

T 9/100 ~~Proo. I~~
22/113

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha ..13/3/98.....
ENTRADA NUM. ..1102.....

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física Aplicada



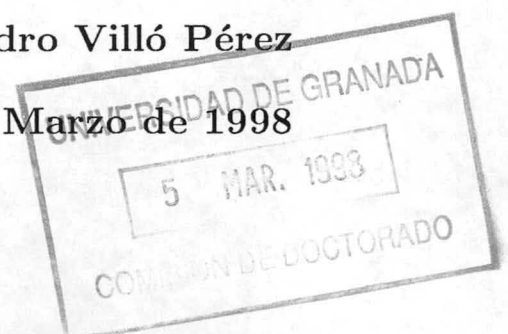
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
N.º Documento 613386943
N.º Copia 146307860

TESIS DOCTORAL

APORTACIONES AL MÉTODO FDTD PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Isidro Villó Pérez

Granada, Marzo de 1998





UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA
ÁREA DE ELECTROMAGNETISMO

APORTACIONES AL MÉTODO FDTD PARA LA
SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES
DE MAXWELL

Memoria presentada por Isidro Villó Pérez para optar al grado
de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada.

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Isidro Villó Pérez'.

Fdo. Isidro Villó Pérez

D. Bernardo García Olmedo, Doctor en Ciencias Físicas, Catedrático de Electromagnetismo del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada

y

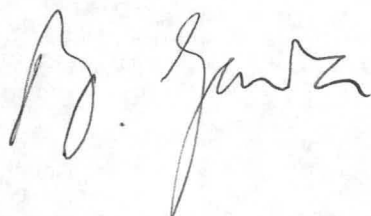
D. Salvador González García, Doctor en Ciencias Físicas, Profesor Asociado del Area de Electromagnetismo del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada,

CERTIFICAN

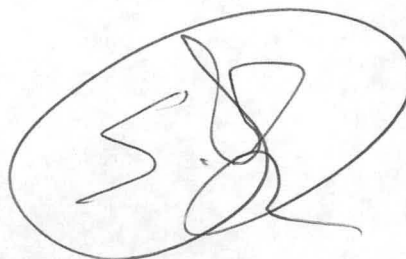
Que el trabajo de investigación que se presenta en esta Memoria, titulado *APORTACIONES AL MÉTODO FDTD PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL*, ha sido realizado en este Departamento por el Licenciado en Ciencias Físicas D. Isidro Villó Pérez bajo nuestra dirección, y constituye su Tesis Doctoral.

Con esta fecha autorizamos su presentación ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Granada.

Granada, cinco de Febrero de mil novecientos noventa y ocho.



Fdo. Bernardo García Olmedo



Fdo. Salvador González García

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a los Profesores D. Bernardo García Olmedo y D. Salvador González García, directores de esta Memoria, por su dirección, y sin cuyo interés, entusiasmo y dedicación no hubiese sido posible la realización de este trabajo.

*A mi madre
y
hermanos
Begoña y Germán*

Índice

1	<i>Introducción: Justificación y precedentes</i>	1
1.1	<i>Introducción</i>	1
1.2	<i>Antecedentes</i>	2
1.2.1	<i>Mejoras, modificaciones y alternativas</i>	3
1.2.2	<i>Aplicaciones</i>	8
1.3	<i>Organización de la memoria</i>	9
2	<i>El método FDTD</i>	11
2.1	<i>Introducción</i>	11
2.2	<i>Redes, funciones y operadores discretos</i>	12
2.3	<i>Medios isótropos. El método de Yee</i>	16
2.4	<i>Medios anisótropos. El método de Dos Nudos</i>	26
3	<i>Estudio numérico en medios isótropos</i>	31
3.1	<i>Introducción</i>	31
3.2	<i>Propagación de Ondas Discretas (I). Ondas planas en un medio numérico homogéneo infinito</i>	31
3.2.1	<i>Medios no conductores</i>	32
3.2.2	<i>Medios conductores</i>	39
3.3	<i>Propagación de Ondas Discretas (II). Reflexión y refracción en la interfase simulada de dos medios homogéneos</i>	40
3.3.1	<i>Deducción de las ecuaciones fundamentales. Ley numérica de Snell-Descartes. Coeficientes numéricos de reflexión y de refracción.</i>	41
3.4	<i>Propagación de Ondas Discretas (III). Propagación guiada</i>	49
3.4.1	<i>Solución numérica para la guía rectangular metálica</i>	50
3.4.2	<i>Solución numérica para la guía dieléctrica planar</i>	54
4	<i>Estudio numérico en medios anisótropos</i>	71
4.1	<i>Introducción</i>	71
4.2	<i>Comportamiento de una onda plana discretas en un medio numérico dieléctricamente anisótropo</i>	71
4.2.1	<i>Ecuación de dispersión y velocidad de fase numérica en medios biáxico y uniáxicos. Ley de transformación numérica por rotación del sistema de referencia.</i>	72
4.2.2	<i>Solución Analítica</i>	79

4.2.3	<i>Ejes Ópticos Numéricos y Analíticos. Efectos asociados a la rotación del sistema de referencia</i>	80
5	<i>Generalización del medio PML</i>	90
5.1	<i>Ecuaciones de Maxwell para ondas planas</i>	90
5.2	<i>Ecuaciones en el medio PML</i>	91
5.3	<i>Adaptación perfecta entre ambos medios</i>	92
5.4	<i>Caso Isótropo</i>	94
5.5	<i>Caso anisótropo</i>	97
5.6	<i>Implementación computacional</i>	98
A	<i>Diagrama Polar</i>	102
	Bibliografía	103

Capítulo 1

Introducción: Justificación y precedentes

1.1 *Introducción*

En el campo del Electromagnetismo, el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo ¹ se asocia históricamente al método presentado por Yee (1966). Este permite resolver las ecuaciones de Maxwell explícitamente en el dominio del tiempo mediante la sustitución de las derivadas espaciales y temporales por diferencias centradas de primer orden en un dominio espacio temporal discreto. Una de las ventajas principales del método es la de su sencillez y adaptabilidad al cálculo por ordenador. Los algoritmos explícitos presentan además la ventaja de ser secuenciales en el tiempo, y no precisar inversión matricial.

No obstante y de un modo genérico esta definición ha pasado a incluir a todos los métodos que hacen uso de aproximaciones discretas de las derivadas para resolver explícitamente en el dominio del tiempo las ecuaciones de Maxwell. Todos ellos tienen en común la definición de un conjunto de puntos discreto del espacio-tiempo (red espacio-temporal) en los que se obtienen los campos eléctricos y magnéticos como solución de una aproximación de las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo, para lo que los operadores diferenciales son sustituidos convenientemente por operadores discretos que actúan sobre los campos definidos en los puntos de la red.

El método FDTD genera una bibliografía numerosa y creciente y ha dado lugar desde 1966 a más de dos mil publicaciones que van desde la mejora y extensión del método, hasta la aplicación al análisis y diseño de todo tipo de dispositivos electromagnéticos. Es por ello casi imposible abrir una revista dedicada a electromagnetismo aplicado sin encontrarnos con las conocidas siglas FDTD. En la siguiente gráfica se muestra un histograma de la evolución del número de publicaciones a lo largo de los años

La presente memoria ha sido desarrollada dentro de la línea de investigación que el Grupo de Electromagnetismo de Granada viene dedicando desde 1990 al método FDTD. Durante una primera etapa, la participación del grupo en los proyectos PRONTIC "Desarrollo y validación de métodos de cálculo numérico para la predicción y análisis de las características

¹De aquí en adelante FDTD (Finite Difference Time Domain)

de los ecos radar (RCS) y su reducción”, coordinado por la empresa CASA, sirvió para sentar las bases del desarrollo de códigos basados en FDTD donde se estudiaron los problemas básicos de estabilidad, dispersión, iluminación, conversión campo cercano-lejano y se aplicó a la determinación de la sección recta radar de blancos conductores. En una segunda etapa, con la participación en los proyectos de investigación, "Desarrollo y aplicación de métodos numéricos en dominio del tiempo", y "Estudio de pérdidas en discontinuidades abruptas de guías dieléctricas" financiados por la CICYT, se desarrolló y aplicó el método al tratamiento de guías dieléctricas (fibras ópticas), isótropas y anisótropas. Es precisamente a raíz de este último proyecto cuando se planteó la necesidad de hacer un estudio analítico de los problemas numéricos que se estaban resolviendo, por un lado, y del desarrollo de condiciones absorbentes adecuadas para truncar guías dieléctricas anisótropas. En esta memoria se presentan los resultados de dicho estudio.

1.2 *Antecedentes*

Aunque cualquier revisión bibliográfica que se intente hacer quedará prontamente desfasada, sin ánimo de ser sistemáticos ni exhaustivos, en este epígrafe daremos los antecedentes fundamentales y más recientes que encuadran el trabajo de investigación presentado en esta memoria. Para una revisión más extensa de la bibliografía ver (Shlager y Schneider, 1995), o consultar la continua actualización que de la bibliografía de diferencias finitas hacen los autores del artículo citado en la dirección de web <http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/fdtd-bib.html>

Aunque la aplicación de diferencias finitas a las ecuaciones de Maxwell fue introducida a la comunidad electromagnética por Yee en (1966), los orígenes de la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante diferencias finitas se remontan a 1928 en un artículo de Courant, Friedrichs y Lewy (Courant *et al.*, 1928). No fue hasta quince años después, en tiempos de la Segunda Guerra Mundial, cuando se aplicó, con ayuda de las primeras computadoras, a problemas de dinámica de fluidos. Después de la guerra se amplió su campo a problemas de difusión y transporte de neutrones, reacciones termonucleares, radiación, etc. Progresivamente el número de problemas abordado mediante diferencias finitas se ha ido expandiendo con el avance la microelectrónica, así como han ido apareciendo nuevos algoritmos basados muy a menudo más en la intuición que en fundamentos matemáticos. Como consecuencia, cuestiones como la convergencia, estabilidad, estimaciones de error, no han sido tratadas de forma paralela al desarrollo computacional de los métodos. De cualquier modo, los fundamentos matemáticos básicos se pueden encontrar en los trabajos de Courant, Von-Neumann, Lax, Richtmyer y Morton, entre otros, durante los años 40 y 50 (Lax y Richtmyer, 1956) (Richtmyer y Morton, 1967) y en algunos textos básicos sobre esquemas en diferencias (Mitchell y Griffiths, 1980) (Smith, 1985)(Godunov y Ryabenkii, 1987). Textos más recientes recopilan trabajos de investigación matemáticos más elaborados (Dautray y Lions, 1984) que dan un formalismo más adecuado aunque más complejo de los métodos en diferencias.

La aplicación en electromagnetismo computacional ² de las diferencias finital, a partir

²Una revisión de los métodos computacionales en electromagnetismo puede encontrarse en (Miller, 1988)

del trabajo de Yee, se ha desarrollado unida a nombres como los de Taflove, Umashankar o Holland, entre otros: (Taflove y Brodwin, 1975b), (Holland, 1977), (Umashankar y Taflove, 1982), (Taflove y Umashankar, 1983), (Holland, 1983), (Taflove *et al.*, 1985). Trabajos de recopilación como los de (Taflove y Umashankar, 1987), (1990b) constituyen referencias tutoriales del método. Más recientemente han ido apareciendo libros (Kunz y Luebbers, 1993) (Taflove, 1995) que constituyen recopilaciones del cambiante estado del arte hasta el momento de su publicación.

Desde su nacimiento, los esfuerzos en la investigación en la aplicación de los métodos en diferencias para resolver las ecuaciones de Maxwell, han seguido dos direcciones fundamentales:

- Mejoras, modificaciones y alternativas al método: refinamiento de los esquemas en diferencias, métodos próximos que superen algunas de sus limitaciones, búsqueda de condiciones de truncamiento de la región de cálculo, modelado.
- Aplicaciones a problemas concretos.

1.2.1 *Mejoras, modificaciones y alternativas*

Dentro de las mejoras del método es necesario destacar tres líneas de investigación:

- Búsqueda de condiciones de truncamiento de la región de solución adecuadas.
- Tratamiento de la dispersión del método.
- Utilización de otros esquemas para el tratamiento de contornos curvos, medios anisótropos, medios dispersivos,....

Acompañando estas líneas de trabajo, existe un esfuerzo constante por cimentar matemáticamente los avances que el motor del desarrollo de aplicaciones necesita.

Tratamiento de la dispersión del método

Cada esquema en diferencias presenta unas características dispersivas, que se traducen en diferencias de fase de su solución respecto de la solución del problema diferencial. Es por ello preocupación constante el desarrollo de técnicas que permitan minimizar o controlar este error de fase. En este sentido, trabajos como los de (Lax y Wedroff, 1960), (Roberts y Weiss, 1966), (Zwas y Abarbanel, 1971), (Oliger, 1974), presentan algoritmos de orden superior aplicados a ecuaciones hiperbólicas en general que reducen los errores de fase. Asimismo (Fang, 1989), (Deveze, 1992), (Materdey Bao-Hung, 1993), (García *et al.*, 1996b), entre otros, estudian algoritmos de orden superior alternativos al de Yee, con igual o con diferente disposición espacial de los campos. Otras vías de reducción de la dispersión se basan en la adición a las ecuaciones de un término difusivo ficticio (Omick y Castillo lo hacen en un algoritmo de un nudo (1993)), y corrigiendo además los errores de amplitud debidos a este término (Watanabe, 1987). La reducción de la dispersión se hace especialmente necesaria en el estudio en el dominio del tiempo de transitorios cortos.

En la presente memoria, manteniendo la simplicidad del esquema de Yee para medios isotropos, y el de dos nudos (Bi *et al.*, 1991)(Materdey Bao-Hung, 1993) para medios anisotropos se realiza un estudio analítico de los efectos de la dispersión numérica y se proponen técnicas que permiten controlarla para un conjunto de problemas de interés práctico: propagación libre, incidencia sobre interfases, propagación guiada en medios confinados y abiertos (guías conductoras y dieléctricas respectivamente).

Búsqueda de condiciones de truncamiento de la región de solución adecuadas

Si hay que destacar el tópico que más esfuerzo investigador ha acarreado desde el nacimiento del método, ese es el de las condiciones de truncamiento de la región solución. Como quiera que la gran mayoría de los problemas de interés práctico son abiertos o semiabiertos, es preciso encontrar condiciones de truncamiento adecuadas que permitan su simulación computacional en un dominio finito.

La dificultad de encontrar condiciones que simulen la continuidad indefinida del espacio computacional ha dado lugar a un sinnúmero de trabajos. No obstante, y en la práctica, se ha sustituido este objetivo, por uno más simple como el de simular la propagación indefinida de las ondas que inciden sobre la misma, sin reflexión alguna, para cualquier frecuencia y ángulo de incidencia. Aunque este tipo de condiciones no permiten por su propio planteamiento, truncar adecuadamente zonas de campo cercano, debido a que éstos no son exclusivamente propagativos, es posible utilizarlas con éxito, mediante el correcto alejamiento de las condiciones hasta poder suponer que los campos que le inciden son puramente propagativos. En general a este tipo de soluciones se les ha llamado en la literatura condiciones absorbentes ³, y particularmente condiciones de radiación ⁴ cuando en su construcción se hace la hipótesis de que el campo que le incide se comporta como un campo de radiación. Trabajos como los de (Lindman, 1975), (Bayliss y Turkel, 1980), (Engquist y Majda, 1977), (Gottlieb y Turkel, 1978), (Engquist y Majda, 1979), (Bayliss y Turkel, 1980), (Mur, 1981), (Sloan, 1983), (Ziolkowsky *et al.*, 1983), (Liao *et al.*, 1984), (Keys, 1985), (Higdon, 1986), (Higdon, 1987), (Fang y Mei, 1989), (Ramahi *et al.*, 1991), (Olivier, 1992), (Tirkas *et al.*, 1992), (Mei y Fang, 1992), (Betz y Mittra, 1993), (McInturff y Simon, 1993), (Railton *et al.*, 1993) son algunos de los involucrados en este estudio. Todos ellos tienen en común la modificación de las ecuaciones del esquema en las fronteras.

Aunque técnicas como las de (Mei y Fang, 1992) han permitido obtener coeficientes de reflexión de hasta -40 dB, la construcción de cámaras anecoicas que permiten obtener atenuaciones de hasta -70 dB, ha dado lugar a métodos experimentales con una precisión que los métodos computacionales no podían corroborar.

En 1994 una revolución, tan sólo comparable a la de Yee en 1966, aparece en el tema de las condiciones absorbentes con el trabajo de (Berenger, 1994). Basándose en una versión desdoblada de las ecuaciones de Maxwell y en la definición de un pseudo-medio con pérdidas eléctricas y magnéticas anisótropas, Berenger consigue una condición de truncamiento ideal, que permite la continuidad de todas las componentes del campo en la interfase, y que al ser implementada computacionalmente, consigue con muy poco esfuerzo coeficientes de reflexión

³Absorbing Boundary Conditions, ABC

⁴Radiation Boundary Conditions, RBC

del orden de -80 dB que mejoran en varios órdenes de magnitud, los mejores resultados obtenidos hasta entonces (Andrew *et al.*, 1995) (Aksun y Dural, 1996). Aunque la idea de absorber las ondas mediante medios con pérdidas ya se había expuesto en (Berenger, 1983), (Holland, 1983), (Rappaport, 1992), (Rappaport y Bahrmassel, 1992), el planteamiento de Berenger de partir las ecuaciones de Maxwell, para construir un conjunto de ecuaciones que añadan grados de libertad al problema matemático de la absorción, ha constituido toda una avance en este campo, que ha dado lugar en muy poco tiempo a más de un centenar de publicaciones dedicados al tema. Genéricamente, se les ha llamado, tanto al método de Berenger, como a otros métodos que utilizan ideas afines, métodos de adaptación perfecta mediante capas ⁵ dada la característica común de intentar *adaptar* las *impedancias* de ambos medios al modo en el que se hace en la teoría de líneas de transmisión. A diferencia de las RBC este tipo de condiciones ejecutan la absorción añadiendo un material maxwelliano o no que atenúa las ondas que se propagan en él.

Son de señalar trabajos como el de (Chew y Weedon, 1994) o el de (Rappaport, 1995) donde se reinterpretan las condiciones de Berenger en términos de un reescalamiento espacial complejo (ver también (Gribbons *et al.*, 1995)). Esta interpretación en el dominio de la frecuencia ha resultado ser muy apropiada para la implementación de estas condiciones absorbentes mediante técnicas en el dominio de la frecuencia como la de los Elementos Finitos. Sin embargo la obtención de una versión directa en el dominio del tiempo lleva a ecuaciones diferenciales de segundo orden (Rappaport, 1995) que son exóticas de implementar mediante diferencias finitas dados los incrementos de las necesidades de almacenamiento de instantes pasados, a fin de obtener los presentes. No obstante en (Veihl y Mittra, 1996) se presenta una implementación que hace uso de una versión que involucra integrales temporales numéricas para superar esta dificultad.

Otra aproximación al problema diferente, aunque muy conveniente tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo que cuenta con muchos adeptos, es la presentada en (Sacks *et al.*, 1995). Esta técnica retoma la idea de utilizar un medio Maxwelliano con pérdidas para conseguir la adaptación total del medio problema. En este caso se utilizan los grados de libertad que proporcionan un medio uniaxial con pérdidas eléctricas y magnéticas para adaptarlo a un medio isótropo desde el que le incide la perturbación. El medio resultante es un medio activo con fuentes dependientes en su interior, a través de conductividades negativas, que resulta atenuaa las ondas progresivas que viajan en su interior. La principal ventaja de este método radica en su carácter Maxwelliano que le permite ser implementado con facilidad en códigos en el dominio del tiempo y de la frecuencia con mínimas modificaciones para tratar medios anisótropos. El método fue originalmente implementado en el dominio de la frecuencia mediante el método de los elementos finitos por (Sacks *et al.*, 1995) y ha sido llevado al dominio del tiempo en (Gedney, 1996) que también da en ese trabajo una equivalencia matemática del PML de Berenger y el de Sacks. La estabilidad de este método ha sido estudiada, según se describe posteriormente en (Nehrbass y Lee, 1996) (Nehrbass *et al.*, 1996). Asimismo la causalidad del medio de Sacks es estudiada en (Kuzuoglu y Mittra, 1996).

El método aunque presentado, demostrado y comprobado por Berenger en dos dimensiones, fue prontamente extendido por el mismo Berenger a 3 dimensiones (Bérenger,

⁵Perfect Matching Layers

1994)(Bérenger, 1996)(Berenger, 1996), comprobado en 3 dimensiones en (Katz *et al.*, 1994) y aplicado a la absorción de ondas guiadas en (Reuter *et al.*, 1994). En (Cai y Zhou, 1995) se prueba analíticamente su validez en 3 dimensiones. A partir de este momento, multitud de trabajos dedicados a la optimización, estudio, aplicación y mejoras del método se han ido sucediendo.

Por ejemplo en (Mittra y Pekel, 1995) se demuestra que tanto el medio PML, en su interpretación reescalada espacialmente, como el presentado por Sacks son medios que contienen fuentes dependientes en su interior, por lo que pueden considerarse medios no pasivos. Igualmente se cuestiona la estabilidad del método FDTD para el PML para truncar medios laminados. El tópico de la estabilidad de los esquemas en diferencias, siendo en general de crucial importancia, y a la vez de difícil tratamiento para el problema general de valores iniciales y de frontera (González García, 1994), ha sido abordado para el medio PML en (Nehrbass y Lee, 1996) (Nehrbass *et al.*, 1996). En este trabajo se demuestra que el medio de Sacks es dinámicamente inestable, debido a que es un medio electromagnéticamente activo (sus conductividades son negativas), es decir, el medio acepta soluciones no acotadas en el tiempo para excitaciones acotadas, por lo que ningún esquema numérico estable podrá obtener una respuesta acotada del problema original, si la solución de este es no acotada. Por otro lado en ese mismo trabajo, asumiendo que el *medio* de Berenger es dinámicamente estable, se prueba que el límite de Courant provee una condición suficiente de estabilidad numérica para la discretización mediante FDTD del mismo. Asimismo prueba que este límite de estabilidad es independiente de las conductividades del material.

Aunque la realización física del medio PML es inviable, es curioso hacer notar que las ideas surgidas en el dominio de lo numérico están sirviendo para inspirar métodos de realización física de medios Maxwellianos absorbentes (Ziolkowski, 1997).

Con el objetivo de reducir las reflexiones numéricas que se producen en su implementación, debidas, por una parte, a los cambios de conductividad entre celdas adyacentes (interfases numéricas) y de otro a la terminación del PML mediante conductores eléctricos y magnéticos perfectos, se han hecho estudios dedicados a su predicción y minimización. Por ejemplo, en (Bérenger, 1997) se estudian técnicas que permiten reducir el tamaño de la capa absorbente,

Uno de los objetivos de esta memoria ha sido el de extender el método de Berenger a la adaptación de medios anisótropos eléctricos y magnéticos. Partiendo de la sólo hipótesis de continuidad total de los campos, se ha introducido una formulación algébrica que proporciona un método general de construcción de medios PML, que ha permitido incluso la extensión del PML a la absorción de ondas en medios bi-anisótropos. Partiendo de la forma básica del método de Berenger, en (García *et al.*, 1996a) se estudia la aplicabilidad del mismo a la absorción de ondas en medios anisótropos llegándose a la conclusión de su imposibilidad en el caso más general. En (Villó Pérez *et al.*, 1997) se propone una extensión al método de Berenger (EPML) que permite la absorción de ondas en medios dieléctricos anisótropos generales en dos dimensiones. En (Villó Pérez *et al.*, 1998) se extiende y valida el EPML a medios tridimensionales anisótropos eléctricos y magnéticos simultáneamente. Finalmente en (García *et al.*, 1998a) se propone un PML bi-anisótropo (BiPML) para la adaptación de un medio bi-isótropo general en tres dimensiones. Paralelamente e independientemente, han ido apareciendo en la literatura otras formas de realizar esta adaptación, mediante la

utilización de una formulación del PML en función del vector \vec{D} y \vec{B} , con un paso intermedio que obtiene ambos vectores en función del \vec{E} y del \vec{H} (Zhao *et al.*, 1997) (Zhao y Räsänen, 1998) (Zhao *et al.*, 1998). La principal ventaja del método presentado en esta memoria es la de proveer un método general algebraico que engloba y justifica la formulación de Zhao *et al.*, además de dar los mecanismos básicos de su extensión a medios bi-isotropos y bi-anisotropos (García *et al.*, 1998a) (García *et al.*, 1998b). Además su implementación, al ser directa mediante los vectores \vec{E} y del \vec{H} no requiere el almacenamiento extra de los \vec{D} y del \vec{B} , ni su cálculo, con el consiguiente ahorro computacional.

Utilización de otros esquemas para el tratamiento medios anisótropos, medios dispersivos, contornos curvos, etc.

El estudio de medios anisótropos, al no ser el esquema de Yee adecuado dado el entremezclamiento de componentes que se produce, ha motivado la búsqueda de otros algoritmos es punto fundamental de la investigación. En (Bi *et al.*, 1991) se utiliza un algoritmo bidimensional de dos nudos (todas las componentes eléctricas en un nudo y todas las magnéticas en otro) para resolver el problema. (Chen *et al.*, 1991) propone un tipo de celda compleja y relaciona el método con el TLM. (Omick y Castillo, 1993) utilizan un algoritmo de un solo nudo. (Schneider y Hudson, 1993) estudian medios anisótropos no diagonales. (Reineix *et al.*, 1992) analizan una guía bidimensional de ferrita. (Pereda *et al.*, 1993) tratan también ferritas magnetizadas mediante un algoritmo modificado. (Asi y Shafai, 1992) y (Xiao *et al.*, 1992) utilizan la red de Yee, en la que se han colapsado dos planos de un octante del cubo de Yee, para producir un algoritmo bidimensional que permite tratar problemas tridimensionales de guías homogéneas en la dirección de propagación, reduciéndolos a dos dimensiones. (Xiao y Vahldieck, 1993) extiende al anterior método y lo aplica a medios anisótropos con elementos no diagonales. (Materdey Bao-Hung, 1993)(1993a)(Materdey *et al.*, 1993b)(Materdey *et al.*, 1994)(García *et al.*, 1996b) hace un estudio de diversos esquemas útiles en el tratamiento de guías anisótropas, así como de su estabilidad y dispersión. En (Shlager *et al.*, 1993) se hace un estudio comparativo, entre otros, de los métodos de Bi y Chen citados anteriormente, en cuanto a sus necesidades computacionales, estabilidad y dispersión.

En la presente memoria se utiliza el método de dos nudos presentado en (Materdey Bao-Hung, 1993) como punto de partida para el estudio analítico de sus soluciones numéricas en el caso de propagación libre en medios anisótropos generales. Asimismo, y con el único objetivo de validar las condiciones de adaptación de medios bi-anisótropos, se presenta un algoritmo de dos nudos monofrecuencia en el dominio del tiempo que permite tratar este tipo de medios.

En cuanto al tratamiento mediante FDTD de objetos curvos ha dado origen también a numerosa bibliografía, dados los errores asociado con el uso de una aproximación en escalera (Cangellaris y Wright, 1991) y (Holland, 1993). Un gran esfuerzo se ha dedicado y se está dedicando a este problema: de un lado la utilización de métodos de volumen finito, que implican deformaciones complejas de las celdas espaciales y recuerdan en su planteamiento al de los elementos finitos (Selmin, 1993), (Lahrman, 1992), (Vinokur, 1989), y de otro lado métodos que utilizan localmente las leyes integrales de Faraday y Ampere en celdas

deformadas en la cercanía del objeto para *conformarlo*, utilizando los algoritmos usuales lejos del mismo.

Dentro de la primera línea cabe citar trabajos como los de (Holland, 1983) (Fusco, 1990) (Fusco *et al.*, 1991) (Lee *et al.*, 1992) (Harms *et al.*, 1992) (Kashiwa *et al.*, 1994) (Madsen y Ziolkowski, 1988) (Madsen y Ziolkowski, 1990) (Shankar *et al.*, 1989) (Shankar *et al.*, 1990) (Mohammadian *et al.*, 1991) (Cangellaris *et al.*, 1987) (Mei *et al.*, 1984). Dos tipos particulares de deformaciones de la red, a los que por su simplicidad se le está dedicando especial atención, son el del mallado gradual y el submallado de la red: (Kim y Hoefler, 1990) (Heinrich *et al.*, 1996) (Kunz y Simpson, 1981) (Li *et al.*, 1993), (Zivanovic *et al.*, 1991) (Prescott y Shuley, 1992).

Dentro de la segunda línea, una solución simple al problema surge de deformar sólomente las celdas próximas al objeto adaptándolas a su superficie, aplicando el algoritmo usual para el resto de las celdas. En estas celdas deformadas los campos se sitúan en los mismos puntos que en las celdas sin deformar, y, para calcular los situados en el centro de las mismas, se hace uso de las leyes de Ampere y Faraday en forma integral. Este método ha sido utilizado en diversos problemas (Umashankar *et al.*, 1987) (Taflove *et al.*, 1988) (Jurgens *et al.*, 1992) (Luebbers *et al.*, 1992), (Luebbers *et al.*, 1993) (Katz *et al.*, 1991), (Tirkas y Demarest, 1991), (Maloney y Smith, 1992), (Shorthouse y Railton, 1992), (Railton, 1993), (Fang y Ren, 1993) etc. Asimismo, se han propuesto generalizaciones a tres dimensiones: (Jurgens y Taflove, 1993) lo hace de forma directa y (González *et al.*, 1993) (González García, 1994) (S. González García *et al.*, 1996) utiliza una forma volúmica de la ley de Faraday, en la que se utilizan celdas adaptadas a la superficie superponiéndose entre sí. (Rappaport, 1991) aplica las formas integrales de las leyes de Ampere y Faraday a regiones malladas triangularmente. Concretamente, en esta memoria se ha hecho igualmente uso de las formas volúmicas de la leyes de Faraday y Ampere para derivar las condiciones de conexión en interfases, para la correcta modelación de las mismas.

Aunque la estabilidad de las aproximaciones basadas en las formas integrales, no ha sido aun formalmente probada, existen algo más que indicios que apuntan a inestabilidades en el proceso de solución (González García, 1994). Para ello se han propuesto (Craddock *et al.*, 1996) técnicas que corrigen las inestabilidades mediante la búsqueda de redes pasivas que conviertan el método en dinámicamente estable. En esta memoria, conocido el comportamiento frecuencial de las inestabilidades, se propone un filtro numérico que podría ser aplicado a la estabilización numérica del proceso de solución.

1.2.2 Aplicaciones

El método ha sido, y continúa siendo actualmente, aplicado a numerosos casos prácticos, siendo éste el campo de más actividad en torno al mismo. Una revisión del método puede encontrarse en los trabajos de Taflove y Umashankar (1990b) y (1990a). Uno de las aplicaciones más consolidadas es la de aplicación del método a dispersión y cálculo de RCS ((Umashankar y Taflove, 1982), (Furse *et al.*, 1990), (Tirkas y Demarest, 1991)). El estudio de la interacción y absorción de ondas electromagnéticas mediante tejidos vivos ha sido llevada a cabo en (Taflove y Brodwin, 1975a), (Sullivan *et al.*, 1987), (Sullivan, 1991), (Chen y Gandhi, 1991), (Shaw *et al.*, 1991) y (Dimbylow, 1991). Medios dispersivos han

sido tratados en (Luebbers *et al.*, 1990), (Luebbers *et al.*, 1991), (Hunsberger *et al.*, 1992), (Gandhi *et al.*, 1993), (Petropulos, 1994). Al análisis de circuitos de microondas se ha aplicado en (Gwarek, 1985), (1988), (Gwarek *et al.*, 1993), (Fang *et al.*, 1987), (Zhang *et al.*, 1988), (Sheen *et al.*, 1990), (Jarem, 1991), (Ko y Mittra, 1991), (Pereda *et al.*, 1993), (Feix *et al.*, 1992). En antenas (Reineix y Jecko, 1989), (Maloney *et al.*, 1990), (Katz *et al.*, 1991), (Tirkas y Balanis, 1992), (Luebbers *et al.*, 1992), (Luebbers *et al.*, 1993), (Maloney y Smith, 1993), (Tirkas *et al.*, 1993). Al análisis de antenas (García *et al.*, 1998c).

En esta memoria se presentan, además, resultados de su aplicación al estudio de la propagación en guías metálicas y dieléctricas isotrópicas. Es posible encontrar también una amplia bibliografía dedicada a este tema. La simulación de propagación en guías conductoras se puede encontrar en, y en guías dieléctricas

1.3 Organización de la memoria

En el primer capítulo se precisará el ambiente matemático que dará marco formal a los dos algoritmos en diferencias que se estudiarán con más profundidad en capítulos posteriores: el algoritmo clásico de Yee (Yee, 1966) que se utilizará en el tratamiento de medios isotrópicos, y el algoritmo de dos nudos (Materdey Bao-Hung, 1993) en medios anisotrópicos. Partiendo de las formas diferenciales e integrales analíticas, y mediante el uso de un lenguaje operacional adecuado, se propondrán formas compactas para las ecuaciones numéricas que permitirán en capítulos posteriores estudiar sus soluciones mediante técnicas analíticas. Finalmente se abordarán los tópicos clásicos de consistencia, convergencia, estabilidad y dispersión.

En el segundo capítulo se obtienen las soluciones analíticas del problema numérico mediante el método de Yee, para medios isotrópicos, haciendo especial hincapié en aquellos fenómenos exclusivos del dominio de lo numérico, no consistentes con las soluciones analíticas, y de las condiciones de su minimización práctica. Siguiendo el paralelismo con cualquier texto básico de electromagnetismo aplicado, se han estudiado las soluciones analíticas de los siguientes problemas planteados en el espacio discreto y resueltos por el método de Yee:

1. Propagación libre en el espacio numérico
2. Incidencia sobre interfases
3. Propagación en guías conductoras
4. Propagación en guías dieléctricas (fibras ópticas)

Entre otras aportaciones de interés, junto con la conocida relación de dispersión numérica en el medio computacional libre, se obtienen la ley de Snell–Descartes numérica, los coeficientes de reflexión numéricos en la interfase, las relaciones de dispersión numéricas para guías confinadas y no confinadas simples, además de las relaciones que cumplen las componentes numéricas de los campos en el medio numérico.

Siguiendo con el esquema del segundo capítulo, en el tercer capítulo se obtienen las soluciones analíticas del problema numérico mediante el método de dos nudos, para medios anisotrópicos. Dada la complejidad de estos medios, se estudia básicamente el problema de

propagación libre en medios numéricos y los fenómenos que allí aparacen. Concretamente se obtiene la relación de dispersión numérica, la relación entre las componentes numéricas de los campos y las leyes que permiten pasar de un sistema de referencia a otro, que da lugar al concepto de eje óptico numérico.

Constituyendo estos tres primeros capítulos un bloque temático de la presente memoria, sus principales aportaciones serán las de dar métodos sistemáticos de estudio del problema numérico, así como soluciones numéricas cerradas para muchos ejemplos de interés, que permitirán obtener una comprensión más adecuada del comportamiento real de los métodos en diferencias. El disponer de las soluciones analíticas exactas del problema numérico, permitirá, entre otras:

1. La exacta excitación modal de las estructuras en el dominio de lo numérico, con la consiguiente corrección de los errores de dispersión inherentes al método.
2. La cuantificación a priori de los errores numéricos
3. La correcta elección de los parámetros de simulación evitando errores no deseados

Por último el cuarto y último capítulo se ha dedicado al estudio y generalización del método PML para el truncamiento adecuado de la zona de cálculo numérico y la simulación de dominios indefinidos. Constituye una principal aportación de esta memoria la generalización del PML clásico de Berenger a medios dieléctricos y magnéticos anisótropos, así como a medios bianisótropos. Se presentan las bases algebraicas de dicha generalización y se validaran numéricamente las condiciones obtenidas.

como sigue: se empezará estableciendo una nomenclatura básica, que permitirá expresar de forma compacta y simple las ecuaciones numéricas que caracterizan el método FDTD. A continuación, las ecuaciones generales (2.1) se particularizarán a medios lineales isótropos, y se aproximarán mediante el método de Yee. También se mostrará la utilidad de la formulación integral para la simulación de transiciones abruptas entre medios. Siguiendo la metodología utilizada para el caso isótropo, finalizaremos este capítulo, aproximando estas ecuaciones en el caso anisótropo mediante el método de Dos Nudos.

2.2 Redes, funciones y operadores discretos

Los conceptos fundamentales implicados en el método FDTD son el de red, función discreta y aproximación de derivadas por ecuaciones en diferencias finitas, aproximación que se realizará mediante el uso de un lenguaje operacional adecuado. Dichos conceptos serán definidos y examinados en esta sección.

Definición 1 (Nudos) Dados los números reales positivos y distintos de cero Δx , Δy , Δz y Δt . Se definen los siguientes conjuntos cuyos elementos se denominan *nudos*²

$$\begin{aligned}
 A_1 &\equiv \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_r^3 : x = (i + \frac{1}{2})\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z\} \\
 A_2 &\equiv \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_r^3 : x = i\Delta x, y = (j + \frac{1}{2})\Delta y, z = k\Delta z\} \\
 A_3 &\equiv \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_r^3 : x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = (k + \frac{1}{2})\Delta z\} \\
 A_4 &\equiv \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_r^3 : x = i\Delta x, y = (j + \frac{1}{2})\Delta y, z = (k + \frac{1}{2})\Delta z\} \\
 A_5 &\equiv \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_r^3 : x = (i + \frac{1}{2})\Delta x, y = j\Delta y, z = (k + \frac{1}{2})\Delta z\} \\
 A_6 &\equiv \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_r^3 : x = (i + \frac{1}{2})\Delta x, y = (j + \frac{1}{2})\Delta y, z = k\Delta z\} \\
 A_7 &\equiv \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_r^3 : x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z\} \\
 A_8 &\equiv \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_r^3 : x = (i + \frac{1}{2})\Delta x, y = (j + \frac{1}{2})\Delta y, z = (k + \frac{1}{2})\Delta z\}
 \end{aligned} \tag{2.2a}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &\equiv \{t \in \mathbf{R}_t : t = n\Delta t\} \\
 B_2 &\equiv \{t \in \mathbf{R}_t : t = (n + \frac{1}{2})\Delta t\}
 \end{aligned} \tag{2.2b}$$

con $i, j, k, n \in \mathbf{Z}$.

En lo que sigue, utilizaremos el símbolo m_t para representar indistintamente n o $n + \frac{1}{2}$, m_x para i o $i + \frac{1}{2}$, m_y para j o $j + \frac{1}{2}$ y m_z para k o $k + \frac{1}{2}$. Esta notación se utilizará con frecuencia y será conveniente recordarla.

Definición 2 (Redes) Se define la *red espacial* A , subconjunto de \mathbf{R}_r^3 , y la *red temporal*

²En lo que sigue utilizaremos el símbolo \mathbf{Z} para denotar el conjunto de los números enteros, \mathbf{R} para el conjunto de los números reales, \mathbf{R}_r^3 representara el conjunto \mathbf{R}^3 de los puntos del espacio y \mathbf{R}_t denotará la recta de tiempo real.

B , subconjunto de \mathbf{R}_t , como

$$A \equiv A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_8 \quad (2.3a)$$

$$B \equiv B_1 \cup B_2 \quad (2.3b)$$

Haciendo uso de estas definiciones construimos la *red espacio-temporal* M subconjunto de $\mathbf{R}_x^3 \times \mathbf{R}_t$ como el producto cartesiano de A por B

$$M \equiv A \times B = \{((x, y, z), t) : (x, y, z) \in A, t \in B\} \quad (2.4)$$

Así M es el conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente representa un punto discreto del espacio (*nudo espacial*) y cuya segunda componente representa un instante discreto de tiempo (*nudo temporal*). Para simplificar la notación escribiremos (x, y, z, t) en lugar de $((x, y, z), t)$.

Definida de esta forma la red espacial es una red ortogonal compuesta de nudos dispuestos en el espacio, tal y como muestra la Figura 2.1. El octate de trazo grueso en cuyos vértices están representados los nudos espaciales de los ocho conjuntos definidos, se denomina *octate elemental de la red espacial*.

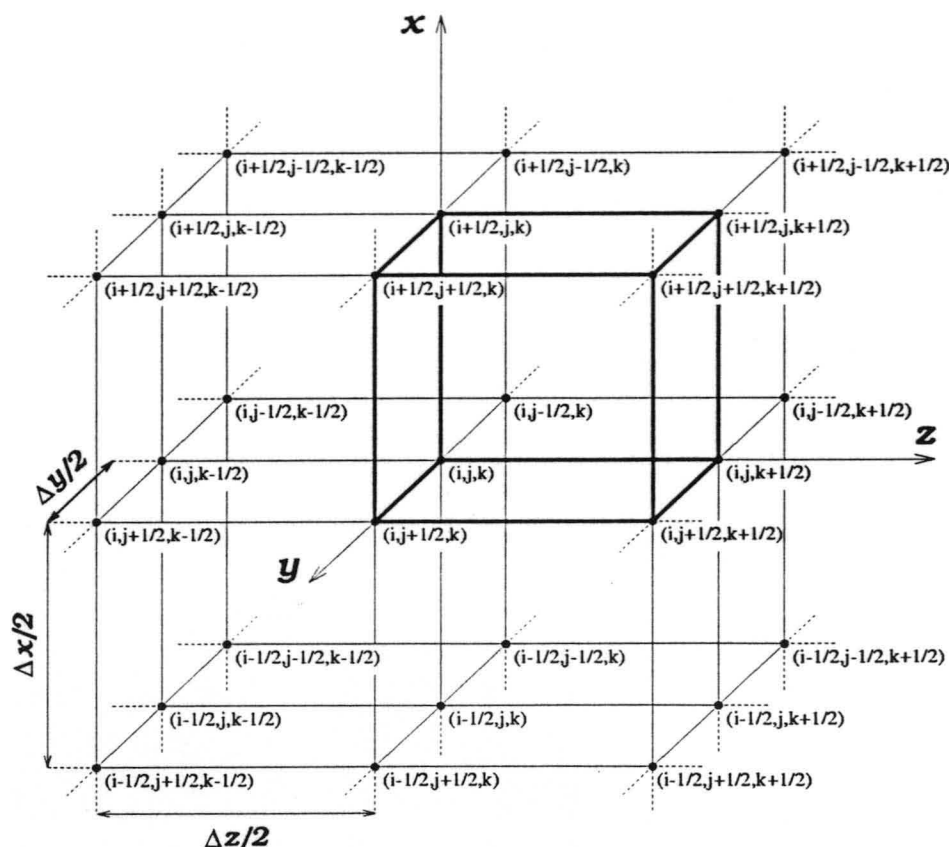


Figura 2.1: *Red espacial*.

La red espacio-temporal se construye llenando el espacio tiempo de nudos mediante desplazamientos en $\frac{\Delta t}{2}$ de la red espacial, su octate elemental se puede considerar como un

hipercubo en el espacio tetradimensional de aristas $\frac{\Delta x}{2}$, $\frac{\Delta y}{2}$, $\frac{\Delta z}{2}$ y $\frac{\Delta t}{2}$. Este hipercubo define un espacio discreto que será denominado *espacio o medio numérico*. Para redes espaciales bidimensionales es posible representar gráficamente este espacio tal y como muestra la Figura 2.2.

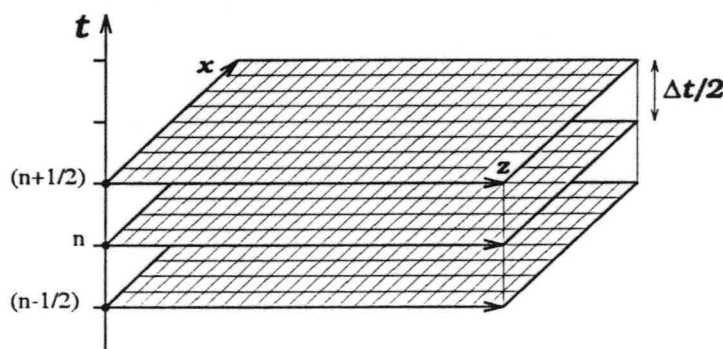


Figura 2.2: Red espacio-temporal, caso bidimensional plano xz .

Definición 3 (Funciones discretas) Sea M una red espacio-temporal y M' un subconjunto no vacío de ella. Llamaremos *función discreta* a toda aplicación $F : M' \rightarrow \mathbf{R}$ definida sobre el conjunto de pares ordenados (x, y, z, t) de M' . Representaremos con $\mathcal{F}(M', \mathbf{R})$ el conjunto de todas las funciones discretas definidas en M' .

Definición 4 (Operaciones con funciones discretas) En el conjunto $\mathcal{F}(M', \mathbf{R})$ se consideran las operaciones habituales de suma y producto de un escalar por una función.

Suma de funciones discretas. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(M', \mathbf{R})$, se define la suma de F_1 y F_2 , y se representa por $F_1 + F_2$, a la función definida como

$$F_1 + F_2 : M' \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(F_1 + F_2)(x, y, z, t) \equiv F_1(x, y, z, t) + F_2(x, y, z, t)$$

Producto de un número real por una función discreta. Sea $F \in \mathcal{F}(M', \mathbf{R})$ y $a \in \mathbf{R}$, se define el producto de a por F , y se representa por aF , a la función definida como

$$aF : M' \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(aF)(x, y, z, t) \equiv aF(x, y, z, t)$$

El conjunto $\mathcal{F}(M')$ junto con las operaciones definidas anteriormente, es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbf{R} y escribiremos \mathbf{V} para referirnos a tal espacio.

Definición 5 (Operadores discretos) Sea \mathbf{V} el espacio vectorial de las funciones discretas definidas en M' . Llamaremos *operador discreto* a toda aplicación lineal $\mathcal{O} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. Esto es, el operador \mathcal{O} se llama discreto si a cada función $F \in \mathbf{V}$ le hace corresponder de forma

unívoca otra función $\mathcal{O}(F) \in V$, en este caso se dice que el operador \mathcal{O} transforma la función discreta F en la función discreta $\mathcal{O}(F)$. Además por la definición de linealidad se ha de cumplir

$$\mathcal{O}(aF_1 + bF_2) = a\mathcal{O}(F_1) + b\mathcal{O}(F_2) \quad \forall a, b \in \mathbf{R}, \forall F_1, F_2 \in V$$

Definición (Composición o Producto de Operadores Discretos) Sea V el espacio vectorial de las funciones discretas definidas sobre M' . Dados los operadores discretos $\mathcal{O}_1 : V \rightarrow V$ y $\mathcal{O}_2 : V \rightarrow V$, se llamará producto de ellos a la aplicación compuesta

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2 \circ \mathcal{O}_1 &: V \rightarrow V \\ (\mathcal{O}_2 \circ \mathcal{O}_1)(F) &\equiv \mathcal{O}_2(\mathcal{O}_1(F)) \end{aligned}$$

la cual, por ser composición de aplicaciones lineales, es también lineal.

El producto de operadores verifica las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_3 \circ (\mathcal{O}_2 \circ \mathcal{O}_1) &= (\mathcal{O}_3 \circ \mathcal{O}_2) \circ \mathcal{O}_1 \\ \mathcal{O}_2 \circ (k\mathcal{O}_1) &= (k\mathcal{O}_2) \circ \mathcal{O}_1 = k(\mathcal{O}_2 \circ \mathcal{O}_1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

siendo k un escalar.

Definición 6 (Diferencia Centrada y Promedio Centrado) En el espacio de las funciones discretas se definen los siguientes operadores discretos

- *Diferencia centrada en la variable x*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x &: V \rightarrow V \\ \mathcal{D}_x(F) &\equiv \frac{F(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t) - F(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.6)$$

- *Promedio centrado en la variable x*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &: V \rightarrow V \\ \mathcal{P}_x(F) &\equiv \frac{F(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t) + F(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t)}{2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

con expresiones similares para las variables y , z y t .

Se sobreentiende que estas definiciones sólo tienen sentido en un conjunto M' abierto, tal que $x \pm \frac{\Delta x}{2}$ existan para todo $x \in M'$.

Aproximaciones Sea dada una red espacio-temporal M y $f : \mathbf{R}_r^3 \times \mathbf{R}_t \rightarrow \mathbf{R}$ una función que se supone definida en todo el dominio $\mathbf{R}_r^3 \times \mathbf{R}_t$ y al menos tres veces continuamente derivable en él, con una cota superior del valor absoluto de cada una de las derivadas de orden tres. En cada subconjunto M' de M la función f genera la función discreta

$$\begin{aligned} F &: M' \rightarrow \mathbf{R} \\ F(x, y, z, t) &\equiv f(x, y, z, t) \quad \forall (x, y, z, t) \in M' \end{aligned}$$

Ahora el operador \mathcal{D}_u ($u = x, y, z, t$) puede utilizarse para aproximar la derivada parcial de f respecto de la variable u en cualquier nudo de M' . En efecto, sea $(x_o, y_o, z_o, t_o) \in M'$, haciendo uso del teorema de Taylor es fácil verificar la siguiente igualdad

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x_o, y_o, z_o, t_o)} = \mathcal{D}_u(F) \Big|_{(x_o, y_o, z_o, t_o)} + O(\Delta u^2) \quad (u = x, y, z, t)$$

en donde $O(\Delta u^2)$ indica, que cuando Δu tiende a cero $\mathcal{D}_u(F)$ converge al valor $\frac{\partial f}{\partial u}$ aproximadamente con la misma rapidez con la que Δu^2 converge a cero. En este caso se dice que se ha obtenido una aproximación de segundo orden de exactitud en Δu .

De igual forma puede demostrarse la identidad

$$f(x_o, y_o, z_o, t_o) = \mathcal{P}_u(F) \Big|_{(x_o, y_o, z_o, t_o)} + O(\Delta u^2) \quad (u = x, y, z, t)$$

siendo en consecuencia $\mathcal{P}_u(F)$ una aproximación de segundo orden de exactitud en Δu del valor de la función f en el nudo (x_o, y_o, z_o, t_o) .

En lo que sigue escribiremos para simplificar $\mathcal{O}F(x_o, y_o, z_o, t_o)$ en lugar de $\mathcal{O}(F) \Big|_{(x_o, y_o, z_o, t_o)}$.

Definición 7 (Notación de Yee) Es evidente que las funciones discretas pueden ser consideradas como funciones cuyos argumentos son los números enteros o semienteros que caracterizan los nudos de la red. Así, siguiendo la notación de Yee, un nudo genérico de la red espacio-temporal de coordenadas $(x = m_x \Delta x, y = m_y \Delta y, z = m_z \Delta z, t = m_t \Delta t)$ será representado como (m_x, m_y, m_z, m_t) y la función F como $F^{m_t}(m_x, m_y, m_z)$. Así escribiremos, por ejemplo

$$\mathcal{D}_x F^{m_t}(m_x, m_y, m_z) = \frac{F^{m_t}(m_x + \frac{1}{2}, m_y, m_z) - F^{m_t}(m_x - \frac{1}{2}, m_y, m_z)}{\Delta x}$$

$$\mathcal{D}_t F^{m_t}(m_x, m_y, m_z) = \frac{F^{m_t + \frac{1}{2}}(m_x, m_y, m_z) - F^{m_t - \frac{1}{2}}(m_x, m_y, m_z)}{\Delta t}$$

2.3 Medios isótropos. El método de Yee

Los medios más simples son aquellos en los que sus relaciones constitutivas son lineales, isótropas, homogéneas, independientes del tiempo y no dispersivas

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)$$

donde ϵ , μ y σ son constantes escalares independientes de \vec{r} y t .

Las ecuaciones rotacionales de Maxwell (2.1) toman en este caso la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\tilde{R}\vec{E} \\ \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} = \tilde{R}\vec{H} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Esta versión es de una gran utilidad puesto que es aplicable con suficiente aproximación a una gran parte de los problemas de interés práctico.

En este apartado comenzaremos el estudio numérico que permitirá resolver de forma aproximada estas ecuaciones, asumiendo que las funciones incógnitas $E_u, H_u : \mathbf{R}_r^3 \times \mathbf{R}_t \rightarrow \mathbf{R}$ están definidas en todo $\mathbf{R}_r^3 \times \mathbf{R}_t$ y poseen derivadas de tercer orden acotadas.

El procedimiento de resolución numérica mediante el método FDTD se inicia sustituyendo el dominio de definición continuo de las componentes del campo electromagnético por un dominio discreto definido sobre una red espacio-temporal.

En el método de Yee la red espacial, temporal y espacio-temporal son dadas como sigue

$$\begin{aligned} A_{Yee} &\equiv A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6 \subset A \\ B_{Yee} &\equiv B_1 \cup B_2 = B \\ M_{Yee} &\equiv [(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \times B_1] \cup [(A_4 \cup A_5 \cup A_6) \times B_2] \subset M \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ahora las componentes de argumento continuo, presentes en las ecuaciones rotacionales, son reemplazadas por componentes discretas definidas en los nudos de la red como

$$\begin{aligned} E_x : A_1 \times B_1 &\longrightarrow \mathbf{R} & H_x : A_4 \times B_2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (i+\frac{1}{2}, j, k, n) &\longrightarrow E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) & (i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) &\longrightarrow H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) \\ E_y : A_2 \times B_1 &\longrightarrow \mathbf{R} & H_y : A_5 \times B_2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (i, j+\frac{1}{2}, k, n) &\longrightarrow E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k) & (i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) &\longrightarrow H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) \\ E_z : A_3 \times B_1 &\longrightarrow \mathbf{R} & H_z : A_6 \times B_2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (i, j, k+\frac{1}{2}, n) &\longrightarrow E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2}) & (i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k, n+\frac{1}{2}) &\longrightarrow H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Quedando el campo electromagnético discreto distribuido en el espacio tal y como muestra la Figura 2.3. En relación con la distribución temporal las componentes del campo \vec{E} se definen en los instantes n y las de \vec{H} en los instantes $n + \frac{1}{2}$.

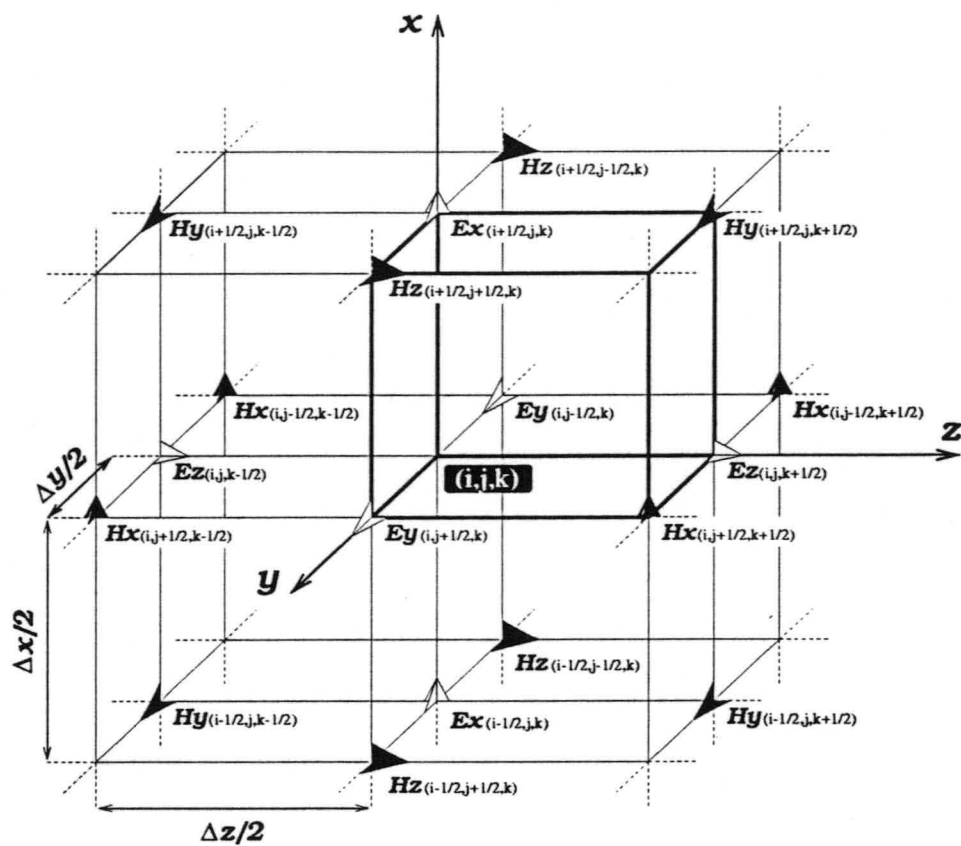


Figura 2.3: Disposición espacial de las componentes del campo electromagnético discreto según el método de Yee.

La distribución espacio-temporal del método de Yee permite aproximar, en los nudos de la red, las ecuaciones rotacionales (2.8) sustituyendo el operador derivada $\frac{\partial}{\partial u}$ por el operador discreto \mathcal{D}_u ($u = x, y, z, t$) y haciendo uso del operador \mathcal{P}_t para las componentes no derivadas, lo que proporciona una aproximación de segundo orden de exactitud. Cuando esto se hace, se obtiene el esquema de Yee en forma operacional

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \mathcal{D}_t H_x^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_z E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \mathcal{D}_y E_z^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \\ \mu \mathcal{D}_t H_y^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_x E_z^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - \mathcal{D}_z E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \\ \mu \mathcal{D}_t H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = \mathcal{D}_y E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - \mathcal{D}_x E_y^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \\ \varepsilon \mathcal{D}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) + \sigma \mathcal{P}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) = \mathcal{D}_y H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) - \mathcal{D}_z H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) \\ \varepsilon \mathcal{D}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) + \sigma \mathcal{P}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) = \mathcal{D}_z H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) - \mathcal{D}_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) \\ \varepsilon \mathcal{D}_t E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) + \sigma \mathcal{P}_t E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_x H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) - \mathcal{D}_y H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Es de destacar que los operadores discretos actúan sobre cada componente en nudos que no pertenecen a su dominio de definición, pero el resultado de esta operación coloca a cada componente en su correspondiente dominio. Por otra parte, el uso del operador \mathcal{P}_t es necesario para que las componentes del campo eléctrico no derivadas temporalmente se sitúen en los instantes en los cuales están definidas.

De (2.11) obtenemos finalmente el esquema de Yee expresado algebraicamente

$$\left\{ \begin{array}{l}
 H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \\
 + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \\
 \\
 H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) + \\
 + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right] \\
 \\
 H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) + \\
 + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right] \\
 \\
 E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) = C_a E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) + \\
 + C_b \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right] \\
 \\
 E_y^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k) = C_a E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + \\
 + C_b \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right] \\
 \\
 E_z^{n+1}(i, j, k+\frac{1}{2}) = C_a E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2}) + \\
 + C_b \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right]
 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

siendo

$$C_a \equiv \frac{2\varepsilon - \sigma\Delta t}{2\varepsilon + \sigma\Delta t} \quad , \quad C_b \equiv \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma\Delta t} \quad (2.13)$$

Obsérvese que la sustitución del operador analítico $\frac{\partial}{\partial t}$ por el operador discreto \mathcal{D}_t da como resultado un esquema numérico que permite obtener los valores del campo electromagnético en un instante dado y en todos los nudos de la red en función de los que tuvo dicho campo en los instantes inmediatamente anteriores. Así pues, partiendo de unas condiciones iniciales el esquema permite obtener la evolución temporal en el espacio solución.

Por ultimo, señalaremos que el esquema de Yee expresado en forma algebraica resulta de gran utilidad como punto de partida para la implementación computacional, mientras que la forma operacional es más conveniente para el tratamiento teórico general.

Interpretación integral. Hemos obtenido el esquema de Yee partiendo de las ecuaciones rotacionales de Maxwell, esto es, de la ley de Faraday y Ampère-Maxwell en forma diferencial. En este apartado mostraremos como obtener estos mismos resultados usando las expresiones integrales de estas leyes

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu \vec{H} \cdot d\vec{S} \quad \text{Ley de Faraday} \quad (2.14a)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell} \quad (2.14b)$$

En concreto, las ecuaciones del esquema para las componentes del campo \vec{H} se obtienen de la ley de Faraday y las del campo \vec{E} de la ley de Ampère-Maxwell.

Como se ha puesto de manifiesto, el campo electromagnético discreto se define espacialmente de tal forma que cada componente del vector \vec{E} está rodeada por cuatro componentes de \vec{H} y cada componente de \vec{H} por cuatro componentes de \vec{E} , lo que hace muy sencilla la interpretación integral. En efecto, para ilustrar el proceso de integración numérica vamos a obtener la ecuación del esquema para la componente E_x .

Partimos de la ley de Ampère-Maxwell aproximada temporalmente

$$\oint_C \vec{H}^{n+\frac{1}{2}} \cdot d\vec{l} \simeq \mathcal{P}_t \int_S \sigma \vec{E}^{n+\frac{1}{2}} \cdot d\vec{S} + \mathcal{D}_t \int_S \epsilon \vec{E}^{n+\frac{1}{2}} \cdot d\vec{S} \quad (2.15)$$

Evaluemos la circulación del vector \vec{H} a lo largo de la curva C que se muestra en la Figura 2.4, para ello se supone que las componentes H_y y H_z son constantes en cada uno de los lados del cuadrado definido por la curva C . Bajo esta suposición se tiene

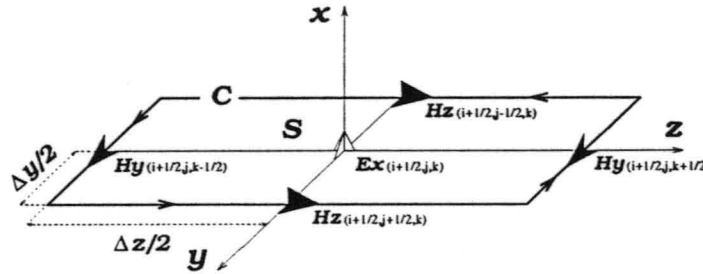


Figura 2.4: Contorno de integración para determinar la componente E_x del esquema de Yee haciendo uso de la ley integral de Ampère-Maxwell.

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{H}^{n+\frac{1}{2}} \cdot d\vec{l} &= \left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k) \right] \Delta z - \\ &\quad - \left[H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}) \right] \Delta y \end{aligned} \quad (2.16)$$

Haciendo uso del lenguaje operacional esta expresión se puede escribir de forma más compacta como

$$\oint_C \vec{H}^{n+\frac{1}{2}} \cdot d\vec{l} = \left[\mathcal{D}_y H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - \mathcal{D}_z H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \right] \Delta y \Delta z \quad (2.17)$$

Ahora para evaluar el flujo del vector \vec{E} a través de la superficie S definida por la curva C se supone que la componente E_x es constante en S , obteniendo

$$\begin{aligned} \int_S \sigma \vec{E}^{n+\frac{1}{2}} \cdot d\vec{S} &= \sigma E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \Delta y \Delta z \\ \int_S \epsilon \vec{E}^{n+\frac{1}{2}} \cdot d\vec{S} &= \epsilon E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.18)$$

Si en (2.15) se introducen los resultados (2.17) y (2.18) se obtiene finalmente

$$\varepsilon \mathcal{D}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + \sigma \mathcal{P}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) = \mathcal{D}_y H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - \mathcal{D}_z H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k)$$

tal y como queríamos demostrar.

Simulación de interfases. El método de Yee admite la posibilidad de poder tratar de forma simple medios inhomogéneos elementales, esto es, medios constituidos por medios homogéneos con variaciones a saltos de los parámetros constitutivos, y suponiendo que las superficies de separación no poseen cargas o corrientes superficiales.

Para que el esquema de Yee simule adecuadamente una transición abrupta entre dos medios homogéneos analíticos, es necesario modificar sus ecuaciones en los nudos próximos a la interfase, lo que puede conseguirse fácilmente haciendo uso de la interpretación integral. En efecto, considérese la situación mostrada en la Figura 2.5, en donde puede observarse una interfase simulada que separa dos medios homogéneos distintos, de parámetros $(\mu_1, \varepsilon_1, \sigma_1)$ y $(\mu_2, \varepsilon_2, \sigma_2)$. La interfase, perpendicular al eje z , no coincide con nudos de la red, encontrándose a una distancia d del nudo $k = k_o$.

En este caso, las ecuaciones de Yee para las componentes H_x y E_z no necesitan ser modificadas ya que los campos que rodean a estas componentes y a partir de los cuales ellas se obtienen se encuentran en el mismo medio. Esto no ocurre con las componentes H_x , H_y , E_x y E_y cuyas ecuaciones trataremos a continuación.

Ecuaciones modificadas para las componentes H_x y H_y . Partimos de la ley de Faraday

$$\oint_C \vec{E}^n \cdot d\vec{l} \simeq - \mathcal{D}_t \int_S \mu \vec{H}^n \cdot d\vec{S}$$

aplicada a la curva C mostrada en la Figura 2.6, (a) para la componente H_x y (b) para la componente H_y . Obsérvese que en ambos casos la componente E_z es normal a la interfase y en consecuencia analíticamente discontinua en ella. Para tener en cuenta la magnitud de esta discontinuidad se simula la interfase abrupta tomamdo

$$E_z(z) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_z(k_o + \frac{1}{2}) & k_o \Delta z \leq z < k_o \Delta z + d \\ E_z(k_o + \frac{1}{2}) & k_o \Delta z + d \leq z \leq (k_o + 1) \Delta z \end{cases} \quad (2.19)$$

Teniendo esto en cuenta, y recordando la interpretación integral, obtenemos las siguientes ecuaciones modificadas para H_x y H_y

$$\mu_{ef} \mathcal{D}_t H_x^n(i, j + \frac{1}{2}, k_o + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_z E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k_o + \frac{1}{2}) - C_1 \mathcal{D}_y E_z^n(i, j + \frac{1}{2}, k_o + \frac{1}{2}) \quad (2.20a)$$

$$\mu_{ef} \mathcal{D}_t H_y^n(i + \frac{1}{2}, j, k_o + \frac{1}{2}) = C_1 \mathcal{D}_x E_z^n(i + \frac{1}{2}, j, k_o + \frac{1}{2}) - \mathcal{D}_z E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k_o + \frac{1}{2}) \quad (2.20b)$$

en donde se ha definido

$$\begin{aligned} \mu_{ef} &\equiv \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2) \frac{d}{\Delta z} \\ C_1 &\equiv 1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \frac{d}{\Delta z} \end{aligned} \quad (2.21)$$

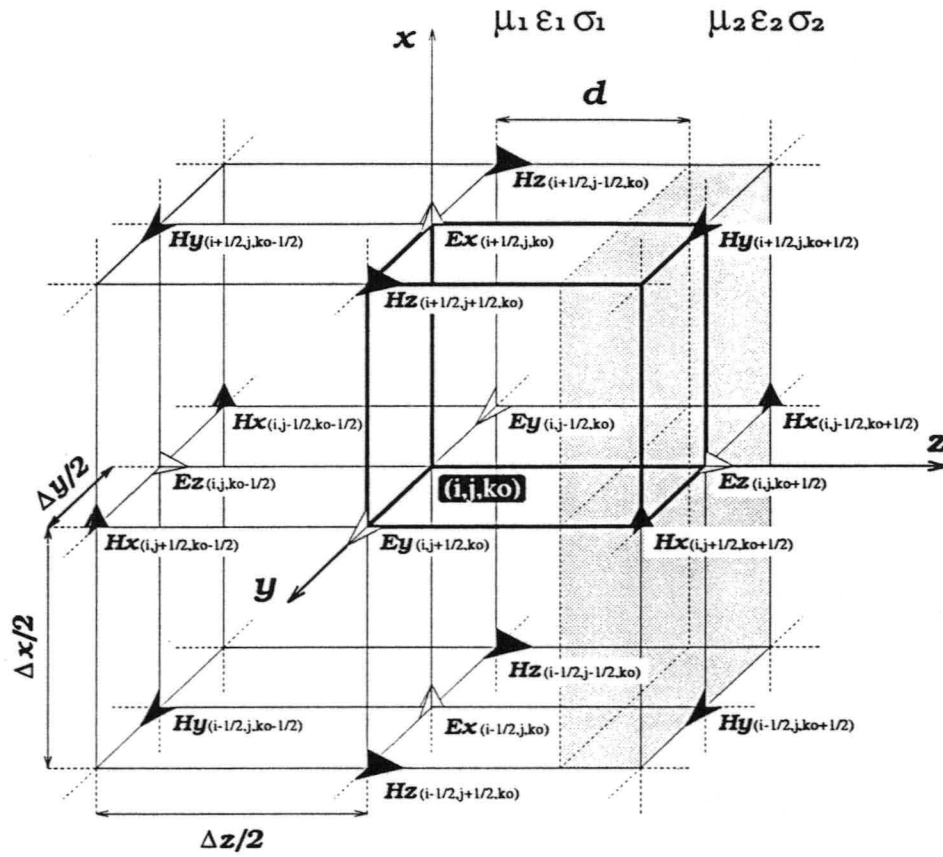


Figura 2.5:

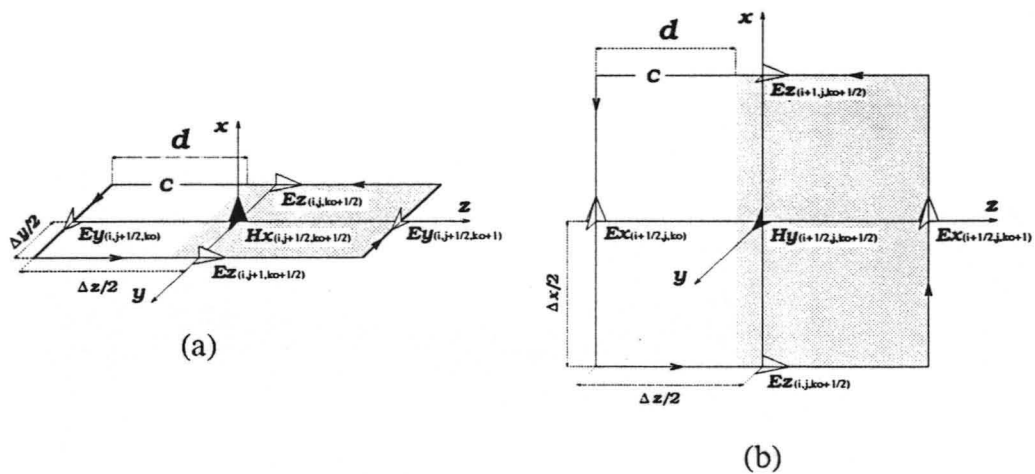


Figura 2.6:

Ecuaciones modificadas para las componentes E_x y E_y . En este caso se parte de la ley de Ampère-Maxwell

$$\oint_C \vec{H}^{n+\frac{1}{2}} \cdot d\vec{l} \simeq \mathcal{P}_t \int_S \sigma \vec{E}^{n+\frac{1}{2}} \cdot d\vec{S} + \mathcal{D}_t \int_S \varepsilon \vec{E}^{n+\frac{1}{2}} \cdot d\vec{S} \quad (2.22)$$

aplicada a la curva C mostrada en la Figura 2.7, (a) para la componente E_x y (b) para la componente E_y . Ahora la componente H_z es normal a la superficie de discontinuidad y la magnitud de esta discontinuidad se considera tomando

$$H_z(z) = \begin{cases} H_z(k_0) & (k_0 - \frac{1}{2})\Delta z \leq z \leq k_0\Delta z + d \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} H_z(k_0) & k_0\Delta z + d < z \leq (k_0 + \frac{1}{2})\Delta z \end{cases} \quad (2.23)$$

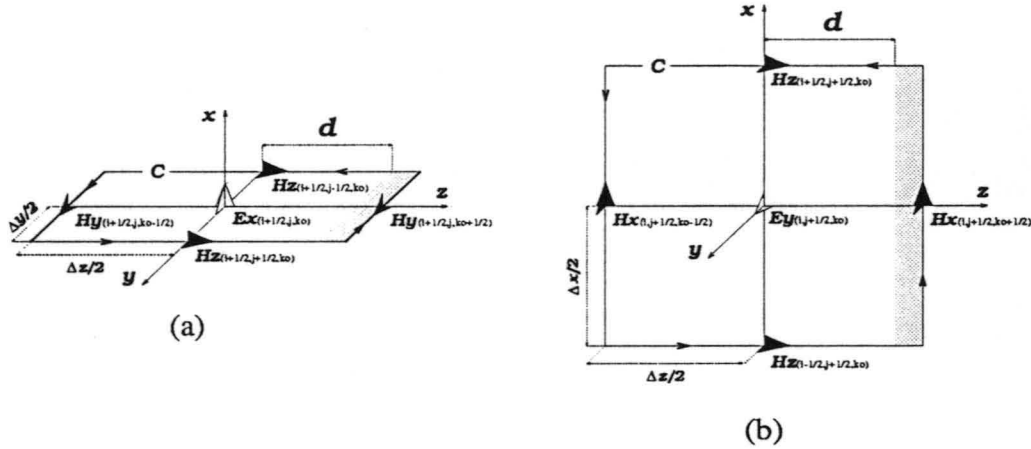


Figura 2.7:

Procediendo de forma similar al caso anterior se obtienen las siguientes ecuaciones modificadas para las componentes E_x y E_y

$$\varepsilon_{ef} \mathcal{D}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k_0) + \sigma_{ef} \mathcal{P}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k_0) = C_2 \mathcal{D}_y H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k_0) - \mathcal{D}_z H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k_0) \quad (2.24a)$$

$$\varepsilon_{ef} \mathcal{D}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k_0) + \sigma_{ef} \mathcal{P}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k_0) = \mathcal{D}_z H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k_0) - C_2 \mathcal{D}_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k_0) \quad (2.24b)$$

con

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ef} &\equiv \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{d}{\Delta z} \\ \sigma_{ef} &\equiv \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{d}{\Delta z} \\ C_2 &\equiv \frac{1}{\mu_2} \left[\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + (\mu_2 - \mu_1) \frac{d}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Caso bidimensional. Los problemas bidimensionales tienen la ventaja de que las seis ecuaciones del rotacional se desacoplan en dos sistemas independientes. Para problemas bidimensionales en el plano xz ($\frac{\partial}{\partial y}=0$) estos sistemas, que llamaremos TE_y (\vec{E} tiene solamente componente y) y TM_y (\vec{H} tiene solamente componente y), están definidos por las siguientes ecuaciones discretas

$$TE_y \begin{cases} \mu \mathcal{D}_t H_x^n(i, k + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_z E_y^n(i, k + \frac{1}{2}) \\ \mu \mathcal{D}_t H_z^n(i + \frac{1}{2}, k) = -\mathcal{D}_x E_y^n(i + \frac{1}{2}, k) \\ \varepsilon \mathcal{D}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + \sigma \mathcal{P}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, k) = \mathcal{D}_z H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) - \mathcal{D}_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, k) \end{cases} \quad (2.26a)$$

$$TM_y \begin{cases} \mu \mathcal{D}_t H_y^n(i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_x E_z^n(i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \mathcal{D}_z E_x^n(i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \\ \varepsilon \mathcal{D}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k) + \sigma \mathcal{P}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k) = -\mathcal{D}_z H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k) \\ \varepsilon \mathcal{D}_t E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, k + \frac{1}{2}) + \sigma \mathcal{P}_t E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, k + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_x H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, k + \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (2.26b)$$

Para poder considerar la posibilidad de una interfase Figura 2.8, estas ecuaciones han de ser complementadas con

$$TE_y \begin{cases} \mu_{ef} \mathcal{D}_t H_x^n(i, k_o + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_z E_y^n(i, k_o + \frac{1}{2}) \\ \varepsilon_{ef} \mathcal{D}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) + \sigma_{ef} \mathcal{P}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) = \mathcal{D}_z H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) - C_2 \mathcal{D}_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) \end{cases} \quad (2.27a)$$

$$TM_y \begin{cases} \mu_{ef} \mathcal{D}_t H_y^n(i + \frac{1}{2}, k_o + \frac{1}{2}) = C_1 \mathcal{D}_x E_z^n(i + \frac{1}{2}, k_o + \frac{1}{2}) - \mathcal{D}_z E_x^n(i + \frac{1}{2}, k_o + \frac{1}{2}) \\ \varepsilon_{ef} \mathcal{D}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k_o) + \sigma_{ef} \mathcal{P}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k_o) = -\mathcal{D}_z H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k_o) \end{cases} \quad (2.27b)$$

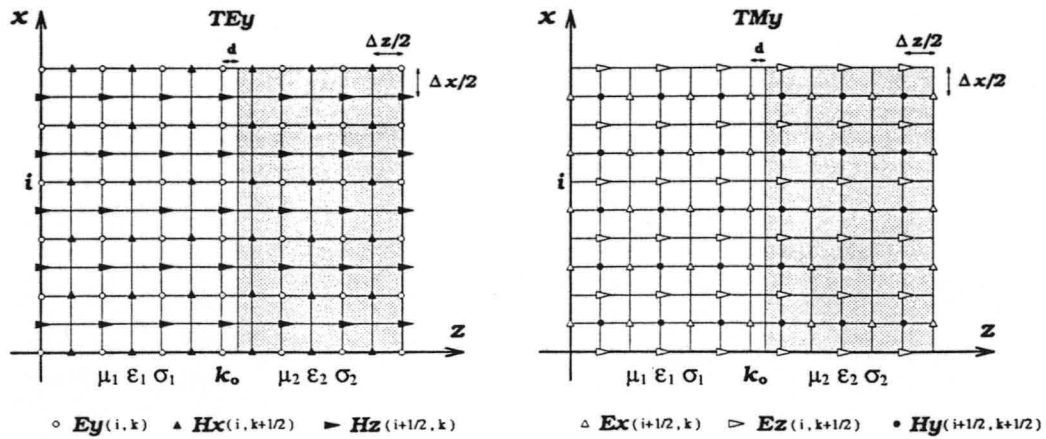


Figura 2.8:

La eliminación de una variable permite describir gráficamente el esquema de propagación tal y como muestra la Figura 2.9, donde se ha tomado como ejemplo la polarización TE_y . Se

supone que para $t \leq n\Delta t$ las componentes H_x , H_z y E_y son conocidas en sus correspondientes dominios de definición, ahora podemos calcular el campo \vec{H} en el instante $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ y en cualquier nudo espacial a partir de los valores conocidos de este campo y del campo \vec{E} en los instantes inmediatamente anteriores. Después de esto, se calcula el campo \vec{E} en el instante $t = (n + 1)\Delta t$ y se repite el proceso. De esta forma, partiendo de unas condiciones iniciales, el esquema permite obtener la evolución temporal.

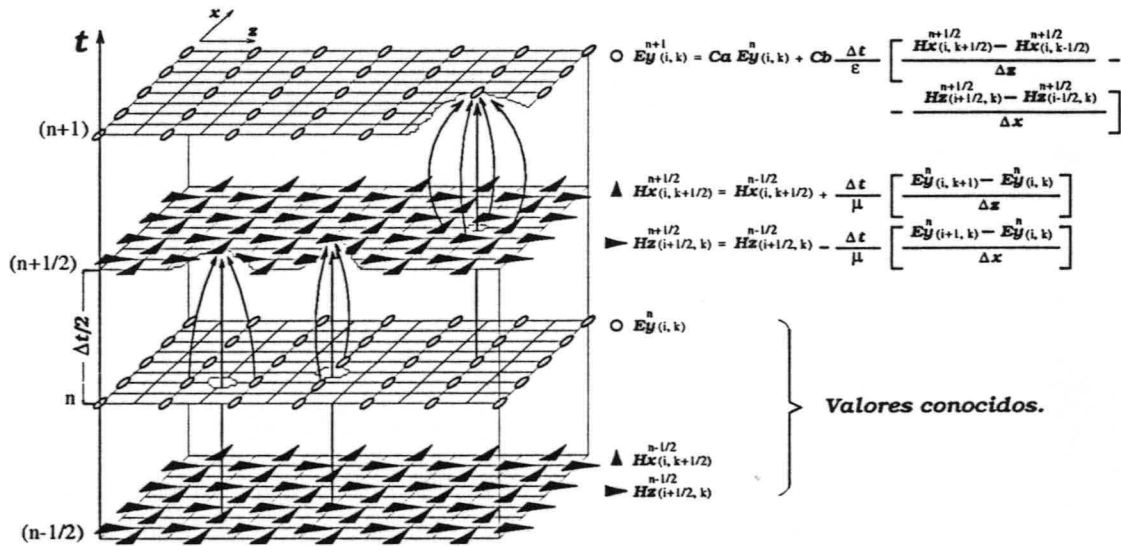


Figura 2.9: Red espacio-temporal de Yee. Polarización TE_y .

2.4 Medios anisótropos. El método de Dos Nudos

En los medios anisótropos los vectores \vec{D} y \vec{E} , por un lado, y los vectores \vec{B} y \vec{H} , por otro, a diferencia de lo que ocurre en los medios isótropos, no tienen la misma dirección, y están ligados por las relaciones tensoriales

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \tilde{\epsilon} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \tilde{\mu} \vec{H}(\vec{r}, t)$$

donde $\tilde{\epsilon}$ y $\tilde{\mu}$ son tensores de segundo orden.

De forma similar, la densidad de corriente \vec{J} y el campo eléctrico \vec{E} están relacionados por el tensor de conductividad $\tilde{\sigma}$. Por simplicidad se tomarán medios no conductores, $\tilde{\sigma} = 0$.

Para ilustrar la aplicación del método FDTD a medios anisótropos, se supondrá que dicha anisotropía es sólo dieléctrica, ya que las técnicas y resultados obtenidos son igualmente aplicables para el tensor $\tilde{\mu}$. También supondremos que el tensor dieléctrico $\tilde{\epsilon}$ es simétrico³

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

³Por ejemplo, cuando el medio se encuentra sometido a un campo magnético exterior constante \vec{H} , el tensor $\tilde{\epsilon}$ deja de ser simétrico, efecto que aquí no será considerado.

y siendo constantes reales todas sus componentes.

En este caso las ecuaciones (2.1) toman la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\tilde{R}\vec{E} \\ \tilde{\epsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \tilde{R}\vec{H} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \epsilon_{xx} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \epsilon_{xy} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \epsilon_{xz} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \epsilon_{yy} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \epsilon_{yz} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \epsilon_{xz} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \epsilon_{yz} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \epsilon_{zz} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2.29)$$

La propiedad que caracteriza la simetría del tensor $\tilde{\epsilon}$ consiste en que siempre es posible encontrar tres ejes ortogonales, llamados ejes principales que denotaremos como $x'y'z'$, característicos de cada material, en los cuales el tensor dieléctrico tiene la forma diagonal

$$\tilde{\epsilon}' = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Las constantes ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z son llamadas constantes dieléctricas principales y se suponen conocidas para un medio dado. En relación con éstas, los medios anisótropos se dividen en dos clases: biáxicos si $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ y uniáxicos si dos constantes dieléctricas principales son iguales, por ejemplo $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Los medios isotrópicos pueden estudiarse como casos particulares de éstos, en los cuales $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z \equiv \epsilon$.

En problemas de interés práctico, no siempre es posible hacer coincidir el sistema de referencia con las direcciones de los ejes principales del tensor dieléctrico. Por esta razón se considera la posibilidad de poder tomar un sistema de referencia xyz con una rotación arbitraria respecto del sistema $x'y'z'$. Obtengamos las ecuaciones de transformación que ligán ambos sistemas, cuyos orígenes de coordenadas se suponen comunes.

Sean $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ y $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ las bases ortonormales que definen los sistemas $x'y'z'$ y xyz , respectivamente. Llamaremos (a_x, a_y, a_z) , (b_x, b_y, b_z) y (c_x, c_y, c_z) a las componentes de \hat{x}' , \hat{y}' y \hat{z}' en el sistema rotado xyz , esto es

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \\ \hat{y}' &= b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z} \\ \hat{z}' &= c_x \hat{x} + c_y \hat{y} + c_z \hat{z} \end{aligned} \quad (2.31)$$

La matriz de giro \tilde{G} será pues

$$\tilde{G} \equiv \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

de tal modo que si \vec{V} es un vector genérico del sistema xyz y \vec{V}' es este vector en $x'y'z'$, la transformación de coordenadas se expresa como

$$\begin{aligned}\vec{V}' &= \tilde{G}\vec{V} \\ \vec{V} &= \tilde{G}^t\vec{V}'\end{aligned}\quad (2.33)$$

donde \tilde{G}^t denota la matriz transpuesta de \tilde{G} que coincide con su inversa por ser la matriz de giro ortogonal.

De forma análoga, la ley de transformación para tensores de segundo orden será

$$\begin{aligned}\tilde{T}' &= \tilde{G}\tilde{T}\tilde{G}^t \\ \tilde{T} &= \tilde{G}^t\tilde{T}'\tilde{G}\end{aligned}\quad (2.34)$$

Por lo tanto, las componentes del tensor $\tilde{\epsilon}$ en un sistema de ejes rotado xyz se obtienen mediante la transformación de coordenadas

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{G}^t\tilde{\epsilon}'\tilde{G}\quad (2.35)$$

y al realizar operaciones resulta directamente, teniendo en cuenta la matriz de giro

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_x a_i a_j + \epsilon_y b_i b_j + \epsilon_z c_i c_j\quad (2.36)$$

Al ser el determinante de un tensor un invariante

$$|\tilde{\epsilon}| = |\tilde{\epsilon}'| = \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z$$

quedando asegurada la inversibilidad de este tensor para dieléctricos ordinarios. Aún más, el tensor inverso $(\tilde{\epsilon})^{-1}$ puede obtenerse directamente de (2.35), en efecto

$$(\tilde{\epsilon})^{-1} = (\tilde{G}^t\tilde{\epsilon}'\tilde{G})^{-1} = \tilde{G}^t(\tilde{\epsilon}')^{-1}\tilde{G} \quad \text{y dado que} \quad (\tilde{\epsilon}')^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_z} \end{pmatrix}$$

resulta

$$(\tilde{\epsilon})^{-1} \equiv (\xi_{ij}) \quad \text{con} \quad \xi_{ij} = \frac{1}{\epsilon_x} a_i a_j + \frac{1}{\epsilon_y} b_i b_j + \frac{1}{\epsilon_z} c_i c_j\quad (2.37)$$

Para esta clase de medios el método de Yee sigue siendo adecuado en aquellos problemas particulares donde el tensor dieléctrico se presenta en forma diagonal, las ecuaciones rotacionales son idénticas al caso isótropo, sigue existiendo una sola constante dieléctrica en cada ecuación escalar, aunque son diferentes de una a otra. La dificultad surge en el caso general, cuando no es posible tomar el tensor diagonal, ya que los elementos no diagonales implican más de una componente del campo en la parte temporal de las ecuaciones escalares, y ahora la definición espacial del método de Yee deja de ser adecuada.

Para solventar este problema se proponen definiciones espaciales distintas de la original de Yee, dadas en métodos como el de Dos Nudo que pasaremos a describir.

Siguiendo la metodología anterior, presentaremos el método de Dos Nudos como sigue: la red espacial, temporal y espacio-temporal son dadas en la forma

$$\begin{aligned} A_{2N} &\equiv A_7 \cup A_8 \subset A \\ B_{2N} &\equiv B_1 \cup B_2 = B \\ M_{2N} &\equiv [A_7 \times B_1] \cup [A_8 \times B_2] \subset M \end{aligned} \quad (2.38)$$

Las componentes discretas de \vec{E} y \vec{H} son definidas sobre la red M_{2N} como

$$\begin{aligned} E_u : A_7 \times B_1 &\longrightarrow \mathbf{R} & H_u : A_8 \times B_2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (i,j,k,n) &\longrightarrow E_u^n(i,j,k) & (i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}) &\longrightarrow H_u^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Así, los campos quedan definidos sobre la red temporal de forma idéntica al método de Yee, las componentes eléctricas se definen en instantes n y las magnéticas en $n + \frac{1}{2}$. Sin embargo, la definición espacial es distinta, en el método de Yee cada componente era definida en nudos de distinto tipo (E_x en A_1 , E_y en A_2 , etc), ahora todas las componentes de \vec{E} son definidas en A_7 , esto es, en nudos del tipo (i,j,k) y todas las componentes de \vec{H} en A_8 , esto es, en nudos del tipo $(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})$.

En el método de Yee para medios isótropos, las componentes de \vec{E} y \vec{H} se definen espacialmente de tal forma que las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial u}$ ($u = x, y, z$) presentes en las ecuaciones rotacionales, pueden ser aproximadas haciendo uso únicamente de los operadores \mathcal{D}_u . En este sentido se dice que el esquema de Yee es óptimo para dichos medios. Por el contrario, la distribución espacial del método de Dos Nudos, exige de la definición de nuevos operadores compatibles con tal distribución. Dichos operadores, que denotaremos con un acento circunflejo, son definidos como los siguientes productos entre operadores promedios y diferencias centradas.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_x &\equiv \mathcal{P}_y \circ \mathcal{P}_z \circ \mathcal{D}_x \\ \hat{\mathcal{D}}_y &\equiv \mathcal{P}_z \circ \mathcal{P}_x \circ \mathcal{D}_y \\ \hat{\mathcal{D}}_z &\equiv \mathcal{P}_y \circ \mathcal{P}_x \circ \mathcal{D}_z \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si bien, cada operador introduce un error para cada variable, se sigue obteniendo una aproximación de segundo orden.

Por ejemplo, la actuación de uno de estos operadores, digamos $\hat{\mathcal{D}}_x$, sobre una función discreta F daría como resultado

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_x F^{mt}(m_x, m_y, m_z) &= \frac{1}{4\Delta x} [F^{mt}(m_x+\frac{1}{2}, m_y+\frac{1}{2}, m_z+\frac{1}{2}) + F^{mt}(m_x+\frac{1}{2}, m_y-\frac{1}{2}, m_z+\frac{1}{2}) + \\ &+ F^{mt}(m_x+\frac{1}{2}, m_y+\frac{1}{2}, m_z-\frac{1}{2}) + F^{mt}(m_x+\frac{1}{2}, m_y-\frac{1}{2}, m_z-\frac{1}{2}) - \\ &- F^{mt}(m_x-\frac{1}{2}, m_y+\frac{1}{2}, m_z+\frac{1}{2}) - F^{mt}(m_x-\frac{1}{2}, m_y-\frac{1}{2}, m_z+\frac{1}{2}) - \\ &- F^{mt}(m_x-\frac{1}{2}, m_y+\frac{1}{2}, m_z-\frac{1}{2}) - F^{mt}(m_x-\frac{1}{2}, m_y-\frac{1}{2}, m_z-\frac{1}{2})] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Haciendo uso de las definiciones anteriormente, construimos el operador matricial $\tilde{\mathcal{D}}$ como

$$\tilde{\mathcal{D}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\mathcal{D}}_z & \hat{\mathcal{D}}_y \\ \hat{\mathcal{D}}_z & 0 & -\hat{\mathcal{D}}_x \\ -\hat{\mathcal{D}}_y & \hat{\mathcal{D}}_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Por otra parte, dado que todas las componentes de un campo $\vec{\Psi}$ (\vec{E} o \vec{H}) están definidas en nudos del mismo tipo, representaremos éste en la forma de un vector discreto

$$\vec{\Psi}^{m_t}_{(m_x, m_y, m_z)} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_x^{m_t}_{(m_x, m_y, m_z)} \\ \Psi_y^{m_t}_{(m_x, m_y, m_z)} \\ \Psi_z^{m_t}_{(m_x, m_y, m_z)} \end{pmatrix}$$

Ahora las ecuaciones rotacionales de Maxwell (2.29) pueden ser aproximadas, con una exactitud de segundo orden en el espacio y en el tiempo, sin más que sustituir \vec{R} por \vec{D} , $\frac{\partial}{\partial t}$ por \mathcal{D}_t y los campos continuos por sus análogos discretos. Cuando esto se hace se obtiene el esquema de Dos Nudos expresado en forma operacional bajo notación matricial

$$\begin{cases} \mu \mathcal{D}_t \vec{H}^n_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} = -\vec{D} \vec{E}^n_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} \\ \tilde{\varepsilon} \mathcal{D}_t \vec{E}^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} = \vec{D} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} \end{cases} \quad (2.43)$$

Para obtener la forma explícita de las ecuaciones de avance temporal es necesario despejar los operadores discretos de derivación temporal

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t \vec{H}^n_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} = -\frac{1}{\mu} \vec{D} \vec{E}^n_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} \\ \mathcal{D}_t \vec{E}^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} = (\tilde{\varepsilon})^{-1} \vec{D} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} \end{cases} \quad (2.44)$$

donde las componentes del tensor $(\tilde{\varepsilon})^{-1}$, para un sistema de referencia dado, pueden obtenerse de (2.37).

De las ecuaciones anteriores se sigue

$$\begin{cases} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} = \vec{H}^{n-\frac{1}{2}}_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} - \frac{\Delta t}{\mu} \vec{D} \vec{E}^n_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} \\ \vec{E}^{n+1}_{(i, j, k)} = \vec{E}^{n-1}_{(i, j, k)} + \Delta t (\tilde{\varepsilon})^{-1} \vec{D} \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} \end{cases} \quad (2.45)$$

Hemos evitado escribir la forma completa de las ecuaciones algebraicas del esquema, debido a su gran extensión. Por ejemplo, para la componente u ($u = x, y, z$) del campo \vec{E} , se tendría

$$\begin{aligned} E_u^{n+1}_{(i, j, k)} = E_u^{n-1}_{(i, j, k)} + \Delta t \left[\xi_{ux} \left(\hat{D}_y H_z^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} - \hat{D}_z H_y^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} \right) + \right. \\ \left. + \xi_{uy} \left(\hat{D}_z H_x^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} - \hat{D}_x H_z^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} \right) + \right. \\ \left. + \xi_{uz} \left(\hat{D}_x H_y^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} - \hat{D}_y H_x^{n+\frac{1}{2}}_{(i, j, k)} \right) \right] \end{aligned}$$

donde la actuación del operador \hat{D}_u sobre cada componente magnética, daría como resultado expresiones del tipo (2.41).

Capítulo 3

Estudio numérico en medios isótropos

3.1 *Introducción*

El método de Yee ha proporcionado un sistema de ecuaciones algebraicas en diferencias finitas, el esquema de Yee, cuya solución cerrada deseamos obtener en unos cuantos casos típicos.

Comenzaremos con el caso, relativamente sencillo, de un medio numérico homogéneo indefinido. Ensayaremos una solución discreta del tipo onda plana monocromática y demostraremos que la conocida relación de dispersión numérica y el llamado criterio de estabilidad son condiciones necesarias pero no suficientes para que dicha función satisfaga el esquema presentado. La condición necesaria y suficiente es obtenida mediante la investigación de la relación de estructura de la onda discreta en el medio numérico, y se pondrán de manifiesto las analogías y diferencias en relación con la solución analítica.

Los resultados obtenidos permitirán explicar los fenómenos numéricos de reflexión y refracción. Para ello se considerarán dos medios semiinfinitos con distintos valores de sus parámetros constitutivos, separados por una interfase simulada, y se obtendrán las leyes y coeficientes numéricos de reflexión y refracción.

La última parte concluye con un estudio del fenómeno de propagación guiada, resolviendo el esquema de Yee en medios numéricos que simularán guías metálicas y dieléctricas. La relación de dispersión y estructura de los modos discretos, obtenidas como resultado de nuestra investigación, mostrará una vez más la identidad propia del medio numérico.

Los resultados obtenidos facilitarán el entendimiento de procesos más complicados que operan en medios numéricos. Esta es también razón por la cual reviste interés el estudio aquí realizado.

3.2 *Propagación de Ondas Discretas (I). Ondas planas en un medio numérico homogéneo infinito*

Planteamiento del problema. En esta sección iniciaremos nuestro estudio tratando

de encontrar una solución para el esquema de Yee en el caso elemental de un medio homogéneo indefinido. Ensayemos como solución una onda plana discreta, y encontraremos las condiciones necesarias y suficientes para que tal función satisfaga este esquema.

Iniciaremos nuestro estudio tratando con medios numéricos no conductores y después abordaremos el problema de la propagación cuando la conductividad es no nula.

3.2.1 Medios no conductores

Una onda plana monocromática discreta, de constante de propagación $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, de frecuencia angular ω y propagándose en la dirección dada por el vector unitario \hat{n} de componentes n_x , n_y y n_z será de la forma

$$\Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = \Psi_o e^{-j\beta(n_x m_x \Delta x + n_y m_y \Delta y + n_z m_z \Delta z)} e^{j\omega m_t \Delta t} \quad (3.1)$$

donde Ψ representa una componente cartesiana del campo discreto.

Puede observarse que (4.1) es autofunción de los operadores \mathcal{D}_u ($u = x, y, z, t$) con autovalores

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = a_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} \\ a_u \equiv \frac{e^{-j\beta n_u \frac{\Delta u}{2}} - e^{j\beta n_u \frac{\Delta u}{2}}}{\Delta u} = -j2 \frac{\text{sen}(\beta n_u \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \quad (u = x, y, z) \\ a_t \equiv \frac{e^{j\omega \frac{\Delta t}{2}} - e^{-j\omega \frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} = j2 \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Teniendo esto en cuenta, la sustitución de la solución propuesta (4.1) en el sistema de ecuaciones (2.11) con $\sigma = 0$, permite escribir, en forma matricial y bajo notación de autovalores, el esquema de Yee para el campo discreto de una onda plana monocromática, como

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t \mu \vec{H}_o = -\tilde{a} \vec{E}_o \\ a_t \epsilon \vec{E}_o = \tilde{a} \vec{H}_o \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \tilde{a} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

o equivalentemente como

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_o = \frac{1}{a_t \mu} \tilde{a} \vec{E}_o \\ (a_t^2 \mu \epsilon \tilde{I} + \tilde{a}^2) \vec{E}_o = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

siendo \tilde{I} la matriz 3×3 identidad.

La condición de compatibilidad de este sistema exige que se anule el determinante de la matriz de los coeficientes de las tres últimas ecuaciones

$$|a_t^2 \mu \epsilon \tilde{I} + \tilde{a}^2| = 0 \quad (3.5)$$

esto es

$$\begin{vmatrix} a_t^2 \mu \varepsilon - a_y^2 - a_z^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_t^2 \mu \varepsilon - a_x^2 - a_z^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_t^2 \mu \varepsilon - a_x^2 - a_y^2 \end{vmatrix} = 0$$

Esta ecuación determina de forma implícita la *relación de dispersión numérica*, es decir, la dependencia funcional entre las cantidades reales ω , β y \hat{n} .

El cálculo de este determinante conduce a la siguiente ecuación

$$a_t^2 \mu \varepsilon = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad (3.6)$$

Sustituyendo a_u por su valor según (3.2), se obtiene la siguiente solución positiva

$$\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2}) = c \Delta t \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\beta n_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta n_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta n_z \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z^2}} \quad (3.7)$$

con $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$. Resolviendo para ω , esto es, tomando β y \hat{n} como variables independientes se obtiene finalmente

$$\omega(\beta, \hat{n}) = \frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(c \Delta t \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\beta n_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta n_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta n_z \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z^2}} \right) \quad (3.8)$$

Dados β y \hat{n} , esta función permite obtener el valor de ω suficiente para que el sistema (3.4) admita una solución no trivial. Ahora bien, dado que la función $\text{sen} x$ oscila entre -1 y 1 , es evidente que la ecuación anterior admite soluciones para $\omega \in \mathbf{R}^+$ si

$$0 < c \Delta t \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\beta n_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta n_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta n_z \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z^2}} \leq 1 \quad (3.9)$$

condición que se satisface para todo β y \hat{n} si

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \quad (3.10)$$

De acuerdo con el estudio tradicional, esta relación suele escribirse en la forma

$$\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2 \leq 1 \quad (3.11)$$

donde $\rho_u \equiv \frac{c \Delta t}{\Delta u}$ es el llamado número de Courant en la variable u . En particular, cuando $\Delta x = \Delta y = \Delta z \equiv \Delta$ resulta

$$\rho \equiv \frac{c \Delta t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (3.12)$$

que establece una cota superior para el número de Courant.

Así pues, una vez fijados los incrementos espaciales el incremento temporal se ha de calcular haciendo uso de este criterio, conocido con el nombre de *criterio de estabilidad*. La razón de esta denominación es la siguiente.

Sea

$$b \equiv c\Delta t \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\beta n_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta n_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta n_z \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z^2}}$$

y suponiendo que (3.9) no se satisface, siendo $b > 1$. En este caso (3.7)

$$\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2}) = b \quad (3.13)$$

no admite soluciones para valores de ω reales. Consideremos esta magnitud compleja $\omega = \omega' + j\omega''$, siendo en consecuencia¹

$$\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2}) = \text{sen}(\omega' \frac{\Delta t}{2}) \cosh(\omega'' \frac{\Delta t}{2}) + j \cos(\omega' \frac{\Delta t}{2}) \sinh(\omega'' \frac{\Delta t}{2}) \quad (3.14)$$

y la ecuación (3.13) quedaría como

$$\text{sen}(\omega' \frac{\Delta t}{2}) \cosh(\omega'' \frac{\Delta t}{2}) + j \cos(\omega' \frac{\Delta t}{2}) \sinh(\omega'' \frac{\Delta t}{2}) = b \quad (3.15)$$

Dado que b es real, esta ecuación es cierta si

$$\omega' = \frac{\pi}{\Delta t}, \quad \omega'' = \frac{2}{\Delta t} \cosh^{-1}(b) = \pm \frac{2}{\Delta t} \ln [b + \sqrt{b^2 - 1}]$$

y la solución que satisface el esquema para $b > 1$ toma la forma

$$\Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = \Psi_0 e^{\pm 2 \ln [b + \sqrt{b^2 - 1}] m_t} e^{-j\beta(n_x m_x \Delta x + n_y m_y \Delta y + n_z m_z \Delta z)} e^{j\pi m_t}$$

Por no tener realidad física este tipo de soluciones, la no satisfacción del criterio de Courant lleva, pues, a una falta de consistencia entre el problema numérico y el analítico.

Obsérvese que estas soluciones están frecuentemente centradas en la frecuencia de Nyquist $f = \frac{1}{2\Delta t}$, y su amplitud crece o decrece indefinidamente con el tiempo. Las soluciones crecientes acaban por invalidar los resultados numéricos obtenidos computacionalmente. En la Figura 3.1 se muestran cuatro instantes de tiempo distintos para un caso de propagación de un pulso gaussiano en un dominio unidimensional en el que se ha escogido un número de Courant menor que la unidad (0.975) y en el que se observa la aparición de una de estas soluciones crecientes

Es de hacer notar que este tipo de inestabilidades, centradas en la frecuencia de Nyquist, se presentan también en otro tipo de esquemas como el VCFDTD sin que la elección de un número de Courant adecuado acabe estabilizando el esquema. Conocido el tipo exacto de evolución de las inestabilidades, un posible método de eliminación de estas es el filtrado de las mismas. Por ejemplo, y para el caso anterior, es posible efectuar un filtrado temporal de la forma $\Psi^{n-1} = \frac{\Psi^{n-2} + 2\Psi^{n-1} + \Psi^n}{4}$ cuya función de transferencia en el dominio de la variable z es de la forma

$$f(z) = \frac{z^{-1} + 2z^0 + z^1}{4} \quad (3.16)$$

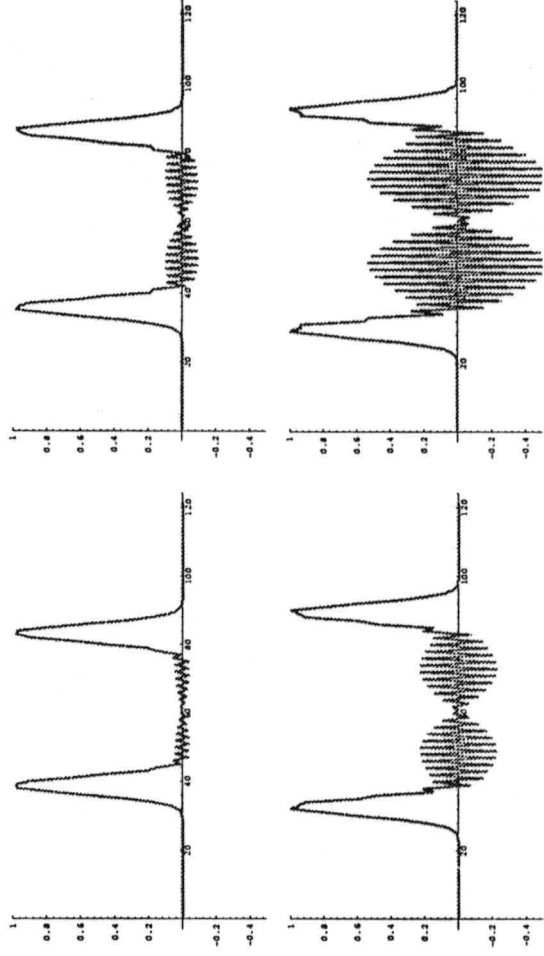


Figura 3.1: .

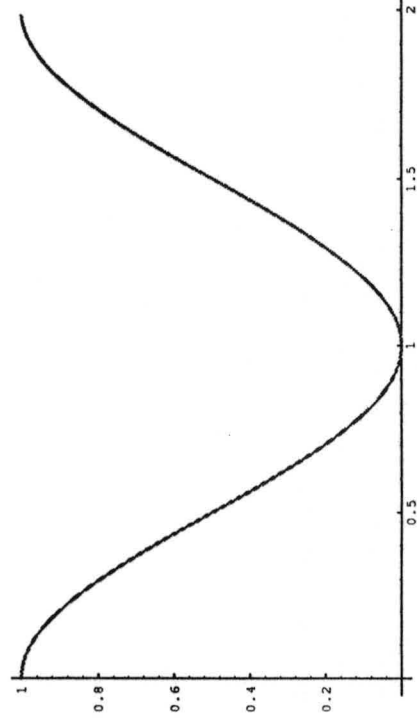


Figura 3.2: .

que sustituyendo z por $e^{j\omega}$ resulta ser en el dominio de la frecuencia un filtro paso baja de fase nula, y de función de transferencia de la forma mostrada en la Figura 3.2

Para el caso anterior con número de Courant 0.975 se consigue de este modo eliminar la inestabilidad, obteniendo en el dominio de la frecuencia la situación de la gráfica mostrada en la Figura 3.3.

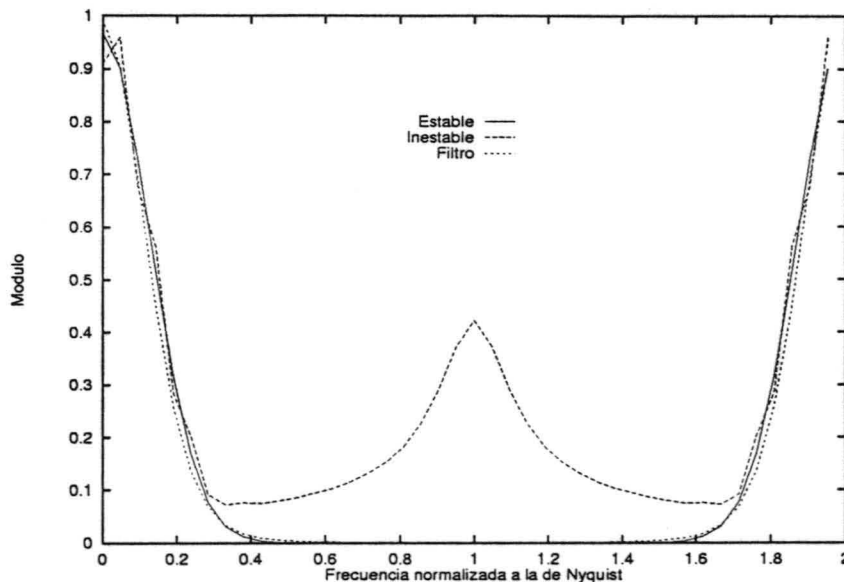


Figura 3.3: .

Asociada a la solución físicamente aceptable, una cantidad de interés es la *velocidad de fase numérica*, dada por el cociente entre la frecuencia angular y la constante de propagación

$$v(\beta, \hat{n}) = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(c \Delta t \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\beta n_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta n_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta n_z \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z^2}} \right)}{\beta} \quad (3.17)$$

Cuando los incrementos espacio-temporales tienden a cero ($\Delta u \rightarrow 0$, $u = x, y, z, t$) la ecuación de dispersión numérica (3.8) converge a la ecuación de dispersión analítica $\omega(\beta) = c\beta$. Para medios no dispersivos esta ecuación establece una relación lineal entre β y ω , como consecuencia, la velocidad de fase analítica ($v = \frac{\omega}{\beta} = c$) es una constante de valor c . Por el contrario, la ecuación de dispersión numérica establece una relación no lineal entre β y ω y también puede observarse que esta relación depende de la dirección de propagación. En consecuencia, puede decirse que la discretización de un medio analítico no dispersivo conduce a un medio numérico que además de dispersivo es anisótropo, la velocidad de fase numérica depende de la dirección de propagación.

El medio numérico definido por los incrementos Δx , Δy , Δz y Δt juega un papel fundamental en relación con la exactitud de la solución, ya que a medida que estos incrementos tienden a cero, la solución del problema numérico converge a la solución del problema analítico.

¹Para un ángulo z complejo: $\text{sen}(z) \equiv \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$

En lugar de los incrementos espaciales, se maneja la cantidad *resolución en la variable u* (R_u) definida como

$$R_u \equiv \frac{\lambda}{\Delta u} \quad (u = x, y, z) \quad (3.18)$$

Si una onda plana monocromática discreta de longitud de onda λ se propaga en la dirección u es evidente que R_u es igual al número de muestras espaciales tomadas por longitud de onda. Para una λ dada, una mayor resolución implica un menor Δu y por lo tanto una mayor precisión. Es usual, para problemas razonables, utilizar resoluciones entorno a 20, aunque esta elección depende del grado de exactitud con la que se quiera resolver el problema. El único inconveniente para conseguir una mayor precisión disminuyendo Δu es que al aumentar el número de celdas que componen la región de cálculo la solución del problema puede resultar inabordable para el ordenador disponible.

Si hacemos $\Delta t = 1/c\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}$, la función velocidad de fase (3.17) puede ser escrita en términos de las variables independientes R_x , R_y y R_z

$$v(R_u, \hat{n}) = c \frac{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}{\pi \cdot \arcsen \left(\sqrt{\frac{R_x^2 \text{sen}^2(\frac{\pi}{R_x} n_x) + R_y^2 \text{sen}^2(\frac{\pi}{R_y} n_y) + R_z^2 \text{sen}^2(\frac{\pi}{R_z} n_z)}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \right)} \quad (3.19)$$

Una idea de la anisotropía del medio numérico puede ser obtenida de la Figura 3.4, en donde hemos representado el diagrama polar² de la función $v(R, \hat{n})$ para distintos valores de $R \equiv R_x = R_y = R_z$. Por claridad se ha tomado el semiespacio $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ y el corte longitudinal (eje z) de esta superficie.

Relación de estructura en el medio numérico (condición necesaria y suficiente). Como ya se ha puesto de manifiesto, la relación de dispersión es condición necesaria pero no suficiente para que el esquema de Yee admita como solución una onda plana discreta. Para obtener la condición necesaria y suficiente, es necesario investigar en la relación de estructura de la onda en el medio numérico.

Si se sustituye (3.6) en (3.4) se encuentra un sistema de cuatro ecuaciones linealmente independientes con seis incógnitas

$$\begin{cases} H_{ox} = \frac{1}{a_t \mu} [a_z E_{oy} - a_y E_{oz}] \\ H_{oy} = \frac{1}{a_t \mu} [a_x E_{oz} - a_z E_{ox}] \\ H_{oz} = \frac{1}{a_t \mu} [a_y E_{ox} - a_x E_{oy}] \\ a_x E_{ox} + a_y E_{oy} + a_z E_{oz} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

²Véase Apéndice A

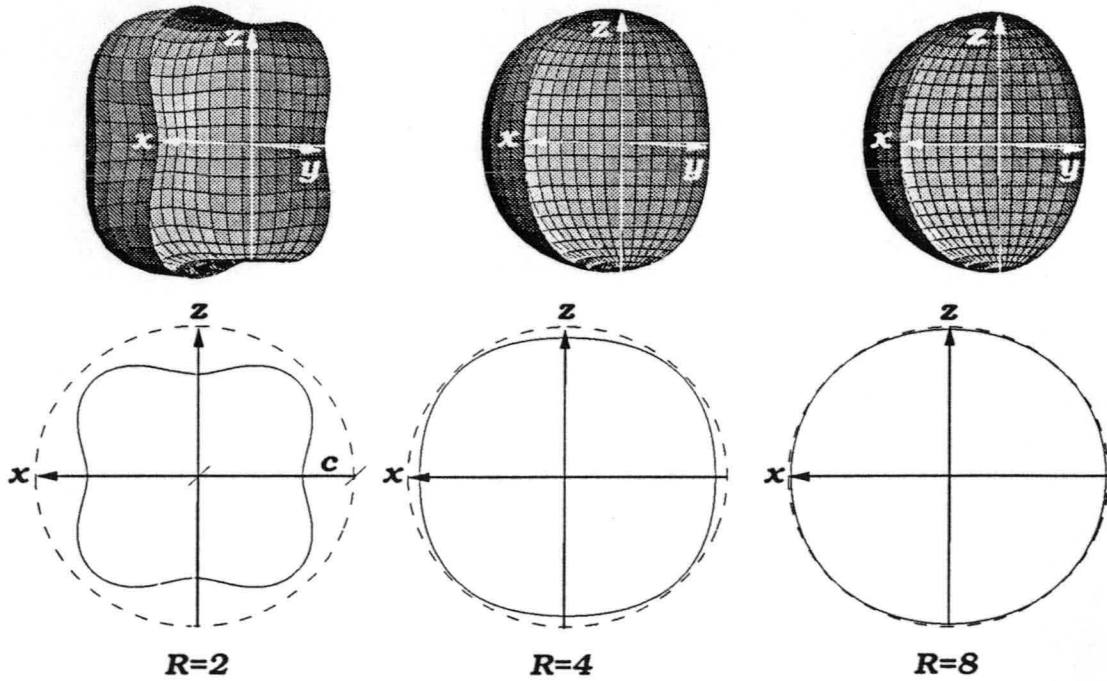


Figura 3.4: Diagrama polar de la velocidad de fase en el medio numérico.

esto es

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{ox} = \frac{\Delta t}{\mu \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \left[\frac{\text{sen}(\beta n_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} E_{oz} - \frac{\text{sen}(\beta n_z \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} E_{oy} \right] \\ H_{oy} = \frac{\Delta t}{\mu \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \left[\frac{\text{sen}(\beta n_z \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} E_{ox} - \frac{\text{sen}(\beta n_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} E_{oz} \right] \\ H_{oz} = \frac{\Delta t}{\mu \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \left[\frac{\text{sen}(\beta n_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} E_{oy} - \frac{\text{sen}(\beta n_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} E_{ox} \right] \end{array} \right. \quad (3.21)$$

$$\frac{\text{sen}(\beta n_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} E_{ox} + \frac{\text{sen}(\beta n_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} E_{oy} + \frac{\text{sen}(\beta n_z \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} E_{oz} = 0$$

Este sistema determina la relación de estructura de la onda plana en el medio numérico. Puesto que tenemos cuatro ecuaciones y seis incógnitas, dos de ellas se podrán elegir arbitrarias, quedando las restantes ligadas por estas ecuaciones.

La relación de estructura puede ser convenientemente escrita en la forma vectorial

$$\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_o = \frac{1}{\alpha_t \mu} \vec{\alpha} \wedge \vec{E}_o \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{E}_o = 0 \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \alpha_u \equiv \text{Im}(a_u) = 2 \frac{\text{sen}(\beta n_u \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \quad (3.22)$$

$$\alpha_t \equiv \text{Im}(a_t) = 2 \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t}$$

De su interpretación se deduce que el vector \vec{H}_o es perpendicular a $\vec{\alpha}$ y \vec{E}_o , y $\vec{\alpha}$ es perpendicular a \vec{E}_o . Por lo tanto, los tres vectores \vec{E}_o , \vec{H}_o y $\vec{\alpha}$ formarán un triángulo recto. Como en general la dirección del vector $\vec{\alpha}$ no coincide con la dirección de propagación, los vectores \vec{H}_o y \vec{E}_o pierden su perpendicularidad respecto de esta dirección.

También puede demostrarse fácilmente que las amplitudes numéricas siguen conservando la relación

$$\frac{|\vec{H}_o|}{|\vec{E}_o|} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

Por otra parte, de los resultados $\vec{\alpha} \cdot \vec{E}_o = 0$ y $\vec{\alpha} \cdot \vec{H}_o = 0$ se deducen las ecuaciones discretas

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x E_x^n(i,j,k) + \mathcal{D}_y E_y^n(i,j,k) + \mathcal{D}_z E_z^n(i,j,k) &= 0 \\ \mathcal{D}_x H_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathcal{D}_y H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathcal{D}_z H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

que son precisamente las ecuaciones de la divergencia $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ aproximadas mediante los operadores \mathcal{D}_u ($u = x, y, z$).

Caso bidimensional. Para usos ulteriores resultará conveniente tener presente las soluciones de los sistemas bidimensionales TE_y y TM_y , definidos en (2.26), en el caso de medios no conductores.

Para una solución del tipo

$$\Psi^{m_t(m_x, m_z)} = \Psi_o e^{-j\beta(n_x m_x \Delta x + n_z m_z \Delta z)} e^{j\omega m_t \Delta t} \quad (3.24)$$

se ha de satisfacer la igualdad

$$a_t^2 \mu \varepsilon = a_x^2 + a_z^2 \quad (3.25a)$$

junto con la relación de estructura

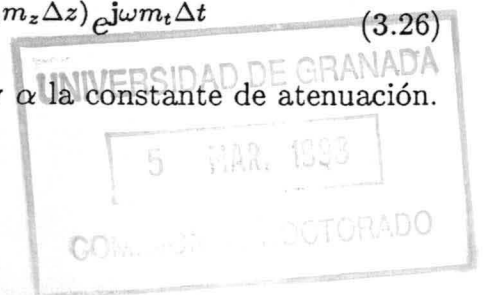
$$TE_y \begin{cases} H_{ox} = \frac{a_z}{a_t \mu} E_{oy} \\ H_{oz} = -\frac{a_x}{a_t \mu} E_{oy} \end{cases} \quad TM_y \begin{cases} E_{ox} = -\frac{a_z}{a_t \varepsilon} H_{oy} \\ E_{oz} = \frac{a_x}{a_t \varepsilon} H_{oy} \end{cases} \quad (3.25b)$$

3.2.2 Medios conductores

Ahora se propondrá estudiar la propagación de ondas discretas cuando el medio numérico tiene una conductividad no nula. Se intentará satisfacer el esquema de Yee (2.11) buscando una solución

$$\Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = \Psi_o e^{-j\gamma(n_x m_x \Delta x + n_y m_y \Delta y + n_z m_z \Delta z)} e^{j\omega m_t \Delta t} \quad (3.26)$$

con $\gamma = \beta - j\alpha$, siendo $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ la constante de propagación y α la constante de atenuación.



Para medios conductores, el esquema de Yee implica a los operadores \mathcal{D}_u en las variables x, y, z y t , y al operador promedio temporal P_t . Para la solución propuesta es evidente que el autovalor temporal a_t del operador D_t sigue siendo el mismo que en el caso anterior, sin embargo la cantidad compleja γ modifica los autovalores espaciales. En concreto

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = a_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} \\ a_u \equiv \frac{e^{-j\gamma n_u \frac{\Delta u}{2}} - e^{j\gamma n_u \frac{\Delta u}{2}}}{\Delta u} = \\ = -2 \frac{\sinh(\alpha n_u \frac{\Delta u}{2}) \cos(\beta n_u \frac{\Delta u}{2}) + j \cosh(\alpha n_u \frac{\Delta u}{2}) \sin(\beta n_u \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \\ a_t \equiv \frac{e^{j\omega \frac{\Delta t}{2}} - e^{-j\omega \frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} = j2 \frac{\sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_t \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = a'_t \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} \\ a'_t \equiv \frac{e^{j\omega \frac{\Delta t}{2}} + e^{-j\omega \frac{\Delta t}{2}}}{2} = \cos(\omega \frac{\Delta t}{2}) \end{array} \right.$$

Procediendo la misma forma que en el caso anterior, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t \mu \vec{H}_0 = -\tilde{a} \vec{E}_0 \\ a_t \varepsilon_c \vec{E}_0 = \tilde{a} \vec{H}_0 \end{array} \right. \quad (3.28)$$

con

$$\varepsilon_c \equiv \varepsilon \left(1 + \frac{a'_t \sigma}{a_t \varepsilon} \right) = \varepsilon \left(1 - j \frac{\Delta t}{2} \frac{\sigma}{\tan(\omega \frac{\Delta t}{2}) \varepsilon} \right) \quad (3.29)$$

Este sistema es idéntico al obtenido para medios no conductores (3.3) sin más que sustituir ε por ε_c , en consecuencia, la condición para que exista una solución no trivial establece la siguiente ligadura

$$\mu \varepsilon_c a_t^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad (3.30)$$

de donde se obtiene el sistema de dos ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \varepsilon \frac{\sin^2(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t^2} = \sum_{u=x,y,z} \frac{\cosh^2(\alpha n_u \frac{\Delta u}{2}) \sin^2(\beta n_u \frac{\Delta u}{2}) - \sinh^2(\alpha n_u \frac{\Delta u}{2}) \cos^2(\beta n_u \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u^2} \\ \frac{\mu \sigma}{4} \frac{\sin(\omega \frac{\Delta t}{2}) \cos(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} = \sum_{u=x,y,z} \frac{\cosh(\alpha n_u \frac{\Delta u}{2}) \sin(\beta n_u \frac{\Delta u}{2}) \sinh(\alpha n_u \frac{\Delta u}{2}) \cos(\beta n_u \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u^2} \end{array} \right.$$

que permiten determinar ω y α para β y \hat{n} dados.

3.3 Propagación de Ondas Discretas (II). Reflexión y refracción en la interfase simulada de dos medios homogéneos

Planteamiento del problema. En esta sección se estudiará el problema numérico relacionado con la incidencia de una onda discreta sobre la superficie plana e infinita que separa dos medios homogéneos distintos.

Este es el problema de contorno más simple que puede ser analizado y como es sabido desde el punto de vista analítico puede ser resuelto haciendo uso de las condiciones de contorno, no así en el caso numérico donde la solución es obtenida de la condición de compatibilidad del esquema en los nudos próximos a la interfase.

3.3.1 Deducción de las ecuaciones fundamentales. Ley numérica de Snell-Descartes. Coeficientes numéricos de reflexión y de refracción.

En las secciones anteriores se ha puesto de manifiesto la gran ventaja de utilizar un lenguaje operacional en el tratamiento teórico general del problema discreto. En esta sección se introducirán dos nuevos operadores que facilitarán el análisis matemático de los problemas numéricos de las condiciones de contorno. Estos operadores, que denominaremos *Adelanto* y *Retraso*, son definidos en el espacio de las funciones discretas como sigue

- *Adelanto en la variable x*

$$\mathcal{A}_x F^{m_t}(m_x, m_y, m_z) \equiv \frac{F^{m_t}(m_x + \frac{1}{2}, m_y, m_z)}{\Delta x}$$

- *Retraso en la variable x*

$$\mathcal{R}_x F^{m_t}(m_x, m_y, m_z) \equiv \frac{F^{m_t}(m_x - \frac{1}{2}, m_y, m_z)}{\Delta x}$$

con expresiones similares para las variables y y z .

Haciendo uso de estas definiciones podemos expresar el operador diferencia centrada como

$$\mathcal{D}_u = \mathcal{A}_u - \mathcal{R}_u$$

Para funciones del tipo

$$\Psi^{m_t}(m_x, m_y, m_z) = \Psi_0 e^{-j\beta(n_x m_x \Delta x + n_y m_y \Delta y + n_z m_z \Delta z)} e^{j\omega m_t \Delta t}$$

las siguientes identidades son ciertas

$$\begin{cases} \mathcal{A}_u \Psi^{m_t}(m_x, m_y, m_z) = a_u^+ \Psi^{m_t}(m_x, m_y, m_z) & (u = x, y, z) \\ a_u^+ \equiv \frac{e^{-j\beta n_u \frac{\Delta u}{2}}}{\Delta u} = \frac{\cos(\beta n_u \frac{\Delta u}{2}) - j \operatorname{sen}(\beta n_u \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \end{cases} \quad (3.31a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{R}_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = a_u^- \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} & (u = x, y, z) \\ a_u^- \equiv \frac{e^{j\beta n_u \frac{\Delta u}{2}}}{\Delta u} = \frac{\cos(\beta n_u \frac{\Delta u}{2}) + j\text{sen}(\beta n_u \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \end{cases} \quad (3.31b)$$

y también

$$a_u = a_u^+ - a_u^- \quad (3.32)$$

donde recordamos que

$$a_u \equiv \frac{e^{-j\beta n_u \frac{\Delta u}{2}} - e^{j\beta n_u \frac{\Delta u}{2}}}{\Delta u} = -j2 \frac{\text{sen}(\beta n_u \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \quad (u = x, y, z)$$

es el autovalor espacial del operador \mathcal{D}_u definido en (3.2).

Para el estudio numérico se adoptarán los siguientes convenios:

- Tomaremos el plano discreto $z = k_o \Delta z$ como la superficie de separación y el plano xz como el plano de incidencia.
- Aún siendo fácil encontrar la solución general cuando ambos medios son conductores, la complejidad de los resultados tienden a dificultar la interpretación de lo que está ocurriendo. En consecuencia, se tomarán ambos medios como no conductores, de modo que todos los vectores de propagación serán reales.
- Se utilizarán los índices i , r y t para denotar las cantidades asociadas con la onda incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.
- Como es usual, consideraremos por separado dos casos: cuando el campo eléctrico se encuentra en el plano de incidencia y cuando es perpendicular al mismo. De esta manera consideraremos también el caso general, en el que \vec{E} puede descomponerse en dos vectores de uno y otro tipo.

Polarización TE_y. Vector \vec{E} normal al plano de incidencia

En este caso el vector \vec{E} es normal al plano xz (plano de incidencia) y \vec{H} es paralelo a él, Figura 3.5.

Siendo consecuentes con nuestra exposición (2.26), (2.27), debemos suponer que la implementación computacional se ha realizado como sigue

$$\begin{cases} \mu(k+\frac{1}{2}) \mathcal{D}_t H_x^n(i, k+\frac{1}{2}) = \mathcal{D}_z E_y^n(i, k+\frac{1}{2}) \\ \mu(k) \mathcal{D}_t H_z^n(i+\frac{1}{2}, k) = -\mathcal{D}_x E_y^n(i+\frac{1}{2}, k) \\ \varepsilon(k) \mathcal{D}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, k) = \mathcal{D}_z H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) - C(k) \mathcal{D}_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, k) \end{cases} \quad (3.33)$$

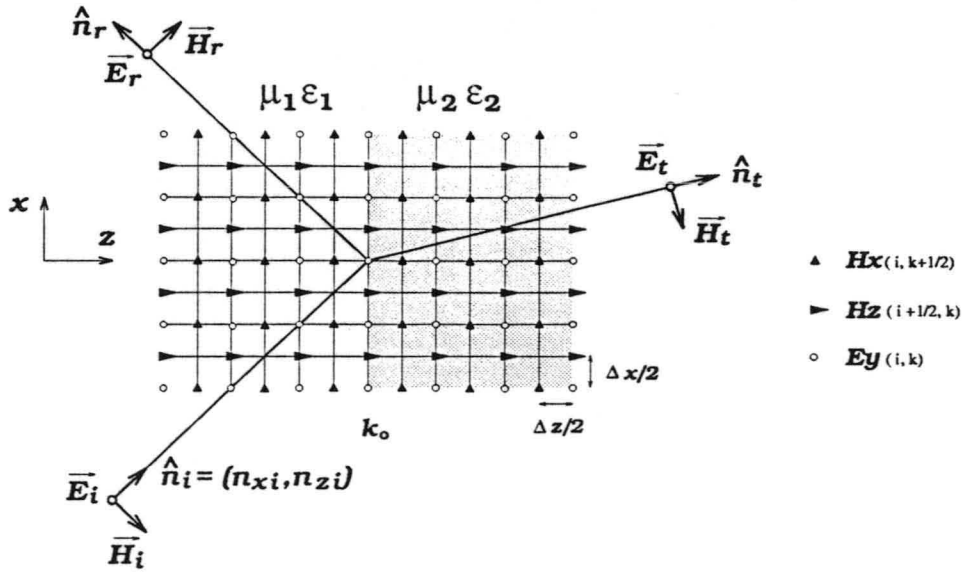


Figura 3.5:

con

$$\mu(m_z) = \begin{cases} \mu_1 & m_z = k_0, k_0 - \frac{1}{2}, k_0 - 1, k_0 - \frac{3}{2}, \dots \\ \mu_{ef} & m_z = k_0 + \frac{1}{2} \\ \mu_2 & m_z = k_0 + 1, k_0 + \frac{3}{2}, \dots \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\varepsilon(m_z) = \begin{cases} \varepsilon_1 & m_z = k_0 - 1, k_0 - 2, \dots \\ \varepsilon_{ef} & m_z = k_0 \\ \varepsilon_2 & m_z = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots \end{cases} \quad (3.35)$$

$$C(m_z) = \begin{cases} 1 & m_z \neq k_0 \\ C_2 & m_z = k_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

en donde μ_{ef} , ε_{ef} y C_2 están dadas en (2.21), (2.25). Se ha tomado $d = 0$, siendo por tanto

$$\mu_{ef} = \mu_2, \quad \varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \quad C_2 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2} \quad (3.37)$$

Nuestro objetivo es encontrar la condición de compatibilidad del esquema (3.33), admitiendo la existencia de tres ondas: la onda incidente en el medio uno, la onda reflejada también en el medio uno y la onda transmitida en el medio dos. Sin hacer suposiciones acerca de sus amplitudes o fases, podemos expresar estas ondas como

Onda incidente

$$\Psi_i^{m_t(m_x, m_z)} = \Psi_{oi} e^{-j\beta_i(n_{xi}m_x\Delta x + n_{zi}m_z\Delta z)} e^{j\omega_i m_t \Delta t} \quad m_z < k_0$$

Onda reflejada

$$\Psi_r^{m_t(m_x, m_z)} = \Psi_{or} e^{-j[\beta_r(n_{xr}m_x\Delta x + n_{zr}m_z\Delta z) + \phi_r]} e^{j\omega_r m_t \Delta t} \quad m_z < k_0$$

Onda transmitida

$$\Psi_t^{m_t(m_x, m_z)} = \Psi_{ot} e^{-j[\beta_t(n_{xt}m_x \Delta x + n_{zt}m_z \Delta z) + \phi_t]} e^{j\omega_t m_t \Delta t} \quad m_z > k_o$$

siendo ϕ_r y ϕ_t constantes de fase relativas a Ψ_i que se introducen debido a que k_o es arbitrario y $\beta_v = \frac{2\pi}{\lambda_v}$ ($v = i, r, t$) la constante de propagación de la onda incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.

Cada una de estas ondas deben satisfacer las relaciones dadas en (3.25)

$$a_{tv}^2 \mu_l \varepsilon_l = a_{xv}^2 + a_{zv}^2, \quad \begin{cases} H_{oxv} = \frac{a_{zv}}{a_{tv} \mu_l} E_{oyv} \\ H_{ozv} = -\frac{a_{xv}}{a_{tv} \mu_l} E_{oyv} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} l = 1 & \text{si } v = i, r \\ l = 2 & \text{si } v = t \end{cases} \quad (3.38)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{uv} &= -j2 \frac{\text{sen}(\beta_v n_{uv} \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} & (u = x, z) \\ a_{tv} &= j2 \frac{\text{sen}(\omega_v \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} & (v = i, r, t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

También se utilizará la notación

$$\begin{aligned} a_{uv}^+ &= \frac{\cos(\beta_v n_{uv} \frac{\Delta u}{2}) - j \text{sen}(\beta_v n_{uv} \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \\ a_{uv}^- &= \frac{\cos(\beta_v n_{uv} \frac{\Delta u}{2}) + j \text{sen}(\beta_v n_{uv} \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \end{aligned} \quad (3.40)$$

para los autovalores de los operadores adelanto y retraso definidos anteriormente.

Obsérvese que los campos en los nudos de interfase $E_y^{n(i, k_o)}$ y $H_z^{n+\frac{1}{2}(i+\frac{1}{2}, k_o)}$ no han sido etiquetados respecto al carácter incidente, reflejado o transmitido, pero estos se relacionan con los campos en el medio uno y dos a través de las ecuaciones del esquema en los nudos próximos a la interfase.

Llamando

$$\begin{aligned} \Psi_1^{m_t(m_x, m_z)} &= \Psi_i^{m_t(m_x, m_z)} + \Psi_r^{m_t(m_x, m_z)} \\ \Psi_2^{m_t(m_x, m_z)} &= \Psi_t^{m_t(m_x, m_z)} \end{aligned}$$

las ecuaciones del esquema en los nudos próximos a la interfase pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} \text{En } k_o - \frac{1}{2} \\ \mu_1 \mathcal{D}_t H_{x1}^{n(i, k_o - \frac{1}{2})} &= \mathcal{A}_z E_y^{n(i, k_o - \frac{1}{2})} - \mathcal{R}_z E_{y1}^{n(i, k_o - \frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \text{En } k_o \\ \varepsilon_{ef} \mathcal{D}_t E_y^{n+\frac{1}{2}(i, k_o)} &= \mathcal{A}_z H_{x2}^{n+\frac{1}{2}(i, k_o)} - \mathcal{R}_z H_{x1}^{n+\frac{1}{2}(i, k_o)} - C_2 \mathcal{D}_x H_z^{n+\frac{1}{2}(i, k_o)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\mu_1 \mathcal{D}_t H_z^n(i+\frac{1}{2}, k_o) = -\mathcal{D}_x E_y^n(i+\frac{1}{2}, k_o) \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \text{En } k_o + \frac{1}{2} \\ \mu_{ef} \mathcal{D}_t H_{x2}^n(i, k_o + \frac{1}{2}) = \mathcal{A}_z E_{y2}^n(i, k_o + \frac{1}{2}) - \mathcal{R}_z E_y^n(i, k_o + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

De (3.41) es fácil derivar la identidad

$$E_y^n(i, k_o) = E_{yi}^n(i, k_o) + E_{yr}^n(i, k_o) \quad (3.45)$$

En efecto, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t H_{xv}^n(i, k_o - \frac{1}{2}) &= a_{tv} H_{xv}^n(i, k_o - \frac{1}{2}) \\ \mathcal{R}_z E_{yv}^n(i, k_o - \frac{1}{2}) &= a_{zv}^- E_{yv}^n(i, k_o - \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (v = i, r)$$

y la relación de estructura (3.38), la ecuación (3.41) puede reescribirse como

$$\mathcal{A}_z E_y^n(i, k_o - \frac{1}{2}) = (a_{zi} + a_{zi}^-) E_{yi}^n(i, k_o - \frac{1}{2}) + (a_{zr} + a_{zr}^-) E_{yr}^n(i, k_o - \frac{1}{2})$$

dado que $a_{zv} = a_{zv}^+ - a_{zv}^-$, según (3.32), resulta

$$\mathcal{A}_z E_y^n(i, k_o - \frac{1}{2}) = a_{zi}^+ E_{yi}^n(i, k_o - \frac{1}{2}) + a_{zr}^+ E_{yr}^n(i, k_o - \frac{1}{2})$$

esto es

$$\mathcal{A}_z E_y^n(i, k_o - \frac{1}{2}) = \mathcal{A}_z E_{yi}^n(i, k_o - \frac{1}{2}) + \mathcal{A}_z E_{yr}^n(i, k_o - \frac{1}{2})$$

de donde se sigue (3.45), tal y como queríamos demostrar.

De forma similar podemos despejar $\mathcal{R}_z E_y^n(i, k_o + \frac{1}{2})$ de (3.44), llegando através de un razonamiento análogo al precedente, a la conclusión

$$E_y^n(i, k_o) = E_{yt}^n(i, k_o) \quad (3.46)$$

La condición de compatibilidad de (3.45) y (3.46) requiere

$$E_{yi}^n(i, k_o) + E_{yr}^n(i, k_o) = E_{yt}^n(i, k_o) \quad (3.47)$$

esto es

$$\begin{aligned} E_{oyi} e^{-j\beta_i(n_{xi}i\Delta x + n_{zi}k_o\Delta z)} e^{j\omega_i n\Delta t} + E_{oyr} e^{-j[\beta_r(n_{xr}i\Delta x + n_{zr}k_o\Delta z) + \phi_r]} e^{j\omega_r n\Delta t} = \\ = E_{oyt} e^{-j[\beta_t(n_{xt}i\Delta x + n_{zt}k_o\Delta z) + \phi_t]} e^{j\omega_t n\Delta t} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para que esta condición se cumpla, es necesario en primer lugar que

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \quad (3.49)$$

En efecto, la condición (3.48) tiene la forma

$$A e^{j\omega_i n\Delta t} + B e^{j\omega_r n\Delta t} = C e^{j\omega_t n\Delta t} \quad (3.50)$$

donde A , B y C no dependen de la variable temporal.

Aplicando a (3.50) el operador \mathcal{D}_t , obtenemos

$$a_{ti}Ae^{j\omega_i n \Delta t} + a_{tr}Be^{j\omega_r n \Delta t} = a_{tt}Ce^{j\omega_t n \Delta t} \quad (3.51)$$

eliminando de estas dos últimas ecuaciones $Ce^{j\omega_t n \Delta t}$, resulta

$$(a_{ti} - a_{tt})Ae^{j\omega_i n \Delta t} = (a_{tt} - a_{tr})Be^{j\omega_r n \Delta t}$$

esto es

$$[\text{sen}(\omega_i \frac{\Delta t}{2}) - \text{sen}(\omega_t \frac{\Delta t}{2})] Ae^{j\omega_i n \Delta t} = [\text{sen}(\omega_t \frac{\Delta t}{2}) - \text{sen}(\omega_r \frac{\Delta t}{2})] Be^{j\omega_r n \Delta t}$$

que se satisface sólo para $\omega_i = \omega_r$. De forma similar, en (3.51) podemos sustituir $Be^{j\omega_r n \Delta t}$ por su valor según (3.50), llegando a la conclusión de que $\omega_i = \omega_t$. Por consiguiente, efectivamente $\omega_i = \omega_r = \omega_t$, es decir, la frecuencia numérica no varía durante la reflexión o refracción. A partir de ahora este valor común será denotado como ω . Nótese que esta condición también puede ser expresada en términos de los autovalores temporales como

$$a_{ti} = a_{tr} = a_{tt} \equiv a_t = j2 \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \quad (3.52)$$

De un modo similar, puede demostrarse que deben cumplirse las igualdades

$$\beta_i n_{xi} = \beta_r n_{xr} = \beta_t n_{xt} \quad \text{o} \quad a_{xi} = a_{xr} = a_{xt} \quad (3.53a)$$

$$\phi_r = (\beta_i n_{zi} - \beta_r n_{zr}) k_o \Delta z \quad (3.53b)$$

$$\phi_t = (\beta_i n_{zi} - \beta_t n_{zt}) k_o \Delta z \quad (3.53c)$$

Con esto, las exponenciales en la ecuación (3.48) se anulan dejando una expresión independiente de las variables espaciales y temporales

$$E_{oyi} + E_{oyr} = E_{oyt} \quad (3.54)$$

Las ecuaciones (3.53b) y (3.53c) dan los valores de ϕ_r y ϕ_t correspondientes a un valor dado de k_o y entonces ellas permiten que la relación anterior sea válida independiente de esta ubicación.

Ahora tengamos en cuenta la ecuación (3.53a). De la primera de estas igualdades $\beta_r n_{xr} = \beta_i n_{xi}$ o $a_{xr} = a_{xi}$, y del hecho de que

$$\begin{aligned} a_t^2 \mu_1 \varepsilon_1 &= a_{xi}^2 + a_{zi}^2 \\ a_t^2 \mu_1 \varepsilon_1 &= a_{xr}^2 + a_{zr}^2 = a_{xi}^2 + a_{zr}^2 \end{aligned}$$

se sigue

$$\beta_r = \beta_i, \quad n_{xr} = n_{xi}, \quad n_{zr} = -n_{zi}, \quad a_{zr} = -a_{zi} \quad (3.55)$$

que es la *ley de la reflexión*, la cual no se ve modificada en el espacio numérico.

De la segunda igualdad de (3.53a) $\beta_t n_{xt} = \beta_i n_{xi}$ o $a_{xt} = a_{xi}$, es evidente que

$$\beta_t = \beta_i \frac{n_{xi}}{n_{xt}} \quad (3.56)$$

donde n_{xt} puede obtenerse de las relaciones

$$\begin{aligned} a_i^2 \mu_1 \varepsilon_1 &= a_{xi}^2 + a_{zi}^2 \\ a_i^2 \mu_2 \varepsilon_2 &= a_{xt}^2 + a_{zt}^2 = a_{xi}^2 + a_{zt}^2 \end{aligned}$$

el resultado es

$$\begin{aligned} n_{xt} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\arcsen(\zeta)}{\beta_i n_{xi} \frac{\Delta z}{2}} \right)^2}} \quad \text{con} \quad (3.57) \\ \zeta &\equiv \Delta z \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1} \left(\frac{\text{sen}^2(\beta_i n_{xi} \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x^2} + \frac{\text{sen}^2(\beta_i n_{xi} \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z^2} \right) - \frac{\text{sen}^2(\beta_i n_{xi} \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x^2}} \end{aligned}$$

y por supuesto se tiene para la componente z

$$n_{zt} = \sqrt{1 - n_{xt}^2} \quad (3.58)$$

Por lo tanto, conocidos β_i y \hat{n}_i es posible determinar β_t y \hat{n}_t para la onda transmitida. Este resultado, es pues, la versión numérica de la *ley de refracción* o *ley de Snell-Descartes*.

Hay aún, junto con (3.54), una interdependencia compartida por las amplitudes que ahora se puede evaluar. De (3.43), (3.45) y teniendo presente la relación de estructura (3.38) se obtiene

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, k_o) = H_{zi}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, k_o) + H_{zr}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, k_o) \quad (3.59)$$

Este resultado junto con (3.45), permite escribir (3.42) como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ef} \mathcal{D}_t \left[E_{yi}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) + E_{yr}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) \right] &= \mathcal{A}_z H_{xt}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) - \mathcal{R}_z \left[H_{xi}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) + H_{xr}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) \right] - \\ &\quad - C_2 \mathcal{D}_x \left[H_{zi}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) + H_{zr}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_o) \right] \quad (3.60) \end{aligned}$$

de donde se sigue, después de hacer algunos cálculos, la siguiente relación entre amplitudes

$$b_1 E_{oyi} + b_2 E_{oyr} = b_3 E_{oyt} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} b_1 &\equiv \mu_2 a_{zi} (2a_{zi}^- + a_{zi}) + \mu_1 a_{zt}^2 \\ b_2 &\equiv \mu_2 a_{zr} (2a_{zr}^- + a_{zr}) + \mu_1 a_{zt}^2 \\ b_3 &\equiv \mu_1 2a_{zt}^+ a_{zt} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Puesto que E_{oyi} es arbitraria, las cantidades significativas son las relaciones E_{oyr}/E_{oyi} y E_{oyt}/E_{oyi} , pudiéndose ya calcular a partir de las ecuaciones (3.54) y (3.61). El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{E_{oyr}}{E_{oyi}} &= -\frac{\mu_2 a_{zi}(a_{zi}^+ + a_{zi}^-) - \mu_1 a_{zt}(a_{zt}^+ + a_{zt}^-)}{\mu_2 a_{zr}(a_{zr}^+ + a_{zr}^-) - \mu_1 a_{zt}(a_{zt}^+ + a_{zt}^-)} = \\ &= -\frac{\mu_2 \text{sen}(\beta_i n_{zi} \Delta z) - \mu_1 \text{sen}(\beta_t n_{zt} \Delta z)}{\mu_2 \text{sen}(\beta_r n_{zr} \Delta z) - \mu_1 \text{sen}(\beta_t n_{zt} \Delta z)} \end{aligned} \quad (3.62a)$$

$$\frac{E_{oyt}}{E_{oyi}} = 1 + \frac{E_{oyr}}{E_{oyi}} \quad (3.62b)$$

en donde $\beta_r n_{zr}$ y $\beta_t n_{zt}$ pueden obtenerse de (3.55), (3.56), (3.57) y (3.58).

A modo de ejemplo en las siguientes gráficas se muestra la parte real y la parte imaginaria (onda atenuada en el caso de reflexión total) del ángulo de transmisión teórico y numérico, obtenido a partir de (3.57), para una onda resuelta con 15 celdas por longitud de onda, propagándose en un medio cerámico de $\epsilon_r = 90$ y saliendo al vacío.

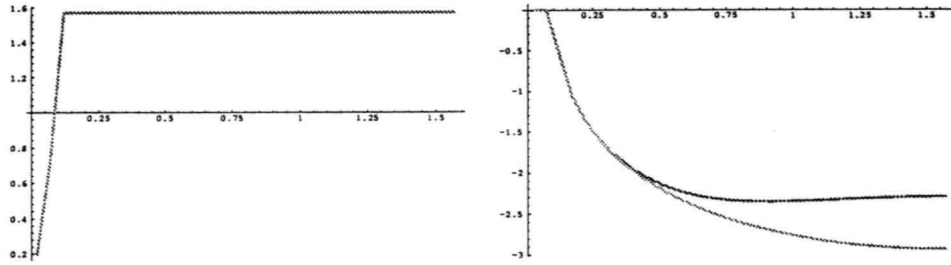


Figura 3.6: .

Se ha analizado el primer caso de polarización donde \vec{E} es perpendicular al plano de incidencia, obteniéndose las expresiones de los coeficientes de reflexión y refracción para la componente del campo E_y . De manera similar puede obtenerse las expresiones de estos coeficientes para el segundo caso de polarización, cuando el vector \vec{H} es perpendicular al plano de incidencia.

Polarización TH_y. Vector \vec{H} normal al plano de incidencia

En este caso el vector \vec{E} es paralelo al plano de incidencia con dos componentes E_x y E_z , y el vector \vec{H} es perpendicular al mismo con una sola componente H_y , Figura (3.7). Se procede aquí de una manera muy similar a la de la sección anterior. La condición de compatibilidad del esquema TH_y

$$\begin{cases} \mu(k+\frac{1}{2})\mathcal{D}_t H_y^n(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = \mathcal{D}_x E_z^n(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - \mathcal{D}_z E_x^n(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) \\ \epsilon(k)\mathcal{D}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, k) = -\mathcal{D}_z H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, k) \\ \epsilon(k+\frac{1}{2})\mathcal{D}_t E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, k+\frac{1}{2}) = \mathcal{D}_x H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, k+\frac{1}{2}) \end{cases} \quad (3.63)$$

con

$$\mu(m_z) = \begin{cases} \mu_1 & m_z = k_o - \frac{1}{2}, k_o - \frac{3}{2}, k_o - \frac{5}{2}, \dots \\ \mu_{ef} = \mu_2 & m_z = k_o + \frac{1}{2} \\ \mu_2 & m_z = k_o + \frac{3}{2}, k_o + \frac{5}{2}, \dots \end{cases} \quad (3.64a)$$

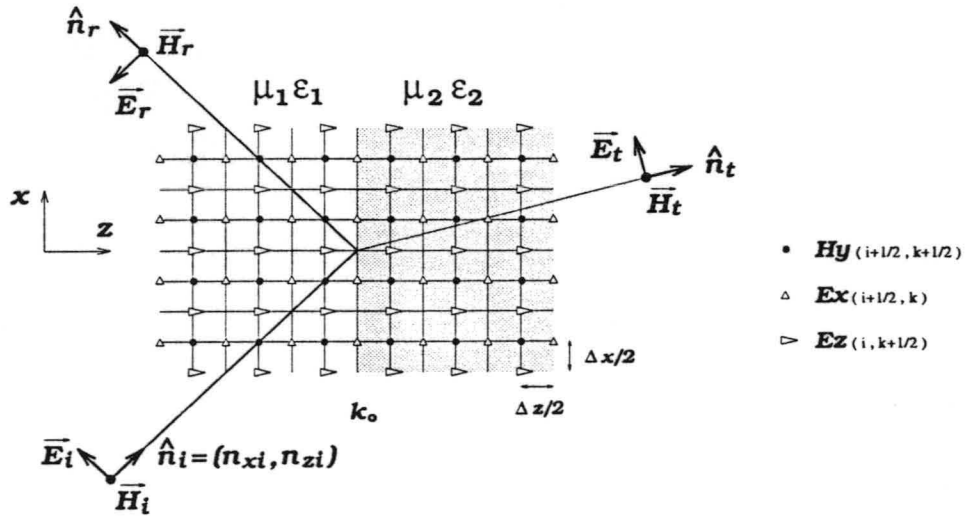


Figura 3.7:

$$\varepsilon(m_z) = \begin{cases} \varepsilon_1 & m_z = k_0 - \frac{1}{2}, k_0 - 1, k_0 - \frac{3}{2}, \dots \\ \varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} & m_z = k_0 \\ \varepsilon_2 & m_z = k_0 + \frac{1}{2}, k_0 + 1, k_0 + \frac{3}{2}, \dots \end{cases} \quad (3.64b)$$

conduce a

$$\begin{cases} E_{oxi} + E_{oxr} = E_{oxt} \\ b_1 E_{oxi} + b_2 E_{oxr} = b_3 E_{oxt} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} b_1 \equiv -2\varepsilon_1 a_{zt} a_{zi}^- \\ b_2 \equiv 2\varepsilon_1 a_{zt} a_{zr}^- \\ b_3 \equiv \varepsilon_1 a_{zt} a_{zi} - \varepsilon_2 a_{zi} (a_{zt}^+ + a_{zt}^-) \end{cases} \quad (3.65)$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{E_{oxr}}{E_{oxi}} &= \frac{\varepsilon_2 a_{zi} (a_{zt}^+ + a_{zt}^-) - \varepsilon_1 a_{zt} (a_{zi}^+ + a_{zi}^-)}{\varepsilon_2 a_{zr} (a_{zt}^+ + a_{zt}^-) - \varepsilon_1 a_{zt} (a_{zr}^+ + a_{zr}^-)} = \\ &= \frac{\varepsilon_2 \tan(\beta_i n_{zi} \frac{\Delta z}{2}) - \varepsilon_1 \tan(\beta_t n_{zt} \frac{\Delta z}{2})}{\varepsilon_2 \tan(\beta_r n_{zr} \frac{\Delta z}{2}) - \varepsilon_1 \tan(\beta_t n_{zt} \frac{\Delta z}{2})} \end{aligned} \quad (3.66a)$$

$$\frac{E_{oxt}}{E_{oxi}} = 1 + \frac{E_{oxr}}{E_{oxi}} \quad (3.66b)$$

De la relación de estructura del campo discreto, es fácil hallar los coeficientes de reflexión y refracción para las otras componentes. Así por ejemplo, se obtendría para la componente H_y

$$\frac{H_{oyr}}{H_{oyi}} = -\frac{E_{oxr}}{E_{oxi}} \quad (3.67)$$

3.4 Propagación de Ondas Discretas (III). Propagación guiada

Planteamiento del problema. En las secciones precedentes se investigaron soluciones discretas dependientes del tiempo para el esquema de Yee en la forma de ondas planas, los resultados obtenidos nos han permitido explicar la reflexión y refracción en interfaces simuladas, por lo que estamos preparados para estudiar a continuación los aspectos básicos de la propagación discreta de ondas guiadas en medios numéricos que simularán guías metálicas y dieléctricas. Así pues, esta parte está dedicada a analizar la distribución del campo electromagnético y los fenómenos que ocurren en el espacio numérico que simula este tipo de estructuras.

Desde el punto de vista matemático este problema se reduce a la investigación del esquema de Yee sujeto a las condiciones de contorno simuladas en cada caso.

3.4.1 Solución numérica para la guía rectangular metálica

En la Figura 3.8 se muestra una guía metálica que se extiende indefinidamente en la dirección z , siendo de sección rectangular constante de lados $a = i_a \Delta x$ y $b = j_b \Delta y$ en el plano xy . Se hace la suposición de que las paredes limitantes son conductores perfectos y que el interior se encuentra lleno de un medio lineal, homogéneo e isótropo no conductor, descrito por los parámetro μ y ϵ .

Bajo la suposición de que las paredes que forman la guía son conductores perfecto y que el medio material en contacto con ellas es isótropo, las condiciones de contorno son simplemente $\vec{E}_t = 0$ y $\vec{H}_n = 0$, es decir, \vec{E} no tiene componente tangencial y \vec{H} no tiene componente normal. Para simular estas condiciones, basta con hacer coincidir las paredes de la guía con aquellos nudos de la red donde están definidas las componentes tangenciales del campo eléctrico y las componentes normales del campo magnético, manteniendo a cero el valor de tales componentes en todo nudo temporal se garantiza el cumplimiento de las condiciones de contorno.

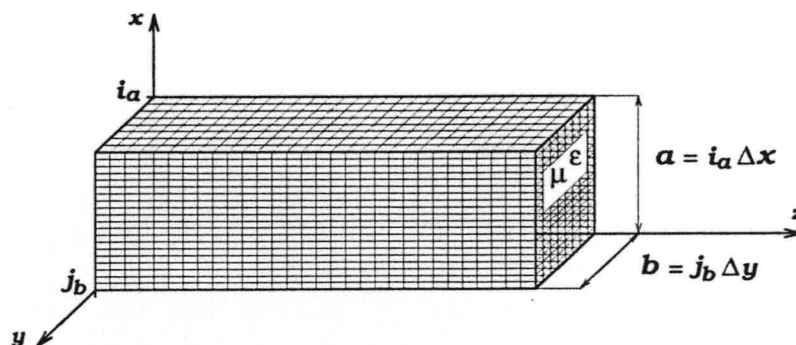


Figura 3.8: .

Así pues, para determinar la distribución de los campos discretos en la guía, es necesario

resolver el esquema de Yee

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \mathcal{D}_t H_x^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_z E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \mathcal{D}_y E_z^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \\ \mu \mathcal{D}_t H_y^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_x E_z^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - \mathcal{D}_z E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \\ \mu \mathcal{D}_t H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = \mathcal{D}_y E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - \mathcal{D}_x E_y^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \\ \varepsilon \mathcal{D}_t E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) = \mathcal{D}_y H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) - \mathcal{D}_z H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) \\ \varepsilon \mathcal{D}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) = \mathcal{D}_z H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) - \mathcal{D}_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) \\ \varepsilon \mathcal{D}_t E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_x H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) - \mathcal{D}_y H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) \end{array} \right. \quad (3.68)$$

sujeto a las condiciones de contorno

$$\left. \begin{array}{l} H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \\ E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \\ E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \end{array} \right\} = 0 \quad \text{en } i = 0, i_a \quad (3.69a)$$

$$\left. \begin{array}{l} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \\ E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \\ E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \end{array} \right\} = 0 \quad \text{en } j = 0, j_b \quad (3.69b)$$

Se trata de encontrar una solución en la forma de una onda que se propaga a lo largo del eje de la guía, esto es, en la dirección z . Se hace la suposición de que las componentes del campo poseen la forma discreta

$$\Psi^{m_t}(m_x, m_y, m_z) = \Psi_o(m_x, m_y) e^{-j\beta m_z \Delta z} e^{j\omega m_t \Delta t} \quad (3.70)$$

La cantidad $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ es la constante de propagación de la guía y λ su longitud de onda, es decir, el periodo espacial a lo largo de ésta.

Al sustituir esta función en el esquema de Yee, y tras cancelar el factor exponencial común, se obtienen las siguientes condiciones matemáticas del problema planteado

$$E_{oy}(i, j + \frac{1}{2}) = \frac{1}{a_z} [\mathcal{D}_y E_{oz}(i, j + \frac{1}{2}) + a_t \mu H_{ox}(i, j + \frac{1}{2})] \quad (3.71a)$$

$$E_{ox}(i + \frac{1}{2}, j) = \frac{1}{a_z} [\mathcal{D}_x E_{oz}(i + \frac{1}{2}, j) - a_t \mu H_{oy}(i + \frac{1}{2}, j)] \quad (3.71b)$$

$$a_t \mu H_{oz}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_y E_{ox}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \mathcal{D}_x E_{oy}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \quad (3.71c)$$

$$H_{oy}(i + \frac{1}{2}, j) = \frac{1}{a_z} [\mathcal{D}_y H_{oz}(i + \frac{1}{2}, j) - a_t \varepsilon E_{ox}(i + \frac{1}{2}, j)] \quad (3.71d)$$

$$H_{ox}(i, j + \frac{1}{2}) = \frac{1}{a_z} [\mathcal{D}_x H_{oz}(i, j + \frac{1}{2}) + a_t \varepsilon E_{oy}(i, j + \frac{1}{2})] \quad (3.71e)$$

$$a_t \varepsilon E_{oz}(i, j) = \mathcal{D}_x H_{oy}(i, j) - \mathcal{D}_y H_{ox}(i, j) \quad (3.71f)$$

con

$$a_z = -j2 \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z}, \quad a_t = j2 \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \quad (3.72)$$

Si ahora se sustituye (3.71e) en (3.71a), (3.71d) en (3.71b), (3.71b) en (3.71d) y (3.71a) en (3.71e) se obtiene el siguiente sistema algebraico completamente equivalente al anterior

$$E_{oy(i,j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\kappa^2} [a_z \mathcal{D}_y E_{oz(i,j+\frac{1}{2})} + a_t \mu \mathcal{D}_x H_{oz(i,j+\frac{1}{2})}] \quad (3.73a)$$

$$E_{ox(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{1}{\kappa^2} [a_z \mathcal{D}_x E_{oz(i+\frac{1}{2},j)} - a_t \mu \mathcal{D}_y H_{oz(i+\frac{1}{2},j)}] \quad (3.73b)$$

$$a_t \mu H_{oz(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} = \mathcal{D}_y E_{ox(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} - \mathcal{D}_x E_{oy(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} \quad (3.73c)$$

$$H_{oy(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{1}{\kappa^2} [a_z \mathcal{D}_y H_{oz(i+\frac{1}{2},j)} - a_t \varepsilon \mathcal{D}_x E_{oz(i+\frac{1}{2},j)}] \quad (3.73d)$$

$$H_{ox(i,j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\kappa^2} [a_z \mathcal{D}_x H_{oz(i,j+\frac{1}{2})} + a_t \varepsilon \mathcal{D}_y E_{oz(i,j+\frac{1}{2})}] \quad (3.73e)$$

$$a_t \varepsilon E_{oz(i,j)} = \mathcal{D}_x H_{oy(i,j)} - \mathcal{D}_y H_{ox(i,j)} \quad (3.73f)$$

donde se ha definido

$$\kappa^2 \equiv a_z^2 - a_t^2 \mu \varepsilon \quad (3.74)$$

Por comparación con la solución analítica, intentaremos encontrar la condición de compatibilidad de este sistema, admitiendo que las componentes longitudinales poseen la forma discreta

$$H_{oz(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} = H_o \cos(\kappa_x(i+\frac{1}{2})\Delta x) \cos(\kappa_y(j+\frac{1}{2})\Delta y) \quad (3.75a)$$

$$E_{oz(i,j)} = E_o \sin(\kappa_x i \Delta x) \sin(\kappa_y j \Delta y) \quad (3.75b)$$

siendo H_o y E_o constantes arbitrarias y

$$\kappa_x \equiv \frac{p\pi}{a}, \quad \kappa_y \equiv \frac{q\pi}{b} \quad \text{con } p \text{ y } q \text{ enteros.} \quad (3.76a)$$

Obsérvese que las siguientes identidades son ciertas

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_u \sin(\kappa_u m_u \Delta u) &= b_u \cos(\kappa_u m_u \Delta u) \\ \mathcal{D}_u \cos(\kappa_u m_u \Delta u) &= -b_u \sin(\kappa_u m_u \Delta u) \end{aligned} \quad \text{con } b_u \equiv 2 \frac{\sin(\kappa_u \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \quad (u = x, y)$$

Haciendo uso de este resultado, es fácil obtener las siguientes expresiones cuando (3.75a) y (3.75b) son sustituidas en (3.73a), (3.73b), (3.73d) y (3.73e)

$$E_{oy(i,j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\kappa^2} (a_z b_y E_o - a_t \mu b_x H_o) \sin(\kappa_x i \Delta x) \cos(\kappa_y(j+\frac{1}{2})\Delta y) \quad (3.77a)$$

$$E_{ox(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{1}{\kappa^2} (a_z b_x E_o + a_t \mu b_y H_o) \cos(\kappa_x(i+\frac{1}{2})\Delta x) \sin(\kappa_y j \Delta y) \quad (3.77b)$$

$$H_{oy(i+\frac{1}{2},j)} = -\frac{1}{\kappa^2} (a_t \varepsilon b_x E_o + a_z b_y H_o) \cos(\kappa_x(i+\frac{1}{2})\Delta x) \sin(\kappa_y j \Delta y) \quad (3.77c)$$

$$H_{ox(i,j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\kappa^2} (a_t \varepsilon b_y E_o - a_z b_x H_o) \sin(\kappa_x i \Delta x) \cos(\kappa_y(j+\frac{1}{2})\Delta y) \quad (3.77d)$$

Todavía quedan por satisfacerse las ecuaciones (3.73c) y (3.73f). Si sustituimos (3.75a), (3.77a) y (3.77b) en (3.73d) obtenemos la siguiente condición de compatibilidad

$$\kappa^2 = b_x^2 + b_y^2 \quad (3.78)$$

Igual condición se obtendría en el requisito de satisfacer (3.73f), así pues, bajo estas condiciones queda asegurada la compatibilidad del esquema y el cumplimiento de las condiciones de contorno.

Para mayor claridad, mostraremos los resultados obtenidos, desacoplando la solución general en las usuales polarizaciones TE_{pq} y TM_{pq} .

Polarización TE_{pq} ($E_o = 0$); $p, q \in \mathbb{Z}^+$ pero sin que $p = q = 0$

$$\begin{aligned} E_{ox}(i+\frac{1}{2},j) &= 4j \frac{\mu}{\kappa^2} \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \frac{\text{sen}(\frac{q\pi}{b} \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} H_o \cos\left(\frac{p\pi}{a}(i+\frac{1}{2})\Delta x\right) \text{sen}\left(\frac{q\pi}{b}j\Delta y\right) \\ E_{oy}(i,j+\frac{1}{2}) &= -4j \frac{\mu}{\kappa^2} \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \frac{\text{sen}(\frac{p\pi}{a} \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} H_o \text{sen}\left(\frac{p\pi}{a}i\Delta x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{b}(j+\frac{1}{2})\Delta y\right) \\ E_{oz}(i,j) &= 0 \\ H_{ox}(i,j+\frac{1}{2}) &= 4j \frac{1}{\kappa^2} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \frac{\text{sen}(\frac{p\pi}{a} \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} H_o \text{sen}\left(\frac{p\pi}{a}i\Delta x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{b}(j+\frac{1}{2})\Delta y\right) \\ H_{oy}(i+\frac{1}{2},j) &= 4j \frac{1}{\kappa^2} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \frac{\text{sen}(\frac{q\pi}{b} \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} H_o \cos\left(\frac{p\pi}{a}(i+\frac{1}{2})\Delta x\right) \text{sen}\left(\frac{q\pi}{b}j\Delta y\right) \\ H_{oz}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}) &= H_o \cos\left(\frac{p\pi}{a}(i+\frac{1}{2})\Delta x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{b}(j+\frac{1}{2})\Delta y\right) \end{aligned}$$

Polarización TM_{pq} ($H_o = 0$); $p, q \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$

$$\begin{aligned} E_{ox}(i+\frac{1}{2},j) &= -4j \frac{1}{\kappa^2} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \frac{\text{sen}(\frac{p\pi}{a} \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} E_o \cos\left(\frac{p\pi}{a}(i+\frac{1}{2})\Delta x\right) \text{sen}\left(\frac{q\pi}{b}j\Delta y\right) \\ E_{oy}(i,j+\frac{1}{2}) &= -4j \frac{1}{\kappa^2} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \frac{\text{sen}(\frac{q\pi}{b} \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} E_o \text{sen}\left(\frac{p\pi}{a}i\Delta x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{b}(j+\frac{1}{2})\Delta y\right) \\ E_{oz}(i,j) &= E_o \text{sen}\left(\frac{p\pi}{a}i\Delta x\right) \text{sen}\left(\frac{q\pi}{b}j\Delta y\right) \\ H_{ox}(i,j+\frac{1}{2}) &= 4j \frac{\varepsilon}{\kappa^2} \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \frac{\text{sen}(\frac{q\pi}{b} \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} E_o \text{sen}\left(\frac{p\pi}{a}i\Delta x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{b}(j+\frac{1}{2})\Delta y\right) \\ H_{oy}(i+\frac{1}{2},j) &= -4j \frac{\varepsilon}{\kappa^2} \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \frac{\text{sen}(\frac{p\pi}{a} \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} E_o \cos\left(\frac{p\pi}{a}(i+\frac{1}{2})\Delta x\right) \text{sen}\left(\frac{q\pi}{b}j\Delta y\right) \\ H_{oz}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

Para que el análisis de las ecuaciones anteriores quede completo, es necesario observar el comportamiento de la dependencia funcional $\omega = \omega(\beta)$.

Se sabe que

$$\kappa^2 \equiv a_z^2 - a_t^2 \mu \varepsilon \quad \text{y también que} \quad \kappa^2 = b_x^2 + b_y^2 \quad (3.81)$$

así pues

$$a_t^2 \mu \varepsilon = a_z^2 - b_x^2 - b_y^2 \quad (3.82)$$

de donde se obtiene la solución física

$$\omega(\beta) = \frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(c\Delta t \sqrt{\frac{\text{sen}^2\left(\frac{p\pi}{a} \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x^2} + \frac{\text{sen}^2\left(\frac{q\pi}{b} \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y^2} + \frac{\text{sen}^2\left(\beta \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z^2}} \right) \quad (3.83)$$

con $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ y $\Delta t \leq \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$

que es la relación de dispersión numérica del modo pq en la guía.

Supongamos fijado el medio numérico por los valores concretos Δx , Δy y Δz , la geometría de la guía por a y b y consideremos un modo particular pq . Si escribimos $\lambda = R_z \Delta z$, esto es, $\beta = \frac{\pi}{R_z} \frac{\Delta z}{2}$ la relación (3.83) puede reescribirse en términos de la resolución R_z como

$$\omega(R_z) = \frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(c\Delta t \sqrt{\frac{\text{sen}^2\left(\frac{p\pi}{a} \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x^2} + \frac{\text{sen}^2\left(\frac{q\pi}{b} \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y^2} + \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{R_z}\right)}{\Delta z^2}} \right)$$

Como quiera que $2 \leq R_z < \infty$, se sigue

$$\omega_{min}^c < \omega \leq \omega_{max}^c$$

con

$$\omega_{min}^c = \lim_{R_z \rightarrow \infty} \omega(R_z) = \frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(c\Delta t \sqrt{\frac{\text{sen}^2\left(\frac{p\pi}{a} \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x^2} + \frac{\text{sen}^2\left(\frac{q\pi}{b} \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y^2}} \right) \quad (3.84)$$

$$\omega_{max}^c = \omega(R_z=2) = \frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(c\Delta t \sqrt{\frac{\text{sen}^2\left(\frac{p\pi}{a} \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x^2} + \frac{\text{sen}^2\left(\frac{q\pi}{b} \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \right) \quad (3.85)$$

En efecto, si $\omega < \omega_{min}^c$ entonces la constante β se hace imaginaria y la propagación desaparece, si $\omega > \omega_{max}^c$ entonces $R_z < 2$ y la señal queda indeterminada. Así pues, en el espacio numérico la frecuencia de un modo particular está acotada inferiormente por la frecuencia crítica ω_{min}^c y superiormente por ω_{max}^c .

3.4.2 Solución numérica para la guía dieléctrica planar

Continuaremos nuestro estudio del campo guiado resolviendo el esquema de Yee en otro ejemplo típico, la guía dieléctrica planar o slab. Este problema puede ser resuelto siguiendo la misma metodología que en el caso anterior, aunque los detalles matemáticos son diferentes, los principios involucrados son los mismos, como veremos a continuación.

Una guía slab es un medio estratificado constituido por tres capas dieléctricas separadas por superficies planas e infinitas, dichas capas son conocidas frecuentemente como: *núcleo*, *cubierta* y *sustrato*, y nos referiremos a ellas con los índices f , c y s , respectivamente, Figura 3.9. En nuestro estudio supondremos que los medios materiales que forman las tres capas de la guía son dieléctricos perfectos, lineales, homogéneos e isótropos no magnéticos. El núcleo, con límites planoparalelos en la dirección x pero con extensión infinita en las direcciones z

e y , tiene espesor $2d$ y parámetros (μ_o, ε_1) . La cubierta y el sustrato, ambas semiinfinitas, se suponen del mismo material, de parámetros (μ_o, ε_2) , en cuyo caso se dice que la guía es simétrica.

Se sobreentiende que la admisión de una extensión infinita representa la idealización de la estructura real, sin embargo, este hecho permite simplificar notablemente el problema matemático.

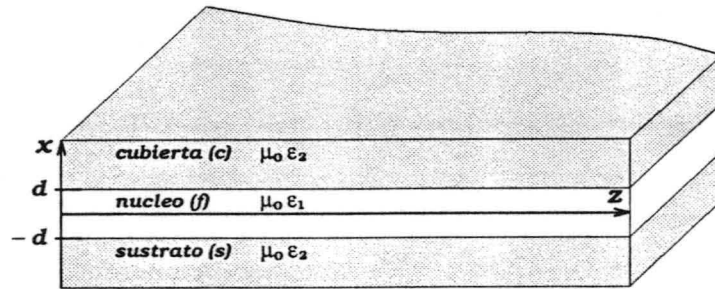


Figura 3.9: .

Para mayor claridad, iniciaremos nuestro estudio recordando la solución analítica y en breve abordaremos el estudio numérico.

Solución analítica

El problema analítico exige resolver las ecuaciones

$$\begin{cases} \mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \\ \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \end{cases} \quad (3.86)$$

en cada medio, junto con las condiciones de contorno

$$E_{2t} = E_{1t} \quad , \quad H_{2t} = H_{1t} \quad (3.87)$$

en las superficies de separación entre medios ($x = d$ y $x = -d$).

Trataremos de encontrar una solución en la forma de una onda que se propaga en la dirección de z y cuya amplitud sea función de x , es decir campos de la forma

$$\Psi_{(x,z)} = \Psi_o(x) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \quad (3.88)$$

cuya variación con y se supone nula, debido a la homogeneidad de la estructura en esta dirección.

Por tratarse de un problema bidimensional, la sustitución de (3.88) en (3.86) conduce a

un conjunto de seis ecuaciones desacopladas en dos sistemas independientes

$$TE_y \begin{cases} \frac{d^2 E_{oy}(x)}{dx^2} + (\omega^2 \mu_o \varepsilon - \beta^2) E_{oy}(x) = 0 \\ H_{ox}(x) = -\frac{\beta}{\omega \mu_o} E_{oy}(x) \\ H_{oz}(x) = \frac{\mathbf{j}}{\omega \mu_o} \frac{dE_{oy}(x)}{dx} \end{cases} \quad (3.89a)$$

$$TM_y \begin{cases} \frac{d^2 H_{oy}(x)}{dx^2} + (\omega^2 \mu_o \varepsilon - \beta^2) H_{oy}(x) = 0 \\ E_{ox}(x) = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} H_{oy}(x) \\ E_{oz}(x) = -\frac{\mathbf{j}}{\omega \varepsilon} \frac{dH_{oy}(x)}{dx} \end{cases} \quad (3.89b)$$

Así pues, la solución general se puede considerar como la superposición de dos ondas una TE_y y otra TM_y .

Se puede observar que para cualquiera de los dos casos se tiene que resolver una ecuación de la forma

$$\frac{d^2 \Psi_o(x)}{dx^2} + (\omega^2 \mu_o \varepsilon - \beta^2) \Psi_o(x) = 0$$

la cual debe ser satisfecha en las tres capas de la slab.

Esta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, cuya solución general puede obtenerse de las raíces de su ecuación característica

$$\begin{aligned} s^2 + (\omega^2 \mu_o \varepsilon - \beta^2) &= 0 \\ s_1 &= -\sqrt{\beta^2 - \omega^2 \mu_o \varepsilon} \\ s_2 &= +\sqrt{\beta^2 - \omega^2 \mu_o \varepsilon} \end{aligned}$$

Deben considerarse dos casos:

1. Si $(\beta^2 - \omega^2 \mu_o \varepsilon) > 0$ las raíces s_1 y s_2 son ambas reales y distintas, y la solución general es

$$\Psi_o(x) = A_1 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2 \mu_o \varepsilon} x} + A'_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2 \mu_o \varepsilon} x}$$

con A_1 y A'_1 constantes arbitrarias.

2. Si $(\beta^2 - \omega^2 \mu_o \varepsilon) < 0$ las raíces s_1 y s_2 son complejas, con parte real nula, en este caso la solución general se expresa como

$$\Psi_o(x) = A_o \cos\left(\sqrt{\omega^2 \mu_o \varepsilon - \beta^2} x\right) + A'_o \text{sen}\left(\sqrt{\omega^2 \mu_o \varepsilon - \beta^2} x\right)$$

con A_o y A'_o constantes arbitrarias.

Para poder hablar de ondas guiadas es necesario confinar la energía en las proximidades de núcleo, así pues, debemos imponer a los campos la condición de que sus amplitudes decrezcan a medida que nos alejamos de éste, por esta razón la solución para ondas guiadas debe ser exponencial decreciente en la cubierta y en el sustrato y armónica en el núcleo

$$\Psi_o(x) = \begin{cases} \Psi_{oc}(x) = A_1 e^{-\gamma x} & x > d \text{ cubierta} \\ \Psi_{of}(x) = A_o \cos(\kappa x) + A'_o \text{sen}(\kappa x) & -d < x < d \text{ núcleo} \\ \Psi_{os}(x) = A'_1 e^{\gamma x} & x < -d \text{ sustrato} \end{cases} \quad (3.90)$$

en donde se ha definido

$$\gamma \equiv \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \mu_o \epsilon_2} \quad , \quad \kappa \equiv \sqrt{\omega^2 \mu_o \epsilon_1 - \beta^2} \quad (3.91)$$

Los parámetros γ y κ , ambos reales y positivos, se denominan constantes transversales para la onda guiada, ya que sus valores determinan el perfil transversal del campo.

Nótese que para ondas guiadas, la constante de propagación está limitada por

$$\omega \sqrt{\mu_o \epsilon_2} < \beta < \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_1} \quad (3.92)$$

y en consecuencia una condición necesaria para tener ondas de este tipo es que $\epsilon_1 > \epsilon_2$.

En (3.90) la función $\Psi_o(x)$ contiene un total de seis constantes, y dependiendo de la polarización particular de que se trate, se identificará con $E_{oy}(x)$ o con $H_{oy}(x)$. Estas constantes no son independientes, ya que sus valores deben permitir el cumplimiento de las condiciones de contorno (3.87) en las fronteras $x = d$ y $x = -d$. Para satisfacer este requisito es necesario considerar por separado cada sumando de la solución para el núcleo

$$\Psi_{of}(x) = A_o \cos(\kappa x) \quad (A'_o = 0) \quad (3.93a)$$

$$\Psi_{of}(x) = A'_o \text{sen}(\kappa x) \quad (A_o = 0) \quad (3.93b)$$

las soluciones del primer tipo son llamadas *modos pares* y las del segundo tipo *modos impares*.

En lo que sigue particularizaremos el estudio a la polarización TE_y , de forma similar puede llevarse a cabo la investigación para el caso TM_y , cuya solución se presentará más adelante.

Modos guiados TE_y . Para modos pares

$$E_{oy}(x) = \begin{cases} E_{oyc}(x) = A_1 e^{-\gamma x} & x > d \\ E_{oyf}(x) = A_o \cos(\kappa x) & -d < x < d \\ E_{oys}(x) = A'_1 e^{\gamma x} & x < -d \end{cases} \quad (3.94)$$

las condiciones de contorno $E_{oyc}(x=d) = E_{oyf}(x=d)$ y $E_{oyf}(x=-d) = E_{oys}(x=-d)$ exigen

$$A_1 = A'_1 = A_o \cos(\kappa d) e^{\gamma d} \quad (3.95)$$

Por otra parte, la conservación de la componente H_z , cuya expresión puede obtenerse derivando el campo eléctrico según (3.89a), requiere para su cumplimiento la siguiente ligadura

$$\kappa \tan(\kappa d) = \gamma \quad (3.96)$$

Esta ecuación, que relaciona las constantes transversales γ y κ , es conocida como ecuación característica para modos pares. La constante A_o queda arbitraria y ella determinará el valor máximo del campo.

De forma similar, para modos impares

$$E_{oy}(x) = \begin{cases} E_{oyc}(x) = A_1 e^{-\gamma x} & x > d \\ E_{oyf}(x) = A'_o \text{sen}(\kappa x) & -d < x < d \\ E_{oyg}(x) = A'_1 e^{\gamma x} & x < -d \end{cases} \quad (3.97)$$

se obtendría

$$A_1 = -A'_1 = A'_o \text{sen}(\kappa d) e^{\gamma d} \quad (3.98)$$

siendo en este caso la ecuación característica

$$-\kappa \cot(\kappa d) = \gamma \quad (3.99)$$

La ecuación característica obtenidas para modos pares e impares junto con las expresiones (3.91) ligan las tres cantidades γ , κ y β , así pues, para determinar los valores de éstas, es necesario resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones

$$\begin{cases} \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \mu_o \epsilon_2} \\ \kappa = \sqrt{\mu_o \epsilon_1 \omega^2 - \beta^2} \\ \kappa f(\kappa d) = \gamma \end{cases} \quad (3.100)$$

en donde f representa (\tan) o ($-\cot$) dependiendo del modo particular de que se trate *par* o *impar*. De forma equivalente este sistema puede ser escrito convenientemente como

$$\begin{cases} (\gamma d)^2 + (\kappa d)^2 = R^2 \\ \kappa d f(\kappa d) = \gamma d \end{cases} \quad \text{con} \quad R \equiv \omega d \sqrt{\mu_o (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \quad (3.101)$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_o \epsilon_1 - \kappa^2}$$

Para poder determinar la terna de valores γ , κ y β , es necesario resolver un sistema de la forma

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = R^2 \\ x f(x) = y \end{cases} \quad (3.102)$$

con $x = \kappa d$ e $y = \gamma d$. Este es un sistema trascendente, que no admite una solución cerrada, siendo necesario recurrir al ordenador o a la vía gráfica para poder resolverlo. Esta última forma es de gran interés, pues no sólo permite obtener los valores aproximados de γ y κ , sino además permite deducir fácilmente importantes consecuencias.

La primera ecuación en (3.102) es la ecuación de una circunferencia de radio R en coordenadas $x = \kappa d$ e $y = \gamma d$. Las coordenadas de los puntos de intersección de dicha circunferencia con la curva $y = x f(x)$ permiten obtener los valores de γ y κ que satisfacen

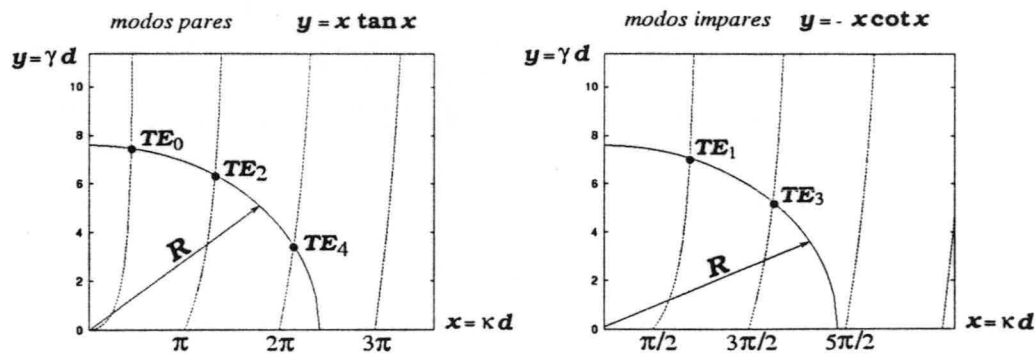


Figura 3.10: .

simultáneamente las dos ecuaciones en (3.102). En la Figura 3.10 se puede apreciar una situación típica en la resolución gráfica de este sistema.

Como se deduce de la figura, solo un conjunto discreto de valores (γ, κ) satisfacen el sistema (3.102) para un valor de R dado, y el número de soluciones aumenta con él. En consecuencia, sólo un conjunto discreto de modos guiados pueden ser propagados. Uno de tales modos han sido denotado como TE_m y nos referiremos a él como *modo de orden m* .

Del análisis gráfico se deduce que la condición de solución de un modo de orden m exige

$$R > m \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (3.103)$$

esto es, según (3.101)

$$\omega d \sqrt{\mu_o(\epsilon_1 - \epsilon_2)} > m \frac{\pi}{2} \quad (3.104)$$

Para una guía de parámetros $(d, \epsilon_1, \epsilon_2)$ prefijados, esta última expresión permite obtener el valor de la frecuencia crítica por debajo de la cual no es posible la existencia de un modo de orden m

$$\omega^c = \frac{m\pi}{2d\sqrt{\mu_o(\epsilon_1 - \epsilon_2)}} \quad (3.105)$$

Puede ser útil tener una referencia rápida de todas las posibles soluciones que pueden existir en una guía simétrica, las cuales serán comparadas con los resultados numéricos. De forma explícita, estas son

Polarización TE_y (analítica)	
<i>modos pares</i>	<i>modos impares</i>
$E_{oy}(x) = \begin{cases} A_o \cos(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ A_o \cos(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ A_o \cos(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$	$E_{oy}(x) = \begin{cases} A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ A'_o \operatorname{sen}(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ -A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$
$H_{oz}(x) = \begin{cases} -\frac{\beta}{\omega \mu_o} A_o \cos(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ -\frac{\beta}{\omega \mu_o} A_o \cos(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ -\frac{\beta}{\omega \mu_o} A_o \cos(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$	$H_{oz}(x) = \begin{cases} -\frac{\beta}{\omega \mu_o} A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ -\frac{\beta}{\omega \mu_o} A'_o \operatorname{sen}(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ \frac{\beta}{\omega \mu_o} A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$
$H_{ox}(x) = \begin{cases} -j \frac{\gamma}{\omega \mu_o} A_o \cos(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ -j \frac{\kappa}{\omega \mu_o} A_o \operatorname{sen}(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ j \frac{\gamma}{\omega \mu_o} A_o \cos(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$	$H_{ox}(x) = \begin{cases} -j \frac{\gamma}{\omega \mu_o} A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ j \frac{\kappa}{\omega \mu_o} A'_o \cos(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ -j \frac{\gamma}{\omega \mu_o} A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$
$\begin{cases} (\gamma d)^2 + (\kappa d)^2 = R^2 \\ \kappa d f(\kappa d) = \gamma d \end{cases} \quad \text{con } R = \omega d \sqrt{\mu_o(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \quad \text{y } f = \begin{cases} \tan & \text{para modos pares} \\ -\cot & \text{para modos impares} \end{cases}$ $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_o \epsilon_1 - \kappa^2}$	

Modos guiados TM_y.

Polarización TM_y (analítica)	
<i>modos pares</i>	<i>modos impares</i>
$H_{oy}(x) = \begin{cases} A_o \cos(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ A_o \cos(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ A_o \cos(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$	$H_{oy}(x) = \begin{cases} A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ A'_o \operatorname{sen}(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ -A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$
$E_{oz}(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\omega \epsilon_2} A_o \cos(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ \frac{\beta}{\omega \epsilon_1} A_o \cos(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ \frac{\beta}{\omega \epsilon_2} A_o \cos(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$	$E_{oz}(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\omega \epsilon_2} A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ \frac{\beta}{\omega \epsilon_1} A'_o \operatorname{sen}(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ -\frac{\beta}{\omega \epsilon_2} A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$
$E_{ox}(x) = \begin{cases} j \frac{\gamma}{\omega \epsilon_2} A_o \cos(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ j \frac{\kappa}{\omega \epsilon_1} A_o \operatorname{sen}(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ -j \frac{\gamma}{\omega \epsilon_2} A_o \cos(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$	$E_{ox}(x) = \begin{cases} j \frac{\gamma}{\omega \epsilon_2} A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{-\gamma(x-d)} & x \geq d \\ -j \frac{\kappa}{\omega \epsilon_1} A'_o \cos(\kappa x) & -d \leq x \leq d \\ j \frac{\gamma}{\omega \epsilon_2} A'_o \operatorname{sen}(\kappa d) e^{\gamma(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$
$\begin{cases} (\gamma d)^2 + (\kappa d)^2 = R^2 \\ \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \kappa d f(\kappa d) = \gamma d \end{cases} \quad \text{con } R = \omega d \sqrt{\mu_o(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \quad \text{y } f = \begin{cases} \tan & \text{para modos pares} \\ -\cot & \text{para modos impares} \end{cases}$ $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_o \epsilon_1 - \kappa^2}$	

Estudio numérico. Polarización TE_y

Supongamos una guía slab discreta tal y como muestra la Figura 3.11. Para este tipo de polarización, las ecuaciones que gobiernan la propagación son

$$\begin{cases} \mu_o \mathcal{D}_t H_x^n(i, k + \frac{1}{2}) = \mathcal{D}_z E_y^n(i, k + \frac{1}{2}) \\ \mu_o \mathcal{D}_t H_z^n(i + \frac{1}{2}, k) = -\mathcal{D}_x E_y^n(i + \frac{1}{2}, k) \\ \epsilon(i) \mathcal{D}_t E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, k) = \mathcal{D}_z H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) - \mathcal{D}_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, k) \end{cases} \quad (3.106)$$

con

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} \varepsilon_2 & i \geq i_d + 1 \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} & i = i_d \\ \varepsilon_1 & -i_d + 1 \leq i \leq i_d - 1 \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} & i = -i_d \\ \varepsilon_2 & i \leq -i_d - 1 \end{cases} \quad (3.107)$$

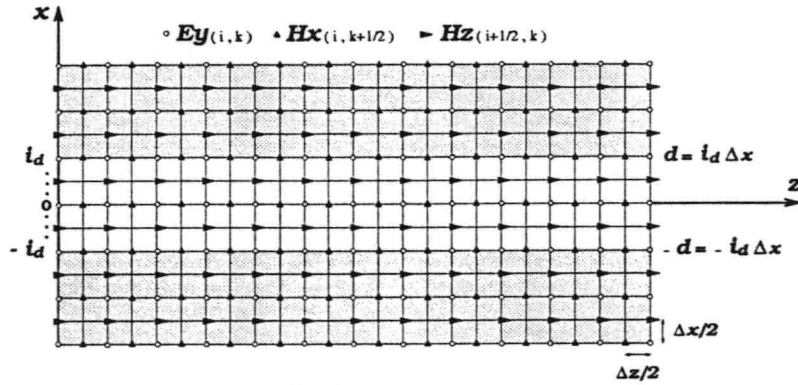


Figura 3.11: .

Trataremos de encontrar una solución a (3.106) admitiendo que los campos discretos poseen la forma

$$\Psi^{m_t(m_x, m_z)} = \Psi_o(m_x) e^{-j\beta m_z \Delta z} e^{j\omega m_t \Delta t} \quad (3.108)$$

Si se sustituye esta solución en (3.106) y se cancela los exponentes comunes, se encuentra que las amplitudes discretas han de satisfacer el sistema

$$\begin{cases} a_t \mu_o H_{ox}(i) = a_z E_{oy}(i) \\ a_t \mu_o H_{oz}(i+\frac{1}{2}) = -\mathcal{D}_x E_{oy}(i+\frac{1}{2}) \\ a_t \varepsilon(i) E_{oy}(i) = a_z H_{ox}(i) - \mathcal{D}_x H_{oz}(i) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_z = -j2 \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \\ a_t = j2 \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \end{cases} \quad (3.109)$$

Estudio numérico para modos pares. Para modos pares, se supone que las amplitudes discretas tienen la forma

$$\begin{aligned} E_{oy}(i) &= \begin{cases} E_{oyc}(m_x) = N_1 e^{-\gamma m_x \Delta x} & i \geq i_d + 1 \\ E_{oyf}(m_x) = N_o \cos(\kappa m_x \Delta x) & -i_d \leq i \leq i_d \\ E_{oys}(m_x) = N_1 e^{\gamma m_x \Delta x} & i \leq -i_d - 1 \end{cases} \\ H_{ox}(m_x) &= \begin{cases} H_{oxc}(m_x) = N_3 e^{-\gamma m_x \Delta x} & i \geq i_d + 1 \\ H_{oxf}(m_x) = N_2 \cos(\kappa m_x \Delta x) & -i_d \leq i \leq i_d \\ H_{oxs}(m_x) = N_3 e^{\gamma m_x \Delta x} & i \leq -i_d - 1 \end{cases} \\ H_{oz}(i+\frac{1}{2}) &= \begin{cases} H_{ozc}(m_x) = N_5 e^{-\gamma m_x \Delta x} & i \geq i_d \\ H_{ozf}(m_x) = N_4 \text{sen}(\kappa m_x \Delta x) & -i_d \leq i \leq i_d - 1 \\ H_{ozs}(m_x) = -N_5 e^{\gamma m_x \Delta x} & i \leq -i_d - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.110)$$

Nos proponemos ahora encontrar las cantidades numéricas γ , κ y N_u . Para ello será necesario estudiar la compatibilidad del sistema (3.109) en las tres regiones de la slab y en las dos interfases. Ahora bien, dada la simetría del problema sólo será necesario considerar la cubierta, el núcleo y la interfase cubierta-núcleo ya que el sustrato y la interfase núcleo-sustrato conducen a los mismos resultados.

Compatibilidad del esquema en la cubierta. En esta región el sistema (3.109) toma la forma

$$\begin{cases} a_t \mu_o H_{oxc}(i) = a_z E_{oyc}(i) \\ a_t \mu_o H_{ozc}(i+\frac{1}{2}) = -\mathcal{D}_x E_{oyc}(i+\frac{1}{2}) \\ a_t \varepsilon_2 E_{oyc}(i) = a_z H_{oxc}(i) - \mathcal{D}_x H_{ozc}(i) \end{cases} \quad (3.111)$$

De (3.110) se puede observar que es justa la siguiente identidad

$$\mathcal{D}_x \Psi_{oc(m_x)} = a_x \Psi_{oc(m_x)} \quad \text{con} \quad a_x \equiv -2 \frac{\sinh(\gamma \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} \quad (3.112)$$

pudiendo escribir

$$\begin{cases} a_t \mu_o H_{oxc}(i) = a_z E_{oyc}(i) \\ a_t \mu_o H_{ozc}(i+\frac{1}{2}) = -a_x E_{oyc}(i+\frac{1}{2}) \\ a_t \varepsilon_2 E_{oyc}(i) = a_z H_{oxc}(i) - a_x H_{ozc}(i) \end{cases} \quad (3.113)$$

después de anular los exponentes comunes se sigue

$$\begin{cases} a_t \mu_o N_3 = a_z N_1 \\ a_t \mu_o N_5 = -a_x N_1 \\ \varepsilon_2 a_t N_1 = a_z N_3 - a_x N_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_3 = \frac{a_z}{a_t \mu_o} N_1 \\ N_5 = -\frac{a_x}{a_t \mu_o} N_1 \\ a_t^2 \mu_o \varepsilon_2 = a_x^2 + a_z^2 \end{cases} \quad (3.114)$$

esto es

$$N_3 = -\frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} N_1 \quad (3.115a)$$

$$N_5 = -j \frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\sinh(\gamma \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} N_1 \quad (3.115b)$$

$$\frac{\sinh(\gamma \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z^2} - \mu_o \varepsilon_2 \frac{\text{sen}^2(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t^2}} \quad (3.115c)$$

siendo (3.115c) la versión numérica de (3.91).

Compatibilidad del esquema en el núcleo. En esta región se tiene

$$\begin{cases} a_t \mu_o H_{oxf}(i) = a_z E_{oyf}(i) \\ a_t \mu_o H_{ozf}(i+\frac{1}{2}) = -\mathcal{D}_x E_{oyf}(i+\frac{1}{2}) \\ a_t \varepsilon_1 E_{oyf}(i) = a_z H_{oxf}(i) - \mathcal{D}_x H_{ozf}(i) \end{cases} \quad (3.116)$$

Las siguientes igualdades son ciertas

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x \text{sen}(\kappa_x m_x \Delta x) &= b_x \cos(\kappa_x m_x \Delta x) \\ \mathcal{D}_x \cos(\kappa_x m_x \Delta x) &= -b_x \text{sen}(\kappa_x m_x \Delta x) \end{aligned} \quad \text{con} \quad b_x \equiv 2 \frac{\text{sen}(\kappa \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \quad (3.117)$$

lo que permite escribir

$$\begin{cases} a_t \mu_o N_2 = a_z N_o \\ a_t \mu_o N_4 = b_x N_o \\ a_t \varepsilon_1 N_o = a_z N_2 - b_x N_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} N_2 &= \frac{a_z}{a_t \mu_o} N_o \\ N_4 &= \frac{b_x}{a_t \mu_o} N_o \\ a_t^2 \mu_o \varepsilon_1 &= a_z^2 - b_x^2 \end{aligned} \quad (3.118)$$

esto es

$$N_2 = -\frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} N_o \quad (3.119a)$$

$$N_4 = -j \frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\kappa \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} N_o \quad (3.119b)$$

$$\frac{\text{sen}(\kappa \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \sqrt{\mu_o \varepsilon_1 \frac{\text{sen}^2(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t^2} - \frac{\text{sen}^2(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z^2}} \quad (3.119c)$$

siendo (3.119c) la versión numérica de (3.91).

De (3.115c) y (3.119c) se deduce que la constante de propagación numérica está limitada por

$$\frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \sqrt{\mu_o \varepsilon_2} < \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} < \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \sqrt{\mu_o \varepsilon_1} \quad (3.120)$$

que es precisamente la versión numérica de (3.92).

Compatibilidad del esquema en la interfase cubierta-núcleo. Es necesario estudiar las dos últimas ecuaciones del sistema (3.106) en $i = i_d$ las cuales relacionan los campos de cada medio

$$a_t \mu_o H_{ozc}(i_d + \frac{1}{2}) = -\frac{E_{oyc}(i_d + 1) - E_{oyf}(i_d)}{\Delta x} \quad (3.121a)$$

$$a_t \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} E_{oyf}(i_d) = a_z H_{oxf}(i_d) - \frac{H_{ozc}(i_d + \frac{1}{2}) - H_{ozf}(i_d - \frac{1}{2})}{\Delta x} \quad (3.121b)$$

de la primera de estas dos ecuaciones de interfase se obtiene

$$N_1 = \cos(\kappa d) e^{\gamma d} N_o \quad (3.122)$$

y de la segunda

$$\text{sen}(\kappa \Delta x) \tan(\kappa d) = \text{senh}(\gamma \Delta x) \quad (3.123)$$

que es la ecuación numérica característica de la guía para modos pares. Esta junto con (3.115c) y (3.119c) permiten determinar las cantidades numéricas γ , κ y β . Conjuntamente

$$\begin{cases} \frac{\sinh(\gamma \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} = \sqrt{\frac{\text{sen}^2(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z^2} - \mu_o \varepsilon_2 \frac{\text{sen}^2(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t^2}} \\ \frac{\text{sen}(\kappa \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} = \sqrt{\mu_o \varepsilon_1 \frac{\text{sen}^2(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t^2} - \frac{\text{sen}^2(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z^2}} \\ \text{sen}(\kappa \Delta x) \tan(\kappa d) = \sinh(\gamma \Delta x) \end{cases} \quad (3.124)$$

siendo este sistema la versión numérica de (3.100), el cual puede ser escrito en la forma (3.101) como

$$\begin{cases} \sinh^2(\gamma d \frac{\Delta x}{2d}) + \text{sen}^2(\kappa d \frac{\Delta x}{2d}) = \left(R \frac{\Delta x}{2d}\right)^2 \\ \text{sen}(\kappa d \frac{\Delta x}{d}) \tan(\kappa d) = \sinh(\gamma d \frac{\Delta x}{d}) \end{cases} \quad \text{con } R \equiv 2 \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} d \sqrt{\mu_o(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (3.125)$$

$$\beta = \frac{2}{\Delta z} \arcsen \left(\Delta z \sqrt{\mu_o \varepsilon_1 \frac{\text{sen}^2(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t^2} - \frac{\text{sen}^2(\kappa \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x^2}} \right)$$

Como resultado

$$E_{oy(i)} = \begin{cases} N_o \cos(\kappa d) e^{-\gamma(i\Delta x - d)} & i \geq i_d + 1 \\ N_o \cos(\kappa i \Delta x) & -i_d \leq i \leq i_d \\ N_o \cos(\kappa d) e^{\gamma(i\Delta x + d)} & i \leq -i_d - 1 \end{cases}$$

$$H_{oz(i)} = \begin{cases} -\frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} N_o \cos(\kappa d) e^{-\gamma(i\Delta x - d)} & i \geq i_d + 1 \\ -\frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} N_o \cos(\kappa i \Delta x) & -i_d \leq i \leq i_d \\ -\frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} N_o \cos(\kappa d) e^{\gamma(i\Delta x + d)} & i \leq -i_d - 1 \end{cases}$$

$$H_{oz(i+\frac{1}{2})} = \begin{cases} -j \frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\sinh(\gamma \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} N_o \cos(\kappa d) e^{-\gamma[(i+\frac{1}{2})\Delta x - d]} & i \geq i_d \\ -j \frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\kappa \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} N_o \text{sen}[\kappa(i+\frac{1}{2})\Delta x] & -i_d \leq i \leq i_d - 1 \\ j \frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\sinh(\gamma \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} N_o \cos(\kappa d) e^{\gamma[(i+\frac{1}{2})\Delta x + d]} & i \leq -i_d - 1 \end{cases}$$

Estudio numérico para modos impares. De forma similar se estudiarían los modos

impares

$$E_{oy(i)} = \begin{cases} N'_o \text{sen}(\kappa d) e^{-\gamma(i\Delta x - d)} & i \geq i_d + 1 \\ N'_o \text{sen}(\kappa i \Delta x) & -i_d \leq i \leq i_d \\ -N'_o \text{sen}(\kappa d) e^{\gamma(i\Delta x + d)} & i \leq -i_d - 1 \end{cases}$$

$$H_{ox(i)} = \begin{cases} -\frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} N'_o \text{sen}(\kappa d) e^{-\gamma(i\Delta x - d)} & i \geq i_d + 1 \\ -\frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} N'_o \text{sen}(\kappa i \Delta x) & -i_d \leq i \leq i_d \\ \frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} N'_o \text{sen}(\kappa d) e^{\gamma(i\Delta x + d)} & i \leq -i_d - 1 \end{cases}$$

$$H_{oz(i+\frac{1}{2})} = \begin{cases} -j \frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{senh}(\gamma \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} N'_o \text{sen}(\kappa d) e^{-\gamma[(i+\frac{1}{2})\Delta x - d]} & i \geq i_d \\ j \frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{sen}(\kappa \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} N'_o \cos[\kappa(i+\frac{1}{2})\Delta x] & -i_d \leq i \leq i_d - 1 \\ -j \frac{\Delta t}{\mu_o \text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})} \frac{\text{senh}(\gamma \frac{\Delta z}{2})}{\Delta x} N'_o \text{sen}(\kappa d) e^{\gamma[(i+\frac{1}{2})\Delta x + d]} & i \leq -i_d - 1 \end{cases}$$

Para modos impares las catidades γ , κ y β pueden ser obtenidas del sistema (3.125) sin más que sustituir $\tan(\kappa d)$ por $-\cot(\kappa d)$.

Finalizaremos esta sección considerando dos ejemplos sencillos que pondrán de manifiesto la certeza de los resultados obtenidos y algunas propiedades importantes deducibles de ellos.

Ejemplo 1. Supongamos una guía slab como la mostrada en la Figura 3.12, con los siguientes valores: $d = 0.3\mu\text{m}$, $n_1 = 1.5$ y $n_2 = 1$.

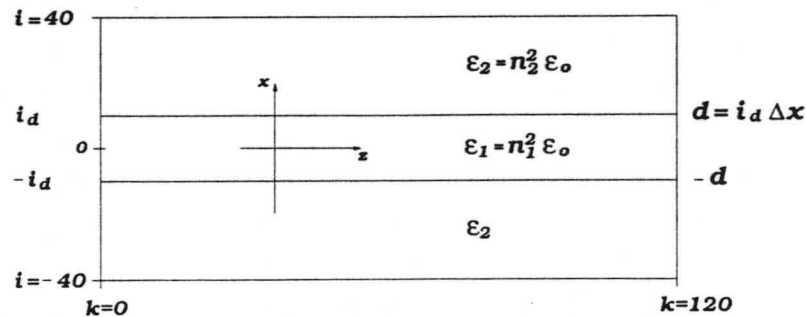


Figura 3.12: .

Para una frecuencia $\omega = \sqrt{0.128\pi} \cdot 10^{15}$, el sistema analítico (3.101) muestran que esta

guía admite como única solución el modo fundamental TE_0 , de parámetros

$$TE_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma d = 0.935208 \\ \kappa d = 0.839359 \\ \beta = 4.87388 \cdot 10^6 \end{array} \right. \quad (\text{analítico})$$

Para abordar el problema numérico fijaremos en primer lugar una resolución analítica en la dirección de propagación, de valor $R_z(\text{ana.}) = \lambda(\text{ana.})/\Delta z = 8$, lo que implica un $\Delta z = 0.161144 \mu m$. En lo que sigue se tomará $\Delta t = \sqrt{\mu_0 \epsilon_2} / (\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2})$ con $\Delta x = d/i_d$. El incremento espacial Δx ha sido escrito en función del número de muestras espaciales tomadas para determinar el perfil transversal del modo en el núcleo, cuanto mayor sea i_d menor es Δx y una mayor precisión es obtenida. Cuantitativamente el error cometido en la determinación de los parámetros numéricos γd , κd y β , puede ser convenientemente visualizado representando la solución gráfica del sistema numérico (3.125) junto con la analítica, tal y como muestra la Figura 3.13 para dos valores distintos de i_d .

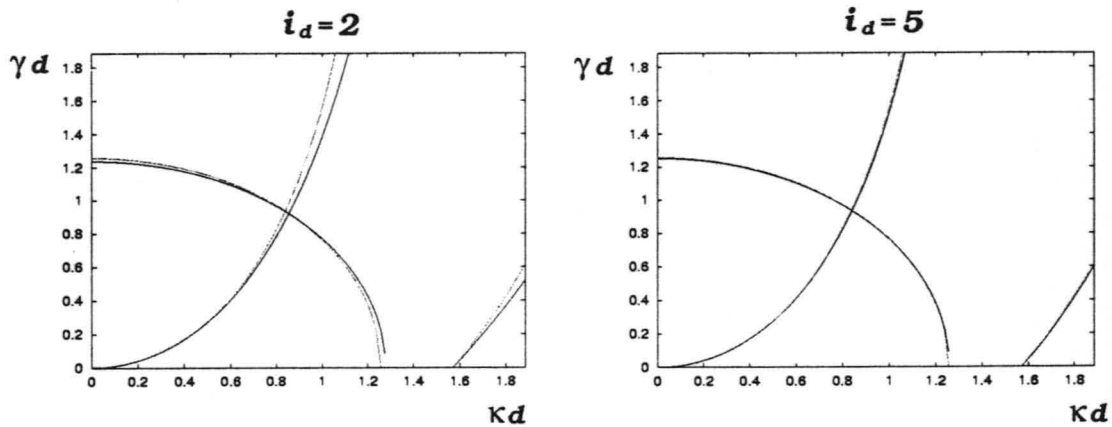


Figura 3.13: .

Tomando $i_d = 5$ ($\Delta x = 0.06 \mu m$), se obtienen los siguientes valores numéricos

$$TE_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma d = 0.932445 \\ \kappa d = 0.838435 \\ \beta = 4.99968 \cdot 10^6 \end{array} \right. \quad (\text{numérico})$$

Para ser exactos, la resolución verdadera en la guía ha de ser obtenida de la constante de propagación numérica, $R_z(\text{num.}) = \lambda(\text{num.})/\Delta z = 7.79871$

Haciendo uso de estos resultados, se ha simulado mediante FDTD la propagación de este modo en dos casos. En el primero de ellos, Figura 3.14, se ha iluminado con la función analítica discretizada (curva punteada), sobre ella se ha superpuesto el campo discreto propagado por el esquema después de 2000 iteraciones. Se comprueba que los diferentes valores para $\beta(\text{ana.})$ y $\beta(\text{num.})$ producen un error de fase que va creciendo con la distancia al origen del plano de iluminación (iniciado en $k = 0$).

En el segundo caso Figuras 3.15 y 3.16, se ha iluminado con el modo numérico y se comprueba que éste es efectivamente el propagado por el esquema, quedando comprobada

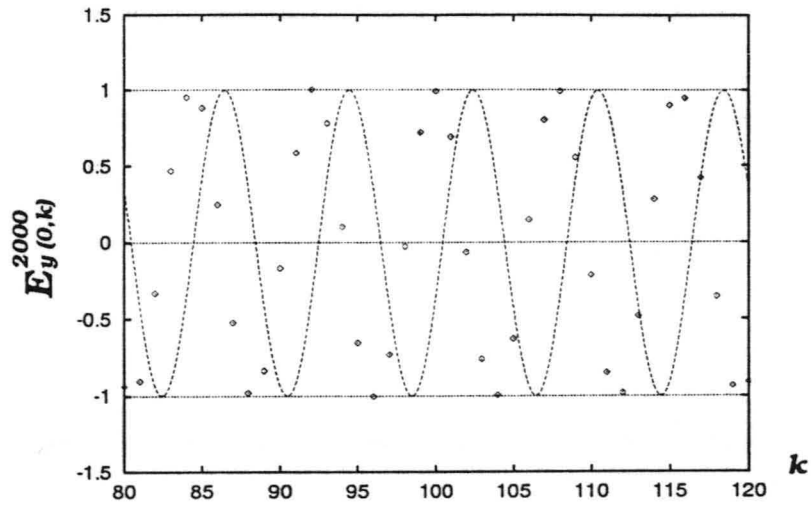


Figura 3.14: .

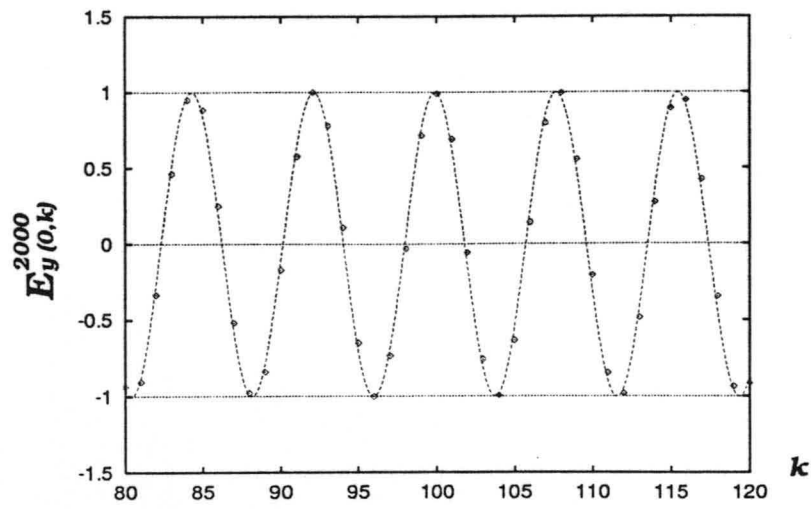


Figura 3.15: .

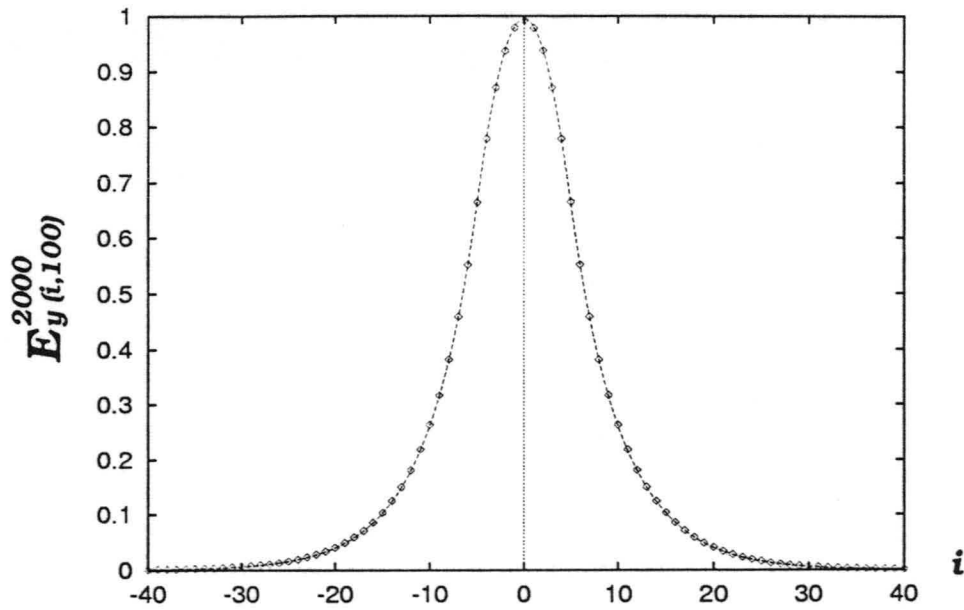


Figura 3.16: .

la validez de los resultados obtenidos.

Ejemplo 2. La guía slab considerada en este ejemplo es idéntica a la del caso anterior, pero ahora se incrementara la frecuencia a un valor $\omega = \sqrt{4.802\pi} \cdot 10^{15}$, aumentando en consecuencia el número de modos soportados por ella.

Para $\Delta z = 0.0125\mu m$ y $i_d = 5$ ($\Delta x = 0.06\mu m$) las posibles soluciones numéricas, son mostradas en la Figura 3.17 junto con las analíticas. De su interpretación se deduce un error considerable, el modo impar TE_5 es solución del problema numérico pero no de su análogo analítico. Los parámetros que caracterizan este modo son

$$TE_5 \quad \begin{cases} \gamma d = 2.41922 \\ \kappa d = 8.14278 \\ \beta = 2.43728 \cdot 10^7 (\Rightarrow R_z = 20.6236) \end{cases} \quad \text{(numérico)}$$

En la Figura 3.18 se muestra la propagación longitudinal de este modo que demuestra su existencia en el medio numérico aún no siendo una solución analítica para la guía que se pretende simular .

Para eliminar este modo no deseado bastará con aumentar i_d , tal y como muestra la Figura 3.19.

Los ejemplos aquí descritos muestran que disponemos de una útil herramienta, las ecuaciones numéricas, que no sólo permiten tener un conocimiento más profundo de los procesos numéricos sino que además permite cuantificar, predecir y evitar los posibles errores antes de una simulación computacional.

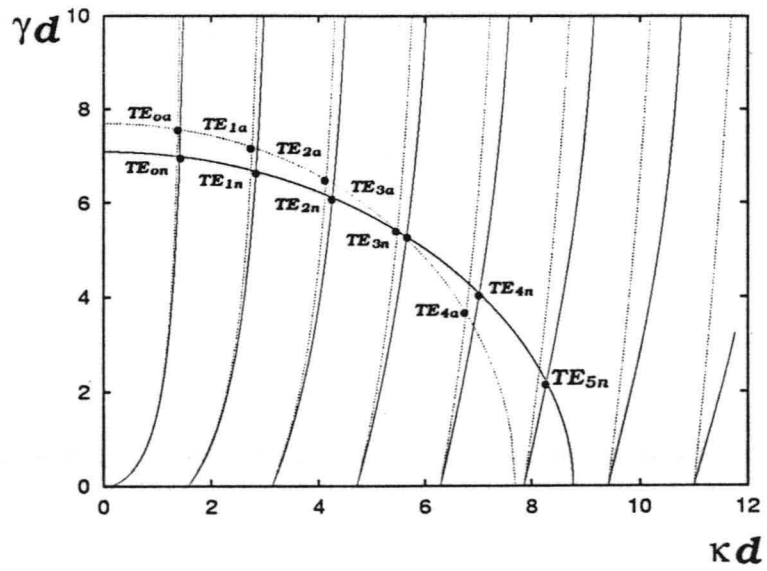


Figura 3.17: .

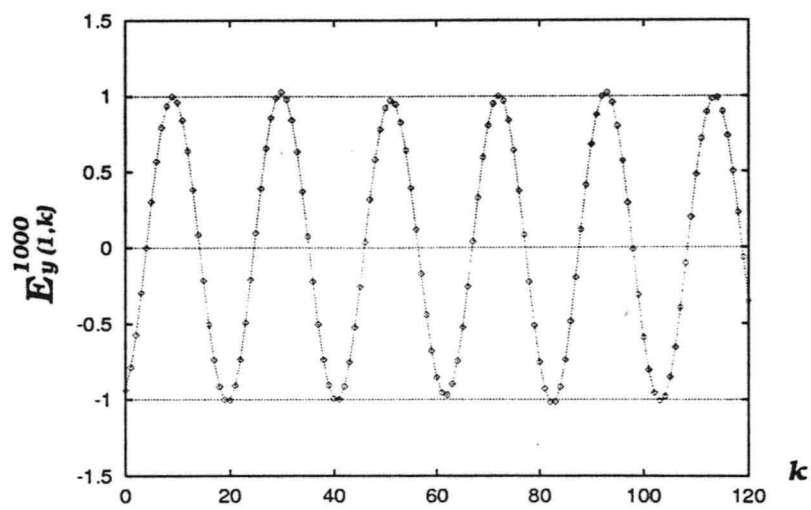


Figura 3.18: .

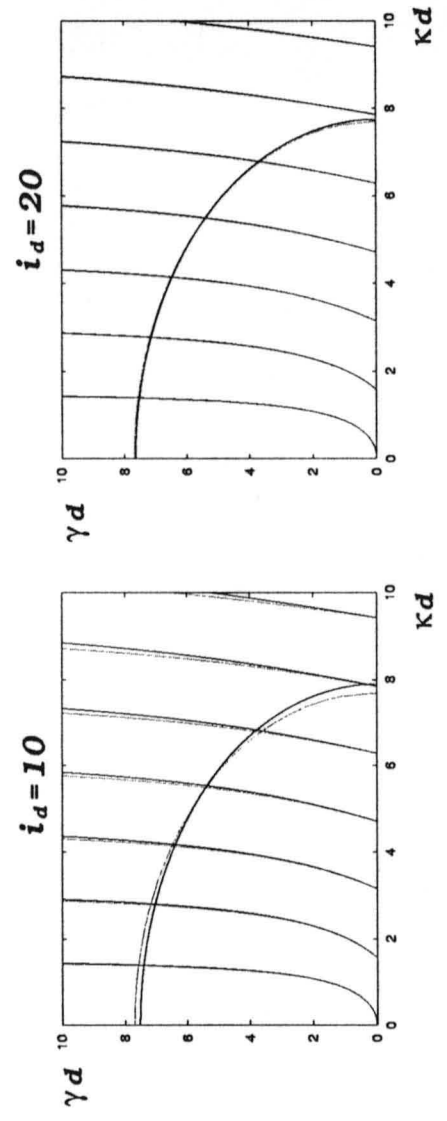


Figura 3.19: .

Capítulo 4

Estudio numérico en medios anisótropos

4.1 *Introducción*

En este capítulo se procede de una forma muy similar al precedente, con la diferencia de que ahora se consideran medios dieléctricamente anisótropos y se toma como punto de partida el esquema de Dos Nudos. Este esquema será resuelto de la misma forma sistemática que se ha utilizado para el esquema de Yee en el caso isótropo. Los detalles matemáticos serán diferentes, y por lo general más complicados, pero los principios involucrados son los mismos.

Dada la complejidad de estos medios, se abordará tan solo el estudio numérico de ondas planas en medios indefinidos. Como resultado, se obtendrá la relación de dispersión numérica, la relación de estructura y las velocidades de fase de las dos posibles soluciones permitidas en estos medios. Se dará la ley de transformación numérica que permite pasar de un sistema de referencia a otro y se introducirá el concepto de eje óptico numérico.

4.2 *Comportamiento de una onda plana discretas en un medio numérico dieléctricamente anisótropo*

Se desea aquí encontrar las condiciones bajo las cuales una onda plana monocromática discreta es solución del esquema (2.43). Así pues, sean dados los reales positivos Δx , Δy y Δz , y supongamos fijado un sistema de referencia xyz cuya orientación respecto de los ejes principales $x'y'z'$ esta definida por una cierta matriz de giro \tilde{G} conocida. En particular el sistema xyz podrá coincidir con $x'y'z'$.

Una onda plana monocromática discreta, de constante de propagación $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, de frecuencia angular ω y propagandose en la dirección dada por el vector unitario \hat{n} de componentes n_x , n_y y n_z será de la forma

$$\Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = \Psi_o e^{-j\beta(n_x m_x \Delta x + n_y m_y \Delta y + n_z m_z \Delta z)} e^{j\omega m_t \Delta t} \quad (4.1)$$

donde $\vec{\Psi} = (\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z)^t$ representa un campo \vec{E} o \vec{H} .

Procediendo de forma análoga al capítulo anterior, es fácil comprobar que una componente cartesiana del campo $\vec{\Psi}$, que representaremos genéricamente como Ψ , es autofunción de los operadores \mathcal{D}_u y \mathcal{P}_u ($u = x, y, z, t$) con autovalores

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = a_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} \\ a_u \equiv -2j \frac{\text{sen}(\beta n_u \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \quad (u = x, y, z) \\ a_t \equiv 2j \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = a'_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} \\ a'_u \equiv \cos(\beta n_u \frac{\Delta u}{2}) \quad (u = x, y, z) \\ a'_t \equiv \cos(\omega \frac{\Delta t}{2}) \end{array} \right.$$

De la propiedad (2.5) se sigue, para los operadores $\hat{\mathcal{D}}_u$ ($u = x, y, z$) definidos en (2.40)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathcal{D}}_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = \hat{a}_u \Psi^{m_t(m_x, m_y, m_z)} \\ \hat{a}_x \equiv a_x a'_y a'_z = -j\alpha_x \\ \hat{a}_y \equiv a_y a'_x a'_z = -j\alpha_y \\ \hat{a}_z \equiv a_z a'_x a'_y = -j\alpha_z \end{array} \right. \quad (4.2)$$

donde hemos introducido las cantidades α_x , α_y y α_z como

$$\begin{aligned} \alpha_x &\equiv 2 \frac{\text{sen}(\beta n_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \cos(\beta n_y \frac{\Delta y}{2}) \cos(\beta n_z \frac{\Delta z}{2}) \\ \alpha_y &\equiv 2 \frac{\text{sen}(\beta n_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} \cos(\beta n_x \frac{\Delta x}{2}) \cos(\beta n_z \frac{\Delta z}{2}) \\ \alpha_z &\equiv 2 \frac{\text{sen}(\beta n_z \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \cos(\beta n_x \frac{\Delta x}{2}) \cos(\beta n_y \frac{\Delta y}{2}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

También sera conveniente definir la cantidad α_t en la forma

$$\alpha_t \equiv 2 \frac{\text{sen}(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \quad (4.4)$$

así escribiremos $j\alpha_t$ para el autovalor temporal a_t del operador D_t .

Como consecuencia de lo anterior, la actuación del operador matriz (2.42) sobre un campo $\vec{\Psi}$ dará como resultado

$$\vec{D} \vec{\Psi}^{m_t(m_x, m_y, m_z)} = -j\tilde{\alpha} \vec{\Psi}^{m_t(m_x, m_y, m_z)} \quad \text{con} \quad \tilde{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Una vez fijada la terminología usada, pasaremos a resolver el problema que nos ocupa.

4.2.1 Ecuación de dispersión y velocidad de fase numérica en medios biáxico y uniáxicos. Ley de transformación numérica por rotación del sistema de referencia

Sustituyendo la solución propuesta en (2.43) y teniendo en cuenta (4.5), el esquema de Dos Nudos para el campo discreto de una onda plana monocromática puede ser escrito, después

de anular el factor exponencial común, como

$$\begin{cases} \alpha_t \mu \vec{H}_o = \tilde{\alpha} \vec{E}_o \\ \alpha_t \tilde{\varepsilon} \vec{E}_o = -\tilde{\alpha} \vec{H}_o \end{cases} \quad (4.6)$$

o equivalentemente como

$$\begin{cases} \vec{H}_o = \frac{1}{\alpha_t \mu} \tilde{\alpha} \vec{E}_o \\ (\alpha_t^2 \mu \tilde{\varepsilon} + \tilde{\alpha}^2) \vec{E}_o = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

La condición de compatibilidad de este sistema exige que se anule el determinante

$$|\alpha_t^2 \mu \tilde{\varepsilon} + \tilde{\alpha}^2| = 0$$

en su forma más general

$$\begin{vmatrix} \alpha_t^2 \mu \varepsilon_{xx} - \alpha_y^2 - \alpha_z^2 & \alpha_t^2 \mu \varepsilon_{xy} + \alpha_x \alpha_y & \alpha_t^2 \mu \varepsilon_{xz} + \alpha_x \alpha_z \\ \alpha_t^2 \mu \varepsilon_{xy} + \alpha_x \alpha_y & \alpha_t^2 \mu \varepsilon_{yy} - \alpha_x^2 - \alpha_z^2 & \alpha_t^2 \mu \varepsilon_{yz} + \alpha_y \alpha_z \\ \alpha_t^2 \mu \varepsilon_{xz} + \alpha_x \alpha_z & \alpha_t^2 \mu \varepsilon_{yz} + \alpha_y \alpha_z & \alpha_t^2 \mu \varepsilon_{zz} - \alpha_x^2 - \alpha_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

Esta es la *ecuación de dispersión numérica*, su resolución para $\omega \in \mathbf{R}^+$ determinara la *relación de dispersión*, esto es, la dependencia funcional $\omega = \omega(\beta, \tilde{\alpha})$.

En lugar de desarrollar este determinante indiscriminadamente, resultará conveniente simplificar un poco las cosas a partir de las consideraciones siguientes.

Ley de transformación numérica. En el sistema de ejes principales las ecuaciones de interes tomaran la forma

$$\begin{cases} \vec{H}'_o = \frac{1}{\alpha_t \mu} \tilde{\alpha}' \vec{E}'_o \\ (\alpha_t^2 \mu \tilde{\varepsilon}' + \tilde{\alpha}'^2) \vec{E}'_o = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

en donde el indice prima indica, como de constumbre, que las componentes cartesianas estan dadas en esta referencia.

Por otra parte, teniendo en cuenta la ortogonalidad de la matriz de giro $\tilde{G}^t \tilde{G} = \tilde{I}$ y la indentida $\tilde{\varepsilon} = \tilde{G}^t \tilde{\varepsilon}' \tilde{G}$, el sistema (4.7) puede reescribirse equivalentemente como

$$\begin{cases} \tilde{G} \vec{H}_o = \frac{1}{\alpha_t \mu} (\tilde{G} \tilde{\alpha} \tilde{G}^t) \tilde{G} \vec{E}_o \\ [\alpha_t^2 \mu \tilde{\varepsilon}' + (\tilde{G} \tilde{\alpha} \tilde{G}^t)^2] \tilde{G} \vec{E}_o = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Comparando éste con (4.9) vemos, que el uno se pueden obtener del otro haciendo el cambio

$$\begin{matrix} \vec{H}'_o = \tilde{G} \vec{H}_o \\ \vec{E}'_o = \tilde{G} \vec{E}_o \end{matrix}, \quad \begin{cases} \alpha'_x = a_x \alpha_x + a_y \alpha_y + a_z \alpha_z \\ \alpha'_y = b_x \alpha_x + b_y \alpha_y + b_z \alpha_z \\ \alpha'_z = c_x \alpha_x + c_y \alpha_y + c_z \alpha_z \end{cases} \quad (4.11)$$

Este resultado facilita la resolución del problema, pues sin pérdida de generalidad se puede tomar como sistema de referencia los ejes principales, cualquier consecuencia derivada en él puede ser directamente trasladada a cualquier otra referencia haciendo uso de la ley de transformación expresada por el sistema de ecuaciones anterior.

Resolución de la ecuación de dispersión. Velocidad de fase numérica. En el sistema de ejes principales el tensor dieléctrico es diagonal y la ecuación de dispersión adopta la forma simple

$$\begin{vmatrix} \alpha_t^2 \mu \varepsilon_x - \alpha_x'^2 - \alpha_z'^2 & \alpha_x' \alpha_y' & \alpha_x' \alpha_z' \\ \alpha_x' \alpha_y' & \alpha_t^2 \mu \varepsilon_y - \alpha_x'^2 - \alpha_z'^2 & \alpha_y' \alpha_z' \\ \alpha_x' \alpha_z' & \alpha_y' \alpha_z' & \alpha_t^2 \mu \varepsilon_z - \alpha_x'^2 - \alpha_y'^2 \end{vmatrix} = 0$$

El cálculo de este determinante conduce a la siguiente ecuación

$$\alpha_t^4 - b\alpha_t^2 + c = 0 \quad \text{con} \quad (4.12)$$

$$b \equiv (v_y^2 + v_z^2)\alpha_x'^2 + (v_x^2 + v_z^2)\alpha_y'^2 + (v_x^2 + v_y^2)\alpha_z'^2$$

$$c \equiv (v_y^2 v_z^2 \alpha_x'^2 + v_x^2 v_z^2 \alpha_y'^2 + v_x^2 v_y^2 \alpha_z'^2) (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2)$$

y siendo v_x , v_y y v_z las *velocidades principales*, definidas de la forma usual

$$v_u \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon_u}} \quad (u = x, y, z) \quad (4.13)$$

Para un valor de β dado y fijada la dirección de propagación $\hat{n}' = (n'_x, n'_y, n'_z)$, la ecuación (4.12) es cuadrática en α_t^2 con coeficientes reales, admitiendo en el caso más general dos soluciones positivas

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \quad (4.14)$$

Sustituyendo α_t por su valor según (4.4) y resolviendo para $\omega \in \mathbf{R}^+$, se obtiene la relación de dispersión numérica correspondiente a cada una de las dos posibles soluciones

$$\omega(\beta, \hat{n}') = \frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \right) \quad \text{con} \quad \frac{\Delta t}{2} \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \leq 1 \quad (4.15)$$

Para cualquier valor de β y dirección de propagación, la desigualdad anterior queda asegurada si

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\Delta x}{v_y}, \frac{\Delta x}{v_z}, \frac{\Delta y}{v_x}, \frac{\Delta y}{v_z}, \frac{\Delta z}{v_x}, \frac{\Delta z}{v_y} \right\} \quad (4.16)$$

que es el criterio de estabilidad en el caso planteado.

Otra cantidad de interés es la velocidad de fase numérica, dada por el cociente entre la frecuencia angular y la constante de propagación. Así pues, de (4.15) se sigue

$$v_{(\beta, \hat{n}')} = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \right)}{\beta} \quad (4.17)$$

el estudio detallado de esta función se llevará a cabo en secciones venideras.

La ley de transformación (4.11) permite expresar los resultados obtenidos en cualquier otro sistema de referencia xyz . En concreto, haciendo uso de (4.12) la ecuación de dispersión en su forma general (4.8) puede ser escrita como

$$\alpha_t^4 - b\alpha_t^2 + c = 0 \quad \text{con} \quad (4.18)$$

$$b = (v_y^2 + v_z^2)(a_x\alpha_x + a_y\alpha_y + a_z\alpha_z)^2 + (v_x^2 + v_z^2)(b_x\alpha_x + b_y\alpha_y + b_z\alpha_z)^2 + (v_x^2 + v_y^2)(c_x\alpha_x + c_y\alpha_y + c_z\alpha_z)^2$$

$$c = [v_y^2v_z^2(a_x\alpha_x + a_y\alpha_y + a_z\alpha_z)^2 + v_x^2v_z^2(b_x\alpha_x + b_y\alpha_y + b_z\alpha_z)^2 + v_x^2v_y^2(c_x\alpha_x + c_y\alpha_y + c_z\alpha_z)^2] (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2)$$

estando ahora las componentes cartesianas n_x , n_y y n_z referidas a los ejes del nuevo sistema de referencia, cuya orientación respecto de los ejes principales queda definida por la matriz de giro \tilde{G} de elementos a_u , b_u y c_u dados.

Relación de Estructura en el Medio Numérico. Del análisis precedente se concluye, que el esquema de Dos Nudos para el campo discreto de una onda plana monocomática

$$\begin{cases} \alpha_t \mu \vec{H}_o = \tilde{\alpha} \vec{E}_o \\ \alpha_t \tilde{\epsilon} \vec{E}_o = -\tilde{\alpha} \vec{H}_o \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{H}_o = \frac{1}{\alpha_t \mu} \tilde{\alpha} \vec{E}_o \\ (\alpha_t^2 \mu \tilde{\epsilon} + \tilde{\alpha}^2) \vec{E}_o = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

admite solución distinta de la trivial para $\omega \in \mathbf{R}^+$, si α_t toma los valores α_{t1} o α_{t2}

$$\begin{aligned} \alpha_{t1} = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} &\Rightarrow v_{1(\beta, \hat{n})} = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \right)}{\beta} \\ \alpha_{t2} = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} &\Rightarrow v_{2(\beta, \hat{n})} = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \right)}{\beta} \end{aligned}$$

Es claro pues, que dado un valor de β y una dirección de propagación, existen dos posibles soluciones físicamente aceptables $\{\vec{E}_1, \vec{H}_1\}$ y $\{\vec{E}_2, \vec{H}_2\}$, que satisfacen simultáneamente el esquema de Dos Nudos, propagándose estas, con velocidades de fase numéricas $v_{1(\beta, \hat{n})}$ y $v_{2(\beta, \hat{n})}$. La relación de estructura que caracteriza estas soluciones, se obtiene al sustituir α_t por sus valores posibles α_{t1} ó α_{t2} . La relativa simplicidad de los medios uniaxiales permitirá profundizar más en este aspecto, por ahora nos limitaremos a obtener algunos resultados de carácter general.

Si representaremos por $\vec{\alpha}$ un vector de componentes α_x , α_y y α_z , y por \vec{D}_o el vector desplazamiento eléctrico $\vec{\epsilon}\vec{E}_o$, las ecuaciones matriciales (4.19) pueden reescribirse vectorialmente como

$$\begin{cases} \alpha_t \mu \vec{H}_o = \vec{\alpha} \wedge \vec{E}_o \\ \alpha_t \vec{D}_o = -\vec{\alpha} \wedge \vec{H}_o \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{H}_o = \frac{1}{\alpha_t \mu} \vec{\alpha} \wedge \vec{E}_o \\ \alpha_t^2 \mu \vec{D}_o + (\vec{\alpha} \cdot \vec{E}_o) \vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}) \vec{E}_o = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

De su interpretación se deducen los siguientes enunciados.

Proposición El vector \vec{H}_o es perpendicular a $\vec{\alpha}$, \vec{E}_o y \vec{D}_o , y $\vec{\alpha}$ es perpendicular a \vec{D}_o . Por lo tanto, los cuatro vectores estarán relativamente como indica la Figura 4.1. Los vectores \vec{D}_o , \vec{E}_o y $\vec{\alpha}$, perpendiculares a \vec{H}_o , son coplanarios; y \vec{D}_o , \vec{H}_o y $\vec{\alpha}$ forman un trirectángulo directo.

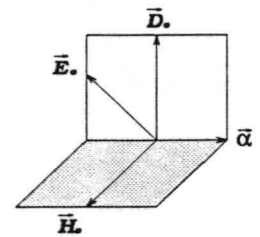


Figura 4.1:

Proposición Los vectores \vec{D}_{o1} y \vec{D}_{o2} correspondientes a las soluciones α_{t1} y α_{t2} son mutuamente perpendiculares, Figura 4.2.

Demostración. Partimos del sistema de ejes principales y de la ecuación vectorial

$$\alpha_t^2 \mu \vec{D}'_o + (\vec{\alpha}' \cdot \vec{E}'_o) \vec{\alpha}' - (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\alpha}') \vec{E}'_o = 0$$

la cual representa tres ecuaciones escalares que escribimos como

$$\alpha_t^2 \mu D'_{ou} - (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\alpha}') E'_{ou} = -(\vec{\alpha}' \cdot \vec{E}'_o) \alpha'_u \quad (u = x, y, z)$$

Sustituyendo E'_{ou} por $\frac{D'_{ou}}{\epsilon_u}$, en el lado izquierdo de esta ecuación, podemos escribir

$$D'_{ou} = -(\vec{\alpha}' \cdot \vec{E}'_o) \frac{\alpha'_u}{\mu (\alpha_t^2 - v_u^2 (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\alpha}'))} \quad (u = x, y, z)$$

Evaluando el producto escalar de \vec{D}'_{o1} y \vec{D}'_{o2} obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{D}'_{o1} \cdot \vec{D}'_{o2} &= \frac{(\vec{\alpha}' \cdot \vec{E}'_{o1})(\vec{\alpha}' \cdot \vec{E}'_{o2})}{\mu} \sum_{u=x,y,z} \frac{\alpha_u'^2}{(\alpha_{t1}^2 - v_u^2 (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\alpha}')) (\alpha_{t2}^2 - v_u^2 (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\alpha}'))} \\ &= -\frac{(\vec{\alpha}' \cdot \vec{E}'_{o1})(\vec{\alpha}' \cdot \vec{E}'_{o2})}{\mu (\alpha_{t1}^2 - \alpha_{t2}^2)} \left[\sum_{u=x,y,z} \frac{\alpha_u'^2}{\alpha_{t1}^2 - v_u^2 (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\alpha}')} - \sum_{u=x,y,z} \frac{\alpha_u'^2}{\alpha_{t2}^2 - v_u^2 (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\alpha}')} \right] \\ &= -\frac{(\vec{\alpha}' \cdot \vec{E}'_{o1})(\vec{\alpha}' \cdot \vec{E}'_{o2})}{\mu (\alpha_{t1}^2 - \alpha_{t2}^2)} [(\alpha_{t1}^4 - b\alpha_{t1}^2 + c) - (\alpha_{t2}^4 - b\alpha_{t2}^2 + c)] \end{aligned}$$

donde los terminos b y c que aparecen aquí, son idénticos a los presentes en la ecuación de dispersión. Al ser α_{t1} y α_{t2} soluciones de ella, resulta que el termino entre corchetes es idénticamente nulo, con lo que $\vec{D}'_{o1} \cdot \vec{D}'_{o2} = 0$. Si ahora se tiene en cuenta (4.11) es evidente que esta afirmación sigue siendo cierta en cualquier otro sistema de referencia, quedando demostrada la perpendicularidad de estos vectores.

Observación En general, la dirección del vector $\vec{\alpha}$ no coincide con la dirección de

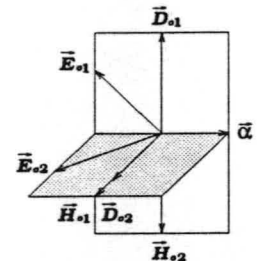


Figura 4.2:

propagación. En consecuencia los vectores \vec{D}_o , \vec{E}_o y \vec{H}_o no son perpendiculares a \hat{n} , tal y como ocurre en el caso analítico. Solo constituye excepción las ondas que se propagan en las direcciones de los ejes principales, en estas direcciones \hat{n} y $\vec{\alpha}$ son paralelos y también lo son \vec{D}_o y \vec{E}_o .

Proposición Si un campo discreto $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ satisface el esquema de dos nudos, éste también satisface las ecuaciones discretas

$$\hat{D}_x D_x^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \hat{D}_y D_y^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \hat{D}_z D_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = 0$$

$$\hat{D}_x H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) + \hat{D}_y H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) + \hat{D}_z H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) = 0$$

que constituyen una aproximación de segundo orden de exactitud, de las ecuaciones de la divergencia $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$.

Demostración. De la primera *Proposición* sabemos que

$$\begin{array}{l} \vec{\alpha} \cdot \vec{D}_o = 0 \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{H}_o = 0 \end{array} \quad \text{esto es} \quad \begin{array}{l} \alpha_x D_{ox} + \alpha_y D_{oy} + \alpha_z D_{oz} = 0 \\ \alpha_x H_{ox} + \alpha_y H_{oy} + \alpha_z H_{oz} = 0 \end{array}$$

multiplicado por el factor exponencial correspondiente y teniendo en cuenta (4.2) podemos escribir

$$\begin{array}{l} \hat{D}_x D_x^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \hat{D}_y D_y^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \hat{D}_z D_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = 0 \\ \hat{D}_x H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) + \hat{D}_y H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) + \hat{D}_z H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) = 0 \end{array}$$

tal y como queríamos demostrar.

Medios Uniáxicos Los uniáxicos son medios con una dirección física destacada. Uno de los ejes principales coincide con esta dirección, si con ella se hace coincidir el eje z' entonces $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$, esto es, $v_x = v_y \neq v_z$. En cuanto a las direcciones de los otros dos ejes principales, situados en un plano perpendicular a z' , estas son arbitrarias.

Si en la ecuación (4.12) se hace $v_y = v_x$, la expresión en el primer miembro se descompone en dos factores cuadráticos

$$[\alpha_t^2 - v_x^2 (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2)] [\alpha_t^2 - v_z^2 (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2) + v_x^2 \alpha_z'^2] = 0$$

Así pues, las dos posibles soluciones, que en el caso general están dadas por (4.14), se reducen en este caso a

$$\alpha_t = v_x \sqrt{\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2} \quad (4.21a)$$

$$\alpha_t = \sqrt{v_z^2 (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2) + v_x^2 \alpha_z'^2} \quad (4.21b)$$

quedando la relación de dispersión numérica correspondiente a cada una de ellas como

$$\omega(\beta, \hat{n}') = \frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} v_x \sqrt{\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2} \right) \quad (4.22a)$$

$$\omega(\beta, \hat{n}') = \frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} \sqrt{v_z^2 (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2) + v_x^2 \alpha_z'^2} \right) \quad (4.22b)$$

donde Δt , segun (4.16), debe cumplir el criterio

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\Delta x}{v_x}, \frac{\Delta x}{v_z}, \frac{\Delta y}{v_x}, \frac{\Delta y}{v_z}, \frac{\Delta z}{v_x} \right\} \quad (4.23)$$

De lo anterior se sigue para la velocidad de fase en un medio uniáxico

$$v_o(\beta, \hat{n}') = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} v_x \sqrt{\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2} \right)}{\beta} \quad (4.24a)$$

$$v_e(\beta, \hat{n}') = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} \sqrt{v_z^2 (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2) + v_x^2 \alpha_z'^2} \right)}{\beta} \quad (4.24b)$$

Hemos utilizado los indices o (*ordinaria*) y e (*extraordinaria*) para diferenciar las velocidades de fase correspondientes a las dos posibles soluciones. En un medio isótropo ($v_x = v_y = v_z$) sólo es posible una solución cuya velocidad de fase es la ordinaria v_o , siendo esta la razón de su denominación.

La relación de estructura de la onda ordinaria y extraordinaria puede ser fácilmente obtenida sin mas que sustituir α_t en

$$\begin{cases} \vec{H}'_o = \frac{1}{\alpha_t \mu} \tilde{\alpha}' \vec{E}'_o \\ (\alpha_t^2 \mu \tilde{\epsilon}' + \tilde{\alpha}'^2) \vec{E}'_o = 0 \end{cases}$$

por sus posibles valores ordinario y extraordinario dados por las ecuaciones (4.21a) y (4.21b). Obteniéndose las siguientes soluciones

Onda Ordinaria

$$\begin{aligned} H'_{ox} &= -\sqrt{\frac{\epsilon_x}{\mu}} \frac{\alpha'_z E'_{oy}}{\sqrt{\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2}} \\ E'_{oz} &= 0 \\ \alpha'_x E'_{ox} + \alpha'_y E'_{oy} &= 0 \\ H'_{oy} &= \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\mu}} \frac{\alpha'_z E'_{ox}}{\sqrt{\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2}} \\ H'_{oz} &= \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\mu}} \frac{\alpha'_x E'_{oy} - \alpha'_y E'_{ox}}{\sqrt{\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2}} \end{aligned}$$

Onda Extraordinaria

$$\begin{aligned} \alpha'_y E'_{ox} - \alpha'_x E'_{oy} &= 0 \\ \alpha'_x E'_{ox} + \alpha'_y E'_{oy} + \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} \alpha'_z E'_{oz} &= 0 \\ H'_{ox} &= \frac{\alpha'_y E'_{oz} - \alpha'_z E'_{oy}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_z} (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2) + \frac{\mu}{\epsilon_x} \alpha_z'^2}} \\ H'_{oy} &= \frac{\alpha'_z E'_{ox} - \alpha'_x E'_{oz}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_z} (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2) + \frac{\mu}{\epsilon_x} \alpha_z'^2}} \\ H'_{oz} &= \frac{\alpha'_x E'_{oy} - \alpha'_y E'_{ox}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_z} (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2) + \frac{\mu}{\epsilon_x} \alpha_z'^2}} \end{aligned}$$

4.2.2 Solución Analítica

Para incrementos espacio-temporales tendiendo a cero las ecuaciones anteriores convergen a las analíticas, las cuales pueden ser fácilmente obtenidas sin más que sustituir α_t por ω y α_u por βn_u ($u = x, y, z$). En concreto, la ecuación de dispersión (4.12) converge a

$$\omega^4 - b\omega^2 + c = 0 \quad \text{siendo} \quad (4.25)$$

$$b = \beta^2 B \quad \text{con} \quad B \equiv (v_y^2 + v_z^2)n_x'^2 + (v_x^2 + v_z^2)n_y'^2 + (v_x^2 + v_y^2)n_z'^2$$

$$c = \beta^4 C \quad \text{con} \quad C \equiv v_y^2 v_z^2 n_x'^2 + v_x^2 v_z^2 n_y'^2 + v_x^2 v_y^2 n_z'^2$$

cuyas soluciones para $\omega \in \mathbb{R}^+$ determinan las relaciones de dispersión analíticas

$$\omega(\beta, \hat{n}') = \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}} \beta \quad (4.26)$$

de donde

$$v(\hat{n}') = \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}} \quad (4.27)$$

Si el medio analítico es no dispersivo, las cantidades B y C son independientes de β , por lo tanto, para una dirección dada de \hat{n}' , la relación de dispersión analítica establece una dependencia lineal entre ω y β . Así pues, en contraste con la solución numérica, la velocidad de fase analítica es función de la dirección de propagación pero no de β .

En el caso particular de un medio uniaxial ($v_x = v_y$) la ecuación (4.25) se reduce a

$$(\omega^2 - v_x^2 \beta^2) [\omega^2 - v_z^2 \beta^2 (n_x'^2 + n_y'^2) - v_x^2 \beta^2 n_z'^2] = 0$$

de donde se obtiene

$$\omega(\beta) = v_x \beta \quad (4.28a)$$

$$\omega(\beta, \hat{n}') = \sqrt{v_z^2 (n_x'^2 + n_y'^2) + v_x^2 n_z'^2} \beta \quad (4.28b)$$

y las correspondientes velocidades de fase ordinaria y extraordinaria

$$v_o = v_x \quad (4.29a)$$

$$v_e(\hat{n}') = \sqrt{v_z^2 (n_x'^2 + n_y'^2) + v_x^2 n_z'^2} \quad (4.29b)$$

La ley de transformación analítica

$$\begin{cases} n_x' = a_x n_x + a_y n_y + a_z n_z \\ n_y' = b_x n_x + b_y n_y + b_z n_z \\ n_z' = c_x n_x + c_y n_y + c_z n_z \end{cases} \quad (4.30)$$

nos permite expresar estos resultados en cualquier otro sistema de referencia.

4.2.3 Ejes Ópticos Numéricos y Analíticos. Efectos asociados a la rotación del sistema de referencia

Del estudio anterior ha quedado claro que para cada dirección del espacio existen dos posibles soluciones que se propagan con velocidades de fase v_1 y v_2 (v_o y v_e para medios uniáxicos). Sin embargo, para ciertas direcciones particulares sólo es posible una solución, es decir, sólo hay una velocidad de fase. Este hecho sugiere la siguiente definición.

Definición (Eje Óptico) En un medio anisótropo se llama *eje óptico* a toda dirección del espacio para la cual $v_1 = v_2$.

Si las velocidades de fase implicadas en esta definición son las correspondientes a un medio analítico hablaremos de *ejes ópticos analíticos*, si por el contrario son las correspondientes a un medio numérico entonces hablaremos de *ejes ópticos numéricos*. Esta distinción es importante porque como veremos unos y otros sólo coinciden en determinados casos particulares.

Como es habitual entre cantidades analíticas y numéricas existen notables analogías y diferencias, las más importantes, en el caso que nos ocupa, son dadas por los siguientes enunciados, cuya certeza se hará evidente a lo largo de esta sección.

Proposición En todo medio anisótropo habrá a lo sumo dos ejes ópticos (*medios biáxicos*) o uno sólo (*medios uniáxicos*). Siendo esto cierto tanto para el caso analítico como numérico.

Proposición En general, en un medio numérico los ejes ópticos dependen de la variable λ aún siendo $\tilde{\epsilon}$ y μ independientes de esta.

Proposición En general, en un medio numérico la velocidad de fase y en consecuencia los ejes ópticos no permanecen invariantes bajo una rotación del sistema de referencia.

Aclaremos un poco más esta última afirmación. Para ello consideremos el siguiente ejemplo ilustrativo: supongamos que hemos implementado el esquema de Dos Nudos tomando como sistema de referencia los ejes principales, y simulamos la propagación de las dos posibles soluciones para una β dada y una determinada dirección del espacio, digamos la mostrada en la Figura 4.3 contenida en el plano $x'z'$ y formando un ángulo θ' con el eje z' , esto es, $\hat{n}' = (\text{sen}\theta', 0, \text{cos}\theta')$. Imaginemos que medimos las velocidades de fase de las dos posibles soluciones, obteniendo como resultado de esta medida los valores concretos $v_1 = v_a$ y $v_2 = v_b$.

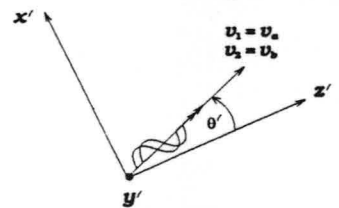


Figura 4.3:

Supongamos ahora que repetimos esta misma experiencia tomando como sistema de

referencia otro distinto de los ejes principales. Para concretar y facilitar el razonamiento, supongamos que éste es el mostrado en la Figura 4.4, una rotación simple de valor φ entorno al eje y . Si medimos las velocidades de fase en la misma dirección que que en el caso anterior $\hat{n} = (\text{sen}(\theta + \theta'), 0, \text{cos}(\theta + \theta'))$ podemos adelantar que en general se obtendrían valores distintos, $v_1 \neq v_a$ y $v_2 \neq v_b$, cuando idealmente deberían ser iguales. La razón por la cual esto es así está contenida en la ley de transformación numérica (4.11), que trataremos más tarde. Concluimos pues diciendo que en un medio numérico la velocidad de fase no sólo depende de la dirección de propagación sino también del sistema de referencia utilizado para definir tal dirección. Acerca de estos puntos nos extenderemos en las siguientes secciones.

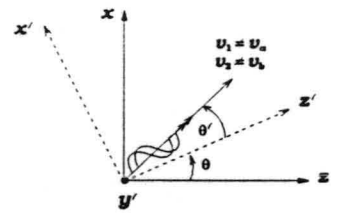


Figura 4.4:

Ejes Ópticos en Medios Uniáxicos

Medio Analítico. Con el objetivo de poder contrastar las propiedades numéricas y analíticas iniciaremos nuestro estudio tratando con las funciones

$$v_o = v_x$$

$$v_e(\hat{n}') = \sqrt{v_z^2 (n_x'^2 + n_y'^2) + v_x^2 n_z'^2}$$

correspondientes a un medio analítico uniáxico.

Si representamos por θ' el ángulo que forma el eje principal z' y la dirección de propagación \hat{n}' , resulta que $n_x'^2 + n_y'^2 = \text{sen}^2 \theta'$ y en consecuencia v_e es tan sólo función de esta variable angular

$$v_e(\theta') = \sqrt{v_z^2 \text{sen}^2 \theta' + v_x^2 \text{cos}^2 \theta'} \quad (4.32)$$

tomando los valores extremos v_x para $\theta' = 0, \pi$ y v_z para $\theta' = \frac{\pi}{2}$.

A la vista de estas ecuaciones, es evidente, que sólo existe una dirección de propagación para la cual $v_e = v_o$, siendo ésta la definida por el eje principal z' , por lo tanto, en este caso el eje óptico y el eje principal z' coinciden. En general, en un medio uniáxico el único eje óptico coincide con el eje principal correspondiente a la constante dieléctrica principal desigual.

En los medios uniáxicos se distinguen dos casos: si $v_x > v_z$ el medio se denomina *positivo*, si por el contrario es $v_x < v_z$ entonces el medio se califica *negativo*.

En la Figura 4.5 se han representado conjuntamente los diagrama polares de las velocidades ordinaria y extraordinaria tanto para un medio uniáxico positivo como negativo. Por claridad se ha tomado sólo el semiespacio correspondiente a $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ y el corte longitudinal (eje z') de estas superficies.

Utilizaremos los símbolos S_o y S_e para referirnos a las superficies polares que representan las velocidades de fase v_o y v_e , respectivamente. De su interpretación se infiere lo que cabía esperar. Por un lado se observa que ambas superficies son tangentes en solamente dos puntos, que son los polos opuestos situados sobre el eje z' (eje óptico), lo que confirma que en esta dirección $v_e = v_o$. Por otra parte, al ser la velocidad de fase ordinaria $v_o = v_x$ una constante, la superficie polar S_o que la representa es una esfera de radio v_x . Por el contrario,

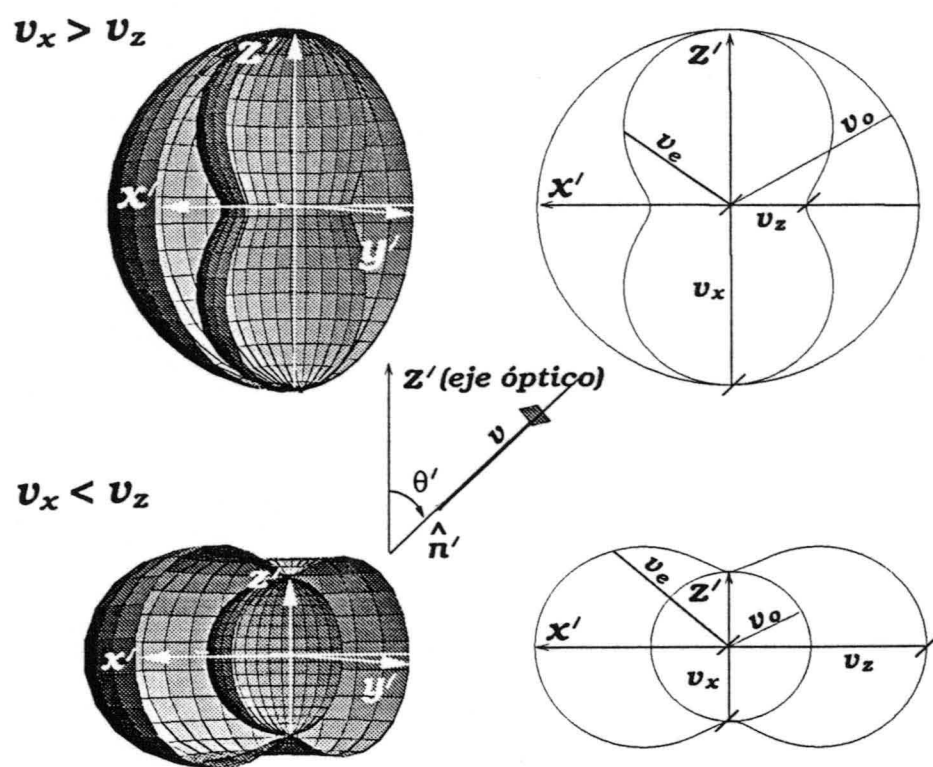


Figura 4.5: En un medio positivo la superficie S_e se encuentra dentro de la esfera S_0 de radio v_x , ocurriendo lo contrario en un medio negativo. En este ejemplo hemos tomado $\epsilon_x = 2\epsilon_0$ y $\epsilon_z = 12\epsilon_0$ para el medio positivo, y $\epsilon_x = 12\epsilon_0$ y $\epsilon_z = 2\epsilon_0$ para el medio negativo.

v_e depende de la dirección de propagación, pero solamente a través de la variable angular θ' , en consecuencia, la superficie S_e presenta simetría de revolución entorno al eje z'

Méδιο Numérico. Un estudio análogo al precedente se llevará a cabo en el espacio numérico, tomando como punto de partida las funciones

$$v_o(\beta, \hat{n}') = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} v_x \sqrt{\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2} \right)}{\beta}$$

$$v_e(\beta, \hat{n}') = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} \sqrt{v_z^2 (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2) + v_x^2 \alpha_z'^2} \right)}{\beta}$$

Es inmediato comprobar que si $\theta' = 0$ ó π entonces $\alpha_x' = \alpha_y' = 0$ y $\alpha_z = 2 \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z}$, siendo

$$v_e(\beta) = v_o(\beta) = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\Delta t v_x \frac{\text{sen}(\beta \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \right)}{\beta}$$

Nos podríamos preguntar si el recíproco de esta afirmación sigue siendo cierto, es decir, si $\theta' = 0, \pi$ es la única dirección del espacio para la cual $v_e = v_o$. La respuesta a tal cuestión es cierta siempre y cuando la resolución en la variable u ($R_u \equiv \frac{\lambda}{\Delta u}$) sea mayor o igual que dos. Esto es

En un medio numérico uniáxico, tomando como sistema de referencia los ejes principales, existe un solo eje óptico numérico coincidente con el analítico (eje z') para cualesquiera valores de $R_u \geq 2$ ($u = x, y, z$).

Reiteramos que esta afirmación sólo es cierta cuando el esquema es implementado en la referencia $x'y'z'$. Como veremos inmediatamente, en general, ambos ejes dejan de coincidir cuando se rota el sistema de referencia.

Las velocidades numéricas ordinaria y extraordinaria dependen tanto de la dirección de propagación como del valor de β (o equivalentemente de λ), y por supuesto, de los parámetros $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ y Δt que definen las propiedades del espacio numérico. Si hacemos $\Delta x = \Delta y = \Delta z \equiv \Delta$ y $\Delta t = \min \left\{ \frac{\Delta}{v_x}, \frac{\Delta}{v_z} \right\}$, esto es, $\Delta t = \frac{\Delta}{v_x}$ para un medio uniáxico positivo o $\Delta t = \frac{\Delta}{v_z}$ para uno negativo, entonces v_o y v_e pueden ser escritas en función única de las variables independientes $R \equiv \frac{\lambda}{\Delta}$ y \hat{n} .

Medios Positivos $v_x > v_z$

$$v_o(R, \hat{n}') = v_x \frac{R}{\pi} \arcsen \left(\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \right) \quad (4.34a)$$

$$v_e(R, \hat{n}') = v_x \frac{R}{\pi} \arcsen \left(\frac{1}{v_x} \sqrt{v_z^2 (S_x^2 + S_y^2) + v_x^2 S_z^2} \right) \quad (4.34b)$$

Medios Negativos $v_x < v_z$

$$v_o(R, \hat{n}') = v_z \frac{R}{\pi} \arcsen \left(\frac{v_x}{v_z} \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \right) \quad (4.35a)$$

$$v_e(R, \hat{n}') = v_z \frac{R}{\pi} \arcsen \left(\frac{1}{v_z} \sqrt{v_z^2(S_x^2 + S_y^2) + v_x^2 S_z^2} \right) \quad (4.35b)$$

con

$$S_x \equiv \text{sen} \left(\frac{\pi}{R} n'_x \right) \cos \left(\frac{\pi}{R} n'_y \right) \cos \left(\frac{\pi}{R} n'_z \right)$$

$$S_y \equiv \text{sen} \left(\frac{\pi}{R} n'_y \right) \cos \left(\frac{\pi}{R} n'_x \right) \cos \left(\frac{\pi}{R} n'_z \right)$$

$$S_z \equiv \text{sen} \left(\frac{\pi}{R} n'_z \right) \cos \left(\frac{\pi}{R} n'_x \right) \cos \left(\frac{\pi}{R} n'_y \right)$$

En la Figura 4.6 se han representado las funciones (4.34) y (4.35) en el plano $x'z'$ para distintos valores de R , junto con las soluciones analíticas (curvas discontinuas).

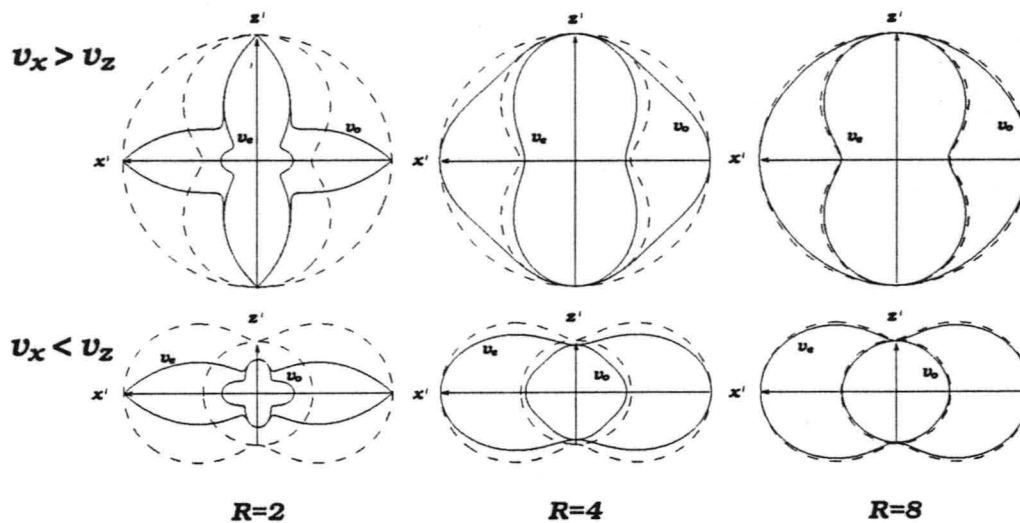
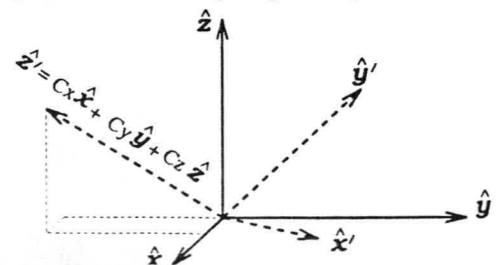


Figura 4.6:

Es de destacar que en contraste con la solución analítica, la solución numérica hace v_o y v_e funciones tanto de θ' como de ϕ' , como consecuencia, las superficies polares que las representan pierden su simetría de revolución en torno al eje z' .

Efectos asociados a la rotación del sistema de referencia. Como ya se mencionó, cuando en un medio numérico se toma como sistema de referencia los ejes principales el eje óptico numérico coinciden con el analítico (eje z') para cualesquiera valores de $R_u \geq 2$ ($u = x, y, z$). En este apartado vamos a demostrar que cuando se rota el sistema de referencia el eje óptico numérico deja de coincidir, en general, con z' .

Sea xyz un sistema de referencia cuya orientación respecto de los ejes principales esta definida por la matriz de giro



$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$$

En el nuevo sistema de referencia, la dirección del eje principal z' esta definida por el vector unitario \hat{z}' de componentes c_x , c_y y c_z . Y las velocidades de fase ordinaria y extraordinaria se expresan como

$$v_o(\beta, \hat{n}) = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} v_x \sqrt{\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2 + \alpha_z'^2} \right)}{\beta}$$

$$v_e(\beta, \hat{n}) = \frac{\frac{2}{\Delta t} \arcsen \left(\frac{\Delta t}{2} \sqrt{v_z^2 (\alpha_x'^2 + \alpha_y'^2) + v_x^2 \alpha_z'^2} \right)}{\beta} \quad \text{con}$$

$$\begin{aligned} \alpha_x' &= a_x \alpha_x + a_y \alpha_y + a_z \alpha_z \\ \alpha_y' &= b_x \alpha_x + b_y \alpha_y + b_z \alpha_z \\ \alpha_z' &= c_x \alpha_x + c_y \alpha_y + c_z \alpha_z \end{aligned}$$

La identidad $v_e = v_o$ se cumple si $\alpha_x' = \alpha_y' = 0$, esto es, si

$$\begin{cases} a_x \alpha_x + a_y \alpha_y + a_z \alpha_z = 0 \\ b_x \alpha_x + b_y \alpha_y + b_z \alpha_z = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Cualquier vector unitario \hat{n} solución de este sistema define una dirección de propagación para la cual $v_o = v_e$, esto es, define un eje óptico numérico.

Multiplicando por el inverso del producto $\beta \cos(\beta n_x \frac{\Delta z}{2}) \cos(\beta n_y \frac{\Delta y}{2}) \cos(\beta n_z \frac{\Delta x}{2})$, supuesto este distinto de cero, podemos escribir las ecuaciones anteriores en terminos de las cantidades R_u ($u = x, y, z$) como

$$\begin{cases} a_x R_x \tan(\frac{\pi}{R_x} n_x) + a_y R_y \tan(\frac{\pi}{R_y} n_y) + a_z R_z \tan(\frac{\pi}{R_z} n_z) = 0 \\ b_x R_x \tan(\frac{\pi}{R_x} n_x) + b_y R_y \tan(\frac{\pi}{R_y} n_y) + b_z R_z \tan(\frac{\pi}{R_z} n_z) = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

En el caso general, este sistema no admite una solución cerrada, siendo necesario recurrir a técnicas numéricas para poder resolverlo. No obstante, se observa que sus soluciones son en general distintas de la dirección \hat{z}' y dependen de la resolución empleada.

Para ilustrar con más detalle todas estas ideas, vamos a aplicar los resultados generales a un caso concreto. Sea xyz el sistema de referencia mostrado en la Figura (4.8), cuya rotación simple, de magnitud θ en torno al eje y , queda definida por la matriz de giro

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} a_x = \cos \theta & a_y = 0 & a_z = -\text{sen} \theta \\ b_x = 0 & b_y = 1 & b_z = 0 \\ c_x = \text{sen} \theta & c_y = 0 & c_z = \cos \theta \end{pmatrix}$$

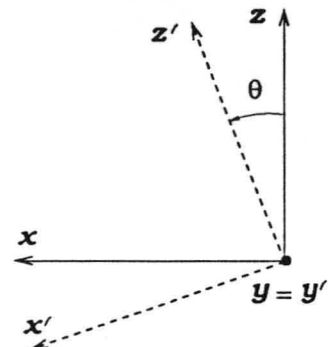


Figura 4.8:

En este caso, el sistema (4.38) se reduce a

$$\begin{cases} \cos \theta R_x \tan\left(\frac{\pi}{R_x} n_x\right) - \operatorname{sen} \theta R_z \tan\left(\frac{\pi}{R_z} n_z\right) = 0 \\ R_y \tan\left(\frac{\pi}{R_y} n_y\right) = 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

Para $R_y \geq 2$ la compatibilidad de este sistema exige que n_y sea igual a cero, lo que demuestra que el eje óptico numérico se encuentra en el plano xz . Por lo tanto, para encontrar la dirección del eje óptico numérico bastará con resolver la ecuación

$$\frac{R_x \tan\left(\frac{\pi}{R_x} \operatorname{sen} \theta_n\right)}{R_z \tan\left(\frac{\pi}{R_z} \cos \theta_n\right)} = \tan \theta \quad (4.40)$$

donde θ_n representa el ángulo que forma el eje óptico numérico con z .

En la Figura (4.9) se muestra el diagrama polar de la velocidad de fase numérica junto con la analítica (curva discontinua) medida en el sistema de referencia considerado en este ejemplo y para una rotación de valor $\theta = 22.5$, se ha tomado $R_x = R_y \equiv R$. En ella se puede apreciar que el eje óptico numérico tiende al analítico (eje z') conforme R crece. Los valores numéricos a pie de figura se han obtenido resolviendo la ecuación (4.40).

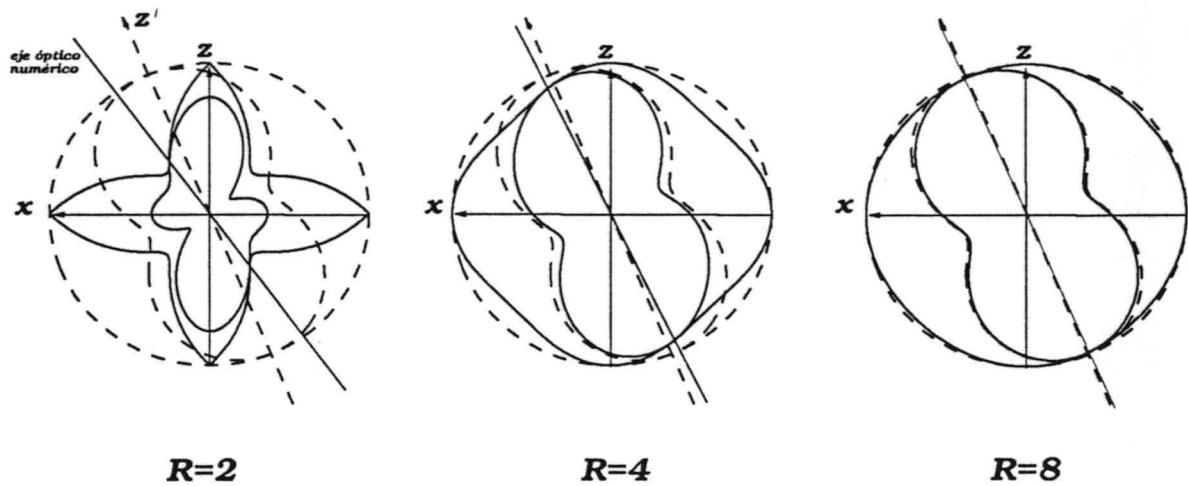


Figura 4.9: Se ha tomado $\varepsilon_x = 2\varepsilon_0$ y $\varepsilon_z = 12\varepsilon_0$. Para estos valores: $\theta_n(R = 2) = 36.1224^\circ$, $\theta_n(R = 4) = 25.6984^\circ$, $\theta_n(R = 8) = 23.2531^\circ$.

Ejes Ópticos en Medios Biáxicos

Medio Analítico. En un medio biáxico, los valores de las constantes dieléctricas principales ε_x , ε_y y ε_z son diferentes. La velocidad de fase puede obtenerse de la ecuación general (4.27).

Admitamos en lo que sigue, para concretar, que tomamos como sistema de referencia los ejes principales, habiéndose elegido estos de manera que

$$\varepsilon_x < \varepsilon_y < \varepsilon_z \quad \text{esto es} \quad v_z < v_y < v_x$$

Es fácil comprobar que cuando los cuadrados de las componentes cartesianas del vector unitario en la dirección de propagación toman los valores

$$\begin{aligned} n_x'^2 &= \frac{v_x^2 - v_y^2}{v_x^2 - v_z^2} = \frac{\varepsilon_z (\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{\varepsilon_y (\varepsilon_z - \varepsilon_x)} \\ n_y' &= 0 \\ n_z'^2 &= \frac{v_y^2 - v_z^2}{v_x^2 - v_z^2} = \frac{\varepsilon_x (\varepsilon_z - \varepsilon_y)}{\varepsilon_y (\varepsilon_z - \varepsilon_x)} \end{aligned} \quad (4.41)$$

entonces el discriminante $B^2 - 4C$ en la ecuación analítica (4.27) es idénticamente nulo. También es fácil comprobar, que el recíproco de esta afirmación sigue siendo cierto, es decir, que esta es la única solución real que hace $B^2 - 4C=0$.

De (4.41) se deducen cuatro vectores de propagación que definen dos direcciones del espacio (contenidas en el plano $x'z'$) para las cuales sólo es posible una velocidad de fase, de valor $\sqrt{B/2} = v_y$. Estas direcciones son por lo tanto los ejes ópticos del medio biáxico, los cuales forman con el eje z' un ángulo θ de valor

$$\theta = \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon_z (\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{\varepsilon_x (\varepsilon_z - \varepsilon_y)}} \quad (4.42)$$

En la Figura 4.10, se muestra el diagrama polar de (4.27) que muestra la dependencia funcional de la velocidad de fase con respecto de la dirección de propagación. Se observa que en el plano $x'z'$ aparecen cuatro puntos singulares opuesto que definen los ejes ópticos, formando estos con el eje z' el ángulo θ .

En lo que hemos visto, hemos supuesto que $v_z < v_y < v_x$ y entonces los ejes ópticos están en el plano $x'z'$ y v_y es la única velocidad de fase posible a lo largo de ellos. También es posible que $v_y < v_z < v_x$ con lo que los ejes ópticos estarán en el plano $x'y'$, o que $v_z < v_x < v_y$ y los ejes ópticos estarán en el plano $y'z'$. Así pues, en un medio biáxico los ejes ópticos se encontrarán en uno de los tres planos mutuamente ortogonales.

Método Numérico. El estudio matemático que permite determinar los ejes ópticos en un medio numérico biáxico no ofrece dificultades particulares. Se trata de encontrar las direcciones de propagación para las cuales el discriminante $b^2 - 4c$ en la ecuación numérica (4.27) es nulo. El cálculo cuantitativo que permite obtener esta condición muestra, que cuando $v_z < v_y < v_x$ los ejes ópticos numéricos siguen contenidos en el plano $x'z'$. Para determinar las direcciones de estos bastará con resolver la ecuación

$$\frac{R_x \tan\left(\frac{\pi}{R_x} \sin \theta_n\right)}{R_z \tan\left(\frac{\pi}{R_z} \cos \theta_n\right)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_z (\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{\varepsilon_x (\varepsilon_z - \varepsilon_y)}} \quad (4.43)$$

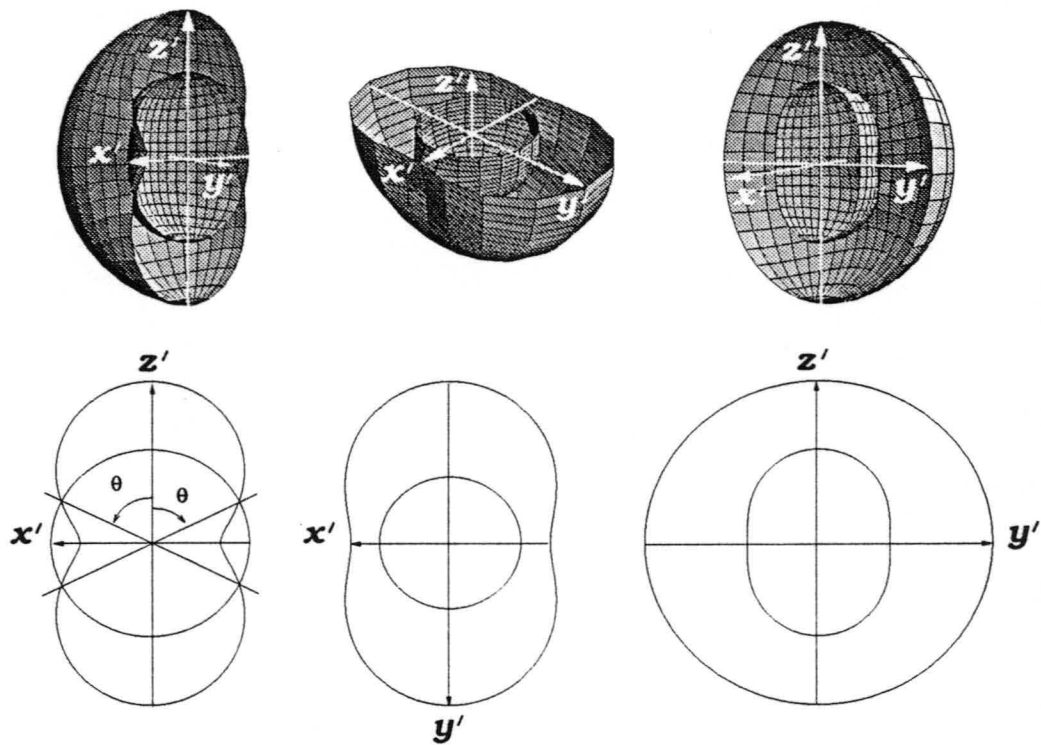


Figura 4.10: Hemos tomado $\epsilon_x = 2\epsilon_o$, $\epsilon_y = 6\epsilon_o$ y $\epsilon_z = 12\epsilon_o$. Para estos valores $\theta = 63.4349^\circ$

donde hemos utilizado el simbolo θ_n para representar el ángulo que forman los ejes ópticos numéricos con z' . Se observa que el valor de éste depende de la resolución empleada y converge al analítico θ para $R_x, R_z \rightarrow \infty$.

En la Figura 4.11 se han representado, en el plano xz , los diagramas polares de las velocidades de fase numérica y analítica (curvas discontinuas) junto con los ejes ópticos para estos dos casos.

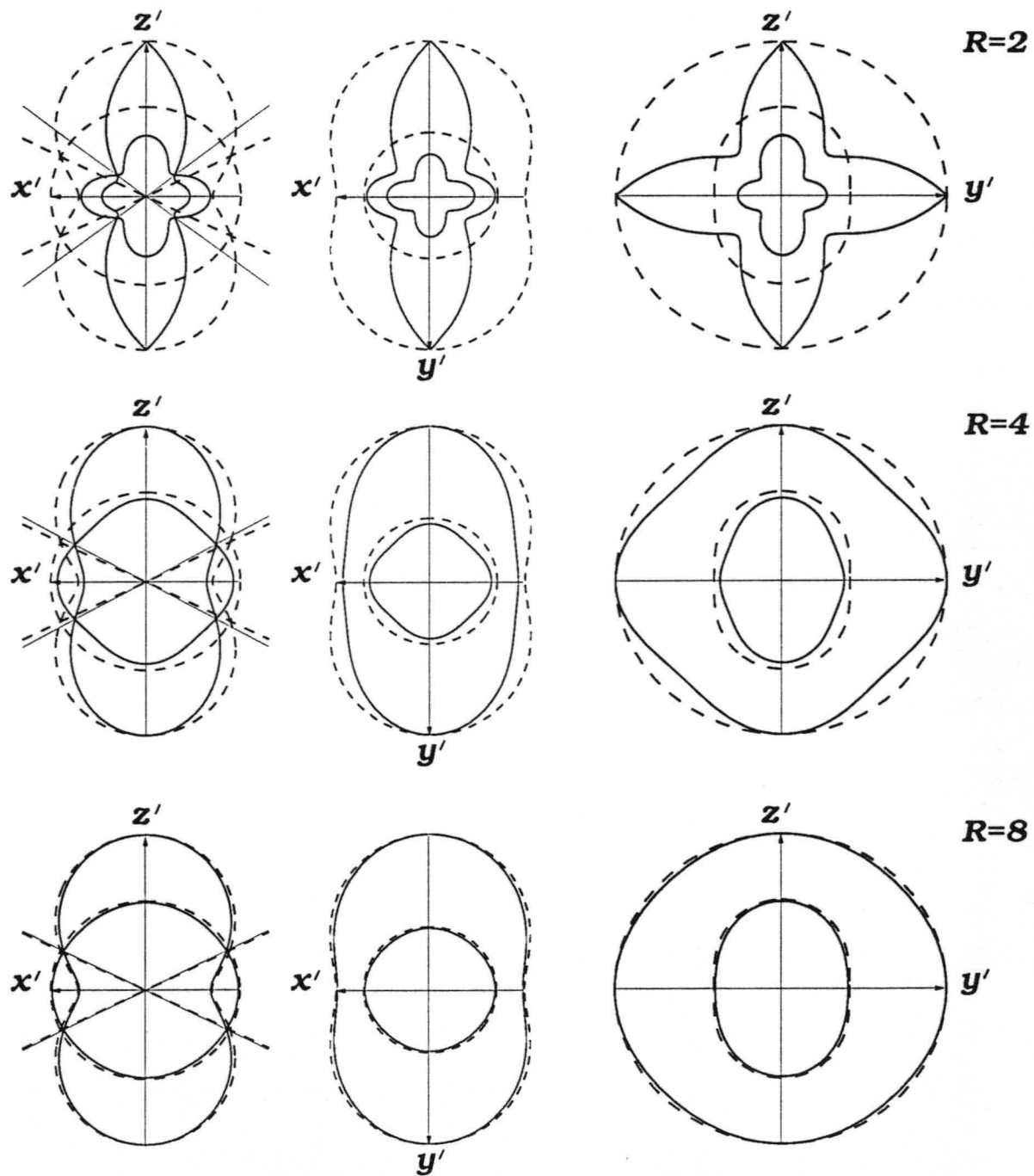


Figura 4.11: Hemos tomado $\epsilon_x = 2\epsilon_0$, $\epsilon_y = 6\epsilon_0$ y $\epsilon_z = 12\epsilon_0$. Para estos valores: $\theta_n(R=2) = 52.0306^\circ$, $\theta_n(R=4) = 60.4981^\circ$ y $\theta_n(R=8) = 62.7198^\circ$

Capítulo 5

Generalización del medio PML

5.1 Ecuaciones de Maxwell para ondas planas

Supongamos un medio anisótropo eléctrico y magnético no conductor, cuyas propiedades quedan definidas por los tensores $\tilde{\mu} = (\mu_{ij})$ y $\tilde{\epsilon} = (\epsilon_{ij})$, que supondremos simétricos y siendo constantes reales todas sus componentes.

Las ecuaciones rotacionales de Maxwell

$$\begin{cases} \tilde{\mu} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\tilde{R} \vec{E} \\ \tilde{\epsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \tilde{R} \vec{H} \end{cases} \quad (5.1)$$

para el campo de una onda plana monocromática

$$\vec{\Psi}(\vec{r}, t) = \vec{\Psi}_o e^{-j(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)} e^{j\omega t}, \quad \beta_u = \frac{\omega}{v} n_u \quad (5.2)$$

toman la forma

$$\begin{cases} \omega \tilde{\mu} \vec{H}_o = \tilde{\beta} \vec{E}_o \\ \omega \tilde{\epsilon} \vec{E}_o = -\tilde{\beta} \vec{H}_o \end{cases} \quad \text{con} \quad \tilde{\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 0 & -\beta_x \\ -\beta_y & \beta_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Despejando \vec{H}_o de la primera ecuación y \vec{E}_o de la segunda, obtenemos

$$\begin{cases} \vec{H}_o = \frac{1}{\omega} (\tilde{\mu})^{-1} \tilde{\beta} \vec{E}_o \\ \vec{E}_o = -\frac{1}{\omega} (\tilde{\epsilon})^{-1} \tilde{\beta} \vec{H}_o \end{cases} \quad (5.4)$$

relaciones de las cuales se hara uso en breve.

5.2 Ecuaciones en el medio PML

Tomando como punto de partida el medio PML de Berenger, generalizaremos éste mediante la definición de un seudo-campo electromagnético¹ como sigue.

Definición Llamaremos seudo-campo electromagnético del medio PML al conjunto formado por las funciones vectoriales de seis componentes $\vec{e}_s(\vec{r}, t)$ y $\vec{h}_s(\vec{r}, t)$, que se suponen continuamente derivables respecto de la posición y el tiempo, y verificando las dos ecuaciones

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_s \frac{\partial \vec{h}_s}{\partial t} + \tilde{\sigma}_s^* \vec{h}_s = -\tilde{R}_s \vec{e}_s \\ \tilde{\epsilon}_s \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial t} + \tilde{\sigma}_s \vec{e}_s = \tilde{R}_s \vec{h}_s \end{cases} \quad (5.5)$$

donde $\tilde{\mu}_s = (\mu_{sij})$, $\tilde{\epsilon}_s = (\epsilon_{sij})$, $\tilde{\sigma}_s^* = (\sigma_{sij}^*)$ y $\tilde{\sigma}_s = (\sigma_{sij})$ son matrices reales (6×6) cuyos elementos van a definir las propiedades del medio PML, y R_s representa el operador matriz

$$\tilde{R}_s \equiv \tilde{r}_s \tilde{C} \quad (5.6)$$

$$\tilde{r}_s \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Siguiendo la notación de Berenger, las seis componentes de los vectores \vec{e}_s y \vec{h}_s serán denotadas como

$$\begin{aligned} \vec{e}_s &\equiv (e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}, e_{yx}, e_{zx}, e_{zy})^t \\ \vec{h}_s &\equiv (h_{xy}, h_{xz}, h_{yz}, h_{yx}, h_{zx}, h_{zy})^t \end{aligned} \quad (5.8)$$

Definición Llamaremos campo $\vec{\mathcal{E}}_s(\vec{r}, t)$, $\vec{\mathcal{H}}_s(\vec{r}, t)$, funciones vectoriales de tres componentes, al campo que asociado a $\vec{e}_s(\vec{r}, t)$, $\vec{h}_s(\vec{r}, t)$ se definen como

$$\vec{\mathcal{E}}_s = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e_{xy} + e_{xz} \\ e_{yz} + e_{yx} \\ e_{zx} + e_{zy} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{H}}_s = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} h_{xy} + h_{xz} \\ h_{yz} + h_{yx} \\ h_{zx} + h_{zy} \end{pmatrix}$$

Relaciones que pueden ser expresadas en la forma matricial

$$\vec{\mathcal{E}}_s \equiv \tilde{C} \vec{e}_s, \quad \vec{\mathcal{H}}_s \equiv \tilde{C} \vec{h}_s \quad (5.9)$$

¹Por analogía se mantiene el término campo electromagnético pero se antepone el término seudo para resaltar que dicho campo es una entidad puramente matemática sin realidad física.

Es de destacar que el sistema (5.5) es la generalización de las ecuaciones de Berenger 3D. Este sistema admite soluciones del tipo ondas planas monocromáticas.

Ondas planas. Las ecuaciones del medio PML (5.5) para el campo de una onda plana monocromática

$$\vec{\psi}_s(\vec{r}, t) = \vec{\psi}_{os} e^{-j(\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z)} e^{j\omega t} \quad (5.10)$$

toman la forma

$$\begin{cases} \omega \tilde{\mu}_s^c \vec{h}_{os} = \tilde{\Gamma} \vec{e}_{os} \\ \omega \tilde{\epsilon}_s^c \vec{e}_{os} = -\tilde{\Gamma} \vec{h}_{os} \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \tilde{\mu}_s^c \equiv \tilde{\mu}_s + \frac{1}{j\omega} \tilde{\sigma}_s^* \\ \tilde{\epsilon}_s^c \equiv \tilde{\epsilon}_s + \frac{1}{j\omega} \tilde{\sigma}_s \end{cases} \quad (5.11)$$

son matrices complejas (6×6), y $\tilde{\Gamma}$ es la matriz

$$\tilde{\Gamma} \equiv \tilde{\gamma} \tilde{C}, \quad \tilde{\gamma} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_y \\ 0 & -\gamma_z & 0 \\ \gamma_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_x \\ 0 & \gamma_x & 0 \\ -\gamma_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

De (5.9) y (5.11) puede observarse que para el campo \vec{E}_s, \vec{H}_s las siguientes identidades son justas

$$\begin{cases} \vec{H}_{os} = \frac{1}{\omega} \tilde{C} (\tilde{\mu}_s^c)^{-1} \tilde{\gamma} \vec{E}_{os} \\ \vec{E}_{os} = \frac{1}{\omega} \tilde{C} (\tilde{\epsilon}_s^c)^{-1} \tilde{\gamma} \vec{H}_{os} \end{cases} \quad (5.13)$$

Deseamos, Figura 5.1, que cualquier onda que desde el medio físico incida sobre un medio PML sea transmitida sin reflexión y disipada en el.

La onda en el medio PML será disipada si al menos una γ_u ($u = x, y, z$) es compleja. En cuanto a la condición de no reflexión (adaptación) ésta puede conseguirse de la forma que pasaremos a describir en la siguiente sección.

5.3 Adaptación perfecta entre ambos medios

Para conseguir la adaptación perfecta entre el medio físico y el medio PML exigimos continuidad entre los campo \vec{E} y \vec{E}_s , por un lado; y los campos \vec{H} y \vec{H}_s , por otro.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que la interfase se encuentra en el plano $\Omega = 0$ ($\Omega = x, y, z$). La continuidad del campo

$$(\vec{E}_s = \vec{E})_{\Omega=0}, \quad (\vec{H}_s = \vec{H})_{\Omega=0} \quad (5.14)$$

implica las dos condiciones

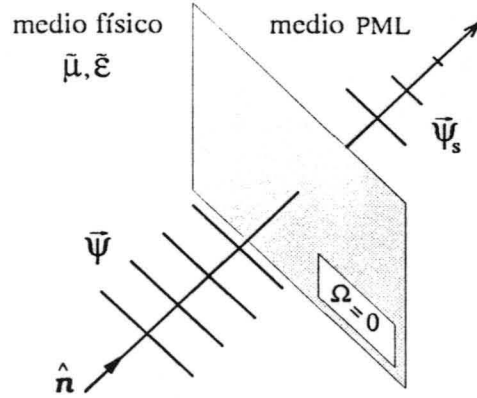


Figura 5.1:

a) Continuidad en fase

$$\left(e^{-j(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)} = e^{-j(\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z)} \right)_{\Omega=0} \iff \begin{cases} \gamma_y = \beta_y, & \gamma_z = \beta_z, & \forall \gamma_x & \text{si } \Omega = x \\ \gamma_x = \beta_x, & \gamma_z = \beta_z, & \forall \gamma_y & \text{si } \Omega = y \\ \gamma_x = \beta_x, & \gamma_y = \beta_y, & \forall \gamma_z & \text{si } \Omega = z \end{cases} \quad (5.15)$$

b) Continuidad en amplitud

$$\vec{\mathcal{E}}_{os} = \vec{E}_o, \quad \vec{\mathcal{H}}_{os} = \vec{H}_o \quad (5.16)$$

Así pues, para una interfase en $\Omega=u$ la continuidad en fase permite que γ_u sea arbitraria, y esta cantidad se debe hacer compleja para conseguir las propiedades disipativas del medio PML.

Por otra parte, comparando (5.4) con (5.13) resulta, para la continuidad en amplitud

$$\vec{\mathcal{E}}_{os} = \vec{E}_o, \quad \vec{\mathcal{H}}_{os} = \vec{H}_o \quad \forall \vec{E}_o, \quad \forall \vec{H}_o \iff \vec{A} \vec{\gamma} = \vec{B} \vec{\gamma} = \vec{\beta} \quad (5.17)$$

en donde $\vec{A} = (a_{ij})$ y $\vec{B} = (b_{ij})$ son matrices (3×6) definidas como

$$\begin{aligned} \vec{A} &\equiv \bar{\mu} \vec{C} (\bar{\mu}_s^c)^{-1} \\ \vec{B} &\equiv \bar{\epsilon} \vec{C} (\bar{\epsilon}_s^c)^{-1} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Explícitamente, la condición $\vec{A} \vec{\gamma} = \vec{\beta}$ se traduce en el siguiente sistema de nueve ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a_{13}\gamma_z - a_{16}\gamma_y & a_{15}\gamma_x - a_{12}\gamma_z & a_{11}\gamma_y - a_{14}\gamma_x \\ a_{23}\gamma_z - a_{26}\gamma_y & a_{25}\gamma_x - a_{22}\gamma_z & a_{21}\gamma_y - a_{24}\gamma_x \\ a_{33}\gamma_z - a_{36}\gamma_y & a_{35}\gamma_x - a_{32}\gamma_z & a_{31}\gamma_y - a_{34}\gamma_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 0 & -\beta_x \\ -\beta_y & \beta_x & 0 \end{pmatrix}$$

y la condición de continuidad (5.17) queda asegurada haciendo

$$\vec{B} = \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_y}{\gamma_y} & \frac{\beta_x}{\gamma_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_z}{\gamma_z} & \frac{\beta_x}{\gamma_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_z}{\gamma_z} & \frac{\beta_y}{\gamma_y} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Por supuesto que ésta es tan solo condición suficiente, pero ella hace las constantes γ_x , γ_y y γ_z independientes las unas de las otras, al igual que lo son β_x , β_y y β_z para una onda incidente de frecuencia arbitraria.

Esta condición puede ser expresada en terminos de los parámetros del medio PML sin mas que multiplicar en (5.18), \tilde{A} por $\tilde{\mu}_s^c$ y \tilde{B} por $\tilde{\epsilon}_s^c$

$$\tilde{A} \tilde{\mu}_s^c = \tilde{\mu} \tilde{C} \quad (5.20a)$$

$$\tilde{B} \tilde{\epsilon}_s^c = \tilde{\epsilon} \tilde{C} \quad (5.20b)$$

Explícitamente, (5.20a) muestra que los μ_{sij}^c del medio PML se relacionan con los μ_{ij} del medio físico, por el siguiente sistema de dieciocho ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s11}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s21}^c &= \mu_{11} \quad , & \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s12}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s22}^c &= \mu_{11} \\ \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s13}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s23}^c &= \mu_{12} \quad , & \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s14}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s24}^c &= \mu_{12} \\ \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s15}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s25}^c &= \mu_{13} \quad , & \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s16}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s26}^c &= \mu_{13} \\ \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s31}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s41}^c &= \mu_{12} \quad , & \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s32}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s42}^c &= \mu_{12} \\ \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s33}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s43}^c &= \mu_{22} \quad , & \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s34}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s44}^c &= \mu_{22} \\ \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s35}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s45}^c &= \mu_{23} \quad , & \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s36}^c + \frac{\beta_z}{\gamma_z} \mu_{s46}^c &= \mu_{23} \\ \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s51}^c + \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s61}^c &= \mu_{13} \quad , & \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s52}^c + \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s62}^c &= \mu_{13} \\ \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s53}^c + \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s63}^c &= \mu_{23} \quad , & \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s54}^c + \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s64}^c &= \mu_{23} \\ \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s55}^c + \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s65}^c &= \mu_{33} \quad , & \frac{\beta_x}{\gamma_x} \mu_{s56}^c + \frac{\beta_y}{\gamma_y} \mu_{s66}^c &= \mu_{33} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Como las matrices \tilde{A} y \tilde{B} son identicas y las ecuaciones (5.20a) y (5.20b) análogas, los parámetros $\tilde{\epsilon}_s^c$ del medio PML son obtenidos de una forma similar, sustituyendo en las ecuaciones anteriores μ_{sij}^c por ϵ_{sij}^c y μ_{ij} por ϵ_{ij} .

5.4 Caso Isótropo

Supongamos que el medio físico es isotropo, así pues, $\tilde{\mu} = \mu \tilde{I}$ y $\tilde{\epsilon} = \epsilon \tilde{I}$. Es evidente, a la vista de (5.21), que existen multiples soluciones del problema planteado. En concreto, la solución dada por Berenger puede obtenerse como caso particular, haciendo cero todos los elementos no diagonales ($\mu_{sij}^c = 0$ si $i \neq j$), con el siguiente resultado

$$\tilde{\mu}_s^c = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_y}{\beta_y} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \mu \end{pmatrix} \quad (5.22a)$$

De forma análoga

$$\tilde{\epsilon}_s^c = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_y}{\beta_y} \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \epsilon \end{pmatrix} \quad (5.22b)$$

Segun (5.11), los elementos de las matrices $\tilde{\mu}_s^c$ y $\tilde{\epsilon}_s^c$ son complejos, tomaremos

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_u}{\beta_u} \mu &= \mu_{su} \mu + \frac{\sigma_{su}^*}{j\omega} \\ \frac{\gamma_u}{\beta_u} \epsilon &= \epsilon_{su} \epsilon + \frac{\sigma_{su}}{j\omega} \end{aligned} \quad (u = x, y, z) \quad (5.23)$$

con μ_{su} , ϵ_{su} , σ_{su}^* y σ_{su} cantidades reales a nuestra disposición.

Como consecuencia de lo anterior, las constantes γ_x , γ_y y γ_z toman la forma

$$\gamma_u = \beta_u \left(a_u + \frac{b_u}{j\omega} \right) = \frac{n_u}{v} (\omega a_u - j b_u) \quad (5.24)$$

donde v es la velocidad de fase, que en el caso isotropo es $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$. Las cantidades a_u , b_u denotan los valores comunes

$$\begin{aligned} a_u &\equiv \mu_{su} = \epsilon_{su} \\ b_u &\equiv \frac{\sigma_{su}^*}{\mu} = \frac{\sigma_{su}}{\epsilon} \end{aligned} \quad (5.25)$$

El campo (5.13) en el medio PML es entonces

$$\vec{\psi}_s(\vec{r}, t) = \vec{\psi}_{os} e^{-\frac{n_x}{c} b_x x} e^{-\frac{n_y}{c} b_y y} e^{-\frac{n_z}{c} b_z z} e^{-j\frac{\omega}{c} (a_x n_x x + a_y n_y y + a_z n_z z)} e^{j\omega t} \quad (5.26)$$

Hasta el momento no hemos tenido en cuenta la condición de continuidad en fase (5.3), en términos de las cantidades definidas ésta se traduce en

$$\begin{cases} a_y, a_z = 1, & b_y, b_z = 0, & \forall a_x, b_x & \text{si } \Omega = x \\ a_x, a_z = 1, & b_x, b_z = 0, & \forall a_y, b_y & \text{si } \Omega = y \\ a_x, a_y = 1, & b_x, b_y = 0, & \forall a_z, b_z & \text{si } \Omega = z \end{cases} \quad (5.27)$$

Así pues, para una interfase en el plano $\Omega = u$ las cantidades a_u y b_u quedan arbitrarias y pueden elegirse para la disipación de ondas propagativas y evanescentes.

Ahora podemos obtener las ecuaciones en el dominio del tiempo del medio PML para la solución propuesta. Sin especificar la interfase, éstas son

$$\mu_{sy} \mu \frac{\partial h_{xy}}{\partial t} + \sigma_{sy}^* h_{xy} = -\frac{\partial (e_{zx} + e_{zy})}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{sz}\mu \frac{\partial h_{xz}}{\partial t} + \sigma_{sz}^* h_{xz} &= \frac{\partial(e_{yz} + e_{yx})}{\partial z} \\
\mu_{sz}\mu \frac{\partial h_{yz}}{\partial t} + \sigma_{sz}^* h_{yz} &= -\frac{\partial(e_{xy} + e_{xz})}{\partial z} \\
\mu_{sx}\mu \frac{\partial h_{yx}}{\partial t} + \sigma_{sx}^* h_{yx} &= \frac{\partial(e_{zx} + e_{zy})}{\partial x} \\
\mu_{sx}\mu \frac{\partial h_{zx}}{\partial t} + \sigma_{sx}^* h_{zx} &= -\frac{\partial(e_{yz} + e_{yx})}{\partial x} \\
\mu_{sy}\mu \frac{\partial h_{zy}}{\partial t} + \sigma_{sy}^* h_{zy} &= \frac{\partial(e_{xy} + e_{xz})}{\partial y}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{sy}\varepsilon \frac{\partial e_{xy}}{\partial t} + \sigma_{sy} e_{xy} &= \frac{\partial(h_{zx} + h_{zy})}{\partial y} \\
\varepsilon_{sz}\varepsilon \frac{\partial e_{xz}}{\partial t} + \sigma_{sz} e_{xz} &= -\frac{\partial(h_{yz} + h_{yx})}{\partial z} \\
\varepsilon_{sz}\varepsilon \frac{\partial e_{yz}}{\partial t} + \sigma_{sz} e_{yz} &= \frac{\partial(h_{xy} + h_{xz})}{\partial z} \\
\varepsilon_{sx}\varepsilon \frac{\partial e_{yx}}{\partial t} + \sigma_{sx} e_{yx} &= -\frac{\partial(h_{zx} + h_{zy})}{\partial x} \\
\varepsilon_{sx}\varepsilon \frac{\partial e_{zx}}{\partial t} + \sigma_{sx} e_{zx} &= \frac{\partial(h_{yz} + h_{yx})}{\partial x} \\
\varepsilon_{sy}\varepsilon \frac{\partial e_{zy}}{\partial t} + \sigma_{sy} e_{zy} &= -\frac{\partial(h_{xy} + h_{xz})}{\partial y}
\end{aligned}$$

Aun no siendo de utilidad práctica, por razones de concepto es interesante observar la relación de estructura del campo \vec{e}_s , \vec{h}_s en el medio PML

$$\begin{aligned}
e_{oxy} &= n_y^2 \mathcal{E}_{ox} - n_x n_y \mathcal{E}_{oy} & h_{oxy} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} n_y \mathcal{E}_{oz} \\
e_{oxz} &= n_z^2 \mathcal{E}_{ox} - n_x n_z \mathcal{E}_{oz} & h_{oxz} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} n_z \mathcal{E}_{oy} \\
e_{oyz} &= n_z^2 \mathcal{E}_{oy} - n_y n_z \mathcal{E}_{oz} & h_{oyz} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} n_z \mathcal{E}_{ox} \\
e_{oyx} &= n_x^2 \mathcal{E}_{oy} - n_y n_x \mathcal{E}_{ox} & h_{oyx} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} n_x \mathcal{E}_{oz} \\
e_{ozx} &= n_x^2 \mathcal{E}_{oz} - n_z n_x \mathcal{E}_{ox} & h_{ozx} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} n_x \mathcal{E}_{oy} \\
e_{ozy} &= n_y^2 \mathcal{E}_{oz} - n_z n_y \mathcal{E}_{oy} & h_{ozy} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} n_y \mathcal{E}_{ox}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

y como puede observarse la estructura de campo $\vec{\mathcal{E}}_s$, $\vec{\mathcal{H}}_s$ en el medio PML es idéntica a la del campo electromagnético \vec{E} , \vec{H} en el medio físico, en particular

$$\mathcal{E}_{ox} n_x + \mathcal{E}_{oy} n_y + \mathcal{E}_{oz} n_z = 0 \tag{5.30}$$

con una expresión análoga para $\vec{\mathcal{H}}$.

Caso bidimensional. Para finalizar este apartado y con el objetivo de tener una referencia

rápida, desacoplaremos el sistema 3D (5.28) en las polarizaciones TE_y y TM_y para problemas bidimensionales en el plano xz .

$$TE_y \left\{ \begin{array}{l} \mu_{sz}\mu \frac{\partial h_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* h_{xz} = \frac{\partial(e_{yz} + e_{yx})}{\partial z} \\ \mu_{sx}\mu \frac{\partial h_{xz}}{\partial t} + \sigma_x^* h_{xz} = -\frac{\partial(e_{yz} + e_{yx})}{\partial x} \\ \varepsilon_{sz}\varepsilon \frac{\partial e_{yz}}{\partial t} + \sigma_z e_{yz} = \frac{\partial h_{xz}}{\partial z} \\ \varepsilon_{sx}\varepsilon \frac{\partial e_{yx}}{\partial t} + \sigma_x e_{yx} = -\frac{\partial h_{xz}}{\partial x} \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} \mathcal{H}_x = h_{xz} \\ \mathcal{H}_z = h_{xz} \\ \mathcal{E}_y = e_{yz} + e_{yx} \end{array} \quad (5.31)$$

$$TH_y \left\{ \begin{array}{l} \mu_{sz}\mu \frac{\partial h_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* h_{yz} = -\frac{\partial e_{xz}}{\partial z} \\ \mu_{sx}\mu \frac{\partial h_{yz}}{\partial t} + \sigma_x^* h_{yz} = \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} \\ \varepsilon_{sz}\varepsilon \frac{\partial e_{xz}}{\partial t} + \sigma_z e_{xz} = -\frac{\partial(h_{yz} + h_{yx})}{\partial z} \\ \varepsilon_{sx}\varepsilon \frac{\partial e_{xz}}{\partial t} + \sigma_x e_{xz} = \frac{\partial(h_{yz} + h_{yx})}{\partial x} \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} \mathcal{E}_x = e_{xz} \\ \mathcal{E}_z = e_{xz} \\ \mathcal{H}_y = h_{yz} + h_{yx} \end{array} \quad (5.32)$$

Obtenida una solución explícita en el caso particular de un medio isótropo, pasaremos a considerar el problema general aquí planteado.

5.5 Caso anisótropo

Como en el caso isótropo, existen múltiples soluciones que permiten satisfacer la condición general (5.21) para medios anisótropos eléctricos y magnéticos. Entre las posibles soluciones elegimos aquella para la cual las matrices $\tilde{\mu}_s^c$ y $\tilde{\varepsilon}_s^c$ toman la forma

$$\tilde{\mu}_s^c = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_y}{\beta_y} \mu_{11} & 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \mu_{12} & 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \mu_{13} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \mu_{11} & 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \mu_{12} & 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \mu_{13} \\ \frac{\gamma_z}{\beta_z} \mu_{12} & 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \mu_{22} & 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \mu_{23} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \mu_{12} & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \mu_{22} & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \mu_{23} \\ \frac{\gamma_x}{\beta_x} \mu_{13} & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \mu_{23} & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \mu_{33} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \mu_{13} & 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \mu_{23} & 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \mu_{33} \end{pmatrix} \quad (5.33a)$$

$$\tilde{\varepsilon}_s^c = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_y}{\beta_y} \varepsilon_{11} & 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \varepsilon_{12} & 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \varepsilon_{13} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \varepsilon_{11} & 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \varepsilon_{12} & 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \varepsilon_{13} \\ \frac{\gamma_z}{\beta_z} \varepsilon_{12} & 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \varepsilon_{22} & 0 & \frac{\gamma_z}{\beta_z} \varepsilon_{23} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \varepsilon_{12} & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \varepsilon_{22} & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \varepsilon_{23} \\ \frac{\gamma_x}{\beta_x} \varepsilon_{13} & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \varepsilon_{23} & 0 & \frac{\gamma_x}{\beta_x} \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \varepsilon_{13} & 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \varepsilon_{23} & 0 & \frac{\gamma_y}{\beta_y} \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (5.33b)$$

Siguiendo una sistemática análoga al caso isótropo, tomaremos

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_u}{\beta_u} \mu_{ij} &= \mu_{suij} \mu_{ij} + \frac{\sigma_{suij}^*}{j\omega} \\ \frac{\gamma_u}{\beta_u} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{suij} \varepsilon_{ij} + \frac{\sigma_{suij}}{j\omega}\end{aligned}\quad (u = x, y, z) \quad (5.34)$$

en donde μ_{suij} , ε_{suij} , σ_{suij}^* y σ_{suij} son ahora como antes cantidades reales a nuestra disposición.

De nuevo las constantes γ_x , γ_y y γ_z toman la forma

$$\gamma_u = \beta_u \left(a_u + \frac{b_u}{j\omega} \right) = \frac{n_u}{v} (\omega a_u - j b_u) \quad (5.35)$$

pero ahora la velocidad de fase en el medio físico es función de la dirección de propagación por tratarse de un medio anisótropo $v = v(\hat{n})$. Las cantidades a_u , b_u denotan los valores comunes

$$\begin{aligned}a_u &\equiv \mu_{suij} = \varepsilon_{suij} \\ b_u &\equiv \frac{\sigma_{suij}^*}{\mu_{ij}} = \frac{\sigma_{suij}}{\varepsilon_{ij}}\end{aligned}\quad \text{con } ij = \begin{cases} 12, 22, 23, 13, 33 & \text{si } u = x \\ 11, 12, 13, 23, 33 & \text{si } u = y \\ 11, 12, 13, 22, 23 & \text{si } u = z \end{cases}$$

Y por supuesto la condición (5.27) es necesaria para satisfacer el requisito de continuidad en fase.

5.6 Implementación computacional

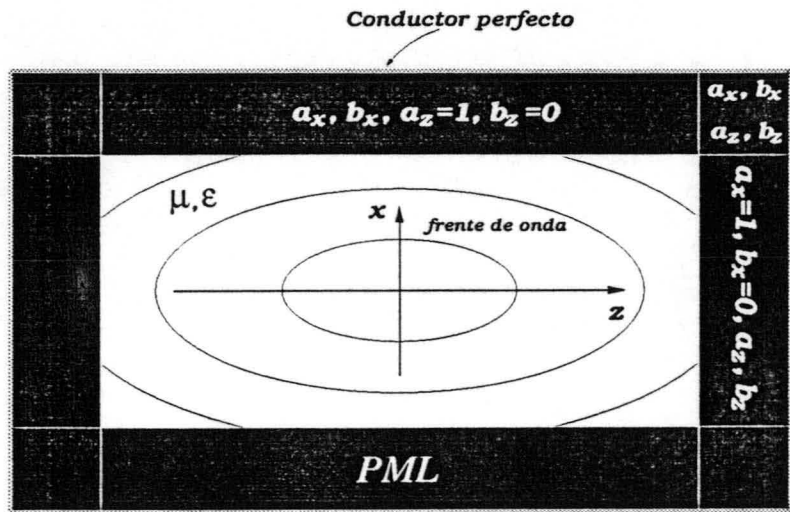
Para ilustrar la implementación computacional del medio PML, consideraremos el caso simple de un medio isótropo bidimensional en el plano xz . Para simular problemas abiertos, se propone rodear el medio físico de interés por un medio PML en cuyas fronteras exteriores se imponen condiciones de conductor perfecto, Figura 5.2.

A una distancia ρ_u de la interfase, Figura 5.3, la amplitud de la onda según (5.26) es:

$$\vec{\psi}_{os}(\rho_u) = \vec{\psi}_{os} e^{-\frac{\cos \theta_u}{c} b_u \rho_u} \quad \text{con } \begin{cases} b_u = \frac{\sigma_u^*}{\mu} = \frac{\sigma_u}{\varepsilon} \\ \rho_u \in [0, \delta_u] \\ u = x, z \end{cases} \quad (5.36)$$

Después de cruzar la capa, la onda se refleja en la frontera exterior, donde se han impuesto condiciones de conductor perfecto. Así pues, para una capa de espesor δ_u , un aparente coeficiente de reflexión puede ser definido

$$R(\theta_u) = e^{-2\frac{\cos \theta_u}{c} b_u \delta_u} \quad (5.37)$$



$$a_u=1 \Rightarrow \mu_{su}=\epsilon_{su}=1 ; b_u=0 \Rightarrow \sigma_{su}, \sigma_{su}^*=0$$

Figura 5.2:

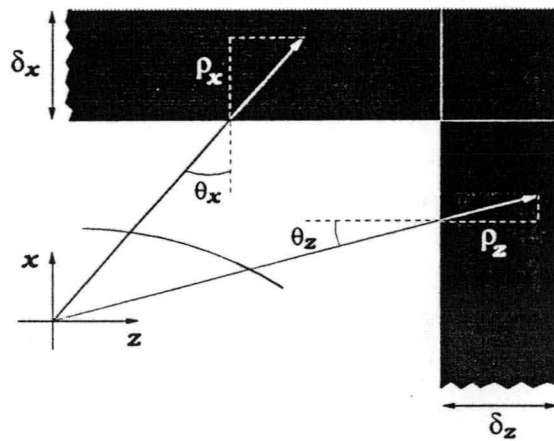


Figura 5.3:

Berenger propone que la magnitud b_u varíe gradualmente desde cero para $\rho_u = 0$ hasta un valor máximo B_u para $\rho_u = \delta_u$, en la forma

$$b_u(\rho_u) = B_u \left(\frac{\rho_u}{\delta_u} \right)^n \quad \text{esto es} \quad \begin{cases} \sigma_{su}^*(\rho_u) = \mu B_u \left(\frac{\rho_u}{\delta_u} \right)^n \\ \sigma_{su}(\rho_u) = \varepsilon B_u \left(\frac{\rho_u}{\delta_u} \right)^n \end{cases} \quad (5.38)$$

siendo B_u un real y n un entero, ambos estrictamente mayores que cero. En cuyo caso el coeficiente de reflexión viene dado por

$$\begin{aligned} R(\theta_u) &= e^{-2 \frac{\cos \theta_u}{c} \int_0^{\delta_u} b_u d\rho_u} \\ &= e^{-\frac{2}{n+1} \frac{\cos \theta_u}{c} B_u \delta_u} \end{aligned} \quad (5.39)$$

el cual se reduce para incidencia normal a

$$R(0) = e^{-\frac{2}{n+1} \frac{B_u}{c} \delta_u} \quad (5.40)$$

Ahora las cantidades B_u , δ_u y n pueden elegirse para ajustar $R(0)$ al valor deseado.

Por otra parte, para modos evanescentes, digamos en la dirección z , θ_z toma la forma

$$\theta_z = \frac{\pi}{2} + j\alpha \quad (5.41)$$

siendo α un real positivo. En este caso el campo en el medio PML toma la forma

$$\vec{\psi}_s(x,z,t) = \vec{\psi}_{os} e^{j \frac{\sinh \alpha}{c} b_z z} e^{-\frac{\omega}{c} \sinh \alpha a_z z} e^{-j \frac{\omega}{c} \cosh \alpha x} e^{j\omega t}, \quad a_z = \mu_{sz} = \varepsilon_{sz}$$

Para modos evanescentes el coeficiente de reflexión R' es

$$R' = e^{-2 \frac{\omega}{c} \sinh \alpha a_z z} \quad (5.42)$$

donde a_z se elige como

$$a_z(\rho_z) = 1 + A_z \left(\frac{\rho_z}{\delta_z} \right)^n \quad (5.43)$$

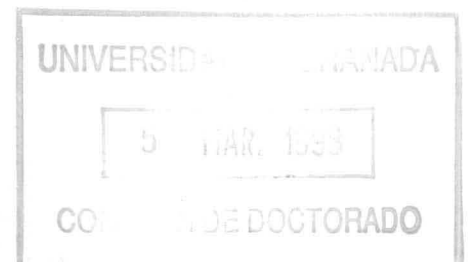
Este término confirma su eficiencia para la disipación de ondas evanescentes, resultados numéricos confirman la teoría. Por último, se observa experimentalmente que valores demasiados grandes para A_z pueden traducirse en fuertes dispersiones numéricas, y se sugiere que $A_z < 10$.

La implementación numérica del medio PML mediante FDTD no requiere un tratamiento especial. Consideremos por ejemplo el esquema de Yee para la polarización TE_y .

En el medio PML las subcomponentes e_{yx} y e_{yz} se definen en el mismo nudo que la componente E_y del medio físico, y las ecuaciones (5.31) pueden ser aproximadas de la forma

usual

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{sz(k+\frac{1}{2})} \mu \mathcal{D}_t \mathcal{H}_x^n(i, k+\frac{1}{2}) + \sigma_{sz}^*(k+\frac{1}{2}) \mathcal{P}_t \mathcal{H}_x^n(i, k+\frac{1}{2}) = \mathcal{D}_z \mathcal{E}_y^n(i, k+\frac{1}{2}) \\ \mu_{sx(i+\frac{1}{2})} \mu \mathcal{D}_t \mathcal{H}_z^n(i+\frac{1}{2}, k) + \sigma_{sx}^*(i+\frac{1}{2}) \mathcal{P}_t \mathcal{H}_z^n(i+\frac{1}{2}, k) = -\mathcal{D}_x \mathcal{E}_y^n(i+\frac{1}{2}, k) \\ \varepsilon_{sz(k)} \varepsilon \mathcal{D}_t e_{yz}^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + \sigma_{sz(k)} \mathcal{P}_t e_{yz}^{n+\frac{1}{2}}(i, k) = \mathcal{D}_z \mathcal{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k) \\ \varepsilon_{sx(i)} \varepsilon \mathcal{D}_t e_{yx}^{n+\frac{1}{2}}(i, k) + \sigma_{sx(i)} \mathcal{P}_t e_{yx}^{n+\frac{1}{2}}(i, k) = -\mathcal{D}_x \mathcal{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i, k) \end{array} \right. \quad (5.44)$$



Apéndice A

Diagrama Polar

La velocidad de fase v como función de la dirección de propagación \hat{n} sera representada mediante un diagrama polar en coordenadas $x = vn_x$, $y = vn_y$ y $z = vn_z$, Figura A.1.

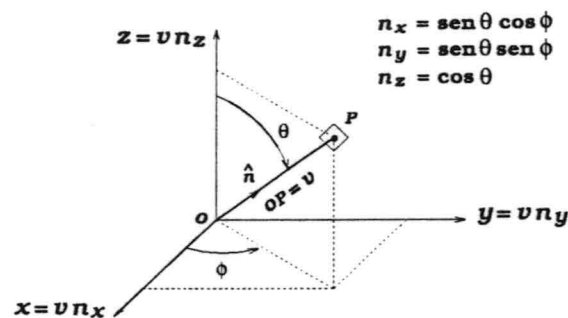


Figura A.1:

El lugar geométrico de los extremos del vector $v(\theta, \phi)\hat{n}$ define una superficie en el espacio de ecuaciones paramétricas

$$x = v(\theta, \phi)\text{sen}\theta\cos\phi$$

$$y = v(\theta, \phi)\text{sen}\theta\text{sen}\phi$$

$$z = v(\theta, \phi)\cos\theta$$

siendo la distancia desde el origen O a un punto P de la gráfica igual a v .

Bibliografía

- AKSUN, M. I., Y DURAL, G LBIN. 1996. Comparative evaluation of Absorbing Boundary Conditions using Green's functions for layered media. *IEEE trans. antennas and propagation*, 44(2), 152-156.
- ANDREW, W. V., BALANIS, C. A., Y TIRKAS, P. A. 1995. A comparison of the Berenger perfectly matched layer and the Lindman higher-order ABC's for the FDTD method. *IEEE microwave guided wave lett.*, 5(6), 192-194.
- ASI, A., Y SHAFAI, L. 1992. Dispersion analysis of anisotropic inhomogeneous waveguides using compact 2D-FDTD. *Electronic Letters*, 28(15), 1451-1452.
- BAYLISS, A., Y TURKEL, E. 1980. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, 33, 707-725.
- BERENGER, J. P. 1983 (Jun.). Calcul de la diffraction l'aide d'une méthode aux différences finies. Pages c21-c26 of: *Actes du colloque cem, cnfrs-ursi*.
- BÉRENGER, J.-P. 1994 (Mayo). A perfectly matched layer for free-space simulations in finite-difference computer codes. *In: Euroem '94*.
- BERENGER, J.-P. 1994. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 185-200.
- BÉRENGER, J.-P. 1996. A perfectly matched layer for free-space simulations in finite-difference computer codes. *Annales des télécommunications*, 51(1-2), 39-46.
- BERENGER, J.-P. 1996. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. comput. phys.*, 127, 363-379.
- BÉRENGER, J.-P. 1997. Improved PML for the FDTD solution of wave-structure interaction problems. *IEEE trans. antennas propagat.*, 45(3), 466-473.
- BETZ, V., Y MITTRA, R. 1993. A boundary condition to absorb both propagating and evanescent waves in a finite-difference time-domain simulation. *IEEE Microwave Guided Waves Letters*, 3(6), 182-184.
- BI, Z., WU, K., WU, C., Y LITVA, J. 1991. A new finite-difference time-domain algorithm for solving maxwell equations. *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, 1(12), 382-384.

- CAI, M., Y ZHOU, H. 1995. Proof of perfectly matched layer conditions in 3 dimensions. *Electronics Letters*, **31**(19), 1675-1676.
- CANGELLARIS, A. C., Y WRIGHT, D. B. 1991. Analysis of the numerical error caused by the stair-stepped approximation of a conducting boundary in FDTD simulations of electromagnetic phenomena. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **39**(Oct.), 1518-1525.
- CANGELLARIS, A. C., LIN, C. C., Y MEI, K. K. 1987. Point-matched time domain finite element methods for electromagnetic radiation and scattering. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **35**(10), 1160-1173.
- CHEN, J. Y., Y GANDHI, O. P. 1991. Currents induced in an anatomically based model of a human exposure to vertically polarized electromagnetic pulses. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **39**(1), 31-39.
- CHEN, Z., NEY, M. M., Y HOEFER, W. J. R. 1991. A new finite-difference time-domain formulation and its equivalence with the TLM symmetrical condensed node. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **39**(12), 2160-2169.
- CHEW, W. C., Y WEEDON, W. H. 1994. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave opt. technol. lett.*, **7**(13), 599-604.
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K. O., Y LEWY, H. 1928. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Math. Ann.*, **100**, 32-74.
- CRADDOCK, I. J., RAILTON, C. J., Y MCGEEHAN, J. P. 1996. Derivation and application of a passive equivalent circuit for the finite difference time domain algorithm. *IEEE microwave guided wave lett.*, **6**(1), 40-42.
- DAUTRAY, R., Y LIONS, J.-L. 1984. Analyse mathématique et calcul numérique. *In: Evolution: numérique, transport*, vol. 9. Masson.
- DEVEZE, M. T. 1992. *Contribution l'analyse, par différences finies, des équations de Maxwell dans le domaine temps*. Tesis Doct., Université de Paris 6, France.
- DIMBYLOW, P. J. 1991. Finite-difference time-domain calculations of absorbed power in the ankle for 10-100 MHz plane wave exposure. *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, **38**, 423-428.
- ENGQUIST, B., Y MAJDA, A. 1977. Absorbing Boundary Conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, **31**(139), 629-651.
- ENGQUIST, B., Y MAJDA, A. 1979. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations. *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, **32**, 313-357.
- FANG, J. 1989. *Time domain finite difference computation for Maxwell's equations*. Tesis Doct., University of California at Berkeley.

- FANG, J., Y MEI, K. K. 1989. Absorbing Boundary Conditions for the time domain finite difference solution of Maxwell's equations. *Page 229 of: URSI Radio Science Meeting.*
- FANG, J., Y REN, J. 1993. A locally conformed finite-difference time-domain algorithm of modeling arbitrary shape planar metal. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **41**(5), 830-838.
- FANG, J., ZHANG, X., Y MEI, K. K. 1987. Dispersion characteristics of microstrip lines in the vicinity of coplanar ground. *Electron. Letters*, **23**(21), 1142-1143.
- FEIX, N., LALAND, M., Y JECKO, B. 1992. Harmonical characterization of a microstrip band via the Finite Difference Time Domain method. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **40**(5), 955-961.
- FURSE, C. M., MATHUR, S. P., Y GANDHI, O. P. 1990. Improvements to the finite-difference time-domain method for calculating the radar cross section of a perfectly conducting target. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **38**(Jul.), 919-927.
- FUSCO, M. 1990. FDTD algorithm in curvilinear coordinates. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **38**(Ene.), 76-89.
- FUSCO, M. A., SMITH, M. V., Y GORDON, L. W. 1991. A three-dimensional FDTD algorithm in curvilinear coordinates. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **29**(10), 1463-1471.
- GANDHI, O. P., GAO, B.-Q., Y CHEN, Y.-Y. 1993. A frequency dependent finite-difference time-domain formulation for general dispersive media. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **41**(4), 658-665.
- GARCÍA, S. GONZÁLEZ, PÉREZ, I. VILLÓ, MARTÍN, R. GÓMEZ, Y OLMEDO, B. GARCÍA. 1996a. On the applicability of the PML Absorbing Boundary Conditions to dielectric anisotropic media. *Electronics Letters*, **32**(14), 1270-1271.
- GARCÍA, S. GONZÁLEZ, HUNG-BAO, T. MATERDEY, MARTÍN, R. GÓMEZ, Y OLMEDO, B. GARCÍA. 1996b. On the application of finite methods in time domain to anisotropic dielectric waveguides. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **44**(12), 2195-2206.
- GARCÍA, S. GONZÁLEZ, PÉREZ, I. VILLÓ, MARTÍN, R. GÓMEZ, Y OLMEDO, B. GARCÍA. 1998b. A perfect matching layer to adapt bi-anisotropic media. *IEEE microwave and guided wave letters*, Submitted.
- GARCÍA, S. GONZÁLEZ, PÉREZ, I. VILLÓ, MARTÍN, R. GÓMEZ, Y OLMEDO, B. GARCÍA. 1998a. A perfect matching layer to adapt bi-isotropic media. *IEEE microwave and guided wave letters*, Submitted.

- GARCÍA, S. GONZÁLEZ, BAGGEN, LAURENS, MANTEUFFEL, DIRK, Y HEBERLING, DIRK. 1998c. Study of coplanar waveguide fed antennas using the fdtd method. *Microwave and optical technology letters*, Submitted.
- GEDNEY, S. D. 1996. An anisotropic PML absorbing media for the FDTD simulation of fields in lossy and dispersive media. *Electromagnetics*, **16**(4), 399–415.
- GODUNOV, S. K., Y RYABENKII, V. S. 1987. *Difference schemes. an introduction to the underlying theory*. Vol. 19. Elsevier Science Publishers.
- GONZÁLEZ, S., GARCÍA, B., MATERDEY, T., Y GÓMEZ, R. 1993 (Sept.). Improvements and extensions in FDTD for RCS calculations. *Page 986 of: Proceedings of 23rd european Microwave conference*.
- GONZÁLEZ GARCÍA, SALVADOR. 1994 (Sept.). *Contribuciones al método de las diferencias finitas para la resolución de las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo*. Tesis Doct., University of Granada, Granada (Spain).
- GOTTLIEB, D., Y TURKEL, E. 1978. Boundary conditions for multistep finite-difference methods for time-dependent equations. *Journal of Computational Physics*, **26**, 181–196.
- GRIBBONS, M. A., PINELLO, W. P., Y CANGELLARIS, A. C. 1995. A stretched coordinate technique for numerical absorption of evanescent and propagating waves in planar waveguiding structures. *Pages 31–34 of: IEEE mtt-s int. microwave symp.*, vol. 1.
- GWAREK, W. K. 1985. Analysis of an arbitrarily-shaped planar circuit. a time domain approach. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **33**(10), 1067–1072.
- GWAREK, W. K. 1988. Analysis of an arbitrarily shaped two-dimensional microwave circuits by Finite-Difference Time-Domain method. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **36**(4), 738–744.
- GWAREK, W. K., MORAWSKI, T., Y MROCKOWSKY, C. 1993. Application of the FD-TD method to the analysis of circuits described by the two-dimensional vector wave equation. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **41**(2), 311–317.
- HARMS, P. H., LEE, J.-F., Y MITTRA, R. 1992. A study of the nonorthogonal FDTD method versus the conventional FDTD technique for computing resonant frequencies of cylindrical cavities. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **40**(4), 741–746.
- HEINRICH, W., BEILENHOF, K., MEZZANOTTE, P., Y ROSELLI, L. 1996. Optimum mesh grading for Finite-Difference method. *IEEE trans. on microwave theory and techniques*, **44**(9), 1569–1574.
- HIGDON, R. L. 1986. Absorbing Boundary Conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation. *Mathematics of Computation*, **47**(176), 437–459.
- HIGDON, R. L. 1987. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation. *Mathematics of Computation*, **49**(179), 65–91.

- HOLLAND, R. 1977. THREDE: A free-field EMP coupling and scattering code. *IEEE Trans. on Nuclear Science*, NS-24(6), 2416-2421.
- HOLLAND, R. 1983. Finite-difference solution of Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. on Nuclear Science*, NS-30(6).
- HOLLAND, R. 1993. Pitfalls of staircase meshing. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, 35(4), 434-439.
- HUNSBERGER, F., LUEBBERS, R. J., Y KUNZ, K. S. 1992. Finite-difference time-domain analysis of gyrotropic media - I Magnetized plasma. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 40, 1489-1495.
- JAREM, J. M. 1991. A method of moments analysis and a finite-difference time-domain analysis of a probe-sleeve fed rectangular waveguide cavity. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 39(3), 444-451.
- JURGENS, T.G., Y TAFLOVE, A. 1993. Three-dimensional contour FDTD modeling of scattering from single and multiple bodies. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 41(Dic.), 1703-1708.
- JURGENS, T.G., TAFLOVE, A., UMASHANKAR, K., Y MOORE, T.G. 1992. Finite-difference time-domain modeling of curved surfaces. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 38(Abr.), 76-89.
- KASHIWA, T., ONISHI, T., Y FUKAI, I. 1994. Analysis of microstrip antennas on a curved surface using the conformal grids (FD-TD) method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 42(3), 423-426.
- KATZ, D. S., PICKET-MAY, M. J., TAFLOVE, A., Y UMASHANKAR, K. R. 1991. FDTD analysis of electromagnetic radiation from systems containing horn antennas. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 39, 1203-1212.
- KATZ, D. S., THIELE, E. T., Y TAFLOVE, A. 1994. Validation and extension to three dimensions of Berenger PML Absorbing Boundary Conditions for FD-TD meshes. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 4(Ago.), 268-270.
- KEYS, R. G. 1985. ABS for the acoustic media. *Geophysics*, 50(6), 892-902.
- KIM, I. S., Y HOEFER, W. J. R. 1990. A local mesh refinement algorithm for the time domain finite difference method using Maxwell's curl equations. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 38(6), 812-815.
- KO, L., Y MITTRA, R. 1991. A combination FDTD and Prony's methods for analyzing microwave integrated circuits. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 39, 2176-2181.
- KUNZ, K. S., Y LUEBBERS, R. J. 1993. *The finite difference time domain method for electromagnetics*. Boca Raton, FL: CRC Press.

- KUNZ, K. S., Y SIMPSON, L. 1981. A technique for increasing the resolution of finite-difference solution of the Maxwell equation. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, EMC-23(Nov.), 419-422.
- KUZUOGLU, M., Y MITTRA, R. 1996. Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers. *IEEE microwave guided wave lett.*, 6(12), 447-449.
- LAHRMAN, A. 1992. An element formulation for the classical finite difference and finite volume method applied to arbitrarily shaped domains. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, 893-913.
- LAX, P. D., Y RITCHMYER, R. D. 1956. Survey of the stability of linear finite difference equations. *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, 9, 267-293.
- LAX, P.D., Y WEDROFF, B. 1960. Systems of conservation laws. *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, 13, 217-237.
- LEE, J. F., PALANDECH, R., Y MITTRA, R. 1992. Modelling three-dimensional discontinuities in waveguides using nonorthogonal FDTD algorithm. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 40, 346-352.
- LI, K., LEE, C. F., POH, S. Y., SHIN, R. T., Y KONG, J. A. 1993. Application of the FDTD method to analysis of electromagnetic radiation from VLSI heatsink configuration. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, 35(2), 204-214.
- LIAO, Z., WONG, H. L., YANG, B., Y YUAN, Y. 1984. A transmitting boundary for transient wave analysis. *Scientia Sinica (Series A)*, 27(10), 1062-1076.
- LINDMAN, E. L. 1975. Free-space boundary-conditions for the time dependent wave equations. *Journal of Computational Physics*, 18, 66-78.
- LUEBBERS, R. J., HUNSBERGER, F., KUNZ, K. S., STANDLER, R. B., Y SCHNEIDER, M. 1990. A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, 32(3), 222-227.
- LUEBBERS, R. J., HUNSBERGER, F., Y KUNZ, K. S. 1991. A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for transient propagation in plasma. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 39(1), 29-34.
- LUEBBERS, R. J., CHEN, L., UNO, T., Y ADACHI, S. 1992. FDTD calculations of radiation patterns, impedance and gain for a monopole antenna in a conducting box. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 40(12), 1577-1583.
- LUEBBERS, R. J., BEGGS, J., Y CHAMBERLIN, K. 1993. Finite-difference time-domain calculations of transients in antennas with non linear loads. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 41(5), 566-573.

- MADSEN, N.K., Y ZIOLKOWSKI, R. W. 1988. Numerical solution of Maxwell's equations in the time domain using irregular nonorthogonal grids. *Wave Motion*, **33**(4), 583-596.
- MADSEN, N.K., Y ZIOLKOWSKI, R. W. 1990. A three-dimensional modified finite volume technique for Maxwell's equations. *Electromagnetics*, **10**(1-2), 147-161.
- MALONEY, J. G., Y SMITH, G. S. 1992. The efficient modeling of thin material sheets in the finite-difference time-domain (FD-TD) method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **40**, 323-330.
- MALONEY, J. G., Y SMITH, G. S. 1993. A study of transient radiation from the Wu-King resistive monopole - FDTD analysis and experimental measurements. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **41**(5), 668-676.
- MALONEY, J. G., SMITH, G. S., Y SCOTT, W. R. 1990. Accurate computation of the radiation from simple antennas using the Finite-Difference Time-Domain method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **38**(7), 1059-1068.
- MATERDEY, T., GONZÁLEZ, S., GÓMEZ, R., Y GARCÍA, B. 1993a. Nuevos algoritmos de diferencias y promedios finitos en el dominio del tiempo para la solución de las ecuaciones de maxwell. Parte I: Medios isótropos. *Pages 635-639 of: VIII Symposium Nacional URSI.*
- MATERDEY, T., GONZÁLEZ, S., GÓMEZ, R., Y GARCÍA, B. 1993b. Nuevos algoritmos de diferencias y promedios finitos en el dominio del tiempo para la solución de las ecuaciones de maxwell. Parte I: Medios anisótropos. *Pages 640-644 of: VIII Symposium Nacional URSI.*
- MATERDEY, T., GONZÁLEZ, S., GÓMEZ, R., Y GARCÍA, B. 1994 (Abr.). A new vision of numerical methods for the solution of Maxwell's equations related to the FD-TD method. Application to general anisotropic media. *Pages 138-141 of: IEE (ed), Second international conference on computation in electromagnetics.*
- MATERDEY BAO-HUNG, T. 1993 (Nov.). *Nueva formulación de métodos de diferencias finitas en el dominio del tiempo. aplicación a guías dieléctricas anisótropas.* Tesis Doct., Universidad de Granada.
- MCINTURFF, K., Y SIMON, P. S. 1993. Closed-form expressions for coefficients used in (FD-TD) high-order boundary conditions. *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, **3**(7), 222-223.
- MEI, K. K., Y FANG, J. 1992. Superabsorption - a method to improve Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Time-Domain method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **40**(9), 1001-1010.
- MEI, K. K., CANGELLARIS, A., Y ANGELAKOS, D. J. 1984. Conformal time domain finite difference method. *Radio Science*, **19**(5), 1145-1147.

- MILLER, E. K. 1988. A selective survey of computational electromagnetics. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **36**(9), 1281–1305.
- MITCHELL, A.R., Y GRIFFITHS, D.F. 1980. *The finite difference method in partial differential equations*. John Wiley & Sons.
- MITTRA, R., Y PEKEL, Ü. 1995. A new look at the perfectly matched layer (PML) concept for the reflectionless absorption of electromagnetic waves. *IEEE microwave guided wave lett.*, **5**(3), 84–86.
- MOHAMMADIAN, A. H., SHANKAR, V., Y HALL, W. F. 1991. Application of time–domain finite–volume method to some radiation problems in two and three dimensions. *IEEE Trans. on Magnetics*, **27**(5), 3841–3844.
- MUR, G. 1981. Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference approximation of the time domain electromagnetic field equations. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, **23**, 377–382.
- NEHRBASS, J., Y LEE, R. 1996 (Jul.). Numerical stability analysis for perfectly matched absorbers. *Pages 96–99 of: IEEE antennas and propagat. soc. int. symp.*, vol. 1.
- NEHRBASS, J. W., LEE, J.-F., Y LEE, R. 1996. Stability analysis for perfectly matched layered absorbers. *Electromagnetics*, **16**(4), 385–397.
- OLIGER, J. 1974. Fourth order difference methods for the initial boundary–value problem for hyperbolic equations. *Mathematics of Computation*, **28**, 15–25.
- OLIVIER, J. C. 1992. On the synthesis of exact free space Absorbing Boundary Conditions for the Finite–Difference Time–Domain method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **40**(4), 456–460.
- OMICK, S. R., Y CASTILLO, S. P. 1993. A new finite–difference time–domain algorithm for the accurate modeling of wide–band electromagnetic phenomena. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, **35**(2), 215–222.
- PEREDA, J. A., VIELVA, L. A., VEGAS, A., Y PRIETO, A. 1993. A treatment of magnetized ferrites using the FDTD method. *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, **3**(5), 136–138.
- PETROPULOS, P. G. 1994. Stability and phase error analysis of FD-TD in dispersive dielectrics. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **42**(1), 62–69.
- PRESCOTT, D. T., Y SHULEY, N. V. 1992. A method for incorporating different sized cells into the finite–difference time–domain analysis technique. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, **2**(11), 434–436.
- RAILTON, C. J. 1993. An algorithm for the treatment of curved metallic laminas in the Finite Difference Time Domain method. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **41**(8), 1429–1438.

- RAILTON, C. J., DANIEL, E. M., PAUL, D., Y MCGEEHAN, J. P. 1993. Optimized boundary conditions for the analysis of planar circuits using the Finite Difference Time Domain method. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 41(2), 290-297.
- RAMAHI, O. M., A, KHEBIR, Y MITTRA, R. 1991. Numerically derived absorbing boundary condition for the solution of open region scattering problems. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 39(3), 350-353.
- RAPPAPORT, C., Y BAHRMASEL, L. 1992. An absorbing boundary condition based on anechoic absorber for EM scattering computation. *J. electromagn. waves applicat.*, 6(12), 1621-1633.
- RAPPAPORT, C. M. 1991. FDFD Analysis of electromagnetic scattering in anisotropic media using unconstrained triangular meshes. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 39(3), 345-349.
- RAPPAPORT, C. M. 1992 (Jul.). Preliminary FDTD results from the anechoic absorber absorbing boundary condition. *Pages 544-547 of: IEEE antennas and propagat. soc. int. symp.*, vol. 1.
- RAPPAPORT, C. M. 1995. Perfectly matched absorbing boundary conditions based on anisotropic lossy mapping of space. *IEEE microwave guided wave lett.*, 5(3), 90-92.
- REINEIX, A., Y JECKO, B. 1989. Analysis for microstrip patch antennas using Finite Difference Time Domain method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 37(11), 1361-1369.
- REINEIX, A., MONEDIERE, T., Y JECKO, F. 1992. Ferrite analysis using the finite-difference time-domain (FDTD) method. *Microwave Opt. Tech. Letters*, 5(13), 685-686.
- REUTER, C. E., JOSEPH, R. M., THIELE, E. T., KATZ, D. S., Y TAFLOVE, A. 1994. Ultrawideband absorbing boundary condition for termination of waveguiding structures in FD-TD simulations. *IEEE microwave guided wave lett.*, 4(10), 344-346.
- RICHTMYER, R. D., Y MORTON, K. W. 1967. *Difference methods for initial-value problems*. New York: Interscience Publishers.
- ROBERTS, K. V., Y WEISS, N. O. 1966. Convective difference schemes. *Mathematics of Computation*, 20(Abr.), 272-299.
- S. GONZÁLEZ GARCÍA, T. MATERDEY BAO-HUNG, B. GARCÍA OLMEDO, Y R. GÓMEZ MARTÍN. 1996. Volume conformation method to study scattering by PEC objects with FDTD. *IEE Proceedings on Microwaves, Antennas and Propagation*, Abr., 131-136.
- SACKS, Z.S., KINGSLAND, D.M., LEE, R., Y LEE, J.F. 1995. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. *IEEE trans. on Antennas and Propagation*, 43(12), 1460-1463.

- SCHNEIDER, J., Y HUDSON, S. 1993. The Finite-Difference Time-Domain method applied to anisotropic material. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **41**(7), 994-999.
- SELMIN, V. 1993. The node-centred finite volume approach: bridge between finite differences and finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **102**, 107-138.
- SHANKAR, V., HALL, W., Y MOHAMMADIAN, A.H. 1989. A three-dimensional Maxwell's equation solver for computation of scattering from layered media. *IEEE Trans. on Magnetics*, **25**(Jul.), 3098-3103.
- SHANKAR, V., MOHAMMADIAN, A. H., Y HALL, W. F. 1990. A time-domain, finite-volume treatment for Maxwell's equations. *Electromagnetics*, **10**, 127-145.
- SHAW, J. A., DURNEY, H. D., Y CRISTENSEN, D. A. 1991. Computer aided design of two-dimensional electric-type hyperthermia applicators using the Finite-Difference Time-Domain method. *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, **38**, 861-870.
- SHEEN, D. M., ALI, S. M., ABOUZHARA, M. D., Y KONG, J. A. 1990. Application of the three dimensional Finite Difference Time Domain method to the analysis of planar microstrip circuits. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **38**(7), 849-857.
- SHLAGER, K. L., Y SCHNEIDER, J. B. 1995. A selective survey of the Finite-Difference Time-Domain literature. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, **37**(4), 39-56.
- SHLAGER, K. L., MALONEY, J. G., RAY, S. L., Y PETERSON, A. F. 1993. Relative accuracy of several Finite-Difference Time-Domain methods in two and three dimensions. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **41**(12), 1732-1737.
- SHORTHOUSE, D. B., Y RAILTON, C. J. 1992. The incorporation of static field solutions into the Finite Difference Time Domain algorithm. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **40**(5), 986-996.
- SLOAN, D. M. 1983. Boundary conditions for a fourth order hyperbolic difference scheme. *Mathematics of Computation*, **41**(163), 1-11.
- SMITH, G.D. 1985. *Numerical solution of partial differential equations. finite difference methods*. Oxford: Clarendon Press.
- SULLIVAN, D. M. 1991. Mathematical methods for treatment planning in deep regional hyperthermia. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **39**(5), 864-872.
- SULLIVAN, D. M., BORUP, D. T., Y GANDHI, O. P. 1987. Use of the finite-difference time domain method in calculating em absorption in human tissues. *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, **34**(2), 148-157.
- TAFLOVE, A. 1995. *Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method*. Boston, MA: Artech House.

- TAFLOVE, A., Y BRODWIN, M. E. 1975a. Computation of electromagnetic fields and induced temperatures within a model of the microwave-irradiated human eye. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **23**(11), 888-896.
- TAFLOVE, A., Y BRODWIN, M.E. 1975b. Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 623-630.
- TAFLOVE, A., Y UMASHANKAR, K. R. 1983. Radar cross section of general three dimensional scatterers. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, **25**(4), 433-440.
- TAFLOVE, A., Y UMASHANKAR, K. R. 1987. The finite-difference time-domain (FDTD) method for electromagnetic scattering and interaction problems. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **1**(3), 243-267.
- TAFLOVE, A., Y UMASHANKAR, K. R. 1990a. The Finite-Difference Time-Domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions. *Electromagnetics*, **10**, 105-126.
- TAFLOVE, A., Y UMASHANKAR, K. R. 1990b. *The finite-difference time-domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions with arbitrary structures*. PIER 2. Progress in electromagnetics research. Finite elements and finite difference methods in electromagnetic scattering. New York: Elsevier.
- TAFLOVE, A., UMASHANKAR, K. R., Y JURGENS, T. G. 1985. Validation of FDTD modeling of the radar cross section of three-dimensional structures spanning up to nine wavelengths. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **33**(6), 662-666.
- TAFLOVE, A., UMASHANKAR, K. R., BEKER, B., HARFOUSH, F., Y YEE, K. S. 1988. Detailed FDTD analysis of electromagnetic fields penetrating narrow slots and lapped joints in the thick conducting screens. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **36**(2), 247-257.
- TIRKAS, P. A., Y BALANIS, C. A. 1992. Finite-difference time-domain method for antenna radiation. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **40**, 334-340.
- TIRKAS, P. A., Y DEMAREST, K. R. 1991. Modeling of thin dielectric structures using the finite-difference time domain technique. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **39**, 1338-1344.
- TIRKAS, P. A., BALANIS, C. A., Y RENAUT, R. A. 1992. Higher order Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Time-Domain method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **40**(10), 1215-1222.
- TIRKAS, P. A., BALANIS, C. A., PRUCHINE, M. P., Y BARBER, G. C. 1993. Finite-difference time-domain method for electromagnetic radiation, interference and interaction with complex structures. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, **35**(2), 192-203.

- UMASHANKAR, K. R., Y TAFLOVE, A. 1982. A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, **24**(4), 397–405.
- UMASHANKAR, K. R., TAFLOVE, A., Y BEKER, B. 1987. Calculation and experimental validation of induced currents on coupled wires in an arbitrary shaped cavity. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **35**(11), 1248–1257.
- VEIHL, J. C., Y MITTRA, R. 1996. An efficient implementation of Berenger's perfectly matched layer (PML) for finite-difference time-domain mesh truncation. *IEEE microwave guided wave lett.*, **6**(2), 94–96.
- VILLÓ PÉREZ, I., GONZÁLEZ GARCÍA, S., GÓMEZ MARTÍN, R., Y GARCÍA OLMEDO, B. 1997. Extension of Berenger's Absorbing Boundary Conditions to match dielectric anisotropic media. *Microwave and Guided Wave Letters*, **7**(9).
- VILLÓ PÉREZ, I., GONZÁLEZ GARCÍA, S., GÓMEZ MARTÍN, R., Y GARCÍA OLMEDO, B. 1998. Generalization of Berenger's Absorbing Boundary Conditions for 3d magnetic and dielectric anisotropic media. *Microwave and Optical Technology Letters*, Jun.
- VINOKUR, M. 1989. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 1–52.
- WATANABE, Y. 1987. A nondispersive and nondissipative numerical method for first-order linear hyperbolic partial differential equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **3**(1-8).
- XIAO, S., Y VAHLDIECK, R. 1993. An efficient 2-D FDTD algorithm using real variables. *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, **3**(5), 127–129.
- XIAO, S., VAHLDIECK, R., Y JIN, H. 1992. Full wave analysis of guided wave structures using a novel 2-D FDTD. *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, **2**(5), 165–167.
- YEE, K.S. 1966. Numerical solution of initial boundary problems in isotropic media. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **14**, 302–307.
- ZHANG, X., FANG, J., MEI, K. K., Y LIU, Y. 1988. Calculations of the dispersion characteristics of microstrips by the time-domain finite-difference method. *IEEE Trans Microwave Theory and Techniques*, **36**(2), 263–267.
- ZHAO, A. P., Y RÄISÄNEN, A. V. 1998. Extension of berenger's PML absorbing boundary conditions to arbitrary anisotropic magnetic media. *IEEE microwave guided wave lett.*, **8**(1), 15–17.
- ZHAO, A. P., JUNTUNEN, J., Y RAISANEN, A.V. 1997. Material independent PML absorbers for arbitrary anisotropic dielectric media. *Electronics Letters*, **33**(18), 1535–1536.

- ZHAO, A. P., JUNTUNEN, J., Y RÄISÄNEN, A. V. 1998. Generalized material-independent PML absorbers for the FDTD simulation of electromagnetic waves in arbitrary anisotropic dielectric and magnetic media. *IEEE microwave guided wave lett.*, 8(2), 52-54.
- ZIOLKOWSKI, R. W. 1997. The design of Maxwellian absorbers for numerical boundary conditions and for practical applications using engineered artificial materials. *IEEE trans. antennas propagat.*, 45(4), 656-671.
- ZIOLKOWSKY, R. W., MADSEN, N. K., Y CARPENTER, R. C. 1983. Three-dimension computer modeling of EM fields: A global lookback lattice truncation scheme. *Journal of Computational Physics*, 50, 360-408.
- ZIVANOVIC, S. S., YEE, K. S., Y MEI, K. K. 1991. A subgridding method for the time-domain finite-difference method to solve Maxwell's equations. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 29(3), 471-479.
- ZWAS, G., Y ABARBANEL, S. 1971. Third and fourth order accurate schemes for hyperbolic equations of conservation law form. *Mathematics of Computation*, 25(114), 229-236.