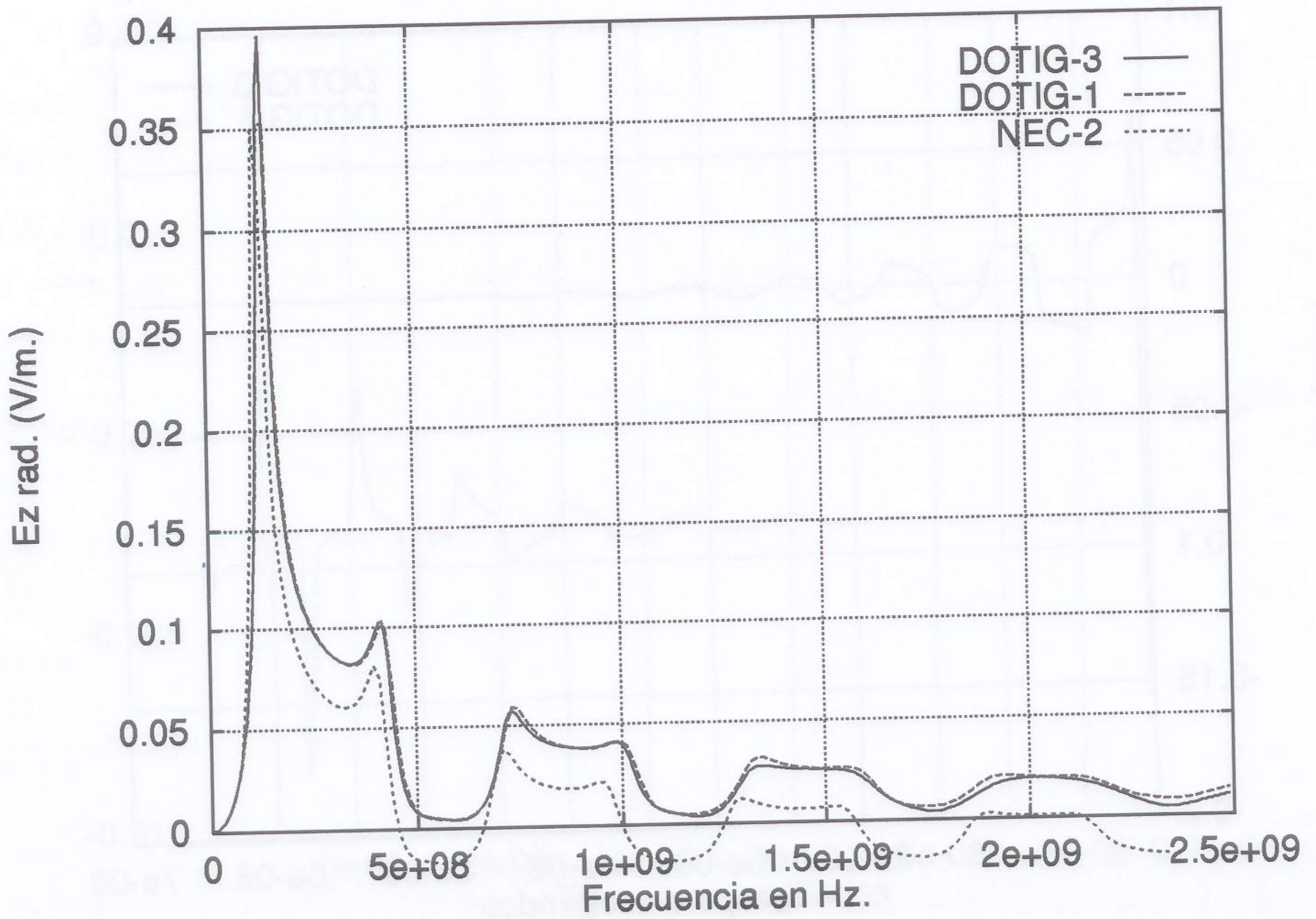


Figura 5.8: Campo de radiación en frecuencia a $\theta = 60$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto

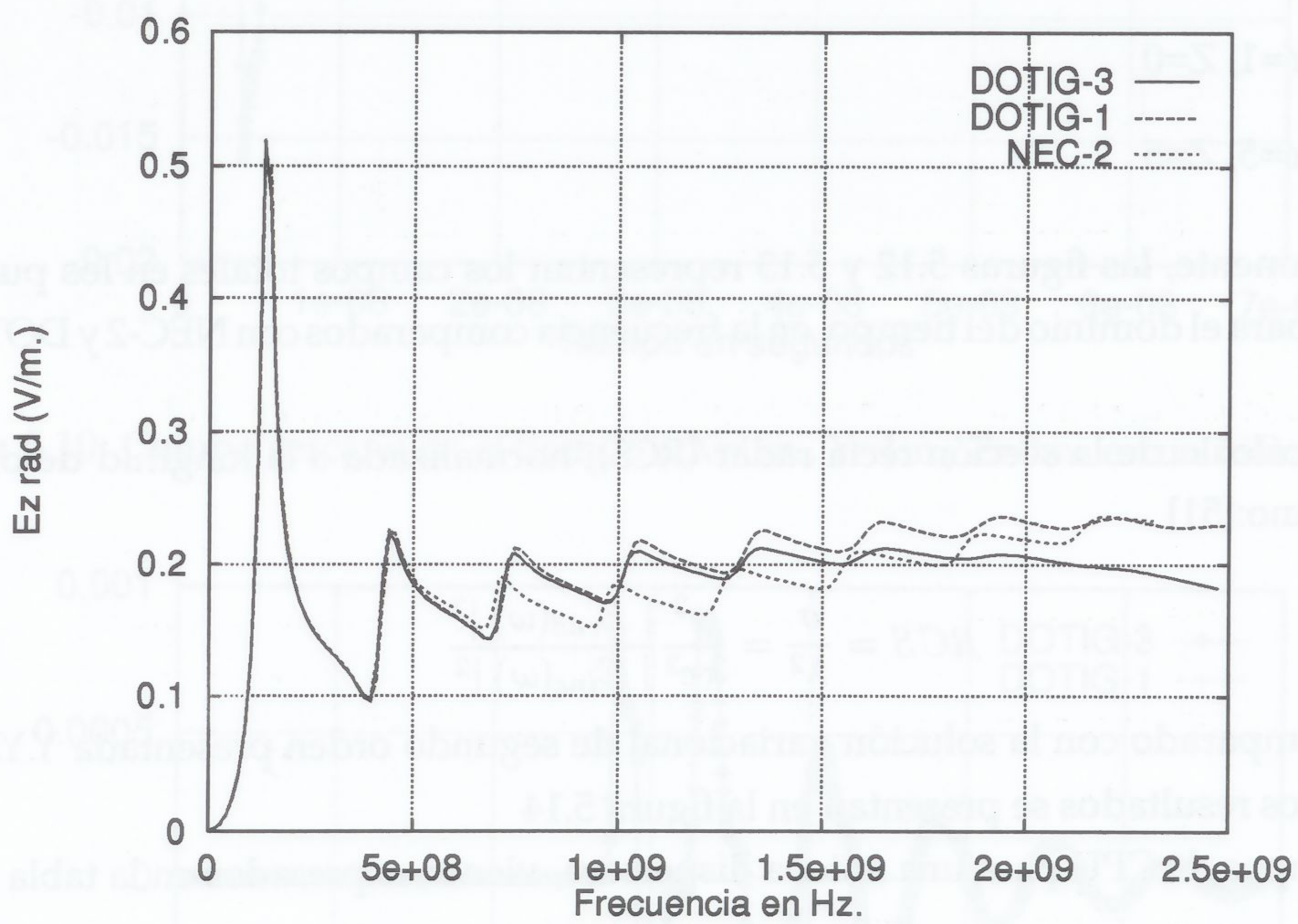


Figura 5.9: Campo de radiación en frecuencia a $\theta = 90$ y $\varphi = 0$ en un hilo recto

Tiempos de CPU para un hilo recto.				
	NUM. DE INCOG.	T. DE PROCESO	T. DE SISTEMA	OBSERVACIONES
DOTIG-3	51	252.9 seg.	2.0 seg.	164 frecuencias
DOTIG-1	50	637.5 seg.	6.9 seg.	1024 inst. temp.
NEC-2	50	163.8 seg.	0.3 seg.	1024 inst. temp.

Tabla 5.1: Tiempo de CPU invertidos para un hilo por diferentes programas

En las figuras 5.10 a 5.11 se presentan campos totales a diferentes distancias del hilo

1. $X=0, Y=1, Z=0$
2. $X=5, Y=5, Z=5$

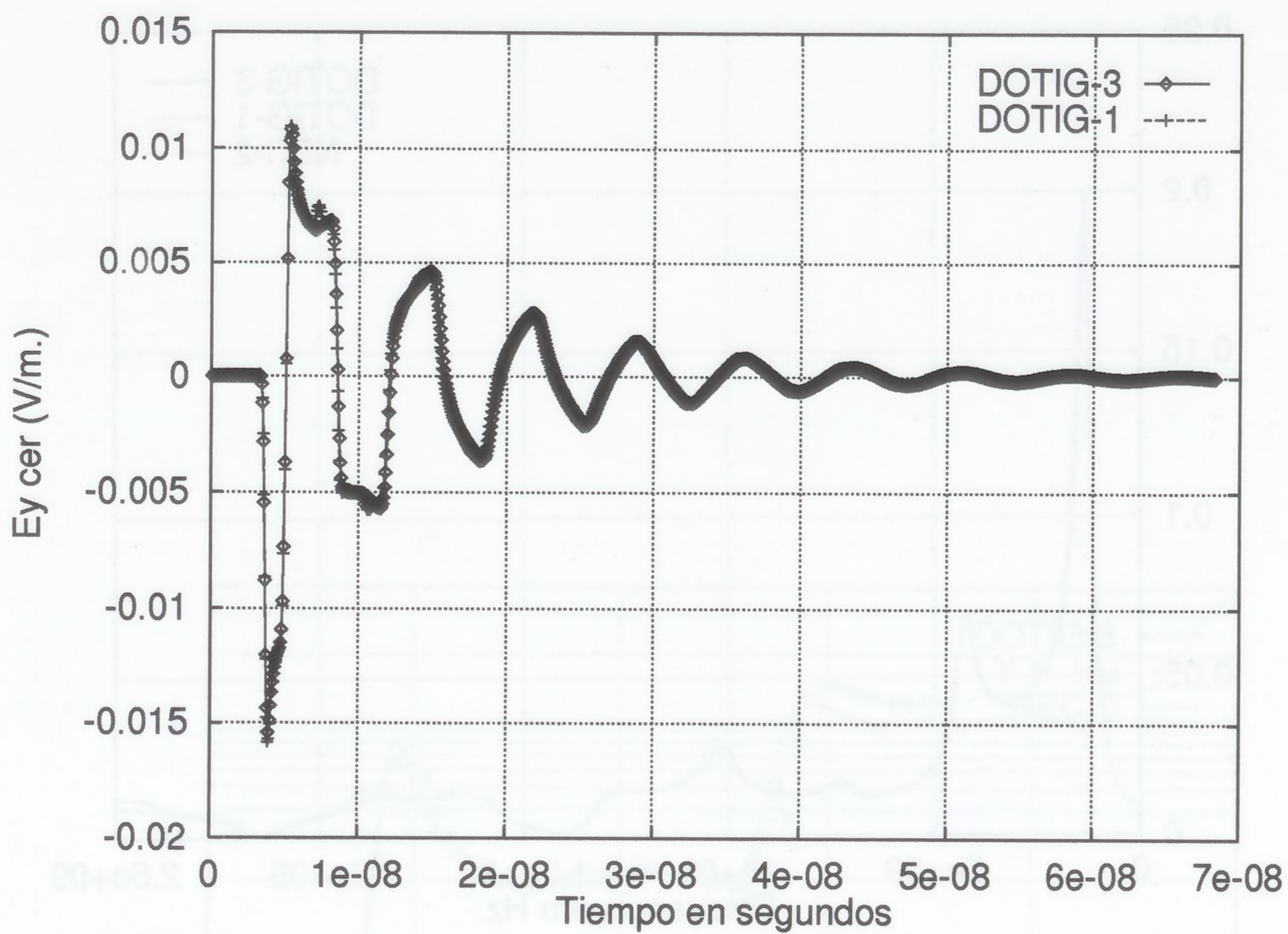
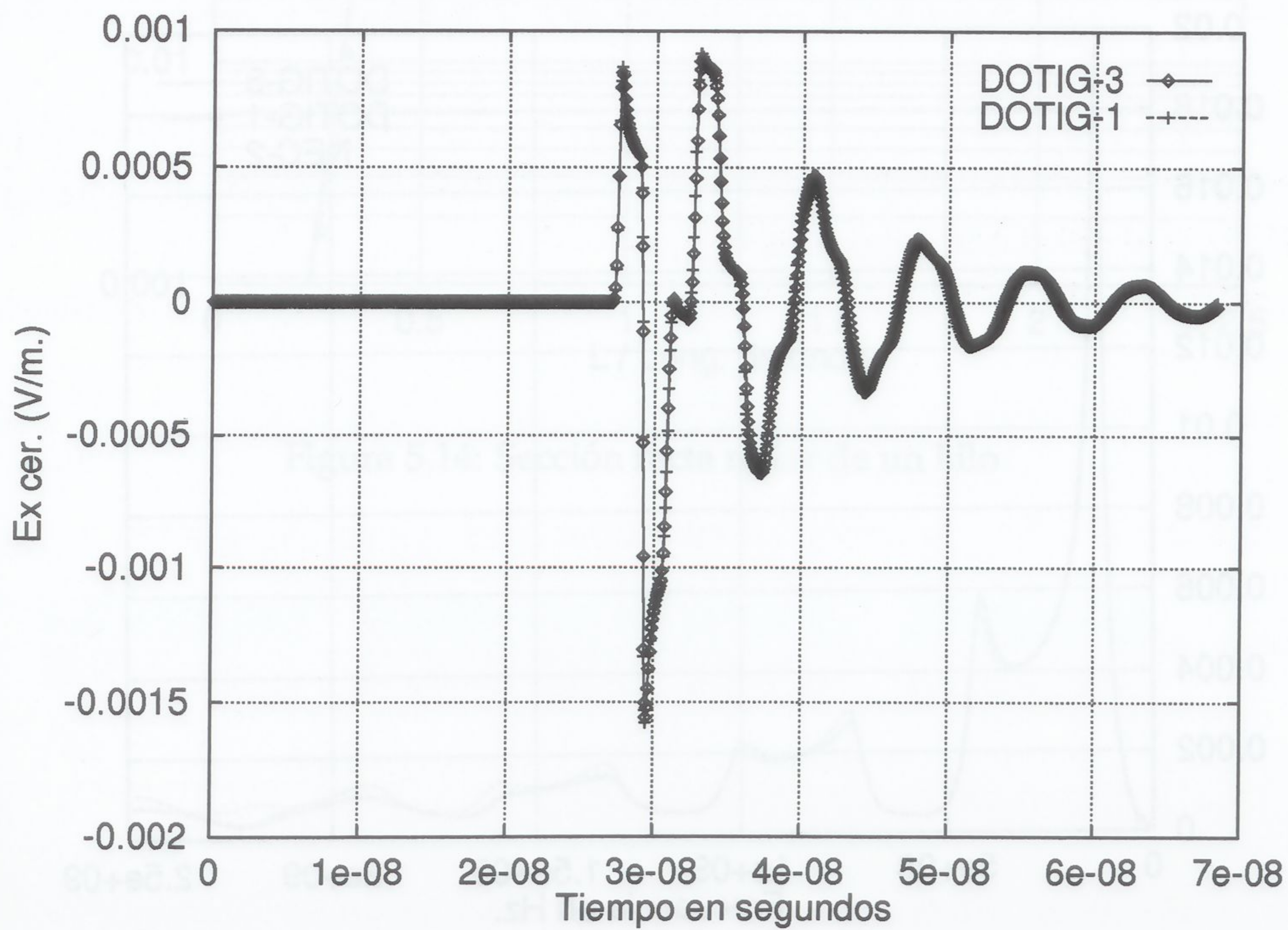
Análogamente, las figuras 5.12 y 5.13 representan los campos totales en los puntos calculados para el dominio del tiempo, en la frecuencia comparados con NEC-2 y DOTIG-1.

Para el cálculo de la sección recta radar (RCS), normalizada a la longitud de onda, definida como:[51]

$$RCS = \frac{\sigma}{\lambda^2} = \frac{\omega^2}{\pi c^2} \frac{|E_{rad}(\omega)|^2}{|E_{inc}(\omega)|^2} \quad (5.3)$$

se ha comparado con la solución variacional de segundo orden presentada Y.Y. Hu [52],[3]. Estos resultados se presentan en la figura 5.14

Los tiempos de CPU para una antena dispersora, vienen expresados en la tabla 5.1

Figura 5.10: Campo cercano en el tiempo a $X=0\text{m.}$, $Y=1\text{m.}$, $Z=0\text{m.}$ en un hilo rectoFigura 5.11: Campo cercano en el tiempo a $X=5\text{m.}$, $Y=5\text{m.}$, $Z=5\text{m.}$ en un hilo recto

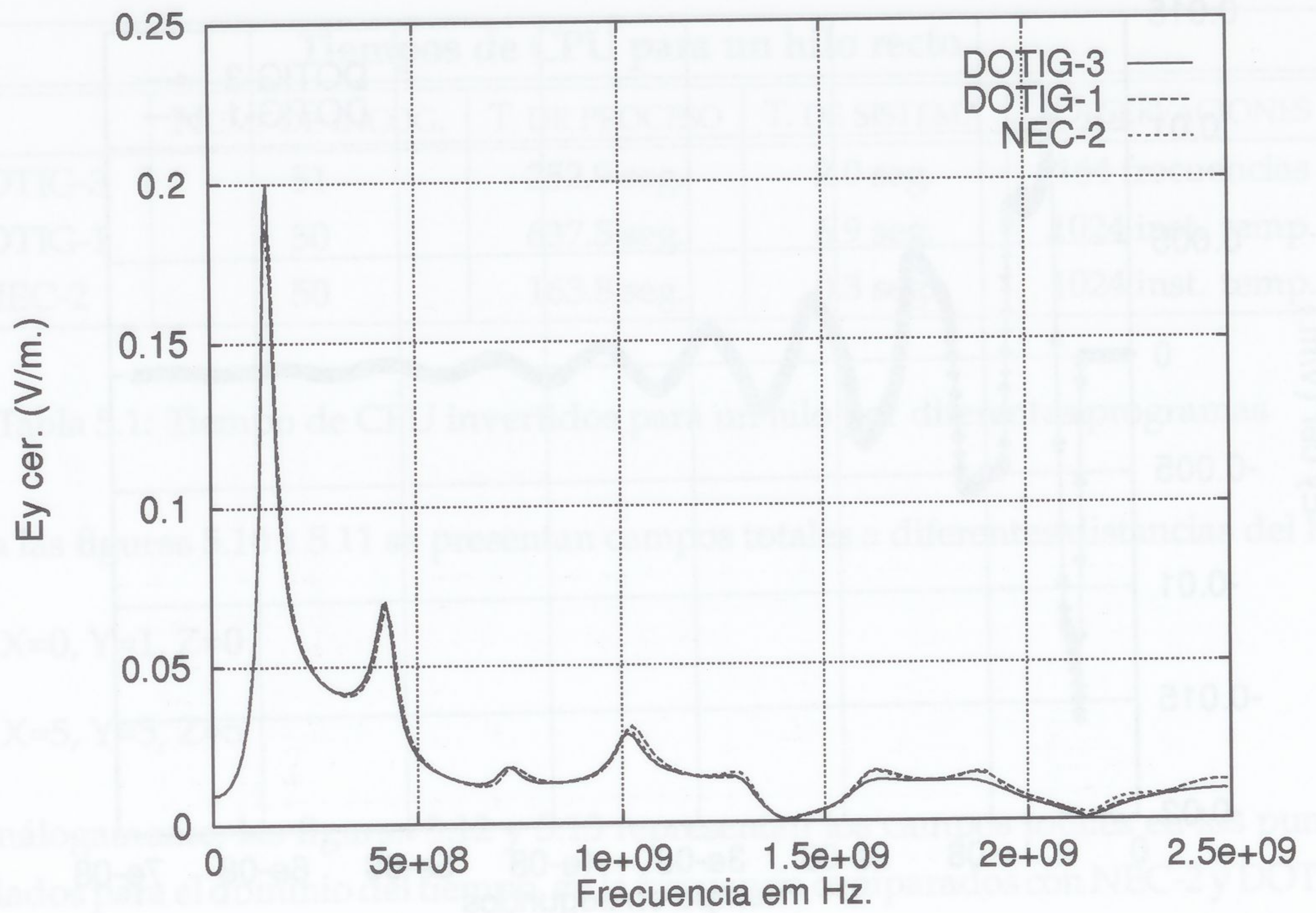


Figura 5.12: Campo cercano en frecuencia a $X=0\text{m.}$, $Y=1\text{m.}$, $Z=0\text{m.}$ en un hilo recto

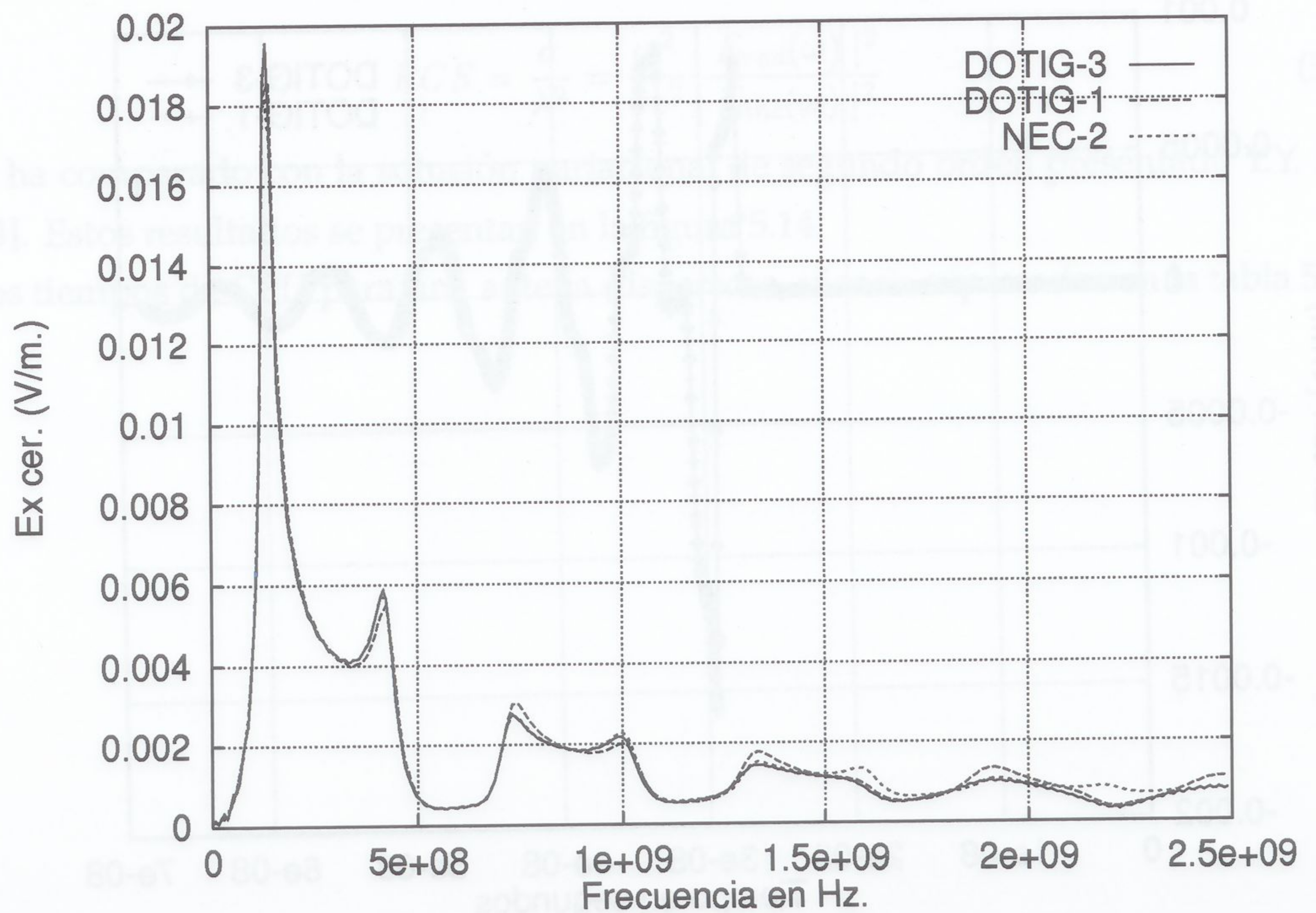


Figura 5.13: Campo cercano en frecuencia a $X=5\text{m.}$, $Y=5\text{m.}$, $Z=5\text{m.}$ en un hilo recto

A continuación se presentan resultados de antenas como dipolos en las que han sido diseñadas para modelar la señal recibida mediante cargas no lineales. (Figura 5.15)

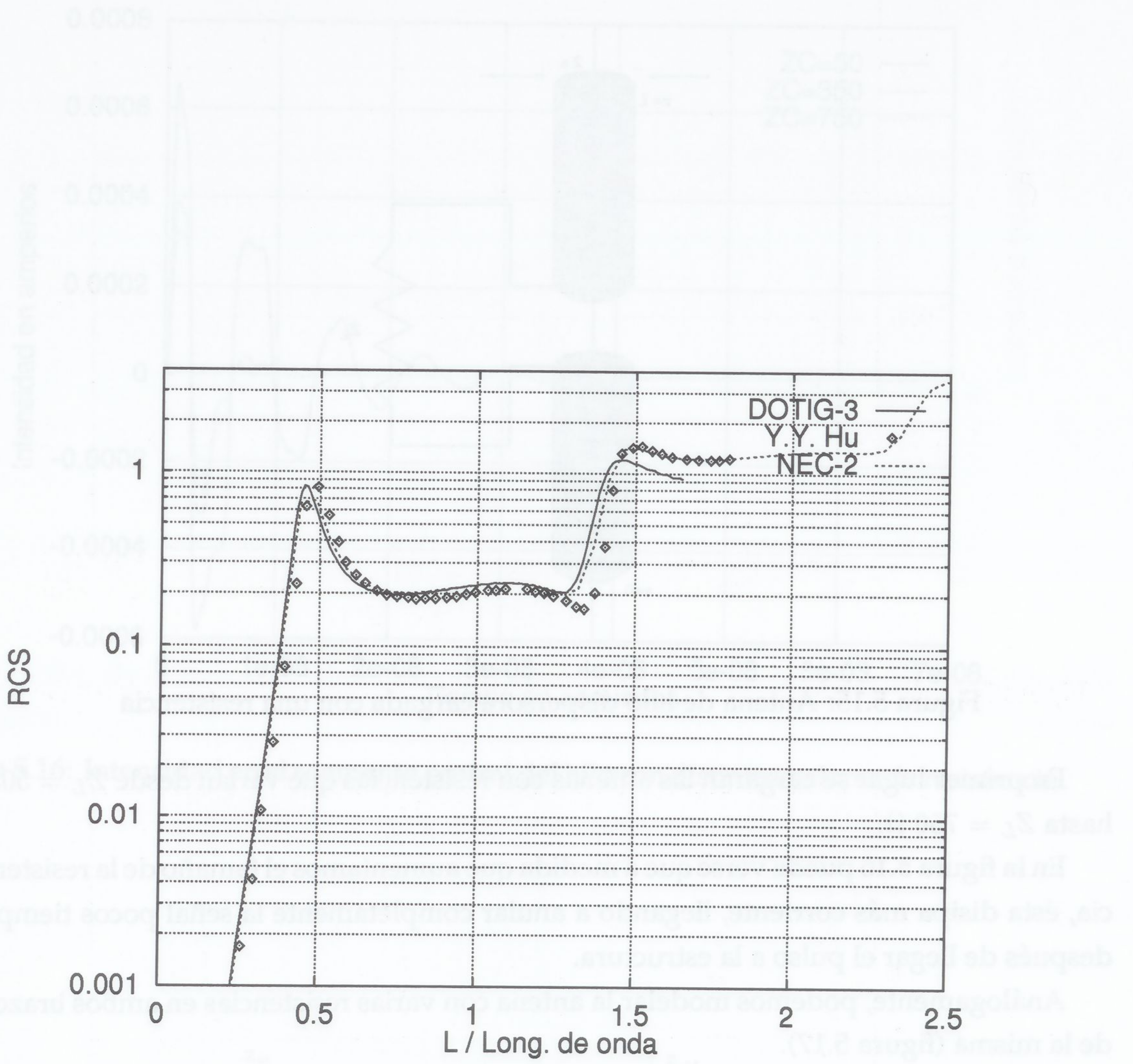


Figura 5.14: Sección recta radar de un hilo

Figura 5.17: Antena de hilo dipolera cargada con las resistencias

A continuación se presentan resultados de antenas como dispersor en las que han sido diseñadas para modelar la señal recibida mediante cargas no lineales. (figura 5.15)

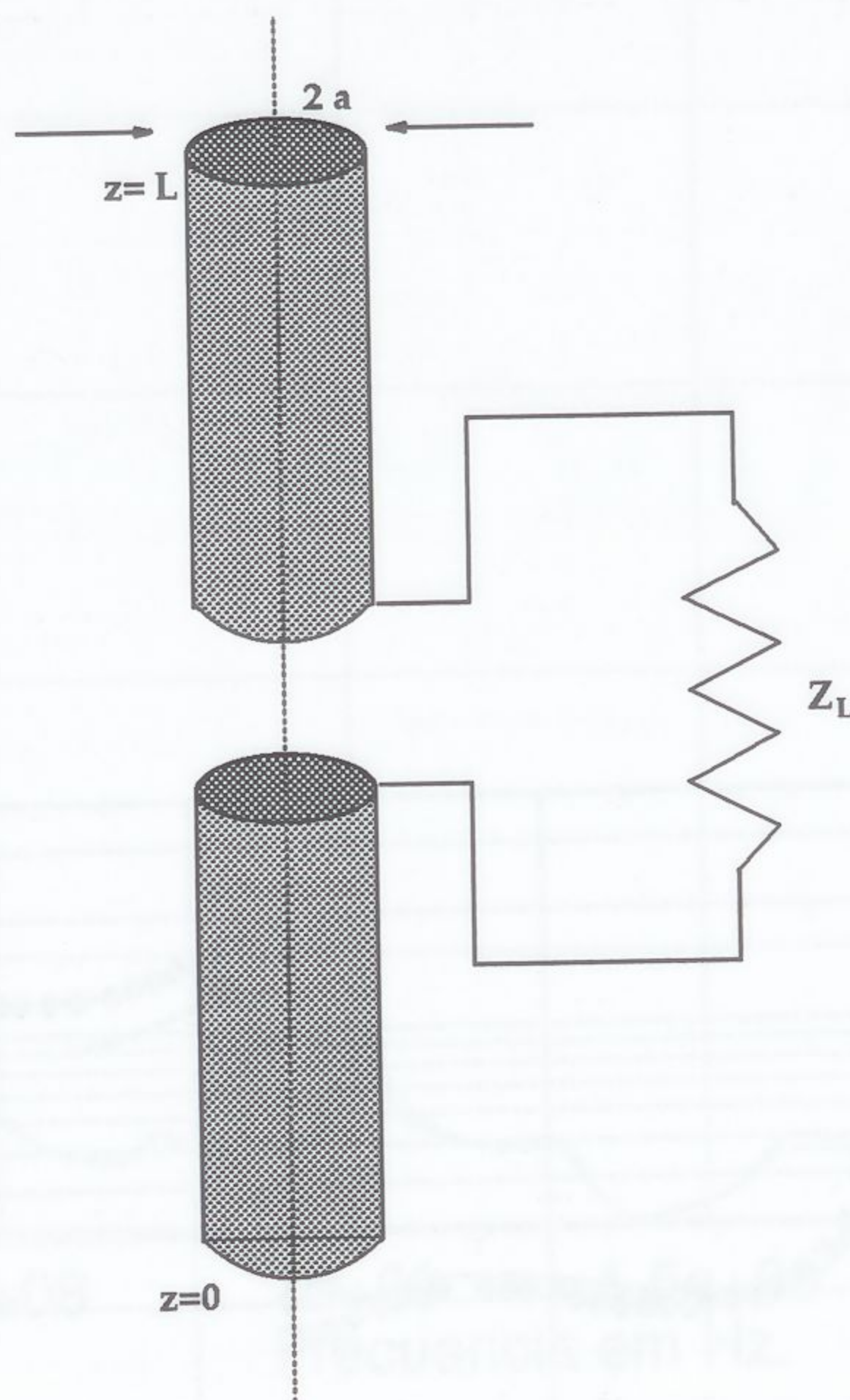


Figura 5.15: Antena de hilo dispersora cargada con una resistencia

En primer lugar se cargarán las antenas con resistencias que varían desde $Z_L = 50\Omega$ hasta $Z_L = 750\Omega$.

En la figura 5.16 puede verse que a medida que aumentamos el tamaño de la resistencia, ésta disipa más corriente, llegando a anular completamente la señal pocos tiempo después de llegar el pulso a la estructura.

Análogamente, podemos modelar la antena con varias resistencias en ambos brazos de la misma (figura 5.17).

Como puede observarse de la figura 5.18, la corriente sobre el hilo es tanto más disipada cuanto mayor es la resistencia.

En las figuras 5.19 a 5.21, se presentan resultados sección recta radar (RCS) de una antena modelada como dispersor con diferentes cargas. Los resultados han sido comparados con las soluciones aportadas por Y.Y. Hu [3].

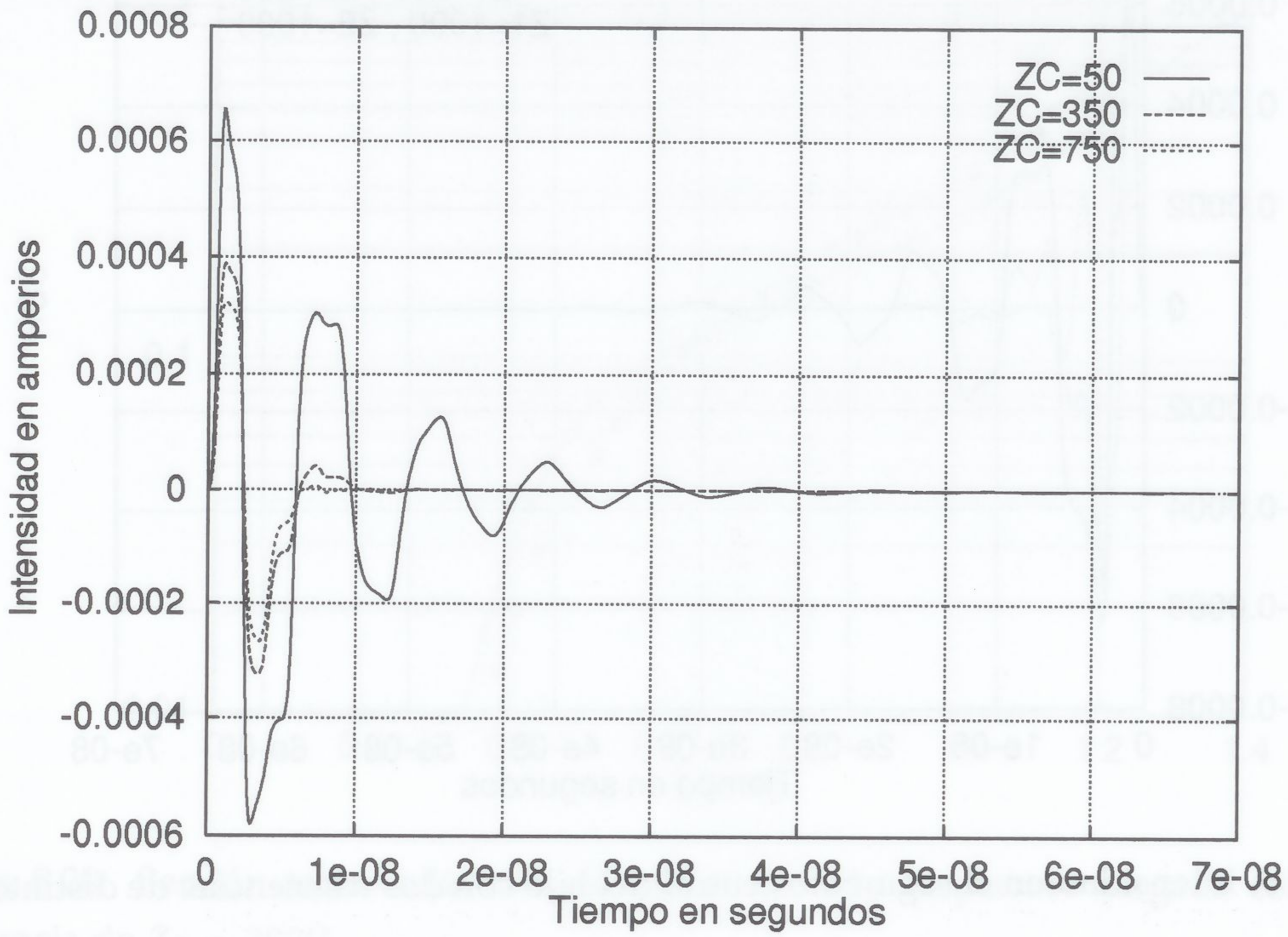


Figura 5.16: Intensidad en el segmento central del hilo con distintos valores de resistencia

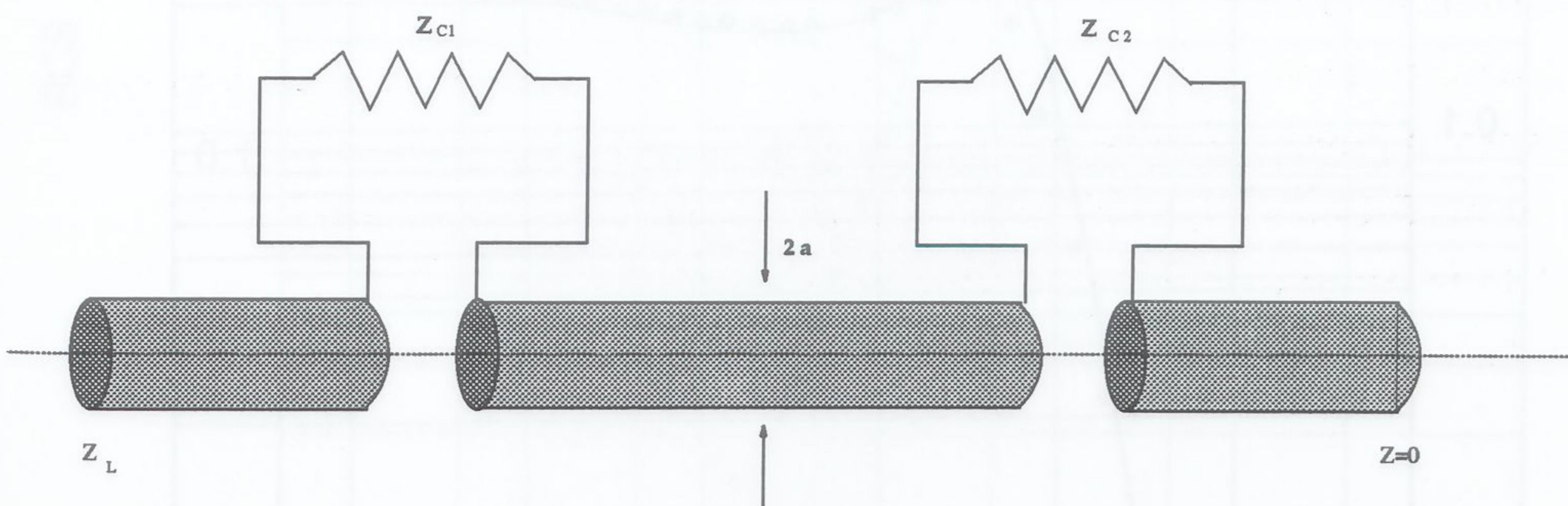


Figura 5.17: Antena de hilo dispersora cargada con dos resistencia

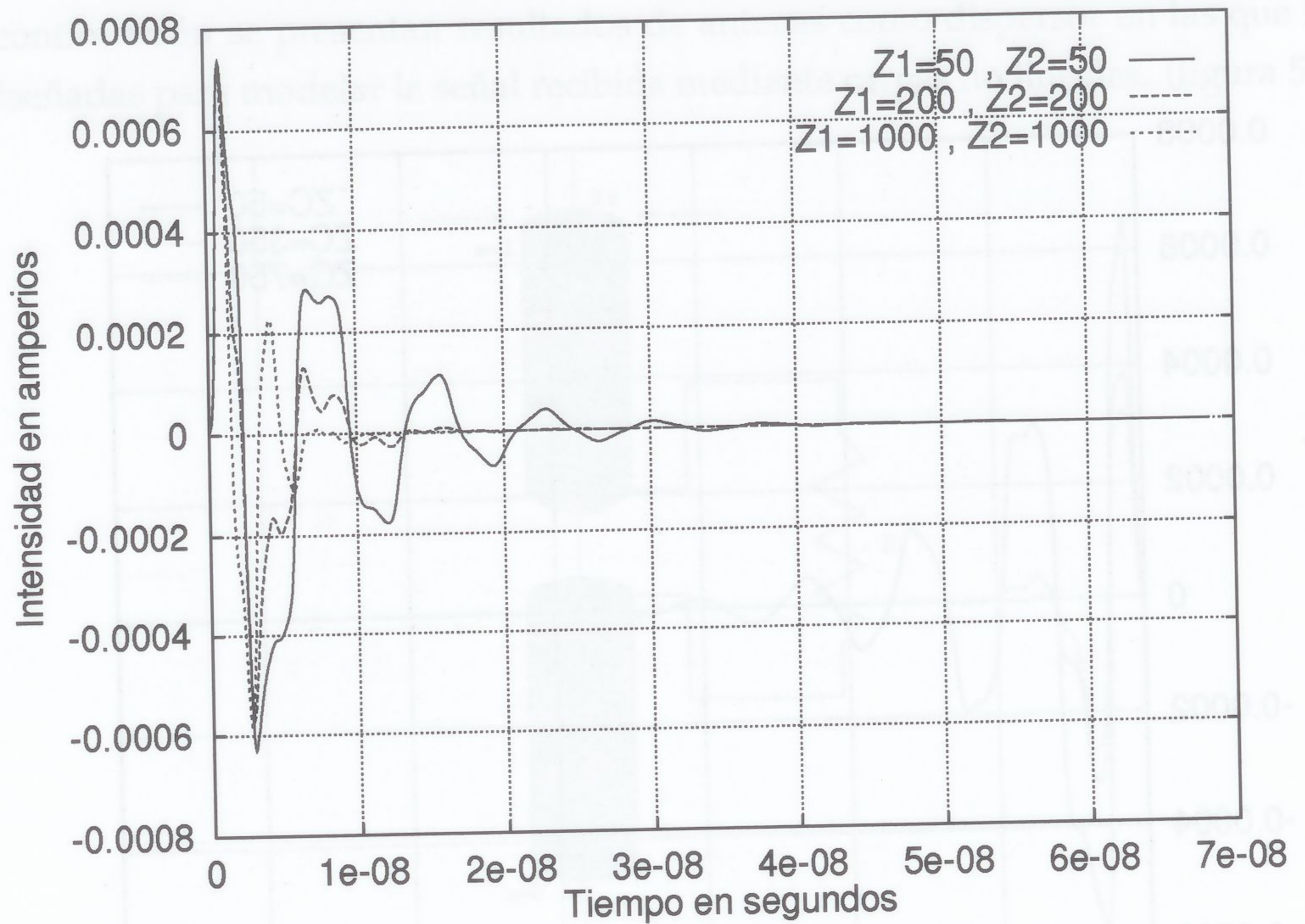


Figura 5.18: Intensidad en el segmento central del hilo con dos resistencias de distintos valores

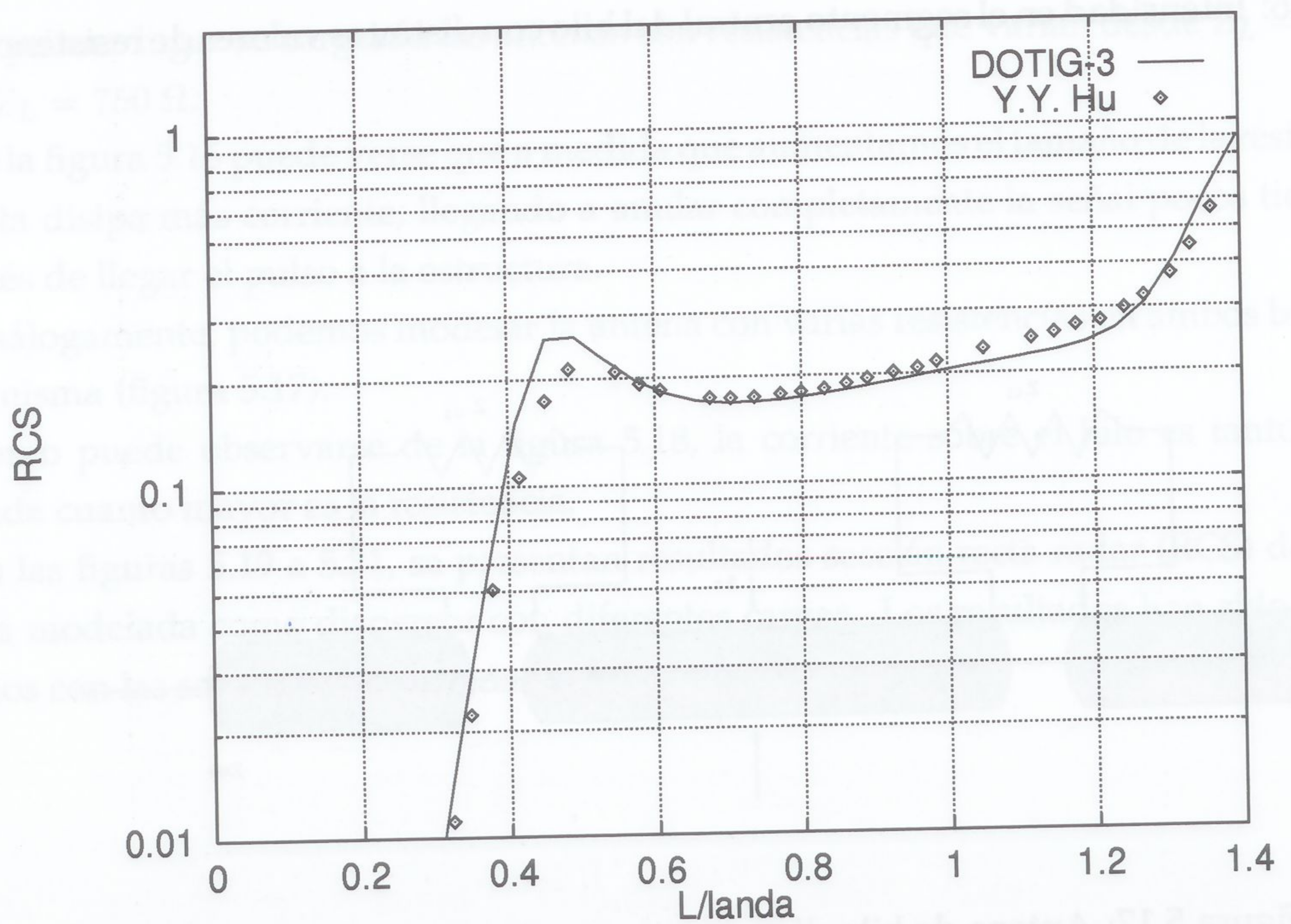


Figura 5.19: Sección recta radar de una antena de hilo dispersora cargada con una resistencia de $Z_L = 75\Omega$

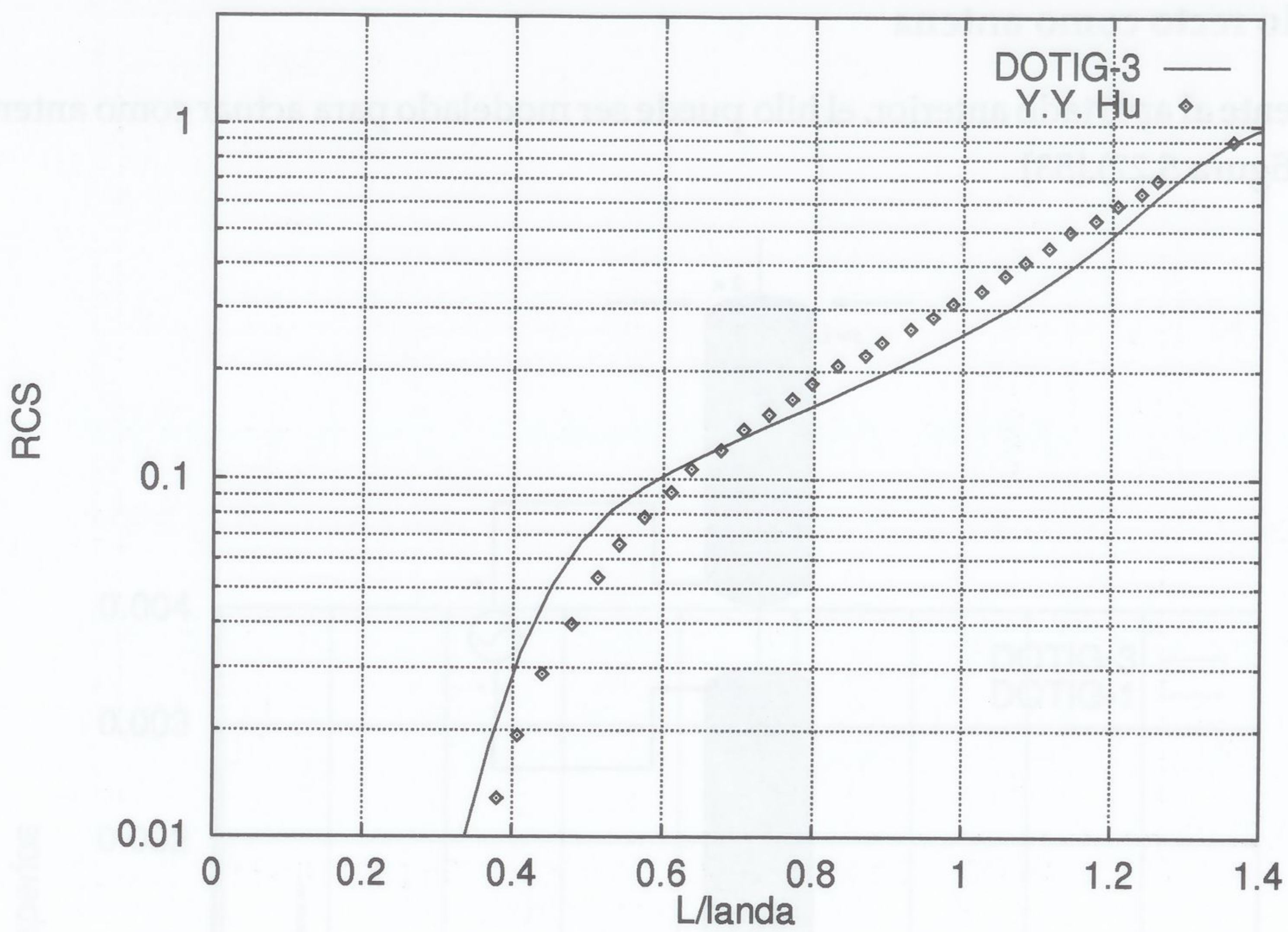


Figura 5.20: Sección recta radar de una antena de hilo dispersora cargada con una resistencia de $Z_L = 300\Omega$

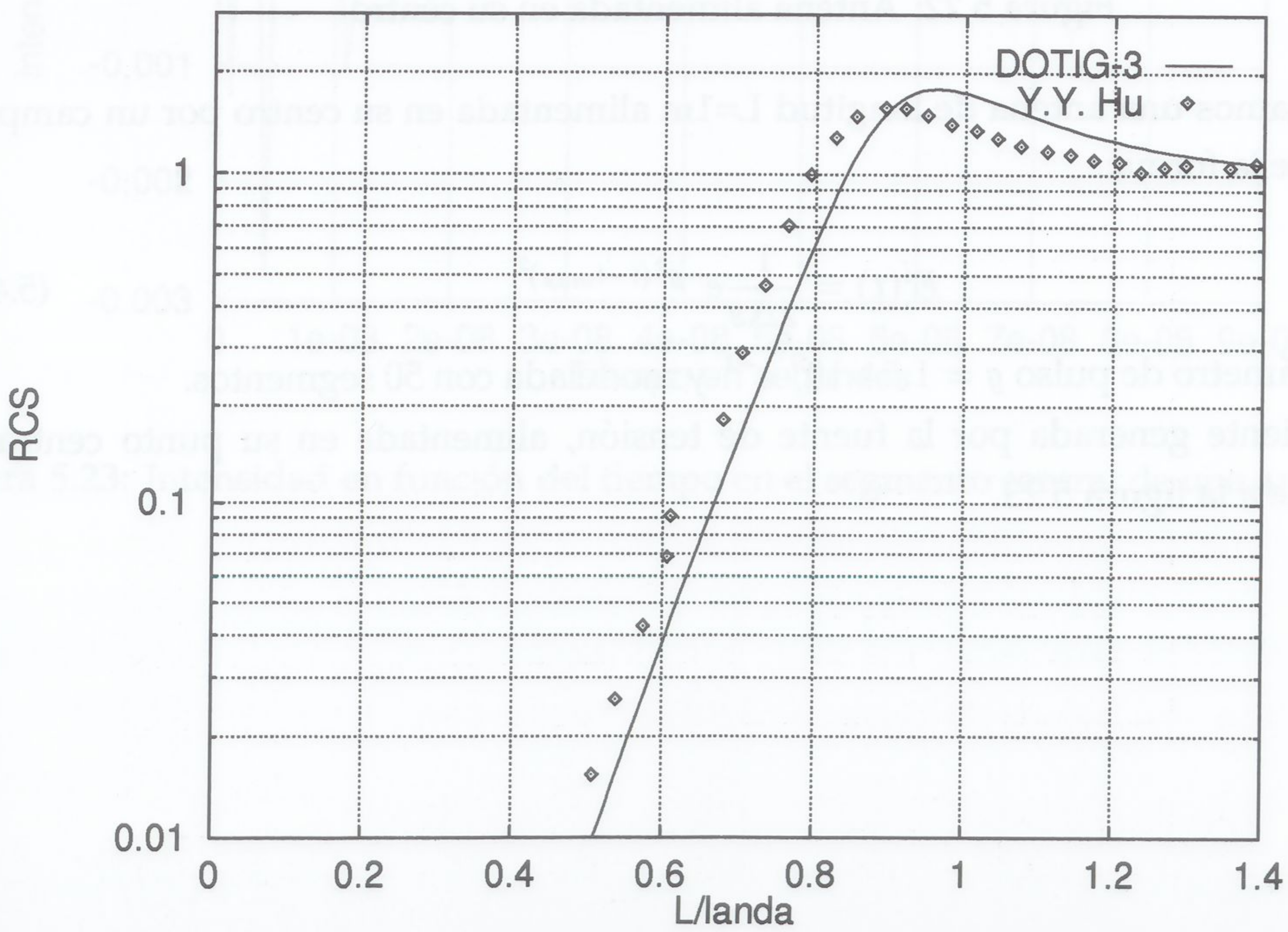


Figura 5.21: Sección recta radar de una antena de hilo dispersora cargada con una resistencia de $Z_L = \infty$

5.1.2 Hilo recto como antena

Análogamente al apartado anterior, el hilo puede ser modelado para actuar como antena radiando (figura 5.22).[53]

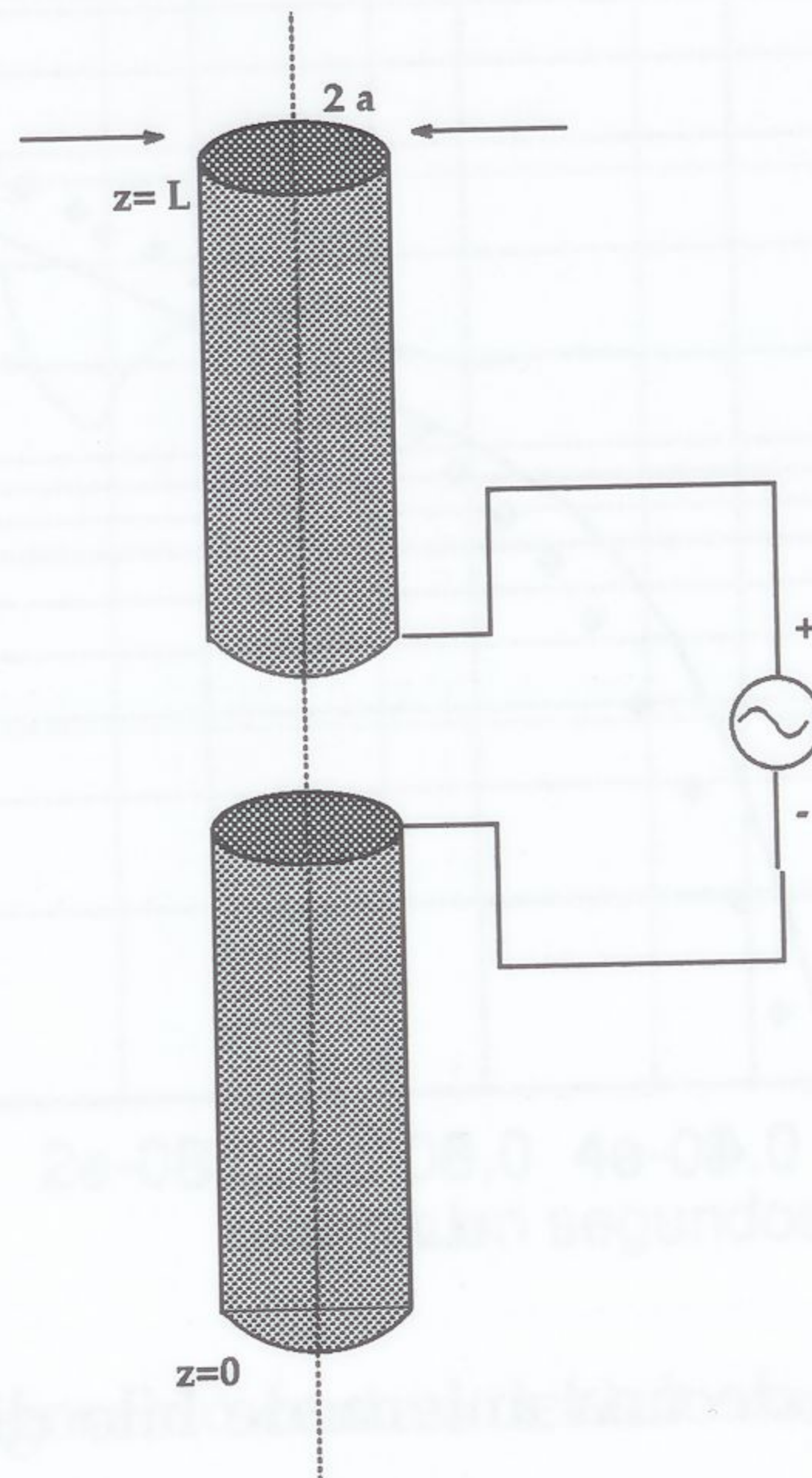


Figura 5.22: Antena alimentada en su centro

Supongamos una antena de longitud $L=1\text{m}$ alimentada en su centro por un campo incidente de la forma:

$$E^i(t) = \frac{1}{2\Delta s} e^{-g^2(t-t_{max})^2} \quad (5.4)$$

con un parámetro de pulso $g = 1.5 * 10^9 \text{ s}^{-1}$ y modelada con 50 segmentos.

La corriente generada por la fuente de tensión, alimentada en su punto central, corresponde a la figura 5.23.

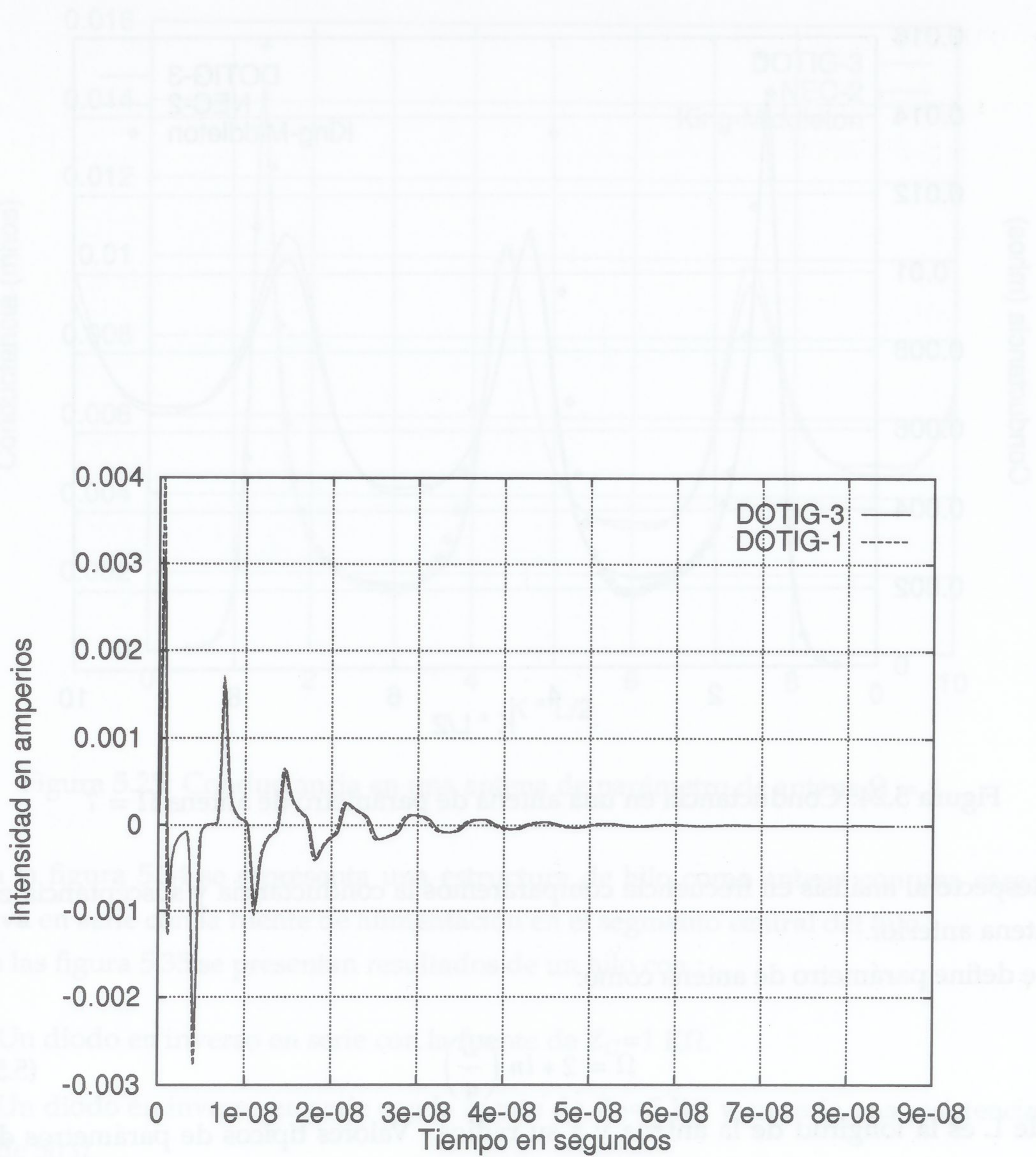


Figura 5.23: Intensidad en función del tiempo en el segmento central de una antena

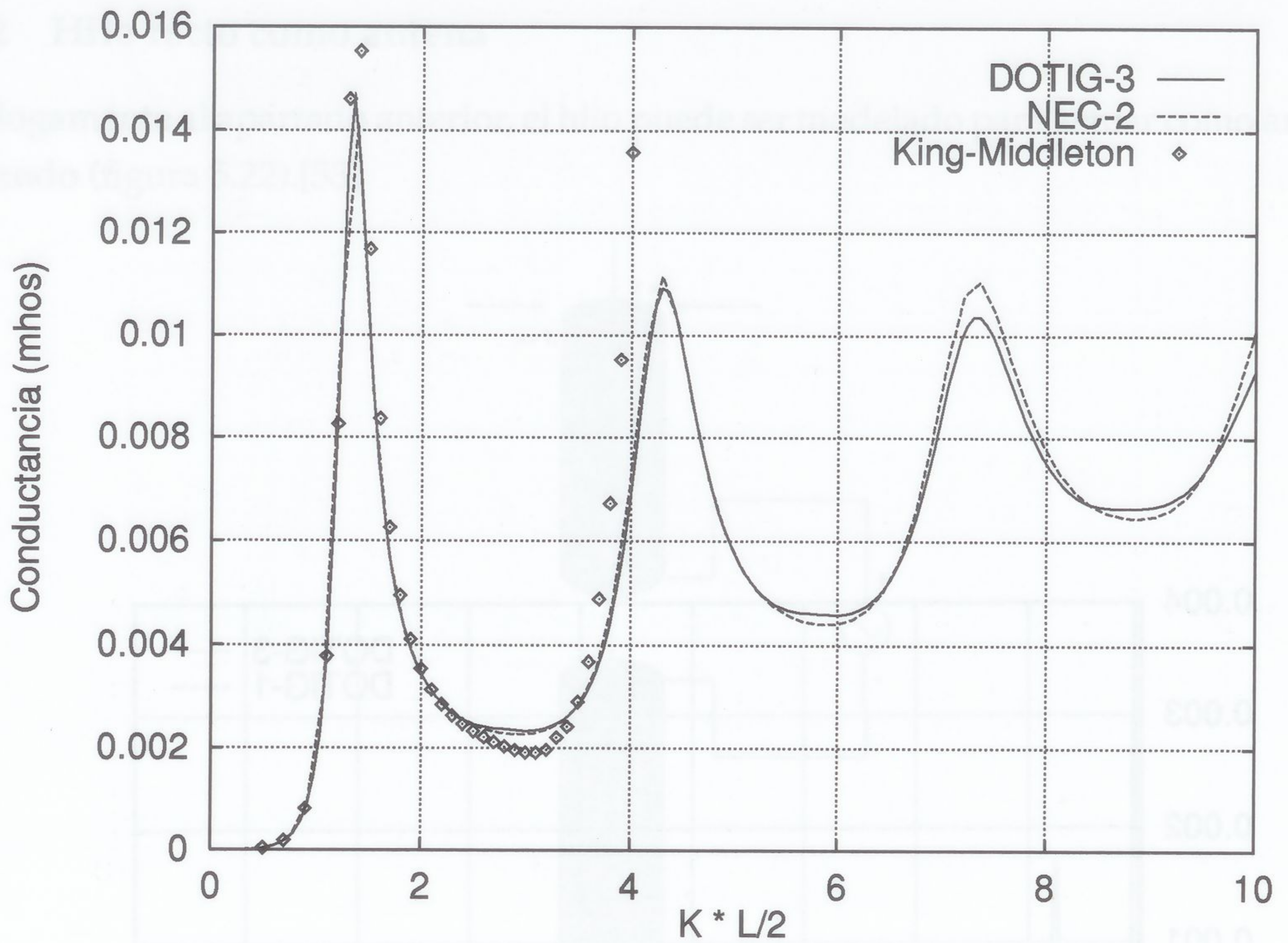


Figura 5.24: Conductancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 7$

Respecto al análisis en frecuencia compararemos la conductancia y susceptancia en la antena anterior.

Se define parámetro de antena como:

$$\Omega = 2 * \ln \left(\frac{L}{a} \right) \quad (5.5)$$

donde L es la longitud de la antena y a su radio. Valores típicos de parámetros de antena están comprendidos entre 7 y 12. El parámetro de antena nos da información sobre la aproximación de hilo delgado. Se considera como hilo delgado a aquellos cuyo parámetro de antena es superior o igual a $\Omega = 10$.

Se compararán conductancias y susceptancias para parámetros de antena comprendidos entre 7 y 11 comparados con NEC-2 y las soluciones de la ecuación de Hallen dadas por King-Middleton [4] (figuras 5.24 a 5.33)

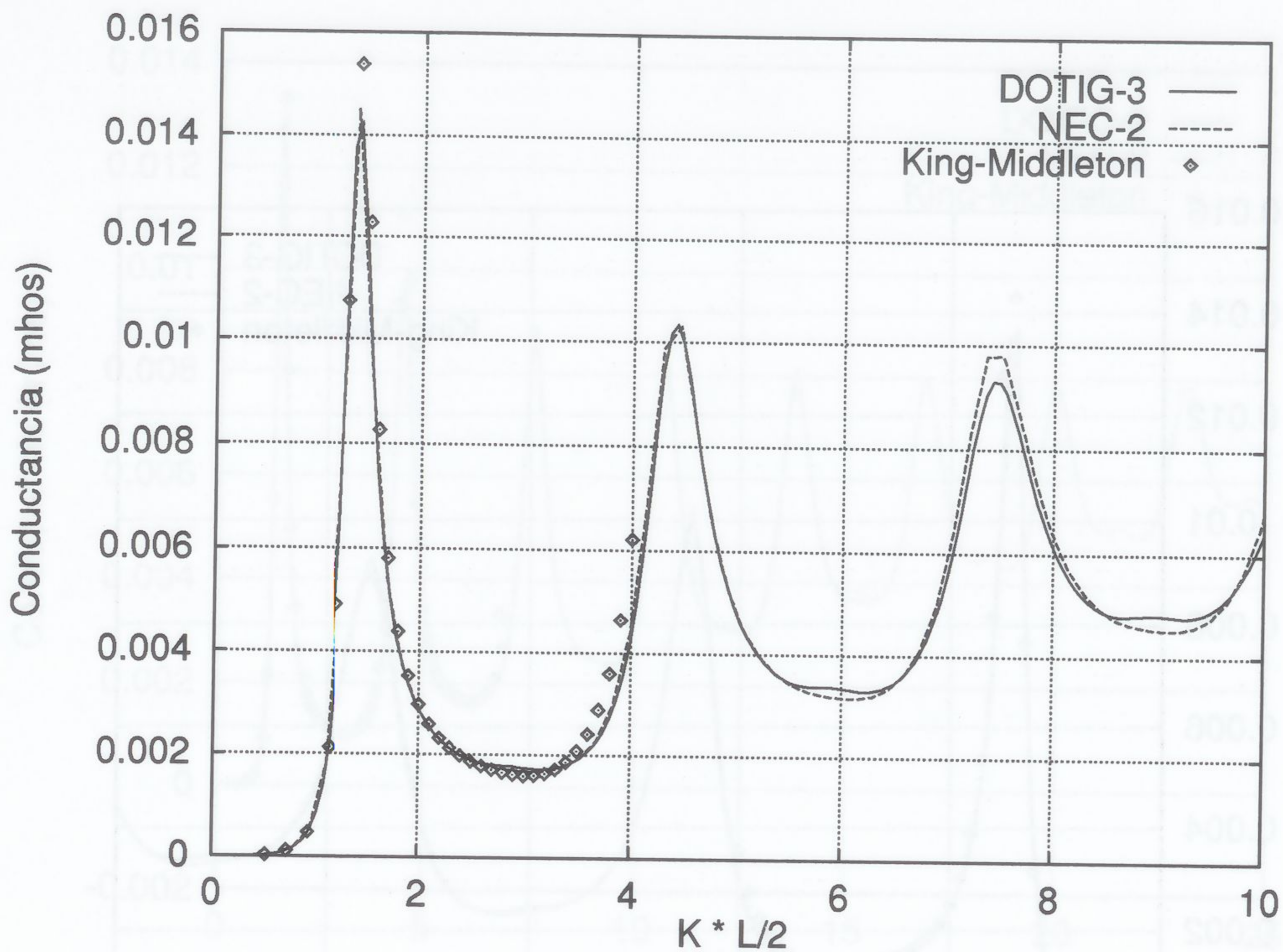


Figura 5.25: Conductancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 8$

En la figura 5.34 se representa una estructura de hilo como antena con una carga resistiva en serie con la fuente de alimentación en el segmento central del hilo.

En las figura 5.35 se presentan resultados de un hilo con :

- A.- Un diodo en inverso en serie con la fuente de $Z_C = 1 \text{ K}\Omega$.
- B.- Un diodo en inverso en serie con la fuente de $Z_C = 5 \text{ K}\Omega$ y en serie una resistencia de 50Ω .
- C.- Un diodo en inverso de $Z_C = 5 \text{ K}\Omega$ y una resistencia de 50Ω en serie con la fuente, dos diodos en inverso de $2.5 \text{ K}\Omega$ en los puntos centrales de cada brazo de la antena.

Respecto a tiempo de CPU, puede verse en la tabla 5.2 los tiempos de usuario y de sistema usado para el caso de una antena alimentada en su centro.

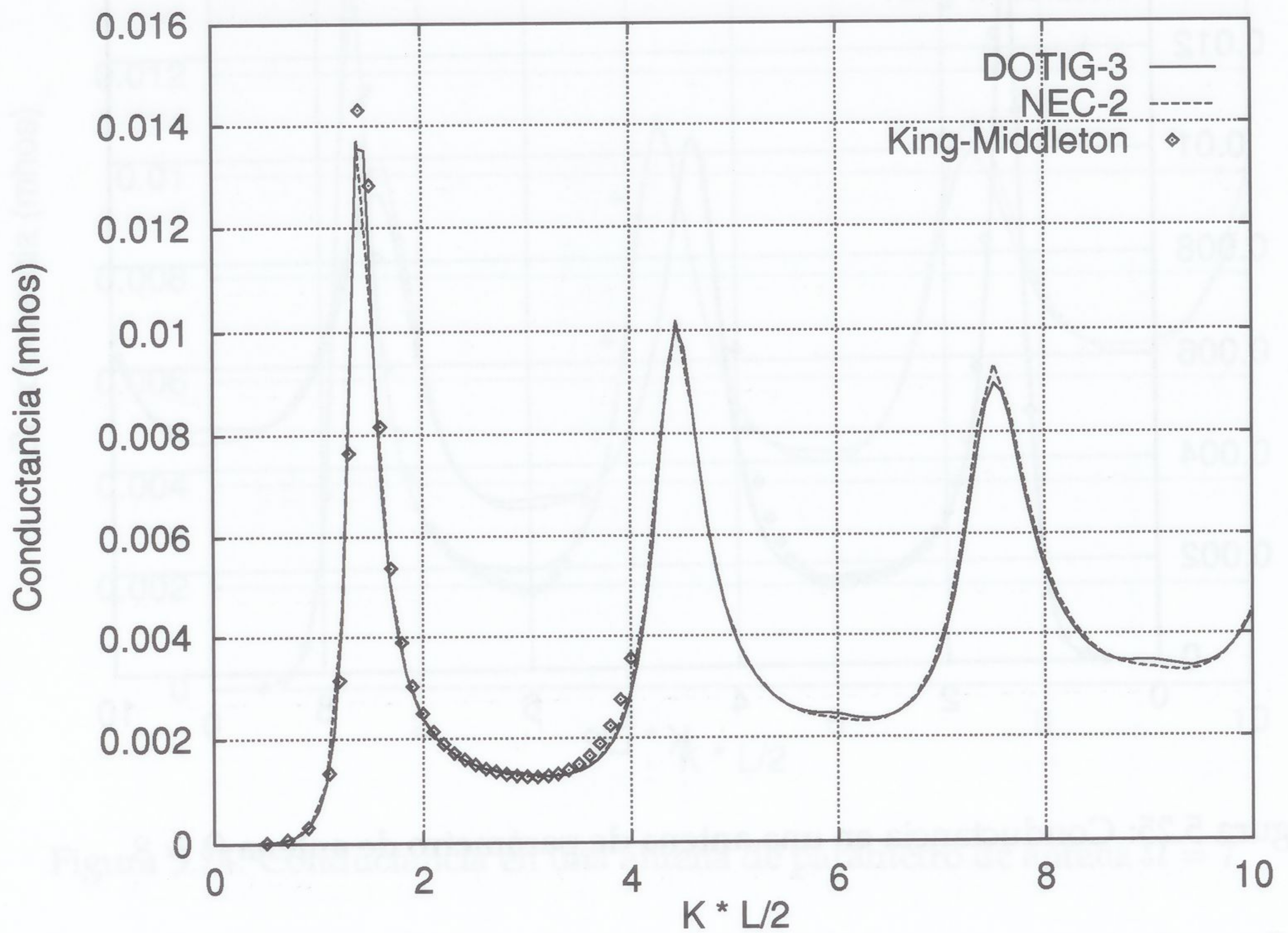


Figura 5.26: Conductancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 9$

Tiempos de CPU para una antena de hilo.				
	NUM. DE INCOG.	T. DE PROCESO	T. DE SISTEMA	OBSERVACIONES
DOTIG-3	51	200.9 seg.	2.8 seg.	164 frecuencias
DOTIG-1	50	650.6 seg.	8.9 seg.	1024 Inst. temp.
NEC-2	50	126.7 seg.	0.3 seg.	1024 Inst. temp.

Tabla 5.2: Tiempo de CPU invertidos para una antena por diferentes programas

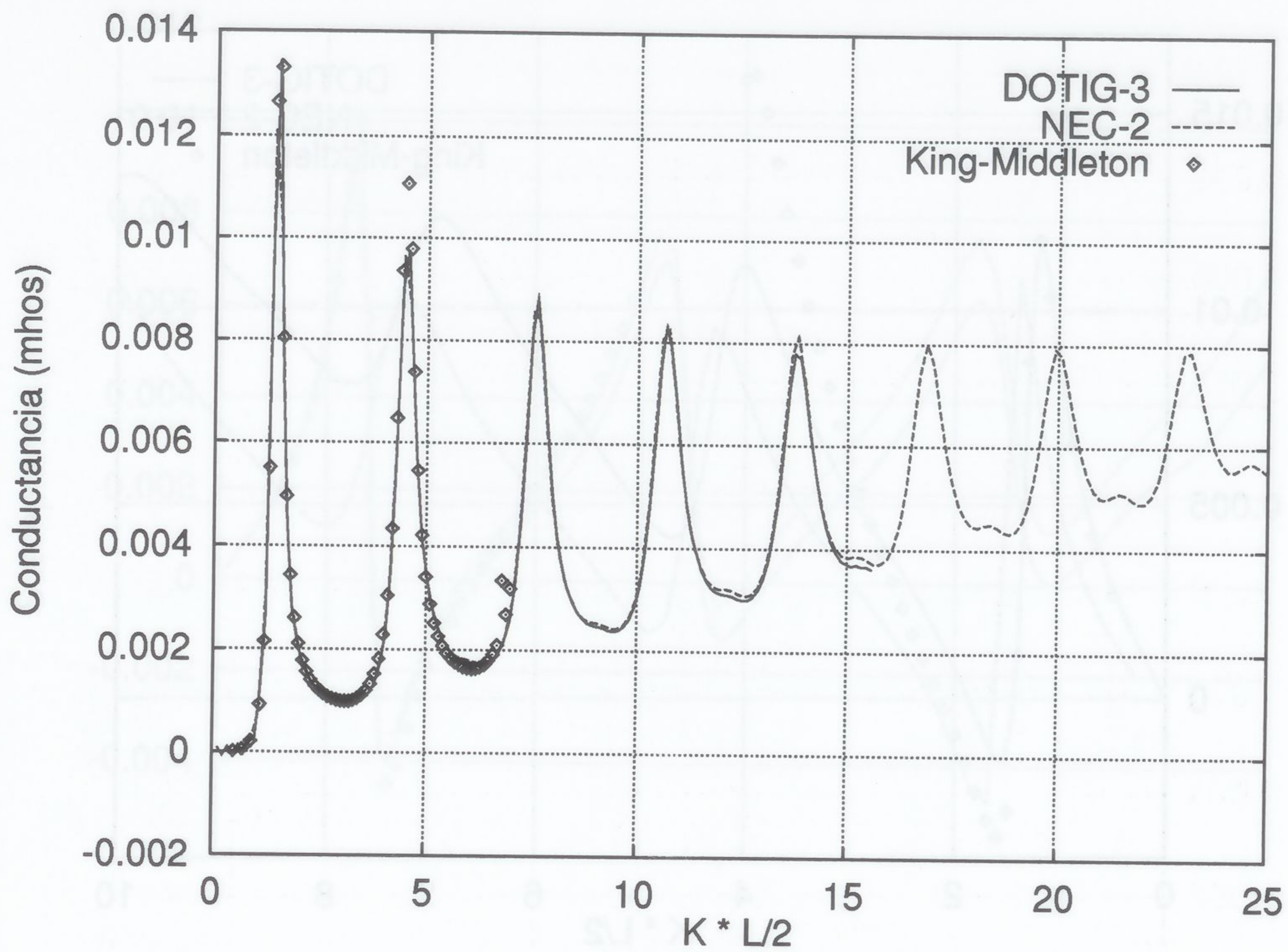


Figura 5.27: Conductancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 10$

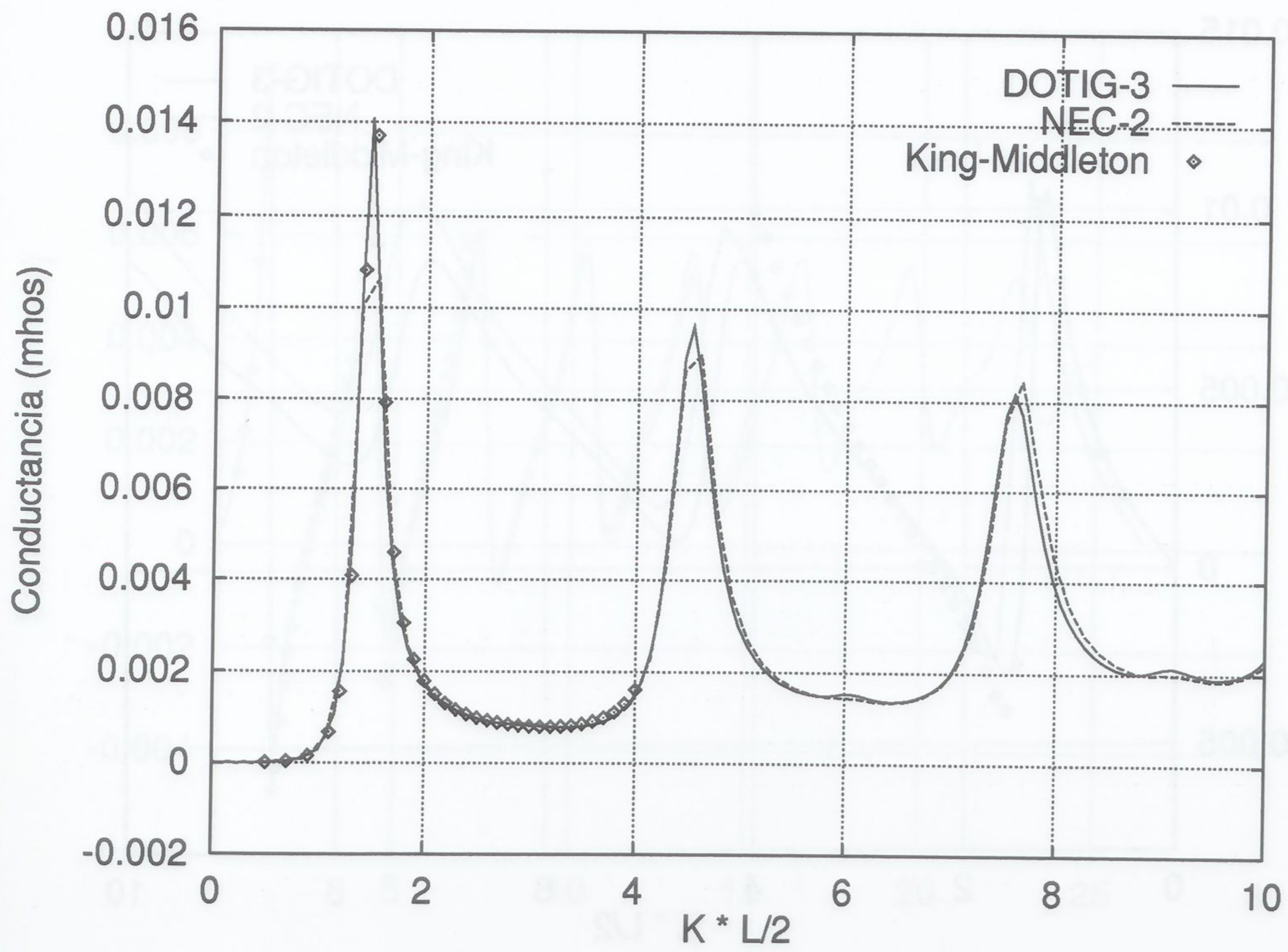


Figura 5.28: Conductancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 11$

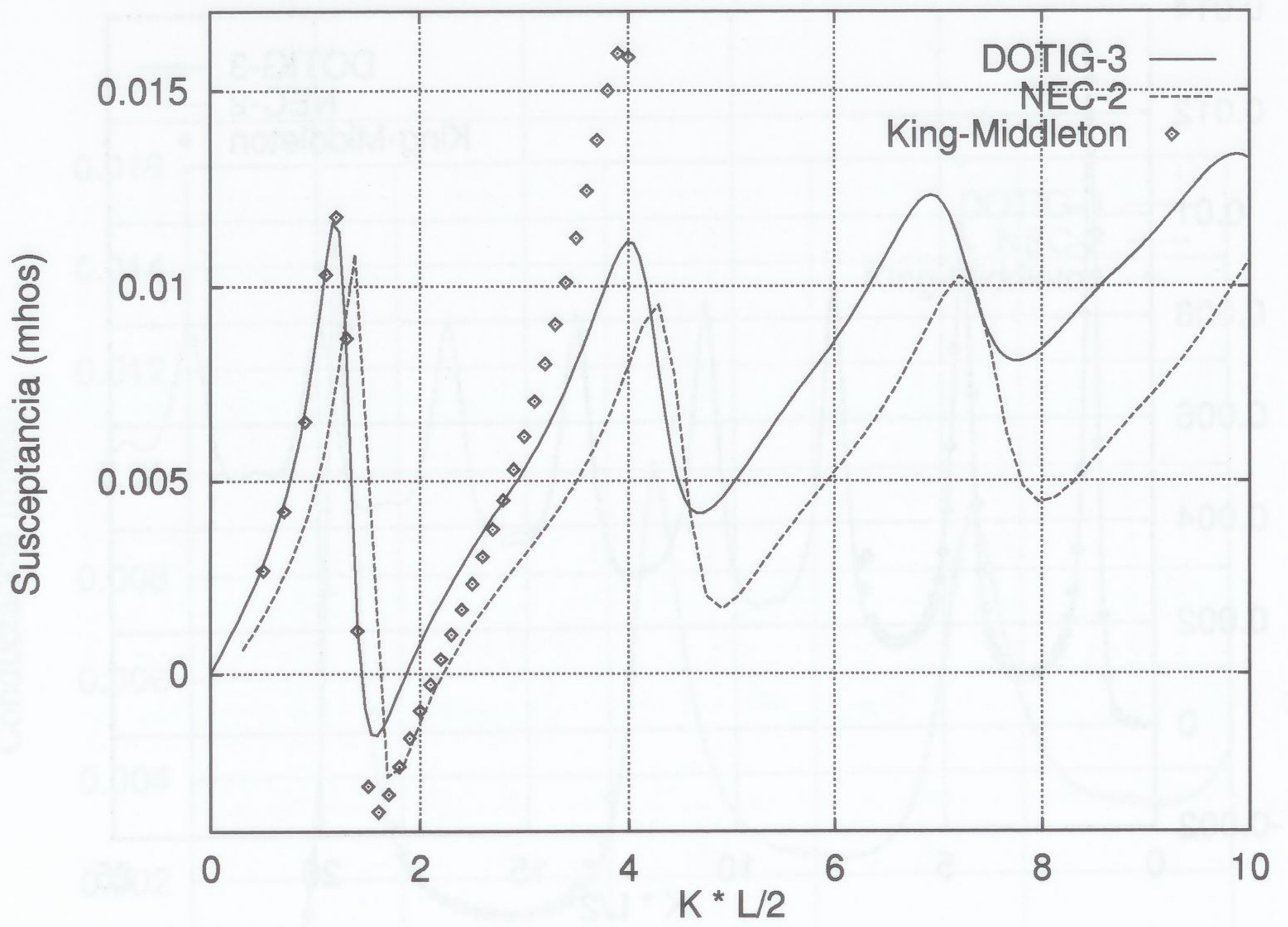


Figura 5.29: Susceptancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 7$

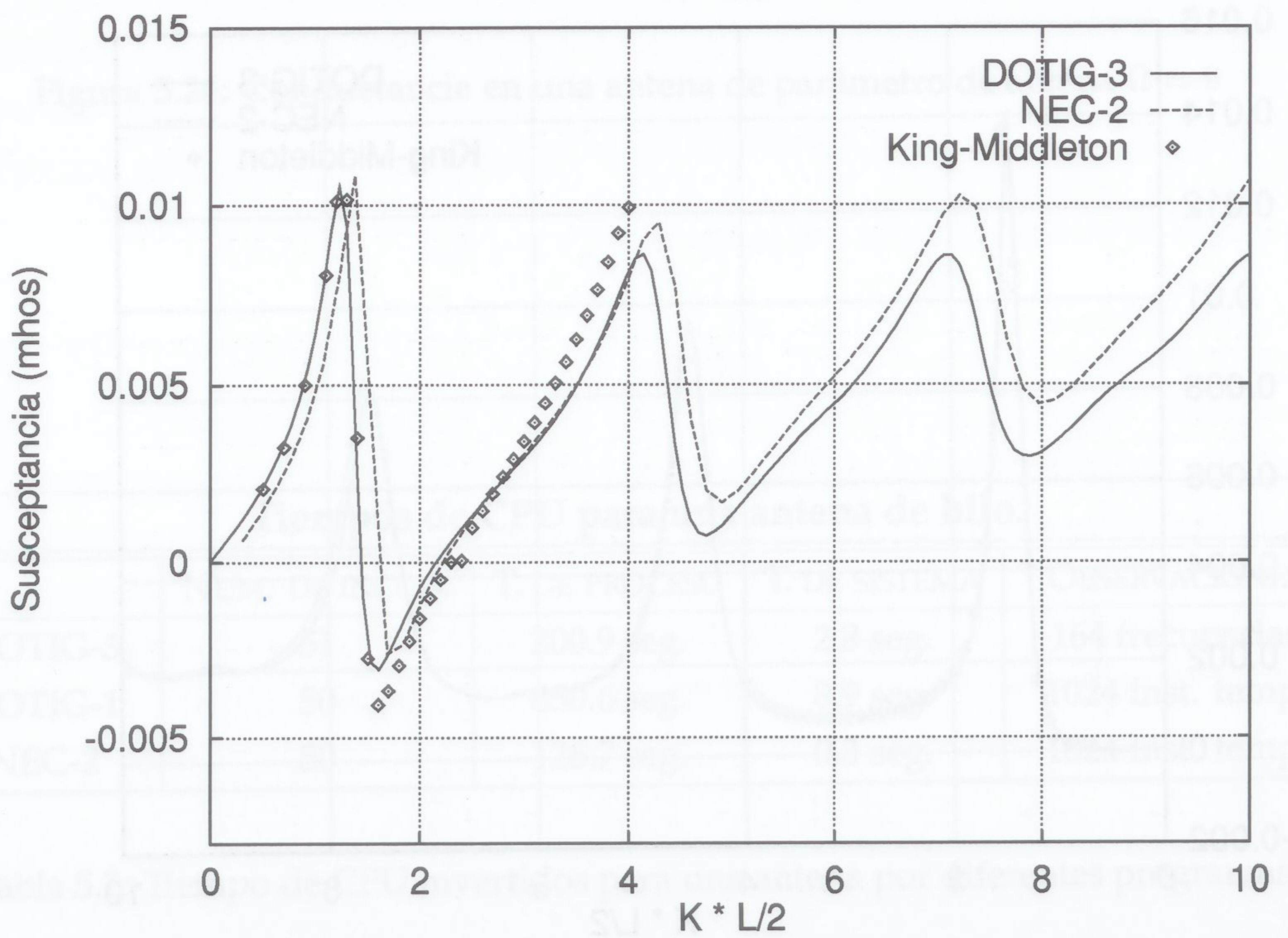


Figura 5.30: Susceptancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 8$

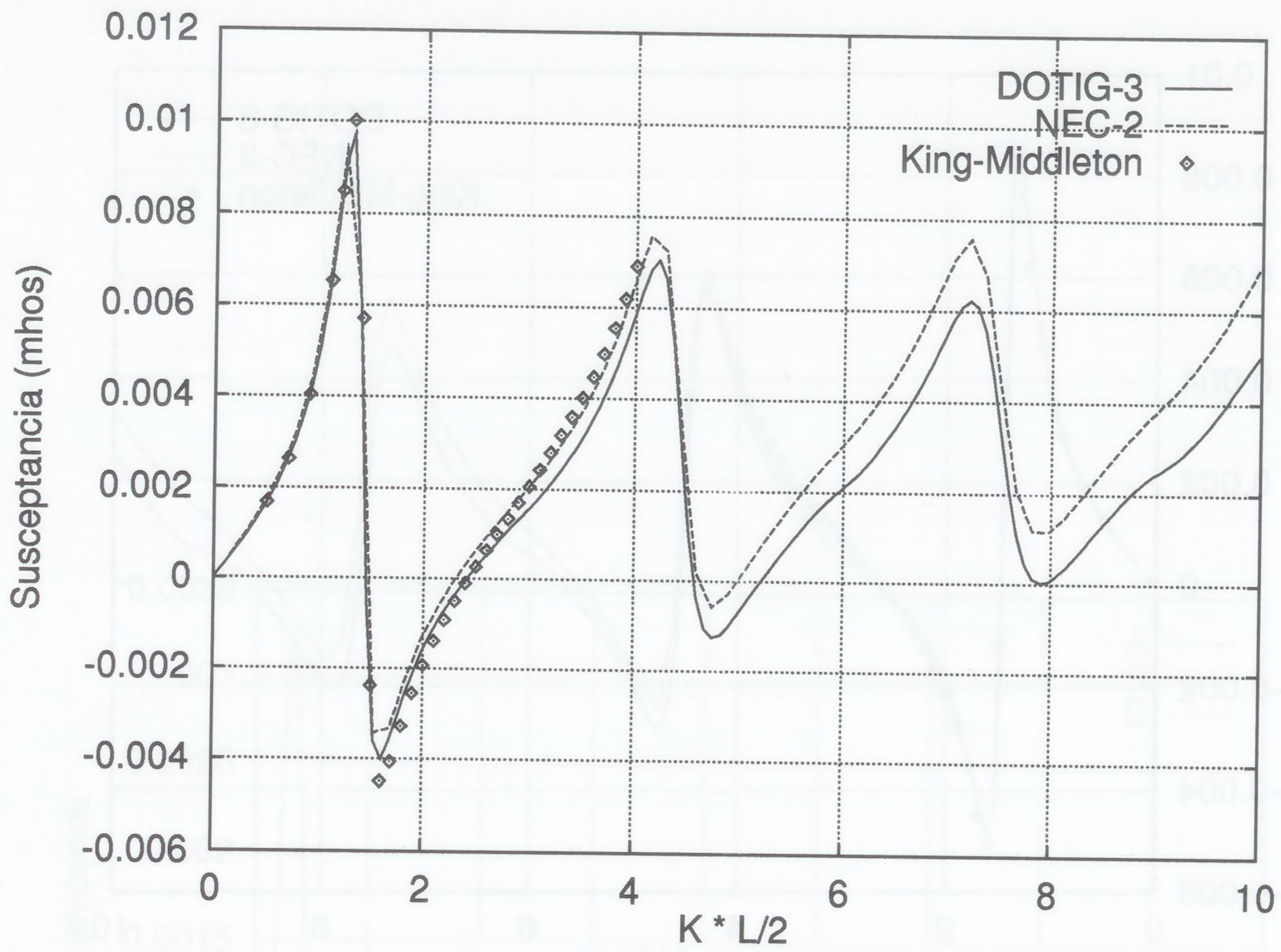


Figura 5.31: Susceptancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 9$

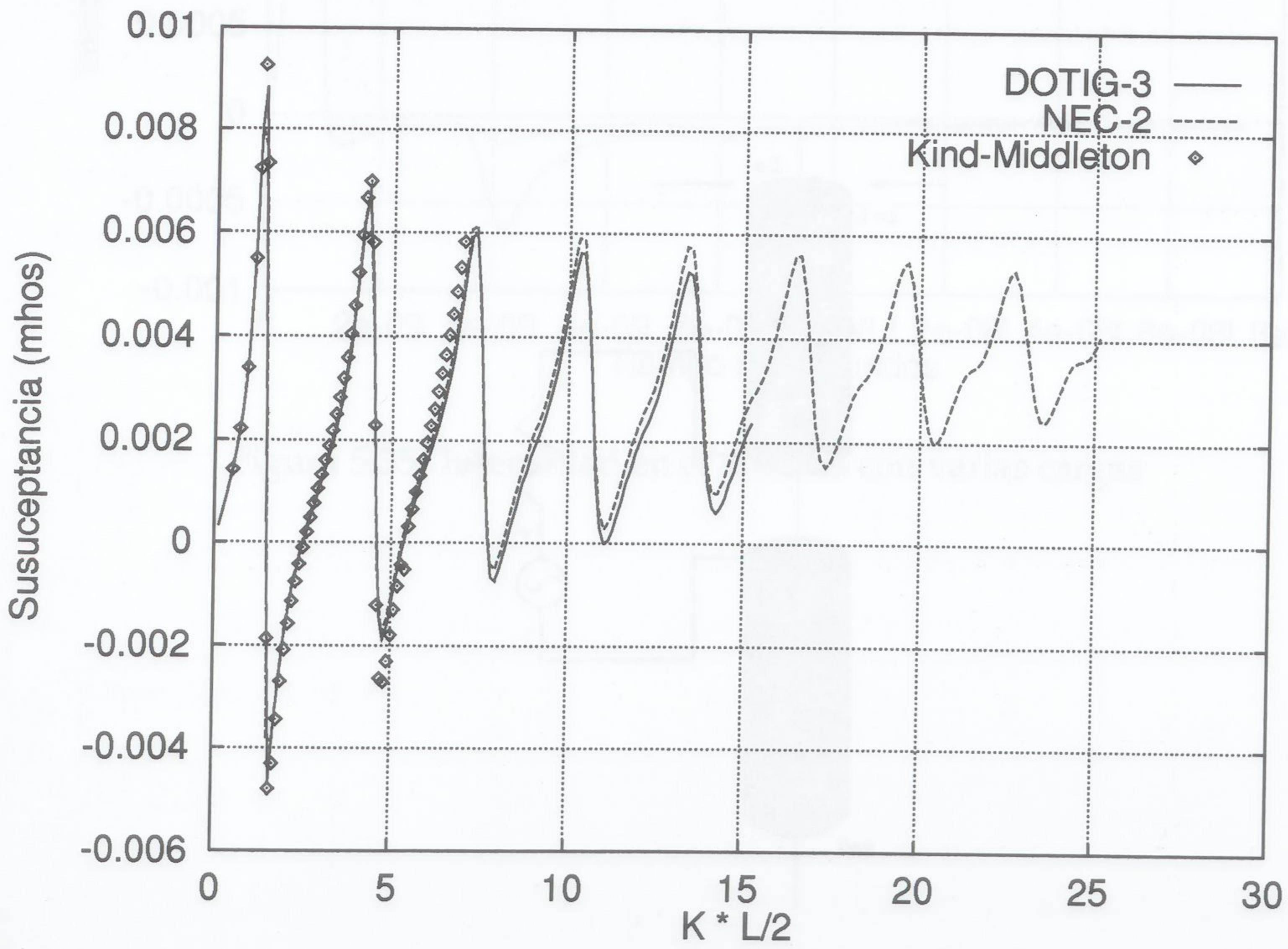


Figura 5.32: Susceptancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 10$

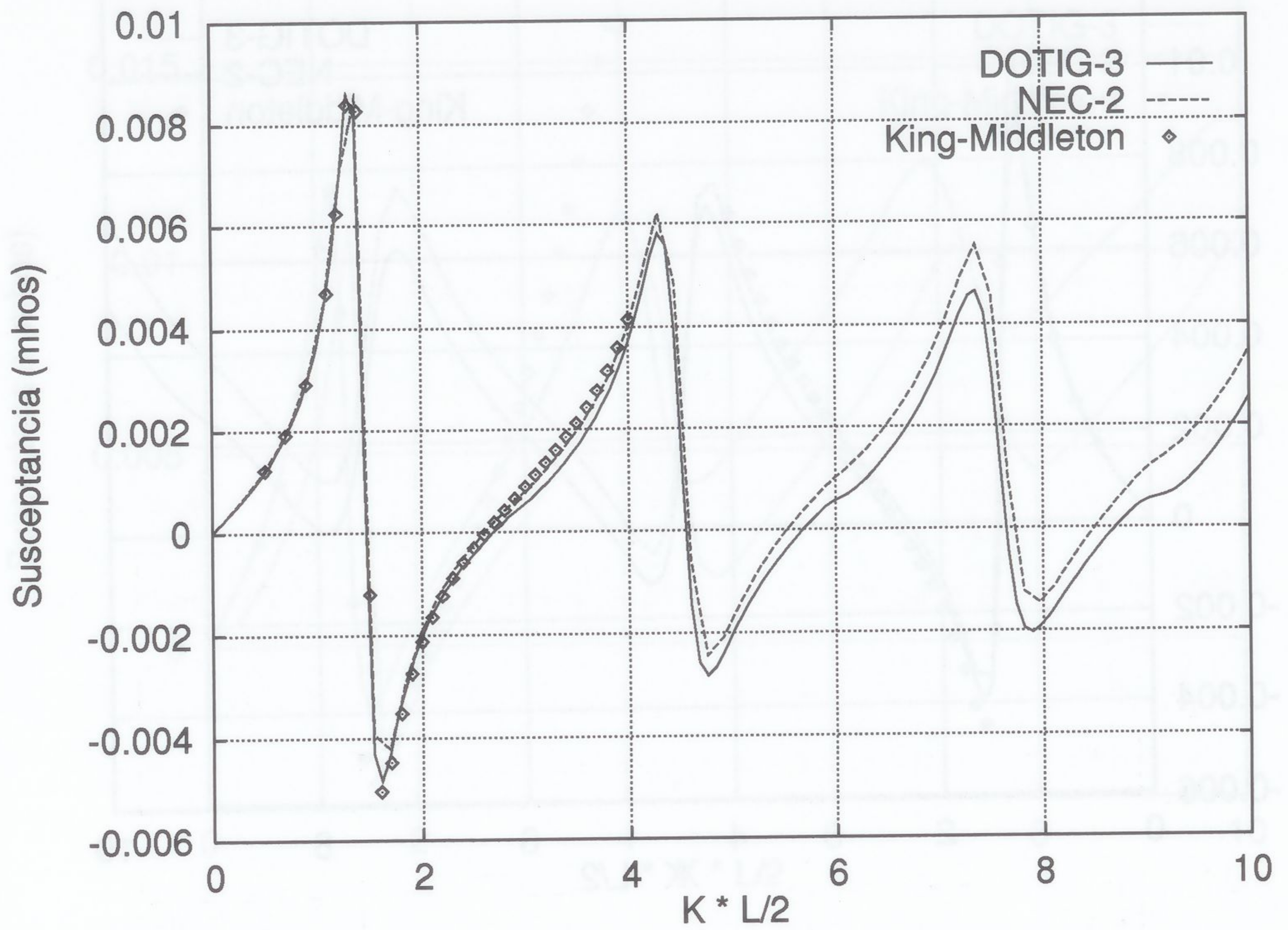


Figura 5.33: Susceptancia en una antena de parámetro de antena $\Omega = 11$

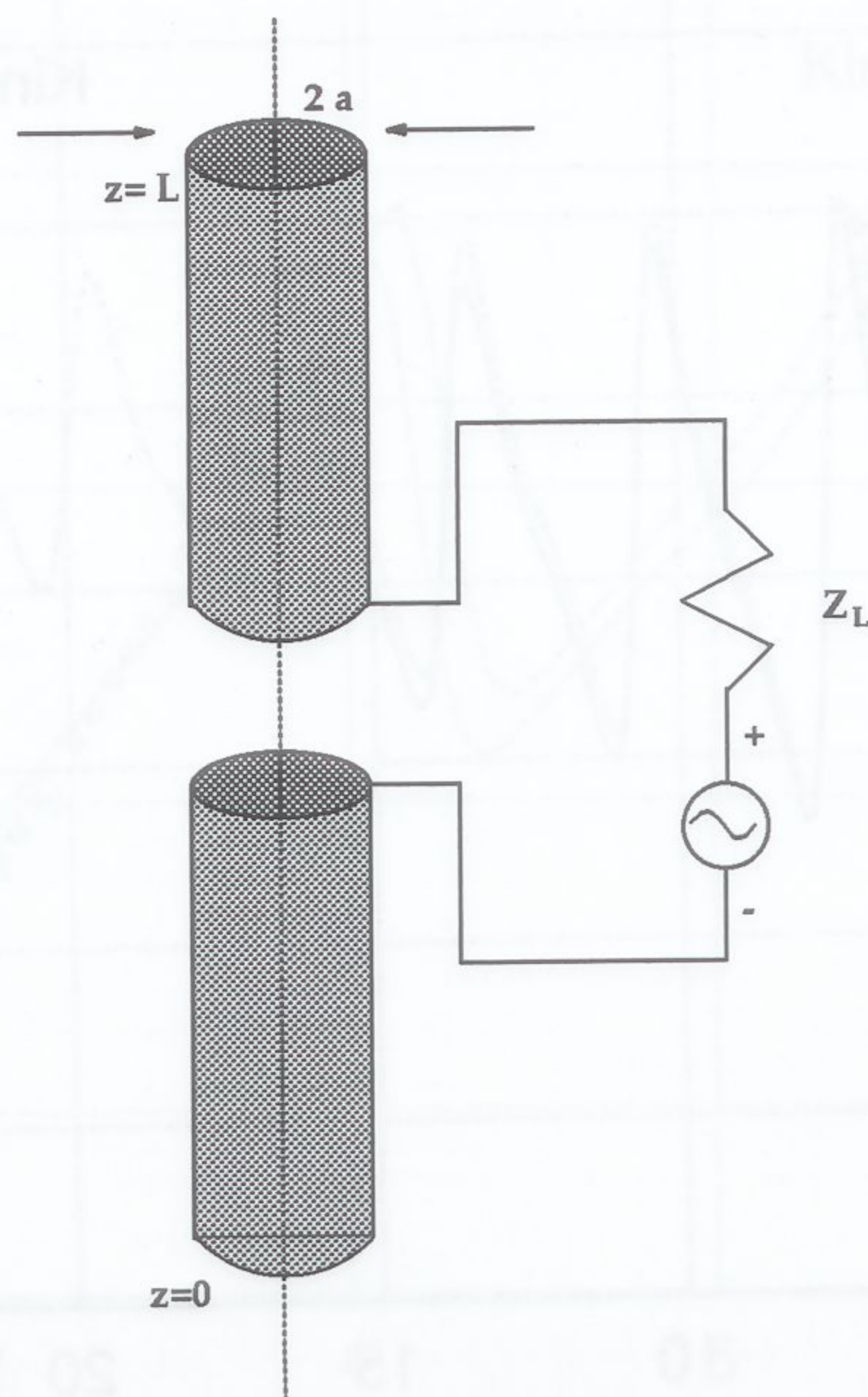


Figura 5.34: Antena de hilo cargada con una resistencia

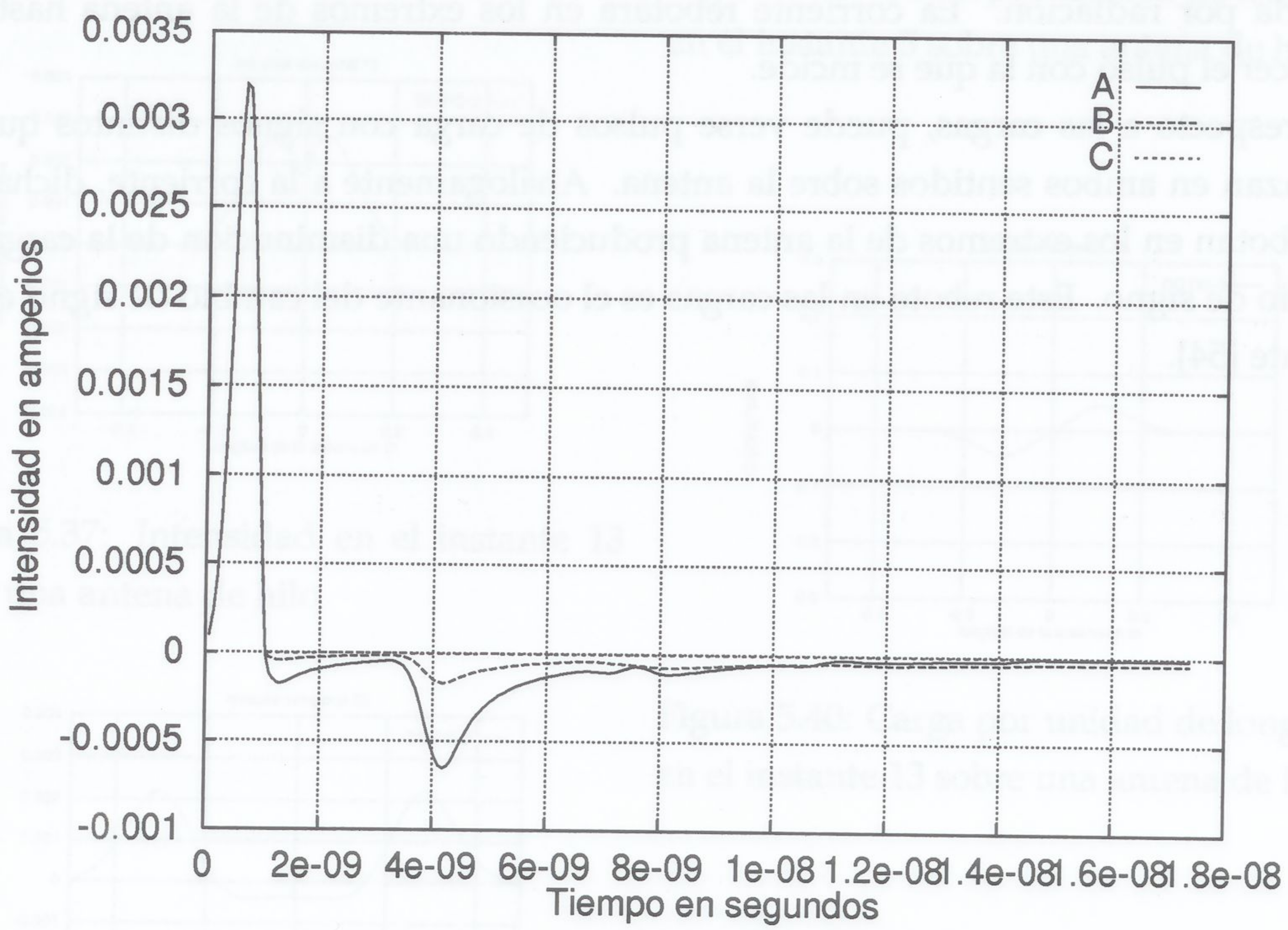


Figura 5.35: Intensidad en el antenas con varias cargas

5.1.3 Intensidad y carga en una antena de hilo

En este apartado se hará un estudio de la evolución de la corriente y de la carga sobre una antena de hilo. El modelo escogido, ha sido una antena de longitud $L=1$ m. de radio 0.00674 metros ($\Omega = 10$), alimentado por un pulso gaussiano de 1 voltio/metro de amplitud.

Como puede verse en la figuras 5.36 a 5.57 la antena empieza a radiar desde su centro (punto de alimentación), y a medida que transcurre el tiempo, el pulso gaussiano se divide en dos pulsos de igual amplitud avanzando sobre cada brazo de la antena, hasta la primera reflexión, disminuyendo su amplitud debido a la pérdida de energía ocasionada por radiación. La corriente rebotará en los extremos de la antena hasta desaparecer el pulso con la que se incide.

Con respecto a las cargas, puede verse pulsos de carga con signos distintos que se desplazan en ambos sentidos sobre la antena. Análogamente a la corriente, dichas cargas rebotan en los extremos de la antena produciendo una disminución de la carga, sin cambio de signo. Este rebote en las cargas es el ocasionante del cambio de signo en la corriente [54].



Figura 5.33. Susceptancia en una antena de parámetros de línea.



Figura 5.34. Antena de hilo cargada con una resistencia.

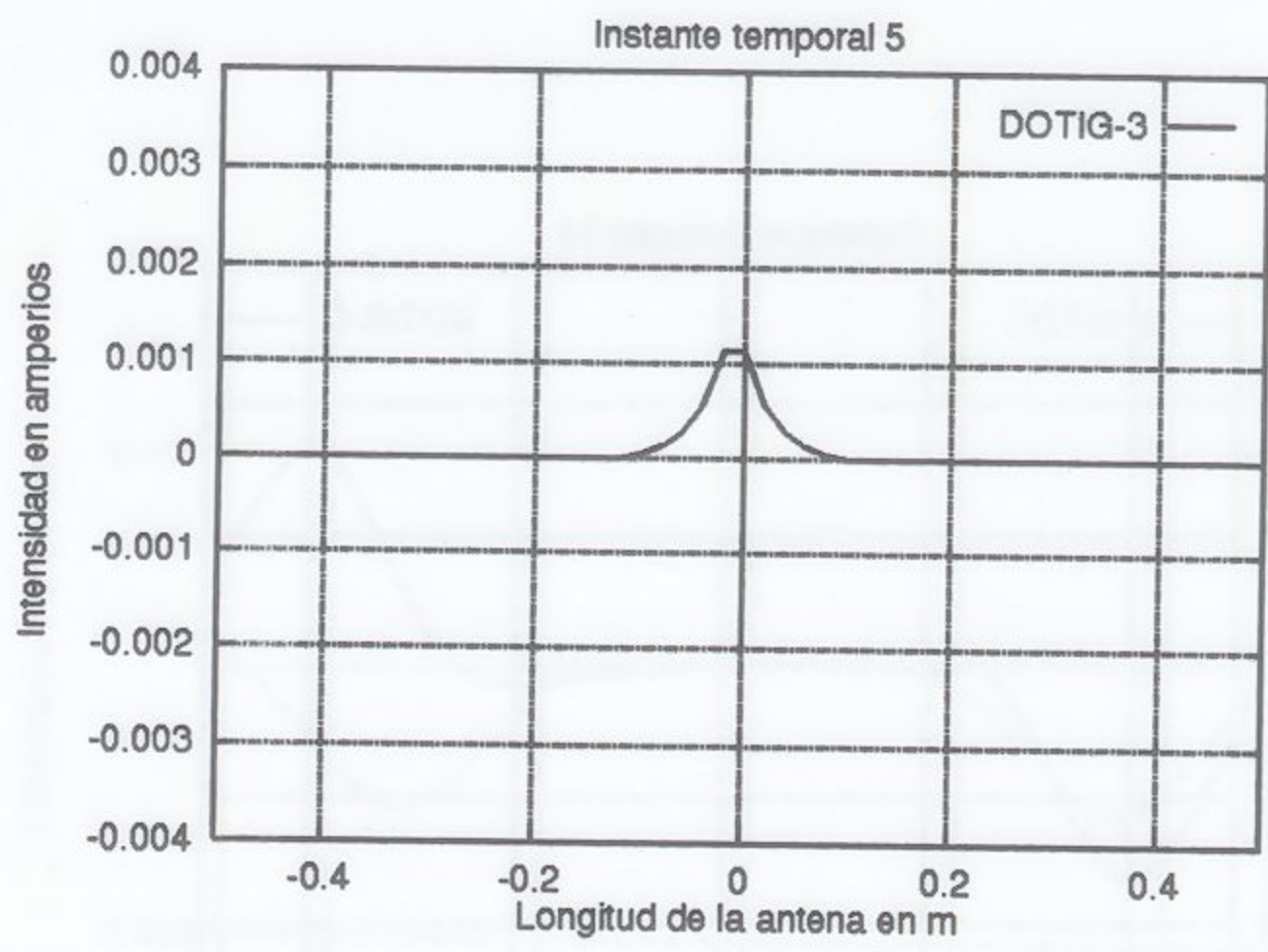


Figura 5.36: Intensidad en el instante 5 sobre una antena de hilo

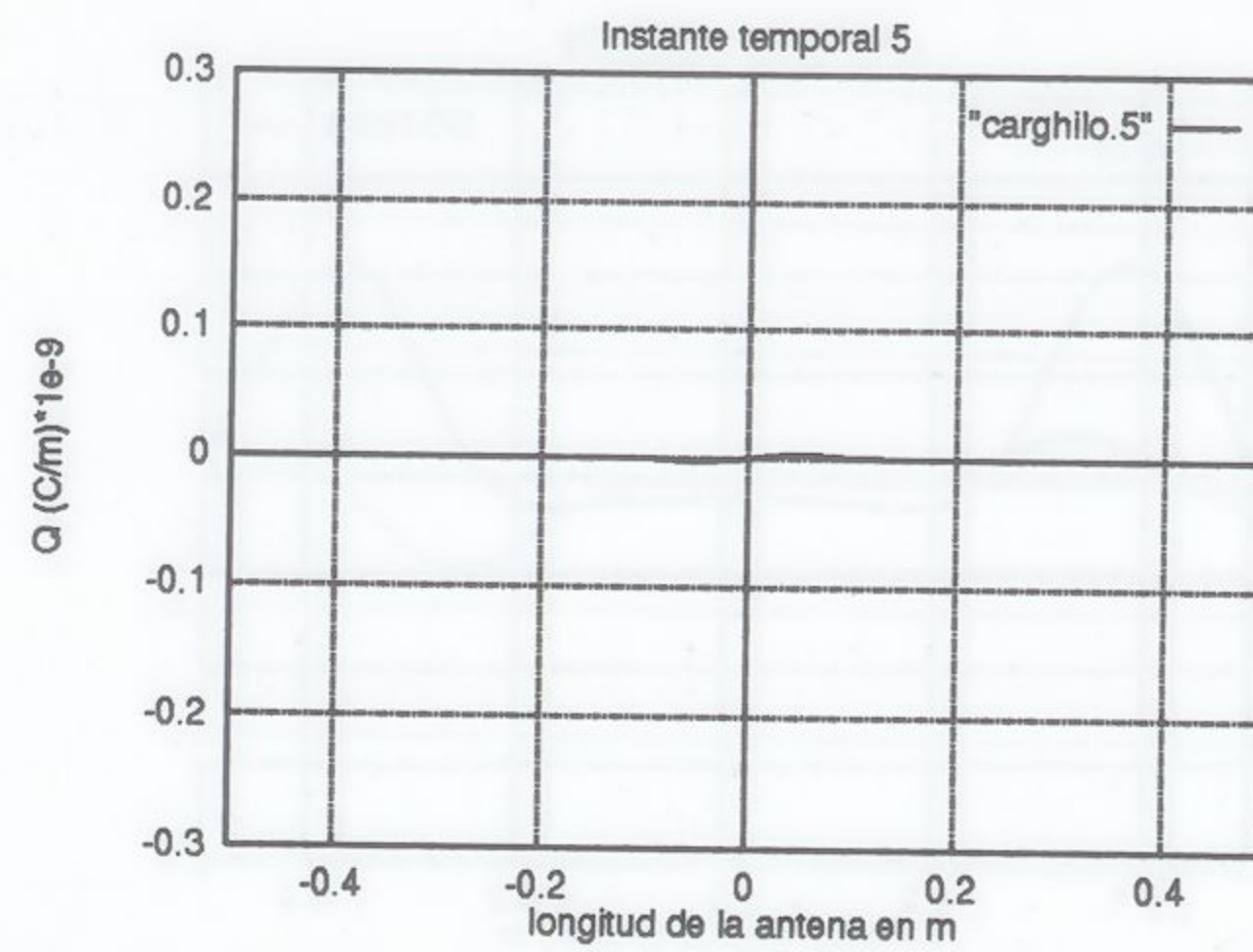


Figura 5.39: Carga por unidad de longitud en el instante 5 sobre una antena de hilo

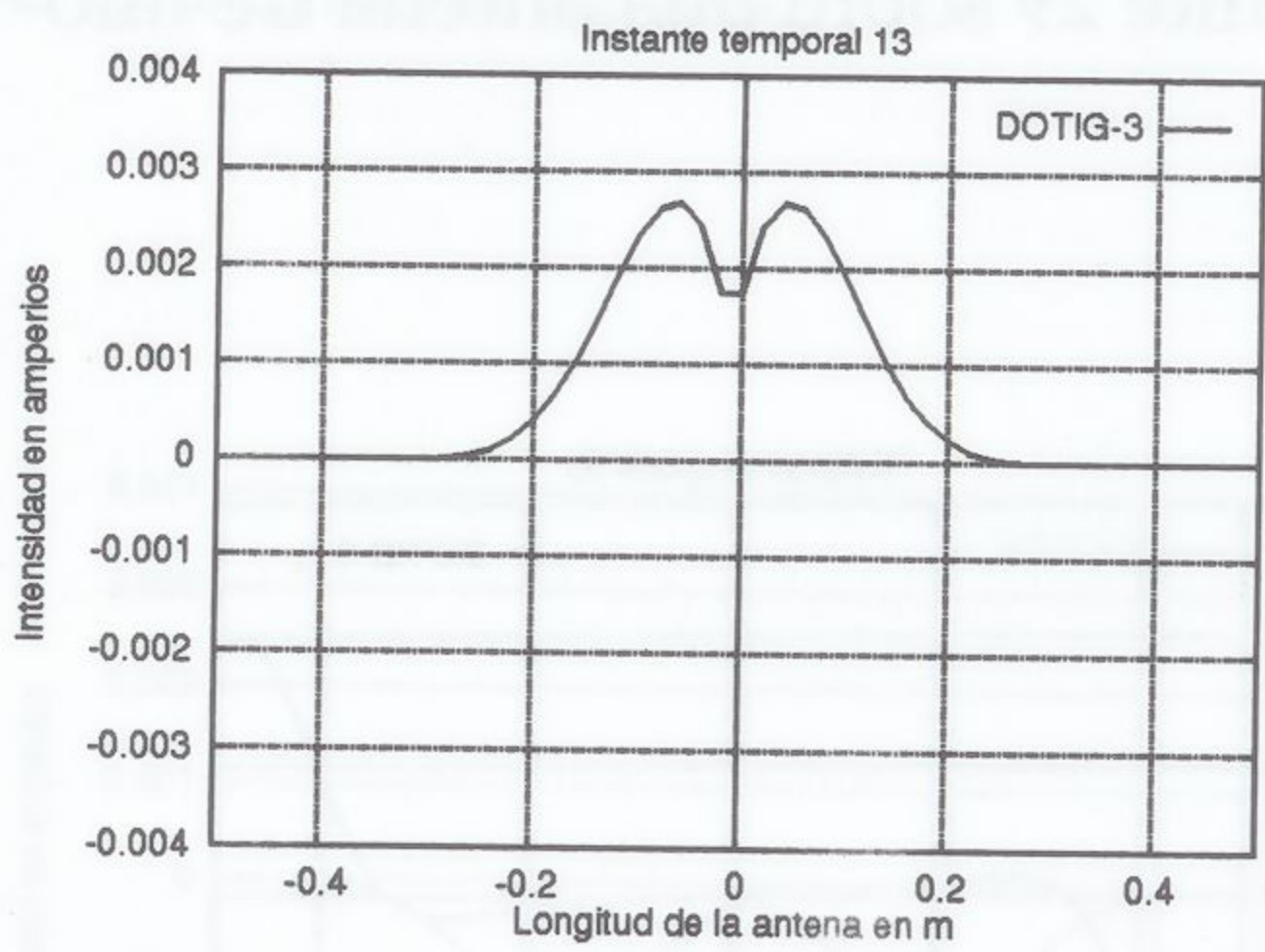


Figura 5.37: Intensidad en el instante 13 sobre una antena de hilo

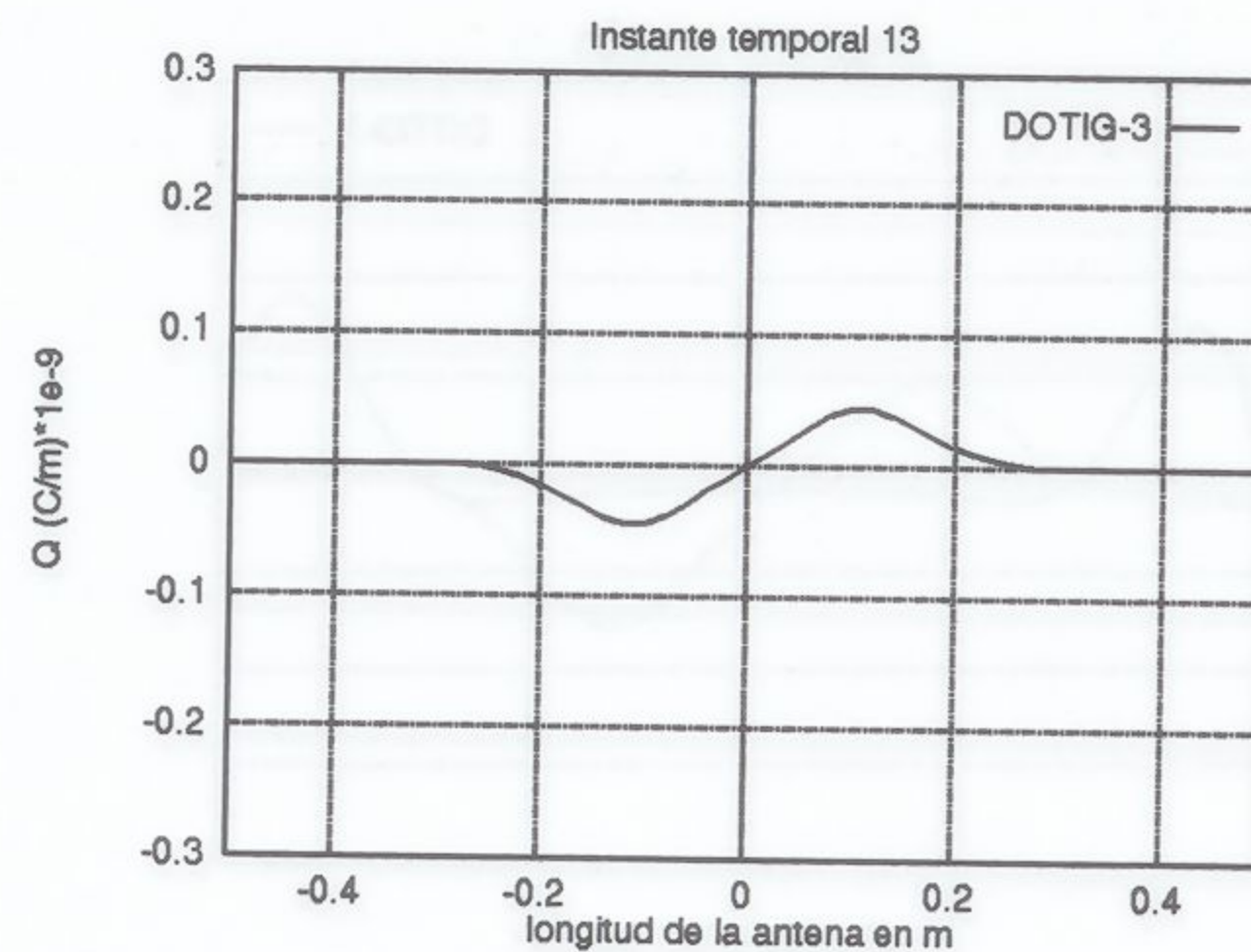


Figura 5.40: Carga por unidad de longitud en el instante 13 sobre una antena de hilo

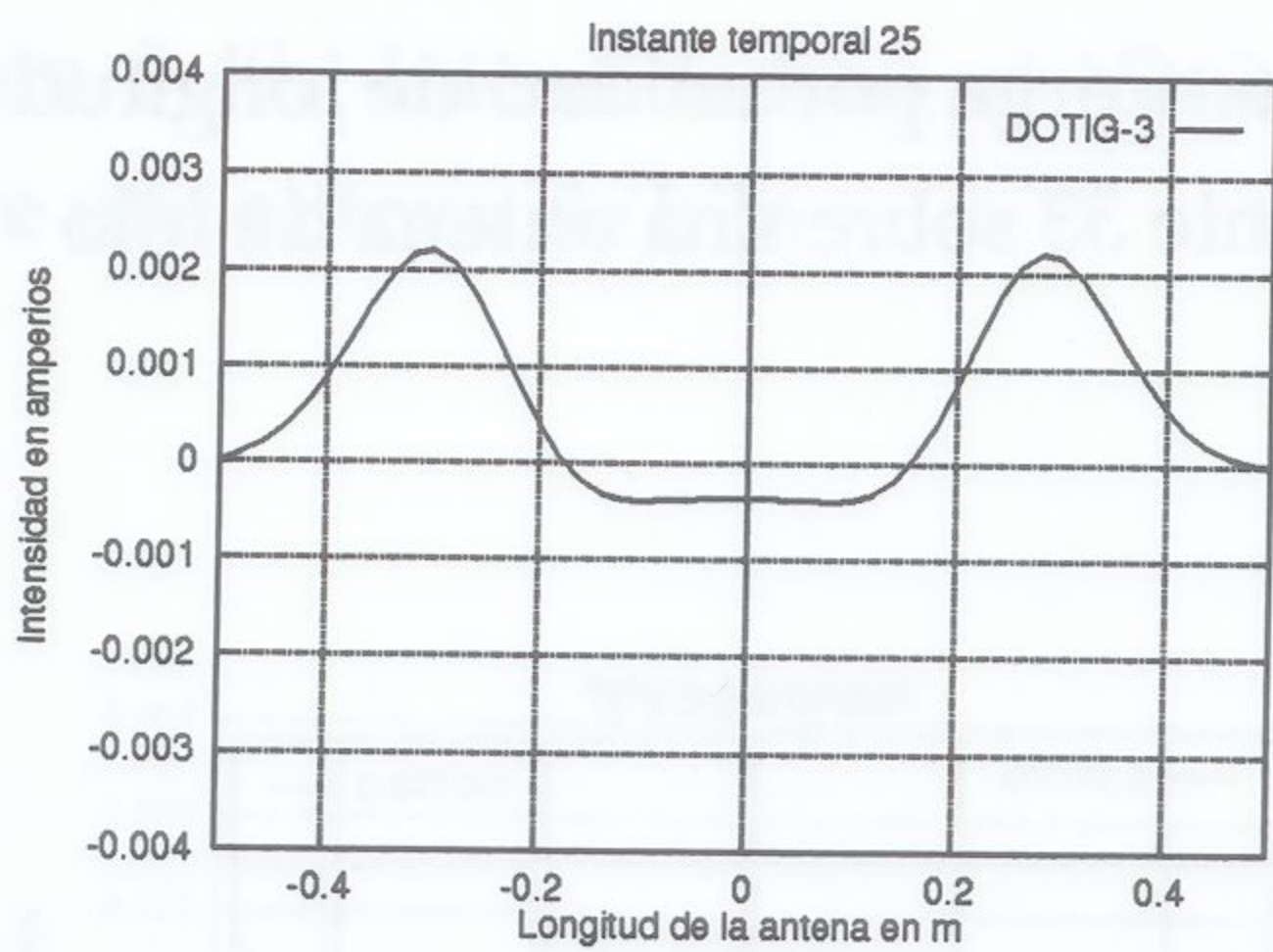


Figura 5.38: Intensidad en el instante 25 sobre una antena de hilo

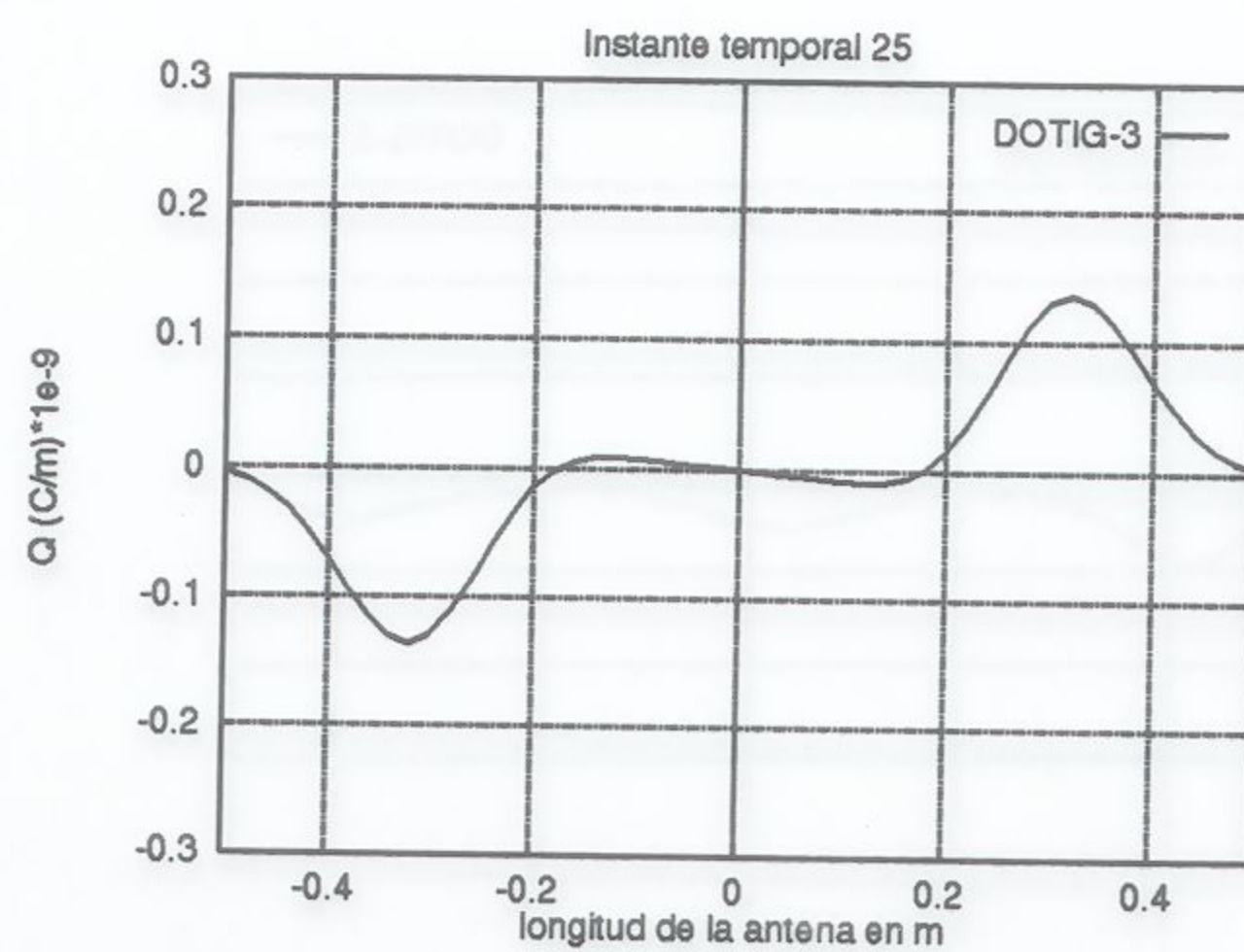


Figura 5.41: Carga por unidad de longitud en el instante 25 sobre una antena de hilo

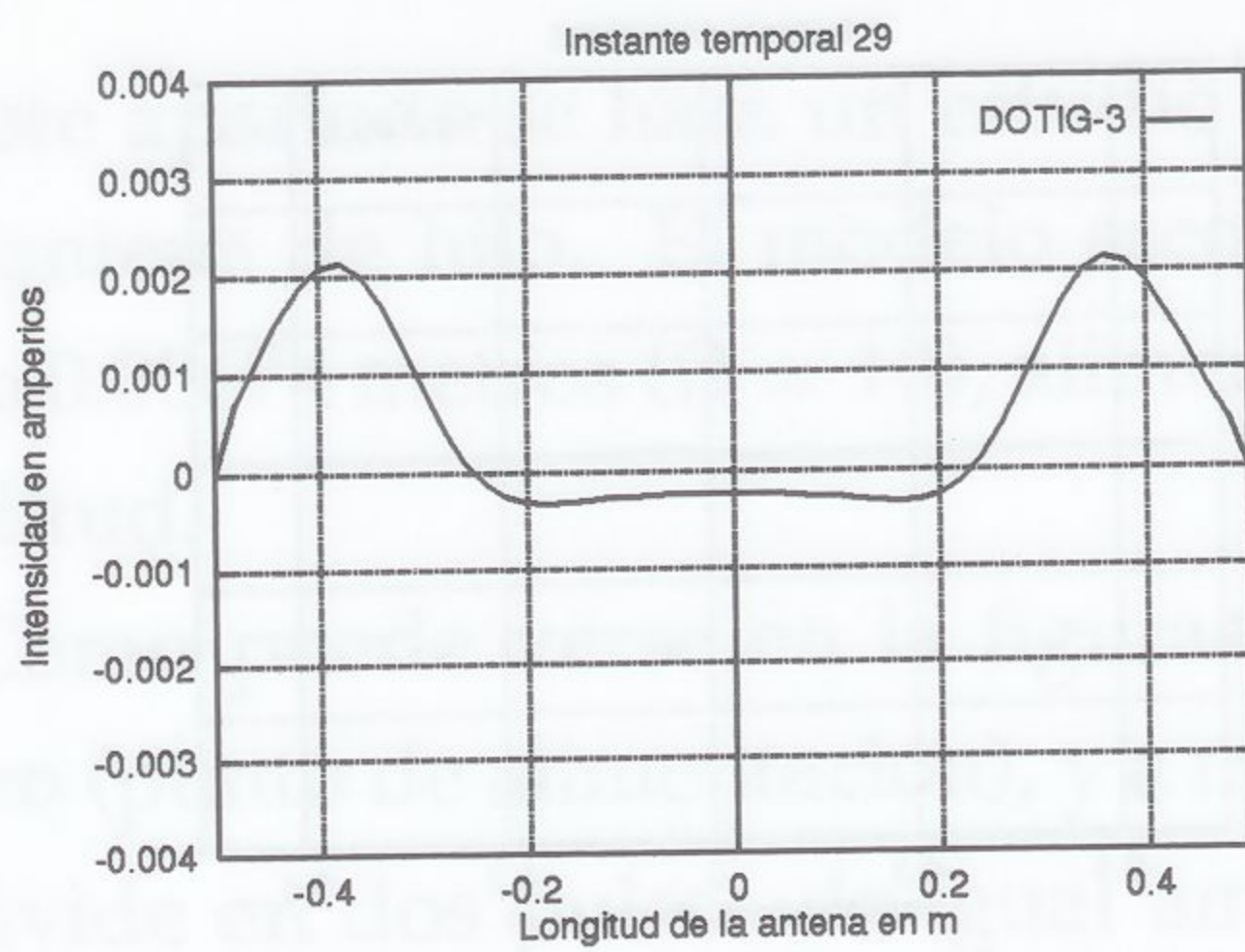


Figura 5.42: Intensidad en el instante 29 sobre una antena de hilo

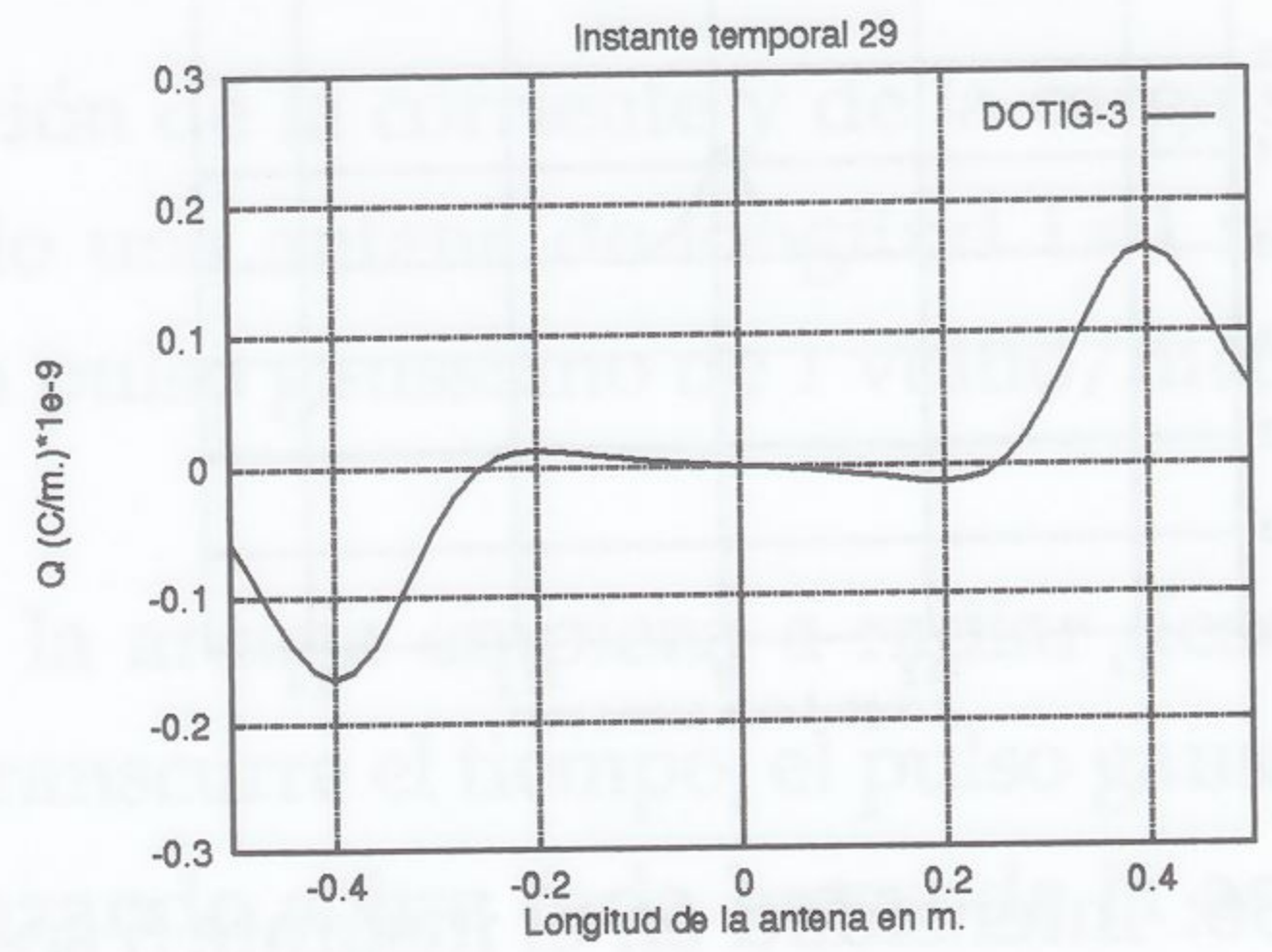


Figura 5.45: Carga por unidad de longitud en el instante 29 sobre una antena de hilo

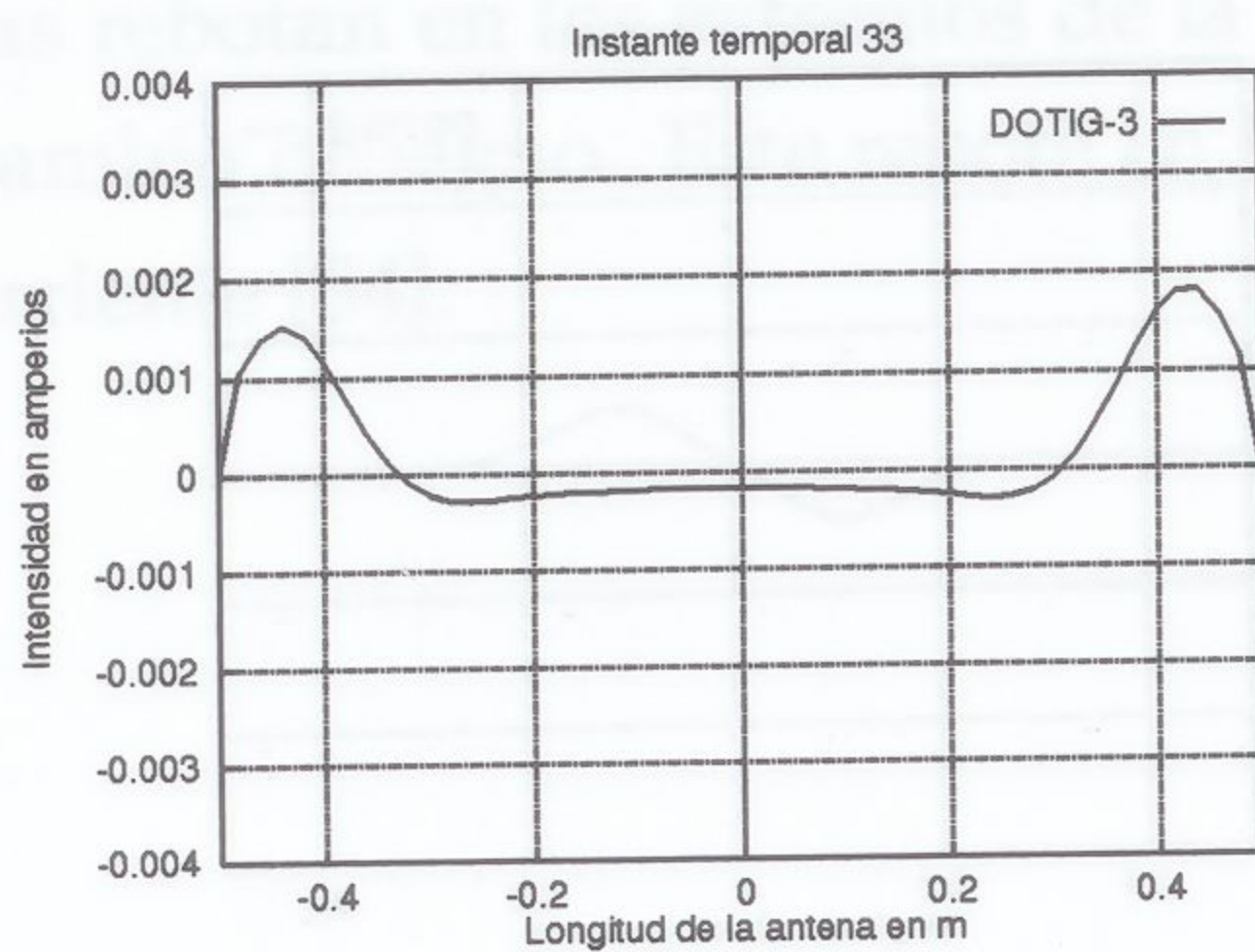


Figura 5.43: Intensidad en el instante 33 sobre una antena de hilo

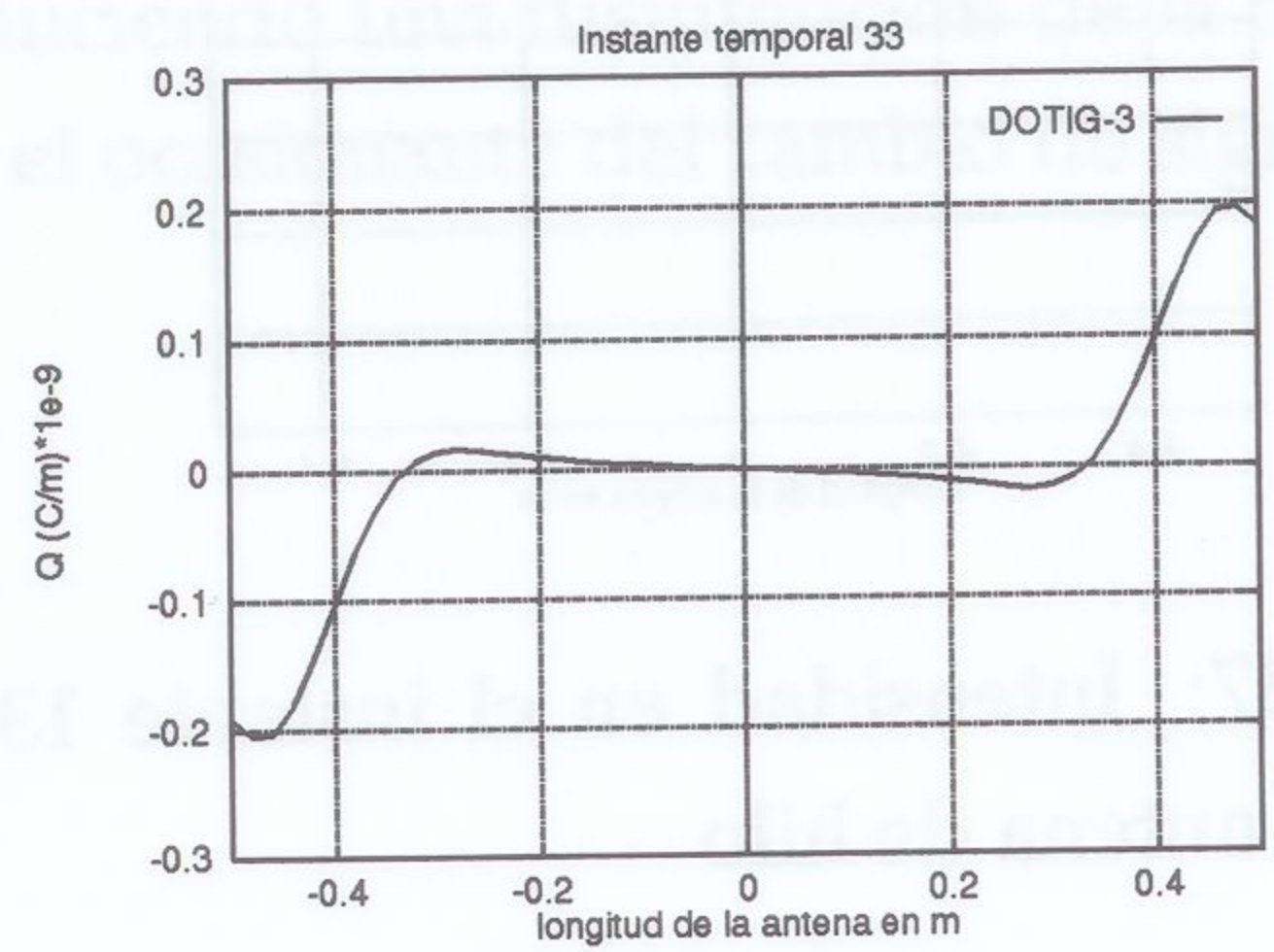


Figura 5.46: Carga por unidad de longitud en el instante 33 sobre una antena de hilo

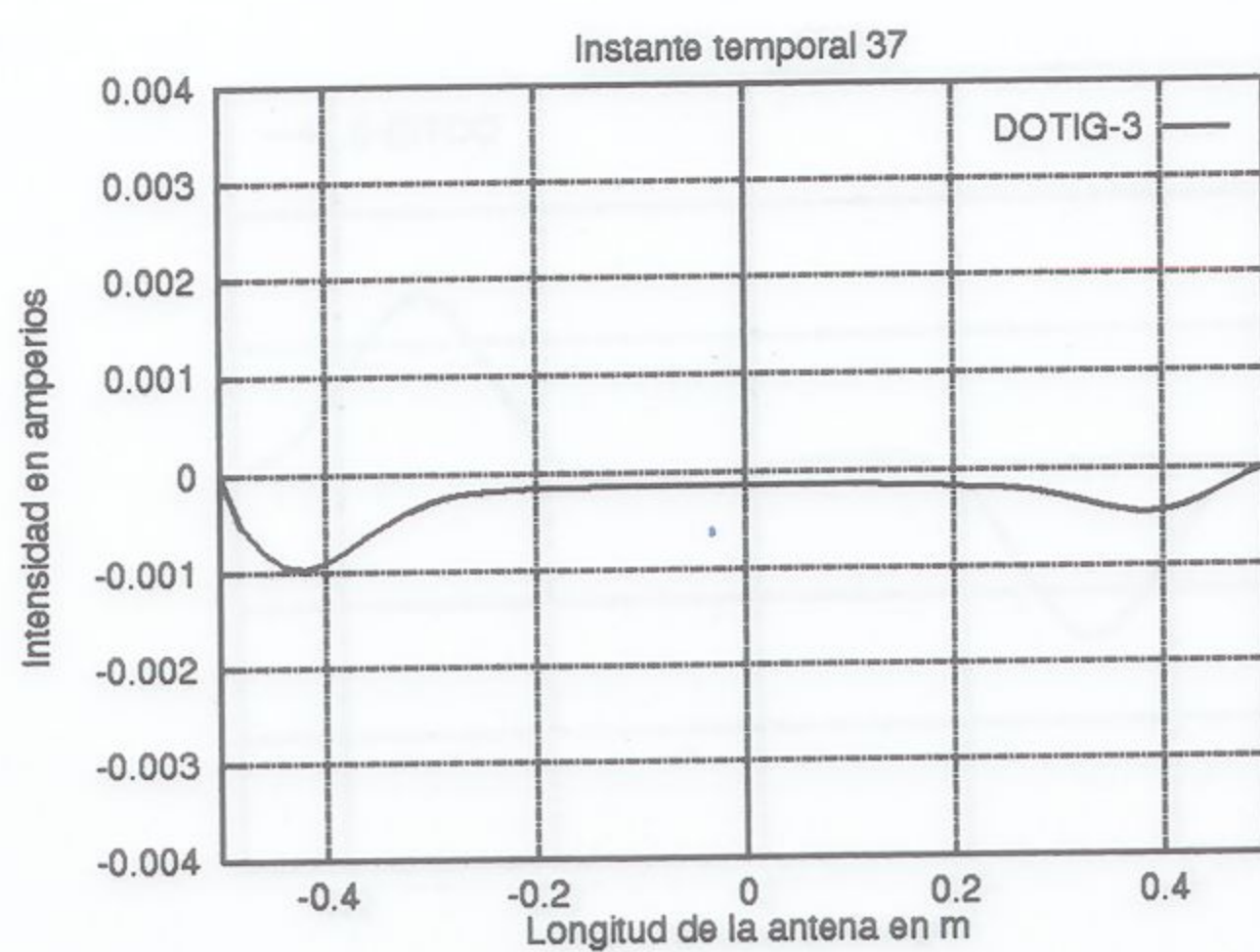


Figura 5.44: Intensidad en el instante 37 sobre una antena de hilo

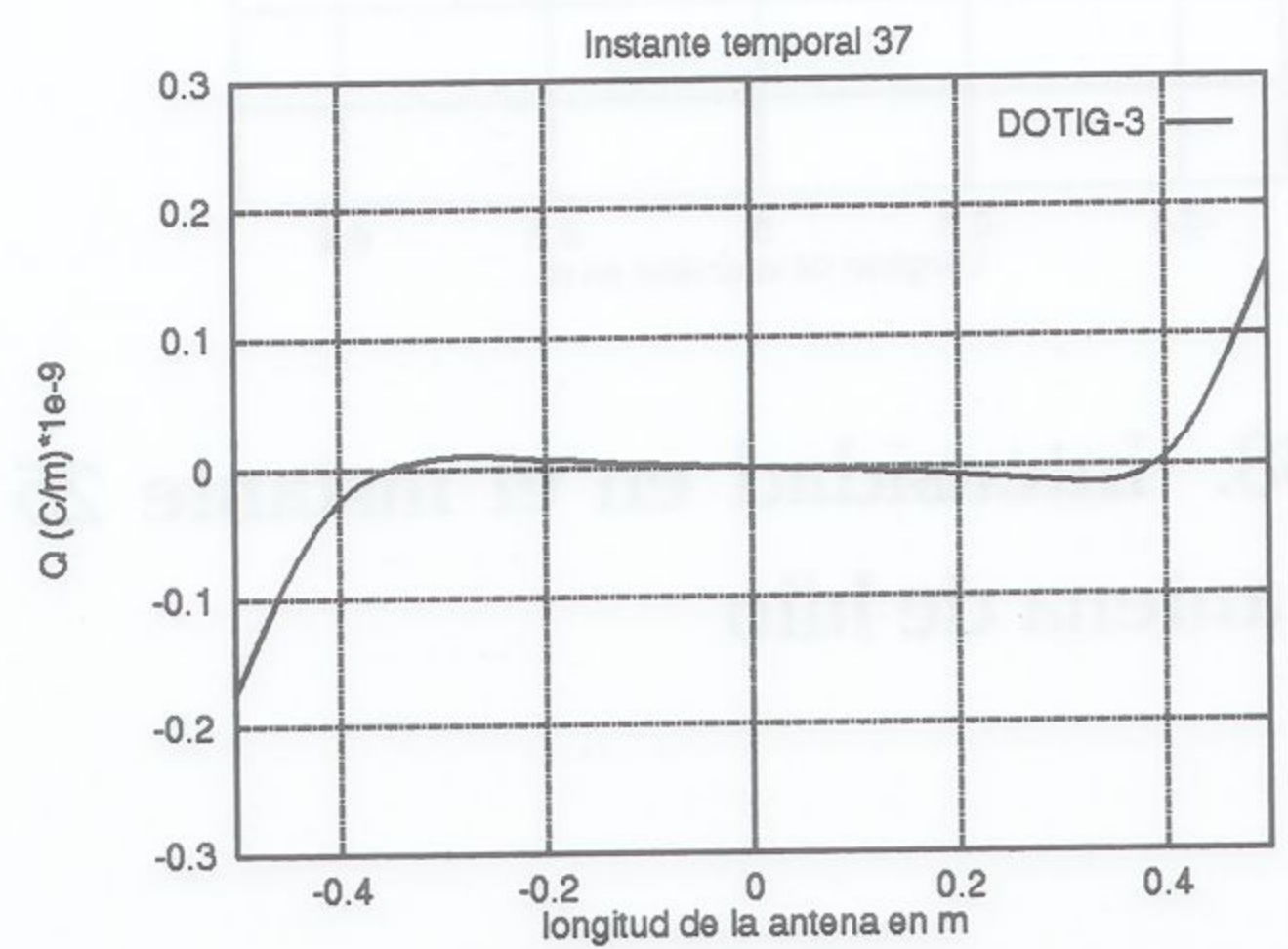


Figura 5.47: Carga por unidad de longitud en el instante 37 sobre una antena de hilo

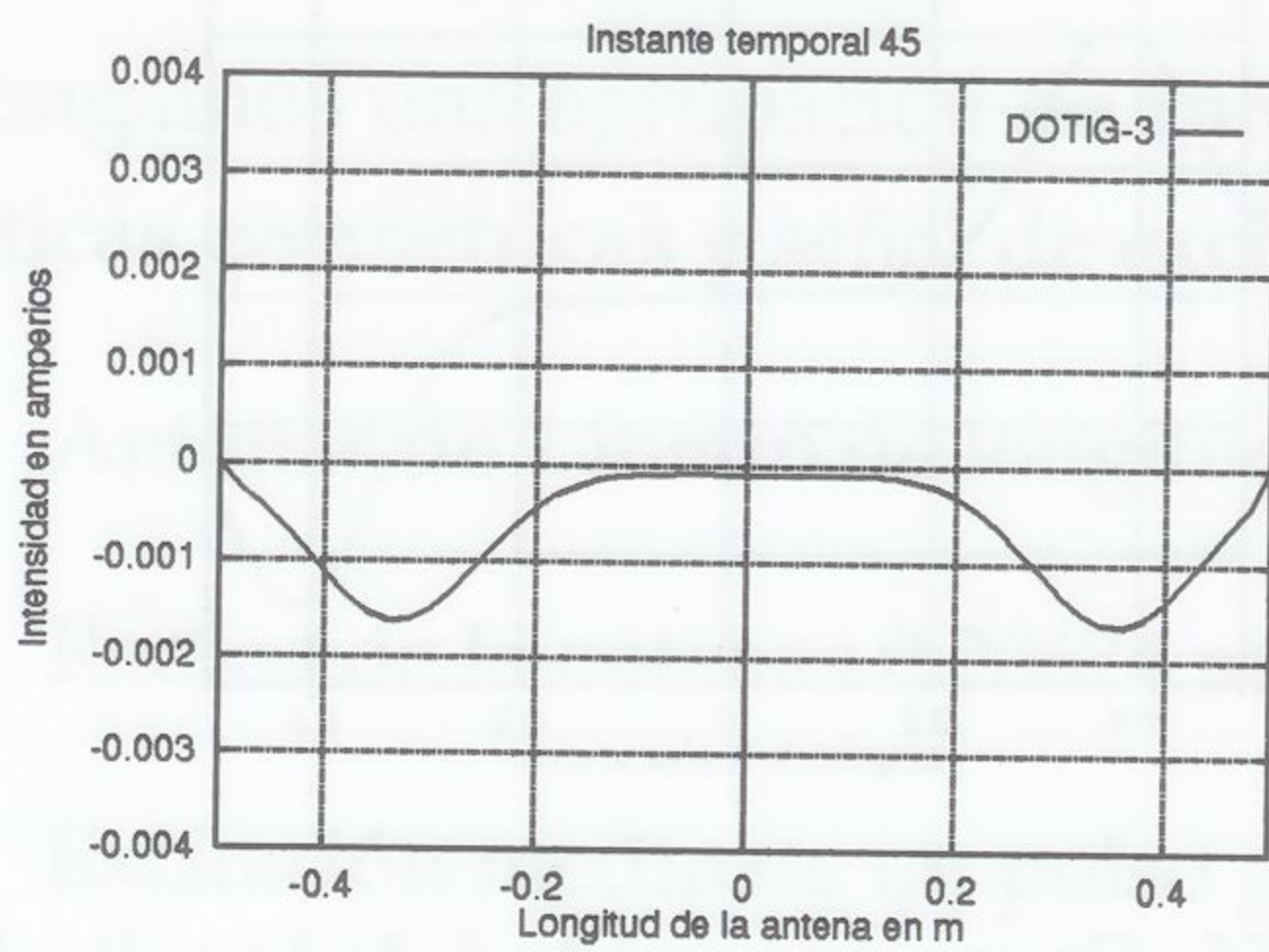


Figura 5.48: Intensidad en el instante 45 sobre una antena de hilo

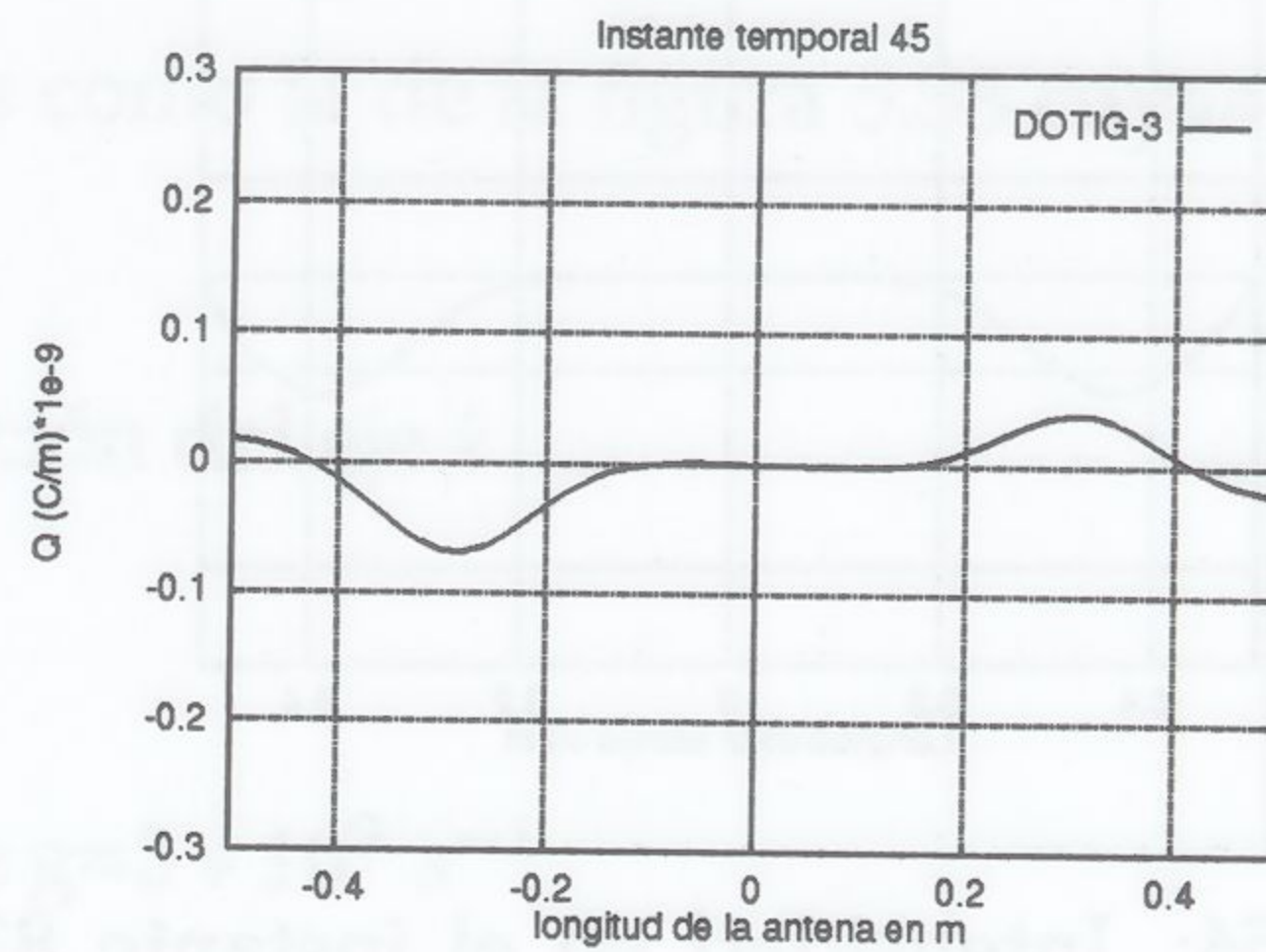


Figura 5.51: Carga por unidad de longitud en el instante 45 sobre una antena de hilo

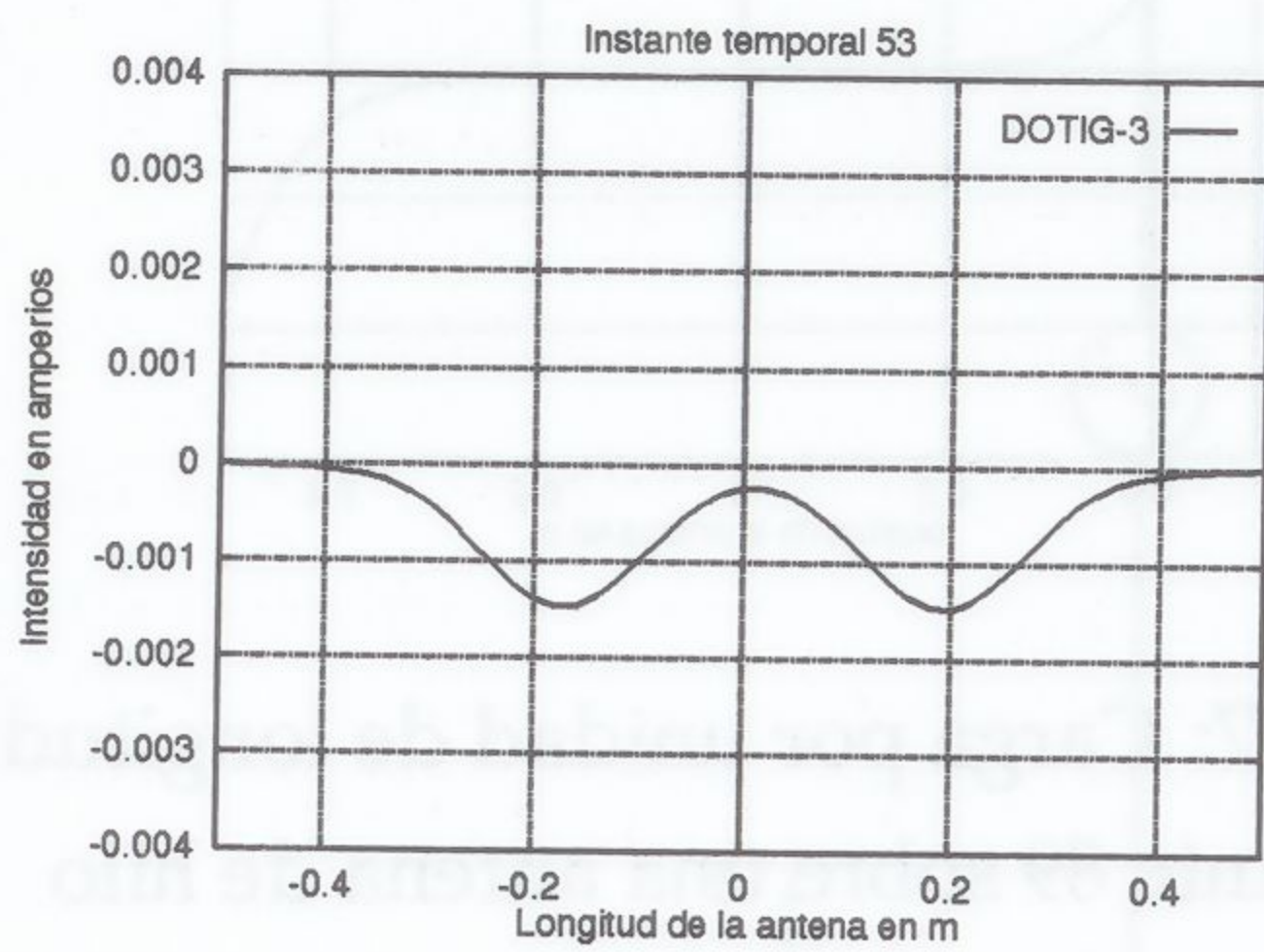


Figura 5.49: Intensidad en el instante 53 sobre una antena de hilo

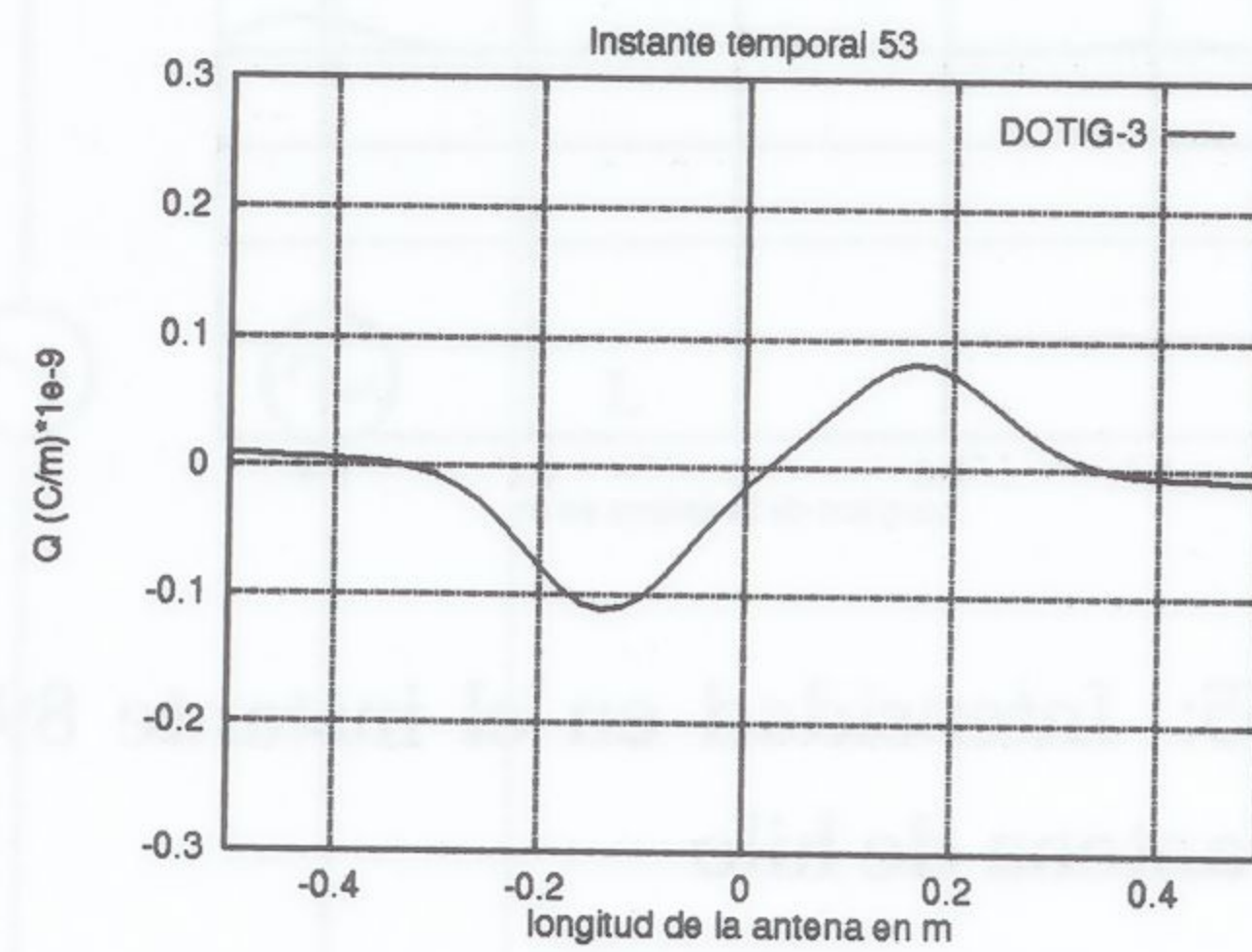


Figura 5.52: Carga por unidad de longitud en el instante 53 sobre una antena de hilo

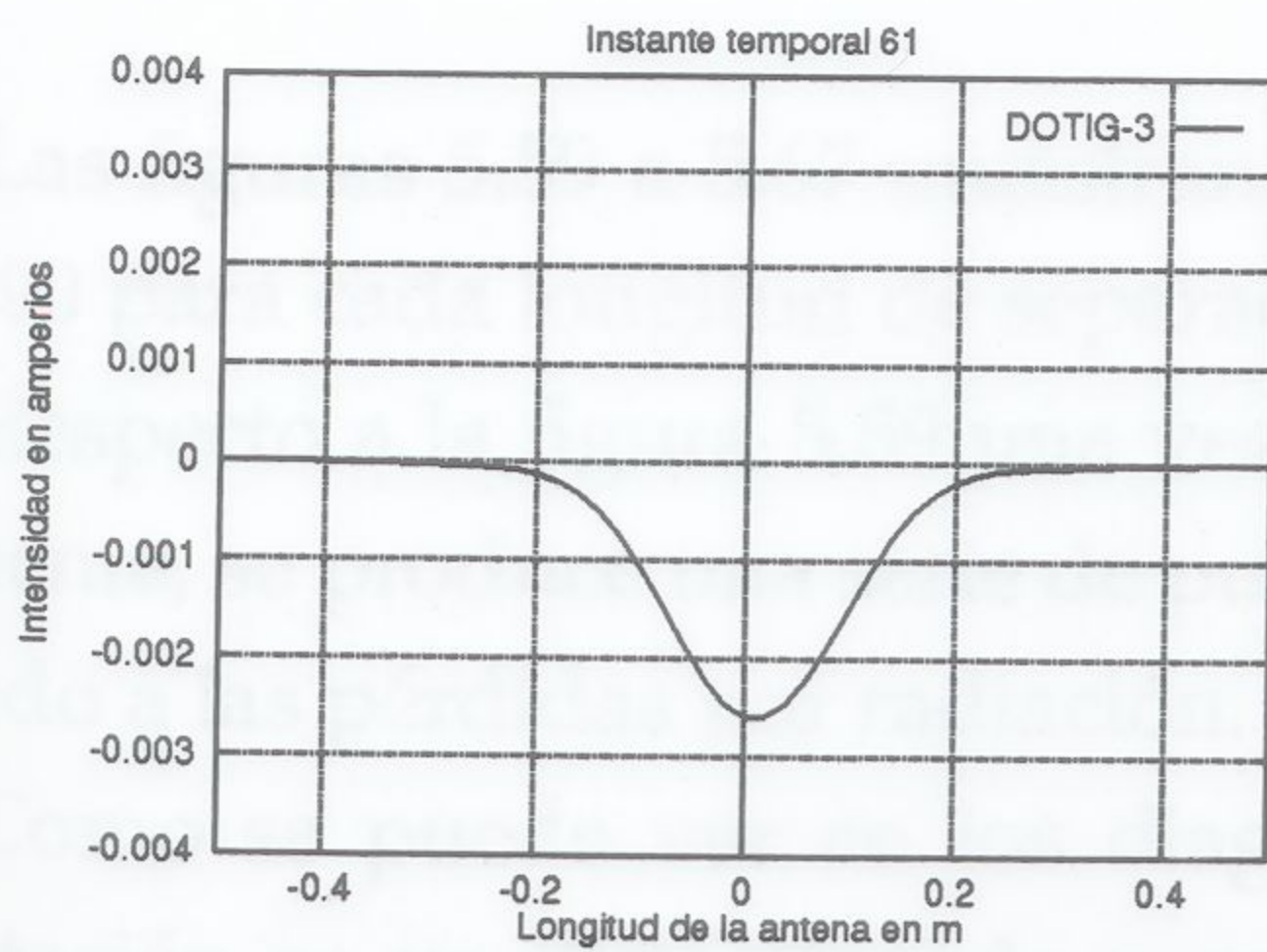


Figura 5.50: Intensidad en el instante 61 sobre una antena de hilo

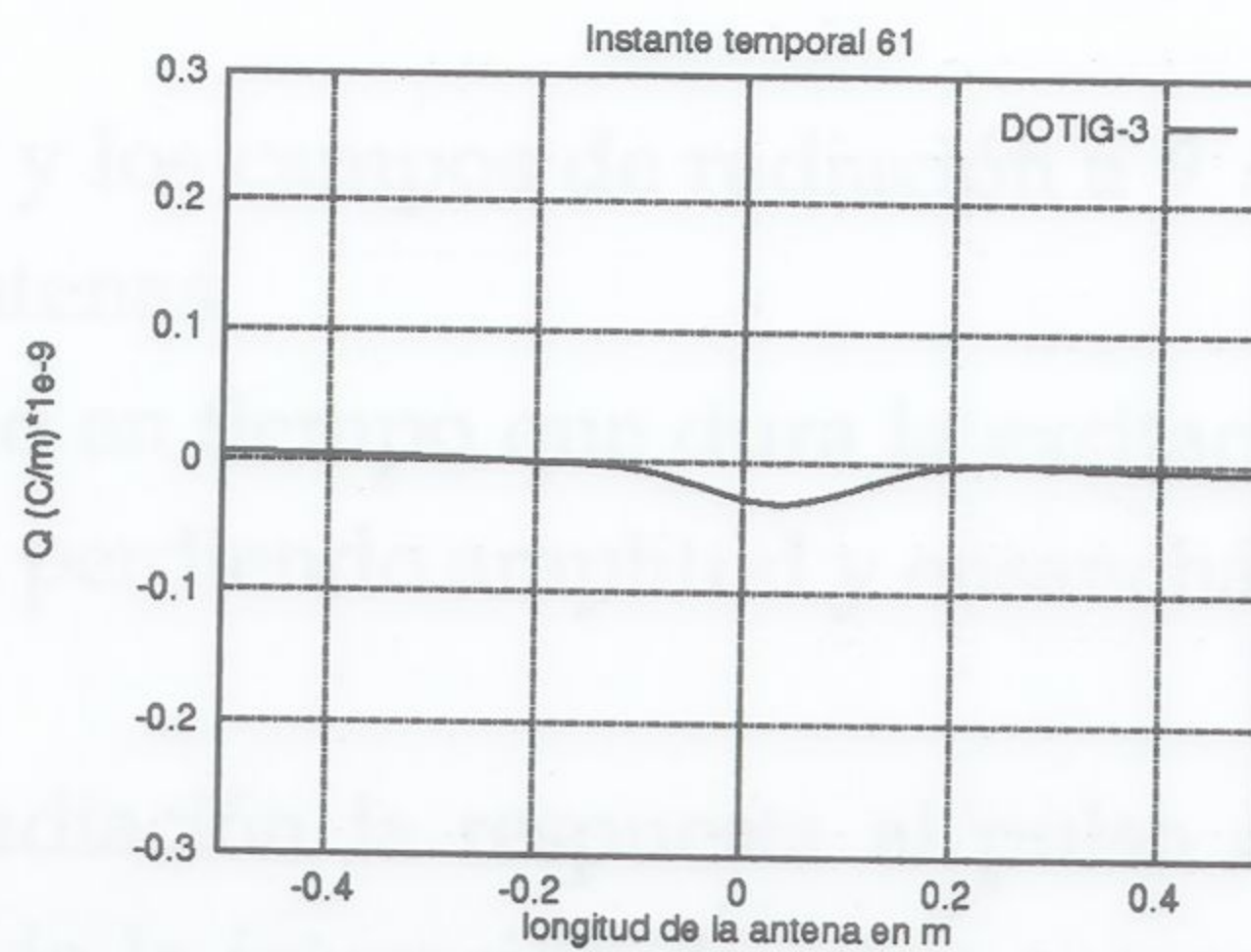


Figura 5.53: Carga por unidad de longitud en el instante 61 sobre una antena de hilo

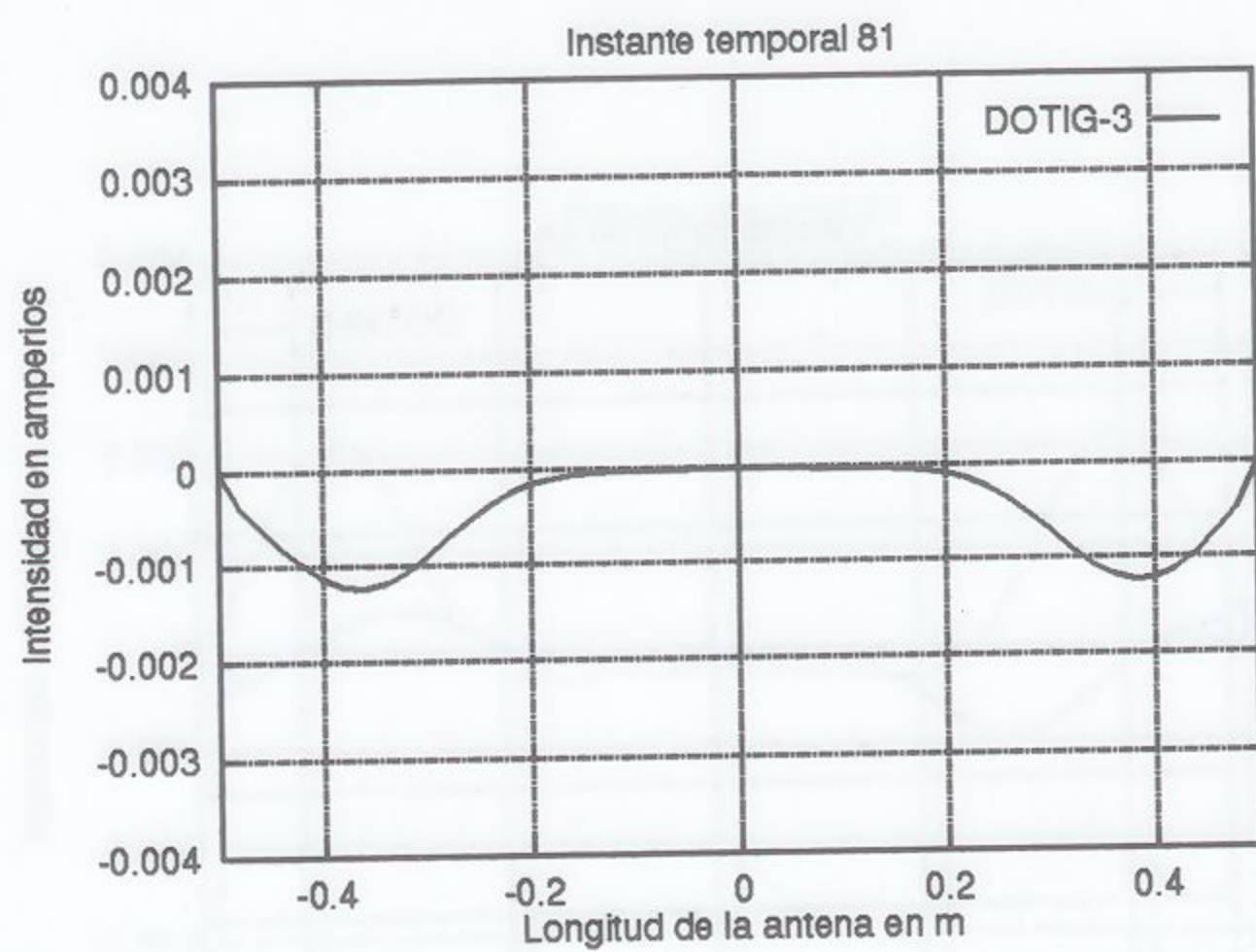


Figura 5.54: Intensidad en el instante 81 sobre una antena de hilo

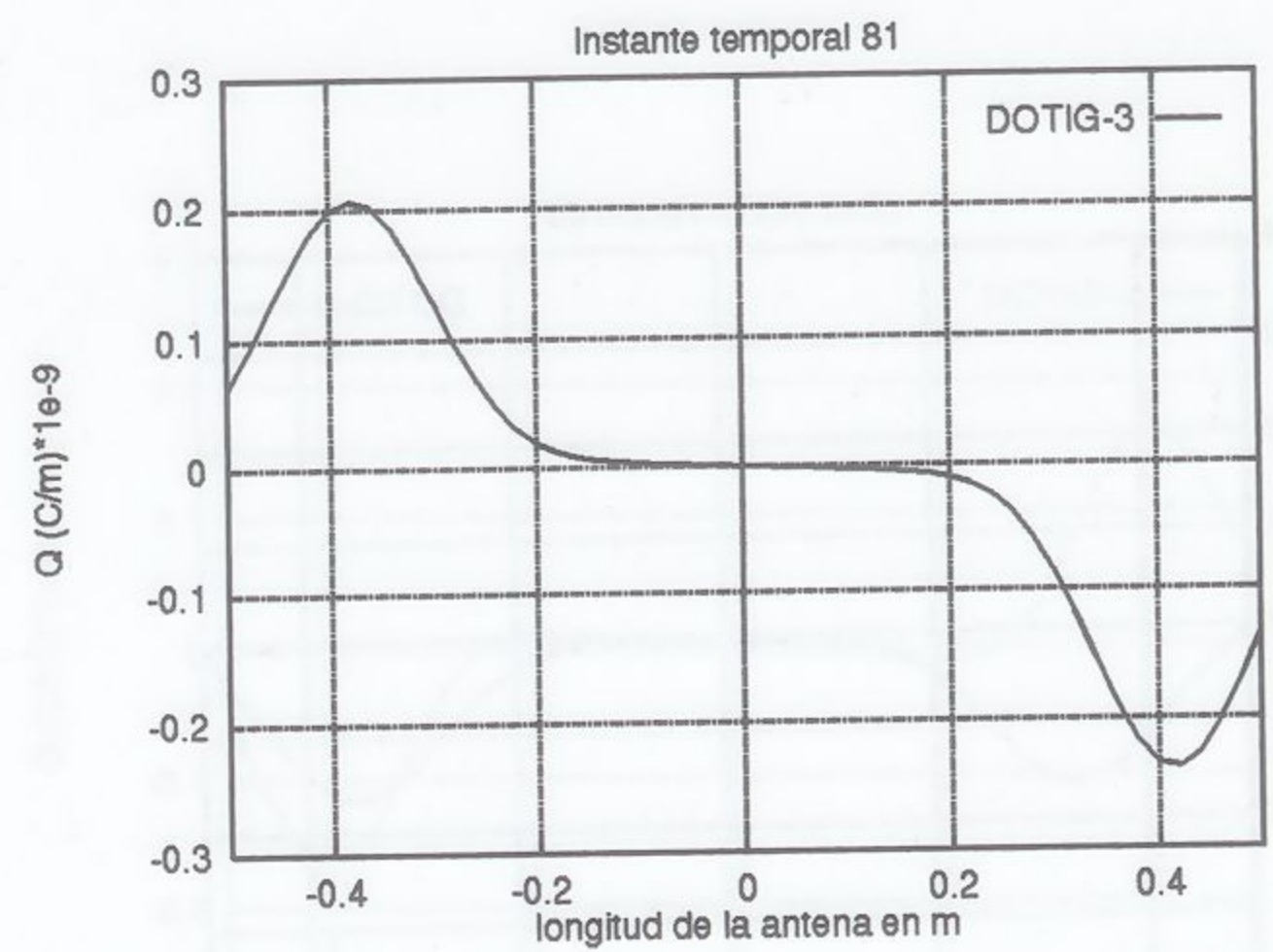


Figura 5.56: Carga por unidad de longitud en el instante 81 sobre una antena de hilo

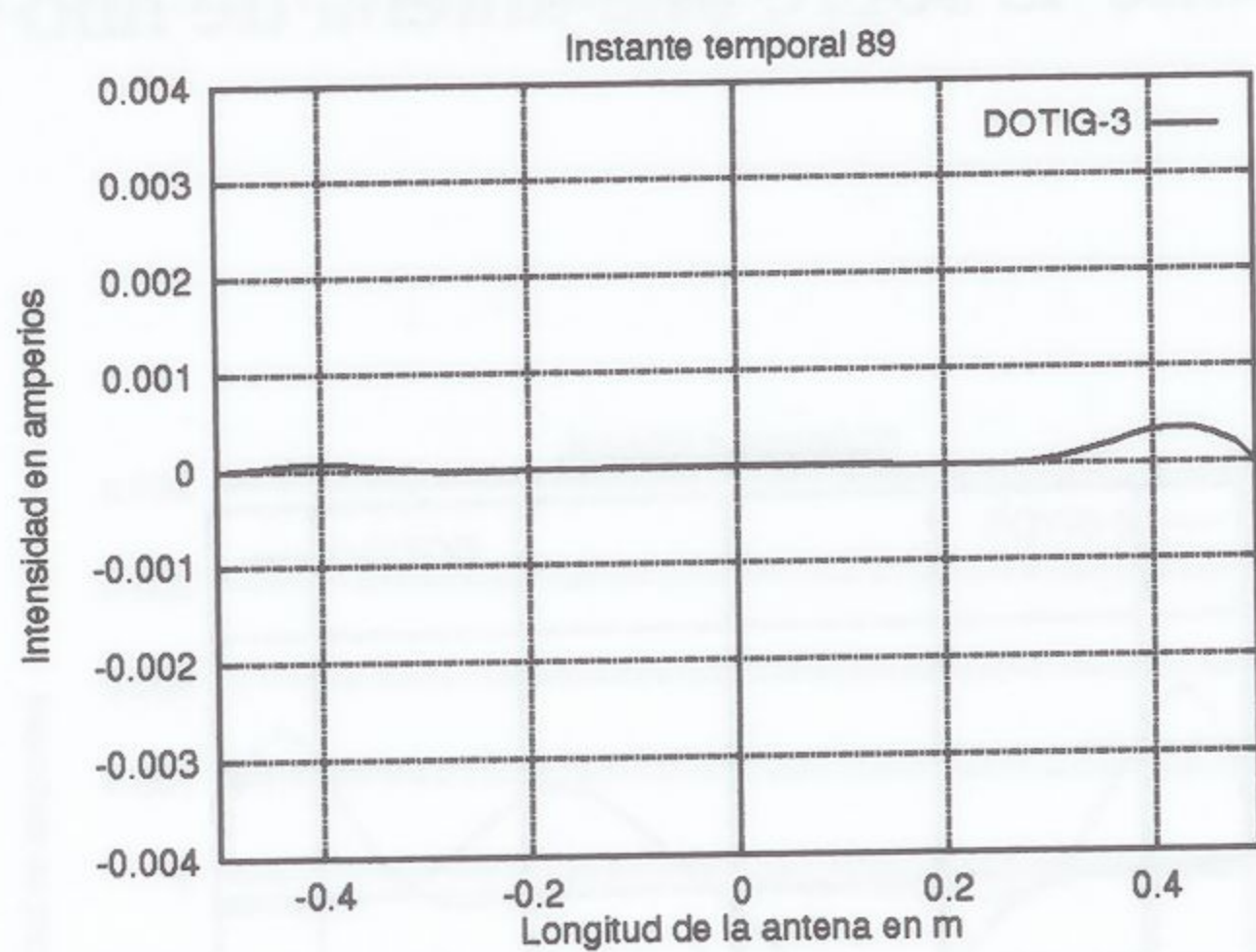


Figura 5.55: Intensidad en el instante 89 sobre una antena de hilo

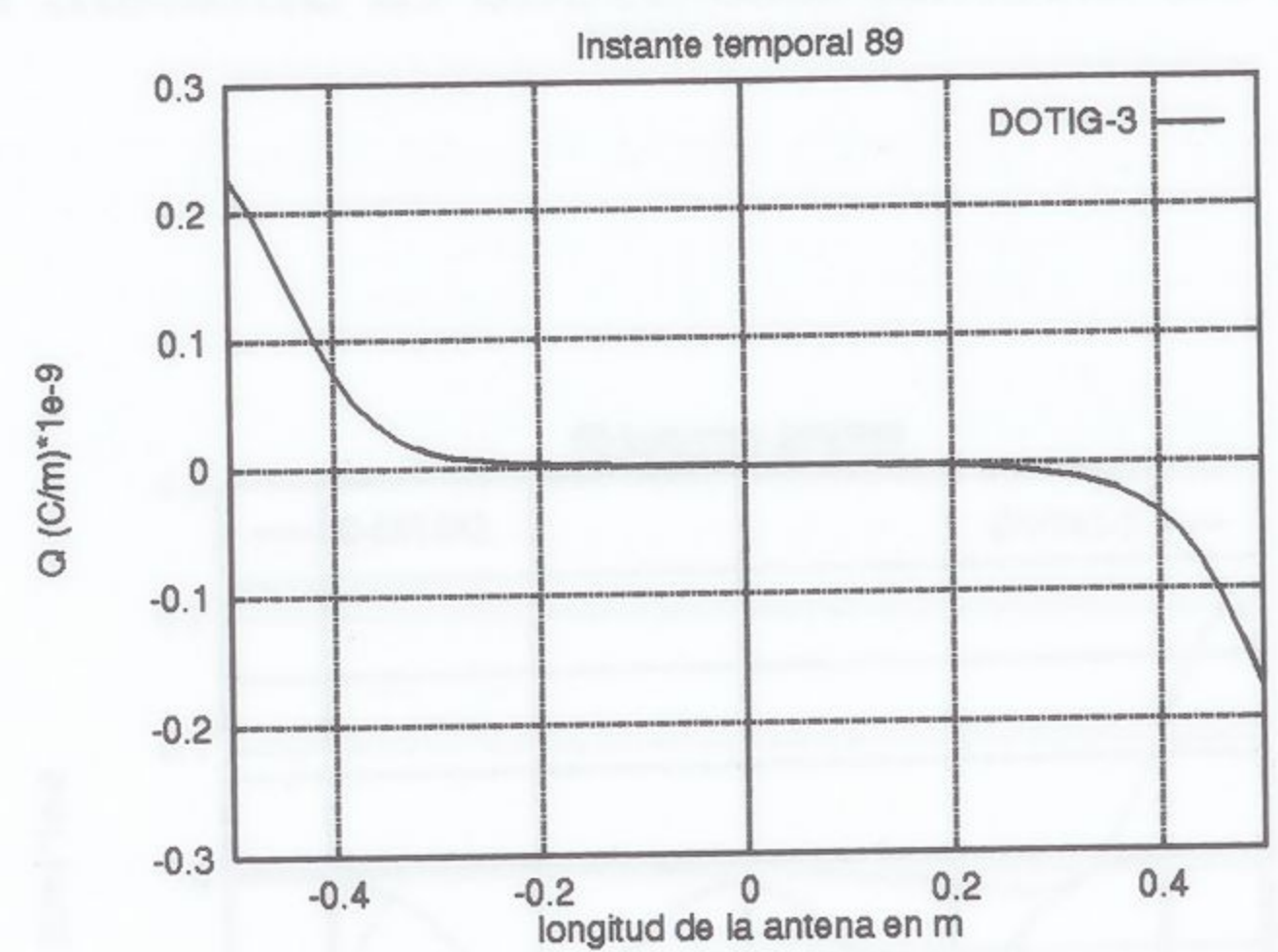


Figura 5.57: Carga por unidad de longitud en el instante 89 sobre una antena de hilo

5.1.4 Agrupaciones de antenas de hilo

Supongamos una agrupación de antenas lineales como la de la figura 5.58 cuyas características geométricas y señal de excitación son:

1. Antenas de 1 metro de longitud en la dirección del eje \hat{z}
2. Radios de la antenas 0.00674 metros.
3. Excitación mediante un pulso gaussiano de $g=3 * 10^9 \text{ s}^{-1}$
4. Distancia entre antenas $d=0.125$ metros hasta $d=1$ metros.

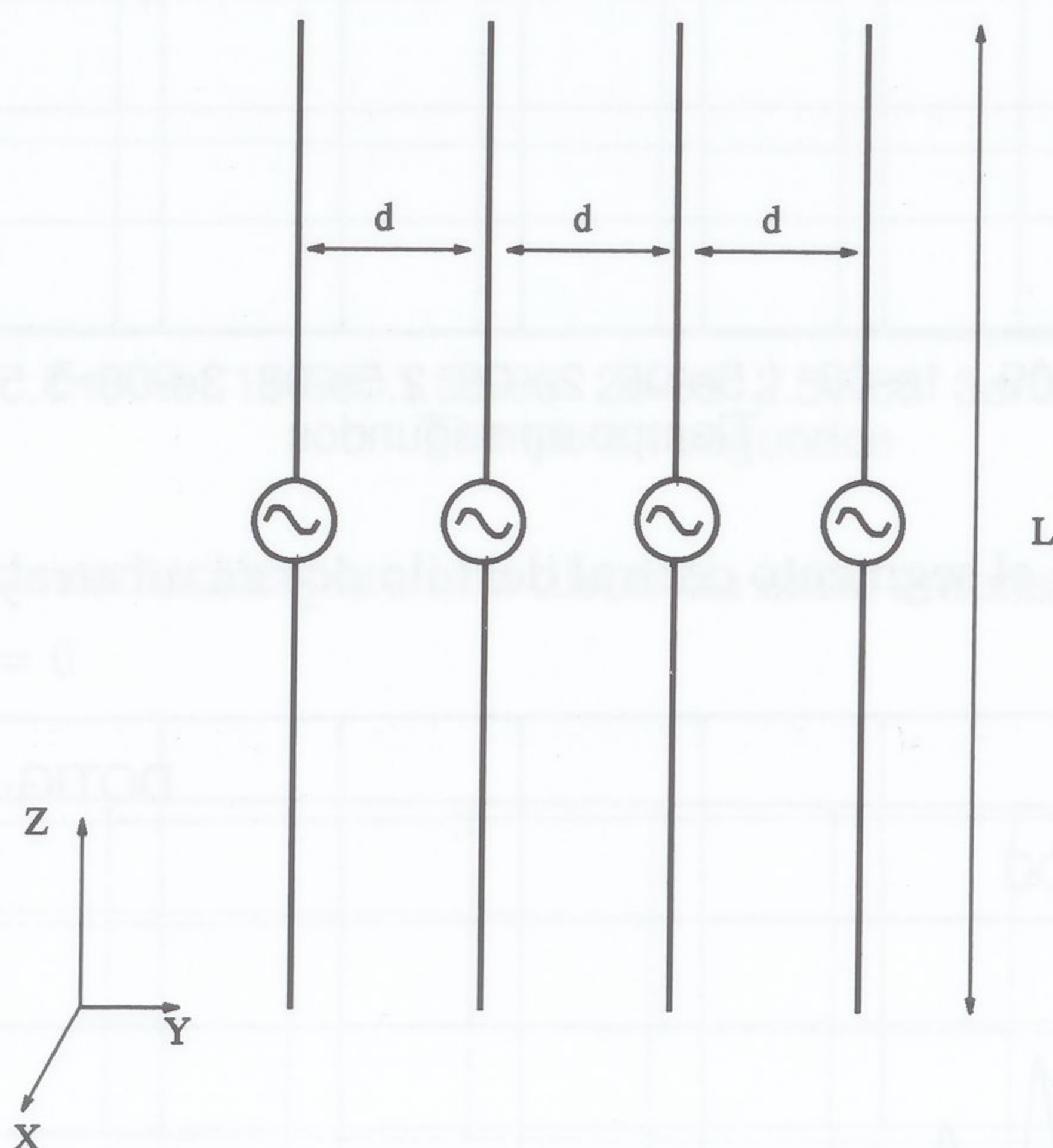


Figura 5.58: Agrupación de antenas lineales

Las figuras 5.59 a 5.67 muestran la corriente y los campos de radiación a $\theta = 45$ y $\theta = 90$ para cada longitud de separación entre antenas.

Respecto a la figura 5.59 una vez transcurrido en tiempo que dura la excitación de la fuente, se produce una serie de pulsos que van perdiendo amplitud y ensanchándose debido a las pérdidas por radiación.

Como se puede ver en los diagramas de radiación la respuesta al pulso de alimentación se ve distorsionado a consecuencia de la interacción de unas antenas con otras. Este efecto se contraresta a medida que aumentamos la separación entre antenas.

Para evitar dicha distorsión es aconsejable el uso de cargas no lineales en los brazos de la antena (figura 5.68 y 5.69).

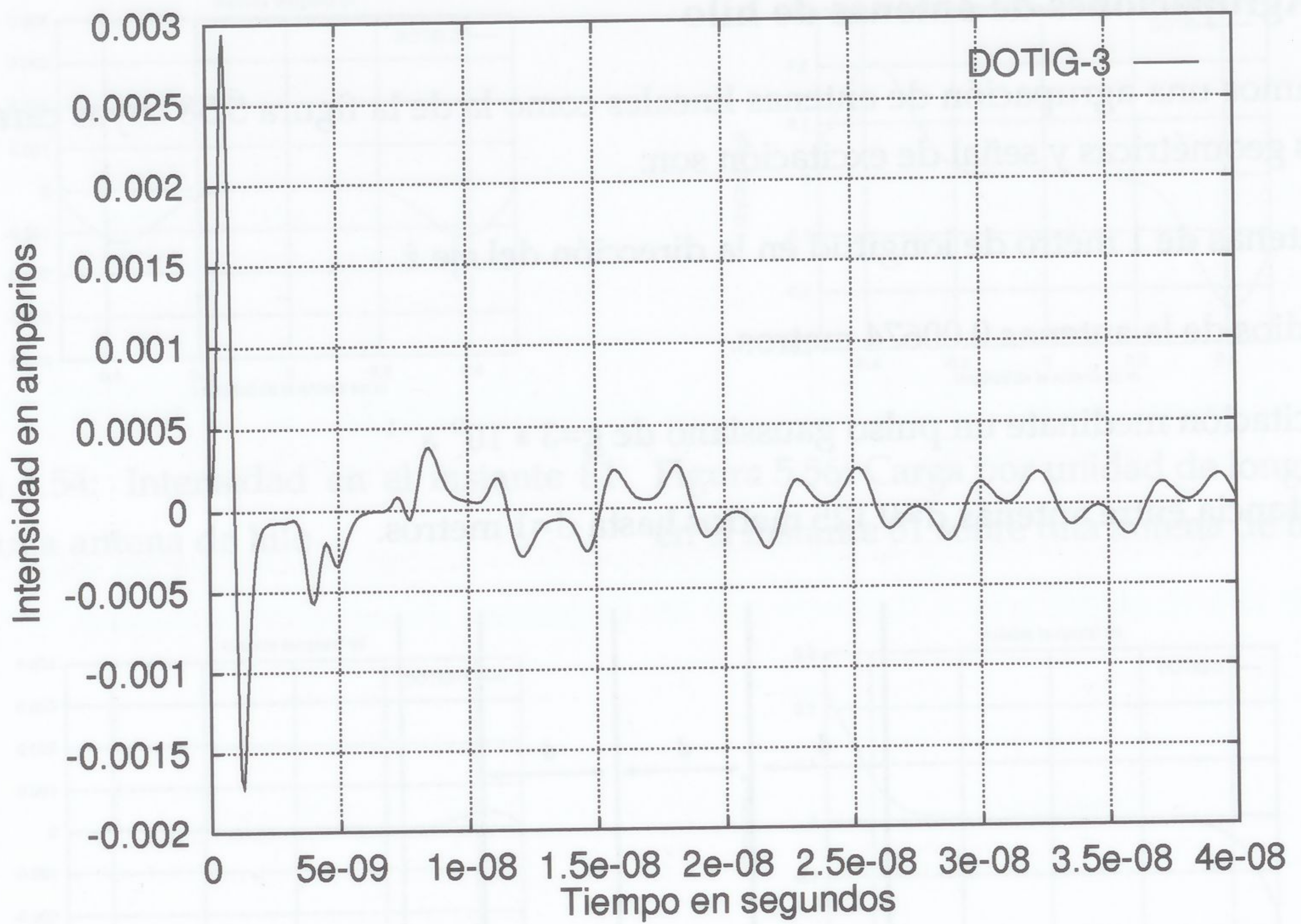


Figura 5.59: Intensidad en el segmento central del hilo dos en un array con $d=0.125$ m.

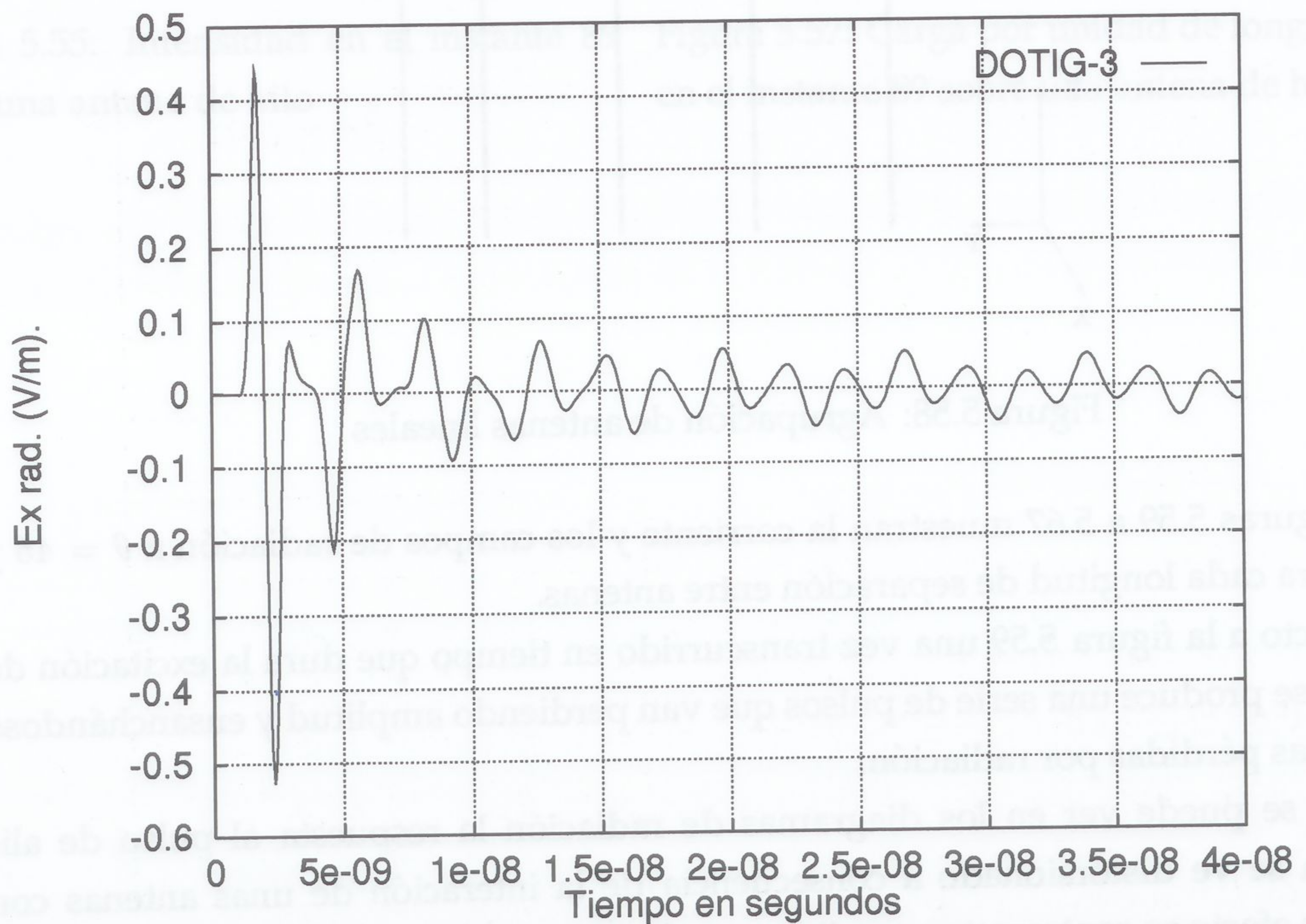


Figura 5.60: Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.125$ m. y una dirección $\theta = 45$ y $\varphi = 0$

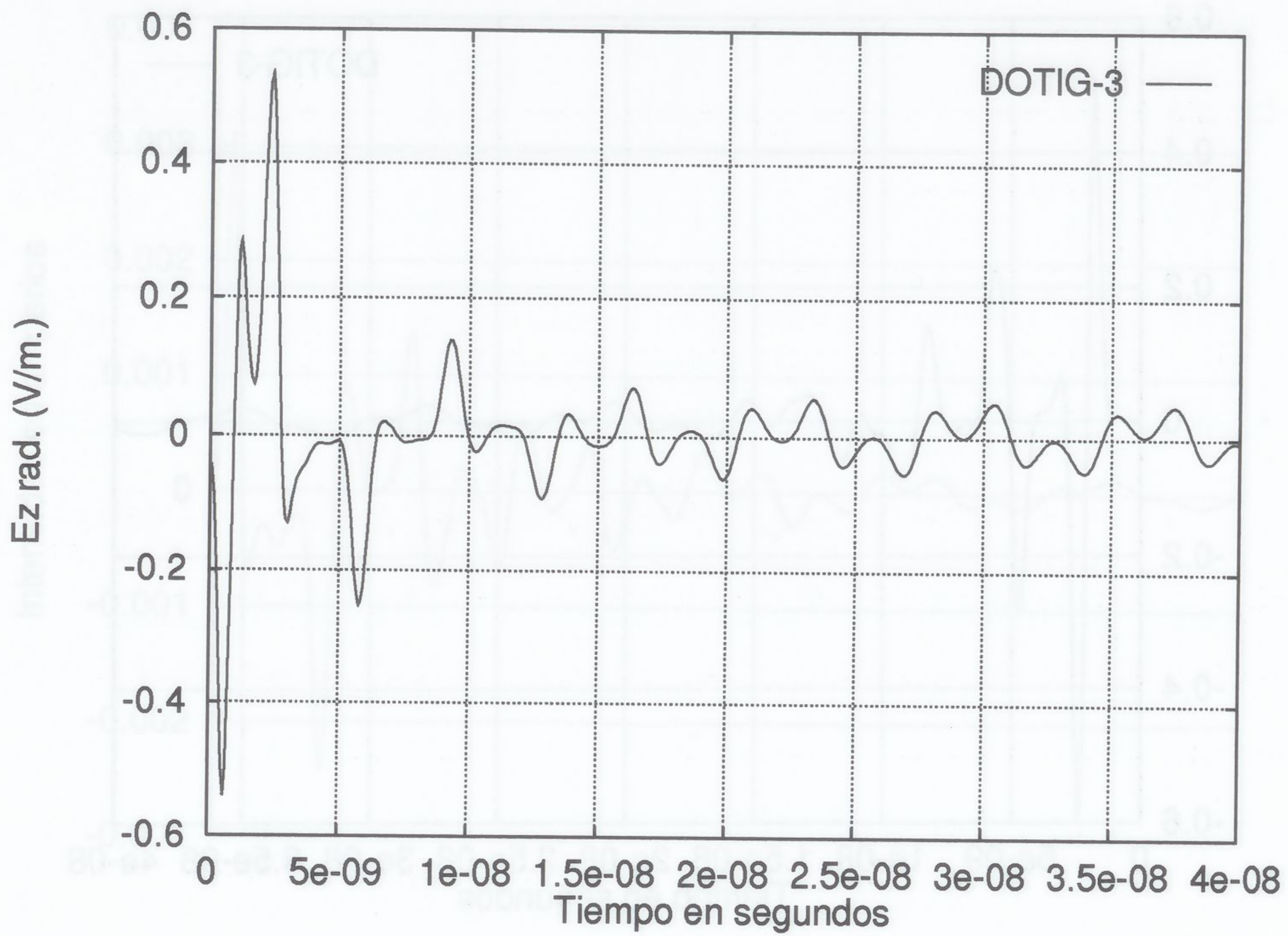


Figura 5.61: Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.125$ m. y una dirección $\theta = 90$ y $\varphi = 0$

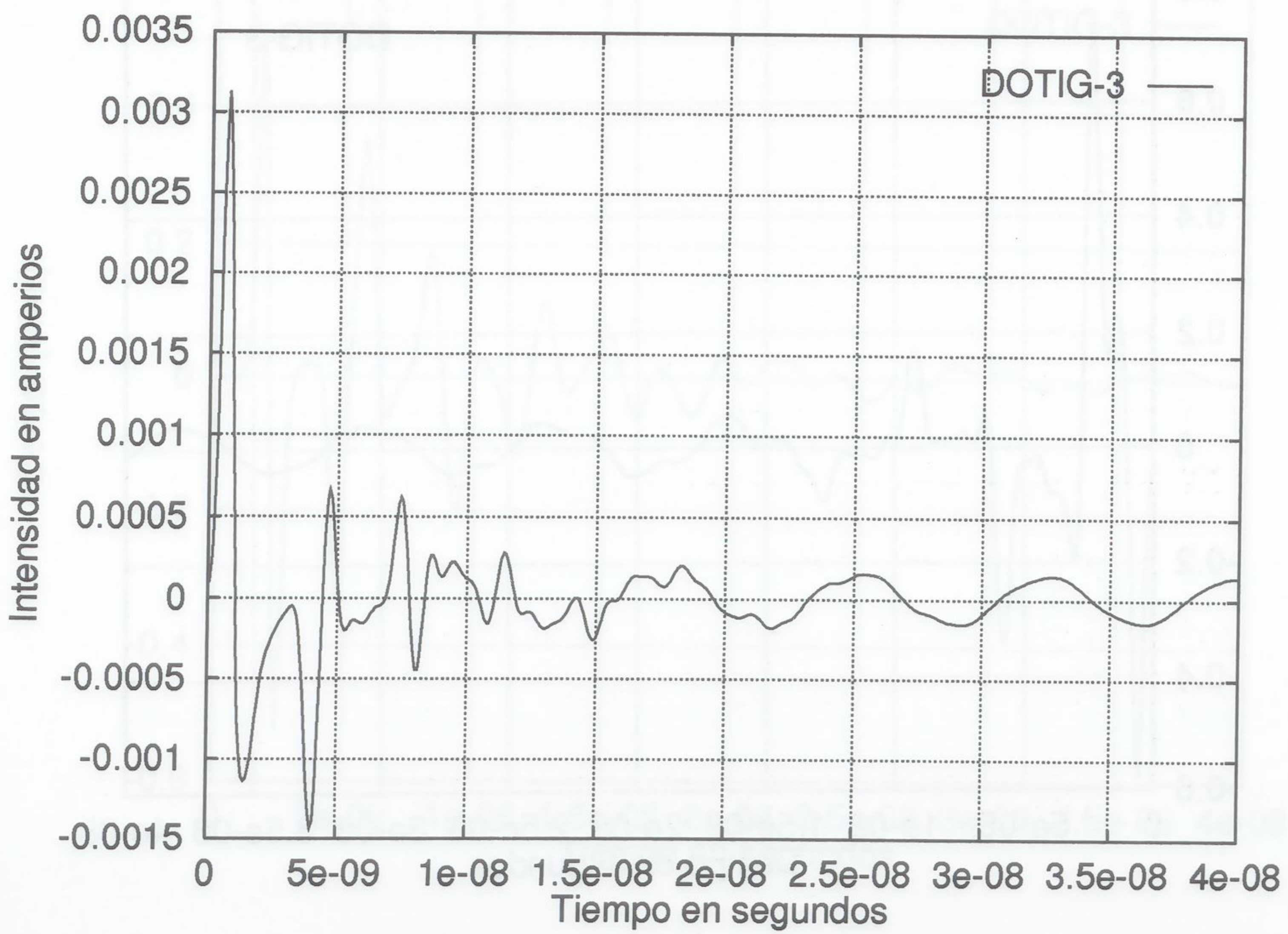


Figura 5.62: Intensidad en el segmento central del hilo dos en un array con $d=0.25$ m.

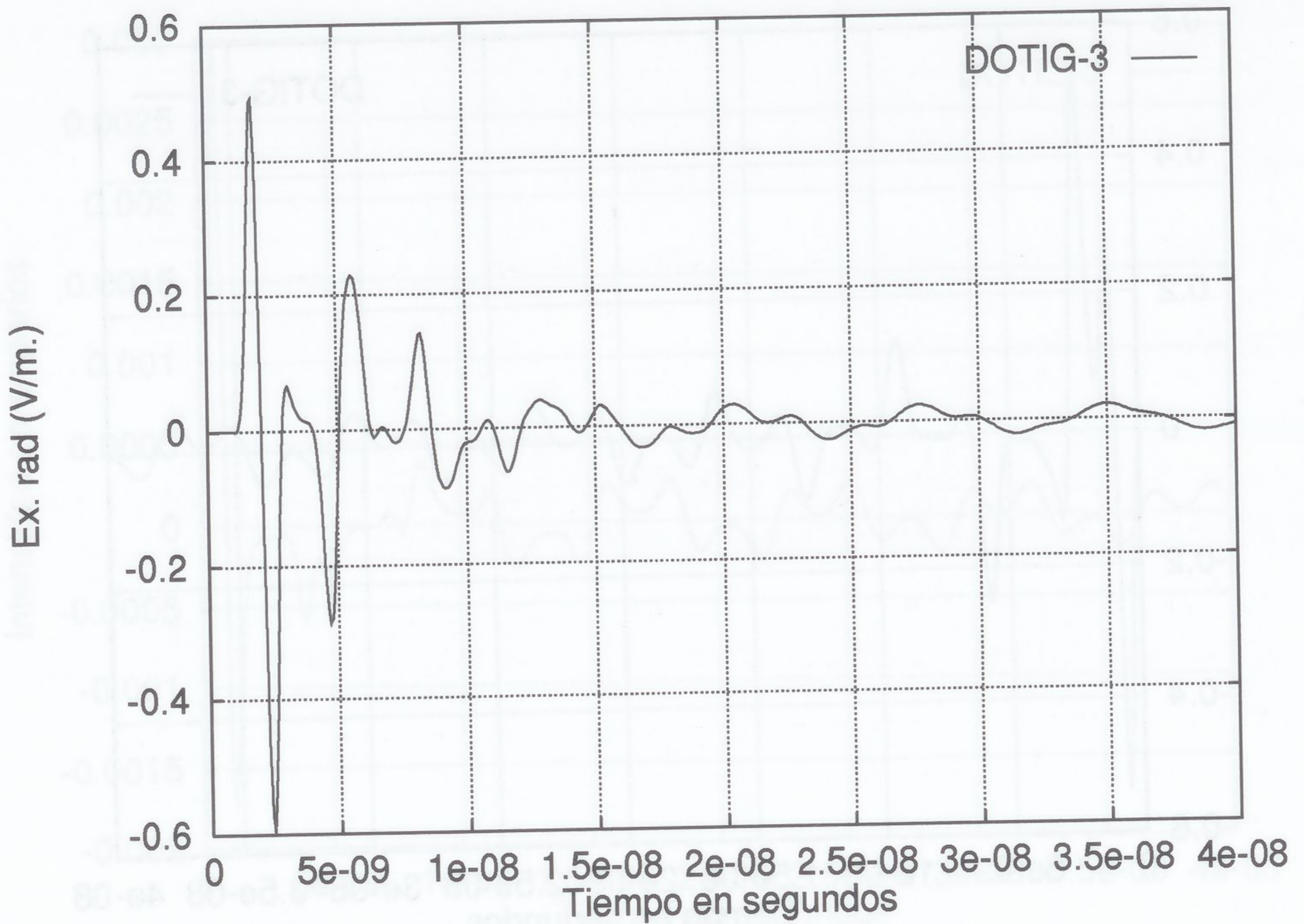


Figura 5.63: Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.25$ m. y una dirección $\theta = 45$ y $\varphi = 0$

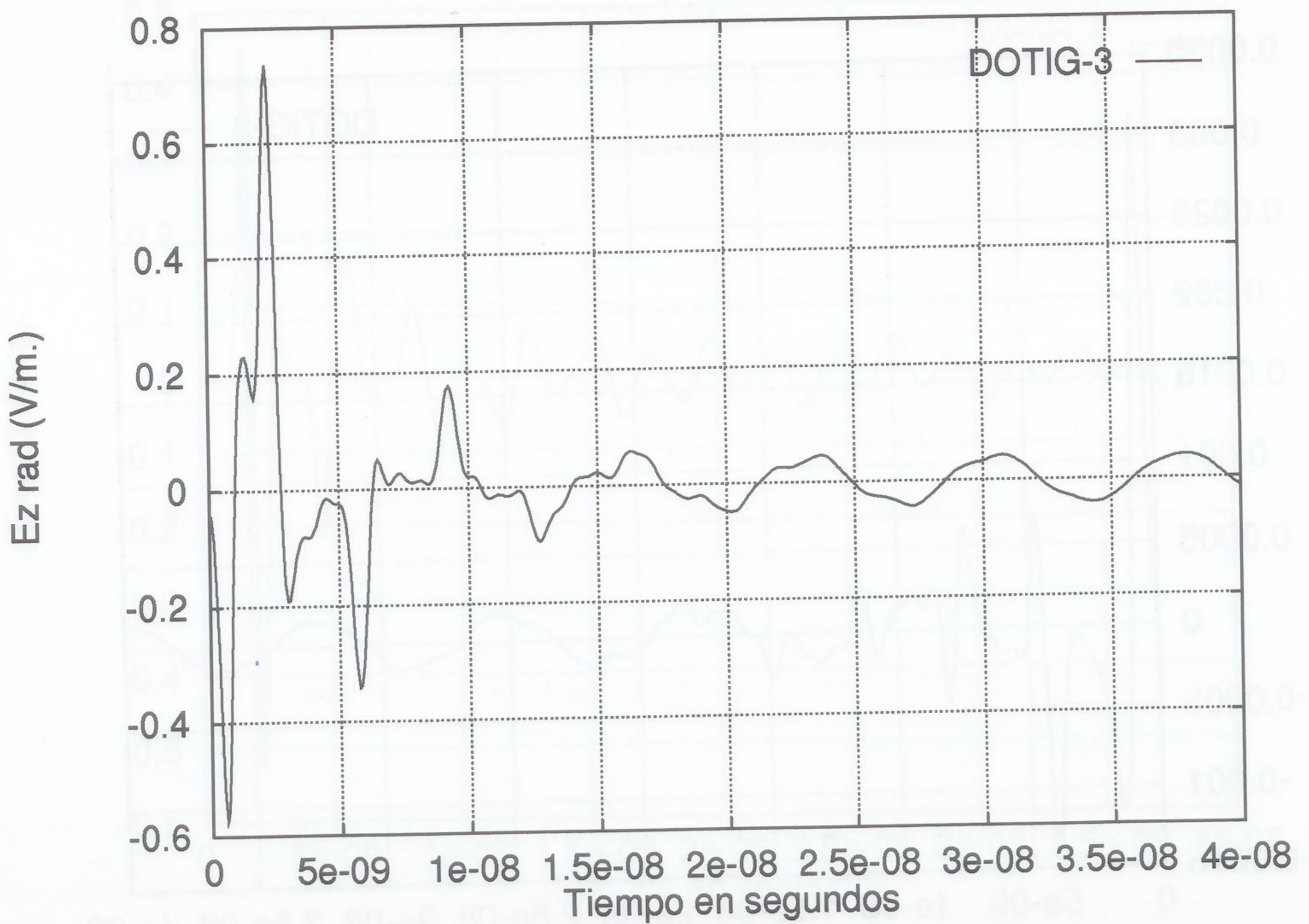


Figura 5.64: Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.25$ m. y una dirección $\theta = 90$ y $\varphi = 0$

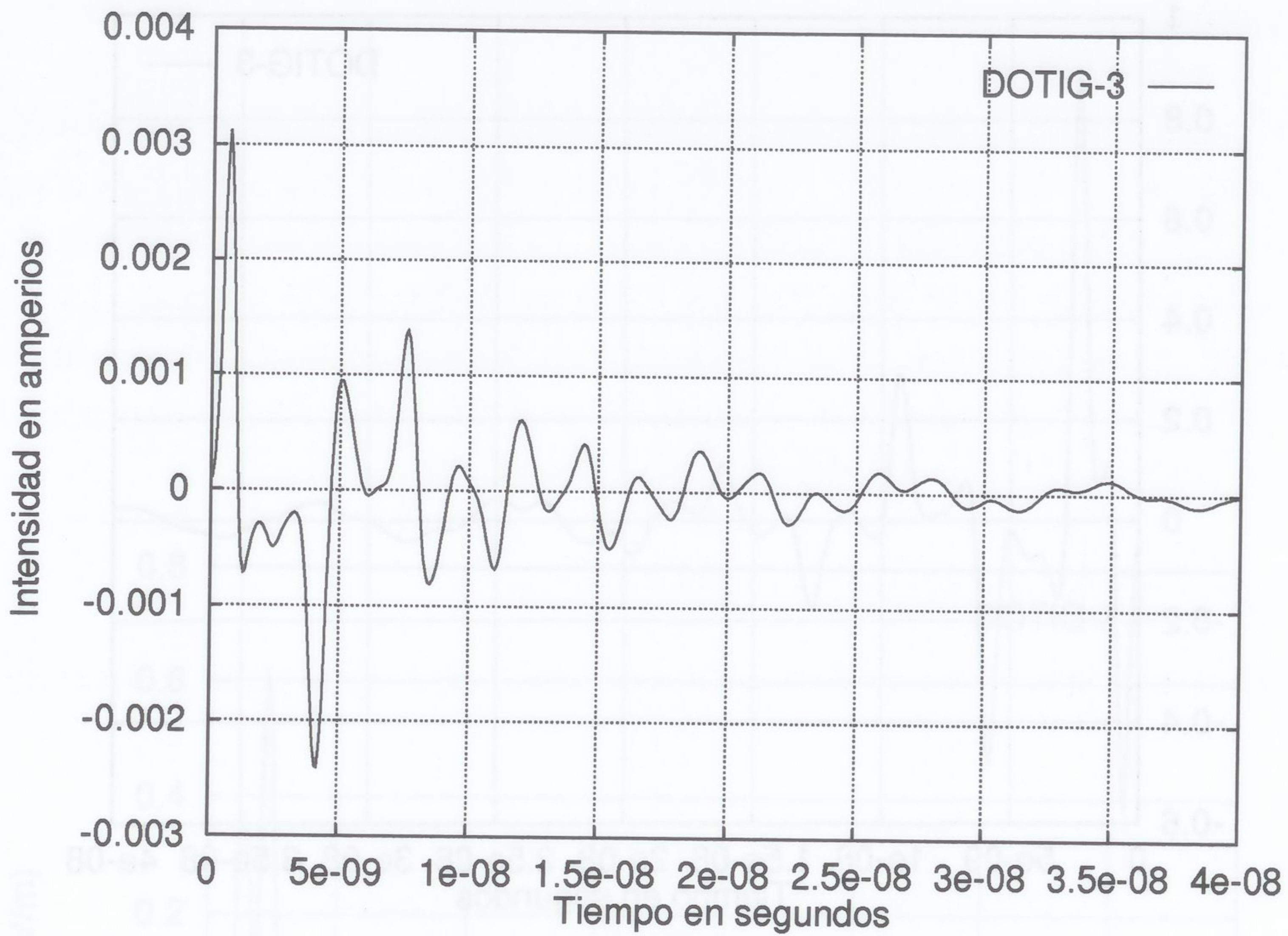


Figura 5.65: Intensidad en el segmento central del hilo dos en un array con $d=0.5$ m.

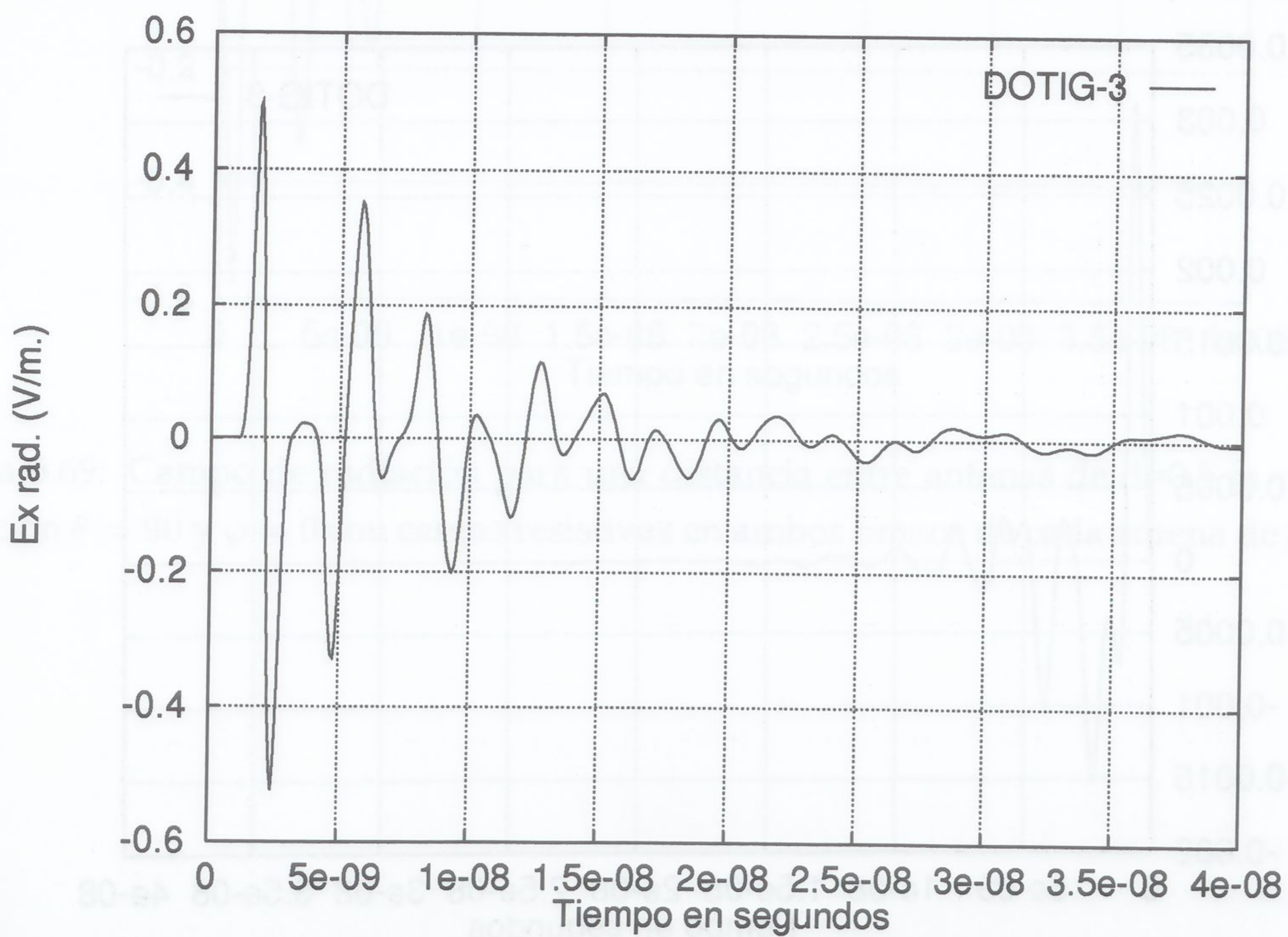


Figura 5.66: Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.5$ m. y una dirección $\theta = 45$ y $\varphi = 0$

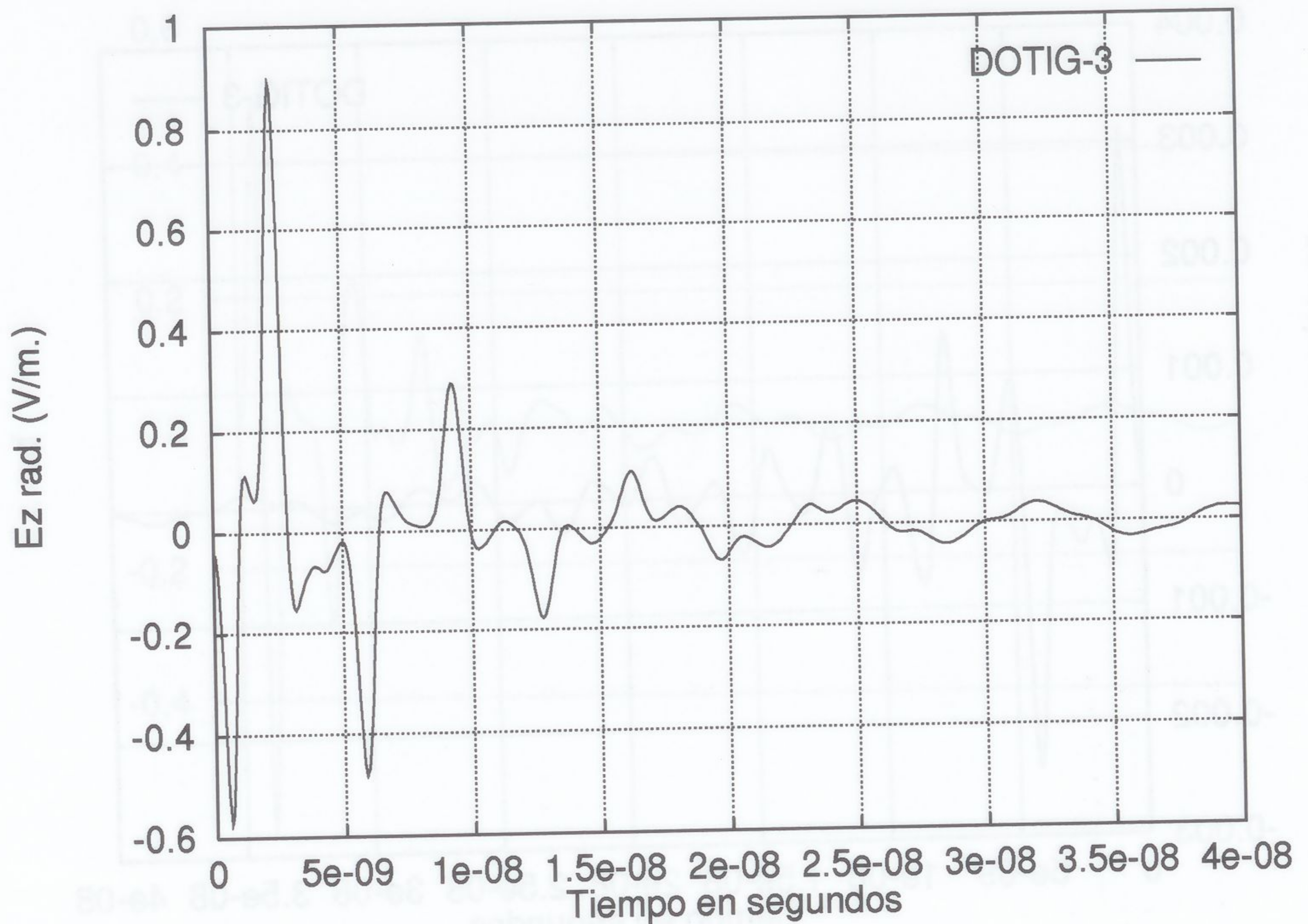


Figura 5.67: Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.5$ m. y una dirección $\theta = 90$ y $\varphi = 0$

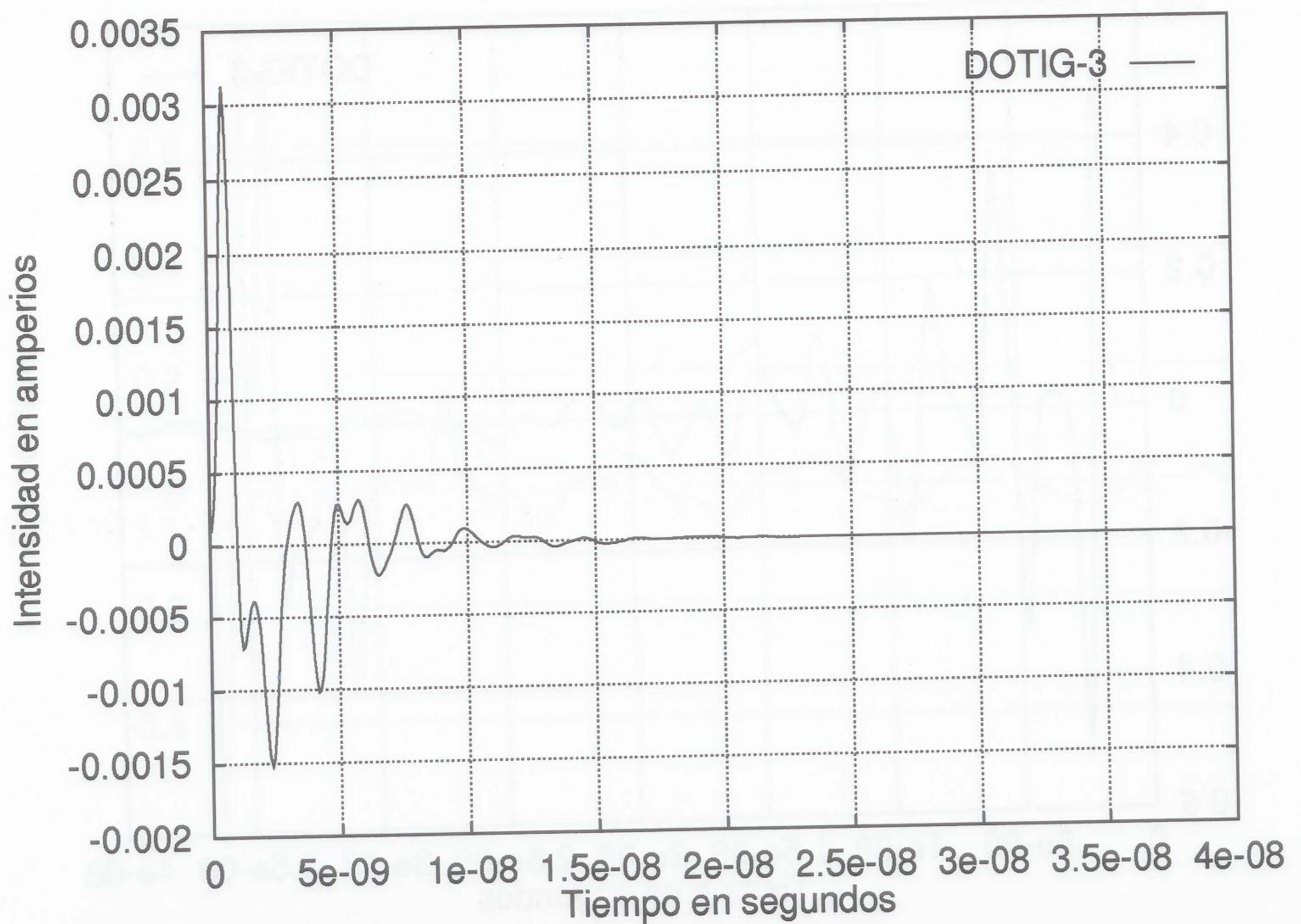


Figura 5.68: Intensidad en el segmento central del hilo dos en una array con $d=0.5$ m y cargas resistivas en ambos brazos de cada antena de 200Ω

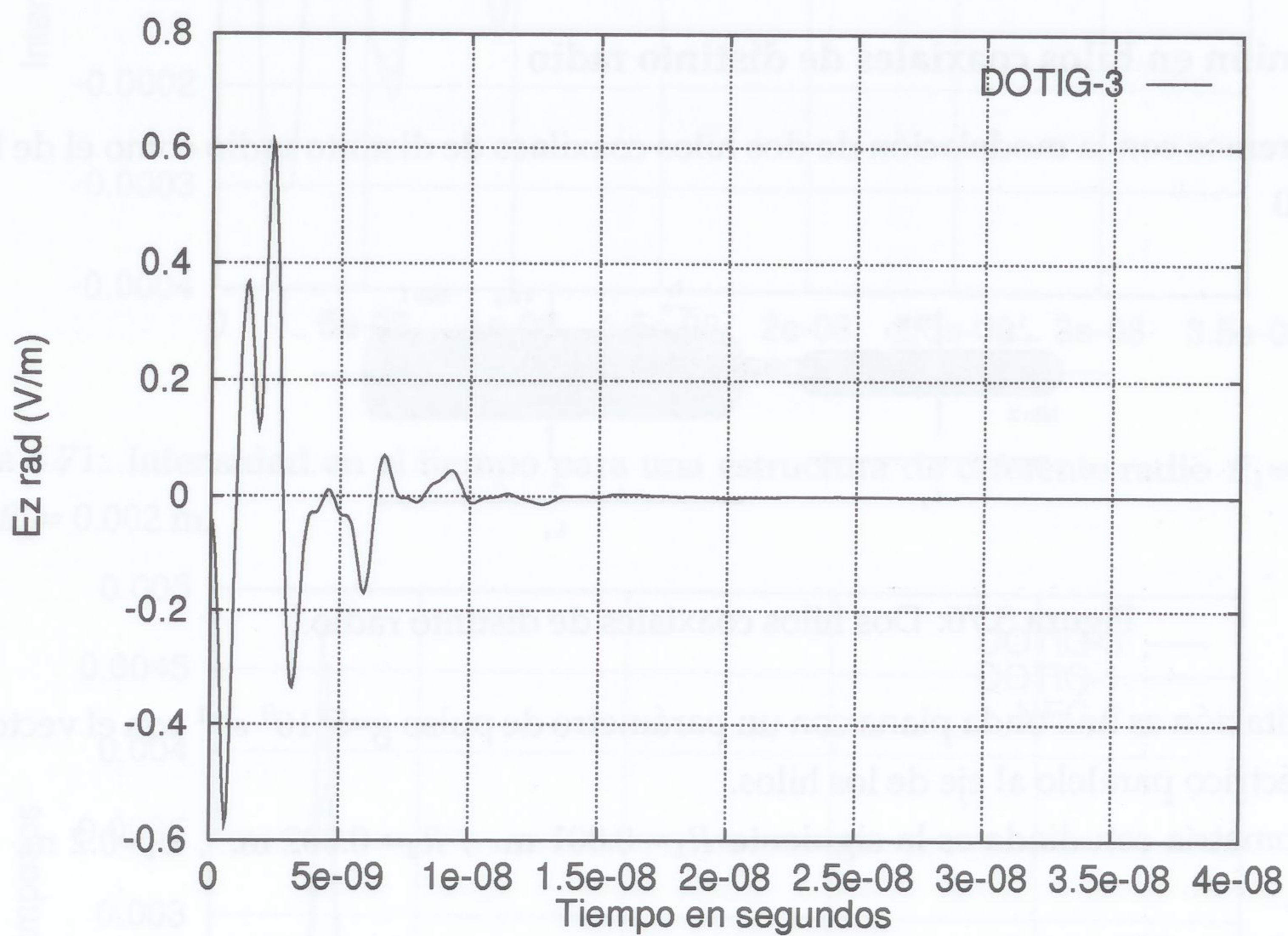


Figura 5.69: Campo de radiación para una distancia entre antenas de $d=0.5$ m. y una dirección $\theta = 90$ y $\varphi = 0$ con cargas resistivas en ambos brazos de cada antena de 200Ω

5.2 Uniones

Siguiendo con el análisis de estructuras de hilos frente a OEMT, estudiaremos modelos formados por una o varias uniones. Para ello comenzaremos con una estructura simple formada por dos hilos coaxiales de distinto radio. La próxima estructura a estudiar, la formarán una unión de cuatro coaxiales dos a dos en configuración de cruz. Las dos siguientes estructuras conllevan un número mayor de uniones e hilos formando una red o un cubo. En todas las estructuras se visualizarán intensidades en diferentes puntos de la estructura, así como los campos eléctricos en diferentes direcciones.

5.2.1 Unión en hilos coaxiales de distinto radio

Comenzaremos con la modelación de dos hilos coaxiales de distinto radio como el de la figura 5.70

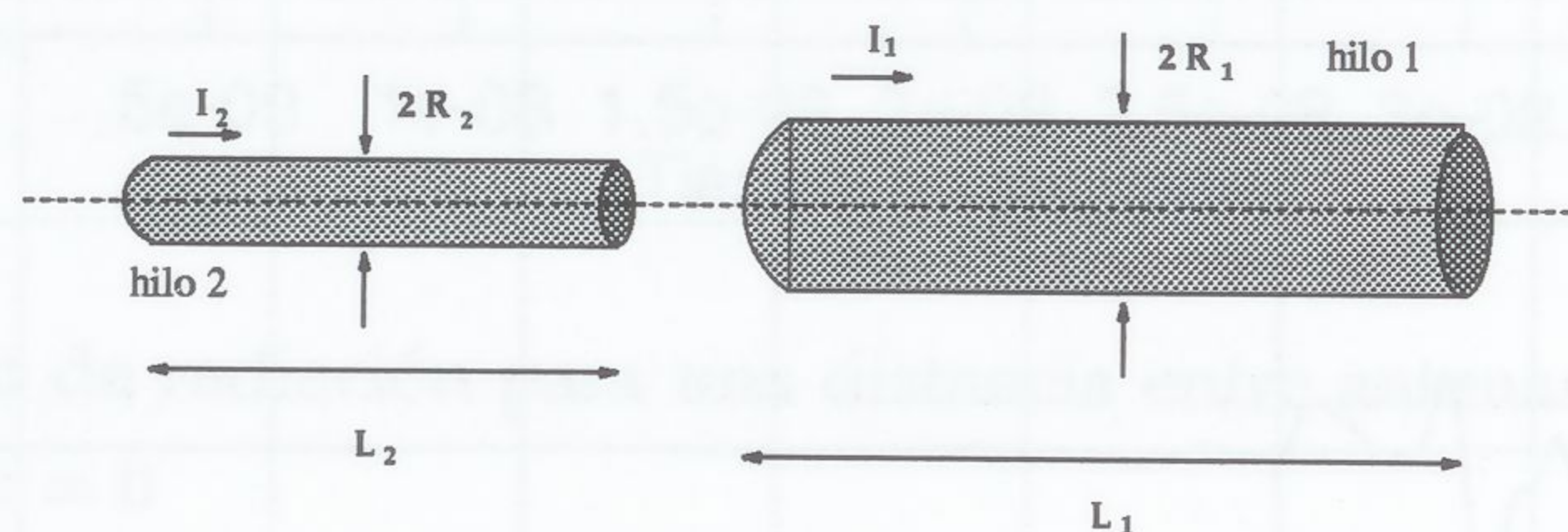


Figura 5.70: Dos hilos coaxiales de distinto radio.

La excitación es una onda plana con un parámetro de pulso $g=5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ con el vector campo eléctrico paralelo al eje de los hilos.

La geometría estudiada es la siguiente $R_1=0.001 \text{ m}$, $R_2=0.002 \text{ m}$, $L_1=0.2 \text{ m}$ y $L_2=0.3 \text{ m}$.

En la figura 5.71 puede verse la corriente para este modelo en función del tiempo comparada con DOTIG-1

La figura 5.72 corresponde a la corriente en frecuencia comparada con DOTIG-1 y NEC-2.

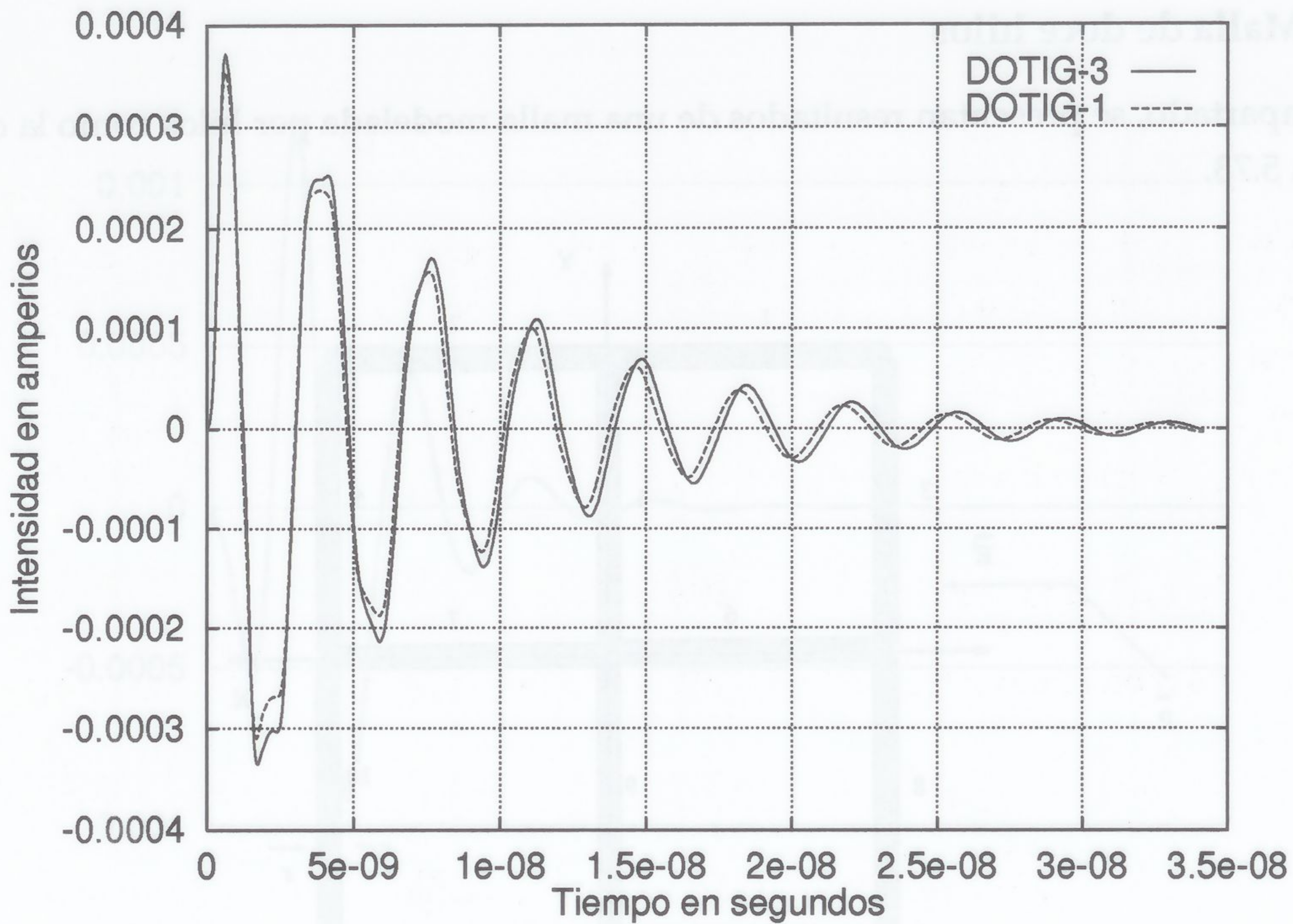


Figura 5.71: Intensidad en el tiempo para una estructura de diferente radio $R_1 = 0.001$ m. y $R_2 = 0.002$ m.

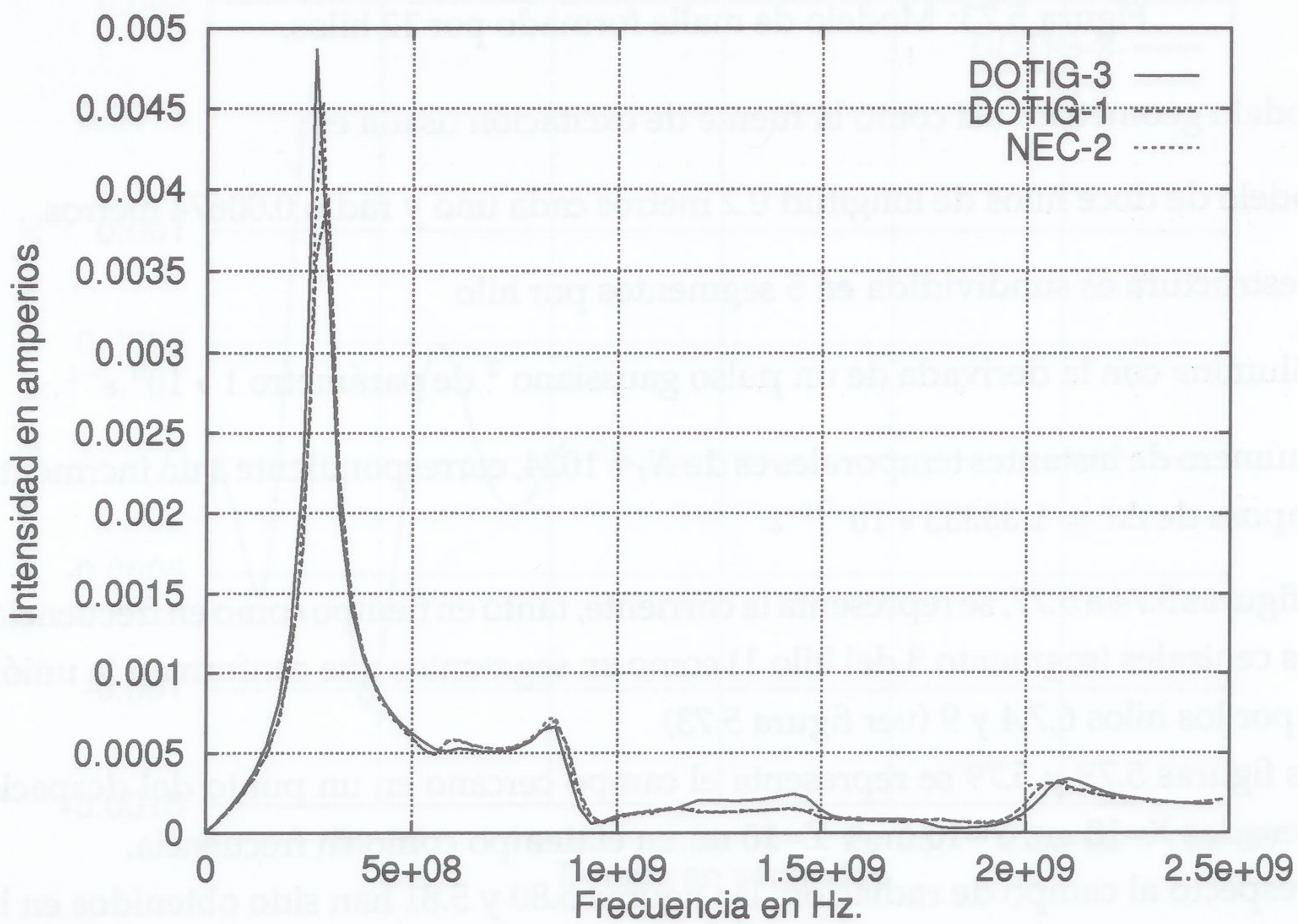


Figura 5.72: Intensidad en frecuencia para una estructura de diferente radio $R_1 = 0.001$ m. y $R_2 = 0.002$ m.

5.2.2 Malla de doce hilos

En este apartado, se presentan resultados de una malla modelada por hilos como la de la figura 5.73.

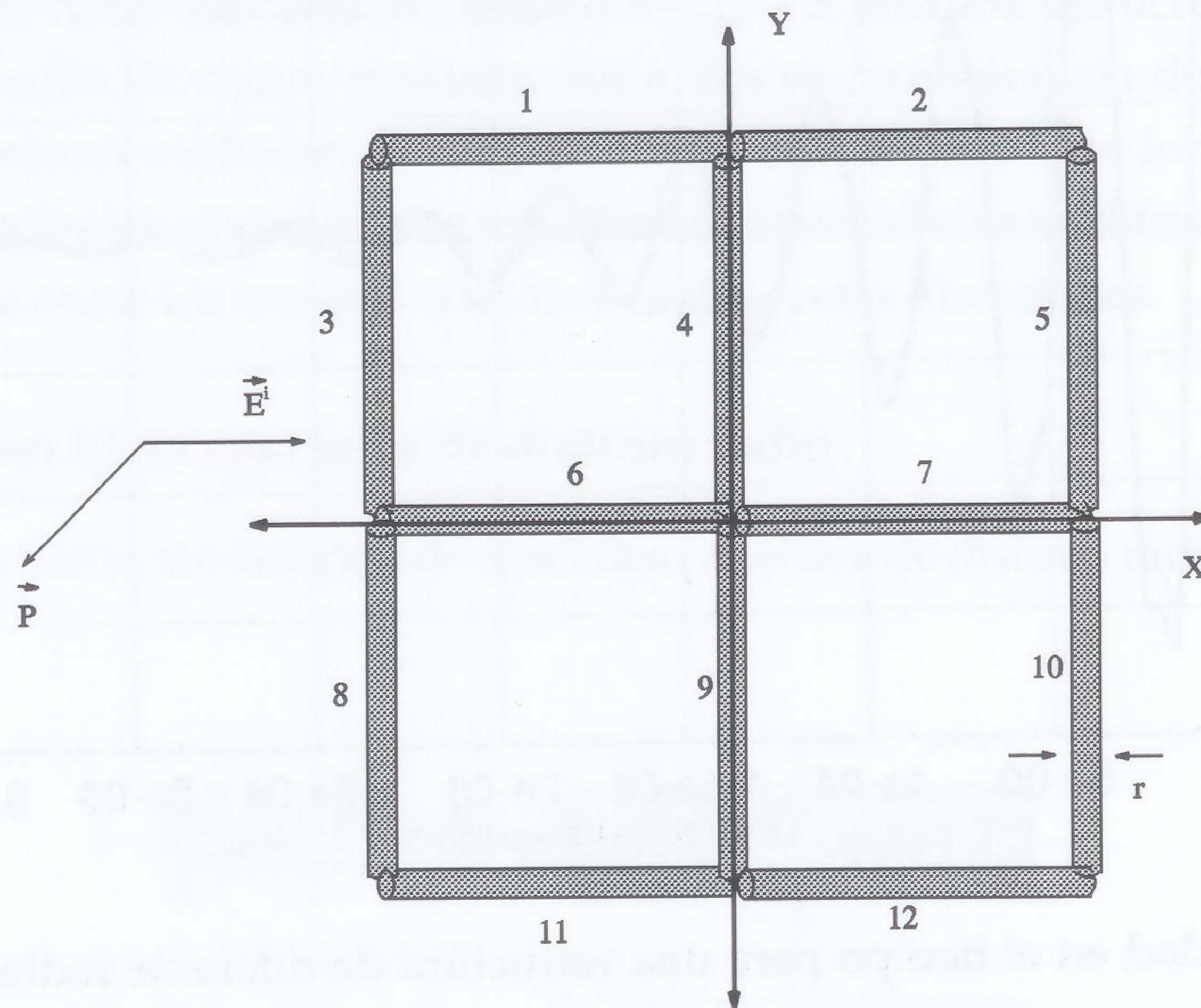


Figura 5.73: Modelo de malla formado por 12 hilos.

El modelo geométrico así como la fuente de excitación usada es :

1. Modelo de doce hilos de longitud 0.2 metros cada uno y radio 0.00674 metros.
2. La estructura es subdividida en 5 segmentos por hilo
3. Se ilumina con la derivada de un pulso gaussiano ² de parámetro $1 * 10^9 \text{ s}^{-1}$.
4. El número de instantes temporales es de $N_t = 1024$, correspondiente a un incremento temporal de $\Delta t = 1.33333 * 10^{-10} \text{ s}$

En las figuras 5.74 a 5.77, se representa la corriente, tanto en tiempo como en frecuencia, en puntos centrales (segmento 3 del hilo 1) como en segmentos que conforman la unión formada por los hilos 6,7,4 y 9 (ver figura 5.73)

En las figuras 5.78 y 5.79 se representa el campo cercano en un punto del espacio de coordenadas $X=10 \text{ m.}$, $Y=10 \text{ m.}$ y $Z=10 \text{ m.}$ en el tiempo como en frecuencia.

Con respecto al campo de radiación, las figuras 5.80 y 5.81 han sido obtenidos en la dirección $\theta = 180$ y $\varphi = 0$

²Como se comentó en capítulos anteriores, para estructuras cerradas, y a fin de eliminar la componente de continua en la señal, es necesario alimentar la estructura con la derivada del pulso gaussiano

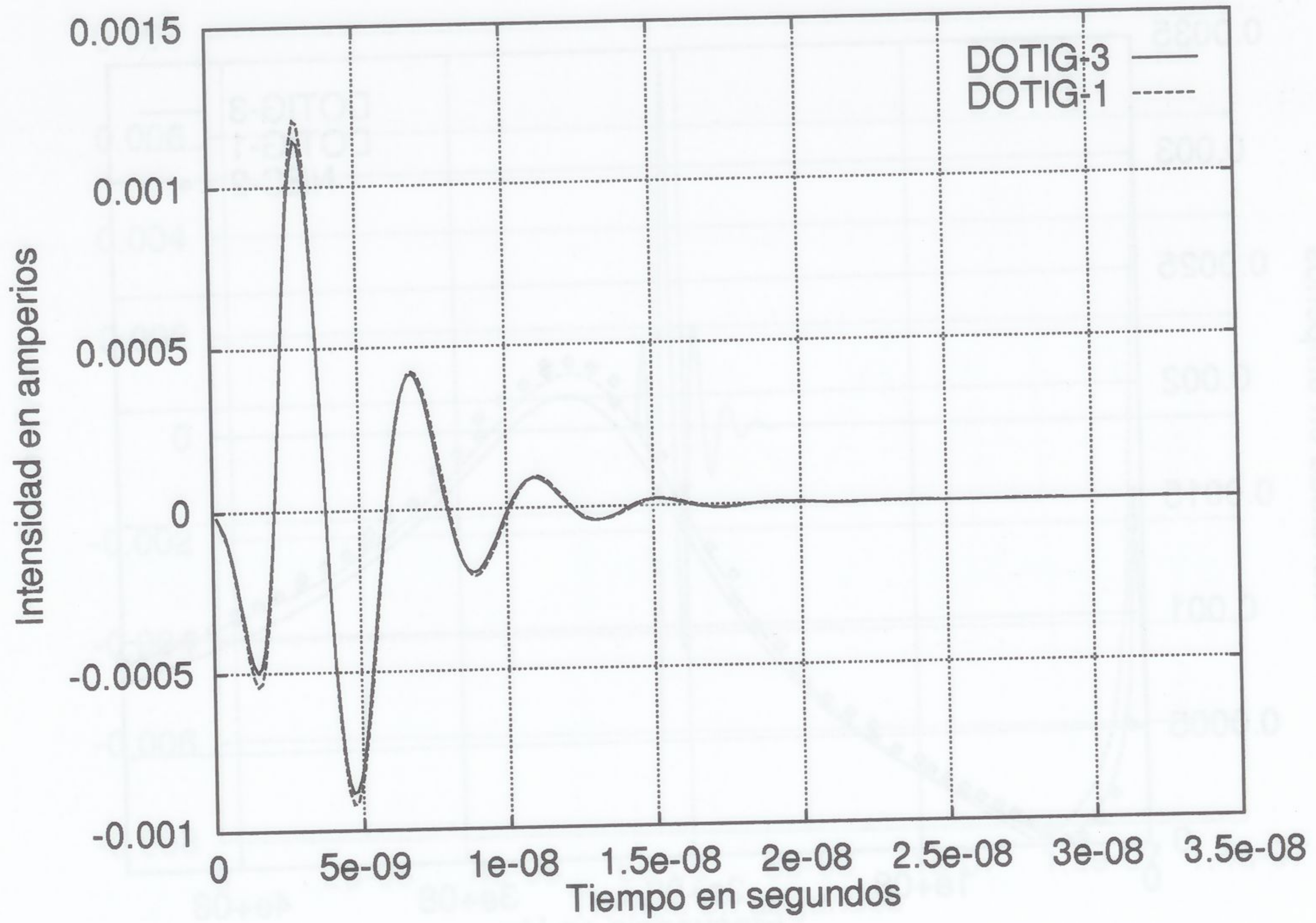


Figura 5.74: Intensidad en el segmento central del primer hilo en una malla

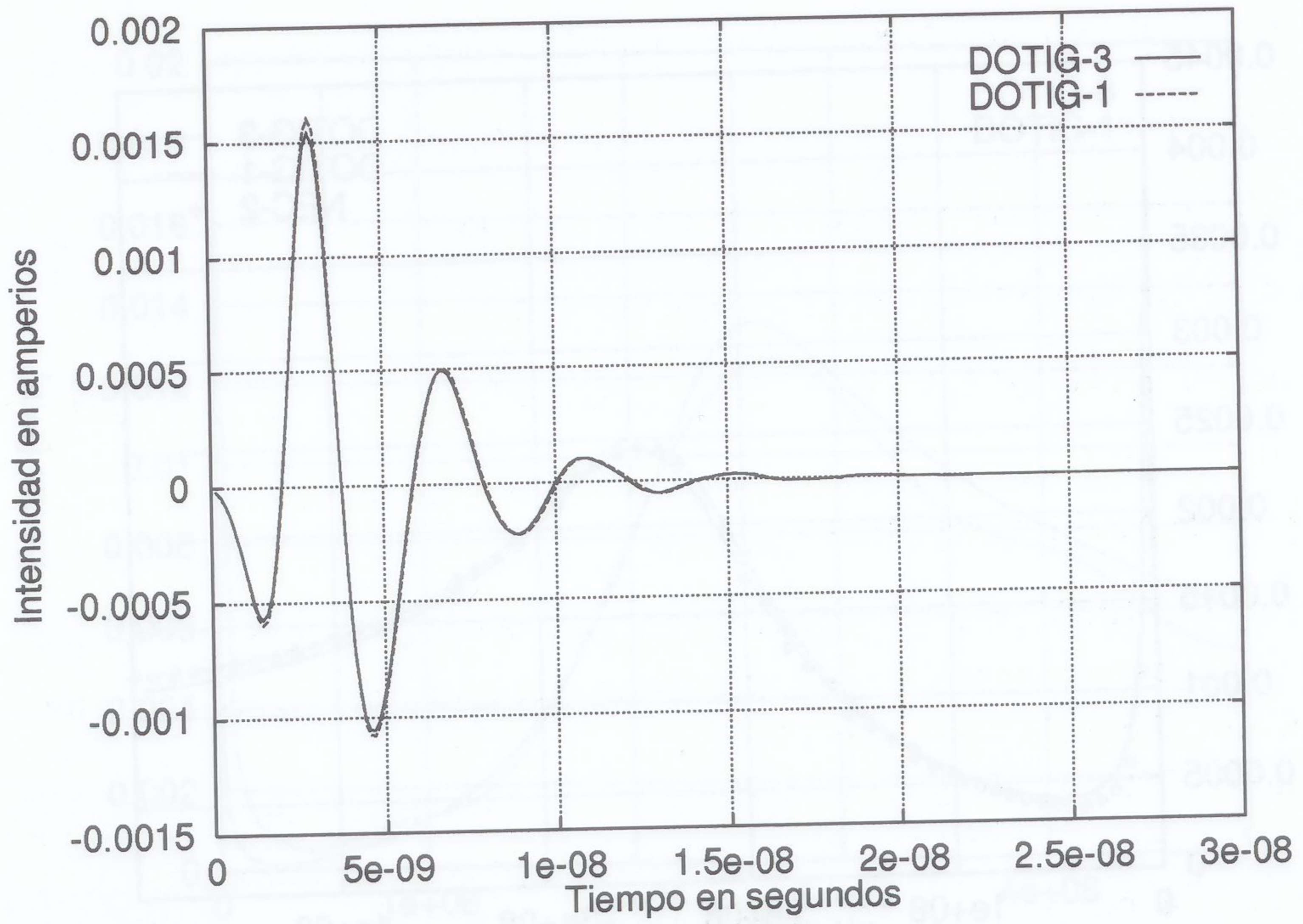


Figura 5.75: Intensidad en un segmento proximo a una unión en una malla

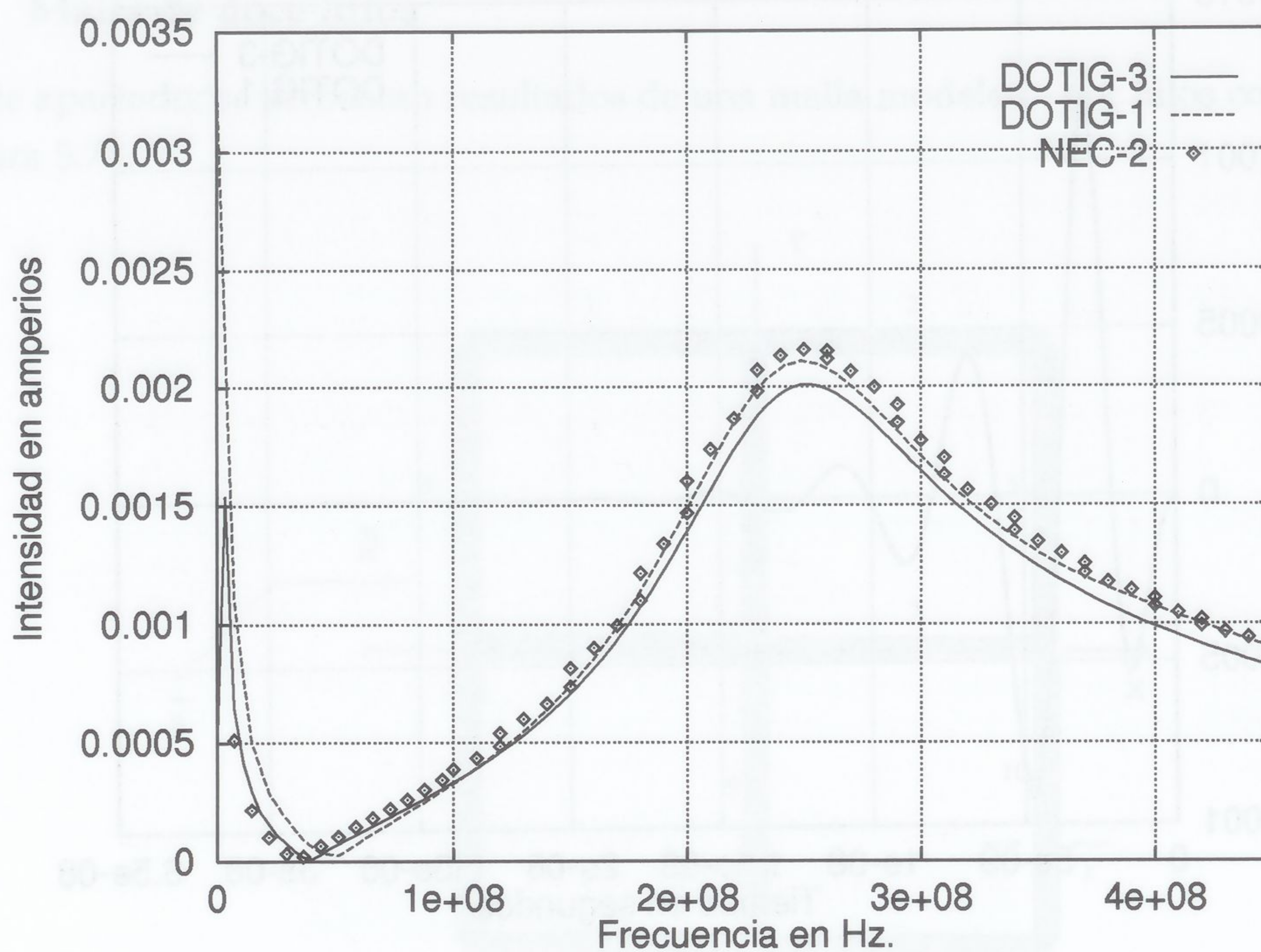


Figura 5.76: Intensidad en frecuencia del segmento central del primer hilo en una malla

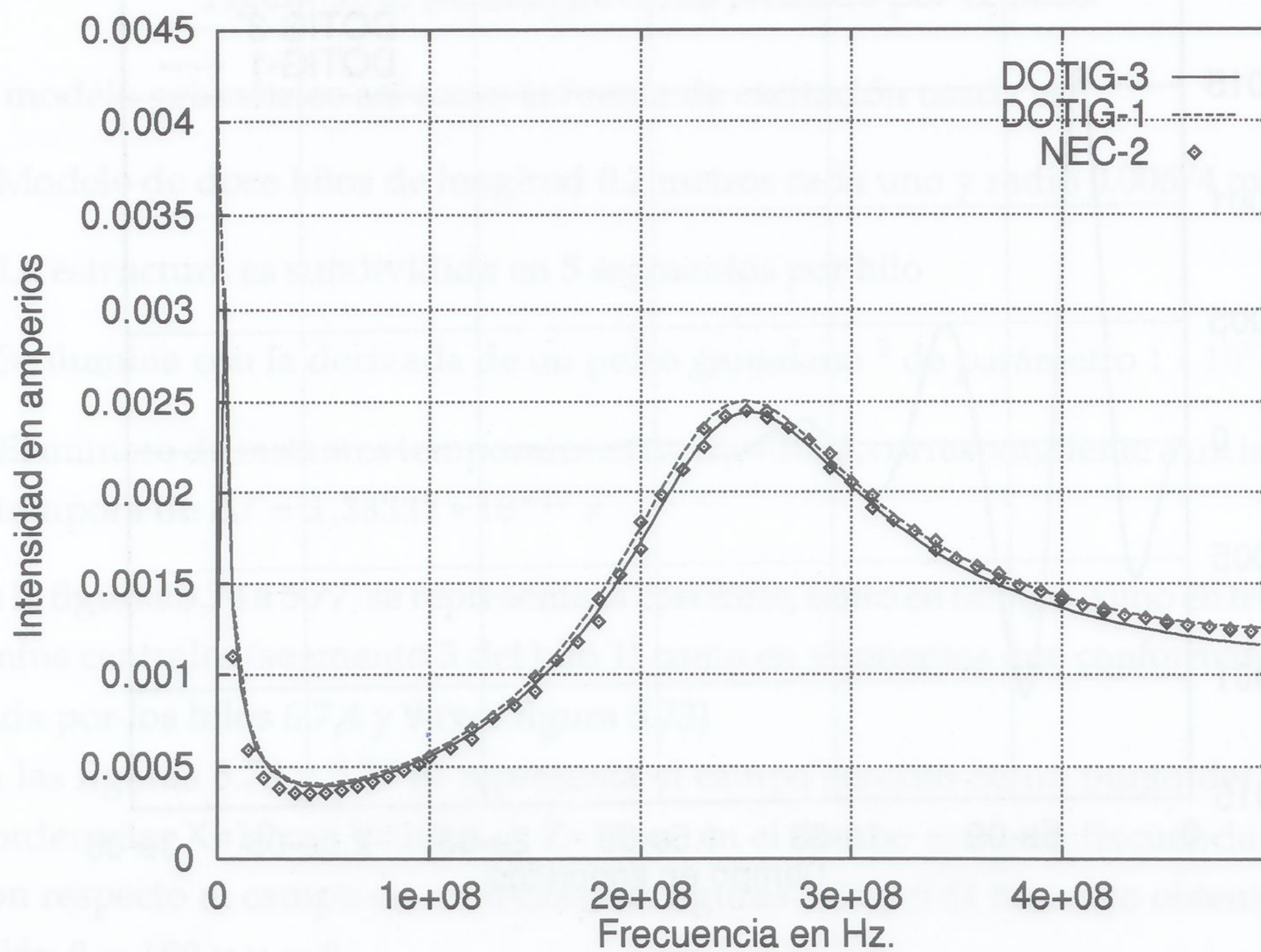


Figura 5.77: Intensidad en frecuencia del segmento próximo a una unión en una malla

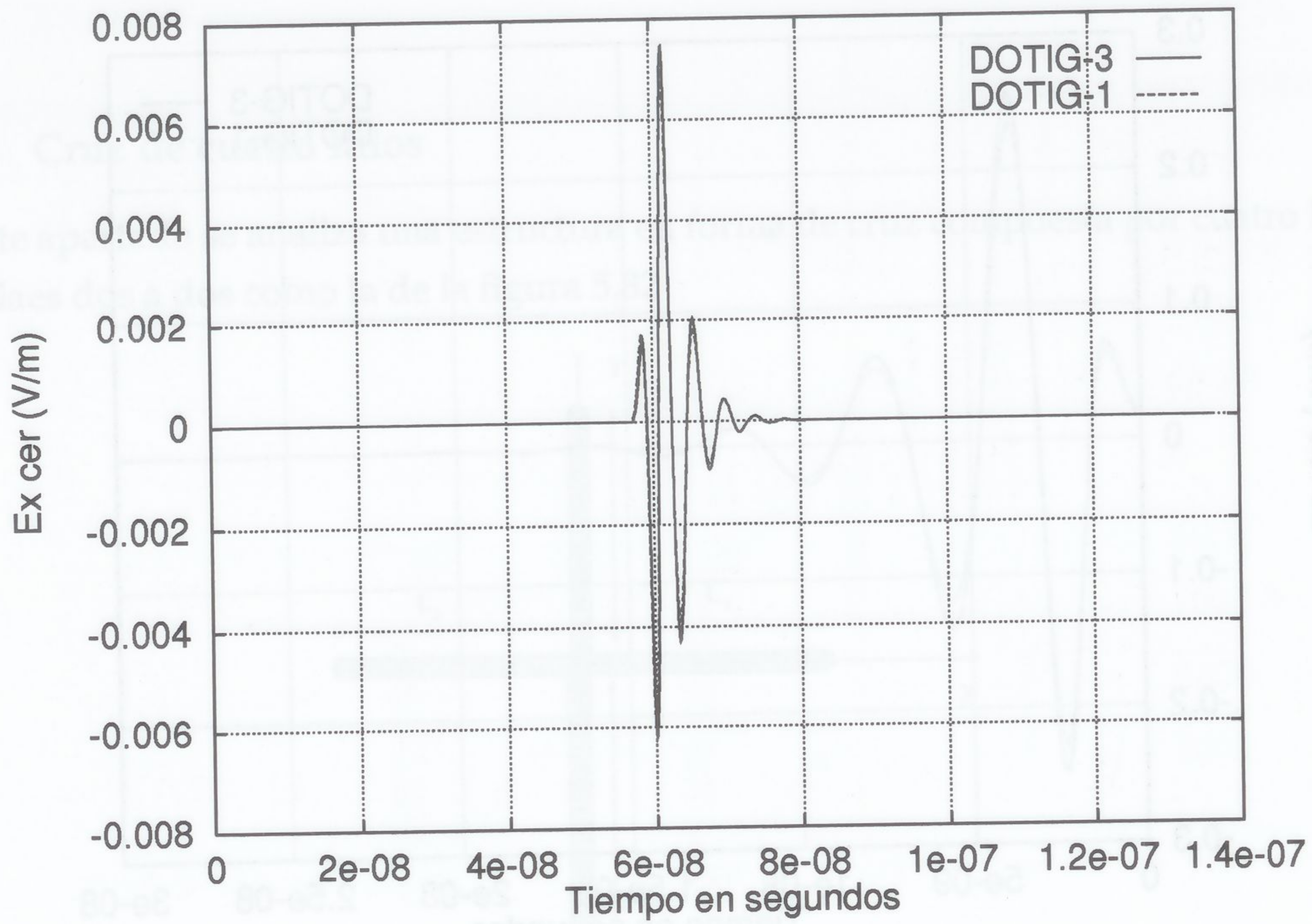


Figura 5.78: Campo de cercanías en el tiempo para $X=10$ m. , $Y=10$ m. y $Z=10$ m. en una malla

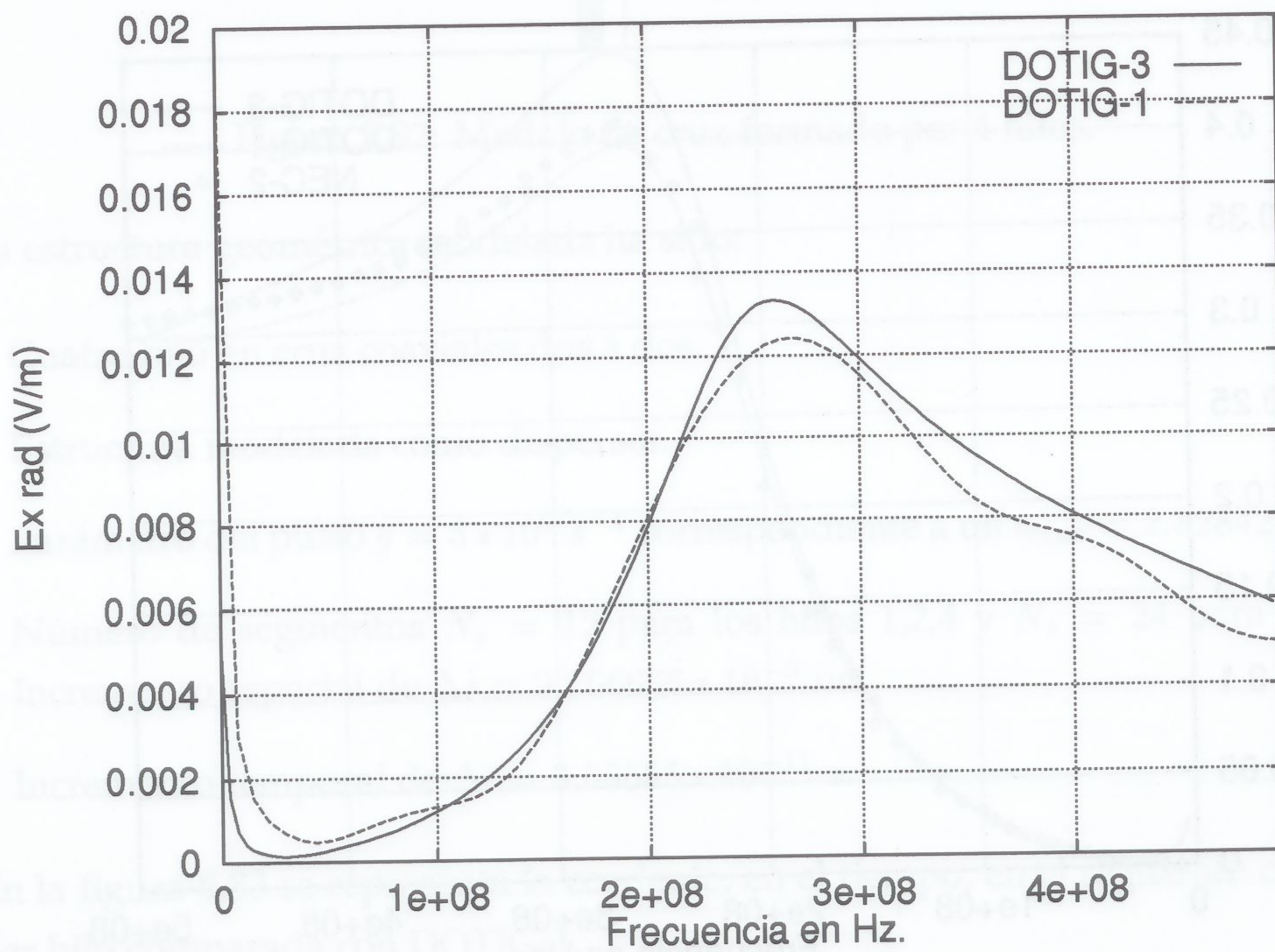


Figura 5.79: Campo de cercanías en frecuencia para $X=10$ m. , $Y=10$ m. y $Z=10$ m. en una malla

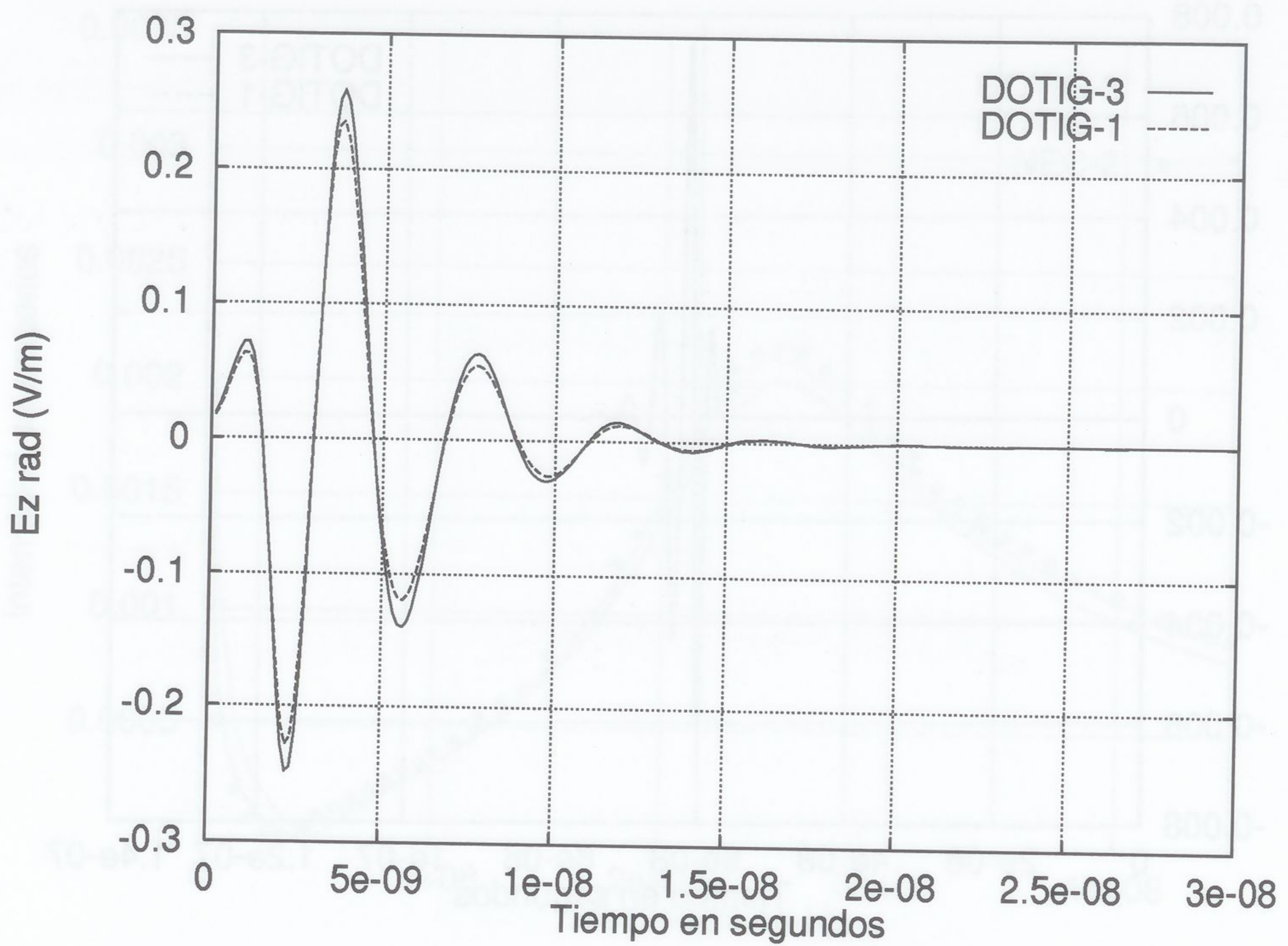


Figura 5.80: Campo lejano en tiempo de una malla en la dirección $\theta = 180$, $\varphi = 0$

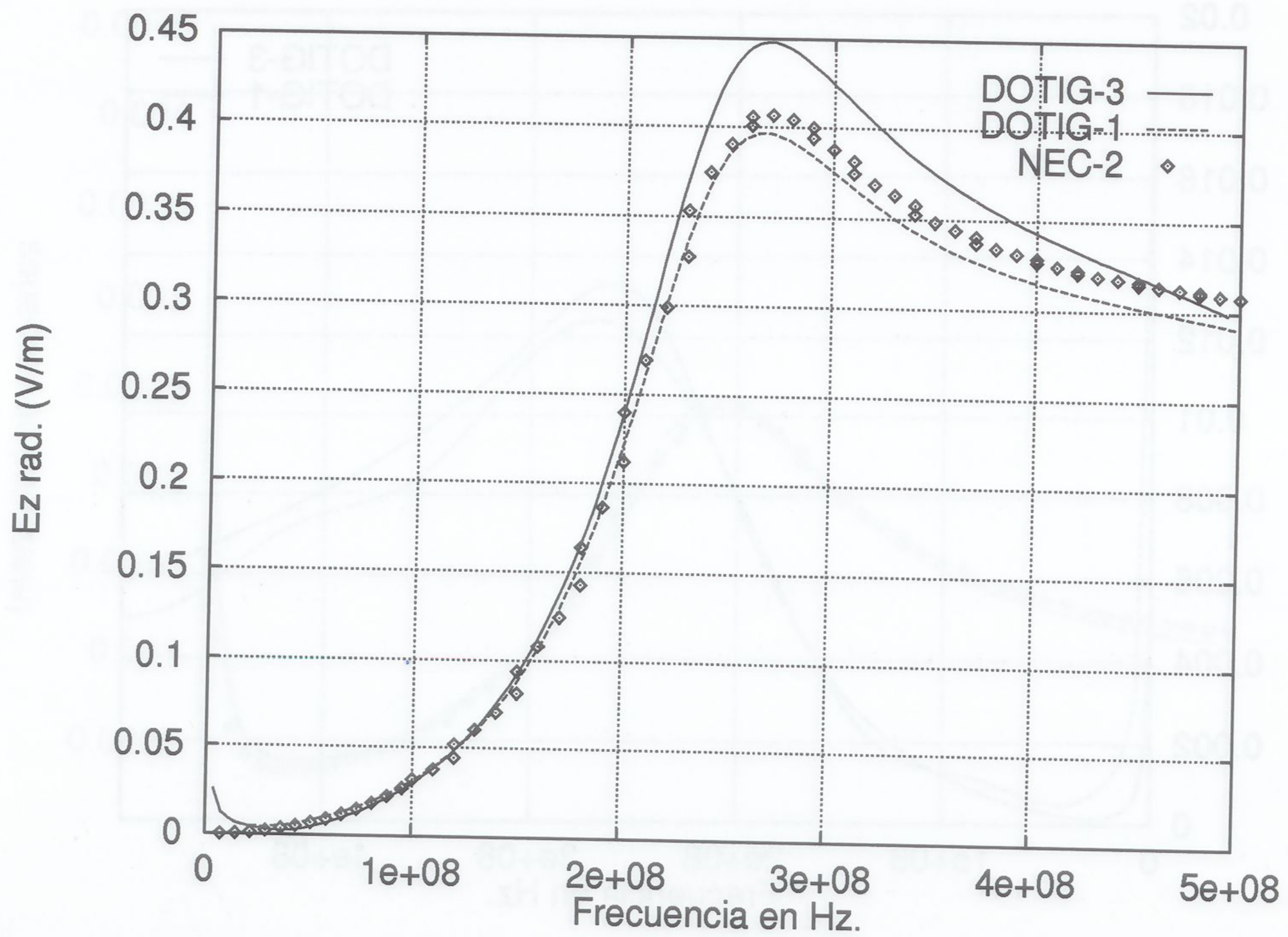


Figura 5.81: Campo lejano en frecuencia de una malla en la dirección $\theta = 180$, $\varphi = 0$

5.2.3 Cruz de cuatro hilos

En este apartado se analiza una estructura en forma de cruz compuesta por cuatro hilos coaxiales dos a dos como la de la figura 5.82

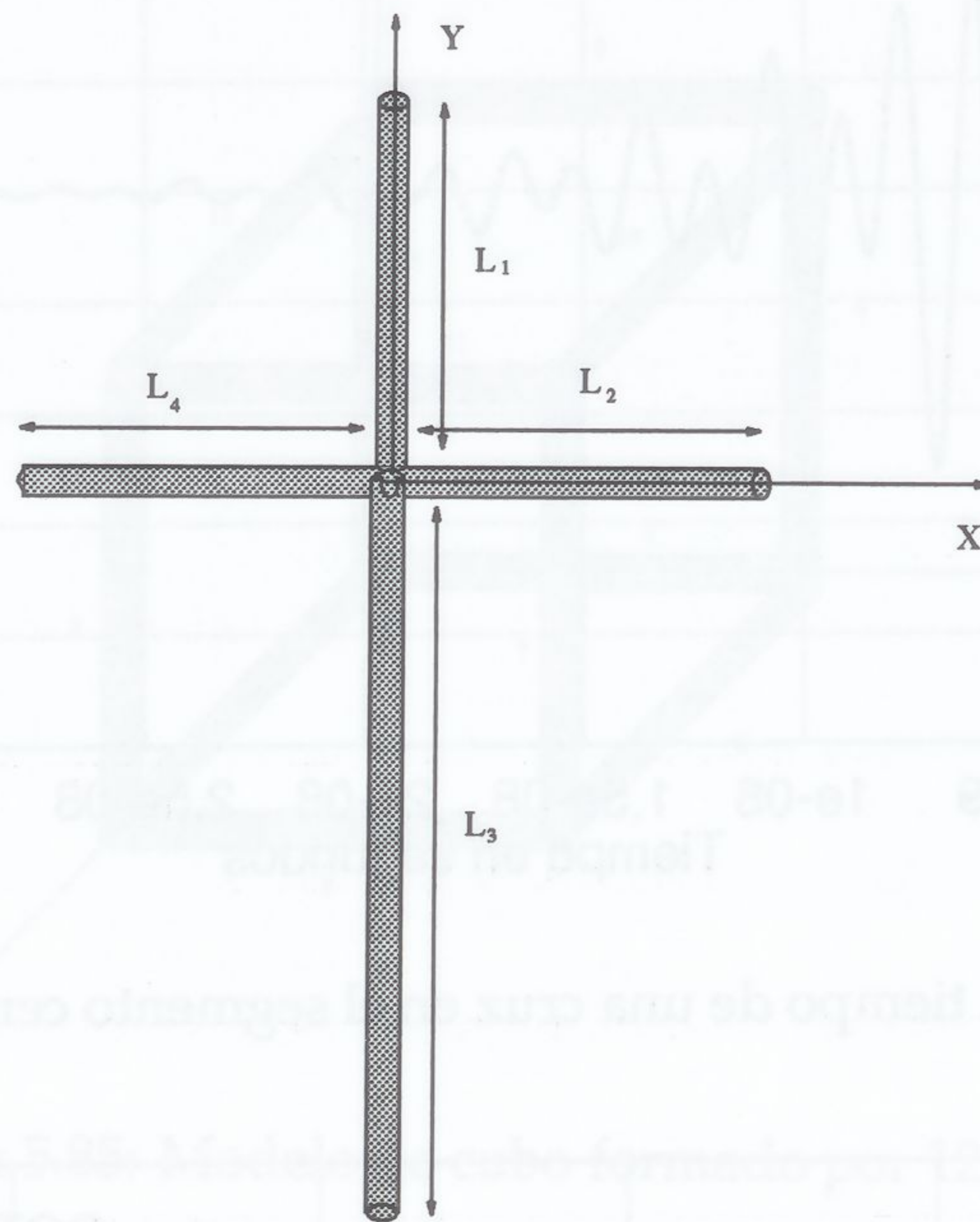


Figura 5.82: Modelo de cruz formado por 4 hilos.

La estructura geométrica modelada ha sido:

1. Cuatro hilo en cruz coaxiales dos a dos.
2. Estructura modelada como dispersor.
3. Parámetro del pulso $g = 5 * 10^9 \text{ s}^{-1}$ correspondiente a un $t_{max} = 2.82842 * 10^{-10} \text{ s}$.
4. Número de segmentos $N_s = 12$ para los hilos 1,2,4 y $N_s = 24$ para el hilo 3. Incremento espacial de $\Delta s = 9.166666 * 10^{-3} \text{ m}$.
5. Incremento temporal de $\Delta t = 3.05555 * 10^{-11} \text{ s}$.

En la figura 5.83 se representa la corriente, en el tiempo, en el segmento central del primer hilo comparada con DOTIG-1.

En la figura 5.84 se representa la corriente, en frecuencia, en el segmento central del primer hilo comparada con DOTIG-1.

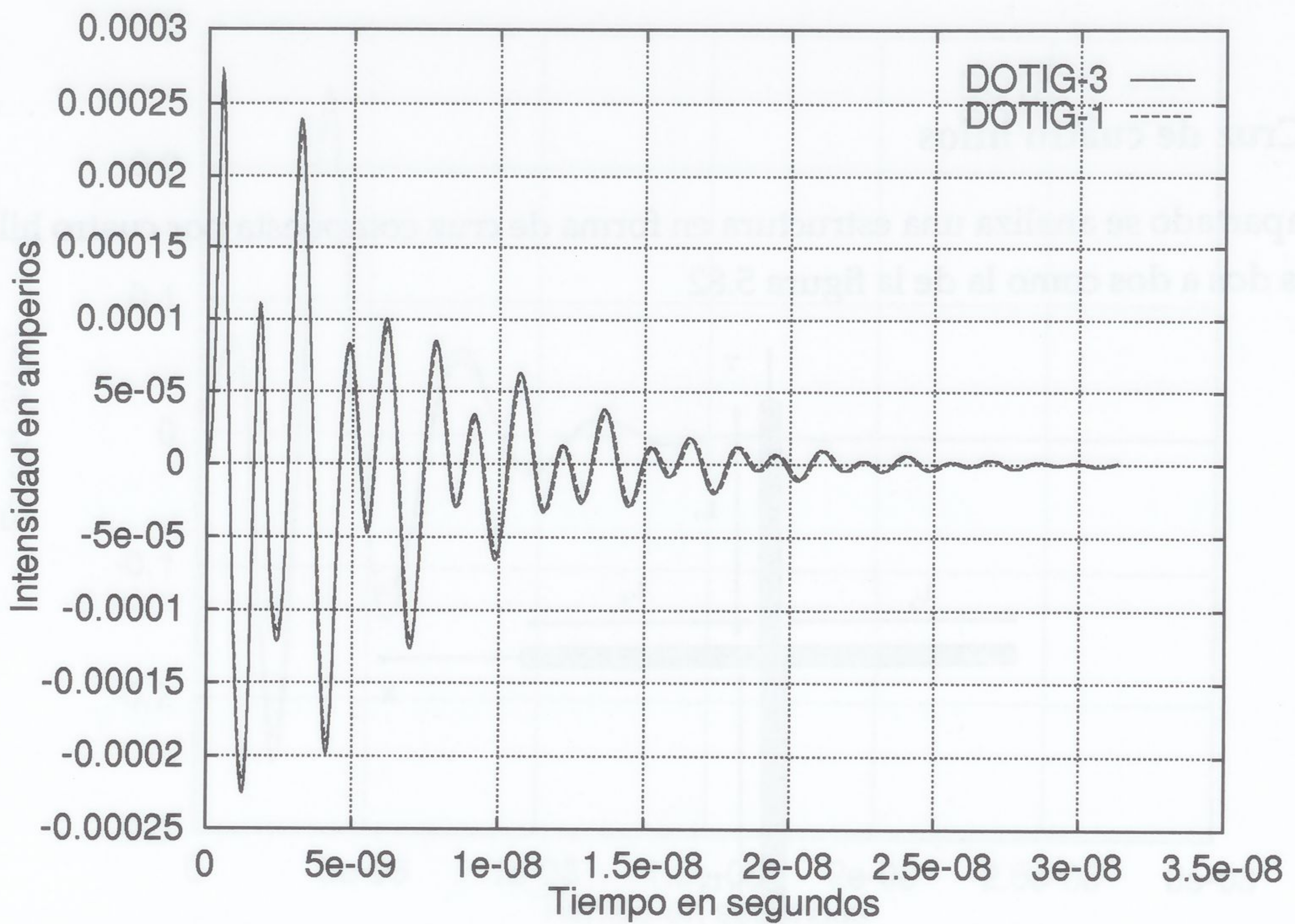


Figura 5.83: Intensidad en el tiempo de una cruz en el segmento central del primer hilo

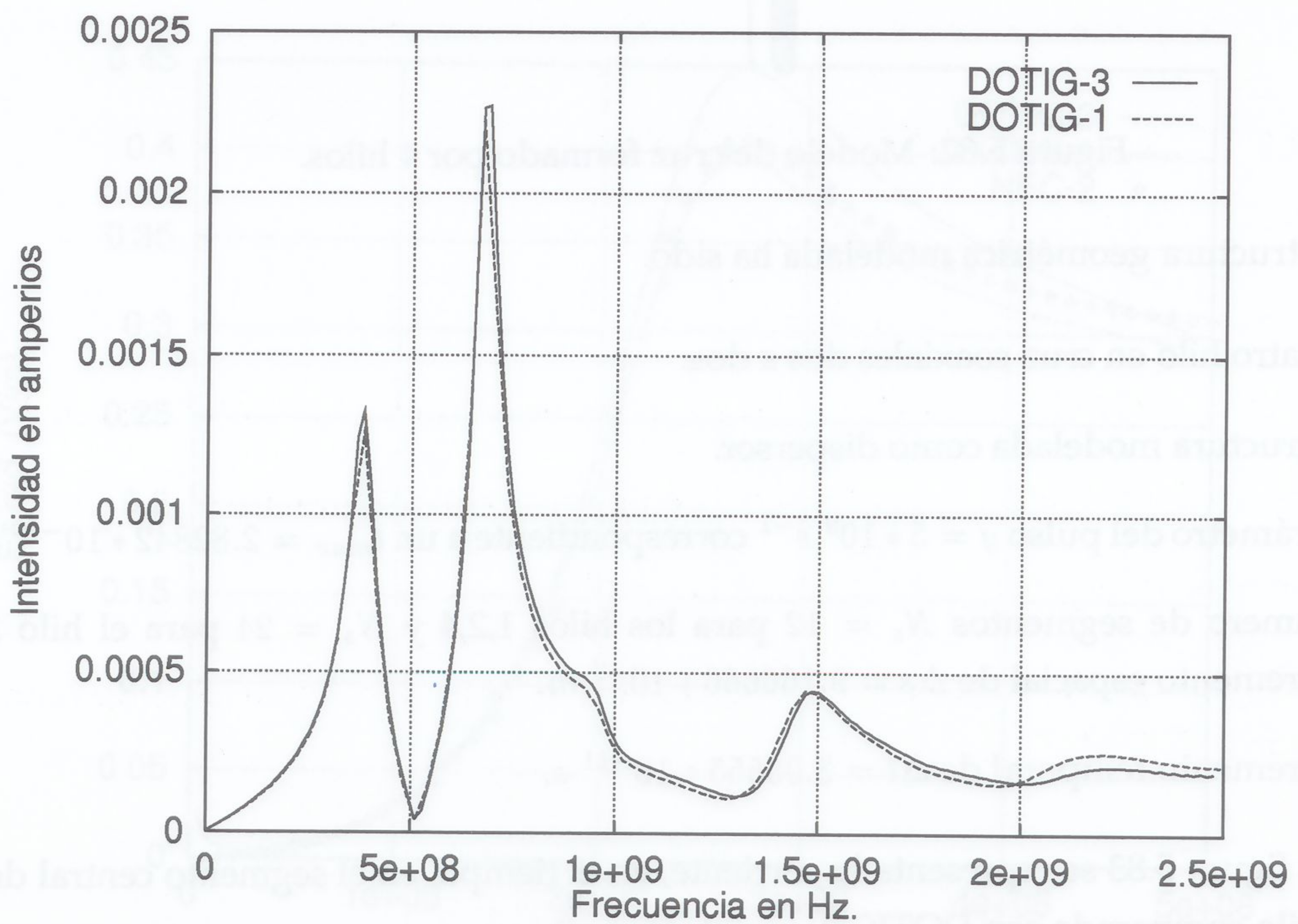


Figura 5.84: Intensidad en frecuencia de una cruz en el segmento central del primer hilo

5.2.4 Modelo de cubo

El siguiente bloque de figuras corresponden a un cubo modelado con doce hilos como el de la figura 5.85

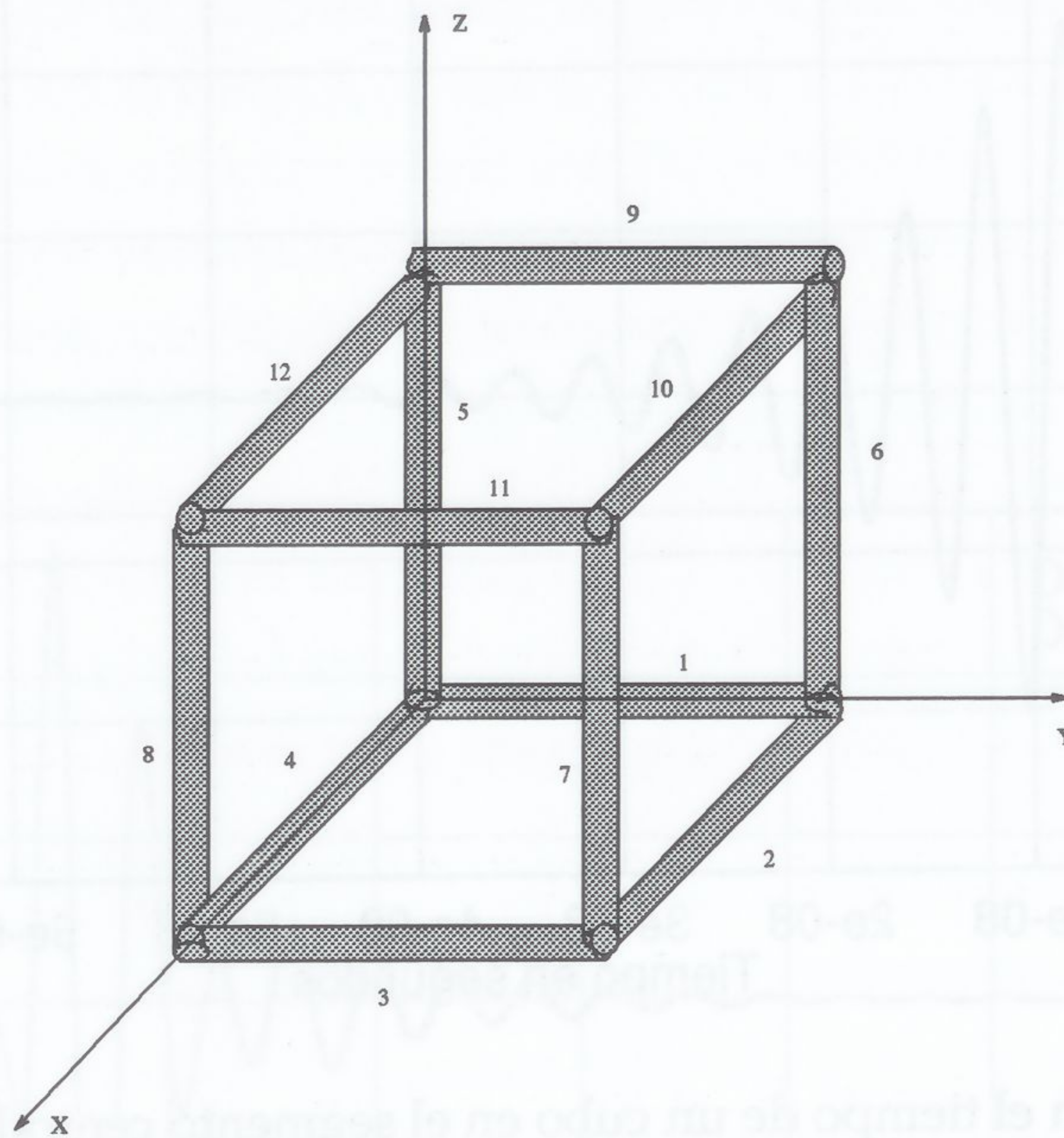


Figura 5.85: Modelo de cubo formado por 12 hilos.

La estructura geométrica modelada ha sido:

1. Doce hilos de igual longitud en estructura de cubo.
2. Estructura modelada como dispersor.
3. Parámetro del pulso $g = 1 * 10^9 \text{ s}^{-1}$ correspondiente a un $t_{max} = 1.4142135 * 10^{-9} \text{ s}$.
4. Número de segmentos $N_s = 10$. Incremento espacial de $\Delta s = 0.04 \text{ m}$.
5. Incremento temporal de $\Delta t = 1.333333 * 10^{-10} \text{ s}$.

En las figuras 5.86 a 5.88 se presentan resultados de intensidades en el tiempo comparadas con DOTIG-1.

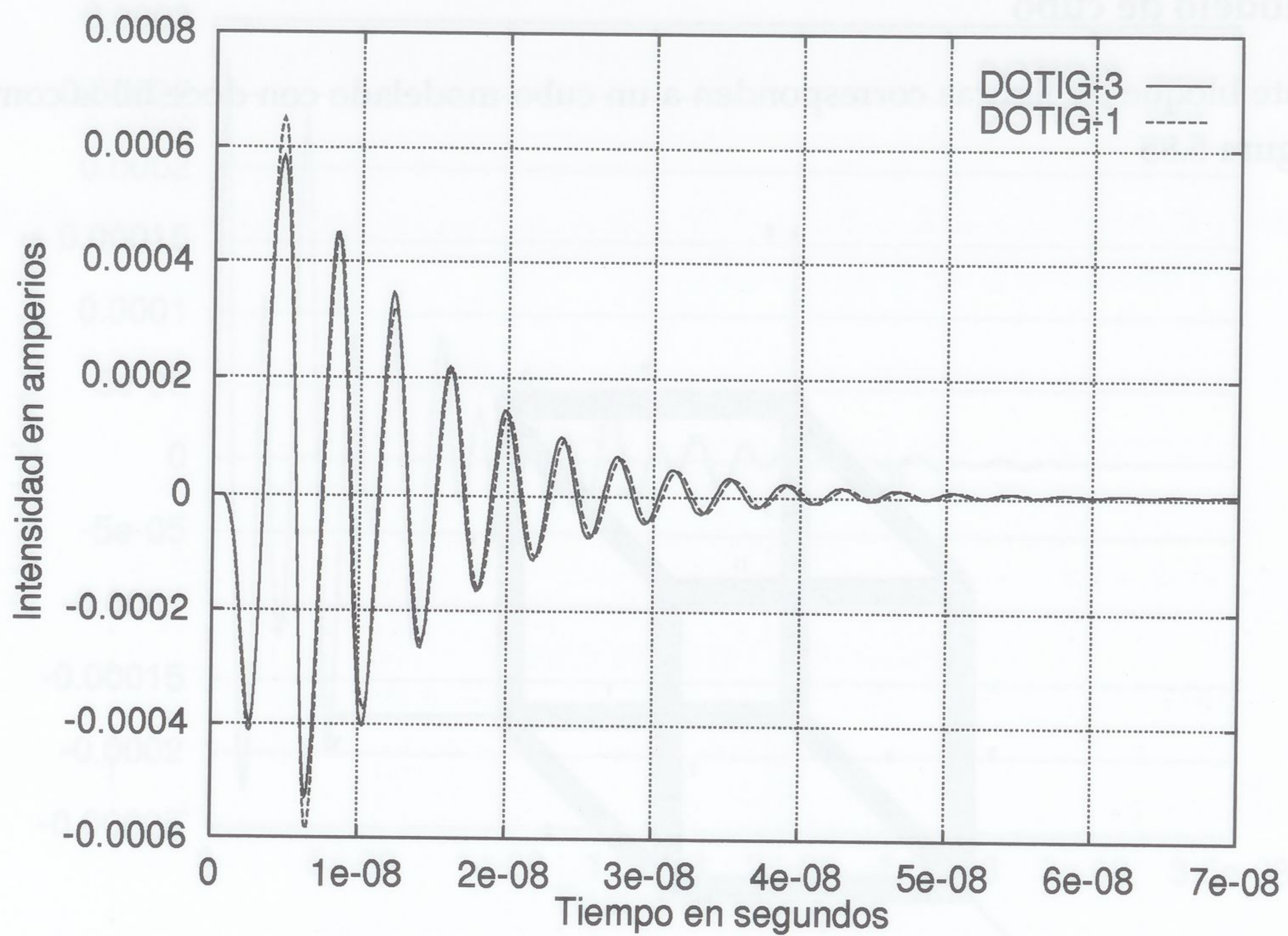


Figura 5.86: Intensidad en el tiempo de un cubo en el segmento central del primer hilo

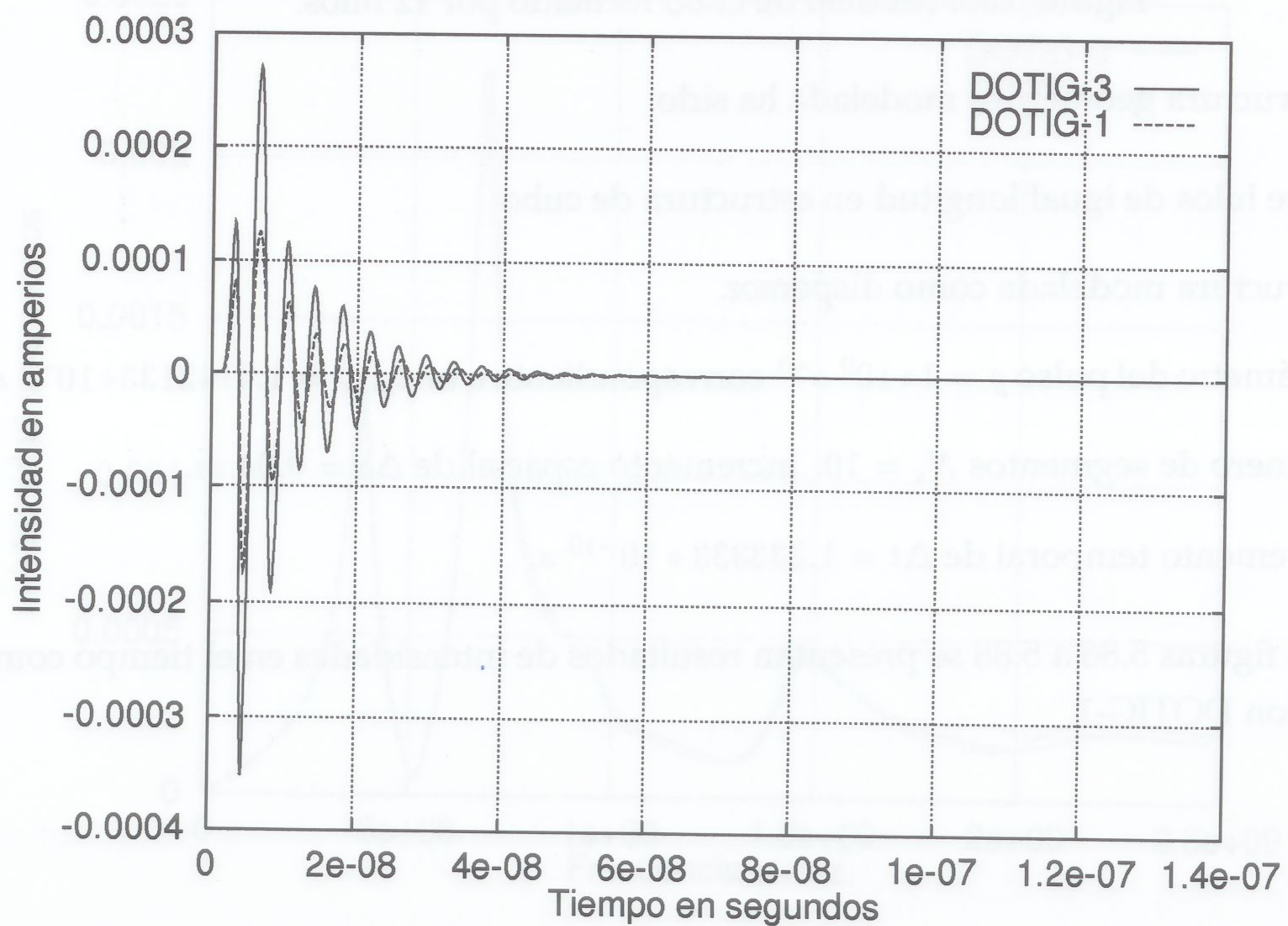


Figura 5.87: Intensidad en el tiempo de un cubo en el segmento central del cuarto hilo

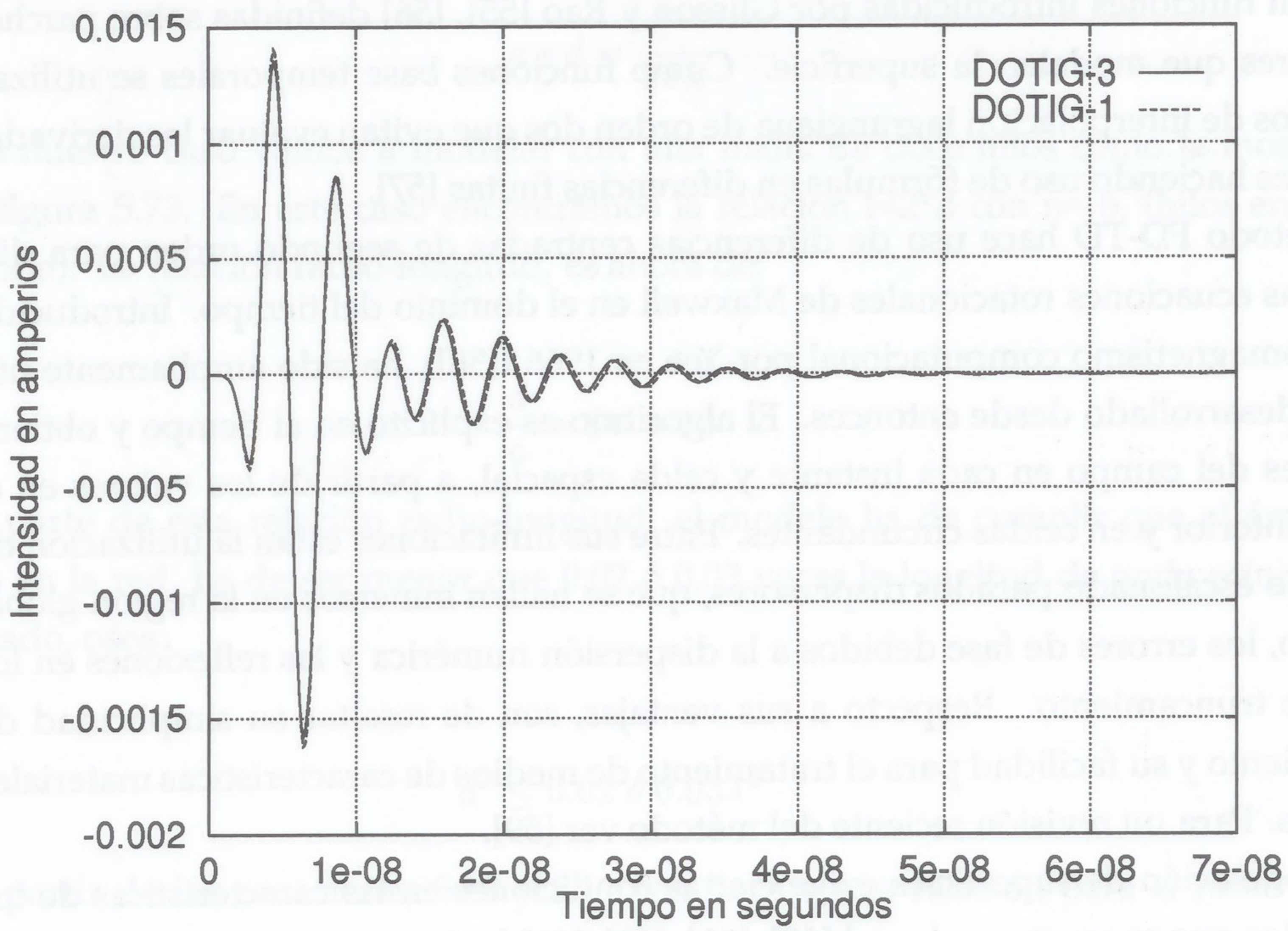


Figura 5.88: Intensidad en el tiempo de un cubo en el segmento central del quinto hilo

5.2.5 Modelado de superficies

En esta sección estudiaremos el modelo numérico de una estructura superficial conductora perfecta por una red de hilos interconectados. Los resultados serán comparados con los obtenidos con la ecuación integral para el campo eléctrico (EFIE) sobre superficies y con los obtenidos con técnicas en diferencias finitas en el dominio del tiempo (FD-TD).

La ecuación EFIE sobre superficies se plantea imponiendo la condición de contorno para el campo eléctrico sobre la superficie del cuerpo dispersor y haciendo uso del teorema de equivalencia. Se obtiene una ecuación de Fredholm de primera clase y para resolverla se hace uso del Método de los Momentos. Como funciones base espaciales se utilizan funciones introducidas por Glisson y Rao [55], [56] definidas sobre parches triangulares que modelan la superficie. Como funciones base temporales se utilizan polinómios de interpolación lagrangiana de orden dos que evitan evaluar las derivadas temporales haciendo uso de fórmulas en diferencias finitas [57].

El método FD-TD hace uso de diferencias centradas de segundo orden para discretizar las ecuaciones rotacionales de Maxwell en el dominio del tiempo. Introducido en electromagnetismo computacional por Yee en 1966 ([58]), ha sido ampliamente utilizado y desarrollado desde entonces. El algoritmo es explícito en el tiempo y obtiene los valores del campo en cada instante y celda espacial, a partir de los valores en el instante anterior y en celdas circundantes. Entre sus limitaciones están la utilización de un modelo escalonado para los dispersores, que se hallan inmersos en la región global de cálculo, los errores de fase debidos a la dispersión numérica y las reflexiones en los planos de truncamiento. Respecto a sus ventajas, son de resaltar su simplicidad de planteamiento y su facilidad para el tratamiento de medios de características materiales arbitrarias. Para un revisión reciente del método ver [59].

La modelación de superficies exige ciertas condiciones en las características de los hilos con los que se construye la red.[60], [61], [62], [63],[64]

Consideremos una malla de hilos de longitud d (figura 5.89). Si en cada dirección tenemos n hilo ($2n$ hilos en total), el área de la red de hilos será:

$$A_h = 2n * 2\pi * a * d \quad (5.6)$$

donde a es el radio de los hilos.

Si el área de la superficie que queremos modelar es un polígono regular, el área de dicho polígono viene dado por:

$$A = \frac{1}{4} N l^2 \cotag \left(\frac{\pi}{N} \right) \quad (5.7)$$

donde A es el área de la superficie real a modelar, N es el número de lados de longitud

1.

Tomando como regla de superficies: $A_h = 2A$ encontramos [65],[66]

$$\cotag\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{8\pi a n d}{N l^2} \quad (5.8)$$

Si el área real es una placa cuadrada de lado l , $N=2$ y la cotangente se hará igual a 1, por lo que encontramos una relación entre la longitud y el radio de los hilos.

$$a * d = \frac{l^2}{2\pi n} \quad (5.9)$$

En nuestro caso vamos a modelar con una malla de doce hilos como la mostrada en la figura 5.73. En este caso encontramos la relación $l=2*d$ con $n= 6$, (hilos en cada dirección). La relación radio-longitud, es ahora de:

$$\frac{d}{a} = 3\pi \approx 10 \quad (5.10)$$

A parte de esta relación radio-longitud, el modelo ha de cumplir que el área del hueco en la red, ha de ser menor que 0.02 ó 0.03 veces la longitud de onda mínima al cuadrado, osea:

$$d^2 \leq 0.02 \text{ ó } 0.03\lambda^2 \quad (5.11)$$

A partir de las ecuaciones 5.10 y 5.11 nos lleva a una relación para el radio de la forma:

$$a \leq 2 * 10^{-3} \lambda^2 \quad (5.12)$$

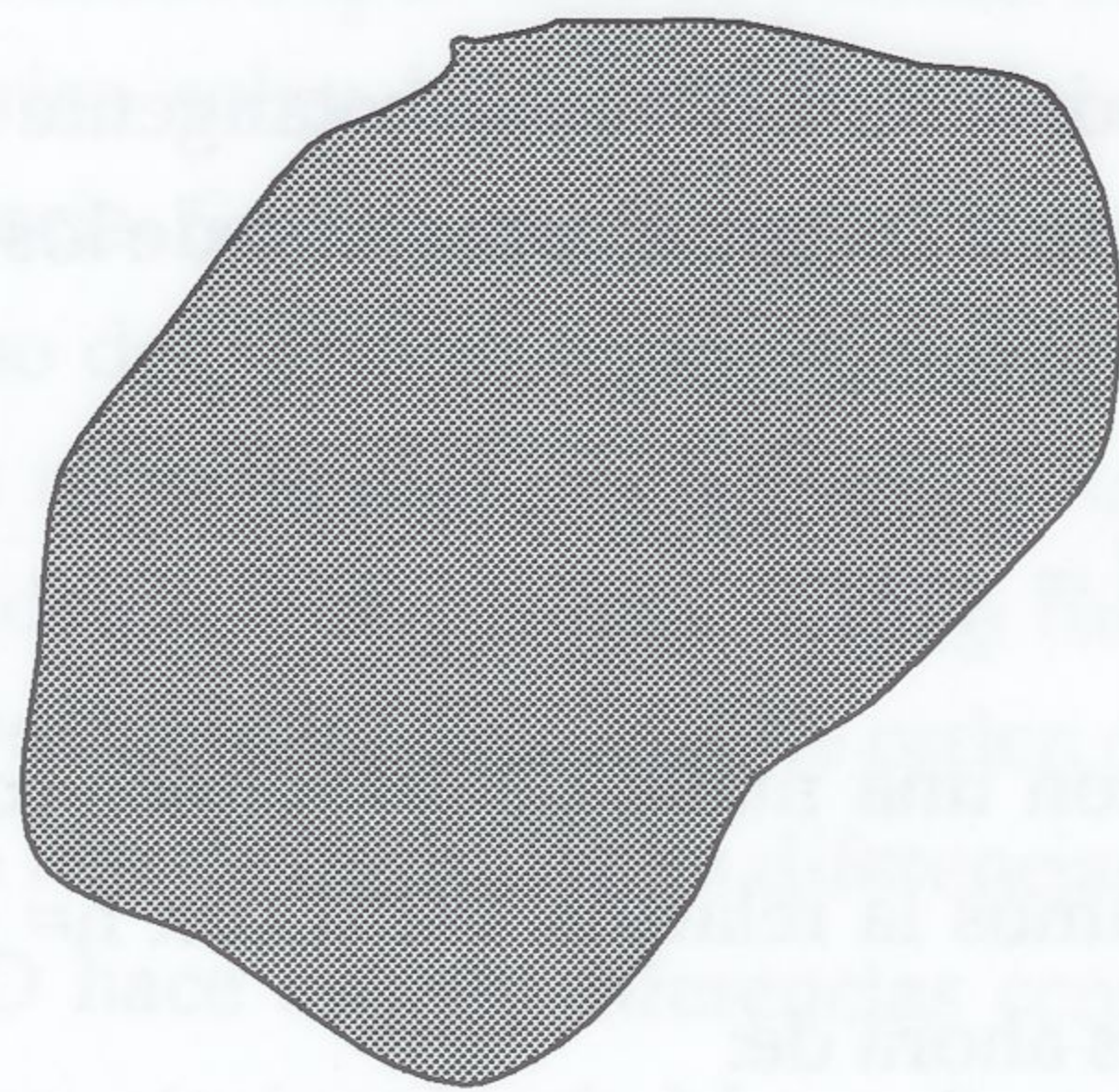
Para el caso de una placa cuadrada conductora perfecta de 1.4 metros de lado (área de 1.96 m^2) la hemos modelado por una malla de doce hilos, de longitud 0.7 metros y de radio 0.007 metros de radio. La longitud de onda mínima de la señal es de $\lambda_{min} = 2m.$, que corresponde a una frecuencia máxima de $f_{max} = 150 \text{ Mhz.}$ De acuerdo con el teorema de Shannon, tomaremos un parámetro del pulso de $g = 0.3 * 10^9 \text{ s}^{-1}$.

En la gráfica 5.90 se muestra el campo eléctrico radiado por dicha placa comparado con los métodos antes citados.

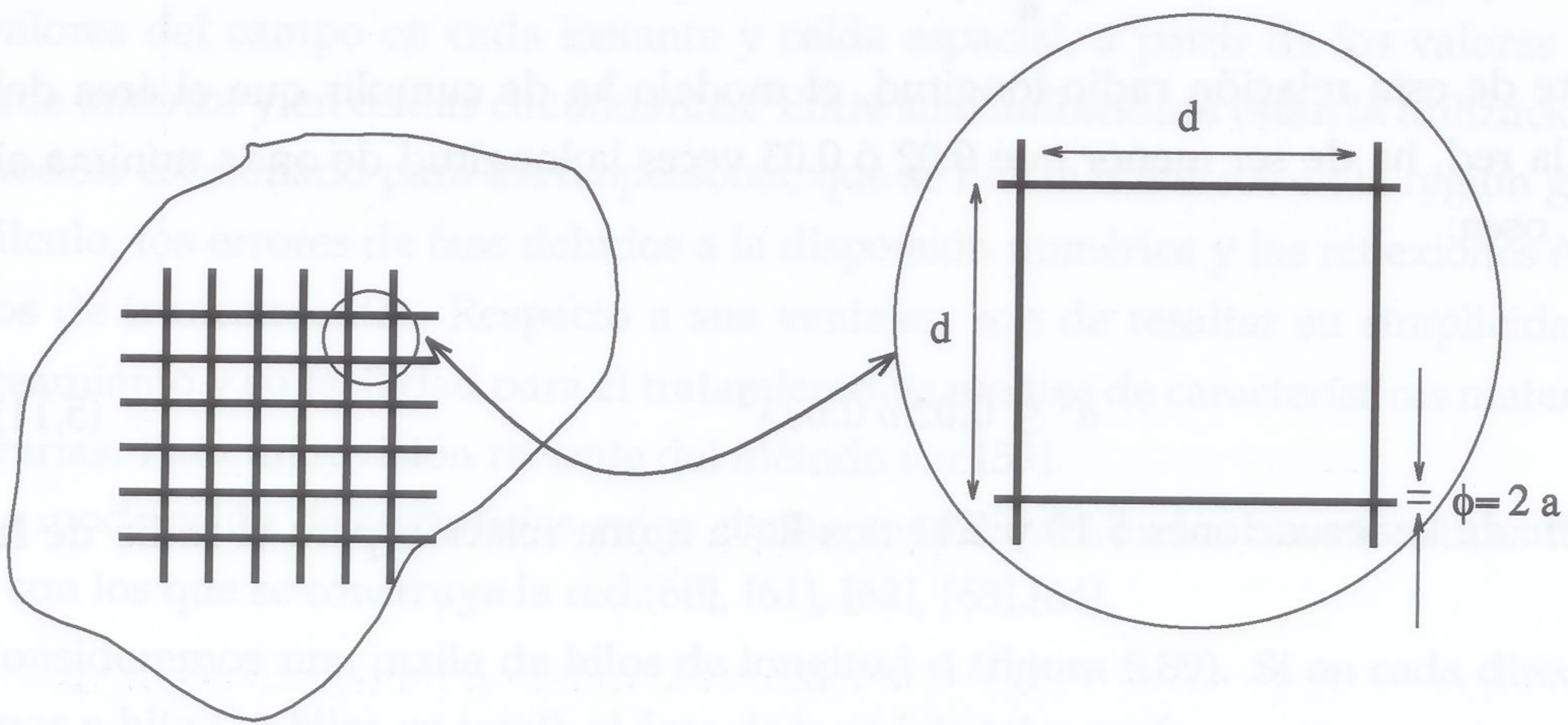
UNIVERSIDAD DE GRANADA

5 SET. 1994

COMISION DE DOCTORADO



a) Superficie cerrada conductora perfecta



b) Modelado por una red de hilos de la figura a)

Figura 5.89: Modelado de superficies reales por una malla de hilos



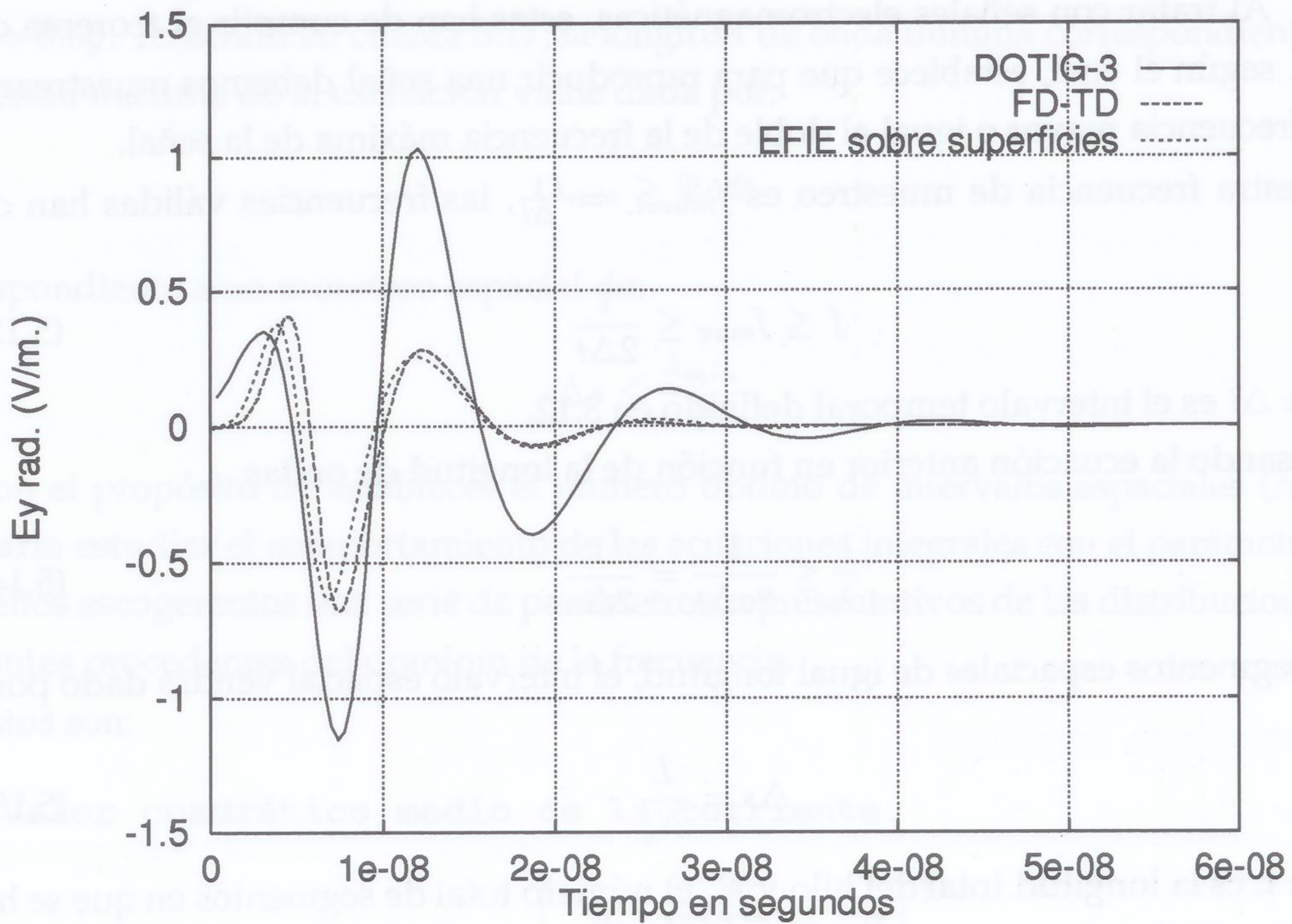


Figura 5.90: Campo de radiación de una placa de lado 1.4 m. modelada por hilos

5.3 Limitaciones y rango de aplicación.

En los capítulos anteriores, se estudió detalladamente el caso de un hilo recto encontrándose la ecuación que lo rige, a partir de las consideraciones efectuadas en el segundo capítulo.

La ecuación 3.29, como se ha visto en los apartados anteriores, se ha obtenido a partir de un proceso de muestreo espacio-temporal, por lo que los errores cometidos al discretizar una u otra variable pueden ser importantes. En este apartado estudiaremos algunas consideraciones numéricas a tener en cuenta. La elección del número de muestras a elegir es un problema importante y debe realizarse teniendo en cuenta diferentes aspectos. Al tratar con señales electromagnéticas, estas han de cumplir el teorema de Shannon, según el cual, establece que para reproducir una señal debemos muestrearla con una frecuencia mayor o igual al doble de la frecuencia máxima de la señal.

Si nuestra frecuencia de muestreo es $f_{muest.} = \frac{1}{\Delta t}$, las frecuencias válidas han de cumplir

$$f \leq f_{max} \leq \frac{1}{2\Delta t} \quad (5.13)$$

donde Δt es el intervalo temporal definido en 3.12.

Expresando la ecuación anterior en función de la longitud de ondas

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{2c\Delta t} = \frac{1}{2\Delta s} \quad (5.14)$$

Para segmentos espaciales de igual longitud, el intervalo espacial vendrá dado por

$$\Delta s = \frac{L}{N_s} \quad (5.15)$$

donde L es la longitud total del hilo y N_s el número total de segmentos en que se ha subdividido el hilo en cuestión.

Por tanto las frecuencias correspondientes son:

$$f \leq \frac{c}{\Psi \Delta s} \quad (5.16)$$

donde Ψ es un parámetro de muestreo espacial que, según algunos autores, en el dominio de la frecuencia toma los valores [26], [67]

$$6 \leq \Psi \leq 20 \quad (5.17)$$

En general el rango de validez del método vendrá dado por:

$$f \leq \text{minimo} \left\{ \frac{1}{2\Delta t}, \frac{c}{\Psi \Delta s} \right\} \quad (5.18)$$

A continuación estudiaremos un hilo recto actuando como radiador. La alimentación es en todos los casos estudiados un pulso gaussiano definido por:

$$v(t) = e^{(-g^2 t^2)} \quad (5.19)$$

cuya componente en frecuencia viene dada por:

$$\tilde{v}(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{g} e\left(-\pi^2 \frac{f^2}{g^2}\right) \quad (5.20)$$

Se define el ancho de banda efectivo, como la frecuencia a la cual la ecuación 5.20 decae la decima parte de su valor máximo, osea, la frecuencia máxima vendrá dada por $f_{max} = 0.5g$. Teniendo en cuenta 5.17, la longitud de onda mínima correspondiente a la frecuencia máxima de la excitación viene dada por:

$$\lambda_{min} \geq \Psi c dt \quad (5.21)$$

correspondiente a un muestreo espacial de:

$$\Delta s \leq \frac{\lambda_{min}}{\Psi} \quad (5.22)$$

Con el propósito de establecer el número óptimo de intervalos espaciales (N_s), es necesario estudiar el comportamiento de las ecuaciones integrales con el parámetro N_s . Para ellos escogeremos una serie de parámetros representativos de las distribuciones de corrientes procedentes del dominio de la frecuencia.

Estos son:

- **Valor cuadrático medio de la corriente.**

$$I_{RMS} = \left\{ \frac{1}{N_t N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_t} |I_{i,j}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.23)$$

- **Error cuadrático medio de la corriente.**

$$\mathcal{E}_{RMS} = \left\{ \frac{1}{N_t N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_t} |I_{i,j} - I_{i,j}^r|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.24)$$

- **Error cuadrático medio normalizado.**

$$\mathcal{E}_{normaRMS} = \left\{ \frac{N_s^R N_t^R}{N_t N_s} \frac{\sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_t} |I_{i,j} - I_{i,j}^R|^2}{\sum_{l=1}^{N_s} \sum_{m=1}^{N_t} |I_{l,m}^R|} \right\} \quad (5.25)$$

donde I^r es una solución de referencia que se supone correcta. A falta de datos, ésta solución se suele obtener de la representación de I_{RMS} .

Para hacer este estudio en la convergencia de la solución tomaremos como ejemplo antena un hilo recto de un metro de longitud y un radio de 0.00674 metros correspondiente a un parámetro de antena de $\Omega = 10$ donde L es la longitud del hilo y a es el radio del mismo alimentada en su centro. El parámetro de la gaussiana es de $g=3 \cdot 10^9 s^{-1}$.

Para obtener las limitaciones de DOTIG-3 con respecto al número de segmentos, longitud y radio, nos basaremos en un problema canónico. Sea un hilo dispersor de longitud $L=1m$. en la dirección del eje \hat{z} . Como referencia tomaremos como solución correcta la dada por un hilo recto de igual longitud, de radio 0.00674 m.³ subdividido en 80 segmentos.

5.3.1 Limitación en el número de segmentos

DOTIG-3, requiere que cada uno de los hilos que componen el modelo esté subdividido en segmentos de igual longitud. En este apartado se hará un estudio del número de segmentos en los que se dividen los hilos.

En la gráfica 5.91, puede observarse que el número de segmentos, no puede ser inferior a 12, ni superior a 180 segmentos.

$$12 < N_s < 180 \quad (5.26)$$

5.3.2 Limitación de radios

En DOTIG-3, sólo las corrientes a lo largo de la dirección axial a los hilos son consideradas, no permitiéndose variaciones circunferenciales de la corriente a lo largo de los hilos. El aceptar estas consideraciones depende básicamente de la relación $\frac{a}{\lambda}$ y de la tendencia de la excitación a producir corriente circunferencial. Para ello exigiremos a los hilos, que $2\pi a \ll \lambda$, donde a es el radio de los hilos. Esto implica que el radio ha de cumplir [49], [66]

$$a \ll 0.159\lambda \quad (5.27)$$

En la gráfica 5.92, podemos observar para la estructura de la subsección anterior, que para un $\Omega = 12.42$, correspondiente a un radio $a = 2.00923 \cdot 10^{-3}$, la señal comienza a desfasarse con respecto a la señal que tomamos como referencia ($\Omega = 10$). Para

³Esta longitud y radio corresponde a un parámetro de antena $\Omega = 10$

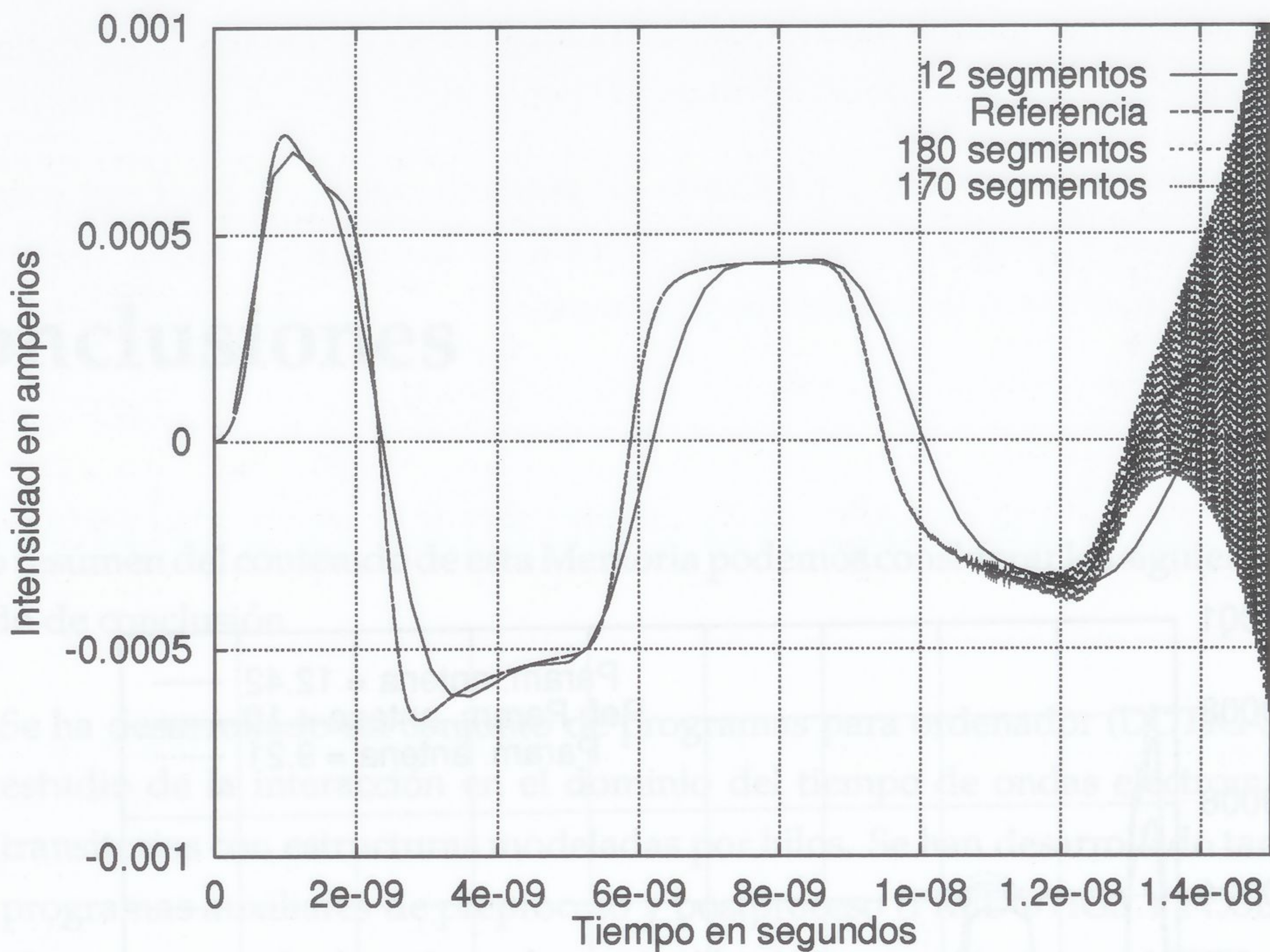


Figura 5.91: Intensidad en el punto central de un hilo con distintos segmentos.

$\Omega = 9.21$, $a = 0.01$, el desfase de la señal es pequeño con respecto a la de referencia. Podemos concluir, que el radio ha de estar comprendido, en DOTIG-3,

$$2.00923 * 10^{-3} < a < 0.01 \quad (5.28)$$

o sea

$$5 * 10^{-3} \lambda < a < 1.004615 \lambda \quad (5.29)$$

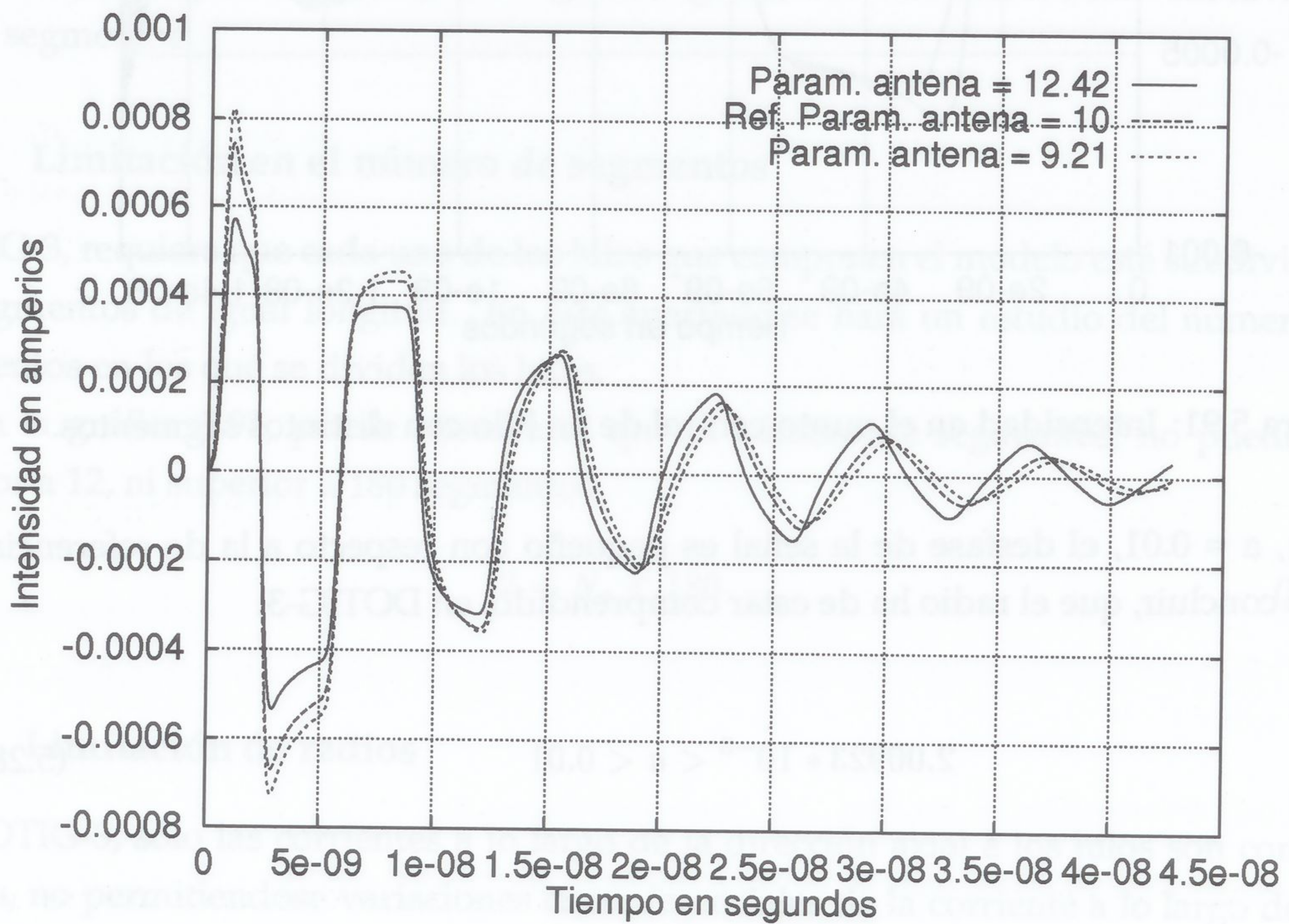


Figura 5.92: Intensidad en el punto central de un hilo con distintos radios.

Conclusiones

Como resúmen del contenido de esta Memoria podemos considerar los siguientes puntos a modo de conclusión

- Se ha desarrollado un conjunto de programas para ordenador (DOTIG-3) para el estudio de la interacción en el dominio del tiempo de ondas electromagnéticas transitorias con estructuras modeladas por hilos. Se han desarrollado también los programas auxiliares de preproceso y postproceso (PREDOTIG3 Y POSDOTIG3). El programa se ha basado en la resolución de la ecuación integral EFIE mediante el Método de los Momentos.
- El programa hace uso de la condición de contorno extendida, así como un análisis de las acumulaciones de carga en la estructura.
- Se ha introducido la Ley de Kirchhoff en el tratamiento de uniones, a fin de simplificar los cálculos que de ella se derivan.
- Se ha introducido un modelo de malla masivo en hilos y uniones
- Se ha validado el método numérico con resultados en el dominio de la frecuencia, así como con resultados encontrados en la bibliografía con distintos métodos numéricos. En general se ha encontrado una buena concordancia con ellos dentro de su rango de validez.
- Se ha estudiado en profundidad el hilo recto actuando como antena o dispersor, se han estudiado estructuras complejas bidimensionales y tridimensionales encontrándose una buena concordancia con resultados tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.
- Se ha estudiado y comparado resultados obtenidos para una placa conductora perfecta modelada por una red de hilos, observándose que aunque los resultados obtenidos con DOTIG-3 detectan las diferentes resonancias de la estructura, la diferencia en amplitud de los campos, nos hacen pensar que la modelación por

hilos de superficies, no es la más indicada, aconsejándose su uso con la EFIE para superficies.

- Por último se han estudiado y analizado las posibles causas de error, así como las limitaciones y rangos de validez en función de la longitud, radio, razones longitud-radio, número de segmentos y frecuencia.

Como resumen del contenido de esta memoria podemos considerar los siguientes puntos a modo de conclusión:

- Se ha desarrollado un programa para ordenador (DOTIC-3) para el estudio de la interacción en el dominio del tiempo de ondas electromagnéticas transmitidas con estructuras modeladas por hilos. Se han desarrollado también los programas auxiliares de preprocesado y postprocesado (TRIXOTIC3 y FIBROTIC3).
- El programa se ha basado en la resolución de la ecuación integral (EFIE) mediante el método de los Momentos.
- El programa hace uso de la condición de contorno extendida, así como un análisis de las simulaciones de carga en la estructura.
- Se ha introducido la Ley de Kirchhoff en el tratamiento de antenas, a fin de simplificar los cálculos que de ella se derivan.
- Se ha introducido un modelo de malla masiva en hilos y uniones.
- Se ha validado el método numérico desarrollado en el dominio de la frecuencia, así como con resultados encontrados en la bibliografía con distintos métodos numéricos. Se han obtenido también conclusiones con otros dominios de su rango de validez.
- Se ha estudiado en profundidad el hilo recto isotrópico como antena o dipolo, así como estudiado estructuras complejas bidimensionales y tridimensionales en un tiempo una buena concordancia con resultados tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.
- Se ha estudiado y comparado resultados obtenidos para una placa conductora perfecta modelada por una red de hilos, observándose que aunque los resultados obtenidos con DOTIC-3 detectan las diferentes resonancias de la estructura, la diferencia en amplitud de los ensayos, nos hacen pensar que la modelación por

Apéndice A

Cálculo de campos de radiación

El campo creado por una distribución arbitraria de fuentes viene dado por la ecuación [68],[39],[2]

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{V'} \frac{([\partial_t \vec{I}]_r \times \vec{R}) \times \vec{R}}{R^3} dV' \quad (\text{A.1})$$

Es un término de radiación, puesto que decae como $\frac{1}{R}$ con la distancia, para grandes distancias. Particularizando la ecuación A.1 para un hilo recto, se tiene:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{L'} \frac{([\partial_t \vec{I}] \times \hat{R}) \times \hat{R}}{R} dl' \quad (\text{A.2})$$

donde la intensidad viene dada en el tiempo retardado $t - \frac{R}{c}$.

Para grandes distancias, es usual la aproximación $R \approx r$ en el denominador, no así en el argumento de la intensidad, pues esta aproximación no es válida para las fases. Tomando para fases $R \approx r - r' \cos\theta$, la ecuación A.2 puede ser escrita como:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2 r} \int_{L'} \partial_t \vec{I}(t - \frac{R}{c}) \vec{\alpha} dl' \quad (\text{A.3})$$

donde $\vec{\alpha} = (\hat{I} \times \hat{r}) \times \hat{r}$.

La dirección del campo de radiación puede ser escrita como:

$$\vec{\alpha} = (\hat{I} \times \hat{r}) \times \hat{r} = \hat{r}(\hat{I} \cdot \hat{r}) - \hat{I}(\hat{r} \cdot \hat{r}) = \hat{r}(\hat{I} \cdot \hat{r}) - \hat{I} \quad (\text{A.4})$$

donde se ha usado la relación vectorial $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b})$.

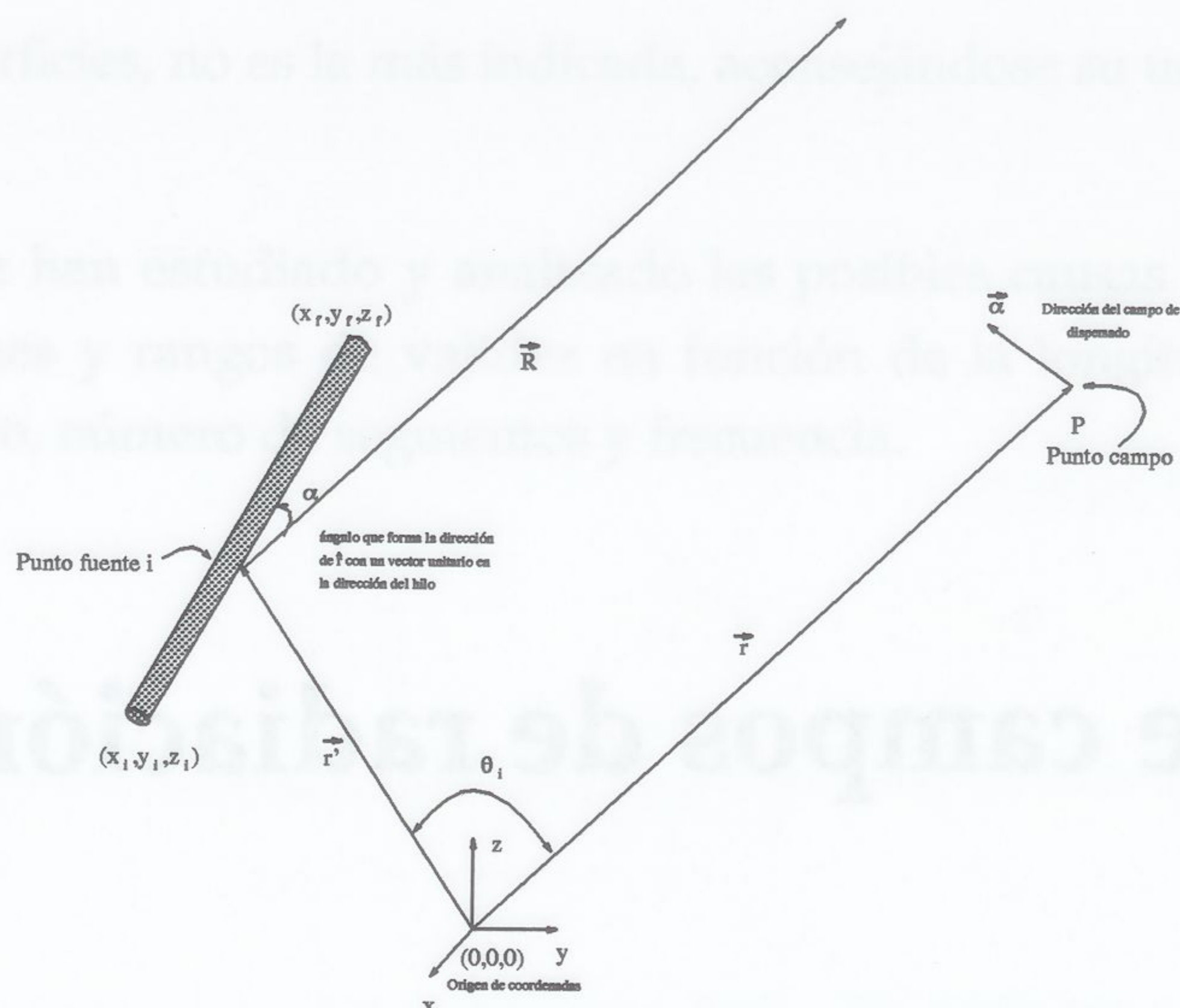


Figura A.1: Diagrama de coordenadas para el campo dispersado

Utilizando coordenadas locales, el campo de radiación puede ser escrito como:

$$r \vec{E}^s \left(\vec{r}, t_v + \frac{r + r_{max}}{c} \right) = \sum_{k=1}^{N_H} \frac{\vec{\alpha}}{4\pi\epsilon c^2} \sum_{i=1}^{N_s(k1)+1} \int_0^{\Delta s} \frac{\partial}{\partial t''_j} I_{i,j}(s''_i, t'') ds''_i \quad (\text{A.5})$$

donde r_{max} da cuenta del posible retraso temporal de la señal entre puntos fuente de la estructura.

El tiempo retardado viene dado por:

$$t_j + t'' = t' = t_v + \frac{r'(s'_i) \cos \theta_i(s'_i) - r_{max}}{c} \quad (\text{A.6})$$

o sea,

$$t'' = t_v + \frac{r'(s'_i) \cos \theta_i(s'_i) - r_{max}}{c} - t_j \quad (\text{A.7})$$

Para $t''=0$ y $s''_i = 0$ y aplicando que $t_v = v\Delta t$ y $t_j = j\Delta t$, se tiene:

$$\tilde{r}_{iu} = (v - j) = EMMC \left\{ \frac{-r'_i \cos \theta_i + r_{max}}{c\Delta t} \right\} \quad (\text{A.8})$$

Donde se denota por EMMC el Entero Mayor y Más Cercano.

Analogamente al proceso seguido en el capítulo 3 para el cálculo de las intensidades en el hilo, se interpolará la corriente según las ecuaciones 3.10 y 3.11.

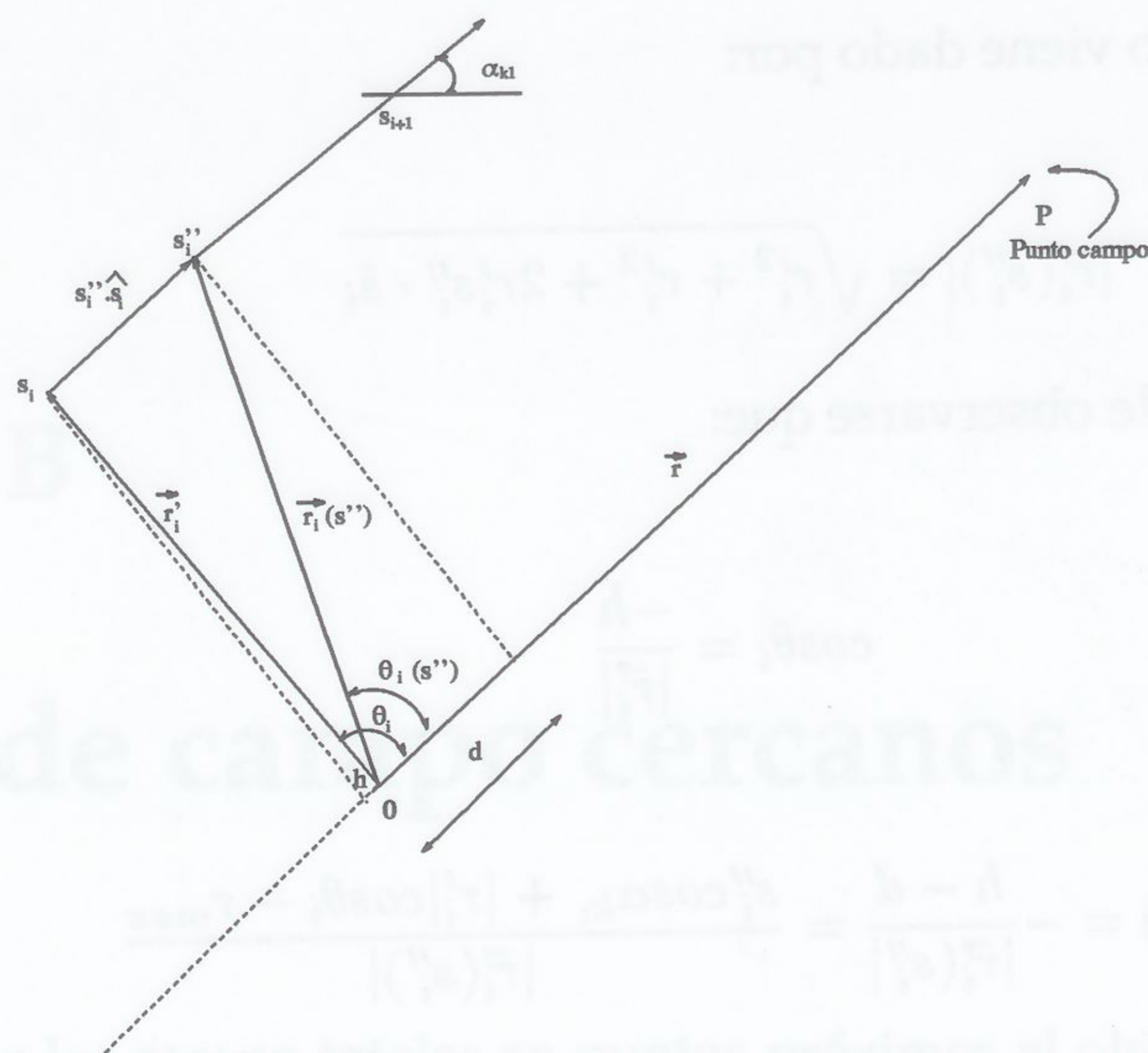


Figura A.2: Coordenadas locales para el campo dispersado

El término $\frac{\partial}{\partial t_j''} I_{i,j}(s_i'', t'')$ de la ecuación A.5 puede expresarse como:

$$\frac{\partial}{\partial t_j''} I_{i,j}(s_i'', t'') = \sum_{l=k}^{n+2} \sum_{m=n}^{n+2} \frac{\partial B_{i,j}^{(l,m)}}{\partial t_j''} I_{i+l,j+m} \quad (\text{A.9})$$

El término $I_{i+l,j+m}$ ya no depende de s_i'' , por lo que sólo analizaremos el término $\frac{\partial B_{i,j}^{(l,m)}}{\partial t_j''}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{i,j}^{(l,m)}}{\partial t_j''} &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(s_i''^2 + SP_i^l s_i'' + PP_i^l \right) (2t'' - SQ_i^m) = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left(s_i''^2 + SP_i^l s_i'' + PP_i^l \right) * \\ &* \left(2 \left[\tilde{r}_{iu} \Delta t + \frac{r'(s_i^l) \cos \theta_i(s_i^l) - r_{max}}{c} \right] - SQ_i^m \right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

De la figura A.2, podemos observar que:

$$\cos \alpha_{k1} = \hat{s}_i \cdot \hat{r}$$

$$\cos \theta_i = \hat{r}'_i \cdot \hat{r}$$

$$\vec{r}'_i(s_i'') = \vec{r}'_i + s_i'' \cdot \hat{s}_i$$

Por lo que su módulo viene dado por:

$$|\vec{r}'_i(s''_i)| = \sqrt{r_i'^2 + r_i''^2 + 2r_i' s''_i \cdot \hat{s}_i}$$

De la figura A.2 puede observarse que:

$$\cos\theta_i = \frac{-h}{|\vec{r}'_i|}$$

$$\cos\theta_i(s''_i) = -\frac{h-d}{|\vec{r}'_i(s''_i)|} = \frac{s''_i \cos\alpha_{k_1} + |r'_i| \cos\theta_i - r_{max}}{|\vec{r}'_i(s''_i)|}$$

Desarrollando el término

$$\begin{aligned} 2 \left[\frac{r'(s'_i) \cos\theta_i(s'_i) - r_{max}}{c} \right] &= 2 \left[\frac{s''_i \cos\alpha_{k_1} |r'_i| \cos\theta_i - r_{max}}{c |r'_i(s''_i)|} \right] |r'_i(s''_i)| = \\ &= 2 \left[\frac{s''_i \cos\alpha_{k_1} |r'_i| \cos\theta_i - r_{max}}{c} \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación del campo de radiación, tenemos:

$$\begin{aligned} r \vec{E}_{rad}(\vec{r}, t_v + \frac{r}{c}) &= - \sum_{k_1}^{N_H} \frac{\vec{\alpha}_{k_1}}{4\pi\epsilon c^2} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \int_0^{\Delta s} \frac{1}{D_i^{(l,m)}} \left(s_i''^2 + s_i'' S P_i^l + P P_i^l \right) * \\ * \left[2\Delta t \tilde{r}_{iu} + 2 \left[\frac{s_i'' \cos\alpha_{k_1} + |r'_i| \cos\theta_i - r_{max}}{c} \right] - S Q_j^m \right] I_{i+l, v-\tilde{r}_{iu}+m} \end{aligned} \quad (A.11)$$

En esta última expresión, todas las variables están en función de las locales, por lo que sólo tenemos que desarrollar e integrar sobre la variable s''_i

$$\begin{aligned} r \vec{E}_{rad}(\vec{r}, t_v + \frac{r}{c}) &= - \sum_{k_1}^{N_H} \frac{\vec{\alpha}_{k_1}}{4\pi\epsilon c^2} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \frac{1}{D_i^{(l,m)}} * \\ * \left[\frac{a_1}{4} ds^4 + \frac{a_2 + a_1 S P_i^l}{3} ds^3 + \frac{a_2 S P_i^l}{2} ds^2 + a_2 P P_i^l ds \right] I_{i+l, v-\tilde{r}_{iu}+m} \end{aligned} \quad (A.12)$$

donde se han definido las variables auxiliares:

$$a_1 = \frac{2 \cos\alpha_{k_1}}{c}$$

$$a_2 = 2\tilde{r}_{iu}\Delta t + 2 \left[\frac{|r'_i| \cos\theta_i - r_{max}}{c} \right] - S Q_j^m$$

Apéndice B

Cálculo de campo cercanos

Para la obtención de los campo totales en puntos próximos al objeto, partiremos de la ecuación integral, imponiendo que la componente tangencial de dicho campo total, sea cero en la superficie del objeto. (figura B.1)

Definiendo la ecuación del campo cercano como

$$\vec{E}_{cer}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{C(s')} \left\{ -\frac{q(s', t')\vec{R}}{R^3} + \frac{\vec{R}}{cR^2} \partial_{s'} I(s', t') + \frac{\hat{s}'}{c^2 R} \partial_{t'} I(s', t') \right\} ds' \quad (B.1)$$

Aproximando la estructura real por un modelo poligonal en donde $C(s') \approx \sum_{i=1}^{N_s} \Delta C_i$ se tiene:

$$\vec{E}_{cer}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^{\Delta s} \left\{ -\frac{q(s', t')\vec{R}}{R^3} + \frac{\vec{R}}{cR^2} \partial_{s'} I(s', t') + \frac{\hat{s}'}{c^2 R} \partial_{t'} I(s', t') \right\} ds'_i \quad (B.2)$$

Desarrollando el vector \vec{R} en función de las variable locales como se puede ver en la figura B.1, se tiene:

$$\vec{r} = \vec{r}_i + \vec{R}_i(s'_i) \Rightarrow \vec{R}_i(s'_i) = \vec{r} - \vec{r}_i$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_i(s''_i) + \vec{R}_i(s''_i) \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_i + \hat{s}_i \cdot \vec{s}''_i + \vec{R}_i(s''_i) \Rightarrow \vec{R}_i(s''_i) = \vec{r} - \vec{r}_i - \hat{s}_i \cdot \vec{s}''_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow R_i(s''_i) = \vec{R}_i - \hat{s}_i \cdot \vec{s}''_i \end{aligned}$$

Con respecto a la variable temporal, se tiene:

$$t = t_j + t''_j + \frac{R_i(s''_i)}{c} \Rightarrow t''_j = t - t_j - \frac{R_i(s''_i)}{c}$$

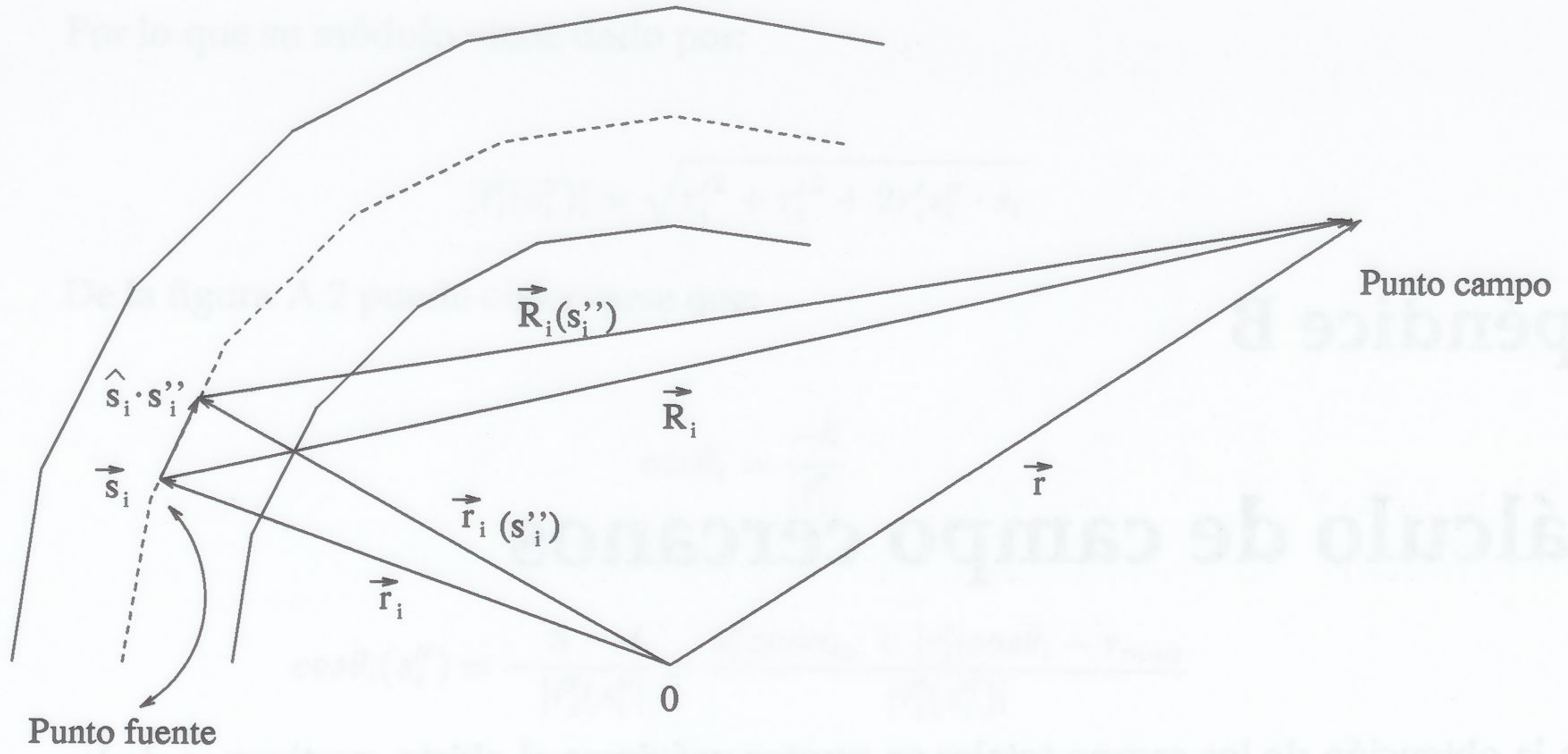


Figura B.1: Diagrama de coordenadas para el campo total

discretizando la variable temporal de la forma $t = v\Delta t$ y $t_j = j\Delta t$ se tiene:

$$t_j'' = (v - j)\Delta t - \frac{R_i(s_i'')}{c} = \tilde{r}_{ij}\Delta t - \frac{R_i(s_i'')}{c}$$

Para el caso de $s_i'' = 0$ y $t_j'' = 0$, se tiene:

$$0 = (v - j)\Delta t - \frac{R_i(s_i'' = 0)}{c} = \tilde{r}_{ij}\Delta t - \frac{R_i}{c} \Rightarrow \tilde{r}_{ij} = EM MC \left\{ \frac{R_i}{c\Delta t} \right\}$$

Introduciendo la ecuación de continuidad 3.21 e introduciendo la interpolación en la corriente (ecuación 3.10), nos queda:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{cer}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \int_0^{\Delta s} \left\{ \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R^3} \int_{-\Delta t}^{t_j''} (\partial_{s_i''} B_{i,j}^{l,m}) + \frac{(\vec{R}_i - \hat{s}_i \cdot \vec{s}_i'')}{cR^2} \partial_{s_i''} B_{i,j}^{l,m} + \right. \\ & \left. + \frac{\hat{s}_i'}{c^2 R} \partial_{t_j''} B_{i,j}^{l,m} \right\} I_{i+l,j+m} ds_i'' + \frac{(\vec{R}_i - \hat{s}_i \cdot \vec{s}_i'')}{R^3} \sum_{s=1}^{j-1} \int_{-\delta t}^0 \partial_{s_i''} B_{i,s}^{l,m} I_{i+l,s+m} ds_i'' \quad (B.3) \end{aligned}$$

Sacando factor común c^2 y definiendo las funciones vectoriales $\vec{F}_{i,l,m}$ y $\vec{C}_{i,l,m}$ se tiene:

$$\vec{E}_{cer}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \vec{F}_{i,l,m} I_{i+l,j+m} + \vec{C}_{i,l,m} \mathcal{Y}_{i,l,m} \right\} \quad (B.4)$$

donde

$$\vec{F}_{i,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\Delta s} \left\{ \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R^3} \int_{-\Delta t}^{t_j''} (\partial_{s_i''} B_{i,j}^{l,m}) + \frac{(\vec{R}_i - \hat{s}_i \cdot \vec{s}_i'')}{cR^2} \partial_{s_i''} B_{i,j}^{l,m} + \right.$$

$$+ \left. \frac{\hat{s}'}{c^2 R} \partial_{t_j''} B_{i,j}^{l,m} \right\} I_{i+l,j+m} ds_i'' \quad (\text{B.5})$$

$$C_{i,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\Delta s} \frac{(\vec{R}_i - \hat{s}_i \cdot \vec{s}_i'')}{R^3} \int_{-\delta t}^0 \partial_{s_i''} B_{i,s}^{l,m} I_{i+l,s+m} ds_i'' \quad (\text{B.6})$$

$$Y_{i,l,m} = \sum_{s=1}^{j-1} I_{i+l,s+m} \quad (\text{B.7})$$

El cálculo de $\vec{F}_{i,l,m}$ y $\vec{C}_{i,l,m}$ es idéntico al efectuado en las secciones 3.3.1 y 3.3.2, por lo que se referencia a dichas secciones para mayor detalle.

Supongamos una estructura, sobre la cual incide una OEM. Esta OEM induce sobre la superficie del conductor perfecto una corriente. Aplicando la ecuación de continuidad, tenemos [69]:

$$\partial_t \rho(\vec{r}, t) = - \int_{\Omega} \partial_r j(\vec{r}, \tau) d\tau \quad (\text{C.1})$$

Debido a que todos los instantes temporales han transcurrido totalmente, la ecuación C.1 puede expresarse como:

$$\rho(\vec{r}, t) = - \int_{-\Delta}^0 \partial_r j(\vec{r}, \tau) d\tau \quad (\text{C.2})$$

donde se ha supuesto $\rho_j = 0$.

Introduciendo la interpolación en la corriente, tenemos:

$$\rho(\vec{r}, t) = - \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} A_{l,m,n}^{(j)} \left[\int_{-\Delta}^0 \partial_r j_{l,m,n}(\vec{r}, \tau) d\tau \right] \right\} \quad (\text{C.3})$$

donde

$$A_{l,m,n}^{(j)} = \frac{\partial}{\partial r} \int_{\Omega} B_{l,m,n}^{(j)} d\tau = \frac{1}{D_{l,m,n}^{(j)}} \left\{ \frac{r^2}{3} + \frac{r^2}{2} SQ_1^2 + r^2 PQ_1^2 \right\} = \frac{1}{D_{l,m,n}^{(j)}} (2r^2 + 3r^2) \left\{ \frac{r^2}{3} + \frac{r^2}{2} SQ_1^2 + r^2 PQ_1^2 \right\} \quad (\text{C.4})$$

Substituyendo los límites de la integración, se obtiene:



Figura B.1: Diagrama de mallas para el campo total

discretizando la variable temporal de la forma $t = i\Delta t$ y $t_j = j\Delta t$ se tiene:

$$E_{i,j,m} = (i-j)\Delta t - \frac{R_i(t)}{c} = r_{ij}\Delta t - \frac{R_i(t)}{c}$$

Para el caso de $r_{ij} = 0$ y $t_j = 0$, se tiene:

$$0 = (i-j)\Delta t - \frac{R_i(t_j = 0)}{c} = r_{ij}\Delta t - \frac{R_i}{c} = r_{ij} = \Delta t \cdot M \cdot \left(\frac{R_i}{c\Delta t} \right)$$

Introduciendo la ecuación de continuidad 3.2) e introduciendo la interpolación en la corriente (ecuación 3.10), nos queda:

$$E_{i,j,m} = \frac{1}{4\pi r} \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} \sum_{m=1}^{N_z} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{R_i - R_j(t)}{R} \int_{t_0}^{t_1} (R_i(t)) + \frac{(R_i - R_j - R)}{R} \int_{t_0}^{t_1} R_i(t) + \frac{R}{2R} (R_i - R_j) \int_{t_0}^{t_1} R_i(t) \right] dt \quad (B.3)$$

Sacando factor común e^2 y definiendo las funciones vectoriales $F_{i,j,m}$ y $G_{i,j,m}$ se tiene:

$$E_{i,j,m} = \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} \sum_{m=1}^{N_z} \int_{t_0}^{t_1} \{ F_{i,j,m} + G_{i,j,m} \} dt \quad (B.4)$$

donde

$$F_{i,j,m} = \frac{1}{4\pi r} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{R_i - R_j(t)}{R} \int_{t_0}^{t_1} (R_i(t)) + \frac{(R_i - R_j - R)}{R} \int_{t_0}^{t_1} R_i(t) \right] dt$$

Apéndice C

Cálculo de cargas inducidas

Supongamos una estructura, sobre la cual incide una OEM. Esta OEM induce sobre la superficie del conductor perfecto una corriente. Aplicando la ecuación de continuidad, tenemos [69]:

$$q(s', t_j) = - \int_0^{t_j} \partial_{s'} I(s', \tau) d\tau \quad (\text{C.1})$$

Debido a que todos los instantes temporales han transcurrido totalmente, la ecuación C.1 puede expresarse como:

$$q(s', t_j) = - \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s'} I(s', \tau) d\tau \quad (\text{C.2})$$

donde se ha supuesto $t_j'' = 0$.

Introduciendo la interpolación en la corriente, tenemos:

$$q(s', t_j'' = 0) = - \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \sum_{s=1}^j A_{i,s}^{(l,m)} \Big|_{-\Delta t}^0 I_{i+l,s+m} \right\} \quad (\text{C.3})$$

donde

$$\begin{aligned} A_{i,s}^{(l,m)} &= \frac{\partial}{\partial s_i''} \int B_i^{(l,m)} d\tau'' = \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left\{ \frac{\tau''^3}{3} + \frac{\tau''^2}{2} S Q_j^m + \tau'' P Q_j^m \right\} = \\ &= \frac{1}{D_{i,j}^{(l,m)}} (2s_i'' + S P_i^l) \left\{ \frac{\tau''^3}{3} + \frac{\tau''^2}{2} S Q_j^m + \tau'' P Q_j^m \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Substituyendo los límites de la integración, se obtiene:

$$A_{i,s}^{(l,m)} \Big|_{-\Delta t}^0 = \frac{2s_i'' + SP_i^l}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left\{ \frac{\Delta t^3}{3} + \frac{\Delta t^2}{2} SQ_j^m + \Delta t PQ_j^m \right\} \quad (C.5)$$

Particularizando la ecuación para $s_i'' = 0$, o sea forzando la ecuación a los extremos de los intervalos espaciales, se tiene para $s_i'' = 0$ y $t_j'' = 0$:

$$q_{i,j} = - \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \sum_{s=1}^j \frac{SP_i^l}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left\{ \frac{\Delta t^3}{3} + \frac{\Delta t^2}{2} SQ_j^m + \Delta t PQ_j^m \right\} I_{i+l,s+m} \quad (C.6)$$

Como para Δt iguales, $D_{i,j}^{l,m}$ no tiene dependencia en la variable j , la expresión C.6 nos queda como:

$$q_{i,j} = - \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \frac{SP_i^l}{D_{i,j}^{(l,m)}} \left\{ \frac{\Delta t^3}{3} + \frac{\Delta t^2}{2} SQ_j^m + \Delta t PQ_j^m \right\} \mathcal{Y}_{i+l,j+m} \quad (C.7)$$

donde se ha definido $\mathcal{Y}_{i+l,j+m}$ como:

$$\mathcal{Y}_{i+l,j+m} = \sum_{s=1}^j I_{i+l,s+m} \quad (C.8)$$

Bibliografía

- [1] E. K. Miller, "A selective survey of computational electromagnetics," *IEEE transaction on antennas and propagation*, vol. 36, pp. 1281–1305, Sept. 1988.
- [2] A. Rubio, *DOTIG-1: Un programa para el estudio en el dominio del tiempo de la interacción de ondas electromagnéticas con estructuras de hilos*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Granada, Mayo 1988.
- [3] R. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. New York: McMillan, 1968.
- [4] R. Mittra, *Computer Techniques for Electromagnetics*. Pergamon Press, 1973.
- [5] J. Moore and R. Pizer, *Moment Methods in Electromagnetic. Techniques and Applications*. John Wiley and Sons Inc., 1983.
- [6] R. Mittra, *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*. Springer Verlag, New York 1975.
- [7] A. Salinas, *Nuevas aportaciones a la interacción de ondas electromagnéticas transitorias con estructuras conductoras*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Granada, Abril 1991.
- [8] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary problems in isotropic media," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, no. 14, pp. 302–307, 1966.
- [9] A. Taflove and K. Umashankar, *The Finite-Difference Time-Domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions with arbitrary structures*. Elsevier, New York: PIER 2. Progress in electromagnetics research. Finite elements and Finite Difference methods in electromagnetic scattering, 1990.
- [10] J. Portí, "Estudio comparativo de diferentes ecuaciones integrales para el campo eléctrico en el dominio del tiempo. aplicación al cálculo del campo de cercanías," *Memoria de Licenciatura*, Universidad de Granada, Granada, Mayo 1988.

- [11] J. Fornieles, "Inestabilidades en el proceso de solución escalonado en el tiempo de ecuaciones integrales. aplicaciones a la ecuación integral del campo magnético (mfie).," Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, 1992.
- [12] W.-X. Wang, "The exact kernel for cylindrical antenna," *IEEE transaction on antennas and propagation*, vol. 39, pp. 434–435, Apr. 1991.
- [13] D. Werner, "An exact formulation for the vector potential of a cylindrical antenna with uniformly distributed current and arbitrary radius," *IEEE transaction on antennas and propagation*, vol. 41, pp. 1009–1018, Aug. 1993.
- [14] K. Mei, *Computational Electromagnetics*, ch. On the integral equations of thin wire antennas, pp. 131–135. IEEE Press, 1992.
- [15] E. K. Miller, R. Bevensee, A. Poggio, R. Adams, and F. Deadrick, "An evaluation of computer programs using integral equations for the electromagnetic analysis of thin wire structures," tech. rep., Lawrence Livermore Laboratory. University of California, 1974. Interaction Notes, Note March.
- [16] R. G. A. Rubio, A. Salinas and I. Sánchez, eds., *Time domain analysis of dielectric coated wire antennas and scatterers*, (Antalye, Turk.), Melecon-94 7th Mediterranean electrotechnical conference, 1994.
- [17] A. A. Salinas Extremera, R. Gómez Martín and I. Sánchez García, "Modelling of straight thin wire using time-domain electric field integral equations," *IEE Proc. Microw. Antennas Propag.*, vol. 141, pp. 123–126, Apr. 1994.
- [18] R. Gómez, A. Salinas, A. Rubio, and I. Sánchez, "An improved version of the computer code dotig for the time domain analysis of thin wire structures," *Applied Computational Electromagnetic Society (ACES)*, vol. 8, pp. 39–53, July 1993.
- [19] R. P. Leal, *Estudio de antenas helicoidales y antenas filiformes sobre plano de masa*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica, Madrid, 1986.
- [20] A. Tijhuis, P. Zhongqiu, and A. Rubio, "Transient excitation of a straight thin wire segment: a new look at an old problem," *IEEE Transaction on antennas and propagation*, vol. 40, pp. 1132–1146, Oct. 1992.
- [21] K. Al-Badwaihy and J. Yen, "Extended boundary condition integrate equations for perfectly conducting and dielectric bodies: Formulation and uniqueness," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, pp. 546–551, July 1975.

- [22] C. Taylor and D. Wilton, "The extended boundary conditions solution of dipole antenna of revolution," *IEEE transaction on antennas and propagation*, vol. AP-20, pp. 772–776, 1972.
- [23] R. Harrington, D. Wilton, C. M. Butler, R. Mittra, and C. L. Bennett, *Computational Methods in Electromagnetics*. SCEE Press, St Cloud FL., 1981.
- [24] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley, New York, 1989. cap. 7.
- [25] T. K. Sarkar, "A note on the variational method (raleigh-ritz), galerkins method, and the method of least squares," *Radio Science*, no. 18, p. 1207, 1983.
- [26] D. Dudley, "Error minimization and convergence in numerical methods," *Electromagnetic*, no. 5, p. 89, 1985.
- [27] R. Harrington, *Computational Electromagnetics*, ch. Origin and development of the method of moments for field computation, pp. 43–47. IEEE Press, 1992.
- [28] E. H. Newman and K. Kingsley, *Computer Physics Comuncations*, vol. 68. North-Holland, 1991.
- [29] J. J. H. Wang, *Generalized Moment Method in Electromagnetic*. John Wiley and Sons, 1991.
- [30] J. A. Morente and R. Gomez, "Arrays para se ales no sinusoidales," *IV Congreso de la U.R.S.I. España*, pp. 123–128, Sevilla, 1984.
- [31] H. Harmuth, "Antennas for nonsinusoidal waves," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 25, pp. 346–357, 1983.
- [32] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [33] M.I. Aksum and R. Mittra, "Choices of expansion and testing functions for the method of moments applied to a class of electromagnetic problems," *IEEE transaction on microwave theory and techniques*, vol. 41, pp. 503–509, Mar. 1993.
- [34] T. Sarkar, A. Djordjevic, and E. Arvas, "On the choice of expansion and weighting functions in the numerical solution of operator equations," *IEEE Trans. antennas and propagation*, vol. AP-33, pp. 988–996, 1985.
- [35] E. Miller, A. Poggio, and G. Burke, "An integro-differential technique for the time-domain analysis of thin wire structures. the numerical method," *Journal of computational physics*, vol. 12, pp. 24–48, 1973.

- [36] A. Poggio, E. Miller, and G. Burke, "An integro-differential equation technique for the time-domain analysis of thin wire structures. numerical results.," *Journal of computational physics*, vol. 12, pp. 210–233, 1973.
- [37] T. Wu and R. King, "The tapered antennas and its application to the junction problem for thin wires," *IEEE Transaction on antennas and propagations*, vol. AP-24, pp. 42–45, Jan. 1976.
- [38] T. K. Liu and F. M. Tesche, "Analysis of antennas and scatterers with nonlinear loads," *IEEE Transactions on antennas and propagation*, vol. AP-24, pp. 131–139, Mar. 1976.
- [39] A. Salinas, "Aplicacion de la técnica monopulso a una agrupación plana de antenas lineales excitadas por pulsos electromagnéticos," Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, Granada, Abril 1986.
- [40] E. E. Altshuler, "A monopole antenna loaded with a modified folded dipole," *IEEE transaction on antennas and propagation*, vol. 41, pp. 871–876, July 1993.
- [41] C.-C. Huang and T.-H. Chu, "Analysis of wire scatterers with nonlinear or time-harmonic loads in the frequency domain," *IEEE transaction on antennas and propagation*, vol. 41, pp. 25–30, Jan. 1993.
- [42] M. Sato and R. Sato, "Transient response between a v-antenna and a collinear dipole antenna," *IEEE transaction on antennas and propagation*, vol. AP-32, pp. 1211–1217, Nov. 1984.
- [43] J. A. Landt, E. K. Miller, and F. J. Deadrick, "Time domain modeling of nonlinear loads," *IEEE Transaction on antennas and propagation*, vol. AP-31, pp. 121–126, Jan. 1983.
- [44] M. Sato and R. Sato, "Analysis of transient responses between coupled dipole antennas by using a simple equivalent circuit," *IEEE Transaction on antennas and propagation*, vol. AP-33, pp. 1015–1020, Sept. 1985.
- [45] J. Pelletier, *Techniques numériques appliquées au calcul scientifique*. Mason et Cie. Editeurs, Paris 1971.
- [46] J. L. Sierra, I. Sánchez García, A. Salinas Extremera, and R. Gómez Martín, "Modelo de fuente de alimentación delta-gap en el estudio de antenas de hilo mediante el método de los momentos en el dominio del tiempo," *U.R.S.I Comité Español*, vol. 2, pp. 743–747, Septiembre 1993.

- [47] B. Popovic, M. Dragovic, and A. Djorjevic, *Analysis and Synthesis of wire antennas*. 58B Station Road, Letchworth, Herts. SG63BE, England: Electronic and Electrical Engineering Research Studies, 1982.
- [48] A. Djordjevic, M. Bazdar, G. Vitosevic, T. Sarkar, and R. Harrington, *Analysis of wire Antennas and Scatterers*. Artech House, 1990. Software Manual.
- [49] G. Burke and A. Poggio, *NEEDS "The numerical electromagnetic engineering design system" NEC "Numerical electromagnetics code" Part III*. Lawrence Livermore National Laboratory, ver. 2.2 ed., Jan. 1981. User's guide.
- [50] W. H. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes. The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1989.
- [51] O. Einarsson, *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*, ch. 12. *The Wire*, pp. 472–502. Hemisphere publishing corporation. J.J. Bowman and T.B.A. Senior and P.L.E. Uslenghi. Eds., 1987.
- [52] Y. Y. Hu, "Back-scattering cross sections of a center-loaded cylindrical antenna," *IRE Trans*, vol. AP-6, pp. 140–148, Jan. 1958.
- [53] D. Ponomarev, A. Goryachev, V. Zhavoronkov, and S. Goryunova, "Experimental time-domain antenna studies," *Plenum Publishing Corporation*, vol. 30, no. 8, pp. 763–767, 1988.
- [54] A. J. Poggio and E. Miller, *Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems in computer techniques for electromagnetics*. New York: Pergamon. R. Mittra Ed., 1973.
- [55] A. Glisson, *On the development of numerical techniques for treating arbitrarily-shaped surface*. PhD thesis, Universidad de Mississippi, 1978.
- [56] S. M. Rao and D. R. Wilton, "Transient scattering by conducting surfaces of arbitrarily shapes," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 39, pp. 56–61, Jan. 1991.
- [57] J. Fornieles Callejón, *Metodos integrales y proceso de solución escalonado en el tiempo aplicados al estudio de la dispersión electromagnética transitoria*. PhD thesis, Universidad de Granada, 1994. Pendiente de su defensa.
- [58] K. Yee, "Numerical solution of initial boundary problems in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302–307, 1966.

- [59] S. González García, *Contribuciones al método de las diferencias finitas para la resolución de las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo*. PhD thesis, Universidad de Granada, 1994. Pendiente de su defensa.
- [60] K. S. H. Lee, L. Marin, and J. P. Castillo, "Limitations of wire-grid modeling of a closed surface," *IEEE Transaction on electromagnetic compatibility*, pp. 123–129, Aug. 1976.
- [61] E. Newman and D. Pozar, *Computational Electromagnetics*, ch. Electromagnetic modeling of composite wire and surface geometries, pp. 91–96. IEEE Press, 1992.
- [62] L. Oyekanmi and J. Watkins, "Selecting wire radius for grid/mesh models," *ACES*, pp. 43–57, 1990.
- [63] S. Kashyap and A. Louie, "Surface modelling for em interaction analysis," *ACES*, vol. 6, pp. 38–52, 1991.
- [64] J. H. Richmond, "A wire-grid model for scattering by conducting bodies," *IEEE Trans. on antennas and propagation*, vol. AP-14, pp. 86–90, Nov. 1966.
- [65] T. R. Ferguson and R. J. Balestri, "Efficient solution of large moments problems: Wire grid modeling criteria and conversion to surface currents," *ACES*, vol. 3, pp. 55–81, Spring 1988.
- [66] C. Trueman and S. Kubina, "Verifying wire-grid model integrity with program "check"," *ACES. Applied Computational Electromagnetics Society*, vol. 5, no. 2, pp. 17–42, 1990.
- [67] R. S. Elliot, *Antenna Theory and design*. Prentice hall, New York, 1981.
- [68] R. Gómez, *Campo electromagnético. Propagación y radiación*. Universidad de Granada, 1984.
- [69] W.-Y. Pan, "An experimental investigation of the distribution of current and charge induced on a tabular conducting cylinder by an electromagnetic pulse," *IEEE transaction on electromagnetic compatibility*, vol. EMC-27, pp. 88–95, May 1985.