UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO DE CASOS

Nielka Rojas González

Granada, 2014

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Nielka Rojas González
D.L.: GR 2222-2014
ISBN: 978-84-9083-295-0

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO DE CASOS

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección del Doctor Pablo Flores Martínez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y del Doctor José Carrillo Yáñez del Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de la Universidad de Huelva que presenta Nielka Rojas González para optar al grado de Doctor en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Nielka Rojas González

V°B° de los Directores

Fdo.: Pablo Flores Martínez

Fdo.: José Carrillo Yáñez

El trabajo de tesis doctoral se realizó dentro del Grupo de Investigación *Didáctica de la matemática. Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada, del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM-193), en la línea de investigación *Formación del Profesorado de Matemáticas*. En el marco de los proyectos de investigación EDU2012-33030 "Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación", de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica del Ministerio de Comercio e Innovación de España, y EDU2009-09789EDUC "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

La autora fue becaria del Programa BECAS CHILE de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) del Gobierno de Chile.

A mi padre

Agradecimientos

Agradezco de manera muy especial a Pablo Flores Martínez por la enseñanza brindada en cada momento; por el tiempo y dedicación que ha ocupado en sugerencias e ideas para desarrollar este trabajo. Asimismo, por sus palabras de motivación y consejos a complementar mi proceso de formación con variadas actividades.

A José Carrillo Yáñez de la Universidad de Huelva mi gratitud especial por su compromiso en la dirección de esta investigación. Por permitirme participar en el grupo de investigación del SIDM, Huelva. Gracias por cada uno sus comentarios, por sus profundas reflexiones y por darme la oportunidad de ser parte de un grupo de trabajo con una calidad y compromiso admirable.

Al Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada, por la facilitación y accesibilidad de los documentos. A cada uno los profesores del grupo de investigación y en general a los docentes del departamento de Didáctica de la Matemática gracias por la enseñanza entregada. Agradezco especialmente a José Luis Lupiáñez por facilitarme bibliografía de interés en este tema de investigación y por la ayuda brindada en la etapa de validación de categorías.

Al grupo de investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, por sus sugerencias, por los documentos recomendados y facilitados, por su compromiso con las investigaciones de cada uno de los doctorandos y por las largas horas de discusión de las cuales nos hacen participes. Agradezco especialmente a Nuria Climent, Luis Carlos Contreras, Cinta Muñoz-Catalán, C. Miguel Ribeiro, Miguel A. Montes, Eric Flores, Dinazar Escudero, Álvaro Aguilar, Emma Carreño, Diana Vasco, José Luis Huitrado, Elisabeth Ramos, Pablo Flores y José Carrillo.

Mi reconocimiento especial a los dos profesores que me permitieron acceder a su salón de clases y grabar por un largo tiempo cada una de las sesiones de matemáticas; gracias por su amabilidad y buena acogida. A cada uno de los estudiantes que día a día con sus energías me saludaban y me maravillaban con su participación en el aula. A los directores del Centro e Instituto al que pertenecen los profesores informantes de la investigación. Muchísimas gracias por abrir las puertas del colegio, del aula y del saber.

A la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) del Gobierno de Chile, por la beca otorgada para seguir mis estudios.

Al Instituto de Matemática (IMA) de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso por permitirme realizar una estancia doctoral. Agradezco de manera especial al grupo de Didáctica de la matemática que me acogió y me brindó la posibilidad de compartir sus reflexiones. A Raimundo Olfos y Soledad Estrella, mis agradecimientos por sus comentarios y sugerencias a mi trabajo, asimismo por permitirme trabajar en conjunto.

A mis amigos y compañeros por su cariño. Especialmente a Emilse, Diana Carolina, Maha y Miguel por su amistad y cariño. A Elisabeth y familia agradezco los momentos compartidos. A José Antonio por su compañerismo y buena acogida en su hermoso país.

A Rosa por la linda amistad cultivada durante los años en Granada. Eres “Ese alguien que te hace reír sin cesar; ese alguien que te hace creer que en el mundo existen realmente cosas buenas. Ese alguien que te convence de que hay una puerta lista para que tú la abras...” (Pablo Neruda), eres eso y mucho más; espero que continuemos cultivando nuestra amistad.

A mi familia por su apoyo, cariño y cuidado entregado cada día; gracias por confiar en mis capacidades y apoyarme en mi ausencia en el tiempo lejos de casa. Mi amor a ustedes es mi eterno agradecimiento.

A Alejandro por su cariño, su paciencia, comprensión, sus palabras de ánimo de día a día.

A todos ellos, gracias.

Tabla de contenido

Listado de siglas

MKT – Conocimiento matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*)

MK – Conocimiento del contenido matemático

PCK – Conocimiento didáctico del contenido

KQ – Cuarteto de Conocimiento (*The Knowledge Quartet*)

MTSK – Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*)

KoT – Conocimiento de los temas

KSM – Conocimiento de la estructura de la matemática

KPM – Conocimiento de la práctica matemática

KMT – Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

KFLM – Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas

KMLS – Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas

Índice de figuras

Índice de tablas

Presentación

En la actualidad, uno de los problemas principales en la línea de investigación sobre la Formación de Profesores de Matemáticas, es estudiar el conocimiento profesional del profesorado, donde se intenta analizar su naturaleza, las características que lo conforman, el grado de conocimiento matemático que tienen y han de tener los profesores para desarrollar su tarea profesional. Dentro de estas perspectivas, nuestro foco de interés se centra en el conocimiento profesional más específico, el conocimiento que dispone el profesor para la enseñanza de las matemáticas. En este trabajo estudiamos el conocimiento especializado del profesor de matemáticas; es decir, aquel conocimiento que se pone en juego cuando se tiene la intencionalidad de enseñar un contenido matemático.

Para efecto de esta investigación, nos focalizamos en comprender el conocimiento especializado de dos profesores de matemáticas expertos, un profesor de Educación Primaria y un profesor de Educación Secundaria, que enseñan el tema de los números racionales. Estudiar el conocimiento de profesores expertos nos permite profundizar en la comprensión de las características y naturaleza del conocimiento especializado del profesorado que enseña matemáticas, objetivo de esta investigación.

Este estudio se realiza dentro del Grupo de Investigación *Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico*, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, centrado en una de las líneas prioritarias de trabajo, “Formación de Profesores de Matemáticas”.

Organizamos el escrito en cinco capítulos. El Capítulo 1 expone el área problemática del estudio, el problema de investigación y su justificación, concluyendo con el planteamiento del objetivo general y los respectivos objetivos específicos.

El Capítulo 2 organiza los referentes teóricos relacionados con nuestro problema de investigación. Desarrollamos tres ejes fundamentales: el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, el análisis didáctico y la conceptualización de profesor experto.

Relacionado con el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, exponemos algunos antecedentes, especificamos distintos modelos teóricos emergentes para estudiar el conocimiento del profesor, y describimos el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), referente principal en este estudio.

Para comprender el conocimiento matemático implicado en la práctica, surge la necesidad de diseñar herramientas que permitan hacer operativo el proceso de la identificación de conocimiento, con el fin de profundizar en su caracterización. Para ello, establecemos una relación teórica entre el *análisis didáctico* y el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). El *análisis didáctico*, que se fundamenta en los trabajos desarrollados por el grupo «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, lleva a definir y precisar categorías e indicadores de conocimiento para aproximarnos a una comprensión del conocimiento del profesor en la práctica.

Por último, examinamos qué se entiende por profesores expertos, presentamos investigaciones relacionadas con esta problemática, para finalmente conceptualizar qué se entenderá por docente experto en esta investigación. Describimos dos tipos de características para identificar a docentes expertos, que denominamos primarias y secundarias, y que conforman nuestra conceptualización de profesor experto.

En el Capítulo 3 recogemos los fundamentos y procedimientos metodológicos que sustentan al estudio. Describimos el diseño de investigación, las técnicas utilizadas para obtener la información, así como los instrumentos de análisis de los datos. Finalmente, enunciamos el proceso seguido para analizar la información, concluyendo con algunas consideraciones sobre el rigor sostenido durante el proceso de investigación.

El Capítulo 4 presenta y describe el caso de dos profesores: Rodríguez y Rivera[1], que enseñan el contenido matemático escolar de las fracciones a niños de 6º de Educación Primaria y 1º de Educación Secundaria Obligatoria, respectivamente. En el contexto del trabajo, los datos obtenidos son cualitativos, el análisis se realiza a través de una descripción detallada interpretativa, basada en el análisis de contenido de los textos, considerando categorías elaboradas *a priori*. Realizamos una interpretación conceptual de los conocimientos que ponen de relieve los profesores en su práctica.

Los resultados del análisis permiten caracterizar el conocimiento especializado de cada profesor. En el análisis comenzamos por identificar componentes del conocimiento especializado, puestos de manifiesto a lo largo de la unidad didáctica impartida por cada docente, según los indicadores de conocimiento establecidos previamente. Posteriormente, hacemos una reconstrucción del conocimiento plausible (lo que se puede inferir) de cada profesor, al enseñar el tema de las fracciones.

En el Capítulo 5 exponemos las conclusiones referentes al conocimiento manifestado por cada profesor, y examinamos el logro de los objetivos de la investigación. En síntesis, hemos apreciado que el profesor Rodríguez manifiesta un fuerte componente de *conocimiento didáctico del contenido*, centrado tanto en el conocimiento de la enseñanza como en el de las características del aprendizaje de las matemáticas. Este conocimiento va condicionando su práctica, hasta el punto de organizar su docencia de manera original para enfatizar los aspectos que considera importantes de los números racionales, evitar los errores más comunes en su aprendizaje y promover el uso de diversas representaciones, entre otros aspectos.

El profesor Rivera pone de relieve un alto componente de conocimiento matemático del tema, que se centra especialmente en dos de las tres dimensiones del significado del número racional, las situaciones que le dan sentido y las estructuras matemáticas que los caracterizan. También pone de manifiesto conocimiento de la estructura de las matemáticas, principalmente a partir del manejo de relaciones temporales de los contenidos; es decir, enlaza contenidos previos con aquellos que se estudiarán en otros niveles escolares.

[1] Nombres ficticios de los participantes del estudio.

A partir de la comprensión del conocimiento especializado de los sujetos informantes del estudio, avanzamos en la caracterización del modelo MTSK. Específicamente la relación teórica establecida entre el *análisis didáctico* y modelo MTSK, permitió tener referentes concretos para profundizar en la naturaleza de cada uno de los subdominios de conocimiento.

El informe se completa enunciando las contribuciones que aporta este trabajo a la problemática que hemos planteado, señalamos las limitaciones del estudio, y finalizamos enunciando algunas líneas para continuar la investigación.

Las referencias empleadas en el desarrollo del estudio y un resumen del presente trabajo cierran este informe. También se adjuntan dos discos compactos que contienen los anexos: análisis didáctico de los números racionales, descripción de 33 clases, comunicado para el consentimiento de los tutores de los estudiantes de los establecimientos del estudio, audios y videos de las 33 sesiones de clases analizadas, además de las transcripciones de dichas sesiones.

Capítulo 1

Planteamiento de la investigación

Índice del capítulo

Planteamiento de la investigación

Es el maestro quien ha de transmitir al alumno lo que la humanidad ha aprendido sobre sí misma y sobre la naturaleza, todo lo que ha creado e inventado de esencial.
(Delors, 1994, La educación encierra un tesoro, UNESCO, p.15)

El informe de la UNESCO (Delors, 1994) describe que el papel del maestro es primordial en la enseñanza, es él quien hace despertar en los estudiantes el deseo de aprender. Este informe llama la atención sobre la importancia del papel del profesor y la necesidad de organizar de manera conveniente la formación inicial y continua de los profesores. Desde estas perspectivas, el presente estudio aborda dos cuestiones que están relacionadas con ellas: el conocimiento profesional de los profesores, especialmente el conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas, y cómo este conocimiento se manifiesta en la tarea de enseñanza.

El estudio que presentamos busca contribuir y profundizar en una de las áreas prioritarias, en la actualidad, en Educación Matemática: el conocimiento profesional de los profesores. A continuación, presentamos la problemática del estudio, la delimitación del problema, explicamos además la pertinencia de la investigación y finalizamos con la presentación de los objetivos que guían el estudio.

1.1 ÁREA PROBLEMÁTICA

Actualmente, uno de los problemas principales en la línea de investigación de Formación de Profesores de Matemáticas es estudiar el conocimiento profesional del profesorado (Cardeñoso, Flores y Azcárate, 2001; Chapman, 2014; English, 2008; Godino, Carrillo *et al.*, 2012; Heid, Grady *et al.*, 2014; Hoover, 2014), en el cual se pretende, fundamentalmente, analizar su naturaleza, las características que lo conforman, y el grado de conocimiento matemático que tienen y han de tener los profesores para desarrollar su tarea docente.

El informe de la UNESCO (2012) manifiesta que los profesores son la clave para un desarrollo positivo y sostenible de los sistemas de educación; componen el principal desafío para una educación matemática de calidad (p. 25). Las habilidades, los conocimientos, las actitudes y las prácticas de los docentes son algunos de los factores considerados como influyentes en el aprendizaje estudiantil (OCDE, 2005). Además, el profesor de matemáticas es un actor importante en la actividad que se genera en el aula, es un gestor de conocimiento; esto y otros factores han llevado a los investigadores a centrarse en la comprensión que tienen los profesores del contenido que enseñan, siendo un tema oportuno y de suma importancia para el campo de la Educación Matemática (Bass, 2007; Spangler, 2014).

El estudio comparativo internacional *Teacher Education Study in Mathematics (TEDS-M)*, perteneciente a la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA), sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas en Educación Primaria y en la Secundaria Obligatoria, ha dirigido la atención preliminarmente a estudiar los conocimientos matemáticos y didácticos que han adquirido los profesores en formación. Es decir, indagan sobre qué conocimientos tienen y qué saben hacer los profesores en formación de diversos países, además del impacto que los programas tienen en la formación del profesorado.

En uno de los estudios específicos realizados por el TEDS-M abordan la pregunta de investigación "¿Cuál es el nivel y la profundidad del conocimiento matemático y su didáctica que adquieren los futuros profesores de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria al final de su programa de formación?" (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008, p. 13). Esta problemática se retoma en el libro publicado recientemente *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn. TEDS-M results* (Blömeke, Hsieh, Kaiser y Schmidt, 2014), en el cual todos los estudios presentados se centran en la importancia de profundizar en el conocimiento matemático para la enseñanza.

En la línea del conocimiento profesional del profesor de matemáticas existe una tendencia a estudiar a futuros profesores, siendo necesario el trabajo empírico centrado en el aula. Profundizar en el conocimiento necesario para la enseñanza de profesores en ejercicio, en sus propias instituciones y clases, sigue siendo una tarea inconclusa (Hoover, 2014). Estudiar el conocimiento de los profesores y comprender la lógica con que ponen en juego diversos conocimientos en el desarrollo de su tarea profesional, es un tema latente en educación en la actualidad.

En las reuniones anuales celebradas por el *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) se evidencia una preocupación constante respecto al estudio del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, lo que lleva a investigadores a generar distintos modelos para organizar el conocimiento del profesor de matemáticas. Por ejemplo, en el PME33 (2009) celebrado en Grecia, se discutieron tres perspectivas: *Mathematical knowledge for Teaching* (Ball, Thames y Phelps, 2008), *Knowledge Quartet* (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) y *Mathematics for teaching* (Davis y Simmt, 2006).

Deborah Ball y su equipo presentan el modelo MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*), que surge de los estudios referente a la práctica docente, en el nivel primario del ámbito matemático, y de la identificación de las tareas habituales que realizan los profesores, quienes requieren de conocimientos específicos para desarrollar su labor profesional. Estos autores distinguen dentro del modelo MKT dos grandes dominios de conocimiento: el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido.

Tim Rowland y colaboradores estudian el conocimiento de los contenidos matemáticos de los profesores en formación de Educación Primaria y las formas en que este conocimiento se manifiesta, tanto en los procesos de planificación como en la enseñanza. Este grupo desarrolla un marco teórico denominado *Knowledge Quartet* (KQ) que surge inductivamente, a partir del análisis de clases impartidas por estudiantes para profesores. El modelo está compuesto por cuatro dimensiones: fundamento, transformación, conexión y contingencia.

Por último, Brent Davis presenta una investigación que se centra en estudiar cómo aprenden los profesores, basándose en el "estudio conceptual" (*concept study*). Es decir, en el análisis de las estructuras lógicas de base de los conceptos (comprensión matemática de los conceptos o tema) y el estudio o análisis de la lección, que permite al profesor mejorar la calidad de la enseñanza y enriquecer las experiencias de aprendizaje de los estudiantes.

El CERME 8 (*Congress of the European Research in Mathematics Education*), celebrado el año 2013 en Turquía, permitió al grupo de trabajo 17, (*From a study of teaching practices to issues in teacher education*), discutir investigaciones centradas en las prácticas de enseñanza, siendo uno de los temas de debate el conocimiento del profesor. Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) presentaron el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK), que parte de la base de identificar el conocimiento del profesor de matemáticas que solo tiene sentido para él, por tanto se considera que el conocimiento del docente que enseña matemáticas es un conocimiento especializado. En el Capítulo 2 detallamos estos referentes teóricos.

Los temas enunciados siguen siendo abordados en las reuniones internacionales de Educación Matemática, en las que se observa un aumento en las investigaciones centradas en el profesor y en su práctica docente. English (2008) indica que en el ICME-10 (*International Congress on Mathematical Education*), dos tercios de las investigaciones tienen como foco de atención al profesor en contraste con un tercio de los estudios que se centran en los estudiantes. Estos aspectos se ven reflejados en las nuevas revistas de profesores que han ido surgiendo en los últimos tiempos.

Es evidente que existen inquietudes acerca de cómo delimitar el conocimiento y las habilidades del profesor, y cómo esta cuestión repercute en la tarea de enseñanza (Schoenfeld, 2010a). De lo expuesto, se desprende el interés por estudiar el conocimiento del profesor, especialmente el conocimiento que manifiestan los docentes al enseñar un tema matemático.

El informe *Teachers for Tomorrow's Schools* (OCDE, 2001), que analiza los indicadores educativos desarrollados por la OCDE/UNESCO (*World Education Indicators*– WEI), destaca que es indispensable obtener este tipo de informaciones a un nivel micro, pues se requieren evidencias que provengan directamente del aula, de modo que permitan comprender los problemas reales de la educación. Ma (1999), inspirándose en los aportes teóricos de Dewey, insiste en la necesidad de comprender de manera más profunda lo que realmente pasa en las aulas; para ello, se debe descubrir la realidad a la cual uno pertenece.

En el año 2010 realizamos un estudio sobre el conocimiento matemático para la enseñanza y la calidad matemática de un proceso de instrucción de un profesor de Educación Primaria (Rojas, 2010). Nos centramos en el análisis de una sesión de clase donde se enseñaba el contenido matemático escolar de las fracciones. La investigación permitió identificar distintos tipos de conocimientos matemáticos activados por el docente al enseñar el tema en cuestión. Asimismo, a partir de la aplicación de unas categorías para medir la Calidad Matemática de la Instrucción (Hill, Blunk, Charalambous, Lewis *et al*., 2008), obtuvimos que la instrucción impartida por el profesor era activa, es decir, centrada en el planteamiento de problemas matemáticos; la riqueza matemática era media, en la que se prestó más atención a la presentación del contenido que a promover generalizaciones e incitar a resolver problemas por procedimientos múltiples (Rojas, 2010). Esta investigación abordó el estudio del conocimiento del profesor, a partir de la observación directa de su actuación en aula. El profesor participante era un maestro, reconocido como un buen docente por sus pares y su entorno. En el proceso estudiado caracterizamos el conocimiento del profesor, a partir de su práctica, apreciando un estilo de trabajo muy ligado a los materiales curriculares, para enseñar las fracciones.

Partimos de que si deseamos comprender el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas, necesitamos estudiar a profesores que se distinguen por la amplitud de conocimientos (profesores expertos). En general, comprender la enseñanza de expertos es la clave para el desarrollo profesional: "si uno sabe qué encierra la enseñanza experta, esperaría encontrar formas de ayudar a que los profesores desarrollen tales competencias" (Schoenfeld, 2011, p.333). También puede servir como base para la discusión con otros profesores sobre problemas reales de la enseñanza de un contenido, o para abordar procesos de formación continua del profesorado, así como para la elaboración de planes de formación más acordes con las características de los docentes (Blanco, 1997).

Contar con buenos docentes es garantía de buenas experiencias de aprendizaje (OCDE, 2005); asimismo, estudiar las prácticas seguidas por estos docentes puede conducir a comprender la lógica de los procesos de enseñanza efectivos. En lo que sigue, presentamos algunos antecedentes de investigaciones con profesores expertos (para más detalle ver Capítulo 2).

1.1.1 Profesores expertos

Los estudios que llevan a conocer y comprender los enfoques de las prácticas efectivas o de las buenas prácticas, han vuelto a tomar protagonismo en la actualidad (Kaiser y Li, 2011; Muñoz-Catalán y Carrillo, 2012; Yang, 2014). El libro titulado *Expertise in Mathematics Instruction* (Li y Kaiser (Eds.), 2011) contiene una colección de investigaciones relacionadas con la pericia (*expertise*) de profesores de matemáticas de países de alto rendimiento en educación (China, Japón, Singapur, Corea del Sur y Taiwán). Este libro deja de manifiesto que existe una variedad de perspectivas para identificar a profesores expertos. Chi (2011) considera que estos docentes se diferencian de otros por la amplitud de conocimientos, lo que les permite abarcar múltiples formas de conceptualizar las matemáticas elementales, disponer de conocimientos sobre el origen curricular y conceptual de la materia a enseñar; haciendo uso además de representaciones variadas y conectando los contenidos con los de otros niveles escolares.

En una investigación realizada por Li, Huang y Yang (2011) se concluye que los docentes expertos del estudio en cuestión tienen profundo conocimiento de la materia en el nivel que enseñan; identifican apropiadamente los aspectos que conllevan dificultades a los estudiantes, ponen énfasis en el desarrollo del pensamiento y habilidades matemáticas de los alumnos, usan la resolución de problemas matemáticos para la mejora efectiva de la instrucción, centran la instrucción en el estudiante y motivan a sus alumnos.

Schoenfeld (2011) hace referencia a una caracterización de profesor experto partiendo de que "los profesores en el momento de la toma de decisiones actúan en función de sus orientaciones (creencias, valores, preferencias, etc.), los objetivos (que se establecen en función de sus orientaciones) y sus recursos (especialmente su conocimiento)" (p.337). Considera que cualquier decisión hecha por el profesor en determinado contexto, puede ser modelada en función de estos tres componentes: orientaciones, objetivos y recursos. Esto lleva a considerar que el desarrollo de un profesor experto depende de estas tres características y de la relación que se establece entre ellas. Por tanto, un profesor experto ha de tener un conjunto de orientaciones consistentes: un amplio conocimiento del contenido a enseñar, ya que eso permite organizar el proceso de enseñanza sin dificultad y generar discusiones en la clase de temas complejos; promover la participación en el aula, haciendo uso de los comentarios de los estudiantes para lograr interacciones productivas en la clase; y presentar a sus estudiantes el material de manera clara (Schoenfeld, 2011).

De las características que distinguen a los profesores expertos, inferimos que estos docentes tienen ampliamente desarrollado el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, lo que permitiría extraer información relevante relacionada con los dominios de conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas.

Debemos considerar que la caracterización de profesor experto está mediada por las orientaciones de los investigadores. Por ejemplo, Li, Huang y Yang (2011) identifican a los profesores expertos por ser personas con valores morales y culturales; es decir, aquellos que representan un modelo a seguir para otros docentes. Los profesores expertos demuestran una enseñanza ejemplar, se distinguen por el nivel de logros en sus estudios (licenciatura, máster, doctorado), por su experiencia de enseñanza y por haber sido premiados o distinguidos.

Como vemos, la identificación y selección de profesores expertos depende de los criterios que adopten los investigadores, volviendo a ser conveniente establecer criterios para dichos procesos. Parte de estos criterios aluden a aspectos que se pueden apreciar de manera objetiva (distinciones, premios, grado de estudio, etc.), pero también se han empleado otros criterios para definir la experiencia, basados en destrezas profesionales. Por tanto, apreciamos que los profesores expertos pueden tener un mayor nivel de conocimientos, ser capaces de estructurar la enseñanza y los procesos de aprendizaje de manera efectiva y orientada a los objetivos. Ellos ven el proceso de forma holística, combinando la enseñanza con los contenidos, organizan la enseñanza y los procesos de aprendizajes respecto de las necesidades de los estudiantes (Kaiser y Li, 2011). Considerando el segundo tipo de criterios, se evidencia el interés en profundizar en el contenido especializado del profesor de matemáticas, especialmente de profesores expertos. Reflexionar sobre estos dos tipos de criterios nos llevará a apreciar cómo se articulan y el papel que juegan en nuestra investigación.

Debido al papel que se les concede a los profesores expertos (definidos por criterios precisados en la investigación), para la línea de investigación que se ocupa de la formación de profesores de matemáticas, es de relevancia comprender cuál es el conocimiento profesional de estos docentes y analizar cómo se organiza, ya que el estudio en profundidad de los conocimientos observados en profesores con un cuerpo consistente y dinámico de conocimiento puede brindar una comprensión profunda en aspectos matemáticos y didácticos del contenido (Grossman, Schoenfeld y Lee, 2005).

1.1.2 Los números racionales

En Educación Matemática un gran número de investigaciones se han centrado en estudiar las características de la comprensión de las fracciones y los números racionales que presentan los estudiantes en determinados niveles escolares (por ejemplo, Dickson, Brown y Gibson, 1984; Kieren, 1992; Lamon, 2007). Los números racionales en general, y la expresión fraccionaria en particular, es uno de los conceptos más complejos que los estudiantes abordan en sus primeros años escolares, al aparecer bajo distintos significados (parte-todo, medida, cociente, operador, razón) que se relacionan entre sí. Asimismo, es un contenido que se va construyendo de manera gradual, lo que aumenta su complejidad (Kieren, 1980; Llinares, 2003; Llinares y Sánchez, 1997). Los estudios dejan de manifiesto los distintos factores predominantes que dificultan el aprendizaje de las fracciones.

Por otra parte, existen numerosas investigaciones que estudian el conocimiento sobre las fracciones de profesores en formación y en ejercicio, apreciando, por ejemplo, que algunos profesores presentan las mismas dificultades que los estudiantes respecto a las fracciones (Ball, 1990; Gairín, 1998; Klein y Tirosh ,1997; Llinares y Sánchez, 1997; Llinares y Sánchez, 1991; Ma, 1999; Pinto y Tall, 1996). Klein y Tirosh (1997) evalúan el conocimiento didáctico del contenido tanto de profesores en formación como en ejercicio y obtienen que los docentes en formación, muestran bajo conocimiento sobre los problemas verbales de multiplicación y división con números racionales, mientras los profesores en ejercicio identifican las respuestas incorrectas a problemas sobre los números racionales, pero no los posibles orígenes de los errores, concluyendo de ello que los profesores tienen una comprensión procedimental del contenido. Estos resultados sugieren que el conocimiento de los docentes referente al contenido matemático de los números racionales, en ocasiones, es débil.

Ma (1999) estudia el conocimiento profesional para la enseñanza de las matemáticas de algunos profesores de Educación Primaria de Estados Unidos y de China. La autora aborda distintos contenidos matemáticos escolares (resta, multiplicación con números de varios dígitos, división de fracciones y relación entre área y perímetro) con los profesores del estudio y da cuenta de las diferencias de conocimiento del contenido y de la comprensión que tienen sobre estos temas matemáticos. La investigación concluye mostrando que los profesores chinos tienen una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales; es decir, logran una comprensión conceptual de la matemática elemental y son capaces de relacionar y conectar los distintos temas con otros de niveles más avanzados y con aquellos más complejos. Asimismo, estos docentes disponen de un amplio repertorio de estrategias didácticas para representar y explicar el contenido matemático. El estudio mencionado logró profundizar sobre la enseñanza de algunos temas matemáticos, comprendiendo sus fundamentos y principios básicos subyacentes a los contenidos. Esto permitió reflejar la riqueza de conocimiento de la materia que los profesores chinos presentaban, destacándose la integración de aspectos del conocimiento matemático y didáctico del contenido.

Con estos aportes, hemos comenzado por identificar una problemática central que guía nuestra investigación, el estudio del conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de las matemáticas y cómo se pone de manifiesto en su práctica de aula. Luego, hemos aludido al interés de centrarnos en comprender el conocimiento que tiene y pone en juego el profesor experto mientras enseña, para profundizar en aspectos matemáticos y didácticos del contenido, sobre el que distinguimos el interés de realizar estudios micro, concretados en un estudio de casos. Finalmente, hemos concretado focalizarnos en el estudio del conocimiento y la enseñanza del contenido específico de los números racionales.

Consideramos necesario restringir la investigación al caso de dos profesores que enseñan el tema de los números racionales. Nos centramos en los niveles de Educación Primaria y Secundaria Obligatoria, ya que este tema es de transición en estos niveles. Seleccionamos a un profesor de cada nivel educativo para apreciarlos en el entorno que lo caracteriza, las respectivas aulas de clases.

El profesor de Educación Secundaria tiene una amplia formación matemática universitaria, por lo que puede establecer relaciones y conexiones entre los contenidos desde la propia matemática, siendo interesante comprender cómo este conocimiento se manifiesta en la tarea de enseñanza. Igualmente, examinar la actuación profesional del profesor de Educación Primaria, nos puede brindar información, especialmente sobre el conocimiento didáctico de los números racionales, sobre los modos de proceder en matemáticas y cómo estos se ponen en juego en el proceso de instrucción, dándonos una idea más clara del conocimiento profesional que se genera en su práctica sobre este contenido matemático.

En la sección siguiente revisamos el currículo español, principalmente los apartados relacionados con la enseñanza de los números racionales, debido a que los profesores sujetos de estudio de la investigación imparten su docencia en el sistema educativo español. Contemplamos a docentes de este sistema educativo por disponibilidad de los informantes (en la Comunidad Autónoma de Andalucía), por el contexto físico en donde desarrollamos la investigación y, finalmente, porque es un tema latente de estudio en el grupo de investigación DESYM (Formación Inicial y Desarrollo Profesional de los profesores de Ciencias-Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas), en el cual se enmarcan las actividades del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) del que forman parte la doctoranda y los directores de este trabajo.

1.1.3 Sistema educativo español

El sistema educativo de *España* está organizado en cinco niveles educativos: Infantil, Primaria, Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Educación Superior, como se ilustra en la Figura 1.

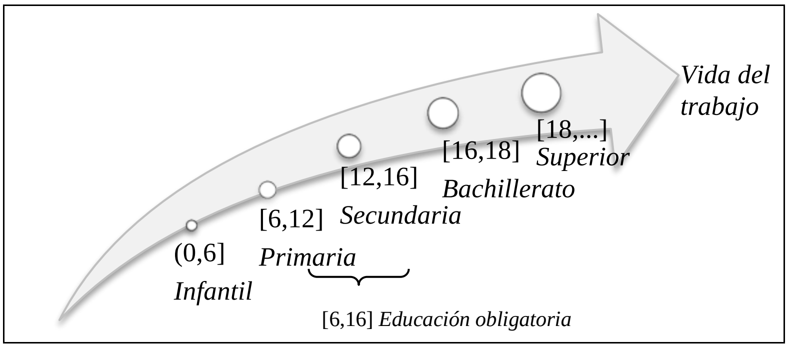


Figura 1. Niveles educativos en España

La Educación Infantil constituye la etapa educativa que atiende desde el nacimiento hasta los 6 años de edad; es de carácter no obligatorio. Por otra parte, la Educación Primaria tiene carácter obligatorio, comprende tres ciclos de dos años cada uno, que se siguen ordinariamente entre los 6 y 12 años de edad, como se detalla en la Tabla 1.

Tabla 1. *Educación Primaria diferenciada por ciclos educativos*

		Ciclo	Edad
Enseñanza Primaria	1°	Inicial (1º y 2º)	[6-8] años
	2°	Medio (3º y 4º)	[8-10] años
	3°	Superior (5º y 6º)	[10-12] años

La Educación Secundaria Obligatoria (ESO), como su nombre lo indica, es una etapa educativa obligatoria que atiende a estudiantes entre 12 y 16 años de edad y consta de cuatro cursos académicos (ver Tabla 2).

Tabla 2. *Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO)*

	Ciclo	Edad	
Enseñanza Secundaria Obligatoria	1°	[12-14] años	1° ESO
			2° ESO
	2°	[14-16] años	3° ESO
			4° ESO

La Enseñanza Secundaria Obligatoria completa la educación básica del sistema educativo español, que en total comprende diez años de escolaridad y se desarrolla de forma regular entre los 6 y los 16 años de edad. La finalidad de la educación obligatoria es proporcionar a todos los estudiantes una educación común que haga posible la adquisición de los elementos básicos culturales, los aprendizajes relativos a la expresión oral, a la lectura, a la escritura y al cálculo aritmético, así como una progresiva autonomía de acción en su medio.

El Bachillerato (Educación Secundaria Postobligatoria) es la etapa educativa posterior a la Educación Secundaria, es de carácter voluntario y pueden acceder los estudiantes que estén en posesión del título de graduado en Educación Secundaria Obligatoria. Comprende dos cursos académicos que se realizan entre los 16 y 18 años de edad. Tiene como finalidad formar y preparar a los estudiantes conforme a sus perspectivas e intereses de formación, que les permita incorporarse a la Educación Superior. Al concluir el bachillerato los estudiantes están habilitados para continuar su proceso educativo formal, a través de la Educación Superior. A continuación, detallamos los contenidos referentes a los números racionales según el currículo escolar español en los niveles mencionados.

Contenidos matemáticos descritos en el currículo educativo español

El currículo español se entiende como el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la Ley Orgánica de Educación 2/2006 del 3 Mayo. Este documento deja de manifiesto que el área de conocimiento de las matemáticas tiene un lugar importante en la educación básica, así como en los primeros cursos de bachillerato.

A lo largo de la escolaridad básica, los estudiantes han de aprender matemáticas utilizando contextos funcionales vinculados con situaciones de la vida diaria, para adquirir paulatinamente conocimientos más complejos, a partir de las experiencias y los conocimientos previos. Los objetivos que se buscan desarrollar en la Educación Primaria y en la ESO, en la enseñanza de la matemática, son los descritos en la Tabla 3.

Tabla 3. *Objetivos que se persigue desarrollar en la Educación Primaria y Secundaria*

Objetivos para Educación Primaria
- Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana.
- Reconocer situaciones de su medio habitual para cuya comprensión o tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlas mediante formas sencillas de expresión matemática o resolverlas utilizando los algoritmos correspondientes.
- Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de las actitudes como la exploración de distintas alternativas.
- Conocer, valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas para afrontar situaciones diversas.
- Elaborar y utilizar instrumentos y estrategias personales de cálculo mental y medida, así como procedimientos de orientación espacial.
- Utilizar de forma adecuada los medios tecnológicos tanto de cálculo como en la búsqueda, tratamiento y representación de información.
- Identificar formas geométricas del entorno natural y cultura, utilizando conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.
- Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno.
Objetivos para Educación Secundaria Obligatoria
- Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje modos de argumentación.
- Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos.
- Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permiten interpretar mejor.
- Identificar elementos matemáticos presentes en los medios de comunicación.
- Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana.
- Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos.
- Actuar frente a los problemas que se plantean en la vida cotidiana.
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas.
- Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas.

Tabla 3. *Objetivos que se persigue desarrollar en la Educación Primaria y Secundaria*

- Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo en las distintas áreas.
- Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura.

En el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006b), se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. En este documento se enuncian los contenidos correspondientes al eje de matemática en Educación Primaria organizándose en cuatro bloques temáticos: Números y operaciones, Medida, Geometría y Tratamiento de la información, azar y probabilidad. La resolución de problemas constituye uno de los ejes principales de la actividad matemática y es fuente y soporte principal del aprendizaje matemático en la educación básica. Nos centramos en los contenidos básicos de las enseñanzas mínimas descritos para matemáticas y específicamente en el bloque de Números y operaciones (que busca desarrollar el sentido numérico; es decir, el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que pueden expresarse en habilidades para descomponer números de forma natural, utilizar las propiedades y relaciones entre operaciones, entre otras).

En el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006c), se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. En este documento se enuncian los contenidos correspondientes a la materia de Matemáticas de los cuatro cursos que conforman la Educación Secundaria, al ser un área común en todos los niveles escolares. Los contenidos se distribuyen en cinco bloques: Números, Álgebra, Geometría, Funciones y Gráficas, y Estadística y Probabilidad, además, la resolución de problemas es un bloque de contenido común que constituye el eje transversal de los contenidos matemáticos.

En la Tabla 4, especificamos los contenidos matemáticos por cada nivel escolar, relacionados con los números racionales, correspondientes a Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria.

Tabla 4. *Contenidos correspondientes al eje de matemática en Educación Primaria y Secundaria*

	Educación Primaria
Ciclo	Bloque de Números
1° (Inicial)	- Situaciones de recuento, medida, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana. - Lectura y escritura de números (N), orden y relaciones entre números y

Tabla 4. *Contenidos correspondientes al eje de matemática en Educación Primaria y Secundaria*

	comparación de números en contextos familiares. - Operaciones, suma (juntar y añadir), resta (separar y quitar), multiplicar (números de veces) (N).
2° (Medio)	- Sistema de numeración decimal y el valor de posición de las cifras, en situaciones reales. - Números fraccionarios, en contextos reales, para expresar particiones y relaciones. - Comparar fracciones sencillas mediante ordenación y representación gráfica.
3° (Superior)	- Se persiste con el estudio de los números enteros, decimales y las fracciones. - Fracciones equivalentes, ordenar fracciones (por comparación y representación gráfica), expresión de partes utilizando porcentajes y establecer correspondencia entre fracciones sencillas. - Operaciones. - Porcentaje.
Educación Secundaria Obligatoria	
Curso	Bloques: Números, Álgebra, Geometría, Estadística y probabilidad
1º	- Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. - Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente. - Números decimales. Relaciones entre fracciones y decimales. - Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa. - Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales. - Identificar relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilizando de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.
2º	- Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Usar estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes. - Proporcionalidad directa e inversa, a través de análisis de tablas. - Razón de proporcionalidad. - Aumentos y disminuciones porcentuales. - Resolver problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa. - Proporcionalidad de segmentos y el teorema de Thales.
3º	- Números decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. - Fracción generatriz. - Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo. - Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Tabla 4. *Contenidos correspondientes al eje de matemática en Educación Primaria y Secundaria*

	- Representación en la recta numérica. Comparación de números racionales. - Sucesiones numéricas. - Sucesos equiprobables y no equiprobables.
4° (opción A)	- Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. - Porcentajes con aplicaciones a la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto.
4° (opción B)	- Comienzan a reconocerse los números que no pueden expresar en forma de fracción; es decir, inician el estudio del conjunto numérico de los números irracionales. - Razones trigonométricas y las relaciones entre las razones trigonométricas.

Está previsto que los estudiantes del sistema educativo español comiencen a estudiar las fracciones en el 2° ciclo (entre 8 y 10 años de edad), en este nivel se introducen números fraccionarios en contextos reales para expresar particiones y relaciones. Continúa el trabajo con la comparación y la ordenación de fracciones, siendo aconsejable trabajar inicialmente con la representación gráfica. En el tercer ciclo, se complementa el estudio de las fracciones, equivalencia, orden y fraccionamiento, siempre con representaciones y en contextos y problemas prácticos. Inician las operaciones con números fraccionarios, limitándose a sumas y restas entre fracciones con igual denominador. Por otra parte, se agrega al trabajo de los números racionales la notación decimal y los porcentajes, así como los problemas relacionados con ellos, estableciéndose correspondencia entre fracciones, decimales y porcentajes. La Figura 2 sintetiza los contenidos que se abordan en cada ciclo que comprende la Educación Primaria.

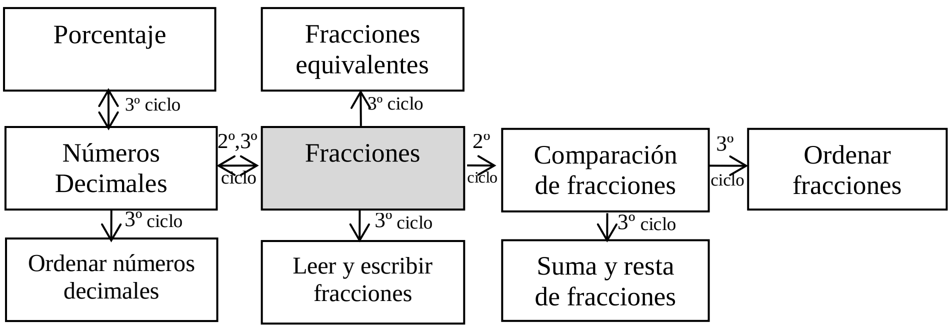


Figura 2. Contenidos relacionados con los números racionales abordados en la Educación Primaria

La enseñanza de los números racionales continúa en el curso 1º de la ESO, donde se relacionan de manera más extensa las expresiones decimales de los racionales, las operaciones con decimales y las relaciones entre la expresión fraccionaria y decimal. El currículo indica, explícitamente los diferentes significados y usos de las fracciones en contextos de la vida real, la simplificación y amplificación de fracciones, identificación y obtención de fracciones equivalentes. Igualmente, aparecen contenidos procedimentales, como la reducción de fracciones a común denominador llegando a la comparación de fracciones y las operaciones (suma, resta, producto y cociente). Otros temas que se abordan y que se relacionan con las fracciones son los porcentajes para expresar composiciones o variaciones, así como la razón y proporción, en las que los estudiantes han de identificar y utilizar situaciones en que aparezcan magnitudes directamente proporcionales.

En el curso 2º, extienden el trabajo a problemas aritméticos usando números fraccionarios. Además, establecen relaciones entre expresiones fraccionarias, decimales y porcentajes. Se amplía el concepto de proporcionalidad, identificando y utilizando situaciones de la vida cotidiana de magnitudes no sólo directamente proporcionales, sino también inversamente proporcionales. En el bloque de Geometría, se trabaja la proporcionalidad de segmentos y el teorema de Thales para establecer la razón entre superficies de figuras semejantes.

En el curso 3º, profundizan en los conceptos estudiados en los cursos anteriores, para llegar a explicitar el conjunto de los números racionales, sus relaciones internas (comparación, equivalencia y orden y representación en la recta numérica), así como las operaciones. Dentro del bloque de Álgebra, se trabajan las sucesiones numéricas. En el bloque de Estadística y probabilidad, se aborda el concepto y propiedades de la probabilidad.

En el último curso de la ESO, dependiendo de la opción elegida (A, B, de acuerdo con el currículo escolar) los estudiantes continúan con la resolución de problemas de la vida cotidiana referentes a la proporcionalidad directa e inversa y los porcentajes aplicados a la economía. Reconocen los números que no pueden expresarse en forma de fracción, extendiendo el trabajo a los números irracionales. En el bloque de Geometría, estudian las razones trigonométricas y las relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.

La Figura 3, presenta en síntesis los contenidos fijados para la asignatura de matemática correspondiente a los cursos de la ESO y concerniente al tema de los números racionales.

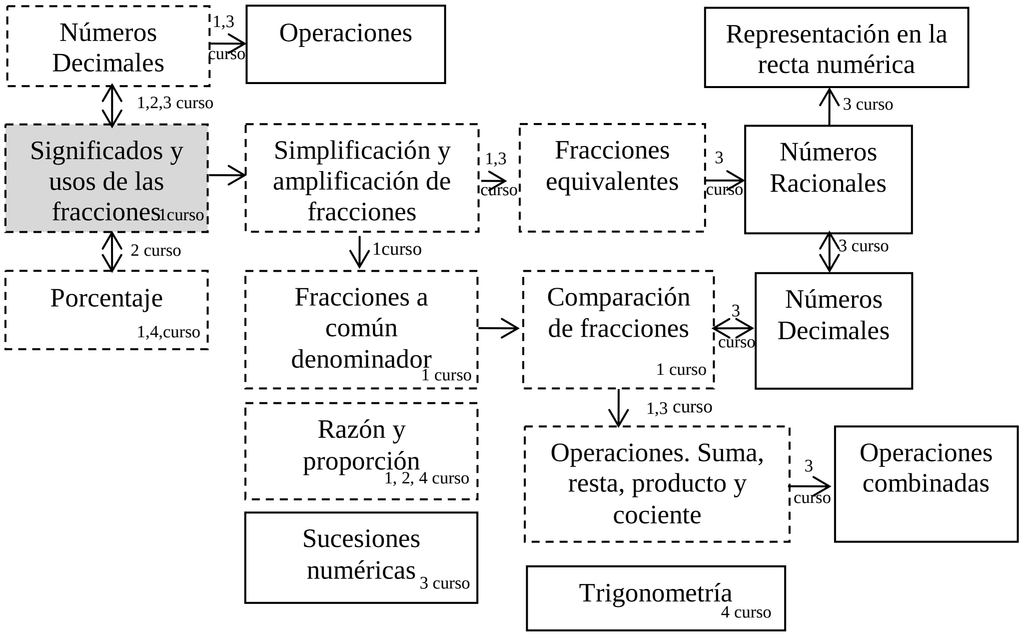


Figura 3. Contenidos relacionados con los números racionales abordados en los cursos 1°, 2°, 3° y 4° de la ESO

En la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a), se dispone la autonomía para establecer y adecuar las actuaciones organizativas y curriculares a las Comunidades Autónomas, a las corporaciones locales y a los centros educativos. En el caso de la Comunidad Autónoma de Andalucía, la Orden de 10 de agosto de 2007 (JA, 2007a; 2007b), desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, estableciendo, respecto de las Matemáticas, que la resolución de problemas, el uso adecuado de los medios tecnológicos y la dimensión social y cultural de las matemáticas, deben ser ejes transversales que han de estar presente en la construcción del conocimiento, tanto en la Enseñanza Primaria como en la Educación Secundaria Obligatoria. El documento enfatiza la idea de sentido numérico, que está estrechamente relacionada con la enseñanza y aprendizaje de los números, en general, y de los racionales, en particular. Con ello, se quiere destacar el papel funcional del aprendizaje matemático, así como la necesidad de relacionar los aprendizajes procedimentales con la comprensión de los procedimientos puestos en juego, y con los problemas que le dan sentido.

Revisados los contenidos establecidos en el currículo, correspondientes al sistema educativo español, y luego de presentar el área problemática de base de la investigación, pasamos a definir nuestro problema de estudio.

1.2 EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El aula es un sistema dinámico donde el profesor, los alumnos y el contenido son los agentes participantes (Goodchild y Sriramanp, 2012). El profesor es quien planifica y dirige la acción. La actuación del profesor está influenciada por el conocimiento profesional, que le permite diseñar, aplicar, actuar frente a las respuestas de los alumnos, improvisar unas acciones por otras, entre otros aspectos. Es de interés estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas manifestado en la acción de enseñar. Aprender sobre el conocimiento de los profesores, cómo le dan sentido en el aula, nos puede permitir apreciar el desarrollo profesional y la idiosincrasia de ellos. Asimismo, estudiar el conocimiento de profesores expertos, nos mostrará qué elementos caracteriza su condición de experto. Es especialmente interesante profundizar en el conocimiento especializado del profesorado para la enseñanza de las matemáticas (Carrillo *et al*., 2013); es decir, aquel conocimiento que se pone en juego cuando se tiene la intencionalidad de enseñar un contenido matemático.

Para efecto de esta investigación, nos focalizamos en comprender la especificidad del conocimiento de dos profesores expertos de matemáticas, concretamente el caso de un profesor de Educación Primaria y un profesor de Educación Secundaria que enseñan el tema de los números racionales. La Figura 4 sintetiza los elementos que fundamentan el problema de investigación.

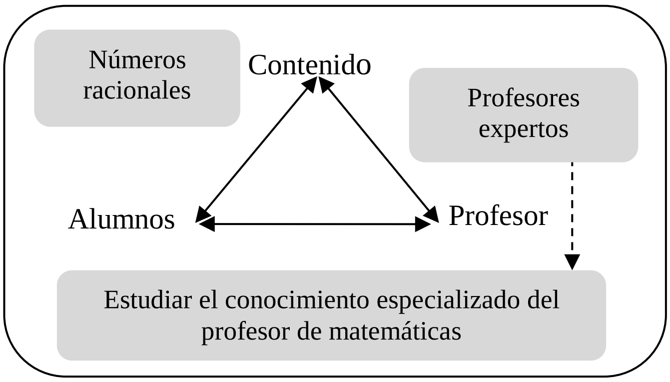


Figura 4. Elementos que fundamentan el problema de estudio

Estudiar la enseñanza de expertos nos permitirá mostrar evidencias del conocimiento especializado del docente que enseña matemática, ayudándonos a comprender mejor las características y naturaleza de ese conocimiento, lo que podemos emplear para elaborar propuestas de formación inicial y continua del profesorado.

Hemos elegido un contenido importante, los números racionales, que se comienzan a estudiar en Educación Primaria a partir del 2º ciclo y se prolonga a lo largo de los niveles escolares de la ESO. Por ello, los profesores informantes del estudio son docentes que enseñan en la educación básica. Específicamente, nos focalizamos en comprender el conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas que se refleja en la enseñanza impartida por un profesor de Educación Primaria, con título de Maestro con especialización en matemática, y un docente de matemática con formación de Licenciado de Matemáticas. Basamos esta selección con el propósito de profundizar en las ideas y conceptos matemáticos que los profesores organizan para la enseñanza de los números racionales y establecer relaciones entre las caracterizaciones de conocimientos reveladas por ambos profesores.

1.2.1 Pertinencia de la investigación

A lo largo del escrito ha quedado constancia de la relevancia de estudiar el conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. Considerando que la problemática es amplia y compleja, aproximarse a ella a través de estudios en profundidad (estudio de caso) permite ahondar en nuestra comprensión de cómo los profesores utilizan su conocimiento en la enseñanza y qué conocimientos se activan al enseñar un contenido. Para poder caracterizar el conocimiento, empleamos un modelo que lo organiza, el MTSK (Carrillo *et al*., 2013). Pretendemos que esta investigación nos lleve a afinar el modelo establecido de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), y que el estudio de casos nos suministre ejemplos concretos de momentos o episodios de clase, donde se activan distintos conocimientos, siendo un referente para ejemplificar a nivel teórico los diferentes subdominios de conocimiento que un profesor debe tener para abordar su tarea docente.

Igualmente, la caracterización del conocimiento de los profesores permite obtener indicadores que influyen en una buena práctica, lo cual puede servir como base para diseñar cursos de formación, elaborar planes de formación más acordes con las características de los docentes (Blanco, 1997), y ser una base para discusiones entre el profesorado, entre otras. Concretamente, el trabajo aportará indicadores de conocimiento sobre los números racionales.

Este estudio se enmarca en la línea de Formación de Profesores de Matemáticas, asimismo dentro de dos grandes grupos de trabajo que mencionamos en el apartado siguiente.

1.2.2 Líneas de investigación en las que se enmarca el estudio

Considerando que las investigaciones tienen lugar dentro de las comunidades de personas que establecen acuerdos colectivos que definen, regulan y normalizan las prácticas que se efectúan, dentro de la Educación Matemática, este trabajo es parte de la línea de investigación que tiene como foco de estudio al profesor de matemáticas y su avance como profesional: “Formación y Desarrollo de los Profesores de Matemáticas” (Cardeñoso *et al*., 2001, p. 235). En España, los tipos de investigaciones que se abordan bajo esta línea de investigación están relacionados con las concepciones y creencias de los profesores y sus consecuencias en el desarrollo de su práctica profesional, con el conocimiento profesional, su estructura y su evolución. Dentro de los dos bloques mencionados, este trabajo se concentra en las problemáticas sobre el conocimiento profesional del profesor, sus dimensiones, sus relaciones, su estructura; es decir, nos interesa estudiar qué conocimiento caracteriza al profesor de matemáticas al enseñar un tema en particular.

El estudio se realiza dentro del grupo de investigación (FQM193)[2] “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada, centrado en una de las líneas prioritarias de trabajo, “Formación de Profesores de Matemáticas”. Un importante foco de interés del grupo lo constituye el conocimiento numérico, en esta investigación consideramos los números racionales como base para profundizar en el conocimiento manifestado por profesores en la enseñanza de este tema matemático; siendo este conocimiento considerado como un fenómeno social y cultural.

Un elemento definidor del grupo ha sido el desarrollo y utilización de una herramienta, el *análisis didáctico*, pensada especialmente para el diseño e implementación de unidades didácticas. Partiendo del concepto de *análisis didáctico* que inició Luis Rico

[2] Grupo perteneciente al Plan andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

(Rico, 1997a; 1997b), se han realizado destacados trabajos con este fundamento (por ejemplo, Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009). Actualmente se ha caracterizado el constructo precisando su alcance y delimitando su relación con constructos próximos, como queda de relieve en el libro *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (Rico, Lupiáñez y Molina (Eds.), 2013). Tal como señalamos en dicho libro (Rojas, Flores y Ramos, 2013), la presente investigación considera el *análisis didáctico* con fines formativos e investigativos: a) formativo, como herramienta que permite al investigador profundizar en el contenido matemático escolar de los números racionales, desde el ámbito matemático y de la enseñanza, e b) investigativo, como herramienta que permite disponer de un referente amplio para identificar dominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, a partir de la observación de la práctica. Precisamente, el trabajo contribuye en este aspecto a establecer una relación teórica entre los elementos que componen el *análisis didáctico* y los subdominios de conocimientos especializado del profesor de matemáticas (del modelo MTSK), que nos lleva a acceder e identificar distintos tipos de conocimiento a partir de la observación del aula. Estos aspectos se explicitan en el siguiente capítulo.

Además, esta investigación tiene como punto de partida los trabajos desarrollados en la línea del conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas por el SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática), coordinado por José Carrillo Yáñez, dentro del grupo de investigación DESYM (Formación Inicial y Desarrollo Profesional de los profesores de Ciencias-Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas), cuyo código PAI es HUM 0168, y posee su sede en el Departamento de Didáctica de las Ciencias de la Universidad de Huelva.

Los trabajos del grupo están relacionados con las concepciones y creencias de los profesores y las consecuencias en el desarrollo de su práctica profesional, asimismo con el conocimiento profesional, su estructura y su evolución. En estos trabajos se profundiza en el caso de un número reducido de profesores en formación continua, lo que permite profundizar en realidades particulares, donde se busca principalmente describir y comprender el proceso de desarrollo profesional de los sujetos participantes en las investigaciones. En la dirección que estudia el conocimiento profesional del profesor de matemáticas las investigaciones más actuales (Ribeiro, 2010; Sosa, 2010) se centran en comprender el conocimiento matemático para la enseñanza que manifiestan los profesores en la acción y, a su vez, en identificar dimensiones o subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza. En esta última línea de trabajo se enmarca la presente investigación, que busca comprender en profundidad el conocimiento especializado que manifiestan los profesores en su actuación docente, al enseñar el tema de los números racionales.

1.2.3 Objetivo general y específico de la investigación

Describir, identificar y caracterizar el conocimiento especializado que manifiesta un profesor de Educación Primaria y un docente de Educación Secundaria, al enseñar el contenido matemático de los números racionales.

Objetivos específicos

El objetivo general se concreta en seis objetivos específicos, como se ilustra en la Figura 5 y en su posterior descripción.

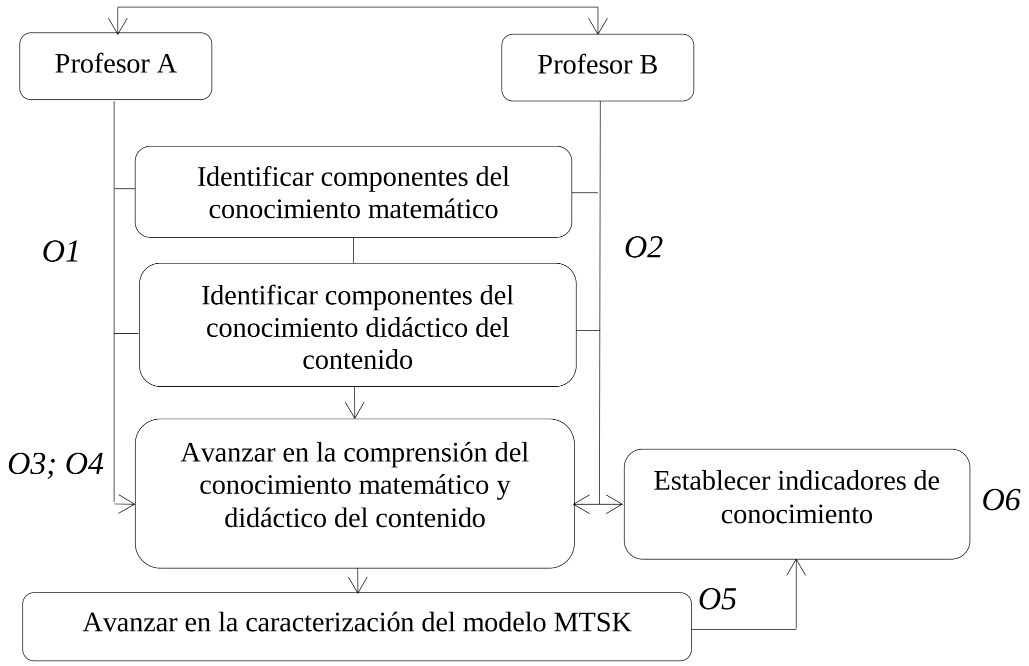


Figura 5. Objetivos específicos que guían la investigación

Con los objetivos específicos *O1*, *O2*, *O3* y *O4* pretendemos identificar, profundizar y comprender el conocimiento matemático especializado que manifiestan dos profesores al enseñar el tema de los números racionales. A partir de la comprensión del conocimiento de los profesores, proyectamos profundizar en la caracterización del modelo teórico de conocimiento empleado en el estudio, que corresponde a los objetivos *O5* y *O6*.

O1: Identificar qué componentes del conocimiento matemático especializado para la enseñanza pone en juego un profesor experto de Educación Primaria al enseñar el contenido de los números racionales.

O2: Identificar qué componentes del conocimiento matemático especializado para la enseñanza pone en juego un profesor experto de Educación Secundaria al enseñar el contenido de los números racionales.

O3: Avanzar en la comprensión del conocimiento matemático especializado de un profesor experto de Educación Primaria al enseñar el contenido de los números racionales.

O4: Avanzar en la comprensión del conocimiento matemático especializado de un profesor experto de Educación Secundaria al enseñar el contenido de los números racionales.

O5: Avanzar en la caracterización de los subdominios del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.

O6: Establecer indicadores y subcategorías de conocimiento referentes al contenido matemático escolar de los números racionales.

RESUMEN

Una línea de investigación importante en Educación Matemática es la relacionada con la caracterización del conocimiento profesional de los profesores (Ponte y Chapman, 2006). Situados en la perspectiva práctica, es de interés profundizar en el conocimiento especializado del profesorado para la enseñanza de las matemáticas.

Para efecto de esta investigación, hemos delimitado el problema de investigación focalizándonos en comprender la especificidad del conocimiento de dos profesores expertos de matemáticas, concretamente el caso de un profesor de Educación Primaria y un profesor de Educación Secundaria, que enseñan el tema de los números racionales.

Capítulo 2

Marco de referencia de la investigación

Índice del capítulo

Marco de referencia de la investigación

Teniendo en vista profundizar en el conocimiento matemático para la enseñanza que ponen en juego profesores de matemáticas expertos, al enseñar el tema de los números racionales, surge la necesidad de definir algunos conceptos referentes a nuestro problema de investigación. Esto nos lleva a desarrollar tres ejes fundamentales en este capítulo: el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, el *análisis didáctico* y la conceptualización de profesor experto.

Con vista a un encuadre del tema, primero presentamos las bases teóricas de la investigación respecto del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Exponemos algunos antecedentes sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, destacando distintos modelos teóricos para estudiar el conocimiento del profesor; finalmente, presentamos el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), referente principal en este estudio. Este modelo nos permitirá estudiar en profundidad el conocimiento del profesor de matemáticas en su acción docente.

Luego, exponemos el *análisis didáctico* que se fundamenta en los trabajos desarrollados por el grupo «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Rico, 1997a; Rico 1997b; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), que lleva a definir y precisar variadas categorías e indicadores de conocimiento para aproximarnos a una comprensión profunda del conocimiento del profesor en la práctica. Por último, enunciamos investigaciones relacionadas con profesores expertos, que nos permiten conceptualizar qué se entenderá por docente experto en la investigación.

2.1 El conocimiento profesional del profesor de matemáticas

Sánchez (2011) identifica las principales tendencias de investigación en el campo de la formación de profesores, diferenciando: a) investigaciones actuales en el área de interés de los investigadores en formación de profesores, b) conceptos teóricos empleados, y c) las nuevas tendencias. Destaca que estudiar la práctica de los profesores es dominante en la línea de formación del profesorado, buscando caracterizar las acciones que realizan en el aula, y comprender los factores de formación y promoción de su desarrollo. El autor considera que las investigaciones en esta área ponen de relieve la importancia de estudiar el conocimiento profesional de los profesores, distinguiéndose dos tipos de estudios: aquellos que se centran en contribuir al dominio de conocimiento que los profesores necesitan para la enseñanza, y otros que buscan la manera de ayudar a los docentes a adquirir ese conocimiento.

Por otra parte, en los congresos nacionales e internacionales también queda de relieve la preocupación por esta línea de estudio. Por ejemplo, en el PME 33, celebrado en Tesalónica (Grecia), el primer *Research Fora* aborda el tema del conocimiento del profesor para la enseñanza (Ball, Charalambous, Thames y Lewis, 2009). Los ponentes analizan, cada uno desde su perspectiva, un video de una maestra novel y otra experimentada, exhibiendo la complejidad del conocimiento profesional de los profesores. En las reuniones posteriores los trabajos clasificados según el dominio *Teacher Knowledge* siguen siendo destacados.

Desde la mitad del siglo XX a la actualidad ha habido cambios trascendentales en lo que se considera el conocimiento profesional de un docente de matemáticas, proponiéndose una mirada que integra el conocimiento disciplinar y el didáctico (Carrillo, Contreras y Flores, 2013; Even y Ball, 2009). Uno de los momentos importantes para el estudio del conocimiento profesional del profesor fueron los trabajos de Shulman (1986; 1987), que buscaban resaltar la importancia del conocimiento del contenido para la enseñanza y diferenciarlo del conocimiento del contenido que tienen otros profesionales. Estos trabajos centraron su atención en el profesor desde una perspectiva del conocimiento del contenido para la enseñanza y materia a enseñar, intentando contrarrestar lo producido en los años 80, donde el interés se enfocaba en los aspectos generales de la enseñanza, más que en el conocimiento del profesor como enseñante de un contenido.

Los trabajos de Shulman han sido reconocidos como precursores en llamar la atención sobre el conocimiento que debe tener un profesor para la enseñanza de su disciplina, proponiendo tres dominios de conocimiento que se requieren para la enseñanza: conocimiento del contenido a enseñar, conocimiento didáctico del contenido[3] y conocimiento curricular. El primer tipo de conocimiento hace alusión a la "cantidad y organización del conocimiento, como tal, en la mente del profesor" (Shulman, 1987, p.9), e incluye la comprensión de los factores principales, como por ejemplo, el conocimiento sobre la materia y el marco explicativo de la materia. Mientras que el conocimiento didáctico del contenido alude, más específicamente, al conocimiento de la materia para la enseñanza, concretamente a los modos de representar y enunciar el contenido para hacerlo comprensible a los demás. Este dominio incluye comprender las características del alumno y del contexto educativo, seleccionar con claridad las metas educativas, disponer de bases filosóficas e históricas, identificar el grado de dificultad en el aprendizaje de determinados temas, etc.

Por último, el conocimiento curricular queda constituido por el conocimiento de los materiales para la instrucción, válidos para enseñar. Por ejemplo, los programas y materiales diseñados para la enseñanza, que sirven al profesor de herramientas para presentar el contenido.

La nueva perspectiva introducida por Shulman (1986; 1987) guía a los investigadores a centrarse en el conocimiento del contenido de los profesores (Sherin *et al*., 2000), específicamente en las habilidades de las estructuras mentales de los docentes (Leinhardt y Greeno, 1986) y en las habilidades de los profesores para la enseñanza (Ball, 2000; Ma, 1999). Estas líneas tienen la intención de generalizar, así como profundizar en la comprensión del conocimiento necesario para la práctica de enseñanza (Törner, Rolka, Rösken y Sriraman, 2010).

Todo este proceso de evolución impulsa un cambio en la consideración del papel del profesor, del conocimiento relacionado con la enseñanza, y de la correspondencia entre conocimiento y práctica (Llinares, 1995). Las investigaciones llegan a relacionar el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (Bromme, 1988) con el conocimiento

[3] Traducción de la expresión en inglés *Pedagogical Content Knowledge*, en la literatura en español es frecuente la traducción a conocimiento didáctico del contenido, por sugerencia de Marcelo (1993), como nos referimos en este trabajo.

del profesor, adquiriendo una idea fundamental del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

El profesor tiene un conocimiento profesional que se distingue del conocimiento académico de los formadores matemáticos (en su naturaleza teórica, declarativa o formal), y también del común de las personas. Este conocimiento está orientado para una actividad práctica (para la enseñanza de las matemáticas a un grupo de alumnos), sobre la base de los conocimientos teóricos (sobre la matemáticas, la educación en general y la enseñanza de las matemáticas) y también considerando la naturaleza social y vivencial (en los estudiantes, la dinámica del aula, los valores y cultura de la comunidad, la participación de la comunidad escolar y profesional, etc.) (Ponte, 2012, p.3). En efecto, el conocimiento profesional del profesor se considera como resultado de la experiencia práctica acumulada en la realización de tareas docentes específicas (Estepa, 2000; Llinares y Sánchez, 1990), que se va construyendo desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional (Climent, 2002).

Una línea de trabajo que inició Shulman (Shulman, 1986; Wilson, Shulman y Richert, 1987) distingue entre el conocimiento y el proceso de razonamiento del profesor, como dos aspectos que se complementan: qué conocimiento tiene (o debe tener) el profesor y cómo se detenta (manifiesta, organiza, etc.) ese conocimiento. En esta segunda línea aparecen constructos como las creencias y las concepciones, que son elementos en los que se apoya el conocimiento (Ponte, 1992).

Las creencias son consideradas como verdades personales con elementos evaluativos y afectivos, mientras que las concepciones se refieren a esquemas que organizan los conceptos, formándose como resultado y confrontación de la elaboración de nuestras propias experiencias, siendo su naturaleza, fundamentalmente, cognitiva (Ponte, 1994). Por tanto, las concepciones estarían implícitas en el pensamiento de las personas y permitirían organizar determinados conceptos, son primordiales para la estructura del significado que le atribuimos a las cosas y actúan como entidades bloqueadoras en diversas situaciones (Ponte, 1992). Consecuentemente, el conocimiento que comprenden las concepciones, se basa especialmente en la experiencia y reflexión, es fundamentalmente conocimiento en la acción, que conforme se fundamenta y se relaciona tanto con teorías como con experiencia y reflexión sobre la práctica, se convertirá en conocimiento.

Queda de relieve que el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas incluye una diversidad de aspectos, de los cuales, en este estudio nos interesan aquellos que se activan al enseñar, especialmente buscamos profundizar en el conocimiento que el profesor presenta en su práctica y en cómo lo organiza al enseñar matemáticas.

2.1.1 El conocimiento necesario para enseñar matemáticas

Las investigaciones centradas en los conocimientos que los profesores necesitan para la enseñanza, poseen una dualidad dentro de la Educación Matemática, que comprende el conocimiento que un profesor "tiene" y el conocimiento que un docente "debe tener" con el objeto de producir buenas enseñanzas (Liljedahl *et al*., 2009, pp.29-30).

En la actualidad se reconoce que un profesor de matemáticas debe tener un profundo conocimiento, no sólo de las matemáticas específicas que enseña, sino también requiere de un cuerpo amplio y altamente organizado de conocimiento que le permita desarrollar su tarea docente (Bromme, 1994; Fennema y Franke, 1992; Peterson, 1988; Ponte, 2011; Shulman, 1986; Steele y Rogers, 2012; Sullivan, 2008). Las investigaciones sobre la enseñanza han pretendido describir y comprender el conocimiento para la enseñanza; con el objeto de intentar mejorar la enseñanza y proporcionar información válida para la formación del profesorado (Imbernón, 1989, p. 9).

En la literatura se proponen distintas conceptualizaciones sobre qué conocimiento debe tener un profesor para enseñar matemáticas, buscando definir, en algunos casos, modelos de conocimientos del profesor de matemáticas (Ball, 2000; Ball *et al*., 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Davis y Simmt, 2006; Ernest, 1989; Fennema y Franke, 1992; Grossman, 1990; Hill, Ball y Schilling, 2008; Llinares y Krainer, 2006; Ponte, 2012; Ponte y Serrazina, 2004; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005).

Fennema y Franke (1992) conceptualizan el conocimiento necesario para la enseñanza a partir de los trabajos de Shulman, modificando los dominios de cocimientos y considerando que el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas debe ser dinámico e interactivo. Definen un modelo de conocimiento del profesor centrado en las matemáticas, que puede ser empleado para describir qué conocimiento necesitan los profesores para enseñar esta disciplina. Es un modelo centrado en el conocimiento del profesor y en cómo éste se refleja en el contexto del aula. Contempla cuatro componentes: conocimiento del contenido (*Knowledge of the Content*); conocimiento didáctico (*Knowledge Pedagogical*); conocimiento de la cognición de los estudiantes (*Knowledge of Students' Cognition*); y las creencias de los profesores (*Teacher's Beliefs*), como se ilustra en la Figura 6.

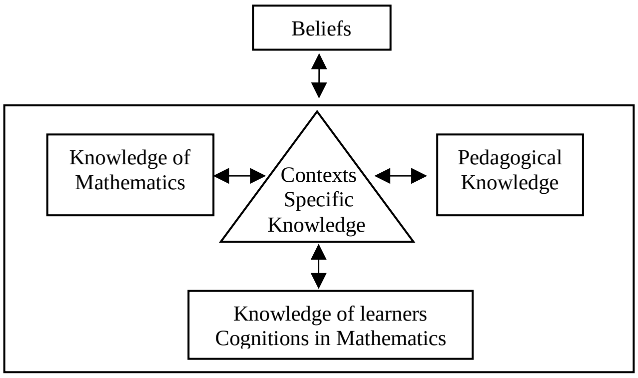


Figura 6. Conocimiento del profesor (Fennema y Franke, 1992, p.162)

En el centro del modelo se encuentra el conocimiento de los contextos específicos. El contexto es la estructura que define los componentes del conocimiento y las creencias que entran en juego. El conocimiento y las creencias de los profesores, se consideran como elementos que influyen en cómo el profesor comprende la enseñanza de las matemáticas, dentro de un contexto determinado. Estos tipos de conocimientos interactúan formando un conjunto único de conocimiento que impulsa el comportamiento en el aula.

El conocimiento del contenido matemático incluye el conocimiento de los conceptos, los procedimientos y los procesos de resolución de problemas, además envuelve el dominio de los contenidos relacionados con el tema. Asimismo, comprende el conocimiento de los conceptos implícitos en los procedimientos, la interrelación entre los conceptos, y en cómo se utilizan los conceptos y procedimientos en determinados problemas. El conocimiento didáctico incluye el conocimiento de los procedimientos como estrategias efectivas para la planificación, la gestión y la organización de clase, y las técnicas motivacionales, además de los principios y estrategias de la gestión del aula.

Relacionado con la cognición de los estudiantes se incluye el conocimiento de cómo ellos piensan y aprenden un contenido matemático. Este componente incluye, además, el conocimiento de cómo los estudiantes adquieren los contenidos matemáticos, las dificultades y los éxitos que enfrentan en los procesos de aprendizaje.

En síntesis, este modelo de conocimiento propone trabajar bajo un contexto específico. El conocimiento del contenido de los profesores se relaciona con el conocimiento didáctico y con el de la cognición de los estudiantes, todo esto combinado con las creencias, generando así el conocimiento que determina cómo enseña el profesor.

Más recientemente, el grupo de investigación de la Universidad de Michigan, liderado por Deborah Ball, se centra en el estudio de la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar y el desarrollo de medidas que hacen posible el análisis de relaciones entre el conocimiento matemático para la enseñanza, la calidad de su enseñanza y el rendimiento de los estudiantes (Ball y Bass, 2009; Hill, Blunk, Charalambous, Lewis *et al*., 2008).

Los trabajos desarrollados por Ball y colaboradores tienen gran repercusión en Educación Matemática por la extensión de sus estudios y la cualidad analítica de sus propuestas para el estudio sobre el conocimiento del profesor (Ball, 2000; Ball *et al*., 2008 y Hill, Ball *et al*., 2008). Se trata de un modelo que surge de la observación de la práctica en el ámbito matemático, identificando las tareas habituales que realizan los profesores, que requieren conocimientos específicos, razonamiento y conocimiento de la materia (Ball *et al*., 2005).

Estos trabajos han analizado la naturaleza del conocimiento matemático y cómo este puede ayudar en la enseñanza, lo que lleva a establecer una base práctica basada en lo que se denomina conocimiento matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT[4]), que es una clase de conocimiento profesional de las matemáticas diferente del exigido en otras ocupaciones matemáticas (por ejemplo, física, contabilidad).

Hill, Ball *et al*. (2008) conceptualizan la noción de conocimiento matemático para la enseñanza como "el conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos" (p.374). Desde esta perspectiva, podemos distinguir este conocimiento como específico y propio de los profesores, que implica, por ejemplo, analizar los errores de los alumnos, examinar las estrategias utilizadas para la resolución de una tarea matemática, poder explicar cuando no comprenden los alumnos, saber responder a cuestiones matemáticas, evaluar las

[4] A lo largo del escrito se conservan las siglas en inglés del modelo y de cada subdominio que lo compone.

cualidades de los materiales de enseñanza, disponer de representaciones, de recursos para explicar un concepto y explicitar argumentos sólidos para evidenciar que un procedimiento funciona. Para ello el profesor no sólo debe reunir una sólida base de conocimiento matemático, sino que también ha de complementar su tarea con un conocimiento específico para la enseñanza.

Los estudios del equipo de investigación mencionado han logrado caracterizar en detalle el conocimiento matemático para la enseñanza, basándose en los componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman. Plantean un modelo en el que distinguen dos grandes dominios de conocimiento: (a) *conocimiento del contenido matemático* (MK) y (b) *conocimiento didáctico del* contenido (PCK), proponiendo una división de los dominios en tres subdominios específicos, como se ilustra en la Figura 7.

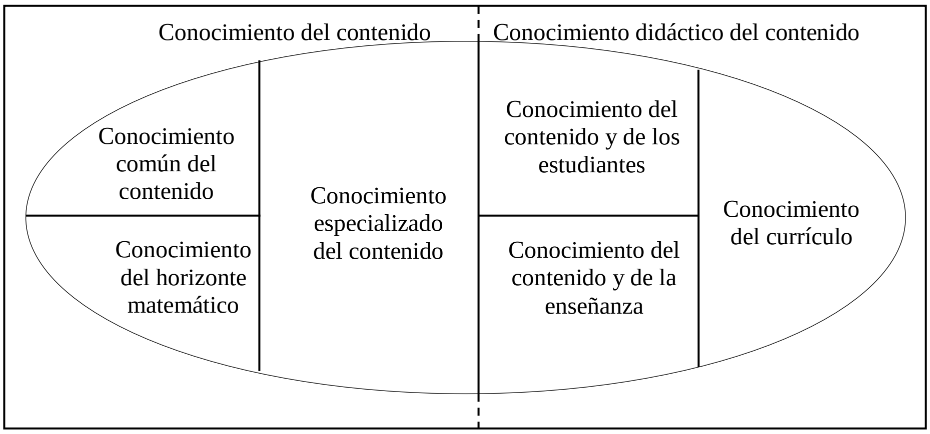


Figura 7. Dominios de conocimiento matemático para la enseñanza
(Hill, Ball y Schilling, 2008, p.377)

(a) El *conocimiento del contenido* está compuesto por tres subdominios de conocimiento:

El *conocimiento común del contenido* es descrito como el “conocimiento matemático y habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza” (Ball *et al*., 2008, p.399). Incluye el conocimiento que el profesor pone en juego para resolver problemas matemáticos, operar correctamente y aplicar definiciones y propiedades. Los autores han examinado este conocimiento a partir de cuestionarios planteados a los profesores, que incluyen cuestiones sobre, por ejemplo, ordenar números decimales, determinar un decimal entre otros dos, justificar si un cuadrado es un rectángulo, si 0/7 es 0, o si las diagonales de un paralelogramo son necesariamente perpendiculares. Todas ellas son situaciones a las que cualquier persona con un cuerpo discreto de conocimientos matemáticos básicos, puede dar respuesta (Davis, 2012).

El *conocimiento especializado del contenido* alude al "conocimiento matemático y habilidad exclusiva para la enseñanza" (Ball *et al*., 2008, pp.400-401). El profesor, para desarrollar las tareas de enseñanza, requiere un conocimiento que le permita participar en tal actividad, incluyendo, por ejemplo, seleccionar qué tareas representan las ideas de manera clara a los estudiantes, qué explicaciones matemáticas son precisas y adecuadas, examinar o comprender métodos excepcionales de resolución de problemas (Ball *et al*., 2005). Los autores han apreciado este conocimiento a partir de cuestionarios en los que incluyen ítems para examinar si el profesor sabe, por ejemplo, cómo elegir y usar representaciones matemáticas eficaces, examinar y conocer ventajas e inconvenientes de usar rectángulos o círculos para comparar fracciones, justificar por qué se invierte uno de los términos al dividir fracciones para realizar la operación de multiplicación, entre otros; es decir, situaciones exclusivas de la enseñanza que conllevan aplicar un saber flexible.

El *conocimiento del horizonte matemático* es definido como "el conocimiento que tiene el docente de cómo están relacionados los temas matemáticos incluidos en el currículo" (Ball *et al*., 2008, p.403). Puede considerarse como el conocimiento sobre las relaciones entre los distintos temas matemáticos y la forma en que el aprendizaje de los temas evoluciona en los distintos niveles escolares. En términos de lo que definen Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu (2011), puede entenderse como aquellas relaciones que enlazan los conocimientos previos y futuros, permitiendo, por ejemplo, estudiar otras propiedades de un concepto o procedimientos en situaciones nuevas o más complejas. Por ejemplo, los docentes de Educación Primaria, necesitan saber cómo están relacionadas las matemáticas que ellos enseñan con aquellos contenidos que los alumnos aprenderán en cursos posteriores.

(b) Ball *et al*. (2008) y Hill, Ball *et al*. (2008) describen el domino de *conocimiento didáctico del contenido* como la composición de tres subdominios de conocimiento:

El *conocimiento del contenido y de los estudiantes* es definido como el "conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular" (Hill, Ball *et al*., 2008, p.375). Es decir, es el conocimiento que se utiliza en tareas de enseñanza que implica atender a un contenido específico y aspectos particulares de los alumnos. Por ejemplo, incluye el conocimiento de las dificultades más habituales y los errores comunes que presentan los estudiantes. Los profesores que tienen conocimiento del contenido y de los estudiantes, por ejemplo, reconocen que ciertos aspectos de los números naturales constituyen un obstáculo de aprendizaje al trabajar con los números decimales, además distinguen algunas de las dificultades de aprendizaje que se presentan (por ejemplo, cuando los estudiantes establecen que 13.2 es menor que 13.17 porque 2 es menor que 17; 1.121 es mayor que 1.21 porque el primer número tiene más cifras decimales).

El *conocimiento del contenido y la enseñanza* queda definido como "el conocimiento que combina el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático" (Ball *et al*., 2008, p. 401); es decir, abarca saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para lograr su aprendizaje y para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas. Los autores han detectado este conocimiento en las respuestas de los profesores al observar, por ejemplo, qué estrategias tienen previstas para afrontar las dificultades que se producen en el aprendizaje de un contenido.

Por último, el *conocimiento del currículo* alude al conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes (Ball *et al*., 2008, p.391).

El Cuarteto de Conocimiento (*The Knowledge Quartet* − KQ) es otro modelo de conocimiento que se destaca en la literatura. Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) introducen esta herramienta para reflexionar sobre las formas en que el conocimiento del profesor entra en juego en el aula. El modelo KQ surge de la observación y grabación de situaciones de clases de matemáticas, que conllevan estudiar el conocimiento de los contenidos matemáticos, de los profesores en formación de Educación Primaria, y las formas en que este conocimiento se manifiesta tanto en los procesos de planificación como en la enseñanza. Las dimensiones de conocimiento del KQ son las siguientes: *Foundation*, *Transformation*, *Connection* y *Contingency*.

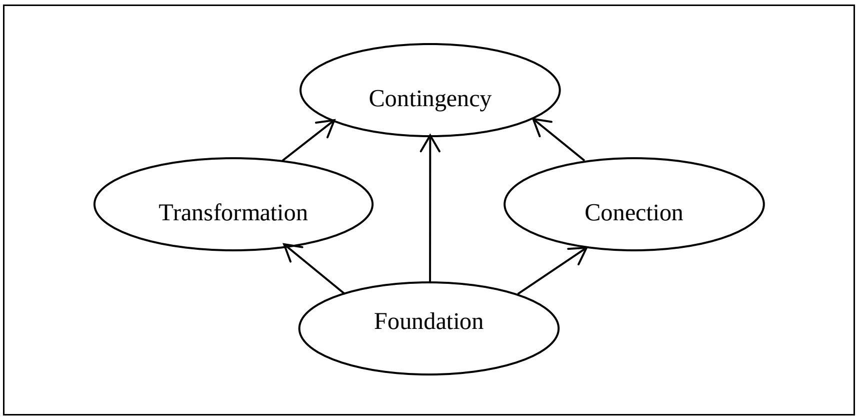


Figura 8. Dimensiones de conocimiento del Knowledge Quartet (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005)

La categoría *Foundation* incluye el conocimiento, las concepciones y las comprensiones adquiridas antes y durante la formación académica; la *Transformation* se ocupa de aspectos del conocimiento en la acción, tal como se pone de relieve durante la planificación y la enseñanza. Está íntimamente relacionado con el uso de representaciones adecuadas del contenido, de ejemplos y de demostraciones de procedimientos. La dimensión *Connection* se refiere al conocimiento que despliegan los profesores cuando establecen conexiones entre las distintas partes del contenido matemático; es decir, se combinan algunas decisiones y elecciones respecto del contenido matemático. Incluye la secuenciación del material para la instrucción y la consideración de las demandas cognitivas que cada tema y tarea requieren. Por último, la dimensión de *Contingency* se manifiesta en aquellas situaciones en las que los profesores han de responder ante eventos inesperados que emergen durante la instrucción (Rowland, 2007; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Rowland, Thwaites y Jared, 2011).

En general, es un marco para observar, describir y discutir el papel que desempeña el conocimiento del contenido, incluyendo el conocimiento didáctico, que tiene el profesor y cómo lo implementa en su práctica (se relaciona con el cómo es el conocimiento). En la actualidad se sigue refinando el KQ, además se busca ampliar su implementación a la Educación Secundaria, asimismo extrapolarlo a un nivel internacional.

Considerando que no es suficiente que los profesores conozcan los contenidos matemáticos, que hay mucho más, Sullivan (2008) adopta tres perspectivas para establecer el conocimiento necesario para enseñar: el conocimiento de las matemáticas, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento de la pedagogía. Bajo esta perspectiva un profesor debe ser capaz de responder a las preguntas de los estudiantes correctamente; anticipar los métodos intuitivos; enseñar lo que está previsto en el currículo, etc. También incluye apreciar las dificultades que los estudiantes pueden experimentar; ser consciente de que las lecciones pueden ser estructuradas para que el aprendizaje sea producto de exploración de los estudiantes; saber cómo plantear tareas de enseñanza; saber esperar antes de ofrecer orientación; evaluar el aprendizaje de los alumnos; y llevar a cabo de manera eficaz un debate en el que se fomente que los estudiantes manifiesten sus opiniones.

Ponte (2012) enuncia un modelo centrado en el conocimiento didáctico de las matemáticas. Propone un modelo de conocimiento que se interesa por aquellos aspectos del conocimiento profesional del profesor, que se refieren a la práctica docente y que se focaliza en el conocimiento didáctico del contenido. En el modelo distingue cuatro tipos de conocimiento: el conocimiento de las matemáticas, el conocimiento del currículo, el conocimiento del estudiante y sus procesos de aprendizaje, y el conocimiento de los procesos de trabajo en el salón de aprendizaje (Ponte, 2012; Ponte y Oliveira, 2002).

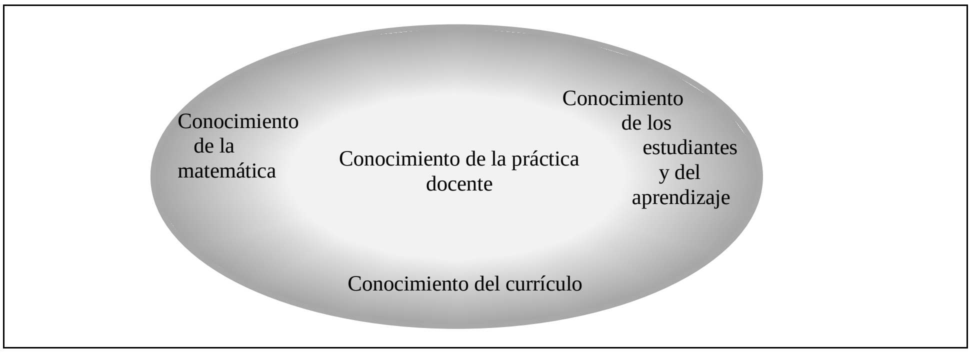


Figura 9. Componentes del conocimiento didáctico (Ponte, 2012, p. 4)

El modelo tiene como núcleo el campo relativo al conocimiento de la práctica docente, siendo el eje fundamental del conocimiento didáctico. La práctica docente puede entenderse como esa actividad llevada a cabo con regularidad por el profesor, teniendo en cuenta el contexto de su trabajo y sus significados e intenciones (Ponte y Chapman, 2006). Por tanto, este foco incluye la planificación a medio y largo plazo, el diseño del plan de cada clase, la elaboración de tareas de enseñanza, y en general todo lo relacionado con el proceso de instrucción (Ponte, 2012, pp. 4-5).

El conocimiento didáctico se centra directamente en las especialidades de la disciplina. No se trata del conocimiento de la matemática como ciencia, sino de las interpretaciones que hace el profesor para su enseñanza. Incluye los conceptos y procedimientos fundamentales de la disciplina, las distintas formas de representar los conceptos y las conexiones internas y externas a la disciplina. También incluye el conocimiento de los estudiantes y de sus procesos de aprendizaje. Es una condición esencial para el éxito de su trabajo que el profesor conozca a sus estudiantes como personas con sus propios intereses, gustos, su manera habitual de reaccionar, sus valores, etc.

Por último, el conocimiento didáctico abarca el conocimiento del currículo, cómo los docentes gestionan el contenido curricularmente. Incluye el conocimiento de los principales fines y objetivos de la enseñanza de las matemáticas y de la organización de los contenidos, además de conocer los materiales y las formas de evaluación más empleadas.

Existen otros modelos de conocimiento que articulan distintas nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Godino, Batanero y Font (2007) proponen un marco teórico para la Didáctica de las Matemáticas denominado Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), que brinda herramientas de análisis y de reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, además permite analizar y comprender de manera sistemática y profunda el conocimiento del profesor de matemáticas. Godino (2009) propone un refinamiento de los subdominios del MKT a partir de la consideración de las facetas epistemológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, con correspondientes niveles de análisis y consignas para su evaluación.

También encontramos en la literatura modelos centrados en aspectos cognitivos, como el de Silverman y Thompson (2008), quienes describen un marco para el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza (desde una perspectiva constructivista), que busca que los profesores generen estructuras conceptuales conectadas, de tal modo que intenten desarrollar estas mismas estructuras conceptuales en sus estudiantes.

Algunos de los modelos de conocimiento presentados han sido sometidos a diversas críticas y revisiones por parte de los investigadores; sin embargo, son herramientas útiles para diferenciar los componentes de conocimiento que un docente “debe tener” para una enseñanza efectiva, al mismo tiempo para profundizar en la naturaleza del conocimiento matemático necesario para la enseñanza.

Las perspectivas enunciadas reconocen la complejidad del conocimiento matemático para la enseñanza. Buscan avanzar en la comprensión del conocimiento de los docentes y de la relación con la enseñanza. A pesar de los avances en esta línea de investigación, todavía se está buscando desenredar la complicada relación existente entre los conocimientos de los profesores, sus prácticas de enseñanza y el aprendizaje de los alumnos (Ball, Charalambous, Thames y Lewis, 2009; Mewborn, 2003). Bajo esta dirección, en el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva[5] (España), liderado por José Carrillo, se está buscando determinar, de modo preciso, de qué naturaleza es cada dominio de conocimiento del profesor necesario para su práctica.

Partiendo de los trabajos sobre el MKT que han supuesto un avance por caracterizar los dominios de conocimiento del profesor de matemáticas, este grupo ha encontrado algunos problemas de delimitación de los componentes del modelo MKT, que lo llevan a avanzar en una reformulación desde una perspectiva que entiende todo el conocimiento del profesor como especializado. De este modo, surge el modelo de *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* – MTSK).

Los problemas de delimitación del modelo MKT han supuesto una importante fuente de dificultades en la investigación, especialmente para identificar episodios de conocimiento según los subdominios, llevando a plantear problemas de operatividad para caracterizarlo y delimitarlo (Carrillo, Contreras y Flores, 2013; Escudero, Flores y Carrillo, 2012). Como los mismos autores del modelo MKT reconocen, los subdominios del conocimiento del profesor no suponen una clasificación exhaustiva del conocimiento del profesor, siendo en la práctica complejo evidenciar cuáles son los subdominios de conocimiento que intervienen.

Si examinamos el conocimiento profesional sobre los números racionales, es difícil distinguir si conocer que las fracciones pueden interpretarse como medidas de

[5] Los directores del trabajo de tesis y el autor del trabajo son parte del grupo de investigación que ha participado en la elaboración del modelo MTSK.

magnitudes, como relaciones concretas entre cantidades u otros significados del concepto de fracción (reparto, medida, cociente, operador y razón), corresponde a conocimiento común o a conocimiento especializado del contenido. No está claro si cualquier usuario de la matemática en su labor profesional (ingeniero, biólogo, contador, etc.) tendría que conocer las situaciones descritas; es decir, si es un conocimiento que tiene cualquier persona instruida que no sea profesor. Una dificultad añadida es que no es posible observar cómo ponen en práctica el conocimiento "todos" esos ciudadanos medios. Ello lleva a considerar más apropiado caracterizar el conocimiento matemático de un modo intrínseco, sin referirse a otras profesiones o titulaciones (Carrillo, Contreras y Flores, 2013; Flores, Escudero y Carrillo, 2013).

Otra dificultad de delimitación observada en el modelo MKT se presenta entre los subdominios del conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del contenido y de los estudiantes. Este último alude a una reflexión sobre el contenido matemático sólo cuando se trabaja como objeto de enseñanza, siendo complejo diferenciar si esa reflexión se refiere a las relaciones entre el contenido, o bien a los aspectos referentes al aprendizaje de los estudiantes. Supongamos, por ejemplo, que en la ordenación de fracciones como $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{7}$, los estudiantes las ordenan usando las propiedades de orden de los números naturales, pero el profesor reconoce que hay una dificultad asociada al contenido sin relacionarla al obstáculo didáctico, sino que se limita a explicar el error matemáticamente. Parece claro que reconocer el error en que incurren los estudiantes se asociaría al conocimiento del contenido y de los estudiantes, sin embargo ¿dónde ubicaríamos el conocimiento sobre la procedencia matemática del error? ¿Se asocia con el conocimiento especializado del contenido o con el conocimiento del contenido y el estudiante? Concordamos con Carrillo, Contreras y Flores (2013), quienes indican que no parece haber ninguna ventaja al incluir el conocimiento de la procedencia del error en un subdominio y la consciencia de su existencia en otro, porque queda desdibujada la presencia de la matemática en el conocimiento del contenido y el estudiante.

El grupo SIDM ha redefinido los subdominios de conocimiento del modelo MKT, centrándose en el conocimiento matemático del profesor respecto de la enseñanza de las matemáticas. Se ha profundizado, principalmente, en el dominio de conocimiento matemático, y en la delimitación de los subdominios: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático que lo componen; asimismo, se redefine el dominio de conocimiento didáctico del contenido.

En el modelo MTSK, el subdominio de conocimiento común del contenido no se contempla en el dominio de conocimiento del contenido, debido a que el modelo se concentra en el conocimiento que se refiere al profesor de matemáticas. El subdominio de conocimiento especializado del contenido se traslada y se convierte en la esencia del modelo; el carácter especializado y el conocimiento del horizonte matemático amplían su definición. Respecto al dominio de conocimiento didáctico del contenido, son renombrados y reinterpretados, incluyendo otros elementos de conocimiento.

En lo que sigue, definimos cada subdominio de conocimiento del modelo MTSK. El hexágono de la Figura 10 representa a cada subdominio de conocimiento del modelo y tienen como núcleo las creencias matemáticas y las de su enseñanza y aprendizaje.

2.1.2 El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas distingue, al igual que el modelo MKT, dos grandes dominios de conocimiento: (a) *conocimiento del contenido matemático* (MK) y (b) *conocimiento didáctico del* contenido (PCK), proponiendo una división de los dominios en tres subdominios específicos, que se distinguen del modelo MKT, como se ilustra en la Figura 10.

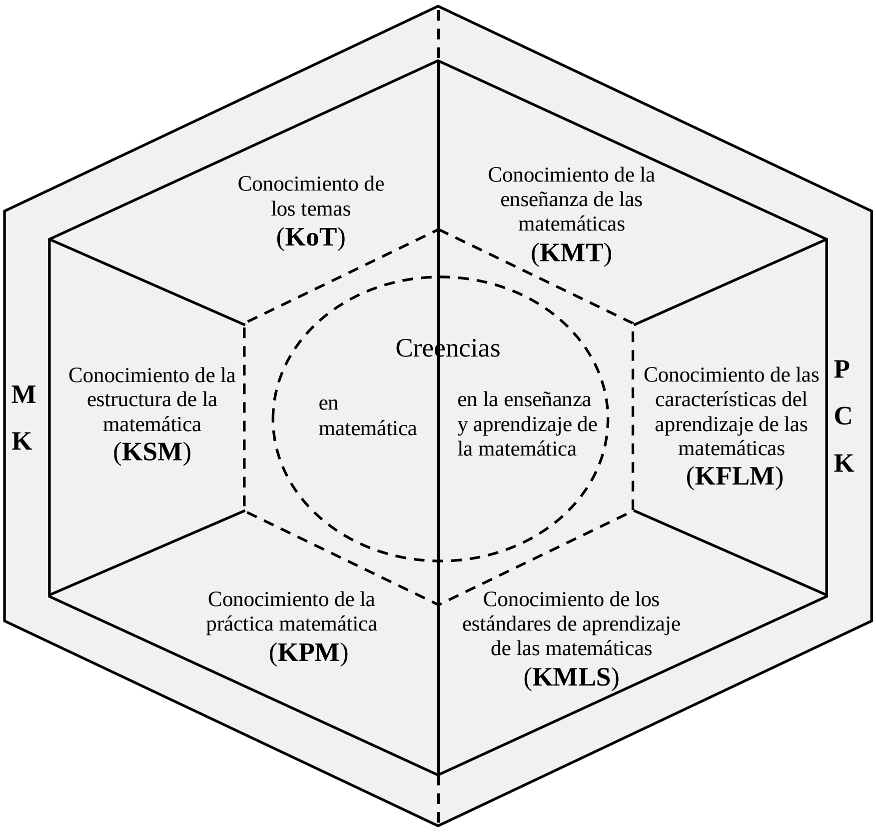


Figura 10. Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas

(a) El *conocimiento del contenido matemático* (*Mathematical Knowledge* – MK) está compuesto por tres subdominios de conocimiento:

El *conocimiento de los temas* (*Knowledge of Topics*[6] – KoT) es más que el conocimiento de la matemática como disciplina; la matemática escolar también está incluida en este subdominio, así como lo relativo a su fundamentación teórica, y los procedimientos, estándar y alternativos, o las distintas formas de representación de un contenido (Carrillo, Contreras y Flores, 2013). Específicamente, incluye el conocimiento de conceptos y procedimientos matemáticos con sus correspondientes fundamentos. Comprende cierto grado de formalización, por ejemplo, según el tema matemático de estudio, relacionar los números racionales con proporciones, probabilidad, trigonometría, etc. Este subdominio se concreta en saber matemáticas (en el sentido escolar); conocer los aspectos fenomenológicos asociados al tema; conocer

[6] Traducimos la palabra topics por temas.

los distintos significados del tema y conocer ejemplos específicos a un aspecto concreto de un contenido.

El *conocimiento de la estructura de las matemáticas* (*Knowledge of the Structure of Mathematics* – KSM) hace referencia a la estructura de la materia. Incluye el conocimiento de las principales ideas y de las estructuras de la disciplina, como, por ejemplo, el conocimiento de propiedades y nociones relacionadas con el contenido que se esté tratando; incluye una visión de conjunto de la matemática. El subdominio KSM está constituido por los conocimientos, tanto más avanzados, como más elementales, que permiten al profesor trabajar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental y viceversa. Asimismo, considera la idea de conexión y de complejidad del contenido. La conexión con contenidos posteriores y anteriores a los que se está trabajando, permitiendo al docente diseñar la tarea de enseñanza de las matemáticas respecto a otras áreas de conocimiento, en el sentido del *Horizon Knowledge* definido en el modelo MKT (Ball y Bass, 2009).

En el KSM se consideran las conexiones en términos de lo que describen Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu (2011), que hacen una caracterización del conocimiento del HCK en función de conexiones matemáticas, y que estiman que este conocimiento es más amplio que considerar solo los conocimientos matemáticos previos o posteriores al contenido que se enseña en un determinado momento (p. 430); definen tres categorías de conexiones: intraconceptuales, interconceptuales y temporales (p. 431). Las conexiones intraconceptuales (contempladas en el KoT) implican enlaces hacia el interior de un mismo concepto, como por ejemplo, equivalencia entre caracterizaciones de un concepto, prueba de equivalencia entre dos definiciones, mientras que las conexiones interconceptuales comprenden vínculos entre ideas o conceptos matemáticos distintos, siendo los conectores ideas matemáticas que vinculan representaciones del mismo concepto con otras que han de emplear los alumnos. Las conexiones temporales son las que enlazan los conocimientos previos y futuros, permitiendo, por ejemplo, estudiar otras propiedades de un concepto o procedimiento en situaciones nuevas o más complejas.

Por otra parte, la "complejización" o complejidad del contenido incluye también la idea de simplificación; por ejemplo, en el trabajo con fracciones, puede el profesor introducir el significado de fracción como parte-todo hasta llegar, quizás en otros niveles, a institucionalizarlo como una estructura matemática.

La complejización es matemática y lleva al docente a un proceso de análisis matemático de los contenidos, con el objeto de establecer aquellos que se conectan o son parte de la matemática, que implica una comprensión global de la estructura de la matemática ligada al concepto (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013).

El *conocimiento de las prácticas matemáticas* (*Knowledge of Practices in Mathematics* – KPM), atañe al conocimiento del modo de proceder en matemáticas. Incluye el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemáticas (conocimiento sintáctico sobre la lógica en matemáticas), el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, establecer relaciones (entre conceptos, propiedades, etc.), correspondencias o equivalencias o elegir representaciones, argumentar, generalizar o explorar, aspectos de la comunicación matemática. Es decir, consta de aquellas formas de hacer y proceder en matemáticas que un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, como son las diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática.

El dominio del conocimiento matemático (MK) del modelo MTSK transita por todo el conocimiento matemático, comprendiendo los conceptos y procedimientos, las ideas que estructuran la disciplina, las conexiones entre conceptos, la razón o el origen de los procedimientos, los procesos de prueba y de cualquier forma de proceder en matemáticas; asimismo, de la necesidad de su lenguaje con su precisión (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

(b) El *conocimiento didáctico del contenido matemático* (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK) está compuesto por tres subdominios de conocimiento, que abarcan, principalmente, aspectos de la enseñanza y del aprendizaje de un contenido matemático y consideraciones curriculares:

El *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (*Knowledge of Features of Learning Mathematics* – KFLM), responde a la necesidad del profesor de conocer el modo de pensar del alumno respecto de las tareas matemáticas. Es un subdominio que contiene el conocimiento del aprendizaje de las matemáticas del modelo del MKT, que engloba todo lo que concierne a producir aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, qué tipo de oportunidades de aprendizaje se puede ofrecer para un contenido, qué etapas de aprendizaje son recomendables. Igualmente, el profesor ha de tener conocimiento al respecto de las dificultades de los estudiantes al abordar un tema matemático. Este subdominio engloba conocer ciertas teorías o perspectivas que le aporten a la caracterización del proceso de aprender matemáticas, como el conocimiento sobre la diferencia entre aprender matemáticas de un modo mecánico o con significado (Skemp, 1978), el tránsito que recorre el alumno desde la familiarización con un objeto hasta su cosificación (Sfard, 1991), aspectos no contemplados en el MKT.

Es evidente que el KFLM y el KoT guardan mucha relación con el aprendizaje, al ser la base de ambos el conocimiento matemático escolar; sin embargo, mientras el KoT se relaciona con el conocimiento en sí, KFLM se corresponde con el aprendizaje específico de ese conocimiento.

El *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (*Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT), es un conocimiento que permite al profesor elegir una determinada representación o un material para el aprendizaje de un concepto o un procedimiento matemático, o aquel conocimiento que le permite seleccionar unos ejemplos o una tarea matemática, elegir un libro de texto. Al igual que el conocimiento del contenido y la enseñanza del modelo MKT, es un conocimiento específico del profesor de matemáticas, no es meramente conocimiento matemático, sino la integración de matemáticas y enseñanza.

El KMT incluye, por ejemplo, conocer estrategias de enseñanza asociadas a temas concretos, conocer materiales y recursos que faciliten la adquisición de ciertos conceptos. Pero también incluye conocimientos teóricos sobre la enseñanza de la matemática, como los relacionados con la enseñanza a través de la resolución de problemas, lo que lo diferencia del MKT.

El *conocimiento de los estándares*[7] *de aprendizaje* (*Knowledge of Mathematics Learning Standards* – KMLS) comprende los contenidos propuestos en las normativas curriculares de los niveles de enseñanza (conocer qué indica el currículo que debe aprenderse en cada nivel), conocer los materiales o recursos que proponen las normativas para abordar los contenidos, al igual que el conocimiento del currículo del modelo MKT. Además, el KMLS incluye conocer los objetivos y estándares de aprendizaje más allá de los que provienen del entorno institucional del profesor. Por ejemplo, considera los objetivos y estándares que indican las asociaciones profesionales o de investigadores como el NCTM, o pruebas de evaluación como PISA, etc.; es decir, qué recomiendan los expertos en la materia y qué existe en la literatura de investigación respecto al aprendizaje de los contenidos.

En síntesis, el modelo MTSK se centra en la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas respecto de la enseñanza del contenido, evitando discernir cuándo se trata de conocimiento común del contenido. Así, el dominio MK pretende observar la matemática como un elemento articulador del MTSK, asimismo, el PCK centra su atención en las diferentes formas de profundizar en el contenido matemático, cuando se tiene la intencionalidad de enseñarlo y de que los estudiantes aprendan.

En el centro del modelo MTSK puede verse también la inclusión de las creencias que el profesor tiene acerca de la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, como dimensión que impregnan el conocimiento del docente. No obstante, el tema de las creencias no será objeto de reflexión en este trabajo, únicamente nos concentramos en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

El modelo MTSK proporciona una perspectiva y una herramienta para profundizar en el conocimiento que un docente posee, declara o muestra (Aguilar, Carreño, Carrillo, Climent, Contreras, Escudero *et al*., 2013). Asumiendo que las evidencias de conocimiento son complejas y situadas, consideramos que estudiar las características de

[7] El término “estándares” es empleado aludiendo a la traducción que se hizo desde la SAEM Thales, en el año 2000, de la publicación homónima del NCTM en 1989, con el objeto de poner de relieve que el subdominio KMLS es más amplio que el propio conocimiento curricular, de carácter institucional y local, incluyendo aportaciones internacionales sobre lo que debe componer el contenido de la educación matemática de un ciudadano, procedentes de la propia investigación en educación matemática y de instituciones y asociaciones profesionales.

los subdominios del MTSK y sus relaciones nos puede ayudar a comprender el conocimiento especializado necesario para enseñar matemáticas.

El modelo MTSK es uno de los referentes teóricos de este estudio, que nos llevará a profundizar en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en su acción docente, siendo una herramienta que suministra ideas y sugerencias para en un futuro elaborar propuestas formativas. En lo que sigue, definimos qué se entenderá por conocimiento en este estudio, con el objeto de precisar esta noción.

2.1.3 El conocimiento en la investigación

Desde el punto de vista fenomenológico, conocer se produce cuando una persona denominada cognoscente aprehende o representa un objeto que ha sido transcendente para él (Ferrater, 1982, pp.597- 598). Así, comprender, comunicar o actuar sobre una situación implica comenzar a construir una representación según el contexto y proyecto, existiendo una infinidad de maneras de representar una situación.

Pozo (2003) se plantea "¿Es lo mismo tener representación que tener conocimiento?, ¿Es posible tener representaciones sin conocimientos?" (p.44). Para buscar respuestas a las preguntas el autor hace una descomposición de los procesos cognitivos en implícitos y explícitos. Los procesos implícitos atienden a aquello que no se puede informar y lo explícito a lo que se puede informar o comunicar. De modo general, las representaciones implícitas aumentan la posibilidad de explicitación de los objetos. El paso de las representaciones implícitas a las explicitas es un proceso gradual (evolutivo) y complejo que permite ir organizando el contenido y, en general, la actividad epistémica.

En términos de aprendizaje, una persona que informa sobre lo que ha aprendido y cómo lo ha asimilado, manifestaría un aprendizaje explícito, luego conocer se entendería como "la capacidad de manejar representaciones explícitas" (Pozo, 2003, pp.119-120). Contemplando que el ser humano por naturaleza está influenciado por sistemas culturales complejos, necesita desarrollar nuevas funciones cognitivas que incrementan la adquisición de conocimiento mediante procesos que llevan a representar explícitamente.

Las representaciones las genera el ser humano, están socialmente distribuidas, se transmiten en forma de representaciones mentales y llegan a instaurarse como conocimiento en la medida que la mente las explicita e interpreta. Por lo tanto, el conocimiento sería el resultado de un proceso más que sólo un producto, estando relacionado con los procesos mentales que lo producen o lo obtienen (Pozo, 2003).

El proceso de conocer también se puede analizar desde el dominio cognitivo, examinando el proceso que nos permite aprender. Esto se inicia cuando se presenta una nueva información que produce cambios inesperados en las estructuras mentales, posteriormente la información se integra, apareciendo representaciones que se apoyan en actividades objetivas que llevan a presagiar y controlar tareas y sucesos del mundo. Estos cambios proporcionan información que se entiende como medida de entropía (desorden) negativa. Esta información es codificada de acuerdo con restricciones. Las representaciones específicas se organizan respecto a los organismos que procesan los cambios, permitiendo su explicitación progresiva y su reconstrucción en nuevas formas de conocimiento.

Como consecuencia, el conocimiento forma una red compleja en la que se entrelazan los conceptos, las relaciones ente conceptos, los esquemas, etc. La representación de los objetos se entiende como construcciones mediadas por la estructura psicológica de cada persona. Pozo (2003) enfatiza que un requerimiento para alcanzar conocimiento es identificar y representar la relación que mantiene ciertos objetos con otros (p.135). Sostiene que las formas de aprendizaje de los seres humanos se manifiestan por declaraciones conceptuales, dependiendo la complejidad de los procesos de los métodos elaborados por los sujetos. Para considerar los aspectos cognitivos como una construcción es necesario asumir que hay distintas formas de construir o aprender.

Desde una mirada constructivista, las personas adquirimos los conocimientos en la interacción con el medio, dialogando, argumentando y discutiendo con otros. En el caso de los constructivistas radicales, conocer, es un proceso adaptativo que admite organizar nuestro mundo de experiencias (Ponte, 1992). Esto lleva a que el conocimiento se pueda entender como el resultado de conocer, constituye una "[…] red amplia de conceptos, imágenes, y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos" (Pajares, 1992), que está disponible para afrontar distintas situaciones.

En este trabajo consideramos el conocimiento como algo más neutral que las creencias y que las concepciones, en el sentido que la información del sistema de conocimiento se va almacenando semánticamente, de modo que amplía las redes de conceptos, imágenes y habilidades. En el sentido que lo define Van Dijk (2001), el conocimiento como la "creencia verdadera justificada", aquella información que ha sido ratificada como verdadera para la colectividad, para la sociedad encargada de dar validez a estos conocimientos; esta información que forma parte de la estructura cognitiva de un sujeto y que hace explícita.

Considerando que nos centramos en uno de los protagonistas del escenario de la actividad del aula, el profesor, vamos a estudiar las declaraciones del profesor producidas en la interacción con los estudiantes y el entorno (el aula), y examinar cómo nos informan respecto del conocimiento del profesor. Como indica Blanco (1991), el desarrollo de las acciones exige decisiones inmediatas, que son caracterizadas por el conocimiento disponible, los objetivos prioritarios y las creencias del profesor (p. 95). Por tanto, a partir de las declaraciones del docente en la práctica, vamos a identificar el conocimiento plausible (lo que se puede inferir, lo que parece razonable que subyace a lo observado) al enseñar un tema matemático.

Schoenfeld (2010b) alude al conocimiento que tiene una persona como "[…] la información que él o ella tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier otra tarea". De acuerdo a esta definición se considera que "el conocimiento de una persona no es necesariamente correcto" (p. 25). En el caso de un profesor de matemáticas, la información que dispone puede presentarse según los distintos tipos de comprensión[8] (relacional, instrumental, lógica o simbólica), siendo la

---

[8] Siguiendo a Skemp (1978), que distingue los dos primeros tipos de comprensión, la *relacional*, que alude a "saber qué hacer y por qué se debe hacer", permite llegar a extraer información desde la memoria del sujeto por vías expeditas y conlleva el avance de la comprensión. Un ejemplo, referente a las fracciones, puede ser estudiar qué conceptos matemáticos son conectados al representar la expresión $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ con el modelo de área de un rectángulo. La comprensión *instrumental* alude a "cómo aplicar reglas sin necesidad de justificar", es decir, se asocia con ideas existentes que permiten conectar conceptos y procedimientos, siendo un saber que lleva aplicar reglas sin una razón evidente (Skemp, 1978). Por ejemplo, si tenemos la expresión $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$, para obtener la multiplicación de fracciones, una razón instrumental sería: se multiplican los numeradores de la fracción $(1 \cdot 3)$ y el resultado da el numerador de la fracción (3) y luego se multiplican los denominadores de las fracciones $(2 \cdot 4)$ obteniéndose el denominador de la fracción (8); es decir, antecede un conocimiento aprendido que emplea reglas sin argumentación. La comprensión *lógica* permite organizar la información, equivalente al conocer la estructura de lo que se hace y conoce; como pueda suceder en la prueba formal. La comprensión *simbólica* es "una conexión de simbolismo y la notación con las ideas asociadas" (p.135). Esto último puede consistir en asociar $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $, a, c \in Z;\ b, d \in Z^*$, según las definiciones y propiedades de $Q. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})$, luego por asociatividad se llega a $(a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

información disponible que el profesor usa para resolver situaciones y que hace explicitas a partir de declaraciones conceptuales.

En el aula las acciones de enseñanza revelan manifestaciones explicitas de esa red compleja de conocimiento (conceptos, relaciones entre conceptos, esquemas, etc.) que tiene el profesor, y que se manifiestan en cómo aborda los contenidos, los tipos de ejemplos y tareas que presenta a sus estudiantes, el significado proporcionado a los algoritmos (el saber por qué se hace así), los modos de proceder en matemática, así como los elementos que median en las interacciones de los alumnos con el contenido, entre otros aspectos. Estas manifestaciones que *usa* el profesor (que hace explícitas) son los elementos más próximos observables del conocimiento del profesor, dándonos una idea del conocimiento que queremos comprender en esta investigación; es decir, el conocimiento plausible observado en la actuación docente.

Considerar que el c*onocimiento no ha de ser necesariamente correcto* nos permite aún más comprender el conocimiento del profesor que manifiesta en su acción, no buscando realzar sus incorrecciones, más bien interesaría comprender por qué el profesor procede de ese modo, presenta distintas tareas, emplea ciertas representaciones, qué errores de los estudiantes reconoce, qué tipo de material emplea para la enseñanza de los contenidos, etc. Por tanto, consideramos que profundizar en el conocimiento del profesor a partir de sus declaraciones nos puede acercar a una mejor comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

2.1.4 Antecedentes: Investigaciones centradas en el conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica

Las investigaciones en el área del desarrollo y el aprendizaje del profesor, centradas en el conocimiento, buscan estudiar las formas en que los docentes generan o adquieren ciertos tipos de conocimientos (Grossman, Schoenfeld y Lee, 2005; Llinares y Valls, 2009; Rivas, 2012); comprender el conocimiento de los profesores a partir de la práctica docente (Ball, Thames y Phelps, 2008; Ribeiro, 2010; Ribeiro y Carrillo, 2011; Ribeiro, Monteiro y Carrillo, 2010; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Sosa, 2010; Steele y Rogers, 2012); evaluar el conocimiento del docente (Arteaga, Batanero, Cañadas y Gea, 2012; Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans, 2013; Estrada, 2007; Gonzato, Godino y Neto, 2011; Krauss *et al*., 2008; Ortiz y Nordin, 2012; Varas, Lacourly, López, y Giaconi, 2013); y entre otras preferencias, abordan estudios de colaboración con maestros para planear o discutir clases de matemáticas, que llevan a los investigadores a profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas (Carrillo y Climent, 2006; Menezes, 2004; Ponte, Serrazina, Sousa y Fonseca, 2003; Ribeiro, 2010).

Como hemos mencionado, en este trabajo es de interés estudiar el conocimiento que pone en juego el profesor cuando tiene la intencionalidad de enseñar un contenido matemático. En esta dirección existen destacados estudios que se focalizan en profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas directamente de su actuación en el aula.

Los modelos MKT y KQ surgen de experiencias empíricas. El MKT nace de las observaciones de aula de profesores de Educación Primaria. Convirtiéndose en uno de los constructos de referencia en los estudios que buscan comprender la naturaleza del conocimiento que los profesores poseen; también buscan definir enfoques para apoyar el desarrollo de los conocimientos necesarios para la enseñanza (Ball *et al.*, 2008; Hill, Ball *et al.*, 2008). El KQ se apoya en la discusión sobre el conocimiento de los contenidos matemáticos entre formadores de profesores, alumnos y profesores-tutores, en el contexto de las escuelas. Es un marco para la observación de clase y para el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, que busca reflexionar sobre la enseñanza y el conocimiento de los profesores puesto en juego en el aula. Ambos modelos se emplean para estudiar el conocimiento matemático para la enseñanza, para abordar cuestiones que surgen de la observación de clase y para reflexiones posteriores a cada clase.

Teniendo como base el estudio de Ponte y Chapman (2006) que identifican y analizan diversas investigaciones que se centran en el conocimiento y la práctica del profesor de matemáticas, en la Tabla 5 organizamos estudios centrados en este tema, según los distintos niveles de formación. Luego, detallamos algunas de las investigaciones mencionadas y una síntesis de los resultados obtenidos.

Tabla 5. *Investigación sobre el conocimiento matemático de las fracciones*

Autor(es)/año	Tema	Nivel*
Ball (1990)	División de fracciones	PFP
Callejo, Fernández y Márquez (2013)	División de fracciones	PFP
Gairín (1998)	Fracciones (representaciones)	PFP
Klein y Tirosh (1997)	Multiplicación y divisiones de	PEP

Tabla 5. *Investigación sobre el conocimiento matemático de las fracciones*

	fracciones	
Klein *et al*. (1998)	Fracciones (errores en operaciones)	PEP
Linchevsky y Vinner (1989)	Números y operaciones	PEP
Llinares y Sánchez (1997)	Fracciones	PFP
Llinares *et al*. (1994)	Fracciones (representaciones)	PFS
Llinares y Sánchez (1991)	Fracciones	PFP
Ma (1999)	División de fracciones	PEP
Pinto y Tall (1996)	Número Racional	PFP/PFS
Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010)	Decimales y propiedad de un cubo	PEP
Sosa (2010)	Álgebra	PES
Tirosh, Graeber y Glover (1986)	Resolución de problemas	PFP

** PEP: Profesores en ejercicio de Educación Primaria, PES: Profesores en ejercicio de Educación Secundaria o Bachillerato PFP: Profesores en formación de Educación Primaria, PFS: Profesores en formación de Educación Secundaria.*

Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010) estudian la presencia de los distintos componentes de conocimiento matemático para la enseñanza (según el modelo MKT) en la práctica de una profesora de Educación Primaria. A partir de las acciones ejecutadas por la profesora (obtenidas mediante las grabaciones de audio y video), en situaciones específicas, se analizan los componentes del conocimiento profesional. El estudio concluye con que se superponen los componentes relativos al conocimiento común y al conocimiento especializado, por lo que no es posible distinguirlos. Además, observan algunas carencias relacionadas con el conocimiento relativo al contenido y a sus alumnos, que se asocian a la falta de conocimiento común y al especializado del contenido.

Los autores sostienen que los profesores deben tener un abanico de conocimiento que se relacionen con cada uno de los contenidos específicos que tienen que enseñar, para hacerlos comprensibles a sus estudiantes y buscar que ellos adquieran un conocimiento relacional entre los distintos contenidos.

Sosa (2010) también estudia el conocimiento matemático para la enseñanza que se evidencia en la práctica del profesor que enseña un tema de Álgebra en el nivel de Bachillerato. A partir de la observación de aula, notas de campo, cuestionarios y entrevista semi-estructurada estudia el caso de dos profesores, buscando identificar en la práctica qué subdominios de conocimiento matemático para enseñanza se evidencia.

En este estudio se obtiene una serie de indicadores de conocimiento que se focalizan especialmente en el conocimiento del contenido y de los estudiantes y en el conocimiento del contenido y de la enseñanza. La presencia de un mayor número de indicadores de conocimiento en estos subdominios se atribuye posiblemente a la distinción y esclarecimiento de la frontera que separa a los subdominios del modelo MKT (p. 464).

En el nivel estudiado (bachillerato) se espera que los profesores de matemáticas tengan un buen dominio de conocimiento común del contenido, por la formación de base del profesorado. Por tanto, aumenta la posibilidad de que un profesor de bachillerato tenga un amplio dominio de los conceptos matemáticos, tanto de las reglas y propiedades, de distintos teoremas, etc., así como del conocimiento sobre la operatividad que requiere para realizar las tareas de enseñanzas. Sin embargo, en los casos estudiados parece ir descendiendo el conocimiento a medida que se avanza sobre la utilidad y la profundizad de los contenidos enseñados.

Tchoshanov (2011) define el conocimiento de tipo cognitivo del maestro (*The Cognitive Type* – TCM) que se refiere al conocimiento del contenido, al modo de pensar de los docentes y a los procesos necesarios para cumplir unas tareas de manera exitosa. El TCM se basa en tres tipos de conocimientos. El tipo 1 corresponde a los hechos y los procedimientos. El conocimiento matemático del profesor está organizado por: hechos matemáticos, procedimientos, conceptos, generalizaciones y modelos, así como la forma en que se estructura y se genera ese conocimiento. Incluye también este tipo 1 el conocimiento curricular y el conocimiento didáctico del contenido. El conocimiento de tipo 2 supone conocer conexiones entre conceptos. Este conocimiento se ocupa del modo de hacer conexiones conceptuales entre procedimientos e ideas matemáticas. Por ejemplo, resolver $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ utilizando distintos procedimientos, por lo que alude a concepto relacional de procedimientos matemáticos. El conocimiento tipo 3 es conocer modelos y generalizaciones. Es un conocimiento teórico, envuelve comprobar conjeturas, hacer o establecer generalizaciones, demostrar teoremas. Por ejemplo, para demostrar que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, a, b, c\ y\ d \epsilon Z$, el profesor necesita distintos tipos de conocimientos (conocer modelos y generalizaciones).

Tchoshanov (2011) realiza su estudio del conocimiento del contenido del profesor con 120 docentes de Educación Secundaria, estableciendo tres fases. En la primera, analiza las asociaciones entre el tipo cognitivo del profesor (TCM) y el logro del estudiante. En la segunda, relaciona el TCM y la práctica de la enseñanza, y en la tercera examina el conocimiento del profesor de matemáticas al enseñar la división de fracciones. Este autor concluye que un TCM limitado restringe los logros de los estudiantes en matemáticas. Además encontró que los profesores con TCM elevado (aquellos que hacen conexiones entre conceptos) presentan clases de mayor calidad.

Krauss *et al*. (2008), basándose en el trabajo de Shulman (1986), han buscado conceptualizar el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido del nivel secundario de matemáticas. Aplican pruebas a profesores alemanes de Educación Secundaria (dos grupos con distinta especialización) para evaluar el conocimiento de los profesores en estas categorías de conocimiento. Concretan el conocimiento del contenido centrándose en las áreas de estudio de la enseñanza secundaria (por ejemplo, aritmética, álgebra y geometría).

El conocimiento didáctico del contenido se identifica a partir de las tareas matemáticas, los conceptos erróneos y las dificultades de los estudiantes, así como el conocimiento de las estrategias de enseñanza específica de las matemáticas. Respecto de este subdominio, los resultados han arrojado que los dos grupos de profesores difieren sustancialmente en cuanto al nivel y la estructura de conocimiento, aunque no se puede descartar la posibilidad de que este hallazgo sea simplemente una manifestación de las diferencias intergrupales antes de su formación docente. Además se obtiene que el grado de conexión cognitiva entre el conocimiento del contenido y el didáctico del contenido está en función del grado de conocimiento matemático de los docentes.

Klein y Tirosh (1997) evalúan el conocimiento didáctico del contenido de 67 profesores en formación y de 46 profesores en ejercicio. Se centran en examinar si los profesores identifican las dificultades y errores más usuales que tienen los niños cuando resuelven problemas verbales de multiplicación y división con números racionales. El resultado obtenido es que los profesores en formación muestran bajo conocimiento didáctico del contenido sobre los dos aspectos mencionados. En cambio, la mayoría de los profesores en ejercicio identifican las respuestas incorrectas de los alumnos, pero no los posibles orígenes. Establecen así la importancia de que los cursos de formación analicen con los docentes los procesos de pensamiento más usuales de los alumnos, para aumentar el conocimiento didáctico del contenido.

Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans (2013) estudiaron distintas relaciones entre los dominios de conocimiento. En las investigaciones, observaron que utilizando distintos test para medir el contenido y el conocimiento didáctico del contenido, se llega a concluir que ambos conceptos están correlacionados y que el conocimiento del contenido es una condición necesaria para el conocimiento didáctico del contenido, aunque no suficiente. Estudios en pequeña escala que incluían la observación de aula y entrevistas a alumnos y profesores, revelaron que el conocimiento didáctico del contenido está bien establecido, que un buen conocimiento didáctico del contenido se relaciona con una formación práctica docente efectiva. También apreciaron que el conocimiento didáctico del contenido sobre los estudiantes está relacionado de forma positiva con los resultados de aprendizaje del alumnado, siendo el nivel de aprendizaje ostensiblemente más alto cuando se tiene un buen conocimiento del contenido.

En este estudio observaron la importancia del conocimiento didáctico del contenido. Apreciaron que existe conexión con el conocimiento del profesor. Los autores encontraron que este conocimiento permite construir conexiones entre el contenido y los aspectos didácticos del contenido. Concluyen que el conocimiento didáctico del contenido es específico para la enseñanza de la materia, pero que requiere del conocimiento del contenido para establecerse.

Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) estudian el conocimiento del contenido en futuros profesores de Educación Primaria (del Reino Unido), analizan videos de profesores en formación según las cuatro grandes dimensiones del modelo KQ. Observaron a 149 futuros profesores que impartieron clases a estudiantes de edades 3-8 y de 7-11 años. En total analizaron 24 sesiones de clase.

A los participantes se les pidió que proporcionaran una copia de sus planificaciones de clase diseñadas. El investigador no participante realizaba un resumen al término de la clase observada. La fuente principal de datos son los videos de clase. A lo largo de los videos se buscaron las cuestiones relacionadas con el conocimiento del contenido y didáctico del contenido, organizando los datos según las cuatro dimensiones del modelo KQ. Concluyeron que el conocimiento matemático es necesario para todos los profesores, negando que los docentes de secundaria necesiten tener un mayor conocimiento del contenido que los maestros de primaria (p. 256).

Callejo, Fernández y Márquez (2013) estudian el conocimiento especializado del contenido, según el modelo MKT, en futuros profesores de Educación Primaria al resolver problemas de división de fracciones. Los participantes fueron 84 futuros profesores de primer año de su grado. Los investigadores se centran en estudiar cómo los profesores resuelven problemas de división (cuotitiva) y examinar cómo interpretan las estrategias y los errores de los estudiantes frente a este tipo de problemas. Los resultados obtenidos aluden a que la mayoría de los docentes resuelven correctamente los problemas empleando un método de medición (representación gráfica). También hallaron que pocos profesores identificaron los errores (conceptuales o procedimentales) de los estudiantes, limitándose a afirmar la validez del método a partir de las interpretaciones de las respuestas dadas. Los resultados obtenidos sugieren que el conocimiento común del contenido no es suficiente para analizar e interpretar las respuestas de los estudiantes y los errores que ellos presentan, debido a que la actividad de interpretación de estas situaciones necesita del conocimiento especializado del contenido.

En síntesis, las investigaciones que estudian el conocimiento del profesor en la práctica utilizan métodos cualitativos o cuantitativos, también combinan ambos métodos. En los estudios cuantitativos se complementan los análisis con la profundización en uno o dos casos. Los instrumentos utilizados son la observación directa del aula, notas de campo, análisis de videos, cuestionarios, entrevistas, las producciones de los sujetos (diarios, plan de clase), etc. Estos trabajos destacan la importancia de que el profesor de matemáticas desarrolle una extensa base de conocimiento matemático y didáctico, que le permita organizar el conocimiento para afrontar su labor profesional.

En esta línea centramos nuestro problema de investigación que persigue estudiar el conocimiento especializado del profesorado para la enseñanza de las matemáticas; es decir, aquel conocimiento que se pone en juego cuando se tiene la intencionalidad de enseñar un contenido matemático.

En el apartado que sigue, exponemos el *análisis didáctico* y las categorías e indicadores de conocimiento que surgen de la relación entre el modelo MTSK y el *análisis didáctico*, referentes teóricos que nos permitirán aproximarnos a una comprensión profunda del conocimiento del profesor en la práctica.

2.2 EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Empleamos el término *análisis didáctico* para referirnos a una herramienta que se desarrolla en el grupo de investigación «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico», del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. El *análisis didáctico* comienza a definirse en los trabajos de Rico (1997a; 1997b), a partir del análisis curricular que articula cuatro dimensiones: cultural/conceptual, cognitiva, ética o formativa y social. Rico (1997a) considera el *análisis didáctico* como una herramienta para facilitar al profesor el diseño de unidades didácticas; un recurso que le permite organizar su actividad de enseñanza en torno a un tema matemático. Por tanto, en este trabajo lo consideramos como un procedimiento ideal de cómo el profesor diseña, lleva a la práctica y evalúa las actividades de enseñanza y aprendizaje.

El análisis de las dimensiones del currículo lleva a definir cuatro organizadores del currículo, con los cuales el profesor aprecia el significado de un contenido matemático, a partir de las dimensiones curriculares que lo sustentan (Rico, 1997a): la dimensión cultural/conceptual, que se relaciona con el organizador contenido; la dimensión cognitiva, con el organizador cognitivo; la dimensión ética o formativa, con el organizador instrucción; y la dimensión social, con el organizador actuación/evaluación.

A partir del triángulo semántico de Frege, referencia-signo-sentido, Rico (1997a) establece la terna: definición-representación-fenómeno, para expresar el significado de los *contenidos* de las matemáticas escolares. En correspondencia con ello surgen los organizadores de significado del contenido, que son: la estructura conceptual, que requiere examinar los focos de atención del contenido, para lo cual es conveniente analizar la evolución histórica de cada campo o de los conceptos; la diversidad de representaciones empleadas para cada sistema conceptual, además de las modelizaciones que pueden emplearse para materializar los conceptos; los fenómenos que se organizan a través de las nociones, así como las aplicaciones prácticas de cada contenido.

Una vez examinado el significado del concepto, se requiere estudiar los elementos de su enseñanza y aprendizaje, para lo que se propone examinar la dimensión *cognitiva*, comenzando con el estudio de las limitaciones de aprendizaje relacionadas con el contenido, que pueden obstaculizar el aprendizaje de los estudiantes; considerando las dificultades ligadas al contenido, así como los errores que se detectan comúnmente en el aprendizaje de las matemáticas de cada tema. El análisis cognitivo debe estudiar la secuencia de capacidades que los alumnos pueden poner en juego para resolver las tareas (camino de aprendizaje de una tarea), los objetivos y las competencias de aprendizaje que se pretenden alcanzar.

La dimensión de *instrucción* se centra en buscar estrategias de enseñanza conformadas por las tareas y secuencias de tareas matemáticas escolares, así como los materiales y recursos didácticos que se pueden emplear para la enseñanza de cada contenido, y que ayudan a configurar estas tareas.

Por último, la dimensión de *actuación/evaluación* requiere examinar estrategias de evaluación, tanto del aprendizaje de los alumnos, como de la propia unidad didáctica diseñada. Esto lleva a realizar una síntesis evaluativa que evidencie los aprendizajes alcanzados y las debilidades del proceso de instrucción, con el objeto de mejorar el proceso de enseñanza/aprendizaje del tema matemático de estudio.

Producto de emplear estos organizadores surge el *análisis didáctico*, que tiene por objetivo facilitar la práctica del profesor de matemáticas, de una manera sistemática y profunda, tomando en consideración el máximo de dimensiones que influyen en su actuación. Este análisis se compone de cinco partes: a) análisis conceptual, b) análisis de contenido matemático escolar, c) análisis cognitivo, d) análisis de instrucción, y e) análisis evaluativo (Rico, 2013; Rico y Fernández-Cano, 2013).

El *análisis didáctico* de los temas matemáticos se inicia con el análisis de contenido de aquellos conceptos y procedimientos matemáticos que lo componen. A su vez el análisis de contenido requiere de un análisis conceptual específico de las nociones básicas asociadas. En lo que sigue, definimos los cinco análisis parciales que conforman el *análisis didáctico*, según Rico y Fernández-Cano (2013):

1. El *análisis conceptual* lleva a profundizar en los conceptos y nociones básicas del conocimiento matemático, sus fundamentos e historias, su génesis y desarrollo, sobre los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje.

2. El *análisis de contenido* lleva a estudiar la estructura conceptual, tanto de una forma sincrónica como diacrónica (incluyendo su evolución histórica), así como los aspectos fenomenológicos y los sistemas de representación referente al

contenido matemático. Estos tres aspectos establecen una visión más significativa del contenido matemático escolar.

3. El *análisis cognitivo* examina expectativas sobre el aprendizaje de los escolares (fines, objetivos y capacidades), oportunidades (situaciones en las que se puede producir aprendizaje enfocado hacia las finalidades) y limitaciones de aprendizaje (dificultades y errores).
4. El *análisis de instrucción* organiza las tareas matemáticas escolares, prestando atención a la forma de afrontar la enseñanza de la resolución de problemas y la modelización y abogando por una enseñanza práctica, que utilice los materiales y recursos disponibles.
5. El *análisis evaluativo* permite al profesor confrontar los aspectos planificados con lo que sucedió, luego que la planificación se pone en práctica; implica describir la comprensión de los estudiantes, con el propósito de brindar información que permita mejorar la planificación y, en efecto, su práctica docente.

2.2.1 El análisis didáctico en el estudio

En este trabajo utilizamos el *análisis didáctico* con fines formativos e investigativos. Lo primero alude a que el *análisis didáctico* permite profundizar sobre un contenido matemático escolar, tanto desde el ámbito matemático como desde la enseñanza, permitiendo al investigador profundizar en un tema matemático.

En esta investigación hemos realizado el *análisis didáctico* de los números racionales (ver Anexo A), llevando a cabo los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. Por lo tanto, en el trabajo empleamos el *análisis didáctico* como una herramienta que permite al investigador tener una recopilación de información respecto al contenido.

Para clarificar el papel que juega el *análisis didáctico* en la investigación, distinguimos en él tres fases: (a) fase de profundización, (b) fase de diseño o toma de decisiones, y (c) fase de actuación y evaluación, como se ilustran en la Figura 11 (Rojas, Flores y Ramos, 2013).

Fase de profundización

- Análisis de contenido
- Análisis cognitivo
- Análisis de instrucción (fase de estudio de tareas, gestión, medios de evaluación)

Fase de diseño o toma de decisiones

- Análisis de instrucción (fase de diseño de la unidad didáctica)
- Análisis de actuación (fase de diseño de las herramientas de toma de datos del proceso)

Fase de actuación y evaluación

- Análisis de evaluación (fase de puesta en marcha de la unidad y de revisión del proceso)

Figura 11. Fases en el análisis didáctico

La primera fase de profundización permite al profesor examinar el contenido matemático y su enseñanza, llegando a organizar la información en un mapa de posibilidades. A partir de este análisis, el docente está en condiciones de seleccionar el proceso de enseñanza, que concreta en la fase de diseño, tomando decisiones sobre cómo va a llevar a cabo la enseñanza en la unidad didáctica. La tercera fase consiste en la puesta en práctica de la unidad diseñada, cuya implementación será a la vez objeto de revisión en el análisis de evaluación.

Partimos de que el profesor que va a enseñar el tema de los números racionales tiene que examinar el contenido matemático, para esto debe situarlo respecto a otros conceptos, profundizar en los distintos contextos y situaciones asociadas al contenido, revisar las finalidades educativas que pretende, así como las dificultades más habituales de los estudiantes, hacer una selección de tareas matemáticas escolares para enseñar, entre otros aspectos.

Por tanto, consideramos que todo profesor dispone de una organización del contenido que lo lleva a seleccionar las tareas que realizará en su actividad de enseñanza. De esta forma, el docente organiza la actividad de enseñanza (planifica) atendiendo a los contenidos, objetivos, metodología y evaluación de acuerdo a las dimensiones del currículo y a sus reflexiones previas, realizando un proceso que puede ser visto como un procedimiento de *análisis didáctico*, independiente de que conozca el sustento teórico que conforma el modelo de *análisis didáctico* que se utiliza en esta investigación.

Por otra parte, el investigador realiza el *análisis didáctico* de la enseñanza de los números racionales en el nivel educativo correspondiente (ver Anexo A) con el objeto de profundizar en los posibles contenidos (formales, pero también significados, formas de representarlos, etc., lo que constituye el análisis de contenido de los racionales), examinar qué objetivos y limitaciones se pueden encontrar en su enseñanza (análisis cognitivo), y teniendo presente los recursos, los tipos de tareas y secuencias de tareas para la enseñanza del contenido (análisis de instrucción).

En este trabajo debemos distinguir dos situaciones distintas respecto al empleo del *análisis didáctico*, según la intención y el sujeto que realiza el *análisis didáctico*, es decir, el análisis que lleva al profesor a determinar su actuación, y aquel que realiza el investigador para tener referentes que le permitan apreciar las cualidades de la actuación del profesor. Ambas funciones del *análisis didáctico* se presentan en la Figura 12.

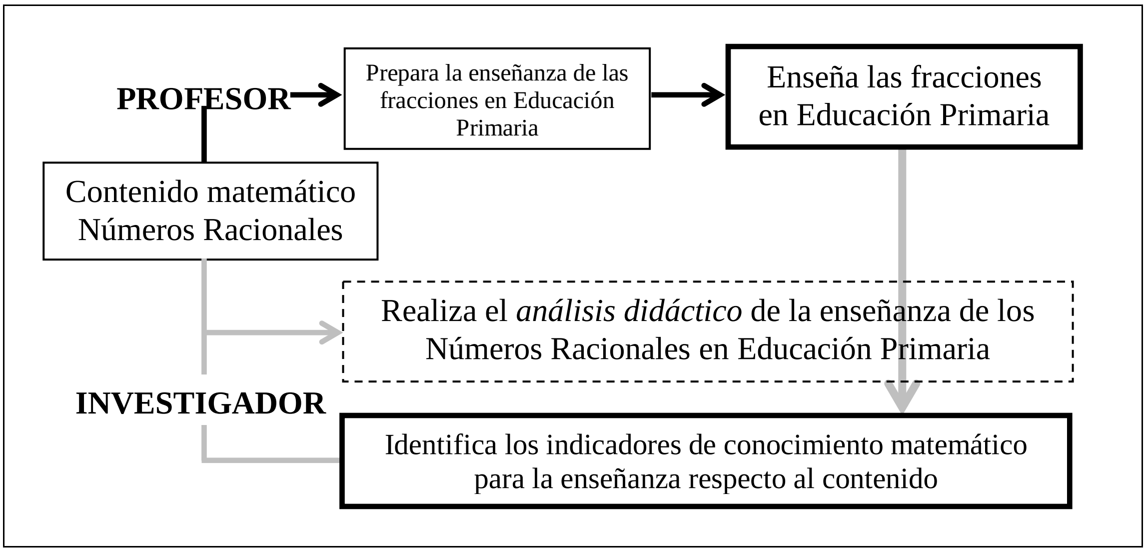


Figura 12. El análisis didáctico para identificar indicadores de conocimiento

El *análisis didáctico* aporta una sensibilidad al investigador, para comprender las manifestaciones de los profesores en relación con su conocimiento, lo que facilita la interpretación de dichas manifestaciones (observación) como elementos de su conocimiento especializado, máxime cuando se usa una herramienta integrada entre el *análisis didáctico* y el modelo MTSK.

Por lo tanto, el *análisis didáctico* constituye un medio que permite articular los distintos tipos de conocimiento del profesor de matemáticas con la práctica docente (que se refleja en el *análisis didáctico*) (Rojas, Flores y Ramos, 2013). Esto nos lleva a establecer vínculos entre dos herramientas teóricas: los dominios de conocimiento del modelo MTSK y aquellos elementos esenciales para organizar el contenido matemático escolar, que son sistematizados en el *análisis didáctico*. En la Figura 13 resumimos el proceso que hemos seguido.

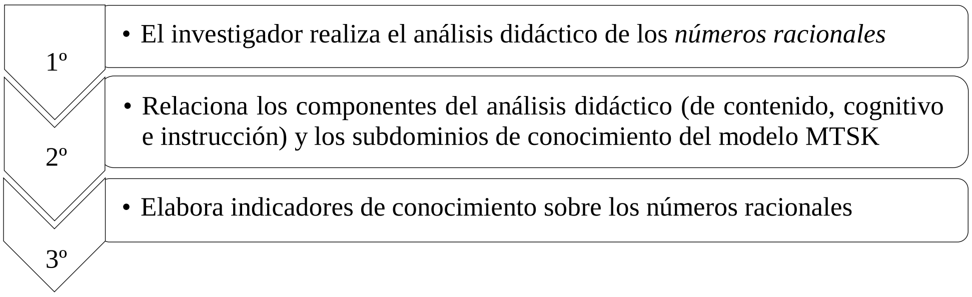


Figura 13. Empleo del análisis didáctico en la investigación

2.2.2 Relación entre el análisis didáctico y los dominios de conocimiento del modelo MTSK

Comenzamos por especificar las partes que componen cada uno de los análisis parciales del *análisis didáctico*, que se enuncian en la Tabla 6. Con ellos, podemos precisar mejor las relaciones que existen con los subdominios de conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Tabla 6. *Elementos del análisis didáctico*

Análisis didáctico		Elementos del análisis didáctico
Análisis de contenido	1.	Análisis conceptual
	2.	Análisis fenomenológico
	3.	Sistemas de representación
Análisis cognitivo	4.	Expectativas de aprendizaje
	5.	Limitaciones de aprendizaje
	6.	Oportunidades de aprendizaje
Análisis de instrucción	7.	Tareas y secuencias de tareas
	8.	Materiales y recursos

Por ejemplo, para el análisis de contenido realizamos el análisis conceptual, profundizamos en los aspectos fenomenológicos, en los distintos sistemas de representación asociados al tema de los números racionales (ver Anexo A). Este análisis nos lleva a disponer de un repertorio amplio de elementos que influyen en cómo el profesor realiza su enseñanza, por lo que su apreciación en la práctica puede mostrar dimensiones del conocimiento que el profesor activa al planificar, diseñar y enseñar un contenido. Veamos, de manera más completa, cómo relacionamos los componentes del *análisis didáctico* con cada uno de los subdominios de conocimiento del modelo MTSK.

Comenzamos el *análisis didáctico* profundizando en la estructura conceptual de los números racionales, empleando como fuentes los documentos oficiales que regulan la enseñanza, libros de texto del curso, textos matemáticos, entre otros. De las fuentes aludidas se extrae un conjunto de conceptos y procedimientos relacionados con Q. En este conjunto queda de manifiesto, por ejemplo, qué contenidos está previsto que aprenderá un niño de 10 años, cómo se relaciona el número racional con otros conceptos próximos, con qué formas de representarlo, etc. Todos estos aportes nos han llevado a crear un mapa amplio que resume la estructura conceptual de los números racionales en su expresión fraccionaria (ver Anexo A). En el mapa quedan recogidos los ítems de conocimiento que se ubican en los distintos subdominios del modelo de conocimiento del profesor (MTSK). La Tabla 7 representa qué elementos de *análisis didáctico* estamos empleando en cada subdominio del modelo MTSK.

Tabla 7. *Relación entre los componentes del análisis didáctico y los dominios de conocimiento especializado del profesor de matemáticas*

Análisis Didáctico	**Dominios de conocimiento**					
	Conocimiento del contenido			Conocimiento didáctico del contenido		
	KoT	**KSM**	**KPM**	**KFLM**	**KMT**	**KMLS**
Análisis de contenido						
Análisis conceptual	X	X	X	X	X	X
Análisis fenomenológico	X	X			X	
Sistemas de representación	X	X			X	
Análisis cognitivo						
Expectativas de aprendizaje				X		X
Limitaciones de aprendizaje				X	X	
Oportunidades de aprendizaje				X	X	
Análisis de instrucción						

Tabla 7. *Relación entre los componentes del análisis didáctico y los dominios de conocimiento especializado del profesor de matemáticas*

Tareas y secuencias de tareas[9]	X	X	X	X
Materiales y recursos		X	X	X

En lo que sigue vamos a describir con más atención la relación entre los elementos del *análisis didáctico* y los componentes del modelo MTSK, según quedan reflejados en la Tabla 7. La relación construida, permite adoptar un enfoque operativo para comprender el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en su práctica. Establecer esta relación nos ha permitido elaborar indicadores de conocimiento que surgen para cada subdominio, relacionados con el tema de los números racionales; que aluden a las acciones en que los conocimientos de los profesores actúan.

Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)

El KoT (de los números racionales) se corresponde con los conceptos y procedimientos referentes al tema matemático, que puede cubrir varios campos, como, por ejemplo, conocer la estructura conceptual de los números racionales, manejar su estructura de cuerpo conmutativo con las operaciones de adición y multiplicación, identificar los números racionales con los números que tienen una representación decimal finita o periódica, formando un conjunto que se construye a partir de relaciones de equivalencia en ZxZ^*, que es denso en R, en el que existen relaciones de equivalencia y de orden, que carece de primer elemento, etc. Todo esto derivado del conocimiento formal del número racional, que puede completarse con el conocimiento de etapas en la historia del número racional, como su surgimiento en la matemática antigua, anterior a los números con signo, su formalización y completitud con la construcción de los decimales por Stevin, y la formalización posterior.

También incluye el conocimiento de los significados, contextos y usos del número racional, como la distinción entre los significados de fracción que se establecen en relación con un todo (parte-todo, reparto, medida, cociente, operador) y los que no requieren el todo (razón); los contextos en los que se utilizan, como en medida de

[9] Las *tareas matemáticas* se indican en los subdominio KoT, KFLM, KMT y KMLS, ellas tienen indicadores de conocimiento diferentes respecto de cada dominio. Por ejemplo, las tareas nos permiten ver los significados de las fracciones que maneja el profesor, siendo un aspecto de KoT (desde el ámbito matemático), ahora bien, si el profesor usa criterios explícitos para justificar que la tarea es adecuada al nivel escolar de enseñanza, estaríamos en el KMLS.

magnitud o como relaciones concretas, que son aspectos relacionados con la fenomenología. Significados de las operaciones aditivas y multiplicativas, según el tipo de fracciones que los integran y las acciones que requieren (Contreras, 2012; Flores, 2008). Del mismo modo, el análisis fenomenológico lleva a estudiar cómo se vincula la estructura conceptual de Q con los contextos natural, cultural, social y científico, para dotar de sentido el aprendizaje de los conceptos y estructuras asociados al contenido; aspectos que se relacionan con el conocimiento del tema. De ahí se identifican los sentidos que tiene el número racional y cuáles son más adecuados en Educación Primaria. Estos constituyen la dimensión significado de la terna semántica del *análisis didáctico*.

El conocimiento del tema también requiere conocer las formas en que se representan los números racionales; es decir, estudiar los distintos sistemas de representación que facilitan su manejo. Esto requiere disponer de diferentes registros de representación, desde los materiales a los numéricos, pasando por representaciones icónicas. La forma concreta lleva a distinguir objetos que expresan porciones, situaciones familiares que los emplean, etc. Las representaciones icónicas distinguen los modelos o soportes, según la magnitud utilizada, así como su naturaleza continua o discreta. La representación numérica debe llevar al manejo de las representaciones fraccionarias, decimal y porcentajes, tanto en su expresión verbal como numérica. Así el profesor, al examinar los sistemas de representación, dispone de un repertorio de formas de aludir al concepto de número racional y a las nociones relacionadas con él.

En este subdominio, también consideramos aspectos de comunicación matemática, debido a que la matemática es un área de conocimiento que posee un lenguaje propio, que comprende reglas exactas y admite interpretación de sus signos propios de la disciplina. Existe una diversidad de nociones (medidas, magnitud…), conectores lógicos, cuantificadores, símbolos (<, >, %, +…), propios de la matemática, así como símbolos (exponentes, paréntesis…) que también forman parte de la sintaxis de la matemática. Planas y Reverter (2011), destacan que conviene conocer el lenguaje matemático para aludir a ellos y construir conceptos derivados.

Por último, dentro de la actividad de enseñanza el profesor puede presentar a sus estudiantes distintas tareas de exploración, de investigación, problemas, ejercicios y los proyectos (Ponte, 2004), situaciones que tienen de base un contenido matemático. Que requieren que los estudiantes piensen conceptualmente, que los estimulan a hacer conexiones entre conceptos y procedimientos, o que involucran la ejecución de procedimientos memorizados (de manera rutinaria, puede ser un ejercicio) o pueden llevar al desarrollo de ideas implícitas sobre el comprender el sentido de las matemáticas (Stein y Smith, 1998, p. 269). Las tareas deben estar contextualizadas y enmarcadas en un contenido matemático. Siguiendo las orientaciones del marco de matemáticas de PISA 2012, que define cuatro categorías de contexto para clasificar las preguntas de la evaluación del estudio, podemos considerar las orientaciones para estudiar el contexto de las tareas matemáticas que presenta el profesor en el aula. Los contextos de los problemas pueden ser a) personales, aluden a las actividades diarias que tienen relevancia directa e inmediata para los alumnos (su familia, su grupo de iguales, etc.); b) profesionales, situaciones que se centran en el mundo laboral (medición, cálculo de coste, etc.); c) sociales, situaciones que se centran en la propia comunidad (local, nacional, global) (sistemas electorales, economía, demografía, publicidad, etc.); y, d) científicos, situaciones abstractas en el cual los alumnos están poco inmiscuidos, hacen referencia a la aplicación de las matemáticas al mundo natural y a temas relacionados con la ciencia y tecnología (áreas como meteorología, clima, ecología, medicina, etc.) (OCDE, 2012). Contreras (2012) identifica algunos contextos específicos en el trabajo con fracciones, como medidas extensivas (de diversas magnitudes) como capacidad, peso, longitud, área, dinero, costes, etc., a medidas intensiva como la velocidad o la densidad, o bien, a contextos geométricos, algebraicos o del entorno de la vida real, a particiones o reparto, entre otros.

De lo anterior se derivan las siguientes categorías: *conceptos*, *fenomenología*, *procedimientos matemáticos*, *sistemas de representación*, *aspectos de comunicación* y *tareas matemáticas*, cada una de ellas con sus respectivos indicadores de conocimiento que quedan descritos en la Tabla 8.

Tabla 8. *Indicadores de conocimiento de los temas matemáticos*

Conceptos
- Conocer elementos de la estructura conceptual de los números racionales (cuerpo conmutativo con las propiedades de adición y multiplicación, conjunto que tiene una representación decimal finita o periódica, conjunto definido como cociente de los Z, Q es denso en R, relaciones de equivalencia y orden de Q, existencia de neutros e inversos, etc.).
- Conocer los distintos temas, conceptos y procedimientos matemáticos vinculados a los números racionales, como probabilidad, razones trigonométricas, semejanza de figuras,

Tabla 8. *Indicadores de conocimiento de los temas matemáticos*

entre otras.

- Precisión de las definiciones y propiedades; y, riqueza de relaciones entre los conceptos matemáticos. Como que el conjunto Q con las operaciones de adición y multiplicación tiene una estructura de cuerpo conmutativo, que en Q se pueden resolver las ecuaciones del tipo $ax = b$, $a \in \mathrm{Q}\ y\ b\ \in \mathrm{Q}$, que en Q puede definirse un orden total, etc.
- Conocer etapas de la evolución histórica de los números racionales.

Fenomenología

- Conocer los distintos significados del concepto de fracción como relación parte-todo, reparto, medida, cociente, operador y razón. Conocer distintos significados de las operaciones con racionales, en diversas formas de representación, como problemas aditivos de cambio, combinación y comparación, y multiplicativos de proporcionalidad, fracción de fracción, producto de medidas y áreas.
- Referencias a campos de utilidad del contenido en ámbitos específicos relacionados con el pensamiento multiplicativo inverso y la proporcionalidad, especialmente si se refiere a contenidos con mayor grado de formalización. Por ejemplo, si el profesor alude a las concepciones de los números racionales como razón, fomenta el pensamiento proporcional, destaca momentos de la génesis de las matemáticas.
- Conocer los contextos que aparecen en las diversas situaciones, como:
  - Medidas de magnitudes (medio kilo, tres cuartos de hora).
  - Relaciones concretas entre cantidades (escala de $1\colon 1000$, cartografía; tanto por ciento, comercio, por mil; falta el 10%, descuento de un 10%, construcción).

Procedimientos matemáticos

- Dominio de indicadores de cada operación o de campos de problemas relacionados con ellos, de conceptos matemáticos y procedimientos empleados para realizar las operaciones y resolver situaciones y problemas. Conocimientos tales como:
  - En la división de fracciones conocer el algoritmo de los productos cruzados, el de invertir y multiplicar, o bien el de invertir los numeradores una vez reducidas ambas fracciones a denominar común.
  - Para valorar la equivalencia de fracciones presentar el método de los productos cruzados, multiplicar o dividir numerador y denominador o la división de dos fracciones en que su resultado sea la unidad.
- Dominio de los conceptos y los procedimientos relacionados con las fracciones, como simplificación y amplificación de fracciones, operaciones con fracciones, concepto de fracciones equivalentes, comparación de fracciones, números decimales y operaciones.

Sistemas de representación

- Conocer los distintos sistemas de representación relacionados con el contenido, tales como:
  - *Verbal o literal*. Mitad, un medio, medio, uno de dos, media parte.
  - *Numérico*. División indicada $\left(\frac{1}{2}\right)$, par ordenado $(1,2)$, razón$(1\colon 2)$, porcentaje (50%), decimal $(0{,}5)$.

Tabla 8. *Indicadores de conocimiento de los temas matemáticos*

- *Gráfico*. Recta numerica como subconjunto de los R. En el plano cartesiano se puede establecer la correspondencia biúnivoca entre los puntos de cordenadas enteros, con la segunda cordenada no nula y los elementos del conjunto $ZxZ/\{0\}$ y representación de las clases de equivalencia de pares de enteros.
- *Figural*. Una unidad dividida en partes iguales, cada parte representa una cantidad. Relación existente entre el todo (continuo o discreto) y sus partes.
- *Material o concreta*. Por medio de objetos, materiales y recursos (Regletas de Cuisenaire, cantidad como longitud, área o volumen, reglas de colores, Tangram, etc.).

Estos tipos de representaciones pueden emplearse para trabajar las cantidades como longitud y área en los niveles iniciales de la enseñanza de las fracciones, hasta llegar a representar las clases de equivalencia de pares de enteros en los niveles sucesivos. También, puede relacionarse que los números racionales admiten una representación decimal que se obtiene dividiendo el numerador y del denominador. Luego, todo número con representación decimal finita o periódica puede representarse como un número racional, es decir como un cociente entre dos enteros.

Aspectos de comunicación

- Amplitud y precisión del lenguaje formal /algebraico utilizado según el nivel de enseñanza.
- Conocer expresiones cotidianas relacionadas con las nociones de reparto equitativo o medición (lenguaje con significado propio dentro de la matemática).
- Conocer el lenguaje utilizado en la vida cotidiana (lenguaje natural) como: mitad, parte, partir, repartir, dividir, media hora, entre otros.

Tareas matemáticas

- Conocer tareas que ponen de manifiesto los distintos significados de las fracciones como objeto matemático, enmarcadas en un contexto significativo, tales como:
    - Las fracciones como procesos de medición y partición de una unidad. Situaciones que involucren las acciones de dividir, partir y repartir. Tareas de fraccionamiento donde intervienen tres datos (dos cantidades (todo y la parte) y la relación entre ellos, la fracción).
    - Situaciones donde la unidad de medida no está contenida en un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o expresar una magnitud.
- Conocer y crear ejemplos donde el tema tenga un papel relevante, enmarcados en un contexto y un contenido matemático. Por ejemplo, situaciones de fraccionamiento, problemas aditivos (de cambio, de combinación, de comparación) y problemas multiplicativos (fracción de fracción, de comparación, productos de medidas) (Contreras, 2012; Flores y Torralbo, 2011).
- Grado en que las situaciones dan sentido al contenido matemático escolar. Por ejemplo, forma de justificar el algoritmo de los productos cruzados para la división de fracciones.

Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)

El KSM se relaciona con aspectos propiamente de la estructura conceptual, como el papel que desempeña la estructura multiplicativa en la construcción y razón de ser de Q (ideas estructurante). También, las conexiones entre elementos de la estructura conceptual, identificando tanto los objetos que se conectan como la forma en que se establecen las relaciones. Por ejemplo, vincular los significados de fracciones entre sí, relacionarlos con los procedimientos de actuación, tanto para el fraccionamiento (con los tres tipos de problemas enunciados por Flores y Torralbo, 2011), como para la equivalencia, orden y operaciones (apreciar que las operaciones aditivas se realizan preferentemente en situaciones de parte-todo, reparto, medida, cociente y operador; las multiplicativas en situaciones de operador y razón, etc.).

Las conexiones temporales, como las relaciones entre los contenidos matemáticos que enseña y los de niveles escolares anteriores y posteriores, como: fracciones, decimales y porcentajes; razón y proporción, etc. Además, incluye conocer otros conceptos y procedimientos matemáticos vinculados a los números racionales, como la proporcionalidad, la probabilidad, las razones trigonométricas, la semejanza de figuras, entre otras.

De lo anterior se deriva la categoría *relaciones entre componentes de la estructura conceptual*, con sus respectivos indicadores de conocimiento que quedan descritos en la Tabla 9.

Tabla 9. *Indicadores de conocimiento de la estructura de las matemáticas*

Relaciones entre componentes de la estructura conceptual
- Relaciones entre los contenidos matemáticos que enseña y los de niveles escolares anteriores y posteriores, como: ▪ Correspondencia entre fracciones, decimales y porcentajes. ▪ Relacionar las fracciones con la razón y proporción identificando magnitudes proporcionales o los porcentajes para expresar composiciones o variaciones.
- Relaciones o conexiones entre elementos de la estructura conceptual de los números racionales, tal como el trabajo de las fracciones según su variedad de significados como relación parte-todo, reparto, medida, cociente, operador y razón, y saber explicarlos. También, por ejemplo, identificar la acción de una fracción sobre una cantidad, estableciendo la relación entre una parte y el todo que constituye esa cantidad (fraccionamiento), y su separación de los problemas de operaciones; distinción de los tipos de problemas de fraccionamiento (directos e inverso).
- Establecimiento de relaciones entre los tipos de representación empleados y realce que se concede a ellos.

Conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM)

El KPM comprende los modos de proceder en matemáticas, por tanto concierne a aspectos del análisis de contenido. Implica llevar a cabo argumentaciones lógicas, mostrando su conocimiento de lo que es demostrar, formas de hacerlo, el papel de los ejemplos y los contraejemplos. Pueden emplearse los ejemplos para generalizar, incluyendo relaciones intuitivas y razonamiento deductivo, para ilustrar conceptos y principios, para indicar una clase o una categoría superior, para motivar, para mostrar la variación y el cambio o para practicar técnicas, etc. (Watson y Mason, 2002). Todo ello abarcando los aspectos conceptual (saber qué) y procedimental (saber cómo).

Este tema abarca específicamente conocer la forma en que se ha construido Q a partir de las relaciones de equivalencia, así como los isomorfismos que permiten identificar las fracciones con divisiones, el papel que juegan los algoritmos, en relación con las definiciones formales de las operaciones con racionales, etc. En la Tabla 10 los indicadores de conocimiento para el subdominio.

Tabla 10. *Indicadores de conocimiento de las prácticas matemáticas*

Modos de proceder en matemáticas
- Hacer usos de distintas formas de proceder en matemática como emplear argumentaciones lógicas, manifestar lo que es demostrar, el significado de la definición, axioma o teorema, el papel de los ejemplos y contraejemplos, como elementos constituyentes de la disciplina.
- Sentido dado a los algoritmos según el significado empleado. Identificar el papel de los algoritmos de equivalencia, orden y operaciones, en el conocimiento matemático.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

El KFLM se relaciona con algunos aspectos conceptuales desde el punto de vista del aprendizaje, por ejemplo el profesor ha de conocer los errores y las dificultades que los estudiantes pueden presentar en la aplicación de conceptos y procedimientos en la resolución de las tareas propuestas, aspectos que se relacionan con el conocimiento del tema matemático. Asimismo, cuando el profesor efectúa explicaciones a los estudiantes, tiene de base el conocimiento del contenido, de acuerdo con la profundidad que conozca el contenido se generan las respuestas a los estudiantes.

El análisis cognitivo permite examinar expectativas, oportunidades y limitaciones de aprendizaje de Q según el nivel de enseñanza del contenido. Las expectativas se concretan en un listado de fines, objetivos y capacidades, que pueden secuenciarse para establecer caminos hipotéticos de aprendizaje. Las limitaciones se materializan en forma de dificultades de aprendizaje de los conceptos, como las asociadas a la complejidad inherente de los contenidos (González, Gómez y Lupiáñez, 2010) y los errores que con más frecuencia aparecen como reflejo de estas dificultades. Mientras, las oportunidades muestran situaciones en las que se puede producir aprendizaje encaminado hacia las finalidades. Fruto de conocer la complejidad del aprendizaje, el profesor puede presentar tareas que refuercen los conceptos o procedimientos matemáticos para afrontar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, y adaptar tareas de acuerdo a las finalidades de aprendizaje.

Consideramos las tareas en el subdominio del KFLM cuando son oportunidades para que se produzca aprendizaje y cuando se corresponde con el objetivo de aprendizaje determinado. El trabajo con materiales o recursos didácticos como facilitador para la profundización o refuerzo de un concepto que conlleva un problema habitual de aprendizaje, sería un ejemplo del conocimiento de las características de aprendizaje.

De lo anterior se desprenden las siguientes categorías: *características de aprendizaje*, *errores y dificultades*, *tareas matemáticas* y *materiales y recursos*, cada una de ellas con sus respectivos indicadores de conocimiento que quedan descritos en la Tabla 11.

Tabla 11. *Indicadores de conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas*

Características de aprendizaje
- Conocer cómo se desarrolla la cognición sobre el concepto de número racional (etapas de aprendizaje por los que transcurre el pensamiento del estudiante para conocer y comprender el contenido).
- Conocer concepciones e ideas previas de los estudiantes sobre el contenido de las fracciones.
- Saber identificar qué imagen del concepto o procedimientos tienen los estudiantes según sus expectativas o respuestas.
- Identificar los elementos de la argumentación en el proceso de desarrollo de una respuesta de los estudiantes (inferir sus pasos mentales).
- Expresar con claridad matemática las respuestas a las preguntas y dudas de los estudiantes.

Tabla 11. *Indicadores de conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas*

Errores y dificultades[10]
- Conocer los errores y las dificultades que los estudiantes pueden presentar en la aplicación de conceptos y procedimientos en la resolución de las tareas propuestas. Por ejemplo, dificultades para identificar el todo en cada fracción, empleo parcial de las características de la fracción porción (partes equitativas y exhaustividad de la partición), y las relacionadas con procedimientos, como sumar o restar fracciones con distintos denominadores, donde los alumnos pueden sumar o restar los numeradores y los denominadores entre sí. El profesor puede manifestar que se transfieren las propiedades de los N a las operaciones con Q. Presentar tareas que permitan aclarar el error o que no se incurra en la situación.
- Conocer indicadores de la presencia de errores conceptuales en las declaraciones de los estudiantes.
- Saber planificar tareas[11] con el objeto de prever dificultades de los estudiantes en relación con el contenido.
- Presentar explicaciones a los estudiantes cuando tienen dificultades al abordar un contenido o una tarea matemática.
Tareas matemáticas
- Presentar tareas matemáticas que refuerzan los conceptos o procedimientos matemáticos relacionados con las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.
- Explicar criterios para adaptar las tareas propuestas a las finalidades de aprendizaje, puntualmente o como caminos previstos de aprendizaje.
- Presentar tareas adecuadas para recordar los caminos de aprendizaje que se intuyen. Como por ejemplo, la relación parte-todo puede trabajarse en contextos continuos (área) e ir gradualmente incorporando actividades que involucren contextos discretos, o el papel que juega la representación en contextos discretos para iniciar los problemas aditivos en fracciones con distinto denominador.
Materiales y recursos
- Promover acciones que permiten el empleo de recursos y situaciones que envuelvan diversos significados y contextos. Por ejemplo, el trabajo de las fracciones como relación parte-todo puede abordarse con modelos concretos (contexto continuo, área) y luego trabajar en contextos concreto (fichas). (Transparencia de los materiales y recursos).

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

El KMT considera aspectos del contenido, cognitivos y aquellos relacionados con la instrucción. Por ejemplo, el profesor ha de conocer estrategias (matemáticas- didácticas)

[10] En el Anexo A presentamos una serie de errores y dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje de los números racionales.

[11] Este indicador y el siguiente se asignan al KFLM porque el motivo que propicia el diseño y la propia realización de esa tarea o actividad es el KFLM.

para abordar un error o una dificultad presentada por los estudiantes, desarrollar líneas argumentales que permitan la adquisición de los conceptos; cuestiones que se activan en situaciones de enseñanza pero que requieren tener conocimiento del tema matemático.

Consideramos necesario que el profesor desarrolle líneas argumentales que faciliten la adquisición de los conceptos, esto requiriese comprender o producir relaciones de justificación entre proposiciones deductivas y semánticas (Charalambous, Hill y Ball, 2011; De Gamboa, Planas y Edo, 2010). Las argumentaciones pueden estar constituidas por explicaciones, justificaciones u otro tipo de razonamientos. Las explicaciones son descriptivas, mientras la argumentación valida el paso de premisa a conclusión (De Gamboa, Planas y Edo, 2010). En este subdominio consideramos las explicaciones y justificaciones susceptibles de transmitirse en los niveles de educación básica, que le permiten al profesor dar sentido de aquello a lo que enseña.

También, el profesor ha de saber elegir los sistemas de presentación para la enseñanza del contenido, por ejemplo, mostrar que para los primeros niveles de enseñanza del tema de las fracciones ha de favorecerse el trabajo con representaciones concretas.

Por otra parte, las tareas matemáticas también son parte del subdominio KMT. Por ejemplo, el profesor ha de tener criterios explícitos para justificar y elegir tareas adecuadas a cada nivel de enseñanza; ha de diseñar un repertorio de situaciones que permitan adquirir o reforzar conceptos matemáticos. Presentar tareas con riqueza matemática, como aquellas en las cuales la unidad de medida no está contenida en un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o expresar su medida, o tareas sobre identificación de la unidad, de modo que los estudiantes puedan reconocer las partes en que está dividida la unidad. La riqueza de las tareas matemáticas busca captar la profundidad de las matemáticas ofrecidas a los estudiantes (Hill, Blunk *et al.*, 2008). En este trabajo consideramos que las tareas son ricas en términos de los hechos y el procedimiento que desarrollan, si buscan abordar las diferentes ideas matemáticas, y si permiten establecer relaciones entre representaciones.

Este subdominio incluye también conocer materiales y recursos didácticos para la enseñanza (regletas de Cuisenaire, reglas de colores, Tangram, etc.), adecuadas al nivel escolar y a las finalidades previstas de adquisición de conceptos y propiedades. El profesor ha de saber justificar los materiales o recursos empleados para el proceso de enseñanza.

De lo anterior se derivan las siguientes categorías: *estrategias*, *sistemas de representación*, *tareas matemáticas* y *materiales y recursos*, cada una de ellas con sus respectivos indicadores de conocimiento que quedan descritos en la Tabla 12.

Tabla 12. *Indicadores de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*

Estrategias
- Conocer estrategias para abordar un error o una dificultad. - Conocer o saber desarrollar líneas argumentales que faciliten la adquisición de los conceptos y procedimientos.
Sistemas de representación
- Saber elegir los sistemas de representación para la enseñanza de las fracciones. Por ejemplo, primero el número puede tener una imagen concreta o material, luego una imagen gráfica, para finalmente quedar visualizada idealmente (imaginación de lo visual) (Bruner, 1964; Castelnuovo, 1970). - Conocer una variedad adecuada de los sistemas de representación que se emplean en las tareas. Conocer aquellas representaciones más adecuadas para cada tarea, según los objetivos de aprendizaje planteados o las metas (subsanar errores, introducir un concepto, ampliar los significados del mismo, precisarlo, etc.).
Tareas matemáticas
- Criterios explícitos para justificar que las tareas planteadas son adecuadas al nivel escolar y cognitivo de los estudiantes, como: ▪ Para manejar símbolos con significado y lograr su comprensión se pueden presentar experiencias de repartir cantidades de manera equitativa, utilizando material concreto, dibujos, etc., de modo que los estudiantes puedan conectar las acciones con los símbolos matemáticos. ▪ Tareas que permitan presentar ideas desde un plano simbólico pasando previamente por la utilización de representaciones escritas y verbales. - Tareas propuestas en relación con la diversidad del alumnado. - Repertorio de tareas que permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos. Por ejemplo, diversidad de situaciones cotidianas que emplea para el trabajo con las fracciones como relación parte-todo. - La evidencia de que el profesor dispone de un esquema de instrucción. Por ejemplo, comienza con una actividad de reparto, da ocasión a que actúen los estudiantes, presenta los contenidos. - Riqueza de las tareas matemáticas propuestas o improvisadas en el transcurso de la enseñanza, como: ▪ Situaciones en el cual la unidad de medida no está contenida un número exacto de

Tabla 12. *Indicadores de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*

veces en la cantidad que se desea medir o expresar una magnitud.

- Tareas sobre identificación de la unidad, de modo que los estudiantes puedan reconocer las partes en que está dividida la unidad.

Materiales y recursos
- Conocer materiales o recursos didácticos empleados para la enseñanza y cualidades didácticas.
- Saber adecuar los recursos y materiales según el nivel de enseñanza y las finalidades previstas de adquisición de conceptos y propiedades. Por ejemplo, el uso de material concreto, dibujos, para iniciar repartos equitativos.
- Saber justificar la utilidad de los materiales o recursos didácticos para el proceso de aprendizaje.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS)

El KMLS implica conocer cómo se afronta el tema matemático en los documentos oficiales, reflejar en la enseñanza los contenidos mínimos previstos en el currículo escolar de base, cuál es la práctica habitual en el ciclo educativo en el que se encuentra, qué otras formas de afrontar su enseñanza se recomienda en documentos profesionales de otros países o comunidades.

Respecto a las tareas, saber justificar si se adaptan o enriquecen según las orientaciones propuestas en los documentos oficiales o en las indicaciones curriculares de diversas fuentes del currículo en educación matemática (estándares curriculares, currículo nacional, pruebas PISA, etc.), pero también en la práctica habitual de los centros educativos.

Asimismo, justificar el uso que se hace de los materiales y recursos didácticos en base a las orientaciones metodológicas estipuladas en los documentos oficiales y en las recomendaciones curriculares. Lo anterior podemos englobarlo dentro de las herramientas curriculares básicas para el trabajo del profesor de matemáticas.

Para este subdominio hemos establecido la categoría *lenguaje matemático*, *proceso de instrucción* y *orientaciones curriculares*, cada una de ellas con sus respectivos indicadores de conocimiento que quedan descritos en la Tabla 13.

Tabla 13. *Indicadores de conocimiento de los estándares de aprendizaje*

Lenguaje matemático
- Promover la formalización de las escrituras, los fundamentos matemáticos de las

Tabla 13. *Indicadores de conocimiento de los estándares de aprendizaje*

definiciones y de los algoritmos según el rigor correspondiente a los niveles escolares.
Proceso de instrucción
- Disponer de criterios para asociar los objetivos de aprendizaje planteados (implícitamente o explícitamente) con el desarrollo de la instrucción según los documentos oficiales. - Saber hacer referencia a los contenidos esperados que aprendan los estudiantes, teniendo presente el tipo de alumno y los conocimientos previos de los que parten, según lo reconocido en los documentos oficiales, en los curriculares o en la práctica habitual en los centros, como: ▪ Números naturales y las propiedades asociadas al conjunto numérico. ▪ Estimación y cálculo de medida (comparación de objetos según longitud, peso/masa o capacidad y estimar resultados de medida, realizándose cálculos exactos). ▪ Trabajo con el sistema de numeración decimal (leer y escribir, comparación, ordenación). ▪ Correspondencia entre fracciones, decimales y porcentaje.
Orientaciones curriculares
- Conocer estándares de aprendizaje surgidos de investigaciones. - Conocer los conceptos, propiedades, relaciones, problemas, etc., del tema de los números racionales que se refleja en el currículo escolar de referencia o en documentos oficiales que atienden al proceso de enseñanza. - Saber cómo indica el currículo que el tema de los números racionales debe ser enseñado o abordado. - Reflejar los contenidos mínimos previstos en el currículo escolar en la propuesta de enseñanza. - Comprender los elementos que diferencian las expectativas de aprendizaje y los contenidos de cada nivel. - Saber justificar si las tareas enunciadas se adaptan o enriquecen según las orientaciones propuestas en los documentos oficiales o en las indicaciones curriculares de diversas fuentes del currículo en educación matemática (estándares curriculares, currículo nacional, pruebas PISA, etc.). - Saber justificar la adecuación entre las propuestas de gestión que se ponen en juego y las previstas en las recomendaciones metodológicas según el currículo escolar. - Saber justificar el uso que se hace de materiales y recursos didácticos de acuerdo con las orientaciones metodológicas estipuladas en los documentos oficiales de base. - Conocer orientaciones curriculares emitidas por asociaciones de profesores, grupos de investigaciones, entre otros, como la organización de docentes de matemáticas (NCTM).

En síntesis, tal como hemos expuesto, vinculamos cada uno de los subdominios de conocimiento especializado del profesor de matemáticas con aspectos del *análisis didáctico*. La relación establecida lleva a definir indicadores de conocimiento relacionados con los números racionales, que nos permitirán vislumbrar el conocimiento especializado de profesores de matemáticas puesto en juego al enseñar el tema. La Figura 14 muestra una representación gráfica de los elementos del *análisis didáctico* que intervienen en cada uno de los subdominios de conocimiento del modelo MTSK.

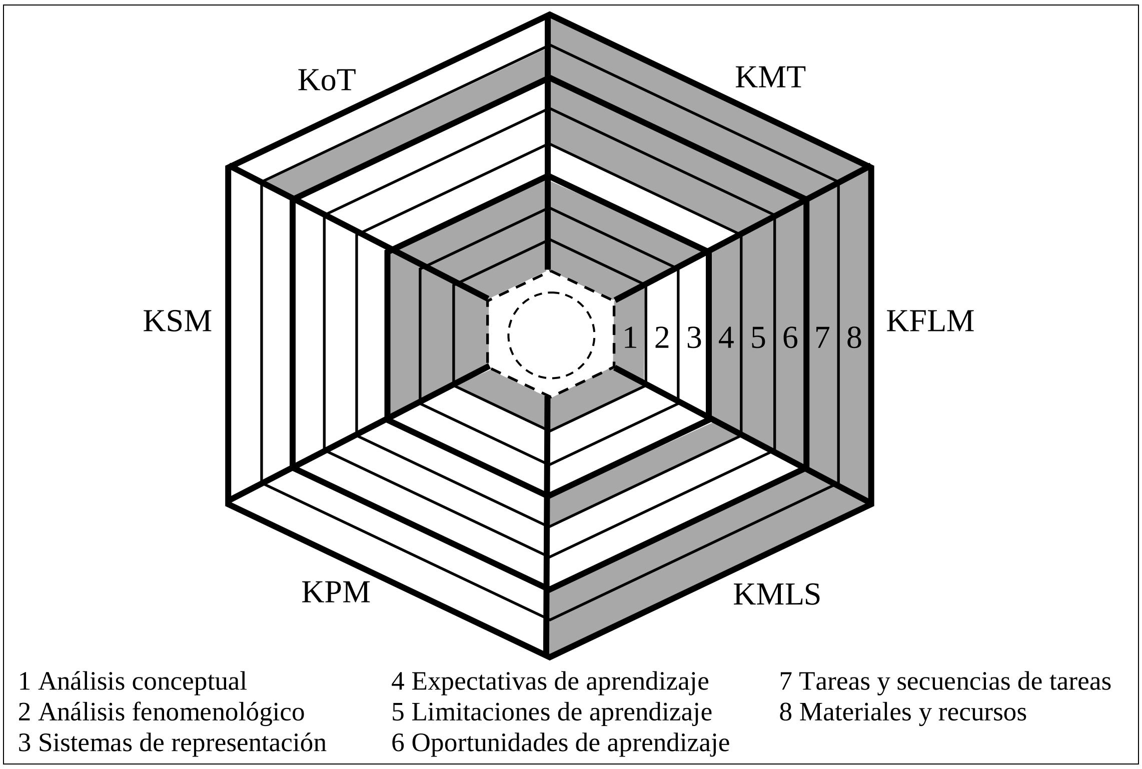


Figura 14. Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas

En el aparado siguiente enunciamos estudios sobre profesores expertos, que nos permiten conceptualizar qué se entenderá por docente experto en esta investigación.

2.3 CONCEPTUALIZACIÓN DE PROFESOR DE MATEMÁTICAS EXPERTO

La formación del profesorado a través del tiempo, ha ido experimentando cambios en el campo de la educación, tanto en los planteamientos teóricos como en sus técnicas de aplicación en la formación. En la década de los 70, la formación del profesor comenzó a desarrollarse como un campo de conocimiento, las investigaciones en educación se encaminaron a identificar factores que establecían la eficacia docente, vinculándose directamente a los estudios realizados en torno a la enseñanza (Brown y Borko, 1992; Grossman, Wilson y Shulman, 1989; Llinares, 1991; Marcelo, 1987).

Diversos son los paradigmas de investigación que permiten organizar en detalle los estudios en el campo de la educación. Estudios relacionados con la identificación de relaciones, que buscan encontrar conexiones entre la enseñanza en el aula y el aprendizaje de los estudiantes, son conocidos como investigaciones *proceso-producto*. En estas investigaciones son observados los aspectos puntuales de la actuación del profesor mientras enseña (proceso), que describen un mejor rendimiento de los estudiantes (producto), quedando determinada la eficacia docente a partir de las conductas del profesor que generan resultados favorables en sus estudiantes. Por ejemplo, un tipo de investigación bajo el paradigma proceso-producto estudió el tiempo que el profesor deja al estudiante que responda, después de hacer una pregunta antes de él mismo dar la respuesta (Russ, Sherin y Gamoran, 2011).

Posteriormente, debido al realce de la psicología cognitiva y al constructivismo, los estudios se focalizan en los cambios en la estructura cognitiva del sujeto, introduciéndose elementos sobre el procesamiento de la información y la adquisición del conocimiento. Aparece así el paradigma del *pensamiento del profesor*, que busca conocer cuáles son los procesos de razonamiento que ocurren en la mente del docente durante su actividad profesional (Marcelo, 1987). Por lo tanto, el eje de los estudios son los procesos psicológicos que apoyan los comportamientos, prestando menos atención a las conductas ante los eventos educativos.

Llinares (1991) enfatiza que las investigaciones sobre el pensamiento del profesor determinan una nueva conceptualización del conocimiento del docente con relación a su práctica, identificando que el aprendizaje del profesor se realiza desde la práctica, que su conocimiento tiene una naturaleza contextualizada y que destaca el interés por estudiar la comprensión que tiene el profesor de la materia que enseña. Fue así como este paradigma condujo a investigaciones, en las que se pretendía identificar la naturaleza de las experiencias pedagógicas de los profesores expertos, comparándose a docentes noveles, en ámbitos específicos y tareas concretas.

El enfoque comparativo ha permitido identificar características únicas de conocimiento y de las prácticas de enseñanza de los profesores, referente a sus conductas y sus actuaciones. Por ejemplo, Schempp, Tan, Manross y Fincher (1998) adoptan categorías, enunciadas por Berliner (1988; 2001), con las que describen el desarrollo docente, recorriendo cinco etapas: principiante o novel, principiante avanzado, competente, muy competente y experto. Cada etapa queda identificada por la experiencia docente y las prácticas habituales.

Principiante o novel es el estudiante para profesor y la mayoría de los profesores de primer año de ejercicio profesional. Estos docentes tienden a un comportamiento inflexible y racional en su desempeño profesional.

Principiante avanzado es el profesor que va adquiriendo experiencia en las tareas de enseñanza, participando de manera directa en el proceso de enseñanza y aprendizaje; es decir, trabaja con los estudiantes y enseña los contenidos de la disciplina.

Competente es el docente que se desempeña alrededor del quinto año de la profesión docente. Como destacan Schempp *et al*. (1998), es el docente "que se siente más cómodo y más flexible en su rol docente" (p.11).

Muy competente (capaz) es el profesor "que tiene un sentido global y una percepción holística de las situaciones de enseñanza" (Schempp *et al*., 1998, p.11).

Experto es el profesor que enseña de manera intuitiva, automática y fluida. El buen desarrollo de su experiencia profesional le permite convertirse en docente experto.

Las etapas descritas son consideradas graduales, el profesor parte de la base como profesor principiante o novel, y puede alcanzar un desempeño profesional experto. Entendiéndose que estos sujetos tienen un desempeño mayor que los docentes principiantes o noveles. Este enfoque admite que la experiencia (práctica prolongada) no lleva automáticamente a ser un docente experto, aceptando que el sujeto principiante o novel puede convertirse en experto.

En el entorno educativo un profesor experto es reconocido, comúnmente, con los siguientes vocablos: experimentado, profesor con buena o exitosa práctica, buen profesor, competente, entre otros, y en ocasiones, pueden ser empleados como sinónimos estos términos, sin embargo, en la literatura se distinguen estas expresiones aludiéndose a significados específicos.

Por ejemplo, un profesor con años de experiencia en el aula puede ser reconocido como experimentado, atribuyéndose el calificativo según los años de experiencia docente. No obstante, puede suceder que los años de experiencia no indiquen la pericia del profesor en un área determinada.

Los profesores con cierto grado de pericia, pueden asociarse con docentes que tienen buenas o exitosas prácticas. La buena enseñanza, se atribuye a poner en práctica los estándares aplicados a las tareas que competen a la enseñanza y en relación con las normas de conducta profesional, incluyendo esto último consideraciones éticas. Sin embargo, la enseñanza exitosa se mide a partir de los aprendizajes logrados (Fenstermacher y Richardson, 2000). Específicamente, Climent y Carrillo (2007) definen criterios que caracterizan a la una buena práctica, en los niveles educativos de infantil a secundaria, en los siguientes tres aspectos:

- La diversidad de focos matemáticos empleados (con énfasis en la resolución de problemas y el razonamiento).
- El uso de actividades que conllevan un aprendizaje profundo y significativo.
- El empleo de estrategias didácticas que integren la exploración y la consideración de conocimientos previos.

Los autores complementan los indicadores de buena práctica con el uso de problemas a lo largo de la actividad matemática en el aula.

Planas y Alsina (2009), en el libro de *Educación Matemática y buenas prácticas*, presentan una recopilación de experiencias de aula de profesores que imparten clase en distintas etapas escolares, que se consideran buenas prácticas a partir del modelo teórico que ellos mismos determinan. Identifican este modelo a través de las experiencias de los profesores como características de un "conocimiento educativo amplio y reflexivo" (p. 11). Una buena práctica de enseñanza "es una situación donde los alumnos y profesores colaboran por medio de conversaciones en las que construyen puentes entre el lenguaje escolar y el lenguaje cotidiano al referirse a actividades contextualizadas que son cognitivamente estimulantes" (pp.16-17). En esta interacción aparecen los conocimientos matemáticos y sobre otras materias y, en general, todo aquello que permite aprender.

Con frecuencia, se emplea la expresión "buen profesor" indicando a un docente con ciertas características, pero "¿qué significa ser un buen profesor de matemáticas?" (Niss, 2004, pp. 179-180). Niss (2004) hace una aproximación de respuesta a la pregunta considerando que un buen profesor es aquél que "de una manera efectiva puede fomentar el desarrollo de las competencias matemáticas en sus estudiantes." (p. 190). Esto lleva a que el docente de matemáticas adquiera cierta pericia en relación con el contenido matemático, adquiera destrezas y actitudes en torno a las matemáticas, y a su vez utilice estas características en variados entornos y situaciones.

Para describir al buen profesor se han planteado las competencias didácticas y pedagógicas específicas en matemáticas que conviene que desarrolle el profesor. En los aportes de Niss (2004) se describe la competencia curricular, de enseñanza, sobre el aprendizaje, de evaluación, de colaboración, y para el desarrollo profesional. Específicamente, para este informe, aludimos a la competencia para el desarrollo profesional, que hace referencia a la habilidad de desarrollar la propia competencia como docente de matemática. Para ello se identifica como indicadores la participación en cursos de formación continua, implicación en proyectos, investigaciones y conferencias; es decir, el profesor participa en actividades que lo lleven a potenciar su desarrollo profesional.

La competencia para el desarrollo profesional incluye también, reflexionar sobre la propia enseñanza y sus necesidades y mantenerse actualizado sobre las nuevas perspectivas y tendencias en la investigación y en la práctica (Niss, 2004, p. 192).

Hattie (2003) distingue dimensiones que diferencian al docente de matemáticas competente como aquel que puede identificar representaciones para la enseñanza de un contenido, que organiza y utiliza su conocimiento respecto a la materia, que guía el aprendizaje de sus estudiantes generando interacciones en el aula y además genera un buen clima de enseñanza, quien crea retroalimentación a sus alumnos y propone desafíos con el objeto de buscar aprendizajes profundos de los contenidos.

Variadas son las definiciones que aluden a profesores destacados, sin embargo nuestra atención se centra en los profesores que, generalmente, representan de manera profunda los temas que enseñan a sus alumnos y que hoy en día se reconocen que tienen conocimientos más estructurados que el común de los docentes (Chi, 2011; Li, Huang y Yang, 2011; Li y Kaiser, 2011; Yang, 2014).

Lo anterior nos lleva a planteamos ¿cómo podemos identificar a profesores expertos en el sistema educativo? En término de lo que sostiene Hattie (2003), somos conscientes de que “más que una lista de verificación” buscamos identificar criterios que nos permitan seleccionar a profesores con desarrollo profesional destacado (p. 10). Para aproximarnos a algunos criterios de selección de profesores expertos revisamos estudios que nos ilustren sobre cómo han identificado y seleccionado a docentes con características de expertos.

2.3.1 Algunas investigaciones sobre identificación y selección de profesores destacados

En este aparatado, resumimos una pluralidad de estudios que identifican características para reconocer a los docentes de matemáticas que se diferencian del común de los profesores. Las investigaciones que contrastan las actuaciones de los profesores establecen criterios para seleccionar a los sujetos participantes en la investigación. Para esto, algunos investigadores se apoyan en sus propios juicios y decisiones sobre qué se entenderá por profesor experto, o bien hacen uso de variados enfoques que les permiten identificar y seleccionar a los docentes.

Borko y Livingston (1989) abordan el estudio del pensamiento y las acciones de un grupo de profesores expertos y otro de profesores noveles. Los docentes expertos fueron seleccionados por ser reconocidos como profesores con una vasta experiencia pedagógica y recomendaciones emitidas por los administradores y coordinadores de los centros donde ejercían su labor profesional. Los profesores noveles, participantes en el estudio, eran estudiantes para profesor, seleccionados y por el rendimiento en los cursos de matemática asistidos. Los autores de la investigación, consideraron que las características descritas les permitían comparar la enseñanza de los profesores expertos y de los noveles destacados.

En esta investigación se comparó la enseñanza y la reflexión después de las clases, llevadas a cabo por los profesores, analizando la enseñanza como habilidad cognitiva compleja desde dos perspectivas: por la naturaleza del sistema de conocimiento de los profesores y por la forma en que improvisaban los docentes.

Algunos resultados hallados en el estudio sobre las actuaciones de los docentes expertos, en comparación con los docentes noveles, fueron que los expertos presentan esquemas cognitivos más elaborados que los profesores noveles; el razonamiento pedagógico está más desarrollado, debido a la experiencia adquirida durante su desarrollo profesional; tienen integrados hechos, principios y experiencias sobre los cuales planifican y reflexionan; son más selectivos en el uso de la información durante la planificación de sus clases y en la interacción durante la enseñanza; usan distintas estrategias para resolver problemas; los profesores expertos hacen mayor uso de la instrucción y de rutinas de enseñanza (Borko y Livingston, 1989). En esta investigación, además de encontrarse diferencias en las actuaciones de los docentes expertos y noveles, los participantes del estudio destacaron la importancia de enseñar un mismo contenido varias veces como una valiosa oportunidad de aprendizaje. De esta manera Borko y Livingston (1989) subrayan que es relevante "la habilidad creada por los docentes al enseñar el contenido más de una vez" (p. 495).

Schempp *et al.* (1998) estudian las diferencias de conocimiento entre profesores noveles y competentes. A diferencia del estudio de Borko y Livingston (1989), estos investigadores comparan a profesores en dos etapas diferentes de la experiencia: novel y competente, de acuerdo a las etapas descritas por Berliner (1988). El profesor novel es aquel que inicia su carrera profesional, mientras que el profesor competente queda definido como "aquel docente que a través de la experiencia y el continuo aprendizaje, ha alcanzado un respetable y reconocible nivel de experiencia pedagógica" (pp.11-12). Utilizan tres criterios para identificar y seleccionar a los profesores competentes: tener cinco o más años de experiencia en la enseñanza, haber sido reconocido por los compañeros de las escuelas públicas y del profesor mentor (tutor) por su participación y desempeño en su labor; es decir, reconocérsele su servicio.

Posteriormente, entrevistaron a los sujetos seleccionados para apreciar el conocimiento que utilizan en la planificación y en la realización de sus clases. Encontraron diferencias en aspectos de la cognición entre los profesores noveles y competentes. Por ejemplo, los profesores competentes focalizan su atención en la estructura y organización de la clase en lugar de atender a los estudiantes, padres o la sociedad; en relación con las percepciones, los profesores competentes admiten sus deficiencias de conocimiento, mostrándose dispuestos a aprender (Schempp *et al.*, 1998). La práctica de los docentes competentes es reflexiva, por ejemplo, los docentes utilizan evaluaciones de aprendizaje para identificar problemas y dificultades de aprendizaje de los contenidos, a su vez diseñan y elaboran actividades de enriquecimiento que favorezcan la adquisición de los conceptos a los estudiantes.

Algunos resultados de estudio coinciden con los obtenidos por Borko y Livingston (1989). Por ejemplo, los profesores competentes acumulan una gran cantidad de conocimiento, lo que los hace poseedores de estructuras cognitivas más elaboradas, permitiéndoles interpretar de manera significativa los acontecimientos de la clase y tomar decisiones efectivas en el aula que conduzcan a un desempeño ejemplar. Estos profesores son más experimentados, atienden a cuestiones relevantes en el aula.

Hattie (2003), en una investigación realizada con profesores de Nueva Zelanda, se planteó determinar los atributos de excelencia de los profesores, concretamente averiguar las diferencias entre los docentes con experiencia y expertos. El autor recalca que en ocasiones se confunde la experiencia con la edad avanzada de los sujetos, esto lleva al investigador a preguntarse "¿qué hace la diferencia entre un docente experto y un docente con experiencia?" (p.5). Considera docentes expertos como aquellos que identifican las representaciones esenciales de una materia, guían el aprendizaje a través de las interacciones en el aula; monitorean el aprendizaje y proporcionan retroalimentación a sus alumnos; atienden a los atributos afectivos; e, influyen en los resultados de los estudiantes. Mientras que los profesores con experiencia se identifican como aquellos que han tenido una práctica profesional prolongada.

El estudio de campo realizado por Hattie (2003) contó con grupos de profesores expertos y un grupo de docentes con experiencia. Discriminaron a los docentes tras observar cómo aplicaban una serie de tareas, a partir de su práctica, de entrevistas y haciendo encuestas a sus estudiantes. Apreciaron que los profesores expertos se diferencian de los profesores con experiencia, especialmente por demostrar durante la instrucción. También se observa que la práctica es más integrada y más coherente. Los estudiantes que son instruidos por profesores expertos se enfrentan a tareas de alto grado de dificultad, evidenciándose una comprensión más profunda de los conceptos enseñados.

En general, los profesores expertos de matemáticas generan mayores conexiones entre los contenidos y elaboran estructuras conceptuales más complejas. Como obtiene Ma (1999) en su estudio, los profesores experimentados sujetos de su investigación tienen una comprensión más profunda de las matemáticas elementales, conectan distintos contenidos entre sí y vinculan los principios básicos de la materia con otros contenidos. Entendiéndose una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales como "más que una sólida comprensión conceptual de la matemática elemental, es la consciencia de la estructura conceptual y las actitudes básicas de la matemática inherentes en la matemática elemental y la habilidad para aportar un fundamento para tal estructura conceptual e infundir esas actitudes básicas a los estudiantes […]" (p. 124). Un elemento clave en esta comprensión profunda es la comprensión de la estructura matemática relacionada con los contenidos, además de la capacidad de los profesores para relacionar los contenidos de la estructura conceptual.

En general, comprender la enseñanza de expertos es la clave para el desarrollo profesional: "si uno sabe qué encierra la enseñanza experta, esperaría encontrar formas de ayudar a que los profesores desarrollen tales competencias" (Schoenfeld, 2011, p.333). Este es el caso de algunos países de alto rendimiento en educación que van adelantados en desarrollar la pericia docente en cuanto a la enseñanza de los contenidos (Li y Kaiser, 2012; Yang, 2014).

El libro reciente titulado *Expertise in Mathematics Instruction* (Li y Kaiser, 2011), contiene una colección de investigaciones sobre la pericia en la instrucción de las matemáticas de países de alto rendimiento en educación: China, Japón, Singapur, Corea del Sur y Taiwán. Este tema se retoma en el PME 36, dedicando el 1º *Research Forum* a abordar el tema de la conceptualización y el desarrollo de la pericia en la instrucción matemática en distintos países (Li y Kaiser, 2012). Si bien son países con culturas muy diferentes entre sí, consideramos pertinente comprender qué se entiende por profesores expertos en estos países y cómo identifican a estos profesores.

En Japón y China, para mejorar la calidad de la instrucción de las clases, se aprende directamente de los profesores expertos; la enseñanza es considerada una práctica profesional que es abierta a la discusión pública (Li, Huang y Yang, 2011). En Japón, el profesorado está constantemente en búsqueda de la mejora de sus clases, a través del método de "Estudio de Clases", que consiste en que los docentes visitan las aulas de otros profesores y promueven el estudio de lo sucedido en clase, mediante una reflexión conjunta con el profesor, empleando la clase como base de reflexión (Fernández y Yoshida, 2004; Isoda, Arcavi, y Mena, 2005;). Los docentes de matemática, de las aulas de Japón, están en continuo perfeccionamiento, participando en estudios de sus clases que le permiten generar una discusión valiosa en el ámbito matemático y didáctico.

En China, los profesores son reconocidos por el rango y título profesional, por su desempeño en la enseñanza y el nivel de liderazgo de la instrucción. Los profesores expertos se identifican por ser personas con valores éticos y culturales, representan un modelo a seguir para otros docentes (Li, Huang y Yang, 2011). Específicamente, los docentes pueden aprender de los profesores expertos sobre su conocimiento y habilidades que estos poseen, y que son públicamente demostradas. Para ello, el profesor experto ha de tener una formación académica reconocida. En este país se presenta menor preocupación en identificar a profesores expertos, pues uno de los criterios que es ampliamente usado es el ranking de la enseñanza.

Li, Huang y Yang (2011) examinaron el grado de similitud entre profesores expertos, atendiendo específicamente al pensamiento y a su práctica de enseñanza. Estudiaron a cinco profesores expertos que se identificaron por ser docentes que demostraban una enseñanza ejemplar, además que tenían un alto grado de formación (licenciatura, máster, doctorado), amplia experiencia de enseñanza, impartían en alto grado educativo, y habían sido premiados. De los docentes participantes del estudio, se grabaron sus lecciones ejemplares y se recogieron los diseños de clases y las reflexiones de la clase. En este estudio se encontraron similitudes en las lecciones y tendencias de los profesores expertos al desempeñarse en las aulas chinas (Li, Huang y Yang, 2011). Algunas de ellas son que los profesores tienen profundo conocimiento del contenido de la materia en el nivel que enseñan; identifican apropiadamente y abordan los aspectos difíciles del contenido que conllevan dificultades a los estudiantes; ponen énfasis en el desarrollo del pensamiento y habilidades matemáticas de los alumnos; usan la resolución de problemas matemáticos para el desarrollo efectivo de la instrucción; centran la instrucción en el estudiante; y motivan a sus alumnos. En general, los profesores expertos del estudio demostraron un buen conocimiento de la materia, del aprendizaje de los estudiantes y de estrategias de enseñanza; identifican dificultades de aprendizaje de sus alumnos, desarrollan métodos de pensamiento matemático y muestran habilidad en la resolución de problemas.

Li, Huang y Yang (2011) sostienen que los profesores expertos deben servir como modelos éticos, valorándose sus características. En el caso de los profesores chinos han de ser líderes de la asignatura a nivel local, demostrar una enseñanza de calidad, impartir lecciones ejemplares y haber ganado algún premio nacional en un concurso de enseñanza. Además, es importante que lo profesores participen en investigación científica, escriban monografías o investigaciones en revistas locales o más allá.

El estudio reciente de Yang (2014) identifica que los docentes con cierta pericia tienen una base de conocimiento profundo y amplio, que incluye: el conocimiento de las matemáticas (de las distintas ramas de la disciplina y el proceso de desarrollo de las matemáticas) y una fuerte capacidad de resolución de problemas; conocen teorías educativas y psicológicas (de instrucción, aprendizaje, cognitivas y curriculares);

conocen las características de sus alumnos, sus hábitos de aprendizaje, las personalidades, las fortalezas, las debilidades, etc. También, destaca su conocimiento de los estándares curriculares, que incluye tener una imagen clara y completa de los textos escolares, no solo del nivel de enseñanza, el saber diseñar pruebas y saber cómo evaluar el aprendizaje de los estudiantes; y, por último un profesor experto debe tener un amplio conocimiento en otros campos.

Otros aspectos que también se pueden considerar para la identificación de profesores expertos, son los resultados de las evaluaciones docentes, puesto que son valoraciones iniciales que se tiene del profesorado.

En el caso de *España*, en la actualidad, no cuenta con un sistema nacional de evaluación del desempeño profesional docente, únicamente se establecen evaluaciones que elaboran las administraciones correspondientes a cada comunidad autónoma.

Según la Ley Orgánica de Educación “Evaluación de la función pública docente” (Artículo 106), precisa que las administraciones elaborarán planes para la evaluación, fomentando la evaluación voluntaria del profesorado. La Figura 15, considera los organismos encargados de las evaluaciones docentes. Por ejemplo en el caso de la comunidad Autónoma de Andalucía, la Ley de Educación de Andalucía crea la Agencia Andaluza de Evaluación Educativa que establece “un sistema de evaluación del profesorado que permita la acreditación de los méritos a efectos de su promoción profesional” (Artículo 157, p.131).

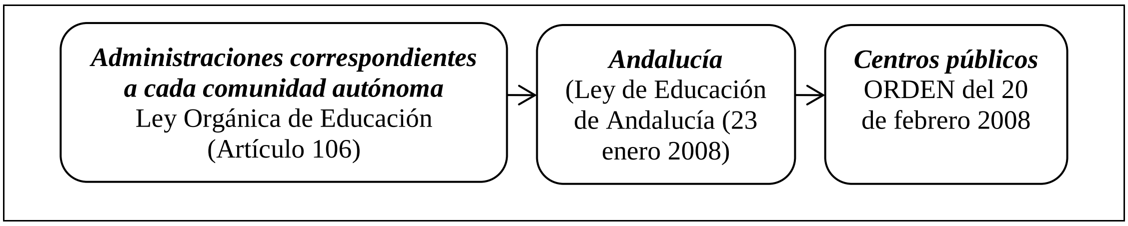


Figura 15. Organismos encargados de la Evaluación de la práctica docente en España

Estableciéndose que los centros públicos de educación han de elaborar sus programas de calidad y de mejora del rendimiento escolar, estos podrían tener presente los resultados de las evaluaciones docentes, si se realizan.

Leinhardt, Putnam, Stein y Baxter (1991) identifican que los profesores con una mayor comprensión de los temas escolares que enseñan (conocimiento del contenido), tienen mejores resultados en su práctica profesional. Por lo cual, pueden ser una apreciación a considerar los resultados del rendimiento de los estudiantes en evaluaciones nacionales e internacionales. Por ejemplo, en Taiwán los logros de los estudiantes en pruebas internacionales es un indicador de la instrucción efectiva y el efecto de los conocimientos matemáticos de los profesores (Lin, 2012).

Queda de relieve que la conceptualización de profesor experto es amplia y los criterios para seleccionar a los docentes con cierto grado de pericia depende de las orientaciones de los investigadores (Schoenfeld, 2011). Como describe Chi (2011) un profesor puede caracterizarse como experto en función de variadas dimensiones, tales como sus cualidades académicas, años de experiencia en el trabajo, consenso entre pares, evaluación basada en alguna tarea o evaluación del dominio de conocimiento en su área. Del mismo modo, y de acuerdo a las cualidades de los sujetos, un profesor puede considerarse experto, por ejemplo, por su capacidad innata, habilidades o su índice de especialización, entre otros.

De los antecedentes descritos anteriormente y de la organización de ellos vamos a establecer algunos criterios que nos permitan identificar, en este estudio, a docentes expertos.

2.3.2 Conceptualización de profesor experto en el estudio

En el apartado anterior, observamos dos tipos de características contempladas por los investigadores para identificar a profesores expertos, que denominaremos primarias y secundarias y que conforman nuestra conceptualización de profesor experto (Rojas, Carrillo y Flores, 2012).

Las características primarias aluden a aspectos específicos de la tarea de enseñanza y a cuestiones sobre conocimiento. Son cualidades que han de confirmarse a través de la observación de clase, de entrevistas sobre el contenido, de instrucción y de actuación.

Características primarias

- Comprensión de los contenidos específicos, del aprendizaje de los estudiantes y de estrategias de enseñanza.
- Procesos de enseñanza más integrados (relaciona el contenido con diversas situaciones, usa variedad de representaciones en la enseñanza de los contenidos).
- Presentación a los estudiantes de tareas de mayor complejidad (problemas).

- Uso de distintas estrategias para resolver los problemas.
- Diseño y elaboración de actividades de enriquecimiento que favorecen la adquisición de los conceptos o procedimientos.

Las características secundarias atienden a aspectos generales de la experiencia profesional del profesor.

Características secundarias

- Estar en ejercicio y tener cinco o más años de experiencia docente en aulas.
- Profesor destacado según las evaluaciones institucionales y nacionales si se aplican.
- Haber enseñado el contenido matemático escolar, alusivo al objeto de estudio de interés, más de una vez, en los últimos años de desempeño docente.
- Docente recomendado por sus pares y por los directivos del centro.
- Participar en procesos de actualización constante en su disciplina, como: participación en curso de formación continua, realización de postgrados (licenciatura, máster, doctorado), implicación en procesos de investigación e innovación educativa.
- Ser consciente del incesante proceso de cambio de la educación, motivo para ser un docente activo que se actualiza y se preocupa por su mejora continua como profesor.
- Poseer alguna nominación o adjudicación de premios en concursos de enseñanza.
- El rendimiento de sus estudiantes en evaluaciones locales, nacionales e internacionales ha de ser destacado.

Los criterios definidos nos permitirán distinguir características de profesores que han alcanzado un desempeño profesional experto. Teniendo presente la complejidad de identificar a profesores con características particulares y, a veces, las limitaciones de acceder a trabajar con profesores, consideramos que los docentes que tengan una mayor cantidad de las características descritas son buenos candidatos para considerarlos como expertos y, por ende para comprender su conocimiento especializado a partir de cómo se manifiesta en su enseñanza.

RESUMEN

Desarrollamos tres ideas centrales, que tienen el propósito de dar a la investigación un sistema coordinado y coherente de fundamentos, que permitan abordar nuestro problema de investigación. Primero, abordamos el tema del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, partiendo de los trabajos de Shulman (1986; 1987) para llegar a definir los modelos de conocimientos actuales que se están trabajando en la línea de formación de profesores.

Nos focalizamos en definir el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), que surge de los avances y propuestas provenientes de distintos modelos de conocimiento profesional del profesor (Ball, 2000; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ponte y Serrazina, 2004; Rowland *et al*., 2005; Shulman, 1986). Avanzando en una reformulación desde una perspectiva que entiende todo el conocimiento del profesor como especializado. Este modelo se compone de dos dominios de conocimiento: el matemático y el didáctico del contenido. Cada dominio se divide en tres subdominios de conocimiento que aluden al conocimiento de los fundamentos de los conceptos elementales, de los fundamentos matemático de los recursos didácticos, de las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de dichos conceptos, etc., todo esto forma parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Este modelo nos permitirá estudiar en profundidad el conocimiento del profesor de matemáticas en su acción docente.

Posteriormente, exponemos como entendemos el *análisis didáctico* tal como lo concibe el grupo «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico», principalmente en los trabajos de Rico (1997a, 1997b; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), Gómez (2007) y Lupiáñez (2009); es decir, como una herramienta investigadora para identificar y clarificar los conocimientos puestos en juego por un profesor, cuando enseña un contenido matemático (Rojas y Flores, 2011; Rojas, Flores y Carrillo, 2013; Rojas, Flores y Ramos, 2013). Este procedimiento nos lleva a relacionar cada uno de los subdominios del modelo MTSK con los distintos análisis que componen el *análisis didáctico*. De la relación establecida surgen indicadores de conocimiento (establecidos *a priori* y deductivamente). El sistema de indicadores constituye una herramienta conceptual y operacional que facilita el análisis de la información y su posterior interpretación.

Por último, considerando que la comprensión de la pericia lleva a dedicar una mayor atención a los conocimientos de los docentes expertos y a la organización que presentan dichos conocimientos en su práctica (Li y Kaiser, 2011; Yang, 2014), nos centramos en identificar características que distinguen a los docentes expertos. Enunciamos características primarias y secundarias que nos llevarán a seleccionar a profesores, quienes pueden aportar más información sobre la naturaleza del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que enseña el contenido de los números racionales.

Capítulo 3

Metodología

Índice del capítulo

Metodología

You can observe a lot by just watching
(Yogi Berra, citado en Savola, 2008, p. 1)

La investigación en Educación Matemática demanda una indagación sistemática de la naturaleza y del contexto de los procesos de enseñanza, lo que conlleva emplear distintos procedimientos (seguir un camino) que permitan alcanzar los objetivos planteados.

Considerando que el objetivo que guía la investigación es describir, identificar y caracterizar el conocimiento especializado que manifiesta un profesor de Educación Primaria y un docente de Educación Secundaria, al enseñar un tema matemático, empleamos métodos cualitativos vinculados al paradigma interpretativo con el propósito de profundizar y comprender sobre los aspectos de conocimiento revelados por los profesores en su práctica docente.

Al ser el foco de atención comprender el conocimiento del profesor, sin intención de generalizar, hemos elegido el estudio de caso como diseño de investigación (Stake, 2007; 1998). Mediante la observación buscamos realizar una exploración inicial sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, de modo que permita desarrollar estudios más complejos y ambiciosos que favorezcan posteriormente la construcción de teorías (Cohen, Manion y Morrison, 2011).

En este capítulo, primero recogemos los fundamentos y procedimientos metodológicos que sustentan al estudio. Luego, enunciamos el diseño de investigación, las técnicas utilizadas para obtener la información, así como la descripción de los instrumentos de análisis de los datos. Finalmente, describimos el proceso seguido para analizar la información recogida, concluyendo con algunas consideraciones sobre el rigor sostenido en el estudio.

3.1 MARCO METODOLÓGICO: FUNDAMENTOS Y PERSPECTIVA DEL ESTUDIO

El método positivista ha predominado en las ciencias empíricas en las que mediante un distanciamiento del observador se considera la indagación de los hechos experimentales, aplicándose frecuentemente medición cuantitativa y usando modelos estadísticos. Bajo este escenario se destacan los estudios experimentales que tienen un amplio control de las variables que influyen sobre el fenómeno estudiado, siendo la finalidad principal establecer leyes o principios que expliquen el mundo y sus fenómenos (Rodríguez y Valldeoriola, 2007).

Por otra parte, las metodologías denominadas cualitativas o constructivistas se orientan a comprender e interpretar los fenómenos humanos, tendiendo a una aproximación interpretativa y naturalista del mundo. Son metodologías que aparecen más recientemente (siglo XX) con la Antropología Cultural y la Sociología, y buscan dar sentido e interpretar los hechos en función de los significados que atribuimos los sujetos.

Debido a la complejidad inherente a la realidad educativa y de acuerdo a las características de nuestro problema de investigación y a los objetivos que nos hemos planteado, consideramos que la metodología que más se adecúa al estudio es la cualitativa. Nuestro interés no está en la medición cuantitativa y en la aplicación de modelos estadísticos que nos lleven a explicar, controlar y predecir los fenómenos, tal y como busca el método positivista. Pretendemos describir, comprender e interpretar situaciones únicas y particulares, centrándonos en buscar significado y sentido a los hechos. Por ende, buscamos aproximarnos a la comprensión del conocimiento por medio de la interpretación, que como investigadores realizamos de los datos obtenidos, lo que lleva a elegir el paradigma interpretativo como el más apropiado para este estudio.

Nos referimos a comprensión como una construcción del propio investigador para interpretar el fenómeno, que surge a partir de la observación de las características del conocimiento que los profesores revelan en su tarea de enseñanza. La interpretación se nutre de referentes teóricos respecto al contenido matemático, que nos provee el *análisis didáctico*, y de aspectos concernientes al conocimiento del profesor de matemáticas.

3.2 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN: EL ESTUDIO DE CASO

En este trabajo nos centramos en uno de los protagonistas de la actividad del aula, el profesor. Buscamos profundizar en el conocimiento matemático y didáctico que el docente pone en juego al enseñar; es decir, comprender el conocimiento que emplea para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar tareas (Schoenfeld, 2010b). Por las características del tema y porque el medio natural es un entorno privilegiado para el estudio de las personas, consideramos especialmente apropiado abordar nuestro objetivo a través de un estudio de caso, que nos lleve a una extensiva y profunda descripción del conocimiento especializado que manifiesta el profesor en su tarea de enseñanza.

Cohen, Manion y Morrison (2000) establecen que el estudio de caso lleva a profundizar en un sistema acotado, que está basado en situaciones reales, que se caracteriza por estudiar fenómenos en profundidad y comprender las ideas con claridad más que interpretar teorías abstractas o principios. Como pretendemos comprender las características y la naturaleza del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, hemos optado por un estudio de caso cualitativo.

Existen distintas fortalezas que caracterizan a un estudio de caso: a) tienen particularidades únicas que de otra manera se perderían en los datos de mayor escala, estas características pueden ser la clave para la comprensión de la situación; b) son fuertes en la realidad; es decir, los datos del estudio proceden de las prácticas y experiencias de los sujetos; c) permiten mostrar la complejidad de la vida social y contribuir a cambiar la práctica; d) pueden ser una fuente de información que lleva a sugerir análisis posteriores; y e) los resultados son más fácilmente comprendidos por un público más amplio, ya que con frecuencia son escritos en el lenguaje cotidiano (Cohen *et al.*, 2011). Este conjunto de características lo hace especialmente adecuado para conocer en profundidad la práctica del profesor en su hábitat profesional natural.

Los especialistas en investigación educativa identifican algunas debilidades en el estudio de caso. Nos advierten de que los resultados pueden no ser generalizables, salvo cuando existan otros estudiosos que ven su aplicación; y que el estudio de caso es propenso a problemas de sesgo del observador. En este trabajo no pretendemos generalizar, sino comprender el conocimiento especializado de los protagonistas, por lo que nuestro interés, en principio, está en el propio caso. Sin embargo, esperamos que el estudio en profundidad de cada caso nos permita comprender mejor el conocimiento del profesor desde la perspectiva del modelo de conocimiento empleado (MTSK) y especialmente el conocimiento del profesor para la enseñanza de fracciones.

Para evitar los sesgos de los estudios cualitativos, enfrentamos esta actividad científica de manera sistemática y cumpliendo los aspectos de rigor y autenticidad que caracterizan al proceso de investigación. Concordamos con Stake (1999) al no considerar la subjetividad como un fallo que hay que eliminar, sino más bien un elemento esencial para la comprensión del tema.

El estudio de caso puede clasificarse en función de varios criterios. En relación con los objetivos, distinguiendo entre: a) *intrínsecos*, que corresponden a estudios que se llevan a cabo para profundizar y para obtener una mayor comprensión del caso en sí mismo, y entender el caso particular. A priori no se busca generar teoría ni generalizar a partir de los datos; b) *instrumentales*, en los que se examina un caso particular con el fin de proporcionar más información sobre un tema o para formular una abstracción. Un caso de tipo instrumental aporta datos (es un instrumento) para comprender otros fenómenos; y c) *múltiples o colectivos*, consisten en grupos de estudios individuales que se realizan para obtener una imagen más completa del fenómeno a estudiar; es un estudio instrumental que se extiende a varios casos (Stake, 2007).

En función de los resultados, el estudio de caso se diferencia en: a) *exploratorio*, como piloto para otros estudios o preguntas de investigación; b) *descriptivo*, que proporciona narraciones y busca describir un caso particular, aportando información básica; y c) *explicativo*, que prueba teorías y provee la interpretación (Cohen *et al*., 2011; Cohen *et al*., 2007; Stake, 2000).

Según la primera clasificación y de acuerdo a algunos objetivos planteados en esta investigación (*O1*, *O2*, *O3* y *O4*), este estudio sería de tipo *intrínseco*, al ser de interés profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas al enseñar el tema de los números racionales. Sin embargo, dos profesores expertos que enseñan este tema matemático, pueden brindar una mayor comprensión del conocimiento especializado de los números racionales, lo que otorga al estudio un carácter instrumental. Los dos casos aportarán información sobre el conocimiento especializado del docente en su acción de enseñanza, lo que puede servir como base para contrastar los resultados con otros casos e investigaciones, con el objetivo de comprender la naturaleza en sí del fenómeno.

También podemos indicar que es un estudio de tipo *descriptivo*, porque busca describir y comprender la realidad observada a partir de las acciones brindadas por los docentes. Conjuntamente, la descripción que aporta cada caso y las relaciones que podamos extraer del mismo permiten construir *interpretaciones* sobre el conocimiento especializado del profesor, respecto del contenido matemático de estudio.

La observación suele ser la técnica de recogida de datos de base del estudio de caso, pues el investigador observa los fenómenos que suceden, apreciando las características de los elementos de análisis: una clase, un profesor, un grupo de personas, una escuela o una comunidad (Cohen y Manion, 1990). La observación es importante al ser lo que menos altera la enseñanza real. En este trabajo se observa la actuación del profesor, apreciando la acción del docente ante cualquier situación, especialmente aquellas de contingencia.

Dos son los tipos principales de observación: participante y no participante. En la observación participante, el investigador se compromete e implica en las actividades, mientras que, en la no participante permanece al margen de las actividades ejecutadas. En este estudio el observador es no participante, ya que nos limitamos a apreciar las acciones e intervenciones del profesor en el aula.

Siguiendo el diseño de investigación del estudio de caso en el apartado que sigue exponemos el proceso de selección de los casos, los métodos de recopilación de datos empleados y las técnicas de análisis utilizadas.

3.3 SELECCIÓN DE LOS CASOS

Algunos autores indican que los profesores de matemáticas expertos tienen una comprensión profunda del conocimiento de la estructura matemática subyacente a los contenidos, y relacionan éstos con ideas principales de la materia y entre temas (Li y Kaiser, 2011; Ma, 1999). Además, son capaces de planificar sus clases en detalle, señalan características críticas de los conocimientos de los estudiantes, promueven el pensamiento matemático de sus alumnos, entre otros aspectos (Yang, 2014). Por tanto, los profesores expertos dan muestra de mayor conocimiento, por ello, consideramos que estudiar a docentes con características de experto nos aportará más información sobre la naturaleza del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que enseña el contenido de los números racionales. Lo anterior, lleva a la necesidad de seleccionar a los profesores informantes de la investigación, para esto hemos determinado algunos criterios de selección.

En el Capítulo 2 presentamos las aportaciones que hemos extraído de la revisión de la literatura sobre profesores expertos, lo que nos permitió extraer variadas cualidades para elegir a los docentes del estudio. Describimos dos tipos de características contempladas por los investigadores para identificar a docentes expertos, que denominamos primarias y secundarias, y que conforman nuestra conceptualización de profesor experto (Rojas, Carrillo y Flores, 2012).

Las características primarias aluden a cuestiones específicas de la tarea de enseñanza y se relacionan con aspectos de conocimiento.

Características primarias

a) Comprensión de los contenidos específicos, del aprendizaje de los estudiantes y de estrategias de enseñanza.

b) Procesos de enseñanza más integrados (relacionando el contenido con diversas situaciones, usando variedad de representaciones en la enseñanza de los contenidos).

c) Presentación a los estudiantes de problemas de mayor dificultad.

d) Uso de distintas estrategias para resolver los problemas.

e) Diseño y elaboración de actividades de enriquecimiento que favorecen la adquisición de los conceptos o procedimientos.

Características secundarias

Las características secundarias atienden a aspectos objetivos y generales de la experiencia profesional del profesor.

f) Estar en activo, desempeñando tareas docentes, con amplia experiencia profesional, de al menos cinco años.

g) Haber sido destacado en evaluaciones institucionales, tanto nacionales como internacionales, si se aplica.

h) Haber enseñado el contenido matemático escolar, alusivo al objeto de estudio de interés, más de una vez, en los últimos años de desempeño docente.

i) Ser reconocido y recomendado por sus compañeros y por los directivos del centro.

j) Participar en procesos de actualización en su disciplina, como en cursos de formación, haber realizado estudios de postgrados (licenciatura, máster, doctorado), estar implicado en procesos de investigación e innovación educativa, etc.

k) Ser consciente del incesante proceso de cambio de la educación, motivo para ser un docente activo que se actualiza y se preocupa por su mejora continua como profesor.

l) Poseer alguna nominación o adjudicación de premios en concursos de enseñanza.

m) Haber logrado un rendimiento destacado de sus estudiantes en evaluaciones locales, nacionales o internacionales.

Estas cualidades pueden ser confirmadas a través de la observación de la actuación del profesor, por medio de un cuestionario, de entrevistas sobre el contenido, o por indagaciones en el entorno del profesor. Los profesores seleccionados cumplen con las características secundarias descritas anteriormente, como mostramos en el apartado siguiente.

3.3.1 Selección de dos profesores de matemáticas expertos atendiendo a características específicas

Por medio de recomendaciones de profesores del área de Didáctica de la Matemática, de las universidades de Granada y Huelva, establecimos vínculos con docentes de centros e institutos de la Comunidad de Andalucía. Los profesores fueron recomendados por estar comprometidos con la tarea de enseñanza; participar activamente en congresos, seminarios o capacitaciones impartidos por distintas entidades; y por tener una amplia experiencia profesional. Estas recomendaciones nos llevaron a establecer contacto con 9 profesores; en un primer acercamiento descartamos a algunos docentes por las siguientes razones:

- En la fecha de contacto el profesor ya había enseñado el tema de los números racionales para el curso 2012-2013.
- Un docente postergó la enseñanza del contenido para finales de año, lo que complicaba la recogida de la información por la planificación del estudio.

- Un profesor que realizaba trabajo administrativo en un centro indicó que en ocasiones se ausentaba de las clases de matemáticas, recomendando no grabar sus clases.
- Dos profesores estaban jubilados.
- Algunos profesores impartían clase en Bachillerato, en donde el papel de los números racionales era distinto del pretendido.

Dos de los profesores recomendados expresaron interés por colaborar con el estudio, accediendo a que ingresáramos a su aula para filmar la enseñanza de los números racionales. Previo al ingreso del salón de clase realizamos una entrevista a cada profesor, con el objeto de confirmar las características definidas (primarias y secundarias).

Bajo un clima de confianza con el profesor, semejante a una conversación libre, se dio paso a una entrevista semiestructurada. Disponíamos, previamente, de una serie de preguntas cuidadosamente formuladas y parafraseadas, con el fin de generar un diálogo asimétrico con el docente que nos llevó a obtener información sobre algunas de sus cualidades.

Guión de entrevista
Parte 1:

- Centro o instituto donde desempeña su labor docente.
- Años de experiencia de la profesión docente como profesor de matemáticas.
- Preparación profesional (universitaria, menciones, postgrados, máster, etc.).
- Participación en congresos, simposios, etc. En el caso de participación mencionar los nombres de los eventos y año de participación.
- Participación en proyectos de innovación e investigación. En el caso de participación mencionar algunas.
- Participación en cursos de actualizaciones de conocimiento didáctico, matemáticas, tecnológicas en los cuales ha participado durante los últimos años.
- Curso(s) que imparte actualmente.
- Cursos y nivel escolar correspondiente, que ha impartido durante su carrera profesional.
- Tiempo que lleva impartiendo la asignatura de matemática.

  Número de años académicos que ha impartido el contenido matemático de las fracciones. Indicar en cuanto de los últimos años ha enseñado el contenido de las fracciones.

Algún otro antecedente que desee incluir sobre su formación profesional.

Parte 2:

- En relación con el currículo escolar ¿Observa diferencias entre el currículo escolar para Educación Primaria (o Secundaria, según corresponda) de España y el currículo de la Comunidad Andaluza, referente a las fracciones?
- ¿Cuál es el libro de texto que utiliza para enseñar las fracciones?
- ¿Qué lo motiva a utilizar el libro de texto descrito?
- ¿Cómo cree que afecta el libro de texto en el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué afecta de esa manera?
- ¿Qué materiales o recursos escolares utiliza como apoyo para enseñar el contenido de las fracciones?
- ¿Elabora las unidades didácticas en relación con el currículo de base? ¿Nos puede facilitar la unidad el ejemplar correspondiente a la unidad observada?

La primera parte de la entrevista buscaba confirmar las características secundarias, enfocando aspectos generales de la formación del profesor. La segunda parte pretendía indagar en los materiales y recursos educativos que el profesor emplea en el proceso de enseñanza, así como sobre qué función tiene para él el texto escolar y la legislación educativa que orienta el currículo escolar.

La entrevista fue grabada en audio (con la autorización del profesor), con el fin de prestar más atención a lo que enunciaba el informante, lo que favoreció la interacción entre el docente y el investigador. A continuación exponemos la información obtenida según cada profesor.

Profesor Rodríguez[12]

El profesor Rodríguez inicia sus estudios con el plan descrito en la Ley General de Educación de 1970, conocida como Ley Villar Palasí, estatuto que se asienta en el principio de personalización y que buscaba implantar una reforma en la formación del

[12] A lo largo del documento nos referimos a los profesores por los apellidos Rodríguez y Rivera, designaciones ficticias que no representan a los nombres reales de los docentes participantes del estudio.

Magisterio en la categoría de universitarios (Baelo y Arias, 2011). Rodríguez es titulado como profesor de Enseñanza General Básica (EGB), tiene estudios de Magisterio con una duración de tres años, que contempla el desarrollo de distintas especialidades (Ciencias, Ciencias Humanas, Filología, Educación Especial y Educación Preescolar), predominando el carácter cultural sobre los aspectos profesionalizantes. Luego con la reforma educativa promovida por la Ley Orgánica 1/1990 de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE, 1990), que conlleva una modificación en los planes de estudio de maestros, el profesor obtiene el Diplomado en Profesorado EGB con mención en matemáticas y es Licenciado en Ciencias de la Educación. Ha ejercido la docencia de matemáticas durante 34 años, en Educación Primaria, enseñando a lo largo de este tiempo el tema de las fracciones (f y h).

Es una persona consciente del incesante proceso de cambio de la educación, aspecto que lo motiva a perfeccionarse para mejorar su labor como profesor (k). Es un profesor que participa activamente en sociedades y congresos profesionales de Educación Matemática y constantemente está realizando o guiando cursos de perfeccionamientos en el área. Concretamente, ha participado en el equipo asesor de formación (Comunidad de Andalucía) del Sistema Andaluz de Formación Permanente del Profesorado, colaborando para ello con los Centros de Profesores (CEP). Además tiene un papel destacado en la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas THALES, participando como ponente y en el comité organizador de las jornadas (organizadas por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM). Ha tenido destacada participación en la experimentación de la Reforma de la segunda Etapa de EGB, en los años previos a la implantación de la LOGSE. Además, desde varios años participa en el seminario que organiza la Olimpiada Matemática promovida por la FESPM, y, en general, en distintas jornadas de formación de profesores (j y l).

Profesor Rivera

El profesor Rivera es Licenciado en Matemáticas. Tiene un diploma de estudios avanzados en Ingeniería Ambiental. Ha participado en congresos referentes a Sistemas Dinámicos (una de sus áreas de interés) y en el ámbito de la Educación Básica en cursos de perfeccionamiento relacionados con informática educativa (Máxima, un software de Algebra, plataforma virtual) y aspectos didácticos y pedagógicos en general (j).

Tiene trece años de experiencia como profesor de matemáticas, en nueve de los cuales ha impartido clase en la enseñanza concertada y cuatro en la enseña pública, complementando su actividad, durante seis años, como profesor asociado a una universidad (f y h). Hemos de destacar, que el profesor enseña las fracciones desde los primeros años en que ejerce como profesor de enseñanza secundaria (13 años).

Además, ambos profesores fueron recomendados por sus colegas. En el caso del profesor Rodríguez la directora del centro en el que se desempeña indicó que “es un profesional muy exitoso, comprometido con la escuela. Sus estudiantes tienen buenos resultados” (i). En el caso del profesor Rivera entrevistamos al coordinador del equipo técnico del instituto (Coordinador Pedagógico del instituto), quien es profesor de matemáticas y supervisor del docente, además a una colega y compañera de estudios universitarios, quienes lo recomiendan para grabar y estudiar sus clases, aludiendo a que es un profesor que “domina la materia que enseña”, “tiene buena relación con el alumnado y la gestión del grupo” (i) y “sus alumnos obtienen buenas calificaciones de media” (m).

De las entrevistas realizadas a los profesores Rodríguez y Rivera y a sus colegas, se desprende que ambos docentes cumplen con la mayoría de las características secundarias (f, h, i, j, k, m), lo que se complementa con la alusión al dominio de la materia (a) por parte de sus colegas, como se sintetiza en la Tabla 14.

Tabla 14. *Características de los dos profesores*

Características	**Rodríguez**	**Rivera**
Nivel escolar observado	6º de Primaria	1º de ESO
Formación profesional del docente	Maestro	Licenciado en matemática
Años de experiencia	34 años	13 años
Tiempo que imparte el contenido de las fracciones	34 años exceptuando los años de asesor en CEP	13 años
Participación en congresos, simposios, etc.	Sí. Congreso de Matemáticas en Ed. Primaria.	Sí. Relacionados con Sistemas Dinámico.
Participación en proyectos de innovación e investigación.	Sí	No
Participación en cursos de	Sí	Sí

Tabla 14. *Características de los dos profesores*

actualización de conocimiento[13]

Debido a que las entrevistas no permitieron confirmar todas las características primarias, por el poco tiempo que disponían los profesores para reuniones o la aplicación de instrumentos, convenimos con ellos en observar algunas sesiones de clase, previas a las de la enseñanza del tema de los números racionales. Consideramos que la observación de algunas clases nos permitiría confirmar algunas características primarias, como, por ejemplo, identificar si el profesor relaciona el contenido tratado con distintas situaciones, si permite el empleo de diferentes representaciones en la enseñanza de los contenidos (b), los tipos de tareas que presenta a los estudiantes (c, d, e) y, en general, conocer la metodología seguida en el proceso de instrucción.

En las clases del profesor Rodríguez observamos un proceso de enseñanza integrado; es decir, el profesor presenta a sus estudiantes una variedad de tareas que envuelven diferentes tipos de representaciones (b); en la resolución de las tareas permite que los estudiantes empleen variados procedimientos de resolución (d); las tareas planteadas exigen alta demanda cognitiva y permiten adquirir o reforzar conceptos o procedimientos matemáticos (e). El profesor muestra conocer los contenidos que enseña cuando realiza preguntas a los alumnos que responden de manera errónea, generando un ambiente de reflexión en el aula que lleva a profundizar sobre las cuestiones matemáticas más complejas (a).

Estas apreciaciones nos han llevado a considerar a los profesores Rodríguez (caso 1) y Rivera (caso 2), ya que satisfacen las condiciones de nuestra investigación, ambos cumplen con la mayoría de las características primarias y secundarias descritas. Debemos indicar que seleccionamos a dos profesores expertos de distintos niveles escolares, ya que el tema de los números racionales se enseña en los últimos años de Educación Primaria y en los primeros de Secundaria.

[13] Participación en cursos de actualizaciones de conocimiento matemático, didáctico, pedagógico o tecnológico.

3.4 RECOGIDA DE DATOS, OBTENCIÓN DE LA INFORMACIÓN E INSTRUMENTOS DE ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Una vez seleccionados los profesores procedimos a examinar su práctica docente, a través de la observación no participante o pasiva; es decir, con un nivel de distanciamiento en las actividades del salón de clase.

Las sesiones en las cuales se aborda el tema de los números racionales han sido grabadas en audio y video, con el fin de captar la totalidad del escenario y las interacciones entre el profesor y los estudiantes. Si bien el foco de la grabación fue el profesor con sus intervenciones orales y escritas, también nos fijamos en las actuaciones de los estudiantes, en la medida que nos ayudaban a comprender el conocimiento del profesor.

Para la grabación de las clases, utilizamos una cámara digital (*C*) ubicada en la parte posterior del aula, que siguió al docente en todo momento, capturando una visión de conjunto de la clase. Además, instalamos una grabadora de audio con dos micrófonos (*G*) para capturar el audio con mayor calidad, especialmente todo lo que enunciaba el profesor (P). El registro de la configuración de las aulas observadas se ilustra en la Figura 16.

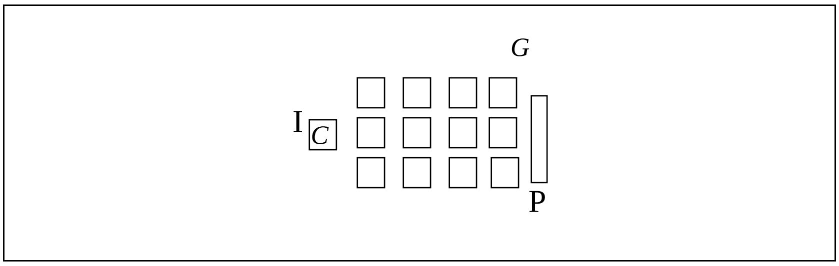


Figura 16. Registro de configuración de las aulas observadas

Debemos señalar que cuando los estudiantes planteaban consultas sobre el contenido al investigador/observador (I), se les indicó que debían dirigirse exclusivamente al profesor.

Para aminorar la distorsión que pudiera observarse en la actuación de los alumnos y del profesor producto de la grabación de las sesiones de clases, consideramos necesario filmar algunas sesiones previas a las dedicadas a la enseñanza de los números racionales. Así, la presencia de la cámara de video y del investigador se convirtió en parte del entorno, acostumbrándose a ellos los estudiantes.

Como las observaciones del estudio de caso se extendieron por un período prolongado de tiempo, el investigador que recogió los datos desarrolló cierta familiaridad con los estudiantes y el profesor, generándose un ambiente más natural que los que suelen generar otros medios de recogida de información como los experimentos o encuestas (Cohen *et al.*, 2000).

Previo a la observación de clase se elaboró un protocolo de observación, con el objeto de examinar cuestiones específicas, como los contenidos abordados en la clase, el objetivo que guía la sesión, el tipo de tarea presentada (ejercicio, problema, proyecto), entre otros elementos. Hubo que desistir de rellenar este formulario de observación durante la clase, ya que ambos profesores comentaron que se sentían evaluados. Nos limitamos entonces a realizar notas textuales de aspectos destacables que difícilmente se recogen en las grabaciones, como por ejemplo la escritura de la pizarra o algunas respuestas del profesor a los estudiantes.

Después de la grabación y el examen de las imágenes, cada sesión se transcribe textualmente (ver Anexos E y F) de forma minuciosa y clara, sin modificaciones. Además, el texto se complementa con las notas de campo recogidas, de modo que contenga la mayor parte posible de las interacciones entre el profesor y sus estudiantes. En promedio dedicamos de 3 a 6 horas para transcribir cada hora de interacción grabada en el video. La Figura 17 ilustra el proceso llevado para la recogida de datos.

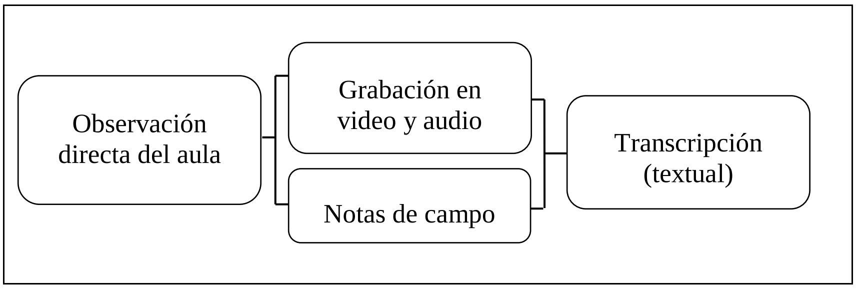


Figura 17. Proceso de recogida de datos de la investigación

Siendo conscientes de la problemática que encierra el empleo del video, en el siguiente apartado estudiamos sus cualidades y limitaciones, para afrontarlo como herramienta de investigación.

3.4.1 Los videos como fuente de información

Los videos son un poderoso instrumento de observación en investigación educativa, que pueden ayudar a profundizar en la comprensión de distintos fenómenos complejos que tienen lugar en los salones de clase (Ruiz, 2011; Savola, 2008). Las grabaciones de video se pueden usar eficazmente en estudios cuantitativos, cualitativos o métodos mixtos, asimismo en estudios comparativo o no comparativo, en trabajos experimentales o no experimentales, en general, el análisis de video es una buena herramienta en investigación en Educación Matemática (Savola, 2008). Las grabaciones de video abren una nueva ventana que permite a los profesores e investigadores a estudiar las matemáticas escolares en nuestro propio país y en otros lugares (Kilpatrick, 2013; Mesa, Gómez y Hock Cheah, 2013).

El uso de video es una herramienta relativamente nueva en la investigación pedagógica, aunque el potencial del video como herramienta de investigación existe desde hace varios años, sobre todo en las áreas de la antropología y de estudios culturales (Fitzgerald, Hackling y Dawson, 2013; Ruíz, 2011; Savola, 2008).

En las décadas de los 80 y 90, buscando salvar la brecha entre la teoría y la práctica, se emplean los videos como herramienta de observación de aula, con la intención de obtener una mayor comprensión de las realidades que ocurren en los salones de clase, aunque se tiene constancia de estudios de los años 30 donde se realizaron investigaciones dentro del aula bajo algunos contextos culturales (Ruíz, 2011, p. 56). Hoy en día la posibilidad de la recopilación y uso de imágenes de video es una importante innovación para la investigación en el aula (Fitzgerald *et al.*, 2013).

Existen destacadas investigaciones en el cual la fuente principal de datos son los videos. Unos de los primeros estudios internacionales a gran escala que utilizan datos de clase a partir de videos son los estudios del organismo Tendencias en Matemáticas y Ciencias (*Trends in International Mathematics and Science Study −TIMSS*) como el *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings From an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States* (Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll y Serrano, 1999) y el *Teaching Mathematics in Seven Countries: Results From the TIMSS 1999 Video Study* (Hiebert, Gallimore, Garnier, Givvin, Hollingsworth, Jacobs, Chiu *et al.*, 2003) que emplearon videos como principal apoyo para obtener la información de referencia. Estas investigaciones se centraron en funciones pedagógicas como el entorno de trabajo, la participación de los alumnos en clase, los métodos empleados por los profesores y la secuencia seguida en clase. También existen otros estudios internacionales[14] como el trabajo comparativo *Learner's Perspective Study* (LPS) que se centra en la actividad y percepción de los estudiantes frente a distintas situaciones, estudio que lleva a complementar las investigaciones relacionadas con la actividad del profesor.

Savola (2008) distingue cualidades que aporta el uso de video como herramienta observacional, como las siguientes:

- Permite el estudio de los procesos sociales complejos que tienen lugar en la vida cotidiana.
- Con la grabación de video los investigadores pueden reconstruir eventos al nivel de detalle deseado. Además, se pueden reproducir los eventos desde múltiples enfoques.
- Permite análisis ilimitados. Pueden ayudar en la exploración para generalizar hallazgos cualitativos interesantes e iluminar las tendencias en los datos codificados cuantitativamente. Desde el ámbito estadístico puede utilizarse para validar algunos resultados.
- Pueden ayudar a construir un lenguaje común de enseñanza, lo cual es fundamental para que las comunidades educativas aprendan las unas a las otras.
- Las imágenes de video se pueden reducir a las fotografías, transcripciones y otras formas de representación de los eventos. Estos datos son multidimensionales y contienen gran cantidad de información, que puede fraccionarse a formas de menor dimensión para fines específicos.
- Como define Planas (2006), "[…] el video de una sesión de clase proporciona una perspectiva poliédrica de las interacciones entre participantes y permite volver sobre los datos originales una y otra vez" (p. 40), siendo una cualidad de los investigadores cualitativos el regresar al escenario para recabar o revisar la información que en un primer momento no se consideró relevante.

[14]En Ruíz (2011) se discuten tres estudios donde se emplean videos para estudiar las lecciones en la enseñanza de la matemática.

- La calidad de los archivos de video digital no disminuye con el tiempo, lo cual permite que el análisis pueda ser verificado o los registros estudiados desde otros ámbitos. Los videos pueden ser vistos varias veces por expertos, lo que puede llevar a combinar perspectivas de investigación completarías sobre el conjunto de información, lo cual facilita la integración de métodos cualitativa y cuantitativa.

Más allá de los problemas financieros y logísticos habituales en las fases clave del proceso de investigación, recopilación de datos y análisis de datos, también existen otras dificultades en el uso de video, como, por ejemplo, la presencia de la cámara y de quien la conduce puede tener un efecto sobre el comportamiento de los estudiantes, además no es fácil la obtención de grabaciones de video neutrales y de alta calidad.

Naturalmente la presencia de la cámara en el aula puede alterar el comportamiento de los estudiantes y tal vez también el del docente. Sin embargo, como lo explicitamos en el apartado 3.4, previo a la grabación de la unidad de los números racionales ingresamos a las aulas, oportunidad que permitió una rápida familiaridad con la presencia del observador y de la cámara.

Considerando que el análisis es un proceso aplicado a contextos reales que permite discriminar y describir componentes, y por ende profundizar en ellas, realizamos el análisis sobre los videos que representan la unidad de información más real. Los videos son el recurso de información principal en este estudio, aunque en el proceso de análisis la transcripción textual de cada sesión de clase (Anexos E y F) es fundamental para ir indicando las unidades de análisis y hacer referencia a los fragmentos de texto.

Los videos como fuente de información constan de dos fases principales: la recopilación y el análisis de datos. Savola (2008) manifiesta que la recolección de datos para proyectos de investigación basados en videos, involucran tres largas etapas o procesos: permisos necesarios y consentimientos, grabaciones y manipulación de los archivos digitales (análisis). En lo que sigue, desarrollamos las fases descritas.

3.4.2 Consideraciones éticas para la recogida de datos

En la investigación se recopila información por medio de audio y video o imágenes, es importante tener presente consideraciones éticas, ya que hay que cuidar la privacidad y la confidencialidad de las imágenes que afectan a las personas, asimismo se debe contar con los permisos y consentimientos necesarios (Santos, 2002; Savola, 2008). En este trabajo asumimos con responsabilidad estos hechos, lo que nos llevó a demandar, antes de la recopilación de los datos, el consentimiento informado del director de cada establecimiento en donde grabamos las clases, de los padres o encargados de cada uno de los estudiantes correspondientes a cada curso que filmamos, y principalmente de los alumnos. En cada uno de los casos informamos sobre el propósito de la observación y el uso que daríamos a las grabaciones.

Primero contactamos con el director del centro e instituto en el que trabajan los profesores del estudio, entregamos una carta que detallaba el propósito del ingreso a la institución y los agradecimientos respectivos. Una vez que ingresamos al aula, cada profesor presentó al investigador a sus estudiantes, indicándose que durante un tiempo la persona estará grabando las clases. Explicamos el interés de las grabaciones de las clases, asimismo solicitamos la aprobación de los alumnos y sus respectivos padres o tutores. Remitimos un comunicado para el consentimiento de los encargados (ver Anexo D). Hemos de indicar que la totalidad de los padres o tutores de los alumnos autorizaron a grabar las clases. Además, contamos con el permiso de los directores de los centros educativos y de los profesores de cada establecimiento para acceder a las aulas.

En este trabajo no restringimos el acceso a los videos y audios auténticos por cualquier eventualidad (Anexos G, H, I y J), considerando que una de las características de los estudios cualitativos es disponer de la información para contrastarla en caso de ser necesario. Sin embargo, en este informe sí hemos protegido los nombres de los participantes del estudio (profesor y estudiantes), asociando a cada sujeto un nombre ficticio.

3.4.3 Grabaciones de clase. Caso 1. Profesor Rodríguez

Durante el periodo de febrero y marzo del año 2012 se observó y grabó una secuencia de 21 clases, de una duración estipulada de 60 ó 90 minutos cada una, en un curso de sexto año de Educación Primaria de una escuela pública de Málaga, en el cual trabajaron el tema de las fracciones.

La Tabla 15 resume el tema central en cada clase, la fecha de realización, el tiempo programado de clase y el tiempo efectivo de cada sesión, además de la cantidad de estudiantes por clase. En total, las clases planificadas correspondían a 20 horas aproximadamente, siendo el tiempo real o efectivo de las 21 sesiones de aproximadamente unas 18 horas. Alrededor de 5 minutos de clase se ocupaban para dar inicio a la sesión, el tiempo restante corresponde a la actividad matemática generada.

Tabla 15. *Clases de 6º de Educación Primaria (alumnos de 11 y 12 años de edad)*

Nº de sesión	**Fecha realización de la clase**	**Tiempo programado**	**Tiempo de clase**[15]	**Cant. de alumnos**[16]
1	07/02/2012	45 min [09:00/ 09:45]	41 min	21
Temática de la clase[17]: Comienza la unidad de fracciones. Recuerdan el contenido del año anterior. Dividir variadas figuras geométricas en partes de igual tamaño y forma.				
2	08/02/2012	45 min [11:15/ 12:00]	43 min	21
Temática de la clase: Reseña histórica sobre las fracciones. Resolución de tareas de dividir figuras irregulares en partes de igual tamaño y forma, y de igual tamaño y distinta forma.				
3	09/02/2012	90 min [10:30/ 12:00]	43 min	21
Temática de la clase: A partir de distintas figuras divididas identifican cuál de ellas están para representar cuartos, luego a partir de una parte de una figura identifican la unidad (el todo), finalmente, a partir de hexágonos divididos en partes iguales identifican la fracción que representa a cada parte sombreada.				
4	10/02/2012	45 min [09:00/ 09:45]	47 min	20
Temática de la clase: Identificar la figura que está contenida en un cuadrado dividido en variadas partes. Luego identifican la fracción que corresponde a la parte del cuadrado. Dividir una figura en forma de "te" en cuatro partes de igual tamaño y forma.				
5	15/02/2012	45 min [11:15/ 12:00]	45 min	21
Temática de la clase: Fracción como operador, con respecto a una cantidad.				
6	16/02/2012	90 min [10:30/ 12:00]	81 min	21
Temática de la clase: Fracción como operador. Resolución de tareas donde se da el operador y el estado final, y otras donde se pide encontrar el estado final.				
7	17/02/2012	45 min [09:00/ 09:45]	46 min	21
Temática de la clase: Resolución de problemas que implican trabajar las fracciones como operador.				
8	21/02/2012	45 min [09:00/ 09:45]	41 min	20
Temática de la clase: Construcción de la unidad o entero. Fracción como operador.				
9	23/02/2012	90 min [10:30/ 12:00]	81min	21
Temática de la clase: Dada una parte de una figura identifican la figura completa; resuelven problemas que implica trabajar la fracción como operador, donde se pide la fracción operador o la cantidad resultante. Repaso sobre número mixto, identificando un número mixto y su				

[15] Tiempo en que se enseña el contenido matemático, se omite, por ejemplo, el tiempo cuando el profesor pasa asistencia.

[16] La asistencia regular a clases es de 28 alumnos, sin embargo en la asignatura de matemática cinco alumnos se retiran de la clase para trabajar en nivelación escolar.

[17] La temática de la clase se extrae de la observación de cada clase, al no ser explicita a lo largo de la sesión.

Tabla 15. *Clases de 6º de Educación Primaria (alumnos de 11 y 12 años de edad)*

representación (figural o decimal).				
10	24/02/2012	45 min [09:00/ 09:45]	51 min	22
Temática de la clase: Pasar de una fracción impropia a una fracción mixta. Lectura de las fracciones mixtas. Resuelven tareas en un contexto real (día, año, semana y horas) y pasan de una fracción impropia a un número mixto. Transforman un número entero en una fracción.				
11	06/03/2012	45 min [09:00/ 09:45]	42 min	22
Temática de la clase: Recuerdan cómo se suman y restan fracciones de igual denominador. Pasan de fracción mixta a fracción y viceversa.				
12	07/03/2012	45 min [11:15/ 12:00]	40 min	22
Temática de la clase: Sumar y restar fracciones con igual denominador, a partir de una representación gráfica y numérica. Suman, restan y multiplican un número entero y una fracción.				
13	08/03/2012	90 min [10:30/ 12:00]	65 min	21
Temática de la clase: Ubicar fracciones en la recta numérica. Comparar fracciones (mayor, menor, igual).				
14	13/03/2012	45 min [09:00/ 09:45]	45 min	21
Temática de la clase: Ubicar fracciones en la recta numérica.				
15	14/03/2012	45 min [11:15/ 12:00]	39 min	21
Temática de la clase: Fracciones equivalentes. Comparar fracciones.				
16	15/03/2012	90 min [10:30/ 12:00]	83 min	21
Temática de la clase: Suma y resta de fracciones con distintos denominadores.				
17	16/03/2012	45 min [09:00/ 09:45]	46 min	21
Temática de la clase *Temática de la clase* de ejercicios de suma y resta de fracciones con distinto denominador.				
18	20/03/2012	45 min [09:00/ 09:45]	43 min	22
Temática de la clase: Repaso de suma de fracciones con distinto denominador. Repasan el mínimo común múltiplo.				
19	21/03/2012	45 min [11:15/ 12:00]	22 min	22
Temática de la clase: Repaso de suma de fracciones, igualando los denominadores.				
20	22/03/2012	90 min [10:30/ 12:00]	84 min	22
Temática de la clase: Repaso del mínimo común múltiplo y máximo común divisor.				
21	23/03/2012	45 min [09:00/ 09:45]	52 min	22
Temática de la clase: Suma de fracciones con distintos denominadores calculando el mínimo común múltiplo.				

Hemos de destacar que las clases programadas se extendieron a causa de los días festivos celebrados en la comunidad, además de algunas actividades extra programáticas realizadas por el centro, por lo que el profesor dedicó algunas clases para repasar contenidos.

3.4.4 Grabaciones de clase. Caso 2. Profesor Rivera

Durante el periodo de diciembre 2011- enero 2012 se observó y grabó una secuencia de 12 clases, de una duración concertada de 60 minutos cada una, en un curso de primer año de Educación Secundaria de un instituto público de la ciudad de Huelva. Nos concentramos en un 1º de la ESO, al ser el curso que el profesor tenía planificado para estudiar el tema de las fracciones.

La Tabla 16 resume el tema central del contenido abordado en cada clase, la fecha de realización, el tiempo programado de clase y el tiempo efectivo de cada sesión, además de la cantidad de estudiantes por clase.

En total las clases planificadas correspondían aproximadamente a 13 horas, con un tiempo real o efectivo de 11 horas. Alrededor de 10 minutos de clase se ocupaban para dar inicio a la sesión.

Tabla 16. *Clases de 1º de Educación Secundaria (estudiantes de 12 y 13 años de edad)*

Nº de sesión	**Fecha realización de la clase**	**Tiempo programado de la clase**	**Tiempo de clase**	**Cant. de alumnos**
1	13/12/2011	60 min [9:15- 10:15]	53 min	23
Temática de la clase: Inician la unidad de fracciones. Se repasa los conjuntos numéricos N y Z estableciéndose que se estudiará un nuevo conjunto numérico. Estudian que representa cada parte de la fracción en el contexto de fracción como parte-todo y trabajan situaciones como fracción y como operador.				
2	14/12/2011	60 min [11:45-12:45]	52 min	21
Temática de la clase: Trabajan la fracción como operador y las fracciones como división indicadas. Repasan como pasar de un número decimal exacto a una fracción. Inician el estudio del concepto de fracción equivalente.				
3	15/12/2011	60 min [9:15- 10:15]	52 min	22
Temática de la clase: Fracciones equivalentes a través de la representación figural. Trabajan tres métodos para establecer cuando dos fracciones son equivalentes.				
4	16/12/2011	60 min [13:45- 14:45]	58 min	25
Temática de la clase: Identifican si dos fracciones son equivalentes, representando en una expresión decimal. Método de amplificación y simplificación para establecer si dos fracciones son equivalentes.				
5	20/12/2011	60 min [9:15- 10:15]	45 min	21
Temática de la clase: Método de amplificación y simplificación para establecer si dos fracciones son equivalentes. Concepto de fracciones irreducibles. Presentación de tipos de problemas con fracciones.				
6	21/12/2011	60 min [11:45- 12:45]	51 min	18
Temática de la clase: Resolución de problemas.				
7	23/12/2011	60 min [13:45- 14:45]	52 min	10
Temática de la clase: Operaciones con fracciones: suma y resta.				
8	11/01/2012	60 min [11:45-12:45]	46 min	18
Temática de la clase: Método de comparación de fracción, con el cálculo del mínimo común múltiplo.				
9	12/01/2012	60 min [9:15- 10:15]	58 min	20
Temática de la clase: Comparación de fracción.				

Tabla 16. *Clases de 1º de Educación Secundaria (estudiantes de 12 y 13 años de edad)*

10	17/01/2012	60 min [9:15- 10:15]	53 min	21
Temática de la clase: Comparación de fracción.				
11	18/01/2012	60 min [11:45-12:45]	50 min	20
Temática de la clase: Suma y resta de fracciones con denominadores iguales y distintos numeradores. Suma y resta de fracciones con denominadores y numeradores distintos.				
12	19/01/2012	120 min [08:15-10:15]	101 min	26
Temática de la clase: Suma y resta de fracciones. Multiplicación y división de fracciones.				

La enseñanza del tema siguió la secuenciación del libro de texto guía, incluso los ejercicios y problemas planteados por el profesor se extraían del mismo documento. En general, las clases se realizaron con normalidad y los contenidos correspondientes a la unidad fueron enseñados según la planificación.

3.5 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS

Una vez recogida la información, llega el momento de darle sentido, lo que conlleva estructurar los datos y organizarlos de manera que resulten manejables y permitan extraer significados para cumplir con los objetivos del estudio.

3.5.1 El contenido a analizar

Planas (2006) nos llama la atención sobre la importancia de los registros en los estudios en que se recoge la información por medio de videos, entendiendo, por tanto, la transcripción como un elemento auxiliar. En este estudio consideramos tanto el video como la transcripción como esenciales para aportarnos datos con vistas a cubrir el objetivo de investigación; es decir, identificar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Por lo tanto, realizando la observación directa del aula y registrando esa información, obtenemos dos grandes fuentes de datos: el registro en video de cada clase y el texto que corresponde a la transcripción literal de las sesiones. La Figura 18 ilustra las fuentes de datos principales del estudio.

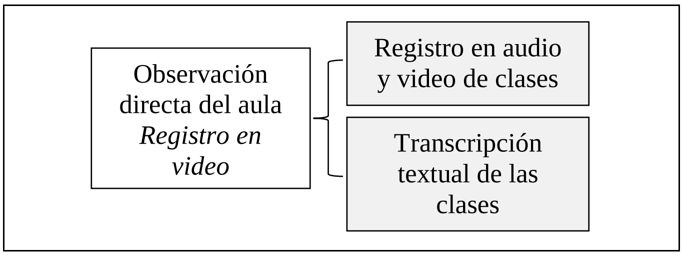


Figura 18. Fuentes de datos del estudio

Para analizar los datos utilizamos el proceso de análisis de contenido, que es definido como un “procedimiento para la categorización de datos verbales o de conducta, con fines de clasificación, resumen y tabulación.” (Fox, 1981, p.709). Es por tanto un conjunto de técnicas de análisis que emplea procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido del instrumento de registro (Bardin, 1996).

Este procedimiento ofrece la posibilidad de investigar en detalle y en profundidad el contenido de cualquier material escrito, logrando inferir significados de grandes cantidades de texto (Franzosi, 2004). En esta investigación el registro escrito ha sido la trascripción, pero para darle sentido a cada unidad de significado, hemos recurrido constantemente a visionar el episodio correspondiente, para apreciar el texto en su contexto.

El análisis de contenido sigue diferentes etapas: 1º delimitar el contenido a analizar, 2º especificar la unidad de análisis; es decir, establecer fragmento de texto con significado, 3º denominar, definir e interpretar las categorías consideradas, 4º codificar y cuantificar las unidades de análisis previamente adscritas al sistema de categorías establecidos (etiquetas para las unidades de análisis). Una vez que los datos han sido codificados y categorizados es posible llevar a cabo el análisis de datos, para eso debemos 5º relacionar e interpretar las categorías establecidas, considerando sus unidades de análisis, y 6º relacionar el proceso de análisis de contenido con el tema de estudio (Cohen *et al*., 2011; Cohen *et al*., 2007; Krippendorff, 1990).

3.5.2 Las unidades de análisis

Un primer paso que realizamos fue seleccionar y simplificar la información con objeto de tener mayor control sobre los datos. La reducción consiste en un proceso de categorización y codificación que lleva a identificar y establecer unidades de información. Estas son las unidades que se han de codificar y que corresponden a un segmento de contenido considerado como unidad de base para la categorización (Bardin, 1996).

Las fases que guían el proceso de categorización de los datos del estudio son: a) separación de unidades, b) extracción de unidades ajenas al contenido, c) identificación y clasificación de unidades (episodios), y d) síntesis y agrupamiento.

a) Los datos o segmentos de información conversacional los separamos en unidades singulares; es decir, realizamos una división a través del criterio conversacional, que consiste en separar las declaraciones o turnos de palabras u oraciones de los sujetos implicados en el discurso (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 207). En este caso, los datos del estudio se refieren a unidades de conversación diferenciados según quién interviene, algunos de los sujetos implicados bien el profesor o algún alumno o el grupo, cuando contesta en conjunto. Por ejemplo, en la Figura 19, ilustramos cómo se efectúa la división inicial de los datos.

1	P	:	*Bueno, habíamos visto que la fracción era la parte de un todo. Vamos a dibujar.*
2	As	:	*Bien.*
3	A	:	*¡Los dibujos del profe no me gustan!*

Figura 19. Transcripción por turnos de intervención

La primera columna corresponde al número de la declaración efectuada por los sujetos que intervienen en cada sesión de clase, la segunda hace referencia a los sujetos implicados: A: alumnos, As: alumnos y P: profesor. Y la tercera columna hace mención a la declaración formulada por el alumno o por el profesor. Por tanto, cada clase (texto: transcripción de la sesión) es separada en declaraciones o turnos de palabra u oraciones realizadas por los sujetos participantes. Para el caso de Educación Primaria obtuvimos 11.065 unidades conversacionales y para el caso de Educación Secundaria 3.494.

b) Posteriormente identificamos en cada clase los momentos en que se abordan aspectos no relacionados con el contenido. Por ejemplo, cuando el docente pide a los estudiantes que salgan a la pizarra para resolver una tarea, no así el momento en el cual se resuelve la tarea; o bien, cuando el profesor observa el trabajo que realizan sus estudiantes sin hacer intervenciones; esos momentos no se contemplan como unidades de información. Nos interesan aquellas unidades de comunicación que detallan y profundizan en la actividad matemática; es decir, cuando se enuncian tareas y se genera discusión, los estudiantes explican y validan sus ideas, etc.

c) Una vez descartados los segmentos en los cuales se atienden aspectos externos al contenido y la enseñanza, realizamos una segunda división de los datos, esta vez consideramos unidades de análisis de contexto (episodios), que corresponden a un fragmento que tiene un principio y un fin reconocible y una secuencia de acciones que lo constituye (Cohen y Manion, 2002; Krippendorff, 1990), teniendo cierto significado para los participantes.

Cada episodio corresponde a una unidad de información con sentido completo, como, por ejemplo, el proceso de ejecución de una tarea, la validación de un concepto matemático, el desarrollo de un contenido, la explicación matemática de un ejercicio o problema. Para el caso de Educación Primaria obtuvimos 66 episodios y para el caso de Educación Secundaria 29.

Considerando que "la unidad debe ser bastante grande como para proveer significado, al menos mediante un contexto, pero bastante pequeña como para permitir objetividad en su uso" (Hayman, 1991, p.128), cada episodio se va descomponiendo en fragmentos menores (subepisodios). Por ende, un subepisodio es un fragmento del episodio indicador de algún aspecto de conocimiento especializado del profesor. Por ejemplo, un episodio [*i*] puede corresponder a *sumar fracciones*, ahora un subepisodio de [*i*] sería *sumar fracciones con denominadores iguales y numeradores distintos.*

d) El proceso de síntesis y agrupamiento de los datos culmina con la asignación de un código a cada episodio [*i*], el índice *i* corresponde a la cantidad de unidades en las que se ha fragmentado la clase (reiniciando la numeración en cada clase). Cada subepisodio se distingue por el número asignado a la unidad conversacional [Fila *n*, Fila *m*][18], donde *n* indica el comienzo y *m* el final del fragmento que comprende algún significado. En la Figura 20 resumimos el proceso de separación de las unidades de análisis:

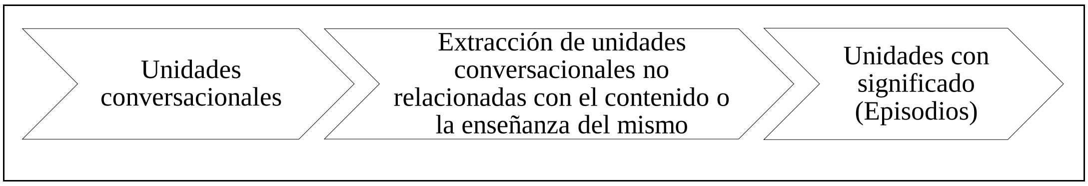


Figura 20. Fases para establecer las unidades de análisis

[18] El número asignado en cada unidad de información está expresado en la transcripción de cada sesión de clase (ver Anexos E y F).

3.5.3 Categorías y codificación

En el Capítulo 2 presentamos una lista de 19 categorías con sus respectivos indicadores de conocimiento relacionados con el contenido de los números racionales. Siguiendo un procedimiento deductivo surgen las categorías de un proceso de vinculación de los subdominios de conocimiento del modelo MTSK y los componentes que caracterizan al *análisis didáctico*.

Las categorías denotan un tema en sí mismo, tales como fenomenología, procedimientos, sistemas de representaciones, etc., y los indicadores detallan el tema en microaspectos, que corresponden al desglose de las categorías. Por ejemplo, la categoría *conceptos* se desglosa en *conocer la estructura conceptual de los números racionales*; *conocer los distintos temas, conceptos y procedimientos matemáticos vinculados al tema*; *precisión en las definiciones y propiedades empleadas por el docente*, etc.

En este caso las categorías y los indicadores son apriorísticas, han sido construidas antes del proceso de recopilación de la información. Las categorías serán complementadas con categorías emergentes que pueden surgir de la indagación de los significados de los propios datos.

A cada categoría se le asigna un código que se conforma por una letra seguida de un número correlativo que se reestablece para cada indicador ordenadamente, como se indica en la Tabla 17.

Tabla 17. *Categorías e indicadores de conocimiento con su respectivo código*

	Categorías	Indicadores			
		KoT			
A1.	Estructura conceptual	A1.1	A1.2	A1.3	A1.4
A2.	Fenomenología	A2.1	A2.2	A2.3	
A3.	Procedimientos matemáticos	A3.1	A3.2		
A4.	Sistemas de representaciones	A4.1			
A5.	Aspectos de comunicación	A5.1	A5.2	A5.3	
A6.	Tareas matemáticas	A6.1	A6.2	A6.3	
		KSM			
B1.	Relaciones entre componentes de la	B1.2	B1.2	B1.3	

Tabla 17. *Categorías e indicadores de conocimiento con su respectivo código*

	estructura conceptual									
		KPM								
C1.	Modos de proceder en matemáticas	C1.1	C1.2							
		KFLM								
D1.	Características de aprendizaje	D1.1	D1.2	D1.3	D1.4	D1.5				
D2.	Errores y dificultades	D2.1	D2.2	D2.3	D2.4					
D3.	Tareas matemáticas	D3.1	D3.2	D3.3						
D4.	Materiales y recursos	D4.1								
		KMT								
E1.	Estrategias	E1.1	E1.2							
E2.	Sistemas de representación	E2.1	E2.2							
E3.	Tareas matemáticas	E3.1	E3.2	E3.3	E3.4	E3.5				
E4.	Materiales y recursos	E4.1	E4.2	E4.3						
		KMLS								
F1.	Lenguaje matemático	F1.1								
F2.	Proceso de instrucción	F2.1	F2.2							
F3.	Orientaciones curriculares	F3.1	F3.2	F3.3	F3.4	F3.5	F3.6	F3.7	F3.8	F3.9

Hemos de indicar que una vez desarrollada las categorías y los indicadores de conocimiento solicitamos su revisión por expertos. Elegimos dos profesionales, doctores, profesores de las asignaturas de Didáctica de la Matemática, que trabajan en la línea de investigación de formación de profesores y que tienen participación en el desarrollo teórico de dos referentes fundamentales de este trabajo: el *análisis didáctico* y el modelo de conocimiento MTSK. Solicitamos a los expertos que analizaran los siguientes aspectos:

- Confirmar si cada indicador es cubierto en el subdominio vinculado. En caso contrario explicar a qué dominio correspondería.

- Señalar qué indicadores no están expresados con claridad y hacer sugerencias para mejorar su definición.
- En general, valorar si son pertinentes los indicadores enunciados y si se han asociado adecuadamente con aspectos del conocimiento especializado del profesor sobre las fracciones.

Se tomaron en consideración las indicaciones de los revisores, quedando reflejadas en las cualidades descritas en el Capítulo 2. En lo que sigue, explicamos cómo identificamos las unidades de información relacionadas con los indicadores de conocimiento especializado del profesor. La Figura 21 resume el proceso seguido.

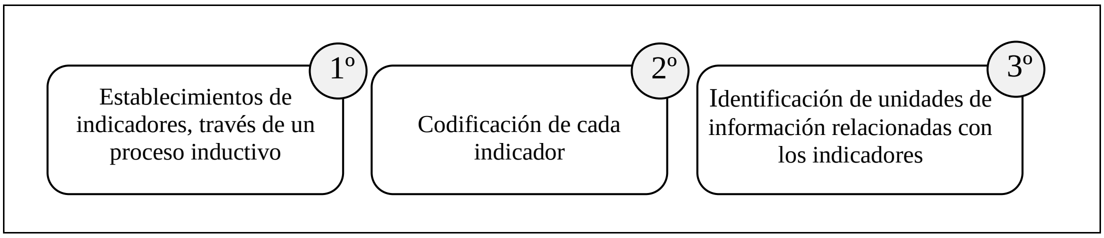


Figura 21. Proceso de codificación

3.5.4 Relación entre categorías y unidades de análisis

Después de asignar los códigos a cada categoría y a cada indicador, identificamos los subepisodios que se relacionan con ellos.

Siguiendo las orientaciones de Miles y Huberman (1994), elaboramos una matriz descriptiva de datos, como se ejemplifica en la Figura 22. La matriz contiene las unidades de información (subepisodios), en cada sesión de clase, correspondiente a cada categoría, según el indicador de conocimiento.

				Clase 1	**Clase 2**	**…**	**Clase n**
Subdominios de conocimiento	KoT	Indicador de conocimiento	A1.1				
	KSM		A1.2		[subepisodio]		
	KPM		A1.3				[subepisodio]
	KFLM		…				
	KMT		F3.8		[subepisodio]		
	KMLS		F3.9				

Figura 22. Matriz de registro de las unidades de información

En la matriz de datos cada fila representa un indicador de conocimiento, según los códigos asignado para cada uno de ellos: $A1.1,\ A1.2, \ldots, F3.8,\ F3.9$. Las columnas muestran el número de la clase ($1 \ldots n$), asignación otorgada según el orden de ejecución de cada sesión. Cada celda registra el/los subepisodio/s que se relaciona/n con el indicador respectivo en la clase correspondiente.

El análisis de los datos se realiza a través de una descripción detallada interpretativa (Fox, 1981). Seguimos un proceso de cinco pasos para dar sentido a los datos y establecer relaciones sobre el conocimiento especializado desvelado por los profesores informantes de la investigación:

1) Miramos la grabación (en audio o video) de cada sesión de clase, dos o más veces; a continuación elaboramos un informe descriptivo que sirve para familiarizarse con los contenidos del video de manera general.
2) La descripción general de cada clase nos lleva a reconocer los episodios y subepisodios de clase, que representan fragmentos con significado (detalle en los Anexo B y C).
3) Interpretamos qué representa cada subepisodio; es decir, con qué categoría e indicador de conocimiento se relaciona. Distinguimos si el fragmento de clase alude a acciones en que se trabaja un concepto, el profesor explica o guía a los estudiantes para corregir un error o una dificultad sobre aspectos matemáticos.

Mediante el análisis de la matriz de datos buscamos describir, interpretar y comprender el conocimiento especializado de cada profesor de matemáticas.

4) Examinamos la matriz por filas, considerando los indicadores que con más frecuencia se observan a lo largo del proceso de enseñanza estudiado, esto nos permite describir el conocimiento manifestado por los profesores respecto de cada subdominio de conocimiento.
5) Hacemos una interpretación general de las apreciaciones sobre el conocimiento especializado del profesor, identificando los subdominios del modelo de MTSK. Este proceso nos lleva a una observación de la secuencia de video en su totalidad, proporcionando una perspectiva holística sobre lo que ocurre al enseñar el tema de los números racionales y sobre aspectos emergentes dentro del contexto más amplio.

3.6 RIGOR, AUTENTICIDAD Y VALIDEZ DEL PROCESO DEL ESTUDIO

Rodríguez y Valldeoriola (2007) indican que “las metodologías de aproximación cualitativas en investigación no se centran en la predicción ni se comportan igual que las metodologías propias de las ciencias físico-naturales […]” (p.74), no obstante, es una actividad científica que debe ser sistemática y cumplir con ciertos aspectos como el rigor, la autenticidad y la validez del proceso del estudio. En este trabajo consideramos algunos criterios regulativos descritos por Rodríguez y Valldeoriola (2007, pp. 74-75):

La *veracidad* hace referencia al rigor de los resultados y de los procedimientos empleados en el estudio. En la metodología cualitativa corresponde a la credibilidad de la investigación, similar a los criterios de validez interna y credibilidad de metodologías empírico-analítica, de naturaleza esencialmente cuantitativa. En este trabajo consultamos a expertos para la selección de los profesores informantes de los estudios, asimismo dos informantes secundarios (profesores universitarios) nos revisaron las categorías y los indicadores apriorísticos de conocimiento establecidos para el análisis de los datos.

El proceso de la investigación ha estado supervisado y guiado por dos expertos en el área, que corresponden a los directores de la tesis doctoral que se realiza con esta investigación, estando en todo momento el estudio sujeto a confirmación por parte de los expertos. Esto último ha llevado a una triangulación entre investigadores, presentándose un constante proceso de cuestionamiento sobre la interpretación de los datos (¿interpretamos lo mismo cada investigador?), que nos ha llevado a un análisis que va desde dar significado a las partes a remitirnos a su totalidad (texto en su contexto).

La *aplicabilidad* busca asegurar la relevancia y generalización de los resultados en otros contextos, correspondiendo al criterio de validez externa en la metodología empírico-analítica y de transferibilidad desde la metodología sociocrítica. Como en esta investigación buscamos comprender en profundidad una realidad particular, contextualizamos las conclusiones según el escenario estudiado, al tratarse de un fenómeno único y singular. A partir de los resultados obtenidos, de los dos casos, esperamos que estos puedan proporcionar más información sobre el conocimiento del profesor.

La *consistencia* responde a en qué medida los resultados se repetirán si volvemos a replicar la investigación en un contexto análogo. Este criterio, desde la perspectiva empírico-analítica, corresponde a la fiabilidad de los datos y, en estudios cualitativos, a la dependencia. En el marco de una investigación de corte cualitativo este criterio es complejo de corroborar, ya que los contextos sociales, culturales e históricos propios de estas metodologías están en constante transformación. No obstante, hemos cuidado de expresar las condiciones en que se realizó tanto la toma de datos como los procesos interpretativos.

Neutralidad u objetividad, como se define en los estudios cualitativos, es un criterio complejo de asegurar totalmente, implica seguridad de que los resultados no están sesgados. Para cumplir con el criterio de neutralidad es importante emplear técnicas y procedimientos intersubjetivas en el proceso de investigación (Rodríguez y Valldeoriola, 2007, pp. 16-17). En este estudio, para lograr cumplir el criterio de neutralidad, nos centramos en el fenómeno de interés; es decir, en comprender el conocimiento manifestado por los profesores en la acción docente, buscamos reflexionar sobre los aspectos principales que caracterizan al fenómeno. Esto nos lleva a centrarnos en todo momento en el "objeto" de estudio, el conocimiento del profesor, respetando la esencia del objeto, es decir, buscamos orientarnos hacia el objeto y mantenernos fiel al mismo (Rodríguez y Valldeoriola, 2007, p.75).

RESUMEN

La Figura 23 presenta un resumen de los pasos seguidos en la investigación. Primero, por recomendaciones de diversos profesores, llegamos a contactar con docentes experimentados. Luego examinamos una serie de características, previamente definidas, que nos llevan a seleccionar a los profesores expertos, sujetos informantes de la investigación. Seleccionamos a dos docentes expertos, uno de Educación Primaria y otro de Educación Secundaria. Una vez elegidos a los profesores procedimos a examinar su práctica docente, a través de la observación no participante, ingresando a sus respectivos salones de clases con el objeto de grabar la unidad de los números racionales. Para el caso del profesor de Ed. Primaria grabamos 21 clases y para el de Ed. Secundaria 12 sesiones.

Una vez recogidos los datos buscamos dar sentido a la numerosa información recolectada, empleando el análisis de contenido, hemos llegado a estructurar y organizar la información. El diseño metodológico planteado nos ha permitido abordar el estudio para dar una descripción detallada interpretativa del conocimiento especializado de los docentes al enseñar el tema de los números racionales.

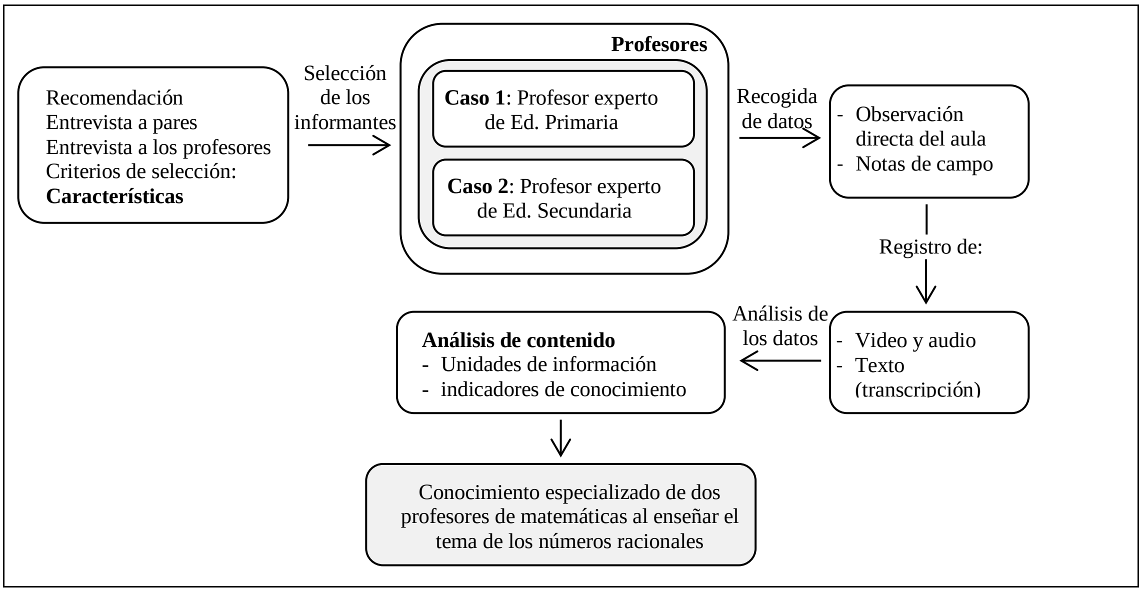


Figura 23. Proceso seguido en la investigación

Capítulo 4

Análisis y resultados

Índice del capítulo

Análisis y resultados

No pretendemos presentar una instrucción ejemplar o un estilo pedagógico en particular, sino más bien proporcionar un ejemplo que haga vivo y visible algo del complejo trabajo matemático de enseñar.

(Bass, 2007, p. 698)

Presentamos el caso de dos profesores: Rodríguez y Rivera[19], que enseñan el contenido matemático escolar de las fracciones a niños de 6º de Educación Primaria y 1º de Educación Obligatoria Secundaria, respectivamente.

En los siguientes apartados nos planteamos lograr los objetivos específicos que corresponden a identificar componentes del conocimiento matemático especializado, que revelan cada uno de los docentes, al enseñar el tema de las fracciones.

Primero, presentamos el caso del profesor Rodríguez describiendo la enseñanza impartida por el docente a lo largo de 21 sesiones de clase, información que corresponde a un total de aproximadamente 18 horas de tiempo real de clase. Luego identificamos componentes de conocimiento observados al enseñar: situaciones de fraccionamientos, significados de las fracciones (como operador y parte-todo), conversión de fracciones impropias a mixtas y viceversa, comparación de fracciones sencillas, mediante ordenación y representación gráfica, y las operaciones con fracciones (suma, resta, multiplicación y división). Finalmente, presentamos una reconstrucción del conocimiento especializado del profesor Rodríguez, según los indicadores de conocimiento con más presencia en la enseñanza del tema.

Posteriormente, exhibimos el caso del profesor Rivera, quien realiza clases a un 1º de ESO, estudiantes de 12 y 13 años de edad. Presentamos una descripción de 12 sesiones

[19] Nombres ficticios de los participantes del estudio.

de clase en las que se trabaja el tema de las fracciones. La información corresponde a 11 horas de tiempo real de clase. Identificamos componentes de conocimiento respecto de los contenidos abordado a lo largo de la unidad: significado de fracción (parte-todo, operador y como división indicada), fracciones equivalentes, ordenación de fracciones y las operaciones con fracciones (suma, resta, multiplicación y división). Concluimos presentando una reconstrucción del conocimiento especializado del profesor Rivera según los indicadores de conocimiento observados al enseñar las fracciones.

Hemos de indicar que en este capítulo aparecen los resultados concernientes a los objetivos específicos relacionados con los profesores (*O1*, *O2*, *O3* y *O4*), mientras que los objetivos que se refieren a la profundización en la caracterización del modelo teórico de conocimiento (*O5* y *O6*), serán discutidos en el siguiente capítulo, según los resultados obtenidos del conocimiento especializado de los sujetos informantes de la investigación. En lo que sigue, presentamos el análisis de los datos correspondientes a los dos casos y su posterior interpretación.

4.1 CASO 1: ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA AL ENSEÑAR LAS FRACCIONES

La descripción[20] de cada clase lleva a tener una clasificación detallada de la información contenida a lo largo de la unidad, también nos permite establecer los episodios y subepisodios de clase en los cuales se produce comunicación matemática, que representan fragmentos de texto con significados, aspectos esenciales que conducen a la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

La Figura 24 ilustra los contenidos tratados a lo largo de 21 sesiones de clase en un curso de 6º de Educación Primaria, destacamos el camino seguido por el profesor en la enseñanza de las fracciones.

[20] El Anexo B contiene una descripción más detallada de las 21 sesiones de clase, en que el profesor Rodríguez aborda el tema de las fracciones.

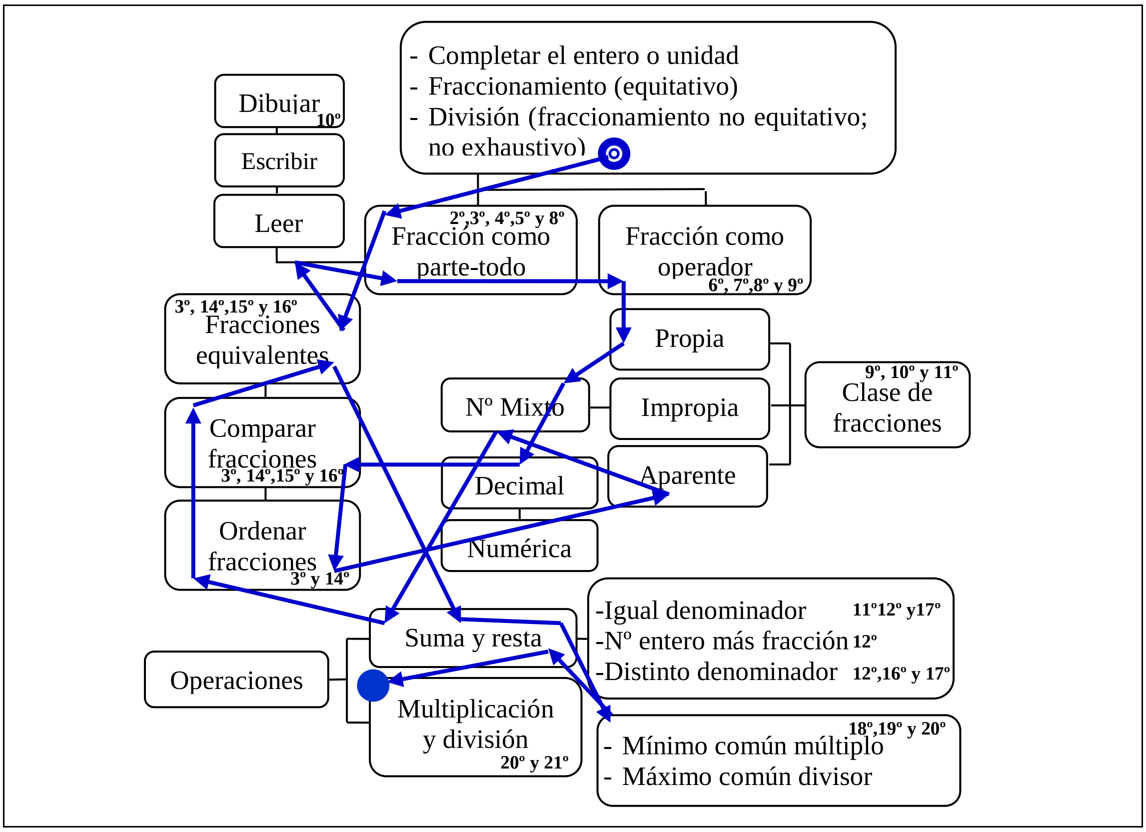


Figura 24. Contenidos abordados a lo largo de 21 sesiones de clase, en 6º de Educación Primaria, al estudiar las fracciones

La enseñanza del tema de las fracciones se inicia con la resolución de distintas tareas que implican un fraccionamiento (división de figuras geométricas en partes de igual tamaño y forma, y de igual tamaño y distinta forma), que llevan a distinguir la noción de fraccionamiento y de división. El profesor utiliza el término fraccionamiento al partir un objeto completo (partición exhaustiva), en partes iguales o equitativas (partes que representan la misma cantidad), mientras la expresión división indica, para el docente, partir el objeto en trozos que no son equitativos o que no cubren todo el objeto (no exhaustiva). Por tanto, el fraccionamiento sería equivalente a dividir en partes iguales; es decir, partes que representan la misma cantidad.

A lo largo de la unidad se trabajan principalmente los significados de fracción como parte-todo y operador. A partir de distintas figuras planas, divididas en partes iguales, se identifica cada parte fraccionaria con su representación numérica. Asimismo, construyen la unidad teniendo una figura que representa una porción dada de tal unidad (todo).

El profesor presenta distintas tareas de fraccionamiento en las que intervienen tres datos: el todo, la parte o porción y la relación entre ellas, expresada en forma de fracción. Estas situaciones se relacionan con la fracción como parte-todo y operador. Así, el número racional expresa una operación multiplicativa sobre una cantidad (todo o unidad) que representa una división en partes iguales según la cantidad que indica el denominador de la fracción operador, y una multiplicación por el número de partes que indica el numerador.

Resuelven tareas que implican que la fracción operador actué sobre cantidades y valores de magnitudes (número, longitud). También se da sentido a las operaciones implicadas en el fraccionamiento (multiplicación y división), que transforman las cantidades, a partir de representar gráficamente la situación de partida.

El profesor recuerda que un número mixto está conformado por una parte entera y una parte de fracción. Expone dos métodos para transformar fracciones a números mixtos, primero representado gráficamente (como parte-todo) y obteniendo la cantidad de partes enteras y la fracción que representa a las partes resultantes. Segundo, dividiendo el numerador por el denominador de la fracción impropia y relacionando el divisor, cociente y resto (algoritmo de la división en Z).

Comparan fracciones, establecen cómo se identifica que una fracción es mayor, menor o igual a la unidad y cómo puede escribirse un número entero como fracción (equivalencias notables de Q). A partir de la representación figural suman y restan fracciones con igual denominador. Posteriormente, ordenan fracciones con igual denominador y distintos numeradores, con igual numerador y distintos denominadores, y con distintos numeradores y denominadores. Ordenan fracciones por comparación y representan gráficamente. También trabajan las fracciones equivalentes a partir de la idea de fracción porción (referida a un todo), identificando que son equivalentes si representan la misma porción. Para verificar o comprobar si dos fracciones representan lo mismo (son equivalentes) el profesor promueve: dibujar la porción de un todo dado (generalmente de superficie), representar en una recta numérica, calcular el número decimal asociado o amplificar o simplificar la expresión numérica.

Una vez estudiadas las fracciones equivalentes, la ordenación y comparación de fracciones, suman y restan fracciones, primero con igual denominador y luego con distintos denominadores. Convierten las fracciones a igual denominador (fracciones equivalentes) mediante el método de productos cruzados. Luego calculan el mínimo común múltiplo (mcm), diferenciándolo de máximo común divisor (MCD). El mcm lo obtienen tras descomponer en factores primos, expresado como producto de factores primos. Suman fracciones con distintos denominadores pasando a denominador común, mediante el cálculo del mcm. Finalmente, en las últimas dos clases trabajan la multiplicación de fracciones, multiplicando numeradores y denominadores. La división de fracciones, la trabajan a partir de la multiplicación en cruz.

Siguiendo las orientaciones curriculares para el trabajo del tema de las fracciones, en los primeros niveles escolares, se da paso a expresar particiones y relaciones en contextos reales, desde la comparación entre partes de una figura, hasta establecer la fracción como medida. Los documentos oficiales explicitan las “operaciones” con fracciones como contenido correspondiente al nivel escolar en que se imparte la enseñanza, sexto curso de Educación Primaria; sin embargo, en los documentos oficiales (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006b) no queda explicito el grado de complejidad exigible a las operaciones aditivas y multiplicativas de los números racionales. El profesor Rodríguez enseña la suma/resta y multiplicación/división de fracciones.

Hemos de indicar que los temas de proporcionalidad y porcentaje fueron considerados en la planificación del profesor Rodríguez como parte de la unidad siguiente, por lo cual en las clases observadas no tratan la orientación curricular, de relacionar los porcentajes y las fracciones sencillas.

En general, los contenidos programados para el nivel fueron enseñados a lo largo de las 21 clases ejecutadas, concordando con los contenidos que el currículo escolar hace explícito para la enseñanza en el tercer ciclo de educación básica.

En lo que sigue detallaremos el conocimiento especializado del profesor Rodríguez que ha puesto de manifiesto al enseñar el tema de las fracciones. Organizamos la presentación según los seis subdominios de conocimiento del modelo MTSK y respecto de los indicadores de conocimiento más destacados a los largo de la unidad.

4.1.1 Componente de conocimiento especializado manifestado por el profesor Rodríguez al enseñar las fracciones

En el Capítulo 2 definimos las categorías de conocimiento con sus respectivos indicadores, que surgen de la relación entre el *análisis didáctico* y el modelo de conocimiento MTSK. Los indicadores fueron aplicados a las 21 sesiones de clase, según los pasos definidos en el Capítulo 3 de este documento. En la matriz[21] de datos (Tabla 18) cada columna corresponde al número de la clase ($1 \ldots 21$), asignación otorgada según el orden de ejecución de cada sesión, y las filas corresponden a los indicadores descritos. Cada celda registra las unidades de información (subepisodios) que se relacionan con el indicador asignado.

Mediante el análisis de la matriz de datos buscamos describir, interpretar y comprender el conocimiento especializado de cada profesor de matemáticas. Primero, examinamos la matriz por filas, considerando los indicadores que con más frecuencia se observan a lo largo de las 21 clases. Esto nos permite describir el conocimiento manifestado por los profesores acerca de cada subdominio de conocimiento, que nos llevan a las observaciones que presentamos a continuación.

[21] El Anexo E contiene el texto completo (transcripción textual de cada sesión de clase), con la codificación asignada a las unidades conversacionales.

Tabla 18. *Unidades de información*[22] *de 21 sesiones de clase, que se relacionan con los indicadores de conocimiento del modelo MTSK*

	Indicador	Clase 1	Clase 2	Clase 3	Clase 4	Clase 5	Clase 6	Clase 7	Clase 8	Clase 9	Clase 10	Clase 11	Clase 12	Clase 13	Clase 14	Clase 15	Clase 16	Clase 17	Clase 18	Clase 19	Clase 20	Clase 21
KoT	A1.1									[311]	[390-593]											
	A1.2	[70-73]															[12-20] [220]					
	A1.3	[70-73]																				
	A1.4	[11-24]	[1-64]																			
	A2.1	[174-180]	[81-388]	[355-577]	[9-809]	[38-451]				[311]	[390-593]											
	A2.2		[1-63]					[441-458]														
	A2.3																					
	A3.1						[610-751]		[4-346]	[311-335]		[9-30]	[368-400]			[8-189]	[231-452]			[8-311]	[402-489] [501-768]	[14-39]
	A3.2	[181-184]	[213-320]			[38-451]			[4-346]		[53-289] [54-63] 390-593]	[88-373]	[272-285]	[101-278] [287-400]	[7] [8-131] [369-394]			[10-22]	[4-513] [159-234] [381-513]		[33-401]	
	A4.1												[1-99]									
	A5.1	[39-41] [46-47]		[460-463]	[613-627] [650-660]		[27-42]			[73-81]	[81-104] [127-133]					[384-432]		[334-349]			[124-151]	
	A5.2							[42-68]														
	A5.3																					
	A6.1	[131-142]	[81-136] [137-173] [174-235] [236-273]	[23-34] [352]		[38-451]	[610-948]			[8-66]												
	A6.2						[610-948]															
	A6.3	[131-142]	[323] [339] [440]			[38-451]			[4-346]													
KSM	B1.1										[422-437] [534]	[24]		[375-384]								
	B1.2					[38-451]																
	B1.3			[129-139]																		
KPM	C1.1																					
	C1.2						[27-52]					[88-373]										
KFLM	D1.1																					
	D1.2																					
	D1.3		[121-122]					[11-370]	[4-346] [373-410]	[287-309]												
	D1.4			[31-46]					[4-346]	[185-197]					[210-294]							
	D1.5		[418-424]			[38-451]			[303-313] [113-347]	[312-398]	[350-388]		[76-92] [309-364] [368-377]			[384-432]						
	D2.1					[38-451]	[210-320]		[98-346]	[171-309]									[236-513]			
	D2.2		[265-290]						[4-346]									[215-262]				
	D2.3																					
	D2.4	[392-395]	[122] [190-199]	[154-297] [315-343]		[38-451]	[71-86] [321-594]		[4-346]	[72-170] [198-309]	[50-388]						[68-107]				[592-642]	
	D3.1			[18-354] [355-489] [499-577]		[19-31]	[610-751]	[11-495]				[256-352]	[117-253] [253-269]						[236-513]			

[22] Cada intervalo corresponde al fragmento de clase en el cual se observan los indicadores de conocimiento. El Anexo E contiene las transcripciones de las clases, con la codificación para cada unidad conversacional.

Tabla 18. *Unidades de información*[22] *de 21 sesiones de clase, que se relacionan con los indicadores de conocimiento del modelo MTSK*

	Indicador	**Clase 1**	**Clase 2**	**Clase 3**	**Clase 4**	**Clase 5**	**Clase 6**	**Clase 7**	**Clase 8**	**Clase 9**	**Clase 10**	**Clase 11**	**Clase 12**	**Clase 13**	**Clase 14**	**Clase 15**	**Clase 16**	**Clase 17**	**Clase 18**	**Clase 19**	**Clase 20**	**Clase 21**
	D3.2								[32-95]													
	D3.3																					
	D4.1		[122]			[38-451]																
	E1.1			[70-104] [154-314]					[4-346]					[186-254]			[151-218]	[263-323]				
	E1.2						[27-52] [610-948]			[312-398]	[390-593]					[243-377]	[126-150] [361-452]				[33-401]	
	E2.1								[32-95]	[312-398]				[10-101] [185-254]								
	E2.2					[38-451]	[25-949]							[10-101]								
	E3.1	[209-243] [331-357]	[1-450]	[18-577]			[25-949]	[11-495]		[8-66]	[53-593]	[88-350]	[1-99]		[161-593]	[8-527]		[72-465]				
	E3.2	[1-416]	[1-450]	[18-577]	[39-809] [810-810]	[38-451]	[25-955]	[11-495]	[4-439]			[81-371]	[1-400]	[102-620]			[4-452]		[20-513]		[33-760]	
KMT	E3.3	[131-142] [209-243] [331-357]	[1-450]			[38-451]		[11-495]			[53-593]	[88-350]	[1-99]		[161-593]	[8-527]		[72-465]				
	E3.4		[1-450]	[18-577]		[38-451]	[25-955]		[4-39]	[312-398]		[81-371]	[1-400]	[102-620]			[4-452]		[20-513]		[33-760]	
	E3.5		[137-173] [81-450]	[18-577]		[38-451]	[25-949]							[10-101] [287-400] [185-254]								
	E4.1			[154-314]	[688-787]	[38-451]			[1-3]	[401]	[193-217]										[218-381]	
	E4.2		[65-80]																			
	E4.3																					
	F1.1																					
	F2.1																					
	F2.2	[167-349]																				
	F3.1																					
	F3.2																					
	F3.3																					
KMLS	F3.4																					
	F3.5																					
	F3.6																					
	F3.7																					
	F3.8																					
	F3.9	[419]							[1-3]													

Conocimiento de los temas matemáticos

Para el subdominio de *conocimiento de los temas matemáticos* (KoT) consideramos las categorías: conceptos (A1), fenomenología (A2), procedimientos matemáticos (A3), sistemas de representación (A4), aspectos de comunicación (A5) y tareas matemáticas (A6), cada una de ellas con sus respectivos indicadores de conocimiento. En lo que sigue hacemos una descripción detallada de los componentes de conocimiento observados a lo largo de las 21 sesiones de clase, según cada categoría y respecto de los indicadores establecidos.

Conceptos

En relación con **conocer los distintos temas, conceptos y procedimientos matemáticos vinculados a los números racionales**, se hace mención a que la fracción es una operación, una división [**C9**. A1.1.Línea 311][23]. El número racional es visto como la porción o parte que resulta de una división entre dos cantidades. Por lo tanto, se trabaja el concepto de números racional como número fraccionario, representado por el cociente entre dos números $\left(\frac{a}{b}\right)$, identificando su valor con el resultado de realizar la división $(a \div b)$.

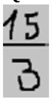
311. P *Sabes que la fracción es una operación, es una división; es decir, sabes que dos quintos es cero coma cuatro, bueno. Estas son cositas que ya vimos el año pasado. Cuándo una fracción el numerador es mayor que el denominador, ¿la fracción es mayor o menor que la unidad? Vale eso no tiene mucha dificultad, es algo que ya se vio el año pasado.*

Para mostrar la inclusión de los enteros en los racionales, el profesor propone fracciones formadas por números cuya división da un número entero [**C10**. A1.1. Líneas 390-593].

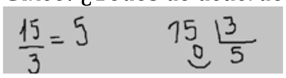
393. P *Y hemos dicho ¿qué?, ¿la fracción es qué?*
394. A *Una división*
395. P *Una división, ¿sí o no?*
396. A *Sí.*
397. P *Una división. Por ejemplo siete quintos, ¿qué división?*
398. A *Siete entre cinco.*
399. A *Siete entre cinco.*
400. P *Siete entre cinco. Vale.*
401. P *¿Qué? A ver, vamos a pensar un número difícil.*
402. A *Uno.*
403. P *No, vamos a pensar un número complicado.*

[23] La notación indica: [número de la clase (Ci), indicador de conocimiento ($Ai.i.$), subepisodio de conocimiento (Línea)].

404. As [No se logra oír, los alumnos indican algunos números]
405. P *Quince tercios.*



406. P *Quince tercios.*
407. A *¡Qué difícil!*
408. P *Yo sé, que, si yo quiero calcular el valor de esa fracción, ¿qué tengo que hacer?*
409. As *Dividir.*
410. P *Dividir. ¿Cuánto?*
411. As *Cinco.*
412. P *Cinco. ¿Todos de acuerdo?*



413. As *Sí.*

Este proceso se realiza de manera directa e indirecta; es decir, identifican el entero dada la fracción, o diversas fracciones, proveído el entero $\left(\frac{15}{3} \rightarrow 15 \div 3;\ 3 = \frac{?}{3};\ 12 = \frac{?}{3}\right)$.

El profesor utiliza el término “fraccionamiento” para aludir a la partición de la unidad completa en partes iguales y exhaustivas. Para hacer énfasis en la necesidad de distinguir estas dos condiciones, emplea la expresión “dividir” para referirse a particiones que producen partes que no son iguales, o que no cubren toda la unidad. Esto lleva a establecer que el fraccionamiento sería equivalente a dividir en partes iguales o partes que representan la misma cantidad, permitiendo las fracciones expresar partes o porciones de la unidad.

Este modelo semántico de división partitiva lleva a repartir una unidad o todo en partes iguales, interpretándose la fracción como una parte o porción de la unidad. Esta idea se conecta con los significados de fracción como parte-todo y operador, relacionándose ambos significados. Cuando se trabaja la fracción como parte-todo se expresa una relación entre el número de partes que forman la porción y el total de las partes consideradas. En el caso de la fracción como operador, expresa una operación multiplicativa sobre una cantidad (unidad), indicando una división (equitativa) en tantas partes como determina el denominador, y una multiplicación por el número de partes que indica el numerador.

El profesor conoce y expone diversas clasificaciones de las fracciones, como en aparentes o enteras, propias e impropias. Utiliza con precisión el empleo de estas clasificaciones [**C1**. A1.2. Líneas 70-73].

70. A *Las fracciones aparentes.*

71. P *Las fracciones aparentes, pero eso lo hemos puesto en las clases de fracciones. ¡Vale!*

El profesor establece relaciones entre los términos de la fracción, para clasificarlas, como $\frac{a}{b}$ es menor que la unidad si $a < b$. Por ejemplo, a partir de un caso particular, pregunta a un estudiante si reparten 6 chuches entre 6 niños cuánto recibe cada niño, dando como respuesta 1, luego el profesor enuncia "¿Y si en lugar de esa chuche es otra cosa?" "¿Y si son números y no son nada?" [**C10**. A1.2. Líneas 193- 216].

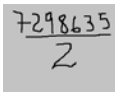
193. P *Marta siempre que el numerador es igual al denominador de una fracción, bueno ¿la fracción es igual a qué?, cuando el numerador y denominador son iguales.*
194. A *Es que no sé.*
195. P *¡Piénsalo!*
196. A *¿Cero?*
197. P *Claro, claro cero.* [El profesor enuncia que es cero para ver que comentan los alumnos].
198. P *Yo tengo 6 chucherías y las reparto entre seis niños, no le doy ni una a ninguno.*
199. A [Los alumnos se ríen].
200. A *Son todas para mí.*
201. P *¡Bueno contéstame!*
202. A *Le da una.*
203. A *Le da una a cada niño.*
204. P *¡A ver! escuchar a Laura. Eh, vale. Escucháis a Laura. A ver Laura, que Laura quiere hablar.*
205. A *No, por qué si son seis chuches y seis niños una para cada uno.*
206. P *Vale. ¿Y si en lugar de esa chuche es otra cosa?*
207. A *Dos para cada uno.*
208. P *¿Y si son números y no son nada?*
209. A *No nos líe más.*
210. A *¡Uno y ya está!*
211. P *Ah, uno y ya está. Uno y ya está.*
212. A *¡Qué lio!*
213. P *Uno y ya está.*
214. A *¿Y eso cómo se llama?*
215. A *Yo he puesto la unidad.*
216. P *La unidad. ¡Vale!.¡Bien!.*

Luego el profesor pregunta qué pasa cuando en una fracción el numerador es múltiplo del denominador. Un estudiante señala que da como resultado "un entero". Continua preguntando "¿ocho entre dos?", presenta un número de varias cifras para reforzar la idea que $\frac{a}{b}$ es mayor que la unidad si $a > b$ [**C10**. A1.2. Líneas 193- 216].

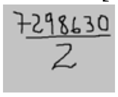
241. P *Ocho entre dos.*
242. A *Cuatro.*
243. P *Deja a Manuel*
244. A *A cuatro.*

$\frac{9}{3}=3 \quad \frac{8}{2}=4$

245. P *A cuatro. Vale, vale, vale, vale.*
246. As *Profe ¡no!, no se puede, no se puede* [ya que el profesor escribe en la pizarra lo siguiente].



247. A *No se puede porque no es un múltiplo de dos.*
248. A *Ahora sí* [el profesor cambia el cinco por el cero].



Trabaja la equivalencia, el orden y las operaciones de fracciones (suma, resta multiplicación y división). La equivalencia la enseña a partir de la representación figural, comparando las partes de un mismo todo (unidad). Presenta cuatro métodos para establecer cuándo dos fracciones son equivalentes: a) dibujar y comparar si cada parte representa la misma cantidad (la misma área), b) representar las fracciones en una recta numérica y ver si coinciden sobre la recta, c) calcular el número decimal correspondiente y compararlos, y d) amplificar o simplificar, buscando denominadores iguales o numeradores iguales. La equivalencia de fracciones en a) y b) se trabaja bajo el significado de fracción como parte-todo, la fracción indica la medida de una parte respecto de un todo. En c) y d) dos fracciones distintas son equivalentes al generar el mismo resultado, basándose en la representación decimal del racional.

En algunos episodios de clase, el profesor indica que al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, la fracción se hace más grande, asimismo si al dividir el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número se hace más pequeña. Con ello introduce lo que escolarmente se llama “ampliación” y “reducción” de fracciones equivalentes, resaltando que el tamaño de los términos de la fracción aumenta en la ampliación y disminuye en la reducción [**C16**. A1.2. Líneas 12-20; Línea 220].

12. P *Para hacer fracciones más grandes, ¿Qué hacíamos con el numerador y denominador?*
13. P *¡Dime!*
14. A *Multiplicar.*
15. P *Multiplicábamos ¿por qué?*
16. P *Multiplicábamos, ¿por qué?*
17. A *Para.*
18. P *¿Pero por qué se multiplicaba?*
19. A *Para que esa cantidad sea más grande.*
20. P *Para que sea más grande, para que sea más grande multiplicábamos siempre por un mismo número.*

220. P *Fracciones equivalentes, la voy hacer más grande. Multiplico. Fracciones equivalentes la voy hacer más pequeñas divido por un divisor común. Vale. Y me van a salir más pequeñas.*

El profesor establece el orden de dos o más fracciones: de igual denominador (es menor la que tiene menor numerador), de igual numerador (es menor aquella fracción que tiene mayor denominador), con numeradores y denominadores distintos (buscan fracciones equivalentes o por comparación de números decimales).

Presenta dominio de los procedimientos numéricos para operar con fracciones. Para sumar y restar fracciones con igual denominador recurre a la acción de juntar o quitar cantidades, obteniendo la cantidad final (bajo el significado de fracción como parte-todo). Para sumar o restar fracciones con distintos denominadores presenta los siguientes métodos: a) buscar fracciones equivalentes; b) reducir las fracciones a común denominador, por el procedimiento de los productos cruzados; y, c) calcular el mínimo común múltiplo. El producto de fracciones lo define verbalmente: "para sacar el numerador, se multiplican todos los numeradores, y para sacar el denominador, se multiplican todos los denominadores", sugiriendo el procedimiento para realizar el producto de números racionales $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}, a, c \in Z;\ b, d \in Z^* \in Q\right)$.

La Figura 25 presenta una síntesis de los conceptos matemáticos que el profesor conoce, referidos al tema de las fracciones, que se infieren a partir de la observación de clase.

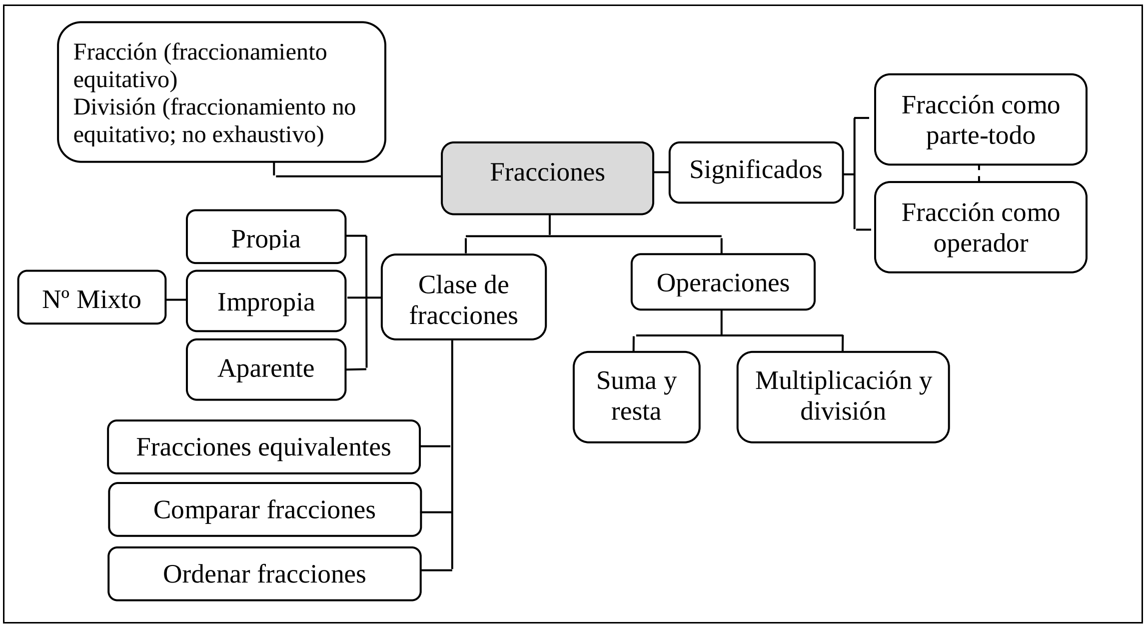


Figura 25. Contenidos matemáticos que el profesor Rodríguez revela conocer

Fenomenología

A lo largo de la enseñanza los **significados de fracción que se trabajan** son principalmente el de parte- todo (dividir el todo completo en partes iguales), operador (actuación multiplicativa de la fracción para obtener una parte del todo), división (expresar la parte racional que comprende en un reparto) y medida (expresar la medida no entera). Por ejemplo, la tarea de dividir figuras en partes de igual tamaño y de distinta forma, es una situación de fraccionamiento que lleva a trabajar la fracción como parte-todo, identificando cada parte con su representación numérica [**C2**. A2.1. Líneas 81-388].

324. P *Es decir, si yo cojo, tengo veinte cuadraditos y hago dos partes, cada parte ¿qué fracción es Diego?*
325. A *Cada parte.*
326. P *Si hago dos partes.*
327. A *Diez.*
328. P *No. Si, diez cuadritos, pero ¿qué fracción es cada parte?*
329. A *Diez veinteavos.*
330. P *Diez veinteavos, Diez veinteavos, vale, pero si hago dos partes ¿una parte es la…?*
331. P *Es decir, si yo cojo, tengo veinte cuadraditos y hago dos partes, cada parte ¿qué fracción es, Diego?*

A partir de una parte dada identifican la unidad o el todo que contiene a la parte o figura. Por ejemplo, de los hexágonos divididos en partes iguales, en los que algunas de las partes están sombreadas, identifican la fracción que representa a cada porción pintada [**C3**. A2.1. Líneas 355-577]. Luego estudian la fracción como operador, a partir de resolver una tarea que consiste en identificar los tres cuartos de sesenta fichas (material concreto).

65. P *A ver. Vamos a ver, vamos a ver, qué podemos poner. Quiero que me calculéis tres cuartos de sesenta.*

La fracción $\frac{3}{4}$ la representan en una figura en la cual el todo (un cuadrado) lo dividen en cuatro partes iguales, además cada parte tiene asociada una cantidad $(60 \div 4)$. Así, cada parte contiene 15 fichas estableciéndose que los $\frac{3}{4}$ corresponden a 45 fichas (3×15).

Respecto a algunas **referencias a campos de utilidad del contenido**, específicamente en un episodio de clase se pide que los estudiantes busquen información sobre el papiro de Rhind. Se hace referencia a una parte histórica del tema, que lleva al profesor a ilustrar la representación egipcia para $\frac{1}{3}$ () e indicar que las fracciones unitarias se trabajaban por los egipcios. El profesor expresa que son temas que se trabajan luego en la universidad [**C2**. A2.2. Líneas 1-63].

Procedimientos matemáticos

El indicador **dominio de los conceptos y procedimientos relacionados con las fracciones** es uno de los más destacados a lo largo de las 21 clases.

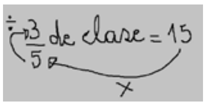
Por ejemplo, relacionado con las tareas planteadas sobre fraccionamiento, el profesor plantea “tengo cuatro euros y es la mitad de todo el dinero que tengo en el monedero, ¿cuánto dinero tengo?”, luego cambia la fracción “un tercio” para que los estudiantes identifiquen los datos que intervienen en la situación y adquieran los procedimientos para calcular algunas de las partes (todo, parte o fracción) que intervienen en las tareas de fraccionamiento. Es decir, se conoce la medida del todo y la fracción, y se pide obtener la parte ($\frac{a}{b} de\ c = x$); se conoce la medida de la porción y la fracción y se pide obtener a medida del todo ($\frac{a}{b} de\ x = d$); y se conoce la medida de todo y la porción, y se pide obtener la fracción ($x\ de\ c = d$) [**C6**. A3.1.Líneas 610-751. **C8**. Líneas 4-346].

Trabajan la fracción como un operador, prevaleciendo las operaciones aritméticas a partir de multiplicar una fracción por una cantidad [**C1**. A3.2. Líneas 181-184].

181.	P	*Dos quintos de sesenta, me habías dicho, creo que era María que me había dicho. Sí, sí, que se dividía por el de abajo y se multiplicaba por el de arriba.*
182.	A	*Marta.*
183.	P	*No yo creo que había sido María la que lo había dicho.*
184.	P	*Entonces, la fracción también es un operador, un operador, multiplica y divide, multiplica por arriba y divide por abajo, ¿vale?*

También se presenta la relación entre la fracción parte-todo y operador. Al relacionarse, a partir de una tarea, ambos conceptos. El todo indica una cantidad discreta (60 fichas); por tanto, cada parte del todo ha de dividirse en cuatro (15 fichas) y como piden $\frac{3}{4}$ del total de fichas (60), se tiene 3×15, así la expresión $\frac{3}{4}$ de 60 toma sentido [**C5**. A3.2. Líneas 38-451]. El razonamiento anterior, además de relacionar ambos significados de fracción, lleva a dar un significado a las operaciones implicadas en situaciones de fraccionamiento: $\frac{a}{b}\ de\ c = x$ ó $\frac{a}{b}\ de\ x = d$ [**C8**. A3.2. Líneas 4-346].

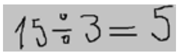
302.	P	*Pero yo tengo que intentar que Manuel, se dé cuenta del error que ha cometido. Entonces.*



303. A *¿Tres quintos de qué?*

304. P *De la clase, de los alumnos ¿Qué es lo que ha hecho Manuel cuando ha dibujado? Ha hecho una clase. Y ha dicho, hago los quintos ¿Y lo qué hay lo he repartido entre?*

305.

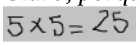


306. A *Cinco.*

307. P *Cinco.*

308. A *Ahora se multiplica por cinco.*

309. P *Claro, porque son todas las partes que yo he hecho.*



Al trabajar los números mixtos el profesor indica que “el número mixto es aquel que tiene una parte entera y una parte de fracción” [**C9**. A3.1.Líneas 311-335]. Luego, relaciona las fracciones impropias con su número mixto asociado. Presenta dos procedimientos para pasar de fracción impropia a número mixto: por medio de un dibujo o dividiendo (representación figural y numérica).

319. P *Uno, dos,… doce… y me va a faltar un cuarto* [el profesor va marcando en los cuadrados las partes].

320. A *Sobra uno.*

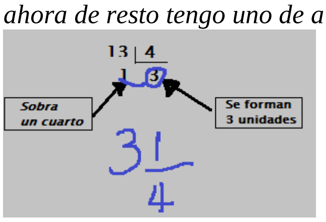
321. P *Claro sobra uno.*

322. A *¿Por qué?*

323. P *Ya, pero es igual. Si tengo 13 cuartos va a sobrar uno.*

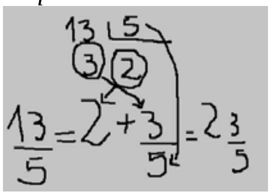
324. P *Bien lo puedo hacer así o bien lo puedo hacer dividiendo. Trece entre cuatro. Tres, y ahora de resto tengo uno de a ver dividido entre cuatro.*

325.

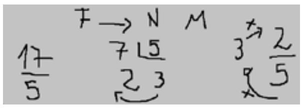


El profesor domina el paso de una fracción impropia a una fracción mixta, como división y como representación a partir de figuras planas. Para ver cuántas veces está contenido un número (divisor) en otro número (dividendo), efectúa el algoritmo de la división dando significado a cada cantidad [**C10**. A3.2. Líneas 53-289]. Es decir, se identifica el cociente, realizando el proceso inverso del procedimiento para dividir dos cantidades, tanto cuando el valor buscado (la incógnita) está en el numerador como en el denominador $\left(a = \frac{x}{b} \rightarrow x = a \cdot b \text{ y } a = \frac{b}{x} \rightarrow x = b \div a\right)$. Las situaciones se resuelven por aproximación, sin introducir el lenguaje algebraico [**C10**. A3.2. Líneas 390-593].

71. P *Bien. Dos, que sería la parte entera, el resto que es lo que nos sobra numerador y como dividimos entre cinco, es que estamos haciendo quintos, sería al denominador. Vale eso lo que estuvimos viendo ayer, que viste que entra. Bueno eso, lo que comentamos ¿Vale?*



Mediante el algoritmo de la división los estudiantes identifican que la parte entera de una fracción mixta representa al cociente, el numerador de la fracción al resto, y el denominador al divisor. Esto lleva a corroborar que multiplicando el divisor por el cociente y sumando el resto, se obtiene el dividendo. Lo anterior, lleva a trabajar la fracción como cociente entre dos números enteros, a entre b $(a > b, b \neq 0)$, conduciendo al paso de distintas representaciones numéricas [**C11**. A3.2. Líneas 88-373].



185. P *Vamos ahora a hacerlo al revés. De número mixto vamos a pasar a fracción, ¿vale? Vamos a coger un número mixto distinto. ¿De acuerdo? Número mixto distinto.*

Trabajan las fracciones equivalentes por amplificación y simplificación. Resaltando que para amplificar se debe multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número, y para simplificar buscar un número que sea divisor del numerador y del denominador. Un estudiante señala que para ver si dos fracciones son equivalentes se pueden multiplicar en cruz, de ese modo, si los resultados son iguales, las fracciones son equivalentes [**C15**. A3.1. Líneas 8-189].

141. P *Vale. Bien. Marta dice que para que dos fracciones sean equivalentes una de las cosas que yo puedo hacer es coger y multiplicar en cruz. Ella ha dicho multiplicar en equis, es lo mismo multiplicar en cruz. Si el resultado es el mismo ¿las fracciones son?*
142. As *Equivalentes.*
143. P *¿Si el resultado es distinto? ¡No son!*
144. As *Equivalentes.*

El profesor explicita que las fracciones equivalentes son aquellas que valen lo mismo, es decir que son iguales [**C14**. A3.2. Línea 7].

7. P *Además de eso estuvimos hablando de las fracciones equivalentes, y vimos que las*

fracciones eran aquellas que valían lo mismo, que eran iguales entonces estuvimos viendo que podíamos verificar o comprobar si dos fracciones eran equivalentes, representaban lo mismo, de varias formas.

Presenta cuatro métodos para establecer cuándo dos fracciones son equivalentes: a) dibujar y comparar si cada parte representa la misma cantidad (la misma área), b) representar las fracciones en una recta numérica, entonces sí coinciden las medidas sobre la recta, son equivalentes las fracciones, c) la fracción como número decimal, se calcula el número decimal y si las cantidades son iguales las fracciones son equivalentes, y d) amplificación o simplificación [**C14**. A3.2. Líneas 8-131].

El profesor trabaja el concepto de fracción equivalente como "aumentarla o disminuirlas, o bien ampliarla o reducirla", indica que para obtener fracciones más grandes se debe multiplicar el numerador y el denominador por cualquier número, señalando que corresponde a amplificar. Asimismo, se puede dividir por un número que sea divisor común al numerador y al denominador de la fracción, y eso se llama simplificación.

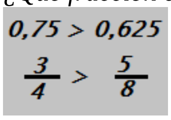
40. P *Bueno. Estábamos diciendo que las fracciones las podíamos hacer más grande, y entonces vimos que para hacer una fracción más grande, lo que hacíamos era multiplicábamos el numerador y el denominador por el número que nos diese la gana. Vale. Cojo y multiplico, multiplico por el número que me dé la gana, el que sea.*

El profesor al enseñar a simplificar fracciones recuerda los divisores de los números, que son aquellos que al dividir a otro número da resto cero.

102. P *Los divisores es lo que tú los vas a dividir ¿y da de resto?*
103. A *Cero.*

Ordena fracciones en todos los casos posibles, en primer lugar cuando los numeradores son iguales. Por ejemplo, los estudiantes enuncian dos fracciones $\left(\frac{9}{5}\ y\ \frac{9}{6}\right)$ y establecen cuál es mayor, representando en una figura. Al representar las cantidades enunciadas en una figura, las superficies que simbolizan a cada cantidad son similares en tamaño, lo que lleva al profesor a doblar un folio para comparar las partes. Luego, relaciona cada cantidad con la representación concreta como el pastel o los "chuches", así al repartir la cantidad (9), en un mayor número de personas se obtiene una parte menor [**C13**. A3.2. Líneas 101-278]. Asimismo, para ordenar fracciones que tienen distintos numeradores y denominadores, el profesor, concretando con el ejemplo $\frac{3}{4}\ y\ \frac{5}{8}$, enuncia los siguientes procedimientos: a) representar mediante una figura y comparar las partes (comparación de superficie) en cada caso, b) representar en la recta numérica y comparar las fracciones según la posición, c) representar de forma decimal y comparar decimales, y d) buscar fracciones equivalentes que permitan igualar los denominadores y así comparar fracciones con distintos numeradores e iguales los denominadores [**C13**. A3.2. Líneas 287-400].

377.	P	*A ver, ¿qué número es más grande 0,75 ó 0,625?*
378.	As	*0,75*
379.	A	*Lo que cuenta es el número de ceros.*
380.	A	*Ah, así es más fácil, más rápido.*
381.	P	*¿Qué fracción es más grande?* [El profesor escribe en la pizarra lo siguiente].

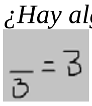


Al pedir que recuerden cómo se suman y restan fracciones cuando tienen el mismo denominador, los alumnos indican que sumando o restando los numeradores y manteniendo el denominador, situación que el profesor confirma. El docente domina el procedimiento para sumar o restar fracciones con igual denominador [**C11**. A3.1.Líneas 9-30].

21.	A	*Se suma el numerador y el numerador y se mantiene el denominador.*
22.	P	*Ah, ahora sí. Iván dice que para sumar esas fracciones lo que nosotros tenemos que hacer es sumar los numeradores ¿y dejamos el mismo…?*
23.	A	*Denominador.*
24.	P	*El mismo denominador. Eso es algo que estuvimos viendo el año pasado, que no había mayor dificultad. Os acordáis que eso era lo que hacíamos en infantil en lugar de los cuartos cogemos manzanas, tres manzanas más cinco manzanas, ocho manzanas, que no es así pero hacíamos ese pequeño truco. Vale. Bien.*
25.	P	*Vale. ¿Y para restar?*
26.	A	*Se resta el numerador, el numerador y se deja igual el denominador.*
27.	P	*¡Dime Manuel!*
28.	A	*No nada.*
29.	P	*Es decir, restamos los numeradores y dejamos los denominadores ¿De acuerdo? Vale. ¿Todo el mundo de acuerdo?*

Al sumar un número entero y una fracción se sigue el siguiente procedimiento: el número entero se convierte a fracción (fracción equivalente) y se suman fracciones que tienen el mismo denominador [**C12**. A3.1. Líneas 368-400].

380.	P	*¿Hay alguna fracción que con denominador tres su resultado sea tres?*



El profesor domina tres métodos para sumar fracciones con distintos denominadores. El primero consiste en multiplicar todos los denominadores de las fracciones, cantidad que será el denominador común de cada una de ellas. Para obtener los numeradores se busca el número por el cual se multiplicó el denominador correspondiente y ese número se multiplica por el numerador. En el segundo método el denominador es la cantidad resultante de multiplicar todos los denominadores de las fracciones y el numerador la cantidad que resulta de multiplicar cada numerador por los denominadores de las otras fracciones, menos por la de ella (reducción de fracciones a común denominador por el método de los productos cruzados). Apreciamos que domina los procedimientos enunciados para sumar fracciones [**C16**. A3.1.Líneas 231-452].

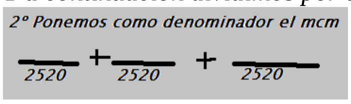
Por último, realizan el cálculo de denominador común, mediante el mínimo común múltiplo, siguiendo los siguientes pasos [**C19**. A3.1. Líneas 8-311]:

1º Calcular el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores de las fracciones. Para esto descomponen en factores primos, luego el mcm es el resultado del producto de los factores "comunes y no comunes elevados a la mayor potencia".

242. P *A ver, muy importante: Comunes y no comunes uno de cada clase elevado al mayor exponente.*

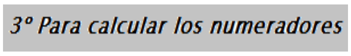
2º Se divide el mcm por el denominador de cada fracción.

293. P *Y a continuación dividimos por el de abajo y multiplicamos por el de arriba.*



3º Se divide el mcm por el denominador de cada fracción y se multiplica por el numerador.

294. P *Vale. Tercer. Para. Tercero. Para calcular los numeradores, los numeradores dividimos por abajo y multiplicamos.*
295. A *Por arriba.*
296. P *Por arriba.*



El profesor domina el procedimiento para sumar fracciones con distintos denominadores, en que el nuevo denominador surge del producto de todos los denominadores, y el numerador será el producto de algunos de los denominadores por el numerador [**C17**. A3.2. Líneas 10-22].

20. P *Bueno. Decíamos eso que para sumar fracciones con distinto denominador cogíamos, porque la vieja sabía mucha matemática, el de arriba por todos los de abajo menos por el suyo, el de arriba por todos los de abajo menos por el suyo. ¿Y cómo*

		denominador…?
21.	A	*Todos.*
22.	P	*El producto de los denominadores. Vale. Eso era lo que habíamos dicho. Entonces ya lo teníamos todos con el mismo denominador y eso era muy sencillito de sumar. Sumábamos los denominadores y poníamos como denominador el mismo.*

También tiene dominio del procedimiento para sumar fracciones reduciendo a común denominador, mediante el cálculo del mínimo común múltiplo [**C18**. A3.2. Líneas 4-513].

4.	P	*Vimos que para poner las fracciones con el mismo denominador, que eso tiene un nombre, que es reducir a común denominador, común el mismo denominador, donde está todo con el mismo denominador. Había dos formas, nosotros vimos una, que era que poníamos, para poner el denominador multiplicábamos todos los denominadores y el resultado lo poníamos como denominadores de todas las fracciones. Para buscar los numeradores, el de arriba por todos los de abajo menos por el suyo.*

El profesor recuerda el cálculo del máximo común divisor (MCD) mediante la descomposición en factores, indicando que se consideran los factores de menor exponente [**C18**. A3.2. Líneas 159-234].

159.	P	*Habéis dicho dos cosas, que las dos llevan parte de razón, pero no se han dicho con claridad. Si voy a calcular el máximo común divisor, escribo toda la lista de divisores y cuando los tengo toda la lista, tengo todos los divisores, busco los que se repiten y me quedo con el más grande, el máximo común divisor.*
211.	P	*Bien. Entonces cogíamos los comunes y decíamos, máximo común divisor, de todos los comunes, uno de cada clase elevado al de menor exponente. De todos los cinco ¿con cuál me quedo?*

Además, el mínimo común múltiplo se explica a partir de la descomposición factorial: “comunes y no comunes, uno de cada clase, elevado al mayor exponente”.

161.	P	[…] *Si voy al mínimo común múltiplo escribo toda la lista de números, cojo los números que sea los voy multiplicando por los números naturales, por el uno, por el dos, por el tres, tra, tra, tra y me sale una lista…*
162.	P	*Bueno, entonces teníamos ahí todas esas listas ahí que no se acababan nunca. Buscábamos los que se repetían, y de los que se repetían ¿cogíamos?*
163.	As	*Más chico.*
164.	As	*Más pequeño.*

El profesor, explica que al hacer la descomposición factorial se han de considerar los factores de mayor exponente justificando que es lo contrario.

192.	P	*Bueno. Rebeca ha dicho una cosa muy importante y yo lo he anotado. Hablaba ya de los factores, hablamos cuando hacíamos la descomposición factorial y decíamos para el mínimo común múltiplo, comunes y no comunes uno de cada clase ¿elevado al?*
193.	As	*Menor exponente.*
194.	P	*Al mayor exponente. Al mayor exponente. Decíamos, va al revés, va al revés. Mínimo*

> *común múltiplo el más grande, máximo común divisor cogíamos el más chico. Entonces decíamos, mínimo común múltiplo los comunes y buscábamos, ¿Cuáles son los comunes, los que se repiten en?*

Por lo tanto, el docente enseña la descomposición en factores primos mediante dos procedimientos: primero, se buscan los divisores del número y luego identifican el menor natural que es divisor de todos. Luego, a partir de los criterios de divisibilidad; es decir, estableciendo si el número es divisible por 2, 3, 4, etc., escriben el producto de factores primos, siendo el mcm el resultado de la multiplicación de los factores comunes y no comunes elevados a la mayor potencia o exponte [**C18**. A3.2. Líneas 381-513].

Para sumar fracciones con distintos denominadores convierten las fracciones a un mismo denominador. A partir de la descomposición en factores primos de los denominadores obtienen el mcm. Así, el nuevo denominador será el mcm y el numerador de cada fracción se obtiene dividiendo el mcm por el denominador de cada fracción y ese resultado se multiplica por el numerador [**C20**. A3.2. Líneas 33-401].

62. P *Una vez que tenemos todos los denominadores iguales, lo que tenemos que hacer es coger y buscar los numeradores para buscar los numeradores lo que vamos a hacer es dividimos el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada fracción.*

La multiplicación de fracciones se enseña a partir de multiplicar los numeradores y los denominadores. Indicando el profesor que el producto de varias fracciones es otra fracción, que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores [**C20**. A3.1. Líneas 402-489].

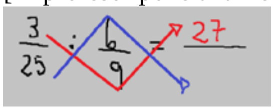
433. P *Bueno, para multiplicar fracciones lo que se hace es lo siguiente. Para sacar el numerador, se multiplican todos los numeradores.*
434. As *¡Oh!*
435. A *¡Qué difícil!*
436. P *Y para sacar el denominador.*
437. A *Se multiplican los denominadores.*
438. P *Se multiplican todos los denominadores.*

$$\frac{5}{7}\times\frac{21}{59}\times\frac{12}{20}=\frac{5\times21\times12}{7\times59\times20}$$

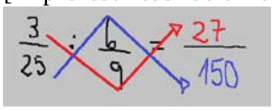
Trabajan la multiplicación de un número entero por una fracción "Para multiplicar un número entero por una fracción, se deja el mismo denominador y se multiplica el número por el numerador de la fracción". También, para sumar (o restar) un número entero y una fracción "se deja el mismo denominador y el numerador se calcula multiplicando el denominador por el número entero y al resultado se le suma (o resta) el numerador de la fracción que se está sumando (o restando)”. Este último procedimiento se relaciona con las fracciones equivalentes [**C12**. A3.2. Línea 272-285].

Para dividir dos fracciones el profesor explica que “para calcular el numerador de la fracción, multiplico el numerador de la primera por el denominador de la segunda y para calcular el denominador (cociente del resultado) multiplico el denominador de la primera por el numerador de la segunda” [**C20**. A3.1. Líneas 501-768]. En el procedimiento para dividir fracciones se observa dominio de los procedimientos enunciados.

551. A *No porque ahora divide.*
552. A *No, porque nueve por tres son veintisiete.*
553. P [El profesor pone una flecha de color azul].

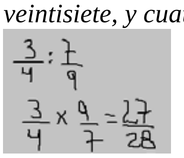


554. A *Eso no es dividir eso es multiplicar.*
555. P [El profesor escribe en la pizarra].



El profesor enuncia que el hacer “el dibujito” (las líneas que indican el orden de las operaciones) tiene su explicación con las fracciones inversas. Explica que dividir dos fracciones es lo mismo que multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda fracción. Explica verbalmente la propiedad de la división de números racionales como operación inversa de la multiplicación, aunque no justifica la aseveración.

649. P *Mirad. En realidad esa de la equis esa ahí tiene su explicación, tiene su explicación* [el profesor hace el gesto con las manos de una x, que indica la multiplicación en cruz en la división de fracciones].
650. P *Si yo voy a dividir tres cuartos entre siete novenos, eso es lo mismo, lo mismo, que coger y multiplicar la primera por la inversa, por la inversa, es lo mismo. Tres por nueve, veintisiete, y cuatro por siete veintiocho.*



651. A *Ah, por eso has hecho la inversa antes.*
652. P *Eso, porque lo vais a encontrar escrito como la inversa. Lo vais a encontrar entonces por eso.*

Sistemas de representación

Considerando los **sistemas de representación como parte de la estructura matemática**, se identifica que el profesor, para sumar o restar fracciones con igual denominador, utiliza la representación simbólica y la figural. Resuelven tareas de fraccionamiento en que la cantidad de partes en que se divide el todo o unidad representa el denominador de la fracción y el numerador las partes sombreadas (representaciones continuas, áreas de diversas formas). Relaciona entre sí los sistemas de representación verbal, simbólico $\left(\frac{a}{b}\right)$ y figural, con modelos tanto continuos como discretos [**C12**. A4.1. Líneas 1-99]. Además, a lo largo de todas las sesiones de clase el profesor emplea los sistemas de representación verbal o literal, numérico ($\frac{a}{b}$ fracción, número decimal) y figural (continuas y discretas), como apoyo para explicar las tareas planteadas, los procedimientos o para introducir los conceptos.

Aspectos de comunicación matemática

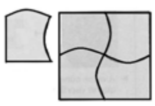
Observamos **precisión en el lenguaje matemático**, respecto al nivel de enseñanza. Por ejemplo cuando un estudiante habla de “la propia y la impropia”, el profesor refuerza y agrega “las fracciones propias e impropias” [**C1**. A5.1. Líneas 39-41].

40.	A	*La propia, la impropia.*
41.	P	*Fracciones propias, las impropias, vamos a poner clases de fracciones* [el profesor escribe en la pizarra].
42.	P	*Clases de fracciones, qué más, qué más, dime Marta* [alumna que levanta la mano].

Asimismo, cuando los estudiantes identifican las partes de una fracción como numerador y denominador [líneas 46-47], el profesor precisa que la fracción tiene numerador y denominador.

46.	**A**	*El numerador y el denominador.*
47.	**P**	*Vale, como es la fracción, tiene su numerador y denominador.*

Un estudiante indica que una parte de una figura “calza” en otra [**C3**. A5.1. Líneas 460-463]. El profesor precisa que la figura primero debe girarse para que “calce en el cuadrado”, en contraste con “doblar”.

460.		
461.	P	*A ver recordad. Hay una cosa importante y es que debemos expresarnos correctamente.*
462.	P	*Cuando le habéis dicho a Paulina ¿no? Y ella ha dicho, doblándolo, y yo creo que es…* [El profesor gira las manos].
463.	As	*¡Ah! Girar.*

Precisa los nombres de las fracciones, cuando algunos estudiantes cambian los sustantivos (medio, tercio, cuarto…) o adjetivos (medio, tercera, cuarta…), leyendo el denominador como números naturales. Por ejemplo, el profesor ayuda en la lectura a un estudiante que nombra $\frac{12}{32}$ como "doce de treinta y dos" [**C4**. A5.1. Líneas 613-627], pidiéndole que diga el nombre que se asigna, o al que lee, la fracción $\frac{6}{8}$ como "seis ochoavo", de este modo el estudiante establece la relación entre la lectura de las fracciones [línea 650-660]. Igualmente al estudiante que expresa $\left(2\frac{2}{3}\right)$ como "dos tercios", pide que lea nuevamente la expresión.

651. A *Tres ocho-avo.*
652. A *¡Eh!*
653. P [El profesor hace gestos].
654. A *¿Ocho-avo? Octavo.*
655. P [El profesor emite un grito porque otro alumno dice octavo]
656. As *¡Eh!*
657. A *Me he liado, como lo tengo ahí.*
658. P *¿Cuánto, diga, diga?*
659. A *Tres octavos.* [Lo vuelve a decir la alumna que dijo ocho-avo].
660. P *A ver. Tres octavos. Tres octavos.* [El profesor escribe en la pizarra 8/3, lo hace para ver si los alumnos se dan cuenta].

En estos casos el profesor indica que la "lectura de las fracciones no es correcta" y que para "las fracciones donde el denominador es mayor que diez, la lectura termina en avos". Corrige a los estudiantes cuando emplean expresiones de forma incorrecta o incompleta [**C10**. A5.1. Líneas 81-104], procura una correcta lectura de los números racionales.

También se observa precisión en el lenguaje matemático, específicamente cuidando cierto rigor en la sintaxis matemática [**C9**. A5.1. Líneas 73-81].

76. A 20÷2 =10+20=30H
77. P *Yo voy a leer lo que Benjamín ha puesto aquí. Benjamín.*
78. P *Me acaba de poner aquí que la mitad de veinte es diez más veinte.*
79. A *No.*
80. P *Yo, leo lo que él ha escrito, leo lo que ha escrito.*
81. A [El alumno vuelve a resolver el problema].
20÷2= 10
20+10= 30M

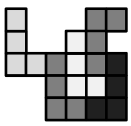
Al sumar fracciones un estudiante no sitúa el signo igual, lo que lleva al profesor a destacar la importancia de habituarse a escribir correctamente en matemáticas [**C17**. A5.1. Líneas 334-349]. Al sumar fracciones igualando los denominadores a partir del mcm, el profesor demuestra precisión en el lenguaje matemático. Los estudiantes suman los numeradores y consideran este valor resultante como resultado de la operación. El profesor pregunta "¿qué se hace para sumar fracciones que tienen el mismo denominador?", lo que permite que los alumnos respondan que "suman los numeradores y se conserva el denominador" [**C20**. A5.1. Líneas 124-151].

133. P *Tercero sumamos. A ver, si yo sumo las fracciones ¿qué me va a dar?*
134. A *Numerador.*
135. A *1001*
136. P *A ver, si sumo fracciones ¿qué me tiene que dar?*
137. A *Un número.*
138. A *Una fracción.*
139. P *Una fracción, me tiene que dar una fracción. Me tiene que dar una fracción.*
140. A *1001, dos mil quinientos veinte.*

En general, el profesor corrige el lenguaje y la escritura matemática de sus estudiantes, fomentando que empleen el lenguaje matemático preciso, según el nivel de enseñanza [**C6**. A5.1. Líneas 27-42].

Tareas matemáticas

De acuerdo con el indicador **conocer tareas que ponen de manifiesto los distintos significados de fracción**, identificamos que el profesor presenta distintas tareas matemáticas escolares de fraccionamiento. Por ejemplo, "identificar cuántas veces una figura en forma de una "L" (formada por 4 cuadrados) puede encontrarse en una figura irregular de 20 cuadrados (unidad)", es una situación que implica la acción de dividir y conduce a presentar la fracción como proceso de medición y partición de una unidad [**C2**. A6.1. Líneas 81-136].

90. A  [Pintan la figura].
91. P *Venga María uno.*

La tarea refuerza la idea de fraccionar (dividir en partes iguales) "Bien, ¿en cuántas partes lo hemos dividido?" [**C2**. A6.1. Línea 121]. Entonces se alude a la idea de fraccionar cuando la unidad tiene la misma forma y la misma medida, "Hasta ahora hemos dicho que fraccionábamos, que tenía que tener la misma forma y todo" [**C2**. A6.1. Línea 131]. Con ello, diferencia el fraccionamiento exclusivamente para dividir algo en partes iguales; diferenciando la igualdad como misma forma, de la igualdad como mismo valor, que generalmente aplica para igual cantidad de superficie. Con esto el profesor da un salto para mostrar que las partes no tienen que ser iguales en forma, aunque tienen que tener la misma medida.

A lo largo de la unidad el profesor presenta tareas que abordan problemas de fraccionamiento de tipo directo e inverso:

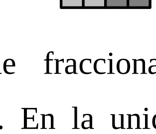
Problemas directos	a. dada unidad y fracción, obtener porción
Problemas inversos	b. dada unidad y porción, obtener fracción
	c. dada porción y fracción, obtener unidad

Por ejemplo, un problema del tipo inverso (c) que presenta el profesor, es el siguiente: “un cuarto del dinero que yo tengo son cinco euros ¿Cuánto es todo el dinero que yo tengo?”. En esta tarea se tiene la porción (5) y la fracción $\left(\frac{1}{4}\right)$ y se pide obtener la unidad. La situación implica buscar la cantidad que multiplicada por la fracción de cómo resultado cinco [**C1**. A6.1. Líneas 131-142].

133.	P	*Un cuarto del dinero que yo tengo son cinco euros. ¿Cuánto es todo el dinero que yo tengo? ¡Eso!*
134.	P	*Eh liado, eh liado, el ejemplo no ha sido bueno.*
135.	P	*Venga, a ver.*
136.	A	*Doce euros.*
137.	P	*¿Cuánto?*
138.	A	*Doce euros.*
139.	A	*Pero que has dicho, si yo, si el cuarto de dinero que tienes en el bolsillo son cinco euros.*
140.	A	*No, son veinte.*
141.	P	*Son veinte.*
142.	A	*Son veinte.*

Relaciona el fraccionamiento con el proceso de partir una figura, que representa el todo, y que más adelante divide en partes que representan la misma cantidad, “bueno ahora vamos con la otra que nos decía qué íbamos a dividirlo de cualquier forma que queramos pero, ¿que tengan siempre el mismo…?” [**C2**. A6.1.Líneas 174-235].

201.	A	*¿Hay que ir probando aquí?* [En la hoja que el profesor entrega].
202.	P	*Claro, por eso te he dejado la copia.*
203.	P	*Lo puedes poner como tú quieras, pero cambia el color* [el profesor le indica al alumno que cambie el color ya que está marcando la figura].



La tarea de fraccionamiento planteada también permite identificar fracciones equivalentes. En la unidad de información [**C2**. A6.1. Líneas 137-173] el profesor indica “Por cierto, es que me he acordado ahora, ¿qué fracción es el azul?”, los alumnos explican que con cuatro cuadrados se forma cada parte de la unidad, de 20 cuadraditos, así la fracción (en el contexto parte-todo) es $\frac{4}{20}$. El profesor busca que los estudiantes indiquen que cada parte representa a $\frac{1}{5}$ del total.

También se relacionan los significados de fracción como operador, con el de fracción como parte-todo. El cálculo de fracciones, actuando como operador, cobra sentido cuando el profesor relaciona una situación de fracción como operador con el significado de fracción como parte-todo. El profesor justifica que multiplicar una fracción por una cantidad consiste en dividir la cantidad el denominador de la fracción y el resultado multiplicarlo por el denominador [**C5**. A6.3. Líneas 38- 451].

Justifica mediante la representación figural las operaciones implicadas en situaciones de fraccionamientos. Las expresiones $\frac{a}{b}\ de\ c = x$ ó $\frac{a}{b}\ de\ x = \ d$, se interpretan por medio de representaciones de las cantidades en una figura plana, fraccionando la superficie. Para ello toman una representación figural de superficie arbitraria, sobre la que representan las divisiones que comprenden a la fracción $\frac{a}{b}$. Entonces si el todo representa la cantidad c, identifican el tamaño de cada parte mediante la división de c, en forma equitativa, en b partes, y luego se multiplica el resultado por a para considerar a de esas partes. Asimismo, se interpretan las operaciones cuando se tiene la fracción y el todo (unidad) [**C8**. A6.3. Líneas 4-346]. La situación planteada permite pasar del trabajo en contextos continuos (figuras geométricas), a cantidades (discretas) y luego a un trabajo numérico [**C5**. A6.1. Líneas 38- 451].

Las tareas planteadas por el profesor, en general, se presentan en un contexto personal; o bien, desposeídas de contexto, limitándose a argumentos matemáticos. Algunas de las tareas planteadas pueden relacionarse con situaciones habituales (medidas extensivas) que tienen relevancia directa para los estudiantes como "Luis tenía 27 canicas, perdió un tercio de las que tenía…", "tengo cuatro euros y es la mitad de todo el dinero que tengo…", entre otras. También las tareas son planteadas sin un contexto real, limitándose a trabajar en un contexto matemático, como "dividir una figura en partes de igual tamaño y forma", "construir una figura", "dividir". Las tareas programadas por el profesor llevan, inicialmente, a los estudiantes a establecer conexiones entre conceptos y procedimientos, luego el profesor complementa la enseñanza con una serie de ejercicios, que permiten reforzar los contenidos y procedimientos estudiados.

Identificamos un fragmento de clase en que el profesor **crea ejemplos**, específicamente tareas que implican un fraccionamiento: "tengo cuatro euros y es la mitad de todo el dinero que tengo en el monedero, ¿cuánto dinero tengo?". Es un problema de tipo inverso, en el cual se tiene la porción y la fracción y se pide obtener la unidad. La tarea permite trabajar la fracción como operador. Cambiando las fracciones a un tercio y dos sextos, el profesor va justificando las operaciones implicadas en el fraccionamiento ($\frac{a}{b}\, de\; c = x \rightarrow x = \frac{a \cdot c}{b}$ ó $\frac{a}{b}\, de\; x = d \rightarrow x = \frac{d \cdot b}{a}$) [**C6**. A6.2. Líneas 610-948].

En relación con el **grado en que las situaciones planteadas por el profesor dan sentido al contenido matemático**, la actividad de dividir figuras en partes de igual tamaño y forma, permite al profesor introducir la idea de fracción como parte-todo, en que el todo o unidad varía en su forma, como se ilustra en la Figura 26.

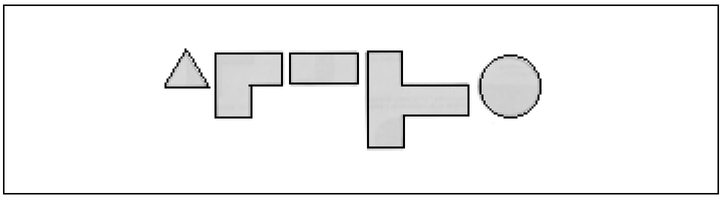


Figura 26. Figuras donde el todo varia en su forma

Estas tareas dan sentido al contenido matemático escolar, al permitir introducir el significado de fracción como partición de la unidad y luego como medición. Además, permiten reforzar la idea de fracción como parte-todo, en el cual cada parte debe tener el mismo tamaño (área), aunque tengan distintas formas (las partes) [**C2**. A6.3. Líneas 323 y 339]. A partir de la representación figural de una fracción, también se busca reforzar que la imagen de cada parte, no solamente debe tener la misma forma y el mismo tamaño, sino "también puede tener distinta forma y ocupar el mismo tamaño" [línea 440].

440. P *Entonces lo que estábamos intentando decir hace un rato, que la fracción no solamente tiene que tener la misma forma y el mismo tamaño, sino que también puede tener formas distintas y ocupar el mismo tamaño, entonces también sería una fracción, vale, también sería una fracción ¿De acuerdo?*

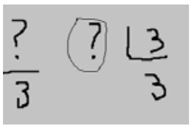
Conocimiento de la estructura de las matemáticas

El *conocimiento de la estructura matemática* (KSM) lo observamos a partir de la categoría relaciones entre componentes de la estructura conceptual (B1), y según los indicadores de conocimiento que la conforman.

Relaciones entre componentes de la estructura conceptual

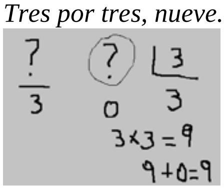
Respecto de las **relaciones entre los contenidos matemáticos que enseña y aquellos de niveles escolares anteriores y posteriores al nivel de enseñanza**, identificamos que el profesor relaciona la representación decimal de una fracción con el algoritmo de la división en Z. Es decir, a partir del algoritmo de la división ("lo que estamos haciendo es algo que aprendimos en segundo"), identifica que el dividendo (a) corresponde al numerador y el divisor (b) al denominador de la fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$.

422. A *Nueve.*



423. P *Nueve.*
424. A *Profe, yo lo hice de otra manera.*
425. P *Nueve, nueve. Bien. María por favor. Lo que estamos haciendo es algo que aprendimos en segundo.*

434. P *Veis como el secreto, el secreto es, lo poquito que sabe uno hacerlo muchas veces. Vamos a hacer la prueba de la división.*
435. P *A ver, ¿cómo hago la prueba de esto?*
436. A *Tres por tres.*
437. As *Tres por tres, nueve.*



El profesor destaca la importancia del algoritmo de la división, al trabajar el tema de las fracciones. Además, insiste en que es un tema trascendental para comparar cantidades decimales asociadas a las fracciones.

534. P *Bueno, mirad, estábamos en que, ¿yo para qué voy aprender a dividir? Es verdad uno no va por las calles tropezándose con divisiones, es verdad. Pero es algo que después se utiliza mucho, es que ahora, en realidad lo que nosotros estamos usando es la división. Cuando veamos cómo podemos comparar fracciones, también vamos a ver que la división es una cosa que nos puede ayudar, en determinado momento.*

Recuerdan que el año anterior habían visto la suma y la resta de fracciones con igual denominador, comparando la suma de fracciones con la suma de números naturales, tema tratado en cursos anteriores [**C11**. B1.1.Línea 24].

24. P *El mismo denominador. Eso es algo que estuvimos viendo el año pasado que no había mayor dificultad ¿Acordáis que eso era lo que hacíamos en infantil? En lugar de los*

cuartos cogemos manzanas, tres manzana más cinco manzana, ocho manzanas; que no es así, pero hacíamos ese pequeño truco.

Al ordenar fracciones que tienen distintos los numeradores y los denominadores el profesor recuerda que la fracción tiene una representación decimal (división). Entonces, calcular la cantidad decimal y ordenar éstas cantidades, sería equivalente a comparar las fracciones [**C13**. B1.1. Líneas 375-384].

376.	P	*Alex nos recordó el otro día que la fracción era también una división y la división puede ser un número decimal, y los números decimales sabemos ya ordenarlos. ¿Sí o no?*
377.	P	*A ver, ¿qué número es más grande 0,75 ó 0, 625?*
378.	As	*0,75*
379.	A	*Lo que cuenta es el número de cero.*
380.	A	*¡Ah!, así es más fácil más rápido.*
381.	P	*¿Qué fracción es más grande?* [El profesor escribe en la pizarra lo siguiente].
382.		$0{,}75 > 0{,}625$ $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$

En resumen, el profesor relaciona algunos contenidos estudiados previamente con aquellos programados. Esto lleva a establecer que presenta conexiones temporales, enlazando los conocimientos estudiados con saberes previos. Respecto de la complejidad del contenido, en el caso de los ejemplos exhibidos, el algoritmo de la división en Z permite justificar las operaciones implicadas en las tareas de fraccionamiento [**C10**. B1.1. Línea 534]. Al trabajar tareas de fraccionamiento se emplean representaciones en un contexto continuo (diagramas circulares y rectangulares), paulatinamente se introducen tareas en que el todo o unidad es una representación discreta o una cantidad (al trabajar la fracción como operador) [**C5**. B1.2. Líneas 38- 451].

Los **elementos de la estructura conceptual relacionados** a lo largo de la unidad, principalmente, son los significados de fracción como parte-todo y como operador, en contextos de reparto y medición. También se relacionan distintos sistemas de representación, para comparar fracciones, por medio de transformación de fracciones en decimales, o mediante la representación en la recta numérica, comparando segmentos.

Conocimiento de las prácticas matemáticas

El *conocimiento de las prácticas matemáticas* (KPM) lo observamos a partir de la categoría modos de proceder en matemáticas (C1), que está conformada por dos indicadores de conocimiento.

Modos de proceder en matemáticas

Respecto de las **formas de hacer y proceder en matemática**, en las clases del profesor Rodríguez no se habla de teoremas, axiomas, demostraciones, etc. La actividad matemática se presenta como un proceso constructivo, en el cual los estudiantes aprenden matemáticas a partir de actividades concretas, realizando distintas tareas de dividir, fraccionar, repartir, etc. El profesor fomenta la comprensión de distintas nociones, definiciones, propiedades y relaciones matemáticas, mediante la actividad práctica. La actividad del aula es análoga a la génesis histórica de la matemática, en la cual, la construcción del conocimiento es inherente a la actividad concreta, deductiva y de resolución de tareas.

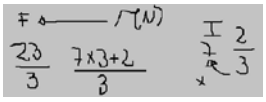
El profesor enuncia algunas definiciones de procedimientos matemáticos. Por ejemplo, para multiplicar fracciones expresa que "para sacar el numerador, se multiplican todos los numeradores, y para sacar el denominador, se multiplican todos los denominadores". Para calcular el mínimo común múltiplo indica que "es el resultado de la multiplicación de los factores comunes y no comunes elevados a la mayor potencia o exponente". Algunas definiciones las sintetiza, las expresa en lenguaje corriente y alejado del lenguaje matemático. Sin embargo, promueve la formalización rigurosa de las escrituras matemáticas. Por ejemplo, con el signo igual, en igualdades y sentencias, que se componen de una cadena de operaciones que emplean como una secuencia unidireccional de izquierda a derecha (Molina, Castro y Castro, 2007). En ocasiones dan lugar a expresiones matemáticamente incorrectas $20 \div 2 = 10 + 20 = 30\,H$ o como separador de los pasos realizados $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$. El profesor fomenta el uso correcto del signo igual.

De acuerdo al indicador **sentido dado a los algoritmos y procedimientos**, al trabajar la fracción como operador, específicamente a partir de repartir tres cuartos de sesenta fichas $\left(\frac{3}{4} \times 60\right)$, se da sentido a las operaciones implicadas al multiplicar una fracción por una cantidad. Mediante la representación figural identifican la cantidad de fichas por cada parte [**C6**. C1.2. Líneas 27-52].

43. P *La mayoría de vosotros hizo grupos, unos más otros menos, pero la mayoría de vosotros hizo los cuatro grupos. Hubo algunos que cometieron un pequeño desliz, de no prestar tanta atención y otros que no lo hicieron a la primera. Pero todo el mundo hizo los cuatro grupos ahí, entonces esos cuatro grupos eran porque dividíamos entre*

> *cuatro, en el denominador. Y el resultado, cuando teníamos hechos los grupos, agrupábamos de tres, entonces sí agrupamos tres que son iguales era multiplicar, multiplicábamos por tres, ¿de acuerdo?*

El profesor interpreta el procedimiento para convertir una fracción mixta a una fracción: $\left(a\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}\right)$, a partir del algoritmo de la división (de Z), en el cual la parte entera de la fracción mixta representa al cociente, el numerador de la fracción al resto y el denominador el divisor. Luego multiplicando el divisor por el cociente y sumando el resto obtienen el dividendo, formando la fracción impropia con el dividendo y el divisor [**C11**. C1.2. Líneas 88-373]. Estableciéndose que "[…] multiplico el denominador por la parte entera le sumo el numerador y ponemos como denominador el mismo, eso dicho más enserio. Entonces tenemos que coger y un poquito más, un poquito más" [línea 253].



230. A *¡Ah!*
231. P *Eso, y ponemos como denominador el mismo. Vale.*

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas

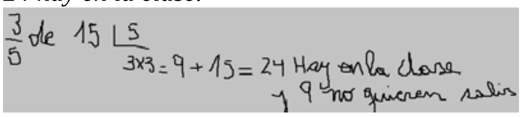
El *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) lo observamos a partir de las categorías: características de aprendizaje (D1), errores y dificultades (D2), tareas matemáticas (D3) y los materiales y recursos (D4). En lo que sigue, por cada categoría y según los indicadores enunciados, realizamos el análisis del subdominio.

Características de aprendizaje

Otro indicador destacado a lo largo de las clases es **saber identificar qué imagen de los conceptos o procedimientos tienen los estudiantes**. Por ejemplo, al resolver el problema "Luis tenía 27 canicas. En la primera partida perdió un tercio de las que tenía. En la segunda consigue ganar ocho y en la tercera pierde dos tercios de las que tenía al comienzo de ella. ¿Cuántas le quedan, si es que le queda alguna?", un estudiante sale a la pizarra y calcula los dos tercios de 27 canicas (última partida), resultando como resultado 18 canicas. El profesor sigue el proceso realizado por el estudiante, mostrando que es consciente del error que presenta. Lo anterior lleva al profesor a solicitar al alumno que vuelva a explicar el proceso, de este modo se da cuenta de que no resta una cantidad al número de canicas que quedan en la segunda partida (26) [**C7**. D1.3. Líneas 11-370].

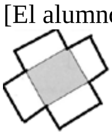
En general, el docente conoce cuándo los estudiantes interpretan un ejercicio o problema de forma incorrecta o cuándo hacen algún señalamiento erróneo, retomando lo expuesto por los alumnos. Por ejemplo, en la resolución de una tarea de fraccionamiento un estudiante interpreta los datos y opera, sin considerar si las cantidades son finales o iniciales. El profesor identifica el error en que incurren los alumnos, luego insta a que comenten el proceso y la solución, solicitando que realicen un dibujo para interpretar la situación [**C8**. D1.3. Líneas 4-346].

99. A *24 hay en la clase.*



Al completar o construir figuras que representan una parte de ella un estudiante efectúa lo siguiente:

374. A [El alumno realizó lo siguiente].



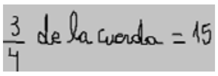
375. P *Un quinto.*

Algunos alumnos indican que está mal, así el profesor pregunta "¿Hay alguien que tiene hecho otra cosa?" [Línea 393], por lo cual infiere que los alumnos construyeron la figura de otra manera. El profesor sabe que existen varias maneras de construir la figura y pide a otro estudiante que lo dibuje. Establecen que existen varias maneras de construir la figura, solo que deben respetar que las partes sean iguales: "Que hay muchas formas, pero la única condición que hay es que las partes sean iguales y que haya cinco" [Línea 409].

400. P *No, no está haciendo lo mismo. Bueno.*

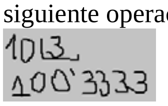
Desde el indicador anterior se va observando que el profesor en distintos momentos de las sesiones de clase **identifica los elementos de argumentación en el proceso de desarrollo de las respuestas de los estudiantes**. Por ejemplo, al resolver el problema "Un viejo problema matemático dice que en el Lago Ness vive un monstruo que la gente del pueblo dice que tiene una longitud de 20 metros más la mitad de lo que mide. ¿Sabrías cuánto mide el monstruo?", el profesor identifica los argumentos que los estudiantes expresan. Al considerar que la mitad del monstruo es 10 (la mitad de la mitad), que la mitad del monstruo es 20 aludiendo al planteamiento del fraccionamiento $\left(\frac{1}{2}\, monstruo = 20\right)$ [**C9**. D1.4. Líneas 72-170]. En otra tarea enunciada "Se sabe que las tres cuartas partes de un rollo de cuerda son 15 metros, ¿Cuántos metros tiene el rollo?", un estudiante plantea el problema y lo resuelve como $\frac{3}{4}\, de\ 15$, así los estudiantes indican que el resultado es 20. El resultado es correcto pero el planteamiento incorrecto, el profesor retoma los comentarios de los estudiantes y vuelve a plantear la tarea [líneas 185-197].

185.	A	*Está bien el resultado, pero la cuenta está mal expresada porque pone tres cuartos de no sé qué, igual a…*
186.	A	*Eso era lo que te iba a decir.*
187.	P	*A no sé qué.*
188.	A	*Del resultado igual a quince.*
189.	P	*¡Ah!, a ver lo pongo aquí* [el profesor escribe en la pizarra].
190.	As	*Sí.*
191.	A	*Tres cuarto de una cuerda igual a 15.*
192.	P	*Vamos a ver, Alex dice que tres cuartos de la cuerda son 15, ¿eso es lo que tú has dicho Alex?*



Al identificar la fracción que da respuesta a la pregunta "estoy entre 1 y 2 y a un tercio de 1. ¿Quién soy?", un estudiante da el resultado como número decimal (1,33). El resto de los estudiantes presentan dudas sobre el resultado, el profesor pide al alumno que explique por qué da como resultado 1,33. Lo anterior da cuenta que el docente percibe los elementos de la argumentación dada por el alumno, al aceptar el resultado, además de relacionar con la representación simbólica $\left(1\ \frac{1}{3}\right)$ [**C14**. D1.4. Líneas 210-294].

266.	A	*¿Cómo sabes qué es 33?*
267.	P	*Buena pregunta, ¿cómo sabes qué es 33?*
268.	A	*Sí.*
269.	P	*Eso es.*
270.	A	*Para que esté dividido en tres partes tiene que ser 33.*
271.	P	*¡Ah!, es decir. Mario, si no es lo que tú has dicho, me corriges. Vale.*
272.	P	*A ver, Mario dice, si de ahí hay uno y hago tres partes.* [El profesor realiza la siguiente operación en la pizarra].



273.	P	*Entonces cada uno de estos trozos es cero coma treinta y tres, aproximadamente. Ese número no tiene fin, no tiene fin. Vale. No tiene fin.*
274.	P	*Mario ha dicho, si de aquí tengo uno, si le sumo eso será uno con treinta y tres.*

Correcto. Está bien. Está bien.

En relación con el indicador **claridad matemática en las respuestas o preguntas enunciadas por los estudiantes**, el profesor normalmente busca que los alumnos se den cuenta de los errores, formulando una nueva pregunta que los lleve a cuestionarse las ideas. También insta a los estudiantes a representar el contexto de las tareas en una figura, o bien procura que empleen material concreto para resolver la situación.

Por ejemplo, al trabajar una tarea de fraccionamiento “establecer los $\frac{3}{4}$ de 60 fichas”, la mayoría de los estudiantes identifican tres grupos de veinte fichas y enuncian que los tres cuartos corresponden a las fichas de tres de los grupos [**C5**. D1.5. Líneas 38- 451].

105.	A	*Tres cuartos ha dicho ¿o qué?*
106.	A	*Sí, entonces hay que quitarle veinte.*
107.	A	*Qué sería sesenta. Uno, otro y otro.* [La alumna pone seis dedos y va bajando de dos, tres veces].
108.	A	*Claro cuatro veces veinte.*
109.	A	*Que sería veinte por cuatro.*
110.	A	*Hay que quitarle veinte.* [Le dice la compañera a otra que dice $20x4$].
111.	A	*Hay que quitarle tres cuartos ¿No? Tres cuartos ha dicho. Tres cuartos de 60.*
112.	P	*Tres cuartos.*
113.	A	[Una alumna explica]. *De sesenta hay que quitarle tres cuartos, y ahora hemos calculado dos, dos, dos* [pone seis dedos y baja de dos] así que serían 20 cada cuarto. *Hay que quitarle un cuarto que sería 20. Aquí quedarían cuarenta y ahí 20* [Mostrando los dos conjuntos de ficha].
114.	A	*Pero profe, ¿qué has dicho que lo dividamos?*
115.	P	*Vale. Bien.*
116.	A	[Un alumno explica, tiene tres grupos en cada mesa de veinte ficha] *Veinte en cada grupo y hay sesenta en total, hay que partirlo en veinte en cada lado.* [Se le pregunta a qué equivale cada grupo y contesta] *veinte sesentavo* [el otro grupo] *veinte sesentavo,* [el otro grupo] *veinte sesentavo* [y en total] *sesenta. Está dividido en tres partes.*
117.		

El profesor permite que se genere la discusión, aunque se estén dando respuestas incorrectas, y poco a poco direcciona el debate. Pregunta ¿cómo se pueden establecer los tres cuartos de un rectángulo, por ejemplo? Con ello los estudiantes se dan cuenta de que el rectángulo (la unidad) correspondería a las 60 fichas, por tanto tienen que resolver un problema de fraccionamiento directo, determinar el cuarto de 60, que son son15 fichas, y tomar tres de ellos.

150.	P	*Hay otra cosa que sí sé, es que si yo te digo los tres cuartos de la tableta de chocolate ¿qué es lo que haces tú?*

151.	A	*Lo divido en tres partes.*
152.	P	*La tableta de chocolate.*
153.	P	*Qué es lo que haces si yo te digo los tres cuartos de eso* [señalando el rectángulo]
154.	A	*Y eso es 60.*

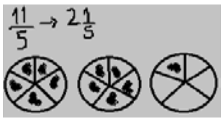
Lo anterior permite identificar que el profesor entiende con claridad las dudas o preguntas de los estudiantes. Asimismo, guía el proceso de enseñanza según las interrogantes o los errores que presenten los alumnos, demostrando que conoce las limitaciones que se van presentando al resolver las tareas.

165.	A	*De sesenta.*
166.	P	*No, olvídate de las fichas estamos hablando de la tableta de chocolate.*
167.	A	*Pero es que la tableta de chocolate está dividida en 60 porciones.*
168.	P	*¡A ver!...*
169.	A	*Qué la tableta de chocolate tiene, o lo que sea tiene que estar dividida en 60 porciones.*

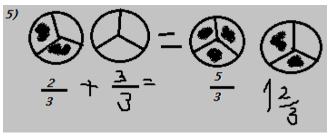
Al identificar las distintas cantidades que intervienen en una situación de fraccionamiento, varios estudiantes tienen dificultad en el planteamiento de este tipo de tarea. Por ejemplo, en la tarea inversa (si $\frac{3}{5}$ de una clase son 15), en la que algunos hacen operaciones incorrectas, el profesor solicita que interpreten los datos a partir de una figura. Los estudiantes dibujan una imagen que representa una clase y de esta forma interpretan mejor quiénes son los datos y cuál es la incógnita en la tarea **[C8**. D1.5. Líneas 303-313].

303.	A	*¿Tres quintos de qué?*
304.	P	*De la clase, de los alumnos, ¿Qué es lo que ha hecho Manuel cuando ha dibujado? Ha hecho una clase. Y ha dicho, hago los quintos ¿Y lo qué hay lo he repartido entre?*
305.		$15 \div 3 = 5$
306.	A	*Cinco.*
307.	P	*Cinco.*
308.	A	*Ahora se multiplica por cinco.*
309.	P	*¡Claro!, porque son todas las partes que yo he hecho.* $5 \times 5 = 25$
310.	P	*Vale Manuel ¿de verdad? Bien.*

Otro ejemplo surge cuando algunos estudiantes presentan dudas en el paso de una fracción impropia a fracción mixta, según las dos estrategias enunciadas por el profesor: representación figural y mediante la división. El profesor explica cada estrategia con la fracción $\frac{11}{5}$, representando mediante pizzas. Luego pregunta ¿cuántas pizzas enteras se tienen? De este modo el profesor justifica la representación figural de una fracción mixta y muestra su relación con la expresión como fracción ordinaria [**C9**. D1.5. Líneas 312-398].

368.		
369.	P	*Vale.*
370.	As	[Los alumnos comentan, no se logra entender].
371.	P	*Juan, Mario, Natalia.*
372.	P	*A ver Natalia, ¿cuántas pizzas enteras tengo?*
373.	A	*Dos.*
374.	P	*¿Y de la otra pizza cuanto tengo?*
375.	A	*Un quinto.*

Otro ejemplo aparece al sumar las siguientes fracciones $\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=\frac{5}{3}$, cuando un estudiante pregunta si se puede escribir el resultado como $1\frac{5}{3}$. A partir de la representación figural el profesor muestra a los estudiantes que resulta una figura entera y dos tercios de la otra figura, de ese modo recuerdan el paso de fracción a número mixto [**C12**. D1.5. Líneas 76-92].

76.	A	*En el cinco, sí son cinco tercios, pero de otra manera no tendría que ser uno cinco tercios.*
77.	A	*¿Qué?*
78.	A	*¡Ah!, un número mixto.*
79.	A	*Mixto.*
80.	P	*A ver por favor. Marta. Luis, por favor, Vale. Marta, ha planteado algo muy interesante y es que esto era. Vamos a subirlo un poquito. Esto era. Dos tercios y aquí tengo cinco tercios.*
81.	As	*Uno, dos, tres, cuatro y cinco.*
82.	P	*Luego tres, tercios. Vale. Y Marta ha planteado lo siguiente. Si me equivoco lo que tú querías decir me lo dices. Que esos cinco tercios en realidad son un entero y dos tercios de ahí.* 
83.	A	*No, son cinco tercios.*
84.	P	*Sí, que cinco tercios sería igual a eso* [5/3= 1 2/3].
85.	P	*¿Qué tiene ese entero?, ¿es eso?, ¿y ese trozo de ahí? Vale. Lo que Marta ha hecho, ha sido pasar ¿qué?*
86.	A	*¡De fracción!*
87.	As	*De fracción a número mixto.*
88.	P	*De fracción a número mixto, ¿lo podíamos haber puesto directamente?*

Las unidades de información descritas nos muestran que el profesor tiende a dirigir la instrucción, formulando distintas preguntas cuando los estudiantes incurren en errores o tienen dificultades para enfrentar una tarea matemática. También, promueve que los alumnos empleen el sistema de representación figural para abordar las situaciones complejas. Esto nos lleva a inferir que el docente tiene claridad matemática, al brindar orientaciones precisas que llevan a que se superen las limitaciones de aprendizaje.

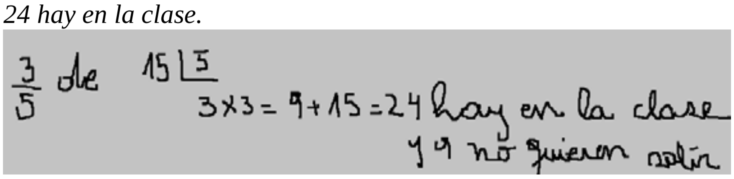
Errores y dificultades

El profesor **conoce una serie de errores y dificultades que los estudiantes presentan al trabajar el tema de las fracciones**. En lo que sigue, enunciamos aquellas particularidades identificadas en la enseñanza del contenido.

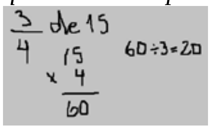
Cuando los estudiantes salen a la pizarra y exponen el resultado que han obtenido al multiplicar $\frac{6}{12} \times 8$, surge un primer error al resolver la operación. Un estudiante divide doce entre otro y obtiene como resultado uno, luego el resultado lo multiplica por seis obteniendo como resultado final seis (6×1). Otro estudiante indica que realizó la operación 6×8 y que le dio como resultado 48, así dividiendo por 12 obtiene como resultado 4. Luego, otro estudiante indica que realizó la operación con calculadora y obtuvo que $12 \div 8 = 1{,}5$ y $1{,}5 \times 6 = 9$. A partir de los argumentos de los estudiantes el profesor manifiesta que están presentando un error de cálculo que suele ocurrir, dejando explicito que es un error habitual [**C6**. D2.1.Líneas 210-320].

Al resolver el problema “en una clase se ha votado si se sale al recreo cuando llueva. Quince niños han votado que sí, y representan tres quintos de la clase. ¿Cuántos niños hay en total en clase? ¿Cuántos prefieren no salir al recreo cuando llueva?”, un alumno establece que el resultado es que 9 niños no salen a recreo [**C8**. D2.1. Líneas 98- 346].

99. A *24 hay en la clase.*



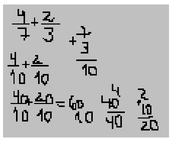
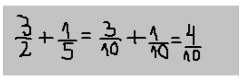
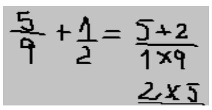
En general, el profesor identifica las dificultades que presentan los estudiantes en el planteamiento y resolución de tareas de fraccionamiento. En la situación descrita, se considera 15 como el todo y no como la parte de niños de la clase. Esto conduce al profesor a solicitar que representen la situación en una figura, así los alumnos indican que los $\frac{3}{5}\ de\ 25 = 15$, concluyendo que 10 niños no salen a recreo. Por tanto, al trabajar tareas de fraccionamiento, el profesor identifica las dificultades que los estudiantes tienen para reconocer los datos que intervienen en las situaciones (el todo, la parte y la fracción que expresa las cantidades) y a su vez los errores que conducen a establecer incorrectamente las cantidades [**C9**. D2.1. Líneas 171-309].

285.	P	*El error que ha cometido María es lo que ha dicho Manuel, es que no lo ha expresado bien. De lo que sea es igual a 15 y entonces no lo ha expresado bien, pero si lo ha hecho, quince entre 4 sesenta. Hacerlo, lo ha hecho bien, lo que pasa que no lo ha expresado bien.*
286.		

El profesor **reconoce la presencia de errores conceptuales en las declaraciones de los estudiantes**, como hemos descrito anteriormente. Por ejemplo, cuando los estudiantes calculan los múltiplos de algunos números (1 y 13) y lo que hacen es calcular los divisores y no los múltiplos [**C18**. D2.1. Líneas 236-513].

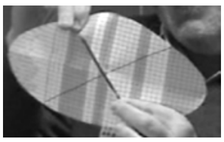
278.	P	*Vamos a ver Manuel. ¿Qué hacemos nosotros para formar los múltiplos de un número?*
279.	A	*Multiplicar.*
280.	P	*¿Multiplicar qué?*
281.	A	*Dividirlo por los números naturales.*
282.	P	*¡Dividirlo por los números naturales!*
283.	A	*Si la división es exacta, ese número es divisor.*

El profesor identifica distintos errores que los estudiantes presentan al sumar y restar fracciones con numeradores y denominadores distintos. Por ejemplo, a) suman los denominadores, y el numerador lo obtiene multiplicando el nuevo denominador por el numerador correspondiente, b) calculan el mínimo común múltiplo de denominadores y conservan los numeradores, y c) multiplican el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, que será la cantidad del numerador de la fracción resultante, caso similar con el denominador [**C17**. D2.2. Líneas 215-262].

a)		*Manuel dice, hay que sumar fracciones que son distintas,* […]. H*a hecho siete más tres, diez. Luego él se ha acordado que multiplica todos los de abajo menos por el suyo y ha dicho, cuatro por diez cuarenta, dos por diez veinte y pongo el mismo denominador, y ha empezado a sumarlos* [Líneas 218-222].
b)		*Elena se lo ha estudiado de verdad y ha cogido y ha hecho lo siguiente.* […] *Cinco por dos diez, y había puesto ahí el diez, se ve ¿no?* [Líneas 232-249].
c)		*Laura. Ha cogido y ha empezado de la siguiente forma, cinco por dos y ha puesto cinco por dos. Nueve por dos.* *Luego ya no ha sabido cómo seguir. Vale. Luego como ha dudado. Como ha dudado, ha cogido y ha borrado todo* [Líneas 253-260].

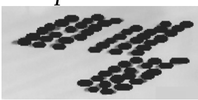
En el caso a) el profesor indica que ha realizado “siete más tres diez, luego él se ha acordado que multiplica todos los de abajo menos por el suyo, y ha dicho, cuatro por diez cuarenta, dos por diez veinte, y pongo el mismo denominador, y ha empezado a sumar”. En el caso b) “Laura. Ha cogido y ha empezado de la siguiente forma, cinco por dos y ha mantenido los numeradores”. En c) el profesor indica “cinco por dos y ha puesto cinco por dos. Nueve por dos. Luego ya no ha sabido cómo seguir”. Esto nos lleva a establecer que el profesor reconoce los errores comunes que se despliegan al sumar y restar fracciones, por sus expresiones explícitas de que es un error común, como por las estrategias que propone para afrontarlos. Aunque no expresa el porqué de los errores, debemos destacar que él profesor reconoce cuando sus estudiantes incurren en ellos.

El profesor brinda **explicaciones a los estudiantes cuando presentan dificultades al abordar un contenido o una tarea matemática**. En las explicaciones brindadas a los alumnos, el profesor deja de manifiesto conocer elementos de las características de aprendizaje de las matemáticas. Efectúa explicaciones a los estudiantes cuando presentan dificultades para reconocer si una figura está dividida en partes iguales [**C2**. D2.4. Líneas 190-199; **C3**. Líneas 154-297; **C3**. Líneas 315-343]. Por ejemplo, dibuja una elipse, a mano alzada, en un papel, luego dobla y obtiene una recta que divide en dos partes a la figura, recorta cada parte y las muestra a los estudiantes.

256. P 

Algunos alumnos concluyen que “son iguales las partes”, otros que “no son iguales”. El profesor expresa que “dibujar permite ver las cosas con más claridad”, que se puede “contar la cantidad de cuadritos de la hoja y comprobar si es la misma cantidad”; es decir, si las partes tienen la misma cantidad de superficie. Esto lleva a establecer que el profesor conoce que las figuras, los dibujos, etc., en este caso el papel, brinda una imagen ideal en que se apoya el pensamiento, facilitando distinguir objetos que expresan porciones y comparar cantidades [**C8**. D2.4. Líneas 4-346].

En la tarea de “calcular los $\frac{3}{4}$ de 60 fichas”, el profesor efectúa explicaciones a los estudiantes cuando presentan dificultades en la resolución de la tarea. Los alumnos representan, con material concreto, tres grupos de veinte fichas $(60/3)$ y no cuatro grupos de quince fichas $(60/4)$ [**C5**. D2.4. Líneas 38- 451; **C6**. Líneas 71-86].

232.	A	*Yo tengo tres partes de veinte fichas.*
233.	P	*Tres partes de veinte fichas.*
		
234.	P	*Vale.*
235.	A	*Pero yo he hecho otra cosa.*
236.	P	*Espera. Vale.*
237.	P	*Vamos despacio, yo sé que todo el mundo quiere hablar.*
238.	P	*A ver. Él ha hecho, él dice, dice. Juan dice, tres grupo de ¿dime cuántos?*
239.	A	*De cinco fichas.*
240.	P	*¿Tres grupos, de cinco fichas?*
241.	A	*No, de veinte fichas.*
242.	P	*Ah, tres grupos de veinte. Bien.* [El profesor escribe en la pizarra]
243.	P	*Mario, queda.*
244.	A	*Tres grupos de quince, por qué sí.*
245.	P	*¿Quedan?*
246.	As	*Son cuatro.*
247.	A	*Sí, son cuatro pero como son tres cuartos quedan tres*
248.	P	*¿A ver cuántos grupos has hecho?*
249.	A	*He hecho tres porque como son tres cuartos se le quita uno.*
		
250.	P	*Bueno. ¿Pero había hecho cuántos grupos?*
251.	A	*Cuatro.*
252.	P	*Mario dice he hecho cuatro grupos de quince y saco…*
253.	A	*Un grupo.*
254.	P	*No, he sacado tres, ¿o he separado tres?* [Indica con las manos como que está apartando].
255.	A	*He separado tres.*

El profesor observa que los estudiantes resuelven incorrectamente la tarea, por tanto presenta un problema con datos más sencillos y, a continuación, aplica el mismo método en la solución del problema planteado. Explica con una situación concreta: “si tiene 12 euros y se reparten entre 8 niños no es lo mismo que repartir 8 euros entre 12 niños”, permitiendo a los estudiantes comprender las operaciones de las tareas de fraccionamiento ($\frac{6}{12} \times 8$, que inicialmente resolvían como $12 \div 8 = 1$ y luego 6×1) [**C6**. D2.4. Líneas 321-594].

Tareas matemáticas

A lo largo de la clase, el profesor **presenta tareas matemáticas que refuerzan los conceptos o procedimientos matemáticos relacionados con las dificultades de aprendizaje de los estudiantes**. Concretamente, presenta tareas de fraccionamiento enfatizando el reparto equitativo y exhaustivo, para reforzar la idea de división equitativa y exhaustiva. Con ello reconoce cuidar estos dos aspectos, que presentan mayor dificultad para los estudiantes [**C3**. D3.1. Líneas 18-354].

352. P *Bueno, vale. Ayer decíamos que para que fuese fracción, tuviese la misma forma, tamaño y ahora, puede ser fracción manteniendo el tamaño aunque la forma cambie, vale ¿de acuerdo?*

El profesor presenta tareas en contextos concretos, empleando medidas extensivas familiares para los estudiantes. Por ejemplo, la tarea "tengo cuatro euros y es la mitad de todo el dinero que tengo en el monedero, ¿cuánto dinero tengo?".

También se presentan tareas que permiten emplear distintas representaciones para facilitar la adquisición de los conceptos y procedimientos matemáticos. Por ejemplo, el contexto de la tarea citada anteriormente, lleva más fácilmente a identificar las cantidades que se conocen (fracción y la parte) y aquella que se pide (todo). También, al identificar los datos de la tarea y traducir al lenguaje simbólico ($\frac{1}{2} de\ dinero = 4$), se da paso a dar sentido y reforzar a las operaciones implicadas en tareas de fraccionamientos: $\frac{a}{b} de\ c = [(ac) \div B]$, $\frac{a}{b} de\ c = [a \cdot (c \div B)]$ y $\frac{a}{b} de\ x = d \rightarrow x = \frac{d \cdot b}{a}$ [**C6**.D3.1. Líneas 610-751].

El profesor promueve el empleo de la representación manipulativa o pictórica para facilitar la comprensión de las situaciones. Por ejemplo, para el caso de las fracciones equivalentes, en un hexágono dividido en partes iguales y sombreadas algunas de ellas, identifican qué fracción representa cada parte sombreada. Posteriormente identifican fracciones equivalentes a partir de las partes pintadas, mediante la comparación de las partes. En general, promueve el empleo de la representación verbal-figural, para comprender los datos implicados en las tareas planteadas, luego pasan al lenguaje simbólico o numérico [**C3**. D3.1. Líneas 499-577].

499. 
500. A *Tres doceavos.*
501. P *Tres doceavos.*
502. P *¿De acuerdo todo el mundo?*
503. As *Sí.*
504. P *¿A ver alguien que encuentre otra solución?*
505. A *Yo, ¿pero para eso?*
506. As *¡Ah!*
507. A *Ah, yo sí. Un cuarto.*
508. As *Sí, sí, un cuarto.*

509. P *¿Un cuarto?*
510. A *¡Ah, sí, es verdad!*

A lo largo de la unidad, el profesor acompaña la instrucción con una serie de tareas que permiten reforzar o practicar los distintos contenidos y procedimientos matemáticos. Por ejemplo, el profesor propone descifrar un mensaje, cuando se han sustituido algunas letras por figuras, unas de ellas representando fracciones (por estar divididas en partes iguales), y otras divisiones no igualitarias. Esta tarea permite reforzar y practicar el concepto de fracción como parte-todo, realzando la importancia de que la división sea igualitaria, para que cada parte o porción indique una fracción [**C5**. D3.1. Líneas 19-31].

Al establecer el procedimiento para pasar de una fracción mixta a una fracción ordinaria, realizan ejercicios que ayudan a reforzar el procedimiento. Ejercicios del tipo $2\frac{9}{4}$; $5\frac{6}{7}$; $3+\frac{2}{5}$; $25\frac{7}{9}$ [**C11**. D3.1. Líneas 256-352].

Se presenta la tarea de completar un cuadrado de 6×6, en el que las casillas tienen que llenarse con una fracción, un símbolo de operación aditiva ($+$ ó $-$), o bien quedar vacías, para que sean correctas las operaciones expresadas en sentido horizontal y vertical. Con ello, el profesor varía las tareas escolares, reforzando el aprendizaje de la suma y resta de fracciones con el mismo denominador [Líneas 117-253]. Luego responden verdadero o falso a preguntas que le permiten identificar cuándo se suman o restan fracciones que tienen el mismo denominador. Estas situaciones permiten ejercitar cálculos [**C12**. D3.1.Líneas 253-269].

El profesor tiene planificado enseñar a sumar fracciones igualando los denominadores mediante la obtención del mínimo común múltiplo (mcm). Los estudiantes tienen dificultades para calcular el mcm, confundiendo su cálculo con el del máximo común divisor (MCD). Confunden los múltiplos con los divisores. Para resolver la situación vuelven a realizar ejercicios, facilitando que los estudiantes recuerden el procedimiento para calcular el mcm y MCD [**C18**. D3.1.Líneas 236-513].

275. P *El uno y el trece* [números que indica un estudiante que aluden a los múltiplos del 13].
13 = 1, 13
276. As [Los alumnos comentan, no se logra entender].
277. P *A ver, por favor. El uno y el trece. Vale.*
278. P *Vamos a ver Manuel. ¿Qué hacemos nosotros para formar los múltiplos de un número?*
279. A *Multiplicar.*
280. P *¿Multiplicar qué?*

281. A *Dividirlo por los números naturales.*

En la tarea "en el mismo papiro se encontró este segmento (segmento de 3 cm), que son los tres cuartos del segmento original. ¿Eres capaz de reconstruir el segmento? ¿Cuánto debe medir?", la situación permite trabajar la fracción como operador, en que se tiene la cantidad final 3 (total) y la fracción operador $\frac{3}{4}$. La tarea se resuelve de un modo práctico como lo estudiantes sugieren; es decir, dibujan un segmento dividido en 3 partes (fracción como parte-todo), cada parte mide 1 cm, así el segmento total mide 4 cm. Lo anterior **permite establecer que la resolución de la tarea se adapta al proceso que siguen los estudiantes** [**C8**. D3.2. Líneas 32-95].

49. P *Tres cuartos. Bien. Ana. ¿Tres cuartos qué significa? Olvídate de eso.*
50. A *Tres cuartos.*
51. P *¿Qué se han hecho?*
52. A *Tres de cuatro.*
53. P *¿De cuántas partes?*
54. A *De cuatro partes y ha cogido tres.*
55. P *Se han hecho cuatro partes y ha cogido tres. Luego, ¿aquí cuántas partes hay?* [El profesor señala el segmento que sale en el problema].
56. A *Tres.*

Materiales y recursos

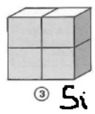
El profesor emplea **materiales y recursos didácticos** en la enseñanza del tema de las fracciones para facilitar el aprendizaje del contenido, por ejemplo, el papel cuadriculado que permite relacionar el significado de la fracción como medida, empleándose el modelo de área para representar partes congruentes. Además, emplea fichas de colores para resolver tareas de fraccionamiento, en las que el todo y la porción representan a cantidades discretas (fichas de colores). Por ejemplo, utilizando fichas de colores identifican los $\frac{3}{4}$ de 60 fichas. Para ello, considera las 60 fichas que corresponden a la unidad o el todo, dividen en cuatro partes, para obtener 15, que representan un cuarto del todo, por tanto la porción relativa a dicha fracción $\left(\frac{1}{4}\right)$ y 45 fichas, representan la porción correspondiente a $\frac{3}{4}$ [**C5**. D4.1. Líneas 38- 451].

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

El conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) lo observamos a partir distintas categorías: estrategias (E1), las tareas matemáticas (E2), los sistemas de representación (E3) y los materiales y recursos (E4). En lo que sigue realizamos el análisis del subdominio para cada categoría y según los indicadores de conocimientos enunciados.

Estrategias

En algunos subdominios de conocimiento que hemos descrito, se han presentado los errores y dificultades que el profesor conoce, relacionado con el tema de las fracciones. El indicador **conocer estrategias para abordar un error o una dificultad** nos permitirá mostrar las estrategias que el profesor conoce para afrontar las limitaciones reveladas en el proceso de enseñanza. Por ejemplo, un alumno identifica que un prisma rectangular formado por cuatro cubos, representa a un cubo [**C3**. E1.1. Líneas 70-104].

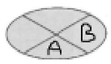
70. A 

71. A *Eso es un cubo ¿No?*

Ante esta aseveración el profesor facilita cubos imantados al estudiante, que lo llevan a establecer que el sólido no representa un cubo. Es decir, el empleo del material concreto permite que el alumno visualice el cuerpo geométrico y compruebe que la altura no es equivalente al lado de la base.

92. P *A ver, ha salido una cosa, ¿eso es un cubo?*
93. As *No.*
94. A *No.*
95. P *Ah, no es un cubo, ya sabemos que no es un cubo.*
96. A *Olvida lo que he dicho* [dice el alumno que pensaba que la figura representaba un cubo].

En otra tarea se pide identificar si una elipse está dividida en cuatro partes iguales, figura que está dividida por dos segmentos que no son los ejes que se cortan en el centro de la misma. Los estudiantes no tienen claridad en la respuesta, entonces el profesor realiza la figura en papel, logrando que los estudiantes establezcan que las partes son iguales dos a dos; es decir, las opuestas por el vértice [**C3**. E1.1. Líneas 154-314].

294. 

295. As [Se produce silencio en la clase].
296. A *Si yo lo veo de aquí si son iguales.*
297. P *Si yo lo veo de aquí si son iguales.*

En las dos tareas presentadas, el profesor recurre a la representación material para que los estudiantes visualicen la situación planteada. Así, la disposición del profesor a improvisar con material concreto, es una característica que muestra que conoce estrategias prácticas para afrontar las dificultades que presentan sus estudiantes.

Al ordenar fracciones con numeradores iguales y denominadores distintos $\left(\frac{9}{5}\ y\ \frac{9}{6}\right)$, los estudiantes tienen dificultad para identificar qué fracción es mayor, a partir de la representación gráfica. El profesor a través del doblado de papel (ajustando el papel para representar quintos y sextos) muestra a los estudiantes que la parte que representa a $\frac{1}{5}$ es mayor que la que representa $\frac{1}{6}$ (comparando las áreas) [**C13**. E1.1. Líneas 186-254].

181.	A	*La tableta es muy chica.*
182.	P	*No, es muy sencillo lo hacemos.*
183.	A	*Cortando papelitos.*
184.	A	*Reciclados.*
185.	P	*A ver. Una tableta de chocolate. Imaginaros.* [El profesor corta un folio y lo dobla por la mitad y lo corta, y luego cada trozo de papel lo pliega en tres partes iguales cada uno].
186.	P	*Venga, ¿cuántos trozos tenemos aquí?* [El profesor sostiene las dos partes de papel cuadriculado, que corresponde cada porción a ½ del total].

Luego establece que los denominadores representan la cantidad de trozos en que se divide el papel, siendo más grandes las porciones de papel cuando se dividen en menos partes (menor la cantidad del denominador). Por tanto, $\frac{9}{5} > \frac{9}{6}$, ya que al tener la misma cantidad y repartir entre 5, se obtiene más al dividir en 6.

228.	P	*¡Ah!, ¡es más grande un quinto que un sexto!*
229.	A	*Profe, ¿cómo sabe eso?*
230.	P	*Vale. A ver por favor. Luis. Donde está el lápiz.*
231.	P	*Ya hemos visto que trozo es más grande, ¿cuándo yo hago cinco trozos o cuando seis?*
232.	As	*Cinco.*
233.	A	*Seis.*
234.	P	*Cinco. Si yo me como nueve trozos más grandes o nueve trozos más chicos, ¿Cuándo como más?*
235.	A	*Cuándo son más grandes.*
236.	P	*Cuándo son más grandes.*

Al establecer un valor para una fracción de modo que se cumpla que $\frac{120}{40} < \frac{?}{20}$ los estudiantes identifican varios valores para la cantidad faltante: 130, 150, 120, 140, 145, 45. El profesor pide que justifiquen sus respuestas, para establecer si el número es correcto. Un estudiante indica "120 ya que tienen el mismo numerador, y el denominador de la más pequeña es mayor que el otro" [línea 162]. Para los siguientes casos las fracciones tendrían distintos numeradores y denominadores, el profesor pide que comprueben con la calculadora, y comparen los decimales. Por tanto, trabaja simultáneamente con dos formas de representación para comparar fracciones: $\frac{a}{b}$ fracción y decimal [**C16**. E1.1. Líneas 151-218].

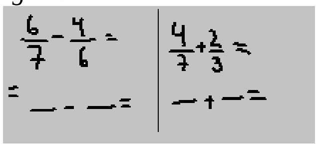
182.	P	*¿La fracción va hacer más grande? No lo sé, no lo sé. Vamos a comprobarlo.*
183.	As	[No se logra oír].
184.	A	*Lo hemos dividido está bien.*
185.	P	*120/40 ¿cuánto da? Qué lo hago más rápido yo que la calculadora*
186.	As	*3*
187.	P	*¿130/40? ¿Qué es la de Juan?*
188.	A	*3*
189.	A	*3.25*
190.	P	*¿150/40?*
191.	As	*3.75*

Otra estrategia que el profesor conoce es pasar primero del lenguaje verbal al figural, para esquematizar los datos que se tienen y los que se piden en las tareas. Sucede por ejemplo, en las tareas de fraccionamiento en las que los estudiantes no reconocen los datos que intervienen (parte, todo, fracción) en la situación, que el profesor constantemente pide a sus estudiantes que interpreten la situación a partir de un "dibujo" y establezcan cuáles son los datos que se dan y aquellos que se piden [**C8**. E1.1. Líneas 4-346].

110.	P	*¿Por qué no me haces un dibujo de la clase?*
111.	As	[Los alumnos se ríen].
112.	A	*¿Qué va a dibujar los niños?*
113.	P	*Dibuja la clase.*

También se identifica que el profesor emplea, como estrategia para resolver los errores de cálculo que incurren sus estudiantes, el reiterar los procedimientos algorítmicos. Por ejemplo, cuando realizan sumas y restas de fracciones con numeradores y denominadores distintos, efectúan algunas operaciones incorrectas. El profesor pide a sus estudiantes que vuelvan a realizar las operaciones o a resolver la tarea, recordando el procedimiento "el de arriba por todos los de abajo menos por el suyo, y ahí me da exactamente igual". También, para que los estudiantes no cometan errores de escritura matemática, al sumar o restar fracciones, hace contar la cantidad de fracciones que van a sumar o restar, con el objeto de determinar el tamaño de la línea fraccionaria. Luego, recuerda el procedimiento: "para obtener el numerador, tenemos que multiplicar el numerador de una fracción por todos los numeradores de abajo menos por el suyo" y para obtener el numerador "se han de multiplicar todos los denominadores (método de los productos cruzados)" [**C17**. E1.1. Líneas 263-323].

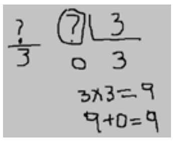
288. P *Bueno. Vamos a poner nuestras dos rayitas de fracción, ¿sí o no? Pues venga, vamos.*
289. P *Venga. Menos.*
290. A *Igual.*



En relación con el indicador **saber desarrollar líneas argumentales que faciliten la adquisición de los conceptos matemáticos**, identificamos que el profesor enuncia distintas justificaciones a lo largo de la enseñanza del tema. Hemos de indicar que el proceso de instrucción que el profesor sigue está ajustado al planteamiento de preguntas a sus estudiantes, sin embargo estas intervenciones requieren argumentaciones que son las que destacamos en lo que sigue.

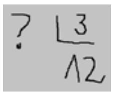
Para enseñar el paso de una fracción impropia a una fracción mixta, pide representar la fracción (impropia) en una figura, luego bajo el significado de fracción como parte-todo identifica la cantidad de unidades (todo) completas y las partes sobrantes, luego pasan al lenguaje numérico. También, el algoritmo de la división en Z permite al profesor justificar el paso de una fracción impropia a una mixta, a través del proceso inverso del procedimiento para dividir dos cantidades, identifican el divisor, el cociente y el resto [**C9**. E1.2. Líneas 312-398]. Con la explicación del profesor los estudiantes se dan cuenta de las operaciones que pueden efectuar cuando la incógnita de la fracción es el numerador o el denominador $\left(\frac{x}{b}=a\rightarrow x=a\cdot b\ y\ \frac{b}{x}=a\rightarrow x=b\div a\right)$ [**C10**. E1.2. Líneas 390-593].

436. A *Ah, tres por tres.*
437. As *Tres por tres, nueve.*



438. P *Profe, yo lo que he hecho es tres por tres.*
439. A *Yo también.*
440. P *Claro.*
441. A *Después el que estaba arriba tenía que dividir.*
442. A *¡Sí el que está arriba tenía que dividir!*
443. P *Bueno. Venga. Nueve correcto.* [Corrige el primer ejercicio].

499. P *Me da doce. Algo divido entre tres me da doce* [el profesor señala lo siguiente].



500. A *Puedo multiplicar.*
501. P *¡A ver!*
502. A *Pero profe.*
503. P *Por favor, Manuel, puedo yo, puedo. Luis. Vale.*
504. P *¿Cómo calculo el dividendo de la división? ¡Tengo que hacer la prueba!*
505. A *¡Sí!*
506. P *Y el dividendo ¿a qué es el igual?*
507. A *Al cociente.*
508. A *Más resto.*
509. P *A ver, doce por tres.*
510. As *Treinta y seis.*

Al enseñar a sumar fracciones con distintos denominadores el profesor explica el procedimiento o método de los productos cruzados, apoyándose su justificación en un procedimiento de asociación que facilita la regla.

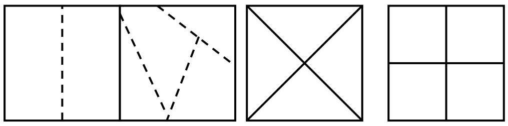
$$\frac{5}{3}+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{27}{16}=\frac{5x2x4x16}{3x2x4x16}+\frac{3x3x4x16}{23x2x4x16}+\frac{5x3x2x16}{3x2x4x16}+\frac{27x3x2x4}{3x2x4x16}=\frac{640}{384}+\frac{576}{384}+\frac{480}{384}+\frac{648}{384}$$

Tareas matemáticas

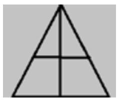
En las sesiones de estudio se **presenta un repertorio de tareas que permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos** sobre las fracciones. Por ejemplo, las tareas presentadas por el profesor permiten trabajar la idea de fraccionamiento (construir partes iguales y exhaustivas), que llevan a expresar la fracción según dos cantidades: la parte y el todo. Al expresar la fracción, una porción le permite al profesor trabajar los significados de fracción como parte-todo y operador, y establecer relaciones entre ellos.

El profesor presenta tareas de fraccionamiento de la unidad que lleva gradualmente a dividir diversas figuras, a dividir en partes de igual tamaño, a dividir figuras en partes de igual tamaño y de distinta forma. Esta gradualidad lo lleva a precisar en situaciones de medida, trabajando tareas en el cual existe una cantidad de magnitud a medir que no equivale a la unidad o algunos de sus múltiplos.

El docente sigue una secuencia de enseñanza, primero propone una actividad que lo lleva a dividir una hoja en dos partes de igual tamaño y forma, luego divide una de las partes resultantes en dos pedazos de igual tamaño y forma, y la otra en trozos de distinto tamaño y forma. La actividad conduce a que cada parte de igual tamaño y forma representa a una fracción, mientras las partes de distintos tamaños y forma indican solo una división. Hemos de destacar que la idea presentada puede excluir el caso cuando las partes que conforman un todo son de distintas formas, pero representan la misma cantidad.



Continúan el trabajo dividiendo diversas figuras en partes de igual tamaño y forma, y luego de igual tamaño y distinta forma. Reforzando las nociones de fraccionar y dividir. Así, se adquiere o refuerza la idea que las partes deben ser congruentes, que fraccionar indica dividir en partes iguales la unidad considerada. Las figuras expuestas no son sencillas de dividir [**C1**. E3.3. Líneas 209-243; Líneas 331-357].

343. 

344. A *¡Pero lo ha intentado!*

345. P *Ah no, hemos dicho cuatro partes, lo que pasa es que según Marta no son de la misma forma.*

También se enuncian tareas que involucran medición y partición de la unidad. Siendo un proceso gradual, primero se trabaja con la unidad de medida de 4 cuadraditos y luego van cambiando la cantidad de cuadrados que conformaría cada unidad de medidas. En seguida, establecen qué fracción representa cada parte mediante su expresión numérica relacionada con la cantidad de cuadritos. Finalmente, llegan a la idea de fracción (a/b) como la relación existente entre dos cantidades específicas: un "todo" o unidad b (continua o discreta), representando un número total de partes iguales, y una "parte" a, destacando un número particular de esas partes iguales tomadas del total [**C2**. E3.3. Líneas 1-450]. El proceso seguido se presenta en la Figura 27.

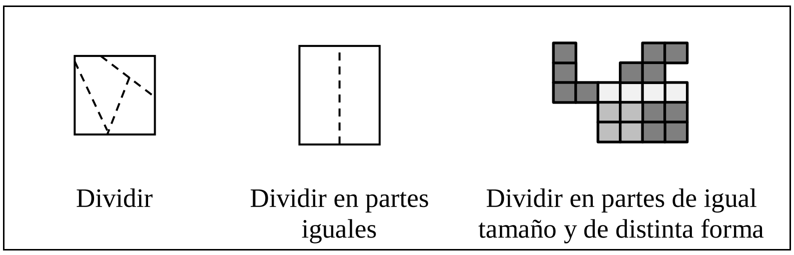


Figura 27. Tareas de fraccionamiento

En síntesis, el profesor presenta un repertorio de tareas de partición de la unidad, en el cual gradualmente se introduce la fracción como resultado de la partición de una unidad en partes de igual tamaño y forma, y de igual tamaño y distinta forma. Luego, para precisar más la medida se divide la unidad en partes iguales y si una cantidad de magnitud mide a/b unidades quiere decir que dividiendo la unidad en b partes iguales la cantidad de magnitud a medir equivale a un número a de dichas partes.

La secuenciación particular de las tareas presentadas por el profesor es un soporte didáctico para la enseñanza del significado de fracción como parte de la unidad. El proceso seguido por el docente envuelve un conocimiento específico, no solo matemático, sino la integración de matemáticas y enseñanza.

Complementa la enseñanza con la resolución de distintas tareas de fraccionamiento que llevan a trabajar situaciones, principalmente, de dos tipos: se tiene la medida del todo y la fracción, y se pide la medida de la parte o porción ($\frac{a}{b}\, de\ c = ?$); y aquellas en que se conoce la fracción y la medida de la parte, y se pide la medida del todo ($\frac{a}{b}\, de\ ? = c$) [**C6**. E3.3. Líneas 25-949]. Además de resolver distintos ejercicios y problemas de fraccionamiento [**C7**. E3.3. Líneas 11-495].

A lo largo de la unidad se introducen los significados de fracción como parte-todo y operador, estos significados le permiten al profesor trabajar la equivalencia de fracciones como la igualdad entre partes o porciones (según el significado de parte-todo); es decir, la fracción indica la medida de una parte respecto de un todo. La comparación de fracciones también se realiza por medio de la comparación entre partes (a partir de la representación figural).

Al trabajar las fracciones mixtas, refuerza el paso de la fracción impropia a mixta, a partir de la división. Relaciona la fracción con su representación decimal, aludiendo con frecuencia al algoritmo de la división, para que los alumnos aprecien el papel que desempeña cada cantidad. Resuelven diversos ejercicios en los que se conoce el tamaño de la porción, en el cual se debe calcular la fracción o el todo [**C10**. E3.3. Líneas 53-593]. Luego de pasar de una fracción impropia a una fracción mixta, a partir de la representación decimal, surge la idea inversa; es decir, pasar de una fracción mixta a una fracción. En estos casos la fracción impropia es igual a la cantidad que queda determinada por el cociente, más la fracción conformada por el resto sobre el divisor [**C11**. E3.3. Líneas 88-350].

97.	P	*Bueno. Bien. Pero. Vamos a suponer, vamos a suponer. Que yo ahora quiero pasar de número mixto a fracción, ¿qué es lo que yo tengo que hacer para ir hacia allá?*
98.	P	*Alex.*

99. A *Haces la prueba de la división.*

Presenta un repertorio de tareas de suma, resta y de operaciones combinadas con fracciones. La riqueza de estas tareas es que pasan de la suma y resta a la acción de añadir o quitar elementos concretos (partes de la unidad). De esta forma, aunque no se contextualiza en situaciones prácticas, se hace mediante su concreción en acciones con objetos. Además, el proceso permite trabajar progresivamente la representación numérica, pasando primero a obtener la parte resultante, luego el nombre y finalmente se asocia la parte resultante con su simbolización.

A lo largo de las 21 clases se observa que el profesor **dispone de esquemas de instrucción para la enseñanza** de las fracciones. En la clase **C1** introduce el tema de estudio haciendo referencia a aspectos históricos, luego los alumnos enuncian los contenidos abordados en el curso anterior, complementando el profesor con los contenidos a estudiar. Es introducida la idea de fraccionar como dividir en partes iguales una unidad (fraccionamiento). Realizan una serie de tareas de fraccionamiento, luego continúan con las actividades que involucran procesos de medición y partición de una figura, reforzando la idea en la fracción como parte-todo [**C2**. E3.4. Líneas 1-450]. En la sesión **C2** trabajan el concepto de fracción como parte-todo, reforzando la idea que en una figura cada parte debe ser de igual forma o distinta, pero debe tener la misma cantidad (área). También, trabajan las fracciones equivalentes a partir de la representación gráfica [**C3**. E3.4. Líneas 18-577].

Al sumar fracciones se evidencia un esquema de enseñanza. El profesor enseña a sumar fracciones con denominadores iguales a partir de la representación figural. Luego, suman un número entero y una fracción, relacionando con el procedimiento para establecer fracciones equivalentes. Finalmente, el número entero se transforma a fracción equivalente a través de identificar un cociente que dé como resultado la cantidad entera, luego suman las fracciones aplicando el procedimiento de la suma de fracciones de igual denominador [**C12**. E3.4. Líneas 1-400].

Para ordenar fracciones se evidencia un esquema de instrucción que parte de comparar fracciones con igual denominador y distintos numeradores, luego con igual numerador y distintos denominadores, y finalmente con distintos numeradores y denominadores. Los métodos para comparar fracciones se van complementando y usando en cada caso.

Finalmente, realizan una actividad que lleva a comparar fracciones según los tres casos estudiados [**C13**. E3.4. Líneas 102-620].

En **C16** recuerdan cómo se obtienen las fracciones equivalentes: amplificando y simplificando, luego suman fracciones con distintos denominadores amplificando. Posteriormente, suman fracciones por el método de los productos cruzados [**C16**. E3.4. Líneas 4-452]. El esquema de instrucción seguido en **C20**: sumar fracciones calculando el mínimo común múltiplo, multiplicar fracciones y dividir fracciones [**C20**. E3.4. Líneas 33-760].

En síntesis, el tema se aborda a partir de tareas de fraccionamiento que le permiten al profesor trabajar los contenidos mínimos establecidos para el nivel escolar. Acompaña el proceso con una serie de tareas que le permiten reforzar los conceptos y algunos procedimientos matemáticos.

De acuerdo con la **riqueza de las tareas matemáticas propuestas** en el transcurso de la unidad identificamos que las tareas permiten abordar diferentes ideas matemáticas. Por ejemplo, la tarea de identificar cuántas "L" caben en otra figura lleva a los estudiantes trabajar la fracción como medida. En este caso la unidad de medida tiene distintas formas pero conserva el área. La tarea refuerza la idea de fracción en un contexto parte-todo, las partes necesariamente tienen que representar la misma cantidad, o en el caso de la tarea descrita, han de tener la misma área [**C2**. E3.5. Líneas 137-173].

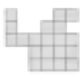
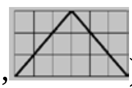
Al trabajar situaciones de identificar una fracción como parte-todo el profesor refuerza la idea que las partes pueden ser iguales o distintas, asimismo que no importa si la figura tiene alguna rotación, ellas representan la misma cantidad (área). Por tanto, se evidencia una riqueza de situaciones propuestas que permiten reforzar el significado de fracción como relación parte-todo [**C3**. E3.5. Líneas 18-577].

A partir de un número de partes en que está dividida una figura (cuadrado) y teniendo una parte o porción de ella, se establece que la fracción (a/b) representa a cada parte o fragmento de la imagen. En la misma tarea el profesor orienta a que los estudiantes identifiquen fracciones equivalentes, mediante comparación de superficie [**C4**. E3.5. Líneas 688-787].

La tarea de fraccionamiento "$\frac{3}{4}$ de 60 fichas" puede parecer mecánica y fomentar el procedimiento de dividir ($60 \div 4$) y multiplicar (15×3); sin embargo, es una tarea que permite relacionar los significados de fracción como parte-todo con el de operador. Asimismo, identificar que la fracción se utiliza para representar partes de un todo continuo, pero también para un todo discreto, esto proporciona riqueza matemática a la tarea [**C5**. E3.5. Líneas 38- 451].

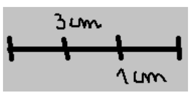
El profesor pregunta ¿qué pasa cuando el numerador y el denominador de una fracción son iguales?, una alumna dice que es cero. El profesor improvisa un ejemplo concreto, dice “Yo tengo 6 chucherías y las reparto entre seis niños. No le doy ni una ¿a ninguno?”. La explicación del profesor lleva a que el estudiante se dé cuenta que le toca una chuche. El ejemplo, permite que los estudiantes refuercen la idea de que la fracción puede referirse a situaciones discretas [**C10**. E3.5. Línea 193-217].

193.	P	*Marta siempre que el numerador es igual al denominador de una fracción, bueno ¿la fracción es igual a qué?, cuando el numerador y denominador son iguales.*
194.	A	*Es que no sé.*
195.	P	*¡Piénsalo!*
196.	A	*¿Cero?*
197.	P	*Claro, claro cero.* [El profesor enuncia que es cero para ver que comentan los alumnos].
198.	P	*Yo tengo 6 chucherías y lo reparto entre seis niños, no le doy ni una ¿a ninguno?*
199.	A	[Los alumnos se ríen].
200.	A	Son todas para mí.
201.	P	*¡Bueno contéstame!*
202.	A	*Le da una.*
203.	A	*Le da una a cada niño.*

También se destaca que las tareas, presentadas en clase, permiten emplear variados sistemas de representación como el verbal (un quinto, cuatro veinteavos, diez veinteavos), numérico $\left(\frac{1}{5},\frac{4}{20},0{,}5\right)$ y figural (, ), estableciéndose relación entre ellos [**C2**. E3.5. Líneas 81-450].

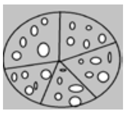
Sistemas de representación

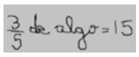
De acuerdo al indicador **saber elegir los sistemas de representación para la enseñanza de las fracciones**, identificamos que al completar una unidad se emplean representaciones gráficas, como la recta numérica, siendo las unidades centímetros. Además, se establecen constantemente relaciones entre la representación verbal, figural y numérica [**C8**. E2.1. Líneas 32-95].

67. P 

En las tareas de fraccionamiento emplean la representación verbal o literal, luego representa de forma figural y numérica, como se describe a continuación:

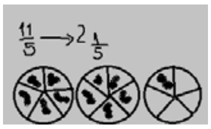
Tres quintos de la clase son 15



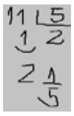


Para enseñar el paso de una fracción impropia a una fracción mixta el profesor utiliza la representación figural y a partir de ella pasa a la representación numérica (a/b, división indicada). También de la representación numérica (a/b) establece relación con la representación numérica decimal [**C9**. E2.1. Líneas 312-398].

368. P



390. P



Esta elección de los sistemas de representación, en el cual se busca primero tener una imagen concreta o material, luego una imagen gráfica, prevaleciendo la imaginación de lo visual, es un indicador de que el profesor conoce una variedad de representaciones que facilitan comprender los conceptos en éste nivel escolar.

Respecto de **conocer una variedad adecuada de sistemas de representación** que se emplean en las tareas, observamos lo siguiente:

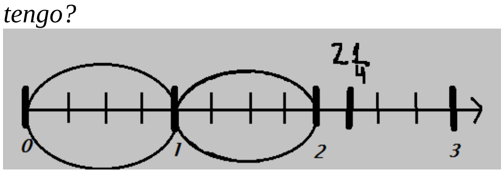
La tarea de resolver los $\frac{3}{4}$ de 60 fichas permite emplear la representación verbal (tres cuartos), numérica $(3/4 \times 60)$, figural (rectángulo) y material (fichas de colores), por lo cual el profesor evidencia conocer distintos tipos de presentación para la enseñanza del significado de fracción como operador [**C5**. E2.2. Líneas 38- 451].

En las tareas de fraccionamiento emplean la representación verbal (un medio, un tercio, la tercera parte…); numérica ($\frac{2}{6}de$? $= 4$; $\frac{1}{3}de\ 12 =$?) y figural (un rectángulo dividido en partes iguales y cada parte contiene una cantidad de objetos) [**C6**. E2.2. Líneas 25-949].

Trabajan las fracciones en la recta numérica. A partir de la dificultad para representar una fracción impropia mediante una representación de área, establecen que puede representarse en la recta numérica, entonces cada unidad se divide en partes iguales. Por lo tanto, emplean las representaciones: verbal, figural, numérica y gráfica (recta numérica) para representar fracciones impropias [**C13**. E2.2. Líneas 10-101].

48. P *Tengo dos unidades enteras, tengo uno, dos, y además de esas dos unidades ¿qué tengo?*

49.



50. A *Ah una.*

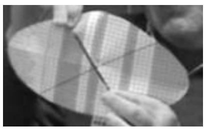
51. P *Un cuarto, un cuarto. Vale.*

Para ordenar fracciones que tienen distintos numeradores y denominadores el profesor presenta **varios sistemas de representación**: mediante una figura (comparación de superficie); en la recta numérica (comparar las fracciones según la posición); expresión decimal (comparar decimales); representación numérica $\left(\frac{a}{b}\right)$ (fracciones equivalentes que permitan igualar los denominadores y así comparar fracciones con distintos numeradores e igual denominadores) [líneas 287-400]. Al ordenar fracciones con igual numerador y distintos los denominadores $\left(\frac{9}{5}\ y\ \frac{9}{6}\right)$ representa las fracciones en figuras y mediante material concreto, como con trozos de papel. La representación material resulta adecuada para representar las fracciones que sugieren los estudiantes, ya que llevan a comparar las partes [**C13**. E2.2. Líneas 185-254].

Materiales y recursos

A lo largo de las sesiones los **materiales y recursos que se emplean** son papel, fichas de colores y recursos tecnológicos. El primero, como recurso para ilustrar cuando las partes de una figura tienen el mismo tamaño [**C3**. E4.1. Líneas 154-314]. Para trabajar la fracción como operador (fracción de una cantidad) trabaja con fichas de colores (cantidades discretas) [**C5**. E4.1. Líneas 38- 451].

236. P



También emplean recursos tecnológicos como las hojas de Excel. Explotan las funciones de la planilla de Excel, especialmente para calcular el mcm de varios números y el cociente entre dos cifras. Esta herramienta les permite comprobar los ejercicios que han realizado con papel y lápiz [**C20**. E4.1. Líneas 218-381]. Complementan la enseñanza de las fracciones realizando tareas de una página Web [**C8**. E4.1. Líneas 1-3].

Conocimiento de los estándares de aprendizaje

Observamos *conocimiento de los estándares de aprendizaje* (KMLS) a partir del lenguaje matemático (F1), de los procesos de instrucción (F2) y de las orientaciones curriculares (F3). En lo que sigue realizamos el análisis del subdominio por cada categoría y según los indicadores enunciados.

Lenguaje matemático

En general a lo largo del proceso de instrucción el profesor **promueve la formalización rigurosa de las escrituras matemáticas, los fundamentos matemáticos de las definiciones y de los algoritmos** según el rigor correspondiente al nivel escolar. A la vez, tiende a ser riguroso en emplear los términos, conceptos, propiedades, definiciones, procedimientos matemáticos, etc., aunque al fomentar la automatización de algunos algoritmos o la memorización de fórmulas lo lleva a sintetizar las expresiones verbales. Por ejemplo, indica "para sumar fracciones con distinto denominador cogíamos, […], el de arriba por todos los de abajo menos por el suyo, el de arriba por todos los de abajo menos por el suyo y como denominador." [**C17**. A3.2. Líneas 10-22].

Proceso de instrucción

El profesor **hace referencia a los contenidos** que abordarán en el curso, teniendo presente los contenidos previos estudiados. Enuncia que pasarán de fracción a número decimal, de fracción a porcentaje y de porcentaje a números decimales. Además, la clase la inició con la puesta en común de los contenidos que se trataron en el curso anterior, complementado la puesta en común con aquellos contenidos que se abordarán en el presente curso [C1. F2.2. Líneas 167-349].

167.	P	*Otras de las cosas* [el profesor escribe en la pizarra].
168.	As	*Ah, sí* [contestan los alumnos a ver lo que el profesor escribe en la pizarra].
169.	P	*Ah, sí* [El profesor escribe nº decimal, fracción, porcentaje].

170.	P	*Eso, eso. Y que íbamos a estar pasando de aquí* [pasando de fracción a nº decimal].
171.	As	*Ah eso.*
172.	P	*Y de ahí* [de fracción a porcentaje, de porcentaje a nº decimal, de nº decimal a fracción, el profesor va haciendo las flechas en la pizarra que muestra los procesos que van a estudiar].
173.	A	*Sí.*

Orientaciones curriculares

La propuesta de enseñanza **refleja los contenidos mínimos estipulados por el currículo escolar**, asimismo como aquellos contenidos programados para el nivel. Una diferencia observada en la enseñanza del tema, es que los porcentajes (expresión de partes utilizando porcentajes) no es un contenido que se enseña en correspondencia con las fracciones, de acuerdo a las recomendaciones del currículo [F3.4]. El profesor enseña las cuatro operaciones básicas con fracciones: suma, resta, producto y cociente, aunque el currículo español no hace explicito que el producto y cociente han de tratarse en el nivel escolar de estudio.

El profesor entrega a los estudiantes fichas de trabajo, y al final del documento describe las tareas que abordará durante las sesiones. Indica que las tareas propuestas han sido extraídas de distintos documentos. Por lo tanto, conoce orientaciones emitidas por el colectivo y organizaciones docentes como el NCTM, además constantemente está mostrando a la investigadora libros dedicados al tema, como el libro del Tangram elaborado por la comisión (NCTM) [**C1**. F3.9].

Complementa el proceso de enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes con la resolución de tareas descritas en una página Web. Además, complementa las actividades con otros materiales de enseñanza relacionado con el tema de estudio, por ejemplo, propone una lista de ejercicios matemáticos, que permiten reforzar los conceptos y procedimientos asociados al tema. Emplea recursos tecnológicos (calculadora y panillas de Excel), como se propone en los documentos oficiales (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006b), además hace uso de páginas Web que le permite tener un registro sobre los avances de cada estudiante; es decir, contemplar el tiempo que el estudiante dedica a ejercitar el tema, las respuestas erróneas y las preguntas que los estudiantes no responden [**C1**. F3.9. Líneas 1-3].

4.1.2 Reconstrucción del conocimiento especializado del profesor Rodríguez al enseñar el tema de las fracciones

Lo siguiente son aspectos que se relacionan con el conocimiento pedagógico general, que nos llevan a una primera aproximación de la dinámica de la enseñanza generada por el profesor Rodríguez, al enseñar el tema de las fracciones.

Desde el punto de vista de la enseñanza impartida por el profesor Rodríguez prevalece la formulación de preguntas a los estudiantes y se promueve la argumentación para generar discusión en clase. En términos de lo que definen Carrillo, Climent, Gorgorió, Rojas y Prat (2008), la comunicación promovida por el profesor o el modo que permite describir cómo gestiona la participación de sus estudiantes en los procesos de aprendizaje, puede clasificarse como una *comunicación instructiva*. Es decir, la información se produce por medio de la integración de las contribuciones de los estudiantes, buscando modificar la comprensión matemática a partir de preguntas, así como informar de la instrucción subsiguiente.

El profesor Rodríguez es un gestor de las actividades, más que informador de los contenidos. Utiliza explícitamente preguntas que llevan a los estudiantes a desarrollar o reforzar ideas matemáticas, aclarar o mejorar aquellas interrogantes que surgen a lo largo de la instrucción, dejando espacio para que los alumnos reflexionen sobre aspectos del contenido, focalizándose especialmente en las ideas o señalamientos de sus alumnos.

El profesor deja espacio para que los alumnos reflexionen sobre aspectos del contenido, siempre considerando las ideas o aportes de sus estudiantes. En las actividades que involucran indagación, exploración o que son de ejercitación, también permite espacios para la reflexión logrando que los estudiantes modifiquen la comprensión matemática de lo abordado, estando bajo una *comunicación reflexiva*. Es decir, el profesor fomenta las interacciones matemáticas buscando que los estudiantes hagan exploraciones (Brendefur y Frykholm, 2000; Carrillo *et al*., 2008).

Las estrategias metodológicas que emplea el docente para la enseñanza del tema de las fracciones están en función del contexto. Presenta a sus estudiantes guías o fichas de trabajo que contienen una descripción reducida de los conceptos y procedimientos matemáticos que abordarán a lo largo de la unidad, sigue una serie de tareas que se relacionan con el tema de estudio. Según queda explícito en la descripción de las sesiones de clase (apartado 4.1), este material permite al profesor ir trabajando clase a clase distintas situaciones, y generar discusión en el salón de clase de acuerdo a la dinámica de la formulación de preguntas.

Referente al conocimiento especializado del profesor de matemáticas, tres son los subdominios más destacados a lo largo de las 21 sesiones de clase: el *conocimiento de los temas matemáticos* (KoT), *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) y el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT). Aunque en general se destaca la presencia de los subepisodios relacionados con el dominio *conocimiento didáctico del contenido* (PCK), especialmente aspectos sobre las características de aprendizaje de las matemáticas. Relacionado con el *conocimiento de los temas* evidenciamos subepisodios en todas las categorías descritas: conceptos, fenomenología, procedimientos matemáticos, sistemas de representaciones, aspectos de comunicación y tareas matemáticas.

Respecto del indicador conocimiento de la *estructura conceptual* identificamos que el profesor trabaja el concepto de número racional aludiendo principalmente a su expresión fraccionaria, relacionándola con la expresión decimal procedente de la división entre enteros: “por ejemplo, siete quintos, es ¿qué división?, siete entre cinco”. Esto le permite emplear como números fraccionarios también aquellos que tienen representantes fracciones en las que el numerador es múltiplo del denominador; es decir, las que se corresponden con los enteros $\left(3 = \frac{?}{3};\ 12 = \frac{?}{3};\ \frac{15}{3} \rightarrow 15 \div 3\right)$. Además, la fracción se reconoce como una porción, que expresa una relación multiplicativa entre el número de partes que forman la porción y el total de las partes consideradas de una unidad.

Para trabajar situaciones de fraccionamiento diferencia la noción de “fraccionar” y “dividir”. El profesor identifica la noción de dividir con la acción de partir o separar en partes no necesariamente iguales, mientras que alude a fraccionar para aludir a la partición de la unidad completa en partes iguales y exhaustivas. Esta distinción de división partitiva lleva a repartir una parte de una unidad o todo en partes iguales, interpretándose la fracción como una parte o porción de la unidad. También, esta idea le permite trabajar la fracción como medida de una parte respecto de una unidad o todo, y los significados de fracción como parte-todo y operador, relacionando ambos significados.

El *significado* empleado para introducir el concepto de fracción es el de cociente, aunque como apoyo didáctico prevalecen a lo largo de la enseñanza los significados de fracción como parte-todo y operador; empleándose definiciones menos formales como "la fracción es una división, un cociente", "la fracción es parte de algo", "la fracción es un operador". La fracción como parte-todo y operador se trabajan a partir de resolver distintas tareas de fraccionamiento. Los contextos más frecuentes de las tareas introducidas por el docente son los que requieren una partición. Por ejemplo, para el caso de la fracción como parte-todo las tareas comprenden dividir figuras en partes de igual tamaño y de distinta forma, donde se debe identificar cada parte con su representación numérica. La fracción como operador se trabaja a partir de situaciones como la siguiente: "identificar los tres cuartos de sesenta fichas (material concreto)", esto lleva a expresar una operación multiplicativa $\left(\frac{3}{4} \times 6\right)$ sobre una cantidad (60), obteniéndose una división en tantas partes como indica el denominador (4) y una multiplicación por el número de partes que indica el numerador (3).

Sin nombrar al conjunto de los números racionales (Q), el profesor trabaja la equivalencia, el orden, las operaciones en Q (suma, resta multiplicación y división) y sus propiedades (de orden, equivalencias notables de Q). La equivalencia la enseña a partir de la representación figural, comparando las partes de un mismo todo (unidad). Domina cuatro métodos para establecer cuándo dos fracciones son equivalentes: a) dibujar y comparar si cada parte representa la misma cantidad (la misma área), b) representar las fracciones en una recta numérica y ver si coinciden sobre la recta, c) calcular el número decimal correspondiente y compararlos, y d) amplificar o simplificar, buscando denominadores iguales o numeradores iguales. La equivalencia de fracciones en a) y b) se trabaja bajo el significado de fracción como parte-todo, la fracción indica la medida de una parte respecto de un todo. En c) y d) dos fracciones distintas son equivalentes al generar el mismo resultado, basándose en la representación decimal del racional.

El profesor, para introducir el orden de dos o más fracciones, se apoya en la representación figural y compara las partes (áreas). Trabajan gradualmente las fracciones con igual denominador (es menor la que tiene menor numerador), de igual numerador (es menor aquella fracción que tiene mayor denominador) y aquellas con numeradores y denominadores distintos (buscan fracciones equivalentes o por comparación de números decimales).

Para sumar y restar fracciones con igual denominador el profesor recurre a la acción de juntar o quitar cantidades, obteniendo la cantidad final (bajo el significado de fracción como parte-todo). Para sumar y restar fracciones con distintos denominadores, presenta tres métodos: a) buscar fracciones equivalentes; b) reducir las fracciones a común denominador, por el procedimiento de los productos cruzados; y, c) calcular el mínimo común múltiplo. Para las operaciones multiplicativas se basa en la forma en que se obtiene el resultado de manera simbólica. Da mayor sentido a la división relacionándola con la definición formal de ésta operación, indicando que dividir dos fracciones es lo mismo que multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda fracción. Por tanto, la enseñanza de las operaciones aditivas y multiplicativas produce diferencias. En el caso de la suma y resta de fracciones se definen diversos pasos, basándose en buscar acciones con partes (juntar, quitar), mientras para la multiplicación y división no aparecen situaciones contextualizadas, ni obtención del trozo correspondiente a esas operaciones.

Respecto de los *procedimientos matemáticos* apreciamos que el profesor domina aquellos que enseña, disponiendo de diversos procedimientos para actuar. Por ejemplo, al estudiar la fracción como operador se enuncian distintas tareas de fraccionamiento (de reparto/ medida) que buscan obtener algunas de las partes, donde se conoce: a) la medida del todo y la fracción y la incógnita es la medida de la porción $\left(\frac{a}{b} de\ c = x\right)$; b) la medida de la porción y la fracción, y la incógnita es la medida del todo $\left(\frac{a}{b} de\ x = d \rightarrow x = \frac{d \cdot b}{a}\right)$; y c) el todo y la porción y la incógnita es la fracción $\left(x\ de\ c = d \rightarrow x = \frac{d}{c}\right)$. Para trabajar la fracción como operador, explica las acciones multiplicativas a partir de la representación gráfica, “una división en tantas partes como dice el denominador y la multiplicación por la cantidad de partes del numerador”, buscando dar sentido a las operaciones implicadas.

Trabaja el concepto de número mixto como aquel que tiene una parte entera y una parte fraccionaria, relacionado con la fracción impropia. Muestra dos procedimientos para pasar de fracción impropia a número mixto: a) por medio de un dibujo (representación como parte-todo) y b) como división, la parte entera representa al cociente, el numerador de la fracción al resto y el denominador al divisor; así, multiplicando el divisor por el cociente y sumando el resto obtienen el dividendo, formando la fracción impropia con el dividendo y el divisor. El primer procedimiento lleva a obtener el resultado agrupando o juntando las partes de la figura, proceso que será precursor a la suma de fracciones. El segundo procedimiento permite al profesor relacionar con la división entera. Ambos procedimientos llevan a establecer relaciones entre las operaciones y las acciones.

Para establecer cuándo dos fracciones son equivalentes el profesor presenta los siguientes métodos: a) dibujar y comparar si cada parte o porción representa la misma cantidad (la misma área), b) representar las fracciones en una recta numérica y ver si las medidas coinciden sobre la recta, c) calcular el número decimal correspondiente y compararlos, y d) amplificar o simplificar.

La representación figural permite resolver situaciones de adición o sustracción, donde se tiene una cantidad inicial $\left(\frac{1}{3}\right)$, luego mediante la acción de juntar o quitar otra cantidad $\left(\frac{2}{3}\right)$ se obtiene la cantidad final $\left(\frac{3}{3}\right)$. Posteriormente, suman fracciones con distintos denominadores mediante tres métodos: a) buscando fracciones equivalentes; b) reduciendo las fracciones a común denominador, por el procedimiento de los productos cruzados; y, c) calculando el mínimo común múltiplo. Observamos la ordenación lógica que el profesor establece de los procedimientos simbólicos de las operaciones aditivas (suma y resta). Igualmente enfatiza procedimientos numéricos en la multiplicación y división de fracciones, como se refleja en el siguiente fragmento:

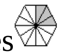
Profesor	:	*Bueno, para multiplicar fracciones lo que se hace es lo siguiente. Para sacar el numerador, se multiplican todos los numeradores.*
Estudiantes	:	*¡Oh!*
Estudiante	:	*¡Qué difícil!*
Profesor	:	*Y para sacar el denominador*
Estudiante	:	*Se multiplican los denominadores*
Profesor	:	*Se multiplican todos los denominadores*
		$\frac{5}{7} \times \frac{21}{59} \times \frac{12}{20} = \frac{5 \times 21 \times 12}{7 \times 59 \times 20}$

Para multiplicar fracciones “lo que se hace es lo siguiente: para sacar el numerador, se multiplican todos los numeradores, y para sacar el denominador, se multiplican todos los denominadores”. Para dividir dos fracciones el profesor enuncia que para calcular el numerador de la fracción “multiplico el numerador de la primera por el denominador de la segunda” y para calcular el denominador, cociente del resultado, “multiplico el denominador de la primera por el numerador de la segunda”. También emplea la definición formal de esta operación, indicando que “dividir dos fracciones es lo mismo que multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda fracción”. Por tanto, el conocimiento que muestra sobre las operaciones se centra en procedimientos de cálculo, especialmente en la multiplicación y división de fracciones. Mientras que en la suma y resta de fracciones parte de acciones para realizar las operaciones, apoyándose en el empleo de la representación figural (rectángulos) y luego llega a expresar la fracción como símbolo, que es el resultado de la acción de juntar o quitar partes de una unidad.

Sobre los *sistemas de representación* al trabajar la fracción como parte-todo y operador se emplea mayoritariamente los registros numéricos (división indicada y decimal), figural y gráfico. La representación verbal se utiliza para leer las fracciones según su forma numérica o al enunciar fracciones para escribirlas en su forma numérica. Al sumar o restar fracciones con igual denominador el profesor emplea la representación figural para dar significado a la acción de sumar y restar, juntando o quitando las partes de una unidad, con lo que muestra los dos pasos de las operaciones, obtención de la porción resultado y asignación de la representación simbólica fraccionaria.

Destacan los modelos basados en la representación figural, tanto los discretos como los continuos. Los modelos continuos abarcan diversas magnitudes, prevaleciendo el modelo de área, que adopta una gran riqueza de polígonos, así como formas redondeadas. Conoce y emplea los modelos lineales, tanto en su versión de relación entre segmentos, como la recta numérica, a la que otorga presencia con diversas funciones. La recta numérica le permite representar la fracción como un punto, lo que aprovecha para trabajar el orden y la equivalencia, vinculando con la idea abstracta de número racional. También emplea modelos de volumen, a partir preferentemente de prismas rectos rectangulares.

Respecto de la representación material o manipulativa, trabajan con papel (para representar partes congruentes) y con fichas de colores que les permiten el trabajo de la fracción como operador, reforzando situaciones de fraccionamiento como de medida.

Las representaciones y los modelos trabajados en clase permiten al profesor ejemplificar o dar significado a las representaciones verbal y numérica, asimismo resolver situaciones de fraccionamiento, reforzar los significados de la fracción como parte-todo y como operador y realizar operaciones aditivas. En general, destaca la presencia de la conversión en el sistema de representación figural, sobre todo para sumar fracciones donde los denominadores son iguales  e ilustrar fracciones equivalentes. Asimismo, se pone en juego la conversión entre el sistema de representación numérico, verbal y figural/gráfico en sus modalidades en unidades de longitud y superficie, y en la recta numérica.

Las *tareas* enunciadas por el profesor son situaciones de reparto y de medida. Las situaciones de reparto son principalmente de partición de un todo y las de medida son por fraccionamiento de la unidad, también presenta algunas situaciones en las que se comparan dos cantidades de una magnitud, estableciendo cuántas veces tiene que ser repetida cada una de ellas para obtener dos cantidades iguales (conmensurabilidad).

Respecto del *conocimiento de la estructura matemática* el profesor establece relaciones entre algunos contenidos matemáticos que enseña y aquellos de niveles escolares estudiados anteriormente. Por ejemplo, relaciona la fracción en su representación numérica$\left(\frac{a}{b}\right)$ con su representación decimal $(a{:}\,b)$, mediante el algoritmo de la división en Z. Enseña a comparar y ordenar fracciones según la representación decimal asociada, la comparación de las cantidades resultantes es equivalente a comparar y ordenar fracciones. La suma y resta de fracciones con igual denominador se relaciona con las operaciones de los números naturales. Esto lleva a establecer que presenta conexiones temporales, enlazando los conocimientos estudiados con saberes previos.

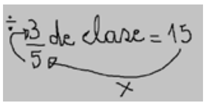
También identificamos que el profesor establece conexiones entre los elementos de la estructura conceptual, específicamente las tareas de fraccionamiento de la unidad le permiten relacionar los significados de fracción como parte-todo y como operador, en contextos de reparto y medida. Las tareas desplegadas por el profesor permiten emplear distintos sistemas de representación: figural en contexto continuo o discreto (diagramas circulares y rectangulares, segmentos de recta), verbal o literal y simbólico ($\frac{a}{b}$, expresión decimal).

Identificamos elementos de complejización del contenido, por ejemplo el algoritmo de la división en Z le permite al profesor justificar las operaciones implicadas en las tareas de fraccionamiento. Este tipo de tarea permite trabajar contextos continuos y discretos, que llevan a la solución por medio de un dibujo, un esquema o un diagrama; además, ir introduciendo gradualmente un trabajo estrictamente en contextos numéricos.

Acerca del *conocimiento de las prácticas matemática*, como se mencionó en el apartado 4.1.1, a lo largo de las sesiones de clase el profesor no habla formalmente de teoremas, axiomas, lemas, demostraciones. La actividad matemática se presenta como un proceso constructivo, en el cual los estudiantes aprenden matemáticas a partir de actividades concretas, ejecutando distintas tareas de repartir, dividir y fraccionar figuras en partes iguales (equitativas) y que cubren el todo o unidad (exhaustivas). Sin embargo, el profesor mediante la actividad práctica fomenta la comprensión de distintas nociones, definiciones, propiedades y relaciones matemáticas ("para sacar el numerador, se multiplican todos los numeradores, y para sacar el denominador, se multiplican todos los denominadores"), aunque sintetizando las ideas y haciendo uso de un lenguaje corriente ("multiplicamos todos los de arribas, por todos los de abajo"), alejado del lenguaje matemático formal.

Centrándonos en el *conocimiento de las características de aprendizaje*, respecto de las tareas, observamos que la mayoría de situaciones que se presentan son de fraccionamiento, donde intervienen tres datos: dos cantidades (el todo y la parte) y la relación entre ellos (la fracción). El profesor detecta la dificultad que tienen sus estudiantes para identificar estas cantidades en situaciones contextualizadas. Por ejemplo, pide resolver "En una clase se ha votado si se sale o no al recreo cuando llueva, 15 niños han votado que sí y representan tres quintos de la clase. ¿Cuántos niños hay en total en clase? ¿Cuántos prefieren no salir al recreo cuando llueva?". En este problema varios de los estudiantes consideran la porción dada (15 niños) como la unidad (la cantidad de alumnos de la clase). Esto lleva al profesor a solicitar "¿Por qué no me hacen un dibujo de la clase?". A partir de la representación establecida los alumnos identifican la medida de cada porción o parte (5), y de la porción dada (15) ("Manuel, en esos tres quintos, ¿cuántos alumnos hay?") y la unidad o todo (25 niños) ("mi pregunta es, sí en esos tres quintos hay quince, ¿cuántos hay en toda la clase?").

Estudiante	:	*Pero profe, yo en vez de poner tres quintos de algo, yo he puesto directamente la división.*
Profesor	:	*¡Ah, bueno!*
Profesor	:	*Pero yo tengo que intentar que Manuel, se dé cuenta del error que ha cometido. Entonces:*

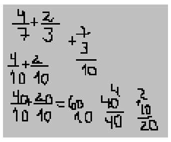


Estudiante	:	*¿Tres quintos de qué?*
Profesor	:	*De la clase, de los alumnos ¿Qué es lo que ha hecho Manuel cuando ha dibujado? ¡Ha hecho una clase! Y ha dicho, hago los quintos, y lo qué hay ¿lo he repartido entre?*

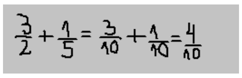
También, en este tipo de situaciones los estudiantes confunden las operaciones implicadas en el fraccionamiento $\left(\frac{3}{5} de\ la\ clase = 15 \rightarrow 15 \times 3 = 45\ y\ 45\ \div 5 = 9\right)$, llevando al profesor a explicitar que “aquí habéis cometido uno de los errores que suelen cometer los alumnos, cuando se está calculando la fracción de una cantidad”. El profesor orienta a sus estudiantes a que representen las cantidades mediante una representación figural, con la que puedan identificar el papel de los términos de la fracción y contrastar la validez de su respuesta.

Vemos que el profesor identifica la imagen de un concepto, que infiere en base a las respuestas de los estudiantes. Específicamente, conoce las formas en que los alumnos pueden interpretar los conceptos estudiados, o cuando explican un ejercicio o un problema de forma incorrecta; demuestra disposición para trabajar a partir del error, para que los estudiantes den significado a las situaciones.

El profesor identifica distintos *errores* que los estudiantes presentan al sumar y restar fracciones con numeradores y denominadores distintos. Por ejemplo, a) suman los denominadores y el numerador lo obtiene multiplicando el nuevo denominador por el numerador correspondiente, y b) calculan el mínimo común múltiplo de denominadores y conservan los numeradores:

a) 

Manuel dice, hay que sumar fracciones que son distintas, […] *ha hecho siete más tres, diez. Luego él se ha acordado que multiplica todos los de abajo menos por el suyo y ha dicho, cuatro por diez cuarenta, dos por diez veinte y pongo el mismo denominador, y ha empezado a sumarlos.*

b) 

Elena se lo ha estudiado de verdad y ha cogido y ha hecho lo siguiente. […] *Cinco por dos diez, y había puesto ahí el diez, se ve ¿no?*

El profesor indica que el estudiante en el ejemplo a) ha realizado “siete más tres diez. Luego él se ha acordado que multiplica todos los de abajo menos por el suyo y ha dicho, cuatro por diez cuarenta, dos por diez veinte, y pongo el mismo denominador, y ha empezado a sumar.” Para el ejemplo b) el profesor enuncia “Laura. Ha cogido y ha empezado de la siguiente forma, cinco por dos y ha mantenido los numeradores". Esto nos lleva a establecer que el profesor reconoce los errores comunes que se despliegan al sumar y restar fracciones, por sus expresiones explícitas de que es un error común, como por las estrategias que propone para afrontarlos.

Apreciamos en el proceso de instrucción que el profesor reconoce errores de cálculos en las operaciones; de planteamiento de las situaciones (dificultad para interpretar los datos); y errores de tipo conceptual.

Relacionado con las *tareas matemáticas* el profesor presenta situaciones que refuerzan los conceptos y procedimientos matemáticos, en correspondencia con las dificultades de aprendizaje de los estudiantes. Asimismo, introduce los contenidos gradualmente, por ejemplo inicia el trabajo con situaciones de fraccionamiento, en contextos continuos, (área) y va incorporando actividades que involucran contextos discretos como el ejemplo presentado anteriormente.

En relación con el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* hemos de indicar que el profesor presenta un repertorio de *tareas* de partición de la unidad. Para enfatizar la idea de división igualitaria, enuncia tareas de dividir diversas figuras en partes de igual tamaño, mediante pasos que atienden a dos aspectos, el tamaño –en relación con alguna magnitud, preferentemente la superficie –, y la forma. Primero, exhibe una actividad donde divide una hoja en dos partes de igual tamaño y forma, luego una parte la divide en dos partes de igual tamaño y forma, y la otra en trozos de distinto tamaño y forma. La actividad conduce a que cada parte de igual tamaño y forma representa una "fracción", mientras las partes de distinto tamaño y forma indican solo una "división" (en palabras del profesor).

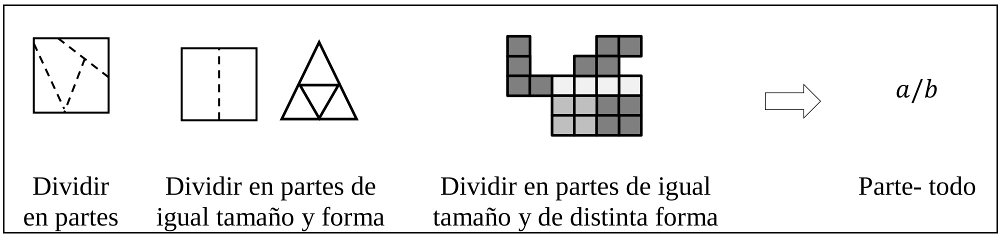


Figura 28. Tareas de fraccionamiento

Continúan el trabajo dividiendo diversas figuras en partes de igual tamaño y forma, y luego de igual tamaño y distinta forma, con lo que refuerza las nociones de "fraccionar" y “dividir”, siendo el fraccionamiento equitativo una de las ideas que presenta dificultad para los estudiantes en diversas situaciones.

Luego, para precisar más la medida se divide la unidad en partes iguales, y si una cantidad de magnitud mide a/b unidades quiere decir que dividiendo la unidad en b partes iguales la cantidad de magnitud a medir equivale a un número a de dichas partes. De este modo expresan cada parte con su representación simbólica (relación existente entre dos cantidades específicas).

El profesor trabaja tres tipos de problemas con fracciones que se presentan al trabajar el significado de fracción como operador: a) aquellos problemas en el cual deben buscar la fracción operador, b) calcular la fracción de un número, es decir, se tiene el total y la fracción y se debe encontrar la parte; y c) fracción de un número, es decir, se tiene la parte y la fracción y se debe encontrar el total.

La *secuenciación de las tareas* de fraccionamiento que presenta el profesor es un soporte didáctico para la enseñanza del significado de fracción como parte-todo. Consta de la acción manipulativa sobre objetos, fraccionamiento, el empleo de representaciones icónicas, y finalmente emplea la representación numérica para expresar las acciones anteriores. El proceso seguido por el docente envuelve un conocimiento específico, no solo matemático, sino que integra matemáticas y enseñanza.

Las tareas de fraccionamiento de la unidad se introducen en contextos personales, o bien, desposeías de contexto, limitándose a argumentos matemáticos. Algunas de las tareas planteadas, pueden relacionarse con situaciones habituales para los alumnos (medidas extensivas), que tienen relevancia directa como “Luis tenía 27 canicas, perdió un tercio de las que tenía…”, “tengo cuatro euros”, “la mitad de la cuerda”, entre otras. También las tareas son planteadas en un contexto matemático y según el nivel escolar, como “dividir una figura en partes de igual tamaño y forma”, “construir una figura”, “dividir”. En las primeras sesiones de clase las tareas propuestas llevan a los estudiantes a relacionar conceptos, procedimientos y darles significados. Sin embargo, en las últimas clases, donde se enseñan las operaciones con fracciones, prevalecen las tareas de reproducción; es decir, se busca que los estudiantes recuerden y demuestren que dominan los procedimientos de cálculo de las operaciones.

Sobre las *representaciones*, introduce la suma y la resta de fracciones con igual denominador mediante problemas de combinación (solo fracciones con el mismo denominador), que implica juntar o quitar las partes para formar un total (obtener la porción resultado); es decir, tareas en las que subyace un planteamiento directo (conocen las partes o cantidades y se pide el total). Primero emplean la representación figural, luego el trabajo se desvincula de esta representación, centrándose únicamente en los procedimientos de cálculo con las representaciones simbólicas para expresar la porción por medio de una fracción. Comienza obteniendo partes y aplicando fraccionamiento, para luego generalizar por el cálculo simbólico formal.

Para la enseñanza de las operaciones aditivas y multiplicativas se producen diferencias. En el caso de la suma y resta de fracciones se definen diversos pasos, basándose en buscar acciones con partes (juntar, quitar), mientras para la multiplicación y división no aparecen situaciones contextualizadas, ni obtención del trozo correspondiente a esas operaciones.

De los *sistemas de representación* para la enseñanza observamos que el profesor contantemente emplea la representación verbal, numérica y figural, y establece relaciones entre ellas. Relacionar las distintas representaciones ayuda a los estudiantes a comprender las tareas, dado que a veces la formulación sólo verbal o numérica no lleva a una correcta solución. Por ejemplo, en la tarea citada anteriormente "[…] 15 niños han votado que sí y representa tres quintos de la clase, ¿cuántos niños hay en total en la clase?", que envuelve el significado de fracción como operador, la mayoría de los estudiantes calcularon "$\frac{3}{5}$ *de* 15", esto llevó al profesor a solicitar a sus estudiantes que representaran la situación en un dibujo (figura), relacionando distintas representaciones, como se ilustra en la Figura 29.

Tres quintos de la clase son 15

Figura 29. Representaciones empleadas en clase

A lo largo de la enseñanza del tema el profesor promueve representar las situaciones en una figura, esquema, diagrama o dibujo, de modo de que sus estudiantes lleguen sin dificultad a identificar los datos que se tienen y los que se piden, y así llegar fácilmente a la solución. El apoyo de imágenes es un recurso habitual en la enseñanza impartida por el profesor Rodríguez, prevalece antes que la representación numérica.

Los materiales y recursos que se emplean son: el papel, para ilustrar si tienen el mismo tamaño las porciones de una figura; fichas de colores (cantidades discretas), para trabajar la fracción como operador (fracción de una cantidad). También el profesor utiliza recursos tecnológicos como las hojas de Excel (función *mínimo común múltiplo*) que permite calcular el mínimo común múltiplo de varios números y la calculadora. Estas herramientas ayudan a comprobar la validez de los cálculos en los ejercicios que han realizado por otros medios.

En general, en cada clase observamos un repertorio de tareas que permiten introducir o reforzar algún concepto, cambiar de representaciones, reforzar o ejercitar los procedimientos. Podemos inferir que la enseñanza está organizada en las siguientes fases: a) puesta en común de las soluciones de las tareas dejadas en la clase anterior, b) resolución de tareas que implican trabajar un concepto o un procedimiento, c) refuerzo de las ideas básicas, introducción de conceptos o procedimientos, y d) repaso y ejercitación de lo enseñado.

Relacionado con el *conocimiento de los estándares de aprendizaje*, el profesor durante el proceso de instrucción tiene presente los contenidos previos estudiados y aquellos programados para el nivel correspondiente. Por tanto, identificamos que conoce los contenidos mínimos estipulados en el currículo escolar.

Una diferencia observada respecto de las orientaciones curriculares es que los porcentajes (expresión de partes utilizando porcentajes) no es un contenido que se enseña en correspondencia con las fracciones. El profesor en una entrevista informal, indica que cuando enseña el tema de los porcentajes lo relaciona con las fracciones. También, enseña las operaciones de multiplicación y división de fracciones, pese a que el currículo español no hace explicito que el producto y cociente han de tratarse en el nivel escolar de estudio (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006b).

El profesor conoce material curricular relacionado con las fracciones y lo emplea en la enseñanza del tema. Conoce orientaciones emitidas por el colectivo y organizaciones docentes como el NCTM, por ejemplo el libro del Tangram elaborado por la comisión del cual extrae tareas para trabajar con sus estudiantes. También emplea recursos tecnológicos como la calculadora y las panillas de Excel, tal como se propone en los documentos oficiales (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006b). La Tabla 19 sintetiza el conocimiento manifestado por el profesor Rodríguez al enseñar el tema de las fracciones.

Tabla 19. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rodríguez al enseñar el tema de las fracciones*

Conceptos y propiedades			
Número racional	- El número racional es la porción o parte que resulta de una división entre dos cantidades. Se trabaja el número racional como fraccionario, representado por el cociente entre dos números $\left(\frac{a}{b}\right)$, identificando su valor con el resultado de la división $(a \div b)$. - El modelo semántico de división partitiva lleva a repartir una unidad o todo en partes iguales, interpretando la fracción como una parte o porción. [KoT]		**Conexión temporal e intraconceptual**: Relaciona la representación decimal de una fracción con el algoritmo de la división en Z, el dividendo (a) con el numerador y el divisor (b) con el denominador $\left(\frac{a}{b}\right)$. [KSM]
Fraccionar	Partición de la unidad en partes iguales y exhaustivas. [KoT]		**Conexión intraconceptual**: Fracción como medida de una parte respecto de una unidad o todo, relacionado con los significados de fracción como parte-todo y operador. [KSM]
Dividir	Particiones en partes que no son iguales, o no cubren toda la unidad. [KoT]		
Número mixto	Número entero y una fracción. [KoT]	**Procedimientos matemáticos**: - Representa gráficamente (como parte-todo) y obtienen la cantidad entera y la fracción resultante. - Divide el numerador por el denominador de la fracción impropia y relacionan el divisor, cociente y resto. [KoT]	
Clase de fracciones	Aparentes o enteras: "Fracciones que dan como resultado uno". [KoT]	**Procedimientos matemáticos**: Comparan partes de un mismo todo (unidad). [KoT]	
	Propias e impropias: - $\frac{a}{b}$ es menor que la unidad, si $a < b$ - $\frac{a}{b}$ es mayor que la unidad si $a > b$ [KoT] Número mixto: Tiene una parte entera y una fraccionaria. [KoT]	**Procedimientos matemáticos**: Para pasar de fracción impropia a número mixto: - Por medio de un dibujo (comparando partes). - Como división, la parte entera representa al cociente, el numerador de la fracción al resto y el denominador al divisor. [KoT]	**Conexión temporal e intraconceptual**: Relaciona las fracciones impropias con números mixto (comparando decimales y representando en figuras planas). [KSM]
Equivalencia de fracciones	"valen lo mismo; es decir, son iguales (las partes)". [KoT]	**Procedimientos matemáticos**: Bajo el significado de fracción como parte-todo, la fracción indica la medida de una parte respecto de un todo: a) Dibuja y compara partes de cantidad de superficie. [KoT] b) Representan las fracciones en una recta numérica y ver si coinciden sobre la recta. c) Dos fracciones distintas son equivalentes al generar el mismo resultado, basándose en la	

Tabla 19. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rodríguez al enseñar el tema de las fracciones*

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">representación decimal del racional. Calculan el número decimal correspondiente y compararlos.
d) Amplificar o simplificar, buscando denominadores iguales o numeradores iguales.</td></tr>
<tr><td>Orden de fracciones</td><td>Se apoya en la representación figural y comparan las partes (áreas)</td><td>- Con igual denominador y distintos numeradores.
- Con igual numerador y distintos denominadores.
- Con distinto numerador y denominador. [KoT]</td><td>Procedimientos matemáticos:
Compara las partes de un todo. Es menor la fracción que tiene menor numerador.
Es menor aquella fracción que tiene mayor denominador.
Buscan fracciones equivalentes (amplificando o simplificando) o por comparación de números decimales. [KoT]</td><td>Conexión temporal:
Recuerda que la fracción tiene una representación decimal (división). Entonces, al calcular la cantidad decimal y al ordenar éstas cantidades, sería equivalente a comparar las fracciones. [KSM]</td></tr>
<tr><td>Comparación de fracciones</td><td colspan="4">Procedimientos matemáticos:
a) Representan mediante una figura y comparan las partes (comparación de superficie).
b) Representan en la recta numérica y comparan las fracciones según la posición (medida).
c) Representan de forma decimal y comparan decimales.
d) Buscan fracciones equivalentes que permitan igualar los denominadores y así comparan fracciones con distintos numeradores e iguales los denominadores. [KoT]</td></tr>
<tr><td>Máximo común divisor (MCD)</td><td colspan="4">Procedimientos matemáticos:
Descomposición en factores, considerando los factores de menor exponente. [KoT]</td></tr>
<tr><td>Mínimo común múltiplo (mcm)</td><td colspan="4">Procedimientos matemáticos:
Por descomposición en factores primos. Producto de factores primos, resultando de multiplicar “los factores comunes y no comunes elevados a la mayor potencia”.
- Buscan los divisores del número y luego identifican el menor natural que es divisor de todos.
- A partir de los criterios de divisibilidad; escriben el producto de factores primos, siendo el mcm el resultado de la multiplicación de los factores comunes y no comunes elevados a la mayor potencia o exponte. [KoT]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operaciones con fracciones</td><td colspan="2">Sumar y restar fracciones con igual denominador [KoT]</td><td>Procedimientos matemáticos:
Recurren a la acción de juntar o quitar cantidades, obteniendo la cantidad final (bajo el significado de fracción como parte-todo). [KoT]</td><td>Conexión temporal:
Para sumar y la restar fracciones con igual denominador, comparan la suma de fracciones con la suma de números naturales (agregando o quitando partes de una unidad). [KSM]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Suma y resta de fracciones con distintos denominadores [KoT]</td><td>a) Fracciones equivalentes.
b) Reducen las fracciones a común denominador, por el procedimiento de los productos cruzados.</td><td>Tareas matemáticas:
Repertorio de tareas de suma, resta y de operaciones

Representaciones:
Trabajar progresivamente a partir de la representación</td></tr>
</table>

Tabla 19. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rodríguez al enseñar el tema de las fracciones*

		c) Calculan el mínimo común múltiplo (mcm).	combinadas con fracciones. Mediante su concreción en acciones con objetos (añadir o quitar elementos concretos (partes de la unidad)). [KMT]	figural, luego simbólica. Obtienen la parte resultante, luego el nombre y finalmente se asocia la parte resultante con su simbolización. [KMT]
	Sumar o restar un número entero y una fracción	El número entero se convierte a fracción (fracción equivalente) y se suman fracciones que tienen el mismo denominador.		
	Multiplicación de fracciones [KoT]	**Procedimientos matemáticos**: "Para sacar el numerador, se multiplican todos los numeradores, y para sacar el denominador, se multiplican todos los denominadores", sugiriendo el procedimiento para realizar el producto de números racionales $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}, a,c\in Z;\ b,d\in Z^{*}\in Q\right)$. [KoT]		
	División de fracciones [KoT]	- "Para calcular el numerador de la fracción, multiplico el numerador de la primera por el denominador de la segunda y para calcular el denominador (cociente del resultado) multiplico el denominador de la primera por el numerador de la segunda" (División en cruz). - "Dividir dos fracciones es lo mismo que multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda fracción". [KoT]		
Fenomenología				
Significados de fracción	Parte- todo: Expresa una relación entre el número de partes que forman la porción y el total de las partes consideradas. [KoT]	**Tareas matemáticas**: - Figuras planas, divididas en partes iguales, se identifica cada parte fraccionaria con su representación simbólica. - Tareas que conllevan a la acción de dividir y conducen a presentar la fracción como proceso de medición y partición de una unidad. - Figura que representa una parte de una unidad desconocida (todo) construyen la unidad. - Tareas de fraccionamiento. [KoT]		**Conexión intraconceptual**: Relacionan los significados de fracción como parte-todo y operador. El cálculo de fracciones, actuando como operador, cobra sentido cuando el profesor relaciona una situación de fracción como operador con el significado de fracción como parte-todo. [KSM]
	Operador: Expresa una operación multiplicativa sobre una cantidad (unidad), indicando una división (equitativa) en tantas partes como determina el denominador, y una	**Procedimientos matemáticos**: - Operaciones de multiplicación y división que transforman las	**Tareas matemáticas**: - La fracción operador actúa sobre cantidades y valores de magnitudes (número, longitud).	**Conexión temporal**: El algoritmo de la división en Z permite justificar las operaciones envueltas en las tareas de fraccionamiento. [KSM]

Tabla 19. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rodríguez al enseñar el tema de las fracciones*

	multiplicación por el número de partes que indica el numerador. [KoT]	cantidades $\left(\frac{a}{b}\ de\ c=(ac)/b\right)$. [KoT]	- Tareas de fraccionamiento de tipo directo e inverso. [KoT]	**Complejización** Al trabajar tareas de fraccionamiento se emplean representaciones en un contexto continuo (diagramas circulares y rectangulares), paulatinamente se introducen tareas en que el todo o unidad es una presentación discreta o una cantidad (al trabajar la fracción como operador). [KSM]
	División. [KoT]	Expresar la parte racional que comprende en un reparto. [KoT]		
	Medida. [KoT]	Expresar la medida no entera. [KoT]		

Modos de proceder en matemática

- La actividad matemática se presenta como un proceso constructivo, en el cual los estudiantes aprenden matemáticas a partir de actividades concretas, realizando distintas tareas de dividir, fraccionar, repartir, etc. [KPM]
- Algunas definiciones las sintetiza, las expresa en lenguaje corriente y alejado del lenguaje matemático. Sin embargo, promueve la formalización rigurosa de las escrituras matemáticas. [KPM]

Errores y dificultades

El profesor es consciente de los errores que presentan los estudiantes en el proceso de enseñanza:
- Cuándo los estudiantes interpretan un ejercicio o problema de forma incorrecta.
- Cuándo hacen algún señalamiento erróneo.[KFLM]

Claridad matemática en las respuestas o preguntas enunciadas por estudiantes: [KoT] - Busca que los estudiantes se den cuenta de los errores, formulando una nueva pregunta que los lleve a cuestionarse las ideas. [KMT] - Insta a los estudiantes a representar el contexto de las tareas en una figura, o bien procura que empleen material concreto para resolver la situación. [KMT] - Permite que se genere la discusión, aunque se estén dando respuestas incorrectas, y poco a poco direcciona el debate.	Entiende con claridad las dudas o preguntas de los estudiantes. Asimismo, guía el proceso de enseñanza según las interrogantes o los errores que presenten los alumnos, demostrando que conoce las limitaciones que se van presentando al resolver las tareas. [KFLM] [KMT]

Errores y dificultades [KoT] [KFLM]	- Identifica errores en distintas operaciones aritméticas (de cálculo). - El planteamiento y resolución de tareas de fraccionamiento (para reconocer los datos que intervienen). - Errores que se despliegan al sumar y restar fracciones: ▪ Suman numeradores y denominadores de las fracciones. ▪ Confunden múltiplos con divisores.	**Estrategias** (para abordar un error o una dificultad): [KMT] - Trabajan simultáneamente con dos formas de representación y comparan los resultados. - Pasan primero del lenguaje verbal al figural, para esquematizar los datos que se tienen y los que se piden en las tareas. - Presenta imágenes para que los alumnos apoyen el pensamiento. - Reiterar los procedimientos algorítmicos, previo	**Materiales y recursos**: Emplea material concreto que permite visualizar cuerpos geométricos (cubos) y papel para comprar áreas. [KMT]

Tabla 19. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rodríguez al enseñar el tema de las fracciones*

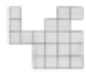
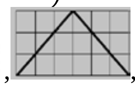
- Errores conceptuales en las declaraciones de los estudiantes.	a la resolución de tareas. - Presenta problemas con datos más sencillos, y luego, aplica el mismo método en la resolución de otros problemas. [KPM]	
Tareas matemáticas		
- Que refuerzan los conceptos y procedimientos matemáticos. [KoT] - En contextos concretos (personales) o bien, desposeídas de contexto, limitándose a argumentos matemáticos. - Que permiten trabajar con distintos sistemas de representación.	Como aquellas tareas de fraccionamiento enfatizando el reparto equitativo y exhaustivo, para reforzar la idea de división equitativa y exhaustiva. [KoT] - Dinero, familia, amigos, juegos, etc. - Dividir, partir, etc. Por ejemplo, traducir al lenguaje simbólico ($\frac{1}{2}\, de\ dinero = 4$), representar en una figura, luego se da paso a dar sentido y reforzar a las operaciones implicadas en tareas de fraccionamientos (simbólicamente).	**Representaciones**: Representación manipulativa o pictórica para facilitar la comprensión de las situaciones. Se busca primero tener una imagen concreta o material, luego una imagen gráfica, prevaleciendo la imaginación de lo visual. [KMT]
- Serie de tareas que permiten reforzar o practicar los distintos contenidos y procedimientos matemáticos. [KMT]	- Trabajan la idea de fraccionamiento (construir partes iguales y exhaustivas), que llevan a expresar la fracción según dos cantidades: la parte y el todo. Al expresar la fracción una porción trabajan los significados de fracción como parte-todo y operador, y establecer relaciones entre ellos. [KoT] [KSM] - Tareas de fraccionamiento de la unidad que lleva gradualmente a dividir diversas figuras, a dividir en partes de igual tamaño, a dividir figuras en partes de igual tamaño y de distinta forma. Esta gradualidad lo lleva a	**Representaciones** (variedad): [KoT] [KMT] - Verbal (un quinto, cuatro veinteavos, diez veinteavos). - Numérica $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{20}, 0{,}5, \right)$. - Figural (, , figuras divisibles, continuas y discretas). - Concreta (papel, fichas) - Gráfico (recta numérica).

Tabla 19. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rodríguez al enseñar el tema de las fracciones*

	precisar en situaciones de medida, trabajando tareas en el cual existe una cantidad de magnitud a medir que no equivale a la unidad o algunos de sus múltiplos. [KoT] - Enuncian tareas que involucran medición y partición de la unidad. Siendo un proceso gradual, primero se trabaja con la unidad de medida y luego van cambiando la unidad. En seguida, establecen qué fracción representa cada parte mediante su expresión simbólica. Finalmente, llegan a la idea de fracción (a/b) como la relación existente entre dos cantidades específicas. [KoT]	**Representaciones** (relacionados): [KMT] [KSM] Relaciona distintos sistemas de representación - Verbal- figural - Verbal- figural- numérico - Figural- numérico - Verbal- concreto- numérico - Material- verbal- numérico
Tareas que se resuelve de un modo práctico como lo estudiantes sugieren. [KMT]		
Esquemas de instrucción para la enseñanza	El tema se aborda a partir de tareas de fraccionamiento que le permiten al profesor trabajar los contenidos mínimos establecidos para el nivel escolar. Acompaña el proceso con una serie de tareas que le permiten reforzar los conceptos y algunos procedimientos matemáticos. [KMLS]	
Riqueza de las tareas matemáticas propuestas	Tareas que le permiten tratar diferentes ideas matemáticas: fracción como medida, fracción en un contexto parte-todo, como operador, fracciones equivalentes, comparar fracciones, operar con fracciones, etc. [KoT] [KMT]	
Materiales y recursos		
Conocer materiales o recursos didáctico: [KMT] - Material concreto (fichas de colores, cuerpos). - Papel cuadriculado. - Recursos tecnológicos (hoja de Excel) y la calculadora.	Para trabajar la fracción como operador (cantidades discretas). Para ilustrar cuando las partes de una figura tienen el mismo tamaño (comparar cantidad de superficie): [KMT] [KMLS] - Explotan las funciones de la planilla de Excel, especialmente para calcular el mcm de varios números y el cociente entre dos cifras. - Comprobar ejercicios que han realizado con papel y lápiz.	Promover acciones que permiten el empleo de recursos y situaciones: [KFLM] Por ejemplo, permite relacionar el significado de la fracción como medida, empleándose el modelo de área para representar partes congruentes.
Lenguaje matemático		
Es riguroso en el empleo de términos, conceptos, propiedades, definiciones, procedimientos matemáticos, etc., aunque al fomentar la automatización de algunos algoritmos o la memorización de fórmulas lo lleva a sintetizar las expresiones verbales. [KoT]	- Promueve la formalización rigurosa de las escrituras matemáticas, los fundamentos matemáticos de las definiciones y de los algoritmos. - Es preciso en lenguaje y escritura matemática. [KoT]	
Orientaciones curriculares		
Contenidos mínimos estipulados por el currículo escolar y	- Los porcentajes (expresión de partes utilizando porcentajes) no es un contenido que se enseña en	

Tabla 19. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rodríguez al enseñar el tema de las fracciones*

contenidos programados para el nivel. [KMLS]	correspondencia con las fracciones, de acuerdo a las recomendaciones del currículo. - Enseña las cuatro operaciones básicas con fracciones: suma, resta, producto y cociente, aunque el currículo español no hace explicito que el producto y cociente han de tratarse en el nivel escolar de estudio.
El profesor conoce orientaciones emitidas por el colectivo y organizaciones docentes. [KMLS]	- Libros dedicados al tema (*Tangram* elaborador por el NCTM).
Complementa el proceso de enseñanza y aprendizaje.	- Recursos tecnológicos (calculadora y panillas de Excel). Páginas Web que le permite tener un registro sobre los avance de cada estudiante y para que ejerciten el tema. [KMT] [KMLS]

4.2 CASO 2: ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA AL ENSEÑAR LAS FRACCIONES

En lo que sigue describimos la información contenida a lo largo de 12 sesiones de clase impartidas por el profesor Rivera. La Figura 30 ilustra los contenidos abordados en un curso de 1º de Educación Secundaria obligatoria, al enseñar el tema de las fracciones. Destacamos el camino seguido por el profesor al enseñar el tema.

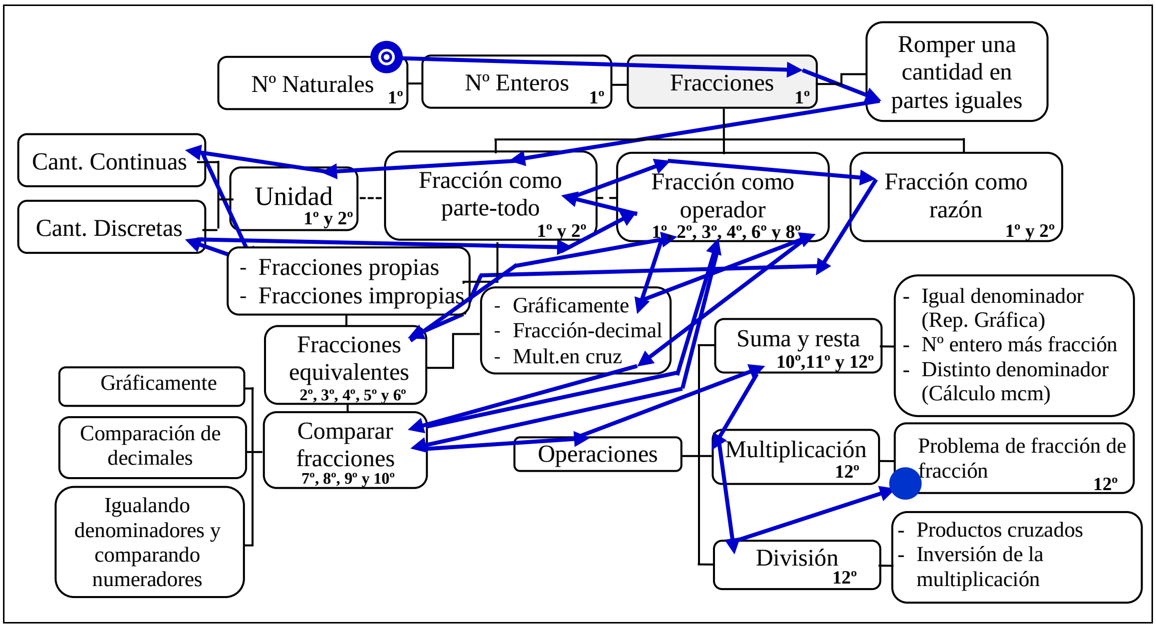


Figura 30. Contenidos abordados al tratar el tema de las fracciones en 1º de Educación Secundaria

El tema de las fracciones se inicia por una necesidad de ampliar los conjuntos de los números naturales y enteros, de manera gradual se trabajan las fracciones como una extensión de estos conjuntos. El profesor destaca que los números enteros son cantidades que no tienen ninguna parte decimal, para introducir que existen otras cantidades no exactas. La idea anterior se conecta con la fracción como fracturador, indicando la fracción el resultado de romper una unidad o una cantidad, concretamente se establece que "la fracción lo que hace es romper en trozos". Luego, la idea de romper en trozos se relaciona con la representación numérica de una fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$, el numerador indica el número de trozos que se consideran de la unidad y el denominador los trozos en que se rompe la unidad. Por lo tanto, las fracciones se presentan cuando una unidad o todo se divide en partes iguales, lo que lleva a relacionar con el significado de fracción como parte-todo. Es decir, se tienen dos cantidades específicas $\left(\frac{a}{b}\right)$, un todo o unidad y se divide en b partes, considerándose un número concreto (a) de esas partes iguales del total. También se hace alusión a la fracción como razón; es decir, leen la fracción como índice comparativo entre dos cantidades: "por cada tres trozos tomo dos". En seguida, realizan una serie de ejercicios que permite trabajar la fracción bajo el significado parte-todo, así, a partir de figuras geométricas divididas en partes iguales y sombreadas algunas de las partes, identifican la fracción que representa a cada porción sombreada.

Trabajan la idea de unidad, ejemplificando con casos particulares, por ejemplo $\frac{3}{3}$ y $\frac{5}{5}$ representan a la unidad. Luego, el profesor presenta ejemplos de fracciones que son mayores que la unidad, relacionando la fracción en su representación numérica con la figural (bajo el significado parte-todo). Establece que las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador son mayores que la unidad. Asimismo si el numerador es igual al denominador el resultado corresponde a la unidad (1). Por último, si el numerador es menor que el denominador la cantidad resultante es menor que la unidad. Realizan ejercicios para representar fracciones en una figura, luego comparan fracciones respecto a la unidad (menores, iguales o mayores que la unidad).

El profesor introduce algunas nociones de un programa de matemáticas, con la intención de que los alumnos puedan comprobar la solución de los ejercicios. Al explicar algunas notaciones destaca que la línea divisora en una fracción corresponde, en el software citado, al símbolo de la división, siendo "la fracción también es una división".

Reanudan la idea de unidad, ahora, enfatizando que una unidad también puede ser una cantidad discreta. Lo anterior permite al profesor trabajar las fracciones sobre cantidades discretas mediante el significado de fracción como operador. Trabajan tareas de fraccionamiento en que se tiene el todo y la fracción.

Continúa la unidad refiriéndose el profesor a las fracciones como cantidades no exactas, que admiten una representación fraccionaria. Luego vuelve a retomar la idea de fracción como parte-todo, para establecer en qué casos una fracción es mayor, menor o igual a la unidad, mediante la representación gráfica. El profesor indica que las fracciones menores que la unidad reciben el nombre de propias, mientras que las mayores que la unidad son denominadas impropias. Resuelven distintas tareas de fraccionamiento, comparando (en su representación figural) las partes de un conjunto discreto.

El profesor relaciona la fracción con el resultado de una división, resaltando las distintas formas de escribir la misma cantidad. Por ejemplo, relaciona la representación figural de una fracción $\left(\frac{1}{2}\right)$, con su valor decimal (en la recta numérica), lo que le permite comparar longitudes. Explica un procedimiento para convertir una expresión decimal a fracción, estableciendo que "las fracciones con denominadores 100 corresponden a porcentajes". Ello le permite relacionar los conceptos: "las fracciones, además de relacionarse con la división, si tienen denominador 100, corresponderían a un porcentaje".

Introduce las fracciones equivalentes como aquellas fracciones que tienen el mismo valor, así $\frac{2}{2}\ y\ \frac{3}{3}$ serían fracciones equivalentes. Lo anterior lleva a cuestionar si "¿solamente son iguales las fracciones que tienen igual numerador y denominador o hay más?", ejemplificando con otras fracciones equivalentes que no representan a la unidad. Establece tres métodos para estudiar cuándo dos fracciones son equivalentes: a) representar la fracción en un objeto divisible y comparan las partes, indicando que tiene la "ventaja de ser un método muy visual pero es complejo cuando la cantidad a dividir la figura es muy grande"; b) buscar el número decimal asociado a cada fracción y comparar los decimales; y c) "multiplicar en cruz", que correspondería a dividir dos fracciones, y al obtener como resultado la unidad, de este modo las fracciones serían equivalentes.

Para buscar fracciones equivalentes a una dada, amplifican y simplifican fracciones. El profesor enfatiza que "siempre es posible amplificar fracciones, pero no siempre simplificar. Cuando esto ocurre la fracción es irreducible". Resuelven ejercicios que consisten en determinar el numerador o el denominador de las fracciones equivalentes a una dada, conocido el otro miembro.

El profesor identifica y describe tres tipos de problemas de fraccionamiento: a) aquellos en que se conocen las cantidades y se debe encontrar la fracción; b) se tiene la medida del todo y la fracción, y se debe encontrar la medida de la porción o parte (el profesor la llama fracción de un número); y c) se conoce la medida de la parte o porción y la fracción y se debe encontrar la medida del total. La visión formal del contenido que presenta el profesor, le permite estructurar los problemas de fraccionamiento, aunque no aparezcan delimitados de esta forma en el libro de texto.

Para comparar y ordenar fracciones el profesor enuncia los siguientes tres métodos: a) calcular la expresión decimal asociada a cada fracción y compararlas; b) reducir a común denominador, luego comparar los numeradores y ordenar las fracciones; y c) calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores, con vista a igualar los denominadores, luego comparar los numeradores de las fracciones.

Realizan sumas y restas de fracciones, primero con denominadores iguales y luego con distintos denominadores, buscando fracciones equivalentes que tienen el mismo denominador. Finalmente, trabajan la multiplicación de fracciones, a partir de ejemplos concretos, multiplicando los numeradores y luego los denominadores. Previo a enseñar la división de fracciones explica lo que es la inversa de una fracción, entonces, para dividir dos fracciones indica que pueden multiplicarse en cruz o bien multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda (inversión de la multiplicación). Finalmente resuelven una serie de ejercicios con operaciones combinadas $(+,-,\cdot,\div)$ y un problema multiplicativo de fracción de fracción.

4.2.1 Componentes de conocimiento especializado manifestado por el profesor Rivera al enseñar las fracciones

Al igual que en el caso anterior las categorías de conocimiento y sus respectivos indicadores fueron utilizados para analizar 12 sesiones de clase, en las que se aborda el tema de las fracciones. La matriz[24] descriptiva (Tabla 20) contiene las unidades de información (subepisodios), según cada clase y en relación con el indicador de conocimiento asignado.

Para dar sentido a la información y establecer relaciones sobre el conocimiento especializado manifestado por el profesor Rivera, a continuación interpretamos qué representa cada subepisodio según cada indicador de conocimiento. Analizamos cada fila de la matriz (Tabla 20), examinando los indicadores que aparecen con más frecuencia durante las sesiones. Esto nos permite describir el conocimiento especializado del profesor Rivera al enseñar el tema de las fracciones.

---

[24] El Anexo E contienen el texto completo, con el número asignado a cada unidad conversacional.

Tabla 20. *Unidades de información*[25] *correspondiente a 12 sesiones de clase, que se relacionan con los indicadores de conocimiento del modelo MTSK*

	Indicador	**Clase 1**	**Clase 2**	**Clase 3**	**Clase 4**	**Clase 5**	**Clase 6**	**Clase 7**	**Clase 8**	**Clase 9**	**Clase 10**	**Clase 11**	**Clase 12**
KoT	A1.1	[8-27]	[7-12]										
	A1.2												
	A1.3	[103-173]	[8-34]		[28-124]								[186-354]
	A1.4												
	A2.1	[24-27] [24-62] [174-186] [188-270]	[152-225] [113-118]	[112-140]	[215-305]		[87-360]						
	A2.2	[24-27]											
	A2.3												
	A3.1		[203-225] [226-242]	[58-111] [141-259]	[6-7] [8-156] [157-214] [215-305]	[60-209]	[51-85] [87-360]		[3-163]	[2-17]			[348-384]
	A3.2			[141-259]				[19-304]	[102-243]	[39-243]	[13-203] [207-419]	[10-298]	[8-86] [7-140] [132-384]
	A4.1	[31-61]	[150-225]			[9-207]		[19-304]	[125-201]		[204-242]	[8-27]	
	A5.1	[10-16] [90-93]	[153-224]	[24-347]									
	A5.2			[25-46]									
	A5.3												
	A6.1	[188-254] [188-204]	[75-150]				[126-360]		[32-124]				
	A6.2												
	A6.3												[158-184]
KSM	B1.1		[90-111]	[25-47]	[185]		[70-83]	[19-58]					
	B1.2		[158-225]	[58-140]									
	B1.3												
KPM	C1.1						[35-72]						
	C1.2												
KFLM	D1.1												
	D1.2												
	D1.3		[218-225]										
	D1.4												
	D1.5												
	D2.1		[73-79] [152-225]								[205-234]		
	D2.2												
	D2.3												
	D2.4							[100-304]				[273-298]	[4-140] [4-8]
	D3.1												
	D3.2												

[25] Cada intervalo corresponde al fragmento de clase en que se observan los indicadores de conocimiento del modelo MTSK. Para más detalle las sesiones de clase con sus respectivas unidades conversacionales ver el Anexo F.

Tabla 20. *Unidades de información*[25] *correspondiente a 12 sesiones de clase, que se relacionan con los indicadores de conocimiento del modelo MTSK*

	Indicador	**Clase 1**	**Clase 2**	**Clase 3**	**Clase 4**	**Clase 5**	**Clase 6**	**Clase 7**	**Clase 8**	**Clase 9**	**Clase 10**	**Clase 11**	**Clase 12**
	D3.3												
	D4.1												
KMT	E1.1												
	E1.2		[157-187]										
	E2.1												
	E2.2		[31-225]										
	E3.1												
	E3.2												
	E3.3	[31-166] [19-102] [188-270]	[7-242] [90-11]	[1-57]	[157-214]								
	E3.4					[9-207]			[2-121]	[31-243]	[13-203] [205-419]	[10-298]	[4-128]
	E3.5												
	E4.1						[84-86]					[3-4] [132-384] [131-171]	
	E4.2												
	E4.3												
KMLS	F1.1												
	F2.1												
	F2.2												
	F3.1												
	F3.2												
	F3.3												
	F3.4												
	F3.5												
	F3.6												
	F3.7												
	F3.8												
	F3.9												

Conocimiento de los temas matemáticos

En lo que sigue describimos detalladamente los componentes de conocimiento observados en el profesor Rivera al enseñar el tema de las fracciones, para cada categoría, según los indicadores de conocimiento definidos para el subdominio de *conocimiento de los temas matemáticos*.

Conceptos

La fracción se justifica por la necesidad de ampliar los conjuntos numéricos de los naturales y los enteros. En esta justificación, el profesor parece adoptar una idea de la fracción como medida. Por ejemplo, recuerda que los precios pueden requerir partes, que no se expresan mediante números enteros ("1,20 ó 1,30 euros"). En estas condiciones, si la unidad completa está contenida en la cantidad un número entero de veces, su expresión (medida) se asocia con los números naturales y enteros (positivos), mientras que si la unidad completa no está contenida en la cantidad un número entero y queda un resto inferior a la unidad, dicha cantidad representa una fracción. Por tanto, los números enteros se relacionan con cantidades que no tienen parte decimal, existiendo otros números con valores de magnitud que no son exactos; esta idea lleva a relacionar las fracciones con un conjunto que tiene una representación decimal [**C1**. A1.1. Líneas 8-27].

21.	P	*Cuando nosotros vamos a cualquier tienda, cuando tenemos que pedir cualquier cosa, puede ocurrir, casualmente que nos dé algo exacto. Pero cuando vamos a una tienda la mayoría de las cosas son 1,20 ó 1,30. Es decir, si tomamos como unidad, por ejemplo el euro, generalmente ese euro después lo vamos a tener que romperlo, ¿no es verdad? Se rompe. Por ejemplo, el euro se rompe en 100 céntimos, ¿no es cierto?*
22.	As	*Sí.* [Dos alumnos expresan sí].
23.	P	*Sí, por eso somos capaces de asignarle precios a las cosas ¿Estáis de acuerdo? Así que con los números que hemos visto hasta ahora, muchas de las cantidades que vamos a manejar, no vamos a ser capaces de encontrarle una cantidad asociada a ese número. Vamos a solucionar ese problema.*

La fracción se trabaja como el resultado de fracturar o romper una cantidad en partes iguales. En el ejemplo concreto enunciado por el profesor el euro se "rompe" en 100 céntimos. Esta idea lleva a relacionar la fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$ con el significado de fracción como parte-todo, en el caso del ejemplo la parte de referencia o el todo tiene valor 100 [**C2**. A1.1. Líneas 7-12].

7.	P	*En este tema, fracciones, lo que vamos hacer es fracturar, romper y empezar a trabajar*

con cantidades no exactas, no enteras ¿Y de qué manera fracturamos? Y decíamos ayer que íbamos a representar mediante una fracción que consta de dos números, que el de abajo me indicaba la cantidad de trozos en que yo fracturaba y el de arriba, que se llama numerador, decía cuántos tomaba de cada uno de esos.

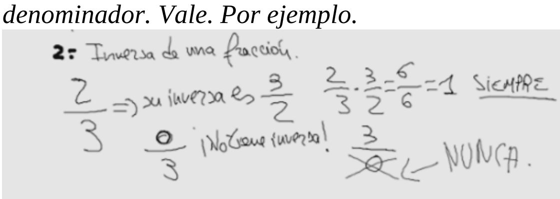
El profesor en algunos subepisodios de clase exhibe **precisión en las definiciones y propiedades** enunciadas. Por ejemplo, conoce las propiedades de equivalencias notables de Q: $a > b$ entonces $\frac{a}{b}$ es mayor que la unidad y si $a < b$ entonces $\frac{a}{b}$ es menor que la unidad. Aunque presenta ejemplos numéricos concretos, bajo el contexto de fracción como parte-todo, explica cada caso fijando una magnitud (longitud), dividiendo segmentos en partes iguales y comparando las partes [**C1**. A1.3. Líneas 103-173; **C2**. Líneas 8-34].

Al trabajar el método de amplificar y simplificar fracciones el profesor indica que sí no es posible simplificar una fracción, entonces se dice que es irreducible. Indicando que el método más directo para encontrar la fracción irreducible es calcular el máximo común divisor (MCD) entre el numerador y denominador, y dividir ambos por la cantidad que indica el MCD. Enuncia que una fracción es irreducible si el numerador y el denominador son primos entre sí, relacionando esta propiedad con que sea uno el máximo común divisor entre ellos. Aunque no profundiza en la idea anterior, el profesor presenta con precisión la definición de equivalencia de fracciones. Diferencia el concepto de número primo de la relación "ser primo con" [**C4**. A1.3. Líneas 28-124].

112. P *O sea que la fracción irreducible no tiene (…), que estar formada por números primos, sino tienen que ser primos entre sí, es decir, cuyo máximo común divisor sea uno.*

El docente conoce que los números fraccionarios tienen inverso, con excepción del cero ("que nunca puede dividirse por cero"). Indica que "la inversa de una fracción consiste en darle la vuelta al numerador y al denominador". Resalta que al multiplicar una fracción por su inversa da como resultado la unidad [**C12**. A1.3. Líneas 186-354].

191. P *Bueno pues. La inversa de una fracción consiste en darle la vuelta al numerador y al denominador. Vale. Por ejemplo.*



El profesor conoce y emplea en su enseñanza elementos de la estructura conceptual de Q, como diversas notaciones (matemáticas, fraccionarias, decimales, verbales), resultados concretos (como $\frac{a}{a} = 1, a \neq 0$; $\frac{a}{1} = a$, y que si $a > b$, entonces $\frac{a}{b}$ es mayor que la unidad,…). También se aprecia conocimiento sobre los significados de fracción como parte-todo, operador y razón, también sobre la forma de establecer la relación de equivalencia, el orden, y la definición y procedimientos para realizar las operaciones con fracciones (suma, resta multiplicación y división).

Define fracciones equivalentes "como aquellas fracciones que tienen el mismo valor o representan la misma cantidad". Mediante el significado de fracción como parte-todo, y apoyándose en la representación figural, se comparan las porciones, para establecer que si dos fracciones dan lugar a la misma porción de un todo, las fracciones son equivalentes [**C3**. A1.3. Líneas 1-260; **C4**. Líneas 1-307].

Establece el orden de dos fracciones mediante ejemplos concretos, representando en figuras divididas en partes iguales, y comparando las partes (bajo el significado de fracción como parte-todo). Comienza ordenando fracciones de igual denominador, estableciendo que es menor la que tiene menor numerador; de igual numerador, llegando a apreciar que es menor aquella fracción que tiene mayor denominador ("cuanto más pequeño es el denominador, estoy rompiendo en menos trozos, por lo tanto los trozos son más grandes"). Por último, para ordenar fracciones con diferentes numeradores y denominadores, convierten a su expresión decimal y comparan números decimales, o bien igualan denominadores de las fracciones y comparan los numeradores.

Respecto de las operaciones con fracciones, el docente introduce la suma y resta con iguales denominadores y distintos numeradores, a partir de ejemplos concretos (numéricos), que representan mediante una figura. Las acciones de agrupar/juntar o quitar/separar partes le permite obtener aquella porción que es el resultado del problema, expresando esa parte por medio de una fracción (símbolo). Luego establecen que para sumar o restar fracciones con iguales denominadores y distintos numeradores se suman los numeradores y se conserva el denominador. Lo mismo para sumar o restar un número entero y una fracción o fracciones con distintos denominadores, se enseña el procedimiento, hallan fracciones con el común denominador a partir del cálculo del mcm y luego suman o restan (método del mínimo común múltiplo).

El producto de fracciones, el profesor lo define informalmente como "multiplicación en línea, los de arriba entre sí y los de abajo entre sí", sugiriendo el procedimiento para realizar el producto de números racionales $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\right)$. Para dividir fracciones, presenta ejemplos concretos e indica dos algoritmos generales para la división de fracciones: "multiplicar en cruz" (productos cruzados) o "multiplicar por el inverso" (inversión de la multiplicación).

La Figura 31 exhibe una síntesis de los conceptos matemáticos que el profesor presenta, relacionados con el tema de las fracciones, que se aprecian a partir de la observación de sus clases.

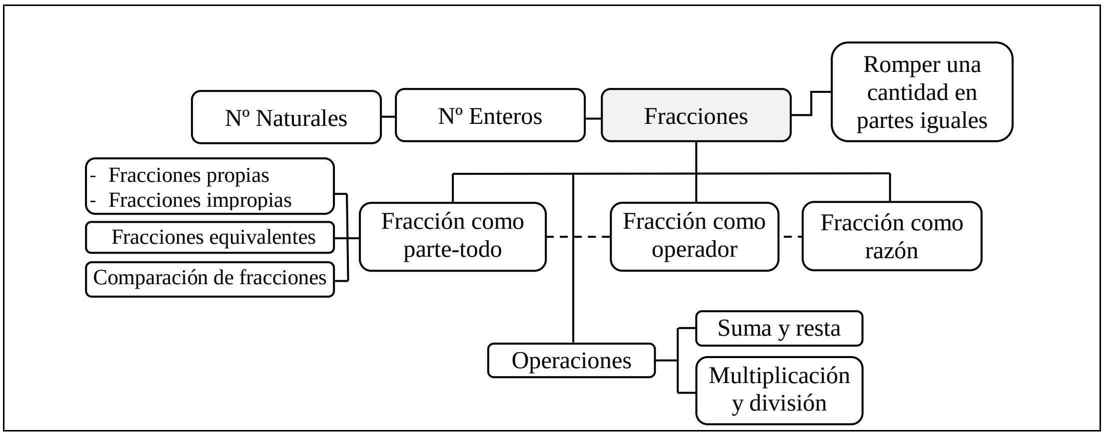
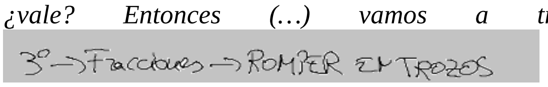


Figura 31. Contenidos matemáticos que el profesor Rivera revela conocer

Fenomenología

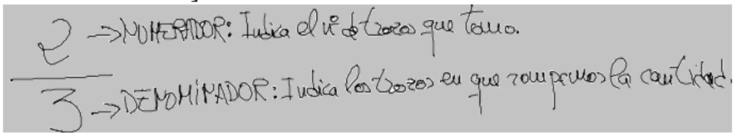
A partir de un ejemplo concreto sobre los precios de objetos (1.20 ó 1.30) el profesor indica que el euro se rompe en 100 céntimos, siendo la idea que lo lleva a enunciar que lo que se hace es "romper la unidad". Es decir, se asocia romper o fracturar con hacer pedazo algo (una unidad, una cantidad) [**C1**. A2.1. Líneas 24-27].

24.	P	*Entonces lo que vamos hacer, es romper, romper la unidad que sea ¿Y cómo se rompe?, pues utilizando las fracciones.*
25.	P	*¿Nunca habéis escuchado hablar, tienen una fractura, por ejemplo?*
26.	A	*¡De tercer grado!* [Un alumno exclama].
27.	P	*De tercer grado, de ligamentos cruzados. Fracturar romper. Fracturar. Y las fracciones van hacer precisamente eso, romper la unidad, o romper en grupos una cierta cantidad, ¿vale? Entonces (…) vamos a trabajar con las fracciones.*



El planteamiento anterior le permite al profesor trabajar la fracción como parte-todo, así el todo o unidad se "rompe" o "fractura" en trozos, introduciéndose la fracción como resultado de la partición de una unidad en partes.

31.	P	*Tienen una fracción de este tipo 2/3, y ¿en qué sentido rompe? ¿Y en qué sentido rompe una fracción? Pues en el sentido que nos indica que hay aquí debajo* [El profesor señala el denominador 3] *de acuerdo.*



Por ejemplo, relaciona la fracción $\left(\frac{2}{3}\right)$ con la acción de romper un todo o unidad (continua) en tres partes, considerando del total dos de esas partes en que se ha dividido la unidad, destacándose que las partes en que se divide la unidad deben ser iguales. Por lo tanto, trabaja la fracción bajo el significado parte-todo, pero también como operador, que fractura, y como medida, en otros momentos, sin diferenciar estos usos [**C1**. A2.1. Líneas 24-62].

45.	P	*Me interesa mucho insistir en esto de aquí ¿Vale*? En qué representa el numerador de la fracción 2/3]. E*sa fracción me está diciendo, que por un lado rompo la unidad o la cantidad en tres grupos iguales, y que me estoy quedando con dos de esos grupos ¿De acuerdo? Por ejemplo, vamos a suponer (…)*

En general, identificamos que se presentan situaciones que van más allá de los enteros, (como los precios), también la fracción se relaciona con fraccionar para expresar las partes de la unidad y se relaciona con la división, como ampliación de la división, más allá de la división entera [**C1**. A2.1. Líneas 174-186; **C2**. Líneas 152-225; **C3**. Líneas 112-140].

El profesor trabaja la fracción como operador que actúa sobre cantidades, expresando una operación multiplicativa respecto de una cantidad. Por ejemplo, "de 20 alumnos de una clase $\frac{4}{5}$ aprobarán, ¿Cuántos alumnos aprobarán?" es una tarea de fraccionamiento en el que se tiene la medida del todo (20) y la fracción $\left(\frac{4}{5}\right)$ y se pide la medida de la porción. Algunos alumnos la resuelven bajo el significado de fracción operador; es decir, expresan la cantidad multiplicativa sobre la cantidad 20 (todo), indicando una división en 5 partes (como indica el denominador) y una multiplicación por 4 (cantidad que muestra el numerador). Esta tarea también permite al profesor trabajar implícitamente el significado de fracción como razón, explicando que al dividir 20 (el todo) en cuatro partes, resulta que "por cada cinco aprueban 4", comparando el cardinal del subconjunto con sus elementos. Estableciendo relaciones como "1 de cada 5" reprueban que es igual a "4 de 20", expresando en ambos casos la idea de fracción como razón; es decir, es como si en el interior de la unidad se mantiene la misma proporción entre todas las muestras de 5 elementos.

Por lo tanto, las situaciones de fraccionamiento le permiten al profesor establecer relaciones entre el todo y la parte, mientras que al trabajar la fracción como razón el índice de comparación es entre dos partes del mismo todo o entre dos cantidades de magnitud ("por cada 5 alumnos aprueban 4") [**C1**. A2.1. Líneas 188-270; **C2**. Líneas 113-118; **C6**. Líneas 87-360].

115. P *Y dice que las chicas son cuatro novenos del total. Quiero que cuando veáis una fracción. Yo quiero que también tengáis en mente esto, que por cada nueve alumnos cuatro son chicas ¿Todo el mundo cuando veis esa fracción piensa eso también? Eso es importante, porque si por cada nueve niños cuatro son chicas ¿Cuántos serán chicos?*

A lo largo de la unidad el profesor presenta tareas que abordan problemas de fraccionamiento, especialmente de tipo directo; es decir, en que se tiene la unidad y la fracción y se pide obtener la porción.

Realiza tareas de fraccionamiento de tipo directo e inverso, prevaleciendo los problemas de tipo directo, es decir, aquellos en que se conoce el todo o unidad y la fracción y se pide obtener la porción [**C4**. A2.1. Líneas 215-305].

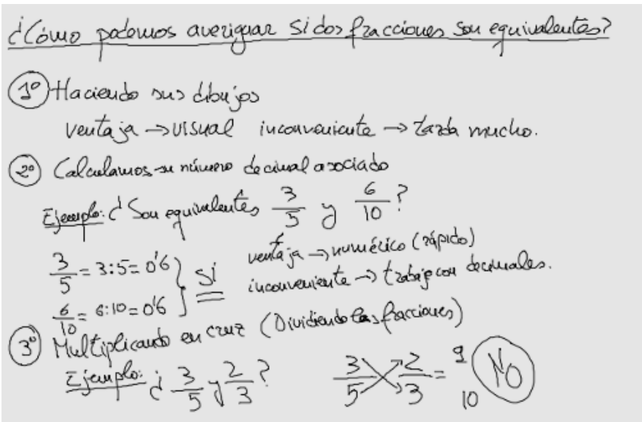
Relacionado con las operaciones con fracciones, para sumar y restar fracciones con distintos numeradores e iguales los denominadores, el profesor interpreta las acciones de juntar o quitar partes de un mismo todo para componer el total.

La multiplicación y la división de fracciones se enseñan a partir de procedimientos particulares. Trabajan un problema multiplicativo de fracción de fracción "Juan se ha gastado $\frac{2}{7}$ de su paga en chucherías y $\frac{2}{3}$ de lo que le queda en una entrada. ¿Qué fracción de dinero le queda?". En el problema se conocen las fracciones $\left(\frac{2}{7}, \frac{2}{3}\right)$, el todo o unidad hace referencia al dinero ganado por Juan y el resultado final está en función del dinero ganado. El profesor lleva a identificar que el dinero que le queda "después de las chucherías es $\frac{5}{7}$", luego a esa cantidad pide obtener los $\frac{5}{7}$ "5/7 es lo que hay que hacerle 2/3", que interpreta como $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$. Esto último lo resuelve como un problema multiplicativo de producto de medidas, representando gráficamente $\frac{2}{7}$ y $\frac{5}{7}$ (una figura dividida en siete partes iguales o congruentes), donde el denominador indica las partes en que se divide (7) la figura y el numerador las partes que se seleccionan, luego de forma horizontal se representan los tercios. El área del rectángulo queda conformado por 21 cuadrados (7×3), entonces el área (intersección) representa la fracción $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{21}$ que corresponde a la cantidad de dinero que se gasta en la entrada. Que es lo mismo que obtener 2 veces la tercera parte de $\frac{5}{7}$ que es la cantidad de dinero que gasta para la entrada $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}\right)$, luego obtienen la cantidad de dinero que le queda $\left(\frac{2}{7} + \frac{10}{21} = \frac{16}{21} \rightarrow queda\ \frac{5}{21}\right)$. Por lo tanto, el profesor da sentido de fracción de fracción a la multiplicación de fracciones.

Procedimientos matemáticos

El profesor tiene **dominio de procedimientos** para identificar fracciones equivalentes, presentando tres métodos: a) representar en el mismo todo, mediante una representación figural (de superficie), b) calcular la expresión decimal asociada y compararlas, y c) dividir las dos fracciones (multiplicando en cruz) si da como resultado uno las fracciones son equivalentes ("[…] si al dividir fracciones el resultado es la unidad esas fracciones son equivalentes, si no es la unidad esas fracciones no son equivalentes. Entonces al tercer método lo llama multiplicación, o multiplicando en cruz […]") [**C2**. A3.1. Líneas 226-242; **C3**. Líneas 141-259; **C4**. Líneas 6-7; **C9**. Líneas 2-17].

259. P



Para buscar fracciones equivalentes a otras enuncia el método de amplificación y simplificación. Relaciona la idea de amplificar con la amplitud o intensidad del sonido, para establecer que las "fracciones también es hacerlas más grande", indicando la operación de multiplicar que "¿[…] hace más grande una cantidad?". Así, amplificar indica multiplicar el numerador y denominador de una fracción por una misma cantidad, siendo la fracción que se obtiene equivalente a la inicial. Para el caso contrario, explica que dividir el numerador y el denominador de una fracción sería equivalente a simplificar. Presenta dominio para amplificar y simplificar distintas fracciones [**C4**. A3.1. Líneas 8-156; **C5**. Líneas 60-209].

11. P *¡Qué lo amplia, claro! Por ejemplo, de lo que han salido más moderno, un iPod ¿Sabes cómo funcionan? Cogen el aparato ese y lo amplifica* [el sonido], *lo hace más grande. Pues en las fracciones también es hacerlas más grande ¿Cómo se hace más grande una cantidad? ¡Multiplicándola!*

Al resolver ejercicios sobre igualar dos fracciones y calcular el término que falta, el profesor **presenta dominio de las operaciones implicadas en el proceso**. Es decir, aplica la propiedad que dice que dos fracciones son equivalentes si se verifica que el producto cruzado es igual (dadas dos fracciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ son equivalentes si y solo sí $a \cdot d = b \cdot c$) [**C4**. A3.1. Líneas 157-214; **C6**. Líneas 51-85].

195. P *Los dos que van atravesados siempre arriba.*

b) $\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$ $=10$ $\quad x = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10$

El profesor conoce que en los problemas de fraccionamiento intervienen tres datos (el todo, la parte o porción y la fracción). Los problemas que se plantean buscan obtener algunas de las partes: a) se debe encontrar la fracción si se conoce el todo y la poción; b) se tiene la porción y la fracción y piden el todo; y c) dan la parte del total y la fracción y piden el todo. En todos los casos el profesor domina las operaciones que se requieren para resolver los problemas. Para el caso c) conoce el procedimiento de "invertir la fracción" (multiplicar por el inverso), y luego operar; prevaleciendo los procedimientos mecánicos [**C4**. A3.1. Líneas 215-305; **C6**. Líneas 87-360; **C8**. Líneas 3-163].

305. P *Y terminar el doce.*

Tª Pb3

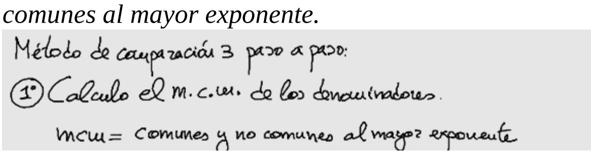
630 prestados → PARTE DEL TOTAL
$\frac{2}{5}$ partes → FRACCIÓN
Tipo 3

Doy la vuelta a la fracción $\frac{2}{5} \longrightarrow \frac{5}{2}$ (Por cada 2 libros prestados en la biblioteca hay 5)

$\frac{5}{2}$ de $630 = \frac{5 \cdot 630}{2} = 1.575$ libros en total

El profesor conoce procedimientos para ordenar fracciones, cuando las fracciones tienen distintos denominadores, a) calculan la expresión decimal asociada a la fracción y comparan decimales e b) igualan los denominadores de las fracciones y comparan según las partes que indica el numerador. Para convertir fracciones a común denominador, el profesor utiliza el procedimiento de amplificación de cada fracción, empleando los denominadores opuestos, y mediante el cálculo del mínimo común múltiplo de los denominadores. Posteriormente, para encontrar los numeradores, establece dos pasos: a) "dividir el mínimo común múltiplo que se ha obtenido entre el denominador" y b) "multiplico por el numerador el resultado obtenido" [**C7**. A3.2. Líneas 19- 304; **C8**. Líneas 102-243; **C10**. Líneas 13-203; **C12**. Líneas 8-86].

183. P *Recuerdo, mínimo común múltiplo se obtiene como: comunes y no comunes al mayor exponente. Luego recuerdo ¿Vale? Mínimo común múltiplo son los comunes y no comunes al mayor exponente.*


Método de comparación 3 paso a paso:
(1º) Calculo el m.c.m. de los denominadores.
mcm = comunes y no comunes al mayor exponente

184. A *¿Eso hay que poner?*
185. P *Pones método de comparación tres, más abajo, los dos ejemplos que hemos hecho, ahora voy a explicar cómo se consiguen, paso a paso.*
186. P *Lo segundo, coloco el mínimo común múltiplo en los denominadores de las fracciones equivalentes, por lo tanto ya tiene el mismo denominador.*

En las clases siguientes el docente explica cómo ordenar fracciones que tienen igual los numeradores, concretando con el ejemplo $\frac{2}{4}$ y $\frac{2}{5}$. Representa las fracciones mediante un modelo de área, indicando que, independientemente del número de partes en que se divide el todo, lo que importa son las partes que se consideran (comparación de superficie). Luego, formula la propiedad, "cuanto más pequeño es el denominador, estoy rompiendo en menos trozos, por lo tanto los trozos son más grandes" [**C9**. A3.2. Líneas 39-243].

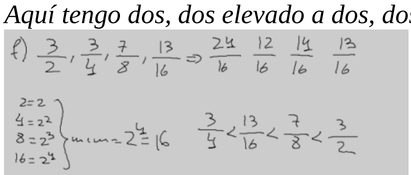
46. P *Muy bien. O sea el número de trozos que estoy poniendo es el mismo, pero claro ¿son iguales los tamaños de cada trozo?*

Para pasar de la expresión decimal finita a la expresión fraccionaria el profesor explica que "se pone un uno en el denominador, y según la cantidad de cifras decimales se consideran los ceros que se agrega a la cifra del denominador". Aunque no justifica esta conversión, se aprecia que domina el procedimiento de pasar de expresión decimal finita a fracción, centrándose en procedimientos sistemáticos [**C2**. A3.1. Líneas 203-225; **C3**. Líneas 58-111].

120. P *[…] es muy sencillo porque solamente tenemos que hacer esto que yo le explico aquí, en el denominador ponemos un uno y contamos cuantas cifras hay detrás de la coma ¿Cuántas cifras hay aquí Alex?*

Mediante la descomposición en factores primos calculan el mínimo común múltiplo, indicando que se "eligen los comunes, con el exponente más grande". El profesor domina el procedimiento basado en la descomposición en factores primos, para encontrar el mcm, que luego aplica para obtener fracciones con común denominador [**C10**. A3.2. Líneas 13-203].

176. P *Aquí tengo dos, dos elevado a dos, dos elevado a tres y dos elevado a cuatro.*



177. A *Dos elevado a cuatro.*
178. P *El mayor y ya está. Dieciséis, muy bien, dieciséis, dieciséis pues lo mismo.* [El profesor va poniendo la línea de la fracción y su denominador tantas veces el número de fracciones tenga inicialmente].

Para sumar y restar fracciones con igual denominador suman o restan los numeradores, conservando el denominador. El profesor relaciona los cálculos realizando las operaciones mediante una representación con el modelo de área, identificando sumar con juntar, y restar con quitar partes de un mismo todo. También suma y resta un número entero y una fracción a partir de convertir el número entero en fracción, luego mediante el cálculo del mcm igualan los denominadores. Para sumar fracciones con distintos denominadores el profesor explica el método del cálculo del mínimo común múltiplo (mcm). Primero, calculan el nuevo denominador de las fracciones, que será el mcm, y el numerador de cada fracción se obtiene dividiendo el mcm por el denominador de cada fracción y ese resultado se multiplica por el numerador, luego hacen las operaciones correspondientes. Observamos que el profesor domina los procedimientos enunciados para sumar o restar fracciones [**C10**. A3.2. Líneas 207-419; **C11**. Líneas 10-298; **C12**. Líneas 7-140].

306. P *Ahora lo que yo quiero que entendáis es éste signo igual de aquí* [alude a la expresión 3/5+7/10=6/10+7/10]. *Tiene sentido. Es igual sumar estas dos fracciones* [3/5+7/10] *que sumar estas dos* [6/10+7/10].

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{10}=\frac{6}{10}+\frac{7}{10}=\frac{13}{10}$$

307. A *¿Por qué?*
308. P *Por qué son equivalentes, he cambiado la fracción por una que vale lo mismo, por lo tanto yo sigo haciendo la suma que me habían planteado con distinto aspecto, pero sigue siendo la misma suma.*

Para el caso de la multiplicación y división de fracciones apreciamos que el profesor domina los procedimientos detallados. Para la multiplicación expresa que se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador (“multiplicación en línea”, “los de arriba entre sí y los de abajo entre sí”). Para dividir fracciones describe dos procedimientos a) “no dividimos en cruz, multiplicamos en cruz” y b) “multiplicar por el inverso”. Prevalecen los procedimientos matemáticos en las operaciones multiplicativas con fracciones.

147. P *Es decir. Lo vamos a ver directamente con ejemplos.*

Multiplicación y división de fracciones

1- Multiplicación:

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 4}=\frac{15}{28}$$

Sistemas de representación

El profesor **conoce distintos sistemas de representación relacionados con el tema**: verbal en forma numérica (de fracción y decimal); y figural, que emplea a lo largo de la enseñanza de las fracciones [**C1**. A4.1. Líneas 31-61].

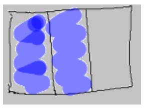
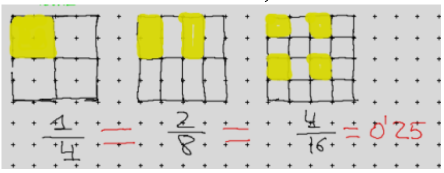
Dos tercios	$\frac{2}{3}$ 2 → NUMERADOR: Indica el nº de trozos que tenía 3 → DENOMINADOR: Indica los trozos en que rompemos la cantidad	

Figura 32. Representaciones empleadas en las clases

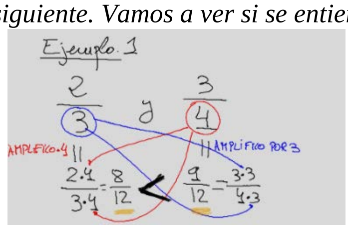
Por ejemplo, al trabajar la equivalencia de fracciones enuncia tres métodos: representar en una figura, calcular la expresión decimal asociada y comparar las cantidades, y aplicar el procedimiento de “multiplicar en cruz”. Los procesos descritos permiten trabajar diferentes sistemas de representación: verbal, numérico ($\frac{a}{b}$ como fracción y decimal) y figural (continuo). Explica cada método para establecer la equivalencia, utilizando todos los sistemas de representación, lo que muestra que los conoce y relaciona entre sí, como expresiones de la misma idea [**C5**. A4.1. Líneas 9-207].

11. P *Después de representarlas nos dimos cuenta de que en todas, la cantidad que se estaba sombreando de amarillo, eran la misma.*



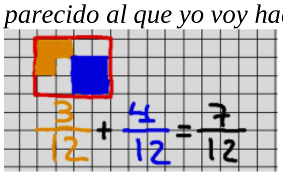
Al ordenar fracciones trabajan la representación verbal, figural y numérica, esta última como fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$ y en su expresión decimal. La representación figural, mediante el modelo de área o de longitud, la emplea para "justificar" las propiedades que formula aludiendo a la expresión simbólica en forma de fracción (en las fracciones que tienen los mismos denominadores y distintos denominadores son mayores aquellas en que el numerador es mayor). Es decir, al representar mediante el área de una figura (significado parte-todo), son mayores las fracciones en que se considera una mayor cantidad de partes. El empleo de la representación figural es temporal, sirve para justificar, pero posteriormente, la ordenación de fracciones se realiza mediante un trabajo puramente simbólico sin volver a la imagen concreta [**C7**. A4.1. Líneas 19- 304; **C8**. Líneas 125- 201].

204. P *Vamos a ver un ejemplo. Entonces las fracciones que teníamos ahí de antes,* $2/3$ *y* $3/4$. *La idea es la siguiente. Vamos a ver si se entiende. Vamos a ver.*



Para sumar o restar fracciones cuando tienen el mismo denominador suman o restan los numeradores y mantienen el denominador, operando numéricamente. Luego, se representa mediante el modelo de área la fracción $\frac{3}{12}$, y mediante la acción de juntar (o quitar) otra cantidad (4) se obtiene la cantidad final $\frac{7}{12}$ [**C10**. A4.1. Líneas 204-242; **C11**. Líneas 8-27].

207. P *Entonces, como ustedes tenéis la hoja de cuadritos, quiero que hagáis un dibujo parecido al que yo voy hacer. ¿Vale?*



208. P *Tiene tres hacia abajo y cuatro hacia la derecha. Quiero que me digáis cuántos*

cuadrados hay en el interior.

También relaciona las representaciones numéricas, considerando que las fracciones admiten una representación decimal que se obtiene dividiendo el numerador por el denominador. Relaciona los sistemas de representación numérico-verbal, numérico (como fracción $\frac{a}{b}$ y como expresión decimal) y figural (modelo de área o longitud, en contextos continuos), con otros modelos continuos y discretos [**C1**. A4.1. Líneas 31-61; **C2**. Líneas 150-225]. También emplea la representación en porcentajes (25%), identificándolos cuando es 100 la unidad o valor del todo.

Aspectos de comunicación matemática

El profesor realiza **una lectura correcta de las fracciones**, indicando que se pueden leer enunciando primero el numerador y después el denominador, pero desde el 11 en adelante el denominador toma el nombre del número seguido del sufijo “avos” [**C1**. A5.1. Líneas 90-93].

Destaca la importancia de ser preciso al trabajar con las igualdades. Aunque las expresiones $\frac{2}{5}$; $2{:}\,5$ y 0,4 no son iguales, el profesor explica a los estudiantes que representan lo mismo, siendo transcendental el signo igual. Por tanto se aprecia que emplea el signo igual para expresar su equivalencia entre formas de representación, con lo que quiere aludir a estas formas como que representan la misma cantidad, evitando el sentido de igualdad como identidad de una manera consciente [**C2**. A5.1. Líneas 153-224].

159. P *Vuelvo a insistir una cosa, en matemática, el signo igual solamente se puede usar cuando lo que hay a la derecha y a la izquierda son cosas iguales ¿Qué me está diciendo esto? Qué la fracción dos quintos es lo mismo que esto, es decir, es igual dos quintos que 0,4, es la misma cosa.*

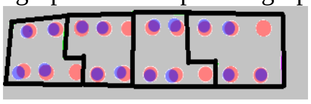
Respecto a **conocer expresiones cotidianas relacionadas con las fracciones** el profesor emplea las fracciones para expresar medidas (“un cuarto de kilo son 250 gramos”, “cuarto y mitad, un cuarto de kilo y la mitad del kilo que sería 375 gramos”, “¿Cuántos minutos tiene una hora?”, “¿Y un cuarto de hora será entonces?”), especificaciones que son parte de las tareas planteadas en clase, en las cuales se necesita conocer las equivalencias de otras unidades. Emplea los símbolos asociados a las unidades de medidas y hace explicito cómo se abrevia cada unidad [**C3**. A5.1. Líneas 24-347; **C3**. A5.2. Líneas 25-46].

25. P *Y el problema 12, nos dice aquí en un cartel que el boquerón cuesta 5,4 euros el kilo. Sabéis que* €/kg *esto se lee euros el kilo.*

Tareas matemáticas

El profesor **conoce situaciones que ponen de manifiesto los distintos significados de las fracciones**, especialmente trabaja la fracción como procesos de partición de una cantidad numérica que permite divisiones discretas. Por ejemplo, a partir de una situación de fraccionamiento en que el todo es 20 alumnos y la fracción $\frac{1}{5}$, mediante la actuación del operador, encuentran la medida de la parte [**C1**. A6.1. Líneas 188-254]. Para expresarlo emplea las representaciones de áreas o de conjuntos de puntos que le permiten asociar las acciones numéricas con acciones reales en los modelos (agrupar/ juntar).

232. P *Me dice, que por cada cinco alumnos, cuatro van a aprobar, entonces uno, por ejemplo, Luis internamente ha hecho, voy a coger grupos de cinco, por ejemplo* [el profesor va agrupando en la pizarra grupos de cinco de la colección de 20 puntos].



Las tareas de fraccionamiento también le permiten al profesor trabajar la fracción como razón, relacionando dos cantidades o conjuntos de unidades. Estableciendo diferencia entre $\frac{4}{5}$ como fracción y como razón, cuando se tiene la fracción se alude a $\frac{4}{5}$ como cantidad: “cuatro quintos”, y como razón como la comparación entre los números 4 y 5: “cuatro de cada cinco”, “por cada 5 alumnos aprueban 4” (comparándose partes del mismo todo).

El profesor presenta tareas que permiten trabajar las fracciones sobre cantidades discretas, bajo la interpretación parte-todo, en un contexto de medida para comparar cantidades del mismo tipo. Trabajan la fracción como cantidad, indicándose que el “todo” en el cual actúa la fracción puede ser cualquier cantidad. Las tareas de fraccionamiento permiten indicar que la unidad depende del contexto de trabajo; es decir, una unidad puede referirse a la cantidad de elementos de un conjunto o a los elementos por separados. En el ejemplo descrito la fracción “uno de cada cinco alumnos reprueban” es de razón, y se aplica para indicar que “1 de cada 5 es igual a 4 de cada

20”, cambiando la unidad (5 en el primero, 20 en el segundo) [**C1**. A6.1. Líneas 188-204].

188.	P	*Hasta ahora hemos estado hablando de fracciones respecto a la unidad. Con respecto a la unidad. Lo que pasa es que el concepto de unidad, la idea de unidad, depende un poco de lo que se está hablando. Por ejemplo cuando yo hablo del grupo primero, nosotros como grupo formamos una unidad ¿No es cierto?*

Un problema multiplicativo de fracción de fracción, que se presenta a lo largo de la unidad, también permite reconocer que el todo o unidad varía. En algunos casos se puede pedir la fracción en función del total (todo) o bien en función de una parte del total, cambiando el referente [**C12**. A6.1. Líneas 1-244].

219.	P	*En chucherías. Muy bien. Y luego si seguimos leyendo el problema, me dice que dos tercios, ¿pero esos dos tercios con respecto a qué se está hablando?*
220.	A	*¡De los chuches!*
221.	P	*¿De la paga o de lo que le queda?*
222.	As	*De lo que le queda.*

Como indicamos anteriormente, el profesor presenta tareas de fraccionamiento de tipo directo e inverso, prevaleciendo los problemas de tipo directo (se conoce el todo o unidad y la fracción y se pide obtener la porción). Presenta algunos problemas aditivos de combinación o composición y de cambio por diferencia. Por ejemplo, “María ha gastado $\frac{3}{4}$ de dinero que tenía en un libro y $\frac{1}{5}$ en refresco ¿Qué parte de dinero ha gastado?, ¿Y qué parte le queda?”. La acción juntar/agregar, representada por la adición, lleva a este tipo de problema a combinar los enunciados $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)$. Un problema de cambio de diferencia que plantea el profesor es “Marta ha comprado $\frac{3}{4}$ kilo de queso y le da a su vecina $\frac{1}{3}$, ¿qué fracción de kilo le queda?”, en que se tiene una cantidad inicial $\left(\frac{3}{4}\right)$, luego a ella se le quita otra cantidad $\left(\frac{1}{3}\right)$, obteniéndose una cantidad final $\left(\frac{5}{12}\right)$ [**C2**. E3.3. Líneas 90-111].

A lo largo de la unidad, identificamos que el profesor presenta un problema multiplicativo de fracción de fracción, que relaciona con el producto de medidas (buscar el área de un rectángulo).

En general, las tareas matemáticas se enuncian en contextos personales; es decir, tienen relación con las actividades diarias de los alumnos (amigos, compra de combustible, viajes, dinero, gastos, cantidad de árboles, etc.).

Respecto al **sentido dado al contenido matemático** el profesor mediante un ejemplo que implica multiplicar un número natural por una fracción menor que uno, comprueba el resultado de la operación según su representación figural ("Sí. Por lo menos que nos quedé un poco más claro porqué multiplicamos"). Presenta el ejercicio $2 \cdot \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, luego se representan en una figura los $\frac{4}{12}$, bajo el significado de fracción como parte-todo, así mediante la acción de dividir en dos partes los $\frac{4}{12}$ se obtiene el doble de partes . Por lo tanto, el profesor mediante ejemplos concretos y representando en figuras divisibles busca dar sentido a los conceptos y procedimientos matemáticos. Por ejemplo, para sumar y restar fracciones con igual numeradores y denominadores, representan en una figura cada fracción, y mediante la acción de juntar o quitar partes de un todo (de la figura) reúnen o sustraen porciones; expresando la cantidad resultante por medio de una fracción [**C12**. A6.3. Líneas 158-184].

Conocimiento de la estructura de las matemáticas

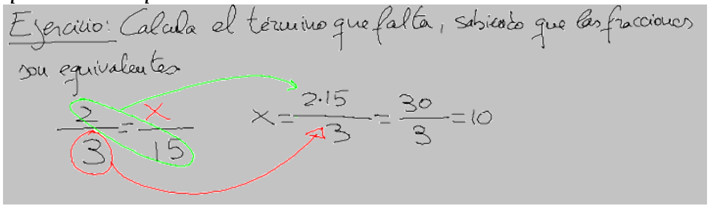
Presentamos algunas conexiones conceptuales y relaciones entre los sistemas de representación que se evidencian a lo largo del proceso de enseñanza del tema de las fracciones. Además las distintas relaciones presentadas entre los contenidos matemáticos que enseña y los de otros niveles escolares.

Relaciones entre componentes de la estructura conceptual

En general, el profesor hace conexiones temporales enlazando los conocimientos previos con los estudiados. Por ejemplo, al presentar tareas de fraccionamiento (de tipo directo e inverso), en contextos personales, emplea factores de conversión de unidades de medidas concretas: tiempo (horas-minutos), longitud (kilómetros-metros) y masa (kilogramos-gramos). Tema que se relaciona con los contenidos de tercer ciclo del *Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes*, *las equivalencias entre unidades de una misma magnitud* (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) [**C3**. B1.1. Líneas 25- 47].

También, el profesor relaciona la igualdad de fracciones (fracciones equivalentes) con problemas de valor ausente; es decir, situaciones en el cual se tienen tres cantidades de una proporción y se debe encontrar la cuarta cantidad de modo que la igualdad sea verdadera. Aunque el profesor no habla de la proporcionalidad (igualdad de dos razones), esto conduce a la enseñanza de este contenido [**C4**. B1.1. Línea 185; **C6**. B1.1. Línea 70-83].

157. P *Calcula el término que falta sabiendo que las fracciones son equivalentes. Como digo este ejercicio, para el segundo semestre, donde vamos a trabajar la razón de proporcionalidad. Las razones, que también se puede entender una fracción como una razón. Ejercicios como este vamos a hacer muchísimos. Imaginaros que yo les digo que dos tercios es lo mismo que una fracción de éste tipo* [x/15] *y ustedes tenéis que decirme quién es la equis.*



Establece correspondencia entre el orden de las fracciones y el orden de los números naturales y enteros, contenidos previos estudiados. Aunque en su clase no profundiza al respecto, alude a ello, mostrando que conoce que la relación de orden de estos conjuntos numéricos se extiende a Q [**C7**. B1.1. Línea 19-58].

El profesor conecta las operaciones de números enteros con las operaciones con fracciones: "Pues con fracciones es exactamente igual. A ver, cuando tengáis un problema de fracciones y no tengáis muy claro qué tenéis qué hacer, quiero que penséis en un problema con números [naturales]. Y las mismas operaciones que saquen con los números, son las que hay que hacer con las fracciones. ¿Ha quedado claro en éste ejemplo?".

En el transcurso de la enseñanza se produce un aumento progresivo de la complejidad del contenido. Por ejemplo, comienza empleando el significado de la fracción como parte-todo, y este principio le sirve para nuevos aspectos, como la equivalencia, el orden, etc. También le permite introducir los porcentajes, indicando en este caso que la parte de referencia o el todo tiene valor 100. Igualmente, la comparación entre dos partes de un todo o cantidades lleva a la idea de fracción como razón, complejizando el significado de fracción como parte-todo. En algún ejercicio razona de manera proporcional, identificando relaciones multiplicativas entre dos cantidades, mostrando una forma de concebir la fracción que va más allá de partir en partes iguales y tomar algunas de ellas [**C1**. A6.1. Líneas 188-254].

Apreciamos que el profesor establece **relaciones o conexiones entre elementos de la estructura conceptual**. Por ejemplo, genera correspondencias entre distintos tipos de representación: numérica de fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$, expresión decimal (de hasta tres dígitos decimales), verbal (en varias formas, tres de cinco, o tres quintos, por ejemplo), y representación figural mediante modelos de área y de longitud (como parte-todo), y como porcentajes. Indica que las fracciones admiten una representación decimal, el porcentaje como una relación entre dos cantidades en el cual se tiene 100 como denominador común [**C2**. B1.2. Líneas 158-225; **C3**. Líneas 58-140].

Los problemas inversos en que se tiene la unidad y la porción y se busca obtener la fracción, si bien muestran situaciones de relación parte-todo, a veces le sirven al profesor para aludir a proporcionalidad, con lo que introduce la fracción como razón, al establecer correspondencia entre dos partes de un todo o entre cantidades.

Conocimiento de las prácticas matemáticas

Aunque el profesor alude en diversos momentos a elementos matemáticos y destaca la importancia de su uso, a lo largo de las sesiones de clase observamos en menor presencia el subdominio de conocimiento de las prácticas matemáticas. Solo identificamos un episodio en el que se vislumbra que el profesor tiene conocimiento del modo de proceder en matemática. En este caso, da especial importancia a los pasos que hay que dar para determinar el valor de un término de una fracción, para que sea equivalente a otra dada. La secuencia que sigue y explicita es la siguiente:

1º Partiendo de la premisa de que las fracciones son equivalentes ("[…] Tengo la información que estas fracciones son equivalentes").

2º Se aplica la definición de que si dos fracciones son equivalentes se verifica que el producto cruzado es igual, es decir, dos fracciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ son equivalentes si y solo sí $a \cdot d = b \cdot c$ ("multiplicando en cruz y comprobando que nos daban lo mismo").

3º Se obtiene el valor de la incógnita ("[…] Y nuestro objetivo en este ejercicio es averiguar cuál es esa letra.").

4º Se comprueba la solución.

El razonamiento expresado por el profesor muestra una de las formas de proceder en matemáticas. Se sigue una secuencia de pasos lógicos, partiendo de una premisa inicial, aplica una definición y se llega a la conclusión [**C6**. C1.1. Líneas 35-72].

36.	P	*La cuestión era esa, María. Nosotros tenemos dos fracciones que son equivalentes. ¿De acuerdo? En algunas de las dos fracciones o bien el numerador o el denominador, no importa, no me lo dan. Entonces para eso, en general en matemáticas, para eso se usa la letra equis. Se le podría poner cualquier letra. Y nuestro objetivo en este ejercicio es averiguar cuál es esa letra.*
37.	P	*¿Qué información tengo? Tengo la información que estas fracciones son equivalentes, y al ser equivalentes, se debe cumplir. ¿Recordáis las tres formas que teníamos para ver si eran equivalentes?*

El profesor destaca que para resolver la tarea es importante comprender el problema (¿qué datos se tienen y qué se pide?), buscar estrategias para resolverla y hacer la verificación, fases similares del proceso de resolución de problemas definidas por Pólya. Además, promueve que los estudiantes empleen este esquema en sus razonamientos.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas

A continuación resumimos las apreciaciones sobre los apartados del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, empleando las categorías definidas. Comenzamos por exponer el conocimiento de las características de aprendizaje, luego los errores y dificultades posibles, las tareas matemáticas abordadas y, por último, los materiales y recursos utilizados en el proceso de instrucción.

Características de aprendizaje

El indicador responde a la necesidad del profesor de **conocer el modo de pensar de sus estudiantes** para afrontar las tareas matemáticas escolares que propone en su enseñanza. Considerando que el estilo de enseñanza del profesor se centra en exponer el tema, dando pocas ocasiones a que los estudiantes comuniquen sus ideas, esto nos ha llevado a identificar escasos episodios de clase en los que el profesor interactúe con sus estudiantes y pueda apreciar sus reacciones a la exposición.

Destacamos un subepisodio de clase en el que el profesor considera la respuesta de un estudiante que indica “que las fracciones con denominador 100 son porcentajes”. Aprovecha esta afirmación, que lo lleva a identificar que las fracciones también representan a un porcentaje cuando sugiere 100 como la unidad. De esta forma relaciona el significado de fracción como parte-todo, aceptando que tiene una expresión como porcentaje, cuando la parte de referencia o todo tiene un valor 100 [**C2**. D1.3. Líneas 218-225].

218. P *Escuchemos la pregunta de Manuel, que es muy bueno. Me ha preguntado, si 25 dividido entre 100 da un porcentaje. Efectivamente, todas las fracciones que tienen denominador100, representan un porcentaje, de hecho ¿qué porcentaje seria esto?* [$0'25 = \frac{25}{100} = 25\%$].

El profesor tiende a repetir los procedimientos y propiedades matemáticas para que los estudiantes recuerden las ideas, previamente a la resolución de algunas tareas. Por ejemplo para representar en una figura una fracción impropia, indica “cuándo el numerador es mayor que el denominador, estoy tomando cantidades más grandes que la unidad”. Esta forma de proceder del profesor lleva a que los estudiantes no incurran en errores y ejecuten los procedimientos directamente.

Errores y dificultades

Sobre **conocer los errores y las dificultades que los estudiantes pueden presentar en la aplicación de conceptos y procedimientos**, indicamos aquellos aspectos que el profesor hace explícito al enseñar el tema de las fracciones.

El profesor identifica que, a veces, los alumnos realizan el fraccionamiento de una cantidad (por medio de una fracción-operador), confundiendo el multiplicador y el divisor; es decir, efectúan las operaciones de multiplicar y dividir sin respetar el papel de los términos de la fracción [**C2**. D2.1. Líneas 73-79]. También reconoce el error que incurren los estudiantes al pasar de una fracción a su notación decimal, en el cual tienden a dividir el denominador entre el numerador, especialmente cuando una cantidad es múltiplo de otra, o bien para obtener resultados mayores que la unidad [**C2**. D2.1. Líneas 152-225]. Con ello muestra que comprende el papel de obstáculo que tiene la división entera, para el caso de la operación en los números racionales.

156. P *Fijaros por favor, en el orden que se hace la división, se divide el numerador entre el denominador. Muchas veces, inconscientemente hacemos 5 entre dos, porque tenemos la tendencia entre dividir el número más grande entre el pequeño, y no es así. ¿Vale? Siempre es el que está arriba dividido por el que abajo, aunque me de cero como algo, no importa ¿De acuerdo?*

El profesor conoce una de las dificultades comunes que presentan los estudiantes al sumar o restar fracciones con el mismo denominador, que consiste en que tienden a sumar o restar los numeradores y los denominadores [**C10**. D2.1. Líneas 205-234].

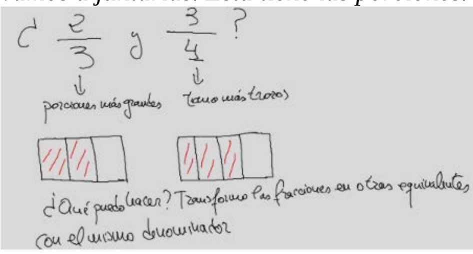
234.	P	*Luego, no por favor, ¡no me sume! No me digas que después de la suma está roto en veinticuatro trozos. No tiene sentido. Nos pasa una vez y después no se olvida. Está roto en doce trozos. Ahora eso sí, lo de arriba sí se suma* [explica la suma de las fracciones $\frac{3}{2} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$].

Los estudiantes indican que la fracción $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{3}{4}$, ya que al representarlas en una figura, una de ellas se divide en 3 y la otra en 4 partes iguales, por lo que las partes de la figura que representa a $\frac{1}{3}$ son más grandes que las de $\frac{1}{4}$. El profesor identifica el error y hace notar que el orden de las fracciones se determina por la consideración de los dos términos que la forman, sus numeradores y denominadores. Advierte que un mayor número de partes (numerador) puede compensar un menor tamaño de cada parte (denominador) y viceversa. El profesor explica que "aquí como estoy cogiendo menos trozos, aunque sean más pequeñitos, estoy cogiendo más cantidad. ¿Sí o no?" Detectando que los alumnos cometen el error de no considerar más que alguno de los elementos de la fracción.

También se aprecia esta situación cuando trabajan el orden de fracciones y la equivalencia, por ejemplo, al comparar las fracciones $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$. El profesor **efectúa explicaciones a los estudiantes** que buscan que razonen en términos de la relación entre el numerador y el denominador, y no uno solo de ellos. Para esto propone que adquieran rápidamente el procedimiento de convertir las fracciones a común denominador y luego comparen los numeradores ("lo que quiero primero es que aprendéis el proceso mecánico; es decir, ¿aquí amplificaremos por quién?") [**C7**. D2.4. Líneas 100-304].

115.	P	*Ahora, ¿qué ocurre si no tienen el mismo denominador? Por ejemplo, ¿qué ocurre si queremos comparar 2/3 y 3/4?*
116.	A	*¿Qué sería más grande, 2/3?*
117.	P	*¿Quién pensáis que es mayor?*
118.	A	*Dos tercios.*
119.	A	*Dos tercios.*
120.	A	*Dos tercios.*
121.	P	*Pensáis que es mayor 2/3 ¿por qué?*
122.	P	*Vamos a ir uno a uno, ¿Por qué pensáis que es mayor 2/3?*
123.	A	*Porque si ponéis una tarta y la dividimos entre tres, como dos. Y si la dividimos entre cuatro, el trozo más grande es de 2/3.*

124. P *Tú dices que si divido en tres y cojo 2 es más grande.*
125. A *Sería lo mismo, pero las porciones serían más grandes esas.*
126. P *¿Qué porciones? Vamos a empezar por eso, esa es muy buena observación. ¿Dónde serían más grandes las porciones, aquí o aquí?* [Indicando 2/3 y 3/4].
127. A *En dos tercios.*
128. A *En 2 partido por 3.*
129. P *En dos partido por tres las porciones serían más grandes. Porque hay menos trozos ¿no?*
130. P *¿En eso estáis de acuerdo? Muy bien. O sea que estas porciones son más grandes, vamos a juntarlas. Esta tiene las porciones. Muy bien.*



El profesor detecta la dificultad que encuentran los alumnos al trabajar la suma y resta de fracciones con números enteros, como $1 - \frac{3}{5}$. Tiene recursos para explicar la situación, indicando que 1 equivale a "uno partido por uno", ya que la unidad no se ha troceado, entonces "hay un único trozo" y "cuando no hay división de ese trozo, entonces hay un trozo". El profesor explica la situación procediendo a considerar la inclusión de Z en Q, y pasando a operar en este último conjunto, pero advirtiendo que esto no es un convenio, sino que corresponde con la idea de fracción (partir en alguna cantidad de partes iguales y tomar algunas de ellas) [**C11**. D2.4. Líneas 273-298; **C12**. Líneas 4-140; Líneas 4-8].

273. P *Ahora en el apartado b. Tenéis uno menos tres quintos.*

$$\text{b)}\ \frac{1}{1} - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

274. P *Es exactamente igual, uno partido por uno, menos tres quintos.*
275. P *En el c, tenéis dos más dos partidos por siete. ¿Pues ese dos qué denominador llevará?*
276. A *Dos.*
277. P *¡Uno!*

$$\text{c)}\ \frac{2}{1} + \frac{2}{7} = \frac{14}{7} + \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$$

278. P *Uno porque yo sigo sin romper, sin trocear la unidad. Dos partido por uno, si tu Juan no lo rompes y coges dos, ¿qué estás cogiendo? Dos unidades, dos por cada uno. Vale. Dos partido por uno.*
279. P *¿Se entiende ahora Ema?*
280. P *O sea que siempre que me aparezca un número sin denominador, como me indica que no he troceado la unidad habrá por cada unidad un trozo. Por lo tanto, el denominador es uno.*

Tareas matemáticas

El profesor a lo largo de la unidad **presenta tareas que permiten reforzar o practicar distintos procedimientos matemáticos**. Por ejemplo, enuncia numerosos problemas de fraccionamiento de tipo directo e inverso, en el que intervienen dos cantidades (el todo y la parte) y la fracción que surge de la relación entre las dos cantidades. Los problemas de fraccionamiento le permiten al profesor reforzar que las partes en un fraccionamiento deben ser iguales (equitativas). También le permiten emplear distintos datos, lo que lleva a destacar que es importante reconocer qué indica cada cantidad, los datos que surgen de la tarea y reconocer aquellos que se piden (el total, la parte o es la fracción). Refuerza el proceso de instrucción con una serie de tareas de fraccionamiento que conducen a los estudiantes a identificar cada cantidad: $\frac{a}{b} de\ c = x \rightarrow x = \frac{ac}{b}$, $\frac{a}{b} de\ x = d \rightarrow x = \frac{db}{a}$ o $x\ de\ c = d \rightarrow x = \frac{d}{c}$, prevaleciendo los problemas de tipo directo [**C3**. E3.3. Líneas 1-57].

Regularmente para la resolución de tareas el profesor promueve su representación en varios registros, especialmente empleando la representación figural de área o de longitud, para que no se reduzca su interpretación a las acciones simbólicas y para que tengan sentido. Por ejemplo, en tareas de fraccionamiento, busca que los estudiantes relacionen las distintas cantidades, el todo y la parte, e interpreten si el todo es continuo o discreto por medio de una figura, en la que pueden actuar para determinar tanto los términos como la fracción. Igualmente ocurre cuando trabaja las fracciones equivalentes y la comparación de fracciones, comparando las partes o porciones. También acude a este procedimiento para las operaciones de suma y resta con igual denominador, comparando las partes respecto de un mismo todo. Las representaciones por medio de áreas de figuras, de longitudes de segmentos o de conjuntos discretos de puntos, como apoyo que dan mayor sentido para introducir los distintos conceptos matemáticos relacionados con fracciones. El profesor llega a conceder tanta importancia a esta representación, que recurre a ella para establecer la validez de la respuesta obtenida por procedimientos simbólicos.

Materiales y recursos

El profesor a lo largo de la enseñanza del tema **emplea escasos materiales y recursos didácticos**, centrándose en el apoyo visual que ofrece la pizarra, en la que realiza figuras, pero también esquemas que le permiten, tanto representar los datos de un modo gráfico, como realzar los razonamientos que realiza. Hay que destacar el buen uso que realiza de la pizarra, escribiendo incluso con tizas de colores, y cuidando expresar con palabras los pasos y resultados que quiere resaltar.

Apoya el proceso de instrucción con un software (*Máxima*) que permite a los estudiantes revisar o verificar la solución obtenida en las distintas tareas de cálculo. El profesor propone gran cantidad de tareas basadas en ejercicios de cálculo, el programa lleva únicamente a corregir los resultados, limitando los aportes de refuerzo o revisión que, por ejemplo, si aborda desde la pizarra.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

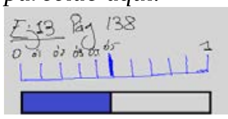
En este subdominio de conocimiento indicamos las estrategias de enseñanza que hemos detectado que conoce el profesor y que le permiten desarrollar contenidos conceptuales y procedimentales. También, los tipos de representaciones empleadas para la enseñanza, las tareas planteadas y los materiales y recursos didácticos que llevan a hacer comprensible el contenido matemático.

Estrategias

El profesor introduce la idea de fracción recurriendo a los conocimientos anteriores de los alumnos. Para ello, explota los términos que se utilizan, para decir que una fracción resulta de “fracturar” o “fraccionar”. Igualmente la relaciona matemáticamente con las operaciones multiplicativas, especialmente con la división, lo que le facilitará buscar la expresión decimal de la fracción (en sesiones posteriores). En su discurso alude a estos conocimientos previos para sentar las nuevas ideas sobre elementos que los alumnos ya dominan. Igualmente, introduce los otros contenidos que enseña aludiendo a conocimientos previos, como las operaciones con números enteros (a lo que llama “números”, para diferenciarlos de las fracciones).

La tarea de pasar de una fracción $\left(\frac{1}{2}\right)$ a su representación decimal $(0{,}5)$ no solo se queda en “dividir el numerador entre el denominador y obtener el decimal asociado”, sino que el profesor representa en la recta numérica el decimal $0{,}5$ y lo relaciona con la representación figural (rectángulo). Así, la fracción $\frac{1}{2}$ en la recta numérica se asocia con un punto situado sobre la recta numérica en la que cada segmento unidad se ha dividido en partes congruentes, lo que lleva a comprobar que los números que aparentemente son distintos representan la misma cantidad (trabajando la idea de fracción como medida). De la misma tarea obtiene la fracción equivalente $\frac{5}{10}$, al indicar que la unidad se divide en 10 partes iguales. La representación figural permite al profesor mostrar en qué casos las fracciones representan la misma porción, reforzando distintas formas de representar una fracción [**C2**. E1.2. Líneas 157-187].

170. P *¿Cómo se escribiría el número decimal asociado? Voy a empezar a dibujar algo parecido aquí.*

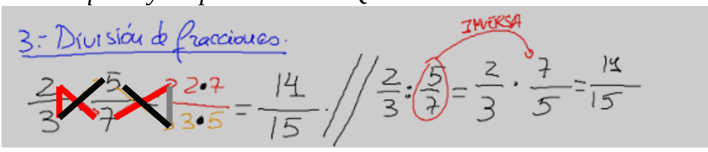


En general, se destaca el empleo de distintas representaciones de las fracciones, para que los estudiantes refuercen las situaciones de fraccionamiento de la unidad y el significado de fracción, en problemas de fraccionamiento, apareciendo fracciones como relación parte-todo y como operador. El fraccionamiento le permite al profesor establecer que dos fracciones son equivalentes cuando expresan la misma porción de un todo. Ordena fracciones comparando porciones o representaciones decimales. También emplea el fraccionamiento para sumar o restar fracciones (con igual denominador), reuniendo o separando las partes que indica el numerador.

Presenta tareas para describir procedimientos simbólicos, pero siempre los apoya con resoluciones basadas en acciones sobre modelos de área, de longitud o discretos. Esto le permite dar sentido a la búsqueda de denominadores comunes, a la obtención de las fracciones equivalentes a los sumandos, para efectuar reuniones o separaciones, etc. Una vez establecidos estos principios, que en muchos casos el profesor convierte en frases que sirven para resumir las propiedades, realiza tareas de ejercitación, para reforzar la aplicación de procedimientos, especialmente para trabajar la equivalencia, el orden, y las operaciones aditivas, de forma numérica.

El profesor aborda las operaciones multiplicativas mediante reglas mnemotécnicas, definiendo el procedimiento a partir de los algoritmos de cálculo. Por ejemplo, para dividir fracciones sintetiza las operaciones según la regla “del caramelo o del balón”, como le llama. “Del caramelo, porque las dos cruces que hay aquí, rojas y amarillo, es como si forman un caramelo”, y “el balón lo tiras al suelo rebota en el suelo, y va hacia arriba, y va hacia el suelo”. Subrayando que los alumnos tienen que aprender los procedimientos “O sea que os podéis quedar con lo del caramelo, con lo del balón, con lo de donde empiezo, empiezo abajo. Otra manera, multiplicar por la inversa. Cualquiera de esas nos sirve” [**C12**. A3.2. Líneas 132-384].

237. P *Vale. Aquí hay un punto no dos. Qué se vea bien.*



Tareas matemáticas

Las tareas matemáticas escolares propuestas por el profesor se presentan principalmente por exposición dialogada y son de resolución de ejercicios. Emplea un discurso, que utiliza un léxico y expresiones familiares para el alumno, pero incluyendo, cuando le parece importante, alusiones a la práctica matemática. Durante la exposición de este discurso utiliza diversas representaciones, tal como se ha citado anteriormente, empleando la pizarra tanto para ejemplificar los razonamientos gráficos y simbólicos, como para resumir los razonamientos realizados.

Las tareas de resolución, que en la mayoría de las ocasiones también responde el profesor, formulan enunciados, bien en forma verbal, o en forma numérica. Los primeros corresponden a ejercicios para determinar cantidades, empleando las fracciones como medios. Las segundas se refieren a la ejecución de cálculos matemáticos simbólicos.

En la clase evidenciamos que se introduce el tema de las fracciones comenzando con un ejemplo con medidas extensivas (euros), para indicar que en matemáticas existen cantidades que se denominan no exactas, queriendo con ello indicar que su medida no es una cantidad exacta de veces la unidad principal de medida. Luego el profesor presenta otro ejemplo para relacionar las cantidades “no exactas” con el cociente entre dos números, conectando el significado de fracción como medida con el de división reparto, expresando cada parte por medio de una fracción. Por tanto, las tareas propuestas llevan a que las fracciones son porciones; es decir, se refieren a partes de un todo [**C1**. E3.3. Líneas 19-102]. La idea anterior permite al profesor trabajar la equivalencia de fracciones y el orden, comparando las partes. Es decir, si las partes de un mismo todo coinciden esto lleva a la equivalencia de fracciones [**C1**. E3.3. Líneas 188-270].

Resuelven problemas de fraccionamiento en que intervienen tres datos. Primero, se proporciona la fracción y una cantidad (todo) y deben hallar la cantidad faltante (la parte). Las tareas planteadas permiten trabajar el significado de fracción como operador, que lleva a expresar una operación multiplicativa sobre una cantidad (todo), indicando una multiplicación según el número de partes que indica el numerador y una división en tantas partes como indica el denominador $\frac{a}{b} de\ c = [(ac) \div b]$ $\left(\frac{a}{b} de\ c = [(ac) \div b]\right)$ [**C3**. E3.3. Líneas 1-57]. También, emplea el fraccionamiento como forma de relacionar, tanto los distintos significados de las fracciones, como los contenidos tratados: concepto de fracción, orden y equivalencia. Para ello alude con frecuencia a la representación gráfica, por medio de modelos de área, de longitud y discretos.

Las operaciones aditivas con fracciones inicialmente se trabajan por medio de las acciones de juntar/agrupar o quitar partes de una figura, luego se da paso al trabajo numérico, según distintos procedimientos. Se presentan problemas de combinación y de cambio por diferencia (según el significado de fracción como parte-todo). Identificamos que el profesor maneja diversas situaciones aditivas, sin embargo no se aprecia un trabajo sistemático para proponer tareas según los tipos de significados de las operaciones.

En general, el profesor presenta distintas tareas matemáticas relacionadas con el tema (fraccionamiento, problemas aditivos y multiplicativos, etc.), que resuelve correctamente, pero que en ocasiones resuelve atendiendo a otros conceptos y definiciones. Por ejemplo, algunos problemas de fracción como parte-todo los resuelve como razón, al comparar dos partes de un todo o dos cantidades de una misma magnitud. Esto muestra que el profesor es capaz de resolver las tareas de diversas formas, relacionando los contenidos, aunque su enseñanza sea expositiva.

Por otra parte, observamos que el profesor en cada clase **dispone de un esquema de instrucción**. Por ejemplo, las tareas de fraccionamiento le permiten trabajar la fracción como porción, identificar el todo o unidad a que se refiere (todo rectangular, circular, cantidades discretas, segmento de recta).

Las tareas de fraccionamiento en que intervienen el todo, la porción y la fracción se plantean para buscar las distintas cantidades. Primero, aquellas que se tiene la medida del todo y la fracción y se pide la medida de una parte del todo, luego se tiene la medida de la porción y la fracción y pide la medida del todo, finalmente tareas que llevan a encontrar la fracción. La secuencia de las tareas de fraccionamiento tiene asociado un grado de dificultad, aquella situación en que se pide la medida de la parte o porción es de menor complejidad que aquellas en las cuales se pide calcular la medida del total o la fracción [**C8**. E3.4. Líneas 2-121].

164. P *La parte del total es el más sencillo de todos, se deja la fracción normal y ya está. Que me piden el total se da vuelta.*

También sigue un esquema para ordenar fracciones: parte de comparar fracciones con igual denominador y distintos numeradores (comparando las partes según la fracción como parte-todo), luego comparan aquellas con igual numerador y distintos denominadores (igualando los denominadores). Posteriormente, presenta una serie de ejercicios de comparación de fracciones, pretendiendo que los estudiantes busquen el mcm para igualar los denominadores de las fracciones [**C9**. E3.4. Líneas 31-243; **C10**. Líneas 13-203].

Sigue un esquema de enseñanza para las operaciones con fracciones. Primero, suma y resta fracciones con denominadores iguales, sumando o restando los numeradores y manteniendo el denominador; luego con distintos denominadores, igualando las fracciones a común denominador (mediante el método del cálculo del mcm). Por último, presenta una serie de ejercicios que refuerzan las operaciones aditivas con fracciones [**C10** E3.4. Líneas 205-419; **C11**. Líneas 10-298; **C12**. Líneas 4-128].

Sistemas de representación

El profesor Rivera **conoce y utiliza en su enseñanza las representaciones** verbal, numérica y figural. La representación verbal como "a sobre b fracción", "a entre b"; numérica, como fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$, número decimal y porcentaje y su correspondiente notación. La representación verbal la emplea esencialmente para hacer lecturas de fracciones representadas en forma numérica. La representación figural continua (figuras rectangulares y la recta numérica), en que el todo o unidad, en el caso del rectángulo corresponde al área de la figura, en el caso del segmento a su medida (1 unidad). Este tipo de representación se emplea, principalmente, para ejemplificar las representaciones numéricas y verbales que buscan transmitir el significado de fracción como parte-todo. Por ejemplo, emplean el segmento de recta relacionando las fracciones con un punto en la recta; es decir, trabajan la fracción como medida en que un segmento dividido en partes congruentes se le asigna una fracción a cada parte [**C2**. E2.2. Líneas 31-225].

En tareas de fraccionamiento en que intervienen tres datos (parte, todo y fracción) se recurre a magnitudes discretas, en el cual el todo es el conjunto y la parte corresponde a los elementos del conjunto.

Materiales y recursos

Como hemos mencionado en otros apartados, no hemos podido apreciar el conocimiento del profesor Rivera **sobre materiales o recursos didácticos empleados para la enseñanza**. El empleo prioritario de la pizarra se complementa con el uso amplio del libro de texto, fundamentalmente como fuente de ejercicios, pero también para marcar el orden de presentación de los contenidos.

Aparte de estos materiales tradicionales, el profesor conoce y promueve el uso del software *Máxima*, que es un programa para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, permitiendo a los estudiantes comprobar los resultados de los ejercicios, específicamente para calcular el decimal asociado a una fracción, comprobar cuando dos fracciones son equivalentes, el resultado de la suma de facciones, entre otras. Por lo tanto, el programa es un recurso que se emplea como un medio para realizar cálculos [**C6**. E4.1. Líneas 84-86; **C11**. Líneas 3-4; Líneas 131-171].

También, utilizan la calculadora como medio para comprobar distintos ejercicios, pero siempre en notación decimal (no fraccionaria), especialmente para aludir a las operaciones con enteros. Por ejemplo, emplea la calculadora para mostrar la imposibilidad de hacer la división por cero, el profesor les pide a los alumnos que comprueben con la calculadora que aparece un error [**C12**. E4.1. Líneas 186-354].

Conocimiento de los estándares de aprendizaje

La propuesta de enseñanza presentada por el profesor Rivera **refleja los contenidos mínimos estipulados por el currículo escolar** para el nivel. Específicamente, relaciona de manera extensa las expresiones decimales con las fracciones; trabaja los significados de fracción como parte-todo y operador, aunque no alude con tanta frecuencia a los contextos de la vida real, como recomienda el currículo. Hace una interpretación preferentemente procedimental de los restantes contenidos, respetando las ideas expuestas en el libro de texto. Así, trata la simplificación y amplificación de fracciones, la identificación y obtención de fracciones equivalentes y los procedimientos de las operaciones con fracciones (suma, resta, producto y cociente), de nuevo con menos alusiones al contexto de lo que parece derivarse de las recomendaciones del currículo oficial. Aparecen contenidos procedimentales, como la reducción de fracciones a común denominador, llegando a la comparación y a las operaciones de fracciones. También se relacionan los porcentajes con las fracciones, bajo el significado de fracción como parte-todo.

El trabajo expositivo del profesor y el apoyo frecuente del libro de texto, hacen que no podamos apreciar si es conocedor de otras recomendaciones curriculares externas, así como elementos del *análisis didáctico* sobre la enseñanza del tema.

4.2.2 Reconstrucción del conocimiento especializado del profesor Rivera al enseñar las fracciones

Algunos aspectos relacionados con el conocimiento pedagógico general nos permiten tener una primera aproximación de la actividad de enseñanza impartida por el profesor Rivera, elementos que nos llevan a situarnos en el escenario particular de enseñanza. En términos de lo que definen Carrillo *et al*. (2008), la comunicación promovida por el docente es unidireccional; es decir, explica el tema sin dar lugar a que los estudiantes comuniquen sus ideas. Durante las clases el profesor enuncia preguntas cerradas a sus estudiantes, dejando pocas oportunidades para que ellos expresen sus ideas o estrategias. Sin embargo, aprovecha algunas aportaciones de los estudiantes para efectuar explicaciones, especialmente cuando señalan puntos clave.

La tendencia metodológica del profesor es explicar cada contenido, promoviendo el empleo de procedimientos, técnicas y algoritmo matemáticos, luego presenta ejemplos relacionados con los temas abordados y posteriormente refuerza el contiendo proponiendo una serie de ejercicios. Su discurso está bien elaborado, empleando términos precisos y recurriendo a ejemplos prácticos cuando advierte que los alumnos pueden tener dificultades para comprender un concepto.

A lo largo de 12 sesiones de clase se destacan tres dominios de *conocimiento especializado del profesor de matemáticas*: el *conocimiento de los temas matemáticos*, el *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* y el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*. No obstante, el subdominio con mayor presencia en el proceso de instrucción es el *KoT*, predominando los conocimientos matemáticos. Especialmente el profesor presenta dominio de los significados de fracción como parte-todo, operador y razón, de distintos procedimientos para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones, etc.

Relacionado con el *KoT* identificamos subepisodios de conocimiento respecto de todas las categorías descritas para el subdominio: conceptos, aspectos fenomenológicos, procedimientos matemáticos, sistemas de representaciones, aspectos de comunicación y tareas matemáticas.

Las fracciones se introducen como extensión de los conjuntos numéricos de los naturales y los enteros ante la necesidad de trabajar con cantidades no exactas. El profesor parece adoptar una idea de la fracción como medida, por ejemplo, recuerda que los precios pueden requerir partes que no se expresan mediante números enteros ("1,20 ó 1,30 euros"). Esta idea lleva a referirse a las fracciones como un conjunto que tiene una representación decimal.

Explícitamente el profesor define la fracción como par ordenado $\left(\frac{a}{b}\right)$ que resulta de "fracturar" o "romper" una cantidad en partes, introduciéndose la fracción como resultado de la partición de una unidad en partes iguales. Como consecuencia, el significado usado para organizar el concepto de fracción es esencialmente el de parte-todo, priorizando este significado frente a otros. Los restantes significados también están presentes aunque en menor medida: a) como operador, la fracción expresa una operación multiplicativa respecto a una cantidad, y b) como razón, al interpretar la fracción como índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud (comparando dos partes de un todo o dos cantidades de una misma magnitud).

En la presentación del tema no se aprecian elementos históricos relacionados con los números racionales o con las fracciones. Algunas tareas están contextualizadas según medidas extensivas (peso, tiempo, dinero…): "un cuarto de kilo son 250 gramos", "a contracción, cuarto y mitad, un cuarto de kilo y la mitad del kilo que sería 375 gramos", "¿Cuántos minutos tiene una hora?", "¿Y un cuarto de hora será entonces?" "1,20 euros", estas unidades permiten trabajar el significado de fracción como parte-todo y operador, estableciendo las equivalencias de otras unidades.

El profesor manifiesta precisión en las definiciones y propiedades empleadas a lo largo de la enseñanza del contenido. Por ejemplo, conoce las propiedades de equivalencias notables de Q ($\frac{a}{a} = 1, a \neq 0$; $a > b \rightarrow \frac{a}{b}$ es mayor que la unidad; y, $a < b \rightarrow \frac{a}{b}$ es menor que la unidad), justificando cada una de ellas a partir de ejemplos concretos (numéricos) bajo el significado de fracción como parte-todo y empleando la representación figural para comprobar cada ejemplo. Define que una fracción es irreducible "si el numerador y el denominador son primos entre sí; es decir, el máximo común divisor entre los números debe ser 1", aunque no profundiza en esta idea el profesor presenta precisión en la definición. Promueve la búsqueda de fracciones irreducibles a partir del cálculo del máximo común divisor.

Define la inversa de una fracción sintetizando a lo siguiente: "consiste en darle la vuelta al numerador y al denominador", esta explicación lo lleva a definir el inverso multiplicativo de una fracción "y su producto con la fracción inicial da como resultado uno" ($\frac{a}{b}$ tiene un inverso multiplicativo $\frac{b}{a}$ tal que, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$). También, presenta precisión al definir las fracciones equivalentes como aquellas que tienen el mismo valor fraccionario, subrayando que las fracciones del tipo $\frac{a}{a}$ y $\frac{b}{b}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ también son equivalentes. Esta definición implícitamente considera que el conjunto de los números racionales incluye a los números enteros.

Una característica destacada del profesor a lo largo de la enseñanza de las fracciones es el amplio dominio de procedimientos relacionados con el tema enseñando. Por ejemplo, para convertir un número decimal finito a fracción considera el procedimiento que si tiene n dígitos decimales el denominador es 10^n y el numerador de la fracción conserva el número original sin punto decimal (no se justifica la conversión).

Presenta tres procedimientos para identificar cuándo dos fracciones son equivalentes: a) representando en una figura la fracción y estableciendo relación entre dos cantidades, b) calculando el número decimal asociado y comparando las cantidades, y c) dividiendo las dos fracciones (multiplicando en cruz), si da como resultado uno las fracciones son equivalentes. El caso a) y b) muestran que el profesor concibe que las fracciones al dar lugar a la misma parte de un todo o al generar el mismo resultado son equivalentes , y en el caso c) sugiere situar la fracción en relación al número racional, por la definición de equivalencia $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

Los procedimientos a) y b) enunciados para identificar fracciones equivalentes también se emplean como válidos para comparar fracciones. Luego se complementa con el procedimiento de comparación de fracciones cuando los denominadores son iguales, así a partir de la representación gráfica comparan solo la cantidad de partes que se consideran del todo. Entonces podemos establecer que trabajan la propiedad de la tricotomía (si x e y son números racionales entonces una de las siguientes relaciones es verdadera $x < y, x > y, o\ x = y$), que surge de la definición de números racionales (positivos) y de la definición de orden.

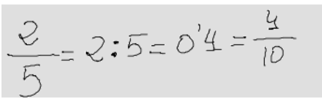
Emplea con precisión el lenguaje formal al trabajar la equivalencia de fracciones, por ejemplo, indica que las expresiones $\frac{2}{5}$; $2{:}\,5$ y $0{,}4$ no son iguales, pero representan lo mismo, quedando la igualdad determinada por las relaciones específicas del dominio al que pertenecen dichos objetos (propiedades de Q). Aunque matemáticamente pasan a ser iguales al definirse una relación de equivalencia que las agrupa en una misma clase, para el nivel escolar que se trabaja se contextualiza indicando que representan la misma cantidad.

Previo a definir la adición de fracciones el profesor gradualmente introduce un método para sumar y restar fracciones con igual denominador, que consiste en sumar o restar los numeradores conservando el denominador $\left(\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, a, c \in Z, c \in Z^{*}\right)$. Luego para sumar fracciones con distintos denominadores $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, a, c \in Z, c \in Z^{*}\right)$ calculan el mínimo común múltiplo (mcm) para obtener el nuevo denominador y el numerador de cada fracción se obtiene dividiendo el mcm por el denominador de cada fracción, y ese resultado se multiplica por el numerador, luego hacen las operaciones correspondientes. Domina los procedimientos enunciados para sumar o restar fracciones, aunque su enseñanza es mecánica y se busca que los estudiantes adquieran técnicas.

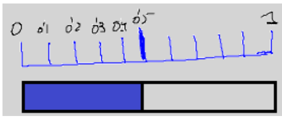
Para la multiplicación y división de fracciones nuevamente la enseñanza se centra en procedimientos, presentando el profesor dominios de ellos. Para la multiplicación expresa que se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador ("multiplicación en línea", "los de arriba entre sí y los de abajo entre sí"). Aplicando directamente la definición matemática para el producto de números racionales: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $, a, c \in Z;\ b, d \in Z^*$.

Para la división describe dos procedimientos a) “no dividimos en cruz, multiplicamos en cruz” y b) multiplicar por el inverso. El profesor aplica la definición de los números racionales para la división; es decir, la operación inversa a la multiplicación: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, que lleva a generar la técnica de los productos cruzados.

Sobre los sistemas de representación, los más empleados en la enseñanza de las fracciones fueron el verbal, numérico y el figural. La representación verbal se utiliza esencialmente para hacer lecturas de las fracciones según su representación numérica. La representación numérica se presenta para definir la fracción $\frac{a}{b}$ como cociente que tiene un número decimal asociado y como un representante de un todo o unidad que se ha dividido en b partes iguales (congruentes) de las que se consideran a de esas partes. También, como porcentajes (25%) lo que sugiere 100 como la unidad. La Figura 33 contiene un resumen con los sistemas de representación empleados.



Numérica
Fracción- decimal



Figural

Numérica
Fracción- porcentaje

Figura 33. Tipos de representaciones que prevalecen en la enseñanza del tema de las fracciones

La representación figural está vinculada principalmente al empleo de figuras geométricas (cuadrados y rectángulos), y en ocasiones hacen uso del segmento de recta para transmitir el significado de medida como resultado de dividir un segmento en partes iguales (congruentes) y asignar una fracción a cada parte. Es un sistema que se utiliza como recurso para ejemplificar la representación simbólica, para explicar alguna situación (equivalencia de fracciones con igual denominador) y para afianzar los significados como el de parte-todo y el de operador. Aunque, en general, el uso de la representación figural es temporal se emplea solo para ejemplificar casos puntuales, el trabajo predominante es puramente simbólico alejado del trabajo concreto. Las tareas de fraccionamiento se trabajan en contextos continuos y discretos.

En términos de lo que definen Stein y Smith (1998) se presentan en menor cantidad tareas que requieren que los estudiantes piensen conceptualmente y que hagan conexiones entre conceptos y procedimientos, prevaleciendo las tareas que involucran la ejecución de procedimientos memorizados (ejercicios). Por ejemplo, trabajan la fracción como procesos de partición de una unidad con cantidades continuas y discretas, lo que permite visualizar que la unidad depende del contexto de trabajo. Resuelven tareas de fraccionamiento en que intervienen dos cantidades (el todo y la parte) y la fracción, centrándose en buscar algunas de las partes. Prevale la ejecución de tipos de tareas que llevan a la ejecución de procedimientos rutinarios (mecánicos) como es el trabajo de las operaciones con fracciones.

A lo largo de la unidad se identifican conexiones temporales; es decir, el profesor relaciona los contenidos estudiados con aquellos de otros niveles escolares. Por ejemplo, al trabajar tareas de fraccionamiento (de tipo directo e inverso), según algunos contextos, el profesor recuerda los factores de conversión de unidades de medidas de magnitud (tiempo: horas/minutos; longitud: kilómetros/metros, y masa: kilogramos/gramos). Tema estudiado en el 3º ciclo correspondiente al *Bloque 2. La medida* (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007).

Por otra parte, conecta las fracciones equivalentes con el tema de razones y proporciones, a partir de problemas de valor ausente (Lamon, 1993). Por ejemplo, indican tres de cuatro cantidades de una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se pide encontrar la cuarta cantidad para que la igualdad sea verdadera. Aunque esta situación se limita al uso de la técnica de la regla de tres, que lleva a resolver expresiones del tipo $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ y aunque el profesor no habla de la proporcionalidad, la introducción de estrategias aditivas y multiplicativas sientan las bases para el razonamiento proporcional formal y para acercarse al trabajo de la proporcionalidad (Lamon, 2007).

Constantemente el profesor está extrapolando las propiedades de los números naturales y los enteros a las fracciones. Establece correspondencia entre el orden de las fracciones con el orden de los números naturales y enteros (contenidos previos estudiados), aunque no profundiza al respecto admite la relación de orden de los conjuntos.

También identificamos que se produce complejización del contenido, por ejemplo al trabajar la fracción como parte-todo, el profesor establece relación entre las partes o el todo, proyectando que la parte de referencia o el todo tiene valor 100, para relacionar la fracción como porcentaje. Al trabajar tareas de fraccionamiento en que se pide obtener la porción o parte del total, el profesor relaciona la tarea con la fracción como razón vinculando dos cantidades o conjunto de unidades. Esta idea lleva a perder de referencial el todo y relacionar dos cantidades de la misma magnitud.

Identificamos que el profesor establece conexiones entre algunos elementos de la estructura conceptual, como relacionar las fracciones con decimales y porcentajes. También, las tareas de fraccionamiento en que intervienen tres datos y buscan obtener algunas de las partes (todo, parte o fracción), se relacionan con el significado de fracción como parte-todo y operador. Los problemas inversos que buscan obtener la fracción, se relacionan con la fracción como razón; es decir, se establece correspondencia entre dos partes de un todo o entre cantidades.

La observación nos limitó a la identificar indicadores de *conocimiento de las prácticas matemáticas*; es decir, a comprender el significado que presenta el profesor sobre los elementos constituyentes de la matemática, y en general, en profundizar en como él procede en matemáticas. Únicamente encontramos un episodio de clase que nos permite vislumbrar *KPM*. Al trabajar tareas en el cual se tienen tres de cuatro cantidades de una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se pide encontrar la cuarta cantidad para que la igualdad sea verdadera, el profesor mediante una serie de pasos lógicos explica cómo resolver los ejercicios: 1º parte de la premisa que las fracciones son equivalentes, 2º aplica la definición $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ son equivalentes si y solo sí $a \cdot d = b \cdot c$; y, 3º obtiene el valor de la incógnita. Observamos que el docente sigue una secuencia de pasos propios de la lógica matemática, partiendo de una premisa inicial luego se aplica una definición y se llega a la conclusión, dejando entre ver una forma de proceder en matemáticas.

Identificamos escasos subepisodios relacionados con el c*onocimiento didáctico del contenido*. Consideramos que al ser el profesor el único gestor de la actividad matemática del aula, y no dejar espacio para la participación de sus estudiantes, dificultó la observación de indicios de éste conocimiento.

De las apreciaciones observadas debemos destacar que el profesor conoce algunos errores y dificultades que los estudiantes pueden presentar al trabajar conceptos y procedimientos relacionados con el tema de las fracciones. Por ejemplo, en tareas de fraccionamiento, en que intervienen tres cantidades: el todo, la parte y la fracción, expresa que es frecuente que no se respete el orden de las operaciones, en el cual tienden a dividir el denominador entre el numerador, siendo una dificultad cuando una cantidad es múltiplo de otra, o se puede obtener un resultado mayor que la unidad. También, los estudiantes al sumar o restar fracciones que tienen el mismo denominador tienden a sumar los numeradores y los denominadores, situación que se transfiere de la suma de los números naturales.

Algunas tareas planteadas por el profesor permiten hacer uso de los distintos sistemas de representación: verbal (a sobre b fracción; "a entre b), numérica $\left(\frac{a}{b}; a{:}b; \%\right)$ y figural (rectangulares y la recta numérica). Predominando a lo largo de la enseñanza el paso de la representación verbal y numérica.

A lo largo de la unidad el profesor presenta tareas que permiten trabajar las fracciones sobre cantidades (continuas y discretas), bajo la interpretación parte-todo, en un contexto de medida para comparar cantidades del mismo tipo. Se presentan problemas de fraccionamiento de tipo directo e inverso. Presenta algunos problemas aditivos de combinación o composición y de cambio por diferencia y un problema multiplicativo de fracción de fracción, que le permite relacionar con el producto de medidas. En general, las tareas matemáticas se enuncian en contextos personales; es decir, tienen relación con las actividades diarias de los alumnos.

Es frecuente que el profesor establezca métodos para resolver tareas matemáticas que se van complejizando y acercando a la aplicación de propiedades matemáticas. Por ejemplo, para identificar cuando dos fracciones son equivalentes propone: 1º representar la fracción en un objeto divisible y comparar las partes, 2º calcular su número decimal asociado, 3º multiplicar en cruz (división de fracciones). Para comparar y ordenar fracciones: 1º calcular el decimal asociado a cada fracción, comparar los decimales y ordenar, 2º reducir a común denominador, luego comparar los numeradores y ordenar las fracciones, y 3º calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores, de modo de igualar los denominadores y luego comparar los numeradores de las fracciones.

La gradualidad de los procedimientos también implica la introducción del contenido de forma secuencial. Por ejemplo, para ordenar fracciones: parte de comparar fracciones con igual denominador y distintos numeradores, luego con igual numerador y distintos denominadores, esto último igualando los denominadores por medio de la amplificación y la simplificación o calculando el mcm para igualar los denominadores de las fracciones. Para las operaciones aditivas, 1º suman y restan fracciones con denominadores iguales, sumando o restando los numeradores y manteniendo el denominador; 2º suman y restan fracciones con distintos denominadores, igualando las fracciones a común denominador, mediante el método del cálculo del mcm; 3º multiplican y dividen fracciones. Luego, presenta una serie de ejercicios que permiten reforzar las operaciones aditivas con fracciones.

Los materiales y recursos didácticos empleados para la enseñanza son herramientas digitales. Destaca el uso de un software (*Máxima*) que es un sistema para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, y en general para trabajar matemática avanzada como diferenciación, integración, expansión en series de Taylor, transformadas de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias, matrices, etc. Emplean la calculadora para realizar operaciones. Ambas herramientas se utilizan como un medio para comprobar las soluciones de los ejercicios, o bien para realizar cálculos numéricos elementales.

La propuesta de enseñanza presentada por el profesor refleja los contenidos mínimos estipulados por el currículo escolar para el curso 1º de la ESO. Concretamente relaciona las expresiones decimales con las fracciones, trabaja los significados de fracción como parte-todo y operador, aunque hace pocas referencias a los contextos de la vida real, como se recomienda en el currículo; la simplificación y amplificación de fracciones e identificación y obtención de fracciones equivalentes; y las operaciones con fracciones (suma, resta, producto y cociente). Aparecen contenidos procedimentales, como la reducción de fracciones a común denominador, la resolución de tareas de fraccionamiento y las operaciones de fracciones. Relacionan los porcentajes con las fracciones, bajo el significado de fracción como parte-todo. A partir de la observación de clase no identificamos que el profesor conozca orientaciones del colectivo y organizaciones docentes. La Tabla 21 sintetiza el conocimiento desplegado por el profesor Rivera al enseñar el tema de las fracciones.

Tabla 21. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rivera al enseñar el tema de las fracciones*

Conceptos y propiedades			
Número racional	- La fracción se justifica por la necesidad de ampliar los conjuntos numéricos de los naturales y los enteros ante la necesidad de trabajar con cantidades no exactas. - Los números enteros se relacionan a cantidades que no tienen parte decimal, existiendo otros números con valores de magnitud que no son exactos; esta idea lleva a relacionar las fracciones como un conjunto que tiene una representación decimal. - La fracción se trabaja como el resultado de "fracturar" o "romper" una cantidad en partes iguales, expresando una relación entre el número de partes que forman la porción y el total de las partes consideradas. [KoT]		**Conexiones intraconceptuales**: Entre elementos de la estructura conceptual, como relacionar las fracciones con decimales y porcentajes. [KSM]
Número mixto	- Tiene una parte entera y una fracción. - Es una fracción mayor que la unidad. [KoT]		
Propiedades de equivalencia de Q	- Si $a > b$ entonces $\frac{a}{b}$ es mayor que la unidad - Si $a < b$ entonces $\frac{a}{b}$ es menor que la unidad [KoT]	**Procedimientos matemáticos**: Se fija una magnitud (longitud), dividiendo segmentos en partes iguales y comparando las partes. [KoT]	
Fracciones irreducibles	"Si el numerador y el denominador son primos entre sí; es decir, el máximo común divisor entre los números debe ser 1". [KoT]		
Equivalencia de fracciones	Fracciones que tienen el mismo valor o representan la misma cantidad. [KoT]	**Procedimientos matemáticos**: a) Mediante el significado de fracción como parte-todo, y apoyándose en la representación figural, se comparan las porciones, para establecer que si dos fracciones dan lugar a la misma porción de un todo, las fracciones son equivalentes. b) Calculan la expresión decimal asociada y se comparan las cantidades. c) Dividen las dos fracciones (multiplicando en cruz) si da como resultado uno las fracciones son equivalentes. [KoT]	**Conexión temporal**: Relaciona la igualdad de fracciones con problemas de valor ausente; es decir, situaciones en el cual se tienen tres cantidades de una proporción y se debe encontrar la cuarta cantidad de modo que la igualdad sea verdadera. [KSM]
	Fracciones equivalentes a otras.	Amplificación o simplificación. [KoT]	
Fracciones irreducible	Una fracción es irreducible si el numerador y el denominador son primos entre sí. [KoT]	**Procedimiento matemático**: Calculan el máximo común divisor (MCD) entre el numerador y denominador, y dividir ambos por la cantidad que indica el MCD. [KoT]	
Orden de fracciones	Con igual denominador y distintos numeradores, estableciendo que es menor la que tiene menor numerador. [KoT]	**Procedimientos matemáticos**: Representa las fracciones mediante un modelo de área, indicando que, independientemente del número de partes en que se divide el todo, lo que importa son las partes que se consideran	**Conexión temporal**: Establece correspondencia entre el orden de las fracciones y el orden de los números naturales y enteros,

Tabla 21. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rivera al enseñar el tema de las fracciones*

		(comparación de superficie). [KoT]		contenidos previos estudiados. [KSM]
	Con igual numerador y distintos denominadores, estableciendo que es menor aquella fracción que tiene mayor denominador. [KoT]	Formula la propiedad, "cuanto más pequeño es el denominador, estoy rompiendo en menos trozos, por lo tanto los trozos son más grandes". [KoT]		
	Con distinto numerador y denominador. [KoT]	a) Calculan la expresión decimal asociada a la fracción y comparan decimales. b) Igualan los denominadores de las fracciones y comparan según las partes que indica el numerador. [KoT]		
Comparación de fracciones	**Procedimientos matemáticos**: - Comparando partes de un todo. - Aplicando los propiedades de orden. [KoT]			
Operaciones con fracciones	Sumar y restar fracciones con igual denominador y distintos numeradores. [KoT]	Las acciones de agrupar/juntar o quitar/separar partes le permite obtener aquella porción que es el resultado del problema, expresando esa parte por medio de una fracción (símbolo). [KoT]	**Tareas matemáticas**: - Problemas aditivos de combinación o composición y de cambio por diferencia (según el significado de fracción como parte-todo). [KoT] - La acción juntar/agregar, representada por la adición, lleva a este tipo de problema a combinar los enunciados. [KMT]	**Conexión temporal**: Relaciona las operaciones de números enteros con las operaciones con fracciones: "cuando tengáis un problema de fracciones y no tengáis muy claro qué tenéis qué hacer, quiero que penséis en un problema con números [naturales]". [KSM]
	Sumar y restar fracciones con igual numerador y distintos denominadores. [KoT]	Calculan el mínimo común múltiplo (mcm): el nuevo denominador de las fracciones, será el mcm, y el numerador de cada fracción se obtiene dividiendo el mcm por el denominador de cada fracción y ese resultado se multiplica por el numerador, luego hacen las operaciones correspondientes. [KoT]		
	Sumar y restar fracciones con un número entero. [KoT]	Hallan fracciones a común denominador a partir del cálculo del mcm y luego suman o restan (método del mínimo común múltiplo). [KoT]		
	Producto de fracciones [KoT]	"Multiplicación en línea, los de arriba entre sí y los de abajo entre sí", sugiriendo el procedimiento para realizar el producto de números racionales $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\right)$. [KoT]	**Procedimientos matemáticos**: Prevalecen los procedimientos matemáticos en las operaciones multiplicativas con fracciones. [KoT]	**Tareas matemáticas**: Problema multiplicativo de fracción de fracción. [KoT]
	División de fracciones [KoT]	Algoritmos generales para la división de fracciones: - "Multiplicar en cruz" (productos cruzados) - "Multiplicar por el inverso" (inversión de la multiplicación). [KoT]		
Fenomenología				
Significados de	Romper o fracturar se asocia con hacer pedazo algo (una			

Tabla 21. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rivera al enseñar el tema de las fracciones*

fracción	unidad, una cantidad). [KoT]			
	Conocer expresiones cotidianas relacionadas con las fracciones: [KoT] - “Un cuarto de kilo son 250 gramos” - “Cuarto y mitad, un cuarto de kilo y la mitad del kilo que sería 375 gramos” - “¿Cuántos minutos tiene una hora?” - “¿Y un cuarto de hora será entonces?”.		**Conexiones temporales**: Unidades permiten trabajar el significado de fracción como parte-todo y operador, estableciendo las equivalencias de otras unidades. [KSM]	
	Fracción como medida. Por ejemplo, recuerda que los precios pueden requerir partes, que no se expresan mediante números enteros (“1,20 ó 1,30 euros”). [KoT]			
	Parte-todo: Situaciones de fraccionamiento le permiten establecer relaciones entre el todo y la parte. [KoT]		**Conexión intraconceptual**: Significado de fracción como parte-todo, con el de operador, según el tipo de problema. [KSM]	**Complejización**: La fracción como parte-todo, se relaciona el todo y las partes, proyectando que la parte de referencia o el todo tiene valor 100, para relacionar la fracción como porcentaje. [KSM]
	Operador: Expresando una operación multiplicativa respecto de una cantidad. [KoT]	**Tareas matemáticas**: De fraccionamiento en que intervienen tres datos (el todo, la parte o porción y la fracción), de tipo directo e inverso. [KoT]	**Conexión temporal**: Al presentar tareas de fraccionamiento (de tipo directo e inverso), emplea factores de conversión de unidades de medidas concretas: tiempo (horas-minutos), longitud (kilómetros-metros) y masa (kilogramos-gramos). Tema que se relaciona con los contenidos de tercer ciclo del *Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes*, *las equivalencias entre unidades de una misma magnitud*. [KSM]	**Complejización**: Los problemas inversos en que se tiene la unidad y la porción y se busca obtener la fracción, si bien muestran situaciones de relación parte-todo, a veces le sirven para aludir a proporcionalidad, con lo que introduce la fracción como razón, al establecer correspondencia entre dos partes de un todo o entre cantidades. [KSM]
	Razón: Comparan el cardinal de un subconjunto con sus elementos. El índice de comparación es entre dos partes del mismo todo o entre dos cantidades de magnitud. [KoT]			
Aspectos de comunicación				
Precisión en el lenguaje matemático	- Lectura de las fracciones. - Precisión al trabajar con las igualdades. [KoT]	Se aprecia que emplea el signo igual para expresar su equivalencia entre formas de representación, con lo que quiere aludir a estas formas como que representan la misma cantidad, evitando el sentido de igualdad como identidad de una manera consciente.		

Tabla 21. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rivera al enseñar el tema de las fracciones*

<table>
<tr><th colspan="4">Modo de proceder en matemáticas</th></tr>
<tr><td colspan="4">Tiende a seguir una secuencia de pasos lógicos, comenzando de una premisa inicial, aplica una definición y llega a una conclusión. [KPM]

Hace énfasis que para resolver la tarea es importante comprender el problema (¿qué datos se tienen y qué se pide?), buscar estrategias para resolverla y hacer la verificación, fases similares del proceso de resolución de problemas definidas por Pólya. [KPM]</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores y dificultades</th></tr>
<tr><td>Conocer errores y dificultades
[KoT] [KFLM]</td><td colspan="2">- Errores en distintas operaciones aritméticas (de cálculo).
- Errores que se despliegan al sumar y restar fracciones:
▪ Suman o restan numeradores y denominadores de las fracciones.</td><td>Estrategias (para abordar un error o una dificultad):
Reiterar los procedimientos algorítmicos, previo a la resolución de tareas. [KMT]</td></tr>
<tr><th colspan="4">Tareas matemáticas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Serie de tareas que permiten adquirir, reforzar o practicar los distintos contenidos y procedimientos matemáticos.
[KoT] [KFLM]
[KMT]</td><td>Tareas matemáticas:
[KMT]
- De fraccionamiento.
▪ Permiten reforzar que las partes en un fraccionamiento deben ser iguales (equitativas).
- Emplear distintos datos, lo que lleva a destacar que es importante reconocer qué indica cada cantidad.</td><td>Conexiones intraconceptuales:
- Las tareas de fraccionamiento en que intervienen tres datos y buscan obtener algunas de las partes (todo, parte o fracción), se relacionan con el significado de fracción como parte-todo y operador. [KSM]
Conexiones interconceptuales:
- Los problemas inversos que buscan obtener la fracción, se relacionan con la fracción como razón; es decir, se establece correspondencia entre dos partes de un todo o entre cantidades. [KSM]</td><td>Representaciones:
Regularmente para la resolución de tareas el profesor promueve su representación en varios registros, especialmente empleando la representación figural de área o de longitud, para que no se reduzca su interpretación a las acciones simbólicas y para que tengan sentido. Aunque prevalece el trabajo centrado en la representación simbólica. [KMT]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">- Sobre cantidades discretas, bajo la interpretación parte-todo, en un contexto de medida para comparar cantidades del mismo tipo. [KoT]</td><td>Representaciones (variedad):
- Verbal (un medio, uno de dos, uno sobre dos, uno entre dos, de cada dos uno aprueba, uno de cada dos…).[KoT]</td><td>Se emplea para hacer lecturas de fracciones representadas en forma simbólica.</td></tr>
<tr><td>- Numérico ($\frac{a}{b}$, decimal, porcentaje). [KoT]
$\frac{2}{5} = 2:5 = 0'4 = \frac{4}{10}$</td><td>Este tipo de representación se emplea, principalmente, para ejemplificar la representación numérica. [KMT]
La representación figural continua (figuras</td></tr>
</table>

Tabla 21. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rivera al enseñar el tema de las fracciones*

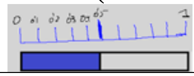
			rectangulares y la recta numérica), en que el todo o unidad, corresponde al área de la figura, en el caso del segmento a su medida (1 unidad).
	- Como cantidad, indicándose que el “todo” en el cual actúa la fracción puede ser cualquier cantidad.	- Figural (continuas y discretas).	
		- Gráfico (recta numérica) 	Recta numérica. Trabajan la fracción como medida en que un segmento dividido en partes congruentes se le asigna una fracción a cada parte. [KMT]
	- Como razón, relacionando dos cantidades o conjuntos de unidades.	**Representaciones** (relacionados): [KMT] [KSM] - Verbal- numérica (como fracción $\frac{a}{b}$ y como expresión decimal, comparación de parte). - Verbal- numérica - figural (modelo de área o longitud, en contextos continuos), con otros modelos continuos y discretos. - Figural (modelos de área y de longitud) y simbólico (porcentajes).	
Riqueza de las tareas matemáticas propuestas	- Tareas que aluden a contextos concretos (personales) y matemáticos. Tienen relación con las actividades diarias de los alumnos (amigos, compra de combustible, viajes, dinero, gastos, cantidad de árboles, etc.). Las tareas de resolución, que en la mayoría de las ocasiones también responde el profesor, formula enunciados, bien en forma verbal, o en forma simbólica. [KMT] - Corresponden a ejercicios para determinar cantidades, empleando las fracciones como medios. Prevale la ejecución de tipos de tareas que llevan a la ejecución de procedimientos rutinarios (mecánicos) como es el trabajo de las operaciones con fracciones. [KMT]		
Repertorio de tareas que permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos.	Presenta distintas tareas matemáticas relacionadas con el tema (fraccionamiento, problemas aditivos y multiplicativos, etc.), que resuelve correctamente, pero que en ocasiones resuelve atendiendo a otros conceptos y definiciones. Esto muestra que el profesor es capaz de resolver las tareas de diversas formas, relacionando los contenidos. [KMT]		
Clase a clase dispone de un esquema de instrucción.	Por ejemplo, las tareas de fraccionamiento le permiten trabajar la fracción como porción, identificar el todo o unidad a que se refiere (todo rectangular, circular, cantidades discretas, segmento de recta). [KMT]		
Materiales y recursos			
Conocer materiales o recursos didáctico: [KMT] - Libro de texto - Recursos tecnológicos (hoja de Excel y software). - Calculadora	[KMT] [KMLS] - El empleo prioritario de la pizarra se complementa con el uso amplio del libro de texto, fundamentalmente como fuente de ejercicios, pero también para marcar el orden de presentación de los contenidos. - Apoya el proceso de instrucción con un software (*Máxima*) que permite a los estudiantes revisar o verificar la solución obtenida en las distintas tareas. También las hojas de Excel le permiten comprobar los ejercicios. - La calculadora como medio para comprobar distintos ejercicios, pero siempre en notación decimal (no fraccionaria),		

Tabla 21. *Conocimiento matemático especializado manifestado por el profesor Rivera al enseñar el tema de las fracciones*

	especialmente para aludir a las operaciones con enteros.
- Apoyo visual con pizarra electrónica	- El profesor se centra en el apoyo visual que ofrece la pizarra, en la que realiza figuras, también esquemas que le permiten, tanto representar los datos de un modo gráfico, como realzar los razonamientos que realiza.
Orientaciones curriculares	
Refleja los contenidos mínimos estipulados por el currículo escolar y los contenidos programados para el nivel. [KMLS]	- Específicamente relacionan de manera más extensa las expresiones decimales con las fracciones - Trabaja los significados de fracción como parte-todo y operador, aunque no alude con tanta frecuencia a los contextos de la vida real, como recomienda el currículo. - Hace una interpretación preferentemente procedimental de los restantes contenidos, respetando las ideas expuestas en el libro de texto. - Aparecen contenidos procedimentales, como la reducción de fracciones a común denominador, llegando a la comparación y a las operaciones de fracciones. - También se relacionan los porcentajes con las fracciones, bajo el significado de fracción como parte-todo.
Orientaciones emitidas por el colectivo y organizaciones docentes. [KMLS]	- El trabajo expositivo del profesor y el apoyo frecuente del libro de texto, hacen que no podamos apreciar si es conocedor de otras recomendaciones curriculares externas.

RESUMEN

Para efecto de esta investigación hemos seleccionado a dos profesores expertos, atendiendo a características que distinguen a estos docentes. Una vez seleccionados a los profesores, uno de 6º de Educación Primaria (profesor Rodríguez) y otro de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (profesor Rivera), ingresamos a sus aulas para extraer información sobre la enseñanza del tema de los números racionales. Realizamos la observación directa del aula y registramos esa información en video, obteniendo dos fuentes de datos: el registro en video de cada clase y el texto que corresponde a la transcripción literal de cada sesión. Luego, para analizar los datos utilizamos el proceso de análisis de contenido, que permitió categorizar la información y extraer significado. El análisis de los datos se realiza a través de una descripción detallada interpretativa, considerando categorías e indicadores *a priori* elaborados, y siguiendo los referentes teóricos relacionados con nuestro problema de investigación. Esto nos permitió identificar elementos de conocimiento matemático y didáctico del contenido manifestado por los profesores al enseñar el tema de las fracciones. A continuación se resumen los principales hallazgos del análisis realizado.

- El conocimiento del tema relativo a los números racionales, según lo indicado en el currículo escolar, forma un cuerpo común de conocimientos de los dos profesores del estudio. En general, manifiestan conocimiento de propiedades y nociones relacionadas con el tema, como: significados de fracción (parte-todo, operador, medida, razón), equivalencia, orden, clases de fracciones, operaciones con fracciones, y distintos procedimientos asociados a los conceptos.

- Los sistemas de representación más empleados en la enseñanza de las fracciones fueron el verbal, numérico y el figural. La representación verbal se utiliza esencialmente para hacer lecturas de las fracciones según su representación numérica. Esta representación se presenta para definir la fracción $\frac{a}{b}$ como cociente que tiene un número decimal asociado y como un representante de un todo o unidad. La representación figural está vinculada principalmente al empleo de magnitudes continuas, como la superficie de figuras geométricas (cuadrados y rectángulos), o la longitud de segmentos de recta, para representar una porción de una unidad, que expresa la fracción. En estos casos se enfatiza el proceso de construcción, transmitiendo el significado de fracción medida, como resultado de dividir el todo en partes iguales (congruentes) y asignar una fracción a cada parte. El profesor de Educación Primaria promueve el paso de la representación verbal a la figural y luego a la representación numérica, empleando en ocasiones material concreto. El profesor de Educación Secundaria se centra en pasar de la representación verbal a la numérica, y en algunas oportunidades emplea la representación figural.

- Tanto el profesor de Educación Primaria como el de Educación Secundaria, establecen conexiones con contenidos estudiados en cursos preliminares (conexiones temporales), que les permite justificar y relacionar nociones o procedimientos matemáticos. También se presentan conexiones intraconceptuales; es decir, se establecen enlaces hacia el interior de un mismo concepto.

- Respecto de la complejidad matemática del contenido, el profesor de Educación Primaria va "complejizando" la actividad matemática. Primero, presenta un repertorio de tareas de partición de la unidad en partes iguales, para introducir la fracción como resultado de dicha partición. Tiene especial cuidado en enfatizar la igualdad, comenzando por igualar el tamaño y forma de las partes, y posteriormente sólo el tamaño. Esto le permite asociar la expresión simbólica con la representación figural. También tiende a graduar las cantidades empleadas, comenzando con tareas de datos sencillos para continuar con situaciones más complejas.

- El profesor de Educación Secundaria comienza empleando el significado de la fracción como parte-todo, y este principio lo lleva a trabajar la equivalencia, el orden de fracciones, etc. Extiende el significado de fracción como parte-todo referido a un todo de 100 partes, para introducir los porcentajes (como medidas que varía en función del total). Además, la comparación entre dos partes de un todo o cantidades lleva a la idea de fracción como razón, complejizando el significado de fracción como parte-todo. Esto permite al profesor concebir que la fracción va más allá de partir en partes iguales y tomar algunas de ellas, identificando relaciones multiplicativas entre dos cantidades.

- Respecto a las formas de hacer y proceder en matemática, los dos profesores razonan de manera matemáticamente correcta, sin hacer uso de un lenguaje formal (no se aluden a teoremas, axiomas, demostraciones, etc.). La actividad matemática se presenta a partir de situaciones concretas, realizando diferentes acciones que comportan dividir, fraccionar, repartir, etc., aludiendo a actividades prácticas. Enuncian algunas definiciones matemáticas verbalmente, sintetizando y expresando en lenguaje corriente, alejado del lenguaje matemático.

- El profesor de Educación Secundaria revela una forma de proceder en matemáticas, siguiendo una secuencia de pasos lógicos: parte de una premisa inicial, aplica una definición y llega a la conclusión, esto deja de manifiesto que el docente sigue un proceso propio de la lógica matemática.
- El profesor de Educación Primaria es consciente de algunos errores y dificultades (conceptuales y de cálculo) más habituales que presentan los estudiantes al resolver las tareas matemáticas del tema. Esto le hace explicitar estas manifestaciones o bien presentar tareas para que los estudiantes identifiquen y corrijan el error o afronten la dificultad.

  El profesor de Educación Secundaria manifiesta conocer errores aritméticos que los estudiantes exhiben. Al ser preferentemente unidireccional la comunicación promovida en clases (se da pocas ocasiones para que los estudiantes comuniquen sus ideas), resulta más complicado identificar si el profesor conoce aspectos sobre el modo de pensar de sus alumnos respecto de las tareas matemáticas, aunque anticipa algunos, y actúa en consecuencia.
- Ambos profesores presentan tareas matemáticas relacionadas con contenidos de la estructura conceptual referentes al tema, enunciadas en contextos y situaciones diferentes (contextos personales o matemáticos), además permiten emplear distintos sistemas de representación.

En síntesis, el análisis detallado de los datos nos permitió hallar indicios de conocimiento especializado de dos profesores expertos al enseñar el tema de las fracciones. Las clases observadas del profesor Rodríguez, sobre la enseñanza de los números racionales, han puesto de relieve un predominio de situaciones en las que destaca el c*onocimiento didáctico del contenido* y, en menor grado, el *conocimiento matemático*. Mientras que en el caso del profesor Rivera observamos lo contrario; es decir, destaca el *conocimiento matemático* por sobre el *conocimiento didáctico del contenido*.

El análisis detallado de cada clase ha mostrado la importancia de profundizar en situaciones de aula, para tratar de comprender mejor los elementos que integran el conocimiento del profesor. En el siguiente capítulo discutiremos los resultados a la luz de los objetivos planteados en la investigación.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

Índice del capítulo

Conclusiones y recomendaciones

La preocupación principal de esta investigación es avanzar en la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, para eso nos hemos propuesto describir, identificar y caracterizar el conocimiento especializado que manifiestan dos profesores expertos que enseñan el contenido matemático de los números racionales. Seleccionamos a profesores expertos ya que se esperaba que exhibieran un mayor nivel de conocimiento, que estructuraran la enseñanza y los procesos de aprendizaje de forma efectiva, para acercarnos a una comprensión profunda de los aspectos matemáticos y didácticos de un contenido. A partir de la comprensión del conocimiento de los profesores, proyectábamos profundizar en la caracterización del modelo teórico de conocimiento empleado en el estudio.

En lo que sigue, exponemos la evaluación de los resultados presentados en el capítulo anterior. Primero, se discuten los resultados según los objetivos planteados en el capítulo primero, luego, enunciamos los principales aportes de la investigación, algunas limitaciones presentadas en el transcurso del estudio y formulamos recomendaciones de posibles líneas para continuar la investigación.

5.1 EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS

En lo que sigue examinamos hasta qué punto se cumplieron los objetivos propuestos en el estudio. Primero, presentamos los objetivos específicos *O1*, *O2*, *O3* y *O4* que buscaban identificar, profundizar y comprender el conocimiento matemático especializado manifestado por dos profesores al enseñar el tema de los números racionales. Comenzando por examinar los objetivos *O1* y *O3* que corresponden a profundizar y comprender el conocimiento matemático especializado del profesor de Educación Primaria, posteriormente analizamos los *O2* y *O4* que aluden al profesor de Educación Secundaria. A partir de la comprensión del conocimiento de los profesores, profundizamos en la caracterización del modelo teórico de conocimiento empleado en el estudio, que corresponde a los objetivos *O5* y *O6*.

5.1.1 Evaluación de los objetivos 1 y 3

El primer objetivo específico de esta investigación (*O1*) consiste en identificar qué componentes del conocimiento matemático especializado para la enseñanza pone en juego un profesor experto de Educación Primaria al enseñar el contenido de los números racionales. A partir del análisis detallado de los datos identificamos componentes de conocimiento para cada subdominio del modelo MTSK, según se describe en el capítulo anterior. Posteriormente, integramos dichos componentes para realizar una síntesis que permitió comprender cuál es el conocimiento matemático especializado del profesor.

En el profesor de Educación Primaria se destacan especialmente los conocimientos correspondientes a tres dominios: el *conocimiento de los temas matemáticos* (KoT), *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) y el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT), como se ilustra en la Figura 34[26].

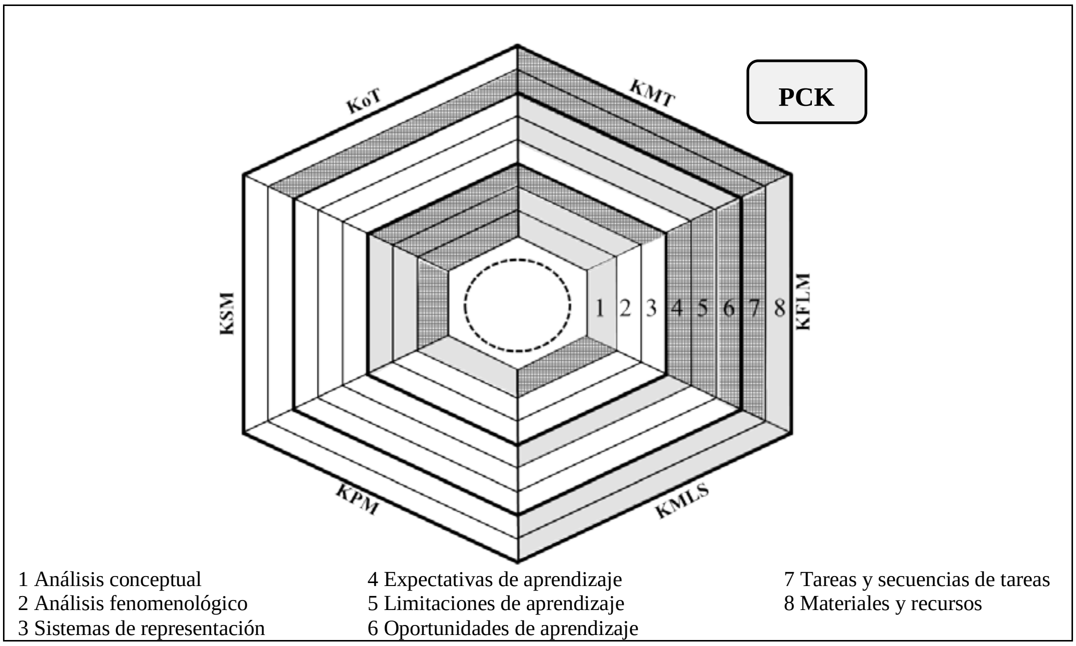


Figura 34. Conocimiento especializado manifestado por el profesor Rodríguez al enseñar el tema de las fracciones en 6º de Educación Primaria

[26] Los trapecios cuadriculados señalan las categorías más destacadas al enseñarse el tema de las fracciones.

Referente al *conocimiento del contenido matemático* identificamos que el profesor conoce distintos conceptos y procedimientos relacionados con las fracciones: fraccionamiento equitativo y exhaustivo, los significados de fracción como parte-todo y operador, clases de fracciones, equivalencia, orden y operaciones con fracciones, y una serie de procedimientos para establecer fracciones equivalentes, comparar y ordenar fracciones, etc. La Tabla 19 resume los aspectos conceptuales y procedimentales que muestra conocer el profesor al enseñar el tema de los números racionales.

El profesor conoce los sistemas de representación usuales para la enseñanza del tema de las fracciones: simbólico verbal y numérico (fraccionario y decimal), figural, gráfico y concreto. Las tareas planteadas muestran que maneja diferentes ideas matemáticas, como la fracción concebida como una medida en un contexto parte-todo, como operador para situaciones de fraccionamiento, la equivalencia de fracciones y el orden. En estos casos relaciona las formas de representar las fracciones, estableciendo el fraccionamiento de una unidad como referente principal para apreciar sus relaciones. Esto se extiende a las operaciones aditivas con fracciones en las que se definen a partir de situaciones concretas, utilizando la fracción con referencia a una unidad (parte-todo, operador o medida). Por tanto, podemos decir que en la enseñanza de estos conceptos establece una relación entre los tres vértices del triángulo semántico del análisis de contenido: concepto formal, representación gráfica y significado de fracción en relación a una unidad.

Las operaciones multiplicativas de fracciones se presentan en términos estrictamente procedimentales, en representación simbólica y en forma de fracción.

El profesor también recoge la temporalidad como eje conector de los contenidos matemáticos, relacionando, principalmente, el contenido estudiado con temas trabajados en cursos preliminares, y generando enlaces hacia el interior de un mismo concepto.

El docente integra en la actividad matemática generada en clase las contribuciones de sus estudiantes, especialmente para definir conceptos, lograr el aprendizaje de procedimientos y para resolver situaciones contextualizadas, en los dominios señalados anteriormente. Por la dinámica generada en clase, en la que los estudiantes tienen el rol fundamental, interviniendo el profesor en momentos específicos, no apreciamos el grado en que el docente sabe cómo se explora y genera nuevo conocimiento en matemáticas; si bien, emplea algunos tipos de argumentaciones, estas corresponden a la matemática escolar.

En relación con el *conocimiento didáctico del contenido*, la actuación del profesor refleja su conocimiento del tema, mediante una diversidad de tareas de enseñanza, en las que se procura relacionar distintos sistemas de representación, especialmente centrados en el figural, del que se apoya para ejemplificar las acciones. El profesor plantea situaciones prácticas habituales (partir, dividir) empleando la representación figural, dando sentido progresivamente a la representación numérica. Estas tareas promueven acciones que se realizan con material concreto, como el papel cuadriculado, o bien, empleando la representación figural. Por tanto, el profesor muestra conocimiento de las características formativas de las tareas matemáticas escolares.

El docente manifiesta disponer de un esquema de enseñanza que va de lo particular a lo general. Introduce el tema mediante una serie de tareas que permiten trabajar la idea de fraccionamiento equitativo y exhaustivo, interpretándose la fracción como una parte o porción de la unidad. Esto admite trabajar los significados de fracción como parte-todo y operador, y apoyarse en estos significados para ir justificando otros conceptos y procedimientos relacionados con el contenido. A diferencia de lo que señala Lamon (2001) que la fracción como parte-todo es la menos valiosa respecto de los otros significados de fracción, en el caso del docente, este significado le permite trabajar situaciones de fraccionamiento equitativo, que es un contenido que presenta dificultad para los estudiantes (Flores y Torralbo, 2011; Lamon, 2007).

Un aspecto destacado de *conocimiento didáctico del contenido matemático* es el potencial de la secuencia de tareas de fraccionamiento que presenta a lo largo de la unidad. También conoce dificultades de aprendizaje de los estudiantes, e indicadores de la presencia de errores conceptuales que manifestar al abordar el contenido. Reconoce la imagen de los conceptos o procedimientos que tienen los estudiantes al resolver una tarea matemática de forma incorrecta, o cuándo hacen algún señalamiento erróneo. Esto lleva al profesor a formular distintas preguntas para que los alumnos reconozcan el error, también presenta tareas en otros contextos para simplificar las situaciones, por tanto brinda orientaciones precisas para que los estudiantes superen las limitaciones de aprendizaje.

El subdominio del *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas*, que comprende los contenidos propuestos en las normativas curriculares de los niveles de enseñanza, y conocer materiales o recursos que proponen las normativas para abordar los contenidos, es uno de los subdominios que más difícilmente se aprecia en la observación de aula. Evidenciamos que el profesor reflejó los contenidos mínimos estipulados por el currículo escolar y los contenidos programados para el nivel, y, en las conversaciones que acompañaron nuestro paso por su aula, que conocía algunas orientaciones emitidas por organizaciones docentes y las empleaba como fuentes para elaborar las tareas que presentaba en su enseñanza. Produciéndose, a partir de la observación de aula, una interpretación evaluativa de este subdominio.

A partir del conocimiento presentado por el profesor Rodríguez, avanzamos en la comprensión de su conocimiento matemático especializado (*O3*).

En este profesor se destacan dos circunstancias importantes, tiene una formación de base como maestro generalista, y tiene amplia experiencia docente (34 años). Es esta experiencia, no solo en relación con su práctica, sino su destacado reconocimiento por sus compañeros y la comunidad de profesores, lo que nos llevó a reconocerlo como un profesor experto. Considerando que su formación generalista le hace tener una formación matemática de base menos formal (Krauss, Brunner, Kunter, Neubrand, Blum, y Jordan, 2008), esto no es impedimento para organizar la enseñanza del tema de manera más intuitiva. Los resultados de este estudio muestran que su experiencia, relacionada con su responsabilidad profesional, le ha llevado a una integración más fuerte de diferentes categorías de conocimiento.

Asimismo, apreciamos que su conocimiento de las fracciones se ubica preferentemente en relación a una unidad (indicando explícitamente que se trata de una relación parte-todo o de un operador, pero también empleando la fracción como medida), consiguiendo articular los significados y los conceptos, a través de una estructura conceptual fuertemente arraigada, y apoyada por el empleo de sistemas de representación que conjugan los elementos simbólicos (fracciones y decimales), con los figurales. Esto se realiza apoyándose en situaciones de fraccionamiento, en los que puede contextualizar toda su enseñanza, incluso las operaciones aditivas (fracciones con igual denominador).

Esta articulación del conocimiento de la matemática para la enseñanza se acompaña de la disposición a la innovación educativa, buscando fuentes de tareas matemáticas, y creando nuevas tareas para lograr un aprendizaje de la estructura de la matemática escolar que él mismo domina.

En el proceso de enseñanza, el profesor ha ido identificando dificultades del aprendizaje, que pueden haberse derivado de su práctica docente. A partir de ellas, ha generado tareas matemáticas innovadoras, que le sirven para detenerse en estas dificultades. Como consecuencia, el profesor presenta un repertorio de tareas matemáticas que tienden a ser más estimulante cognitivamente para los estudiantes.

Cuando el conocimiento matemático no tiene este respaldo en significados, como, por ejemplo, en lo referente a las operaciones multiplicativas, o en los procedimientos de búsqueda del mínimo común denominador, el profesor realiza una enseñanza de procedimientos, sin el apoyo que hemos destacado en los otros contenidos.

En síntesis, el profesor Rodríguez manifiesta tener un conjunto de orientaciones consistentes: un amplio conocimiento del contenido a enseñar, que le permiten organizar el proceso de enseñanza sin dificultad y generar discusiones en clase; y promueve la participación en el aula, haciendo uso de los comentarios de los estudiantes para lograr interacciones productivas en las clases. Estos aspectos caracterizan principalmente su condición de experto, reafirmándose, esencialmente, las características primarias descritas en este estudio.

Las apreciaciones, que resumen lo expresado en el capítulo anterior, nos llevan a considerar que se han alcanzado el primer y tercer objetivo de la investigación.

5.1.2 Evaluación de los objetivos 2 y 4

Identificar qué componentes del conocimiento matemático especializado para la enseñanza pone en juego un profesor experto de Educación Secundaria al enseñar el contenido de los números racionales, constituye el segundo objetivo (*O2*) específico de esta investigación. Para los subdominios del modelo MTSK identificamos elementos de conocimiento especializado manifestado por el profesor al enseñar el tema de las fracciones. Especialmente se destacan elementos de conocimiento de tres dominios: el *conocimiento de los temas matemáticos* (KoT), *conocimiento de las características del* *aprendizaje de las matemáticas* (KFLM), y el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT), como se ilustra en la Figura 35.

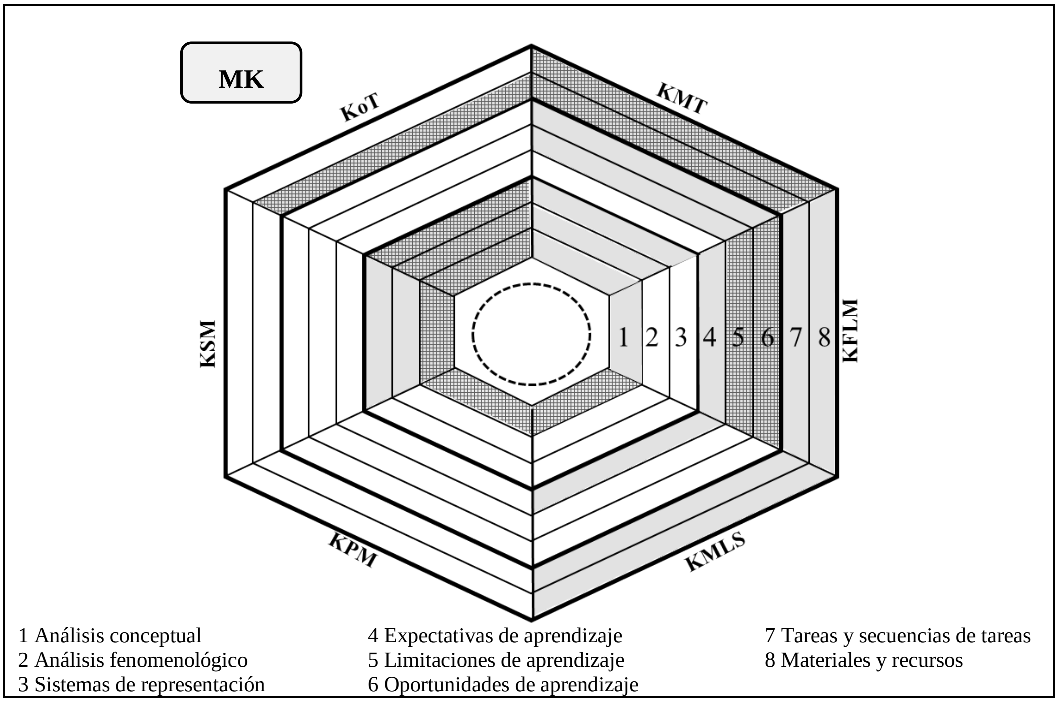


Figura 35. Conocimiento especializado manifestado por el profesor Rivera al enseñar el tema de las fracciones en 1º de Educación Secundaria

El subdominio más destacado del profesor de Educación Secundaria fue el KoT, predominando el dominio de los aspectos conceptuales relacionados con el tema de las fracciones para 1º de Educación Secundaria. Durante sus explicaciones demuestra disponer de un conocimiento formal e intuitivo del tema, pero también apreciamos indicadores de conocimiento de aspectos fenomenológicos sobre las fracciones y sus operaciones, si bien no se establecen de manera sistemática. De manera esporádica incorpora elementos de significado de las fracciones y sus operaciones, para articularlas con la secuencia de enseñanza propuesta en el libro de texto, en el que se apoya.

El profesor indica que las fracciones son una extensión de los conjuntos numéricos de los naturales y los enteros, para cubrir la necesidad de trabajar con cantidades no exactas. Esto brinda la oportunidad de relacionar la fracción con la idea formal de par ordenado $\left(\frac{a}{b}\right)$, pero también con el significado de “fracturar” o “romper” una cantidad en partes iguales. El significado usado para organizar el concepto de fracción es esencialmente el de parte-todo, priorizando este significado frente a otros, pero apareciendo su visión de los racionales a partir de la idea de proporcionalidad, trabajando implícitamente el significado de fracción como razón, a pesar de encontrarse en situaciones en que se hace referencia a una unidad. Una característica destacada del profesor es el amplio dominio de procedimientos relacionados con el tema enseñado, especialmente los aspectos formales, presentando, en ocasiones, situaciones que dan sentido a algunos procedimientos.

Maneja los sistemas de representación numérico (fracción $\frac{a}{b}$, decimal y porcentaje, $a: b$ razón) y figural (modelos de área y de longitud). La representación figural se utiliza como recurso para apoyar la representación numérica, lo que le permite explicar alguna situación concerniente a la fracción como parte-todo y operador, pero también para expresar relaciones de proporcionalidad interna en la unidad. En general, enfatiza el trabajo numérico, exhibiendo que es el contenido matemático a aprender. Independiente del apoyo del libro de texto, el profesor tiene conocimiento para presentar situaciones que ejemplifican los conceptos, cuando aprecia que el discurso no está suficientemente claro.

Establece conexiones temporales entre contenidos de otros niveles escolares, además relaciona elementos de la estructura conceptual. Produce complejización del contenido, específicamente al trabajar tareas de fraccionamiento que llevan a relacionar dos cantidades de la misma magnitud.

Identificamos en algunos episodios de clase que el profesor tiende a seguir una secuencia de pasos en los que hay una estructura lógica, que se corresponde con el razonamiento matemático: comienza de una premisa inicial, aplica una definición y llega a la conclusión. Esta estructura aparece en su presentación, pero también en las recomendaciones que hace a los alumnos para la resolución de las tareas, especialmente cuando requieren una argumentación.

Sobre aspectos didácticos del contenido, el profesor presenta una serie tareas que llevan a reforzar o practicar los distintos contenidos y procedimientos matemáticos, destacando su aprendizaje simbólico. Los materiales y recursos didácticos que el profesor conoce para la enseñanza del contenido son herramientas digitales (*software* y calculadora), que le sirven como un medio para comprobar las soluciones de los ejercicios; es decir, apreciar si los alumnos realizan los cálculos correspondientes.

Prevalecen las tareas que involucran la ejecución de procedimientos memorizados (ejercicios), en menor cantidad se presentan tareas que requieren que los estudiantes piensen conceptualmente y que hagan conexiones entre conceptos y procedimientos. En general, la propuesta de enseñanza presentada por el profesor refleja los contenidos mínimos estipulados por el currículo escolar para el curso 1º de la ESO. A partir de la observación de clase no hemos podido identificar que el profesor conozca orientaciones de colectivos y organizaciones docentes diferentes de los institucionales.

Respecto del *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas*, identificamos que el profesor relaciona de manera más extensa las expresiones decimales con las fracciones; trabaja los significados de fracción como parte-todo y operador, aunque alude con escasa frecuencia a los contextos de la vida real, como recomienda el currículo. También, hace una interpretación preferentemente procedimental de algunos contenidos, respetando las ideas expuestas en el libro de texto. Al igual que el caso del profesor de Educación Primaria, la observación de clase manifestó una interpretación evaluativa de este subdominio.

Estas apreciaciones sobre los componentes del conocimiento matemático especializado, nos permiten profundizar en el conocimiento del profesor de Educación Secundaria, objetivo cuarto (*O4*) del estudio.

El docente tiene una formación como licenciado en matemáticas y estudios de posgrado en esta especialidad. Esto se ve reflejado en un conocimiento matemático organizado, especialmente en sus aspectos formales. Pero además, el profesor tiene capacidad para encontrar situaciones contextualizadas que expresen fenomenológicamente los conceptos referentes al tema. Aunque las tareas de enseñanza se centran en una utilización de la fracción en relación a una unidad, el profesor muestra manejar el conocimiento de la fracción razón, interpretando las situaciones de una manera proporcional, en la que la relación entre la parte y el todo se puede aplicar a todos proporcionales (completo), lo que permite obtener la porción mediante la unión de porciones parciales. Este conocimiento de nuevos significados no se acompaña de una enseñanza específica, lo que indica que no le da suficiente entidad para considerarlo aprendizajes específicos. Parece que el profesor conoce diversas situaciones que dan significado a los conceptos, pero no está claro si las distingue explícitamente, y por tanto no se detiene a plantear tareas que contemplen los diferentes significados de fracción, aunque habríamos necesitado entrevistar al profesor para confirmar esta apreciación.

Esto demuestra que el profesor establece conexiones entre los conceptos matemáticos, desde relaciones simples y superficiales entre contenidos específicos a otras más complejas, como es el caso de relacionar los significados de fracción. El establecer conexiones entre contenidos es una cualidad de profesores con una comprensión profunda de las matemáticas elementales (Ma, 1999), que parece ser una característica del profesor Rivera. Además, el profesor tiene un amplio conocimiento procedimental del tema, buscando en ocasiones situaciones que corresponden a los procedimientos.

El profesor ha sido seleccionado por el reconocimiento que ofrece a compañeros y gestores del centro, quienes destacan su amplio conocimiento matemático. Esta idea se refuerza, aunque se aprecia que su responsabilidad profesional la centra en conseguir los aprendizajes previstos en el libro de texto. Con estas apreciaciones podemos considerar que se han alcanzado, en gran parte, los objetivos 2 y 4 de la investigación.

5.1.3 Evaluación del objetivo 5

El quinto objetivo (*O5*) buscaba avanzar en la caracterización de los subdominios del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Hemos de indicar que, simultáneamente a la realización de esta investigación, la autora principal de este estudio en conjunto con sus directores, formamos parte de un grupo de investigación que ha participado en la elaboración del modelo de conocimiento MTSK. Por tanto, este trabajo ha ido contribuyendo paulatinamente en las reflexiones del grupo, aportando análisis de fragmentos de clase (reales) para profundizar en las categorías e indicadores de conocimiento de cada dominio del modelo.

Considerando que el modelo de conocimiento MTSK, surge de la necesidad de disponer de herramientas que permitan profundizar en el conocimiento necesario para enseñar (Carrillo, 2011; Carrillo *et al*., en revisión), además que es un modelo que nace de reflexiones teóricas orientadas a comprender y estructurar el conocimiento del profesor de matemáticas, esta investigación ha servido para aportar dos ejemplos concretos del conocimiento puesto en práctica por profesores al enseñar el tema de las fracciones. El modelo MTSK ha sido una herramienta beneficiosa para depurar el conocimiento observado durante la acción docente, mostrando potencialidad analítica para profundizar en la comprensión del conocimiento matemático del profesor, manifestado en su práctica.

También, el propio diseño de esta investigación, especialmente la relación teórica establecida entre el *análisis didáctico* y modelo MTSK, ha permitido tener referentes concretos para profundizar en la naturaleza de cada uno de los subdominios de conocimiento. Por ejemplo, el subdominio de *conocimiento de los temas matemáticos*, que comprende el qué y cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que va a enseñar, se constituye, en este trabajo, por los focos referentes al análisis de contenido del *análisis didáctico* que se relaciona con el conocimiento matemático escolar sobre los temas (conceptos, procedimientos, representaciones, aspectos fenomenológicos, etc.). Del mismo modo, cada uno de los restantes subdominios se relaciona con los elementos del *análisis didáctico*, como se explica en el Capítulo 2 (apartado 2.2.2).

Las categorías e indicadores definidos, permiten vislumbrar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la práctica. Brindando un amplio escenario para profundizar en el conocimiento puesto en juego por el profesor. Por ejemplo, contemplamos las *tareas* en distintos subdominios del modelo MTSK, aunque diferenciando los aspectos de las mismas, según el subdominio. Las tareas que selecciona e implementa el profesor manejan contenidos de la estructura conceptual, utilizan diferentes sistemas de representación, pueden formularse seleccionando situaciones que presentan los contenidos en contextos y situaciones que identifican aspectos fenomenológicos, además tienen metas que han de estar asociadas a los objetivos de aprendizaje que se definen en el análisis cognitivo (Marín, 2013, p. 109). Esto lleva a diferenciar que en la resolución de las tareas el profesor hace uso de distintas estrategias de resolución, empleando significados, conceptos, procedimientos matemáticos, etc., que llevan a vislumbrar aspectos del *conocimiento de los temas matemáticos*. También llevan a establecer relaciones conceptuales (*conocimiento de la estructura de las matemáticas*), y si el profesor usa criterios explícitos para justificar que las tareas son adecuadas al nivel de enseñanza, o bien, que permiten prever errores o dificultades matemáticas que llevan a centrarnos en aspectos de *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*. Por lo tanto, el *análisis didáctico* ofrece un escenario amplio para profundizar en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, a partir del estudio de la actividad en el aula (Rojas y Flores, 2011; Rojas, Flores y Ramos, 2013).

Este trabajo aporta una lista de categorías e indicadores de conocimiento, referentes al tema de los números racionales, que se distinguen para cada uno de los seis subdominios del modelo MTSK. La aplicación de estas categorías para estudiar el conocimiento del profesor en la práctica, lleva a tener una visión holística del conocimiento revelado por los profesores al enseñar el tema de los números racionales. Estas apreciaciones resumen los logros del quinto objetivo de la investigación.

5.1.4 Evaluación del objetivo 6

El sexto objetivo (*O6*) consistía en establecer indicadores y subcategorías de conocimiento referentes al contenido matemático escolar de los números racionales. Definimos 19 categorías con sus respectivos indicadores de conocimiento (total 58) relacionados con el contenido de los números racionales (para más detalle ver Capítulo 2, apartados 2.2.1 y 2.2.2), como se ilustra en la Figura 36.

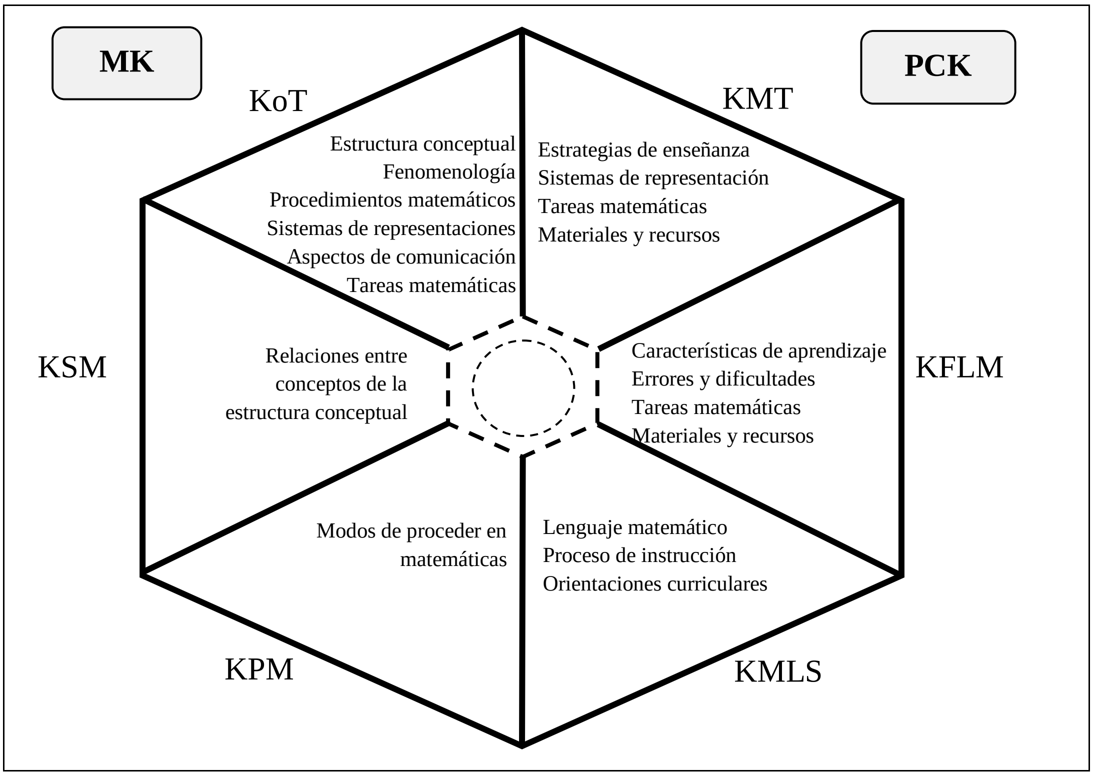


Figura 36. Categorías de conocimiento para cada subdominio del modelo MTSK

Las categorías e indicadores fueron construidos antes del proceso de recopilación de la información y se aplicaron a distintas unidades de información, permitiendo organizar y profundizar en el conocimiento especializado manifestado por dos profesores al enseñar el tema de los números racionales.

En este trabajo buscábamos completar las categorías e indicadores de conocimiento con datos emergentes, que pudiesen surgir de la indagación de los significados de los propios datos. No obstante, del análisis de las clases no surgieron categorías emergentes de los datos, siendo las cualidades definidas un referente amplio para profundizar en el conocimiento del profesor a partir de la observación de clase. Aunque hemos de reconocer que no todos los indicadores han podido ser apreciados con la misma precisión en la práctica, lo que nos hace pensar en reformular algunos de ellos para expresarlos en términos más operativos. Para ello observamos que las categorías e indicadores definidos pueden complementarse con otras particulares que ofrece el *análisis didáctico* y que pueden no observarse a partir del análisis de clase. Por ejemplo, conocer qué espera el profesor que aprendan sus estudiantes, profundizar en las competencias, aptitudes, habilidades, valores y actitudes, etc., que se esperan que se desarrollen o utilicen a lo largo de su formación.

La función que han desempeñado las categorías en la investigación, así como su correspondencia con las bases teóricas, nos permiten considerar que el sexto objetivo fue alcanzado en alto grado.

5.1.5 Evaluación del objetivo general

El objetivo general que orientaba esta investigación era describir, identificar y caracterizar el conocimiento especializado de dos profesores al enseñar el tema de los números racionales. En el Capítulo 4 (apartados 4.1 y 4.2) y en los Anexos B y C se presenta una descripción detallada de la información seguida por cada profesor, sujetos informantes del estudio. La descripción permite definir los episodios y subepisodios de clase en los cuales se produce comunicación matemática, que representan fragmentos de texto con significados. Luego de la descripción y de la clasificación de las clases, buscamos dar sentido a la información recolectada, empleando el análisis de contenido (Bardin, 1996; Fox, 1981; Krippendorff, 1990), que nos llevó a estructurar y organizar la información respecto de los seis subdominios de conocimiento del modelo MTSK. En los apartados 4.1.1 y 4.2.1 identificamos características del conocimiento manifestado por cada profesor al enseñar el tema de los números racionales, según distintas categorías e indicadores definidos para cada subdominio. Las dos etapas anteriores nos llevaron a determinar los atributos particulares de conocimiento de cada profesor manifestado en su acción docente, como se sintetiza en los apartados 4.1.2 y 4.2.2. Esto se concreta con perfiles de conocimiento especializado de profesores expertos que enseñan el tema de las fracciones, que suministran información que va más allá de hacer una evaluación de su conocimiento.

5.2 PRINCIPALES APORTES DE LA INVESTIGACIÓN

Con base en los objetivos que guiaron esta investigación, el marco de referencia y los hallazgos presentados, enunciamos los principales aportes de la investigación.

- El conocimiento del contenido matemático y didáctico del contenido son comúnmente considerados como una parte importante de la pericia del docente, sin embargo no está claro lo que los profesores exactamente expertos saben acerca de las matemáticas (Li y Kaiser, 2012). En esta investigación mostramos dos casos que resumen el conocimiento que manifiestan profesores expertos, dejando a la luz que el profesor de Educación Primaria manifiesta conocer más aspectos del *conocimiento didáctico del contenido*, que el profesor de Educación Secundaria que se limita a una enseñanza más tradicional. No obstante, aún se necesitan más investigaciones para examinar el nivel de conocimiento de los profesores expertos sobre la matemática escolar y para saber si es importante para ellos saber también matemáticas avanzadas (Li y Kaiser, 2011; Rojas, Flores y Carrillo, 2011, 2013, en prensa).
- El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), ha sido una valiosa herramienta para profundizar en el conocimiento del profesor a partir de la observación de aula. La especialización del modelo MTSK permitió diferenciar los elementos de conocimiento general, para centrarnos exclusivamente en el conocimiento matemático y didáctico del contenido. A partir de la identificación y de la organización de componentes de conocimiento manifestado por los profesores del estudio, profundizamos en el conocimiento especializado en su conjunto (referente al tema de los números racionales), obteniendo, en ocasiones, episodios de clase que develaban conocimiento de varios subdominios. Obteniendo un banco de episodios referidos a los distintos subdominios de conocimiento del modelo MTSK, de dos enseñanzas particulares del tema de los números racionales.

- Considerando que los modelos de conocimiento incluyen categorías generales, además que es necesario disponer de modelos que lleven a un análisis detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se manifiestan en una enseñanza de las matemáticas efectiva (Godino, 2009), en este trabajo presentamos una serie de indicadores de conocimiento relacionado con el modelo MTSK, referentes al tema de los números racionales. Los indicadores de conocimiento son una base de información para el diseño de materiales de apoyo para los docentes, para la formación docente y desarrollo profesional (Ball *et al*., 2008; Sosa, 2010).

- El realizar el *análisis didáctico* del tema de los números racionales nos permitió hacer una reflexión sobre las cualidades educativas e instruccionales del contenido matemático escolar, además establecer relaciones precisas entre los componentes del *análisis didáctico* y los dominios de conocimiento del modelo MTSK. Las categorías e indicadores de conocimiento que surgieron de la relación teórica establecida permitieron "mirar" las declaraciones de los profesores enunciadas en el aula, comprendiendo tanto aspectos matemáticos como didácticos del tema de las fracciones. Esto nos permitió hacer una reconstrucción del conocimiento plausible que el profesor manifiesta en su tarea de enseñanza. Por lo tanto, el *análisis didáctico* se ha manifestado como una efectiva herramienta teórica-metodológica para identificar conocimiento matemático a partir de la observación de clase (Rojas y Flores, 2011; Rojas, Flores y Ramos, 2013).

- La organización de las características primarias y secundarias elaboradas, permitieron seleccionar e identificar a profesores con cierto grado de pericia matemática. Los profesores expertos dejan a la luz grandes fortalezas de enseñanza, aspectos que se pueden realzar en profesores con características de expertos para destacarlos como mentores de profesores noveles. Como se evidencia en otras culturas, especialmente en las de occidente, la preparación de los docentes a cargo de otros es una fortaleza que les permite compartir experiencias profesionales en post de mejorar la práctica del profesor (Li y Kaiser, 2011).

5.3 LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS PARA EL AVANCE DE LA INVESTIGACIÓN

En lo que sigue, exponemos algunas limitaciones presentadas en el transcurso de esta investigación. Además, según los resultados del estudio, las conclusiones derivadas de estos y los problemas principales de la línea de investigación de Formación de Profesores de Matemáticas, sugerimos algunas líneas futuras de investigación.

5.3.1 Limitaciones del estudio

- Considerando que la línea de trabajo que motiva está investigación es estudiar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas, en su acción docente, esto nos llevó a centrarnos únicamente en la observación directa del aula. Nos basamos específicamente en la observación de clases, pretendiendo identificar componentes, pero, sobre todo, comprender este conocimiento. La construcción de una representación sintética del conocimiento de cada profesor se vería enriquecida mediante un mayor contacto con los sujetos, complementándose con entrevista a los profesores de estímulo del recuerdo, para indagar sobre las conductas o actuaciones ejecutadas y observadas en las clases. Este proceso no fue posible concretarlo, por la lejanía de los profesores de nuestro lugar de trabajo, así como por el tiempo de planificación de la investigación. Ello nos hubiera permitido analizar el grado en que los profesores son conscientes de su conocimiento, asimismo conocer si sus intenciones educativas coinciden con las inferidas en el análisis realizado, y en general, debatir sobre el papel que desempeñan las actividades que propusieron a sus estudiantes. Este enfoque basado en los datos permitiría avanzar en la comprensión de su conocimiento, así como también en establecer resultados teóricos de mayor nivel (Glaser y Strauss, 1967).
- Para la selección de los profesores del estudio establecimos características primarias y secundarias. Los docentes seleccionados cumplieron con la mayoría de características secundarias; es decir, con aspectos generales que aludían a su formación profesional (número determinado de años de experiencia, reconocimiento entre pares, etc.); sin embargo, las características primarias no fueron confirmadas en su totalidad. En este caso, sería conveniente aplicar otros instrumentos a los profesores para confirmar aspectos específicos de la tarea de

enseñanza y de conocimiento (uso de distintas estrategias para resolver los problemas, procesos de enseñanza más integrados, etc.). Esto nos hubiese permitido caracterizar todos los subdominios de conocimiento del modelo MTSK, quizás, con una mayor riqueza matemática y didáctica. El estudio del conocimiento a través de la práctica tiene la limitación de mostrar aquellos rasgos de conocimiento que aparecen en la gestión del profesor en su aula. Como en el caso del profesor de Educación Secundaria analizado, la intervención del docente facilita una comunicación unidireccional, es decir, preferentemente expositiva, sin dar lugar a que los estudiantes comuniquen sus ideas, esto limitó, por ejemplo, la posibilidad de profundizar en el subdominio de *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas*.

5.3.2 Perspectivas para el avance de la investigación

Respecto de los resultados evaluados y las conclusiones derivadas de estos, sugerimos las siguientes líneas futuras de investigación:

- Ampliar el *análisis didáctico* en torno a los cuatro tipos de análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación, puede llevar a considerar más posibilidades para vincular los componentes de conocimiento que caracterizan el modelo MTSK, a fin de identificar dimensiones del conocimiento profesional de los profesores. Por ejemplo, el análisis de evaluación podría dar información sobre formas de evaluar las fracciones, con ello comprenderíamos otra parte del conocimiento del profesor.

- Siguiendo la metáfora de Liljedahl *et al*. (2009), la formación inicial se puede ver a partir de una trenza de seis puntas, en los cuales cada hilo corresponde a un subdominio de conocimiento del modelo MTSK, que se nutre de los elementos del *análisis didáctico*. Al principio de la formación, cada hilo individualmente corresponde a los distintos conocimientos que deben adquirir a lo largo de la formación, luego esas hebras se trenzan para integrar y unificar ese conocimiento necesario para la enseñanza. Por lo tanto, la relación establecida entre el *análisis didáctico* y los subdominios de conocimiento del modelo MTSK puede ser la base para inferir como cada uno de los organizadores del *análisis didáctico*, promueve el desarrollo de diferentes dominios de conocimiento en los cursos de formación.

La preocupación de identificar algunos componentes de conocimiento del profesor tiene la intención de generar información que permita manifestarse en los contenidos impartidos en los programas de formación de profesores, inicial o permanente, y para evaluar su eficacia (Godino, 2009, p. 14; Llinares, 1991, pp. 27-28).

Docentes del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Flores, 2013, Lupiáñez, 2012), organizan cada materia de un grado de Maestro de Educación Primaria en términos del *análisis didáctico*, relacionándolo con un modelo de conocimiento y de competencias del profesor. De este modo, proyectan desarrollar en los futuros profesores su conocimiento específico del contenido matemático y didáctico, a partir de los planes de formación estructurados en torno a los dominios de conocimiento que la comunidad científica está definiendo.

- En la línea de evaluación del conocimiento del profesor de matemática se busca estudiar la calidad matemática de los procesos de instrucción (Hill, Blunk *et al*., 2008; Godino, 2009), estableciéndose categorías que permiten medir el proceso. En este estudio las relaciones establecidas entre el *análisis didáctico* y el modelo MTSK aportan una serie de indicadores organizados según los distintos dominios de conocimientos. Estos indicadores pueden ser adaptados para valorar la calidad matemática de distintos procesos de instrucción en que se aborde el tema de los números racionales.
- La caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, obtenido a partir de los dos estudios de casos presentados, proporcionan una rica descripción del conocimiento puesto en juego por cada docente en su práctica profesional. Un componente necesario para complementar este estudio es obtener información sobre el impacto que tiene en los estudiantes que se forman en ambientes ricos de clases con profesores expertos (Fennema y Franke, 1992).
- Los indicadores de conocimiento propuestos pueden seguir enriqueciéndose para el tema de las fracciones, además se pueden ampliar a otros contenidos matemáticos escolares, de distintos niveles, para profundizar en el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas.

Caracterizamos el conocimiento especializado de dos profesores que enseñaban el tema específico de las fracciones. Es posible que sus decisiones de enseñanza y comportamientos varíen al enseñar otros temas matemáticos, por lo que estudiar a profesores al enseñar otros contenidos puede proporcionar una compresión más profunda y completa del conocimiento del profesor de matemáticas. Esto puede contribuir al modelo MTSK con ejemplos concretos de episodios de clase donde se vislumbran distintos subdominios de conocimiento.

- Este trabajo se realizó en el contexto específico español, que nos permitió profundizar en el conocimiento especializado de dos docentes expertos de matemáticas. Al ser un estudio de caso no es representativo a todo el profesorado de España; sin embargo, sería interesante estudiar las concepciones y características de los profesores expertos en los distintos niveles educativos. Lo anterior permitiría construir una imagen más completa del profesor experto en España.

- Considerando la variedad y complejidad del sistema educativo, los datos de este estudio pueden ser un material descriptivo que se presta a reinterpretaciones posteriores. Las grabaciones de las clases y las transcripciones son un evidente valor como fuente de datos para los investigadores y otros usuarios, planteándose distintos objetivos.

- Los registros de video de las sesiones de clases de este estudio es un beneficioso material para complementar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de futuros profesores. Las ventajas de la actividad basada en videos es una oportunidad para que los profesores reflexionen sobre episodios concretos de enseñanza de los contenidos (Barcelos, 2012; Oliveira, Menezes y Canavarro, 2012; Star y Strickland, 2007). Por ejemplo, Star y Strickland (2007) realizan estudios con futuros profesores que identifican los aspectos puntuales en que estos se fijan a la hora de estudiar videos, como hacer conexiones entre los aspectos específicos de las interacciones producidas en el aula y en general con el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Finalmente, tenemos la expectativa de que esta investigación no sólo puede activar el debate sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas, sino también iniciar esfuerzos similares para abordar otros temas escolares.

5.4 PUBLICACIONES Y APORTES RELACIONADOS CON LA INVESTIGACIÓN

En lo que sigue indicamos algunas de las producciones realizadas durante la elaboración de la investigación, relacionadas con el tema de estudio. En el año 2010 realizamos el trabajo de fin de máster centrado en la problemática del conocimiento del profesor. Este estudio se presentó en distintas reuniones, sintetizándose en los siguientes escritos:

Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: Estudio de caso de un profesor chileno*. Trabajo de fin de máster: Universidad de Granada. Granada. España.

Rojas, N. y Flores, P. (2011). El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 17-28). Granada, España: Departamento. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Los resultados obtenidos en los trabajos mencionados, orientaron a la realización del proyecto de investigación que resume esta memoria. El propio diseño de la investigación concedió divulgar parte de los resultados de este estudio, generándose los siguientes escritos:

Ramos, E., Rojas, N. y Flores, P. (2013). Una aproximación a las nociones de profesor reflexivo y de profesor experto y su repercusión en el docente universitario de matemáticas. En M. T. Ramiro, T. Ramiro, M. Bermúdez y FECIES (Comps.), *FECIES 2013. X Foro Internacional sobre Evaluación de la Calidad de la Investigación y de la Educación Superior (FECIES)* (pp.120-125). Granada, España: Universidad de Granada.

Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Conteras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en educación matemática XVI* (pp. 479-485). Jaén, España: SEIEM.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2011). Caracterización del conocimiento matemático de profesores de educación primaria y secundaria. En M. Marín y N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 395-400). Ciudad Real, España.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 4*, 47-64.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (En prensa). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema*. Brasil.

Rojas, N., Flores, P. y Ramos., E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp.191-208). Granada, España: Universidad de Granada.

También este estudio ha sido presentado en distintas reuniones, siendo objeto de discusión el tema. Hemos participado en las reuniones del Grupo de trabajo de Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesional de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), constantemente en el grupo de investigación SIDM de la Universidad de Huelva y en jornadas doctorales organizadas por la Universidad de Granada. Conjuntamente al desarrollo de esta investigación se ha trabajado en colaboración con otros investigadores, produciendo los siguientes documentos:

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2013). En Actas de la VII CIBEM, *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK* (5063-5069). VII CIBEM. Uruguay.

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. Á. & Flores, P. (2013). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (2976-2984). Antalya, Turquía.

Carrillo, J., Climent, N., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Contreras, L. C., Vasco, D., Rojas, N *et al*. (In review). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Model.

Flores, P., Rojas, N. y Aguayo, C. (2014). Taller. Operaciones con sentido, con números racionales. En Actas del XV CEAM, *Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El sentido de las matemáticas: matemáticas con sentido.* Baeza. España.

Martins, F., Ribeiro, C., M., Pinto, H., Sebastião, S., Aguilar, A., Escudero, D., Flores, E., Montes, M. y Rojas, N. (2014). Atribuir significado a raciocínios de outros: discutindo alguns aspetos do conhecimento de futuros professores. In atas *AFIRSE* (pp. to appear), Lisboa: AFIRSE.

Rojas, N., Olfos, R. y Estrella. S. (En revisión). Conocimiento matemático para la enseñanza en un grupo estudio de clases.

Referencias

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2013, septiembre). El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: MTSK. En CIBEM (Eds.), *Actas de las VII CIBEM* (pp. 5063-5069). Montevideo, Uruguay.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Gea, M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *14*(2), 279-297.

Baelo, R. y Arias, A. R. (2011). La formación de maestros en España, de la teoría a la práctica. *Tendencias pedagógicas, 18*, 105-131.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, *90*, 449-466. doi: 10.1086/461626

Ball, D. L. (2000). Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241-247. doi: 10.1177/0022487100051003013

Ball, D. L. & Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Recuperado de http://www.fachportal-paedagogik.de/fis_bildung/suche/fis_set.html?FId=889839.

Ball, D. L., Charalambous C.Y., Thames, M. & Lewis J. M. (2009). Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspectives. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.121-150). Thessaloniki, Greece: PME.

Ball, D. L., Hill, H. C. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *29*(1), 14-22.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Barcelos, R. (2012). Video as resource for mathematical visualization. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 4-246). Taipei, Taiwan: PME.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Ediciones Akal.

Bass, H. (2007). Matemáticas, matemáticos y educación matemática. *La Gaceta*, *10*(3), 689-706.

Berliner, D. C. (1988). *The development of expertise in pedagogy*. Charles W. Hunt Memorial Lecture presented at the annual meeting of the American Association of Colleges for Teacher Education, New Orleans.

Berliner, D. C. (2001). Learning about and learning from expert teachers. *International Journal of Educational Research*, *35*(5), 463-482. doi: 10.1016/S0883-0355(02)00004-6

Blanco, L. (1991). Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de EGB y estudiantes para profesores. *Manuales UNEX*, *11*. España: Universidad de Extremadura.

Blanco, L. (1997). Tipos de tareas para desarrollar el conocimiento didáctico del contenido. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.34-40). Zamora: SEIEM.

Blömeke, S., Hsieh, F. J., Kaiser, G. & Schmidt, W. H. (Eds.). (2014). *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn. TEDS-M results*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Borko, H. & Livingston, C. (1989). Cognition and Improvisation: Differences in Mathematics Instruction by Expert and Novice Teachers. *American Educational Research Journal*, *26*(4), 473-498. doi: 10.3102/00028312026004473

Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two peservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 125-153.

Bromme, R. (1988). Conocimientos profesionales de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, *6*(1), 19-29.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer & B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Brown, C. A. & Borko, H. (1992). Becoming a Mathematics Teacher. In D.A. Grouws (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 209-239). New York: Macmillan.

Bruner, J. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, *19*, 1-15. doi: 10.1037/h0044160

Callejo, M. L., Fernández, C. & Márquez, M. (2013). Pre-service primary teachers' knowledge for teaching of quotitive division word problems. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 145-152). Kiel, Germany: PME.

Cardeñoso, J. M., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Carrillo, J. (2011). Building mathematical knowledge in teaching by means of theorised tools. In T. Rowland, & K. Ruthven (Eds), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 273-287). New York: Springer. doi:10.1007/978-90-481-9766-8_16

Carrillo, J. & Climent, N. (October, 2006). Analysing teaching practice in collaborative environments. In G. Nickmans, M. Bosmans & L. Brants (Eds.), *First European Conference for Practice-based and Practitioner Research. Improving quality in teaching and learning: developmental work and implementation challenges* (pp. 19-21). University of Leuven.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Climent, N., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Contreras, L. C., Vasco, D., Rojas, N., *et al*. (In review). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Model.

Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Rojas, F. y Prat, M. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(1), 67-76.

Carrillo, J., Contreras, L. C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigacion en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.

Castelnuovo, E. (1970). *Didáctica de la matemática moderna*. Serie de matemática. México: F. Trillas, S. A.

Chapman. O. (2014). Overall Commentary: Understanding and Changing Mathematics Teachers. In J. J. Lo, K. R. Leatham, L. R. Van Zoest & SpringerLink (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 295-309). Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-02562-9_16

Charalambous, C. Y., Hill, H. C. & Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: how does it look and what might it take? *Journal of Education for Teaching, 14*(6), 441–463. doi 10.1007/s10857-011-9182-z

Chi, M. (2011). Theoretical perspectives, methodological approaches, and trends in the study of expertise. In Y. Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction* (pp.17-39). Boston, MA: Springer.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: Un estudio de caso*. Tesis doctoral: Universidad de Huelva. España.

Climent, N. & Carrillo, J. (2007). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la Escuela*, *61*, 23-35.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid, España: La Muralla S.A.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa* (2ª ed.). Madrid, España: La Muralla S.A.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5ª ed.). London: RoutledgeFalmer.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6ª ed.). London: RoutledgeFalmer.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. London: RoutledgeFalmer.

Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje*. Tesis doctoral: Universidad de Valencia. España.

Davis, B. (2012). Subtlety and complexity of mathematics teacher's disciplinary knowledge. In *12th* ICME (Eds.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 214- 234). Seoul, Korea: ICME

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics for teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 293–319. doi: 10.1007/s10649-006-2372-4

De Gamboa, G., Planas, N. y Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. *Suma*, *64*, 35-44.

Delors, J. (1994). Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI. *La educación encierra un tesoro*. París, Francia: Santillana Ediciones UNESCO. Recuperado en http://www.unesco.org/education/pdf/DELORS_S.PDF/

Depaepe, F., Verschaffel, L. & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education, 34*, 12-25. doi: 10.1016/j.tate.2013.03.001

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research.* Oxford, Great Britain, England: Schools Council Publications.

English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 3-19). New York: Routledge.

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model. *Journal of Education for Teaching, 15*(1), 13-33.

Escudero, D., Flores, E. y Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio y Flor M. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 35-42). México, DF: Cinvestav.

Estepa, J. (2000). El conocimiento profesional de los profesores de ciencias sociales. En J. Pagés, J. Estepa y G. Travé (Eds.), *Modelos, contenidos y experiencias en la formación profesional del profesorado de Ciencias Sociales* (pp. 313-334). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Estrada, A. (2007). Evaluación del conocimiento estadístico en la formación inicial del profesorado. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. *UNO, 45*, 80- 98.

Even, R. & Ball, D. L. (Eds.). (2009). The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. *The 15th ICMI study.* New York: Springer. doi 10.1007/978-0-387-09601-8

Fennema, E. & Franke, L. M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). New York, NY: Macmillan.

Fenstermacher, G. D. & Richardson, V. (2000). *On making determinations of quality in teaching*. Paper prepared for the Board on International Comparative Studies in Education of the National Academies of Science and the National Research Council, Washington, DC. Recuperado de http://www-personal.umich.edu/~

gfenster/teaqual14ss.PDF

Fernández, C. & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Ferrater, J. (1982). *Diccionario de filosofía, 4* (4ª ed.). Madrid, España: Alianza editorial.

Fitzgerald, A., Hackling, M. & Dawson, V. (2013). Through the viewfinder: reflecting on the collection and analysis of classroom video. *International Journal of Qualitative Methods*, *12*, 52-64.

Flores, E., Escudero, D. I. & Carrillo, J. (2013). *A theoretical review of specialised content Knowledge*. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Épsilon*, *70*, 27-40.

Flores, P. (2013). ¿Por qué multiplicar en cruz? Curso de formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad. *Actas del VII del Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo. Uruguay. Recuperdo de http://www.cibem.org/extensos/47_1375090358_flores_multiplicar_en_cruz.pdf

Flores, P. y Torralbo, M. (2011). Números racionales. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 189-218). Madrid: Pirámide.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: Eunsa.

Franzosi, R. (2004). Content Analysis. In M. Hardy & A. Bryman (Eds.), *Handbook of Data Analysis* (pp. 547- 565). London: SAGE Publications Ltd.

Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis Doctoral: Universidad de Zaragoza. España.

Glaser, B. & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research* (Vol.188). Chicago: Aldine De Gruyter. .

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *20*, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M. y Wilhelmi, M. (2012). Métodos de investigación en las ponencias y comunicaciones presentadas en los simposios de la SEIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2*, 29 -52.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral: Universidad de Granada. España.

González, M. J., Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2010). *Análisis Cognitivo* (Versión 2). Santander y Granada.

Gonzato, M., Godino, J. D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, *23*(3), 5-37.

Goodchild. S. & Sriraman, B. (2012). Revisiting the didactic triangle: from the particular to the general. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 581–585. doi 10.1007/s11858-012-0449-3

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: teacher knowledge and teacher education*. Nueva York: Teachers College Press.

Grossman, P. L., Schoenfeld, A. & Lee, C. D. (2005). Teaching subject matter. In L. Darling Hammond & J. Bransford (Eds.), *Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do* (pp. 201-231). San Francisco, CA: Jossey Bass.

Grossman, P. L., Wilson, S. M. & Shulman, L. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 23-36). Oxford: Pergamon Press.

Hattie, J. (2003). *Teachers make a difference: What is the research evidence? Keynote presentation at the Building Teacher Quality*. The ACER Annual Conference, Melbourne, Australia. Recuperado de file:///C:/Users/usuario/Downloads/john_

hattie.pdf

Hayman, J. L. (1991). *Investigación y Educación* (3ª ed.). Barcelona: Paidós Ibérica.

Heid, M. K., Grady, M., Jairam, A., Lee, Y., Freeburn, B. & Karunakaran, S. (2014). A Processes Lens on a Beginning Teacher’s Personal and Classroom Mathematics. In J. J. Lo, K. R. Leatham, L. R. Van Zoest & SpringerLink. (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 67-82). Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-02562-9_4

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., *et al*. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study. U.S.* Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics. Recuperado de http://nces.ed.gov/pubs2003/2003013.pdf

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers’ Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L. & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430-511. doi: 10.1080/07370000802177235

Hoover, M. (2014). Commentary on Section 1: Mounting Progress on Understanding Mathematics Teacher Content Knowledge. In J. J. Lo, K. R. Leatham, L. R. Van

Zoest & SpringerLink. (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 83- 90). Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-02562-9_5

Imbernón, F. (1989). *La formación del profesorado. El reto de la reforma*. Barcelona: Laia.

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, L. (Eds.). (2005). *El estudio de clases japonés en matemáticas, su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso. PUCV.

Junta de Andalucía (2007a). Orden 166/2007, de 10 de agosto, por la que se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. *BOJA*, 5-20.

Junta de Andalucía (2007b). Orden 166/2007, de 10 de agosto, por la que se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. *BOJA*, 21-50.

Junta de Andalucía (2008). Ley de educación de Andalucía, de 23 enero. Artículo 157. Evaluación y acreditación del profesorado.

Kaiser, G. & Li, Y. (2011). Reflections and Future Prospects. In Y. Li, G. Kaiser, & SpringerLink. (Eds.). *Expertise in mathematics instruction* (pp. 343-353). Boston, MA: Springer.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. In T. E. Kieran (Ed.), *Recent Research on Number earning* (pp. 125-149). Columbus, Ohio: ERIC-SMEAC.

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323-371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J. (2013). Introduction to Section D: International Perspectives on Mathematics Education. In M. A. (Ken) Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, F. Leung & Springer (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp.791-795), Springer New York Heidelberg Dordrecht London: Springer.

Klein, R. & Tirosh, D. (1997). Teachers' pedagogical content knowledge of multiplication and division of rational numbers. In H. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference* (pp. 144-152). Lathi: Finland.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand. M. & Jordan, A. (2008). Pedagogical Content Knowledge and Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Educational Psychology*, *100*(3), 716-725. doi: 10.1037/0022-0663.100.3.716

Krippendorff, K. (1990). Determinación de las unidades. En K, Krippendorff (Ed.), *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica* (pp. 81-92). Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41-61.

Lamon, S. (2001). Presenting and Representing. From Fractions to Rational Numbers. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in Schol Mathematics*. Yearbok of the NCTM. Reston, Va: NCTM. Newstead y Murray.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte: NCTM, Information Age Publishing.

Leinhardt, G. & Greeno, J. (1986). The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology*, *78*(2), 75-95. doi: 10.1037/0022-0663.78.2.75

Leinhardt, G., Putnam, R. T., Stein, M. K. & Baxter, J. (1991). Where subject knowledge matters. In J. Brophy (Ed.), *Advances in Research on Teaching* (pp. 87-114). London: Jai Press Inc.

Li, Y., Huang, R. & Yang, Y. (2011). Characterizing Expert Teaching in School mathematics in China – A Prototype of Expertise in Teaching Mathematics. In Y. Li, G. Kaiser, & SpringerLink (Eds.), *Expertise in mathematics instruction* (pp.167-195). Boston, MA: Springer.

Li, Y. & Kaiser, G. (2011). Expertise in Mathematics Instruction: Advancing Research and Practice from an International Perspective. In Y. Li, G. Kaiser & SpringerLink (Eds.), *Expertise in mathematics instruction* (pp. 3-15). Boston, MA: Springer.

Li, Y. & Kaiser, G. (2012). Conceptualizing and developing expertise in mathematics instruction. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 121-124). Taipei, Taiwan: PME.

Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winslow, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., Thwaites, A., Grevholm, B., *et al*. (2009). Components of mathematics teacher training. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*: *the 15th ICMI study* (pp.25-33). New York: Springer. doi 10.1007/978-0-387-09601-8

Lin, P. (2012). The approaches of developing teachers' expertise in mathematics instruction in Taiwan. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 131-134). Taipei, Taiwan: PME.

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID.

Llinares, S. (1995). Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: implicaciones en la formación de profesores de matemáticas. En L. Blanco, y V. Mellado (Eds.), *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal* (pp.153-171). DDCEM: Universidad de Extremadura, Badajoz.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 187-219). España: Pearson Prentice Hall.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematic (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459) Rotterdam: Sense Publishers.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1990). Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. *Enseñanza*, *8*, 165-180. Universidad de Salamanca.

Llinares, S. & Sánchez, V. (1991). The knowledge about unity in fractions tasks of prospective elementary teachers. In F. Funghinetti (Ed), *Proceedings of the XV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 181-189). Assisi: Italia.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.

Llinares, S. & Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interactions and online video cases studies. *Instructional Science*, *37*(3), 247–271.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas de educación secundaria*. Tesis doctoral: Universidad de Granada. España.

Lupiáñez, J. L. (2012). *Proyecto docente e investigador*. Universidad de Granada.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Marcelo, C. (1987). *El pensamiento del profesor*. Barcelona: CEAC.

Marcelo, C. (1993). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre Conocimiento Didáctico del Contenido. En L. Montero y J. M. Vez (Eds.), *Las didácticas específicas en la formación del Profesorado (I)* (pp.151-185). Santiago de Compostela: Tórculo.

Marín, A. (2013). El análisis de instrucción: instrumento para la formación inicial de profesores de secundaria. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación,* *innovación curricular y formación de profesores* (pp. 103-120). Granada, España: Universidad de Granada.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L. y Deulofeu. J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-437). Ciudad Real: SEIEM.

Menezes, J. L. (2004). *Investigar para ensinar matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. Teses doutoramento: Universidade de Lisboa. Portugal.

Mesa, V., Gómez. P. & Hock Cheah. U. (2013). Influence of International Studies of Student Achievement on Mathematics Teaching and Learning. In M. A. (Ken) Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, F. Leung & Springer (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 861-900), Springer New York Heidelberg Dordrecht London: Springer. doi: 10.1007/978-1-4614-4684-2_27

Mewborn, D. S. (2003). Teaching, teachers' knowledge and their professional development. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 45-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Miles, M. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Ministerio de Educación y Ciencia (1990). Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *BOE*, *238*, 36705-36715.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006a). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE*, *106*, 17158-17207.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006b). Real Decreto 1513/2006 de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 293*, 43053-43102.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006c). Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 5*, 677-773.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2211/2007 de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Primaria. *BOE*, *173*, 31487-31566.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Historia del signo igual. En M. Guzmán, Humanidades y Ciencias. *Aspectos Disciplinares y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides* (pp. 249-261). Granada: Editorial Atrio.

Montes, M. A., Aguilar, A., Carrillo, J. & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MSTK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. In B.

Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2012). Buenas prácticas en la Universidad de Huelva: el conocimiento profesional en la acción del profesor de “Matemáticas y su Didáctica”. *Revista de Docencia Universitaria*, *10*(1), 177-198.

Niss, M. (2004). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. In R. Strässer, G. Brandell, & B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.

OCDE. (2001). *Teachers for tomorrow’s schools. Analysis of the world education indicators*. Executive Summary. Organization for economic Co-operation and Development. UNESCO Institute for Statistics. World Education Indicators Programme. Paris: Francia. Recuperado de http://www.uis.unesco.org/Library /Documents/wei01-en-execsum.pdf

OCDE. (2005). Teachers Matter: Attracting, Developing and Retaining Effective Teachers. *Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE)*. Recuperado de http://www.nefmi.gov.hu/letolt/nemzet/oecd_publication_teachers_ matter_english_061116.pdf

OCDE. (2012). PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do Student–Performance in Mathematics, Reading and Science (Vol. 1), *PISA*, OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264201118-en

Oliveira, H., Menezes, L. & Canavarro, A. P. (2012). The use of classroom videos as a context for research on teachers’ practice and teacher education. In *12th* ICME (Eds.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 4280-4289). Seoul, Korea: ICME

Ortiz, J. J. y Nordin, M. (2012). Evaluación de conocimientos de profesores en formación sobre el juego equitativo. *Revista Números*, *80*, 103-117.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy contruct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307-332. doi: 10.3102/00346543062003307

Peterson, P. (1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. *Educational Researcher*, *17*(5), 5-14. doi: 10.3102/0013189X017005005

Pinto, M. & Tall, D. (1996). Student teachers’ conceptions of the rational number. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceeding of 20th PME International Conference* (pp. 139-146). Valencia, España.

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación matemática*, *18*(1), 37-72.

Planas, N. y Alsina, A. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas*. Barcelona: Graó.

Planas, N. y Reverter, F. (2011). Hay mucho de lengua en las matemáticas. *Cuadernos de Pedagogía*, *413*, 38-41.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Innova*çao* Educational.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. In J. P. Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 195-210). Lisboa, Portugal: PME.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos & J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 413-417. doi: 10.1007/s10857-011-9195-7

Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. En N. Planas (Ed.), *Teoría, critica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P. & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista da Educação, 11*(2), 145-163.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13*(2), 51-74.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Sousa, O. & Fonseca, H. (2003). Professionals investigate their own practice. *European Congress of Mathematics Education – CERME III*. Bellaria, Italy: CERME.

Pozo, J. I. (2003). *Adquisición de Conocimiento*. Madrid: Ediciones Morata.

Ribeiro, C. M. (2010). *El desarrollo profesional de dos maestras inmersas en un grupo de trabajo colaborativo, a partir de la modelización de sus clases de matemáticas*. Tesis doctoral: Universidad de Huelva. España.

Ribeiro, M. & Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 41-48). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Ribeiro, C. M., Monteiro, R. y Carrillo, J. (2010). Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación Matemática* [online], *22*(2), 123-138.

Rico, L. (Ed.). (1997a). *Educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Ice - Horsori.

Rico, L. (Ed.) (1997b). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación, 33*, 11-27.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp. 1-22). Granada, España: Universidad de Granada.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina., M. (2013). *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores*. Granada, España: Universidad de Granada.

Rivas. M. (2012). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria*. Tesis doctoral: Universidad de Granada. España.

Rodríguez, G., Gil, J. & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga, España: Aljibe.

Rodríguez, D. y Valldeoriola, J. (2007). *Metodología de la investigación*. Universitat Oberta de Catalunya, España. Recuperado de http://zanadoria.com/syllabi/m1019 /mat_cast-nodef/PID_00148556-1.pdf.

Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno*. Trabajo de fin de máster: Universidad de Granada. Granada. España.

Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479-485). Jaén. España.

Rojas, N. y Flores, P. (2011). El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 17-28). Granada, España: Departamento. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2011). Caracterización del conocimiento matemático de profesores de educación primaria y secundaria. En M. Marín y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 395-400). Ciudad Real, España.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 4*, 47-64.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (En prensa). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema*. Brasil.

Rojas, N., Flores, P. y Ramos., E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiáñez & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp. 191-208). Granada, España: Universidad de Granada.

Rowland, T. (2007) Developing knowledge for mathematics teaching: a theoretical loop. In S. Close, D. Corcoran & T. Dooley (Eds.), *Proceedings of the second national conference on research in mathematics education* (pp. 13-26). Dublin: St Patrick's College.

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255–281. doi:10.1007/s10857-005-0853-5

Rowland, T., Thwaites, A. & Jared, L. (2011). Triggers of contingency in mathematics teaching. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73-80). Ankara, Turkey: PME.

Ruiz, Á. (2011). La lección de matemáticas a través de estudios internacionales con videos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*, 55-121. Recuperado de file:///C:/Users/usuario/Downloads/6950-9534-1-PB.pdf

Russ, R., Sherin, B. & Gamoran, M. (2011). Images of expertise in mathematics teaching. In Y. Li, G. Kaiser & SpringerLink (Eds.), *Expertise in Mathematics Instruction* (pp. 41-60). Boston, MA: Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-7707-6_3

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: Contributos para uma discussão. En J. Murillo, P. Arnal, R. Escolano, J. Gairín y L. Blanco (Eds.), *Sexto simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.157-170). Logroño: SEIEM.

Savola. L. (2008). *Video-based analysis of mathematics classroom practice: examples from finland and Iceland. Doctoral dissertation*. Universidad de Columbia. United States.

Schempp, P., Tan, S., Manross, D. & Fincher, M. (1998). Differences in novice and competent teachers'knowledge. *Teachers and teaching*, *4*(1), 9-20.

Schoenfeld, A. H. (2010a). Bharath Sriraman and Lyn English: Theories of mathematics education: seeking new frontiers. (Springer series: advances in mathematics education). In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education. Seeking new frontiers* (pp. 503-506). ZDM. Mathematics Education.

Schoenfeld, A. H. (2010b). *How We Think: A Theory Of Goal-Oriented Decision Making And Its Educational Applications*. New York: Routledge.

Schoenfeld, A. (2011). Reflections on Teacher Expertise. In Y. Li, G. Kaiser, & SpringerLink (Eds.), *Expertise in mathematics instruction* (pp.327-341). Boston, MA: Springer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Sherin, M. G., Sherin, B.L. & Madanes, R. (2000). Exploring Diverse Accounts of Teacher Knowldege. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 357-375.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. doi: 10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform Harvard. *Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Silverman, J. & Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 499-511. doi 10.1007/s10857-008-9089-5.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.

Sosa, L. (2010). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos*. Tesis doctoral: Universidad de Huelva. España.

Spangler, D. (2014). Commentary on Section 2: Attending to Teachers in Mathematics Teacher Education Research. In J. J. Lo, K. R. Leatham, L. R. Van Zoest & SpringerLink (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 181-189). Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-02562-9_10

Stake, R. (1998). *Investigar con estudios de caso*. Madrid: Morata.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Stake, R. (2000). Case Studies. In N. K. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 435-454). Thousand Oaks: Sage Publications.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata, S.L.

Star, J. R. & Strickland, S. K. (2007). Learning to observe: using video to improve pre-service teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 107-125. doi: 10.1007/s10857-007-9063-7

Steele, M. D. & Rogers. K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*, 159–180. doi: 10.1007/s10857-012-9204-5

Stein, M. & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Stigler, J., Gonzales, P., Kawanaka, T., Knoll, S. & Serrano, A. (1999). The TIMSS 1995 videotape classroom study: Methods and findings from an exploratory research project on eighth-grade mathematics instruction in Germany, Japan, and the United States. US Dept of Education. Washington, DC: National Center for Education Statistics. Recuperado de http://nces.ed.gov/pubs99/1999074.pdf

Sullivan, P. (2008). Knowledge for Teaching Mathematics. In P. Sullivan, & T. Wood, (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education*. *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (Vol. 1) (pp. 1-9). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics*. Conceptual framework. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University. Recuperado de http://teds.educ.msu.edu/framework/

Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(2), 141–164. doi: 10.1007/s10649-010-9269-y

Törner, G., Rolka, K., Rösken, B. & Sriraman, B. (2010). Understanding a teacher's actions in the classroom by applying Schoenfeld's theory *Teaching-in-Context*: Reflecting on goals and beliefs. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education* (pp.401-420), Berlin Heidelberg: Springer. doi:10.1007/978-3-642-00742-2_38

UNESCO. (2012). *Challenges in basic mathematics education*. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. Paris. Recuperado en http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf

Van Dijk, T. A. (2001). *Conocimiento, elaboración del discurso y educación*. Documento presentado en el congreso Cátedra Unesco, Cartagena de Indias (Colombia). Traducción de Olga Cecilia Martínez Solís. Universidad de Manizales, Colombia. Recuperado de http://discursos.org/

Varas, M., Lacourly, N., Lopez, A. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(1), 171-187.

Watson, A. & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(2), 237-249. doi: 10.1080/14926150209556516

Wilson, S. M., Shulman, L. S. & Richert, A. E. (1987). “150 different ways” of knowing: Representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teacher Thinking* (pp. 104-124). Londres: Cassell.

Yang, X. (2014). *Conception and characteristics of expert mathematics teachers in China*. Springer Fachmedien Wiesbaden. doi: 10.1007/978-3-658-03097-1

Resumen

Uno de los problemas principales en la actualidad, en la línea de Formación de Profesores de Matemáticas, es estudiar el conocimiento profesional del profesorado. Esta línea de investigación se interesa fundamentalmente por analizar la naturaleza del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, estudiar las características que lo conforman y examinar el grado de conocimiento matemático que tienen y han de tener los profesores para desarrollar su tarea docente. La preocupación principal de esta investigación es avanzar en la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, especialmente profundizar en la comprensión del conocimiento que pone en juego el profesor al enseñar un contenido matemático.

Considerando que la problemática es amplia y compleja, aproximarse a ella a través de estudios en profundidad (estudio de caso), permite ahondar en nuestra comprensión de cómo los profesores utilizan su conocimiento en la enseñanza y qué conocimientos se activan al enseñar un contenido. Hemos delimitado el problema de investigación focalizándonos en comprender la especificidad del conocimiento de dos profesores expertos de matemáticas, al enseñar el tema de los números racionales.

Los profesores expertos se caracterizan por tener un mayor nivel de conocimientos, por ser capaces de estructurar la enseñanza y los procesos de aprendizaje de manera efectiva y orientada a los objetivos, por lo que pueden aportar mayor información del conocimiento en la práctica. Hemos elegido un contenido importante, los números racionales, que se comienzan a estudiar en los primeros niveles escolares y se prolonga a lo largo de los niveles de la escolaridad secundaria, siendo un contenido complejo en su enseñanza, por tanto interesante para profundizar en cómo los docentes lo organizan y qué conocimiento ponen en juego al enseñarlo.

El objetivo general que guía el estudio es describir, identificar y caracterizar el conocimiento especializado que manifiesta un profesor de Educación Primaria y un docente de Educación Secundaria, al enseñar el contenido matemático de los números racionales. Este objetivo se sintetiza en seis objetivos específicos, como se presenta en la Figura 1.

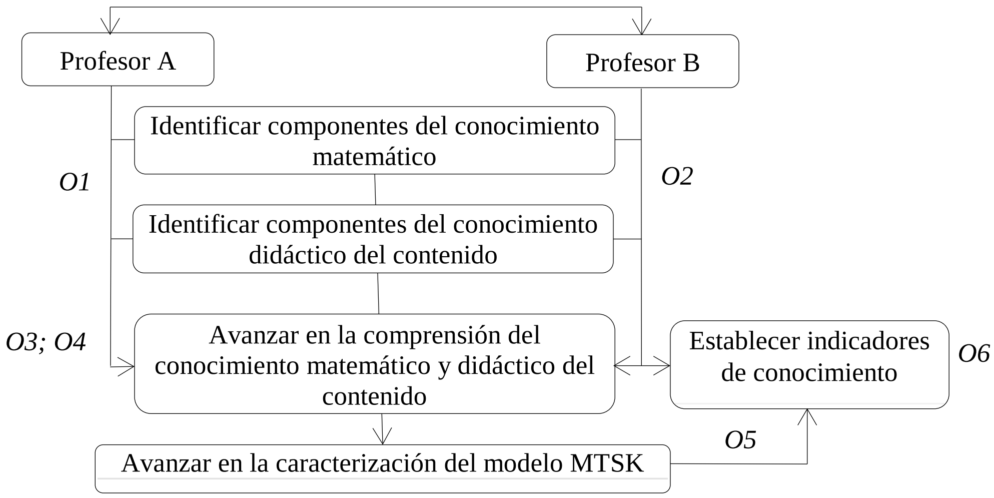


Figura 1. Objetivos específicos que guían la investigación

Con los objetivos específicos *O1*, *O2*, *O3* y *O4* se pretende identificar, profundizar y comprender el conocimiento matemático especializado, que manifiestan dos profesores al enseñar el tema de los números racionales. A partir de la comprensión del conocimiento de los profesores, proyectamos profundizar en la caracterización del modelo teórico de conocimiento especializado del profesor, empleado en el estudio, lo que corresponde a los objetivos *O5* y *O6*, buscando avanzar en la caracterización del modelo y establecer subcategorías de conocimiento referentes al contenido de los números racionales.

MARCO CONCEPTUAL

Desarrollamos tres ideas centrales, que tienen el propósito de dar a la investigación un sistema coordinado y coherente de fundamentos, que permitan abordar nuestro problema de investigación. Primero profundizamos sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, partiendo de los trabajos de Shulman (1986; 1987), hasta llegar a definir el modelo «Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)», que surge de los avances y propuestas realizados en el grupo SIDM, de la Universidad de Huelva, basándose en distintos modelos del conocimiento profesional del profesor (Ball, 2000; Hill, Ball y Schilling, 2008; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Shulman, 1986). El MTSK avanza en una reformulación desde una perspectiva que entiende todo el conocimiento del profesor como especializado (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

El modelo MTSK adopta una perspectiva y proporciona una herramienta para profundizar en el conocimiento que un docente posee, declara o muestra al enseñar. La Figura 2 sintetiza el modelo MTSK.

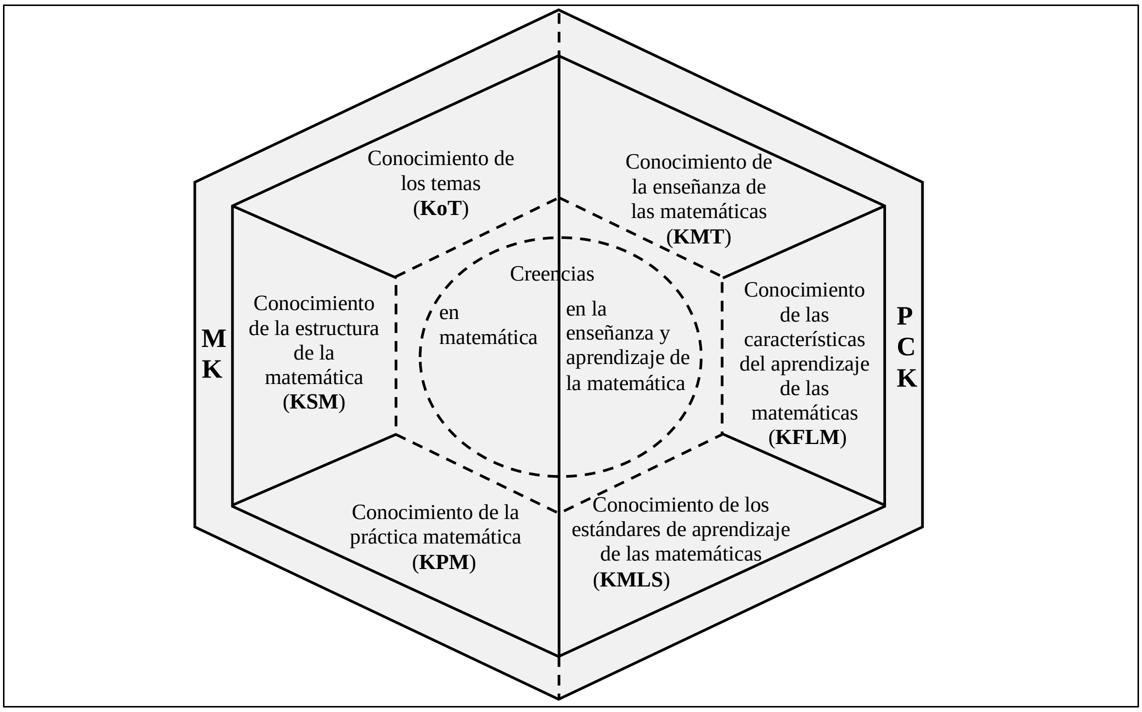


Figura 2. Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas

En este modelo MTSK se distinguen dos grandes dominios de conocimiento: (a) *conocimiento del contenido matemático* (MK) y (b) *conocimiento didáctico del* contenido (PCK), proponiendo una división de cada uno de ellos en tres subdominios específicos. El MK está compuesto por tres subdominios. El *conocimiento de los temas* incluye el conocimiento de la matemática como disciplina (la matemática escolar también está incluida en este subdominio), así como lo relativo a su fundamentación teórica y los procedimientos, estándar y alternativos, o las distintas formas de representación de un contenido. El *conocimiento de la estructura de las matemáticas* hace referencia a la estructura de la materia, incluyendo el conocimiento de las principales ideas y de las estructuras de la disciplina. El *conocimiento de las prácticas matemáticas* corresponde al conocimiento del modo de proceder en matemáticas.

Incluye el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemáticas, el razonamiento y la prueba, saber definir, etc.

El PCK está compuesto por tres subdominios de conocimiento, que abarcan, principalmente, aspectos de la enseñanza y del aprendizaje de un contenido matemático y consideraciones curriculares. El *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* responde a la necesidad del profesor de conocer el modo de pensar del alumno relacionado con las tareas matemáticas. El *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*, es un conocimiento que permite al profesor elegir una determinada representación o un material para el aprendizaje de un concepto, un procedimiento matemático o una tarea matemática, etc. El *conocimiento de los estándares de aprendizaje* comprende los contenidos y orientaciones propuestas en las normativas curriculares, además incluye conocer los objetivos y estándares de aprendizaje más allá de los que provienen del entorno institucional del profesor. En el centro del modelo se incluyen las creencias que el profesor tiene acerca de la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, como dimensión que impregna el conocimiento del docente. No obstante, las creencias de los profesores no son objeto de atención en este trabajo.

Para comprender el conocimiento matemático implicado en la práctica, surge la necesidad de diseñar herramientas que permitan la identificación de conocimiento de una manera operativa. Para ello, establecemos una relación teórica entre el *análisis didáctico* y el modelo de conocimiento MTSK. El *análisis didáctico* se fundamenta en los trabajos desarrollados por el grupo «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Rico, 1997a; Rico 1997b; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

En este trabajo empleamos el análisis didáctico con fines formativos e investigativos. Realizar un análisis didáctico de los números racionales, como contenido matemático de enseñanza primaria y secundaria, permite al investigador profundizar en este contenido matemático escolar, desde el ámbito matemático y de la enseñanza. A su vez, el análisis didáctico ha constituido una herramienta investigativa, que lleva a disponer de un referente amplio para identificar dominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, a partir de la observación de la práctica. Para esta identificación se han relacionado los elementos que componen el análisis didáctico y los subdominios del modelo de MTSK (Rojas, Flores y Ramos, 2013). De la relación establecida surgen indicadores de conocimiento (establecidos *a priori* y deductivamente). El sistema de indicadores constituye una herramienta conceptual y operacional que facilita el análisis de la información y su posterior interpretación.

Para precisar las características de los sujetos informantes del estudio, hemos identificado características que distinguen a los docentes expertos. Para ello, examinamos una variedad de estudios que identifican características para reconocer a los docentes de matemáticas que se diferencian del común de los profesores (Chi, 2011; Li, Huang y Yang, 2011; Li y Kaiser, 2011; Yang, 2014). De la revisión de la literatura identificamos dos tipos de características para identificar a profesores expertos, que agrupamos y denominamos primarias y secundarias, con las que hemos conformado la conceptualización de profesor experto (Rojas, Carrillo y Flores, 2012). Las características primarias aluden a aspectos específicos de la tarea de enseñanza y a cuestiones sobre conocimiento (comprensión de los contenidos específicos, del aprendizaje de los estudiantes y de estrategias de enseñanza, etc.). Las características secundarias atienden a aspectos generales de la experiencia profesional del profesor (estar en ejercicio y tener cinco o más años de experiencia docente en aulas, profesor destacado según las evaluaciones institucionales, etc.).

METODOLOGÍA

Empleamos métodos cualitativos vinculados al paradigma interpretativo con el propósito de profundizar y comprender los aspectos de conocimiento revelados por los profesores en su práctica docente (Cohen, Manion y Morrison, 2011). Asimismo, al ser el foco de atención comprender el conocimiento del profesor, sin intención de generalizar, hemos elegido el estudio de caso como diseño de investigación (Stake, 2007; 1998). A continuación, describimos la selección de los casos y el proceso de recogida y análisis de datos.

Selección de los casos

Por medio de recomendaciones de profesores del área de Didáctica de la Matemática, de las universidades de Granada y Huelva, establecimos vínculos con docentes de centros de la Comunidad de Andalucía. Los profesores fueron recomendados por estar comprometidos con la tarea de enseñanza; participar activamente en congresos, seminarios o capacitaciones impartidos por distintas entidades; y por tener una amplia experiencia profesional. Estas recomendaciones nos llevaron a establecer contacto con 9 profesores; en un primer acercamiento descartamos a algunos docentes por distintas razones (no accedieron a grabar sus aulas, se estaban acogiendo a la jubilación, etc.). Dos de los profesores recomendados, expresaron interés por colaborar con el estudio, accediendo a que ingresáramos al aula para filmar la enseñanza de los números racionales. Finalmente, aplicando las características definidas, seleccionamos a dos profesores, *Rodríguez* y *Rivera*[27].

El profesor Rodríguez es titulado como profesor de Enseñanza General Básica (EGB), tiene estudios de Magisterio con una duración de tres años, ha ejercido la docencia de matemáticas durante 34 años en Educación Primaria, enseñando a lo largo de este tiempo el tema de las fracciones. El profesor Rivera es Licenciado en Matemáticas, tiene un diploma de estudios avanzados en Ingeniería Ambiental, ha participado en congresos referentes a Sistemas Dinámicos (una de sus áreas de interés), tiene 13 años de experiencia como profesor de matemáticas. Estas y otras apreciaciones nos llevaron a considerar a los profesores como sujetos informantes de la investigación.

Recogida de datos

Una vez seleccionados los profesores, procedimos a examinar su práctica docente a través de la observación no participante o pasiva. Las sesiones en las cuales se aborda el tema de los números racionales han sido grabadas en audio y video, con el fin de captar la totalidad del escenario y las interacciones entre el profesor y los estudiantes. Para el caso del profesor Rodríguez se observó y grabó una secuencia de 21 clases, en un curso de 6º de Educación Primaria de una escuela pública de Málaga. Para el caso del profesor Rivera se observó y grabó una secuencia de 12 clases, en un curso de 1º de Educación Secundaria de un instituto público de la ciudad de Huelva.

Análisis e interpretación de datos

El análisis se aplica al texto que registra la actividad matemática desarrollada en las clases. La información de audio y vídeo se transcribe por turnos de intervención a través

[27] Nombres ficticios de los participantes del estudio.

del criterio conversacional, que consiste en separar las declaraciones o turnos de palabras u oraciones de los sujetos implicados (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 207).

Luego dividimos los datos en episodios, que corresponden a fragmentos de intervenciones que tienen una secuencia de acciones y un principio y un fin reconocible (Krippendorff, 1990, p.85). Posteriormente, en una matriz descriptiva vamos asignando cada episodio según los indicadores de conocimientos establecidos. El análisis de los datos se realiza a través de una descripción detallada interpretativa, empleando el proceso de análisis de contenido (Fox, 1981, p.709).

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Presentamos el caso de dos profesores: Rodríguez y Rivera, que enseñan el contenido matemático escolar de las fracciones a niños de 6º de Educación Primaria y 1º de Educación Obligatoria Secundaria, respectivamente.

Para contextualizar la enseñanza impartida por los profesores, mencionamos algunos aspectos que se relacionan con el conocimiento pedagógico general. En la enseñanza del tema impartido por el profesor Rodríguez prevalece la formulación de preguntas a los estudiantes, promoviéndose la argumentación para generar discusión en clase. La comunicación es de tipo *instructiva*; es decir, se produce por medio de la integración de las contribuciones de los estudiantes, buscando modificar la comprensión matemática a partir de preguntas, así como informar de la instrucción subsiguiente (Carrillo, Climent, Gorgorió, Rojas y Prat, 2008). También permite espacios para la reflexión logrando que los estudiantes modifiquen la comprensión matemática de lo abordado (Brendefur y Frykholm, 2000; Carrillo *et al*., 2008). En la enseñanza impartida por el profesor Rivera se promueve una comunicación unidireccional, en la que mayoritariamente el profesor explica el tema dando pocas ocasiones para que los estudiantes comuniquen sus ideas (Carrillo *et al*., 2008). Durante las clases el profesor enuncia preguntas cerradas a sus estudiantes, dejando pocas oportunidades para que ellos expresen ideas o estrategias diferentes de las esperadas.

Referente al conocimiento especializado manifestado por el profesor Rodríguez, tres son los subdominios más destacados, a lo largo de las 21 sesiones de clase: el *conocimiento de los temas matemáticos* (KoT), *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) y el *conocimiento de la enseñanza de las* *matemáticas* (KMT). Aunque, en general, se destaca la presencia de los subepisodios relacionados con el dominio *conocimiento didáctico del contenido* (PCK), especialmente aspectos sobre las características de aprendizaje de las matemáticas. En el caso del profesor Rivera los subdominios de conocimiento más destacados son: el *conocimiento de los temas matemáticos*, el *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* y el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*, predominando los conocimientos matemáticos. En lo que sigue, detallamos una síntesis de los elementos de conocimiento más destacados, según algunos indicadores de conocimiento:

- Los sistemas de representación más empleados en la enseñanza de las fracciones fueron el figural, simbólico verbal y simbólico numérico. La representación verbal se utiliza esencialmente para hacer lecturas de las fracciones según su representación numérica. Esta representación se presenta para definir la fracción $\frac{a}{b}$ como cociente, que tiene un número decimal asociado y como un representante de un todo o unidad. El profesor de Educación Primaria promueve el paso de la representación verbal a la figural y luego a la representación simbólica, empleando en ocasiones material concreto. El profesor de Educación Secundaria se centra en pasar de la representación verbal a la simbólica, y en algunas oportunidades emplea la representación figural.

- Tanto el profesor de Educación Primaria como el de Educación Secundaria, establecen conexiones con contenidos estudiados en cursos preliminares (conexiones temporales), que les permite justificar y relacionar nociones o procedimientos matemáticos. También se presentan conexiones intraconceptuales; es decir, se establecen enlaces hacia el interior de un mismo concepto.

- Respecto de la complejidad matemática del contenido, el profesor de Educación Primaria va “complejizando” la actividad matemática siempre a partir de la fracción en relación a una unidad o todo. Primero, presenta un repertorio de tareas de partición de la unidad en partes iguales, para introducir la fracción como resultado de dicha partición. Tiene especial cuidado en enfatizar la igualdad, comenzando por igualar el tamaño y forma de las partes, y posteriormente sólo el tamaño. Esto le permite asociar la expresión simbólica con la representación figural. También tiende a graduar las cantidades empleadas, comenzando con tareas de datos sencillos para continuar con situaciones más complejas.

- El profesor de Educación Secundaria comienza empleando el significado de la fracción como parte-todo, y este principio lo lleva a trabajar la equivalencia, el orden de fracciones, etc. Extiende el significado de fracción como parte-todo referido a un todo de 100 partes, para introducir los porcentajes (como medidas que varía en función del total). Además, la comparación entre dos partes de un todo o cantidades lleva a la idea de fracción como razón, complejizando el significado de fracción como parte-todo. Esto permite al profesor concebir que la fracción va más allá de partir en partes iguales y tomar algunas de ellas, identificando relaciones multiplicativas entre dos cantidades.

- Respecto a las formas de hacer y proceder en matemática, los dos profesores razonan de manera matemáticamente correcta, sin hacer uso de un lenguaje formal (no se aluden a teoremas, axiomas, demostraciones, etc.). La actividad matemática se presenta a partir de situaciones concretas, realizando diferentes acciones que comportan dividir, fraccionar, repartir, etc., aludiendo a actividades prácticas. Enuncian algunas definiciones matemáticas verbalmente, sintetizando y expresando en lenguaje corriente, alejado del lenguaje matemático.

- El profesor de Educación Secundaria revela una forma de proceder en matemáticas siguiendo una secuencia de pasos lógicos: parte de una premisa inicial, aplica una definición y llega a la conclusión, esto deja de manifiesto que el docente sigue un proceso propio de la lógica matemática.

- El profesor de Educación Primaria es consciente de algunos errores y dificultades (conceptuales y de cálculo) más habituales que presentan los estudiantes al resolver las tareas matemáticas del tema. Esto le hace explicitar estas manifestaciones o bien presentar tareas para que los estudiantes identifiquen y corrijan el error o afronten la dificultad.

- El profesor de Educación Secundaria manifiesta conocer errores aritméticos que los estudiantes exhiben. Al dar pocas ocasiones para que los estudiantes comuniquen sus ideas, resulta más complicado identificar los aspectos que conoce sobre el modo de pensar de sus alumnos respecto de las tareas matemáticas, aunque anticipa algunas, y actúa en consecuencia.

- Ambos profesores presentan tareas matemáticas relacionadas con contenidos de la estructura conceptual referentes al tema, enunciadas en contextos y situaciones diferentes (contextos personales o matemáticos), además permiten emplear distintos sistemas de representación.

CONCLUSIONES

A partir del análisis detallado de los datos identificamos componentes de conocimiento para cada subdominio del modelo MTSK. Posteriormente, integramos dichos componentes para realizar una síntesis que permitió comprender cuál es el conocimiento matemático especializado del profesor. En el caso del docente de Educación Primaria se destacan dos circunstancias importantes, tiene una formación de base como maestro generalista y una amplia experiencia docente (34 años). Es esta experiencia, manifestada no solo por sus años de práctica docente, sino especialmente por el destacado reconocimiento que de él manifiestan sus compañeros y la comunidad de profesores, lo que nos llevó a reconocerlo como un profesor experto. Considerando que su formación generalista le hace tener una formación matemática de base menos formal (Krauss, Brunner, Kunter, Neubrand, Blum, y Jordan, 2008), apreciamos que organiza la enseñanza del tema de manera más intuitiva pero con gran sistematicidad y riqueza de aspectos. Los resultados de este estudio muestran que su experiencia, relacionada con su responsabilidad profesional, le ha llevado a una integración más fuerte de diferentes categorías de conocimiento.

En el caso del profesor de Educación Secundaria, tiene una formación como licenciado en matemáticas y estudios de posgrado en esta especialidad. Esto se ve reflejado en un conocimiento matemático organizado, especialmente en sus aspectos formales. Pero además, tiene capacidad para encontrar situaciones contextualizadas que expresen fenomenológicamente los conceptos referentes al tema. Aunque las tareas de enseñanza se centran en una utilización de la fracción en relación a una unidad, el profesor muestra manejar el conocimiento de la fracción razón, interpretando las situaciones de una manera proporcional, en la que la relación entre la parte y el todo se puede aplicar a todos proporcionales (completo), lo que permite obtener la porción mediante la unión de porciones parciales. Este conocimiento de nuevos significados no se acompaña de una enseñanza específica, lo que indica que no le da suficiente entidad para considerarlo aprendizajes específicos. Parece que el profesor conoce diversas situaciones que dan significado a los conceptos, pero no está claro si las distingue explícitamente, y por tanto no se detiene a plantear tareas que cubran los diferentes significados de fracción, aunque habríamos necesitado entrevistar al profesor para confirmar esta apreciación.

A partir del análisis detallado de los datos identificamos componentes de conocimiento para cada subdominio del modelo MTSK. Posteriormente, integramos dichos componentes para realizar una síntesis que nos suministró una imagen más integrada para comprender cuál es el conocimiento matemático especializado manifestado por los profesores. Esto lleva a establecer que se han alcanzado los objetivos *O1*, *O2*, *O3* y *O4* de la investigación.

A partir de la comprensión del conocimiento de los profesores, profundizamos en la caracterización del modelo teórico de conocimiento empleado en el estudio, que corresponde a los objetivos *O5* y *O6*. El quinto objetivo buscaba avanzar en la caracterización de los subdominios del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Este trabajo ha ido contribuyendo paulatinamente en las reflexiones para la elaboración del modelo MTSK, aportando análisis de fragmentos de clase (reales) para profundizar en las categorías e indicadores de conocimiento de cada dominio del modelo.

Considerando que el modelo de conocimiento MTSK surge de la necesidad de disponer de herramientas que permitan profundizar en el conocimiento necesario para enseñar (Carrillo, 2011; Carrillo *et al*., en revisión), además que es un modelo que nace de reflexiones teóricas orientadas a comprender y estructurar el conocimiento del profesor de matemáticas, esta investigación ha servido para aportar dos ejemplos concretos del conocimiento puesto en práctica por profesores al enseñar el tema de las fracciones. El modelo MTSK ha sido una herramienta beneficiosa para depurar el conocimiento observado durante la acción docente, mostrando potencialidad analítica para profundizar en la comprensión del conocimiento matemático del profesor, manifestado en su práctica.

También el diseño de la investigación, especialmente la relación teórica establecida entre el análisis didáctico y modelo MTSK, ha permitido tener referentes concretos para profundizar en la naturaleza de cada uno de los subdominios de conocimiento, aportando una lista de categorías e indicadores de conocimiento, referentes al tema de los números racionales, que se distinguen para cada uno de los seis subdominios del modelo MTSK. Estas apreciaciones resumen los logros del quinto objetivo de la investigación.

El sexto objetivo consistía en establecer indicadores y subcategorías de conocimiento referentes al contenido matemático escolar de los números racionales. Definimos 19 categorías con sus respectivos indicadores de conocimiento (total 58), relacionados con el tema de los números racionales. Las categorías e indicadores fueron construidos antes del proceso de recopilación de la información y se aplicaron a distintas unidades de información, permitiendo organizar y profundizar en el conocimiento especializado.

En este trabajo buscábamos completar las categorías e indicadores de conocimiento con datos emergentes, que pudiesen surgir de la indagación de los significados de los propios datos, no obstante, del análisis de las clases no surgieron categorías emergentes de los datos. La función que han desempeñado las categorías en la investigación, así como su correspondencia con las bases teóricas, llevan a considerar que el sexto objetivo fue alcanzado en alto grado.

Principales aportes de la investigación

El conocimiento del contenido matemático y didáctico del contenido son comúnmente considerados como una parte importante de la pericia del docente, constituyéndose en medios para apreciar lo que caracteriza el conocimiento específico de los profesores expertos para la enseñanza de las matemáticas (Li y Kaiser, 2012). Con este tipo de herramientas se podrán abordar más investigaciones para examinar el nivel de conocimiento de los profesores expertos sobre la matemática escolar (Li y Kaiser, 2011; Rojas, Flores y Carrillo, 2011, 2013, en prensa).

El modelo MTSK ha sido una valiosa herramienta para profundizar en el conocimiento del profesor a partir de la observación de aula. La especialización del modelo MTSK permitió diferenciar elementos para centrarnos exclusivamente en el conocimiento matemático y didáctico del contenido.

Considerando que los modelos de conocimiento suelen incluir categorías generales, pensamos que resulta importante disponer de modelos que lleven a un análisis detallado de cada uno de los tipos de conocimiento, que se manifiestan en la enseñanza de las matemáticas. En este trabajo presentamos una serie de indicadores de conocimiento relacionado con el modelo MTSK, referentes al tema de los números racionales.

La realización del análisis didáctico del tema de los números racionales nos permitió hacer una reflexión sobre las cualidades educativas e instruccionales del contenido matemático escolar, además establecer relaciones entre los componentes del análisis didáctico y los dominios de conocimiento del modelo MTSK. Por lo tanto, el análisis didáctico se ha manifestado como una efectiva herramienta teórica-metodológica para identificar conocimiento matemático a partir de la observación de clase (Rojas y Flores, 2011; Rojas, Flores y Ramos, 2013).

La organización de las características primarias y secundarias elaboradas permitieron seleccionar e identificar a profesores con cierto grado de pericia matemática. Los profesores expertos dejan a la luz grandes fortalezas de enseñanza, aspectos que se pueden realzar en profesores con características de expertos para destacarlos como mentores de profesores noveles.

Los perfiles de conocimiento de los dos profesores estudiados, aun sin pretender generalizaciones, aportan una forma de integrar las componentes del conocimiento matemático especializado del profesor experto, señalando qué papel juega en este conocimiento la experiencia, su formación de base, los conocimientos matemáticos de carácter fenomenológico, la forma en que se organizan y dan sentido a su actuación con los alumnos, y cómo afrontan su responsabilidad profesional al enseñar un contenido matemático.

Limitaciones y perspectivas para el avance de la investigación

Considerando que la línea de trabajo que motiva está investigación es estudiar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas, en su acción docente, esto nos llevó a centrarnos únicamente en la observación directa del aula. La construcción de una representación sintética del conocimiento de cada profesor se vería enriquecida mediante un mayor contacto con los sujetos, complementándose con entrevista a los profesores de estímulo del recuerdo, para indagar sobre las conductas o actuaciones ejecutadas y observadas en las clases.

Por otra parte, los docentes seleccionados cumplieron con la mayoría de características secundarias; es decir, con aspectos generales que aludían a su formación profesional, sin embargo, las características primarias no fueron confirmadas en su totalidad. En este caso, sería conveniente aplicar otros instrumentos a los profesores para confirmar aspectos específicos de la tarea de enseñanza y de conocimiento.

Según los resultados del estudio, las conclusiones derivadas de estos y los problemas principales de la línea de investigación de Formación de Profesores de Matemáticas, sugerimos algunas líneas futuras de investigación. Ampliar el análisis didáctico en torno a los cuatro tipos de análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación, puede llevar a considerar más posibilidades para vincular los componentes de conocimiento que caracterizan el modelo MTSK. Esto puede ser la base para inferir cómo cada uno de los organizadores del análisis didáctico promueve el desarrollo de diferentes dominios de conocimiento en los cursos de formación.

En la línea de evaluación del conocimiento del profesor de matemática se busca estudiar la calidad matemática de los procesos de instrucción (Hill, Blunk *et al*., 2008), estableciéndose categorías que permiten medir el proceso. En este estudio las relaciones detalladas entre el análisis didáctico y el modelo MTSK aportan una serie de indicadores organizados según los distintos dominios de conocimientos, que pueden ser adaptados para valorar la calidad matemática de procesos de instrucción en que se aborde el tema de los números racionales.

Los indicadores de conocimiento propuestos pueden seguir enriqueciéndose para el tema de las fracciones, además se pueden ampliar a otros contenidos matemáticos escolares, de distintos niveles, para profundizar en el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas.

Índice de anexos digitales

Los siguientes anexos están incluidos en los discos compactos que acompañan a este trabajo.

CD-1

CD-2