

# ANÁLISIS Y CLASIFICACIÓN DE ERRORES COMETIDOS POR ALUMNOS DE SECUNDARIA EN LOS PROCESOS DE SUSTITUCIÓN FORMAL, GENERALIZACIÓN Y MODELIZACIÓN EN ÁLGEBRA

Raquel M. Ruano, Martín M. Socas y M. Mercedes Palarea

*Presentamos un estudio con alumnos de educación secundaria sobre tres procesos específicos del lenguaje algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización. A partir de las respuestas a un cuestionario, realizamos una clasificación de los errores cometidos y se analizan sus posibles orígenes. Finalmente, formulamos algunas consecuencias didácticas que se derivan de estos resultados.*

*Términos clave:* Análisis de errores; Procesos algebraicos; Sustitución formal; Generalización; Modelización.

Secondary Students' Error Analysis and Classification in Formal Substitution, Generalization and Modelling Process in Algebra

*We present a study with secondary students about three specific processes of algebraic language: Formal substitution, generalization, and modelling. Using a test, we develop a students' errors classifications, and we analyze its possible origins. Finally we present some didactical conclusions from the results.*

*Keywords:* Error analysis; Algebraic process; Formal substitution; Generalization; Modelling.

Muchos alumnos, incluso algunos de los que se consideran más capacitados para las matemáticas, encuentran grandes dificultades cuando inician su aprendizaje del álgebra. Para el profesor, es importante conocer los errores básicos cometidos por los alumnos puesto que le provee de información sobre la forma en que éstos interpretan los problemas y sobre cómo utilizan los diferentes procedimientos

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.

algebraicos. Esta información permitirá al profesor arbitrar procedimientos y remedios efectivos para ayudar a los alumnos en la corrección de dichos errores.

Numerosos profesores e investigadores, preocupados por las dificultades que el aprendizaje del álgebra ocasiona a los alumnos, han desarrollado diferentes investigaciones sobre el método de aproximación a ella más adecuado. Varios autores apuestan por la generalización como vía de introducción del álgebra en la escuela. Mason (1996) considera que la generalización es la sangre, el corazón de las matemáticas. En cambio Freudenthal (1983) piensa que la sustitución formal engloba al resto de los procesos y, por tanto, es la mejor forma de iniciar su tratamiento. Para otros, el mejor método de comenzar la enseñanza-aprendizaje del álgebra es desde la perspectiva de la modelización, enfatizando la fase de formulación del modelo (Janvier, 1996).

El estudio de los errores cometidos por los alumnos en los distintos procesos mencionados, proporciona información sobre las ventajas e inconvenientes de utilizar una u otra forma de introducir el álgebra en el ámbito escolar. Sin embargo, con este trabajo no pretendemos dilucidar cuál de las opciones mencionadas es la mejor.

Este trabajo tiene como objetivo principal analizar y clasificar los errores cometidos por un grupo de alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización.

## MARCO TEÓRICO

El estudio de los errores cometidos en la enseñanza-aprendizaje del álgebra se puede apoyar en algunas teorías de la psicología cognitiva. En este sentido, la mente del alumno no es una página en blanco, el alumno tiene un conocimiento anterior que le parece suficiente y establece en su mente cierto equilibrio. Por ello, la principal razón para que se produzca la asimilación del nuevo conocimiento es que éste debe tener significado para el alumno, para lo cual, ha de responder a las preguntas que él mismo se ha formulado. En ningún caso, el nuevo conocimiento se añade al antiguo; al contrario, le crea un conflicto al alumno porque le provoca una reestructuración nueva del conocimiento total, produciéndose posteriormente una acomodación de la estructura anterior, que le permite recobrar el equilibrio perdido.

Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos principalmente cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Como señala Matz (1980), “los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 94). Entendemos que el error tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimiento o de un despiste.

Abordaremos el estudio de los errores tomando como referencia el marco teórico descrito en Socas (1997), en el que se consideran tres ejes, no disjuntos, que nos permiten analizar el origen del error. De esta forma, podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos:

- ◆ obstáculo,
- ◆ ausencia de sentido, y
- ◆ actitudes afectivas y emocionales.

Consideramos el *obstáculo* como un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas (Bachelard, 1938; Brousseau, 1983). Organizamos los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico como mostramos en la Figura 1.

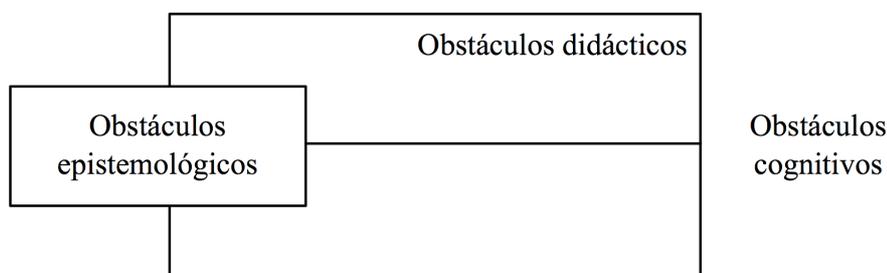


Figura 1. Organización de obstáculos en el sistema didáctico

La presencia de obstáculos epistemológicos, fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como a la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy. Esta condición parece esencial por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar. El análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos de hoy. Esta diferenciación se indicará de manera explícita en algunos ejemplos.

Los errores que tienen su origen en una *ausencia de sentido* se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo que podemos diferenciarlos en tres etapas distintas:

1. Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.

2. Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento.
3. Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo igual en álgebra y la sustitución formal.

Los errores que tienen su origen en *actitudes afectivas y emocionales* tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

Debemos señalar también que el hecho de atribuir una letra a un número desconocido o a un objeto matemático es necesariamente una sustitución formal y a su vez también una generalización. El hecho de establecer una relación entre letras y números es, obviamente, una modelización en la que la sustitución formal y la generalización están presentes. No obstante, a pesar de esta necesaria e implícita relación entre los tres procesos en la cultura matemática, consideramos que podemos diferenciarlos desde un punto de vista epistemológico. En este trabajo, el estudio de errores se realiza por separado en cada proceso, lo que nos mostrará indicios sobre cuál de ellos presenta las mayores dificultades.

## METODOLOGÍA

Para responder al objetivo de investigación, se diseñó un cuestionario con 15 preguntas y 43 ítems, en torno a tres procesos característicos del lenguaje algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización. El diseño y modo de construcción del cuestionario, así como los criterios de corrección de las preguntas están recogidos en Ruano y Socas (2001). El cuestionario se administró en dos partes, C1 y C2. La parte C1 contiene 9 preguntas, con un total de 28 ítems. En relación con los procesos en estudio, las 4 primeras están dedicadas a la sustitución formal (13 ítems) y el resto a la generalización. La parte C2 consta de 6 preguntas (20 ítems) donde las 3 primeras están relacionadas con la generalización y las siguientes con la modelización.

La muestra elegida fue de 60 estudiantes del IES San Matías, del Barrio de San Matías, en La Laguna (Tenerife): dos grupos de 4º de ESO de la opción B, con 21 y 25 alumnos, respectivamente, y un grupo de 1º de bachillerato tecnológico (14 alumnos), a los que se les administró el cuestionario (C1 y C2). Los alumnos no habían recibido instrucción del tema previa a la ejecución de este cuestionario y no se les proporcionó ningún tipo de ayuda. Se les pasó el cuestionario en dos sesiones de 50 minutos, una para cada parte, durante su clase de matemáticas, en dos días distintos de los meses de noviembre, diciembre y enero, durante el curso escolar 2001-2002. Tras la corrección del cuestionario, la muestra quedó reducida a 43 alumnos (13, 19 y 11 alumnos, respectivamente, en cada grupo) porque algunos sólo hicieron una de las dos partes del cuestionario.

Se utilizaron varios procedimientos para el análisis de la información. Realizamos la clasificación de los errores ayudándonos de esquemas de análisis en los que se refleja: (a) el tipo de error cometido, (b) los códigos de los alumnos, (c) el ítem en el que han fallado y (d) el número total de errores de cada tipo. En algunas preguntas con respuestas abiertas, hemos empleado redes sistémicas para la recogida de la información utilizando los parámetros fijados por Bliss, Monk y Ogborn (1983), con algunas modificaciones para ajustarlas a nuestro propósito. En concreto, en el lado derecho de la red, hemos incluido un recuadro con el número del alumno que ha recorrido cada itinerario.

## ANÁLISIS Y CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

A efectos de mostrar el análisis y clasificación de los errores cometidos por este grupo de alumnos de educación secundaria, seleccionamos dos de las quince preguntas propuestas. De la parte C1 del cuestionario, la pregunta 1, relacionada con la sustitución formal; y de la parte C2, la pregunta 5, relativa al proceso de modelización.

En la pregunta 1 se le pedía a los alumnos que sustituyeran las variables de una expresión por otras expresiones más complejas, que resultarían nuevamente variables.

### Pregunta 1

*Realiza las siguientes transformaciones:*

a. Si  $a = 2b$ , ¿en qué se transforma  $5a + 3$ ?

b. Si  $a = b + 3$ , ¿en qué se transforma  $5a + 3b$ ?

c. Si  $a = 2b$ , ¿en qué se transforma  $(a + 3) \cdot (3 - a)$ ?

En primer lugar, organizamos los errores de esta pregunta, relativa a la sustitución formal, atendiendo a si se han producido en la sustitución (proceso) o en el desarrollo y simplificación de las expresiones. Así, esquemáticamente, podemos organizarlos como muestra la Figura 2. En esta figura, los números que figuran en el interior del primer recuadro sobre la flecha representan el número asignado al alumno que ha cometido el error con distintos tipos de letra: normal, negrilla o cursiva según pertenezcan, respectivamente, a los grupos 1, 2 ó 3. Unido a este rectángulo se encuentra otro en el que se indica el ítem que presenta el error y, por último, en el recuadro tras la flecha, se muestra el número total de errores cometidos de cada tipo. Una vez organizados los errores, analizamos cuáles son los orígenes de los mismos.

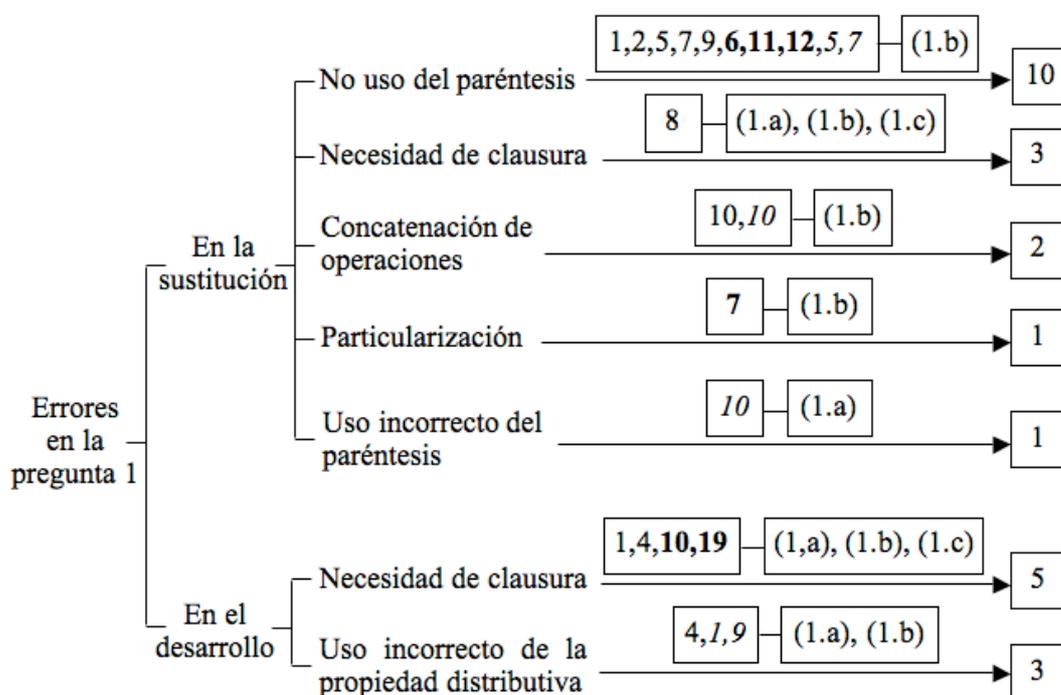


Figura 2. Organización de los errores en la pregunta 1

Comenzamos por el análisis de los errores cometidos al realizar el proceso de sustitución formal. En general, los alumnos no parecen tener demasiadas dificultades para realizar las sustituciones, pues de las 120 respuestas dadas, únicamente ha habido 17 incorrectas. Como era de esperar, el mayor número de fallos se produjo en el ítem (1.b), y el error más frecuente es el de no usar paréntesis donde es necesario. Este tipo de error suele tener su origen, o bien en una ausencia de sentido, o bien en un obstáculo. En el primer caso, el uso incorrecto del paréntesis es un tipo de error que se comete en álgebra y que tiene que ver, en muchas ocasiones, con problemas de la aritmética no superados. En el segundo caso, el origen estaría en un obstáculo didáctico relacionado con la forma de enseñanza de los paréntesis (Socas, 2001). En la enseñanza de la resolución de expresiones con operaciones combinadas de números enteros, se suelen seguir dos estrategias. En la primera, los cálculos se efectúan de “dentro hacia fuera”: los paréntesis tienen preferencia y se resuelven en primer lugar, luego el corchete y, finalmente, la llave. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 -\{-3 + 5 \cdot [7 - (+4 - 3 + 5) + 6] + 4\} &= -\{-3 + 5 \cdot [7 - 6 + 6] + 4\} = -\{-3 + 5 \cdot 7 + 4\} \\
 &= -\{-3 + 35 + 4\} = -36.
 \end{aligned}$$

Extrapolando este modo de hacer los cálculos, cuando se realizan operaciones en las que intervienen números y letras, los alumnos siguen el mismo procedimiento. Esto produce errores, bien porque se bloquean al no poder resolver paréntesis del tipo  $-(a - 2b) + b$ ; o bien, porque omiten el paréntesis y actúan como si no estu-

viera. La segunda estrategia consiste en resolver las expresiones de “fuera hacia dentro”. Este modo de resolver expresiones con operaciones combinadas de números enteros evitaría, para el caso del álgebra, que se produjeran errores del tipo anterior.

Otro tipo de error cometido está relacionado con la necesidad de clausura, que generalmente tiene su origen en un obstáculo cognitivo. Algunos alumnos que estudian álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que, a veces, son incompletos. Los alumnos no aceptan que una expresión no pueda cerrarse (que no dé un número) y que quede expresada, por ejemplo, como  $10b + 3$ . Sienten la necesidad de completarla, de cerrarla y dan como resultado  $13b$ . La concatenación, esto es, la yuxtaposición de dos o más símbolos, también suele tener su origen en un obstáculo cognitivo.

La necesidad de particularizar las expresiones algebraicas aparece como un error que tiene su origen en una ausencia de sentido. El alumno no encuentra sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no sabe cómo trabajar con letras o éstas no tienen significado para él. En este caso, el alumno busca respuesta retrocediendo al lenguaje numérico, particularizando las expresiones.

Nos fijamos ahora en los errores cometidos al realizar el desarrollo de las expresiones tras la sustitución formal. Según se observa en la Figura 2, el error más frecuente es la necesidad de clausura, que ya mencionamos anteriormente que tiene su origen en un obstáculo cognitivo. Este tipo de error suele mostrar que el alumno tiene una fijación en el pensamiento numérico y que tiene dificultades para pensar algebraicamente. El resto de los errores cometidos por los alumnos en el desarrollo de las expresiones, está relacionado con el uso incorrecto de la propiedad distributiva. Nuevamente atribuimos este tipo de error a la ausencia de sentido. Se trata de un error de procedimiento que los alumnos cometen cuando utilizan inadecuadamente una propiedad conocida. El primero de ellos se ha producido por la extensión de la propiedad distributiva (que supone dos operaciones) de la multiplicación en relación con la adición, al caso de la multiplicación (una sola operación):  $5(2b) + 3 = 10 + 5b + 3$ . Es posible que este tipo de error esté motivado por la forma de enseñanza-aprendizaje de las propiedades de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). Generalmente, se enseñan todas las propiedades de forma conjunta, sin hacer hincapié en cada una de ellas por separado y no se profundiza en la necesidad de la existencia de dos operaciones para que se pueda dar la distributividad. Esta estrategia de enseñanza puede llevar a los alumnos a mezclarlas. En el caso que nos ocupa, es posible que el alumno haya confundido la propiedad distributiva con la asociativa del producto, o que haya introducido propiedades como extensión de las ya conocidas, lo que también genera confusión si no se extrema el cuidado en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El segundo error está igualmente relacionado con la propiedad distributiva ya que los alumnos tratan de distribuir la multiplicación respecto a

uno de los factores, en este caso el numérico. Posiblemente, este tipo de error se produce al no reconocer las letras como uno de los sumandos que hay que considerar para aplicar la propiedad distributiva, lo que implicaría un pensamiento numérico.

En la Figura 3 resumimos las ideas presentadas. Mostramos una clasificación de los errores de los estudiantes en la pregunta 1, atendiendo a los orígenes de los mismos.

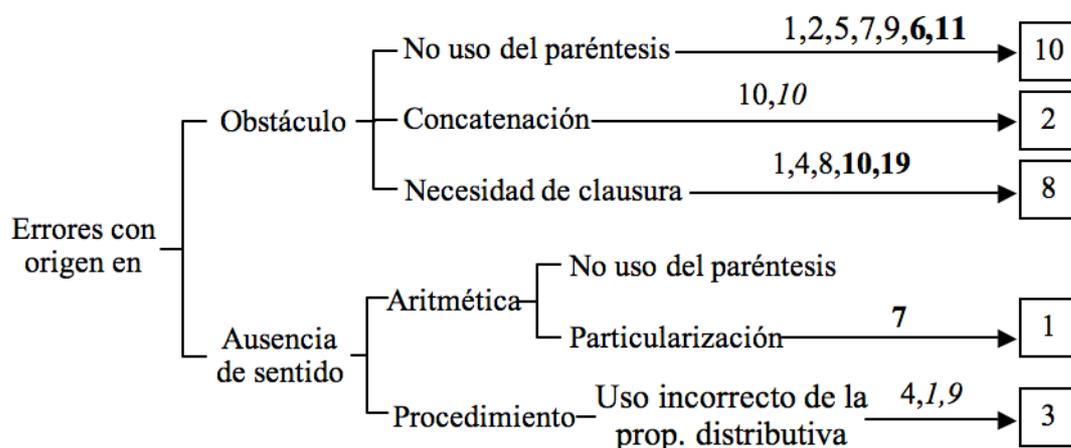


Figura 3. Clasificación de los errores en la pregunta 1 según su origen

En este esquema observamos que al error “no uso del paréntesis” se le asocian dos orígenes diferentes: obstáculo y ausencia de sentido.

Para profundizar en el análisis de los orígenes de los errores, consideramos necesario realizar entrevistas clínicas ya que éstas pueden permitir obtener más información acerca del proceso seguido por los alumnos al responder a las preguntas. Estas entrevistas aportarían más datos sobre el origen de los errores. En este trabajo nos centramos en la información obtenida en el cuestionario inicial, omitiendo el análisis de las entrevistas. Esto nos permite conjeturar el origen de los errores a partir de las respuestas dadas al cuestionario.

Por último, presentamos los errores cometidos al responder a la pregunta 5 de la parte C2, relacionada con la modelización. En esta pregunta se pretende que los alumnos obtengan y apliquen el modelo “el precio total es el precio de una unidad multiplicado por el número de unidades”, realizando previamente la conversión en dos registros simultáneos: precios y frutas.

### Pregunta 5

*En el supermercado un kilo de peras cuesta 125 pesetas, un kilo de plátanos 60 pesetas, el kilo de ciruelas 325, el kilo de naranjas 210 pesetas y cada kiwi cuesta b pesetas. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: compran a la semana 2 kilos de peras, p kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.*

a. ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta, en una semana?

b. ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta al mes, suponiendo que todas las semanas consume la misma cantidad de fruta y que un mes tiene 4 semanas?

c. Si el precio del kiwi es de 20 pesetas y compran a la semana 1 kilo de plátanos, ¿podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta en una semana?

Dado que esta pregunta admite una respuesta abierta, introducimos una red sistémica (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) con las distintas respuestas dadas por los alumnos, antes de organizar los errores. Esta red nos orientará acerca de los pasos seguidos por los alumnos para llegar a las diversas soluciones que proponen.

En la Figura 4 aparecen los distintos caminos seguidos por los alumnos para resolver cada uno de los apartados de la pregunta propuesta. Para el estudio de los errores, nos centramos en los razonamientos erróneos. Así, usando la información que suministra la Figura 4, podemos organizar los errores tal y como aparece en la Figura 5.

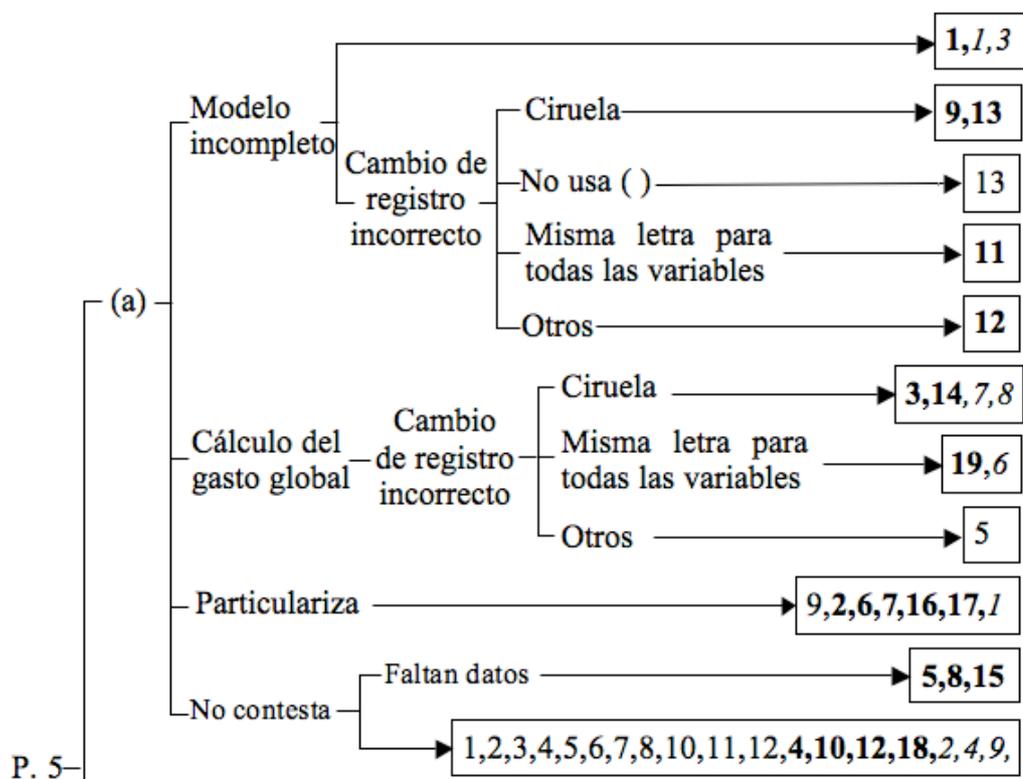


Figura 4. Red de los diferentes caminos de solución para la pregunta 5

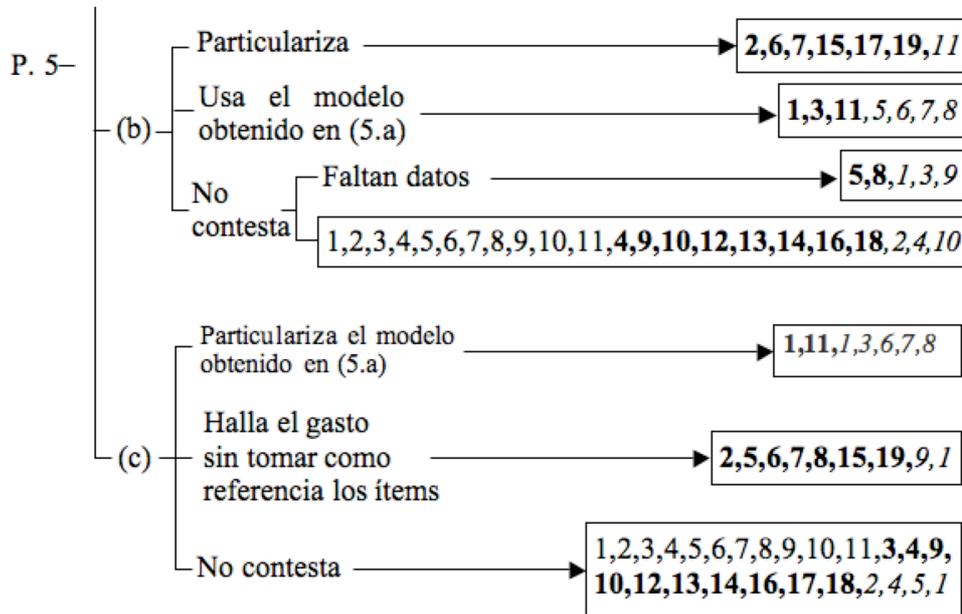


Figura 4. Red de los diferentes caminos de solución para la pregunta 5

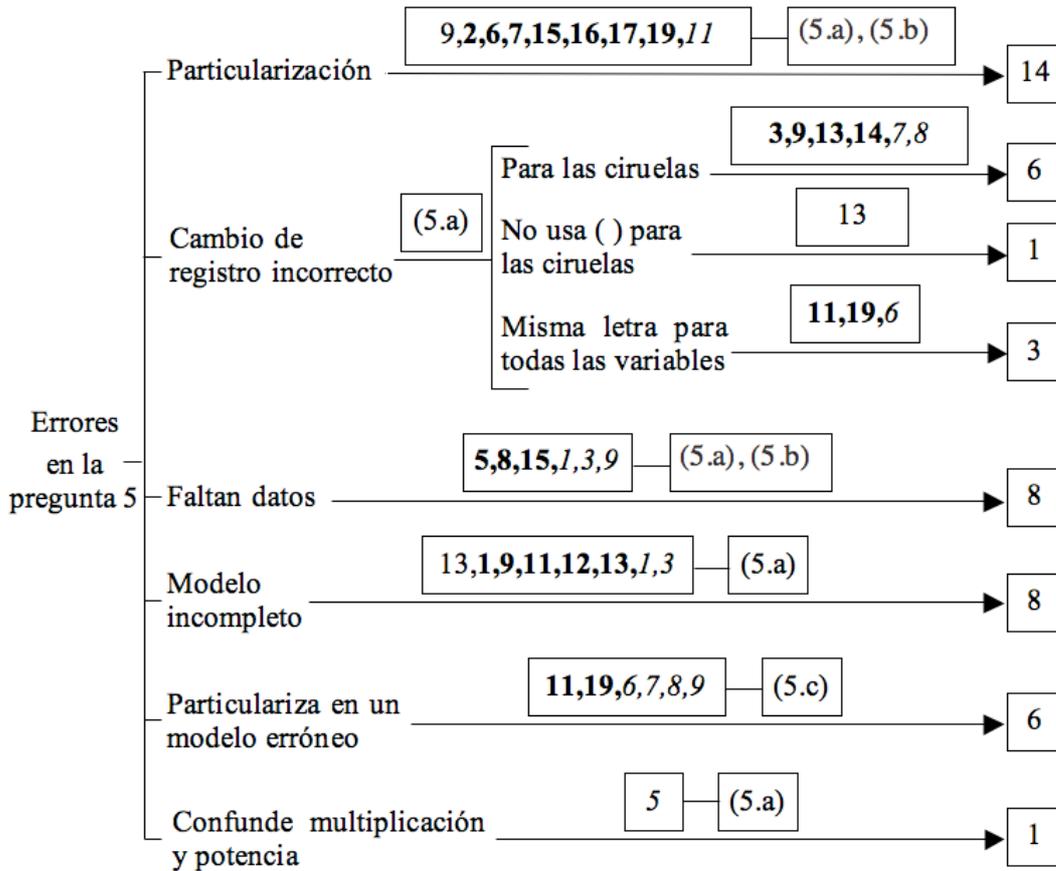


Figura 5. Análisis de errores para la pregunta 5

Como se observa en la Figura 5, el error más repetido es la necesidad de particularizar. Éste se ha producido en los dos primeros ítems de la pregunta 5. Anteriormente mencionamos que la necesidad de particularizar suele tener su origen en una ausencia de sentido. A pesar de que los alumnos reconocen el modelo, no encuentran significado al uso de las letras y necesitan retroceder a lo numérico para poder resolver el problema. Otro error bastante frecuente es el cambio de registro incorrecto. La mayoría de los alumnos ha fallado al intentar expresar la relación entre los kilos de ciruelas y su precio. Algunas de las respuestas dadas son  $3 + 60p$  o  $60p$ , aunque la más frecuente es considerar los kilos de ciruelas como  $3p$  en lugar de  $(3 + p)$ . Los errores al realizar tareas relacionadas con la sustitución formal, como es el caso del cambio de registro, suelen tener su origen en una ausencia de sentido, debida a las características propias del lenguaje algebraico. Otros alumnos han considerado que el problema no se puede resolver porque faltan datos. Tal y como ya hemos indicado en otras ocasiones, la no necesidad de utilización de las letras tiene su origen en una ausencia de sentido y podría implicar que los alumnos continúan pensando numéricamente. Dentro del grupo de errores que hemos denominado “modelo incompleto” están aquellos cometidos por los alumnos que han realizado correctamente los cambios de registro pero que sólo han resuelto parcialmente el problema. Lo plantean pero no suman los distintos precios de las frutas para calcular el precio final. Esta situación en la que los alumnos interpretan correctamente las diferentes partes de un todo y luego no las yuxtaponen, podría deberse a descuido. Finalmente, un grupo de alumnos tiene el ítem 5.c mal porque han realizado la particularización de los modelos que han obtenido en el ítem 5.a, y estos modelos no son correctos, por lo que la respuesta es incorrecta. La confusión de la multiplicación y la potencia ha sido un error que se ha repetido en muchas de las preguntas, independientemente del proceso con el que estuvieran relacionadas. Consideramos que este tipo de error puede tener su origen en una ausencia de sentido.

Tal y como hemos hecho con las preguntas anteriores, en la Figura 6 esquematizamos los errores cometidos en esta pregunta en función de sus orígenes.

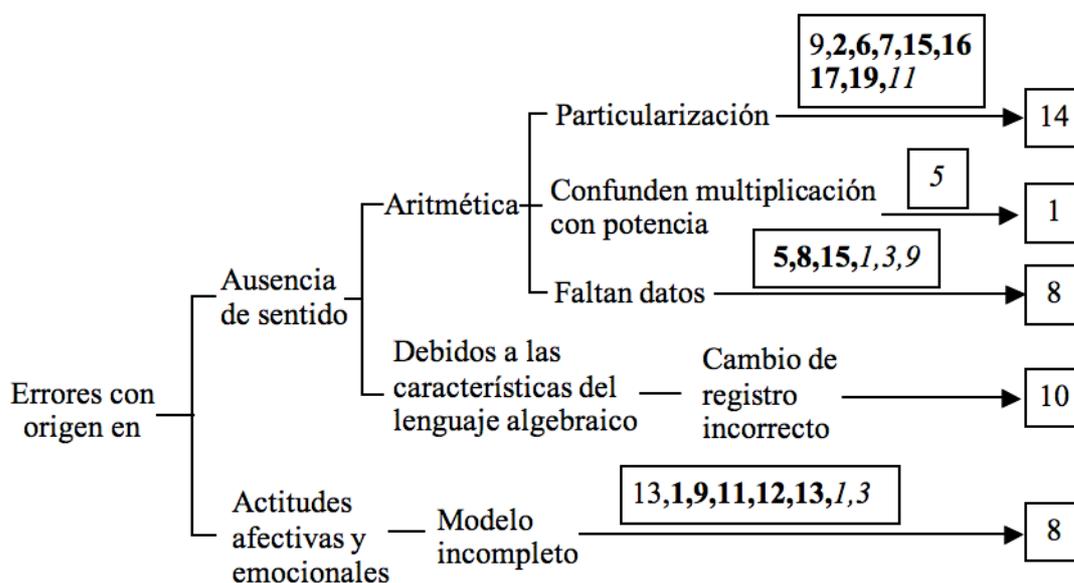


Figura 6. Análisis de los errores en la pregunta 5 según su origen

## CONCLUSIONES Y VALORACIONES

Encontramos que el uso de los esquemas de análisis descritos anteriormente, ha resultado útil para organizar los errores cometidos por los alumnos en la mayoría de las preguntas. En aquellas en que las respuestas son abiertas, previo a la organización de los errores, hemos empleado redes sistémicas que nos ayudan a ver cuáles son los razonamientos seguidos por los alumnos. Ahora bien, estas estrategias, que nos han permitido organizar los diferentes errores, no nos permiten identificar con garantías los distintos orígenes de los mismos. Es necesario completar con datos obtenidos mediante entrevistas clínicas a los alumnos que nos proporcionarán detalles sobre el proceso seguido a la hora de responder a las preguntas.

En general, los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas y del proceso. Sin embargo, hay algunos que se han repetido independientemente del proceso desarrollado: la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. Parece conveniente prestar especial atención a la prevención y remedio de estos errores en el tratamiento del lenguaje algebraico, fijándonos principalmente en el origen de los mismos.

Otros muchos errores tienen su origen en una ausencia de sentido. En algunos casos, son errores que están relacionados con cuestiones que han quedado sin resolver en la Aritmética. De aquí que sea importante identificarlos para tratar de corregirlos en el ámbito aritmético y que no sean un problema añadido a la hora de introducir el álgebra.

Determinado el origen del error, las estrategias de remedio van dirigidas a superar un obstáculo, a dar sentido a los objetos matemáticos o a crear una actitud racional hacia las matemáticas. Para dar sentido a un objeto matemático no es suficiente con mostrar un contraejemplo, cosa que los profesores hacen usualmente. Por eso parece razonable recurrir también a otras situaciones que creen esquemas fáciles de recuperar, por estar apoyados en distintos sistemas de representación y no solamente en argumentos formales. La superación de los obstáculos es ciertamente difícil puesto que el conocimiento que tiene el alumno le ha sido útil en múltiples ocasiones. Aún así, su aparición es interesante ya que su superación va a implicar la adquisición de un conocimiento nuevo y mejor.

En definitiva, independientemente del origen del error, la superación del mismo requiere una participación activa del estudiante. Para ello, el profesor debe provocar conflicto en la mente del alumno a partir de la inconsistencia de sus propios errores, y buscar estrategias para que participe activamente en la resolución del conflicto, sustituyendo los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada.

## REFERENCIAS

- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: De Vrin.
- Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research*. London: Croom Helm.
- Brousseau, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Janvier, C. (1996). Modelling and the initiation into algebra. En N. Bednarz, K. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 225-236). Dordrecht: Kluwer.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behaviour*, 3(1), 93-166.
- Ruano, R. y Socas, M. M. (2001). Habilidades cognitivas en relación con la sustitución formal, la generalización y la modelización que presentan los alumnos de 4º de ESO. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del profesorado e investigación en educación matemática III* (pp. 239-265). La Laguna: CAMPUS.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en didáctica de la matemática vía modelos de competencia. Un estudio en relación con el lenguaje algebraico*. Universidad de La Laguna, documento no publicado.

Este documento se publicó originalmente como Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Raquel M. Ruano  
IES ADEJE Tenerife  
rrb@amena.com

Martín M. Socas  
Universidad de la Laguna  
msocas@ull.es

M. Mercedes Palarea  
Universidad de La Laguna  
mpalarea1@yahoo.es