Funciones semióticas para el análisis de procesos de estudio integrados de matemáticas y música en la universidad

Semiotic functions for analysing university courses integrating mathematics and music

Mariana Montiel y Miguel R. Wilhelmi

Georgia State University, Universidad Pública de Navarra

Resumen

En el contexto de dos cursos universitarios que integran matemáticas y música se utiliza el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) y, en particular, su componente teórico de las funciones semióticas, en el análisis de la práctica educativa a partir de las producciones escritas y orales de los estudiantes. En el documento se describen las competencias matemáticas previstas a través de esta enseñanza interdisciplinaria, sin tratar las metas musicales. Se emplean las funciones semióticas con la finalidad de usar sus categorías para identificar tanto el aprendizaje matemático como los conflictos de significado sobre el contenido matemático

Palabras clave: matemáticas y música; funciones semióticas; grupos de frisos; simetría; Clapping Music.

Abstract

In this work two university courses that integrated mathematics and music are analysed using the Onto-semiotic Approach (OSA) and, in particular, its theoretical component of semiotic functions, to shed light on some of the written and oral manifestations of the students that participated. The mathematical competence that the participants were expected to achieve through this interdisciplinary teaching was privileged over the musical goals. The semiotic functions were employed with the objective of using their categories to identify both learning and meaning conflicts related to the mathematical content.

Keywords: mathematics and music; semiotic functions; friese groups; symmetry; Clapping Music.

1. Del *Quadrivium* a la teoría matemática de la música

No es poco común referirse a la música y a las matemáticas como lenguajes aunque, en la mayoría de los casos, la referencia es coloquial y poco precisa. Sin embargo, en honor a la verdad, su uso en estos casos no dista mucho de una de las acepciones de la palabra "lenguaje" según el *Diccionario de la lengua española* (http://www.rae.es/), a saber, "conjunto de señales que dan a entender algo". Si buscamos la palabra "señal" en el mismo diccionario, nos topamos con la palabra "signo", la cual nos remite a importantes corrientes lingüísticas junto con las obras de sus fundadores (Hjelmslev, 1972; Eco, 1979; Peirce, 1987; Saussure, 1998, Peirce, 1999). A propósito de estos dos "lenguajes", el presente trabajo se basa en dos cursos universitarios en torno a la teoría matemática de la música en los cuales participaron tanto estudiantes de matemáticas como de música. Por medio del enfoque ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) y, en particular, de las funciones semióticas y de la dualidad personal-institucional, se pretende comunicar de manera objetiva e ilustrativa algunos de los resultados de esta enseñanza multidisciplinaria. En el transcurso de la

Montiel, M. y Wilhelmi, M. R. (2017). Funciones semióticas para el análisis de procesos de estudio integrados de matemáticas y música en la universidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

presentación se describen los objetivos de los cursos, algunas las competencias esperadas según el área de concentración y nivel de conocimientos de los estudiantes, así como los logros y las limitaciones de la propuesta.

La teoría matemática de la música es un área de investigación que también ofrece interesantes perspectivas para la pedagogía (Kovachi, 2014; Hall, 2014; Hughes 2014; Montiel y Gómez, 2014; Montiel, 2016; Montiel, en prensa). El vínculo entre las matemáticas y la música a nivel académico viene de tiempos inmemoriales. El *Quadrivium* era el símbolo de la formación superior en occidente desde la antigüedad hasta el renacimiento y consistía en la enseñanza de la aritmética, la geometría, la música y la astronomía. Sin embargo, hubo un alejamiento entre las dos áreas en los últimos siglos hasta hace aproximadamente cuarenta años cuando, en las facultades y escuelas de música, la necesidad de analizar los patrones de la composición musical contemporánea no podía satisfacerse a través de la teoría musical tradicional. Así es que surgió la teoría de conjuntos musical donde el uso de la teoría de grupos y otras estructuras matemáticas modernas es equivalente al uso del cálculo diferencial e integral en las facultades de ingeniería o de química. De semejante manera, los matemáticos han encontrado preguntas e incógnitas en la estructura musical que han llevado a problemas interesantes y novedosos en la matemática.

En este trabajo se propone, por un lado, aquilatar la efectividad del EOS en lo que se refiere al componente de las funciones semióticas como marco para entender el alcance de cursos integrados de matemáticas y música. Por otro lado, también es de interés ponderar la relevancia de dichos cursos en lo tocante al logro de las metas académicas fijadas. El artículo está estructurado de la siguiente manera. La sección 2, se centra en las funciones semióticas dentro de la lingüística en general y, en particular, en el contexto del EOS. Asimismo, se aportan algunos antecedentes de la enseñanza interdisciplinaria de matemáticas y música (Montiel, en prensa). En la sección 3, *Antecedentes*, se describen los contextos universitarios donde se realiza la enseñanza interdisciplinar. Después, se describe el *Método* (sección 4) y se aportan los *Resultados* (sección 5). Por último, en las *Conclusiones* (sección 6) se concreta la efectividad del análisis de estos cursos interdisciplinarios de matemáticas y música a través de las funciones semióticas y el EOS.

2. Funciones semióticas para la evaluación de propuestas interdisciplinares

Hjemslev (1972) establece la noción de *función del signo*, que es una expansión de la noción de *signo* establecida por Saussure (1998). El “signo” se define como una relación entre dos componentes llamados *expresión* y *contenido* que son los argumentos de la función. De esta manera un objeto y su representación se presentan como un todo integrado. Eco (1979) designa la función del signo como *función semiótica* y con este nombre se conoce dentro del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007). Según el desarrollo del EOS, las relaciones entre la expresión y el contenido pueden presentarse de manera *representacional* (un objeto se sustituye por otro), *instrumental* (un objeto se emplea como instrumento por otro objeto) o *estructural* (dos o más objetos componen un sistema del cual emergen objetos nuevos) (Godino, Batanero y Font, 2007).

Un ejemplo de una *función semiótica representativa* podría ocurrir, para los propósitos del presente estudio, cuando un término del lenguaje musical, la expresión, se sustituye por el término formal matemático que representa las transformaciones rígidas aplicadas a las notas para formar una melodía. Una *función semiótica instrumental*, en nuestro contexto, ocurre cuando los patrones rítmicos se usan para arrojar luz sobre un problema matemático (Demaine et al., 2009). La teoría matemática de la música, con sus términos, técnicas y aplicaciones es un ejemplo a nivel macro de una *función semiótica estructural*.

Una expresión en el contexto de una función semiótica puede ser el contenido en la situación de otra. Como ejemplo netamente matemático, en una función semiótica representativa un sólido presentado geométricamente podría ser la expresión y la formulación de la integral doble sería el contenido; por otro lado, en una función semiótica instrumental la expresión podría ser esa misma formulación de la integral doble y el contenido sería la respuesta numérica (Montiel et al., 2009).

La noción de *conflicto semiótico* puede interpretarse en situaciones de aprendizaje de las matemáticas como un desacuerdo fundamental entre el significado personal atribuido y el institucional enseñado. La *dualidad personal-institucional* de un objeto (Godino y Batanero, 1994) es entonces clave. Cuando en el proceso de aprendizaje de una noción matemática el significado personal coincide con el institucional, por lo menos en lo que respecta a las competencias, se puede considerar que ha habido "éxito" ya que hay concordancia entre las interpretaciones personales e institucionales de las expresiones de la función semiótica, neutralizándose así el conflicto mencionado arriba.

Hasta donde saben los autores del presente trabajo no hay antecedentes del uso del EOS, o cualquiera de los marcos conceptuales de la educación matemática, en el contexto de la interdisciplinariedad entre las matemáticas y disciplinas humanísticas. Por lo general, la interdisciplinariedad es un tema polémico. Para algunos implica la posibilidad de expandir los conocimientos y de llegar a nuevas aplicaciones, mientras que otros se ponen en guardia ante los peligros de la superficialidad y la rendición a la moda. Por este motivo, es necesario tener un marco teórico sólido y coherente que permita evaluar las idiosincrasias de esta modalidad de enseñanza y que pueda captar las especificidades de las áreas de conocimiento involucradas, en este caso las matemáticas y la música.

Varios antecedentes de cursos universitarios interdisciplinarios integrando las matemáticas y la música han sido recopilados en una edición especial sobre pedagogías de la teoría matemática de la música en la revista *Journal of Mathematics and Music* (JMM), de la Sociedad para Matemáticas y Computación en la Música (SMCM) (Yust, 2014). Sin embargo, aunque esta monografía cumplimentó un vacío muy importante para el desarrollo del área de la teoría matemática de la música, su finalidad no abarcaba los métodos de evaluación y análisis de los cursos para las dos disciplinas involucradas.

El "movimiento" de las *matemáticas humanísticas* (White, 1993; Skrivanos y Zhang, 2013) fue una de las fuentes de los programas de *matemáticas en todas las áreas del currículo* (Mathematics Across the Curriculum) patrocinados por la Fundación Nacional de las Ciencias (NSF) de los Estados Unidos. Este programa fue implementado en universidades tales como Dartmouth College (Wallace, 2000) y Mt Holyoke College y, hasta la fecha, los materiales que desarrollaron están disponibles en línea para el gran público (https://math.dartmouth.edu/~matc/). Este enfoque interdisciplinario, que buscaba implicar las matemáticas con las humanidades, respondía a una pregunta muy básica, a saber: ¿Qué clase de matemáticas necesita un estudiante universitario? Se partía de la idea de que al expandir la accesibilidad del rango de tópicos matemáticos al estudiante universitario, se podría incrementar su interés en las matemáticas y, a la vez, tratar simultáneamente con los alumnos poseedores de una cierta sofisticación matemática y con los de menos formación.

El programa de matemáticas en todas las áreas del currículo tuvo un componente de evaluación (Korey, 2000) en que se utilizaron múltiples métodos para medir el nivel de éxito de los cursos interdisciplinarios. Sin embargo, como cada curso tenía diferentes expectativas en el logro de competencias, no hay un reporte exacto de los resultados en términos de conceptos matemáticos. Hay solo referencias vagas (Korey, 2000):

> Second, the shared interdisciplinary focus points to a shared goal that students learn real math. Dartmouth´s math and humanities courses are not only 'about' math, they 'are' math. While students study history or art or literature, they also learn group theory or geometry (p. 2).

No obstante, la evaluación en sí (obligatoria en proyectos financiados por la NSF) consistió en el estudio cuantitativo y cualitativo de actitudes hacía las matemáticas y las preguntas fundamentales de la investigación se relacionaban con posibles cambios (positivos) en la percepción de los estudiantes en torno a las matemáticas y su utilidad. Probablemente debido a la naturaleza del reporte, no hay ningún intento de análisis teórico con el uso de algún marco conceptual proveniente del campo de la educación matemática. Este es un de los objetivos fundamentales de este trabajo; a saber: utilizar el EOS como marco teórico para la evaluación de propuestas interdisciplinares de matemáticas y música.

3. Antecedentes

En mayo de 2014 se implementó un curso de la teoría matemática de la música para un grupo de estudiantes del Departamento de Matemáticas y Estadística y de la Escuela de Música de Georgia State University (GSU) en los Estados Unidos y de estudiantes de matemáticas de la Universidad de Ciencia y Tecnología de China del Este (ECUST, por sus siglas en inglés). Los temas abordados incluyeron los ritmos euclidianos, la regularidad máxima en términos de ritmo y melodía, el software Rubato Composer® y su base teórica de la teoría de categorías (Milmeister, 2009); asimismo, se incluyeron aspectos de teoría de grupos y las transformaciones neo-riemannianas, en particular la dualidad entre el grupo T/I y el grupo PLR (Crans, Fiore y Satyendra, 2009; Aceff-Sánchez et al., 2012), el teorema del hexacordo y la combinatoria en la pieza *Clapping Music* de Steve Reich. Todos los estudiantes que realizaron el curso tuvieron que entregar un trabajo por escrito, que se utiliza en el análisis.

En junio de 2014 se publicó una convocatoria de propuestas en la División de Artes y Ciencias de la Universidad Estatal de Georgia, en la cual se planteó un programa piloto donde los estudiantes obtendrían seis créditos en el mismo contexto donde, de manera habitual, se obtienen tres. El nuevo programa se denominó *Integrative Course Pairing* (Cursos integrados por parejas) y se inauguraría en el semestre de primavera de 2015. Cada curso tenía programada una sesión por semana en aula y, para complementar los requisitos de horas, se impartirían clases magistrales por vídeo y se asignarían lecturas y tareas interactivas en línea. La justificación de la integración de los cursos de *teoría matemática de la música* del Departamento de Matemáticas y Estadística y de *análisis postonal* de la Escuela de Música estribó en que como los títulos de los cursos muestran, uno es teórico y el otro es analítico; asimismo el análisis de la música postonal abarca diferentes estilos, cada uno de los cuales han sido enfocados matemáticamente. La propuesta fue aprobada y el curso se implementó durante el primer semestre de 2015.

Por último, antes de describir el método y los resultados, es preciso saber que en la teoría matemática de la música es común considerar que las doce notas de la escala cromática constituyen un grupo isomorfo a Z_{12}. En la figura 1 se puede apreciar cómo se hace esta transición del grupo Z_{12} al grupo de 12 notas con la operación "sumar intervalos". Con el uso de las letras, comenzando con *C* para representar *do*, se asignan los números de *0* a *11* a cada letra. Como ejemplo, si tomamos la nota *D* (*re*), representada por el número *2*, se le puede concebir como un elemento estático del grupo o, a su vez, como el resultado de la operación interválica que consiste en sumar dos semitonos al origen *C = 0.* Así es que se hace abstracción de las frecuencias y se habla de *la clase de C* o *la clase de D*, etc. Además, si sólo se toma en cuenta las notas blancas se tiene la escala diatónica de siete notas (si se comienza con *do* es la escala mayor usual), isomorfa a Z_7.

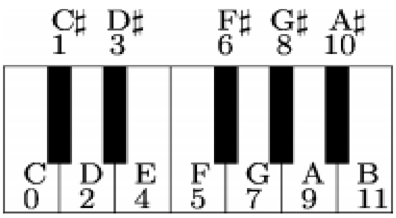

Figura 1: Isomorfismo entre Z_{12} y la escala cromática.

Así, por ejemplo, se puede definir una unidad mínima de tiempo en el eje de las abscisas y un intervalo armónico mínimo como una unidad en el eje de las ordenadas (figura 2).

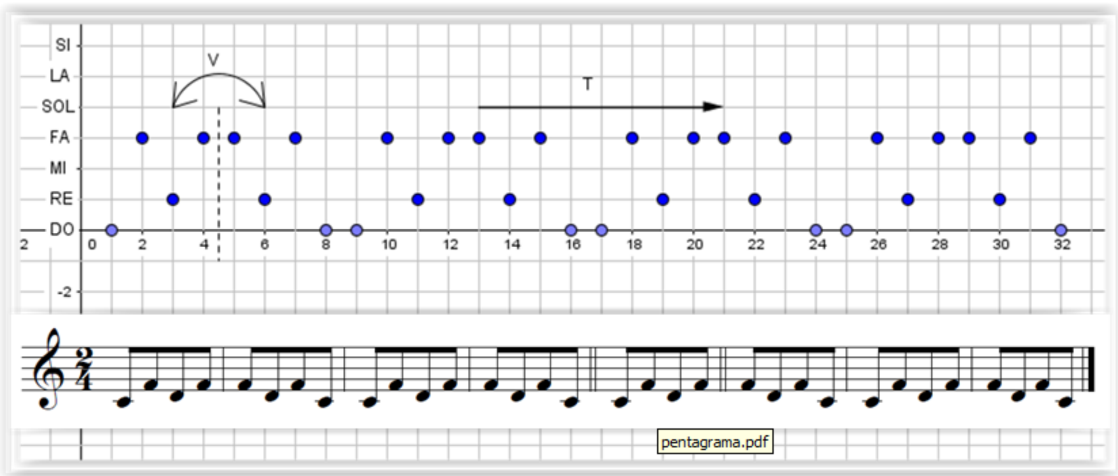

Figura 2: de gráfica a partitura a sonido. Patrón de frisos *camino de lado* (*sidle*).

4. Método

El propósito del presente trabajo es intentar emplear la noción de funciones semióticas según el EOS para poder identificar el nivel de competencia de los estudiantes en las áreas matemáticas involucradas, tomando en cuenta sus muy diferentes niveles de conocimiento. Asimismo, se pretende señalar cualquier conflicto semiótico y analizarlo por medio de la dualidad personal-institucional.

Se cuenta con varios tipos de datos: a) reportes escritos de los estudiantes de ECUST y de GSU del curso llevado a cabo en China; b) vídeos de las presentaciones finales de los grupos integrados de los estudiantes de ambas universidades; y, finalmente, c) el vídeo (https://www.youtube.com/watch?v=HiNd3e3UnMc), donde los estudiantes de GSU discuten sobre dichos temas, así como sobre su experiencia cultural.

Asimismo, en el curso integrado entre el Departamento de Matemáticas y Estadística y la Escuela de Música de GSU, se contó con los proyectos finales de los estudiantes, más un vídeo de entrevistas a cuatro estudiantes, dos de matemáticas y dos de música, realizado el día de la presentación de su conferencia-concierto (Montiel, en prensa). La conferencia-concierto se basó en el proyecto final: la composición de una pieza atonal con la inclusión de estructuras sujetas al análisis matemático.

Para realizar el análisis se hace una segmentación en expresión y contenido de oraciones y frases, tanto escritas como orales. Asimismo, para identificar los conflictos semióticos y la dualidad personal-institucional se remite a las competencias matemáticas previstas, en relación con la procedencia del estudiante (matemáticas o música). En lugar de incluir una lista de estos objetivos didácticos para cada tema abordado, nos limitaremos a aquellos que son relevantes en el presente trabajo, como se apreciará en el transcurso de la siguiente sección de resultados. Se enfatiza de nuevo que, en este reporte, se privilegia el aspecto del aprendizaje matemático; los objetivos didácticos del curso de análisis postonal sólo aparecen de manera secundaria.

Finalmente, los dos cursos se llevaron a cabo en inglés y todos los estudiantes, incluyendo los de China, realizaron sus participaciones y trabajos escritos en dicho idioma. Se ha tomado mucho cuidado en las traducciones al español, respetando las sutilezas y giros de ambos idiomas.

5. Resultados

Las *simetrías y transformaciones en la música* es un tema común a los dos cursos de matemáticas y música analizados. Asimismo, en el curso de Shanghái, uno de los grupos se formó en torno a este tema y sus miembros trabajaron en aplicaciones de los aspectos teóricos que habían visto en la clase magistral. Su trabajo en grupo parte de un artículo sobre simetrías en el *plano musical* (Hart, 2009), que se refiere a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que posee significado musical en un contexto dado. Así, siguiendo a Hart (2009), en términos de competencias matemáticas, se busca que los estudiantes puedan identificar los patrones de frisos presentados en dicho artículo y que relacionen cada patrón con su correspondiente grupo de simetría.

En este contexto, los estudiantes trabajaron sobre representaciones geométricas de los grupos de frisos y, una vez establecidas dichas representaciones en el plano musical, se transformaron en música en el pentagrama (figura 2). El resultado de este paso se denominó "*de gráfica a partitura a sonido*". El sonido se puede escuchar en: https://www.youtube.com/watch?v=HiNd3e3UnMc

El estudiante 1, del ECUST y del grupo de *simetrías en la música*, escribió lo que sigue en su trabajo final:

> Cuando los teóricos musicales ven una pieza les interesa seguir el desarrollo de motivos. Un motivo (un conjunto de notas) puede repetirse (trasladarse horizontalmente), transponerse (trasladarse verticalmente), invertirse (un reflejo horizontal), retrogradarse (un reflejo vertical) o hacer una inversión retrógrada (una rotación de 180°... Si te interesa la teoría musical deberías conocer el *brinco vertiginoso* (*dizzy jump*)…

Las funciones semióticas pueden identificarse como *representacionales*, donde la expresión por lo general es el término musical y el contenido su traducción al lenguaje matemático. No obstante, también sería válido intercambiar los papeles en el caso de que el interés se enfocase en el aprendizaje de la teoría musical.

Con la excepción de un estudiante doctoral en el grupo de GSU, ninguno de los participantes en el curso había estudiado formalmente los grupos de frisos en su carrera de matemáticas. Sin embargo, en las expresiones escritas y orales relacionadas con las actitudes de este grupo se observa que la aplicación musical refuerza, al menos para los estudiantes de la muestra, los nuevos conceptos matemáticos. El estudiante 2, del ECUST y del grupo de simetrías, expresa:

> Un conjunto de notas pueden verse como un conjunto de puntos en el espacio bidimensional. El plano musical, sin embargo, difiere en un aspecto muy importante del plano geométrico: las dos dimensiones no son iguales… El plano musical tiene dos dimensiones diferentes e incomparables, el espacio del tiempo y el espacio de la altura de tono, en vez de dos dimensiones idénticas. Por lo tanto el plano musical tiene menos simetría que el plano euclidiano. Por ejemplo, en vez de tener simetría sobre cualquier eje de reflexión, el plano musical sólo tiene los ejes de simetría horizontal y vertical… Ahora introduciré el patrón de frisos llamado *camino de lado* (sidle) el cual es isomorfo a D_∞. Este grupo contiene dos reflejos verticales, alternando un motivo con su retrógrada.

En el trabajo del estudiante 2 (figura 2) las funciones semióticas parecen tener un carácter *instrumental*. La expresión es el plano con sus puntos; el contenido es el grupo de frisos si el plano es geométrico o la “pieza” si el plano se concibe como musical. La competencia matemática, por supuesto, estriba en poder identificar los diferentes grupos de frisos. Sin embargo, el contexto de la teoría matemática de la música agrega un elemento de contraste que transforma las funciones semióticas instrumentales, otorgándoles una naturaleza estructural, ya que el concepto del plano musical es una construcción nueva. Obviamente, ni este estudiante ni los demás participantes habían inventado el lenguaje y las nociones; no obstante, reconstruyeron el conocimiento determinando una función semiótica, que les permite la construcción o la comunicación de contendido específico en una práctica operatoria o discursiva propia (significado individual) o compartida (significado institucional).

A manera de contraste se incluye en este tema de patrones de frisos el trabajo de uno de los estudiantes de música de GSU. Este participante era de posgrado en el área de composición musical y en su explicación oral determinó lo que sigue.

> Comenzando por el compás 25, la pieza emplea una clara transformación matemática. Se crea una inversión retrógrada en la voz inferior a manera de respuesta al compás 25. En terminología matemática, la inversión retrógrada es una rotación. Como esta rotación ocurre en el tiempo, las notas no se rotan ni se reflejan en torno a un centro o eje fijos. De hecho, el resultado es una reflexión DE la reflexión.

En la frase “en terminología matemática la inversión retrógrada es una rotación”, los dos objetos “*inversión retrógrada*” y “*rotación*”, pueden etiquetarse como la expresión y el contenido de una función semiótica representacional. De hecho, parece ser una traducción directa de un término musical con su contenido teórico a un concepto matemático. Sin embargo, dicha frase también puede analizarse en términos estructurales en vista de que estos dos objetos, la inversión retrógrada y la rotación (y realmente son dos objetos abstractos diferentes, aunque isomorfos como grupos) se fusionan en un nuevo sistema del cual emerge un objeto nuevo, a saber, la pieza musical concreta representada por su partitura. El estudiante 3 destaca que este nuevo objeto, ocurre en el tiempo y, a la vez, intuye su complejidad matemática cuando enfatiza que “las notas no se rotan ni se reflejan en torno a un centro o eje fijos”.

Por otro lado, como se ha mencionado, las expectativas en el desarrollo del significado personal eran diferentes para los estudiantes de matemáticas y los de música. El estudiante 3 afirma:

> Vi que las herramientas no eran tan abstractas, no necesitabas todo el vocabulario y formalidad que tienen los matemáticos. Los conceptos eran profundos pero fueron impartidos de tal forma que no necesitases todas las fórmulas y pruebas para poder entenderlos; los matemáticos iban por ese lado porque les gusta, pero no era necesario para sacar provecho del curso. Un músico tiene una mente acostumbrada a los cálculos, el proceso no es tan diferente. Ahora tengo más herramientas para mis propias composiciones.

Otro de los temas explorados fue la combinatoria; en particular, los grupos de permutaciones y el lema de Burnside a través de la pieza de Steven Reich conocida como *Clapping Music* (Gómez Martín, 2012), que por razones de espacio no desarrollamos aquí. En el análisis realizado con el trabajo de los estudiantes en torno a este tema se identificaron conflictos semióticos. Una pregunta que queda abierta es si estos conflictos se deben a factores introducidos a través del contexto interdisciplinario o si, por el contrario, dicho contexto puso de relevancia una baja *idoneidad interaccional* en la negociación de los significados personales emergentes y su adecuación a los institucionales enseñados.

6. Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Se ha mostrado como el uso del EOS y, en particular, las *funciones semióticas*, permiten sacar conclusiones objetivas en torno al aprendizaje en cursos integrados de matemáticas y música. Los dos cursos del estudio se llevaron a cabo en contextos diferentes; no obstante, ambos contaron con estudiantes de las dos disciplinas, cada uno se diseñó para alcanzar competencias matemáticas específicas y la integración en ambos fue orgánica, no superpuesta.

En términos generales se considera que los dos cursos permitieron constatar la adquisición por la mayoría de los estudiantes del significado institucional previsto. Esta constatación se basa en el uso de herramientas diversas de evaluación formativa (exámenes, trabajos escritos y presentaciones orales), que han permitido un seguimiento individualizado, necesario dada la heterogeneidad de los estudiantes: de matemáticas y de música; de licenciatura y de posgrado.

Las funciones semióticas han permitido el análisis de las producciones escritas y orales de los participantes. La *función semiótica representativa* ha permitido sustituir expresiones musicales por isometrías para la elaboración de melodías. La *función semiótica instrumental* ha permitido identificar conflictos semióticos que vinculados a la percepción sonora y su interpretación matemática. Finalmente, la *función semiótica estructural* ha permitido asociar, globalmente en los cursos, la estructura matemática (puntos en el plano cartesiano o permutaciones y sus propiedades atribuidas) y la estructura musical (plano musical o pentagrama y sus propiedades y melodías asociadas).

Aunque la valoración de cursos que integran las matemáticas y la música no era parte de los objetivos del presente trabajo, es entendible que surjan interrogantes al respeto (Montiel, en prensa). Por más que se haya visto un producto positivo y que las motivaciones exóticas hayan provocado el enganche de los estudiantes, ¿es factible la generalización del modelo desarrollado? Es obvio que se precisa de un conjunto de condiciones especiales, entre ellas un profesorado familiar con la teoría matemática de la música. No se aboga por una adopción indiscriminada del modelo, lo cual llevaría a su caricaturización. Sin embargo, si hay disponibilidad de investigadores y docentes de las dos áreas, el diseño de cursos multidisciplinarios puede arrojar resultados valiosos. Una de las grandes ventajas que se ha visto es que la naturaleza de la música frecuentemente demanda la aplicación de nociones matemáticas que se obvian en los programas base de los temas clásicos. Se precisa pues estudios que orienten sobre las condiciones de reproductibilidad de las situaciones que garanticen la adquisición de los significados instituciones (matemáticos y musicales) previstos.

Referencias

Aceff-Sánchez, F., Agustín, O., du Plessis, J., Lluis-Puebla, E. y Montiel, M. (2012). *An introduction to group theory applications to mathematical music theory.* Bookboon Ventus publishing Aps. Disponible en, http://bookboon.com/en/textbooks/mathematics/an-introduction-to-group-theory

Crans, A., Fiore, T. y Satyendra, R. (2009). Musical actions of dihedral groups. *American Mathematical Monthly*, *116*(6), 479–495.

Demaine, Erik D., Gomez-Martin, F., Meijer, H., Rappaport, D., Taslakian, P., Toussaint, G.T., Winograd, T. y Wood, D.R. (2009). The distance geometry of music. *Computacional geometry: Theory and applications*. *42*, 429-454.

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos (Institutional and personal meaning of mathematical objects). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*. *39*(1-2), 127-135.

Gómez Martín, F. (2012). Minimalismo y matemáticas: Clapping music. *Divulgamat:* RSME. Disponible en, http://www.divulgamat.net/

Hart, V. (2009). Symmetry and transformations in the musical plane. En C. Kaplan y R. Sarhangi (Eds.), *Proceedings of Bridges 2009: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*. (pp. 169-176). Londres: Tarquin Publications.

Korey, J. (2000). *Dartmouth College Mathematics across the curriculum evaluation summary: mathematics and humanities courses*. Disponible en, https://math.dartmouth.edu/~matc/Evaluation/humeval.pdf

Kovachi, J. (2014). Music speculative for the twenty-first century: integrating mathematics and music in the liberal arts classroom. *Journal of Mathematics and Music*, *8*(2), 117-124.

Hall, R. (2014). Acoustics labs for a general education math and music course. *Journal of Mathematics and Music*, *8*(2), 125-130.

Hughes, J. (2014). Creative experiences in an interdisciplinary honors course on mathematics in music. *Journal of Mathematics and Music*, *8*(2), 131-144.

Hjelmslev, L. (1972). *Prolegomena a una teoría del lenguaje*. Madrid: Editorial Gredos.

Milmeister, G. (2009). *The rubato composer music oftware: Component-Based implementation of a functorial concept architecture.* Berlín: Springer-Verlag.

Montiel, M. (en prensa). Un experimento piloto sobre la enseñanza interdisciplinaria integrada a nivel universitario: matemáticas y música, *Foro de Educación.* FahrenHouse: Salamanca, España.

Montiel, M. (2016) *Mathematical music theory in Shanghai*. Disponible en, https://www.youtube.com/watch?v=HiNd3e3UnMc .

Montiel, M. y Gómez, F. (2014). Music in the pedagogy of mathematics, *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 151-166.

Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 139-160.

Peirce, C. (1987). *Obra lógico-semiótica,* Madrid: Taurus.

Peirce, C. (1999). *¿Qué es un signo?* Traducción castellana de Uxia Rivas, Madrid. Disponible en, http://www.unav.es/gep/Signo.html.

Saussure, F. (1998). *Course in general linguistics.* Chicago, Illinois: Open Court.

Skrivanos, C. y Zhang, Q. (2013). Humanistic mathematics newsletter: A bibliographic report. *Journal of Humanistic Mathematics 3*(1), 33-61.

Wallace, D. (2000). Math Across the curriculum at Dartmouth. *Focus (publicación de la Asociación Matemática de América),* 6-7.

White, A. (1993). *Essays in humanistic mathematics*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Yust, J. (2014). Pedagogies of mathematical music theories. *Journal of Mathematics and Music*, *8*(2), 113-116.