

II<sup>nd</sup> International Congress on *Mechanical models in structural engineering*.  
University of Granada (Spain), June 2013.

**2<sup>ND</sup> INTERNATIONAL CONGRESS ON  
*MECHANICAL MODELS IN STRUCTURAL ENGINEERING***

II<sup>nd</sup> International Congress on *Mechanical models in structural engineering*.  
University of Granada (Spain), June 2013.

## **2ND INTERNATIONAL CONGRESS ON MODELS IN STRUCTURAL.**

**Editores:** Godel Impresiones Digitales, S.L.

**Deposito Legal:** GR-1023/2013

**I.S.B.N:** 978-84-15873-04-4

Reservados todos los derechos a los autores. Queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del Copyright, bajo las sanciones establecidas en la leyes, la reproducción total o parcial de esta obra.

II<sup>nd</sup> International Congress on *Mechanical models in structural engineering*.  
University of Granada (Spain), June 2013.

## **Congress President**

**Antonio Ramírez-Rodríguez**

*Director I+D Grupo Sacyr – Head R&D Sacyr*

## **Organizing Committee**

María Dolores Gómez Pulido (CSIC)  
Luisa María Gil Martín (Universidad de Granada)  
Andrés Sáez Pérez (Universidad de Sevilla)  
Enrique Hernández Montes (Universidad de Granada)

## **Technical Committee**

Pedro Miguel Sosa (Universidad Politécnica de Valencia)  
Antonio Mari Bernat (Universidad Politécnica de Cataluña)  
Luis Albajar Molera (Universidad Politécnica de Madrid)  
Carlos Zanuy Sánchez (Universidad Politécnica de Madrid)  
Pablo de la Fuente Martín (Universidad Politécnica de Madrid)  
Mark A. Aschheim (Santa Clara University, California EEUU)  
Pietro Gambarova (Politecnico di Milano, Italia)  
Alberto Taliercio (Politecnico di Milano, Italia)  
Stravoula Pantazopoulou (University of Cyprus, Chipre)  
Guillermo Rus Carlborg (UGR)  
Javier Suárez Medina (UGR)  
Amadeo Benavent Climent (UGR)  
Miguel Fernández-Ruiz (Lausanne, Suiza)  
Manuel Romero García (UPV)  
Tomaso Trombeti (University of Bologna, Italia)  
Eduardo Bayo Pérez (UNAV)  
Antoni Cladera Boigas (Universidad de las Islas Baleares)  
Fernando Medina Encina (US)  
Enrique Mirambell Arrizabalaga (Universidad Politécnica de Cataluña)  
Miguel Muñoz Black (Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia)  
Miguel Pasadas Fernández (UGR)  
Ignacio Javier Paya Zaforteza (Universidad Politécnica de Valencia)  
Esperanza Rodríguez-Mayorga (Universidad de Sevilla)  
Victor Compan Cardiel (Universidad de Sevilla)  
Felipe García Sánchez (Universidad de Málaga)  
David López Martín (Universidad de Granada)

## ÍNDICE

1. Structural damage of RC bridge decks under fatigue loading <i>Carlos Zamuy, Luis Felipe Maya Duque, Juan Manuel Gallego, Pablo de la Fuente, Luis Albajar</i>	1
2. Resistencia a cortante de forjados de vigueta y bovedilla. Un modelo racional. <i>Carlos Ribas, Antoni Cladera</i>	16
3. Diagrama de dominios de armado optimo aplicado a secciones con ductilidad suficiente para la redistribución de esfuerzos. <i>David López Martín</i>	24
4. Aplicación web para el análisis y diseño de estructuras <i>Javier Calvo Vadillo, Javier Gracia Rodríguez, Eduardo Bayo Pérez</i>	32
5. Estudio de un material inagotable a base del residuo de la industria del cultivo de setas. <i>José Daniel Román Ramos, Francisco Javier Luna Molina, Lázaro José Bailón Pérez</i>	42
6. Aplicación de algoritmos paramétricos de generación formal en el diseño estructural. La Ópera de Sidney desde una perspectiva contemporánea. <i>Juan Rey Rey</i>	53
7. Análisis experimental y numérico del T-stub <i>Manuel López López, Alfonso Loureiro Montero, Ruth M. Gutiérrez Fernández, José M. Reinoso Prado</i>	62
8. Análisis límite de estructuras de fábrica como problema de contacto unilateral: resolución por el método de Monte Carlo. <i>Fernando Magdalena Layos, José Ignacio Hernando García</i>	68
9. Método de Aproximación Catenaria en el cálculo de estructuras antifuniculares. <i>Manuel Cañete-Güeto, Enrique Hernández-Montes</i>	78
10. Topological shape optimization for tension structures <i>Rafael Jurado-Piña, Juan Francisco Carbonell-Márquez, Enrique. Hernández-Montes</i>	87
11. Stability Analysis of Plates with Different Boundary Conditions under Uni and Biaxial Compression Using Exact Stress Functions . <i>O. Mijušković, B. Čorić</i>	103
12. Experimental and numerical study of angle connections assembled with European profiles <i>José M. Reinoso Prado, Alfonso Loureiro Montero, Ruth M Gutiérrez Fernández, López M.</i>	111

13. Análisis numérico de la respuesta térmica y estructural de un puente de vigas metálico en condiciones reales de incendio  
*Guillem Peris-Sayol, José Alós-Moya, Ignacio Payá-Zaforteza, Antonio Hospitaler-Pérez* 120
14. Strut-and-Tie Modelling of Deep Beams in the Shear  
*Radmila Sindić-Grebović* 132
15. Estimation of uniform temperature component in the bridges based on site experimental data  
*Radovanović Željka* 138
16. Predicción de la estabilidad estructural mediante Análisis Modal Operacional. Teatro Romano de Cádiz.  
*Pablo Pachón García, Esperanza Rodríguez Mayorga, Javier F. Jiménez Alonso, Victor Compán Cardiel, Andrés Sáez Pérez, Emilio Yanes Bustamante, Emilio.* 147
17. Isostatic lines' study to optimize steel space grid envelope structures for tall buildings according to their solicitations.  
*Señis López, Roger* 156
18. Methods for determination of ultimate load of eccentrically patch loaded steel I-girders  
*Biljana Šćepanović, Luisa María Gil-Martín, Enrique Hernández-Montes, Miloš Knežević, Duško Lučić* 162
19. How simple can nonlinear finite element modelling be for structural concrete?  
*Galina Argirova, Miguel Fernández Ruiz, Aurelio Muttoni* 169
20. Estado del conocimiento sobre la aplicación de aleaciones con memoria de forma superelásticas en ingeniería civil  
*Antoni Cladera, Carlos Ribas, Eva Oller* 177
21. Dynamic analysis response in structural systems, accuracy and efficiency  
*De Miguel, A. Marques M. Calçada, R., De la Fuente, P.* 185
22. Análisis estructural del arco de medio punto. Aplicación al arco del acueducto de la Alhambra.  
*Javier Suárez Medina, Juan José Granados Romera* 195
23. Armado Óptimo de Secciones de Hormigón Pretensado  
*Juan Francisco Carbonell Márquez, Francisco Antonio García Villena, Luisa María Gil Martín.* 215
24. Análisis del comportamiento de tableros de carreteras de luces cortas ejecutados con placa alveolar pretensada  
*Valentín Moreno Padilla, Luís Albajar Molera, Carlos Zanuy Sánchez* 232

25. Evaluation of the fatigue-cracking behavior of crumb rubber modified bituminous mixes.  
*F. Moreno-Navarro , M. C. Rubio-Gómez, E. Tomás-Fortún, F. Valor-Hernández, A. Ramírez-Rodríguez* 245
26. Development of a Seismic-Resistant Bamboo Braced Frame System for Resisting Earthquakes in Tropical Climates  
*Echeverria, J., Sampson, C., Vargas, J., Nilsson, T., Gil-Martin, L. M., and Aschheim, M.* 256
27. A direct pedestrian-structure interaction model to characterize the human induced vibrations on slender footbridges  
*J.F. Jiménez-Alonso, A. Sáez, E. Caetano, Á. Cunha* 265
28. Análisis estructural de la torre del Homenaje de la Alhambra. Evaluación del procedimiento de simulación numérica mediante el MEF.  
*Compán Cardiel, Víctor; Villegas Cerredo, David; Hernández Montes, Enrique.* 273

## Structural damage of RC bridge decks under fatigue loading

Carlos Zanuy<sup>1</sup>, Luis Felipe Maya Duque<sup>2</sup>, Juan Manuel Gallego<sup>1</sup>, Pablo de la Fuente<sup>1</sup>, Luis Albajar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Continuum Mechanics and Structures ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid, Spain. E-mail addresses: {czs, jmgallego, pdelaf, lalbajar} @ caminos.upm.es

<sup>2</sup>Department of Research and Development, Cementos Argos. Torre Almagran, Medellín, Colombia. E-mail: femayadu@gmail.com

---

### Abstract

Mechanical models to analyze the behavior of civil engineering structures are becoming more and more detailed in order to provide a realistic description of the structural response, thereby needing a wide set of reliable input data. Because of the usually complex nature of material or structural phenomena, numerical models need to be verified by comparing their capabilities with the real structural performance. Accordingly, many civil structures are monitored to detect structural damage and to provide updated data to be introduced in numerical models. Health monitoring techniques to identify structural damage usually rely on the change of dynamic properties through so-called experimental modal analysis. Regarding concrete structures, cracking is the most usual damaging process that affects the structural state but cracking may be due to different sources. Existing works dealing with dynamic identification of structural concrete damage have typically focused on the progressive decrease of natural frequencies under gradually increasing loads. In the present contribution, the attention is paid to the effect of high-cycle fatigue loading. An experimental campaign on elements reproducing the top slab of concrete girders has been carried out, including specimens subjected to fatigue loading and a reference static test. Impact excitation dynamic tests were carried out at different stages to identify natural frequencies, modal shapes and damping ratios. The techniques involved to identify dynamic properties were within the field of output-only models, which are only based on the structural response to an external excitation that is not measured. The evolution of dynamic properties has been correlated with damage development with emphasis on the stages of the fatigue process: formation of cracks, cyclic reduction of tension stiffening and brittle fracture of the reinforcement.

### Keywords

Concrete bridges, fatigue, cracking, damage identification, output-only models.

### I. Introduction

Experimental modal analysis provides a wide field of applications to detect structural damage of concrete structures. Such techniques focus on the evaluation of the dynamic properties of the structure (natural frequencies, modal shapes and damping factors) and the relationship between their evolution and the change of structural parameters (stiffness, mass or boundary conditions). A significant number of modal identification techniques has been developed in the last years and a good survey was reported by Cunha and Caetano [1]. Modal identification techniques can be classified into two categories: input-output techniques and output-only techniques. While in input-output techniques the excitation is measured and frequency response functions (FRF) can be therefore derived, output-only techniques are only based on the dynamic response, remaining the excitation source as unknown [2]. For civil engineering structures, where external sophisticated equipment would be needed to excite a wide band of frequencies and simultaneously measure the input signal, output-only techniques have shown to be very appropriate to extract dynamic properties. In addition, output-only techniques can take advantage of the ambient excitation due to wind or traffic loads (ambient vibration testing, AVT), which avoids the interruption of the in-service performance of the structure. Many civil structures have been tested under such conditions (e.g. [3,4]).

Dynamic identification techniques offer an interesting way to assess damage of concrete structures. Due to the availability of instrumentation systems, non destructive vibration monitoring of civil structures has rapidly increased for the last years. Many monitoring activities related to concrete structures rely on the measurement of the change of dynamic properties. Cracking is the most usual damaging process that affects reinforced concrete. Since cracking leads to a reduction of the stiffness, it has an influence on the dynamic properties. Some researchers have experimentally shown the relationship between progressive cracking and change of natural frequencies and damping ratios [5]. However, cracking can be in turn due to diverse external solicitations: monotonic increasing loads, time-dependent effects, repeated loading, corrosion-induced cover cracking, etc. Other damaging sources that affect dynamic properties of concrete structures are yielding of the reinforcement, loss of tension stiffening, settlement of foundations or corrosion of the reinforcement [6]. In order to develop efficient monitoring techniques for reinforced concrete, a fundamental study on the evolution of damage due to different loading processes has to be firstly established [7]. Particular experimental works are needed to identify the implications of different damaging sources and derive conclusions about the

correlation between change of dynamic properties and structural damage. So far, most of the experimental studies regarding reinforced concrete have dealt with the evolution of cracking due to gradually increasing loads [8].

An increasing attention has been paid to the effect of repeated loading on concrete structures for the last years. In bridges, traffic loads are of repetitive nature and they can lead to local fatigue damage. It is well known that repeated loads lead to progressive cracking and tension stiffening reduction of reinforced concrete. Furthermore, fatigue fracture of the reinforcement may take place in the high-cycle domain. Premature damage detection of concrete bridges is of large significance and dynamic identification techniques may provide a helpful tool. To do it, the study of correlation between change of dynamic properties and different damage stages due to repeated loading is necessary. In this paper, the evolution of dynamic properties of specimens reproducing the top slab of box-girder concrete bridges is studied. The analysis focuses on the transverse fatigue behaviour of the bridge, which is more susceptible to be damaged than the longitudinal direction in medium- and long-span bridges due to the presence of longitudinal prestressing. Since dynamic properties of concrete structures are load-dependent, mainly due to concrete material nonlinearities [9,10], different excitation techniques or dynamic identification models may lead to different values of the dynamic properties, especially damping [8]. In order to account for this fact and avoid uncertainties, the testing procedure and the identification techniques used here are defined before the presentation of experimental results.

## II. Experimental program

### 2.1. Overview of tests

The analysis developed in this paper focuses on the evolution of dynamic properties of reinforced concrete bridge decks. The experimental results obtained in the tests performed by Zanuy et al. [11] at the Technical University of Madrid are used here. A brief summary of such tests is described in this section. The dynamic excitation tests, the results regarding the dynamic properties and the subsequent analysis are reported in the following sections of this paper. The tests were designed to study the transverse fatigue behaviour of box-girder concrete bridges. The specimens represented at 1/2 scale the top slab and the webs until the point of zero transverse moment of a typical railway viaduct of the Spanish network. The specimens were symmetrically loaded at the free edges of the lateral cantilevers and they were supported on cylindrical steel rollers of 6 cm diameter. One reference specimen was loaded to static failure and two specimens were subjected to fatigue loading. The test configuration, specimen geometry and reinforcement lay-out can be observed in Fig. 1. The main data of the three tests are given in Table 1. The reinforcement consisted of hot-rolled deformed bars of quality B500SD, with characteristic yield and ultimate strength of 500 and 575 MPa, respectively, according to the Spanish code for structural concrete [12].

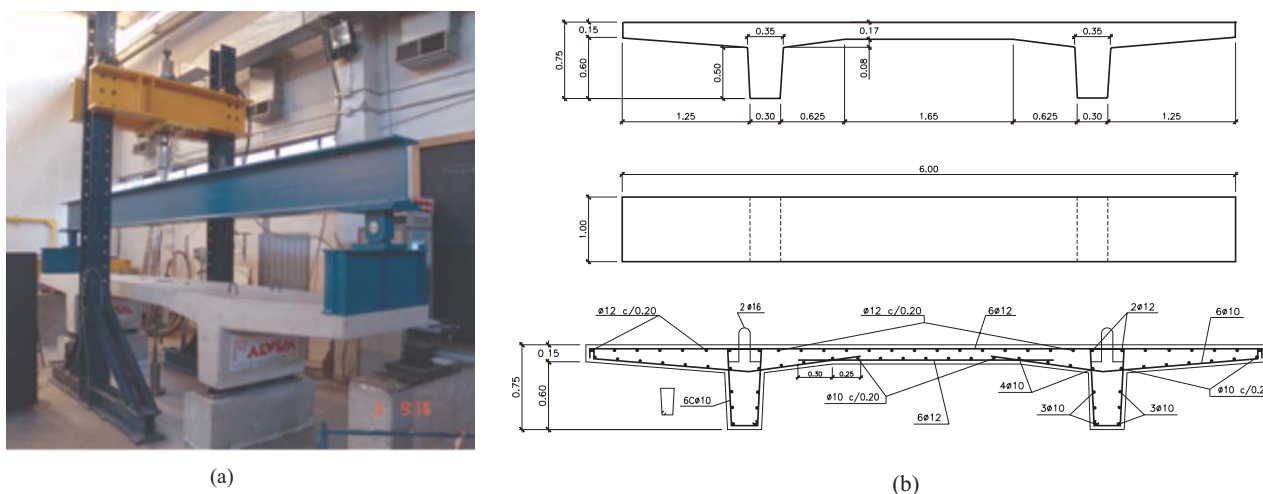


Fig. 1. (a) View of the test configuration, and (b) specimen geometry and reinforcement [11].



Table 1. Main parameters of the tests: load values, concrete properties at the age of testing and number of cycles to fatigue fracture.

Test	Type	Applied load (kN)	Frequency (Hz)	$f_c$ (MPa)	$E_c$ (MPa)	$f_{ct}$ (MPa)	1 <sup>st</sup> bar fracture	2 <sup>nd</sup> bar fracture	3 <sup>rd</sup> bar fracture
ST1	Static	86.18	-	48.1	36870	3.90			
FT1	Fatigue	10 – 40	2.0	46.5	35177	3.59	2993677	3038877	3102433
FT2	Fatigue	10 – 50*	1.0	51.8	36258	4.70	523339	526339	528181

\*In the first load cycle of test FT2, the maximum load was 60 kN

The static test ST1 was used as reference for the fatigue tests and it developed a ductile flexural failure. The maximum applied load during the stage of yielding of the reinforcement was 86.18 kN. The load-midspan deflection curve is plotted in Fig. 2a. Due to the small reinforcement ratio ( $\rho = 0.53\%$  at the central region of the specimen and  $\rho = 0.34\%$  at the clamped edge of the cantilevers), the member exhibited a significant tension stiffening capacity. Before yielding, the cracks mainly developed at the central region of the specimen (top side). After yielding, the lateral cantilevers also cracked (refer to [11]). The first cracking load was 30.1 kN and the yielding load was 67.0 kN.

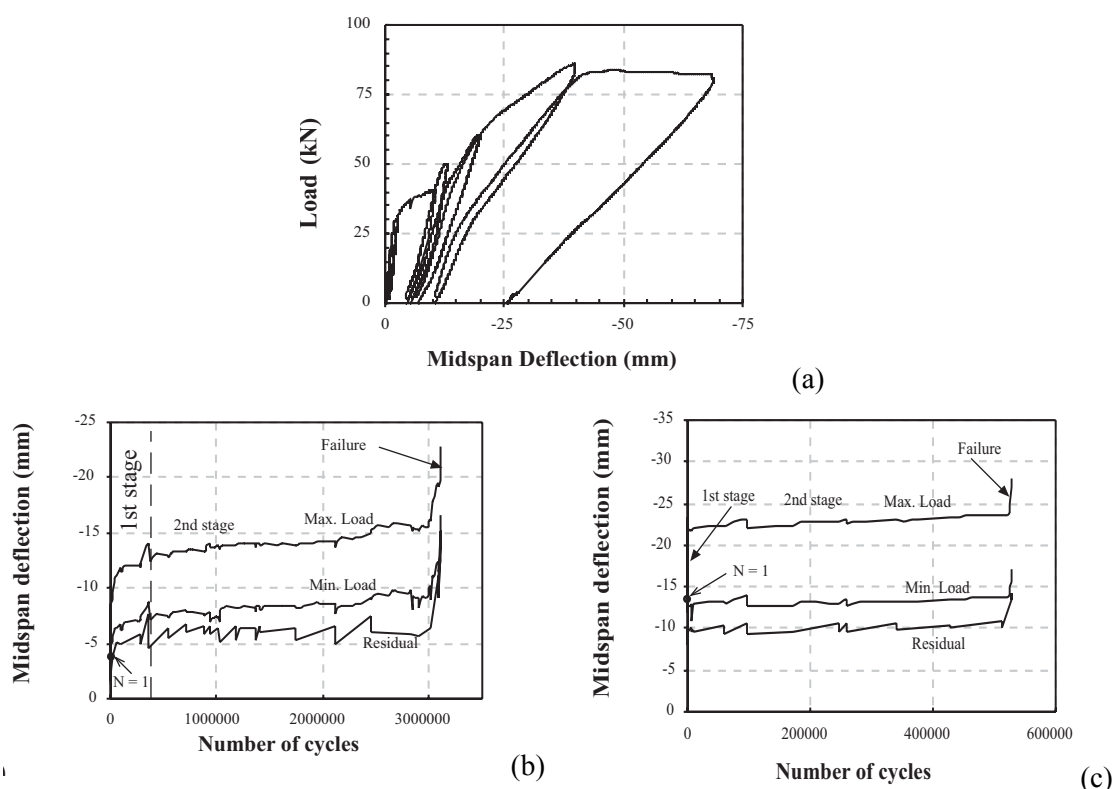


Fig. 2. (a) Load-midspan deflection of test ST1; (b) Evolution of midspan deflection of test FT1; (c) Evolution of midspan deflection of test FT2.

Both fatigue tests (FT1 and FT2) developed three stages: 1) crack formation, 2) stabilized cracking, and 3) fatigue failure. The first stage corresponded to the formation of flexural cracks in the specimens. For test FT1, the last crack formation was registered at load cycle 330000, while for test FT2, where the maximum load was larger, no further cracks formed after load cycle 300. During the second stage, existing cracks widened with number of cycles and no additional cracks formed, indicating the cycle-dependent reduction of tension stiffening contribution. The third stage corresponded to the brittle fatigue fracture of the tensile reinforcement in the central region of the specimens. The instant of fatigue failure was detected by the sudden increase of deflections and deformations. Three broken bars were detected in each fatigue test after they were finished. Cracks developed on the top side of the central region of the specimens, remaining the lateral cantilevers almost uncracked. The three typical stages can be observed through the evolution of measured deflections plotted in Fig. 2b-c. The maximum deflection corresponding to the first cycle ( $N = 1$ ) is indicated with a black point in the graphics in order to note the significant deflection increase undergone in the crack formation stage. The structural damage developed in the two first stages was due to progressive cracking and loss of tension stiffening contribution. It is noted that lightly reinforced concrete members have a relevant tension stiffening capacity [13], and the present tests indicate that repeated loads significantly decrease this

contribution, leading to the cyclic increase of cracks and deflections. Therefore, it deserves to be studied whether the effect of repeated loads on the serviceability of reinforced concrete can be detected and explained by the evolution of dynamic properties. In that case, experimental modal techniques could be used to monitor structures susceptible to this damaging source. In addition, another interesting damage to be detected is the fatigue fracture of the reinforcing bars. The correlation of this effect with the change of dynamic properties has not been studied so far, to the authors' knowledge.

## 2.2. Dynamic testing

To determine the evolution of dynamic properties, impact excitation vibration tests were conducted at relevant instants of the experiments summarized in the previous section. The specimens were excited by the impact of a 3 kg steel ball dropped from a height of 0.50 m. The ball impacted on the top side of the specimens at the midpoint, as plotted in Fig. 3. This procedure mainly excites longitudinal symmetric modes (it is noted that longitudinal modes of the specimen refer to transverse modes of the bridge). The height of 0.50 m was fitted before the tests so that the response of the first impact was fully dissipated before the second impact of the ball took place. This guaranteed that the isolated effect of a single impact could be used in the analysis. Before the application of the impacts the specimens were unloaded, the load application equipment was switched off, and the auxiliary loading frame was removed. The support conditions were the same as the ones referred to in the previous section (steel rollers over 0.43 x 0.38 x 1.00 m concrete bricks).

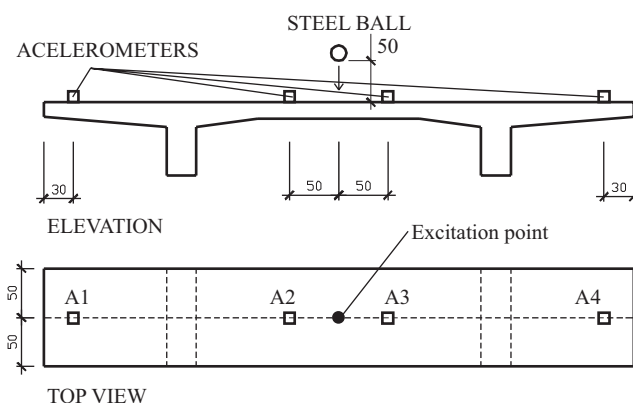


Fig. 3. Configuration of the impact excitation tests (dimensions in cm).

The sequence of preparation and execution of dynamic tests is represented in Fig. 4. Four impacts were given at each testing stage. Four piezo-resistive accelerometers (B&K 4573) with sensitivity 67mV/g were used to register the dynamic response. The accelerometers were located on the top side of the specimens (Fig. 3). A more refined mesh was used to identify the modal shapes with more accuracy, as explained later. The input excitation due to the impact of the drop weight was not measured. Therefore, output-only modal identification techniques from the free damped vibration response are to be used to estimate dynamic parameters. Accelerations were measured with an HBM MGC-plus data acquisition system. The sampling rate of the digital recorder was 2400 Hz, which was enough to study the evolution of frequencies below 750 Hz. A Butterworth low-pass filter with a filter frequency of 1000 Hz was used in the data acquisition. A typical acceleration record is plotted in Fig. 5. It can be observed that the vibration is the result of a single impact. It is noted that all the experiments were performed in a laboratory environment without temperature or moisture changes, which avoided that environmental factors affect dynamic properties.

In the static experiment (ST1), the dynamic tests were conducted after each load stage. The load stages consisted of a loading phase, followed by 60 seconds during which the load was held constant, and a subsequent complete unloading. The loading and unloading rate was 0.5 kN/s. The maximum load level of each load stage was progressively increased (5 kN, 10 kN, 20 kN, 30 kN, 40 kN, 50 kN, 60 kN and failure), which means that the structural damage was progressively introduced in the specimen, according to the stages observed in Fig. 2a: uncracked state until 30.1 kN, cracking stage between 30.1 and 67.0 kN, and yielding of the reinforcement thereafter.

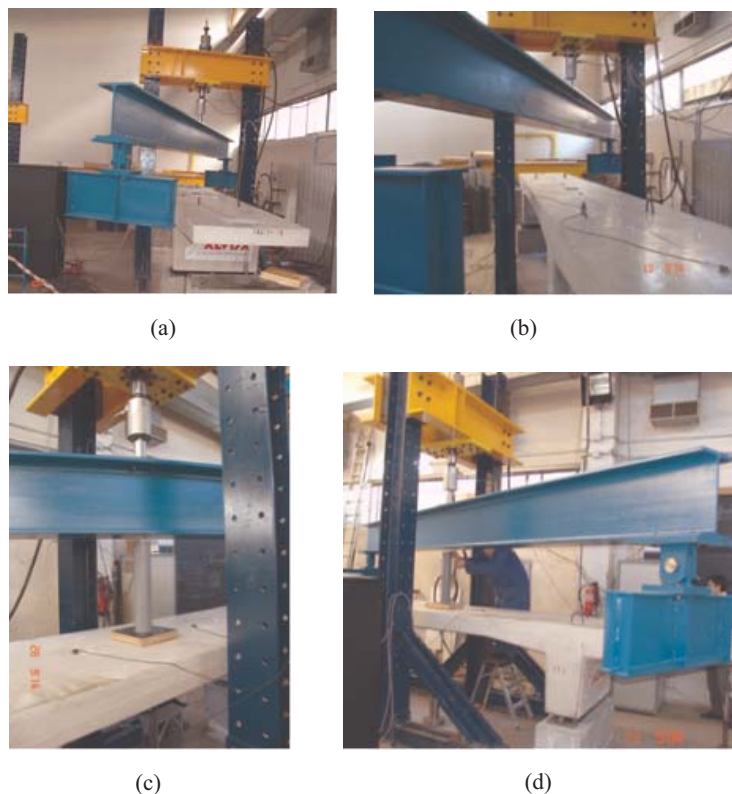


Fig. 4. Sequence of impact excitation tests: (a) remove of auxiliary spread beam after switching off the load application equipment; (b) the auxiliary beam is suspended freely from the actuator; (c) collocation of the PVC tube to guide the steel ball; (d) dropping the steel ball.

In the fatigue tests (FT1 and FT2), the configuration and procedure to develop the impact excitation tests was the same as in the static test. The impacts were applied at relevant number of load cycles, in order to obtain the evolution of dynamic properties in a logarithmic scale. This included, at least, the following number of load cycles:  $N = 0$  (undamaged state, before the application of any load), 1, 10, 100, 1000, 10000, 50000, 100000, and thereafter every 180000 cycles for test FT1 and 70000 cycles for test FT2.

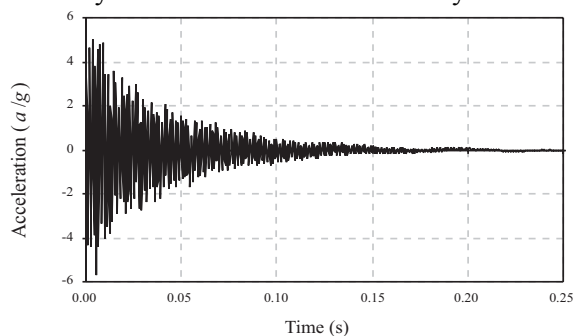


Fig. 5. Typical acceleration record in an impact test.

### III. Estimation of dynamic properties

#### 3.1. Identification methods

In this section, the data processing techniques employed to determine dynamic properties are summarized. Due to the test configuration, output-only identification techniques were used to identify the natural frequencies, modal shapes and damping ratios. The free damped vibration responses measured with the accelerometers (see the example plotted in Fig. 5) were transformed in the frequency domain to study the damage development. No techniques based on the time domain analysis have been employed in this paper. A short summary of the fundamentals of the identification methods used is given in the following paragraphs.

Natural frequencies have been firstly estimated by the peak picking method from the average normalized power spectral densities (ANPSD). This method was conveniently implemented by Felber [14] and its

simplicity has made it very attractive for structural applications [15]. It is based on the identification of natural frequencies as the peaks of the ANPSDs. The power spectral density (PSD) has to be first obtained for each individual acceleration signal measured in the time domain (Fig. 5), as follows:

$$G_{ii}(\Omega) = A_i^*(\Omega)A_i(\Omega) \quad (1)$$

where  $G_{ii}(\Omega)$  is the PSD of the acceleration at point  $i$ ,  $A_i(\Omega)$  is the Fourier transform of the acceleration at point  $i$ , and  $A_i^*(\Omega)$  is the complex conjugate of  $A_i(\Omega)$ . The PSD is therefore the square of the magnitude of the Fourier transform of the acceleration. The ANPSD is computed for each sensor by normalizing and then averaging the four impacts given at each testing stage. The evolution of the ANPSD for accelerometer A2 during test ST1 is represented in Fig. 6a, where the progressive decrease of the peaks (frequencies) with load can be observed. As well, the influence of load cycles in test FT2 is represented in Fig. 6b in the frequency range 650-720 Hz.

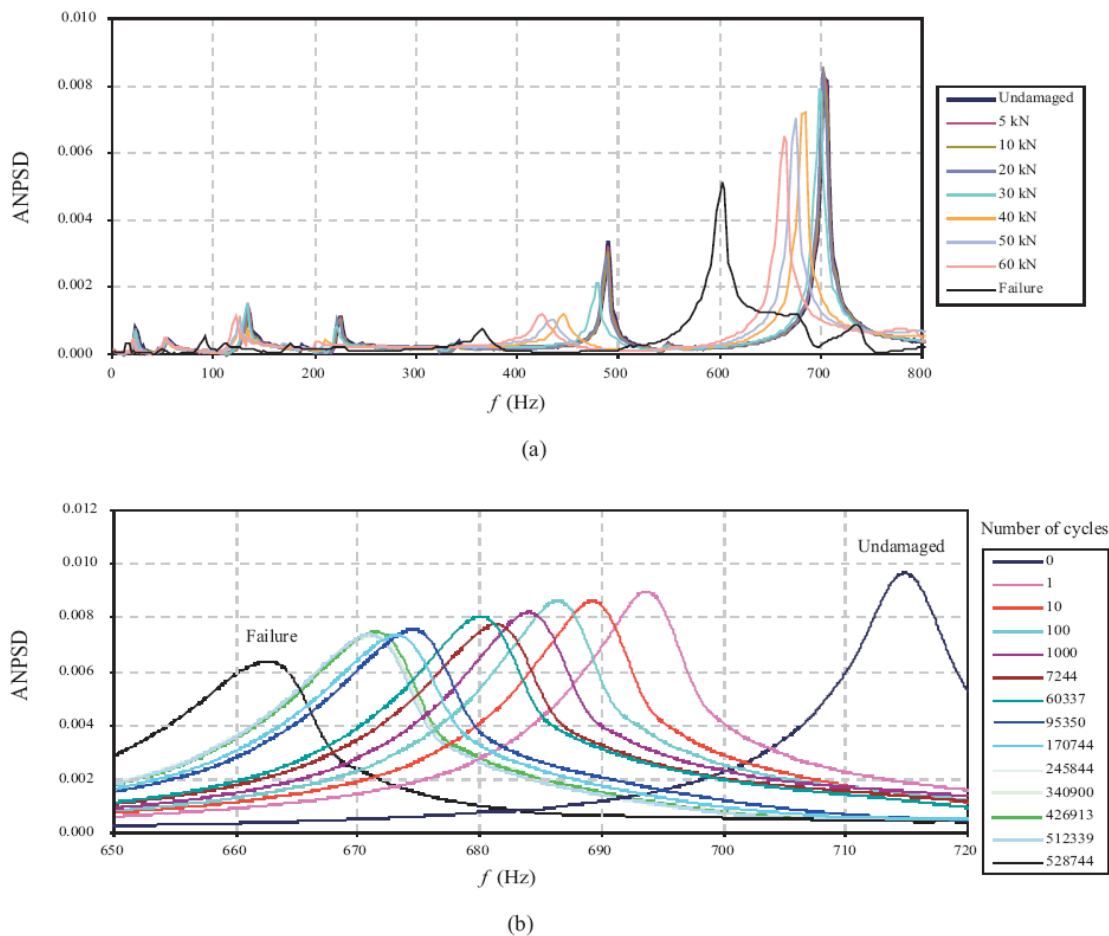


Fig. 6. Evolution of ANPSD: (a) Test ST1, accelerometer A2, frequency range 0-800 Hz; (a) Test FT2, accelerometer A3, frequency range 650-720 Hz.

The employ of the four accelerometers plotted in Fig. 3 allows to estimate natural frequencies and their evolution. However, it is not accurate enough to identify the modal shape corresponding to each frequency. A more refined mesh is necessary to plot the modal shapes with better resolution and therefore compare the experimental shapes with numerical results. In this paper the potential modal ratio (PMR) functions proposed by Felber [14] have been used. Within the field of output-only identification techniques, the PMRs are used instead FRFs and they represent the relationship between the Fourier transform of a roving signal and a fixed reference signal. The amplitude of the PMRs at the natural frequencies represents the coordinate of the modal shape that corresponds to that frequency in the location of the roving sensor. The higher the number of roving signals, the better the resolution of the modal shapes. According to Felber, the PMR can be obtained as:

$$M_{ij}(\Omega) = \left| \frac{G_{ij}(\Omega)}{G_{ii}(\Omega)} \right| PW_{ij}(\Omega) CW_{ij}(\Omega) \quad (2)$$

where  $i$  is the fixed sensor and  $j$  is the roving sensor.  $G_{ij}(\Omega)$  is the cross PSD between signals  $i$  and  $j$ ,  $PW_{ij}$  is a phase window function that eliminates values associated with phase angles not near  $0^\circ$  and  $180^\circ$  (typically deviations smaller than  $10^\circ$  are accepted), and  $CW_{ij}$  is a coherence window that eliminates values with small coherence (normally values lower than 0.90). The PMR technique was used to identify the modal shapes in test FT2 at the undamaged state, before the application of any load. The mesh of sensor locations is represented in Fig. 7. The reference accelerometer was located in point 1, while the roving signal was subsequently located in points 2-32. The excitation was due to the impact of the steel ball on the midpoint of the top side of the specimen, as explained in section 2.2. It is noted that points 1, 14, 19 and 31 correspond to the positions of the accelerometers indicated in Fig. 3.

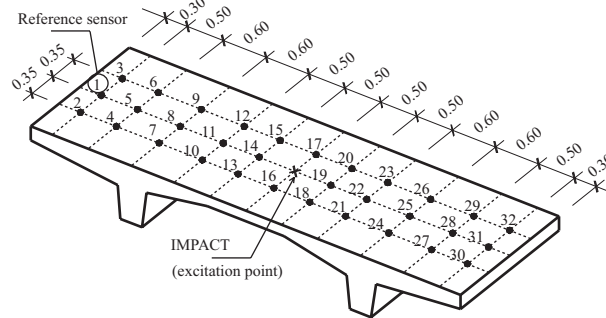


Fig. 7. Sensor mesh to obtain PMRs in test FT2.

The estimation of damping ratios is usually the most difficult part of experimental modal analysis. The frequency domain decomposition (FDD) method proposed by Brincker et al. [16] has been used in this paper. This technique is based on the singular value decomposition of the PSD matrix at each frequency, as follows:

$$G(\Omega) = U(\Omega)S(\Omega)V^H(\Omega) \quad (3)$$

In the above equation, the spectra matrix  $G(\Omega)$  that contains the PSD functions  $G_{ij}(\Omega)$  is decomposed into a set of singular vectors  $U(\Omega)$  and  $V(\Omega)$  and the corresponding diagonal matrix  $S(\Omega)$  that contains the singular values in the diagonal. The superscript H indicates complex conjugate matrix transpose. Under the hypotheses of white noise excitation, well separated modes and light damping, the singular value decomposition results in the following equation

$$G(\Omega) = \Phi(\Omega)S(\Omega)\Phi^T(\Omega) \quad (4)$$

where  $\Phi(\Omega)$  contains the singular vectors and  $S(\Omega)$  gives the singular values  $s_{ii}(\Omega)$  of the output PSD matrix. The peaks of the singular values represent the resonance frequencies. A frequency band around each peak provides the auto PSD function of the corresponding single degree of freedom system, which can be taken back to the time domain by inverse Fourier transform. Brincker et al. indicated that the band width around the peaks of the singular values can be better selected by using the modal assurance criterion, which resulted in the enhanced FDD method (refer to [16]). This e-FDD technique has been used in this paper. In the time domain, the damping ratio of each mode can be estimated from the logarithmic decrement  $\delta$ , which is calculated as the absolute value of the slope of the regression line of the logarithms of the local maxima extracted from the free decay acceleration of each isolated single degree of freedom signal. Due to the nonlinear behaviour of structural concrete, the estimation of the logarithmic decrement depends on the amplitude of the acceleration [10]. Therefore, the result is a function of the number of maxima employed in the regression line. In order to use a uniform criterion, the damping ratio obtained in this paper was estimated from the maxima within the first 0.2 seconds of the acceleration response (the first acceleration peak was eliminated too). An example corresponding to the estimation of the undamaged damping ratio of mode M3 of test FT1 is given in Fig. 8. After obtaining the logarithmic decrement, the damping ratio  $\zeta$  is derived as:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (5)$$

It is noted that FDD also results in the estimation of natural frequencies by determining the number of zero-crossings of the isolated accelerations in the time domain. In the following paragraphs, this result is compared with the frequency obtained with the ANPSD.

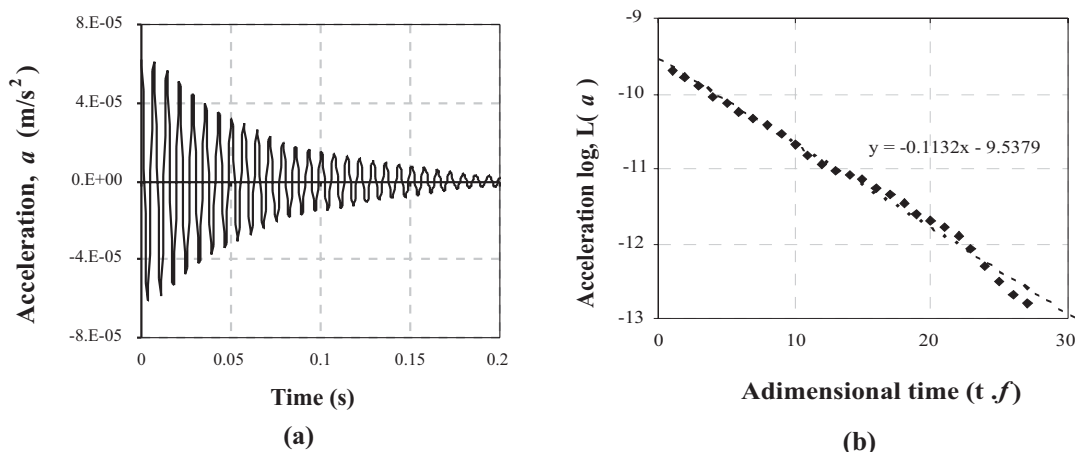


Fig. 8. Estimation of undamaged (before testing) damping ratio of mode M3 (test FT1): (a) Isolated single degree of freedom signal of mode M3; (b) Regression line to calculate logarithmic decrement ( $\delta = 0.1132$ ).

### 3.2. Determination of dynamic properties

The experimental set up and equipment has made it possible to study of the evolution of the frequency and damping ratio of eight modes of frequency smaller than 750 Hz. Besides such eight modes, which will be studied in detail, the PMR technique was able to obtain a total of ten modal shapes for test FT2 at the undamaged state and the results are plotted in Fig. 9. The nomenclature of the modes does not have any physical meaning.

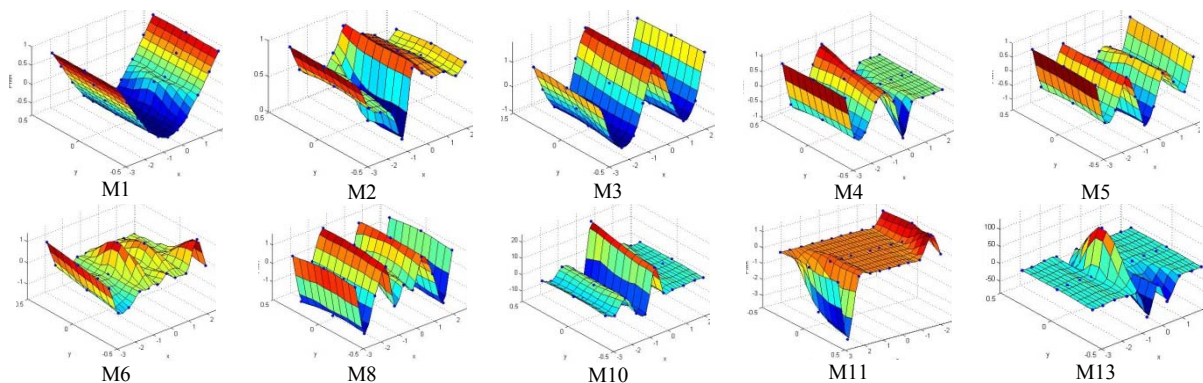


Fig. 9. Experimental mode shapes obtained with PMR technique for test FT2 (undamaged state).

The experimental mode shapes can be compared with the numerical results represented in Fig. 10, which were obtained with the finite element software ANSYS [17]. The 13 modal shapes plotted in Fig. 10 have a natural frequency smaller than 750 Hz. In the model, eight-node brick elements with three translational degrees of freedom at each node (element Solid45) were used with the following properties:  $E = 36258$  MPa,  $\nu = 0.2$ , density =  $2500$  kg/m<sup>3</sup>. The support conditions were modelled reproducing the steel rollers and the concrete blocks below them. Due to the impact excitation, mostly symmetrical modes were experimentally identified. Accordingly, the theoretically obtained modes M7, M9 and M12 could not be identified with the experimental techniques and M4 and M5 could only be detected with the PMR. The evolution of the natural frequencies and damping ratios for the other modes (M1-M3, M6, M8, M10-M11 and M13) could be followed with the techniques explained in the previous section. In addition, it has to be noted that the evolution of natural frequencies corresponding to mode M10 in tests ST1 and FT1, and modes M6 and M11 in test FT2, could not be followed (refer to Fig. 11), although they were identified in Fig. 9 owing to the spatially refined

mesh employed in the PMR technique (Fig. 7). Modes M1, M3, M8 and M10 represent the first four symmetrical bending modes. Mode M5 is the same as M8 with some excitation of the supports (this modal shape is not obtained numerically if the supports are not modelled). Modes M2, M4, M7 and M9 are the first asymmetrical bending modes. Mode M6 represents transverse bending of the cantilevers. Modes M11 and M12 represent the asymmetrical and symmetrical bending of the cantilevers, while in mode M13 only the central region of the specimen is excited.

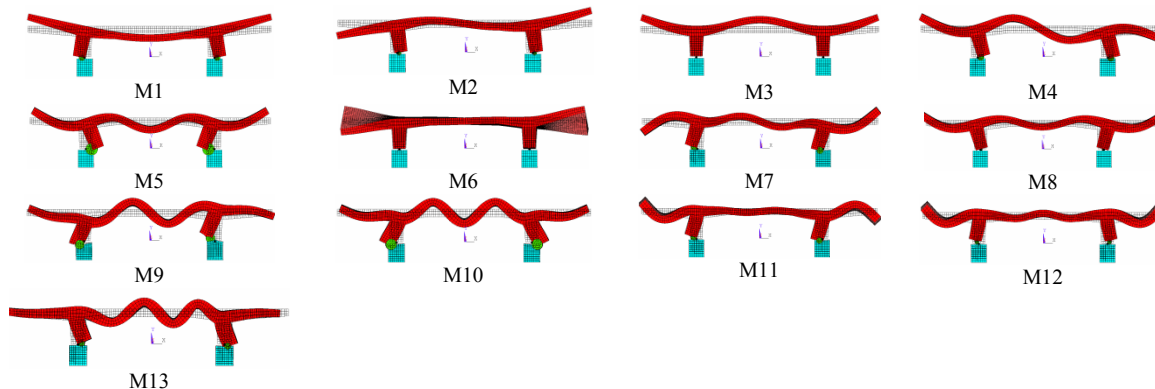


Fig. 10. Numerical mode shapes obtained from finite element model.

The natural frequencies corresponding to the undamaged state of modes M1-M3, M6, M8, M10-M11 and M13 for the three tests are listed in Table 2. In the table, the values obtained with the ANPSD and enhanced FDD (e-FDD) techniques are given. It can be observed that both techniques provide very similar values. The frequencies that correspond to the modes identified only with the PMR but not with ANPSD or e-FDD are 166.04 Hz (mode M4) and 191.09 Hz (mode M5). M7, M9 and M12 were not experimentally found, as already explained. The evolution of the frequencies during the tests is plotted in Fig. 11. In the ordinate axis, the frequency is related to the undamaged state value ( $f_0$ ) provided in Table 2. For test ST1, the frequency change is expressed over the maximum load level that corresponds to the load stage in which the impact tests were performed. Three vertical lines indicate the load level corresponding to the limits of the three stages developed in the static test (uncracked state, cracking stage and yielding of the reinforcement). The analysis of the frequency evolution in these stages is carried out in section IV. For tests FT1 and FT2, the frequency change is represented over the number of load cycles. The two vertical lines plotted in the graphics of fatigue tests indicate the division of the three stages shown in Fig. 2 (crack formation, stabilized cracking and fatigue failure). The analysis of the frequency change and structural damage is performed in section IV.

Table 2. Natural frequencies at the undamaged state of tested specimens (Hz). N.D.: not detected.

Natural frequencies obtained with ANPSD								
Test	M1	M2	M3	M6	M8	M10	M11	M13
ST1	21.97	N.D.	131.98	221.78	319.70	N.D.	487.65	701.88
FT1	25.26	52.81	139.16	232.91	325.34	N.D.	509.99	731.83
FT2	16.48	47.75	119.53	216.58	303.96	414.92	542.50	713.38
Natural frequencies obtained with enhanced FDD								
Test	M1	M2	M3	M6	M8	M10	M11	M13
ST1	21.98	50.04	132.13	222.02	N.D.	N.D.	487.93	702.24
FT1	25.19	49.70	139.15	233.46	325.14	N.D.	510.33	732.01
FT2	16.48	51.18	122.12	N.D.	303.21	381.77	N.D.	714.96

In addition to the evolution of natural frequencies, the damping ratio can be used as a damage indicator. The development of damage is indicated by an increase of the damping ratio. Table 3 shows the damping ratios of the modes studied that correspond to the undamaged state of each specimen. The evolution during the tests is shown in Fig. 12 in a way similar to the one used to show the frequency change in Fig. 11. The analysis of the evolution with structural damage is performed in the following section.

Table 3. Damping ratios at the undamaged state of tested specimens. N.D.: not detected.

Damping ratios obtained with enhanced FDD								
Test	M1	M2	M3	M6	M8	M10	M11	M13
ST1	0.08147	0.06536	0.01772	0.00922	N.D.	N.D.	0.00532	0.00451
FT1	0.08265	0.05582	0.01842	0.01118	0.00291	N.D.	0.00541	0.00389
FT2	0.10048	0.06920	0.03506	N.D.	0.00859	0.01139	N.D.	0.00508

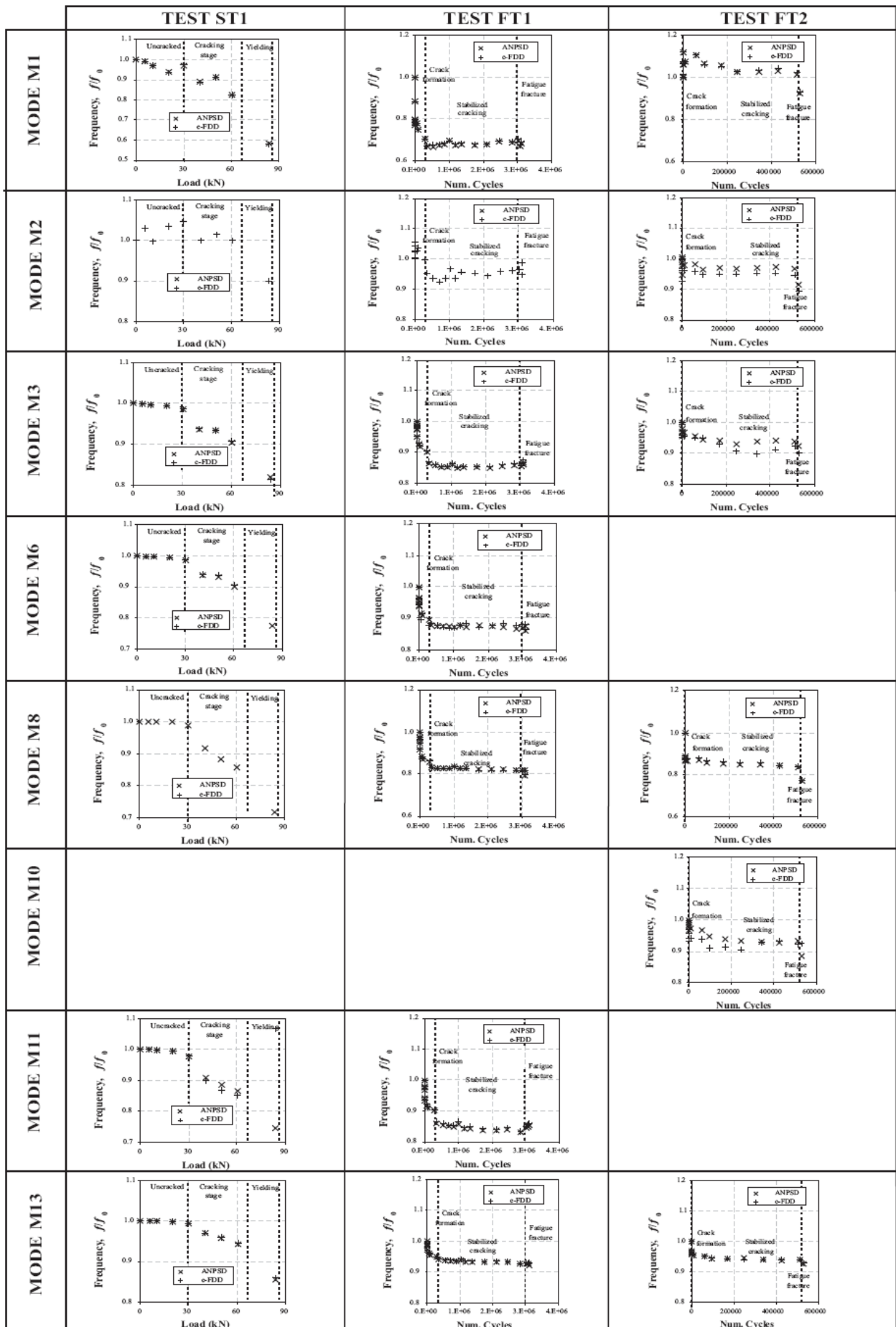


Fig. 11. Evolution of natural frequencies with load level (test ST1) or number of load cycles (tests FT1 and FT2).



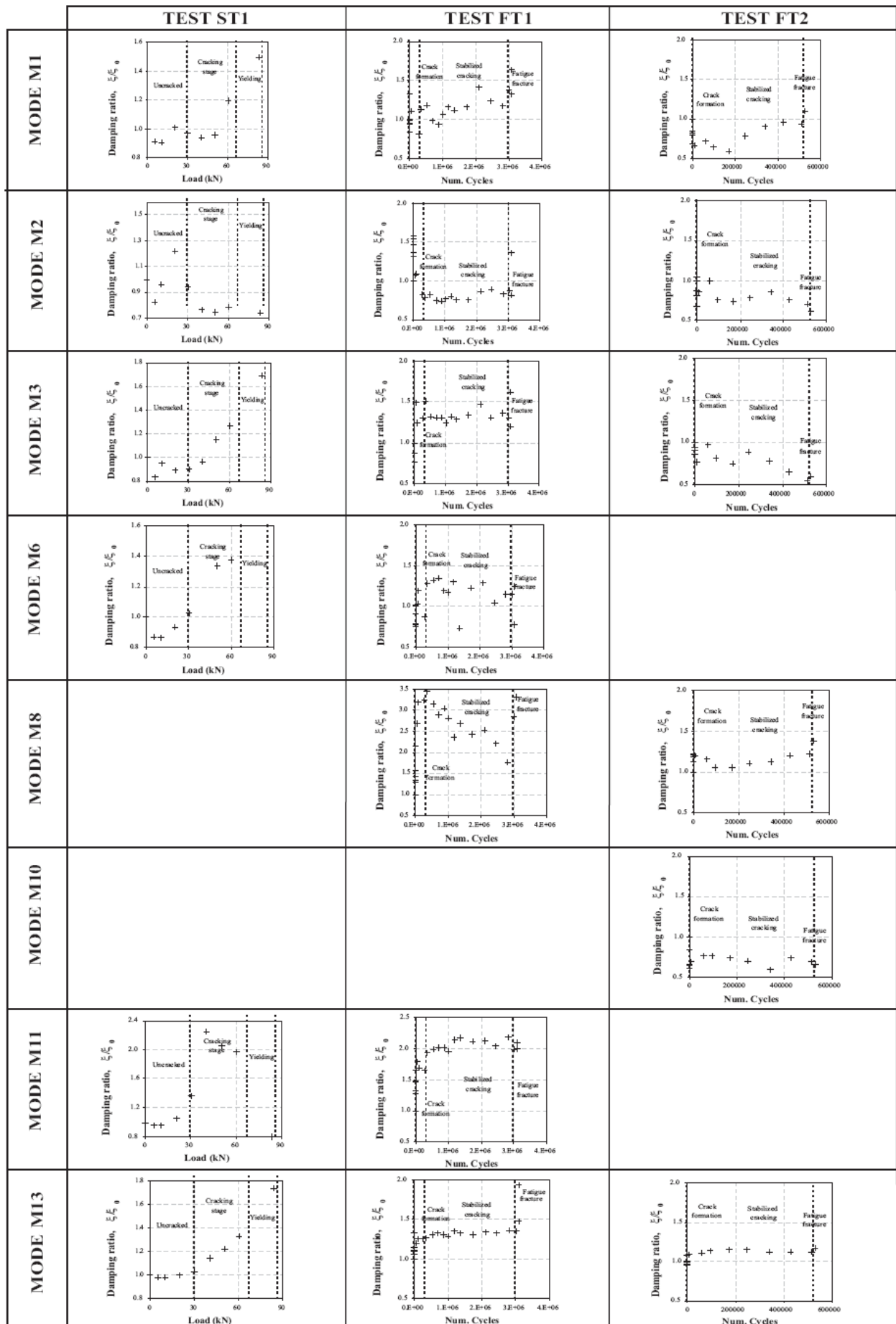


Fig. 12. Evolution of damping ratios with load level (test ST1) or number of load cycles (tests FT1 and FT2).

#### IV. Analysis of correlation between structural damage and change of dynamic properties

Among other objectives, the experimental campaign was intended to evaluate the correlation between the progressive damaging process of the reinforced concrete specimens and the resulting changes that can be observed in the dynamic properties. Regarding the evolution of natural frequencies, the graphics of Fig. 11 indicate a similar trend of the frequency change and the evolution of deflections during the tests (Fig. 2). The experimental stages indicated in section 2.1 can be observed through the frequency change experienced during the tests. The evolution of the frequency corresponding to mode M2 was somewhat irregular at the first loading stages, which can be attributed to the fact that this mode was not sufficiently excited because of the excitation point of the tests. According to the experimental results [11], cracking damage mainly developed at the central region of the specimens and fatigue fracture of rebars took place at the same zone. Since the change of dynamic properties can be related to the location of damage, the most appropriate modes to analyze the decrease of frequencies or increase of damping are those where damage occurs at locations of high modal curvature. Among the modes represented in Fig. 9, M13 seems therefore very appropriate to analyze the experimental behaviour.

According to the above paragraph, the evolution of frequency M13 will be taken as representative of the experimental response of the static test ST1. During the first uncracked stage, there was no frequency change, which agrees with the fact that the stiffness is not reduced as long as concrete does not crack. The frequency then experienced a progressive decrease during the cracking stage. If the evolution of the frequency with the load is plotted in a way similar to the load-deflection diagram, it is observed that the frequency and the deflection follow the same evolution (refer to Fig. 13(a)). Even the crack formation and stabilized cracking stages can be distinguished by a different rate of the frequency decrease. In addition, a larger decrease of the frequency is observed in the stage of yielding of the reinforcement. The frequency change with load is found to follow the same evolution of deflections with load, which can be observed in Fig. 13(b)-(c). The high coefficient of determination indicates that a linear correlation exists between the frequency reduction and the evolution of deflections. Damage due to monotonic loading can be therefore predicted with the evolution of natural frequencies, even in the stage of yielding of the reinforcement.

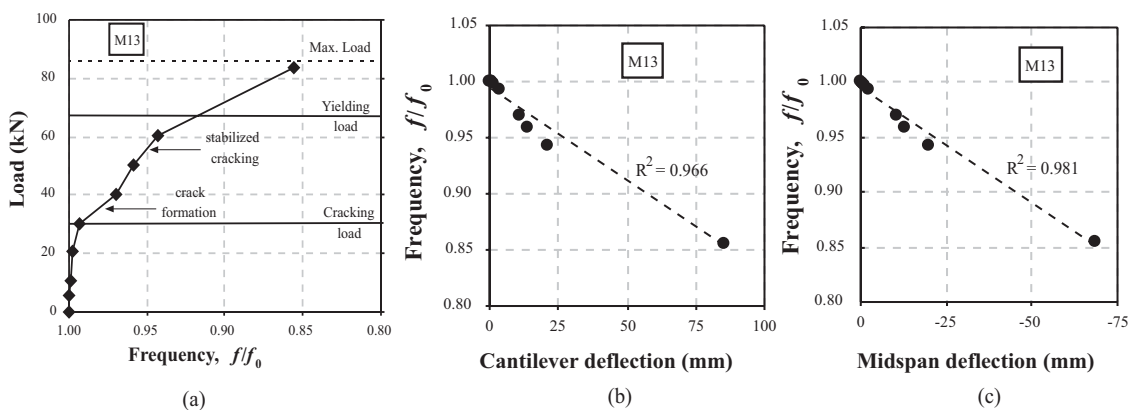


Fig. 13. (a) Evolution of frequency M13 with load in test ST1, and (b)-(c) comparison of frequency change with evolution of deflections.

For the fatigue tests (FT1 and FT2), the frequency decrease was quite significant during the first crack formation stage (see the evolution of frequency M13, for example), which agrees with the increase of deflections during the tests. The damage rate stabilized during the second stage, showing a small linear decrease of the frequency with number of load cycles. Finally, a sudden jump of the frequency indicated the fatigue fracture of the reinforcement. These three stages correspond very well with the evolution of deflections and deformations with number of cycles, showing that the change of natural frequencies can be used to identify the typical fatigue behaviour of reinforced concrete. Further conclusions can be drawn if the frequency evolution developed in the static test is used as a reference to identify the stages of the fatigue tests. This is analyzed with the load-frequency diagram of the three tests plotted in Fig. 14 (the graphic refers to frequency M13, similar to Fig. 13(a)). Three zones are considered in the graphic. The results of the crack formation stage for the fatigue tests lie in zone 1 (triangle ABC), which locates at the left-hand side of the static curve BC. It can be observed that the end of the crack formation stage ( $N = 330000$  cycles for test FT1 and  $N = 300$  cycles for test FT2) coincides with this curve. Zone 2 (triangle BCD) is bounded by the static

curve BC and the vertical line BD that corresponds to the yielding point of the static test ( $f/f_0 \approx 0.93$ ). This zone corresponds to the stabilized cracking stage in the fatigue tests. Furthermore, the points that represent the measurements taken after fatigue failure of the reinforcement in tests FT1 and FT2 fall into zone 3 at the right-hand side of line BD. It is noted that the bars that remained intact after fatigue failure suddenly yielded due to the small reinforcement ratio of the specimens, which suggests that zone 3 corresponds to the stage of yielding of the reinforcement. From the analysis of Fig. 14, it can be concluded that the frequency evolution of the static test is a good tool to establish the three stages developed in the fatigue tests and build the regions of the load-frequency diagram that correspond to them.

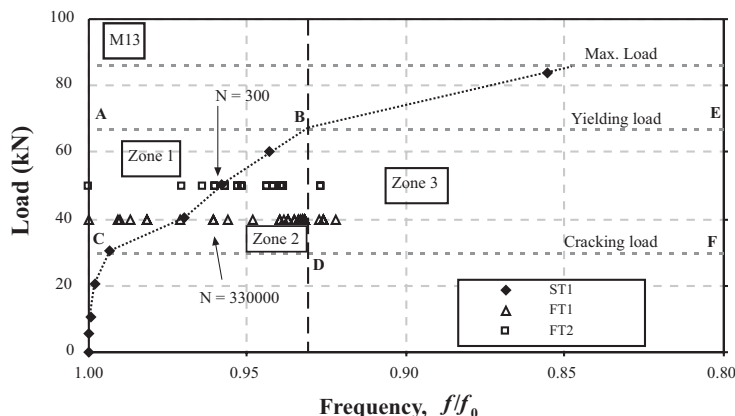


Fig. 14. Load-frequency diagram of the three tests.

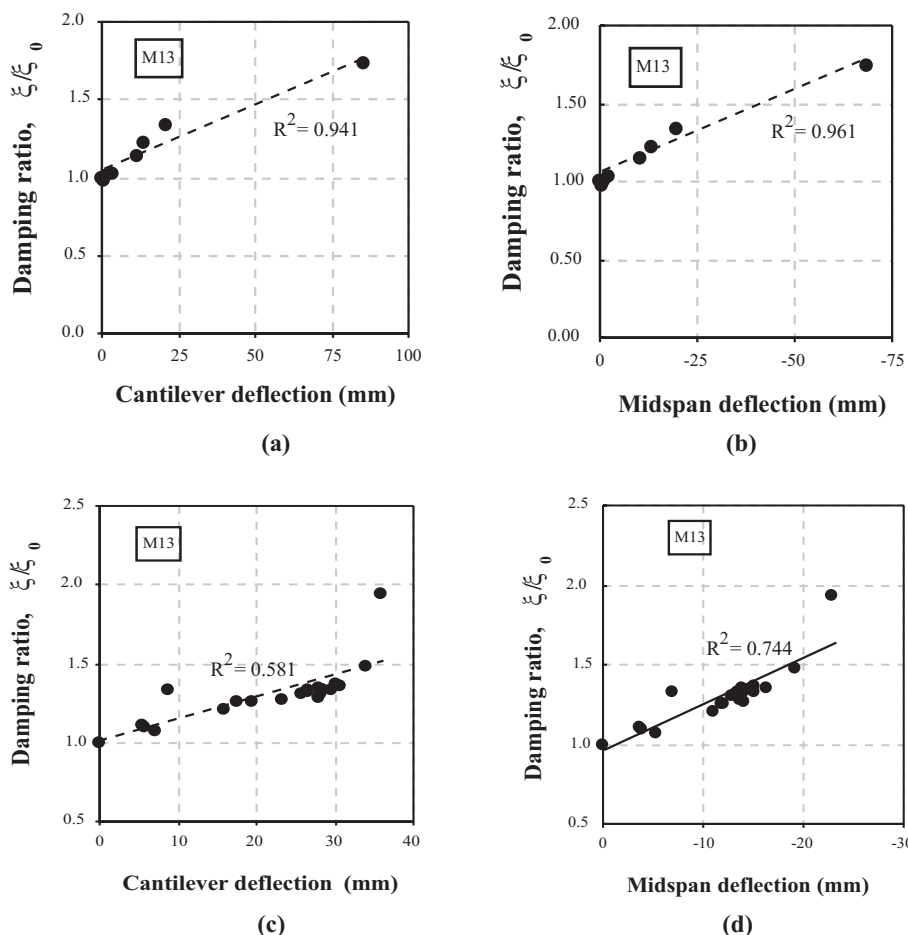


Fig. 15. Comparison of the evolution of damping ratio of mode M13 with deflections: (a)-(b) Test ST1; (c)-(d) Test FT1.

The employ of the evolution of damping ratio to follow the structural damage is more complicated than the use of natural frequencies due to the larger scatter obtained for this parameter (Fig. 12). The identification of

the experimental stages is not easy from the evolution of the damping ratio of modes M1-M10. Better results are obtained for the high order modes (M11 and M13). The change obtained for the damping ratio of mode M13 is plotted over the evolution of deflections for the static test and one of the fatigue tests (FT1) in Fig. 15. The coefficient of determination between damping ratio change and deflections is smaller than the one obtained between natural frequencies and deflections. This is evident for the fatigue tests ( $R^2 = 0.58-0.74$ ), while for the static case the correlation is still rather good ( $R^2 = 0.94-0.96$ ). In Fig. 16 it is shown that the scatter obtained for the damping values does not allow the use of the damping factors of the static test as a reference for the fatigue tests in a similar way to the ones obtained for the frequency in Fig. 14.

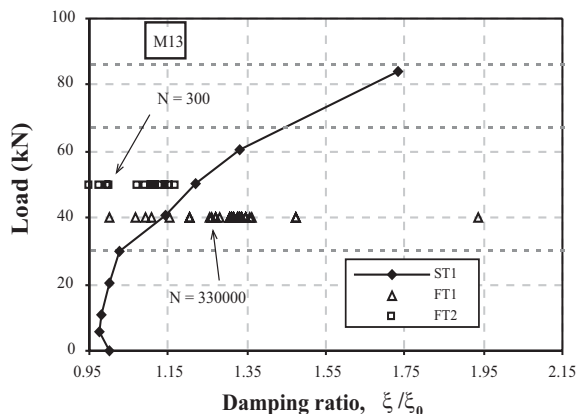


Fig. 16. Load-damping ratio diagram of the three tests.

## V. Conclusions

This paper presents the results of an experimental campaign dealing with the correlation between change of dynamic properties and structural damage of reinforced concrete. The dynamic properties (natural frequencies, damping ratios and modal shapes) were obtained by means of output-only techniques from impact excitation vibration tests. The analysis has focused on the damage caused by fatigue loading on reinforced concrete specimens reproducing the top slab of concrete bridges, with a focus on the transverse behaviour. Three significant stages were developed in the tests: crack formation, stabilized cracking and fatigue fracture of the reinforcement. The results indicate that the change of natural frequencies is an excellent tool to follow the structural damage of the specimens due to the good correlation between the frequency decrease and the increase of deflections with load cycles. In addition, the study indicates that the results obtained in a static test provide a useful reference to establish criteria to identify the fatigue damage. The employ of the damping ratio has more difficulties to identify structural damage due to the more irregular evolution obtained for this parameter.

## Acknowledgements

The financial support provided by the Spanish Ministry for Science and Innovation (projects PSE-370000-2009-10 and IPT-370000-2010-12) is gratefully acknowledged.

## References

- [1] Cunha, A.; Caetano, E. Experimental modal analysis of civil engineering structures. *Sound and Vibration* 6 (2006) 12-20.
- [2] Kim, B.H.; Stubbs, N.; Park, T. A new method to extract modal parameters using output-only responses. *Journal of Sound and Vibration* 282 (2005) 215-230.
- [3] Gentile, C.; Bernardini, G. Output-only modal identification of a reinforced concrete bridge from radar-based measurements. *NDT&E International* 41 (2008) 544-253.
- [4] Altunisik, A.C.; Bayraktar, A.; Sevim, B. Output-only system identification of posttensioned segmental concrete highway bridges. *Journal of Bridge Engineering* 16 (2011) 259-266.
- [5] Waltering, M.; Bongard, V.; Waldmann, D.; Maas, S.; Zürbes, A. Vergleich statischer und dynamischer Methoden zur Zustandsbewertung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. *Beton- und Stahlbetonbau* 104 (2009) 628-641.
- [6] De Roeck, G.; Peeters, B.; Maeck, J. Dynamic monitoring of civil engineering structures. In:

- Computational methods for shell and spatial structures, Proceedings. IASS-IACM 2000. 2000, 1-24.
- [7] Casas, J.R.; Aparicio, A.C. Structural damage identification from dynamic test data. *Journal of Structural Engineering* 120 (1994) 2437-2450.
  - [8] Ndambi, J.M.; Vantomme, J.; Harri, K. Damage assessment in reinforced concrete beams using eigenfrequencies and mode shape derivatives. *Engineering Structures* 24 (2002) 501-515.
  - [9] Peeters, B.; Maeck, J.; De Roeck, G. Excitation sources and dynamic system identification in civil engineering. In: European COST M3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring, Proceedings. 2000, 341-350.
  - [10] Neild, S.A.; Williams, M.S.; McFadden, P.D. Nonlinear vibration characteristics of damaged concrete beams. *Journal of Structural Engineering* 129 (2003) 260-268.
  - [11] Zanuy, C.; Maya, L.F.; Albajar, L.; de la Fuente, P. Transverse fatigue behaviour of lightly reinforced concrete bridge decks. *Engineering Structures* 33 (2011) 2839-2849.
  - [12] Ministerio de Fomento. Instrucción de Hormigón Estructural EHE 08 (Spanish code for structural concrete). Madrid, Spain. 2008.
  - [13] Gilbert, R.I. Tension stiffening in lightly reinforced concrete slabs. *Journal of Structural Engineering* 133 (2007) 899-903.
  - [14] Felber, A.J. Development of a hybrid bridge evaluation system. PhD Thesis, University of New British Columbia, 1993.
  - [15] Felber, A.; Cantieni, R. Advances in ambient vibration testing: Ganter bridge, Switzerland. *Structural Engineering International* 96 (1996) 187-190.
  - [16] Brincker, R.; Ventura, C.E.; Andersen, P. Damping estimation by frequency domain decomposition. In: Proceedings of the International Modal Analysis Conference IMAC. 2001, 1-6.
  - [17] ANSYS. ANSYS Mechanical APDL Programmer's Manual. Release 13.0. Canonsburg, PA: 2010.

## Resistencia a cortante de forjados de vigueta y bovedilla. Un modelo racional

*Carlos Ribas, Antoni Cladera*

*Department of Physics. University of Balearic Islands (UIB).  
{antoni.cladera, carlos.ribas}@uib.es.*

### Resumen

El presente estudio plantea la evolución de un modelo de cálculo de resistencia a cortante último existente en la bibliografía, para su aplicación en forjados de vigueta pretensada y bovedilla. El modelo presenta como mejora principales la interacción momento-cortante, y la evaluación del efecto que tiene la capa de compresión en la resistencia a cortante.

### Palabras clave

Resistencia a cortante; vigas con sección en T; hormigón armado; forjados de vigueta y bovedilla.

### I. Introducción:

La resistencia a cortante de las vigas de hormigón armado con sección en forma de "T" y sin armadura transversal es evaluada en la mayor parte de normativas de forma simplificada, igualándola a la resistencia a cortante del alma de la sección. Sin embargo, desde los años 50 muchos modelos tanto empíricos como racionales evalúan el incremento de resistencia a cortante que supone la existencia de alas comprimidas en la sección en forma de "T" [1-3].

Un ejemplo de elementos sin armadura a cortante con secciones que poseen estas alas comprimidas son los forjados de vigueta pretensada y bovedilla. Con el fin de evaluar la influencia de las alas comprimidas en este tipo de elementos se realizaron dos campañas experimentales sobre un total de 27 elementos (ver Figura 1). La principal variable de la campaña fue la existencia o no de alas en la sección y su espesor.

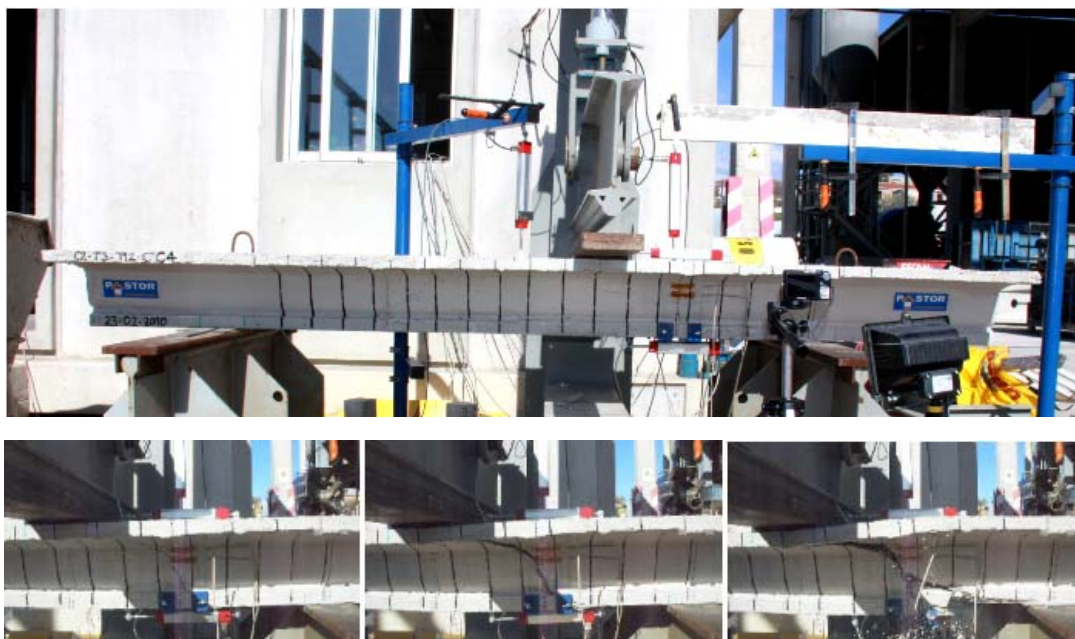


Figura 1. Configuración de ensayo y rotura a cortante.

En este estudio se presenta un modelo racional basado en uno existente en la bibliografía [3], para determinar el efecto beneficioso de las alas a la resistencia a compresión en estos forjados de vigueta pretensada y bovedilla. El modelo previo evalúa la resistencia a cortante a partir de un área efectiva a cortante sobre una posición determinada de la fibra neutra. La evolución propuesta determina un área efectiva a cortante para cada posición de la fibra neutra en la sección, por lo que el modelo permite estimar la interacción flexión-cortante.

## II. Datos experimentales:

Se realizaron dos campañas experimentales, la primera ensayando 24 elementos y la segunda con 3 elementos. Todos ellos son nervios de forjados de vigueta pretensada y bovedilla, y por tanto, con secciones construidas con parte de hormigón pretensado (vigüeta o semivigüeta prefabricada) y otra parte por hormigón “in situ”.

En la primera campaña, se pretendía obtener y medir la influencia de las siguientes variables en la resistencia a cortante último de los elementos a ensayar:

- Cantos útiles del nervio del forjado total (2 opciones: 24 cm y 29 cm).
- Cuantía de pretensado en la vigüeta prefabricada (2 opciones: *T3* y *T5*, ver Figura 2).
- Geometría de la vigüeta prefabricada, atendiendo al canto y el ancho  $b_0$  (2 opciones: semivigüeta *T12* y vigüeta *T20*, ver Figura 2).
- Existencia de la capa de compresión así como la influencia de su espesor (3 opciones: Sin capa de compresión *SCC*, con capa de compresión de 4 cm *CC4* y con capa de compresión de 7 cm *CC7*, ver Figura 3)

Según estas variables, y por el citado orden, se adoptó la nomenclatura de las vigas (ver Tabla 1). El número de especímenes ensayados viene dado por toda la combinatoria de las variables arriba citadas, por tanto se realizaron un total de 24 ensayos. Nótese las diferencias de los dos armados activos de cada una de las vigüetas o semivigüetas, los elementos *T3* tienen 4 alambres de 5 mm de diámetro pretensados y los elementos *T5* tienen 6 alambres de 5 mm de diámetro pretensados, Figura 2.

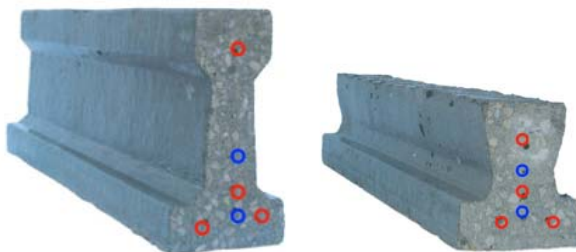


Figura 2. Vigüetas *T20* y *T12*, todos los cordones conforman el armado *T5*, en rojo el armado *T3*.

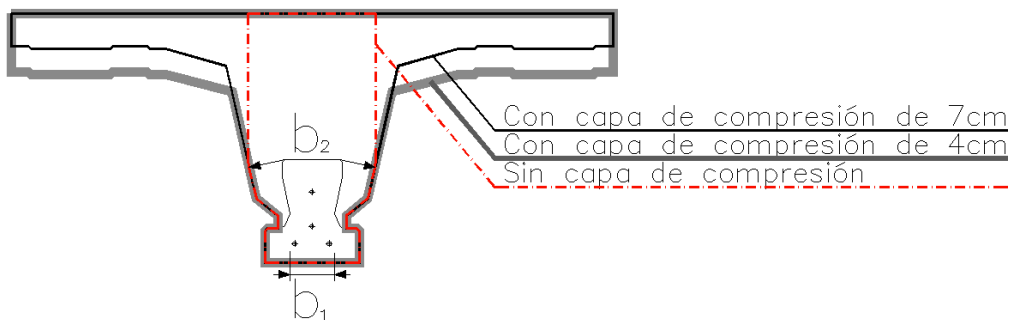


Figura 3. Trío de nervios de forjados con igual resistencia a cortante según la EHE-08 [4].

Con la intención de conseguir un mayor número de roturas a cortante, se ensayan con una carga puntual dispuesta a  $3h$  de un apoyo y  $5h$  del otro Figura 4, siendo  $h$  en canto total del nervio del forjado. Estas dimensiones permiten evitar el efecto arco.

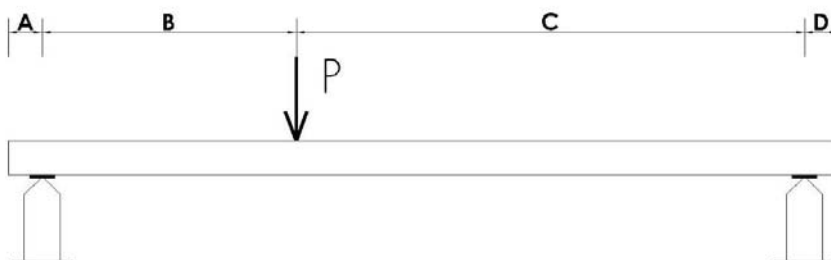


Figura 4. Posición de la carga en los ensayos a realizar,  $A \geq 0.5m$ ,  $B = 3h$ ,  $C = 5h$ ,  $D \geq 0.5m$ ,  $h =$ canto viga.

El mayor interés de la primera campaña, es que se disponen 8 conjuntos de nervios de forjado, de forma que que, según la Instrucción EHE-08 [4], los tres nervios de cada conjunto tienen la misma resistencia última a cortante, ver Figura 3, dado que cada viga de un mismo conjunto tiene las mismas características consideradas por la Instrucción EHE-08 [4] para la obtención del cortante último:  $f_{ck}$  del hormigón “in situ”,  $f_{ck}$  del hormigón prefabricado,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $\sigma_{cp}$ ,  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{12}$  y  $d$ , tal y como se muestra en la Tabla 1.

Los datos de los 24 nervios de forjado analizados se presentan en la Tabla 1, en donde a su vez se presentan: las resistencias características de los hormigones “in situ” y pretensado  $f_{ck}$ , las características del acero activo  $f_{pk}$ , el canto útil de la pieza  $d$ , el área de pretensado  $A_p$ , los anchos de los nervios de hormigón  $b_0$  utilizados en las dos comprobaciones  $b_{01}$  y  $b_{02}$ , la tensión de pretensado inicial  $\sigma_{p0}$ , y el tanto por ciento de pérdidas de pretensado; todos ellos valores utilizados para la predicción de la resistencia a cortante de los forjados ensayados según la Instrucción EHE [4].

La segunda campaña está formada por 3 nervios de forjado de semivigueta pretensada del mismo tipo *T12* con armado *T5* utilizado en la primera campaña. Los cantos utilizados son 25+5, 20+5 y 12+8, donde la suma de los dos valores es el canto total de la sección en cm, y el segundo sumando representa el espesor de la capa de compresión en cm. Los datos de estos 3 ensayos se presentan junto a los de la primera campaña en la Tabla 1.

Campaña	Serie	Viga	Canto mm	Canto CC mm	d mm	$f_{c,HP}$ N/mm <sup>2</sup>	$f_{c,In Situ}$ N/mm <sup>2</sup>	$b_1$ mm	$b_2$ mm	a/d	Armado Longitudinal	$\rho_{11}$	$\rho_{12}$	$\sigma'_{cd}$ N/mm <sup>2</sup>	Tipo de Rotura	$V_{EXP}$ kN	$M_{EXP}$ kN·m
1 <sup>a</sup>	A	24-T3-T12-SCC	240	0	197.5	55.97	31.47	52	152	3.65	4φ5	0.0073	0.0025	7.92	S	40.49	29.15
		24-T3-T12-CC4	240	40	197.5	55.97	31.47	52	152						S	38.67	27.84
		24-T3-T12-CC7	240	70	197.5	55.97	31.47	52	152						F	43.75	31.50
	B	24-T5-T12-SCC	240	0	197.5	55.97	31.47	52	152	3.65	6φ5	0.0115	0.0039	10.95	SL	30.69	36.83
		24-T5-T12-CC4	240	40	197.5	55.97	31.47	52	152						F	63.55	45.76
		24-T5-T12-CC7	240	70	197.5	55.97	31.47	52	152						F	67.22	48.40
	C	29-T3-T12-SCC	290	0	247.5	55.97	31.47	52	149.8	3.52	4φ5	0.0058	0.0020	7.92	F	45.00	39.15
		29-T3-T12-CC4	290	40	247.5	55.97	31.47	52	149.8						F	45.12	39.25
		29-T3-T12-CC7	290	70	247.5	55.97	31.47	52	149.8						F	44.92	39.08
	D	29-T5-T12-SCC	290	0	247.5	55.97	31.47	52	149.8	3.52	6φ5	0.0091	0.0032	10.95	SL	36.07	52.30
		29-T5-T12-CC4	290	40	247.5	55.97	31.47	52	149.8						S	56.45	49.11
		29-T5-T12-CC7	290	70	247.5	55.97	31.47	52	149.8						F	66.91	58.21
	E	24-T3-T20-SCC	240	0	210.8	52.32	38.37	38	198.8	3.42	4φ5	0.0093	0.0023	5.81	F	35.43	25.51
		24-T3-T20-CC4	240	40	210.8	52.32	38.37	38	198.8						F	38.50	27.72
		24-T3-T20-CC7	240	70	210.8	52.32	38.37	38	198.8						F	38.06	27.40
	F	24-T5-T20-SCC	240	0	199.5	52.32	38.37	38	198.8	3.61	6φ5	0.0155	0.0039	8.73	SL	28.69	34.43
		24-T5-T20-CC4	240	40	199.5	52.32	38.37	38	198.8						F	56.25	40.50
		24-T5-T20-CC7	240	70	199.5	52.32	38.37	38	198.8						F	57.96	41.73
	G	29-T3-T20-SCC	290	0	260.8	52.32	38.37	38	187.3	3.34	4φ5	0.0075	0.0019	5.81	F	42.39	36.88
		29-T3-T20-CC4	290	40	260.8	52.32	38.37	38	187.3						F	40.81	35.51
		29-T3-T20-CC7	290	70	260.8	52.32	38.37	38	187.3						F	41.86	36.42
	H	29-T5-T20-SCC	290	0	249.5	52.32	38.37	38	187.3	3.49	6φ5	0.0124	0.0031	8.73	F	60.19	52.36
		29-T5-T20-CC4	290	40	249.5	52.32	38.37	38	187.3						F	58.13	50.57
		29-T5-T20-CC7	290	70	249.5	52.32	38.37	38	187.3						F	58.75	51.11
2 <sup>a</sup>	2007	30-T5-T12-CC5	290	50	257.5	46.32	43.63	52	163.6	4.27	6φ5	0.0088	0.0028	10.95	S	47.23	51.92
		25-T5-T12-CC5	250	50	207.5	45.51	43.63	52	145.8	4.34	6φ5	0.0109	0.0039	10.95	S	40.47	36.36
		20-T5-T12-CC8	200	80	157.5	46.86	43.63	52	141.2	4.44	6φ5	0.0144	0.0053	10.95	S	52.78	27.12

Tabla 1. Características de los elementos ensayados en las dos campañas y resultados obtenidos en los ensayos.

### III. Modelo base existente en bibliografía:

A continuación se resume el modelo de comportamiento de las vigas de hormigón armado sometidas a esfuerzo cortante, propuesto por Zararis [3] [5], en 3 puntos básicos. No se presenta la parte del modelo para elementos con armadura a cortante al no ser de interés para el presente estudio.

#### III.1 Fisura crítica

En base a la observación de las roturas a cortante de la bibliografía técnica consultada, Zararis divide la fisura crítica a cortante en dos ramas principales. La primera está ligeramente inclinada y con una altura aproximada a la producida en un elemento igual sometido a flexión pura; y la segunda rama que va desde el extremo de la anterior hasta el punto de aplicación de la carga, la trazada de esta segunda rama se superpone a una línea imaginaria, que parte desde el apoyo al punto de aplicación de la carga. El trazado de las dos ramas se puede ver de forma esquemática en la Figura 5.



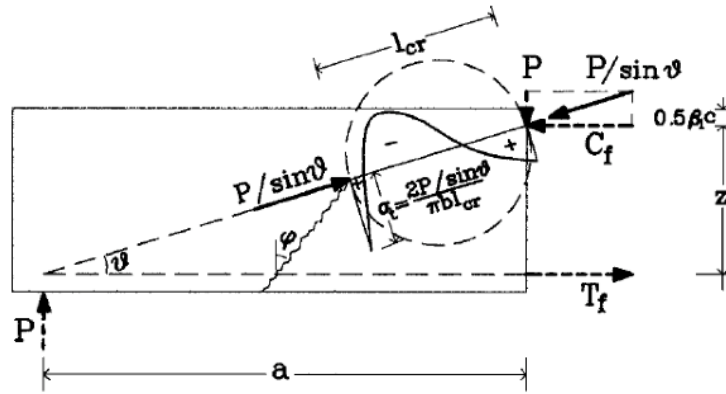


Figura 5. Trazado de las ramas y distribución de las tensiones normales a lo largo de la segunda rama de la fisura crítica [3].

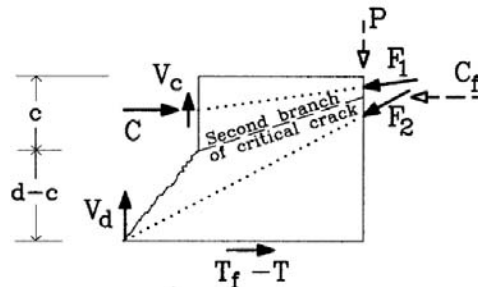


Figura 6. Propuesta de equilibrio de fuerzas [3].

### III.2 Mecanismo resistente

Zararis [3] evalúa el equilibrio de fuerzas que se produce en el trozo de viga delimitado por un lado, por la primera rama de la fisura crítica y la prolongación vertical de su extremo superior; y por otro, la sección de aplicación de la carga. Este trozo de viga se presenta en la Figura 6, en el cual se muestran dos fuerzas de compresión en líneas de puntos. Obsérvese que Zararis obvia el posible efecto de cortante fricción que se produce en la primera rama de la fisura crítica.

El diagrama de tensiones normales que suponen el equilibrio de fuerzas mostrado en la Figura 5 guarda cierto parecido con el del ensayo por tracción indirecta de una probeta cilíndrica de hormigón. Basado en ello, Zararis [3] presenta un desarrollo analítico, donde concluye que la resistencia a cortante de una viga de hormigón sin armadura a cortante, es el área que queda por encima de la primera rama de la fisura crítica (es decir por encima de la fibra neutra) multiplicada por la resistencia a tracción indirecta del hormigón. Por tanto en una viga rectangular, la resistencia a cortante sería:

$$V_{cr} = b \cdot c \cdot f_{ct} = A_{ef,v} \cdot f_{ct} \quad (1)$$

donde  $b$  sería el ancho de la sección,  $c$  la profundidad del bloque comprimido a flexión,  $f_{ct}$  la resistencia a tracción indirecta del hormigón y  $A_{ef,v}$  el área eficaz a cortante.

Zararis para las secciones en T, propone una simplificación para hallar  $c$ , a partir de las ecuaciones de equilibrio de la sección, sometiendo a la fibra superior a una deformación de compresión del hormigón  $\epsilon_{co}=0,002$ , y adoptando un diagrama tensión-deformación rectangular del hormigón, como se muestra en la Figura 7.

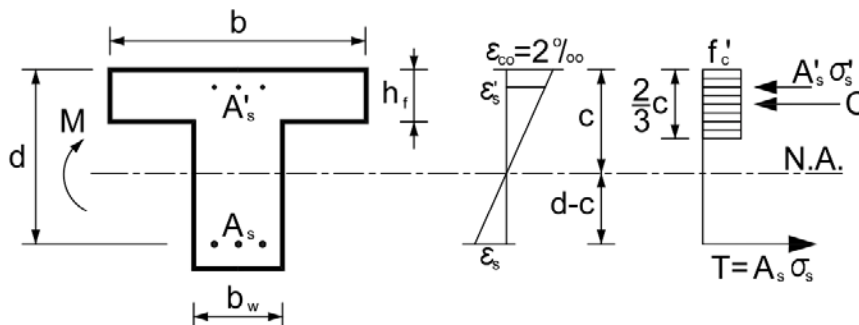


Figura 7. Distribución de deformaciones y tensiones en una sección en T. [5]

### III.3 Efecto tamaño y resistencia de vigas en T

Zararis en [3] propone añadir a la Ecuación 1, un factor para evaluar el efecto tamaño, quedando la expresión:

$$V_{cr} = (1,2 - 0,2a) b \cdot c \cdot f_{ct} = (1,2 - 0,2a) A_{ef,v} \cdot f_{ct} \quad (2)$$

En donde  $d$  es el canto útil,  $c$  es la altura del bloque comprimido a flexión, y  $a$  es la longitud en metros del vano a cortante.

Basándose en la observación de la fisuración diagonal en las alas de las vigas ensayadas, Zararis propone que el área efectiva a tener en cuenta de las alas de una sección en T, para el cálculo de la resistencia a cortante, tenga la forma de embudo mostrada en la Figura 8. Aunque no lo comenta, se sobrentiende que cuando la fibra neutra esté dentro de la capa de compresión, sólo se contará el área del embudo de la Figura 8, que esté por encima de la fibra neutra.

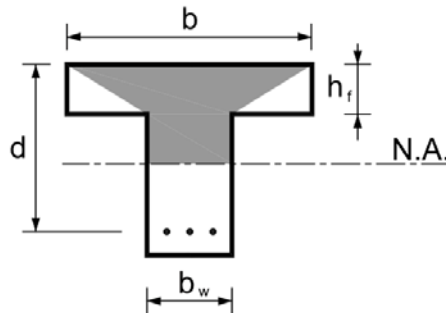


Figura 8. Sección en T con área efectiva a cortante del hormigón (sombreada, adaptada de [5]).

### IV. Modelo propuesto:

En el presente estudio, gracias al planteamiento de equilibrio en la sección mediante un análisis de fibras, se obtienen las tensiones normales en la sección. Repitiendo el proceso para diferentes posiciones de la fibra neutra se consigue evaluar la relación momento curvatura.

A partir del análisis momento-curvatura se obtiene la posición de la fibra neutra para cada momento flector solicitado, y gracias a ello se deduce el área efectiva a cortante planteada por Zararis,  $A_{ef,v}$ . Este área efectiva multiplicada por la resistencia a tracción indirecta  $f_{ct}$  y por el factor que tiene en cuenta el efecto tamaño, es la resistencia a cortante planteada.

Un ejemplo del análisis planteado para el elemento 29-T5-T12-CC4 se presenta en la Figura 9, en ella se observa que:

- Para momentos menores al de fisuración, el área efectiva a cortante es constante, y por tanto la resistencia a cortante del elemento (línea continua azul horizontal).
- Una vez iniciada la fisuración, a cada momento le corresponde una fibra neutra, y por tanto una resistencia a cortante diferente (línea continua azul no horizontal).
- La interacción momento cortante no supera el momento último (línea azul discontinua).
- La predicción del cortante último según el modelo previo de Zararis, no depende del momento flector aplicado (línea verde de 3 rayas y 2 puntos). En el modelo propuesto, sí que se considera la interacción entre ambos esfuerzos.
- No se puede solicitar al elemento más allá de la línea vertical continua negra, que representa el momento flector que solicita a la sección de análisis, en el instante de la rotura por flexión de la sección bajo la aplicación de la carga.
- La sollicitación de la viga en la sección de análisis (línea discontinua roja inclinada), si corta antes de la línea continua azul, significa que rompe por cortante (rombo azul), mientras que si corta antes de la línea vertical negra quiere decir que el elemento rompe por flexión (que no es el caso).
- El par de esfuerzos de rotura observados en el ensayo están representados con un cuadrado rojo.

Nótese que la sección de análisis planteada está situada a  $0,5d$  del punto de aplicación de la carga, pues se sitúa en la parte central de la segunda fisura (y crítica) observada por Zararis [3]. El análisis planteado se puede realizar tanto por el lado largo como por el lado corto de la viga, puesto que la interacción de los esfuerzos solicitados y el factor tamaño de Zararis dependen de la longitud del vano a cortante  $a$ .

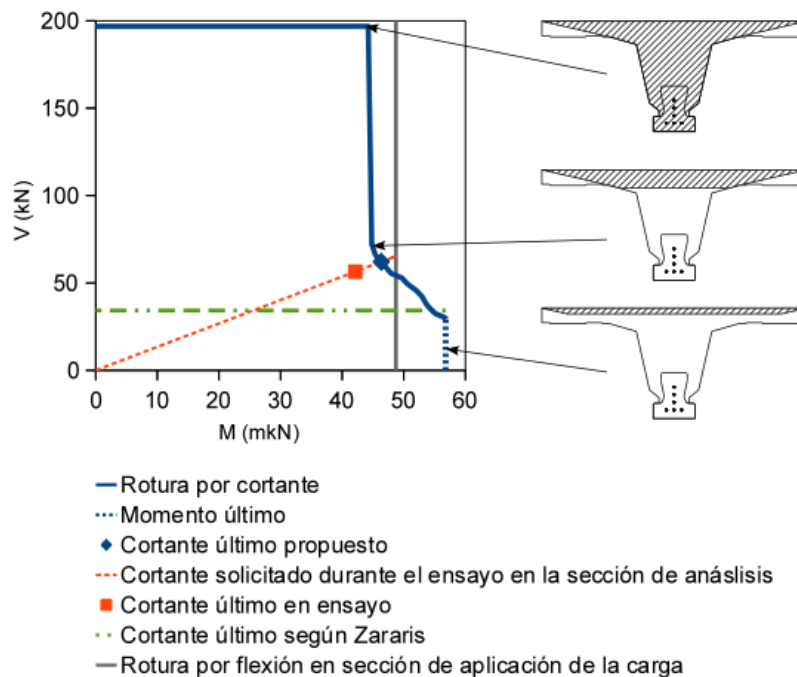


Figura 9. Interacción momento-cortante propuesta para la sección 29-T5-T12-CC4.

## V. Comparación con datos experimentales:

En la Tabla 2 se muestra:

- Las cargas de rotura y el tipo de rotura observado en los ensayos (*S*: Rotura cortante lado corto, *F*: rotura a flexión y *SL*: rotura a cortante lado largo).
- En el segundo bloque, referido a las predicciones de la Instrucción EHE-08, se presentan las cargas últimas de rotura a flexión y cortante por el lado corto, y la más desfavorable de estas dos. A continuación se muestra el tipo de rotura predicho por la Instrucción EHE-08, así como su comparación con la carga última experimental.
- En el tercer bloque se presentan los valores propios del modelo propuesto en este artículo, es decir, las cargas últimas de rotura a flexión, cortante por el lado corto y cortante por el lado largo, y la más desfavorable de estas tres. A continuación se muestra también el tipo de rotura predicho por la propuesta, así como su comparación con la carga última experimental.

La Instrucción EHE-08 no plantea que la resistencia a cortante varíe en función del momento flector concomitante, por lo que en la Tabla 2 sólo se presenta la carga última a cortante por el lado corto que es el más solicitado.

La Tabla 2 muestra que el tipo de rotura predicho por la propuesta coincide con el observado en 10 de las 27 vigas. En cualquier caso, para los casos en que no coincide, la diferencia entre la carga última predicha por la propuesta comparada con la que predicha para el modo de rotura para el que realmente rompió la pieza difiere en todos los casos menos de un 7 %. Esto quiere decir que, según la propuesta, las cargas de rotura por cortante y flexión están más cercanas entre sí que las previstas por la Instrucción EHE-08.

Campaña	Serie	Viga	Datos experimentales		Cargas Últimas EHE-08				P <sub>exp</sub> /P <sub>EHE-08</sub>	Cargas Últimas Propuesta					P <sub>exp</sub> /P <sub>prop</sub>
			Carga Última observada kN	Tipo de rotura predicho	a flexión kN	a cortante lado corto kN	más desf. kN	Tipo de rotura predicho		a flexión kN	a cortante lado corto kN	a cortante lado largo kN	más desf. kN	Tipo de rotura predicho	
1 <sup>a</sup>	A	24-T3-T12-SCC	64.78	S	53.07	<b>45.61</b>	45.61	S	1.42	53.07	<b>52.63</b>	53.81	52.63	S	1.23
		24-T3-T12-CC4	61.87	S	65.91	<b>45.61</b>	45.61	S	1.36	<b>65.91</b>	66.22	67.72	65.91	F	0.94
		24-T3-T12-CC7	70.00	F	65.91	<b>45.61</b>	45.61	S	1.53	<b>65.91</b>	66.67	68.23	65.91	F	1.06
	B	24-T5-T12-SCC	81.85	SL	69.53	<b>53.67</b>	53.67	S	1.53	<b>69.53</b>	75.06	74.21	69.53	F	1.18
		24-T5-T12-CC4	101.68	F	95.58	<b>53.67</b>	53.67	S	1.89	95.58	<b>91.81</b>	94.78	91.81	S	1.11
		24-T5-T12-CC7	107.55	F	95.58	<b>53.67</b>	53.67	S	2.00	95.58	<b>93.58</b>	95.59	93.58	S	1.15
	C	29-T3-T12-SCC	72.00	F	63.80	<b>54.71</b>	54.71	S	1.32	63.80	<b>60.32</b>	62.84	60.32	S	1.19
		29-T3-T12-CC4	72.19	F	72.66	<b>54.71</b>	54.71	S	1.32	<b>72.66</b>	73.72	75.25	72.66	F	0.99
		29-T3-T12-CC7	71.87	F	72.66	<b>54.71</b>	54.71	S	1.31	<b>72.66</b>	75.11	75.56	72.66	F	0.99
	D	29-T5-T12-SCC	96.18	SL	86.25	<b>64.81</b>	64.81	S	1.48	86.25	<b>84.07</b>	84.95	84.07	S	1.14
		29-T5-T12-CC4	90.32	S	104.48	<b>64.81</b>	64.81	S	1.39	104.48	<b>99.36</b>	105.24	99.36	S	0.91
		29-T5-T12-CC7	107.05	F	104.48	<b>64.81</b>	64.81	S	1.65	104.48	<b>101.99</b>	106.39	101.99	S	1.05
	E	24-T3-T20-SCC	56.68	F	52.91	<b>30.69</b>	30.69	S	1.85	52.91	<b>50.05</b>	53.89	50.05	S	1.13
		24-T3-T20-CC4	61.60	F	59.50	<b>30.69</b>	30.69	S	2.01	<b>59.50</b>	59.73	62.43	59.50	F	1.04
		24-T3-T20-CC7	60.90	F	59.50	<b>30.69</b>	30.69	S	1.98	<b>59.50</b>	60.06	62.79	59.50	F	1.02
	F	24-T5-T20-SCC	76.50	SL	74.01	<b>35.15</b>	35.15	S	2.18	74.01	<b>72.30</b>	74.79	72.30	S	1.06
		24-T5-T20-CC4	90.00	F	87.55	<b>35.15</b>	35.15	S	2.56	87.55	<b>85.35</b>	87.28	85.35	S	1.05
		24-T5-T20-CC7	92.74	F	87.55	<b>35.15</b>	35.15	S	2.64	87.55	<b>87.13</b>	87.99	87.13	S	1.06
	G	29-T3-T20-SCC	67.82	F	61.33	<b>36.20</b>	36.20	S	1.87	61.33	<b>57.62</b>	62.24	57.62	S	1.18
		29-T3-T20-CC4	65.30	F	67.51	<b>36.20</b>	36.20	S	1.80	<b>67.51</b>	70.13	70.20	67.51	F	0.97
		29-T3-T20-CC7	66.98	F	67.51	<b>36.20</b>	36.20	S	1.85	<b>67.51</b>	71.03	70.39	67.51	F	0.99
	H	29-T5-T20-SCC	96.30	F	85.76	<b>41.78</b>	41.78	S	2.30	85.76	<b>82.55</b>	85.78	82.55	S	1.17
		29-T5-T20-CC4	93.00	F	97.51	<b>41.78</b>	41.78	S	2.23	97.51	<b>95.40</b>	98.62	95.40	S	0.97
		29-T5-T20-CC7	94.00	F	97.51	<b>41.78</b>	41.78	S	2.25	97.51	<b>96.66</b>	99.01	96.66	S	0.97
2 <sup>a</sup>	2007	30-T5-T12-CC5	66.53	S	76.90	<b>56.54</b>	56.54	S	1.18	<b>76.90</b>	77.65	78.45	76.90	F	0.87
		25-T5-T12-CC5	56.21	S	71.94	<b>46.14</b>	46.14	S	1.22	71.94	<b>71.28</b>	74.68	71.28	S	0.79
		20-T5-T12-CC8	72.31	S	66.33	<b>36.37</b>	36.37	S	1.99	<b>66.33</b>	67.13	68.92	66.33	F	1.09
								Promedio=						Promedio=	
								Desv. Est.=						Desv. Est.=	
								C.O.V.=						C.O.V.=	

Tabla 2: Resumen de resultados del modelo propuesto.

Las predicciones de carga última a cortante previstas por la EHE-08 dentro de cada serie de la primera campaña son iguales, puesto que la Instrucción EHE-08 obvia el efecto beneficioso de el espesor de la capa de compresión [6] [7]. Sin embargo, la propuesta sí que prevé una resistencia creciente dentro de cada familia de la primera campaña a medida que aumenta el espesor de la capa de compresión.

La Tabla 2 presenta los promedios entre las cargas de rotura previstas por la Instrucción EHE-08 y la carga de rotura experimental, este promedio es de 1,78 con una desviación estándar de 0,41 y un coeficiente de variación del 23,2%. Una desviación tan alta y un promedio tan por el lado de la seguridad, están producidos por un exceso de seguridad en la predicción del cortante último, ya que las predicciones de carga última a flexión concuerdan de forma adecuada en los elementos que han roto a flexión. El motivo de ello puede estar en que la formulación de la EHE-08 es de origen empírico a partir de vigas ensayadas a cortante con otras características.

Por otra parte, la Tabla 2 también presenta los promedios entre las cargas de rotura previstas por la propuesta presentada y la carga de rotura experimental, este promedio es de 1,05 con una desviación estándar de 0,11 y un coeficiente de variación del 10,2%. Estos valores son más adecuados que los de la Instrucción EHE-08, y son fruto de un modelo racional fruto de la observación experimental, pero en el que no se incluye ningún ajuste a partir de la experimentación efectuada.

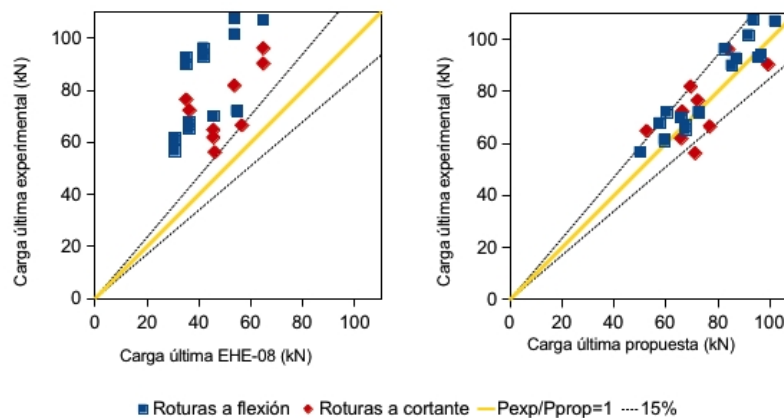


Figura 9. Comparativa entre ensayos experimentales y predicciones de la EHE-08 y el modelo racional propuesto.

En la Figura 9 se presentan dos gráficas en las que se compara la carga última predicha con la carga experimental, para la Instrucción EHE-08 en la primera gráfica, y para la propuesta racional en la segunda. En esta figura se diferencian las roturas a cortante de las que se han producido a flexión. La Figura muestra de forma clara el mejor comportamiento de la propuesta con respecto de la Instrucción EHE-08.

## VI. Conclusiones:

En el presente estudio se han modificado algunas de las simplificaciones planteadas en el modelo de Zararis para la evaluación de la resistencia a cortante de elementos de hormigón armado, con el fin de poder evaluar la resistencia a cortante de forjados de vigueta y bovedilla. Las conclusiones extraídas de la aplicación del modelo propuesto para el cálculo a estado límite último de cortante son:

- La Instrucción EHE-08 proporciona valores muy del lado de la seguridad en las roturas a cortante.
- Según la Instrucción EHE, los 27 elementos ensayados debían romper a cortante, cuando realmente sólo 9 de las 27 roturas han sido a cortante.
- El modelo presentado predice de forma más adecuada la resistencia a cortante de los forjados de vigueta y bovedilla ensayados que la Instrucción EHE-08.
- El modelo presentado es totalmente racional, y es capaz de responder al efecto que produce la variación del espesor de la capa de compresión detectado en la campaña experimental.

## Agradecimientos

Esta investigación se ha desarrollado en el marco de los proyectos BIA2007/60197 (Ministerio de Educación y Ciencia de España) y BIA2012-31432 (Ministerio de Economía y Competitividad de España).

La empresa constructora y de prefabricados PASTOR construyó gratuitamente los especímenes de ensayo y facilitó la utilización de su laboratorio de ensayos, sito en Santa Margarita, Mallorca.

## Bibliografía:

- [1] Al-Alusi: Diagonal tension strength of reinforced concrete T-beams with varying shear span,” in ACI Journal Proceedings, vol. 53 (1957), 1057-1067.
- [2] Swamy, R.; Qureshi, S.: An ultimate shear strength theory for reinforced concrete T-beams without web reinforcement, Materials and Structures, vol. 7, no. 3 (1974), 181-189.
- [3] Zararis, I.; Karaveziroglou, M.; Zararis, P.: Shear strength of reinforced concrete T- beams, ACI structural journal, vol. 103, no. 5, (2006) 693-700.
- [4] Comisión Permanente del Hormigón. *EHE-08. Instrucción de Hormigón Estructural*. Ministerio de Fomento (2008).
- [5] Zararis, P.D; Papadakis, G.: Diagonal Shear Failure and Size Effect in RC Beams without Web Reinforcement, Journal of Structural Engineering, July (2001), 733-742.
- [6] Ribas, C.; Cladera, A.; Mayol, R.; Mas, B.: Resistencia a cortante en forjados de edificación de viguetas pretensadas. Influencia de la geometría de la sección. Ponencia en el V Congreso Internacional de Estructuras, ACHE, (2011). Resumen de comunicaciones 363-364.
- [7] Ribas, C.; Cladera, A.; Mayol, R.; Mas, B.: Experimental campaign on shear strength of beams for beam-and-block floor systems. FIB Symposium, Prague (2011), vol.1, 555-556.

# Diagrama de dominios de armado óptimo aplicado a secciones con ductilidad suficiente para la redistribución de esfuerzos.

David López Martín

Dr. Ingeniero de Caminos. Profesor Titular de Escuela Universitaria. Departamento de Mecánica de estructuras e ingeniería hidráulica. Universidad de Granada. dlopezm@ugr.

## Resumen

La Instrucción española EHE-08 en su Artículo 21º nos dice que para el cálculo de solicitaciones en estructuras reticulares planas podrá utilizarse un análisis lineal con redistribución limitada de esfuerzos. Para ello las secciones en las que se aplique redistribución deberán armarse de modo que tengan ductilidad suficiente. En la práctica esto equivale a limitar la profundidad de la fibra neutra en el agotamiento, y con ello la curvatura, según una fórmula que es adaptación de otra tomada del Código modelo CM90 CEB-FIB. Los diagramas de dominios de armado óptimo de secciones rectangulares solicitadas a flexo-compresión, propuestos por D. López et al. [4] pueden ser adaptados para estas situaciones de armado, tal y como se presenta en este trabajo, así como las ecuaciones de equilibrio que resuelven el problema de armadura la sección.

**Palabras clave** Hormigón, flexión, redistribución, armado, ductilidad.

## I. La redistribución de esfuerzos en la normativa.

Cada Norma de hormigón (CM, EC2 y EHE) propone su propio procedimiento para la redistribución de esfuerzos en función de la ductilidad garantizada en la sección con su diseño. Todos estos métodos suponen que una sección tienen ductilidad suficiente si en el agotamiento su curvatura, que a su vez depende fundamentalmente de la profundidad de la fibra neutra, es suficientemente grande. Para ello se debe asegurar que la profundidad de la fibra neutra sea tanto menor cuanto mayor sea la redistribución aplicada y en todo caso mucho menor que  $x_{lim}$ .

### II.1 Método de la Instrucción EHE-08 (2008).

En [2] el Artículo 21º “Estructuras reticulares planas, forjados y placas unidireccionales” la Instrucción española dice que para el cálculo de solicitaciones en estructuras reticulares planas podrá utilizarse cualquiera de los métodos indicados en el Artículo 19º, entre los que se incluye el análisis lineal con redistribución limitada, y que cuando éste se utilice la magnitud de la redistribución dependerá del grado de ductilidad de las secciones críticas. Pero es en sus comentarios y no en el articulado donde se propone un método de redistribución de esfuerzos para vigas, placas unidireccionales continuas y dinteles de estructuras sensiblemente intraslacionales (los pórticos de edificación suelen serlo).

La única variable que considera es la ductilidad del acero. La máxima reducción de esfuerzos permitida es función de la profundidad de la fibra neutra ( $x$ ) según la fórmula siguiente, que es adaptación de otra tomada del Código modelo CM90 CEB-FIB:

$$r (\%) = 56 - 125 \frac{x}{d}$$

Pese a que el método propuesto no reproduce completamente lo propuesto por el CM90, ha supuesto un importante cambio respecto de la Instrucción anterior EHE-98 que limitaba la redistribución a un 15% independientemente del valor  $x$ , que debía ser menor o igual que  $0.45 d$ , lo que tenía poco sentido. También y en armonía con la Norma europea EC-2 se limita el valor máximo de la redistribución a :

- 20% para aceros de ductilidad normal (S).
- 30% para aceros de ductilidad alta (SD).

La Instrucción deja claro que esta redistribución es aplicable sólo para las comprobaciones de E.L.U. y debe aplicarse sobre los resultados de cada una de las hipótesis de cálculo por separado, para después combinarlas, y no sobre los resultados de una combinación de hipótesis.

## II. Armado de secciones con ductilidad suficiente para la redistribución.

En el cálculo de secciones de hormigón armado solicitadas a flexión es bien sabido que el máximo aprovechamiento de hormigón y armadura se consigue cuando el agotamiento se produce con  $x = x_{lim}$ . A tal situación se la ha denominado de “flexión perfecta” pues en ella se produce el agotamiento simultaneo de acero en tracción y de hormigón con el mayor volumen de compresiones movilizadas posible. El momento flector que la sección es capaz de resistir en estas condiciones es el conocido  $M_{lim}$  y representa el máximo esfuerzo flector que la sección es capaz de resistir estrictamente sin armaduras que colaboren a compresión [3].

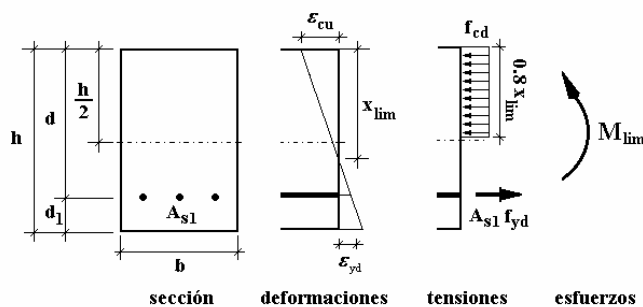


Figura 1. Esquema de cálculo para la obtención de  $M_{lim}$ .

En efecto, se trata del modo de armar una sección a flexión simple de la forma más económica. Sin embargo, según se ha explicado previamente, una sección que agota de este modo carecería de lo que las Normas entienden por ductilidad suficiente y en consecuencia no sería posible hacer ninguna redistribución de esfuerzos. Por tanto, para resistir un determinado esfuerzo flector la sección debe diseñarse bloqueando el valor de la profundidad de la fibra neutra más o menos dependiendo del valor de la redistribución que se le haya aplicado al esfuerzo flector de dicha sección. Pero siempre con un valor mucho menor que el de  $x_{lim}$ . El valor de  $x_{lim}$  es diferente dependiendo del tipo de acero que se emplee. Recordemos que dicho valor se obtiene a partir de ecuaciones de compatibilidad de deformación que conducen a la fórmula:

$$x_{lim} = \frac{d}{1 + \varepsilon_{yd} / \varepsilon_{cu}}$$

Para hormigones convencionales ( $f_{ck} \leq 50$  MPa)  $\varepsilon_{cu} = 0.0035$  y  $x_{lim}$  puede tomar los siguientes valores dependiendo del tipo de acero y del coeficiente de minoración. Si  $\gamma_s = 1.15$ :

de 0.636 d a 0.668 d para acero B 400  
de 0.583 d a 0.617 d para acero B500

En todo caso, son valores claramente superiores al de  $x = 0.45d$ , a partir del cual se puede aplicar la redistribución de esfuerzos. En consecuencia, al bloquear la profundidad de la fibra neutra en valores inferiores al mencionado, podrá ser necesario complementar las compresiones en el hormigón con armadura incluso para resistir esfuerzos flectores inferiores a  $M_{lim}$ . Dicho de otro modo, la armadura comprimida se hace necesaria por razones de ductilidad aun cuando no fuera necesaria por razón de resistencia. De acuerdo con el método de EHE, para un esfuerzo flector reducido:

$$M_{red} = \delta \cdot M \quad \text{donde:} \quad \delta = 1 - \frac{r(\%)}{100} \quad \text{con} \quad r(\%) = 56 - 125 \frac{x}{d}$$

la fibra neutra se debe bloquear en:

$$x = \beta d \quad \text{con} \quad \beta = \frac{56 - r(\%)}{125}$$

Por lo tanto, el máximo esfuerzo flector que se puede resistir sin armadura de compresión es:

$$M_{\beta} = f_{cd} 0.8 \beta d b (d - 0.4 \beta d) = 0.8 (\beta - 0.4 \beta^2) f_{cd} b d^2$$

La armadura de compresión será necesaria si  $M_{red} > M_{\beta}$  y su capacidad mecánica se calculará con:

$$U_2 = \frac{M_d - M_{\beta}}{d - d_2}$$

A modo de ejemplo, si se desea aplicar la máxima redistribución (no siempre será necesario o conveniente aplicar el máximo) conforme al método de la EHE deberemos diseñar la sección acuerdo con:

$$20 = 56 - 125 x / d \text{ para aceros S (ductilidad norma)}$$

$$30 = 56 - 125 x / d \text{ para aceros SD (ductilidad alta)}$$

El valor máximo de la profundidad  $x$  conforme a las formulas anteriores será:

$$x = 0.288 d \approx 0.29 d \text{ para aceros S}$$

$$x = 0.208 d \approx 0.21 d \text{ para aceros SD}$$

Luego, será necesaria armadura comprimida si el esfuerzo flector de diseño (el reducido) es mayor de:

$$M_{0.29} = f_{cd} \cdot 0.8 x b (d - 0.4x) = 0.205 f_{cd} b d^2 \text{ para aceros S}$$

$$M_{0.21} = f_{cd} 0.8 x b (d - 0.4 x) = 0.152 f_{cd} b d^2 \text{ para aceros SD}$$

La armadura necesaria en compresión se obtiene de forma análoga a como la obtenemos para resistir momentos superiores a  $M_{lim}$ . En primer lugar, se calcula la capacidad mecánica necesaria en la armadura comprimida ( $U_2$ ). La capacidad mecánica en el hormigón ( $U_C$ ) es conocida, pues la profundidad  $x$  se ha fijado previamente, y la capacidad mecánica de la armadura traccionada ( $U_1$ ) se deduce del equilibrio en la sección.

$$\text{para } x = 0.29 d: U_2 = \frac{M_{red} - M_{0.29}}{d - d_2}, U_C = 0.232 f_{cd} b d \text{ y } U_1 = U_C + U_2$$

$$\text{para } x = 0.21 d: U_2 = \frac{M_{red} - M_{0.21}}{d - d_2}, U_C = 0.168 f_{cd} b d \text{ y } U_1 = U_C + U_2$$

En caso contrario la sección tendrá ductilidad suficiente pese a no disponer de armadura comprimida.

### III. La redistribución en los diagramas de armado óptimo.

Para una sección solicitada a flexión compuesta el valor excentricidad a partir del cual se dispone armadura comprimida por razones de economía es el que satisface:  $N_d e_1 = M_{lim}$ . Sin embargo, si por alguna razón se desea dar un valor a la curvatura en agotamiento de la sección, como ocurre en la redistribución de esfuerzos, la expresión anterior cambia por la siguiente:

$$N_d e_1 = M_{\beta} = 0.8 (\beta - 0.4 \beta^2) f_{cd} b d^2$$

Que en términos de la excentricidad al baricentro de la sección es:

$$N_d e_1 = N_d \left( e_o + \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) \right) = 0.8 (\beta - 0.4 \beta^2) f_{cd} b d^2$$



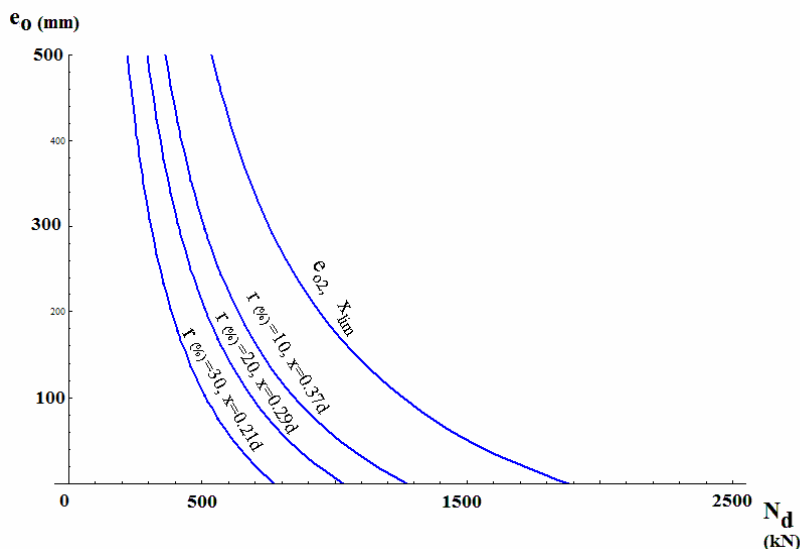


Figura 2. Curvas de variación de  $e_{o2\beta}$  para diferentes valores de redistribución de esfuerzos según EHE y comparación con  $e_{o2}$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

Despejando:

$$e_o = -\left(\frac{h}{2} - d_1\right) + \frac{0.8(\beta - 0.4\beta^2) f_{cd} b d^2}{N_d} = e_{o2\beta} \quad \dots \quad [\text{Ec.1}]$$

Una representación de  $e_{o2\beta}$  para diferentes valores de reducción de esfuerzos según el método de la EHE puede verse en la (Fig. 2) a modo de ejemplo. Recordemos que si en nuestro problema de armado  $e_o > e_{o2}$ , será necesario disponer armadura de compresión por razones de economía (situación (1) en la (Fig. 3)).

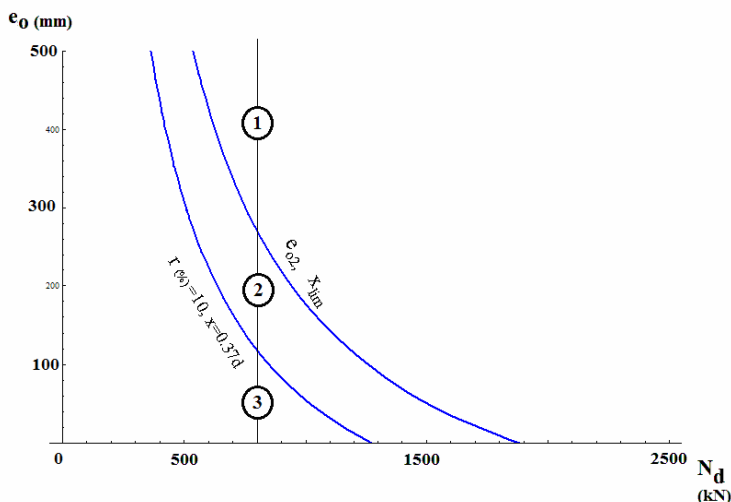


Figura 3. Curva de variación de  $e_{o2\beta}$  con  $\beta = 0.37$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

Si por el contrario,  $e_o < e_{o2}$  pero  $e_o > e_{o2\beta}$  (situación (2) en la (Fig. 3)). Entonces se nos plantean dos alternativas:

1. Dimensionar sin armadura de compresión. En cuyo caso la sección queda estrictamente armada, pero no se le puede aplicar redistribución alguna de esfuerzos.
2. Si lo que queremos es dimensionar la sección para un esfuerzo flector redistribuido  $M_{red} = \delta \cdot M_d$  deberemos bloquear la profundidad de la fibra neutra en  $x = \beta d$ , conforme a la normativa que se esté aplicando, y armar la sección en tales condiciones. Será necesario disponer armadura de compresión.

En consecuencia, el armado de la sección resultará más caro, pero podemos conseguir un armado más económico en el conjunto de la pieza.

Finalmente si  $e_o < e_{o,2\beta}$  (situación (3) en la (Fig. 3) la sección resultará con ductilidad suficiente sin necesidad de disponer armadura de compresión. Podemos plantear la situación frontera de la (Fig. 4).

Queremos determinar el esfuerzo flector que podemos resistir sin armadura de tracción para una sección solicitada a flexión compuesta en la que se ha bloqueado la profundidad de la fibra neutra en  $x = \beta d$ . Si planteamos el equilibrio en la sección, tomando momentos en el baricentro de la armadura superior, tenemos:

$$N_d \cdot e_2 = f_{cd} \cdot 0.8 \beta \cdot d \cdot b (0.4 \beta \cdot d - d_2)$$

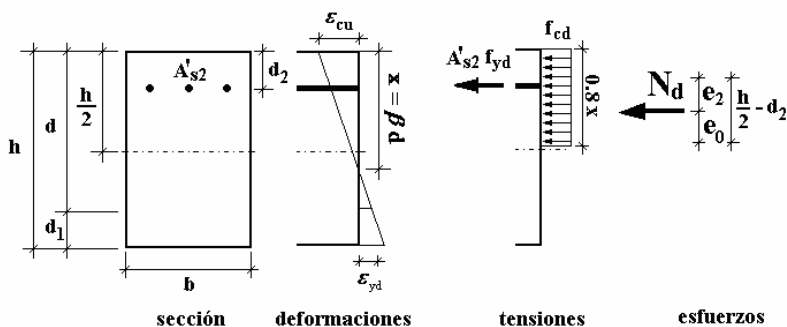


Figura 4. Sección rectangular solicitada a flexión-compuesta con  $x = \beta d$  y sin armadura inferior  $A_{s1} = 0$ . Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular.

Y teniendo en cuenta que:

$$e_2 = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - e_o \quad \rightarrow \quad N_d \cdot \left( \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - e_o \right) = f_{cd} \cdot 0.8 \beta \cdot d \cdot b (0.4 \beta \cdot d - d_2)$$

Despejando:

$$e_o = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - \frac{f_{cd} \cdot 0.8 \beta \cdot d \cdot b (0.4 \beta \cdot d - d_2)}{N_d} = e_{o\beta} \quad \dots \quad [\text{Ec.2}]$$

Una representación de  $e_{o\beta}$  para diferentes valores de la redistribución de esfuerzos según EHE y comparación con  $e_{olim}$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

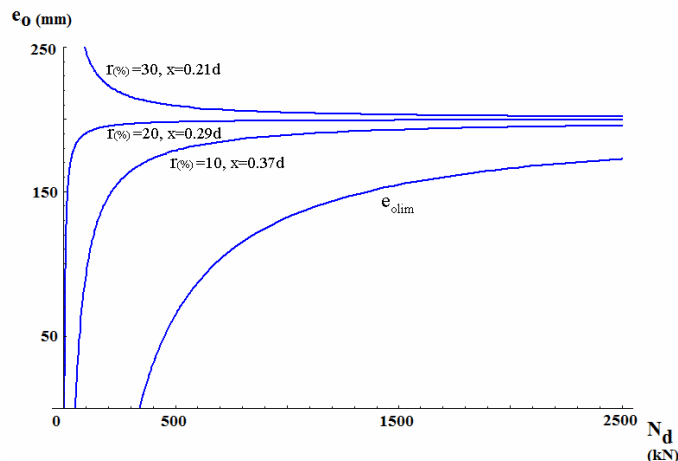


Figura 5. Curvas de variación de  $e_{o\beta}$  para diferentes valores de redistribución de esfuerzos según EHE y comparación con  $e_{olim}$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

Recordemos que siempre que  $e_o > e_{o\lim}$ , tendremos un problema de gran excentricidad [4] y por tanto de flexión compuesta. Si es  $e_o < e_{o\lim}$  el dimensionado es con  $x > x_{lim}$  en el agotamiento, no siendo de aplicación los criterios de ductilidad asociados a una redistribución de esfuerzos (situación (3) en la (Fig. 6). Se recuerda que en las Normas presentadas la redistribución es de aplicación a vigas y dinteles, que en general están solicitados a flexión simple o compuesta, con valores de esfuerzo axial muy pequeño.

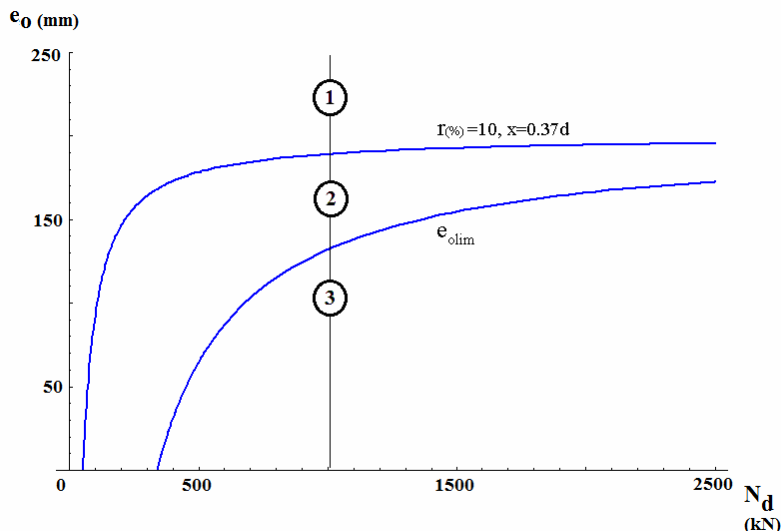


Figura 6. Curva de variación de  $e_{o\beta}$  con  $\beta = 0.37$  para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

El valor de excentricidad que se obtienen de [Ec.2] lo denominamos  $e_{o\beta}$  y representa el valor de la excentricidad tal que si  $e_o < e_{o\beta}$ , la armadura inferior debe estar comprimida, lo que es una contradicción con la hipótesis de agotamiento y significa que la sección no puede armarse con  $x = \beta d$ . La redistribución no será posible.

Por lo tanto, nos quedan las siguientes situaciones:

1. Si  $e_o > e_{o\beta}$  (situación (1) en la (Fig. 6) entonces la sección se puede armar para el resistir el momento redistribuido imponiendo la condición  $x = \beta d$ .
2. Si  $e_o > e_{o\lim}$ , pero  $e_o < e_{o\beta}$  (situación (2) en la (Fig. 6) entonces la sección se puede armar con  $x = x_{lim}$ . Pero no es posible la redistribución.

#### IV. Diagrama “axil–excentricidad” de dominios de armado óptimo. Secciones con redistribución de esfuerzos.

Elegido un valor  $\delta$  para la redistribución y su correspondiente límite  $x = \beta d$  para la profundidad de la línea neutra obtendremos dos curvas de valor frontera  $e_{o\beta}$  y  $e_{o2\beta}$  para la excentricidad de cálculo. Si las combinamos con las ya presentadas [4]  $e_{o\lim}$ ,  $e_{oh}$ ,  $e_{o2}$  y  $e_{oC}$  obtendremos una colección de curvas de excentricidades frontera como la que se muestra en la (Fig. 7).

Los nuevos valores frontera  $e_{o2\beta}$  y  $e_{o\beta}$  que se obtienen de las ecuaciones [Ec.1] y [Ec.2] respectivamente, pueden expresarse en función del axil adimensional  $v_d$ :

$$e_{o2\beta} = -\left(\frac{h}{2} - d_1\right) + \frac{0.8(\beta - 0.4\beta^2)d}{v_d} \quad \dots \quad [\text{Ec.3}]$$

$$e_{o\beta} = \left(\frac{h}{2} - d_2\right) - \frac{0.8(0.4d\beta^2 - \beta d_2)}{v_d} \quad \dots \quad [\text{Ec.4}]$$

A partir de la (Fig. 7), una vez eliminadas las ramas innecesarias de esas curvas obtenemos un diagrama como el de la (Fig. 9).

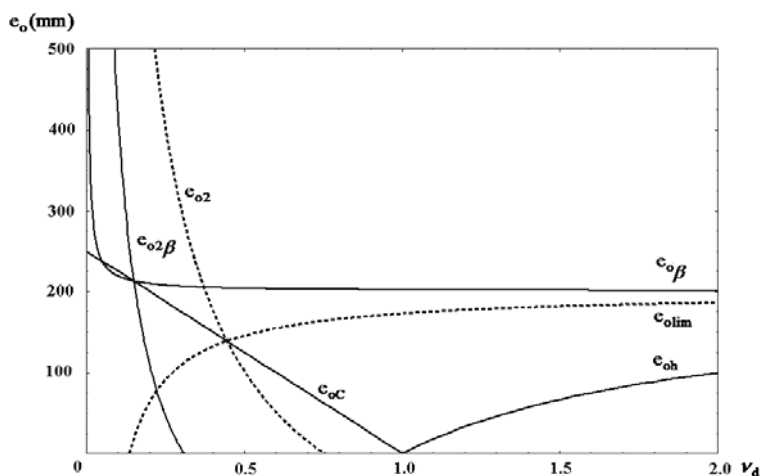


Figura 7. Valores de las diferentes excentricidades frontera en función del axil reducido para una sección armada con acero B 500 ,  $d_1=d_2=h/10$  y  $r(\%)=30 \Leftrightarrow \beta = 0.21 d$  según EHE.

Se trata de otro diagrama de armado óptimo en función de los valores adimensionales  $e_o/h - \nu_d$ . A las situaciones de agotamiento sin redistribución se ha añadido una más, que es la que corresponde a  $x = \beta d$  y se puede plantear cuando  $e_o > e_{o\beta}$  ó  $e_o > e_{o2\beta}$  según sea el valor del axil reducido  $\nu_d$ . Armando la sección de esta manera para el esfuerzo flector resultante de la redistribución se consigue la suficiente ductilidad. Las ecuaciones deducidas del equilibrio de la sección que permiten calcular el armado son:

$$U_2 = \frac{N_d e_1 - M_\beta}{d - d_2} = A'_{s2} f_{yd} \quad \text{con } M_\beta = 0.8 (\beta - 0.4\beta^2) f_{cd} b d^2$$

$$U_1 = U_C + U_2 - N_d = A_{s1} f_{yd} \quad \text{con } U_C = 0.8 \beta f_{cd} b d$$

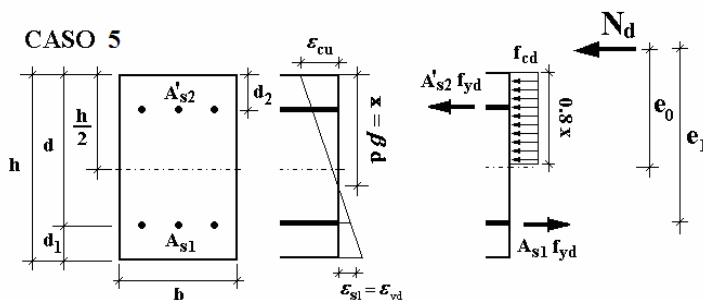


Figura 8. Esquemas de agotamiento con  $x = \beta d$  para armado óptimo en secciones solicitadas a flexo-compresión.

La zona del diagrama sin colorear representa las combinaciones de esfuerzos en las que no se dan las condiciones para la redistribución. Se destaca con un coloreado más oscuro la zona del diagrama en la que incluso con  $A'_{s2} = 0$  se consigue ductilidad para la redistribución.

Siendo la flexión simple caso particular de la flexión compuesta con axil nulo y consecuencia excentricidad infinita, concluimos entonces la redistribución de esfuerzos en flexión simple siempre será posible tal y como se observa en el diagrama  $\nu_d - e_o/h$  de la (Fig. 9).

Si igualamos las ecuaciones [Ec.3] y [Ec.4]:

$$-\left(\frac{h}{2} - d_1\right) + \frac{0.8 (\beta - 0.4\beta^2) d}{\nu_d} = \left(\frac{h}{2} - d_2\right) - \frac{0.8 (0.4 d \beta^2 - \beta d_2)}{\nu_d}$$

Operando:

$$d_1 + d_2 - h + 0.8 \frac{\beta}{\nu_d} (d - d_2) = 0$$

Y teniendo en cuenta:

$$h = d + d_1 \quad \rightarrow (d - d_2) + 0.8 \frac{\beta}{\nu_d} (d - d_2) = 0$$

Despejando:  $\nu_d = 0.8 \beta$

Este es el valor del axil adimensional para el cual los valores de  $e_{o2\beta}$  y  $e_{o\beta}$  coinciden. Tal y como ocurre para  $e_{o2}$  y  $e_{olim}$  este punto está sobre la recta de  $e_{oc}$ . Si la sección está solicitada a flexión compuesta con un axil reducido menor de ese valor, la redistribución siempre será posible, tal y como puede observarse en el diagrama  $\nu_d - e_o/h$  de la (Fig. 9).

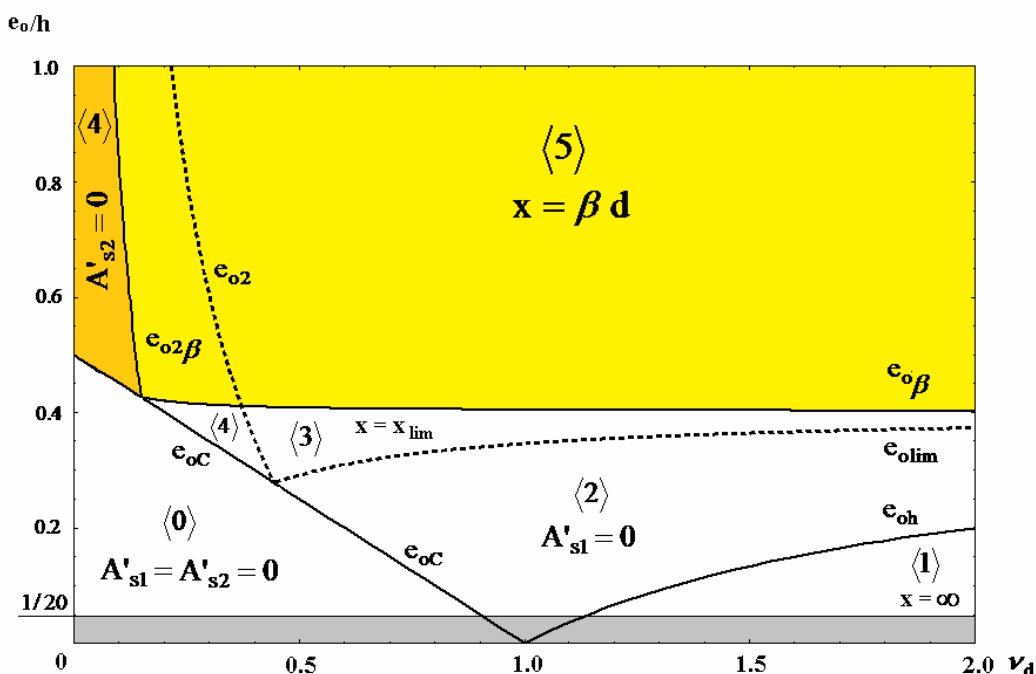


Figura 9. Diagrama  $\nu_d - e_o/h$ . Ejemplo para una sección de hormigón armada con acero B 500 y recubrimientos iguales  $d_1 = d_2 = h/10$ . Para cada caso se indica la condición adicional a utilizar, incluso para el dimensionado en condiciones de ductilidad suficiente para  $r(\%) = 30 \Leftrightarrow \beta = 0.21 d$ .

### Bibliografía:

- [1] Aschheim, M.; Hernández-Montes, E.; Gil-Martín, M.L. Optimal domains for strength design of rectangular sections for axial load and moment according to Eurocode 2. *Engineering Structures* 29 (2007) 1752–1760.
- [2] Comisión permanente del hormigón. Instrucción de Hormigón Estructural (EHE-08)
- [3] Gil Martín, L; López Martín, D; Hernández Montes, E; Aschheim, M. Dimensionamiento en rotura a flexión de secciones de hormigón armado. Un planteamiento compacto. *Informes de la Construcción* Vol. 64 ,528 (2012), pag 497-505.
- [4] López Martín, D; Gil Martín, L; Hernández Montes, E; Aschheim, M. Dominios de deformación referidos a la excentricidad de cálculo para el diseño óptimo de secciones rectangulares solicitadas a flexo-compresión. *Ist International Congress on Mechanical models in structural engineering*. December 2011.

## Aplicación web para el análisis y diseño de estructuras

Calvo Vadillo, Javier<sup>1</sup>; Gracia Rodríguez, Javier<sup>2</sup>; Bayo Pérez, Eduardo<sup>3</sup>

Departamento de Estructuras. Universidad de Navarra.  
jcalvov@alumni.unav.es<sup>1</sup>, jgrarod@alumni.unav.es<sup>2</sup>, ebayo@unav.es<sup>3</sup>

---

### Resumen.

Este artículo expone la arquitectura de una aplicación web para el análisis y diseño de estructuras, compuesta por 4 módulos: modelador 3D, software de análisis, software de diseño y módulo CAD; así como las herramientas actuales para su desarrollo como una aplicación integrada en el 'cloud'. Por último, se desarrolla una versión preliminar del módulo CAD que genera la documentación gráfica final en formato DXF.

### Abstract.

*In this paper, the architecture of a web application for integral design of structures is presented. It is composed of four modules: 3D modeler, structural analysis solver, structural design solver and graphic documentation render. Also, current tools to develop this service as cloud application will be presented. Finally, a preliminary version of the CAD module, which generates graphical output as DXF format, is developed.*

### Key words.

Cloud Computing, web application, Internet, structures, integral design.

## I. Introducción.

El 'Cloud Computing' describe un modelo innovador de prestación de servicios de forma centralizada usando Internet como medio de distribución. La propia arquitectura del sistema permite que el usuario acceda a un catálogo de servicios de forma flexible pagando únicamente por el consumo efectuado. Por tanto, este sistema beneficia tanto a los proveedores, que pueden incrementar de forma ágil y transparente la capacidad del servicio en caso de picos de demanda no previstos, como a los consumidores, que acceden a un sistema 'transparente' en el que solamente se abona el consumo realizado.

El concepto de la computación en la 'nube' comenzó con proveedores de servicios de Internet a gran escala como Google, Amazon WS o Microsoft, entre otros, que a partir de sus propios desarrollos e infraestructuras empiezan a ofrecerlas comercialmente al resto del mundo. A partir de ese momento surge una arquitectura de sistemas basada en recursos distribuidos horizontalmente como servicios virtuales de TI (Tecnología de la Información) escalados masivamente.

Dentro del 'Cloud Computing', tal y como se muestra en la tesis de Erb [1], se diferencian tres esquemas (capas) de servicio. La capa más alta, denominada 'Software como Servicio' (SaaS), ofrece una aplicación completa (software) como servicio. El software corre en la infraestructura del proveedor sirviendo a múltiples clientes. Google Apps o MS Office 365 con su suite ofimática online son ejemplos de ello. La segunda capa se refiere a 'Plataforma como Servicio' (PaaS) en la que el proveedor proporciona una plataforma con un entorno de desarrollo y APIs completa. Los principales ejemplos de este modelo son Windows Azure o Google App Engine. Por último, 'Hardware o Infraestructura como Servicio' (IaaS), en la que se proporciona un almacenamiento básico y capacidad de cómputo como servicios de red. El caso más conocido es Amazon Web Services.

El aumento del rendimiento de los equipos informáticos actuales ha incrementado las características y la capacidad de cálculo del software para el análisis y diseño de estructuras, sólo limitados por los recursos de hardware de los ordenadores. Dicho aumento, con marcado carácter exponencial, obliga a una constante revisión y adaptación de los desarrollos actuales. Hoy en día, el análisis de estructuras, que requiere grandes prestaciones de cálculo, no ha sido 'migrado' al entorno de Internet; suele ser desarrollado como software de escritorio en contra de la tendencia actual del mercado informático, donde las tareas comunes más cotidianas como el correo electrónico, hojas de cálculo o servicios de almacenamiento, ya han sido migradas a la 'nube'.

En el presente artículo, se expone el desarrollo de una aplicación para el diseño integral de estructuras. Esta aplicación, que consiste en un paquete de servicios web como SaaS (Software as a Service), esta formada por 4 módulos: un modelador 3D, un software de análisis estructural, un software de diseño estructural y un generador de la documentación gráfica. Toda la aplicación estará distribuida en un entorno 'cloud', con posibilidad para escalarse de forma horizontal en función de la demanda solicitada. También se presentan las herramientas actuales para desarrollar esta aplicación como un servicio integrado en el 'cloud', dando lugar a

un servicio basado en REST (Representational State Transfer) y explicando el funcionamiento de una API (Application Programming Interface) creada para dar soporte a otras plataformas. Se estudia también la oferta actual que ofrece Amazon Web Services para este tipo de aplicaciones ‘cloud’ y como se puede integrar el servicio web presentado en esta plataforma.

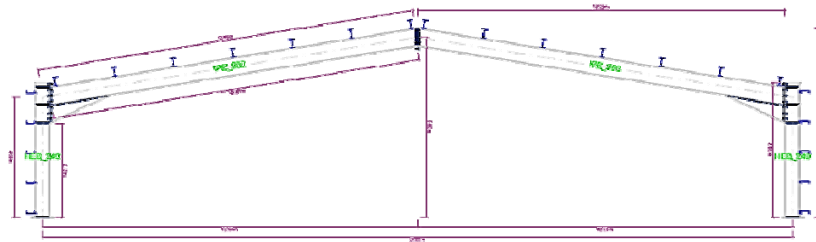


Figura 1. Ejemplo de pórtico generado con el sistema.

Por último, se desarrolla una versión preliminar del último módulo, el de CAD, el cual generará la documentación gráfica final como un fichero DXF. El módulo permite obtener la documentación gráfica de una tipología de nave industrial cuya definición se aporta en un archivo ‘provisional’ con los parámetros necesarios. El módulo, una vez interpretada toda la definición de la nave aportada en el archivo, permite al usuario modificar los parámetros más relevantes. Posteriormente, previa confirmación por parte del usuario, el servidor genera toda la documentación sin necesidad de ningún tipo de cálculo en el equipo cliente. La documentación generada, como la de la Figura 1, estará disponible al usuario por medio de un enlace de descarga. Para la programación de esta versión ‘beta’, se desarrolla adicionalmente un entorno principal que permite el acceso a la anterior a través del registro del usuario y sus privilegios.

## II. Aplicación para el diseño integral de estructuras.

Este artículo, en su primera parte, pretende dar un enfoque global desde un punto de vista teórico, de cómo desarrollar un servicio web que abarque todas las ramas necesarias para el diseño completo y análisis de un sistema estructural, desde el modelado de la misma a través de una aplicación gráfica, hasta la solución final que detalle gráficamente el proyecto para su puesta en obra.

El proyecto consiste en una aplicación con varios módulos integrada totalmente en la ‘nube’, a la que el usuario cliente accede, bien mediante una aplicación web cliente, o bien por medio de aplicaciones de escritorio o móviles haciendo uso de las APIs correspondientes. El acceso mediante la utilización de las APIs queda en uso tanto para aplicaciones de escritorio como para aplicaciones de dispositivos móviles, en las que la interfaz de usuario es adaptada para el uso cómodo y sencillo desde estos terminales. De la misma forma, la API permite el acceso a los servicios desde aplicaciones programadas por terceros, facilitando así la integración de los servicios desde otras aplicaciones o comunicaciones con empresas del sector que utilizan otras herramientas, para la realización de un proyecto en conjunto.

El resultado final es un SaaS, fácilmente portable a cualquiera de las HaaS existentes, con capacidad para escalar en función de la demanda. Este servicio permite que el usuario pueda acceder a la aplicación solamente con una conexión a Internet, en cualquier punto y sin necesidad de disponer de un equipo acorde a la complejidad del cálculo.

### II.1 Módulos de la aplicación.

El usuario es guiado a través de la interfaz gráfica de la aplicación por los diferentes módulos que entran en juego para desarrollar el proyecto estructural. Estos son enumerados a continuación.

- i. Modelador 3D.
- ii. Aplicación para análisis estructural.
- iii. Aplicación de diseño estructural.
- iv. Módulo de CAD. Generador de la documentación gráfica.

El cliente, a través del menú de la aplicación, tiene la posibilidad bien de crear un nuevo proyecto, en donde será guiado por los diferentes módulos, o bien modificar uno en curso. La interacción del usuario con las diversas partes de la aplicación hasta del desarrollo DXF final se ofrece de una manera lineal, pero pudiendo también intervenir diferentes agentes en el mismo proyecto; mediante la asignación de privilegios por parte del administrador o compartiendo el proyecto a otros socios; gracias al alojamiento de todo el proyecto en la ‘nube’.

El primer módulo, el modelador 3D, está centrado en definir gráficamente la estructura conforme a la definición del proyecto. Aquí el usuario, a través de la correspondiente aplicación web cliente, dispone de un entorno gráfico 3D donde modelar gráficamente, mediante las herramientas proporcionadas, el esqueleto del sistema estructural. La poca exigencia gráfica de este proceso y el soporte de WebGL de los navegadores actuales, permitiendo el acceso al procesador gráfico por parte de la aplicación web; nos permite la ejecución de esta aplicación sobre el navegador del usuario, soportando este una pequeña carga de trabajo gráfico exclusivamente, tal y como muestran Gracia y Bayo [2]. De esta forma, eliminamos costes adicionales del servicio así como la pequeña latencia visual que podría generarse.

Una vez realizado el trabajo en este primer módulo, los datos de la definición de la estructura quedan almacenados en el fichero del proyecto, definiendo ya un esqueleto de la tipología del mismo.

El módulo para el análisis estructural es el encargado de realizar un análisis conforme a la elección del cliente, obteniendo un dimensionado y análisis de la estructura, y realizándose todo el trabajo computacional en el entorno cloud computing. Es en el módulo de diseño estructural donde, con los datos del cálculo de la estructura, se definen las uniones y otros elementos restantes conforme a la normativa vigente.

El usuario tiene la posibilidad de modificar cualquier parámetro del proyecto en cualquier momento, aunque esto conllevará el recalculado de todas las demás partes, teniendo que revisar los usuarios oportunos esta actualización.

Por último, después de la intervención de las fases anteriores, el proyecto es procesado por el módulo CAD; este genera la documentación gráfica detallada del sistema estructural completo. Esta información es generada como fichero DXF que el usuario podrá descargar y utilizar con programas CAD de escritorio, y utilizarlo para la puesta en obra del proyecto.

## II.2 Arquitectura REST y la API.

El desarrollo del servicio web que nos ocupa, se implementa mediante una arquitectura tipo REST, creando una API que es consumida por JavaScript y por aplicaciones web programadas bajo PHP. Se usa por lo tanto el protocolo HTTP (Hypertext Transfer Protocol) como método de comunicación y JSON (JavaScript Object Notation) o XML (Extensible Markup Language) para el intercambio de datos.

REST es una técnica o familia de arquitecturas software para sistemas hipermedia distribuidos como la World Wide Web. El término se originó en el año 2000, en una tesis doctoral sobre la web escrita por Roy Fielding, uno de los principales autores de la especificación del protocolo HTTP, como explican Richardson y Ruby [3]. REST implica que una URL es la representación de un objeto o recurso, cuyos contenidos son accesibles mediante HTTP (Figura 2) [3,4]. Los clientes trabajan con estos recursos a través de las operaciones estándar ('verbos') de HTTP, como GET, POST, PUT y DELETE para descargar o modificar una copia de la representación del recurso. La alternativa más conocida, SOAP (Simple Object Access Protocol), es un protocolo estándar que utiliza una capa adicional por debajo de HTTP para la transmisión de información. Las arquitecturas que siguen los principios de REST son denominadas 'RESTful'.

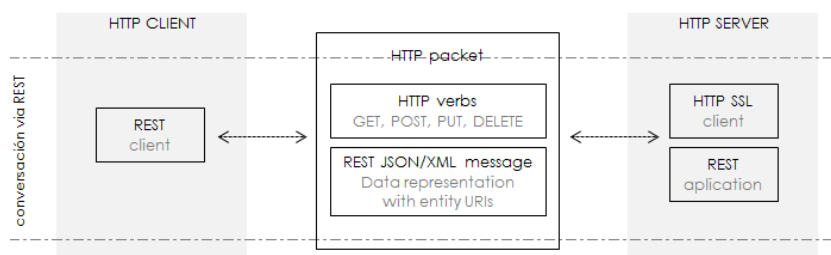


Figura 2. Conversación REST.

El uso de REST frente a SOAP nos proporciona una mayor escalabilidad del servicio [5]. Al tratarse de un protocolo cliente-servidor sin estado cada mensaje HTTP contiene toda la información necesaria para comprender la petición. Como resultado, ni el cliente ni el servidor necesitan recordar ningún estado de las comunicaciones entre mensajes.

Además, REST proporciona una arquitectura mucho más fácil, así como peticiones más simplificadas, permitiendo todo ello un mayor rendimiento y velocidad; y permite interpretar las URIs (Uniform Resource Identifier) de manera visual. Por contra, la información es transferida de forma no optimizada según la aplicación y hacen falta múltiples llamadas para conseguir información compleja.

Un tipo de arquitectura SOAP es aconsejable cuando se describen en la comunicación todas las funciones de la interfaz o cuando es necesario abordar requerimientos complejos no funcionales. Por el contrario, la



arquitectura basada en REST es útil cuando el servicio web no necesita tener estado, cuando se busca rendimiento o cuando tanto el cliente como el servidor conocen el contenido a intercambiar.

Las llamadas a recursos se hacen por medio de URIs, debiendo introducir en cada llamada la petición completa sin poder tener un estado previo como en SOAP, pero haciendo el sistema más flexible y eficaz, así como poder orientar el servicio mediante el uso de APIs a todo tipo de dispositivos fácilmente.

Como se ha indicado antes, el servicio consta de una API desarrollada mediante REST. Esta API permite el acceso, mediante las funciones implementadas en ella, a aplicaciones de escritorio y móviles; o la utilización de características del servicio a aplicaciones de terceros.

Una API es un grupo de funciones que permiten que desarrolladores puedan acceder al servicio mediante sus propias aplicaciones, de forma que pueden comunicarse con la base de datos sin necesidad de disponer del código fuente de nuestro sitio. El ejemplo más claro es Twitter que con su API se han creado multitud de sitios en Internet que, disponiendo de los datos de los usuarios de Twitter, pueden crear multitud de aplicaciones para ayudar o añadir valor al servicio.

Una API puede disponer o no de dos grandes funcionalidades:

- i. Recoger y disponer de los datos del sitio para mostrarlos de forma conveniente.
- ii. Alterar esos datos, cómo modificarlos, añadir nuevos datos o eliminarlos.

Para la comunicación interna de la aplicación, como para el formato de almacenaje de los datos del proyecto del usuario (archivo de proyecto) se usa JSON. Esto nos permite una buena eficiencia en entornos donde se utilice AJAX (Asynchronous JavaScript And XML), como demuestra Wang [6]. JSON es un formato ligero para el intercambio de datos, generalizado como alternativa a XML en AJAX gracias a su simplicidad. JSON es una parte de la definición del estándar ECMA-262 en que se basa JavaScript. Se utiliza generalmente en entornos donde el tamaño del flujo de datos entre cliente – servidor es de vital importancia y cuando la fuente de los datos es de fiar.

La fácil escritura de un ‘parser’ JSON y la posibilidad de análisis mediante la función *eval()* en JavaScript ha contribuido a su expansión actual. Conviene mencionar la falta de seguridad que plantea el uso de la función *eval()*, aunque no requerida para el intercambio de datos o funciones al usando la definición correcta de Literal JavaScript (LSJ).

Así, destacamos algunas ventajas de JSON sobre XML, como su facilidad de interpretación y creación en entornos como PHP, donde existen funciones nativas para crear objetos JSON; el menor consumo de ancho de banda en la comunicación de datos al evitar partes de estructura propias del lenguaje como tabulaciones y etiquetas del XML; y su soporte nativo por parte de JavaScript pudiendo acceder a los datos fácilmente mediante el operador “.” (*objeto.propiedad*), facilitando la extracción de contenido frente a XML.

### III. Integración de la aplicación en un HaaS.

En este apartado se exponen las características principales de Amazon Web Services (AWS) en cuanto a las posibilidades que ofrece para alojar el servicio web explicado, dando lugar a una aplicación web escalable, así como los recursos necesarios para alojar la aplicación en sus servidores.

Se ha elegido AWS por ofrecer todas las herramientas necesarias para alojar nuestro servicio web, proporcionando de una manera muy flexible los recursos necesarios en cada momento en función de la demanda, así como por su estabilidad y precios. Aunque, a día de hoy, existen numerosos servicios de similares características y con buen servicio de ayuda.

Si contratamos los servicios de Amazon WS dispondremos de un VPS (Virtual Private Server) a diferencia del Hosting tradicional. En un VPS disponemos de un servidor propio virtualizado dentro de los servidores de la empresa, que aunque compartiendo recursos, tenemos garantizada una capacidad de cálculo del CPU y memoria en función de lo contratado. Al disponer en un VPS de acceso root, podemos instalar el software deseado. En AWS también es posible contratar un servidor dedicado, sin compartir recursos con otros usuarios.

Amazon ofrece diversos servicios y herramientas, siendo Amazon EC2 (Amazon Elastic Compute Cloud) el servicio principal. Amazon EC2 ofrece un servicio web que proporciona capacidad informática con tamaño modificable en la nube, donde podemos contratar distintos servidores en función de necesidades específicas, pudiendo elegir una mayor capacidad de cómputo o mayor almacenamiento, facilitando unos recursos informáticos escalables. A cada uno de estos servidores virtuales se denomina ‘instancia’.

Otros servicios muy importantes de AWS son: Amazon Simple Storage Service (Amazon S3), donde disponemos de un servicio de almacenamiento para Internet altamente escalable, fiable, y seguro; Amazon SQS (Amazon Simple Queue Service) como sistema de gestión de colas de trabajo para almacenar mensajes a

medida que se transfieren entre sistemas; y Amazon EBS (Amazon Elastic Block Store) que nos proporciona volúmenes de almacenamiento a nivel de bloque para utilizarlos con las instancias EC2.

### III.1 Distribución del SaaS en AWS.

Para la integración del servicio web comentado a lo largo de este artículo en Amazon Web Services, se necesita el uso de varias instancias reservadas EC2, así como varios de los servicios mencionados. Estas instancias, para una mayor facilidad de gestión, llevarán Ubuntu como sistema operativo. Las instancias serán generadas teniendo en cuenta el servicio que van a correr, con una mejor capacidad gráfica para el módulo CAD, o mejor capacidad de computación en el caso del módulo de análisis. Para el servicio de bases de datos no usaremos Amazon SimpleDB, en vez de este utilizaremos una instancia EC2 ejecutando MySQL como servidor de bases de datos.

Se detalla a continuación un esquema de distribución del servicio en caso de alta demanda por gran cantidad de clientes simultáneos (Figura 3).

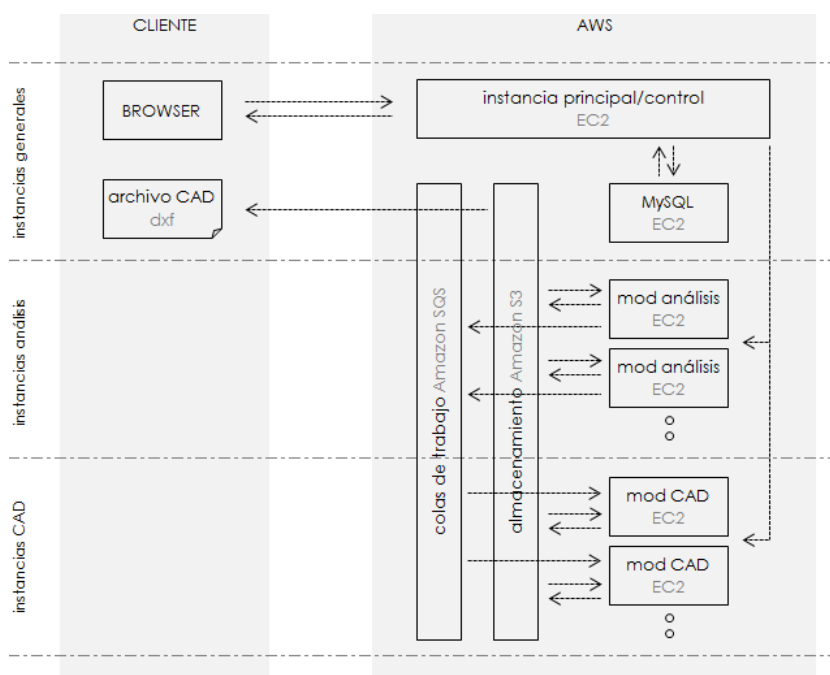


Figura 3. Esquema distribución en AWS.

Para la distribución del módulo de CAD del servicio web, dedicaremos varias instancias EC2 ejecutando el código desarrollado. Estas instancias estarán controladas por otra de rendimiento reducido (instancia de control), encargadas de modificar dinámicamente las anteriores en función de la demanda, tanto aumentando sus características, como creando nuevas instancias.

Al disponer de distintas instancias ejecutando el módulo de CAD, debemos situar MySQL en otra independiente para el acceso a la base de datos a través del dominio interno ofrecido por Amazon para esta. En caso de tener una sola instancia EC2 podríamos instalar MySQL, si nos conviniese, en esta para acceder localmente a través de la IP 127.0.0.1, dejando la base de datos cerrada a conexiones exteriores para mayor seguridad.

La aplicación principal correrá en otra EC2 independiente, usando Amazon S3 como almacenamiento de los ficheros de proyecto de cada usuario. Cuando sea necesario generar la solución final de un proyecto, se creará un mensaje en una cola de Amazon SQS con una referencia al fichero de proyecto en Amazon S3. El software de la instancia EC2 disponible leerá la solicitud de la cola y recuperará el proyecto de Amazon S3 para su procesado. Después de esto lo colocará de nuevo en S3 creando otro mensaje en la cola de Amazon SQS indicando la finalización.

La instancia de control supervisará constantemente la cola de trabajo, y en función del número de mensajes de la misma, ajustará de forma dinámica el número de instancias de Amazon EC2 dedicadas al módulo CAD necesarias para cumplir con los requisitos de tiempo de respuesta de los clientes.

#### IV. Desarrollo del prototipo para el módulo CAD.

Se desarrolla una versión preliminar del módulo CAD que genera la documentación gráfica final como un fichero DXF para una determinada tipología de nave industrial. Esta documentación será aportada al programa mediante un fichero externo ya definido. Este fichero 'provisional' e intermedio es necesario para definir el proyecto al no existir los módulos previos. Una vez leídos los datos por el servidor, el módulo da la posibilidad al usuario de modificar los parámetros más relevantes. Una vez aceptados los datos se generará la documentación gráfica correspondiente en el servidor, sin ningún procesamiento en el equipo cliente. Esto finalizará con la información del fichero generado y su posible descarga como documento DXF (Figura 4).

Para el desarrollo de este servicio web se ha utilizado principalmente PHP como lenguaje de programación. PHP permite la introducción de contenido HTML que, junto con las instrucciones propias del lenguaje, será procesado completamente en el equipo servidor, sin que el usuario deba procesar nada ni pueda acceder a partes del servicio fuera de su acceso. Esta aplicación genera un nuevo documento HTML que utiliza CSS para definir la estructura de presentación o formato del mismo, y contiene instrucciones JavaScript. Estas rutinas son ejecutadas por el cliente para agilizar los tiempos de respuesta y, en su mayoría, son funciones para la validación de formularios y asignación de eventos a elementos HTML.

Esta aplicación PHP, durante la parte fundamental de creación de los ficheros DXF resultantes, se comunica con un ejecutable escrito en C++ pasándole los parámetros del dibujo como comandos. Así, la aplicación base se ejecuta por completo en el servidor sin requerir ningún tipo de proceso por parte del cliente y sin necesidad de incluir ninguna parte del código en la aplicación web, disminuyendo el tráfico de datos en la red y evitando accesos indebidos al mismo.

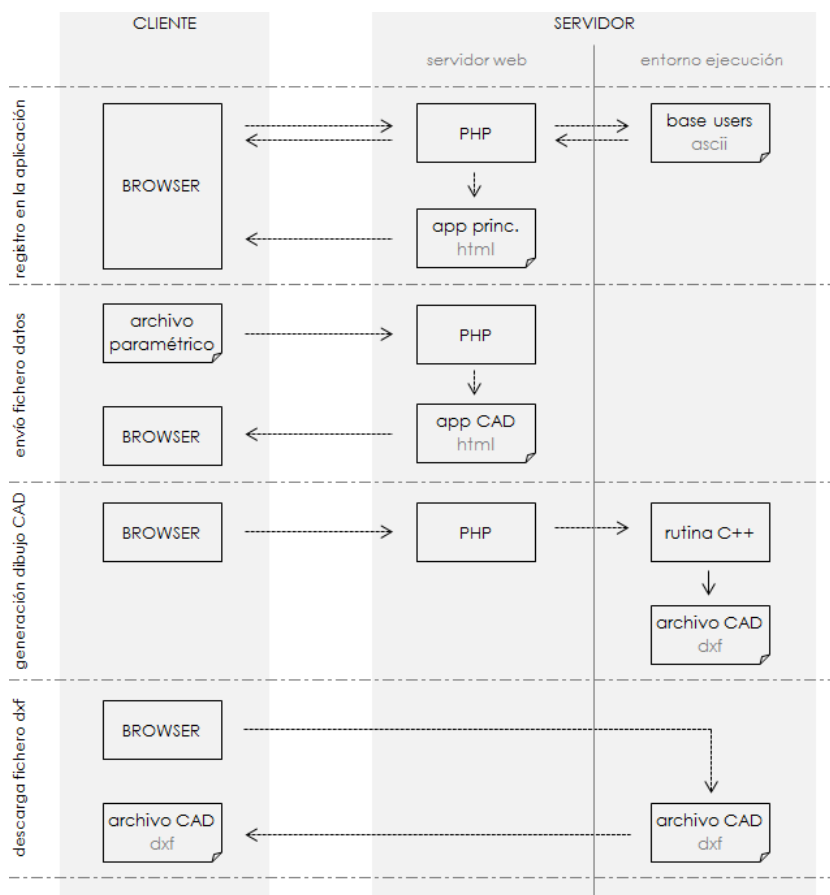


Figura 4. Esquema distribución aplicación.

Para la realización de este prototipo, se ha montado la plataforma WAMP Server 2.2 sobre Windows 7. El proyecto WAMP es una infraestructura de Internet, bajo licencia libre, que engloba las siguientes herramientas: Apache como servidor web, MySQL como gestor de bases de datos y PHP (generalmente), Perl o Python como lenguajes de programación.

#### **IV.1 Implementación del módulo de CAD.**

Para un mejor seguimiento con la aplicación desarrollada, se procede a explicar la misma distinguiendo los 4 pasos que muestra visualmente durante el proceso, hasta la generación de la documentación final en DXF.

Recordemos que la programación de esta aplicación se basa fundamentalmente en PHP, por lo que el documento generado por estas rutinas contiene elementos HTML así como links en la cabecera del documento a dos ficheros externos: una hoja de estilo CSS y un documento con JavaScript.

Para las peticiones cliente/servidor, se usa el método POST haciendo uso de un *submit* y enlazando el *action* del *form* con un documento PHP. Para no crear diferentes páginas PHP, una por cada paso descrito, se enlaza con el mismo documento recursivamente. Para que este muestre la sección correcta, PHP lee un campo oculto en el formulario que indica el paso actual.

```
$Paso=$_REQUEST["Form0_1"];
```

En cualquier momento de la ejecución podemos volver al inicio de la aplicación presionando el botón superior 'Reiniciar'.

#### *Envío del fichero paramétrico.*

En la primera sección de la aplicación (Figura 5), se pide al usuario mediante un *input* de tipo *file*, que seleccione el fichero con los parámetros del dibujo a crear.

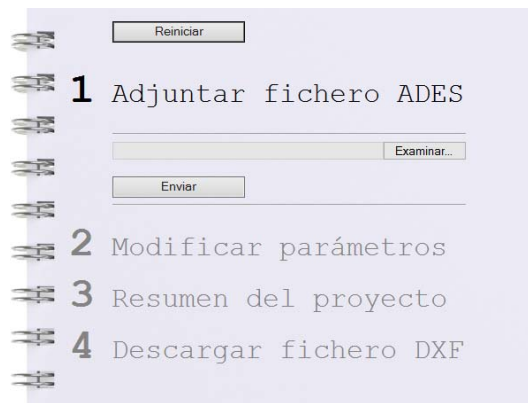


Figura 5. Prototipo de la aplicación de CAD.

#### *Lectura del fichero.*

En esta fase, la rutina de PHP lee e interpreta el archivo enviado. Para ello creamos un manejador que referenciará al archivo para trabajar con él.

```
$handle=fopen($_FILES['Form1_1']['tmp_name'], "r");
```

A medida que el fichero es interpretado por el servidor, los datos se van guardando en diversas variables que podrán ser modificadas posteriormente por el usuario mediante un formulario (Figura 6).

Cuando se haga clic en el botón 'Continuar', se enviarán también todos los valores de los formularios, tanto si han sido modificados como si no.

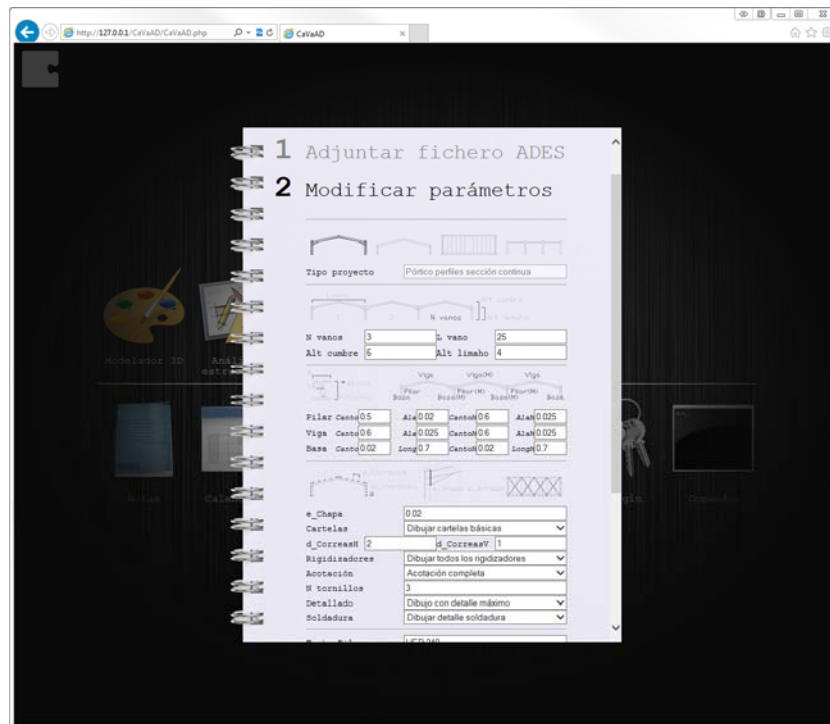


Figura 6. Prototipo de la aplicación de CAD.

#### Generación archivo DXF.

Una vez recuperados todos los valores finales, generamos una cadena de texto *\$command* que contiene todos los parámetros que pasaremos al ejecutable externo de la forma siguiente.

```
exec($command, $output, $return_var);
```

Mediante las variables *\$output* y *\$return\_var* obtenemos la información que ofrece el ejecutable C++, que mostraremos al cliente en un campo 'textarea'.

#### Descarga documento.

Por último se permite al usuario la opción de descargar el fichero DXF generado.

Para ello, se ha optado por relacionar el *submit* de un formulario directamente con el fichero. De esta forma no es necesario crear un enlace *<a>* y la aplicación conserva la misma estética de los apartados anteriores.

```
<form method="post" action="portico.dxf" enctype="multipart/form-data">
```

Otra forma de realizar el proceso, más correcta en cuanto a la gestión de tráfico de datos en la red, hubiese sido crear un enlace como el siguiente.

```
<a href="CaVaAC_4.php">Descargar</a>
```

Y posteriormente controlar la descarga mediante PHP, generando una cabecera al siguiente documento HTML.

```
$filename='portico.dxf';
$fp=fopen($filename, 'r');
$output=fread($fp, filesize($filename));
fclose($fp);
header("Content-type: application/autocad-dxf");
header("Content-Disposition: attachment; filename=Filename.dxf");
echo $output;
exit();
```

#### IV.2 Implementación del prototipo de la aplicación principal.

Por último, se expone brevemente la implementación de la aplicación principal que permite el acceso a todos los módulos de la aplicación. Esta aplicación se presenta al usuario por medio de un entorno de trabajo con diversos iconos. El cliente accede por medio de un registro con su cuenta personal y el servidor le proporciona el acceso a los módulos para los que esté registrado. Este entorno, permite el registro simultáneo de diferentes usuarios, cada uno con sus permisos, sin interferir en los demás. Véase la Figura 7.

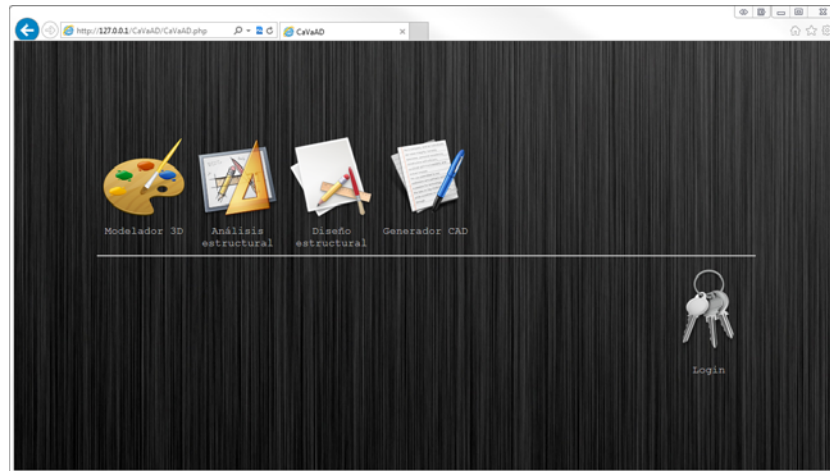


Figura 7. Menú principal de la aplicación.

Este programa también está desarrollado en PHP introduciendo el uso de sesiones. Las sesiones nos permiten guardar el registro de un mismo usuario durante la duración de su visita a la aplicación, independientemente de que abra otra página en su navegador y posteriormente regrese. Esto proporciona una mejor experiencia de usuario al cliente y nos permite mantener su sesión abierta mientras no cierre su navegador o finalice la sesión en el programa.

Si observamos la aplicación relacionada con el módulo de CAD (Figura 6), veremos que sobre un *div* se muestra totalmente funcional dicha aplicación, sin necesidad de recargar la página ‘padre’ para interactuar con ella. Esto se ha conseguido mediante la incrustación de un ‘marco’ posicionado en otro *div*. Aquí se muestra.

```
<div Class="CaVaAC3"></div>
<div Class="CaVaAC3_Content" align="center">
  <iframe src="CaVaAC.php" allowtransparency="allowtransparency"
    scrolling="auto" frameborder="0" width="100%" height="100%">
    ...
  </iframe>
</div>
```

Mediante la etiqueta *<iframe>* insertamos el contenido de otro documento HTML sin necesidad de usar *frameset*. Esta porción de la página web toma el control y se ejecuta como si fuese suya la página.

#### V. Conclusiones.

Este artículo presenta una arquitectura diferente en cuanto a las aplicaciones de diseño y análisis de estructuras tradicionales. Esta arquitectura, basada en las tecnologías web actuales, ha demostrado, aun a estar a comienzos de su desarrollo, numerosos beneficios, tanto para el usuario como para los desarrolladores, enumerados a continuación:

- i. Posibilidad de acceso a la aplicación desde cualquier ubicación.
- ii. Compatibilidad con todos los equipos independientemente de su sistema o de su hardware, solamente es necesario un navegador web como aplicación cliente. Por lo tanto no es necesario un equipo con altas prestaciones de hardware ya que el cálculo se desarrolla en la infraestructura y el cliente sólo recibe/envía la información o se le asigna una parte de computo proporcional a su equipo.
- iii. Al ser un entorno centralizado en el ‘cloud’, el usuario accede a versiones actualizadas del servicio sin ningún tipo de interacción por parte este. Cada vez que se actualiza la aplicación web, esta pasa a ser la

que se distribuye para todos y cada uno de los clientes, independientemente de que su acceso se produzca por la web o mediante las APIs.

- iv. Se trata de una plataforma de uso basada en consumo y no en adquisición de productos evitando así altos costes iniciales.
- v. Existe una mayor capacidad de adaptación, recuperación de desastres y reducción al mínimo de los tiempos de inactividad.
- vi. Se produce un uso más eficiente de los recursos con menores consumos energéticos, debido a que la aplicación se encuentra centralizada y permite la escalabilidad en función del uso requerido.

## **VI. Bibliografía.**

- [1] Erb, Benjamin: *Concurrent Programming for Scalable Web Architectures*. Diploma Thesis, (2012).
- [2] Gracia, Javier; Bayo, Eduardo: An integrated 3D web application for structural analysis Software as a Service. *Journal of Computing in Civil Engineering* (2012).
- [3] Richardson, Leonard; Ruby, Sam: *RESTful Web Services*. O'Reilly Media (2007).
- [4] Su, Chuan-Jun; Chiang, Chang-Yu: Enabling successful Collaboration 2.0: A REST-based Web Service and Web 2.0 technology oriented information platform for collaborative product development. *Computers in Industry* 63 (2012) 948–959.
- [5] T. Fielding, Roy; N. Taylor, Richard: Principled design of the modern Web architecture. *ACM Transactions on Internet Technology* 2 (2) (2002) 115–150.
- [6] Wang, Guanhua: Improving Data Transmission in Web Applications via the Translation between XML and JSON. *Third International Conference on Communications and Mobile Computing* (2011).

## Estudio de un material inagotable a base de micelio.

Román Ramos, José Daniel<sup>a</sup>. Luna Molina, Francisco Javier<sup>b</sup>. Bailón Pérez, Lázaro José<sup>c</sup>.

<sup>a</sup>Departamento de mecánica de estructuras e ingeniería hidráulica, Universidad de Granada. <sup>b,c</sup>Departamento de ingeniería de la construcción y proyectos de ingeniería, Universidad de Granada.

<sup>a</sup>josedaroman@gmail.com, <sup>b</sup>jlunam@correo.ugr.es, <sup>c</sup>lazarobjp@ugr.es

---

### Resumen

En esta publicación se presentan algunas de las cualidades físicas y mecánicas de un material a base de micelio. Las paredes celulares del hongo están compuestas por quitina, compuesto orgánico muy abundante en la naturaleza y que presenta unas excelentes propiedades mecánicas que lo hacen idóneo para reemplazar a los materiales plásticos tradicionalmente empleados en construcción tales como el poliestireno, que es altamente contaminante. Además, debido a su propia naturaleza, el material así obtenido es completamente biodegradable. Los primeros ensayos a compresión simple efectuados sobre este material arrojan resultados de resistencia mecánica prometedores.

### Palabras clave

Hongos, micelio, resistencia, poliestireno (EPS), aplicaciones.

## I. Introducción

Según la Agencia de Protección al Medioambiente americana, el poliestireno expandido (en adelante, EPS) se clasificaba en 1986 como el quinto producto químico cuya producción generaba más desechos peligrosos, utilizándose 1,5 litros de petróleo para producir 1 m<sup>3</sup> del citado material. Además, cuando el EPS se desecha en los vertederos, se descompone muy lentamente; por ello, es común que se incinere, siendo este proceso muy contaminante.

La quitina es el compuesto orgánico más abundante en el planeta después de la celulosa [1-3], y se encuentra en la naturaleza como un componente de las estructuras de protección y resistencia en animales inferiores y hongos [4-8]. La quitina posee propiedades mecánicas muy interesantes, como la elevación del módulo de Young y de la rigidez de los materiales a los que se une [9-12]. En este estudio, se han aprovechado dichas propiedades para crear un nuevo material a base de unir el micelio de los hongos, compuesto principalmente por quitina, con un sustrato, en este caso paja y turba.

Para llevar a cabo el estudio de este material, se han perseguido fundamentalmente tres objetivos:

El primer objetivo que se pretende es comparar cómo afectan las variables relativas al crecimiento micelar en el comportamiento mecánico del material.

Para ello, por un lado, se estudia el material obtenido a partir del cultivo de la seta *Pleurotus ostreatus*. En concreto, para llevar a cabo este estudio, se permite al micelio seguir creciendo en el sustrato, tanto fuera como dentro de unos moldes que garantizan la forma de las probetas, y tras un cierto periodo de tiempo se evalúa la resistencia a compresión simple del material. En esta publicación, se tratan materiales procedentes de dos fábricas distintas.



Por otro lado, se fabrican probetas con el sustrato inoculado para la producción de setas y, aplicando las condiciones ideales para el crecimiento del micelio estudiadas durante esta investigación, es conservado en laboratorio hasta el día de los ensayos. Para este segundo tipo de material en estudio, el número de ensayos es mayor porque se pretende evaluar cómo influye la densidad del material, variable relacionada con la cohesión y con el fenómeno de softening.

El segundo objetivo es comparar dos especies de hongos, *Pleurotus ostreatus* y *Agaricus bisporus* o champiñón común, evaluando cuál es la más idónea para que el producto final tenga la mayor resistencia posible.

Por último, el tercer objetivo es comprobar si el material estudiado cumple algunos de los requisitos más relevantes para convertirse en un claro sustituto del EPS, esto es, exigencias fundamentalmente basadas en propiedades mecánicas y de la resistencia al fuego [13].

## II. Campaña experimental

Para la realización de los ensayos se han elaborado cuatro familias de muestras, las tres primeras con la especie *Pleurotus ostreatus* y la última con *Agaricus bisporus*.

Para la confección de la “familia 1”, se ha introducido el material en moldes que permiten la realización de probetas cúbicas de 15 cm de lado distinguiéndose dos tipos de probetas.

En la “familia 2” se distinguen dos muestras, una tallada y otra compactada en dos tongadas, ambas con un solo cultivo y procedentes de una fábrica distinta a las de la familia 1. Estas muestras permanecieron los 5 primeros días en los moldes; entonces, se extrajeron de ellos y se introdujeron en bolsas de plástico hasta la edad de 28 días para asegurar la entrada de aire.

Por otro lado, para la confección de la “familia 3”, se realizaron probetas con sustrato inoculado. El hongo creció en el laboratorio bajo unas condiciones ambientales controladas e idóneas para la expansión del micelio [14-21], protegido de la luz, a 28°C de temperatura y con una humedad del 80% durante 21 días.

Por último, la “familia 4” se compone de micelio correspondiente al cultivo de *Agaricus bisporus*, pero el sustrato de cultivo no es paja, sino turba. Esta probeta se ha elaborado cortando el material con las medidas exactas para introducirlos en los moldes de una sola vez.

## III. Ensayos realizados

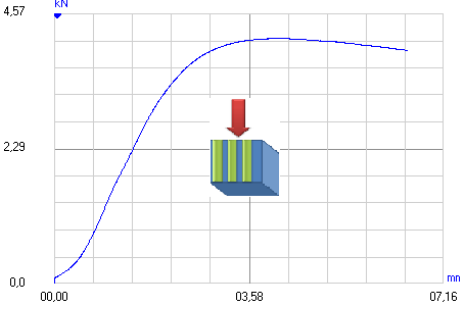

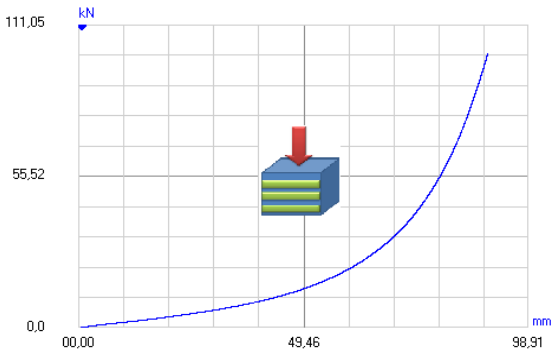
Las cuatro familias de muestras han sido sometidas a ensayos de compresión simple, aplicando la carga en dos direcciones diferentes atendiendo a lo que se ha pretendido determinar; por un lado, se ha efectuado la compresión en la dirección perpendicular a las capas compactadas para evaluar la resistencia a compresión simple y, por otro lado, en una dirección que, aparte de ser perpendicular a dos caras de la probeta, esté contenida en el plano de las capas compactadas, y que sirve para evaluar la cohesión que el micelio aporta a la muestra.

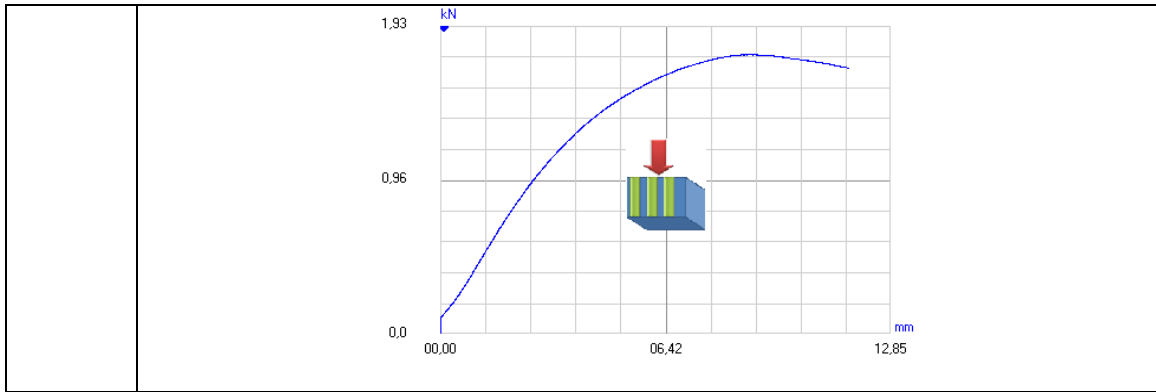
Además, se realizan en esta investigación ensayos de resistencia al fuego sobre algunas de las muestras de las mencionadas familias.

#### IV. Resultados

##### IV.1. Ensayos sobre la familia 1.

A continuación se muestran los resultados mecánicos de la familia 1 de muestras.

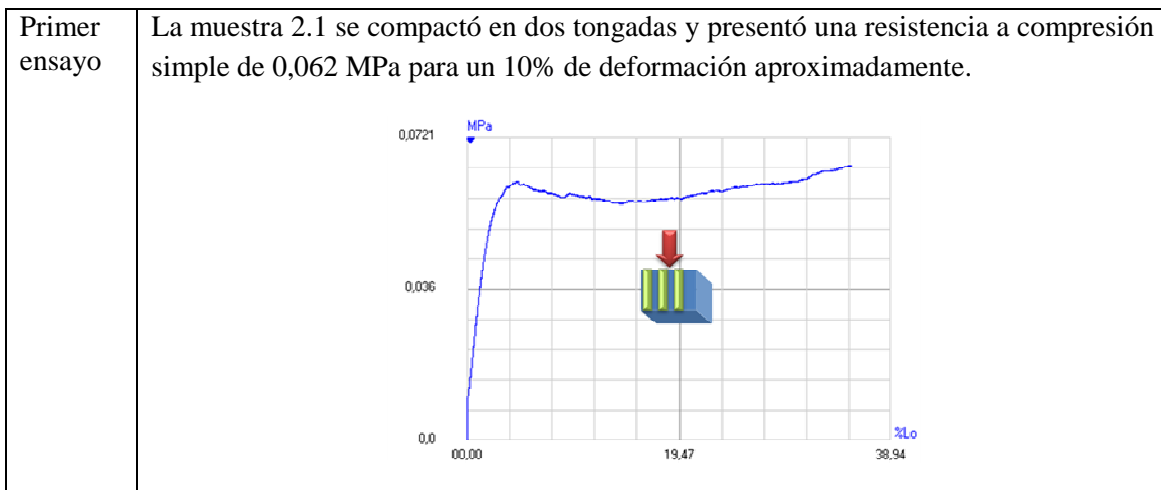
<p>Primer ensayo</p>	<p>Se trata de la muestra 1.1, con la carga en la dirección perpendicular de compactación. Su peso final era de 1.502 gramos. La resistencia máxima que ofreció fue de 0,200 MPa a un 5% de deformación y a partir del cual el material rompe. Se muestra a continuación el resultado completo del ensayo:</p>  
<p>Segundo ensayo</p>	<p>Se utilizó la muestra 1.2 aplicando una compresión en la dirección paralela a la compactación. La muestra mostró una resistencia más alta que en el caso anterior, en torno a 0,310 MPa al 10% de deformación; además, en este caso, el material no rompió:</p> 
<p>Tercer ensayo</p>	<p>Se ensayó la muestra 1.3 aplicando una compresión en la dirección perpendicular a la compactación. La probeta, cuya masa tras secado en estufa era de 751 gramos, rompió y su resistencia fue de 0,080 MPa a un 6% de deformación. Se presenta a continuación el resultado del ensayo:</p>

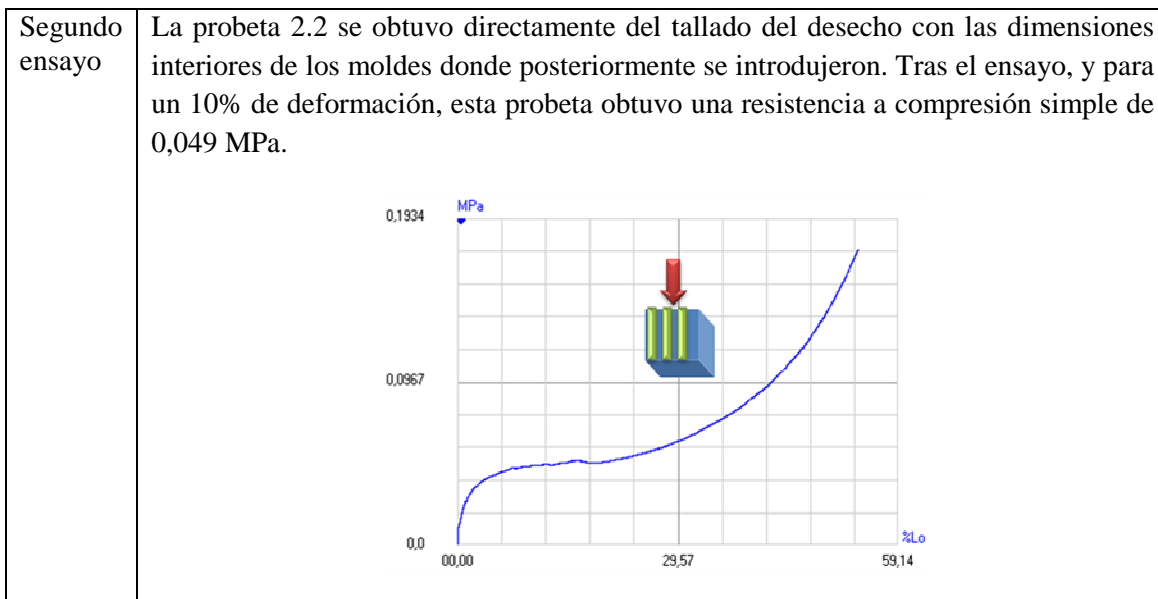


Tras la realización de estos ensayos, puede deducirse que:

- La muestra 1.1 soportó más carga que la muestra 1.3. Esto es debido a que la primera muestra posee más cantidad de micelio.
- Se observó que, ejerciendo la compresión en la misma dirección de compactación, la resistencia del material era muy superior a la que se presentaba cuando la compresión se aplicaba en direcciones paralelas a la compactación. Esto es debido a la anisotropía que las probetas presentaron debida a su confección por tongadas.
- La compactación previa del material influye en la resistencia a compresión del mismo, siendo el material con más densidad el más resistente.

#### ***IV.1. Ensayos sobre la familia 2.***





De la realización de estos ensayos, se deduce que:

- El material compactado presenta una resistencia un 26,5 % mayor que el simplemente tallado pero esto podría deberse a que su densidad es también superior.
- Se puede concluir que las probetas compactadas y, por tanto, con mayor densidad que las talladas, presentan una resistencia final mayor.

### IV.3. Ensayos sobre la familia 3

A continuación se muestra una tabla-resumen de las características y resultados de las probetas que forman la familia 3 (Fig.1):

Probeta	Cantidad de sustrato introducido (Kg)	Densidad (Tn/m3)	Dirección de compresión respecto a la compactación	Resistencia justo al romper la cohesión (MPa)
3.1	1.52	0.450	Perp	0,013
3.2	1.52	0.450	Perp	0,020
3.3	1.52	0.450	Perp	0,022
3.4	1.60	0.475	Perp	0,020
3.5	1.60	0.475	Perp	0,015
3.6	1.60	0.475	Para	No rompe
3.7	1.69	0.500	No válida	No válida
3.8	1.69	0.500	Perp	0,022
3.9	1.69	0.500	Para	No rompe
3.10	1.77	0.525	Perp	0,022
3.11	1.77	0.525	Perp	0,025
3.12	1.77	0.525	Para	No rompe
3.13	1.86	0.550	Perp	0,030
3.14	1.86	0.550	Perp	0,033
3.15	1.86	0.550	Para	No rompe

Figura 1. Tabla-resumen de los resultados obtenidos de los ensayos realizados sobre las probetas con sustrato inoculado, conservado reproduciendo condiciones ideales de crecimiento del micelio y sin producción de cosecha, a los 21 días de la fabricación.

#### IV.4. Ensayos sobre la familia 4.

La muestra 4.1 presentó una resistencia a compresión simple de 0,024 MPa para un 10% de deformación aproximadamente (Fig. 2).

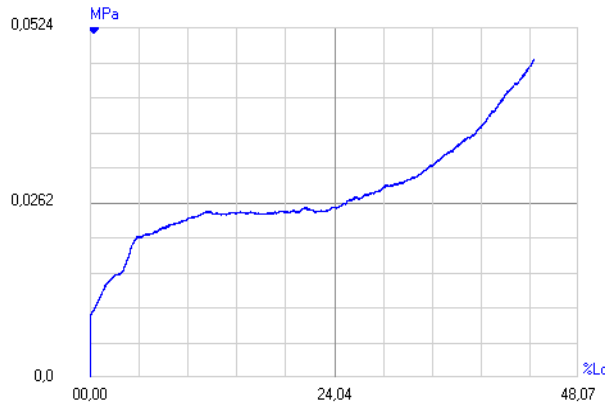


Figura 2. Resistencia a compresión simple vs porcentaje de deformación de la muestra 4.1

#### IV.5. Resumen de los resultados.

Los valores más desfavorables para la resistencia se observan cuando la compresión se aplica en la dirección perpendicular a la de compactación. La tabla (Fig. 3) que se presenta a continuación resume los valores de resistencia a compresión simple (MPa) al 10% de deformación de las probetas ensayadas según esta dirección.

	Probeta	Resistencia a compresión simple (MPa) al 10% de deformación
Familia 1	1.1	0,200
	1.3	0,080
Familia 2	2.1	0,062
	2.2	0,049
Familia 3	3.1	0,015
	3.2	0,022
	3.3	0,016
	3.4	0,018
	3.5	0,014
	3.8	0,019
	3.10	0,023
	3.11	0,024
	3.13	0,026
Familia 4	4.1	0,024

Figura 3. Valores de la resistencia a compresión simple (MPa) al 10% de deformación de las probetas ensayadas en la dirección perpendicular a la del plano de compactación.

Actualmente se está estudiando cómo influye el tiempo y la temperatura de secado de las probetas en la resistencia final, para intentar conseguir la máxima resistencia con un secado ideal.

#### ***IV.6. Ensayos de resistencia ante el fuego.***

En el presente estudio se ha querido también evaluar la resistencia ante el fuego del agregado sustrato-micelio.

En el Libro Blanco del EPS se puede leer “El EPS fundido normalmente no arde por chispas de soldadura o brasas de cigarrillos; sin embargo, las pequeñas llamas harán arder fácilmente al EPS de grado estándar a menos que contenga aditivos retardadores de la llama (EPS-SE).”[13]

El producto propuesto en esta investigación revoluciona este aspecto. Para comprobar si este material arde al contacto con una llama, se escogió, de entre todas las probetas realizadas, la que, a priori, parecía ser la más desfavorable, es decir, la que tenía menos presencia de micelio. En concreto, resultó ser una probeta de la familia 2. Elegida la probeta, se aplicó la llama de un soplete durante 20 segundos sobre una de las caras de la misma y se observó que la paja más superficial, que estaba seca y no envuelta en micelio, se había consumido. El fuego, al encontrar el micelio, no conseguía prender al material, lo que revelaba que, sin necesidad de realizar ningún tratamiento superficial de la muestra, puede garantizarse que el material es prácticamente ignífugo, ya que el micelio actúa como una capa que resiste al fuego e incluso lo extingue (Fig. 4).



Figura 4. Estado final de la muestra de la familia 2 tras el ensayo con soplete.

## **V. Discusión**

### ***V.1. Materiales de estudio***

El cultivo del *Agaricus bisporus* se realiza sobre turba, material que no es de desecho, al contrario que la paja donde se cultivó la *Pleurotus*. La resistencia conseguida con el agregado donde se inocula *Pleurotus* es mayor que la del *Agaricus*. No obstante, este último aglomerado arroja valores interesantes por los que seguir estudiando.

### ***V.2. Comparación con el EPS***

En este apartado se evalúan si son admisibles las propiedades que se han estudiado teniendo en cuenta la aplicación a la que va a ser destinado el producto final. Para clarificar la discusión, se

responde a continuación a dos preguntas clave, que se justifican con la normativa específica de ensayos.

1. ¿El material objeto de estudio cumple los valores mínimos de resistencia exigidos al EPS?

La resistencia exigida depende de las aplicaciones a las que vaya a ser destinado el producto final. Se concluye que el material obtenido a partir del *Pleurotus ostreatus* podría sustituir al EPS en las siguientes aplicaciones: su utilización como embalaje, su colocación en carreteras para evitar asentamientos diferenciales y su instalación como material aislante para tabiquería. En la siguiente gráfica (Fig. 5) puede verse que incluso el valor más desfavorable de la familia 1 cumple los requisitos de compresión simple para una deformación del 10% exigidos para los tres usos anteriormente mencionados y que quedan en el límite de cumplimiento los valores de la familia 3 que tenían las densidades más altas.

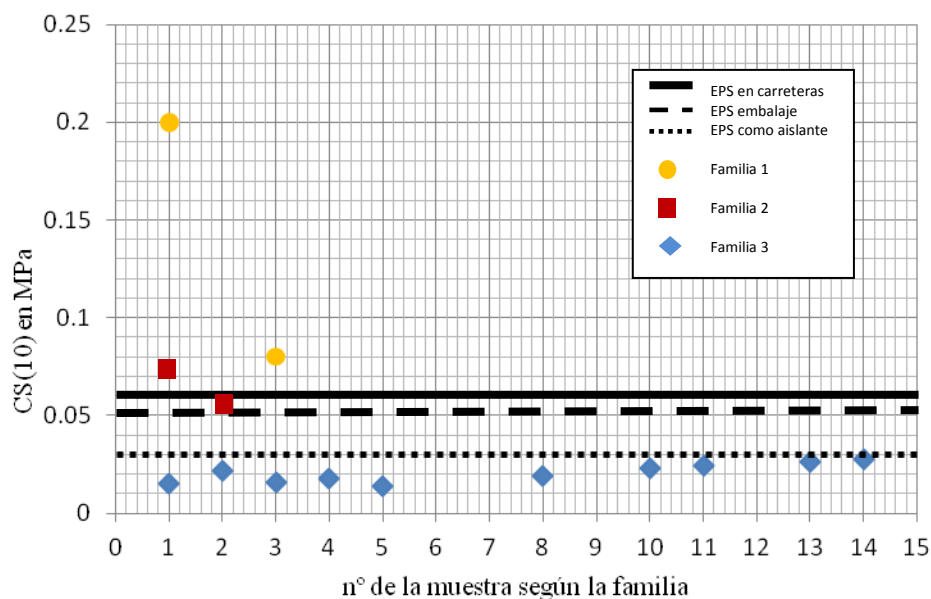


Fig. 5. Comparación entre los resultados obtenidos y los valores admisibles según el uso final del material

- 2.- ¿El material objeto de estudio cumple los requerimientos ante fuego exigidos al EPS?

En principio, la autoextinción que presenta el material al contacto con la llama es un resultado muy a tener en cuenta puesto que el EPS no resiste el calor de una llama. No obstante, el tipo de ensayo para evaluar la resistencia al fuego varía dependiendo de la aplicación final del producto y, actualmente, ya se está trabajando para determinarla e incluirla en futuras publicaciones.

## VI. Conclusiones

Después del trabajo desarrollado, se ha llegado a conclusiones muy interesantes que favorecen un desarrollo más profundo del producto con el que llegar a obtener resultados más determinantes en aplicaciones concretas. Las más directas derivadas de este estudio se desarrollan a continuación:

### 1.- Uso del material

Se concluye que el material obtenido a partir del cultivo de *Pleurotus ostreatus* podría sustituir al EPS en sus diversas aplicaciones actuales en cuanto a la resistencia mecánica y al comportamiento ante el fuego se refiere.

2.-Aun no habiendo realizado una campaña de ensayos demasiado extensa, el resultado es prometedor. Para poder utilizar el producto, éste debería cumplir una serie de exigencias. En el presente estudio, se ha comprobado que, de entre todos los requisitos exigibles, se cumplen los que a priori parecen más importantes. No obstante, las futuras líneas de investigación en las que ya se está trabajando comprobarán si se satisfacen todos los exigidos y, en caso de no cumplirse, se trabajará para corregir las debilidades de este material.

### 3.-Comportamiento ante el fuego

El agregado sustrato-micelio posee propiedades ignífugas como la resistencia a una llama de fuego y que el EPS no satisface, por lo que, a falta de ensayos específicos para la aplicación a la que finalmente vaya a ser destinado, el comportamiento ante el fuego es alentador.

4.-El producto en estudio es totalmente biodegradable.

A diferencia del EPS, el material objeto de estudio se descompone por sí mismo sin necesidad de ser sometido a ningún tratamiento industrial.

5.- La resistencia que ha dado el *Pleurotus* es mayor que la del *Agaricus*, aunque proporciona valores interesantes por los que seguir estudiando este hongo.

### **Agradecimientos**

Este trabajo no hubiera sido posible sin la colaboración de la empresa Misur S.L. que nos ha cedido sus instalaciones y equipos. Agradecemos a Champinter su apoyo y las muestras de material suministrado para realizar los ensayos; al profesor José Rodríguez Montero la absoluta disponibilidad de los medios disponibles en su laboratorio, al profesor Manuel Díaz y a los profesores Enrique Hernández y Luisa María Gil promotores de esta investigación.

### **Bibliografía**

[1] Ruiz-Herrera, José. La Quitina. El segundo compuesto orgánico más abundante en la Tierra. Investigación y Ciencia (1993). Vol.: Julio. Pp 42-49.

[2] Gacén, J.: De Quitina y quitosano: materiales del pasado para el presente y el futuro. Revista avances en Química, (2006). Pp 15-21.

[3] Caprile, María Daniela: Obtención y Utilización de Quitina y Quitosano a partir de desechos de crustáceos. Revista Ceiso (2006). Pp 1-6.



- [4] Pisabarro, Antonio G. and Ramírez, Lucía. VI Meeting on Genetics and Cellular Biology of Basidiomycetes.. Pamplona : Universidad Pública de Navarra, 2006.
- [5] Ratón, Roca. Fungal Cell Wall. Structure, synthesis and assembly (1998)
- [6] Ruiz-Herrera, J. Chitin Biosynthesis in fungi. Universidad de Sevilla (2005).
- [7] Ruiz-Herrera J. La síntesis de la quitina en los hongos. Universidad de Sevilla (2005).
- [8] Chang, S.-T. and Miles, P.G. Mushrooms cultivations, nutritional value, medical effect and environmental impact. Second edition. CRC Press Inc. United States. (2004).
- [9] Ashby, M.F. Materials Selection in Mechanical Design, 2nd ed, Butterworth-Heinemann, Oxford (1999).
- [10] Helge-Otto, Fabritius Sachs, Christoph Romano Triguero, Patricia and Raabe, Dierk. Influence of Structural Principles on the Mechanics of a Biological Fiber-Based Composite Material with Hierarchical Organization: The Exoskeleton of the Lobster *Homarus americanus*. Advanced material (2012). Pp 1-10.
- [11] Julian F.V. Vincenta, Ulrike G.K. Wegstb. Design and mechanical properties of insect cuticle, Department of Mechanical Engineering, University of Bath. Stuttgart, Germany (2003). Volume: 33. Publisher: Elsevier, Pages: 187-199.
- [12] Katsuyuki Ogura, Tetsuo Kanamoto , Masayoshi Itoh , Hajime Miyashiro and Koji Tanaka. Dynamic Mechanical Behavior of Chitin and Chitosan (1999).
- [13] Libro Blanco del EPS .EUPECS (2003). Pag: 1-60
- [14] Aranguren Oroz, Íñigo. Ensayo de sustratos experimentales a base de residuos oleicos para el cultivo de hongos. Proyecto de Ingeniería Ambiental coordinado con Universidad de Florencia, (2006).
- [15] Eduardo Ardón López, Carlos. La Producción De Los Hongos Comestibles. Universidad De San Carlos De Guatemala (2007).
- [16] López R, A. Cultivo de setas: alternativa alimenticia de la economía familiar (en línea). Veracruz, México, Universidad Veracruzana, Centro de Genética Forestal (1995).
- [17] Paul Stamets. Growing gourmet and medicinal mushrooms. University of Arizona (EE.UU) (2003).
- [18] Paul Staments. Mycelium running. Universidad de Arizona (EE.UU) (2005).
- [19] Sánchez José E. and Royse, Daniel. La biología y el cultivo del pleurotus spp. México: Editorial LIMUSA, S.A. (2001)
- [20] Shelley, Evans; Geoffrey, Kibby. Hongos. Omega (2008). Barcelona
- [21] Tellería, M. Teresa. Los hongos .Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas (2011)



# Aplicación de algoritmos paramétricos de generación formal en el diseño estructural. La Ópera de Sídney desde una perspectiva contemporánea

*Rey Rey, Juan*

*Departamento de estructuras de edificación, Escuela Técnica Superior de Arquitectura.  
Universidad Politécnica de Madrid (Spain).  
E-mail: [juan.rey@upm.es](mailto:juan.rey@upm.es)*

---

## Resumen

La Ópera de Sídney puede considerarse un paradigma en relación a la influencia que los métodos de representación gráfica y análisis estructural ejercen en la concepción y construcción de las obras de arquitectura. Se plantean posibles esquemas estructurales para las cubiertas de dicho edificio respetando la forma propuesta originalmente por Utzon, poniendo en evidencia el impacto que los ordenadores personales han tenido en la manera de concebir y construir edificios.

## Palabras clave

Ópera de Sídney, diseño paramétrico, ingeniería estructural.

## I. Introducción

El importante desarrollo tecnológico e industrial surgido especialmente durante la segunda mitad del siglo pasado ha eliminado las históricas limitaciones técnicas en el ámbito de los proyectos arquitectónicos, desembocando en la situación actual en la que cualquier planteamiento formal puede ser analizado desde un punto de vista estructural, concluyéndose por tanto que ha desaparecido la barrera del análisis en lo que al desarrollo de un proyecto arquitectónico se refiere.

En la actualidad, al igual que a finales del siglo XIX, nos encontramos en un periodo de transición, y también, como entonces, es la tecnología la que orienta el cambio. No la tecnología de los nuevos materiales (hormigón y acero) como sucedía tras la revolución industrial sino que es la nueva tecnología digital aplicada a los sistemas de diseño, cálculo y fabricación la que están siendo el motor de la actual transformación. Hoy no es tanto el paradigma mecanicista el que prevalece en muchos casos en la concepción de los edificios sino que, nuevos elementos como la tecnología digital integrada está cambiando la forma de diseñar y concebir el entorno construido.

Ante este contexto cabría plantearse las siguientes cuestiones: ¿Puede el diseño paramétrico y la tecnología CAD-CAM-CAE en conjunción con los programas actuales de análisis estructural basados en los Métodos Matricial y de los Elementos Finitos hacer más sencilla la construcción de estructuras ligeras y eficientes hoy en día? ¿Puede la tecnología digital ayudar a ampliar el abanico formal a la hora de diseñar edificios y a la vez permitir el uso de sistemas estructurales racionales que optimicen el consumo de materiales bajo dichas circunstancias?

## II. La Ópera de Sídney

La Ópera de Sídney puede considerarse un paradigma en relación a la influencia que los métodos de representación gráfica y análisis estructural ejercen en la concepción y construcción de las obras de arquitectura. El edificio fue gestado en una época (1956-1973) inmediatamente anterior al desarrollo científico y tecnológico anteriormente referido y, a pesar de emplearse de forma pionera ordenadores durante su desarrollo, tanto el software como el hardware no estaban lo suficientemente maduros. Así, el proyecto del edificio debió realizarse con medios básicamente manuales adoptando en consecuencia importantes simplificaciones, tanto en lo referente a la representación gráfica como al análisis estructural. Esta ausencia de herramientas de diseño disponibles acordes a la complejidad formal de la propuesta planteada condicionó enormemente la marcha del proyecto, dilatándose dramáticamente en el tiempo (hasta un total de 17 años) y multiplicándose su costo final de forma desproporcionada (en aproximadamente un 1.300%).

Además, la solución estructural finalmente construida dista mucho de la imaginada por Utzon inicialmente, debido a las importantes modificaciones que debieron introducirse para hacer viable su análisis y representación. Así, donde Utzon se imaginó una fina lámina de hormigón flotando sobre el paisaje se

construyó finalmente una estructura más pesada, formada por costillas pretensadas de hormigón con unas secciones notablemente mayores. La geometría también debió ser modificada de forma ostensible, pasando de un trazado “libre” a una geometría esférica, tal y como se observa en la siguiente figura.

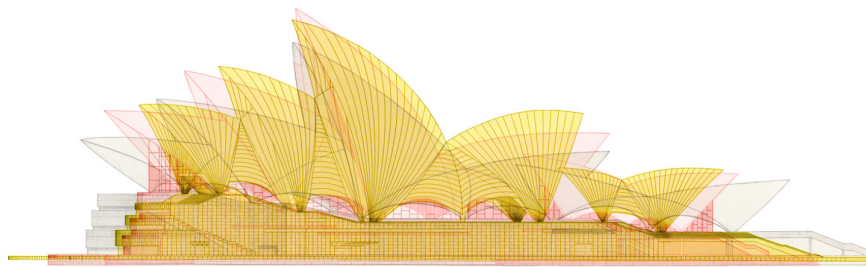


Figura 1. Comparativa de la evolución de la forma de las cubiertas de la Ópera de Sídney: concurso –en gris- (1956), geometría parabólica –en rojo- (“Libro Rojo”, 1958) y geometría esférica -en amarillo- (“Libro Amarillo”, 1962).

Si este edificio se pretendiese construir en la actualidad, con total seguridad el curso de los acontecimientos se desarrollaría por senderos muy diferentes. Ante este supuesto se plantean posibles esquemas estructurales para las cubiertas de dicho edificio respetando la forma “libre” propuesta originalmente por Utzon así como su carácter laminar, poniendo en evidencia el impacto que los ordenadores personales y los programas informáticos asociados han tenido en la manera de concebir y construir edificios.

### III. Algoritmos de diseño paramétrico

El modelado de “formas libres” a través de superficies paramétricas permite una rápida generación de formas complejas con una mínima cantidad de datos. Así, los sistemas CAD-CAM-CAE han redefinido la concepción, representación, fabricación y construcción vinculadas al proyecto arquitectónico, haciendo accesible la manipulación de “formas libres”, incluso con conocimientos mínimos de geometría.

El importante avance de la informática en las últimas décadas ha posibilitado a los arquitectos trabajar de forma relativamente sencilla e intuitiva con representaciones matemáticas de geometrías tridimensionales como las NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*). Estas curvas y superficies orgánicas definidas por curvas vectoriales, han permitido abordar gráficamente la manipulación de espacialidades complejas, desconociendo además la especificidad analítica de sus ecuaciones paramétricas dado que mediante este proceso de generación formal, se desconocen las ecuaciones de las superficies generadas y, en consecuencia, muchas de sus características mecánicas y constructivas.

Pero, al contrario de lo que ha sucedido en otras industrias como la aeronáutica o la del automóvil, la construcción de edificios ha mostrado una inercia muy fuerte a integrar estos avances tecnológicos, particularmente durante las últimas décadas, dando continuidad al empleo de técnicas en algunos casos seculares. Este posicionamiento evidentemente evita riesgos pero a su vez obstaculiza la incorporación de innovaciones y mejoras en los procesos constructivos.

El diseño paramétrico es por tanto una técnica para el control y la manipulación de objetos de diseño a cualquier escala, que emplea algoritmos como métodos de generación de formas y posibilita la producción de formas complejas basadas en reglas sencillas para el control de cada uno de sus componentes. Al definir una determinada forma mediante NURBS se obtiene un modelo geométrico dinámico, esto es: una forma definida por un conjunto de parámetros flexibles y modificables.

Se podría decir que el diseño paramétrico es por tanto un diseño asociativo basado en parámetros, lo cual permite realizar modificaciones en la geometría del modelo de forma rápida y sencilla, dado que al estar las variables relacionadas entre sí, cualquier cambio en una variable se arrastra automáticamente al resto de ellas. Como siempre que una innovación entra en escena, la inexistencia de referencias y precedentes genera tentativas fallidas y tratamientos superficiales de dicha nueva herramienta. El caso del diseño paramétrico en el ámbito arquitectónico no ha escapado de este cliché. Así, fundamentalmente durante los últimos años del siglo pasado, el diseño paramétrico fue empleado mayoritariamente en ejercicios formalistas de dudoso interés, sin mayores pretensiones que la pura experimentación estética.

Incluso en fechas más recientes se ha extendido la tendencia de emplear las nuevas herramientas de diseño algorítmico para producir formas de gran complejidad partiendo de la implementación de reglas y fórmulas sencillas. Este enfoque ha conducido frecuentemente a diseños con una complejidad innecesaria, en los que ésta era además introducida sin un fundamento o motivo claros.

Existe por tanto la tentación de emplear la potencialidad de las nuevas herramientas de diseño paramétrico de una forma sencilla para aumentar artificialmente la complejidad de un diseño en lugar de hacer uso de éstas de una manera más intensa (y compleja) en aras de alcanzar diseños más simples, coherentes y en último término, eficaces.

#### **IV. Aplicación de algoritmos de diseño paramétrico en el desarrollo de propuestas para la estructura de las cubiertas de la Ópera de Sídney**

##### ***IV.1 Introducción***

Aplicando estas técnicas es posible realizar exploraciones geométricas sobre superficies complejas en la búsqueda de soluciones eficaces. En el caso de las superficies propuestas por Utzon para las cubiertas de la Ópera de Sídney, dado que éstas no están definidas geoméricamente, el empleo de NURBS y geometrías parametrizadas sobre dicha superficie se adapta a la perfección al problema geométrico que se presenta.

Estas técnicas cobran todavía más relevancia en cuanto a la fabricación y construcción de la obra. Así, mientras que en la obra de construcción de las cubiertas de hormigón que hoy se pueden admirar en Bennelong Point, en el Sídney de los años sesenta, el proceso constructivo requirió la prefabricación de sus componentes para racionalizar y en último término hacer viable su construcción, los inicios de este nuevo siglo se caracterizan por poner el acento en los sistemas de fabricación digitales. Dichos sistemas se caracterizan por centralizar toda la información relevante del edificio en un archivo de datos tridimensional, que además de para su análisis estructural, sirve también para alimentar directamente las máquinas de corte, doblado, etc. Por tanto hoy en día ya no es imprescindible racionalizar o modular la estructura de una forma tan rígida, dado que la fabricación de piezas de distintos tamaños entre sí no supone una penalización significativa, excepto la complejización del proceso de montaje si éste no está bien concebido.

Hasta hace no mucho tiempo, los medios de representación y análisis coincidían aproximadamente con las técnicas de construcción de su momento. En cambio, a día de hoy, la realidad es que las nuevas técnicas de representación y análisis estructural nos han llevado a un punto de desarrollo tal que la limitación que hasta ahora existía en estos campos en el desarrollo de los proyectos arquitectónicos ha desaparecido. Y hoy es la industria la que supone el lastre mayor para la construcción de edificios con “formas libres” como las propuestas por Utzon en su momento.

##### ***IV.2 Generación de un modelo digital de la geometría original de las cubiertas***

Se ha empleado la documentación gráfica que Jörn Utzon presentó al concurso de arquitectura convocado para la generación de un modelo digital de una parte de las cubiertas (las dos piezas de mayor tamaño, considerándose que los resultados obtenidos serán extrapolables al resto de piezas). En concreto, se han tomado los dibujos de plantas y alzados y se han digitalizado empleando para ello el programa informático Rhinoceros v5.0 (NURBS modelling for MAC).

El proceso de digitalización ha consistido en la captura de puntos directamente sobre los dibujos anteriormente indicados, una vez escalados estos previamente. Posteriormente, se han interpolado curvas partiendo de los puntos previamente capturados, tanto de los dibujos de plantas como de alzados. Para la interpolación se han considerado polinomios de tercer grado. Los resultados obtenidos, tal y como se observa en las figuras siguientes, se consideran suficientemente aproximados:

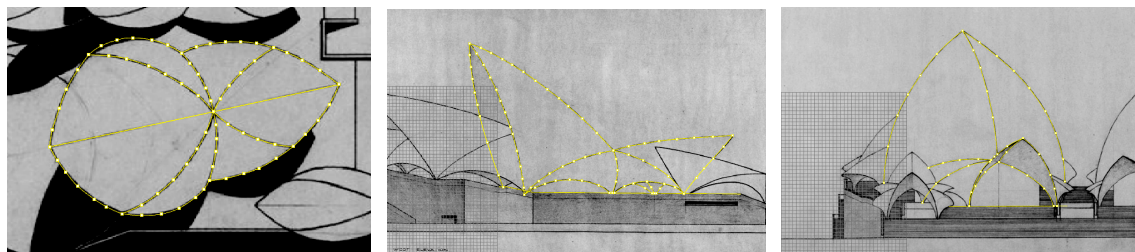


Figura 2. Proceso de digitalización de los dibujos originales.

A continuación, se han generado superficies a partir de las curvas anteriores, proyectando dichas curvas en las tres direcciones principales del espacio. Se han obtenido las curvas espaciales resultantes de la intersección de las superficies extruidas anteriormente indicadas. Estas curvas constituyen las curvas maestras (aristas) para la definición de las superficies que constituyen las dos piezas de cubierta seleccionadas.

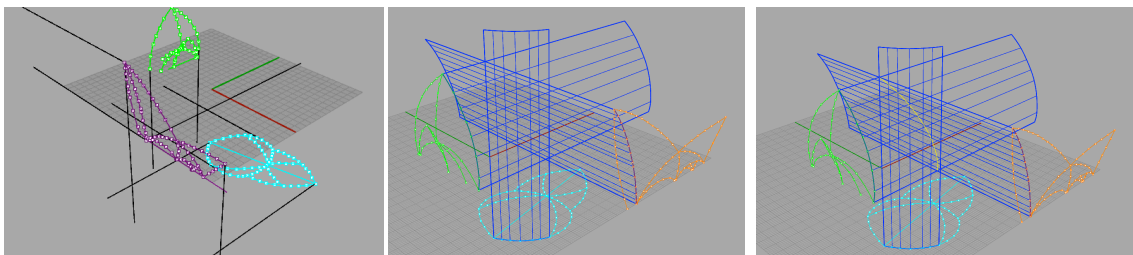


Figura 3. Montaje tridimensional de las tres proyecciones digitalizadas, extrusión de superficies y obtención de curvas de las aristas por intersección de dichas superficies.

A partir de este conjunto de curvas en el espacio se han generado los fragmentos de superficie de cubierta enmarcados por dichas curvas. Para ello se ha empleado la opción de generación de superficies a partir de curvas maestras de Rhinoceros. Esta interpolación se considera válida por varios motivos: por no existir información suficiente para generarla de forma precisa (por lo que la aquí presentada es una de las infinitas soluciones posibles al problema) y por tener un parecido razonable con las imágenes existentes. Sobre estas superficies generadas se ha realizado un mallado en elementos triangulares de tres nodos, para facilitar el posterior análisis estructural.

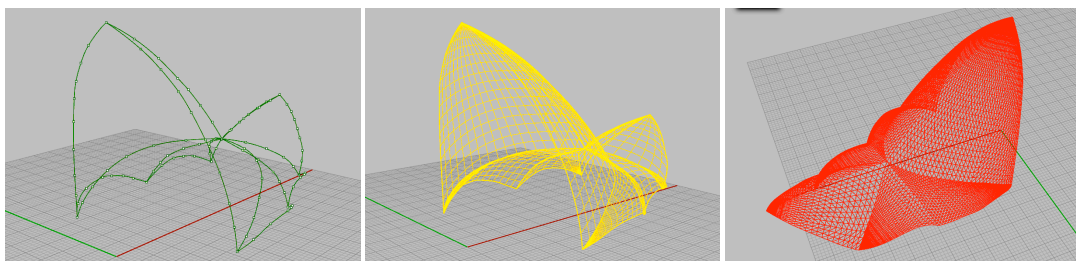


Figura 4. Curvas de las aristas, generación de las distintas porciones de superficie y mallado con elementos triangulares de tres nodos.

#### ***IV.3 La estructura de cubierta de la Ópera de Sídney desde una perspectiva contemporánea***

Las técnicas de construcción de cubiertas ligeras en hormigón armado (láminas) se han basado tradicionalmente en el uso intensivo de mano de obra y consecuentemente se han paulatinamente abandonando debido a su elevado coste. Según estudios realizados por Williamson en 2003, el valor de la mano de obra (no reajustado por la inflación) aumentó entre 1958 y 2002 entre 8 veces (mano de obra no especializada) y once veces (mano de obra de producción), mientras que el coste de los materiales de construcción en el mismo periodo aumentó *solamente* entre 3,8 veces (acero) y 4,8 veces (hormigón).

Así, para que la construcción de cubiertas laminares de hormigón fuese viable hoy en día sería necesario crear técnicas de construcción menos demandantes de mano de obra, ya que el encofrado y las cimbras suponen porcentualmente una parte muy importante del coste de la estructura completa. Debido a estos motivos el autor entiende que hoy en día el proyecto de la estructura de las cubiertas de la Ópera de Sídney debería plantearse en estructura de acero.

Un aspecto importante a resaltar en relación a las cubiertas proyectadas por Utzon para la Ópera de Sídney es que, a diferencia de las cubiertas laminares de Nervi, Candela, Torroja, etc., en las cubiertas de la ópera el hormigón armado estaba en principio previsto que no fuese visto: se preveía su recubrimiento exterior mediante un acabado cerámico y su interior iba a estar oculto en su mayor parte por los imprescindibles falsos techos derivados de las necesidades de acondicionamiento acústico de las salas. En las áreas en las que dichos falsos techos no eran necesarios, Utzon, tal y como deja plasmado en sus dibujos de concurso, prevé tratar el interior de hormigón con un acabado de color dorado.

Así, hoy como entonces, parece más natural plantear una estructura metálica para generar una superficie del tamaño y forma propuestas por Utzon. Las ventajas fundamentales que presenta frente a la versión construida son:

- Mayor ligereza, lo que repercute no sólo en los esfuerzos que debe soportar la propia cubierta –cuya carga dominante es el peso propio- sino también en el tamaño de los pilares y cimentaciones bajo las mismas.
- Facilidad de prefabricación: unión de tubos metálicos curvos a través de soldadura en taller.
- Rapidez de ejecución: combinando prefabricación de piezas de gran tamaño y uniones atornilladas en obra. Izado de módulos completos unidos previamente a pie de obra.

- Drástica reducción de los medios auxiliares requeridos: debido a la mayor ligereza de las piezas a manipular en obra.

#### **IV.4 Parametrización de posibles soluciones estructurales sobre las superficies de las cubiertas**

Una vez adoptada la decisión de plantear posibles soluciones en estructura metálica, se han aplicado técnicas de generación de geometrías tridimensionales con NURBS y de diseño paramétrico, con ayuda del programa informático Grasshopper sobre Rhinoceros, con el objetivo de plantear alternativas a la estructura de las cubiertas de la Ópera de Sídney desde una perspectiva contemporánea, tratando de respetar de forma lo más fiel posible, la geometría de las cubiertas plasmada por Utzon en los planos presentados al concurso internacional de arquitectura convocado al efecto (geometría que no responde a ninguna forma conocida o expresable matemáticamente).

Aplicando varios algoritmos con la ayuda del programa informático *Grasshopper*, se han desarrollado diversas aproximaciones geométricas al problema de cómo disponer las barras de un entramado metálico adaptadas a las superficies “libres” planteadas por Utzon de modo que la estructura resultante sea lo más lógica y eficiente posible.

Se pretende realizar una aproximación sistemática en la que se puedan analizar en paralelo varias propuestas, parametrizadas, de modo que de una forma semi-automática se puedan extraer conclusiones acerca de la eficiencia de la disposición de dichas barras en la estructura.

De este modo, aplicando algoritmos pre-programados como “*LunchBox*” o “*Karamba*” se ha generado una familia de posibles formas, todas constituidas por barras de acero, adaptadas a la geometría original con la que Utzon ganó el concurso, para determinar de entre ellas cual es la disposición de barras más apropiada.

En primer lugar se ha explorado las posibilidades de *LunchBox v3.0*, programado por Nathan Miller (ver figura 5).

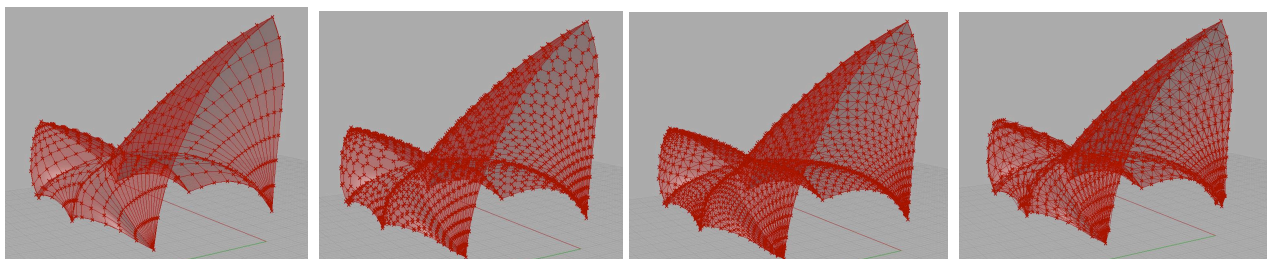


Figura 5. Aplicación directa del plugin LunchBox v3.0 de Grasshopper, sobre la superficie de las cubiertas, considerando la geometría de la propuesta original de Jørn Utzon. Estudio de distintos patrones geométricos para un posible mallado de las superficies “libres” a través de barras.

Empleando el algoritmo *Karamba v1.0.2* se ha generado una geometría adicional, basada en una malla diagonal sobre la superficie libre propuesta por Utzon. En la figura 6 se puede observar el resultado obtenido:

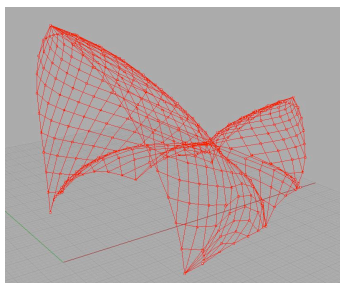


Figura 6. Aplicación directa del algoritmo Karamba de Grasshopper sobre la superficie de las cubiertas.

Una vez generadas las disposiciones de barras de las seis alternativas en estructura de acero (una propuesta inicial generada “manualmente” mediante corte de superficies así como las cinco adicionales anteriormente presentadas, generadas mediante algoritmos paramétricos), se realiza un análisis estructural de dichas propuestas en paralelo con ayuda del programa *Autodesk Robot Structural Analysis v2012*, considerando las mismas cargas actuantes en todos los casos.

Se adjuntan a continuación algunas imágenes de los seis diferentes modelos de cálculo elaborados, cada uno de ellos con una disposición diferente de la malla sobre la superficie original planteada por Utzon:

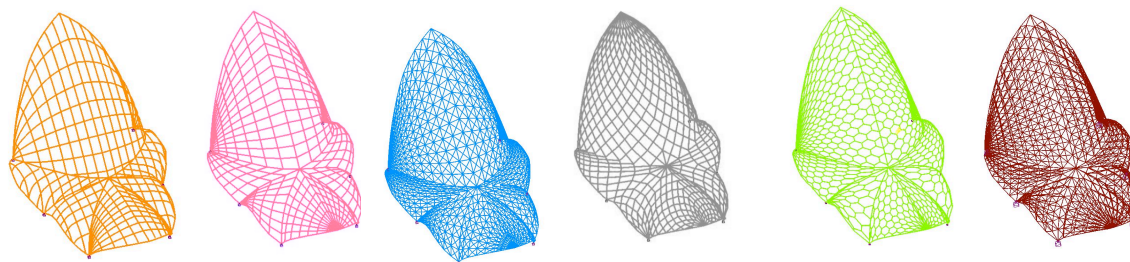


Figura 7. Vistas de los seis modelos de cálculo elaborados en Autodesk Robot Structural Analysis 2012.

Se podría proceder pues a realizar un dimensionado en detalle de cada uno de los seis esquemas geométricos propuestos para, de su análisis comparado, determinar cuál es el más adecuado en términos de economía. Así, se llevaría a cabo un dimensionado de las barras en cada caso, con el objetivo de minimizar, por ejemplo, el peso de la estructura y la superficie exterior de las barras (de cara a minimizar la aplicación de pinturas tanto anticorrosivas como intumescentes).

En cualquier caso, se ha considerado que el desarrollo de un análisis detallado de estas seis propuestas excede los objetivos establecidos para la redacción del presente artículo y no aporta una información relevante. Se considera más interesante exponer el proceso metodológico propuesto que determinar de forma precisa el tamaño de cada una de las barras de cada opción planteada.

De todos modos, de forma simplificada, se ha considerado un único tipo común de barras tubulares circulares en todos los casos y, en base a estas premisas, se han analizado los seis modelos para de forma cualitativa poder clasificar los seis esquemas geométricos en función de su comportamiento tenso-deformacional.

En la figura siguiente, como ejemplo, se presentan vistas de las deformadas obtenidas del cálculo de los seis modelos:

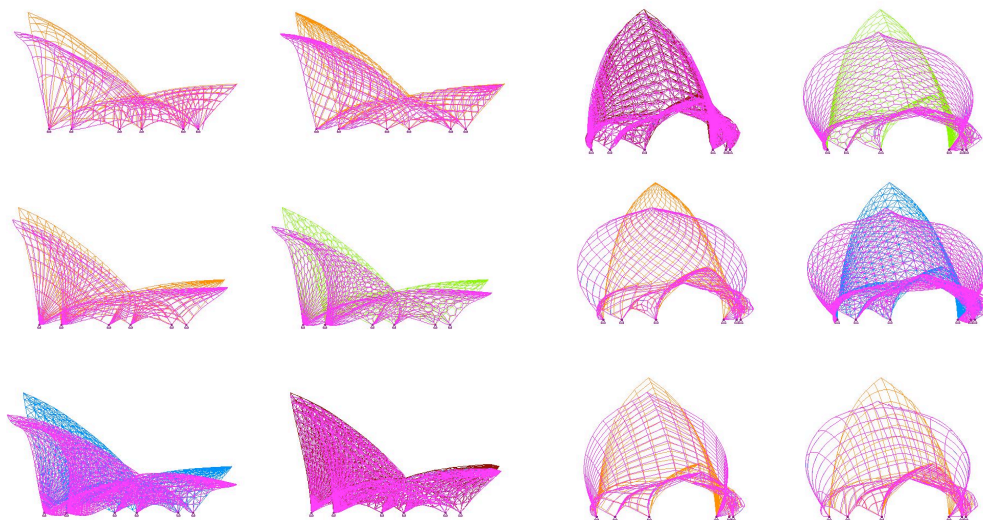


Figura 8. Geometría deformada de los seis modelos de cálculo elaborados.

A la vista de los resultados obtenidos, se concluye que la geometría más eficaz es la malla tridimensional de tetraedros. No obstante, se decide descartar dicha opción por ser la que más se distancia de la filosofía de la propuesta inicial de Utzon, al tratarse de una malla espacial en lugar de una disposición laminar, penalizando fuertemente el canto estructural resultante.

Se decide pues optar por la distribución de barras en malla diagonal.

Una vez realizada esta elección, podría afrontarse un nuevo análisis de sensibilidad sobre la densidad de malla. Para ello las herramientas de diseño paramétrico de nuevo se muestran de gran utilidad. Se realiza pues un nuevo análisis paramétrico para establecer, dentro de unos parámetros constructivos razonables, la



densidad de malla más adecuada. Así, se generan una serie de opciones en función de la densidad de barras del modelo, simplemente alterando las variables de separación de las barras en cada una de las direcciones principales.

El objetivo sería de nuevo la minimización del peso de la estructura así como, de forma secundaria, de su superficie exterior. El análisis se hace para un rango de separación de barras de entre uno y cuatro metros, por considerarse un abanico razonable para la correcta disposición del cerramiento de cubierta sobre ellas.

A continuación se adjuntan unas imágenes de las nuevas formas generadas a partir de las premisas indicadas:

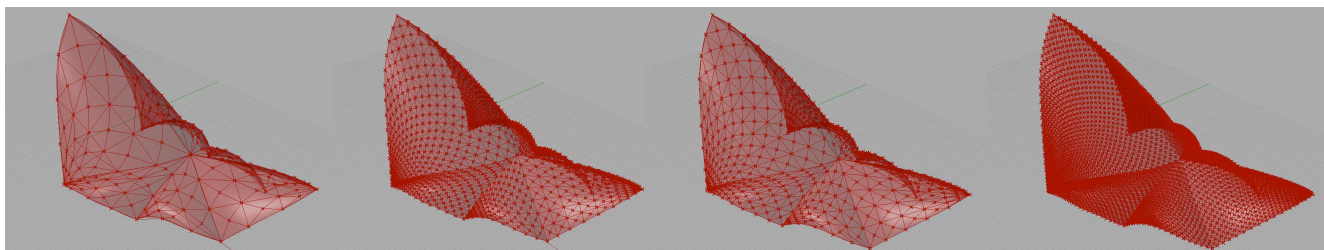


Figura 9. Aplicación directa del algoritmo “LunchBox” en Grasshopper. Estudio de distintos grados de densidad de malla para un posible mallado de las superficies “libres” a través de barras.

Nuevamente se procede a realizar un análisis estructural de las distintas propuestas con la ayuda del programa *Autodesk Robot Structural Analysis v2012*, con el objetivo de dimensionar las distintas opciones y poder realizar una comparación entre las mismas. A continuación se adjuntan vistas de los tres modelos analizados:

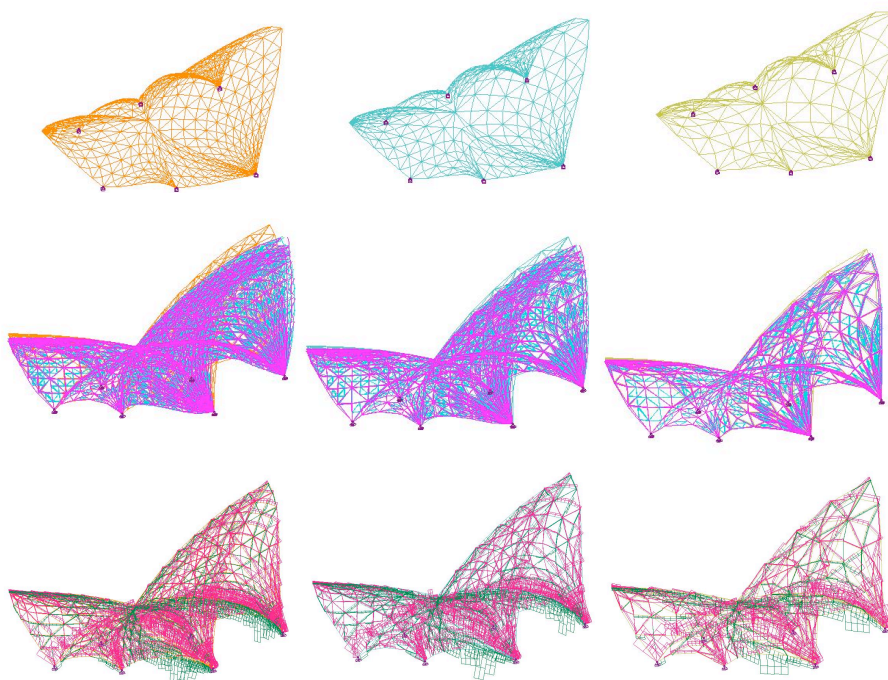


Figura 10. Modelos de cálculo elaborados, geometría deformada (ELS) y esfuerzos axiales en las barras (ELU).

Del análisis detallado de los resultados obtenidos se podría concluir cuál de entre las opciones estudiadas se considera la más adecuada por representar aquella que menor cantidad de estructura requiere.

Nótese que el hecho de tener un gran número de barras de dimensiones distintas no supone un inconveniente importante dado que, como se ha comentado, la estructura generada tridimensionalmente pasa directamente a las máquinas de corte, mediante sistemas CAD-CAM-CAE, las cuales afrontan de forma idéntica el corte de piezas de dimensiones repetitivas que de aquellas con gran variedad dimensional.

En cualquier caso, es preciso recalcar la gran complejidad de montaje que representa una estructura de estas características, motivada fundamentalmente por la forma impuesta a la misma (en este caso la propuesta

geométrica de Utzon para el concurso). Existen nudos con gran densidad de barras que deberían analizarse en detalle para simplificar al máximo su diseño.

No obstante, lo que aquí se ha desarrollado pretende únicamente ser una aproximación a nivel de Anteproyecto a un problema de estas características. Sería necesario realizar un estudio mucho más detallado para poder obtener conclusiones de mayor calado.

En cualquier caso, las herramientas paramétricas empleadas representan en este caso únicamente una ayuda para la generación rápida y automática de mallas de barras sobre una superficie predefinida. Esto es especialmente útil en estructuras en las que, como la objeto de estudio, por su complejidad formal resultan poco intuitivas. Como se ha expuesto, es posible hacer un análisis de alternativas de una forma relativamente sencilla que nos permita *optimizar* la estructura partiendo de los fuertes condicionantes formales existentes.

## V. Conclusiones

Las nuevas herramientas digitales de diseño paramétrico permiten, dentro del ámbito de las estructuras de edificación, la realización de análisis comparados de diseños estructurales de un modo manejable y modificable de forma relativamente sencilla, lo que posibilita que, aún trabajando con formas o configuraciones espaciales complejas, se pueda *optimizar* la propuesta estructural tomando en cuenta los condicionantes impuestos por el diseño.

Pero todo esto no debe hacernos perder de vista que, en realidad, no se trata más que de nuevas herramientas al servicio de la creatividad de los arquitectos e ingenieros y que son éstos en último término los responsables de hacer un uso sensato y responsable de las mismas. En palabras del arquitecto australiano Glenn Murcutt: *“La mayoría de los arquitectos que construyen edificios extraños asegura que lo hacen porque ahora la tecnología lo hace posible. Eso me parece absurdo. Poder hacer una cosa no legitima hacerla”*.

## Bibliografía:

- [1] Arup, Ove; et al. October 1973. The Arup Journal. London: Ove Arup Partnership.
- [2] Autodesk. Autodesk Robot Structural Analysis user manual. 2012.
- [3] Azagra, D.; Bernabeu, A. La estructura de las formas libres. Informes de la construcción. Abril-Junio 2012. Vol. 64, 526, 133-142.
- [4] Bechthold, Martin. Sobre cáscaras y blobs. Superficies estructurales de la era digital. Revista ARQ nº63; Mecánica electronica. 2006. Pags. 30-35. 2006.
- [5] Block, Philippe; Lachauer, Lorenz. Closest-fit, compresión-only solutions for freeform solutions for freeform shells. ETH Zurich. IABSE-IASS. 2011.
- [6] Calderón-Domínguez; Emmanuel Ruffo. Algorithmic Processes and Evolutionary Architectural Design for Nonstandard Geometries. Proceedings of the international symposium on algorithmic design for architecture and urban design. Algone, Tokyo. 2011.
- [7] Calderón-Domínguez; Emmanuel Ruffo. Towards morphogenetic control of nonstandard geometries for designers. Institute for architecture and media, University TU Graz, Austria. 2011.
- [8] Candela, Felix. En defensa del formalismo y otros escritos. Madrid: Ed. Xarait. 1985.
- [9] Chiorino, M.A.; Sassone, M. The morphogenesis of Shell structures: a conceptual, computational and constructional challenge. Structures and Architecture. Ed. Paulo J. S. Cruz.
- [10] Coenders, J.L. Interfacing between parametric associative and structural software. Delft University of Technology, Delft, The Netherlands. 2007
- [11] Coenders, J.L. Parametric and associative strategies for engineering. Delft University of Technology, Delft, The Netherlands. IABSE. 2008
- [12] De Mesa Gisbert, Andrés; Regot, Joaquín. El análisis de las formas libre en arquitectura a partir de la generación digital de superficies. La cubierta de Ronchamp. EGA: revista de expresión gráfica arquitectónica, nº10, págs.. 86-93. 2005.
- [13] Drew, Philip. Sydney Opera House. Architecture in detail. London: Ed. Phaidon. 1995.
- [14] Drew, Philip. The masterpiece. Jörn Utzon: a secret life. Sydney: Hardie Grant Books. 1999.
- [15] Fromonot, Françoise. Jörn Utzon: architetto della Sydney Opera House. Documenti di architettura. Milano: Ed. Electa. 1998.
- [16] Lachauer, Lorenz; Jungjohann; Kotnik, Toni. Interactive parametric tools for structural design. ETH Zurich. IABSE-IASS. 2011.

- [17] Martínez Calzón, Julio. La ingeniería estructural y el dominio de la forma. IV Congreso ACHE. Valencia. Noviembre 2008.
- [18] Martínez Calzón, Julio. Treatment of the form in structural engineering. Structures and Architecture. Ed. Paulo J. S. Cruz. 2010.
- [19] Martínez Calzón, Julio. Form, structure and energy. Structural engineers World Congress (SEWC). Como. 2011.
- [20] Ohmori, H.; Kimura, T.; Maene, A. Computational morphogenesis of free form shells. Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, Valencia. Octubre 2009.
- [21] Pellegrino, S. & Wislow, P. & Sharma, S. Multi-objective optimization of free-form grid structures. Cambridge University. Springer. 2009.
- [22] Rey Rey, J. & Fernández Cabo, J.L. La desaparición de la barrera del análisis estructural en los proyectos arquitectónicos. Madrid: Congreso Hitos Estructurales de la Arquitectura e Ingeniería. 2011.
- [23] Rey Rey, J. The disappearance of the structural analysis barrier: the Sydney Opera House from a contemporary perspective. ICSA 2013. Guimaraes.
- [24] Sakamoto, Tomoko; Ferré, Albert. From control to design. Parametric / Algorithmic architecture. Editorial Actar, Barcelona. 2009.
- [25] Sasaki, Mutsuro. Shape design of free curved surface shells. Número especial a + u, Architecture and Urbanism, nº5 (404), mayo 2004: 36-37.
- [26] Standards Association of Australia. 1971. Australian standard CA34, Part II – 1971. SAA Loading Code. Part II – Wind forces.
- [27] Torroja, Eduardo. Razón y ser de los tipos estructurales. Madrid: 9a Ed.; Consejo Superior de Investigaciones Científicas. 1998.
- [28] Utzon, Jörn. Sydney Opera House – New South Wales State Records – Digital gallery. (<http://gallery.records.nsw.gov.au/index.php/galleries/sydney-opera-house/>).
- [29] Watson, Anne (Ed.). Building a Masterpiece: the Sydney Opera House. Sydney: Powerhouse Publishing. 2006.

## Análisis experimental y numérico del T-stub

López López Manuel<sup>1</sup>✉, Loureiro Montero Alfonso<sup>1</sup>, Gutiérrez Fernández Ruth M.<sup>1</sup>, Reinoso Prado José M.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Industrial II. Universidade da Coruña.  
C/Mendizábal s/n , 15403 Ferrol. A Coruña (Spain). E-mail: manuellopez@udc.es

---

### Resumen

En este artículo se presentan los resultados una campaña experimental realizada sobre el componente T-stub, que aparece en uniones metálicas atornilladas. También se presenta, un modelo de elementos finitos realizado en Abaqus que predice correctamente el comportamiento de este elemento para las diferentes geometrías ensayadas.

### Palabras clave

Uniones metálicas, semirrigidas, elementos finitos, T-stu., Abaqus

### I. Introducción

En las estructuras metálicas las uniones juegan un papel fundamental tanto por su coste como por su influencia en el comportamiento global. Por lo que muchos investigadores han dedicado mucho esfuerzo y tiempo, en la caracterización de las mismas desarrollando modelos para predecir su comportamiento. Siendo el método de los componentes, uno de los modelos más avanzados para modelar el comportamiento de las uniones semirrigidas. Este modelo ha sido adoptado por una de las normativas más completa y avanzada como es el Eurocódigo [1].

El comportamiento rotacional de las uniones depende del comportamiento de cada uno de los componentes de la unión [2-3]. En las uniones atornilladas, uno de los componentes más importante por su contribución a la rigidez y resistencia es el T-stub. Además, con este componente se puede modelizar el comportamiento de varias partes de la unión como son el ala del pilar a flexión, chapa de testa a flexión y ala del angular a flexión.

En la literatura podemos encontrar diferentes campañas experimentales de T-stub [4-9] que estudian su comportamiento, en el que influyen una gran cantidad de parámetros e indeterminaciones.

Por otra parte, los modelos de elementos finitos (FEM) son una herramienta muy eficiente en la investigación del comportamiento de las uniones y de sus componentes. Desde que Krishnamurthy y Graddy [10] estudiaron el comportamiento de las uniones con chapa de testa mediante modelos bidimensionales y tridimensionales, numerosos estudios han sido realizados [11-13].

En este artículo, se presenta una campaña experimental sobre el componente T-stub y un modelo de elementos finitos para la predicción de su comportamiento elástico y plástico. Dicho modelo servirá para un posterior análisis paramétrico de este componente.

### II. Campaña experimental

La campaña experimental se compone de 4 ensayos con 2 geometrías diferentes tal como se indica en la Fig. 1 y con las configuraciones expuestas en la Tabla 1. El espécimen ensayado es un perfil de 50 cm de longitud, al que se le han practicado 4 taladros a una distancia  $w$  entre ellos. Por lo tanto, el espécimen se comportará como dos T-stub unidos por el alma del perfil.

Se han duplicado los ensayos de cada geometría con el fin de comprobar similitud de los resultados obtenidos para ejemplares iguales.

Los tornillos utilizados en los ensayos fueron de métrica 20 y los perfiles del tipo HEA con unas dimensiones comunes en edificación, estudiando así un comportamiento no extremo del T-stub.

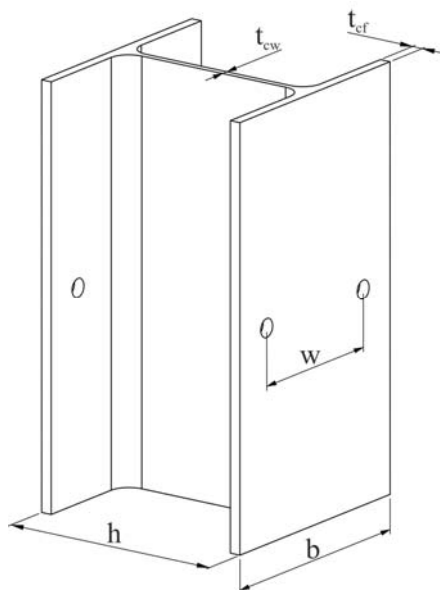


Figura 1. Espécimen ensayado

Tabla 1. Configuración de los ensayos experimentales

Ensayo	Column	h (mm)	b (mm)	$t_{cw}$ (mm)	$t_{cf}$ (mm)	w (mm)	Tornillo
E1A	HEA 280	272.5	280.0	8.5	13.1	220	8.8 TR20
E1B	HEA 280	271.5	280.0	8.5	13.1	220	8.8 TR20
E2A	HEA 200	238.0	237.5	7.5	11.2	160	8.8 TR20
E2B	HEA 200	238.0	237.5	7.5	11.4	160	8.8 TR20

Previamente a los ensayos, se verificaron las características mecánicas de los aceros mediante dos ensayos tracción para cada tipo de perfil. Los aceros de los perfiles se corresponden con un acero S275. Los resultados de los ensayos de tracción se muestran la Tabla 2 donde se observa que el límite elástico es superior al requerido por la normativa y el módulo elástico tiene un valor muy próximo al teórico. Los tornillos y tuercas son de M20 y acero grado 8.8 según las especificaciones del fabricante.

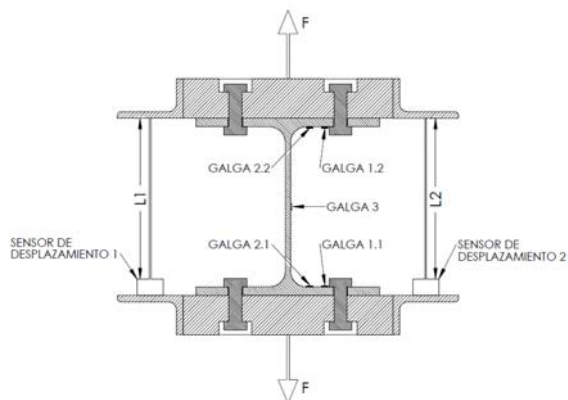
Tabla 2. Configuración de los ensayos experimentales

Perfil	$\sigma_y$ (MPa)	$\sigma_u$ (MPa)	E (MPa)
HEA 280	337	466	209540
HEA 240	340	479	208600

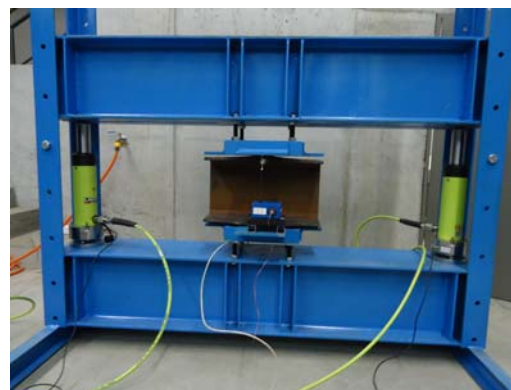
Los ensayos se realizan en un pórtico de tracción (Fig. 2b) que aplica una carga que se transmite al T-stub mediante unas placas de carga a las que se atornillan los especímenes. Previamente se realiza una precarga en régimen elástico para el ajuste de los componentes. Los ensayos se finalizan una vez caracterizado el comportamiento plástico del espécimen y antes de la rotura.

Los ensayos son instrumentados con 2 células de carga (una por cada actuador hidráulico) y 2 sensores de hilo que se colocan a ambos lados del espécimen. La medida de fuerza será la suma de los valores de las células de carga y la medida de desplazamiento será la media de los sensores de hilo. Utilizando la media de los sensores se minimizan el efecto de las posibles asimetrías durante el proceso de carga. Esta medida debe ser multiplicada por 0.5 para obtener el desplazamiento de cada uno de los 2 T-stub que forman el espécimen.

En los especímenes también se colocan galgas extensiométricas para monitorizar la secuencia de plastificación (Fig. 2a). Las galgas tipo 1 y 2 se han duplicado para verificar el comportamiento simétrico de los 2 T-stubs del espécimen.



a. Instrumentación



b. Proceso de carga en los ensayos

Figura 2 Instrumentación y proceso de carga en los ensayos

### III. Modelo de elementos finitos del T-stub

El análisis por elementos finitos de los T-stub se ha realizado mediante el software comercial Abaqus/Standard. Se han utilizado elementos sólidos (C3D8R) con integración reducida para evitar el bloqueo por cortante y con control del hourglass.

Se han modelado tres partes: tornillo, placa de carga y pilar. La placa de carga se usa solamente para la aplicación del desplazamiento su rigidez es alta debido a que tiene un espesor de 60 mm. Las arandelas se han modelado solidarias a la tuerca y a la cabeza del tornillo para simplificar el conjunto. Debido a la simetría de los especímenes modelados sólo es necesario modelar un cuarto del espécimen.

Se ha realizado análisis estático con material y geometría no lineal realizando un control por desplazamiento. Las características de los materiales han sido introducidas mediante tensión deformación verdaderas obtenidas de los ensayos de material del perfil. Los tornillos y tuercas han sido modelados con las características nominales del material. Se selecciona el criterio de plastificación de Von Mises.

En la modelización del contacto entre las superficies como pilar-tornillo, pilar-placa y placa-tornillo se utiliza un contacto duro para obtener un comportamiento lo más realista posible. Por lo tanto en este modelo tiene 5 contactos entre sus 3 partes.

Se ha realizado un estudio de convergencia de la discretización del mallado del pilar, tornillo y placas de carga buscando el número y tamaño ideal de los elementos en las partes modeladas. Las alas del pilar están sometidas principalmente a flexión, mientras que el alma del pilar está sometida principalmente a esfuerzo axial. La discretización del tornillo también es importante para la simulación de las tensiones en los elementos en contacto. En la Figura 3 se muestra la discretización del modelo completo donde se observan las distintas densidades de mallado utilizado.

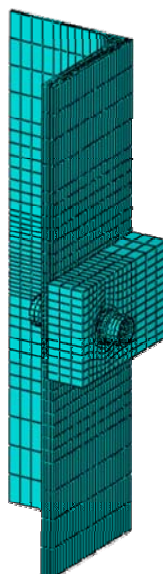


Figura 3. Modelo de elementos finitos

#### IV. Curvas fuerza-desplazamiento: Ensayos versus MEF

En esta sección se presentan las curvas obtenidas de los ensayos de laboratorio y de los modelos de elementos finitos. La comparación se establece en términos de fuerza desplazamiento del T-stub. En esta comparación se tiene en cuenta los resultados de los 2 sensores de hilo para minimizar el efecto de las posibles asimetrías mediante la comparación con la media de las medidas.

En las Figs. 4 y 5 se comparan las curvas fuerza desplazamiento obtenidas en los ensayos de igual geometría. De esta comparación se deduce que los especímenes se han comportado de forma muy similar, dado que las curvas se superponen en la zona elástica y plástica.

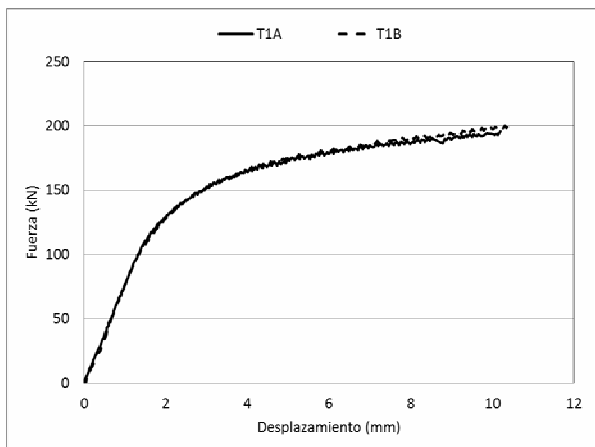


Figura 4. Curvas fuerza desplazamiento de los ensayos T1

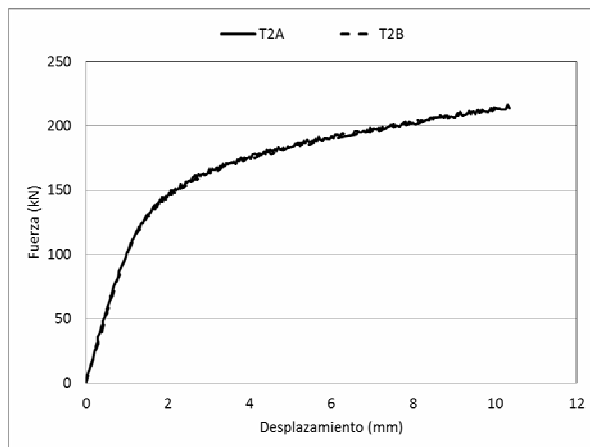


Figura 5. Curvas fuerza desplazamiento de los ensayos T2

En las Figs 6 y 7 se comparan las curvas fuerza desplazamiento de los ensayos y los modelos de elementos finitos, obteniendo una gran correlación tanto en la zona elástica como en la zona plástica de la curva.

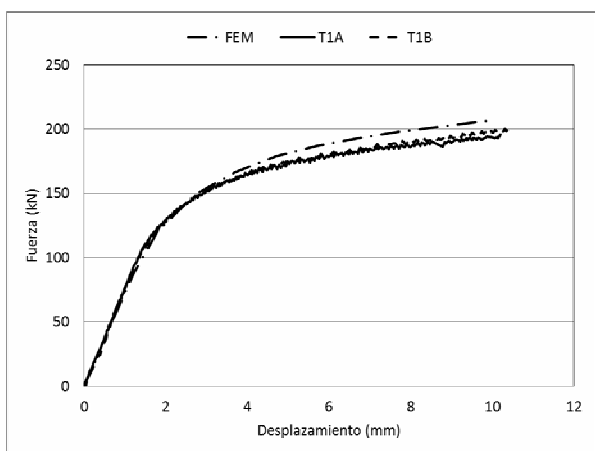


Figura 6. Curvas fuerza desplazamiento de los ensayos T1 y del FEM

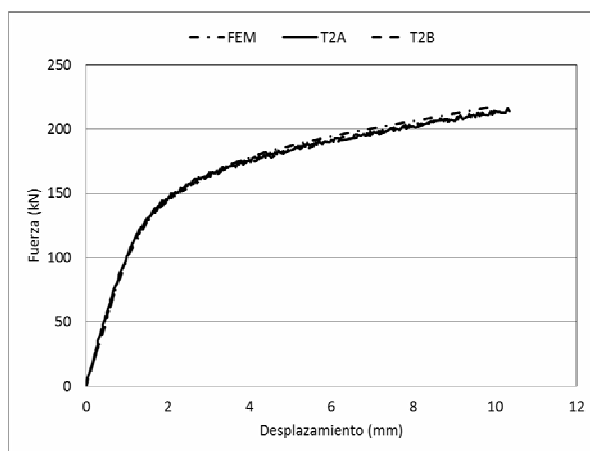


Figura 7. Curvas fuerza desplazamiento de los ensayos T2 y del FEM

En las Figs. 8a y 9a se representa un diagrama de tensiones de Von Mises de los especímenes, donde se observan concentraciones de tensión en la zona del tornillo y en la zona del radio de acuerdo del perfil.

En las Figs 8b y 9b se representan las curvas fuerza deformación de las galgas extensiométricas. Las galgas tipo 1 y 2 que estaban duplicadas tienen un comportamiento muy similar, por lo que se deduce que los 2 T-stub de cada espécimen han tenido un comportamiento simétrico. La galga tipo 4 que estaba colocada en el centro del alma del perfil se comporta de forma elástica durante todo el ensayo.

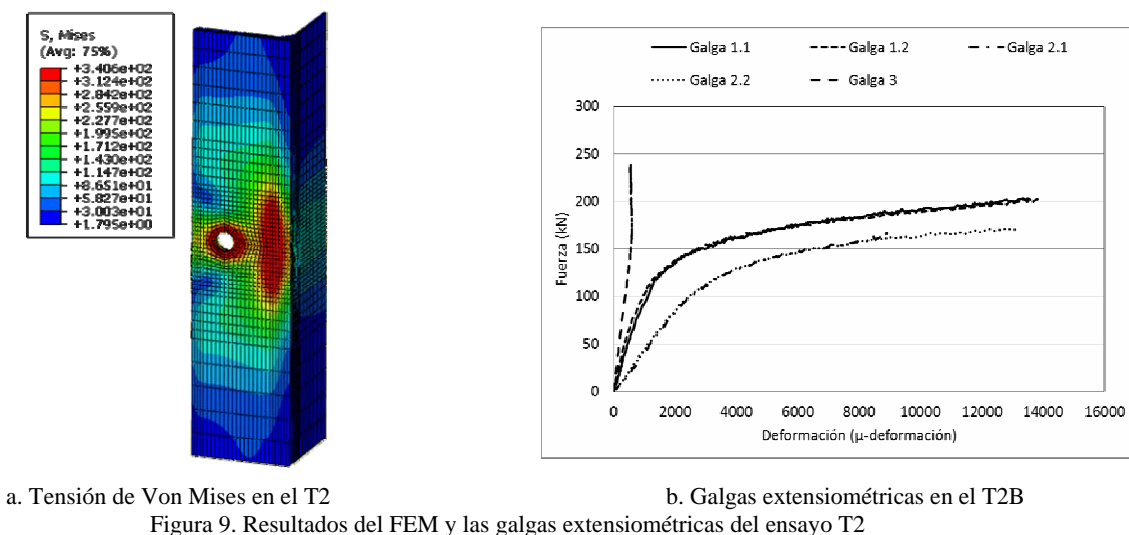
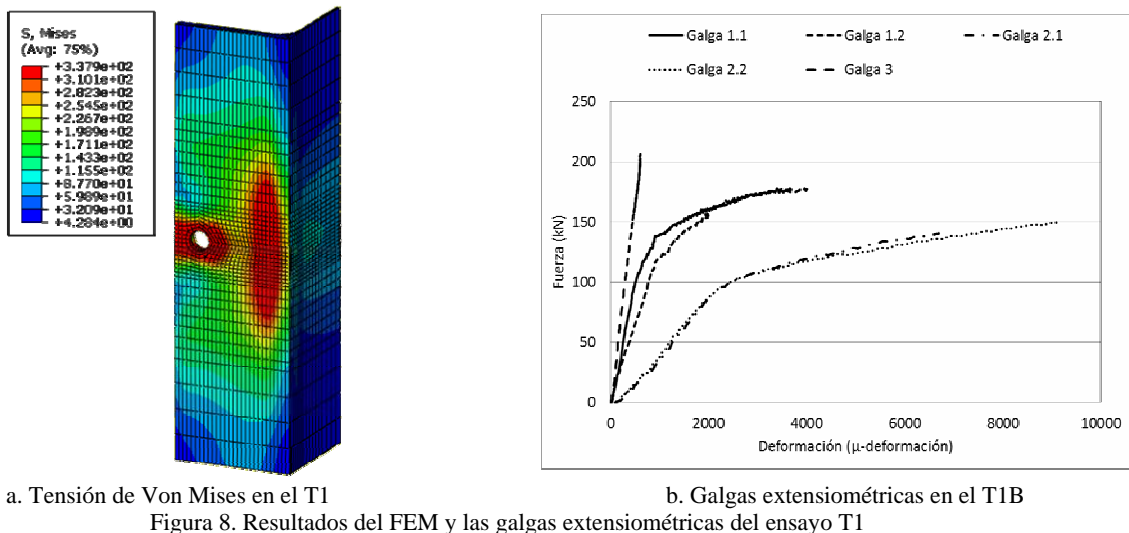


Tabla 3. Comparación de la rigidez de los ensayos en (kN/mm)

Ensayo	$K_{\text{Ensayo}}$	$K_{\text{FEM}}$	Error (%)
T1A	76	73	-5.0
T1B	76	73	-5.3
T2A	110	103	-6.6
T2B	104	103	-1.2

En la Tabla 3 se compara la rigidez inicial de los ensayos de laboratorio con la de los modelos de elementos finitos obteniendo un error medio del -4.53% y un error máximo del -6.6%.

## V. Conclusiones

En este artículo se ha estudiado el comportamiento del T-stub mediante ensayos de laboratorio y modelos de elementos finitos de los que se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Se han realizado 4 ensayos de laboratorio con 2 geometrías diferentes, obteniendo los mismos resultados en los ensayos de la misma geometría.
- Se han desarrollado modelos de elementos finitos predicen correctamente el comportamiento elástico y plástico de los especímenes ensayados.
- Los modelos de elementos finitos permitirán un análisis paramétrico del componente T-tub.



## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo financiero del Ministerio de Ciencia e Innovación por medio del proyecto de investigación BIA2010-20839-C02-01.

## Bibliografía:

- [1] EUROCODE 3. Design of steel structures-part 1.8: design of joints CEN. Brussels; 2005.
- [2] Yee, Y.L.; Melchers, R.E.: Moment-rotation curves for bolted connections. *Journal of Structural Engineering*, ASCE 112 (1986) 615-635.
- [3] Jaspert, J.P. 1991. Etude de la semi-rigidite des noeuds poutre-colonne et son influence sur la resistance et la stabilite des ossatures en acier. Ph.D.thesis. Belgium: University of Liege. (1991).
- [4] Weynand, K; Jaspert, J.P.; Steenhuis, M.; The stiffness model of revised annex J of Eurocode 3. *Connections in Steel Structures III* (1995).
- [5] Zoetemeijer, P: A design method for the tension side of statically loaded bolted beam-to-column connections. *Heron*, 20(1) (1974) 1–59.
- [6] Bursi, O.S.; Jaspert, J.P.: Benchmarks for finite element modeling of bolted steel connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 43(1-3) (1997) 17–42.
- [7] Faella, C.; Piluso, V.; Rizzano, G.; *Structural steel semirigid connections: theory, design and software*. Vol. 1. Boca Ratón, Florida (EEUU): CRC Publishers. (2000).
- [8] Swanson, J.A.; Leon, R.T.: Bolted steel connections: Tests on T-stub components. *Journal of Structural Engineering*, 126(1) (2000) 50–56.
- [9] Girao Coelho, A.M.; Bijlaard, F.S.K.; Gresnigt, N.; Simoes da Silva, L.: Experimental assessment of the behaviour of bolted T-stub connections made up of welded plates. *Journal of constructional Steel research*, 60(2) (2004) 269–311.
- [10] Krishnamurthy, N.; Graddy, D.E.: Correlation between 2-and 3-dimensional finite element analysis of steel bolted end-plate connections. *Computers & Structures*, 6(4-5) (1976) 381–389.
- [11] Sherbourne, A.N.; Bahaari, M.R.; Finite element prediction of end-plate bolted connection behavior. I: parametric study. *Journal of the Structural Engineering* 123 (2) (1997) 157–164
- [12] Swanson, J.A.; Kokan, D.S.; Leon, R.T.: Advanced finite element modeling of bolted T-stub connection components. *Journal of Constructional Steel Research*, 58(5) (2002) 1015–31.
- [13] Loureiro, A.; Gutiérrez, R.; Reinoso, J.M.; Moreno, A.: Axial stiffness prediction of non-preloaded T-stub: Analytical frame approach. *Journal of the Structural Engineering* 66 (2010) 1516–1522.

## **Análisis límite de estructuras de fábrica como problema de contacto unilateral: resolución por el método de Monte Carlo.**

*Magdalena Layos, Fernando.*<sup>1,2</sup>; *Hernando García, José Ignacio.*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>*Departamento de construcciones arquitectónicas. EUATM.UPM.* <sup>2</sup>*Departamento de estructuras de edificación . ETSAM.UPM*  
*fernando.magdalena@upm.es, joseignacio.hernando@upm.es*

---

### **Resumen**

Se propone, como fundamento para posteriores análisis por métodos probabilísticos menos costosos computacionalmente, una simulación por el Método de Monte Carlo de estructuras antiguas de fábrica modeladas en forma de problema de contacto unilateral con rozamiento entre cuerpos rígidos.

### **Palabras clave**

Monte Carlo, rozamiento, contacto unilateral.

### **I. Introducción:**

La evaluación de la seguridad de las estructuras antiguas de fábrica es un problema abierto. El material es heterogéneo y anisótropo, el estado previo de tensiones difícil de conocer y las condiciones de contorno inciertas. Una de sus características distintivas es su carácter "unilateral", es decir, su escasa o nula resistencia a tracción frente a su elevada resistencia a compresión.

Es un hecho conocido que el colapso de este tipo de estructuras no se produce al alcanzarse, en uno o varios puntos, las tensiones máximas de resistencia a tracción. Por el contrario, al producirse la consecuente fisuración, el material pasa de su comportamiento inicial quasi-frágil a otro que puede considerarse dúctil. Es esta fisuración, real o virtual, la que confiere al material la ductilidad que permite aplicarle los métodos del Análisis Límite [1]. A comienzos de los años 50 [2] se demostró que el análisis límite era aplicable a este tipo de estructuras, considerándose como una herramienta adecuada, ya sea de modo autosuficiente o, simplemente, como una primera aproximación [3].

Por otro lado, esta nueva caracterización del material fábrica (como un conjunto de cuerpos separados por fisuras, reales o virtuales, y en contacto unilateral) implica que no puedan ignorarse las características especiales del comportamiento a rozamiento por deslizamiento, para el cual está demostrado [4] que puede dar lugar a problemas inconsistentes. Éstos pueden no tener solución o tener múltiples soluciones.

En los casos en los que no se produce deslizamiento, la aplicación de los teoremas del análisis límite estándar constituye una herramienta formidable por su simplicidad y robustez. No es necesario conocer el estado real de tensiones, basta con encontrar cualquier solución de equilibrio y que satisfaga las condiciones de límite del material, para saber con seguridad que su carga será igual o inferior a la carga real de inicio de colapso (teorema estático). Además, esta carga de inicio de colapso es única (teorema de la unicidad) y se puede obtener como el óptimo de uno cualquiera entre un par de programas matemáticos convexos duales.

Sin embargo, cuando puedan existir mecanismos de inicio de colapso que impliquen deslizamientos, cualquier solución debe satisfacer tanto las restricciones estáticas como las cinemáticas así como un tipo especial de restricciones disyuntivas, que ligan las anteriores y que pueden plantearse como de complementariedad. En este último caso, el Problema de Complementariedad resultante no presenta características especiales que permitan asegurar la existencia de una solución única, por lo que es necesaria la búsqueda de otros métodos para tratar la incertidumbre asociada a su multiplicidad.

En los últimos años esta búsqueda se ha centrado en encontrar un mínimo absoluto por debajo del cual el colapso sea imposible. Este método es fácil de plantear desde el punto de vista matemático, pero intratable computacionalmente debido a las restricciones de complementariedad (1), que no son ni convexas ni suaves.

$$0 \leq \mathbf{y} \perp \mathbf{z} \geq 0 \quad (1)$$

El problema de decisión resultante es de complejidad computacional No determinista Polinomial - completo (**NP-completo**) y el problema de optimización global **NP-difícil**. Además, en tanto no se demuestre la existencia de un principio de máximo o mínimo, existen dudas en relación a que el esfuerzo empleado en aproximar este mínimo esté justificado.

Está fuera de lugar recurrir a la vía experimental, para constatarlo, en el caso de las construcciones históricas. Como alternativa, el presente trabajo propone, sobre ejemplos sencillos y aprovechando las especiales características de las restricciones de complementariedad (que escritas en forma bilineal son del tipo (2)), hallar la distribución de frecuencias de las acciones desestabilizantes para todas las soluciones de inicio de colapso posibles.

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0 ; \mathbf{y} \geq \mathbf{0} ; \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (2)$$

Para ello, se realiza un muestreo de soluciones [5][6] mediante el método de Monte Carlo, comprobando previamente su exactitud utilizando como contraste un método exacto de computación de politopos [7].

El objetivo final es plantear hasta qué punto está justificada la búsqueda del mínimo absoluto y proponer un método alternativo de evaluación de la seguridad basado en probabilidades.

## II. Exposición:

Se propone modelar una junta continua mediante su discretización en múltiples apoyos (Fig. 1). Cuando el contacto es perfecto, éste se produce en todos los apoyos. Cuando es imperfecto, sólo se producirá en algunos, llegando, en el caso extremo de máxima imperfección, a producirse en un único apoyo. Todos los casos posibles se encuentran entre ambos extremos.

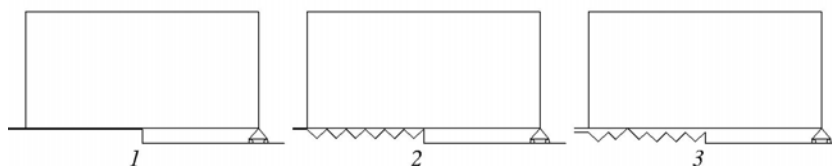


Figura 1. Discretización de una junta mediante múltiples puntos de contacto.

Se pretende obtener la totalidad de las soluciones de inicio de colapso posibles, correspondientes a un mecanismo determinado, con el fin de estudiar la distribución de los valores de las acciones desestabilizantes correspondientes.

De modo muy sintético, una solución de inicio de colapso es la que cumple las restricciones (3).

$$\mathbf{y} \in \{E_y\} ; \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \perp \mathbf{z} \geq \mathbf{0} ; \mathbf{z} \in \{K_z\} \Leftrightarrow \mathbf{y} \in \{E_y\} ; \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0 ; \mathbf{z} \in \{K_z\} \quad (3)$$

Que se interpreta del siguiente modo: debe ser una solución estática válida,  $\mathbf{y} \in \{E_y\}$ , debe ser una solución cinemática válida,  $\mathbf{z} \in \{K_z\}$ , y deben cumplirse las condiciones de contacto unilateral entre ambas, que pueden

escribirse en forma de restricción de complementariedad  $\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \perp \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$  o, teniendo en cuenta que las soluciones estática y cinemática se han formulado en función de dos vectores positivos  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ , escribirse en forma bilineal  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0$ .

Las especiales características de las restricciones que gobiernan el problema (2) hacen que, una vez elegida de algún modo una parte de la solución y sustituida en el problema original, éste se convierta en lineal, quedando reducido a un sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales. En el presente caso, eligiendo un mecanismo de inicio de colapso  $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$ , el problema queda reducido a (4).

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}' \Rightarrow \mathbf{y} \in \{E_y\} ; \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}' = 0 \quad (4)$$

En el primer ejemplo que se va a analizar, se somete a la acción desestabilizante de una fuerza externa horizontal  $f$ , que provocará su fallo por deslizamiento hacia la derecha, a un cuerpo (Fig. 1) apoyado, en el lado izquierdo, sobre una junta de contacto con rozamiento discretizada del modo descrito, y, en el lado derecho, sobre un apoyo deslizante.

Representando el mecanismo de colapso por medio de sus restricciones estáticas (de cedencia) equivalentes, a saber, haciendo que la relación entre tangencial, opuesto al deslizamiento, y normal alcance en todos los puntos de contacto el valor del coeficiente de rozamiento del material, se pueden escribir las ecuaciones estáticas, de equilibrio y de cedencia, del problema.

Planteadas las ecuaciones de equilibrio para el caso de  $n+1$  apoyos (Fig. 2), se comprueba que incluso para  $n=1$ , es decir, con dos apoyos con rozamiento en el lado izquierdo, el problema está indeterminado.

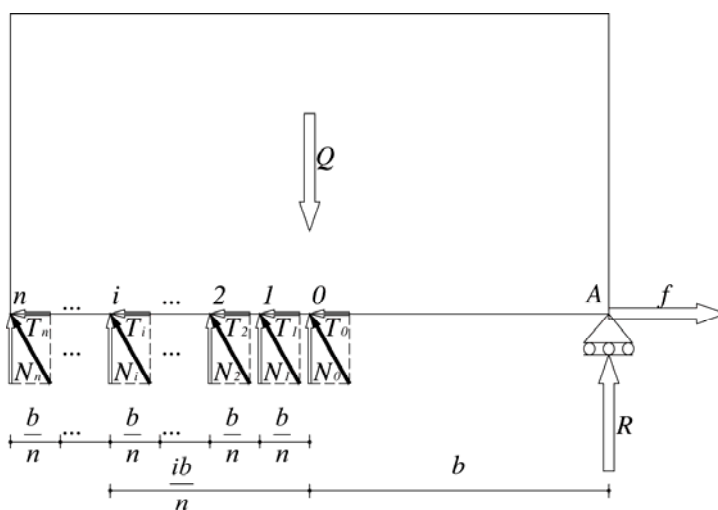


Figura 2. Diagrama de sólido libre (de fuerzas) para una solución estática extrema correspondiente a un mecanismo.

Expresado en forma clásica, como un problema de estática, mediante las ecuaciones de equilibrio en las cuales se han sustituido los valores límites de las restricciones de cedencia, y después de operarlo, se reduce a un sistema de desigualdades (5).

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{n} N_i \geq 0 ; Q - \sum_{i=1}^n (1 + \frac{i}{n}) N_i \geq 0 ; N_i \geq 0 \quad \forall i | i=0..n \quad (5)$$

Cada desigualdad divide el espacio en dos semiespacios, en uno de los cuales se cumple la desigualdad y en el otro no. El conjunto de todas las desigualdades define un cuerpo poliédrico convexo, en el interior del cual se cumplen todas ellas y que, por tanto, contiene todas las soluciones de inicio de colapso para el mecanismo en estudio. Si el cuerpo es cerrado recibe el nombre de politopo.

Llamando  $\phi$  a la  $\tan \varphi$ , siendo  $\varphi$  el ángulo de rozamiento (en seco, estático de Coulomb) se puede escribir  $f$  :

$$f = \phi(Q - \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} N_i) \quad (6)$$

En el caso en que  $n=1$  el problema es representable gráficamente, lo que permite mostrar la distribución de los valores de la fuerza desestabilizante  $f$  (Fig. 3). En ella se puede apreciar como una de las desigualdades es redundante y no interviene en la definición del poliedro. En el caso en que  $n=1$  el poliedro es un polígono, concretamente un triángulo que es el politopo más simple posible en dos dimensiones.

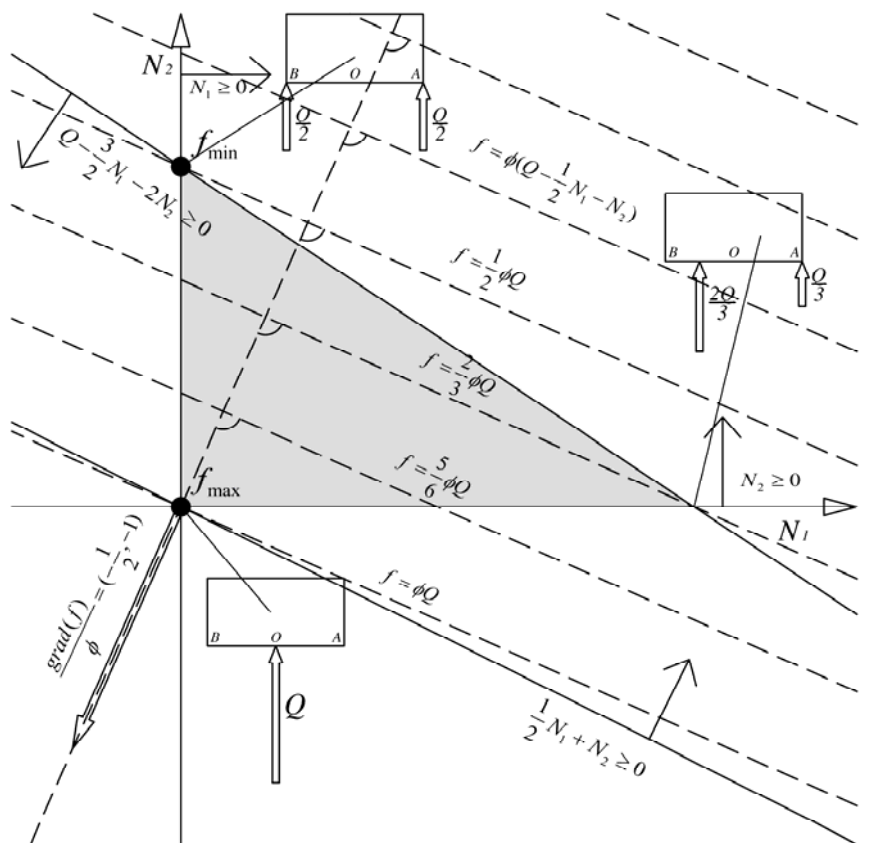


Figura 3. Conjunto de soluciones de inicio de colapso para el caso de dos apoyos con rozamiento y uno deslizante.

Al politopo más simple posible en  $n$  dimensiones se le llama simplex y tiene que estar definido por  $n + 1$  desigualdades que cumplan ciertas condiciones, entre ellas, que el número de restricciones que se corten en un vértice sea el mínimo estrictamente necesario para definirlo, es decir,  $n$ . Para generalizar los razonamientos a  $n$  dimensiones basta sustituir en la argumentación los triángulos por simplex  $n$ -dimensionales.

Definimos como probabilidad de inicio de colapso para una acción dada, la relación entre la cantidad de soluciones para las que el colapso se inicia con una acción menor o igual que la dada y la cantidad total de soluciones de inicio de colapso. En la figura 4 se representan estas cantidades para el caso en que la acción valga  $f = \frac{5}{6} \phi Q$ .

Las cantidades, que de modo general llamamos volúmenes, aunque en el presente caso son superficies, pueden obtenerse por métodos exactos. En este caso por triangulación (Fig. 4) y en el caso  $n$ -dimensional por descomposición en simplex  $n$ -dimensionales. De esta forma se ha realizado, empleando el software VINCI [8] para computación exacta del volumen de un politopo. Sin embargo, el uso de estos métodos está restringido a casos con un pequeño número de dimensiones.

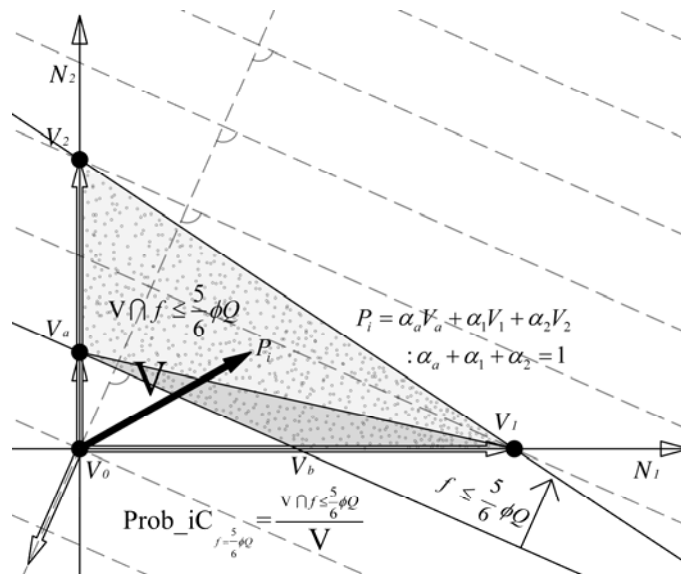


Figura 4. Procedimiento de obtención de un muestreo uniforme sobre un polígono y la correspondiente distribución de probabilidades.

También pueden obtenerse los volúmenes, y es especialmente apropiado en los casos de muchas dimensiones, por el método de Monte Carlo. Así se ha realizado (para el caso en que  $n=10$ ), utilizando el procedimiento que se describirá más adelante, y se han comparado los resultados con los obtenidos por el método exacto, comprobando que a efectos prácticos son indistinguibles.

Una vez comprobada su equivalencia, se realiza un muestreo directo de los valores de las acciones desestabilizantes  $f$  mediante el procedimiento que se describe a continuación.

Tanto en el procedimiento exacto como en el de Monte Carlo, el primer paso consiste en hallar los vértices del polígono. En el presente trabajo esto se hace de modo determinista. A partir de estos vértices se obtendrán los puntos del polígono que constituirán la muestra.

El método más clásico de muestreo por Monte Carlo, conocido como método de rechazo, consiste en hacer un muestreo uniforme sobre un ortoedro que circunscriba al cuerpo, rechazando los resultados que no estén incluidos en el propio cuerpo. Este método no es viable, dado que la relación entre el volumen de un simplex y el del paralelepípedo circunscrito es de  $1/n!$ , esto significa que en el caso de comprobación estudiado con  $n=10$  se admitiría un resultado de cada 3.628.800, por tanto, debe implementarse otro método.

Todo punto sobre el que se va a realizar la muestra valores de  $f$ , mediante la aplicación de la fórmula (6), debe pertenecer al polígono. Un punto pertenece al polígono cuando su vector de posición es una combinación lineal convexa de los de sus vértices,  $P_i = \alpha_a V_a + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots : \alpha_a + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots = 1$ , (Fig. 4).

Quedan por elegir los coeficientes  $\alpha_a, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  de modo que la distribución resultante sea uniforme. Para ello se aprovecha [5] una propiedad de los estadísticos de orden de una distribución uniforme sobre el intervalo  $[0,1]$ . El algoritmo que implementa los dos últimos pasos descritos se detalla a continuación.

- 1º Sea  $p_0 = 0$  y  $p_{n+1} = 1$
- 2º Generar  $n$  extracciones aleatorias uniformemente distribuidas del intervalo cerrado  $[0,1]$
- 3º Ordenar en orden ascendente los  $n+2$  puntos  $p_0, \dots, p_{n+1}$
- 4º Los  $n+1$  coeficientes del vector de posición  $(a_0 V_0, a_1 V_1, \dots, a_n V_n)$  del punto buscado del polígono vendrán dados por  $a_i = p_{i+1} - p_i$

Aplicando el procedimiento descrito, en el caso de junta perfecta y para diferentes valores de  $n$ , se comprueba (Fig. 5) que conforme aumenta el número de puntos de contacto disminuye la varianza de los valores de la muestra obtenida.

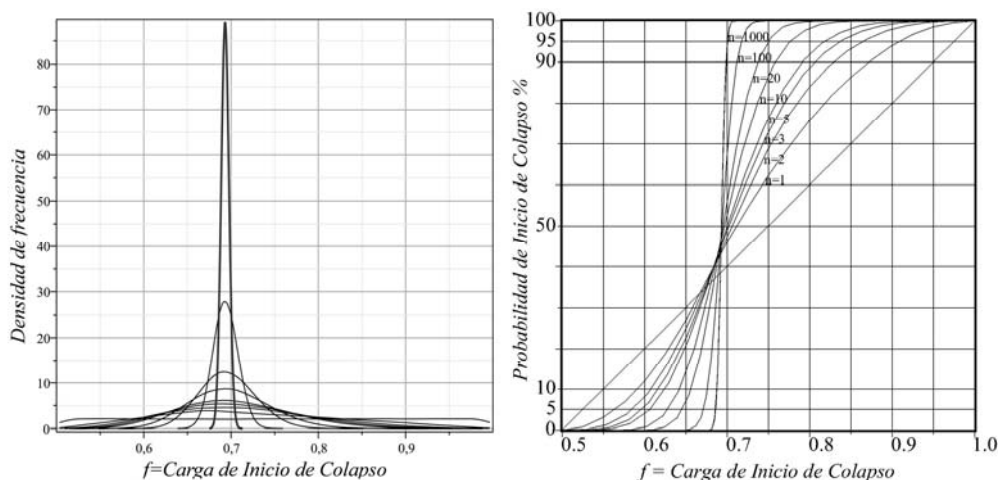


Figura 5. Funciones de distribución y acumulada de frecuencias, de la acción desestabilizante, para distintos valores de  $n$ .

Aplicando los procedimientos descritos se hallan las distribuciones de frecuencia (Fig. 6) de los puntos de paso de la resultante (Fig. 6 izquierda) y de los valores de la acción desestabilizante (Fig.6 derecha). En ambos casos, la curva señalada con 2 corresponde al caso de junta perfecta y la señalada con 3 al de extremadamente imperfecta.

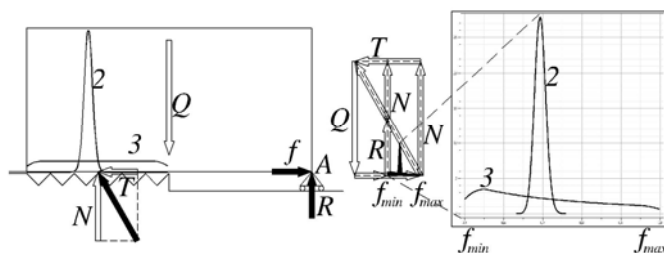


Figura 6. Distribuciones de frecuencias de los puntos de paso de la reacción de contacto, y de las acciones desestabilizantes.

Se puede comprobar, así mismo, que las soluciones, en el caso de junta absolutamente imperfecta, coinciden con los vértices del poliedro, que a su vez coinciden con los casos en que hay contacto en un único punto de cada cara de contacto. Aprovechando este hecho, se pueden obtener directamente las soluciones extremas, es decir, los vértices del poliedro de soluciones de colapso, tal y como se va a hacer en el siguiente ejemplo.

Éste, que puede representar razonablemente el efecto de la traba, al que Rankine denominó "tenacidad friccional", estudia las relaciones de contacto entre dos o tres bloques y, en concreto, la resistencia a su separación horizontal (a "tracción") sujetos a las sollicitaciones transmitidas por el peso de un bloque superior, que actúan en sentido perpendicular a la acción desestabilizante (Fig. 7).

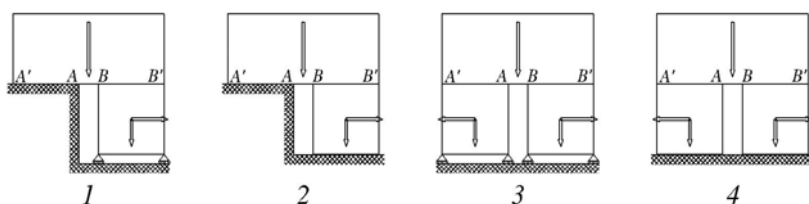


Figura 7. Diferentes casos de estudio para el modelo de traba.

Con carácter previo, es necesario comprobar cuantas de estas caras de contacto son "independientes", es decir, en cuantas de ellas se pueden elegir, aleatoriamente, los puntos de paso de su resultante. Como se observa (Fig. 8 derecha) una vez elegido el punto de paso y el valor de la resultante en la cara superior, quedan determinados ambos en la cara inferior. De ello se deduce que el muestreo puede realizarse, exclusivamente, sobre las dos caras de contacto del bloque superior (Fig. 8 centro)

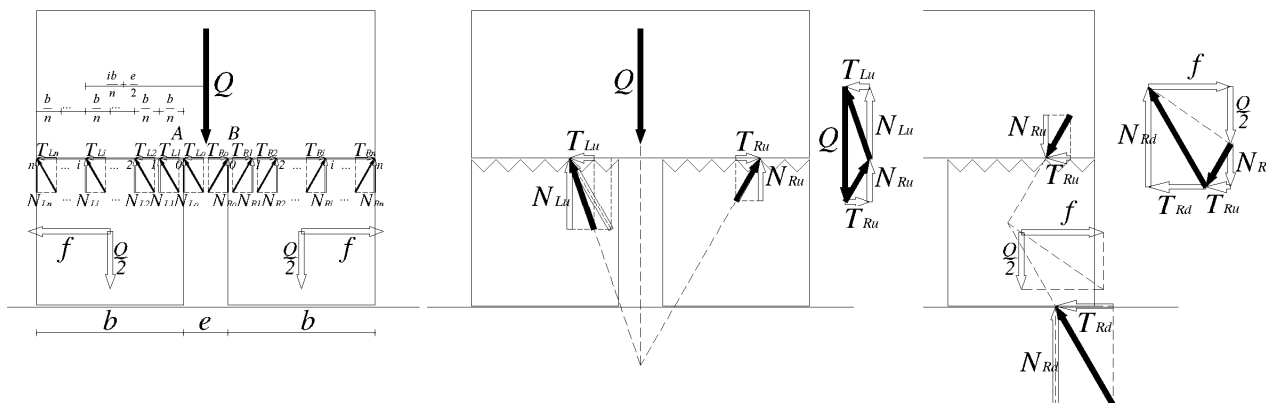


Figura 8. Diagramas de sólido libre (de fuerzas) para las soluciones estáticas extremas correspondientes a los tres mecanismos.

Puesto que los puntos extremos del politopo son aquellos en que todas las variables excepto una toman el valor 0, en este caso, para que pueda existir equilibrio en el bloque superior es necesario que al menos uno de los  $N_{Lj}$  y uno de los  $N_{Rk}$  sean estrictamente positivos. Esta condición puede escribirse:

$$\exists N_{Lj} > 0 \in \{N_{Lj} \mid j = 0 \dots n\} \quad \wedge \quad \exists N_{Rk} > 0 \in \{N_{Rk} \mid k = 0 \dots n\} \quad (7)$$

Los puntos extremos del politopo (soluciones extremas) serán aquellos en los que sólo uno de los  $N_{Lj}$  y uno de los  $N_{Rk}$  sean estrictamente positivos (Fig. 8 centro). Se pueden plantear directamente todas las combinaciones posibles. Siendo, para el caso en que el contacto se produce en el punto  $j$  de la junta izquierda y  $k$  de la junta derecha:

$$N_{Lj} \neq 0 ; N_{Li} = 0 \quad \forall i \neq j ; N_{Rk} \neq 0 ; N_{Ri} = 0 \quad \forall i \neq k \quad (8)$$

Estas combinaciones se pueden presentar en forma de matriz cuadrada de dimensión  $(n+1)$ . El número total de estas combinaciones es, por tanto,  $(n+1)^2$ . Desde el punto de vista computacional, obtener los términos de esta matriz, que contiene los valores de las soluciones correspondientes a los distintos valores de  $j, k$ , puede resolverse mediante dos bucles anidados.

Como parte de los resultados obtenidos, que se representan en la figura 11, se obtiene el mecanismo de inicio de colapso que corresponde a cada una de las soluciones. El presente ejemplo tiene tres posibles mecanismos de inicio de colapso por deslizamiento puro: deslizando el bloque inferior izquierdo, el inferior derecho o ambos a la vez.

Aplicando el método propuesto, se obtienen los siguientes resultados que muestran que los mecanismos o, más exactamente, las soluciones de inicio de colapso que corresponden a ellos no son igualmente probables. En primer lugar (tabla 1 izquierda), los resultados obtenidos para el caso de junta perfecta y una simulación de 10.000 ensayos. En segundo lugar (tabla 1 derecha), para el caso de junta absolutamente imperfecta y discretización en 2, 5, 10, 20, 50, 100 ...  $n$  puntos de contacto.

Contacto perfecto, muestra 10.000		Contacto absolutamente imperfecto (en un único punto)
-----------------------------------	--	---



izquierdo	simétrico	derecho	n	Izquierdo	simétrico	derecho	Nº vértices	Proporción		
								Izq./Sim./Der.		
5.048	0	4.952	2	3	3	3	9	1	1	1
5.030	0	4.970	5	15	6	15	36	2,5	1	2,5
4.915	0	5.085	10	55	11	55	121	5	1	5
5.041	0	4.959	20	210	21	210	441	10	1	10
4.975	0	5.025	50	1.275	51	1.275	2.601	25	1	25
5.006	0	4.994	100	5.050	101	5.050	10.201	50	1	50
			n	$\frac{n(n+1)}{2}$	n + 1	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(n+1)^2$	$\frac{n}{2}$	1	$\frac{n}{2}$

Tabla 1. Proporción de soluciones para cada mecanismo, casos de contacto perfecto y absolutamente imperfecto.

Para completar la exposición, se analiza otro modelo muy sencillo en el cual se han fijado las dimensiones para que las restricciones relativas al deslizamiento no sean las únicas que pueden alcanzar sus valores límites. Este caso fue estudiado por Fishwick [9] en su tesis doctoral, siendo éste uno de los motivos por lo cual se conoce el valor del mínimo absoluto de  $f$ . El modelo a analizar está representado en la figura 9 izquierda.

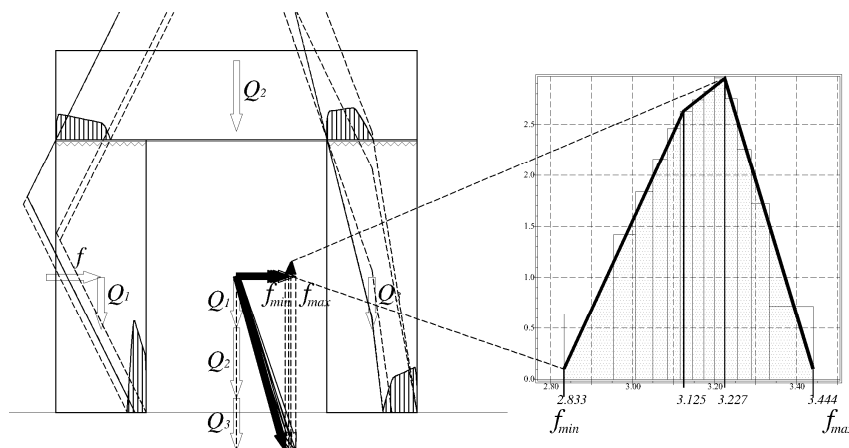


Figura 9. Funciones de distribución de los puntos de paso y de la acción desestabilizante, para el caso de máxima imperfección.

Al tratarse de un caso ya estudiado, se conoce que los posibles mecanismos de colapso por vuelco, aun cuando son válidos, no corresponden a soluciones estáticas válidas y, por tanto, no son de inicio de colapso. Restringiendo el análisis al único mecanismo de inicio de colapso válido, por deslizamiento del bloque izquierdo, en este caso debe completarse el procedimiento ya expuesto con una posterior etapa de rechazo de aquellas soluciones que incumplen la restricción de fallo por vuelco. Ejecutado el procedimiento para el caso de juntas imperfectas, por los motivos que se expondrán a continuación, se representan los resultados (Fig. 9). En el lado izquierdo se representan las distribuciones de los puntos de paso de las resultantes. Puede apreciarse que existen zonas de las caras de contacto por las cuales no pueden pasar las resultantes pues violarían la restricción de vuelco. En el lado derecho se representa la distribución de los valores de la acción desestabilizante  $f$ , coincidiendo los valores máximo y mínimo, respectivamente, con los que se obtienen aplicando el Análisis Límite Estándar y el procedimiento enumerativo de Fishwick. Puede observarse que ambos valores son extremadamente improbables.

Como último punto, queda por tratar el motivo por el cual se ha elegido el caso de junta absolutamente imperfecta, como más significativo, para presentar los resultados del caso anterior.

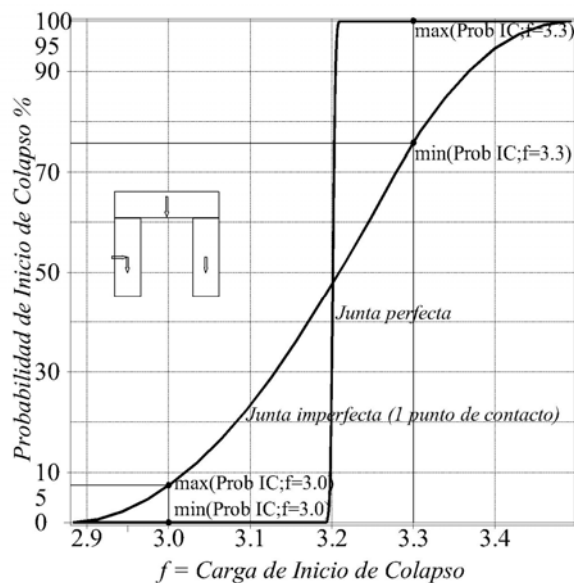


Figura 10. Comparación de las funciones de frecuencia acumuladas para el caso perfecto y absolutamente imperfecto.

Al decidir sobre la seguridad de una estructura, hay que tener en cuenta, no sólo la probabilidad de un suceso, sino también, las consecuencias que se derivan de éste. En los casos que generalmente preocupan, que son aquellos con menor carga de inicio de colapso, la distribución más desfavorable es la correspondiente a las soluciones extremas, es decir, a la junta absolutamente imperfecta (Fig. 10).

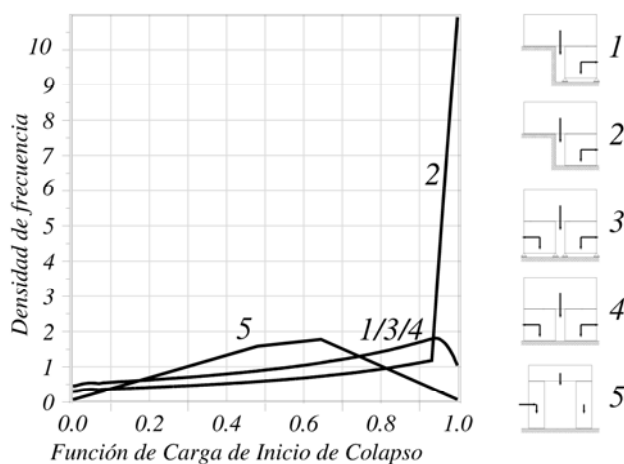


Figura 11. Comparación de las distribuciones de frecuencias para el caso absolutamente imperfecto sobre los distintos modelos.

De acuerdo a lo argumentado en el párrafo anterior, en la figura 11, se resumen los resultados obtenidos para las agrupaciones de dos o tres bloques, en el caso de junta absolutamente imperfecta.

### III. Conclusiones:

Para los casos estudiados, queda demostrado, por un lado, que no es posible determinar a priori la distribución de frecuencias de los valores de las acciones desestabilizantes, al menos en los casos de agrupaciones de pocos sólidos y, por otra parte, que los valores extremos son altamente infrecuentes en comparación con la gran cantidad de casos intermedios, y tanto más cuanto más perfecto y continuo es el contacto.

Los resultados obtenidos confirman el interés de profundizar en el desarrollo del nuevo método propuesto. Éste debe entenderse al nivel de investigación básica, es decir, su objetivo es obtener datos a partir de los cuales implementar otros métodos probabilistas menos costosos computacionalmente.

Uno de estos métodos menos costosos, que adopta, para la probabilidad de inicio de colapso, un enfoque de cota superior y, por tanto, seguro, se ha desarrollado en la tesis doctoral del primer autor [10] (Fig. 12)

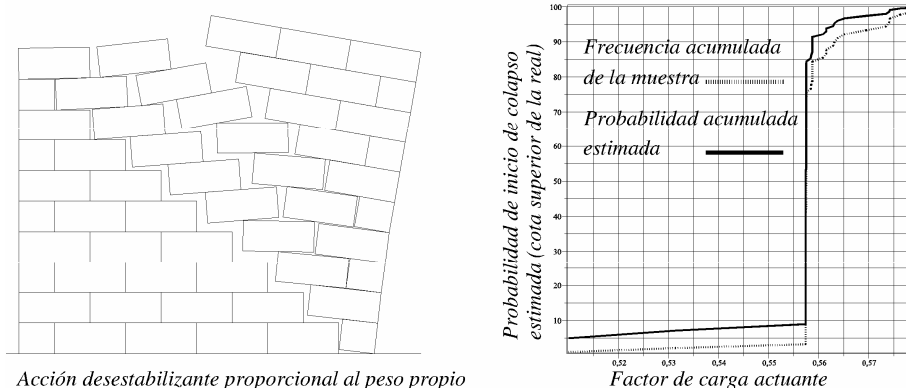


Figura 12. Ejemplo de aplicación de otros métodos probabilistas menos exactos pero menos costosos computacionalmente.

#### IV. Desarrollos:

El método propuesto, en su implementación actual, está limitado a ejemplos con pequeño número de caras en contacto. Esto se debe tanto a la obtención determinista de todas las posibles soluciones extremas (cuyo número viene fijado por  $n^c$ , siendo  $n$  el número de puntos de contacto en que se discretiza cada cara y  $c$  el número de caras de contacto "independientes"), como al creciente número de mecanismos de inicio de colapso posibles según aumenta el número de cuerpos en contacto.

Para el primer problema hay solución, y ya se está trabajando en ella, realizando también de modo probabilista la obtención de las soluciones extremas.

Para el segundo, puesto que se ha mostrado que no todos los mecanismos son igualmente probables, se está trabajando en métodos de muestreo, aplicables a casos de mayor tamaño, que cubran uniformemente el espacio de posibles soluciones y sean independientes de los mecanismos a los que corresponden estas soluciones.

#### Bibliografía:

- [1] Heyman, Jacques. The plasticity of unreinforced concrete. Morley symposium on concrete plasticity and its application. University of Cambridge (2007) 157-162.
- [2] Kooharian, Anthony. Limit Analysis of Voussoir (segmental) and Concrete Arches. Proceedings of American Concrete Institute (1952) vol 49-24, 317-328
- [3] Orduña, Agustín, Lourenço, Paulo B. Limit analysis as a tool for the simplified assessment of ancient masonry structures. Historical Constructions, P.B. Lourenço, P. Roca (Eds.) Guimarães (2001) 511-520
- [4] Painlevé, P. "Sur les lois du frottement de glissement" Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (1895) tome 121, pag 112 – 115.
- [5] Rubinstein, Reuven; Kroese, Dirk. *Simulation and the Monte Carlo Method*. 2nd Ed. Wiley (2008)
- [6] Devroye, Luc. *Non-Uniform Random Variate Generation* Springer-Verlag (1986)
- [7] Büeler, Benno; Enge, Andreas; Fukuda, Komei. "Exact Volume Computation for Polytopes: A practical Study". in: G. Kalai and G. Ziegler, Editors, Polytopes, Combinatorics and Computation DMV-Seminar vol. 29, Birkhauser Verlag (1998-2000)
- [8] Büeler, Benno; Enge, Andreas. VINCI version 1.0.5 Computing volumes of convex polytopes. Laboratoire d'Informatique École polytechnique 91128 Palaiseau France (2003) (bajo licencia GNU-GPL).
- [9] Fishwick, Rupert John. Limit análisis of rigid block structures. Ph.D. thesis. Department of Civil Engineering University of Portsmouth (1996).
- [10] Magdalena Layos, Fernando. El problema del rozamiento en el análisis de estructuras de fábrica mediante modelos de sólidos rígidos. Tesis doctoral. Universidad politécnica de Madrid (2013)

# Método de Aproximación Catenaria en el cálculo de estructuras antifuniculares

M. Cañete-Güeto<sup>1</sup>, E. Hernández-Montes<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Mecánica Estructural. Universidad de Granada  
Campus de Fuentenueva, E-18072 Granada (España). E-mail: cms@gmx.es

<sup>2</sup>Departamento de Mecánica Estructural. Universidad de Granada  
Campus de Fuentenueva, E-18072 Granada (España). E-mail: emontes@ugr.es

---

## Resumen:

Si se analizan las formas más habituales de estructuras antifuniculares tridimensionales, bóvedas y cúpulas, podemos distinguir la forma catenaria como parte integrante de todas ellas.

En este artículo, a través del que hemos denominado *Método de Aproximación Catenaria (MAC)*, es posible la obtención de las densidades de fuerza a partir de valores geométricos del diseño.

**Palabras clave:** Densidad fuerza, Estructuras Antifuniculares, Catenaria

---

## I. Introducción.

El cálculo de las estructuras de compresión o antifuniculares, como en el caso de las estructuras tensadas, se aborda resolviendo en primer lugar la forma de equilibrio del conjunto. A diferencia de las obras de ingeniería y arquitectura tradicionales, en estas tipologías estructurales la geometría inicial es una incógnita más del sistema y dependerá de las tensiones a las que estén sometidas. Si bien el diseñador podrá partir de una idea preconcebida, con unas formas y dimensiones aproximadas, no conocerá la geometría exacta del proyecto. Esta solución geométrica o forma de equilibrio coincidirá con la que presenta ausencia total de flexiones. El problema adquiere una mayor complejidad debido a que el diseño pasa a formar parte del cálculo estructural.

El Método de Densidad de Fuerzas (MDF) [1,2,3] es uno de los más utilizados en el cálculo de este tipo de estructuras. Permite obtener la forma de equilibrio de una tensoestructura o de una estructura antifunicular a partir de la resolución de un sistema de ecuaciones. El procedimiento puede resumirse en cuatro sencillos pasos:

### 1. Definición de la estructura de nodos-conexiones:

Es posible representar la estructura como una malla de nodos conectados entre sí a través de un número determinado de ramas dispuestas a criterio del calculista. Esta estructura de nodos-conexiones podrá adoptar múltiples formas en función del valor que adquieran los **VECTORES DE COORDENADAS**, formados por las coordenadas  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  de todos los nodos.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

De esta forma, algunas de las coordenadas serán conocidas al comienzo del procedimiento, cuando correspondan a nodos fijos, mientras que el resto serán incógnitas del sistema de ecuaciones.

Una parte esencial de este método consiste en definir la **MATRIZ DE CONECTIVIDAD "C"** que representa todas las conexiones entre los nodos.

Cada fila de esta matriz define una rama de la malla mientras que cada columna equivale a un nodo de la estructura. En cada fila "i" sólo existirán dos valores distintos de cero, con valor 1 o -1, que indicarán los nodos conectados por la rama i. Con el signo se define la dirección de la rama o conexión. De esta forma la matriz **C** tendrá tantas filas como ramas posea la malla y tantas columnas como nodos existan.

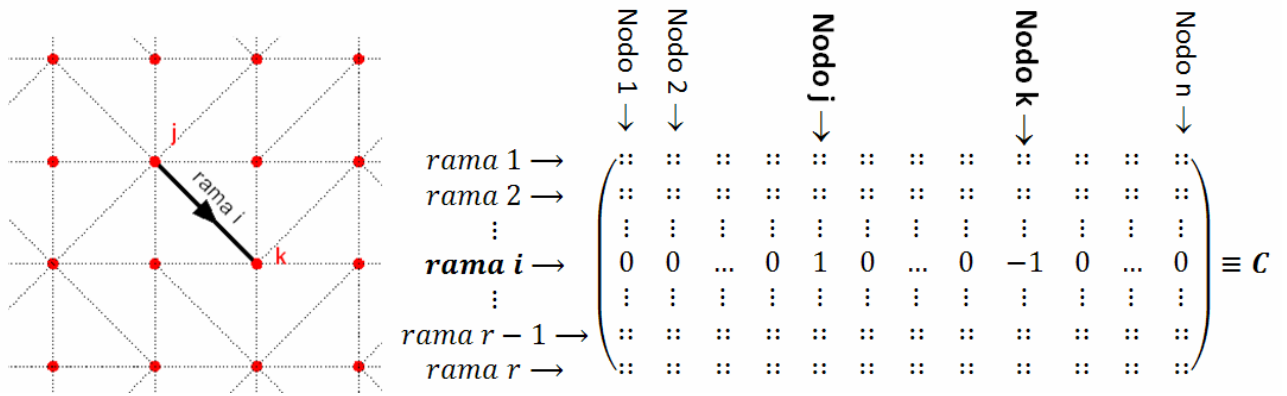


Fig. 1: Obtención de la Matriz de Conectividad “C”. Siendo n el número total de nodos y r el número total de ramas

**2. Obtención de las fuerzas externas:**

Las fuerzas externas se introducen como fuerzas puntuales aplicadas en cada nodo y se representan a través de los **VECTORES DE FUERZA**, formados por las componentes  $f_{xi}$ ,  $f_{yi}$ ,  $f_{zi}$  de las fuerza aplicadas a cada nodo:

$$\vec{f}_x = \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{x2} \\ \vdots \\ f_{xn} \end{pmatrix} ; \vec{f}_y = \begin{pmatrix} f_{y1} \\ f_{y2} \\ \vdots \\ f_{yn} \end{pmatrix} ; \vec{f}_z = \begin{pmatrix} f_{z1} \\ f_{z2} \\ \vdots \\ f_{zn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Uno de los mayores inconvenientes del método consiste en la necesidad de transformar a fuerzas nodales todas las fuerzas superficiales o de volumen que afectan a la estructura. Este tipo de fuerzas externas, como el viento o el peso propio, adoptarán diferentes valores en función de la forma de equilibrio alcanzada, lo que obliga a estimar una primera geometría. Posteriormente, una vez calculado el estado de equilibrio, es necesario volver a calcular corrigiendo las fuerzas nodales introducidas. Se trata por lo tanto de un procedimiento iterativo.

**3. Las densidades de fuerza:**

Se definen como la relación entre la fuerza de tracción o compresión “s” y la longitud “l” de cada conexión o rama.

Es decir, para cada rama i:

$$q_i = \frac{s_i}{l_i} \tag{3}$$

Así es posible definir la **MATRIZ DE DENSIDAD DE FUERZAS Q** como la matriz diagonal, de dimensión  $r \times r$ , formada por las densidades de fuerzas de todas las ramas:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_r \end{pmatrix} \tag{4}$$

**4. Resolución del sistema de ecuaciones del MDF**

Definidos estos vectores y matrices, las ecuaciones del Método de Densidad de Fuerzas expresan el equilibrio de las fuerzas nodales:

$$\begin{matrix}
 (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot x + f_x = 0 \\
 (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot y + f_y = 0 \\
 (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot z + f_z = 0
 \end{matrix} \tag{5}$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema lineal donde los valores conocidos son las coordenadas de los puntos fijos, los vectores de fuerza aplicados en los nodos y las densidades de fuerza de cada rama.

En resumen, a partir de las matrices definidas anteriormente (INPUTS) se obtienen las “n” incógnitas del sistema (OUPUTS) a partir de la resolución del sistema de ecuaciones anterior.



Fig. 2: Esquema de INPUTS - OUPUTS en el MDF

La potencia de cálculo informático disponible hoy en día ha permitido mejorar el MDF con la consideración del peso propio (PP) e implementarlo en un mismo algoritmo junto con técnicas de automallado como es el Mallado Topológico (MT) [4]. Este tipo de algoritmos MDF-MT-PP simplifican la introducción de los datos al poder generarse de forma automática la estructura de nodos-conexiones y al calcular directamente las fuerzas nodales correspondientes al peso específico del material. Por otra parte, con la consideración del peso propio, el sistema de ecuaciones que plantea el MDF pierde su linealidad con lo que no siempre existe una solución al problema.



Fig. 3: Esquema de INPUTS - OUPUTS en el MDF-MT-PP

El concepto de Densidad de Fuerza, adquiere así un papel fundamental en la forma de equilibrio obtenida. Partiendo de unas condiciones de contorno definidas y conocidas por el proyectista, este parámetro se convierte en la única incógnita a determinar. El resto de variables del sistema o bien resultan conocidas, como las coordenadas de los puntos de apoyo o el peso específico del material, o bien tienen una menor influencia en la forma de equilibrio obtenida, como la densidad de nodos empleada o la tipología de malla escogida. Para cada matriz de densidades de fuerza podrá existir una solución al problema y, en el caso de que esta exista, la forma de equilibrio alcanzada diferirá considerablemente de otra obtenida con una matriz de densidades de fuerza diferente. Ello obliga de nuevo a realizar un cálculo iterativo en el que una vez obtenida una primera solución o forma de equilibrio, es necesario modificar el valor de las densidades de fuerzas empleadas hasta conseguir la geometría deseada. Pero no resulta fácil relacionar el valor de las densidades de fuerza con la forma geométrica que se persigue. Para el diseñador se convierte en un procedimiento largo y complejo al tener que modificar multitud de valores hasta obtener una forma de equilibrio que aproxime el modelo inicial diseñado.

El presente artículo proporciona un método para obtener las densidades de fuerza en las estructuras clásicas de compresión, bóvedas y cúpulas, a partir de parámetros del diseño original. Previamente se ayudará a adquirir una mejor comprensión práctica de estos parámetros y su relación con la forma de equilibrio alcanzada.

## II.- La Densidad de Fuerza en estructuras antifuniculares

Para comprender el significado práctico de la densidad de fuerza y su relación con la geometría alcanzada, resulta útil establecer un símil entre dicho parámetro con la constante elástica de un muelle.

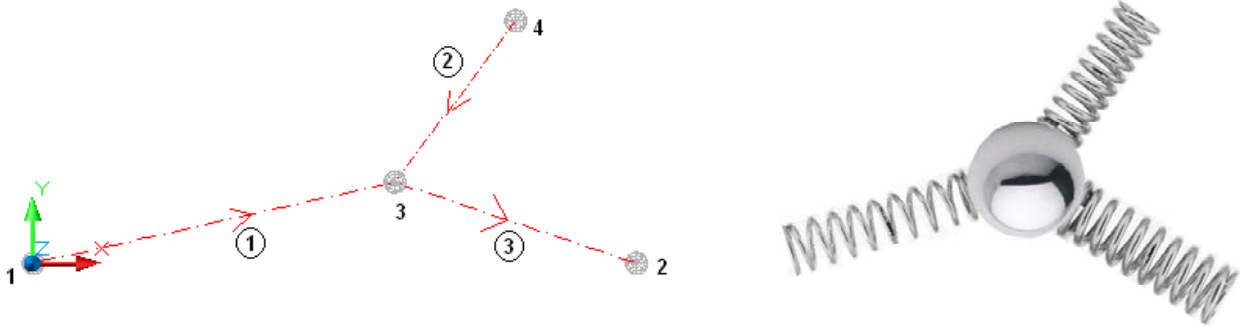


Fig. 4: Símil de una estructura simple de cuatro nodos, un nodo central libre y tres fijos, con un sistema de muelles y bolas.

Si se aumenta la densidad de fuerza de una barra en una estructura en equilibrio, conseguiremos acortar la longitud de dicha barra, pero al mismo tiempo se modificará la posición del resto de nodos de la estructura y cambiará sustancialmente la forma de equilibrio.

Una técnica para obtener estructuras simétricas con la forma deseada consiste en agrupar estas densidades de fuerza según pertenezcan a un anillo o a una conexión radial o de unión.

En las estructuras antifuniculares abiertas, tipo bóveda, el paralelismo de los anillos se puede conseguir utilizando las mismas densidades de fuerza en todas las ramas radiales y adoptando un valor cercano a cero para minimizar las tensiones en las mismas. La figura 5 muestra como se pierde este paralelismo de arcos al modificar un solo valor de densidad de fuerza radial.

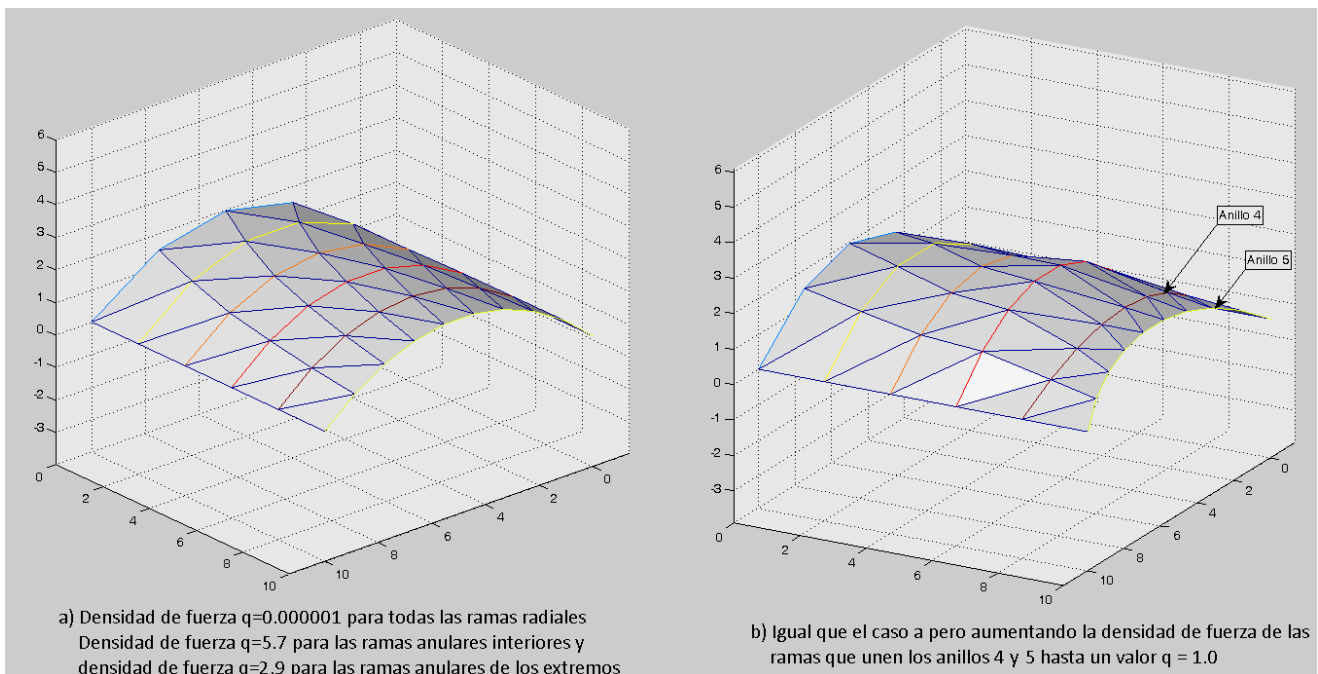


Fig. 5: Pérdida del paralelismo de los arcos con la modificación de las densidades de fuerza radiales

Por otra parte, modificando las densidades de fuerza de los anillos o arcos en las estructuras abiertas conseguiremos aumentar la altura de la bóveda. Para la densidad de fuerza de los arcos extremos, deberá adoptarse la mitad de la densidad de fuerza de los anillos centrales, puesto que estos últimos soportan el doble de peso.

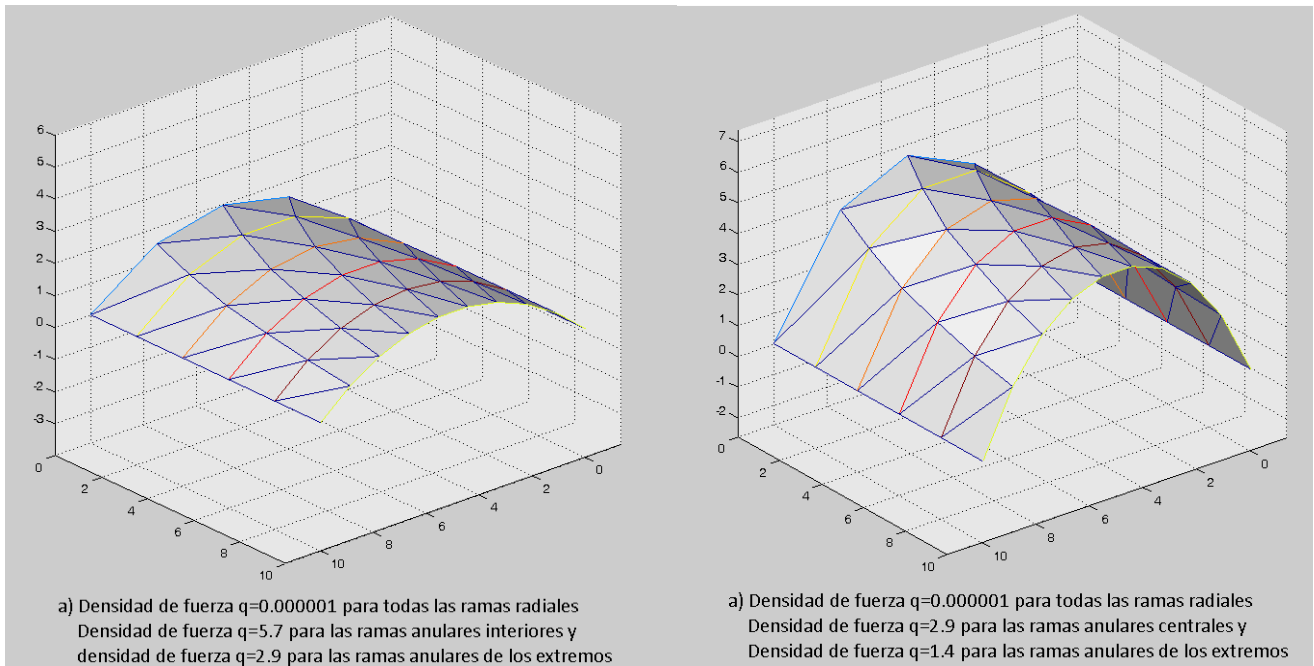


Fig. 6: Cambio de altura de los arcos con la modificación de las densidades de fuerza anulares.

Intuitivamente estos cambios pueden predecirse mediante el símil de bolas-muelles. No obstante las modificaciones en la geometría no son proporcionales a las variaciones de estos parámetros. Además pueden observarse otras pequeñas diferencias, más difíciles de comprender, que están relacionadas con la morfología del mallado utilizado.

Análogamente para las mallas cerradas, tipo cúpula, las ramas radiales son las que modifican la altura de la bóveda mientras que las ramas anilladas controlan la forma más o menos abierta de la cúpula sin afectar en gran medida su altura.

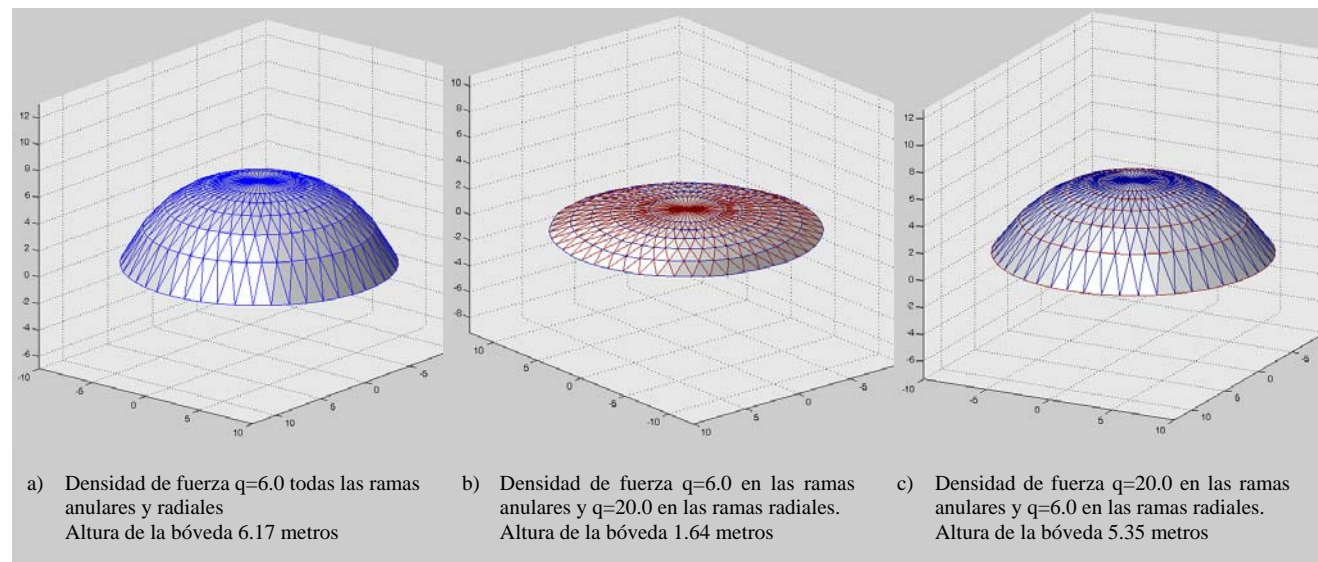


Fig. 7: Cambio de altura de la cúpula con la modificación de las densidades de fuerza.



### III. Método de Aproximación Catenaria.

Si se analizan diferentes estructuras de compresión tridimensionales, se pueden distinguir formas antifuniculares como partes integrantes de todas ellas. Incluso en muchos casos es posible generar las figuras espaciales con la simple traslación o giro de estas formas poligonales.

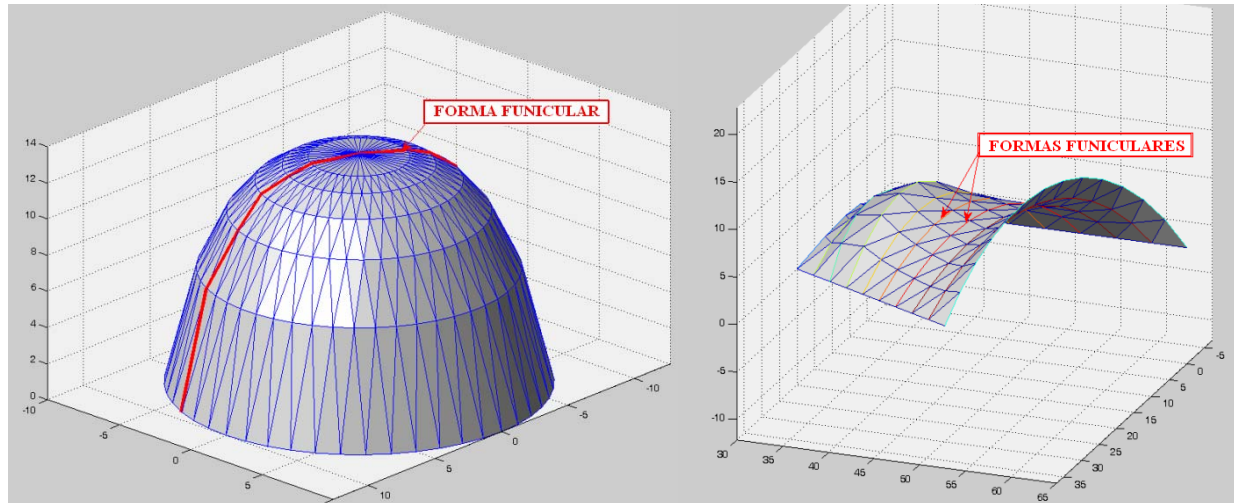


Fig. 8: Identificación de curvas funiculares en cúpulas y bóvedas (mallas cerradas y abiertas)

El **Método de Aproximación Catenaria** permite obtener las densidades de fuerza de estas formas antifuniculares mediante su aproximación a una curva catenaria de igual altura o longitud.

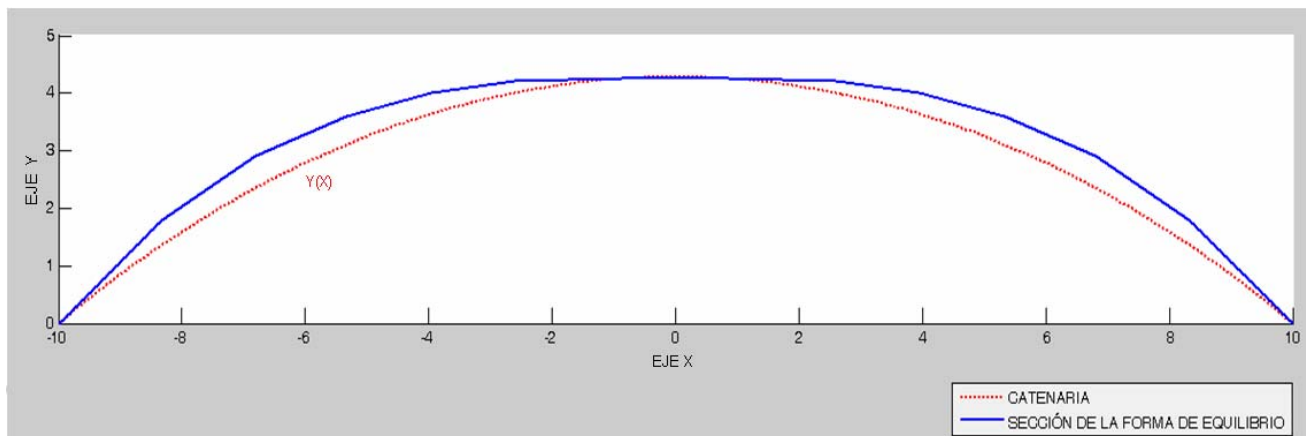


Fig. 9: Comparación de la sección radial de una cúpula antifunicular con la curva catenaria de igual altura

La ventaja de esta aproximación radica en que la ecuación matemática de la curva catenaria es conocida y puede obtenerse directamente a partir de valores geométricos como la longitud o la flecha en su punto medio. Estas ecuaciones, obtenidas en base al equilibrio de fuerzas horizontales y verticales, son las siguientes:

$$y(x) = \frac{T_0}{\lambda} \left\{ \cosh \left[ \frac{\lambda}{2T_0} \cdot (2x - a) \right] - \cosh \left[ \frac{\lambda a}{2T_0} \right] \right\} \quad (6)$$

$$h = \frac{T_0}{\lambda} \cosh \left[ \frac{\lambda a}{2T_0} \right] - \frac{T_0}{\lambda} \quad (7)$$

$$L = \frac{2T_0}{\lambda} \sinh \left[ \frac{\lambda a}{2T_0} \right] \quad (8)$$

siendo:

- $y(x)$  la flecha de la catenaria en el punto  $x$
- $T_0$  la tensión horizontal de la catenaria (igual en todos sus puntos)
- $\lambda$  el peso específico
- $a$  la distancia entre los dos extremos fijos de la catenaria.

La parte esencial del método consiste en calcular lo que denominaremos densidad de fuerza equivalente de la catenaria “ $q_e$ ”, (ecuación 9) que es el valor a adoptar para todas las barras incluidas en la sección funicular de la bóveda o cúpula. Posteriormente, utilizando el MDF y aplicando estas densidades de fuerza equivalentes, se obtendrá una forma de equilibrio con la altura o perímetro deseado.

Si se divide la proyección horizontal de la catenaria en  $N$  partes iguales, siendo  $N$  el número de tramos de la forma funicular, podemos calcular el valor de la densidad de fuerza equivalente de la catenaria mediante la siguiente expresión:

$$q_e = \frac{T}{L_1} = \frac{T_0}{L_1 \cdot \cos \theta} = \frac{T_0 \cdot L_1}{L_1 \cdot x_1} = \frac{T_0}{x_1} \quad (9)$$

$$x_1 = \frac{a}{N} \quad (10)$$

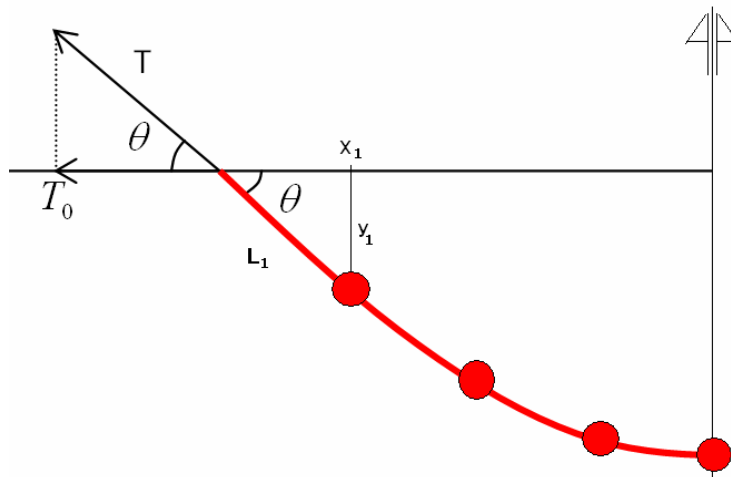


Fig. 10: Representación de las tensiones en el extremo de la catenaria.

Por otra parte, el valor de  $T_0$  se puede calcular conociendo el peso por unidad de longitud de la catenaria  $\lambda$  a través de las siguientes expresiones:

$$T_0 = \left[ \frac{\lambda \cdot L}{2 \cdot \tan \theta} \right] \quad (11)$$

$$\tan \theta = \frac{y_1}{x_1} \quad (12)$$

El valor  $y_1$  se obtiene aplicando la ecuación de la catenaria (ecuación 6).

El peso unitario  $\lambda$  puede estimarse a través de lo que hemos denominado **Calibración del Método**. Este procedimiento parte de calcular utilizando el MDF-MT-PP una forma de equilibrio cualquiera, de dimensiones diferentes a las del diseño. A continuación se calcula el peso específico de las catenarias que aproximan las formas funiculares inscritas en este estado de equilibrio.

Si a través del MDF-MT-PP, utilizando unas densidades de fuerzas determinadas, se converge a una cúpula o bóveda de altura  $h_1$  se puede calcular el peso por unidad de longitud de la catenaria  $\lambda$  utilizando las siguientes expresiones:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \tan \theta \cdot T_0}{L} \quad (13)$$

$$T_0 = q_1 \cdot x_1 \quad (14)$$

$$L = \frac{1}{g} \operatorname{senh} [g \cdot a] \quad (15)$$

$g$  es una constante de la catenaria que se define como:

$$g = \frac{\lambda}{2T_0} \quad (16)$$

Los valores de  $g$  y  $x_1$  se pueden obtener a través del valor conocido de  $h_1$ ,  $a$  y  $N$  utilizando las ecuaciones 7, 8 y 10.

A continuación se calcula la densidad equivalente de la catenaria con la altura de proyecto, para lo que se utiliza la ecuación 9 adoptando el valor  $\lambda$  anterior.

Aplicando el MAC a una cúpula de 20 m de diámetro de base para diferentes alturas y calibrado previamente el método para los valores de  $q=8$  y  $h=4.283$  calculados previamente con MDF-MT-PP ( $\lambda=0.98$ ), se obtienen los siguientes valores de densidad de fuerza equivalente  $q_e$ :

ALTURA DE LA CÚPULA DISEÑADA	DENSIDAD DE FUERZAS ( $q_e$ ) OBTENIDA CON EL MAC PARA ESTA ALTURA	ALTURA DE LA CÚPULA OBTENIDA CON EL MDF-MT-PP PARA $q=q_e$
2	16.31	1.95
4	8.53	3.97
6	6.06	6.09
8	4.88	8.32
10	4.20	10.67
15	3.34	16.81
20	2.91	23.57
30	2.50	37.24
40	2.28	52.14

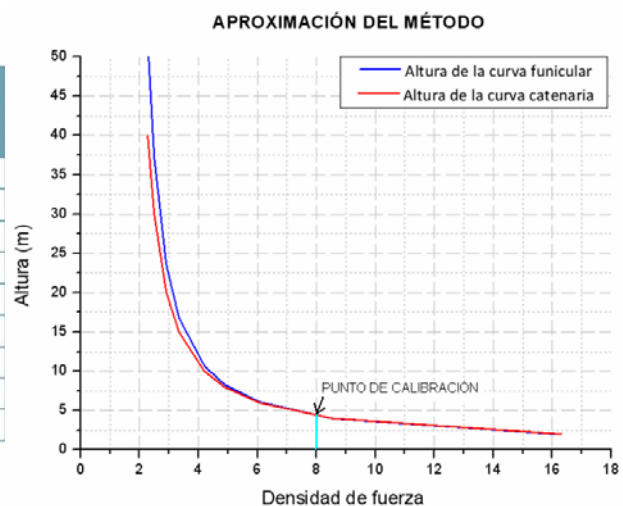
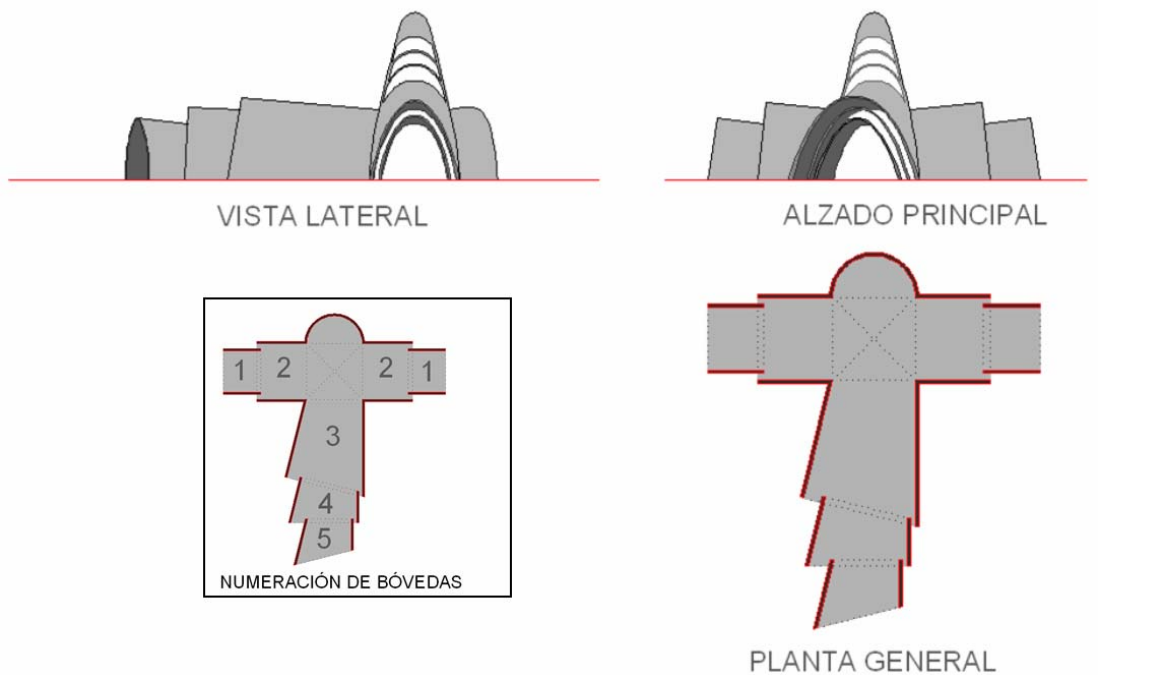


Fig. 11 Aproximación del método para una cúpula de 20 metros de diámetro

A través del MAC se consiguen buenas aproximaciones, si bien pueden darse diferencias considerables para valores de densidad de fuerza muy alejados al de la calibración realizada. En estos casos, se puede realizar una segunda calibración por la que se obtendrán resultados óptimos.

Con las bóvedas se procede de forma similar, si bien en este caso las densidades de fuerza obtenidas se aplicarán únicamente a las ramas anulares. Las densidades de fuerza de las conexiones radiales, conforme a lo explicado en el apartado anterior, deben de introducirse con valores próximos a cero, a menos que no se desee mantener el paralelismo de los arcos. Para el ejemplo representado en la figura 11 se han alcanzado errores inferiores al 5,5% en una primera iteración.



BÓVEDA	ALTURA DE ARCOS DE DISEÑO		ALTURA DE ARCOS CALCULADA		ERROR COMETIDO	
	INICIAL	FINAL	INICIAL	FINAL	INICIAL	FINAL
1	13.95	14.66	13.95	14.60	0.00%	-0.41%
2	17.08	19.00	17.84	19.32	4.45%	1.68%
3	17.08	19.77	17.43	18.73	2.05%	-5.26%
4	17.03	17.33	16.61	17.29	-2.47%	-0.23%
5	13.43	14.66	13.68	14.27	1.86%	-2.66%

Fig.10: Aplicación del MAC a un Proyecto de Gran Estructura. Resultados obtenidos con una única iteración

Finalmente el método propuesto ha sido testado en diferentes proyectos, obteniendo resultados muy satisfactorios que simplifican el trabajo de aproximación a la forma de equilibrio buscada.

### Referencias

- [1] Linkwitz, K., and Shek, H. J. (1971). "Einige Bemerkung von vorsgepannten Seilnetzkonstruktionen." *Ingenieur-archiv* 40, Springer, Berlin, 145–158.
- [2] Maurin, B., and Motro, R. (1998). "The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes." *Eng. Struct.*, 20(8), 712–719.
- [3] Schek, H. J. (1974). "The force density method for form finding and computation of general networks." *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 3, 115–134.
- [4] Hernández-Montes, E., Jurado-Piña, R., and Bayo, E. (2006) "Topological mapping for tension structures". *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 132(6), 970-977.

## Topological shape optimization for tension structures

*Jurado-Piña Rafael<sup>a</sup>, Carbonell-Márquez Juan Francisco<sup>b</sup>, Hernández-Montes Enrique<sup>c</sup>*

<sup>a</sup>Department of Civil Engineering: Transportation. Technical University of Madrid. Spain. [rafael.jurado@upm.es](mailto:rafael.jurado@upm.es)

<sup>b</sup>Department of Structural Mechanics, University of Granada. Spain. [jfcarbonell@ugr.es](mailto:jfcarbonell@ugr.es)

<sup>c</sup>Department of Structural Mechanics, University of Granada. Spain. [emontes@ugr.es](mailto:emontes@ugr.es)

---

### Abstract

The main difference between the design of a tension structure and the design of a regular structure (as buildings, bridges, ...) is that the shape of a tension structure is usually not known at the beginning of the design process and many different shapes are possible for given boundary conditions. Shape-finding or form-finding is the first step in the design of a tension structure. The stress distribution and the shape of a tension structure are related, this is a particularity of this kind of structures. Several form-finding methods for tension structures are already available in the technical literature, all of them possess certain limitations and drawbacks and no single method is optimal for all problems. The engineer may select the proper combination of methods best suited to the designer's needs. In this paper we propose a combined straight method to achieve satisfactory equilibrium configurations for fabric tension structures, making use of stress control over surface elements to optimize the final shape of the tension structure. The force density method (FDM) implemented with topological mapping (TM), a method recently developed by the authors (FDM-TM), is used as a search engine for the preliminary design. A detailed example is presented to illustrate this extended application of topological mapping.

**Keywords:** Tension structures; form-finding; inverse problems; structural optimization

### I. Introduction

The design process of tension structures is a relatively complex problem. The absence of flexural rigidity in the membrane makes difficult to know the shape of the tension structure, stress distribution and shape are related in a tension structure, and different stress distributions on the same structure yield different shapes (Levy and Spillers 2004; Sánchez et al. 2007). The design of a tension structure can be described in three steps: initial shape-finding, stress analysis of the structure and patterning. In the process of shape-finding (or form-finding) the designer gives a set of parameters and then calculates other parameters finally resolving the shape of the structure that satisfied equilibrium. Under stress analysis, loads are applied to a structure whose initial equilibrium configuration is given by the previous step, and then the membrane adapts its configuration to the applied loads. Patterning is concerned with how a curved surface is to be formed from rolls of fabric; several techniques are available for this step (Kim and Lee 2002; Bletzinger et al. 2009).

Form-finding for tension structures is nowadays accomplished by numerical methods and computers. The parameters involved in the form-finding process are: i) type of element for modelling the fabric, ii) surface topology, iii) body forces, iv) surface tractions, v) nodal coordinates of the model, vi) geometry boundary conditions, and vii) internal stress distribution. Body forces and surface tractions are usually neglected during the shape-finding phase due to their insignificant influence in the geometrical shape at the equilibrium state. They can also complicate the initial equilibrium problem since the local direction and net magnitude of the loads may depend on an unknown initial surface shape. These loads are usually incorporated later into the stress analysis stage.

In most existing methods of equilibrium configuration finding the shape is treated as an unknown. Then, it is necessary to introduce the values of a set of parameters to insure a unique solution. Ideally, one can use the nonlinear displacement analysis technique for solving the initial equilibrium problem using surface finite elements (Levy and Spillers 2004; Haug and Powell 1971). In this case the element stresses and the fixed nodes can be prescribed by the designer to guarantee a unique solution to the problem. The results of the equilibrium problem

are the position of the non fixed nodes. This technique has an important drawback: a geometrical initial mapping with a guess of the nodal coordinates is needed.

Several methods for solving the initial equilibrium problem (form-finding) have been developed to overcome some of the problems associated with the nonlinear displacement method. In many of these methods a variety of limitations is imposed on the solution to transform the general nonlinear problem into a linear form. Siev and Eidelman (1964) showed that if equilibrium is satisfied over a grid in the horizontal plane, vertical equilibrium can be used to calculate the elevation at the grid points. In the force density method (FDM) (Linkwitz and Schek 1971) the membrane is modelled by a cable network. FDM is based upon the force-length ratios or force densities which are defined for each branch of the net structure, a simple example will be shown later. Schek (1974) shows that the force densities are suitable for the description of the equilibrium state of any general network. The FDM renders a simple linear system of equations for a possible initial configuration.

Haber and Abel (1982) presented the “smoothing concept” which allows the designer to solve the shape of a reference configuration in terms of an assumed prestress distribution. Using this method the equilibrium equations are nonlinear and consequently iterative techniques are required for the solution.

Other methods of form-finding are based on dynamic analysis. One of the main contributors to these methods was Barnes (1988) who used a method of dynamic relaxation with kinetic damping for form-finding.

A new step in form-finding using surface elements was given by Maurin and Motro (1998) who introduce the concept of the surface stress density. The surface stress density method uses surface triangular elements with an isotropic stress tensor and leads to an iterative procedure that converges on configurations that satisfy static equilibrium. The input parameter is the ratio between the isotropic stress intensity and the area of the element in the equilibrium state.

Hernandez-Montes et al. (2006) and Jurado-Piña et al. (2009) employed an important property of the FDM by which knowledge of the initial position of the non-fixed nodes of the structure is not needed; only the connectivity of the nodes is necessary for the solution of the problem. Accordingly, a new mapping method was presented that is based on topology called topological mapping (TM); in contrast to the mapping methods used so far that are based exclusively on geometry.

Each of the methods mentioned above possesses certain limitations and drawbacks and then no single solution method is optimal for all problems. The engineer may select the proper combination of methods best suited to the problem at hand and the designer’s needs. In this paper we take advantage of some of the existing methods to propose a combined straight method for computing satisfactory equilibrium configurations. The objective is to develop a methodology to achieve final equilibrium configurations for fabric tension structures, making use of stress control over surface elements, and taking advantage of the FDM with topological mapping as preliminary shape-finding.

## **II. Description of the procedure**

The procedure presented in this paper is shown in Fig. 1. The first step of the method makes use of topological mapping (TM) and the FDM (Hernández-Montes et al. 2006; Jurado-Piña et al. 2009), as it will be described latter. In a second step the obtained cable network is transformed into a membrane model. In the final step a new surface with a prescribed stress field is searched.

In order to make the paper self-contained an introduction to FDM and topological mapping are contemplated.

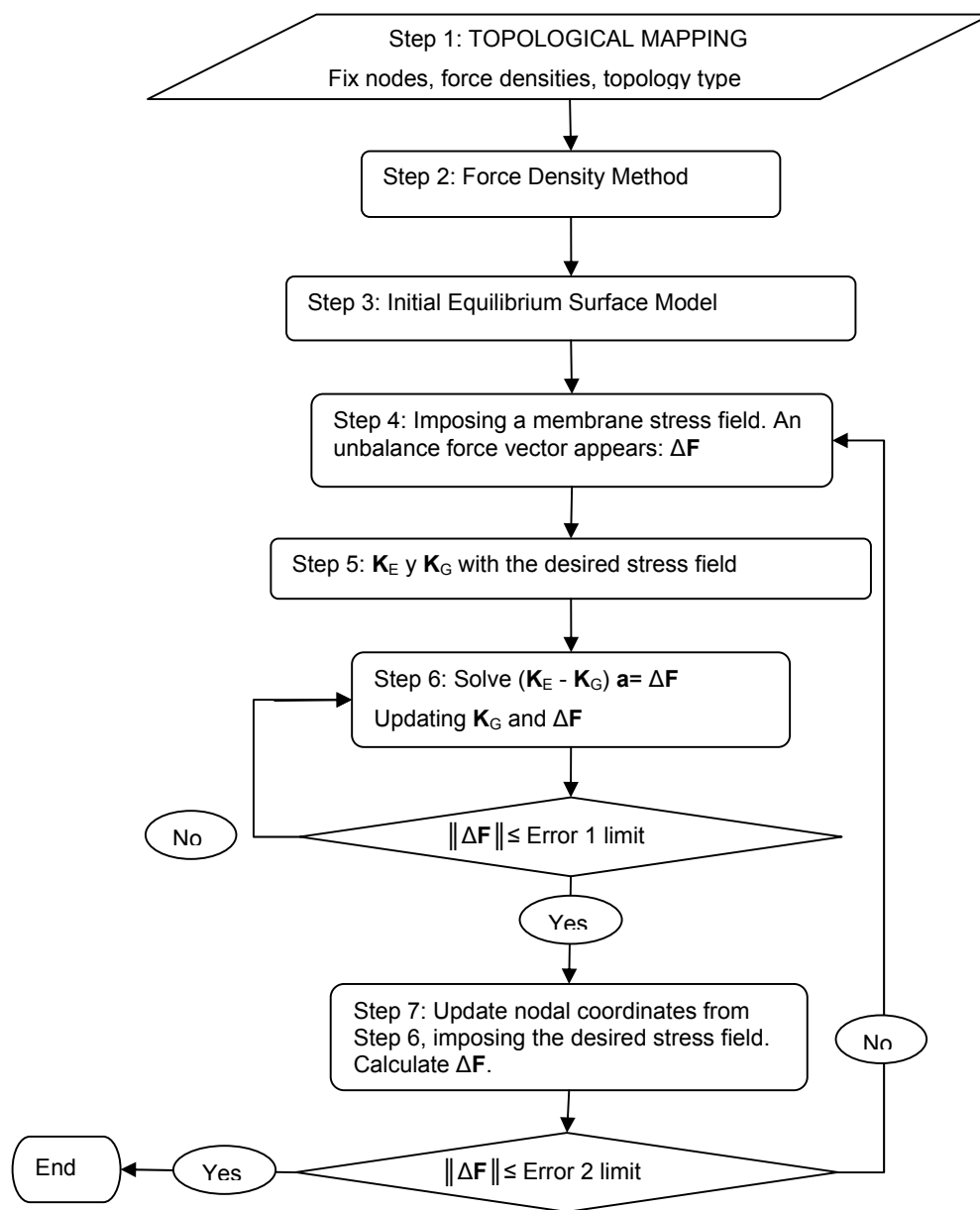


Figure 1. Flow diagram of the method applied.

### ***II.1 Initial equilibrium configuration***

#### **FORCE DENSITY METHOD**

The starting point for the FDM is a pin-joint network consisting of cable or bar elements, in which some of the points are fixed and the others are free, and the free points will have to find a position in the equilibrium configuration.

For a given pin-joint network with  $n$  nodes and  $m$  branches, the branch-node matrix  $\mathbf{C}$  is a  $m \times n$  matrix used in the FDM to define the connectivity of the nodes. As shown in Fig. 2, each branch or connection  $j$  links two nodes  $i(j)$  and  $k(j)$ , for  $i < k$  the elements of the branch-node matrix  $\mathbf{C}$  can be defined as follows:

$$C(j, r) = \begin{cases} +1 & \text{if } i(j) = r \\ -1 & \text{if } k(j) = r \\ 0 & \text{for the rest} \end{cases} \quad (1)$$

The nodes  $P_i$  have coordinates  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ . Some of these nodes are fixed, and they will constitute the input data for the initial equilibrium configuration problem. The  $x$ ,  $y$  and  $z$ -coordinates for each of the nodes can be grouped in the  $n$ -vectors  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  and  $\mathbf{z}$ . The  $m$ -vector  $\mathbf{l}$  contains the lengths  $l_j$  of each branch  $j$ , and the vector  $\mathbf{s}$  is the  $m$ -vector formed by the branch forces  $s_j$  of each branch  $j$ . The nodal loads are characterized by means of  $n$ -vectors  $\mathbf{p}$  containing the force components  $p_x$ ,  $p_y$  and  $p_z$ .

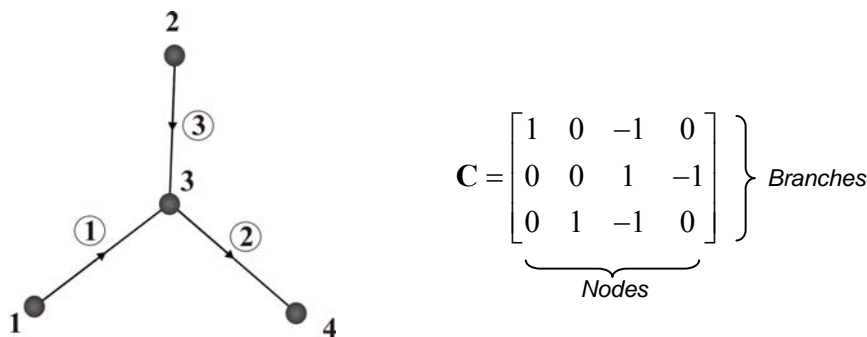


Fig. 2 Example for the construction of the branch-node matrix.

The equilibrium equations for each node may now be established. In the case of Fig. 2, the equilibrium equations for node 3 come from the projections of the forces along each one of the axes:

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{l_1}(x_3 - x_1) + \frac{s_2}{l_2}(x_3 - x_4) + \frac{s_3}{l_3}(x_3 - x_2) &= p_{3x} \\ \frac{s_1}{l_1}(y_3 - y_1) + \frac{s_2}{l_2}(y_3 - y_4) + \frac{s_3}{l_3}(y_3 - y_2) &= p_{3y} \\ \frac{s_1}{l_1}(z_3 - z_1) + \frac{s_2}{l_2}(z_3 - z_4) + \frac{s_3}{l_3}(z_3 - z_2) &= p_{3z} \end{aligned} \quad (2)$$

The great advantage of the FDM is the introduction of a parameter  $q$ , which is defined as the force-length ratio or force density for the branches. If  $q$  is constant then the equilibrium equations become a linear system.

For a more general formulation of the FDM, the coordinate differences  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  and  $\mathbf{w}$  of the connected nodes are considered. These are  $m$ -vectors that can be obtained using the  $\mathbf{C}$  matrix as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{C}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{C}\mathbf{z} \end{aligned} \quad (3)$$

Considering that the matrices  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  and  $\mathbf{L}$  are the diagonal matrices resulting from placing the vectors  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  and  $\mathbf{l}$  in the main diagonal, the equilibrium equations for the complete network may be cast in the following form:



$$\begin{aligned}(\mathbf{C}^t \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1}) \mathbf{s} + \mathbf{p}_x &= \mathbf{0} \\(\mathbf{C}^t \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1}) \mathbf{s} + \mathbf{p}_y &= \mathbf{0} \\(\mathbf{C}^t \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1}) \mathbf{s} + \mathbf{p}_z &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{4}$$

A key property of the FDM is that the above system of equations is a linear system under the following assumption:

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{s}\tag{5}$$

where  $\mathbf{q}$  is an  $m$ -vector containing the force-density ratios  $q_j$  of all the branches. Finally, taking into account the following identities:

$$\begin{aligned}\mathbf{U} \mathbf{q} &= \mathbf{Q} \mathbf{u} \\ \mathbf{V} \mathbf{q} &= \mathbf{Q} \mathbf{v} \\ \mathbf{W} \mathbf{q} &= \mathbf{Q} \mathbf{w}\end{aligned}\tag{6}$$

And letting  $\mathbf{Q}$  be the diagonal matrix that contains  $\mathbf{q}$ , the following equilibrium equations may be obtained:

$$\begin{aligned}(\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \mathbf{x} + \mathbf{p}_x &= \mathbf{0} \\(\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \mathbf{y} + \mathbf{p}_y &= \mathbf{0} \\(\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \mathbf{z} + \mathbf{p}_z &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{7}$$

The above system of equations constitutes a linear system where the known values are the coordinates of the fixed points, the topology of the pin-joint network, and the force density values.

The unknowns are the coordinates of non-fixed nodes.

### TOPOLOGICAL MAPPING

An initial guess of the shape is needed in order to generate a network, for instance the approximate shape of the horizontal projection. With this horizontal projection it is easy to consider a network even when we pick only the connections as input for the FDM; this way of doing is called “geometrical mapping”, in order to differentiate it from the topological method (TM).

The main feature of the topological mapping (TM) introduced by Hernández-Montes et al. (2006) is that with a few topological rules a meshing can be performed independently of the final geometric configuration. Based on this new concept many types of topological networks can be selected and performed. Three **basic networks** are used: type A, type B and type C (Fig. 3). The basic networks are classified in closed network and open network.

In case of the type A open basic network (Fig. 3a), the connectivity between nodes is represented by thick and dashed lines, and the nodes are black or gray (with no difference among them). In case of the type A closed basic network (Fig. 3a), the connectivity between nodes is represented by thick lines, and dashed lines mean repeated connections. In the case of the type A closed basic network the black circles represent nodes, and the gray circles represent repeated nodes.

Three symbols are needed in order to illustrate network type B (Fig. 3b). Black, gray and empty circles mean nodes in the open network type B. In the case of closed networks, a black circle means node, gray circle means repeated node and empty circle means non existing node. The same for the thick line, dashed thick line and dashed thin line, all of them mean connectivity in open network; and for closed network they mean connectivity, repeated connectivity and non existing connectivity, respectively.

The behavior of the basic network type C (Fig. 3c) open or closed is similar to network type A.

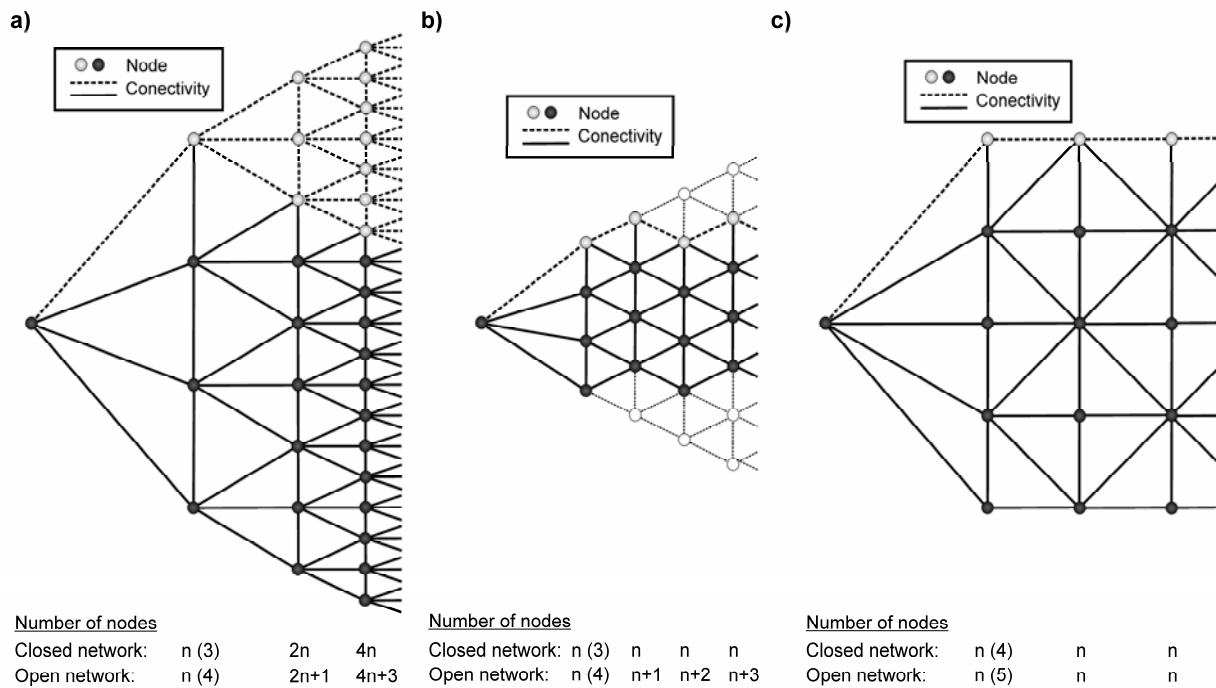


Fig. 3 a) Topology of network Type A. b) Topology of network Type B. c) Topology of network Type C

The basic network A correspond to a pattern in which each node at a given step is connected to the adjacent ones on the same step as well as three more nodes of the following step. In this way the number of nodes of each step is double the amount of the previous one for the closed configuration, and double plus one node for the open configuration.

The basic network B is similar to type A with the difference that each node at a given step is connected to two nodes of the following step. With network B the number of nodes of each step is equal to that of the previous step for the closed configuration and the previous plus one for the open configuration.

The pattern of basic network C is such that each node at a given step is connected alternatively to one or three nodes of the next step. In this way the number of nodes in each step remains the same for both open as well as closed networks.

The described basic networks originate from an initial node that is connected to the  $n$  nodes of the second step. However, this initial node may be suppressed in open networks, as well as closed networks whenever it is desired to create a new interior contour in the interior of the net.

The algorithms that generate closed networks require a reduced and simple data input, namely: the location of the fixed nodes, the force densities of the interior and exterior branches, and the topology of the net. The topology is characterized by the number of nodes of the second step, the number of steps and the basic pattern. The distribution of nodes of the last step along the contour as well as the fixed points is done in an automatic way for closed networks. In this way for any given contour, it is possible to directly generate an equilibrium configuration. On the other hand, with open network is more complicated since all the steps share nodes on the given contour.

For the closed networks the nodes in the last step are the nodes located at the exterior of the final configuration as well as the fixed nodes. The amount of nodes between consecutive fixed points is proportional to the length between them. In the case of open networks the outside nodes correspond to the outside of the graph tree. If the

node of the first step is eliminated, the first step may produce a fixed part of the structure, and in case of a closed network an interior hole will appear.

The basic networks may present several problems if directly applied. For example, types B and C require a high number of nodes in their second step for closed networks. On the other hand, network A produces a high number of nodes just after a few steps. These limitations may be eliminated by using topology combinations of the basic networks A, B and C to form what it is called **simple networks**. In this case, the user needs to define the desired sequence of combinations.

In order to be able to address the problem of complex configurations, simple open or/and closed networks can be mixed together. These combinations lead to the concept of **combined networks**. Fig. 4a shows an example of tension structure meshed in topology with a simple closed network and Fig. 4b with a combined network.

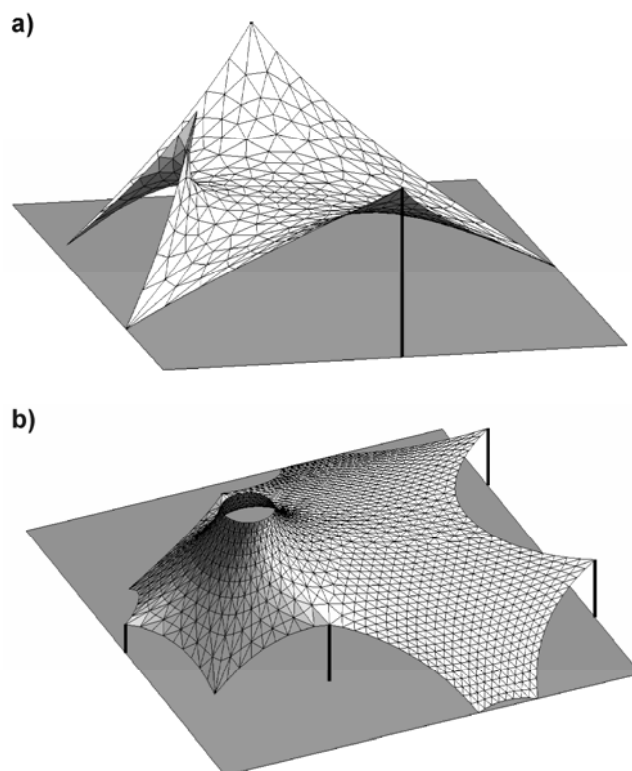


Fig. 4 Examples of the use of meshing in topology a) using simple network b) using combined network

## ***II.2. Transforming the cable model into a membrane model***

The triangular constant stress element is used; it is described in Fig. 5 and 6. In the standard formulation of this element (Figure 6a), the node equilibrium equation appears in the local coordinate system as

$$\mathbf{f}^e = \begin{pmatrix} (f_i^e)_x \\ (f_i^e)_y \\ (f_j^e)_x \\ (f_j^e)_y \\ (f_m^e)_x \\ (f_m^e)_y \end{pmatrix} = \frac{t}{2} \cdot \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_m & 0 & c_m \\ 0 & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{t}{2} \cdot \begin{bmatrix} b_i \sigma_x + c_i \tau_{xy} \\ c_i \sigma_y + b_i \tau_{xy} \\ b_j \sigma_x + c_j \tau_{xy} \\ c_j \sigma_y + b_j \tau_{xy} \\ b_m \sigma_x + c_m \tau_{xy} \\ c_m \sigma_y + b_m \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Where  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$  are the usual stresses of plane elasticity,  $t$  is the thickness of the membrane,  $\mathbf{f}^e$  is a vector that contains the nodal forces of the element, and  $b$ 's and  $c$ 's are defined as follow:

$$b_i = y_j - y_m; \quad c_i = x_m - x_j$$

$$b_j = y_m - y_i; \quad c_j = x_i - x_m$$

$$b_m = y_i - y_j; \quad c_m = x_j - x_i$$

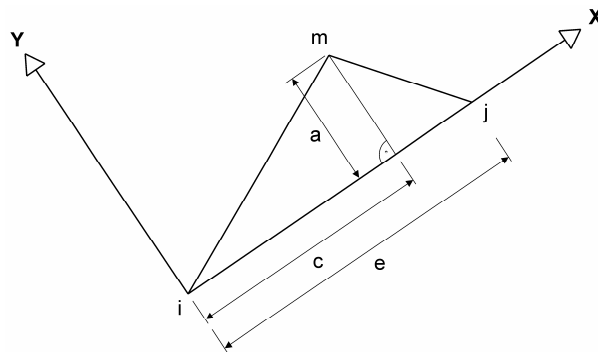


Fig. 5 Triangular Finite Element in its Local Coordinate System

A link is established between the stresses in a membrane model and the cable forces in its corresponding virtual triangulated network. First, we use a local coordinate system coplanar with the element. Afterwards, the components of the nodal forces (in a Cartesian system) are transformed into a skew system parallel to the edges of the element (Fig. 6b), so the following transformation equation can be obtained:

$$\begin{pmatrix} \frac{Q_{ij}}{L_{ij}} \\ \frac{Q_{im}}{L_{im}} \\ \frac{Q_{ji}}{L_{ji}} \\ \frac{Q_{jm}}{L_{jm}} \\ \frac{Q_{mi}}{L_{mi}} \\ \frac{Q_{mj}}{L_{mj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{ij} \\ q_{im} \\ q_{ji} \\ q_{jm} \\ q_{mi} \\ q_{mj} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_j & c_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_m & c_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_i & c_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_m & c_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_i & c_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_j & c_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (f_i^e)_x \\ (f_i^e)_y \\ (f_j^e)_x \\ (f_j^e)_y \\ (f_m^e)_x \\ (f_m^e)_y \end{pmatrix} \quad (9)$$

Where  $Q_{rs}/L_{rs}=q_{rs}$ , represent the force density at the edge “rs” of the element, and  $\Delta$  is the surface area of the triangular finite element.

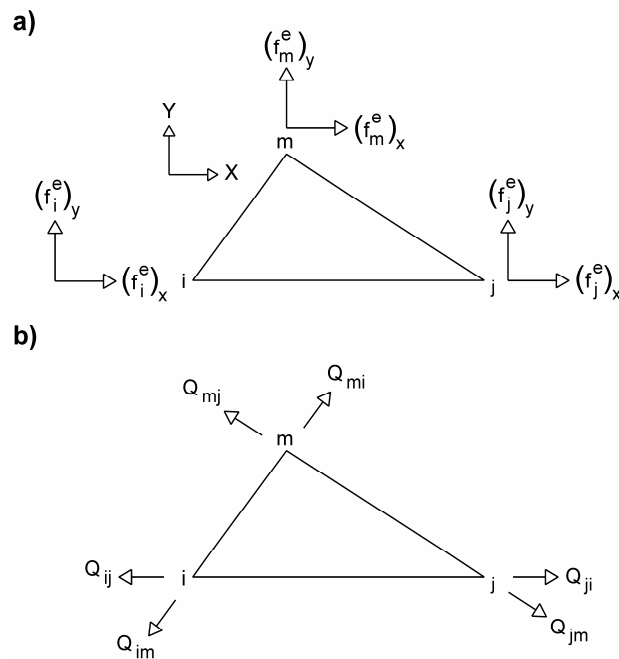


Fig. 6 a) Standard constant stress triangular element b) same element with equivalent nodal force components in the direction of the edges

Substituting  $\mathbf{f}^e$  (Eq. 8) into system (Eq. 9) and noting that  $Q_{rs}/L_{rs}$  is equal to  $Q_{sr}/L_{sr}$ , the following three independent equations can be obtained:

$$\begin{pmatrix} q_{ij} \\ q_{jm} \\ q_{mi} \end{pmatrix} = -\frac{t}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_j & c_i c_j & b_i c_j + b_j c_i \\ b_j b_m & c_j c_m & b_j c_m + b_m c_j \\ b_m b_i & c_m c_i & b_m c_i + b_i c_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Eq. (10) renders the three force densities ( $q$ ) for a constant stress triangular element. For a given stress distribution over a membrane that has been divided into triangles, Eq. (10) is used to obtain the three force densities for the virtual cable network in each triangle. In case of an equilibrated network calculated by the force density method with topological mapping the corresponding stress distribution over an equivalent finite element membrane model can be obtained as the inverse problem of Eq. (10). This equilibrated membrane model will be referred as Initial Equilibrium Surface Model (IESM).

### **II.3. Final equilibrium configuration with stress control**

The shape of tension structures depends on their internal stress pattern. Nonlinear structural analysis is needed for loading added to the Initial Equilibrium Surface Model. In this paper nonlinear analysis is employed with the hypothesis of large rotations and small strains, together with the triangular constant stress finite element previously described. New equilibrium configurations are obtained due to perturbations introduced in the system. In this paper perturbations come from changes in the stress field, these changes generate non equilibrated nodal loads. New equilibrium configurations with subsequent geometric changes are obtained.

#### **THE ELASTIC AND GEOMETRIC STIFFNESS MATRIX**

In case of the plane stress triangular finite element, the elastic stiffness matrix of the element ( $\mathbf{K}_E^e$ ) is (Levy and Spillers 2004):

$$\mathbf{K}_E^e = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_E^e)_{ii} & (\mathbf{K}_E^e)_{ij} & (\mathbf{K}_E^e)_{im} \\ (\mathbf{K}_E^e)_{ji} & (\mathbf{K}_E^e)_{jj} & (\mathbf{K}_E^e)_{jm} \\ (\mathbf{K}_E^e)_{mi} & (\mathbf{K}_E^e)_{mj} & (\mathbf{K}_E^e)_{mm} \end{bmatrix} \quad (11)$$

The components of the previous matrix are:

$$(\mathbf{K}_E^e)_{rs} = \frac{t}{4\Delta} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2} c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2} c_r b_s & 0 \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2} b_r b_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r = i, j, m. \\ s = i, j, m. \end{matrix} \quad (12)$$

Where  $E$  and  $\nu$  are Young's modulus and Poisson's ratio.  $(\mathbf{K}_E^e)_{ij}$  is the element in row  $i$  and column  $j$  of the matrix  $\mathbf{K}_E^e$ .

The geometric stiffness matrix associated with the elastic stiffness matrix defined in Eq. 11 can be obtained by perturbation methods. The resulting geometric stiffness matrix ( $\mathbf{K}_G^e$ ) is (Levy and Spillers 2004):

$$\mathbf{K}_G^e = \frac{t}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\tau & \sigma_x & 0 & \tau & -\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_y & \tau & 0 & \sigma_y & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i & 0 & 0 & \beta_i & 0 & 0 & \lambda_i \\ \tau & -\sigma_x & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & \sigma_x & 0 \\ \sigma_y & -\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_y & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j & 0 & 0 & \beta_j & 0 & 0 & \lambda_j \\ -\tau & \sigma_x & 0 & \tau & -\sigma_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_y & \tau & 0 & \sigma_y & -\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_m & 0 & 0 & \beta_m & 0 & 0 & \lambda_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

where

$$\alpha_r = -\frac{e-c}{ae} (\mathbf{f}_r^e)_y - \frac{1}{e} (\mathbf{f}_r^e)_x$$

$$\beta_r = -\frac{c}{ae} (\mathbf{f}_r^e)_y + \frac{1}{e} (\mathbf{f}_r^e)_x$$

$$\lambda_r = \frac{1}{a} (\mathbf{f}_r^e)_y \quad r = i, j, m$$

a, e and c are illustrated in Fig. 5.

### CONFIGURATIONS WITH STRESS CONTROL

Given an initial equilibrium configuration, usually a different equilibrium shape close to the initial shape might be obtained, changing both the geometry and the stress distribution of the initial structure. For example, it maybe attractive to obtain an equilibrium configuration with a constant stress field, or other prescribed stress patterns, by changing the Initial Equilibrium Surface Model (derived from the initial cable model equilibrium configuration obtained by FDM and TM). It is possible to generate equilibrium configurations with an imposed stress distribution using the nonlinear structural analysis equations. The procedure is based on the same displacement analysis techniques used to study the behaviour of tension structures under varying load condition. In this method geometrical nonlinear analysis techniques are used to compensate unbalanced forces. These unbalanced forces result from the imposition of a new stress field to the Initial Equilibrium Surface Model. The applied procedure contains the following steps, schematically described in Fig. 1:

- Step 1: Introduce the necessary data for the topology mapping: the coordinates of the fixed nodes, the topology of the pin-joint network and the force density values.
- Step 2. Calculate an initial equilibrium configuration based on the force density method. The coordinates of the non-fixed nodes are obtained.
- Step 3: Compute the membrane stresses using Eq. (10). The Initial Equilibrium Surface Model is obtained.
- Step 4: Modify the membrane stresses to the desired values. This introduces a perturbation in the system, and an unbalanced force vector ( $\Delta\mathbf{F}$ ) appears.
- Step 5: Assemble individual element stiffness matrices to form the elastic stiffness matrix  $\mathbf{K}_E$  and the geometrical stiffness matrix  $\mathbf{K}_G$  of the structure with the desired stresses.

- Step 6: Equilibrium requires that the sum of all forces must be zero at each node, so a new equilibrium configuration of the structure is obtained by allowing the deformation of the structure under the unbalanced forces ( $\Delta\mathbf{F}$ ). Eq. (14) is solved by iterations, as a regular second order analysis:

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{a} = \Delta\mathbf{F} \tag{14}$$

where  $\mathbf{a}$  is the vector of nodal displacements and  $\Delta\mathbf{F}$  is the vector of nodal forces resulting from the perturbation induced by the imposed stress field, which induce a non-equilibrium configuration. Each iteration requires the calculation of:

- The new nodal positions, adding to the previous nodal position the nodal displacements  $\mathbf{a}$ .
- The vector of unbalanced forces  $\Delta\mathbf{F}$ , calculated with the stress field variation. Small variations are preferred for numerical convergence, the magnitude of this variations can be easily controlled with small values of the Young's modulus  $E$ .
- The error, which can be computed as the second norm of the vector  $\Delta\mathbf{F}$  (we have named it as error Type 1).
- In case the error (Type 1) is bigger than an upper bound value,  $\mathbf{K}_E$  and  $\mathbf{K}_G$  must be recalculated taking into account the new nodal position and the new stress field.
- Step 7: Compute the vector of unbalanced forces  $\Delta\mathbf{F}$  with the final nodal position obtained in Step 6 and the desired stresses. Finally, calculate the error as the second norm of the vector  $\Delta\mathbf{F}$  (Error Type 2). If this error is bigger than an upper bound value, go to Step 4, with the previous obtained nodal coordinates.

### III. Example

#### Steps 1 and 2: Initial equilibrium configuration

A tension structure with 8 fixed points is designed. The first step is the solution to the form-finding problem, TM and FDM is used. The necessary input data for this first step are the following:

- Boundary conditions:
  - Number of fixed points: 8
  - Coordinates of the fixed points: (-6,-45,0), (6,-45,0), (27,-24,15), (27, 24,15), (6, 45,0), (-6, 45,0), (-27, 24,15), (-27, -24,15)
- Topology:
  - Type of network: closed
  - Number of desired steps: 12
  - Number of nodes in the second step: 6
  - Type of network associated to each step (as desired): See Table 1.
- Force density values
  - For the inner branches: 1
  - For the external branches: 10

Table 1. Type of network associated to each step

Step	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Type of network	A	B	A	B	B	A	B	B	B	B



With these simple inputs the geometry corresponding to the initial equilibrium configuration is automatically obtained (Fig.7).

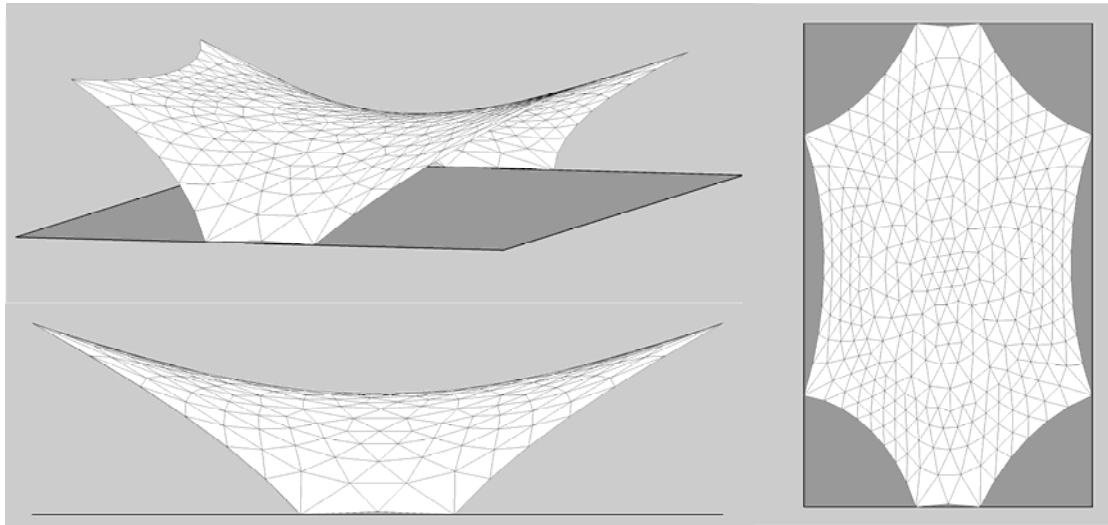


Fig. 7 Initial equilibrium configuration with FDM and topological mapping methodology

Step 3: Transforming the cable model into a membrane model

Because FDM has been used, the forces in the cables are easily obtained by the following expression:

$$Q_{rs} = q_{rs} \cdot L_{rs} \tag{15}$$

The cable model is transformed into a membrane model composed by triangular elements; the stress field is obtained by Eq. (10). The corresponding stress distribution is shown in Fig. 8.

In Fig. 8, stresses have been scaled so the minimum value of the major principal stress is equal to 1 (force/length). For the exterior cables the obtained values vary between 59 and 34 with a mean value of 48 units of force.

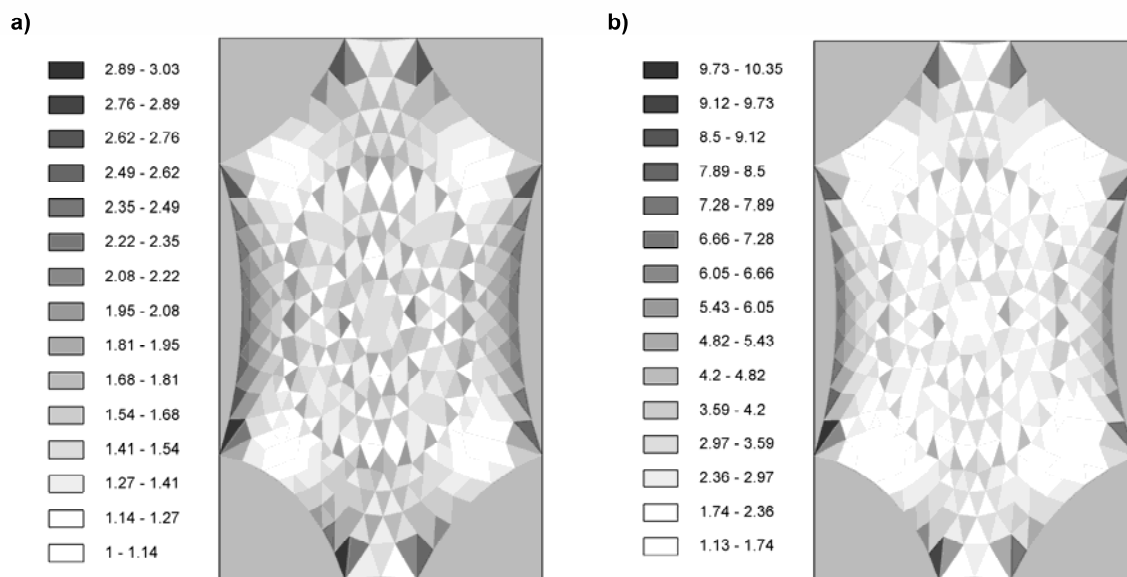


Fig. 8 a) Major principal stress ( $\sigma_1$ ), imposing 1 for the smaller value b) Ratio of principal stresses.

**Steps 4 to 7. Final equilibrium configuration with stress control**

For simplicity, in this example an isotropic and uniform stress field has been chosen in the membrane. The fixed value of the principal stresses is 1 (force/length units). An imposed value of force of 48 (force units) has been given to the exterior cable. A Poisson's ratio equal to zero and a Young's modulus equal to 0.5 have been used. After few iterations (Newton-Rapson) from steps 4 to 7 a new equilibrium configuration is obtained. In order to fulfill with the requirements of error Type 2, the numerical procedure has gone four times through step 7. Table 2 shows the resulting error for each step. Two types of error are computed: Error1 (Error Type 1) and Error2 (Error Type 2). It can be checked that after few iterations the resulting residual error for the final equilibrium configuration with the desired stresses is insignificant.

Table 2. Error obtained in the iteration process.

<b>Times through step 7 = 0</b>										
<b>ITER</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>Error1</b>	1,15E+01	3,16E+00	4,47E-01	1,38E-02	2,18E-03	5,58E-04	1,55E-04	5,61E-05	1,84E-05	6,76E-06
<b>Error2</b>	1,15E+01	3,18E+00	1,32E+00	1,26E+00	1,26E+00	1,26E+00	1,26E+00	1,26E+00	1,26E+00	1,26E+00
<b>Times through step 7 = 1</b>										
<b>ITER</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>Error1</b>	1,26E+00	1,63E-02	4,01E-04	7,83E-06	-	-	-	-	-	-
<b>Error2</b>	1,26E+00	2,22E-01	2,17E-01	2,17E-01	-	-	-	-	-	-
<b>Times through step 7 = 2</b>										
<b>ITER</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>Error1</b>	2,17E-01	2,86E-03	4,65E-06	-	-	-	-	-	-	-
<b>Error2</b>	2,17E-01	8,69E-02	8,71E-02	-	-	-	-	-	-	-
<b>Times through step 7 = 3</b>										
<b>ITER</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>Error1</b>	8,71E-02	9,67E-04	1,01E-06	-	-	-	-	-	-	-
<b>Error2</b>	8,71E-02	7,34E-02	7,34E-02	-	-	-	-	-	-	-
<b>Times through step 7 = 4</b>										
<b>ITER</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>Error1</b>	7,35E-02	6,24E-04	7,78E-07	-	-	-	-	-	-	-
<b>Error2</b>	7,35E-02	6,88E-02	6,89E-02	-	-	-	-	-	-	-

Fig. 9 shows the initial configuration, obtained by the FDM-TM, in black color, and the final configuration, with the specified stress field, in white color. A substantial change in the geometry can be observed.

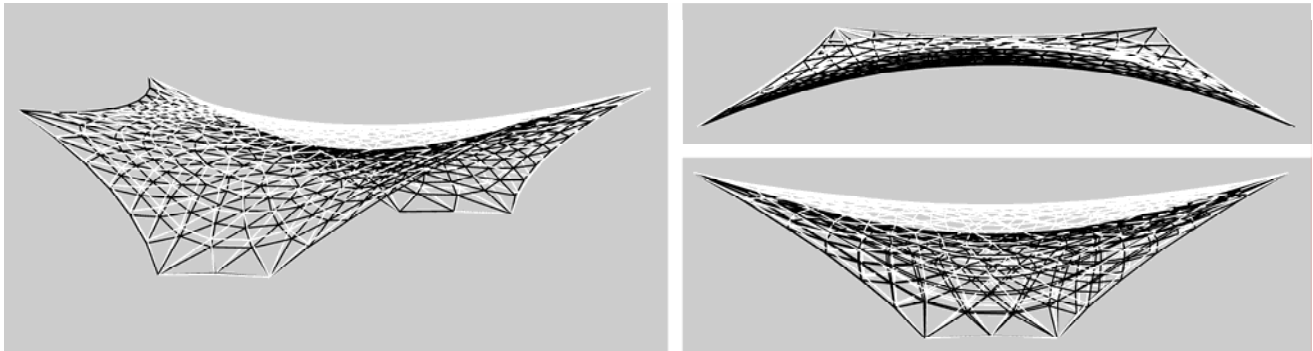


Fig. 9 Initial and Final configuration of the equilibrium shapes.

#### IV. Conclusion

An extended application of topological mapping to obtain a final equilibrium configuration of a membrane structure under controlled stress conditions is presented. The procedure deals with a topology based pin-joint network that is easy to implement and the force density method (FDM). The procedure is versatile and it represents a simple and straight method to achieve optimized equilibrium configurations.

#### References

- Barnes, M.R. Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes. *Computers & Structures*, 30(3) (1988) 685–695.
- Bletzinger, K.U., Linhard, J. and Wüchner, R. Extended and Integrated Numerical Form Finding and Patterning of Membrane Structures. *Journal of the International Association for Shell and Space Structures*, 50 (1) (2009) 35-49.
- Haber, R.B. and Abel, J.F. Initial equilibrium solution method for cable reinforced membranes. Part I: Formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 30 (1982) 263-284.
- Haug, E. and Powell, G.H. Finite element analysis of non-linear membrane structures. *Proceedings of IASS Pacific Symposium - Part II on Tension Structures and Space Frame*, Tokyo and Kyoto. . (1971)
- Hernández-Montes, E., Jurado-Piña, R. and Bayo, E. Topological mapping for tension structures. *ASCE Journal of Structural Engineering* 132(6) (2006) 970-977.
- Jurado-Piña, R., Gil-Martín, L.M. and Hernández-Montes, E. Topological mesh for shell structures. *Applied Mathematical Modelling* 33 (2009) 948-958.
- Kim, J.Y. and Lee, J.B. A new technique for optimum cutting pattern generation of membrane structures. *Engineering Structures* 24 (2002) 745-756.
- Levy, R. and Spillers, W.R. (2004). *Analysis of Geometrically Nonlinear Structures*, 2nd Ed., Chapman & Hall, London.
- Linkwitz, K. and Schek, H.J. Einige Bemerkung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen. *Ingenieur-Archiv* 40 (1971) 145-158.
- Maurin, B. and Motro, R. The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes. *Engineering Structures* 20(8) (1998) 712–719.
- Sánchez, J., Serna, M.A. and Morer, P. A multi-step force–density method and surface-fitting approach for the preliminary shape design of tensile structures. *Engineering Structures* 28 (2007) 1966-1976.

II<sup>nd</sup> International Congress on *Mechanical models in structural engineering*.  
University of Granada (Spain), June 2013.

Schek, H.J. The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3(1) (1974) 115-134.

Siev, A. and Eidelman, J. Stress. Analysis of Prestressed Suspended Roofs. *Proceedings ASCE, Journal of the Structural Division, ST4*, (1964) 103-121.

# Stability Analysis of Plates with Different Boundary Conditions under Uni and Biaxial Compression Using Exact Stress Functions

O. Mijušković<sup>1</sup> ✉, B. Ćorić<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Civil Engineering. University of Montenegro.  
Bul. Džordža Vašingtona bb, 81000 Podgorica (Montenegro).  
E-mail: olja\_64@yahoo.com

<sup>2</sup> Faculty of Civil Engineering. University of Belgrade.  
Kralja Aleksandra br 73, 11000 Belgrade, Serbia.  
E-mail: bcoric@grf.bg.ac.rs

---

## Abstract.

In this paper elastic stability of plates under arbitrary uni and biaxial compression is investigated.

Analytical approach used for determination the critical load is based on well known Ritz energy technique in which two factors are crucial for the accuracy of results. First and very important factor is deflection function. Herein, double Fourier series are used to represent buckled shape of the plates with different boundary conditions under arbitrary external loads. The second and the most important factor which determine the accuracy level of presented analytical approach is adoption of adequate realistic stress distribution within plate prior to buckling. Based on the Pavlović&Baker (1993) and Pavlović&Liu (2007) investigations, exact stress distributions were introduced herein. In that way, with the adequate deflection functions and precise stress distribution, Ritz energy method can produce highly accurate results.

Through several examples for the plates with different boundary conditions, for which available literature does not offer analytical solutions, accuracy and applicability of the presented analytical approach is proved. All these results are compared with the results obtained by finite element method (FEM).

**Keywords:** elastic stability of plates, exact stress function, boundary conditions

## I. Introduction

The analytical procedure for determining the exact stress distribution within a rectangular plate, loaded by in-plane arbitrary external load is based on the solution dated from XIX century. In fact, in 1890 Mathieu [1] was the first to determine the stress function for the concrete case of a rectangular plate loaded along the edges by an arbitrary compressive stress through superposition of two (DEA and DEB), the so called basic types of load (Fig.1).

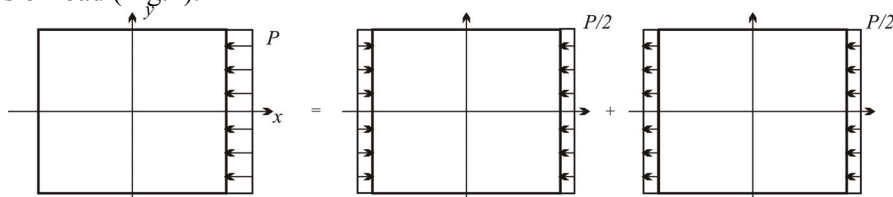


Figure 1. Decomposition of loads (cases DEA and DEB)

In the series of papers by Baker and Pavlović [2-5], one of these types of load (DEA), was applied during the stability analysis of simply supported plates, loaded by the locally distributed compressive stress. However, several years later, (1993), more than one century after the Mathieu's original paper appeared, the same authors return to the basic problem [6]. Their aim was to obtain the solution of the exact stress distribution for the general case of the rectangular plate loaded by the arbitrary external load. The fact is that any load (normal and/or shear) which effects along the edges of the plate, can be described by the chosen functions (even and/or odd in relation to the coordinate axes), so the total solution is obtained by the adequate combination of eight basic cases (Fig. 2).

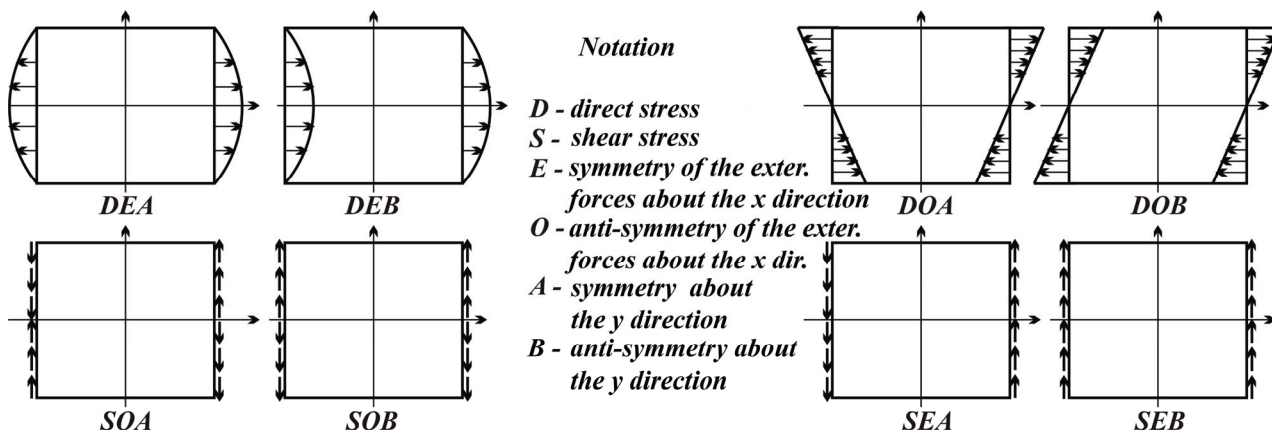
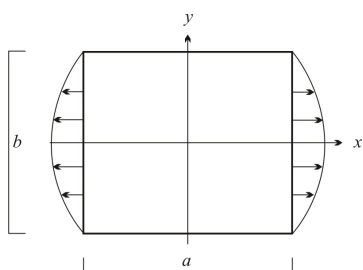


Figure 2. Eight fundamental cases

To enable a detailed description of the analytical procedure to critical buckling determination for the plates with different boundary conditions, in this paper, the basic load case DEA is used. So far, according to literature, this kind of analyses has been done exclusively for simply supported plates [3-5, 7].

## II. Exact Stress Function for the Fundamental Problem DEA



Solution approach begins by expressing the external loading  $f(y)$  in terms of half-range Fourier expansion over the whole edges  $y = \pm b/2$ .

$$f(y) = A_0 + \sum_n A_n \cos ny$$

DEA

Boundary conditions:

$$N_1 = f(y), \quad x = \pm \frac{a}{2} \quad (1a)$$

$$N_2 = 0, \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (1b)$$

$$T_3 = 0, \quad x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (1c)$$

After several very complex mathematical operations, which can be found in literature [6 - 8], expressions for the exact stress functions for the plate under load case DEA, can be obtained in form:

$$N_1 = A_0 + (\lambda + \mu) \sum_n B_n \left[ \left( 1 + \frac{na}{2} \frac{E(\frac{1}{2}na)}{e(\frac{1}{2}na)} \right) E(nx) - nxe(nx) \right] \cos ny$$

$$+ (\lambda + \mu) \sum_m \beta_m \left[ \left( 1 - \frac{mb}{2} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right) E(my) + mye(my) \right] \cos mx \quad (2a)$$

$$N_2 = (\lambda + \mu) \sum_n B_n \left[ \left( 1 - \frac{na}{2} \frac{E(\frac{1}{2}na)}{e(\frac{1}{2}na)} \right) E(nx) + nxe(nx) \right] \cos ny$$

$$+ (\lambda + \mu) \sum_m \beta_m \left[ \left( 1 + \frac{mb}{2} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right) E(my) - mye(my) \right] \cos mx \quad (2b)$$

$$T_3 = (\lambda + \mu) \sum_n B_n \left( -\frac{na}{2} \frac{E(\frac{1}{2}na)}{e(\frac{1}{2}na)} e(nx) + nx E(nx) \right) \sin ny$$

$$+ (\lambda + \mu) \sum_m \beta_m \left( -\frac{mb}{2} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} e(my) + my E(my) \right) \sin mx \quad (2c)$$

Through coefficients  $B_n$  and  $\beta_m$  external load parameters  $A_q$  are introduced in stress functions (3).

$$B_q = \frac{A_q}{(\lambda + \mu)\tau(q\pi\phi)} + \frac{16\phi^4 q^2 (-1)^q}{(\lambda + \mu)\pi^2 \tau(q\pi\phi)} \sum_{q'} q' A_{q'} (-1)^{q'} \Psi(q'\pi\phi) \quad (3a)$$

$$\times \{ \Lambda_1(q, q') + (16\phi^4 / \pi^2) \Lambda_3(q, q') + (16\phi^4 / \pi^2)^2 \Lambda_5(q, q') + \dots \}$$

$$\beta_p = -\frac{4\phi p^2 (-1)^p}{(\lambda + \mu)\pi \tau(p\pi/\phi)} \sum_q q A_q (-1)^q \Psi(q\pi\phi) \quad (3b)$$

$$\times \{ \Lambda_0(p, q) + (16\phi^4 / \pi^2) \Lambda_2(p, q) + (16\phi^4 / \pi^2)^2 \Lambda_4(p, q) + \dots \}$$

In the aim of more efficient writing of very long expressions, certain abbreviations are introduced (exp.  $E() = \cosh()$ , that is  $e() = \sinh()$ ),

$$\tau(x) = E(x) + x / e(x), \quad \Psi(x) = e(x) / \tau(x) \quad \text{and} \quad \phi = a / b, \quad (4)$$

while  $\Lambda$  functions are in non-dimensional form:

$$\Lambda_0(p, q) = \frac{1}{(p^2 + \phi^2 q^2)^2} \quad (5a)$$

$$\Lambda_1(q, q') = \sum_p \frac{p^3 \Psi(p\pi/\phi)}{(p^2 + \phi^2 q'^2)^2} \Lambda_0(p, q) \quad (5b)$$

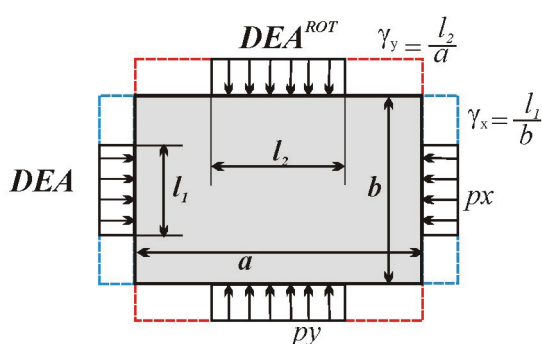
$$\Lambda_2(p, q) = \sum_{q'} \frac{q'^3 \Psi(q'\pi\phi)}{(p^2 + \phi^2 q'^2)^2} \Lambda_1(q, q') \quad (5c)$$

$$\Lambda_3(q, q') = \sum_p \frac{p^3 \Psi(p\pi/\phi)}{(p^2 + \phi^2 q'^2)^2} \Lambda_2(p, q) \quad (5d)$$

$$\Lambda_4(p, q) = \sum_{q'} \frac{q'^3 \Psi(q'\pi\phi)}{(p^2 + \phi^2 q'^2)^2} \Lambda_3(q, q') \quad (5e)$$

Finally, in Table 1 stress distributions for the case of non-uniform biaxial loading are presented. These functions are obtained, on the one side, by analytical approach and, on the other, by software FINEL and ANSYS based on the finite element method.

Table 1. Stresses distributions within plate obtained by analytical procedure and by software (FINEL and ANSYS), based on the finite element method (FEM).



### Example for the stress analysis

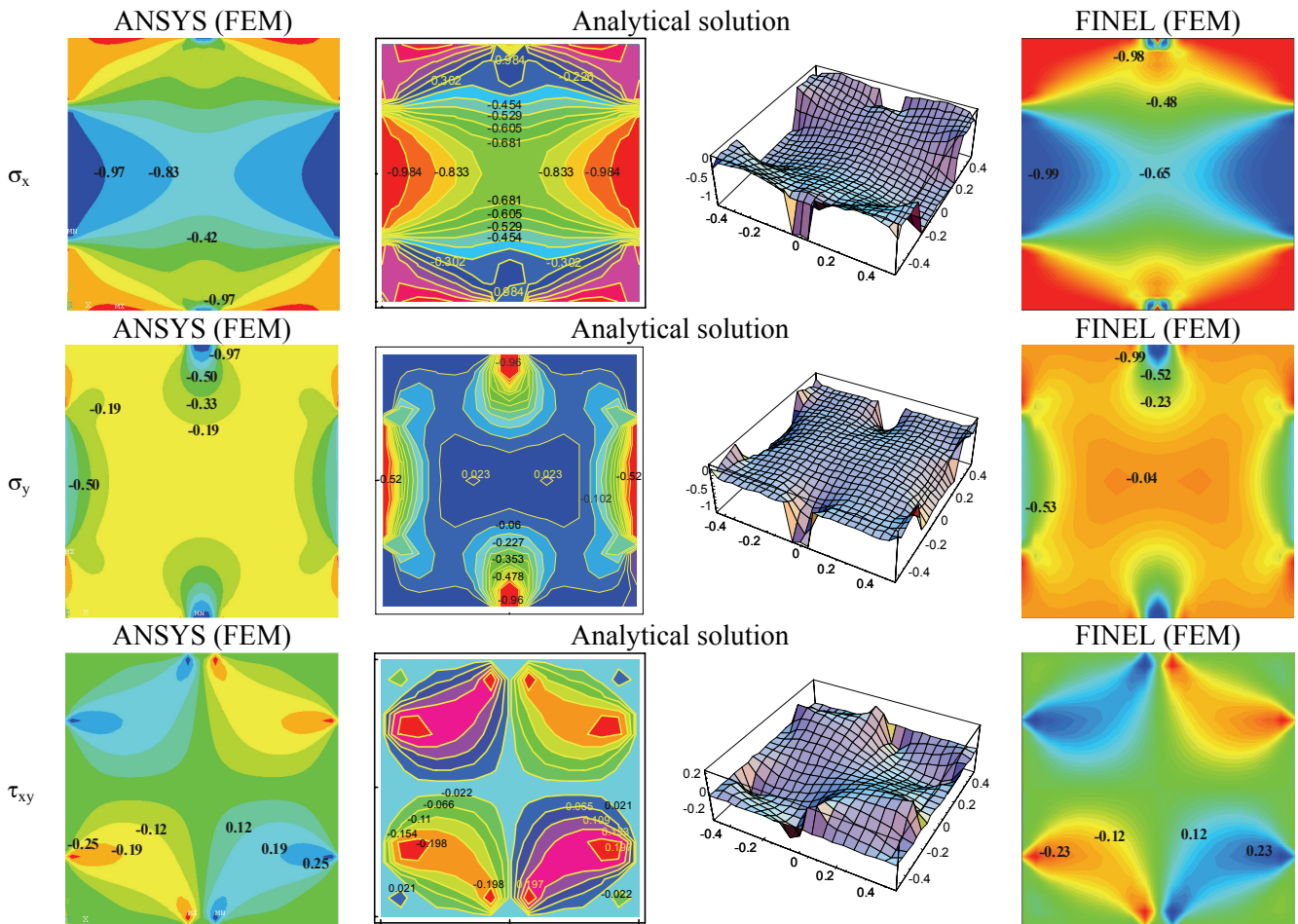
The plate with aspect ratio  $\phi = a/b = 1.0$

Load in  $x$  direction ( $p_x$ )  $\gamma_x = 0.5$

Load in  $y$  direction ( $p_y$ )  $\gamma_y = 0.1$

Ratio of loads intensity

$p_x = p_y$

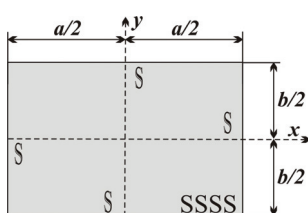


### III. Analytical Approach to Plate Buckling

The problem of the elastic stability of rectangular plates with different boundary conditions is investigated using the Ritz energy technique. The strain energy due to bending of the plate is defined in the traditional way. On the other hand, the exact stress distribution of Mathieu's theory of elasticity is introduced through the potential energy of the plate associated with the work done by external loads. By adopting the exact stresses within a plate under any type of external loads and using the double Fourier series to represent any possible buckled profile, the buckling loads can be obtained in a very accurate way. Analytical approach to plate buckling is presented on the example (Fig. 3) of the rectangular plate with mixed boundary conditions (SSSS, CSCS and CCCC) under non-uniform biaxial edge forces (DEA and DEA<sup>ROT</sup>). In order to verify the results from analytical method, the finite-element method (FINEL and ANSYS) is used to produce buckling coefficients for the problem under consideration.

#### III.1 The Adopted Deflection Series

In order to guarantee the accuracy, the double Fourier series is used to represent buckled profile of the simply supported plate (SSSS), plate with two edges simply supported and other two clamped CSCS and clamped plate (CCCC). This series satisfies all boundary conditions, term by term, and are capable of representing any possible buckled profiles for very wide range of aspect ratios and load cases.



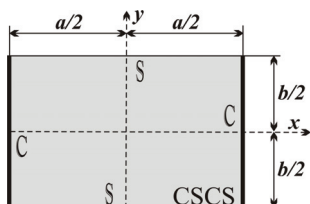
#### Case 1

#### Plate SSSS

edges  $x = \pm a/2$  simply supported (S)  
 edges  $y = \pm b/2$  simply supported (S)



$$w = \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s W_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{b} \left( y + \frac{b}{2} \right) \quad (6)$$

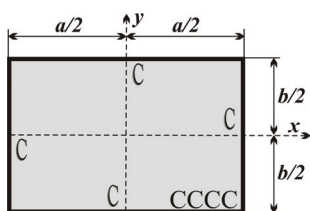


**Case 2**

**Plate CSCS**

edges  $x = \pm a/2$  clamped (C)  
edges  $y = \pm b/2$  simply supported (S)

$$w = \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s W_{mn} \left( \cos \frac{(m-1)\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} \right) - \cos \frac{(m+1)\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} \right) \right) \sin \frac{n\pi}{b} \left( y + \frac{b}{2} \right) \quad (7)$$



**Case 3**

**Plate CCCC**

edges  $x = \pm a/2$  clamped (C)  
edges  $y = \pm b/2$  clamped (C)

$$w = \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s W_{mn} \left( \cos \frac{(m-1)\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} \right) - \cos \frac{(m+1)\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} \right) \right) \cdot \left( \cos \frac{(n-1)\pi}{b} \left( y + \frac{b}{2} \right) - \cos \frac{(n+1)\pi}{b} \left( y + \frac{b}{2} \right) \right) \quad (8)$$

### III.2 Strain Energy Due to Bending and Work Done by External Loads

During the evaluation of the total potential energy of the plate, the first step is defining the strain energy due plate banding in the traditional way:

$$U = \frac{1}{2} D \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy \quad (9)$$

where D is flexural rigidity of the plate.

The part of the potential energy of the plate associated with the work done by external loads is presented by the expression (10). In this expression, the stresses within the plate  $N_1$ ,  $N_2$  i  $T_3$  are given by equations (2) that represent solutions of the Mathieu's exact approach:

$$V = -\frac{t}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ N_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2T_3 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (10)$$

Introducing the exact stress functions makes the expression for the work done by external forces (10) more complex. It presents the basic difference in relation to the all previous analyses of the stability of plates which are not simply supported along all edges.

### III.3 Formulation of Eigenvalue Problem

Finally, after the definition of the strain energy of the plate bending  $U$ , and of the value which responds to the work done by external forces  $V$ , the total potential energy of the system can be written like:

$$\Pi = U + V \quad (11)$$

From the minimum potential energy principle, the condition (14) is given by:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_{mn}} = \frac{\partial U}{\partial W_{mn}} + \frac{\partial V}{\partial W_{mn}} = 0 \quad (12)$$

which basically represents linear system of  $m \cdot n$  homogenous equations per unknown coefficients  $W_{mn}$ . The existence of nontrivial solution, expressed through condition that the determinant of the system is equal to zero, leads to the solution of the classical eigenvalue problem. In its scope, the lowest value has, for us, the only practical importance, which presents the requested critical load.

Surely, the usage of the corresponding software (MATHEMATICA) was necessary in the solving process because of the ampleness of the analytical procedure. The complexity directly depends on the adopted number of terms of the stress functions, as well as number of terms of the deflection function.

#### IV. Example and Results

As it was already said, with the aim to prove the quality of the shown analytical approach for the problems of elastic stability, the case of square plate with different boundary conditions (SSSS, CSCS and CCCC), under the effect of locally distributed stress ( $DEA + DEA^{ROT}$ ), is chosen (Fig. 3).

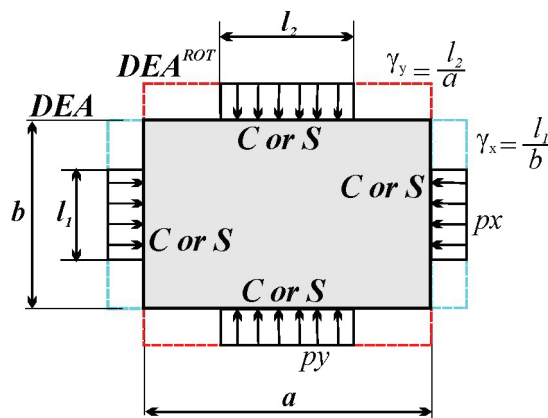


Figure 3. Analyzed example

All results for the three square plates with different boundary conditions (SSSS, CSCS and CCCC) under the effects of uniaxial and biaxial compressive stress ( $\gamma_x$  and  $\gamma_y$  in the interval 0.1 – 1), are presented in tables (tables 2-3). In these tables, there are not only buckling coefficients obtained by analytical approach, but also there are, as some kind of “experimental” values, the results of finite element method (FINEL and ANSYS).

However, in order to evaluate the quality of the presented analytical solutions, it is necessary to point out some limits which, from the practical reasons, must be included. Namely, buckling coefficients, presented in the tables, are evaluated exclusively by using 20 series terms of the deflection function and 60 terms of the stress functions. From the stress function point of view, accuracy of the solution is achieved with 40 and more terms. In the case of the deflection function, sometimes it is desirable the presence of more number of terms in dependence on boundary conditions and types of the load [8]. Certainly, we are aware of the fact that by limiting the numbers of terms we get the solution little bit higher than exact one. However, due to complexity of the analytical approach, and large number of integrals which should be solved, it has been decided to limit number of term to 20 for all types of plates under uniaxial and biaxial edge loads.

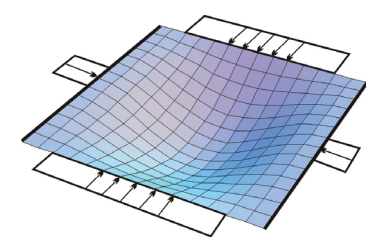
At the end, after the detailed analysis of the presented results, it would be possible to give the answer relating the mentioned suggestions and limitations.

Table 2. Comparative values of buckling coefficients for square plates SSSS and CCCC ( $p_x = p_y$ )

<b>Plate SSSS <math>\phi = 1.0</math> (symmetry)</b>											
	load ratio	/	$\gamma_y = 0.1$	$\gamma_y = 0.3$	$\gamma_y = 0.5$	$\gamma_y = 0.7$	$\gamma_y = 0.9$	$\gamma_y = 1.0$	load ratio	Results	
<b>Plate SSSS</b>	$\gamma_x = 0.0$		26.1936	9.2096	6.0748	4.8794	4.2457	4.0000	$\gamma_x = 0.0$	A. Solution	
			25.9600	9.1278	6.0210	4.8366	4.2092	3.9660		MKE (Fi)	
			-0.892	-0.888	-0.886	-0.877	-0.860	-0.850		Discrep.(%)	
	$\gamma_x = 0.1$		13.2999	6.8825	4.9608	4.1285	3.6621	3.4769	$\gamma_x = 0.1$	A. Solution	
			13.1840	6.8220	4.9174	4.0925	3.6308	3.4473		MKE (Fi)	
			-0.871	-0.879	-0.875	-0.872	-0.854	-0.851		Discrep.(%)	
	$\gamma_x = 0.3$		67.7444	37.1264	4.6543	3.6881	3.2051	2.9152	2.7963	$\gamma_x = 0.3$	A. Solution
			67.5360	37.0610	4.6136	3.6557	3.1772	2.8902	2.7724		MKE (Fi)
			-0.307	-0.176	-0.874	-0.878	-0.870	-0.858	-0.855		Discrep.(%)
	$\gamma_x = 0.5$		24.0774	19.1035	13.0862	3.0537	2.7148	2.5041	2.4161	$\gamma_x = 0.5$	A. Solution
			24.0120	19.0700	13.0690	3.0270	2.6911	2.4826	2.3954		MKE (Fi)
			-0.272	-0.175	-0.154	-0.874	-0.873	-0.859	-0.857		Discrep.(%)
	$\gamma_x = 0.7$		16.1085	13.6335	10.3533	8.6037	2.4438	2.2721	2.1997	$\gamma_x = 0.7$	A. Solution
			16.0660	13.6100	10.3380	8.5915	2.4225	2.2526	2.1808		MKE (Fi)
			-0.264	-0.172	-0.148	-0.142	-0.872	-0.858	-0.859		Discrep.(%)
	$\gamma_x = 0.9$		12.7037	11.1241	8.8809	7.5817	6.7841	2.1232	2.0598	$\gamma_x = 0.9$	A. Solution
			12.6770	11.1040	8.8676	7.5709	6.7745	2.1050	2.0422		MKE (Fi)
			-0.210	-0.181	-0.150	-0.142	-0.142	-0.857	-0.854		Discrep.(%)
	$\gamma_x = 1.0$		10.7885	9.6222	7.9086	6.8674	6.2066	5.7177	2.0000	$\gamma_x = 1.0$	A. Solution
			10.7660	9.6053	7.8966	6.8576	6.1978	5.7095	1.9830		MKE (Fi)
			-0.209	-0.176	-0.152	-0.143	-0.142	-0.143	-0.85		Discrep.(%)
	load ratio		$\gamma_y = 0.0$	$\gamma_y = 0.1$	$\gamma_y = 0.3$	$\gamma_y = 0.5$	$\gamma_y = 0.7$	$\gamma_y = 0.9$	$\gamma_y = 1.0$	Results	$K = \frac{\sigma_{cr} t b^2}{\pi^2 D}$

Table 3. Comparative values of buckling coefficients for square plate CSCS ( $p_x = p_y$ )

<b>Plate CSCS <math>\phi = 1.0</math></b>									
$K = \frac{\sigma_{cr} t b^2}{\pi^2 D}$	/	$\gamma_y = 0.1$	$\gamma_y = 0.3$	$\gamma_y = 0.5$	$\gamma_y = 0.7$	$\gamma_y = 0.9$	$\gamma_y = 1.0$	Results	
/	-	39.9453	14.4903	9.9815	8.4325	7.8278	7.6927	A. Solution	
	-	39.7330	14.4190	9.9347	8.3942	7.7928	7.6586	MKE (Fi)	
	-	-0.531	-0.492	-0.469	-0.454	-0.447	-0.432	Discrep.(%)	
$\gamma_x = 0.1$		47.6257	25.5627	13.5845	9.8814	8.3683	7.7784	7.3408	A. Solution
		47.4500	25.4560	13.5190	9.8353	8.3304	7.7438	7.3138	MKE (Fi)
		-0.369	-0.417	-0.482	-0.466	-0.453	-0.445	-0.368	Discrep.(%)
$\gamma_x = 0.3$		16.6288	12.8628	9.0263	7.3883	6.5779	6.0092	5.7388	A. Solution
		16.5710	12.8160	8.9903	7.3587	6.5526	5.9873	5.7185	MKE (Fi)
		-0.348	-0.364	-0.399	-0.401	-0.385	-0.364	-0.354	Discrep.(%)
$\gamma_x = 0.5$		10.7787	9.0624	6.9943	5.9751	5.4352	5.0389	4.8467	A. Solution
		10.7420	9.0301	6.9678	5.9548	5.4151	5.0209	4.8298	MKE (Fi)
		-0.340	-0.356	-0.379	-0.340	-0.370	-0.357	-0.349	Discrep.(%)
$\gamma_x = 0.7$		8.4494	7.3570	5.9402	5.1960	4.7827	4.4724	4.3199	A. Solution
		8.4205	7.3309	5.9180	5.1765	4.7652	4.4565	4.3048	MKE (Fi)
		-0.342	-0.355	-0.373	-0.375	-0.366	-0.356	-0.349	Discrep.(%)
$\gamma_x = 0.9$		7.1955	6.3867	5.2948	4.6993	4.3599	4.0997	3.9708	A. Solution
		7.1703	6.3637	5.2749	4.6816	4.3439	4.0851	3.9568	MKE (Fi)
		-0.350	-0.360	-0.376	-0.377	-0.367	-0.356	-0.353	Discrep.(%)
$\gamma_x = 1.0$		6.7432	6.0267	5.0457	4.5035	4.1912	3.9499	3.8300	A. Solution
		6.7196	6.0049	5.0266	4.4865	4.1758	3.9357	3.8164	MKE (Fi)
		-0.350	-0.362	-0.379	-0.378	-0.367	-0.360	-0.355	Discrep.(%)



**Concentrated Forces**

Results		Y = 0	Y = 1
X=0	A. Solut.	-	3.9463
	MKE (Fi)	-	3.9248
	MKE (Ans)	-	3.9421
X=1	A. Solut.	4.7313	2.5365
	MKE (Fi)	4.7131	2.5257
	MKE (Ans)	4.7268	2.5342

### V. Final Remarks

After a detailed analysis of results (Tables 2 to 3), it can easily be noted very good behaviour of analytical solution in the complete considered load range ( $\gamma_x = 0.1 - 1$ ,  $\gamma_y = 0.1 - 1$ ,  $p_y = p_x$ ).

Buckling coefficient values for three selected plate types (SSSS, CCCC and CSCS) under uniaxial and biaxial compressive stress, show maximum discrepancy with respect to values obtained using the finite element method of no more than 0.9 percent (Case SSSS).

Finally, it can be concluded that the number of the terms in the series of deflection and stress functions is sufficient for the analyzed cases of plates with mixed boundary conditions, subjected to variable uni and biaxial compressive load. Obviously, in cases with more complex load types, which were also subjected to detailed verification, it is indispensable to pay special attention to proper selection of the type and number of terms for the stress and deflection functions which undoubtedly influences the level of accuracy, but not the applicability of the analytical approach presented in the paper.

## References

- [1] Mathieu, E. *Theorie de l'elasticite des corps solides*, Seconde partie. GauthierVillars. Paris. (1890)
- [2] Baker, G.; Pavlović, M. N. Elastic stability of simply supported rectangular plates under locally distributed edge forces. *Journal of Applied Mechanics* 104 (1982) 177-179.
- [3] Baker, G.; Pavlović, M. N. Rectangular plates compressed by series of in-plane loads: stability and stress distribution, *The Aeronautical Journal* 87 (1983) 183-188.
- [4] Pavlović, M. N.; Baker, G. Buckling of non-uniformly compressed plates. *Theo.& Appl.Mech., Trans.Yugosl.Soc.Mech.*, vol. 9 (1983) 91-104.
- [5] Baker, G.; Pavlović, M. N. Stability of wide strips under locally distributed forces., *Journal of Applied Mechanics* 107 (1985) 232-234.
- [6] Baker, G.; Pavlović, M. N.; Tahan, N. An exact solution to the two-dimensional elasticity problem with rectangular boundaries under arbitrary edge forces, *Phil. Trans. R. Soc. London, A* 393 (1993) 307-336.
- [7] Liu, Y. G. *Buckling of Plates under Non-Uniform Stresses, with Particular Emphasis on Shear*, Ph. D Thesis, Imperial College, London (2006).
- [8] Mijušković O. *Analiza stabilnosti pravougaonih ploča korišćenjem tačne funkcije napona*, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd (2008).

# Experimental and numerical study of angle connections assembled with European profiles

Reinosa J.M.<sup>1A</sup>, Loureiro A.<sup>1B</sup>, Gutiérrez R.<sup>1C</sup>, López M.<sup>1D</sup>

<sup>1</sup> Department of Industrial Engineering II. University of A Coruña. Mendizábal s/n 15403 Ferrol (Spain).  
{jreinosa, loureiro, ruthgut, manuellopez}@udc.es

---

## Abstract

In this paper, two specimens with different thickness of top and seat angle with double web angle connections are numerically modeled. The problem is solved with *Abaqus*® finite element package. Moment rotation curves obtained from the experiments are compared with those obtained from FE models and good agreement is observed.

## Keywords

Finite Element Method, Semi-rigid Connections, Contact, Steel Frame Design.

## I. Introduction

In conventional analysis and design procedures of steel frames, beam to column connections are assumed to be either perfectly rigid or ideally pinned. Thus, the true behaviour of joints is disregarded. Moreover, semi-rigid connections have highly nonlinear behaviour so they are seldom used by designers. On the other hand semi-rigidity introduces economic and structural benefits, so, in order to change this trend and to establish a rational design procedure, it is very important to determinate the moment-rotation characteristics of the semi-rigid connections.

One of the typologies of semi-rigid connections is the top and seat angle connection with double web angle. In this study, monotonic loading tests are conducted and modeled using European profiles for the analysis of top and seat angle connections with double web angle. It is very interesting to validate a solid numerical model to deal future parametric studies on European geometries.

## II. Testing configuration and connection geometries

### II.1 Test configuration

The test set up consist of a pair of beams connected to a central stub column via top and seat angles bolted to the flanges of the beam and column and web angles bolted to the beam web and column flanges. For practical reasons, the load was applied on the column, as shown in (Fig. 1). The tests have been carried out in the Structural Analysis Laboratory of the Higher Polytechnic University College of the University of A Coruña (Spain). The beams were supported on completely rigid rollers separated 1.5 meters length.

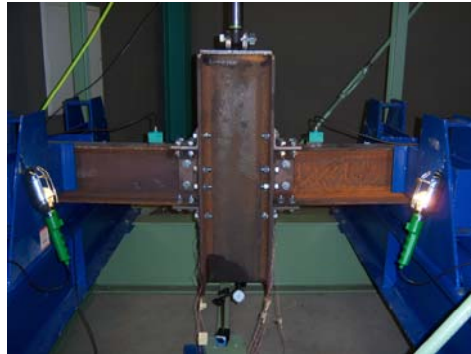
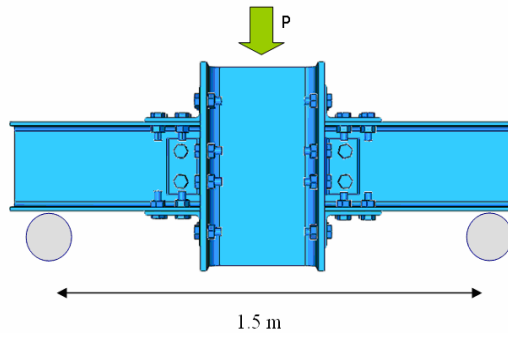


Figure 1. Test configuration

## II.2 Connection geometries

The test geometric definition was as follows:

- Column: HEA 300
- Beams: IPE 240
- Top and seat angle: L120x90x12 (Test1), L120x90x9 (Test2) L120x90x8 (Test3) and L120x90x10 (Test4)
- Web angle: L100x8

(Fig. 2) shows the key dimensions that define the tests.

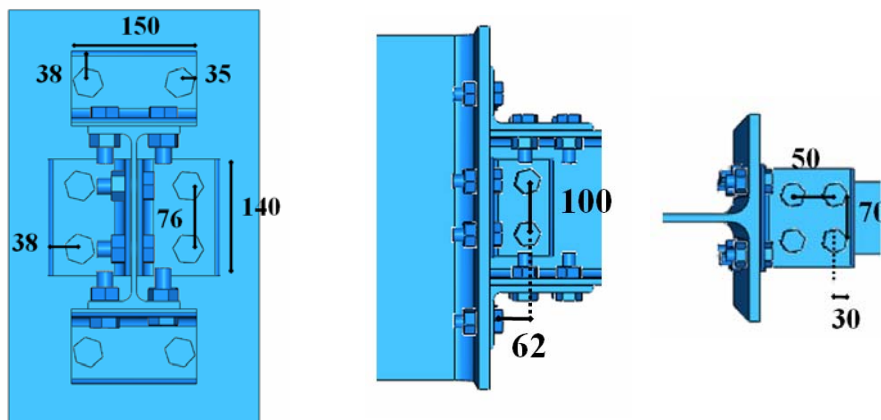


Figure 2. Key dimensions (millimetres)

### III. Instrumentation

The tests were carried out by means of the following instrumentation:

- *System 7000* Data Acquisition System that can be controlled using Vishay Micro-Measurements *StrainSmart*® software.
- Load cell with 30 tons sensitivity 2 mV / V, placed under the actuator.
- Inclinometers.
- Strain gages: placed in top angles in order to capture the yielding sequence.
- Actuator with a load capacity of 30 tons and maximum stroke of 220 mm.

### IV. Finite element models

3D finite element models of the tests have been performed. The Test1 3D FE model of top and seat angle connection with double web angles is shown in (Fig. 3). Symmetry about the plane of the beam web is used so half of the connection is modelled. The model was meshed by means of C3D8I eight-node brick elements with full integration and incompatible modes [2] and contact between all surfaces was imposed with a friction coefficient of 0.3, by using the general contact algorithm of *Abaqus*® [3]. The problem was numerically solved as a quasi-static process by using the *Abaqus*® explicit solver, because of the ease with it solves complex contact problems, as it was prove in recent works [6]. Additionally, the washers were modelled as isolated elements, so that appropriate interactions between components may be developed, as they have been estimated to be relevant. Finally, the model was improved by introducing the actual length of the beam and the tubular supports as rigid surfaces. The introduction of the real dimensions of the beam is relatively important, as it has recently been shown [5].

The experimental data describing the stress-strain top angle response is taken from coupon test for Test1 and Test2, and translated to true-stress-strain cuatrilineal relations to be used in the *Abaqus*® FE models [1], as it can be observed in (Fig. 4). For Test3 and Test4 coupon tests were not available, so S275 steel nominal values were used. The beam, column and web angle materials have been introduced with its S275 steel nominal values. The bolts were modelled as elastic components in order to avoid convergence problems [4]. The load was simulated by an imposed displacement on the column. To achieve the “snug tight” condition, little pretension has been applied to the bolts by means of a thermal gradient.

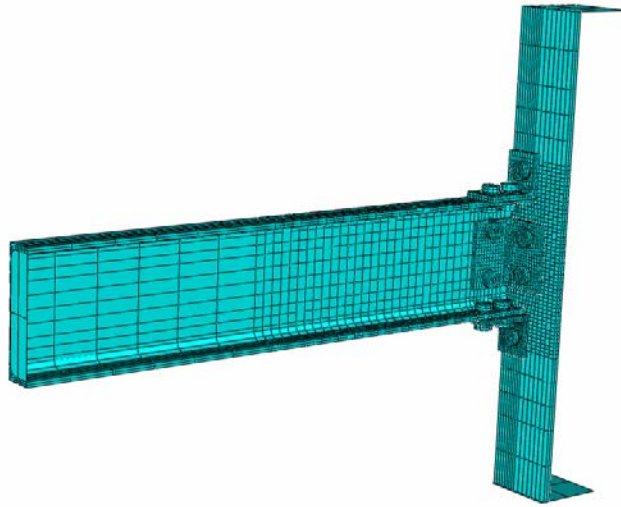


Figure 3. Finite element model of Test1

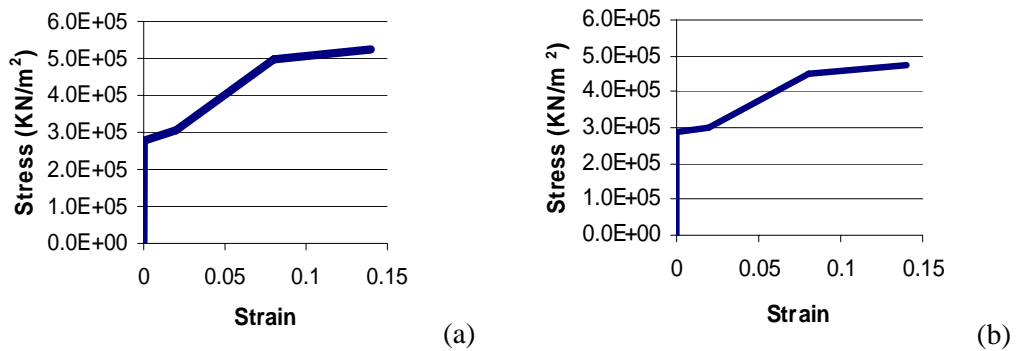


Figure 4. Material properties adopted for Test1 (a) and Test2 (b)

### V. Finite element results

(Fig. 5) shows Test2 equivalent plastic strain in the top angle, which is the most important component of this connection. As shown in (Fig. 6), the fit obtained for Test1 is good, matching the initial stiffness of the MR curve and maintaining the yield tendency, although with a lower ultimate moment associated. On the other hand, the FE model initial stiffness is larger than the actual value of Test2 and Test3, as it can be observed in (Fig. 7) and (Fig.8). Test4 FE model fits the initial stiffness but not the ultimate moment, which remains below the test value (Fig.9).



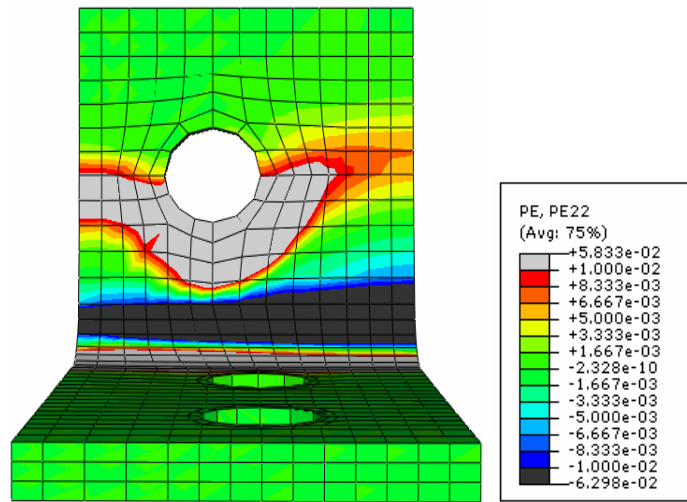


Figure 5. Finite element results of Test2: equivalent plastic strain in the top angle

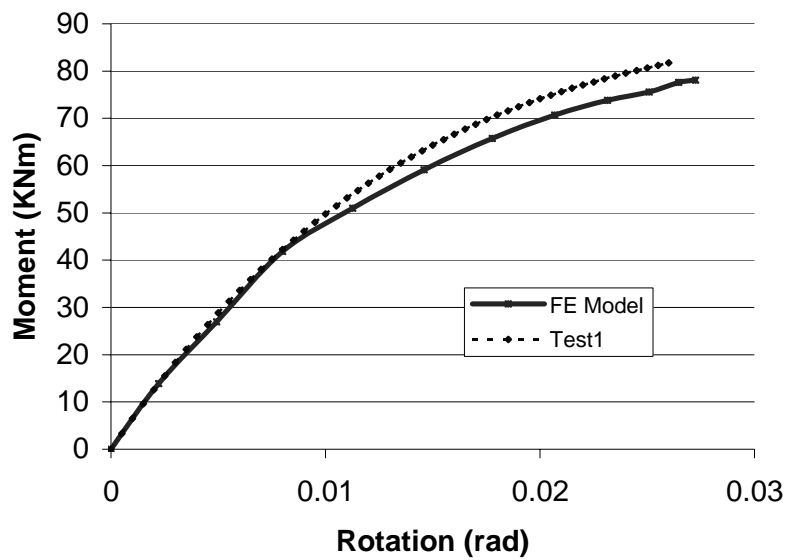


Figure 6. Moment-Rotation curves for Test1 and the associated FE model

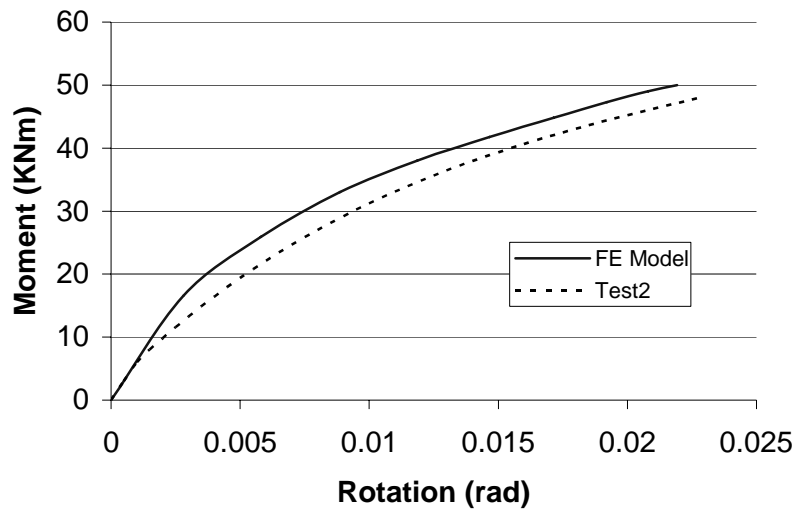


Figure 7. Moment-Rotation curves for Test2 and the associated FE model

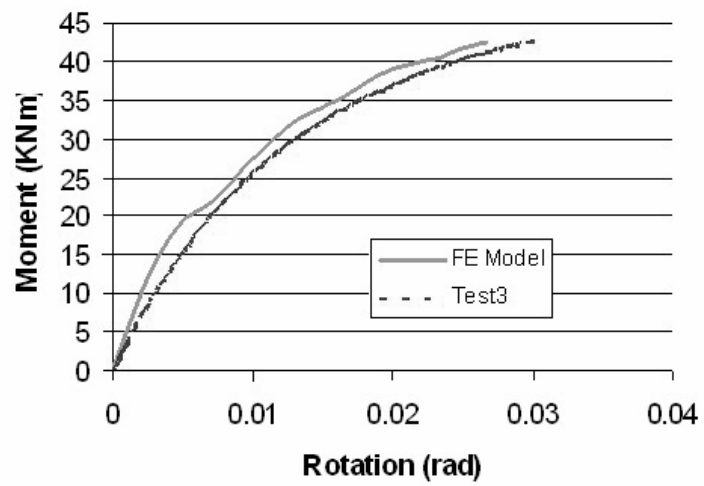


Figure 8. Moment-Rotation curves for Test3 and the associated FE model

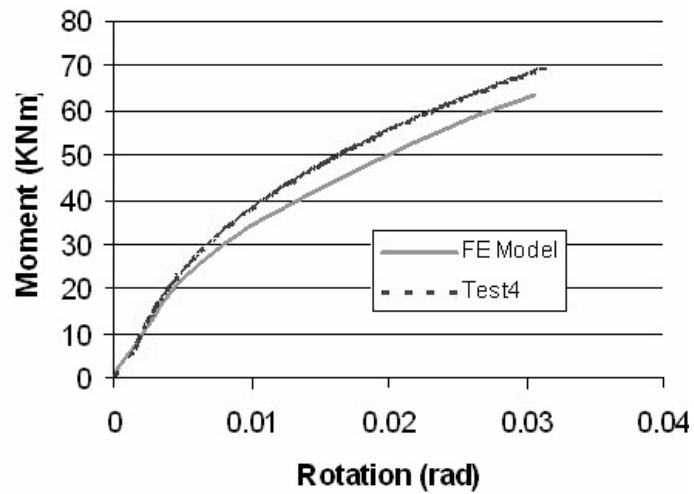


Figure 9. Moment-Rotation curves for Test4 and the associated FE model

As it can be verified (Fig. 10), the numerical models manage to reproduce the angle deformation behavior, which is the fundamental source of strain for this typology of bolted joints. In Figure 11 the final deformed configuration of Test1 can be observed.

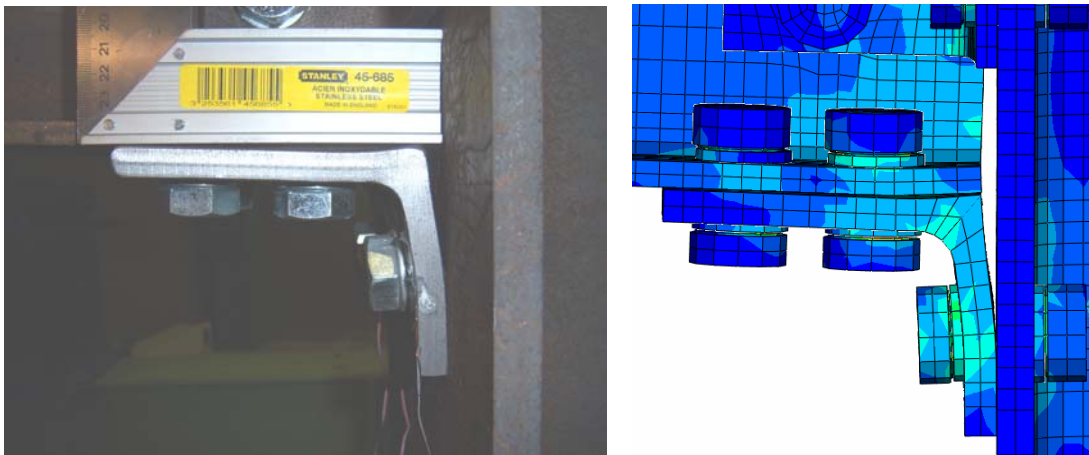


Figure 10. Comparative between test and FE model deformation behaviour in Test1

The stiffness and resistance increasing, by comparing Test1 (top angle thickness equal to 12 mm) and Test3 (top angle thickness equal to 8 mm), is about 100%. These results show the possibilities of this connection in order to match with different design requirements, just varying the angle thickness (Fig. 12).



Figure 11. Deformed connection configuration for Test1

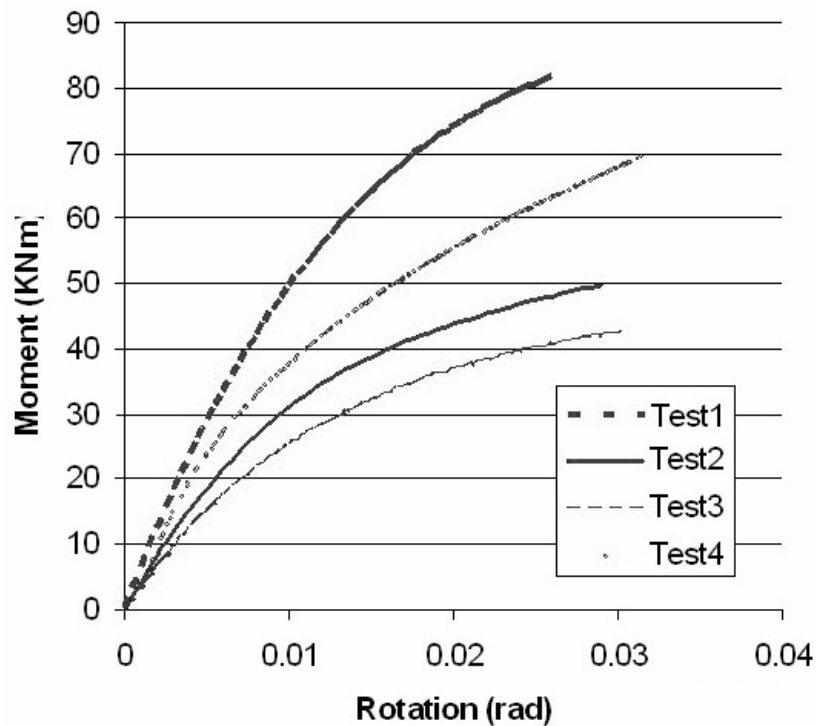


Figure 12. Comparison between Moment-Rotation curves for Test1 to Test4

## VI. Conclusions

3D FE models of top and seat angle connections with double web angles made up of rolled European profiles have been developed. The effectiveness of this modelling approach is proved by comparison with experimental data, so this numerical approximation could be successfully used in future parametric studies. The increase in stiffness and resistance, as a result of varying top angle thickness, has shown the possibilities of angle connections in European steel construction instead of other semi-rigid typologies.

## References

- [1] Citipitioglu A.M., Haj-Ali R.M. and White D.W. Refined 3D Finite Element Modelling of Partially-Restrained Connections Including Slip. *Journal of Constructional Steel Research*, 58 (2002) 995-1013.
- [2] CEN Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1.8: Design of Joints, EN 1993-1-8:2005.
- [3] Reinoso J.M., Loureiro A., Gutiérrez R. and Moreno A., “Nonlinear elastic-plastic 3d finite element modelling of Top and Seat Angle Connections with Double Web Angle”, Eurosteel 2008: 5th European Conference on Steel and Composite Structures, Volume A, 501-506, Graz (Austria), 2008.

## Análisis numérico de la respuesta térmica y estructural de un puente de vigas metálico en condiciones reales de incendio

Guillem Peris-Sayol, José Alós-Moya, Ignacio Payá-Zaforteza ✉, Antonio Hospitaler-Pérez

ICITECH, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera S/N, 46022 Valencia, España.

guipesa2@cam.upv.es, joalmo11@upv.es, igpaza@upv.es, ahospitaler@cst.upv.es

### Resumen

El análisis de la respuesta de los puentes frente al fuego es un tema de gran interés, poco estudiado y no cubierto en las normativas actuales. Este artículo estudia la respuesta de un puente de vigas metálico de 12.2 m de luz ante varios fuegos reales causados por un camión cisterna y analiza tanto aspectos de modelización numérica como la influencia en la respuesta de diferentes parámetros (posición del camión y magnitud de la sobrecarga de uso entre otros). Para ello, se realiza primeramente un modelo de fuego del puente y su entorno empleando técnicas de Dinámica de Fluidos Computacional y el programa FDS. Seguidamente, se realiza un análisis termo-estructural no lineal de la viga más afectada por el incendio en Abaqus. Los resultados son de interés para ingenieros e investigadores y muestran (1) la importancia de considerar condiciones reales de incendio y no modelos simplificados como la curva de hidrocarburos y (2) la necesidad de desarrollar herramientas específicas para el proyecto de puentes frente al fuego.

### Palabras clave

Fuego, puente, Dinámica de Fluidos Computacional, CFD, diseño basado en prestaciones

### I. Introducción

Los puentes son elementos críticos de las infraestructuras de transporte cuyo colapso o deterioro puede tener grandes repercusiones económicas y sociales. Para minimizar la probabilidad de que estos eventos puedan suceder, las diferentes normativas (véase por ej. [1,2]) definen las acciones o cargas a tener en cuenta en su diseño. En este contexto, acciones extraordinarias como el sismo, el viento o la socavación de la cimentación han sido muy investigadas en el pasado (véase por ej. [3]) y están ampliamente recogidas en las normativas actuales. En cambio, estas normativas no indican nada sobre cómo proteger o diseñar un puente frente al fuego. Así, normas relativas al diseño frente al fuego como la parte 1-2 del Eurocódigo 1 [4] describen las acciones térmicas y mecánicas para el proyecto de edificios y por lo tanto excluyen los puentes. Por su parte, las normas de acciones en puentes como el Eurocódigo 1 parte 2 [2] especifican aspectos como las sobrecargas de uso, pero no indican cómo considerar el fuego en el proyecto o evaluación estructural de un puente.



Figura 1. Colapso del Intercambiador Mc Arthur en Oakland: (a) puente bajo la acción del fuego, (b) estado en que quedó el puente tras el incendio. Fotografías: (a) Noah Berger, Associated Press, (b) Mark Constantini, San Francisco Chronicle.

Este vacío normativo contrasta con la importancia del fuego en los puentes evaluada por el número y consecuencias de los incidentes ocurridos en el pasado. Así, una encuesta realizada por el Departamento de Transportes del Estado de Nueva York de los Estados Unidos (NYDOT, [5]) reveló que el fuego fue la quinta causa de colapsos de puentes en este país, por delante de eventos como el sismo. Las consecuencias de un incendio en un puente son ilustradas por el colapso del Intercambiador Mc Arthur en Oakland, California, tras el incendio causado por el vuelco de un camión cisterna el 29 de abril del año 2007 (Fig. 1). La reparación del puente costó 9 millones de dólares, pero más importantes aun fueron los costes generados en el área de la

Bahía de San Francisco por el cierre del intercambiador que se estimaron en 6 millones de dólares por día de cierre. Una completa revisión bibliográfica sobre los efectos del fuego en puentes, incidentes ocurridos y estudios previos en el tema puede encontrarse en Garlock et al. [6] y Payá-Zaforteza et al. [7].

En este artículo se emplean modelos numéricos para estudiar la respuesta de un puente metálico ante diferentes escenarios reales de incendios causados por camiones cisterna que transportan combustibles. Se consideran diferentes posiciones de un camión cisterna de gasolina resultado del análisis de accidentes previos. El análisis emplea técnicas de Dinámica de Fluidos Computacional (*Computer Fluid Dynamics*, CFDs) implementadas en el programa *Fire Dynamics Simulator* (FDS) para simular el incendio y obtener las temperaturas en el gas alrededor del puente. Estas temperaturas son el punto de partida de un análisis termo-estructural considerando las no linealidades geométricas y del material realizado con el programa de elementos finitos Abaqus.

Los resultados obtenidos son comparados con los proporcionados por Payá-Zaforteza y Garlock [8] empleando un modelo de fuego simplificado (curva de calentamiento representada por la curva de hidrocarburos aplicada de forma uniforme en toda la longitud del puente) que se alejan de las condiciones reales de un incendio. La comparación de resultados permite analizar la precisión y seguridad obtenidas al emplear curvas de calentamiento simplificadas como la curva de hidrocarburos en lugar de complejos modelos de cálculo basados en el uso de CFDs. Además, el estudio analiza la influencia de diferentes parámetros como la magnitud de las sobrecargas de uso y las condiciones de apoyo del puente. Por todo ello, el trabajo que se presenta aquí tiene un gran interés investigador (por la novedad del tema tratado) y práctico (por la aplicabilidad de los resultados obtenidos).

## II. Descripción del puente analizado

El puente analizado en este estudio es un puente biapoyado proyectado por la *Federal Highway Administration* (FHWA) de los Estados Unidos de América. El puente salva una luz de 12.2 m y su sección transversal se muestra en la Fig. 2. La sección transversal está formada por cinco vigas de acero del tipo W33x141 según el catálogo de perfiles del American Institute of Steel Construction (AISC) [9] que soportan una losa de hormigón armado de 0.2 m de canto. La losa no está conectada a las vigas, por lo que no se trata de una estructura mixta. Además, existen dos diafragmas en las secciones de centro luz y de apoyos que proporcionan estabilidad lateral al puente. El tablero tiene dos juntas de dilatación en sus extremos con un ancho de 3.6 cm. El acero empleado es del tipo A36 de acuerdo con [10] y, por tanto, su límite elástico garantizado a temperatura ambiente es de 250 MPa .

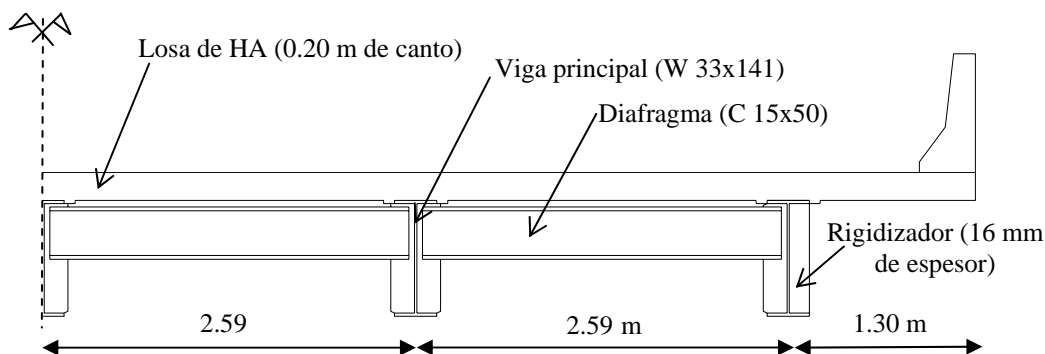


Figura 2. Sección transversal del puente estudiado.

## II. Análisis numérico

### II.1 Introducción

El análisis numérico consta de 4 fases:

(1) Simulación de incendios mediante el software FDS [11] en el que se obtienen las temperaturas producidas por el incendio en el entorno del puente.

(2) Obtención de las temperaturas en la superficie y en el interior de la viga del puente más desfavorable a partir de las temperaturas existentes en su perímetro. Esto se hace resolviendo el problema de transferencia de calor con el programa Abaqus [12].

(3) Obtención de la respuesta estructural de la viga más solicitada también mediante Abaqus [12]. En esta fase, se supone la viga sometida a cargas gravitatorias constantes y a un incremento de temperaturas que implican un deterioro progresivo de las características de los materiales

(4) Obtención de conclusiones a partir de la valoración de las resistencias al fuego alcanzadas así como de los fallos detectados.

Se insiste en que en la fase (1) se trabaja con un modelo de todo el puente y de su entorno, mientras que en las fases (2), (3) y (4) se trabaja solamente con la viga de la estructura más solicitada.

## II.2 Modelo de fuego con técnicas de Dinámica de Fluidos Computacional

El modelo de FDS [11] resuelve numéricamente una forma de las ecuaciones de Navier-Stokes apropiadas para baja velocidad del flujo térmico, con un especial énfasis en el humo y el transporte de calor por el fuego. El FDS es un modelo de campo CFD que calcula la temperatura, la densidad, la presión, la velocidad, el flujo de calor, la tasa de pérdida de masa y la composición química en cada celda de la malla en cada paso de tiempo discreto. Para ello el programa emplea (1) la ecuación de la conservación de la masa, (2) la ecuación de la conservación de las especies, (3) la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento, (4) la ecuación de la conservación energía y (5) la ecuación de estado. Adicionalmente se ha recurrido al modelo de turbulencia LES (*Large Eddy Simulator*) asumiendo la forma de Smagorinsky.

Los dos escenarios de fuego planteados (Fig. 3) se diferencian únicamente por la posición de la carga de fuego (a) En centro luz y (b) Próxima al apoyo. La carga de fuego se ha modelizado de forma simplificada por una superficie horizontal de 25 m<sup>2</sup> (12 x 2.5 metros) [13] dispuesta a un metro de altura con una tasa de liberación de calor (HRR) de 2400KW/m<sup>2</sup> correspondiente a una piscina de gasolina con diámetro equivalente superior a 3 metros [14]. Esta carga representa la energía liberada en el incendio por un camión cisterna de la misma huella y volumen de la cisterna de 25 m<sup>3</sup>.

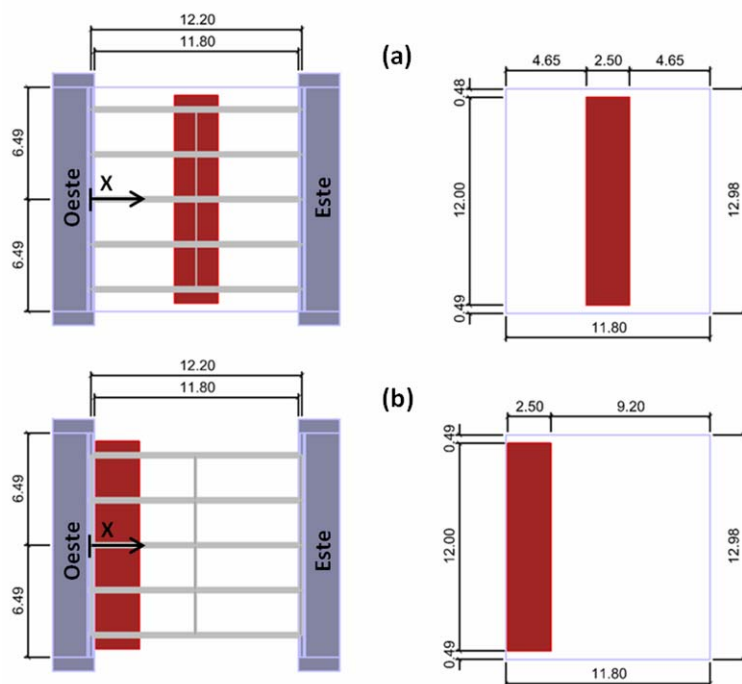


Figura 3: Posiciones de las cargas de fuego: (a) fire1: En centro luz, (b) fire2: Próxima al apoyo

## II.3 Análisis termo-mecánico mediante elementos finitos (FE)

### II.3.1 Introducción

El estudio numérico se ha llevado a cabo mediante el software de elementos finitos (EF) Abaqus [12] y comprende el estudio de la respuesta de la viga central, que es la que alcanza mayores temperaturas durante el incendio. Debido a la existencia de cargas de fuego no simétricas, ha sido necesario modelar la totalidad de la viga y no solo la mitad de ella como se hizo en Paya-Zaforteza y Garlock [8]. El análisis mediante Abaqus se



ha abordado desacoplando el problema de transmisión de calor del problema estructural. Así en una primera fase se obtienen las temperaturas en todo el dominio de la viga y en una segunda fase se analiza la respuesta estructural del elemento mediante la actualización de las características mecánicas de los materiales en función de su temperatura a lo largo del tiempo.

Para el análisis térmico se ha recurrido a un elemento finito de transferencia de calor tridimensional de 8 nodos con un grado de libertad por nodo (DC3D8) mientras que para el análisis estructural se ha utilizado un elemento finito tridimensional de 8 nodos con tres grados de libertad por nodo (C3D8). La utilización de elementos finitos tridimensionales viene motivada por la necesidad de capturar fenómenos locales como el pandeo o la abolladura.

La losa de hormigón únicamente se ha considerado en la transmisión de calor dada su influencia en el enfriamiento del ala superior de la sección metálica dejándose fuera del cálculo en el análisis estructural donde su contribución es despreciable por no existir acción mixta en el puente.

### II.3.2 Propiedades de los materiales

Los materiales, hormigón y acero, se han caracterizado de acuerdo a los Eurocódigos 2 y 3 [15-16]. El acero utilizado es un A36 con límite elástico 250 MPa en el que se ha incorporado el endurecimiento por deformación propuesto por el Eurocódigo 3 [16] y se han manejado curvas constitutivas reales ( $\sigma_n$ ,  $\epsilon_n$ ) obtenidas mediante las siguientes expresiones:

$$\sigma_n = \sigma \cdot (1 + ) \quad (1)$$

$$\epsilon_n = \ln(1 + ) \quad (2)$$

En lo que respecta al hormigón únicamente se han caracterizado las propiedades térmicas envueltas en el modelo de transmisión de calor (densidad, calor específico y conductividad) asumiendo para la conductividad el límite superior propuesto por el Eurocódigo 3 [15].

### II.3.3 Condiciones de contorno

El puente estudiado está compuesto de un único vano simplemente apoyado en sus extremos oeste y este. El apoyo este es fijo mientras que el oeste es móvil. No obstante, la viga no puede dilatarse libremente de forma indefinida: cuando la magnitud del movimiento longitudinal del puente supera el ancho de la junta de dilatación, el movimiento es impedido por la existencia de un vano adyacente o de un estribo. Por ello, es necesario estudiar dos modelos estructurales diferentes en cada caso de carga: cuando se trabaje sin coacción al movimiento longitudinal se hablará de condición "free" (dilatación libre) y cuando se incluya se considerará condición "fix" (dilatación longitudinal restringida a los 36 mm de la junta oeste).

### II.3.4 Cargas Térmicas

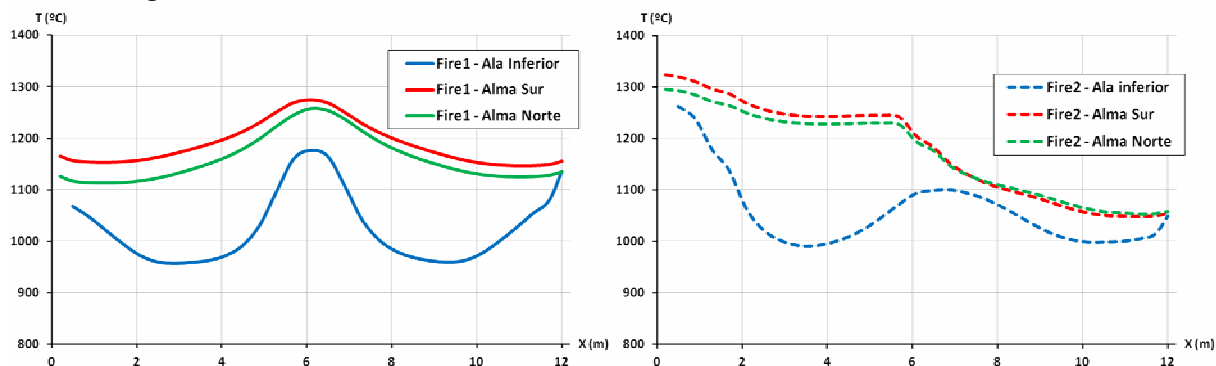


Figura 4: Temperaturas del gas en el entorno de la viga central: (a) fire1: En centro luz, (b) fire2: Próximo al apoyo

Las cargas térmicas son las temperaturas del gas en el contorno de la viga a estudiar (la viga central en el presente artículo). En el modelo estructural se han implementado tres cargas térmicas, dos de ellas procedentes de los modelos FDS (Fig. 4) y una tercera es la curva de hidrocarburos indicada en el

Eurocódigo1 [3]. Mientras que la curva de hidrocarburos se aplica de forma uniforme en todo el contorno las cargas térmicas procedentes de FDS se han discretizado en distintas zonas dadas las grandes variaciones que experimentan en el entorno de la viga. En la Fig.5 se muestran los incendios "fire1" y "fire2".

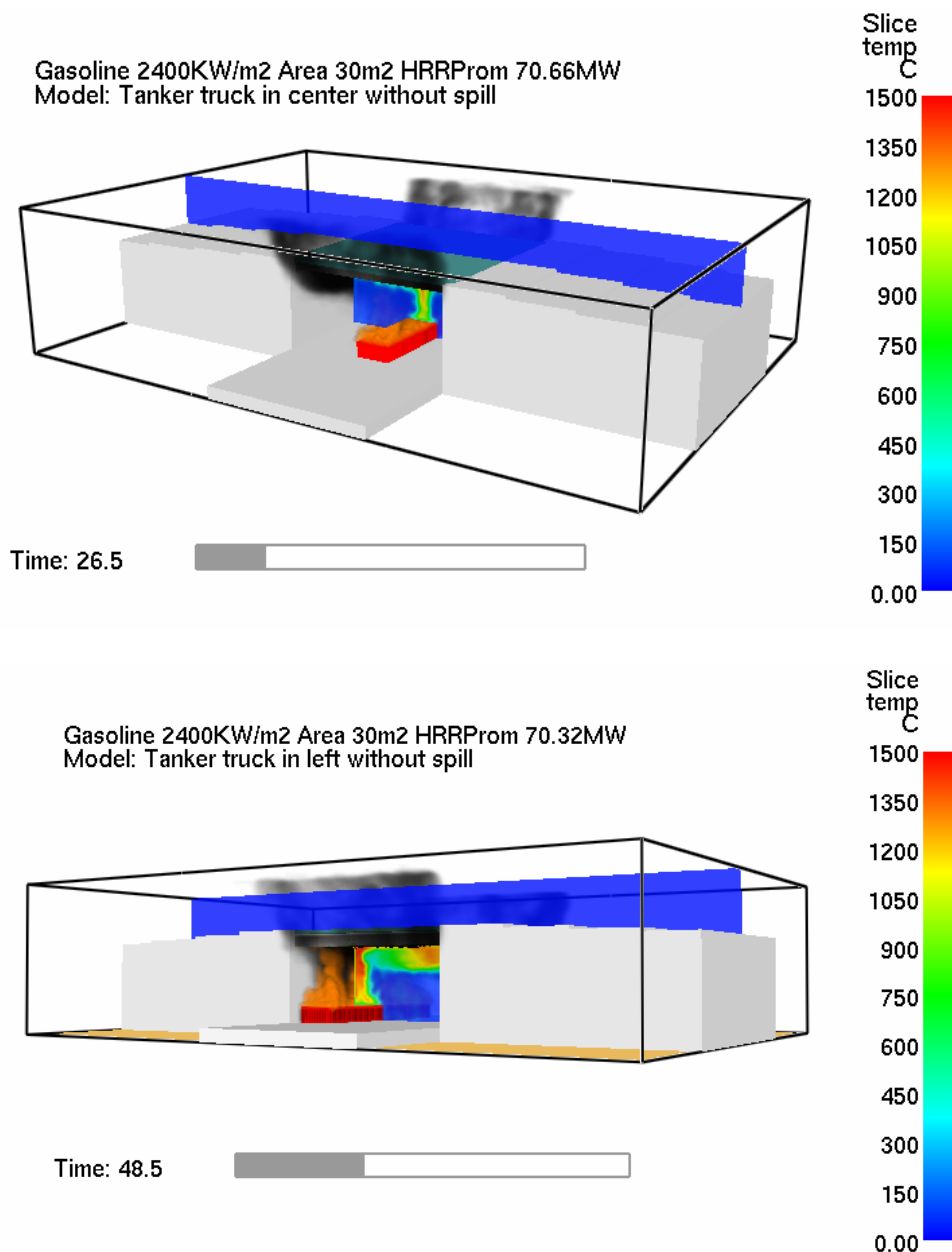


Figura 5: Imagen de los incendios "fire1" (superior) y "fire2" (inferior)

### II.3.5 Cargas gravitatorias

Como indican Paya-Zaforteza y Garlock [8] y, debido a que existen grabaciones que muestran coches cruzando un puente durante un incendio [17], es necesario considerar alguna sobrecarga simultánea al incendio aunque las normativas no indican cuál. Por este motivo se han considerado distintos niveles de sobrecarga, asumiendo únicamente la debida a vehículos ligeros, en la respuesta estructural del puente frente a dos escenarios de fuego reales. Los valores de cargas muertas y sobrecargas en el análisis son:

- 22542 N por metro lineal de viga de acero para cargas muertas. Este valor corresponde al peso propio del hormigón y del pavimento de la cubierta soportado por cada viga de acuerdo con el Eurocódigo1 en su parte 2 [2]. Además se ha considerado el peso propio de la viga (2067N/m).
- Una carga uniforme máxima de 10700 N por metro lineal de viga, de acuerdo con el código AASHTO [18] actuando en toda la longitud del vano. Aunque originalmente el puente se diseñó para soportar el

camión HS20-44 del código AASHTO [18]. Esta carga no ha sido considerada en los análisis debido a que no se han encontrado pruebas de camiones cruzando puentes en el momento del incendio.

### II.3.6 Tipos de mallado empleados

En el escenario de fuego "fire1" se han empleado 3 mallados distintos con el fin de valorar el efecto de su consideración sobre la respuesta estructural y el tiempo de fallo del escenario de fuego "fire1" dados dos tipos de coacciones longitudinales  $u_1=0$  en el apoyo este (apoyo fijo). La diferencia entre los tres mallados (Fig. 6) se aprecia en los tramos extremos y centrales. Dividiendo la viga en 16 tramos de igual longitud los tramos 1, 8, 9 y 16 son los que presentan distintos grados de finura. Mientras la malla "mesh1" presenta tres elementos longitudinales por cada uno de los 16 tramos la malla "mesh2" presenta 6 elementos longitudinales y la malla "mesh3" presentaría 12 elementos longitudinales.

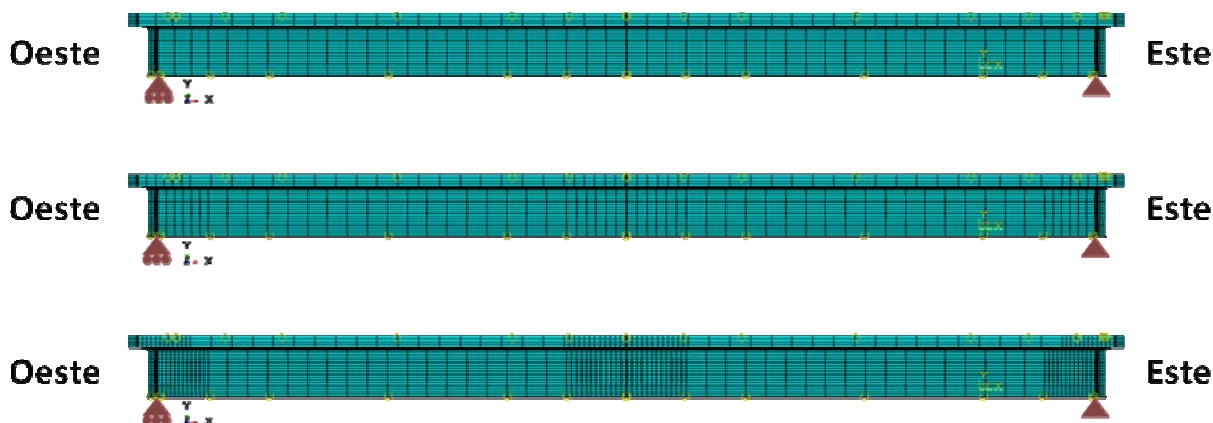


Figura 6: Comparativa entre mallas utilizadas. De arriba a abajo: mesh1, mesh2 y mesh3

### II.3.7 Coacción longitudinal en apoyo fijo

Se han probado dos formas de modelar la coacción a los desplazamientos longitudinales en el escenario "fire1". La primera consiste en la aplicación de una restricción del tipo  $u_1=0$  (siendo  $u_1$  el desplazamiento en la dirección "X" de la Fig.3), en una arista situada en la sección de apoyo "Este" ( $u_{1line}$ ). La segunda consiste en aplicar la misma restricción de tipo  $u_1=0$  en toda la superficie localizada bajo los rigidizadores de apoyo ( $u_{1srf}$ ).

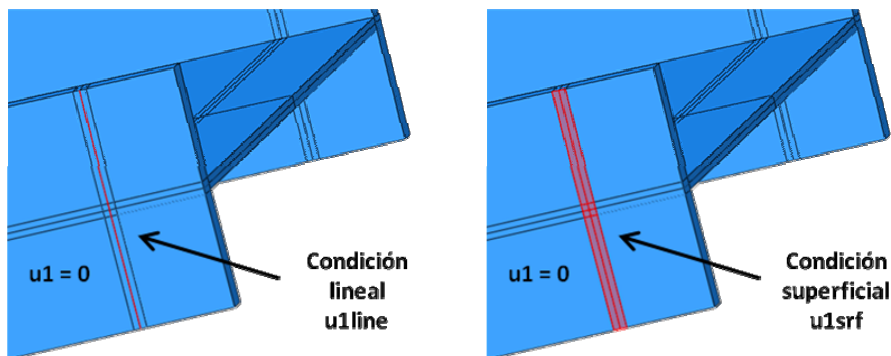


Figura 7: Vista del ala inferior de la viga mostrando los dos tipos de coacciones longitudinales estudiadas en el apoyo fijo (apoyo este). Izquierda:  $u_{1line}$ , Derecha:  $u_{1srf}$

### II.3.8 Tabla resumen y nomenclatura

En la Tabla 1 se detallan los parámetros considerados en cada uno de los análisis incluidos en el presente estudio:

**Tabla 1**

Parámetros considerados en el análisis

Analysys name	Escenario de fuego	Tramos	u1 oeste (Dilatación)	u1 este (Apoyo)	Sobrecargas	Malla
Fire1-16-Free-u1lin-0-mesh1	Fire1	16	Free	u1lin	0	mesh1
Fire1-16-Free-u1lin-0-mesh2	Fire1	16	Free	u1lin	0	mesh2
Fire1-16-Free-u1lin-0-mesh3	Fire1	16	Free	u1lin	0	mesh3
Fire1-16-Free-u1srf-0-mesh1	Fire1	16	Free	u1srf	0	mesh1
Fire1-16-Free-u1srf-0-mesh2	Fire1	16	Free	u1srf	0	mesh2
Fire1-16-Free-u1srf-0-mesh3	Fire1	16	Free	u1srf	0	mesh3
Fire1-16-Free-u1srf-0.3Q-mesh3	Fire1	16	Free	u1srf	0.3Q	mesh3
Fire1-16-Free-u1srf-0.5Q-mesh3	Fire1	16	Free	u1srf	0.5Q	mesh3
Fire1-16-Free-u1srf-Q-mesh3	Fire1	16	Free	u1srf	Q	mesh3
Fire1-16-Fix-u1srf-0.3Q-mesh3	Fire1	16	Fix	u1srf	0.3Q	mesh3
Fire1-16-Fix-u1srf-0.5Q-mesh3	Fire1	16	Fix	u1srf	0.5Q	mesh3
Fire1-16-Fix-u1srf-Q-mesh3	Fire1	16	Fix	u1srf	Q	mesh3
Fire1-16-Fix-u1srf-0-mesh3	Fire1	16	Fix	u1srf	0	mesh3
Fire1-8-Fix-u1srf-0-mesh3	Fire1	8	Fix	u1srf	0	mesh3
Fire1-4-Fix-u1srf-0-mesh3	Fire1	4	Fix	u1srf	0	mesh3
Fire1-2-Fix-u1srf-0-mesh3	Fire1	2	Fix	u1srf	0	mesh3
Fire1-1-Fix-u1srf-0-mesh3	Fire1	1	Fix	u1srf	0	mesh3
Fire2-16-Free-u1srf-0-mesh3	Fire2	16	Free	u1srf	0	mesh3
Fire2-16-Fix-u1srf-0-mesh3	Fire2	16	Fix	u1srf	0	mesh3
Fire2-8-Fix-u1srf-0-mesh3	Fire2	8	Fix	u1srf	0	mesh3
Fire2-4-Fix-u1srf-0-mesh3	Fire2	4	Fix	u1srf	0	mesh3
Fire2-2-Fix-u1srf-0-mesh3	Fire2	2	Fix	u1srf	0	mesh3
Fire2-1-Fix-u1srf-0-mesh3	Fire2	1	Fix	u1srf	0	mesh3
Hidroc-1-Free-u1srf-0-mesh1	Hidroc	1	Free	u1srf	0	mesh1
Hidroc-1-Free-u1srf-0-mesh2	Hidroc	1	Free	u1srf	0	mesh2
Hidroc-1-Free-u1srf-0-mesh3	Hidroc	1	Free	u1srf	0	mesh3
Hidroc-1-Fix-u1srf-0-mesh3	Hidroc	1	Fix	u1srf	0	mesh3

Tabla1: Parámetros considerados en el estudio

### II.3.9 Valoración del fallo

Se han considerado como criterios de fallo los propuestos por Payá-Zaforteza y Garlock [8]. La estructura colapsa cuando se alcanza alguna de las siguientes condiciones:

- a) Se produce fractura:
  - a.1) Al alcanzar la deformación última,  $\varepsilon_u$ , del material. Se comprueba comparando la deformación unitaria logarítmica principal LE de la estructura con las deformaciones reales.
- b) La estructura se vuelve inestable como consecuencia de:
  - b.1) Un rápido incremento de la flecha máxima registrada en la viga.
  - b.2) Un desplazamiento del extremo libre (oeste) hacia el centro de la viga.

### III. Resultados y discusión

#### III.1 Influencia de la consideración de un fuego real

En la Fig. 8 puede apreciarse como un incendio real (fire1) donde un camión cisterna comienza a arder en centro luz del puente en el sentido de la marcha haría colapsar la viga central del puente en poco más de de 3 minutos, mientras que si se analiza la respuesta estructural aplicando en toda las superficie de la viga las temperaturas de la curva de hidrocarburos el tiempo de fallo supera los 8 minutos. Las flechas alcanzadas en el escenario "fire1" en el momento de colapso son un 24.3% inferiores en el caso de la malla "mesh1" y un 49.2% inferiores en el caso de la malla "mesh2" a las obtenidas en el escenario de hidrocarburos.

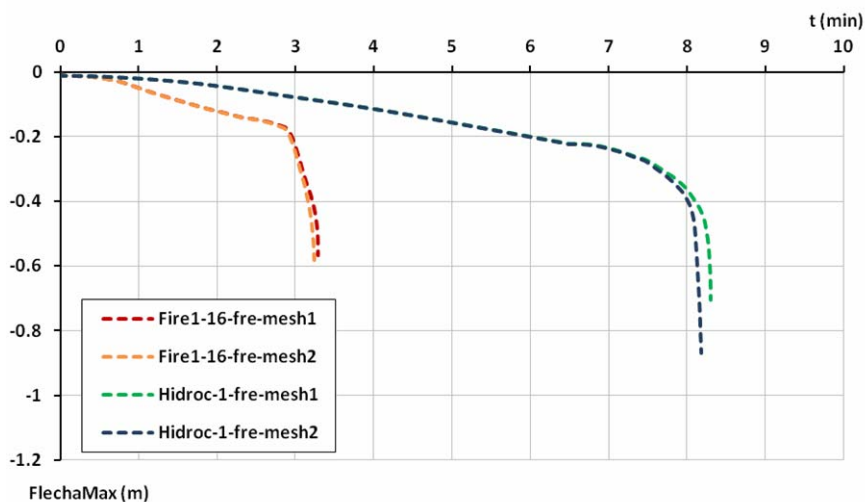


Figura 8: Comparativa incendio real vs Curva Hidrocarburos. Evolución en el tiempo de la flecha máxima.

El motivo de que la viga central del puente alcance el colapso en tiempos notablemente superiores se debe a dos motivos fundamentales. El primero es que el escenario de hidrocarburos ejerce sobre la viga una acción uniforme a lo largo de la misma mientras que el escenario de fuego real (fire1) ejerce una sollicitación variable a lo largo de la misma que en gran parte de los casos suele ser más perjudicial para la estructura como ocurre con las fuerzas puntuales respecto a las distribuidas. El segundo radica en que la curva de hidrocarburos, por definición, es una curva con un incremento de temperaturas más progresivo que el obtenido en el caso del fuego real. En la Fig. 9 puede verse como las curvas de calentamiento aplicadas sobre la viga en el escenario "fire1" alcanzan el máximo muy rápidamente como consecuencia de la gran velocidad de propagación (~2m/s) [19] de la llama en combustibles como la gasolina que hace que el incendio adquiera el carácter de totalmente desarrollado con las llamas muy próximas a la viga de estudio. Resulta necesario por tanto, el desarrollo de curvas de fuego para puentes con el fin de evaluar su resistencia frente a fuegos estandarizados.

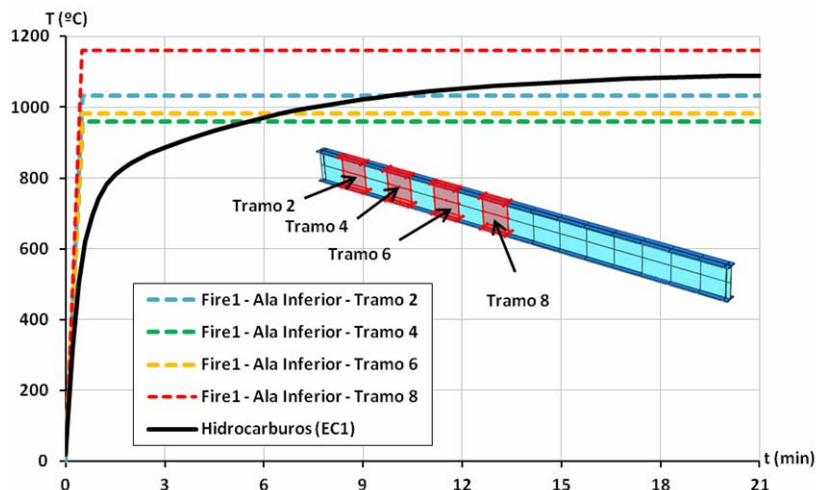


Figura 9: Comparativa entre curvas de calentamiento en tramos 2, 4, 6 y 8 (de 16) con curva de hidrocarburos

### III.2 Influencia de la malla y coacción longitudinal en el apoyo

En la Fig. 10 se puede ver que los tiempos de fallo y desplazamientos verticales son muy similares en todos los casos pero, en el caso de adoptar una restricción superficial, más realista por otro lado, se evitan concentraciones de esfuerzos que sí aparecen al adoptar una restricción lineal.

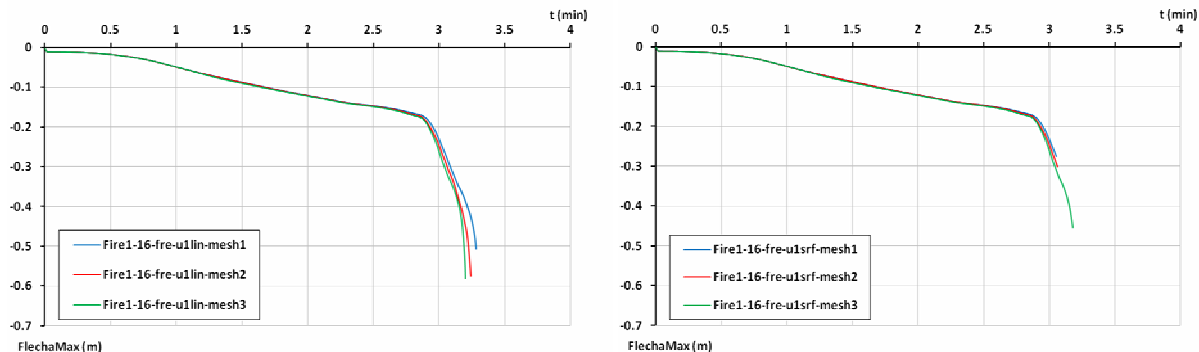


Figura 10: Comparativa entre mallas y tipos de coacciones longitudinales: (a) u1lin, (b) u1srf

La Fig. 10 también pone de manifiesto que los tipos de mallado utilizados apenas afectan a la forma de la curva que define la evolución de la flecha máxima. Conforme se afinan los extremos y la parte central de la viga, se reduce ligeramente el tiempo de fallo así como se aumenta la flecha máxima alcanzada. Ambas variaciones se explican por el incremento de los esfuerzos locales en apoyos que se registran al afinar el tamaño de los elementos finitos.

En lo sucesivo se ha utilizado siempre la malla "mesh3" más fina que las otras en las regiones extremas y central porque con ella se alcanzan resultados más precisos.

### III.3 Influencia del escenario de fuego y la restricción longitudinal

Como ya se ha indicado anteriormente se han estudiado tres hipótesis de carga de fuego: (1) fire1: fuego en centro luz, (2) fire2: fuego próximo al apoyo y (3) Curva de hidrocarburos. La Fig.11 muestra la evolución de la flecha máxima en los tres escenarios para las dos condiciones de restricción longitudinal del apoyo oeste (1) "fre": Sin restricción alguna y (2) "fix": con restricción longitudinal a 3.6 cm del extremo oeste. En los tres escenarios de fuego el caso "fix" presenta una menor flecha máxima que en el caso "free". El motivo es que la viga, al flectar, contacta en su parte inferior con el estribo oeste. Al contactar el estribo ejerce un momento negativo sobre la viga que impide que la curvatura se vea incrementada como ocurre en el caso de dilatación libre. En cuanto a la diferencia entre escenarios de fuego, indicar que los dos incendios reales presentan tiempos de fallo muy inferiores a los que presenta el calentamiento por hidrocarburos, siendo el "fire2" el que ofrece tiempos de fallo menores. En el caso del "fire1" el efecto de la restricción longitudinal al movimiento es mucho más acentuado que en el caso del "fire2".

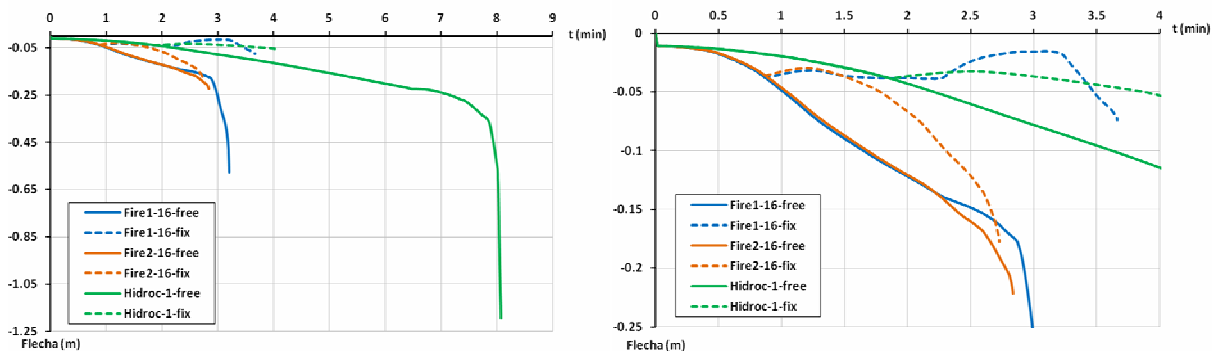


Figura 11: Comparativa restricción longitudinal ("free" vs "fix").

### III.4 Influencia de la tramificación de las curvas

En el programa Abaqus no se pueden introducir las curvas de fuego correspondientes a escenarios reales obtenidas con FDS de forma directa. Por ello, es necesario discretizar la viga en una serie de tramos en cada uno de los cuales se asume una carga de fuego uniforme. Esta carga se corresponde con la curva de

temperaturas medias en el tramo. Por este motivo se ha hecho un análisis para ver la importancia de la tramificación en los resultados. Se han propuesto discretizaciones de 1, 2, 4, 8 y 16 tramos correspondientes a anchos de tramo de 0.76, 1.52, 3.05, 6.10 y 12.20. De esta manera se podrá ver si en futuros trabajos es posible utilizar discretizaciones más groseras con el fin de reducir los tiempos tanto de modelado como de cálculo. En la Fig. 12. se puede ver como se adaptan las curvas reales de temperatura a las tramificaciones más finas.

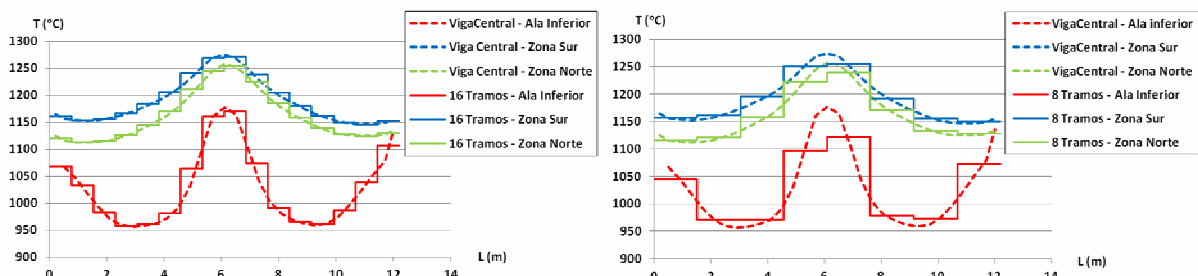


Figura 12: Tramificaciones ejemplo para 16 tramos (0.76 m) y 8 tramos (1.52 m) para la carga de fuego "fire1".

Como podemos ver en la Fig. 13, la modificación de la respuesta estructural en los escenarios de fuego "fire1" y "fire2" es distinta. Mientras que en el incendio provocado por el camión centrado (fire1) las flechas suelen ser superiores con tramificaciones más groseras, en el incendio asociado al camión en el extremo oeste (fire2) las flechas se van reduciendo conforme se reduce el número de tramos con la excepción del caso de tramo único. Adicionalmente se ha detectado que una tramificación de 8 subdivisiones presenta resultados muy similares la tramificación de 16 tramos en cualquiera de los dos incendios por lo que podría considerarse la reducción del número de tramos necesarios para estos dos escenarios de fuego. Las tramificaciones en 1 y 2 subdivisiones quedarían totalmente descartadas mientras que la tramificación en 4 tramos no acaba de reproducir exactamente el fenómeno que se produce antes del colapso en el incendio "fire1".

En el presente estudio, salvo los modelos que consideran el escenario de hidrocarburos y los que indican expresamente el número de tramos, los análisis han incorporado una discretización en 16 subdivisiones con el fin de reproducir lo más fielmente posible la respuesta estructural.

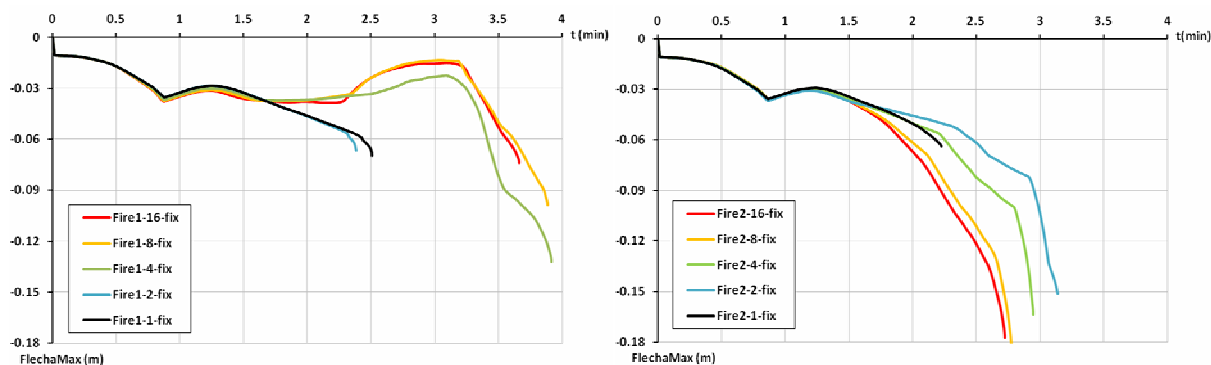


Figura 13: Comparativa entre distintas tramificaciones para los escenarios de fuego "fire1" y "fire2" respectivamente

### III.5 Influencia de la sobrecarga

La Fig. 14 muestra la evolución en el tiempo de la flecha máxima para el caso de camión cisterna en centro-luz (fire1) para diferentes cantidades de sobrecarga y con limitación de dilatación longitudinal al desplazamiento de 3.6 cm (fix) o dilatación totalmente libre (free). En el caso de dilatación libre la respuesta estructural sigue el mismo patrón reduciendo tiempo de fallo y flecha máxima en colapso conforme se incrementa el nivel de sobrecarga en el caso de "free". No obstante, la influencia de la sobrecarga de uso es reducida pues los tiempos de fallo varían entre 2.8 y 3.2 minutos y las flechas máximas entre 0.42 y 0.58 m entre los casos de sobrecarga nula y 100% de la sobrecarga. En el caso "fix" parece detectarse un nivel de sobrecarga crítica que puede que hace que el fallo se produzca sin seguir el patrón establecido en el caso sin sobrecargas que se encontraría por debajo del 30% de la sobrecarga. Este nivel de sobrecarga crítica fijaría el límite entre aquellos casos en que la dilatación libre presenta un tiempo de fallo notablemente inferior, entre 2 y 2.2 minutos (0.3q, 0.5q, q), y el caso sin sobrecarga en que el tiempo de fallo es de 3.6 minutos (un 62% de

superior respecto al caso con 30% de sobrecarga). Este nivel de sobrecarga crítica, implicaría además, en el caso de dilatación restringida "fix" unas flechas máximas considerablemente inferiores al caso "free" de dilatación libre.

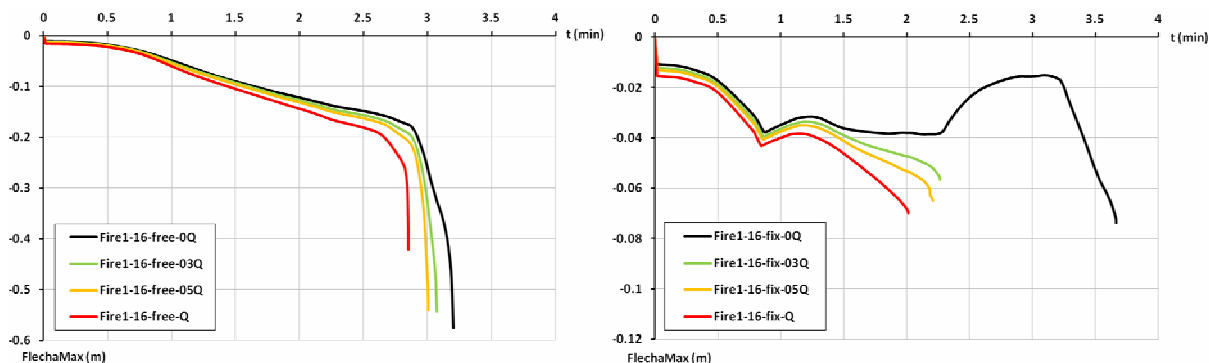


Figura 14: Comparativa entre distintos niveles de sobrecarga para los casos "free" y "fix" respectivamente

#### IV. Conclusiones

El presente artículo ha estudiado la resistencia al fuego de un puente de vigas con losa no conectada simplemente apoyado de 12.2m de longitud diseñado por la FHWA sometido a dos incendios reales. Para ello se ha empleado primeramente el programa FDS que ha permitido obtener las temperaturas bajo el puente y a continuación se ha realizado un cálculo termo-estructural desacoplado mediante Abaqus. Este procedimiento ha permitido: (1) comparar la diferente respuesta estructural del puente frente a escenarios reales de fuego y frente a modelos simplificados, como el de la curva de hidrocarburos y (2) estudiar la influencia de parámetros como el tipo de mallado, la tramificación de la carga de fuego, la magnitud de las sobrecargas y la modelización de las condiciones de contorno.

Las conclusiones obtenidas son las siguientes:

- 1) Los escenarios de fuego reales presentan tiempos de fallo notablemente inferiores a los que ofrecería un análisis adoptando la curva de hidrocarburos. Esto se debe a que la curva hidrocarburos tiene un incremento de temperaturas más progresivo. Parece necesario, por tanto, la inclusión en normativas de curvas estandarizadas que se adapten mejor a un escenario real de fuego en puentes.
- 2) La modelización de la restricción longitudinal en el apoyo fijo como una superficie da mejores resultados que la modelización mediante aristas, siendo más realista y dando tiempos de fallo superiores. Esto se debe a que la modelización de la restricción longitudinal  $u_1=0$  mediante arista genera unas concentraciones de tensiones de mayor magnitud.
- 3) Se recomienda afinar la malla en apoyos y centro luz con el fin de obtener una mejor aproximación a la realidad siempre y cuando las condiciones de contorno sean lo suficientemente extensas para no introducir concentraciones de esfuerzos que no se producen en un caso real.
- 4) En los modelos que consideran "dilatación libre" (free) el colapso se produce por aumento de la flecha en centro-luz mientras que en los modelos de "dilatación restringida" (fix), al flectar la viga, contacta en su parte inferior con el estribo provocando el colapso por plastificación en el apoyo fijo a menores flechas.
- 5) El tiempo de colapso de la estructura depende de la posición del camión cisterna que provoca el incendio. Es ligeramente más restrictivo un incendio en las proximidades del estribo que un incendio en centro luz.
- 6) La implementación de las curvas obtenidas en FDS en el programa Abaqus no es inmediata por lo que deberá escogerse una discretización en tramos suficiente para garantizar una respuesta estructural acorde con la realidad. En el presente estudio se ha visto que subdivisiones de 1.52 metros ( $L/8$  donde  $L$  es la luz del puente) en un puente de un solo vano de 12.2 metros de luz con una carga de fuego promedio de 72MW, resultan suficientes.



- 7) La influencia de la sobrecarga es pequeña en el caso de "dilatación libre" (free) pero presenta una singularidad en el caso de "dilatación restringida" que podría ser motivo de estudio de cara a tratar de mejorar la respuesta estructural de puentes metálicos y/o mixtos.
- 8) Aunque el presente artículo muestra la posibilidad de simular incendios reales en puentes resulta evidente la necesidad de incorporar herramientas y modelos simplificados en normativa que reduzcan la consideración de una acción como el fuego a una comprobación más como ocurre en otros ámbitos como la edificación o los túneles.

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación prestada por el Ministerio de Ciencia e Innovación (proyecto BIA 2011-27104 del Plan Nacional de I+D+i) y por la Universitat Politècnica de València (Programa de Apoyo a la I+D PAID-06-11).

### Bibliografía

- [1] Ministerio de Fomento. Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera IAP-11. Ministerio de Fomento (2011), Madrid.
- [2] European Committee for Standardization (CEN). *Eurocode 1 Actions on Structures, Part 2: Traffic loads on bridges*. CEN (2003), Bruselas (Bélgica).
- [3] European Committee for Standardization (CEN). *Eurocode 1 Actions on Structures, Part 1-2: General Actions - Actions on Structures Exposed to Fire*. CEN (2002), Bruselas (Bélgica).
- [4] Priestley M.J.N., Seible F., Calvi G.M. *Seismic design and retrofit of bridges*. John Wiley & Sons Inc. (1996), New York, USA.
- [5] New York State Department of Transportation. Bridge fire incidents in New York State (Private Correspondence with Prof. M. Garlock). USA: New York State Department of Transportation; 2011.
- [6] Garlock M.E.; Paya-Zaforteza I.; Kodur V.; Gu L. *Fire hazard in bridges: review, assessment and repair strategies*. Engineering Structures (2012) 35:89–98.
- [7] Paya-Zaforteza I.; Alós-Moya J.; Hospitaler A. *Puentes y Fuego. Análisis de una problemática*. II Fire Engineering Conference, Valencia (2012).
- [8] Paya-Zaforteza I.; Garlock M.E.M. *A numerical investigation on the fire response of a steel girder bridge*. Journal of Constructional Steel Research (2012) 75:93-103.
- [9] American Institute of Steel Construction (AISC). *Steel Construction Manual*, 14th Edition. AISC (2010), Chicago, IL, USA.
- [10] American Society for Testing and Materials (ASTM). *ASTM A6/A6M Standard Specification for Structural Steel (A36-/A36M-04a)*. ASTM (2004), West Conshohocken, PA, USA.
- [11] National Institute of Standards and Technology (NIST), *Fire Dynamics Simulator (version 5) User's Guide*. NIST (2007).
- [12] Simulia. *Abaqus 6.11 Abaqus/CAE User's Manual*. Simulia (2011).
- [13] Catalogo hytruck, modelo, Euro II Hongyan XinDaKang, <http://www.hytruck.es/>.
- [14] Society of Fire Protection Engineers (SFPE). *SFPE Handbook of Fire Protection Engineering*. 3th edition. SFPE, (2002).
- [15] European Committee for Standardization (CEN). *Eurocódigo 2 Proyecto de estructuras de hormigón, Parte 1.2: Reglas Generales, Proyecto de estructuras sometidas al fuego*. CEN (2011), Bruselas (Bélgica).
- [16] European Committee for Standardization (CEN). *Eurocódigo 3 Proyecto de estructuras de acero Parte 1.2: Reglas generales, Proyecto de estructuras sometidas al fuego*. CEN (2011), Bruselas (Bélgica).
- [17] Rosenfield M. I-75 tanker explosion collapses nine mile rd overpass in metro. DetroitABC News, July 15, 2009.
- [18] American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO). *LRFD Bridge design specifications*. AASHTO, (2009), Washington D.C., USA.
- [19] Society of Fire Protection Engineers (SFPE). Chapter 12 section 2, *SFPE Handbook of Fire Protection Engineering*. 3th edition. SFPE, (2002).

## Strut-and-Tie Modelling of Deep Beams in the Shear

*Sinđić-Grebović Radmila*

*University of Montenegro. Faculty of Civil Engineering. [radmilasg@gmail.com](mailto:radmilasg@gmail.com)*

### Abstract

This paper deals with strut-and-tie modelling of deep reinforced concrete beams in the shear. Contemporary design codes allow application of strut-and-tie model for the design of deep beams and other elements. Analysis presented in this paper comprises beam modelling and procedure of design according to provisions of current design codes, as well as analysis of experimental results.

### Keywords

Strut-and-Tie Model, Shear strength, D-region, High-Strength Concrete

### I. D-regions of deep beams

In some reinforced concrete elements, such as for example deep beams, there are areas where Bernoulli's principle, which says that planar sections remain plane after load, is no longer valid. In this case calculation based on hypothesis of linear strain distribution in section cannot be applied. Such areas are the areas of discontinuity or D-regions.

D-regions is typically the region around geometrical discontinuity and static discontinuity. A typical example of D-region is the area close to the support beams, and the area around the effects of concentrated load. If it is a deep beam where  $a/l \leq 2h$ , then the whole area of the beam is D-region, as shown in Figure 1, [1]. The maximum span-to-depth ratio of such a D-region would be approximately two. Thus, the smallest angle between the strut and the tie in a D-region is rounded to 25 degrees, [1]. D-regions are characterized by the disturbance of the load transfer system.

For the calculation of bearing capacity of reinforced concrete where the fracture occurs in zones of discontinuity, strut-and-tie model (STM) is applied.

However, the results of experimental tests are not always consistent with the results obtained using the STM. Also, the results obtained using the strut-and-tie models do not show the same security for high-strength concrete and normal strength concrete, [2,3,4]. When defining the effective stress in the elements of the model, the effect of concrete strength on the effective capacity of the elements of strut-and-tie model must be taken into account.

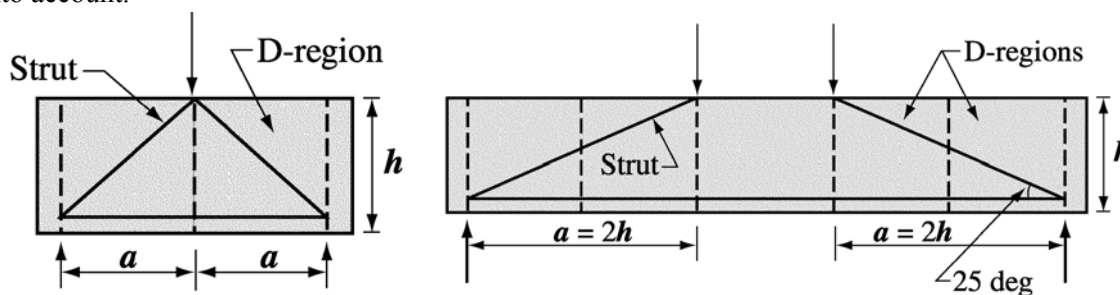


Figure 1. D-regions of deep beams according [1]

### II. Application of strut-and-tie model

The analysis of shear in reinforced concrete members is based on the so called truss analogy. The first model according truss analogy is defined by Ritter and Morsch. In the period of 1980-90 some authors (Schlaich, Collins, etc.) developed a new model based on the analogy of compressed struts and tensioned ties, called a strut-and-tie model. Modern regulations stipulate the application of strut-and-tie model (STM) for the calculation of bearing capacity of reinforced concrete elements in the D-region.

To apply this model, besides the geometric definition of the system, it is necessary to determine the stress state in the STM elements that characterize the ultimate limit state of bearing. It is necessary to establish a

relationship between the uniaxial compressive strength of concrete measured on the cylinder and the effective strength of concrete in the compressed struts and in the nodes of the strut-and-tie model.

### II.1 Defining the strut-and-tie models according to current regulations

Strut-and-tie model was introduced in the Canadian Standard CSA A23.3 in 1984, in AASHTO LRFD Bridge Design Specifications 1994, while according to ACI Building Code application of STM is prescribed 2002 in section Appendix A. According to EN 1992-1-1:2004 strut-and-tie model can be used in cases of non-linear distribution of strain - at the supports, in the area of concentrated load and plane stress state, [5]. Using STM flow stress distributed in reinforced concrete element is idealized. Strut-and-tie model is a system composed of compressed concrete struts, ties of reinforcement and nodes in which they are connected. As suggested by Schlaich and Schäfer, there are three major geometric shape classes for struts: prismatic, bottle-shaped, and compression fan. Fig. 2 shows an illustration of the three major geometric shape classes for struts applied to common deep beam STM. Prismatic struts are the most basic type of strut. Bottle-shaped struts are formed when the geometric conditions at the end of the struts are well defined, but the rest of the strut is not confined to a specific portion of the structural element. Most of the regulations prescribe a minimum amount of reinforcement to control cracking in the zone where the bottle-shaped strut is formed, [6,7,8,9].

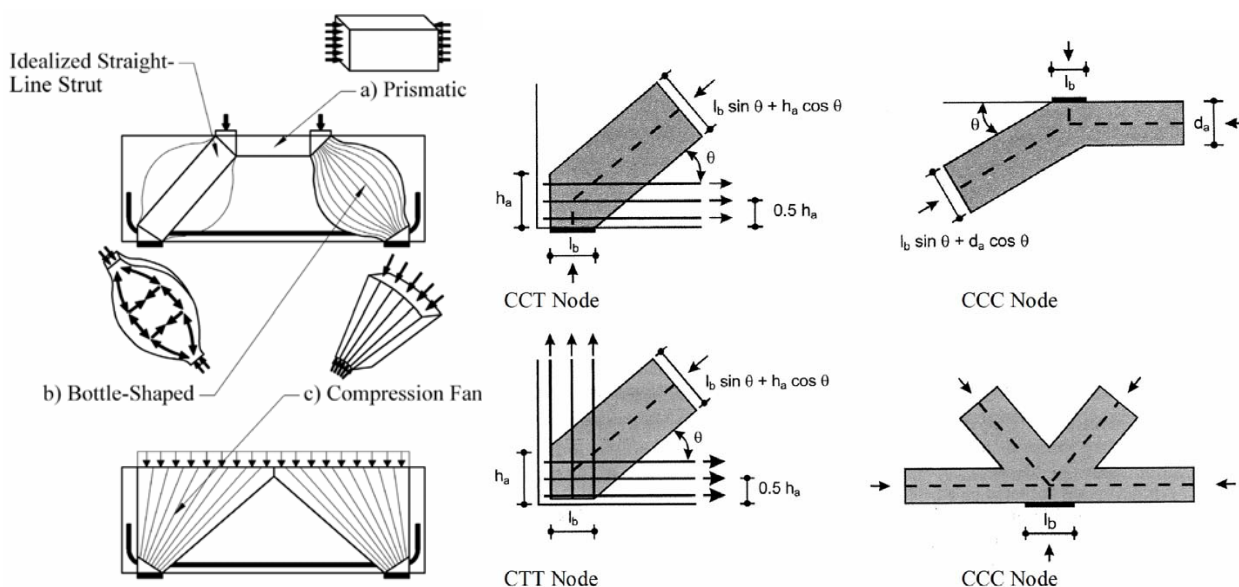


Figure 2. Geometric shapes of struts and different types of strut-and-tie model nodes [6]

### II.2 Bearing capacity of elements by STM

Rules for the application of STM defined by current regulations are mainly oriented to the definition of the limit (effective) capacity of individual elements of the model. Recommendations relating to the determination of the geometry of the model are very limited. Also, there are significant differences among different codes in relation to the capacity of individual elements of the model, as well as the minimum reinforcement required for crack control.

Formulas for calculation of capacity of STM elements are a function of concrete strength under uniaxial pressure. They represent the concrete compressive strength, which was corrected by the appropriate correction factor. Most modern regulations provide correction coefficients in the form of constants that do not depend on the strength of concrete.

Calculation of compressed strut, ties and nodes of STM according to the ACI 318-02 (ACI 318-05, ACI 318-08), Appendix A is based on the formula:

$$\phi F_n \geq F_u \quad (1)$$

$F_u$  is the force in a strut or tie, or the force acting on one face of a nodal zone, due to the factored loads;

$F_n$  is the nominal strength of the strut, tie, or nodal zone;

$\phi$  is the strength reduction factor.

The nominal compressive strength of a strut or nodal zone is given by the formula:

$$F_n = f_{cu} A \quad (2)$$

where:  $f_{cu}$  effective compressive strength of the concrete in a strut or nodal zone, while  $A$  is the cross-sectional area at one end of the strut, the area of the face of the nodal zone that  $F_u$  acts on, taken perpendicular to the line of action of  $F_u$ , or the area of a section through the nodal zone, taken perpendicular to the line of action of the resultant force on the section.

The effective strength of concrete elements in STM is expressed depending on the concrete compressive strength ( $f_c'$ ) using the following expression

$$f_{cu} = 0.85\beta_s f_c' \quad \text{or} \quad f_{cu} = 0.85\beta_n f_c' \quad (3)$$

$\beta_s=1.0$  for a strut of uniform cross-sectional area over its length in a compression zone;

$\beta_s=0.75$  applies to bottle-shaped struts with distributed reinforcement

$\beta_s=0.60$  applies to bottle-shaped struts without distributed reinforcement

$\beta_n=1.0$  applies in nodal zones bounded by struts or bearing areas, or both (CCC node)

$\beta_n=0.80$  applies in nodal zones anchoring one tie (CCT node)

$\beta_n=0.60$  applies in nodal zones anchoring two or more ties (CTT node)

According to the Canadian Standards Association (CSA) and the AASHTO LRFD Bridge Design Specifications the requirement given in relation (1) should be met, where the reduction factor  $\phi=0.70$ . Compressive capacity of strut element is defined as a function of strain in tension and the angle between the concrete strut and tie elements, using equations (4) and (5).

$$f_{cu} = \frac{f_c'}{0.8 + 170\varepsilon_1} \leq 0.85f_c' \quad (4)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + 0.002) \cot^2 \theta_s \quad (5)$$

$\varepsilon_1$  is principal tensile strain in the strut;

$\varepsilon_s$  is the tensile strain in the concrete in direction of the tension tie;

0.002 is the assumed value of strain in the concrete strut at failure, and

$\theta_s$  is angle between strut and tie.

According to these regulations, the following stress limits in nodes of STM are determined:

$$f_{cu} = v f_c' \quad (6)$$

where:  $v=0.85$  for CCC node,  $v=0.75$  for CCT node and  $v=0.65$  for CTT node.

EC2 stipulates that the design concrete strength in cracked concrete (with longitudinal cracks) is calculated using the following expression:

$$\sigma_{Rd \max} = 0.6v f_{cd} \quad (7)$$

The coefficient  $v$  is calculated by the equation:

$$v = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (8)$$

where  $f_{ck}$  is characteristic compressive strength of concrete and  $f_{cd}$  is design concrete compressive strength.

For compressed nodes (CCC), according EC2, stress on the node face is limited on  $v f_{cd}$ , while for nodes with one tie (CCT) the stress is limited on  $0.85v f_{cd}$ , and for nodes with more than one tie (CTT) the stress is limited on  $0.75v f_{cd}$ . [5].

### III. Strut-and-Tie model of the tested beams

Observed experimental investigation was carried out on reinforced concrete beams with shear span to depth ratio of 1.25. The shape and dimensions of the beams, as well as the plan of reinforcement, are shown in Figure 3. The beams are made of normal strength concrete ( $f_c' = 35$  MPa, marked by "N") and high strength concrete ( $f_c' = 85$  MPa, marked by "H").

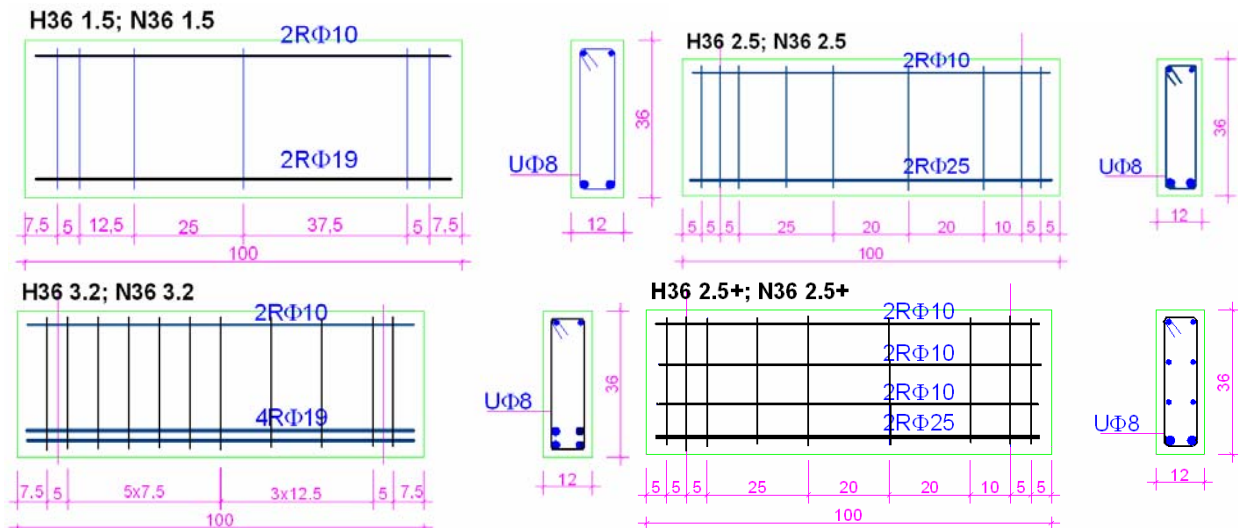


Figure 3. Plan of reinforcement of the tested models

Strut-and-tie model of the tested beams is shown in Figure 4. It is composed of two compressed struts and one tie, which are connected with the nodes. Node B is of type CCC, where the elements in compression come together, while the A and C are nodes of CCT type which connect elements in compression and one tie in tension.

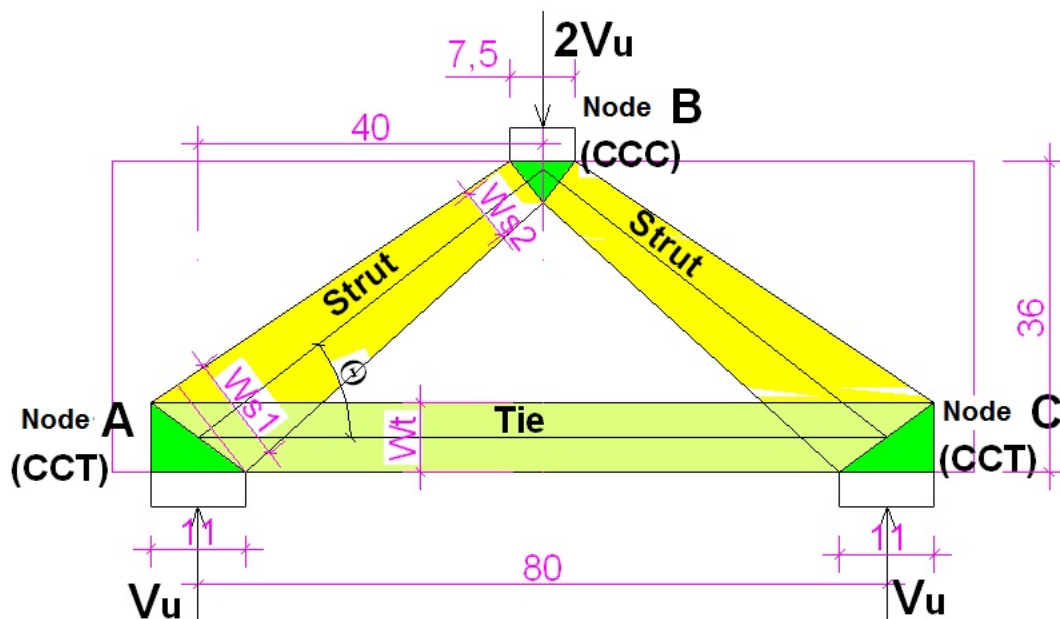


Figure 4. Strut-and-tie model used in stressed analysis.

Geometric characteristics of the strut-and-tie model are determined from the geometrical characteristics of the beam, the position of the reinforcement geometry and supports, as well as pattern of cracks. The system is always in balance and equilibrium conditions of the individual nodes get the relation:  $V_u = F_{AB} \cdot \sin\theta$ ;  $F_{AC} = F_{AB} \cdot \cos\theta$ ;  $V_u = F_{AC} \cdot \tan\theta$ . From the geometry of the model the following is obtained:  $\theta = 38^\circ$ ;  $w_t = 8\text{cm}$ ;  $w_{s1} = 13\text{cm}$ ;  $w_{s2} = 6,1\text{cm}$ . For beams H36-32 and N36-32  $\theta = 36^\circ$ ,  $w_t = 12\text{cm}$ ,  $w_{s1} = 16\text{cm}$  and  $w_{s2} = 6,4\text{ cm}$  is obtained.

#### IV. Analysis of results

Figures 5 and 6 show the compressive stress in the strut of the tested models of normal strength concrete and high strength concrete. Stresses were determined from the experimental data by measuring strain in concrete at the stage of fracture. Table 1 contains tested load capacity of beams obtained by calculation of the relevant elements of the STM, as well as experimentally. The table indicates the critical elements of STM in which

there has been a failure. Load design values are obtained from the nominal strength of individual STM, according to the ACI and CSA. For calculation of expression (1) reduction factor  $\phi=1.0$  is adopted.

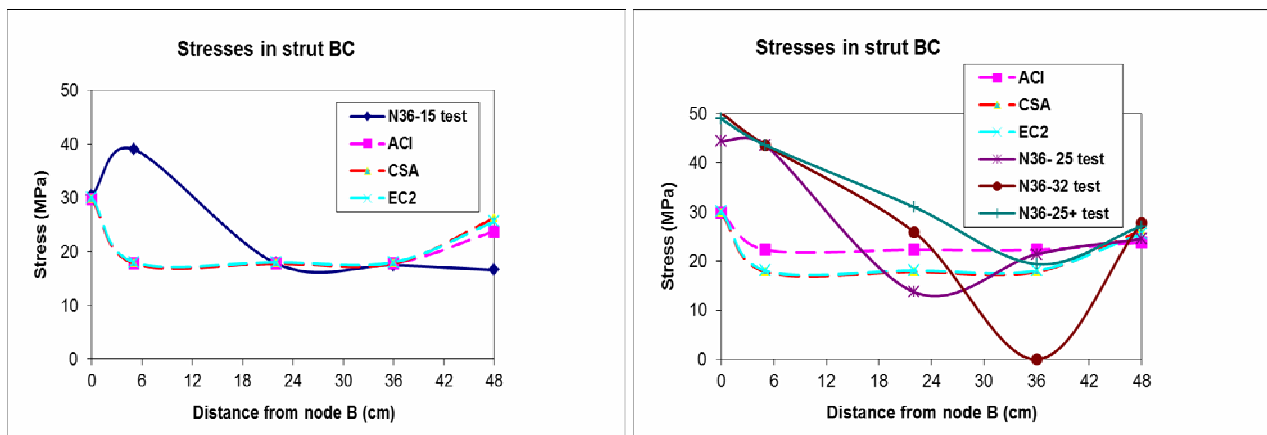


Figure 5. Stresses in strut elements of normal strength concrete (NSC)

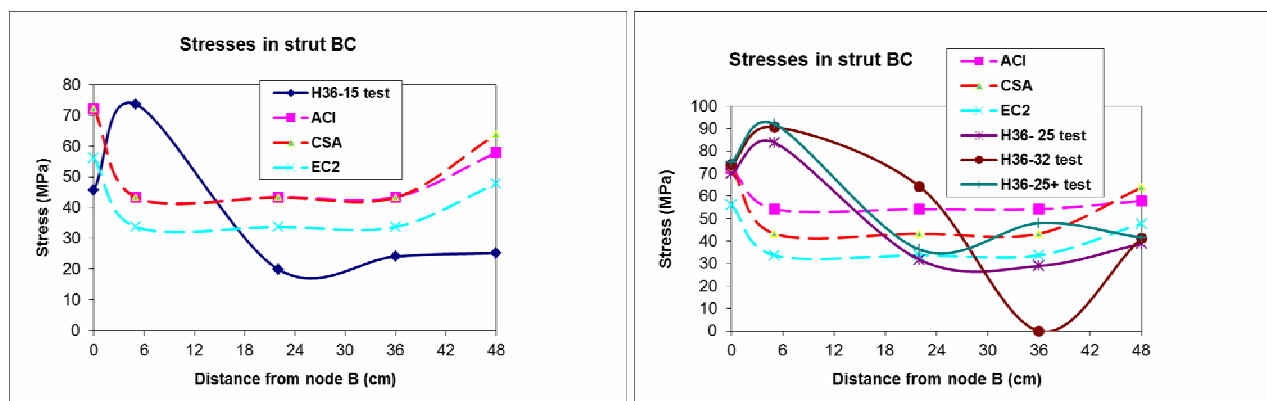


Figure 6. Stresses in strut elements of high strength concrete (HSC)

Table 1. Ultimate shear load by test and STM according ACI and EC2

Sign of beam	$V_u$ - test		$V_u$ - ACI (kN)		$V_u$ - EC2 (kN)		$V_u$ - test/ $V_u$ - ACI		$V_u$ - test/ $V_u$ - EC2	
	Load (kN)	Element of failure	Strut B-C	Node B	Strut B-C	Node B	(B)	(B-C)	(B)	(B-C)
N36-15	135.3	B,B-C	80.4	134.1	81.4	135.6	1.01	1.68	1.00	1.66
N36-25	200	B-C	100.5	134.1	81.4	135.6	1.49	2.0	1.47	2.46
N36-32	225.6	B-C	100.7	134.3	81.5	135.9	1.68	2.24	1.66	2.77
N36-25+	219.8	B-C	100.5	134.1	81.4	135.6	1.64	2.19	1.62	2.70
H36-15	205	B,B-C	195.6	325.4	151.9	252.8	0.63	1.05	0.81	1.35
H36-25	315	B,B-C	244.2	325.4	151.9	252.8	0.97	1.29	1.25	2.07
H36-32	335	B,B-C	244.6	325.9	152.1	253.2	1.03	1.37	1.32	2.20
H36-25+	337.5	B-C	244.2	325.4	151.9	252.8	1.04	1.38	1.34	2.22

In all tested beams the failure has occurred in the compressed strut B-C in part directly alongside the node B. Fracture zone in some cases included the area of the node B. Design capacity of node B is significantly higher than the design capacity of strut B-C.

It can be concluded that the calculated capacity for node B is non-conservative, while the calculated capacity of the element BC is largely conservative. For the calculation of load node B (type CCC) regulations provide greater effective compressive strength than the values for the strut element BC. Experimental studies have shown that the area where the fracture occurs is part of the strut element that flows into the node, and the capacity of these elements cannot be considered separately.

In the diagrams in Figures 5 and 6, much higher value of the effective stress on the strut element near the node B is observed, as determined from the measured strains in relation to the effective compressive strength specified by the prescribed rules of design codes.

Comparison of calculated and test results for the effective strength of the elements of strut-and-tie model, for high strength concrete, shows that the calculated values are, to some extent, non-conservative. This is especially true for effective strength of node B calculated according to ACI.

#### **IV. Conclusion**

For the calculation of ultimate bearing capacity of beams in the discontinuity using STM, effective stresses in the concrete are defined depending on the strength of the concrete. The correlation coefficient as a constant value is not equally applicable to the case of normal strength concrete and high strength concrete. Strut-and-tie model that was applied to beams of high-strength concrete provides less reliable results than in the case of normal strength concrete. This is especially characteristic for the case when the shear span to depth ratio is smaller than 2.0.

The correlation coefficient for the effective strength should be a function of the concrete strength, as predicted by EC2, however the proposed term should be verified through the experimental results.

To complete the STM stress to face node of CCC type it is necessary to compare them with the stress in strut element, establishing the relationship that depends on the transverse tension strain around the strut elements.

It is concluded that the calculation of beams using STM is non-conservative if in the case of high strength concrete the effective strains determined using the same coefficients as for normal strength concrete are used. The diagrams in the pictures 5 and 6 show that EC2 is somewhat more conservative than other design codes.

#### **References**

- [1] ACI Committee 318; Building Code and Commentary - Appendix A - Strut-and-Tie Models American Concrete Institute, Farmington Hills, (2002) 443
- [2] Quintero-Febres, C.G.; Parra-Montesinos, G.; Wight, J.K. Strength of Struts in Deep Concrete Members Designed Using Strut-and-Tie Method, ACI Structura Journal Vol.103 No. 4 (2006) 577-586
- [3] Brown, M. D., Bayrak, O.: Design of Deep Beams Using Strut-and-Tie Models–Part I: Evaluating U.S. Provisions, ACI Structural Journal, V105 No. 4 (2008) 395-404
- [4] Brown, M. D., Bayrak, O.: Design of Deep Beams Using Strut-and-Tie Models–Part II: Design Recommendations ACI Structural Journal V105 No. 4 (2008) 405-413
- [5] EN 1992-Eurocode 2: Design of concrete structures-Part 1-1: General rules and rules for buildings, Final draft, December, CEN, (2003)
- [6] Martin, B. and Sanders, D.: Verification and Implementation of Strut-and-Tie Model in LRFD Bridge Design Specifications, AASHTO, (2007) 276
- [7] Michael D.; Brown, M.D.; Sankovich, C.L.; Bayrak, O; Jirsa, J.O.; Breen, J.E.: Design for Shear in Reinforced Concrete Using Strut-and-Tie Models, Report No. HWA/TX-06/0-4371-2, The University of Texas at Austin, (2006) 330
- [8] Breña, S. F. and Roy, N. C.: Evaluation of Load Transfer and Strut Strength of Deep Beams with Short Longitudinal Bar Anchorages, ACI Structural Journal, V106, No.5 (2009) 678-689
- [9] Wight, J.K., and Parra-Montesinos G.J.: Strut-and Tie Model for Deep Beam Design, Concrete International (2003) 63-70

# Estimation of uniform temperature component in the bridges based on site experimental data

Radovanović Željka

Faculty of Civil Engineering, University of Montenegro, Podgorica  
Džordža Vašingtona b.b, 81000 Podgorica, E-mail: radovanovic@t-com.me

## Abstract

Object of our research is measurement of temperature differences and strains in one pedestrian concrete box bridge in Podgorica. All instruments for monitoring of temperature changes and strains are embedded into bridge structure during the bridge construction. This paper presents relation between uniform temperature bridge component and shade air temperature that is measured in the nearest Meteorological station.

## Keywords (Times New Roman 9 pt bold)

concrete box bridges, measurement, thermal action, Eurocode, uniform temperature

## I. Introduction

Meteorological conditions vary continuously and temperature changes produce a complex deformations and stresses in the structures. Temperature distribution along bridge cross section is determined through three primary mechanisms: solar radiation, bridges re-radiation (conduction through bridge itself) and convection between bridge surface and ambient air. Those mechanisms are influenced by many factors, like geometry of bridge, bridge axis direction, location, solar radiation, air temperature, wind speed and direction, and material properties.

All structures are deformed by temperature changes. Eurocode EN 1991-1-5 defines thermal action for girder bridges, however there is not data for arch, frame, suspension and cable stayed bridges. For these bridge types, EN 1991-1-5 suggests that appropriate values should be derived from specialist data, special studies or test results. This articulate that is necessary to research experimentally and theoretically the effects of thermal actions on aforesaid types of bridges.

Montenegro is located in the south part of Europe and Podgorica is capital town of Montenegro. Podgorica is on 42 m under the sea level and has Mediterranean climate. The winters are temperate and summers are hot. Absolute minimum shade air temperature ( $T_{\min}$ ) is  $-9.7^{\circ}\text{C}$  and absolute maximum hourly shade air temperature is  $44.8^{\circ}\text{C}$ , for measurement period from years 1949. to August 2007.

In order to better understand thermal effects on the bridge in Mediterranean climate, one pedestrian bridge in Podgorica is equipped for monitoring temperature changes and strains. All instruments are embedded in structure during the construction of the bridge. This paper presents one part of own experimental results obtained by measurements of temperature differences and strains along three characteristic cross sections of pedestrian concrete bridge "Zabjelo" in Podgorica.

Also, this paper deals with the calculation of uniform temperature component according to EN 1991-1-5 and the relation between uniform temperature bridge component and shade air temperature based on own experimental data has been recommended.

## II. Description of the Bridge and measurement program

The bridge is a frame structure with arched box section beam fixed at solid abutments, fig. 1.

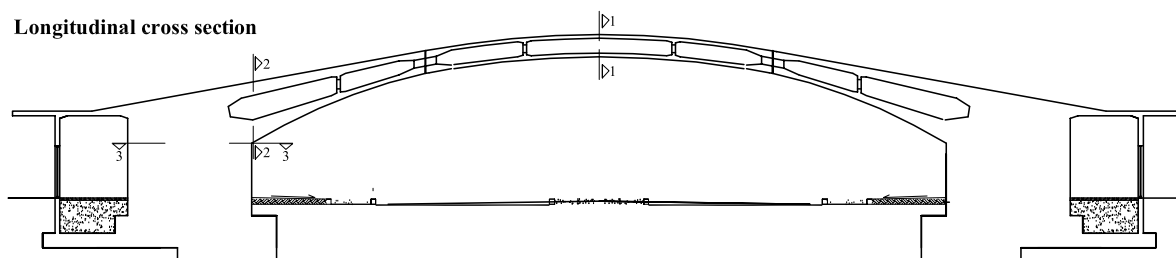


Figure 1. Bridge elevation and position of equipped cross sections



Structure's clear span between abutments is 28.0 m. The width of the box with two parallel webs is 1.5 m. Height of the box varies from 0.9 m in the middle part of the bridge to 2.45 m at abutments. Thickness of lower and upper slabs is varying from minimal 15 cm in the middle of span to 80 cm at abutments. Thickness of the box web is 20 cm.

In order to predict daily and long term temperature variations along the cross section of the bridge and temperature influence on stresses, measurements on the pedestrian bridge were performed in five stages (two autumn and one wintry, spring and summer), during two days, with data recording in every 30 minutes. Cross sections positions, where the measurements were done, are displayed in figure 1.

In total, 76 thermocouples and 50 strain gauges were embedded during the bridge construction. This bridge has relative complicated form. Cross section of the bridge is constructed in three stages: lower slab, web and top slab. Therefore equipments embedding method has been carefully and detailed analysed. Equipment is embedded in more phases that is followed the bridge construction, see fig. 2.

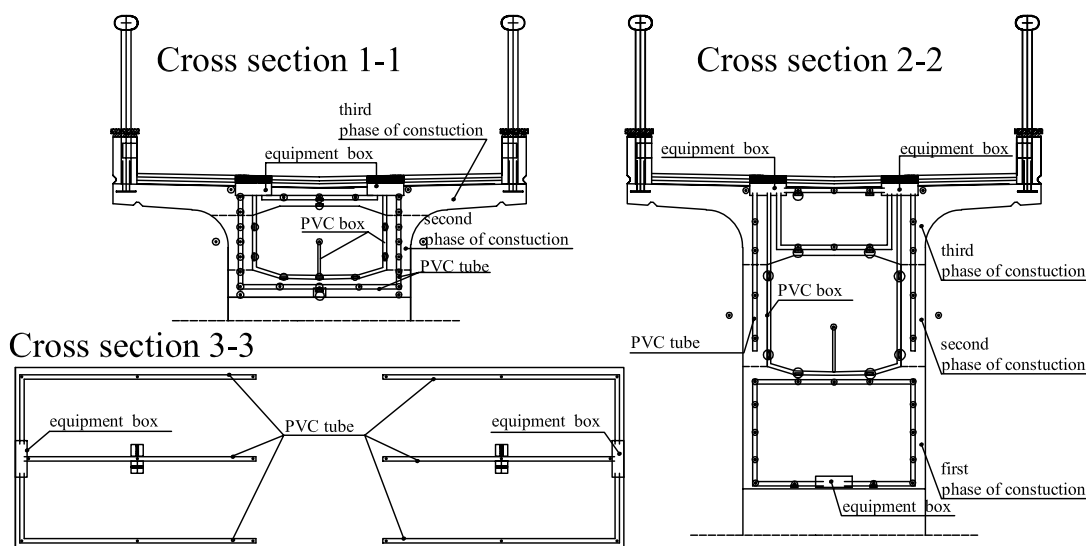


Figure 2: Equipped cross section

TML type T thermocouples were used to measure temperature values into box concrete cross section. Strains were measured by embedded strain gauges (type PMFL-60-2LT), waterproof strain gauges which are gummed into the concrete surface (type WFLM-60-11-2LT) and strain gauges that are gummed to reinforcement (type PFL-30-11-3LT). Position of thermocouples and strain gauges are displayed in fig. 3.

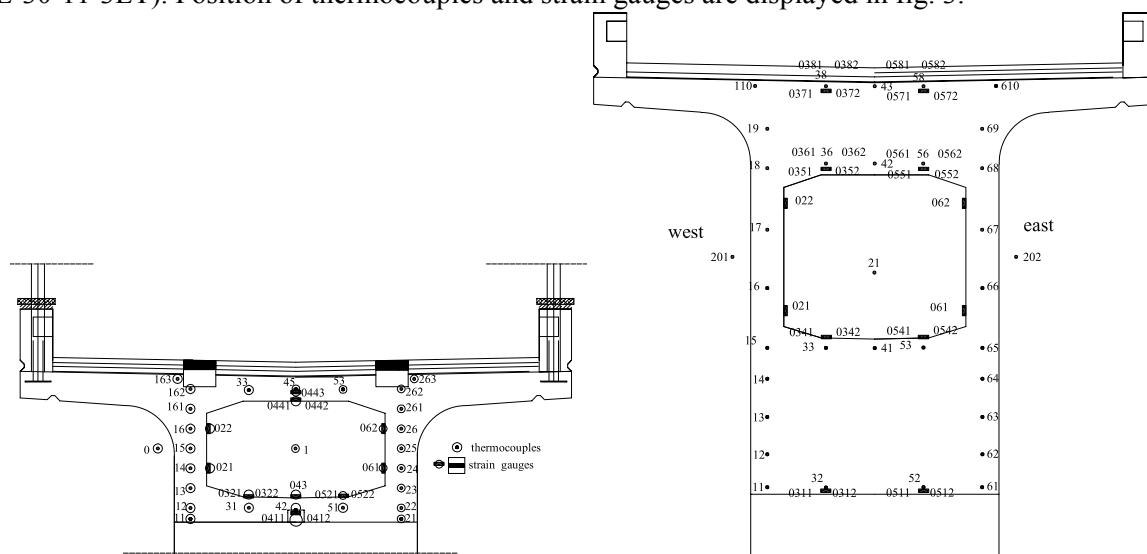


Figure 3: Thermocouples and strain gauges in cross sections 1-1 and 2-2

TML data logger recorded the measurements results. The data that were recorded on data logger were saved on the PC, fig. 4.



Figure 4: Switching box, data logger and saving of the date

During the data acquisition it is concluded that only one thermocouple, located in outer box of the cross section 1-1, has been damaged. All other thermocouples and strain gauges have steady measurements.

### III. Temperature in the bridge - Presentation of own experimental data

#### III.1 Factors which act on the temperatures in the bridge

Temperature in the structure depends on the meteorological conditions on the structure location, and then on the thermal characteristics of materials, characteristics of the area and the geometry of the cross section. Meteorological conditions are very complex for total understanding, and the most important factors which influence on the temperatures in the structure are: daily temperatures, solar radiation, wind velocity, falls, other basic conditions and so on.

Combination of the above mentioned factors makes complex distribution of the temperature along the depth of the cross section of the bridge structure. It is usual to neglect the influences of humidity and wind velocity, because of the compound characters of their effects, as well as the less level of importance in relation to the environment temperature.

#### III.2 Middle effective temperatures in the bridge concrete

In the fig. 5 there are temperatures of distribution along the depth, for one of the performed measurement.

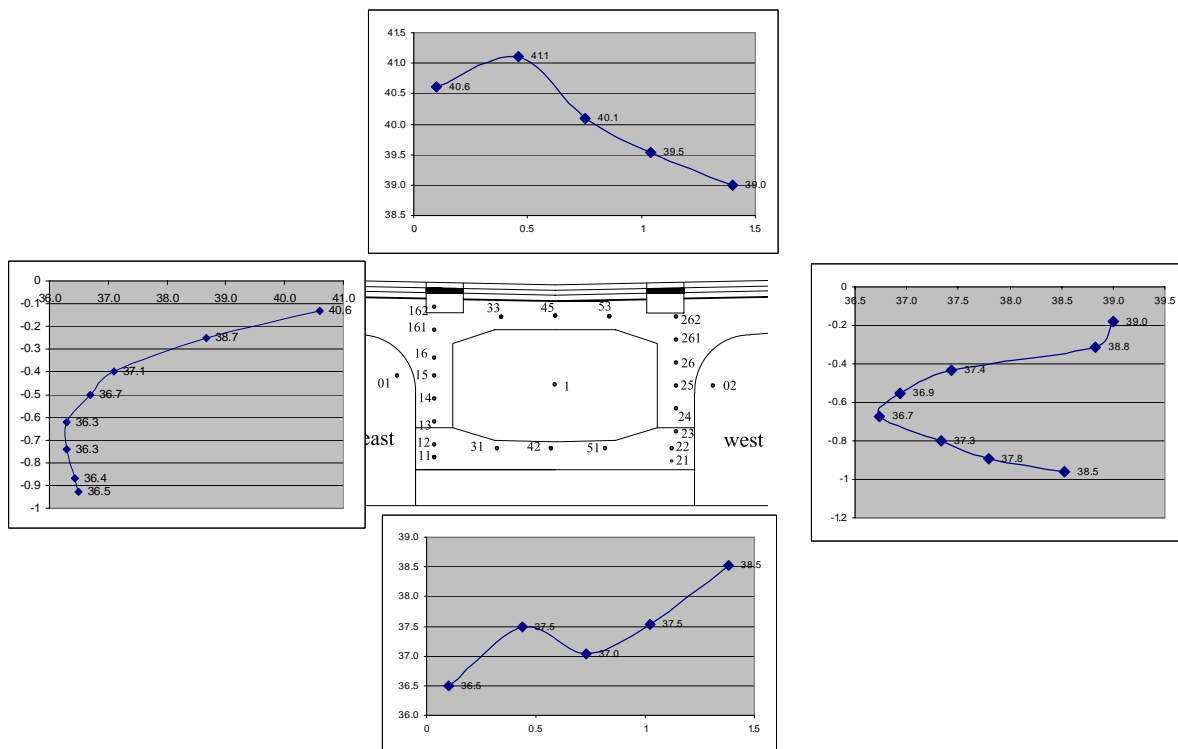


Figure 5: Temperature registration in the cross section 1-1, measurement from 22.06.2007. at 18.00

After each of the measuring series on the footbridge „Zabjelo“ the data, which data logger copy in the shape of ASC fail, are transfered in EXCEL fails, for each reading, where they were given: averaging of three reading successively, estimation of mean temperatures in the concrete of the cross section and drawing of the graft of temperature changes along the height of section, example fig.5.

In the structures with the checked movement, as the bridge “Zabjelo” is, uniform component produces structure deformations and it is not easy to define precisely what the uniform component of the temeprature is, and what the temperature changes are.

M. Emerson [6] informs that the effective temperatures or mean temperatures in the bridge can be calculated by summarizing the products of areas and mean temperatures in them and then dividing these sum of products with the total area of sections, equations (1).

In this investigation the cross section is divided on parts, with the thermo-pair located in the center, fig.6. Mean temperature in the bridge is defined according to the equation (1):

$$T_{av,t} = \frac{\sum A_i T_i}{A}, \text{ where} \quad (1)$$

$T_i$  – temperature is taken in thermo-pairs

$A_i$  – area of the concrete section part

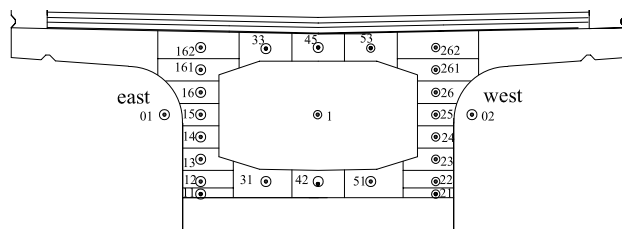


Figure 6: Cross section 1-1 divided on parts with the aim of defining the mean temperatures in concrete

After sorting and arranging of large number of data which are registered by experimental measuring, data analyzing can be done. According to the drawn graf of hours – reading (of different types), one of them is given in the fig.7, regularity of temperature changes can be observed clearly in the concrete during the period of reading.

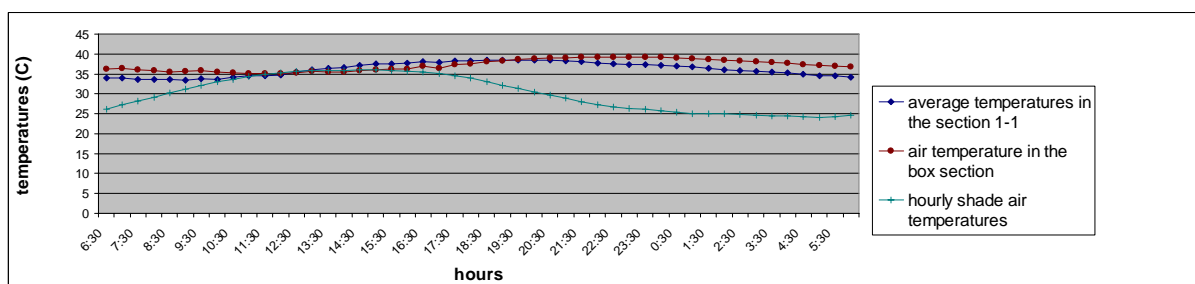


Figure 7: Time- temperature relation, measurement from 22. - 23.06.2007.

Graphs gives the starting figure about the character of the transport process of temperature from the environment up to the inside box cross sections. According to these grafps we conclude:

- Temperature which gets from Meteorological station is the stabile curve in relation to the measurements got by reading of air temperatures placed in the structure, those dependences should make in relation to the hourly shade air temperatures, measured in Meteorological station;
- Mean-effective temperatures in concrete are late in relation to temperatures which are registered in Meteorological station Podgorica.

### III.2.1 Connection between mean temperature in concrete and temperature in shade

According to the analysis of the available literature from this area and explanations of graphs of dependences of mean temperatures in concrete and hourly shade air temperatures, made according to the individual research, it is given one of them in the fig. 8, we can conclude:

- According to the minimal mean temperatures in concrete, and to the measured data it is stated they are registered at  $7:00 \pm 1:00$  for our area, and they are dependant on temperatures which happen in environments in the longer time period;
- Minimal mean temperatures in concrete do not depend on the section geometry;
- Changes of mean temperatures during the day, from minimal to maximal, is in the function of change of the hourly shade air temperatures and intensity of solar radiation;
- Curves „changes of mean temperatures in the concrete – changes of air temperatures in the shade“, are constituted according to the taken data, have different shapes depending on the geometry section.

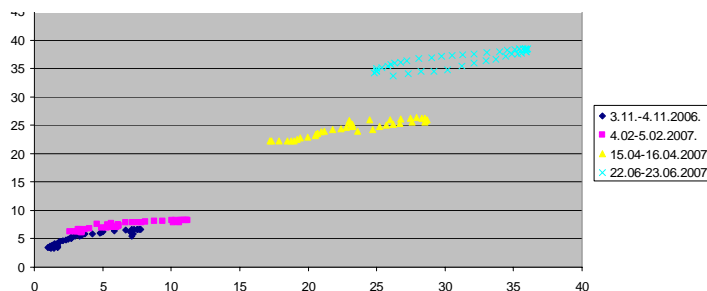


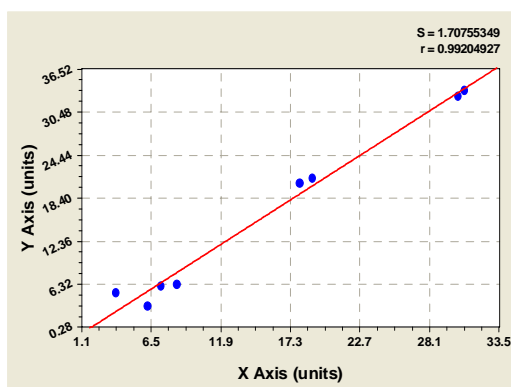
Figure 8: Mean temperatures in concrete in the function of air temperatures in the shade, Section 1-1, ( $^{\circ}\text{C}$ )

#### A. Connection of the minimal daily mean temperature in concrete and mean daily temperatures

M. Emerson stated the connection between 48 hourly mean shade air temperatures and mean temperatures in concrete. In the research which is presented here, there is the connection between the mean daily air temperature and mean temperature in concrete. Mean daily air temperature is climate data which is presented in reports of Meteorological stations, so it is the simplest, changes of temperature in concrete connect for the data, which according to the climate standards, define temperatures in one day.

From individual data base minimal mean temperatures are recognized in concrete and mean daily temperatures in concrete are calculated in the previous day, according to the data got from Meteorological station Podgorica.

Using the program for regression analysis, CurveExpert, for data (measured for box sections 1-1 and 2-2) by linear regression, with the assumption that the function is the right one, the linear function is got „of mean daily air temperature – of minimal mean temperature in concrete“, equation (2), fig. 9.



$$\min T_{\text{sr},b} = 1.158 t_{\text{sr}, \text{dn}, v} - 1.84 \pm 2^{\circ}\text{C} \quad (2)$$

where:

$\min T_{\text{sr},b}$  – minimal mean temperatures in concrete  
 $t_{\text{sr}, \text{dn}, v}$  – daily mean air temperature in shade

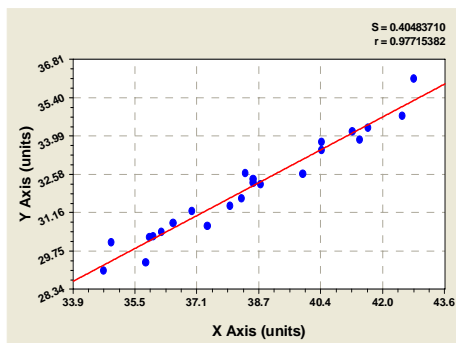
The function is defined for  $t_{\text{sr}, \text{dn}, v}$  which varies from  $3.8^{\circ}\text{C}$  (winter series) to  $30.8^{\circ}\text{C}$  (summer series).

Figure 9: Regression analysis of the linear function „mean daily air temperature – minimal mean temperature in concrete“

#### B. The connection of the minimal mean temperature in concrete and maximal daily temperatures

The connection of minimal daily mean temperature in concrete and maximal hourly daily temperatures can be made if the mutual dependance of mean daily temperatures and maximal hourly temperatures are previously established during a day. This dependance is got by the regression analysis of data of all Meteorological temperatures, which are larger than  $30^{\circ}\text{C}$ , for summer 2007, when the highest air temperatures are registered

for the last 50 years in the area of Podgorica. In the fig.10 there is the abstract from regression analysis, and there is an equation (3) of dependance of mean daily temperatures from the minimal hourly air temperatures.



$$t_{sr, dn, v} = 0.749 t_{max, v} + 3.27 \quad (^{\circ}C) \quad (3)$$

where:

$t_{max, v}$  - maximal hourly shade air temperature

$t_{sr, dn, v}$  - mean daily shade air temperature

Figure 10: Regression analysis of linear functions „ maximal hourly air temperatures – minimal mean daily air temperatures“

After making the connection of the equations (2) and (3) we get the connection of minimal mean temperatures in concrete and maximal hourly temperatures in shade, the equation (4).

$$\min T_{sr,b} = 0.867 t_{max, v} + 1.95 \quad (^{\circ}C) \quad (4)$$

where:

$t_{max, v}$  - maximal hourly shade air temperatures

$\min T_{sr,b}$  – minimal mean temperatures in concrete

### III.2.2 Change of mean temperatures in concrete during a day

Mean temperatures in concrete are changed during a day from minimal which are registered about 7:00 to maximal which are noticed in the different periods of a day depending on the season. It is usual that in the definition of dependance function between changes of temperatures in concrete and changes of hourly shade temperatures as the parameter we take only the change of hourly shade air temperatures although this function is influenced on the intensity of solar radiation, humidity of air and wind velocity.

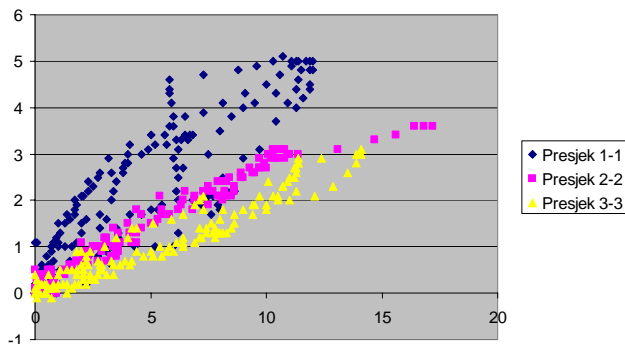


Figure 9: Changes of mean temperatures in concrete in dependance of changes of hourly shade air temperatures

In the fig. 9, for all sections, there are the data about the application of mean temperatures in concrete in dependance on changes of hourly shade air temperatures. According to the graphs in the fig. 9 we can conclude that daily variations of mean temperatures in concrete, from minimal to maximal, are dependant on shapes and section geography.

## IV. Connection of maximal mean temperatures in concrete and maximal shade air temperatures

Maximal mean temperatures in concrete are registered from 16:00 to 20:00 p.m. depending on season. These temperatures are the sum of minimal mean temperatures which are registered of about 7:00 a.m., and temperature changes in concrete. Values of maximal temperature changes in concrete depending on the geometry section, daily variation of air temperature and solar radiation, were:

- 5.10C in the section 1-1;
- 3.6 in the section 2-2;

- 3.10C in the section 3.

In the Section 1-1 daily variation of the temperature in concrete is of the value of 5<sup>0</sup>C in summer and spring series of measurement.

The above mentioned data indicate that the values of minimal mean temperatures in concrete must be increased for the value of daily temperature changes in concrete of 4.5<sup>0</sup>C. Arguments are the following:

- The section 1-1, of the total height with layers can be considered the most similar to usual sections at bridges of box section;
- However, the section has webs of the depth of 15 cm, so in this section variations of temperatures are larger than for the usual boxes of the web depth of 20 cm or more;
- In the Section 1-1, in the case of more daily variations of hourly shade air temperatures, which are very possible, these temperatures can be more;
- There are a large number of box sections of more height and more width of the cross section so it would not be justified to take maximal values of daily variations of temperatures in concrete, registered in the Section 1-1.

After increase of minimal mean temperatures in concrete for 4.5<sup>0</sup>C we get the equation (5), for maximal mean temperatures in concrete in the function of maximal shade air temperatures.

$$T_{sr,b}^{max} = 0.867 t_{max,v} + 6.45 \quad \text{za} \quad t_{max,v} > 24^{\circ}\text{C} \quad (5)$$

where:

$t_{max,v}$  - maximal hourly shade air temperatures

$T_{sr,b}^{max}$  – maximal mean temperatures in concrete

In the figure 10 there are values of maximal mean temperatures in concrete, measured in the summer series of measurement, and values defined by the equation by Ž. Radovanović, European regulations and the results of research which were presented by M. Emerson [6].

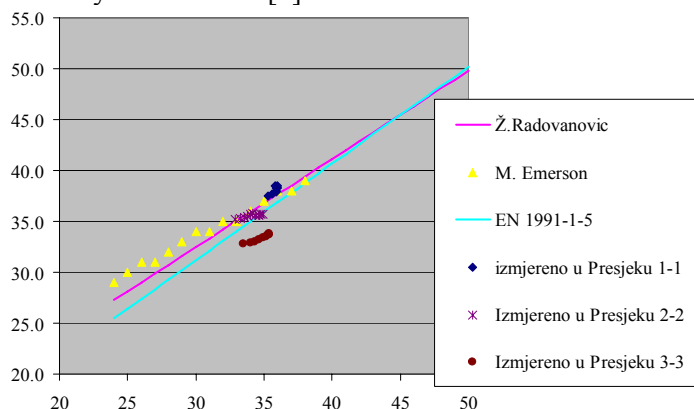


Figure 10: Connection of “Maximal mean temperatures in concrete, maximal hourly shade air temperature”

In the table 1. values of maximal mean temperatures in concrete are given for conditions of extremely high hourly shade air temperatures.

$t_{vazd}^{max}$	Ž. Radovanović	M. Emerson	EN 1991-1-5
26	29.0	31	27.4
27	29.9	31	28.3
28	30.7	32	29.3
29	31.6	33	30.3
30	32.5	34	31.2
31	33.3	34	32.2
32	34.2	35	33.1
33	35.1	35	34.0
34	35.9	36	35.0
35	36.8	37	35.9
36	37.7	38	36.9
37	38.5	38	37.8
38	39.4	39	38.8
39	40.3		39.7
40	41.1		40.7
41	42.0		41.6
42	42.9		42.6

43	43.7		43.5
44	44.6		44.5
45	45.5		45.4

Table 1: Maximal mean temperatures in concrete in dependence on maximal shade air temperatures

We note that it can be possible to expect more mean temperatures in concrete for up to 2<sup>o</sup>C in the sections less than 1m than in the ones got by the equation (5), while for the sections more than 1m it can expect maximal mean temperatures in concrete less for to 2<sup>o</sup>C than those which are got by the equation (5).

## V. Conclusion

According to the above mentioned we can conclude:

- All taken data are from the scope of measuring errors of the placed equipment, so instrumentalization of the foot bridge "Zabjelo" gives reliable data for the analysis of temperature influences on the bridges of box cross section;
- According to individual researches and with the usage of methods of regression analyses, with the high degree of reliability, the placed equation presents the maximal mean temperature in concrete in the function from maximal hourly air temperature, so it is a good base for defining the maximal uniform temperatures in concrete bridges in the future national annex Eurocode EN 1991-1-5;
- We can count the maximal mean temperatures in bridge concrete for any area of Montenegro making like the base of data, taken from Republic institution: the function of dependance of mean daily temperatures from the hourly daily temperatures in shade;
- Data should be completed by researches on the bridges with slab and girder cross section, because the temperatures in these cross sections during a day can be larger than at the bridges with box cross section.

## References

- [1] AASHTO Standard Specifications for Highway Bridges "STRUCTURES DESIGN GUIDELINES FOR LOAD FACTOR DESIGN" January 1, 2000, 209pp
- [2] BD 37/01.: "BRITISH STANDARD – DESIGN MANUEL FOR ROADS AND BRIDGES" may, 2002
- [3] Dimitri Soukov: "THERMAL ACTION IN THE EUROCODE 1- ACTION ON STRUCTURES", LACER No.5, 2000, pp 379-386
- [4] Emerson Mary: "TEMPERATURE DIFFERENCES IN BIDGES: BASIS OF DESIGN REQUIREMENTS" , TRRL Laboratory Report 765, 1977
- [5] Emerson Mary: "THE CALCULATION OF DISTRIBUTION OF TEMPERATURE IN BRIDGES" , TRRL Laboratory Report 561, 1973
- [6] Emerson Mary: "EXTREME VALUES OF BRIDGE TEMPERATURES FOR DESIGN PURPOSES" , TRRL Laboratory Report 744, 1976
- [7] EUROCODE 1 – ACTION ON STRUCTURES PART 1.5 General Action – Thermal Action, Final draft
- [8] Jeffrey Keith Johnson CONCRETE BRIDGE DECK BEHAVIOR UNDER THERMAL LOADS Master of Science in Civil Engineering MONTANA STATE UNIVERSITY Bozeman, Montana July 2005, 106pp
- [9] Mortlock J D: "THE INSTRUMENTATION OF BRIDGES FOR THE MEASUREMENT OF TEMPERATURE AND MOVEMENT" , TRRL Laboratory Report 641, 1974
- [10] Proceedings of Symposium held at the Transport and Road Research Laboratory: " BRIDGE TEMPERATURES", Crowthorne, 1978
- [11] Radovanović Ž.: "TENDER PAPER FOR CONSTRUCTION OF OVERHEAD CROSSING ON THE TRAFFIC DIRECTION VOISAVLJEVIĆA (PUT YNA) ZABJELO", Podgorica", Podgorica, 2004
- [12] Radovanović Ž.: "MAIN DESIGN OF OVERHEAD CROSSING IN ZABJELO IN PODGORICA", Podgorica, 2005.
- [13] Radovanović Ž.: "ESTIMSTION OF TEMPERATURE ACTION IN BRIDGE ACCORDING TO EN 1991-1-5 AND MEASUREMENT PLAN IN THE CONCRETE PEDESTRIAN BRIDGE", International Conference on Civil Engineering Design and Construction, Varna, 2006. pp. 435-443
- [14] Radovanović Ž., M. Uluićević: "ESTIMATION OF UNIFORM TEMPERATURE COMPONENT BASED ON SITE EXPERIMENTAL DATA AND ACCORDING TO EN 1991-1-5", 12th International Symposium of MASE Struga, 2007, pp 6
- [15] Radovanović Ž., EFFECT OF TEMPERATURE ON THE REINFORCED CONCRETE BOX GIRDER BRIDGES, PhD thesis, 2008, pp.181
- [16] Římal J.: "EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF STRUCTURES AND MATERIALS" Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, , 2003 45 pp

- [17] Shiu K.N.: "THERMAL EFFECTS IN THE COMPOSITE BOX GIRDER BRIDGES", phd thesis, 168pp



## Predicción de la estabilidad estructural mediante Análisis Modal Operacional. Teatro Romano de Cádiz.

*Pachón García, Pablo; Rodríguez Mayorga, Esperanza; Jiménez Alonso, Javier F.; Compán Cardiel, Víctor; Sáez Pérez, Andrés; Yanes Bustamante, Emilio.*

*Departamento de Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno. Universidad de Sevilla.  
{ppachon, espe, jjjimenez, compan, andres}@us.es*

### Resumen

El presente artículo expone la caracterización dinámica de un grupo de edificios situados sobre el Teatro Romano de Cádiz a través de pruebas de vibración ambiental. Con los datos obtenidos de estas pruebas se calibraron los modelos de elementos finitos (EF) necesarios para realizar el control de las obras que se están ejecutando actualmente en esta área y predecir el efecto final de las mismas sobre el conjunto estructural.

### Palabras clave

Teatro Romano de Cádiz, Elementos Finitos, Paraguas de inyección, Análisis Modal Operacional, Ensayo de Vibración ambiental.

### I. Introducción:

Las pruebas de vibración ambiental están consolidadas desde hace años como uno de los principales métodos experimentales para evaluar el comportamiento dinámico de estructuras a gran escala. La excitación artificial de grandes estructuras conlleva una gran complejidad, lo que hace recurrir al análisis modal operacional (OMA) para la identificación modal de las propiedades dinámicas de la estructura [1, 2, 3]. Las pruebas de vibración ambiental han demostrado ser especialmente adecuadas para sistemas flexibles, siendo innumerables los casos de aplicación de OMA en el mundo ingenieril y presentando en la mayoría de ellos óptimos resultados [4, 5].

En los últimos años son numerosas las aplicaciones de las pruebas de vibración ambiental que podemos encontrar asociadas al mundo de la arquitectura. Los buenos resultados obtenidos de estas aplicaciones, el bajo coste económico que supone hacer este tipo de pruebas y la no interrupción del normal funcionamiento del edificio mientras las pruebas son realizadas, son algunos de los motivos que han hecho que éstas sean muy populares en los últimos años. Sin embargo, en el caso concreto de construcciones históricas de fábrica, donde el uso de técnicas no destructivas es un factor fundamental, los casos de aplicación de OMA son menos numerosos debido a dificultades añadidas [6, 7, 8, 9, 10].

La intervención que se está desarrollando en la actualidad sobre el área del Teatro Romano de Cádiz (Fig. 1) se está controlando a través de OMA. Los resultados obtenidos a partir de pruebas de vibración ambiental han sido utilizados para calibrar modelos de EF desarrollados con anterioridad. Como resultado, se ha logrado un modelo numérico con un comportamiento dinámico similar al observado in situ. Este modelo se ha utilizado para controlar los trabajos actuales y prever el comportamiento final del conjunto. La descripción del teatro romano, la metodología de análisis seguida y los resultados obtenidos, tanto en el estado actual como en el final, son los objetivos del presente artículo.



Figura 1. Área del Teatro Romano de Cádiz.

## II. Antecedentes:

El Teatro Romano de Cádiz (España), se localiza en el barrio del Pópulo (Fig. 2), junto a la Catedral Vieja (actual Iglesia de Santa Cruz) (Fig. 3). Es el más antiguo de la Península Ibérica, pues data de finales del siglo I a.C. El diámetro de su cavea es de 120 m, lo que lo hace ser uno de los mayores edificios de su clase en España. Su aforo sería alrededor de unos 20.000 espectadores, un elevado número si tenemos en cuenta que la población de Gades rondaría los 50.000 habitantes. Los materiales utilizados en la estructura fueron piedra y opus caementicium [11]. La gran resistencia de éstos hizo que el teatro fuera utilizado como base de otros edificios construidos posteriormente. En el siglo III d.C. el área del teatro comenzó a usarse para diversos fines, siendo uno de ellos un castillo. En el siglo XIII, después de la conquista de la ciudad por parte de las tropas cristianas, el castillo fue reconstruido y su uso cambió, desapareciendo toda referencia al teatro primitivo [12]. En ese momento, el barrio que actualmente es conocido como "El Pópulo", comenzó a construirse, asentándose parte de él sobre los restos del teatro.



Figura 2. Localización del Teatro Romano de Cádiz.

Desde que el teatro se descubriera en el año 1980 de forma accidental (Fig. 3), se ha seguido un proceso sistemático hacia su recuperación. Son numerosas las labores de demolición, excavación y consolidación realizadas desde entonces [13], que han dado como resultado la recuperación de una parte significativa de la cávea (Fig. 4).

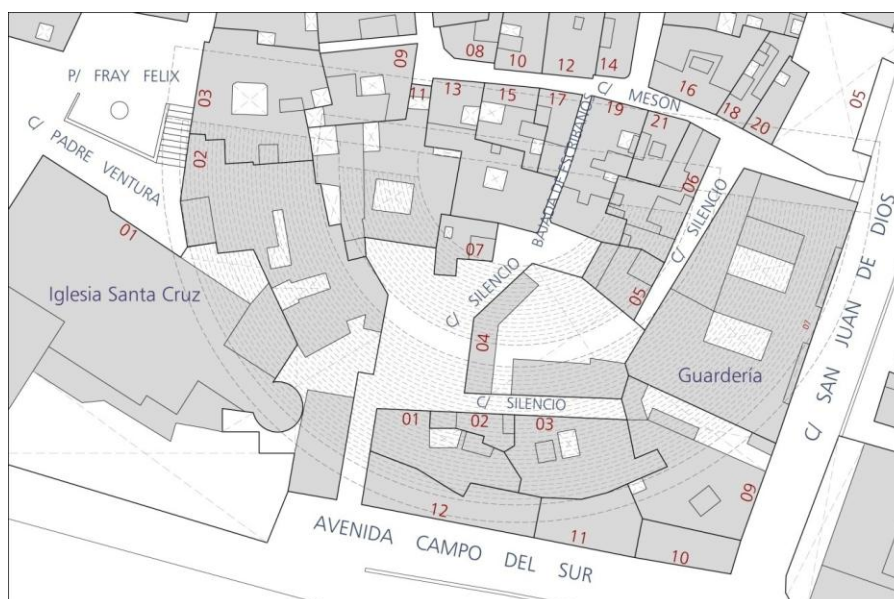


Figura 3. Estado del parcelario superpuesto a las trazas del Teatro. Año 1980.



Figura 4. Estado del Teatro Romano de Cádiz. Año 2010.

Siguiendo la línea marcada con las intervenciones anteriores, la Junta de Andalucía se enfrentó al dilema de hacer compatible la recuperación del teatro con la conservación de los edificios que gravitan sobre él, piezas relevantes del barrio del "Pópulo". En 2010 se inició una importante intervención consistente en la consolidación de las cimentaciones de los edificios y la construcción de bóvedas bajo los mismos mediante el método de los paraguas de inyección [14, 15] (Fig. 5). El resultado final será la creación de un nuevo espacio abovedado debajo de los edificios desde el cual se pueda contemplar el resto del teatro (Fig. 6).

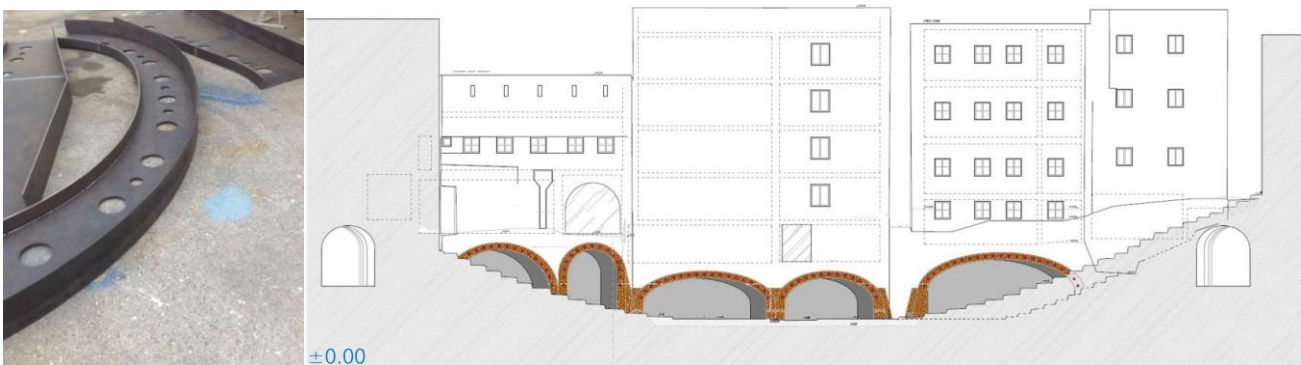


Figura 5. Arcos para la ejecución de los paraguas de inyección y alzado esquemático tras la extracción de tierras.

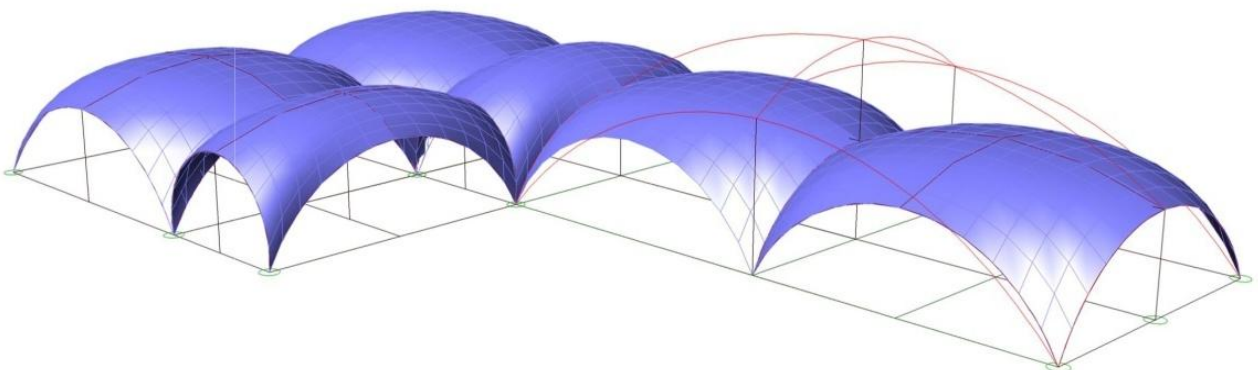


Figura 6. Perspectivas esquemáticas del revestimiento interior de las bóvedas.

### III. Análisis Modal Operacional (OMA)

#### III.1 Toma de datos

El control de la intervención consiste en la obtención de los parámetros modales del conjunto estructural antes, durante y al final de los trabajos, a través de métodos numéricos y experimentales. La comparación de los mismos permite identificar las alteraciones en el comportamiento estructural si éstas tuvieran lugar.

Como primer punto en el proceso de aplicación del análisis modal operacional se generó un modelo previo para decidir la situación de los acelerómetros [1, 3]. Este modelo se constituye de dos partes fundamentales, los edificios y el terreno (vaciado del teatro), y fue modelado utilizando el programa informático ANSYS. Los edificios fueron mallados con elementos superficiales, SHELL63, mientras que para el terreno se utilizaron elementos sólidos, SOLID45, obteniendo un modelo final de 975.370 elementos y 189.585 nodos (Fig. 7). Las propiedades de los materiales de densidad, módulo de Young y coeficiente de *Poisson* se obtuvieron de la bibliografía (tabla 2) [16, 17, 18].

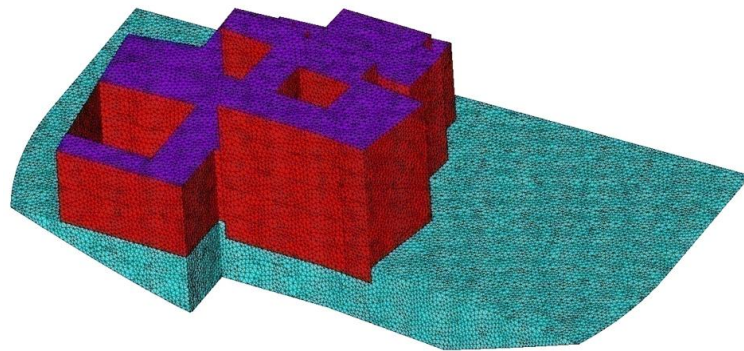


Figura 7. Modelo de EF previo. Elementos superficiales: SHELL 63. Elementos volumétricos: SOLID 45.

Con la ayuda del modelo de elementos finitos se localizaron los puntos más adecuados para la colocación de los acelerómetros de referencia, que fueron aquellos con mayor desplazamiento modal [1] (Fig. 8). Estos puntos estaban en la cubierta del inmueble número 13 de la calle Mesón, donde se situaron cuatro acelerómetros de referencia según se ilustra en la figura 9.

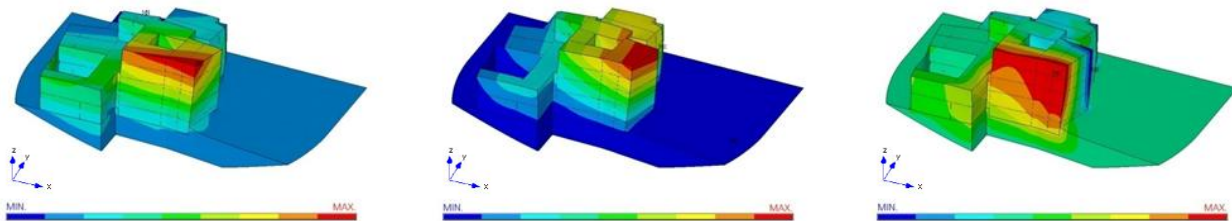


Figura 8. Desplazamientos modales del 1º Modo de vibración en direcciones X, Y y Z.



Figura 9. Situación de los acelerómetros de referencia.

La monitorización de la estructura y la toma de datos se realizó con un equipo compuesto por ocho acelerómetros uniaxiales de fuerza balanceada Episensor de la casa comercial KINEMATRICS, con ancho de banda de 0-200 Hz, y una central de adquisición de datos tipo GRANITE de la misma casa (Fig. 10). El software ARTEMIS se utilizó para el tratamiento e interpretación de los datos recopilados.



Figura 10. Central de Adquisición de datos, equipo informático y acelerómetro de fuerza balanceada.

Antes de comenzar la intervención sobre el área del teatro en 2010, se desarrolló la primera campaña experimental. Los acelerómetros de referencia fueron cuatro, situados según el análisis previo en la cubierta del inmueble número 13 de la calle Mesón (Fig. 9). Los otros cuatro acelerómetros se colocaron siguiendo la vertical de los anteriores en cada una de las plantas, de forma que se realizaron un total de cuatro series de medidas con ocho acelerómetros cada una, siendo la duración de cada una de ellas de quince minutos.

### III.2 Tratamiento de datos

Una vez tomados y almacenados los datos, se procedió al tratamiento de los mismos (Fig. 11). Se estudió el comportamiento dinámico utilizando dos métodos de identificación modal: el método de Descomposición mejorada en el dominio de la frecuencia (EFDD) y el método de Identificación en el Subespacio Estocástico (SSI), ambos implementados en el programa comercial ARTEMIS.

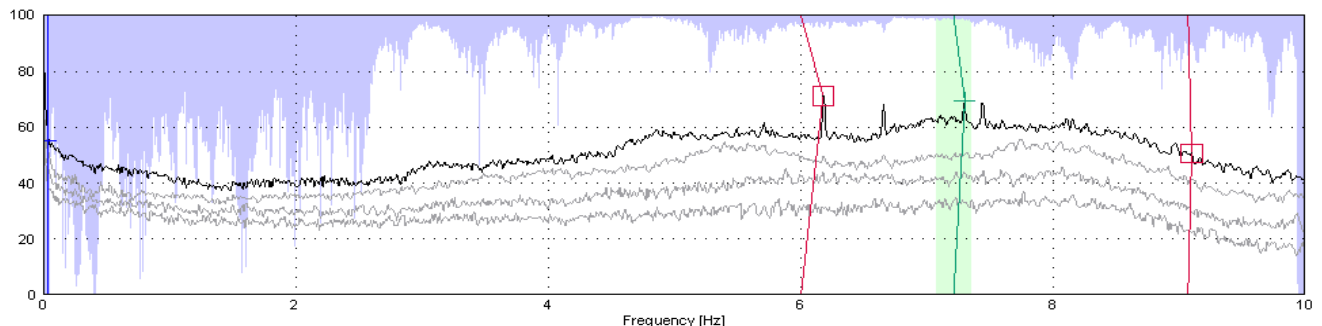


Figura 11. Espectro de respuesta. Identificación de los parámetros modales mediante el método EFDD.

Con ambos métodos se identificaron tres modos de vibración en un rango de frecuencias de 0 a 10 Hz. Los resultados obtenidos, así como la comparación del valor MAC entre ellos, están recogidos en la tabla 1.

	Frecuencia Natural (Hz)		% diferencia	Valor MAC
	EFDD	SSI		
1º Modo de Vibración (Mov. paralelo eje Y (fig.8))	6,09	6,15	0,76	0,99
2º Modo de Vibración (Mov. paralelo eje Z (fig.8))	7,21	7,22	0,14	0,99
3º Modo de Vibración (Modo de torsión)	9,01	8,92	1,01	0,85

Tabla 1. Resultados del modelo experimental antes del comienzo de la intervención sobre el área del Teatro Romano de Cádiz.

### III.3 Validación y verificación de los Modelos EF

Una vez analizado el modelo inicial de EF, se compararon los resultados obtenidos con los valores medidos in situ, en términos de parámetros dinámicos (frecuencias naturales y formas modales). Para ajustar el comportamiento dinámico del modelo inicial de EF al modelo experimental se modificaron los valores de las propiedades mecánicas de la fábrica y del terreno (tabla 2).

	Modelo EF (inicial)			Modelo EF (validado)		
	Fábrica	Terreno	Hormigón	Fábrica	Terreno	Hormigón
Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	1500	1800	2500	1500	1800	2500
Módulo de deformación (MPa)	4000	1500	21000	3000	1000	21000
Coefficiente de Poisson	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Tabla 2. Propiedades mecánicas de los materiales del modelo inicial de EF y del modelo final calibrado.

Con estos datos, y tras un nuevo análisis dinámico del modelo numérico de EF, se obtuvieron nuevas frecuencias naturales asociadas a cada uno de los modos. Estableciendo la comparación de modelos se puede observar la proximidad de los valores (diferencias máximas de frecuencias menores al 1,5%), que indican un comportamiento dinámico similar de ambos modelos (tabla 3).

	F. Natural 1º Modo (Hz)	F. Natural 2º Modo (Hz)	F. Natural 3º Modo (Hz)
Modelo de EF Validado. Fase Previa.	6,14	7,15	8,97
Modelo Experimental. Fase Previa.	6,15	7,22	8,9 – 9,1
% de diferencia	0,16 %	0,96 %	1,44 %

Tabla 3. Comparación de las frecuencias naturales (Hz) asociadas a los tres modos de vibración.

En marzo de 2012, una vez que los paraguas de inyección ya habían sido ejecutados (Fig. 12), se llevó a cabo una segunda campaña experimental. La toma y tratamiento de datos siguió el mismo esquema que el desarrollado con anterioridad. Los nuevos resultados obtenidos condujeron a actualizar nuevamente el modelo de EF, de forma que el módulo de deformación del hormigón adquirió un nuevo valor (tabla 2).

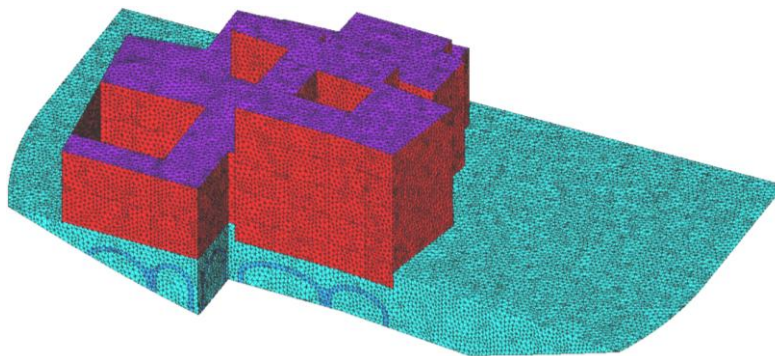


Figura 12. Modelo de EF con las bóvedas conformadas.

Los resultados obtenidos mostraron que tras la intervención en el teatro, el comportamiento dinámico del edificio no se vio alterado de manera significativa, debido a la pequeña modificación en las frecuencias antes y después de la inyección de la lechada (diferencias siempre menores al 1%) (tabla 4).

Modo	Fase previa		Fase bóvedas		Dif. Max. Frecuencia %
	Experimental	Modelo EF	Experimental	Modelo EF	
1	6.15	6.14	6.17	6.15	0,31
2	7.22	7.15	7.23	7.16	0,13
3	8.90	8.97	8.90	9.04	0,78

Tabla 4. Comparación de las frecuencias naturales (Hz) asociadas a los tres modos de vibración.

### III.4 Predicción de la estabilidad estructural al final de la obra

Una vez que todos los parámetros constituyentes del modelo de EF habían sido ajustados, se realizó el modelo correspondiente a la fase final de obras (Fig. 13), de forma que fuera posible estudiar el efecto global dinámico que tiene la intervención sobre el conjunto estructural.

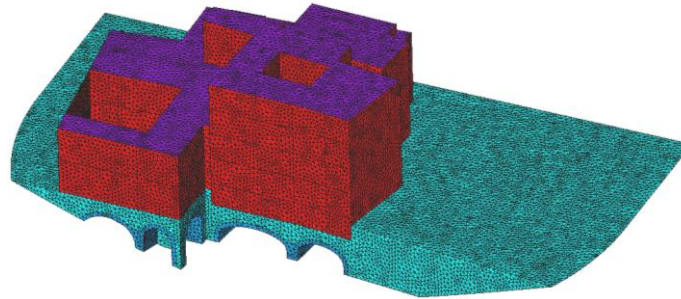


Figura 13. Modelo de EF correspondiente al estado final de la obra.

Se analizó dinámicamente el nuevo modelo de EF para establecer la comparación con el modelo inicial, ya fuera el experimental o el numérico, y estudiar así el efecto global de la intervención. Los resultados obtenidos sirvieron para predecir que la rigidez estructural del conjunto no se modificará sustancialmente tras la intervención. El comportamiento dinámico no se verá alterado de manera significativa debido a las pequeñas diferencias existentes entre los valores de las frecuencias naturales (tabla 5), y entre las formas modales (Fig. 14, 15 y 16).

Modo	Fase previa		Fase final	Comparación 1 y 2 %
	Experimental (1)	Modelo EF	Modelo EF (2)	
1	6.15	6.14	6.14	0,16
2	7.22	7.15	7.13	1,24
3	8.90	8.97	8.98	0,89

Tabla 5. Comparación de las frecuencias naturales (Hz) asociadas a los 3 modos de vibración.

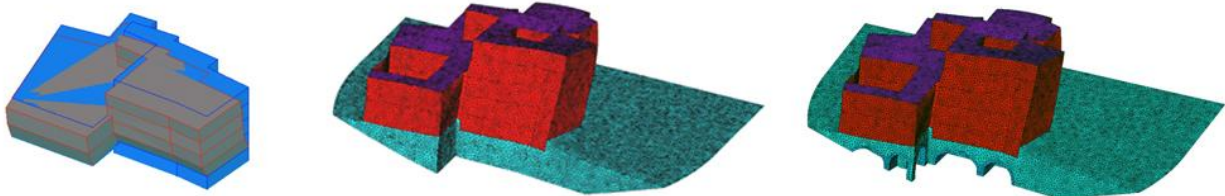


Figura 14. Forma modal del 1º modo de vibración del modelo experimental y numérico en fase previa (izquierda y centro), y del modelo numérico una vez finalizadas las obras (derecha).

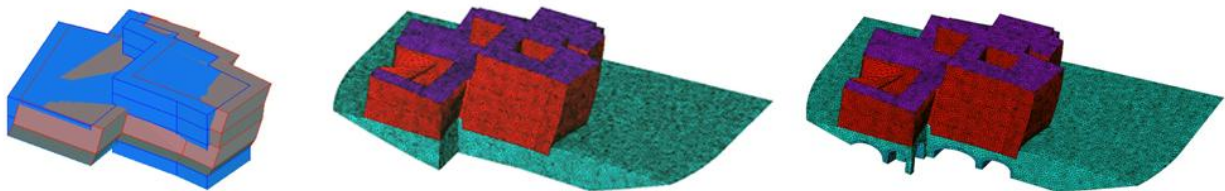


Figura 15. Forma modal del 2º modo de vibración del modelo experimental y numérico en fase previa (izquierda y centro), y del modelo numérico una vez finalizadas las obras (derecha).

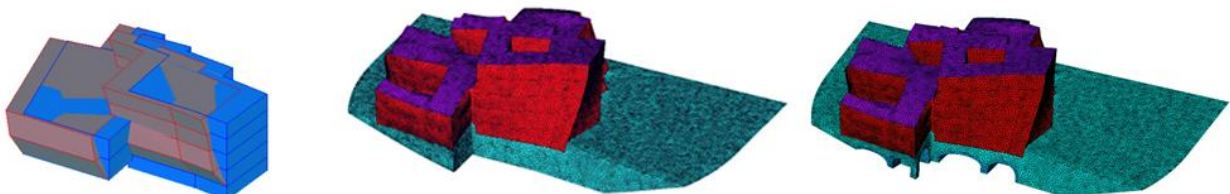


Figura 16. Forma modal del 3º modo de vibración del modelo experimental y numérico en fase previa (izquierda y centro), y del modelo numérico una vez finalizadas las obras (derecha).

### III. Conclusiones

El Análisis Modal Operacional (OMA) se ha aplicado en el área del Teatro Romano de Cádiz para controlar la intervención que se está llevando a cabo sobre él, y para predecir los efectos de ésta al finalizar la obra [19]. Este control se ejecutó mediante pruebas de vibración ambiental y modelos numéricos de elementos finitos. Las propiedades mecánicas de los modelos numéricos fueron inicialmente extraídas de bibliografía, para posteriormente ser ajustadas a partir de la comparación entre el comportamiento dinámico del modelo numérico de EF y los datos recabados in situ (modelo experimental).

Una vez comparados los datos relativos a las mediciones experimentales realizadas antes y después de la ejecución de los paraguas de inyección que conforman las bóvedas (Fig. 17), se evaluó el comportamiento dinámico del complejo sin detectarse importantes modificaciones: diferencias entre frecuencias naturales siempre menores al 1 %, que indican que la rigidez estructural del conjunto no se ha visto modificada (tabla 4).



Figura 17. Área del Teatro Romano de Cádiz. Bóvedas de hormigón ya conformadas (marzo, 2012)

A su vez, los datos medidos in situ se emplearon para validar el modelo de EF, de forma que éste quedara preparado para prever el comportamiento dinámico del complejo al finalizar los trabajos. La predicción dinámica realizada a partir del modelo final indica que la rigidez estructural del conjunto no se verá afectada por las labores de excavación, lo cual proporciona la seguridad suficiente para afrontar las labores de extracción de tierras (fase final de obras). Se estimó que la rigidez del conjunto no se verá afectada por la intervención, ya que los valores de las frecuencias naturales, de los que depende directamente la rigidez estructural, permanecen prácticamente constantes (tabla 5).

### Bibliografía

- [1] Ramos, L. *Damage Identification on Masonry Structures Based on Vibration Signatures*. PhD Thesis, University of Minho (2007).
- [2] Jiménez, J. F. *Estudio del comportamiento dinámico de pasarelas peatonales esbeltas bajo sobrecarga de uso*. Trabajo de investigación para la obtención de estudios avanzados (DEA). Departamento de Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno. Universidad de Sevilla (2010).
- [3] Rodrigues, J. *Identificação Modal Estocástica, Métodos de Análise e Aplicações em Estruturas de Engenharia Civil*. PhD Thesis, University of Porto (2004).
- [4] Čaušević, M. S. "Mathematical Modelling and Full-Scale Forced Vibration Testing of a Reinforced Concrete Structure." *Engineering Structures* 9 (1987) 2-8.
- [5] Alonso, J. F.; Pérez, A. "Application of the Operational Modal Analysis and Modal Updating Methods for the Characterization of the Longitudinal Modulus of an Ancient Reinforced Concrete Truss Bridge in Almeria" (2012).
- [6] Ramos, L. F.; Aguilar, R.; Lourenço, P.; Moreira, S. "Dynamic Structural Health Monitoring of Saint Torcato Church." *Mechanical Systems and Signal Processing* (2012).



- [7] Votsis, R. A.; Kyriakides, N.; Chrysostomou, C.; Tantele, E.; Demetriou, T. "Ambient Vibration Testing of Two Masonry Monuments in Cyprus." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 43 (2012) 58-68.
- [8] Gentile, C.; Saisi, A. Dynamic-based F.E. Model Updating to Evaluate Damage in Masonry Towers, Proceedings of the 4th International Seminar on Structural analysis of Historical Constructions, Padova, Italy (2004).Vol. 1, pp. 439-449.
- [9] Ramos, L. F.; Marques, L.; Lourenço, P.; De Roeck, P.; Campos-Costa, A.; Roque, J. "Monitoring Historical Masonry Structures with Operational Modal Analysis: Two Case Studies." *Mechanical Systems and Signal Processing* 24 (5) (2010). 1291-1305.
- [10] Foti, D.; Diaferio, M.; Giannoccaro, N.; Mongelli, M. "Ambient Vibration Testing, Dynamic Identification and Model Updating of a Historic Tower." *NDT and International* 47 (2012) 88-95.
- [11] Corzo Sánchez, R. El Teatro Romano de Cádiz. *Teatros Romanos de Hispania. Cuadernos de Arquitectura Romana, vol. 2.* (1993) 133-140.
- [12] Fresnadillo García, R.; Tabales Rodríguez, M. A.; Maya Torcelly, R.; Jurado Fresnadillo, G.; Pajuelo Sáez, M. Cádiz en la edad media. *Revista Atlántica-Mediterránea de Prehistoria y Arqueología Social, RAMPAS* 10 (2008) 399-411.
- [13] Pérez Alberich, J. M. La revitalización del Teatro. De los años ochenta a la actualidad. In *El Thearum Balbi de Gades. Proc. of Seminario "El Teatro Romano de Gades. Una mirada al futuro"*, Cádiz, 18-19 November 2009. Servicio de Publicaciones Universidad de Cádiz. España (2011).
- [14] Yanes, E.; Cobo, A. Un proyecto arquitectónico singular de consolidación. La futura mirada al Teatro Romano Gaditano. *El Thearum Balbi de Gades. Actas del Seminario "El Teatro Romano de Gades. Una mirada al futuro"*, Cádiz, 18-19 Noviembre 2009. Servicio de Publicaciones Universidad de Cádiz (2011).
- [15] Williamson, C. Remedial grout injection of buildings". *Construction & Building Materials*, vol. 2, núm. 3 (1988) 145-147.
- [16] Norma EHE Instrucción de Hormigón Estructural (2008).
- [17] Augenti N., F. Parisi and E. Acconcia. MADA: online experimental database for mechanical modeling of existing masonry assemblages. Proc., 15th World Conference on Earthquake Engineering, Lisbon, Portugal (CD-ROM) (2012).
- [18] CTE: Código Técnico de la Edificación (2006).
- [19] Pachón, P. *Predicción de la estabilidad estructural mediante análisis modales operacionales*. Trabajo de investigación para la obtención del Máster de Innovación en Arquitectura: Tecnología y Desarrollo. Departamento de Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno. Universidad de Sevilla (2012).

# Isostatic lines' study to optimize steel space grid envelope structures for tall buildings according to their solicitations.

Author: *Señís López, Roger*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Assistant Professor, Department of Architectural Constructions II, Barcelona School Building Construction (EPSEB).  
Polytechnic University of Catalonia (UPC-BarcelonaTech). E-mail: roger.senis@upc.edu

## ABSTRACT

The aim of this study is to determine if steel space grid envelope for tall buildings are more optimal and efficient if their design is based on the isostatic lines of their structural elements. The methodology used is the dynamic response analysis of 540 models of tall buildings using the Equivalent Static Wind Loads (ESWL) method. It is necessary to determine the dynamic wind loads that influence buildings, RMS (root-mean-square) moment coefficients and spectra of along-wind, across-wind and torsional moments. To do this, 5 rigid models of tall buildings in the wind tunnel are made in order to compare them with the results of the NatHaz online database. The results conclude that space grids are more optimal if they do adopt the trajectory of the dominant load, in this case the wind.

**Keywords:** Design buildings; Space grid structures; Parametric design; Wind tunnel modelling; Tall buildings.

## I. INTRODUCTION

The recent interest in the use of steel space grids as structural envelope elements for tall buildings is, more and more, helping external structures to gain relevance within architectural concept and building design. It is by these means that a bidirectional relationship between architectural concepts and structural design is needed.

As Eduardo Torroja [1] argues: “*La obra mejor es la que se sostiene por su forma y no por la resistencia oculta de su material*”.

As a matter of fact, the material, the structural type (*see figure 1*), the function of form (Farshid Moussavi [2]) and the construction process are some of the aspects that gain relevance in building design. It is for this reason that the acknowledgement of mechanical characteristics of materials and techniques are essential to define the structural type and its more optimal shape according to its loads.

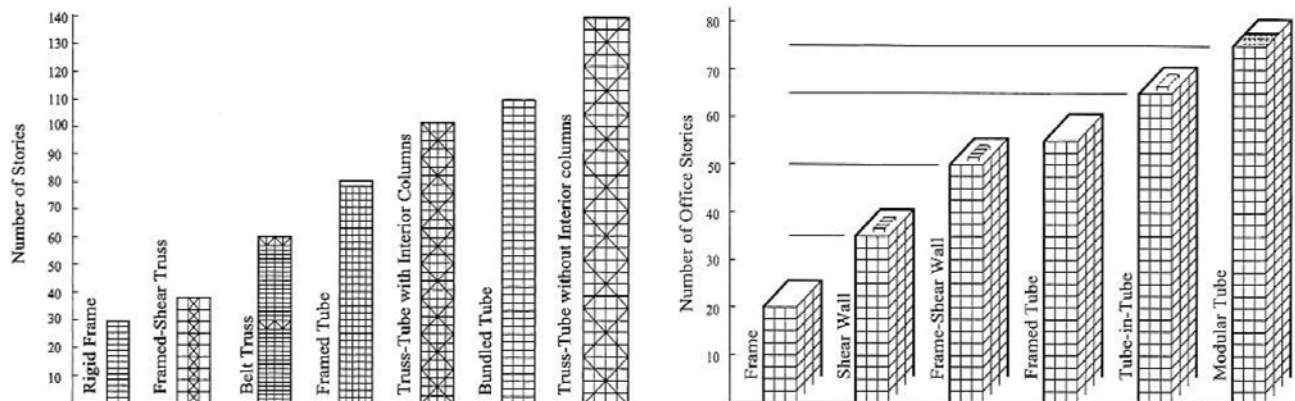


Figure 1: Classification of tall building structural systems by Fazlur Khan [3].

Since the first skyscraper was built back in 1885, by Le Baron Jenney, using steel structure, this typology, tall buildings, has extended all around the world. Given its relevance it has also been object of study as was The Empire States building (380 meters high) which was the tallest building on the world for 40 years and which was the focus of three significant studies in the 1930s (Coyle, 1931; Dryden and Hill, 1933; Rathbun, 1940), and the object of analysis of Alan G. Davenport [4] who studied in detail, guided by his wind load chain (see figure 2), the building's wind load.

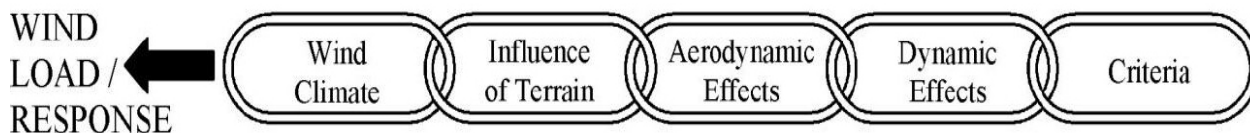


Figure 2: Wind loading chain of Alan G. Davenport [5].

After the Second World War the new generation of tall buildings promoted the evolution of the wind tunnel of the atmospheric boundary layer which became a valuable tool to analyse the wind tunnel loads which contributed in the tall buildings' design. The first use of the wind tunnel to measure wind loads for tall buildings' design was in 1893 in Melbourne, Australia, by W. C. Kernot. It is by means of the comparison of wind tunnel experiments and *NatHaz* database that we can obtain the wind repercussion and influence in tall buildings.

It is necessary to define a parametrical procedure to design and analyze the space grids for tall buildings that allows solving the most common problems that usually arise when designing and analysing this type of complex structure. Once this information has been gathered, and in order to develop a parametrical design to optimize the shape of steel mesh envelope structures that we need to study the trajectory of the isostatic lines of the structural elements that are object of study (D'Arcy Thompson [6]), encompassing the different variables that are involved in the building design and in its structural concept.

## II. METHODOLOGY

In the methodology we can differentiate 2 stages:

- The first stage in which experiments with a wind tunnel simulation need to be made in order to understand the wind repercussion and influence in tall buildings for high Reynolds number. Being necessary to bear in mind the turbulence, at high intensity, and the wind flow fluctuant pressure coefficients that can be produced by natural wind as well as the unstable behaviour of the flow around bluff-bodies that produce flow separations (see figure 3). Even re-attachments and buildings geometry's details produce pressures and forces on bodies, highly fluctuating (Kwok [7]).

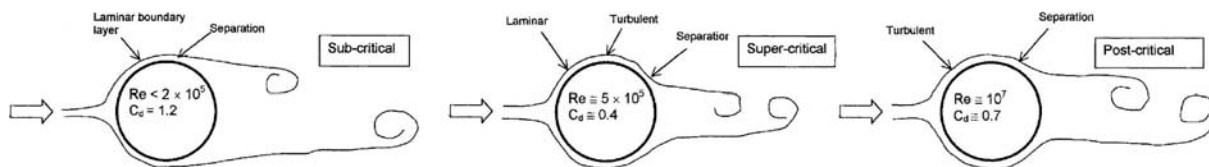


Figure 3: Flow regimes for a circular cylinder in smooth flow by John D. Holmes [8].

- The second stage consists of designing and analysing the building structures, through parametrical tools, according to their structural elements' isostatic lines, for its optimization. To analyze the models it is employed an ESWL method that reproduces the maximum response of a structure, a method first introduced by Davenport [9].

## II.1 Wind Tunnel tests

In the first stage, as stated earlier, experiments with wind tunnel simulation take place. For the experiment 5 different rigid models, according to section, tallness and distortion variations, at a 1/400 scale, are analyzed through the wind tunnel simulation. With the compiled data, result of the analysis, the influence of the atmospheric wind over the building is analyzed to obtain valid results for the prototype model (see figure 4). All simulations are realized according to the recommendations of Manuals and Reports on Engineering Practice No. 67 for Local Pressures Test by ASCE [10].

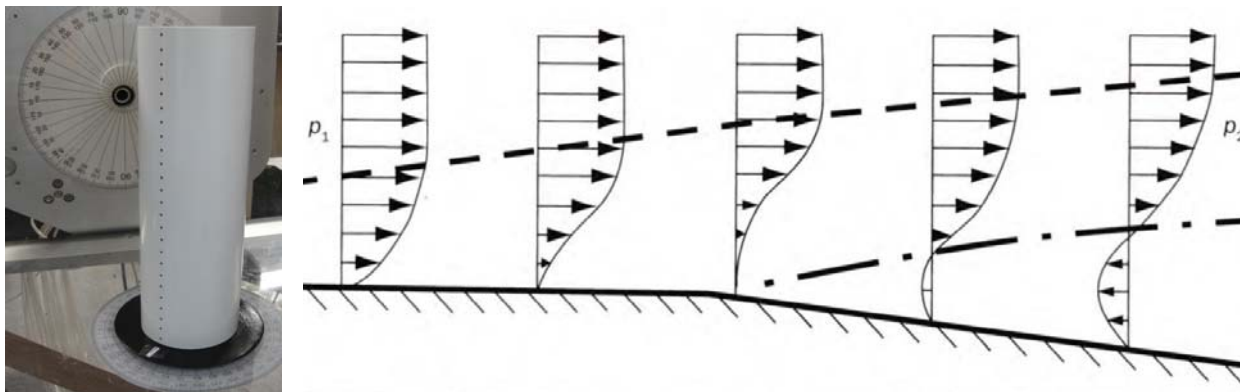


Figure 4: One of wind tunnel model (cylindrical base) and atmospheric wind boundary layer scheme.

## II.2 Parametric Design and Numerical Simulation

In the second stage, the design and analysis takes place; 540 models of 25 metres of base and 3 different types of slenderness <<50m (1/2), 100m (1/4) y 150m (1/6)>> are designed and analyzed following 4 steps:

- Define all the initial geometrical variables; base shape, front form, volume distortions, tallness and mesh base geometry, generating the models with a parametrical modelling program such as *Grasshopper*.
- Model the structural volume with finite elements and analyze it with an analysis program in order to recognize the isostatic lines of the structural envelope.
- Define the definitive mesh according to the results of the second step and define the most optimal structural type and structural form according to the building loads.
- Analyze the final flexible model (dynamic response) taking into account moment coefficients and spectra of along-wind, across-wind and torsional moments according to the guide of Architectural Institute of Japan (AIJ) [11]. Compare the results with the base grid model to observe if the global behaviour of the structure is more efficient (see figure 5).

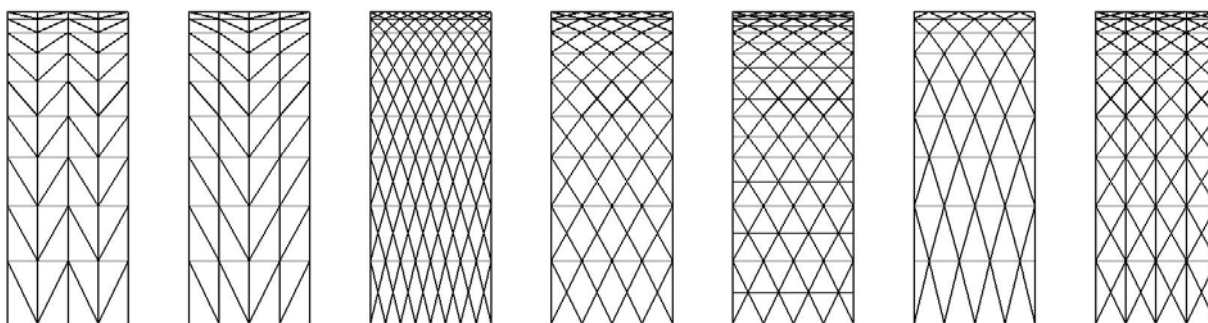


Figure 5: Grid geometry according to isostatic lines result of the wind load.

### III. ANALYSIS AND RESULTS

Tall buildings are sensible to wind flows. Under wind flow action tall buildings are exposed to dynamic loads alongwind, acrosswind and torsional directions (see figure 6). In order to determine the desing data and the tall building's behaviour, of different geometries and different wind exposure (Yin Zhou, *et. al.* [12]), we use *NatHaz* database. The results are then compared with the wind tunnel results (see figure 7) and the aerodynamic loads are defined in RMS terms of the base moment coefficients and non-dimensional PSD according to 1 and 2 equations, where  $\bar{M}'$  = reference moment or torque and  $C_M$  = non-dimensional moment coefficient:

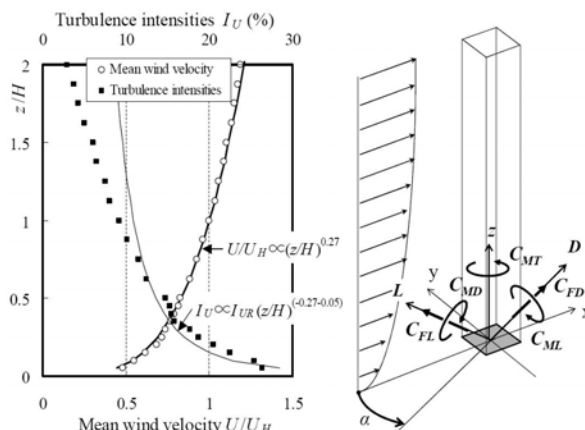


Figure 6: Wind tunnel test flow by Y. Tamura [13].

$$\sigma_{CM} = \sigma_M / \bar{M}' \quad (1)$$

$$C_M(f) = (f \times S_M(f)) / \sigma_M^2 \quad (2)$$

The experimental formulae to calculate the torsional moment  $C_{M_z}$  of tall buildings under wind loads was first proposed by Kareem [14], then by Lythe and Surry [15], Cheung and Melbourne [16, 17] and later on by Liang *et. al.* [18] using experimental results from wind tunnel tests, which were carried out in 1/400 scale models of the natural wind flow generated over roughness elements. Cheung and Melbourne [16, 17] normalized the measured torsional moments in coefficients forms as follows:

$$C_{M_z} = \bar{M}_z / \frac{1}{2} \rho V_h^2 b_{max}^2 h \quad (3)$$

$$C_{\sigma M_z} = \sigma_{M_z} / \frac{1}{2} \rho V_h^2 b_{max}^2 h \quad (4)$$

The models analyzed are generated according to different variables: different geometries of mesh, various structural typologies (frame, shear wall, frame-shear wall, tube framed, tube-in-tube and modular tube), various unions between frames, core and non-core models, different rigidities of columns and floors, etc. So, it is necessary to use parametric designing tools for models. Analyzed models have a maximum height of 150 meters and a base of maximum dimensions of 25x25 meters. The slabs have a thickness of 25cm and cores 60cm thick.

Table 1: Input parameters and non-dimensional PSD (along-wind, across-wind and torsional)

B = 30m	D = 30m	H = 150m	$f_x = 1Hz$	$f_y = 1Hz$	$f_z = 1Hz$
$\zeta = 0,02$	$\alpha = 1/3$	$\beta_1, \beta_2, \beta_3 = 1,0$	$\rho_B = 250kg/m^3$	$\rho_A = 1,25kg/m^3$	$C_D = 1,3$
$U_{10} = 63m/s$ (6-1b, ASCE 7)		$A = 63 \times 0,30^a = 18,9 m/s$		$\bar{U}_H = 18,9 \times (150/10)^{1/3} = 51,30$	

Table 2: Survivability Design (50-years wind): Base moments and maximum displacements

	Base moments ( $10^6 KN \cdot m$ )				Roof: Maximum displacements (m)
	$\bar{M}$	$\bar{M}_B$	$\bar{M}_R$	$\bar{M}$	
Along-wind	0,9167	0,3779	0,3820	1,4541	0,22
Across-wind	-	0,6800	0,3489	0,7643	0,11
Torsional	-	0,0245	0,0438	0,0502	-

Table 3: Serviceability Design (10-years wind): Peak and RMS Accelerations at roof

	Peak Acceleraciones at roof		RMS Accelerations at roof	
Along-wind	10,82 milli-g		2,58 milli-g	
Across-wind	10,55 milli-g		2,76 milli-g	
Lateral Accel. at corner	0,00632 rad/s <sup>2</sup>	Along-wind: 9,67milli-g Across-wind: 9,67milli-g	0,00151 rad/s <sup>2</sup>	Along-wind: 2,31 milli-g Acrosswind: 2,31 milli-g
Total lateral Accel. at corner	Along-wind component: 14,51 milli-g Across-wind component: 15,06 milli-g		Along-wind component: 3,46 milli-g Across-wind component: 3,59 milli-g	

### III. 1 Results of Wind Tunnel Test

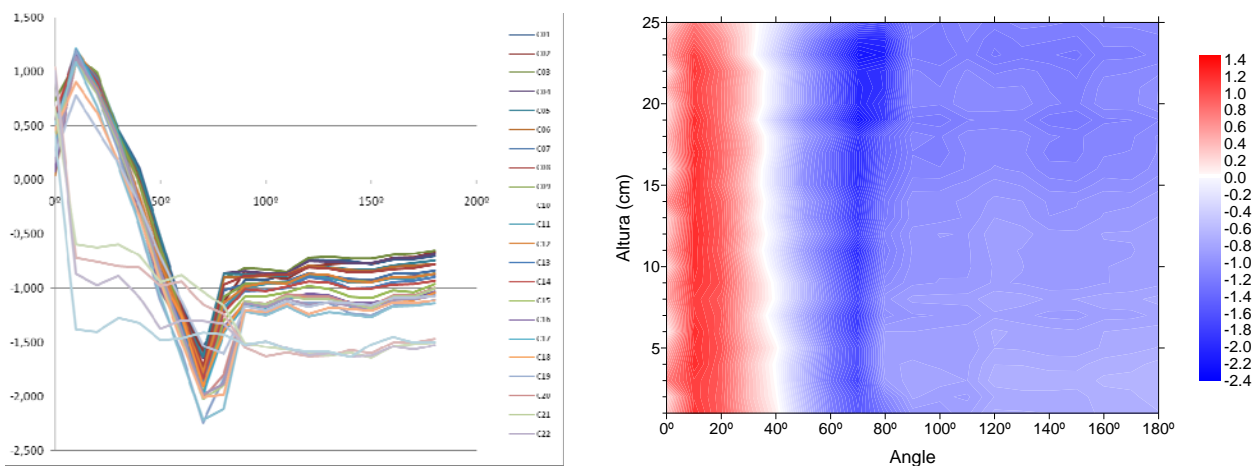


Figure 7: Aerodynamics coefficients results from wind tunnel test (RMS).

### III.2 Comparison of the base mesh model with the isostatic lines' defined models

Having compared the results of three of the models of mesh base with results of three of the models that were designed according to the trajectory of the isostatic it can be determined whether the final models (2, 4 and 6) are more optimal and efficient than the initial models (1,3 and 5) or not.

Table 4: Results numerical analysis of some models tall buildings (see figure 8)

Model 1	50m	Model 2	Model 3	100m	Model 4	Model 5	150m	Model 6
0,05 m	100%	0,05 m	0,10 m	100%	0,10 m	0,15 m	100%	0,15 m
53,1 KN	72,98%	38,75 KN	567,5 KN	90,78%	515,2 KN	1272,9 KN	95,43%	1214,7KN

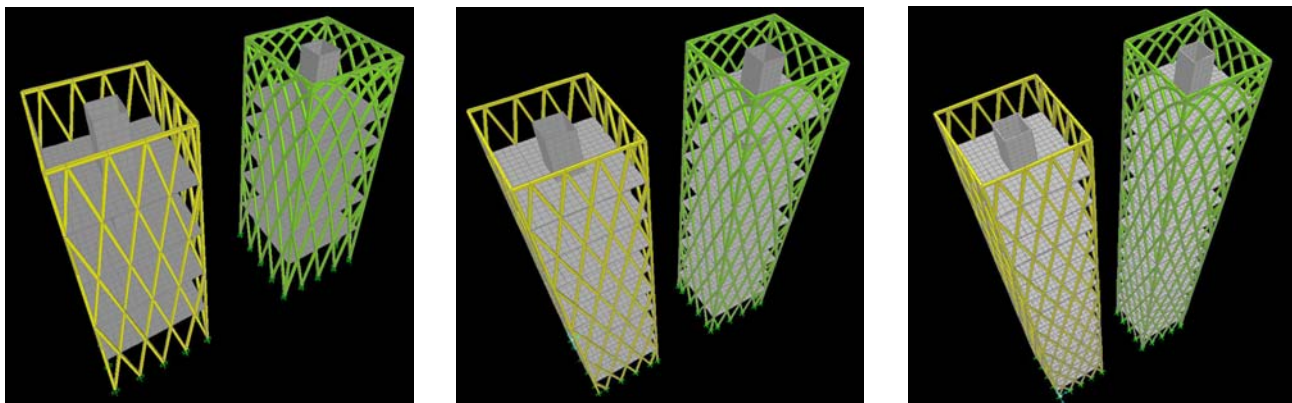


Figure 8: Images of some models analyzed.

## IV. CONCLUSIONS

With the first results of the present study we demonstrate that space grid envelope in tall buildings have a more optimal and efficient behaviour against stresses (survivability design) and displacements (serviceability) if their geometry and dominant load trajectory is adapted to their isostatic lines trajectory.

It can be observed that in this type of buildings the wind repercussion is determinant as the increment of the gravity loads against the horizontal loads does not vary the structure's global behaviour. What is more, the increase of the space grid's density does not always imply the optimization of the structure's global behaviour. Given the impact of the wind flow repercussion in tall buildings it is necessary to analyze with detail its influence over tall buildings especially the across-wind and torsional response result of aerodynamic pressure fluctuations.

## V. REFERENCES

- [1] Fernández J.A. and Navarro J.R. (1999). *Eduardo Torroja. Ingeniero*. Ed. Pronaos, Madrid.
- [2] Moussavi F. (2009). *The Function of Form*. Published by Actar and the Harvard University Graduate School of Design, 2009, 53-157.
- [3] Khan F.R. (1973). *Evolution of structural systems for high-rise buildings in steel and concrete*. Proceedings of the 10<sup>th</sup> Regional Conference on Tall Buildings, Bratislava.
- [4] Davenport A.G. (1975). *Perspectives on the full-scale measurements of wind effects*. Journal of Industrial Aerodynamics, vol. 1, 23-54.
- [5] Davenport A.G. (1965). *The dependence of wind loads on meteorological parameters*. In International Research Seminar on Wind Effects on Buildings, Ottawa, vol. 1, 20-82.
- [6] Thompson A. (2000). *Sobre el crecimiento y la forma*. Edited by John Tyler Bonner, Cambridge University Press., 16<sup>th</sup> edition, 213-236.
- [7] Kwok K.C.S. (1988). *Effect of building shape on wind-induced response of tall buildings*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 28, 381-390.
- [8] Holmes J.D. (2007). *Wind loading of structures*. Edited by Taylor&Francis, 2<sup>nd</sup> edition, 87-92.
- [9] Davenport A.G. (1967). *Gust loading factors*". Journal of Structural Division, vol. 93, 11-34.
- [10] ASCE (1999). *Wind Tunnel Studies of Buildings and Structures*. Manuals and Reports on Engineering Practice no. 67, 5-7.
- [11] Tamura Y., Kawai H., et. al. (1996). *Wind load and wind-induced response estimations in the Recommendations for Loads on Buildings, AIJ 1993*, 399-411.
- [12] Zhou Y., Kijewski T. and Kareem A. (2003). *Aerodynamics loads on tall building: Interactive database*. Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 129, no. 3, 394-404.
- [13] Tamura Y., Kim Y., Tanaka H., Ohtake K. and Nakai M. (2010). *Aerodynamics characteristics of tall building models with various unconventional configurations*. Structures Congress 2010, 3104-2010.
- [14] Kareem A. (1981). *Wind induced torsional loads in structures*. Engineering Structures, vol. 3, 85-86.
- [15] Lythe G.R., and Surry D. (1990). *Wind-Induced Torsional Loads on Tall Buildings*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 36, 225-234.
- [16] Cheung J.C.K. and Melbourne W.H. (1992). *Torsional Moments of Tall Buildings*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 41-44, 1125-1126.
- [17] Cheung J.C.K. and Melbourne W.H. (2006). *Torsional Moments of Tall Buildings with various Planform Shapes*. Proceedings of the 12<sup>th</sup> Australian Wind Eng. Society Workshop.
- [18] Liang S., Liu S., Zhang L., Gu M. and Li Q.S. (2004). *Torsional dynamic wind loads on rectangular tall buildings*. Engineering Structures, vol. 29, 129-137.

## Methods for determination of ultimate load of eccentrically patch loaded steel I-girders

Šćepanović Biljana<sup>1A</sup>, Gil-Martín Luisa María<sup>2A</sup>,  
Hernández-Montes Enrique<sup>2B</sup>, Knežević Miloš<sup>1B</sup>, Lučić Duško<sup>1C</sup>

1 Faculty of Civil Engineering, University of Montenegro, Bul. Džordža Vašingtona bb, 81000 Podgorica, Montenegro  
E-mail: biljazz38@gmail.com<sup>1A</sup>, knezevicmilos@hotmail.com<sup>1B</sup>, dlucic@t-com.me<sup>1C</sup>

2 Department of Structural Mechanics, University of Granada, Campus de Fuentenueva, E-18072 Granada, Spain  
E-mail: mlgil@ugr.es<sup>2A</sup>, emontes@ugr.es<sup>2B</sup>

### Abstract

Behaviour, collapse mode and ultimate load of eccentrically patch loaded steel I-girders are influenced by numerous mutually dependant parameters. Since there is still no theoretical formulation of collapse mechanism, two approaches for ultimate load determination are suitable: empirical mathematical expressions and artificial neural networks (ANN) forecast models. Results of two procedures are compared. Recommendations for application in engineering practice are given.

### Keywords

steel I-girder, eccentric patch load, ultimate load, empirical expression, ANN forecast model

### I. Introduction

Patch loading acts locally, over a small area or length of a structural element. It is a common situation in structural engineering that local compressive load affects the flange of steel I-girder so that the web is compressed in the region below the applied load. Local stresses in the vicinity of load might cause local instability that may provoke element carrying capacity loss and, consequently, collapse of the whole structure. This is rather complex and challenging issue of extremely evident elastic-plastic stresses and deformations. Apart from that, geometrical nonlinearity is noticeable even at the lowest loading level. Patch loaded girders (Fig. 1) are widely used and present in different structures, including crane girders loaded by crane wheels or bridge girders during launching.

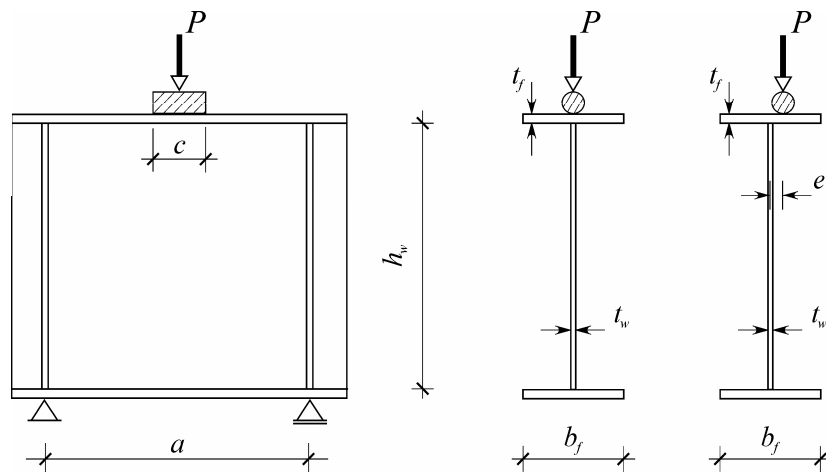


Figure 1. Patch loaded I-girder – centric and eccentric patch loading

Although some eccentricity of load relative to the web plane is unavoidable in engineering practice, rather modest amount of worldwide research work has treated this issue in comparison with the amount of worldwide research work that have treated centric patch loading. While over 35 experimental researches (with more than 750 tested samples) dealt with I-girders patch loaded in the web plane, influence of load eccentricity was analysed in only eight experimental studies (with less than 200 tested samples) [1-10]. Experimental analysis of eccentrically patch loaded girders started at the University of Maine in late 1980s [1,2,3]. At the same time some tests were done at the Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Czech Academy of Sciences [4]. Ten years later a new series of experiments (1998, 2001, 2007) were initiated at the University of Montenegro [5-10]. The newest testing, with only four tested girders, was done at the University



of Navarra, upon the initiative of the University of Granada, in 2009 [10]. Experimental work was followed by finite element method (FEM) modelling, by means of various computer software [1-10]. While over 30 mathematical expressions (mostly based on collapse mechanism) for centric ultimate load might be found in literature, only few empirical expressions for eccentric ultimate load have been proposed [3,8-10]. Artificial neural networks, being suitable for multi-parameter analysis, are also used nowadays for collapse mode and ultimate load estimation [8]. However, mathematical model for ultimate load calculation based on collapse mechanism, or some other theoretical approach, has not yet been proposed.

Since the first experimental investigations, in 1980s, it has been evident that numerous parameters influence the behaviour, collapse mode and ultimate load of eccentrically patch loaded steel I-girders: geometric parameters (girder's dimensions and their dimensionless ratios), load eccentricity and its relations with girder dimensions, as well as the manner of load application (line or laterally distributed load). Dominant parameter is the load eccentricity,  $e$ , or ratio  $e/b_f$ . Apart from this parameter, the influence of girder geometry parameters should be studied. Girder dimensions, primarily web and flange thicknesses,  $t_w$  and  $t_f$ , as well as ratio  $t_f/t_w$  are of important influence. Other ratios, like  $b_f/t_f$ ,  $a/t_w$ ,  $h_w/t_w$  should be considered as well. Attention should also be paid to the load length,  $c$ , or ratio  $c/a$  and to the load application manner. Hence, not only that influential parameters are numerous, but they are also mutually dependant and related and therefore should not be considered separately. Combinations of certain parameters should be carefully analysed.

Even 1980s tests shown and all later experiments confirmed that most eccentrically patch loaded steel I-girders (but not all and not always!) have a collapse mode quite different from that of centrically loaded girders (Fig. 2). Carrying capacity loss in the case of centric load is due to web buckling and local stability loss (*centric collapse mode*, Fig. 2a). In the case of eccentric load, girders lose carrying capacity due to local elastic-plastic bending (*eccentric collapse mode*, Fig. 2b). Three different collapse modes are observed in experimentally tested eccentrically patch loaded steel I-girders: eccentric [1,2,5-8], centric [1,2,5-8] and mixed [8] collapse mode. *Mixed collapse mode*, having characteristics of both, centric and eccentric collapse modes, may appear in two variants: as centric-mixed or as eccentric-mixed collapse mode, depending on dominant collapse mode characteristics [8].

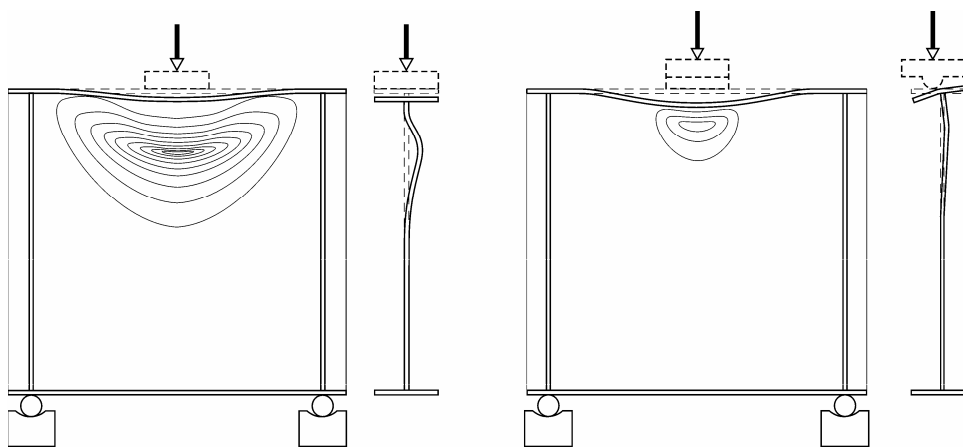


Figure 2. Collapse modes typical for centric and eccentric patch loading

Concerning engineering practice, the most important difference between collapse modes is in ultimate load. The reduction in ultimate load with an increase in load eccentricity is obvious in girders with eccentric collapse mode. For a certain girder geometry, even the smallest load eccentricity ( $e = 5 \text{ mm}$ , i.e.  $e/b_f = 1/30$  in tested girders [8]) reduced ultimate load over 40%. However, eccentrically loaded girders under certain circumstances, for a certain combination of influential parameters, behave as if loaded in the web plane, with no or no significant reduction in ultimate load due to load eccentricity. Even for the highest load eccentricity ( $e = 25 \text{ mm}$ , i.e.  $e/b_f = 1/6$  in tested girders [8]), girders of certain geometry behaved as if there is no eccentricity.

With such a big number of mutually dependant parameters that influence collapse mode and level of ultimate load reduction due to load eccentricity, still without formulation of collapse mechanism, two approaches for ultimate load determination are suitable: empirical mathematical expressions [3,8-10] and artificial neural networks (ANN) forecast models [8]. Both methods are based on experimental and/or FEM experience, their application is limited to cases from experimental and/or FEM data domain and every future experimental and/or FEM testing should be followed by their revision and adjusting in order to improve their accuracy.

## II. Empirical mathematical expressions

In the case of eccentric (or mixed-eccentric) collapse mode ultimate load reduces as the load eccentricity increases [1-3,5-10]. This decrease in the ultimate load might be expressed by a reduction factor,  $R$ , that relates the ultimate load of eccentrically loaded girders to the ultimate load of centrally loaded girders, Equation (1) [3,8-10]. Ultimate load of centrally patch loaded girder might be calculated by one of numerous and very accurate existing mathematical expressions. Ultimate load of eccentrically patch loaded girder then might be easily calculated if the reduction is evaluated correctly and confidently.

$$R = \frac{\text{ultimate load of eccentrically loaded girder}}{\text{ultimate load of centrally loaded girder}} \quad (1)$$

The first published expression for the ultimate load reduction factor,  $R$ , is based on experimental studies conducted in 1980s [1-3]. Reduction factor is expressed in terms of two main geometric parameters:  $R$  is a function of  $t_f/t_w$  and varies linearly with  $e/b_f$ , Equation (2) [3].

$$\left. \begin{aligned} R &= m \cdot \frac{e}{b_f} + n < 1 \\ m &= -0.45 \cdot \left(\frac{t_f}{t_w}\right)^2 + 4.55 \cdot \left(\frac{t_f}{t_w}\right) - 12.75 \\ n &= 1.15 - 0.025 \cdot \left(\frac{t_f}{t_w}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Recent experimental work (from 1998, 2001 and 2007), with wider range of test data [5-9], indicates that the original expression for  $R$  should be modified.

Join research work of teams from the University of Montenegro and Granada University resulted in several modifications of original expression for reduction factor [8-10]. New, improved expressions are also empirical, obtained by regression analysis based on all available experimental data (until 2007) as well as on results of finite element modelling (FEM) by ANSYS. One of these expressions, which has very good match with the wide range of experimental and numerical data, is defined by Equation (3) [8,9]. The reduction factor,  $R$ , is considered to be a quadratic function of the most relevant parameter  $e/b_f$  and, same as in the original expression, dependent on the most influential geometry parameter  $t_f/t_w$ :

$$\left. \begin{aligned} R &= m \cdot \left(\frac{e}{b_f}\right)^2 + n \cdot \left(\frac{e}{b_f}\right) + 1.01 \leq 1 \\ m &= -0.864 \cdot \left(\frac{t_f}{t_w}\right)^2 - 14.40 \cdot \left(\frac{t_f}{t_w}\right) + 38.00 \\ n &= -12.30 + 4.22 \cdot \left(\frac{t_f}{t_w}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Same as any other empirical expression, Equation (3) should be used only in the range of data used for regression analysis. Experimental data used for the derivation of Equation (3) are in the following range:  $1 \leq t_f/t_w \leq 5$ ,  $(0) 1/30 \leq e/b_f \leq 1/5$ ,  $45 \leq a/t_w \leq 233$ ,  $10 \leq b_f/t_f \leq 50$ ,  $c/a = 0.071$  or  $0.214$ ,  $a/h_w = 1$  [1-3,5-9]. Range of FEM (ANSYS) data used for the derivation of Equation (3) differs:  $1 \leq t_f/t_w \leq 4$ ,  $(0) 1/25 \leq e/b_f \leq 1/6.25$ ,  $117 \leq a/t_w \leq 233$ ,  $6.25 \leq b_f/t_f \leq 25$ ,  $0.036 \leq c/a \leq 0.071$ ,  $1 \leq a/h_w \leq 2$ ; with constants:  $h_w = 700$  mm,  $t_w = 6$  mm,  $b_f = 150$  mm,  $c = 50$  mm and variables:  $e$  (0, 6, 12, 18, 24 mm),  $t_f$  (6, 12, 18, 24 mm),  $a$  (700, 910, 1050, 1260, 1400 mm) [8,9].

It has to be pointed out that every future experimental testing or FEM modelling should be followed by new revision of empirical expression for the ultimate load reduction factor in order to improve its accuracy. Apart from that, even with the existing experimental and FEM data base, this kind of mathematical modelling is almost endless, offering almost countless options – to chose different functions for  $R$ , different influential parameters, their forms and combinations or different methods of expression calibration. Presented expression by Equation (3) is chosen and recommended as simple and reliable for application in engineering practice.

### III. ANN forecast models

#### III.1 Artificial neural networks (ANN) modelling method

ANN modelling method is based on the analogy with the human nervous system [8,11]. Artificial neuron imitates biological neuron. Artificial neural network (ANN), consisted of artificial neurons, is computational simulation of human neural network, consisted of biological neurons. Humans use their mind to make conclusions and decisions in certain situations based on the previous (similar) experience. ANN does not have human mind and experience that should be used to process input data and make appropriate conclusions/decisions, i.e. output. In ANN modelling method human mind is replaced by mathematical functions (as much as such replacement is possible) and human experience is replaced by existing data base which is used for ANN training. By training and validation ANN on some data base, forecast models are created in order to estimate output parameter(s) for certain set of input parameters that is not present in the data base, but that is in the range of data base. ANN modelling method is highly suitable for multi-parameter analysis.

#### III.2 ANN forecast models for collapse load

The basic idea is to estimate the collapse load,  $P_u$ , as the only output parameter, depending on numerous input parameters (material characteristics, girder geometry and load eccentricity), as well as to assess applicability of ANN modelling method as a tool for collapse load determination in engineering practice and to compare it with more conventional method of empirical expressions [8].

Several types of forecast models were made using experimental data from 1998, 2001 and 2007 [5-9]: with dimensional (e.g.  $e$ ,  $t_f$ ,  $t_w$ ) and dimensionless (e.g.  $e/b_f$ ,  $e/t_f$ ,  $e/t_w$ ,  $b_f/t_f$ ,  $t_f/t_w$ ,  $h_w/t_w$ ) geometry inputs. Several types of network architecture were constructed [8]: with one or two hidden levels of neurons; with different number of neurons (1 to 20) in each level, depending on inputs number and number of training data. The same computer software [8,11] was used for training of all created artificial neural networks. Comparison of different forecast models was done in comparison data set, in order to evaluate which models provide the best forecast of collapse load.

ANN models were made separately for girders with different load lengths ( $c = 50$  or  $150$  mm – two load lengths used in experiments from 1998, 2001 and 2007). Herein only load length of  $c = 50$  mm and models with five dimensional inputs ( $e$ ,  $t_w$ ,  $t_f$ ,  $\sigma_{0.2,w}$  – web yielding stress,  $\sigma_{0.2,f}$  – flange yielding stress) and one output ( $P_u$ ) are considered. The complete experimental data set for girders with load length  $c = 50$  mm consisted of 120 girders tested in 2001 and 2007 [6-9], all having same dimensions  $b_f$ ,  $a$  and  $h_w$ :  $b_f = 150$  mm,  $a = 700$  mm and  $h_w = 700$  mm. 19 testes were exempted from the network training process and used as a comparison data set, i.e. as data for the evaluation of forecast models. The rest of 101 tests were divided in training data set (71 tests) and validation data set (30 tests).

The best evaluated models show high level of match with experimental data and prove to be acceptable for engineering practice. Particularly good results are obtained from network with two hidden levels, each with ten neurons ("*c50 – load – 2 – 10*") [8]. Examples of collapse load forecast models of this network are presented in Fig. 3 which illustrates estimation of collapse load and its relation with the load eccentricity  $P_{u,ann}(e)$  for  $t_w = 5$  mm and different values of  $t_f = 5 \div 15$  mm, all at fixed  $c = 50$  mm,  $\sigma_{0.2,w} = 28$  kN/cm<sup>2</sup> and  $\sigma_{0.2,f} = 28$  kN/cm<sup>2</sup>. Some of these values of  $t_f$  have been tested experimentally ( $t_f = 6, 8, 10$  and  $12$  mm). However, ANN models fill in the gaps for values that were not present in the experiment and also widen domain of  $t_f$  values. Appropriate graphical presentation of  $P_{u,ann}(e)$  for fixed value of  $t_f$  and different values of  $t_w$  might also be created, assuming fixed values of  $c$ ,  $\sigma_{0.2,w}$  and  $\sigma_{0.2,f}$ . Similar estimations of collapse load and its relations with the web thickness or dimensionless parameter  $t_f/t_w$ , i.e.  $P_{u,ann}(t_w)$  or  $P_{u,ann}(t_f/t_w)$ , might be made, as well. Such diagrams proved to be interesting, leading to various and important conclusions.

It is important to point out that ANN forecast models provide reliable output only for input data from the domain of network training database. Herein that is range of experimental data from 2001 and 2007:  $1 \leq t_f/t_w \leq 5$ ,  $1/30 \leq e/b_f \leq 1/6$ ,  $70 \leq a/t_w \leq 233$ ,  $10 \leq b_f/t_f \leq 50$ ,  $c/a = 0.071$ ,  $a/h_w = 1$ ; with constants:  $a = h_w = 700$  mm,  $b_f = 150$  mm,  $c = 50$  mm and variables:  $e$  (0, 5, 10, 15, 20, 25 mm),  $t_f$  (3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15 mm),  $t_w$  (3, 4, 5, 6, 8, 10 mm) [8].

Future experimental work, as well as inclusion of existing FEM data in training/validation data base, providing wider range of data base, will help improving quality of ANN modelling results. Apart from that, even on the existing experimental data base, results might be improved – by different network architecture, by different choice of data for training and validation set or by means of another ANN software. Presented forecast models (Fig. 3) are representatives of set of forecast models of ANN "*c50 – load – 2 – 10*" which provides simplicity and confident results for application in engineering practice.

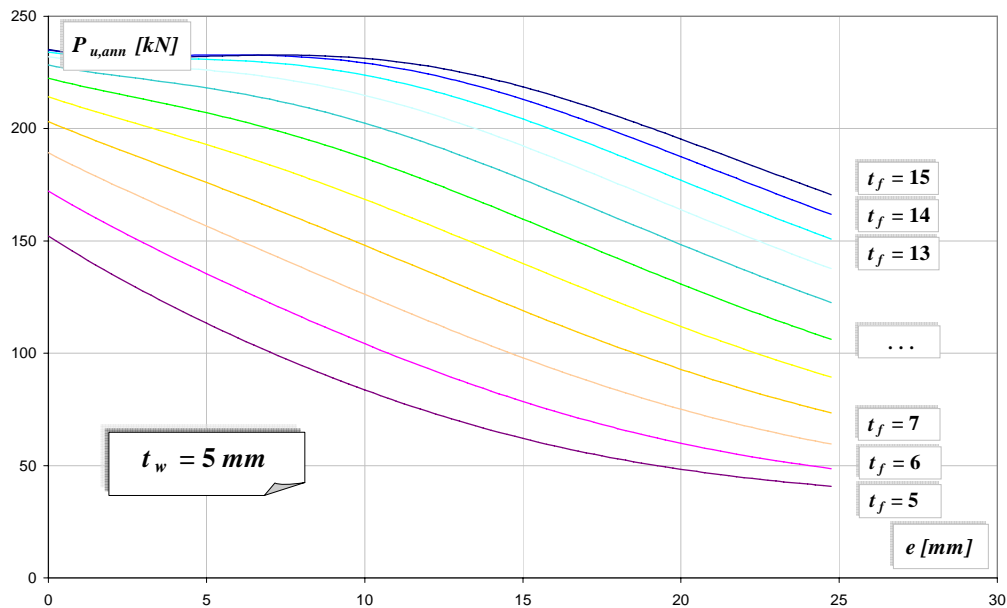


Figure 3. Estimation of collapse load  $P_{u,ann}(e)$  for  $t_w = 5 \text{ mm}$  and  $t_f = 5 \div 15 \text{ mm}$ , at  $c = 50 \text{ mm}$ ,  $\sigma_{0.2,w} = 28 \text{ kN/cm}^2$  and  $\sigma_{0.2,f} = 28 \text{ kN/cm}^2$ , by means of artificial neural network "c50 - load - 2 - 10"

#### IV. Results comparison and conclusion

Assessment of quality of two presented methods for determination of ultimate load (empirical mathematical expressions, represented by Equation (3), Paragraph II, and ANN forecast models, represented by models of network "c50 - load - 2 - 10", Paragraph III) has been done by comparing their results with the experimental results. Comparison is done for set of 120 experimental samples tested in 2001 and 2007. All tested girders have dimensions:  $b_f = 150 \text{ mm}$ ,  $a = 700 \text{ mm}$  and  $h_w = 700 \text{ mm}$ . Load length is  $c = 50 \text{ mm}$ . Variables are:  $e$ ,  $t_f$  and  $t_w$  as well as dimensionless parameters (e.g.  $e/b_f$ ,  $e/t_f$ ,  $e/t_w$ ,  $t_f/t_w$ ,  $b_f/t_f$ ,  $h_w/t_w$  etc).

Statistical indicators of methods quality are summarised in Table 1. Graphical interpretation or results dispersions, i.e. discrepancy between experimental and numerical results for both methods is shown in Fig. 4.

In both procedures, higher difference between experimental and numerical results is observed in girders with same flange and web thickness, particularly in case of small eccentricities, when experimental ultimate load highly departs from centric ultimate load. This is more emphasised in girders with thinner plates.

Furthermore, in both numerical procedures, higher discrepancy from experimental results happens in girders whose mechanical characteristics of material are not precisely determined, but assumed. The same happens in girders whose mechanical characteristics of material are determined by tensile test, but have discrepancy in comparison with average values of mechanical characteristics of material in other girders. Difference between experimental and numerical results due to mechanical characteristics of material (flange and web yielding/ultimate stresses) is more prominent in empirical expression than in ANN forecast model. The explanation is in fact that mechanical characteristics of material do not figure in empirical expression, but are considered in ANN forecast model. Hence, the empirical expression does not account with the difference in mechanical characteristics of centrically and eccentrically loaded girders, as really happened in analysed girders and as was taken into account by ANN forecast models.

It might be concluded that presented ANN forecast model has better statistical indicators, i.e. dispersion of results is lower than for presented empirical expression. However, presented ANN forecast model has narrower range of database used for its creation than presented empirical expression, i.e. empirical expression is formulated for wider domain of some input parameters ( $e/b_f$ ,  $a/t_w$ ,  $b_f/t_f$ ,  $c/a$ ,  $a/h_w$ ). It is expected to have higher dispersion of results for wider domain of creation database. Hence, ANN forecast model provides more precise results, but empirical expression provides application in wider domain of input parameters. Recommendation for engineering practice would be to combine both methods.

Generally, both methods have satisfying and acceptable, reliable and confident results, as well as simple practical application. However, it is necessary to be aware and to take care about their limits and domains of reliable application. It is also important to keep in mind that Equation (3) and ANN "c50 - load - 2 - 10" are not final solutions for  $P_u$  determination. Both methods, ANN modelling and empirical expressions, might and should be improved by future experimental and numerical work.

Table 1 - Statistical parameters as indicators of quality of numerical methods for determination of  $P_u$

parameter	empirical expression <i>Equation (3)</i>	ANN "c50 – load – 2 – 10" forecast model
$\Delta_{av}$ [ $\Delta_{av} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{n}$ , $\Delta_i = \frac{ P_{u,num} - P_{u,exp} }{P_{u,exp}}$ ]	8.49 %	6.06 % (4.77 %) <sup>(#)</sup>
$X_{av}$ [ $X_{av} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ , $X_i = \frac{P_{u,num}}{P_{u,exp}}$ ]	1.04 %	1.01 % (1.01)
$S$ [ $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{av})^2}{n}}$ ]	12.34 %	9.47 % (8.08 %)
$V$ [ $V = \frac{S}{X_{av}}$ ]	11.86 %	9.37 % (7.07 %)

(# - Values in brackets are for ANN forecast model which is used only for  $P_u$  of eccentrically loaded girders, while  $P_u$  of centrally loaded girders is considered to be equal to experimental values, the same as for empirical expression.)

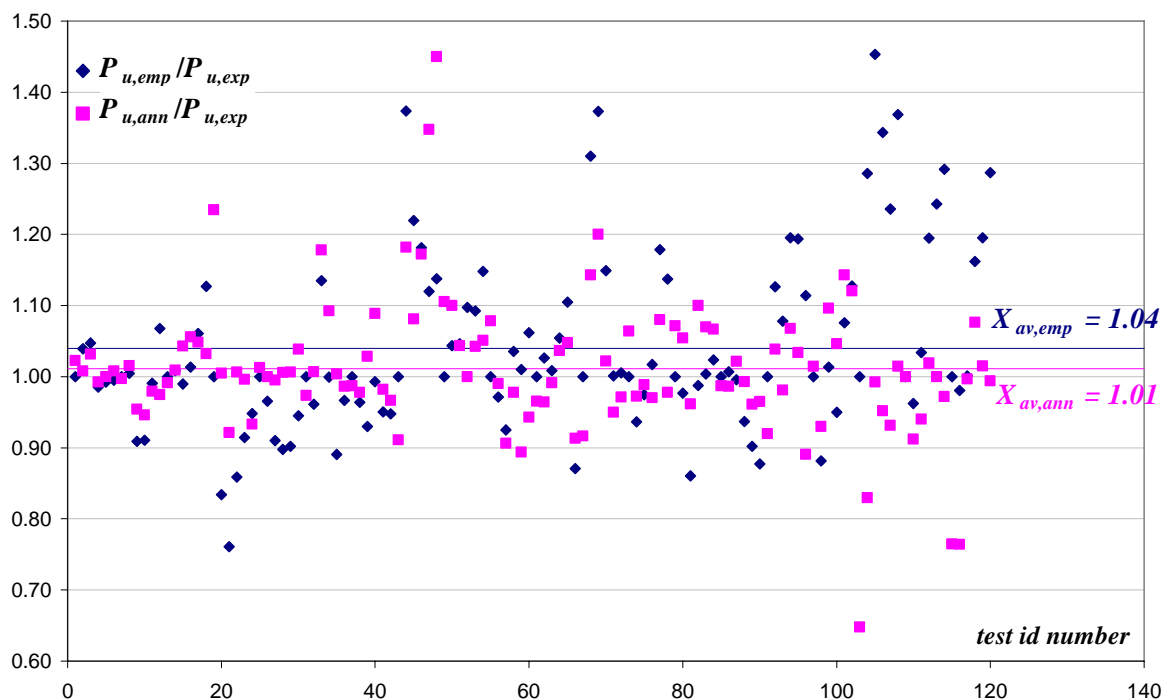


Figure 4. Ratios  $P_{u,emp}/P_{u,exp}$  and  $P_{u,ann}/P_{u,exp}$  for tested girders and their average values  $X_{av,emp}$  and  $X_{av,ann}$

### Acknowledgments

Special thanks to Coimbra Group and CGHS (Coimbra Group Hospitality Scheme) programme which enabled cooperation and join research work of scientists from the University of Montenegro and the University of Granada.

## References

- [1] Elgaaly, M.; Nunan, W.: Behavior of rolled section web under eccentric edge compressive loads. *Journal of Structural Engineering* Vol.115(7) (1989) 1561-1578.
- [2] Elgaaly, M.; Salkar, R.K.: Behavior of webs under eccentric compressive edge loads. IUTAM Symposium (1990) Prague.
- [3] Galambos, T.V.: *Guide to stability design criteria for metal structures*. New York: John Wiley & Sons, Inc. (1998).
- [4] Drdacky, M.: On two particular problems of plate girders webs under partial edge loads. *Journal of Constructional Steel Research* Vol.20(3) (1991) 183-190.
- [5] Lučić, D.: *Experimental Research: Thin-Walled I Girders Subjected to Centric and Eccentric Patch Loading*. Edition: Experimental Researches Vol.1. Podgorica: University of Montenegro, Faculty of Civil Engineering (2001).
- [6] Lučić, D.; Šćepanović, B.: Experimental Investigation on Locally Pressed I-beams Subjected to Eccentric Patch Loading. *Journal of Constructional Steel Research* Vol.60(3-5) (2004) 525-534
- [7] Šćepanović, B.: *I-girders under eccentric local loading – experimental-theoretical analysis*, Master thesis. Belgrade: University of Belgrade (2002).
- [8] Šćepanović, B.: *Analysis of eccentrically locally loaded steel I-girders*, Doctoral thesis. Podgorica: University of Montenegro and University of Granada (2009).
- [9] Šćepanović, B.; Gil Martín, L.M.; Hernández Montes, E.; Aschheim, M.; Lučić, D.: Ultimate strength of I-girders under eccentric patch loading: Derivation of a new strength reduction coefficient. *Engineering Structures* Vol.31(7) (2009) 1403-1413.
- [10] Gil Martín, L.M.; Šćepanović, B.; Hernández Montes, E.; Aschheim, M.; Lučić, D.: Eccentrically Patch Loaded Steel I-Girders: Influence of Patch Length on Ultimate Strength. *Journal of Constructional Steel Research* Vol.66(5) (2010) 716-722.
- [11] Knežević, M.: *Risk management during realisation of the civil engineering projects*, Doctoral thesis. Belgrade: University of Belgrade (2004).

## How simple can nonlinear finite element modelling be for structural concrete?

*Argirova, Galina*<sup>1</sup>  
*Fernández Ruiz, Miguel*<sup>2</sup>  
*Muttoni, Aurelio*<sup>3</sup>

*ENAC. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*  
*argirova@yahoo.com, miguel.fernandezruiz@epfl.ch, aurelio.muttoni@epfl.ch*

---

### **Abstract (Times New Roman 9 pt bold)**

This paper discusses on the required level of simplicity for suitable modelling of structural concrete members. Traditional equilibrium-based approaches (such as strut-and-tie models) may be too coarse in some cases as they account for the actual cracking state of concrete in a, sometimes, excessively simplified manner. The alternative of performing complex nonlinear numerical modelling is also not always satisfactory for design as the number of parameters required, their definition and the sensitivity of the structural response to them is complex and requires a high level of experience.

Contrary to these approaches, this paper introduces the fundamentals and some examples of the elastic plastic stress field method. This method is grounded on the theory of plasticity but allows considering deformation compatibility on the basis of some assumptions. The results are shown to be consistent both in terms of the strength and deformation field of the member. It also has the advantage of requiring only two physical material properties (modulus of elasticity and plastic strength) which can be easily identified and understood by designers.

### **Keywords (Times New Roman 9 pt bold)**

Structural concrete analysis; Non-linear finite element modelling; Shear critical beams; Support zone; Dapped-end beams.

### **I. Introduction**

Critical details of a structure are usually governing for the strength of the member. Such critical details of structures can be found most often where geometrical discontinuities occur or near the region where concentrated loads are applied. The prediction of the load-bearing capacity of such details is very important as well as of the associated failure mode, which may be potentially brittle (associated to localization of strains) or ductile (associated to smeared strains and reinforcement yielding).

The assessment of critical details of existing RC structures is generally performed on the basis of equilibrium-based models such as strut-and-tie models or rigid plastic stress-fields. These methods have proven over time to give a clear and accurate insight of force transfer and ultimate capacity of structural concrete elements. However, for complicated or unusual details they require a certain level of experience in order to suitably account for the various load-carrying actions. In addition, these methods do not consider deformation compatibility and therefore cannot accurately account for some phenomena (such as strength reduction due to transverse cracking) or predict the deformation capacity of a structure.

Other than the equilibrium-based approaches, traditionally used for hand-made calculations, is the nonlinear numerical modelling. This technique has been significantly developed in the last decades leading to advanced programs based on different theories and accounting for a large number of effects in concrete and steel. These models generally give a good prediction of deformation and strength capacities as well as of the potential load-carrying actions. However, they often require defining a large number of parameters in order to provide an accurate solution. Defining these parameters is sometimes cumbersome and the response of the program can potentially be rather sensitive to their choice. Furthermore, such analyses are associated to time-consuming analyses for pre- and post-processing of the data.

An alternative to complex numerical modelling of structural concrete was recently developed at Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. This technique is based on the analysis of elastic-plastic stress fields (EPSF). It shares the ground of equilibrium-based models but allows accounting for compatibility conditions thus allowing to suitably represent the strain state of a concrete member and to refine some of the assumptions of strut-and-tie or rigid plastic stress fields. For the analysis of the strength only two material parameters are required (modulus of elasticity and plastic strength) as well a strength reduction law accounting for transverse cracking. The method has proven to give excellent estimates of the strength and failure modes for a wide variety of structural concrete members.

The EPSF method has already been verified for several critical details such as deep beams [1], beams with openings [2], prestressed girders [3,4], corners of frames [5] and lightweight concrete structures [6]. This paper highlights the simplicity of the method and the good level of accuracy for the analysis of support zones of beams, dapped-end and shear-critical beams (Figure 1).

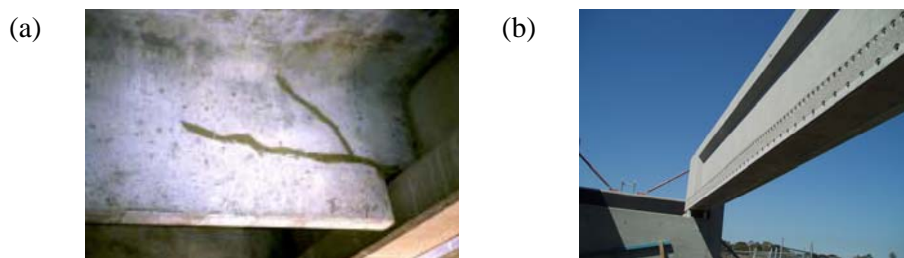


Figure 1. Critical details: (a) dapped end beams; and (b) support zones

## II. The fundamentals of the EPSF method

### II.1 Material models

The EPSF method assumes the material behaviour to be elastic-plastic [1] (with potentially strain hardening). To do so, only the plastic strength and the modulus of elasticity of the materials are required.

For the concrete, additionally, the following assumptions are performed:

- Mohr-Coulomb yield surface for plane stress with tension cut-off (consistent with rigid-plastic stress field assumptions, no tensile strength)
- Consideration of brittleness of high strength concrete through a strength reduction parameter ( $\eta_{fc}$ ):

$$f_{cp} = f_c \cdot \eta_{fc} \quad (1)$$

This parameter can be evaluated according to Muttoni [7] as:

$$\eta_{fc} = \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 1 \quad (2)$$

- Consideration of concrete strength reduction with transverse cracking ( $k_c$ , Vecchio-Collins effect [8]):

$$k_c = \frac{1}{0.8 + 170 \cdot \varepsilon_1} \leq 1 \quad (3)$$

For the steel a bilinear constitutive law, symmetrical in compression and tension, is adopted with the possibility to account for strain-hardening as shown in Figure 2c. Between reinforcement and concrete, perfect bond is assumed (nonlinear springs accounting for actual bond behaviour being an alternative) with no tension-stiffening.

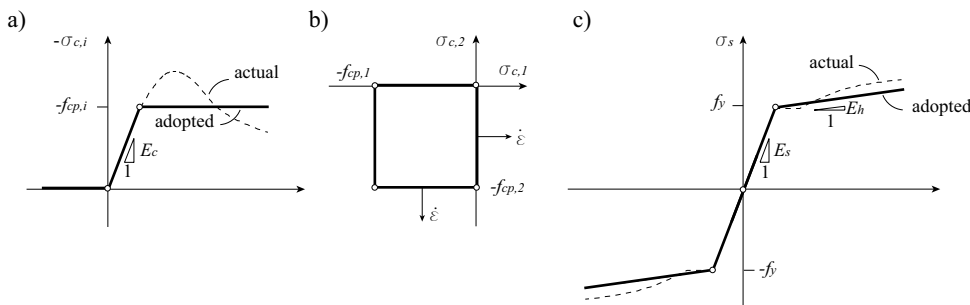


Figure 2. (a) constitutive model for the concrete; (b) Mohr-Coulomb yield surface; and (c) constitutive model for the steel

### II.2 Numerical implementation

The EPSF method can be efficiently implemented through the Finite Element Method (FEM) [1]. Concrete is modelled by means of constant strain triangle elements for which over a given displacement field the principal strains and their directions can be found. An important assumption of the method is that the direction of the principal strains and stresses are parallel (fully-rotational model). Therefore, using the bilinear material



model, described in the previous section, the principal stresses can be obtained and the nodal forces in the principal directions are determined from [1]:

$$F_{j,i} = \sigma_i \cdot \left( \frac{l_j}{2} \cos(\beta_j) - \frac{l_{j+1}}{2} \cos(\beta_{j+1}) \right) \quad (4)$$

*for  $i \in (1,2)$  and  $j \in (1,3)$*

where  $l_j$  is the side of the element and the angle  $\beta_j$  is defined in Figure 3.

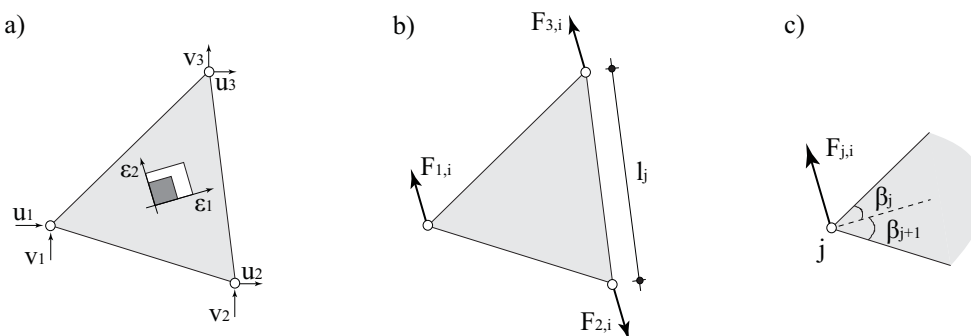


Figure 3. Constant strain triangle

The reinforcement is modelled by a two node link element with no transversal stiffness (thus neglecting dowel action). Using the bilinear material model, described in the previous section, and provided a displacement field at the nodes, the axial forces can be obtained.

By introducing a small incremental displacement at each node and direction the stiffness coefficients can be found the stiffness matrix formed. The solution is found through a full Newton-Raphson solver, providing quadratic convergence to the solution.

The Elastic Plastic Stress Field (EPSF) has been implemented into an open Java computer pro-gram that can be run standalone or as an applet of a web-page. The access for students at EPFL and practicing engineers is free (<http://i-concrete.epfl.ch>) and the source code of the program can also be downloaded and modified.

### III. Application of the EPSF Method

#### III.1 Strength prediction

In this paper the results of the analysis with EPSF method of a total of 125 specimens of which 90 reinforced concrete beams and 30 dapped end beams are included. The tests refer to references [9-23]. The results are presented in Table 1.

Table 1. Statistical analysis of the results from the analysis of specimens from literature with EPSF

All specimens	# specimens included	125
Rectangular beams	# specimens included	39
	Average	1.02
	COV, %	8.08
T-beams	# specimens included	28
	Average	1.15
	COV, %	9.35
Pretensioned beams	# specimens included	28
	Average	1.08
	COV, %	8.26
Dapped end beams	# specimens included	30
	Average	1.003
	COV, %	10.54

In the included beam specimens various parameters were investigated including the compressive concrete strength  $f_c$ , shear reinforcement ratio  $A_s/b_{w,s}$ , the shear span, type of load, amount and type of prestressing, cross section type and size. Some of the beams were tested in order to investigate the interaction between a support zone and anchorage zone. For all beams high amount of longitudinal reinforcement was provided at the span in order to avoid bending failure. The ratio of the obtained in the test to the predicted load bearing

capacity for the 95 beams included in this paper as a function of the compressive strength and amount of shear reinforcement are presented in Figure 3. In this database only beams, for which some anchorage of the longitudinal reinforcement beyond the support was provided, were included.

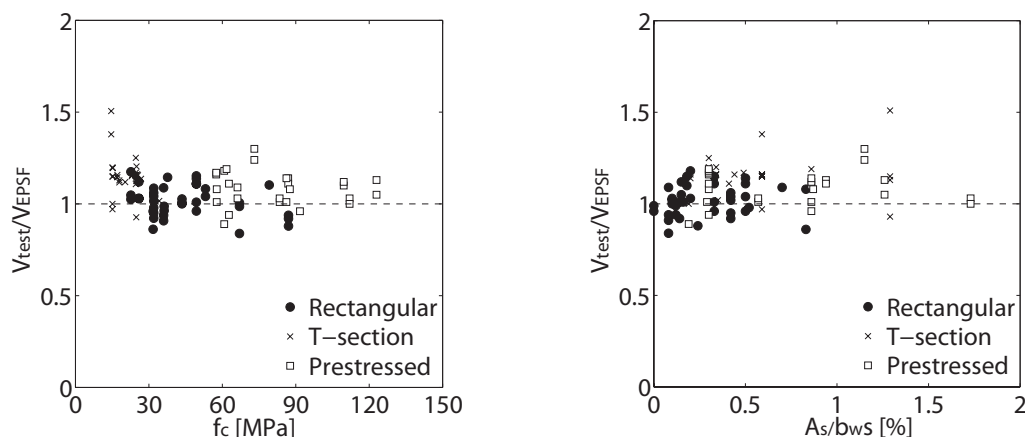


Figure 3. Results for the beams as a function of the (a) compressive strength; and (b) amount of shear reinforcement

In most test campaigns for dapped end beams the main goal of the research is to investigate a particular reinforcement detail at the corbel, focusing on the vertical and inclined hanger reinforcement at the corner and the main horizontal reinforcement at the corbel. Another point of interest for researchers is the anchorage of the longitudinal reinforcement in the full depth section, which allowed also for the validation of the EPSF method for the modelling of anchorage of reinforcement.

### III.2 Deformation capacity

In Figure 5 specimen TA6 tested by Leonhardt [9] and the solution obtained with the EPSF method are presented and compared (measured-to-predicted load ratio equal to 0.96). The specimen was subjected to a two-point load. Due to symmetry conditions, only half of it was thus analysed. During testing, the authors measured the strains at different load stages and calculated the stresses in the stirrups using the experimentally obtained curves from the material tests. Figures 5e and 5f present the comparison between the measured and calculated with the EPSF method strains and stresses in the centre of the stirrups. The authors took measurements on both side of the beam so the values plotted in the figure are the mean values of the two corresponding symmetrical measurements. By neglecting the tensile strength of the concrete, for low load levels the method overestimates the contribution of the stirrups to the shear resistance of the beam. However, as the load increases a very good agreement between measured and calculated strains and stresses can be observed. In addition, the method tends to underestimate the stiffness in the uncracked stage of the specimens. However, as the load increases the method can accurately predict the stiffness of the specimens and their deformation. The failure load is thus accurately predicted (failure developing after cracking stabilized).

### III.3 Mode of failure

An important property of a good mechanical model is that it can predict not only the ultimate load but also the failure mode of an element. For the example presented in Figure 5 the authors reported that the failure occurred due to crushing of the web and yielding of stirrups. It can be clearly seen on Figure 5b and 5c that at failure the EPSF method was able to predict the proper mode of shear failure combining yielding of the stirrups and crushing of the concrete. It can also be observed that the zone of local crushing, predicted by the method, is the same as the one observed in the test Figure 5a.

The analysis of zones with high shear forces is additionally complicated if a geometrical discontinuity is present. A good example is the dapped end beams. In the next paragraphs three common failure modes for dapped end beams and their EPSF solutions will be discussed.

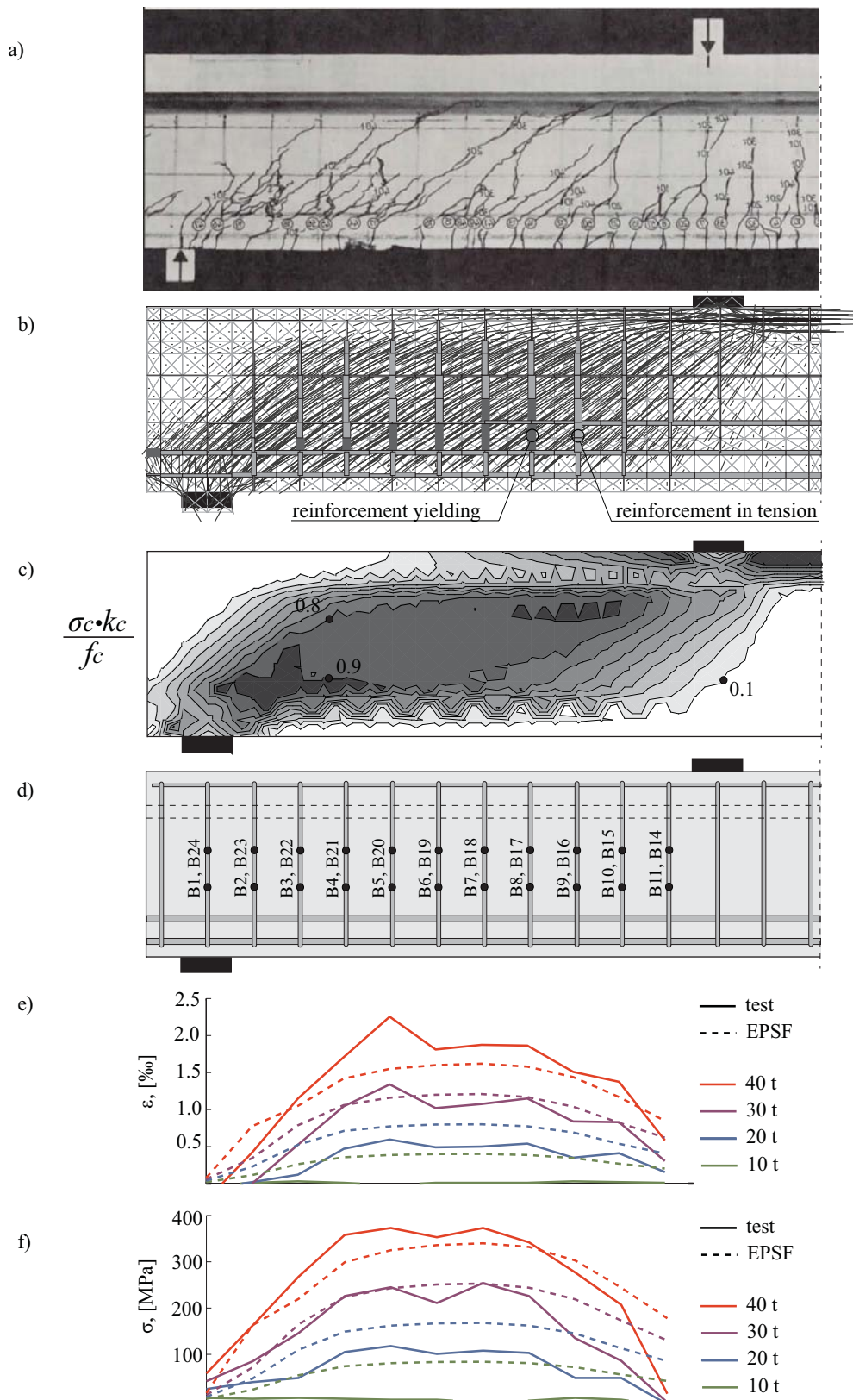


Figure 5. Beam TA6, [9] (a) failure mode; (b) EPSF solution (c) degree of use of concrete strength (d) position and name of the measurements of the stirrups (e) strains in the stirrups, (f) stresses in the stirrups

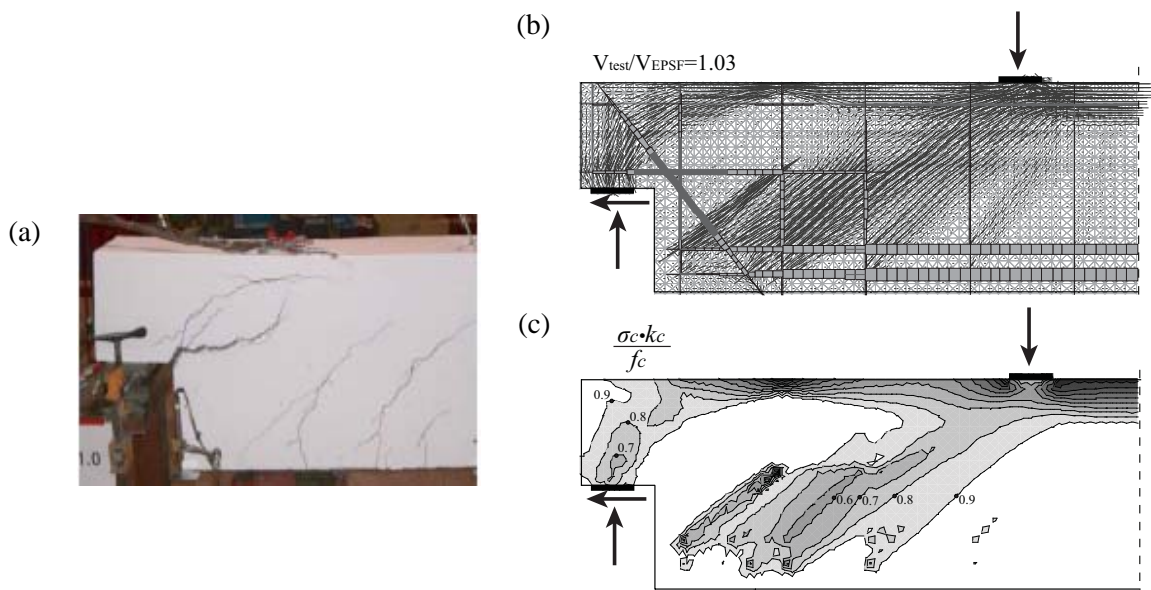


Figure 6. Failure mode with bending of the dap (a) specimen DE-D\*[18] (b) EPSF solution, and (c) degree of use of concrete strength

The first failure mode is due to bending of the recessed end Figure 6a. As it can be observed in the example no extensive cracking or crushing of the concrete occurred at failure. The reinforcement had yielded at the wide cracked propagating from the re-entrant corner. The same mode of failure can be observed in the EPSF solution– the entire reinforcement at the re-entrant is yielding (Figure 6b) and the concrete has not reached its ultimate strength at the ultimate load (Figure 6c).

The second failure mode is due to a diagonal crack propagating from the bottom of the full depth section. During the testing of specimen DB1N [23], presented in Figure 7a, diagonal cracks, related to compression stress formed at the end of the full depth section. The crack across the bottom reinforcement formed at failure and opened to 6 mm. The authors concluded that failure occurred due to combined diagonal tension and bond failure. In the EPSF model the transfer length of the bottom reinforcement, which was not anchored by welded plates, was introduced by reducing the yielding stress of the bar elements and creating a linearly increasing load carrying capacity of the bottom reinforcement. The transfer length ( $\ell_b$ ) was calculated as:

$$l_b = \frac{f_y \cdot \phi}{4 \cdot f_b} \quad (5)$$

where  $f_y$  is the yielding stress of the reinforcement,  $\phi$  is the bar diameter, and  $f_b$  is the bond stress, which was assumed to be equal to twice the tensile strength of the concrete. It can be clearly recognized in the EPSF solution that at failure the load bearing capacity of the reinforcement in the bottom node was reached and that big tensile strains were obtained close to the failure region, which reduced the coefficient  $k_c$  and caused failure of the concrete elements. This solution clearly determines the exact cause of failure and the ultimate load bearing capacity of the specimen.

The third failure mode which will be discussed in this section is due to crushing of the concrete in the compression zone as it is for the example in Figure 8a. It is clear that no extensive cracking and crushing occurred in the full depth section and sufficient longitudinal reinforcement was provided in this part of the specimen. A free-body assumed from the stress distribution in the EPSF solution was isolated and from a simple calculation it was concluded that the specimen did not fail at the corbel. From the EPSF analysis it can be observed that as the deformation of the specimen increases so does the principal tensile strains at the corbel. This causes coefficient  $k_c$  to reduce and thus the compressive strength, leading to failure. This failure mode corresponds well with the observed one from the test.

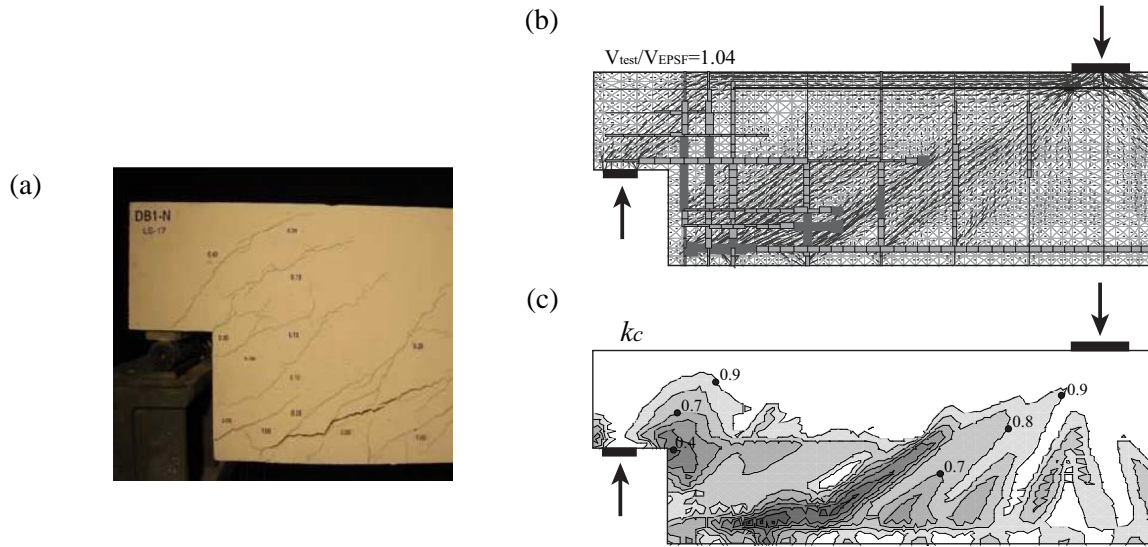


Figure 7. Failure mode with bending of the dap: (a) specimen DB1N; (b) EPSF solution; and (c) distribution of coefficient  $k_c$

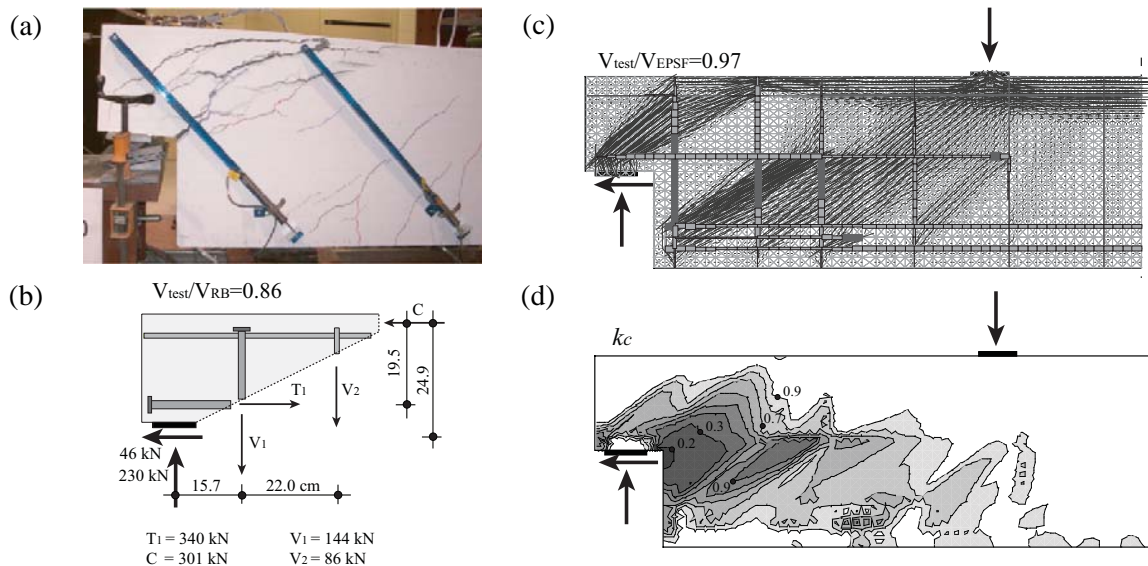


Figure 8. Failure mode in the compression zone: (a) specimen DE-B-1 [18]; (b) rigid body at the dap; (c) EPSF solution; and (d) distribution of coefficient  $k_c$

#### IV. Conclusions

This paper presents the main assumptions and implementation of the EPSF method and the results from the analysis of 125 tests from the literature. It is demonstrated by a number of examples that the method can provide a good estimate of the ultimate load bearing capacity and deformations, as well as the mode and region of failure.

Therefore it can be concluded that the good level of accuracy of the EPSF method makes it a promising tool for the analysis of existing structures for engineers and researchers. Also, its simple and physical hypotheses encourage the use of such method for educational purposes.

## References

- [1] Fernandez Ruiz M., Muttoni A., On development of suitable Stress Fields for structural concrete, ACI Structural Journal, vol.104, no.4, 2007, pp. 495-502
- [2] Muttoni A., Kostic N., Fernández Ruiz M., Discussion on Factors affecting strength of elements designed using strut-and-tie models, paper by Sergio F. Brena and Micah C. Morrison, ACI Structural Journal, 104-S36, USA, 2008, pp. 233-235
- [3] Fernandez Ruiz M., Muttoni A., Shear strength of thin-webbed post-tensioned beams ACI Structural Journal, ACI Structural Journal, V. 105, No 2, Farmington Hills, USA, 2008, pp. 163-172.
- [4] Rupf M., Fernandez Ruiz M., Muttoni A., Assessment of shear strength for existing bridges with low amounts of shear reinforcement fib Symposium Tel Aviv 2013
- [5] Campana S., Eléments en béton armé soumis à une combinaison de flexion, effort tranchant et forces de déviation, (Reinforced concrete elements subjected to bending, shear and deviation forces) PhD Thesis, Lausanne, EPFL, 2013
- [6] Kostic N., Topologie des champs des contraintes pour le dimensionnement des structures en béton armé (Typology of stress fields for the dimensioning of reinforced concrete structures) PhD Thesis, Lausanne, EPFL, 2009
- [7] Muttoni A., Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 176, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990, 158p.
- [8] Vecchio F.J., Collins M.P., The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, ACI Journal, Vol.83, No.2, 1986, pp.219-231
- [9] Leonhardt F., Walther R., Schubversuche an Plattenbalken mit unterschiedlicher Schubbewehrung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton , No 156, Berlin, 1963
- [10] Sorensen H.Ch., Shear tests on 12 reinforced concrete T-beams, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton , DTU Report No R 60, 1974
- [11] Kuchma D., Kang S.K., and Nagle, Th.J., Sun Sh., Hawkins N.M, Shear tests on high-strength prestressed bulb-tee girders : strengths and key observations, ACI Structural Journal, V.105, No. 3, USA, 2008, pp. 358-367
- [12] Kaufman M.K., Ramirez J.A., Re-evaluation of the ultimate shear behavior of high-strength concrete prestressed I-beams ACI Structural Journal, ACI Structural Journal, USA, 2008, pp. 295-303.
- [13] Yoon Y.S., Cook W.D., Mitchell D., Minimum shear reinforcement in normal, medium, and high-strength concrete beams, ACI Structural Journal, V. 93, No 5, 1996, pp 576-584
- [14] Vecchio F.J. ; Shim W., Experimental and analytical reexamination of classic concrete beam test, Journal of Structural Engineering Vol. 130, No.3, pp 460-469
- [15] Hong S.G., Kim D.J., Kim S.Y., Hong N.,K., Shear strength of reinforced concrete deep beams with end anchorage failure, ACI Structural Journal, V.99., No. 1, 2002, pp 12-22
- [16] MacLeod G., Influence of concrete strength on the behaviour of bridge pier Caps, Master Thesis, McGill University, Montreal, Quebec, Canada, 1997
- [17] Shave J.D., Shear assessment of concrete bridges: anchorage effects and use of plasticity, PhD Thesis, University of Bath, 2005
- [18] Herzinger R., and Elbadry M., Alternative reinforcing details in dapped ends of precast concrete bridge girders, Transportation Research Record 2028, 2007, pp 111-121
- [19] Nagrodzka-Godycka K., Piotrkowski P., Experimental study of dapped-end beams subjected to inclined load, ACI Structural Journal, V.109, No1, 2012, pp 11-20
- [20] Barton D.L., Anderson R.B., Bouadi A., Jirsa J.O., Breen J.E., An investigation of strut-and-tie models for dapped beam details, Texas State Department of Highways and Public Transportation, Report No. 1127-1, 1991
- [21] Werner M.P., Dilger W.H., Shear design of prestressed concrete stepped beams, PCI Journal, July-August, 1973, pp 37-49
- [22] Madar D.J., Detailing dapped ends of pretensioned concrete beams, Master Thesis, University of Texas at Austin, 1990
- [23] Peng T., Influence of detailing of response of dapped end beams, McGill University, Montreal, Canada, 2009 SURNAME1, Name1; SURNAME 2, Name2: Title, magazine, vol. XX (year), pages.

# Estado del conocimiento sobre la aplicación de aleaciones con memoria de forma superelásticas en ingeniería civil

Antoni Cladera<sup>1</sup>, Carlos Ribas<sup>1</sup>, Eva Oller<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics. University of Balearic Islands (UIB).

<sup>2</sup> Department of Construction Engineering. Technical University of Catalonia (UPC).  
antoni.cladera@uib.es<sup>1A</sup>, carlos.ribas@uib.es<sup>1B</sup>, eva.oller@upc.edu<sup>2</sup>

## Resumen

Las aleaciones con memoria de forma son materiales que tienen la habilidad de alcanzar grandes deformaciones y regresar a una forma predefinida tras su descarga o mediante su calentamiento. Estas características son muy atractivas para ser utilizadas en estructuras que respondan a los cambios del entorno. Este artículo recoge los avances en sus aplicaciones en estructuras y en su modelización.

## Palabras clave

Aleaciones con memoria de forma, superelasticidad, amortiguamiento, ductilidad, austenita.

## I. Introducción:

Las aleaciones con memoria de forma (AMF) son materiales únicos que tienen la habilidad de alcanzar grandes deformaciones y regresar a una forma predefinida tras su descarga o mediante su calentamiento [1], que puede ser inducido mediante la creación de un circuito eléctrico gracias a la ley de Joule. Estas características distintivas de las AMF hacen de ellos materiales inteligentes con el potencial de ser utilizados en estructuras que respondan y se adapten a los cambios del entorno.

El primer hallazgo de un material con memoria de forma [1] fue documentado por Chang y Read, que observaron una transformación de fase reversible en una aleación Oro-Cadmio. En 1962, Buechler et al. descubrieron el efecto de memoria de forma en una aleación de Níquel-Titanio (Nitinol), hecho que supuso el despegue de la investigación internacional en este campo y la aparición de las primeras aplicaciones reales del Nitinol. Desde entonces se han descubierto diferentes tipos de aleaciones con memoria de forma, aunque las aleaciones Ni-Ti, en algunos casos con un tercer componente, son las que poseen, hasta la fecha, mejores propiedades para las aplicaciones en ingeniería civil [2]. El inconveniente principal para la utilización de estas aleaciones en estructuras de hormigón es su coste. En los últimos años se han conseguido aleaciones con memoria de forma en base Fe [3-5], hecho que sin lugar a dudas contribuirá a disminuir el precio de estos materiales y a hacerlos mucho más competitivos [2]. Mediante la utilización de AMF en estructuras de hormigón se podrían conseguir estructuras con tendones controlados como músculos, que produjeran tensiones sólo cuando fueran necesarias, creando la posibilidad de proyectar estructuras más esbeltas y ligeras [6]. Estas estructuras tendrían además capacidad de respuesta activa frente a cargas extraordinarias y la posibilidad de autorrepararse después de sufrir deformaciones excesivas.

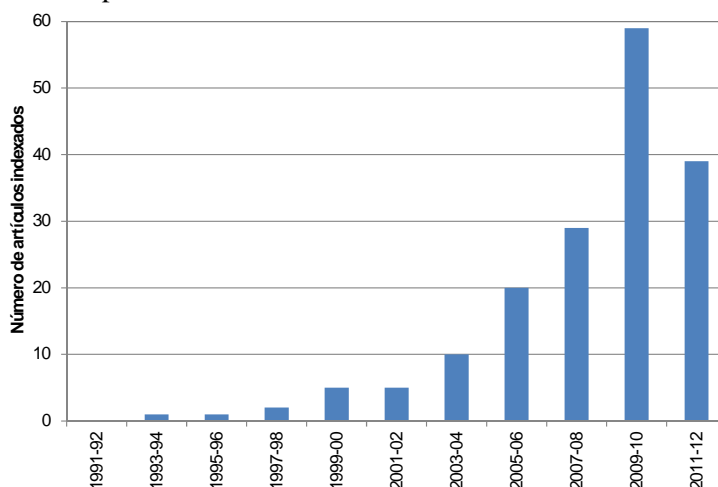


Figura 1: Número de artículos en la base de datos Scopus entre 1991 y 2012 sobre la aplicación de AMF en estructuras de hormigón.

La aplicación de aleaciones con memoria de forma en estructuras de hormigón es un campo de estudio novedoso dentro de la ingeniería estructural, pero que en los últimos años está ganando adeptos. A modo de ejemplo, en la Figura 1 se muestra el número de artículos en la base de datos Scopus entre 1990 y 2012 que combinan los términos “hormigón” y “aleación con memoria de forma”. Si bien la gráfica únicamente recoge artículos que mencionan explícitamente ambos términos en el título o el resumen, y por tanto algunos artículos dentro de este campo podrían no estar contemplados, resulta evidente el interés creciente que despiertan.

Además, la investigación de las posibles aplicaciones de AMF en hormigón estructural tiene un especial impulso en la reparación y rehabilitación de estructuras, ligada a la necesidad de mantener o incrementar la vida útil de las estructuras o, en determinados casos, preservar estructuras por criterios de conservación del patrimonio construido. El refuerzo de estructuras en servicio también resulta necesario frecuentemente para adaptar la estructura a cargas más elevadas que las normativas bajo las que fue diseñada la infraestructura, o para resistir acciones no previstas en el diseño inicial, el sismo en la mayoría de casos.

## II. Aspectos fundamentales de las aleaciones con memoria de forma:

A nivel de ingeniería estructural, las propiedades clave de las AMF son tres: la memoria de forma, la superelasticidad y la capacidad de amortiguación. Estas propiedades son el resultado de la transformación de fase reversible que experimentan las AMF, la llamada transformación martensítica [1].

La transformación martensítica es una transformación de estado sólido displaciva y no difusiva, en que los átomos se mueven cooperativamente, y normalmente va acompañada de esfuerzos de cizalla que deforman la red homogéneamente y que dan lugar a un cambio de estructura cristalina, así como al correspondiente cambio de volumen asociado. El hecho de ser una transformación displaciva y no difusiva implica que la nueva fase se constituye mediante pequeños desplazamientos coordinados de los átomos, donde los desplazamientos de los átomos vecinos son más pequeños que la distancia interatómica original. Es decir, dos átomos adyacentes continuarán siendo vecinos después de la transformación, y conservarán la composición y el orden atómico de la fase inicial. Aunque la variación de la posición relativa de los átomos es muy pequeña, el movimiento coordinado de todos los átomos da lugar a cambios de volumen y deformaciones macroscópicas importantes.

La transformación martensítica se desarrolla en un intervalo finito de temperaturas, durante el cual hay una coexistencia de las dos fases: la austenita y la martensita. La transformación martensítica, o transformación directa, se induce al enfriar la fase austenita (estable a alta temperatura), y consiste en la aparición de la fase martensita (estable a baja temperatura). La temperatura en la que comienza el proceso se conoce por  $M_s$ , mientras que  $M_f$  es la temperatura para la que finaliza la transformación. Si se está a una temperatura para la que el material está totalmente en martensita ( $T < M_f$ ), se puede inducir la transformación inversa, mediante un calentamiento del material. De forma análoga a la anterior, la formación de la austenita comenzará a una temperatura  $A_s$  y acabará a una temperatura  $A_f$ . La transformación presenta una histéresis térmica, es decir, las transformaciones directas e inversas no tienen lugar a la misma temperatura. Estas propiedades térmicas de la transformación se pueden ver en la figura 2, donde se representa, para un ciclo de enfriamiento y uno de calentamiento, el porcentaje de martensita respecto al total del material transformable.

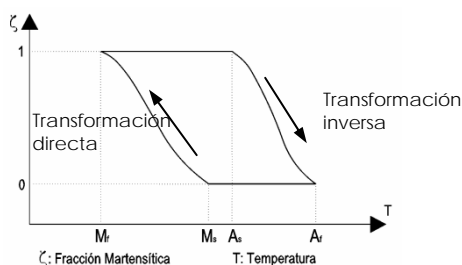


Figura 2: Transformación de fase en AMF en función de la temperatura.

Por tanto, las AMF presentan dos fases cristalinas diferentes: la austenita y la martensita. La austenita está formada, generalmente, por una fase cúbica, existiendo una única estructura posible en este caso, mientras que la martensita tiene una estructura de menor simetría que permite, por ejemplo en el caso del Nitinol, hasta 24 configuraciones diferentes. Cuando una AMF en estado martensítico se deforma sujeta a esfuerzos externos, su estructura cristalina cambia a aquella que permite acomodar la máxima elongación y, por tanto, permitiendo deformaciones permanentes. Al provocar el cambio de fase a austenita (transformación inversa), mediante la elevación de la temperatura, la AMF recupera su estructura cristalina cúbica volviendo a su forma



original si se encuentra con las deformaciones no impedidas, o generando esfuerzos de recuperación en caso contrario.

También es posible inducir la transformación martensítica mediante la aplicación de un esfuerzo externo sobre una AMF que esté en fase austenita ( $T > A_f$ ). En este caso, la transformación martensítica es la misma que la comentada anteriormente, con la diferencia principal que, induciendo la transformación mediante un esfuerzo externo, sólo aparecerán las variantes con un cambio de forma intrínseco en la dirección del esfuerzo aplicado. La recuperación total de esta deformación, al dejar de aplicar el esfuerzo, tiene lugar mediante la transformación martensítica inversa.

El diagrama tensión-deformación de una AMF será diferente en función de si el material se encuentra en fase austenita y martensita, siendo altamente dependiente de la temperatura (Figura 3).

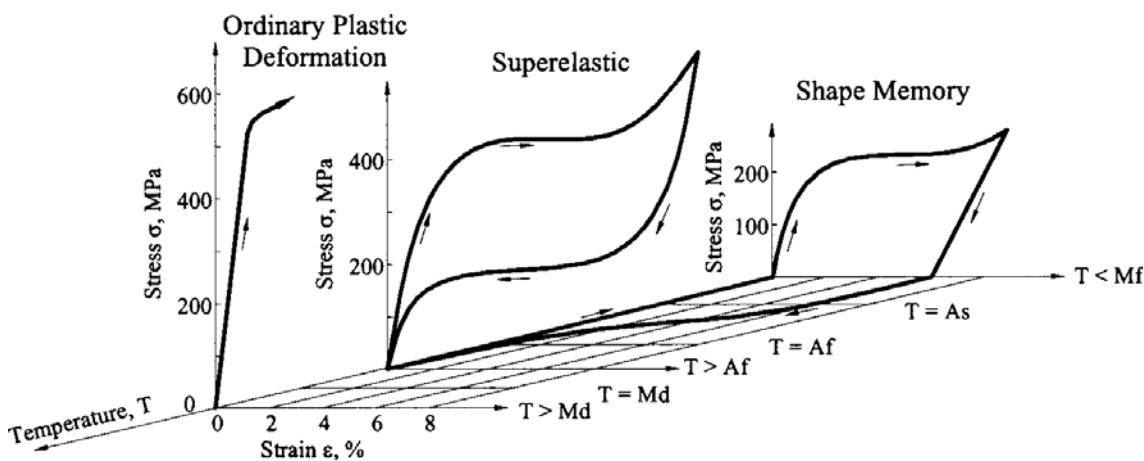


Figura 3: Diagrama típico tensión-deformación para Nitinol [7].

Si la temperatura inicial es mayor que  $A_f$ , el diagrama tensión-deformación puede presentar superelasticidad. Está formado por una fase inicial elástica, con el módulo elástico inicial de la austenita, una fase pseudoplástica muy horizontal, en la que se produce la transformación de fase de austenita a martensita por inducción mecánica, y otra fase elástica con el módulo inicial de la martensita. En cualquier punto del diagrama tensión-deformación representado en la figura 3, al descargar, el material volverá al origen del diagrama sin deformaciones permanentes y realizando un ciclo de histéresis que disipa energía. No se producen deformaciones permanentes al final del ciclo y el material es capaz de disipar energía produciendo un efecto amortiguador. Si en este último caso, la tensión se continuara incrementando después de la fase elástica de la martensita, se produciría una rama pseudo-plástica de martensita no recuperable al descargar. Para bajas temperaturas ( $T < M_f$ ), el material se encontraría en fase martensita, y tendría un diagrama distinto al comentado, como puede verse en la Figura 3, pero que no es objeto de este artículo. En este caso, calentando el material, se podría activar el efecto de memoria de forma.

### III. Aplicaciones de la superelasticidad en estructuras de hormigón

#### III.1 Amortiguadores y dispositivos de control de la respuesta sísmica

Sin lugar a dudas, el campo dentro de la ingeniería de la construcción en el que más se ha investigado los beneficios de la utilización de las AMF es el de los dispositivos amortiguadores para el control de la respuesta sísmica, ya sean aisladores [8], diagonales [9], sujeciones sísmicas estribo-tablero [10], amortiguación de vibraciones en tendones de puentes atirantados [11] u otros elementos [12]. Ozbulut et al. publicaron, en 2011, un interesante estado del conocimiento centrado en este tipo de dispositivos para estructuras de ingeniería civil [13]. Debido a la especificidad de estas aplicaciones y a la imposibilidad de comentar, en el ámbito de este artículo, las principales aportaciones, sólo se comentan a continuación algunos aspectos de importancia significativa para estas aplicaciones. Una de las primeras aplicaciones reales de AMF superelásticas para refuerzo sísmico fue la rehabilitación de la Basílica de San Francisco de Asís [14].

Las aleaciones en base cobre son de gran interés para estas aplicaciones ya que tienen propiedades superelásticas a un coste menor que aleaciones NiTi. En especial, las aleaciones CuAlBe han sido estudiadas con detalle [15-19] y presentan, según varios autores, mejores propiedades frente a cargas cíclicas y fluencia. A modo de ejemplo, Torra et al. [11] recomendaban el uso de CuAlBe para aplicaciones de amortiguación en ingeniería civil contra los efectos de los terremotos, en los que son necesarios años o décadas de inactividad y

1 o 2 minutos de oscilaciones con frecuencias de alrededor de 1 Hz. Por el contrario, los mismos autores consideraban más apropiadas las aleaciones NiTi para la amortiguación de los tirantes en puentes atirantados en los que se pueden dar cerca de 100.000 oscilaciones de pequeña intensidad por día con solamente pausas de horas o tal vez días. De hecho, para aleaciones Ni-Ti no se ha detectado variaciones en la energía disipada en relación a la frecuencia [20].

### **III.2 Uniones**

Las uniones son elementos claves para el correcto comportamiento de las estructuras ante un sismo [21]. Por este motivo, se han diseñado uniones, especialmente para estructuras metálicas, que se benefician del efecto amortiguador de las aleaciones superelásticas y su capacidad de recentrado, es decir, su capacidad de sufrir grandes deformaciones que se anulan en el momento que desaparece el esfuerzo.

Qian et al. [22] propuso el diseño de una unión viga-columna entre elementos prefabricados de hormigón mediante AMF superelásticas en 2009, aunque no llegó a materializar las uniones y ensayó únicamente las aleaciones, confirmando el comportamiento conocido de éstas.

En 2010, Roh y Reinhorn [23] presentaron los resultados de un ensayo sobre un prototipo de pilar de puente construido por dovelas prefabricadas, en el que la conexión entre la zapata y la primera dovela se llevaba a cabo utilizando barras de AMF superelásticas no adherentes. La unión dúctil permitía evitar el daño de los componentes frente a cargas cíclicas horizontales, y proveía una significativa capacidad de recentrado. Los autores también presentaron una nueva alternativa para el modelado de AMF superelásticas.

Speicher et al. [24] construyeron y ensayaron conexiones interiores viga-columna en estructura metálica incorporando Ni-Ti superelástico, demostrando también que este tipo de uniones pueden tener una excelente ductilidad, capacidad de disipación de energía y de recentrado. Las uniones eran capaces de volver a su forma original para derivas de hasta un 1%, y tenían capacidad de recentrado, recuperando el 85% de su deformación, después de ciclos de hasta el 5% de deriva. Las conexiones con Ni-Ti presentaron una amortiguación viscosa equivalente de entre 6% y 13%, aumentando al aumentar los niveles de deriva de 0.375% a 5%. Otras propuestas y ensayos de uniones en estructuras metálicas pueden encontrarse en [25,26]. Cabe destacar que en contra de lo que sucede en elementos de unión de AMF en fase martensita (sección 5.4), el diámetro de las barras utilizadas en fase austenita no influye en la capacidad de recentrado [7]. Esta propiedad también es de gran interés para dispositivos de control de la respuesta sísmica.

### **III.3 Barras de refuerzo en estructuras de hormigón**

En 2003, Sakai et al. [27] presentaron los resultados de una campaña experimental en el que elementos de mortero de cemento eran armados con una AMF superelástica (Ti-Ni) para estudiar su capacidad de recuperación de deformaciones excesivas causadas por un terremoto. Llevaron a cabo ensayos estáticos, demostrando que la superelasticidad permitía la recuperación de grandes flechas, reduciendo las deformaciones residuales a 1/10 de las deformaciones máximas. Sin embargo, también constataron el problema de adherencia entre los alambres de Ti-Ni y el mortero, ya que únicamente se formó una fisura en el centro de la luz.

Saiidi et al. [28] llevaron a cabo un estudio piloto del comportamiento bajo cargas cíclicas de vigas de hormigón reforzadas con AMF superelásticas. Los resultados experimentales mostraron que las flechas residuales medias de las vigas reforzadas con NiTi eran menores a una quinta parte que la de los elementos reforzados con acero. Sin embargo, el bajo módulo elástico de la aleación utilizada producía una disminución de la rigidez significativa de los elementos de hormigón armado, lo que podría ser deseable para algunas aplicaciones, como para la resistencia al sismo, pero indeseable para otras. Por este motivo, complementaron su investigación con un estudio analítico de elementos híbridos, reforzados con acero de alta resistencia o CFRP y AMF, demostrando que en este caso era posible contar con una mayor rigidez y una recuperación parcial de las deformaciones. Posteriormente, Elbahi et al. [29] modelizaron estas vigas y determinaron los parámetros del bloque de compresiones del hormigón para tener en cuenta el uso de AMF a flexión.

De forma paralela a los estudios de vigas destacados en los párrafos anteriores, también se han desarrollado campañas experimentales de pilares reforzados con AMF en fase austenita. En 2006 y 2009, Saiidi et al. [30,31] estudiaron la posibilidad de la utilización de Ni-Ti superelástica en la zona de arranque de pilares, para crear una rótula plástica, tanto para hormigón convencional como para su uso combinado con nuevos materiales cementantes más dúctiles (hormigón flexible). Demostraron que las deformaciones residuales de los pilares con la rótula plástica de AMF, tras la simulación del efecto de un sismo, eran un 83% menores que en el caso de acero convencional al utilizar hormigón flexible, y en el caso de hormigón convencional, un 67% menores. Además, el daño en la estructura que combinaba AMF y hormigón flexible era mucho menor que en

los otros pilares, por lo que la estructura podría permanecer más fácilmente en servicio tras un terremoto que las estructuras convencionales.

#### IV. Modelización numérica de la superelasticidad

Existe un gran número de modelos y éstos fueron en muchos casos previos al uso de las AMF en estructuras de hormigón. Los modelos numéricos se han desarrollado con enfoques microscópicos, mesoscópicos, o macroscópicos. Los modelos microscópicos y mesoscópicos utilizan la mecánica del medio continuo para relacionar tensión y deformación [13]. Un interesante estado del conocimiento sobre los diferentes enfoques se puede encontrar en [14].

Los modelos de mayor interés para incluir las AMF en programas de elementos finitos para cálculo de estructuras son los macroscópicos unidimensionales, ya que los elementos utilizados son alambres, barras o láminas 1D. Estos modelos intentan capturar la respuesta de las AMF a nivel macroscópico, utilizando la fenomenología. Algunos de estos modelos se basan en principios termodinámicos, mientras que otros han sido desarrollados fijando constantes del material para ajustar datos experimentales [13].

El comportamiento superelástico de las AMF ya ha sido incorporado en varios programas de elementos finitos [32], como el ANSYS 10.0, ABAQUS 6.4 y Seismoestruct utilizando las ecuaciones constitutivas propuestas en [33-35]. La Figura 4 muestra el modelo de superelasticidad unidimensional incorporado en ANSYS 10.0 [33]. Los parámetros utilizados para la definición del modelo son: tensión inicial de transformación de austenita a martensita,  $f_y$ ; tensión final de transformación de austenita a martensita,  $f_{P1}$ ; tensión inicial de transformación de martensita a austenita,  $f_{T1}$ ; tensión final de transformación de martensita a austenita,  $f_{T2}$ ; longitud de la meseta superelástica o tensión máxima residual,  $\epsilon_1$ ; módulos de elasticidad de las fases martensita y austenita,  $E_a$  y  $E_s$ .

También a nivel de comportamiento superelástico, Motahari y Ghassemieh [36] han desarrollado un reciente modelo basado en la energía libre de Gibbs y la fracción de volumen de martensita transformada bajo tensión. Algunos autores se han centrado en mejorar los modelos frente a cargas cíclicas [37].

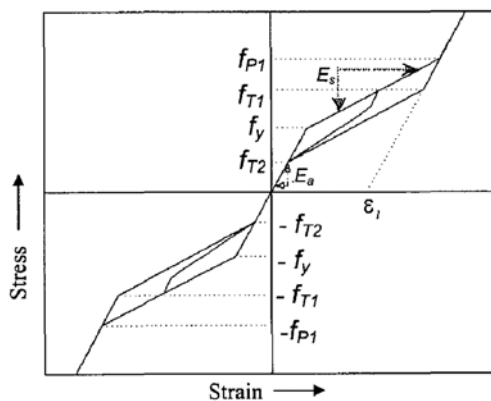


Figura 4: Modelo de superelasticidad unidimensional propuesto por [32].

#### Agradecimientos

Esta investigación se ha desarrollado en el marco del proyecto BIA2012-31432 (Ministerio de Economía y Competitividad de España).

#### Bibliografía (Times New Roman 11 pt Negrita):

- [1]Otsuka, K., Wayman, C. M. *Shape Memory Materials*. Cambridge University Press, United Kingdom, 1998.pp.284, .
- [2]Janke, L., Czaderski, C., Motavalli, M., Ruth, J.: Applications of shape memory alloys in civil engineering structures - Overview, limits and new ideas. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, Vol. 38 nº 279 (2005), pp. 578-592.

- [3] Dong, Z., Klotz, U. E., Leinenbach, C., Bergamini, A., Czaderski, C., Motavalli, M.: A novel Fe-Mn-Si shape memory alloy with improved shape recovery properties by VC precipitation. *Advanced Engineering Materials*, Vol. 11 n° 1-2 (2009), pp. 40-44.
- [4] Tanaka, Y., Himuro, Y., Kainuma, R., Sutou, Y., Omori, T., Ishida, K.: Ferrous polycrystalline shape-memory alloy showing huge superelasticity. *Science*, Vol. 327 n° 5972 (2010), pp. 1488-1490.
- [5] Leinenbach, C., Kramer, H., Bernhard, C., Eifler, D.: Thermo-mechanical properties of an Fe-Mn-Si-Cr-Ni-VC shape memory alloy with low transformation temperature. *Advanced Engineering Materials*, Vol. 14 n° 1-2 (2012), pp. 62-67.
- [6] Czaderski, C., Hahnebach, B., Motavalli, M.: RC beam with variable stiffness and strength. *Construction and Building Materials*, Vol. 20 n° 9 (2006), pp. 824-833.
- [7] Desroches, R., McCormick, J., Delemont, M.: Cyclic properties of superelastic shape memory alloy wires and bars. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 130 n° 1 (2004), pp. 38-46.
- [8] Dolce, M., Cardone, D., Ponzo, F. C.: Shaking-table tests on reinforced concrete frames with different isolation systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 36 n° 5 (2007), pp. 573-596.
- [9] Torra, V., Isalgue, A., Auguet, C., Carreras, G., Casciati, F., Lovey, F. C., et al *SMA in mitigation of extreme loads in civil engineering: Study of their application in a realistic steel portico*. pp.278-283, 2011.
- [10] DesRoches, R., Delemont, M.: Seismic retrofit of simply supported bridges using shape memory alloys. *Engineering Structures*, Vol. 24 n° 3 (2002), pp. 325-332.
- [11] Torra, V., Isalgue, A., Auguet, C., Carreras, G., Lovey, F. C., Soul, H., et al: Damping in civil engineering using SMA. the fatigue behavior and stability of CuAlBe and NiTi alloys. *Journal of Materials Engineering and Performance*, Vol. 18 n° 5-6 (2009), pp. 738-745.
- [12] Johnson, R., Padgett, J. E., Maragakis, M. E., Desroches, R., Saiidi, M. S.: Large scale testing of nitinol shape memory alloy devices for retrofitting of bridges. *Smart Materials and Structures*, Vol. 17 n° 3 (2008), .
- [13] Ozbulut, O. E., Hurlbaas, S., Desroches, R.: Seismic response control using shape memory alloys: A review. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 22 n° 14 (2011), pp. 1531-1549.
- [14] Auricchio, F., Faravelli, L., Magonette, G., Torra, V. *Shape Memory Alloys: Advances in Modelling and Applications*. CIMNE, Barcelona, 2001.
- [15] Torra, V., Isalgue, A., Martorell, F., Terriault, P., Lovey, F. C.: Built in dampers for family homes via SMA: An ANSYS computation scheme based on mesoscopic and microscopic experimental analyses. *Engineering Structures*, Vol. 29 n° 8 (2007), pp. 1889-1902.
- [16] Beltran, J. F., Cruz, C., Herrera, R., Moroni, O.: Shape memory alloy CuAlBe strands subjected to cyclic axial loads. *Engineering Structures*, Vol. 33 n° 10 (2011), pp. 2910-2918.
- [17] Casciati, F., Faravelli, L.: A passive control device with SMA components: From the prototype to the model. *Structural Control and Health Monitoring*, Vol. 16 n° 7-8 (2009), pp. 751-765.
- [18] Casciati, S., Marzi, A.: Fatigue tests on SMA bars in span control. *Engineering Structures*, Vol. 33 n° 4 (2011), pp. 1232-1239.

- [19]Isalgue, A., Auguet, C., Carreras, G., Torra, V.: SMA (Cu-Based, NiTi) for use in damping: The implications of reliability for long time applications and aging behavior. *Functional Materials Letters*, Vol. 5 n° 1 (2012), .
- [20]Branco, M., Guerreiro, L., Mahesh, K. K., Braz Fernandes, F. M.: Effect of load cycling on the phase transformations in Ni-Ti wires for civil engineering applications. *Construction and Building Materials*, Vol. 36 (2012), pp. 508-519.
- [21]Song, G., Ma, N., Li, H. N.: Applications of shape memory alloys in civil structures. *Engineering Structures*, Vol. 28 n° 9 (2006), pp. 1266-1274.
- [22]Qian, H., Li, H. N., Song, G. B., Huai, C.: "Cyclic behavior of superelastic shape memory alloy wire for innovative precast concrete frame connections". *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, Vol. 7288 (2009), doi: 10.1117/12.817560.
- [23]Roh, H., Reinhorn, A. M.: Hysteretic behavior of precast segmental bridge piers with superelastic shape memory alloy bars. *Engineering Structures*, Vol. 32 n° 10 (2010), pp. 3394-3403.
- [24]Speicher, M. S., DesRoches, R., Leon, R. T.: Experimental results of a NiTi shape memory alloy (SMA)-based recentering beam-column connection. *Engineering Structures*, Vol. 33 n° 9 (2011), pp. 2448-2457.
- [25]Tamai, H., Kitagawa, Y.: Pseudoelastic behavior of shape memory alloy wire and its application to seismic resistance member for building. *Computational Materials Science*, Vol. 25 n° 1-2 (2002), pp. 218-227.
- [26]Penar, B. W. *Recentering beam-column connections using shape memory alloys*. Georgia Institute of Technology, 2005. <http://hdl.handle.net/1853/7185>.
- [27]Sakai, Y., Kitagawa, Y., Fukuta, T., Iiba, M.: "Experimental study on enhancement of self-restoration of concrete beams using SMA wire". *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, Vol. 5057 (2003), pp. 178-186. doi: 10.1117/12.482680.
- [28]Saiidi, M. S., Sadrossadat-Zadeh, M., Ayoub, C., Itani, A.: Pilot study of behavior of concrete beams reinforced with shape memory alloys. *Journal of Materials in Civil Engineering*, Vol. 19 n° 6 (2007), pp. 454-461.
- [29]Elbahy, Y. I., Youssef, M. A., Nehdi, M.: Stress block parameters for concrete flexural members reinforced with superelastic shape memory alloys. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, Vol. 42 n° 10 (2009), pp. 1335-1351.
- [30]Saiidi, M. S., Wang, H.: Exploratory study of seismic response of concrete columns with shape memory alloys reinforcement. *ACI Structural Journal*, Vol. 103 n° 3 (2006), pp. 436-443.
- [31]Saiidi, M. S., O'Brien, M., Sadrossadat-Zadeh, M.: Cyclic response of concrete bridge columns using superelastic nitinol and bendable concrete. *ACI Structural Journal*, Vol. 106 n° 1 (2009), pp. 69-77.
- [32]Alam, M. S., Nehdi, M., Youssef, M. A.: Shape memory alloy-based smart RC bridges: Overview of state-of-the-art. *Smart Structures and Systems*, Vol. 4 n° 3 (2008), pp. 367-389.
- [33]Auricchio, F., Lubliner, J.: A uniaxial model for shape-memory alloys. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34 n° 27 (1997), pp. 3601-3618.
- [34]Auricchio, F., Taylor, R. L.: "Shape memory alloy superelastic behavior: 3D finite-element simulations". *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, Vol. 2779 (1996), pp. 487-492.

- [35] Auricchio, F., Sacco, E.: A superelastic shape-memory-alloy beam model. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 8 n° 6 (1997), pp. 489-501.
- [36] Motahari, S. A., Ghassemieh, M.: Multilinear one-dimensional shape memory material model for use in structural engineering applications. *Engineering Structures*, Vol. 29 n° 6 (2007), pp. 904-913.
- [37] Branco, M. M., Kelly, J. M., Guerreiro, L. M.: An algorithm to simulate the one-dimensional superelastic cyclic behavior of NiTi strings, for civil engineering applications. *Engineering Structures*, Vol. 33 n° 12 (2011), pp. 3737-3747.

# Dynamic analysis response in structural systems, accuracy and efficiency

De Miguel, A<sup>1</sup>. Marques M<sup>1</sup>. Calçada, R<sup>1</sup>., De la Fuente, P<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Department of Civil Engineering. University of Porto.

Rua Dr. Roberto Frias, s/n, 4200-465 Porto (Portugal). E-mail: alejandro@fe.up.pt; mariom@fe.up.pt;

<sup>2</sup> Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid. Calle Profesor Aranguren s/n, 28040 Madrid (España)

---

## Abstract

The pros and cons (especially associated to both major accuracy and time of analysis) of time-dependent methods had been widely discussed over the years, being also recognized the importance of considering alternative and approximate methodologies to evaluate the structural response (displacements, shear efforts, flexure efforts...). Therefore, it is assessed the accuracy of the frequency domain method to the time domain method, through the analysis of SDOF responses. It has been detected that this accuracy is more remarkable if:

- i) The truncate period, for the impulsive load and the response to a unit impulse function, is larger enough.
- ii) A corrective response method is used. In this case, it is applied the well known corrective transient response based on initial conditions.

## Keywords

Dynamic analysis, Frequency domain, Discrete systems, Fourier transform, Corrective response.

## I. Introduction

Dynamic analysis of a certain number of structures has reached a lot of importance recently, due to a great amount of different factors. On one hand the need for designing ductile structures, due to economic and seismic performance reasons, recalls that there is associated an increase of its natural period of vibration, and so to more flexible structures. On the other hand, nowadays, special structures such as bridges need to be prepared to withstand high speed traffic and the correspondent dynamic forces. Therefore, traditional static methods have been revealed insufficient approaches to analyse the aforementioned aspects, and consequently dynamic analyses gain a special importance on the assessment and design of structures.

With this perspective, many procedures have been developed and many others have been improved in order to be applied for real dynamic engineering problems.

One of these procedures is referred to dynamic analysis in the frequency domain, whose applicability in the analysis of linear systems was more patent since the development by Cooley and Tukey [4] of the Fast Fourier Transform algorithm, in 1965.

## II. Structural analysis in frequency domain

When established the equilibrium equation, according to a number of degrees of freedom of a discrete system, second order equations of motion are obtained with the correspondent initial conditions:

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = \{p(t)\} \quad (1)$$

Response of a linear system can be obtained through time domain or frequency domain.

In time domain, the response can be computed using either the modal superposition method or direct integration methods, in which the main idea is to approximate an initial value problem by numerical schemes.

The response in frequency domain is obtained following a different procedure to solve the problem, based on Fourier transform, in its two versions, direct and inverse. It should be noted that frequency-domain method analysis applies only to linear systems for which the principle of superposition holds.

In most practical cases, Fourier transform is used in its discrete version by replacing integrals for equivalent numerical calculations of areas.

Since the irruption of the fast Fourier transform algorithm, in 1965, dynamic analysis in frequency domain has changed notably. The number of operations is lower and consequently the time analysis is highly reduced.

Furthermore, the evaluation of response in frequency domain is considered an effective method in the analysis of structural systems with non-proportional damping and systems with frequency dependent parameters.

Also frequency domain analysis is connected with experimental analysis of structures. Through this method some parameters of the system, such as eigenfrequencies, vibration modes and damping ratios, can be obtained.

Bellow, two methodologies to obtain the response in the frequency domain will be briefly explained. The first one corresponds to the frequency domain method, herein named as 'fd' (*from frequency domain*), in which the response is considered as approximate because of the intrinsic features of the Fast Fourier Transform algorithm.

The second one, named as 'cfd' (*from corrective frequency domain*), corresponds to a corrective frequency domain method. It will be considered, due to the accuracy reached, as a quasi-exact method.

The response computed using equation (1) gives the real behaviour of the system, herein named as 'td' (*from time domain*), thus it is considered in this study as the 'exact' method.

### II.1 Response according to 'fd' method:

It is necessary to apply the Fast Fourier algorithm to the impulsive load  $p(t)$  and to periodic impulse response function  $\bar{h}(t)$ . The latter, is given by the physical parameters of the structural system as:

$$\bar{h}(t) = \frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_d} \left\{ \frac{\sin \omega_d t - e^{-\xi\omega T_0} \sin \omega_d (t - T_0)}{1 - 2e^{-\xi\omega T_0} \cos \omega_d T_0 + e^{-2\xi\omega T_0}} \right\} \quad (2)$$

Where:

$\xi$ : damping ratio

$\omega$ : undamped natural frequency in rad/s

$\omega_d$ : damped natural frequency in rad/s

$T_0$ : period of applied load

$m$ : mass of the system

It will be used the  $\bar{h}(t)$  function instead of the unitary impulse response function,  $h(t)$ , to minimize the undesirable effect of overlapping or aliasing. That is, according to [12] using  $h(t)$  would provide a less accurate response than using  $\bar{h}(t)$ .

Once the Fast Fourier transform is applied to the previous functions, the response is defined in the frequency domain, where:

$$\begin{aligned} p(t) &\Rightarrow P(\Omega) \\ \bar{h}(t) &\Rightarrow \bar{H}(\Omega) \end{aligned} \quad (3)$$



The product of  $P(\Omega)$  to  $\bar{H}(\Omega)$  gives the response in frequency domain,  $\bar{U}(\Omega)$ . To get back values in time domain, inverse Fourier transform will be applied, getting  $\bar{u}(t)$ . This latter function, is the approximate response obtained by 'fd' method, in which the accuracy increases with the increase of  $T_0$ .

## II.2 Response according to the 'cfd' method:

This approach intends to correct the major pitfalls of the previous method. It is based on the application of corrective functions that are superposed with the approximate response, given by the previous method,  $\bar{u}(t)$ . These corrective functions fit, at an initial time, the initial conditions of velocity and displacement to a theoretical zero value. Thus, it is assumed zero values of velocity and displacement for  $t=0$ . The number of corrective functions is considered as two for each analysed degree-of-freedom, to correct the initial displacement and the initial velocity.

Therefore, the idea is to express the corrective response function  $u(t)$ , like an addition of the commented approximate response,  $\bar{u}(t)$ , and the corrective responses based on initial conditions:

$$\bar{u}(t) = u(t) + C_d(t) + C_s(t) \quad (4)$$

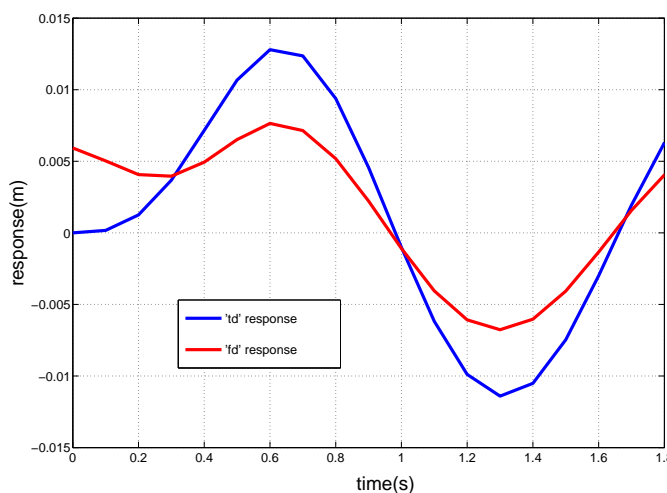


Figure 1. 'td' vs 'fd' responses to an impulsive load.  $T_0=1.8$

As it can be clearly seen in Figure 1, initial conditions for 'fd' response does not adjust to the theoretical initial zero value for displacement and velocity. To obtain the corrective response, with improve initial conditions,  $C_d(t)$  and  $C_s(t)$  must be bear in mind.

The corrective expressions,  $C_d(t)$  and  $C_s(t)$ , are expressed as:

$$\begin{aligned} C_d(t) &= \Delta u(0)r(t) \\ C_s(t) &= \Delta \dot{u}(0)s(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Where  $r(t)$  is the response due to a unit displacement change, and  $s(t)$  is the response due to a unit velocity change.

Applying a corrective response to the 'fd' method, one obtains the following behaviour:

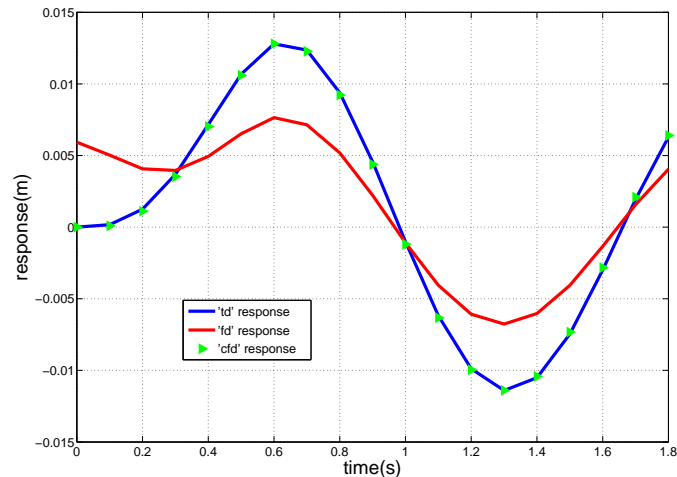


Figure 2. 'td', 'fd' and 'cfd' to an impulsive load.  $T_0=1.8$

### III. Description of the sensitivity study

The present work addresses the aforementioned time and frequency dependent methods for the evaluation of the response of structures, performing a parametric study on critical parameters so as to assess the validity of the approaches under common conditions. Thus, a set of single-degree-of-freedom (SDOF) structures will be used, representing the real core-section geometry and material characteristics, coming out with trends on the accuracy of each approach according to changes on damping (given by ' $\zeta$ ' ratio), stiffness (given by sections of the columns, 'A') and cut-off time for the response (given by the period of the applied load,  $T_0$ )

The herein applied simplified frequency-dependent method has captured a very close behaviour of the structure in analysis to the time-dependent method, over the wide change of studied conditions.

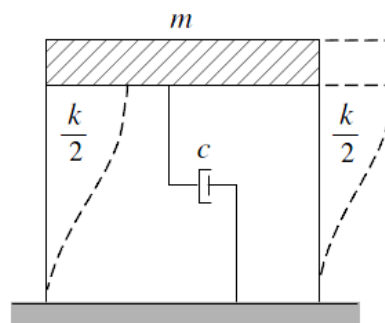


Figure 3. Analyze structure of the sensitive study.

The exact response of a dynamic system is governed in time domain, by the well-known differential equation of motion (1).

As it was said before, the response computed using equation (1) gives the real behaviour of the system, herein named as 'td', thus it is considered in this study as the 'exact' method.

The general scheme of the single-degree-of-freedom system is constituted by a one storey frame building, with a slab of 0.40m thickness, supported by two square section columns, see Figure 3.

The system is subjected to an impulsive and sinusoidal dynamic load  $p(t) = 1000 \sin\left(\frac{2\pi}{1.2}t\right)(N)$ . The total duration for this load is of 0.6 seconds.

First of all, different real core-sections with different damped values will be analysed with the purpose of finding out the time in which the response of the system reaches its maximum value. This will be one of the more important items, because for assessment and design purposes it seems more logical and efficient to obtain the structural response around this maximum value.

Next table shows, for the 'td' method, the values of time,  $T_{\max}$ , (in seconds), in which maximum response to the impulsive load  $p(t)$  is attained, of each analysis previously mentioned, for different values of stiffness and damping ratios.

Table 1. Values of time,  $T_{\max}$  in which maximum response is obtained, following 'td' method.

$T_{\max}$	$\xi = 1\%$	$\xi = 2\%$	$\xi = 3\%$	$\xi = 4\%$
$A=0.3m \times 0.3m$	1.23	1.23	1.23	1.23
$A=0.4m \times 0.4m$	0.83	0.83	0.83	0.83
$A=0.5m \times 0.5m$	0.64	0.64	0.64	0.64

As it can be seen, for every case of analysis, maximum response takes place in the free vibration phase, after the impulsive load has acted.

Analysing the previous results the following conclusions are extracted:

- Value of  $T_{\max}$  keeps constant for each stiffness value being independent on damping coefficient
- The more stiffer the structure is, the lower the value of  $T_{\max}$
- In this analysis, the highest value of time in which the maximum response is reached is of 1.23s. Because of that, time analysis will be limited to a maximum of 2 seconds.

In order to quantify the accuracy of the response of the system obtained from the mentioned methods, an error index,  $\Delta$ , has been applied, defined by equation (6).

$$\Delta = \frac{\sum |\delta_b - \delta_a|}{\sum |\delta_a|} \quad (6)$$

Where  $\delta_a$  is the displacement response captured by the 'td' method, over all the time steps, and  $\delta_b$  is the displacement obtained using either the 'fd' or the 'cfd' methods, over all the time steps.

In this work it is assumed that acceptable values of response may be those that provide an error index  $\Delta \leq 5\%$ . This parameter, together with the evaluation of the response cut-off time, will give us an idea of the efficiency of the method.

In the next table are shown the cut-off time (in seconds) values obtained with the 'fd' method, accepting an error of 5%.

Table 2. Values of cut-off time to achieve an error index of 5%, following 'fd' method.

Section	$\xi = 1\%$	$\xi = 2\%$	$\xi = 3\%$	$\xi = 4\%$
$A=0.3m \times 0.3m$	173.81	90.15	59.95	44.90
$A=0.4m \times 0.4m$	97.75	50.80	33.85	25.42
$A=0.5m \times 0.5m$	61.35	31.68	21.81	16.45

Previous values were obtained for a constant time step of  $dt=0.05s$ .

Watching the previous results, it is clear that cut-off time, for an error of 5%, reduces as damping value increases. In a same way, this cut-off time reduces as stiffness increases, these findings can also be depicted in Figure 4. Additionally, one may conclude also that the cut-off time decreases for higher values of damping ratio, trending to a fixed value regardless to any considered cross sections.

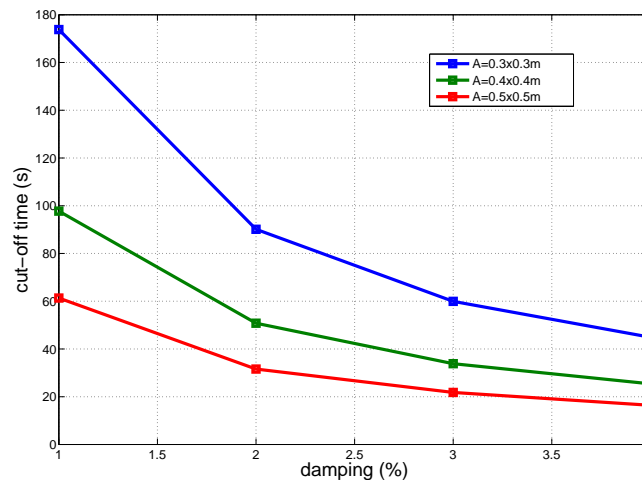


Figure 4. Cut-off time evolution in relation to stiffness and damping values

As it was said before, for analysis of impulsive load in this kind of structures, it seems reasonable to establish a time analysis interval of no more than 2 seconds. The previous cut-off values are too far from the desired 2 seconds and because of this 'fd' method without the use of a corrective function could be considered an inefficient method.

It was proved, that for all of the previous cases, 'cfd' is the most efficient method, from the point of view of computational time. Besides, the displacement response of the system was obtained with an error lower than 0.5% to the exact solution, while for the other methods this error was of about 5%.

Comparing 'cfd' with 'fd', was observed that 'cfd' method provide the useful feature of cutting-off just in the interval of time in which the maximum response of the system is reached, in terms of displacements.

#### IV. Efficiency of the ‘cfd’ method

In this section the comparison between ‘cfd’ and ‘td’ is extended, adding an approximate time domain response method. This approach consists in the well-known Newmark-beta method, commonly used to solve differential equations, and applied in many engineering problems.

Following, a brief explanation of the Newmark-beta method is made:

The expression that gives the value of required displacements,  $\underline{u}_F^C$  is:

$$\underline{\bar{K}}_{FF} \underline{u}_F^C = \underline{\bar{F}}_F^C \quad (7)$$

With:

$$\underline{\bar{K}}_{FF} = A_0 \underline{M}_{FF} + A_1 \underline{C}_{FF} + \underline{K}_{FF}$$

and

$$\underline{\bar{F}}_F^C = \underline{F}_F^C + \underline{M}_{FF} [A_0 \underline{u}_F^p + A_2 \dot{\underline{u}}_F^p + A_3 \ddot{\underline{u}}_F^p] + \underline{C}_{FF} [A_1 \underline{u}_F^p + A_4 \dot{\underline{u}}_F^p + A_5 \ddot{\underline{u}}_F^p]$$

$$\underline{u}_F^C = \frac{\underline{\bar{F}}_F^C}{\underline{\bar{K}}_{FF}} \text{ according to expression (6)}$$

It is assumed that, at the beginning, initial conditions for displacement, velocity and acceleration are equal to zero.

Next, the corresponding values for acceleration and velocity are given, respectively, by:

$$\ddot{\underline{u}}_F^C = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^C - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^p - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_F^p - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \quad (8)$$

and

$$\dot{\underline{u}}_F^C = \dot{\underline{u}}_F^p + (1 - \gamma) \ddot{\underline{u}}_F^p \Delta t + \gamma \ddot{\underline{u}}_F^C \Delta t \quad (9)$$

Index C (current) is referred to the  $(t + \Delta t)$  step, while index p (previous) is referred to  $(t)$  step.

With:

$$A_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad A_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \quad A_2 = \frac{1}{\beta \Delta t} \quad A_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 \quad A_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1 \quad A_5 = \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right)$$

$\beta$  and  $\gamma$  are parameters which are able to control the precision and the numerical stability of the method. In this case it is considered that  $\beta = \frac{1}{4}$  and  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

The accuracy of the method depends on the value taken for  $\Delta t$ , the lower value for  $\Delta t$ , the higher accuracy of the response.

The computational efficiency of the three methods ('td', 'cfd' and Newmark-beta) is therefore compared, guaranteeing also a maximum error of 5% in every procedures.

The same single degree of freedom system, subjected to an impulsive load is analysed for a reinforced concrete square section of 0.5mx0.5m. Here, cut-off times (in seconds) for a damping value of ' $\zeta$ '=1% are presented. It is important to remark, at this point, that although not presented here, very similar values were obtained for the former pairs of damping and stiffness values considered in the previous section.

Table 3. Values of time consumption for the response of the SDOF to an impulsive load, following 'td', 'cfd' and Newmark-beta methods

<i>Cut-off time</i>	<i>'td' method</i>	<i>'cfd' method</i>	<i>Newmark-beta</i>
1	0.261	0.001	0.021
2	0.269	0.001	0.035
5	0.272	0.004	0.047
10	0.291	0.009	0.051
20	0.322	0.023	0.072
100	0.654	0.255	0.423
200	1.187	0.851	1.157
300	1.865	1.752	2.201
400	3.955	5.501	5.806

Previous results can be better analysed through the following picture:

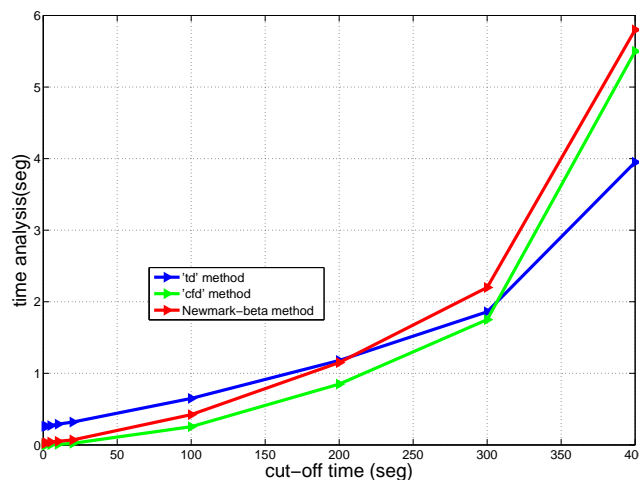


Figure 5. Time analysis depending on cut-off time. 'td' method, 'cfd' method and Newmark-beta method

As it can be seen, for this particular case of study, ‘cfd’ method presents computational advantages, in relation to ‘td’ and Newmark-beta methods, until a certain value of cut-off time equal to  $\approx 300s$ . A value of time too high in comparison to the interval of time of two seconds, previously mentioned.

Thus, from the latter results concerning the use of the corrective version of the frequency domain method, one may conclude that its application is equally valid for the general dynamic loads as well, apart from impulsive ones.

Bearing also in mind the previous results, it can be concluded that ‘cfd’ method is not only a very accurate method to obtain dynamic response of single-degree of freedom systems subjected to impulsive loads, but an efficient method, in terms of time analysis, as well.

## V. Conclusions

This study is presented as an alternative frequency domain method to analyse the dynamic response of linear systems, being revealed their multiple advantages and possible applications.

Through the analysis of the results of this work it has been demonstrated that frequency-domain method is a reliable technique to assess the response of single-degree-of-freedom structures subjected to impulsive dynamic loads.

Due to the fact that in most of structural projects, considerations of analysis are mainly linear, frequency domain method presents as an optional and efficient technique to obtain response of structural systems subjected to general dynamic excitations.

In conclusion two important features of ‘cfd’ method can be extracted from this work:

- Efficacy: Because it has reached similar accuracy (considerably lower than a 5% of error in all of cases) on the response results for any cut-off time interval
- Efficiency: Since time analysis with ‘cfd’ is lower, for a certain range of time, than those reached with other methods in time domain (exact and Newmark-beta)

Apart from the previous analysis, the frequency domain analysis methodology can also be very useful in the particular analysis of systems with multiple degrees-of-freedom, like the one that is depicted below

As in time domain, the information regarding the response in terms of displacements,  $u_1(t)$  for a certain excitation  $p_1(t)$ , does not allow to obtain the response  $u_2(t)$ , for the excitation  $p_2(t)$ . In frequency domain one can do this, using the following relation:

$$\frac{U_1(\Omega)}{P_1(\Omega)} = \frac{U_2(\Omega)}{P_2(\Omega)} = \dots = \frac{U_n(\Omega)}{P_n(\Omega)} = H(\Omega) \quad (10)$$

Previous expression presents multiple advantages in terms of computational efficiency, since determining the  $H(\Omega)$  elements implies only a linear analysis for each degree of freedom.

Nevertheless, the most important application of frequency domain methods is to analyze systems with frequency –dependent parameters, where the direct integration of the equations in time domain is not possible. Therefore the frequency-domain analysis is the only technique available to solve the dynamic problem. In fact this is not an uncommon situation in dynamic structural engineering, and can be found for instance in the analysis of soil-structure interaction and fluid-structure interaction problems.

### References:

- [1] Avitabile,P. Experimental modal analysis, a simple non-mathematical presentation, University of Massachusetts, Lowell.
- [2] Marques, Mário. Avaliação probabilística de segurança sísmica de edifícios. Tese de Doutoramento Faculdade de Engenharia ,(2011). Universidade de Porto.
- [3] Neves,S. Análise Dinâmica com interacção veículo-estrutura em vias de alta velocidade. Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia( 2008) Universidade de Porto.

### Papers:

- [4] Cooley,J.W., and Tukey,J.K., An algorithm for the machine Calculation of Complex Fourier Series Mathematics of Computation,19,1965,pp.297-301
- [5] De Miguel A., de la Fuente P. Análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia. Ist International congress on mechanical models in structural engineering, Granada (Spain), December 16, 2011.
- [6] Meek, J.W. and Veletsos, A.S. Dynamic analysis by extra fast Fourier transform. Journal of Engineering Mechanics Division Vol.98: 367-384 (1972).
- [7] Veletsos, A.S., and Ventura, C.E., Dynamic Analysis of Structures by the DFT Method, Journal of Structural Engineering, ASCE, 111,1985,pp.2625-2642.

### Books:

- [8] Allemang, R.J., and Brown, D.L., “Modal analysis and Testing,” Chapter 21 in Shock and Vibration Handbook, Fourth Edition (Edited by Ciril M.Harris,1996), MacGraw-Hill, New York.
- [9] Barbat, A.H. y Canet, J.M. Estructuras sometidas a acciones sísmicas. Calculo por ordenador. 2<sup>a</sup> edición (1994).Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona.
- [10] Chopra,A.K.. Dynamics of structures, Upper Saddle River, New Jersey,2001.
- [11] Clough,R.W., and Penzien,J.Dynamics of Structures, MacGraw-Hill, New York,1975.
- [12] Humar,J.L. Dynamics of Structures. Prentice\_Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.
- [13] Paz, Mario. Structural dynamics: theory and computation. Kluwer Academic Pub, 1997.



# Análisis estructural del arco de medio punto. Aplicación al arco del acueducto de la Alhambra.

Javier Suárez Medina & Juan José Granados Romera

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica. Universidad de Granada.  
{jjsuarez, jjgr}@ugr.es

## Resumen

Se expone el análisis estructural mediante aplicación de métodos elásticos del arco semicircular parametrizado sometido a la acción de su propio peso, considerando distintas hipótesis de apoyo (arco biempotrado, arco biapoyado, arco apoyado y empotrado), y la formación de rótulas plásticas en los puntos de excentricidad máxima (arco con rótula en clave, con dos rótulas en senos, y triarticulado).

Se aplican los resultados obtenidos al análisis estructural del arco del acueducto de la Alhambra, presentando su modelización geométrica mediante ortofotografía.

Se contrastan los resultados obtenidos mediante aplicación de métodos elásticos, con los resultados obtenidos mediante aplicación de metodologías gráficas basadas en los teoremas del análisis límite desarrollado por el profesor J. Heyman.

## Palabras clave

Alhambra, arco, semicircular, arco de medio punto, acueducto, dovela, excentricidad, estática gráfica, análisis límite.

## I. Objeto

Se ha realizado el estudio según la teoría elástica lineal de la resistencia de materiales, del arco de medio punto sometido la acción de su peso propio y con distintas condiciones de contorno, considerando la posibilidad de la presencia de rótulas, con el objeto de poder comparar dichos resultados con los obtenidos mediante la aplicación de metodologías gráficas basadas en los teoremas del análisis límite desarrollados por el profesor J. Heyman, en el arco del *acueducto de la acequia real de la Alhambra de Granada* [1] y [2].

## II. El arco de medio punto según la teoría elástica lineal de resistencia de materiales.

Se expone el análisis de distintas situaciones del arco de medio punto, a partir de la teoría lineal de la resistencia de materiales, que implica suponer una distribución lineal de las tensiones en cada sección.

Se ha considerado el arco como pieza curva de gran radio de curvatura, acorde con la geometría real de los arcos presentes en la ingeniería civil, entre ellos el arco del acueducto de la Alhambra, cuya modelización geométrica se presenta en [1] y [2].

Se ha considerado la formación de rótulas por agotamiento de la resistencia a tracción del material en los puntos de máxima excentricidad, sin realizar una modelización específica de las juntas de mortero. Las características mecánicas del material de la piedra empleada en el arco del acueducto de la Alhambra se pueden consultar en [3], [1] y [2].

En los arcos hiperestáticos se ha empleado el método de la compatibilidad, calculando los movimientos mediante las fórmulas de Bresse [4]. En los arcos isostáticos el equilibrio es suficiente para calcular los esfuerzos.

Fórmulas de Bresse en piezas curvas con gran radio de curvatura:

$$\theta_B = \theta_A + \int_C k \cdot ds$$

$$\delta_{HB} = \delta_{HA} \pm \theta_A \cdot r_A \pm \int_C k \cdot r \cdot ds \pm \int_C \epsilon \cdot \cos(\gamma) \cdot ds$$

$$\delta_{VB} = \delta_{VA} \pm \theta_A \cdot r_A \pm \int_C k \cdot r \cdot ds \pm \int_C \epsilon \cdot \cos(\gamma) \cdot ds$$

Siendo:

$$k = \frac{M}{EI} \quad \epsilon = \frac{N}{EA} - \frac{M}{EA \cdot R}$$

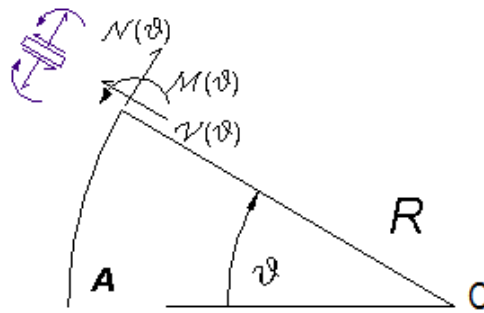


Figura 1. Criterio de signos de los esfuerzos.

## II.1 Arco de medio punto biempotrado

Se presenta la solución de los esfuerzos del arco semicircular biempotrado sometido a su peso propio (Fig. 2).

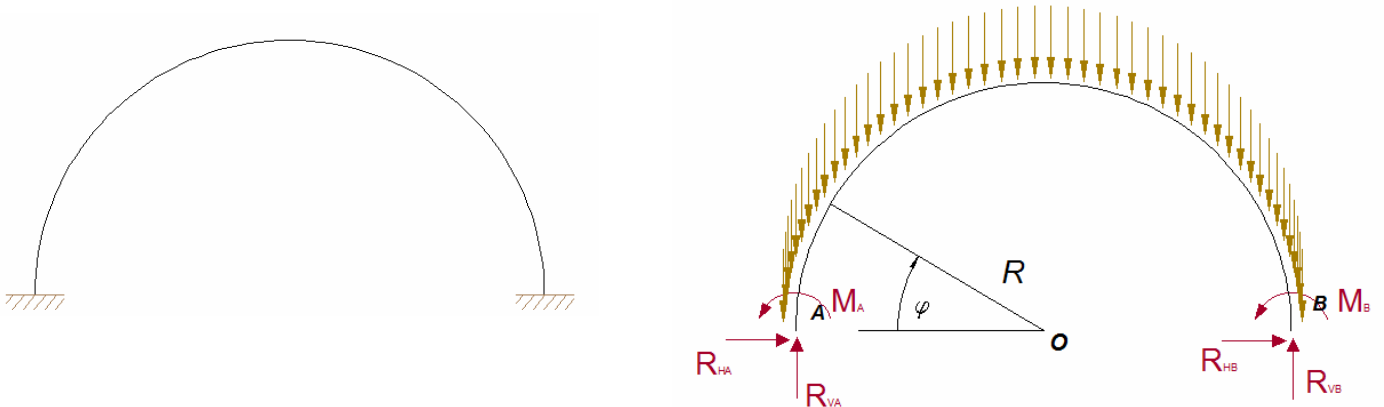


Figura 2. Esquema de cálculo del arco biempotrado, peso propio y reacciones en apoyos.

Leyes de esfuerzos obtenidas, siendo  $\phi$  el cuadrado del radio de giro:

$$N(\theta) = \frac{pR}{2} \cdot \left( (2\theta - \pi) \cdot \cos(\theta) + \frac{(32 - 2\pi^2)\phi + (3\pi^2 - 32)R^2}{8\phi + (\pi^2 - 8)R^2} \cdot \sin(\theta) \right)$$

$$V(\theta) = \frac{pR}{2} \cdot \left( (2\theta - \pi) \cdot \sin(\theta) - \frac{(32 - 2\pi^2)\phi + (3\pi^2 - 32)R^2}{8\phi + (\pi^2 - 8)R^2} \cdot \cos(\theta) \right)$$

$$M(\theta) = \frac{pR^2}{2} \cdot \left( (2\theta - \pi) \cos(\theta) + \frac{4\pi\phi + 2\pi R^2 + [2\phi(8 - \pi^2) + R^2(\pi^2 - 16)] \sin(\theta)}{8\phi + (\pi^2 - 8)R^2} \right)$$

Excentricidad como cociente entre el momento flector y el axil:

$$e(\theta) = R \cdot \frac{(8\phi + (\pi^2 - 8)R^2)(2\theta - \pi) \cos(\theta) + 4\pi\phi + 2\pi R^2 + [2\phi(8 - \pi^2) + R^2(\pi^2 - 16)] \sin(\theta)}{(8\phi + (\pi^2 - 8)R^2)(2\theta - \pi) \cdot \cos(\theta) + [(32 - 2\pi^2)\phi + (3\pi^2 - 32)R^2] \cdot \sin(\theta)}$$

La excentricidad depende del radio R (linealmente) y del parámetro adimensional  $\phi/R^2$ , que se puede despreciar para las dimensiones reales. Los valores máximos de la excentricidad, resultan independientes del valor de la carga y el radio, obteniéndose para los siguientes valores de  $\theta$ , simétricos respecto al eje vertical del arco:

$$\theta_1 \approx 0,62366 = 35,73^\circ; \quad \theta_2 = \pi/2 = 90^\circ; \quad \theta_3 \approx \pi - 0,62366 = 180^\circ - 35,73^\circ;$$

Como se ve en la aplicación al arco del acueducto de la Alhambra, el valor mayor de la excentricidad se produce para  $\theta = \pi/2$ .

## II.2 Arco biempotrado con rótula en la clave.

En este apartado se presenta la solución de los esfuerzos del arco semicircular biempotrado sometido a su peso propio, supuesta la presencia de una rótula en la clave (Fig. 3).

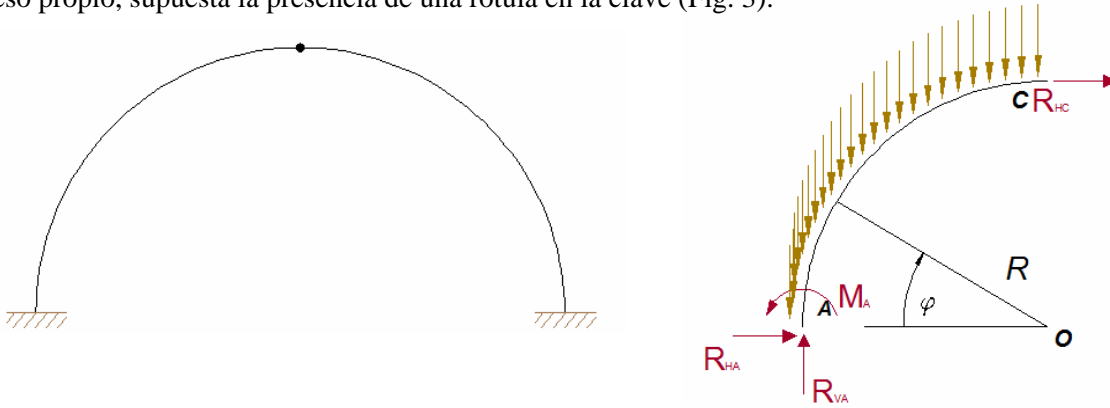


Figura 3. Esquema de cálculo del arco biempotrado con rótula en la clave, peso propio y reacciones en apoyos considerando simetría.

Leyes de esfuerzos, siendo  $\phi$  el cuadrado del radio de giro:

$$\mathcal{N}(\theta) = \frac{pR}{2} \cdot \left( (2\theta - \pi) \cdot \cos(\theta) + \frac{(8 - 2\pi)\phi + (7\pi - 24)R^2}{4\phi + (3\pi - 8)R^2} \cdot \sin(\theta) \right)$$

$$\mathcal{V}(\theta) = \frac{pR}{2} \cdot \left( (2\theta - \pi) \cdot \sin(\theta) - \frac{(8 - 2\pi)\phi + (7\pi - 24)R^2}{4\phi + (3\pi - 8)R^2} \cdot \cos(\theta) \right)$$

$$\mathcal{M}(\theta) = \frac{pR^2}{2} \cdot \left( (2\theta - \pi) \cos(\theta) - \frac{(2\pi\phi - (\pi - 8)R^2) (\sin(\theta) - 1)}{4\phi + (3\pi - 8)R^2} \right)$$

Excentricidad como cociente entre el momento flector y el axil:

$$e(\theta) = R \frac{(4\phi + (3\pi - 8)R^2) (2\theta - \pi) \cos(\theta) - (2\pi\phi - (\pi - 8)R^2) (\sin(\theta) - 1)}{(4\phi + (3\pi - 8)R^2) (2\theta - \pi) \cos(\theta) + [(8 - 2\pi)\phi + (7\pi - 24)R^2] \sin(\theta)}$$

La excentricidad depende linealmente de R y del parámetro adimensional  $\phi/R^2$ .

## II.3 Arco biempotrado con dos rótulas en los puntos laterales de máxima excentricidad.

En este apartado se presenta la solución de los esfuerzos del arco semicircular biempotrado sometido a su peso propio y situando sendas rótulas en los puntos laterales de máxima excentricidad, calculados en el apartado II.1 (Fig. 4).

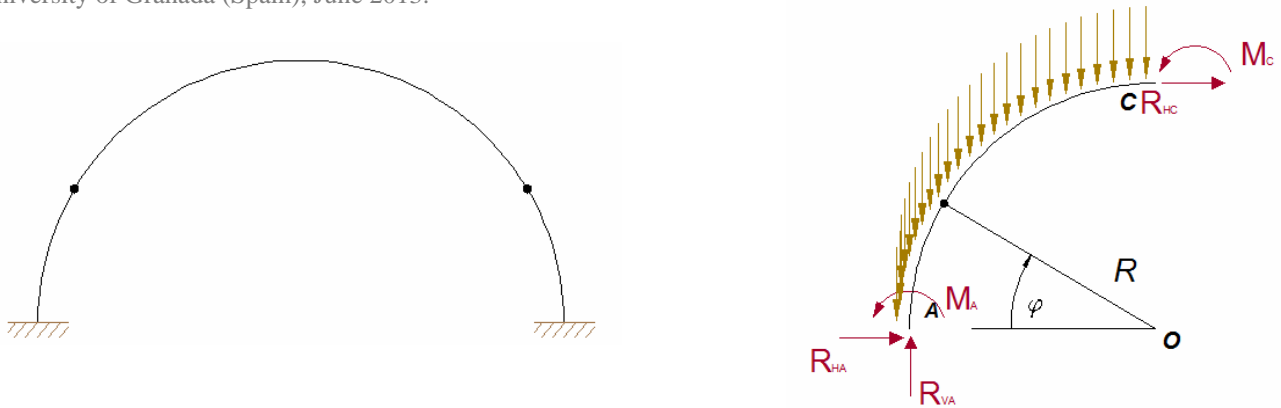


Figura 4. Esquema simplificado de cálculo del arco biempotrado con dos rótulas, peso propio y reacciones en apoyos, considerando simetría.

Leyes de esfuerzos, siendo  $\phi$  el cuadrado del radio de giro:

$$\mathcal{N}(\theta) = pR \left( \left( \frac{0,9554\phi}{0,1531R^2 + 0,5840\phi} - 0,6643 \right) \sin(\theta) + (\theta - 1,5708) \cos(\theta) \right)$$

$$\mathcal{V}(\theta) = pR \left( \left( -\frac{0,9554\phi}{0,1531R^2 + 0,5840\phi} + 0,6643 \right) \cos(\theta) + (\theta - 1,5708) \sin(\theta) \right)$$

$$\mathcal{M}(\theta) = pR^2 \left( (\theta - 1,5708) \cos(\theta) + \frac{0,2666R^2 + 0,4587\phi - (0,2548R^2 + 0,0166\phi) \sin(\theta)}{0,1531R^2 + 0,5840\phi} \right)$$

Excentricidad como cociente entre el momento flector y el axil:

$$\epsilon(\theta) = R \frac{\cos(\theta) \left( R^2(0,1531\theta - 0,2405) + \phi(0,5840\theta - 0,9174) \right) + 0,2666R^2 + 0,4587\phi - \sin(\theta) \left( 0,2548R^2 + 0,0166\phi \right)}{\cos(\theta) \left( R^2(0,1531\theta - 0,2405) + \phi(0,5840\theta - 0,9174) \right) + \sin(\theta) \left( 0,5674\phi - 0,1017R^2 \right)}$$

La excentricidad depende linealmente de R y del parámetro adimensional  $\phi R^2$ .

#### II.4 Arco biempotrado con tres rótulas en los puntos de máxima excentricidad.

En este apartado se presenta la solución de los esfuerzos del arco semicircular biempotrado sometido a su peso propio y supuestas tres rótulas en los puntos de máxima excentricidad, o sea, en la clave y en los laterales (según apartado II.1). Nótese que se trata de un caso isostático (Fig. 5).

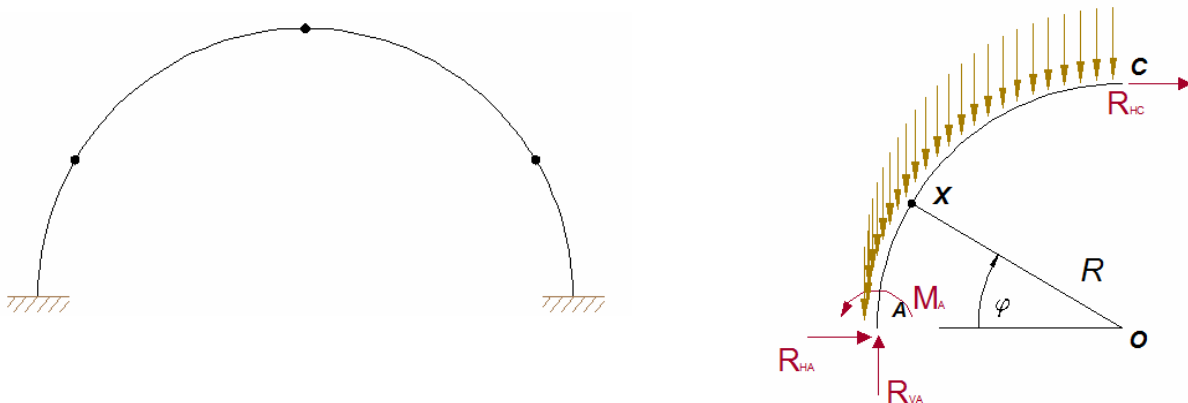


Figura 5. Esquema simplificado de cálculo del arco biempotrado con tres rótulas, peso propio y reacciones en apoyos considerando simetría.

Leyes de esfuerzos, al ser isostático no aparece  $\phi$  (el cuadrado del radio de giro):

$$\mathcal{N}(\theta) = pR ((\theta - 1,5708) \cos(\theta) - 0,8482 \sin(\theta))$$

$$\mathcal{V}(\theta) = pR ((\theta - 1,5708) \sin(\theta) + 0,8482 \cos(\theta))$$

$$\mathcal{M}(\theta) = pR^2 ((\theta - 1,5708) \cos(\theta) + 1,8482 (1 - \sin(\theta)))$$

Excentricidad como cociente entre el momento flector y el axil:

$$e(\theta) = R \frac{(\theta - 1,5708) \cos(\theta) + 1,8482 (1 - \sin(\theta))}{(\theta - 1,5708) \cos(\theta) - 0,8482 \sin(\theta)}$$

La excentricidad depende linealmente de R.

## II.5 Arco de medio punto biapoyado

Aunque lo normal es considerar el arco de medio punto biempotrado, ya que queremos hacer un esquema de cálculo de un arco de medio punto de una construcción histórica (y es precisamente en la base del arco donde la presencia de los estribos le da mayor seguridad), se presentan tres casos en los que se ha supuesto que no hay empotramiento en la base.

En este apartado se presenta la solución de los esfuerzos del arco semicircular biapoyado sometido a su peso propio (Fig. 6).

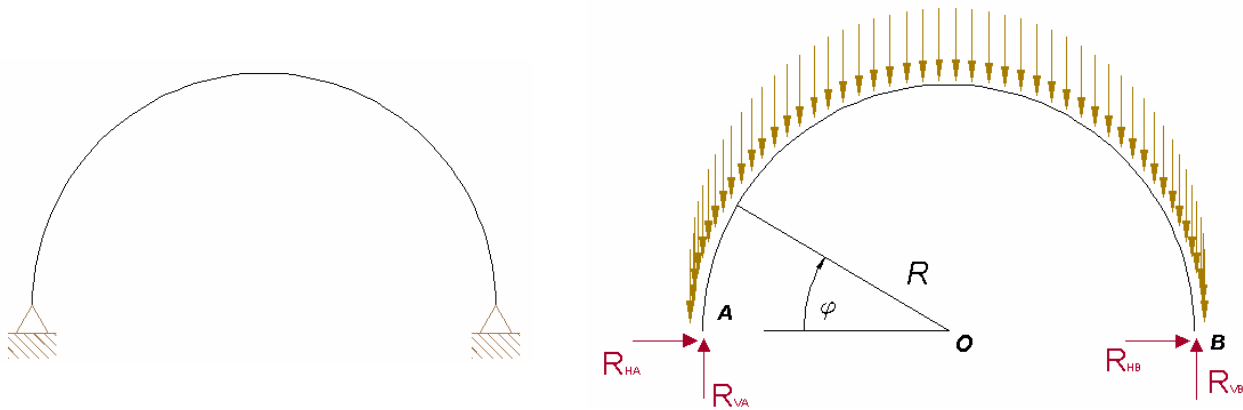


Figura 6. Esquema simplificado de cálculo del arco biapoyado, peso propio y reacciones en apoyos.

Leyes de esfuerzos, siendo  $\phi$  el cuadrado del radio de giro:

$$\mathcal{N}(\theta) = \frac{pR}{2} \cdot \left( (2\theta - \pi) \cdot \cos(\theta) + \left( \frac{2\phi}{R^2} - 1 \right) \sin(\theta) \right)$$

$$\mathcal{V}(\theta) = \frac{pR}{2} \cdot \left( (2\theta - \pi) \cdot \sin(\theta) + \left( 1 - \frac{2\phi}{R^2} \right) \cos(\theta) \right)$$

$$\mathcal{M}(\theta) = \frac{pR^2}{2} \left( (2\theta - \pi) \cos(\theta) + \pi + \left( \frac{2\phi}{R^2} - 3 \right) \sin(\theta) \right)$$

Excentricidad como cociente entre el momento flector y el axil:

$$e(\theta) = \frac{\mathcal{M}(\theta)}{\mathcal{N}(\theta)} = R \frac{(2\theta - \pi) \cos(\theta) + \left(\frac{2\phi}{R^2} - 3\right) \sin(\theta) + \pi}{(2\theta - \pi) \cos(\theta) + \left(\frac{2\phi}{R^2} - 1\right) \sin(\theta)}$$

La excentricidad depende linealmente de R y del parámetro adimensional  $\phi/R^2$ .

## II.6 Arco de medio punto empotrado y apoyado

En este apartado se presenta la solución de los esfuerzos del arco semicircular empotrado y apoyado sometido a su peso propio (Fig. 7).

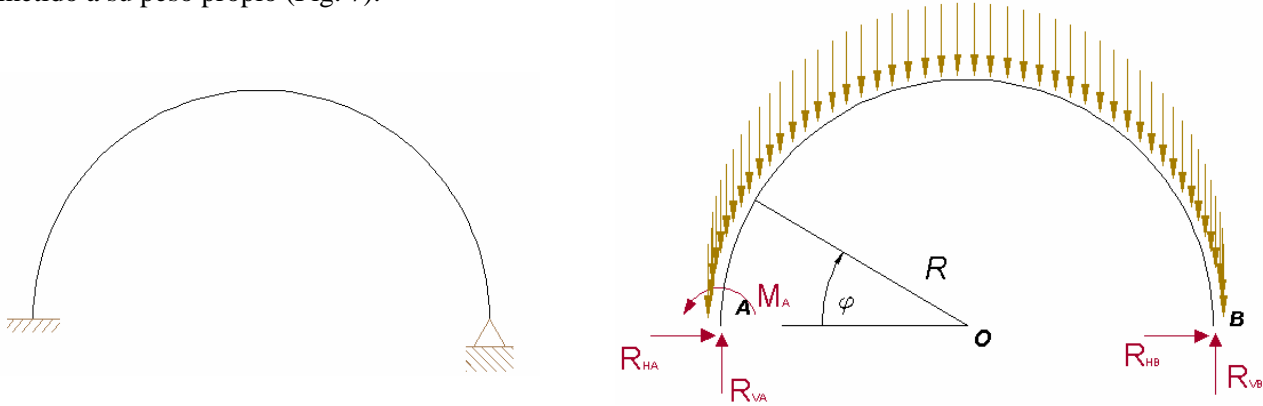


Figura 7. Esquema simplificado de cálculo del arco empotrado apoyado, peso propio y reacciones de apoyos.

Leyes de esfuerzos, siendo  $\phi$  el cuadrado del radio de giro:

$$\mathcal{N}(\theta) = pR \frac{(8\phi(4\theta - 3\pi) + R^2(36\pi - 5\pi^3 + 6\pi^2\theta - 32\theta)) \cos(\theta) + ((5\pi^2 - 64)R^2 - 2\phi(\pi^2 - 32)) \sin(\theta)}{32\phi + 2(3\pi^2 - 16)R^2}$$

$$\mathcal{V}(\theta) = pR \frac{(8\phi(4\theta - 3\pi) + R^2(36\pi - 5\pi^3 + 6\pi^2\theta - 32\theta)) \sin(\theta) - ((5\pi^2 - 64)R^2 - 2\phi(\pi^2 - 32)) \cos(\theta)}{32\phi + 2(3\pi^2 - 16)R^2}$$

Excentricidad como cociente entre el momento flector y el axil (no se ha incluido la expresión de la ley de flectores por ser muy extensa):

$$e(\theta) = R \left( 1 + \frac{(32\phi + (6\pi^2 - 32)R^2) \sin(\theta) - 8\pi\phi - \pi(4 + \pi^2)R^2}{(8(3\pi - 4\theta)\phi + R^2(32\theta - 36\pi + 5\pi^3 - 6\pi^2\theta)) \cos(\theta) + (2\phi(\pi^2 - 32) + (64 - 5\pi^2)R^2) \sin(\theta)} \right)$$

La excentricidad depende linealmente de R y del parámetro adimensional  $\phi/R^2$ .

## II.7 Arco de medio punto isostático

En este apartado se presenta la solución de los esfuerzos del arco semicircular isostático sometido a su peso propio (Fig. 8).

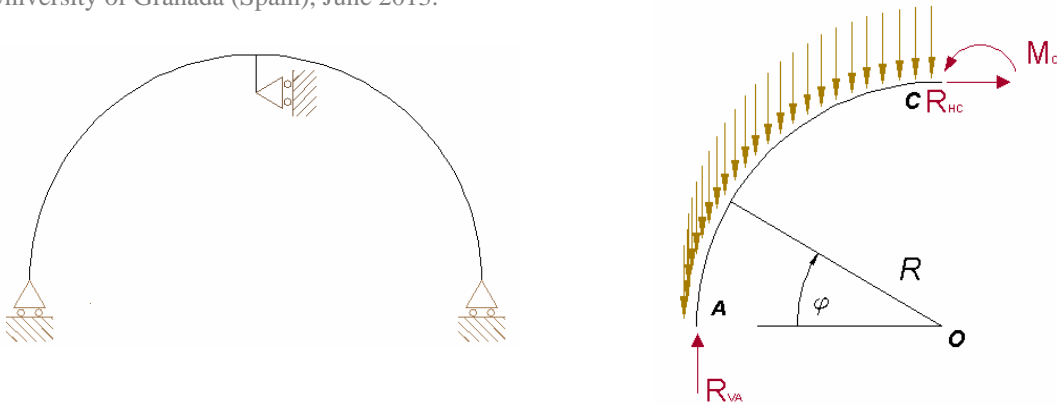


Figura 8. Esquema simplificado de cálculo del arco biapoyado, peso propio y reacciones en apoyos considerando simetría.

Leyes de esfuerzos, siendo  $\phi$  el cuadrado del radio de giro:

$$\mathcal{N}(\theta) = \mathcal{N}_I + \mathcal{N}_{IV} = \frac{pR}{2}(2\theta - \pi) \cos(\theta)$$

$$\mathcal{V}(\theta) = \mathcal{V}_I + \mathcal{V}_{IV} = \frac{pR}{2}(2\theta - \pi) \sin(\theta)$$

$$\mathcal{M}(\theta) = \mathcal{M}_I + \mathcal{M}_{IV} = \frac{pR^2}{2} ((2\theta - \pi) \cos(\theta) + \pi - 2 \sin(\theta))$$

Excentricidad como cociente entre el momento flector y el axil:

$$e(\theta) = R \left( 1 + \frac{2 \tan(\theta) - \pi \sec(\theta)}{\pi - 2\theta} \right)$$

La excentricidad depende linealmente de R, y puesto que el axil se anula en la clave, en dicho punto la excentricidad tiende a infinito por lo que prescindiremos de este modelo para aplicarlo al caso práctico.

### III. El arco del acueducto de la Alhambra

#### III.1 Historia del proceso constructivo

La Alhambra de Granada se incluye en un sistema urbano y espacial articulado en torno a los ríos Darro y Genil y a cuatro acequias principales, entre ellas la *acequia real*, que irriga el territorio alhambrense.

Muhammad I Ibn al-Ahmar, primer rey de la dinastía *nazarí*, en 1238 decidió construir la ciudad palatina de la Alhambra en la colina de la Sabika, donde ya se ubicaba desde época *ziri* la fortaleza de la Alcazaba, cuyo abastecimiento, aunque no está probado arqueológicamente, se realizaba a través de la Coracha, mediante acarreo del agua retenida en una pequeña represa ubicada en el cauce del río Darro, junto a la puerta de los Tableros. Dicho abastecimiento era insuficiente para la nueva ciudad palatina que se proyectaba, por lo que Muhammad I decidió construir la *acequia real*, cuyo trazado se esquematiza en la figura 9.



Figura 9. Recorrido de la acequia real desde la Presa del Rey (Jesús del Valle) hasta la Alhambra.

La *acequia real* nace en la presa del Rey, hoy conocida como presa de Jesús del Valle, situada en el cauce del río Darro, a 6.100 m de recorrido y 40 m de desnivel de su entrada en el Generalife. Su trazado se inicia en la margen derecha aguas abajo del río, cruzando a la margen izquierda después de recorrer 625 metros, mediante canal elevado en el cortijo del Molino del Rey, discurriendo a partir de este por la ladera norte del Cerro del Sol, en dirección a los jardines del Generalife; tras bordear la Silla del Moro, aparece en el Generalife en el interior de una vistosa mina ubicada en el *patio de la sultana*, pasando posteriormente al *patio de la acequia*. (Fig. 10). “Si su recorrido anterior era el de una mera acequia de riego agrícola, desde este punto se convertía en elemento decorativo central del jardín real” [5].

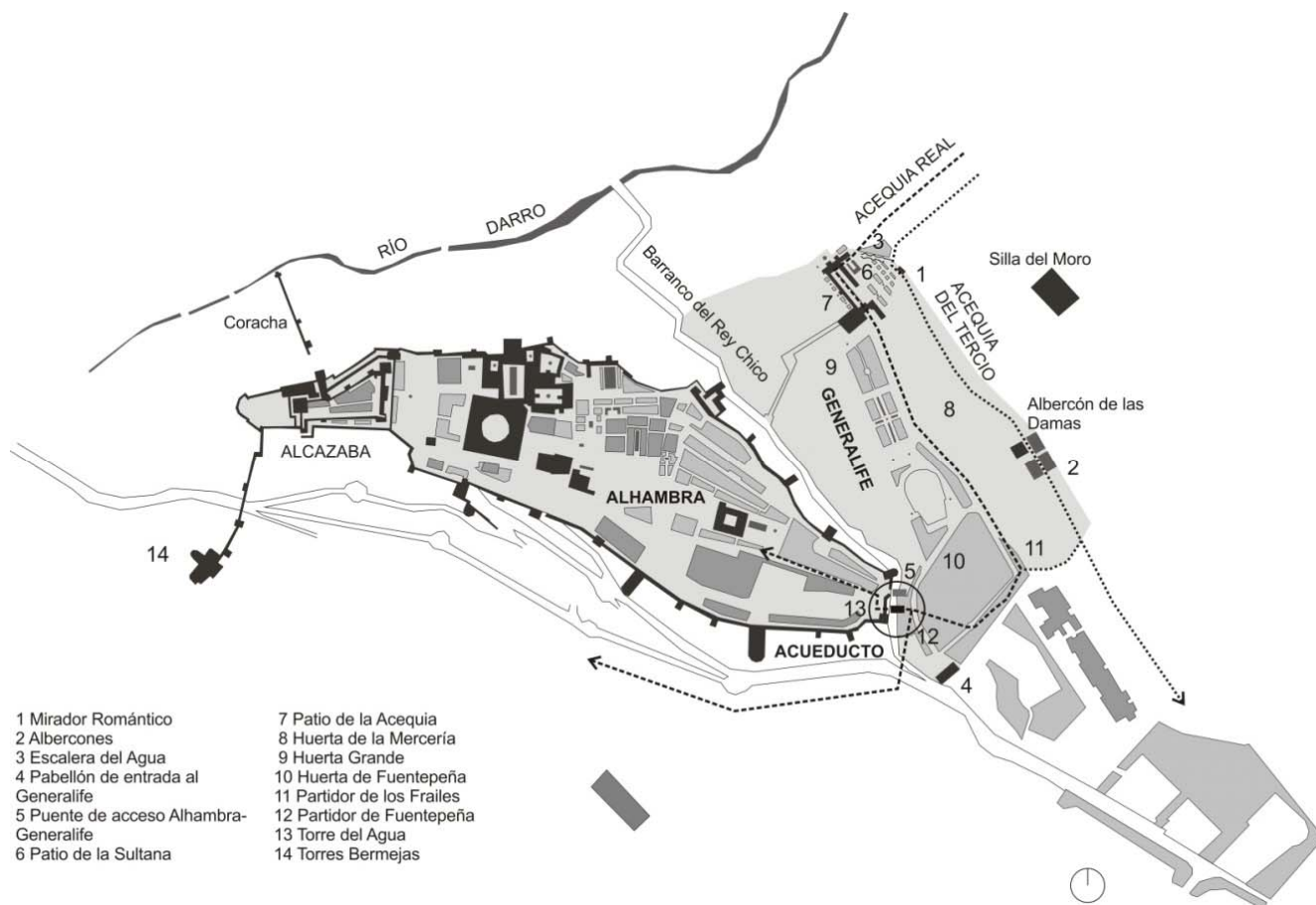


Figura 10. Recorrido de la acequia real a través de los jardines del Generalife y acceso al recinto de la Alhambra mediante el acueducto del Barranco del Rey Chico.

Tras su paso por el Generalife regando huertas, jardines, baños, estanques, fuentes y dispositivos higiénicos, la acequia se dirige hacia la que fue su finalidad principal, el abastecimiento del recinto fortificado de la Alhambra, para lo que es necesario salvar a suficiente cota el *barranco del Rey Chico*, lo que exigía la construcción de un acueducto, junto a su elemento protector, la Torre del Agua.

A unos 2.840 metros de su nacimiento, en el paraje conocido como Carmen del Partidor, se derivó del curso principal un tercio de su caudal, mediante el ramal llamado *acequia del tercio*, que discurriendo a menor pendiente



que la acequia madre, alcanza cotas más altas, permitiendo el riego de fincas a mayor altura, como la *huerta de la mercería*.

La *acequia del tercio* se introduce en el recinto del Generalife junto al *mirador romántico*, a cota 12 m superior a la de la *acequia real*, abasteciendo la *escalera del agua* y el *albercón de las damas*, y reincorporándose parte de ella al cauce principal antes de su entrada en la fortificación.

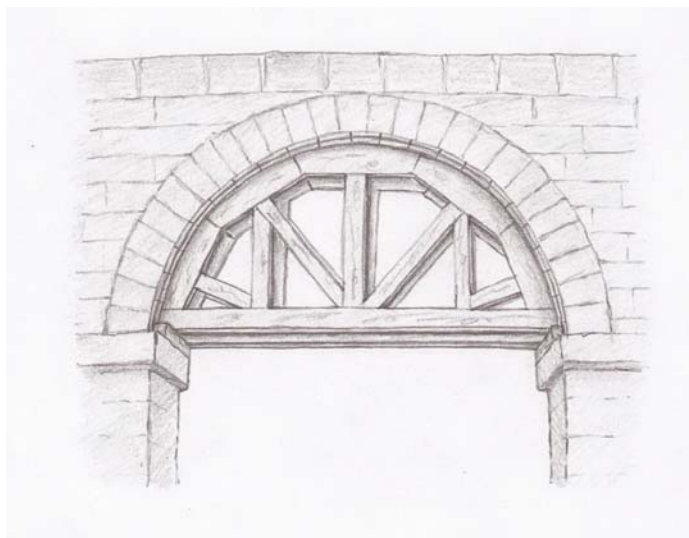
Mediante su distribución en los partidores de los *frailes* y de *fuentepeña*, antes de llegar a la fortaleza de la Alhambra, parte del agua de la *acequia real* se deriva para abastecer el Carmen de los Mártires y los barrios del Mauror y la Antequeruela. [5].

Con el paso del tiempo algunos tramos de la *acequia real* se fueron perdiendo, lo que hizo necesaria la construcción del actual sistema de abastecimiento, que a través de un partidor situado junto al *mirador romántico*, surte la mina de entrada de aguas ubicada en el *patio de la sultana*, respetando el trazado histórico de la acequia a través de los jardines del Generalife.

Excavaciones arqueológicas realizadas en 2008, en el tramo anterior al *arca de fuentepeña* bajo el pavimento del *paseo de los cipreses*, muestran los restos de tres acequias, correspondientes a diferentes periodos históricos, y a sucesivas elevaciones de nivel del terreno adyacente: la primigenia de tapial, identificada con la abierta por Muhammed I en época *nazarí*; la de época moderna, sobre pavimento de grandes piedras; y la contemporánea, bajo bóveda, construida por Torres Balbás y actualmente en uso.

Para salvar el *barranco del Rey Chico*, antiguo foso defensivo de la fortaleza, en junio de 1701, dirigida por el maestro mayor de las obras reales Antonio Velázquez Vázquez, se inició la construcción del actual acueducto en arco de piedra, objeto de este trabajo, encajado entre muros de mampostería ataludada reparados en época de los Reyes Católicos, en el mismo emplazamiento, aunque a mayor cota, que el antiguo arco de argamasa *nazarí* [5].

No es probable que la obra resultara afectada por la voladura de los franceses en 1812, al no tenerse noticias de la construcción de nuevos acueductos en época contemporánea.



**Figura 11.** Disposición constructiva de cimbra de madera sobre impostas para la colocación de dovelas y formación del arco en fábrica de sillares de piedra.

### III.2 Materiales empleados en la construcción histórica de Granada

A diferencia de otras regiones españolas, en las que la mayor parte del patrimonio monumental está constituido por rocas plutónicas (principalmente graníticas), el contexto geológico de Andalucía Oriental ha propiciado el uso frecuente de rocas carbonáticas. En las proximidades de la ciudad de Granada se sitúan dos canteras que han suministrado material pétreo a lo largo de su extensa historia arquitectónica: la cantera de calcarenita de la Escribana, en el cortijo de Santa Pudia, y la cantera de travertino de Alfacar. [3]

La cantera de la Escribana, hasta su cierre en 1994, proporcionó la calcarenita denominada *piedra franca*, material utilizado en construcciones patrimoniales singulares como la Catedral de Granada, Palacio de Carlos V, Monasterio de San Jerónimo, Hospital Real y Real Chancillería. Tras su cierre, las actividades extractivas se trasladaron a la cantera de Escúzar, también conocida como Las Parideras, situada igualmente en el cortijo de Santa

Pudia, en la que se han seguido explotando calcarenitas utilizadas recientemente en la restauración de la Mezquita de Córdoba, o en el Palacio de las cinco llagas de Sevilla.

El travertino extraído de la cantera de Alfacar, procedente de depósitos cuaternarios sobre materiales de la cuenca intramontañosa en el borde noroeste de la depresión de Granada, ha sido utilizado en la construcción del Monasterio de San Jerónimo, Hospital Real, Iglesia de San Justo y Pastor e Iglesia del Salvador, y según la documentación de archivo [5], fue el material empleado en 1701, en la construcción del acueducto de la Alhambra, lo que confirma el aspecto visual de la obra.

Se incluye a continuación un resumen de la caracterización petrográfica y físico-mecánica de la piedra de Alfacar. [5]

Composición mineralógica y química. A partir de resultados publicados del análisis químico de litotipos extraídos de la cantera de travertinos de Alfacar, en la siguiente tabla se incluye su composición en elementos mayoritarios y determinados elementos minoritarios como Cu, Zn, Sr y Zr. La calcita es la principal fase mineral (84-100%), detectándose también cuarzo (14%), dolomita (<5%) y feldespatos (<1%).

%	Travertino de Alfacar	Ppm	Travertino de Alfacar
SiO <sub>2</sub>	14	Cu	6,4
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2,05	Zn	30,2
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,86	Sr	317
MgO	2,15	Zr	27
CaO	43,9		
K <sub>2</sub> O	0,38		
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	0,08		

Tabla 1. Análisis químico del travertino de Alfacar.

Características petrográficas. El estudio petrográfico de la piedra de Alfacar revela una textura de precipitación química sobre restos vegetales, donde se reconocen restos fósiles de gasterópodos, en una matriz de calcita esencialmente micrítica. Se trata de un material de elevada y heterogénea porosidad, alcanzando los poros hasta tamaños centimétricos (coqueras).

Propiedades mecánicas. En la siguiente tabla se incluyen resultados publicados de la medida en el travertino de Alfacar, de la velocidad de propagación de las ondas P y S, según tres direcciones ortogonales, y de la estimación a partir de estas de las características mecánicas de la roca.

Travertino de Alfacar										
Densidad aparente (g/cm <sup>3</sup> )		Velocidad de onda compresiva V <sub>P</sub> (m/s)	Velocidad de onda de cizalla V <sub>S</sub> (m/s)	V <sub>P</sub> /V <sub>S</sub>	Módulo de Young E <sub>d</sub> (GPa)	Coeficiente dinámico de Poisson V <sub>d</sub>	Coeficiente de anisotropía			
							Total ΔM <sub>P</sub> (%)	Relativa Δm <sub>P</sub> (%)	Total ΔM <sub>S</sub> (%)	Total Δm <sub>S</sub> (%)
1,81	X	4571	2149	2,13	22,7	0,36	1,5	1,6	3,2	2,9
	Y	4679	2253	2,08	24,8	0,35				
	Z	4603	2188	2,10	23,5	0,35				

Tabla 2. Caracterización mecánica del travertino de Alfacar.

### III.3 Modelización geométrica. Esbeltez.

La modelización geométrica de la obra se ha realizado mediante reconocimiento y toma de medidas *in situ*, y posterior ajuste de las mismas en reportaje fotográfico (Fig. 12), completándose con el análisis de fotografías y grabados antiguos.

El acueducto está formado por un arco de dovelas, de medio punto, apoyado mediante impostas en estribos, soportando sendos tímpanos de fábrica, conteniendo material de relleno y un canal de piedra en su parte superior.

A pocos metros de distancia y paralelo al acueducto, se encuentra un puente peatonal que permite el acceso desde el interior del recinto de la Alhambra a los jardines del Generalife, construido en 1971 por el arquitecto Francisco Prieto Moreno, quien especifica en la memoria del proyecto su propósito de utilizar para la nueva obra, idénticas proporciones geométricas a las del acueducto objeto del presente trabajo.



Figura 12. Ajuste fotográfico de las medidas tomadas *in situ*, en los alzados norte y sur de la obra.

Con objeto de evaluar la esbeltez del arco estudiado, se han comparado las medidas obtenidas, con las correspondientes a los arcos de medio punto de acueductos pertenecientes a distintos periodos históricos, como los acueductos romanos de Almuñécar y Tarragona, y el dieciochesco de San Telmo.

Aun habiendo heredado las técnicas de conducción de aguas de los pueblos de Oriente y Grecia, y de sus antecesores los etruscos, se puede decir que el acueducto, como obra de fábrica que en las conducciones de agua soporta el canal sobre el terreno mediante arcadas, es de invención romana.

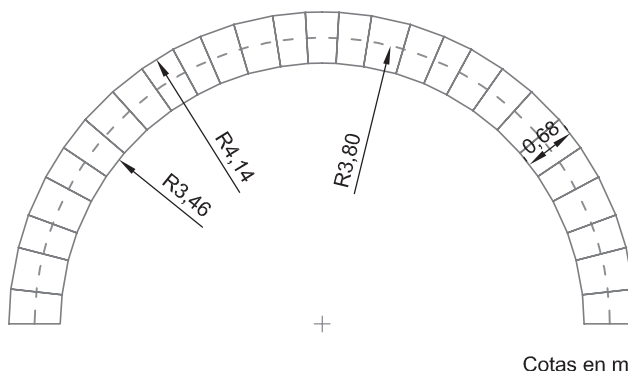


Figura 13. Definición geométrica del arco del acueducto de la Alhambra.

El acueducto romano de Almuñécar, de su trazado original de longitud aproximada diez kilómetros, conserva actualmente en buen estado cuatro tramos, de diecinueve, seis, diez y once arcadas cada uno, algunas en dos y tres pisos. En los cuatro tramos se aprecia una normalización de sus dimensiones características, siendo la luz de los arcos principales de 4,90 m, y de 2,80 m la de los arcos secundarios. En sección transversal se sigue una regulación de espesores, desde un ancho en las bóvedas igual a 1,45 m, hasta 1,80 m al pasar a la pila. Para el aparejo del arco se emplean lajas de piedra con longitudes de hasta 75 cm.

El acueducto de Tarragona, conocido como Puente de las Ferreras, está formado por dos niveles de arcadas, once en el inferior y veinticinco en el superior, y se corona a una altura máxima de 26 m, con una longitud total de unos 200 m. Los arcos están formados por bloques de piedra y tienen 5,90 m de luz, que deben corresponder a 20 pies romanos, alcanzando la distancia entre ejes de pilares 7,95 m, unos 26 pies.

El acueducto de San Telmo, en la provincia de Málaga, está considerado como la obra de ingeniería hidráulica más importante del siglo XVIII en España. Los puentes más significativos del mismo se sitúan sobre los arroyos de Humania y de Quintana, ambos construidos en fábrica de ladrillo, y de 7 metros de luz en sus arcos principales.

Considerando como factor de esbeltez la relación entre la luz y la altura del aparejo del arco, se obtienen los valores del mismo indicados en el esquema de la figura 9, en el que podemos comprobar la mayor esbeltez del arco alhambrenño.

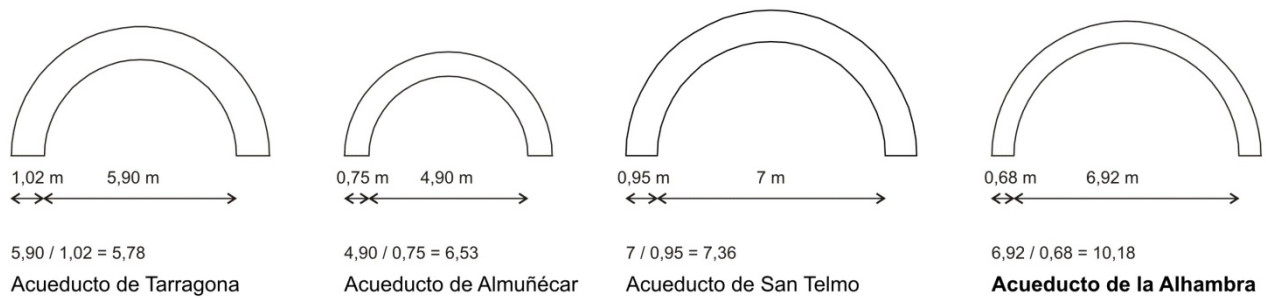


Figura 14. Factor de esbeltez en los arcos de los acueductos de Almuñécar, San Telmo, Tarragona y de la Alhambra.

### III.4 Estereotomía

El acueducto de la Alhambra se sustenta sobre arco de medio punto formado por dovelas de un bloque pétreo, en disposición radial, de 0,92 m de canto, recibidos los bloques con fina capa de mortero y aparejados a llave. En algunas zonas se dificulta la definición de su geometría debido al deterioro que presentan las juntas. La luz del arco es de 6,92 m y su profundidad de 92 cm, espesor que se mantiene en toda la altura del acueducto. Según consta en las memorias atribuidas al maestro mayor de las obras reales, Antonio Velázquez Vázquez [5], la piedra procede de la cantera histórica de travertino de Alfacar.

Mediante impostas, el arco se apoya en estribos formados por obra de sillería recta de la misma piedra tosca, en disposición horizontal, recibida con mortero y aparejada a soga y tizón. Sobre el arco se sitúan sendos tímpanos, de sillería recta aparejada a soga, igualmente de travertino procedente de Alfacar. El cauce para la conducción del agua está formado por paramentos verticales de 15 cm de espesor y losa de 3 cm, todo ello del mismo material travertínico.

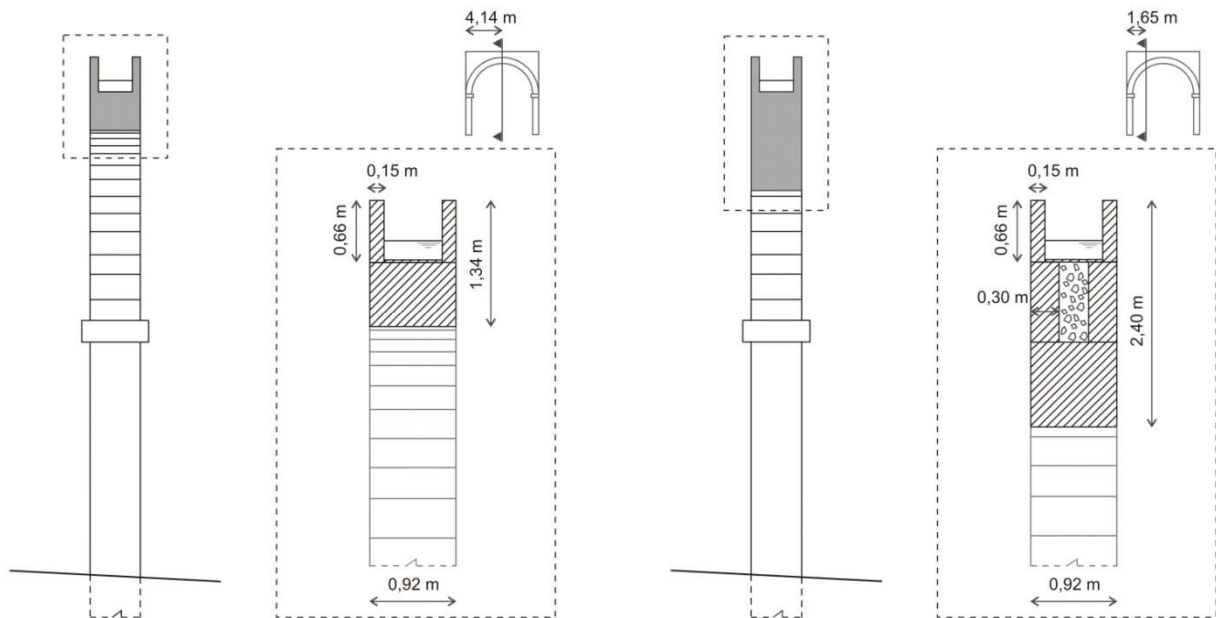


Figura 15. Secciones transversales en la clave y a ¼ de la luz. Detalle del canal, tímpanos y relleno.

### III.5 Patología. Deformación.

La inspección visual de la obra permite apreciar:

- Presencia de pequeñas fisuras longitudinales al arco, en el intradós de las dovelas próximas a la clave. Se atribuye a un leve revirado del mismo, consecuencia de los empujes laterales del terreno.

- Ausencia total de fisuras transversales al arco.
- Numerosas oquedades superficiales en la piedra.
- Deterioro de algunas juntas.

El análisis geométrico mediante instrumentación topográfica, de las aristas Sur y Norte del arco, permite concluir el siguiente proceso de deformación experimentado por el mismo:

Línea de arista SUR:

- Paramento Este: inclinación hacia intradós del 0,94%.
- Paramento Oeste: desplazamiento de la imposta hacia extradós de 4,1 mm, y abombamiento del paramento hacia intradós de hasta 7 mm.
- Arco: abombamiento hacia intradós en riñones, con máximos a 45°, de 7,3 cm (Oeste), y 4,44 cm (Este).

Línea de arista NORTE:

- Paramento Este: inclinación hacia intradós del 1,28%.
- Paramento Oeste: inclinación hacia intradós del 0,27%.
- Arco: abombamiento hacia intradós en riñones, con máximos a 45°, de 5,4 cm (Oeste) y 6,08 cm (Este).

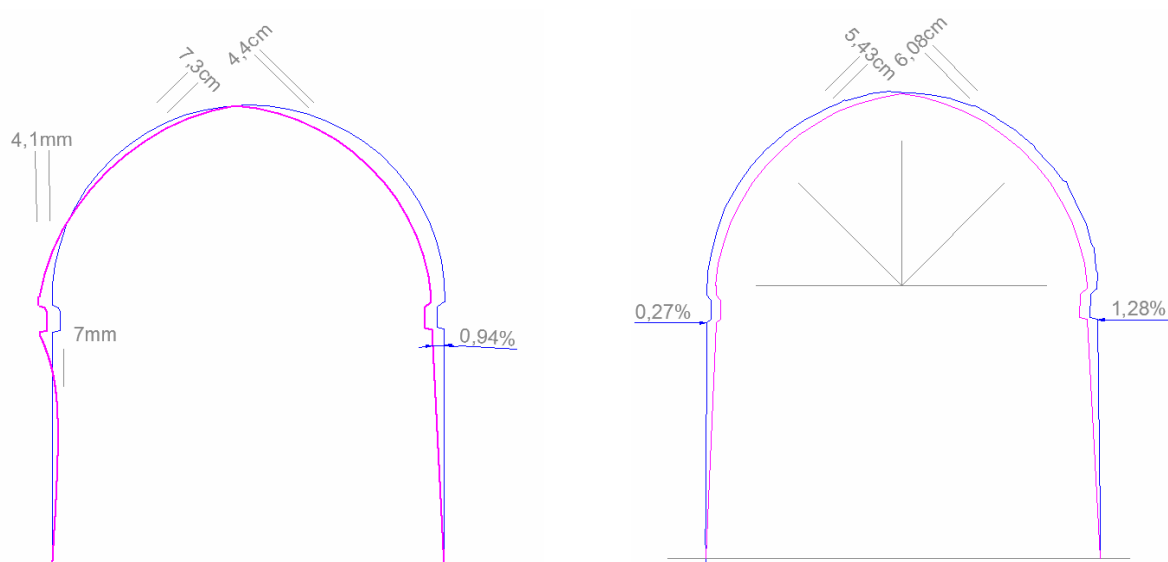


Figura 16. Esquema de la deformación de las líneas de arista Sur y Norte del arco.

### III.6 Determinación del peso propio de los elementos de la obra

A partir del valor de la densidad aparente de la piedra de Alfacar [5], teniendo en cuenta su elevada porosidad y la presencia de abundantes coqueras, y los valores genéricos para rocas de naturaleza caliza (Huerta, 6), en la evaluación de acciones de peso propio realizada en el presente trabajo, se han tomado valores del peso específico de la piedra, comprendidos entre 17,74 y 21 kN/m<sup>3</sup>. En la tabla 3 se indica el peso de los distintos elementos constructivos deducido a partir de la geometría de los mismos. Se ha supuesto el espesor de los tímpanos igual a 30 cm, y el relleno entre ambos de mala calidad.

PESO ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS							
Peso específico piedra (kN/m <sup>3</sup> ): 17,74				Coordenadas cdg sector (m)			
DOVELAS	Peso (kN)	SECTORES	Peso (kN)	X	Y	BLOQUES ESTRIBO	Peso (kN)
D1	2,26	S1	5,62	3,9669	3,9861	B1	16,75
D2	4,44	S2	5,80	3,6212	3,9661	B2	12,92
D3	5,31	S3	6,15	3,2756	3,9268	B3	12,92
D4	4,79	S4	6,69	2,9299	3,8680	B4	12,92
D5	4,07	S5	7,44	2,5841	3,7874	B5	12,92
D6	4,95	S6	8,45	2,2387	3,6801	B6	12,92
D7	4,98	S7	9,75	1,8931	3,5423	B7	12,92
D8	5,26	S8	11,48	1,5476	3,3626	B8	12,92
D9	4,75	S9	13,85	1,2015	3,1175	B9	12,92
D10	4,66	S10	17,96	0,8527	2,6951	B10	12,92
D11	5,62	S11	23,36	0,5180	2,1754	B11	12,92
D12	4,61	S12	22,67	0,1739	2,1961	B12	12,92
D13	5,68					B13	12,92
D14	4,70	S13	70,83	0,5600	2,2577		

Peso semiarco (Tn):	6,74
Peso arco (Tn):	13,49
Peso semiarco más relleno (Tn):	14,21
Peso estribo (Tn):	17,54

PESO ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS							
Peso específico piedra (kN/m <sup>3</sup> ): 21				Coordenadas cdg sector (m)			
DOVELAS	Peso (kN)	SECTORES	Peso (kN)	X	Y	BLOQUES ESTRIBO	Peso (kN)
D1	2,68	S1	6,57	3,9669	3,9811	B1	19,84
D2	5,26	S2	6,79	3,6212	3,9610	B2	15,30
D3	6,29	S3	7,21	3,2756	3,9215	B3	15,30
D4	5,67	S4	7,85	2,9299	3,8626	B4	15,30
D5	4,81	S5	8,73	2,5841	3,7818	B5	15,30
D6	5,86	S6	9,92	2,2387	3,6743	B6	15,30
D7	5,89	S7	11,47	1,8931	3,5364	B7	15,30
D8	6,23	S8	13,51	1,5475	3,3566	B8	15,30
D9	5,62	S9	16,32	1,2015	3,1113	B9	15,30
D10	5,52	S10	21,19	0,8526	2,6887	B10	15,30
D11	6,66	S11	27,57	0,5180	2,1691	B11	15,30
D12	5,46	S12	26,76	0,1739	2,1896	B12	15,30
D13	6,73					B13	15,30
D14	5,56	S13	83,60	0,5600	2,2512		

Peso semiarco (Tn):	7,98
Peso arco (Tn):	15,97
Peso arco más relleno (Tn):	33,45

Peso estribo (Tn): 20,76

**Tabla 3. Peso de los elementos constructivos deducido a partir de la geometría de los mismos, para distintos valores del peso específico de la piedra.**

### III.7 Análisis de estabilidad

Se analiza el comportamiento estructural de la obra mediante aplicación de la teoría del Análisis Límite de Estructuras de Fábrica desarrollada por Heyman [6], [7] y [8], que se resume a continuación.

Como consecuencia de las inevitables imperfecciones prácticas de la construcción, y la imposibilidad de conocer con precisión el movimiento de los estribos, el estado de trabajo real de la estructura es impredecible.

El teorema plástico de la seguridad establece que si se puede considerar un estado cualquiera de equilibrio (esfuerzos internos y cargas exteriores) para el que cada sección interna satisfaga un cierto criterio de resistencia (en las fábricas, los esfuerzos deben de actuar dentro de los límites de la estructura), entonces la estructura es segura.

Se admiten para el material pétreo las siguientes hipótesis:

- La fábrica no presenta resistencia a tracción.
- Las tensiones son tan bajas que, a efectos prácticos la fábrica presenta resistencia a compresión ilimitada.
- El fallo por deslizamiento es imposible.

Condición de estabilidad: una estructura de fábrica que cumple las hipótesis anteriores es estable, si la trayectoria de las fuerzas (*línea de empujes*) está contenida en la sección de la estructura; es decir, si la resultante de fuerzas en cada sección, está contenida dentro de la sección.

Coefficiente geométrico de seguridad: la seguridad será determinada en cada sección por la distancia relativa del empuje a sus bordes.

#### Análisis de estabilidad de la obra

Se analiza la estabilidad de la obra determinando mediante métodos gráficos la posición de la *línea de empujes* en el interior de la sección de la fábrica.

Teniendo en cuenta la simetría del arco, se considera solamente la mitad del mismo, sometido en la sección de la clave al empuje horizontal E ejercido por la otra mitad.

A partir del peso de las dovelas, para distintas situaciones del empuje E y de la reacción del estribo en el *salmer*, se ha calculado gráficamente la posición de la línea de empujes, tratando de encontrar una situación de equilibrio, en la que la misma esté contenida en su totalidad en la sección de la fábrica, con la mayor seguridad geométrica posible. En [1] y [2] se exponen la totalidad de las pruebas realizadas.

En la figura 17 se expone la situación de equilibrio correspondiente a la mayor seguridad geométrica. Se considera el empuje situado en el límite superior de la mitad central de la sección, y la interacción entre las dovelas 8 y 9, situada en el límite inferior de la mitad central de la sección: la línea de empujes se mantiene en el interior de la sección de la fábrica, a una distancia mínima del borde igual a 7 cm, por lo que se obtiene un coeficiente de seguridad geométrico igual a 1,26.



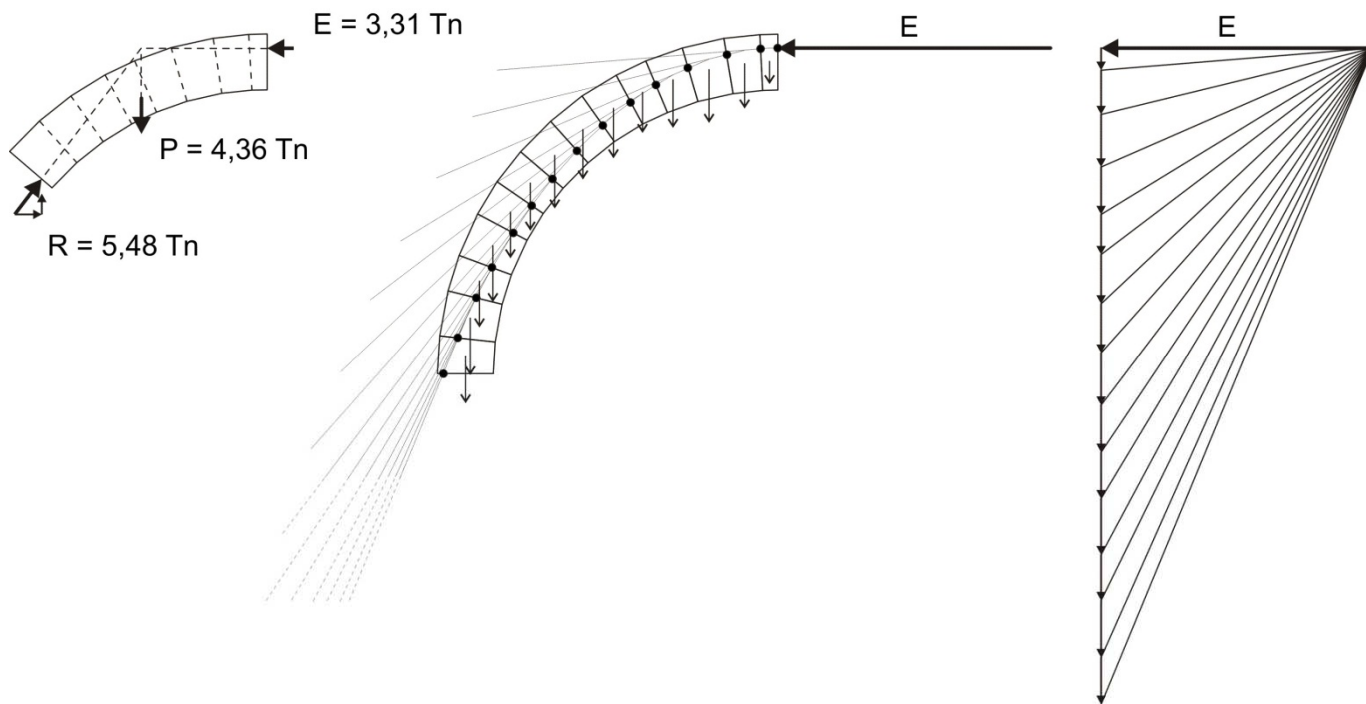


Figura 17. Empuje situado en el límite superior de la mitad central de la sección e interacción entre las dovelas 8 y 9, situada en el límite inferior de la mitad central de la sección: la línea de empujes se mantiene en el interior de la sección de la fábrica, a una distancia mínima del borde igual a 7 cm, por lo que se obtiene un coeficiente de seguridad geométrico igual a 1,26.

#### IV Análisis comparativo de resultados

Se compara la geometría de la línea de empujes obtenida mediante aplicación del Análisis Límite de Estructuras de Fábrica, con la excentricidad del esfuerzo axil calculada según la teoría de resistencia de materiales, para los distintos casos estudiados.

En el caso del arco biempotrado (Fig. 18), ambas curvas tienen una coincidencia relativamente buena en la zona de la clave y muy buena en el resto. La distancia de la curva de la excentricidad hasta el borde superior de la clave es de 6 cm y la de la línea de empujes es de 17 cm. La distancia de la curva de la excentricidad hasta el borde exterior de la dovela basal (salmer) es de 10 cm y la de la línea de empujes es de 7 cm.

Se puede observar que la mayor excentricidad del axil se produce en la clave.

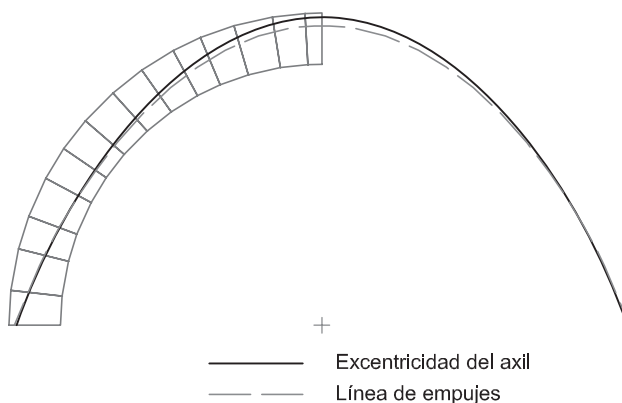
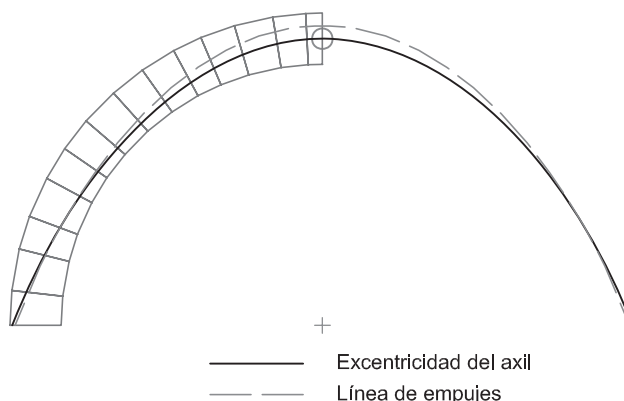


Figura 18. Arco biempotrado. Comparación de excentricidad y geometría de línea de empujes.

En el siguiente caso hemos supuesto que la zona de mayor excentricidad no es capaz de resistir momento flector, de ahí que el arco ideal se haya modelizado con una rótula en la clave (Fig. 19).

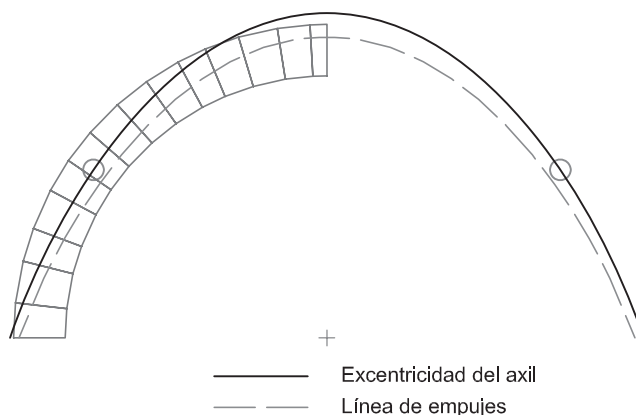
Al igual que en el caso anterior la coincidencia de ambas curvas también es buena. En la zona de la clave la excentricidad del axil es nula (ya que la existencia de la rótula obliga a que el momento flector sea nulo) por lo que la distancia al borde superior es obviamente la mitad del canto (0,34 m) frente a los 17 cm de la línea de empujes. En la dovela basal la distancia de la excentricidad al exterior es de 3 cm y frente a los 7 cm de la línea de empujes.

Por tanto la línea de empujes es una curva intermedia entre las dos excentricidades calculadas. Podemos decir que la línea de empujes coincidiría bastante bien a lo largo de todo el arco con la excentricidad si se hubiese modelizado un arco con una rótula en la clave que fuese capaz de transmitir cierto grado de momento flector (sería una rótula con cierto grado de rigidez a la flexión).



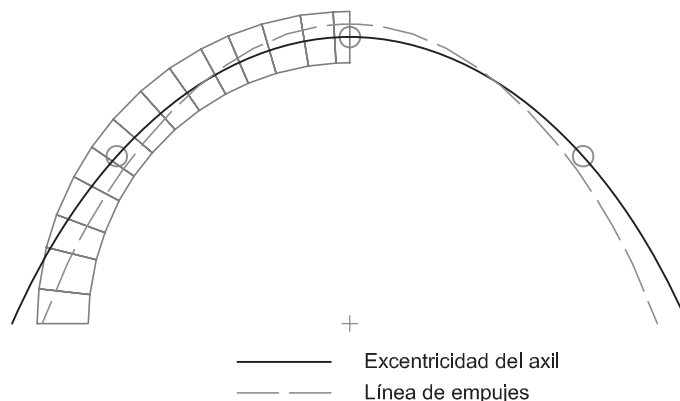
**Figura 19. Arco biempotrado con rótula en la clave. Comparación de excentricidad y geometría de línea de empujes.**

El siguiente caso que se ha comparado es en el que se supone que el arco ha plastificado en la zona del máximo de excentricidad en las dovelas laterales, a  $35,73^\circ$  con la horizontal. En este caso la línea de empujes se separa de la excentricidad del axil calculada (Fig. 20). Como en el caso anterior, las rótulas se representan mediante pequeños círculos donde la excentricidad del axil es nula.



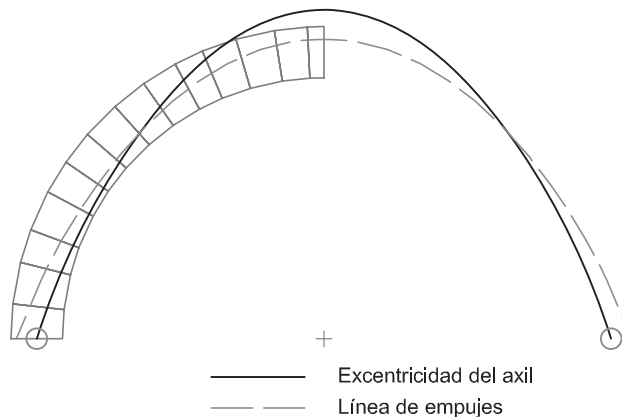
**Figura 20. Arco biempotrado con dos rótulas. Comparación de excentricidad y geometría de línea de empujes.**

Suponiendo la formación de rótulas en la clave y en los laterales (la suma de los dos casos anteriores) se consigue que la excentricidad sea prácticamente nula en la mitad superior del arco, a consta de aumentar en gran medida la excentricidad en las dovelas basales. Por supuesto la seguridad del arco en este caso se ve gravemente comprometida, debiendo colaborar los estribos de forma decisiva en la estabilidad del mismo. Nótese que este es ya un arco isostático a haber admitido ya la formación de tres rótulas (Fig. 21).



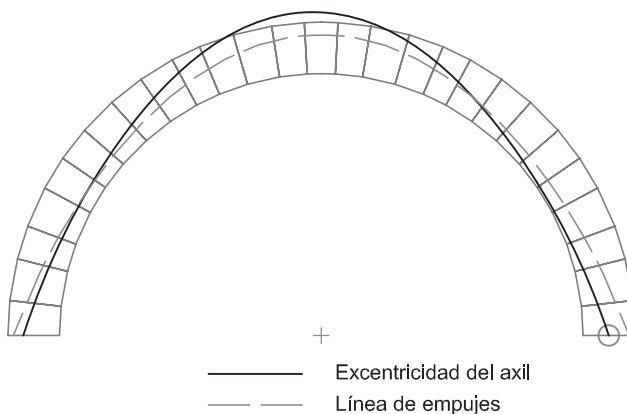
**Figura 21. Arco biempotrado con tres rótulas. Comparación de excentricidad y geometría de línea de empujes.**

La otra alternativa a la formación de las rótulas en las dovelas laterales es la formación de sendas rótulas en las dovelas basales (puntos también de máxima excentricidad en el caso del arco biempotrado. Debido a la presencia, en general, de los estribos que confinan el arco, este es un modelo que quizás se adapte menos a la realidad. Se observa que se compromete la seguridad del arco en la clave al desplazarse la excentricidad por encima del borde superior de la misma, y como se aproxima al borde interior de las dovelas en los laterales. Por otro lado la línea de empujes tiene poco parecido con la de la excentricidad (Fig. 22).



**Figura 22. Arco biempotrado. Comparación de excentricidad y geometría de línea de empujes.**

Se completa el estudio con un caso asimétrico. El arco se considera empotrado a la izquierda y articulado a la derecha. Nótese el pernicioso efecto de la rótula en la dovela basal derecha que hace que la curva de la excentricidad se parezca bastante (desde la clave hasta el estribo derecho) a la del caso anterior. (Fig. 23).



**Figura 23. Arco empotrado y apoyado. Comparación de excentricidad (asimétrica) y geometría de línea de empujes.**

## V. Conclusiones y propuesta de futuros trabajos

Las conclusiones se pueden resumir en las siguientes:

Según el modelo de resistencia de materiales, el arco biempotrado de gran radio de curvatura presenta extremos relativos de la excentricidad del axil en puntos fijos: en la clave (a  $90^\circ$ ) y en sendos puntos a unos  $35^\circ$  con la horizontal.

Considerando el peso propio, de todos los modelos estudiados según la teoría de resistencia de materiales, los que mantienen la línea de acción del axil, o sea, la excentricidad, dentro del perfil del arco del acueducto de la Alhambra son dos: el arco biempotrado y el arco biempotrado con una rótula en la clave.

La línea de empujes calculada según la teoría del Análisis Límite de Estructuras de Fábrica (J. Heyman) se encuentra entre las curvas de excentricidad de los citados modelos, por lo que situando una rótula que mantenga cierto grado de rigidez a flexión en la clave se encontraría una curva de excentricidad que coincidiría en gran medida con la línea de empujes.

La formación de otras rótulas en el arco conlleva en todos los casos a que la curva de excentricidad del axil se salga del perfil de las dovelas del arco, provocando la inestabilidad del mismo.

Se propone el desarrollo de los siguientes trabajos:

Calibración del grado de rigidez de la rótula que hay que situar en la clave para que la excentricidad coincida con la línea de empujes. Para ello se puede estudiar la formación de una rótula plástica en la clave, para lo cual sería necesario estimar una curva de comportamiento de la interfaz entre dovelas de sillería. Esto nos permitiría acotar cual es el máximo momento que es capaz de transmitir cualquier sección entre dovelas en función del axil al que se encuentra sometida.

Realizar el estudio considerando además del peso propio, el resto de las cargas que actúan sobre el arco: tímpanos, relleno y canal.

## VI Bibliografía

- [1] Suárez J. & Cirera L. 2012. *Structural and Constructive Analysis of the Acequia Real Aqueduct in the Alhambra, Granada*. NUTS & BOLTS OF CONSTRUCTION HISTORY. (ISBN: 978-2-7804-0929-3). Vol: 1 Pág.: 307-315 Editorial: Roberts Carvais, André Guillerme, Valérie Nègre, Joël Sakarovitch. PARIS (FRANCE)
- [2] Suárez J. & Cirera L. 2011. *El acueducto de la Acequia Real de la Alhambra de Granada: análisis constructivo y estructural*. VII Congreso Nacional de Historia de la Construcción. Actas del Congreso (ISBN: 978-84-9728-370-0 Depósito Legal: M-41.247-2011). SANTIAGO DE COMPOSTELA.
- [3] Urosevic, M., E. Sebastián, E. Ruiz and C. Cardell. 2011. *Evaluación de las propiedades físicas de dos rocas carbonáticas usadas como material de construcción actual e histórico en Andalucía Oriental, España*. Materiales de Construcción, vol. 61, 301, 93-114.
- [4] Granados Romera, JJ & Museros P. *Apuntes de Teoría de Estructuras ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Tomos I y II*. 2012. Granada.
- [5] Vilar, J.A. 2011. *La Acequia Real de la Alhambra en época cristiana (1492-1850)*. Editorial Comares. Granada.
- [6] Heyman, J. 1982. *The masonry arch*. Chichester: Ellis Horwood.
- [7] Heyman, J. 1995. *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*. Instituto Juan de Herrera. CEHOPU. MADRID.
- [8] Heyman, J. 1999. *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*. Instituto Juan de Herrera. MADRID.

# Armado Óptimo de Secciones de Hormigón Pretensado

Juan Francisco Carbonell Márquez, Francisco Antonio García Villena, Luisa María Gil Martín

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica. Universidad de Granada.  
{jfcarbonell, fagv, mlgil}@ugr.es

## Resumen

Para un rango de valores de área de pretensado y de excentricidad que cumplen los requisitos de tensión impuestos por el estado límite de servicio, se evalúa la armadura pasiva necesaria en estado límite último mediante la técnica RSD (“Reinforcement Sizing Diagrams”) considerando el efecto del pretensado como el de un axil exterior. Se selecciona la solución que conduce a un valor mínimo del coste total de armado pasivo y activo.

## Palabras clave

Hormigón Pretensado, Vigas, Armado Óptimo, Reinforcement Sizing Diagrams.

## I. Introducción

El procedimiento de diseño de elementos simplemente apoyados de hormigón pretensado (HP) comienza con la determinación de la fuerza de pretensado inicial  $P_0$  y de su excentricidad  $e$  en la sección media, donde el momento flector es máximo. Para su determinación, es común el empleo de los denominados diagramas de Magnel. Estos diagramas representan gráficamente las limitaciones de tensiones impuestas en las fibras superior e inferior para los estados de vacío y servicio, de tal manera que introduciendo en el gráfico el par  $P_0 - e$  adoptado en el diseño, el ingeniero puede saber si se cumplen dichas prescripciones. Establecido el valor de la fuerza  $P_0$ , el área de pretensado  $A_p$  a disponer en la sección se obtiene como:

$$A_p = \frac{P_0}{\sigma_{p0}} \quad (1)$$

siendo  $\sigma_{p0}$  la tensión inicial de pretensado.

Si el ingeniero pretende determinar el armado pasivo necesario en una determinada sección del elemento, sometida a una combinación de fuerza axil y momento flector respecto a su eje fuerte en estado límite último, la acción del pretensado a lo largo del elemento puede considerarse equivalentemente a la acción de la fuerza de pretensado aplicada en los extremos del mismo más una carga distribuida equivalente – en el caso aquí tratado de tendones parabólicos –. La acción de la carga distribuida se autoequilibra en la dirección transversal del elemento, quedando la fuerza de pretensado como única carga exterior a añadir al axil y al momento que solicitan a la sección.

Así pues, la armadura pasiva necesaria puede ser calculada empleando cualquiera de los métodos clásicos comúnmente utilizados para el diseño de secciones de HA sometidas a la combinación de carga axil y momento flector respecto a su eje principal de inercia. Sin embargo, ha surgido en la última década un nuevo enfoque de dicho problema de diseño, presentado por Hernández-Montes et al. [1], denominado RSD – del inglés *Reinforcement Sizing Diagrams* – y que presenta todas las soluciones posibles para las armaduras superior e inferior. La observación del tipo de soluciones óptimas – mínima cantidad de acero – obtenidas ha conducido al desarrollo del denominado Teorema del Armado Óptimo de Secciones [2] – TOSR, del inglés *Theorem of Optimal Section Reinforcement* –, el cual ofrece una serie de condiciones a imponer en el diseño para la obtención del armado óptimo de la sección.

Para un elemento de HA, las combinaciones posibles de armado superior e inferior requeridos para conferir la adecuada resistencia en rotura a la sección sometida a momento flector y a carga axil constituye un conjunto infinito de soluciones entre las que se incluye la solución de armado simétrico obtenida mediante el empleo de los diagramas de interacción  $N-M$  clásicos. Mediante la técnica RSD, la familia de soluciones se representa gráficamente en función de la posición de la fibra neutra,  $x$ , tal y como es explicado por Hernández-Montes et al. [1]. En este sentido López-Martín et al. [3] ha desarrollado recientemente un procedimiento basado en la

técnica RSD que, dependiendo de la excentricidad equivalente de la carga axial, proporciona cuál de las cinco condiciones dictadas por el TOSR debe ser impuesta para obtener el armado óptimo de la sección.

En el presente trabajo se pretende aplicar el concepto de armado óptimo desde el inicio del proceso de diseño de una sección de HP. Entendida la acción del pretensado como la de un axil excéntrico en la sección transversal, la técnica RSD podría ser empleada como hasta ahora proponía Hernández-Montes et al. [1], es decir, las distintas soluciones de armado superior e inferior seguirían siendo función de la posición de la fibra neutra,  $x$ . En el caso de HP, para cada par de valores de  $A_p - e$  obtenido a partir del diagrama de Magnel, la técnica RSD permitirá determinar el armado pasivo óptimo.

## II. Determinación del pretensado de una sección: diagramas de Magnel

El hormigón es un material versátil para su uso en elementos estructurales, con una muy buena resistencia a compresión. Por contra, se trata de un material con una pobre resistencia a tracción, por lo que es necesaria la inclusión de elementos de acero para que soporten las tracciones. El uso de cables de acero pretensados o postesados introduce un estado de compresión previa en el elemento estructural de hormigón, de manera que se anulan o disminuyen las tracciones en las distintas etapas de la vida útil de la estructura.

Si se pretende diseñar el pretensado de un elemento estructural tipo viga, las variables de diseño del pretensado son la fuerza inicial que se le aplica al cable,  $P_0$ , y la trayectoria del mismo a lo largo de la viga,  $e$  – Figura 1 –. Además, hay que tener en cuenta que la acción del cable de pretensado genera distintos estados tensionales a lo largo de la vida de la estructura y que la fuerza de pretensado no permanecerá constante a lo largo de la vida útil del elemento, si no que variará disminuyendo por efecto de la acción de las deformaciones diferidas del hormigón y por la relajación del acero.

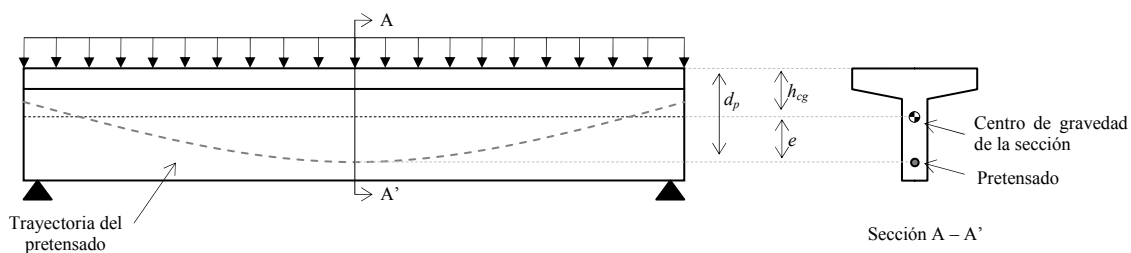


Figura 1. Esquema del problema de diseño de una viga de HP

Por tanto, para determinar estas variables de diseño,  $P_0$  y  $e$ , es necesario conocer la sección de la viga, la estimación de pérdidas del pretensado y los estados de carga a los que se verá sometido el elemento, de manera que se puedan verificar los criterios de proyecto con respecto a las tensiones en la sección más solicitada que, en el caso de vigas simplemente apoyadas, es la sección central. Los estados tensionales límite de los que se obtendrán las condiciones que han de verificar  $P_0$  y  $e$  son el estado de transferencia de la fuerza de pretensado al hormigón y el estado de servicio – Figura 2 –.

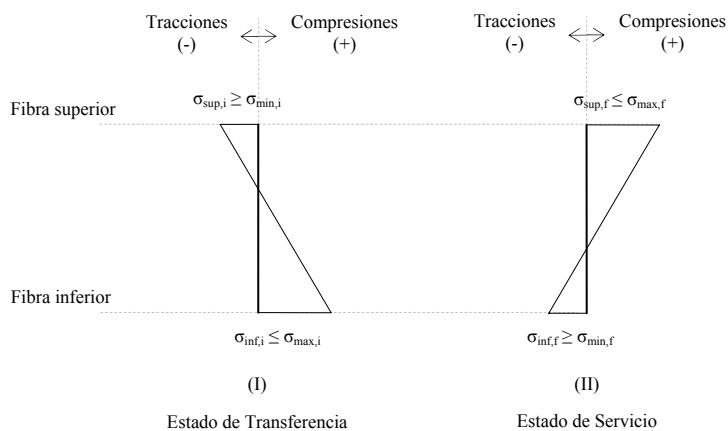


Figura 2. Estados límite a verificar con el pretensado

En el estado de transferencia, la fuerza de tesado se toma como  $\alpha P_0$ , la resistencia del hormigón,  $f_{ci}$ , una resistencia menor de la resistencia característica a 28 días,  $f_{ck}$ , y las cargas exteriores son el peso propio y las

cargas muertas; se tomará por tanto  $N_0=0$  y  $M_0$ . En el presente trabajo se considera la resistencia del hormigón  $f_{ci}$  igual a  $0.75 f_{ck}$ .

En el estado de servicio la fuerza de pretensado se toma como  $\beta P_0$ , la resistencia del hormigón es  $f_{ck}$ , y las cargas exteriores son las accidentales o poco probables,  $N_{ex}=0$  y  $M_{ex}$ .

Planteando la Ley de Navier de tensiones normales para la fibra superior e inferior de la sección transversal, para un axil exterior nulo y un momento exterior  $M$ , se obtienen las siguientes expresiones:

$$\sigma_{sup} = \frac{P}{A_c} - \frac{e \cdot P}{w_s} + \frac{M}{w_s} \quad (2)$$

$$\sigma_{inf} = \frac{P}{A_c} + \frac{e \cdot P}{w_i} - \frac{M}{w_i} \quad (3)$$

siendo  $\sigma_{sup}$  y  $\sigma_{inf}$  las tensiones normales en la fibra superior e inferior respectivamente,  $P$  la fuerza de pretensado,  $A_c$  el área de hormigón de la sección transversal,  $e$  la excentricidad del cable de pretensado respecto al centro de gravedad de la sección y  $w_s = \frac{I}{y_s}$  y  $w_i = \frac{I}{y_i}$  son los módulos resistentes para la fibra superior e inferior respectivamente siendo  $y_s$  e  $y_i$  las respectivas distancias al centro de gravedad e  $I$  el momento de inercia respecto del eje fuerte de la sección.

Las condiciones de proyecto – según EC2 – para las compresiones y tracciones máximas en el estado de transferencia se tomarán como – Figura 2 –:

$$\sigma_{min,i} = -0.70 \cdot 0.30 \cdot f_{ci}^{\frac{2}{3}} \quad (4)$$

$$\sigma_{max,i} = 0.60 \cdot f_{ci} \quad (5)$$

para el estado de servicio, las tracciones y compresiones máximas son:

$$\sigma_{min,f} = -0.70 \cdot f_{ctm} \quad (6)$$

$$\sigma_{max,f} = 0.60 \cdot f_{ck} \quad (7)$$

siendo  $f_{ctm}$  la resistencia media a tracción del hormigón a 28 días.

Por tanto, son dos las condiciones a verificar por cada estado tensional. Para el estado de transferencia:

$$\sigma_{min,i} \leq \frac{\alpha \cdot P_0}{A_c} - \frac{e \cdot (\alpha \cdot P_0)}{w_s} + \frac{M_0}{w_s} \quad (8)$$

$$\sigma_{max,i} \geq \frac{\alpha \cdot P_0}{A_c} + \frac{e \cdot (\alpha \cdot P_0)}{w_i} - \frac{M_0}{w_i} \quad (9)$$

y para el estado de servicio:

$$\sigma_{max,f} \leq \frac{\beta \cdot P_0}{A_c} - \frac{e \cdot (\beta \cdot P_0)}{w_s} + \frac{M_{ex}}{w_s} \quad (10)$$

$$\sigma_{min,f} \geq \frac{\beta \cdot P_0}{A_c} + \frac{\beta \cdot (\alpha \cdot P_0)}{w_i} - \frac{M_{ex}}{w_i} \quad (11)$$

Despejando  $1/P_0$  de cada una de las cuatro condiciones anteriores expuestas en las Eqs. (8) – (11), se obtienen las inequaciones de los conocidos como diagramas de Magnel. En estos diagramas se representan gráficamente los pares  $(e, 1/P_0)$  que verifican las condiciones dadas por las Eqs. (8) – (11) – Figura 3 –.

$$\frac{1}{P_0} \geq \frac{\alpha \cdot \left( \frac{w_s}{A_c} - e \right)}{w_s \cdot \sigma_{\min,i} - M_0} \quad (12)$$

$$\frac{1}{P_0} \geq \frac{\alpha \cdot \left( \frac{w_i}{A_c} + e \right)}{w_i \cdot \sigma_{\max,i} + M_0} \quad (13)$$

$$\frac{1}{P_0} \geq \frac{\beta \cdot \left( \frac{w_s}{A_c} - e \right)}{w_s \cdot \sigma_{\max,f} - M_{ex}} \quad (14)$$

$$\frac{1}{P_0} \leq \frac{\beta \cdot \left( \frac{w_i}{A_c} + e \right)}{w_i \cdot \sigma_{\min,f} + M_{ex}} \quad (15)$$

Conocida la regla del cambio de sentido de una inequación al dividir ambos términos de la misma por un número negativo, las inequaciones (12) y (14) serán válidas tal y como se exponen si los denominadores resultan positivos. En caso contrario, habría que cambiar el sentido de las mismas [4]. A la hora de presentar gráficamente las Eqs. (12) – (15), en el presente trabajo se hace una modificación respecto a los diagramas de Magnel clásicos: la variable independiente  $e$  se sustituye por  $d_p$ , que es la distancia medida desde la fibra superior de la sección al centro de gravedad del pretensado – Figura 1 – y  $P_0$  se sustituye por  $A_p$  haciendo uso de la Eq. (1). Además de los límites impuestos por las Eqs. (12) – (15), se introduce un nuevo límite vertical en el diagrama de Magnel debido a las limitaciones impuestas por el recubrimiento en la parte inferior de la sección del elemento estructural.

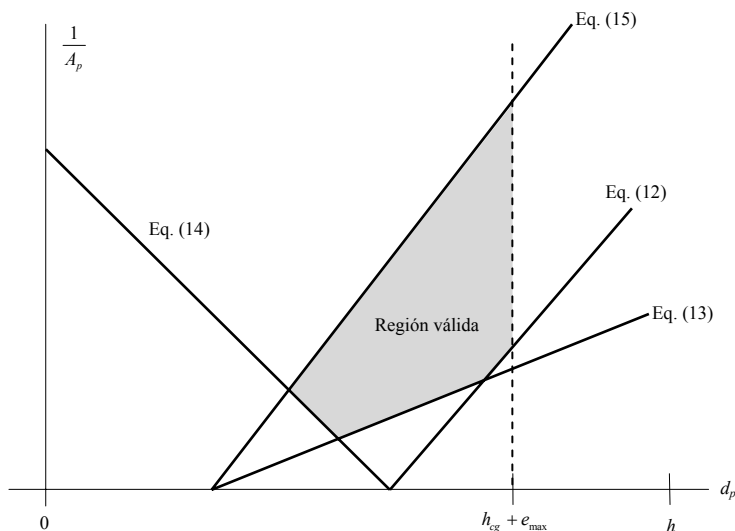


Figura 3. Diagrama de Magnel típico

### III. Consideraciones en el diseño resistente de secciones de HA en flexión

El diseño en rotura de una sección de HA sometida a flexión compuesta respecto a su eje principal de inercia conlleva la consideración simultánea de las condiciones de compatibilidad, los modelos constitutivos y las ecuaciones de equilibrio para los materiales – hormigón y aceros pasivo y activo – a nivel de la sección.

#### III.1. Hipótesis de Bernouilli y estado límite último de la sección según EC2

Las condiciones de compatibilidad hacen uso de las hipótesis de Bernouilli que dicta que las secciones planas permanecen planas después de la deformación. Se admite que no existe deslizamiento entre el hormigón y las barras de acero en la sección. La hipótesis de Bernouilli permite que la distribución de deformaciones a lo largo de la sección pueda ser definida mediante dos variables: la deformación en el centro de gravedad de la



sección  $-\varepsilon_{cg}$  – y la curvatura  $-\square$  –. De este modo, la deformación a cierto nivel y por encima del centro de gravedad de la sección puede ser definida de acuerdo a la Eq. (16):

$$\varepsilon(y, \varepsilon_{cg}, \phi) = \varepsilon_{cg} + \phi y \quad (16)$$

La expresión empleada en la Eq. (16) considera como positivas la deformación por compresión y la curvatura que produce tracción en la fibra inferior de la sección.

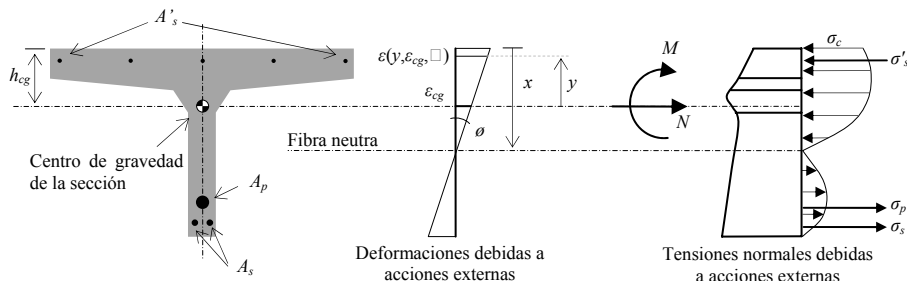


Figura 4. Diagramas de deformaciones y tensiones a nivel de sección

Siguiendo con la hipótesis de Bernoulli, el Eurocódigo 2 (EC2) [5] propone una serie de rangos de distribuciones de deformaciones de rotura, tal y como la Figura 5 muestra: los planos que pivotan en el punto A se corresponden con distribuciones de deformación para las cuales el acero falla a tracción mientras que los planos que pivotan en los puntos B o C se corresponden con el agotamiento del hormigón a compresión. Adoptando el diagrama rectangular de compresiones en rotura para el hormigón, el EC2 considera una deformación de compresión última para flexo compresión,  $\varepsilon_{cu3}$ , y para compresión pura,  $\varepsilon_{c3}$ . En el presente trabajo se considera que el acero responde a un modelo tensión-deformación bilineal sin endurecimiento, de manera que el EC2 permite que no se imponga ninguna limitación de deformación a tracción y el pivote A en la Figura 5 desaparece. Otra consecuencia es que la posición de la fibra neutra,  $x$ , toma valores en el intervalo  $[0, \infty)$ .

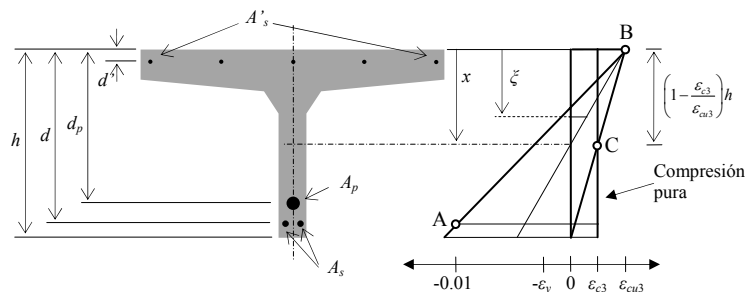


Figura 5. Distribuciones de deformación de la sección en rotura de acuerdo con el EC2

De acuerdo con las distribuciones de deformaciones presentadas en la Figura 5, en nuestro caso la deformación de rotura en cualquier fibra situada a una distancia  $\xi$  desde la fibra superior de la sección puede ser expresada en términos de la posición de la fibra neutra,  $x$ , como:

$$\varepsilon(\xi, x) = \begin{cases} \varepsilon_{cu3} \frac{x - \xi}{x} & \text{si } 0 \leq x < h \\ \varepsilon_{c3} \frac{x - \xi}{x - \Xi} & \text{si } x \geq h \end{cases} \quad (17)$$

donde  $\Xi = h \left( 1 - \frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}} \right)$ .

### III.2. Modelo constitutivo del hormigón en rotura

Tal y como se ha mencionado anteriormente, se adopta el diagrama rectangular de compresiones en rotura para el hormigón propuesto en el EC2. Así pues, los valores de la deformación última son:

- Compresión pura:  $\varepsilon_{c3}(\%) = \begin{cases} 1.75 & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1.75 + 0.55(f_{ck} - 50) / 40 & \text{para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$
- Flexo compresion:  $\varepsilon_{cu3}(\%) = \begin{cases} 3.5 & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 2.6 + 35(90 - f_{ck})^4 / 100 & \text{para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$

La resistencia de diseño del hormigón a compresión de acuerdo con el EC2 viene dada por:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (18)$$

donde  $f_{ck}$  es la resistencia característica a compresión de la probeta cilíndrica ensayada a los 28 días,  $\alpha_{cc}$  es el coeficiente que considera la reducción de la resistencia a compresión del hormigón a largo plazo y otros efectos desfavorables debidos al modo en que la carga es aplicada cuyo valor debe ser escogido en el rango 0.8-1.0 – en este trabajo se adopta 0.85 – y,  $\gamma_c$  es el factor parcial de seguridad tomado en este trabajo como 1.5 – situaciones de diseño permanentes y transitorias –.

La resultante del bloque de compresiones en el hormigón,  $N_c$ , puede ser definida como una función de la posición de la fibra neutra,  $x$ , como

$$N_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \eta f_{cd} \int_0^{\lambda x} b(\xi) d\xi & \text{si } 0 \leq x < h / \lambda \\ \eta f_{cd} \int_0^h b(\xi) d\xi & \text{si } x \geq h / \lambda \end{cases} \quad (19)$$

siendo  $b(\xi)$  el ancho de la sección en la fibra situada a  $\xi$  de la fibra superior (Fig. 5)

Los valores de  $\lambda$  y  $\eta$  vienen dados por el EC2 de acuerdo a la Eq. (20):

$$\lambda = \begin{cases} 0.8 & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.8 - (f_{ck} - 50) / 400 & \text{para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad (20)$$

$$\eta = \begin{cases} 1.0 & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1.0 - (f_{ck} - 50) / 200 & \text{para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$$

### III.3. Modelo constitutivo del acero

Los modelos tensión-deformación considerados tanto para el acero pasivo como para el activo son bilineales sin tener en cuenta el endurecimiento por deformación y simétricos, Figura 6.

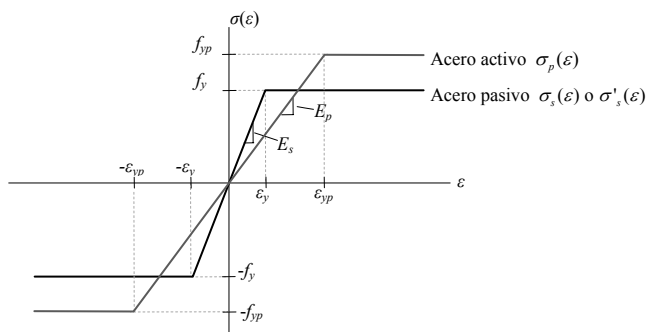


Figura 6. Modelos de tensión-deformación para las armaduras activa y pasiva

Ya que la presencia del acero dentro del hormigón no fue tomada en cuenta a la hora de formular la resultante de las compresiones en el hormigón – Eq.(19) –, los modelos de acero presentados en la Figura 6 se modifican

ligeramente para considerar el citado fenómeno. Así pues, los modelos de tensión – deformación de la armadura pasiva quedan:

$$\sigma_s(\varepsilon_s) \text{ or } \sigma'_s(\varepsilon_s) = \begin{cases} f_{yd} - \eta f_{cd} & \text{si } \varepsilon_s \geq \frac{f_{yd} - \eta f_{cd}}{E_s} \\ E_s \varepsilon_s & \text{si } -\frac{f_{yd}}{E_s} < \varepsilon_s < \frac{f_{yd} - \eta f_{cd}}{E_s} \\ -f_{yd} & \text{si } \varepsilon_s \leq -\frac{f_{yd}}{E_s} \end{cases} \quad (21)$$

donde  $f_{yd}$  se corresponde con  $f_y/\gamma_s$  y  $\gamma_s = 1.15$ . El modelo del pretensado queda:

$$\sigma_p(\varepsilon_p) = \begin{cases} f_{ypd} - \eta f_{cd} & \text{si } \varepsilon_p \geq \frac{f_{ypd} - \eta f_{cd}}{E_p} \\ E_p \varepsilon_p & \text{si } -\frac{f_{ypd}}{E_p} < \varepsilon_p < \frac{f_{ypd} - \eta f_{cd}}{E_p} \\ -f_{ypd} & \text{si } \varepsilon_p \leq -\frac{f_{ypd}}{E_p} \end{cases} \quad (22)$$

donde  $f_{ypd}$  se corresponde con  $f_{yp}/\gamma_{sp}$  y  $\gamma_{sp} = 1.15/1.1$ .

En este trabajo se consideran dos niveles de armado pasivo,  $A_s$  y  $A'_s$ , colocados a una distancia  $d$  y  $d'$  de la fibra superior respectivamente, y un nivel para el pretensado,  $A_p$ , localizado a una distancia  $d_p$  desde la fibra superior – Figura 5 –. Tal y como se ha mencionado anteriormente, la deformación en estado último de rotura para cada fibra de la sección puede ser expresada en términos de la posición de la fibra neutra  $x$  de acuerdo con Eq. (17). De esta manera, haciendo uso de la composición de funciones matemáticas, las Eqs. (17),(21) y (22) pueden ser combinadas tal y como hace Gil-Martin et al. [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_s(x) &= \varepsilon(d', x) \\ \varepsilon_s(x) &= \varepsilon(d, x) \\ \varepsilon_p(x) &= \varepsilon(d_p, x) - \beta \cdot \varepsilon_{p0} \\ \sigma'_s(x) &= \sigma'_s(\varepsilon'_s(x)) = (\sigma'_s \circ \varepsilon'_s)(x) \\ \sigma_s(x) &= \sigma_s(\varepsilon_s(x)) = (\sigma_s \circ \varepsilon_s)(x) \\ \sigma_p(x) &= \sigma_p(\varepsilon_p(x)) = (\sigma_p \circ \varepsilon_p)(x) \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $\circ$  significa composición de dos funciones matemáticas y  $\varepsilon_{p0}$  es la deformación inicial del pretensado y  $\beta$  es el coeficiente de pérdidas diferidas del pretensado, adoptado como 0,7.

#### III.4. Ecuaciones de equilibrio

Una vez que son conocidos los modelos de tensión – deformación de los materiales y teniendo en cuenta que la distribución de deformaciones unitarias a lo largo de la sección viene definida por de la posición de la fibra neutra,  $x$ , las ecuaciones de equilibrio pueden ser planteadas como se indica en la Eq. (24). Las tensiones normales a lo largo de la sección deben equilibrar la fuerza axial  $N$  y al momento flector  $M$ . Tomando momentos respecto al centro de gravedad de la sección, las ecuaciones de equilibrio quedan:

$$\begin{aligned} N &= N_c(x) + A_s \sigma_s(x) + A'_s \sigma'_s(x) + A_p \sigma_p(x) \\ M &= N_c(x)(h_{cg} - z_c(x)) + A_s \sigma_s(x)(h_{cg} - d) + A'_s \sigma'_s(x)(h_{cg} - d') + A_p \sigma_p(x)(h_{cg} - d_p) \end{aligned} \quad (24)$$

donde  $h_{cg}$  es la posición del centro de gravedad de la sección – Figura 4 – con respecto a la fibra superior y  $z_c$  es la posición del centro de compresiones del hormigón también con respecto a la fibra superior, definida como:

$$z_c(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^{\lambda x} \xi b(\xi) d\xi}{\lambda x} & \text{si } 0 \leq x < h/\lambda \\ \int_0^{\lambda x} b(\xi) d\xi & \\ h_{cg} & \text{si } x \geq h/\lambda \end{cases} \quad (25)$$

#### IV. Diagramas RSD: introducción de las variables $A_p$ y $d_p$

Presentadas las ecuaciones de equilibrio en Eq. (24), la resolución del problema de diseño del armado pasivo de una sección en estado límite último – supuestos conocidos  $A_p$  y  $d_p$  – conlleva la determinación de la posición de la fibra neutra  $x$  y las áreas de armado pasivo superior  $A_s'$  e inferior  $A_s$ . Imponiendo equilibrio de momentos a nivel de las armaduras superior e inferior, Hernández-Montes et al. [1] expresan  $A_s'$  y  $A_s$  como función de  $x$ , de tal manera que se pueden representar gráficamente todas las soluciones de armado en función de la posición de la fibra neutra en los denominados diagramas RSD. Estos diagramas permiten la selección de la solución óptima – mínima – de armado pasivo.

Ahora bien, si el problema de diseño implica también la determinación de los parámetros  $A_p$  y  $d_p$ , dichos parámetros pueden ser introducidos en las ecuaciones de la metodología RSD, obteniendo:

$$A_s(x, A_p, d_p) = - \frac{M_d - N_d(h_{gc} - d') - N_c(x)(d' - z_c(x)) - A_p \cdot \sigma_p(x)(d' - d_p)}{\sigma_s(x)(d - d')} \quad (26)$$

$$A_s'(x, A_p, d_p) = \frac{M_d - N_d(h_{gc} - d') - N_c(x)(d - z_c(x)) - A_p \cdot \sigma_p(x)(d - d_p)}{\sigma_s'(x)(d - d')} \quad (27)$$

A través de la Eq. (1) el valor de  $A_p$  se puede expresar en función de la fuerza de pretensado inicial  $P_0$ . En este trabajo, los pares de valores  $A_p - d_p$  a introducir en las Eqs. (26) y (27) se determinarán a partir del diagrama de Magnel y haciendo uso de la representación RSD se obtendrá el mínimo de armado pasivo para cada uno de esos pares.

#### V. Metodología del procedimiento de optimización

Una vez explicados los diagramas de Magnel para secciones de HP, presentadas las consideraciones relativas al dimensionamiento en rotura de secciones en flexión compuesta así como los diagramas RSD con la inclusión de las variables  $A_p$  y  $d_p$ , en este apartado se expone el procedimiento de optimización ideado. La Figura 7 presenta esquemáticamente dicho procedimiento.

Conocidas la geometría del elemento, las acciones a las que se ve sometido el mismo y las características del hormigón de la sección, el diagrama de Magnel puede construirse mediante la representación gráfica de las inecuaciones presentadas en (12) – (15).

Dado que los cordones de pretensado se comercializan con áreas nominales concretas, la región válida del diagrama de Magnel se reducirá a pares de valores  $A_p - d_p$  discretos, es decir, puntos. Así pues, definido un conjunto de valores  $A_p - d_p$  relativos a un área nominal de pretensado,  $A_{pnom}$ , y a un paso determinado para el valor de la posición del pretensado,  $d_{pstep}$ , se seleccionan aquellos puntos que se encuentran dentro de la región válida de Magnel.

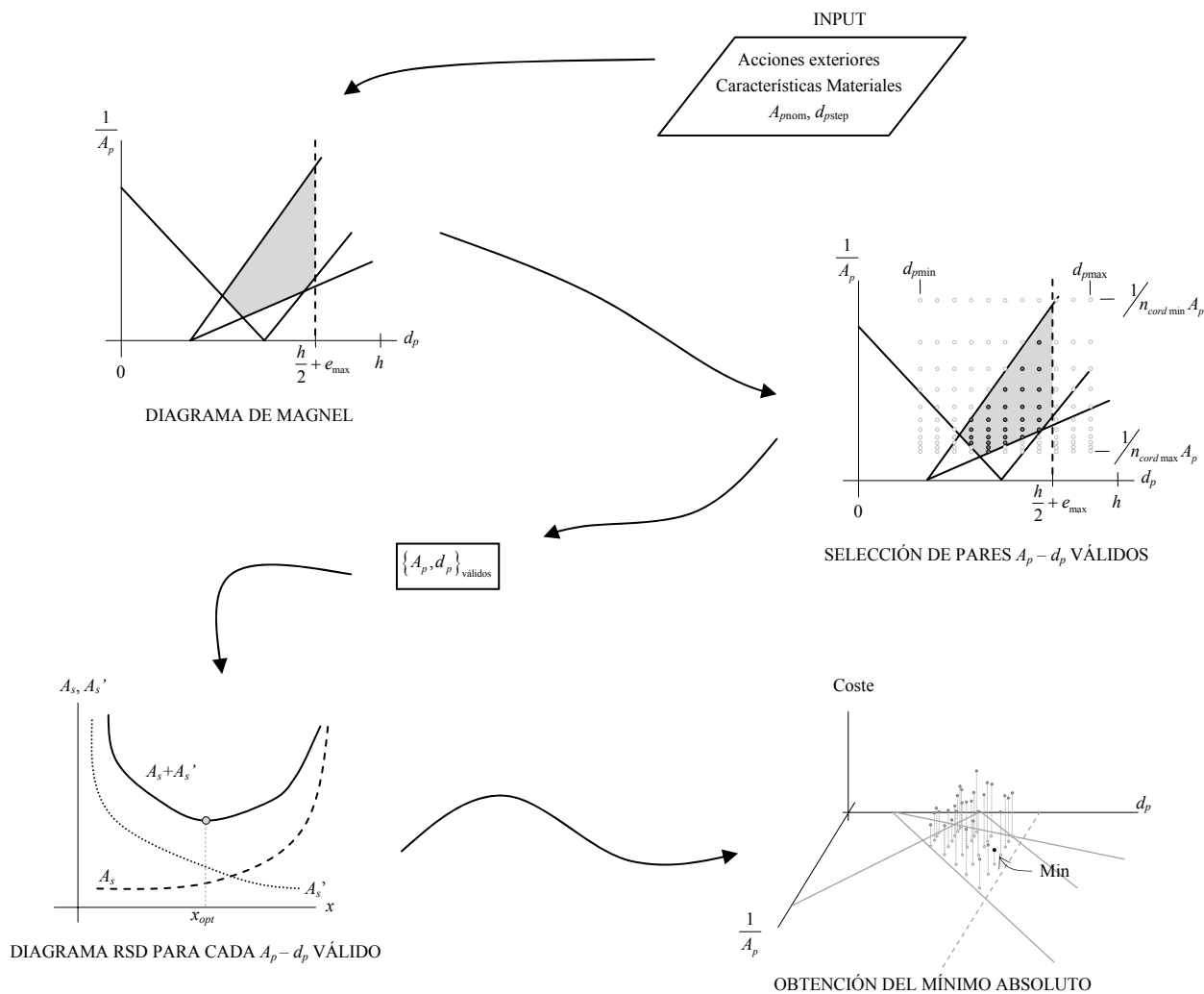


Figura 7. Esquema del procedimiento de optimización

Cada par  $A_p - d_p$  dentro de la región válida del diagrama de Magnel es ahora introducido en el procedimiento RSD – Eqs. (26) y (27) – obteniendo así unos valores óptimos de  $A_s$  y  $A_s'$ , sin tener en cuenta consideraciones de cuantía mínima. Finalmente, cuando todos los pares  $A_p - d_p$  han sido analizados, de entre todas las soluciones posibles se seleccionará aquella que minimice el coste total de armado, por metro lineal. Para determinar dicho coste, se han considerado los precios unitarios expuestos en la TABLA según la “Base de precios tipo para los proyectos de plataforma (BPGP)” de ADIF [7]. Los precios expuestos incluyen toda la mano de obra y medios auxiliares necesarios para la ejecución de las armaduras en obra.

Tipo Acero	Coste (€/mm <sup>2</sup> )
Pasivo	0,00683
Activo	0,02002

Tabla 1. Coste unitario considerados para los aceros pasivo y activo

## VI. Ejemplos

El procedimiento de optimización descrito se ha aplicado a tres casos. El elemento estructural considerado es similar al presentado en la Figura 1. Las características del acero pasivo se resumen en la Tabla 2 y las correspondientes al acero de pretensado en la Tabla 3.

Acero pasivo	B 500 S
$f_y$	500 MPa
$E_s$	200.000 MPa

Tabla 2. Características del acero pasivo a emplear en los ejemplos desarrollados

Acero activo	Y1860S7 $\Phi$ 15.2
Área cordón, $A_{pnom}$	140 mm <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} f_{pk} & 1.860 \text{ MPa} \\ E_p & 190.000 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Tabla 3. Características del acero activo a emplear en los ejemplos desarrollados

En los tres ejemplos presentados, el armado se optimiza en la sección central del elemento, la más solicitada. El paso para la variable  $d_p$  en el diagrama de Magnel –  $d_{pstep}$  – ha sido considerado igual a 10 mm en los tres ejemplos presentados a continuación.

### VI.1. Ejemplo 1

La Figura 8 muestra la geometría de la sección del Ejemplo 1 y el valor de los parámetros *input* al proceso.

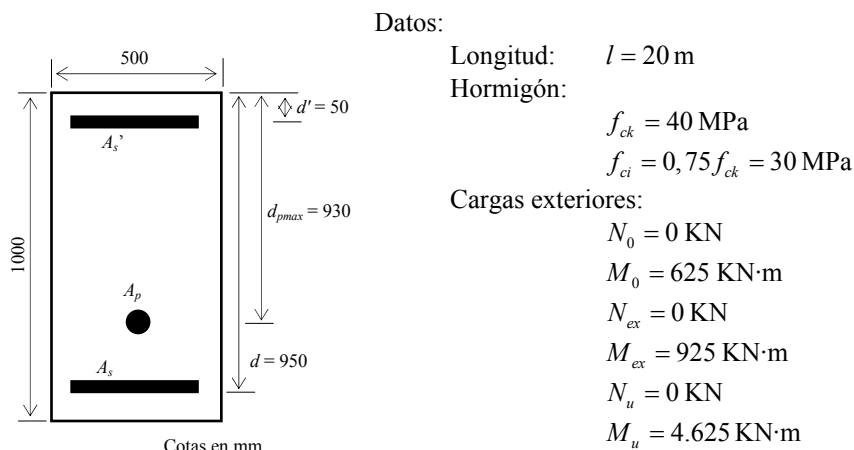


Figura 8. Sección e *input* para el Ejemplo 1

El diagrama de Magnel y todos los pares  $A_p - d_p$  generados se muestran en la Figura 9. Los pares  $A_p - d_p$  válidos son los que quedan dentro del área sombreada de la Figura 9. Cada uno de estos pares es introducido en las Eqs. (26) y (27) para obtener el mínimo armado pasivo necesario para soportar el momento  $M_u$ . El coste por metro lineal de armado obtenido para cada combinación  $A_p - d_p$  se presenta gráficamente en la Figura 10 para todos los pares  $A_p - d_p$  válidos. En la Fig. 10 el plano horizontal del gráfico se corresponde con el diagrama de Magnel de la Figura 9. La solución encontrada como óptima se presenta en la Tabla 4 y su diagrama RSD correspondiente en la Figura 11.

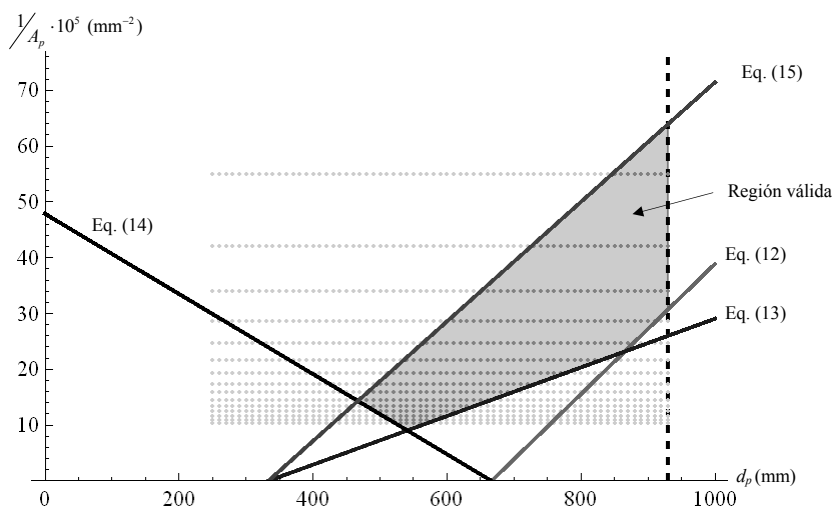


Figura 9. Diagrama de Magnel del Ejemplo 1

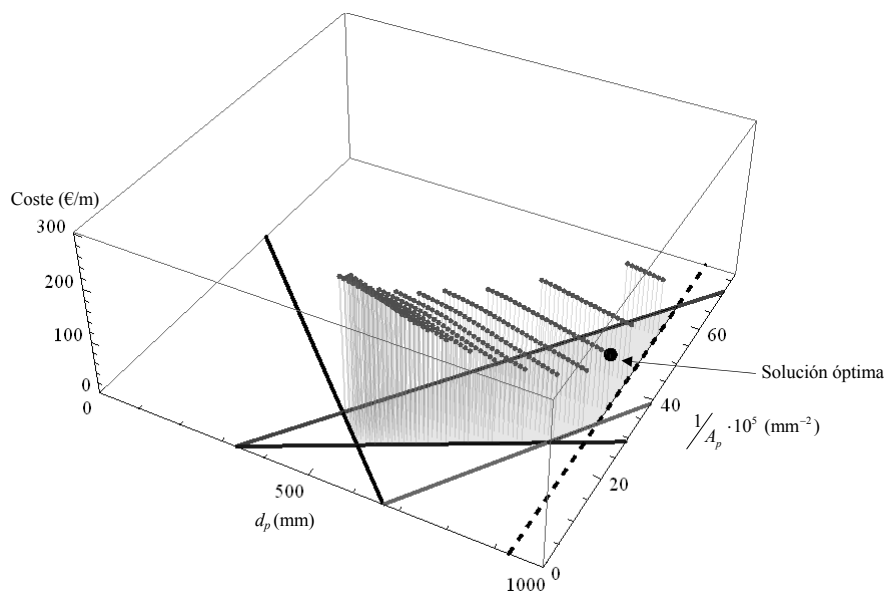


Figura 10. Representación gráfica del coste de armado tras el RSD para los pares válidos  $A_p - d_p$

$d_p$ (mm)	$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	Nº cables	$x$ (mm)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$A_s'$ (mm <sup>2</sup> )	Coste (€/m)
930	2.940	21	451	3.640,5	4.218,18	111,304

Tabla 4. Solución de armado óptimo para el Ejemplo 1

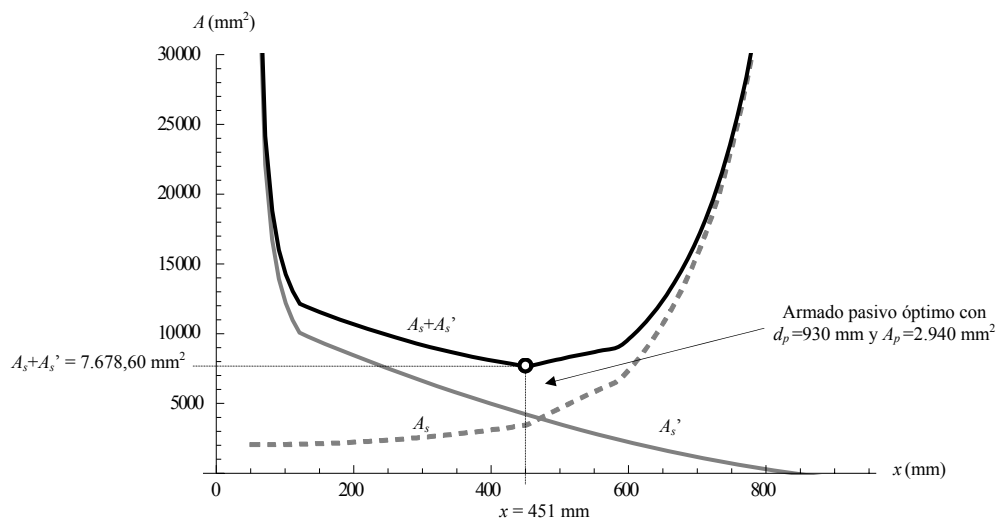
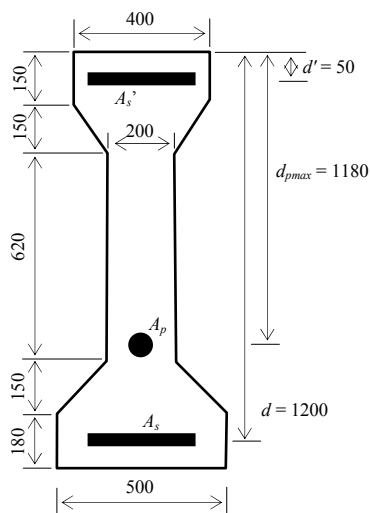


Figura 11. Diagrama RSD correspondiente a la solución óptima

Este primer ejemplo muestra la capacidad del método propuesto para lograr la optimización del armado. Dado que el momento solicitante en estado límite último es mucho mayor que los momentos en estado de servicio, se necesita disponer un área considerable de armadura pasiva. Además, puesto que el pretensado se sitúa por debajo del centro de gravedad de la sección, el área de armadura pasiva superior ha de ser mayor que el de armadura inferior.

### VI.2. Ejemplo 2

La Figura 12 muestra la geometría de la sección del Ejemplo 2, esta vez una sección en doble T y el valor de los parámetros *input* al proceso.



Cotas en mm

Datos:

Longitud:  $l = 25 \text{ m}$

Hormigón:

$$f_{ck} = 45 \text{ MPa}$$

$$f_{ci} = 0,75 f_{ck} = 33,75 \text{ MPa}$$

Cargas exteriores:

$$N_0 = 0 \text{ KN}$$

$$M_0 = 726 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$N_{ex} = 0 \text{ KN}$$

$$M_{ex} = 1.807 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$N_u = 0 \text{ KN}$$

$$M_u = 3.563 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

Figura 12. Sección e input para el Ejemplo 2

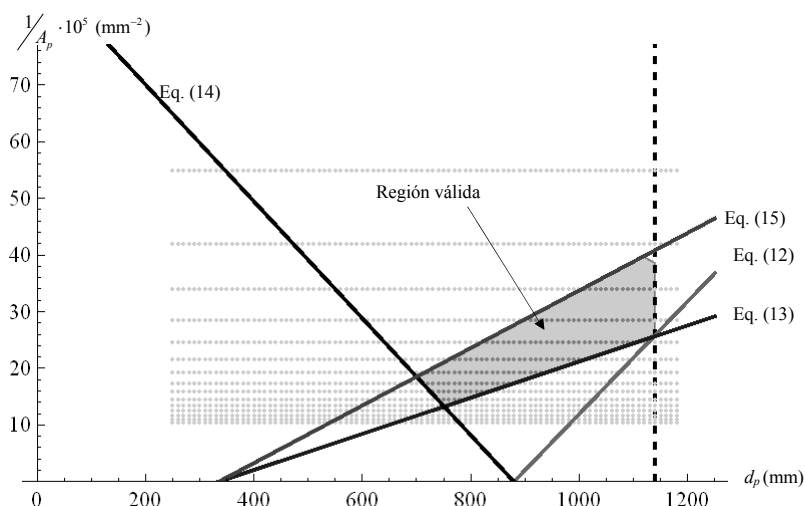


Figura 13. Diagrama de Magnel del Ejemplo 2

Comparando la Figura 9 con la Figura 13 se observa cómo la región válida en el diagrama de Magnel del Ejemplo 2 es más reducida que la del Ejemplo 1. En la Figura 14 se presentan nuevamente el análisis de coste de las soluciones de armado obtenidas mediante la introducción en el RSD de todos los pares  $A_p - d_p$  válidos de la Figura 13. Los valores de la posición y área de pretensado, posición de la fibra neutra y de las áreas de armadura pasiva inferior y superior se resumen en la Tabla 5.

La Figura 15 muestra el diagrama RSD correspondiente a la solución óptima. Se observa cómo en este caso no se precisa armadura pasiva inferior. Además, el rango de posiciones de la fibra neutra  $x$  donde existen soluciones de armado pasivo es bastante más reducido que en el Ejemplo 1. En este caso la diferencia entre los momentos máximos en estado de servicio y último no es tan acusada. En este ejemplo, la excentricidad del pretensado correspondiente a la solución óptima es la máxima permisible y el área de armadura pasiva necesaria es muy pequeña –de hecho la armadura inferior no es necesaria y la superior se resolvería con 5 barras de diámetro 10 mm ( $392,70 \text{ mm}^2$ )–.



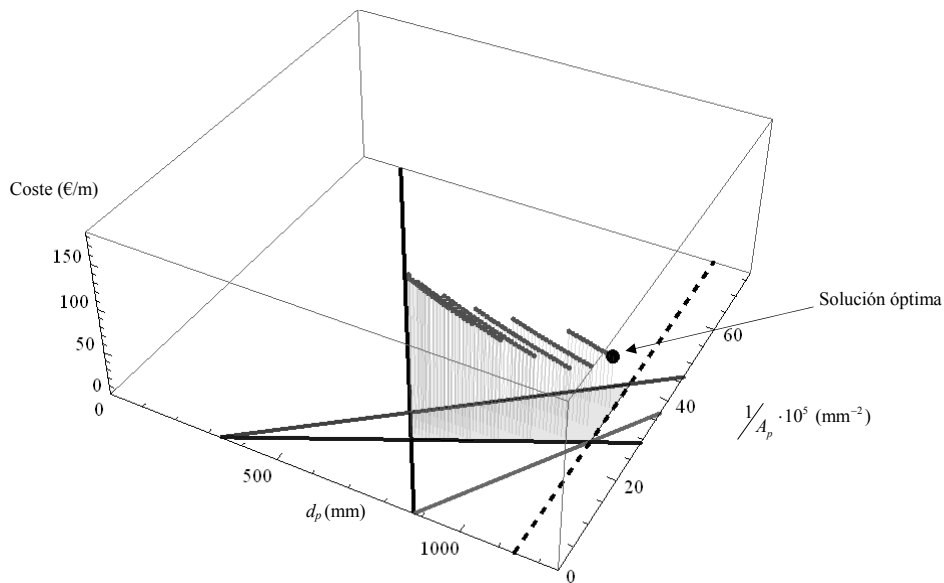


Figura 14. Representación gráfica del coste de armado tras el RSD para los pares válidos  $A_p - d_p$

$d_p$ (mm)	$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	Nº cables	$x$ (mm)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$A_s'$ (mm <sup>2</sup> )	Coste (€/m)
1.130	2.940	21	626	0,00	348,09	61,236

Tabla 5. Solución de armado óptimo para el Ejemplo 2

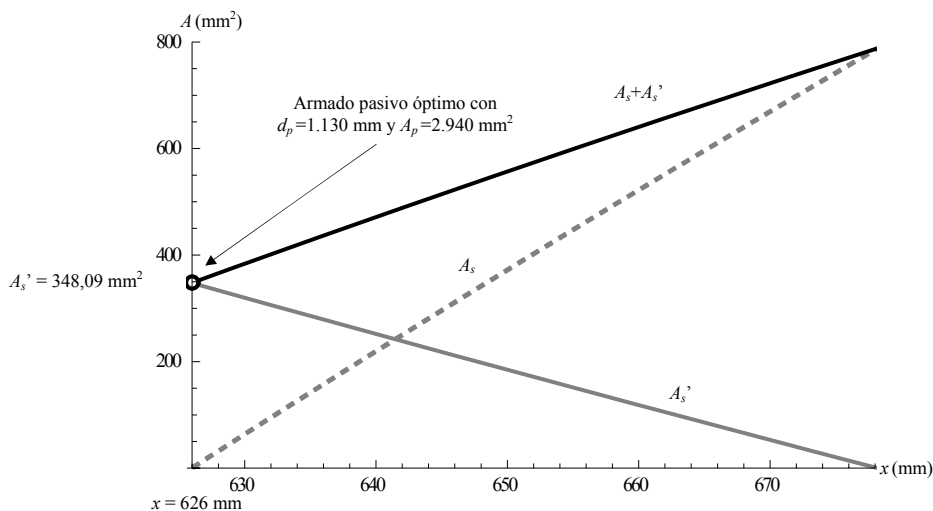


Figura 15. Diagrama RSD correspondiente a la solución óptima

### VI.3. Ejemplo 3

El tercer ejemplo desarrollado en este trabajo es similar al anterior y se pretende analizar el efecto que tiene el cambio de geometría hacia una sección más esbelta en el armado óptimo. La Figura 16 muestra la geometría de la sección y los datos de entrada del problema.

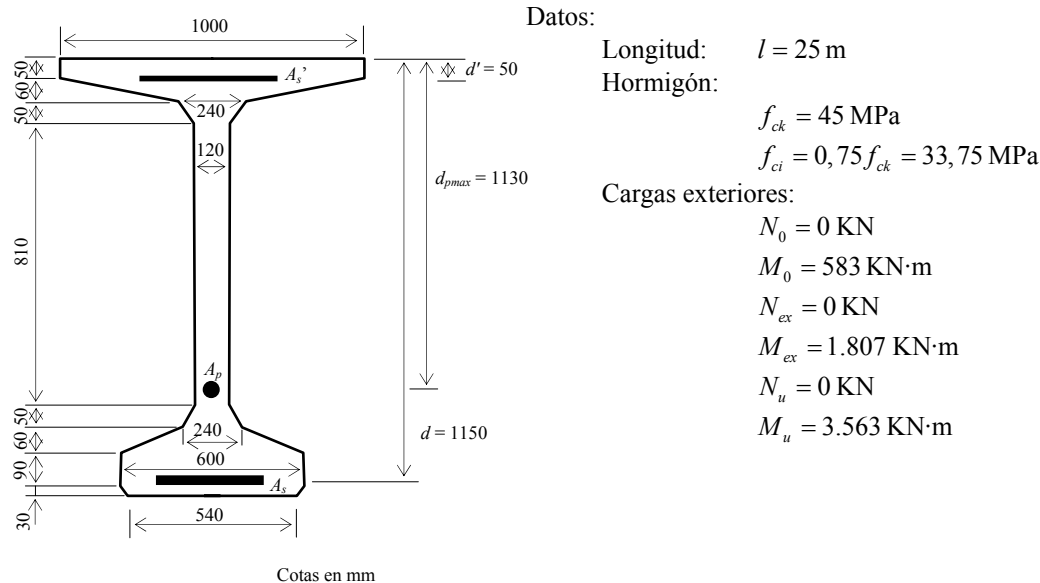


Figura 16. Sección e *input* para el Ejemplo 3

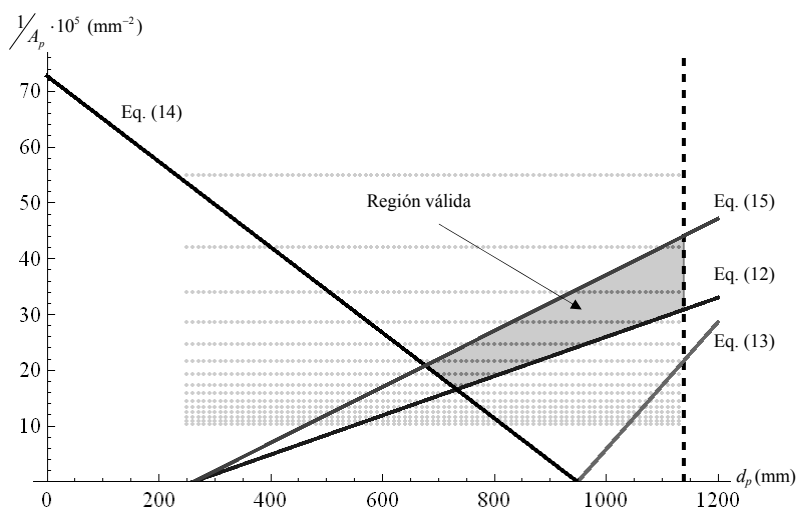


Figura 17. Diagrama de Magnel del Ejemplo 3

El diagrama de Magnel para este caso – Figura 17 – es similar al del Ejemplo 2. En este caso, el corte entre el límite impuesto por la Eq. (12) y el límite impuesto por la Eq. (13) se produce para una profundidad del pretensado que supera el límite impuesto por el recubrimiento mínimo – línea discontinua vertical en la Figura 17 –.

Dado que la región válida en el diagrama de Magnel es más reducida que en anteriores casos, el número de pares  $A_p - d_p$  a analizar con el procedimiento RSD es menor. El resultado óptimo se produce, según se observa en la Figura 18 para la profundidad máxima del pretensado y el mínimo valor de  $A_p$  de los pares analizados. Los valores de la posición y área de pretensado, de la fibra neutra y de las áreas de armadura pasiva inferior y superior se resumen en la Tabla 6.

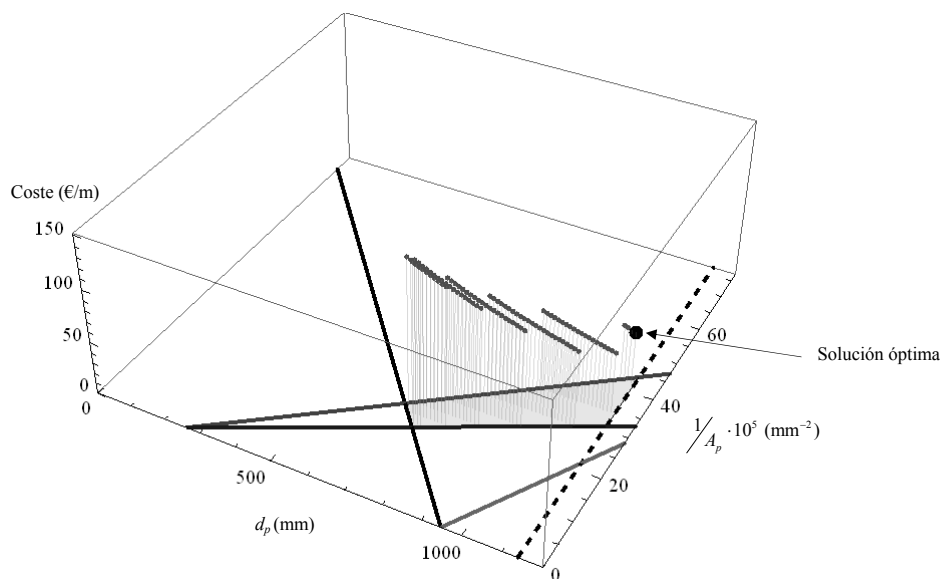


Figura 18. Representación gráfica del coste de armado tras el RSD para los pares válidos  $A_p - d_p$

$d_p$ (mm)	$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	Nº cables	$x$ (mm)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$A_s'$ (mm <sup>2</sup> )	Coste (€/m)
1.130	2.380	17	551	17,57	475,06	51,012

Tabla 6. Solución de armado óptimo para el Ejemplo 3

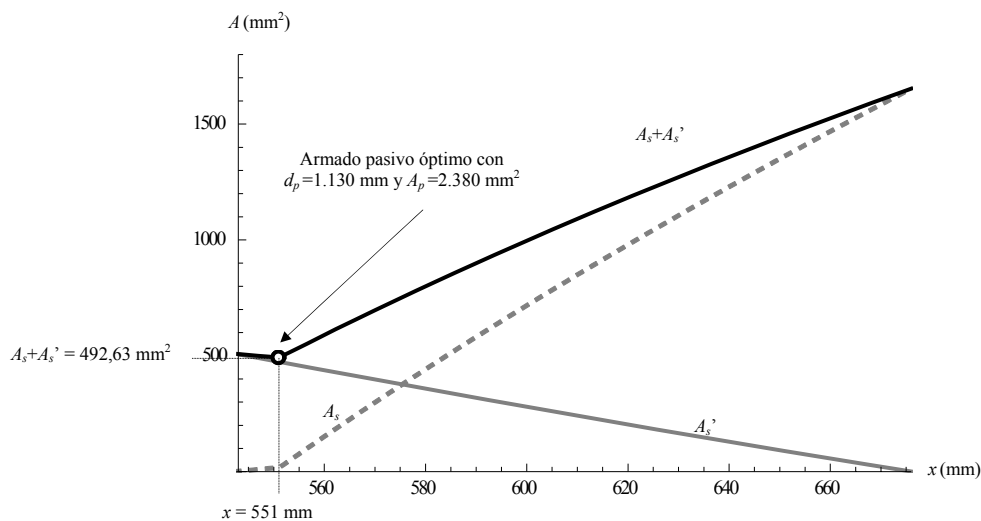


Figura 19. Diagrama RSD correspondiente a la solución óptima

En la Figura 19 se ha representado el diagrama RSD correspondiente al par  $A_p - d_p$  de armado óptimo. En este caso la posición de la fibra neutra para la cual el área necesaria del acero pasivo es mínima no corresponde al primer valor del rango donde existen soluciones válidas, como sucedía en el caso anterior.

Comparando los Ejemplos 2 y 3 se deduce que el cambio de geometría de la sección ha permitido soportar los mismos niveles de carga con una menor sección transversal y menos área de acero, tanto activo como pasivo (mientras que en el Ejemplo 2, la sección transversal – en términos brutos – es de 371.500 mm<sup>2</sup>, la sección empleada en el Ejemplo 3 es de 298.712 mm<sup>2</sup> – un 20% menor que la anterior – y el acero activo ha pasado de 2.940 a 2.380 mm<sup>2</sup>). El acero pasivo necesario se ha visto ligeramente incrementado – 492,63 mm<sup>2</sup> frente a 348,09 mm<sup>2</sup> –. Es importante tener en cuenta que el precio del acero activo es mayor que el del acero pasivo no sólo debido al coste del material en sí mismo si no por los medios técnicos necesarios para su colocación, que dependerán de si el elemento es preteso o posteso (Gatos de tesado, cuñas, vainas, lechada, etc). Así pues,

el ahorro por metro lineal de armado es de aproximadamente 10€ al emplear la sección del Ejemplo 3 en vez de la propuesta en el Ejemplo 2.

## VII. Conclusiones

Los métodos tradicionales de diseño de elementos de hormigón armado y pretensado se han visto superados por las nuevas técnicas de cálculo numérico, la capacidad computacional y los nuevos planteamientos de optimización a la hora de decidir las cuantías de armado. Aunando las nuevas posibilidades con el diseño del pretensado se ha aplicado la metodología de los diagramas RSD al método de diseño por medio de los diagramas de Magnel para la sección más desfavorable de una viga simplemente apoyada, pudiendo así obtener el valor mínimo de acero necesario en la etapa de diseño.

Con la metodología desarrollada se agrupa el diseño en estado límite último y el estado límite de servicio para la sección más desfavorable, pudiendo así optimizar el área total de acero – entendido como la suma de  $A_s + A_s' + A_p$  – y, por consiguiente, conseguir un ahorro económico al obtener el valor óptimo de entre todas las soluciones posibles.

Se han planteado tres casos a modo de ejemplo, con input distintos, mostrando los valores óptimos de posición del pretensado,  $d_p$ , áreas de acero pasivo  $A_s$  y  $A_s'$  y de área de acero activo  $A_p$ . Observando los resultados obtenidos para es evidente que esta metodología es una herramienta útil y versátil con la que el ingeniero puede afrontar el problema de diseño de vigas pretensadas.

Aunque el procedimiento se ha presentado aquí para una sección concreta, la más solicitada, éste es extrapolable a otras secciones transversales de la viga lo que permitiría optimizar la posición del pretensado y el área total de acero a lo largo de toda la viga.

Puesto que los diagramas de Magnel no tienen en cuenta la presencia de la armadura pasiva, el procedimiento descrito en este artículo plantea realizar un "feedback" en el procedimiento tradicionalmente seguido para situar la armadura activa y determinar el área necesaria de la misma de manera que la existencia del acero pasivo sea también considerada.

Aunque este trabajo se ha desarrollado para vigas, la metodología presentada es general y, por tanto, extrapolable a otros elementos estructurales.

## Agradecimientos

El presente trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España. El primer autor es becario predoctoral del anterior Ministerio (Beca FPU AP 2010-3707).

## Bibliografía

- [1] Hernández-Montes, E.; Gil-Martín, L.M.; Aschheim M. Design of concrete members subjected to uniaxial bending and compression using reinforcement sizing diagrams. *ACI Structural Journal* 102 (2005) 150–158.
- [2] Hernández-Montes, E.; Gil-Martín, L.M.; Pasadas-Fernández, M.; Aschheim M. Theorem of optimal reinforcement for reinforced concrete sections. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 36 (2008) 509–521.
- [3] López-Martín, D; Carbonell-Márquez, J.F.; Gil-Martín, L.M.; Hernández-Montes, E. Eccentricity-based optimization procedure for strength design of RC sections under compression and in plane bending moment. *Journal of Structural Engineering ASCE*. Aceptado para publicación, doi: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000794
- [4] Hurst, M.K. *Prestressed Concrete Design, 2<sup>nd</sup> Ed.* E&FN Spon, (1998).
- [5] *EN-1992-1-1. Eurocode 2: Design of Concrete Structures- Part 1-1. General Rules and Rules for Buildings.* European committee for Standardization, (2004). Bruselas.
- [6] Gil-Martín, L.M.; López-Martín, D.; Hernández-Montes, E.; Aschheim, M. Dimensionamiento en rotura a flexión de secciones de hormigón armado. Un planteamiento compacto. *Informes de la Construcción* 64(528) (2012) 497-505.

- [7] ADIF. *Sistema de Gestión. Tomo V: Base de precios tipo general para los proyectos de plataforma. Edición junio 2011, versión 2*. Administrador de Infraestructuras Ferroviarias, (2011). Madrid.

## **Análisis del comportamiento de tableros de carreteras de luces cortas ejecutados con placa alveolar pretensada**

*Valentín Moreno Padilla<sup>1</sup>, Luís Albajar Molera<sup>2</sup>, Carlos Zanuy Sánchez<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, Spain. E-mail address: vmorenopadilla @ yahoo.es*

<sup>2</sup>*Department of Continuum Mechanics and Structures ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, Spain. E-mail addresses: {czs, lalbajar} @ caminos.upm.es*

---

### **Resumen**

El comportamiento de la placa alveolar se conoce de una manera muy precisa para un determinado ámbito de aplicación, los forjados. Las similitudes entre los forjados y los tableros de obras de paso de luces cortas son evidentes pero los métodos tradicionales utilizados para el cálculo de estos últimos no aportan suficiente precisión. Se propone un nuevo método de modelización híbrido que permite cuantificar de forma más realista el mecanismo resistente de los tableros demostrando la buena correlación con el comportamiento observado en la realidad.

### **Palabras clave**

Puentes, placa alveolar, juntas longitudinales, torsión.

### **I. Introducción**

La aplicación de placas alveolares pretensadas en ciertos ámbitos de la obra pública, a pesar de su aplicación limitada, es una práctica que presenta una creciente demanda debido a la posibilidad de aprovechar las ventajas del sistema. Dinteles de pasos inferiores, tableros de obras de paso de luces cortas, elementos de contención de tierras o incluso elementos transversales utilizados a modo de prelosas en tableros de puentes de luces medias y grandes son sólo algunos de los ejemplos que muestran la versatilidad del sistema para adaptarse a diferentes esquemas de sollicitación.

Tradicionalmente se ha supuesto que el comportamiento de este tipo de tableros es inadecuado para hacer frente a sobrecargas móviles de tráfico por dos motivos fundamentalmente. Las placas alveolares no tienen apenas capacidad resistente a torsión y, la junta existente entre capa de reparto y placas alveolares es incapaz de transmitir las tensiones rasantes porque no se puede colocar armadura de cosido entre ambos elementos.

A pesar de las posibles causas de fallo citadas anteriormente, el comportamiento en servicio observado en este tipo de tableros es más que satisfactorio.

La explicación de la aparente contradicción entre las predicciones teóricas y las observaciones reales puede obedecer a dos razones fundamentales. Por una parte, técnicas de modelización incapaces de representar los elementos y variables de gobierno de este tipo de tableros pueden conducir a la obtención de esfuerzos distorsionados que no se corresponden con la realidad del mecanismo resistente. Por otra, la intensidad de tráfico pesado que en general soporta este tipo de tableros no es muy elevada porque la ubicación de los mismos suelen ser entornos alejados de vías principales de comunicación tales como zonas rurales o carreteras de montaña. Esto hace pensar que la magnitud de los esfuerzos solicitantes en servicio no alcanza el umbral de diseño prescrito en la normativa. Aún así, no parece razonable establecer la hipótesis de que estas estructuras funcionan por la aleatoria y aparentemente favorable casuística de restricción de tráfico a que están sometidas.

La modelización tradicional de este tipo de estructuras se ha basado en el método del emparillado plano. Tanto las placas alveolares como la capa de reparto se definen mediante elementos de tipo barra y las juntas entre placas se representan mediante rótulas, o mejor dicho, cuasi-rótulas que transmiten los cortantes verticales y momentos flectores muy bajos.

Como alternativa al método del emparillado se propone un método de modelización híbrido que contiene elementos finitos de tipo lámina para representar la capa de reparto y elementos finitos de tipo barra para representar las placas alveolares. Ambos elementos se conectan de forma rígida mediante la imposición de condiciones de compatibilidad. Las juntas longitudinales entre placas se representan como elementos de contacto no lineales.

Se analiza un tablero tipo mediante este método y se pone de manifiesto que los esfuerzos de torsión sobre las placas quedan prácticamente reducidos a cero gracias al excelente trabajo de la placa de reparto y a la consideración en el modelo del efecto del espesor de las placas alveolares. Se corrobora por tanto el buen comportamiento observado en la práctica.

## II. Motivación y objetivos

La hipótesis fundamental de trabajo es demostrar la adecuada aptitud del sistema de placas alveolares pretensadas para conformar tableros de obras de paso de carreteras de luces cortas sometidos a cargas de tráfico.

Entender el mecanismo resistente de este tipo de tableros es fundamental para poder explicar el comportamiento observado en la práctica. Es imprescindible conocer la morfología básica y las disposiciones constructivas habituales para establecer las principales variables de gobierno. Igualmente es necesario establecer esquemas de modelización adecuados basados en los últimos avances del conocimiento para obtener solicitaciones fiables.

## III. Morfología básica de los tableros de placa alveolar

Los tableros están formados por dos elementos fundamentales. Placa alveolar de hormigón pretensado y capa de reparto de hormigón armado.

Los elementos de la superestructura no difieren en general del resto de tipos de tableros. Pretil, capa de rodadura, impostas, iluminación y drenaje pueden asimilarse a los habitualmente empleados en otros tipos de obras de paso.

Las secciones tipo (Fig 1) suelen tener del orden de 8 a 10 m de anchura para poder albergar cómodamente dos carriles con anchuras variables entre 2 y 3 m habitualmente y una o dos aceras de aproximadamente 1 m de anchura además del espacio para los elementos de contención de vehículos y peatones.

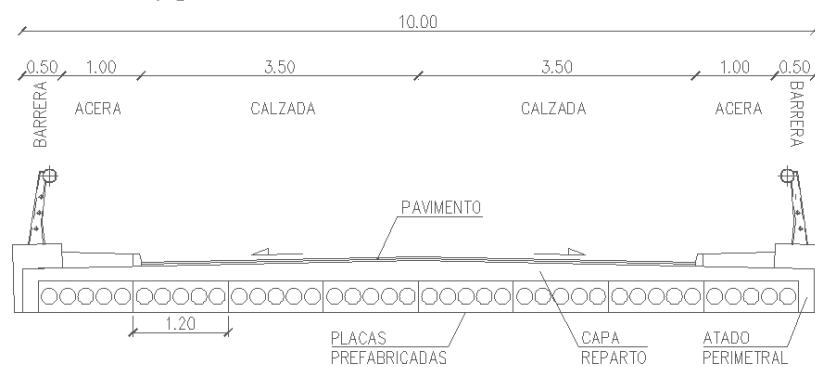


Figura 1. Sección tipo

Los estribos del puente pueden ser ejecutados in situ ó prefabricados. En este último caso se pueden emplear igualmente placas alveolares pretensadas en posición vertical para contención de tierras. También es común el empleo de escamas para formar macizos de suelo reforzado. Las disposiciones constructivas habituales (Fig 2) suelen ser tramos isostáticos únicos con luces aproximadas de hasta 15 m. Los cantos habituales de las placas suele estar entre 35 y 50 cm y los espesores de la capa de reparto varían entre 10 y 20 cm[1]. No se puede hablar en principio de relaciones canto/luz como tales puesto que en muchas ocasiones se emplea el mismo canto de placa para un rango de luces determinado. Estas dimensiones suelen ser suficientes para salvar pequeños cauces, caminos o incluso carreteras secundarias con cunetas y arceles.

En el caso de disponer varios vanos (Fig 2), las pilas suelen adoptar la configuración de pórticos o tabiques para recibir a las placas mediante apoyos continuos evitando de esta forma concentraciones de tensiones. Los apoyos se materializan mediante bandas elastoméricas corridas sin zunchar. También se pueden disponer una serie de apoyos discretos bajo cada placa.



Figura 2. Disposiciones constructivas habituales

La técnica empleada en el caso de la ejecución de tableros de obras de paso de carreteras es herencia directa del ámbito de los forjados de edificios de habitación. Sobre los estribos previamente construidos se disponen una serie de placas yuxtapuestas longitudinalmente según el eje de la obra. Sobre las placas se coloca una capa de reparto de hormigón vertido in situ que, a priori, tiene una doble misión. Por una parte se encarga de transmitir transversalmente entre placas los esfuerzos provocados por acciones verticales consiguiendo de esta forma un diafragma de reparto horizontal como si de un tablero de vigas se tratase; por otra parte actúa como diafragma horizontal frente a acciones horizontales garantizando de esta forma el trabajo uniforme del conjunto.

#### **IV. Modelización de forjados de placa alveolar pretensada**

En la actualidad existen básicamente tres posibilidades para la determinación de los esfuerzos sobre un forjado.

##### ***IV.1 Modelos basados en ábacos***

Es el sistema tradicional prescrito por EHE-08 [2] y EN 1168 CEN/Tc229 [3]. Se basa en unos gráficos que permiten obtener la distribución transversal de cargas de un forjado, sin capa de reparto, formado por cinco placas alveolares cuyo trabajo se supone conjunto mediante la teoría de la elasticidad. Según esta teoría, para poder considerar el trabajo conjunto de las placas, es necesario limitar los desplazamientos laterales.

Las placas se modelizan como elementos isótropos o anisótropos y las juntas longitudinales se representan mediante rótulas a modo de bisagras permitiendo el libre giro transversal de una placa respecto a otra. De esta forma se transmiten los cortantes de una placa a otra pero no los momentos flectores transversales.

##### ***IV.2 Modelos de elementos finitos tipo losa***

Basándose en la teoría de la elasticidad, las instrucciones [2] y [3] permiten modelizar las placas alveolares como losas isótropas o anisótropas. En ningún caso se hace referencia a la representación de la capa de reparto. Tan sólo se establecen recomendaciones sobre las condiciones geométricas que tiene que cumplir esta.

Para la modelización se suelen emplear elementos finitos de tipo lámina cuya formulación permite tener en cuenta tanto los esfuerzos perpendiculares al plano medio del elemento como los contenidos en el mismo. También permiten representar el comportamiento ortótropo de las placas.

##### ***IV.3 Modelos de elementos finitos tipo barra***

El elemento de tipo barra es el más manejable y accesible por todos los programas comerciales. Una placa alveolar puede ser representada perfectamente mediante una serie de barras longitudinales dispuestas según la directriz de la misma. Un forjado puede ser representado por una serie de barras yuxtapuestas separadas la distancia entre ejes de placas.

Las placas alveolares están en la práctica conectadas entre sí mediante juntas longitudinales que se hormigonan in situ. Normalmente las juntas están fisuradas y tradicionalmente se asume que actúan como rótulas. Como consecuencia, la distribución de las cargas aplicadas sobre las placas introduce momentos torsores sobre las mismas que a su vez introducen fuerzas de contacto horizontales sobre las juntas longitudinales (Fig 3) [4].



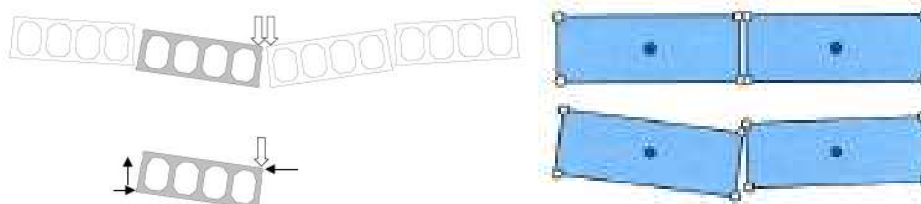


Figura 3. Mecanismo de distribución transversal. Cortesía de Lundgren

Las fuerzas de contacto horizontales provocan a su vez un momento torsor de sentido contrario al que provocan las acciones exteriores precisamente porque las juntas entre placas están hormigonadas. Este efecto (efecto del espesor) tiene una gran influencia sobre el comportamiento de los forjados y es de vital importancia su inclusión en los modelos de cálculo. Para ello, Lundgren [5] define la sección transversal de cada placa mediante un único elemento de tipo barra alineada con la directriz. Además, una serie de nodos llamados nodos esclavos se posicionan en las esquinas de la sección transversal (Fig 3). Estos nodos se unen a los nodos de la directriz de forma que, de cara a las deformaciones y giros de la sección transversal, se asumen dos hipótesis básicas de funcionamiento; Navier-Bernoulli (planeidad de secciones) y Saint Venant (torsión sin distorsión).

#### **IV.4 Correlación entre los distintos tipos de modelos**

Para establecer la precisión del modelo de Lundgren se han hecho estudios comparativos [5]. Se parte de un forjado formado por cinco placas alveolares sometido a una carga puntual de 100 kN centrada en el vano y en el ancho. Las luces estudiadas son 4, 7 y 14m. Dos modelos fueron analizados.

El primero de ellos es un modelo con elementos tipo barra basado en la discretización de Lundgren. A cada barra se le asigna las propiedades de una de una placa de 400 mm de canto y 1200 mm de ancho. Las juntas entre nodos contiguos se modelizaron con elementos de contacto no lineales que permitían compresiones y muy pocas tracciones.

Para el segundo modelo se emplearon elementos finitos de tipo lámina cuadriláteros de cuatro nodos con formulación de interpolación lineal. El espesor de los elementos fue de 354 mm para que la inercia principal a flexión coincidiera con la de la placa. La rigidez a flexión transversal se consideró la misma que la longitudinal. La rigidez a torsión se tomó igual a la del elemento finito sin minorar. En este segundo modelo las juntas se modelizaron como rótulas. Los resultados de ambos modelos fueron coincidentes. A su vez se contrastaron con las previsiones de los ábacos de reparto transversal propuestos por FIP[6] basados en la teoría de la elasticidad y las correspondencias de resultados entre los modelos y los ábacos resultaron excelentes.

#### **V. Modelización tradicional de tableros de placa alveolar pretensada**

A pesar de los medios disponibles en la actualidad y de la posibilidad de representar efectos tales como el espesor de las placas dentro de un forjado o tablero, el método del emparrillado[7] sigue estando en plena vigencia. Cada una de las placas alveolares se representa mediante dos vigas longitudinales del emparrillado representando cada una de ellas la mitad de la sección transversal más la parte tributaria de la capa de reparto[1]. A estas barras se les asignan las características de áreas e inercias a flexión y torsión correspondientes. Las barras transversales representan a la capa de reparto y suele haber dos tipos.

Barras transversales interiores situadas entre las dos barras longitudinales de cada placa que representan transversalmente a la placa más la capa de reparto y barras transversales exteriores que representan la junta entre placas.

A las barras transversales interiores se les asignan las áreas e inercias transversales del conjunto mientras que a las barras transversales exteriores sólo se les asignan las propiedades de la capa de reparto. De esta forma se recoge en cierta manera el efecto del debilitamiento que supone la junta entre placas y, aunque no llega a ser una rótula tal y como prescriben las normativas, es en cierto modo un punto débil para la flexión y el cortante.

De este tipo de modelos se obtienen de forma directa los esfuerzos principales de flexión y cortante tanto longitudinales como transversales, esfuerzos rasantes y cortantes en juntas. Los esfuerzos de torsión hay que procesarlos y trasladarlos al centro de gravedad de la sección compuesta.

Respecto a estos últimos hay que decir que el hecho de no poder representar el efecto del espesor de la placa[5] se traduce en la sobreestimación de los mismos. Esta sobreestimación puede provocar que la sollicitación a torsión de la placa sea superior, al menos teóricamente, a la baja capacidad resistente de la misma. Este hecho ha sido el que tradicionalmente ha provocado el rechazo respecto al empleo de placas alveolares pretensadas en tableros de obras de paso. Se plantea por tanto la necesidad de incorporar los últimos avances en el campo de la modelización para poder establecer magnitudes de las sollicitaciones más fiables.

## VI. Propuesta de modelización híbrida

Vistas las posibles carencias del método del empaillado plano para representar el trabajo real de torsión de las placas, se plantea un nuevo método de modelización para este tipo de tableros basado en las siguientes premisas.

- 1) Las placas alveolares se representan mediante elementos finitos de tipo barra.
- 2) Las juntas longitudinales entre placas se representan mediante elementos de contacto no lineales.
- 3) La capa de reparto se representa mediante elementos finitos de tipo lámina.

Las especiales características del modelo exigen de una conexión rígida entre los elementos descritos de forma que se cumplan las hipótesis de Navier-Bernouilli y Saint-Venant.

Como aplicación práctica se ha modelizado un tablero (Fig 4) con las siguientes características.

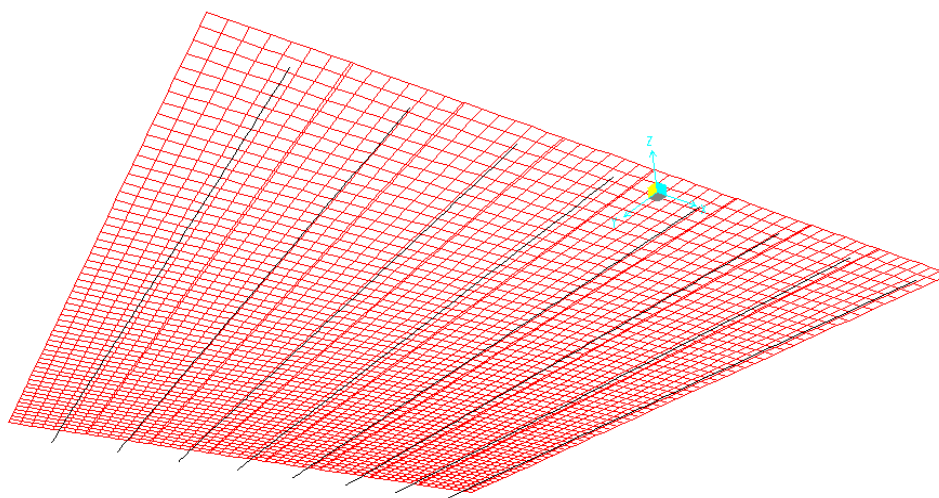


Figura 4. Vista general inferior del modelo

El tablero está compuesto por ocho placas alveolares de 120 cm de ancho y 40 cm de canto. La luz es de 12 m. Las características mecánicas de las placas se muestran en la tabla 1. El eje X es horizontal y el eje Y es vertical ambos pasando por el centro de gravedad de la sección.

Canto de placa (mm)	400
$f_{ck}$ (Mpa)	40
$f_{ct,k}$ (Mpa)	2,45
$E$ (Mpa)	30891
$A$ (m <sup>2</sup> )	0,2108
$I_x$ (m <sup>4</sup> )	$4,43 \cdot 10^{-3}$
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$2,80 \cdot 10^{-2}$
$I_t$ (m <sup>4</sup> )	$9,03 \cdot 10^{-3}$
$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	976.5

Tabla 1. Características de las placas

Las placas se disponen simplemente apoyadas en los extremos de forma que un extremo tiene impedidos los tres desplazamientos y dos de los giros permitiendo el giro principal de flexión

longitudinal. El extremo opuesto tiene las mismas coacciones pero además permite el desplazamiento longitudinal materializando de esta forma un apoyo móvil. La directriz de cada placa se discretiza mediante 60 barras de 20 cm de longitud. Asociados a cada nodo de la directriz se colocan cuatro nodos esclavos de forma que los cinco nodos cumplen simultáneamente dos condiciones de compatibilidad mencionadas.

Los elementos elegidos para la discretización de la directriz son barras de dos nodos que utilizan una formulación tridimensional de tipo viga-columna que incluye los efectos de flexión biaxial, torsión, deformación axial y deformaciones por cortante.

Las distancias entre nodos esclavos extremos de placas son de 3 cm para materializar el ancho de las juntas. Cada dos nodos están conectados por un elemento de conexión que permite desarrollar fuerzas de compresión perpendiculares al plano de la junta. No se permiten tracciones. En las direcciones vertical y longitudinal de la junta se permiten fuerzas tanto de compresión como de tracción.

Las rigideces de los elementos de conexión se muestran en la tabla 2.

Compresión junta (N/m <sup>3</sup> )	3x10 <sup>10</sup>
Tracción junta (N/m <sup>3</sup> )	0
Cortante vertical junta (N/m <sup>3</sup> )	1x10 <sup>9</sup>
Cortante longitudinal junta (N/m <sup>3</sup> )	1x10 <sup>9</sup>

Tabla 2. Características de las juntas

La junta representa una no linealidad geométrica. Además, es necesario representar la apertura de la misma de forma que se puedan tener en cuenta los fenómenos de retracción del hormigón vertido in situ, la edad de las placas y el tamaño de la junta. El valor de apertura de junta elegido es de 0,5 mm puesto que representa el límite superior recomendado para que los mecanismos de fricción y acunamiento se puedan desarrollar[8].

Las ecuaciones constitutivas de los elementos de contacto que representan las condiciones impuestas son:

$$1) F = k (d + \delta_{\text{apertura}}) \quad \text{si} \quad d + \delta_{\text{apertura}} < 0$$

$$2) F = 0 \quad \text{Resto de casos}$$

La capa de reparto se modeliza mediante elementos finitos de tipo lámina de cuatro nodos con formulación general de Kirchoff. Las características se muestran en la tabla 3.

Espesor del elemento (mm)	200
Dimensiones (mm <sup>2</sup> )	200 x 200
fck (Mpa)	25
E (Mpa)	27264

Tabla 3. Características de la capa de reparto

## VII. Bases de cálculo

### VII.1 Acciones

Las acciones empleadas en el modelo son:

Peso propio de placas (PP) = 5,27 kN/m.

Pretensado (P). Se ha introducido como una fuerza exterior de compresión de valor 976.5 kN y un momento negativo de valor -166 kNm en los extremos de las placas; no se han considerado pérdidas.

Peso propio de la capa de reparto (PPCRI) = 6 kN/m para las placas interiores y PPCRE = 9 kN/m para las placas exteriores debido al peso de los zunchos de atado.

Resto de carga permanente correspondiente a aceras (RCPA) = 5 kN/m<sup>2</sup>.

Resto de carga permanente correspondiente a barreras (RCPB) = 10 kN/m/barrera.

Resto de carga permanente correspondiente a un espesor de pavimento de 5 cm (RCP) = 1,2 kN/m<sup>2</sup>.

Sobrecarga de uso uniforme (SCU) = 4 kN/m<sup>2</sup> según IAP-98[9] .

Tren de cargas (CA) = 6 x 100 kN según IAP-98[9] .

Los valores de cálculo de las acciones para ELU y ELS se han obtenido de EHE-08 [2] .

### ***VII.2 Comportamiento de los materiales***

Los materiales se han caracterizado mediante su módulo de deformación longitudinal y transversal. Las secciones empleadas en los cálculos son brutas y el comportamiento es elástico y lineal en todo momento. Este planteamiento es compatible con la filosofía de los estados límite para el cálculo de esfuerzos y la posterior comprobación en servicio o rotura. No se han considerado efectos reológicos ni térmicos.

### ***VII.3 Proceso constructivo***

La secuencia de fases ha sido:

Fase-1. Pretensado (P) + (PP). Sección simple.

Fase-2. Montaje de Superestructura (RCP). Sección compuesta.

Fase-3. Sobrecarga de uso (SCU). Sección compuesta.

Fase-4A. Carro en centro de vano excéntrico (CA\_CV). Sección compuesta.

Fase-4B. Carro en apoyo excéntrico (CA\_AP). Sección compuesta.

Por simplicidad sólo se muestran los gráficos (Fig 5) correspondientes a la hipótesis del carro CA. La numeración de las placas es 1 a 8 siendo la placa 1 la más alejada del carro (CA).

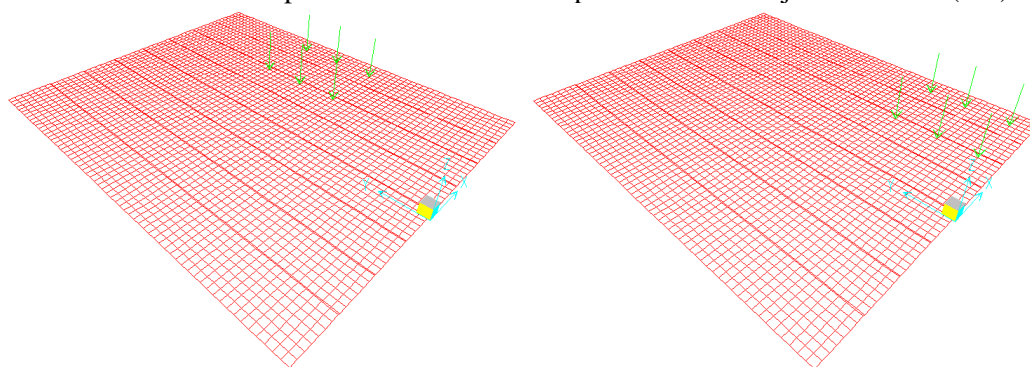


Figura 5. Posición de los carros (CA)

## **VIII. Resultados ELS**

De entre todos los ELS, el de fisuración por tensiones normales es el más representativo para cuantificar los aspectos de durabilidad y deformacionales de cara a poder explicar el buen comportamiento observado en la práctica.

### ***VIII.1 Fisuración por tensiones normales***

El siguiente gráfico (Fig 6) muestra el incremento tensional de la armadura de pretensado por efecto de las acciones exteriores para la combinación frecuente. Los valores positivos indican tracciones. Puede comprobarse que el pretensado de las placas extremas está por debajo de 200 Mpa por lo que la abertura de fisura no supera los 0,2 mm[2] . Las placas interiores se encuentran en descompresión.

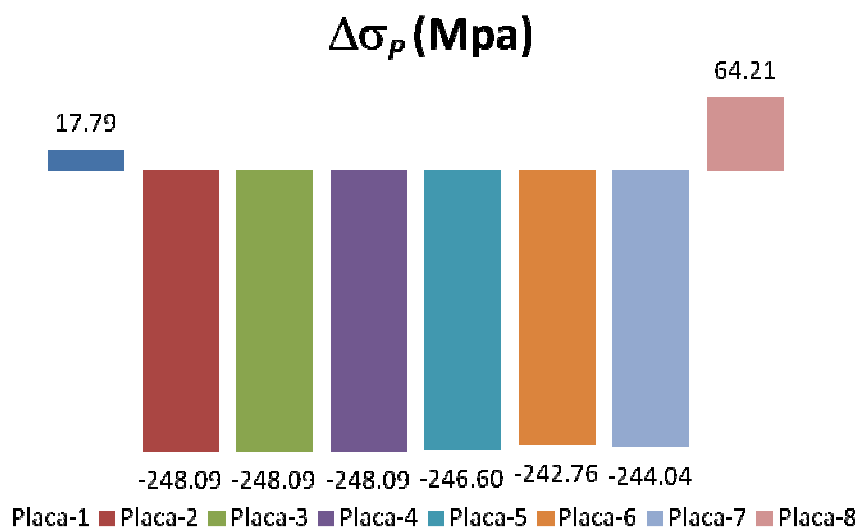


Figura 6. Incrementos tensionales en la armadura de pretensado

## IX. Resultados ELU

Se analizan los esfuerzos que tradicionalmente han supuesto un impedimento para su aplicación. Cortante, torsión, cortante longitudinal en juntas y rasante entre la capa de reparto y las placas.

### IX.1 Cortante

La comprobación del ELU de cortante se hace conforme al artículo 44 de EHE-08[2]. El gráfico adjunto (Fig 7) muestra la distribución de cortantes en las placas del modelo para la combinación de hipótesis correspondiente a la actuación de peso propio (PP), pretensado (P), resto de carga permanente (RCP), sobrecarga de uso extendida a todo el tablero (SCU) y carro excéntrico a un canto útil del apoyo (CA\_AP). También se ha representado la capacidad del alma  $V_{u2}$  y la reducida por efecto del torsor  $V_{u2n}$ .

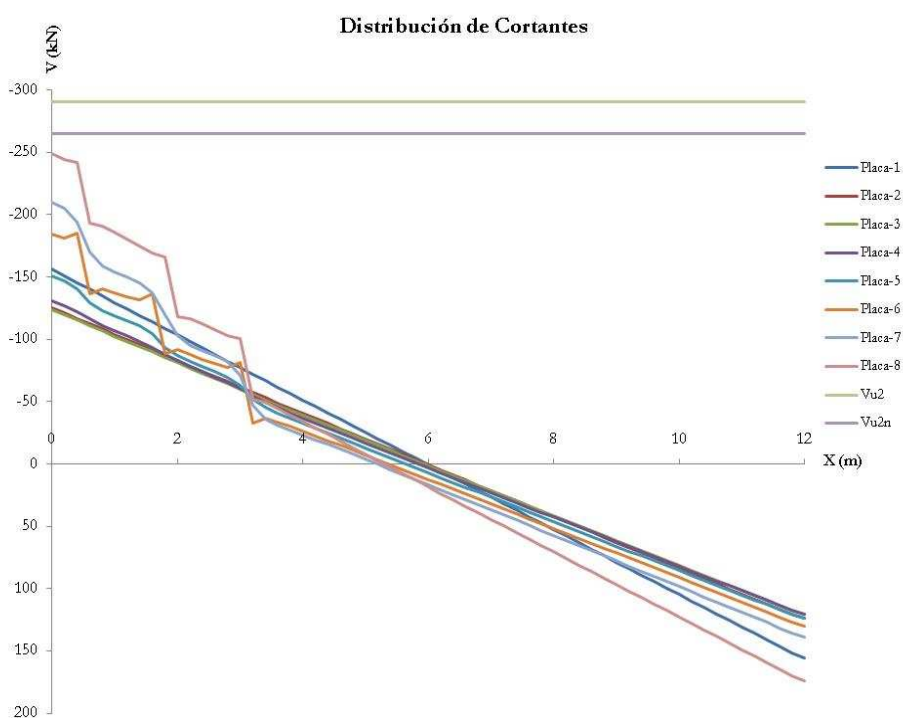


Figura 7. Distribución de cortantes en placas

En rigor, la capacidad  $Vu_2$  mostrada no sería una línea recta sino curva en función de la zona (fisurada o no) donde se encuentre la sección en estudio; pero en este caso no se pretende evaluar la capacidad de cada sección a cortante sino comparar con un valor límite.

Las placas 6, 7 y 8 acusan fuertemente la presencia del carro mostrando tres saltos en la ley de variación del cortante coincidentes con la posición de las cargas. Puede verse cómo a partir de la placa 5 se empieza a notar el efecto del carro como consecuencia de haber introducido en el modelo los elementos de conexión entre placas (juntas longitudinales). La distribución de cortantes sobre los apoyos no es muy uniforme, a pesar de la influencia de la capa de reparto, debido a la presencia del carro en las proximidades.

### **IX.2 Torsión**

El mecanismo resistente a torsión contenido en EHE-08 [2] (art. 45) responde a un esquema de bielas y tirantes basado en la obtención de una sección hueca equivalente. Precisa de tres elementos para su formación. Dos familias de armadura pasiva, cercos transversales y barras longitudinales, colocadas en el perímetro de la sección hueca equivalente para la materialización de los tirantes, y bielas de hormigón alojadas en las paredes de dicha sección.

Los elementos de una placa alveolar necesarios para la formación de la sección hueca equivalente son las tablas superior e inferior y las almas exteriores. Las bielas se pueden materializar fácilmente a través de las tablas superior e inferior así como de las almas exteriores. Los alambres o tendones de pretensado pueden hacer las funciones de tirantes longitudinales aunque incumplen una condición básica para la formación del mecanismo; no están distribuidos uniformemente sobre el perímetro de la sección. Los tirantes transversales no se pueden materializar por la imposibilidad de colocar cercos cerrados sobre el perímetro de la pieza durante el proceso de fabricación. Únicamente se puede confiar en la resistencia a tracción del hormigón para su formación pero esto limita fuertemente la capacidad resistente del mecanismo a torsión además de ser incongruente con las prescripciones de EHE-08[2] .

El método de comprobación para el caso particular de placas alveolares pretensadas está basado en la obtención de los flujos tensionales que provocan los momentos torsores sobre las paredes de la sección hueca equivalente[2] . Para ello, es muy útil obtener la curva característica que relaciona momentos torsores con giros.

El siguiente gráfico (Fig 8) muestra la distribución de momentos torsores en las placas del modelo para la combinación de hipótesis correspondiente a la actuación de peso propio (PP), pretensado (P), resto de carga permanente (RCP), sobrecarga de uso extendida a todo el tablero (SCU) y carro excéntrico a un canto útil del apoyo (CA\_AP). Con objeto de percibir con mayor precisión el efecto de la torsión sobre cada placa se ha prescindido de representar el valor límite del momento torsor de agotamiento para las placas ( $M_t=80$  kNm).

El gráfico muestra cómo las placas más alejadas de la zona de influencia del carro (placas 1 y 2) apenas reciben el influjo del mismo mientras que las placas 5 y 6 son las más solicitadas. Una vez más se pone de manifiesto el efecto de la inclusión de las juntas longitudinales en el modelo mediante elementos de contacto. Se corrobora la hipótesis de Lundgren[5] . El efecto del espesor de las placas hace que los momentos torsores sobre las mismas se vean disminuidos notablemente por la aparición de fuerzas en el contacto entre placas de sentido contrario a las introducidas por las fuerzas exteriores.

Por otra parte, debido al trabajo de la capa de reparto, la magnitud de los esfuerzos torsores es muy reducida y las placas se encuentran por tanto muy lejos de su capacidad de agotamiento. Esta es la principal característica del funcionamiento de los tableros de placa alveolar pretensada. La capa de reparto realiza un excelente trabajo aliviando a las placas de torsiones innecesarias y poniendo de manifiesto, en analogía con los tableros de vigas, que un espesor adecuado de la misma permite afrontar el trabajo de reparto transversal sin necesidad de implicar a las placas. De esta forma se pueden aprovechar éstas para el desempeño fundamental del trabajo de flexión longitudinal.

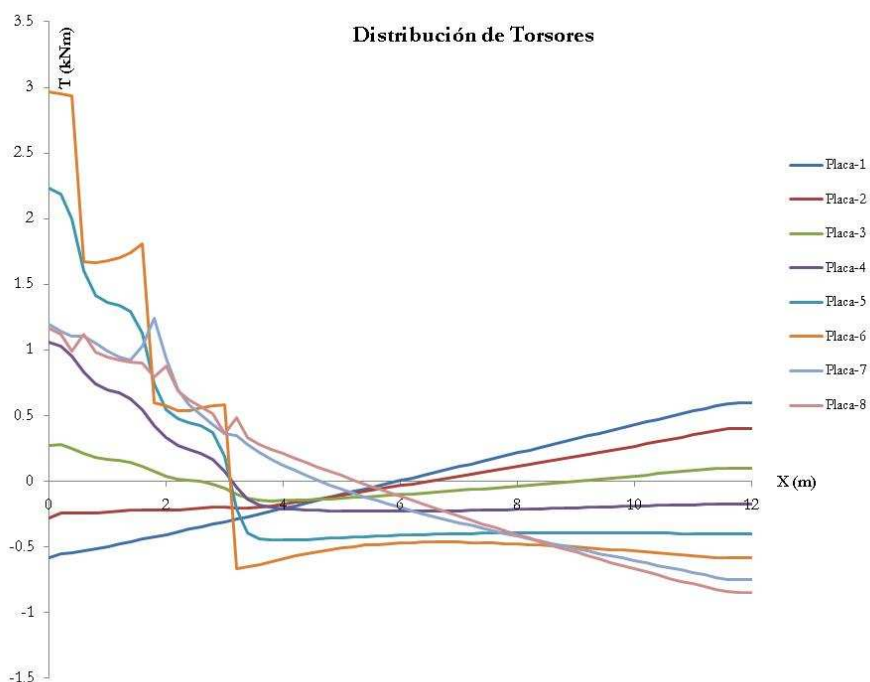


Figura 8. Distribución de torsores en placas

### IX.3 Cortante en juntas longitudinales

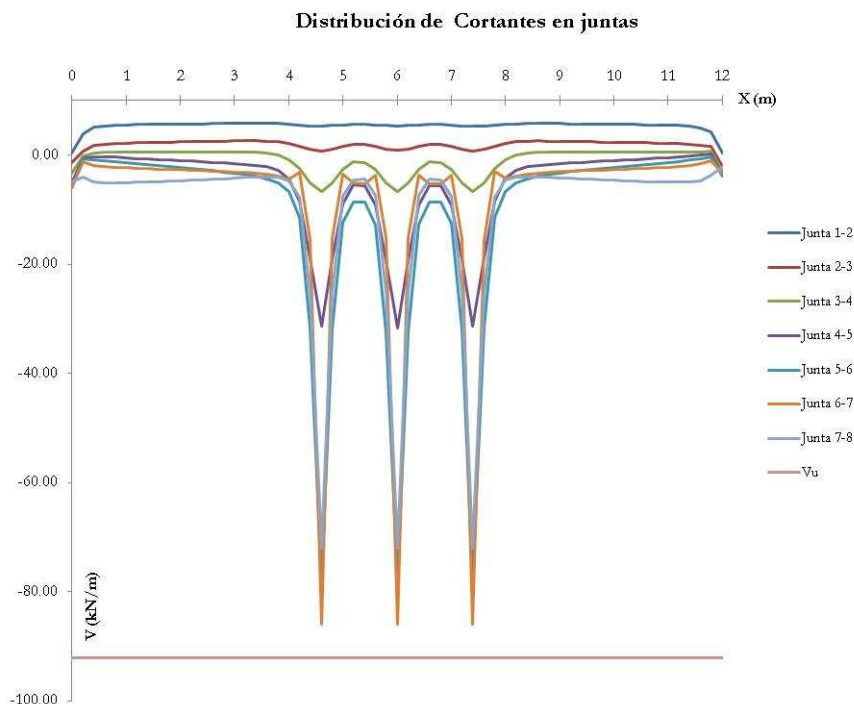
La comprobación del cortante vertical en las juntas se lleva a cabo mediante la aplicación del artículo 44.2.3.6 de EHE-08[2]. Se tienen en cuenta dos secciones de control. La primera es la compuesta por capa de reparto y tablas superior e inferior de las placas que proporciona un

valor de  $V_u = 92,1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ . La otra sección es la compuesta únicamente por hormigón vertido in

situ. En este caso  $V_u = 107,1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ . Se toma el valor mínimo para la comprobación.

El gráfico (Fig 9) muestra la distribución de cortantes verticales en las juntas longitudinales entre placas para la combinación de hipótesis correspondiente a la actuación de peso propio (PP), pretensado (P), resto de carga permanente (RCP), sobrecarga de uso extendida a todo el tablero (SCU) y carro excéntrico en centro de vano (CA\_CV).

En la zona de influencia de las cargas puntuales del carro se acusa un incremento de la magnitud del cortante pero no se llega a rebasar la capacidad de la junta en ningún caso.



#### ***IX.4 Rasante entre hormigones***

La comprobación de las tensiones rasantes en la junta existente entre placas alveolares y capa de reparto se hace conforme al artículo 47.2.1 de EHE-08 [2] y está basada en la suposición de dos hipótesis. No existe armadura de cosido y la superficie de contacto puede considerarse como de alta rugosidad. Adicionalmente el articulado establece la limitación de reducir en un 50% el factor de cohesión entre hormigones cuando las solicitaciones sean de tipo dinámico o de fatiga. Esta cuestión es muy discutible en este tipo de tableros pero aún así se ha tenido en cuenta por ser esta comprobación especialmente sensible para explicar el buen funcionamiento observado en los puentes construidos.

En (Fig 10) se representa la distribución de tensiones rasantes de cálculo en cada punto de la directriz de la placa 7 situada bajo el carro para la combinación de hipótesis correspondiente a la actuación de peso propio (PP), pretensado (P), resto de carga permanente (RCP), sobrecarga de uso extendida a todo el tablero (SCU) y carro excéntrico en centro de vano (CA\_CV). También se representa la tensión rasante última soportada por la junta.

A la vista de los resultados puede decirse que todas las secciones se hallan dentro del dominio de seguridad incluso las zonas próximas a los extremos libres.



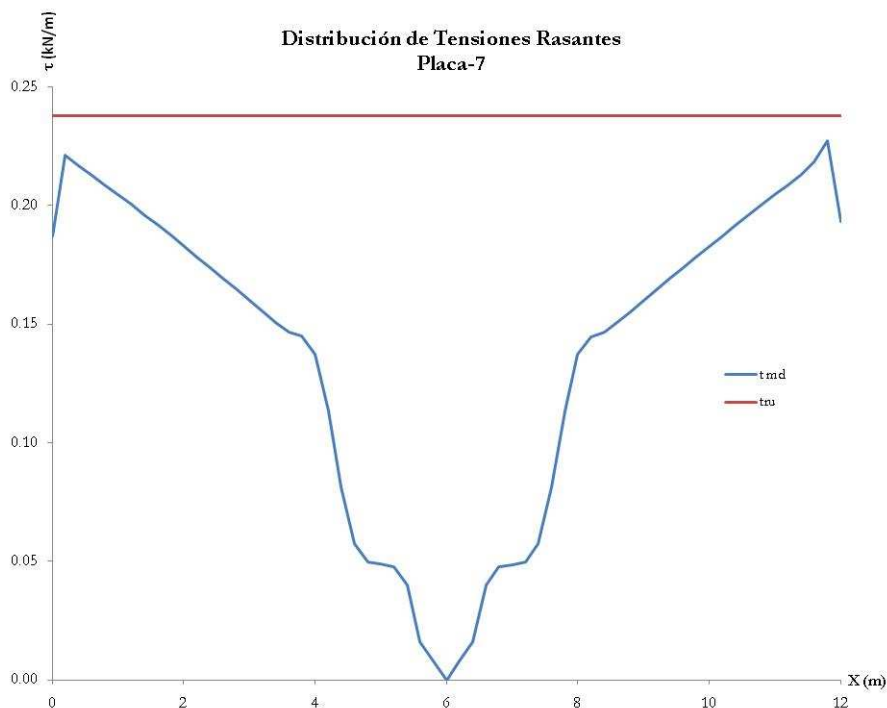


Figura 10. Distribución de tensiones rasantes en placa 7


## X. Conclusiones

- 1) Existen tres grupos de herramientas para modelización de forjados de placa alveolar sin capa de reparto. Ábacos basados en la teoría del reparto transversal, modelos de elementos finitos de tipo barra y modelos de elementos finitos de tipo lámina. Cualquiera de los tres sistemas presenta suficiente precisión para la representación del mecanismo resistente y además existe muy buena correlación entre ellos.
- 2) El modelo de barras (Modelo de Lundgren) permite introducir el efecto del espesor de las placas con la consecuente repercusión sobre la minimización de los esfuerzos de torsión sobre las placas. También permite representar el comportamiento real de las juntas longitudinales entre placas.
- 3) El método tradicionalmente usado para la modelización de tableros es el del emparillado plano aunque presenta ciertas limitaciones para la caracterización de la torsión y las juntas longitudinales entre placas.
- 4) Se propone un tipo de modelización denominado híbrido formado por elementos de tipo barra para la representación de las barras y elementos de tipo lámina para la representación de la capa de reparto. Ambos elementos se conectan rígidamente. Las juntas longitudinales se modelizan mediante elementos no lineales de contacto. Dicho modelo se aplica a un tablero de 12m de luz formado por 8 placas de 40cm de canto sobre las que se coloca una capa de reparto de 20cm.
- 5) La predicción obtenida en la comprobación del ELS de fisuración por tensiones normales se corresponde con las observaciones realizadas sobre puentes construidos.
- 6) Se comprueban determinados ELU que tradicionalmente han puesto en tela de juicio la validez de las placas alveolares para su empleo en tableros (cortante, torsión, cortante en juntas longitudinales y rasante entre hormigones). Todas las comprobaciones resultan satisfactorias.
- 7) En el caso particular de la comprobación de torsión, se pone claramente de manifiesto que los esfuerzos sobre las placas prácticamente desaparecen gracias a dos factores. La inclusión en el modelo de cálculo de los efectos del espesor de las placas y la capa de reparto. Esto explica claramente por qué las placas funcionan perfectamente dentro de este tipo de tableros.

## **Bibliografía**

- [1] Prefabricados J. Cirera Arcos S.A; Colección de tableros de puentes (1990).
- [2] Ministerio de Fomento; EHE-08 Instrucción de Hormigón Estructural (2008).
- [3] EN1168, CEN/Tc229, European Standard EN 1168:2005; Precast concrete products – hollow core slabs (2005).
- [4] CHALMERS, Civil and Environmental Engineering; Shear and torsion interaction of hollow core slabs. HOLCOTORS, Technical Report 3, Rev.1 (2004)
- [5] K. Lundgren; H. Broo; B. Engström. Analyses of hollow core floors subjected to shear and torsion. *Structural Concrete* (2004), 5, Nº 4, 161-172.
- [6] Fédération Internationale de la Précontrainte; Precast prestressed hollow core floors. Thomas Telford (1998).
- [7] Javier Manterola; Puentes. Apuntes para su diseño, cálculo y construcción (2006).
- [8] Elliot, K.S; Davies, G.; Bensalem, K. Precast Floor Slabs Diaphragms Without Structural Screeds, *Concrete 200 – Economic and Durable Construction Through Excellence* (1993) 617-632.
- [9] Ministerio de Fomento; IAP Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera (1998).

## Evaluation of the fatigue-cracking behavior of crumb rubber modified bituminous mixes.

F. Moreno-Navarro<sup>1A</sup> , M. C. Rubio-Gámez<sup>1B</sup>, E. Tomás-Fortún<sup>2A</sup>, F. Valor-Hernández<sup>2B</sup>, A. Ramírez-Rodríguez<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratorio de Ingeniería de la Construcción, LabIC.UGR. University of Granada.

Av. Severo Ochoa s/n, 18072 Granada (Spain). E-mail: fmoreno@ugr.es<sup>1A</sup>, mcrubio@ugr.es<sup>1B</sup>

<sup>2</sup> CIESM-INTEVIA

C/ San Severo 18, 28042 Madrid (Spain). E-mail: esther.tomas@ciesm-intevia.com<sup>2A</sup>,

fernando.valor@ciesm-intevia.com<sup>2B</sup>

<sup>3</sup> Sacyr

Paseo de la Castellana 83-85, 28046 Madrid (Spain). E-mail: aramirez@sacyr.com

**Keywords:** asphalt mixes, crumb rubber, fatigue cracking.

### • Abstract.

El empleo de betunes modificados con polvo de neumático usado en la fabricación de mezclas bituminosas es una de las técnicas que mayor auge está teniendo en los últimos años dadas sus ventajas económicas y ambientales. Este tipo de ligantes pretende conseguir prestaciones similares a la de los betunes modificados con polímeros utilizados habitualmente. La aparición de fisuras debido a fenómenos de fatiga es una de las patologías más comunes en firmes de carretera. Debido a las mejoras de las propiedades mecánicas del betún aportadas tras la incorporación de polvo de neumático, las mezclas fabricadas con estos ligantes se postulan como una posible solución a dicho problema. En este artículo se lleva a cabo un análisis comparativo del comportamiento a fisuración por fatiga mediante el ensayo de flexo-tracción en 4 puntos, provisto de un sensor óptico de control de deformaciones y un sistema de grabación de imágenes, realizado sobre mezclas bituminosas fabricadas con betún modificado con polvo de neumático y con polímeros.

### Introducción.

La fisuración por fatiga es una de las principales patologías existentes en los firmes de carretera de todo el mundo, independientemente del tipo de pavimento. Este fenómeno puede acarrear consecuencias muy negativas sobre la carretera, provocando un fin prematuro de su vida de servicio. El diseño de materiales más resistentes que permitan hacer frente a las sollicitaciones impuestas por las cargas cíclicas del tráfico y los cambios de temperatura (que son los principales causantes de la aparición de fisuras por fatiga) [1] puede contribuir favorablemente en la construcción de pavimentos de larga duración .

Las mezclas bituminosas son el material más utilizado en la construcción de firmes de carretera de todo el mundo [2], en las que la fisuración sigue focalizando gran parte de las investigaciones en ingeniería de carreteras. Por tanto, resulta necesario continuar estudiando el proceso de aparición y propagación de fisuras, de manera que se mejore la respuesta mecánica de este tipo de materiales bajo diferentes condiciones ambientales y

tipos de solicitaciones.

El empleo de polvo de neumáticos fuera de uso (PNFU) en la fabricación de mezclas bituminosas (tanto por vía seca, como por vía húmeda), contribuye directamente con una mejora en su comportamiento mecánico ante procesos de fatiga y deformación (principales causantes de la aparición de fisuras) [3]. La reacción producida entre el PNFU y el betún cuando ambos interactúan a cierta temperatura provoca un aumento en la viscosidad de este último, así como una modificación de sus propiedades reológicas (mejora del comportamiento elástico y menor susceptibilidad térmica). Este hecho ejerce una influencia directa en el comportamiento ante el fenómeno de fisuración de la mezcla en la que éste es utilizado como ligante, de forma que su empleo puede postularse como una solución para retardar la aparición de dicha patología, alargando la vida de servicio del pavimento [4-6].

En base a estas circunstancias, y debido a las numerosas ventajas que presenta la valorización de un residuo tan problemático, en los últimos años se están llevando a cabo grandes esfuerzos para desarrollar betunes de altas prestaciones modificados con PNFU. Así, a partir de un betún convencional, adicionando ciertas cantidades de polvo de caucho, se pretende mejorar sus prestaciones, de forma que influya positivamente en la vida de servicio de la mezcla. En este sentido, el objetivo es que en un futuro estos ligantes lleguen a tener prestaciones similares a las de los betunes modificados con polímeros (normalmente SBS y EVA) utilizados actualmente, los cuales tienen un coste económico muy superior.

Esta investigación tiene por objeto la evaluación del comportamiento mecánico ante fenómenos de fisuración por fatiga de mezclas bituminosas fabricadas con betún modificado de alta viscosidad con caucho por vía húmeda (BMAVC). Para ello se ha utilizado un ensayo de flexo-tracción en 4 puntos, provisto de un sensor óptico de control de deformaciones y un sistema de grabación de imágenes. Los resultados obtenidos con las diferentes muestras fabricadas con BMAVC han sido comparados con los obtenidos con otras de idéntica composición, pero fabricadas con un betún modificado con polímeros BM3b. Durante el estudio se ha analizado el proceso de propagación de la macro-fisura en mezclas con diferente tipología de esqueleto mineral (SMA y Arena-Betún), para lo cual se han combinado los datos obtenidos de las imágenes y los sensores de movimiento, con los valores de tensión y deformación registrados.

## **Metodología.**

### **Materiales**

Durante el desarrollo de este estudio se analizaron algunos de los tipos de mezclas más comunes utilizados como solución anti-fisuras en firmes de carretera, una arena-betún y una SMA (Stone Mastic Asphalt) [7, 8]. Con el empleo de estas mezclas se pretende a su vez analizar la influencia del tipo de esqueleto mineral en la respuesta de las mezclas fabricadas con PNFU, de manera que se defina donde puede ser más efectivo su empleo.

Par la fabricación de las mezclas, se utilizaron áridos de la misma naturaleza tanto para la fracción fina como para la gruesa (caliza), y cemento como filler. Por su parte, en cada una

de los tipos de mezclas se analizó el efecto de los dos tipos de ligantes a estudiar, uno modificado con polímeros (BM3b) y otro de alta viscosidad modificado con polvo de neumático por vía húmeda (BMAVC). Las características de estos materiales vienen recogidas en las Tablas 1 y 2.

Ensayo	Resultado
Índice de lajas %(UNE-EN 933-3)	2
Resistencia a la fragmentación (UNE-EN1097-2)	20
Caras de fractura %(UNE-EN 933-5)	100
Coefficiente de limpieza (Annex C, UNE 146130)	0,01
Equivalente de arena (UNE-EN 933-8)	72

**Tabla 1.** Características de los áridos utilizados en el estudio.

Tipo de Betún	BM3b	BMAVC
Penetración (UNE-EN 1426) (mm)	54	55-70
Punto de reblandecimiento (UNE-EN 1427) (°C)	68.1	70.0
Temperatura de fragilidad Fraass (UNE-EN 12593) (°C)	-17	-15
Recuperación elástica a 25 °C (NLT 329) (%)	73	80

**Tabla 2.** Características de los betunes analizados.

Las granulometrías empleadas para la fabricación de las mezclas Arena-Betún y SMA vienen recogidas en la Figura 1. Los esqueletos minerales utilizados en las mezclas fabricadas con BMAVC y BM3b fueron los mismos (la mezcla fabricada fue la misma, modificando únicamente el tipo y contenido de ligante). La Tabla 3 recoge las principales características de las mezclas estudiadas diseñadas a partir de los ensayos de sensibilidad al agua y deformaciones plásticas.

**Figura 1.** Granulometría de las mezclas estudiadas.

Mezcla	Contenido de ligante (%)	Densidad Aparente (Kg/m <sup>3</sup> )	Densidad Máxima (Kg/m <sup>3</sup> )	Huecos Aire (%)	Rigidez a 20 ° C (MPa)
A-B BM3b	9	2344	2364	0,8	5885
A-B BMAVC	12	2363	2428	2,7	3690
SMA BM3b	5,5	2513	2632	4,5	6885
SMA BMAVC	5,5	2470	2582	4,3	4532

**Tabla 3.** Características de las mezclas estudiadas.

### Plan de Ensayos

Las pruebas realizadas para la evaluación del comportamiento mecánico a fisuración por fatiga de las mezclas estudiadas ha sido el ensayo de flexo-tracción en cuatro puntos con probetas prismáticas de dimensiones 410 x 50 x 50 mm. El equipo de ensayo utilizado está provisto de un sistema de captación de imágenes de alta resolución, y un sensor óptico para

el control de deformaciones, que permiten analizar el proceso de fractura de la probeta. De esta forma, dentro de un volumen representativo del material se tomarán los valores de fuerza y deformación aplicados durante cada ciclo de ensayo, así como la propagación de la macro-fisura aparecida. Además, en la zona de aparición de la macro-fisura se colocarán dos indicadores de movimiento (a ambos lados de la macro-fisura y en su zona inferior), que mediante el empleo del sensor óptico, permitirá medir las deformaciones producidas en sus labios (Figura 2).



**Figura 2.** *Dispositivo de ensayo utilizado.*

Las probetas han sido provistas de una entalla triangular situada en su zona central (de 1 mm de altura y 1 mm de base), de manera que se induce la aparición de la macro-fisura en la zona del volumen representativo del material controlado por la cámara (Figura 3). El criterio de fallo utilizado para la finalización del ensayo ha sido una longitud de macro-fisura de 25 mm, ya que una vez rebasado dicho valor, la propagación de la grieta deja de ser estable (perdiendo trazabilidad en el comportamiento), y la probeta rompe de forma brusca a sección completa. El control de la propagación de la macro-fisura se lleva a cabo mediante el análisis de las imágenes captadas, realizando mediciones digitales de la propagación de la grieta (para facilitar esta tarea la zona del volumen representativo a estudiar se pinta de blanco).

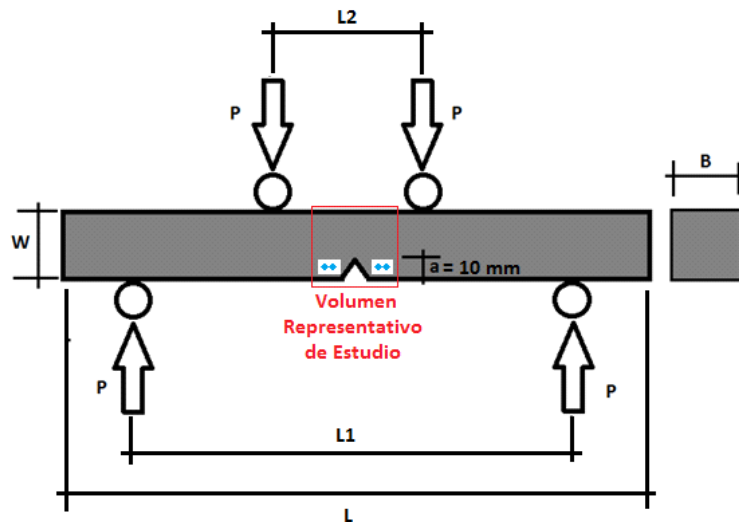


Figura 3. Esquema de las características del ensayo realizado.

Para poder realizar un estudio más detallado de la respuesta de los materiales ensayados ante el proceso de fisuración, el ensayo se realiza en el interior de una cámara climática. Las condiciones de ensayo utilizadas para la evaluación de los materiales fueron de 0,5 mm de amplitud de carga, con una frecuencia de 10 Hz, a una temperatura constante de 20 °C. Además, para una evaluación más realista del comportamiento de la mezcla, teniendo en cuenta el efecto de “healing” producido durante los procesos de fatiga de los materiales [9-11], se introdujeron periodos de descanso durante las cargas cíclicas sinusoidales aplicadas durante el ensayo. De esta forma, las cargas utilizadas en los ensayos consistieron en la aplicación de 1500 ciclos de carga, aplicando un periodo de descanso de 150 segundos (el mismo tiempo que tarda en aplicar los 1500 ciclos).

En base a los dos tipos de mezclas analizadas y a los dos tipos de betún utilizados en su fabricación, el plan de trabajo llevado a cabo durante el desarrollo del estudio viene recogido en la Tabla 4.

Tipo de Mezcla	Temperatura de Ensayo (°C)	Amplitud de Ensayo (mm)	Frecuencia de Ensayo (Hz)	Nº de Probetas
Arena Betún con BM3b	20	0,5	10	2
Arena Betún con BMAVC	20	0,5	10	2
SMA con BM3b	20	0,5	10	2
SMA con BMAVC	20	0,5	10	2

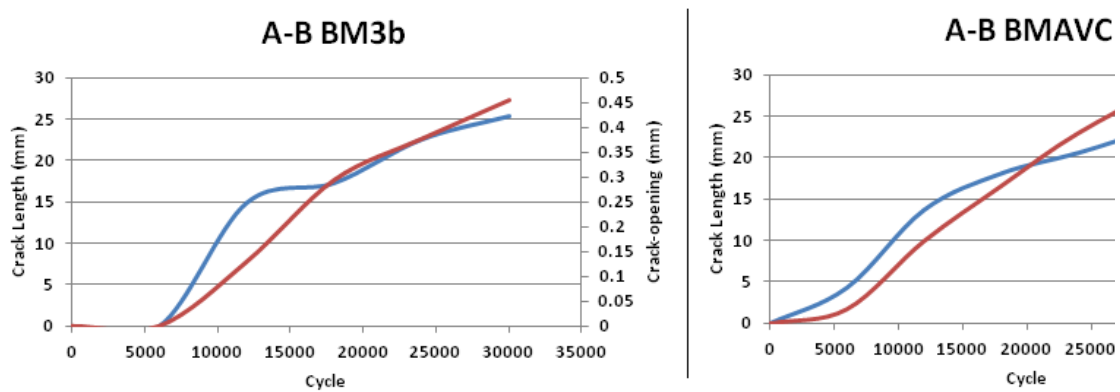
Tabla 4. Plan de ensayos.

## Análisis de Resultados

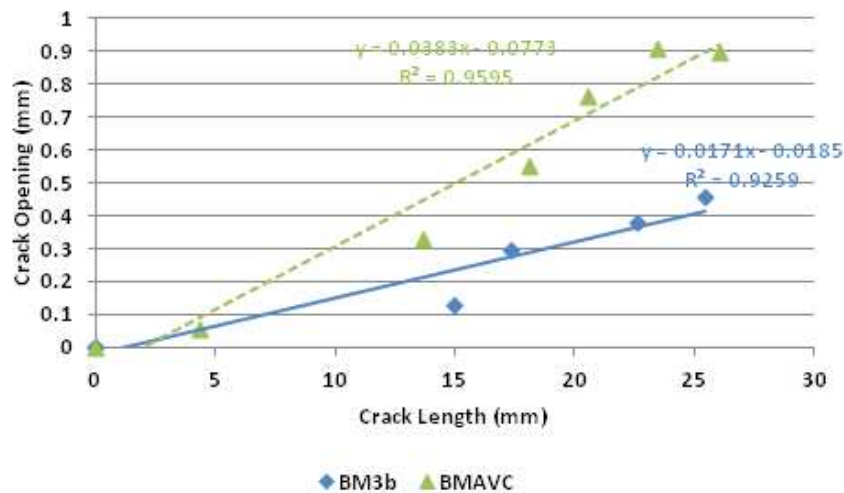
### Arena Betún

La Figura 4 muestra los resultados obtenidos en términos de longitud y apertura de fisura para la mezcla arena-betún fabricada con los betunes BM3b y BMAVC. Como se puede

observar, en ambos casos existe correspondencia entre dichas medidas de manera que para la temperatura estudiada el material se comporta la propagación del daño a macro-fisuración tiene una relación directa con las deformaciones generadas en la boca de la fisura debida a las tensiones sufridas (Figura 5). En este sentido podemos decir, que para las mismas condiciones de carga, el ancho de fisura sufrido por la mezcla fabricada con BMAVC es mayor que el de la mezcla BM3b.



**Figura 4.** Resultados de propagación de macro-fisura y apertura de grieta para las mezclas arena-betún.



**Figura 5.** Relación entre apertura de grieta y propagación de macro-fisura en las mezclas arena-betún.

Por su parte la Figura 6 izq. muestra los valores de energía disipada durante el ensayo. Conforme el daño se va propagando a través del material, la cantidad de energía necesaria para provocar la propagación de la macro-grieta va disminuyendo. Este hecho es debido a que el material va perdiendo resistencia conforme el daño evoluciona y por tanto (al realizarse el ensayo a deformación controlada), la fuerza necesaria para propagar la fisura es menor. Además, se observa como la energía necesaria para la propagación del proceso de macro-fisuración en la mezcla fabricada con BM3b es superior que en el caso de la mezcla con BMAVC, lo que indica su mayor resistencia ante el fenómeno de fisuración. En la



Figura 7 pueden observarse las imágenes de la propagación de la macro-fisura en ambos materiales.

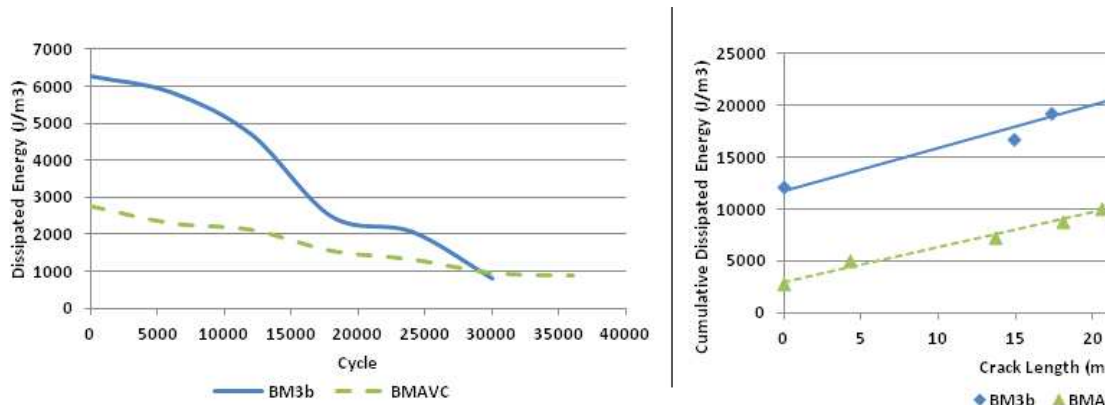


Figura 6. Resultados de energía disipada (izq.) y su relación con la propagación de macro-fisura (dcha.) en las mezclas arena-betón.

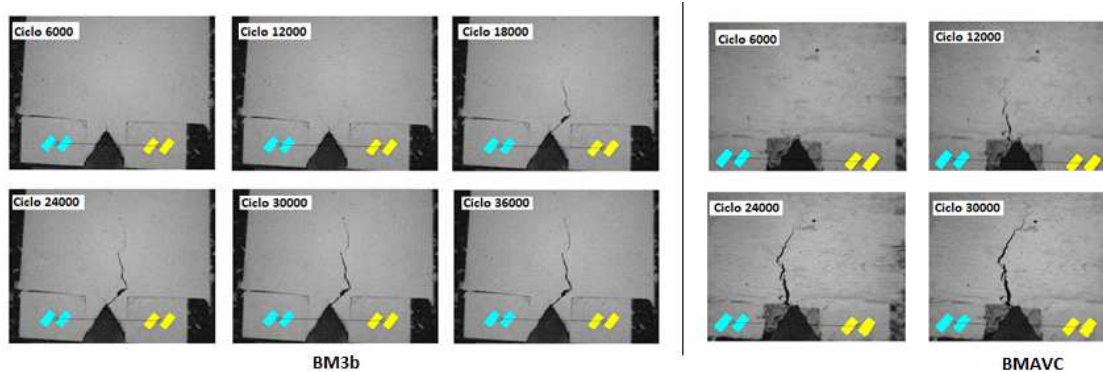


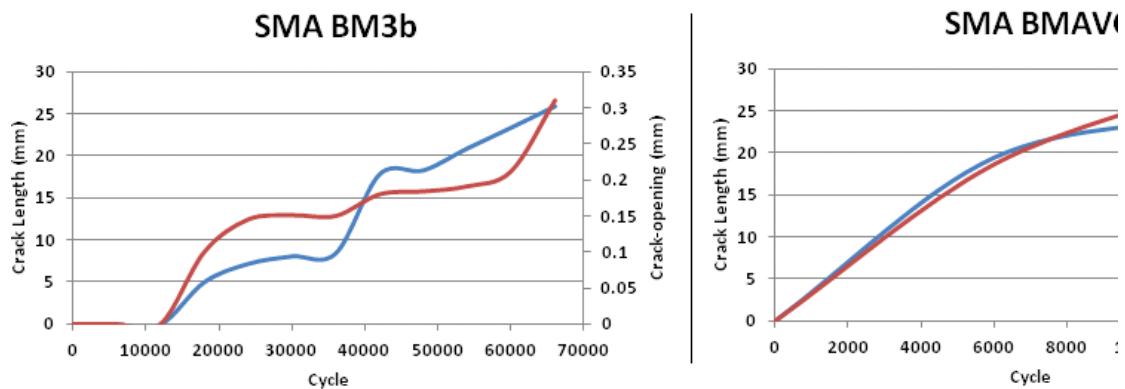
Figura 7. Imágenes del desarrollo de la macro-fisura de las mezclas arena-betón durante el ensayo.

Destacar la relación lineal entre la longitud de la macro-fisura y la cantidad energía disipada acumulada durante el ensayo (Figura 6 dcha.), lo que demuestra la correspondencia de la energía disipada con el daño sufrido por el material, y por tanto lo establecen como un criterio óptimo de diseño. Así, a pesar de que bajo un enfoque fenomenológico tradicional (en el que se relaciona las condiciones de carga con el numero de ciclos en el que se produce el fallo del material) la respuesta mecánica de ambos materiales puede considerarse similar, bajo el enfoque de la energía disipada se puede afirmar que la resistencia a fisuración de las mezclas fabricadas con betón BM3c con polímeros SBS es superior a las de las mezclas fabricadas con BMAVC con PNFU.

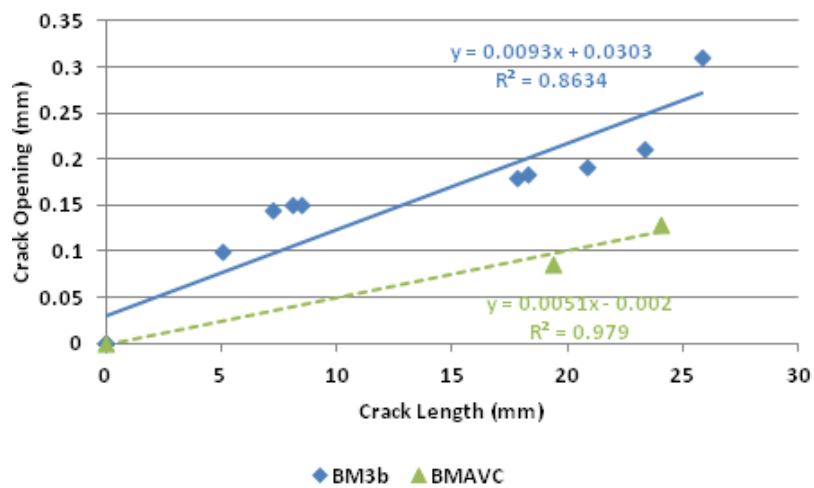
### SMA

Tal y como ocurriera en el caso anterior, la abertura de macro-grieta tiene una fuerte relación lineal con la longitud de propagación, de manera que puede afirmarse que ambos aspectos se encuentran relacionados. A pesar de ello, en este caso la mezcla que mayor resistencia ofrece es la que posee una abertura de grieta superior, y por tanto se demuestra que el ancho de grieta no está directamente relacionado con la propagación del daño en el

material (Figuras 8 y 9).

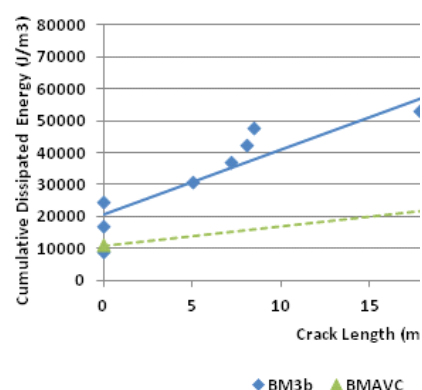
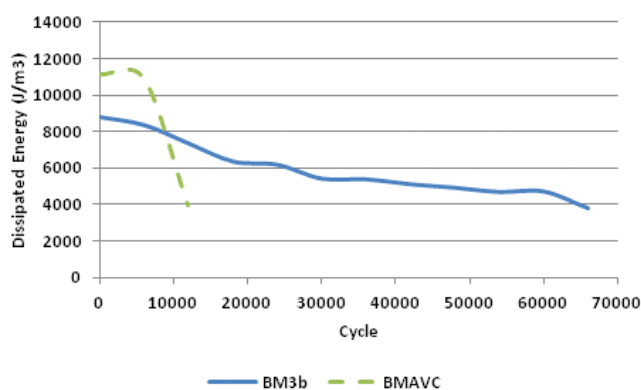


**Figura 8.** Resultados de propagación de macro-fisura y apertura de grieta para las mezclas SMA.

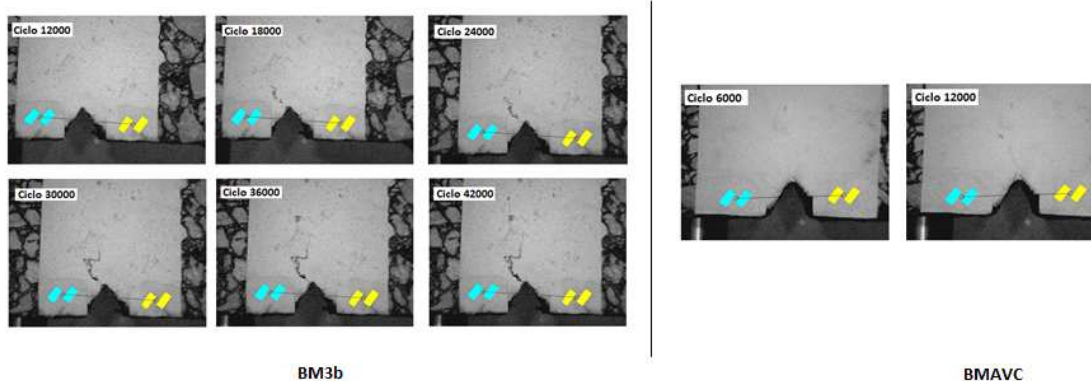


**Figura 9.** Relación entre apertura de grieta y propagación de macro-fisura en las mezclas SMA.

En términos de energía disipada, de nuevo se corrobora que la energía disipada durante el proceso de fisuración va disminuyendo (Figura 10 izq.). Esto es debido a que el consumo de energía en la formación de la grieta es superior que durante su etapa de propagación estable. Por su parte, de nuevo se observa una fuerte relación entre la energía disipada acumulada y la propagación de la grieta a través de los materiales (Figura 10 dcha.). La energía necesaria para provocar el inicio y desarrollo de la fisura en el caso de la mezcla SMA con BM3b es mayor, por lo que dicho material será más resistente ante este fenómeno.



**Figura 10.** Resultados de energía disipada (izq.) y su relación con la propagación de macro-fisura (dcha.) en las mezclas SMA.



**Figura 11.** Imágenes del desarrollo de la macro-fisura de las mezclas arena-betón durante el ensayo.

## Conclusiones

En el presente artículo se recogen los resultados del estudio del comportamiento a fisuración de dos tipos de mezclas bituminosas (SMA y Arena Betón), fabricadas con un betón modificado con PNFU y con un betón modificado con polímeros convencional. A continuación se resumen las conclusiones obtenidas en este estudio:

- Existe una correlación del comportamiento a fisuración de las mezclas entre los datos visuales tomados mediante los sensores ópticos y la cámara, y la energía disipada durante el ensayo. Así, la evaluación del estado de daño de este tipo de materiales y su posterior diseño mecánico, puede ser basado en estudios de energía disipada.
- Existe una relación considerable entre la abertura de los labios de grieta y la propagación vertical de ésta. En función del material dicha relación variará, de forma que cuanto más cohesiva es la mezcla, menor es la abertura de los labios de

la fisura y más fina es la macro-grieta propagada.

- Llevando a cabo un análisis detallado a través de la energía disipada por cada material, se puede observar como el BM3b se muestra más resistente al proceso de propagación de fisuras que el BMAVC. A pesar de que el comportamiento a fisuración de las mezclas fabricadas con el betún modificado con polvo de neumático es de orden similar, en base a los resultados obtenidos en términos de energía disipada podemos afirmar que el daño sufrido por este tipo de mezclas es superior que en el caso del BM3b.
- Por su parte, analizando el comportamiento de los dos tipos de mezclas estudiadas, según los resultados del estudio realizado la mezcla tipo SMA tiene una mejor respuesta ante este fenómeno (para un mismo nivel de daño, la cantidad de energía necesaria para el desarrollo y propagación de la fisura se incrementa).

- **Agradecimientos**

Los autores de esta publicación quieren expresar su agradecimiento al CDTI, Ministerio de Ciencia e Innovación, por la financiación recibida para el desarrollo del proyecto de investigación: “Proyecto Integrado de Investigación, desarrollo y demostración de tecnologías para la aplicación de nfus en firmes de carretera resistentes a la propagación de grietas”.

- **Referencias**

[1] Colombier, G.: “Cracking in pavements: nature and origin of cracks”. Prevention of Reflective Cracking in Pavements – RILEM Report 18. Edited by Vanelstraete A. et Franckien L. (1997), pp. 1-15.

[2] European Asphalt Pavement Association, EAPA. “Asphalt in Figures 2010”. <<http://www.eapa.org>> (Aug. 21, 2012).

[3] Ruiz, A.: “Mezclas con caucho de neumáticos”. Curso de Mezclas Bituminosas: dosificación, fabricación, puesta en obra y control de calidad. Barcelona, (March 10, 2010).

[4] Mamlouk, M.; Mobasher, B. Cracking resistance of asphalt rubber mix versus hot-mix asphalt. *Road Materials and Pavement Design*, Vol. 5:4 (2004.), pp. 435-451.

[5] Mull, M. A.; Othman, A.; Mohammad, L. Fatigue crack propagation analysis of chemically modified crumb rubber asphalt mixtures. *Journal of Elastomers and Plastics*, Vol. 37 (2005), pp.73-86.

[6] Abojaradeh, M.; Jrew, B.; Ghargheer, F.; Kaloush, K. E.; Abojaradeh, D. Cracking characteristic of asphalt rubber mixtures. *Jordan Journal of Civil Engineering*, Vol. 4 (2010), pp. 205-210.

[7] Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, CEDEX. "Jornadas sobre Reflexión de Grietas en Carreteras." Madrid, (1992).

[8] Drüschner, L.; Schäfer, V.: "Stone Mastic Asphalt". Asphalt Guide, German Asphalt Association, (2005).

[9] Bazin, P., Saunier, J. "Deformability, fatigue and healing properties of asphalt mixes." Int. Conf. on the Structural Design of Asphalt Pavements, Ann Arbor, University of Michigan, (1967).

[10] Bonnaure, F. P., Huibers, A. H. J. J., Boonders, A. "A laboratory investigation of the influence of rest periods on the fatigue characteristics of bituminous mixes." Journal of the Association of Asphalt Paving Technologist, Vol. 51 (1982), pp. 104-128.

[11] Kim, Y. R., Little, D. N., Lytton, R. L. "Fatigue and healing characterization of asphalt mixtures." Journal of Materials in Civil Engineering, Vol. 15 (1), (2003), pp. 75-83.

# Development of a Seismic-Resistant Bamboo Braced Frame System for Resisting Earthquakes in Tropical Climates

*Echeverria, J., Sampson, C., Vargas, J., Nilsson, T., Gil-Martin, L. M., and Aschheim, M.*

*Department of Civil Engineering, Santa Clara University and Department of Structural Mechanics, University of Granada*  
[jakeecheverria@gmail.com](mailto:jakeecheverria@gmail.com), [christopher.sampson@kiewit.com](mailto:christopher.sampson@kiewit.com), [juanvg123@yahoo.com](mailto:juanvg123@yahoo.com), [nilsson@scu.edu](mailto:nilsson@scu.edu), [mlgil@ugr.es](mailto:mlgil@ugr.es),  
[maschheim@scu.edu](mailto:maschheim@scu.edu)

---

## Abstract

A low-cost housing system was developed for use in Haiti and other tropical countries with the aims of minimizing environmental impact (including carbon emissions) and maximizing use of local and preferably recycled materials while using local labor and tools. The housing system integrates low-strength concrete blocks (made using recycled concrete aggregate), an innovative seismically-resistant bamboo frame, earthen plasters, bamboo trusses, and metal deck roofs. The bamboo frame relies on the yielding of a short rebar dowel in flexure to provide ductile performance at a controlled strength level, thus limiting the forces developed in frame joints. The rebar dowel connection between the bamboo frame overlying a concrete block wall holds the bamboo frame base a short distance up above the block wall, thereby protecting the bamboo from moisture contained within the block. The top of a soda bottle is used to protect the rebar from moisture and to seal the base of the bamboo culm, thereby allowing grout to be introduced in the culm above to anchor the bar to the culm. This paper describes the resulting design, details, and key results from experiments and detailed finite element modeling of the rebar dowel.

## Keywords

Ecological building, ductile bamboo frame, rebar dowel.

## I. Introduction

On January 12, 2010, a 7.0 magnitude earthquake caused extensive and severe damage to Haiti leaving 1.5 million people displaced. By December of 2010, teams of international engineers investigated the structural integrity of over 400,000 houses in Port-au-Prince and surrounding areas and found that only fifty percent were habitable without repair, twenty-six percent required repairs for safe habitation, and the remaining required demolition [1]. Several months after the earthquake, the government of Haiti announced a request for designs for low-cost homes to be demonstrated at an exposition known as Building Back Better Communities (BBBC). The Ecological Building Network (EBNet) was awarded an opportunity to build a demonstration house for the exposition. The design provides two porches on the 15 ft (4.6 m) by 24 ft (7.3 m) footprint, with one of these porches containing an outdoor kitchen. There is room for one bath, while interior walls may be provided for private bedrooms. The home has a 9 ft (2.7 m) ceiling height with a peaked roof.

The use of local materials was balanced with the need to produce housing quickly and with low environmental impact. The use of imported materials was minimized due to their relatively high cost and the desire to stimulate economic growth and employment opportunities within Haiti. The EBNet design features low strength concrete block made using recycled concrete rubble aggregate, salvaged reinforcing steel bars for reinforcement, locally-grown bamboo, and locally-sourced earthen plasters. Galvanized corrugated metal roofing is the only major component imported from abroad.

The use of concrete rubble and salvaged reinforcing bars addresses the problem of disposing of large quantities of debris resulting from reinforced concrete buildings that collapsed during the earthquake or were demolished subsequently. Most of the estimated 20-million cubic yards of debris is concrete rubble, left by the earthquake [2]. Since aggregate can account for 70 - 80 percent of the constituents (by volume) of concrete, the use of crushed concrete rubble as aggregate provides an alternative to a landfill for the debris and preserves natural resources. Observations by EBNet (personal communication) and DesRoches, et al. [2] indicate concrete strengths while low compared with U.S. practice, are more than adequate for our intended application. DesRoches et al. [2] report average compressive strength of random samples of Haitian concrete to be 1300 psi. When the Haitian concrete samples were crushed and used as fine and coarse aggregate in new batches of concrete, compressive strengths between 3100 psi and 3350 psi could be achieved, using a water/cement ratio of 0.5. In comparison, strengths of above 5000 psi were achieved when Georgia granite was substituted for the crushed concrete rubble.

Deforestation is a critical problem in Haiti leading to soil erosion and reduced agricultural production, and results in limited availability and high costs for construction lumber [3][4]. Reforestation with species suitable for timber would require 30 – 70 years to mature to harvest depending on the species, provided that the timber was not harvested for use as fuel [5][6][7]. Bamboo is a viable alternative for reforestation [8]. A small bamboo industry has developed in Haiti. The species *Guadua Angustifolia*, which is found naturally in Colombia and Ecuador, is being grown. This species can provide quality building materials within six years of planting; new shoots that emerge after the initial harvest can be harvested every four years [9][10]. This species has excellent structural properties and holds promise to become a valuable cash crop within Haiti, thereby strengthening the economy.

This paper describes the structural system concept that was developed, concrete mix designs suitable for producing the low strength concrete masonry units, results from testing of the critical rebar dowel element, and results from finite element analyses of this rebar dowel.

## II. Structural system concept

The basic structural system is illustrated in Fig. 1 (section) and Fig. 2 (elevation). The house uses bamboo roof trusses that are supported by bamboo braced frames, which in turn are supported by 3 ft (0.9 m) high masonry plinth walls. The masonry plinth walls are composed of concrete masonry units (CMU) made from recycled concrete rubble. The masonry plinths raise the bamboo frames above ground and protect them from ground moisture and rain splash.

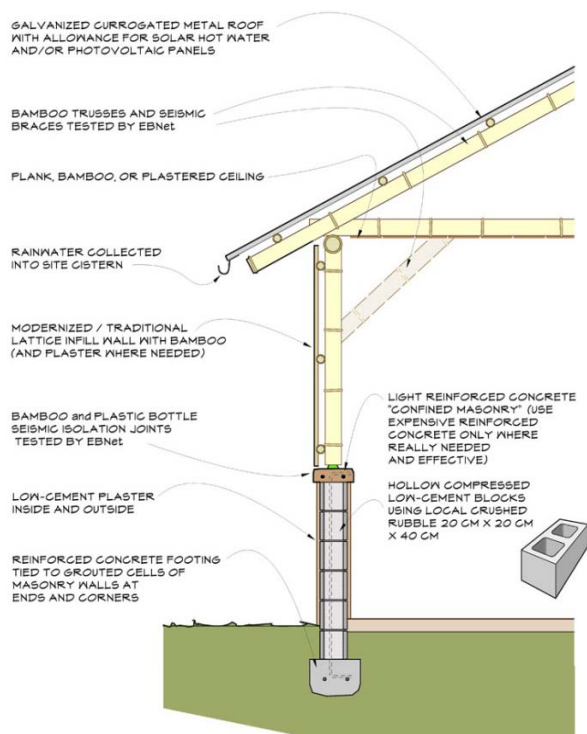


Figure 1. Section (courtesy B. King)

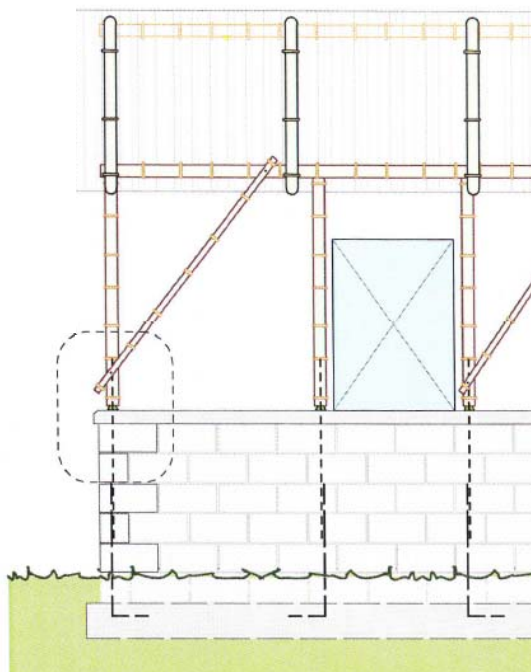


Figure 2. Elevation (courtesy B. King)

Construction requires the braced bamboo frame walls be assembled on the ground, then raised into place and set onto masonry plinth walls. Wall frames are then covered in a lath and plaster (or wattle and daub) system. To protect the bamboo from moisture in the plaster, the lath is held off the bamboo frames using recycled bottle caps as spacers. Bamboo roof trusses are built onsite, lifted into place on the walls, where 1" by 4" boards spaced approximately 8" apart will be used as an attachment point for a corrugated sheet metal roof very common to Haitian buildings.

The 3-ft. (0.9 m) high CMU plinth wall is supported on a continuous strip footing. The CMU blocks are fabricated on site by hand-tamping a concrete mix into metal molds. A low-strength concrete made using

crushed concrete rubble as aggregate is used (approximately 300 psi (2 MPa) compressive strength at 3 days), to minimize cement content. The CMU plinth wall is not load bearing, but serves as a form for cast-in-void reinforced concrete where a No. 3 deformed rebar runs continuously from the foundation within grouted CMU cells at locations where the bamboo frame columns attach. The bamboo frame is held approximately 2" above the CMU plinth walls, exposing the No. 3 rebar and creating a ductile connection described later in this paper. After the braced frame has been lowered on to the rebar, the bamboo culm containing rebar is grouted, with the grout squeezed in to the culm via a small hole in the culm wall, using a grout bag.

Plastic hinging in the approximately 2" length of exposed rebar is the intended ductile mechanism in the structure. The weakest mechanism in the system consists of plastic hinging of the short exposed length of rebar. Capacity design principles are used to ensure the bamboo frame and its connections remain elastic when this mechanism develops. To protect the 2" exposed rebar from corrosion, the top half of a plastic bottle is slipped over the exposed rebar and embedded in the CMU plinth mortar during construction of the masonry wall. The bamboo column will set on top of the plastic bottle top, embedding the rebar within, while the plastic bottle top acts to seal the mortar within the bamboo culm.

## II. Low-strength concrete mix design

Mix designs were developed using Type I Portland cements sourced in Haiti and the United States. Strengths of 2" cubes obtained using Haitian cements were lower than those obtained with a U.S. cement. Table 1 summarizes 28-day strengths obtained for a water/cement ratio of 1.4 and approximate quantities by weight of cement (1), water (1.4), coarse aggregate (3), sand (9). Reasons for the noticeable disparity in comparison with U.S. cements are being investigated. Given the apparent difference in cement quality and the reduced strengths obtained using recycled Haitian concrete as aggregate, mix designs must be finalized using locally sourced constituents.

Table 1. 28-day cube strengths using w/c = 1.4

Cement Brand	Average Cube Compressive Strength, psi (MPa)	Compressive Strength Relative to US Cement
Kolos	415 (2.86)	0.42
National	533 (3.67)	0.54
Verraux	570 (3.93)	0.58
Quikrete (US Source)	984 (6.78)	1.00

## III. Mechanical properties of *Guadua Angustifolia*

Reported strengths of *Guadua Angustifolia* vary with age at harvest and the height at which a sample was removed from the culm. Ranges for mechanical properties of *Guadua Angustifolia* reported by others are summarized in Table 2 [11][12].

Table 2. Reported Mechanical Properties for *Guadua Angustifolia* Bamboo

Property	Trujillo (2009) (based on 5th percentile values) ksi (MPa)	Lopez (2009)		
		Minimum, ksi (MPa)	Average, ksi (MPa)	Maximum, ksi (MPa)
Compression Parallel to Grain, $f_c$	4.06 – 5.51 (28.0 – 38.0)	3.00 (20.7)	6.37 (43.9)	12.1 (83.4)
Tension Parallel to Grain, $f_t$	5.08 (35.0)	5.11 (35.2)	7.76 (53.5)	24.7 (170.3)
Bending, $f_b$	6.67 (46.0)	0.71 (4.90)	5.44 (37.5)	16.3 (112.4)
Shear, $f_v$	0.33 (2.28)	0.62 (4.27)	1.001 (6.902)	1.64 (11.31)

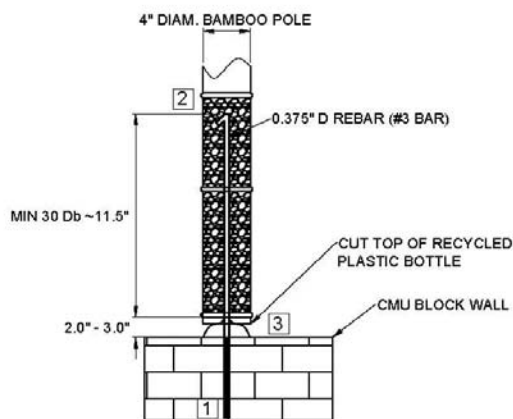
## IV. Experimental behavior of rebar dowel

### IV.1 The dowel configuration

Figure 3 details the rebar dowel used at the base of each culm at the connection to the masonry plinth. The rebar dowel is intended to confer ductility to the braced frame system while also limiting the forces that develop within the bamboo frame connections, following the principles of capacity design. Dowels having exposed lengths of 2 to 3 inches (50 to 75 mm) are considered to be the most practical to build with; hence,



the number of braced frames required depends on the mass of the roof, seismic hazard, and seismic performance objectives, as well as the lateral strength required to resist wind loads. Under these lateral loads, the rebar dowel will be subjected to simultaneous axial and shear forces. The axial forces arise from both dead loads and overturning forces associated with the lateral load. Expected strengths for the dowel based on a yield strength of 40 ksi (276 MPa), assuming zero axial force, are summarized in Table 3, along with effective yield displacements for the dowel (considering only flexural deformations) and for the dowel-frame system.



NOTES:

- 1) EMBEDDED NO. 3 BAR EXTENDS THROUGH CMU WALL INTO FOUNDATION, FOUNDATION NOT PICTURED
- 2) 1" 90 DEG BEND APPLIED TO END OF EMBEDDED BAR PRIOR TO INSERTION AND MORTAR APPLICATION
- 3) APPROX. 2" OF EXPOSED NO. 3 BAR PROTECTED WITH THE CUT TOP FROM A RECYCLED PLASTIC BOTTLE

Figure 3. Rebar dowel connection at top of plinth wall.

Table 3. Expected effective yield displacements and dowel strengths of No. 3 (9.5 mm diameter) bar based on  $f_y = 40$  ksi.

Effective Length of Rebar, in (mm)	Effective yield displacement of dowel, in (mm)	Effective yield displacement of system, in (mm)	Shear strength at effective yield, lbs (kN)
1.0 (25.4)	0.010 (0.25)	0.552 (14.02)	497 (2.211)
1.5 (38.1)	0.022 (0.56)	0.568 (14.43)	331 (1.472)
2.0 (50.8)	0.040 (1.02)	0.589 (14.96)	249 (1.108)
2.5 (63.5)	0.063 (1.60)	0.616 (15.65)	199 (0.885)
3.0 (76.2)	0.090 (2.29)	0.646 (16.41)	165 (0.734)
3.5 (88.9)	0.122 (3.10)	0.681 (17.30)	142 (0.632)
4.0 (101.6)	0.160 (4.06)	0.723 (18.36)	124 (0.552)

Construction is achieved using a single No. 3 rebar fabricated with a sharp 90-degree hook with 1-in. (25-mm) extension, anchored by filling the CMU void that contains the bar with concrete. Laboratory tests indicated rebar embedment into a single internode space within the culm provided adequate strength. However, to avoid potential detailing conflicts within the first internode due to the brace to column connection, the No. 3 bar is extended into the second internode space as shown in Fig. 3.

**IV.2 Experimental setup and loading protocol**

Specimens represent the rebar extending full length (from CMU block to bamboo culm). To model this, the rebar specimen was anchored rigidly in the CMU block with a mortar infill and rigidly to a metal bracket by welding the rebar dowel to the metal bracket (Figure 4). The mortar infill reflects Haitian mix practices as witnessed by EBNet members. A target fine aggregate to cement ratio is 9:1 (measured by weight or volume). Water is then added based on a visual target viscosity that will allow the mortar infill to be poured into the CMU cell, and corresponding bamboo culm by means of a grout bag. The laboratory specimens had a final

water to cement ratio of approximately 2.89. Compressive strengths of the resulting mortar infill averaged 522 psi (3.6 MPa).

Testing for each rebar dowel connection was achieved using a specially built testing rig (Figure 5) aiming to simulate load applied at the midspan of the free length of the No. 3 (9.5 mm nominal diameter) rebar, with restraint achieved at one end by embedment in the concrete-filled block and at the other end by welding to the metal hardware used to load the specimen. Loading was applied using an ATS Series 900 Universal Testing Machine and followed a modified ATC-24 displacement protocol of Figure 6. Three displacement cycles were performed at each amplitude, and the cyclic amplitudes were based on the expected yield displacement of the rebar dowel. The displacement amplitudes were set to 0.5, 0.75, 1, 2, 3, 4, and 5 times the expected yield displacement. Displacements were measured between the steel channel the CMU block is mounted to and the end of the exposed rebar, adjacent to where the weld occurs. Superlogics data acquisition software was used to continuously record load and displacement. The Universal Test Machine was manually controlled to follow the ATC-24 displacement protocol.



Figure 4. Specimen and hardware used to simulate pure shear applied at midspan.



Figure 5. Specimen in test machine.

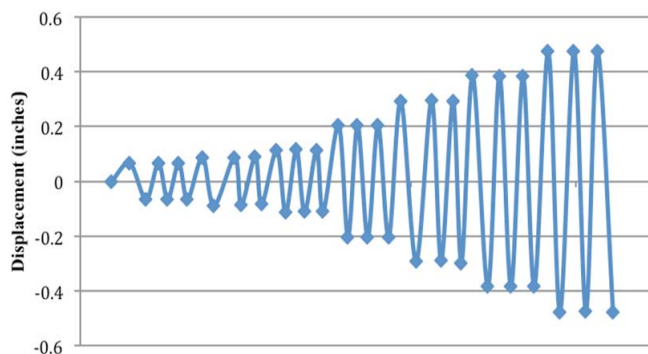


Figure 6. Illustration of ATC-24 reversed cyclic displacement protocol. (1 in. = 25.4 mm).

### IV.3 Experimental test results

Plots of recorded load-displacement response are provided in Figures 7 and 8, for the specimens with 2- and 3-inch (50- and 75-mm) lengths of exposed dowel, respectively. With reference to Table 3, yield strengths of 249 and 165 pounds (1.108 and 0.734 kN) would have been expected, whereas observed yielding occurred at approximately 260 and 220 pounds (1.157 and 0.979 kN), respectively. These differences may be due to the effective length between plastic hinges being less than the nominal length, a yield strength higher than 40 ksi (276 MPa), or perhaps the development of some strain hardening. Peak strengths for the 2-in. (50-mm) sample were approximately 340 and 420 pounds (1.512 and 1.868 kN) in each loading direction—approximately 31% and 62% greater than the observed effective yield strength. This difference likely reflects the development of some asymmetry in the experimental setup or degradation of the concrete in the vicinity of the dowel. A picture near the end of the test is provided in Figure 9, and highlights the degradation of concrete for this specimen. Peak strengths for the 3-in. (75-mm) sample were approximately 290 and 310 pounds (1.290 and 1.379 kN) in each loading direction—an average of 36% greater than the observed effective yield strength. Test results show ductile behavior with relatively full hysteretic loops.

Effective yield displacements were approximately 0.20 and 0.16 in. (5.08 and 4.064 mm) respectively, substantially greater than the calculated values of 0.04 and 0.09 in. (1.016 and 2.286 mm) respectively. These disparities are likely to reflect flexibility of the test fixtures or infill mortar, or perhaps misalignment developing during the progression of the test.

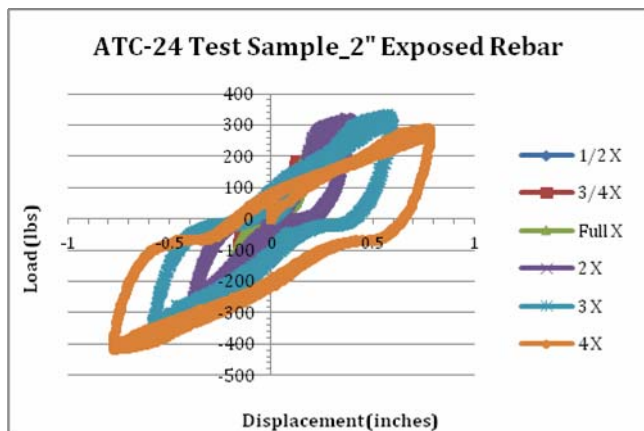


Figure 7. Experimental results for 2-in. (50-mm) dowel.

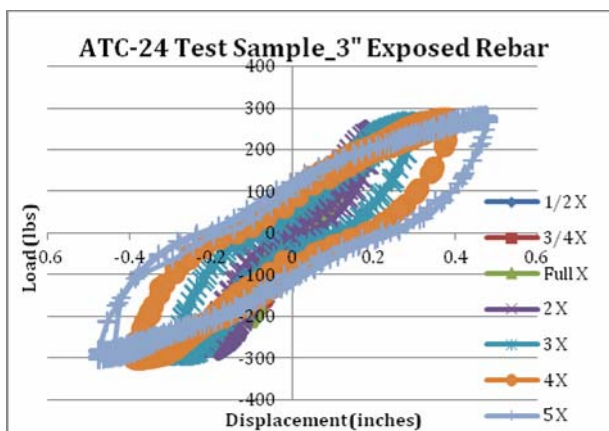


Figure 8. Experimental results for 3-in. (75-mm) dowel.



Figure 9. Experimental results for 3-in. (76-mm) dowel.

## V. Analytical investigations of dowel behavior

The experimental results indicate the dowel can provide very ductile behavior to the system, despite the progression of damage to the restraint provided by the concrete cast within the CMU void. (Note that damage would also be expected at the opposite restraint, provided by the mortar cast within the bamboo culm.) Due to the difficulty of simultaneously applying axial load while applying lateral shears, analytical investigations were undertaken to evaluate the effects of axial load on the behavior of the rebar dowel.

A 12-mm diameter bar of Grade 40 reinforcement was considered, assumed to have actual yield strength of 47.9 ksi (330 MPa). The bar was modelled as fixed at end and restrained from rotation at the other end. Results for bars having length of  $4\emptyset$  (= 48 mm or 1.9 in.) and  $10\emptyset$  (= 120 mm or 4.7 in.) are reported below. While axial tension forces will reduce the plastic moment and hence shear capacity, tension is generally beneficial to the system response. In contrast, compression upon the yielding dowel bar can introduce destabilizing P-Delta effects while also reducing the plastic moment strength and hence shear capacity. For these reasons, analyses simulated ATC-24 loading with different levels of (constant) compression to identify useful ranges. Values of 0,  $0.10P_y$ ,  $0.20P_y$ ,  $0.40P_y$ , and  $0.60P_y$  were used, where  $P_y$  (=  $A_b \cdot f_y$ ) corresponds to yield.

The bar was modelled using ANSYS Element BEAM23 (2D Plastic Beam). This element has a uniaxial behaviour with tension-compression and bending capabilities. Each node has three degrees of freedom: translation in the nodal x and y directions and rotation about the nodal z-axis. This element has plastic deformation, stress stiffening and large deflection capabilities. The ANSYS model was validated by comparison of the response of a cantilever column subjected to lateral displacement and axial load with theoretically derived values; results for shear and moment were within 1.6% of the theoretically correct values.

The steel stress-strain model for the Grade 40 reinforcement is represented in Figure 10, and uses the following parameter values: the end of the yield plateau and beginning of strain hardening at  $\epsilon_{sh} = 0.018$ , the strain at which the ultimate strength first appears at  $\epsilon_{sur} = 0.15$ , the strain at which the ultimate strength terminates, corresponding to fracture, as  $\epsilon_{su} = 0.18$ , the expected yield strength as  $f_{ye} = 330$  MPa, the ultimate strength as  $f_{ue} = 500$  MPa, and the modulus of elasticity as  $E = 200$  GPa. A multilinear kinematic hardening (MKH) material behaviour option was chosen. In this model, irreversible straining develops in the material beyond a certain level of stress. The plastic strains are assumed to develop independent of time. The MKH model assumes that the total stress range is equal to twice the yield stress, which allows for development of plasticity under cyclic loading.

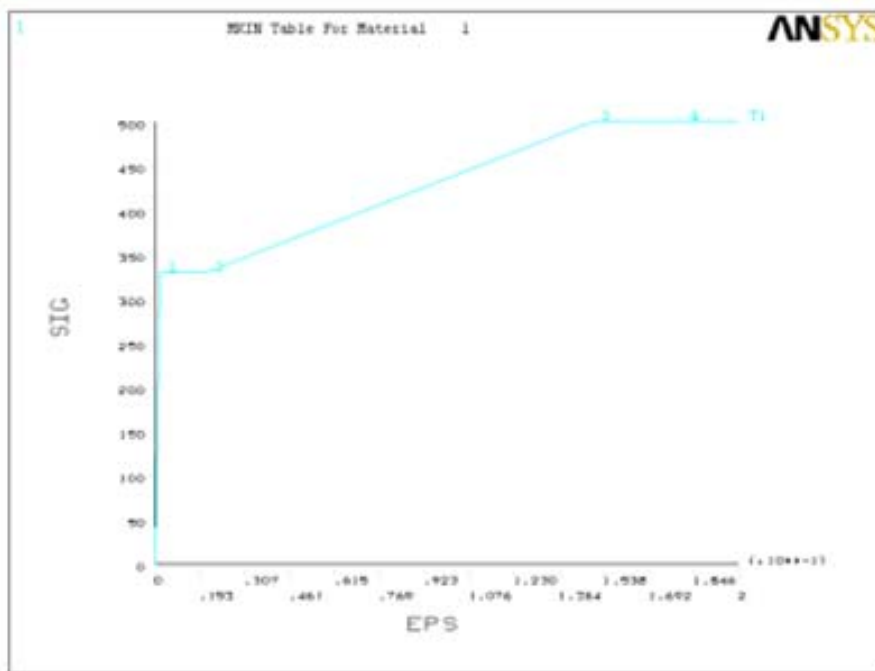


Figure 10. Steel stress-strain relationship used in the ANSYS model.

Basic results for  $L=4\phi$  with no axial load or  $P=0.40P_y$  are shown in Figure 11. Note that the peak shear resisted exceeds values determined experimentally due to the larger cross section (12 mm versus 9.5 mm), the slightly shorter length (48 mm versus 50 mm), and small differences in yield strength. Of particular interest are the ductile behaviour obtained and the relatively small effect of a significant axial load ( $0.40P_y$ ) on the softening after yielding, the shear strength, and the post-yield stiffness. Negative post-yield stiffnesses are known to lead to biased response to earthquake ground motions, and can lead to large displacements, primarily in one loading direction, and during just one or several cycles of response. The minor overall negative slope present in Figure 11b shows that strain hardening results in positive post-yield stiffness on any individual cycle that is advancing into new (larger) displacements. Thus, the relatively minor negative overall stiffness and presence of strain hardening would be expected to blunt the development of larger displacement demands due to second order effects.

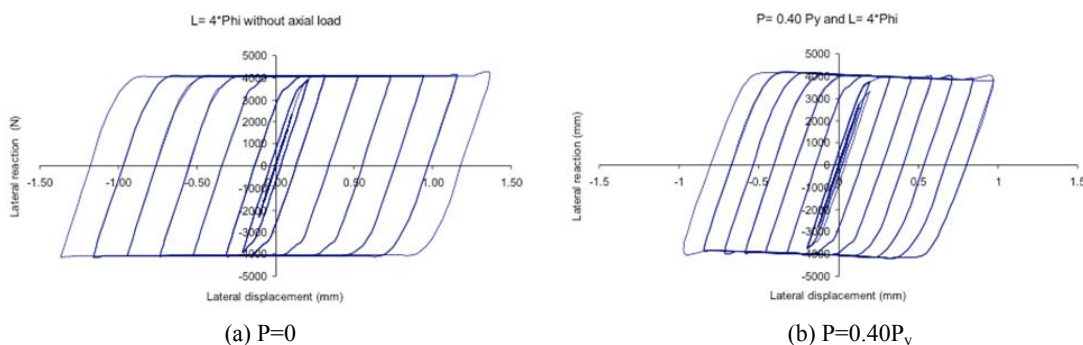


Figure 11. Results from detailed finite element modeling of a short dowel ( $L=4\phi$ ) under different (constant) levels of axial load.

Results for  $L=10\emptyset$  and axial loads of  $P=0.10P_y$  and  $P=0.40P_y$  are shown in Figure 12. Note for these more slender cases, the geometric stiffness is more pronounced, such that strain hardening is unable to mobilize a sufficient increase in stiffness to counteract the second order effect in the post-yield regime, even for axial loads as low as  $0.10P_y$ .

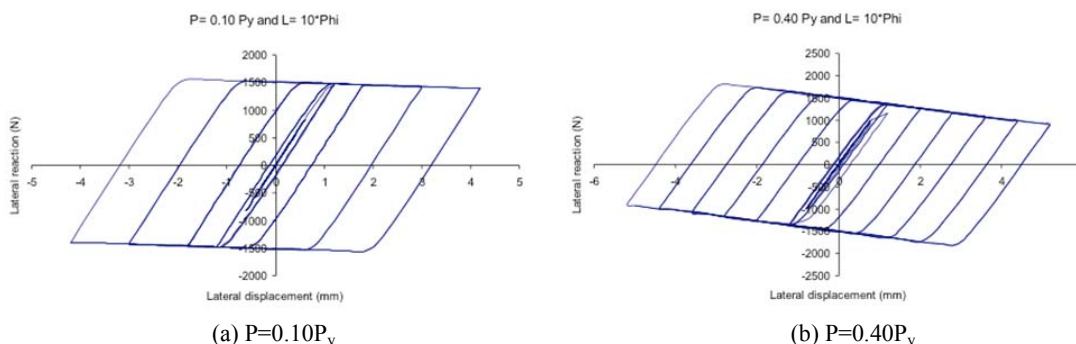


Figure 12. Results for an intermediate length dowel ( $L=10\emptyset$ ) under different (constant) levels of axial load.

## VI. Conclusions

Experimental data indicate that the yielding rebar dowel can provide a stable, ductile, mechanism for limiting forces that develop within the overlying bamboo frame system. The increase in effective length with cyclic displacement was significant for the specimens tested, and resulted in a softening behavior. The analytical work establishes the potential for rebar dowels with effective lengths of  $10\emptyset$  (or perhaps less) to develop negative post-yield stiffnesses that can lead to increased displacements during the inelastic response of the frame to earthquake-induced ground motions. Thus, to prevent cyclic increases in effective length, significantly higher concrete and mortar strengths must be reliably achieved in the field, or dowel-concrete bearing stresses must be reduced, or both. It is recommended that a steel annular insert be used to reliably define the effective length of the bar and reduce bearing stresses at both ends of the dowel, within the CMU block and bamboo culm. The effective length of dowel should then be limited to perhaps  $8\emptyset$ , which corresponds to 3 in. (75 mm) for No. 3 (9.5 mm) bars and 4 in (100 mm) for No. 4 (12.7 mm) bars. The actual clear length must consider how tightly the annulus encircles the bar. Ideally a strong and stiff material would be used to fill the space between the bar and the annulus—the bars might be welded to the annulus or the space filled with molten metal. The actual clear lengths to be used depend on the lateral strength required to ensure the building has acceptable performance under one or more seismic hazard levels and will depend on the number of braced frame bays along a wall line, the mass tributary to that wall line, and the elastic stiffness of the bamboo braced frame.

## Acknowledgments

Developments described herein were achieved in collaboration with Bruce King, P.E., of the Ecological Building Network, with assistance from Darrel DeBoer, Architect, and Martin Hammer, Architect. We appreciate the opportunity to work with these talented individuals towards the development of culturally appropriate and low-impact housing systems for reconstruction.

## References

- [1] <http://haiti.usaid.gov/issues/shelter.php> (last accessed April 20, 2013).
- [2] DesRoches, R. R., Kurtis, K. E., and Gresham, J. J., (2011), "Breaking the reconstruction logjam: Haiti urged to recycle concrete rubble," *American Ceramic Society Bulletin*, Vol. 90, No. 1, 20-26.
- [3] Federal Research Division, (2006). "Country Profile: Haiti" Library of Congress, May, 23 pp.
- [4] USAID, (2010). "Emergency Market Mapping and Analysis: The Market for Agricultural Labor in Sud-Est Department of Haiti," United States Agency for International Development, MicroReport #165, April.
- [5] Vance, E.D., Maguire, D. A., and Zalesny Jr., R. S., (2010). "Research Strategies for Increasing Productivity of Intensively Managed Forest Plantations," *Journal of Forestry*, June, 183-192.

- [6] Blatner, K.A., Cohn, P. J., and Fight, R. D., (2010). “Returns from Management of Noble Fir Stands for Bough Production and Sawtimber,” *Western Journal of Applied Forestry*, Vol. 25. No. 2, 68-72.
- [7] Marcklinger, C. J., (2011). “Community Environmental Preservation Initiative in Borgne, Haiti,” *FIU Electronic Thesis and Dissertations*, Paper 403.
- [8] Perez, M. R., Belcher, B., Maoyi, F., and Xiasheng, Y., (2003). “Forestry, poverty, and rural development: perspectives from the bamboo subsector,” in Hyde, W. F., Xu, J., and Belcher, B. (Eds.), *China’s Forests: Global Lessons from Market Reforms, Resources for the Future and CIFOR*, Washington D.C., 151-176.
- [9] Van Der Lugt, P., (2005). “The bamboo sector in Colombia and Ecuador: a state of the art analysis of opportunities and constraints,” *Journal of Bamboo and Rattan*, Vol. 4, No. 4, 421-440.
- [10] Riano, N.M., Londono, X., Lopez, Y., and Gomez, J.H., (2002). “Plant growth and biomass distribution on *Guadua angustifolia* Kunth in relation to ageing in the Valle Del Cauca – Columbia”, *Bamboo Science and Culture: The Journal of the American Bamboo Society*, Vol. 16, No. 1, 43-51.
- [11] Trujillo, D. J. A., (2009). “Axially Loaded Connections in *Guadua* Bamboo,” *Proceedings of the International Conference on Non-conventional Materials and Technologies*, September 6-9, Bath, UK.
- [12] Lopez, D. P., (2009). “Desarrollo de un Sistema de Construcción a partir de estructuras en *Guadua*,” *Universidad EAFIT, Ingeniería de Diseño de Producto*, Medellín, Colombia.

# A direct pedestrian-structure interaction model to characterize the human induced vibrations on slender footbridges

*J.F. Jiménez-Alonso<sup>1</sup>, A. Sáez<sup>1</sup>, E. Caetano<sup>2</sup>, Á. Cunha<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Department of Continuum Mechanics, Structural Analysis and Soil Engineering. University of Seville (Spain).*

*e-mail: jfjimenez@us.es, andres@us.es*

<sup>2</sup>*University of Porto, Faculty of Engineering*

*e-mail: ecaetano@fe.up.pt, acunha@fe.up.pt*

---

## Abstract

The phenomena of interaction between pedestrians and structures are known since, at the end of the 19th century, a group of 60 soldiers excited, under its step, a bridge located in the British town of Broughton [1]. Although the scientific community didn't stop studying the above mentioned phenomenon, it wasn't up to the occurrence of the phenomenon happened in the Millennium Bridge (London) [2], when the importance of the problem has produced a high level of attention. Large advances have been realized, from the above mentioned date, in the characterization of the interaction force that takes place between pedestrians and footbridges during the step of a pedestrian flow [3]. The above mentioned efforts in the characterization of the phenomenon, together with the increasing need of the current society for the construction of this type of structures, as way of structuring the urban spaces that surround cities, have been reflected in the appearance of investigation projects [4] and specific normative codes [5] for the consideration of the above mentioned phenomenon. In this paper, the formulation of a human-structure interaction model is carried out and its reliability is verified from the measures made on a footbridge when a controlled group of pedestrians circulate on it.

## Keywords

Slender footbridge, human induced vibration, pedestrian-structure interaction, synchronization.

## I. Introduction.

In most cases, the effect that the pedestrian exercises during its step on the footbridge, has been modeled as a moving variable force on the structure [3]. The variability, of the above mentioned load, tries to have in consideration the variation of the level of pressures that takes place between the pedestrian and the deck during the phenomenon of the step. In all these models, either it's despised the effect that the pedestrian has in the dynamic characteristics of the structure, or the above mentioned effect is considered by means of very simplified finger rules. These models don't consider the energetic exchange that takes place between both systems during the step of the pedestrian flows on the structure. Nevertheless, in the existing publications [3] appear indications of which the above mentioned phenomena of dynamic interaction take really place, and that both the frequencies and the modes of vibration of the structure seem to be affected by the step of pedestrian groups. In the case of structures subjected to large pedestrian flows, the correct estimation of the above mentioned effect may be of vital importance, both during the project phase, for the budget increase that the above mentioned phenomenon supposes when a simplified finger rule for the dynamic characterization are used, during the design phase; and in the case of an intervention on some existing footbridge that presents signs of sensibility to the pedestrian step, by the influence that the dynamic characteristics of the footbridge present on the calibration of the energy dissipation systems, applied normally as vibration control system [5].

In the present article, it's proposed as methodology for the correct characterization of the whole dynamic behavior, the use of a human-structure interaction model with six degrees of freedom, in order to characterize the movement of the gravity center of the pedestrian in three directions of the space. The resolution of the problem of energetic exchange has been realized by the direct form, realizing the modal projection of the coordinates in contact between the pedestrian and the structure, and maintaining the physical coordinates of the gravity center of the pedestrian. The model considers, in the same way, the local effect of the step, by means of the modal projection of the corresponding interaction force.

This form of resolution of the phenomenon, allows, on the one hand, uncoupling the equations of the dynamic system that govern the behavior of the structure, thus facilitating the application of the model from the modal characteristics of the footbridge obtained to any commercial software based on the finite element method; and on the other one, it allows to estimate in a direct form both the dynamic characteristics of the structure during the pedestrian step, and the principal variable that regulates the behavior of the pedestrian during the phenomenon, the components of the pedestrian's center of gravity acceleration in the three space directions.

On the other hand, the design features allow considering in the calculation of the response of the structure under the pedestrian action, additional parameters, such as the sign of pedestrian damping introduced into the system. It's presented, finally, a validation example of the proposed model, in order to show the kindness of the same one, in the determination of the dynamic response of a real footbridge during a variable flow of pedestrians.

## II. Normative analysis.

Currently, the most advanced international codes about the dynamic behaviour of slender footbridges [4 and 5], determine, in a wide way, that if the natural frequencies of the structure is in the range of pedestrian walking step frequency (1.25-2.30 Hz for vertical vibrations and 0.50-1.20 Hz for horizontal vibrations) the acceleration, in that direction, needs to be determined and checked against a acceleration limits (Table 1) of the appropriate comfort level for each design scenario. To avoid lateral synchronization the acceleration in this direction must be less than 0.10-0.15 m/s<sup>2</sup>.

Level	Degree	Vertical acceleration	Horizontal acceleration
CL1	Maximum	<0.50 m/s <sup>2</sup>	<0.10 m/s <sup>2</sup>
CL2	Medium	0.50-1.00 m/s <sup>2</sup>	0.10-0.30 m/s <sup>2</sup>
CL3	Minimum	1.00-2.50 m/s <sup>2</sup>	0.30-0.80 m/s <sup>2</sup>
CL4	Discomfort	>2.50 m/s <sup>2</sup>	>0.80 m/s <sup>2</sup>

Table 1. Defined comfort classes with limit acceleration ranges [5].

The design scenario is established by the expected pedestrian traffic (Table 2) and the situation or importance of the structure. The comfort level is determined by the property of the structure, and normally a medium comfort level must be guaranteed for all traffic classes, except for pedestrian densities above 1.00 P/m<sup>2</sup> where a minimum comfort is acceptable.

Classes	Density $d$ [P=Person]	Characteristics
TC1	< 15 P d=15/S	15 single persons ; S= surface deck
TC2	<0.20 P/m <sup>2</sup>	Comfortable and free walking
TC3	<0.50 P/m <sup>2</sup>	Unrestricted walking, significantly dense traffic
TC4	<1.00 P/m <sup>2</sup>	Uncomfortable situation, obstructed walking
TC5	<1.50 P/m <sup>2</sup>	Unpleasant walking, very dense traffic

Table 2. Traffic classes [5].

The pedestrian induced action is represented as oscillating distributed load  $p(t)$ , defined by:

$$p(t) = G \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \cdot n'_p \cdot \psi \quad (1)$$

where:

$G$ , is the considered component of the step force ( $G=280$  N vertical, 140 N longitudinal and 35 N lateral).

$f$ , is the natural frequency under consideration.

$n'_p$ , is the equivalent pedestrians number.  $n'_p = 10.80 \cdot \sqrt{\xi \cdot n_p}$  (TC1-TC3) or  $n'_p = 1.85 \cdot \sqrt{n_p}$  (TC4-TC5).

$\psi$ , is the reduction coefficient to take into account the probability that the footfall frequency approaches the natural frequency under consideration.

$\xi$ , is the structural damping.

$n_p$ , is the number of the pedestrians on the loaded surface  $S$  ( $n_p = S \cdot density$ ).

$S$ , is the loaded surface that depends on the shape of the normal mode under consideration.

This methodology presents the following limitations:

- the equivalent pedestrian number (pedestrian moving in phase with the structure) has been determined by the experimental results of only one footbridge [5].
- the change in the dynamic structural properties that the pedestrians flow causes is considered through a finger rule (addition of all the pedestrian mass density to structure mass matrix).
- the interaction between pedestrians and the structure is only slightly considered.

The estimations carried out, under this methodology, normally overestimate the real results [5].



### III. Proposal of a human-structure interaction model.

In this section a method for the simulation of the interaction between the pedestrian and the footbridge is proposed. The same one is obtained from the application of dynamic equilibrium equations [6 and 7] to a simplified model of interaction with sprung and unsprung masses.

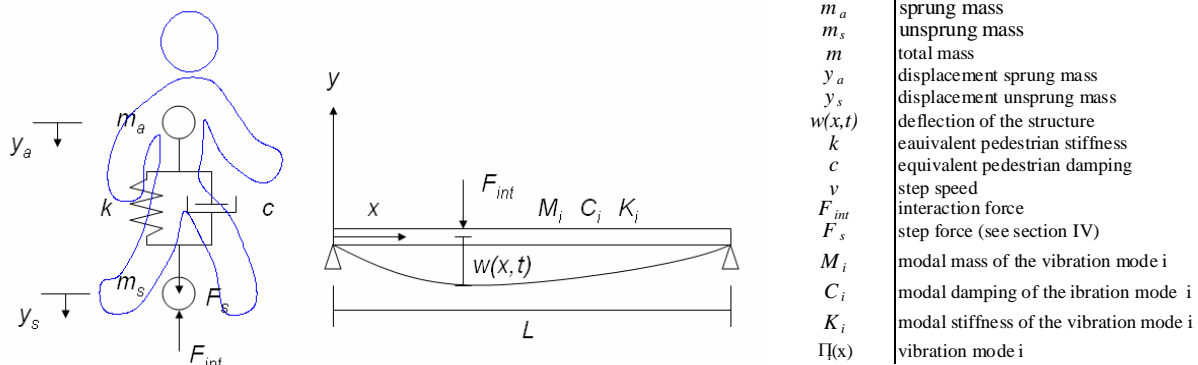


Figure 1. Pedestrian-structure interaction model.

For  $n$  modes of vibration  $\phi_i(x)$ , the total response of the structure may be decomposed in function of the amplitude of the different modes  $y_i(t)$ .

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot \phi_i(x) \quad (2)$$

$$\dot{w}(x,t) = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i(t) \cdot \phi_i(x) + \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot v \cdot \phi_i'(x) \quad (3)$$

$$\ddot{w}(x,t) = \sum_{i=1}^n \ddot{y}_i(t) \cdot \phi_i(x) + \sum_{i=1}^n 2 \cdot \dot{y}_i \cdot v \cdot \phi_i'(x) + \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot v^2 \cdot \phi_i''(x) \quad (4)$$

where

$$\phi_i'(x) = \frac{d}{dx} \phi_i(x) \text{ is the spatial derivate of the mode of vibration } i. \quad (5)$$

$$\phi_i''(x) = \frac{d^2}{dx^2} \phi_i(x) \text{ is the second spatial derivate of the mode of vibration } i. \quad (6)$$

Considering the balance of the system, structure and pedestrian model, the following coupled equation system is obtained.

$$M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + K_i y_i = \phi_i(F_{int}) \quad (7)$$

$$m_a \ddot{y}_a + c(\dot{y}_a - \dot{y}_s) + k(y_a - y_s) = 0 \quad (8)$$

$$m_s \ddot{y}_s + c(\dot{y}_s - \dot{y}_a) + k(y_s - y_a) = F_s - F_{int} \quad (9)$$

Thus, solving the value  $F_{int}$  of the above equation.

$$F_{int} = F_s - m_s \ddot{y}_s - c(\dot{y}_s - \dot{y}_a) - k(y_s - y_a) \quad (10)$$

And substituting this equation into the equilibrium equation of the structure.

$$M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + K_i y_i = \phi_i(F_s - m_s \ddot{y}_s - c(\dot{y}_s - \dot{y}_a) - k(y_s - y_a)) \quad (11)$$

Applying the equations of compatibility of displacements, velocity and acceleration between the structure and the simplified model of interaction.

$$y_s = w(x,t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot \phi_i(x) \quad (12)$$

$$\dot{y}_s = \dot{w}(x,t) = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i(t) \cdot \phi_i(x) + \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot v \cdot \phi_i'(x) \quad (13)$$

$$\ddot{y}_s = \ddot{w}(x,t) = \sum_{i=1}^n \ddot{y}_i(t) \cdot \phi_i(x) + \sum_{i=1}^n 2 \cdot \dot{y}_i \cdot v \cdot \phi_i' + \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot v^2 \cdot \phi_i''(x) \quad (14)$$

Substituting these relations in the overall dynamic equilibrium equation of the structure and organizing information in a matrix form, the following model of interaction is shown.

$$M(t) \cdot \ddot{y}(t) + C(t) \cdot \dot{y}(t) + K(t) \cdot y(t) = F(t) \quad (15)$$

Considering the nature of the proposed system, it's proposed the use of a method of  $\beta$ -Newmark integration family, depending on the integration step  $\Delta t$  and the parameters  $\beta=1/4$  and  $\gamma=1/2$ .

In the previous expressions, the value of the vibrations modes is zero, when the interaction simplified model remains outside of the structure.

$$\phi_i(x) = 0 \text{ for } 0 \geq x \geq L, \text{ with } L, \text{ length of the structure} \quad (16)$$

In the proposed method,  $\phi_i(x)$  is obtained, in a discrete way, using the finite element method, collecting the modal displacements and derivates in each of the nodes of the structure. To obtain a continuous function of the modes, the same one is determined from the shape functions consistent with the finite element approximation. The interpolation of displacement between nodes will have a cubic form, Bernoulli beam elements.

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^n \phi_i^j \cdot N_a(x) \quad (17)$$

where  $N_j(x)$  is the shape function for the degree of freedom  $j$ .

For a group of  $k$  pedestrians (Figure 2), represented each one by the above simplified interaction model.

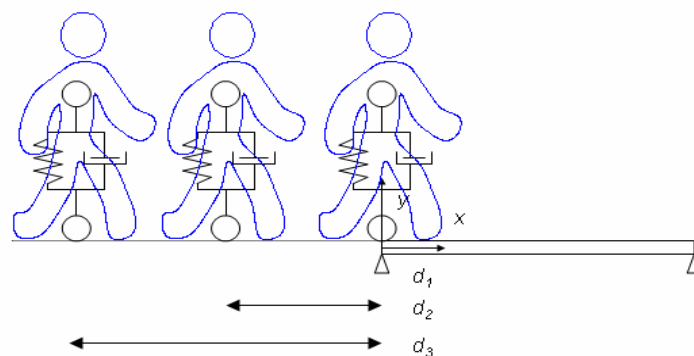


Figure 2. Group of pedestrians according to the simplified model of pedestrian-structure interaction..

When a group of pedestrians are considered in calculations, increases the number of differential equations to solve is increased, in the case of a single pedestrian, the same one was reduced to the considered number of vibration modes  $n$  plus the appropriate simplified interaction mechanical element system, total  $n+1$ . Assuming a group of  $k$  pedestrians, a system of  $n+k$  differential equations will have to be solved. The equations for the modes of vibration of the structure vary in term of the position of pedestrians. Every moment, the numbers of pedestrian on the deformed shape must be calculated, and the value of the amplitude, slope and curvature corresponding to their position.

As a preliminary validation of the proposed formulation, the previously defined parameters will be estimated from the results, presented in the international literature, of comparable studies carried out with different objectives. Finally, the experimental and numerical dynamic response of a real footbridge, under a controlled group of pedestrians, will be compared in order to determine the goodness of the proposed model.

The validation will be carried out, for simplicity, in the vertical direction, although the extracted results are easily extrapolated to the remaining directions.

#### IV. Determination of the walking forces.

The movement of the body mass and the put-down, rolling and push-off of the feet of one pedestrian generate the induced three-dimensional forces between both elements,  $F_s$ , that according to the research developed by different authors [4], can be determined from a Fourier series decomposition in the three-space components.

$$F_{p,vert}(t) = P \left[ 1 + \sum_{i=1}^{n_f} \alpha_{i,vert} \sin(2\pi i f_s t - \varphi_i) \right] \quad (18)$$

$$F_{p,lat}(t) = P \sum_{i=1}^{n_f} \alpha_{i,lat} \sin(\pi i f_s t - \varphi_i) \quad (19)$$

$$F_{p,long}(t) = P \sum_{i=1}^{n_f} \alpha_{i,long} \sin(2\pi i f_s t - \varphi_i) \quad (20)$$

where

$F_{p,vert}$  vertical periodic force due to walking or running

$F_{p,lat}$  lateral periodic force due to walking or running

$F_{p,long}$  longitudinal periodic force due to walking or running

$P$  [N] medium pedestrian weight (internationally considered as  $P=700.00$  N)

$\alpha_{i,vert}$   $\alpha_{i,lat}$   $\alpha_{i,long}$  Fourier coefficient of the  $i$ th harmonic for vertical, lateral and longitudinal forces or dynamic load factor (DLF).

$f_s$  [Hz] step frequency

$\varphi_i$  phase shift of the  $i$ th harmonic

$n_f$  total number of contributing harmonics.

Between the contributions of the different authors, for the development of the present document, the vertical dynamic load factors proposed by Setra [5] (see Table 3 and Figure 3) will be considered, as it's the most widely recognized international code in this area.

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$
0.40	0.04	0.04	0.00	90.00	90.00

Table 3. Fourier coefficient and phase shift for vertical dynamic load factors proposed by Setra [5].

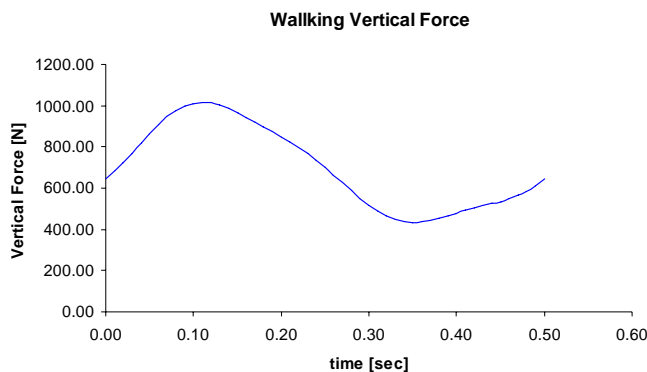


Figure 3. Vertical component of walking pedestrian force [5].

The relation between the velocity magnitude ( $v$ ) and the pacing frequency ( $f_s$ ) is considered by the empirical relationship (21), that it's based on the study of Bertram and Ruina [3].

$$f_s = 0.35 \cdot v^3 - 1.59 \cdot v^2 + 2.93 \cdot v \quad (21)$$

### V. Determination of the dynamic properties of the human-structure interaction model.

For the estimation of the dynamic characteristics of the SDOF-system, as a first approximation, a wide bibliographic study has been made. There are several studies that collect the effect of spectators on stadiums stands in the dynamic behaviour of the structure by a SDOF static system [8]. In the Figure 4 and Table 4, a scheme of the models used and the estimated dynamic parameters are shown.

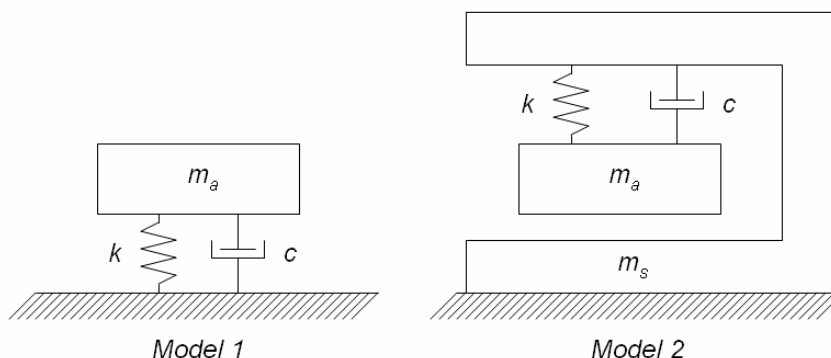


Figure 4. Simplified dynamic representations of the standing human body: (1) SDOF model (2) SDOF model with rigid support.

Human Model	Modal Properties	Human Model	Modal Properties
Foschi et al.	$f=3.30$ Hz $\zeta=53.00$ % $m_a=91.00$ kg	Falati	$f=10.43$ Hz $\zeta=50.00$ % $m_a=25.00$ kg
Al-Foqaha'a (Model 1)	$f=3.50$ Hz $\zeta=34.00$ % $m_a=83.00$ kg	Zheng and Brownjohn	$f=5.24$ Hz $\zeta=39.00$ % $m_a=85.00$ kg
Al-Foqaha'a (Model 2)	$f=3.70$ Hz $\zeta=36.00$ % $m_a=75.00$ kg	Matsumoto and Griffin (Model 1)	$f=5.74$ Hz $\zeta=69.00$ % $m_a=76.10$ kg
Brownjohn	$f=4.90$ Hz $\zeta=37.00$ % $m_a=80.00$ kg	Matsumoto and Griffin (Model 2)	$f=5.88$ Hz $\zeta=61.00$ % $m_a=70.60$ kg $m_s=7.06$ kg

Table 4. Dynamic properties of SDOF equivalents to standing humans [8].

Eliminating the extreme values, and considering averaged values to verify the reliability of the proposed model, the parameters, presented in the table below (Table 5), have been considered..

$m_a$ [kg]	$m_s$ [kg]	$\zeta$ [%]	$f$ [Hz]
63.00	7.00	35.00	3.50

Table 5. Dynamic properties of the SDOF considered in the human-structure interaction model.

### VI. Validation example.

For the validation of the model, the measured dynamic response of Viana do Castelo footbridge, in the section A (see Figure 5), under a controlled group of pedestrians is compared to the numerical results offered by the model. The characterization of the dynamic behaviour of the footbridge has been improved by the model updating of the finite element model of the same one from the experimental dynamic results of an ambient test (9).

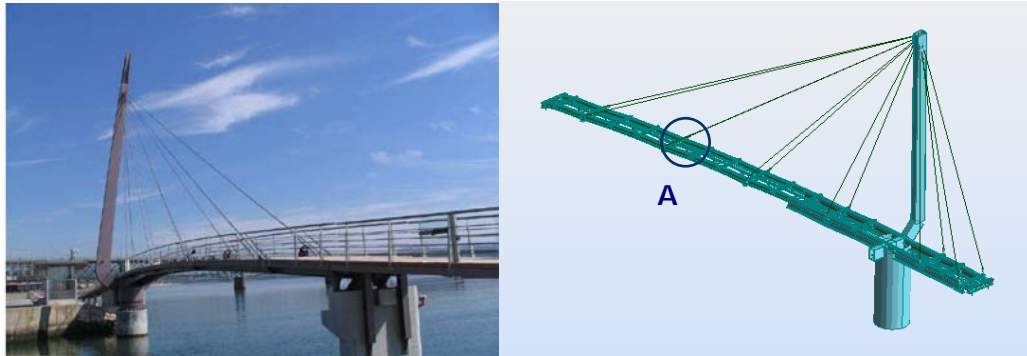


Figure 5. Lateral view and FEM of Viana do Castelo Footbridge (x).

During the dynamic tests developed in the footbridge, after its construction, a group of 50 pedestrians crossed the structure to different controlled step frequencies ( $f=1.60, 1.75$  and  $2.00$  Hz) with the help of a metronome. For the purpose of this study, the vertical acceleration measured in the section A will be considered in the three previously defined scenarios. In the following figures (Figure 6, 7 and 8), it's presented the numerical and experimental vertical acceleration, in the reference section, under the pedestrian flow.

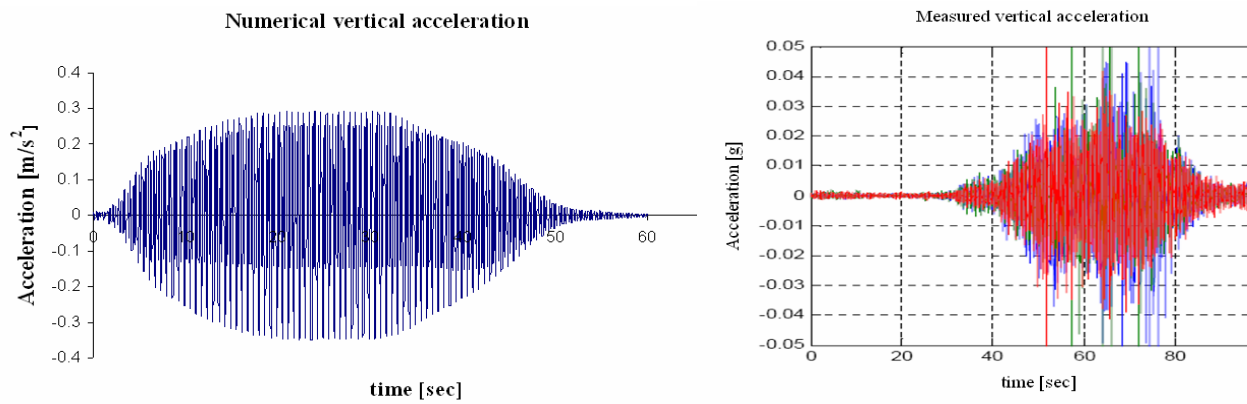


Figure 6. Estimated and measured vertical acceleration. Scenario I: 50 Pedestrian/Step frequency  $f_s=1.60$  Hz

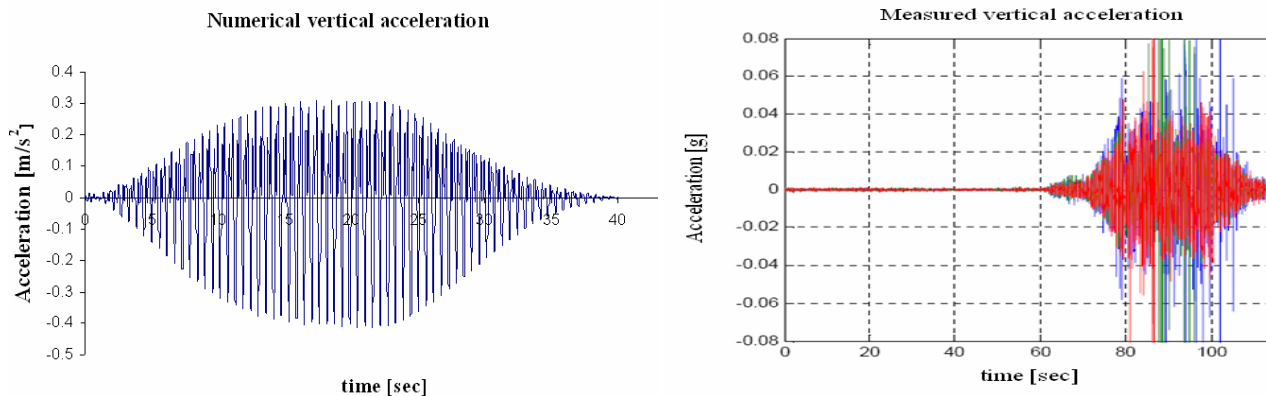


Figure 7. Estimated and measured vertical acceleration. Scenario II: 50 Pedestrian/Step frequency  $f_s=1.75$  Hz

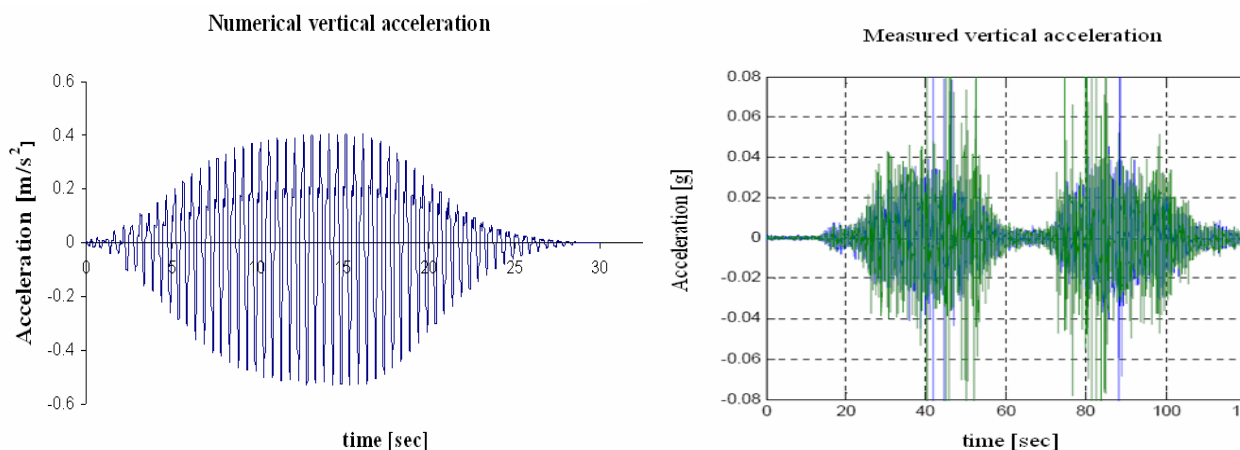


Figure 8. Estimated and measured vertical acceleration. Scenario III: 50 Pedestrian/Step frequency  $f_s=2.00$  Hz

In all the case, the maximum acceleration achieved and the shape of the graph (less local effect) are reasonably close. In the measured accelerations, there're several peaks due to the local modes of the wooden floor of the deck that shouldn't be considered in the present study.

## VII. Conclusions.

The current codes for the study of the dynamic behaviour of footbridges don't allow to adequately estimate of the maximum accelerations that occur at the different points of the deck. The most advanced methodology, although it's very effective to estimate the sensitivity of the structures to pedestrian's flows, it's quite conservative to estimate their effects on the structure. As this subject, the achieved acceleration, is the main factor that determines the service conditions, a pedestrian-structure interaction model has been proposed in order to a more accurately estimation of the response. The model has been presented and its applicability proven in this article. However, further studies will be performed in order to characterize the dynamic parameters of the same one in the three space directions under moving situations and in order to include synchronization phenomena.

## References.

- [1] Wolmuth, B., Surtees, J., "Crowd-related failure of bridges", *Civil Engineering*, Vol. 156, No.3, pp. 116-123, 2003.
- [2] Dallard, P.;Fitzpatrick, A.J.; Le Bourva, S.; Low, A.; Ridsill Smith, R.; Willford, M., Flint, A.. "The London Millenium Footbrige". *The Structural Engineer*, Vol. 79, No. 22, pp. 17-33, 2001.
- [3] Zivanovic, S., Pavic, A., Reynolds, R., "Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 279, No. 1-2, pp. 1-74, 2005.
- [4] SYNPEX Guidelines, European Project on Advanced Load Models for synchronous Pedestrian Excitation and Optimised Design Guidelines for Steel Footbridges, 2007
- [5] Setra, *Guide méthodologique passerelles piétonnes (Technical guide footbridges: Assesment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading)*, Setra, 2006.
- [6] Clough, R and Penzien, J. *Dynamics of Structures*, 2nd. Edition, Mc Graw-Hill, 1993.
- [7] Domínguez, J. "Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la resonancia" Tesis Doctoral. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid (UPM). Publicada por la Asociación Nacional de Constructores Independientes (ANCI).
- [8] C.A. Jones, P. Reunodls, A. Pavic. "Vibration serviceability of stadia structures subjected to dynamic crowd loads: A literature review". *Journal of Sound and Vibration*, Vol 330, pp. 1531-1566,2011.
- [9] Caetano, E. Cunha, A. Hoopah, W., Raoul J. "Footbridge Vibration Design". CRC Press. Taylor&Francis Group. London (U.K.) 2009. ISBN: 978-0-415-49866-1.

## **Análisis estructural de la torre del Homenaje de la Alhambra. Evaluación del procedimiento de simulación numérica mediante el MEF**

### *Structural analysis of Homenaje tower in the Alhambra. Assessment of numerical simulation procedure through FEM*

*Compán Cardiel, Víctor; Villegas Cerredo, David; Hernández Montes, Enrique.*

*Departamento de mecánica de los medios continuos. Universidad de Sevilla. [compan@us.es],*

#### **Resumen**

En el presente trabajo se pretende profundizar en la documentación y análisis de la Torre del Homenaje de la Alhambra, uno de los casos más paradigmáticos, por su configuración y construcción, del medievo hispanomusulmán.

La torre se levanta como bastión defensivo en el perfil norte de la colina de ‘Sabika’, donde se alza el conjunto monumental de la Alhambra en Granada.

El interés creciente por la conservación y documentación del patrimonio conducen a la realización de un estudio que evalúe de manera integral el estado estructural del edificio. Por su situación geográfica, en uno de los puntos de mayor sismicidad de la Península Ibérica, la evaluación estructural desde un punto de vista sísmico cobra especial relevancia.

La complejidad de su forma, la utilización de diferentes técnicas constructivas, la utilización de varios materiales, unido a la dificultad de la caracterización de sus propiedades mecánicas, hacen pertinente una discusión sobre los modelos de simulación numérica mediante el M.E.F. más adecuados para analizar correctamente desde un punto de vista estructural este edificio.

#### **Abstract**

*This work deals with the documentation and analysis procedures related to the ‘Homenaje’ tower of The Alhambra. This is one of the most significant constructions in the medieval ‘hispanomusulmán’ period.*

*The tower rises as a defensive stronghold in the north profile of ‘Sabika’ hill, where historical city of the Alhambra stands.*

*The increasing interest for conservation and documentation of heritage makes relevant the whole structural analysis of the building. Because of the situation of the building, in one of the points of grater seismicity in the Iberian mainland, the structural assessment through a seismic analysis makes especially relevant.*

*Complexity of some elements and shapes; the uses of different construction techniques and some different materials, joined all together with the difficulty to characterize mechanical properties in an accurate way; make relevant a discussion about the different numerical models based on FEM applicable to make an appropriate structural analysis of a building like this.*

#### **Palabras clave**

Fábrica de ladrillo, Alhambra, análisis pushover, evaluación estructural

#### **Keywords**

Masonry, Alhambra, pushover analysis, structural assessment

## I. Descripción del edificio

La Torre del Homenaje, situada en el flanco noreste de la alcazaba de la Alhambra, dibuja un rectángulo en planta de unos 12.00x10.50m. Cuenta con seis niveles más el nivel de terraza y almenas. En vertical, la torre se encuentra dividida en dos zonas bien diferenciadas:

Una zona inferior comprendida por dos niveles, ambos unidos a la muralla perimetral del recinto. Desde este punto se puede acceder a través de un pasaje cubierto por una bóveda de cañón (ver Fig.1).

La zona superior está conformada por el resto de niveles (conectados entre sí por un núcleo de comunicaciones vertical interno). El acceso se realiza desde lo alto de la muralla norte, en el nivel tres.

En planta, todos los niveles (a excepción del primero y el último) están divididos en 6 espacios cuadrados o sensiblemente rectangulares, dejando en la zona central dos pilares de gran dimensión que recorren el edificio en toda su altura. Estos espacios están cubiertos por diferentes sistemas de bóvedas y cúpulas rellenos hasta conformar el suelo del nivel inmediatamente superior.

Conforme vamos subiendo en altura el muro perimetral reduce su sección por la cara interior, pasando de los 2.35m del nivel más inferior hasta los 0.80m del nivel superior. Las soluciones variadas y experimentales de cubrición empleadas en el interior contrastan con la contundencia del aspecto exterior de la torre, siendo difícil imaginar de un vistazo, los pormenores que esconde detrás de sus muros.

Así como en otros edificios del conjunto es posible establecer como válidas algunas de las reglas constructivas empíricas [1] de la época, en este edificio hay una clara diferenciación entre el muro perimetral y la configuración interior. Los elementos interiores, tales como pilas principales o arcos y bóvedas responden a proporciones clásicas que justifican el dimensionado de los mismos; por ejemplo era habitual que el espesor de los arcos fuera proporcional a la luz salvada o que el ancho de los estribos fuera proporcional a la altura de la clave del arco recibido; siendo relativamente sencillo comprobar algunas de estas reglas empíricas en un análisis geométrico preliminar.

Esto no ocurre así en el muro perimetral, donde los espesores son de una mayor relevancia y donde se aprecia claramente una doble intencionalidad. Por un lado, una necesidad de adición de masa derivada de la contundencia estructural que requería un edificio predominantemente defensivo. Por otro lado, ya se conocía la virulencia de los temblores de la zona, siendo de nuevo necesario disponer elementos contundentes que evitaran su ruina.

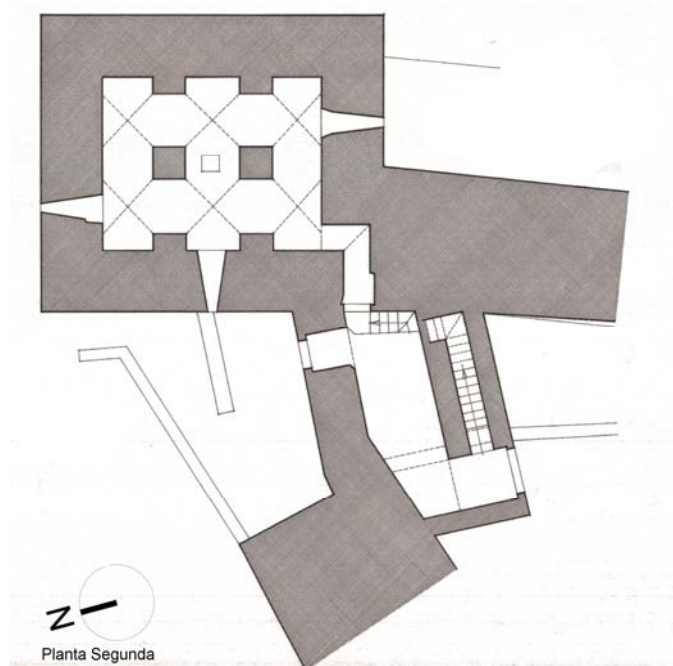


Figura 1 – Planta de la zona inferior con ambas murallas acometiendo a la torre



## II. Estado actual

El estado de conservación del edificio es bueno, no presentando patologías reseñables de carácter activo. Las grietas y defectos reflejados en un informe realizado por el CEDEX en 1995 [2] no han sufrido ninguna evolución de consideración.

Los defectos y patologías detectados por plantas, en su mayoría, son debidos a defectos puntuales, a fenómenos derivados de la propia configuración geométrica y resistente del edificio o a diferentes intervenciones practicadas a lo largo de su historia.

Sí cabe destacar, por su especial incidencia, algunas apreciaciones de carácter general registradas:

En primer lugar existe una grieta de considerable tamaño en el paramento Este (fig.2), cuya dirección indica la dirección en la que se han producido desplomes o asentamientos de consideración. En segundo lugar, un estudio detallado de las cotas de nivelación registradas en distintos puntos de todas las plantas, dan una idea de los asentamientos o los acortamientos que han podido producirse en determinadas zonas de la torre.

En cuanto al estado de los paramentos interiores, surge una variada casuística. En varias de las plantas se muestra el elemento estructural desnudo; incluso determinados daños permiten conocer los espesores empleados y los elementos de base; en la mayoría de ocasiones es factible determinar las dimensiones y geometría de los principales elementos. En otras ocasiones el paramento aparece revestido y no es posible obtener una información de mayor veracidad que la que proporciona el estudio de elementos similares y el conocimiento de los procedimientos constructivos de la época.

En cuanto al grado de intervención del edificio, es variado. En general, no existe constancia de que se hayan realizado intervenciones de consideración en los elementos sustentantes interiores. Así mismo, no existen registros de desplomes o colapsos locales interiores que hicieran pertinentes intervenciones de reconstrucción.

En cuanto a los elementos exteriores, tenemos constancia de dos intervenciones que, por su relevancia en la configuración del edificio, se describen a continuación:

Por un lado, consta un derrumbe parcial del muro de la esquina suroeste de la torre (esquina donde confluyen la muralla oeste, la muralla sur y el núcleo de comunicación vertical). El derrumbe se debió con toda probabilidad a un terremoto registrado a mediados del siglo XVIII. La reconstrucción se realizó mediante aparejo de ladrillo (diferenciándolo de los elementos de tapial del resto del muro) y se sustituyó la arista troncopiramidal por una vertical pura.

Por otro lado, en el siglo XIX se acometió una reconstrucción del nivel superior. Se reconstruyeron las almenas (dotándolas de una altura superior a las originales) y se reconstruyeron tres de las cuatro naves que conforman el patio de la planta sexta. En esta ocasión se sustituyó el sistema abovedado del que aún queda constancia en una de las naves, por un sistema plano de entrevigado de madera.

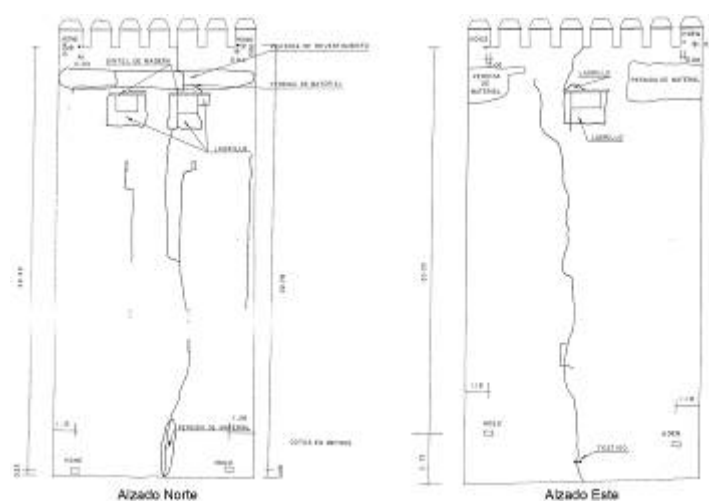


Figura 2 – Patologías en el muro exterior más reseñables

### III. Modelos de análisis estructural

Se ha optado por el empleo de diferentes modelos estructurales orientados a la obtención de diferentes parámetros de relevancia en el comportamiento del edificio.

Dado que se trata de una construcción histórica protegida, la obtención de datos directos del edificio que permitan caracterizar adecuadamente sus materiales, o su rigidez es costosa, cuando no inabordable. En estos términos, cualquier análisis planteado parte de una serie de fuentes de variabilidad y unos márgenes de incertidumbre que conviene tener presente.

Por otro lado, nos encontramos con las limitaciones del propio método de análisis (MEF), La complejidad geométrica, los elementos de predominancia volumétrica y la escala de la torre requieren un gran número de GDL para poder aproximar la rigidez correctamente (fig.3). En ese sentido, se van a valorar diferentes modelos numéricos con diferentes grados de aproximación.

En primer lugar, del análisis mediante líneas de empuje (**modelo 1**) nos va a permitir cuantificar la estabilidad global del edificio, así como la seguridad de determinados elementos. Este método ha permitido el estudio de los muros perimetrales en cuanto a su estabilidad global, cualificación del efecto de las acciones transversales y estimación del estado tensional.

Así mismo, permiten establecer un coeficiente de seguridad geométrico para los elementos interiores relevantes, como son los arcos principales de descarga y las cúpulas y bóvedas que cubren el interior.

Este acercamiento preliminar sólo busca satisfacer las condiciones de equilibrio, pero para este tipo de geometrías es suficiente para tener una primera cuantificación a nivel isostático del estado general de sus elementos.

Un segundo acercamiento al edificio se plantea mediante un análisis estático a través del método de los elementos finitos (**modelo 2**), utilizando materiales con un comportamiento elástico y lineal. De este análisis pueden extraerse datos relevantes del comportamiento general del edificio. Del análisis tensional y de deformación vamos a poder identificar la mayor parte de las patologías del muro perimetral.

Es en este análisis donde puede estimarse el nivel tensional de los distintos elementos y su margen de seguridad frente a una determinada sollicitación.

Por último, se plantea un análisis estático no lineal con un comportamiento inelástico del material, para valorar su respuesta estructural ante acciones horizontales, mediante curvas de capacidad. Este procedimiento nos va a permitir obtener valores más próximos a la realidad, gracias a la simulación inelástica del material, y su capacidad de limitar las tensiones de tracción o la capacidad de incorporar daño para degradar la rigidez de los elementos en el tramo post- fallo.

Este modelo de análisis se aplica a dos sub-modelos geométricos. Uno de análisis plano, donde se realiza un estudio de capacidad de una de las secciones representativas del edificio (**modelo 3**) y otro en el que evaluamos el efecto tridimensional a través de un modelo que contempla la rigidez y geometría del muro perimetral, compuesto por tapial y ladrillo como elemento predominante para la resistencia de los esfuerzos horizontales (**modelo 4**)

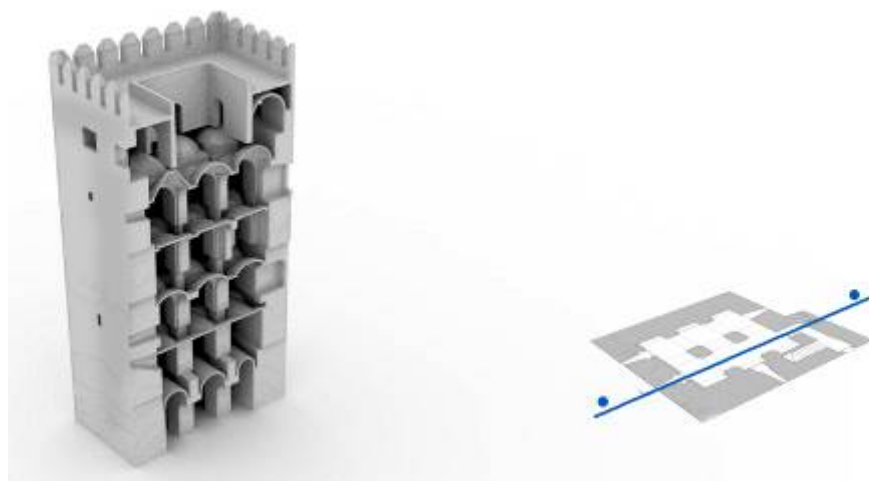


Figura 3 – Modelo tridimensional de la sección principal del edificio

#### IV. Caracterización de los materiales

##### IV.1 Modelo 1

En el modelo de líneas de empujes no es preciso considerar el material más que a nivel de densidades y pesos (descritas en el modelo 2); no obstante, para la estimación de la resistencia en el muro perimetral se supone un material que responda a un modelo de fallo Mohr-Coulombian, donde el valor inicial de la cohesión  $f_{vk0}$  se desprecia y  $\sigma_d$  representa la tensión vertical en el punto considerado.

$$f_{vk} = f_{vk0} + 0.36\sigma_d \leq 0.065f_{ck}$$

##### IV.2 Modelo 2

En el segundo modelo se ha empleado una caracterización elástica de los materiales, partiendo de las densidades consideradas en el modelo 1.

Se disponen de algunas muestras reales de los tapias de la torre analizadas en [3] que revelan un gran parecido con los materiales de la Torre de Comares. De este otro edificio aledaño sí se disponen ensayos y caracterizaciones mecánicas, comentadas en [2] y [4] en relación al tapial calicostrado, a las piezas de ladrillo y al mortero empleado.

Propiedad	Valor	
	Fábrica de ladrillo	Tapial calicostrado
Densidad aparente	1,45 g/cm <sup>3</sup>	2,25 g/cm <sup>3</sup>
Resistencia a compresión	40 Kp/cm <sup>2</sup>	25 Kp/cm <sup>2</sup> (Estructura) 80 Kp/cm <sup>2</sup> (Cimentación)
Resistencia a tracción	2 Kp/cm <sup>2</sup>	3 Kp/cm <sup>2</sup> (Estructura) 7,5 Kp/cm <sup>2</sup> (Cimentación) (Relación 1/8 aprox)
Módulo de elasticidad	30.000 Kp/cm <sup>2</sup> (Instantáneo) 16.000 Kp/cm <sup>2</sup> (a plazo infinito)	12.000 Kp/cm <sup>2</sup> (Estructura) 63.000 Kp/cm <sup>2</sup> (Cimentación) (al 40% de la carga de rotura)
Coefficiente de Poisson	0,25	0,3 (Estructura) 0,2 (Cimentación)

Para la caracterización de la fábrica de ladrillo, además se ha incluido un parámetro de origen geométrico que recoge la variabilidad del módulo de deformación en función de la proporción de espesor entre pieza de ladrillo resistente y llaga de mortero. La influencia de este parámetro es desarrollada en [5] y, en función de los distintos aparejos presentes en el edificio, lleva a las siguientes consideraciones:

	Fábrica de ladrillo			
	$\alpha$	$\beta$	E (N/mm <sup>2</sup> )	E/E <sub>t</sub>
Nivel 1	1.20	12	1429	1.19
Nivel 2	0.25	12	3125	2.60
Nivel 3	0.50	12	2143	1.79
Nivel 4	0.50	12	2143	1.79
Nivel 5 (Arcos y pilas)	0.90	12	1610	1.34
Nivel 5 (Cúpulas)	0.40	12	2414	2.01
Nivel 6	1.00	12	1538	1.28

*Valor de referencia del módulo de elasticidad 'E <sub>t</sub> ' del <b>tapial</b> tomado estudios de edificios aledaños (N/mm <sup>2</sup> )	1200
---	------

### IV.3 Modelo 3 y 4

Se ha demostrado que modelos constitutivos creados inicialmente para la simulación del hormigón no lineal ver [6] es válido para simular fábrica de ladrillo y piedra, ya que presenta un comportamiento elástico y lineal a tracción hasta la rotura, frágil en este caso y un comportamiento elastoplástico con ablandamiento y rotura dúctil en compresión. Como ejemplo se pueden nombrar el análisis realizado en la basílica de Santa María all’Impruneta (Italia) [7]. En nuestro caso vamos a utilizar como herramienta ABAQUS v.6.9-1 para realizar el análisis, ver [8], utilizando como material el “Concrete Damaged Plasticity“, ver [9] y [10].

Se propone por tanto un material inelástico con rotura frágil a tracción y dúctil a compresión, con capacidad de definir daño post-fallo (fig.4). Dicho daño modifica el valor del módulo de deformación elástico según un valor escalar comprendido entre 0-1. En nuestro análisis se ha definido un valor del daño tanto en tracción ( $d_t$ ) como en compresión ( $d_c$ ) de hasta un 90%. ( $d_c=d_t=0,9$ )

En el caso particular de la tracción, el daño se ha definido de manera lineal a partir de la energía de fractura, según la ecuación:

$$U_{t,0} = \frac{2G_f^I}{\sigma_{t,0}}$$

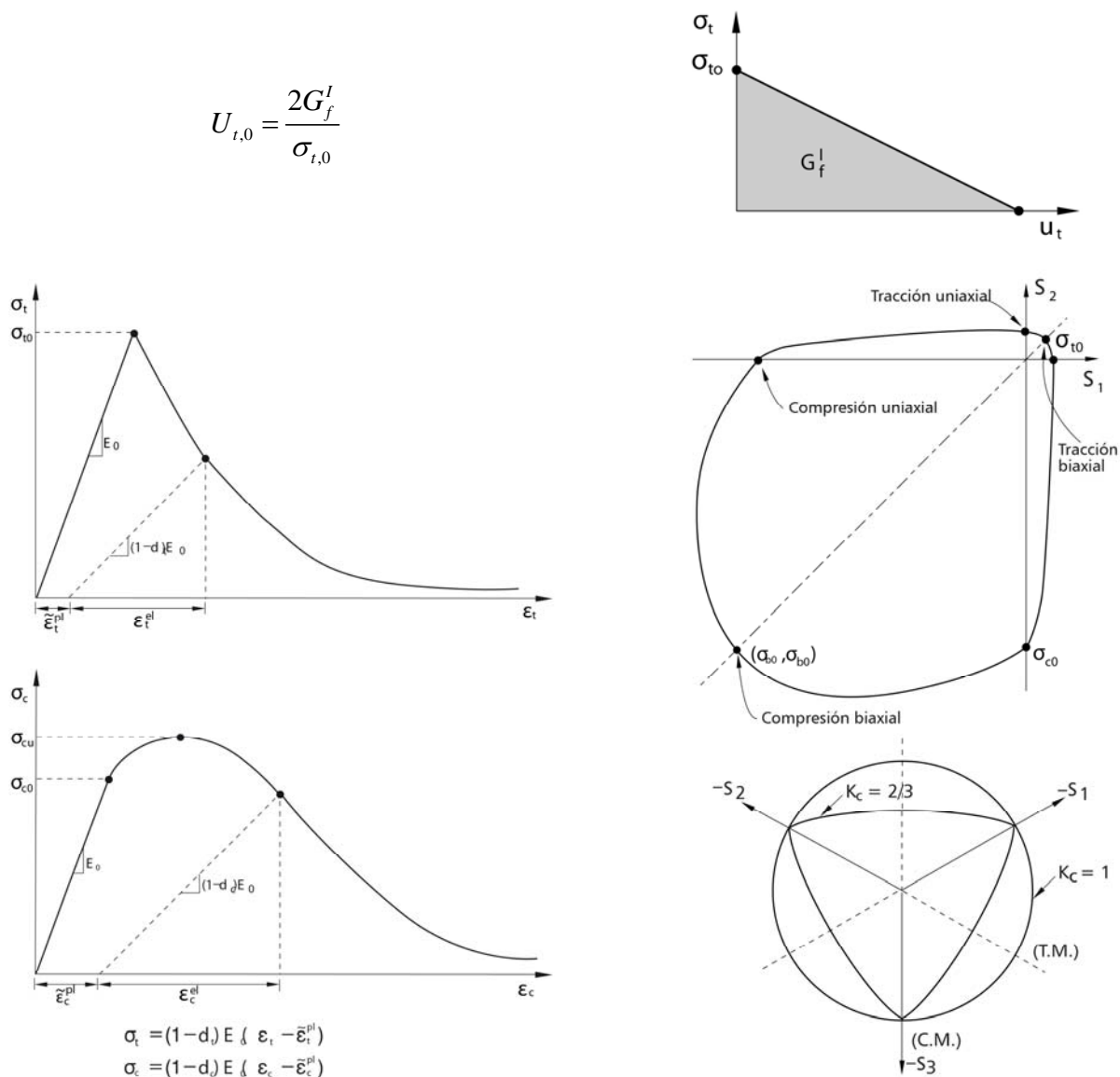


Figura 4 – A la izquierda sendas curvas tensión-deformación (tracción arriba, compresión abajo)  
 A la derecha, superficie de plastificación en el espacio de Haigh-Westergaard

Propiedades utilizadas en el análisis estático no lineal:

Propiedad	Valor	
	Fábrica de ladrillo	Tapial calicostrado
Densidad aparente	1,45 (gr/cm <sup>3</sup> )	2,25 (gr/cm <sup>3</sup> )
Módulo de elasticidad	1200 (Mpa)	1200** (Mpa)
Coefficiente de Poisson	0,2	0,3
Tensión de rotura a compresión	2 (Mpa)	0,5 (Mpa)
Tensión de rotura a tracción	0,2 (Mpa)	0,1 (Mpa)
Energía de fractura	40 (Mpa/m)	20 (Mpa/m)

\*\*Se han empleado diferentes relaciones de módulo de elasticidad entre ambos materiales, dentro del rango  $E_{\text{ladrillo}}/E_{\text{tapial}}=[1,2.5]$

## V. Análisis de los modelos empleados

### V.1 Modelo 1

El procedimiento de análisis mediante líneas de empuje, sólo satisface las ecuaciones de equilibrio, aunque es un método muy empleado en el análisis preliminar de estructuras históricas, ver [11]

Los resultados obtenidos (fig.5) sitúan el coeficiente geométrico de seguridad de los arcos principales sensiblemente por debajo de dos; aunque es posible encontrar una línea en equilibrio en todos los casos sin necesidad de hacer consideraciones en torno a la capacidad resistente del relleno rígido en el trasdós.

En cuanto a las cúpulas y bóvedas analizadas, en casi todos los casos es suficiente el espesor medio considerado de 15cm para garantizar un coeficiente de seguridad cercano a dos.

En el estudio del muro perimetral observamos que la configuración del nivel superior es muy determinante en la estabilidad global del elemento, situándose el coeficiente de seguridad hacia 1,5 para una configuración de empujes como la actual.

Es importante destacar la buena configuración que tiene el muro frente a esfuerzos verticales, quedando la carga perfectamente centrada si no se consideran los efectos horizontales. Este hecho tiene cierta importancia en el análisis a esfuerzos horizontales que se hará en el modelo 3 y 4, evitando excentricidades de carga locales y dotando al conjunto de una mayor coherencia estructural.

El punto crítico en el cruce con la última entreplanta se ve rápidamente atenuado por el efecto que tiene el relleno de ese nivel estabilizando el muro y centrando la carga.

Cabe destacar el efecto que tiene en la línea de empuje la consideración de uno u otro tipo de relleno. No se encuentra una configuración inestable en ningún caso, pero la consideración de un relleno rígido en el nivel 5 y un relleno más ligero en las plantas inferiores conduce a resultados con un mayor coeficiente de seguridad.

La consideración del efecto del muro interior que delimita el perímetro del patio del nivel 6 es de nuevo decisiva en el resultado de este análisis, ya que es preciso considerar un cierto desvío en la transmisión de cargas que afecta a la excentricidad en cabeza de las pilas centrales.

Cabe destacar sin embargo que, en términos resistentes, evaluando la resistencia a corte del muro, según el modelo de material descrito en el apartado anterior, el coeficiente de seguridad sube sustancialmente hasta el entorno de 4.

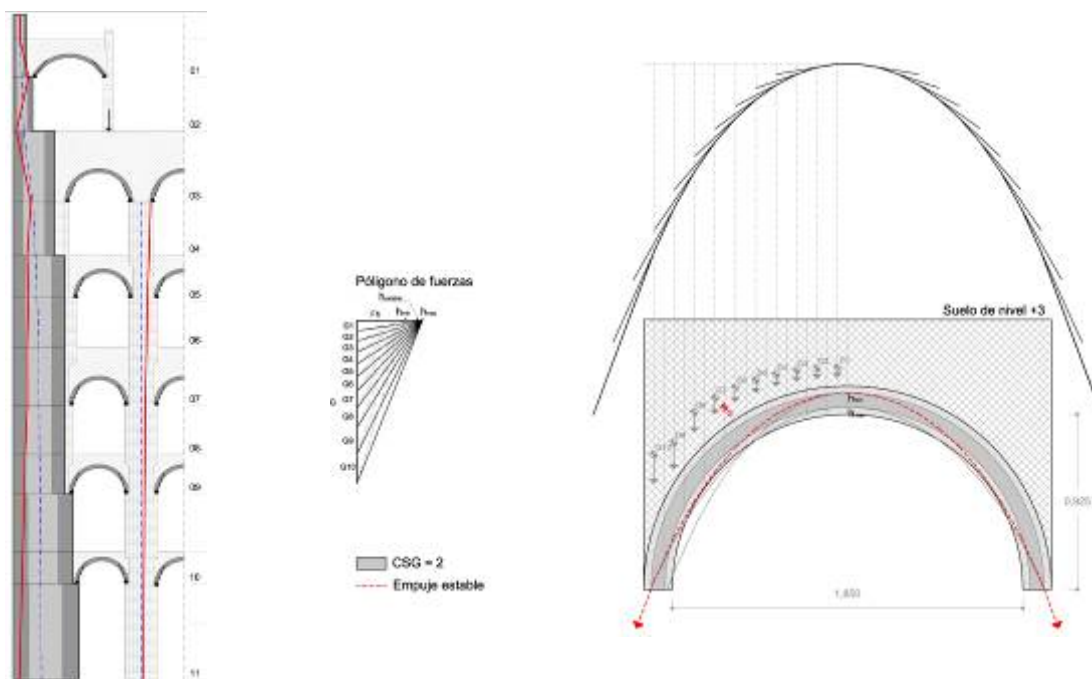


Figura 5 – Estudio mediante líneas de empuje de un arco fajón tipo y de una sección de muro

## V.2 Modelo 2

Los modelos empleados se basan en el MEF, empleando elementos volumétricos y realizando una discretización y un modelo de cálculo para cada planta (fig.6).

El efecto de incremento de la resistencia que experimenta el muro perimetral por estar sometido a un esfuerzo axial proporcional a la masa que gravita sobre el punto considerado es claramente beneficioso para la resistencia y la estabilidad del conjunto. Sin embargo, si no se tiene en cuenta el proceso constructivo seguido en el edificio, este efecto deriva en un acortamiento diferencial excesivo entre las pilas interiores y el muro perimetral y, por tanto, en un desplazamiento impuesto en los apoyos de arcos y cúpulas de los entrepisos.

Este efecto es difícil de cuantificar, pero a la vista de las pocas patologías detectadas cuya causa original pudiera ser esta, es lógico pensar que durante la fase de construcción se dispusieron los medios necesarios para evitar la generación de estas tensiones residuales.

Este efecto ha sido tenido en cuenta en los modelos empleados, reduciendo de esta forma los fenómenos de concentración de tensiones en los arranques y en clave que rápidamente aparecen al considerar el conjunto de una sola vez. Una discusión más amplia de ambos modelos 1 y 2, puede ser consultada en [12]

Se obtienen los siguientes resultados:

Nivel	Máx. tensión de tracción (Mpa)	Máx. tensión de compresión (Mpa)
Nivel 1	12,5	-15,0
Nivel 2	25,5	-46,0
Nivel 3	12,5	-41,0
Nivel 4	12,5	-24,5
Nivel 5	065	-31,0

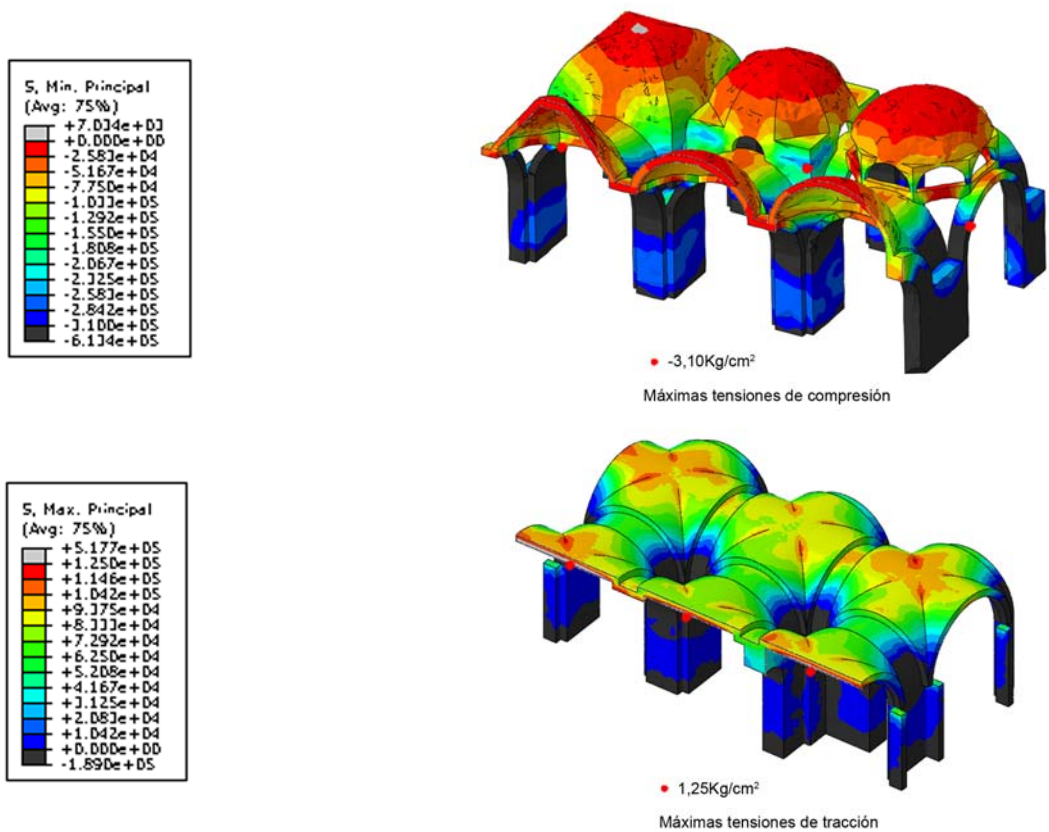


Figura 6 – Análisis mediante modelo 2, de dos niveles tipo

### V.3 Modelo 3

Si dejamos fuera del análisis el efecto de las murallas laterales y el efecto de vaciado de una zona del muro perimetral para albergar un núcleo de comunicaciones vertical; ambos aspectos que pueden ser discutidos mediante un modelo de rigideces global ponderando el muro perimetral, la torre es una conjunto doblemente simétrico y, por tanto es razonable estudiar muchos de sus parámetros mediante un modelo de deformación plana.

Con este propósito, se desarrolla un modelo mecánico plano donde se reflejan todos los elementos estructurales incluidos en la sección principal del edificio, siendo especialmente interesante para estudiar con mayor profundidad todos los fenómenos locales que pueden estar produciéndose si la carga horizontal es suficientemente importante como para movilizar transversalmente a una sección interior.

Es importante tener en cuenta el efecto que el ratio entre módulos de deformación Ladrillo-Tapial ( $E/E_t$ ) tiene. En general, la sección de muro perimetral se presenta en una combinación de tapial y ladrillo, mientras que las pilas interiores son, casi exclusivamente de fábrica de ladrillo. Esto produce una serie de deformaciones elásticas que, para satisfacer las ecuaciones de compatibilidad, acaban desarrollando un perfil de tensiones heterogéneo que no debe ser despreciado.

La obtención de resultados en este modelo se ha desarrollado mediante un análisis tipo ‘pushover’, donde un perfil de cargas horizontales es aplicado de forma incremental en pasos sucesivos y el desplazamiento en un elemento (en este caso situado en el último nivel) es monitorizado.

Como vemos en (fig.7), el primer tramo de las curvas de comportamiento depende en gran medida de la relación entre módulos de elasticidad. Los modelos con menor ratio son capaces de soportar menos carga, evolucionando el cálculo mucho menos.

En todos los casos, las divergencias hacen que el modelo se pare para unos niveles de carga considerados de entre 70 y 200 KN

En este modelo se observa la aparición sucesiva de zonas de fluencia plástica que van generando colapsos locales en los arcos internos de la sección.

La consideración de los rellenos vuelve a tener en este caso gran importancia, encontrándose que ya no sólo por su peso, sino también por sus propiedades, la simulación mediante diferentes tipos de material conduce a resultados muy diferentes. En este caso, se ha empleado un material inelástico para todos los rellenos. Dicho elementos suele estar ejecutado con material de relleno con un alto nivel de huecos, luego para lograr una mejor aproximación a su comportamiento se ha considera un elemento con una alta capacidad de deformación plástica con valores tensionales bajos, especialmente su capacidad resistente a tracción.

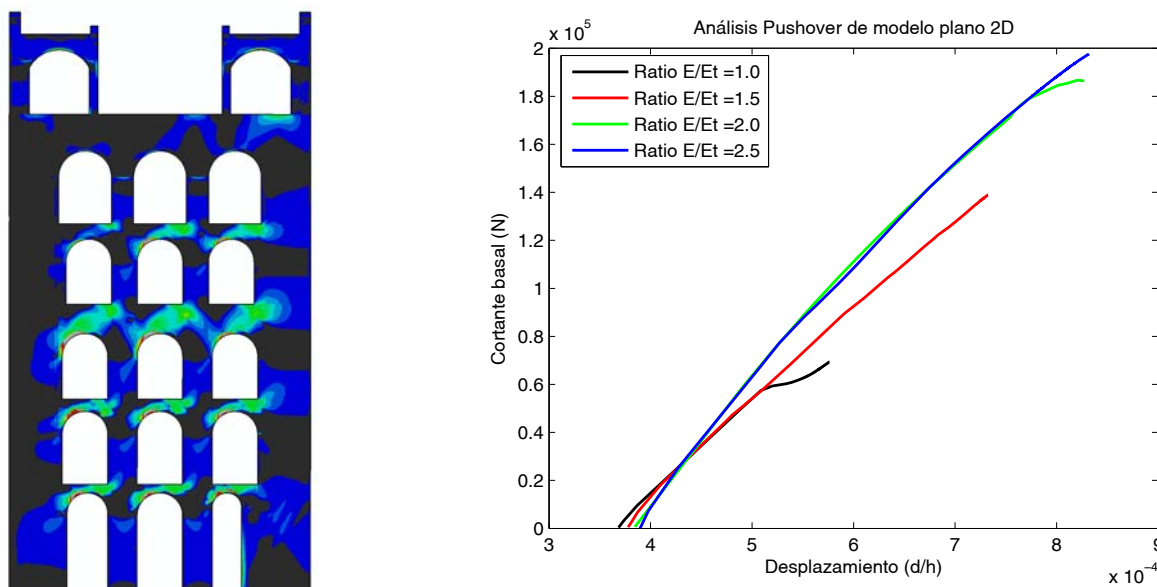


Figura 7 – Análisis ‘pushover’ del modelo 3 (derecha) y modelo 3 (izquierda)

#### V.4 Modelo 4

En este modelo se estudia mediante un procedimiento tipo ‘pushover’ análogo al empleado en el modelo anterior, el comportamiento global de la torre.

La elaboración de un modelo global detallado conduce a complejos fenómenos de redistribución local que imposibilitan un análisis veraz del comportamiento estructural. Es por esto, que se opta por un modelo tridimensional que recoja los elementos cuya contribución a la resistencia horizontal es verdaderamente importante.

Esta sensibilidad se ha estimado mediante un análisis de distribución de pesos y un análisis modal del conjunto.

Del análisis modal se desprende que la influencia de la rigidez lateral de los entrepisos apenas contribuye entre un 5% y un 10% a la rigidez global del mismo; esta variación es aún menor si se considera la matriz de masas general del modelo.

Modo	Con entrepisos		Sin entrepisos		Variación*
	(s)	(Hz)	(s)	(Hz)	
Primer modo de flexión (E-O)	0.391	2.558	0.431	2.319	+10.2%
Primer modo de flexión (N-S)	0.348	2.876	0.371	2.696	+6.6%

\*Variación en el período de vibración (s) al eliminar en el análisis los entrepisos

Además, una vez se analiza la forma de los modos de vibración (fig 5.4) se observa que la deformación por cortante no es especialmente relevante en el modelo global, por lo que el sistema (que además tienes una esbeltez reducida, entre 2 y 2,5) queda suficientemente bien representado mediante un modelo de viga Euler-Bernoulli de inercia y módulo de elasticidad variable.



Por último, en un perfil de distribución de pesos del edificio como el que se presenta (fig.8), podemos ver que la masa atribuida al tapial se acerca al 70% de la masa total; si además consideramos la capa de ladrillo interna esta proporción se sitúa en torno al 75%.

Estas consideraciones, nos permiten establecer un modelo geométrico de análisis de mayor simplicidad, consistente sólo en la inclusión de aquellos elementos que componen la sección del muro perimetral.

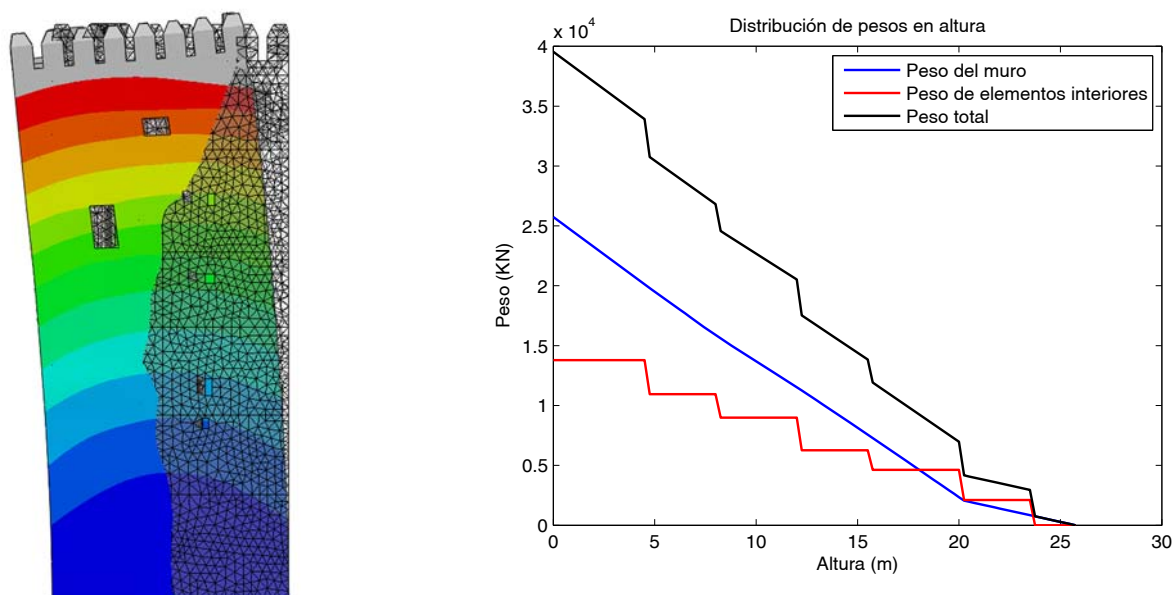


Figura 8 – Primer modo de vibración (izquierda) y distribución de pesos (derecha)

Es importante puntualizar que, dado las reducidas dimensiones en planta del edificio, el reparto de rigideces que se produce frente a una acción horizontal conduce a que gran parte de la carga viaje a través de los muros paralelos a la acción. Dada la rigidez de los mismos, la flexión horizontal en el paramento perpendicular no llega a ser suficiente para movilizar empujes importantes en los elementos interiores.

Como fuente de variabilidad principal para este análisis tenemos la variación entre el módulo de deformación longitudinal del tapial y el de la fábrica; condicionando este parámetro enormemente la propensión a la concentración de tensiones en distintas zonas del edificio, de forma análoga a las observaciones realizadas en el modelo 3.

Como muestra la (fig.9) el modelo moviliza un mayor desplazamiento que el que precisa el modelo 3, estableciendo además su carga de fallo en torno a 5000 KN.

En este análisis se muestra un comportamiento menos influenciado la relación de módulos de elasticidad, esto es debido a que la presencia del ladrillo en el muro más tiene que ver con una necesidad constructiva derivada de los elementos de entrepiso que con una necesidad resistente. Este cambio en las propiedades se ve eclipsado por la importante rigidez del muro de tapial, sobre todo en los niveles inferiores.

En el análisis progresivo se muestra como las zonas plásticas empiezan a surgir en la base del muro, produciéndose importantes tensiones de tracción y compresión que acaban por provocar el fallo del conjunto.

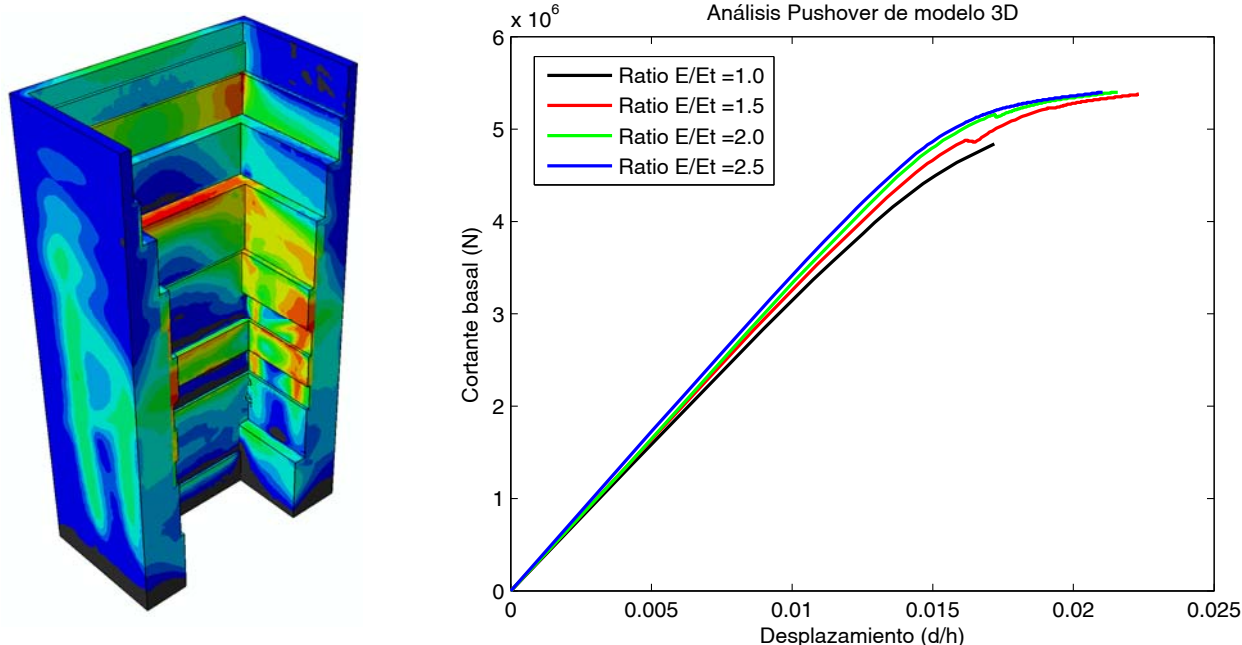


Figura 9 – Modelo 4 (izquierda) y resultado del análisis ‘pushover’ (derecha)

## VI. Conclusiones

- 1.-Los registros de patologías que se disponen de los niveles interiores no hacen pensar que haya un acortamiento diferencial entre las pilas interiores y el muro perimetral, por lo que es razonable considerar que la deformabilidad de ambos elementos tiene cierta semejanza. Los sucesivos análisis realizados destacan la importancia del espesor de la junta de mortero en la caracterización de las propiedades mecánicas del material de fábrica de ladrillo y muestran la importancia de este efecto en el comportamiento global del edificio.
- 2.-Por su masividad y por la alta deformabilidad del tapial, cobra mucha importancia el análisis del conjunto considerando las distintas fases constructivas. Los importantes acortamientos por axil que experimentan los elementos verticales deben hacerse compatibles con el estado tensional de los elementos interiores, supuestos en reposo en el momento de su colocación.
- 3.-El análisis global predice bastante bien las principales patologías detectas, como el desplome hacia la esquina noreste que provoca importantes fisuras en el muro este.
- 4.-Del modelo 1, de líneas de empujes se desprende que el conjunto satisface la condición de equilibrio con un coeficiente de seguridad geométrico en torno a 2. Esta condición se satisface tanto para los elementos individuales como para el muro perimetral.
- 5.-Del modelo 2, se desprende que el nivel tensional de los elementos interiores es aceptable frente a cargas verticales de peso propio. En general, se obtiene un margen de seguridad frente a los valores de resistencia considerados y tomando espesores ideales de los elementos descritos de dos.
- 6.-Del modelo 2, se constata la necesidad de incorporar las rigideces y las masas teniendo en cuenta las diferentes fases de construcción del edificio.
- 7.-Del modelo 2, se obtiene la distribución de rigideces aproximada entre los distintos elementos frente a cargas horizontales; mostrándose que en torno a un 80% de la carga es absorbida por los muros paralelos a la carga. Así mismo, se constata que la rigidez de los muros en el plano de flexión horizontal es suficiente como para homogeneizar y atenuar la entrada de cargas horizontales al sistema de arcos, bóvedas y pilas interior.
- 8.-Del modelo 3, se obtienen los modos de fallo locales del interior de la torre, mostrándose especial sensibilidad en la colapsabilidad de alguno de los arcos fajones del conjunto.
- 9.-Del modelo 4, obtenemos la capacidad del edificio para disipar en forma de energía plástica los efectos de una carga horizontal aplicada. Se aprecia una menos dependencia con el módulo de deformación de la fábrica de ladrillo y se obtienen unas cargas de fallo cercanas a 5000Kn para un desplazamiento en coronación unitario de 0,02.

## VII. Referencias

- [1] AROCA, R. Tamaño y proporción de las estructuras.
- [2] VV.AA. Informe técnico. CEDEX – “Caracterización Geotécnica de las Condiciones de Cimentación del Conjunto Monumental de la Alhambra y el Generalife”, 1995
- [3] DE LA TORRE LÓPEZ M. J. Estudio de los materiales de construcción en la Alhambra. Universidad de Granada, Tesis doctoral, 1995
- [4] ASTIZ, M.A. Estudio de la seguridad estructural de la Torre de Comares
- [5] LEÓN GONZÁLEZ, J. Comportamiento mecánico de la obra de fábrica
- [6] WILLAM KJ, Warnke ED. 1975 Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete. Proceedings of international association for bridge and structural engineers (ISMES), Bergamo, Italy.
- [7] Michele Betti, Andrea Vignoli. 2011 Numerical assessment of the static and seismic behaviour of the basilica of Santa Maria all’Impruneta (Italy). Construction and Building Materials. Elsevier. 0950-0618
- [8] Giordano A., Mele E. , De Luca A. 2002 Modelling of historical masonry structures: comparison of different approaches through a case study. Engineering Structures 24. Elsevier. 0141-0296
- [9] Dassault Systèmes. Abaqus Analysis User’s Manual. Vol. 3: Materials. Apart. 19.6.3. Dassault Systèmes Simulia Corp. Providence. RI, USA.
- [10] Lubliner J., Oliver J., Oller., Oñate E. 1989 A Plastic-Damage Model for Concrete. International Journal of Solids Structures Vol.25. Pergamon Press. 0020-7683-89
- [11] HEYMAN, J. Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica: colección de ensayos
- [12] VILLEGAS CERREDO, D. Análisis estructural del patrimonio histórico. Torre del Homenaje de la Alhambra. Universidad de Granada, Trabajo fin Máster, 2012