

Programa de doctorado de  
ESPECIFICACIÓN Y DESARROLLO DE SOFTWARE (125 89 2)

Tesis doctoral

# MODELADO DE SÓLIDOS HETEROGÉNEOS MEDIANTE HIPERPARCHES



Autor: Francisco de Asís Conde Rodríguez  
Director: Dr. Juan Carlos Torres Cantero



*ugr*

Universidad  
de **Granada**

Parte de la investigación que se describe en esta memoria, ha sido parcialmente financiada por el Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España a través de los proyectos TIN2014-58218-R y TIN2014-60956-R con fondos FEDER.

Copyright © 2015 Francisco de Asís Conde Rodríguez

Todas las imágenes que aparecen en este trabajo han sido generadas por el autor con software escrito íntegramente por él mismo, a menos que se indique lo contrario en el título de la propia imagen.

*Octubre 2015*



*ugr* | Universidad  
de **Granada**

El doctorando Francisco de Asís Conde Rodríguez y el director de la tesis Dr. Juan Carlos Torres Cantero. Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección del director de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, Octubre 2015.

Director de la tesis

Doctorando

Fdo: Dr. Juan Carlos Torres Cantero

Fdo: Francisco de Asís Conde Rodríguez

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales

Autor: Francisco de Asis Conde Rodríguez

ISBN: 978-84-9125-436-2

URI: <http://hdl.handle.net/10481/41764>

*Para Raquel*

*La suerte de mi vida,  
mi fuerza y mi inspiración*



# Índice general

1	<i>Resumen</i>	17
2	<i>Motivación y objetivos</i>	19
2.1	<i>¿Qué es una buena tesis doctoral?</i>	19
2.2	<i>Motivación</i>	20
2.3	<i>Objetivos</i>	21
2.4	<i>Plan de trabajo</i>	21
2.5	<i>Estructura de la memoria</i>	22
3	<i>Modelado de sólidos</i>	23
3.1	<i>Modelado de sólidos</i>	23
3.2	<i>Esquemas de representación</i>	25
3.3	<i>Repaso de esquemas de representación</i>	32
3.4	<i>Conclusiones</i>	40
3.5	<i>¿Cómo plantear una investigación en modelado de sólidos?</i>	40
4	<i>Objetos heterogéneos</i>	41
4.1	<i>Objeto heterogéneo</i>	41
4.2	<i>Distribución de material</i>	42
4.3	<i>Ejemplo real de objeto heterogéneo: neumático</i>	44

5	<i>Objeto regular heterogéneo hr-object</i>	49
6	<i>Hiperparche Béziér heterogéneo compuesto</i>	53
6.1	<i>Hiperparche</i>	53
6.2	<i>Revisión de trabajos previos</i>	55
6.3	<i>Hiperparche Béziér heterogéneo</i>	58
6.4	<i>Hiperparche Béziér heterogéneo compuesto</i>	60
7	<i>Propiedades del esquema de representación</i>	63
7.1	<i>Validez del hiperparche</i>	63
7.2	<i>Revisión de trabajos previos</i>	63
7.3	<i>Nuestra condición de validez</i>	65
7.4	<i>Continuidad entre hiperparches</i>	72
8	<i>Edición continua de objetos</i>	81
8.1	<i>Edición de la geometría</i>	81
8.2	<i>Edición de la distribución de material</i>	86
9	<i>Construcción de modelos</i>	89
9.1	<i>Proceso de construcción de modelos</i>	89
9.2	<i>Métodos de construcción de modelos</i>	90
9.3	<i>Ejemplo de construcción de nuevos modelos</i>	93
10	<i>Resultados</i>	95
10.1	<i>Ejemplo: pieza mecánica</i>	95
10.2	<i>Ejemplo: neumático de moto de competición</i>	96
10.3	<i>Usabilidad</i>	99

11	<i>Conclusiones</i>	101	
	11.1 <i>Principales aportaciones</i>	101	101
	11.2 <i>Trabajos futuros</i>	103	
	11.3 <i>Conclusiones</i>	104	
	 <i>Bibliografía</i>	105	
	 <i>Índice alfabético</i>	109	
	 <i>Glosario</i>	111	



# Índice de figuras

3.1. Tres niveles en el proceso de modelado	25
3.2. Esquema de representación	28
3.3. Ambigüedad y no unicidad de una representación	29
3.4. Ejemplo de enumeración exhaustiva	32
3.5. Celdas genéricas	35
3.6. Ejemplo de descomposición en celdas	36
3.7. Ejemplo de octree	38
4.1. Diferencia entre objeto homogéneo y heterogéneo	41
4.2. Neumático de competición degradado	44
4.3. Histéresis y adherencia	45
4.4. Histéresis y resistencia a la rodadura 1	46
4.5. Histéresis y resistencia a la rodadura 2	47
4.6. Plano circuito de Estoril	48
5.1. Estructura de un hr-object	49
6.1. Hiperparche	54
6.2. Array de coeficientes geométricos	55
6.3. Elementos frontera del hiperparche	55
6.4. Funciones mezcla de Béziér	58
6.5. Esquema de hiperparche Béziér heterogéneo compuesto	60
6.6. Hiperparche Bézier heterogéneo compuesto como descomposición en celdas	61
7.1. Celda paramétrica Béziér no válida	65
7.2. Spans, slices y slice skins de coeficientes	66
7.3. Span no localmente ordenado	66
7.4. División de celdas para cumplir la condición de validez	68
7.5. Contraejemplos de la condición de validez	69
7.6. Celda paramétrica	70
7.7. Cajas envolventes en celdas divididas	71

7.8. Condición clásica de continuidad de orden 0	73	
7.9. Nuestra condición de continuidad de orden 0	73	
7.10. Continuidad $C^1$ entre celdas paramétricas	74	
7.11. Condición de continuidad $C^1$ entre celdas paramétricas		75
7.12. Condición de continuidad de orden 1	75	
7.13. Continuidad $C^1$ para distribución de materiales	77	
7.14. Facilidad de edición continua de materiales	78	
8.1. Malla simplificada de coeficientes geométricos	82	
8.2. Vecinos de un corner point	82	
8.3. Edición continua de un hiperparche	83	
8.4. Clasificación de los vecinos de un corner point	84	
8.5. Edición de los vecinos inmediatos a un corner point		85
8.6. Corner points irregulares	86	
8.7. Edición interactiva de distribuciones de material	87	
9.1. Extrusión de celdas paramétricas	90	
9.2. Proceso de extrusión	90	
9.3. Mezcla (blending) de celdas paramétricas	91	
9.4. Ejemplo de construcción de un modelo	94	
10.1. Transición continua en los materiales en pieza mecánica		95
10.2. Ejemplo: pieza mecánica	96	
10.3. Patente del neumático de competición	96	
10.4. Vista detallada del neumático	97	
10.5. Ejemplo: neumático de moto de competición	98	
10.6. Usabilidad de la aplicación	99	

# *Agradecimientos*

Comencé a trabajar en esta tesis hace 21 años, toda una vida. En ese tiempo he visto morir a mi madre y a mis hijas, y he pasado por una nulidad matrimonial; mi vida no ha sido precisamente tranquila. Algunos momentos claves de la investigación que se recoge en este trabajo han ido ligados a momentos muy intensos de mi vida personal.

Las principales ideas de esta tesis llevan años en mi cabeza, a la espera de darles forma. Todos los intentos previos de estructurar un método de modelado “bien armado” a partir de esas ideas, se habían estrellado contra un muro. Un buen amigo, que primero fue alumno y ahora es compañero, dice que podría contarse la historia de los lenguajes de programación a través del código de mi tesis. La primera versión se escribió en C, posteriormente en C++, luego en Java, más tarde en Objective-C, después en Swift y finalmente la versión actual está escrita en Swift 2. Eso da una idea de las vueltas que he dado para terminar esta tesis.

Todo eso empezó a cambiar el 17 de enero de 2009. Ese día fue el primer día en que mi esposa y yo empezamos a vernos como algo más que amigos. Podría decirse que nuestra relación comenzó ese día. Nos casamos el 19 de agosto de 2011. Desde entonces mi vida cambió por completo. A pesar de todas las experiencias dramáticas que hemos vivido juntos, a su lado me siento seguro, comprendido, apoyado, en definitiva amado, y esa estabilidad emocional ha tenido efectos muy importantes en mi investigación. Por fin todas las piezas del rompecabezas han encajado y por fin esta tesis ha visto la luz. Por eso quiero empezar agradeciéndote que me quieras incondicionalmente, a pesar de mis defectos. Eres lo mejor de mi vida. Gracias amor mío por estar ahí.

Desde que era un crío me gusta el diseño. El mejor regalo que me podían hacer de pequeño era una caja de lápices y cuadernos. Podía pasarme horas inventando formas, colores, objetos, personajes. Supongo que por eso he acabado orientando mi carrera hacia la informática gráfica. Mi madre, que en paz descansa, jugó un papel fundamental a la hora de potenciar esa afición. Ella era una gran pintora. Sus óleos y pasteles ocupan un lugar en las paredes de mi hogar y no pasan inadvertidos. Pero, por encima de todo eso, era una gran mujer. Pasamos largos ratos en la cocina charlando de todo mientras le ayudaba a preparar la comida. Tenía una mente abierta y me educó para tener una mente abierta. Siempre insistía en que debía procurar ser un hombre del Renacimiento, interesado

en arte, historia, ciencia, música,... Soy como soy en gran parte gracias a ti. Gracias mamá. Soy creyente, así que sé que estás en un lugar mejor y que desde allí estarás sonriéndome.

Mi historia con la informática, y más concretamente con la informática grafica comenzó en 1982. Hasta ese momento, yo tenía la idea de ser abogado como lo era mi padre que en paz descansa. Sin embargo en 1982 fui al cine con mis amigos del instituto y todo eso cambió. Fuimos a ver Tron, una película un tanto extraña sobre gente viviendo dentro de un ordenador. Cuando vi aquellas maravillosas imágenes generadas por ordenador me quedé absolutamente fascinado. En 1982 no tenía ni idea de lo que era un ordenador, jamás había visto uno. En el instituto había escogido dibujo técnico, porque la informática era *“eso tan raro para lo que tenías que saber muchas matemáticas”*. Sin embargo, al salir del cine me dije: si esto es lo se puede hacer con un ordenador, tienes que aprender todo lo que puedas sobre estas extrañas máquinas. Por eso quiero agradecer a ese joven director de cine que, a pesar de todas las dificultades, luchó para sacar a la luz su película. Es por él que soy Licenciado en Informática y ahora aspiro a ser doctor en Informática.

Durante la carrera tuve la inmensa suerte de conocer a un joven profesor que me enseñó las bases de la informática gráfica. Su pasión por el tema, sus inmensos conocimientos sobre el mismo, su disponibilidad más allá de lo meramente académico, fueron claves para que mi pasión innata sobre la informática gráfica arraigara de una forma mas madura. Él me prestó las primeras revistas científicas que leí. Gracias a él descubrí el SIGGRAPH. En definitiva, fue quien me recondujo hacia la investigación. Dirigió mi proyecto fin de carrera y después mi tesis doctoral. A pesar de todas las vueltas que he dado para terminarla, su puerta siempre ha estado abierta para mi. A pesar que no siempre he hecho caso de sus magníficas ideas (lo que hubiese acertado sin duda el tiempo dedicado), siempre ha estado dispuesto para hablar sobre los problemas de la tesis. Eres mi **maestro**, en el sentido clásico de la palabra, y además eres mi amigo. Por eso quiero agradecerte todo el esfuerzo que has puesto en mí y en esta tesis. No cabe ninguna duda, sin tu apoyo incondicional, este trabajo jamás habría visto la luz. Gracias.

Soy profesor y me encanta mi trabajo. No siempre es posible, pero hay veces en que notas que entre la clase y tu hay una conexión especial. Que una especie de corriente eléctrica recorre la clase. Las ideas brotan con intensidad, los alumnos participan, están ansiosos por descubrir, por aprender. Ese día acabas la clase agotado pero lleno de energía, es un subidón total. Esos días me hacen exclamar: ¡Me encanta mi trabajo!

Ser profesor es algo que no entraba en mis planes en un principio, sin embargo, en 1994 publiqué mi primer artículo en el CEIG'94 celebrado en Zaragoza y allí conocí a quien llegaría a ser una figura muy importante en mi carrera profesional. Él me animó a solicitar la plaza en la Universidad de Jaén y desde entonces, me ha acogido, aconsejado y alentado. Ha puesto a mi disposición la maquinaria de un grupo de investigación y a pesar de que no he estado a la altura, siempre ha contado conmigo. Eres mi **mentor**, en el sentido clásico de la palabra, y mi amigo. Por eso quiero

agradecerte que seas la causa de que tenga un trabajo que me hace disfrutar. No cabe duda, yo no estaría en la Universidad de Jaén si no fuera por ti. Gracias.

Desde 2004 comparto despacho con una de las mejores personas que conozco. Comenzó siendo mi alumno y ahora es un compañero en el departamento. Es un profesor y un científico brillante, pero lo más importante es que es muy **buena gente**, en el sentido más castizo del término. Sus enciclopédicos conocimientos de Inglés han sido claves para mejorar los artículos publicados en revistas y congresos internacionales. Eres mi **amigo**. Siempre estás ahí para escuchar confidencias, para ofrecer consejos, para hacer favores (algunos de ellos no se pagan ni en tres vidas), para echar unas risas. Las largas jornadas en la Universidad de Jaén (algunos días de 7:30 a 21:30) son mucho más llevaderas cuando estás en la mesa de al lado. Por eso quiero agradecerte que seas como eres y que me quieras. Gracias.

En una época de transición en mi vida, una época crucial, tuve la inmensa suerte de coincidir con tres chicos y una chica, un poco más jóvenes que yo, que me acogieron en su pandilla. En esa época había dado la espalda al mundo y estaba encerrado en mí mismo. Ellos me ayudaron a salir de nuevo al exterior y a reconducir las relaciones personales en mi vida. Durante un tiempo fuimos inseparables. Hicimos salidas, viajes, cenas juntos. Fuisteis la medicina que necesitaba y tuvisteis un gran impacto en mí. Sois mis **amigos**. Por eso quiero agradecer vuestra paciencia, apoyo, en definitiva vuestra amistad. Gracias.

Siempre he tenido una especial relación con uno de los miembros de la pandilla. Entre otras cosas, él me ha atraído hacia el ciclismo de montaña (a mi edad). Recuerdo aquel viaje a la playa oyendo al grupo "no me pises que llevo chanclas", ¡qué risas! Eres una **persona humana** muy especial a pesar de que yo no te correspondo como debería. Por eso quiero agradecerte tu amistad incondicional. Gracias.

A lo largo de mi vida he coincidido con cientos de personas y tengo la inmensa suerte de que la gran mayoría de ellas han sido y son muy buenas personas. Todas ellas me han aportado algo bueno. Todos vosotros habéis contribuido a que sea mejor persona. Por eso quiero agradecer que no hayáis pasado de largo por mi vida sin más. Gracias de todo corazón.

También quiero dar gracias a Dios por haberme creado libre e inquieto. Por haber sembrado en mí la semilla de la curiosidad, que me lleva a preguntarme el qué y el por qué de todo lo que me rodea. Por estar siempre a mi lado, en los momentos buenos y malos, sujetándome cuando las fuerzas fallan. Por creer en mí siempre, incondicionalmente, incluso las veces en que yo le he dado la espalda. Por haberme ofrecido generosamente un modelo al que seguir. Una referencia para hacer que mi vida sea mejor y más feliz. Gracias Dios mío.

**Notas finales**

He dedicado parte de mi vida a esta investigación. Por eso no quería que estos agradecimientos fuesen algo hueco o vacío. He volcado mi alma en ellos. He usado un lenguaje personal y coloquial porque es el que mejor expresa lo que siento. Sin duda no son unos agradecimientos al uso, pero es que no conozco otra forma de escribirlos.

A caballo entre Granada y Jaén,  
octubre de 2015.

# 1

## Resumen

Muchos de los objetos que nos rodean son heterogéneos, es decir, están formados por distintos materiales que están presentes en proporciones variables a lo largo de todo su volumen. Estos objetos son muy importantes, ya que presentan mejores valores de propiedades físicas por el hecho de estar compuestos por mezclas de materiales que varían en su interior.

La industria ha realizado un gran esfuerzo para desarrollar nuevos procesos que permitan mezclar distintos materiales, y en la última década se han desarrollado impresoras 3D capaces de mezclar distintos materiales durante el proceso de impresión. También se han hecho esfuerzos para modelar en un ordenador esta clase de objetos heterogéneos.

Sin embargo, los distintos métodos de modelado de objetos sólidos presentados o bien no son completos (no tienen en cuenta propiedades fundamentales como la validez) o bien se basan en representaciones poco útiles (no permiten representar con precisión objetos complejos del mundo real).

Por esta razón decidimos desarrollar un método completo de modelado de objetos heterogéneos. Este método debe servir como marco de referencia para implementar aplicaciones informáticas que permitan modelar objetos heterogéneos complejos del mundo real.

El método de modelado que hemos desarrollado y que se presen-

*La industria demanda métodos para modelar objetos heterogéneos*

*Los métodos actuales tienen limitaciones importantes*

*Hemos desarrollado un método completo para modelar objetos heterogéneos*

ta en esta memoria es completo, ya que caracteriza con precisión qué es un objeto sólido heterogéneo, define un modelo matemático que captura la esencia de tales objetos y presenta una representación computacional capaz de representar completamente los modelos matemáticos.

Además hemos estudiado el esquema de representación que hace corresponder una representación válida a cada modelo matemático, teniendo en cuenta que en el proceso se garanticen propiedades esenciales como validez, rigidez o regularidad.

El método de modelado ha sido diseñado específicamente para facilitar la tarea de creación y edición de modelos de objetos heterogéneos. Así por ejemplo, se usa una malla simplificada de coeficientes geométricos y mecanismos para mantener automáticamente la continuidad del objeto sólido en aquellas partes del mismo que lo necesiten.

Por último, el método de modelado se ha implementado en una aplicación informática, y se ha probado exhaustivamente con modelos de objetos reales, lo que ha permitido demostrar en la práctica su utilidad.

*El método propuesto ha sido probado exhaustivamente con modelos de objetos reales*

## 2

# *Motivación y objetivos*

Esta tesis doctoral presenta un método completo para modelar objetos sólidos, basado en hiperparches, especialmente pensado para representar objetos heterogéneos. Pero antes de explicar con detalle en qué consiste nuestro esquema de representación, es conveniente plantear la pregunta: ¿Qué es una buena tesis doctoral?

### *2.1 ¿Qué es una buena tesis doctoral?*

Para responder a esta pregunta se ha recopilado bibliografía sobre qué es un buen trabajo científico y cómo debe presentarse. El trabajo que más nos ha interesado es [28]; allí se explica que un trabajo científico, para ser bueno, debe presentar un cuerpo de material que sea original, importante y consistente:

- La originalidad de un trabajo se puede establecer respondiendo a la pregunta: ¿Lo que se propone ha sido publicado antes?
- La importancia se puede establecer respondiendo a las preguntas: ¿Se trata de una solución obvia? ¿Es algo más que una mera alternativa a un método bien probado y asentado? ¿Tiene aplicación? ¿Se demanda una solución al problema tratado en el campo de aplicación del trabajo?
- Por último, la consistencia se puede establecer respondiendo a las preguntas: ¿La solución es robusta? ¿Es aplicable a problemas reales? ¿Puede manejar bien grandes volúmenes de datos?

*Durante la realización de esta tesis hemos tratado de no perder de vista la respuesta a esta pregunta*

De lo anterior se desprende que la realización de una buena tesis doctoral no es una tarea fácil.

Para empezar, es difícil encontrar un tema original. Uno de los pioneros de la informática gráfica, James Blinn, ya en 1998 sostenía que es bastante difícil encontrar un tema completamente original en este área de investigación [1]; Por tanto, la primera condición deberá estudiarse de forma realista.

Además, hay que demostrar que el trabajo realizado es útil. Para ello, nada mejor que implementar el esquema propuesto, someterlo a casos de prueba, y comprobar con datos reales que no hay casos particulares que hagan a la solución poco robusta, datos de entrada que den origen a errores numéricos, etc.

*En su artículo Blinn escribe: “The first problem is simply finding something that hasn’t been done yet. Let’s face it; all the easy problems have been solved. Sometimes it seems that computer graphics research consists of finding some new subtle lighting effect that hasn’t yet been modeled”.*

## 2.2 Motivación

La respuesta a la pregunta: ¿qué es una buena tesis doctoral? da origen a un conjunto de nuevas preguntas.

¿Qué es un objeto heterogéneo? ¿Qué importancia tiene este tipo de objetos? ¿No se puede representar esta clase de objetos con los métodos actuales? ¿Es realmente necesario un nuevo método? ¿Los posibles campos de aplicación del método lo demandan?

La mayor parte de los objetos que nos rodean son heterogéneos, es decir, están compuestos por varios materiales mezclados entre sí. Por ejemplo, el cuerpo humano, la superficie terrestre o cientos de objetos artificiales son mezcla de materiales. Es importante contar con herramientas que permitan su correcta representación en un ordenador.

La mayoría de los métodos de modelado de objetos se centran en representar la superficie de los mismos (su frontera) y hacer ciertas suposiciones sobre el interior del objeto. Este enfoque puede ser válido en el caso de objetos homogéneos; sin embargo, pensamos que para representar correctamente objetos heterogéneos, el método que se use debe prestar especial atención a la representación del interior.

*Para modelar de forma precisa un objeto heterogéneo, hay que poder representar su interior*

Existen métodos que representan tanto la frontera como el interior del objeto sólido y se han aplicado con éxito al problema de representar correctamente objetos heterogéneos, sin embargo, pensamos que es posible diseñar un método para modelar objetos heterogéneos que aporte ventajas sobre los métodos existentes.

### 2.3 *Objetivos*

El objetivo de esta tesis es construir un método de modelado de objetos heterogéneos, basado en hiperparches, que aporte ventajas sobre los métodos actuales. Para ello el nuevo método debe cumplir las siguientes propiedades:

- Ser **preciso** a la hora de representar tanto la forma del objeto sólido, como la distribución de los materiales en su interior.
- Ser **flexible**, de forma que permita representar correctamente un conjunto grande de objetos, incluyendo aquellos que presenten agujeros o discontinuidades.
- Ser **fácil de manejar** para un operador humano. En especial debe tratar de forma automática ciertos problemas complejos como la validez de los modelos construidos.
- Ser **conciso**, de forma que pueda ser procesado, almacenado y transmitido a través de una red con un consumo ajustado de recursos.

### 2.4 *Plan de trabajo*

Para poder cumplir el objetivo fijado, se ha estudiado qué es el modelado de sólidos, y a partir de ahí se ha averiguado cómo debe plantearse un nuevo método de modelado, prestando especial atención a las propiedades que debe satisfacer.

El siguiente paso ha sido localizar la bibliografía previa existente sobre este tema y estudiarla. Esto ha permitido averiguar las ventajas e inconvenientes de los métodos ya propuestos, y servir de marco de referencia para comprobar la originalidad de nuestro trabajo.

*En la literatura se suele usar el término "sólido" y "modelado de sólidos" para referirse a objetos sólidos*

A continuación se ha estudiado en profundidad qué es un objeto heterogéneo y cuáles son sus principales características. Un buen método de modelado debería dar soporte a estas características. También se han encontrado ejemplos reales que han permitido probar el método propuesto.

Por último se ha diseñado el método, se ha implementado y se ha probado con casos de prueba reales. A partir de ahí se han extraído conclusiones. Todo ello ha sido publicado en la revista *The Visual Computer* [5] y presentado en el congreso *Computer Graphics International'15*, que tuvo lugar en Estrasburgo del 24 al 26 de junio de 2015 [6].

*Los resultados de este trabajo han sido publicados en una revista y un congreso internacionales*

### 2.5 Estructura de la memoria

Las páginas siguientes de esta memoria se han organizado de la siguiente forma:

*La revisión de trabajos previos se ha incluido en la introducción de cada capítulo.*

- En el capítulo 3° se estudia con detalle qué es el modelado de sólidos con el objeto de averiguar cómo debe plantearse un nuevo trabajo en este campo.
- En los capítulos 4°, 5° y 6° se describe con detalle el método propuesto. Cada uno de esos capítulos se dedica a un nivel del proceso de modelado: objetos físicos, objetos matemáticos y representaciones.
- En el capítulo 7° se describen las principales propiedades del método.
- En los capítulos 8° y 9° detallamos con precisión los métodos que hemos diseñado para facilitar la construcción de nuevos modelos, así como su edición interactiva.
- En el capítulo 10° describimos la aplicación informática que hemos desarrollado para probar nuestro método y los resultados que se han obtenido.
- Y por último en el capítulo 11° resumimos las conclusiones de la tesis.

También se ha incluido un glosario al final de la memoria en el que se definen algunos conceptos que se mencionan en el texto.

# 3

## *Modelado de sólidos*

En este capítulo se responde a las preguntas, ¿Qué es el modelado de objetos sólidos? ¿Qué es un modelo de sólido? y ¿Cómo debe plantearse un nuevo método de modelado de sólidos?

### *3.1 Modelado de sólidos*

En el cuerpo teórico del modelado de sólidos hay dos trabajos básicos que marcan qué es un esquema de representación de sólidos y cómo debe definirse. Son las referencias [22, 18]. Lo que sigue está ampliamente basado en ellas.

El modelado de sólidos alcanza su máxima importancia en las aplicaciones industriales y de investigación científica. En ellas no sólo se requiere una representación de los objetos adecuada para su visualización, sino que es necesario que esas representaciones capturen sin error la esencia de los objetos modelizados para poder tomar decisiones en base al modelo con la misma exactitud que si se tomasen en base al objeto representado.

Se define el **modelado de sólidos** como: *“El conjunto de técnicas y herramientas para: construir, almacenar y modificar representaciones de objetos sólidos, permitiendo el cálculo de propiedades de los objetos representados”*.

La necesidad de construir modelos es inherente al proceso de investigación. Cuando un proceso, fenómeno u objeto es demasiado grande, demasiado pequeño, demasiado lento, demasiado rápido, demasiado lejano o es demasiado peligroso para ser observado y percibido por el ojo humano, el modelado juega un papel fun-

damental, ya que proporciona a los científicos las herramientas necesarias para capturar su esencia y trabajar sobre algo que sí se puede observar y manipular.

Los modelos no sólo se construyen a imagen y semejanza de objetos reales. También puede interesar calcular propiedades de objetos sólidos que no existen. Por ejemplo, durante las fases de diseño de un nuevo producto o pieza de maquinaria, el modelado de sólidos aporta sustanciales ventajas a los ingenieros ya que permite calcular propiedades de los nuevos objetos sin necesidad de construirlos. Ello supone un gran ahorro de tiempo y dinero.

*En estos casos, la facilidad de creación de nuevos modelos desde cero es crucial para que el método de modelado sea útil*

Cualquier método de modelado de sólidos debería tener los siguiente componentes para ser útil [22, 18, 11]:

- **Estructuras de símbolos** que representan objetos sólidos. Tradicionalmente los modeladores de sólidos están basados en definiciones precisas de sólidos que dan lugar a una representación completa (no ambigua) que permite distinguir entre el interior, la frontera y el exterior del sólido.
- **Procesos** que usan esas representaciones para responder a preguntas geométricas sobre los objetos. Aquí son fundamentales algoritmos robustos. La correcta implementación de operaciones requiere un tratamiento exhaustivo de los casos particulares, que complican considerablemente las estructuras de datos y los algoritmos.
- **Capacidades de entrada**, es decir, mecanismos para crear y editar representaciones de objetos.
- **Capacidades de salida**. Fundamentalmente mecanismos de visualización y comunicación con máquinas para fabricación automática.

Usualmente el proceso de modelado se realiza a tres niveles [18]: (ver Figura 3.1).

1. **Objetos físicos**. Son los objetos que necesitan ser estudiados o manipulados. Pueden existir o no.
2. **Objetos matemáticos**. Los objetos físicos no son modelables en un ordenador, y por tanto es necesario adoptar una idealización adecuada de los mismos. Esos objetos idealizados deben

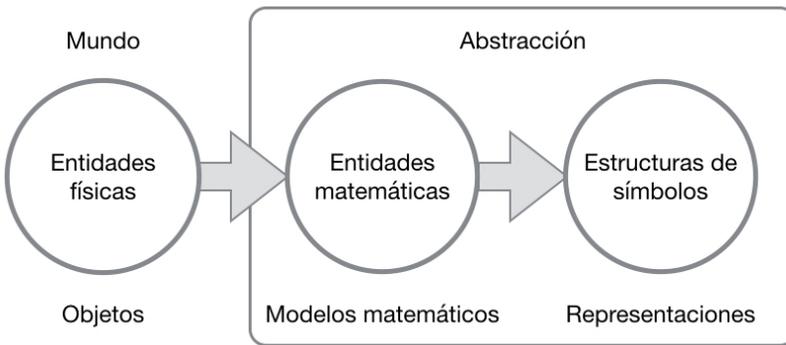


Figura 3.1: Normalmente el proceso de modelado se realiza a tres niveles: objetos físicos, objetos matemáticos y representaciones computacionales

tener una conexión clara e intuitiva con los objetos físicos, y al mismo tiempo ser lo suficientemente simples como para que se puedan representar en un ordenador discreto y limitado.

3. **Representaciones computacionales.** Son el paso final en la actividad de modelado. Consiste en asignar al objeto matemático una representación que sea adecuada para su uso en el ordenador.

Este enfoque a tres niveles permite caracterizar rigurosamente las propiedades deseables de un método de modelado de sólidos analizando las relaciones entre los objetos matemáticos y sus representaciones computacionales.

Todo esto puede parecer demasiado complejo o incluso innecesario a la hora de construir una determinada aplicación o algoritmo, pero no debemos olvidar que: “el modelado de sólidos trata de ser una herramienta universal que permita desarrollar sistemas para modelar objetos que garanticen la integridad de los mismos” [26].

*Un buen método de modelado de sólidos que sirva como base a las aplicaciones concretas es fundamental para garantizar propiedades esenciales de los modelos obtenidos*

### 3.2 Esquemas de representación

Informalmente podemos decir que un **esquema de representación** es una aplicación entre modelos matemáticos abstractos de sólidos y sus representaciones computacionales. El esquema de representación asocia a un modelo matemático abstracto de sólido una forma de representarlo en el ordenador, de forma que se garanticen las propiedades deseables que lo hacen útil. Es decir, un esquema de representación es un marco de trabajo.

Hasta ahora en esta memoria hemos hablado informalmente de método de modelado de sólidos; a partir de ahora usaremos el término más preciso: esquema de representación.

### 3.2.1 Modelo matemático abstracto

Tradicionalmente se han usado los  $r$ -sets (enfoques basados en topología de conjuntos) como modelos matemáticos abstractos de sólidos [22, 18]. Como es la idealización más adecuada en nuestro caso, adoptaremos como modelo matemático de sólido al  $r$ -set.

El espacio euclídeo tridimensional  $\mathbb{E}^3$  es una idealización adecuada del espacio real en el que se sitúan los objetos; por consiguiente, la definición más general de **sólido** es: “Un subconjunto de  $\mathbb{E}^3$  cerrado y acotado”.

Esta definición de sólido es simple, sin embargo debe refinarse, ya que muy pocos subconjuntos de  $\mathbb{E}^3$  son modelos adecuados de sólidos físicos. La noción de sólido abstracto debe capturar las propiedades de rigidez y regularidad para ser útil.

Dado el conjunto referencial  $\mathcal{P}(\mathbb{E}^3)$ , y dados  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  subconjuntos de  $\mathbb{E}^3$ , es decir,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{E}^3)$ ; se define la **relación binaria**  $R$  sobre  $\mathcal{P}(\mathbb{E}^3)$  que se satisface si y sólo si  $\mathbf{A}$  puede proyectarse sobre  $\mathbf{B}$  mediante una transformación rígida. La relación binaria  $R$  así definida es una **relación de equivalencia**.

Un objeto rígido es: “Una clase de equivalencia de conjuntos de puntos de  $\mathbb{E}^3$  bajo la relación de equivalencia  $R$ ”.

De manera informal, diremos que la propiedad de rigidez garantiza que el sólido tiene una forma invariante sea cual sea su posición y orientación.

La regularización de un conjunto  $\mathbf{A}$  de puntos,  $\mathbf{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{E}^3)$ , se define como:  $r(\mathbf{A}) = c(i(\mathbf{A}))$  donde  $c(\mathbf{A})$  e  $i(\mathbf{A})$  denotan la clausura y el interior del conjunto  $\mathbf{A}$  respectivamente.

Un objeto regular es: “Aquel conjunto  $\mathbf{A}$  que satisface que  $r(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ ”.

*La propiedad de rigidez garantiza que el objeto sólido modelado puede moverse por el espacio sin perder su forma, y la propiedad de regularidad garantiza que no es una colección de puntos aislados o independientes*

De manera informal, diremos que la propiedad de regularidad garantiza que el sólido matemático abstracto tiene interior, y que su frontera no tiene partes aisladas o móviles. Es decir, la frontera de un sólido debe determinar de forma no ambigua cuál es el interior, y por tanto qué es lo que comprende el sólido.

Además de las dos anteriores, el sólido debe cumplir la propiedad de **finitud**. No podemos olvidar que todos los objetos en los que podemos estar interesados tienen un tamaño finito, por tanto, además de las propiedades de rigidez y regularidad, es necesario exigir al sólido que ocupe una porción finita del espacio y pueda ser descrito de manera finita, ya que de otra forma no sería posible su representación en un ordenador.

Con todo ello se define un *r*-set como: “Una clase de equivalencia bajo la relación *R*, de subconjuntos de  $\mathbb{E}^3$  acotados, cerrados, regulares y semialgebraicos”.

Un conjunto cerrado es aquel que contiene a su frontera, es regular si su frontera no tiene partes no adyacentes al interior y es semialgebraico si es el resultado de un conjunto finito de combinaciones de semiespacios algebraicos usando para ello los operadores de conjuntos:  $\cup$ ,  $\cap$  y  $\setminus$ .

Por el hecho de ser acotado, el *r*-set ocupa una porción del espacio con unos límites bien definidos.

### 3.2.2 Representación computacional

Una representación computacional de un sólido es: “Una colección finita de símbolos de un alfabeto finito que designa a un sólido matemático abstracto”.

A la colección de todas las representaciones sintácticamente correctas se le denomina **espacio de representación R**.

### 3.2.3 Esquema de representación

Sea **M** un espacio de modelos matemáticos abstractos de objetos sólidos. Un sólido es una entidad de **M**.

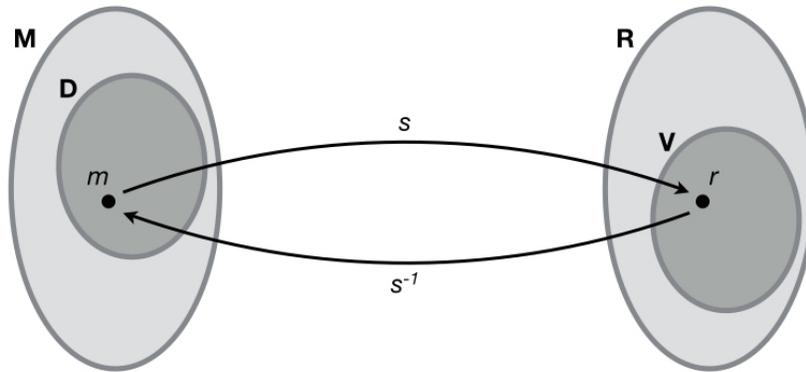


Figura 3.2: Relación que existe entre el espacio de modelos matemáticos  $M$ , el espacio de representaciones  $R$ , el dominio  $D$  y el rango  $V$  del esquema de representación

Un esquema de representación es: “Una *correspondencia*  $s$  entre los conjuntos referenciales  $M$  y  $R$ ”. (Figura 3.2).

Dado que una correspondencia  $s$  entre dos conjuntos referenciales  $M$  y  $R$ , es un subconjunto del producto cartesiano  $s \subseteq M \times R$ , si un elemento  $r \in R$  está relacionado con un elemento  $m \in M$  mediante  $s$ , ello se denota como  $(m, r) \in s$ .

El dominio de  $s$ , es decir, el conjunto de aquellos modelos  $m \in M$  de sólidos que se relacionan con alguna representación  $r \in R$  mediante  $s$ , se denota como  $D$ . El rango de  $s$ , es decir, el conjunto de aquellas representaciones  $r \in R$  que se corresponden con algún modelo matemático  $m \in M$  mediante  $s$ , se denota como  $V$ . A la correspondencia inversa de  $s$  se la denomina  $s^{-1}$ .

*Cuanto mayor sea  $D$ , más potente es la representación, porque permite representar más modelos matemáticos de objetos sólidos*

#### 3.2.4 Propiedades de las representaciones computacionales

Una representación computacional  $r \in R$  es útil únicamente cuando está relacionada con algún sólido matemático abstracto  $m \in M$ .

**Validez de una representación:** “Cualquier representación computacional  $r \in V$  es válida”.

Esto es así ya que es una representación correcta tanto sintácticamente como semánticamente, es decir, pertenece a  $R$  y además tiene un elemento correspondiente en el dominio  $D$ .

No todos los objetos matemáticos abstractos son representables, es decir,  $\mathbf{D}$  no tiene por qué ser igual a  $\mathbf{M}$ . Igualmente no todas las representaciones sintácticamente correctas son válidas,  $\mathbf{V}$  no tiene por qué ser igual a  $\mathbf{R}$ .

**No ambigüedad de una representación:** “Una representación  $r \in \mathbf{V}$  es no ambigua si:  $(m, r) \in s \wedge (m', r) \in s \Rightarrow m = m'$ ” (Figura 3.3 arriba).

Es decir, una representación  $r \in \mathbf{V}$  es no ambigua si es la imagen de un único sólido matemático abstracto de  $\mathbf{D}$  bajo  $s$ .

**Unicidad de una representación:** “Una representación  $r \in \mathbf{V}$  es única si:  $(m, r) \in s \wedge (m, r') \in s \Rightarrow r = r'$ ” (Figura 3.3 abajo).

O lo que es igual, una representación  $r \in \mathbf{V}$  es única si su sólido matemático correspondiente mediante  $s$  no admite otras representaciones distintas a  $r$  en el esquema de representación.

### 3.2.5 Propiedades de los esquemas de representación

#### Dominio

El dominio o poder expresivo de un esquema de representación es el conjunto de sólidos matemáticos abstractos que son representables mediante ese esquema. No sólo se refiere a qué o cuántos sólidos matemáticos pueden representarse con el esquema, sino que también se refiere a con qué precisión pueden representarse.

Un buen esquema de representación debería tener un dominio lo más amplio posible.

#### Validez

Un esquema de representación es válido si todas sus representaciones sintácticamente correctas lo son.

A nuestro juicio la propiedad de validez es la más importante que debe garantizar un esquema de representación. Implica que si una representación es sintácticamente correcta, entonces

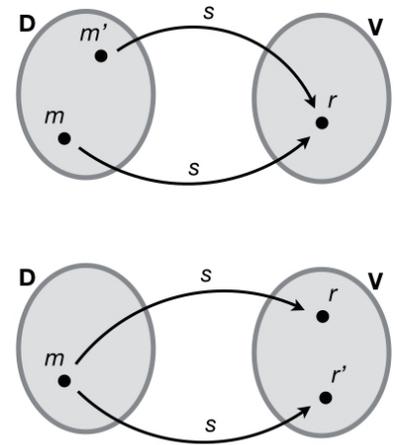


Figura 3.3: Arriba, representación ambigua. Una misma representación puede corresponder a dos modelos matemáticos distintos. Abajo, representación no única. Un mismo modelo matemático puede tener dos representaciones válidas distintas

es válida. De esta forma la comprobación de validez se limita a hacer comparaciones entre símbolos. Ello es vital, ya que las comprobaciones de tipo sintáctico son muy sencillas de hacer por un ordenador.

En la práctica, que todos los sólidos que se puedan representar mediante un esquema de representación sean válidos implica que no se tienen sólidos sin sentido, o lo que es lo mismo, que todos los sólidos que se representen pueden, por ejemplo, ser fabricados.

### **No ambigüedad**

Un esquema de representación es no ambiguo si todas sus representaciones válidas modelan a exactamente un único sólido matemático.

Por definición, cada representación no ambigua contiene suficiente información para distinguir a un sólido matemático individual de todos los demás sólidos en el dominio de modelado, y por tanto es una fuente de datos suficiente (completa) para evaluar cualquier función matemática definida del sólido. Por esta razón algunos autores también llaman a esta propiedad **completitud**.

### **Unicidad**

Un esquema de representación es único si cada sólido matemático tiene una única representación válida en el esquema. la unicidad es importante para poder valorar la igualdad entre sólidos representados.

La mayoría de los esquemas de representación no son únicos porque se da alguna de las causas siguientes:

- Las subestructuras de símbolos de la representación pueden ser permutadas.
  
- Distintas representaciones pueden corresponder a copias equivalentes de un mismo sólido matemático, pero posicionadas de forma distinta.

Ambas, la no unicidad permutacional y la no unicidad posicional son conceptualmente triviales. No obstante, determinar si dos estructuras contienen los mismos elementos puede ser computacionalmente costoso si las estructuras son grandes.

Los esquemas de representación que son no ambiguos y únicos o completos son muy útiles, ya que suponen una proyección uno a uno.

Ello implica que distintas representaciones se corresponden con sólidos matemáticos distintos y por tanto la igualdad entre objetos puede determinarse comparando sintácticamente las representaciones de dichos sólidos.

### **Concisión**

Hace referencia al tamaño de una representación computacional. Cuanto más concisa sea una representación, menos espacio es necesario para almacenarla, y menor es el tiempo que se tarda en transmitirla a través de una red de ordenadores.

Normalmente, la concisión implica el uso de poca información redundante; si bien, a veces la redundancia añadida selectivamente puede tener grandes ventajas en la práctica.

### **Facilidad de creación**

Cualquier esquema de representación se propone con el objetivo de que permita a los científicos modelar objetos para su estudio. Por tanto es fundamental que se puedan crear representaciones válidas de la manera más fácil posible. Esto aumenta la utilidad práctica del esquema.

### **Eficiencia en el contexto de las aplicaciones**

Por la misma razón, los esquemas de representación deben permitir el uso de buenos algoritmos para evaluar funciones útiles de los sólidos. Los buenos algoritmos deben ser correctos, eficientes y robustos. También deberían tener otras propiedades menos cuantificables, tales como extensibilidad o facilidad de mantenimiento.

### 3.3 Repaso de esquemas de representación

En esta sección se va a hacer un repaso de los esquemas de representación más directamente relacionados con el trabajo realizado.

Por lo general los tres tipos de esquemas de representación más ampliamente usados son: enumeración espacial, b-rep (boundary representation) y CSG (Constructive Solid Geometry) [11]. En esta sección nos centramos en los primeros, ya que tienen un interés especial para nuestro trabajo.

Los esquemas de enumeración espacial, también llamados esquemas de descomposición, describen a los sólidos a partir de unos bloques constructivos básicos llamados **vóxeles**, que se combinan mediante alguna operación de “pegado”. El tipo de vóxel que se utilice y la forma en que se combinan entre sí, da origen a las distintas variaciones de este esquema.

En parte, la importancia de este esquema reside en que es la representación elegida tradicionalmente por los métodos de elementos finitos (FEM) para la solución numérica de ecuaciones diferenciales.

A continuación se repasan las principales variantes de los esquemas de enumeración espacial.

#### 3.3.1 Enumeración exhaustiva

Los métodos de modelado basados en r-sets ven a los sólidos como conjuntos continuos de puntos del espacio. A la hora de representarlos, no es posible hacerlo mediante una lista de dichos puntos, ya que se trata de un conjunto infinito no numerable. Sin embargo, sí es posible discretizar el espacio dividiéndolo en pequeños cubos y representar el sólido como la lista de todos los cubitos total o parcialmente ocupados por puntos del sólido. Los cubos forman una subdivisión regular del espacio, es decir, no se solapan, y tienen tamaño y orientación uniformes. En caso contrario, la enumeración no es sintácticamente correcta. (En la Figura 3.4 puede verse un ejemplo).

*Los esquemas de enumeración espacial se están usando mucho en la actualidad dada la gran capacidad de procesamiento de vóxeles que incorporan las GPUs actuales*

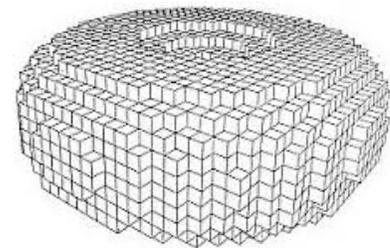


Figura 3.4: Ejemplo de enumeración exhaustiva. © A.H.J. Christensen, 1980

Este es uno de los esquemas más sencillos a la hora de representar un sólido matemático en un ordenador, y recibe el nombre de enumeración exhaustiva. Normalmente sólo se estará interesado en una región limitada del espacio, por lo que el conjunto de pequeños cubos puede almacenarse como un array tridimensional  $c_{ijk}$  de datos binarios. Si  $c_{ijk} = 1$ , entonces el vóxel  $c_{ijk}$  representa a una región del espacio ocupada por el sólido, mientras que si es cero, representa a una región vacía.

Por supuesto, para poder establecer ese array tridimensional de datos binarios es necesario almacenar también el sistema de ejes coordenados de referencia, la caja englobante alineada con los ejes del área del espacio de interés, y el tamaño de arista de cada pequeño vóxel.

Este esquema de representación es muy adecuado en ciertos campos de aplicación, tales como la tomografía digital en medicina, que justamente produce información tridimensional digital muestreada a intervalos regulares, dentro de un volumen limitado. Además, algunas propiedades integrales de los sólidos, tales como su volumen o su momento de inercia, se pueden calcular como sumas de los valores de dichas propiedades evaluadas en cada vóxel individual.

Se puede extender este esquema de representación para representar sólidos heterogéneos fácilmente. En lugar de asignar sólo dos valores a cada vóxel 0 ó 1, se puede definir un conjunto  $\mathbf{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  de materiales primarios y asignar a cada cubo un valor

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad \left| \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad a_i \geq 0\right.$$

que es una **combinación convexa** sobre el conjunto de materiales. Así, cada cubo puede estar compuesto por un material que es una mezcla de los  $n$  materiales primarios.

Este esquema de representación es muy simple, pero no es muy adecuado para representar sólidos heterogéneos, ya que tiene limitaciones evidentes:

- Dentro de cada vóxel sólo hay un material uniforme, que si bien es la mezcla de los materiales primarios, permanece constante a lo largo de todo el volumen del cubo. Por tanto, no es posible establecer una gradación continua de la distribución de materiales en el interior del sólido.
- Para poder representar con precisión la distribución de materiales a lo largo del objeto sólido, es necesario que el tamaño de cada vóxel sea muy pequeño (el modelo debe tener una alta resolución) de forma que el tamaño de la representación resultante es enorme. Esto requiere gran esfuerzo de procesamiento y de almacenamiento.
- No es sencillo editar ni la forma, ni la distribución de materiales de un sólido modelado con este esquema de representación.

Los esquemas de representación mediante enumeración exhaustiva tienen en general las siguiente propiedades:

- **Dominio o poder expresivo.** Obviamente, la enumeración exhaustiva es un método de representación aproximado. Las superficies que no sean planas y paralelas a alguno de los planos coordenados sólo podrán representarse de forma aproximada, y esta aproximación será tanto mejor cuanto menor sea el tamaño de los pequeños vóxeles que forman la descomposición. En el límite, la descomposición tiende al objeto que se representa. Por lo demás, el esquema es general, es decir, permite representar cualquier clase de sólidos.
- **Validez.** Dado que los cubos están situados en una rejilla regular del espacio y que sólo pueden intersectarse en una cara, arista o vértice, la validez está garantizada en este esquema. Toda representación sintácticamente correcta de un sólido es válida.
- **No ambigüedad.** El esquema es no ambiguo hasta el grado de resolución que permita el tamaño de los vóxeles. Dos sólidos con la misma estructura general, pero con pequeños detalles diferentes en su superficie pueden representarse de la misma

*El esquema de representación mediante enumeración exhaustiva puede usarse para representar sólidos heterogéneos, pero para construir sólidos con calidad es necesario procesar una cantidad enorme de vóxeles*

forma en el esquema, ya que si el tamaño del detalle es menor que el tamaño de los vóxeles, el esquema no tendrá precisión suficiente para representarlo.

- **Unicidad.** Si se usa un sistema de referencia fijo y un mismo tamaño tanto de caja envolvente como de arista para los vóxeles, el esquema de enumeración exhaustiva es único, salvo la no unicidad posicional, ya que un mismo sólido no puede tener dos representaciones diferentes. Si no se usa un mismo criterio a la hora de almacenar los vóxeles del array tridimensional, también puede darse la no unicidad permutacional.
- **Facilidad de creación.** En ciertos campos de aplicación es muy sencillo construir representaciones mediante enumeración exhaustiva. Por ejemplo en medicina, donde se cuenta con información tridimensional digital como datos de entrada. Sin embargo, en general es difícil construir modelos de objetos mediante enumeración exhaustiva.
- **Concisión.** Este esquema no es en absoluto conciso. Si se desea representar un objeto de tamaño medio-alto con un nivel medio de resolución, se necesita una cantidad enorme de pequeños vóxeles para describirlo, lo cual se traduce en una gran cantidad de almacenamiento.
- **Cerrado para operaciones booleanas.** Las operaciones booleanas son extremadamente fáciles de implementar en este esquema; sin embargo, dado el gran tamaño que requiere una representación para ser medianamente útil, dichos algoritmos consumen mucho tiempo de procesamiento.

### 3.3.2 Descomposición en celdas

Una forma de resolver los problemas de los esquemas de enumeración exhaustiva, conservando sus ventajas, es usar otros tipos de vóxeles en lugar de cubos. A estos vóxeles con formas genéricas se les denomina **celdas** (véase Figura 3.5).

Normalmente se suele usar más de un tipo de celdas básicas, las cuales pueden ser cualquier objeto topológicamente equivalente a una esfera (es decir, que no contenga agujeros). Las celdas individuales concretas de la representación se generan a partir de las celdas básicas como instancias parametrizadas. Hay una única

*Por lo general, se usa la palabra vóxel sólo para referirse a celdas cúbicas*

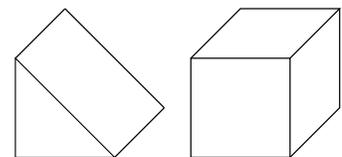


Figura 3.5: Celdas genéricas

operación que “pega” unas celdas con otras y normalmente viene dada de forma implícita mediante la manera en que se codifican en la estructura de datos.

La descomposición debe satisfacer la condición de que cada dos celdas deben ser o bien completamente disjuntas (no se intersectan), o bien se intersectan en exactamente un vértice, o a lo largo de una arista, o bien en una superficie completa. Si las celdas se intersectan de alguna otra forma, la descomposición no es correcta. Las celdas más utilizadas son poliedros y celdas cuadráticas.

Este esquema de representación también se puede extender para representar sólidos heterogéneos. En este caso, es necesario asignar una función de material  $F$ , que asigne a cada punto de cada celda de la descomposición una **combinación convexa** sobre el conjunto de materiales  $\mathbf{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad \left| \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad a_i \geq 0\right.$$

En el caso de celdas poliédricas no es sencillo definir una función de material  $F$ , y en el caso de celdas cuadráticas se debe implementar algún mecanismo para asegurar la transición continua de materiales entre celdas contiguas.

Los esquemas de representación mediante descomposición en celdas tienen en general las siguientes propiedades:

- **Dominio o poder expresivo.** El esquema es general, y exacto hasta el grado de la celda, sobre todo si se usan celdas con superficies exteriores curvas.
- **Validez.** La validez de la descomposición en celdas es muy difícil de establecer. Mientras que el esquema de enumeración exhaustiva tiene propiedades estructurales que aseguran la validez, una descomposición en celdas general es solamente un conjunto desordenado de celdas, por lo que para comprobar la validez se necesita aplicar un test de intersección para cada pareja de celdas de la representación.

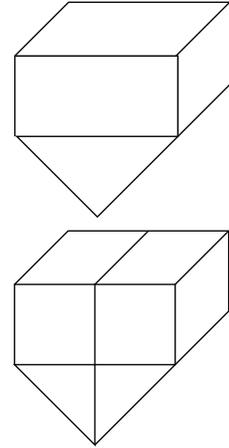


Figura 3.6: Ejemplo de descomposición en celdas usando las celdas de la Figura 3.5. Como puede verse el esquema no es ambiguo y no es único

*Nuestro esquema de representación es un esquema de descomposición en celdas, en el que se han resuelto los problemas de continuidad, validez, facilidad de creación y edición.*

- **No ambigüedad.** El esquema no es ambiguo, siempre y cuando se emplee el número suficiente de celdas del tamaño adecuado para representar todos los detalles del sólido que se quiera representar.
- **Unicidad.** Este esquema de representación no es único, y no sólo por la no unicidad posicional y permutacional. Dado que se emplean distintos tipos de celdas con tamaños que pueden ser variables, es muy sencillo generar dos representaciones distintas para un mismo objeto sólido.
- **Facilidad de creación.** Normalmente las descomposiciones en celdas se crean mediante conversión a partir de otros esquemas de representación, ya que es difícil construirlas directamente.
- **Concisión.** Es una representación relativamente concisa; normalmente consiste en un conjunto de puntos, seguido de una lista de elementos. Cada elemento tiene un tipo y una lista de enteros referenciando cada uno a un punto. La interpretación de esa lista de puntos depende de cada tipo de elemento. Por ejemplo: si se trata de un tetraedro, el elemento tendrá una lista de cuatro índices de punto, que se refieren a los vértices del tetraedro.
- **Cerrado bajo operaciones booleanas.** Los algoritmos para calcular operaciones booleanas no triviales son muy complejos en el caso de descomposición en celdas.

### 3.3.3 Octrees

Los octrees son otro intento de resolver los problemas de la enumeración exhaustiva sin perder sus ventajas. A diferencia de la descomposición en celdas, donde se aplicaba el enfoque de usar otros tipos de vóxeles distintos a los cubos, en los octrees se siguen usando cubos, pero no todos del mismo tamaño, de forma que se puede ahorrar mucho espacio de almacenamiento.

Los octrees explotan el hecho de que normalmente en una enumeración exhaustiva, los cubos vecinos a un cubo ocupado por el sólido están también ocupados por el sólido. Usan la propiedad fundamental de que el número de nodos necesarios para representar un sólido es proporcional al área de su superficie. De esta forma, el número de vóxeles necesarios es proporcional a  $r^2$ ,

donde  $r$  es la resolución, en lugar de ser proporcional a  $r^3$  como ocurre en la enumeración exhaustiva.

Los octrees parten de un gran cubo que engloba a todo el espacio de interés. Si el sólido ocupa parcialmente ese cubo, entonces se subdivide en ocho subcubos iguales llamados octantes, que se almacenan en un árbol en el que cada nodo tiene ocho descendientes (árbol octal). Este proceso de subdivisión recursiva del espacio prosigue con cada uno de los ocho octantes hasta que cada uno puede ser etiquetado como completamente ocupado por el sólido, completamente vacío, o bien hasta que se alcanza un nivel de subdivisión prefijado (véase Figura 3.7).

Los octrees no son adecuados para representar sólidos heterogéneos. Su principal ventaja frente a la enumeración exhaustiva, que permiten agrupar varios cubos que tengan un mismo material en un cubo mayor, es el principal inconveniente que impide usarlos para representar esta clase de sólidos. El octree sólo sería efectivo en aquellas partes del sólido que estuviesen compuestas por un único material.

Se podría considerar otro enfoque, en el que el criterio de parada a la hora de subdividir no fuese el material en el interior del sólido sino la forma del sólido, y usar una función en el interior de cada cubo, que asigne una distribución de material a cada punto. Sin embargo, esta solución plantea grandes problemas de continuidad entre cubos de mayor tamaño adyacentes a cubos de menor tamaño.

Además, este método no permite una edición sencilla de un objeto ya modelado.

Los esquemas de representación mediante octrees tienen en general las siguientes propiedades:

- **Dominio o poder expresivo.** Tal y como ocurría con la enumeración exhaustiva, la representación mediante octrees es aproximada. Dado un objeto sólido para la que se tenga una rutina de clasificación de puntos, puede generarse un octree tan preciso como se quiera, eso sí, a costa de un mayor número

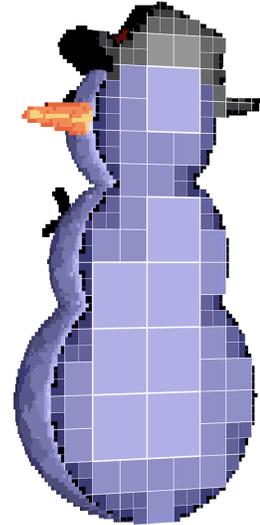


Figura 3.7: Ejemplo de octree. Como puede verse, en el interior del objeto los vóxeles son mayores que en la superficie, donde es necesario un mayor detalle. © Acodered, 2010

de vóxeles. Cuanto más se subdivide el espacio, más pequeños serán los octantes y más precisa será la representación, pero mayor será también el espacio de almacenamiento requerido.

- **Validez.** Este esquema de representación es válido. Todas sus representaciones sintácticamente correctas son válidas.
- **No ambigüedad.** Hasta la resolución prefijada, todos los octrees son no ambiguos.
- **Unicidad.** Dada una resolución, un sistema de referencia y un cubo inicial fijos, todos los octrees son únicos salvo la no unicidad posicional. Si no se usa un mismo criterio para etiquetar los nodos en el árbol octal, se puede dar no unicidad permutacional.
- **Facilidad de creación.** El único problema que se presenta a la hora de construir octrees a partir de cualquier objeto sólido, es contar con un método de clasificación de puntos para dicha sólido. Si existe un método que dado un punto del espacio determine si está dentro o fuera del sólido, entonces construir el octree es muy sencillo.
- **Concisión.** Aunque más concisos, en general, que los esquemas de enumeración exhaustiva, los octrees, en promedio, requieren gran cantidad de almacenamiento. Aunque como ya se ha mencionado, el número de nodos necesario para representar a un sólido es proporcional al área de la superficie de dicho sólido. Así, si se trata de un sólido con una superficie poco intrincada, se puede representar con precisión con relativamente pocos octantes.
- **Cerrado bajo operaciones booleanas.** Las operaciones booleanas se implementan de forma sencilla mediante algoritmos para recorrer los árboles.

Aun cuando los octrees sólo representan de forma exacta ciertos tipos de sólidos, se usan mucho, ya que permiten calcular propiedades integrales de los mismos de forma muy sencilla.

### 3.4 Conclusiones

La experiencia acumulada hasta la fecha indica que ningún esquema de representación es el mejor de una manera absoluta. Un sistema de modelado de propósito general debería poder gestionar diferentes esquemas de representación, y usar cada uno de ellos en aquellas aplicaciones a las que se adapte especialmente bien.

### 3.5 ¿Cómo plantear una investigación en modelado de sólidos?

De todo lo anterior se desprende que cualquier trabajo de investigación que pretenda establecer un nuevo esquema de representación para modelar objetos sólidos debe tratar los siguientes aspectos:

- Establecer de forma clara cuál es el espacio de sólidos matemáticos que le sirve de referencia.
- Establecer de forma clara cuál es la representación que se elige para representar dichos sólidos.
- Explicar en qué consiste el esquema de representación propuesto, o lo que es lo mismo, cómo es la correspondencia entre sólidos matemáticos y representaciones.
- Estudiar hasta qué grado el esquema de representación elegido cumple las propiedades deseables que debe tener.
- Explicar cómo construir y editar representaciones de sólidos usando el esquema propuesto.
- Explicar cómo visualizar los sólidos representados con el nuevo esquema.

En los siguientes capítulos de esta memoria se tratan todos esos puntos con detalle.

# 4

## Objetos heterogéneos

Los objetos físicos que se quieren representar con este esquema de representación son heterogéneos, es decir, están formados por distintos materiales mezclados en proporción variable (ver Figura. 4.1). Por esa razón, el primer paso en el proceso de modelado debe ser definirlos con precisión. En este capítulo se define qué es un objeto heterogéneo.

### 4.1 Objeto heterogéneo

Kumar y Dutta en [16] presentan un estudio muy completo sobre objetos heterogéneos y cómo caracterizarlos matemáticamente. El material de este capítulo se basa con algunas pequeñas modificaciones en su trabajo.

Un **objeto heterogéneo** es aquel que está compuesto por diferentes materiales (conocidos como **materiales primarios**), los cuales se presentan en proporción variable a lo largo del objeto. Se asume que el número  $n$  de materiales primarios es finito.

Figura 4.1: a) objeto homogéneo formado por un único material (metal). b) objeto heterogéneo formado por dos materiales (metal y carbón), mezclados en proporción variable



(a) homogéneo



(b) heterogéneo

El material en un punto  $\mathbf{p}$  de un objeto heterogéneo  $\mathbf{S}$  es una combinación (mezcla) de los  $n$  materiales primarios, que se especifica como la fracción de volumen ocupada por cada material. El conjunto  $\mathbb{R}^n$ , que tiene estructura de **espacio vectorial**, es un espacio matemático que define la distribución de material. Cada dimensión representa a un material primario específico.

#### 4.2 Distribución de material

Sea  $\mathbf{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  un conjunto de materiales primarios, donde cada material  $m_i$  es un literal (el nombre de ese material). Sea  $n = |\mathbf{M}|$  la cardinalidad del conjunto  $\mathbf{M}$  (el número de materiales necesarios para un problema concreto).

La **distribución de material** en un punto cualquiera  $\mathbf{p}$  de un objeto heterogéneo es una tupla:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

del **espacio vectorial**  $\mathbb{R}^n$ , donde cada coordenada  $a_i$  de la distribución de material es la fracción del volumen que ocupa el  $i$ -ésimo material en ese punto.

La suma de las fracciones de volumen ocupado por cada material primario debe sumar la unidad, y cada coordenada debe ser un valor perteneciente al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . De lo contrario, los objetos no tienen sentido en el mundo real. En otras palabras, no todas las posibles distribuciones de material  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  son apropiadas.

*La suma de todas las coordenadas de la distribución de material debe ser igual a 1*

Se define el **espacio de distribuciones de material válidas**  $\mathbf{V}$  como:

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 1, a_i \geq 0 \right\} \quad (4.2)$$

Una distribución de material  $\mathbf{a}$  es válida si y sólo si  $\mathbf{a} \in \mathbf{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ ; es decir, una distribución de material  $\mathbf{a}$  es válida si y sólo si sus coordenadas  $a_i$  son los coeficientes de una **combinación convexa** sobre el conjunto de materiales primarios  $\mathbf{M}$ .

Sobre el espacio de distribuciones válidas de material  $\mathbf{V}$ , se define una operación de combinación, denotada por  $\oplus_\alpha$ , de forma que  $\mathbf{V}$  es **cerrado bajo la operación**  $\oplus_\alpha$ . Es decir: que dados  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$ , dos combinaciones de material válidas, entonces su combinación mediante la operación  $\oplus_\alpha$  también lo es,  $\mathbf{a} \oplus_\alpha \mathbf{b} \in \mathbf{V}$ .

La operación  $\oplus_\alpha$  se define de la forma:

$$\mathbf{a} \oplus_\alpha \mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{b} \quad (4.3)$$

donde  $\alpha$  es un escalar que define la contribución de cada distribución de material al resultado final. Es necesario que  $\mathbf{V}$  sea **cerrado bajo la operación**  $\oplus_\alpha$ , por lo que debe darse que:

$$\alpha \in [0, 1]$$

Es decir,  $\alpha$ , debe definir una **combinación convexa** sobre el conjunto  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  que forman las distribuciones de material  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

#### 4.2.1 Problema con dos materiales

En varias aplicaciones industriales son necesarios materiales resistentes a la rotura y al mismo tiempo con baja conductividad térmica. En esos casos se suele emplear una mezcla de Zirconia  $ZrO_2$  (un material cerámico) y acero dulce  $Fe+C+Mn$ .

Para modelar este material usando nuestro esquema de representación definimos un conjunto  $\mathbf{M} = \{\text{"Zirconia"}, \text{"Acero dulce"}\}$  cuya cardinalidad  $n = |\mathbf{M}| = 2$ .

Para asignar una distribución de material concreta a un punto dado  $\mathbf{p}$  del objeto que se quiere modelar, se define una distribución de material  $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbf{V} \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Si en un punto hay un 50 % de Zirconia y otro 50 % de acero dulce, la distribución de material que hay que asociar es:  $\mathbf{a} = (0.5, 0.5)$ , mientras que si se tiene un 20 % de Zirconia y un 80 % de acero, la distribución de material es:  $\mathbf{a} = (0.2, 0.8)$ .

Sólo se pueden asignar distribuciones de material válidas. Por ejemplo, la distribución  $\mathbf{a} = (0.4, 0.8)$  no es válida, porque la suma de sus coordenadas no es 1. De igual forma, la distribución  $\mathbf{a} = (1.2, -0.2)$  no es válida, porque no todas sus coordenadas están en el intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

*Esta situación en el diseño de palas para turbinas de motores de aviación en las que se necesita un núcleo de acero muy resistente y un exterior de cerámica que soporte altas temperaturas*

Supongamos ahora dos distribuciones de material válidas  $\mathbf{a} = (0.7, 0.3)$  y  $\mathbf{b} = (0.4, 0.6)$ . Para combinarlas de forma que la distribución  $\mathbf{a}$  tenga tres veces más peso en la mezcla final que la distribución  $\mathbf{b}$ , se puede usar la operación  $\oplus_\alpha$  con el valor  $\alpha = 0.75$ :

$$\mathbf{a} \oplus_{0.75} \mathbf{b} = 0.75 \cdot (0.7, 0.3) + (1 - 0.75) \cdot (0.4, 0.6) = (0.625, 0.375)$$

### 4.3 Ejemplo real de objeto heterogéneo: neumático

Como sabemos, los objetos heterogéneos están formados por varios materiales mezclados entre sí, de forma que se obtiene un nuevo material cuyas propiedades no son las de los materiales individuales, sino su mezcla. Esto tiene grandes ventajas para la industria. En la actualidad, se dedica un gran esfuerzo de investigación a la fabricación de nuevos materiales heterogéneos, fabricados mediante mezcla de otros materiales, con la idea de mejorar las propiedades de estos últimos mediante la combinación de las propiedades de los materiales mezclados.

Un ejemplo interesante lo tenemos en el motociclismo de competición, donde la tecnología juega un papel muy importante a la hora de conseguir mayores prestaciones en las motos.

Uno de los elementos más importantes en una moto de competición son los neumáticos, que tienen dos funciones principales: transmitir la potencia que genera el motor al suelo con la máxima eficiencia, y proporcionar el mayor agarre en curvas y sobre asfalto mojado o resbaladizo [8]. De entre todas las partes de los neumáticos, la banda de rodadura es probablemente el componente más crítico a la hora de determinar las propiedades de los mismos.

En el desarrollo de mejores neumáticos se pueden tener en cuenta muchas propiedades, pero la mayoría de fabricantes centran su atención en el efecto conocido como **triángulo mágico**: resistencia a la rodadura, adherencia en mojado y resistencia al desgaste.



Figura 4.2: Neumático de competición degradado tras una carrera del campeonato mundial de MotoGP. © Scott Jones, 2014

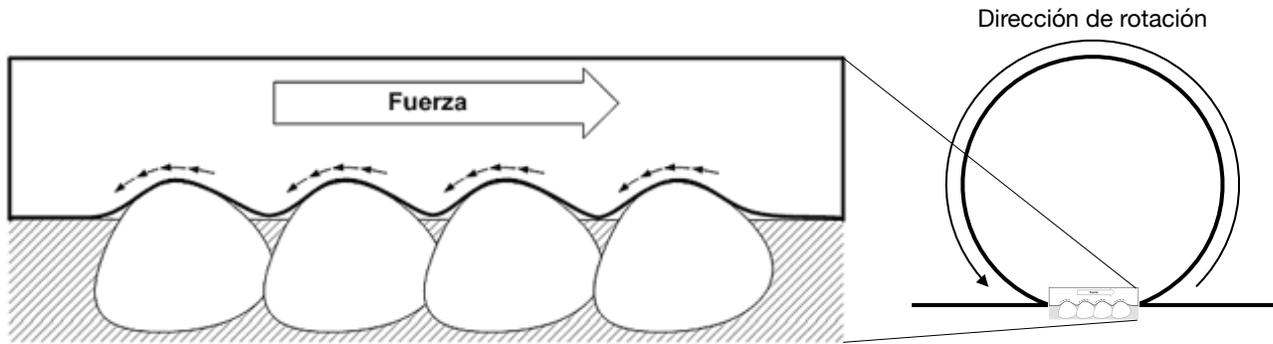


Figura 4.3: Histéresis y adherencia. El neumático se desplaza hacia la izquierda lo que provoca una fuerza de **deslizamiento** hacia la derecha. La histéresis de alta frecuencia crea microfuerzas que se oponen al **deslizamiento** y por tanto favorecen el agarre [10]

El nombre de triángulo mágico viene de la complicada relación entre estas propiedades, ya que, por ejemplo, al mejorar la adherencia en mojado, se produce un aumento de la resistencia a la rodadura, y por tanto un aumento del desgaste y viceversa.

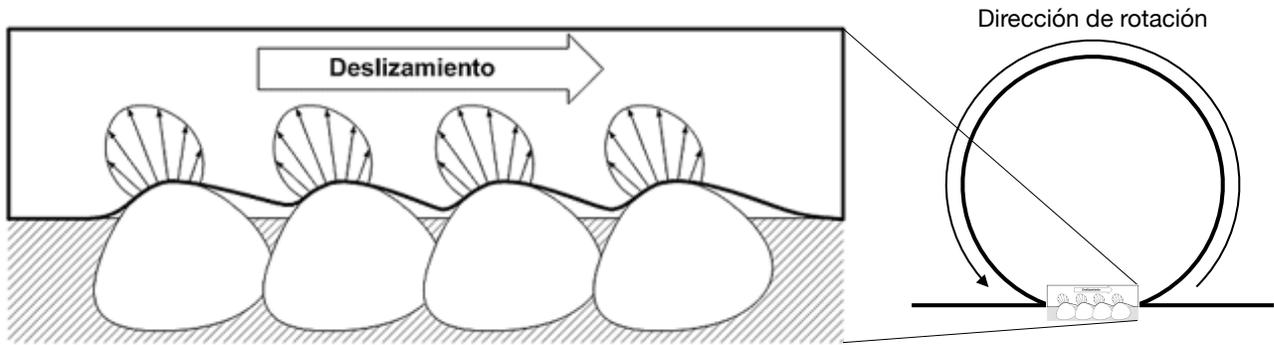
#### 4.3.1 Histéresis y adherencia

El contenido de esta sección está basado en las referencias [10, 8]

El caucho, material que determina en buena medida las propiedades de un neumático, presenta **histéresis viscoelástica** que tiene efectos que son a la vez beneficiosos y perjudiciales.

El **deslizamiento** de un neumático de caucho sobre una irregularidad en la superficie de contacto provoca una deformación. Se trata de deformaciones de alta frecuencia y se deben a pequeños baches y piedrecitas o a la propia estructura rugosa del asfalto. Cuando esta irregularidad se ha superado, el caucho tiende a recuperar su forma original y su contacto con la superficie pero, debido a la histéresis, no de manera inmediata.

Este desfase entre causa (presión o tensión aplicada) y efecto (deformación), hace que el neumático apoyado sobre una superficie rugosa como es el asfalto “abraze” las irregularidades de manera asimétrica, más por delante de esa rugosidad que por detrás, en el sentido de la marcha (ver Figura 4.3). Esto genera una distribución de presiones orientada en sentido contrario al



**deslizamiento**, lo que contribuye a la fuerza de fricción total. En este caso la histéresis favorece el agarre del neumático.

A este fenómeno se debe que un neumático “blando” tenga mejor agarre que uno “duro”, y que la mayor tracción se obtenga cuando la rueda está sufriendo un cierto **deslizamiento**. Los mejores compuestos para conseguir mejor agarre son los que presentan altos valores de histéresis para deformaciones de alta frecuencia.

#### 4.3.2 Histéresis y resistencia a la rodadura

Una consecuencia negativa de la histéresis de un neumático es la resistencia a la rodadura. Cuando un neumático gira, todas las secciones de su banda de rodadura entran en contacto con el suelo en sucesión. Se trata de deformaciones de baja frecuencia. Cuando una sección del neumático toca el suelo se deforma, pero no recupera su forma original de forma inmediata a consecuencia de la viscoelasticidad del caucho. Este retardo provoca que buena parte de la energía empleada en su deformación no sea recuperada al volver a su forma original. Esto se traduce en una distribución de presiones desigual en la huella, más intensas en su parte delantera (véase Figura 4.4).

Esta distribución de presiones puede ser resumida en una única fuerza resultante que tiene una dirección vertical, y su punto de aplicación estará ligeramente desplazado por delante del eje vertical del neumático. Como toda fuerza cuya dirección de aplicación no pase por el centro de rotación de un objeto, imprimirá al mismo un momento angular o par (véase Figura 4.5).

Figura 4.4: Histéresis y resistencia a la rodadura 1. El neumático se desplaza hacia la izquierda lo que provoca una fuerza de **deslizamiento** hacia la derecha. La histéresis de baja frecuencia crea fuerzas desiguales en la huella del neumático, más intensas en la parte delantera de la marcha [10]

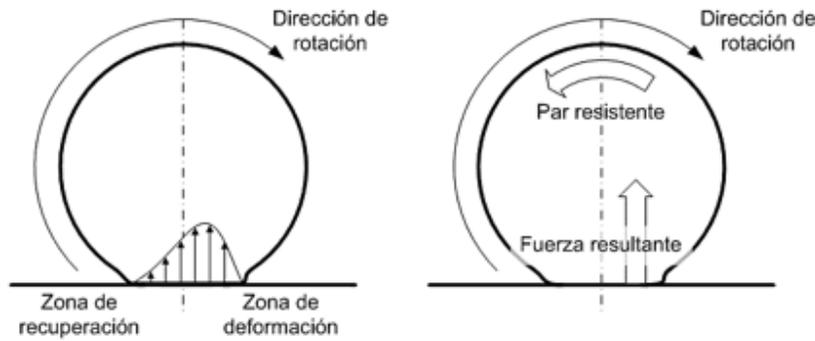


Figura 4.5: Histéresis y resistencia a la rodadura 2. En esta imagen el neumático se desplaza hacia la derecha. Las fuerzas pueden resumirse en una única fuerza resultante que genera un par que se opone al giro de la rueda [10]

En el caso del neumático, este par se opondrá a su rodadura, y deberá ser vencido por la energía proveniente del motor, incrementando por tanto el consumo de combustible y reduciendo la velocidad máxima.

Los mejores compuestos para conseguir menor resistencia al avance son los que presentan menor histéresis para deformaciones de baja frecuencia.

Por otro lado, a mayor histéresis, mayor cantidad de calor se disipa al rodar, por lo que el neumático se ve sometido a temperaturas que pueden degradarlo y en casos extremos destruirlo. Todo ello influye negativamente en el desgaste del neumático y en sus propiedades.

#### 4.3.3 Conclusión

Para maximizar las propiedades beneficiosas del caucho y minimizar sus propiedades perjudiciales, los fabricantes añaden aditivos al caucho. Los más importantes son: carbon black y sílica.

El aditivo **carbon black** es una forma amorfa de carbono muy fina y de color negro que se produce por la combustión incompleta de gas natural o derivados del petróleo. Presenta un valor alto de histéresis para deformaciones de alta frecuencia, por lo que añadido al caucho da como resultado neumáticos que tienen altos valores de agarre.

El aditivo **silica** se obtiene a partir de la reacción de silicato de sodio soluble y ácido. Presenta un valor bajo de histéresis para deformaciones de baja frecuencia, por lo que añadido al caucho da como resultado neumáticos que tienen bajos valores de resistencia al rodamiento.

Los fabricantes de neumáticos consiguen neumáticos con una banda de rodadura eficiente (baja resistencia al rodamiento y mayor duración), y al mismo tiempo con gran agarre, mezclando al caucho, carbon black y silica. Este es un magnífico ejemplo de cómo un material formado por mezcla de otros (heterogéneo) proporciona unas propiedades mejores que las de los componentes tomados por separado.

Además de todos los problemas descritos anteriormente, en las carreras se tienen circuitos con un mayor número de curvas en un sentido que en otro; por ejemplo, el circuito de Estoril en Portugal (Figura 4.6), tiene cuatro curvas a izquierda y nueve a la derecha. Esto hace que los neumáticos se vean sometidos a mayor esfuerzo en el lado derecho. En estas condiciones, si se opta por un neumático “blando” en toda la banda de rodadura, es posible que el lado derecho no aguante toda la carrera, mientras que si se opta por un neumático “duro”, las curvas a izquierda se deberán tomar a menor velocidad.

La solución óptima en este caso es un neumático donde la proporción de los aditivos carbon black y silica en el caucho sea variable. El neumático debería ser más “duro” en el lado derecho para tener mayor durabilidad (ya que en ese lado está sometido a mayor desgaste) y más “blando” en el izquierdo para tener mayor agarre. En el lado izquierdo debería haber mayor concentración de carbon black, mientras que en el lado izquierdo debería haber mayor concentración de silica.

La variación en la mezcla de materiales en la banda de rodadura del neumático debe ser continua para que el neumático sea útil. De esta forma se previene que al girar la moto para pasar de una curva a izquierda a una a derecha en rápida sucesión, haya cambios bruscos en la capacidad de agarre, lo que podría causar un accidente.

*Hasta ahora no se tiene un objeto realmente heterogéneo, ya que, una vez fijadas las proporciones de cada material en la mezcla, esta no varía a lo largo de toda la banda de rodadura*

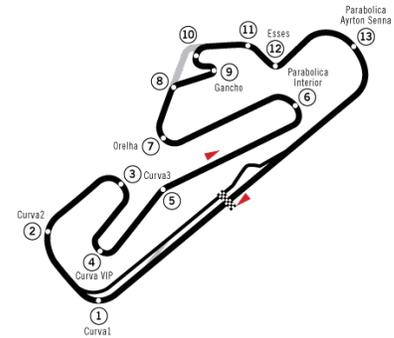


Figura 4.6: Plano del circuito de Estoril en Portugal. © Circuito Estoril, 2015

*En este caso sí se tiene un objeto heterogéneo, ya que la proporción de los distintos materiales va variando a lo ancho de toda la banda de rodadura*

## 5

# Objeto regular heterogéneo *hr-object*

El siguiente paso en el proceso de modelado es definir un modelo matemático adecuado para representar objetos heterogéneos. En este capítulo caracterizamos formalmente el modelo matemático que usamos en nuestro esquema de representación: los objetos regulares heterogéneos o *hr-objects*.

Kumar y Dutta en [16] presentan una idealización matemática para objetos heterogéneos que es muy apropiada: los  $r_m$ -objects, compuestos por  $r_m$ -sets. Nuestros *hr-objects* están basados en ellos, con dos ligeras pero importantes variaciones [5]: la función de material  $F$  debe ser continua a trozos y su dominio no puede ser  $\mathbb{E}^3$ .

El modelo matemático que proponemos es el **hr-object**:

Sea  $\mathbf{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  un conjunto de materiales primarios y sea  $n = |\mathbf{M}|$  su cardinalidad (el número de materiales necesarios para un problema concreto).

Se define un objeto regular heterogéneo *hr-object*  $\mathbf{O}$  como una terna  $\mathbf{O} = \{\mathbf{S}, \mathbf{V}, F\}$  (ver Figura 5.1), donde:

- $\mathbf{S}$  es un *r-set*.  $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^3$  es un **conjunto acotado**, rígido y regular, con su frontera definida mediante funciones algebraicas.
- $\mathbf{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  es el conjunto de todas las distribuciones de material válidas (ver ecuación 4.2) para un problema con  $n$  materiales.

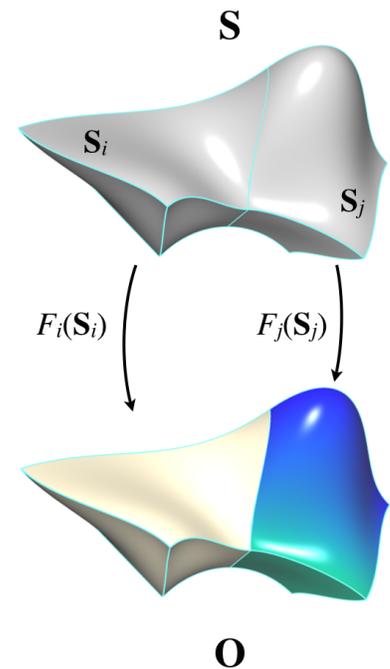


Figura 5.1: Estructura de un *hr-object*. Sobre el *r-set*  $\mathbf{S}$  se define una partición, siendo  $\mathbf{S}_i$  los elementos de esa partición. La función de material  $F$  es continua en cada subconjunto  $\mathbf{S}_i$  y continua a trozos en el *r-set*  $\mathbf{S}$  completo

- $F$  es la **función de material**; asigna una distribución de material válida  $\mathbf{a}$ , para cada punto  $\mathbf{p}$  del r-set. La función  $F$  define la forma en que los materiales primarios se distribuyen a lo largo del volumen del objeto.

La función de material  $F$  es continua a trozos:

Sea  $\{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_p\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{S})$  una partición de  $\mathbf{S}$ , es decir:

$$\mathbf{S}_i \cap \mathbf{S}_j = \emptyset, \quad i \neq j \quad \text{and} \quad \bigcup_{i=1}^p \mathbf{S}_i = \mathbf{S}.$$

$$F(\mathbf{p}) = \begin{cases} F_i : \mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{V} \\ F_i(\mathbf{p}) = \mathbf{a} \quad \mathbf{p} \in \mathbf{S}_i \quad 1 \leq i \leq p \end{cases} \quad (5.1)$$

Cada función  $F_i$  es continua en el conjunto  $\mathbf{S}_i$  en el cual está definida. Llamamos hr-set a cada subconjunto  $\mathbf{S}_i$  (cada volumen en el cual la función  $F$  es continua).

Como puede verse en la ecuación 5.1, la función de material  $F$  define la forma en que los materiales se distribuyen a lo largo del volumen del objeto. Asigna una distribución de materiales válida a cada punto  $\mathbf{p}$  del r-set.

La función de material  $F$  no tiene por qué ser continua en el r-set  $\mathbf{S}$  completo. A diferencia de otros modelos propuestos, esto permite modelar objetos complejos con discontinuidades tanto en su forma como en la distribución de materiales en su interior.

A diferencia de otros modelos propuestos, el dominio de nuestra función de material  $F$  no es  $\mathbb{E}^3$ . Es decir, la función de material no asigna una distribución de material a un punto según sus coordenadas. De esta forma se pueden aplicar transformaciones y deformaciones al objeto, sin que se pierdan las distribuciones de material asociadas a los puntos. Se puede argumentar que siempre se puede definir un sistema de coordenadas local al objeto y aplicar las distribuciones de material a los puntos expresados en ese sistema. Eso permitiría aplicar transformaciones geométricas rígidas, pero no deformaciones, ni editar la forma del objeto sólido.

*La forma en que definimos la función  $F$  en nuestro modelo permite aplicar deformaciones y editar la forma del objeto heterogéneo, sin que pierda sus materiales*

La **frontera geométrica externa** del objeto regular heterogéneo  $\mathbf{O}$ ,  $b_{\text{ext}}(\mathbf{O})$ , es la frontera de la unión regularizada de los hr-sets  $\mathbf{S}_i$ .

$$b_{\text{ext}}(\mathbf{O}) = b \left( \bigcup_i \mathbf{S}_i \right), \quad 1 \leq i \leq p \quad (5.2)$$

Los puntos que no pertenecen a  $b_{\text{ext}}(\mathbf{O})$ , pero que pertenecen a  $b(\mathbf{S}_i)$ ,  $1 \leq i \leq p$ , es decir, aquellos puntos que no estén en la frontera del objeto regular heterogéneo pero que sí están en la frontera de alguno de los hr-sets que lo forman se llaman **puntos de frontera interna**.

$$b_{\text{int}}(\mathbf{O}) = \bigcup_i b(\mathbf{S}_i) \mid b_{\text{ext}}(\mathbf{O}), \quad 1 \leq i \leq p \quad (5.3)$$

Los puntos de frontera interna forman parte de más de un hr-set; son puntos irregulares, que pueden tener dos o más distribuciones de material asociadas.

Sea  $\underline{\mathbf{p}} \in b_{\text{int}}(\mathbf{O})$  un punto perteneciente a la frontera interna de un hr-object  $\mathbf{O}$ ; sea  $\mathbf{L} = \{l_1, \dots, l_m\} \in \{1, \dots, p\}$ , el conjunto de los índices de aquellos conjuntos a los cuales pertenece el punto

$\underline{\mathbf{p}}: \underline{\mathbf{p}} \in \bigcup_{l_i \in \mathbf{L}} b(\mathbf{S}_{l_i}) \subseteq b_{\text{int}}(\mathbf{O})$ , y sea  $l_{\min} = \min(\mathbf{L})$ .

Definimos la función de material en este punto de frontera interna  $F(\underline{\mathbf{p}})$  como:

$$F(\underline{\mathbf{p}}) = F_{l_{\min}}(\underline{\mathbf{p}}) \quad (5.4)$$

De esta forma, la función de material  $F$  es inyectiva en estos puntos, y así el hr-object es válido.

Es importante darse cuenta de que el conjunto  $\mathbf{M}$  no es parte de la definición matemática de objeto regular heterogéneo, ya que lo único que importa es su cardinalidad  $n = |\mathbf{M}|$ , el número de materiales primarios adecuados para un problema concreto, no los materiales concretos que lo forman. Es tarea de las aplicaciones que usan los hr-objects asignar un significado concreto a cada material.

Expresado de otra forma, el esquema de representación que proponemos no necesita conocer la naturaleza de los materiales primarios para poder gestionarlos correctamente.



# 6

## *Hiperparche Béziér heterogéneo compuesto*

El último paso en el proceso de modelado consiste en definir la representación computacional que permite representar en un ordenador los objetos matemáticos definidos en el paso anterior. En este capítulo caracterizamos formalmente la representación que se usa en nuestro esquema de representación: los hiperparches Béziér heterogéneos compuestos.

### *6.1 Hiperparche*

Los hiperparches (también conocidos como objetos paramétricos o sólidos trivaluados) son una herramienta matemática que se ha usado con éxito para representar objetos [19].

Tienen una clara ventaja sobre otras herramientas clásicas como modelos de fronteras (B-rep), geometría constructiva de sólidos (CSG), o modelos de descomposición (enumeración exhaustiva, descomposición en celdas y octrees): permiten representar con precisión no sólo la frontera externa de los objetos, sino también su interior.

Un **hiperparche** es un conjunto de puntos cuyas coordenadas son el resultado de evaluar una función vectorial, continua, monovaluada:

$$\mathbf{B}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

donde las variables paramétricas  $u$ ,  $v$ , y  $w$  por lo general están limitadas a tomar valores dentro del intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

*La gran ventaja de los hiperparches sobre otras herramientas de modelado es que permiten representar con precisión el interior de los objetos*

Estas funciones vectoriales definen las coordenadas del conjunto de puntos que forman el objeto. Para cada tupla de valores de las variables paramétricas  $(u, v, w)$ , la función  $\mathbf{B}$  proporciona las coordenadas de un punto  $\mathbf{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  del objeto.

Por lo tanto, un hiperparche es una proyección paramétrica de un dominio sólido (un cubo de tamaño unidad) en el espacio tridimensional. El dominio de esta proyección se conoce como **espacio paramétrico**  $\mathbb{U}$ , y el rango de la proyección se llama **espacio de modelado**  $\mathbb{R}^3$ .

La **forma geométrica** de un hiperparche es:

$$\mathbf{p}(u, v, w) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \mathbf{g}_{ijk} B_i^3(u) B_j^3(v) B_k^3(w) \quad u, v, w \in [0, 1] \quad (6.1)$$

donde  $\mathbf{g}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$  son los **coeficientes geométricos** que definen la forma del objeto, y  $B^3$  son las **funciones de mezcla cúbicas** que combinan esos coeficientes para obtener todos los puntos del objeto. Los coeficientes geométricos también se denominan **puntos de control**. Como puede verse en la Figura 6.1, la forma del objeto está directamente relacionada con la posición de los coeficientes geométricos.

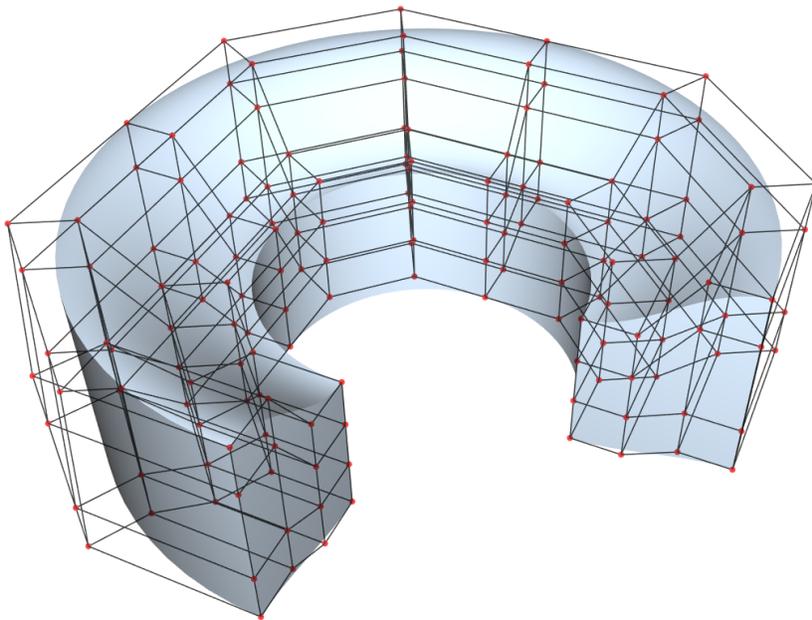


Figura 6.1: La forma del hiperparche viene determinada por la posición de los coeficientes geométricos  $\mathbf{g}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$  que son interpolados por las funciones mezcla  $B^3$ . En esta figura se muestran tres hiperparches contiguos.

En el caso tricúbico, hacen falta  $4 \times 4 \times 4 = 64$  coeficientes geométricos para definir un hiperparche. Estos coeficientes están organizados en un array tridimensional, con índices  $i, j$  y  $k$ , que varían de 0 a 3 (ver Figura 6.2). Se puede establecer un sistema de coordenadas, llamado **espacio de índices**,  $\mathbb{I}$  con ejes  $I, J$  y  $K$ . Se denomina  $\mathbf{G}$  al array tridimensional de índices que definen la forma del hiperparche.

Cada hiperparche tiene asociado un conjunto de elementos frontera que definen de forma perfecta su frontera externa (véase la Figura 6.3):

- Seis superficies, que se obtienen fijando el valor de una de las variables paramétricas  $u, v, w$ , que toma el valor 0 o el valor 1, mientras las otras dos variables toman valores libremente en el intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Se denominan **superficies isoparamétricas frontera**. Por ejemplo:  $\mathbf{B}(0, v, w)$  o  $\mathbf{B}_{0vw}$
- Doce curvas, que se obtienen fijando el valor de dos de las variables paramétricas  $u, v, w$ , que toman el valor 0 o el valor 1, mientras que la tercera toma valores libremente en el intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Se denominan **curvas isoparamétricas frontera**.
- Ocho puntos, que se obtienen fijando el valor de las tres coordenadas paramétricas  $u, v, w$ , que toman el valor 0 o el valor 1. Estos puntos se llaman **corner points**. Coinciden con los ocho coeficientes geométricos que ocupan las esquinas del array de coeficientes  $\mathbf{G}$ .

## 6.2 Revisión de trabajos previos

La investigación sobre el uso de hiperparches como herramienta de modelado de objetos heterogéneos comenzó durante la década de los 80 [3]. Casale y Stanton extendieron la formulación clásica de los hiperparches (ecuación 6.1) para asignar materiales a cada punto del hiperparche, y además explicaron algunos métodos de construcción de hiperparches, como barrido o revolución. Sin embargo, no tienen en cuenta aspectos esenciales como continuidad o validez.

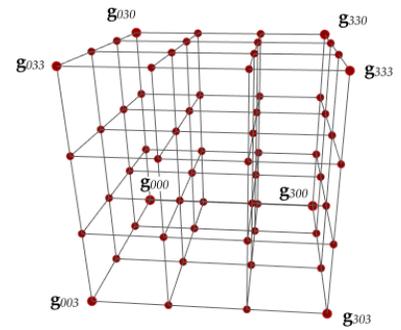


Figura 6.2: Array tridimensional de  $4 \times 4 \times 4 = 64$  coeficientes geométricos con índices  $i, j$ , y  $k$  que varían de 0 a 3

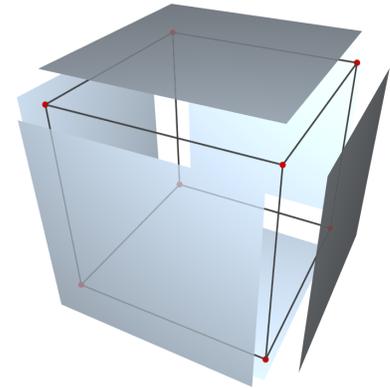


Figura 6.3: Elementos frontera del hiperparche. Corner points (en rojo), curvas isoparamétricas (en negro) y superficies isoparamétricas (en gris)

Casale y Stanton demostraron que los hiperparches tienen una capacidad extraordinaria para representar con precisión cada punto del interior del objeto. No obstante, la herramienta matemática tiene demasiados grados de libertad, por lo que es necesario refinarla para que pueda ser una herramienta realmente útil de modelado de objetos sólidos. Desde entonces ha habido varios intentos para refinar los hiperparches.

Jackson y otros en [14] presentan un modelo basado en simples spline trivariados (el dominio paramétrico no es un cubo sino un tetraedro). Este modelo es muy útil cuando se construye una representación de un objeto heterogéneo a partir de una malla de triángulos. Permite una descomposición muy precisa en tetraedros spline. Sin embargo la malla de tetraedros resultante es enorme al estar basada en una malla de triángulos. La edición se realiza mediante movimientos de puntos de control sin ninguna ayuda por parte del esquema de representación. En la práctica, se usa para representar en el ordenador objetos de los cuales se tiene ya una malla de triángulos, pero con este método es muy difícil modelar nuevos objetos desde cero.

Siguiendo este trabajo, Hua y otros [12, 13] plantean una descomposición en tetraedros spline que permite establecer ciertas condiciones de continuidad variable entre  $C^0$  y  $C^{n-1}$ , siendo  $n$  el grado de los splines. Las condiciones de continuidad no son intuitivas ni demasiado flexibles. La edición se sigue haciendo mediante movimiento de puntos de control que en una malla tan grande son inviables en la práctica. Este es un modelo muy bueno para reconstruir y visualizar atributos físicos multidimensionales a lo largo de cualquier objeto volumétrico, pero no para modelar nuevos objetos desde cero.

Qian y Dutta en [21] presentan un modelo basado en hiperparches B-Spline para representar objetos heterogéneos. Se centran principalmente en asignar una determinada distribución de materiales a un punto concreto del objeto en función de las propiedades que se quieran obtener en dicho punto. Para ello definen un proceso de difusión. Basan su estructura en hiperparches B-Spline (las funciones mezcla son B-Splines de grado 3), lo que resta poder expresivo a su modelo.

Schmitt y otros en [23] proponen un método para modelar objetos heterogéneos que usa FReps como representación básica, combinadas con primitivas B-Spline simples mediante CSG. Este método es muy apropiado para prototipado rápido o escultura virtual. Sin embargo el poder expresivo del modelo no es muy elevado, debido a la baja capacidad de los FReps para representar distribuciones de material complejas y a la baja capacidad de los B-Splines cúbicos para modelar geometrías complejas.

Yang y Qian proponen un método para modelar geometrías complejas con hiperparches B-Spline [29]. Las geometrías se definen mediante un proceso de lofting (barrido) heterogéneo. El proceso de lofting y el uso de hiperparches B-Spline hacen que los objetos que se pueden modelar estén topológicamente limitados a formas regulares. Esto limita seriamente la capacidad expresiva del método propuesto.

Warkhedkar y Bhatt [27] usan hiperparches B-Spline regulares para gestionar las capas producidas por una tomografía axial y representar el cuerpo humano. En realidad, los hiperparches son cubos y no intervienen en la geometría del objeto modelado. La visualización se realiza mediante la extracción de isosuperficies mediante técnicas clásicas como marching cubes. Por esta razón, no está clara la utilidad real del uso de B-Splines.

En general, los métodos propuestos hasta ahora tienen las siguientes debilidades:

- Los hiperparches producen modelos que son o bien completamente continuos, o que no tienen ninguna continuidad. Por ejemplo, los hiperparches B-Spline cúbicos tienen coeficientes alineados en rejillas regulares y producen objetos con continuidad  $C^2$ . Con esta formulación no se pueden modelar discontinuidades ni en la forma, ni en la distribución de materiales entre celdas adyacentes. Algunos métodos como inserción de knots tratan de resolver el problema, pero complican enormemente la edición del modelo y la comprobación de propiedades básicas como su validez.

- Los hiperparches *per se* no garantizan la propiedad de validez. La formulación matemática del hiperparche puede no ser inyectiva. La propiedad de validez es muy importante y debe garantizarse en un esquema de representación (véanse las secciones 3.2.4 y 3.2.5).
- La forma natural de editar un hiperparche es moviendo sus coeficientes geométricos o puntos de control; sin embargo, si estos coeficientes se tratan independientemente, sin la ayuda del esquema de representación para percibir y mantener las relaciones que existen entre ellos, el proceso de edición es muy poco intuitivo.
- Otros métodos están basados en CSG y B-rep y no permiten una representación directa y precisa de los puntos que componen el interior del objeto sólido, lo cual es muy necesario en el caso de sólidos heterogéneos.
- Sin menospreciar la capacidad de los métodos basados en CSG para construir prototipos rápidamente, estos métodos no son muy adecuados para modelar formas complejas que no pueden obtenerse mediante operaciones booleanas.
- Algunas representaciones que permiten modelar objetos con mucha precisión no son en absoluto concisas lo que complica su almacenamiento, transmisión a través de una red y edición.

### 6.3 Hiperparche Béziér heterogéneo

Hay varios tipos de funciones de mezcla que se pueden usar para combinar los coeficientes geométricos. Nosotros hemos elegido funciones de mezcla Béziér cúbicas [17] (ver Figura 6.4).

$$\begin{aligned} B_0^3(t) &= (1-t)^3 & B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_2^3(t) &= 3t^2(1-t) & B_3^3(t) &= t^3 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Hemos elegido las funciones mezcla de Béziér por varias razones:

- Las funciones mezcla de Béziér definen una combinación convexa sobre el conjunto de puntos de control  $\mathbf{G}$  del hiperparche. Para todos los valores del parámetro  $t \in [0, 1]$ , la suma de las cuatro funciones mezcla Béziér  $B_0^3(t) + B_1^3(t) + B_2^3(t) + B_3^3(t)$  es siempre 1, por tanto, definen una **combinación convexa** sobre el conjunto de puntos de control.

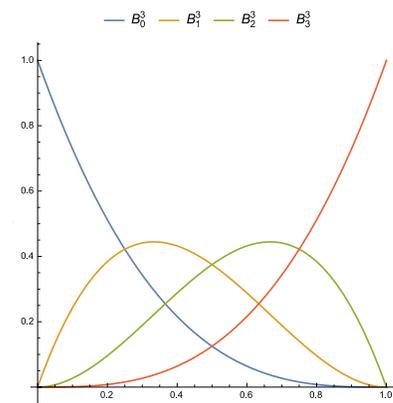


Figura 6.4: Funciones mezcla de Béziér. Generadas con Mathematica 10

- Interpolan los ocho corner points del hiperparche, es decir, el hiperparche “pasa a través” de esos puntos.
- Las tangentes alrededor de cada corner point vienen definidas por sólo sus coeficientes geométricos vecinos (en el array de 64 coeficientes). De esta forma, el movimiento de un punto de control vecino inmediato de un corner point, tiene un efecto claro en la forma del hiperparche alrededor de ese corner point.

Los hiperparches permiten modelar de forma precisa la posición de cada punto en el interior del objeto. Sin embargo, con la formulación clásica no es posible determinar la distribución de material en esos puntos. Por ello, se hace necesario definir un **hiperparche Béziér heterogéneo** de la forma:

$$\mathbf{B}_m = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \mathbf{h}_{ijk} B_i^3(u) B_j^3(v) B_k^3(w) \quad u, v, w \in [0, 1] \quad (6.3)$$

donde  $\mathbf{h}_{ijk} = (\mathbf{p}_{ijk}, \mathbf{a}_{ijk})$  son los **coeficientes geométricos heterogéneos**, que son pares de valores. Los elementos:

$$\mathbf{p}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \in \mathbb{R}^3$$

son los puntos que definen la forma del hiperparche, y los elementos:

$$\mathbf{a}_{ijk} = (a_{1ijk}, a_{2ijk}, \dots, a_{nijk}) \in \mathbf{V} \subseteq \mathbb{R}^n$$

son las distribuciones de material que definen la gradación de los diferentes materiales a lo largo del hiperparche.

Es importante darse cuenta de que un hiperparche Béziér heterogéneo  $\mathbf{B}_m$  es un conjunto formado a su vez por dos conjuntos:

$$\mathbf{B}_m = \{\mathbf{P}_m, \mathbf{A}_m\} \quad (6.4)$$

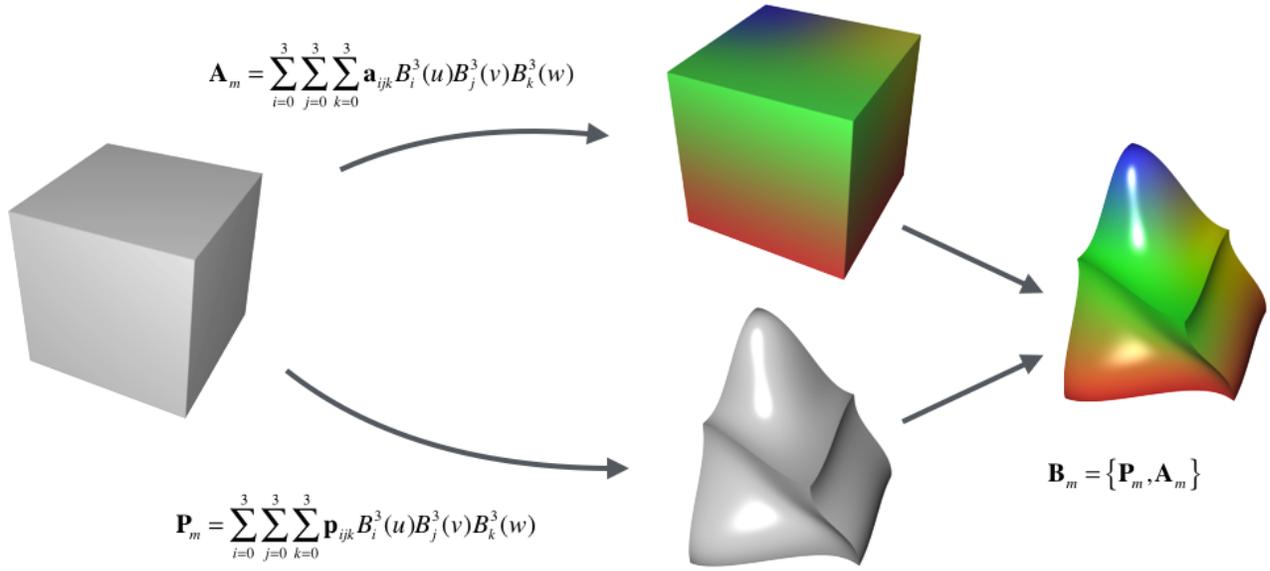
El conjunto  $\mathbf{P}_m$  define la forma del hiperparche.

$$\mathbf{P}_m = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \mathbf{p}_{ijk} B_i^3(u) B_j^3(v) B_k^3(w) \quad u, v, w \in [0, 1] \quad (6.5)$$

y el conjunto  $\mathbf{A}_m$  define la gradación de los diferentes materiales a lo largo del hiperparche (ver Figura 6.5).

$$\mathbf{A}_m = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \mathbf{a}_{ijk} B_i^3(u) B_j^3(v) B_k^3(w) \quad u, v, w \in [0, 1] \quad (6.6)$$

$\mathbf{A}_m$  es la función de material  $F$  (ver Ecuación 5.1) implementada mediante hiperparches



A la rejilla de 64 coeficientes geométricos heterogéneos que definen un hiperparche Béziér heterogéneo tricúbico  $\mathbf{B}_m$  se la llama  $\mathbf{H}_m$ . Los 64 coeficientes de la rejilla están organizados en un array tridimensional de  $4 \times 4 \times 4$  coeficientes con índices  $i, j, k$ , que toman valores en el conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

Figura 6.5: Un hiperparche Béziér heterogéneo  $\mathbf{B}_m$ , se compone de dos conjuntos, un conjunto  $\mathbf{P}_m$  de puntos que define la geometría del hiperparche, y un conjunto  $\mathbf{A}_m$  de distribuciones de material que define la gradación de los materiales a lo largo del hiperparche

#### 6.4 Hiperparche Béziér heterogéneo compuesto

Un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto,  $\mathbf{B}$ , es una colección finita de hiperparches Béziér heterogéneos.

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m\} \quad (6.7)$$

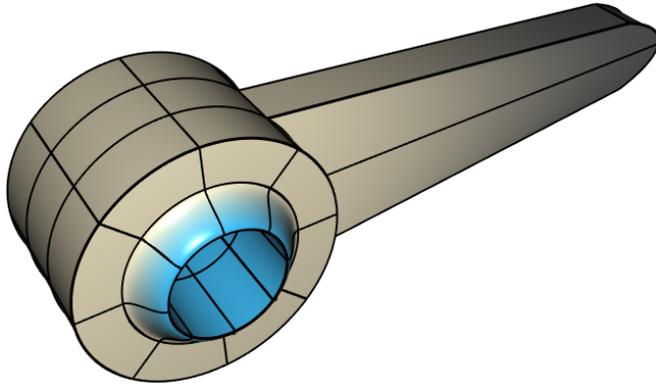
donde  $\mathbf{B}_i = \{\mathbf{P}_i, \mathbf{A}_i\}$ . Y se cumple que:

$$\forall \mathbf{P}_i \in \mathbf{B}_i, \mathbf{P}_j \in \mathbf{B}_j \quad i \neq j, \quad \mathbf{P}_i \cap^* \mathbf{P}_j = \emptyset \quad (6.8)$$

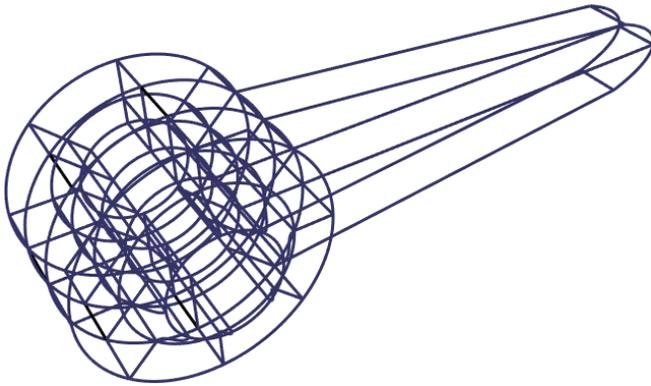
Es decir, los hiperparches son disjuntos dos a dos y como mucho sólo comparten uno, dos o cuatro corner points; una o cuatro curvas isoparamétricas frontera; y/o una superficie isoparamétrica frontera.

Un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto puede verse como una descomposición en celdas (véase la sección 3.3.2), en la cual cada celda es un hiperparche Béziér heterogéneo. De ahora en

*Esta es la condición de pegado entre las distintas celdas paramétricas que forman el hiperparche Béziér heterogéneo compuesto*



(a) Hiperparche Béziér heterogéneo compuesto



(b) Estructura de celdas subyacente

adelante, usaremos ambos **celda paramétrica** o hiperparche para referirnos a los hiperparches Béziér heterogéneos de la descomposición.

La función  $\mathbf{A}$  del hiperparche Béziér heterogéneo compuesto  $\mathbf{B}$ , es una implementación perfecta de la función de material  $F$  definida en los objetos regulares heterogéneos hr-object (véase ecuación 5.1). Asigna a cada punto del hiperparche una distribución de material válida a partir de las distribuciones de material asignadas en los coeficientes geométricos heterogéneos. Para combinar esos valores de distribución de material se usan las funciones mezcla Béziér cúbicas, que son una forma de implementar la operación de combinación  $\oplus_\alpha$  (véase ecuación 4.3).

$\mathbf{A}$  es continua a trozos. Dentro de cada celda paramétrica  $\mathbf{B}_i \in \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}_i$  tiene continuidad  $C^2$ , y en las uniones entre celdas puede haber continuidad  $C^1$  o no haber continuidad, según interese para un determinado problema (véase la sección 7.4).

Figura 6.6: Un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto es una descomposición en celdas. Cada celda es un hiperparche Béziér heterogéneo.

*Esta es una gran ventaja de los hiperparches Béziér heterogéneos compuestos sobre otros métodos basados en hiperparches*



# 7

## *Propiedades del esquema de representación propuesto*

Una vez descrito el esquema de representación que proponemos, es el momento de estudiar algunas de sus propiedades más importantes que todo esquema de representación debe cumplir.

### *7.1 Validez del hiperparche*

Tal y como se estudió en las subsecciones 3.2.4 y 3.2.5, la validez de un esquema de representación es una de las propiedades más importantes que deben garantizarse ya que asegura que no se tienen objetos sólidos sin sentido en el mundo real y por tanto pueden fabricarse.

Si no se establecen condiciones adicionales, la formulación clásica de los hiperparches no garantiza la validez de los objetos representados. No todas las configuraciones de la rejilla  $\mathbf{H}$  de coeficientes geométricos producen celdas inyectivas. Es decir, celdas en las que a cada punto  $(u, v, w)$  del espacio paramétrico  $\mathbb{U}$  le corresponde uno y sólo un punto  $(x, y, z)$  del espacio de modelado  $\mathbb{R}^3$  (véase la Figura 7.1).

*Un objeto sólido no válido, entre otras cosas, puede tener puntos que queden fuera de sus fronteras*

### *7.2 Revisión de trabajos previos*

Sederger y Parry publicaron en 1986 un trabajo sobre deformaciones de forma libre [25] en el que se daban cuenta de que el **Jacobiano** es una herramienta muy interesante para determinar la

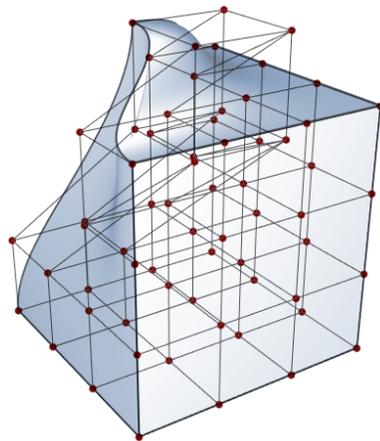
distribución interna de los puntos en el interior del hiperparche. Los autores no usan el **Jacobiano** para comprobar la validez del hiperparche, sino para asegurar que una deformación preserva el volumen del objeto deformado. Su trabajo es fundamental, ya que marca las líneas de las posteriores condiciones de validez para hiperparches.

Joy y Duchaineau en el contexto de encontrar las superficies que representan la frontera de un B-Spline tricúbico, proponen un método basado en el **Jacobiano** que puede verse como un test de validez [15]. Los autores no están interesados en comprobar si un hiperparche es o no válido, sino en encontrar las superficies frontera del mismo. Usando el teorema de la función implícita, establecen que la frontera real del objeto es un subconjunto de la unión de las superficies isoparamétricas frontera del hiperparche y la isosuperficie donde el determinante del **Jacobiano** es cero. Los autores aproximan el **Jacobiano** usando subdivisión adaptativa del espacio paramétrico.

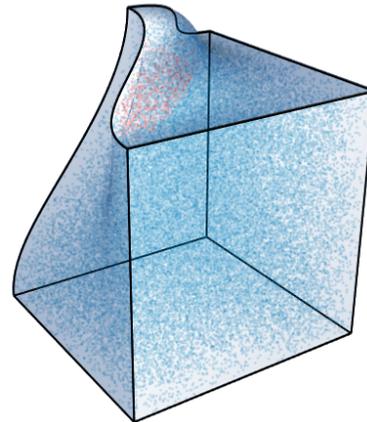
Gain y Dogson [9], en el contexto de deformaciones de forma libre, proponen un test de validez para hiperparches que es muy similar al trabajo de Joy y Duchaineau. Gain, al igual que Joy, se da cuenta de que el determinante del **Jacobiano** es cero en un punto del espacio paramétrico si y solo si las tres derivadas parciales del objeto en ese punto son linealmente dependientes. y usan un **hodograph** cónico para encontrar los límites de esas derivadas. Este método trabaja comparando posiciones relativas de los coeficientes geométricos del hiperparche. Es una condición suficiente y por tanto restringe el rango de deformaciones de forma libre que se pueden aplicar, pero puede ser usado repetidamente en cortos pasos para conseguir el resultado deseado sin obtener una deformación no válida.

*En el glosario se define qué es un  
hodograph*

Otro enfoque ligeramente diferente lo tenemos en [4]. Choi y Lee, en el contexto de morphing 3D, desarrollan un test de validez para hiperparches B-Spline basado en desplazamiento de puntos de control en lugar de estar basado en comparar posiciones relativas de los mismos. Los autores no usan un **hodograph** cónico para encontrar los límites de las columnas del **Jacobiano**,



(a) Celda de Béziér no válida



(b) Puntos interiores en la celda no válida

sino regiones 3D. Lo que proponen es una condición suficiente, por lo que algunos hiperparches que son en realidad válidos son rechazados.

### 7.3 Nuestra condición de validez

En 2001 presentamos una condición de validez para hiperparches B-Spline [7] que puede extenderse a hiperparches Béziér heterogéneos compuestos.

Un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto  $\mathbf{B}$  es no válido o no inyectivo en el dominio paramétrico  $\mathbb{U}$  en cualquiera de las dos situaciones siguientes:

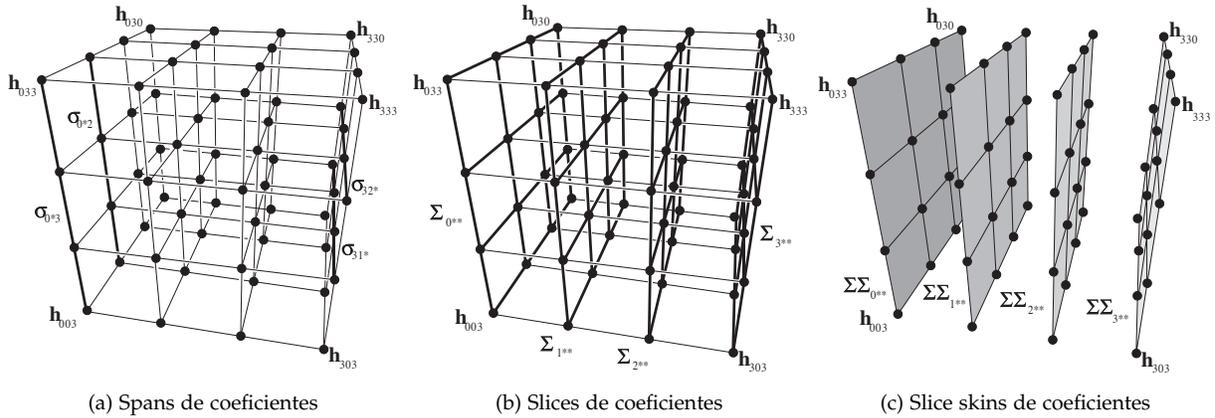
- Una celda paramétrica  $\mathbf{B}_m$  del hiperparche  $\mathbf{B}$  es no inyectiva (véase Figura 7.1).
- Dos celdas paramétricas inyectivas distintas se intersectan.
 
$$\exists \mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j \in \mathbf{B} \quad \mathbf{B}_i \neq \mathbf{B}_j \quad \Bigg| \quad \mathbf{B}_i \cap^* \mathbf{B}_j \neq \emptyset$$

Vamos a explorar esas dos situaciones por separado.

#### 7.3.1 Caso 1: una celda paramétrica no es válida

Antes de describir nuestra condición de validez para celdas paramétricas de Béziér, es necesario definir algunos conceptos previos.

Figura 7.1: a) Celda paramétrica Béziér no válida. b) Interior de la celda. En rojo se muestran los puntos no válidos (son la imagen de más de un punto  $(u, v, w)$  distinto del espacio paramétrico  $\mathbb{U}$ )



### Span de coeficientes

Sea  $\mathbf{B}_m$  una celda paramétrica definida por la rejilla de coeficientes  $\mathbf{H}_m$ . Llamamos **span de coeficientes** a cada subconjunto de cuatro coeficientes de  $\mathbf{H}_m$  que se obtiene fijando el valor de dos de los índices en  $\mathbb{I}$ , mientras el tercero toma valores libremente.

Por ejemplo, los spans  $\sigma_{i*k}^m$  están formados por los 16 grupos de cuatro coeficientes de la rejilla  $\mathbf{H}_m$  con coordenadas  $\mathbf{h}_{i0k}$ ,  $\mathbf{h}_{i1k}$ ,  $\mathbf{h}_{i2k}$ ,  $\mathbf{h}_{i3k}$ ,  $i, k \in \{0, 1, 2, 3\}$  (véase Figura 7.2 a).

En el resto de esta sección, el valor concreto de los índices del span que permanecen fijos no es relevante, por tanto usamos una notación simplificada, más clara, a la hora de referirnos a cada coeficiente geométrico que forma un span.

Por ejemplo, dado el span concreto  $\sigma_{*23}^m = \{\mathbf{h}_{023}, \mathbf{h}_{123}, \mathbf{h}_{223}, \mathbf{h}_{323}\}$  nos referiremos a sus coeficientes como  $\sigma_{*23}^m = \{\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3\}$ .

Se dice que el span  $\sigma = \{\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3\}$  de coeficientes está **localmente ordenado** si se da que:

$$\begin{aligned} \forall q \in \{0, 1, 2\} \\ ((x_q \leq x_{q+1}) \vee (x_q \geq x_{q+1})) \wedge \\ ((y_q \leq y_{q+1}) \vee (y_q \geq y_{q+1})) \wedge \\ ((z_q \leq z_{q+1}) \vee (z_q \geq z_{q+1})) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Siendo  $(x_q, y_q, z_q) = \mathbf{p}_q \in \mathbf{h}_q$ .

En la Figura 7.3 puede verse un ejemplo de span no localmente ordenado. Los coeficientes geométricos  $\mathbf{h}_0$ ,  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$  y  $\mathbf{h}_3$ , que forman el span no cumplen la condición expresada en la fórmula 7.1. Si

Figura 7.2: a) Spans de coeficientes. Se muestran resaltados los spans  $\sigma_{i0*3}^m$ ,  $\sigma_{i0*2}^m$ ,  $\sigma_{i31*}^m$  y  $\sigma_{i32*}^m$ . b) Slices de coeficientes. Se muestran resaltados los cuatro slices con índice  $i$  fijo. c) Slice skins de coeficientes. Se muestran en gris los cuatro slice skins paralelos con valor de índice  $i$  fijo

El símbolo  $*$  representa al índice que toma valores libremente en  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

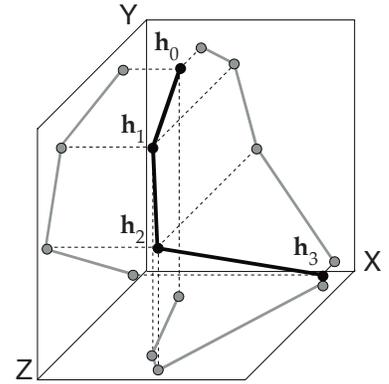


Figura 7.3: Ejemplo de span no localmente ordenado. Se muestra el span (negro) y sus proyecciones sobre los planos coordenados (gris). Las coordenadas  $x$  e  $y$  de los coeficientes geométricos están ordenadas coherentemente con sus índices  $i$  y  $j$ , pero no así la coordenada  $z$  donde se produce una inflexión con respecto a  $k$

bien se tiene que  $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$  y que  $y_0 > y_1 > y_2 > y_3$ , los valores de la coordenada  $z$  no son monótonos  $z_0 < z_1 < z_2 \not< z_3$ .

### Slice de coeficientes

Sea  $\mathbf{B}_m$  una celda paramétrica definida por la rejilla de coeficientes  $\mathbf{H}_m$ . Llamamos **slice de coeficientes** a cada subconjunto de 16 coeficientes de  $\mathbf{H}_m$  que se obtiene fijando el valor de uno de los índices en  $\mathbb{I}$ , mientras los otros dos toman valores libremente.

Por ejemplo, los slices de coeficientes  $\Sigma_{i**}^m$  están formados por los cuatro grupos de 16 coeficientes de la rejilla  $\mathbf{H}_m$  con coordenadas  $\mathbf{h}_{i00}, \mathbf{h}_{i01}, \mathbf{h}_{i02}, \mathbf{h}_{i03}, \mathbf{h}_{i10}, \mathbf{h}_{i11}, \mathbf{h}_{i12}, \mathbf{h}_{i13}, \mathbf{h}_{i20}, \mathbf{h}_{i21}, \mathbf{h}_{i22}, \mathbf{h}_{i23}, \mathbf{h}_{i30}, \mathbf{h}_{i31}, \mathbf{h}_{i32}$  y  $\mathbf{h}_{i33}$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  (véase Figura 7.2 b).

*El símbolo \* representa a los índices que toman valores libremente en  $\{0, 1, 2, 3\}$ .*

En el resto de esta sección, el valor concreto del índice del slice que permanece fijo no es relevante; por tanto, usamos una notación simplificada, más clara, a la hora de referirnos a cada coeficiente geométrico que forma un slice.

Por ejemplo, dado el slice  $\Sigma_{1**}^m = \{\mathbf{h}_{1jk} \mid j, k \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ , nos referiremos a sus coeficientes como  $\Sigma_{1**}^m = \{\mathbf{h}_{jk} \mid j, k \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ , es decir, sólo se nombrarán los índices que varían.

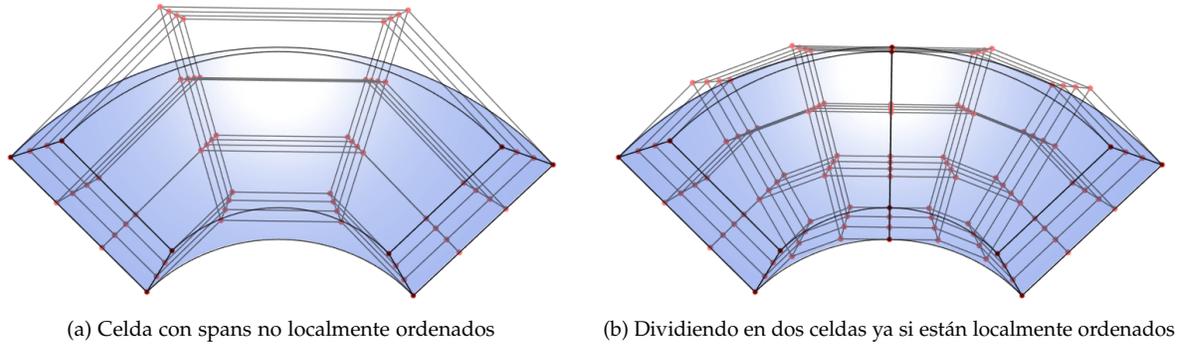
Usando la **relación de orden** definida en el conjunto  $\mathbb{I}$  se pueden ordenar los slices. Sean dos slices de coeficientes que tienen fijo el mismo índice. Se dice que uno es menor que otro en esa dirección paramétrica  $<|_D$  con  $D \in \mathbb{I} = \{I, J, K\}$  si:

$$\Sigma_{*j_a*}^m <|_J \Sigma_{*j_b*}^m \quad \text{si} \quad j_a < j_b \quad (7.2)$$

Dos slices de coeficientes pertenecientes a la misma celda paramétrica se llaman **paralelos** si tienen fijo el mismo índice. Se llaman **perpendiculares** si sus índices fijos son distintos. Dos slices paralelos se dicen **contiguos** si la distancia entre ellos en el espacio de índices es 1.  $\Sigma_{*j_a*}^m$  es contiguo a  $\Sigma_{*j_b*}^m$  si  $|j_a - j_b| = 1$

### Slice skin de coeficientes

Sea  $\mathbf{B}_m$  una celda paramétrica definida por la rejilla de coeficientes  $\mathbf{H}_m$ . Sea  $\Sigma$  uno de sus 12 slices de coeficientes geométricos. Llamamos **slice skin de coeficientes**, y lo denotamos como  $\Sigma\Sigma$ , a la superficie definida por los nueve parches bilineales que se obtienen tomando grupos de cuatro coeficientes contiguos en  $\Sigma$ .



Por ejemplo, dados los slice de coeficientes  $\Sigma_{i**}^m$ , sus slice skins asociados  $\Sigma\Sigma_{i**}^m$  son las superficies definidas por los nueve parches bilineales cuyos coeficientes son:  $\mathbf{h}_{j+0k+0}$ ,  $\mathbf{h}_{j+0k+1}$ ,  $\mathbf{h}_{j+1k+0}$  y  $\mathbf{h}_{j+1k+1}$ , con  $j, k \in \{0, 1, 2\}$ . (Véase Figura 7.2 c)

### Condición de validez

Una vez definidos los conceptos previos, es posible enunciar la **condición de validez para celdas paramétricas tricúbicas de Béziér**. Una celda paramétrica tricúbica de Béziér es válida si cumple los siguientes requisitos:

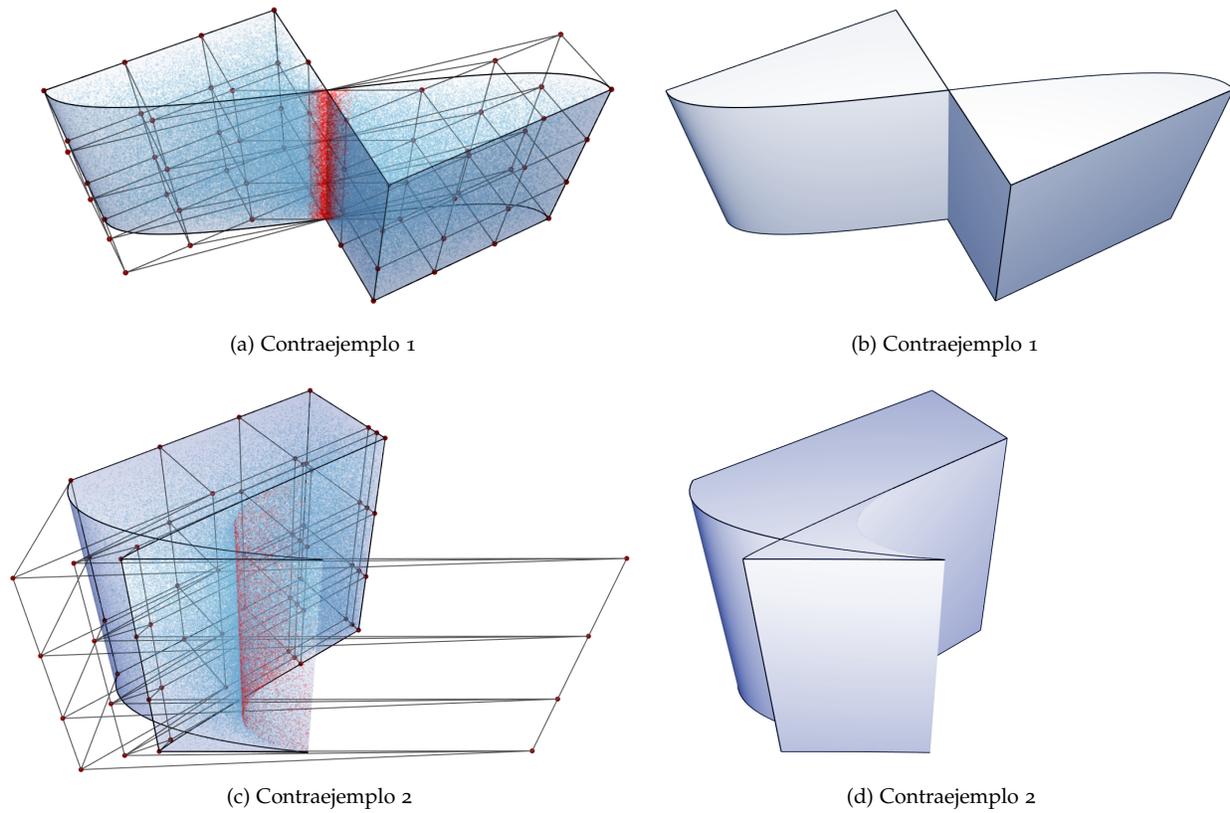
1. Todos sus spans  $\sigma$  de coeficientes geométricos (48 en total) están localmente ordenados.
2. Ninguno de sus slice skin paralelos (tres grupos de cuatro slice skins) se intersectan.

Es sencillo demostrar esta condición de validez por reducción al absurdo. Supongamos que una celda paramétrica tricúbica de Béziér  $\mathbf{B}_m$  cumple los dos requisitos y aún así es no válida o no inyectiva.

Aplicando el teorema de la función implícita, se tiene que el determinante del **Jacobiano** de  $\mathbf{B}_m$  es cero al menos en un punto del dominio paramétrico  $\mathbf{U}$ .

$$\exists \mathbf{u} \in \mathbf{U} \left| |J(\mathbf{B}_m(\mathbf{u}))| \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{ijk}}{\partial u} & \frac{\partial x_{ijk}}{\partial v} & \frac{\partial x_{ijk}}{\partial w} \\ \frac{\partial y_{ijk}}{\partial u} & \frac{\partial y_{ijk}}{\partial v} & \frac{\partial y_{ijk}}{\partial w} \\ \frac{\partial z_{ijk}}{\partial u} & \frac{\partial z_{ijk}}{\partial v} & \frac{\partial z_{ijk}}{\partial w} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.3)$$

Figura 7.4: El requisito 1 de la condición de validez puede parecer muy fuerte. Como puede verse en la Figura a) una celda claramente válida no cumple esa condición. Sin embargo esto se puede resolver fácilmente dividiéndola en dos celdas, Figura b). Se aumenta el número de celdas paramétricas, pero es más eficiente porque se simplifican los cálculos para comprobar el requisito 1.



Este determinante es cero en  $\mathbf{u}$  si y sólo si los vectores columna:

$$\left( \frac{\partial x_{ijk}}{\partial u}, \frac{\partial y_{ijk}}{\partial u}, \frac{\partial z_{ijk}}{\partial u} \right), \left( \frac{\partial x_{ijk}}{\partial v}, \frac{\partial y_{ijk}}{\partial v}, \frac{\partial z_{ijk}}{\partial v} \right), \left( \frac{\partial x_{ijk}}{\partial w}, \frac{\partial y_{ijk}}{\partial w}, \frac{\partial z_{ijk}}{\partial w} \right)$$

son linealmente dependientes.

Esos tres vectores son las tangentes de la celda paramétrica  $\mathbf{B}_m$  evaluadas en el punto  $\mathbf{u}$  en cada dirección del espacio paramétrico  $\mathbb{U} = \{U, V, W\}$ . Eso significa que el determinante del Jacobiano sólo puede ser cero en alguna de las condiciones siguientes:

1. Uno de esos vectores tangentes es cero.
2. Los tres vectores tangentes están situados en el mismo plano.

Pero eso no es posible si se cumplen los dos requisitos de nuestra condición de validez, gracias a las propiedades de las funciones mezcla de Béziér como por ejemplo la propiedad de disminución de la variación en el caso de curvas [24].

Figura 7.5: Las imágenes a) y b) muestran un ejemplo de celda paramétrica que es no válida a pesar de que todos sus spans de coeficientes están localmente ordenados. Las imágenes c) y d) muestran un ejemplo de celda paramétrica que no es válida a pesar de que ninguno de sus slice skins paralelos de coeficientes se intersectan. En las cuatro imágenes, los puntos en rojo representan puntos con valor de  $|J(\mathbf{B}_m(\mathbf{u}))|$  igual a 0.

Es importante darse cuenta de que los dos requisitos son necesarios para asegurar la validez. Ninguno de ellos por sí sólo basta. En la Figura 7.5 se tienen dos contraejemplos.

Nuestra condición de validez para celdas paramétricas tricúbicas de Béziér es suficiente, pero no necesaria. Esto significa que algunas celdas paramétricas, que son en realidad válidas, son rechazadas. Sin embargo, esta es una ventaja de nuestra condición de validez, ya que los puntos de las celdas rechazadas no están distribuidos regularmente en su interior (Figura 7.6). A la hora de modelar objetos heterogéneos son preferibles las celdas cuyos puntos interiores están regularmente distribuidos.

### 7.3.2 Caso 2: dos celdas se intersectan

En este caso, hay que comprobar que ninguna celda paramétrica intersecta a otra celda paramétrica distinta del hiperparche Béziér heterogéneo compuesto. Este proceso puede ser muy costoso en tiempo, pero se simplifica mucho aprovechando las propiedades de los hiperparches de Béziér.

Dos celdas paramétricas válidas distintas,  $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j \in \mathbf{B}$ ,  $i \neq j$ , se intersectan si una está totalmente contenida dentro de la otra, o si bien sus superficies isoparamétricas frontera se intersectan. Este test puede hacerse muy rápidamente con la siguiente jerarquía de comprobaciones:

1. Si la intersección de las cajas envolventes alineadas con los ejes coordenados  $X, Y, Z$  de las rejillas de coeficientes geométricos  $\mathbf{H}_i$  y  $\mathbf{H}_j$  que definen la geometría de las celdas  $\mathbf{B}_i$  y  $\mathbf{B}_j$  es vacía, entonces podemos asegurar que las celdas  $\mathbf{B}_i$  y  $\mathbf{B}_j$  no se intersectan.

Esto ocurre dado que los hiperparches Béziér tricúbicos cumplen la propiedad fuerte del convex-hull que establece que un hiperparche Béziér tricúbico  $\mathbf{B}_i$  está completamente dentro del convex-hull de su rejilla de 64 coeficientes geométricos  $\mathbf{H}_i$ , y dado que el convex hull del hiperparche está completamente dentro de su caja envolvente alineada con los ejes  $X, Y, Z$ .

En la mayoría de los casos, esta es la única comprobación que es necesario hacer.

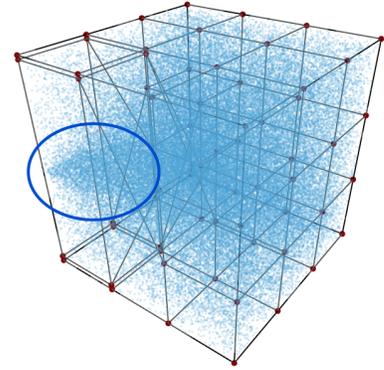


Figura 7.6: Celda paramétrica que es válida, pero contiene puntos no uniformemente distribuidos. Nuestra condición de validez la rechaza obteniendo así un beneficio a la hora de calcular la distribución de material en su interior

*Es importante darse cuenta de que si las celdas no son válidas, podrían intersectarse aunque no hubiese intersección entre sus superficies frontera. Para poder usar esta simplificación es necesario comprobar primero si las celdas son válidas*

Si ambas cajas envolventes se intersectan puede haber intersección o puede no haberla, por lo que se realiza el siguiente test.

2. El siguiente paso es dividir las celdas paramétricas cuyas cajas envolventes se intersectan en dos nuevas celdas cada una. Para ello se utiliza el algoritmo de DeCasteljau [2] extendido a hiperparches. En cada subdivisión se van alternando las tres direcciones del espacio paramétrico  $\mathbf{U} = \{U, V \text{ y } W\}$ . Con cada subcelda se repite el test del paso 1.

El proceso se repite con cada subcelda que intersece con alguna otra hasta que el nivel de subdivisión sea suficientemente pequeño.

Podría parecer que este proceso es muy costoso en tiempo si la malla es muy grande, sin embargo no es así por las siguientes razones.

1. En el primer paso se descartan la mayoría de las celdas ya que sus cajas envolventes no van a intersectar con la de la celda que se comprueba.
2. A medida que se subdividen las celdas cuyas cajas se intersectan, se obtienen subceldas cuyos coeficientes geométricos están cada vez más próximos a la forma del objeto que representan, lo que da lugar a cajas envolventes cada vez más pequeñas y más precisas, Figura 7.7. Esto hace que muchas cajas envolventes de las subceldas ya no intersecten, lo que tiene como consecuencia que el tamaño del problema no se duplique en cada subdivisión.
3. Mientras los coeficientes geométricos de una celda no se modifiquen, las subceldas calculadas en un test de intersección anterior siguen siendo válidas en subsiguientes test, por tanto no hay que recalcularlas por lo que, en promedio, el número de subdivisiones que se necesitan es muy pequeño.

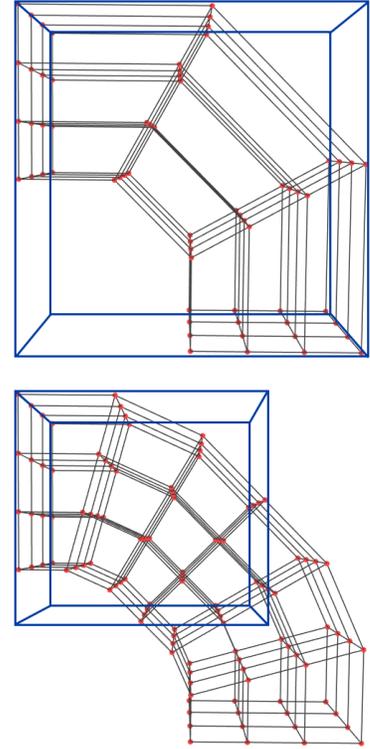


Figura 7.7: A medida que se divide una celda, las cajas envolventes de las subceldas se hacen cada vez más pequeñas

### 7.3.3 Propiedades de la condición de validez

De forma resumida, las propiedades importantes de nuestra condición de validez para celdas paramétricas tricúbicas de Béziér son:

1. Es robusta. No hay casos particulares que considerar y por tanto es sencilla de implementar y mantener.
2. Funciona comprobando posiciones relativas de coeficientes geométricos dentro de la celda, lo que la hace adecuada tanto para comprobar si un determinado movimiento de algún coeficiente ha violado la inyectividad de la celda, como para comprobar si una celda dada es inyectiva.
3. Es muy adecuada para el modelado interactivo de objetos, ya que la edición de un hiperparche afecta sólo a los hiperparches contiguos, y ésto sólo si la unión entre ellos es continua. Es decir, sólo hay que aplicar la condición de validez a unas pocas celdas paramétricas en cada edición.

## 7.4 Continuidad entre hiperparches

Los objetos reales tienen partes donde su forma y su distribución de materiales es continua y partes donde hay discontinuidades. Un buen esquema de representación para modelar objetos heterogéneos debe gestionar de forma sencilla para el usuario estas situaciones.

### Continuidad de orden 0

Hay continuidad de orden 0,  $C^0$ , entre dos celdas paramétricas  $\mathbf{B}_l$  y  $\mathbf{B}_m$ , si comparten los 16 coeficientes que definen una superficie isoparamétrica frontera. Sea  $\mathbf{B}_l(1, v, w) = \mathbf{B}_m(0, v, w)$  la superficie compartida, entonces los coeficientes  $\mathbf{h}_{l_{3jk}} \in \mathbf{B}_l$  y  $\mathbf{h}_{m_{0jk}} \in \mathbf{B}_m$  deben ser iguales  $\forall j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$  (véase Figura 7.8).

*Nótese que el razonamiento es el mismo en el caso de que la superficie compartida tenga valores  $v$  o  $w$  fijos*

Esta condición de continuidad de orden 0 es muy restrictiva, por eso, para este esquema de representación hemos desarrollado una más flexible. En nuestro esquema de representación, la continuidad de orden 0 puede establecerse para cada uno de los cuatro corner points de la superficie compartida independientemente.

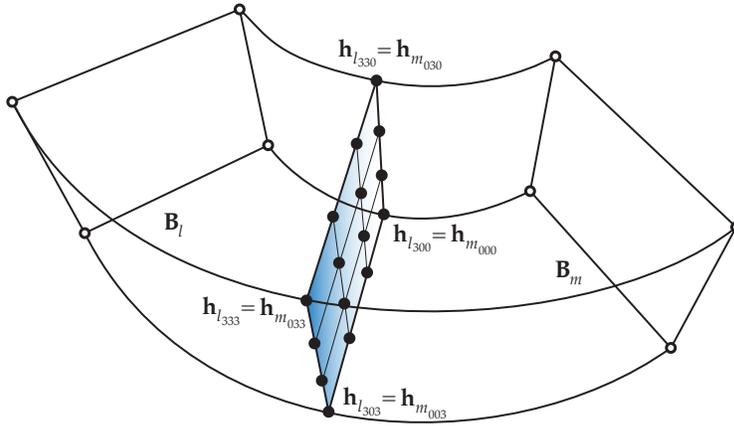


Figura 7.8: La condición clásica de continuidad de orden 0 indica que las dos celdas paramétricas deben compartir los 16 coeficientes geométricos que definen la superficie isoparamétrica frontera compartida

Dado un corner point cualquiera de los cuatro que tiene cada superficie isoparamétrica frontera, solamente tres coeficientes geométricos tienen efecto en la continuidad de la superficie alrededor de ese punto: sus tres vecinos inmediatos. Por esta razón, para obtener continuidad de orden 0 entre dos celdas  $B_l$  y  $B_m$ , alrededor de un corner point dado, sólo es necesario que ambas celdas compartan a ese corner point y sus tres vecinos inmediatos.

Sea  $\mathbf{h}_{l_{333}} = \mathbf{h}_{m_{033}}$  el corner point compartido, entonces los coeficientes geométricos heterogéneos vecinos  $\mathbf{h}_{l_{332}} = \mathbf{h}_{m_{032}}$ ,  $\mathbf{h}_{l_{323}} = \mathbf{h}_{m_{023}}$  y  $\mathbf{h}_{l_{322}} = \mathbf{h}_{m_{022}}$  deben ser iguales para obtener continuidad  $C^0$  alrededor del corner point (véase Figura 7.9). Nuestra condición es muy flexible, y permite modelar formas complejas muy fácilmente.

Es preciso tener en cuenta que un coeficiente geométrico heterogéneo  $\mathbf{h}_{ijk} = (\mathbf{p}_{ijk}, \mathbf{a}_{ijk})$  tiene dos componentes, posición en el espacio tridimensional  $\mathbf{p}_{ijk} \in \mathbb{R}^3$ , y una distribución de material válida  $\mathbf{a}_{ijk} \in \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ , de forma que la continuidad  $C^0$  se aplica tanto a la geometría como a la distribución de materiales **independientemente**.

De esta forma, es posible establecer continuidad  $C^0$  entre dos celdas paramétricas para la geometría (la forma del objeto modelado) y elegir si se quiere o no continuidad para la distribución de material.

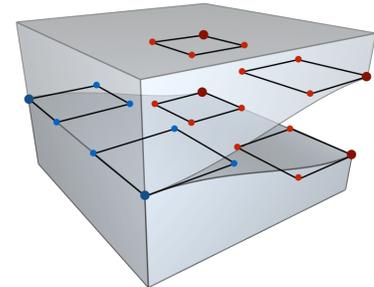


Figura 7.9: En nuestro esquema de representación, la continuidad  $C^0$  entre dos celdas paramétricas puede establecerse a nivel de corner points. Las dos celdas paramétricas de la figura comparten los corner points marcados en azul oscuro y sus vecinos inmediatos, por lo que tienen continuidad  $C^0$  en el lado izquierdo. En el lado derecho cada celda tiene corner points diferentes, por lo que no tienen continuidad  $C^0$

### Continuidad de orden 1

Sean  $\mathbf{B}_l$  y  $\mathbf{B}_m$  dos celdas paramétricas que comparten una superficie isoparamétrica frontera. Sean  $\mathbf{B}_l(1, v, w) = \mathbf{B}_m(0, v, w)$  los puntos de la superficie compartida.

El hiperparche Béziér heterogéneo compuesto  $\mathbf{B}$  tiene continuidad  $C^1$  en la superficie compartida si todas las curvas isoparamétricas con valores constantes de los parámetros  $v$  y  $w$ , que pasan a través de cada punto de la superficie compartida, tienen vectores tangentes en esos puntos iguales para ambas superficies (véase la Figura 7.10).

$$\mathbf{B}_l^u(1, v, w) = \mathbf{B}_m^u(0, v, w) \quad \forall v, w \in [0, 1] \quad (7.4)$$

Dado que las tangentes en esos puntos dependen de los 16 coeficientes geométricos heterogéneos que definen la superficie compartida por las dos celdas y sus vecinos inmediatos en cada celda, para mantener continuidad  $C^1$  cada grupo de tres coeficientes debe formar dos vectores que deben ser iguales (Figura 7.11).

Sea  $\mathbf{h}_{*jk}$ ,  $j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , uno de los coeficientes geométricos compartidos entre las celdas  $\mathbf{B}_l$  y  $\mathbf{B}_m$ . Sea  $\mathbf{v}_l = \mathbf{h}_{*jk} - \mathbf{h}_{l_{3-1jk}}$  el vector formado por el coeficiente compartido y su vecino inmediato en la dirección paramétrica  $u$  en la celda  $\mathbf{B}_l$ . Sea  $\mathbf{v}_m = \mathbf{h}_{m_{0+1jk}} - \mathbf{h}_{*jk}$  el vector formado por el coeficiente compartido y su vecino inmediato en la dirección paramétrica  $u$  en la celda  $\mathbf{B}_m$ .

*Nótese, que el razonamiento es el mismo en el caso de que la superficie compartida tenga valores  $v$  o  $w$  fijos*

*Usamos el subíndice \* para indicar que ese coeficiente geométrico tiene subíndice 3 en la celda  $\mathbf{B}_l$  y subíndice 0 en la celda  $\mathbf{B}_m$*

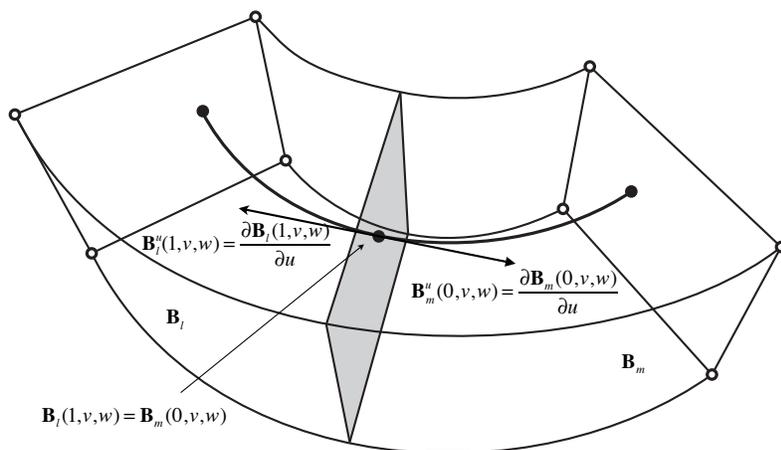


Figura 7.10: Continuidad  $C^1$  entre celdas paramétricas. En cada curva isoparamétrica perpendicular a la superficie compartida por las celdas, las tangentes en los puntos de la superficie evaluadas en ambas celdas son iguales

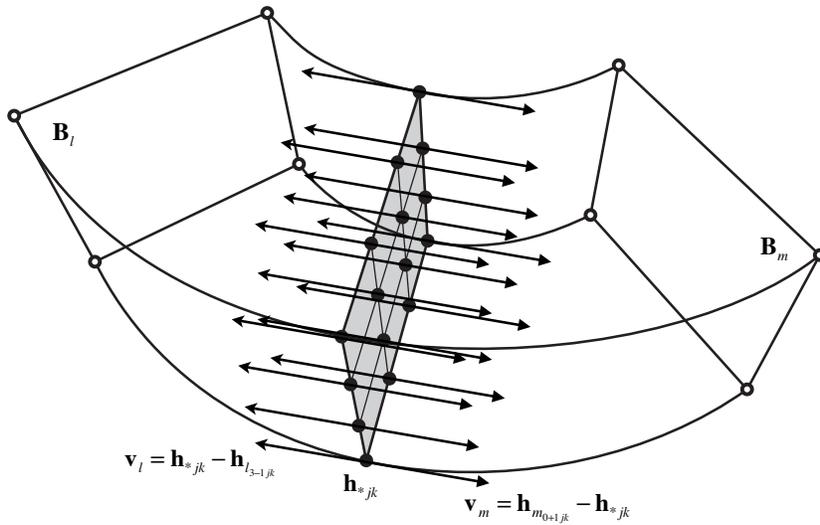


Figura 7.11: Continuidad  $C^1$  entre celdas paramétricas. La condición de la figura anterior se da si los coeficientes de la superficie compartida y sus vecinos en cada celda paramétrica forman vectores iguales

De nuevo se tiene que esta condición de continuidad  $C^1$  es demasiado restrictiva así que hemos desarrollado una más flexible. En nuestro esquema de representación la continuidad de orden 1 puede establecerse para cada corner point de los cuatro de la superficie compartida independientemente (véase Figura 7.12).

Cuando se edita un vecino inmediato  $h_{l_{3-1}jk}$  de un corner point compartido, es fácil calcular el valor del otro vecino inmediato que se corresponde con él  $h_{m_{0+1}jk}$  de la forma:

$$h_{m_{0+1}jk} = 2h_{*jk} - h_{l_{3-1}jk} \tag{7.6}$$

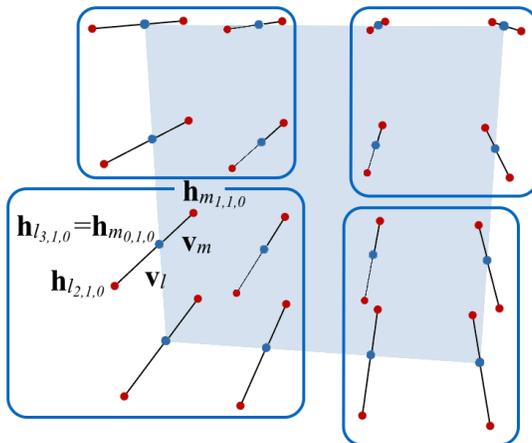


Figura 7.12: Las tangentes en los puntos de la superficie compartida (azul claro) vienen definidas por los 16 coeficientes geométricos de la superficie (azul oscuro) y sus vecinos inmediatos (rojo) en cada celda. Para asegurar continuidad  $C^1$ , cada grupo de tres coeficientes debe formar dos vectores  $v_l$  y  $v_m$  que deben ser iguales.

En nuestro esquema de representación la continuidad  $C^1$  se establece a nivel de corner points, por lo que la condición de continuidad de orden  $C^1$  puede establecerse independientemente para cada grupo de 4 coeficientes compartidos (puntos dentro de las cajas azules)

En nuestro esquema de representación, la continuidad  $C^1$  se establece a nivel de corner points; por tanto, la condición de la ecuación 7.6 puede establecerse para cada corner point y sus vecinos inmediatos, con independencia de los demás corner points (véase Figura 7.12).

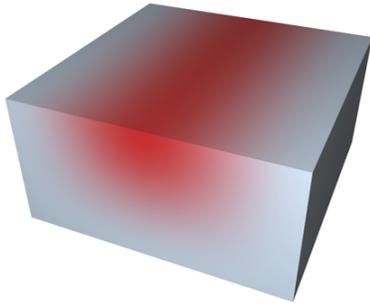
Un coeficiente geométrico heterogéneo  $\mathbf{h}_{ijk} = (\mathbf{p}_{ijk}, \mathbf{a}_{ijk})$  tiene una posición en el espacio tridimensional y una distribución de material válida. Vamos a estudiar por separado la continuidad  $C^1$  en ambos casos.

La posición de un coeficiente geométrico heterogéneo es un punto en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , por lo que la operación  $2\mathbf{p}_{*jk} - \mathbf{p}_{l_{3-1}jk}$  es siempre un punto válido en  $\mathbb{R}^3$ .

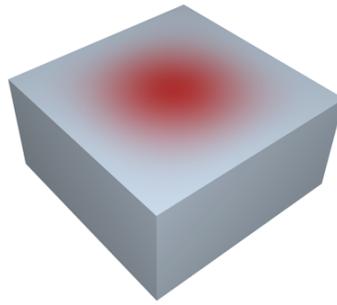
Sin embargo, la misma operación no puede aplicarse a la distribución de material  $\mathbf{a}_{ijk} = (a_{1ijk}, a_{2ijk}, \dots, a_{nijk}) \in \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ , porque una distribución de material en un coeficiente geométrico heterogéneo debe ser un punto de  $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^n$ . Es decir, que las coordenadas  $a_{l_{ijk}}$  deben ser los coeficientes de una combinación convexa sobre el conjunto de materiales primarios  $\mathbf{M}$ .

Por ejemplo, si se usa un conjunto de materiales primarios con cardinalidad 2,  $\mathbf{M} = \{m_0, m_1\}$ ,  $|\mathbf{M}| = 2$ , sólo los puntos de  $\mathbb{R}^2$  situados sobre el segmento de recta con extremos  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  representan distribuciones de material válidas.

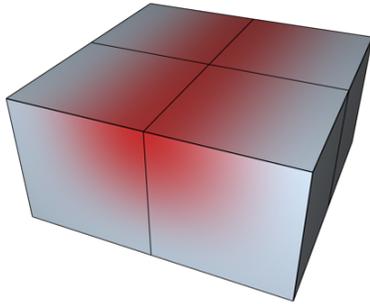
Supongamos que  $\mathbf{a}_{l_{3-1}jk} = (0.5, 0.5)$  y que  $\mathbf{a}_{*jk} = (0.2, 0.8)$ , aplicando la ecuación 7.6,  $\mathbf{a}_{m_{0+1}jk} = (-0.1, 1.1)$  que no es una distribución de material válida.



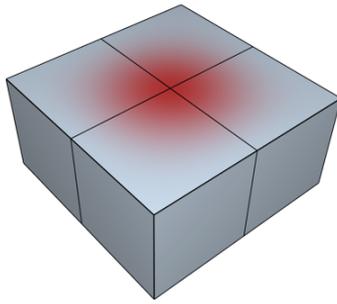
(a) Transición cilíndrica



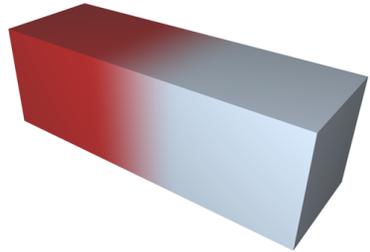
(b) Transición esférica



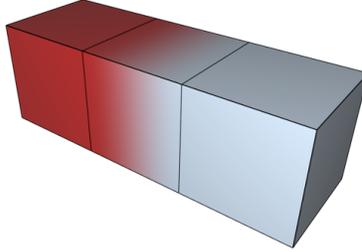
(c) Estructura de celdas para la transición cilíndrica



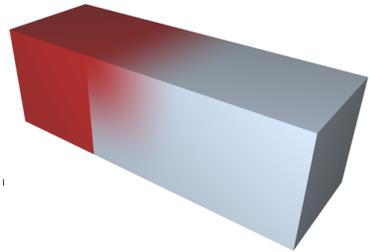
(d) Estructura de celdas para la transición esférica



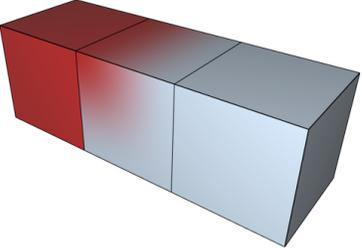
(e) Transición continua en toda la celda



(f) Estructura de celdas de la transición continua



(g) Transición continua  $C^1$  en la parte superior de la celda y no continua en la inferior



(h) Estructura de celdas de la transición mixta continua  $C^1$ /no continua  $C^1$

Figura 7.13: Nuestra condición de continuidad  $C^1$  automática para distribuciones de material es muy flexible y permite modelar muchas situaciones muy fácilmente

Para mantener continuidad  $C^1$  automáticamente en las distribuciones de material, hemos desarrollado una condición de continuidad diferente a la de la ecuación 7.5. Dada la distribución de material  $\mathbf{a}_{ijk}$  en un corner point compartido por dos celdas paramétricas  $\mathbf{B}_l$  y  $\mathbf{B}_m$ , aseguramos la continuidad  $C^1$  en la distribución de material alrededor de ese corner point asignando la misma distribución de material  $\mathbf{a}$  a todos los coeficientes vecinos inmediatos a ese corner point en ambas celdas paramétricas. (Véase Figura 7.14)

Como puede verse en la Figura 7.13 a), b), c) y d), esta condición de continuidad  $C^1$  para distribuciones de material permite modelar muchas transiciones continuas interesantes entre dos materiales (por ejemplo, transiciones con forma de cilindros o esferas).

También es posible tener continuidad  $C^1$  entre dos celdas paramétricas en algunos de sus corner points compartidos y no continuidad en otros, Figura 7.13 g) y h).

Por supuesto, si se requiere un mayor grado de precisión al especificar la transición entre un material y otro, los valores de distribución de material pueden ajustarse manualmente. En todo momento el esquema de representación informa si los valores introducidos son válidos.

### Continuidad de orden 2

En nuestro esquema de representación no hemos tenido en cuenta continuidad de orden 2,  $C^2$ , ya que este tipo de continuidad no puede ser mantenido localmente. Esto es así ya que implica a todos los coeficientes de ambas celdas paramétricas  $\mathbf{B}_l$  y  $\mathbf{B}_m$ , y por consiguiente, también afecta a otras celdas paramétricas adyacentes a las primeras.

Esto significa que si se establece continuidad  $C^2$  entre dos celdas paramétricas  $\mathbf{B}_l$  y  $\mathbf{B}_m$ , las celdas adyacentes a estas dos también deben tener continuidad  $C^2$  y no podrían modelarse discontinuidades entre ellas. Es lo que ocurre con hiperparches B-Splines de grado 3, y lo que los hace poco flexibles para modelar objetos complejos.

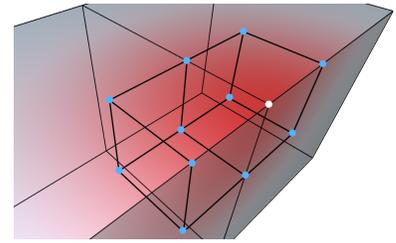


Figura 7.14: Nuestro esquema de representación mantiene la continuidad  $C^1$  en la distribución de material entre dos celdas adyacentes en un corner point dado (punto en blanco), asignando el mismo valor de distribución de material a sus vecinos inmediatos en ambas celdas (puntos en azul claro)

*Nótese que esta condición de continuidad no da lugar a una interpolación lineal entre las distribuciones de material de los ocho corner points de la celda paramétrica, sino que sigue siendo una interpolación cúbica*

Además, la continuidad de orden 2 tiene un uso moderado, y muchas aplicaciones industriales no la necesitan [19](página 95).

En cualquier caso, con nuestro esquema de representación es posible obtener continuidad de orden 2 entre dos celdas paramétricas si eso es necesario para alguna aplicación. En ese caso, se usan funciones mezcla Béziér de grado 4 en lugar de cúbicas. De esta forma se mantiene la flexibilidad de poder definir zonas con continuidad  $C^2$  junto con zonas sin continuidad, a cambio de usar funciones más complejas de evaluar y un mayor número de puntos de control.

#### 7.4.1 Frontera del hiperparche

La condición de pegado (ver Ecuación 6.8) de las distintas celdas paramétricas facilita la tarea de encontrar la frontera del hiperparche Béziér heterogéneo compuesto, así como su clasificación en frontera externa e interna (véase Ecuaciones 5.2 y 5.3).

Sea  $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m\}$  un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto, formado por  $m$  celdas paramétricas,  $|\mathbf{B}| = m$ . Una superficie isoparamétrica frontera  $\mathbf{S}$  pertenece a la frontera externa de  $\mathbf{B}$ ,  $b_{\text{ext}}(\mathbf{B})$  si sólo pertenece a una de sus celdas paramétricas.

$$\text{si } \exists i \in \{1, \dots, m\}, \mathbf{S} \in \mathbf{B}_i | \forall k \in \{1, \dots, m\}, k \neq i \Rightarrow \mathbf{S} \notin \mathbf{B}_k \quad (7.7)$$

Sea  $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m\}$  un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto, formado por  $m$  celdas paramétricas,  $|\mathbf{B}| = m$ . Una superficie isoparamétrica frontera  $\mathbf{S}$  pertenece a la frontera interna de  $\mathbf{B}$ ,  $b_{\text{int}}(\mathbf{B})$  si pertenece exactamente a dos de sus celdas paramétricas.

$$\text{si } \exists i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j, \mathbf{S} \in \mathbf{B}_i \wedge \mathbf{S} \in \mathbf{B}_j \quad | \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}, k \neq i, k \neq j \Rightarrow \mathbf{S} \notin \mathbf{B}_k \quad (7.8)$$

*Nótese que dada la condición de pegado 6.8, es imposible que una superficie isoparamétrica frontera pertenezca a más de dos celdas paramétricas*

Aquellas superficies isoparamétricas frontera que pertenecen a la frontera interna del hiperparche Béziér heterogéneo compuesto podrían tener dos distribuciones de material distintas asociadas a cada uno de sus puntos. Si eso ocurriese, la función de material

en esos puntos no sería inyectiva. Para evitar esto, se le asocia la distribución de material que le corresponde por pertenecer a la celda cuyo índice es menor:

Sea  $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m\}$  un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto, formado por  $m$  celdas paramétricas,  $|\mathbf{B}| = m$ , sea  $\mathbf{S}$  una superficie isoparamétrica frontera que forma parte de la frontera interna de  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{S} \in b_{\text{int}}(\mathbf{B})$ , y sean  $i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j$  los índices de las celdas paramétricas a las que pertenece  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S} \in \mathbf{B}_i, \mathbf{S} \in \mathbf{B}_j$ .

La distribución de material  $\mathbf{A}$  que se asigna a los puntos de  $\mathbf{S}$  es  $\mathbf{A}_{\min(i,j)}$ .

# 8

## *Edición continua de objetos*

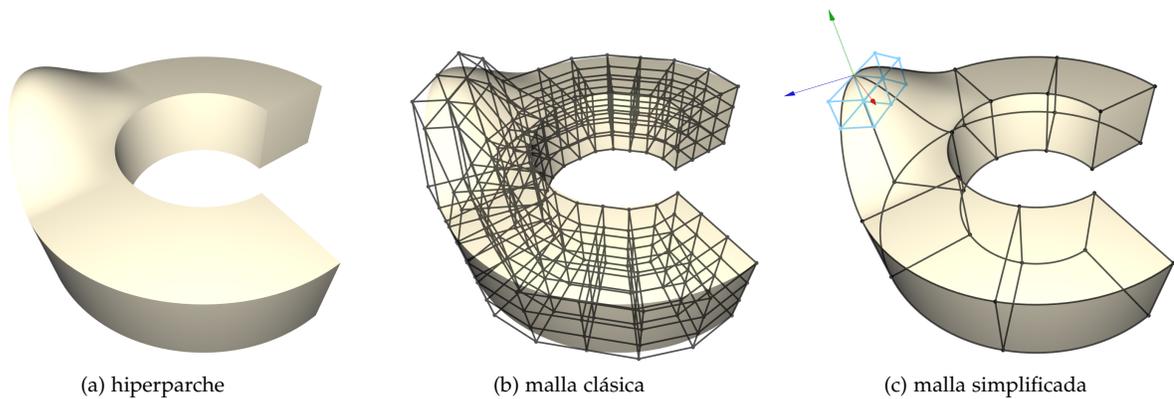
Muchos objetos heterogéneos presentan zonas en las que su geometría/distribución de materiales es continua, y zonas donde no lo es. Nuestro esquema de representación ayuda a un operador humano a definir y mantener automáticamente continuidad en la geometría y/o en la distribución de materiales en aquellas zonas del modelo que lo requieran. Hemos definido nuestro esquema de representación específicamente para hacer que el proceso de edición de objetos heterogéneos sea una tarea más fácil.

### *8.1 Edición de la geometría*

La forma de un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto viene definida directamente por sus coeficientes geométricos; por lo tanto, la forma natural de editar la geometría de un hiperparche es moviendo esos coeficientes geométricos. Este proceso tiene resultados inmediatos.

Sin embargo, si los coeficientes geométricos se tratan independientemente, sin la ayuda del esquema de representación para percibir y mantener las relaciones existentes entre ellos, el proceso de edición es muy confuso y difícil para un operador humano.

En la Figura 8.1 b) puede verse que incluso en el caso de un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto sencillo (sólo seis celdas paramétricas), el gran número de coeficientes geométricos hace muy difícil saber qué coeficiente debe ser editado para conseguir un determinado efecto.

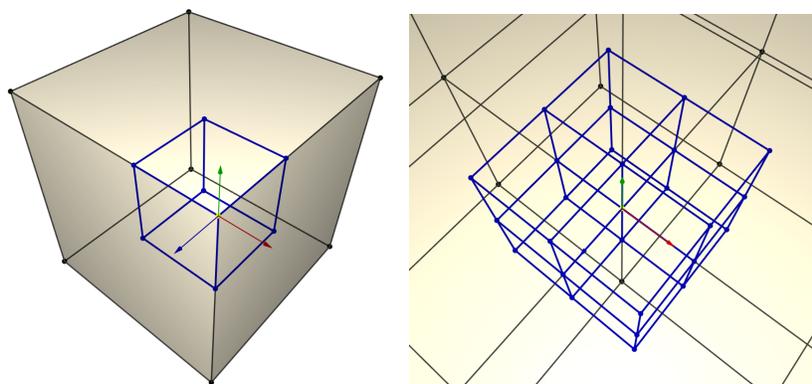


En el caso de los hiperparches de Béziér, los corner points tienen máxima influencia en la forma del objeto, ya que las funciones mezcla los interpolan (el objeto “pasa” a través de ellos). Por esta razón, este es el primer nivel de interacción que nuestro esquema de representación presenta al usuario.

Hemos desarrollado la **rejilla simplificada de coeficientes geométricos**, que está formada por todos los corner points del hiperparche Béziér heterogéneo compuesto y todas sus curvas isoparamétricas frontera. Esta rejilla tiene la ventaja de que muestra claramente la estructura del objeto modelado y permite su edición directa.

Cuando el usuario selecciona un corner point, el sistema muestra la **rejilla de vecinos inmediatos** a ese corner point. Cada corner point tiene siete vecinos inmediatos en la rejilla de  $4 \times 4 \times 4$  coeficientes que definen una celda paramétrica, Figura 8.2 a). Estos siete coeficientes son sus vecinos inmediatos. En general, cada

Figura 8.1: Nuestra malla simplificada de coeficientes geométricos c) muestra claramente la estructura de celdas del hiperparche a). Es mucho más intuitiva y fácil de usar que la malla clásica b)



(a) Siete vecinos inmediatos de un corner point

(b) 26 vecinos inmediatos en el caso general

Figura 8.2: Vecinos de un corner point. a) siete vecinos inmediatos en una celda. b) 26 vecinos inmediatos en el caso general de que el corner point esté compartido por ocho celdas

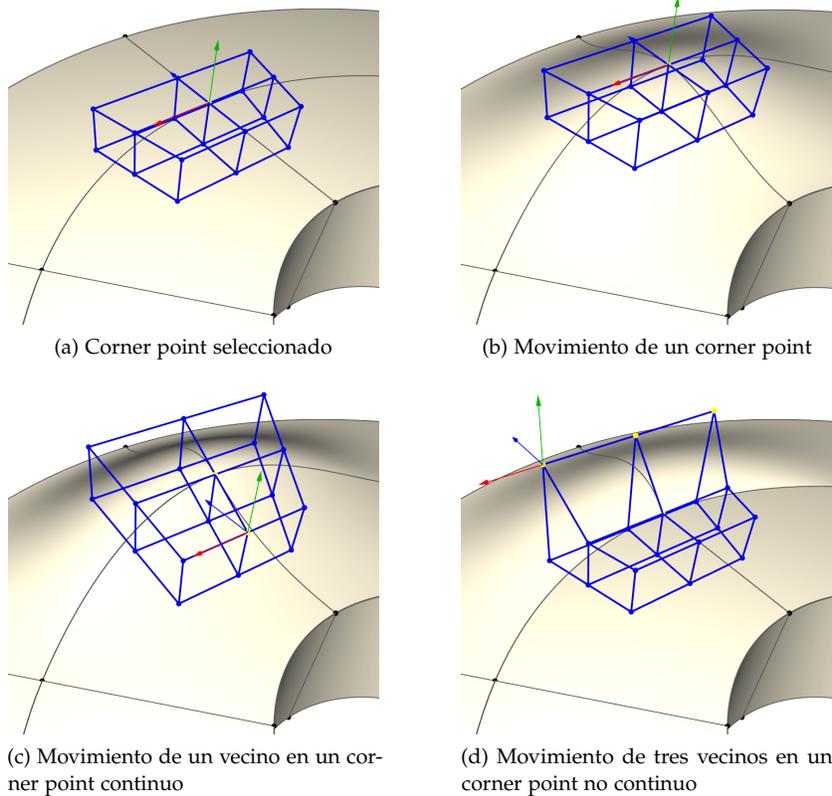


Figura 8.3: Nuestro esquema de representación ayuda a mantener automáticamente la continuidad  $C^1$ , compensando el movimiento de un coeficiente geométrico con movimientos en los coeficientes geométricos relacionados

corner point es compartido por ocho celdas paramétricas adyacentes, y por tanto tiene 26 puntos de control vecinos organizados en una rejilla  $3 \times 3 \times 3$ , Figura 8.2 b). Este es el segundo nivel de interacción que se presenta al usuario.

Si un corner point está marcado como continuo  $C^1$  en la geometría, cuando el usuario lo mueve, nuestro esquema de representación automáticamente aplica el mismo movimiento a todos sus vecinos inmediatos. De esta forma se mantiene la continuidad entre las celdas paramétricas adyacentes que comparten ese corner point y la forma general del hiperparche alrededor del mismo, Figura 8.3 a) y b).

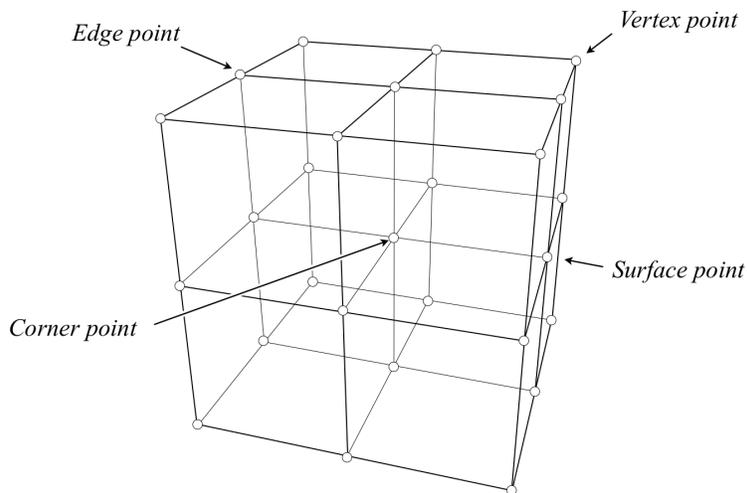
Se trata de una **edición directa de la forma del hiperparche**, ya que si se coloca un corner point en una posición concreta en el espacio tridimensional, el hiperparche Béziér heterogeneo compuesto “pasa” por ese punto. Esto permite modelar objetos

usando las medidas reales que se necesiten de una forma muy sencilla.

Nuestro esquema de representación también permite mover los coeficientes geométricos vecinos de un corner point seleccionado, para conseguir así un ajuste preciso de la forma del hiperparche Béziér heterogéneo compuesto alrededor de ese punto.

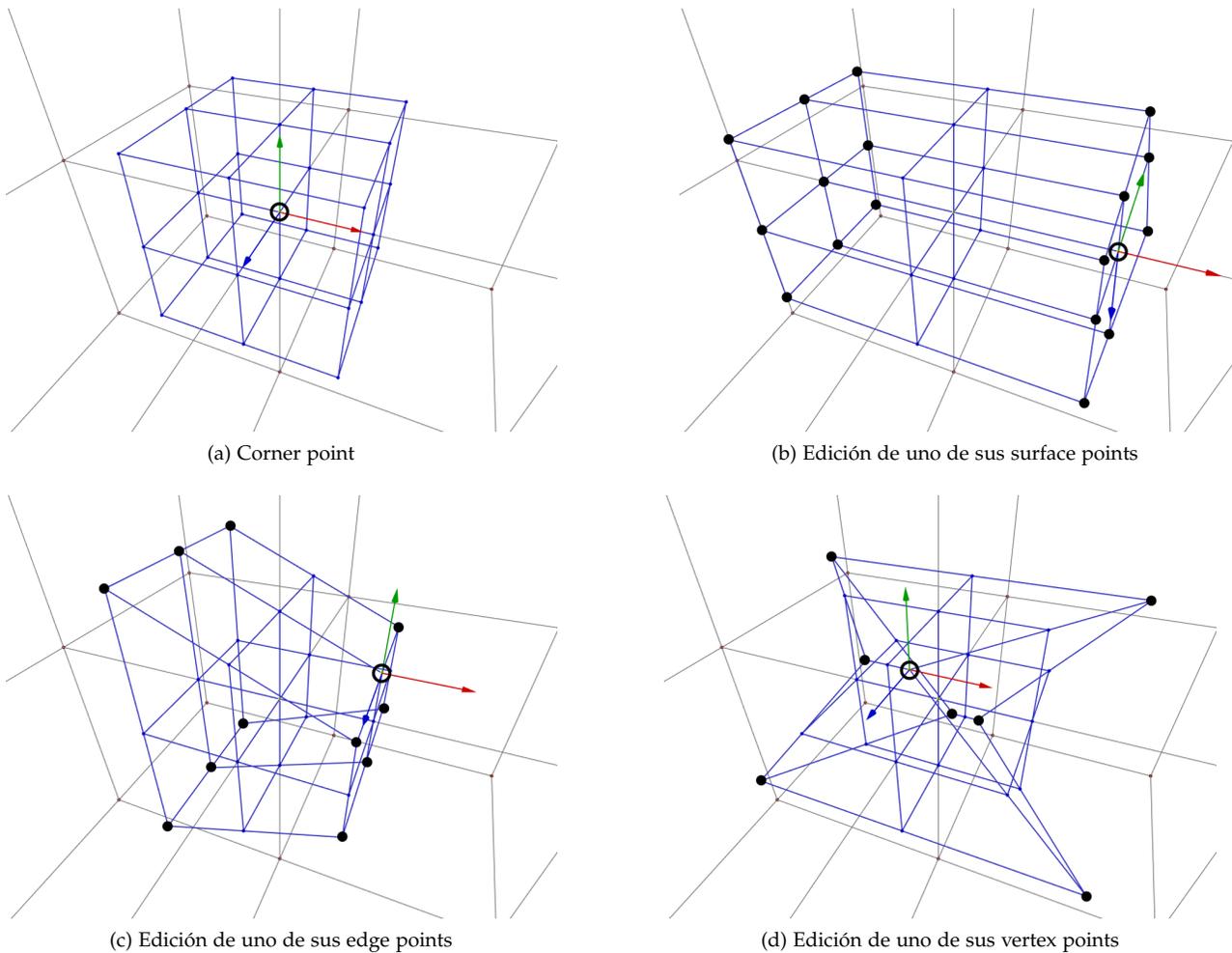
Si el corner point está marcado como continuo  $C^1$  en la geometría, cuando el usuario mueve un vecino inmediato el esquema de representación automáticamente recalcula la posición de algunos de los otros vecinos inmediatos aplicando la ecuación 7.6. De esta forma se mantiene automáticamente la continuidad  $C^1$ , véase Figura 8.3 c).

A fin de que el esquema de representación sepa qué vecinos inmediatos debe mover y cómo, previamente hay que clasificar cada punto de la rejilla de  $3 \times 3 \times 3$  vecinos inmediatos del corner point seleccionado (Figura 8.2 b) como se muestra en la Figura 8.4. La rejilla de vecinos inmediatos tiene forma de cubo. En el centro de dicho cubo se sitúa el corner point. El resto de coeficientes geométricos se sitúa en el centro de una de las caras del cubo, o en el centro de uno de sus lados, o bien en una de las esquinas. Clasificamos a cada uno de esos tipos como **surface point**, **edge point** y **vertex point** respectivamente.



*Nota: un surface point está en realidad en uno de los lados de la rejilla  $\mathbf{H}_m$  de  $4 \times 4 \times 4$  coeficientes de la celda a la que pertenece. Sin embargo, la clasificación que nos interesa aquí es con respecto al grupo de 27 vecinos del corner point. El mismo razonamiento se aplica a edge points y vertex points*

Figura 8.4: Clasificación de los 27 coeficientes geométricos vecinos de un corner point



Una vez que se tiene esa clasificación, cuando se edita uno de los coeficientes geométricos vecinos a un corner point se comprueba su tipo, y para cada tipo se actúa de forma distinta:

- **Surface point.** En este caso, es necesario editar otros 17 vecinos inmediatos: los 8 vecinos que se encuentran en la misma superficie del cubo de  $3 \times 3 \times 3$  vecinos inmediatos, junto con los 9 vecinos que se encuentran en la superficie opuesta (véase Figura 8.5 b).
- **Edge point.** En este caso hay que editar otros 11 vecinos inmediatos: los coeficientes geométricos que se encuentran en los lados paralelos al lado que ocupa el coeficiente que se está editando (véase Figura 8.5 c).

Figura 8.5: Edición de los vecinos inmediatos a un corner point. En cada sub imagen se representa el coeficiente geométrico editado mediante un círculo hueco, y los puntos correspondientes que hay que editar para mantener la continuidad mediante círculos rellenos

- **Vertex point.** En este caso hay que editar otros 7 vecinos inmediatos: todos los demás vertex points de la rejilla de  $3 \times 3 \times 3$  vecinos inmediatos al corner point seleccionado (véase Figura 8.5 d).

Cuando el usuario mueve un vecino inmediato de un corner point marcado como no continuo, el esquema de representación no realiza ninguna modificación en la posición de los otros vecinos inmediatos, Figura 8.3 d). De esta forma se pueden tener discontinuidades en la geometría en aquellas partes del objeto que lo requieran.

Nuestro esquema de representación no está limitado a trabajar con rejillas regulares en las cuales cada corner point es compartido por exactamente ocho celdas paramétricas, de forma que un corner point puede tener un número arbitrario de vecinos inmediatos. En estos **corner points irregulares** no es posible mantener la continuidad  $C^1$  automáticamente; en algunos casos el concepto continuidad ni siquiera tiene sentido, sin embargo, nuestro esquema de representación puede identificar e integrar esos puntos automáticamente en el diseño del objeto (Figura 8.6).

## 8.2 Edición de la distribución de material

Cuando se edita la distribución de material dentro de un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto, nuestro esquema de representación muestra al usuario las celdas paramétricas que lo componen y sus corner points. Sobre estos elementos es sobre los

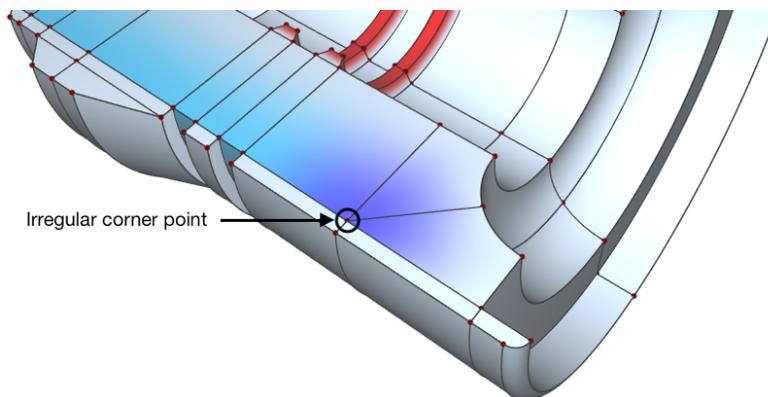
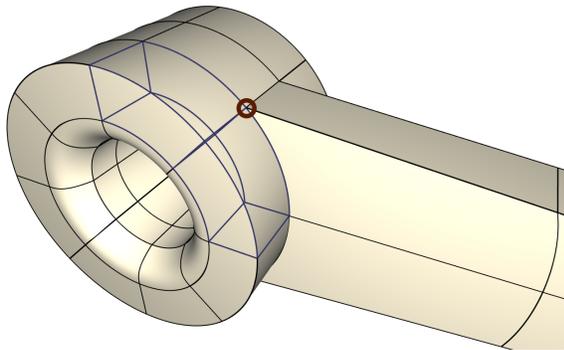
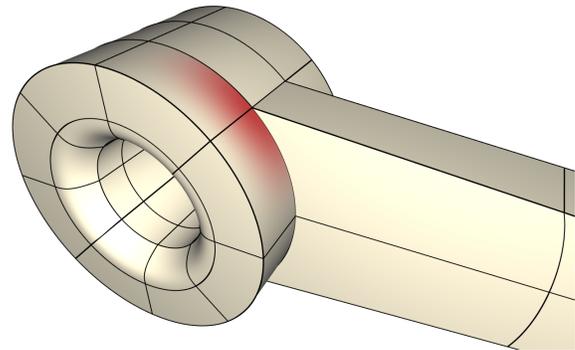


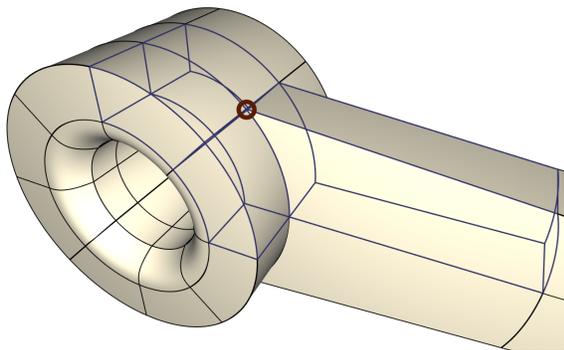
Figura 8.6: Nuestro esquema de representación no está limitado a rejillas regulares de coeficientes. En esta imagen podemos ver una pieza mecánica real modelada con nuestro esquema de representación que tiene puntos irregulares



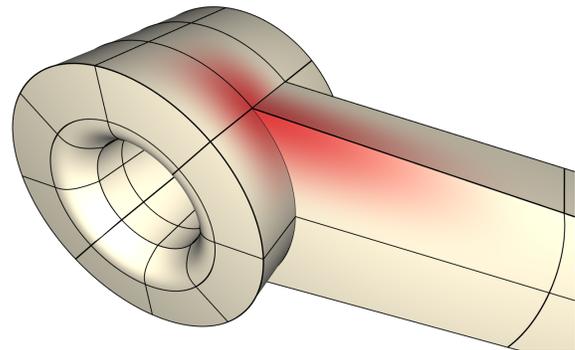
(a) Dos celdas seleccionadas y un corner point común



(b) El efecto se extiende a esas dos celdas



(c) Cuatro celdas seleccionadas y un corner point común



(d) El efecto se extiende a las cuatro celdas

que se actúa. El usuario puede seleccionar celdas, corner points o una mezcla de ambos.

Si el usuario selecciona sólo celdas, el esquema de representación permite aplicar la misma distribución de material a los 64 coeficientes de cada celda seleccionada. Esto da lugar a una distribución de material uniforme que es muy útil para modelar aquellas partes del objeto que son homogéneas.

Si el usuario selecciona uno o varios corner points, el esquema de representación permite asignar la misma distribución de material a los 7 coeficientes vecinos inmediatos de los corner points en todas las celdas que los comparten. Esto da lugar a una gradación de materiales entre celdas con continuidad  $C^1$ .

Figura 8.7: Edición interactiva de distribuciones de materiales. a) y b) Si se selecciona un corner point y hay sólo algunas de las celdas que lo comparten seleccionadas, entonces la transición continua de materiales se limita a esas celdas. c) y d) si están seleccionadas todas las celdas que comparten un corner point, o bien no hay selección de celdas, entonces la transición continua se aplica a todas las celdas que comparten dicho corner point

Si se han seleccionado algunas celdas y el usuario selecciona un corner point compartido por ellas, el esquema de representación permite aplicar la misma distribución de material a los vecinos inmediatos del corner point, pero sólo en aquellas celdas seleccionadas. Esto da lugar a una gradación de materiales con continuidad  $C^1$  en las celdas seleccionadas y una gradación no continua de materiales entre las celdas no seleccionadas que también comparten el corner point. (Figura 8.7)

En aquellos corner points que requieran un ajuste muy específico de la distribución de material, el esquema de representación permite aplicar una distribución de material diferente a cada coeficiente vecino inmediato manualmente. Sin embargo, este proceso manual sólo es necesario en casos muy específicos.

En todos los casos, el esquema de representación comprueba automáticamente la validez de la distribución de material, asegurando que todos los elementos de la distribución aplicada son los coeficientes de una combinación convexa del conjunto de materiales primarios (véase la ecuación 4.2).

# 9

## *Construcción de nuevos modelos*

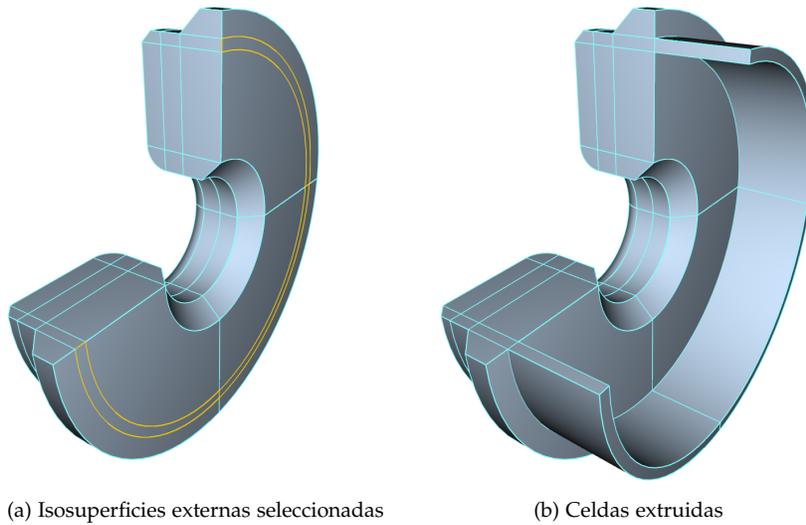
Otra característica importante de un buen esquema de representación es que permita la creación de nuevos modelos de objetos sólidos de forma sencilla. Hemos prestado especial cuidado a la hora de diseñar las capacidades de creación de modelos de nuestro esquema de representación.

### *9.1 Proceso de construcción de modelos*

En nuestro esquema de representación, un hiperparche Béziér heterogéneo compuesto se construye añadiéndole nuevas celdas. Es una forma muy intuitiva de construir el modelo.

Cada vez que se añade una nueva celda al hiperparche, el esquema de representación realiza las siguientes tareas automáticamente:

1. **Comprobar validez.** El esquema de representación comprueba si la nueva celda paramétrica es inyectiva (válida). Este proceso consiste en comprobar la condición de validez que se describe en la sección 7.1. En el caso de que la nueva celda se haya añadido a partir de una biblioteca de celdas prediseñadas, sólo es necesario comprobar la segunda parte de la condición de validez, es decir, que no intersecta con ninguna otra ya añadida al sistema. Dicho de otra forma, la nueva celda sólo puede compartir con alguna otra celda ya existente un corner point, una curva isoparamétrica frontera o una superficie isoparamétrica frontera.
2. **Comprobar continuidad.** Si la nueva celda comparte con alguna otra un corner point y sus tres vecinos inmediatos sobre una superficie isoparamétrica frontera, nuestro esquema de



(a) Isosuperficies externas seleccionadas

(b) Celdas extruidas

representación comprueba si hay continuidad  $C^1$  en ese corner point, tanto en la geometría como en la distribución de materiales y clasifica al punto automáticamente como continuo o no continuo. Para ello, se aplican las condiciones de continuidad descritas en la sección 7.3.2.

## 9.2 Métodos de construcción de modelos

A la hora de añadir nuevas celdas al hiperparche Béziér heterogéneo compuesto, nuestro esquema de representación permite usar varios métodos intuitivos como:

### 9.2.1 Extrusión

Dado que nuestro esquema de representación facilita el cálculo de la frontera externa del objeto heterogéneo que se está modelando (véase ecuación 7.7), es muy fácil calcular la extrusión de celdas seleccionadas (Figuras 9.1 y 9.2):

1. Se selecciona una o varias superficies isoparamétricas frontera que pertenezcan a la frontera externa del hiperparche Béziér heterogéneo compuesto.

Cada superficie pertenece a una sola celda paramétrica, y cada uno de los 16 coeficientes geométricos de la superficie tiene asociado un único vecino inmediato en el interior de la celda.

Figura 9.1: Extrusión siguiendo la normal de tres celdas paramétricas a partir de una de sus superficies isoparamétricas frontera para generar una geometría más compleja

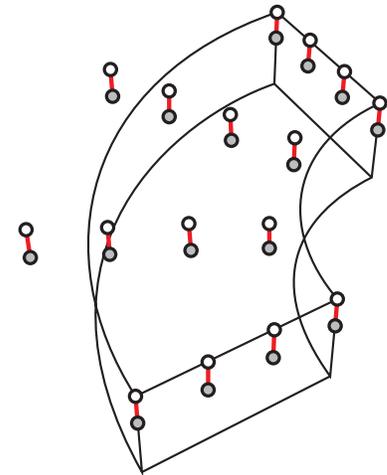


Figura 9.2: Proceso de extrusión. Cada superficie isoparamétrica frontera del hiperparche pertenece a una única celda paramétrica. Cada uno de los 16 coeficientes geométricos que definen la superficie (en blanco) tiene un único vecino inmediato en el interior de la celda (en gris). Con esa información es fácil construir vectores que, cuando se invierten, indican la dirección de la normal de la superficie apuntando hacia el exterior del hiperparche.

2. A partir de cada pareja de coeficientes geométricos (cada punto en la superficie y su vecino inmediato), se generan vectores que indican la dirección de la normal en la superficie apuntando hacia el exterior de la celda.
3. Siguiendo la dirección de cada uno de esos 16 vectores, se generan tres coeficientes geométricos a intervalos, cuya magnitud es un parámetro configurable por el usuario. De esta forma se obtienen 48 coeficientes geométricos, que junto a los 16 de la superficie inicial, forman la rejilla  $\mathbf{H}$  de 64 coeficientes geométricos que definen la nueva celda paramétrica.

En cuanto a la distribución de material, se asocia a los 3 nuevos coeficientes geométricos que se producen por cada uno de los 16 coeficientes de la superficie isoparamétrica inicial el mismo valor de distribución de material que tuviese el coeficiente asociado en la superficie. De esta forma se garantiza continuidad  $C^1$  en la distribución de material en la unión entre la nueva celda y las celdas existentes.

### 9.2.2 Mezcla de celdas

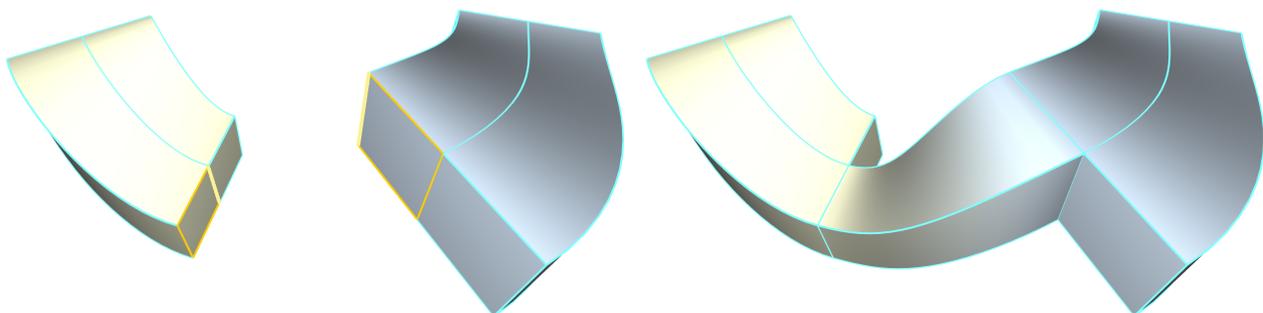
El proceso de mezcla de celdas (blending) consiste en rellenar el hueco entre dos celdas con una celda paramétrica que se conecta de forma continua con ambas (véase Figura 9.3). El proceso es el siguiente:

1. Seleccionar dos superficies isoparamétricas frontera externa (ecuación 7.7), cada una perteneciente a una celda paramétrica distinta.

Por la forma en que está diseñado el esquema de representación, cada superficie pertenece a una sola celda paramétrica,

*En todo el proceso el esquema de representación comprueba que las celdas producidas sean válidas y sólo añade al hiperparche aquellas celdas que lo son*

Figura 9.3: Mezcla (blending) de celdas paramétricas. A partir de dos celdas seleccionadas y una superficie isoparamétrica frontera en cada una, que forme parte de la frontera externa  $b_{\text{ext}}(\mathbf{B})$  del objeto, se puede generar una nueva celda paramétrica que “une” las celdas originales. El proceso de blending puede hacerse de forma continua o no continua



(a) Isosuperficies externas seleccionadas

(b) Nueva celda paramétrica producida mediante mezcla

y cada uno de los 16 coeficientes geométricos de la superficie tiene asociado un único vecino inmediato en el interior de la celda.

2. A partir de cada pareja de coeficientes geométricos (cada punto en la superficie y su vecino inmediato) se generan vectores que indican la dirección de la normal en la superficie apuntando hacia el exterior de la celda. Para cada una de las dos isosuperficies seleccionadas se tienen 16 vectores normales.
3. Siguiendo la dirección de cada uno de esos 32 vectores normales se producen otros 32 coeficientes geométricos, de forma que cada grupo de 16 coeficientes asegura la continuidad con cada una de las dos superficies isoparamétricas frontera. Para ello se usa la ecuación 7.6. De esta forma se obtiene la rejilla **H** de 64 coeficientes geométricos que definen la nueva celda paramétrica.

En el esquema de representación se cuida que todas las celdas que se añaden estén parametrizadas de la misma forma, pero podría darse el caso de que el usuario, al editar la celda, hubiese cambiado la parametrización de la misma. En este caso, la celda resultante podría ser no válida, por lo que se da la oportunidad al usuario de establecer la correspondencia manualmente entre los puntos de control de la isosuperficie seleccionada en una celda y los de la isosuperficie seleccionada en otra.

En determinados casos no se necesita una mezcla continua entre dos celdas paramétricas (vease Figura 9.4 apartado d). En esos casos, es posible hacer una mezcla en la que los 32 puntos intermedios se obtienen mediante interpolación lineal entre los vértices de cada una de las dos superficies isoparamétricas seleccionadas. Para la interpolación se usan valores de parámetro  $1/3$  y  $2/3$ .

En cuando a la distribución de material, se asocia al nuevo coeficiente geométrico que se produce asociado a cada uno de los 16 coeficientes que definen cada una de las isosuperficies seleccionadas la misma distribución de material que tiene el coeficiente con el que se asocia. De esta forma se garantiza la transición continua con continuidad  $C^1$  en la distribución de material entre las celdas.

*Por parametrización de la celda nos referimos a la ordenación de los coeficientes dentro de la misma. En el esquema de representación se procura que haya coherencia entre las coordenadas  $x, y, z$  en el espacio paramétrico y las coordenadas  $i, j, k$  en el espacio de índices*

### 9.2.3 *Añadir celdas a partir de una biblioteca*

Añadir grupos de celdas a partir de una biblioteca de celdas predefinidas con formas básicas. Se pueden ajustar algunos parámetros de estos grupos de celdas tales como tamaño, posición, etc.

### 9.2.4 *Añadir celdas a partir de un archivo*

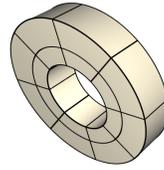
Añadir grupos de celdas a partir de archivos previamente salvados. Esto permite combinar varios objetos para construir uno más complejo.

## 9.3 *Ejemplo de construcción de un modelo*

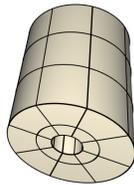
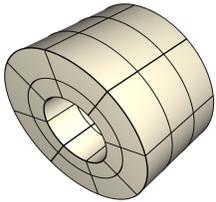
Con todas las técnicas de creación y edición de modelos explicadas en este capítulo y el anterior, un usuario puede modelar objetos heterogéneos complejos fácilmente (véase Figura 9.4).



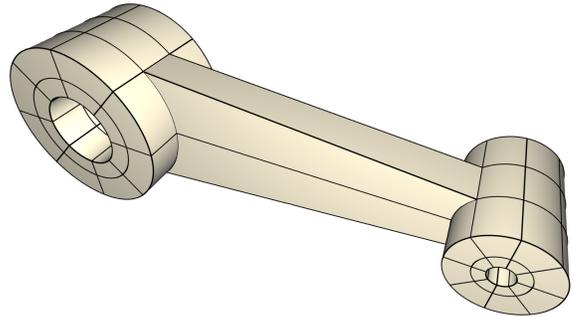
(a) Añadir dos anillos a partir de la biblioteca de celdas predefinidas



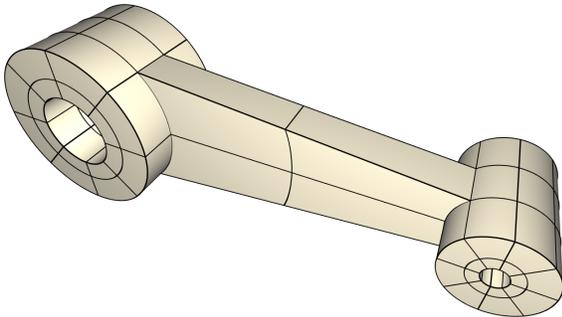
(b) Extrusión de las 16 celdas para obtener una estructura más grande



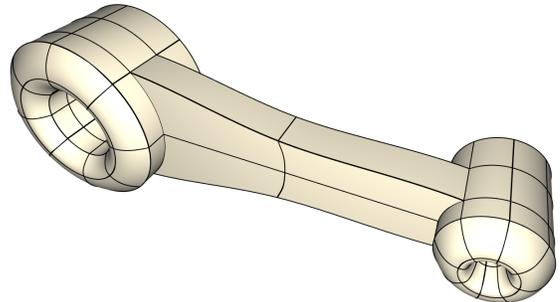
(c) Extrusión de las 32 celdas para obtener una estructura más ancha



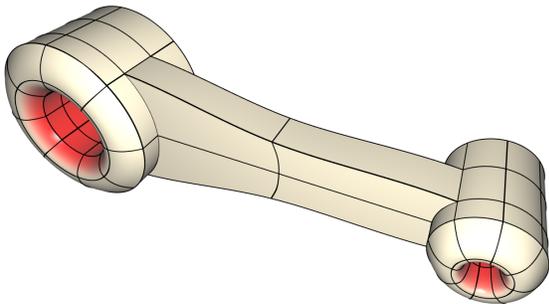
(d) Mezcla no continua de cuatro celdas tomadas dos a dos



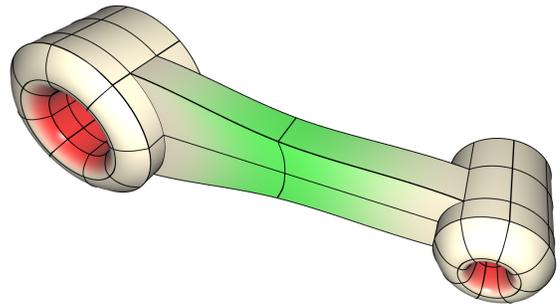
(e) Subdivisión de celdas para obtener mejor detalle en la zona central



(f) Edición de la geometría



(g) Edición de las distribuciones de material



(h) Edición de las distribuciones de material

Figura 9.4: Ejemplo de construcción de un modelo de objeto heterogéneo en sólo ocho pasos

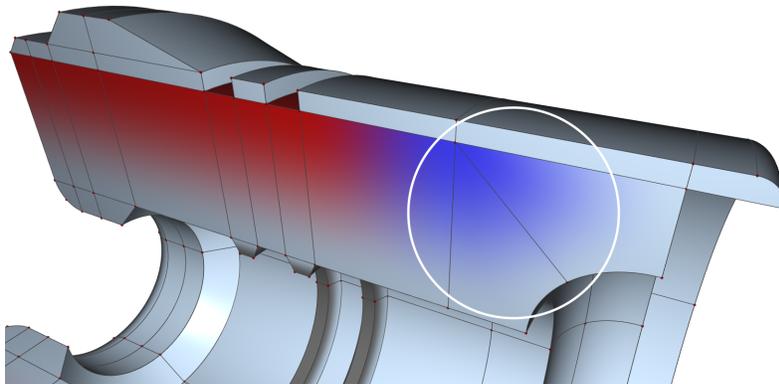
# 10

## Resultados

Hemos desarrollado una aplicación informática para probar en la práctica si el esquema de representación puede representar con precisión objetos reales. Usando la aplicación se han modelado varios objetos.

### 10.1 Modelado de una pieza mecánica

El primer objeto real que modelamos fue una pieza mecánica. Esta pieza fue un reto, ya que planteaba transiciones complejas de distribución de material entre celdas. En la parte frontal, hay una zona de geometría compleja con vértices irregulares. En esta zona se necesitaba modelar una transición continua en la distribución de materiales con forma cilíndrica (en el espacio paramétrico), sin embargo las rejillas de vértices de esas celdas no representan un cilindro. A pesar de todo, el esquema de representación permitió construir el modelo de forma sencilla (Figura 10.1).



*Ficha técnica. IDE: XCode 7, lenguaje de programación: swift 2, biblioteca gráfica: OpenGL 4.1 y framework para la interfaz: Cocoa*

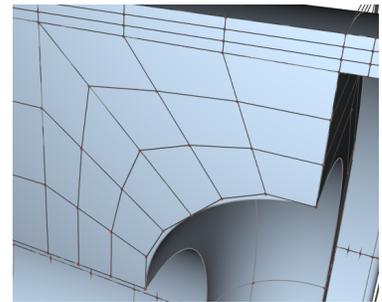


Figura 10.1: En la zona señalada en blanco de la pieza mecánica se necesitaba una transición continua del material representado en color azul que tuviera forma cilíndrica. Los coeficientes geométricos en esa parte de la pieza no representan un cilindro. Todo lo contrario. A pesar de todo el esquema de representación nos permitió modelar la transición deseada con precisión

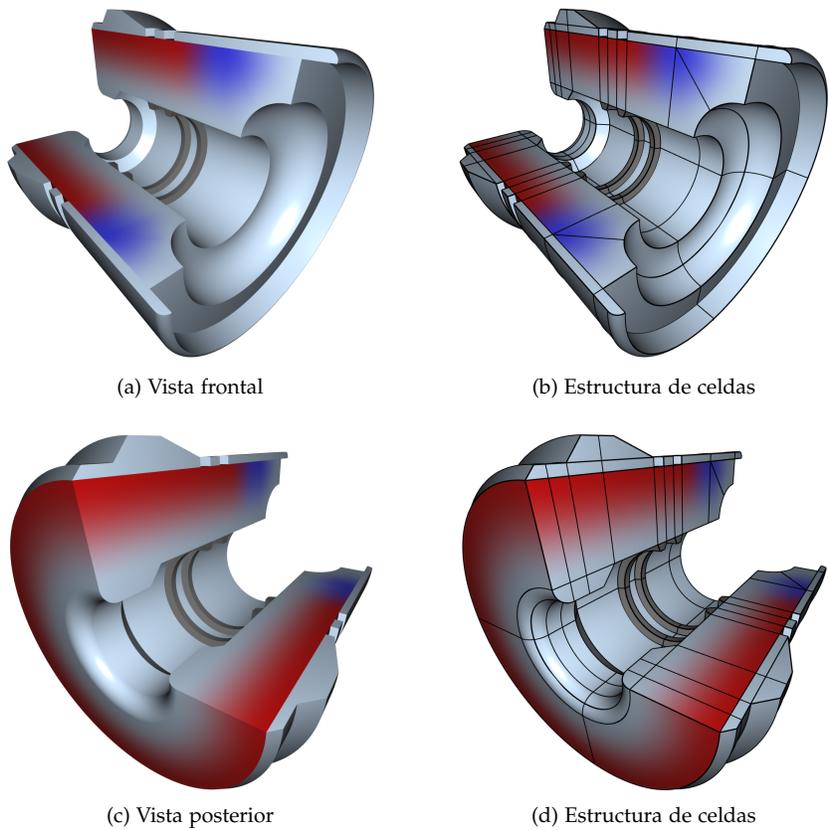


Figura 10.2: Pieza mecánica que incluye una transición compleja de materiales en la parte frontal. Como puede verse, se modela correctamente con nuestro esquema de representación, manteniendo un número de celdas relativamente bajo

Como puede apreciarse en la Figura 10.2, el esquema de representación permite representar la pieza mecánica con total precisión al tiempo que se mantiene un número bajo de celdas paramétricas.

### 10.2 Modelado de un neumático de moto de competición

Como se estudió en la sección 4.3, los neumáticos de motos de competición son un claro ejemplo de cómo la mezcla heterogénea de materiales puede proporcionar unas prestaciones mucho mejores. Por eso nos planteamos modelar con precisión un neumático real de competición. Para ello, consultamos la patente de un neumático real [20] y siguiendo fielmente los planos (Figura 10.3) reproducimos un modelo heterogéneo usando nuestra aplicación. El proceso completo duró sólo seis horas de trabajo.

En este caso el reto era modelar con precisión una geometría realmente compleja. La aplicación basada en nuestro esquema de representación demostró ser una herramienta muy útil.



Figura 10.3: Primera página de la patente del neumático de competición [20]. La patente incluye planos detallados, que fueron los utilizados para modelar el neumático

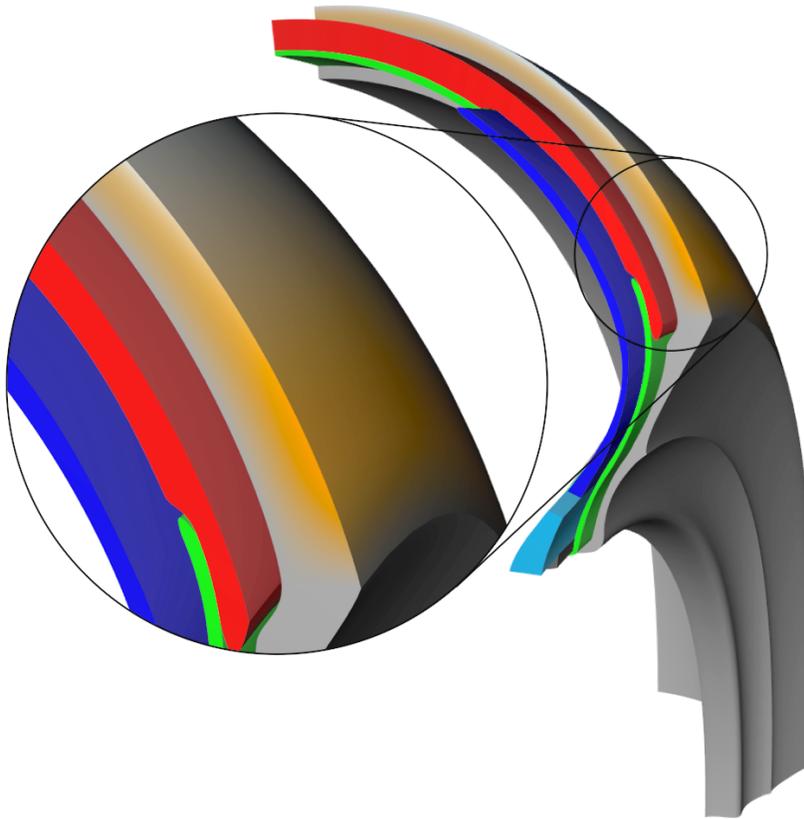


Figura 10.4: En esta vista detallada en sección del neumático pueden verse las distintas zonas formadas por un único material y la banda de rodadura (tread) que está compuesta por tres materiales mezclados de forma continua. El modelo completo es **un único hiperparche Béziér heterogéneo compuesto** lo que resulta muy conveniente a la hora de realizar simulaciones

Una característica muy interesante de los modelos generados con nuestro esquema de representación es que todas las partes del objeto se modelan como **un único hiperparche Béziér heterogéneo compuesto**. En este ejemplo, el neumático completo, incluyendo todos los componentes (tread, body ply, belt, side-wall, etc.) se han modelado como un único hiperparche. Esto es muy conveniente a la hora de realizar simulaciones.

Esta propiedad de nuestro esquema de representación es posible debido a que se pueden modelar discontinuidades, tanto en la geometría como en la distribución de material, de forma independiente (véase la sección 7.4).

Esa fue una de las razones que nos llevaron a realizar un estudio profundo de las condiciones de continuidad en nuestro esquema de representación.

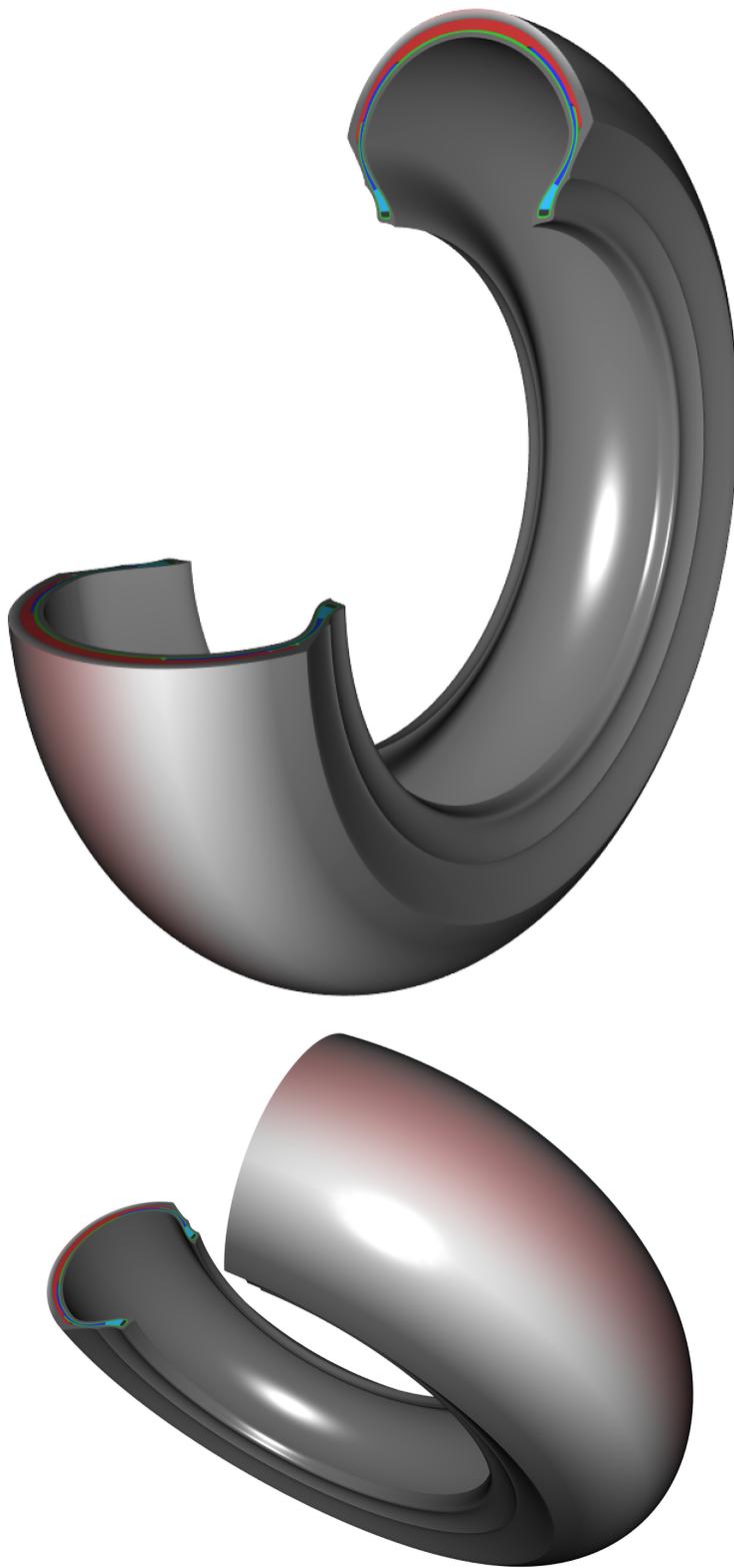


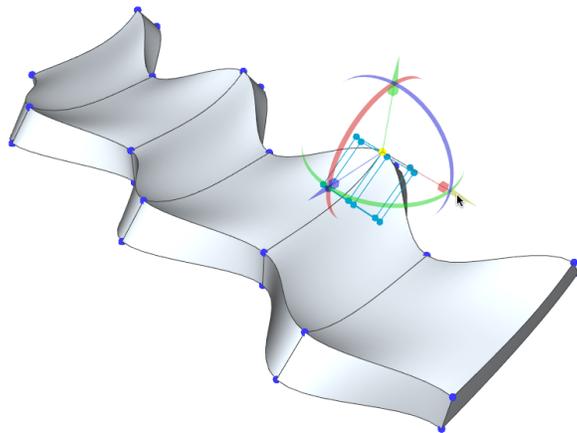
Figura 10.5: Vista completa en sección del neumático de competición, donde se puede ver con detalle su estructura interna

### 10.3 Usabilidad

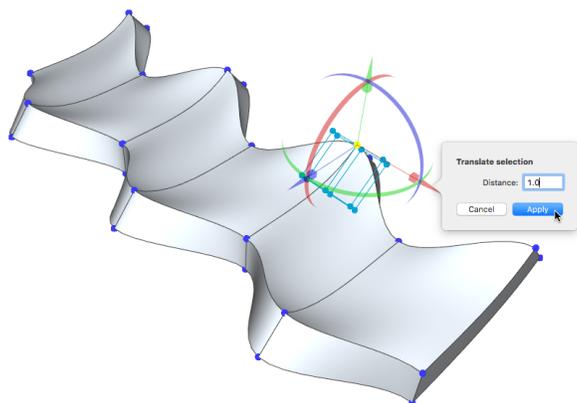
La **usabilidad** es uno de los principios más importantes a tener en cuenta en el diseño de una aplicación informática. Entre otras cosas, una aplicación usable reduce los costes de uso y mejora la calidad general del producto.

En la aplicación que implementa nuestro esquema de representación se ha cuidado mucho la usabilidad (véase Figura 10.6).

Ha sido posible diseñar una aplicación altamente usable gracias a que el diseño del esquema de representación incluye la rejilla simplificada de coeficientes geométricos, procedimientos automáticos para comprobar validez y continuidad, procedimientos sencillos para crear y editar objetos, y es muy sencillo de usar.



(a) Transformación de un corner point arrastrando el handler de transformación



(b) Transformación de un corner point especificando desplazamiento/posición numéricamente

Figura 10.6: En la aplicación que implementa nuestro esquema de representación se ha cuidado al máximo la usabilidad.

Por ejemplo, se usa el principio de usabilidad llamado capacidad de sustitución. El usuario puede aplicar transformaciones a un coeficiente geométrico interactivamente arrastrando el handler de transformación con el ratón, o bien puede especificar un desplazamiento o una posición exacta numéricamente



## Conclusiones

Después de haber expuesto en qué consiste el esquema de representación que proponemos para modelar objetos heterogéneos, en este capítulo resumimos las aportaciones y conclusiones de esta tesis. También apuntamos posibles vías de investigación que se derivan del trabajo realizado.

### 11.1 Principales aportaciones

Las principales aportaciones de esta tesis doctoral son:

1. Se propone un esquema de representación **completo** para modelar objetos sólidos heterogéneos. Nuestro trabajo no es un algoritmo o técnica concreta para resolver algún aspecto del modelado de objetos heterogéneos, sino un esquema de representación completo y bien fundamentado.  
En nuestra opinión, esta es la principal aportación de la tesis. Sobre las bases establecidas por el esquema de representación propuesto, es posible construir nuevos algoritmos para problemas concretos, sabiendo que se van a respetar las propiedades fundamentales de todo buen esquema de representación.
2. Se ha definido matemáticamente el concepto de objeto heterogéneo, y se ha establecido la operación de combinación  $\oplus_\alpha$  de distribuciones de material (véase ecuación 4.3) que, a diferencia de otras operaciones propuestas en la literatura, es simple y se utiliza consistentemente a lo largo de todo el trabajo. En nuestra operación no hay casos particulares y se garantiza la validez de las distribuciones de material calculadas con nuestra fórmula del hiperparche Béziér heterogéneo (véase ecuación 6.6).

3. Se ha definido el objeto regular heterogéneo *hr-object*, de forma que es posible definir zonas continuas y no continuas tanto en la geometría como en la distribución de materiales. A diferencia de otros métodos, esto nos permite definir objetos complejos útiles en el mundo real.
4. Se ha definido el hiperparche Béziér heterogéneo compuesto que es la representación que utilizamos. Es una implementación que captura de forma perfecta las características de los *hr-objects* (nuestros objetos matemáticos). Esto nos permite conservar propiedades importantes tales como regularidad.
5. Se ha definido una condición de validez que, al igual que las otras condiciones propuestas, es suficiente, es decir, rechaza algunos hiperparches que en realidad sí son válidos. Esto en realidad es una ventaja de nuestra condición de validez, porque los hiperparches rechazados no tienen una distribución uniforme de los puntos en su interior. La condición de validez no resta poder expresivo al esquema de representación, ya que se pueden conseguir celdas válidas subdividiendo las celdas rechazadas. Las comprobaciones que es necesario hacer son sencillas, por lo que se puede usar durante el modelado interactivo de objetos.
6. Se han definido condiciones de continuidad de orden 0 y 1 tanto para la geometría como para la distribución de material. Estas condiciones son flexibles y permiten modelar situaciones complejas con poco esfuerzo. Además, pueden darse independientemente una de otra. Por ejemplo, es posible tener continuidad en la geometría pero no en la distribución de materiales y viceversa.
7. Se ha desarrollado una rejilla simplificada de coeficientes geométricos para el hiperparche Béziér heterogéneo compuesto, que facilita mucho el proceso de edición, al mostrar los coeficientes geométricos en dos niveles. En el primer nivel se muestran los *corner points*, que son puntos de máxima influencia para el hiperparche (el hiperparche interpola estos puntos); en el segundo nivel se muestran los coeficientes geométricos vecinos inmediatos de un *corner point* concreto, que influyen en la forma y distribución de materiales alrededor de ese *corner point*.

8. Se ha definido un método para mantener la continuidad de orden 1 automáticamente en aquellos corner points regulares que estén marcados como continuos. De esta forma un operador humano sólo debe centrarse en la forma o el material que desea para el hiperparche alrededor de un corner point concreto, sin preocuparse por mantener las condiciones de continuidad.

El esquema de representación es capaz de identificar aquellos corner points regulares y aquellos corner points irregulares, y es capaz de trabajar con ambos tipos.

Todo ello nos ha permitido implementar fácilmente el esquema de representación y obtener una aplicación que permite modelar desde cero objetos complejos reales.

### *11.2 Trabajos futuros*

El esquema de representación desarrollado en esta tesis permite modelar de forma precisa cada uno de los puntos que forman el interior del objeto, distinguiendo claramente la frontera externa del mismo. Eso abre todo un nuevo mundo de posibilidades para modelar objetos todavía más complejos.

Por ejemplo, hay muchas clases de objetos heterogéneos que no están formados por una mezcla continua de materiales, sino que en realidad se tienen fases de un material primario en el que se encuentran partículas de otro material primario. La proporción de partículas de una fase dentro de otra es variable. Normalmente a estos materiales se les denomina FGM (Functionally Graded Materials), y a la distribución interna de materiales se le llama **microestructura**.

Visto a nivel micro, se tiene en realidad un objeto heterogéneo por capas. En cada punto del objeto se tiene un único material primario. Sin embargo, visto a nivel macro, ese objeto se comporta como un objeto heterogéneo, en el que las propiedades varían según la proporción de partículas de un material dentro de otro.

Es muy importante contar con un esquema de representación que permita modelar esta clase de objetos, ya que pueden fabricarse con impresoras 3D de bajo coste que permiten usar dos materiales aunque no mezclados.

Nuestro esquema de representación está especialmente bien preparado para modelar microestructura, ya que las funciones que se emplean para simular la distribución de una fase dentro de otra se aplican en el espacio paramétrico  $\mathbb{U}$ , con lo que, a diferencia de otros métodos, el objeto sólido modelado puede deformarse sin perder su microestructura interna.

### 11.3 Conclusiones

Esta tesis rellena un vacío existente en el ámbito del modelado de objetos sólidos heterogéneos. En ella se propone un esquema de representación completo que permite el modelado de forma simple y eficiente de nuevos objetos con precisión.

Se han demostrado las principales propiedades del esquema de representación desde un punto de vista teórico, lo que permite asegurar que el esquema es útil para representar objetos reales.

Además, se ha implementado en una aplicación informática y se ha usado con éxito para representar varios objetos reales. Los objetos representados incluyen geometrías y distribuciones de material complejas. Todo eso permite asegurar que el esquema de representación propuesto es útil desde un punto de vista práctico.

El desarrollo matemático de base no es cerrado, sino que permite ampliaciones como por ejemplo, el uso de microestructuras para definir la distribución interna de materiales en el objeto.

Todo lo anterior nos permite asegurar que el objetivo marcado en la sección 2.3 se ha conseguido con éxito.

# Bibliografía

- [1] J. F. Blinn. Ten more unsolved problems in computer graphics. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 18(5):86–89, Sept. 1998.
- [2] W. Boehm and A. Müller. On de casteljau’s algorithm. *Computer Aided Geometric Design*, 16(7):587 – 605, 1999.
- [3] M. Casale and E. Stanton. An overview of analytic solid modeling. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 5(2):45–56, Feb. 1985.
- [4] Y. Choi and S. Lee. Injectivity conditions of 2d and 3d uniform cubic b-spline functions. *Graph. Models*, 62(6):411–427, Dec. 2000.
- [5] F. Conde-Rodríguez, J.-C. Torres, Á.-L. García-Fernández, and F.-R. Feito-Higuera. A comprehensive framework for modeling heterogeneous objects. *The Visual Computer*, pages 1–15, 2015.
- [6] F. Conde-Rodríguez, J.-C. Torres, Á.-L. García-Fernández, and F.-R. Feito-Higuera. Heterogeneous object modeling. In *Proceedings of Computer Graphics International. Full paper*, 24–26 June, 2015.
- [7] F. Conde-Rodríguez and J. C. Torres-Cantero. A simple validity condition for b-spline hyperpatches. In *Proceedings of Eurographics, 2001, short presentations, 2001*.
- [8] S. Evans. *Tyre Compounding for Improved Performance*. Number v. 12 in RAPRA Technology Limited. Smithers Rapra Technology, 2002.
- [9] J. Gain and N. Dodgson. Preventing self-intersection under free-form deformation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 7(4):289–298, 2001.

- [10] T. D. Gillespie. Fundamentals of vehicle dynamics. Technical report, SAE Technical Paper, 1992.
- [11] C. M. Hoffmann and J. R. Rossignac. A road map to solid modeling. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2(1):3–10, Mar. 1996.
- [12] J. Hua, Y. He, and H. Qin. Multiresolution heterogeneous solid modeling and visualization using trivariate simplex splines. In *ACM Symposium on Solid Modeling and Applications, SM*, pages 47–58, 2004.
- [13] J. Hua, Y. He, and H. Qin. Trivariate simplex splines for inhomogeneous solid modeling in engineering design. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 5(2):149–157, 2005.
- [14] T. Jackson, H. Liu, N. Patrikalakis, E. Sachs, and M. Ci-ma. Modeling and designing functionally graded material components for fabrication with local composition control. *Materials and Design*, 20(2-3):63–75, 1999.
- [15] K. I. Joy and M. A. Duchaineau. Boundary determination for trivariate solids. In *7th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications (PG '99), 5-7 October 1999, Seoul, Korea*, pages 82–91, 1999.
- [16] V. Kumar and D. Dutta. An approach to modeling & representation of heterogeneous objects. In *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, volume 120, pages 659–667, 1998.
- [17] D. Lasser. Bernstein-bézier representation of volumes. *Computer Aided Geometric Design*, 2(1–3):145 – 149, 1985.
- [18] M. Mantyla. *An Introduction to Solid Modeling*. Computer Science Press, College Park, MD, 1988.
- [19] M. E. Mortenson. *Geometric Modeling*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1985.
- [20] K. Ochiai. Tire for motorcycle. Sumitomo Rubber Industries, Ltd., Kobeshi (JP), assignee, Apr. 10 2007. US Patent 7,201,198.

- [21] X. Qian and D. Dutta. Physics-based modeling for heterogeneous objects. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 125(3):416–427, 2003.
- [22] A. G. Requicha. Representations for rigid solids: Theory, methods, and systems. *ACM Computing Surveys*, 12(4):437–464, Dec. 1980.
- [23] B. Schmitt, A. Pasko, and C. Schlick. Constructive sculpting of heterogeneous volumetric objects using trivariate b-splines. *The Visual Computer*, 20(2-3):130–148, 2004.
- [24] I. J. Schoenberg. On spline functions. pages 255–291, 1967.
- [25] T. W. Sederberg and S. R. Parry. Free-form deformation of solid geometric models. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 20(4):151–160, Aug. 1986.
- [26] V. Shapiro. Chapter 20 - solid modeling. In G. F. H.-S. K. H.-S. Kim, editor, *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, pages 473 – 518. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [27] R. Warkhedkar and A. Bhatt. Material-solid modeling of human body: A heterogeneous b-spline based approach. *CAD Computer Aided Design*, 41(8):586–597, 2009.
- [28] J. Woodward. *How to run a paper mill*. Information geometers, ltd., 1992.
- [29] P. Yang and X. Qian. A b-spline-based approach to heterogeneous objects design and analysis. *CAD Computer Aided Design*, 39(2):95–111, 2007.



# Índice alfabético

- árbol octal, 38
  - carbon black, 47
  - celda, 35
  - celda paramétrica, 61
    - extrusión, 90
    - mezcla de celdas, 91
    - proceso adición al hiperparche, 89
  - coeficientes geométricos, 54
  - edición directa, 82
  - heterogéneos, 59
    - rejilla **H**, 60
  - irregulares, 86
  - rejilla de vecinos inmediatos, 82
  - rejilla simplificada de, 82
  - slice de, 67
    - contiguos, 67
    - paralelos, 67
    - perpendiculares, 67
  - slice skin de, 67
  - span de, 66
    - localmente ordenado, 66
  - continuidad
    - condición de
      - para distribución de material, 78
      - para geometría, 74
  - continuidad a trozos
    - en hr-objects, 50
  - corner points, 55
  - curvas isoparamétricas, 55
  
  - descomposición en celdas, 35
    - mediante hiperparches, 60
    - propiedades generales, 36
    - y objetos paramétricos, 36
  - deslizamiento de un neumático, 45
  - distribución de material, 42
    - combinación, 43
    - ejemplos, 43
    - operación  $\oplus_\alpha$ , 43
    - válida, 42
  - edge point, 84
  - enumeración exhaustiva, 32
    - propiedades generales, 34
    - y objetos heterogéneos, 34
  - espacio
    - de índices, 55
    - de modelado, 54
    - paramétrico, 54
  - esquema de representación
    - definición, 28
    - informal, 25
    - propiedades, 29–31
      - completitud, 30
      - concisión, 31
      - dominio, 29
      - eficacia, 31
      - facilidad de creación, 31
      - no ambigüedad, 30
      - unicidad, 30
      - validez, 29
  - función de material
    - en hiperparches, 61
    - en hr-objects, 50
  - funciones mezcla, 54
    - de Béziér, 58
  - hiperparche, 53–55
    - continuidad
      - de orden 0, 72
      - de orden 1, 74
      - de orden 2, 78
    - corner points, 55
    - irregulares, 86
    - vecinos inmediatos, 84
  - curvas frontera, 55
  - edición
    - distribución de materiales, 86
    - geometría, 81
  - edición directa, 83
  - extrusión, 90
  - frontera
    - elementos, 55
    - externa, 79
    - interna, 79
  - heterogéneo, 58–60
  - heterogéneo compuesto, 60–80
    - continuidad, 72–79
    - frontera, 79
    - validez, 63
  - mezcla de celdas, 91
  - proceso de construcción, 89
  - rejilla de control **G**, 55
  - superficies frontera, 55
  - ventajas, 53
- histéresis, 45
- hr-object
  - definición, 49
  - frontera
    - externa, 50
    - interna, 51

Jacobiano, 68

material primario, 41

modelado de sólidos, 23–40
  - definición, 23
  - enfoque de tres niveles, 24
  - esquema de representación, 25
  - estructuras de símbolos, 24
  - investigación en, 40
  - objetos físicos, 24

- objetos matemáticos, 24
- representaciones computacionales, 25
- objeto
  - heterogéneo
    - definición, 41
    - ejemplo, 44
    - rígido, 26
    - regular, 26
  - octree, 37
  - propiedades generales, 38
  - y objetos heterogéneos, 38
- puntos de control, 54
- r-set
  - definición, 27
- representación
  - propiedades
    - no ambigüedad, 29
    - unicidad, 29
    - validez, 28
- sólido
  - definición, 26
- silica, 48
- slice de coeficientes, 67
  - contiguos, 67
  - paralelos, 67
  - perpendiculares, 67
- slice skin de coeficientes, 67
- span de coeficientes, 66
  - localmente ordenado, 66
- superficies isoparamétricas, 55
- surface point, 84
- teorema de la función implícita, 68
- tesis
  - publicaciones asociadas, 22, 65
- triángulo mágico, 44
- usabilidad, 99
- vóxel, 32
- validez
  - condición de, 68
  - contraejemplos, 70
  - propiedades, 72
  - del hiperparche, 65
- variables paramétricas, 53
- vertex point, 84

# Glosario

*cerrado bajo la operación* Se dice que una estructura matemática  $\mathbf{A}$  es cerrada bajo una operación  $+$ , si cualesquiera que sean  $a$  y  $b$ , elementos de  $\mathbf{A}$ , se tiene que  $a + b$  es también un elemento de  $\mathbf{A}$ .

$$\forall a, b \in \mathbf{A} \quad a + b \in \mathbf{A}$$

*combinación baricéntrica* Dado un conjunto  $\mathbf{O}$  se define la operación combinación baricéntrica como la suma:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i o_i \quad \left\{ \begin{array}{l} o_i \in \mathbf{O} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1 \end{array} \right.$$

*combinación convexa* Es una combinación baricéntrica, en la que además se tiene que cada coeficiente  $\alpha_i$  es positivo:

$$\forall \alpha_i, 1 \leq i \leq n, \alpha_i \geq 0.$$

*conjunto acotado* Un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^3$  es acotado si lo está en cada uno de los ejes coordenados  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ .

No se puede hablar estrictamente de conjuntos de puntos acotados, porque eso implicaría que existe una [relación de orden](#) en  $\mathbb{R}^3$ , lo cual no es cierto. Sí se puede hablar de acotado para cada eje coordenado, porque en  $\mathbb{R}$  sí que existe una [relación de orden](#). En la práctica, decir que un conjunto de puntos está acotado para cada eje coordenado es equivalente a decir que existe una caja envolvente alineada con los ejes coordenados  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  para ese conjunto. En otras palabras, el conjunto es limitado, ya que se "extiende" a lo largo de una porción finita del espacio.

*conjunto semialgebraico* Un conjunto es semialgebraico si es el resultado de un conjunto finito de combinaciones de semiespacios algebraicos, usando para ello los operadores de conjuntos  $\cup$ ,  $\cap$  y  $\setminus$

*conjunto de las partes* Dado un conjunto  $\mathbf{S}$ , se define el conjunto de las partes de  $\mathbf{S}$  (también llamado conjunto potencia de  $\mathbf{S}$ ) denotado como  $\mathcal{P}(\mathbf{S})$ , como el conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbf{S}$ . La cardinalidad del conjunto de las partes de un conjunto con cardinalidad  $n$  es  $2^n$ .

*correspondencia* Una correspondencia  $R$  entre dos conjuntos referenciales  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es un subconjunto del producto cartesiano  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . Si un elemento  $a \in \mathbf{A}$  se corresponde con un elemento  $b \in \mathbf{B}$ , eso se escribe  $aRb$ .

*deslizamiento* Se produce cuando la velocidad angular o de giro de la rueda no se corresponde con la velocidad lineal del vehículo. Puede darse el deslizamiento tanto por aceleración (al arrancar fuerte sobre una superficie deslizante, las ruedas giran más deprisa de lo que corresponde a la velocidad del vehículo) como por frenada (al pisar los frenos, si se bloquean las ruedas, giran más despacio de lo que corresponde a la velocidad del vehículo).

*espacio vectorial* Un espacio vectorial es un conjunto no vacío  $\mathbf{V}$  cerrado bajo las operaciones  $+$  (suma de vectores) y  $\cdot$  (producto por un escalar) que cumple las propiedades:

- Asociativa.  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$
- Conmutativa.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$
- Elemento neutro.  $\exists \mathbf{e} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{e} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{e} = \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$
- Elemento opuesto.  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \exists \mathbf{w} \mid \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v} = \mathbf{e}$
- Pseudoasociativa.  $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- Distributiva.  $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$  y  $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$   
 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$  y  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- Unimodular.  $1\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$

*función algebraica* Una función  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es algebraica si  $F(x, y, z)$  puede expresarse en términos de un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces conteniendo  $x^n, y^n$  y  $z^n$ .

*histéresis viscoelástica* Si deformamos con la mano una pelota de caucho e inmediatamente la soltamos, veremos cómo la pelota recupera (en este caso completamente) su forma original, pero

de manera lenta. Este desfase implica en todo caso que parte de la energía empleada durante la aplicación de la fuerza externa no es recuperada tras su relajación, disipándose en forma de calor.

*hodograph* Se define un hodograph como el camino recorrido por la punta de un vector que representa de forma continua, en magnitud y dirección, la velocidad de un cuerpo en movimiento. En los trabajos previos estudiados en esta tesis, es un cono que representa los límites en los que se mueve un vector tangente.

*Jacobiano* Dado un conjunto  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  de  $n$  ecuaciones con  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\mathbf{y} \equiv \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \text{ o explícitamente } \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

el jacobiano o matriz jacobiana, es la matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de la función:

$$J(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

*relación de orden* Es una relación binaria  $R$  sobre el conjunto referencial  $\mathbf{A}$ , que verifica las siguientes propiedades:

- Reflexiva.  $\forall a \in \mathbf{A}, aRa$ .
- Antisimétrica.  $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b, a, b \in \mathbf{A}$ .
- Transitiva.  $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc, a, b, c \in \mathbf{A}$ .

*relación de equivalencia* Es una relación binaria  $R$  sobre el conjunto referencial  $\mathbf{A}$ , que verifica las siguientes propiedades:

- Reflexiva.  $\forall a \in \mathbf{A}, aRa$ .
- Simétrica.  $aRb \Rightarrow bRa, a, b \in \mathbf{A}$ .
- Transitiva.  $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc, a, b, c \in \mathbf{A}$ .

*relación binaria* Es una correspondencia  $R$  en la que los dos conjuntos referenciales son el mismo.

*semiespacio algebraico* Es el conjunto de puntos  $\mathbf{H} = \{(x, y, z) / p(x, y, z) \leq 0\}$ , donde  $p(x, y, z)$  es una función algebraica.

*usabilidad* “Medida en que un producto se puede usar por determinados usuarios, para conseguir objetivos concretos con efectividad, eficiencia y satisfacción en un contexto de uso específico”.

La efectividad es la precisión con la que los usuarios alcanzan los objetivos especificados. La eficiencia hace referencia a los recursos empleados (tiempo, etc.) que son necesarios para alcanzar con precisión esos objetivos. La satisfacción es la ausencia de incomodidad y la actitud positiva del usuario hacia el producto; es pues, un factor subjetivo.