Do not worry about your difficulties in Mathematics.
I can assure you mine are still greater.

Albert Einstein

Índice general

Introducción

El objetivo de esta introducción es, en primer lugar, presentar los problemas que vamos a estudiar en esta memoria. En segundo lugar, situar estos problemas dentro de la literatura previa sobre este tema. Por último, hacer un breve resumen de los resultados que se obtienen en este trabajo.

El problema que se estudia en esta memoria es sencillo de plantear. Si X es un espacio de Banach, la norma de un funcional x^* se define como

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : \; x \in X, \; \|x\| \leq 1\}$$

Diremos que x^* alcanza su norma si dicho supremo es en realidad un máximo. A principios de los años sesenta E. Bishop y R. R. Phelps demostraron que cualquier espacio de Banach es subreflexivo, esto es, el conjunto de los funcionales que alcanzan su norma es denso en el espacio dual. Además preguntaron qué se podía decir sobre aplicaciones lineales y continuas entre espacios de Banach.

Si X e Y son espacios de Banach, y $T : X \to Y$ es un operador lineal y continuo, la norma del operador está definida mediante la bien conocida expresión

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \; x \in X, \; \|x\| \leq 1\}.$$

En el caso de que este supremo sea un máximo, diremos que el operador T alcanza su norma. Si en lugar del cuerpo base, que es el contexto en el que se establece el Teorema de Bishop-Phelps, tenemos un espacio de Banach cualquiera, la situación cambia radicalmente. J. Lindenstrauss ([37]) fue el primero en comenzar el estudio sistemático de las parejas de espacios de Banach X e Y verificando que cualquier operador lineal y continuo se puede aproximar por operadores que alcanzan su norma. En dicho trabajo también aparece el primer ejemplo de pareja (X, Y) para la que no se cumple la mencionada densidad.

El trabajo pionero de J. Lindenstrauss ha sido continuado por numerosos autores, como V. Zizler [50], J. Bourgain [18], W. Schachermayer [46] y W. T. Gowers [30], por citar sólo algunos, dando lugar a una extensa "teoría de operadores que alcanzan su norma". El desarrollo de esta teoría ha desvelado interesantes relaciones entre los operadores que alcanzan su norma y otras propiedades muy relevantes de los espacios de Banach como, por ejemplo, la propiedad de Radon-Nikodym. Aún hoy quedan, sin embargo, importantes problemas abiertos en esta línea.

Incluso en el ambiente de los espacios de Banach "clásicos" (espacios L_p y espacios de funciones continuas), el problema de la densidad de los operadores que alcanzan su norma es considerablemente complicado. Por ejemplo, hasta 1990 ([30]) no se supo que en el Teorema de Bishop-Phelps no se puede sustituir el cuerpo base por un espacio de Hilbert de dimensión infinita y aún hoy desconocemos si se puede sustituir por $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea. En el ambiente de los espacios de Banach clásicos, W. Schachermayer probó el siguiente resultado:

Teorema. [W. Schachermayer] *Sea X un espacio de Banach real y K un espacio topológico compacto Hausdorff. Entonces los operadores débilmente compactos de*

$C(K)$ en X se pueden aproximar por operadores débilmente compactos que alcanzan su norma.

Este teorema ha sido el hilo conductor de esta memoria. En un primer paso nos planteamos extenderlo al caso complejo. Con un poco más de esfuerzo adicional también podemos trabajar sobre un espacio localmente compacto en lugar de compacto, usando naturalmente las funciones continuas que se anulan en el infinito. El siguiente resultado, recogido en el segundo capítulo de esta memoria, detalla ésto.

Teorema. *Sea X un espacio de Banach y L un espacio topológico localmente compacto Hausdorff. Entonces los operadores débilmente compactos de $C_0(L)$ en X se pueden aproximar por operadores débilmente compactos que alcanzan su norma.*

La prueba de este teorema consiste básicamente en hacer un análisis cuidadoso de los argumentos de W. Schachermayer, comprobando que son válidos en un contexto más general. Comentemos brevemente que la principal herramienta en la demostración original de W. Schachermayer es el conocimiento de los subconjuntos débilmente compactos del dual de un espacio de funciones continuas y algunas cuestiones sobre una medida como la regularidad o la descomposición de Hahn. En el caso complejo utilizaremos la descomposición polar de una medida como herramienta que sustituye a la descomposición de Hahn. La compacidad débil está caracterizada y la regularidad la utilizaremos de una forma levemente distinta: el Teorema de Lusin nos permite aproximar una medida por otra con signo continuo. Es fácil comprobar que esta condición es la adecuada para aproximar un funcional (una medida a fin de cuentas) sobre el espacio de las funciones continuas por funcionales que alcancen su norma.

El siguiente paso, que se encuentra recogido en el tercer capítulo de esta memoria consiste en considerar una C^*-álgebra cualquiera en lugar de

$C_0(L)$. En este ambiente el siguiente resultado recoge la contribución que hemos realizado.

Teorema. *Sea A una C^*-álgebra cuyo bidual es un álgebra de von Neumann de tipo I finita y X un espacio de Banach. Entonces los operadores débilmente compactos de A en X se pueden aproximar por operadores débilmente compactos que alcanzan su norma.*

El bidual de una C^*-álgebra conmutativa es un álgebra conmutativa y toda álgebra de von Neumann conmutativa es de tipo I finito. En consecuencia, este resultado es efectivamente una extensión del anterior. Más adelante comentaremos el alcance de esta extensión.

En este ambiente tratamos con los funcionales normales en lugar de las medidas del caso conmutativo y ahora disponemos de la descomposición polar de éstos en lugar de la descomposición polar de las medidas. El principal problema son el resto de las herramientas. El Teorema de Lusin admite una versión no conmutativa pero no es "isométrica" en el sentido que utilizamos en el segundo capítulo. La regularidad de una medida es un concepto más complicado de trasladar a C^*-álgebras cualesquiera. El mismo problema se plantea cuando pretendemos generalizar la idea de proyección asociada a un subconjunto abierto o cerrado de L. En el caso no conmutativo ya no es cierto que cualquier proyección "abierta" se pueda aproximar por proyecciones "compactas".

La demostración del resultado antes expuesto pasa por una propiedad intermedia. Comprobamos que dicha propiedad es una condición suficiente para que los operadores débilmente compactos de A en un espacio de Banach complejo se puedan aproximar por operadores que alcanzan su norma. La demostración de que las C^*-álgebras cuyo bidual es un álgebra de von Neumann de tipo I finito verifican dicha propiedad ocupa parte del tercer capítulo.

El segundo problema que se trata en esta memoria es el de la posible densidad de las formas multilineales que alcanzan su norma. En 1995, R. M. Aron, C. Finet y E. Werner [14] inician el estudio de este problema. Más concretamente, la norma de una forma N-lineal continua T en un espacio de Banach X viene dada por

$$\|T\| = \sup\{|T(x_1, \ldots, x_N)| : \ x_i \in X, \|x_i\| \leq 1\}$$

y decimos que T alcanza su norma cuando el supremo anterior es un máximo.

En paralelo con el estudio de los operadores que alcanzan su norma, los mencionados autores se plantean la posible densidad del conjunto de las formas N-lineales que alcanzan su norma en el espacio de todas las formas N-lineales continuas. Prueban, por ejemplo, que dicha densidad se verifica para espacios con la propiedad de Radon-Nikodym y preguntan qué ocurre en general.

Poco después, M. D. Acosta, F. J. Aguirre y R. Payá [4] encuentran el primer ejemplo de espacio de Banach para el que no se verifica la densidad de las formas bilineales que alcanzan su norma. Queda así abierta una línea de trabajo: ¿cuáles son los espacios de Banach en los que se verifica la versión multilineal del Teorema de Bishop-Phelps?

Es interesante mencionar que Y. S. Choi [21] demostró que las formas bilineales en $L_1[0,1]$ que alcanzan su norma no son densas en el espacio de las formas bilineales continuas. Así pues, la no validez de un Teorema de Bishop-Phelps bilineal no es algo propio de contraejemplos “rebuscados”. La escasez de formas bilineales que alcanzan su norma puede producirse en las mejores familias de espacios de Banach.

Motivados por estos precedentes, en esta memoria estudiamos qué ocurre con las formas bilineales en espacios de funciones continuas y en C^*-álgebras más generales.

Respecto al contexto conmutativo, obtenemos el siguiente resultado que clarifica la situación por completo.

Teorema. *Sea L un espacio topológico localmente compacto Hausdorff. Entonces cualquier forma bilineal continua en $C_0(L)$ se puede aproximar por formas bilineales que alcanzan su norma.*

La demostración está fuertemente basada en los resultados previos sobre operadores débilmente compactos en espacios de funciones continuas y en el hecho de que cualquier operador de $C_0(L)$ en su dual es débilmente compacto. Este hecho es una consecuencia de la desigualdad de Grothendieck, lo que tiene el inconveniente de fallar para formas N-lineales cuando $N \geq 3$. Cuando imponemos esta "compacidad débil" a las formas trilineales (en general N-lineales con $N \geq 3$) se obtiene una condición adicional sobre L. Más concretamente dicha "compacidad débil" equivale a que L sea disperso, esto es, a que todo subconjunto no vacío de L tenga un punto aislado. Así, para formas multilineales hemos conseguido obtener el siguiente resultado.

Teorema. *Sea L un espacio topológico localmente compacto Hausdorff disperso. Entonces cualquier forma multilineal en $C_0(L)$ se puede aproximar por formas multilineales que alcanzan su norma.*

En ambiente no conmutativo, también aprovechamos que todo operador de una C^*-álgebra en su dual es débilmente compacto y los resultados previamente comentados para este tipo de operadores. Conseguimos así el siguiente resultado:

Teorema. *Sea A una C^*-álgebra cuyo bidual es un álgebra de von Neumann de tipo I finito. Entonces cualquier forma bilineal en A se puede aproximar por formas bilineales que alcanzan su norma.*

También abordamos, en ambiente no conmutativo la densidad de las formas N-lineales que alcanzan su norma, con $N \geq 3$. Conseguimos respuesta afirmativa para una clase de C^*-álgebras algo más restrictiva. Partiendo de la C^*-álgebra $M_n(\mathbb{C})$ de las matrices $n \times n$ con coeficientes complejos, podemos considerar la C^*-álgebra $C_0(\Omega, M_n(\mathbb{C}))$ de las funciones continuas que se anulan en el infinito, definidas en un espacio localmente compacto Hausdorff Ω y con valores en $M_n(\mathbb{C})$. Finalmente, podemos hacer c_0-sumas de álgebras de este tipo, usando espacios topológicos dispersos, y obtenemos lo siguiente:

Teorema. *Sea $\{n_i\}_{i\in I}$ una familia de naturales arbitraria, $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos localmente compactos Hausdorff dispersos, y A la C^*-álgebra*

$$A = c_0 - \bigoplus_{i\in I} C_0(\Omega_i, M_{n_i}(\mathbb{C})).$$

Entonces las formas N-lineales continuas en A se pueden aproximar por formas N-lineales que alcanzan su norma.

Por último, en ambiente no conmutativo hemos hecho un estudio sobre una clase general de C^*-álgebras especialmente importante y que verifica las condiciones de los teoremas anteriores: las C^*-álgebras grupo. Más concretamente nos hemos centrado en una clase de grupos localmente compactos: los grupos de Moore. Este ambiente es lo suficientemente genérico como para incluir a los grupos compactos y a los grupos abelianos. Denotemos por $C^*(G)$ la C^*-álgebra asociada a un grupo G.

En el caso particular de que el grupo sea abeliano, $C^*(G)$ es un álgebra conmutativa. Como consecuencia, los resultados que obtenemos ya se encuentran recogidos en el segundo capítulo de esta memoria.

Si el grupo G no es abeliano, no hay una manera general de identificar su C^*-álgebra asociada. En la sección de ejemplos del tercer capítulo utilizamos herramientas del análisis armónico y del análisis funcional para establecer una representación concreta de este tipo de álgebras para grupos de Moore conexos. Probamos que todas ellas son de la forma

$$A = c_0 - \bigoplus_{i \in I} C_0(\Omega_i, M_{n_i}(\mathbb{C})).$$

El siguiente teorema es un ejemplo de lo obtenido.

Teorema. *Sea H un grupo localmente compacto abeliano, K un grupo compacto. Entonces cualquier operador débilmente compacto de $C^*(H \times K)$ en un espacio de Banach complejo puede ser aproximado por operadores que alcanzan su norma. Además cualquier forma bilineal en $C^*(H \times K)$ puede ser aproximada por formas bilineales que alcanzan su norma.*

Por último, merece la pena comentar que en el caso conmutativo hemos añadido un breve estudio sobre formas multilineales y radio numérico. El radio numérico de un operador $T : X \to X$, donde X es espacio de Banach, se define como

$$v(T) = \sup\{|x^*(Tx)| : \ \|x^*\| = \|x\| = x^*(x) = 1\}.$$

De nuevo nos podemos plantear la pregunta de si este supremo es en realidad un máximo o si podemos aproximar un operador por operadores que alcanzan su radio numérico. Recientemente Y. S. Choi introdujo la noción de radio numérico para aplicaciones multilineales. Si $\varphi : X \times X \times \ldots \times X \to X$ es una aplicación N-lineal, el radio numérico de φ se define como

$$v(\varphi) = \sup\{|x^*(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N))| : \|x^*\| = \|x_k\| = x^*(x_k) = 1,\ k = 1, \ldots, N\},$$

y diremos que φ alcanza su radio numérico si dicho supremo es un máximo.

En la última sección del segundo capítulo demostraremos que, en espacios de funciones continuas, no hay diferencia entre alcanzar el radio numérico y alcanzar la norma. Si $\mathcal{L}(^N C_0(L), C_0(L))$ denota al espacio de las formas N-lineales de $C_0(L)$ en si mismo, se tiene el siguiente resultado.

Teorema. *Para cualquier* $\varphi \in \mathcal{L}(^N C_0(L), C_0(L))$ *se tiene que* $v(\varphi) = \|\varphi\|$. *Además,* φ *alcanza su radio numérico si, y sólo si,* φ *alcanza su norma.*

En particular se tiene el siguiente teorema.

Teorema. *Si* L *tiene un subconjunto denso de puntos aislados, entonces las aplicaciones bilineales en* $C_0(L)$ *y con valores en* $C_0(L)$ *que alcanzan su norma son densas en* $\mathcal{L}(^2 C_0(L), C_0(L))$.

Si L *es disperso, entonces las aplicaciones* N*-lineales en* $C_0(L)$ *con valores en* $C_0(L)$ *se pueden aproximar por aplicaciones que alcanzan su norma.*

Hay que decir que la exposición que se hace en esta memoria es, en cierta manera, "cronológica". Cuando comenzamos el estudio de este problema, en un primer paso nos planteamos qué ocurría en el caso conmutativo. Una vez resuelto éste en su mayor parte, nos planteamos la posible extensión de los resultados obtenidos al caso no conmutativo. Los tres capítulos de esta memoria se corresponden aproximadamente con este desarrollo. Los resultados de esta memoria correspondientes al caso conmutativo se encuentran recogidos en [11]. Los resultados en ambiente no conmutativo están actualmente sometidos a publicación [12].

Sólo me queda agradecer a todos los que de una manera u otra han hecho que este trabajo haya sido lo que es. En primer lugar mi familia que me ha aguantado durante mucho tiempo (y espero que lo sigan haciendo).

Quiero agradecer a todo el Departamento de Análisis Matemático el apoyo y el ánimo durante todos estos años. Esta no es la manera fácil de no olvidar a nadie sino la constatación de que hay muy buena gente por aquí.

También tengo que agradecer todo el tiempo, trabajo, paciencia y mucho más, que Rafael Payá y Armando Villena han dedicado a esta memoria. Todo lo que hay de bueno aquí se debe a ellos.

También es obligado acordarse de toda la gente que me ha ayudado con los aspectos técnicos de la escritura. Para no dejar fuera a nadie, de nuevo me gustaría agradecer a todo el departamento lo que me ha hecho aprender sobre LaTeXy sus entresijos ;-).

Especialmente tengo que agradecer a Pepe, Pilar, Camilo, Chiqui y Conchita que siempre han estado cuando los he necesitado. No sabría por donde empezar a contar todo lo que han hecho por mí. Sólo puedo decir que gracias.

Capítulo 1

Antecedentes y principios básicos

1.1. Antecedentes

En 1961, E. Bishop y R. R. Phelps demostraron que cualquier espacio de Banach es subreflexivo o, dicho de otra manera, que los funcionales que alcanzan su norma son densos en el espacio dual. Este resultado ha sido el inicio de una fructífera línea de investigación dentro de la que se encuadra esta memoria.

Antes de entrar en más detalles, fijemos algo de notación. El cuerpo base será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y, salvo que se diga lo contrario, los resultados serán válidos en cualquiera de ambos casos. Si X es un espacio de Banach, X^* denotará su dual, B_X denotará la bola unidad y S_X la esfera unidad. Recordemos que la norma de un funcional x^* se define como el supremo de los valores del funcional sobre la bola unidad:

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : \ x \in B_X\}.$$

Diremos que el funcional x^* alcanza su norma si dicho supremo es de hecho un máximo:

$$x^* \text{ alcanza su norma } \Leftrightarrow \exists\, x_0 \in S_X : \; x^*(x_0) = \|x^*\|$$

Volviendo al principio, E. Bishop y R. R. Phelps demostraron el siguiente resultado:

1.1.1 Teorema. *([17]) El conjunto de los funcionales que alcanzan su norma en un espacio de Banach X es denso en su dual X^*.*

En ese mismo trabajo, los autores ya plantean la pregunta de qué ocurre cuando se cambia el cuerpo base por un espacio de Banach cualquiera. En concreto, si X e Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal y continuo, diremos que T alcanza su norma si existe $x_0 \in S_X$ verificando que

$$\|Tx_0\| = \|T\|$$

o, lo que es lo mismo, si en la definición de la norma de T,

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \; x \in B_X\},$$

se puede cambiar supremo por máximo. Siguiendo la costumbre establecida, denotaremos $NA(X,Y)$ al conjunto de los operadores que alcanzan su norma.

El problema que se plantea es si para cualesquiera espacios de Banach X e Y se tiene que $\overline{NA(X,Y)} = \mathcal{L}(X,Y)$, donde $\mathcal{L}(X,Y)$ denota al espacio de los operadores lineales y continuos de X en Y. En toda esta memoria los operadores siempre se supondrán lineales y continuos aunque a veces se omitan estos calificativos.

En 1963, J. Lindenstrauss ([37]) da el primer ejemplo en el que no es cierta la mencionada densidad. También da los primeros resultados afirmativos. Por ejemplo demuestra lo siguiente:

1.1.2 Teorema. *Sean X e Y espacios de Banach. El conjunto de los operadores de X en Y cuyos segundos adjuntos alcanzan su norma es denso en el espacio de los operadores lineales y continuos.*

Este resultado es mejorado posteriormente por V. Zizler:

1.1.3 Teorema. *([50, Proposition 4]) Sean X e Y espacios de Banach. El conjunto de los operadores de X en Y cuyos adjuntos alcanzan su norma es denso en el espacio de los operadores lineales y continuos.*

El problema de caracterizar los pares de espacios de Banach que verifican $\overline{NA(X,Y)} = \mathcal{L}(X,Y)$ es demasiado ambicioso y, por ello, J. Lindenstrauss introduce las propiedades A y B. Esencialmente lo que se hace es fijar uno de los dos espacios de Banach. Concretamente, se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad A si,

$$\overline{NA(X,Y)} = \mathcal{L}(X,Y),$$

para cualquier espacio de Banach Y. La propiedad B es análoga: diremos que un espacio de Banach Y tiene la propiedad B si, para cualquier espacio de Banach X, se verifica que

$$\overline{NA(X,Y)} = \mathcal{L}(X,Y).$$

Con esta nomenclatura, el Teorema de Bishop-Phelps afirma que el cuerpo tiene la propiedad B. En la literatura posterior sobre el tema hay numerosas aportaciones sobre condiciones suficientes o necesarias para que se verifiquen alguna de estas propiedades. Mencionemos como muestra el siguiente resultado de J. Bourgain ([18]).

1.1.4 Teorema. *Todo espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym verifica la propiedad A.*

El estudio de los espacios de Banach que verifican alguna de estas dos propiedades dista mucho de estar completo. Por citar un ejemplo especialmente ilustrativo, no se sabe si $\mathbb{R}^2$, el espacio euclídeo de dimensión dos, tiene la propiedad B. Es claro que cualquier espacio de dimensión finita tiene la propiedad A.

Se puede consultar, por ejemplo, [1, 2, 3] para buscar más referencias sobre este tema.

Pasemos a los antecedentes directamente relacionados con el tema de este trabajo. En 1979 J. Johnson y J. Wolfe (ver [35]) demostraron que los operadores entre dos espacios de funciones continuas se pueden aproximar por operadores que alcanzan su norma. Por otro lado, A. Iwanik ([34]) había demostrado el mismo resultado para operadores entre espacios de Lebesgue. W. Schachermayer en [46] estudia que ocurre con los casos "cruzados". En primer lugar demuestra

$$\overline{NA(L_1[0,1], C[0,1])} \neq \mathcal{L}(L_1[0,1], C[0,1]).$$

En segundo lugar, y el resultado que más nos interesa, demuestra que los operadores *débilmente compactos* de $C(K)$ en un espacio de Banach real arbitrario se pueden aproximar por operadores débilmente compactos que alcanzan su norma.

En este primer capítulo haremos una exposición detallada del resultado de W. Schachermayer, analizando qué propiedades de $C(K)$ se utilizan. La última sección de este capítulo será el resultado de este análisis.

El segundo problema que se estudia en este trabajo tiene su origen en un artículo del año 1995 en el que R. Aron, C. Finet y E. Werner se plantean el estudio de la densidad para otro tipo de aplicaciones.

Recordemos que dada una forma N-lineal continua

$$T : X \times X \times \overset{N}{\cdots} \times X \to \mathbb{K}$$

en un espacio de Banach X, se define su norma como

$$\|T\| = \sup\{|T(x_1, x_2, \ldots, x_N)| : \; x_i \in B_X, \; i = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Diremos que T alcanza su norma si el supremo es máximo, en analogía con el caso lineal.

Denotaremos $\mathcal{L}(^N X, Y)$ al espacio de las aplicaciones N-lineales continuas de X en Y. En el caso particular de que Y sea el cuerpo base, lo omitiremos. Al conjunto de las aplicaciones N-lineales que alcanzan su norma lo denotaremos $\mathcal{AL}(^N X, Y)$.

El problema que se va a estudiar es, de nuevo, cuándo se cumple que

$$\overline{\mathcal{AL}(^N X)} = \mathcal{L}(^N X).$$

En el mencionado artículo R. Aron, C. Finet y E. Werner demuestran resultados similares a los ya conocidos para operadores. Por ejemplo el siguiente teorema es análogo al que hemos mencionado para operadores lineales.

1.1.5 Teorema. *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym. Entonces,*

$$\overline{\mathcal{AL}(^N X)} = \mathcal{L}(^N X),$$

para cualquier natural N.

También se plantea como problema en este artículo si dicha densidad es cierta para cualquier espacio de Banach en analogía con el Teorema de Bishop-Phelps para funcionales lineales. Al año siguiente M. D. Acosta, F. Aguirre y R. Payá ([4]) probaron que la respuesta es negativa encontrando un contraejemplo. La demostración hace uso de un espacio considerado con anterioridad por W. T. Gowers y hay que esperar otro año para que aparezca el primer contraejemplo entre los espacios clásicos: $L_1[0,1]$ (ver [21]).

Recordemos, por último, que hay una estrecha relación entre formas multilineales y operadores entre espacios de Banach. Si $B : X \times X \to \mathbb{K}$ es una forma bilineal, podemos definir $\widetilde{B} : X \to X^*$ como

$$\widetilde{B}(x)(y) = B(x,y),\ \forall x, y \in X.$$

¿Qué relación hay entre que B alcance su norma y que lo haga $\widetilde{B}$? Es inmediato comprobar que si B alcanza su norma, entonces $\widetilde{B}$ también la alcanza. En cambio $\widetilde{B}$ puede alcanzar su norma sin que B lo haga. En realidad la situación puede ser incluso peor. Puede ocurrir que $\overline{NA(X,X^*)} = \mathcal{L}(X,X^*)$ y $\overline{\mathcal{AL}(^2X)} \neq \mathcal{L}(^2X)$. Efectivamente, ya hemos comentado que $L_1[0,1]$ verifica esta última condición, y R. Payá y C. Finet ([29], ver también [41]) demostraron que los operadores de $L_1[0,1]$ en su dual que alcanzan la norma son densos en el espacio de los operadores lineales y continuos.

1.2. Operadores de $C(K)$ en un espacio de Banach real

En esta sección vamos a estudiar operadores débilmente compactos definidos en un espacio $C(K)$ de funciones continuas en un espacio topológico compacto Hausdorff y con valores en un espacio de Banach real arbitrario.

Veremos que dichos operadores siempre se pueden aproximar por operadores que alcanzan su norma. Los resultados de esta sección aparecen en [46].

En primer lugar hay que recalcar que durante esta sección el cuerpo base siempre será $\mathbb{R}$.

Fijemos algo de notación: K denotará un espacio topológico compacto Hausdorff y $C(K)$ denotará el espacio de las funciones continuas con valores reales con la norma del supremo.

Notaremos $M(K)$ al dual de $C(K)$, esto es, el espacio de Banach de las medidas de Borel regulares con la norma dada por la variación total.

Si $T : C(K) \to X$ es un operador lineal y continuo que alcanza su norma, entonces T^* también la alcanza. Consideremos por un momento el conjunto $W = T^*(B_{X^*})$, la imagen por el operador adjunto de la bola unidad de X^*. ¿Qué debe verificar este conjunto para poder afirmar que T^* o T alcanza su norma? Es inmediato comprobar que T^* alcanza su norma si existe $w_0 \in W$ verificando que $\|w\| \leq \|w_0\|$ para cualquier w en W. ¿Qué debemos exigir para que también T alcance su norma? No es difícil comprobar que esto ocurre si, y sólo si, w_0 es un funcional (una medida) que alcanza su norma en $C(K)$. En el caso particular de que T sea débilmente compacto se tiene además que W será un conjunto relativamente débilmente compacto.

La forma de obtener la densidad será, por tanto, perturbando el conjunto W para obtener todo esto que hemos dicho. Antes de ello vamos a introducir algunas de las herramientas que nos harán falta.

En primer lugar, la descomposición de Hahn de una medida de Borel, y su correspondiente extensión, la descomposición polar de una medida compleja o un funcional normal en un álgebra de von Neumann, va a ser ingrediente común durante todo este trabajo.

1.2.1 Proposición. *Sea μ una medida de Borel real en un espacio L localmente compacto Hausdorff. Entonces existen dos subconjuntos de Borel B^+ y B^- tales que $B^+ \cup B^- = L$, $B^+ \cap B^- = \emptyset$, y de modo que las variaciones positiva y negativa, μ^+ y μ^-, de μ verifican*

$$\mu^+(E) = \mu(B^+ \cap E), \;\; \mu^-(E) = -\mu(B^- \cap E),$$

para cualquier conjunto de Borel E.

Recordemos que hay una estrecha relación entre la compacidad débil de un operador y el comportamiento del operador adjunto: un operador es débilmente compacto si, y sólo si, su adjunto lo es. En vista de esta afirmación, estudiar la compacidad débil de un operador $T : C(K) \to X$ es equivalente a estudiar la compacidad débil de $T^* : X^* \to C(K)^*$ y, por tanto, nuestro primer paso va a ser caracterizar los subconjuntos débilmente compactos de $M(K)$.

1.2.2 Definición. Sea Ω un espacio topológico y W un subconjunto del espacio de las medidas de Borel sobre Ω. Se dice que W es *uniformemente regular interior* si para cada subconjunto Borel medible E de Ω y cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto compacto $K \subseteq E$ tal que

$$\sup\{|\mu|(E \setminus K) : \; \mu \in W\} \leq \varepsilon$$

Pues bien, esta uniformidad es la condición que caracteriza la compacidad débil.

1.2.3 Teorema. *([25, Theorem VII.14]) Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff y W un subconjunto acotado de $M(K)$. Entonces W es relativamente débilmente compacto si, y sólo si, es uniformemente regular interior.*

Además de esta caracterización de la compacidad débil, usaremos el siguiente hecho.

1.2.4 Teorema. *Sea L un espacio topológico localmente compacto Hausdorff. Entonces cualquier operador lineal y continuo $T : C_0(L) \to C_0(L)^*$ es débilmente compacto.*

En el Apéndice incluido en esta memoria hay un desarrollo más detallado sobre operadores débilmente compactos en espacios de funciones continuas o, más generalmente, en C^*-álgebras cualesquiera.

La demostración de la densidad de los operadores débilmente compactos en un espacio de funciones continuas se basa en primer lugar en que los funcionales en $C(K)$ que alcanzan su norma son conocidos. Una medida alcanza su norma si, y sólo si, su signo es continuo. La herramienta principal va a ser el siguiente lema que permite conseguir medidas con signo continuo en "abundancia" utilizando la regularidad interior y el Lema de Uryshon. Esta demostración, como ya hemos mencionado, se debe a W. Schachermayer. Su inclusión en esta memoria se debe a que gran parte de las ideas que se manejan en este trabajo están basadas en esta demostración.

1.2.5 Lema. *Sea W un subconjunto débilmente compacto de $M(K)$ y $\mu_0 \in M(K)$. Para cualquier número positivo ε, existe un operador $S : M(K) \to M(K)$ verificando:*

1. $\|S\| = 1$,
2. $\|S\mu - \mu\| < \varepsilon$, $\forall\, \mu \in W$, *y*
3. *existe* $f_0 \in C(K)$ *con* $\|f_0\| = 1$ *tal que* $\|\mu_0\| = (S\mu_0)(f_0)$.

Demostración. Sea $\mu_0 = \mu_0^+ - \mu_0^-$ la descomposición de Hahn de μ_0 en su partes positiva y negativa y sean B^+ y B^- dos conjuntos de Borel tales que

$$\|\mu_0\| = \mu_0^+(B^+) + \mu_0^-(B^-).$$

Como W es débilmente compacto, el Teorema 1.2.3 nos permite concluir que W es uniformemente regular interior y, por tanto, se pueden encontrar subconjuntos compactos K^+ y K^- de B^+ y B^- respectivamente tales que

$$|\mu|(B^+ \setminus K^+) + |\mu|(B^- \setminus K^-) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.1}$$

para todo $\mu \in W$.

Fijemos $x^+ \in K^+$ y $x^- \in K^-$ y definimos $F : K \to K$ como

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in K^+ \cup K^- \\ x^+, & \text{si } x \in B^+ \setminus K^+ \\ x^-, & \text{si } x \in B^- \setminus K^- \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que F es Borel medible. Definimos $S : M(K) \to M(K)$ como $S(\mu) = F(\mu)$, o sea,

$$S(\mu)(f) = \int_K f \circ F \, d\mu$$

para cualesquiera $f \in C(K)$ y $\mu \in M(K)$. Claramente se tiene que $\|S\| \leq 1$ ya que

$$|S(\mu)(f)| \leq \int_K |f \circ F| \, d|\mu| \leq \|f\| \|\mu\|.$$

Si $\mu \in W$ y $f \in C(K)$, podemos obtener la segunda afirmación del lema usando la desigualdad (1.1):

$$\begin{aligned}
|S(\mu)(f) - \mu(f)| =& |\int_K (f \circ F - f)\, d\mu| \\
\leq& \int_{K\setminus(K^+\cup K^-)} |f \circ F - f|\, d|\mu| \\
\leq& 2\|f\||\mu|(K \setminus (K^+ \cup K^-) \\
\leq& \varepsilon \|f\|
\end{aligned}$$

Por último, dado que K^+ y K^- son compactos disjuntos, el Lema de Uryshon nos proporciona una función continua $f_0 \in C(K)$ verificando que

$$\|f_0\| = 1,\ f_{0|K^+} = 1 \text{ y } f_{0|K^-} = -1.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
S(\mu_0)(f_0) =& \int_K f_0 \circ F\, d\mu_0 \\
=& \int_{B^+} 1\, d\mu_0 + \int_{B^-} -1\, d\mu_0 \\
=& \mu_0(B^+) - \mu_0(B^-) \\
=& \|\mu_0\|,
\end{aligned}$$

con lo que se tiene la última afirmación del lema y además que $\|S\| = 1$. $\square$

Algunas de las herramientas que han intervenido de manera esencial en la demostración son la descomposición de una medida, la regularidad interior y el Lema de Uryshon. En el resto de esta memoria iremos viendo que sustitutos podemos encontrar para trasladar este resultado a un ambiente más general.

El último ingrediente que vamos a usar es el teorema de V. Zizler que hemos mencionado con anterioridad (Teorema 1.1.3).

Ya que hemos comentado las herramientas necesarias, pasemos a enunciar el resultado de W. Schachermayer.

1.2.6 Teorema ([46]). *Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Entonces cualquier operador débilmente compacto de $C(K)$ en un espacio de Banach real X arbitrario puede ser aproximado por operadores débilmente compactos que alcanzan su norma.*

1.3. Principio general

La demostración del teorema anterior está basada en el lema previo sobre subconjuntos débilmente compactos de $M(K)$ y la posibilidad de perturbarlos. Si podemos hacer eso en un subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach dual, el resto de la demostración no depende de propiedades particulares de los espacios de funciones continuas, sino únicamente de propiedades genéricas de los operadores débilmente compactos. Los resultados de esta sección van a recoger toda esa información. Hay que hacer notar que los resultados del resto del capítulo son válidos tanto en caso real como en caso complejo. También hay que resaltar que este resultado incluirá como caso particular el teorema de W. Schachermayer y que la demostración está fuertemente basada en la demostración de éste.

Los operadores débilmente compactos son el hilo conductor de este trabajo. Es por esto que comenzamos recordando algunas propiedades básicas de este tipo de operadores.

1.3.1 Lema. *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es débilmente compacto.*

2. *T^* es débilmente compacto.*

3. *$T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$.*

1.3.2 Teorema. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que dado un subconjunto W débilmente compacto de X^*, $x_0^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un operador lineal y continuo $S : X^* \to X^*$ verificando las siguientes propiedades:*

1. *$\|S\| = 1$,*

2. *existe $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$ tal que $(Sx_0^*)(x_0) = \|x_0^*\|$, y*

3. *$\|Sx^* - x^*\| < \varepsilon$, $\forall x^* \in W$.*

Entonces, cualquier operador débilmente compacto de X en un espacio de Banach arbitrario puede ser aproximado por operadores débilmente compactos que alcanzan su norma.

Demostración. Sea Y un espacio de Banach arbitrario, y $A : X \to Y$ un operador débilmente compacto no cero. El hecho de que los operadores cuyo adjunto alcanza la norma sean densos en el espacio de los operadores lineales y continuos (Teorema 1.1.3) nos permite suponer que A es un operador cuyo adjunto alcanza su norma. Dicho operador adjunto $A^* : Y^* \to X^*$ también es débilmente compacto y por tanto $W = A^*(B_{Y^*})$ es un conjunto relativamente débilmente compacto y tiene un elemento x_0^* con norma máxima, esto es,

$$\|x_0^*\| = \sup\{\|x^*\| : x^* \in W\} = \|A^*\|$$

Si ahora aplicamos la hipótesis a x_0^* y W, existe un operador $S : X^* \to X^*$ de norma uno verificando que

1. $\|Sx^* - x^*\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, para cualquier $x^* \in W$ y,
2. existe $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$ tal que $\|x_0^*\| = (Sx_0^*)(x_0)$.

Como A es débilmente compacto $A^{**}(X^{**}) \subseteq Y$ y en consecuencia

$$B = ((SA^*)^*)_{|X}$$

es un operador de X en Y. Veamos que B cumple todo lo necesario. En primer lugar se tiene que

$$\begin{aligned}\|A^* - SA^*\| =& \sup\{\|A^*(y^*) - (SA^*)(y^*)\| : \ y^* \in B_{Y^*}\}\\ =& \sup\{\|x^* - Sx^*\| : \ x^* \in W\} < \varepsilon,\end{aligned}$$

con lo que $\|A - B\| < \varepsilon$.

En segundo lugar, veamos que B alcanza su norma. Podemos acotar la norma de B de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\|B\| =& \|(SA^*)^*\|\\ =& \|SA^*\|\\ \leq& \|A^*\|.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\|B(x_0)\| =& \sup\{|x^*(B(x_0))| : \ x^* \in B_{X^*}\}\\ =& \sup\{|(SA^*)(x^*)(x_0)| : \ x^* \in B_{X^*}\}\\ \geq& \sup\{|(x^*)(x_0)| : \ x^* \in W\}\\ \geq& |x_0^*(x_0)|\\ \geq& \|x_0^*\|\\ =& \|A^*\|\end{aligned}$$

con lo que B alcanza su norma en x_0. En consecuencia B alcanza su norma y está suficientemente cerca de A como queríamos demostrar. □

En lo que resta de este trabajo veremos cómo podemos comprobar esta hipótesis en C^*-álgebras conmutativas cualesquiera como primer paso y algunas C^*-álgebras no conmutativas en último lugar.

El siguiente paso va a ser aprovechar el anterior resultado para estudiar el problema de las formas bilineales. Usando la identificación entre formas bilineales en un espacio de Banach X y operadores de X en su dual X^* va a ser posible demostrar la densidad de las formas bilineales que alcanzan su norma en el conjunto de las formas bilineales continuas. La única diferencia con el teorema anterior es que exigimos que los operadores de X en X^* sean débilmente compactos como hipótesis adicional. Obsérvese que esta condición se cumple automáticamente en el caso particular $X = C(K)$ y, más generalmente, en el caso de cualquier C^*-álgebra (ver Apéndice para una exposición más detallada).

1.3.3 Teorema. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que dado un subconjunto W débilmente compacto de X^*, $x_0^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un operador lineal y continuo $S : X^* \to X^*$ verificando las siguientes propiedades:*

1. $\|S\| = 1$,
2. *existe* $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$ *tal que* $(Sx_0^*)(x_0) = \|x_0^*\|$, *y*
3. $\|Sx^* - x^*\| < \varepsilon$, $\forall x^* \in W$.

Entonces, si cualquier operador de X en X^* es débilmente compacto, las formas bilineales en X que alcanzan su norma son densas en el espacio de las formas bilineales continuas.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{L}(^2X)$ una forma bilineal continua y $\varepsilon > 0$. Consideremos el operador asociado $\widetilde{A} : X \to X^*$ definido como

$$\widetilde{A}(x)(y) = A(x,y), \ \ \forall x, y \in X$$

Por hipótesis cualquier operador de X en su dual es débilmente compacto y, aplicando el Teorema 1.3.2 podemos encontrar un operador $\widetilde{B} : X \to X^*$ que alcanza su norma en algún elemento $x_0 \in S_X$ y verifica que

$$\|A - B\| = \|\widetilde{A} - \widetilde{B}\| < \varepsilon/2.$$

Denotemos por W al cierre de $\widetilde{B}(B_X)$ en X^*. W es un conjunto débilmente compacto y podemos volver a aplicar la hipótesis del teorema: existe un operador $S : X^* \to X^*$ verificando que

1. $\|S\| \leq 1$,
2. existe $y_0 \in S_X$ tal que $\|\widetilde{B}\| = \|\widetilde{B}(x_0)\| = \langle y_0, S(\widetilde{B}(x_0))\rangle$, y
3. $\|Sy - y\| < \varepsilon/2$, para cualquier $y \in W$.

De esta última condición se deduce que

$$\|S\widetilde{B} - \widetilde{B}\| \leq \varepsilon/2.$$

Para acabar, veamos que la forma bilineal C asociada al operador $S\widetilde{B}$ alcanza su norma y está cerca de A. En primer lugar esta dista poco de A:

$$\begin{aligned}\|C - A\| &= \|S\widetilde{B} - \widetilde{A}\| \\ &\leq \|S\widetilde{B} - \widetilde{B}\| + \|\widetilde{B} - \widetilde{A}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Y en segundo lugar, alcanza su norma:

$$\begin{aligned}
|C(x_0, y_0)| &= \langle y_0, S\widetilde{B}(x_0)\rangle \\
&= \|\widetilde{B}(x_0)\| \\
&= \|\widetilde{B}\| \\
&\geq \|S\widetilde{B}\| = \|C\|.
\end{aligned}$$

□

Teniendo en cuenta que cualquier operador de $C(K)$ en su dual es débilmente compacto, se obtiene como consecuencia el resultado análogo para formas bilineales en $C(K)$.

1.3.4 Corolario. *Sea K un espacio topológico compacto, entonces*

$$\overline{\mathcal{AL}(^2C(K))} = \mathcal{L}(^2C(K)),$$

es decir, las formas bilineales que alcanzan su norma son densas en el espacio de las formas bilineales continuas.

Estos dos últimos teoremas van a ser la herramienta principal durante el resto de esta memoria para demostrar la densidad, ya sea de los operadores o de las formas bilineales, que alcanzan su norma.

Capítulo 2

Formas multilineales en espacios de funciones continuas

En este capítulo vamos a extender el resultado de W. Schachermayer al caso complejo. Asimismo veremos cómo se puede utilizar esto para estudiar formas bilineales en espacios de funciones continuas. El problema de la densidad de las formas multilineales que alcanzan su norma y de aquellas que alcanzan su radio numérico se estudia en las dos últimas secciones.

2.1. Formas bilineales en espacios de funciones continuas

En esta sección vamos a comprobar que los operadores débilmente compactos de un espacio de funciones continuas en un espacio de Banach arbitrario se pueden aproximar por operadores que alcanzan su norma. La demostración sigue la pauta marcada en el primer capítulo. W. Schachermayer usaba la descomposición de Hahn y el Lema de Uryshon y ahora estas herramientas van a ser sustituidas por el Teorema de Lusin. La caracterización de la compacidad débil en espacios de medidas seguirá siendo una herramienta válida.

Durante esta sección L denotará un espacio localmente compacto Hausdorff y $C_0(L)$ será el espacio de las funciones continuas que se anulan en el infinito y con valores en el cuerpo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Como es usual, $M(L)$ denotará al dual de $C_0(L)$, esto es, el espacio de Banach de las medidas de Borel regulares reales o complejas con la norma de la variación.

La extensión al caso complejo del Teorema 1.2.6 pasa por comprobar que se cumple la hipótesis del Teorema 1.3.2. Para esto, en primer lugar, recordemos que en el caso de una medida compleja tenemos una descomposición similar a la descomposición de Hahn de una medida real.

2.1.1 Proposición. *Sea μ una medida compleja en un espacio L localmente compacto Hausdorff. Entonces existe una función medible h tal que $|h(x)| = 1$ para cualquier $x \in L$ y*

$$d\mu = h\, d|\mu|,$$

donde $|\mu|$ denota la variación de μ.

Por analogía con la representación de un número complejo como el producto de su valor absoluto por un número de valor absoluto uno, la descomposición anterior se suele llamar *descomposición polar* o representación polar de μ y a la función h se la llama un *signo* de μ.

El segundo ingrediente en la demostración consiste en aproximar una medida por una medida que alcanza su norma y está suficientemente cerca. En el caso real, la regularidad interior y el Lema de Uryshon son las herramientas claves. Ahora usaremos el siguiente resultado.

2.1.2 Teorema (de Lusin). *([44, Teorema 2.23]) Sea L un espacio topológico localmente compacto Hausdorff y μ una medida de Borel regular positiva en L. Supongamos que f es una función compleja medible en L, A un subconjunto de L con $\mu(A) < \infty$ y $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $g \in C_0(L)$ tal que*

$$\mu(\{x \in L : \ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Además se puede conseguir que

$$\sup\{|g(x)| : \ x \in L\} \leq \sup\{|f(x)| : \ x \in L\} \tag{2.2}$$

2.1.3 Observación. Hay que recalcar que una medida compleja μ alcanza su norma si, y sólo si, admite un signo continuo. El Teorema de Lusin nos permite restringir una función cualquiera (pensemos en el signo de una medida) a un subconjunto más pequeño donde es continua y de forma que la diferencia entre el dominio inicial y el restringido no es demasiado grande según un funcional prefijado (la medida μ).

En otras palabras, el Teorema de Lusin nos permite demostrar el Teorema de Bishop-Phelps en el caso particular de espacios de funciones continuas. Dada una medida μ en L, consideremos su signo, f, y apliquemos el Teorema de Lusin tomando como medida $|\mu|$. Existe, entonces, un subconjunto compacto $K \subset L$ verificando (2.1) y (2.2). La medida μ_K, definida como

$$\mu_K(A) = \mu(E \cap K),$$

para cualquier subconjunto de Borel E de L, alcanza su norma en cualquier extensión continua de $f_{|K}$ y $\|\mu - \mu_K\| < \varepsilon$.

En el primer capítulo utilizábamos la regularidad interior uniforme como caracterización de la compacidad débil en el dual, ahora vamos a utilizar una versión distinta: un conjunto es débilmente compacto si, y sólo si, tiene una "medida de control". En la práctica esto se traduce en que únicamente tenemos que preocuparnos del valor de un funcional. En el apéndice se pueden encontrar referencias detalladas del siguiente teorema.

2.1.4 Teorema. *Sea W un subconjunto de $C_0(L)^*$. Entonces W es relativamente débilmente compacto si, y sólo si, es acotado y existe una medida positiva $\lambda \in C(K)^*$ verificando que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que para cualquier subconjunto de Borel $E \subset L$ con $\lambda(E) < \delta$, se tiene que $|\mu|(E) < \varepsilon$, para cualquier $\mu \in W$.*

Recordemos que para demostrar la densidad de las formas bilineales que alcanzan su norma en $C_0(L)$ tenemos que comprobar que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.3.2 o, lo que es lo mismo, comprobar que el lema previo (Lema1.2.5) se puede trasladar a esta situación.

2.1.5 Lema. *Sea W un subconjunto débilmente compacto de $M(L)$, $\mu_0 \in M(L)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un operador lineal $S : M(L) \to M(L)$ verificando que*

1. $\|S\| = 1$,
2. *existe* $f_0 \in C_0(L)$, *con* $\|f_0\| = 1$ *tal que* $\|\mu_0\| = \langle f_0, S\mu_0 \rangle$,
3. $\|S\mu - \mu\| < \varepsilon$ *para cualquier* $\mu \in W$.

Demostración. Usando la caracterización de la compacidad débil en $M(L)$ (Teorema 2.1.4), existe una medida de Borel regular positiva λ de forma que las medidas de W son uniformemente absolutamente continuas respecto de λ. Por tanto, existe $\delta > 0$ verificando que para cualquier conjunto de Borel $E \subseteq L$, se cumple

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow |\mu|(E) < \varepsilon/2, \ \forall \mu \in W.$$

Consideremos un signo g_0 de la medida μ_0. Por el Teorema de Lusin y la regularidad interior de λ podemos encontrar un conjunto compacto $K \subseteq L$ verificando que la restricción de g_0 a K es continua y $\lambda(L \setminus K) < \delta$. Por tanto, $|\mu|(L \setminus K) < \varepsilon/2$ para todo $\mu \in W$.

Tomemos $t_0 \in L \setminus K$ y definimos $S : M(L) \to M(L)$ como

$$S(\nu)(f) = \int_K f \, d\nu + \left(\int_{L\setminus K} \overline{g_0} \, d\nu \right) f(t_0),$$

para cualquier $\nu \in M(L)$ y cualquier $f \in C_0(L)$, donde $\overline{g_0}$ denota la función conjugada de g_0.

Vamos a comprobar que S cumple las condiciones pedidas:

1. Si $f \in C_0(L)$ y $\|f\| \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} |(S\nu)(f)| \leq & \left| \int_K f \, d\nu \right| + \left| \int_{L\setminus K} \overline{g_0} \, d\nu \right| |f(t_0)| \\ \leq & \int_K |f| \, d|\nu| + \int_{L\setminus K} |\overline{g_0}| \, d|\nu| \\ \leq & |\nu|(K) + |\nu|(L \setminus K) \\ = & |\nu|(L) \\ = & \|\nu\|, \end{aligned}$$

y en consecuencia $\|S\| \leq 1$.

2. El Lema de Uryshon nos permite asegurar la existencia de una función f_0 en $C_0(L)$ de norma uno, que coincide con $\overline{g_0}$ en K y que verifica $f_0(t_0) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle f_0, S(\mu_0) \rangle &= \int_K \overline{g_0}\, d\mu_0 + \left(\int_{L\setminus K} \overline{g_0}\, d\mu_0 \right) f_0(t_0)\\ &= \int_L \overline{g_0}\, d\mu_0\\ &= \int_L d|\mu_0|\\ &= |\mu_0|(L)\\ &= \|\mu_0\|,\end{aligned}$$

como queríamos.

3. Por último, si $f \in C_0(L)$, $\|f\| \le 1$, y $\mu \in W$, se tiene que

$$\begin{aligned}|(S\mu - \mu)(f)| &= \left| \int_K f d\mu + \left(\int_{L\setminus K} \overline{g_0} d\mu \right) f(t_0) - \int_L f d\mu \right|\\ &\le \left| \int_{L\setminus K} f d\mu \right| + \left| \int_{L\setminus K} \overline{g_0} d\mu \right|\\ &\le 2 \int_{L\setminus K} d|\mu| < \varepsilon,\end{aligned}$$

que era la última condición pedida.

Obsérvese que en el caso de que K coincida con L la demostración es trivial: es suficiente con tomar como operador S la identidad y como f_0 la función $\overline{g_0}$. □

El lema anterior nos va a permitir obtener el siguiente resultado que generaliza al de W. Schachermayer. Este resultado ya es válido tanto en caso real como en caso complejo y, por tanto, engloba el resultado original. Al mismo tiempo queda establecido en el ambiente más general de los espacios localmente compactos.

2.1.6 Teorema. *Sea L un espacio localmente compacto Hausdorff. Entonces cualquier operador débilmente compacto de $C_0(L)$ en un espacio de Banach arbitrario puede ser aproximado por operadores débilmente compactos que alcanzan su norma.*

Para obtener un resultado afirmativo sobre formas bilineales en $C_0(L)$ sólo es necesario recordar que cualquier operador de $C_0(L)$ en su dual es débilmente compacto (Teorema 1.2.4) y aplicar el Teorema 1.3.3.

2.1.7 Teorema. *Sea L un espacio localmente compacto Hausdorff. Entonces cualquier forma bilineal continua en $C_0(L)$ puede ser aproximada por formas bilineales que alcanzan su norma.*

2.2. Formas multilineales en espacios de funciones continuas

Las formas multilineales en espacios de funciones continuas de orden mayor que dos presentan algunas dificultades añadidas. La principal es la falta de compacidad débil que hasta ahora ha sido absolutamente necesaria en nuestra demostración y que no es cierta para formas trilineales. Este hecho viene determinado por la "falsedad" de la desigualdad de Grothendieck para formas trilineales. Por tanto, no podremos probar que las formas trilineales que alcanzan su norma son densas en el espacio de las formas trilineales para cualquier espacio de funciones continuas usando este método.

Nuestros esfuerzos van a ir encaminados a caracterizar aquellos espacios de funciones continuas para los que sí sea cierta esta propiedad.

Como veremos poco más adelante esta mayor exigencia sobre los operadores tiene una implicación directa sobre el espacio topológico subyacente.

2.2.1 Definición. Un espacio topológico localmente compacto Hausdorff es *disperso* si cualquier subconjunto no vacío tiene un punto aislado.

En el caso de que L sea disperso, $M(L)$ se puede identificar con $\ell_1(\Gamma)$, para conveniente conjunto Γ y por tanto $C_0(L)$ es un espacio de Asplund, su dual tiene la propiedad de Radon-Nikodym, o equivalentemente $C_0(L)$ no contiene una copia de ℓ_1 (ver Teorema A.1.4).

2.2.2 Lema. *Sea L un espacio topológico localmente compacto Hausdorff infinito. Entonces la inclusión de c_0 en ℓ_∞ factoriza a través de $C_0(L)$. En particular hay operadores en $\mathcal{L}(C_0(L), \ell_\infty)$ que no son débilmente compactos.*

Demostración. Vamos a construir una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en L y una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_0(L)$ tales que

$$f_n(t_n) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad f_n(t_m) = 0, \ \text{ si } n \neq m.$$

Para la construcción distinguiremos dos casos. Si L es discreto, consideremos una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de L, distintos dos a dos. Si L no es discreto, sea $t_0 \in L$ un punto que no sea aislado. Entonces existe U_1, entorno compacto de t_0, que necesariamente ha de ser infinito. Sea $t_1 \in U_1$, $t_1 \neq t_0$. Entonces existe U_2, entorno compacto de t_0, verificando que

$$t_0 \in U_2 \subset U_1, \ \ t_1 \notin U_2,$$

y, por tanto podemos escoger $t_2 \in U_2$ con $t_2 \neq t_0$. Si repetimos el proceso, encontramos una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de L y una sucesión decreciente $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de entornos compactos de t_0 verificando que

$$t_0 \neq t_n, \text{ y } \quad t_n \in U_n \setminus U_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En el caso discreto, simplemente consideramos funciones verificando que $f_n(t_m) = \delta_{nm}$ para cualesquiera n y m.

En el caso no discreto, fijemos un natural n. $\{t_n\}$ y $U_{n+1} \cup \{t_1, \ldots, t_{n-1}\}$ son conjuntos compactos. Aplicamos el Lema de Uryshon y encontramos funciones continuas $f_n : L \to \mathbb{K}$ tales que

$$f_n(t_n) = 1, f_n(t_m) = 0, \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \ n \neq m.$$

Ahora basta considerar el operador $T : c_0 \to C_0(L)$ definido como

$$T(e_n) = f_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

donde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de c_0, y el operador $S : C_0(L) \to \ell_\infty$ definido como

$$S(f) = \{f(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

para cualquier natural n. Es inmediato comprobar ahora que la inclusión, i, de c_0 en ℓ_∞ cumple que $i = ST$. $\square$

Si exigimos que los operadores en $C_0(L)$ con valores en $\mathcal{L}(^N C_0(L))$, para algún natural $N \geq 2$, sean débilmente compactos esto se traduce en que vamos a obtener una condición más fuerte: compacidad. La demostración la haremos por inducción sobre N. Para $N = 1$, tenemos simplemente operadores de $C_0(L)$ en su dual que sabemos que son débilmente compactos. Si además L es disperso, entonces son compactos porque el dual tiene la propiedad de Schur. Si $\mathcal{L}(C_0(L), M(L))$ no contiene a c_0, los operadores de $C_0(L)$ en dicho espacio serán débilmente compactos. Con un poco más de esfuerzo se obtiene la compacidad. Repitiendo este proceso se obtiene lo siguiente.

2.2.3 Proposición. *Sea L un espacio topológico localmente compacto Hausdorff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Para algún natural $N \geq 2$, cualquier operador lineal y continuo de $C_0(L)$ en $\mathcal{L}(^N C_0(L))$ es débilmente compacto.*

2. *Cualquier operador lineal y continuo de $C_0(L)$ en $\mathcal{L}(^2 C_0(L))$ es débilmente compacto*

3. *L es disperso.*

4. *Para todo natural N, cualquier operador lineal y continuo de $C_0(L)$ en $\mathcal{L}(^N C_0(L))$ es compacto.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Es fácil teniendo en cuenta que siempre se puede ver $\mathcal{L}(^2 X)$ incluido isométricamente en $\mathcal{L}(^N X)$ para cualquier espacio de Banach X y cualquier $N \geq 2$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Si L es finito no hay nada que demostrar, así que podemos suponer que L es infinito.

En este caso, $\mathcal{L}(^2 C_0(L))$ no puede contener una copia de ℓ_∞ ya que de ser así sería posible construir un operador continuo y no débilmente compacto de $C_0(L)$ en $\mathcal{L}(^2 C_0(L))$ sin más que aplicar el Lema 2.2.2.

Ahora podemos aplicar el Teorema A.1.6. Para ello comentar que la primera condición es automática en nuestro caso: cualquier espacio de funciones continuas es un espacio del tipo $\mathcal{L}_\infty$ y $M(L)$ es un espacio del tipo $\mathcal{L}_1$. En consecuencia, cualquier operador de $C_0(L)$ en $M(L)$ es compacto.

Por último, el Teorema A.1.7 nos permite concluir que $C_0(L)$ no contiene una copia de ℓ_1 y, por tanto, el Teorema A.1.4 nos asegura que L es disperso.

$(3) \Rightarrow (4)$. Vamos a demostrar por inducción las siguientes afirmaciones:

- $\mathcal{L}(^N C_0(L))$ no contiene una copia de c_0, y
- cualquier operador de $C_0(L)$ en $\mathcal{L}(^N C_0(L))$ es compacto.

Si L es disperso, $C_0(L)^* = l_1(\Gamma)$ tiene la propiedad de Schur. Por tanto, cualquier operador de $C_0(L)$ en su dual es compacto, lo cual prueba (4) para $N = 1$. Obsérvese además que $C_0(L)^*$ no contiene a c_0. En consecuencia, las dos afirmaciones son ciertas para $N = 1$.

Supongamos que se cumplen las propiedades enunciadas para una natural N y veamos qué ocurre para $N + 1$. Por hipótesis,

$$\mathcal{L}(^{N+1} C_0(L)) = \mathcal{L}(C_0(L), \mathcal{L}(^N C_0(L))) = \mathcal{K}(C_0(L), \mathcal{L}(^N C_0(L)))$$

y del Teorema A.1.5, concluimos que $\mathcal{L}(^{N+1} C_0(L))$ no contiene una copia de ℓ_∞ y, siendo un espacio dual, tampoco puede contener una copia de c_0. Por tanto, cualquier operador de $C_0(L)$ en $\mathcal{L}(^{N+1} C_0(L))$ es débilmente compacto por el Teorema A.2.19.

El Teorema de Brace-Grothendieck nos da que cualquier operador de ese tipo lleva sucesiones de Cauchy en la topología débil en sucesiones convergentes en norma. Para acabar, es suficiente con utilizar el Teorema ℓ_1 de Rosenthal teniendo en cuenta que $C_0(L)$ no contiene a ℓ_1 por ser L disperso.

$(4) \Rightarrow (1)$. No hay nada que demostrar. $\square$

Aunque a primera vista pueda parecer que el método empleado para demostrar la densidad de las formas bilineales que alcanzan su norma no es más que utilizar dos veces el resultado para operadores débilmente compactos en espacios de funciones continuas, en realidad sólo se ha aplicado una vez. De hecho si se aplica de nuevo en una forma trilineal no se tiene garantizado que la transformación que realizamos en una variable no afecte a las demás. Es por esto que la manera de demostrar la densidad para formas multilineales va a ser distinta. En este caso demostraremos que unas ciertas formas multilineales "simples" son densas. El último paso consistirá en comprobar que éstas formas alcanzan su norma.

Sean $t_1, t_2, \ldots, t_N \in L$. Consideremos la forma N-lineal definida por

$$[\delta_{t_1} \otimes \delta_{t_2} \otimes \ldots \otimes \delta_{t_N}]\,(f_1, f_2, \ldots, f_N) = \prod_{k=1}^{N} f_k(t_k) \tag{2.3}$$

y denotemos $\mathcal{F}$ al subespacio vectorial de $\mathcal{L}(^N C_0(L))$ generado por estas formas.

Es inmediato comprobar que cualquier aplicación N-lineal del tipo (2.3) alcanza su norma. No hay más fijarse que estamos trabajando con formas en $C(\{t_1, t_2, \ldots, t_N\})$, que es un espacio de dimensión finita y por tanto cualquier aplicación N-lineal es continua y alcanza su norma. Si consideramos una forma de $\mathcal{F}$, el número de puntos sigue siendo una cantidad finita y el mismo razonamiento se puede aplicar.

Si L es disperso, podemos utilizar el último apartado de la Proposición 2.2.3 para concluir que $\mathcal{F}$ es denso en $\mathcal{L}(^N C_0(L))$. Lo que acabamos de demostrar es lo siguiente.

2.2.4 Corolario. *Sea L un espacio topológico localmente compacto y disperso, entonces cualquier forma N-lineal continua en $C_0(L)$ puede ser aproximada por formas N-lineales que alcanzan su norma.*

2.3. Otros resultados relacionados

En la última sección de este capítulo vamos a hacer algunos comentarios sobre aplicaciones multilineales valuadas en espacios de funciones continuas y sobre la relación entre alcanzar la norma y alcanzar el radio numérico.

Lo expuesto hasta ahora se puede utilizar para obtener alguna información extra sobre formas multilineales valuadas en espacios de funciones continuas.

Recordemos la definición de la propiedad (β) introducida por J. Lindenstrauss ([37]).

2.3.1 Definición. Un espacio de Banach Y tiene la propiedad (β) si existe un conjunto

$$\{(y_\alpha, y_\alpha^*) : \alpha \in \Gamma\} \subset Y \times Y^*$$

y una constante $\lambda < 1$ tal que

(I) $\|y_\alpha\| = \|y_\alpha^*\| = y_\alpha^*(y_\alpha) = 1$, para cualquier $\alpha \in \Gamma$,

(II) $|y_\alpha^*(y_\beta)| \leq \lambda$ para $\alpha, \beta \in \Gamma$, $\alpha \neq \beta$.

(III) $\|y\| = \sup\{|y_\alpha^*(y)| : \alpha \in \Gamma\}$, para cualquier $y \in Y$.

Es fácil demostrar que $C_0(L)$ tiene la propiedad (β) si L tiene un subconjunto denso de puntos aislados, lo cual es cierto en el caso de que L sea disperso. Además, en [22, Theorem 2.1] se demuestra el siguiente resultado que relaciona la densidad de aplicaciones N-lineales y la propiedad (β).

2.3.2 Teorema. *Sean X e Y espacios de Banach. Si $\mathcal{AL}(^N X)$ es denso en $\mathcal{L}(^N X)$ e Y tiene la propiedad (β), entonces $\mathcal{AL}(^N X, Y)$ es denso en $\mathcal{L}(^N X, Y)$.*

En virtud de este teorema, y utilizando el Teorema 2.1.7 y el Corolario 2.2.4 se obtiene lo siguiente.

2.3.3 Corolario. *Si L tiene un subconjunto denso de puntos aislados, entonces las aplicaciones bilineales en $C_0(L)$ y con valores en $C_0(L)$ que alcanzan su norma son densas en $\mathcal{L}(^2 C_0(L), C_0(L))$.*

Si L es disperso, entonces las aplicaciones N-lineales en $C_0(L)$ con valores en $C_0(L)$ se pueden aproximar por aplicaciones que alcanzan su norma.

Concluimos este segundo capítulo con algunas observaciones sobre el radio numérico de aplicaciones multilineales. Es obligado citar los dos libros de F. F. Bonsall y J. Duncan ([15, 16]) como referencias imprescindibles para cualquiera que desee información detallada sobre el tema.

En principio el concepto de radio numérico se define para operadores entre espacios de Banach. Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X$ un operador lineal y continuo. Se define el radio numérico de T, $v(T)$, como

$$v(T) = \sup\{|x^*(Tx)| : \ \|x^*\| = \|x\| = x^*(x) = 1\}.$$

En analogía con el caso lineal, diremos que el radio numérico se alcanza cuando dicho supremo es en realidad un máximo. Como en el problema de la densidad de los operadores que alcanzan su norma, también hay una amplia literatura sobre la densidad de los operadores que alcanzan su radio numérico (ver, por ejemplo, [5, 40]).

Y. S. Choi y S. G. Kim introducen en [22] una extensión de este concepto para aplicaciones multilineales. Si $\varphi : X \times X \times \ldots \times X \to X$ es una aplicación N-lineal, el radio numérico de φ se define como

$$v(\varphi) = \sup\{|x^*(\varphi(x_1, \ldots, x_N))| : \|x^*\| = \|x_k\| = x^*(x_k) = 1, \forall k = 1, \ldots, N\},$$

y diremos que φ alcanza su radio numérico si dicho supremo es un máximo.

En esta sección vamos a comprobar que en el caso de que X sea un espacio de funciones continuas no hay diferencia entre alcanzar la norma y alcanzar el radio numérico (ver [16, Theorem 32.5] para el caso lineal).

Antes de pasar al enunciado de este resultado, exponemos un lema técnico que necesitaremos para la demostración.

2.3.4 Lema. *Sea L un espacio topológico localmente compacto Hausdorff. Dado $t_0 \in L$, cualquier función $f \in B_{C_0(L)}$ puede escribirse de la forma siguiente:*

$$f = \alpha g + (1 - \alpha)h,$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$, $g, h \in B_{C_0(L)}$ *y* $|g(t_0)| = |h(t_0)| = 1$.

Demostración. Si $\lambda_0 = f(t_0)$ verifica que $|\lambda_0| = 1$, entonces basta tomar $g = h = f$ y α cualquiera.

Supongamos, por tanto, que $|\lambda_0| < 1$. Sea $\mathbb{D}$ la bola unidad del cuerpo y sean $p, q : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dos funciones continuas verificando que

$$1 = |p(\lambda_0)| = |q(\lambda_0)|, \;\; \lambda = \alpha p(\lambda) + (1 - \alpha)q(\lambda),$$

para cualquier $\lambda \in \mathbb{D}$ y algún α fijo con $0 < \alpha < 1$.

Podemos suponer que $\lambda_0 = 0$ sin perder generalidad. La construcción de p y q es fácil. En el caso real el valor de α viene determinado de manera única por λ_0. Las funciones p y q definidas como

$$p(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2t+1, \text{ si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} 2t-1, \text{ si } 0 \leq x \leq 1, 1, \text{ si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

nos sirven.

En el caso complejo se puede conseguir que α tome cualquier valor estrictamente comprendido entre 0 y 1. Esto es consecuencia del hecho de que, en el caso real, un número del intervalo $]-1,1[$ sólo se puede escribir como combinación convexa de 1 y -1 de una forma. En cambio en el caso complejo cualquier elemento de $\mathring{\mathbb{D}}$ siempre es el punto medio de dos puntos de la esfera unidad. Veamos la definición de p y q en el caso complejo. Las funciones $p, q : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

$$p(x+iy) = \begin{cases} (x, \sqrt{1-x^2}), \text{ si } y \geq 0 \\ (x, 2y+\sqrt{1-x^2}), \text{ si } y < 0 \end{cases}$$

$$q(x+iy) = \begin{cases} (x, \sqrt{1-x^2}), \text{ si } y > 0 \\ (x, 2y-\sqrt{1-x^2}), \text{ si } y \leq 0 \end{cases}$$

cumplen lo pedido.

Finalmente, sea $\rho : L \longrightarrow [0,1]$ una función continua con soporte compacto y tal que $\rho(t_0) = 1$. Entonces, las funciones $g, h : L \to \mathbb{K}$ definidas por

$$g(t) = \rho(t)p(f(t)) + (1-\rho(t))f(t)$$

y

$$h(t) = \rho(t)q(f(t)) + (1-\rho(t))f(t),$$

para cualquier $t \in L$ satisfacen la propiedad deseada. $\square$

2.3.5 Proposición. *Para cualquier $\varphi \in \mathcal{L}(^N C_0(L), C_0(L))$ se tiene que $v(\varphi) = \|\varphi\|$. Además, φ alcanza su radio numérico si, y sólo si, φ alcanza su norma.*

Demostración. Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$ sin perder generalidad. Fijemos un número positivo ε y sean $f_1, f_2, \ldots, f_N \in B_{C_0(L)}$ funciones tales que

$$\|\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_N)\| \geq 1 - \varepsilon.$$

Tomemos ahora $t_0 \in L$ tal que

$$|\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_N)(t_0)| \geq 1 - \varepsilon,$$

y apliquemos el lema anterior para descomponer cada función f_k de la forma

$$f_k = \alpha_k g_k + (1 - \alpha_k) h_k,$$

donde

$$0 \leq \alpha_k \leq 1, \ g_k, \ h_k \in B_{C_0(L)} \text{ y } |g_k(t_0)| = |h_k(t_0)| = 1$$

para $k = 1, 2, \ldots, N$.

Como φ es N-lineal podemos escribir $\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_N)$ como una combinación convexa de la forma

$$\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_N) = \sum_{j=1}^{2^N} \beta_j \, \varphi(f_1^j, f_2^j, \ldots, f_N^j)$$

donde

$$f_k^j \in B_{C_0(L)} \text{ y } |f_k^j(t_0)| = 1$$

para cualquier $k = 1, 2, \ldots, N$ y $j = 1, 2, \ldots, 2^N$.

Usando la convexidad, se obtiene que tiene que existir j verificando que

$$|[\varphi(f_1^j, f_2^j, \ldots, f_N^j)](t_0)| \geq 1 - \varepsilon.$$

En consecuencia, podemos suponer de partida que $|f_k(t_0)| = 1$ para $k = 1, 2, \ldots, N$. Rotando podemos conseguir que $f_k(t_0) = 1$. Entonces

$$v(\varphi) \geq |\delta_{t_0}(\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_N))| \geq 1 - \varepsilon,$$

con lo que se demuestra que $v(\varphi) \geq \|\varphi\|$.

La otra desigualdad es inmediata.

Respecto a la segunda afirmación de la proposición, es claro que si φ alcanza su radio numérico, entonces también alcanza su norma. Para demostrar el recíproco, sólo hay que fijarse en que si φ alcanza su norma, la demostración anterior se puede repetir tomando $\varepsilon = 0$. $\square$

Capítulo 3

Formas multilineales en C^*-álgebras

En este capítulo vamos a generalizar los resultados que hemos obtenido sobre operadores en espacios de funciones continuas a un ambiente no conmutativo. Por supuesto los resultados en este ambiente incluyen los ya conocidos en el caso conmutativo ya que vamos a demostrar que cualquier C^*-álgebra cuyo bidual es de tipo I finito verifica que todo operador débilmente compacto se puede aproximar por operadores que alcanzan su norma y que ocurre lo mismo para forma bilineales.

Comenzaremos describiendo algunas de las herramientas que se van a usar en una primera sección. Aquí se recogerán algunos resultados más o menos conocidos de la teoría de C^*-álgebras que son básicos en el desarrollo de las demostraciones. En el apéndice se pueden consultar algunos resultados adicionales que recordamos por completitud.

Comentemos brevemente algunos de los problemas que hay que salvar en este ambiente. En primer lugar recordemos que en el caso conmutativo disponíamos de una descripción del dual y teníamos identificados aquellos funcionales (medidas) que alcanzaban su norma: el signo de la medida debe ser continuo. Además de dicha continuidad trabajábamos con la topología del compacto Hausdorff K. Cuando nos trasladamos al caso de una C^*-álgebra arbitraria, podemos pensar en K como los elementos positivos de la esfera unidad del dual. A lo largo del capítulo iremos viendo como podemos estudiar cuándo un funcional alcanza su norma o en qué se traduce la compacidad.

Una de las herramientas más importantes era la descomposición de una medida que tiene su análogo en la descomposición polar de un funcional normal. También existe una versión del Teorema de Lusin pero tiene el inconveniente de no ser una extensión "isométrica" de su versión conmutativa. Además de esto nos hará falta un cierto conocimiento de la compacidad débil en el dual de una C^*-álgebra.

Hay, por último, una sección dedicada a ejemplos. En dicha sección comprobaremos que para una amplia gama de C^*-álgebras grupo se obtienen resultados positivos.

Comencemos por mencionar algunos de los resultados de la teoría de C^*-álgebras que vamos a utilizar.

3.1. Preliminares

En todo este capítulo el cuerpo base siempre será $\mathbb{C}$. Si A denota una C^*-álgebra, su dual lo denotaremos A^*. Utilizaremos la "$*$" para denotar la involución usual del álgebra con lo que si $a \in A$, a^* indicará el adjunto de a. A_+ denotará al conjunto de los elementos positivos de la C^*-álgebra. Si A es un álgebra de von Neumann, su predual es único (el conjunto de los funcionales normales) y lo denotaremos como A_*. Al conjunto de funcionales normales positivos lo denotaremos A_*^+. Al igual que en capítulos anteriores, las definiciones y resultados que se mencionan sobre C^*-álgebras y no aparezcan explícitamente referenciados se pueden encontrar en el apéndice incluido en esta memoria.

El Teorema de Lusin en caso conmutativo permitía restringir el dominio de una función medible a un conjunto compacto de forma que ahí la función fuera continua y, a la vez, mantener un cierto control sobre la diferencia entre el dominio original y el nuevo dominio. La función medible no será otra cosa que un elemento del bidual de la C^*-álgebra. En cuanto al subconjunto compacto, si identificamos un subconjunto K de un espacio topológico localmente compacto L con su función característica, χ_K, tenemos una proyección del bidual de $C_0(L)$. En ambiente no conmutativo, las proyecciones del bidual de la C^*-álgebra representarán el mismo papel.

El siguiente teorema es la generalización al caso no conmutativo del Teorema de Lusin clásico.

3.1.1 Teorema (de Lusin no conmutativo). *[48, Theorem 4.15] Sea A una C^*-álgebra y $\mathcal{M}$ su cierre en la topología débil de operadores. Sean ψ un funcional positivo en $\mathcal{M}_*$, e una proyección en $\mathcal{M}$, y $\varepsilon, \delta > 0$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. *Si $x \in \mathcal{M}$, existe una proyección $e_0 \leq e$ en $\mathcal{M}$ y existe $a_0 \in A$ tales que*
$$xe_0 = a_0e_0, \;\; \psi(e - e_0) < \varepsilon \;\; y \;\; \|a_0\| \leq (1+\delta)\|xe_0\|.$$
2. *Si $x \in \mathcal{M}_{sa}$, existen $a_0 \in A_{sa}$ y una proyección $e_0 \leq e$ en $\mathcal{M}$ tales que*
$$xe_0 = a_0e_0, \;\; \psi(e - e_0) < \varepsilon \;\; y \;\; \|a_0\| \leq \text{mín}\{2(1+\delta)\|xe_0\|, \|x\| + \delta\}.$$

Aunque el enunciado se hace en términos del cierre débil de una C^*-álgebra, la analogía es más clara si se piensa en A^{**} en lugar de en $\mathcal{M}$ y, en consecuencia, A^* en lugar de $\mathcal{M}_*$.

A pesar de la similitud entre la versión conmutativa y la no conmutativa del anterior teorema existe una diferencia importante: la versión no conmutativa no es isométrica. Recordemos que la utilidad del Teorema de Lusin conmutativo es "producir" medidas que alcanzan su norma y están cerca de la original. En cambio la versión no conmutativa solamente produce funcionales que están cerca y elementos del álgebra que también están cerca de la norma del funcional.

Intentando salvar este escollo y volviendo a la versión conmutativa, resaltemos otra diferencia: en el primer caso encontramos una proyección sobre un conjunto *compacto* K y en el segundo no tenemos ningún tipo de condición sobre la proyección. Recordemos que para obtener el elemento donde la medida alcanza su norma es esencial el Lema de Uryshon y para ello necesitamos la compacidad. Este es uno de los motivos para introducir las nociones de proyección abierta, cerrada y compacta. Entre otras cosas están íntimamente relacionados con los funcionales que alcanzan su norma. En la Proposición A.2.10 se puede encontrar una exposición más detallada de esto.

Un subconjunto L_0 de un espacio localmente compacto L es abierto si, y sólo si, existe una red creciente $\{f_i\}_{i\in I}$, donde $f_i \in C_0(L)$, de funciones positivas tales que

$$\lim_{i\in I} f_i(t) = 1,\ \forall\, t \in L_0 \ \text{ y } \ f_i(t) = 0,\ \forall\, t \notin L_0$$

Esta observación, consecuencia del Lema de Uryshon, nos va a servir como base de la siguiente definición.

3.1.2 Definición. Dada una C^*-álgebra A y una proyección $p \in A^{**}$, diremos que p es una proyección *abierta* si existe una red creciente $\{a_i\}_{i\in I}$ en A

de elementos positivos verificando que $\lim_{i \in I} a_i = p$ en la topología débil de operadores.

Diremos que una proyección es *cerrada* si su complementaria, $\mathbf{1} - p$, es abierta.

Por último, diremos que una proyección cerrada p es *compacta* si existe un elemento positivo $a \in A$ verificando $p \leq a$.

Para cualquier proyección $p \in A^{**}$, existe una menor proyección cerrada, que denotaremos $\bar{p}$, verificando $p \leq \overline{p}$. En el caso conmutativo, $\overline{\chi_L} = \chi_{\overline{L}}$ para cualquier subconjunto L de un espacio topológico.

Vamos a introducir un último concepto sobre proyecciones. La regularidad de una proyección pretende ser el análogo al hecho de que un subconjunto abierto de un compacto Hausdorff se puede aproximar por una red creciente de compactos. Usando la terminología de proyecciones, en el caso conmutativo cualquier proyección abierta es límite en la topología fuerte de operadores de una red creciente de proyecciones cerradas.

La definición original de proyección regular se debe a M. Tomita ([49], Definición A.2.11). Más tarde C. Akemann ([7, Definition II.11 y Proposition II.12]) demuestra la equivalencia con la propiedad que que hoy es tomada normalmente como definición de regularidad. Esta última es la que usamos nosotros.

3.1.3 Definición. Una proyección p de A^{**} es *regular* si, y sólo si, $\|ap\| = \|a\bar{p}\|$ para cualquier $a \in A$.

La demostración original de la versión no conmutativa del Teorema de Lusin ([49, Theorem 6]) es, de hecho, una herramienta para probar la abundancia de proyecciones regulares. Por ejemplo, en el caso separable siempre podemos aproximar cualquier proyección por proyecciones regulares. El enunciado está hecho en términos de proyecciones regulares relativas (ver Definición A.2.11), aunque en la práctica sólo lo usaremos en caso separable. En cualquier caso, recordemos al lector que en el apéndice puede encontrar una exposición más detallada sobre proyecciones regulares.

3.1.4 Teorema. *Sea A una C^*-álgebra, B una C^*-subálgebra separable y p una proyección de A^{**}. Entonces cualquier entorno en la topología fuerte de operadores de p contiene al menos una proyección $q \in A^{**}$ regular relativa a B y tal que $q \leq p$.*

En particular, si A es separable, cualquier proyección p de A^{**} es límite en la topología fuerte de operadores de una sucesión creciente de proyecciones regulares.

Si tenemos en cuenta que las proyecciones en el bidual de una álgebra conmutativa no son más que las funciones características de conjuntos, se tiene que una proyección χ_S es regular si, y sólo si, $\|f_{|S}\| = \|f_{|\overline{S}}\|$ para cualquier función continua f, lo cual es claramente cierto. Por tanto en el caso conmutativo todas las proyecciones son regulares (como era de esperar). En el caso no conmutativo esto está lejos de ser cierto. Es suficiente con trabajar en la suma directa infinita de copias de las matrices dos por dos para poder encontrar una proyección que no es regular (ver Ejemplo A.2.12).

El siguiente resultado se utilizará posteriormente en la demostración para refinar el Teorema de Lusin.

3.1.5 Teorema. *([20, Theorem 3.3 a)]) Sea A una C^*-álgebra, q una proyección cerrada en A^{**} e I el ideal izquierdo cerrado de A asociado a q.*

Sea $x \in A$ *tal que* $\|xq\| \leq 1$ *y* $\|x\| \leq 1 + \varepsilon$ *para* $\varepsilon > 0$. *Entonces para cualquier* $\varepsilon' > \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}$, *existe* $y \in I$ *tal que* $\|y\| \leq \varepsilon'$ *y* $\|x - y\| \leq 1$.

En el caso conmutativo, los subconjuntos débilmente compactos están caracterizados por la existencia de una medida de control. El siguiente resultado generaliza este hecho. Para una versión más completa se puede consultar el Teorema A.2.18.

3.1.6 Teorema. *Dado un subconjunto* K *del predual* $\mathcal{M}_*$ *de un álgebra de von Neumann* $\mathcal{M}$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. K *es relativamente* $\sigma(\mathcal{M}_*, \mathcal{M})$*-compacto.*

2. K *está acotado y existe* ω *en* $\mathcal{M}_*^+$ *con la propiedad de que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *verificando que* $|\psi(a)| < \varepsilon$ *para cualquier* $\psi \in K$ *si* $\omega(a^*a + aa^*) < \delta$ *y* $\|a\| \leq 1$.

Ya hemos comentado que cualquier forma bilineal en un espacio de Banach se puede identificar con un operador del espacio de Banach en su dual. En el caso de espacios de funciones continuas, esos operadores son débilmente compactos. En el caso de C^*-álgebras sucede lo mismo (ver Teorema A.2.20 y comentarios siguientes).

3.1.7 Teorema. *Sea* A *una* C^**-álgebra. Entonces, cualquier operador* $T : A \to A^*$ *es débilmente compacto.*

En el apéndice se puede encontrar una exposición más detallada de las propiedades de los operadores débilmente compactos en C^*-álgebras.

3.2. Formas bilineales en C^*-álgebras

Empecemos recordando que un álgebra de von Neumann se descomponía como suma directa de álgebras de von Neumann de tipo I, II o III. El propósito de esta sección es demostrar que si A es una C^*-álgebra cuyo bidual es de tipo I finito se verifica el siguiente teorema.

3.2.1 Teorema. *Sea A una C^*-álgebra cuyo bidual es un álgebra de von Neumann de tipo I finito, entonces*

1. *cualquier operador débilmente compacto de A en un espacio de Banach arbitrario se puede aproximar por operadores débilmente compactos que alcanzan su norma y,*
2. *cualquier forma bilineal en A se puede aproximar por formas bilineales que alcanzan su norma.*

Para demostrar este resultado comprobaremos que se verifican las hipótesis del Teorema 1.3.2. Para ello este resultado vamos a usar, a grandes rasgos, la misma técnica que en el caso conmutativo. Esta técnica se puede llevar a cabo en aquellas C^*-álgebras que verifican la siguiente propiedad: diremos que una C^*-álgebra A verifica la *propiedad (H)* si

> para cualquier funcional positivo ϕ en A^* y $\varepsilon > 0$, existe un funcional positivo $\psi \in A^*$ y existe $\delta > 0$ con la propiedad de que si $p \in A^{**}$ es una proyección verificando $\psi(p) < \delta$ entonces existe una proyección central $z \in A^{**}$ tal que $zp = 0$ y $\phi(\mathbf{1} - z) < \varepsilon$.

La primera parte de la demostración del Teorema 3.2.1 va a consistir en comprobar que la propiedad (H) es una condición suficiente para que se cumpla la hipótesis del Teorema 1.3.2 y por tanto obtener la densidad. La segunda parte consistirá en demostrar que cualquier C^*-álgebra cuyo bidual es un álgebra de von Neumann de tipo I finito verifica la propiedad (H). El siguiente resultado es justamente la primera mitad de la demostración.

3.2.2 Teorema. *Sea A una C^*-álgebra que verifica la condición (H), entonces cualquier operador débilmente compacto de A en un espacio de Banach arbitrario puede ser aproximado por operadores débilmente compactos que alcanzan su norma.*

Además las formas bilineales en A que alcanzan su norma son densas en el espacio de las formas bilineales continuas.

La segunda parte de la demostración consistirá en comprobar que la c_0-suma de matrices en espacios de funciones continuas verifica la propiedad (H). Obsérvese que, en este caso, su bidual es un álgebra de von Neumann de tipo I finito arbitraria.

3.2.3 Observación.

1. La propiedad (H) nos asegura la abundancia de proyecciones centrales y sustituye a la propiedad de descomposición de Riesz para proyecciones en espacios de funciones continuas. Esta abundancia es la que nos permitirá definir operadores de restricción de manera cómoda en el dual de la C^*-álgebra.

2. Esta propiedad solamente involucra elementos en el dual y el bidual de la C^*-álgebra. Por tanto si A y B son C^*-álgebras con el mismo bidual, podemos utilizar la Proposición A.2.4 para obtener que los dua-

les también coinciden y por tanto si A verifica la propiedad (H), entonces B también la verifica.

El siguiente lema nos va a permitir trabajar más cómodamente con funcionales en la demostración del Teorema 3.2.2. Esencialmente afirma que si "restringimos" un funcional mediante una proyección central, la norma disminuye y la citada proyección central actúa como nueva identidad.

Recordemos que si ϕ es un funcional en A, su valor absoluto, $|\phi|$ es el único funcional que verifica que $\||\phi|\| = \|\phi\|$ y

$$|\phi(x)|^2 \leq \|\phi\| \, |\phi|(x^*x)$$

para cualquier $x \in A$.

3.2.4 Lema. *Sea A una C^*-álgebra, $\phi \in A^*$, $x \in A^{**}$ y z una proyección central en A^{**}. Entonces*

$$|\phi(zx)| \leq |\phi|(z) \, \|x\|,$$

donde $|\phi|$ es el valor absoluto de ϕ.

Demostración. Sea u la isometría parcial que nos da la descomposición polar de ϕ (ver Proposición A.2.8), esto es

$$\phi(y) = |\phi|(uy), \ \ \forall \, y \in A^{**}$$

Definimos un funcional lineal mediante $\lambda(y) = |\phi|(zy)$. Es inmediato comprobar que λ es positivo ya que

$$\lambda(y) = |\phi|(zy) = |\phi|(zyz)$$

y por tanto λ no es otra que la restricción de $|\phi|$ a $zA^{**}z$. En consecuencia, λ alcanza su norma en la identidad con lo que

$$\begin{aligned}|\phi(zx)| &= \big||\phi|(uzx)\big| \\ &= \big||\phi|(zux)\big| \\ &= |\lambda(ux)| \\ &\leq \lambda(\mathbf{1})\|ux\| \\ &= |\phi|(z)\|ux\| \\ &\leq |\phi|(z)\|x\|.\end{aligned}$$

$\square$

3.2.5 Observación. Si $\phi \in A^*$ es un funcional y $x \in A^{**}$ es un un elemento cualquiera, el funcional definido como $\psi(a) = \phi(ax)$ (respectivamente $\psi(a) = \phi(xa)$) para cualquier $a \in A$, tiene perfecto sentido pero, hay que tener en cuenta que ϕ actua, en principio sobre elementos de A y $xa \in A^{**}$. En lo que resta de capítulo se utilizará en numerosas ocasiones que, de hecho, $\psi \in A^*$. El lector interesado puede consultar el Apéndice donde encontrará referencias adecuadas para estas afirmaciones.

Demostración del Teorema 3.2.2. Por el Teorema 1.3.2 y teniendo en cuenta que todo operador de A en A^* es débilmente compacto (ver Teorema A.2.20), es suficiente con demostrar que si tenemos un subconjunto débilmente compacto W de A^*, $\mu_0 \in A^*$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe un operador lineal $S : A^* \to A^*$ verificando la hipótesis del Teorema 1.3.2, esto es

1. $\|S\| = 1$,
2. existe $a_0 \in A$ con $\|a_0\| = 1$ tal que $S(\mu_0)(a_0) = \|\mu_0\|$, y
3. $\|S\mu - \mu\| < \varepsilon$, para cualquier $\mu \in W$.

Procedemos a construir un tal operador S. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\mu_0 \in W$ ya que si no simplemente reemplazamos W por $W \cup \{\mu_0\}$. En el caso de que $\mu_0 = 0$, la identidad en A^* nos vale como operador S. Por tanto, en lo que sigue se supondrá que $0 \neq \mu_0 \in W$.

Como W es débilmente compacto, el Teorema 3.1.6 afirma que existe un estado ϕ y un número positivo δ verificando

$$|\mu(x)| < \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \|\mu_0\|\}, \ \ \forall\, \mu \in W \tag{3.1}$$

siempre que $x \in A^{**}$ verifique que $\|x\| \leq 1$ y $\phi(xx^* + x^*x) < \delta$.

Usemos ahora que se verifica la condición (H). En consecuencia, existe un funcional positivo ψ y $\alpha > 0$ con la siguiente propiedad:

> Si p es una proyección en A^{**} verificando que $\psi(p) < \alpha$, entonces existe una proyección central $z \in A^{**}$ tal que
>
> $$zp = 0 \text{ y } \phi(\mathbf{1} - z) < \delta/4. \tag{3.2}$$

Sea u^* la isometría parcial de A^{**} que nos da la descomposición polar de μ_0. Aplicando el Teorema de Lusin (Teorema 3.1.1) existe $a \in A$ y existe una proyección $p \in A^{**}$ tales que

$$\|a\| < 1 + \alpha, \ \ ap = up, \ \ \psi(\mathbf{1} - p) < \alpha.$$

Aplicando (3.2), obtenemos una proyección central $z \in A^{**}$ verificando que $zp = z\mathbf{1} = z$ y $\phi(\mathbf{1} - z) < \delta/4$. Obsérvese que $az = uz$.

Vamos a demostrar ahora que existen $a_0 \in A$ y una proyección central $w \in A^{**}$ verificando que

$$\|a_0\| = 1, \ \ a_0 w = uw, \ \ \text{y } \phi(\mathbf{1} - w) < \delta/2. \tag{3.3}$$

Para esto consideremos la C^*-subálgebra B de A generada por a y a^* y notemos B^{cc} a su biconmutante en A^{**}. Dado que B es separable y $z \in B^{cc}$, el Teorema 3.1.4 nos da una proyección $q \in B^{cc}$ regular relativa a B verificando que $q \leq z$ y $\psi(q-z) < \alpha$. Como $q \leq z$ se tiene que $aq = uq$. Notemos $\bar{q}$ al cierre de q en B^{cc}, entonces el Teorema [7, Prop. II.12] junto con la regularidad de q nos dice que $\|a\bar{q}\| = \|aq\|$ y por tanto $\|a\bar{q}\| \leq 1$. Aplicando ahora el Teorema 3.1.5, existe $b \in B$ tal que $b\bar{q} = 0$ y $\|a-b\| \leq 1$. Como $q \leq \bar{q}$, se sigue que $bq = 0$ y por tanto $(a-b)q = uq$. Como $q \leq \bar{q}$, se tiene que $bq = 0$ y por tanto $(a-b)q = uq$. Basta tomar $a_0 = a-b$ para que se verifique (3.3) como queríamos.

Como $\psi(z-q) < \alpha$, la propiedad (3.2) nos permite concluir que existe una proyección central $v \in A^{**}$ tal que $vz = vq$ y $\phi(\mathbf{1}-v) < \delta/4$. Tomemos $w = vz$ que vuelve a ser una proyección central. Entonces

$$a_0 w = a_0 vz = a_0 zv = a_0 zzv = uzv = uw.$$

Por otro lado,

$$\phi(\mathbf{1}-w) = \phi(\mathbf{1}-z) + \phi(z(\mathbf{1}-v)) \leq \phi(\mathbf{1}-z) + \phi(\mathbf{1}-v) < \delta/2.$$

Es fácil comprobar que uw es una isometría parcial:

$$(uw)^*(uw) = w^*u^*uw = wu^*u,$$

ahora es suficiente con usar que u^*u es una proyección y que su producto con w vuelve a ser una proyección. Por tanto $\|uw\| = 1$ o $\|uw\| = 0$. Veamos que la segunda posibilidad no puede darse. Sabemos que $\|\mu_0\| = \mu_0(u)$ por provenir u de la descomposición polar μ_0. Como $\|u(\mathbf{1}-w)\| \leq 1$ y

$$\phi\big((u(\mathbf{1}-w))^*(u(\mathbf{1}-w)) + (u(\mathbf{1}-w))(u(\mathbf{1}-w))^*\big) = \\ \phi((u^*u+uu^*)(\mathbf{1}-w)) \leq 2\phi(\mathbf{1}-w) < \delta,$$

se puede aplicar (3.1) para obtener que $\mu_0(u(\mathbf{1}-w)) < \|\mu_0\| = \mu_0(u)$ y por tanto $uw \neq 0$. En consecuencia $\|a_0 w\| = 1$ y, como $\|a_0\| \leq 1$, se obtiene que $\|a_0\| = 1$ como queríamos.

Estamos ya en condiciones de definir el operador S que estábamos buscando. Sea γ un estado de A que alcance su norma en a_0 y definimos $S : A^* \to A^*$ como

$$(S\mu)(y) = \mu(wy) + \mu((\mathbf{1}-w)u)\gamma(y),$$

para cualesquiera μ en A^* e y en A.

Para acabar, vamos a comprobar que se cumplen las tres condiciones que le pedíamos a S. Veamos en primer lugar que tiene norma menor o igual que uno.

Usando el Lema 3.2.4,

$$\begin{aligned} |(S\mu)(y)| &\leq |\mu(wy)| + |\mu((\mathbf{1}-w)u)| \\ &\leq |\mu|(w) + |\mu|(\mathbf{1}-w) \\ &= |\mu|(\mathbf{1}) = \|\mu\| \end{aligned}$$

se cumple para cualquier $y \in A$ con $\|y\| \leq 1$ y, por tanto, $\|S\| \leq 1$.

Veamos ahora que de hecho la norma es uno,

$$\begin{aligned} (S\mu_0)(a_0) &= \mu_0(wa_0) + \mu_0((\mathbf{1}-w)u)\gamma(a_0) \\ &= \mu_0(wu) + \mu_0((\mathbf{1}-w)u) \\ &= \mu_0(u) \\ &= \|\mu_0\|, \end{aligned}$$

con lo que se cumple la segunda condición pedida.

Por último, si $x \in A^{**}$, $\|x\| = 1$, entonces $\|(\mathbf{1} - w)x\| \leq 1$ y

$$\phi\big((x(\mathbf{1}-w))^*(x(\mathbf{1}-w)) + (x(\mathbf{1}-w))(x(\mathbf{1}-w))^*\big) = \\ \phi((x^*x + xx^*)(\mathbf{1}-w)) \leq 2\phi(\mathbf{1}-w) < \delta.$$

De nuevo, la condición (3.1) nos permite afirmar que $\mu((\mathbf{1} - w)x) < \varepsilon/2$ para cualquier $\mu \in W$. Por tanto,

$$|(S\mu - \mu)(a)| \leq |\mu((\mathbf{1}-w)a)| + |\mu((\mathbf{1}-w)u)| < \varepsilon,$$

para cualquier $a \in A$ con norma uno y para cualquier $\mu \in W$. Por tanto $\|S\mu - \mu\| < \varepsilon$ para cualquier $\mu \in W$ como se quería demostrar. □

Ya que sabemos que la propiedad (H) es una condición suficiente para obtener la densidad de las formas bilineales que alcanzan su norma, vamos a demostrar que las C^*-álgebras cuyo bidual es un álgebra de von Neumann de tipo I finito verifican esta condición. Como hemos comentado en la Observación 3.2.3, utilizando que la propiedad (H) sólo involucra al dual y al bidual de la C^*-álgebra, tenemos que demostrar la c_0-suma directa de álgebras de la forma $C_0(L, M_n(\mathbb{C}))$ verifica la condición (H). Esto lo vamos a hacer en tres pasos: comprobaremos que los espacios de funciones continuas la verifican y después comprobaremos que la propiedad es estable por sumas directas y por productos tensoriales con matrices de orden finito.

Para C^*-álgebras conmutativas ya hemos visto en el segundo capítulo que se tiene la densidad de las formas bilineales que alcanzan su norma. El siguiente resultado, aunque vuelve a poner de manifiesto este hecho, nos interesa no tanto porque sea una demostración distinta de ello, sino porque se obtiene una condición, al menos formalmente, más fuerte: la propiedad (H).

3.2.6 Proposición. *Sea L un conjunto localmente compacto Hausdorff. Entonces $C_0(L)$ verifica la condición (H).*

Demostración. Sea ϕ es una medida positiva en $C_0(L)$ y ε un número positivo. Basta tomar $\delta = \varepsilon$ y $\psi = \phi$, ya que si p es una proyección en $C_0(L)^{**}$, $\mathbf{1} - p$ es una proyección central (todas las proyecciones son centrales). Claramente se cumple que p y $\mathbf{1} - p$ son proyecciones ortogonales y $\phi(\mathbf{1} - p) = \psi(\mathbf{1} - p) < \delta = \varepsilon$. □

El siguiente paso es comprobar que las matrices de orden finito con entradas en un espacio de funciones continuas también verifica la propiedad (H).

3.2.7 Proposición. *Sea A una C^*-álgebra conmutativa y n un número natural. Entonces $M_n(A)$ verifica la propiedad (H).*

Demostración. Podemos suponer que $A = C_0(L)$, para conveniente espacio topólogico localmente compacto L. Entonces $M_n(A)$ se puede identificar con $C_0(L, M_n(\mathbb{C}))$. Por otra parte, el dual de $M_n(A)$ se puede calcular:

$$M_n(A)^* = M_n(A^*) = M_n(M(L)),$$

y su bidual

$$M_n(A)^{**} = M_n(A^{**}) = M_n(M(L)^*),$$

donde $M(L)$ denota, como es usual, al espacio de Banach de las medidas de Borel complejas en L.

Sea $\phi = (\phi_{ij})_{i,j=1}^n$ un funcional positivo en $M_n(A)$ y ε un número positivo.

Observemos que, como ϕ es un funcional positivo en $M_n(A)$, ϕ_{ii} es un funcional positivo en A, para $i = 1, 2, \ldots, n$. En efecto, tenemos que comprobar que $\phi_{ii}(xx^*) \geq 0$ para cualquier $x \in A$. Si E_{ij} denota la matriz que tiene la identidad en la columna i, fija j y cero en el resto de entradas, se tiene que

$$0 \leq (\phi_{ij})((xE_{ii})^*(xE_{ii})) = (\phi_{ij})(x^*xE_{ii}) = \phi_{ii}(x^*x),$$

o lo que es lo mismo, ϕ_{ii} es positivo para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Consideremos la medida positiva $\lambda = \phi_{11} + \phi_{22} + \ldots + \phi_{nn}$ y notemos "tr" a la traza usual en $M_n(\mathbb{C})$.

Hay que observar que la traza es un funcional continuo en $M_n(\mathbb{C})$. Además el valor de la traza sobre una proyección cualquiera es igual a la dimensión del rango de la proyección. En particular, este valor es siempre mayor o igual que uno.

Definimos el funcional $\psi \in M_n(A)$ como

$$\psi(a) = \int_L \mathrm{tr}(a(t)) d\lambda(t),$$

para cualquier $a \in M_n(A)$. Claramente ψ es un funcional positivo. Por último tomemos $\delta = \varepsilon$.

Supongamos que p es una proyección en $M_n(A)^{**}$ verificando que $\psi(p) < \delta$.

Podemos ver a p como una función en $L^\infty(\lambda, M_n(\mathbb{C}))$ de forma que $p(t)$ es una proyección en $M_n(\mathbb{C})$ para cualquier $t \in L$.

Consideremos el subconjunto Δ de L definido por

$$\Delta = \{t \in L : \ p(t) \neq 0\}.$$

Es claro que $\operatorname{tr}(p(t)) \geq 1$, para cualquier $t \in \Delta$ y en consecuencia

$$\lambda(\Delta) = \int_\Delta d\lambda(t) \leq \int_\Delta \operatorname{tr}(p(t))d\lambda(t) \leq \psi(p) < \varepsilon.$$

La proyección central $z \in M_n(A)^{**}$ definida por

$$z(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in \Delta \\ 1, & \text{si } t \notin \Delta, \end{cases}$$

entendiendo que $0, 1 \in M_n(\mathbb{C})$, verifica que $zp = 0$ y

$$\phi(\mathbf{1} - z) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ii}(\Delta) = \lambda(\Delta)\varepsilon.$$

□

Por tanto las formas bilineales en $M_n(C_0(L))$ que alcanzan su norma son densas en el conjunto de todas las formas bilineales continuas.

En el siguiente resultado vamos a comprobar que las c_0-sumas directas infinitas también conservan la propiedad (H). Con esto completamos la demostración del Teorema 3.2.1.

3.2.8 Proposición. *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de C^*-álgebras verificando la propiedad (H). Entonces $A = c_0 - \bigoplus_{i\in I} A_i$ también verifica la propiedad (H).*

Demostración. Sea ϕ un funcional positivo en A y ε un número positivo. Tenemos que encontrar $\psi \in A^*$ positivo y $\delta > 0$ verificando las condiciones de la propiedad (H).

Es bien sabido que $A^* = \ell_1 - \bigoplus_{i\in I} A_i^*$. En consecuencia $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$ con $\phi_i \in A_i^*$ para cada $i \in I$, y $\|\phi\| = \sum_{i\in I} \|\phi_i\|$. Por tanto tiene que existir un subconjunto finito $F \subset I$ tal que

$$\sum_{i\in F}\|\phi_i\| > \|\phi\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usemos ahora que todas las álgebras A_i tienen la propiedad (H) y por tanto, para cada $i \in F$, existe $\delta_i > 0$ y un funcional positivo $\psi_i \in A_i^*$ verificando que si p_i es una proyección en A_i^{**} con $\psi_i(p_i) < \delta_i$, entonces existe una proyección central $z_i \in A_i^{**}$ cumpliendo que

$$z_i p_i = 0, \ \ \phi_i(\mathbf{1} - z_i) < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{card}(F)}.$$

Tomemos $\delta = \text{mín}\{\delta_i : \ i \in F\}$ y definimos

$$\psi = \begin{cases} \psi_i, & \text{si } i \in F, \\ 0, & \text{si } i \notin F. \end{cases}$$

Vamos a comprobar que se cumple la propiedad (H). Sea p una proyección en A^{**} tal que $\psi(p) < \delta$. Como $A^{**} = \ell_\infty - \bigoplus_{i\in I} A_i^{**}$, se tiene que $p = (p_i)_{i\in I}$, con $p_i \in A_i^{**}$ proyección para cualquier $i \in I$.

Por otro lado, $\psi(p_i) < \delta \leq \delta_i$ para cualquier $i \in F$ y podemos encontrar $z_i \in A_i^{**}$, proyecciones centrales, tales que

$$z_i p_i = 0, \ \ \phi(\mathbf{1_i} - z_i) < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{card}(F)}, \ \ \forall i \in F.$$

Entonces,

$$z = \begin{cases} z_i, & \text{si } i \in F, \\ 0, & \text{si } i \notin F, \end{cases}$$

es una proyección central en A^{**} que, claramente, verifica que $zp = 0$ y

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{1} - z) &= \sum_{i \in F} \phi_i(\mathbf{1} - z_i) + \sum_{i \notin F} \phi_i(\mathbf{1}) \\ &= \sum_{i \in F} \phi_i(\mathbf{1} - z_i) + \sum_{i \notin F} \|\phi_i\| \\ &< \frac{\operatorname{card}(F)\varepsilon}{2\operatorname{card}(F)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

3.2.9 Observación. Si A es una C^*-álgebra cuyo bidual es un álgebra de von Neumann de tipo I finito acabamos de demostrar que cualquier operador débilmente compacto de A en un espacio de Banach arbitrario puede ser aproximado por operadores que alcanzan su norma. Evidentemente A es un espacio de Banach complejo y esta historia comenzó en el primer capítulo con espacios de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$. Una posibilidad de pasar a caso real es considerar la parte autoadjunta de C^*-álgebra A, A_{sa}. ¿Qué se puede decir en este caso sobre operadores débilmente compactos o formas bilineales?

Si X es un espacio de Banach arbitrario y $T : A_{sa} \to X$ es un operador débilmente compacto tenemos que ver que estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.3.2. Si A verifica la propiedad (H) podemos repetir la demostración del Teorema 3.2.2 pero hay que tener en cuenta que, usando la identificación de $(A_{sa})^*$ con $(A^*)_{sa}$, si tenemos un subconjunto débilmente compacto W de A^*_{sa}, $\phi_0 \in A^*_{sa}$ y $\varepsilon > 0$, debemos encontrar un operador $S : A^*_{sa} \to A^*_{sa}$ verificando que

1. $\|S\| \leq 1$,

2. existe $x_0 \in A_{sa}$, $\|x_0\| = 1$, tal que $(S\phi_0)(x_0) = \|\phi_0\|$ y,

3. $\|S\phi - \phi\| \leq \varepsilon$, para cualquier $\phi \in A_{sa}^*$.

Además de la compacidad débil, el otro ingrediente fundamental en la demostración es el Teorema de Lusin. El segundo apartado del Teorema 3.1.1 presenta los mismos problemas que la primera parte que hemos usado hasta ahora: no es “isométrica”. La solución ha sido utilizar la regularidad. Si u es un elemento de A^{**} y p es una proyección, hemos sido capaces de encontrar $a_0 \in A$ con $\|a_0\| = \|u\|$ y de forma que a_0 y u “coinciden” en una proyección q, $q \leq p$. Pues bien, si u es autoadjunto, $\frac{1}{2}(a_0 + a_0^*)$ tiene las propiedades que se necesitan. El resto de la demostración no necesita modificaciones.

Teniendo en cuenta la observación, el resultado queda de la siguiente manera.

3.2.10 Corolario. *Sea A una C^*-álgebra cuyo bidual es un álgebra de von Neumann de tipo I finito (o verifica la propiedad (H)). Entonces*

1. *cualquier operador débilmente compacto de $A_s a$ en un espacio de Banach arbitrario se puede puede aproximar por operadores que alcanzan su norma y,*

2. *cualquier forma bilineal en A_{sa} se puede aproximar por formas bilineales que alcanzan su norma.*

3.3. Ejemplos

Tenemos una condición suficiente sobre una C^*-álgebra para obtener la densidad de las formas bilineales que alcanzan su norma. En esta sección vamos a estudiar una clase importante de C^*-álgebras que cumplen esta condición. En lo que sigue estudiaremos condiciones sobre un grupo topológico localmente compacto que fuerzan a que el bidual de la correspondiente C^*-álgebra grupo sea un álgebra de von Neumann de tipo I finito.

Por otra parte, no es difícil mostrar ejemplos de C^*-álgebras a las que no se le pueden aplicar nuestros resultados. El ejemplo más fácil quizá sea $K(H)$, los operadores lineales compactos en un espacio de Hilbert. Su bidual es $\mathcal{L}(H)$, que es un álgebra de tipo I, pero no finito a menos que H sea de dimensión finita. La propiedad (H) que, en principio, es más general tampoco se verifica en $K(H)$ dado que la única proyección central en $\mathcal{L}(H)$ es la identidad.

3.3.1. C^*-álgebras grupo

Durante esta sección G denotará un grupo topológico localmente compacto y, $C^*(G)$, la C^*-álgebra grupo asociada. En el Apéndice se puede encontrar una exposición un poco más detallada sobre el tema.

Comencemos recordando brevemente las nociones básicas. Si μ_G denota la medida de Haar en G, podemos considerar $L^1(G)$, el espacio de las funciones integrables con respecto a dicha medida, o sea

$$L^1(G) = \{f : G \to \mathbb{C} \text{ medible} : \int_G |f(t)|\, d\mu_G(t) < +\infty\}$$

Para simplificar la notación escribiremos $\int_G f(t)dt$ en lugar de $\int_G f(t)\, d\mu_G(t)$. Como es usual en $L^1(G)$ tenemos la norma $\|\cdot\|_1$, esto es,

$$\|f\|_1 = \int_G |f(t)|\, dt$$

Además de ser un espacio de Banach con esta norma, podemos definir un producto.

3.3.1 Definición. Sea G un grupo topológico localmente compacto y sean f y g dos funciones de $L^1(G)$. Se define la *convolución* de f y g como la función $f * g : G \to \mathbb{C}$ dada por

$$(f * g)(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t)\, ds$$

La integral está definida para casi todo t de G y se verifica que

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

para cualesquiera $f, g \in L^1(G)$. Con este producto $L^1(G)$ es un álgebra de Banach. Si G es abeliano, entonces $L^1(G)$ también lo es y, de hecho, este es el único caso en que $L^1(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa.

También tenemos en $L^1(G)$ una involución definida de la manera usual: si $f \in L^1(G)$,

$$f^*(t) = \overline{f(t^{-1})}\Delta(t^{-1}), \ \forall\, t \in G,$$

donde Δ denota la función modular de G (ver apéndice).

Denotaremos por $\widehat{G}$ al conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones unitarias e irreducibles de G. Nos referiremos a $\widehat{G}$ como el objeto dual.

Por último, podemos definir una norma de C^*-álgebra en $L^1(G)$. Si $f \in L^1(G)$,

$$\|f\| = \sup\{\|\gamma(f)\| : \ \gamma \in \widehat{G}\}.$$

Pues bien, $\|\cdot\|$ es una norma en $L^1(G)$ que verifica $\|f\| \leq \|f\|_1$. Algunas de sus propiedades quedan recogidas en el siguiente enunciado.

3.3.2 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. *$\|\cdot\|$ es una norma en $L^1(G)$,*

2. *$\|f * g\| \leq \|f\| \, \|g\|$, para cualesquiera $f, g \in L^1(G)$,*

3. *$\|f^*\| = \|f\|$, $\forall f \in L^1(G)$, y*

4. *$\|f^* * f\| = \|f\|^2$, para cualquier $f \in L^1(G)$.*

A la completación de $L^1(G)$ con la norma $\|\cdot\|$ la denotaremos $C^*(G)$ que, en vista del resultado anterior, es una C^*-álgebra. A las C^*-álgebras obtenidas de esta forma es a lo que se llama *C^*-álgebras grupo*.

Comenzemos por el caso en que G es un grupo abeliano. En estas condiciones se puede identificar fácilmente la C^*-álgebra grupo asociada.

3.3.3 Proposición. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano. Entonces $C^*(G) = C_0(\widehat{G})$.*

Demostración. En el caso abeliano, $L^1(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa y las representaciones unitarias irreducibles son las representaciones asociadas a los funcionales multiplicativos, o sea los elementos de $\widehat{G}$. Por tanto, la aplicación de Gelfand manda una función f de $L^1(G)$ en su transformada de Fourier $\widehat{f} \in C_0(\widehat{G})$, definida por

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(t)\chi(t)dt, \ \forall \chi \in \widehat{G}.$$

La imagen separa puntos y es autoadjunta por lo que es densa. Por tanto $C^*(G) = C_0(\widehat{G})$. $\square$

En el caso abeliano, los resultados obtenidos sobre densidad de formas que alcanzan su norma se pueden reescribir de la siguiente manera:

3.3.4 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto abeliano. Entonces*

1. *Cualquier operador débilmente compacto de $C^*(G)$ en un espacio de Banach complejo arbitrario se puede aproximar por operadores que alcanzan su norma.*

2. *El conjunto de las formas bilineales en $C^*(G)$ que alcanzan su norma es denso en el espacio de todas las formas bilineales continuas en $C^*(G)$.*

3. *Si además G es compacto, las formas n-lineales que alcanzan su norma son densas en el espacio de todas las formas n-lineales continuas para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

No hay nada que demostrar en el anterior teorema, sólo usar que $C^*(G) = C_0(\widehat{G})$ y aplicar los resultados que tenemos sobre operadores o formas sobre espacios de funciones continuas. Además, si G es compacto, $\widehat{G}$ es discreto. En particular $C_0(\widehat{G})$ es un espacio de Asplund y, por tanto, la última afirmación es consencuencia de los resultados sobre formas multilineales ya vistos.

Veamos ahora que se puede decir sobre algunos grupos no abelianos. El primer caso que vamos a tratar es el de los grupos compactos.

Pasemos al caso de que G es un grupo no abeliano. Para poder identificar $C^*(G)$ necesitaremos el siguiente resultado. En el apéndice se pueden encontrar los detalles relativos a definiciones y notación.

3.3.5 Teorema. *[33, Theorem 28.40] Sea G un grupo compacto, entonces la aplicación $f \mapsto \widehat{f} = (\pi(f))_{[\pi]\in\widehat{G}}$ que manda una función f en su transformada de Fourier es un isomorfismo de norma menor o igual que uno de*

$L^1(G)$ sobre una subálgebra densa de $c_0 - \otimes_{\pi\in\widehat{G}}\mathcal{L}(H_\pi)$.

Usando esto se puede demostrar nuestro primer resultado de representación para grupos compactos.

3.3.6 Proposición. *Sea K un grupo compacto. Entonces existe una familia $\{n_i\}_{i\in I}$ de naturales tales que $C^*(K)$ es $*$-isomorfo a $c_0 - \bigoplus_{i\in I} M_{n_i}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.5, $L^1(K)$ se puede incluir isométricamente como una subálgebra densa de $c_0 - \bigoplus_{[\sigma]\in\widehat{K}} M_{n_\sigma}$.

Por tanto, si tomamos el cierre se tiene que

$$C^*(K) = c_0 - \bigoplus_{[\sigma]\in\widehat{K}} M_{n_\sigma}.$$

□

Veamos que ocurre con los productos de los grupos mencionados hasta ahora: compactos y abelianos. Para poder trabajar con productos directos de grupos usaremos el siguiente resultado que relaciona las representaciones irreducibles de cada uno de los grupos con las del total debido a Lynn H. Loomis (1953).

3.3.7 Teorema. *[39, Section 12.4.30] Sean G y H grupos localmente compactos y al menos uno de ellos de Tipo I. Entonces para cada representación π unitaria e irreducible de $G\times H$, existen representaciones γ y σ unitarias e irreducibles de G y H respectivamente verificando $\pi = \gamma\otimes\sigma$.*

Un par de comentarios sobre este resultado: no vamos a aburrir al lector en este momento con la definición de grupo de Tipo I. Lo único que necesita saber es que los grupos compactos y los grupos localmente compactos abelianos son de Tipo I. Para más detalles se puede consultar el apéndice. La segunda observación es que este teorema es en realidad una equivalencia. Dado un par de representaciones irreducibles y unitarias, su producto es una representación unitaria e irreducible siempre.

3.3.8 Proposición. *Sea K un grupo compacto y H un grupo localmente compacto abeliano. Entonces existe una familia de naturales $\{n_i\}_{i\in I}$ tales que $C^*(H\times K)$ es $*$-isomorfo a*

$$c_0 - \bigoplus_{i\in I} C_0(\widehat{H}, M_{n_i}),$$

donde $\widehat{H}$ es el grupo dual de H, y M_{n_i} son las matrices de orden n_i.

Demostración. Vamos a construir el $*$-isomorfismo en un subconjunto denso aprovechando el Teorema 3.3.5 y después extenderemos por continuidad.

Definimos $\Phi : L^1(H)\otimes L^1(K)\to C_0(\widehat{H}, C^*(K))$ como

$$\Phi(f\otimes g)(\gamma) = \widehat{f}(\gamma)g,$$

para cualquier $\gamma\in\widehat{H}$, $f\in L^1(H)$ y $g\in L^1(K)$ y extendemos por linealidad.

Veamos que Φ es una isometría sobre su imagen. Sea $F=\sum_{i=1}^n f_i\otimes g_i$ un elemento cualquiera de $L^1(H)\otimes L^1(K)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\Phi(F)\|_\infty =& \sup_{\gamma\in\widehat{H}}\sup_{\sigma\in\widehat{K}}\|\sigma(\Phi(F))(\gamma)\|\\
=& \sup_{\gamma\in\widehat{H}}\sup_{\sigma\in\widehat{K}}\|\sum_{i=1}^n \widehat{f}_i(\gamma)\sigma(g_i)\|\\
=& \|F\|,
\end{aligned}$$

ya que cualquier representación unitaria irreducible π de $H \times K$ es de la forma $\gamma \otimes \sigma$, donde γ y σ son representaciones irreducibles unitarias de H y K, respectivamente, por el Teorema 3.3.7.

Como $L^1(H) \otimes L^1(K)$ es denso en $L^1(H \times K)$ con respecto a $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_1$, $L^1(H) \otimes L^1(K)$ es denso en $C^*(H \times K)$.

Por otro lado $\Phi(L^1(H) \otimes L^1(K)) = A(\widehat{H}) \otimes L^1(K)$, donde $A(\widehat{H})$ es el álgebra de Fourier de $\widehat{H}$ (consultar el Apéndice para las definiciones).

Como $A(\widehat{H})$ es denso en $C_0(\widehat{H})$ y $L^1(K)$ es denso en $C^*(K)$,

$$\overline{\Phi(L^1(H) \otimes L^1(K))} = C_0(\widehat{H}, C^*(K)).$$

Por tanto Φ se extiende a un $*$-isomorfismo de $C^*(H \times K)$ sobre el espacio $C_0(\widehat{H}, C^*(K))$.

Para acabar la demostración sólo hay que recordar que

$$C^*(K) = c_0 - \bigoplus_{i \in I} M_{n_i}(\mathbb{C}),$$

con lo que

$$C_0(\widehat{H}, C^*(K)) = c_0 - \bigoplus_{i \in I} C_0(\widehat{H}, M_{n_i}(\mathbb{C})).$$

□

Hemos demostrado por tanto que $C^*(H \times K)$, para H localmente compacto abeliano y K compacto cualesquiera, verifica la propiedad (H). En virtud del Teorema 3.2.2, podemos establecer el siguiente resultado.

3.3.9 Corolario. *Sea H un grupo localmente compacto abeliano, K un grupo compacto. Entonces cualquier operador débilmente compacto de $C^*(H \times K)$ en un espacio de Banach complejo puede ser aproximado por operadores* *que alcanzan su norma. Además cualquier forma bilineal en $C^*(H \times K)$ puede ser aproximada por formas bilineales que alcanzan su norma.*

Es interesante mencionar que dentro de los grupos para los que la C^*-álgebra asociada que acabamos de comprobar que se verifica la propiedad (H) se encuentran algunas clases muy conocidas. Recordemos que un grupo G es un grupo de Moore cuando todas sus representaciones irreducibles son finito dimensionales. Esta clase de grupos contiene, entre otros, a los grupos abelianos y a los grupos compactos.

3.3.10 Teorema (Freudenthal-Weil). *[39, Theorem 12.4.28] Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grupo G de Moore:*

1. *G es el producto directo de un espacio euclídeo y un grupo compacto.*

2. *G es un grupo conexo.*

3.3.11 Corolario. *Sea G un grupo de Moore conexo. Entonces todo operador débilmente compacto de $C^*(G)$ en un espacio de Banach arbitrario se puede aproximar por operadores que alcanzan su norma. Además cualquier forma bilineal en $C^*(G)$ se puede aproximar por formas bilineales que alcanzan su norma.*

3.3.12 Problemas.

- *El primer problema que queda pendiente en esta memoria es qué ocurre en el caso general. Si A es una C^*-álgebra cualquiera, ¿bajo que condiciones se cumple que $\overline{\mathcal{AL}(^2A)} = \mathcal{L}(^2A)$?.*

- *Sería interesante conocer qué C^*-álgebras verifican la propiedad (H). Además del interés relativo al problema que nos ocupa, no parece descabellado pensar que está propiedad se pueda expresar en términos de conceptos ya conocidos en la teoría de C^*-álgebras.*
- *Un paso intermedio en estos problemas es el estudio de las C^*-álgebras grupo que verifican la densidad.*

3.4. Formas multilineales

La demostración de la densidad de las aplicaciones multilineales en una C^*-álgebra presenta los mismos problemas (y alguno nuevo) que teníamos en el caso de aplicaciones multilineales en espacios de funciones continuas.

Usando técnicas similares a las del primer capítulo seremos capaces de demostrar la densidad en el caso particular de que determinadas formas multilineales "simples" sean densas. Para que esto ocurra necesitamos que todos los operadores asociados a una forma multilineal sean compactos en lugar de débilmente compactos. Por lo demás, la demostración usará las mismas técnicas que en el caso conmutativo y, más que otra cosa, aparece en esta sección por mantener una cierta simetría en los resultados.

En lo que sigue $\{n_i\}_{i\in I}$ será una familia de naturales arbitraria, $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos dispersos, y A será la C^*-álgebra

$$A = c_0 - \bigoplus_{i\in I} C_0(\Omega_i, M_{n_i}(\mathbb{C})).$$

Antes de demostrar que las formas multilineales en A que alcanzan su norma son densas, vamos a enunciar algunos resultados que necesitaremos.

J. Bourgain demostró el siguiente resultado que generaliza la propiedad de Schur a espacios que tengan una descomposición finito dimensional en el sentido de ℓ_1.

3.4.1 Teorema. *[19, Corollary 2.6] Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios de dimensión finita. Entonces $\ell_1 - \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tiene la propiedad de Schur.*

Si $\{\dim(X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, la demostración no presenta demasiadas dificultades. Es el caso en que las dimensiones no están acotadas donde está la verdadera dificultad de este teorema.

3.4.2 Corolario. *A^* tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. Vamos a identificar el dual de A en primer lugar. Dado que Ω_i es disperso para cualquier $i \in I$, $C_0(\Omega_i)^* = \ell_1(\Gamma_i)$ para conveniente conjunto de índices Γ_i y teniendo en cuenta que la suma directa en el sentido ℓ_1 de espacios $\ell_1(\Gamma)$ vuelve a ser un espacio del mismo tipo, podemos encontrar un nuevo conjunto de índices Λ de forma que

$$C_0(\Omega_i, M_{n_i}(\mathbb{C}))^* = \ell_1 - \bigoplus_{j\in\Gamma_i} \ell_1(\Gamma i, M_{n_i}(\mathbb{C})),$$

y, por tanto,

$$A^* = \ell_1 - \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_{n_\lambda}(\mathbb{C})^*.$$

Sea $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A^* convergente a cero en la topología débil. Entonces tiene que existir un conjunto numerable $\Lambda_1 \subset \Lambda$ de forma que

$$\phi_n \in \ell_1 - \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_1} M_{n_\lambda}(\mathbb{C})^*, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora basta aplicar el teorema anterior para obtener que $\{\phi_n\}$ converge en norma a cero. □

Vamos a probar que los operadores con los que vamos a trabajar son compactos y no sólo débilmente compactos. Esto permitirá cambiar operadores cualesquiera por operadores de rango finito si tenemos propiedad de aproximación.

3.4.3 Lema. *Para la C^*-álgebra A, se verifican las dos afirmaciones siguientes:*

1. $\mathcal{L}(^N A)$ *no contiene una copia de* c_0.
2. *Todo operador de A en $\mathcal{L}(^N A)$ es compacto, para cualquier $N \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Vamos a demostrar ambas afirmaciones a la vez por inducción. Si $N = 1$, entonces $\mathcal{L}(^N A)$ no es otra cosa que A^* que acabamos de comprobar que tiene la propiedad de Schur y por tanto no puede contener a c_0. Por otra parte, como ya sabíamos, cualquier operador de A en A^* es débilmente compacto ([6]) y, por tanto compacto de nuevo usando la propiedad de Schur.

Supongamos, por inducción, que $\mathcal{L}(^N A)$ no contiene una copia de c_0 y que cualquier operador de A en $\mathcal{L}(^N A)$ es compacto.

Sabemos que A no contiene a ℓ_1, que $\mathcal{L}(^N A)$ no contiene a ℓ_∞ y que

$$\mathcal{L}(^N A) = \mathcal{L}(A, \mathcal{L}(^N A)) = K(A, \mathcal{L}(^N A)).$$

Podemos aplicar el Teorema A.1.5 para concluir que $\mathcal{L}(^{N+1} A)$ no contiene a ℓ_∞ y, por tanto, no puede contener a c_0 por ser un espacio dual.

Ahora podemos aplicar de nuevo que cualquier operador de A en un espacio que no contenga a c_0 es débilmente compacto.

Como A^* tiene la propiedad de Schur, A tiene la propiedad de Dunford-Pettis y por el Teorema de Brace-Grothendieck (Teorema A.1.2) cualquier operador de A en $\mathcal{L}(^N A)$ lleva sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones convergentes en norma.

El Teorema ℓ_1 de Rosenthal (Teorema A.1.8) nos permite concluir la demostración del lema. □

3.4.4 Teorema. *Las formas N-lineales que alcanzan su norma son densas en el espacio de las formas N-lineales continuas en A, para cualquier N natural.*

Demostración. Comencemos observando que cualquier forma N-lineal $B : A^N \to \mathbb{C}$ de la forma

$$B(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \prod_{j=1}^{N} \xi_j(a_j(i_j)(t_j)),$$

donde $i_j \in I$, $t_j \in \Omega_{i_j}$ y $\xi_j \in M^*_{n_{i_j}}$, $j = 1, 2, \ldots, N$ alcanza su norma: sólo hay que fijarse en que estamos trabajando sobre espacios de matrices de dimensión finita y espacios de funciones continuas también de dimensión finita. Por tanto no hace falta considerar Ω_{i_j}, sino solamente el compacto $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$. Así pues, B alcanza su norma por ser una aplicación continua en un espacio "finito" dimensional. Por el mismo motivo, las combinaciones lineales de formas de este tipo también alcanzan su norma. Llamemos $\mathcal{F}_N$ a dicha envolvente lineal. Vamos a demostrar por inducción que $\overline{\mathcal{F}_N} = \mathcal{L}(^N A)$ para cualquier $N \in \mathbb{N}$.

El caso $N = 1$ es inmediato. Supongamos que $\overline{\mathcal{F}_j} = \mathcal{L}(^j A)$ para $j \leq N$ y sea $\Phi : A \to \mathcal{L}(^N A)$ un operador continuo. Como Φ es compacto y A tiene la propiedad de aproximación, podemos encontrar un operador Ψ de rango finito tan próximo a Φ como se desee. Además deben existir $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p \in A^*$ y $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_p \in \mathcal{L}(^N A)$ verificando que

$$\Psi(a) = \sum_{j=1}^{p} \phi_j(a)\Psi_j, \ \forall a \in A.$$

Como $\mathcal{F}_N$ es denso en $\mathcal{L}(^N A)$ y $\mathcal{F}_1$ es denso en A^*, Ψ se puede aproximar por elementos de $\mathcal{F}_{N+1}$.

$\square$

En particular, si K es un grupo compacto, la C^*-álgebra grupo asociada es del tipo consideredo. Si, además, K es abeliano, este resultado está incluido en el correspondiente del segundo capítulo.

3.4.5 Corolario. *Sea K un grupo compacto. Entonces cualquier forma multilineal en $C^*(K)$ se puede aproximar por formas multilineales que alcanzan su norma.*

3.4.6 Problemas.

- *El problema de las formas multilineales para una C^*-álgebra cualquiera es, evidentemente, la cuestión más interesante que queda sin resolver. Los métodos empleados hasta ahora no parece que permitan ir más allá: la compacidad débil, obtenida como consecuencia de la desigualdad de Grothendieck, no se verifica para formas trilineales cualesquiera. Como primer paso no exento de interés, no sabemos que ocurre para formas trilineales en espacios de funciones continuas si el mencionado espacio no es Asplund. Por ejemplo, no tenemos ninguna información sobre formas multilineales en $C[0,1]$.*

- *Sería interesante conocer que ocurre con otro tipo de funciones, como por ejemplo formas simétricas o polinomios. Sobre este aspecto hay muy pocos resultados en cualquier sentido, ya sea afirmativo o negativo.*

Apéndice **A**

Apéndice

A.1. Operadores débilmente compactos y cuestiones relacionadas

En esta sección vamos a exponer algunos resultados que se han usado a lo largo de los tres primeros capítulos. El hilo conductor son propiedades que verifican los espacios de funciones de continuas y los operadores en dichos espacios. No hay demostraciones, pero sí referencias en dónde se pueden encontrar. La mayoría de éstas se pueden localizar en textos clásicos como [25] o [27].

Uno de los ingredientes importantes, especialmente a la hora de trabajar con formas multilineales, ha sido la propiedad de Dunford-Pettis. Esta propiedad clásica se ha utilizado para obtener la Proposición 2.2.3 que es clave para obtener los resultados de la última sección del capítulo segundo.

A.1.1 Definición. Un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Dunford-*

Pettis si cualquier operador débilmente compacto definido en X lleva conjuntos débilmente compactos en conjuntos norma-compactos.

Dunford y Pettis demostraron que los espacios del tipo $L^1(\mu)$ verifican esta propiedad y Grothendieck ([31]), y Bartle, Dunford y Schwartz demostraron, independientemente, que los espacios de funciones continuas también la verifican.

La lista de espacios que verifican esta propiedad es, por ahora, relativamente corta. Además de los ya mencionados, se sabe que, por ejemplo, el álgebra disco o $\mathcal{H}^\infty$ la verifican. En cualquier caso, nosotros hemos utiizado la propiedad de Dunford-Pettis como una herramienta para trabajar con operadores débilmente compactos. El siguiente resultado recoge lo utilizado en esta memoria.

A.1.2 Teorema (de Brace-Grothendieck). *([27, pp. 177]) Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

2. *Para cualquier espacio de Banach Y, cualquier operador débilmente compacto de X en Y lleva sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma.*

3. *Para cualquier espacio de Banach Y, cualquier operador débilmente compacto de X en Y lleva sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones convergentes en norma.*

4. *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débil nula en X, y $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débil nula en X^*, entonces $\lim_n x_n^*(x_n) = 0$.*

El dual de los espacios de funciones continuas es un espacio $L^1(\mu)$, para alguna medida μ. Si la medida es atómica, $L^1(\mu)$ tiene algunas "perfecciones" adicionales. Una de las que hemos utilizado nosotros en el estudio de las formas multilineales es la propiedad de Schur.

A.1.3 Definición. Un espacio de Banach tiene la *propiedad de Schur* si cualquier sucesión convergente en la topología débil es convergente en norma.

El ejemplo típico de espacio que tiene la propiedad de Schur es ℓ_1. También es fácil comprobar que la propiedad se hereda a subespacios y, como c_0 no la tiene, ninguno espacio con la propiedad de Schur puede contener a c_0. Para los duales de espacios de funciones continuas, esta propiedad está perfectamente caracterizada.

A.1.4 Teorema. *Sea L un espacio topológico localmente compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$C_0(L)$ es un espacio de Asplund.*
2. *L es disperso.*
3. *$C_0(L)^*$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*
4. *$C_0(L)^* = \ell_1(\Gamma)$ para conveniente conjunto Γ.*
5. *$C_0(L)^*$ tiene la propiedad de Schur.*
6. *$C_0(L)$ no contiene una copia de ℓ_1.*

En el caso de C^*-álgebras no conmutativas estas equivalencias (las que tienen sentido) pueden no ser ciertas. El ejemplo más fácil son los operadores compactos en un espacio de Hilbert de dimensión infinita. $K(H)$ es un espacio de Asplund y por tanto su dual tiene la propiedad de Radon-Nikodym, pero se puede comprobar que el espacio de los operadores traza no tiene la propiedad de Schur.

Los resultados que a continuación se citan discuten la posibilidad de que $K(X,Y)$ o $L(X,Y)$ contengan una copia de c_0 o ℓ_∞. Como se verá, está posibilidad está, en nuestro caso íntimamente ligada a la "posición" de $K(X,Y)$ en $L(X,Y)$.

A.1.5 Teorema. *[36, Theorem 4] Sean X e Y espacios de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{K}(X,Y)$ contiene una copia de ℓ_∞.*
2. *Y contiene una copia de ℓ_∞ ó X contiene una copia complementada de ℓ_1.*

Si exigimos condiciones adicionales a los espacios X e Y, la información que se obtiene es más completa.

A.1.6 Teorema. *[28, Theorem 4] Sean X e Y espacios de Banach. Supongamos que verifican una de las dos condiciones siguientes:*

1. *X es un espacio del tipo $\mathcal{L}_\infty$ e Y es subespacio cerrado de un espacio del tipo $\mathcal{L}_1$, o*
2. *$X = C[0,1]$ e Y es un espacio con cotipo 2.*

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. *$K(X,Y) \neq \mathcal{L}(X,Y)$,*

2. *$K(X,Y)$ contiene una copia de c_0,*

3. *$\mathcal{L}(X,Y)$ contiene una copia de ℓ_∞, y*

4. *$K(X,Y)$ no está complementado en $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Los siguientes resultados se han utilizado a la hora de estudiar formas multilineales. El primero relaciona operadores compactos y operadores completamente continuos, mientras que el segundo es la famosa dicotomía debida a H. P. Rosenthal sobre ℓ_1.

A.1.7 Teorema. *[32, Corollary 5] Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X no contiene una copia de ℓ_1.*

2. *Cualquier operador completamente continuo en X es compacto.*

3. *Cualquier operador completamente continuo de X en X^* es compacto.*

A.1.8 Teorema. *([24, Theorem III.3.7]) Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X. Entonces una, y solamente una, de las siguientes afirmaciones es cierta.*

1. *Cualquier parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una parcial débil Cauchy.*

2. *$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una parcial equivalente a la base canónica de ℓ_1.*

A.2. C^*-álgebras

La teoría de C^*-álgebras es muy amplia y sólo expondremos lo mínimo para completar la lectura del tercer capítulo. No aparecen demostraciones, pero la mayoría de los resultados se pueden encontrar en textos clásicos como [42] o [48].

Aún a riesgo de ofender al lector comenzamos por lo más básico.

A.2.1 Definición. Una C^*-álgebra A es un álgebra de Banach compleja con una involución, que denotaremos $*$, que verifica $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Un elemento x de A diremos que es *normal* si conmuta con su *adjunto* x^*, y diremos que es *autoadjunto* si $x = x^*$.

Por último, diremos que $x \in A$ es *positivo* si existe $y \in A$ verificando que $x = y^*y$.

Notaremos A_{sa} al conjunto de los elementos autoadjuntos de la C^*-álgebra A. Es fácil comprobar que A_{sa} es una espacio de Banach real y que cualquier elemento de A se puede escribir como suma de un elemento en A_{sa} y otro en iA_{sa}.

Existe la posibilidad de definir las C^*-álgebras como subálgebras cerradas y autoadjuntas de $\mathcal{L}(H)$, el álgebra de los operadores acotados en un espacio de Hilbert. La equivalencia entre ambas definiciones, el Teorema de Gelfand-Naimark-Segal (ver [42, Sección 3.3]), nos permite utilizar propiedades de operadores entre espacios de Hilbert para definir nociones en una C^*-álgebra genérica. Por ejemplo, además de la topología usual de la norma, podemos considerar las siguientes.

A.2.2 Definición. Sea $A \subset \mathcal{L}(H)$ una C^*-álgebra. Diremos una red $(a_i)_{i\in I}$ converge débilmente (fuertemente) a a_0 si

$$\langle a_i(u), v\rangle \to \langle a_0(u), v\rangle \quad (\ \|a_i(u) - a_0(u)\| \to 0)$$

para cualesquiera $u, v \in H$.

En otras palabras, estamos hablando de restringir la topología débil de operadores o la fuerte de operadores, en $\mathcal{L}(H)$ a la C^*-álgebra. Hay que tener cuidado de no confundir estas topologías con la convergencia débil ($\sigma(X, X^*)$) o la fuerte (en norma) de cualquier espacio de Banach. Para evitarlo nos referiremos a ellas como topología débil o fuerte de operadores en contraposición a los textos clásicos que normalmente se refieren a ellas simplemente como convergencia débil o fuerte.

Los elementos positivos de una C^*-álgebra forman un cono y esto permite definir un orden de la manera usual. Si x e y son dos elementos del álgebra, diremos que $x \geq y$ si $x - y \geq 0$. Quizá el resultado más utilizado en lo que resta de capítulo sobre el orden en una C^*-álgebra sea el siguiente.

A.2.3 Proposición. *[42, Proposition 1.3.5] Si $0 \leq x \leq y$, entonces $\|x\| \leq \|y\|$ y $a^*xa \leq a^*ya$ para cualquier $a \in A$.*

Un álgebra de von Neumann será una C^*-álgebra que, como espacio de Banach, es dual. Además, en este caso, el predual es único ([48, Corollary III.3.9]).

A.2.4 Proposición. *Si A es una C^*-álgebra, entonces existe a lo sumo un espacio de Banach X verificando que $X^* = A$.*

Notaremos A^* al dual de una C^*-álgebra, teniendo cuidado de no confundir esta notación con la de autoadjunto. Utilizando la involución del álgebra, se dirá que un funcional ϕ es *autoadjunto* si ϕ^*, definido como

$$\phi^*(x) = \overline{\phi(x^*)}, \ \forall x \in A$$

coincide con ϕ. Diremos que un funcional ϕ es positivo si conserva el cono de los elementos positivos de la C^*-álgebra. El primer resultado que enlaza la teoría abstracta de C^*-álgebras y la concreta como álgebras de operadores en espacios de Hilbert es la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

A.2.5 Proposición (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Si ϕ es un funcional positivo en una C^*-álgebra A, entonces*

$$|\phi(y^*x)|^2 \leq \phi(y^*y)\ \phi(x^*x)$$

para cualesquiera x, y en A.

Una de las primeras herramientas que usábamos en el caso conmutativo era la descomposición de Hahn de una medida real. Ahora diremos que dos funcionales positivos ϕ y ψ, en una C^*-álgebra son *ortogonales* si $\|\psi + \phi\| = \|\psi\| + \|\phi\|$. Esto es justamente lo que ocurre cuando descomponemos una medida real como diferencia de su parte positiva y su parte negativa. Pues bien, cualquier funcional autoadjunto admite una descomposición similar.

A.2.6 Proposición. *Para cada funcional autoadjunto ϕ en una C^*-álgebra A existe un único par de funcionales positivos ortogonales ϕ^+ y ϕ^- tales que $\phi = \phi^+ - \phi^-$. Más aún, ϕ^+ y ϕ^- tienen "soportes disjuntos", esto es, existen dos proyecciones ortogonales $p, q \in A^{**}$, verificando que $\phi^+(p) = \|\phi^+\|$, $\phi^-(q) = \|\phi^-\|$ y $\phi^+(q) = \phi^-(p) = 0$. En particular $\|\phi\| = \phi(p - q)$.*

Si lo que queremos es una descomposición de un funcional cualquiera, en analogía con la descomposición de una medida compleja, necesitamos trabajar únicamente con funcionales *normales*. Recordemos que un funcional en un álgebra de von Neumann (C^*-álgebra dual) es normal si, y sólo si, pertenece al predual. En particular el resultado se aplica a cualquier funcional en el dual de una C^*-álgebra que será, por tanto, normal respecto al bidual de dicha álgebra.

Usaremos la notación $\phi(x\cdot)$ y $\phi(\cdot x)$ para los funcionales definidos como $\phi(x\cdot)(y) = \phi(xy)$ y $\phi(\cdot x)(y) = \phi(yx)$. En principio esto tiene sentido cuando ϕ es un elemento del dual de una C^*-álgebra A y x es un elemento de A. La siguiente proposición afirma que podemos tomar x en A^{**} y el funcional se sigue quedando en A^*.

A.2.7 Proposición. *Si ϕ es un funcional normal en un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ y $x \in \mathcal{M}$, entonces los funcionales $\phi(\cdot x)$ y $\phi(x\cdot)$ son normales. Si, además, ϕ es autoadjunto entonces ϕ^+ y ϕ^- también son normales.*

Los funcionales definidos de esta manera nos permiten escribir un funcional como producto de un funcional positivo y un elemento del bidual. Recuérdese que, en el caso conmutativo, cualquier medida se describe usando su signo y la variación. Enunciamos ya el resultado sobre la *descomposición polar* de un funcional.

A.2.8 Proposición. *Sea ϕ un funcional normal en un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$. Entonces existe un único funcional normal $|\phi|$ verificando que $\||\phi|\| = \|\phi\|$ y $|\phi(x)|^2 \leq \|\phi\| \, |\phi|(x^*x)$ para cualquier $x \in \mathcal{M}$. Además existe una isometría parcial u tal que $\phi = |\phi|(u\cdot)$ y $|\phi| = \phi(u^*\cdot)$.*

La versión no conmutativa del Teorema de Lusin se establece para elementos en el biconmutante de una C^*-álgebra. Recordemos que, si A es C^*-álgebras, y S es un subconjunto de A, se define el conmutante de S como

$$S^c = \{a \in A : \; sa = as, \; \forall \, s \in S\}$$

El biconmutante de una C^*-álgebra en un álgebra de von Neumann coincide con su cierre en la topología débil de operadores. En particular, si consideramos una C^*-álgebra como subálgebra de su bidual, su biconmutante coincide con el bidual.

Recordemos la definición de proyección abierta y cerrada.

A.2.9 Definición. Dada una C^*-álgebra A y una proyección $p \in A^{**}$, diremos que p es una proyección *abierta* si existe una red creciente $\{a_i\}_{i \in I}$ en A de elementos positivos verificando que $\lim_{i \in I} a_i = p$ en la topología ω^*.

Diremos que una proyección es *cerrada* si su complementaria, $\mathbf{1} - p$, es abierta.

Por último, diremos que una proyección cerrada p es *compacta* si existe un elemento positivo $a \in A$ verificando $p \leq a$.

Dada una proyección $p \in A^{**}$, denotaremos $\bar{p}$ a la menor proyección cerrada que verifica $\bar{p} \geq p$.

Hay una estrecha relación entre este tipo de proyecciones y la estructura de la C^*-álgebra (ver [42, Sección 3.11]). Como ejemplo, un ideal izquierdo $A^{**}p$ de A^{**} es ω^*-cerrado si, y sólo si, la proyección p es abierta. Quizá, desde nuestro punto de vista, sean más interesantes los resultados que enlazan este tipo de proyecciones y funcionales que alcanzan su norma.

A.2.10 Proposición. *Sea A una C^*-álgebra y $\phi \in A^*$ un funcional de norma uno que alcanza su norma. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *Si ϕ es positivo, existe un único par de proyecciones, p y q, p compacta y q abierta, tales que*

$$\{x \in A^+ : \ \phi(x) = \|\phi\| = \|x\|\} = \{x \in A^+ : \ p \leq x \leq q\}.$$

2. *Si ϕ es autoadjunto, existe un único par de proyecciones compactas, p y q, tales que*

$$\{x \in A_{sa} : \ \phi(x) = \|\phi\| = \|x\|\} = \{x \in A_{sa} : \ \|x\| = 1, \ x(p+q) = p-q\}.$$

3. *Existe una isometría parcial v de A^{**} que pertenece localmente a A tal que*

$$\{x \in A : \ \phi(x) = \|\phi\| = \|x\|\} = \{x \in A : \ \|x\| = 1, \ xv^* = vv^*\}$$

   y diremos que una isometría parcial v de A^{**} pertenece localmente *a A si v^*v es una proyección compacta y $v = xv^*v$ para algún elemento x de A con norma uno.*

Todos los apartados de la proposición anterior se pueden encontrar o son consecuencia inmediata de resultados de [10].

A.2.11 Definición. Sea A una C^*-álgebra y B una C^*-subálgebra de A. Diremos que una proyección p de A^{**} es *regular relativa* a B si verifica

$$\|bp\| = \inf\{\|b-a\| : \ a \in A, \ ap = 0\}$$

para cualquier $b \in B$. En el caso de que $A = B$, simplemente diremos que la proyección es regular.

A.2.12 Ejemplo. (ver [8, Example I.2]) Consideremos el espacio de Hilbert de dimensión dos, ℓ_2^2, y la C^*-álgebra

$$A = c_0 - \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(\ell_2^2)$$

la c_0-suma numerable de copias del espacio de las matrices con entradas en ℓ_2^2. Su bidual es por tanto

$$A^{**} = \ell_\infty - \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(\ell_2^2)$$

la ℓ_∞-suma de copias de $\mathcal{L}(\ell_2^2)$. Para facilitar la notación, fijamos la base usual en ℓ_2^2 y entonces podemos identificar $\mathcal{L}(\ell_2^2)$ con las matrices dos por dos.

Sea $p = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A^{**}$ la proyección definida como

$$p_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

para cualquier n. Definimos la sucesión $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de A como $q_j = \{q_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde q_n^j es el elemento de A dado por

$$q_n^j = \begin{cases} 0, & \text{si } j < n \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{si } j \geq n \end{cases}$$

Llamemos B a la C^*-álgebra generada por $A, \mathbf{1}$ y p. Entonces la sucesión $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es creciente y mayorada en B^{**} y tiene límite, llamémoslo q, en la topología fuerte de operadores. Según la definición que hemos dado, q es una proyección abierta.

Consideremos ahora el ideal $I = \{b \in B : bq = 0\}$. Es claro que $I \subset A$. Entonces si q fuese regular se tendría que

$$\|pq\| = \|p + I\| \geq \|p + A\| = 1,$$

pero

$$\|pq\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|pq_n\| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

Por tanto q no es regular.

La regularidad de las proyecciones la vamos a utilizar para obtener una mejora del Teorema de Lusin. Sabemos que dado un elemento x en el bidual de una C^*-álgebra podemos encontrar una proyección p cerca de la identidad de forma que x "restringido" a p se comporta como a restringido a p, para algún elemento a del álgebra. La mejora va a consistir en que si conseguimos que la proyección sea cerrada, podremos elegir a con norma menor o igual que x. Digamos que en la demostración del Teorema de Lusin conmutativo primero se encuentra un subconjunto compacto, la citada proyección, y luego se extiende la función restringida a ese subconjunto mediante el Lema de Uryshon. Pues bien, las proyecciones compactas verifican algo similar al Lema de Uryshon:

A.2.13 Proposición. *([10, Lemma 2.7]) Sea A una C^*-álgebra, $p, q \in A^{**}$ proyecciones, p compacta, q abierta y $p \leq q$. Entonces existe $a \in A$ positivo verificando $p \leq a \leq q$.*

Ya que hemos comentado algo sobre proyecciones en C^*-álgebras, recordemos que, dependiendo del tipo de proyecciones que contenga un álgebra de von Neumann se pueden clasificar en varios tipos. En lo que a nosotros respecta, el siguiente resultado describe las álgebras de von Neumann de tipo I.

A.2.14 Teorema. *([48, Theorem V.1.27]) Si A es un álgebra de von Neumann* *de tipo I, entonces existe una única familia de proyecciones ortogonales y centrales $\{z_\alpha\}$ con $\sum z_\alpha = \mathbf{1}$ de forma que*

$$A = \ell_\infty - \bigoplus_\alpha A_\alpha \overline{\otimes} \mathcal{L}(H_\alpha),$$

donde A_α son C^*-álgebras conmutativas y H_α son espacios de Hilbert.

Si además A es de tipo I finito, entonces la dimensión de H_α es finita para cualquier α.

Sin entrar en detalles, mencionemos por último que la definición usual de álgebras de von Neumann de tipo I, II o III es la siguiente.

A.2.15 Definición. Un álgebra de von Neumann diremos que es de tipo I si cualquier proyección central no trivial acota superiormente a alguna proyección abeliana no trivial. Si el álgebra no tiene proyecciones finitas, esto es si el álgebra es puramente infinita, diremos que es de tipo III. Por último, si el álgebra no tiene proyecciones abelianas no triviales y cualquier proyección central no trivial acota superiormente alguna proyección finita no trivial diremos que el álgebra es de tipo II.

A.2.16 Teorema. *([48, Theorem V.1.19]) Cualquier álgebra de von Neumann A se puede descomponer como una suma directa $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, donde A_1 es un álgebra de von Neumann de tipo I, A_2 de tipo II y A_3 de tipo III.*

También usaremos, principalmente a la hora de estudiar formas bilineales en C^*-álgebras, el siguiente resultado.

A.2.17 Teorema. *([48, Corollary III.5.2]) El predual de un álgebra de von Neumann es débilmente secuencialmente completo.*

El motivo es la relación con la compacidad débil y a los operadores débilmente compactos en C^*-álgebras. Dado que un operador es débilmente compacto si, y sólo si, su transpuesto lo es, se pueden estudiar los operadores débilmente compactos de una C^*-álgebra en un espacio de Banach arbitrario utilizando los subconjuntos relativamente débilmente compactos del dual de la C^*-álgebra. El teorema que pasamos a enunciar es un resumen de varios resultados parciales obtenidos independientemente por varios autores.

A.2.18 Teorema. *[48, Theorem 5.4] Dado un subconjunto K del predual $\mathcal{M}_*$ de un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *K es relativamente $\sigma(\mathcal{M}_*, \mathcal{M})$-compacto.*
2. *La restricción $K_{|A}$ de K a cualquier *-subálgebra abeliana maximal A de $\mathcal{M}$ es relativamente $\sigma(A_*, A)$-compacta.*
3. *K está acotado y para cualquier sucesión decreciente de proyecciones $\{p_n\}$ en $\mathcal{M}$ con $\inf p_n = 0$, se tiene que $\lim \psi(p_n) = 0$ uniformemente en $\psi \in K$.*
4. *K está acotado y existe ω en $\mathcal{M}_*^+$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que $|\psi(a)| < \varepsilon$ para cualquier $\psi \in K$ si $\omega(a^*a + aa^*) < \delta$ y $\|a\| \leq 1$.*
5. *K está acotado y para cualquier red creciente de proyecciones $\{p_i\}$ en $\mathcal{M}$, existe $\lim_i \psi(p_i)$ uniformemente en $\psi \in K$.*

Cuando aplicamos esto a operadores en espacios de funciones se obtiene lo siguiente.

A.2.19 Teorema. *[27, VI.2, Theorem 15] Sea X un espacio de Banach, y $T : C(\Omega) \to X$ un operador que no sea débilmente compacto, entonces existe una copia isométrica de c_0 en $C(\Omega)$ en la que T es un isomorfismo. En particular, si X no contiene a c_0, cualquier operador de $C(\Omega)$ en X es débilmente compacto.*

Como consecuencia, cualquier operador de un espacio funciones continuas en un espacio débilmente secuencialmente completo es débilmente compacto. La validez de este resultado de A. Grothendieck ([31]) para C^*-álgebras fue conjeturado por S. Sakai en [45], donde demostró que todo operador de una C^*-álgebra en un L-espacio abstracto es débilmente compacto.

Este resultado fue mejorado posteriormente por C. A. Akemann ([6]), quien demostró que cualquier operador de una C^*-álgebra en el predual de un álgebra de von Neumann es débilmente compacto. El resultado que citamos a continuación es una mejora debida a C. A. Akemann, P. G. Dodds y J. L. B. Gamlen.

A.2.20 Teorema. *([9]) Sea A una C^*-álgebra y X un espacio de Banach. Si X no contiene una copia de c_0, entonces cualquier operador de A en X es débilmente compacto.*

Esto incluye, en particular, a los preduales de álgebras de von Neumann y, más generalmente, a espacios débilmente secuencialmente completos.

A.3. C^*-álgebras grupo

Los grupos topológicos que aparecen en Análisis Armónico dan lugar a C^*-álgebras de forma natural. La exposición que aquí se hace no es más que una breve introducción a un tema sumamente amplio. El lector que busque detalles de las demostraciones o información en mayor profundidad sobre el tema pude consultar, por ejemplo, [39].

En lo que sigue G denotará un grupo topológico localmente compacto.

La consecuencia fundamental de la estructura que tenemos en G es la existencia de una medida destacada: la medida de Haar.

A.3.1 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces existe una medida μ_G positiva y regular sobre la σ-álgebra de Borel de G que satisface las siguientes afirmaciones:*

1. $\mu_G(U) > 0$, *para cualquier abierto no vacío $U \subset G$,*
2. $\mu_G(K) < +\infty$, *para cualquier compacto $K \subset G$, y*
3. $\mu_G(sE) = \mu_G(E)$, *para cualquier $s \in G$ y cualquier conjunto de Borel $E \subset G$.*

La medida μ_G se suele llamar *medida de Haar* de G. Además esta medida es, salvo escalares, única. Esto es, si μ es otra medida positiva y regular verificando las condiciones del teorema, entonces existe una constante positiva c de forma que

$$\mu_G(E) = c\mu(E)$$

para cualquier conjunto de Borel $E \subset G$.

Si el grupo G es compacto, μ_G se suele normalizar tomando $\mu_G(G) = 1$. Si G es infinito y discreto la normalización suele consistir en considerar $\mu_G(\{\mathbf{1}\}) = 1$, donde **1** es el elemento neutro de G.

A.3.2 Observación. El teorema anterior proporciona una medida invariante cuando multiplicamos por la izquierda. Es por esto que, lo que hemos llamado simplemente medida de Haar, se debería llamar en realidad medida de Haar izquierda de G. Si, en lugar de la tercera afirmación, exigimos que $\mu_G(Es) = \mu_G(E)$ para cualquier conjunto de Borel $E \subset G$ obtenemos lo que se llama medida de Haar derecha de G.

Existe una total simetría entre ambos tipos de medidas. Si μ_G es una medida de Haar izquierda, $\overline{\mu_G}(E) = \mu_G(E^{-1})$ es una medida de Haar derecha en G. De hecho, todas las medidas de Haar derecha se obtienen de esta manera. En la práctica, se suele trabajar con la medida de Haar izquierda y a ella nos referiremos de ahora en adelante cuando hablemos de medida de Haar.

Si μ_G es una medida de Haar izquierda en G y x es un elemento de G, podemos definir una nueva medida mediante

$$\mu_G^x(E) = \mu_G(Ex),$$

donde E varía en los subconjuntos de Borel de G. μ_G^x vuelve a ser una medida de Haar izquierda y por tanto tiene que existir un número positivo $\Delta(x)$ verificando

$$\mu_G^x = \Delta(x)\mu_G.$$

La función $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ se llama función modular de G. Si G es abeliano o compacto la función Δ vale constantemente uno y, por tanto, cualquier medida de Haar izquierda es también una medida de Haar derecha. A los grupos en los que se cumple que $\Delta \equiv 1$ se les llama unimodulares. Todos los grupos que aparecen en el último capítulo son unimodulares (y ese es el mejor motivo para que no hablemos más de medidas izquierdas o derechas).

Una vez que tenemos la medida de Haar μ_G, podemos considerar $L^1(G)$:

$$L^1(G) = \{f : G \to \mathbb{C} \text{ medible} : \int_G |f(t)| \, d\mu_G(t) < +\infty\}$$

Para simplificar la notación escribiremos $\int_G f(t)dt$ en lugar de $\int_G f(t)\, d\mu_G(t)$. Como es usual en $L^1(G)$ tenemos la norma $\|\cdot\|_1$, o sea,

$$\|f\|_1 = \int_G |f(t)| \, dt$$

Además de ser un espacio de Banach con esta norma, tenemos el producto dado por la convolución:

$$(f * g)(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t) \, ds,$$

que verifica la siguiente desigualdad de las normas:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

para cualesquiera $f, g \in L^1(G)$. Con este producto $L^1(G)$ es un álgebra de Banach. Si G es abeliano, entonces $L^1(G)$ también lo es y, de hecho, este es el único caso en que $L^1(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa.

En el caso particular de que G sea un grupo abeliano, podemos considerar el conjunto

$$\widehat{G} = \{\gamma : G \to \mathbb{T} : \ \gamma \text{ homomorfismo continuo}\}.$$

Entonces $\widehat{G}$ con el producto definido puntualmente y con elemento neutro $\gamma \equiv 1$ vuelve a ser un grupo abeliano. Nos referiremos a $\widehat{G}$ como el *grupo dual* y a sus elementos como *caracteres*.

De las diversas topologías que tienen sentido, la convergencia uniforme sobre compactos es la se toma como topología usual. Con ella $\widehat{G}$ vuelve a ser un grupo topológico.

Otro concepto particularmente importante en el ambiente de grupos abelianos es el de transformada de Fourier.

A.3.3 Definición. Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Se llama *transformada de Fourier* al homomorfismo contractivo $\widehat{\ }$: $L^1(G) \to C_0(\widehat{G})$, $f \mapsto \widehat{f}$, definido por

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(t)\,\overline{\gamma}(t)\,dt.$$

Si $f \in L^1(G)$, a $\widehat{f}$ se le llama transformada de Fourier de f. Por último, a la imagen de $L^1(G)$ por la transformada de Fourier se la llama *álgebra de Fourier* y la denotaremos $A(G)$.

A.3.4 Proposición. *$A(G)$ es densa en $C_0(\widehat{G})$.*

Además en $L^1(G)$ también tenemos la involución definida de la manera usual: si $f \in L^1(G)$,

$$f^*(t) = \overline{f(t^{-1})}\Delta(t^{-1}),\ \forall\, t \in G.$$

Parece natural preguntarse si esta norma e involución proceden de una estructura subyacente de C^*-álgebra y la respuesta es no. $L^1(G)$ es lo que se denomina una A^*-álgebra. En consecuencia se le puede asociar una C^*-álgebra. El procedimiento es el siguiente.

A.3.5 Definición. Sea G un grupo localmente compacto. Una *representación unitaria* de G es un homomorfismo $\pi : G \to U(H_\pi)$, donde $U(H_\pi)$ denota el grupo de los operadores unitarios en un espacio de Hilbert H_π, que verifica que la aplicación

$$t \mapsto \pi(t)x$$

de G en H_π es continua para cualquier $x \in H_\pi$.

Además de la representación trivial (cualquier elemento del grupo tiene como imagen la identidad del espacio de Hilbert), hay una representación destacada: la representación regular izquierda asociada a la traslación izquierda por elementos del grupo. Esto es, $\pi_L : G \to \mathcal{L}(L^2(G))$ definida como

$$\pi_L(t)f(s) = f(t^{-1}s),$$

para cualquier $s, t \in G$ y cualquier $f \in L^2(G)$.

A.3.6 Definición. Sea $\pi : G \to U(H_\pi)$ una representación unitaria de G. Si X es un subespacio de H_π, diremos que es invariante por π si $\pi(t)(X) \subset X$ para cualquier $t \in G$.

Diremos que π es *irreducible* si no tiene subespacios invariantes propios.

A.3.7 Definición. Sea G un grupo localmente compacto y $\pi_i : G \to U(H_i)$, $i = 1, 2$ dos representaciones unitarias. Diremos que π_1 y π_2 son *equivalentes* si existe un operador unitario $T : H_1 \to H_2$ verificando que

$$T\,\pi_1(t) = \pi_2(t)\,T$$

para cualquier $t \in G$.

A.3.8 Definición. Sea G un grupo localmente compacto. Denotaremos por $\widehat{G}$ al conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones unitarias e irreducibles de G, y nos referiremos a él como el *objeto dual*.

En el caso particular de que G sea abeliano, las representaciones unitarias e irreducibles tienen todas dimensión uno (la dimensión del espacio de Hilbert H_π) y se corresponden con los caracteres del grupo. Además $\widehat{G}$ vuelve a tener estructura de grupo topológico. Esto no es cierto en el caso no abeliano.

Pero volvamos a $L^1(G)$. Si π es una representación de G en $\mathcal{L}(H_\pi)$ y f es elemento de $L^1(G)$, la aplicación

$$t \mapsto f(t)\langle \pi(t)x, y\rangle, \ \forall\, t \in G$$

es una aplicación integrable para cualesquiera $x, y \in H_\pi$. Podemos considerar, por tanto, la aplicación bilineal

$$(x, y) \mapsto \int_G f(t)\langle \pi(t)x, y\rangle dt$$

que es continua ya que

$$|\langle \pi(f)\, x, y\rangle| \leq \|x\|\, \|y\|\, \|f\|_1$$

En consecuencia, existe una única aplicación $\pi(f) : H_\pi \to H_\pi$ definida mediante

$$\langle \pi(f)\, x, y\rangle = \int_G f(t)\, \langle \pi(t)\, x, y\rangle\, dt.$$

Por ejemplo, en el caso de la representación regular izquierda, π_L, se tiene que

$$\pi_l(f)\, g = f * g,$$

para cualesquiera $f \in L^1(G)$ y $g \in L^2(G)$.

Ya podemos definir una norma de C^*-álgebra en $L^1(G)$. Si $f \in L^1(G)$, definimos

$$\|f\| = \sup\{\|\gamma(f)\| :\ \gamma \in \widehat{G}\}.$$

A la completación de $L^1(G)$ con la norma $\|\cdot\|$ la denotaremos $C^*(G)$ que, en vista del resultado anterior, es una C^*-álgebra. A las C^*-álgebras obtenidas de esta forma las llamaremos *C^*-álgebras grupo*.

Merece la pena mencionar que también hay una relación entre las representaciones de $L^1(G)$ y las de $C^*(G)$. Cualquier $*$-representación de $L^1(G)$ se extiende a una $*$-representación de $C^*(G)$. De hecho hay una correspondencia biyectiva entre representaciones unitarias de G y $*$-representaciones fieles de $C^*(G)$ (ver [39]).

Para acabar, recordemos la noción de grupo de tipo I.

A.3.9 Definición. Sea G un grupo localmente compacto. Diremos que G es un grupo de tipo I si todas las representaciones unitarias generan álgebras de von Neumann de tipo I.

Bibliografía

[1] M. D. ACOSTA, *On multilinear mappings attaining their norms,* Studia Math. **131** (1998), no. 2, 155–165.

[2] M. D. ACOSTA, *Norm attaining operators into $L_1(\mu)$,* Contemp. Math. **232**, (1999), 1–11, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[3] M. D. ACOSTA, *Denseness of norm attaining operators into strictly convex spaces,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **129** (1999), 1

[4] M. D. ACOSTA, F. J. AGUIRRE AND R. PAYÁ, *There is no bilinear Bishop-Phelps theorem,* Israel J. Math. **93** (1996), no. 6, 1107-1114.

[5] M. D. ACOSTA AND R. PAYÁ, *Numerical radius attaining operators and the Radon-Nikodym property,* Bull. London Math. Soc. **25** (1993), no. 1, 67–73.

[6] C. A. AKEMANN, *The dual space of an operator algebra,* Trans. Amer. Math. Soc. **126** (1967), 286–203.

[7] C. A. AKEMANN, *The general Stone-Weierstrass problem,* J. Funct. Anal. **4** (1969), 277–294.

[8] C. A. AKEMANN, *Left ideal structure of C^*-algebras,* J. Funct. Anal. **6** (1970), 305–317.

[9] C. A. AKEMANN, P. G. DODDS, AND J. L. GAMLEN *Weak compactness in the dual space of a C^*-algebra,* J. Funct. Anal. **10** (1972), 446–450.

[10] C. A. AKEMANN AND G. K. PEDERSEN, *Facial structure in operator algebra theory,* Proc. London Math. Soc. (3) **64** (1992), no. 2, 418–448.

[11] J. ALAMINOS, Y. S. CHOI, S. G. KIM AND R. PAYÁ, *Norm attaining bilinear forms on spaces of continuous functions,* Glasgow Math. J. **40** (1998), 359–365.

[12] J. ALAMINOS, R. PAYÁ AND A. R. VILLENA, *Norm attaining bilinear forms on C^*-algebras,* sometido a publicación.

[13] S. I. ANSARI, *On Banach spaces Y for which $B(C(\Omega), Y) = K(C(\Omega), Y)$,* Pacific J. Math Vol. **169**, no. 2 (1995), 201–218.

[14] R. M. ARON, C. FINET AND E. WERNER, *Norm-attaining n-linear forms and the Radon-Nikodym property,* in "Proc. 2nd Conf. on Function Spaces" (K. Jarosz, ed.), L. N. Pure and Appl. Math., Marcel Dekker (1995), pp. 19-28.

[15] F. F. BONSALL AND J. DUNCAN, *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras,* London Math. Soc. Lect. Notes Ser. **2**, Cambridge Univ. Press 1971.

[16] F. F. BONSALL AND J. DUNCAN, *Numerical ranges II,* London Math. Soc. Lect. Notes Ser. **10**, Cambridge Univ. Press 1973.

[17] E. BISHOP AND R. R. PHELPS, *A proof that every Banach space is subreflexive,* Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 97-98.

[18] J. BOURGAIN, *On dentability and the Bishop-Phelps property,* Israel J. Math. **28** (1977), 265-271.

[19] J. BOURGAIN, *New classes of $\mathcal{L}^p$-spaces,* Lecture Notes in Math. **889**, Springer–Verlag (1981).

[20] L. G. BROWN, *Semicontinuity and multipliers of C^*-algebras,* Can. J. Math. Vol. XI, No. **4** (1988), 865–988.

[21] Y. S. CHOI, *Norm attaining bilinear forms on $L^1[0,1]$,* J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), no. 1, 295–300.

[22] Y. S. CHOI AND S. G. KIM, *Norm or numerical radius attaining multilinear mappings and polynomials,* J. London Math. Soc. **54** (1996), 135–147.

[23] K. R. DAVIDSON, *C^*-algebras by example,* Fields Institute Monographs **6**, Amer. Math. Soc., Providence, 1996.

[24] R. DEVILLE, G. GODEFROY, AND V. ZIZLER, *Smoothness and renormings in Banach spaces,* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math. **64**, Longman Sc. & Tech., Essex, 1993.

[25] J. DIESTEL, *Sequences and series in Banach spaces,* Springer-Verlag, New York, 1984.

[26] J. DIESTEL, H. JARCHOW Y A. TONGUE, *Absolutely summing operators,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics **43**, Cambridge Univ. Press (1995).

[27] J. DIESTEL AND J. J. UHL JR., *Vector measures*, Math. Surveys **15**, Amer. Math. Soc., Providence R.I. 1977.

[28] G. EMMANUELE, *A remark on the containment of c_0 in spaces of compact operators,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **111** (1992), 331–335.

[29] C. FINET AND R. PAYÁ, *Norm attaining operators from L_1 into L_∞,* Israel J. Math. **108** (1998), 139–143.

[30] W. T. GOWERS, *Symmetric block bases of sequences with large average growth,* Israel J. Math. **69** (1990), 129–151.

[31] A. GROTHENDIECK, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$,* Canad. J. Math. **5** (1953), 129–173.

[32] J. M. GUTIÉRREZ, *Weakly continuous functions on Banach spaces not containing ℓ_1,* Proc. Amer. Math. Soc. **119** no. 1 (1993), 147–152.

[33] E. HEWITT AND K. A. ROSS, *Abstract Harmonic Analysis II,* Springer–Verlag (1970).

[34] A. IWANIK, *Norm attaining operators on Lebesgue spaces,* Pacific J. Math. **83** (1979), 381-386.

[35] J. JOHNSON AND J. WOLFE, *Norm attaining operators,* Studia Math. **65** (1979), 7-19.

[36] N. KALTON, *Spaces of compact operators,* Math. Ann. **208** (1974), 267–278.

[37] J. LINDENSTRAUSS, *On operators which attain their norm,* Israel J. Math. **1** (1963), 139–148.

[38] M. JIMÉNEZ-SEVILLA AND R. PAYÁ, *Norm attaining multilinear forms and polynomials on preduals of Lorentz sequence spaces,* Studia Math. **127** (1998), no. 2, 99–112.

[39] T. W. PALMER, *Banach algebras and the general theory of $*$–algebras, vol. II,* Encyclopedia of Math. and its Appl. **79** (2001), Cambridge Univ. Press.

[40] R. PAYÁ, *A counterexample on numerical radius attaining operators,* Israel J. Math. **79** (1992), no. 1, 83–101.

[41] R. PAYÁ AND Y. SALEH, *Norm attaining operators from $L_1(\mu)$ into $L_\infty(\nu)$,* Arch. Math. (Basel) **75** (2000), no. 5, 380–388.

[42] G. K. PEDERSEN, *C^*-algebras and their automorphism groups,* Academic Press London (1979).

[43] A. PELCZYNSKI, *Projections in certain Banach spaces,* Studia Math. **19** (1960), 214–228.

[44] W. RUDIN, *Real and complex analysis,* McGraw-Hill, New York, 1966.

[45] S. SAKAI, *Weakly compact operators on operators algebras,* Pacific J. Math. **14** (1964), 659–664.

[46] W. SCHACHERMAYER, *Norm attaining operators on some classical Banach spaces,* Pac. J. Math. **105**, no. 2 (1983), 427–438.

[47] C. STEGALL, *Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces,* Math. Ann. **236** (1978), 171–176.

[48] M. TAKESAKI, *Theory of Operator Algebras I,* Springer–Verlag (1979).

[49] M. TOMITA, *Spectral Theory of Operator Algebras I,* Math. J. Okayama Univ. **9** (1959), 63–98.

[50] V. ZIZLER, *On some extremal problems in Banach spaces,* Math. Scand. **32** (1973), 214-224.

Glosario