INFLUENCIA DEL NÚMERO DE CONEXIONES EN LA REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE DOS PASOS

Antonio Frías y Enrique Castro

En este trabajo identificamos una variable lingüística en los problemas aritméticos verbales de dos pasos, que denominamos "nodo". Describimos una experiencia con estudiantes de 5º y 6º de primaria (10 y 12 años) cuyo fin fue observar si esta variable lingüística tiene o no influencia significativa en la elección de las operaciones necesarias para solucionar este tipo de problemas. Los resultados obtenidos muestran que el número de nodos en un problema de dos pasos tiene efecto significativo en el proceso de resolución. Esta influencia no se ve alterada por otros factores considerados en este estudio.

Términos clave: Representación; Problemas de dos pasos; Relaciones; Nodos; Estructura aditiva; Estructura multiplicativa.

Influence of Number of Connections in the Symbolic Representation of Two-Step Arithmetic Problems

In this work we identify a new factor in two-step arithmetic word problems, which we denominate "node" factor. We describe an experience with 5th and 6th grade primary students (11 and 12-year-old pupils) whose purpose was to observe if this factor has or has not significant influence in the election of the necessary operations to solve this type of problems. The obtained results show that the number of nodes in a problem of two steps has significant effect in the resolution process. This significant influence is not altered by other factors considered in this study.

Keywords: Representation; Two-step problems; Connections; Nodes; Additive structure; Multiplicative structure.

El trabajo que presentamos es una parte de una investigación más amplia que estamos realizando sobre problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. Las investigaciones previas sobre problemas aritméticos se han centrado, prioritariamente, en problemas verbales simples de estructura aditiva y multiplicativa. En

Frías, A. y Castro, E. (2007). Influencia del número de conexiones en la representación simbólica de problemas aritméticos de dos pasos. *PNA*, *2*(1), 29-41.

estos problemas interviene una sola relación ternaria, en la que Nesher y Hershkovitz (1991) distinguen tres componentes relacionadas:

- dos componentes completas, que suministran información numérica en forma de datos, y
- una componente en forma de pregunta, que demanda una información numérica.

Una manera de representar la relación ternaria es mediante un esquema. Así el esquema de la Figura 1 representa la relación ternaria entre las componentes del problema 1.

Problema 1. María tiene 5 cajas de cromos, en cada caja tiene 12 cromos. ¿Cuántos cromos tiene María?

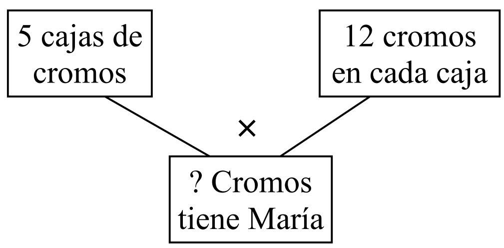

Figura 1. *Relación ternaria entre las componentes de un problema*

El problema 1 contiene en su texto tres componentes o proposiciones:

- Componente 1: María tiene 5 cajas de cromos (completa).
- Componente 2: En cada caja tiene 12 cromos (completa).
- Componente 3: ¿Cuántos cromos tiene María? (incompleta).

Dos de ellas contienen información numérica y la tercera es la pregunta del problema. A las dos primeras se les llama componentes completas y a la cuestión, componente incompleta. Esta última carece de información numérica pero sí describe el conjunto al que se refiere.

Pero en el currículum escolar, además de los problemas simples de estructura aditiva y de estructura multiplicativa, los estudiantes aprenden a resolver problemas del tipo:

Problema 2. Ana tiene 30 cromos. María tiene 6 veces más cromos que Ana. ¿Cuántos cromos tienen entre las dos?

En este problema hay tres componentes y, sin embargo, no es un problema simple que se resuelva con sólo una operación. Es necesario emplear dos operaciones para su resolución: la multiplicación y la adición. ¿Cómo caracterizar estos problemas en términos de relaciones y esquemas? Veamos nuestro análisis.

Puesto que hemos descartado que sea un problema simple, hacemos su caracterización considerando que es un problema compuesto. Para ello, empleamos el análisis que hacen Nesher y Hershkovitz (1991, 1994).

Nesher y Hershkovitz consideran que un problema de un paso tiene una estructura subyacente constituida por una relación ternaria. La combinación de dos estructuras da lugar a esquemas de problemas de dos pasos. En este análisis, un esquema compuesto se forma por la conexión de dos esquemas simples mediante la componente latente ("L" en la Figura 2). Distinguen tres esquemas compuestos de dos relaciones.

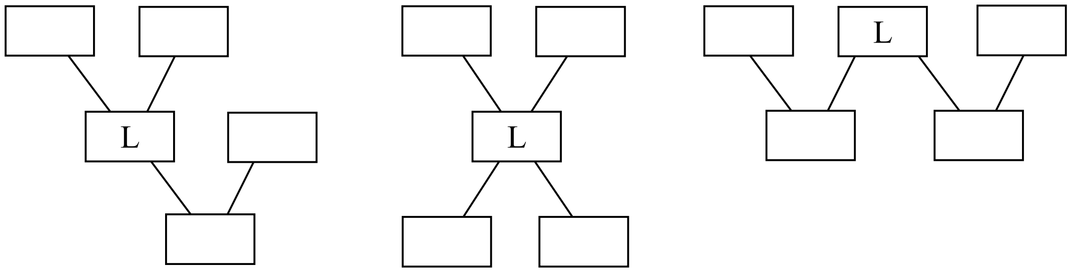

Figura 2. *Esquemas compuestos de dos relaciones según Nesher y Hershkovitz (1991, 1994)*

En estos tres esquemas[4] de problemas de dos pasos hay tres componentes explícitas, una componente latente implícita que sirve de unión entre las estructuras simples, y una componente desconocida que hay que hallar.

Noción de Nodo

En los esquemas compuestos correspondientes a los problemas de dos pasos (Hershkovitz y Nesher, 1991, 1996; Nesher y Hershkovitz, 1991, 1994), la conexión entre los dos esquemas simples se produce mediante una componente latente del problema (ver Figura 3), que es común a los dos esquemas simples.

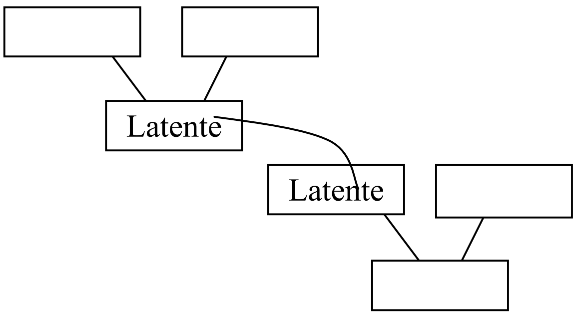

Figura 3. *Componente latente*

En esta situación decimos que existe un *nexo* o *nodo* entre las dos estructuras simples que originan el esquema compuesto correspondiente. Por tanto, hay una cantidad compartida por dos estructuras simples dentro de un problema compuesto. Por ejemplo, en el problema 3:

[4] El esquema que Nesher y Hershkovitz denominan jerárquico lo notamos por J, el esquema de compartir el todo por CT y el esquema de compartir una parte por CP.

Problema 3. He comprado 5 libros, cada libro cuesta 8 euros. Si entrego 50 euros, ¿cuánto dinero me devuelven?

En este problema, la cantidad latente (precio de todos los libros) es compartida por la primera estructura aritmética y por la segunda. Esta cantidad latente, que no está explícita en el enunciado del problema, conecta ambas estructuras. Dicha cantidad se obtiene en la primera estructura, donde tiene la función de incógnita, y se utiliza en la segunda como dato, con el cual se resuelve el problema de dos pasos. Esta función de conexión entre las dos estructuras es la que nos lleva a llamarla nodo o nexo entre ambas.

En la primera estructura la componente latente es la pregunta del primer problema:

- ♦ He comprado 5 libros
- ♦ Cada libro cuesta 8 euros
- ♦ ¿Cuánto cuestan todos los libros?

En la segunda estructura la componente latente pasa a ser una componente completa o dato y, en este caso, es una parte (sustraendo) de la estructura aditiva:

- ♦ Todos los libros cuestan 40 euros
- ♦ Entrego 50 euros
- ♦ ¿Cuánto dinero me devuelven?

En los esquemas de problemas de dos pasos definidos por Nesher y Hershkovitz (1991, 1994), la cantidad latente es el único nexo de unión entre dos estructuras. Pero la condición de nodo no lleva implícito ser una cantidad latente ni tampoco ser la única cantidad con tal condición. El nodo también puede ser un dato explícito en el enunciado, que es compartido por más de una estructura simple dentro de un problema compuesto. Es posible encontrar problemas de dos pasos que tengan dos estructuras conectadas por dos nodos, como ocurre en el siguiente problema:

Problema 4. Juan tiene 5 bolas y su abuelo le regala el triple de las que tenía. ¿Cuántas bolas tiene ahora Juan?

En este problema se combina un esquema multiplicativo y uno aditivo. En ambos esquemas hay dos cantidades, 5 bolas de Juan y las bolas que regala su abuelo a Juan, que son compartidas. Su resolución requiere la siguiente secuencia de operaciones: $3 \times 5 + 5$. En la Figura 4 podemos ver la representación de los dos esquemas simples y cómo ambos contienen a las dos cantidades compartidas. Este tipo de problemas de dos pasos tiene sólo dos datos o, visto de otro modo, tres datos pero uno de ellos se repite. Por ello hay dos componentes compartidas por las dos estructuras simples, una de ellas es la componente latente (bolas que regala el abuelo) y otra el dato repetido (5 bolas de Juan) del problema.

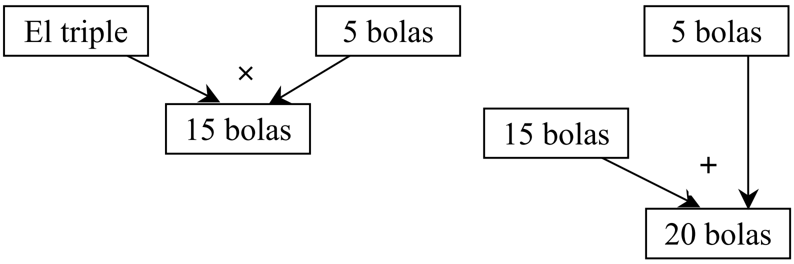

Figura 4. *Esquemas simples de un problema con dos nodos*

La condición de nodo, por tanto, la tienen aquellas cantidades que son compartidas por varias estructuras simples dentro de un problema compuesto, con independencia de que tales cantidades sean datos del problema o incógnitas intermedias (cantidades latentes) del mismo.

A partir de las consideraciones anteriores, en los problemas de dos pasos hemos definido una característica nueva que hemos denominado nodo, y que hemos considerado como una variable que, en este campo de problemas, toma dos valores: (a) problemas de dos pasos con un nodo y (b) problemas de dos pasos con dos nodos. La variable nodo es un objetivo de estudio en nuestra investigación.

Los Problemas con dos Nodos

Si consideramos dos nodos para conectar las dos estructuras simples que forman un problema de dos pasos, aparecen los siguientes esquemas compuestos:

1. Cuando una parte y el todo de un esquema simple coinciden con parte y parte del otro esquema simple (P, T = P, P). Este esquema compuesto lo notaremos por JP, ya que también puede obtenerse a partir del esquema compuesto J, haciendo coincidir una parte de cada esquema simple (ver Figura 5).

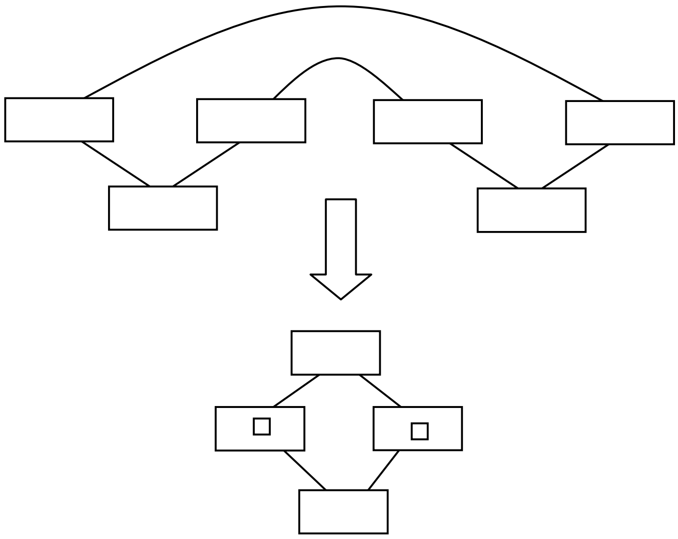

Figura 5. *Esquema compuesto JP*

2. Cuando las dos partes de un esquema simple coinciden con las del otro (P, P = P, P), tenemos el esquema compuesto que llamamos CPP (Compartir Parte y Parte) (ver Figura 6). También puede generarse a partir del esquema compuesto CP, haciendo coincidir la otra parte de ambos esquemas simples.

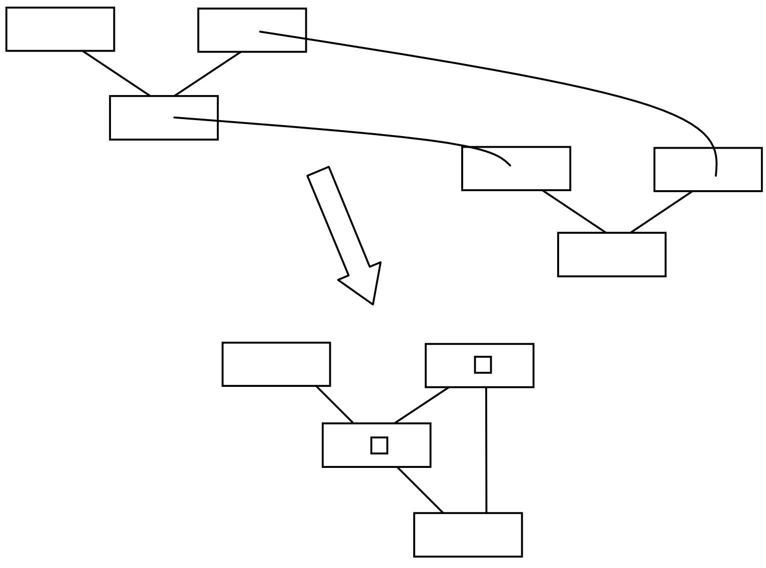

Figura 6. *Esquema compuesto CPP*

3. Cuando una parte y el todo de un esquema simple coinciden con parte y todo del otro (P, T = P, T), tenemos el esquema compuesto que notamos por CTP (Compartir Todo y Parte) (ver Figura 7); que podemos obtenerlo también a partir del esquema compuesto CT, si hacemos coincidir una parte de cada esquema simple, o también a partir del esquema compuesto CP, si hacemos coincidir el todo de cada esquema simple.

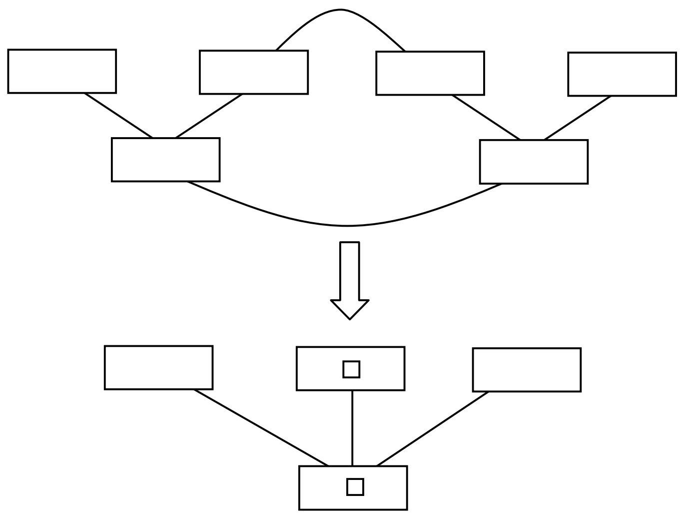

Figura 7. *Esquema compuesto CTP*

Todos estos esquemas representan a problemas de dos pasos con sólo dos datos, o dicho de otro modo, con tres datos, de los cuales uno *interviene* dos veces. Las dos conexiones (nodos) no desempeñan el mismo rol en el esquema: una es la componente latente, por lo cual nunca podrá ser dato del problema, y la otra es el dato repetido, que nunca podrá ser incógnita. Por tanto, dependiendo de donde se coloque la componente latente, tendremos esquemas diferentes. Así, en el esquema JP pueden darse dos posibilidades (ver Figura 8).

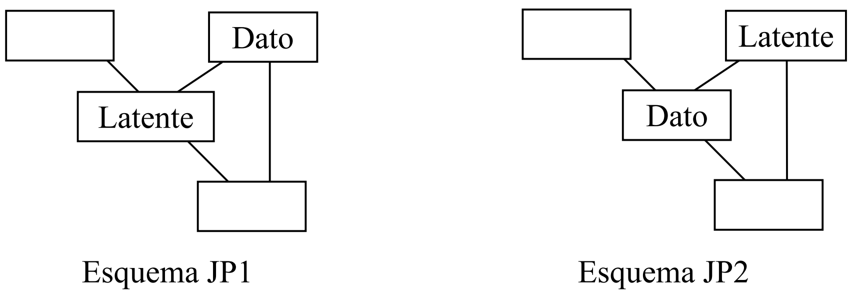

Figura 8. *Esquemas compuestos derivados del esquema JP*

Si en el esquema JP la componente latente es el todo de una de las estructuras, obtenemos el esquema compuesto que notamos JP1, y si la componente latente es la parte compartida por ambos esquemas simples, tenemos el esquema compuesto que notamos por JP2.

De igual modo, si en el esquema CTP la componente latente es el todo compartido por las dos estructuras, tenemos el esquema compuesto que denominamos CTP1, y si la componente latente es la parte compartida por las dos estructuras, obtenemos el esquema que llamamos CTP2 (ver Figura 9).

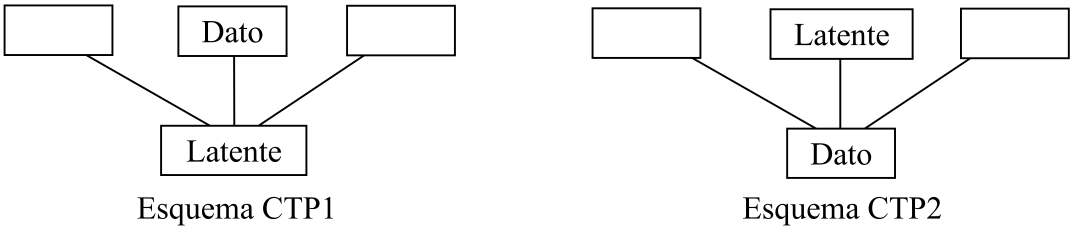

Figura 9. *Esquemas compuestos derivados del esquema CTP*

En el esquema CPP, al cambiar la componente latente de posición se obtiene un esquema equivalente, lo cual viene producido por la simetría de dicho esquema. Con ello, podemos identificar cinco opciones en los problemas de dos pasos con dos nodos: JP1, JP2, CTP1, CTP2 y CPP.

La pregunta que nos hacemos en esta investigación es: ¿tiene influencia la variable *nodo* en la elección correcta de las operaciones aritméticas necesarias para resolver problemas de dos pasos? Para contestar a esta pregunta hemos realizado una experiencia en la que analizamos las producciones escritas de los alumnos de los últimos cursos de educación primaria en respuesta a problemas aritméticos compuestos de dos relaciones con una o dos conexiones. La forma de realizar la experiencia y los resultados los presentamos a continuación.

Método

Sujetos

En este estudio han participado ciento setenta y dos estudiantes de Educación Primaria de colegios públicos de la ciudad de Almería. Ochenta y seis alumnos de 5º curso y otros ochenta y seis de 6º curso. La edad de los alumnos oscila entre diez y doce años.

Tipo de Problemas a Estudiar

Nuestro interés está en los problemas de dos pasos que sólo contengan categorías estáticas de problemas simples, por tanto éstos serán de comparación (Cp) o de combinación (Co) y, por tanto, para un problema estático de dos pasos hay cuatro categorías posibles: Co-Co, Co-Cp, Cp-Co, Cp-Cp. En este estudio nos limitamos a problemas de la categoría Cp-Co. En esta categoría semántica de problemas el esquema compuesto asociado es JP, circunstancia que va a condicionar los valores de las variables presentes en este estudio.

Variables

En este estudio hemos empleado un diseño factorial con cuatro factores o variables independientes que son:

Primera Variable
Se refiere a la relación aritmética doble, que llamamos variable A, y que toma dos valores, correspondientes a las combinaciones posibles en un problema compuesto de dos relaciones: una relación aditiva y otra multiplicativa:

- A_1 para una relación aditiva seguida de una multiplicativa $(+, \times)$.
- A_2 para una relación multiplicativa seguida de una aditiva $(\times, +)$.

Segunda Variable
El tipo de enunciado en un problema de comparación puede ser consistente o inconsistente (Lewis y Mayer, 1987). Atendiendo a estos dos tipos de enunciados de los problemas de comparación, consideramos la variable tipo de enunciado en la comparación, que vamos a llamar variable E, y que toma dos valores:

- E_1 si el enunciado de la comparación es consistente.
- E_2 si el enunciado de la comparación es inconsistente.

Tercera Variable
Cada una de las relaciones simples que intervienen en un problema de dos pasos puede ser de aumento o de disminución (Castro, Rico, Gutiérrez, Castro, Segovia, Morcillo, et al., 1996; Rico, Castro, González y Castro, 1994). Llamamos R a la variable que combina las dos posibilidades en la relación doble. En este trabajo sólo vamos a tener en cuenta dos valores:

- R_1 para la relación de aumento-aumento (AA).
- R_2 para la relación de disminución-aumento (DA).

Cuarta Variable
El número de nodos, que llamamos variable nodos (N), toma dos valores:

- N_1 para los problemas con dos nodos.
- N_2 para los problemas con un nodo.

Instrumento y Procedimiento
El instrumento utilizado en esta experiencia ha sido un cuestionario de dieciséis problemas. Los dieciséis problemas corresponden a las posibilidades que surgen al cruzar los cuatro factores anteriores en un diseño factorial (ver Tabla 1).

Tabla 1
Cruce de las cuatro variables

	N_1		N_2	
R	A_1	A_2	A_1	A_2
		E_1		
R_1	1	2	9	10
R_2	3	4	11	12

Tabla 1
Cruce de las cuatro variables

	N_1		N_2	
R	A_1	A_2	A_1	A_2
		E_2		
R1	5	6	13	14
R2	7	8	15	16

Este conjunto de 16 problemas lo hemos distribuido en dos cuestionarios como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2
Distribución de los problemas en los cuestionarios

	N_1		N_2		N_1		N_2	
	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2
R	*Cuestionario 1*				*Cuestionario 2*			
				E_1				
R_1	X		X			X		X
R_2		X		X	X		X	
				E_2				
R_1	X		X			X		X
R_2		X		X	X		X	

Los problemas de estos cuestionarios fueron resueltos por los niños de manera individual y en silencio, en el salón de clase, en una prueba de lápiz y papel. A cada niño se le dio un cuestionario de forma aleatoria.

Resultados

El análisis de la varianza aplicado a los datos obtenidos ha producido efecto significativo en los siguientes casos.

Variable N, número de nodos ($F = 6.677$, $p = 0.010$). El porcentaje de éxito en problemas con un nodo o con dos nodos es de 41% y 63% respectivamente.

Variable R, combinaciones de aumento y disminución ($F = 20.982, p = 0.000$). Con un porcentaje de éxitos en las combinaciones aumento-aumento y disminución-aumento de 49% y 38%, respectivamente.

Variable E o tipo de enunciado ($F = 56.504$, $p = 0.000$). El porcentaje de éxito es del 61% cuando el enunciado del problema es consistente y del 45% cuando el enunciado es inconsistente.

Variable A, combinación de relaciones aditivas y multiplicativas ($F = 116.760$, $p = 0.000$). Los porcentajes de éxito en las combinaciones de relaciones aditivas y multiplicativas empleadas han sido 30% y 57% respectivamente.

El único efecto de interacción significativo en el que interviene la variable nodo es NxA ($F = 6.084$, $p = 0.014$). Pero esta interacción no altera el orden de dificultad que tienen los valores de la variable nodo, como se ve en la Figura 10.

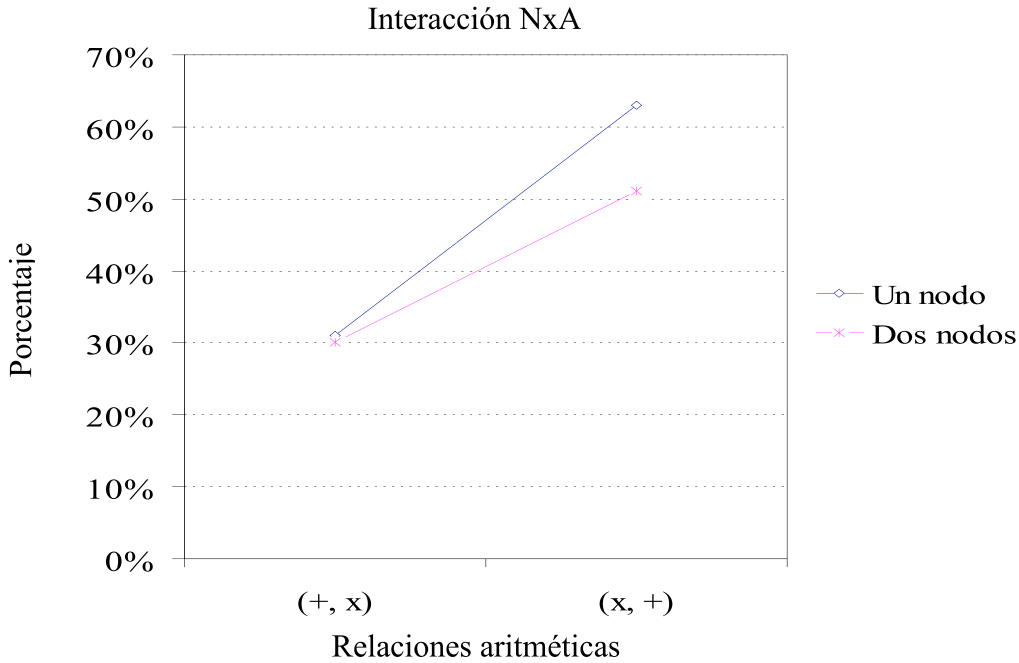

Figura 10. *Porcentajes de aciertos según los nodos y las combinaciones de relaciones aritméticas*

En la Figura 10 podemos observar que los problemas con dos nodos son más difíciles de traducir en una representación simbólica que los problemas con un nodo para las dos combinaciones de operaciones aritméticas.

Conclusiones

En este trabajo hemos identificado una clase particular de problemas aritméticos verbales de dos pasos que contienen en su enunciado sólo dos cantidades conocidas. Hemos puesto de manifiesto que estos problemas tienen una característica común: están formados por estructuras aditivas y multiplicativas conectadas por dos nexos o nodos. En trabajos previos, los problemas de dos pasos que fueron estudiados por Greeno (1987) y Nesher y Hershkovitz (1991, 1994) tienen un solo nexo de unión. Hemos realizado una experiencia para contrastar la hipótesis de si hay diferencias significativas entre problemas de dos pasos que difieren en el número de nodos o conexiones entre relaciones. Mediante un análisis de varianza hemos encontrado que hay diferencias significativas de dificultad entre problemas aritméticos enunciados verbalmente con un nodo y problemas equivalentes con dos nodos. Los problemas aritméticos verbales de dos pasos con dos nodos son más difíciles de trasladar en expresiones aritméticas que sus equivalentes con un nodo. Además, hemos encontrado de manera significativa que este resultado no está influido por otras variables que también tienen influencia en la dificultad de traslación a expresiones aritméticas como el hecho de que la relación de comparación esté expresada en lenguaje consistente o inconsistente, si las relaciones aditiva y multiplicativa son de aumento o de disminución, y también es independiente de las combinaciones de estructuras aditivas y multiplicativas que forman el esquema del problema de dos pasos. Aunque hay interacción significativa entre el factor nodo y el factor que representa las combinaciones de estructuras aditivas y multiplicativas, el análisis de esta interacción pone de manifiesto que el orden de dificultad entre los problemas de dos pasos con un nodo y con dos nodos se mantiene. Por tanto, el número de nodos es un aspecto que nos permite diferenciar tipos de problemas y explicar parte de la dificultad que plantean a los niños los problemas aritméticos verbales de dos pasos.

REFERENCIAS

Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Castro, E., Segovia, I., Morcillo, N., et al. (1996). Evaluación de la resolución de problemas aritméticos en primaria. *Revista de Investigación Educativa*, *14*(2), 121-139.

Greeno, J. G. (1987). Instructional representations based on research about understanding. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hershkovitz, S. y Nesher, P. (1991). Two-step problems, the scheme approach. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 189-196). Assisi: Program Committee of the 15th PME Conference.

Hershkovitz, S. y Nesher, P. (1996). The role of schemes in designing computerized environments. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 339-366.

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*, 363-371.

Nesher, P. y Hershkovitz, S. (1991). Two-step problems, research findings. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the fifteenth International Conference for* *the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 65-71). Assisi: Program Committee of the 15th PME Conference.

Nesher, P. y Hershkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics, 26*(1), 1-23.

Rico, L., Castro, E., González, E. y Castro, E. (1994). Two-step addition problems with duplicated semantic structure. En J. P. Da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Este trabajo se publicó originalmente como Frías, A. y Castro, E. (2004). Influencia del número de conexiones en la representación simbólica de problemas aritméticos de dos pasos. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Actas del octavo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M)* (pp. 207-218). A Coruña: Universidade da Coruña.

Antonio Frías
Universidad de Almería
afrias@ual.es

Enrique Castro
Universidad de Granada
ecastro@ugr.es