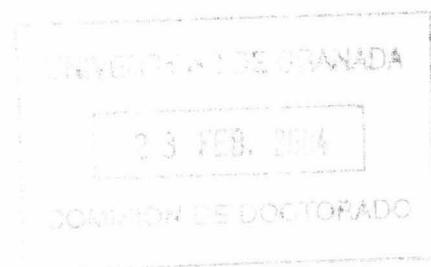


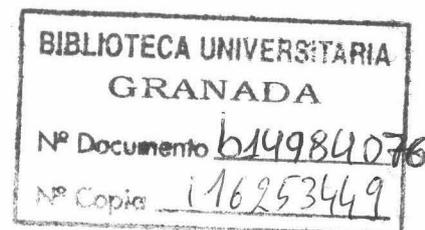
Procesos morfodinámicos en la proximidad de diques de abrigo y su influencia en la operatividad portuaria

(Morphodynamic processes in front of reflective structures
and their influence on the harbor operativity)



Elena Sánchez Badorrey
Departamento de Medios Continuos y Estructuras
Universidad de Granada

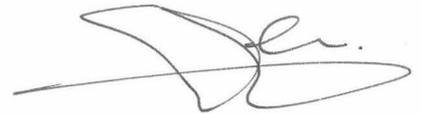
23 de Febrero de 2004



Procesos Morfodinámicos
en la Proximidad de Diques de Abrigo
y
su Influencia en la Operatividad
Portuaria

Tesis Doctoral

Elena Sánchez Badorrey



Grupo de Puertos y Costas

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de
Estructuras

Centro Andaluz de Medio Ambiente

Universidad de Granada

Dirigida por:


Miguel Ángel Losada Rodríguez
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Índice General

| | |
|--|-----------|
| Lista de símbolos | xiii |
| Información y agradecimientos | xv |
| Resumen | xvii |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 Definiciones y conceptos básicos | 3 |
| 1.2 Hidrodinámica inducida por ondas largas | 4 |
| 1.2.1 Importancia de las ondas infragravatorias en profundidades intermedias | 4 |
| 1.2.2 Estado del arte en el modelado de ondas largas | 5 |
| 1.2.3 Modelos de profundidad constante | 5 |
| 1.2.4 Modelos de pendiente suave | 6 |
| 1.3 Transporte de sedimento inducido por ondas gravitatorias moduladas | 6 |
| 1.4 Morfología inducida por ondas gravitatorias moduladas | 7 |
| 1.4.1 Morfología de la plataforma continental exterior | 8 |
| 1.4.2 Morfología de la plataforma continental costera | 9 |
| 1.5 Objetivos y metodología | 10 |
| 1.6 Organización de la Tesis | 13 |
| 2 Hidrodinámica región exterior | 15 |
| 2.1 Introducción | 15 |
| 2.2 Ecuaciones de gobierno | 17 |
| 2.2.1 Modelo de propagación del oleaje | 18 |
| 2.3 Formulación de un tren de ondas modulado | 19 |
| 2.3.1 Cinemática de un tren de ondas modulado | 19 |
| 2.3.2 Estructura del potencial de velocidades | 22 |
| 2.3.3 Solución JWKB del potencial de velocidades de primer orden | 26 |

| | | |
|--------|---|----|
| 2.4 | Escalas para el promedio de trenes modulados | 28 |
| 2.4.1 | Regímenes oscilatorios de ondas gravitatorias moduladas | 30 |
| 2.5 | Campo de velocidades inducido por grupos regulares | 32 |
| 2.5.1 | Régimen débilmente no estacionario del campo de ve- locidades | 33 |
| 2.5.2 | Régimen estacionario del campo de velocidades | 36 |
| 2.5.3 | En resumen | 36 |
| 2.6 | Superficie libre | 39 |
| 2.6.1 | Régimen débilmente no estacionario del nivel medio | 43 |
| 2.6.2 | Régimen estacionario del nivel medio | 44 |
| 2.6.3 | En resumen | 45 |
| 2.7 | Presión | 49 |
| 2.7.1 | Régimen débilmente no estacionario del campo de pre- siones | 50 |
| 2.7.2 | Régimen estacionario del campo de presiones | 52 |
| 2.7.3 | Discusión de resultados | 52 |
| 2.7.4 | En resumen | 56 |
| 2.7.5 | Procesos morfodinámicos inducidos por la presión | 57 |
| 2.8 | Flujo de masa | 62 |
| 2.8.1 | Régimen débilmente no estacionario del flujo de masa | 62 |
| 2.8.2 | Régimen estacionario del flujo de masa | 66 |
| 2.9 | Flujo de energía | 67 |
| 2.9.1 | Régimen débilmente no estacionario del flujo de energía | 68 |
| 2.9.2 | Régimen estacionario del flujo de energía | 69 |
| 2.10 | Flujo de cantidad de movimiento | 69 |
| 2.10.1 | Flujo de momento transversal | 70 |
| 2.10.2 | Flujo de momento longitudinal | 72 |
| 2.10.3 | Flujo de momento tangencial | 76 |
| 2.11 | Tensores de radiación de ondas gravitatorias moduladas | 78 |
| 2.11.1 | Cálculo de contribuciones al tensor de radiación indu- cidas por la presión | 79 |
| 2.11.2 | Componentes diagonales del tensor de radiación de on- das gravitatorias moduladas | 81 |
| 2.11.3 | Tensor de radiación tangencial de ondas gravitatorias moduladas | 83 |
| 2.11.4 | Efectos morfodinámicos inducidos por el tensor de ra- diación tangencial de grupos regulares | 84 |
| 2.12 | Conclusiones | 87 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Hidrodinámica de capa límite inducida por trenes de onda modulados | 91 |
| 3.1 | Introducción | 91 |
| 3.2 | Ecuaciones de gobierno de WBL | 92 |
| 3.2.1 | Modelo laminar de viscosidad de remolino | 94 |
| 3.2.2 | Modelo turbulento de velocidad de remolino | 94 |
| 3.3 | WBL de ondas monocromáticas | 95 |
| 3.4 | Velocidades eulerianas en WBL de trenes modulados | 97 |
| 3.4.1 | Caso progresivo | 97 |
| 3.4.2 | Caso parcialmente estacionario | 97 |
| 3.5 | Streaming en escala de onda corta | 98 |
| 3.5.1 | Definición de 'Streaming' | 98 |
| 3.5.2 | Caso progresivo | 99 |
| 3.5.3 | Caso parcialmente reflejado | 101 |
| 3.6 | Velocidad de transporte de masa | 103 |
| 3.6.1 | Definición de velocidad de transporte de masa | 103 |
| 3.6.2 | Procesos morfodinámicos inducidos por ondas gravitatorias moduladas en la capa límite | 105 |
| 3.7 | Conclusiones | 111 |
| 4 | Operatividad de canales de acceso (en ingles) | 113 |
| 4.1 | Introduction | 113 |
| 4.2 | State scales of the passage | 116 |
| 4.2.1 | Time and space in one-way entrance channels | 117 |
| 4.2.2 | State-Scales definition | 118 |
| 4.3 | Subset and Navigation State definition | 121 |
| 4.3.1 | Entrance Channel Subsets | 121 |
| 4.3.2 | Entrance Channel Navigation States | 122 |
| 4.4 | Verification approaches | 125 |
| 4.4.1 | State Clearance approach | 125 |
| 4.4.2 | Instantaneous Clearance approach | 126 |
| 4.5 | Stoppage mechanisms in one-way entrance channels | 130 |
| 4.5.1 | Verification equation of the 'Under-Keel Clearance' | 130 |
| 4.5.2 | Verification equation of the 'Way-Mark Clearance' | 131 |
| 4.6 | Stoppage probability during a passage | 132 |
| 4.7 | Operativity of entrance channels | 134 |
| 4.8 | Influence of morphology | 138 |
| 4.8.1 | State scales of bed morphology in intermediate depths | 139 |
| 4.8.2 | Descriptors for the statistical description of bed morphology in intermediate depths | 140 |
| 4.9 | Aplication case: The Motril entrance channel | 143 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.9.1 | Motril Harbor and entrance channel description | 143 |
| 4.9.2 | Passage description | 147 |
| 4.9.3 | Stoppage probability along the passage | 151 |
| 4.9.4 | Verification approaches: 'State Clearance' and 'Instantaneous Clearance' | 153 |
| 4.10 | Real time management of one-way entrance channels | 160 |
| 4.11 | Conclusions | 161 |
| 5 | Conclusiones y futuras líneas de trabajo | 165 |
| 5.1 | Conclusiones | 165 |
| 5.1.1 | Influencia de grupos regulares en la operatividad portuaria | 168 |
| 5.2 | Nuevas líneas de investigación | 169 |
| 5.2.1 | Sobre la morfodinámica inducida por ondas gravitatorias moduladas | 170 |
| 5.2.2 | Sobre el modelo probabilista para el cálculo de operatividad en canales de acceso | 171 |
| A | JWKB de trenes modulados | 173 |
| A.1 | Potencial de velocidades | 173 |
| A.1.1 | Solución a primer orden, $n = 1$ | 173 |
| A.1.2 | Second order solution, $n = 2$ | 176 |
| A.1.3 | Caso parcialmente estacionario | 177 |
| B | Constante de Bernoulli | 179 |
| B.1 | Bernoulli en oleaje monocromático | 179 |
| B.2 | Bernoulli en oleaje modulado | 180 |
| B.2.1 | Solución a primer orden. | 180 |
| B.2.2 | Solución a segundo orden. | 181 |
| B.2.3 | Generalización a orden n | 182 |
| B.3 | Criterios físicos de selección | 182 |
| C | Solución JWKB de Capa Límite | 185 |
| C.1 | Ecuaciones de gobierno de la capa límite de trenes de ondas modulados | 185 |
| C.1.1 | Estructura del campo de velocidades de la capa límite de trenes modulados | 186 |
| C.1.2 | Estructura de la viscosidad de remolino para ondas gravitatorias moduladas | 187 |
| C.2 | Solución JWKB del campo de velocidades en la capa límite | 188 |
| C.2.1 | Solución de primer orden | 190 |

| | |
|---|------------|
| C.2.2 Solución a segundo orden | 192 |
| D Modelo de respuesta del barco (en inglés) | 197 |
| E Modelos de propagación fondo variable y dominios complejos | 201 |
| E.1 Introducción | 201 |
| E.2 Aproximación de pendiente suave | 202 |
| E.2.1 Deducción de la ecuación Mild Slope | 203 |
| E.2.2 Mecanismos de pérdida de energía en la ecuación Mild Slope | 205 |
| E.2.3 Condiciones de contorno | 206 |
| E.3 Resolución numérica | 207 |
| E.3.1 Método de elementos finitos | 207 |
| E.4 Método de partición de la Unidad | 208 |
| E.4.1 Técnicas de integración optimizadas para el problema de partición de la unidad aplicado a problemas de difracción | 210 |
| E.4.2 Validación del modelo | 212 |
| E.5 GBCStab Generalizado | 213 |



Índice de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Escalas espaciales y temporales características de formas de rítmicas de gran escala en la plataforma continental. <i>Después de Calvete (2000)</i> | 8 |
| 2.1 | Geometría de los casos considerados y principales parámetros . | 26 |
| 2.2 | Esquema de las escalas espaciales y temporales asociadas a la propagación de ondas gravitatorias moduladas. Caso: Grupos regulares. | 29 |
| 2.3 | Super escala de modulación de la componente transversal del campo medio de velocidades U en la escala de onda corta para distintos valores del parámetro kh | 34 |
| 2.4 | Evolución temporal de las componentes horizontales de velocidad en la escala de onda corta. | 35 |
| 2.5 | Evolución temporal del campo medio de velocidades horizontales de un tren de ondas modulado parcialmente estacionario. Influencia del ángulo de incidencia. | 37 |
| 2.6 | Evolución temporal del campo medio de velocidades horizontales en la escala de onda corta. Influencia del parámetro kh . . | 38 |
| 2.7 | Superficie libre inducida por el término de interacción no lineal. (a) Valor instantáneo, (b) Promedio temporal en escala corta y (c) Promedio temporal en escala de grupo. Nótese que en la escala del grupo, el nivel medio inducido por el término de interacción es una magnitud no nula y modulada en la dirección transversal. | 42 |
| 2.8 | Comparación de modulación del nivel medio en la escala de onda corta para un tren modulado progresivo (izq.) y un tren modulado parcialmente estacionario (der.). Influencia del ángulo de incidencia en las escalas espaciales de modulación. . . | 46 |
| 2.9 | Evolución temporal del nivel medio en la escala corta para un caso estacionario (izq.) y progresivo (der.) con incidencia cuasi-normal. | 47 |

| | | |
|------|---|-----|
| 2.10 | Modulación espacial de nivel medio en escala de grupo en función del parámetro kh y del ángulo de incidencia. | 48 |
| 2.11 | Perfil vertical del campo medio de presiones en la escala de onda corta (izquierda) y en la escala del grupo (derecha). . . | 54 |
| 2.12 | Perfil vertical del campo medio de presiones en la escala de onda corta (izquierda) y en la escala del grupo (derecha). . . | 55 |
| 2.13 | Corte transversal del perfil vertical del campo medio de presiones en la escala de onda corta. | 56 |
| 2.14 | Corte transversal del perfil vertical del campo medio de presiones en la escala del grupo Caso parcialmente estacionario. | 57 |
| 2.15 | Dependencia del campo de presiones medio en la escala del grupo. Caso progresivo (arriba) frente a caso estacionario (abajo). | 58 |
| 2.16 | Evolución temporal y dependencia vertical del campo medio de presiones en la escala de onda. Caso parcialmente estacionario. | 59 |
| 2.17 | Evolución temporal y dependencia vertical del campo medio de presiones en la escala de onda. Caso parcialmente estacionario. | 60 |
| 2.18 | Evolución temporal del flujo de masa en la escala de onda corta. | 65 |
| 2.19 | Flujo de masa longitudinal y transversal en escala de onda corta y en escala del grupo. Caso parcialmente estacionario vs. caso progresivo. | 74 |
| 2.20 | Perfil transversal de los flujos de masa longitudinal, transversal y vertical en la escala del grupo. | 75 |
| 3.1 | Perfil vertical en función del parámetro de viscosidad lamina del: (1) 'streaming'; y, (2) tensión tangencial. Caso progresivo. | 107 |
| 3.2 | Perfil vertical de: (1) la velocidad de transporte de masa del tren incidente; (2) término de interacción de la velocidad de transporte de masa. Caso parcialmente reflejado. | 108 |
| 3.3 | Evolución temporal del perfil vertical de: (1) 'Streaming'; y, (2) velocidad de transporte de masa. Régimen débilmente no estacionario. Caso progresivo. | 109 |
| 3.4 | Evolución temporal del perfil vertical de: (1) término de interacción de velocidad de transporte de masa; (2) velocidad de transporte de masa total. Régimen débilmente no estacionario. Caso parcialmente reflejado. | 110 |
| 4.1 | Time variability analysis of random variables in entrance channels. Right: marine agents. Left: vertical ship displacements. . | 119 |
| 4.2 | Passage division in subsets and navigation states. Schematic view of main scales. | 124 |

- 4.3 Selection criteria for the State Clearance and Instantaneous Clearance time scales as function of the spectral densities of significant agents. 127
- 4.4 Influence of maneuvering conditions in the Instantaneous clearance time scale. (a) and (b): Possible influence of ship speed. (c) and (d): Possible influence of wave encounter angle. . . . 129
- 4.5 Procedure for the calculation of the entrance channel openness 135
- 4.6 Examples of possible storm evolution curves. d_p duration of homogeneous morphological conditions. D_T total duration of the storm event. 137
- 4.7 Motril harbor. Location, current configuration and *N-E* entrance path. 144
- 4.8 Motril harbor deep water climate. Significant wave climate conditions of mean and extreme regime. (Alfonso et al., 2002. *www.puertos.es*) 145
- 4.9 State Clearance (SC) and Instantaneous Clearance (IC) description of environmental conditions in the Motril passage. 148
- 4.10 State Clearance (SC) and Instantaneous Clearance (IC) of morphological conditions during the Motril passage. 148
- 4.11 State Clearance (SC) and Instantaneous Clearance of maneuvering conditions during the Motril passage. 150
- 4.12 Main statistical descriptors of Subsets along the Motril passage. 152
- 4.13 Stoppage probability during the passage for an 'idealized' mound breakwater. State clearance, Instantaneous clearance and Real time solutions. $P_{SC}^{passage} = 40,03\%$; $P_{IC}^{passage} = 25,6\%$; $P_{RT}^{passage} = 28,3\%$ 155
- 4.14 Stoppage probability during the passage for an 'idealized' reflective breakwater. State clearance, Instantaneous clearance and Real time solutions. $P_{SC}^{passage} = 50,03\%$; $P_{IC}^{passage} = 42,04\%$; $P_{RT}^{passage} = 42,7\%$ 156
- 4.15 Agitation conditions along the Motril entrance route. (a) Deep water and entrance channel wave climate for the mound and reflective breakwater cases. (b) Ratio between local and incident wave height along the mean entrance path (detail). . . 157
- 4.16 Scheme of the probabilistic model and methodology for the estimation of safety depth requirements. 158
- 4.17 Safety depth requirements along Motril entrance channel for the passage under consideration. Reflective breakwater case vs. dissipative breakwater case. 159

| | |
|--|-----|
| 4.18 Methodology for the calculation of the stoppage probability during the passage. | 163 |
| D.1 Coordinate system and main parameters used for ship motion description. | 198 |
| E.1 Sistema de coordenadas empleado para la deducción de la ecuación de ondas Mild Slope | 204 |
| E.2 Esquema de transformación de coordenadas empleada para método de integración AEH | 213 |
| E.3 Validación del método de partición de la unidad en problemas de difracción. (a) Malla de elementos finitos con resolución 10 elementos por longitud de onda, (b) malla PUFEM empleada, (c) Comparación entre solución numérica y solución analítica (T=8s, H=1m., h=10m.). | 214 |
| E.4 Convergencia del método GBCStab Generalizado en función de la frecuencia. | 216 |

Lista de símbolos

La lista de símbolos se ha dividido en dos partes. La primera corresponde a los *Capítulos 2 y 3* en los que se describe la morfodinámica del cuerpo del fluido y de la capa límite asociada a grupos de olas. La segunda parte, corresponde a los símbolos utilizados en el *Capítulo 4* para la descripción del modelo probabilista para el cálculo de la operatividad de canales de acceso.

| | |
|-----------------|--|
| λ_{ij} | Distancia entre puntos representativos de tramos consecutivos i y j . |
| τ_m | Tiempo medio de permanencia en el tramo CS_m . |
| l_{st} | Escala espacial de estado con homogeneidad estadística. |
| l_{CS} | Longitud de un tramo CS . |
| t_{st} | Escala temporal de estado con estacionariedad estadística. |
| t_{IC} | Escala de tiempo característica de la aprox. de 'resguardo instantáneo'. |
| t_{NS} | Duración media del estado de navegación NS . |
| t_{SC} | Escala de tiempo característica de la aprox. de 'estado de resguardo'. |
| B | Manga del barco. |
| CS_m | Tramo m del canal de acceso. |
| D | Calado del barco. |
| L | Eslora del barco. |
| L_C | Longitud total del canal del canal de acceso. |
| L_{st}^{sea} | Escala espacial de un estado de mar homogéneo |
| L_{st}^{ship} | Escala espacial de un estado de navegación homogéneo |
| L_{st}^{mor} | Escala espacial de un estado morfológico homogéneo |
| N | Número total de tramos en el canal de acceso |
| NS_n^m | Estado de navegación n del tramo CS_m |
| $P_{passage}$ | Probabilidad de parada durante el tránsito |
| P_i^m | Probabilidad de parada en el tramo CS_m debida al mecanismo de parada i |
| S_i | Ecuación de verificación del mecanismo de parada i |
| S_{IC} | Aproximación de 'resguardo instantáneo' de la ecuación de verificación S_i |
| S_{SC} | Aproximación de 'estado de resguardo' de la ecuación de verificación S_i |

| | |
|------------------|---|
| S_{SC}^0 | Margen de seguridad de la aproximación de 'estado de resguardo' |
| T_C | Duración total del tránsito |
| T_{st}^{sea} | Escala temporal de un estado de mar estacionario |
| T_{st}^{ship} | Escala temporal de un estado de navegación estacionario |
| T_{st}^{mor} | Escala temporal de un estado morfológico estacionario |
| T_{st}^{wc} | Escala temporal de un estado de columna de agua estacionario |
| \bar{V}^{ship} | Velocidad media del barco durante un tramo |
| ξ_{ship}^v | Desplazamiento vertical instantáneo del barco |
| η_{mor} | Amplitud de las formas de lecho del fondo |
| η_{tide} | Amplitud de las variaciones de la superficie libre inducidas por la marea |
| η_{lw} | Amplitud de las variaciones de la superficie libre inducidas por ondas largas |
| η_{ww} | Amplitud de las variaciones de la superficie libre inducidas por el oleaje |
| ω | Frecuencia del oleaje |
| ω_e | Frecuencia de encuentro con el oleaje |
| ω_i | Frecuencia natural de las oscilación vertical i del barco |
| d_{ship} | Calado efectivo del barco inducido por agentes físicos o de maniobra |
| h_{wc} | Altura total de la columna de agua |
| h_0 | Profundidad local en nivel de baja mar viva equinocial |
| M_{man}^v | Desplazamiento vertical del barco inducido por el factor humano |
| P_{max} | Máxima probabilidad de parada admitida durante el tramo |
| S_K | Ecuación de verificación del modo de parada por 'toque del fondo' |
| S_K^0 | Margen de seguridad del modo de parada por 'toque del fondo' |
| SQ | 'Squat' |
| T | Trimado dinámico |

Información y agradecimientos

La Tesis doctoral que se presenta a continuación ha sido realizada por Elena Sánchez Badorrey durante su participación como becaria de investigación en el proyecto europeo HUMOR (Human interaction with large scale coastal morphological evolution, EVK3-CT-2000-00037) dentro del Grupo de Puertos y Costas (Universidad de Granada - Centro Andaluz de Medio Ambiente) y bajo la dirección del profesor Miguel A. Losada (Catedrático del Área de Hidráulica del Departamento de Medios Continuos y Teoría de Estructuras).

La autora es licenciada en C.C. Físicas (Universidad Autónoma de Madrid), master en Métodos numéricos aplicados a la Ingeniería (UNED), diplomada en Estudios Avanzados (2000) dentro del programa de doctorado de calidad '*Planificación, fiabilidad y riesgo en la Ingeniería Civil*' (UGR). En 2001, obtuvo el título de Suficiencia Investigadora con el trabajo de investigación "*Modelo lineal de difracción y refracción de ondas y ejemplos de aplicación en el diseño y planificación de infraestructuras portuarias*" dirigido por Miguel A. Losada.

Esta Tesis doctoral pretende profundizar en el conocimiento de la **dinámica litoral y su interacción con estructuras costeras reflejantes**, ya sean de tipo natural o construidas por el hombre. En particular, se ha analizado la influencia de las **modulaciones en la amplitud del oleaje** (conocidas como grupos de olas) **en la hidrodinámica y morfodinámica de profundidades intermedias**, donde la influencia de la rotura del oleaje puede considerarse despreciable. La Tesis demuestra que dichas modulaciones pueden dar lugar a formas de lecho con una gran variedad de escalas (desde cientos de metros a decenas de kilómetros) y a transporte neto de sedimento en el rango de profundidades intermedias. Así mismo, pone de manifiesto la influencia de dichos procesos morfodinámicos en la operatividad portuaria. En particular, en la **operatividad de los canales de navegación**.

Para la descripción de la hidrodinámica y patrones sedimentarios asociados a los grupos de olas parcialmente reflejados, se ha adoptado una aproximación analítica tanto para la parte no viscosa del fluido como para la capa

límite de fondo. La **resolución analítica** del problema ha permitido analizar las contribuciones de los distintos procesos morfodinámicos implicados. Para el cálculo de la operatividad de los canales de acceso se ha adoptado una **descripción probabilista** de los agentes. Esta aproximación se enmarca dentro de las tendencias actuales de ingeniería portuaria recogidas por las **Recomendaciones para obras marítimas, ROM 0.0**. La metodología y resultados obtenidos se discuten en los **cinco capítulos** que consta la Tesis. Los detalles de cálculo se han adjuntado en forma de **Apéndices** para facilitar la lectura del documento principal.

Además del documento que se presenta a continuación, son resultado del trabajo de investigación realizado diversos artículos, capítulos de libro y comunicaciones a congresos internacionales. La metodología propuesta para el cálculo de la operatividad de canales de acceso ha servido para la obtención de un proyecto de investigación del Ministerio de Fomento (BOE, num. 218; 13 Dic. 2002, Resolución 24317) que permitirá la validación del modelo y su posible implantación en las Autoridades Portuarias de Cádiz y Gijón.

Tanto la temática abordada como haberla realizado dentro de un Proyecto Europeo han permitido realizar al doctorando diversas estancias de colaboración en centros de investigación europeos (*Delft-Hydraulics Lab.*, The Netherlands; *MARIN*, The Netherlands). Teniendo ésto en cuenta, y una vez cumplidos los requisitos administrativos necesarios, esta Tesis optará a la mención de "Doctorado Europeo". Por este motivo, el *Capítulo 4* de la Tesis ha sido escrito en inglés.

Agradecimientos

Muchas personas han contribuido, de una u otra forma, a hacer posible esta Tesis doctoral: familia, amigos, compañeros, profesores, ... nombrarlos a todos sería imposible. A todos ellos, mi profundo agradecimiento.

Entre ellas, hay dos personas a las que a la gratitud personal, estoy obligada a añadir el reconocimiento de una deuda impagable: Miguel A. Losada, director de esta Tesis y MAESTRO; y Ramón, mi querido amigo y esposo, que siempre me ha ofrecido su paciencia, confianza y apoyo incondicional.

Resumen

Los procesos morfodinámicos fuera de la zona de rotura, ya sean inducidos por la propagación del oleaje o por su interacción con las infraestructuras costeras (típicamente localizadas en profundidades intermedias), presentan un gran interés por su influencia en la operatividad portuaria. En esta Tesis, se analizan los **procesos morfodinámicos a que da lugar la interacción de ondas gravitatorias moduladas con estructuras costeras de tipo reflejante y la influencia que dichos procesos tienen sobre la operatividad de los canales de acceso a puertos de una vía.**

El problema se aborda aquí desde un punto de vista hidrodinámico. El cuerpo del fluido se ha dividido en dos regiones: la **región exterior** en la que los términos viscosos son despreciables y la **capa límite de fondo**. En ambas regiones se describe la hidrodinámica a partir de los valores promediados (en el tiempo o en el espacio) de las principales magnitudes hidrodinámicas. Para la definición de los promedios se utilizan las escalas 'naturales' del problema.

La estructura espacial y temporal de las cantidades hidrodinámicas 'medias', depende de la escala elegida para su cálculo. Con la formulación que se adopta en esta Tesis, es posible distinguir dos regímenes oscilatorios: el débilmente estacionario y el estacionario. En el caso de grupos de regulares, el **régimen débilmente estacionario** es en el que la escala de promedio temporal coincide con el periodo de la onda corta; y en el **regimen estacionario**, la escala del promedio temporal es igual al periodo del grupo. Estos regímenes pueden generalizarse al caso de grupos irregulares definiendo un *operador promedio (espacial / temporal) de orden n* . Aquí, ambos regímenes son utilizados para la descripción de las principales magnitudes hidrodinámicas en la región exterior y en la capa límite.

El movimiento oscilatorio en la región exterior inducido por ondas de pequeña amplitud débilmente no lineales se ha modelado analíticamente utilizando la Teoría de Stokes y la formulación de *Schäffer* (1990) para grupos regulares. Asumiendo que el parámetro de modulación y el de Stokes son del mismo orden, y aplicando la técnica JWKB, se ha obtenido la solución del potencial de velocidades de un fluido irrotacional, no viscoso e incompresible

para los casos de un tren de ondas progresivo y un tren de ondas parcialmente estacionario con incidencia oblicua. En esta descripción se incluye tanto la onda corta modulada, como la onda larga vinculada y la onda larga libre que resulta de la interacción del grupo con una estructura reflejante, uniforme e infinita.

En la región exterior, las magnitudes promediadas en la fase que se analizan son: (1) el campo de velocidades euleriano y lagrangiano; (2) la superficie libre; y, (3) el campo de presiones. Las cantidades promediadas e integradas en profundidad que se discuten son: (1) los flujos de masa, momento y energía; y (2) el tensor de radiación.

De los resultados obtenidos, puede concluirse que:

- en el **régimen débilmente estacionario**, las cantidades promediadas son magnitudes harmónicas en el tiempo con periodicidad igual al semi-periodo del grupo. Espacialmente, son moduladas en la dirección normal y paralela a la costa. En caso de reflexión parcial y en el rango de profundidades intermedias, es posible observar las siguientes escalas de modulación: (1) escala del orden de la longitud de la onda corta; (2) escala del orden de la longitud de onda del grupo; y (3) en función de la profundidad, el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión de la onda larga libre, super-escalas de modulación resultado de la interferencia de las ondas largas vinculadas y libres.
- en el **régimen estacionario**, las cantidades promedio son constantes en el tiempo. En el caso de cantidades no lineales y en condiciones de reflexión parcial, su estructura espacial resulta ser uniforme en la dirección paralela a la línea de costa y modulada en la dirección normal. Las escalas de modulación observadas son: (1) del orden de la longitud de onda corta; y (2) del orden de la longitud de onda del grupo. La modulación en la escala onda corta, resulta de la interacción no lineal entre las contribuciones de onda corta incidente y reflejante de primer orden.

La modulación espacial de las cantidades medias en el **régimen débilmente estacionario** da lugar, entre otros, a los siguientes **procesos morfodinámicos**:

- posible generación de **corriente longitudinal fuera de la zona de rotura** inducida por las modulaciones del tensor de radiación tangencial en condiciones de incidencia oblicua y reflexión parcial;

- posible inducción de **patrones de transporte de sedimento en suspensión de gran escala** (del orden de *Kms.*) debido a la presencia de superescalas de modulación del campo lagrangiano de velocidades en condiciones de reflexión parcial;

En el **régimen estacionario**, los grupos regulares parcialmente estacionarios pueden inducir, entre otros, los siguientes **procesos morfodinámicos**:

- con independencia de la profundidad, **carga dinámica del fondo** debido a la variación temporal proporcional a dos veces la frecuencia de la onda corta y a dos veces la frecuencia de la onda larga del promedio espacial de la presión inducida por grupos de olas con condiciones de reflexión parcial. Este resultado extiende la teoría de *Longuet-Higgins* (1950) en relación a la posible generación de microseismos en presencia de ondas estacionarias de pequeña amplitud y pone de manifiesto la influencia de los grupos en la variación temporal del perfil vertical de sedimento.
- promediada en el tiempo, la presión es una magnitud espacialmente modulada en la dirección transversal en las escalas espaciales de onda corta y del grupo. Esta variación puede inducir la **variación espacial en dichas escalas del perfil vertical de sedimento**. La influencia de los grupos en el transporte neto de sedimento vuelve a ponerse de manifiesto.

Las escalas espaciales y temporales inducidas por los grupos en la región exterior, son transmitidas a la capa límite de fondo a través de los términos forzadores de las ecuaciones de conservación de momento horizontal. Dichos términos son proporcionales al gradiente de la presión. A partir de las ecuaciones de conservación de momento, de la ecuación de conservación de masa, e imponiendo condiciones de no deslizamiento en el fondo y la continuidad del campo de velocidades entre la capa límite y la región exterior, es posible calcular analíticamente el campo euleriano de velocidades en la región viscosa. Para ello, se han utilizado las reglas de derivación de la técnica JWKB y se ha asumido una estructura espacial y temporal de tipo armónico para la viscosidad de remolino con: (1) coeficientes independientes de la profundidad (*solución laminar*); y, (2) coeficientes con dependencia lineal de la profundidad (*solución Grant-Madsen*).

En la región viscosa, se analiza la estructura espacial y temporal hasta segundo orden de: (1) el campo euleriano de velocidades, (2) la velocidad de transporte de masa; y, (3) el 'streaming' inducidos por grupos regulares

parcialmente estacionarios. Para ello se utilizan los regímenes oscilatorios estacionario y débilmente estacionario.

De los resultados obtenidos puede deducirse que, en el régimen débilmente estacionario, son magnitudes:

- harmónicas en el tiempo con periodicidad igual al semiperiodo del grupo. Esta dependencia temporal implica la movilidad de los patrones de transporte de sedimento y, por tanto, la posible movilidad (o migración en el caso de grupos irregulares) de las formas de lecho inducidas;
- moduladas, en el caso más general, en las siguientes escalas: (1) la longitud de onda corta; (2) la longitud de onda del grupo; y, (3) en las super escalas de modulación que resultan de la interferencia de las ondas largas vinculada y libre.

En el régimen estacionario, de acuerdo a su carácter no lineal, son magnitudes uniformes en la dirección longitudinal y moduladas en dirección normal a la estructura. Las escalas de modulación presentes son: (1) del orden de la longitud de onda corta; y, (2) del orden de la longitud de onda del grupo.

Tanto en el régimen estacionario como en el débilmente estacionario, la velocidad de transporte de masa y en el 'streaming' presentan patrones de *tipo N* y *tipo L*, en función del transporte dominante.

Asumiendo transporte por fondo, se ha caracterizado la forma en planta de los patrones iniciales de transporte de sedimento inducidos por grupos regulares parcialmente estacionarios. Se ha encontrado que, de acuerdo a criterios cinemáticos, en el régimen débilmente estacionario pueden aparecer formas rítmicas en dirección longitudinal y normal a la estructura reflejante. Estas formas de lecho pueden presentar movilidad en la escala temporal del grupo. En el régimen estacionario, la modulación de la velocidad de transporte de masa y del 'streaming', permite la existencia de formas rítmicas paralelas a la costa (barras) en las escalas de onda corta y del grupo. Este resultado extiende la solución de *Carter et al.* (1974) para ondas monocromáticas parcialmente reflejadas (para coeficientes de reflexión ≥ 0.4), al permitir la formación de barras con longitud entre crestas no sólo del mismo orden que la semilongitud de onda corta, sino también, del orden de la semilongitud de onda del grupo.

La influencia de los procesos morfodinámicos (hidrodinámicos, sedimentarios y morfológicos) inducidos por grupos regulares en la **operatividad de los canales de acceso a puerto de una vía**, se analiza desde un punto de vista probabilista y a la luz del marco intelectual de la *Recomendaciones de Obras Marítimas, ROM 0.0*. Para ello, el canal de acceso es dividido espacialmente en tramos y temporalmente en estados de navegación. En cada

tramo y estado de navegación, se define la ecuación de verificación de los modos de parada del canal. Para el cálculo del dominio de parada, se proponen dos niveles de verificación: el nivel de 'estado de resguardo' y el nivel de 'resguardo instantáneo'.

En el primero, el carácter aleatorio de los agentes y acciones significativos en el tramo se describe en términos de descriptores estadísticos de estado. En el nivel de 'resguardo instantáneo', agentes y acciones son descritos mediante descriptores estadísticos y funciones de probabilidad representativas de las escalas espaciales y temporales que caracterizan la variabilidad de los agentes y acciones significativos de corto periodo del tramo. Generalmente, estas escalas son determinadas por las oscilaciones del barco.

La probabilidad de parada durante el tránsito se determina haciendo uso de la independencia estadística de los tramos. La metodología propuesta se ilustra con el cálculo de la probabilidad de parada por toque del fondo durante el acceso de un barco tipo máximo en condiciones de temporal al puerto de Motril (Granada, España). En el ejemplo, la variabilidad estadística de las formas de lecho 'potenciales' inducidas durante el estado de mar se ha caracterizado mediante una distribución estadística de tipo gaussiano. Los resultados indican que, en función del nivel elegido para el cálculo de la probabilidad de parada y de la reflectividad de las estructuras portuarias, la operatividad de los canales de acceso puede disminuir de forma significativa. Teniendo esto en cuenta, y en función del carácter del canal, se proponen distintas estrategias para el mantenimiento y gestión en tiempo real de los canales de acceso.

Principales aportaciones de la Tesis

Esta Tesis pone de manifiesto que los procesos morfodinámicos inducidos por trenes de olas modulados en profundidades intermedias y su influencia en la operatividad portuaria, **dependen significativamente de las escalas** (espaciales y/o temporales) elegidas para su formulación matemática y descripción estadística.

Así mismo, se ha probado que las estructuras costeras de tipo reflejante, ya sean naturales (ej. acantilados, ...) o hechas por el hombre (ej. diques,...), **pueden modificar sustancialmente la morfodinámica** de las zonas en las que es efectiva la interferencia entre los trenes reflejado e incidente. Es más, las ondas largas libres inducidas durante la reflexión del grupo son un agente importante en dicha morfodinámica al poder inducir, como resultado de su interacción con la onda larga vinculada, modulaciones débilmente estacionarias de muy larga escala en las principales cantidades hidrodinámicas.

Este resultado es importante porque prueba que, sin necesidad de recurrir

a teorías de inestabilidad morfológica alejadas de la intuición física y difíciles de verificar experimentalmente, la **hidrodinámica inducida por ondas gravitatorias moduladas da lugar a escalas que permiten explicar la generación de formas de lecho de gran escala** fuera de la zona de rotura.

Por otro lado, la formulación propuesta ha permitido **estender teorías existentes para ondas monocromáticas** como la de *Carter et al.* (1974) y *Longuet-Higgins* (1950) al caso de grupos regulares. También ha permitido: **(1) descubrir nuevos mecanismos de transporte** frente a estructuras reflejantes como la posible generación de corrientes longitudinales débilmente estacionarias fuera de la zona de rotura; y, **(2) poner de manifiesto la necesidad de revisar las teorías existentes** de generación de ondas largas (ej. 'surf beat' de *Schäffer* (1990)) para incluir los términos de interacción entre los trenes modulados incidente y reflejado. Lo que deja abiertas varias líneas de investigación futura.

Finalmente la Tesis, prueba que los procesos morfodinámicos inducidos por la reflexión de ondas gravitatorias moduladas **pueden influir significativamente en los niveles de operatividad** de las infraestructuras portuarias localizadas en profundidades intermedias, como por ejemplo, la de los canales de acceso. Para evaluar esta influencia en tiempo real, se ha propuesto una metodología probabilista del cálculo de la probabilidad de parada en canales de acceso de una vía acorde con las nuevas recomendaciones de ingeniería portuaria y se han definido distintas estrategias de gestión en función del carácter de la infraestructura. La metodología propuesta pretende ser implementada para su validación en los puertos de Cádiz y Gijón.

Con estas aportaciones, la *Tesis* pretende ser una herramienta útil en el diseño y gestión portuarios y ayudar a comprender y gestionar mejor el complejo sistema costero.

Publicaciones derivadas de la Tesis doctoral

- Sánchez, E. and Losada, M.A. **Large scale bedforms and sediment transport in front of cliffs.** (*aceptado para 29th Int. Conf. of Coastal Engineering 2004, Lisboa*).
- Moyano, J.M., Sánchez, E., Gómez, M., Carretero, J.C., Díaz, J.L. and Losada, M.A. **A wave climate prediction system for the real time management of the Gijon harbor.** (*aceptado para 29th Int. Conf., of Coastal Engineering 2004, Lisboa*).

- Sánchez, E. and Losada, M.A. **Real time management of entrance channels. Part I: a probabilistic model** (*enviado a la revista Coastal Engineering en Octubre 2003*).
- Sánchez, E. and Losada, M.A. **Real time management of entrance channels. Part II: an application case** (*enviado a la revista Coastal Engineering en Octubre 2003*).
- Sánchez, E. and Losada, M.A. **Modelo probabilista para la gestión en tiempo real de canales de navegación de acceso a puertos, ROM 0.0: Canales de Navegación**. Serie EROM .Ed. Universidad de Valencia, Distribución: Puertos del Estado, ISBN:84-9705-506.3. 2003.
- Sánchez, E. and Losada, M.A. **Evolución del fondo frente a un dique reflejante**. VII Jornadas Españolas de Ingeniería de Costas y Puertos. Almería, Spain. 2003 (*en prensa*).
- Sánchez, E. and Losada, M.A. **Influence of wave reflection on the navigation conditions as a factor of breakwater design**. Proceedings of 28th ICCE 2002 Cardiff U.K.: Vol II, pp. 2312-2319.
- Sánchez, E., 2002. **Modelo lineal de difracción y refracción de ondas y ejemplos de aplicación en el diseño y planificación de infraestructuras portuarias**. Universidad de Granada. ISBN: 84-688-0503-3 (*Trabajo de investigación tutelada*)
- Ortiz, P. and Sánchez, E. **An improved partition of unity finite element model for diffraction problems**. Int. J. Numer. Meth. Eng.: 50, pp. 1025-1048, 2001.
- Sánchez, E. and Ortiz, P. **An efficient integration procedure for the partition of unity method in diffraction-refraction wave problems**. Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS-2001); Swansea, U.K.
- Sánchez, E. and Ortiz, P. **Short waves diffraction problems with a partition of unity finite element model**. Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS-2000); Barcelona, Spain.

Artículos en preparación

- Sánchez, E. and Losada, M.A. **Core region hydrodynamics under modulated gravity waves: depth dependent magnitudes** (*fecha prevista de envío, Febrero 2004*).
- Sánchez, E. and Losada, M.A. **Wave Boundary Layer under modulated gravity waves** (*fecha prevista de envío, Marzo 2004*).

Capítulo 1

Introducción

Los procesos morfodinámicos inducidos por el oleaje en la zona de rotura han sido ampliamente estudiados por numerosos autores. Los trabajos de *Dally & Dean* (1984), *Svendsen* (1984), *Stive & Wind* (1986), *Svendsen et al.* (1987), *Deigaard et al.* (1991), *Stive & De Vriend* (1994), *Cox et al.* (1995), son sólo un ejemplo.

Sin embargo, desde el punto de vista de la operatividad portuaria, los procesos morfodinámicos fuera de la zona de rotura (típicamente en profundidades intermedias), ya sean inducidos por la propagación del oleaje o por su interacción con las infraestructuras costeras, presentan un gran interés por su influencia en la operatividad portuaria.

En ausencia de corrientes o fenómenos de refracción significativos, la interacción entre el oleaje incidente y las estructuras reflejantes (naturales o construidas por el hombre) consiste fundamentalmente en:

- **reflexión del oleaje.** La importancia de la reflexión depende de la amplitud del oleaje incidente y del coeficiente de reflexión. Este último es función, entre otros, de los siguientes factores: tipología de la estructura (ej., porosidad, ...), cociente entre la profundidad y la longitud de onda kh , el ángulo de incidencia del oleaje α ,... Teniendo esto en cuenta, la reflexión puede ser un fenómeno significativo, no sólo en el caso de estructuras típicamente reflejantes (ej. diques verticales impermeables, acantilados, ...), sino también en el caso de: **(1)** diques en talud con incidencia de oleaje de tipo 'swell' u ondas gravitatorias moduladas; **(2)** ángulos de incidencia muy oblicuos (*Losada et al.*, 1981); o **(3)** playas con pendiente $> 1 : 20$ (*Baquerizo & Losada* (1998));
- **radiación del oleaje** en los extremos de la estructura o en puntos de discontinuidad (ej. cambios de alineación). La intensidad de la concentración y radiación depende de: la relación entre las dimensiones

de la estructura y la longitud de onda local, la relación kh y el ángulo de incidencia α . En profundidades intermedias e indefinidas y dominios abiertos, la amplitud de la onda radiada decae con una ley potencial con la distancia al foco emisor;

- **pérdida de energía** por: (1) transmisión, (2) rotura y/o (3) generación de vórtices de gran escala en el caso de números de Kaulegan-Karpenter $KC > 0.5$.

A distancias menores o del mismo orden que la longitud de onda del oleaje incidente (*campo cercano a la estructura*), y con $KC > 0.5$, la morfodinámica suele estar dominada por los procesos de pérdida de energía. La morfología asociada consiste, fundamentalmente, en procesos de erosión y sedimentación localizados. Dichos procesos han sido analizados teórica y experimentalmente por: Oumeraci (1994), Irie et al. (1986), Uda et al. (1993), Sumer et al. (1997), Fredsoe et al. (1997), entre otros. Desde el punto de vista de la operatividad portuaria, suelen inducir modos de fallo de tipo estructural (ej., descalzamiento de diques, pérdida de piezas, vuelco, etc.; ROM 1.1. (2003)).

A distancias de la estructura mayores que la longitud de onda (*campo medio y lejano*), o a menor distancia si $KC < 0.5$, los procesos morfodinámicos dominantes suelen ser la reflexión y, de forma más local, la radiación del oleaje. Oleaje que, en el mundo real, tiene carácter irregular (por dispersión en frecuencias y en dirección), es modulado y no estacionario. Los procesos morfodinámicos por la reflexión pueden afectar a la operatividad de las infraestructuras portuarias localizadas en profundidades intermedias (ej. canales de acceso) induciendo la ocurrencia de alguno de sus modos de parada, ROM 0.0, (2003). Por ejemplo, en el caso de canales de navegación, la denegación del acceso por agitación excesiva, aumento de las necesidades de dragado debido al incremento de la sedimentación, por las formas de lecho generadas, etc.

El objeto de esta Tesis es analizar los procesos morfodinámicos inducidos por la interacción de ondas gravitatorias moduladas con estructuras costeras de tipo reflejante y la influencia de dichos procesos en la operatividad de los canales de acceso de una vía. Este trabajo se centra en el rango de profundidades intermedias y en fondos de profundidad constante o pendiente despreciable (i.e., $< 1 : 20$). Estas condiciones son típicas de la plataforma continental costera y exterior (con pendientes entre $1 : 20$ y $1 : 50$, y con profundidades de 8 a 50m.), donde típicamente se ubican las obras de abrigo portuarias (ej. el nuevo dique de Torres del puerto de Gijón) y la mayor parte de los canales de acceso.

La descripción de la morfodinámica inducida y la descripción de la metodología para el cálculo probabilista de su influencia en la operatividad de los

canales de acceso ocupa los capítulos centrales de esta Tesis. En esta Introducción, se describen algunos conceptos básicos relativos a trenes de ondas modulados y se aportan datos que ilustran su importancia en profundidades intermedias. Además, se discuten: (1) los principales mecanismos de generación de onda largas, (2) el estado del arte en el modelado de ondas largas y, (3) el conocimiento actual en relación a la posible influencia de las ondas gravitatorias moduladas en la hidrodinámica, el transporte de sedimentos y la morfología de profundidades intermedias. Finalmente, se describen: la metodología, los principales objetivos de la Tesis y su organización.

1.1 Definiciones y conceptos básicos

En la naturaleza, las ondas gravitatorias (con periodos típicos de $O(10s.)$ y longitudes de onda del orden de $O(100m.)$ que llegan a la plataforma continental y a la zona costera (con profundidades $h = 50 - 5m.$) presentan modulaciones de escala larga en su amplitud. El orden de magnitud típico de dichas modulaciones es de $O(100s.)$ o más en el tiempo, y del orden de $O(Km.)$ o mayores en el espacio. Estas modulaciones son conocidas en la literatura como **ondas infragravitatorias** u **ondas largas**.

Battjes et al. (2003) resume los mecanismos fundamentales para su generación:

- **Interacción entre pares de ondas cortas con frecuencia o dirección de propagación próximas**, lo que da lugar a la formación de **grupos** y **ondas largas vinculadas** de segundo orden (*'set-down beneath wave groups'*). Los primeros autores que apuntan su existencia fueron *Biéssel* (1952) y *Longuet-Higgins and Stewart* (1962). Los grupos y las ondas largas vinculadas pueden ser modificadas o forzadas debido variaciones del fondo a través del mecanismo de transformación conocido como asomeramiento (*'shoaling'*) o transformadas en ondas largas libres debido a su interacción con: (1) estructuras costeras (ya sean naturales como arrecifes o construidas por el hombre como ej. diques), (2) cambios rápidos de la profundidad (ej. canales de navegación) o (3) discontinuidades hidrodinámicas (ej. corrientes, línea de rotura, ...). Una vez transformadas en **ondas largas libres** pueden propagarse hacia la costa (ej. dentro de la zona de rotura; *Foda & Mei*, 1981; *Schäffer and Svendsen*, 1988) o alejarse de la misma (*List*, 1992; *Masselink*, 1995).
- **'Surf beat'** inducido por la oscilación del punto de rotura (*Symonds et al.* (1982); *Symonds and Bowen*, (1984)). Normalmente, dentro

del 'surf beat' se incluyen tanto modos libres ('leaky' waves) que se propagan hacia profundidades indefinidas, como ondas atrapadas de borde ('edge waves').

La relativa importancia de ambos mecanismos de generación en función de la pendiente del fondo ha sido estudiada por *List* (1992) and *Van Dongeren et al.* (2002). Otros autores, como *Schäffer & Jonsson* (1990) and *Schäffer* (1993) han formulado mecanismos de generación que son combinación de los ya mencionados.

En este trabajo, se consideran sólo ondas gravitatorias moduladas por grupos y ondas largas vinculadas. En caso de existir interacción con una estructura reflejante, se incluye la posible generación de ondas largas libres reflejadas.

1.2 Hidrodinámica inducida por ondas largas

1.2.1 Importancia de las ondas infragravitatorias en profundidades intermedias

Los datos que confirman la importancia de las ondas infragravitatorias en el rango de profundidades intermedias son, sobre todo, medidas de campo. Por motivos de escala, existen escasas medidas de laboratorio de movimientos infragravitatorios. Excepción son los trabajos de *Bowers* (1980) y *Baldock et al.* (2000) que midieron ondas largas vinculadas al oleaje y ondas largas generadas por la oscilación del punto de rotura.

La primera evidencia experimental de su existencia medida en campaña de campo y la estimación de su magnitud fue hecha por *Munk* (1949) and *Tucker* (1950) que midió ondas largas vinculadas a una profundidad de 15m. y con alturas del orden del 10% del oleaje incidente.

Ondas gravitatorias vinculadas a oleaje de tipo "sea" y "swell" han sido observadas también entre 8 y 18m. de profundidad por *Hasselmann et al.* (1962), *Meadows et al.* (1982), *Elgar and Guza* (1985), *Okiihiro et al.* (1992). Del análisis de estas observaciones, se concluyó que la magnitud y tipo de onda gravitatoria observada depende, entre otras variables, de: (1) la profundidad y, (2) la dispersión angular y/o de frecuencias del oleaje incidente. *Herbers et al.* (1994, 1995a, 1995b) analizó también la importancia relativa de las ondas vinculadas frente a otras ondas infragravitatorias. Y encontró que, la componente de onda larga vinculada puede ser hasta el 30% de la energía total infragravitatoria. La mayor cantidad de onda larga vinculada se encontró en condiciones de oleaje tipo *swell*. Con las mediciones realizadas

comprobó que, fuera de la zona de rompientes, la teoría de Stokes a segundo orden que incluye dispersión angular del oleaje de corto periodo, predice bien las ondas largas forzadas (o vinculadas). Otras campañas de medida fuera de la zona de rotura han sido realizadas por *Wright et al.* (1979, 1982), *Huntley et al.* (1981), *Holman* (1981), *Guza & Thornton* (1982, 1985), *Oltman-Shay & Guza* (1987) and *Howd et al.* (1991).

Los trabajos mencionados confirman la importancia de las ondas infragravitatorias, ya sea en forma de grupos, ondas largas vinculadas u ondas libres y ponen de manifiesto su carácter débilmente no lineal en el rango de profundidades intermedias.

1.2.2 Estado del arte en el modelado de ondas largas

Debido a su importancia teórica y práctica, hay un extenso trabajo realizado en el modelado de ondas infragravitatorias dentro y fuera de la zona de rotura. Entre los modelos numéricos de ondas infragravitatorias en la zona de rotura pueden destacarse los trabajos de *Madsen et al.* (1997), *Ruessink* (1998), *Battjes et al.* (2003) y *Van Dongeren et al.* (2003).

Fuera de la zona de rotura y en el rango de profundidades intermedias, *Battjes et al.* (2003a) distingue entre: **(1) modelos de profundidad constante basados generalmente en la Teoría de Stokes** y, **(2) modelos de profundidad variable**. Dentro de este último grupo se encuentran: **(1) modelos en el régimen de Stokes con aproximación de pendiente suave** ('mild slope'); **(2) modelos en el régimen de Boussinesq** (*Mei & LeMéhauté* (1966), *Peregrine* (1967, 1971), *Boussinesq* (1972), *Svendsen* (1974), *Madsen et al.* (1991), *Dingemans* (1997)); y, **(3) modelos que resuelven las ecuaciones de Navier Stokes**.

En este trabajo se ha optado por una aproximación basada en la Teoría de Stokes y fondo constante, por lo que sólo se describe el estado del arte de este tipo de modelos y los que utilizan la aproximación de pendiente suave.

1.2.3 Modelos de profundidad constante

Los modelos de profundidad constante describen el comportamiento de grupos y ondas largas mediante su desarrollo en serie de potencias del parámetro de Stokes $O(ak)$ (*Stokes*, 1947), asumiendo las clásicas hipótesis de fluido no viscoso, incompresible y flujo irrotacional para las ecuaciones de gobierno y condiciones de contorno. Dentro de este tipo de modelos son referencias obligadas los trabajos de *Biesel* (1952), *Longuet-Higgins and Stewart* (1960, 1962, 1964) y *Hasselmann* (1962); y más recientemente el de *Chu & Mei* (1970b) para trenes de ondas modulados. *Kosstense* (1984) y *Baldock et al.*

(2000) validaron experimentalmente los resultados obtenidos. La validez de estos modelos está limitada por la condición,

$$\frac{ak}{(kh)^3} \ll 1 \quad (1.1)$$

1.2.4 Modelos de pendiente suave

En este grupo cabe distinguir entre: (1) **modelos de profundidad casi uniforme** basados en la conservación de la energía de onda corta (*Stiassnie & Peregrine*, 1980; *Iusum & Stiassnie*, 1985), y (2) **modelos de tipo 'Mild Slope'**.

Dentro de estos últimos, *Kirby* (1983) propone un modelo no lineal de trenes modulados progresivos en presencia de corrientes cuasi-estacionarias de segundo orden en el parámetro de Stokes $O(ak)^2$ y de primer orden en la pendiente de fondo $O(\Delta h/h)$. Este modelo, sin embargo, está limitado a casos con reflexión despreciable, oleaje de banda estrecha y una frecuencia dominante.

1.3 Transporte de sedimento inducido por ondas gravitatorias moduladas

Al igual que en el caso de la hidrodinámica, existen pocas evidencias experimentales que evalúen la influencia de las ondas infragravitatorias en el transporte de sedimentos. Cabe destacar los trabajos de laboratorio realizados por *Sato* (1992) and *Bowers* (1980) que estudiaron teórica y experimentalmente el transporte de arena inducido por los grupos. Las medidas realizadas muestran que la presencia de grupos generan un incremento del transporte en la dirección de propagación de la onda. Sin embargo, estos experimentos no fueron capaces de estimar la aportación neta de los grupos a la misma.

A la luz de estos experimentos, *Shi and Larsen* (1984) sugirieron que *'bound long waves under wave groups can give an opposing contribution to the net transport, because the backward flow bound long waves give a reverse flow under the high waves when the sediment concentrations are high, and the forward motion under the low waves with low sediment concentrations'*.

Debido a la escasez de datos experimentales, se han buscado *'evidencias numéricas'* que pongan de manifiesto esta influencia en el rango de profundidades intermedias.

Entre los trabajos numéricos existentes, cabe destacar el de *Deigaard et al.* (1999) que modelaron el transporte neto de sedimento fuera de la zona

de rotura en presencia de grupos y ondas vinculadas sobre un fondo plano y condiciones de transporte intensivas ('*sheet flow regime*'). A partir de un modelo de ondas moduladas lineales (no se han incluido *super armónicos de ondas cortas*) y modelos paramétricos de transporte de sedimento, se discute el transporte neto inducido por las ondas gravitatorias y por ondas largas vinculadas en el caso de un tren progresivo.

Los resultados muestran que el transporte neto de sedimentos en presencia de grupos difiere del transporte neto de sedimentos inducido por un oleaje regular con energía equivalente. *Deigaard et al.* (1999) sugieren las siguientes causas: (1) el incremento del transporte de sedimento inducidos por la velocidad de transporte de masa y el 'streaming' inducidos por los grupos; (2) el flujo neto en la dirección de avance del tren modulado inducido por las ondas largas vinculadas; y, (3) el transporte de sedimento asimétrico inducido por el grupo debido a la mayor concentración de sedimento en las ondas más largas (crestas del grupo) y menor en los valles.

De acuerdo a los resultados obtenidos, los principales efectos morfológicos que cabe esperar son: (1) cambio de la condición de transporte neto entre la zona costera y la plataforma continental lo que puede modificar la evolución a largo plazo de esta última; y, (2) el posible desarrollo de formas de lecho dentro de las escalas temporales y espaciales de los grupos.

Sin embargo, en el modelo descrito no se incluye el efecto de la reflexión del grupo en el transporte de sedimentos ni el efecto de las ondas largas vinculadas y libres. Hasta donde llega el conocimiento del autor, a día de hoy, esta influencia y la morfología asociada no han sido completamente analizadas.

1.4 Morfología inducida por ondas gravitatorias moduladas

De lo expuesto anteriormente, puede deducirse que el conocimiento sobre la influencia de grupos u ondas largas parcialmente reflejados en la morfología de profundidades intermedias es muy escasa.

Teniendo en cuenta que las longitudes de onda típicas de movimientos infragravitatorios son $\sim Km$ o más, sus periodo $\sim 100s.$ o mayores, y su amplitud relativa $\sim 10\%$ del oleaje incidente, cabe esperar que las formas de lecho inducidas sean de gran escala, y si desarrollo (o en su caso migración) lentos, en comparación a las inducidas por el oleaje de corto periodo.

A continuación se describen algunas de las formas de gran escala que es posible encontrar en profundidades intermedias y se discuten cuáles de

| Forma de lecho | Longitud | Altura | Velocidad de migración | Tiempo de evolución |
|------------------------------|-------------|----------|------------------------|---------------------|
| Bancos de arena | 5 – 10 km | 5 – 15 m | --- | Centurias |
| Ridges | 5 – 20 km | 5 – 20 m | 3 m/yr | Décadas |
| Bajos | 2 – 5 km | 20-30 m | --- | Décadas |
| Ondas de arena transversales | 300 – 700 m | 1 – 5 m. | 1 – 10 m/yr | Décadas |
| Mega ripples | 2 – 5 km | < 1m. | --- | Años |

Figura 1.1: Escalas espaciales y temporales características de formas de rítmicas de gran escala en la plataforma continental. *Después de Calvete (2000).*

ellas, a la luz del estado de arte actual, podrían ser inducidas por grupos y ondas largas. Para ello se distinguen dos 'ambientes morfológicos': (1) la **plataforma continental exterior** con profundidades entre 20 y 50m.; y, (2) la **plataforma continental costera** (excluida la zona de rotura) con profundidades entre 20 y 8m. Una detallada descripción de las formas de lecho de gran escala puede encontrarse en *Van Rijn (1998)*, *Dyer et al. (1999)* y *Blondeaux (2001)*.

1.4.1 Morfología de la plataforma continental exterior

En la *Fig. 1.1.* se describen las principales formas de lecho de gran escala (con origen no geológico) que pueden encontrarse en la plataforma continental exterior y alguna de sus escalas espaciales y temporales características.

Para explicar su formación existen básicamente dos tipos de modelos: (1) modelos basados en **teoría de inestabilidad morfológica**; y, (2) modelos de tipo **morfodinámico**. En *Blondeaux (2001)* y *De Vriend et al. (2003)* puede encontrarse una revisión detallada de los mismos.

La formación de 'shoals' parece estar relacionada con fenómenos de difracción y radiación inducidos por puntos de concentración y radiación del oleaje ('headlands') y en desembocaduras ('inlets'). Los 'sand banks', 'sand waves' y 'ridges' parecen estar generados por mecanismos relacionados con la interacción del flujo mareal y el fondo, con estructuras secundarias de flujo y con la fuerza de Coriolis. Modelos morfológicos que explican su formación a partir de los mecanismos mencionados son, entre otros, los de *Iheda (1981)*, *Hutnance (1982)*, *Deigaard & Fredsoe (1986)*, *Colombini (1993)*, *Hulscher et*

al. (1993), Blondeaux (1999a, 2000a), Blondeaux (2001). Modelos basados en la inestabilidad morfológica para explicar la formación de 'ridges' conectados a la costa han sido propuestos por Trowbridge (1995) y Calvete (1999), entre otros.

Superpuestos a las estas formas de lecho de gran escala, suelen aparecer formas de lecho rítmicas como: (1) 'mega-ripples' o 'ridges' de pequeña amplitud; y, (2) 'sand waves' de pequeña escala. Sus mecanismos de formación aún no son bien conocidos.

En esta Tesis se muestra que sus escalas espaciales están dentro del rango de las escalas hidrodinámicas inducidas por los grupos y ondas largas en profundidades intermedias.

1.4.2 Morfología de la plataforma continental costera

En la plataforma continental costera, donde suelen ubicarse la mayor parte de las estructuras portuarias, las formas de lecho de gran escala que pueden encontrarse son: (1) barras de pequeña amplitud (~ 10 a 20cm) paralelas a la estructura con longitud entre crestas proporcional a la semilongitud de onda del oleaje incidente y el coseno del ángulo de incidencia; y, (2) depósitos de sedimento de tipo 'shoals' aislados o múltiples en los extremos de la estructura.

Al igual que en la plataforma exterior, los 'shoals' parecen ser inducidos por la concentración y radiación del oleaje en los extremos o cambios de alineación de las estructura reflejantes.

En profundidades reducidas y fuera de la zona de rotura, la formación de barras ha sido modelada por Boczar-Karakiewicz *et al.* (1987, 1995) y Dulou *et al.* (2000) basándose en modelos de interacción no lineal de ondas gravitatorias e infragravitatorias sobre fondos modulados. Mei (1983), O'hare & Davies (1990) y Rey *et al.* (1995) modelaron la formación de barras inducidas por ondas monocromáticas parcialmente estacionarias. En profundidades intermedias, la influencia de la reflexión del oleaje (monocromático) en la formación de barras ha sido estudiada, entre otros por Carter *et al.* (1984), Mei *et al.* (1994) y Baquerizo & Losada (1998) utilizando el concepto lagrangiano de velocidad de transporte de masa. La posición y amplitud de las barras, en función del tamaño de grano, ha sido medida experimentalment por Irie *et al.* (1984).

Hasta donde llega el conocimiento del autor, no existen trabajos previos que describan la influencia de los grupos en la formación de barras en condiciones de reflexión parcial.

1.5 Objetivos y metodología

A la luz de la información descrita, cabe hacerse (entre otras) las siguientes preguntas:

- ¿la presencia de grupos puede explicar la formación de alguna de las formas de lecho de gran escala presentes en la morfología de fondos arenosos en profundidades intermedias?; y si es así, ¿cuáles serían las condiciones para su formación?
- ¿la presencia de estructuras reflejantes puede inducir mecanismos de transporte de sedimento en ausencia de rotura?, ¿en qué condiciones y con qué magnitud?
- ¿cómo pueden afectar, en caso de existir, estos procesos a la operatividad portuaria?; en particular, ¿en la operatividad de los canales de acceso de una vía?, típicamente localizados en el rango de profundidades intermedias.

Con la intención de intentar dar respuesta a estas preguntas, esta Tesis se plantea el siguiente objetivo:

analizar los procesos morfodinámicos inducidos por la interacción de ondas gravitatorias moduladas con estructuras costeras de tipo reflejante en profundidades intermedias y evaluar su influencia en la operatividad de los canales de acceso de una vía.

La amplitud del problema planteado obliga a establecer los siguientes objetivos específicos:

- Modelar la hidrodinámica inducida por los grupos y las ondas largas (vinculada y libre) en condiciones de reflexión parcial e incidencia oblicua en el frente de una estructura reflejante, infinita y uniforme, y analizar los posibles mecanismos en que dicha hidrodinámica puede influir en el transporte de sedimento y en la morfología de profundidades intermedias.
- Establecer una metodología que permita evaluar la influencia de los procesos morfodinámicos (hidrodinámicos, sedimentarios y morfológicos) en la probabilidad de parada de un canal de acceso (ya sea por toque del fondo o por salida del canal) teniendo en cuenta tanto el carácter aleatorio de los mismos como su influencia en las condiciones de maniobrabilidad.

Para intentar abordar estos objetivos se ha seguido la siguiente metodología.

El modelado de la hidrodinámica inducida por grupos y ondas largas sobre un fondo horizontal e impermeable se ha abordado desde un punto de vista analítico haciendo uso de la Teoría de Stokes y la formulación de grupos regulares propuesta por Schäffer (1990). Por *grupo regular* debe entenderse aquel en el que existe una única frecuencia de onda corta y una única frecuencia de onda larga. Además, se asume que el parámetro de Stokes y el parámetro de modulación (definido como el cociente entre el periodo de la onda corta y el periodo del grupo) son del mismo orden. Para la descripción de la hidrodinámica, el cuerpo del fluido se ha dividido en dos regiones: (1) la región exterior donde los términos viscosos son despreciables; y, (2) la capa límite del fondo.

En la **región exterior** el fluido se ha supuesto irrotacional e incompresible, y el potencial de velocidades se ha expandido hasta segundo orden en el parámetro de modulación. En esta descripción se incluyen tanto la onda corta modulada como la onda larga vinculada y la onda larga libre que resulta de la reflexión del grupo con la estructura uniforme e infinita. Para el caso de grupos regulares, se ha obtenido la solución analítica del potencial haciendo uso de la técnica JWKB y de las escalas naturales del problema (i.e. la de onda corta y la del grupo). A partir del potencial de velocidades, se han calculado, hasta segundo orden, las magnitudes promediadas en la fase más significativas. Entre ellas: el nivel medio, el campo medio de presiones, y campo medio de velocidades euleriano y lagrangiano. Como cantidades promediadas e integradas en profundidad se analizan: los flujos de masa, momento y energía, y las componentes diagonales y transversal del tensor de radiación. Para su descripción, y en función de la escala escogida (temporal o espacial) para el promedio, se han establecido dos regímenes oscilatorios: el **débilmente estacionario** y el **estacionario**. Ambos regímenes se definen a partir de un *operador promedio (espacial / temporal) de orden n* , donde n indica el orden de la escala empleada para el promedio. En el caso de grupos regulares, $n = 0$ corresponde al promedio en la escala de onda corta y $n = 1$ al promedio en la escala del grupo. A partir de la estructura espacial y temporal de las magnitudes hidrodinámicas en ambos regímenes, se discute la posible influencia de las ondas gravitatorias moduladas parcialmente reflejadas en:

- el **transporte de sedimentos** mediante: (1) su posible influencia en la distribución espacial y temporal del perfil vertical de sedimentos; y, (2) la posible generación de corrientes longitudinales (*Longuet-Higgins & Stewart*, 1960) fuera de la zona de rotura; y,

- en la **generación de microseismos** (*Longuet-Higgins*, 1950).

El problema de **capa límite** se resuelve analíticamente a partir de las ecuaciones de conservación de momento horizontal con aproximación de capa límite y de conservación de masa. Las condiciones de contorno impuestas son: (1) velocidad cero en el fondo (i.e. condición de no deslizamiento); y, (2) continuidad del campo de velocidades horizontales entre la capa límite y la región exterior. El término forzador de la ecuación de conservación del momento es el gradiente del campo de presiones instantáneo inducido por un grupo regular parcialmente estacionario en la región exterior. La estructura espacial y temporal de la viscosidad se ha supuesto de tipo armónico (*Troubridge*, 1993) y se han considerado dos posibles dependencias con la profundidad: (1) constante (*solución laminar*), y (2) lineal (*solución Grant & Madsen*). Para el caso de grupos regulares se han calculado hasta segundo orden las siguientes magnitudes: campo de velocidades euleriano, velocidad de transporte de masa y 'streaming'. A partir de su estructura espacial y temporal en los regímenes débilmente estacionario y estacionario se discuten:

- los patrones de **transporte potencial de sedimento** (por fondo) inducidos por la velocidad de transporte de masa y por el 'streaming';
- la posible descripción estadística de la **ubicación y movilidad de las 'potenciales' formas de lecho**

Los resultados obtenidos se comparan con los del oleaje monocromático.

La influencia de los procesos morfodinámicos inducidos por ondas gravitatorias moduladas en el cálculo de la **operatividad de canales de acceso de una vía**, se describe desde un punto de vista probabilista. La metodología propuesta, basada en el marco intelectual de la ROM 0.0. (*ROM 0.0.*, 2001), propone la descripción estadística del tránsito de un barco por un canal de acceso en función de la variabilidad espacial y temporal de los agentes hidrodinámicos, morfológicos y de maniobra del problema. La formulación propuesta también incluye la posible influencia de otros agentes climáticos como por ejemplo el viento, mareas,...y el factor humano. Haciendo uso de las escalas características de los agentes y de los conceptos estadísticos de uniformidad, estacionariedad y completitud, el canal es dividido espacialmente en tramos y temporalmente en estados de navegación. En cada tramo, se define una ecuación de verificación de los modos de parada significativos en forma de margen de seguridad. Para determinar la probabilidad de parada se proponen dos niveles de verificación: el nivel de '**estado de resguardo**' y el de '**resguardo instantáneo**'. En el primero, los agentes y acciones significativos se modelan estadísticamente a partir de descriptores de estado. En el

nivel de 'resguardo instantáneo', se modelan mediante descriptores estadísticos y funciones de probabilidad característicos de las escalas de variabilidad de los agentes significativos de corto periodo (generalmente, las oscilaciones del barco). La probabilidad de parada durante el tránsito puede calcularse haciendo uso de la independencia estadística entre tramos. La metodología se ilustra con el cálculo de la probabilidad de parada debida al toque del fondo durante el acceso de un barco tipo en condiciones extremas al Puerto de Motril.

1.6 Organización de la Tesis

La descripción de hidrodinámica de la región exterior ocupa el *Capítulo 2* de la Tesis. La hidrodinámica de la capa límite inducida por ondas gravitatorias moduladas y su influencia en el transporte de sedimento se describe en el *Capítulo 3*. El *Capítulo 4* se ha dedicado a la descripción del modelo probabilista propuesto para evaluar la influencia de la morfodinámica inducida por trenes modulados de ondas en la operatividad de canales de acceso. Finalmente, en el *Capítulo 5* se resumen las principales conclusiones obtenidas y se discuten las líneas de investigación futuras que han resultado de la Tesis.

Para facilitar la lectura, los detalles de cálculo se han incluido en forma de Apéndices. El *Apéndice A* describe la solución del potencial de velocidades hasta segundo orden de un tren de ondas modulado mediante la técnica JWKB. En el *Apéndice B* se deduce, a partir de las ecuaciones de conservación de momento, la estructura espacial y temporal de la constante de Bernoulli en el caso de ondas gravitatorias moduladas. Así mismo, se discuten distintos criterios físicos para su selección. En el *Apéndice C* se describe la solución JWKB del modelo de capa límite en las aproximaciones lineal y Grant & Madsen.

Para aplicar los modelos idealizados que se discuten en la Tesis a un caso real, ha sido necesario utilizar: (1) un modelo que permita modelar la propagación del oleaje sobre dominios complejos; y (2) un modelo de respuesta del barco a las condiciones de agitación obtenidas. Como el objetivo del ejemplo, es ilustrar la influencia de la reflexión en la operatividad de los canales de acceso, no se ha puesto incapié en la precisión de los modelos sino en su sencillez. En consecuencia, la propagación del oleaje se ha simulado mediante un modelo estacionario, lineal, de oleaje regular de tipo M-MSP (aproximación de pendiente suave modificada para incluir términos de segundo orden en la pendiente del fondo, *Dingenmans*, 1997). El modelo de propagación y algunas técnicas numéricas analizadas para mejorar su resolución numérica en el caso de sistemas lineales con un gran número de grados de libertad y mal

condicionamiento se describen en el *Apéndice D*. Los fundamentos del modelo estacionario, lineal y basado en la Teoría 'Strip' utilizado para simular la respuesta del barco ante el oleaje se describen en el *Apéndice E*.

Capítulo 2

Hidrodinámica inducida por el oleaje modulado en la región exterior

2.1 Introducción

En este *Capítulo* se describe y modela analíticamente la hidrodinámica inducida en la región no viscosa del fluido por las ondas gravitatorias moduladas en su propagación e interacción con una estructura reflejante uniforme e infinita. Teniendo en cuenta que este tipo de estructuras típicamente se encuentran instaladas en profundidades intermedias, $kh \sim 1$, el efecto de la rotura del oleaje se ha considerado despreciable. El fluido se ha considerado además incompresible e irrotacional y la descripción del movimiento oscilatorio se hace en el régimen de Stokes.

La presencia de ondas infragravitatorias forzadas por ondas cortas implica la existencia de dos escalas bien diferenciadas en el tiempo y en el espacio. Típicamente la escala de tiempo asociada a las ondas cortas es $O(10s.)$ y la de las ondas infragravitatorias de $O(100s.)$. Las escalas espaciales típicas de las ondas cortas son $O(100m.)$ mientras, que para el caso de las ondas infragravitatorias es $O(1.000 - 10.000m.)$. Estas escalas son las escalas 'naturales' del problema y, con la formulación adoptada, ambas pueden ser incluidas explícitamente en la descripción matemática del problema utilizando la técnica JWKB. Para ello se definen los siguientes parámetros:

- El parámetro de Stokes, $\delta = O(ak)$ donde a representa la amplitud de la onda corta y k , su número de onda.
- Un parámetro, llamado aquí parámetro de modulación ϵ , que describe

la relación entre el periodo de la onda corta T y el periodo del grupo T_g , i.e. $\epsilon = O(T/T_g)$.

La amplitud de la modulación de onda larga es descrita en términos del parámetro γ definido como el cociente entre la amplitud de la onda corta y la amplitud del grupo.

Asumiendo que el parámetro de Stokes y el parámetro de modulación son del mismo orden, y haciendo uso de la técnica JWKB, se ha calculado la solución analítica del potencial de velocidades total Φ^T para los casos de un grupo regular progresivo y un grupo regular parcialmente estacionario y con incidencia oblicua. Por grupo regular debe entenderse aquel que es resultado de la superposición lineal de dos trenes de onda corta monocromáticos con una pequeña diferencia de frecuencias $\omega \pm \Delta\omega$ donde $\Delta\omega$ (Schäffer (1990)). El tren de ondas resultante presenta una frecuencia de onda corta ω y una única frecuencia para la modulación de largo periodo $\Omega = \Delta\omega$. En la solución del potencial, se incluye tanto la onda corta modulada como la onda larga vinculada asociada al grupo y, en caso de existir reflexión, la onda larga libre generada.

A partir de la solución del potencial, en este *Capítulo* se describe la hidrodinámica de la región exterior por medio de los valores promedio de las principales magnitudes hidrodinámicas. Entre ellas se consideran las siguientes cantidades promediadas: nivel medio, campo de presiones, y campo euleriano y lagrangiano de velocidades. Las cantidades promediadas e integradas en profundidad que se analizan son: los flujos de masa, momento y energía, y el tensor de radiación.

En función de la escala temporal (o espacial) elegida para la definición de los valores promedio, se han encontrado dos posibles regímenes oscilatorios: el **régimen débilmente estacionario** y el **régimen estacionario**. Ambos regímenes son descritos para el caso más general a partir de la definición de un operador de promedio (espacial o temporal) de orden n , donde n designa el orden de la escala considerada para la definición del promedio.

A partir de los resultados obtenidos se discuten alguno de los **efectos morfodinámicos inducidos por los grupos regulares** en condiciones de reflexión parcial e incidencia oblicua. Entre ellos se analizan: (1) su posible influencia en la distribución espacial y temporal de sedimentos; (2) su influencia en el transporte neto de los mismos en caso de transporte en suspensión; (3) la posible generación de microseismos en el caso parcialmente estacionario; y, (4) la posible generación de corrientes longitudinales débilmente estacionarias fuera de la zona de rotura.

El *Capítulo* se ha organizado como sigue. En primer lugar se describen las ecuaciones de gobierno de ondas gravitatorias moduladas en la región exterior

(*Section 2.2*). Seguidamente, haciendo uso de la cinemática del problema, se establecen dos escalas naturales de espacio y tiempo para la definición de cantidades hidrodinámicas promediadas (*Section 2.3 y 2.4*). Finalmente, en la *Section 2.3* se describen los casos y geometría considerados para la descripción de la hidrodinámica de la región exterior.

A partir de la solución JWKB del potencial de velocidades de un tren de ondas modulado y de un criterio de selección de las constantes de Bernoulli basado en la conservación de masa se obtienen las expresiones hasta orden $O(\epsilon)^2$ de la superficie libre, presión y velocidad instantánea para los casos de tren de ondas progresivo y tren de ondas parcialmente estacionario con incidencia oblicua. Los detalles del cálculo se describen en el *Apéndice A*. La estructura espacial y temporal de la constante de Bernoulli para el caso de un tren de ondas modulado y distintos criterios físicos para su selección se discuten en el *Apéndice B*.

El campo de velocidades medio se describe en la *Sección 2.6*. La solución del nivel medio de la superficie libre y el campo medio de presiones en la escala de onda corta y de onda larga se describen respectivamente en la *Sección 2.7* y *Sección 2.8*. Los flujos medios de masa y cantidad de movimiento en las dos escalas consideradas se discuten en las *Secciones 2.9 y 2.10*. Finalmente, la estructura espacial y temporal del tensor de radiación se analiza en la *Sección 2.11*. Los posibles procesos morfodinámicos inducidos por grupos regulares se discuten en la *Sección 2.12*. La *Sección 2.13* resume las principales conclusiones obtenidas.

2.2 Ecuaciones de gobierno

El fluido de la región exterior se ha supuesto no viscoso, irrotacional e incompresible.

El dominio considerado está limitado por un fondo rígido, estacionario e impermeable de profundidad constante, y en la parte superior por la superficie libre generada por la propagación de un grupo regular sobre el nivel medio. El efecto de la tensión de fondo y la tensión superficial se han considerado despreciables. Aquí, x e y representan las coordenadas horizontales, y z representa la coordenada vertical con sentido positivo desde el fondo hacia la superficie libre. η^T representa la posición de la superficie libre total y h es la profundidad de la columna de agua en ausencia de movimiento.

Se han considerado dos posibles casos para la definición de los contornos laterales:

- **Caso progresivo.** En el que el dominio se ha supuesto de extensión lateral infinita.

- **Caso parcialmente estacionario.** En el que el dominio se ha supuesto lateralmente limitado en $x = 0$ por un contorno vertical, impermeable, reflejante, infinito y uniforme en la dirección y .

En *Fig.2.1* se representa esquemáticamente el dominio considerado y los principales parámetros. α representa el ángulo de incidencia del tren modulado con respecto a $y = 0$. Teniendo en cuenta que, en caso de reflexión, el contorno lateral es supuesto totalmente impermeable, el ángulo de reflexión del oleaje de onda corta y la onda larga vinculada se ha hecho igual que el incidente. El ángulo de propagación de la onda larga liberada durante la reflexión se ha representado por θ_f .

2.2.1 Modelo de propagación del oleaje

Las ondas gravitatorias moduladas que se consideran son de pequeña amplitud (esto es, $ak \ll 1$ and $\frac{a}{h} \ll 1$) donde a representa la amplitud de la onda corta y k es el número de onda corta. El efecto de rotura del oleaje se considera despreciable.

La ecuación de gobierno en el cuerpo del fluido es la ecuación de Laplace. En tres dimensiones y en términos del potencial total de velocidades Φ^T puede expresarse como:

$$\Phi_{xx}^T + \Phi_{yy}^T + \Phi_{zz}^T = 0 \quad -h \leq z \leq \eta \quad (2.1)$$

donde, en el caso más general, Φ^T será resultado de la superposición lineal de los potenciales de velocidades del tren de ondas incidente Φ^I y del reflejado Φ^R ,

$$\Phi^T = \Phi^I + \Phi^R \quad (2.2)$$

Los subíndices x , y , z y t de *Eq.2.11*, denotan diferenciación parcial con respecto a las coordenadas espaciales y el tiempo, respectivamente.

La descripción del movimiento oscilatorio se completa con las siguientes condiciones de contorno:

1. condición cinemática de no deslizamiento en le fondo,

$$\Phi_z^T = 0 \quad z = -h \quad (2.3)$$

2. condición cinemática combinada de superficie libre,

$$\Phi_z^T = \eta_t^T + \Phi_x^T \eta_x^T + \Phi_x^T \eta_x^T \quad z = \eta \quad (2.4)$$

- condición dinámica de superficie libre obtenida a partir de la ecuación de Bernoulli,

$$g\eta^T = - \left[\Phi_t^T + \frac{1}{2} \left\{ (\Phi_x^T)^2 + (\Phi_y^T)^2 + (\Phi_z^T)^T \right\} \right] + gC^T \quad z = \eta \quad (2.5)$$

donde C^T representa la constante de Bernoulli asociada a la superficie libre y el potencial de velocidades totales.

2.3 Formulación de un tren de ondas modulado

2.3.1 Cinemática de un tren de ondas modulado

Matemáticamente, los grupos de olas modulados se pueden describir como superposición lineal de varias ondas monocromáticas con diferencias en la fase. En el caso de grupos regulares, son resultado de la superposición lineal de dos ondas monocromáticas con pequeñas diferencias de fase. La diferencia de fase de los trenes monocromáticas puede expresarse matemáticamente como:

- pequeñas diferencias en sus números de onda, *Mei and Benmoussa* (1984) and *Liu* (1989), k^+ y k^- ,

$$k^\pm = k \pm \Delta k$$

- pequeñas diferencias en su velocidad angular, *Schäffer* (1990), ω^+ y ω^- ,

$$\omega^\pm = \omega \pm \Delta\omega \quad (2.6)$$

Ambas aproximaciones permiten la descripción de trenes de ondas modulados aunque su definición inicial sea diferente puesto que son expresadas en términos de parámetros diferentes. Sin embargo, ambos parámetros deben ser de la misma magnitud.

La primera aproximación tiene la desventaja de que el parámetro de perturbación Δk debe referirse a una profundidad fija. Aunque el análisis que

se presenta en este trabajo considera el caso de profundidad constante, intentando mantener la máxima generalidad posible, se ha adoptado la segunda formulación en función de $\Delta\omega$.

Por razones que se pondrán de manifiesto más adelante, el parámetro de perturbación se ha definido como sigue $\Delta\omega = \epsilon^2\omega$, de forma que $\Delta\omega$ es una pequeña cantidad de orden $O(\epsilon^2)$. El cambio en la frecuencia angular $\Delta\omega$, corresponde a un cambio en el número de onda Δk , tal y como pone en evidencia la ecuación de dispersión lineal,

$$(\omega \pm \Delta\omega)^2 = g(k \pm \Delta k) \tanh[(k \pm \Delta k)h] \quad (2.7)$$

En profundidades indefinidas donde $kh \gg 1$, la aproximación asintótica de primer orden de la ecuación de dispersión establece la siguiente relación entre ambos parámetros,

$$\Delta k = \frac{2\omega(\Delta\omega)}{g} = \frac{2\omega}{g}\epsilon^2\omega = \frac{\epsilon^2\omega}{C_g} \quad (2.8)$$

donde $C_g = \frac{C}{2}$ es el límite de la velocidad de grupo en profundidades indefinidas.

En profundidades reducidas donde $kh \ll 1$, y teniendo en cuenta la aproximación de la velocidad de grupo $C_g \approx C = gh$ se obtiene la misma relación entre los parámetros Δk y ϵ . En consecuencia, para todo el rango de profundidades relativas $0 < kh < \infty$, y dentro del orden de aproximación considerado, $\Delta\omega = \epsilon^2\omega$ corresponde a un cambio en el número de onda Δk de la forma,

$$\Delta k = \frac{\Delta\omega}{C_g} = \frac{\epsilon^2\omega}{C_g} \quad (2.9)$$

Por tanto, el número de onda de dos ondas monocromáticas con pequeña diferencia en el número de onda, aquí representado como $k^\pm = k \pm \Delta k$ puede ser expresado como,

$$k^\pm = k \pm \Delta k = k \pm \frac{\epsilon^2\omega}{C_g} \quad (2.10)$$

donde,

$$\frac{k^+ + k^-}{2} = k = O(1) \quad (2.11)$$

y

$$\frac{k^+ - k^-}{2} = \frac{\epsilon^2 \omega}{C_g} = O(\epsilon^2) \quad (2.12)$$

A partir de los resultados anteriores, es posible definir el número de onda de la modulación K'_g como,

$$K'_g = k^+ - k^- = \Delta k \quad (2.13)$$

que debe ser entendida como una magnitud vectorial de la forma $K'_{g,x} = k_{1x} - k_{2x}$ y $K'_y = k_{1y} - k_{2y}$. Para el caso de una batimetría cilíndrica, la ley de Snel's puede aplicarse y

$$k_y = cte = k \sin \alpha_0 \quad (2.14)$$

donde α_0 es el ángulo del tren de ondas incidente en la misma batimetría a cierta profundidad de referencia (i.e. profundidades indefinidas). Haciendo uso de estas expresiones, se obtiene que,

$$K'_{g,x} = 2\epsilon^2 \frac{C_0}{C_{g0}} \left[k_x + \frac{k^2}{k_x} \left(\frac{C}{C_0} \frac{C_{g0}}{C_g} - 1 \right) \right] = \epsilon K_{g,x} \quad (2.15)$$

$$K'_{g,y} = 2\epsilon^2 \frac{\omega}{C_{g0}} \frac{k_y}{k_0} = 2\epsilon^2 k_y \frac{C_0}{C_{g0}} = \epsilon K_{g,y} \quad (2.16)$$

donde C_0 y C_{g0} son, respectivamente, la celeridad de la fase y del grupo a la profundidad de referencia y K_g representa el número de onda del grupo redefinido aquí por conveniencia como una cantidad de primer orden con respecto al parámetro de modulación ϵ . De forma que, K'_g es de orden $O(\epsilon^2)$, mientras que K_g es de orden $O(\epsilon)$.

2.3.2 Estructura del potencial de velocidades

En esta *Sección* se analiza la estructura del potencial de velocidades de un tren de ondas modulado a partir de los parámetros definidos anteriormente. Para facilitar su comprensión, e ilustrar el procedimiento empleado, se analiza la estructura del potencial de velocidades de primer orden en teoría de Stokes, representado aquí como Φ_1 , de un grupo regular. El subíndice indica el orden del potencial con respecto al parámetro de Stokes $\delta = O(ak)$.

De acuerdo a la formulación propuesta en la *Sección* anterior, el potencial de velocidades Φ_1 de un tren de ondas modulado progresivo puede expresarse como superposición lineal de dos trenes de ondas monocromáticas del mismo orden con una pequeña diferencia de fases. Dicha superposición puede expresarse como,

$$\Phi_1 = \Phi_1^+ + \Phi_1^- \quad (2.17)$$

en el que Φ_1^\pm tienen la siguiente estructura,

$$\Phi_1^\pm = \left(\frac{-iga^\pm}{2\omega^\pm} \right) \frac{\cosh[k^\pm(h+z)]}{\cosh(k^\pm h)} \exp[i(k_x^\pm x + k_y^\pm y - \omega^\pm t)] + c.c. \quad (2.18)$$

donde $\{a^+, (k_x^+, k_y^+), \omega^+\}$, $\{a^-, (k_x^-, k_y^-), \omega^-\}$ representan, respectivamente, la amplitud real, el número de onda y la frecuencia angular de los dos trenes monocromáticos progresivos. En esta expresión, *c.c.* representa el complejo conjugado.

Las amplitudes a^+ y a^- están relacionadas mediante el parámetro real γ , definido como $a^-/a^+ = \gamma$. La amplitud a^+ se ha definido igual a la amplitud a .

Asumiendo que la dependencia con la profundidad de los dos trenes monocromáticos puede expresarse como función del número de onda promedio k (ver *Eq.2.11*),

$$\frac{\cosh[k^+(h+z)]}{\cosh(k^+h)} \cong \frac{\cosh[k^-(h+z)]}{\cosh(k^-h)} \cong \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} = f(z) \quad (2.19)$$

y expandiendo el término $\frac{1}{\omega^\pm}$ de la *Eq.2.18* en serie de Taylor del parámetro de modulación ϵ ,

$$\frac{1}{\omega^\pm} = \frac{1}{\omega} (1 \mp \epsilon^2) + O(\epsilon^4) \quad (2.20)$$

El potencial de velocidades Φ_1 puede expresarse como,

$$\Phi_1 = \Phi_1^{(0)} + \Phi_1^{(2)} + O(\epsilon^4) \quad (2.21)$$

donde

$$\Phi_1^{(0)} = \left(\frac{-iga}{2\omega} \right) f(z) \{ \exp(i\varphi_g) + \gamma \exp(-i\varphi_g) \} \exp(i\varphi) + c.c. \quad (2.22)$$

y

$$\Phi_1^{(2)} = -\epsilon^2 \left(\frac{-iga}{2\omega} \right) f(z) \{ \exp(i\varphi_g) - \gamma \exp(-i\varphi_g) \} \exp(i\varphi) + c.c. \quad (2.23)$$

En las anteriores expresiones,

- el superíndice m de $\Phi_1^{(m)}$ representa el orden de magnitud con respecto al parámetro de modulación ϵ , mientras que el subíndice indica el orden con respecto al parámetro de Stokes δ ;
- $\varphi = k_x x + k_y y - \omega t$ representa la *fase de la onda corta*; y ,
- $\varphi_g = K_{gx} \cdot (\epsilon x) + K_{gy} \cdot (\epsilon y) - \Omega \cdot (\epsilon t)$ es la *fase del grupo regular* (o de la modulación) dependiente de las coordenadas del sistema de la forma $(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon t)$.

Generalizando la expresión de la fase del grupo regular, al caso de grupos irregulares en el que están presentes varias escalas de modulación de escala larga, la estructura de las coordenadas espaciales y temporales del sistema en términos del parámetro ϵ puede expresarse como,

$$x = x + \epsilon x + \epsilon^2 x + \dots = x + X_1 + X_2 + \dots \quad (2.24)$$

$$y = y + \epsilon y + \epsilon^2 y + \dots = y + Y_1 + Y_2 + \dots \quad (2.25)$$

$$t = t + \epsilon t + \epsilon^2 t + \dots = t + T_1 + T_2 + \dots \quad (2.26)$$

Esta estructura es la estructura formal del sistema de coordenadas de la técnica JWKB. Por lo tanto, con la formulación matemática propuesta,

dicha técnica parece la forma 'natural' de representar las escalas espaciales y temporales presentes en el problema de la propagación y reflexión de ondas gravitatorias moduladas.

Finalmente, para incluir la dependencia en el parámetro de modulación ϵ del potencial de velocidades Φ expresado en términos del parámetro de Stokes como,

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \delta^n \quad (2.27)$$

debe tenerse en cuenta que, para el orden n , el término Φ_n puede expresarse como,

$$\Phi_n = \Phi_n^{(0)} + \epsilon^2 \Phi_n^{(2)} + O(\epsilon)^4 \quad (2.28)$$

Y por tanto,

$$\Phi = \delta \Phi_1^{(0)} + \delta^2 \Phi_2^{(0)} + \delta \epsilon^2 \Phi_1^{(2)} + \delta^3 \Phi_3^{(0)} + O(\epsilon)^4 \quad (2.29)$$

Teniendo en cuenta la *expresión* 2.22 para $\Phi_1^{(0)}$, se concluye que los dos primeros términos de la *Eq.* 2.29 corresponden a las soluciones clásicas del potencial de velocidades de primer y segundo orden en la Teoría de Stokes, aunque con amplitud modulada en la escalas de onda larga ($X_1, Y_1; T_1$).

La solución de primer orden $\Phi_1^{(0)}$ representa el tren de onda corta modulado (conocido en la literatura como *grupo*) y la onda larga vinculada de primer orden asociada al mismo. En el caso de reflexión parcial, $\Phi_1^{(0)}$ también incluye la contribución de la onda larga libre reflejada, resultado de la interacción del grupo con la estructura reflejante.

La contribución $\Phi_2^{(0)}$ representa la corrección de segundo orden del potencial de velocidades de la onda larga, *Biesel* (1952) and *Longuet-Higgins and Stewart* (1962), conocido en la literatura como '*set down beneath wave groups*'.

De la estructura de *Eq.* 2.29 también se observan las siguientes contribuciones,

- $\Phi_3^{(0)}$ que representa la corrección de tercer orden al potencial de velocidades total de la teoría de Stokes y es de segundo orden en el parámetro de Stokes y primer orden en el parámetro de modulación; y,

- $\Phi_1^{(2)}$ que representa una corrección en las escalas largas de tercer orden del tren modulado y cuya estructura viene dada por la Eq.2.23. El orden de la corrección es $\delta\epsilon^2$ y su velocidad de propagación de esta contribución es la misma que la del grupo, pero desfasada en $\frac{\varphi_g}{2}$. Su efecto sobre el potencial de velocidades total es disminuir, al orden $\delta\epsilon^2$, su amplitud de forma proporcional al parámetro γ .

Asumiendo que $\epsilon \simeq \delta$, es decir que la asimetría de la onda (definida por el parámetro de Stokes) y el parámetro de modulación son del mismo orden, las contribuciones $\Phi_3^{(0)}$ y $\Phi_1^{(2)}$ son del mismo orden y el potencial total de velocidades en Eq.2.29 puede expresarse como,

$$\bar{\Phi} = \epsilon\Phi_1^{(0)} + \epsilon^2\Phi_2^{(0)} + \epsilon^3 \left(\Phi_1^{(2)} + \Phi_3^{(0)} \right) + O(\epsilon)^4 \quad (2.30)$$

Con el ánimo de simplificar la notación, y siguiendo la formulación tradicional de la Teoría de Stokes, a partir de ahora los potenciales de primer y segundo orden se representarán como $\Phi_1^{(0)} = \Phi_1$ y $\Phi_2^{(0)} = \Phi_2$, respectivamente.

Introcuciendo esta solución en Eq.2.2, el potencial total de velocidades Φ^T puede ser expresado hasta segundo orden en el caso más general,

$$\Phi^T = \Phi^I + \Phi^R = \epsilon (\Phi_1^I + \Phi_1^R) + \epsilon^2 (\Phi_2^I + \Phi_2^R) + O(\epsilon^3) \quad (2.31)$$

Las expresiones analíticas de los términos Φ_n^I y Φ_n^R para el caso de grupos regulares pueden calcularse analíticamente haciendo uso de la técnica JWKB. Para ello, se ha asumido la siguiente estructura del potencial de velocidades,

$$\Phi_n^j = \sum_{m=0}^n \{ \phi_{nm}^j \exp(im\varphi^j) + c.c. \} \quad (2.32)$$

donde, en este contexto $j = I, R$ y $\varphi^I = \varphi$ representa la fase del tren de onda corta incidente y $\varphi^R = -k_x x + k_y y + \omega t$ es la fase del tren de onda corta reflejado.

Tal y como se indicó en la *Introducción*, en esta Tesis la hidrodinámica de la región exterior se describe, hasta segundo orden en el parámetro de modulación, mediante las cantidades promedio de las principales magnitudes hidrodinámicas. Para lo cual, tal y como se pondrá de manifiesto más adelante, sólo es necesario conocer la solución del potencial de velocidades de pimer orden Φ_1^j .

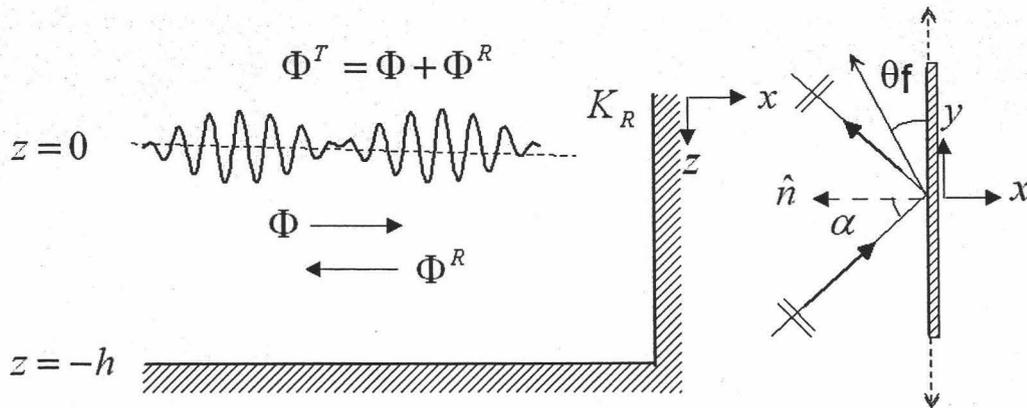


Figura 2.1: Geometría de los casos considerados y principales parámetros

La solución analítica del potencial de velocidades para el caso de grupos regulares se describe con detalle en el *Apéndice A* para los casos progresivo y parcialmente estacionario. En dicho *Apéndice*, y por completitud, se describe también la solución del potencial a segundo orden Φ_2^j de grupos regulares. Para el cálculo del potencial y de la superficie libre asociada, las constantes de Bernoulli se han expandido en términos del parámetro de modulación como $C^j = \epsilon C_1^j + O(\epsilon)^2$ y se han determinado a partir de un criterio de conservación de masa en cada orden. La estructura espacial y temporal de la constante de Bernoulli en el caso de ondas gravitatorias moduladas y el criterio de selección se describen en el *Apéndice B*.

Con el fin de facilitar la comprensión de la Tesis, a continuación se resume la solución analíticas del potencial de velocidades de primer orden de grupos regulares para los casos progresivo y parcialmente estacionario. Los detalles del cálculo pueden encontrarse en los *Apéndices* mencionados.

2.3.3 Solución JWKB del potencial de velocidades de primer orden

La expresión JWKB del potencial de velocidades a primer orden Φ_1^j con $j = I, R$ es,

$$\Phi_1^j = \phi_{1,0}^j + \{ \phi_{1,1}^j \exp(i\varphi^j) + c.c \} \quad (2.33)$$

donde

$$\phi_{1,1}^I = \left(\frac{-ig}{2\omega} \right) f(z) A_{1,1} \quad (2.34)$$

y

$$\phi_{1,1}^R = \left(\frac{-ig}{2\omega} \right) f(z) C_R B_{1,1} \quad (2.35)$$

De acuerdo con Eq.2.22, en el caso de grupos regulares,

$$A_{1,1} = a \{ \exp(i\varphi_g) + \gamma \exp(-i\varphi_g) \} \quad (2.36)$$

donde $A_{1,1}$ representa la amplitud modulada del tren de onda corta incidente. De forma similar,

$$B_{1,1} = aC_R \{ \exp(i\varphi_g^R) + \gamma \exp(-i\varphi_g^R) \} \quad (2.37)$$

donde ahora $B_{1,1}$ es la amplitud modulada del tren de onda corta reflejado, C_R representa el coeficiente de reflexión de onda corta y $\varphi_g^R = -K_{gx}X_1 + K_{gy}Y_1 - \Omega T_1$ es la fase del grupo reflejado.

El término ϕ_{10}^I en la Eq.2.33 es la contribución de la onda larga vinculada al grupo, i.e. $\phi_{10}^I = \phi_{10}^{I,b}$. En presencia de reflexión, $\phi_{10}^R = \phi_{10}^{R,b} + \phi_{10}^{R,f}$ donde $\phi_{10}^{R,b}$ y $\phi_{10}^{R,f}$ representan, respectivamente, las contribuciones de la onda larga vinculada reflejada y la onda libre generada durante la reflexión.

Las contribuciones de onda larga vinculada (incidente y reflejada) se propagan con la velocidad de grupo C_g y son función de las escalas de onda larga del problema. Matemáticamente, $\phi_{10}^{I,b} = \phi_{10}^{I,b}(X_1, T_1)$, $\phi_{10}^{R,b} = \phi_{10}^{R,b}(X_1, T_1)$. De acuerdo con *Losada et al.*(1993), su expresión analítica es la siguiente,

$$\phi_{10}^{I,b} = \frac{-ig}{2\Omega} D_{10}^I \exp(2i\varphi_g) + c.c. \quad (2.38)$$

$$\phi_{10}^{b,R} = \frac{-ig}{2\Omega} D_{10}^R \exp(2i\varphi_g^R) + c.c. \quad (2.39)$$

donde las amplitudes D_{10}^j (con $j = I$ y R) son,

$$D_{10}^j = \frac{\Omega \gamma a^2}{g} \left(\frac{g^2}{\omega} - \frac{gC_g}{\sinh 2kh} \right) \frac{(\alpha_j k_x K_{gx} + k_y K_{gy})}{(\Omega^2 - gh |K_g|^2)} \quad (2.40)$$

La contribución de la onda larga libre reflejada $\phi_{10}^{R,f}$ también es función de las escalas de onda larga del problema y puede expresarse como,

$$\phi_{10}^{R,f} = \frac{-ig}{2\Omega} E_{10}^R \exp(2i\varphi_g^{f,R}) + c.c. \quad (2.41)$$

donde $\alpha_R = -1$, $\alpha_I = 1$ y $\varphi_g^{f,R}$ es la fase de la onda libre definida como $\varphi_g^{f,R} = -k_{f,x}X_1 + k_{f,y}Y_1 - \Omega T_1$, con $k_f = \Omega/\sqrt{gh}$. k_f debe entenderse como una magnitud vectorial con $k_{f,x} = k_f \sin \theta_f$ y $k_{f,y} = k_f \cos \theta_f$. La amplitud de la onda libre E^R y su ángulo de reflexión θ_f pueden obtenerse imponiendo la continuidad del potencial total de velocidades y del flujo en $X_1 = 0$ y a partir de la Ley de Snell. Asumiendo despreciable la amplitud del potencial de velocidades de onda corta transmitido, se obtiene que,

$$E_{10}^R = E_{10}^I - (D_{10}^I + D_{10}^R C_R^2) \quad (2.42)$$

donde E^I representa la amplitud de la onda larga libre transmitida y que, en general no es cero salvo en el límite de profundidades reducidas. El ángulo de reflexión de la onda libre es,

$$\theta_f = a \cos \left[\frac{\Omega^2}{gh} - (k \sin \alpha)^2 \right] \quad (2.43)$$

En este punto es interesante hacer notar que: (1) la amplitud D_{10}^j de las ondas largas vinculadas incidente y reflejada tiene un comportamiento resonante en el límite $\Omega \rightarrow \sqrt{gh} |K|$; y, (2) todas las contribuciones de onda larga (vinculada y libre) son independientes de la profundidad.

2.4 Escalas para el promedio de trenes modulados

Para la descripción de la hidrodinámica inducida por ondas gravitatorias moduladas en la región exterior, es posible definir distintas escalas para el promedio espacial y temporal de las cantidades promediadas en la fase (ver Fig.2.2). En el caso más general, estas escalas son:

- las escalas espaciales y temporales características de la onda corta (ejm. periodo de pico de la onda corta T y su correspondiente longitud de onda L); y,

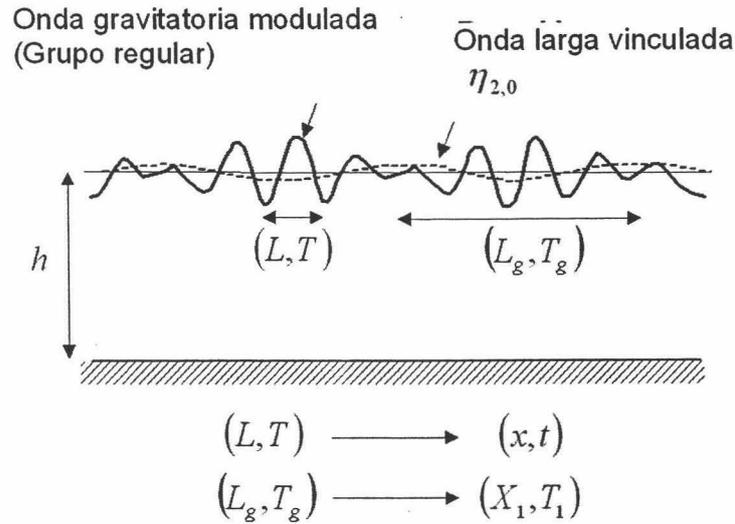


Figura 2.2: Esquema de las escalas espaciales y temporales asociadas a la propagación de ondas gravitatorias moduladas. Caso: Grupos regulares.

- las escalas espaciales y temporales características de las modulaciones de onda larga (escalas del grupo).

De acuerdo a la formulación propuesta y la estructura JWKB de las coordenadas espaciales y temporales del problema (Eq.2.24 - 2.26), en el caso de grupos regulares, el máximo orden de las escalas de onda larga (X_1, Y_1, T_1) presentes es $N = 1$. En el caso de grupos irregulares, y en función de las componentes de onda larga presentes, existen escalas de onda larga asociadas a cada orden $0 \leq n \leq N$ con $N > 1$ de la forma,

$$(\epsilon^n x, \epsilon^n y; \epsilon^n t) = (X_n, Y_n; T_n) \quad (2.44)$$

De acuerdo a estas escalas se definen a continuación los operadores de promedio espacial y temporal para los distintos órdenes posibles del problema. Para ello se define F como una cantidad hidrodinámica instantánea cualquiera de la región exterior. En el caso más general, F será función de las siguientes escalas $F = F(t, T_1, \dots, T_N; x, X_1, \dots, X_N; y, Y_1, \dots, Y_N; z)$ donde N es el número total de escalas de onda larga presentes en el problema.

2.4.1 Regímenes oscilatorios de ondas gravitatorias moduladas

El operador de promedio temporal de orden n , $\langle F \rangle_n$ se define como

$$\langle F \rangle_n = \frac{1}{\langle T \rangle_n} \int_t^{t+\langle T \rangle_n} \langle F \rangle_{n-1} dT_n \quad n \leq N \quad (2.45)$$

donde $\langle T \rangle_n$ representa la escala de tiempo característica del problema al orden n .

La estructura espacial y temporal de la cantidad promediada $\langle F \rangle_n$ es función del número total de escalas de onda larga N presentes en el problema. Para $n < N$ y, en el caso más general, la cantidad $\langle F \rangle_n$ es:

- *débilmente no estacionaria* debido a su dependencia de las escalas de tiempo relacionadas con las variables T_{n+1}, \dots, T_N ;
- *no-uniforme* debido a su dependencia de las variables because of its dependence on $x, X_1, \dots, X_N; y, Y_1, \dots, Y_N; z$;
- *dependiente de la profundidad*, si depende de z .

Para $n = N$,

$$\langle F \rangle_N = \langle F \rangle_N(x, X_1, \dots, X_N; y, Y_1, \dots, Y_N; z) \quad (2.46)$$

En consecuencia, $\langle F \rangle_N$ es *estacionario* puesto que no depende del tiempo, pero en general, *no uniforme* y *dependiente de la profundidad*.

De acuerdo con la discusión anterior, la cantidad $\langle F \rangle_{n < N}$ se define como el *régimen débilmente no estacionario de orden n* de la cantidad F . $\langle F \rangle_N$ se define como su *régimen estacionario*.

De forma similar, es posible definir un operador de promedio espacial de orden n , $(F)_n$ como,

$$(F)_n = \frac{1}{(L)_n} \int_l^{l+(L)_n} (F)_{n-1} dL_n \quad n \leq N \quad (2.47)$$

donde ahora $(L)_n$ representa la escala espacial característica del problema de orden n .

A continuación, estas definiciones se aplican al caso particular de grupos regulares.

Regímenes oscilatorios de grupos regulares

De acuerdo a Eq.2.22, en el caso de grupos regulares $N = 1$. Por tanto, cualquier cantidad hidrodinámica instantánea puede expresarse como $F = F(t, T_1; x, X_1; y, Y_1; z)$.

El *régimen débilmente no estacionario de orden cero* de la cantidad F se define como su promedio temporal en la escala de tiempo característica de la onda corta $\langle T \rangle_0 = T$,

$$\langle F \rangle_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F dt \quad (2.48)$$

donde T representa el periodo de la onda corta. En el caso más general, $\langle F \rangle_0 = \langle F \rangle_0(T_1; x, X_1; y, Y_1; z)$ es una cantidad débilmente no estacionaria. debido a su dependencia de T_1 relacionada con la escala temporal del grupo $T_g = 2\pi/\Omega$. Además, $\langle F \rangle_0$ suele ser no uniforme en el espacio y modulada tanto en las escalas espaciales características de la onda corta como en las del grupo $(x, X_1; y, Y_1)$. El *régimen débilmente estacionario de orden cero* en el caso de grupos regulares equivale al concepto de '**cantidades medias**' utilizado por *Longuet-Higgins & Stewart* (1962) para la descripción de la hidrodinámica de ondas monocromáticas.

El *régimen estacionario* de F se define como el promedio temporal de la cantidad $\langle F \rangle_0$ en la escala temporal característica del grupo $\langle T \rangle_1 = T_g = 2\pi/\Omega$,

$$\langle F \rangle_1 = \frac{1}{T_g} \int_t^{t+T_g} \langle F \rangle_0 dT_1 \quad (2.49)$$

$\langle F \rangle_1 = (x, X_1; y, Y_1)$ es estacionario, pero en general no uniforme y puede estar modulado tanto en la escala espacial de la onda corta como en la del grupo.

En el caso de que las escalas de la onda corta y del grupo puedan considerarse independientes (ejm., en el caso del tiempo, $t \ll T_1$) se tiene que,

$$\tilde{F} = \frac{1}{T_g} \int_t^{t+T_g} \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} F dt \right) dT_1 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left(\frac{1}{T_g} \int_t^{t+T_g} F dT_1 \right) dt \quad (2.50)$$

A partir de ahora, y siguiendo la notación de *Longuet-Higgins & Stewart* (1962), el *régimen débilmente no estacionario* $\langle F \rangle_0$ en el caso de grupos regulares se representa por \overline{F} . El *régimen estacionario* $\langle F \rangle_1$ se representa como \tilde{F} .

Haciendo uso de las definiciones de los operadores promedio en las escalas de onda corta Eq.2.48 y de onda larga Eq.2.49, y la solución analítica del potencial de velocidades, a continuación se analiza la estructura espacial y temporal de las principales magnitudes hidrodinámicas de la región exterior en los regímenes *débilmente no estacionario y estacionario*.

Las **cantidades promediadas en la fase** que se analizan son: (1) el campo de velocidades euleriano y lagrangiano; (2) el nivel medio; y, (3) el campo de presiones. Como **cantidades promediadas en la fase e integradas en profundidad** se discuten: (1) el flujos de masa; (2) flujo de cantidad de movimiento; (3) flujo de energía; y, (4) tensores de radiación.

2.5 Campo de velocidades inducido por grupos regulares

En el caso más general, la componente V_i del campo de velocidades $\vec{V} = (U, V, W)$ se define como,

$$V^i = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \Phi^R}{\partial \xi^i} \right)$$

donde $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$, $\xi_3 = z$.

Haciendo uso de las reglas de derivación del formalismo JWKB (ver *Apéndice A*) y de las expresiones hasta segundo orden del potencial total (Eq.2.31), las velocidades horizontales instantáneas ($j = 1, 2$) pueden expresarse hasta segundo orden como,

$$-V^j = \epsilon \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \Phi_1^R}{\partial \xi^j} \right) + \epsilon^2 \left[\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \Phi_2^R}{\partial \xi^j} \right) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_1^j} + \frac{\partial \Phi_1^R}{\partial \xi_1^j} \right) \right] + O(\epsilon^3) \quad (2.51)$$

donde $\xi_1^1 = X_1$ y $\xi_1^2 = X_2$.

Puesto que no ha sido escalada, la velocidad vertical hasta segundo orden puede expresarse como,

$$-W = \epsilon \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_1^R}{\partial z} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_2^R}{\partial z} \right) + O(\epsilon^3) \quad (2.52)$$

2.5.1 Régimen débilmente no estacionario del campo de velocidades

En el caso más general, el campo medio de las componentes horizontales en la escala de la onda corta queda,

$$\overline{V^j} = -\epsilon^2 \left(\frac{\partial \phi_{10}^b}{\partial \xi_1^j} + \frac{\partial \phi_{10}^{b,R}}{\partial \xi_1^j} + \frac{\partial \phi_{10}^{f,R}}{\partial \xi_1^j} \right)$$

Puesto que sólo tiene contribuciones de las ondas larga vinculada (incidente y reflejada) y libre reflejada, es una magnitud no dependiente de la variable z y por tanto, constante en toda la columna de agua. Además, $\overline{V^j}$ es una magnitud cuasiestacionaria con periodicidad $T_g/2$.

En el caso parcialmente reflejado, y debido a que en general, $\alpha \neq \theta_f$ y $C_g \neq \sqrt{gh}$, el campo medio de velocidades horizontal presenta tres escalas de modulación espacial:

1. una escala relacionada con la longitud de la onda vinculada: $L_{g,x}$ en el caso de la velocidad horizontal U , y $L_{g,y}$ en el caso de la velocidad transversal V , donde $L_{g,x} = L_g \cos \alpha$ y $L_{g,y} = L_g \sin \alpha$.
2. una escala relacionada con la longitud de onda libre reflejada: $L_{g,x}^f$ en el caso de la velocidad horizontal U , y $L_{g,y}^f$ en el caso de la velocidad transversal V , donde $L_{g,x}^f = L_g \cos \theta_f$ y $L_{g,y}^f = L_g \sin \theta_f$.
3. una 'super-escala' de modulación resultado de la interferencia de los trenes de onda larga vinculados e libre. Esta escala depende, entre otros, de los siguientes parámetros: kh , α , θ_f y C_g .

En *Fig.2.3* se puede observar el orden de magnitud de esta modulación. Para el caso considerado, es del orden $\sim 10Kms$.

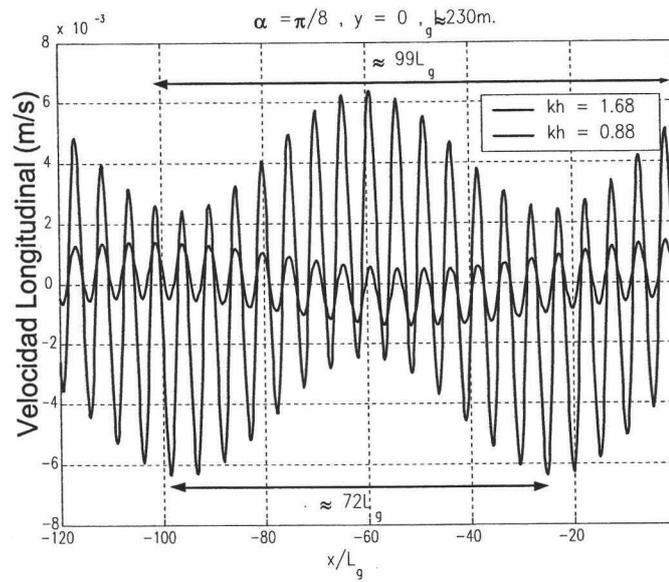


Figura 2.3: Super escala de modulación de la componente transversal del campo medio de velocidades U en la escala de onda corta para distintos valores del parámetro kh .

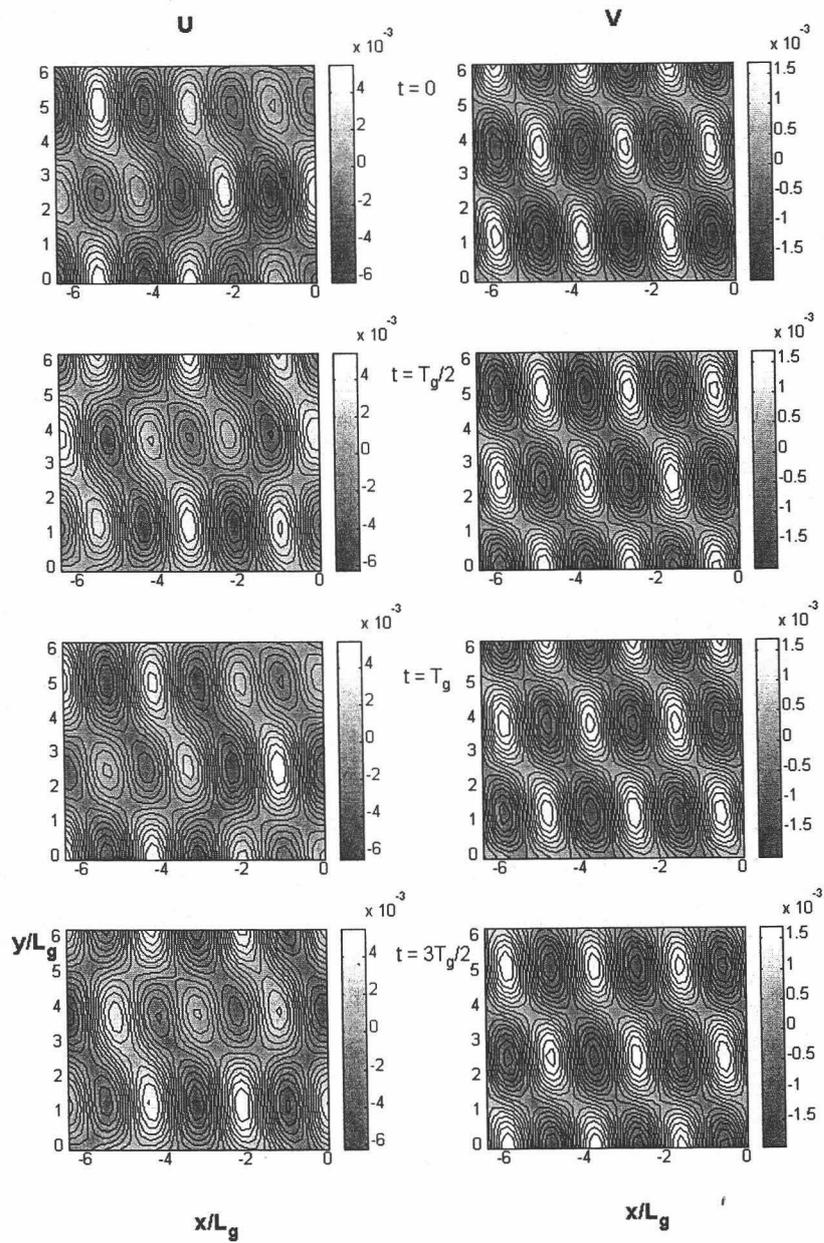


Figura 2.4: Evolución temporal de las componentes horizontales de velocidad en la escala de onda corta.

En la *Fig.2.5* se representa la evolución temporal y modulación espacial (del orden de longitud de onda de la onda larga) del campo medio de velocidades horizontal para un caso con $kh = 1.68$, y ángulos de incidencia $\alpha = \pi/8$ y $\alpha = \pi/32$. En la *Fig.2.6* se comparan el campo de velocidad medio en función del parámetro kh . Finalmente, en la *Fig.2.4* se compara la evolución y modulación espacial de las velocidades longitudinal U y transversal V .

En la escala de onda corta, el campo medio de velocidades verticales en la columna de agua es nulo, $\overline{W} = 0$.

2.5.2 Régimen estacionario del campo de velocidades

El campo de velocidades medio en la escala larga es cero $\widetilde{U} = 0$, $\widetilde{V} = 0$ y $\widetilde{W} = 0$.

2.5.3 En resumen ...

Por lo visto del campo de velocidades de un tren modulado podemos decir que:

- El campo medio de velocidades horizontales en un tren de ondas modulado en el caso parcialmente estacionario es una magnitud de segundo orden, $O(\epsilon^2)$, cuasiestacionaria (i.e, $\widetilde{V}^i = 0$), no nula en la escala temporal de la onda corta (con periodicidad $T_g/2$) y constante en toda la columna de agua.
- En el caso progresivo, el campo medio de velocidades horizontales en la escala de onda corta está modulada longitudinal y transversalmente en las siguientes escalas:
 1. una escala del orden de la longitud de onda del grupo, $l \sim L_g$,
 2. una escala del orden de la longitud de onda de la onda libre $l \sim L_g^f$ y,
- En el caso parcialmente estacionario, a las dos escalas anteriores, hay que añadir 'super-modulación' $l_s \simeq nL_g$ resultado de la interferencia de los trenes de onda larga vinculada y libre. Esta escala depende, entre otros, de los siguientes parámetros $n = n(\alpha, \theta_f, \sqrt{gh}, C_g)$. Como se ha visto en los ejemplos, puede ser del orden de $100L_g \sim 10Km$.

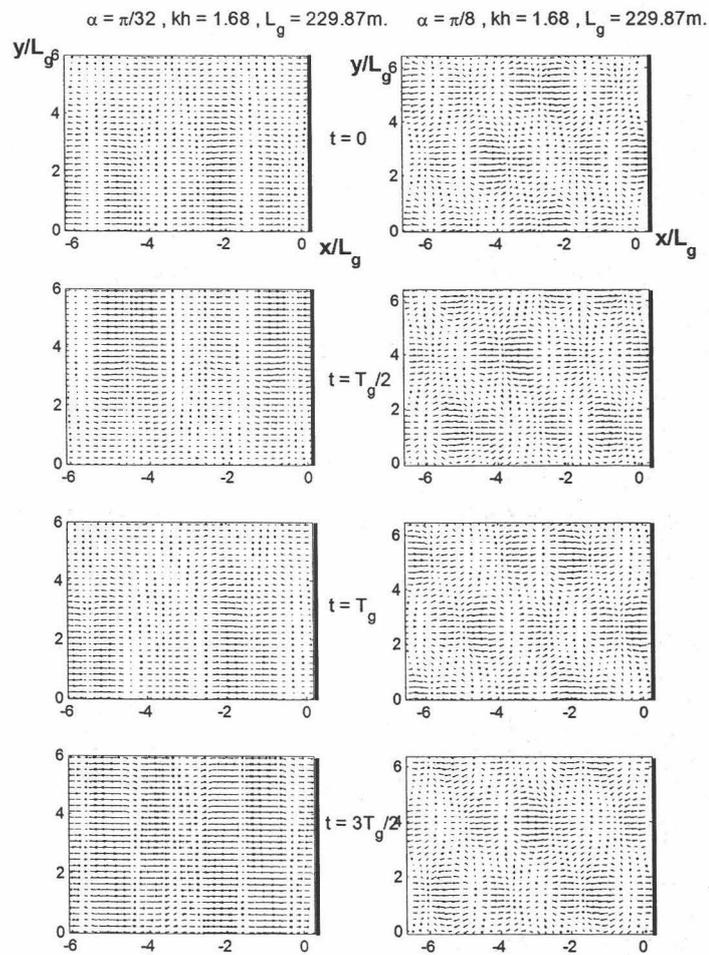


Figura 2.5: Evolución temporal del campo medio de velocidades horizontales de un tren de ondas modulado parcialmente estacionario. Influencia del ángulo de incidencia.

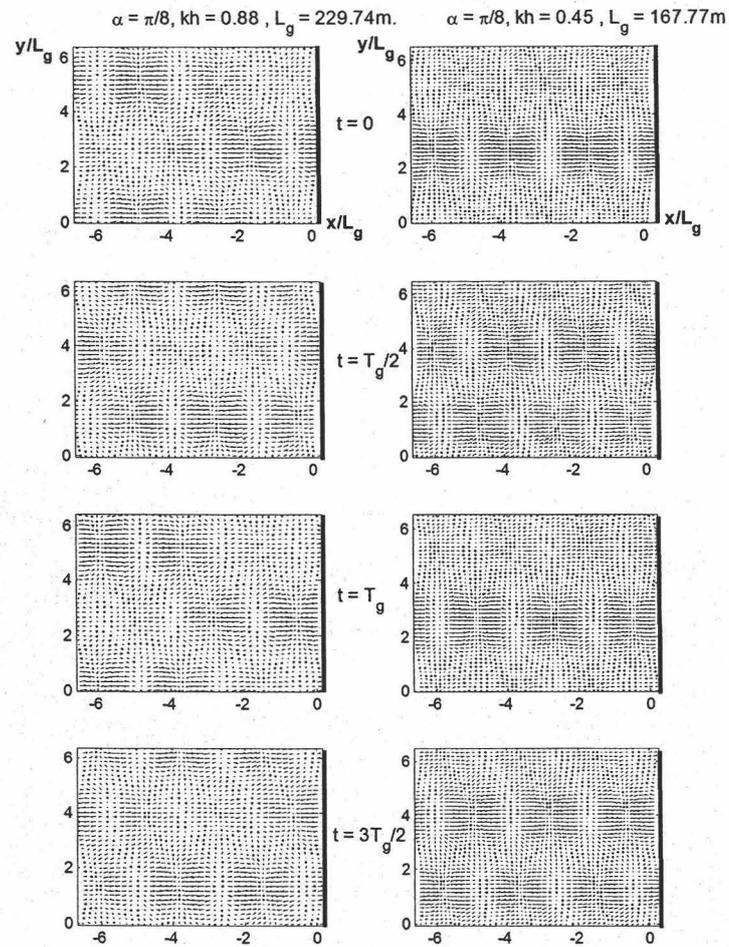


Figura 2.6: Evolución temporal del campo medio de velocidades horizontales en la escala de onda corta. Influencia del parámetro kh .

2.6 Superficie libre

La ecuación dinámica de la superficie libre desarrollada en serie de Taylor en torno a $z = 0$, es

$$g\eta = gC - \left[\Phi_t - \eta\Phi_{zt} - \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) - \frac{\eta}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)_z + \dots \right] \quad \text{en } z = 0$$

Expresando en potencias del parámetro ϵ , el potencial (Eq.??), la constante de Bernoulli C

$$C = \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + O(\epsilon^3) \quad (2.53)$$

y la superficie libre total η^T ,

$$\eta^T = \epsilon\eta_1^T + \epsilon^2\eta_2^T + O(\epsilon^3) \quad (2.54)$$

Y haciendo uso de las reglas de derivación de la técnica JWKB, las siguientes ecuaciones de gobierno de la superficie libre a primer y segundo orden ϵ son respectivamente,

$$-g\eta_1^T = \Phi_{1,t} + gC_1 \quad (2.55)$$

$$-g\eta_2^T = \Phi_{2,t} + \frac{1}{2}(\Phi_{1,x}^2 + \Phi_{1,y}^2 + \Phi_{1,z}^2) + \Phi_{1,T_1} + \eta_1^T\Phi_{1,zt} + gC_2 \quad (2.56)$$

En el caso parcialmente reflejante, la superficie total a primer orden es la superposición lineal de las contribuciones de la superficie libre del tren de ondas incidente η_1 y reflejado η_1^R ,

$$\eta_1^T = \eta_1 + \eta_1^R \quad (2.57)$$

A segundo orden, es necesario tener en cuenta que el caracter no lineal de la superficie libre que da lugar a la existencia de un término de interacción η_2^{IR} entre los potenciales de primer orden incidente Φ_1 y reflejado Φ_1^R . La estructura de dicho término es,

$$-g\eta_2^{IR} = (\Phi_{1,x}\Phi_{1,x}^R + \Phi_{1,y}\Phi_{1,y}^R + \Phi_{1,z}\Phi_{1,z}^R) \quad (2.58)$$

Por tanto, en el caso más general, la superficie libre total a segundo orden η_2^T será resultado de la suma de las contribuciones del tren incidente η_2 , del tren de ondas reflejado η_2^R , y del término de interacción η_2^{IR} ,

$$\eta_2^T = \eta_2 + \eta_2^R + \eta_2^{IR} \quad (2.59)$$

De acuerdo con el método JWKB, las contribuciones η_n^j (con $j = I, R$) a la superficie total en cada orden pueden expresarse como

$$\eta_1^j = \eta_{10}^j + \{ \eta_{11}^j \exp(i\varphi^j) + c.c. \} \quad (2.60)$$

$$\eta_2^j = \eta_{20}^j + \{ \eta_{21}^m \exp(i\varphi^j) + c.c. \} + \{ \eta_{22}^j \exp(2i\varphi^j) + c.c. \} \quad (2.61)$$

Para facilitar la lectura, los detalles del cálculo y expresiones finales de los términos η_{nm}^j para ($n = 1, 2; m = 0, \dots, \pm n$) se describen en el *Apéndice A*.

Para su derivación, se ha hecho uso del criterio de conservación de masa en cada orden. De acuerdo con este criterio, se ha calculado la constante de Bernoulli hasta segundo orden. Los resultados se muestran en el *Apéndice B*.

La estructura JWKB del término de interacción η_2^{IR} es,

$$\eta_2^{IR} = \eta_{20}^{IR} + \{ \eta_{22}^{IR} \exp[2i(k_y y - \omega t)] + c.c. \} \quad (2.62)$$

donde

$$\eta_{20}^{IR} = -\frac{g}{4\omega^2} (-k_x^2 + k_y^2 + k^2 \tanh^2 kh) D_{20}^{IR} \quad (2.63)$$

con

$$D_{20}^{IR} = K_R A_{11} B_{11}^* \exp(2ik_x x) + c.c. \quad (2.64)$$

Entonces,

$$\eta_{22}^{IR} = -\frac{K_R}{g} \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 (k_x^2 - k_y^2 + k^2 \tanh^2 kh) A_{11} B_{11} \quad (2.65)$$

Obsérvese que, los términos $A_{11}B_{11}^*$ y $A_{11}B_{11}$ son magnitudes moduladas en espacio y tiempo a través de las fases φ_g y φ_g^R . Por tanto, η_2^{IR} es una magnitud espacial y temporalmente modulada en las escalas de la onda larga y en la escala de onda corta a través de los términos $\exp[2i(k_y y - \omega t)]$ y $\exp(2ik_x x)$.

Las diferentes escalas de modulación espacial y la evolución temporal del término de interacción se muestran en la *Fig.2.7*. En dicha *Figura* puede observarse que, :

1. el término η_2^{IR} instantáneo está espacial y temporalmente modulado en la escala de onda corta y en la escala de onda larga;
2. el nivel medio en la escala de onda corta inducido por el término de interacción (ver *Eq.2.48*), $\overline{\eta_2^{IR}} = \eta_{20}^{IR}$ es una magnitud cuasi-estacionaria, con periodicidad $T_g/2$, y modulada longitudinal y transversalmente en el espacio en las escalas de la onda larga (a través de $A_{11}B_{11}^*$) y de onda corta (por $\exp(2ik_x x)$).
3. el nivel medio en la escala del grupo inducido por el término de interacción (ver *Eq.2.49*), $\widetilde{\eta_2^{IR}} = \widetilde{\eta_{20}^{IR}}$, es una magnitud estacionaria, no nula, uniforme en la dirección longitudinal y modulada transversalmente en las escalas de onda corta y larga debido a que su amplitud tiene la siguiente estructura,

$$\widetilde{D_{20}^{IR}} = K_R \left[\widetilde{A_{11}B_{11}^*} \exp(2ik_x x) + c.c \right] \cdot \propto \exp(\pm 2iK_{gx}X_1) \exp(2ik_x x)$$

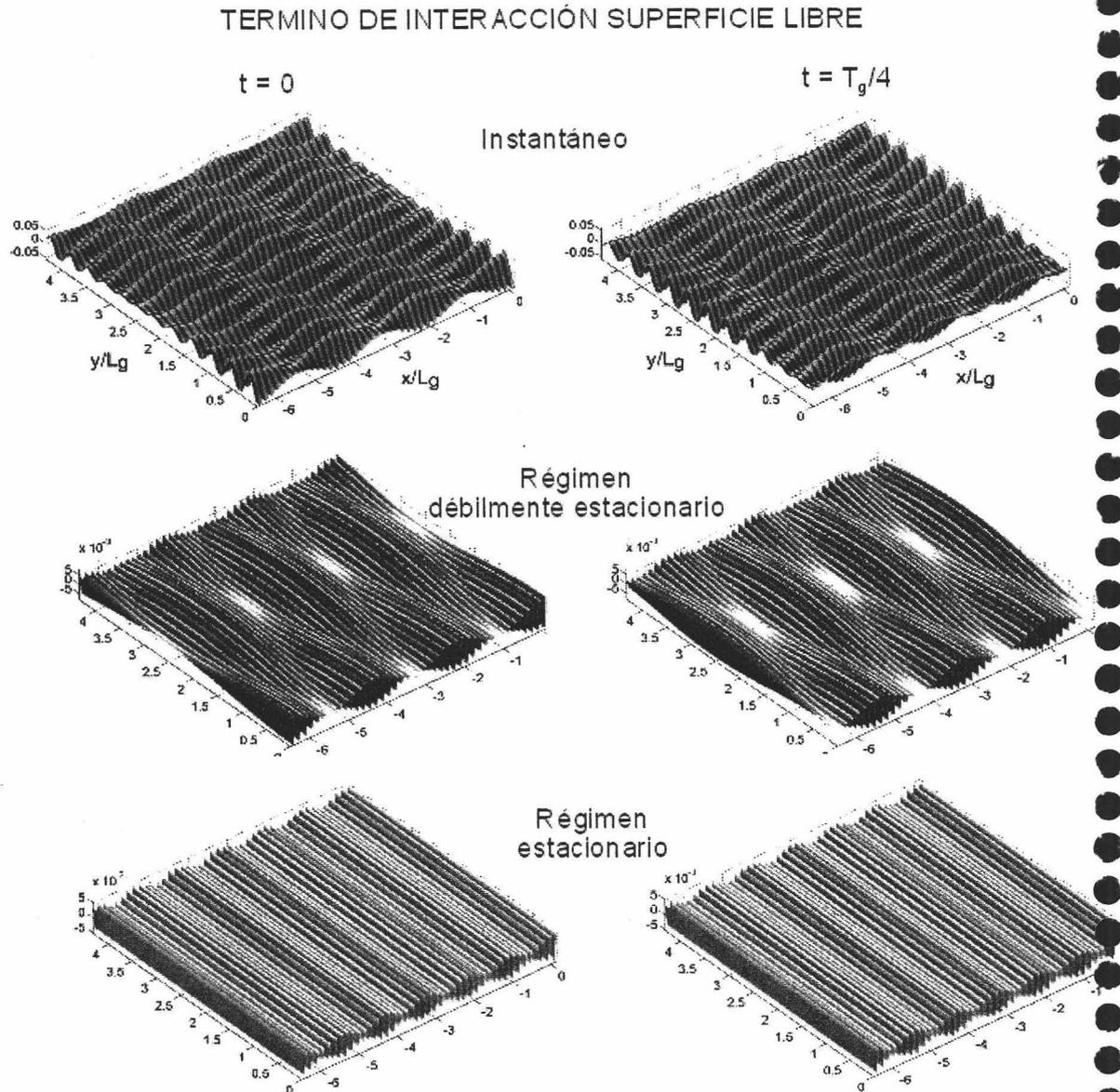


Figura 2.7: Superficie libre inducida por el término de interacción no lineal. (a) Valor instantáneo, (b) Promedio temporal en escala corta y (c) Promedio temporal en escala de grupo. Nótese que en la escala del grupo, el nivel medio inducido por el término de interacción es una magnitud no nula y modulada en la dirección transversal.

A continuación se analizan los niveles medios (en la escala de onda corta y de grupo) inducidos por un tren de ondas modulado para los casos progresivo y parcialmente estacionario.

2.6.1 Régimen débilmente no estacionario del nivel medio

Haciendo uso de la definición del operador promedio en la escala de onda corta (*ver Eq.2.48*), el nivel medio puede escribirse como

$$\overline{\eta^T} = \epsilon \overline{\eta_1^T} + \epsilon^2 \overline{\eta_2^T} + O(\epsilon^3) \quad (2.66)$$

donde, en el caso más general,

$$\overline{\eta_1^T} = \eta_{10} + \eta_{10}^R \quad (2.67)$$

$$\overline{\eta_2^T} = \eta_{20} + \eta_{20}^R + \eta_{20}^{IR} \quad (2.68)$$

A partir de las soluciones de la superficie libre descritas en *Apéndice A.2* y, de acuerdo a la selección de constante de Bernoulli, se tiene que a primer orden,

$$\overline{\eta_1^T} = 0 \quad (2.69)$$

A segundo orden, el nivel medio de la superficie libre inducido por el tren modulado incidente η_{20} es

$$\eta_{20} = -\frac{1}{g} \left[\phi_{10, T_1}^b - \frac{gka^2\gamma}{\sinh(2kh)} \cos(2\varphi_g) \right] \quad (2.70)$$

donde ϕ_{10, T_1}^b representa la derivada temporal respecto a T_1 , del potencial asociado a la onda larga vinculada incidente (*Eq.2.38*).

Por su parte, el nivel medio inducido por el tren reflejado puede expresarse como,

$$\eta_{20}^R = -\frac{1}{g} \left[\phi_{10, T_1}^{b,R} + \phi_{10, T_1}^{f,R} - \frac{gkK_R a^2 \gamma}{\sinh(2kh)} \cos(2\varphi_g^R) \right] \quad (2.71)$$

donde ahora, $\phi_{10,T_1}^{b,R}$ y $\phi_{10,T_1}^{f,R}$ representan, respectivamente, la derivada temporal en la escala larga de la onda larga vinculada reflejada (Eq.??) y la onda libre reflejada (Eq.2.41).

El nivel medio en la escala de onda corta del término de interacción $\widetilde{\eta}_2^{IR} = \eta_{20}^{IR}$ fue descrito anteriormente (ver Eq.2.63).

En la Fig.2.8 se comparan el nivel medio total en la escala de onda corta de un tren de ondas modulado progresivo y uno parcialmente estacionario ($K_R = 1$). En la Figura es posible observar la dependencia del nivel medio en la escala de onda corta con el ángulo de incidencia.

La evolución temporal del nivel medio en la escala de onda corta se muestra en la Fig.2.9

2.6.2 Régimen estacionario del nivel medio

Haciendo uso de la definición del operador promedio en la escala del grupo (ver Eq.2.49), el nivel medio puede escribirse como

$$\widetilde{\eta}^T = \epsilon \widetilde{\eta}_1^T + \epsilon^2 \widetilde{\eta}_2^T + O(\epsilon^3) \quad (2.72)$$

En la escala del grupo, las contribuciones al nivel medio moduladas temporalmente por el término $\exp(\pm n\Omega T_g)$ con, n un número entero, se cancelan.

Por tanto, en el caso progresivo, el nivel medio en la escala de onda larga es

$$\widetilde{\eta} = 0 \quad (2.73)$$

Sin embargo, en el caso parcialmente estacionario,

$$\widetilde{\eta}^T = \widetilde{\eta}_{20}^{IR} \quad (2.74)$$

donde, teniendo en cuenta las ecuaciones Eq.2.63 y 2.64 se tiene que,

$$\widetilde{\eta}_{20}^{IR} = -\frac{g}{4\omega^2} (-k_x^2 + k_y^2 + k^2 \tanh^2 kh) \widetilde{D}_{20}^{IR} \quad (2.75)$$

donde

$$\widetilde{D}_{20}^{IR} = a^2 K_R [\{\exp(2iK_{gx}X_1) + \gamma^2 \exp(2iK_{gx}X_1)\} \exp(2ik_x x) + c.c.] \quad (2.76)$$

El término \widetilde{D}_{20}^{IR} aparecerá más tarde en otras magnitudes.

En Fig.2.10 se compara:

- la modulación del nivel medio en la escala del grupo para dos profundidades intermedias $kh = 0.88$ y $kh = 1.68$ en el caso de incidencia oblicua con $\alpha = \pi/4$,
- la modulación del nivel medio en la escala del grupo ($kh = 0.88$) para dos ángulos de incidencia $\alpha = \pi/4$ y $\alpha = \pi/32$ (incidencia cuasi-normal). En todos los casos, $K_R = 1$.

En la *Fig.2.7-(c)* se presenta la estructura tridimensional del nivel medio en la escala del grupo con incidencia oblicua.

2.6.3 En resumen ...

El nivel medio en la escala de onda corta es, en el caso más general, una magnitud de orden $O(\epsilon^2)$, cuasi-estacionaria (con periodicidad $T_g/2$) y no uniforme longitudinal y transversalmente. Su modulación espacial es resultado de las siguientes contribuciones:

- nivel medio inducido por las ondas largas vinculadas y por la onda larga libre reflejada. Estas contribuciones introducen las siguientes escalas espaciales: (1) modulación en la escala de la onda larga vinculada $l \sim L_g$ y (2) modulación en la escala de la onda libre $l \sim L_g^f(\sqrt{gh}, \Omega, \theta_f)$.
- niveles medios (uniformes en el espacio y cuasiestacionarios) inducidos por los trenes de onda corta incidente y reflejante.
- nivel medio inducido por el término de interacción η_{20}^{IR} resultado de la interacción no lineal entre los trenes de onda corta incidente y reflejado. Este término está modulado en la dirección x e y en las escalas de onda corta $l \sim L$ y de onda larga $l \sim L_g$;

En la escala de onda larga, el nivel medio $\widetilde{\eta}^T$ es, en el caso más general ($K_R \neq 0$), una magnitud de orden $O(\epsilon^2)$, estacionaria, uniforme en la dirección longitudinal y modulada transversalmente en las escalas de onda corta $l \sim L$ y onda larga $l \sim L_g$. Las consecuencias de la existencia de un nivel medio estacionario no nulo en el transporte de sedimento, se pondrán en evidencia cuando se analice la componente tangencial del tensor de radiación.

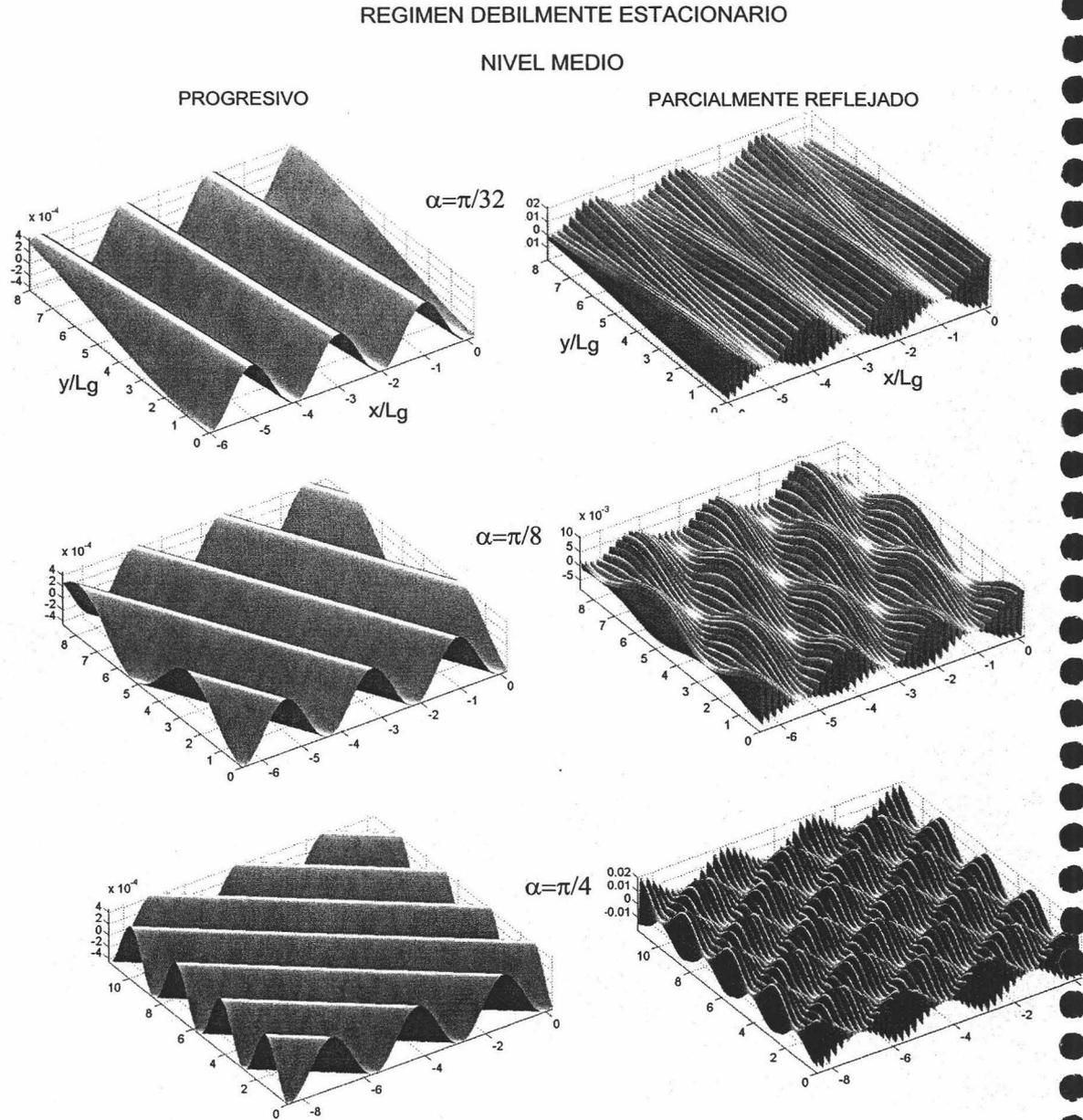


Figura 2.8: Comparación de modulación del nivel medio en la escala de onda corta para un tren modulado progresivo (izq.) y un tren modulado parcialmente estacionario (der.). Influencia del ángulo de incidencia en las escalas espaciales de modulación.

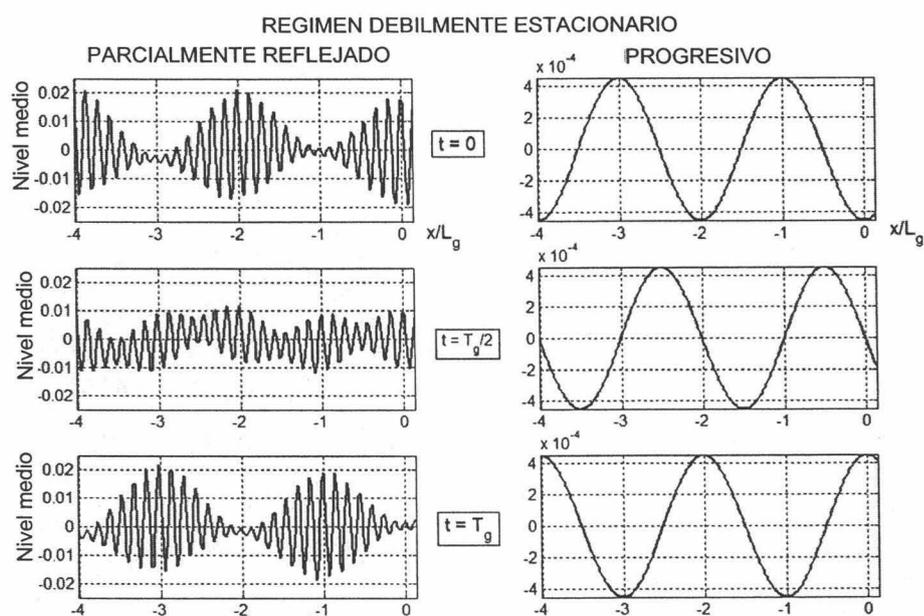


Figura 2.9: Evolución temporal del nivel medio en la escala corta para un caso estacionario (izq.) y progresivo (der.) con incidencia cuasi-normal.

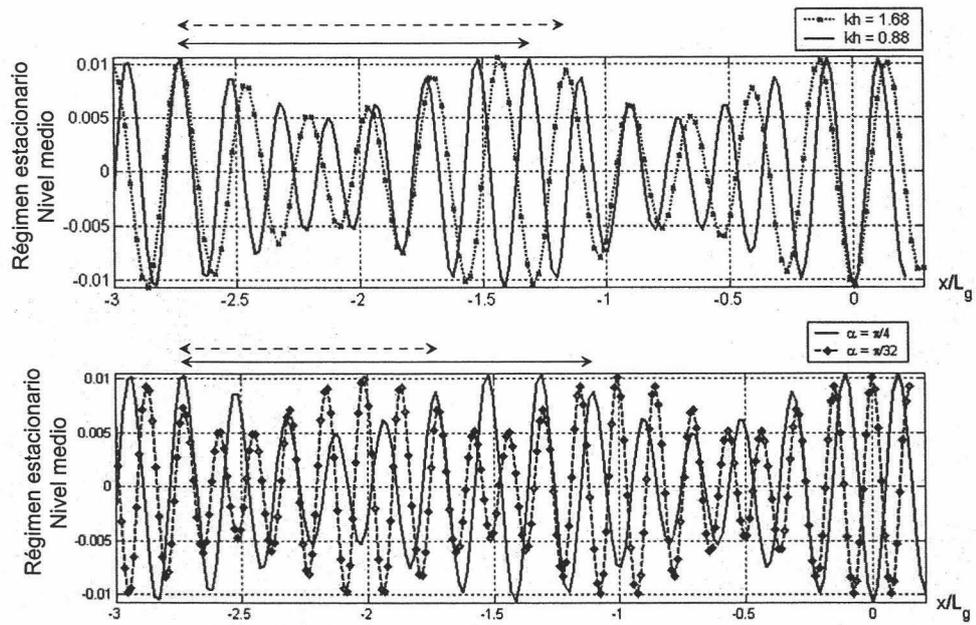


Figura 2.10: Modulación espacial de nivel medio en escala de grupo en función del parámetro kh y del ángulo de incidencia.

2.7 Presión

El campo de presiones total P^T es descrito por la ecuación no lineal,

$$\frac{P^T}{\rho} = - \left\{ \Phi_t^T + \frac{1}{2} \left[(\Phi_x^T)^2 + (\Phi_y^T)^2 + (\Phi_z^T)^2 \right] + gz \right\} + C \quad (2.77)$$

La presión dinámica P_d^T se define como la diferencia entre la presión total P^T y la presión hidrostática $P_0 = -\rho gz$,

$$P_d^T = P^T - P_0 \quad (2.78)$$

Haciendo uso de las reglas de derivación del método JWKB y expresando, en el caso más general, la presión en serie del parámetro ϵ ,

$$P_d^T = \epsilon (P_{d,1} + P_{d,1}^R) + \epsilon^2 (P_{d,2} + P_{d,2}^R + P_{d,2}^{IR}) + O(\epsilon^3) \quad (2.79)$$

es posible obtener las ecuaciones de gobierno de la presión dinámica incidente P_d y reflejada P_d^R a primer y segundo orden:

$$\frac{P_{d,1}^j}{\rho} = - \frac{\partial \Phi_1^j}{\partial t} + C_1^j \quad (2.80)$$

$$\frac{P_{d,2}^j}{\rho} = - \left[\frac{\partial \Phi_1^j}{\partial T_1} + \frac{\partial \Phi_2^j}{\partial t} \right] - \frac{1}{2} \left[(\Phi_{1,x}^j)^2 + (\Phi_{1,y}^j)^2 + (\Phi_{1,z}^j)^2 \right] + C_2^j \quad (2.81)$$

donde, el superíndice j designa la componente incidente ($j = I$) y reflejada ($j = R$).

De forma similar al caso de la superficie libre, la estructura de las componentes de primer, segundo orden de la presión dinámica es la siguiente,

$$P_{d,1}^j = P_{d,10}^j + \{ P_{d,11}^j \exp(i\varphi^j) + c.c. \} \quad (2.82)$$

$$P_{d,2}^j = P_{d,20}^j + \{ P_{d,21}^j \exp(i\varphi^j) + c.c. \} + \{ P_{d,22}^j \exp(2i\varphi^j) + c.c. \} \quad (2.83)$$

La contribución de segundo orden a la presión $P_{d,2}^{IR}$ resultado de la interacción no lineal entre los trenes de onda corta incidente Φ_1 y reflejado Φ_1^R se calcula a partir de la ecuación,

$$\frac{P_{d,2}^{IR}}{\rho} = - (\Phi_{1,x} \Phi_{1,x}^R + \Phi_{1,y} \Phi_{1,y}^R + \Phi_{1,z} \Phi_{1,z}^R) \quad (2.84)$$

donde

$$p_{d,2}^{IR} = p_{d,20}^{IR} + \{p_{d,22}^{IR} \exp [2i(k_y y - \omega t)] + c.c.\} \quad (2.85)$$

Su derivación y expresión analítica se describe en el *Apéndice A*.

A continuación, se describe el campo medio de presiones en la escala de onda corta y del grupo para los casos de tren de ondas modulado progresivo y parcialmente estacionario.

2.7.1 Régimen débilmente no estacionario del campo de presiones

Haciendo uso de la definición del operador promedio en la escala de onda corta (ver Eq.2.48) y la solución analítica del campo de presiones (ver *Apéndice A*), el campo medio de presiones en la escala corta puede escribirse como

$$\overline{P_d^T} = \epsilon^2 (P_{d,20} + P_{d,20}^R + P_{d,20}^{IR}) + O(\epsilon^3) \quad (2.86)$$

con:

$$P_{d,20} = P_{d,20}^{b,I} + P_{d,20}^{ww,I} \quad (2.87)$$

$$P_{d,20}^R = P_{d,20}^{b,R} + P_{d,20}^{f,R} + P_{d,20}^{ww,R} \quad (2.88)$$

donde las contribuciones $P_{d,20}^{b,I}$ y $P_{d,20}^{b,R}$ resultan de la onda larga vinculada incidente y reflejada respectivamente. En notación compacta (con $j = I, R$), su expresión analítica es ,

$$\frac{P_{d,20}^{b,j}}{\rho} = -\frac{\partial \Phi_{10}^{b,j}}{\partial T_1} = gD_{10}^j \exp(2i\varphi_g^j) + c.c. \quad (2.89)$$

El término $P_{d,20}^{f,R}$ representa la contribución a la presión de segundo orden de la onda larga libre reflejada,

$$\frac{P_{d,20}^{f,R}}{\rho} = -\frac{\partial \Phi_{10}^{f,R}}{\partial T_1} = gE_R \exp(2i\varphi_g^{f,R}) + c.c. \quad (2.90)$$

Nótese, que las contribuciones al campo medio de presiones descritas en las Eq.2.89-2.90 no dependen de z . Y por tanto, existen con independencia de la profundidad.

Por otra parte, los términos $P_{d,20}^{ww,I}$ y $P_{d,20}^{ww,R}$ representan los campos medios de presión inducidos por los trenes de onda corta modulados incidente y reflejado. Se pueden expresar como,

$$\frac{P_{d,20}^{ww,I}}{\rho} = -\left(\frac{gk}{2\omega}\right)^2 |A_{11}|^2 F_p(z) + \frac{gka^2(1+\gamma^2)}{2\sinh 2kh} \quad (2.91)$$

$$\frac{P_{d,20}^{ww,R}}{\rho} = -\left(\frac{gK_R}{2\omega}\right)^2 |B_{11}|^2 F_{ww}(z) + \frac{gka^2K_R(1+\gamma^2)}{2\sinh 2kh} \quad (2.92)$$

con

$$F_{ww}(z) = \frac{k^2 [\cosh^2 k(h+z) + \sinh^2 k(h+z)]}{\cosh^2 kh} \quad (2.93)$$

Finalmente, el término de interacción $P_{d,20}^{IR}$ es,

$$\frac{P_{d,20}^{IR}}{\rho} = -\left(\frac{g}{2\omega}\right)^2 F_{IR}(z) K_R D_{20}^{IR} \quad (2.94)$$

con

$$F_{IR}(z) = \frac{(-k_x^2 + k_y^2) \cosh^2 [k(z+h)] + k^2 \sinh^2 [k(z+h)]}{\cosh^2(kh)} \quad (2.95)$$

y donde D_{20}^{IR} fue descrita Eq.2.64 y que es, tal y como se describió en el caso del término de interacción de la superficie libre η_{20}^{IR} (Eq.2.63), una amplitud modulada en la dirección x en la escala de la onda corta y del grupo y en la dirección y en la escala de onda larga.

Tanto las contribuciones de onda corta $P_{d,20}^{ww,I}$ y $P_{d,20}^{ww,R}$ como el término de interacción $P_{d,20}^{IR}$ disminuyen conforme aumenta la profundidad a través de las funciones $F_{ww}(z)$ y $F_{IR}(z)$.

2.7.2 Régimen estacionario del campo de presiones

En la escala del grupo de ondas (ver Eq.2.49), el campo medio de presiones es

$$\widetilde{P}_d^T = \epsilon^2 \left(\widetilde{P}_{d,20}^{ww,I} + \widetilde{P}_{d,20}^{ww,R} + \widetilde{P}_{d,20}^{IR} \right) + O(\epsilon^3) \quad (2.96)$$

donde

$$\frac{\widetilde{P}_{d,20}^{ww,I}}{\rho} = -a^2 (1 + \gamma^2) \left[\left(\frac{gk}{2\omega} \right)^2 F_p(z) - \frac{gk}{2 \sinh 2kh} \right] \quad (2.97)$$

$$\frac{\widetilde{P}_{d,20}^{ww,R}}{\rho} = -a^2 (1 + \gamma^2) \left[\left(\frac{gkK_R}{2\omega} \right)^2 F_p(z) - \frac{gkK_R}{2 \sinh 2kh} \right] \quad (2.98)$$

La contribución del término de interacción es al campo medio de presiones en la escala del grupo es,

$$\frac{\widetilde{P}_{d,20}^{IR}}{\rho} = - \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 F_{IR}(z) \left[K_R a^2 \{ \exp(2iK_{gx}X_1) + \gamma^2 \exp(2iK_{gx}X_1) \} \exp(2ik_x x) + c.c. \right] \quad (2.99)$$

2.7.3 Discusión de resultados

En las figuras Fig.2.11 y Fig.2.12 se muestra la estructura espacial (perfiles horizontales para distintos valores de profundidad en $t = 0$) de la presión total en la escala de onda corta y en la escala del grupo para $kh = 3.15$ ($h = -50m.$) y $kh = 1.65$ ($h = -25m.$), respectivamente y con $K_R = 1$ y $\alpha = \pi/8$. De las figuras puede deducirse que:

- conforme aumenta la profundidad, la presión media \overline{P}_d^T en el fondo ($z \simeq -h$) es, principalmente, resultado de las contribuciones de onda larga: $\overline{P}_d^T \simeq P_{d,20}^{b,I} + P_{d,20}^{b,R} + P_{d,20}^{f,R}$. Puesto que son términos independientes de la profundidad. En consecuencia, las escalas de modulación dominantes son las escalas asociadas al grupo de ondas $l \simeq L_g$ y a la supermodulación l_s . En el caso que se presenta, en dirección transversal, $l_s \simeq 6L_g$ para $kh = 3.15$ y $l_s \simeq 4L_g$ para $kh = 1.65$.

- la presión media en la escala del grupo es, como en el caso de la superficie libre, es una magnitud estacionaria, uniforme longitudinalmente y modulada en dirección transversal en las escalas:
 1. de onda corta $l \simeq L$,
 2. en la escala del grupo de ondas $l \simeq L_g$ y,
 3. en la super-escala de modulación $l_s \simeq nL_g$ donde $n = n(\alpha, \theta_f, \sqrt{gh}, C_g)$.

Distintos ejemplos de estas escalas de modulación en función de: **(1)** kh , **(2)** el ángulo de incidencia α y, **(3)** la profundidad z , pueden verse en las siguientes figuras: *Fig.2.13* y *Fig.2.14*.

En la *Fig.2.15* se muestra la dependencia de la presión \widetilde{P}_d^T con parámetro γ para los casos de un tren de ondas modulado progresivo y parcialmente estacionario ($K_R = 1$) en el rango $kh = [0.5, 3.5]$.

La evolución temporal y escalas espaciales de modulación en la dirección x de la presión en la escala de onda corta para distintos valores de z y de kh se muestran en *Fig.2.16* y *Fig.2.17*. En particular, para el caso $kh = 0.88$ con $\alpha = \pi/4$ y $K_R = 1$ (*Fig.2.17*), se obtiene que la amplitud de la onda larga libre y vinculada reflejadas es prácticamente nula, i.e., $E^R \simeq D_{10}^R \simeq 0$. Por lo que, si $F_{IR}(-h) \simeq 0$, la modulación y evolución temporal de la presión en la onda corta corresponden a la de un tren modulado progresivo y, en consecuencia, en la escala de onda larga, la presión media es nula (ver *Fig.2.14*).

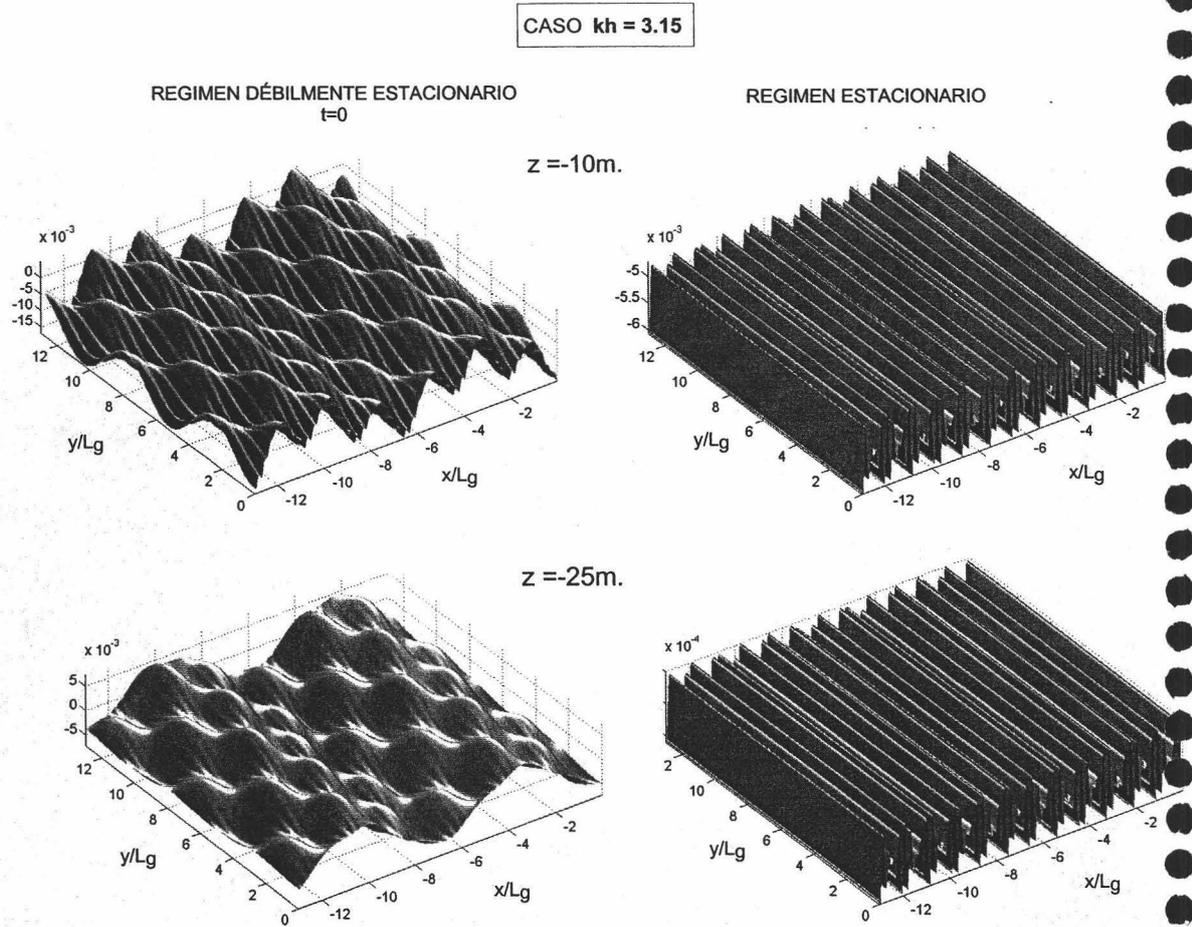


Figura 2.11: Perfil vertical del campo medio de presiones en la escala de onda corta (izquierda) y en la escala del grupo (derecha).

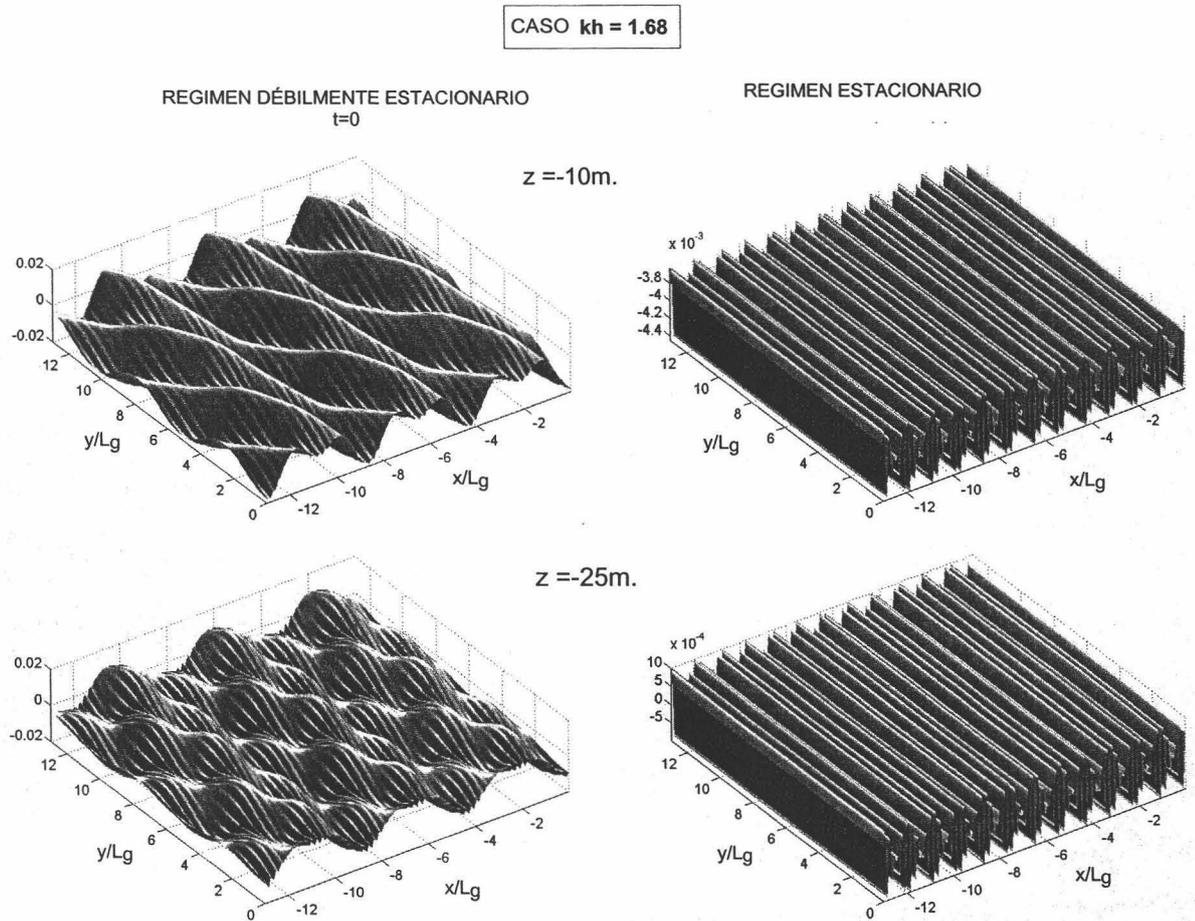


Figura 2.12: Perfil vertical del campo medio de presiones en la escala de onda corta (izquierda) y en la escala del grupo (derecha).

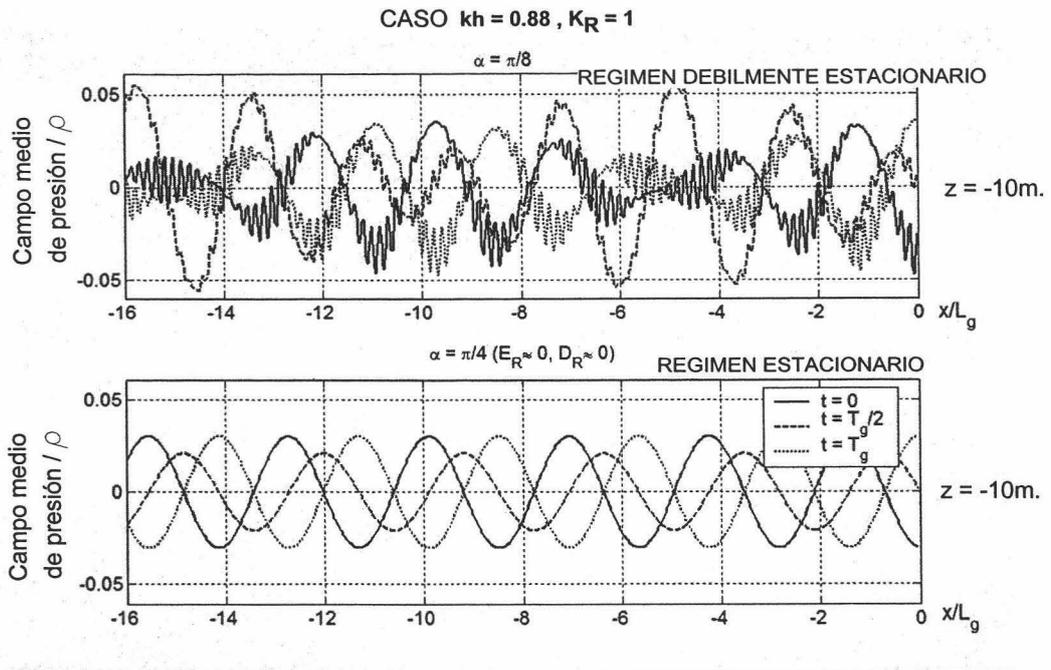


Figura 2.13: Corte transversal del perfil vertical del campo medio de presiones en la escala de onda corta.

2.7.4 En resumen ...

En relación a la estructura espacial y temporal los campos medios de presión en las escalas de onda corta y larga son aplicables las conclusiones obtenidas para el caso de los niveles medios.

Respecto a su dependencia con la profundidad, puede decirse que en la escala de onda corta, el campo de presiones tiene dos contribuciones con distinto comportamiento en z :

- la que proviene de los campos de presión inducidos por las ondas largas vinculada y libre, y que resulta ser independiente de la profundidad;
- la que proviene de los campos de presión inducidos por los trenes de onda corta incidente y reflejado, así como de su interacción no lineal.

En el primer caso la contribución es constante en toda la columna de agua, por lo que será el término dominante en la presión media en la escala corta para el caso de profundidades con $kh > 1$. La segunda contribución decrece con la profundidad.

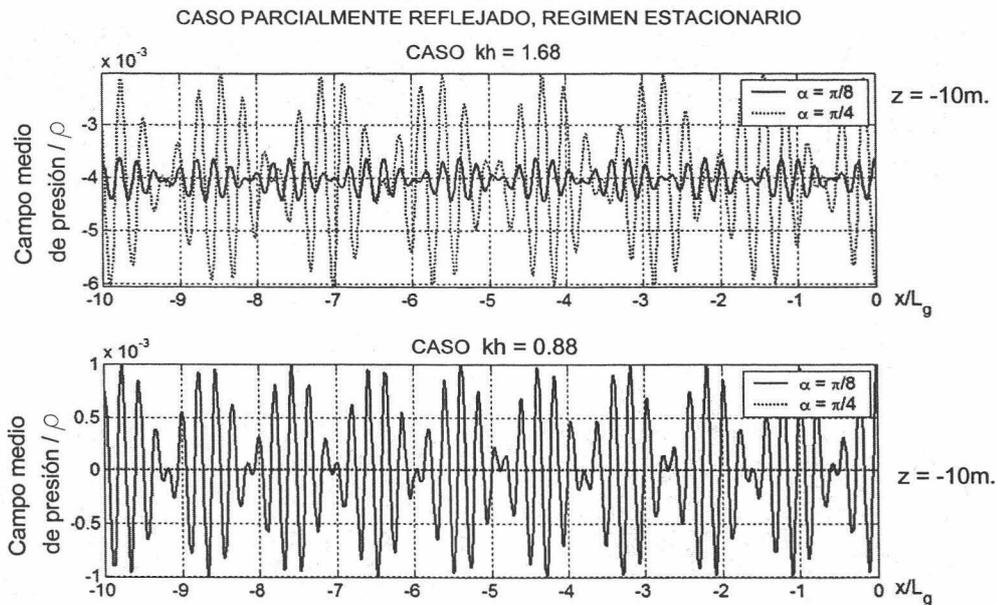


Figura 2.14: Corte transversal del perfil vertical del campo medio de presiones en la escala del grupo Caso parcialmente estacionario.

En la escala de onda larga, al campo de presiones medio sólo contribuye el término de interacción $\overline{P_{d,20}^{IR}}$. Por lo que, en la escala del grupo, la presión media es una función decreciente con la profundidad. En el caso límite de profundidades indefinidas ($kh \gg 1$), $\overline{P_{d,20}^{IR}}(z = -h) \rightarrow 0$. En profundidades intermedias, y en el caso más general, $\overline{P_{d,20}^{IR}}$ es una cantidad estacionaria, no nula, uniforme en la dirección longitudinal y modulada en las escalas de onda larga y onda corta en la dirección transversal.

2.7.5 Procesos morfodinámicos inducidos por la presión

A partir de los resultados anteriores, se discute la influencia del campo de presiones inducido por los grupos regulares progresivos y parcialmente reflejados en los siguientes procesos morfodinámicos: (1) transporte de sedimento; (2) morfología de profundidades intermedias; y, (3) generación de microseismos. Aunque los dos primeros aspectos son objeto de análisis en el *Capítulo* siguiente, se discuten aquí brevemente con la intención de dar una visión general del problema.



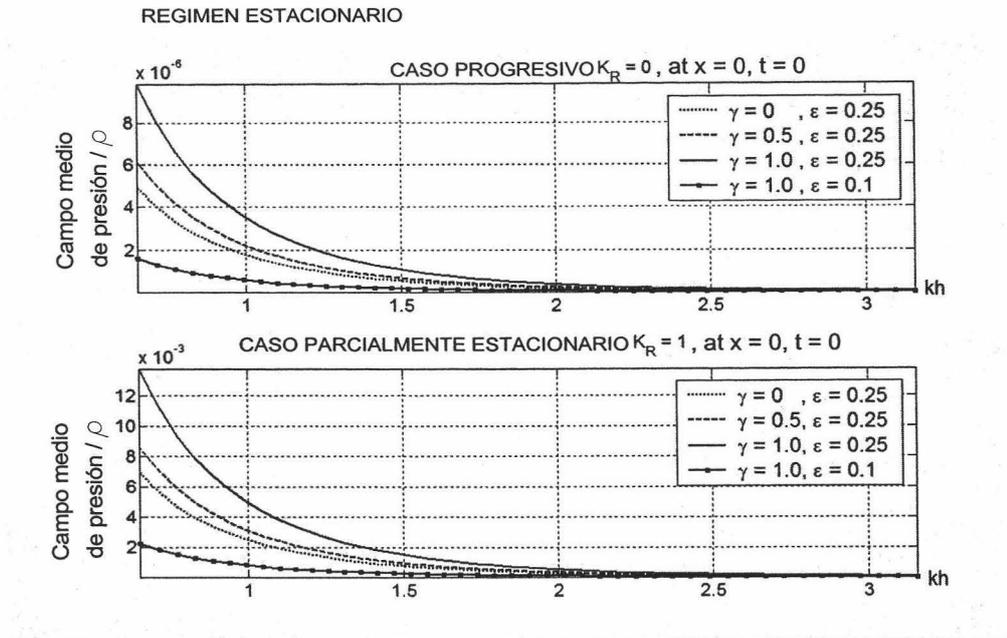


Figura 2.15: Dependencia del campo de presiones medio en la escala del grupo. Caso progresivo (arriba) frente a caso estacionario (abajo).

Influencia de la presión en el transporte de sedimentos

Existe un extenso trabajo en relación a la estructura espacial y temporal de la distribución vertical de sedimentos inducida por ondas cortas monocromáticas progresivas (Vittori, 2003). Sin embargo, hay un desconocimiento general de la influencia de las ondas gravitatorias moduladas en el perfil vertical de sedimento. Probablemente, esta carencia se debe a la dificultad de medir experimentalmente dicha influencia debido a las escalas espaciales y temporales del problema. Los pocos trabajos existentes (tanto numéricos como experimentales) han sido discutidos en la *Introducción*.

De los resultados obtenidos con el modelo analítico propuesto, puede concluirse que asumiendo que la cantidad de sedimento en suspensión es proporcional a la presión dinámica:

- la distribución vertical de sedimento en suspensión bajo la acción de grupos regulares parcialmente reflejados es una función modulada en el espacio y oscilatoria en el tiempo en las escalas de la onda corta y del grupo. El régimen estacionario del promedio espacial de la presión indica, que la dependencia temporal de la concentración de sedimento debe ser proporcional a dos veces la frecuencia de la onda corta y

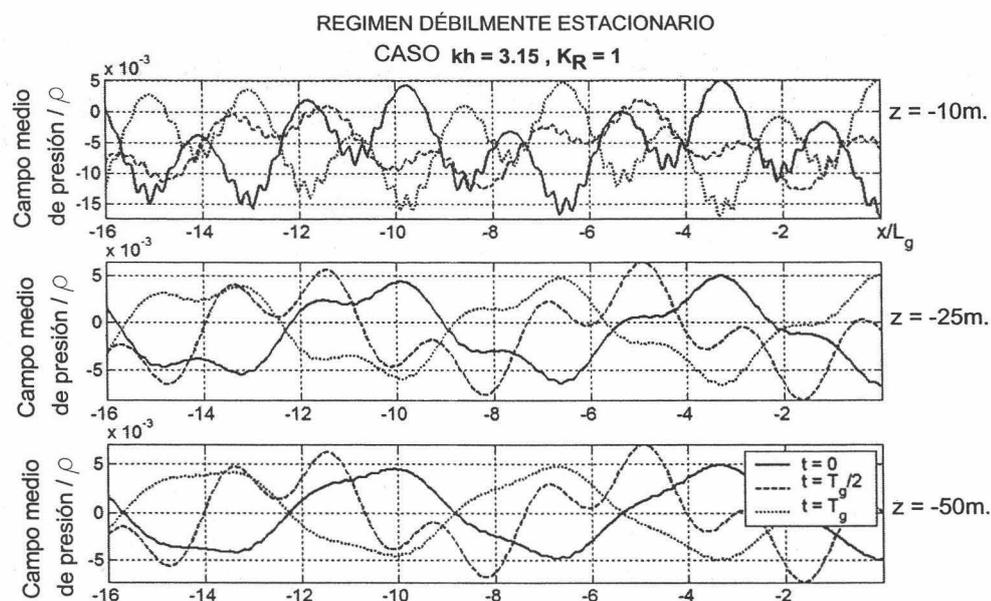


Figura 2.16: Evolución temporal y dependencia vertical del campo medio de presiones en la escala de onda. Caso parcialmente estacionario.

a dos veces la frecuencia del grupo. El régimen estacionario del promedio temporal de la presión, muestra que la modulación espacial de la distribución vertical de sedimento debe ser proporcional a la mitad de la longitud de onda corta y a la mitad de la longitud de onda del grupo. Este resultado está de acuerdo con el trabajo numérico previo de *Deigaard et al.* (1999) que, encontró un comportamiento similar al descrito y puso de manifiesto la importancia de los grupos progresivos en la distribución vertical de sedimento.

- en caso de transporte por fondo, la modulación de larga escala presente en el campo de presiones medio inducido por grupos regulares reflejados, puede influir en la anchura de la capa límite bentónica y en la velocidad de deslizamiento en el fondo. *Foda & Mei* (1986) y *Foda* (2003) analizaron esta influencia en el caso de ondas cortas monocromáticas y progresivas y probaron: (1) la existencia de una velocidad de deslizamiento estacionaria y de primer orden; y, (2) la existencia de una variación de segundo orden en la anchura de la capa límite proporcional a la presión media. Ambos efectos contribuyen a la existencia de un posible transporte neto en dirección contraria al oleaje inciden-

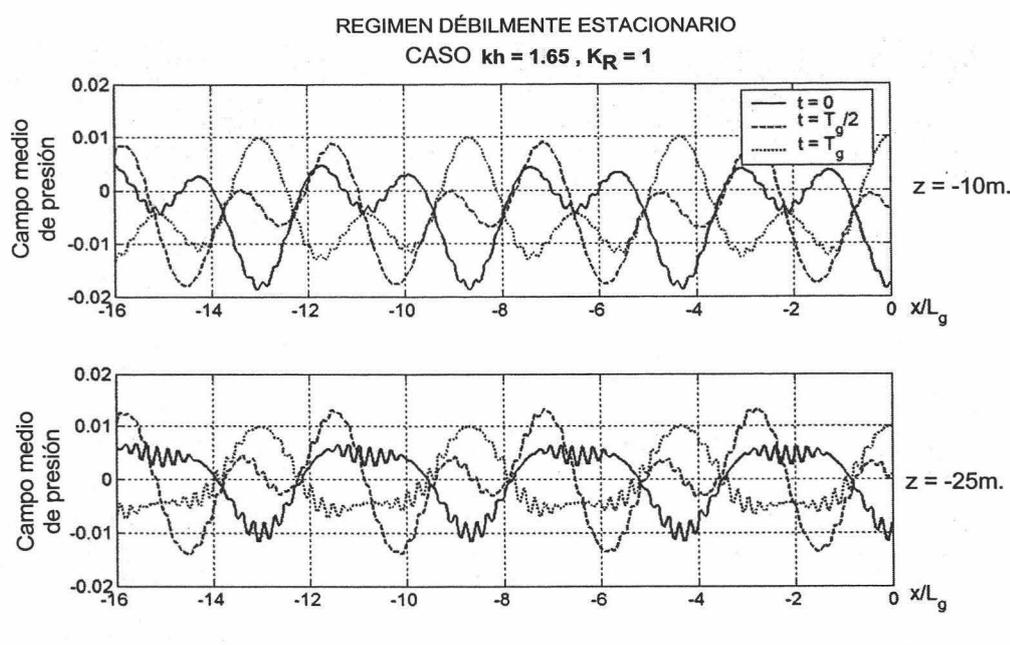


Figura 2.17: Evolución temporal y dependencia vertical del campo medio de presiones en la escala de onda. Caso parcialmente estacionario.

te en la capa límite de fondo. Es de esperar que, teniendo en cuenta la estructura espacial y temporal de la presión en el caso de grupos regulares, tanto la velocidad de deslizamiento como la anchura de la capa límite estén espacialmente moduladas tanto en la escala de onda corta como en la del grupo. Dichas modulaciones, permiten predecir la existencia de patrones no estacionarios y modulados de transporte neto de sedimento.

Influencia de la presión inducida por ondas gravitatorias moduladas en la morfología de profundidades intermedias

Además de a través del transporte de sedimentos, la presión inducida por las ondas gravitatorias moduladas puede influir en la morfología de profundidades intermedias, a través de la hidrodinámica de la capa límite de fondo. Puesto que, tal y como se pondrá de manifiesto en el *Capítulo* siguiente, el gradiente del campo de presiones instantáneo es el término forzador de la aproximación de capa límite de las ecuaciones de conservación del momento horizontal.

Por tanto, cabe esperar, que las escalas de onda corta, del grupo y las

escalas inducidas por la interacción de ondas largas vinculadas y libres, aparezcan también en la estructura espacial y temporal del campo de velocidades (euleriano y lagrangiano) de la capa límite y en el 'streaming' así como en los patrones iniciales de transporte de sedimento y en las formas de lecho resultantes.

Influencia de la presión inducida por ondas gravitatorias moduladas en la posible generación de microseismos

El carácter oscilatorio del campo de presión (promediado en el espacio) inducido por grupos regulares parcialmente reflejados, supone la carga dinámica del fondo de forma proporcional a dos veces la frecuencia de la onda corta y dos veces la frecuencia del grupo.

Este resultado extiende y confirma la teoría propuesta por *Longuet-Higgins* (1962) para onda corta, en relación a la posible influencia de las ondas de superficie estacionarias en la generación de microseismos de pequeña magnitud.

2.8 Flujo de masa

El flujo medio de masa $\overline{f_{m,AA'}^j}$ por unidad de superficie en la dirección j se define como el promedio temporal de la cantidad ρV^j integrada en la columna de agua. En esta *Sección* se calculan los flujos medios de masa en la dirección longitudinal, transversal y vertical de un tren de ondas modulado progresivo y parcialmente estacionario. Para ello se hará uso de los operadores de promedio temporal en la onda corta (Eq.2.48) y en la escala del grupo (Eq.2.49).

2.8.1 Régimen débilmente no estacionario del flujo de masa

En la escala de onda corta, el flujo medio de masa se define,

$$\overline{f_{m,AA'}^j} = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho V^j dz} \quad (2.100)$$

Aproximando en serie de Taylor en torno $z = 0$ la expresión anterior, se tiene:

$$\overline{f_{m,AA'}^j} \simeq \overline{\int_{-h}^0 \rho V^j dz} + \overline{\rho \eta V^j}|_{z=0} + \rho \frac{\eta^2}{2} \overline{V^j}|_{z=0} + \dots \quad (2.101)$$

donde $V^j = (U, V, W)$ representa el campo instantáneo de velocidades descrito en Eq.2.5 y Eq.2.6.

Haciendo uso de estas expresiones, y en el caso más general, el flujo medio de masa en la dirección j con $j = 1, 2$ es suma de las contribuciones de onda larga $\Pi_{1,j}$ y onda corta $\Pi_{2,j}$,

$$\overline{f_{m,AA'}^j} = -\rho \epsilon^2 (\Pi_{1,j} + \Pi_{2,j}) \quad (2.102)$$

donde,

$$\Pi_{1,j} = \frac{\partial \phi_{10}^b}{\partial \xi_1^j} + \frac{\partial \phi_{10}^{b,R}}{\partial \xi_1^j} + \frac{\partial \phi_{10}^{f,R}}{\partial \xi_1^j} \quad (2.103)$$

y

$$\begin{aligned} \Pi_{2,x} = & [ik_x (\phi_{11}\eta_{1,-1} + \phi_{11}^R\eta_{1,-1}^R) + c.c.] + \\ & [ik_x (\phi_{11}\eta_{1,-1}^R - \phi_{1,-1}^R\eta_{1,1}) \exp(2ik_x x) + c.c.] \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\Pi_{2,y} = [ik_y (\phi_{11}\eta_{1,-1} - \phi_{11}^R\eta_{1,-1}^R) + c.c.] \quad (2.105)$$

En la dirección vertical, $\overline{f_{m,AA'}^z} = 0$. Notice that, the second term of the Eq.2.104 is a non-linear interference term between the modulated short wave potential velocity function and related free surface of incident and reflected wave trains.

Discusión de resultados

A partir de las expresiones obtenidas, se deduce que:

- para el orden $O(\epsilon^2)$ y en el caso de grupos regulares, el flujo medio de masa horizontal en la escala de onda corta es una magnitud cuasi-estacionaria con periodicidad $T_g/2$.
- el flujo de masa transversal está modulado espacialmente en las siguientes escalas:
 - la escala de onda larga $l \sim L_g$. A través de las contribuciones de onda larga que introduce el término $\Pi_{1,j}$ y a través de las amplitudes moduladas de la onda corta resultantes de la interacción no lineal del potencial de velocidades $\phi_{1\pm 1}$ y la superficie libre $\eta_{1\pm 1}$ (incidentes y reflejados). En caso de reflexión parcial, a la escala de la onda larga vinculada hay que añadir, la modulación proporcional a la longitud de onda de la onda libre reflejada $l \sim L_g^f$ y la superescala l_s resultado de la interferencia entre ondas largas libres y vinculadas.
 - en el caso de reflexión parcial, el flujo de masa transversal $\overline{f_{m,AA'}^x}$ también está modulado en la escala de onda corta $l \sim L$ debido a la presencia del término $\exp(\pm 2ik_x x)$. La modulación de onda corta es uniforme en la dirección y .
- en el caso parcialmente reflejante con incidencia oblicua, el flujo de masa longitudinal es una magnitud modulada en el espacio, en las escalas de onda larga: $l \sim L_g$ y $l \sim L_g^f$ y en la superescala l_s .

- el flujo de masa en la dirección vertical a segundo orden es cero.

En *Fig.2.18* se muestra la evolución temporal de la densidad de flujo medio de masa transversal $\left(\frac{\overline{f_{m,AA'}}}{h}\right)$ en la escala de onda corta en función del parámetro ϵ para un caso parcialmente estacionario ($K_R = 1$) con incidencia oblicua ($\alpha = \pi/8$). En la figura se pone de manifiesto el efecto de escala del parámetro ϵ en la amplitud y en las dimensiones de la modulación de larga escala.

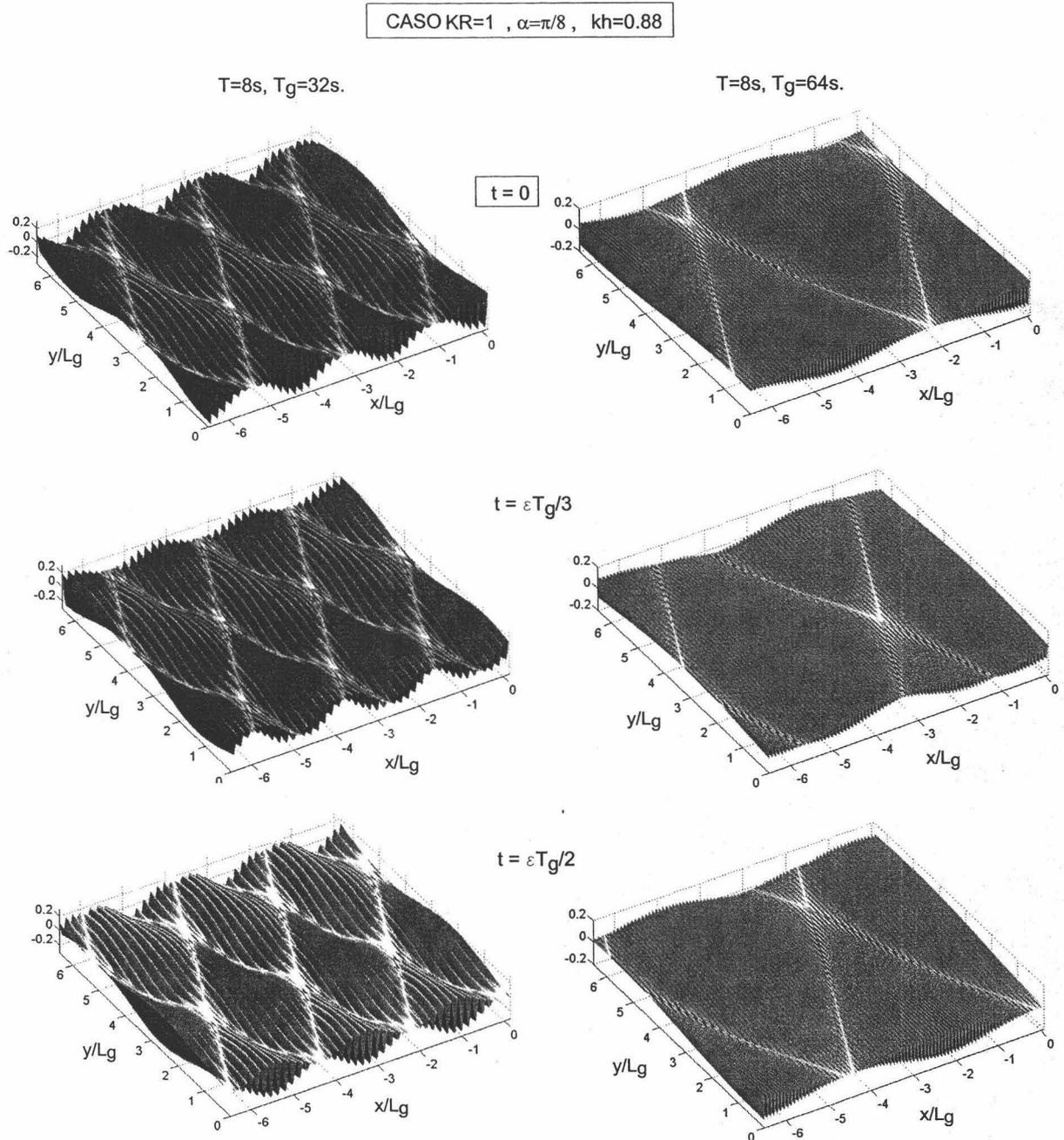


Figura 2.18: Evolución temporal del flujo de masa en la escala de onda corta.

2.8.2 Régimen estacionario del flujo de masa

Por lo expuesto en la sección anterior, el flujo medio horizontal ($j = 1, 2$) en la escala del grupo puede expresarse,

$$\widetilde{f_{m,AA'}^j} = \int_{-h}^{\eta} \widetilde{\rho V^j dz} \simeq -\rho \epsilon^2 (\widetilde{\Pi_{1,j}} + \widetilde{\Pi_{2,j}}) \quad (2.106)$$

Haciendo uso de las expresiones de $\Pi_{1,j}$ y $\Pi_{2,j}$ (Eqs.2.103-3) y del operador promedio en la escala del grupo (Eq.2.49) se tiene que $\widetilde{\Pi_{1,j}} = 0$. Por tanto, el flujo medio de masa horizontal es,

$$\widetilde{f_{m,AA'}^j} = -\rho \epsilon^2 \widetilde{\Pi_{2,j}} \quad (2.107)$$

donde:

$$\widetilde{\Pi_{2,x}} = \frac{k_x g}{2\omega} a^2 (1 + \gamma^2) (1 - K_R^2) + \frac{k_x g}{2\omega} \widetilde{D_{20}^{IR}} \quad (2.108)$$

$$\widetilde{\Pi_{2,y}} = \frac{k_y g}{2\omega} a^2 (1 + \gamma^2) (1 + K_R^2) \quad (2.109)$$

The explicit expression of the interaction term amplitude $\widetilde{D_{20}^{IR}}$ is in Eq.2.76. El flujo vertical de masa en la escala del grupo es cero a segundo orden.

Discusión de resultados

De la Eq.2.108, podemos concluir que el flujo de masa transversal en la escala del grupo es,

- una magnitud estacionaria a orden $O(\epsilon^2)$, uniforme en la dirección longitudinal y modulada en la dirección transversal en la:
 - escala de onda corta, a través del término $\exp(2ik_x x)$
 - escala de onda larga a través del término $\widetilde{D_{20}^{IR}}$ ya que,

$$\widetilde{D_{20}^{IR}} \propto \widetilde{A_{11} B_{11}^*} = a^2 \{ \exp(2iK_{gx} X_1) + \gamma^2 \exp(-2iK_{gx} X_1) \} \quad (2.110)$$

- en el caso de reflexión perfecta $K_R = 1$, el término constante de la Eq.2.108 es nulo. En consecuencia, el promedio espacial del flujo de masa transversal es nulo y no existe intercambio de masa en escalas espaciales mayores que la longitud de onda larga.

- En caso de reflexión parcial $K_R \neq 1$, el término constante de la Eq.2.108 es distinto de cero. Por lo que, además de un flujo estacionario modulado de masa en la dirección transversal, existe una contribución no nula al transporte neto. Contribución que aumenta de forma proporcional al cuadrado del parámetro de modulación γ .

De la expresión obtenida para el flujo de masa longitudinal (Eq.2.109) se puede decir que tiene valor constante y no nulo, tanto en el caso progresivo como en el estacionario. Por tanto, existe un flujo de masa neto en la dirección longitudinal que aumenta proporcionalmente con el cuadrado de los parámetros γ y K_R .

Los resultados obtenidos se ilustran a continuación.

En Fig.2.19 se compara la modulación espacial de los flujos de masa transversal (x) y longitudinal (y) en las escalas de onda corta y onda larga para los casos de un tren de ondas parcialmente estacionario ($K_R = 1$) y un tren modulado progresivo ($K_R = 0$). En la figura se puede observar,

- las diferentes escalas de modulación del flujo medio de masa transversal y longitudinal en la escala de onda corta.
- el caracter modulado en la dirección x del flujo medio de masa transversal en la escala del grupo. En la Fig.2.20 se ilustra la dependencia de las escalas de modulación del flujo de masa en la escala del grupo en función del parámetro ϵ .
- la estructura espacial del flujo medio de masa transversal de un tren de ondas progresivo en las escalas de onda corta y de grupo.

2.9 Flujo de energía

El flujo instantáneo de energía que pasa por una sección AA' con normal \hat{n}_j donde $\hat{n}_1 = \vec{x}$ y $\hat{n}_2 = \vec{y}$ se define en el caso más general como,

$$f_{e,AA',j} = \int_{-h}^{\eta} (p^T + \rho g z) u_j^T dz \quad (2.111)$$

donde $u_1^T = u_x^T$ y $u_2^T = u_y^T$ representan, respectivamente, el campo instantáneo de velocidades en las direcciones x e y , y p^T es el campo instantáneo total de presiones.

En la escala de onda corta, el valor medio del flujo de energía se representa por $\bar{f}_{e,AA',j}$ y para su cálculo se ha hecho uso de la definición de operador

de promedio en la escala de onda corta definido en Eq.2.48. En la escala del grupo, el flujo medio se representa por $\overline{f_{e,AA',j}}$ de acuerdo con la definición del operador promedio en la escala del grupo definido en Eq.2.49.

En esta sección se describen los flujos medios de energía hasta segundo orden en la escala corta y en la escala del grupo inducidos por un tren modulado regular de ondas gravitatorias para los casos progresivo y parcialmente estacionario.

2.9.1 Régimen débilmente no estacionario del flujo de energía

En la escala de onda corta, el flujo medio de energía $\overline{f_{e,AA',j}}$ es suma de dos contribuciones,

$$\overline{f_{e,AA',j}} = \epsilon^2 (\Lambda_{1,j} + \Lambda_{2,j}) + O(\epsilon^3) \quad (2.112)$$

donde, en el caso más general,

$$\Lambda_{1,j} = \rho g \int_{-h}^0 z (\overline{u_2 + u_2^R}) dz \quad (2.113)$$

y

$$\Lambda_{2,j} = \int_{-h}^0 \overline{(p_1 u_1 + p_1^R u_1^R + p_1 u_1^R + p_1^R u_1)} dz \quad (2.114)$$

Haciendo uso de las expresiones del campo de velocidades y presión descritas en Secciones 2.6 y 2.8, se obtiene,

$$\frac{\Lambda_{1,j}}{\rho g h} = - \left(\frac{\partial \phi_{10}^b}{\partial \xi_1^j} + \frac{\partial \phi_{10}^{b,R}}{\partial \xi_1^j} + \frac{\partial \phi_{10}^{f,R}}{\partial \xi_1^j} \right) \quad (2.115)$$

y

$$\frac{\Lambda_{2,j}}{\rho g h} = - \frac{g}{2\omega} k_j M_0 [A_{11} A_{11}^* + K_R^2 B_{11} B_{11}^*] - \frac{g}{2\omega} k_j Z_0 (1 + \alpha_j) D_{20}^{IR} \quad (2.116)$$

donde,

$$M_0 = \frac{1}{\cosh^2 kh} + \frac{\tanh kh}{kh} \quad (2.117)$$

y el subíndice $j = (x, y)$. El coeficiente $\alpha_x = -1$ y $\alpha_y = 1$. Nótese que D_{20}^{IR} representa la amplitud del término de interacción de los trenes de onda corta modulados incidente y reflejados. Su expresión analítica se describió en Eq.??.

2.9.2 Régimen estacionario del flujo de energía

En la escala del grupo, el flujo medio de energía $\widetilde{f_{e,AA',j}}$ hasta segundo orden es,

$$\widetilde{f_{e,AA',j}} = \epsilon^2 (\widetilde{\Lambda_{1,j}} + \widetilde{\Lambda_{2,j}}) + O(\epsilon^3)$$

donde ahora, $\widetilde{\Lambda_{1,j}} = 0$ y

$$\frac{\widetilde{\Lambda_{2,j}}}{\rho g h} = -\frac{g}{2\omega} k_j M_0 \left[a^2 (1 + \gamma^2) (1 + K_R^2) + (1 + \alpha_j) \widetilde{D_{20}^{IR}} \right]$$

En la dirección transversal (perpendicular a la línea de costa) en la que $(1 + \alpha_j) = 0$, la contribución resultante del término de interacción se cancela y por tanto. $\widetilde{f_{e,AA',x}}$ es una magnitud estacionaria y uniforme cuya amplitud aumenta proporcionalmente al cuadrado del parámetro γ y al cuadrado del coeficiente de reflexión K_R .

Sin embargo $\widetilde{f_{e,AA',y}}$, para la que $(1 + \alpha_j) = 2$, a un flujo medio de energía constante hay que añadir la contribución al flujo del término de interacción proporcional a $\widetilde{D_{20}^{IR}}$. Recuérdese que de acuerdo a Eq.??, la amplitud $\widetilde{D_{20}^{IR}}$ es una magnitud estacionaria, uniforme en la dirección longitudinal pero modulada espacialmente en la dirección transversal en las escalas de onda corta $L/2$ y del grupo $L_g/2$.

En la Fig.?? se muestra la estructura espacial del flujo medio transversal y longitudinal de energía en la escala del grupo para los casos de un tren progresivo y parcialmente estacionario.

2.10 Flujo de cantidad de movimiento

El flujo de cantidad de movimiento instantáneo I_{ij} por unidad de superficie en función del campo de velocidades V^j se define,

$$I_{ij} = \int_{-h}^{\eta} \rho V^j V^i dz \quad (2.118)$$

Expandiendo la expresión anterior en serie de Taylor en torno a $z = 0$, se tiene

$$I_{ij} \simeq \int_{-h}^0 \rho V^j V^i dz + \rho \eta [V^j V^i]_{z=0} + \dots \quad (2.119)$$

Finalmente, haciendo uso de las expresiones del campo instantáneo de velocidades de un tren de ondas modulado (Eq.2.5 y 2.6), el flujo de cantidad de movimiento instantáneo en el caso más general puede expresarse,

$$I_{ij} = \epsilon^2 (I_{ij} + I_{ij}^R + I_{ij}^{IR}) + O(\epsilon^3) \quad (2.120)$$

donde, I_{ij} representa el flujo de momento inducido por la integración en toda la columna de agua del campo de velocidades de primer orden Φ_1 ,

$$I_{ij} = \int_{-h}^0 \rho \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi^i} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi^j} \right) dz \quad (2.121)$$

I_{ij}^R es el flujo de momento inducido por el campo de velocidades de primer orden del tren de ondas modulado y reflejado Φ_1^R ,

$$I_{ij}^R = \int_{-h}^0 \rho \left(\frac{\partial \Phi_1^R}{\partial \xi^i} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1^R}{\partial \xi^j} \right) dz \quad (2.122)$$

Finalmente, I_{ij}^{IR} representa el flujo de momento resultante de la interacción no lineal de los campos de velocidades de primer orden de los trenes modulados incidente Φ_1 y reflejado Φ_1^R integrados en verticalmente,

$$I_{ij}^{IR} = \int_{-h}^0 \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi^i} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1^R}{\partial \xi^j} \right) + \left(\frac{\partial \Phi_1^R}{\partial \xi^i} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi^j} \right) \right] dz \quad (2.123)$$

A continuación, se describen las expresiones de los flujos medios transversal ($i = j = 1$), longitudinal ($i = j = 2$) y tangencial ($i = 1, j = 2$) promediados en la escala de onda corta $\overline{I_{ij}}$ y en la escala del grupo $\widetilde{I_{ij}}$. A partir de los mismos, se discutirá la estructura espacial y temporal de los tensores de radiación inducidos por las ondas gravitatorias moduladas regularmente en la proximidad de estructuras reflejantes.

Para el cálculo las magnitudes mencionadas, se ha hecho uso de la solución del potencial de velocidades de un tren de ondas modulado progresivo y parcialmente estacionario obtenidas, respectivamente, en las Secciones 2.5.1 y 2.5.2. En el cálculo, se ha asumido que la densidad del fluido es constante en toda la columna de agua.

2.10.1 Flujo de momento transversal

Régimen débilmente no estacionario

En el caso más general y haciendo uso de Eq.2.120 y del operador de promedio temporal en la escala de la onda corta Eq.2.48, el flujo medio transversal total, por unidad de superficie, en la escala de onda corta $\overline{I_{xx}^T}$ puede expresarse,

$$\overline{I_{xx}^T} = \epsilon^2 \left(\overline{I_{xx}} + \overline{I_{xx}^R} + \overline{I_{xx}^{IR}} \right) \quad (2.124)$$

donde,

$$\overline{I_{xx}} = 2k_x^2 \rho \int_{-h}^0 \phi_{11} \phi_{11}^* dz \quad (2.125)$$

$$\overline{I_{xx}^R} = 2k_x^2 \rho \int_{-h}^0 \phi_{11}^R (\phi_{11}^R)^* dz \quad (2.126)$$

$$\overline{I_{xx}^{IR}} = -2k_x^2 \rho \int_{-h}^0 \left[\phi_{11} (\phi_{11}^R)^* \exp(2ik_x x) + c.c. \right] dz \quad (2.127)$$

Haciendo uso de las expresiones de ϕ_{11} y ϕ_{11}^R , se obtiene

$$\frac{\overline{I_{xx}^T}}{\rho h} = \epsilon^2 \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 M_0 k_x^2 \left\{ |A_{11}|^2 + K_R^2 |B_{11}|^2 - K_R [A_{11} B_{11}^* \exp(2ik_x x) + c.c.] \right\} \quad (2.128)$$

Régimen estacionario

En la escala del grupo, el flujo medio de momento transversal total $\widetilde{I_{xx}^T}$ es,

$$\frac{\widetilde{I_{xx}^T}}{\rho h} = \epsilon^2 \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 M_0 k_x^2 \left\{ a^2 (1 + K_R^2) (1 + \gamma^2) - K_R \left[\widetilde{A_{11} B_{11}^*} \exp(2ik_x x) + c.c. \right] \right\} \quad (2.129)$$

Discusión de resultados

De las expresión del flujo transversal medio en la escala de onda corta (Eq.2.120) podemos concluir que, en el caso más general y hasta el orden $O(\epsilon^2)$, es:

- cuasi-estacionaria con periodicidad $T_g/2$,
- modulada transversal y longitudinalmente en la escala de onda larga (a través de los términos $|A_{11}|^2$, $|B_{11}|^2$ y $A_{11} B_{11}^*$) y transversalmente en la escala de onda corta a través del término $\exp(\pm 2ik_x x)$.

En la escala del grupo (Eq.2.120), el flujo medio transversal \widetilde{I}_{xx}^T de un tren de ondas modulado progresivo es constante y proporcional al cuadrado del parámetro de modulación γ .

En el caso parcialmente estacionario, \widetilde{I}_{xx}^T es hasta segundo orden, una magnitud estacionaria. Como resultado de la interacción no lineal de las ondas gravitatorias incidente y reflejada, está modulada transversalmente en la escala del grupo (a través del término $\widetilde{A_{11}B_{11}^*}$ y su conjugado) y en la escala de onda corta debido a la presencia del término $\exp(\pm 2ik_x x)$. Longitudinalmente, es uniforme.

2.10.2 Flujo de momento longitudinal

Régimen débilmente no estacionario

De forma similar al caso del flujo de cantidad de movimiento transversal, el flujo medio de momento longitudinal en la escala de onda corta \overline{I}_{yy}^T puede expresarse,

$$\overline{I}_{yy}^T = \epsilon^2 \left(\overline{I}_{yy} + \overline{I}_{yy}^R + \overline{I}_{yy}^{IR} \right) \quad (2.130)$$

donde ahora,

$$\frac{\overline{I}_{yy}^T}{\rho h} = \epsilon^2 \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 M_0 k_y^2 \left\{ |A_{11}|^2 + K_R^2 |B_{11}|^2 + K_R [A_{11} B_{11}^* \exp(2ik_x x) + c.c.] \right\} \quad (2.131)$$

Régimen estacionario

En la escala del grupo, el flujo medio de momento longitudinal total \widetilde{I}_{yy}^T es,

$$\frac{\widetilde{I}_{yy}^T}{\rho h} = \epsilon^2 \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 M_0 k_y^2 \left\{ a^2 (1 + K_R^2) (1 + \gamma^2) + K_R \left[\widetilde{A_{11}B_{11}^*} \exp(2ik_x x) + c.c. \right] \right\} \quad (2.132)$$

Discusión de resultados

Excepto por el signo del término de interacción y por la constante de proporcionalidad M_{0y} , la estructura espacial y temporal del flujo medio longitudinal

(Eq.2.131 y 2.132) es equivalente a la del correspondiente flujo medio transversal. Por tanto, su estructura espacial y temporal en la escala de onda corta y en la escala del grupo son iguales.

En la *Fig.??* se ilustra la estructura espacial, en el instante $t = 0$, de flujo medio de momento transversal en la escala de onda corta $\overline{I_{xx}^T}/\rho h$ y en la escala del grupo $\widetilde{I_{xx}^T}/\rho h$ para los siguientes valores del coeficiente de reflexión: $K_R = 0$ (caso progresivo), $K_R = 0.5$ y $K_R = 1$ (casos parcialmente estacionarios). Para ello, se ha tomado: $\alpha = \pi/8$ y $\gamma = 1$. En *Fig.??* se muestran la estructura espacial del flujo medio de momento longitudinal por unidad de area en los mismos casos.

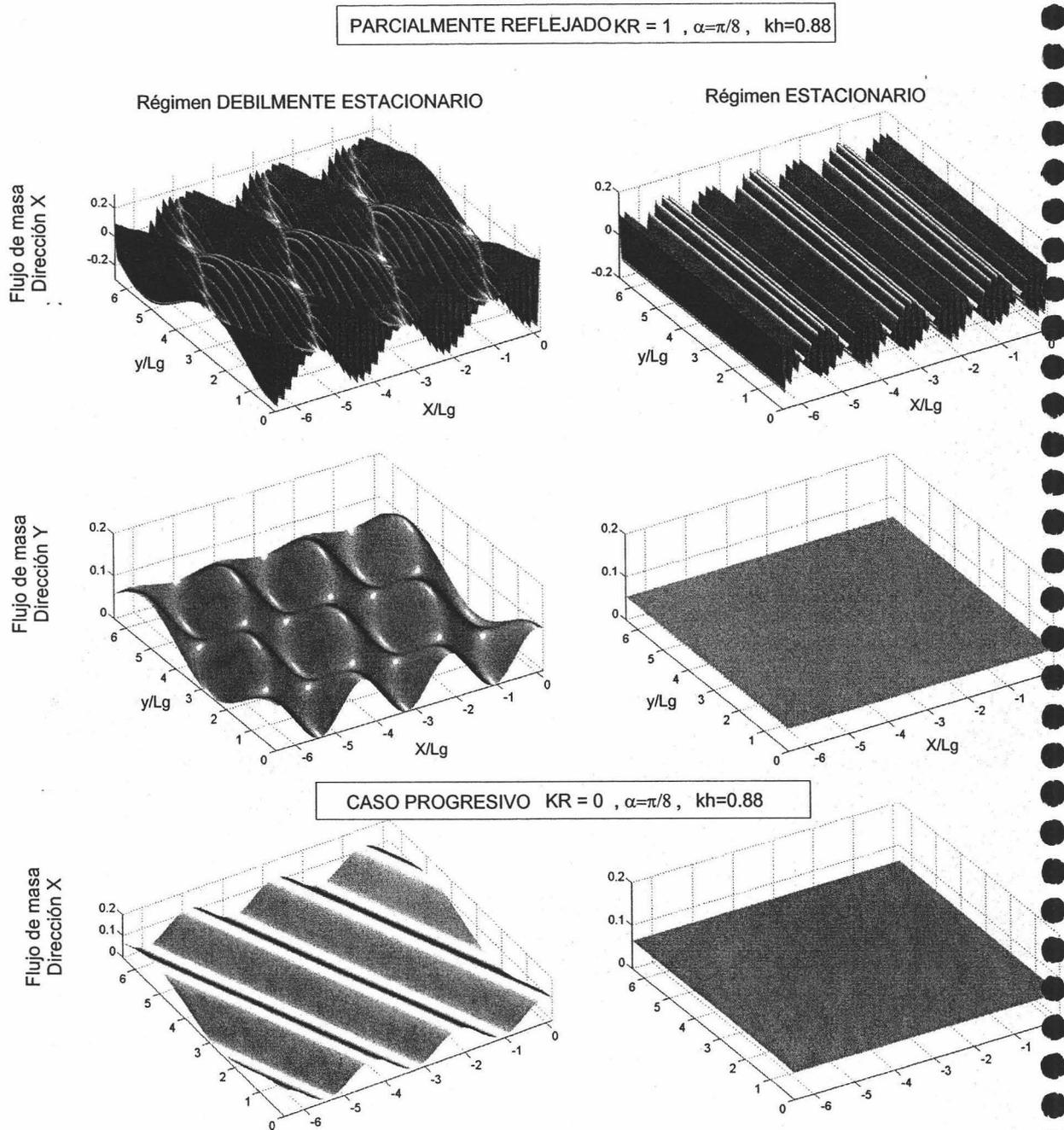


Figura 2.19: Flujo de masa longitudinal y transversal en escala de onda corta y en escala del grupo. Caso parcialmente estacionario vs. caso progresivo.

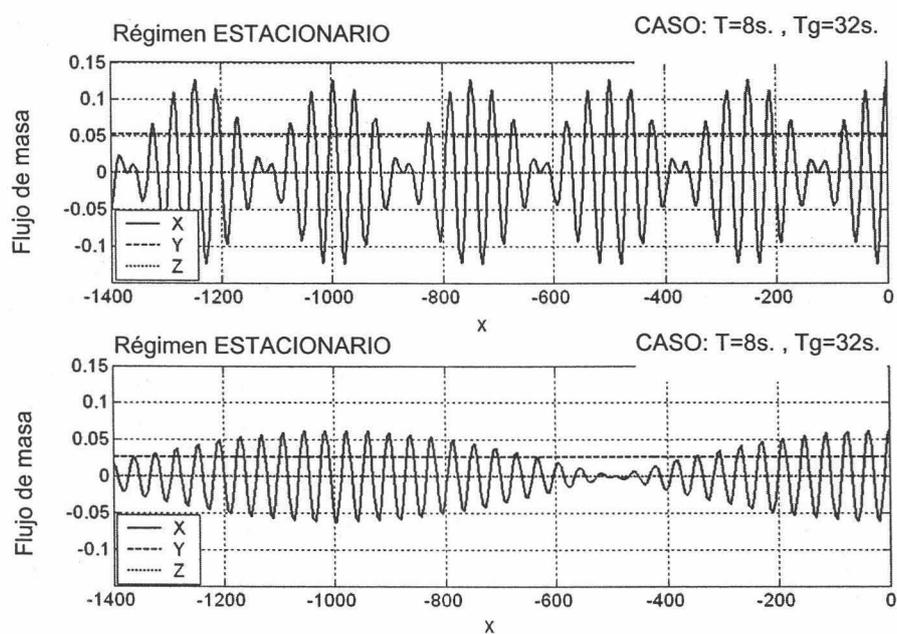


Figura 2.20: Perfil transversal de los flujos de masa longitudinal, transversal y vertical en la escala del grupo.

2.10.3 Flujo de momento tangencial

Régimen débilmente no estacionario

En el caso más general, el flujo medio de cantidad de movimiento $I_{xy}^T = I_{yx}^T$ hasta el orden $O(\epsilon^2)$ en la escala de onda corta puede expresarse,

$$\overline{I_{xy}^T} = \epsilon^2 \left(\overline{I_{xy}} + \overline{I_{xy}^R} + \overline{I_{xy}^{IR}} \right) \quad (2.133)$$

donde,

$$\overline{I_{xy}} = \int_{-h}^0 \rho \overline{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)} dz \quad (2.134)$$

$$\overline{I_{xy}^R} = \int_{-h}^0 \rho \overline{\left(\frac{\partial \Phi_1^R}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1^R}{\partial y} \right)} dz \quad (2.135)$$

y

$$\overline{I_{xy}^{IR}} = \int_{-h}^0 \rho \left[\overline{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1^R}{\partial y} \right)} + \overline{\left(\frac{\partial \Phi_1^R}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)} \right] dz \quad (2.136)$$

Haciendo uso de las expresiones JWKB del potencial de velocidades a primer orden para el caso de ondas gravitatorias moduladas (*Secciones 2.5.1* y *2.5.2*) y del operador promedio en la escala de onda corta (*Eq.2.48*), se obtiene que:

$$\frac{\overline{I_{xy}^T}}{\rho h} = \epsilon^2 \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 M_0 k_x k_y \{ |A_{11}|^2 - K_R^2 |B_{11}|^2 \} \quad (2.137)$$

En la *Eq.2.137*, se ha hecho uso de que el término de interacción del flujo medio de momento tangencial es nulo, i.e. $\overline{I_{xy}^{IR}} = 0$. En consecuencia, $\overline{I_{xy}^T}$ no presenta modulación espacial en la escala de onda corta. Su modulación espacial en la escala de onda larga (longitudinal y transversal) proviene de los términos $|A_{11}|^2$ y $|B_{11}|^2$.

Debe notarse que, en la escala de onda corta, el flujo de momento tangencial es una magnitud cuasi-estacionaria (con periodicidad $T_g/2$) distinta de cero incluso para el caso $K_R = 1$. En la *Fig.??* se muestra la evolución temporal y distribución espacial de $\overline{I_{xy}^T}/\rho h$ para un caso estacionario con $K_R = 1$, $\alpha = \pi/8$ y $\gamma = 1$.

Régimen estacionario

En la escala del grupo, el flujo medio de cantidad de movimiento tangencial \widetilde{I}_{xy}^T es una magnitud estacionaria y espacialmente uniforme con la siguiente expresión,

$$\frac{\widetilde{I}_{xy}^T}{\rho h} = \epsilon^2 \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 M_0 k_x k_y \{ a^2 (1 - K_R^2) (1 + \gamma^2) \} \quad (2.138)$$

Del resultado anterior se concluye, que el flujo medio tangencial $\widetilde{I}_{xy}^T / \rho h$ es una cantidad no nula en el caso de reflexión parcial con incidencia oblicua que disminuye de forma proporcional al cuadrado del coeficiente de reflexión K_R^2 . En condiciones de reflexión total $K_R = 1$ o/y incidencia normal, \widetilde{I}_{xy}^T es cero. Para un coeficiente de reflexión constante, su amplitud aumenta proporcionalmente al cuadrado del parámetro de modulación γ y al producto $k_x k_y$.

A continuación se describen los efectos morfodinámicos inducidos por los flujos medios de cantidad de movimiento en las escalas de onda corta y de onda larga en términos del tensor de radiación.

2.11 Tensores de radiación de ondas gravitatorias moduladas

Es bien conocido que, por conservación del momento, cualquier movimiento ondulatorio (ya sea de carácter electromagnético, acústico u ondas de superficie) que incide o es emitido por una superficie, ejerce sobre ella una fuerza igual al cambio de momento que experimenta. *Lamb* (1932) y *Longuet-Higgins and Stewart* (1960, 1962 I,II y III) pusieron de manifiesto para el caso de ondas gravitatorias que esta fuerza puede ser interpretada como manifestación del *tensor de radiación*, definido como el promedio del exceso de flujo de momento inducido por la presencia del movimiento ondulatorio. Esto es, la diferencia entre el promedio temporal del flujo de momento total, integrado verticalmente entre el fondo $z = -h$ y la superficie libre $z = \eta$, inducido por el movimiento oscilatorio y el promedio del flujo de momento en ausencia del mismo.

Utilizando la notación de *Longuet-Higgins and Stewart* (1962), en la escala de onda corta, y para el caso de profundidad constante, las componentes diagonales del tensor de radiación S_{jj} (con $j = 1, 2$) pueden expresarse como,

$$S_{jj} = S_{jj}^{(1)} + S_{jj}^{(2)} + S_{jj}^{(3)} \quad (2.139)$$

donde,

$S_{jj}^{(1)}$ representa la contribución del tensor de Reynolds $\overline{\rho V^j V^j}$ integrado verticalmente desde el fondo a la superficie libre y promediada en la escala de onda corta, es decir, el flujo medio de cantidad de movimiento $\overline{I_{jj}}$,

$$S_{jj}^{(1)} = \overline{I_{jj}} = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho V^j V^j dz} \quad (2.140)$$

$S_{jj}^{(2)}$ resulta de la contribución al exceso de flujo debida al cambio en el campo medio de presiones del cuerpo del fluido inducida por las ondas de superficie,

$$S_{jj}^{(2)} = \overline{\int_{-h}^0 (p - p_0) dz} \quad (2.141)$$

y $S_{jj}^{(3)}$ representa la contribución al exceso de flujo del campo de presiones inducido por la presencia de ondas de superficie,

$$S_{jj}^{(3)} = \overline{\int_0^{\eta} p dz} \quad (2.142)$$

En la escala del grupo, las componentes diagonales del tensor de radiación \widetilde{S}_{jj} pueden expresarse,

$$\widetilde{S}_{jj} = \widetilde{S}_{jj}^{(1)} + \widetilde{S}_{jj}^{(2)} + \widetilde{S}_{jj}^{(3)} \quad (2.143)$$

Las componentes no diagonales del tensor de radiación $S_{xy} = S_{yx}$ en la escala de onda corta y de onda larga, son iguales al flujo medio de cantidad de movimiento en la dirección tangencial en las respectivas escalas, i.e.

$$S_{xy} = \overline{I_{xy}} \quad (2.144)$$

$$\widetilde{S}_{xy} = \widetilde{I_{xy}} \quad (2.145)$$

En las siguientes *Secciones* se presentan las expresiones de las componentes del radiación hasta orden $O(\epsilon^2)$ para ondas gravitatorias moduladas en los casos progresivo y parcialmente estacionario en las escalas de onda corta y de onda larga. Las expresiones obtenidas se comparan con las del caso monocromático obtenidas por *Longuet-Higgins and Steward*, (1962).

A partir del análisis de dichas expresiones se demuestra teóricamente la existencia de un mecanismo natural de transporte de sedimento fuera de la zona de rotura inducido por la reflexión parcial de ondas gravitatorias moduladas en casos de incidencia oblicua.

2.11.1 Cálculo de contribuciones al tensor de radiación inducidas por la presión

A partir de las expresiones de la presión obtenidas en la *Sección 2.8.1.*, la contribución $S_{jj}^{(2)}$ en la escala de onda corta puede calcularse hasta orden $O(\epsilon^2)$ como,

$$S_{jj}^{(2)} = \epsilon^2 \left[\int_{-h}^0 p_{d,20} dz + \int_{-h}^0 p_{d,20}^R dz + \int_{-h}^0 p_{d,20}^{IR} dz \right] + O(\epsilon)^3 \quad (2.146)$$

donde,

$$\int_{-h}^0 p_{d,20} dz = \rho h \left[\frac{p_{d,20}^{b,I}}{\rho h} + \frac{gka^2(1+\gamma^2)}{2\sinh 2kh} - \left(\frac{g}{2\omega}\right)^2 \frac{k \tanh kh}{h} |A_{11}|^2 \right] \quad (2.147)$$

$$\int_{-h}^0 p_{d,20}^R dz = \rho h \left[\frac{p_{d,20}^{b,R}}{\rho h} + \frac{p_{d,20}^{f,R}}{\rho h} + \frac{gka^2 K_R (1 + \gamma^2)}{2 \sinh 2kh} - \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 \frac{k \tanh kh}{h} K_R^2 |B_{11}|^2 \right] \quad (2.148)$$

y

$$\int_{-h}^0 p_{d,20}^{IR} dz = -\rho h \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 \left(\frac{k_x^2}{\cosh^2 kh} - \frac{k_y^2}{kh} \tanh kh \right) K_R D_{20}^{IR} \quad (2.149)$$

En el régimen estacionario, la contribución $\widetilde{S}_{jj}^{(2)}$ es,

$$\widetilde{S}_{jj}^{(2)} = \epsilon^2 \left[\int_{-h}^0 \widetilde{p}_{d,20} dz + \int_{-h}^0 \widetilde{p}_{d,20}^R dz + \int_{-h}^0 \widetilde{p}_{d,20}^{IR} dz \right] + O(\epsilon)^3 \quad (2.150)$$

con,

$$\int_{-h}^0 \widetilde{p}_{d,20} dz = \rho h \left[\frac{gka^2 (1 + \gamma^2)}{2 \sinh 2kh} - \left(\frac{ga}{2\omega} \right)^2 \frac{k \tanh kh}{h} (1 + \gamma^2) \right] \quad (2.151)$$

$$\int_{-h}^0 p_{d,20}^R dz = \rho h \left[\frac{gka^2 K_R (1 + \gamma^2)}{2 \sinh 2kh} - \left(\frac{ga K_R}{2\omega} \right)^2 \frac{k \tanh kh}{h} (1 + \gamma^2) \right] \quad (2.152)$$

$$\int_{-h}^0 p_{d,20}^{IR} dz = -\rho h \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 \left(\frac{k_x^2}{\cosh^2 kh} - \frac{k_y^2}{kh} \tanh kh \right) K_R \widetilde{D}_{20}^{IR} \quad (2.153)$$

Por otro lado, la contribución al exceso de flujo de cantidad de movimiento debido a la variación de la superficie libre $S_{jj}^{(3)}$ en la escala de onda corta puede aproximarse hasta orden $O(\epsilon)^2$ como,

$$S_{jj}^{(3)} = \overline{\int_0^\eta p dz} \simeq \epsilon^2 \overline{[p_1]_{z=0} \eta_1} + O(\epsilon)^3 \quad (2.154)$$

Y después de un poco de álgebra, se obtiene

$$S_{jj}^{(3)} = \epsilon^2 \frac{\rho g}{2} \{ |A_{11}^2| + K_R^2 |B_{11}^2| + K_R D_{20}^{IR} \}$$

En la escala de onda larga, la contribución $\widetilde{S}_{jj}^{(3)}$ es,

$$\widetilde{S}_{jj}^{(3)} = \epsilon^2 \frac{\rho g}{2} \left\{ a^2 (1 + \gamma^2) (1 + K_R^2) + K_R \widetilde{D}_{20}^{IR} \right\}$$

A continuación se analiza el efecto de estas contribuciones en las componentes diagonales del tenso de radiación.

2.11.2 Componentes diagonales del tensor de radiación de ondas gravitatorias moduladas

Régimen débilmente no estacionario

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, la componente longitudinal S_{yy} del tensor de radiación de ondas gravitatorias moduladas en la escala corta es,

$$S_{yy} = I_{yy}^T + S_{yy}^{(2)} + S_{yy}^{(3)}$$

De forma equivalente, la componente transversal S_{xx} ,

$$S_{xx} = I_{xx}^T + S_{xx}^{(2)} + S_{xx}^{(3)}$$

Haciendo uso de las expresiones de I_{yy}^T y I_{xx}^T (ver Eq.2.128), y de las ecuaciones 2.146 y 2.154 se puede concluir que las componentes diagonales del tensor de radiación en la escala de onda corta son, en el caso más general:

- cantidades cuasiestacionarias al orden $O(\epsilon^2)$ con periodicidad $T_g/2$
- cantidades moduladas longitudinal y transversalmente en las escalas de onda corta, onda larga (vinculada y libre) y en la super-escala de modulación l_s debido a la interferencia de las ondas largas vinculadas y libres

Del promedio en la escala del grupo de las componentes longitudinales del tensor de radiación se deduce que,

- a orden $O(\epsilon^2)$ ambas componentes son magnitudes estacionarias, en general no nulas, uniformes en la dirección longitudinal y moduladas en la escala de onda larga y en la escala de onda corta en la dirección transversal,

- puesto que para el orden considerado, no existen contribuciones de onda larga vinculada o libre, la modulación espacial de larga escala de estas componentes se debe al promedio en la escala del grupo de los términos de interacción no lineal de las ondas gravitatorias moduladas

Longuet-Higgins and Steward, (1962) calcularon la expresión del tensor de radiación para el caso de ondas gravitatorias progresivas y estacionarias con incidencia normal inducido por ondas gravitatorias monocromáticas. Hallaron las siguientes expresiones.

Para el caso progresivo,

$$S = \rho g a^2 \begin{pmatrix} \frac{kh}{2 \sinh 2kh} & 0 \\ 0 & \left[\frac{kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{4} \right] \end{pmatrix} \quad (2.155)$$

y para el caso estacionario,

$$S^T = \rho g a^2 \begin{pmatrix} \frac{kh}{\sinh 2kh} + \left(\frac{2kh}{\sinh 2kh} + 1 \right) \cos 2kx & 0 \\ 0 & \frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.156)$$

En el caso de ondas gravitatorias moduladas, las expresiones equivalentes de las componentes diagonales del tensor de radiación en la escala de onda larga que se han obtenido aquí son las siguientes.

Régimen estacionario

En el caso progresivo con incidencia normal,

$$\widetilde{S}_{xx} = \rho g a^2 \frac{kh}{2 \sinh 2kh} (1 + \gamma^2) \quad (2.157)$$

y

$$\widetilde{S}_{yy} = \rho g a^2 \left[\frac{kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{4} \right] (1 + \gamma^2) \quad (2.158)$$

En el caso estacionario con incidencia normal,

$$\widetilde{S}_{xx}^T = \rho g a^2 \frac{kh}{\sinh 2kh} (1 + \gamma^2) + \rho g a^2 \left(\frac{2kh}{\sinh 2kh} + 1 \right) \left[\widetilde{A}_{11} \widetilde{B}_{11}^* \exp(2ik_x x) + c.c \right] \quad (2.159)$$

y

$$\widetilde{S}_{yy}^T = \rho g a^2 \left[\frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{2} \right] (1 + \gamma^2) \quad (2.160)$$

De los resultados se concluye que:

- la existencia de modulación supone un incremento de la amplitud de la componente longitudinal del tensor de radiación proporcional al cuadrado del parámetro γ
- en el caso progresivo, la componente \widetilde{S}_{xx} también aumenta con el cuadrado del parámetro de modulación
- en el caso estacionario, la presencia de ondas gravitatorias moduladas, supone además del aumento del término constante de la componente \widetilde{S}_{xx}^T con el cuadrado de γ , su modulación transversal en escalas de la onda larga debido a la presencia del término $\widetilde{A_{11}B_{11}^*}$. La amplitud de dicha modulación aumenta linealmente con γ .

2.11.3 Tensor de radiación tangencial de ondas gravitatorias moduladas

Régimen débilmente no estacionario

Haciendo uso de la definición del tensor de radiación para ondas gravitatorias moduladas y de las soluciones obtenidas para los flujos medios de la cantidad de momento, se tiene que la componente tangencial del tensor de radiación en la escala de onda corta es

$$\frac{S_{xy}}{\rho h} = \epsilon^2 \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 M_{0xy} \{ |A_{11}|^2 - K_R^2 |B_{11}|^2 \} \quad (2.161)$$

Por lo tanto, en el caso de ondas gravitatorias moduladas, la componente tangencial del tensor de radiación en la escala corta es al orden $O(\epsilon^2)$ una magnitud cuasi-estacionaria y modulada en las escalas de onda larga en dirección longitudinal y transversal debido a la presencia de los términos $|A_{11}|^2$ y $|B_{11}|^2$. Dicha magnitud es, en el caso más general, distinta de cero incluso en condiciones de reflexión total siempre que exista incidencia oblicua.

Régimen estacionario

En la escala de onda larga,

$$\frac{\widetilde{S}_{xy}}{gh} = \epsilon^2 \left(\frac{g}{2\omega} \right)^2 M_{0xy} \{ a^2 (1 - K_R^2) (1 + \gamma^2) \} \quad (2.162)$$

En la escala de onda larga, la componente tangencial del tensor de radiación de ondas gravitatorias moduladas \widetilde{S}_{xy} es una cantidad constante, uniforme en la dirección transversal y longitudinal. Dicha cantidad se anula en el caso de reflexión perfecta y/o incidencia normal. En este momento es necesario hacer notar que, de acuerdo a los resultados de Longuet-Higgins (Eq.2.155 y 2.156), la componente tangencial S_{xy} del tensor de radiación en el caso de trenes de ondas monocromáticos progresivos o estacionarios es nula.

Desde el punto de vista morfodinámico, la existencia de un tensor de radiación tangencial no nulo en el caso de ondas gravitatorias moduladas en condiciones de reflexión parcial e incidencia oblicua es transcendental, puesto que supone que dentro de la escala temporal de la onda larga existe un mecanismo natural de transporte longitudinal y transversal de sedimento que en el caso de ondas monocromáticas, es sólo posible, en presencia de rotura. Este mecanismo debería ser tenido en cuenta tanto:

- en el diseño y en las estrategias de dragado de canales de acceso en la proximidad de estructuras de abrigo reflejantes.
- en la definición de las escalas temporales de movilidad y/o migración de las formas de lecho de pequeña y gran escala

2.11.4 Efectos morfodinámicos inducidos por el tensor de radiación tangencial de grupos regulares

Numerosos autores han puesto de manifiesto que la variación espacial del tensor de radiación tangencial es un mecanismo forzador de ondas infragravitatorias en la zona de rotura (*Bowen, 1984; Schäffer, 1990; Schäffer & Jonsson (1990); Symond et al. (1983)*); corrientes longitudinales (*Longuet-Higgins & Stewart (1962,1963)*) y corrientes de retorno (*Bowen, 1984; Losada, 1984*). Los resultados obtenidos para el caso de grupos regulares, sugieren que estas teorías deben ser revisadas en el caso de ondas gravitatorias moduladas. A continuación se discuten algunos de los nuevos efectos morfodinámicos encontrados.

Mecanismos generadores de ondas infragravitatorias inducidos por grupos regulares parcialmente reflejados

Schäffer & Jonsson (1990) y *Schäffer* (1993) dieron una formulación para la generación de ondas infragravitatorias a partir de las oscilaciones de la línea de rotura y grupos progresivos. Para ello, incluyeron la variabilidad espacial y temporal de segundo orden del tensor de radiación tangencial inducida por grupos regulares progresivos en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento promediada. Sin embargo, en esta formulación no se ha tenido en cuenta la posible influencia del término de interacción en caso de grupos parcialmente reflejados.

La presencia de este término introduce oscilaciones adicionales de escala corta y larga en la posición de la línea de rotura. La relativa importancia de estas oscilaciones dependerá de la importancia de la reflexión. La relación entre el número de Iribarren number y el coeficiente de reflexión ha sido analizada experimentalmente por *Battjes* (1974). *Baquerizo & Losada* (1998) mostraron también que para pendientes del orden 1 : 20, la reflexión inducida por la batimetría puede llegar a ser el 20% del oleaje incidente. Estos datos indican que la influencia del término de interacción debería ser tenido en cuenta en la generación de ondas largas por movimiento de la línea de rotura.

Corrientes longitudinales inducidas por grupos regulares

Longuet-Higgins and Stewart (1962,1963) probó que las variaciones espaciales del nivel medio y del tensor de radiación tangencial en la zona de rotura y para oleaje con incidencia oblicua pueden dar lugar a corrientes longitudinales significativas (*Losada*, 1982).

En el caso de ondas gravitatorias moduladas, la estructura del tensor de radiación tangencial obtenida (*Eq.2.138*) en el régimen estacionario, muestra que $\frac{\partial \overline{S_{xy}^T}}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial \overline{S_{xy}^T}}{\partial X_1} = 0$, y por lo tanto de acuerdo a las ecuaciones promediadas de la cantidad de movimiento horizontal y de conservación de masa, frente a costas longitudinalmente uniformes no constituye un mecanismo generador de corriente longitudinal fuera de la zona de rotura ni al orden $O(\epsilon)^2$ ni $O(\epsilon)^3$. En el caso de que exista algún tipo de no uniformidad de orden ϵ^2 en: **(1)** el coeficiente de reflexión $C_R(X_2, Y_2; \dots)$; **(2)** del parámetro $\gamma(X_2, Y_2; \dots)$; o **(3)** de la amplitud $a(X_2, Y_2; \dots)$ en el caso de grupos irregulares, sería posible obtener un mecanismo generador de transporte longitudinal en ausencia de rotura. Dicho mecanismo sería, como mucho, de orden $O(\epsilon)^4$. Mecanismos generadores asociados a irregularidades de orden ϵ^0 o ϵ , sólo son posibles en la proximidad de estructuras finitas y están asociados a los fe-

nómenos de radiación y difracción. La estructura de la corriente longitudinal en la proximidad de una estructura finita y simétrica (ej. acantilado) ha sido analizada en función de la relación entre la longitud de onda del grupo y de la estructura por *Sánchez & Losada* (2004c).

Sin embargo en el régimen débilmente no estacionario, la estructura del tensor de radiación encontrada (tanto en el caso progresivo como en el parcialmente estacionario) para grupos regulares muestra que $\frac{\partial S_{xy}^T}{\partial X_1} \neq 0$, periódica en el tiempo con periodicidad $T_g/2$. y espacialmente modulada en las escalas de onda cotra y del grupo. En consecuencia., constituye un mecanismo generador de corrientes longitudinales débilmente no estacionarias fuera de la zona de rotura y en el rango de profundidades intermedias. El orden de magnitud de este mecanismo es $O(\epsilon)^3$. Su efectividad para el transporte de sedimento dependerá de la variabilidad espacial y temporal de los perfiles verticales de concentración de sedimento.

2.12 Conclusiones

En este *Capítulo* se ha analizado la hidrodinámica inducida por ondas gravitatorias moduladas parcialmente reflejadas en el dominio no viscoso del fluido, asumiendo fondo plano y en ausencia de pérdidas de energía significativas. Para ello, se ha propuesto un modelo analítico basado en la teoría de Stokes y en la formulación de *Schäffer's* (1990) para trenes modulados. En el modelo, el parámetro de Stokes y el cociente entre el periodo de la onda corta y el periodo de las modulaciones de larga escala se han supuesto pequeños y del mismo orden.

Utilizando la técnica WKB, se ha obtenido el potencial de velocidades de grupos regulares progresivos y parcialmente reflejados hasta segundo orden en el parámetro de modulación. Para ello se ha considerado un dominio rectangular limitado lateralmente por un contorno vertical, impermeable, uniforme e infinito. Dicho contorno puede representar cualquiera de las estructuras reflejantes que es posible encontrar en profundidades intermedias ya sean naturales (ejm. acantilados) o hechas por el hombre (ejm. diques). En la solución se incluyen las siguientes contribuciones: (1) la onda corta; (2) el grupo; (3) la onda larga vinculada (incidente y reflejada); y, (4) la onda larga libre que resulta de la reflexión del grupo.

A partir del análisis de las escalas de tiempo 'naturales' de las ondas gravitatorias moduladas, se ha definido un operador de promedio temporal de orden n , donde n representa el orden de la escala de promedio. A partir de este operador, y en función del orden elegido y del número total de escalas de onda larga presentes en el problema, se han encontrado dos posibles regímenes oscilatorios para la descripción de las cantidades hidrodinámicas promediadas en la región exterior: (1) el *régimen débilmente no estacionario*; y, (2) el *régimen estacionario*.

Si la cantidad promediada es no lineal, en su estructura aparece un término de interacción entre las contribuciones de primer orden de los trenes modulados incidente y progresivo. Este término puede contribuir de forma neta en los regímenes débilmente no estacionario y estacionario de las cantidades promediadas en la fase. En el *régimen débilmente no estacionario*, puede introducir modulaciones espaciales y variaciones temporales de escala de onda corta y del grupo. En el *régimen estacionario*, el término de interacción contribuye, para el dominio considerado, mediante la modulación (en la escala de onda corta y del grupo) en dirección normal a la estructura de la cantidad promediada.

Por otra parte, que hasta el orden considerado, las ondas largas vinculadas (incidente y reflejada) y la onda libre, sólo pueden dar contribuciones netas en el *régimen débilmente no estacionario*. Su presencia induce nue-

vas escalas de modulación espacial en la cantidad promediada, modulaciones que son independientes de la profundidad. En profundidades intermedias, en función de la relación kh , el ángulo de incidencia y el periodo del grupo, dicha modulación puede llegar a ser del orden de Kms .

A partir de la formulación propuesta se ha analizado la estructura espacial y temporal de las siguientes cantidades promediadas en la fase: velocidades, nivel medio y presión. Además se han estudiado las siguientes cantidades integradas en profundidad: flujos de masa, momento y energía, y tensores de radiación. En el análisis se han considerado grupos regulares progresivos y parcialmente reflejados. De los resultados obtenidos, se ha concluido que:

- En el régimen débilmente no estacionario, el campo de velocidades euleriano horizontal está espacialmente modulado en: (1) la escala del grupo; y (2) en la escala inducida por la interacción entre las ondas largas vinculadas y la onda larga libre. Dichas modulaciones aparecen en las condiciones de continuidad del flujo entre la región exterior y la capa límite. Por tanto, es de esperar que contribuyan de algún modo a los procesos sedimentarios y morfológicos inducidos por la hidrodinámica de la capa límite. Este es el objeto del siguiente *Capítulo*.
- En el régimen estacionario, el campo de presiones promediado en el tiempo y en el espacio está modulado, en las escalas de onda corta y del grupo, en la dirección normal a la estructura reflejante debido a la contribución del término de interacción entre los trenes incidente y reflejado de primer orden y constante en el tiempo. Esta solución permite confirmar la teoría de *Longuet-Higgins* (1950) en relación a la posible generación de microseismos debido a la presencia de ondas parcialmente estacionarias de pequeña amplitud. En el caso de grupos regulares, la carga dinámica del suelo es proporcional a dos veces la frecuencia de la onda corta y a dos veces la frecuencia del grupo.
- En el caso del tensor de radiación tangencial, se ha demostrado que el término de interacción da lugar a una contribución nula. Por tanto, en el régimen estacionario el tensor de radiación tangencial es una magnitud constante y uniforme. Sin embargo, en el régimen débilmente no estacionario, es una cantidad dependiente del tiempo en la escala del grupo y modulada en las escalas de onda corta y de onda larga. Dichas modulaciones, dan lugar a la posible generación de corrientes longitudinales en ausencia de rotura.

Como conclusión general de los resultados obtenidos puede decirse que la escala elegida para la definición del promedio espacial o temporal de las

magnitudes hidrodinámicas inducidas por ondas gravitatorias moduladas, determina los procesos morfodinámicos observados en la región exterior.

Aunque la aproximación de profundidad constante es admisible en el rango de profundidades intermedias (pendientes típicas de la plataforma continental costera son 1 : 20 a 1 : 50) y en la proximidad de estructuras portuarias, y aunque las soluciones analíticas permiten un análisis detallado de problema en geometrías sencillas; desde el punto de vista ingenieril, es imprescindible la resolución de casos con profundidad variable y geometrías complejas. Esto requiere la utilización de métodos numéricos.

Como primera aproximación a la modelación numérica de trenes gravitatorios modulados y su interacción con estructuras reflejantes, se ha implementado mediante el método de elementos finitos un modelo de propagación basado en la ecuación de pendiente suave modificada M-MSP (*Dingenmans*, 1997) para oleaje monocromático. Además, se han investigado distintas técnicas para mejorar la eficiencia en la resolución de sistemas mal condicionados (típicamente asociados a problemas de propagación de oleaje de muy corto periodo) y/o con un gran número de grados de libertad.

En particular, se han analizado las siguientes vías para mejorar la eficiencia numérica de la ecuación M-MSP,

- El uso de 'técnicas sin malla' basadas en el método de partición de la unidad para problemas de difracción de oleaje de muy corto periodo.
- Distintos solvers indirectos y técnicas para garantizar y acelerar la convergencia a la solución.

Los fundamentos del modelo M-MSP, su implementación numérica y los resultados obtenidos en relación a la mejora de la eficiencia numérica de su solución se describen en el *Apéndice E*. En el *Capítulo 5*, se apunta la inclusión de términos de onda larga en el modelo M-MSP como línea de investigación futura.



Capítulo 3

Hidrodinámica de capa límite inducida por trenes de onda modulados

3.1 Introducción

En este *Capítulo* se presenta un modelo analítico de capa límite para la descripción de la hidrodinámica inducida en la capa límite de fondo por las ondas gravitatorias moduladas progresivas y parcialmente reflejadas con incidencia oblicua.

A partir de la solución del campo de velocidades euleriano hasta segundo orden en el parámetro de modulación, se calculan los regímenes débilmente no estacionario y estacionario de la velocidad de transporte de masa y del 'streaming'. A partir de su estructura espacial y temporal, se discuten: (1) los modos de transporte en suspensión y por fondo inducidos por los grupos regulares; (2) los patrones de transporte de sedimento iniciales inducidos; y, (3) la caracterización en planta de las formas de lecho inducidas.

El *Capítulo* se ha organizado como sigue. En primer lugar se establecen las ecuaciones de gobierno de la capa límite y se describe el modelo de viscosidad de remolino utilizado para su resolución. Utilizando la técnica JWKB, se han calculado las expresiones analíticas del campo de velocidades euleriano hasta segundo orden en el parámetro de modulación. Los detalles del cálculo se describen en el *Apéndice C*. Aquí, se describen brevemente las principales expresiones.

A partir del campo de velocidades euleriano se calcula la estructura espacial y temporal del 'streaming' y la velocidad de transporte de masa y se discuten los principales procesos morfodinámicos inducidos.

3.2 Ecuaciones de gobierno de WBL

Sean (u, v, w) las componentes x, y y z del campo euleriano de velocidades de la capa límite, (x, y) las coordenadas horizontales y $z = z' - h$ la coordenada vertical. Las ecuaciones de gobierno de la capa límite son,

(1) la aproximación de capa límite de las ecuaciones de conservación del momento horizontal,

$$u_t + uu_x + vv_y + ww_z = -\frac{1}{\rho}P_{d,x} + \left(\frac{\tau_{zx}}{\rho}\right)_z \quad (3.1)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + ww_z = -\frac{1}{\rho}P_{d,y} + \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho}\right)_z - g \quad (3.2)$$

donde: P_d es la presión dinámica en $z' = h$; τ_{zx} y τ_{xy} son, respectivamente, los tensores de Reynolds en la dirección x e y ; y ρ representa la densidad del fluido, que aquí se ha considerado constante.

(2) la ecuación de conservación de masa

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (3.3)$$

Los subíndices indican la derivación.

Las condiciones de contorno impuestas son:

(1) no deslizamiento en el fondo, i.e.

$$(u, v, w) = (0, 0, 0) \quad \text{en } z' = -h \quad (3.4)$$

(2) continuidad de flujo entre el borde superior de la capa límite de fondo y la región exterior, impuesta a través de la siguiente condición

$$u = u_\infty \quad \text{para } z \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

$$v = v_\infty \quad \text{para } z \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

donde $(u_\infty, v_\infty) = (U, V)$ representan el campo de velocidades horizontales en la región exterior.

El tensor de Reynolds τ_{iz} (con $i = x$ e y) se ha definido como:

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \nu u_z^i \quad (3.7)$$

donde $u^i = (u, v)$. Para la resolución analítica del modelo de capa límite, y de forma similar a la región no viscosa, el campo de velocidades se ha expandido en serie del parámetro de modulación $\epsilon = O(\delta k)$.

$$u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + O(\epsilon^3) \quad (3.8)$$

$$w = \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + O(\epsilon^3) \quad (3.9)$$

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + O(\epsilon^3) \quad (3.10)$$

$$\tau_{zx} = \epsilon \tau_{zx,1} + \epsilon^2 \tau_{zx,2} + O(\epsilon^3) \quad (3.11)$$

Aplicando las reglas de derivación de la técnica JWKB se obtiene que a primer orden,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{zx,1}}{\rho} \right) \quad (3.13)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (3.14)$$

$$u_1 \rightarrow (u_\infty)_1 \quad \text{at } z \rightarrow -h + \delta_1 \quad (3.15)$$

$$w_1 = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (3.16)$$

Al segundo orden,,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = -\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial T_1} \right) + u_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{zx,2}}{\rho} \right) \quad (3.18)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (3.19)$$

$$u_2 \rightarrow (u_\infty)_2 \quad \text{at } z \rightarrow -h + \delta_2 \quad (3.20)$$

$$w_2 = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (3.21)$$

El problema puede ser resuelto de forma secuencial empezando con el problema de orden ϵ^1 y observando que la presión y la potencial de velocidades de la región exterior tienen, en el caso más general, la siguiente estructura:

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \sum_{m=-n}^{m=n} p_{n,m}(z, X_1, Y_1, T_1, \dots) \exp[im(k_x x + k_y y - \omega t)] \quad (3.22)$$

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \sum_{m=-n}^{m=n} \Phi_{n,m}(z, X_1, Y_1, T_1, \dots) \exp[im(k_x x + k_y y - \omega t)] \quad (3.23)$$

Los detalles del cálculo se describen en el *Apéndice C*.

3.2.1 Modelo laminar de viscosidad de remolino

El tensor de Reynolds se define en el caso laminar como,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{zx,n,m}}{\rho} \right) \simeq \nu_{n,m} \frac{\partial^2 u_{n,m}}{\partial z^2} \quad (3.24)$$

donde $\nu_{n,m}$ son los términos constantes que resultan de la expansión en términos del parámetro de modulación de la viscosidad de remolino ν ,

$$\nu = \epsilon \nu_1 + \epsilon^2 \nu_2 + \dots \quad (3.25)$$

con:

$$\nu_1 = \nu_{10} + \{\nu_{11} \exp(i\varphi) + c.c.\} \quad (3.26)$$

y

$$\nu_2 = \nu_{20} + \{\nu_{21} \exp(i\varphi) + c.c.\} + \{\nu_{22} \exp(2i\varphi) + c.c.\} \quad (3.27)$$

3.2.2 Modelo turbulento de velocidad de remolino

En el caso turbulento,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{zx,n,m}}{\rho} \right) \simeq \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_{n,m}^{GM} \frac{\partial u_{n,m}}{\partial z} \right) \quad (3.28)$$

donde, ahora, $\nu_{n,m}^{GM}$ son términos dependientes de la profundidad represents. En el caso de un modelo de viscosidad de tipo Grant-Madsen, estos términos tienen la siguiente estructura;

$$\nu_{n,m}^{GM} = \kappa U_{f,\max,n,m} z = \nu_{n,m}^0 z \quad (3.29)$$

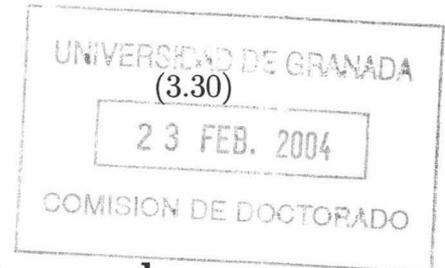
donde:

- κ es la constante de Karman;
- $U_{f,\max,n,m} = \sqrt{\tau_{\max,n,m}/\rho}$ con $\tau_{\max,n,m}$ igual a la máxima tensión de fondo relacionada con el término (n, m) de la velocidad mediante el coeficiente de fricción f_w como $\tau_{\max,n,m} = \frac{1}{2} \rho f_w \tilde{u}_{n,m}^2$ donde $\tilde{u}_{n,m}^2$ representa la máxima velocidad local en el límite superior de la capa límite. En el caso de trenes modulados, $\tilde{u}_{n,m} = \tilde{u}_{n,m}(X_1, T_1, X_2, T_2)$.

El modelo de Grant-Madsen puede considerarse una aproximación lineal del perfil parabólico de la viscosidad de remolino de *Fredsoe* (1984). El coeficiente f_w puede calcularse mediante alguno de los modelos empíricos existentes (ejm. Carlsen-Johnsson) en función del periodo de la onda corta T ,

$$f_w = 0.04 * \left(\frac{a}{k_N} \right)^{-1/4}$$

donde: $a = \frac{u_{1m} T}{2\pi}$ y k_N es el número de Nikuradse.



3.3 Hidrodinámica de la capa límite en el caso de un tren monocromático de ondas gravitatorias

Con el fin de validar la solución obtenida y comparar después con el caso modulado, se presentan las siguientes magnitudes de la capa límite laminar de un tren monocromático de ondas: (1) flujo de momento; (2) 'streaming'; y, (3) la tensión tangencial.

Fuera de la capa límite de un tren de ondas monocromático,

$$u_\infty = A_h \cos(kx - \omega t) = A \cos \varphi \quad (3.31)$$

donde,

$$A_h = \frac{a\omega}{\sinh(kh)} = \frac{1}{c \sinh(kh)} ak \quad (3.32)$$

es la amplitud de la oscilación en el fondo de orden $O(ak)$.

$u_{1,1}$ representa la velocidad de primer orden en la capa límite y tiene la siguiente estructura,

$$u_{1,1} = A_h [\cos(\varphi) - \exp(-\frac{Z}{\delta}) \cos(\varphi - \frac{Z}{\delta})] \quad (3.33)$$

o de forma equivalente,

$$u_{1,1} = A_h \cos(\varphi) [1 - \exp(-\frac{Z}{\delta})] - A_h \exp(-\frac{Z}{\delta}) \sin(\varphi) \quad (3.34)$$

El primer término en el r.h.s. es la fase de la velocidad exterior. Este término contribuye al flujo de masa con una cantidad finita y positiva. El flujo integrado de masa inducido por este término dentro de la capa límite es,

$$M_q(x, t) = - \int_0^\infty A_h \exp(-\frac{Z}{\delta}) \sin(\varphi) dZ = \frac{1}{2} A_h \delta \sin(\varphi) \quad (3.35)$$

En consecuencia, M_q es nulo en la cresta ($\eta = a, \frac{d\eta}{d\varphi} = 0$) y en el valle ($\eta = -a, \frac{d\eta}{d\varphi} = 0$), máximo pero negativo en $\eta = 0, \frac{d\eta}{d\varphi} > 0$) y máximo pero positivo en $\eta = 0, \frac{d\eta}{d\varphi} < 0$. Esta estructura espacial del flujo de masa es compensada mediante un flujo vertical dentro de la capa límite. De la ecuación de conservación de masa se tiene,

$$w = \int_0^Z \frac{\partial w}{\partial Z} dZ = \int_0^Z (-\frac{\partial u}{\partial x}) dZ = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^Z u dZ \quad (3.36)$$

y en el límite superior de la capa límite, $w = w_\infty$ con,

$$w_\infty = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u dZ = -\frac{\partial M_q}{\partial x} = -\frac{1}{2} A_h k \delta \cos(\varphi) \quad (3.37)$$

por tanto, w_∞ está en fase con u_∞ y el promedio del flujo de momento es una cantidad no nula y negativa de orden, $O(k\delta) * O(ak)^2$,

$$\overline{u_\infty w_\infty} = (\overline{uw})_\infty = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_\infty w_\infty dt = -\frac{1}{4} A_h^2 k \delta \quad (3.38)$$

3.4 Hidrodinámica WBL para trenes de ondas modulados: velocidades instantáneas

3.4.1 Caso progresivo

En el caso de un tren progresivo, tenemos:

Solución $n = 1, m = \pm 1$

En el caso más general, la solución del problema es $u_{1,\pm 1} = (u_{1,\pm 1})_p + (u_{1,\pm 1})_r$,

$$u_{1,\pm 1} = (\tilde{u}_{1,\pm 1})_p \{1 - \exp(-Z\beta_{1,\pm 1})\} \exp(\pm i\varphi) \quad (3.39)$$

$$w_{1,\pm 1}(Z) = (\pm ik_x) \frac{(\tilde{u}_{1,\pm 1})_p}{\beta_{1,\pm 1}} \{ \exp(-Z\beta_{1,\pm 1}) - 1 \} \exp(\pm i\varphi) \quad (3.40)$$

donde $Z = z + h$, $\beta_{1,\pm 1} = \frac{(1 \pm i)}{\delta_{11}}$, $\delta_{11} = \sqrt{\frac{2\nu_{11}^{lam}}{\omega}}$ y

$$(\tilde{u}_{1,\pm 1})_p = (\pm ik_x) \left(\frac{\mp ig}{2\omega} \right) \frac{1}{\cosh(kh)} A_{1,\pm 1}(X_1, T_1, X_2, T_2) \quad (3.41)$$

con $A_{1,\pm 1}$ igual a las amplitudes de onda corta moduladas en las escalas del grupo.

3.4.2 Caso parcialmente estacionario

En el caso de incidencia oblicua y reflexión parcial,

$$u_1^T = u_1 + u_1^R \quad (3.42)$$

and

$$w_1^T = w_1 + w_1^R \quad (3.43)$$

Solución $n = 1, m = \pm 1$

Para el caso parcialmente reflejado, $u_{1,\pm 1}^R = (u_{1,\pm 1}^R)_p + (u_{1,\pm 1}^R)_r$,

$$u_{1,\pm 1}^R = (\tilde{u}_{1,\pm 1})_p \{1 - \exp(-Z\beta_{1,\pm 1})\} \exp(\pm i\varphi^R) \quad (3.44)$$

$$w_{1,\pm 1}^R(Z) = (\pm ik_x) \frac{(\tilde{u}_{1,\pm 1})_p}{\beta_{1,\pm 1}} \{ \exp(-Z\beta_{1,\pm 1}) - 1 \} \exp(\pm i\varphi^R) \quad (3.45)$$

donde:

$$(\tilde{u}_{1,\pm 1})_p = (\mp ik_x) \left(\frac{\mp ig}{2\omega} \right) \frac{1}{\cosh(kh)} B_{1,\pm 1}(X_1, T_1, X_2, T_2) \quad (3.46)$$

con $B_{1,\pm 1}$ igual a la amplitud de onda onda corta modulada del tren reflejado.

3.5 'Streaming' en WBL de trenes de onda modulados: escala de onda corta

3.5.1 Definición de 'Streaming'

La velocidad media (promediada en el periodo de onda corta) dentro de la capa límite debida a un movimiento oscilatorio no uniforme es llamada 'streaming'. Es una cantidad euleriana y aquí se denota por, $\overline{u_s}$. Depende de la distancia al fondo y debe cumplir la condición de continuidad de flujo en el límite superior de la capa límite.

El 'streaming' puede definirse a partir de la ecuación de conservación de momento,

$$\overline{(u_1 w_1)}_Z - \overline{(u_1 w_1)}_\infty = \overline{\tau_{zx,1}} \quad (3.47)$$

A partir de esta definición y teniendo en cuenta la estructura espacial del campo de velocidades descrita anteriormente, se tiene:

$$\overline{(uw)}_Z = \epsilon^2 \overline{(u_1 w_1)} + \epsilon^3 \overline{(u_1 w_2 + u_2 w_1)} + O(\epsilon)^4$$

Para el cálculo del 'streaming' hasta segundo orden en el parámetro de modulación se tienen en cuenta las siguientes expresiones: Eq.3.25, Eq.3.26, Eq.3.27. Entonces,

$$\begin{aligned} \overline{\nu \frac{\partial u_s}{\partial z}} &= \epsilon^2 \left\{ \overline{\nu_{10} \frac{\partial u_{s,10}}{\partial z}} + \overline{\nu_{11} \frac{\partial u_{s,1,-1}}{\partial z}} + \overline{\nu_{1,-1} \frac{\partial u_{s,1,1}}{\partial z}} \right\} + \\ &\epsilon^3 \left\{ \overline{\nu_{10} \frac{\partial u_{s,20}}{\partial z}} + \overline{\nu_{20} \frac{\partial u_{s,10}}{\partial z}} + \overline{\nu_{11} \frac{\partial u_{s,2,-1}}{\partial z}} + \overline{\nu_{1,-1} \frac{\partial u_{s,2,1}}{\partial z}} + \overline{\nu_{21} \frac{\partial u_{s,1,-1}}{\partial z}} + \overline{\nu_{2,-1} \frac{\partial u_{s,1,1}}{\partial z}} \right\} + \\ &O(\epsilon)^4 \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que,

$$u_S = \epsilon u_{S,1} + \epsilon^2 u_{S,2} + \dots \quad (3.49)$$

la ecuación de gobierno de segundo orden para el 'streaming' es,

$$\overline{(u_1 w_1)}_Z - \overline{(u_1 w_1)}_\infty = \nu_1 \overline{\frac{\partial u_{S,1}}{\partial z}} \quad (3.50)$$

3.5.2 Caso progresivo

Para el caso progresivo $\overline{(u_1 w_1)}$ puede escribirse como:

$$\overline{(u_1 w_1)} = \overline{(u_{10} w_{10})} + \overline{(u_{11} w_{1,-1})} + c.c. \quad (3.51)$$

las contribuciones de $\overline{(u_{11} w_{1,-1})}$ y $\overline{(u_{1,-1} w_{1,1})}$ son, respectivamente,

$$\left[\overline{(u_{11} w_{1,-1})} \right]_\infty^Z = \left(\frac{-ik_x}{\beta_{1,-1}} \right) \widehat{u}_{11} \widehat{u}_{1,-1} [g(Z) - g(\infty)] \quad (3.52)$$

and

$$\left[\overline{(u_{1,-1} w_{1,1})} \right]_\infty^Z = \left(\frac{ik_x}{\beta_{1,1}} \right) \widehat{u}_{11} \widehat{u}_{1,-1} [g(Z) - g(\infty)] \quad (3.53)$$

donde

$$g(Z) = - \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{2Z}{\delta_{11}}\right) - 2 \exp\left(-\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \cos\left(\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \right\} \quad (3.54)$$

y

$$g(Z) - g(\infty) = - \exp\left(-\frac{2Z}{\delta_{11}}\right) + 2 \exp\left(-\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \cos\left(\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \quad (3.55)$$

De los resultados anteriores, se obtiene que la expresión de tensor tangencial promediado en la escala de onda corta para una viscosidad de remolino de tipo laminar es,

$$\overline{\tau_{zx,1}} = \left[\overline{(u_{10} w_{10})} \right]_\infty^Z - k_x \delta_{11} \widehat{u}_{11} \widehat{u}_{1,-1} \left\{ \exp\left(-\frac{2Z}{\delta_{11}}\right) - 2 \exp\left(-\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \cos\left(\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \right\} \quad (3.56)$$

A partir de esta solución, la ecuación de gobierno del 'streaming' (Eq.3.26) puede dividirse de la forma siguiente:

$$\overline{\nu_{10} \frac{\partial u_{S,10}}{\partial z}} = \left[\overline{(u_{10} w_{10})} \right]_{\infty}^Z \quad (3.57)$$

$$\overline{\nu_{11} \frac{\partial u_{S,1,-1}}{\partial z}} + \overline{\nu_{1,-1} \frac{\partial u_{S,1,1}}{\partial z}} = -k_x \delta_{11} \widehat{u_{11}} \widehat{u_{1,-1}} \left\{ \exp\left(-\frac{2Z}{\delta_{11}}\right) - 2 \exp\left(-\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \cos\left(\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \right\} \quad (3.58)$$

Asumiendo que, $\nu_{11} = \nu_{1,-1} = \nu_{11}^{lam}$, se tiene:

$$\overline{\nu_{11} \frac{\partial u_{S,1,-1}}{\partial z}} + \overline{\nu_{1,-1} \frac{\partial u_{S,1,1}}{\partial z}} = \nu_{11}^{lam} \overline{\frac{\partial (u_{S,1,-1} + u_{S,1,1})}{\partial z}} = 2\nu_{11}^{lam} \frac{\partial [\text{Re}(u_{S,1,1})]}{\partial z} \quad (3.59)$$

Y finalmente,

$$\text{Re}(u_{S,1,1}) = \left(\frac{k_x \delta_{11}^2}{4\nu_{11}^{lam}} \right) \widehat{u_{11}} \widehat{u_{1,-1}} \left[\exp\left(-\frac{2Z}{\delta_{11}}\right) - 2 \exp\left(-\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \left\{ \cos\left(\frac{Z}{\delta_{11}}\right) - \sin\left(\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \right\} \right] \quad (3.60)$$

donde,

$$\begin{aligned} G(Z) &= \int_0^Z [g(Z') - g(\infty)] dZ' \\ &= \left(\frac{\delta_{11}}{2} \right) \left[\exp\left(-\frac{2Z}{\delta_{11}}\right) - 2 \exp\left(-\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \left\{ \cos\left(\frac{Z}{\delta_{11}}\right) - \sin\left(\frac{Z}{\delta_{11}}\right) \right\} \right] \quad (3.61) \end{aligned}$$

y

$$\widehat{u_{11}} \widehat{u_{1,-1}} = \left(\frac{k_x g}{2\omega} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2(kh)} |A_{11}|^2 \quad (3.62)$$

Téngase en cuenta que,

$$|A_{11}|^2 = a^2 \{ 1 + \gamma^2 + \gamma [\exp(i\varphi_g) + \exp(-i\varphi_g)] \} \quad (3.63)$$

De los resultados obtenidos se tiene que, en el caso progresivo y con viscosidad laminar, la estructura vertical del régimen débilmente no estacionario

del 'streaming' es resultado de la superposición lineal de dos funciones exponenciales decrecientes en función de Z . Los coeficientes de decrecimiento son respectivamente, $z_0 = \delta_{11}/2$ y $z_0 = \delta_{11}$. Además, es resultado de la suma de un término constante, proporcional a $(1 + |\gamma|^2)$, y un término modulado por la fase del grupo φ_g .

Por otro lado, y por simetría,

$$\operatorname{Re}(u_{S,1,\pm 1}) = \operatorname{Im}(u_{S,1,\pm 1}) \quad (3.64)$$

En el régimen estacionario, el 'streaming' en el caso progresivo es una cantidad constante.

3.5.3 Caso parcialmente reflejado

En este caso, teniendo en cuenta que $u_1^T = u_1 + u_1^R$ and $w_1^T = w_1 + w_1^R$, podemos escribir

$$u_S = \epsilon (u_{S,1} + u_{S,1}^R) + \epsilon^2 (u_{S,2} + u_{S,2}^R + u_{S,2}^{IR}) + \dots \quad (3.65)$$

donde:

$$\operatorname{Re}(u_{S,1,1}^R) = \overline{(u_1^R w_1^R)} \quad (3.66)$$

y

$$u_{S,2}^{IR} = \overline{(u_1 w_1^R)} + \overline{(u_1^R w_1)} \quad (3.67)$$

Después de un poco de álgebra, se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u_{S,1,1}^R) &= \overline{(u_1^R w_1^R)} \\ &= \left(\frac{-k_x \delta_{11}}{2\nu_{11}^{lam}} \right) \left(\frac{k_x g}{2\omega} \right)^2 \frac{K_R^2}{\cosh^2(kh)} B_{11} B_{1,-1} G(Z) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\operatorname{Re}(u_{S,1,1}^{IR}) = -\frac{1}{2} \frac{ik_x \delta_{11}}{\nu_{11}^{lam}} M_{IR}(x, X_1, T_1) G(Z) \quad (3.69)$$

y

$$M_{IR}(x, X_1, T_1) = \frac{1}{\cosh^2(kh)} \left(\frac{k_x g}{2\omega} \right)^2 \{A_{11} B_{1,-1} \exp(2ik_x x) - A_{1,-1} B_{1,1} \exp(-2ik_x x)\} \quad (3.70)$$

Por lo tanto, en el caso parcialmente reflejado y con viscosidad de remolino de tipo laminar, se tiene que la estructura vertical del 'streaming' en el régimen débilmente no estacionario es similar a la encontrada en el caso progresivo. La presencia de términos de interacción entre el oleaje incidente y reflejado introduce la modulación en las escalas de onda corta y del grupo del 'streaming' en la dirección normal a la estructura.

En el régimen estacionario, la estructura del 'streaming' es, en el caso progresivo:

$$\operatorname{Re}(\widetilde{u_{S,1,1}}) = \left(\frac{k_x \delta_{11}}{2\nu_{11}^{lam}} \right) \left(\frac{k_x g}{2\omega} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2(kh)} \widetilde{A_{11} A_{1,-1}} G(Z) \quad (3.71)$$

y en el caso parcialmente reflejado,

$$\widetilde{u_S} = \epsilon \left(\widetilde{u_{S,1}} + \widetilde{u_{S,1}^R} \right) + \epsilon^2 \left(\widetilde{u_{S,2}} + \widetilde{u_{S,2}^R} + \widetilde{u_{S,2}^{IR}} \right) + \dots \quad (3.72)$$

donde

$$\operatorname{Re}(\widetilde{u_{S,1,1}^R}) = \left(\frac{-k_x \delta_{11}}{2\nu_{11}^{lam}} \right) \left(\frac{k_x g}{2\omega} \right)^2 \frac{K_R^2}{\cosh^2(kh)} \widetilde{B_{11} B_{1,-1}} G(Z) \quad (3.73)$$

y

$$\operatorname{Re}(\widetilde{u_{S,1,1}^{IR}}) = \frac{-1}{\cosh^2(kh)} \left(\frac{ik_x \delta_{11}}{2\nu_{11}^{lam}} \right) \left(\frac{k_x g}{2\omega} \right)^2 K_R M_G(x, X_1) G(Z) \quad (3.74)$$

con

$$M_G(x, X_1) = \left\{ \widetilde{A_{11} B_{11}^*} \exp(2ik_x x) - \widetilde{A_{1,-1} B_{1,1}} \exp(-2ik_x x) \right\} \quad (3.75)$$

Por lo que en el régimen estacionario y para el caso parcialmente reflejado, el 'streaming' es una cantidad estacionaria, uniforme en dirección paralela a la estructura y modulada en la dirección normal. De acuerdo a la estructura de las cantidades no lineales, dicha modulación es proporcional a la semilongitud de la onda corta, a la semilongitud del grupo y al coseno del ángulo de incidencia. say:

3.6 Velocidad de transporte de masa lagrangiana en ondas gravitatorias moduladas

3.6.1 Definición de velocidad de transporte de masa

Una partícula en la capa límite de fondo con posición media (x_0, Z) describe una trayectoria cuasi cerrada puesto que su velocidad instantánea $(x_0 + \Delta x, Z + \Delta Z)$ es infinitesimalmente diferente que la velocidad en la posición media (x_0, Z) . La diferencia entre ambas velocidades, $u(x_0 + \Delta x, Z + \Delta Z) - u(x_0, Z) = \Delta u$ puede expresarse como,

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial Z} \Delta Z \quad (3.76)$$

y teniendo en cuenta que,

$$\Delta x = \int u dt \quad \Delta Z = \int w dt \quad (3.77)$$

la diferencia entre ambas velocidades es,

$$u(x_0 + \Delta x, Z + \Delta Z) - u(x_0, Z) = \frac{\partial u}{\partial x} \int u dt + \frac{\partial u}{\partial Z} \int w dt \quad (3.78)$$

La velocidad de transporte de masa, U_M es la velocidad media de una partícula del fluido sobre un ciclo. Matemáticamente,

$$U_M(x_0, Z) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(x_0 + \Delta x, Z + \Delta Z) = \overline{u(x_0, Z)} + \overline{\frac{\partial u}{\partial x} \int u dt} + \overline{\frac{\partial u}{\partial Z} \int w dt} \quad (3.79)$$

En el fondo, $Z = 0$, $U_M(x_0, Z = 0) = 0$ y el gradiente de la velocidad de transporte de masa es,

$$\frac{\partial U_M(x_0, Z = 0)}{\partial Z} = \frac{\overline{\frac{\partial u(x_0, Z = 0)}{\partial Z}}}{\partial Z} \quad (3.80)$$

pero $\frac{\partial u(x_0, Z=0)}{\partial Z} > 0$, de modo que U_M must be positive close to the bottom that is in the direction of wave propagation. At other levels the contribution of the advective terms are not negligible.

En el caso de ondas gravitatorias moduladas, $u = u(x_0, Z, X_1, T_1, \dots)$, por lo que la diferencia entre las velocidades instantáneas a lo largo de la trayectoria de una partícula es función de las escalas largas del problema,

$$\Delta u = \Delta u(x_0, Z, X_1, T_1, \dots) = \frac{\partial u_1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_1}{\partial Z} (\Delta Z)_1 + \epsilon \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \Delta X_1 \right] + \frac{\partial u_2}{\partial Z} (\Delta Z)_2 + O(\epsilon^4) \quad (3.81)$$

$$\Delta x = \int u_1 dt \quad (\Delta Z)_1 = \int w_1 dt \quad (3.82)$$

$$\Delta X_1 = \int u_2 dt \quad (\Delta Z)_2 = \int w_2 dt \quad (3.83)$$

Aplicando la técnica JWKB,

$$\begin{aligned} \Delta u_{1,m} &= \Delta u(x_0, Z, X_1, T_1, \dots) \\ &= \frac{\partial u_{1,m}}{\partial x} \Delta x_{1,m} + \frac{\partial u_{1,m}}{\partial Z} (\Delta Z)_{1,m} + \epsilon \left[\frac{\partial u_{1,m}}{\partial X_1} \Delta X_{1,m} \right] + \frac{\partial u_{2,m}}{\partial Z} (\Delta Z)_{2,m} + O(\epsilon^4) \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\Delta x_{1,m} = \int u_{1,m} dt \quad (\Delta Z)_{1,m} = \int w_{1,m} dt \quad (3.85)$$

$$\Delta X_{1,m} = \int u_{2,m} dt \quad (\Delta Z)_{2,m} = \int w_{2,m} dt \quad (3.86)$$

Para orden $O(\epsilon^2)$

$$\Delta u_{1,m} = \Delta u(x_0, Z, X_1, T_1, \dots) = \frac{\partial u_{1,m}}{\partial x} \Delta x_{1,m} + \frac{\partial u_{1,m}}{\partial Z} (\Delta Z)_{1,m}; \quad m = -1, 0, 1 \quad (3.87)$$

$$\Delta x_{1,m} = \int u_{1,m} dt \quad (\Delta Z)_{1,m} = \int w_{1,m} dt; \quad m = -1, 0, 1 \quad (3.88)$$

La velocidad de transporte de masa durante un periodo de la onda corta (régimen débilmente no estacionario) es,

$$U_{M,1}(x_0, Z, X_1, T_1) = \overline{u_{1,m}(x_0, Z, X_1, T_1)} + \frac{\partial \overline{u_{1,m}}}{\partial x} \Delta x_{1,m} + \frac{\partial \overline{u_{1,m}}}{\partial Z} (\Delta Z)_{1,m}; \quad m = -1, 1 \quad (3.89)$$

que es una cantidad modulada.

En la escala de onda larga (régimen estacionario), la velocidad de transporte de masa puede expresarse como,

$$U_1(\widetilde{x_0, Z}) = \overline{u_{1,m}(x_0, Z, X_1, T_1)} + \frac{\overline{\partial u_{1,m}}}{\partial x} \Delta x_{1,m} + \frac{\overline{\partial u_{1,m}}}{\partial Z} (\Delta Z)_{1,m}; \quad m = -1, 0, 1 \quad (3.90)$$

que es una cantidad real con la siguiente estructura

$$U_M = \overline{u_2} + \frac{\overline{\partial u_1}}{\partial x} \int u_1 dt + \frac{\overline{\partial u_1}}{\partial x} \int w_1 dt \quad (3.91)$$

$$U_M = \overline{u_2} + \widehat{u_{11}} \widehat{u_{1,-1}} \left[\left(\frac{2k_x}{\omega} \right) g_1(Z) - \left(\frac{k_x}{\omega} \right) g_2(Z) \right] \quad (3.92)$$

3.6.2 Procesos morfodinámicos inducidos por ondas gravitatorias moduladas en la capa límite

Puesto que el término forzador de la hidrodinámica de la capa límite es el potencial de velocidades de la región exterior en $z=-h$, la estructura espacial horizontal de las formas de lecho del fondo estará determinada por las escalas presentes en la hidrodinámica de la región exterior. Estas escalas han sido analizadas en el *Capítulo 2*. Aquí, se analiza la estructura vertical de los flujos medios en la capa límite y sus posibles efectos en el transporte de sedimento.

In *Fig.3.1*, we show the vertical structure of the short wave scale shear stress and the second order streaming velocity for a partially standing ($K_R = 1$) modulated gravity wave as function of the value of the constant eddy viscosity ν . In the figure $t = 0$. El resultado muestra que el signo de cada una de ellas a la capa límite permanece constante para todos los valores de viscosidad considerados.

En la *Fig.3.2* se muestran los perfiles de velocidad en la escala de onda corta y para las mismas condiciones de propagación y viscosidad de los términos:

- término incidente de la velocidad de transporte potencial de masa (arriba)

- término de interacción de la velocidad de transporte potencial de masa (abajo)

En la figura se puede observar que el signo de la amplitud del término incidente de la velocidad de masa, al igual que la tensión tangencial y el streaming, es constante en toda la capa límite. Por lo tanto, en el caso progresivo, el transporte de masa para los casos de tamaño de grano grueso (transporte dominante por fondo) y fino (transporte dominante por suspensión) tiene el mismo sentido.

Sin embargo, el término de interacción de la velocidad de masa introduce un comportamiento diferencial entre ambos tipos de transporte debido al cambio de signo a lo largo de la capa límite.

En las figuras *Fig.3.3* y *Fig.3.4* se muestran, respectivamente, la evolución temporal del perfil vertical del streaming, de la tensión tangencial y de la velocidad de transporte de masa. De estas gráficas se puede deducir que:

- la modulación del tren de ondas gravitatorio induce un comportamiento cuasiestacionario con periodicidad $T_g/2$ en el perfil de velocidades del streaming y la tensión tangencial. La amplitud de esta modulación es proporcional al parámetro γ
- En el caso de la velocidad del transporte de masa, se observa que también es una magnitud cuasiestacionaria con periodicidad $T_g/2$ y amplitud modulada por el parámetro γ .

De estas figuras también puede concluirse que en la escala de onda larga

- el streaming induce un flujo neto estacionario en la dirección de propagación de la onda y de signo constante a lo largo de la capa límite. Por lo que, de nuevo, el transporte neto inducido es similar en los casos de transporte por fondo y en suspensión.
- la velocidad de transporte de masa en la escala de onda larga es también estacionaria y su sentido depende de la distancia al fondo y por tanto será distinto en función de la distribución vertical del sedimento.

Integrado en vertical, el flujo medio por unidad de area inducido por la velocidad de transporte de masa es menor que el inducido por el streaming.

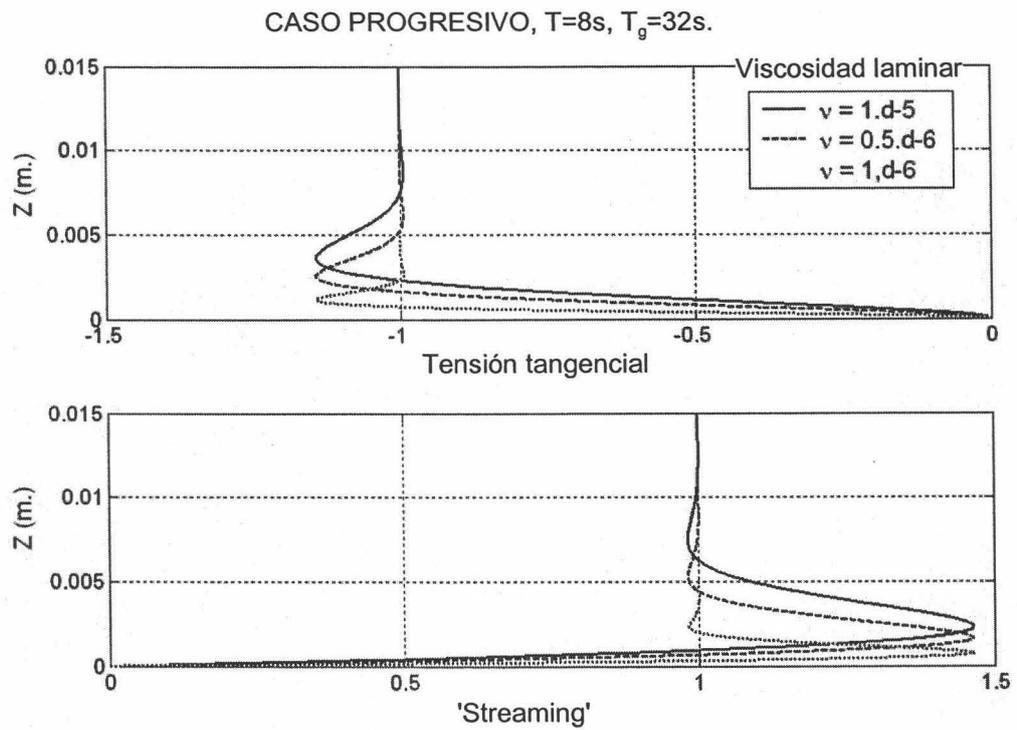


Figura 3.1: Perfil vertical en función del parámetro de viscosidad lamina del: (1) 'streaming'; y, (2) tensión tangencial. Caso progresivo.

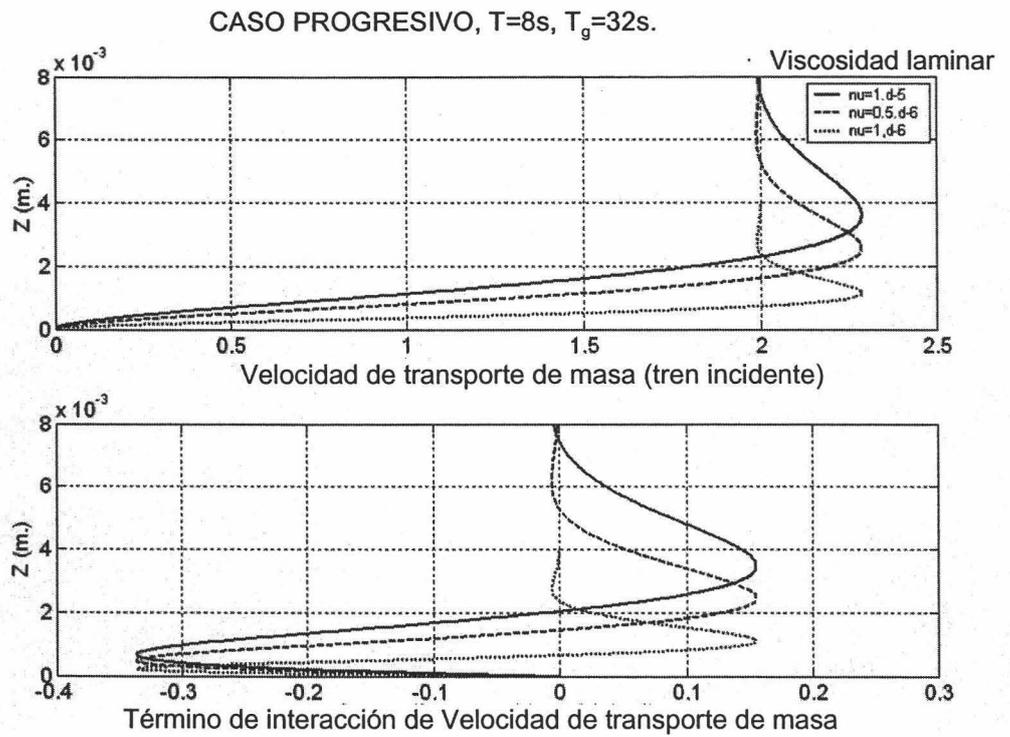


Figura 3.2: Perfil vertical de: (1) la velocidad de transporte de masa del tren incidente; (2) término de interacción de la velocidad de transporte de masa. Caso parcialmente reflejado.

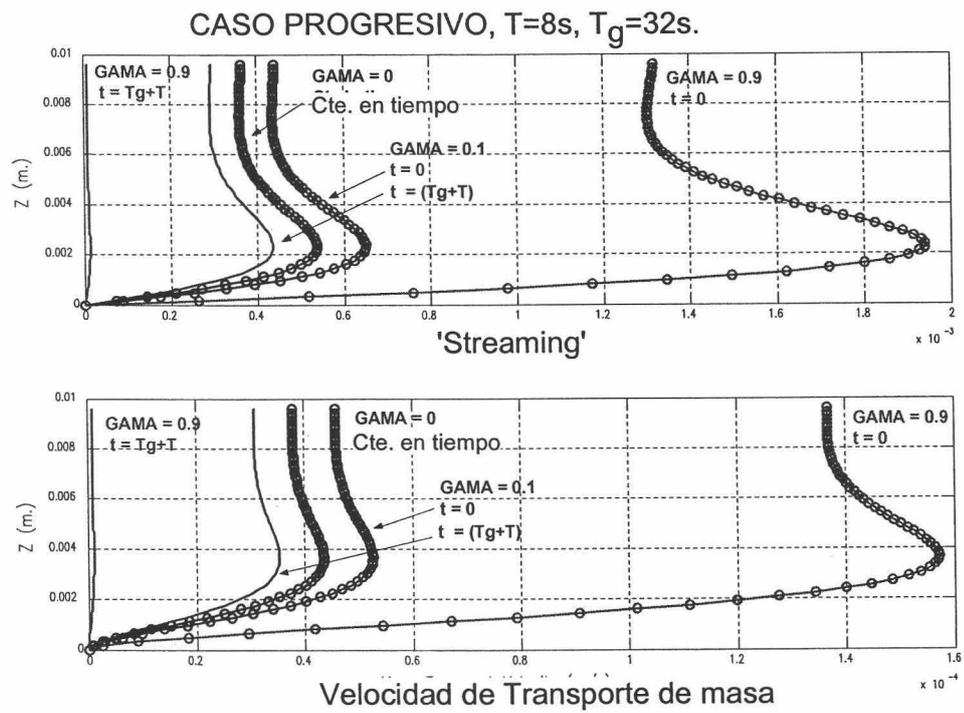


Figura 3.3: Evolución temporal del perfil vertical de: (1) 'Streaming'; y, (2) velocidad de transporte de masa. Régimen débilmente no estacionario. Caso progresivo.

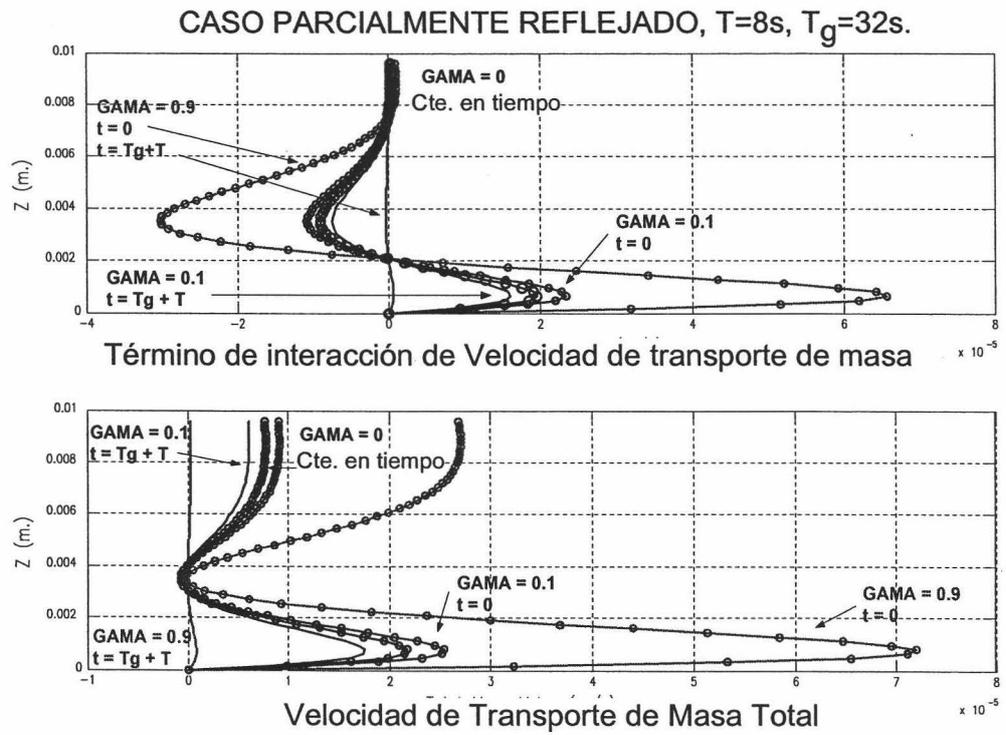


Figura 3.4: Evolución temporal del perfil vertical de: (1) término de interacción de velocidad de transporte de masa; (2) velocidad de transporte de masa total. Régimen débilmente no estacionario. Caso parcialmente reflejado.

3.7 Conclusiones

En este *Capítulo* se ha descrito la hidrodinámica de la capa límite del fondo de ondas gravitatorias moduladas. Para ello se ha utilizado como término forzador de las ecuaciones de conservación de masa y momento, la solución del potencial de velocidades de la región exterior en el fondo $z = -h$. Siguiendo una metodología similar al caso de la región exterior, dichas ecuaciones de conservación han sido resueltas analíticamente hasta orden $O(ak)^2$ mediante la técnica JWKB.

En la solución, se han considerado los casos de capa límite laminar y capa límite turbulenta (utilizando el modelo conceptual de viscosidad estacionaria de *Grant-Madsen*). Los resultados obtenidos, no muestran diferencias significativas.

A partir de la solución del campo de velocidades euleriano en el caso laminar, se ha calculado la estructura espacial y temporal de las distribuciones verticales del 'streaming', la *velocidad lagrangiana de transporte de masa* y la *tensión tangencial* en las escalas de onda corta y en la escala del grupo.

Entre los principales resultados obtenidos destacan:

- debido a las distintas escalas de modulación espacial del 'streaming' y de la velocidad lagrangiana de masa, es posible explicar la formación de formas de lecho rítmicas con escalas horizontales del mismo orden que:
 1. la longitud de onda gravitatoria, i.e, formas de lecho de escala horizontal $l \sim O(100m.)$;
 2. la longitud de onda vinculada, i.e., formas de lecho de escala horizontal $l \sim O(500 - 1000m.)$;
 3. la longitud de onda de la supermodulación, i.e., formas de lecho de escalas de horizontal $l \sim O(1 - 10Kms.)$, como por ejemplo mega-ripples. El orden de magnitud de la supermodulación puede llegar a ser del mismo orden que las inducidas por mareas, lo que puede explicar la existencia de formas de lecho de gran escala horizontal en entornos micromareales.
- La posición de estas formas de lecho es función del coeficiente de reflexión y del modo de transporte dominante (por fondo o en suspensión).
- el carácter cuasi-estacionario del streaming y la velocidad lagrangiana de transporte de masa en la escala de onda corta, permite definir patrones de movilidad y migración de las formas de lecho. Dichos patrones,

en el caso parcialmente estacionario, son distintos para el transporte por fondo y en suspensión.

Capítulo 4

Operativity of entrance channels

4.1 Introduction

The fundamental objective in the management of entrance channels is to guarantee safety and operativity levels that minimize the risk of accidents as well as optimize the use and exploitation of the infrastructure. In recent years the evaluation of both levels has become necessary for the following reasons: (1) the constant increase of the size of the fleet; (2) the increase of maritime traffic and the competitiveness between harbors; (3) the high cost of construction and maintenance of the infrastructures; and (4) the heightened social sensitivity towards the environmental impact caused by accidents. Evidence of this interest can be seen in the recent revisions in safety policy carried out by PIANC and USACE (*Gray et al.*, 2001).

At the present time, there is a general lack of tools capable of accurately calculating the operational levels of entrance channels from a probabilistic point of view. The existing models can be classified in three main groups:

- **Those focus on the ship response modelization.** The ship response model under environmental conditions (i.e. regular or irregular waves) may be based on: (1) experimental databases and CFD numerical simulation (*Rhee and Kim*, 2000), (2) on parametrized 'Response Amplitude Operators' (RAO) (*Lewis*, 1988), or (3) spectral density distributions (*Price & Bishop*, 1974). In general, these models don't consider the spatial or temporal variability of the environmental and maneuvering conditions (i.e. different conditions are simulated as different scenarios) and are mainly used as testing tools of ship motion control strategies.

- **Those based on the probabilistic description of passage simulations.** With independence of the ship response model used, these models are based on the statistical treatment of numerical (*Van der Tak & De Jong, 1996*) or experimental (*Briggs et al., 2003*) passage simulations in which environmental, morphological and maneuvering conditions can be considered. This kind of procedure has been extended, recently, to the calculation of the deep-channel operativity taking into account a probabilistic description of the number of ship arrivals (*Briggs et al., 2003*). These models, although with high economic and time cost, are useful for the calculation of entrance channel operativity (*Solem, 1980*) and for channel design.
- **Those based on the use of Bayesian procedures** (*Jebsen & Papa-konstantinou, 1997*). Nevertheless, until now, they are not useful tools in practical prediction and management due to the scarcity of valid historical data.

Neither of these models evaluates, in real time, the probability of failure of the safety conditions during the 'passage' (here, defined as any access or departure of a ship from harbor areas in a specific set of environmental (sea, wind and currents), morphological and maneuvering conditions (e.g., ship velocity, path,...). In actual practice, real time management (i.e. the refusing or acceptance of the passage in basis on possible violation of the navigation safety requirements) is carried out solely on the basis of the experience of pilots and ship captains.

In this Chapter we propose a model for the calculation of the entrance channel operativity in which the influence of the morphodynamic processes induced by modulated gravity waves is included. Here, to facilitate the model formulation, we have divided these morphodynamic processes in: agitation conditions (included in environmental conditions) and morphological conditions.

The probabilistic model proposed is based on the ROM 0.0. methodology (*ROM 0.0, 2001; Part I*) which permits the calculation of the passage 'stoppage probability' under a given set of environmental, morphological, and maneuvering conditions that, in general, will have random behavior. On the basis of the passage stoppage probability and a probabilistic model of vessel arrivals, the operational level of the channel can be calculated.

To calculate the stoppage probability along a passage, it is necessary to define: (1) the possible stoppage mechanisms of the channel and, (2) a mathematical expression, called here 'verification equation', that describes the relation between the stoppage mechanisms and the environmental, morphological and maneuvering random variables.

We deal only with one-way entrance channels, so the safety requirements (or '**stoppage mechanisms**') considered are:

- insufficient '**Under-Keel Clearance**', related with the touching bottom failure mode;
- and insufficient '**Way-Mark Clearance**', related with the failure mode caused by the exceedence of the channel way marks.

Each of them can be mathematically described by means of a **verification equation** of the local under-keel and way-mark clearances during the passage. Here, is defined as a safety margin with the next structure:

$$S = X - Y \quad (4.1)$$

Where:

- X is the sum of all significant random variables that may cause an increase of the local clearance (i.e. the total water column),
- and Y is the sum of all the significant random variables that may cause a decrease on it (i.e. ship displacements, large scale bedforms, etc.).

On the basis of the verification equation described before, the navigation safety requirements are **not** fulfilled (i.e. there is not sufficient clearance) when $S \leq 0$.

In the model proposed, the stochastic character of the passage is simplified by means of the definition of spatial and time scales in which the homogeneity and stationarity of the significant random variables can be assumed. These scales, called '**state scales**', are used to divide the channel spatially in statistically independent and homogeneous '**subsets**' and to divide the passage duration in stationary '**navigation states**'. For each subset and navigation state, the stoppage probability is calculated as the '**stoppage domain**' of the current '**verification equation**'. The '**stoppage domain**' of a verification equation is defined as the set of values of the random variables for which the security requirements are not reached.

Two '**natural**' approaches have been defined for the calculation of the stoppage domain in a subset: the '**State Clearance**' and '**Instantaneous Clearance**'.

- In the '**State Clearance**' approach, the random variables are described by means of state descriptors and probability distributions characteristic of the '**navigation state duration**'.

- In the '**Instantaneous Clearance**' approach, the random variables are described by means of probability distributions in a characteristic short-time scale of the significant variables of the passage (generally, determined by a representative period of the ship oscillations).

The conditions in which both approaches can be considered statistically independent are defined in terms of their characteristic time scales. Once the stoppage probability in each subset and navigation state is known, the '**overall stoppage probability**' along the channel can be easily calculated making use of their statistical independence. The possible use of the model for real time management of entrance channels is also discussed. Finally, assuming the statistical independence of ships arrivals and of storm events, we will define the channel operativity. The final aim is to provide a useful tool for the improvement of the usage and exploitation levels of entrance channels and, as a result, of harbor management in general.

Chapter organization. The chapter is organized as follow. First, the 'state-scale' concept is discussed and the statistical requirements for their definition are systematically exposed. After that, we define the statistical requirements for the subset and navigation state definitions. Next, the verification approaches proposed for the calculation of the stoppage domain of the stoppage mechanisms. The model description is completed describing the methodology for the calculation of: (1) the stoppage probability in a subset, (2) the overall stoppage probability during the passage and (3) the operativity levels of the channel. Then, the hypothesis assumed for the inclusion of the bed morphology on the calculation of the channel operativity are discussed.

The probabilistic model has been applied to calculate the stoppage probability during a passage along the entrance channel of the Motril harbor. In the application case, we analyze the influence of wave reflection, and the induced morphology, on the stoppage probability due to insufficient under-keel clearance of a medium size vessel arrival.

4.2 State scales of the passage

The stoppage probability during a passage depends on the environmental, morphological and maneuvering conditions in which the passage occurs by means of the verification equation's terms. The environmental and morphological conditions are characteristic of: (1) the location and geometry of the entrance channel, and (2) the dimensions and typology of the harbor structures. The maneuvering conditions depend on: (1) the geometric characteristics of the ship, (2) the navigation conditions (i.e., velocity, path,

'human factor'), and (3) the environmental and morphological conditions in which the passage occurs. All the variables mentioned above have, in general, a random behavior.

In this *Section*, we describe time and space dimensions during the passage taking into account the random character of the variables involved. The *Section* has been organized as follow. First, the time and space scales of the significant environmental, morphological and maneuvering variables during the passage are analyzed. From this analysis, the statistical requirements for the 'time-state scale' and 'length-state scale' definitions are discussed.

4.2.1 Time and space in one-way entrance channels

Time scales of the passage

Except for the case of the geometrical parameters with negligible time variability, it is possible to distinguish a broad range of time scales in a passage. We have classified them in terms of their relation with the **passage duration**, T_C . Typically, $T_C \leq \text{hour}$.

In the case of the marine agents (i.e. tides, currents, wind waves,) we can distinguish the following scales (see *Fig.4.1*):

- **Long-time scale** ($T^{long} \gg T_C$). This scale is introduced by variables such as the astronomical tide and tide-induced currents with characteristic variability scales of *12h.*, *24h.*, *28days*, ...
- **Medium-time scale** ($T^{medium} \approx T_C$). This scale is defined of the same order than a typical **sea state duration** T_{st}^{sea} . Characteristic values of the sea state duration are periods of time of 1 to 3 hours. So, in general, ($T_{st}^{sea} \geq T_C$). Marine variables with medium-time scale variability are: the meteorological tide, residual currents related to sea state conditions, etc.
- **Short-time scale** ($T^{short} \ll T_C$). It is introduced by marine agents such as: wind waves and groups with variability scales of seconds to few minutes.

In a similar way, it can be analyzed all the environmental, morphological and maneuvering variables.

In the case of **wind**, it generally presents variability of medium-time scale (i.e. mean wind velocity related to the sea state duration) and short-time scale (i.e. gusts).

Morphological related variables usually present:

- Medium-time scales, when significant bed changes (i.e. bedforms developing, bedform migration and movility) can be observed within a sea state (typically extreme events) duration.
- Long-time scales, when the developing, migration or movility time scales of the bed morphology are greater than the sea state duration.

Finally, random variables related with the **maneuvering conditions** used to be of medium-time scale (i.e. vessel velocity, path,) and short-time scale (i.e. ship oscillations). See *Fig.4.1*.

Note that in entrance channels, time and space are **not** independent dimensions. They are correlated by the instantaneous ship velocity V_{ship} . This dependence will be taken into account later on, when the statistical requirements for the 'subset' and 'navigation state' definitions are established.

Space Scales of the Passage

The most obvious spatial scales in entrance channels are those introduced by their **geometric dimensions**. These scales are: **(1)** the total length of the channel L_C , **(2)** the maximum length in which channel width and depth can be considered homogeneous and, within this length, **(3)** its average width, and **(4)** average depth.

On the other hand, the **geometric dimensions of the ship** and the **navigation conditions** introduce also spatial scales in the passage. These scales are: **(1)** the ship length L , **(2)** beam B , **(3)** draught D , and **(4)** the distance L_{st}^{ship} in which maneuvering conditions (i.e. velocity, path, human factor, etc.) can be considered homogenous from a statistical point of view. In general, $L_{st}^{ship} > L$.

Finally, the **spatial variability of the environmental and morphological variables** depends on the location and dimensions of the channel. Consequently, their spatial scales will depend strongly on the particular entrance channel we consider. In any case, it will be possible to define the distances in which the homogeneity of the variables can be assumed. These scales will be denoted respectively as: L_{st}^{mor} for the case of the morphological variables, L_{st}^{sea} for those related with the sea state conditions and L_{st}^{wc} for the significant variables of the water column state.

4.2.2 State-Scales definition

In analogy to the 'sea state' concept, we introduce the 'State Scales' one. 'State Scales' of a passage are space and time scales in which the behavior

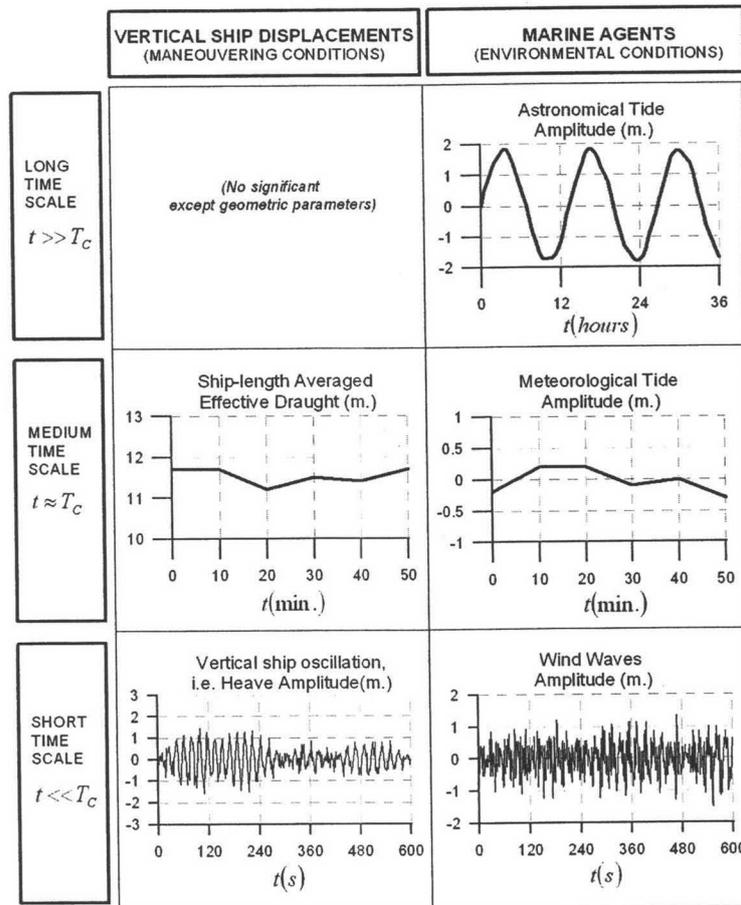


Figura 4.1: Time variability analysis of random variables in entrance channels. Right: marine agents. Left: vertical ship displacements.

of the significant random variables can be assumed, respectively, homogeneous and stationary from a statistical point of view. The time-state scale is represented by t_{st} , the length-state scale by l_{st} .

Time-State scale

Time-state scale depends on the local variability of the environmental, morphological and maneuvering variables. If we assume that:

1. meteorological conditions are defined by a sea state with duration T_{st}^{sea} ;
2. the passage occurs during a water column state with duration T_{st}^{wc} ;

3. bed morphology is defined by a stationary morphological state within a duration T_{st}^{mor} ;
4. maneuvering conditions and ship response are stationary during a period of time T_{st}^{ship} called 'maneuvering state',

then, the duration of the **time-state scale** can be defined as:

$$t_{st} = \min \left(T_{st}^{ship}, T_{st}^{sea}, T_{st}^{wc}, T_{st}^{mor}, T_C \right) \quad (4.2a)$$

Typically, $T_{st}^{ship} \leq T_C \leq T_{st}^{sea} \cong T_{st}^{wc} \cong T_{st}^{mor}$. Thus, the time-state scale used to be determined by the maneuvering conditions, and not by the environmental or morphological ones. Consequently, $t_{st} \cong T_{st}^{ship}$.

Space-State scale

If, similarly to the time-state scale, we assume that at each location of the channel it is possible to find:

1. a homogenous sea state within a distance L_{st}^{sea} ;
2. a homogeneous water column state within a distance L_{st}^{wc} ;
3. a homogeneous morphological state within a length L_{st}^{mor} ;
4. a homogeneous maneuvering state within a distance L_{st}^{ship} ,

then, the **space-state scale** l_{st} can be defined as:

$$l_{st} = \min \left(L_{st}^{ship}, L_{st}^{sea}, L_{st}^{wc}, L_{st}^{mor}, L_C \right) \quad (4.3)$$

As before, generally $L_{st}^{ship} \leq L_{st}^{sea} \leq L_{st}^{wc} \leq L_{st}^{mor} \leq L_C$. Thus, the space-state scale is determined by the maneuvering conditions and ship response to the climate agents. Consequently, it can be defined as $l_{st} \cong L_{st}^{ship}$. Note that $L_{st}^{ship} = L_{st}^{ship} \left(T_{st}^{ship}, V_{ship} \right)$.

4.3 Subset and Navigation State definition

To calculate the stoppage probability along an entrance channel, the passage is spatially divided into 'subsets' and temporally into 'navigation states'. Both concepts as well as the statistical requirements for their definition are discussed in this *Section*.

4.3.1 Entrance Channel Subsets

A channel 'subset' is defined as the area in which the statistical homogeneity of the significant random variables can be assumed. In practice, this condition is applied in its weak form (*Newland, 1975*). According with the state scale definition, the typical scale in which the homogeneity of the significant random variables can be assumed is the local state scale l_{st} .

Besides the homogeneity condition, the other two statistical requirements for the subset definition are:

1. The set of M subsets $\{CS\}_M = (CS_1, CS_2, \dots, CS_M)$ should be **complete, exhaustive and mutually exclusive**. Mathematically:
 - $CS_k \cap CS_j = \Theta$ for all $k \neq j$, where Θ is the null entity.
 - $CS_1 \cup CS_2 \cup \dots \cup CS_M = I$, where I represents the unit entity.

To satisfy this condition, it is necessary that the subsets not to overlap, and the sum of all the subset lengths to be equal to the overall passage distance, L_C .

2. **Statistical independence** of subsets, i.e. the autocorrelation function of any significant random process, $\xi(x)$, between any two points of two different subsets has to be negligible. In practice, this condition is applied in a 'weak' form and the statistical independence of the subsets is only verified between two 'representative' points. Mathematically,

$$R_\xi(\lambda_{kj}) = E[\xi(x_k)\xi(x_j)] \cong 0 \text{ for all } x_k \text{ and } x_j \quad (4.4)$$

where:

- x_k and x_j represent, respectively, the coordinates of the 'representative' points of the subsets k and j with $k \neq j$;
- λ_{kj} is the distance between both 'representative' points.

The location of the 'representative' point on a subset can be chosen according to different criteria (i.e., central point, center of mass with respect to significant random variables,...). The question of which is the optimal criterion for the subset definition is still a matter of study. Similarly, different criteria to model the random variables in such a point are possible (i.e., local values, spatial averaged values within the subset,...). Under the assumption of subset homogeneity, any of them should lead to almost identical results.

Definition of channel subsets

The subset length, l_{CS} , can be defined using different statistical criteria depending on the priority given to the homogeneous or to the statistical independence requirements. Here, focus is put on the statistical independence of the channel subsets. Then, l_{CS} is defined as the minimum distance, λ , in which the statistical independence requirement is fulfilled. Note that this criteria only satisfy the homogeneity condition when $\lambda \leq l_{st}$. The possible violation of the homogeneity requirement, and hence the no-negligible stochastic character of the statistical estimators, might be included in the model through the confidence intervals.

4.3.2 Entrance Channel Navigation States

A 'Navigation State' is defined as the time interval in which, for a given subset, the significant random variables are assumed to be statistically stationary. The duration of each navigation state is represented by t_{NS} and can be calculated as:

$$t_{NS} = \min(t_{st}, \tau) \quad (4.5)$$

where: τ is the average permanence time of the ship in the subset, and t_{st} is the local time-state scale.

Taking into account that τ is defined as the ratio between the subset length and the average velocity of the ship in the subset, $\tau = l_{SP}/\bar{V}^{ship}$, we found that, in general, $\tau \cong t_{st}$ because $l_{st} \cong L_{st}^{ship}$ and $t_{st} \cong T_{st}^{ship}$. Hence, usually, the navigation state duration is determined by the maneuvering conditions.

Each subset, e.g. CS_m , can be divided in a set of N_m navigation states $\{NS\}_{N_m} = (NS_1, NS_2, \dots, NS_{N_m})$. A graphical representation of passage division in subsets and navigation states is shown in *Fig.4.2*.

Besides the stationarity condition, $\{NS\}_{N_m}$ has to be defined as a **complete, exhaustive, and mutually exclusive** set of navigation states. Mathematically:

- $NS_k \cap NS_j = \Theta$ for all $k \neq j$, where Θ is the null entity.
- $NS_1 \cup NS_2 \cup \dots \cup NS_{N_m} = I$, where I represents the unit entity.

To satisfy the above condition, it is necessary to select a representative 'enough' set of environmental, morphological and maneuvering conditions in which passage through the subset CS_m can take place.

Navigation States Definition

The complete set of navigation states concurrent with the passage through the subset CS_m can be defined as the union of possible: (1) water column states, (2) sea states, (3) morphological states, and (4) maneuvering states during the passage.

To define the above mentioned states, it is mandatory to have 'real time' information (either numerical or experimental) about the conditions in which the passage is occurring. The information related to climate state conditions along the channel can be obtained from 'close to channel' buoys and/or local numerical models of the hydrodynamic and meteorological conditions. In absence of direct local measurements, the numerical models may be feed with forecasting information. A case of real time prediction system for harbor management is described in *Moyano et al.* (2003).

On the other hand, the states related to maneuvering conditions can be obtained from: (1) statistical treatment of experimental-based or numerical-based ship response simulations or (2) bayesian-based models. Finally, morphological related states can be obtained from frequently bathymetry measurements and detailed morphological modelization.

Arranging with this information, for a passage under known climate, morphological and maneuvering conditions, a complete set of navigation states in a subset can be defined by means of:

1. A water column state characterized by the average local mean water column level and typical deviation.
2. A sea state characterized by the state descriptors (i.e. mean wind velocity and direction, characteristic wave height, period and direction, etc.) and probability functions of the significant climate agents.

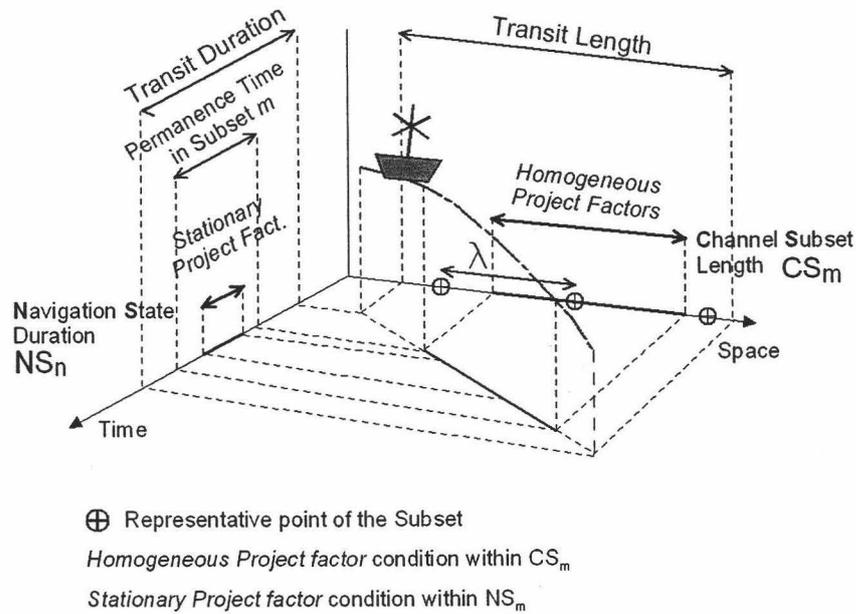


Figura 4.2: Passage division in subsets and navigation states. Schematic view of main scales.

3. A set of morphological states characterized by state descriptors (i.e., mean bed slope, mean height of bed morphology (i.e. bars, mega-ripples, etc.), and their spatial probability distributions.
4. A set of maneuvering states characterized by state descriptors and/or probability distributions of the maneuvering conditions (i.e. mean velocity, direction, trim, path, human factor, etc.) and of the significant ship movements.

4.4 Verification approaches

In each subset and navigation state, the safety requirements of each of the stoppage mechanisms are defined as a safety margin relation between the significant random variables of the system. This relation is called '**verification equation**' (see Eq.4.1). The stoppage probability related to this equation is defined as the set of all the random variables values for which $S \leq 0$ (i.e. the '**stoppage domain**').

We propose two '*natural*' verification approaches for the stoppage domain calculation:

1. A '**Clearance State**' approach in which the terms of the verification equations are averaged in a characteristic time scale of the subset. This characteristic time is defined as the **Clearance State time scale**, t_{SC} ;
2. An '**Instantaneous Clearance**' approach in which the average time scale is equal to a characteristic time scale of the short-time random variables. The **Instantaneous Clearance time scale** is represented by t_{IC} .

In this *Section*, we describe both approaches and the criteria for the time scale selection in each of them.

4.4.1 State Clearance approach

Verification equation

To verify the safety requirements in the State Clearance approach, the verification equation S is averaged in the time state scale t_{SC} :

$$S_{SC} = \frac{1}{t_{SC}} \int_0^{t_{SC}} S dt \quad (4.6)$$

Making use of the Eq.4.1, S_{SC} can be expressed as the difference of the State Clearance approximations of the terms X and Y :

$$S \cong S_{SC} = X_{SC} - Y_{SC} \quad (4.7)$$

The stoppage domain within this approach is defined as $S_{SC} \leq 0$.

Statistical description of terms

On the basis of the relation between the average time scale t_{SC} and the characteristic scale of the significant random variables, X_{SC} and Y_{SC} can be written as the sum of long-time scale, medium-time and short-time contributions. In example:

$$X_{SC} = X_{SC}^{long} + X_{SC}^{medium} + X_{SC}^{short} \quad (4.8)$$

Long and medium-time scale contributions (X_{SC}^{long} and X_{SC}^{medium}) can be statistically described by means of:

1. **nominal values** of the variables involved (e.g. mean value of the astronomical tide).
2. **statistical distributions and state descriptors** representative of spatial and temporal variabilities of the agents under consideration (e.g. the meteorological tide can be described, within the time scale t_{SC} , as a Gaussian distribution of known mean value and typical deviation).

On the other hand, **short-time contributions**, ($X_{SC}^{short} - Y_{SC}^{short}$), can be set equal to a State Clearance safety margin S_{SC}^0 (note that, in the case of the Under-Keel Clearance stoppage mode, S_{SC}^0 can be identified with the 'pilot's foot'). From the statistical point of view, S_{SC}^0 can be described either by a nominal value or by a representative probability distribution (e.g., Gaussian).

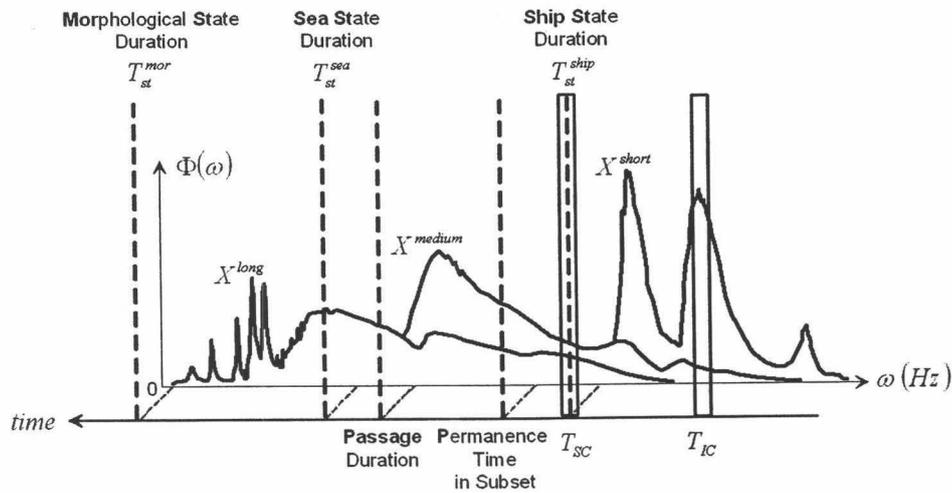
Selection of the State Clearance time scale

The state clearance t_{SC} time is defined equal to the navigation state duration t_{NS} described by Eq.4.5. So, it will be $t_{SC} \cong t_{NS}$. In Fig.4.3, we show a graphical representation of the t_{SC} selection criteria where $\tau > t_{st}$, and then, $t_{SC} \cong t_{st}$.

4.4.2 Instantaneous Clearance approach

Verification equation

When $S_{SC} \leq 0$ (i.e. when the State Clearance safety requirements are not met), or when the objective is the optimization of the use and exploitation levels (thus decreasing the safety margin), the stoppage domain of the verification equation should be calculated, taking into account the effect of the short-time scale terms. For that, we propose the Instantaneous Clearance approach in which the average time scale t_{IC} , of the verification equation



T_{SC} **State Clearance Time Scale**
 Selection criteria: $T_{SC} = t_{st} = \min(T_{st}^{mor}, T_{st}^{sea}, T_{st}^{ship}, T_C)$

T_{IC} **Instantaneous Clearance Time Scale**
 Selection criteria: Minimum peak period
 of significant short-time scale factors

Figura~4.3: Selection criteria for the State Clearance and Instantaneous Clearance time scales as function of the spectral densities of significant agents.

is set equal to a representative short-time scale of the significant random variables. Thus, in the 'Instantaneous Clearance' approach the verification equation S_{IC} is defined by:

$$S_{IC} = \frac{1}{t_{IC}} \int_0^{t_{IC}} S dt \tag{4.9}$$

Making use of the safety margin expression of the verification equation (Eq.4.1), can be written as:

$$S_{IC} = X_{IC} - Y_{IC} \tag{4.10}$$

Within this approach, the stoppage domain is defined as $S_{IC} \leq 0$.

Statistical description of terms

In a similar way than in the State Clearance approach:

$$X_{IC} = X_{IC}^{long} + X_{IC}^{medium} + X_{IC}^{short} \quad (4.11)$$

If $t_{IC} \ll t_{SC}$, it is possible to assume that the long and medium-time scale contributions in both approaches are equal. Then, $(X_{IC}^{long} - Y_{IC}^{long}) \cong (X_{SC}^{long} - Y_{SC}^{long})$ and $(X_{IC}^{medium} - Y_{IC}^{medium}) \cong (X_{SC}^{medium} - Y_{SC}^{medium})$. Making use of the previous assumption, Eq. 4.10 can be finally expressed as:

$$S_{IC} = (S_{SC} - S_{SC}^0) + (X_{IC}^{short} - Y_{IC}^{short}) \quad (4.12)$$

The condition $t_{IC} \ll t_{SC}$ ensures the statistical independence of the State Clearance and Instantaneous Clearance approaches.

On the other hand, if $t_{IC} \ll t_{st}$ is assumed, the short time scale contributions of the Eq.4.12 can be statistically described as individual and independent events within the time-state scale of the navigation state. For example, the short-time scale contribution of wind waves can be regarded as a homogeneous and stationary Gaussian process in which every wave is an individual and independent event. The number of individual waves, their period and amplitude are the statistical descriptors of the process and can be obtained from the wave spectral distribution and sea state descriptors in each subset (Longuet-Higgins, 1962; Ochi & Sahinoglou, 1989; Haver & Moan, 1983). The condition $t_{IC} \ll t_{st}$ ensures that the number of events (e.g., individual waves) is representative from a statistical point of view.

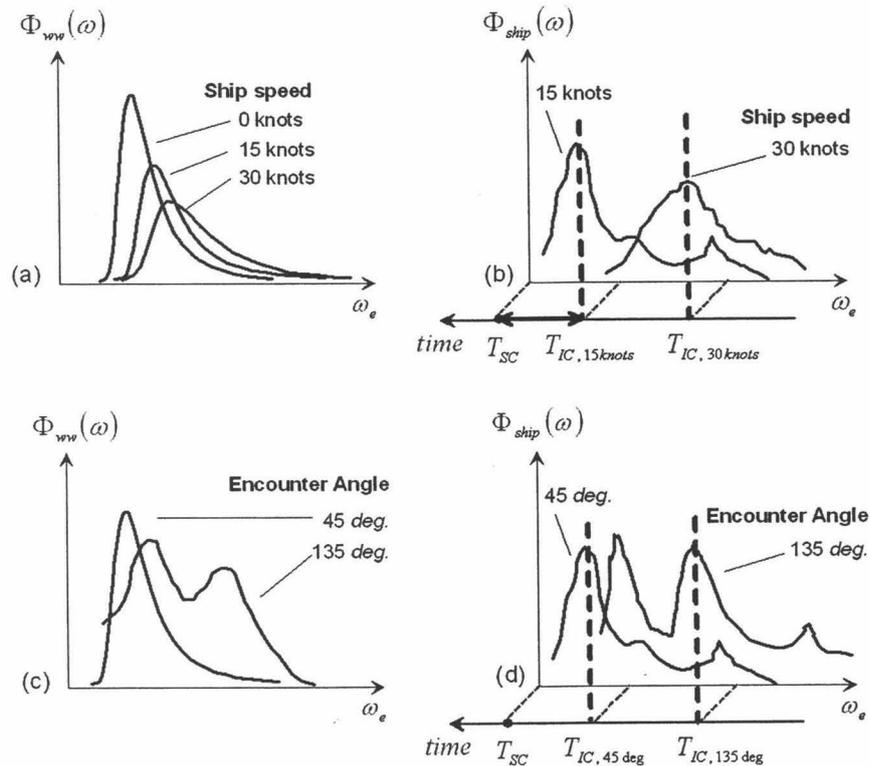
Selection of the Instantaneous Clearance time scale

The scale t_{IC} should be representative of the temporal variability of the short-time scale variables in each subset and, at the same time, satisfy the condition $t_{IC} \ll t_{st}$.

In entrance channels, ship movements induced by climate agents (i.e. wind, currents, wind waves, etc.) are usually the most significant short-time variables in relation to the stoppage mechanisms. Thus, t_{IC} is often defined as a representative time scale of the short-time ship movements, $t_{IC} \cong t_{ship}^{short}$. The scale t_{ship}^{short} can be defined on the basis of the spectral distribution of the ship response to the local climate actions (e.g., as the shorter peak period of the significant ship oscillations, see Fig.4.3).

When the ship response can be regarded as a narrow enough band process, the scale t_{ship}^{short} can be selected as a finite period representative of the spectral ship response. Moreover, if the significant frequencies of the ship response

are far enough from the significant frequencies of the long and medium-time contributions, the condition $t_{ship}^{short} \ll t_{st}$ will be automatically satisfied. If the ship response is a wide band process and/or its significant frequencies are close to the frequencies of the medium and long-period factors, the basic requirements for the model will not be satisfied and a complete stochastic description of the problem is required. It should be noted that, the range of the ship response frequencies is strongly dependent on the environmental and maneuvering conditions. In *Fig.4.4*, we show two examples of their dependence on the vessel speed and the wave encounter angle. Consequently, the requirements for the application of the 'state-' and 'instantaneous clearance' approaches should be verified, for every passage, in each subset and navigation state.



Figura~4.4: Influence of maneuvering conditions in the Instantaneous clearance time scale. (a) and (b): Possible influence of ship speed. (c) and (d): Possible influence of wave encounter angle.

4.5 Stoppage mechanisms in one-way entrance channels

The stoppage mechanisms in case of one-way entrance channels are: **insufficient 'Under-Keel Clearance'**, related with the touching bottom failure mode, and **insufficient 'Way-Mark Clearance'**, related with the failure caused by partial or total exceedence of the channel way marks.

Following the ROM 0.0 methodology (*ROM 0.0*, 2001), the verification equations of both mechanisms are defined in terms of a safety margin relation. In this *Section*, we describe the terms of the verification equations for both stoppage mechanisms.

4.5.1 Verification equation of the 'Under-Keel Clearance'

The '**Under-Keel Clearance**' S_K is defined as the minimum distance between the keel of the ship and the channel bottom. The verification equation establishes the safety requirements of this stoppage mechanism as a mathematical relation between all the random variables that may contribute, in some way, to the under-keel clearance variation. In terms of a safety margin relation, the verification equation reads,

$$S_K = h_{wc} - d_{ship} - S_K^0 \quad (4.13)$$

where:

- h_{wc} represents the sum of all the environmental and morphological parameters and variables that may induce a change in the water column height;
- d_{ship} is the sum of all the parameters and variables that may contribute to the 'actual' ship draught and,
- S_K^0 represents an 'extra' safety margin term in which we include the model uncertainty contribution to the under-keel clearance (*Haver & Moan, 1983*).

The term h_{wc} has the following contributions:

$$h_{wc} = h_0 + \eta_{mor} + \eta_{tide} + \eta_{lw} + \eta_{ww} \quad (4.14)$$

where:

- h_0 is a geometric parameter that describes the local depth with respect to the selected mean water level;
- η_{mor} represents the possible random variation of the local depth due to morphological changes induced by the environmental conditions (i.e. megaripples, bars,...);
- η_{tide} is a random variable that represents the variation of the water column induced by the actions of the astronomical and meteorological tides;
- η_{lw} is a random variable that represents the variation of the free surface due to the geometry of the channel (seiching) or other types of long - period oscillations;
- η_{ww} represents the random free surface variations induced by the short period oscillations (i.e. wind waves).

On the other hand, the term d_{ship} in Eq.4.13 can be generally calculated as:

$$d_{ship} = D + SQ + T + M_{man}^v + \xi_{ship}^v \quad (4.15)$$

where:

- D is a geometric parameter that represents the physical draught of the ship;
- SQ and T are random variables that represent, respectively, the squat and trim;
- M_{man}^v is a random variable that represents the uncertainty on the vertical ship position induced by the human participation on maneuvering conditions;
- ξ_{ship}^v represents the sum of the medium- and short-time scale vertical ship displacements induced by environmental conditions.

4.5.2 Verification equation of the 'Way-Mark Clearance'

The 'Way-Mark Clearance' S_W is defined as the minimum distance between the hull of the ship and the borders (**way-marks**) of the entrance channel.

As in the previous case, the verification equation of the way-mark clearance is defined in terms of a safety margin equation as:

$$S_W = w_c - w_s - S_W^0 \quad (4.16)$$

where:

- w_c represents the minimum distance between the entrance channel borders and the centre of mass of the ship hull;
- w_s is the sum of all the random variables and parameters that may contribute to the variation of the minimum distance between the ship and the 'way-marks' of the channel and,
- S_W^0 represents an 'extra' security margin due to model uncertainty.

Without taking into account the possible curvilinear form of the channel way-marks, the term w_s can be calculated as:

$$w_s = \frac{B}{2} + M_{man}^h + \xi_{ship}^h \quad (4.17)$$

where:

- B is a geometrical parameter that represents the beam of the ship
- M_{man}^h represents the uncertainty of the vessel position induced by the human factor in the maneuvering conditions;
- ξ_{ship}^h is the sum of the medium- and short-time scale horizontal ship displacements induced by environmental conditions.

4.6 Stoppage probability during a passage

Once the passage is spatially divided into subsets and temporally into navigation states, the overall stoppage probability $P^{passage}$ (i.e. stoppage probability for the entire passage) can be calculated making use of the statistical independence of the subsets as:

$$P^{passage} = 1 - \prod_{m=1}^M (1 - P^m) \quad (4.18)$$

where P^m is the total stoppage probability in the subset CS_m , and M is equal to the total number of subsets. The probability P^m can be expressed as:

$$P^m = P_K^m + P_W^m - P_{K \cap W}^m \quad (4.19)$$

where:

- P_K^m is the stoppage probability related to the Under-Keel Stoppage Mode;
- P_W^m is the stoppage probability related to the Way-Mark Stoppage Mode, and
- $P_{K \cap W}^m$ is the joint probability of both stoppage mechanisms.

Any of then above probabilities (from now, P_i^m) can be calculated as:

$$P_i^m = \sum_{n=1}^{N_m} P[S_i^m \leq 0 | NS_n^m] \cdot P[NS_n^m] \quad (4.20)$$

where:

- $P[S_i^m \leq 0 | NS_n^m]$ represents the stoppage probability of the stoppage mechanism i in the subset CS_m conditioned to the occurrence of the navigation state NS_n^m .
- $P[NS_n^m]$ is the occurrence probability of the navigation state n during the passage through the subset CS_m . Note that, $\sum_{n=1}^{N_m} P[NS_n^m] = 1$ according with the completeness requirement of the navigation state definition.
- N_m is the total number of possible navigation states during the passage through the subset CS_m .

In the State Clearance approach, the probability $P[S_i^m \leq 0 | NS_n^m]$ is calculated as the probability associated to the stoppage domain of the state clearance approximation of the verification equation S_i^m (i.e., $S_i^m \cong S_{SC,i}^m$) during the environmental, morphological and maneuvering conditions defined by the navigation state NS_n^m .

In the Instantaneous Clearance approach, $P[S_i^m \leq 0 | NS_n^m]$ is calculated as the stoppage domain of the instantaneous clearance approximation of the verification equation S_i^m (i.e., $S_i^m \cong S_{IC,i}^m$) during the navigation state NS_n^m .

In this case, the occurrence of the failure will be conditioned to the occurrence of the failure in the state clearance level, i.e. $S_{SC,i}^m \leq 0$. Assuming the statistical independence of both approaches (based on the condition $t_{IC} \ll t_{SC}$), it can be expressed as:

$$P[S_i^m \leq 0 | NS_n^m] \approx P[S_{IC,i}^m \leq 0 | S_{SC,i}^m \leq 0, NS_n^m] \cdot P[S_{SC,i}^m \leq 0 | NS_n^m] \quad (4.21)$$

The probabilities defined by Eq.4.20 and 4.21, can be calculated by integrating the joint probability function of the significant random variables using Monte Carlo or FORM numerical methods (First Order Reliability Methods). A description of these methods can be found in *Madsen et al.* (1986), *Ditlevsen and Madsen* (1996), and *Castillo et al.* (2003).

4.7 Operativity of entrance channels

Known the overall stoppage probability $P^{passage}$, and assuming the statistical independence of vessel arrivals and of environmental states, the upper limit of the the annual (meteorological) stoppage probability of an entrance channel can be defined as,

$$P^{channel} \leq \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K P^{passage} \cdot P[passage | ST_{mor}, ST_{env}] \cdot P[ST_{mor} | ST_{env}] P[ST_{env}] \quad (4.22)$$

where:

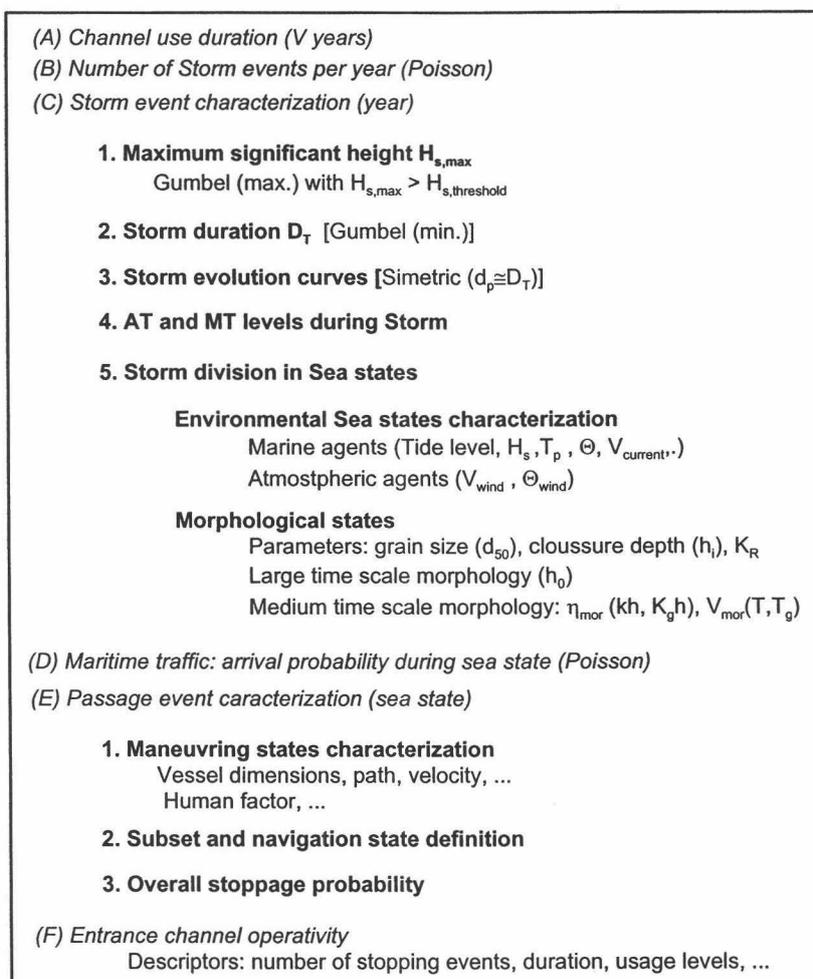
- $P[passage | ST_{sea}, ST_{mor}]$ represents the probability of ship arrival during the environmental state ST_{env} in presence of the morphological state ST_{mor} .
- $P[ST_{mor} | ST_{env}]$ is the probability of occurrence of the morphological state ST_{mor} given the environmental state ST_{env} .
- and $P[ST_{env}]$ is the annual probability of the ST_{env} conditions.

The counters J and K represent, respectively, the total number of environmental and morphological states considered for the calculation of the operativity.

From Eq.4.22, the lower limit of the annual channel operativity R_f is

$$R_f \geq 1 - P^{channel}$$

From the above definitions, other operativity parameters can be easily calculated: mean stoppage duration, mean number and mean return period of stoppage events,...



Figura~4.5: Procedure for the calculation of the entrance channel opeartivity

For practical calculation of channel's operativities, we propose the procedure described in *Fig. 4.5*.

In this procedure, the number of storm events during a year is described as a Poisson distributed processes. The parameter ν of the distribution can be obtained from local environmental measurements. For that, a wave height threshold $H_{S,thresh.}$ has to be defined. Its value can be selected on basis on empirical, bayesian or 'intuitive' knowledge as the maximum wave height for which the stoppage probability during the passage is negligible,

$$P_{\text{passage}} (H_S < H_{S,\text{thresh.}}) \ll P^{\text{max.}}$$

Each storm event can be characterized by (see Fig.4.6): (1) the maximum wave height $H_{s,\text{max}}$, (2) the total storm duration D_T , (3) the evolution curve of the storm event, (4) the significant wave height $H_{S,\text{mor}}$ and the period of time d_p in which the storm event is morphologically active in the water depth considered, and, (5) the evolution curves of tidal level evolution (*astronomic and meteorological*) during the time d_p .

Once each storm event is parametrized, it can be divided in statistically independent environmental states. Assuming that:

- the time in which the storm is morphologically active d_p is much longer than the growth and decay times of the storm (i.e., we deal with storms of type 1 in which $d_p \approx D_T$), and;
- the statistical descriptors of the environmental variables (e.g., tidal level, mean wave and wind direction, significant wave height,...) can be considered constant during the time interval d_p ,

Then,

$$P [ST_{env}] \approx P [Storm] \quad (4.23)$$

For the statistical description of the maritime traffic in the operativity calculation (see Fig. 4.5), a Poisson law can be used. Similar statistical description of maritime traffic is proposed by *Briggs et al.* (2003). For that, the following conditions have to be assumed (*Benjamin & Cornell*, 1970, pp. 234-244):

- each ship arrival and departure can be consider an statistically independent event (i.e., the mean number of annual ship calls should be small);
- within a short interval of time (*the environmental sea state duration*), the probability of ship calls is aproximatelly constant (i.e., the rate of ship arrivals has to be consider a constant parameter). Consequently, the variability of the maritime traffic in a year is assumed negligible;
- the probability of ocurrence of two ship calls within a short time interval can be also considered negligible.

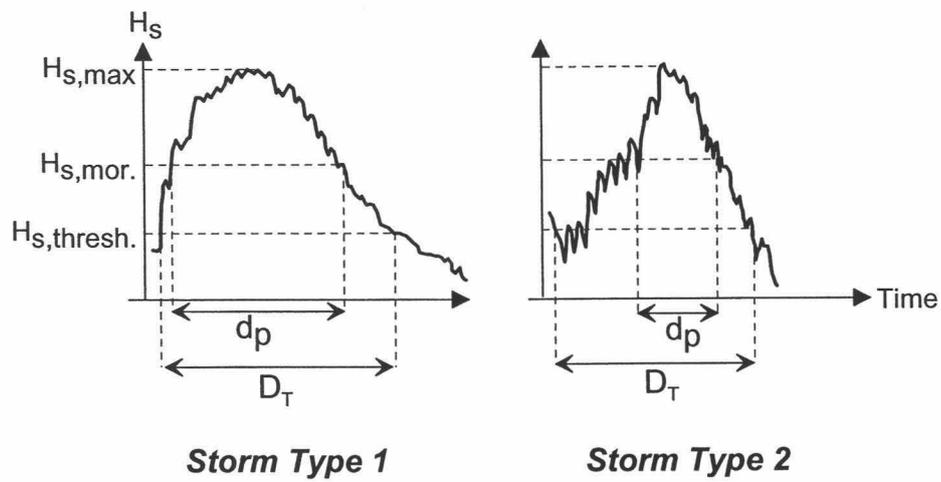


Figura 4.6: Examples of possible storm evolution curves. d_p duration of homogeneous morphological conditions. D_T total duration of the storm event.

4.8 Influence of morphology

In this *Section*, we propose a methodology for considering the morphological variability in the calculation of the entrance channel operativity, that is a calculation procedure of the term $P[ST_{mor} | ST_{env}]$ in Eq.4.22.

In general, during a storm event different morphological states can be observed. This is particularly evident in the surf zone, where a great variety of length scale (*10 to hundreds of meters*) bedforms with developing times of smaller or same order than the storm event duration (*min to hours*) can be observed. Two main approaches have been used to explain the surfzone morphology: **(1)** one based on morphological instability theory (*Christiansen et al., 1994; Deigaard et al., 1999; Vittori et al., 1999; Falques, 1991; Falques et al., 1996, and others*); **(2)** other based on surfzone hydrodynamic of gravity and infragravity motions and wave induced currents (*Holman, 1989; Mei, 1994; Deigaard et al., 1999; Broker, 1985; Van Dongeren, 2003*).

From the hydrodynamic point of view, the fast changes of the bed morphology in the surf zone can be explained by:

- the short-time scale (\sim min. or sec.) of the hydrodynamical processes involved (i.e., wave breaking induced turbulence, longitudinal current induced, rip currents and residual currents induced by non linear phenomena,...) with potential transport velocities of order $O(1)$, and transport rates of order $O(1)$;
- the time variability of the above mentioned hydrodynamic phenomena within the storm event duration (\sim hours).

However, in the inner and intermediate shelf ($h_0 \sim 10 - 50m.$) of microtidal and wave dominated environments, the time scales for the developing of wave induced bedforms are usually not smaller than *hours to days*.

From an hydrodynamic point of view, the slower bed response of intermediate depths, can be explained as consequence of the smaller potential transport capacity of the wave related hydrodynamical processes induced by gravity and infragravity waves out of the breaking zone. In *Chapter 3* we showed that, assuming second order Stokes theory, the potential transport capacity of modulated gravity waves in intermediate depths is of $O(\epsilon^2)$.

However, the net sediment transport depends not only on the potential sediment transport patterns but also on the amount of mobilized sediment. In general, it can be estimated in terms of the following parameters: **(1)** the grain size d_{50} , **(2)** the Shields parameter θ and **(3)** the closure depth h_I (*Van Rijn, 1978; Losada et al., 1986*).

In case of modulated gravity waves, θ may be defined as (Madsen, 1992):

$$\theta = \frac{\tau_{ww} + \tau_{group}}{\rho(s-1)gd} = \theta_{ww} + \theta_{group} \quad (4.24)$$

and, with independence of the closure criteria used, h_I can be written as:

$$h_I = \max \left[(h_I)_{ww}, (h_I)_{group} \right] \quad (4.25)$$

In the above expressions, the subindex $_{ww}$ denotes short wave induced, and the subindex $_{group}$, wave-group induced.

From Eq.4.24, it can be deduced that the amount of the sediment depends both of wind waves and groups shear stresses (Deigaard et al., 1999). In general, $\theta_{group} \ll \theta_{ww}$, thus the sediment is mobilized mainly by short wave action. Consequently, the closure depth in Eq.4.25 is generally determined by the $(h_I)_{ww}$ value. It can be of 8 to 80 meters depending on the short wave period.

In case of partial reflection, the short wave closure depth can be slightly extended to deeper water due to the stationary, spatial modulated and depth independent terms of the pressure field resulting from the interference of incident and reflected wave trains. This pressure field may influence on the closure depth and the net sediment transport through two main mechanisms: (1) modulation of the benthic boundary layer width in the short-wave and wave-group length scales and (2) dynamic variation of the grain lift forces. In this point, it is worthy to mention the works of Foda & Mei (1986) and Foda (2003).

Assuming $h_I \simeq (h_I)_{ww}$ and taking into account that intermediate depths are of the same order than $(h_I)_{ww}$ and if $\theta_{ww} \sim \theta_c$, the dominant sediment transport mode expected in intermediate depths should be bed load with order $O(\epsilon^2)$. From the above discussion, it can be concluded that, the presence of long scale modulation of gravity waves acts mainly as a driven mechanism of the short wave mobilized sediment.

4.8.1 State scales of bed morphology in intermediate depths

To include the morphological conditions in the calculation of the entrance channel operativity, it is necessary to analyze the characteristic variability of bed morphology during a passage.

In intermediate depths, where entrance channel are used to be, we can distinguish the following scales of bedforms variability:

- **Long time scale bedforms** as those shown in *Fig.2.2*. Within the time scale of a passage duration, the bedforms can be considered stationary.
- **Medium time scale bedforms** with characteristic time scales of *hours* and lengths scales from *10 to hundreds of meters*. Clearly, the slower bed time response of intermediate depths implies a greater stochastic dependence between wave induced morphological states. Actually, from a statistical point of view, they should be modelled as Markov (*Benjamin & Cornell, 1970*) or ARMA processes. However, if we assume *Type 1* storm events (see *Fig.4.6*) of long enough duration, and $t_{mor} \sim d_p$, we can approximate the medium-time scale variability of the wave induced morphology as weakly stationary and statistically independent state. Consequently, $P [ST_{mor} | ST_{env}] \approx 1$.

The short time scale variability of bed morphology caused by local erosion or sedimentation processes induced by local current discharges or large scale turbulent eddies in the proximity of structures for Carpenter-Kaulegan numbers $KC > 0.5$ (*Fredsoe & Summer, 2001*) are not included here.

4.8.2 Descriptors for the statistical description of bed morphology in intermediate depths

Long time scale bedforms

The horizontal distribution of the long time scale bedforms during a passage are included in the h_0 term of the verification equation. This term is modelled as a gaussian distributed variable $N [h_0(x, y), \sigma^2(x, y)]$ with mean value equal to the nominal depth value \bar{h}_0 and standard deviation equal to the depth measurement uncertainty. The possible migration and evolution of the long time scale bedforms can be included through annual depth measurements or/and numerical simulations.

Medium time scale bedforms

Assuming the stationarity and independence of the wave induced morphological conditions between passages, they can be described in terms of stationary descriptors and probability functions of their spatial distributions.

Assuming bed load, the horizontal distribution of the medium time scale bedforms can be described in terms of the potential sediment transport patterns obtained in *Chapter 3*. For that, we use the eulerian mass transport velocity q_{mass} and streaming velocity q_{stream} fields.

The random character of the bedform location is modelled here as a Gaussian variable $N[\mu(x, y), \sigma^2(x, y)]$. For the calculation of the statistical descriptors μ and σ^2 , we distinguish between: (1) the monochromatic short wave case and (2) the modulated gravity wave case.

Monochromatic short wave case. The mean location of bedforms (i.e., bar crests and troughs) is established where the following relationship is fulfilled

$$q_{mass} + q_{stream} = 0 \quad (4.26)$$

The spatial distribution obtained is function of:

- the dominant transport load parameters: d_{50} , h_I and θ_c ,
- the coastline reflection coefficient K_R ,
- and the relative water depth kh .

The typical deviation of the gaussian distribution, in absence of significant currents, can be set equal to the model uncertainty.

Modulated gravity wave case. For partially reflected regular wave groups, it was concluded that, the spatial structure of induced bedforms has two typical scales: (1) the short wavelength $L/2$ and (2) the group wavelength $L_g/2$. The presence of weakly unsteady stream and mass transport velocities in the short-wave scale, may induce the mobility of short-wave and wave-group bedforms. On the other hand, the net velocities of order $O(\epsilon^2)$ generated by the interference of locked and free long waves can induce the slow migration of short-scale and wave-group scale bedforms.

Taking these results into account, the statistical descriptors of the crests and troughs distribution induced by regular wave groups can be calculated as follow,

- In the short-wave scale, the mean position $\mu = \bar{\mu}(x, y)$ of crests and troughs should occur if

$$q_{mass} + q_{stream} = 0$$

where q_{mass} and q_{stream} denotes respectively the short-wave averaged eulerian mass transport and streaming velocities. Their typical deviation $\sigma = \bar{\sigma}(x, y)$ is defined as,

$$\bar{\sigma}_i = \frac{T_g^2}{2} \left(\frac{\partial q_{mass}}{\partial T_1} + \frac{\partial q_{stream}}{\partial T_1} \right)_i$$

where: the subindex $i = (x, y)$ and $(\partial q_{mass}/\partial T_1)$ and $(\partial q_{stream}/\partial T_1)$ represent, respectively, the time derivative of the eulerian mass transport and the streaming with respect to the long scale variable T_1 , that is the local deviation induced by the acceleration field. Note that, up to second order, they are weakly unsteady magnitudes with periodicity $T_g/2$. Thus, mobility and migration of the bedforms can be expected.

- In the wave-group scale, $\mu = \tilde{\mu}(x, y)$ can be evaluated as

$$\widetilde{q_{mass}} + \widetilde{q_{stream}} = 0$$

The typical deviation of crests and troughs locations $\sigma = \tilde{\sigma}(x, y)$ is calculated as,

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{T_g^2}{2} \left(\frac{\partial \widetilde{q_{mass}}}{\partial T_1} + \frac{\partial \widetilde{q_{stream}}}{\partial T_1} \right)_i$$

where $(\partial \widetilde{q_{mass}}/\partial T_1)$ and $(\partial \widetilde{q_{stream}}/\partial T_1)$ represents the wave-group average time derivative of mass transport and streaming with respect to T_1 . In case of regular groups, $\tilde{\sigma}_i$ is a stationary and spatially distributed magnitude. Thus, up to $O(\epsilon^2)$, and as function of the crest and through location, different migration velocities can be expected. This is the mobility of bedforms in case of regular groups, is a third order phenomena resulting from the interference of free and locked long waves. In case of modulated groups, $\tilde{\sigma}_i$ will be weakly unsteady and both mobility and migration of bedforms are obtained up to second order.

Above, the statistical description of the bed morphology amplitude is not addressed. For that, a bed evolution model is required. This was proposed as a future work line of *Chapter 4* because this topic exceeds the scope of the present work. However, its consideration within the general methodology discussed here is straightforward. Until then, the descriptors of the bedform amplitude can be done on the basis on empirical models or field measurements.

4.9 Application case: The Motril entrance channel

To illustrate the methodology of the probabilistic model proposed, we study the stoppage probability during the passage of a medium cargo vessel during extreme sea states and low tide conditions along the entrance channel of the Motril harbor (Granada, Spain).

To illustrate the model we describe the calculation of the stoppage probability due to insufficient under-keel clearance during the passage. The main objective of this example are:

1. illustrate the methodology of the probabilistic model
2. illustrate the influence of wave reflection and the induced morphology on the passage stoppage probability.
3. discuss the possible application of the model for real time management

As focus is in the methodology, we make use of simple models for the statistical description of the passage conditions.

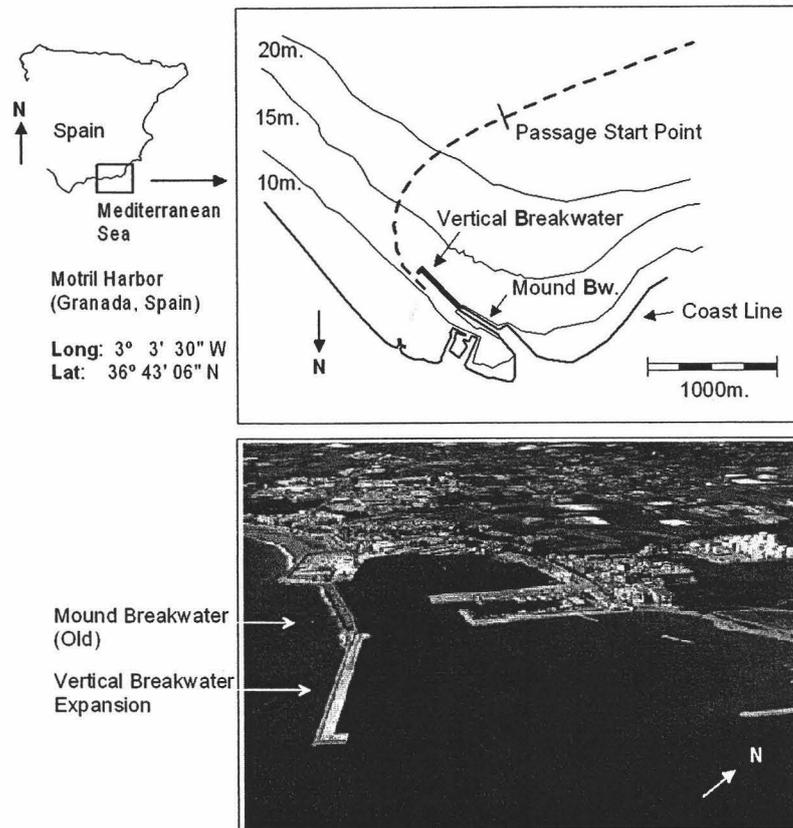
This *Section* is organized as follow. First, we describe the main features of the study case (i.e. harbor location, ship dimensions, entrance route geometry,...). Next, the environmental, morphological and maneuvering conditions in which the passage is supposed to be, are described. Once the passage conditions are defined, we calculate the stoppage probability during the passage due to insufficient under-keel clearance. The influence of agitation conditions and sea state related morphology on the overall stoppage probability and safety depth requirements along the passage are analyzed as function of the breakwater reflectivity.

For completeness, we have included the ship response model description in *Appendix 5-I*.

4.9.1 Motril Harbor and entrance channel description

The Harbor of Motril is located on the *S – E* coast of Spain (Mediterranean sea) and consists of a main dock protected from wave action by the mound breakwater (850m. length) on the west side of the harbor. To improve the harbor operativity, the existing dock was enlarged by lengthening the sloping breakwater 580m. and dredging the dock area to 11.5m. The typology of the new breakwater is vertical impermeable. The principal entrance channel is *N – E* oriented. The total length of the channel is 3000m. Only the last 600

meters of the channel are dredging. The nominal channel width and depth in this area are 100m. and 11.5m. respectively. The harbor location and *N – E* entrance path described above are plotted in the upper part of *Fig.4.7*. Below, a picture of the present harbor configuration is shown. In the image, the vertical typology of the enlarged breakwater can be distinguished.



Figura~4.7: Motril harbor. Location, current configuration and *N-E* entrance path.

Climate of the environment. The maximum fetch in the Motril area is 200Km. Maximum meteorological tidal height measured was 0.4m. The astronomical tide is mainly semidiurnal with height ranging from 0.6 to 1.1m. Real time deep water wave climate in this zone is obtained by: (1) direct scalar buoy measurements ('Cabo de Gata' buoy; Lat. 36°34.2'N, Lon.

| | WSW | W | E | SW |
|------------------------------|------|------|------|-----|
| MEAN WAVE CLIMATE | | | | |
| Annual probability (%) | 17,3 | 15,8 | 15,7 | 5,5 |
| Significant wave height (m.) | 1,1 | 1,1 | 0,9 | 0,8 |
| EXTREME WAVE CLIMATE | | | | |
| Annual probability (%) | 1,2 | 0,9 | 0,6 | 0,1 |
| Significant wave height (m.) | 3,8 | 3,9 | 4,0 | 3,8 |

Figura 4.8: Motril harbor deep water climate. Significant wave climate conditions of mean and extreme regime. (Alfonso et al., 2002. www.puertoes.es)

2°20.4'W; and (2) numerical forecasting. The climate information is provided by 'Programa de Clima Marítimo de Puertos del Estado' (Alfonso et al. (2002), <http://www.puertoes.es>). The available parameters are: significant wave height, peak period, mean wave and wind directions, and mean wind velocity.

The harbor is protected from *NE* to *NW* wind and waves. Significant wave heights and probabilities from *SW* to *SE* sea states are shown in Fig.???. 90% of the wave spectrum energy of these states is within the peak period range of 7 – 12sec. Dominant winds come from *SW*. Currents in the area are assumed negligible ($V_{c,max} \leq 0.1m/s$).

Morphology. The area is characterized by a medium-coarse grain sand ($d_{50} = 3mm$), so bed load is considered the dominant transport mechanism. The last available bathymetry is dated in 1999. No significant dredging has been done since then. Local morphology shows small scale ripples and low amplitude ($\approx 10 - 20cm$) bars parallel to the harbor breakwater induced by the interference of incident and reflected short waves. The bars wavelength are of the same order of magnitude than the half of the incident short wavelength.

Maritime traffic. 56% of the maritime traffic in the Motril harbor consists of Bulkcarrier type vessels. The other part consists on small fishing boats with maximum length of 20m. In the current harbor configuration, the typical medium size cargo vessel is a Bulkcarrier type of 10.000TPM, length $L_{pp} = 140m$, draught $D = 8.5m$ and beam $B = 20m$. The mean number of medium ship (or greater) calls during the last five years was 373. Neglecting monthly variability of maritime traffic, the rate of ship arrivals per hour is

0.04.

4.9.2 Passage description

The passage we consider is the entrance of the medium size cargo vessel during a *SW* storm event in low water level (LWL) conditions. The starting point of the passage has been located at 2.800m. far from the enlarged breakwater's head. The vessel tries to follow the *N - E* path plotted in Fig.4.7. The mean passage duration is $T_c = 17.5$ minutes.

Environmental conditions

The passage is supposed to be in a sea state characterized, in deep water, by a narrow band Jonswap spectrum with significant wave height $H_s = 3.8m$, peak period $T_p = 9s$ and shape factor $\gamma = 3.3$. The mean sea state duration is $T_{st}^{sea} \cong 1.8h$. As $T_C \ll T_{st}^{sea}$, the statistical descriptors of the sea state can be considered stationary during the passage. The mean wave direction is *SW*; no directional dispersion is considered.

The agitation conditions along the passage have been calculated by means of a modified mild slope linear wave propagation model (Massel, 1993; Sánchez, 2001). Wave reflection from bathymetry (up to second order in bed slope) and coastal or harbor structures is included. The old mound breakwater has been characterized by a reflection coefficient $K_R = 0.2$. The coastline has been supposed fully dissipative. To study the influence of the enlarged vertical breakwater reflectivity on the stoppage probability along the entrance channel, we have assigned two 'idealized' reflectivities to model the vertical breakwater: (1) total reflection, i.e. reflection coefficient $K_R = 1$ and (2) full dissipation with $K_R = 0$.

Mean wind and current velocities are considered negligible during the passage. Their possible effects on the maneuvering conditions and ship response have been included as model uncertainty.

The statistical description of significant environmental agents is listed in Fig.4.9.

Morphological conditions

For the description of the **morphological conditions** we distinguish between medium- and large-time variability scales morphology.

Large-time scale morphology is included in the local depth term. The nominal value of the local depth along the channel was obtained from bathymetric data in *LWL*. The relative error in the depth measurements was 5%.

Within the medium-time scale morphology we consider only rhythmic bedforms induced by wave reflection on the harbor breakwater. For the bedform

| ENVIRONMENTAL CONDITIONS | | | |
|--------------------------|--|--|--|
| Description | Time variability scale | SC Description | IC Description |
| Astronomical tide (LWL) | Long time scale $\Omega_{AT}(M_2) \gg T_C$ | $N(0, \sigma_{AT}^2)$ | $N(0, \sigma_{AT}^2)$ |
| Meteorological tide | Long scale $\Omega_{MT} \approx T_{st}^{sea} \approx 1.8h. \gg T_C$ | $N(0, \sigma_{MT}^2)$ | $N(0, \sigma_{MT}^2)$ |
| Wind | Médium scale $\Omega_{wind} \approx T_{st}^{sea} \approx 1.8h. \gg T_C$ | Included in S_K^0 (no significant) | Included in S_K^0 (no significant) |
| Currents | Médium scale $\Omega_{cur} \approx T_{st}^{sea} \approx 1.8h. \gg T_C$ | Included in S_K^0 (no significant) | Included in S_K^0 (no significant) |
| Wind waves | Short scale $T_p \approx 9s. \ll T_C$ | Included in $(S_K^0)_{SC}$ $N(\overline{\eta_{ww}}, \sigma_{ww}^2)$ | Individual waves Gaussian $f(H_s, T_p, \Phi_{ww}(\omega_e))$ |

Figura 4.9: State Clearance (SC) and Instantaneous Clearance (IC) description of environmental conditions in the Motril passage.

description, we assume that the mean persistence of the storm event is large enough (typically, $\sim 15h.$) to consider a fully developed **morphological state**. Moreover, the morphological state is considered stationary within a typical time scale T_{st}^{mor} and $T_C < T_{st}^{mor}$. The spatial distribution is given by potential mass transport pattern in front of a finite reflective breakwater with constant depth $h = 11.5m$. Their location and typical deviation have been calculated according to the procedure described in Section 5.8 (see Fig.4.10). The significant amplitude of the parallel bars to the reflective breakwater has been estimated from field measurements equal to 20cm.

| MORPHOLOGICAL CONDITIONS | | | |
|--------------------------|--|------------------------|------------------------|
| Description | Time variability scale | SC Description | IC Description |
| Local depth in LWL | Long time scale | $N(h_0, \sigma_h^2)$ | $N(h_0, \sigma_h^2)$ |
| Bedforms | Long time scale $T_{st}^{mor} \gg T_{st}^{sea} \gg T_C$ | $N(0, \sigma_{mor}^2)$ | $N(0, \sigma_{mor}^2)$ |

Figura 4.10: State Clearance (SC) and Instantaneous Clearance (IC) of morphological conditions during the Motril passage.

Maneuvering conditions

Accurate modelization of maneuvering conditions in real environments is quite difficult. Proof of that is the continuous effort on dynamical ship response and vessel control modelization (*van Amerongen, J., 1982*). Although, some commercial models give a deterministic answer to the problem, the stochastic description of the maneuvering conditions (ship velocity, path,...), including the influence of the human factor and propulsion systems is not, for the author knowledge, completely solved. In this paper, we have adopted a very simple description of maneuvering conditions based on the empirical models described in the Spanish recommendations for navigation ways (*ROM 3.1.99,1999*, pp.171 - 190) and deterministic maneuvering models.

The mean vessel velocities during the passage were obtained by means of a numerical fast-time simulation program for ship maneuvering. Nominal values of trim \bar{T} and squat \bar{SQ} are calculated making use of ROM 3.1.99 empirical models (*ROM 3.1.99, 1999*). With respect to the passage duration T_C , all the above mentioned random variables have medium-time variability scales. Their statistical behavior has been supposed Gaussian.

The possible vessel deviation from the mean path has been considered also a medium-time scale and Gaussian distributed variable with zero mean and standard deviation $B/2$.

The short-time scale ship response to agitation conditions has been simulated by means of the spectral, linear and stationary model described in *Appendix III*. The damping, restoring and forcing terms of the model were obtained on the basis of a 'Strip Theory' approximation (*Price & Bishop, 1974*). For that, the Froude number was set equal to 0.6.

The influence of the human factor on the maneuvering conditions is included through: (1) the ship velocity uncertainty, (2) the vessel position uncertainty, and (3) the maneuvering under-keel clearance correction term, M_{man}^v . In general, this term can be expressed as function of the local under-keel clearance, S_K :

$$M_{man}^v = \begin{cases} 0 & \text{if } S_K < S_K^0 \\ f(S_K) & \text{if } S_K \geq S_K^0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Here, $f(S_K) = 0.05 \cdot S_K$ and $S_K^0 = 1.0m$.

The statistical description of significant maneuvering conditions is listed in *Fig.4.11*.

| MANEUVRING CONDITIONS | | | |
|---------------------------------|---|--|---|
| <i>Description</i> | <i>Time variability</i> | <i>SC Description</i> | <i>IC Description</i> |
| Vessel draught | Long time scale | $N(D, \sigma_D^2)$ | $N(D, \sigma_D^2)$ |
| Vessel deviation from mean path | Medium time scale ($\approx T_C$) | $N(0, 0.25B^2)$ | $N(0, 0.25B^2)$ |
| Mean vessel velocity | Medium time scale ($\approx T_C$) | $N(\overline{V}_{ship}, \sigma_{ship}^2)$ | $N(\overline{V}_{ship}, \sigma_{ship}^2)$ |
| Squat and Trim | Medium time scale ($\approx T_C$) | $N(\overline{SQ}, \sigma_{SQ}^2),$ $N(\overline{T}, \sigma_T^2)$ | $N(\overline{SQ}, \sigma_{SQ}^2),$ $N(\overline{T}, \sigma_T^2)$ |
| Human factor | Medium time scale ($\approx T_C$) | $f(S_K - S_K^0)$ | $f(S_K - S_K^0)$ |
| Vertical ship displacements | Short scale $T_\xi \cong 15.9s. \ll T_C$ | Included in $(S_K^0)_{SC}$ $N(\overline{\eta}_\xi, \sigma_\xi^2)$ | Individual oscillation Gaussian $f(\xi_s, T_\xi, \Psi_r(\omega_\xi))$ |

Figura~4.11: State Clearance (SC) and Instantaneous Clearance of maneuvering conditions during the Motril passage.

4.9.3 Stoppage probability along the passage

Following the main steps of the probabilistic model, in this *Section* we describe: the state scales along the passage; the passage discretization in subsets and navigation states, and the verification approaches for stoppage probability calculation.

State scales definition

Space-state scale. The space - state scale is defined by Eq. 4.3. For the passage under consideration, $L_{st}^{ship} \cong L_{st}^{sea}$ (because the maneuvering conditions are mainly determined by the agitation conditions) and $L_{st}^{sea} \leq L_{st}^{wc} \leq L_{st}^{mor} \leq L_C$. Consequently, $l_{st} \cong L_{st}^{sea}$.

Time-state scale. The time- state scale is defined by Eq. 4.2a. In the passage under consideration, $T_{st}^{ship} \leq T_C \leq T_{st}^{sea} \leq T_{st}^{wc} \leq T_{st}^{mor}$. Consequently, $t_{st} \cong T_{st}^{ship}$. Assuming that the duration of the dynamic ship response within a subset is small compared with the permanence time τ in the subset, T_{st}^{ship} can be calculated as $T_{st}^{ship} \cong \tau = \bar{V}_{ship} L_{st}^{sea}$.

Passage discretization

Subset definition. To define a complete, exhaustive and mutually exclusive set of subsets along the channel we make use of the 'representative' point (*RP*) concept presented in *Section 5.3*. In this case, *RPs* have been placed along the mean entrance path. The first *RP* is located at $l_{st}/2$ far from the passage starting point. The next *RP* location is found iteratively making use of the statistical requirements for the subset definition (i.e., statistical independence and homogeneity). The procedure is repeated until the total length of the channel L_C is completed. The length of the first subset is $L_{CS} = l_{st}$. For the next ones, it is defined as $L_{CS} = (\lambda_i + \lambda_{i-1})/2$ where $i = 2, \dots, M$. The width of the subset is set equal to B . To model the statistical behavior of the random variables in each subset, 40 randomly selected points within the subset area are used.

Following the above procedure, in the case of the Motril passage we have obtained a set of 6 subsets. Their main characteristics are described in *Fig.4.12*.

Navigation states. For the case of Motril, taking into account that $t_{st} \cong \bar{V}_{ship} L_{st}^{sea}$, only one navigation state is defined in each subset. The navigation

| Subset id. | $L_{SC}(m.)$ | $\lambda_{3,4}(m.)$ | $\tau(sec.)$ | \overline{N}_{ww} | \overline{N}_{shp} |
|---------------|--------------|---------------------|--------------|---------------------|----------------------|
| 1 | 329 | 334.5 | 145 ± 6% | 24 | 13 |
| 2 | 340 | 350.5 | 172 ± 7% | 26 | 16 |
| 3 | 361 | 357.5 | 196 ± 8% | 26 | 17 |
| 4 | 354 | 357 | 205 ± 9% | 29 | 17 |
| 5 | 360 | 358 | 243 ± 10% | 31 | 18 |
| 6 | 356 | — | 267 ± 7% | 31 | 17 |

Figura ~ 4.12: Main statistical descriptors of Subsets along the Motril passage.

state will be described by means of the local statistical descriptors and probability distributions of the environmental, morphological and maneuvering conditions during the passage (see Fig.4.9 , 4.10 and 4.11).

4.9.4 Verification approaches: 'State Clearance' and 'Instantaneous Clearance'

To calculate the stoppage probability in each subset, the stoppage domain of the under-keel clearance verification equation (Eq. 4.13) has to be evaluated. For that, we use the state clearance and instantaneous clearance approaches. In the state clearance approach, the stoppage domain is defined as $(S_K)_{SC} \leq 0$. In the instantaneous clearance, $(S_K)_{IC} \leq 0$.

State clearance approach of the under-keel verification equation

The state clearance approach of the under-keel verification equation can be written as:

$$(S_K)_{SC} = (h_{wc})_{SC} - (d_{ship})_{SC} - (S_K^0)_{SC} \quad (4.28)$$

Where, $(\)_{SC}$ denotes time averaging in the state clearance time scale t_{SC} . Here, $t_{SC} = t_{st} \cong \tau \cong O(\text{min})$. Taking into account the time variability and significance of the random variables in the Motril case, the water column $(h_{wc})_{SC}$ reads:

$$(h_{wc})_{SC} \cong (h_0)_{SC} + (\eta_{mor})_{SC} + (\eta_{tide})_{SC} \quad (4.29)$$

where $(h_0)_{SC}$, $(\eta_{mor})_{SC}$ and $(\eta_{tide})_{SC}$ are the state clearance approximations of the long- and medium-time variables h_0 , η_{mor} and η_{tide} .

The ship related term $(d_{ship})_{SC}$ reads:

$$(d_{ship})_{SC} = (D)_{SC} + (SQ + T)_{SC} + (M_{man}^v)_{SC} \quad (4.30)$$

where $(D)_{SC}$, $(SQ + T)_{SC}$ and $(M_{man}^v)_{SC}$ are the state clearance approximation of the long- and medium time scale maneuvering variables D , SQ , T and M_{man}^v .

Finally, $(S_K^0)_{SC}$ represents an overall state clearance safety margin in which both, the 'model uncertainty' and the state clearance approximation of the environmental and maneuvering short-time scale contributions are included, i.e.

$$(S_K^0)_{SC} = S_K^0 + (\xi_{ship})_{SC} - (\eta_{ww})_{SC} \quad (4.31)$$

Different descriptions of $(S_K^0)_{SC}$ are possible in basis on: engineering and captain judgments, empirical models or extreme statistic. Here, $(S_K^0)_{SC}$ has been model as a Gaussian variable. The nominal value of $(\xi_{ship})_{SC}$ in each subset has been calculated making use of empirical models and safety factors of the Spanish recommendations for waterway design (*ROM 3.1.99*, 1999).

The nominal value of $(\eta_{ww})_{SC}$ in each subset was defined as the mean water level variation induced by short waves. The model uncertainty and random behavior of $(\xi_{ship})_{SC}$ and $(\eta_{ww})_{SC}$ contributions are included in the Gaussian distribution of $(S_K^0)_{SC}$.

Instantaneous Clearance approach of the under-keel verification equation The Instantaneous clearance approach of the under-keel verification equation Eq.4.13, is represented by $(S_K)_{IC}$, where $()_{IC}$ denotes the time averaging in the instantaneous clearance time scale t_{IC} .

Taking into account that the ship response to the agitation conditions is a narrow band process, we define $t_{IC} = \min(T_p^{heave}, T_p^{roll}, T_p^{pitch})$ where T_p^{heave} , T_p^{roll} and T_p^{pitch} are, respectively, the peak periods of the local heave, roll and pitch spectral distributions. As, $t_{IC} \ll t_{SC} \cong \tau$, the statistical independence of state clearance and instantaneous clearance approaches can be assumed. Hence, the instantaneous approach of the long- and medium-time scale terms can be set equal to the state clearance ones, i.e. $(h_{wc})_{IC} \cong (h_{wc})_{SC}$ and $(d_{ship})_{IC} \cong (d_{ship})_{SC}$.

In the instantaneous clearance approach, the statistical description of the significant short-time scale terms has to be included. Here, the amplitude distributions of $(\xi_{ship})_{IC}$ is described as Gaussian process in which each vertical oscillation is considered an individual and independent event. The number of oscillations, their period and amplitude are the statistical descriptors of the process and can be obtained from the ship response spectral distribution in each subset (Newland, 1975). The mean value of individual waves and ship oscillations in the subsets of the Motril passage are detailed in Fig 5.-2.

Discussion of results The stoppage probabilities obtained in both approaches for the 'ideal' mound breakwater case ($K_R = 0$) are shown in Fig.4.13. The reflective breakwater case ($K_R = 1$) is plotted in Fig.4.14. In all the cases, to calculate the stoppage domain, a Monte Carlo procedure with 10^7 simulations is used.

From the results, it can be deduced that the effect of the instantaneous clearance approach is to diminish the state clearance estimation of the subset stoppage probability. Consequently, the overall stoppage probability is also reduced (e.g. for the mound breakwater case $P_{SC}^{passage} = 0.4$ and $P_{IC}^{passage} = 0.25$). The probability reduction is due to the inclusion of the statistical description of the short-scale terms.

The effect of breakwater reflectivity on the stoppage probability is shown in Fig.4.13 and Fig.4.14. It is observed that in the reflective case, the stoppage probability is systematically increased. This is due to the increment

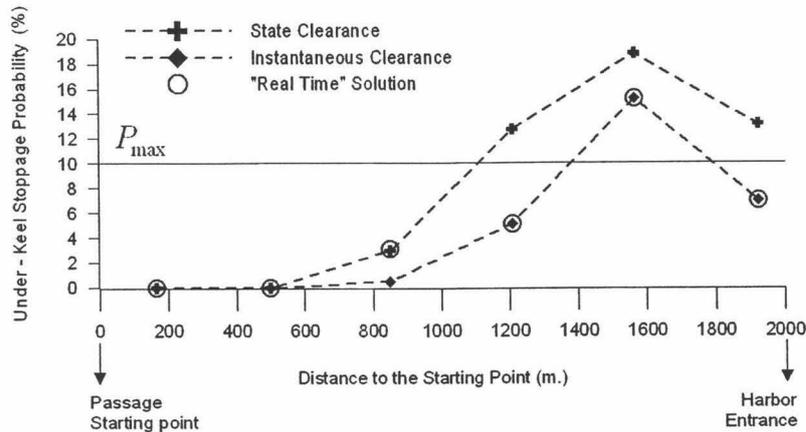


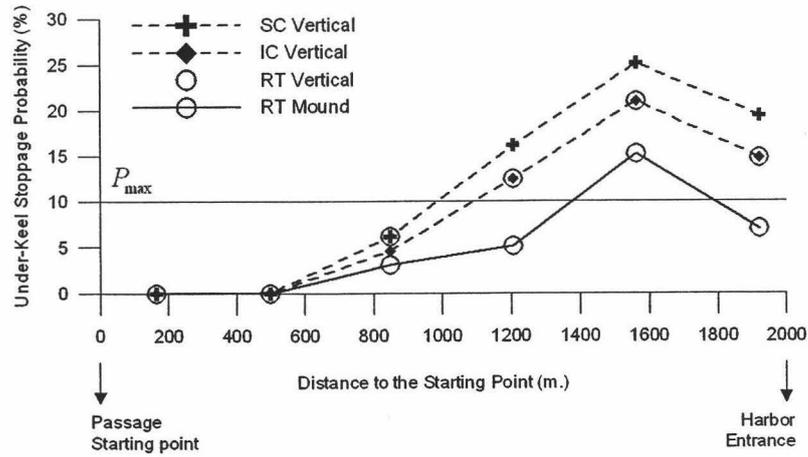
Figura 4.13: Stoppage probability during the passage for an 'idealized' mound breakwater. State clearance, Instantaneous clearance and Real time solutions. $P_{SC}^{passage} = 40,03\%$; $P_{IC}^{passage} = 25.6\%$; $P_{RT}^{passage} = 28.3\%$.

of the agitation conditions along the channel (see Fig.4.15) and the rhythmic bedforms (bars parallel to the breakwater) induced. The increase of the agitation conditions due to the nearly normal incidence of wind waves on the breakwater is maximum in this case (locally it may reach $h/h_{in} \cong 2$). The interference (egg box pattern) between incident and reflected wave trains is significant particularly in the last 1500m. of the entrance channel (i.e. 15 wavelengths). As the mean bar amplitude is 20cm., the influence of wave induced morphology on the increment of the stoppage probability can be consider negligible if it is compared with the agitation.

The overall stoppage probability in the reflective case is $P^{passage} = 42.24\%$. For the mound breakwater it reduces to $P^{passage} = 25.6\%$. The increase in the stoppage probability has the following consequences:

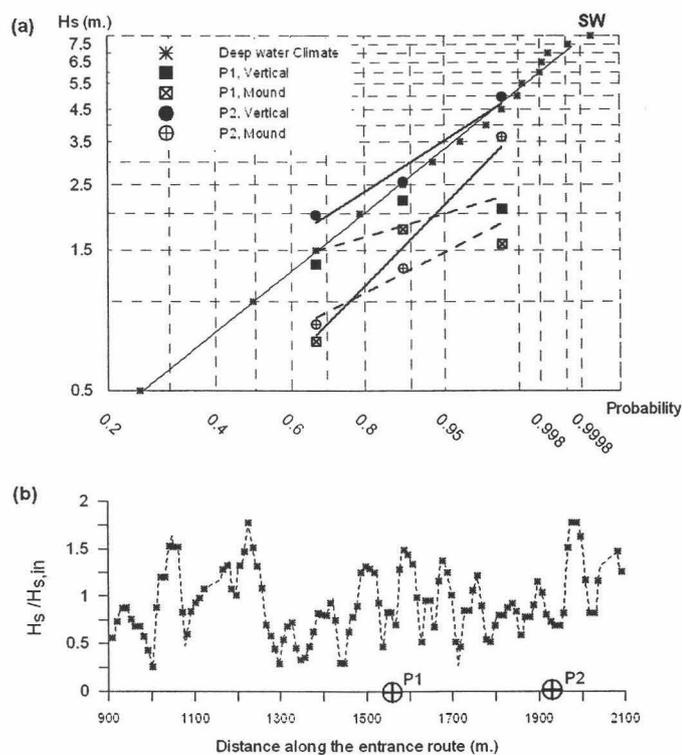
1. Decrease of the usage and operativity levels of the entrance channel;
2. Increase of the depth requirements to obtain the same level of operativity. Following the procedure shown in Fig.??, the depth requirements for the reflective and mound breakwater cases have been calculated. In Fig.??, the mean and 95% upper confidence bands of the current bathymetry and the estimated depth requirements for the current passage, are compared. The results show that, for the passage considered, the volume of material to dredge in the reflective breakwater case may be up to 42% greater than in the mound one.





Figura~4.14: Stoppage probability during the passage for an 'idealized' reflective breakwater. State clearance, Instantaneous clearance and Real time solutions. $P_{SC}^{passage} = 50,03\%$; $P_{IC}^{passage} = 42,04\%$; $P_{RT}^{passage} = 42,7\%$.

Both aspects, and their impact on the economical and environmental cost of entrance channels construction and dredging maintenance, should be taken into account in the entrance channel and breakwater design. Specially in Mediterranean countries in which the traditional mound breakwaters are being changed to vertical breakwaters.



Figura~4.15: Agitation conditions along the Motril entrance route. (a) Deep water and entrance channel wave climate for the mound and reflective breakwater cases. (b) Ratio between local and incident wave height along the mean entrance path (detail).

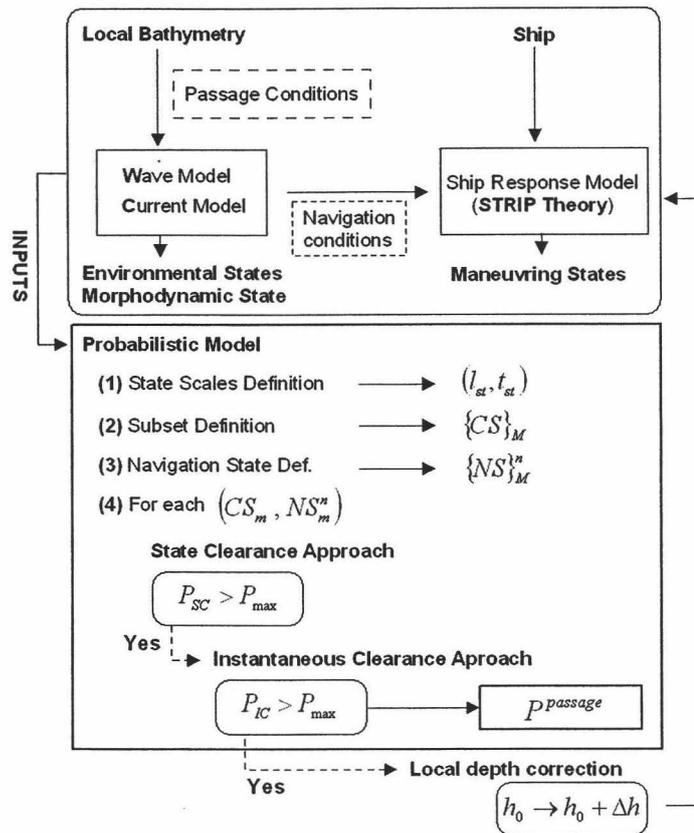
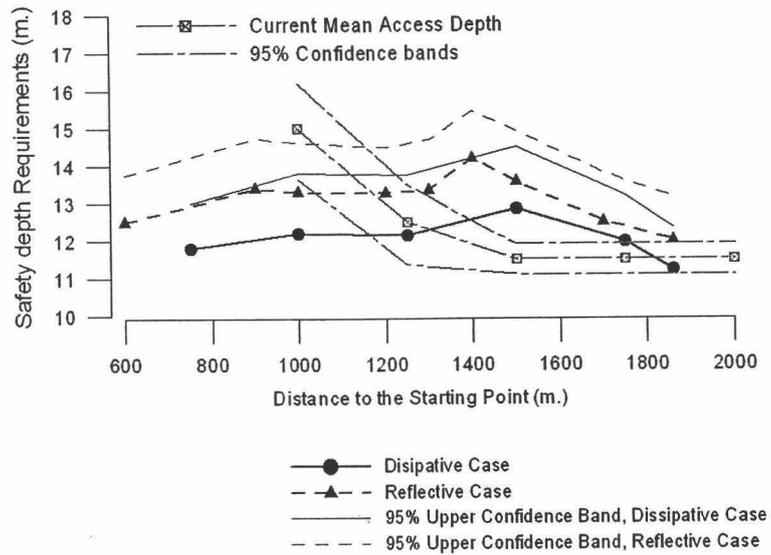


Figura 4.16: Scheme of the probabilistic model and methodology for the estimation of safety depth requirements.



Figura~4.17: Safety depth requirements along Motril entrance channel for the passage under consideration. Reflective breakwater case vs. dissipative breakwater case.

4.10 Real time management of one-way entrance channels

Here, real time management is conceived as the capacity to predict the probability of touching bottom during the passage of a vessel in a given set of environmental, morphodynamic and maneuvering conditions. This capacity provides the pilots and captains with quantitative information regarding the possible risk during passage. This information can be used to correct the maneuvering strategies during the passage or to define the use and exploitation levels of the channel. In any case, real time management of entrance channels requires: (1) definition of a safety criteria for the passage and (2) their evaluation in real time.

In this *Section* we discuss both requirements from the point of view of the probabilistic model proposed. The conclusions are applied to the Motril passage.

Safety criteria for one way entrance channels

The safety criteria for passages along one way entrance channels can be specified by one of the following conditions:

$$P^{passage} \leq P_{max} \quad (4.32)$$

$$P^m \leq P_{max} \text{ with } m = 1, \dots, M \quad (4.33)$$

where P_{max} represents the maximum stoppage probability admissible for the stoppage mechanism under consideration. The choice of the P_{max} value depends: (1) on the management point of view adopted (e.g. that of harbor pilots, ship captains, harbor authorities, etc.); and, as recommended by *ROM 0.0.*, (2) on the economic, social, and environmental impact of the possible occurrence of an accident (i.e., on the operational nature of the channel).

The criterion defined by Eq.4.33 does not guaranty the fulfilment of the safety requirements along the passage (Eq.4.32). It can be deduced making use of Eq.4.18. Consequently, it should be applied only to entrance channels in which the economic, social or environmental impact of an accident is low, or when the vessel maneuverability during the passage is good enough to be modified in real time. In contrast, the criterion defined by Eq.4.32 guaranties the safety requirements in each subset and is more recommendable in passages in which the impact of a possible accident is high and/or the ship maneuverability is small.

The case of Motril. Taking into account the operativity nature of the Motril entrance channel, the maximum stoppage probability is set equal to

$P_{\max} = 10\%$. From *Fig.4.13* and *Fig.4.14*, it is concluded that the passage under consideration can not be considered safety for any of the management criteria discussed in before. Consequently, the access should be denied.

Real time management

For the evaluation of the safety requirements in real time, the probabilistic model proposed defines two approaches: the state clearance and the instantaneous clearance.

Once the safety criteria is defined and from a real time management point of view, the instantaneous clearance approach is only strictly necessary when the safety requirements are not fulfilled in the state clearance approach, or when the levels of use and exploitation of the channel have to be optimized. The 'real time' solution can be defined as:

$$P_{RT} = \begin{cases} P_{SC} & \text{if } P_{SC} \leq P_{\max} \\ P_{IC} & \text{if } P_{SC} > P_{\max} \end{cases} \quad (4.34)$$

Within the approach described, the optimization of the channel management can be carried out by means of: **(1) improved models** of the environment, morphological and maneuvering conditions along the passage, **(2) improved the statistical description** of the variables through more realistic probability distributions (overall, those related with the maneuvering conditions) and **(3) the use of Bayesian or assimilation data techniques** that facilitate the adjustment of parameters of the probabilistic models and the reduction of the S_K^0 margin.

The case of Motril. 'Real time' solutions of the stoppage probability along the Motril passage are plotted in *Fig.4.13* and *Fig.4.14* for the safety criteria defined by Eq.4.33. The overall stoppage probabilities obtained are $P_{RT}^{passage} = 28.3\%$ for the mound breakwater, and $P_{RT}^{passage} = 42.7\%$ for the fully reflective one.

4.11 Conclusions

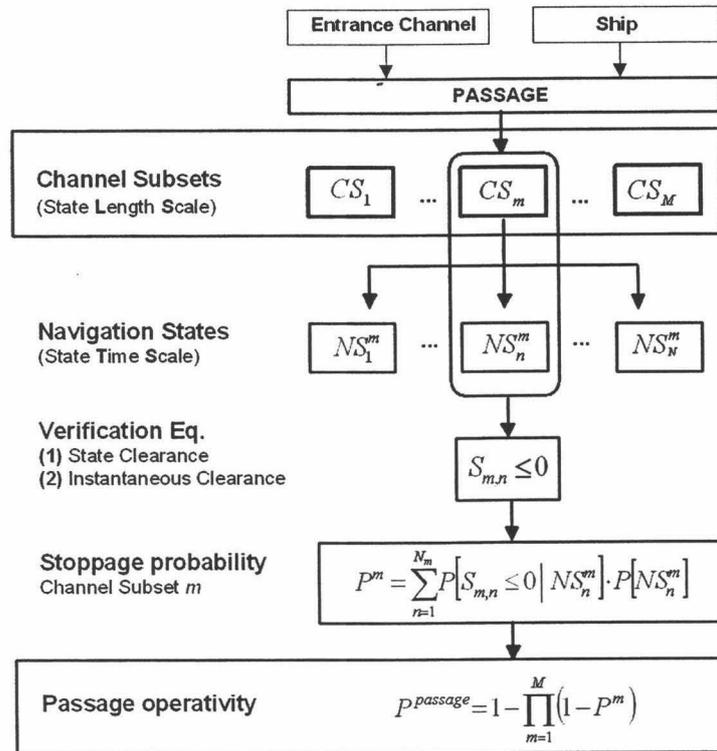
In this *Chapter*, we have described a probabilistic model for the calculation of the stoppage probability of one-way entrance channels during a passage and the entrance channel operativity levels.

The model proposed is based on the *ROM 0.0* methodology and describes the passage from a probabilistic point of view on the basis of:

1. Definition of '**State scales**' from the analysis of the time and space variability of the significant random variables of the problem. They are defined as the space and time local scales in which the behavior of the random variables can be assumed, respectively, homogenous and stationary from a statistical point of view;
2. Division of the channel in statistically independent '**subsets**' and definition of a complete set of '**navigation states**' for each subset during a passage. We propose different criteria for their definition. The selection of the 'optimal' criterion is, by now, an open question;
3. In each subset and navigation state, the '**verification equations**' of the stoppage mechanisms considered are defined. Here, the equation is defined in terms of a safety margin;
4. Definition of two statistically independent verification approaches for the calculation of the stoppage probability. They are called: '**State Clearance**' and '**Instantaneous Clearance**'. In the first one, the random variables are described by means of state descriptors and probability functions representative of the local state scales. In the second one, a representative short scale of the significant random variables is used. The application of the model is limited by the assumption of statistical independence between both approaches. This hypothesis seems to be reasonable in most of the real problems.

Based on the previous concepts, the methodology proposed for the calculation of the '**overall stoppage probability**' along the passage is (see *Fig.4.18*):

1. division of the channel in subsets and division of the passage duration in navigation states, according to the local state scales;
2. calculation of the stoppage probability in each subset making use of the state clearance approach;
3. in those subsets in which the safety conditions are not fulfilled, it will be necessary to calculate the stoppage probability in the instantaneous clearance approach;
4. finally, the overall probability along the passage is calculated making use of the statistical independence of the subsets.



Figura~4.18: Methodology for the calculation of the stoppage probability during the passage.

Assuming the statistical independence between ship arrivals and between storm events, the operativity of the channel has been defined.

The statistical description of environmental, morphological and maneuvering conditions is made in terms of their characteristic variability scales, the verification approach adopted and the available data. In the case of morphology, we have used nominal values for the large-time scale bedforms and bathymetry, and stationary statistical descriptors for the medium-time variability ones. A procedure to calculate the mean location and typical deviation of crests and troughs is presented for the cases of monocromatic and modulated gravity waves. From this procedure, the migration and movility rates of wave induced bedforms is discussed.

The probabilistic model has been applied to the calculation of the stoppa-

ge probability due to insufficient under-keel clearance in the *N - E* entrance channel of Motril harbor (Granada, Spain). The passage analyzed is the entrance of a medium size cargo vessel in extreme wave climate and low tide conditions. The stoppage probability along the passage has been calculated in the state clearance and instantaneous clearance approaches. It was found that, assuming the statistical independence of both approaches, the effect of the instantaneous clearance approach is to diminish the state clearance stoppage probability. The results show that, in this case, increment of the agitation conditions along the channel are the significant agent for the increase of the stoppage probability. With the example, the main aspects of the probabilistic model was illustrated. Also, it was shown that wave reflection may diminish the use and exploitation levels of the channel and increase significantly the channel depth requirements for safety navigation. Their economical (i.e. construction and dredging maintenance costs) and environmental impacts should be taking into account in channel and breakwater design.

Capítulo 5

Conclusiones y futuras líneas de trabajo

5.1 Conclusiones

En esta *Tesis* se han analizado los procesos morfodinámicos inducidos por ondas gravitatorias moduladas en presencia de estructuras reflejantes en profundidades intermedias y su posible influencia en la operatividad portuaria, en particular en la operatividad de los canales de acceso de una vía.

El cuerpo del fluido se ha dividido en dos regiones: la región no viscosa (o exterior) y la capa límite del fondo. En las dos regiones, la hidrodinámica se ha descrito analíticamente a partir de modelos sencillos pero que incluyen los principales fenómenos físicos de ambas regiones. Por simplicidad, se ha considerado una estructura reflejante impermeable e infinita y fondo constante. De igual forma se han considerado despreciables las posibles pérdidas de energía (por rotura o fricción).

Los procesos morfodinámicos inducidos se han analizado a partir de la estructura espacial y temporal de las cantidades hidrodinámicas promediadas (en tiempo o en espacio) más significativas. La presencia de dos escalas (de tiempo y espacio) naturales en el problema (i.e. las escalas de tiempo y espacio de la onda corta y las de la onda larga o grupo) permiten la definición de dos regímenes oscilatorios para la definición del promedio: el *régimen débilmente no estacionario*, y el *régimen estacionario*. En el primero, las escalas de promedio son las de la onda corta. En el régimen estacionario, las escalas de promedio son las de la onda larga. Ambos regímenes pueden calcularse a partir del *operador de promedio (espacial o temporal) de orden n* . En el caso de grupo regulares, *el operador de orden 0* corresponde al régimen débilmente no estacionario y da lugar a cantidades moduladas espacialmente

y con periodicidad igual al semiperiodo del grupo. El *operador de promedio temporal de orden 1*, da lugar al régimen estacionario en el que las cantidades promediadas son constantes en el tiempo. Su estructura espacial es función del carácter lineal o no lineal de la cantidad hidrodinámica considerada. En el caso más general, puede ser modulada en dirección normal a la estructura y uniforme en la dirección longitudinal.

La *Tesis* pone de manifiesto que la escala elegida para la descripción del promedio es determinante para la descripción de la morfodinámica generada por las ondas gravitatorias moduladas.

Asumiendo del mismo orden el parámetro de Stokes y el parámetro de modulación, $O(ak) \sim \epsilon$, la hidrodinámica de la región exterior se ha modelado hasta segundo orden en el parámetro de modulación. El modelo incluye los efectos de: (1) no linealidad débil de la onda gravitatoria, (2) las ondas largas vinculadas y (3) ondas libres generadas en la interacción con la estructura. Su rango de aplicación está condicionado por la validez de la hipótesis $O(ak) \sim \epsilon$ y por la condición $ak/(kh)^3 \ll 1$. Para describir la modulación de larga escala del tren gravitatorio se ha empleado la formulación de grupos de *Schäffer* (1990). Aplicando la técnica JWKB que permite la descripción del problema en función de las escalas naturales presentes, se ha obtenido la solución analítica del potencial de velocidades para el caso de grupos regulares progresivos y parcialmente estacionarios. A partir del potencial de velocidades se han calculado las siguientes cantidades promediadas en los regímenes débilmente no estacionario y estacionario: campo de velocidades, nivel medio, campo de presión, flujos de masa, cantidad de movimiento y energía, y las componentes diagonales y tangencial del tensor de radiación. De los resultados, puede concluirse que:

- En el caso más general, en el régimen débilmente no estacionario, las cantidades hidrodinámicas promediadas en el tiempo están moduladas en las siguientes escalas: (1) una escala del orden de magnitud de la onda gravitatoria; (2) una escala del orden de magnitud de la onda larga vinculada o del grupo; y (3) una escala resultado de la interferencia de las ondas largas vinculadas y la onda larga libre y que depende de los siguientes parámetros: $(\sqrt{gh}, \Omega, C_g, \alpha, \theta_f)$ y que, en profundidades intermedias, puede llegar a ser del orden de 100 veces la longitud de onda del grupo. La posible existencia de esta escala de modulación pone de manifiesto que la hidrodinámica asociada a ondas gravitatorias moduladas en presencia de reflexión presenta escalas espaciales del mismo orden que algunas de las formas de lecho de gran escala (ej. **megaripples**) de profundidades intermedias.
- En el régimen estacionario, las cantidades hidrodinámicas promediadas

en el tiempo son cantidades constantes, uniformes en dirección paralela a la estructura, y en el caso más general, moduladas en dirección perpendicular a la misma. Dicha modulación presenta las siguientes escalas: (1) la semilongitud de onda corta; y, (2) la semilongitud de onda del grupo.

Las estructuras espaciales y temporales descritas dan lugar a los siguientes procesos morfodinámicos:

- Posible generación de corrientes longitudinales débilmente no estacionarias en ausencia de rotura
- Confirmación, y extensión al caso de ondas gravitatorias moduladas, de la teoría de *Longuet-Higgins* (1962) en relación a la posible generación de microseismos por trenes de ondas de superficie estacionarias.
- Confirmación de la importancia de la presencia de modulaciones de larga escala en el transporte de sedimento a través de la modulación espacial y temporal del perfil vertical de concentración de sedimento (en el caso de transporte en suspensión), y la modulación de la capa límite bentónica (en el caso de transporte por fondo).

Utilizando los resultados de la presión ejercida por grupos regulares parcialmente reflejados en la región exterior e imponiendo condiciones de no deslizamiento en el fondo y de continuidad de flujo en el límite superior de la región viscosa, se ha calculado la hidrodinámica de la capa límite de fondo hasta orden $O(\delta k)^2$. Para ello, se ha asumido una estructura espacial y temporal de la viscosidad de remolino de tipo armónico. La solución analítica del problema se ha obtenido aplicando la técnica JWKB. Las cantidades hidrodinámicas estudiadas han sido: el campo euleriano de velocidades, la velocidad de transporte de masa (i.e. la velocidad lagrangiana) y el 'streaming'. En su descripción se han considerado los regímenes oscilatorios débilmente no estacionario y estacionario.

De los resultados obtenidos en el régimen débilmente no estacionario concluirse que:

- en el caso más general y para el orden considerado, el 'streaming' y la velocidad de transporte de masa son cantidades moduladas espacialmente en las escalas de la onda corta, onda larga, y en la escala que resulta de la interacción de la onda larga vinculada y la onda libre. Además, son proporcionales al parámetro γ , y cuasi-estacionarias, con periodicidad $T_g/2$

- El perfil vertical de estas magnitudes difiere del caso monocromático en los siguientes aspectos: (1) en el caso progresivo, su signo es consante a lo largo de la capa límite, por lo que existe un transporte potencial neto en el sentido de propagación del oleaje y, en consecuencia, los patrones morfológicos inducidos en el caso de transporte dominante por fondo y en suspensión, son semejantes; y, (2) en el caso parcialmente estacionario, el signo de ambas magnitudes es función de la profundidad y pueden observarse patrones de transporte de tipo N y L en función del modo de transporte dominante.

En el régimen estacionario,

- en el caso progresivo, el 'streaming' y la velocidad de transporte de masa pueden generar un transporte neto estacionario y uniforme a lo largo de la capa límite en la dirección de propagación del tren modulado.
- en el caso parcialmente estacionario, la modulación en dirección perpendicular a la estructura pueden dar lugar a patrones de transporte inicial de sedimento en forma de barras paralelas a la estructura con distancia entre crestas proporcional a la semilongitud de onda corta, la semilongitud de onda del grupo y al coseno del ángulo de incidencia.

Los resultados obtenidos extienden al caso de grupos regulares parcialmente reflejados y confirman los trabajos previos para ondas monocromáticas de Baquerizo & Losada, (1998) Carter et al. (1974).

La presencia de distintas escalas de modulación (del orden de la onda corta, del grupo y posibles super escalas de modulación) en la estructura espacial de la velocidad de transporte de masa y del 'streaming' demuestran que la presencia de modulaciones de larga escala en el oleaje gravitatorio puede ser de gran importancia para explicar la morfología (de pequeña y gran escala) de profundidades intermedias.

5.1.1 Sobre la influencia de la morfodinámica inducida por grupos regulares en la operatividad de canales de acceso

La descripción de la influencia de los procesos morfodinámicos inducidos por ondas gravitatorias moduladas en la operatividad de canales de navegación se ha abordado desde un punto de vista probabilista. Para ello, se ha propuesto un modelo basado en la ROM 0.0 que permite calcular la probabilidad de parada asociada al tránsito de un barco por un canal de acceso de una vía.

El modelo se basa en:

1. La definición de 'Escalas de estado' a partir del análisis de la variabilidad espacial y temporal de las variables aleatorias más significativas del problema (ambientales, de maniobra o morfológicas). Para su definición se hace uso de los conceptos de homogeneidad y estacionariedad estadísticas;
2. Discretización del canal en 'tramos' estadísticamente independientes y del tránsito en 'estados de navegación' para cuya definición se proponen distintos criterios estadísticos en función de las escalas de estado;

Para el cálculo de la probabilidad de parada, se proponen dos niveles de verificación de los mecanismos de parada del canal de navegación: el nivel de 'estado de resguardo' y el de 'resguardo instantáneo'. En el primero, los términos de la ecuación de verificación se describen en función de descriptores de estado. En el nivel de resguardo instantáneo, las variables aleatorias se describen mediante descriptores estadísticos y distribuciones de probabilidad características de la variabilidad temporal de los agentes y acciones de corto periodo (generalmente las oscilaciones del barco).

La probabilidad de parada durante el tránsito, se calcula finalmente haciendo uso de la independencia estadística de tramos. En función del carácter del canal, su operatividad puede calcularse aplicando el modelo propuesto a partir de un conjunto representativo y completo de estados ambientales, de maniobra y morfodinámicos del canal. La definición de dos niveles de verificación permite, además del cálculo de la operatividad durante la vida útil del canal, establecer distintos criterios de gestión en tiempo real del mismo teniendo.

De la aplicación del modelo a la derrota de entrada del puerto de Motril, se concluye que, los procesos morfodinámicos inducidos por ondas gravitatorias moduladas y parcialmente reflejadas puede ser un factor significativo en la probabilidad de parada de los canales de acceso. Esta influencia debería tenerse en cuenta en el diseño y gestión de obras de abrigo portuarias y canales de navegación próximos a estructuras reflejantes.

5.2 Nuevas líneas de investigación

Entre otras, el trabajo de investigación realizado da lugar a las siguientes líneas de investigación:

5.2.1 Sobre la morfodinámica inducida por ondas gravitatorias moduladas

- **Verificación del modelo.** Pese a la dificultad de medir los procesos de larga escala predichos, se considera imprescindible experimentalmente (ya sea en laboratorio o en el campo), los procesos hidrodinámicos y morfológicos descritos.
- **Extensión del modelo a tercer orden en el parámetro de modulación.** La extensión del modelo a $O(\epsilon)^3$ permitiría analizar la hidrodinámica inducida por la interacción no lineal de los trenes de onda larga (vinculada y libre) incidentes y reflejado así como los procesos morfodinámicos de larga escala generados.
- **Aplicar la metodología propuesta a trenes modulados resultado de la dispersión angular.** En esta *Tesis*, la modulación de las ondas gravitatorias se ha formulado a partir de la interferencia de dos ondas cortas de frecuencia próxima (dispersión en frecuencias). El mismo análisis puede realizarse a partir de una formulación basada en la superposición lineal de dos ondas de igual frecuencia pero propagándose en direcciones próximas pero distintas (dispersión angular). Esta situación es característica de profundidades reducidas, por lo que sería interesante analizar la morfodinámica asociada a estas condiciones.
- **Comparación de resultados con modelos basados en teoría de inestabilidad morfológica.** En los últimos años, la mayor parte de los trabajos realizados para explicar la generación y transformación de formas de lecho de gran escala se ha fundamentado en modelos de inestabilidad morfológica alejados de la intuición y difíciles de comprobar experimentalmente. El modelo propuesto permitiría verificar si las escalas y formas de lecho predichas por estos modelos guardan relación con los patrones morfodinámicos encontrados aquí a partir de la hidrodinámica inducida por las ondas gravitatorias moduladas. La comparación completa de ambos modelos requeriría acoplar al modelo hidrodinámico propuesto un modelo de evolución del lecho.
- **Inclusión de los resultados obtenidos en la teoría 'Surf Beat' para trenes parcialmente reflejados.** Los modelos existentes de generación de ondas largas a partir de trenes modulados y oscilaciones de la línea de rotura no tienen en cuenta los términos de interacción entre los trenes incidente y reflejado. En este trabajo se ha puesto de manifiesto que dichos términos son fundamentales en la descripción

de la morfodinámica inducida por ondas gravitatorias moduladas en presencia de estructuras reflejantes. Por lo que, a la luz de los resultados obtenidos, los modelos de 'surf beat' deberían revisarse para tener en cuenta las oscilaciones inducidas por dichos términos.

- **Incorporar modelos de viscosidad turbulenta no estacionariosn al modelo de capa límite.** Aunque no se esperan cambios significativos en la física del problema, la inclusión de modelos de viscosidad más realistas puede dar lugar a cambios en la magnitud de las corrientes medias inducidas, y por tanto en las escalas temporales de evolución, movilidad y migración de las formas de lecho inducidas por las ondas gravitatorias moduladas.

5.2.2 Sobre el modelo probabilista para el cálculo de operatividad en canales de acceso

- **Validación y calibración del modelo.** En particular, en relación a los criterios para la discretización del canal en tramos y su posible dependencia estadística. Para ello se proponen medidas específicas de laboratorio, monitorización de canales de acceso y aplicación de metodologías ARMA para incorporar los efectos de no homogeneidad, no estacionariedad y posible dependencia estadística entre tramos.
- **Mejora de los modelos estadísticos.** Para lo cual se propone la aplicación de técnicas Bayesianas y asimilación de datos que permitan el ajuste de parámetros de las distribuciones de probabilidad empleadas así como el estudio de las distribuciones de probabilidad más adecuadas para la descripción del carácter aleatorio de las variables morfodinámicas y de las condiciones de maniobrabilidad.

La mayor parte de las líneas de investigación descritas han sido incluidas como líneas de trabajo en el proyecto del Ministerio de Fomento (BOE, num. 218; 13 Dic. 2002, Resolución 24317) actualmente en vigor y cuyo principal objetivo es la validación y posible implantación de los modelos propuestos en las Autoridades Portuarias de Cádiz y Gijón.



Apéndice A

Solución JWKB de un tren de ondas modulado sobre fondo constante

Para obtener la solución analítica del problema de propagación de un tren modulado sobre fondo constante es posible utilizar la técnica JWKB. En este Apéndice, se presentan los principales resultados del potencial de velocidades hasta segundo orden en el parámetro de modulación. Para ello se ha utilizado la Teoría de Stokes y las ecuaciones de gobierno descritas en el *Capítulo 2* (Dingemans, 1997, pp.171-183).

A.1 Potencial de velocidades

En esta *Sección* se presenta la solución del potencial de velocidades instantáneo de un tren modulado progresivo hasta el orden $O(\epsilon^2)$.

A.1.1 Solución a primer orden, $n = 1$

La solución de primer orden del potencial de velocidades Φ_1 tiene la siguiente estructura:

$$\Phi_1 = \phi_{10} + \{\phi_{11} \exp(i\varphi) + c.c.\} \quad (\text{A.1})$$

donde $\varphi = k_x x + k_y y - \omega t$ representa la fase de la onda gravitatoria con frecuencia angular $\omega = 2\pi/T$ y número de onda $k = 2\pi/L$. Teniendo en cuenta que el ángulo de incidencia respecto a la normal α , las componentes del vector de onda son: $k_x = k \cos \alpha$ y $k_y = k \sin \alpha$.

En el caso más general se obtiene que

$$\phi_{10} = \phi_{10}(X_1, T_1, X_2, T_2, \dots) \quad (\text{A.2})$$

$$\phi_{1,1} = \left(\frac{-igA_{1,\pm 1}}{2\omega} \right) f(z) \quad (\text{A.3})$$

donde: $f(z) = \frac{\text{Cosh}(k(h+z))}{\text{Cosh}(kh)}$ y $A_{1,1} = A_{1,1}(X_1, T_1, X_2, T_2, \dots)$ representan las amplitudes de la onda corta moduladas en las escalas del grupo y caracterizada por la fase $\varphi = k_x x + k_y y - \omega t$. En el caso de grupos regulares $A_{1,1}$ es,

$$A_{1,1} = a \{ \exp(\pm i\varphi_g) + \gamma \exp(\mp i\varphi_g) \}$$

In the above expression, $\varphi_g = K_{g,x}X_1 + K_{g,y}Y_1 - \Omega T_1$, con $K_{g,x} = K_g \cos \alpha$, $K_{g,y} = K_g \sin \alpha$ y $K_g = T_g/C_g$.

El término ϕ_{10} no dependiente de la variable z , representa la contribución de la onda larga ligada al grupo y la posible contribución de las ondas largas libres generadas en la interacción del tren de ondas modulado con una discontinuidad (ej. estructura reflejante). En el caso de grupos regulares, su dependencia espacial se reduce a $\phi_{10} = \phi_{10}(X_1, T_1)$. Para obtener su estructura es necesario resolver el problema a tercer orden con

$m = 0$. Teniendo en cuenta que $(C_2)_{T_1} = 0$, la ecuación de gobierno del potencial ϕ_{10} es (Benney & Roskes (1985)),

$$(\phi_{10})_{T_1 T_1} - gh [(\phi_{10})_{X_1 X_1} + (\phi_{10})_{Y_1 Y_1}] = \left(\frac{g^2 k}{2\omega} - \frac{gkC_g}{2 \sinh 2kh} \right) \left[\frac{k_x}{k} |A|_{X_1}^2 + \frac{k_y}{k} |A|_{Y_1}^2 \right] \quad (\text{A.4})$$

La ecuación anterior, admite dos soluciones: la solución homogénea que corresponde a la onda libre ϕ_{10}^f y la solución forzada, que corresponde a la onda larga vinculada ϕ_{10}^b . La estructura de la onda vinculada incidente $\phi_{10}^{b,I}$, la onda vinculada reflejada $\phi_{10}^{b,R}$, y la onda libre reflejada $\phi_{10}^{f,R}$ se expone a continuación:

$$\phi_{10}^{b,I} = \frac{-ig}{2\Omega} D_{10}^I \exp(2i\varphi_g) + c.c.$$

$$\phi_{10}^{b,R} = \frac{-ig}{2\Omega} D_{10}^R K_R^2 \exp(2i\varphi_g^R) + c.c.$$

$$\phi_{10}^{f,R} = \frac{-ig}{2\Omega} E_R \exp(2i\varphi_g^{f,R}) + c.c.$$

donde K_R representa el coeficiente de reflexión de la onda corta y $\varphi_g^{f,R} = -K_{gx}^f X_1 + K_{gy}^f Y_1 - \Omega T_1$ es la fase de la onda larga libre con $K_{gx}^f = K_g^f \cos \theta_f$, $K_{gy}^f = K_g^f \sin \theta_f$. El número de onda de la onda libre se define como $K_g^f = \Omega/\sqrt{gh}$ y el ángulo con el que es reflejada θ_f es,

$$\theta_f = \arccos \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\Omega^2}{gh} - k^2 \sin^2 \alpha}}{\Omega/\sqrt{gh}} \right\} \quad (A.5)$$

Para el caso de grupos regulares, las amplitudes de la onda larga vinculadas D_{10}^I , D_{10}^R son,

$$D_{10}^I = \frac{\Omega\gamma a^2}{g} \left(\frac{g^2}{\omega} - \frac{gC_g}{\sinh 2kh} \right) \frac{(k_x K_{gx} + k_y K_{gy})}{(\Omega^2 - gh |K_g|^2)}$$

$$D_{10}^R = \frac{\Omega\gamma a^2}{g} \left(\frac{g^2}{\omega} - \frac{gC_g}{\sinh 2kh} \right) \frac{(-k_x K_{gx} + k_y K_{gy})}{(\Omega^2 - gh |K_g|^2)}$$

Asumiendo reflexión total de la onda corta, the amplitude of the reflected free long wave E_R can be obtained applying the continuity of the second-order long wave potentials and the second order flux across $X_1 = 0$ as matching conditions. *Losada et al.*(1993) found that, for the case of no long wave transmission,

$$E_R = E_T - (D_{10}^I + D_{10}^R K_R^2)$$

where E_T representa la amplitud de la onda libre transmitida y puede ser calculada como,

$$E_T = \frac{1}{2} \left[\frac{K_{gx}^f}{K_{gx}^f} (D_{10}^I - D_{10}^R K_R^2) + (D_{10}^I + D_{10}^R K_R^2) \right]$$

En este punto se considera importante hacer notar que, excepto en profundidades reducidas y aún suponiendo $K_R = 1$, existe una onda libre transmitida y reflejada de amplitud no nula. El aumento del ángulo de incidencia del tren modulado (ver *Eq.A.5*) produce la disminución de su amplitud.

Renunciando en cuenta lo anteriormente expuesto, en el caso más general, el potencial $\phi_{10} = \phi_{10}^{b,I}$.

A.1.2 Second order solution, $n = 2$

La solución del potencial a segundo orden Φ_2 es,

$$\Phi_2 = \phi_{20} + \{\phi_{21} \exp(i\varphi) + c.c.\} + \{\phi_{22} \exp(2i\varphi) + c.c.\} \quad (\text{A.6})$$

A partir de la solución no homogénea, la ecuación de conservación de masa que se obtiene sobre fondo constante es,

$$\frac{\Omega}{C_g} = \frac{k_x K_{g,x}}{k} + \frac{k_y K_{g,y}}{k}$$

De la ecuación homogénea (Mei, 1982) y haciendo uso de la condición de Kirby (1987) para evitar el comportamiento secular de la solución de $\phi_{2,\pm 1}$ cuando $kh \rightarrow \infty$, se puede obtener que,

$$\phi_{20} = \phi_{20}(X_1, T_1, X_2, T_2, \dots) \quad (\text{A.7})$$

$$\phi_{2,1} = \left(\frac{-g}{2\omega}\right) f_{21}(z) \left[\frac{k_x}{k^2} \frac{\partial A_{1,1}}{\partial X_1} + \frac{k_y}{k^2} \frac{\partial A_{1,1}}{\partial Y_1} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$\phi_{2,2} = \left(\frac{-3i\omega}{16}\right) f_{22}(z) A_{11}^2 \quad (\text{A.9})$$

donde,

$$f_{2,1}(z) = \frac{1}{\text{Cosh}(kh)} \left\{ k(z+h) \text{Si nh}[k(z+h)] - \frac{\omega^2 h}{g} \text{Cosh}[k(z+h)] \right\}$$

$$f_{22}(z) = \frac{\text{Cosh}[2k(z+h)]}{\text{Si nh}^4(kh)}$$

La estructura de ϕ_{20} requiere la solución del sistema a cuarto orden con $m = 0$. Aquí no se incluye, porque no aparece de forma explícita en ninguna de las magnitudes hidrodinámicas dentro del orden de aproximación considerado.

A.1.3 Caso parcialmente estacionario

En el caso de reflexión total o parcial del tren de ondas modulado, el potencial de velocidades hasta segundo orden se expresa

$$\Phi^T = \epsilon (\Phi_1 + \Phi_1^R) + \epsilon^2 (\Phi_2 + \Phi_2^R) + \dots \quad (\text{A.10})$$

donde

$$\Phi_1^R = \phi_{10}^R + \{ \phi_{11}^R \exp(i\varphi^R) + c.c. \} \quad (\text{A.11})$$

y

$$\Phi_2^R = \phi_{20}^R + \{ \phi_{21}^R \exp(i\varphi^R) + c.c. \} + \{ \phi_{22}^R \exp(2i\varphi^R) + c.c. \} \quad (\text{A.12})$$

En la expresión anterior, $\varphi^R = -k_x x + k_y y - \omega t$ representa la fase de la onda corta reflejada.

El término $\phi_{10}^R = \phi_{10}^{b,R} + \phi_{10}^{f,R}$ fue descrito en la *Sección* anterior. Las expresiones de los potenciales reflejados hasta segundo orden se listan a continuación:

$$\phi_{1,1}^R = \left(\frac{-ig}{2\omega} \right) f(z) K_R B_{1,1} \quad (\text{A.13})$$

$$\phi_{2,1}^R = \left(\frac{-g}{2\omega} \right) f_{21}(z) K_R \left[\frac{-k_x}{k^2} \frac{\partial B_{1,1}}{\partial X_1} + \frac{k_y}{k^2} \frac{\partial B_{1,1}}{\partial Y_1} \right] \quad (\text{A.14})$$

$$\phi_{2,2}^R = \left(\frac{-3i\omega}{16} \right) f_{22}(z) K_R^2 B_{11}^2 \quad (\text{A.15})$$

donde ahora,

$$B_{1,1} = a \{ \exp(\pm i\varphi_g^R) + \gamma \exp(\mp i\varphi_g^R) \}$$

con $\varphi_g^R = -K_{g,x} X_1 + K_{g,y} Y_1 - \Omega T_1$ igual a la fase del grupo reflejado.



Apéndice B

Estructura y criterios de selección de la constante de Bernoulli en ondas gravitatorias moduladas

En este *Apéndice* se analiza la estructura espacial y temporal de la constante de Bernoulli en el caso de onda gravitatorias moduladas. Para ello, la constante de Bernoulli se ha expresado como,

$$C = \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + O(\epsilon)^3 \quad (\text{B.1})$$

B.1 Estructura de la constante de Bernoulli para ondas gravitatorias monocromáticas

En el caso monocromático,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} = C_1(z, t) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} = -gz + C_2(x, t) \quad (\text{B.3})$$

Comparando ambas ecuaciones, se deduce que:

$$C_1(z, t) = -gz + C_2(x, t) \quad (\text{B.4})$$

y en consecuencia, $C_2(x, t) = C(t)$ y $C_1(z, t) = -gz + C(t)$.

Por lo que, en el caso de oleaje monocromático, la constante de Bernoulli es en el caso más general una función dependiente del tiempo pero no del espacio.

B.2 Estructura espacial y temporal de la constante de Bernoulli para ondas gravitatorias moduladas

En el caso de oleaje modulado, la estructura de la constante de Bernoulli puede obtenerse a partir de la expansión JWKB de la ecuación diferencial de momento horizontal y vertical.

B.2.1 Solución a primer orden.

El sistema a primer orden es,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho} \right] = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho} \right] = 0 \quad (\text{B.6})$$

De su integración se tiene,

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho} = f_1(z; X_1, X_2, \dots; t, T_1, T_2, \dots) \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho} = g_1(x, X_1, X_2, \dots; t, T_1, T_2, \dots) \quad (\text{B.8})$$

Comparando ambas soluciones,

$$f_1 = g_1 = C_1(X_1, X_2, \dots; t, T_1, T_2, \dots) \quad (\text{B.9})$$

Por lo que a primer orden, la constante de Bernoulli puede ser, en el caso más general, una función de las coordenadas de larga escala del problema.

B.2.2 Solución a segundo orden.

Al segundo orden,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial T_1} + \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + \frac{p_2}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho} \right) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial T_1} + \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + \frac{p_2}{\rho} \right) = 0 \quad (\text{B.11})$$

De la integración de la ecuación de conservación de momento vertical,

$$\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial T_1} + \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + \frac{p_2}{\rho} \right] + \left[\frac{\partial C_1}{\partial X_1} x \right] = f_2(z; X_1, X_2, \dots; t, T_1, T_2, \dots) \quad (\text{B.12})$$

Con el fin de evitar el comportamiento secular de la solución, se impone $\frac{\partial C_1}{\partial X_1} = 0$.

Y en consecuencia, ,

$$C_1 = C_1(X_2, \dots; t, T_1, T_2, \dots) \quad (\text{B.13})$$

Integrando ahora la ecuación de conservación de momento horizontal,

$$\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial T_1} + \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + \frac{p_2}{\rho} \right] = f_2(z; X_1, X_2, \dots; t, T_1, T_2, \dots) \quad (\text{B.14})$$

y la vertical,

$$\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial T_1} + \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + \frac{p_2}{\rho} \right] = g_2(x, X_1, X_2, \dots; t, T_1, T_2, \dots) \quad (\text{B.15})$$

Siguiendo un procedimiento similar al de primer orden, se obtiene:

$$f_2 = g_2 = C_2(X_1, X_2, \dots; t, T_1, T_2, \dots) \quad (\text{B.16})$$

B.2.3 Generalización a orden n

Siguiendo el procedimiento descrito hasta orden n , se tiene que para evitar el comportamiento secular de la superficie libre, la constante de Bernoulli debe tener la siguiente estructura,

$$C_n = C_n(X_{n+1}; t, T_1, T_2, \dots) \quad (\text{B.17})$$

En el caso particular de grupos regulares, la constante de Bernoulli de orden n se reduce a $C_n = C_n(t, T_1, T_2, \dots)$.

B.3 Criterios físicos para la selección de la constante de Bernoulli

La selección de la constante de Bernoulli en el caso de oleaje modulado puede realizarse de acuerdo a alguno de los siguientes criterios:

- evitar el comportamiento secular de la superficie libre a orden superior
- conservación de masa,

Las implicaciones de cada uno de ellos son descritas ampliamente en *Dingenmans* (1997); *Mei* (1989) y *Klopman* (1990).

Aquí se ha adoptado un criterio de conservación de la masa puesto que, sobre fondos impermeables, debe ser una cantidad conservativa durante la propagación del oleaje. Para ello se ha hecho que, en el régimen estacionario, el nivel medio de la superficie libre sea cero. Esto es,

$$\langle \langle \tilde{\eta}_n \rangle \rangle = 0 \quad (\text{B.18})$$

Aplicando este criterio se tiene,

- **Caso progresivo.**

$$C_1 = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$C_2 = \frac{k\gamma |a|^2}{2 \sinh(2kh)} \{1 + |\gamma|^2\} \quad (\text{B.20})$$

- **Caso parcialmente estacionario.**

$$C_1 = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$C_2 = (1 + K_R^2) \frac{k\gamma |a|^2}{2 \sinh(2kh)} \{1 + |\gamma|^2\} \quad (\text{B.22})$$



Apéndice C

Solución JWKB de Capa límite de ondas gravitatorias moduladas

En este *Apéndice* se presenta la solución analítica de las ecuaciones de gobierno de la capa límite para trenes de ondas modulados hasta orden $O(\epsilon)^2$. El *Apéndice* se ha organizado como sigue. En primer lugar se describen las ecuaciones de gobierno y condiciones de contorno empleadas. Seguidamente, se presenta el modelo de viscosidad utilizado. Utilizando el gradiente de presiones de la región exterior en $z = -h$, se calculan las expresiones del campo de velocidades horizontal y vertical en la capa límite inducidos por un grupo de ondas regular para los casos progresivo y parcialmente estacionario.

C.1 Ecuaciones de gobierno de la capa límite de trenes de ondas modulados

Las ecuaciones de gobierno del problema de capa límite son: (1) la ecuación de conservación de masa,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.1})$$

y, (2) las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en las direcciones x e y . De forma compacta,

$$\frac{\partial u^j}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \left(u^i \frac{\partial u^j}{\partial \xi^i} \right) + w \frac{\partial u^j}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_\infty}{\partial \xi^j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{z\xi^j}}{\rho} \right) \quad (\text{C.2})$$

donde $u^j = (u, v, w)$ representa las componentes transversal, longitudinal y vertical del campo de velocidades en la capa límite, P_∞ es el campo de presiones en el límite superior de la capa límite inducido por el tren modulado (de acuerdo a los resultados obtenidos en *Capítulo 2, Sección 2.8*), ρ es la densidad y $\tau_{z\xi^j}$ representa el tensor de Reynolds,

$$\frac{\tau_{z\xi^j}}{\rho} = \nu \frac{\partial u^j}{\partial z} \quad (\text{C.3})$$

$\xi^i = (x, y, z)$ donde, por comodidad, se ha definido $z = z - h$.

Las condiciones de contorno del problema se han definido como sigue.

En el fondo se ha supuesto un fondo impermeable, por lo tanto, se ha impuesto una condición de velocidad en el fondo nula

$$[u^j]_{z=0} = (0, 0, 0) \quad (\text{C.4})$$

Justo fuera de la capa límite $z \gg \delta$, el campo de velocidades (u, v) debe ser igual que el campo de velocidades en la región exterior, normalmente definido como $V_\infty^j = (U, V)_{z=-h}$ (ver definición en *Capítulo 2, Sección 2.6*). En función de la velocidad de déficit

$$u_d^j = u^j - V_\infty^j \quad (\text{C.5})$$

esta condición puede expresarse como,

$$\lim_{z \gg \delta} [u_d^j] \rightarrow 0 \quad (\text{C.6})$$

C.1.1 Estructura del campo de velocidades de la capa límite de trenes modulados

De forma similar a la región exterior, las variables del problema se han expandido en serie del parámetro de modulación ϵ . Así el campo de velocidades puede expresarse,

$$u_d^j = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_{d,n}^j \quad (\text{C.7})$$

donde el índice n indica el orden del término con respecto a ϵ . En el caso más general el campo de velocidades a primer orden es,

$$u_{d,1}^j = \left(u_{d,1}^{j,I} + u_{d,1}^{j,R} \right)$$

donde los superíndices I y R designan respectivamente el campo incidente y reflejado. A segundo orden, y teniendo en cuenta el carácter no lineal del campo de velocidades en la capa límite, se tiene

$$u_{d,2}^j = \left(u_{d,2}^{j,I} + u_{d,2}^{j,R} + u_{d,2}^{j,IR} \right) \quad (C.8)$$

donde ahora $u_{d,2}^{j,IR}$ designa campo de velocidades resultado de la interacción de los trenes incidente y progresivo de primer orden.

A primer y segundo orden, se ha supuesto la siguiente estructura espacio-temporal del campo de velocidades incidente y reflejado,

$$u_{d,n}^{j,I} = \sum_{m=0}^n \left[u_{d,nm}^{j,I} \exp(im\varphi) + c.c. \right] \quad (C.9)$$

$$u_{d,n}^{j,R} = \sum_{m=-n}^n \left[u_{d,nm}^{j,R} \exp(im\varphi^R) + c.c. \right] \quad (C.10)$$

Por razones que se harán evidentes más adelante, la estructura espacio-temporal del término de interacción $u_{d,2}^{j,IR}$ se define,

$$u_{d,2}^{j,IR} = \left\{ u_{d,20}^{j,IR} \exp [i(\varphi - \varphi^R)] + c.c. \right\} + \left\{ u_{d,22}^{j,IR} \exp [i(\varphi + \varphi^R)] + c.c. \right\} \quad (C.11)$$

Nótese que para cada orden, los coeficientes $u_{d,nm}^j$ son cantidades moduladas de la forma $u_{d,nm}^j = u_{d,nm}^{j,I} (\xi_{m+1}^i; z)$ donde $\xi_{m+1}^i = (X_{m+1}, Y_{m+1}, T_{m+1})$.

C.1.2 Estructura de la viscosidad de remolino para ondas gravitatorias moduladas

La expansión de la viscosidad en serie de ϵ se ha definido como sigue,

$$\nu = \nu_0 + \epsilon\nu_1 + \epsilon^2\nu_2 + O(\epsilon)^3 \quad (C.12)$$

donde el término ν_0 se ha asumido de orden $O(\epsilon)^0$ por no estar asociado a ninguna de las escalas de movimiento del problema sino a la naturaleza del fluido. En el caso más general, $\nu_1 = (\nu_1^I + \nu_1^R)$ y $\nu_2 = (\nu_2^I + \nu_2^R + \nu_2^{IR})$. Teniendo en cuenta las ecuaciones *Eq.C.7* y *Eq.C.12*, el tensor de Reynolds $\tau_{x\xi^j}$ puede expresarse como,

$$\frac{\tau_{x\xi^j}}{\rho} = \epsilon \left(\nu_0 \frac{\partial u_1^j}{\partial z} \right) + \epsilon^2 \left(\nu_0 \frac{\partial u_2^j}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial u_1^j}{\partial z} \right) + O(\epsilon)^3 \quad (\text{C.13})$$

De forma similar al campo de velocidades, se ha supuesto la siguiente estructura espacio-temporal a la viscosidad de remolino es,

$$\nu_n = \sum_{m=0}^n [\nu_{nm} \exp(im\varphi) + c.c.] \quad (\text{C.14})$$

Más adelante se pondrá de manifiesto que, esta estructura espacio-temporal de la viscosidad de remolino, permite la interacción entre las distintas escalas del movimiento mediante la difusión de estructuras turbulentas de escala inmediatamente inferior. * hacer mencion a Torkovikc

En el caso más general, los coeficientes ν_{nm} son cantidades moduladas en escalas de orden $m + 1$ y dependientes de la profundidad, i.e. $\nu_{nm} = \nu_{nm}(\xi_{m+1}^i; z)$. Aquí, con objeto de encontrar una solución analítica al problema y con la filosofía de describir de la forma más completa pero más sencilla posible los fenómenos físicos implicados, hemos supuesto una estructura de de tipo laminar, i.e. $\nu_{nm} = Cte$. Es de esperar que esta simplificación, la sobreestimación del campo de velocidades en la capa límite. Sin embargo, permite analizar todos los fenómenos esenciales. Al final de este *Apéndice* se discute y compara la solución obtenida con la solución de *Grant-Madsen* para el campo de velocidades de primer orden.

C.2 Solución JWKB del campo de velocidades en la capa límite

Haciendo uso de las reglas de derivación de la técnica JWKB y de las expresiones del campo de velocidades, viscosidad de remolino y presión discutidas en la *Sección* anterior, las ecuaciones de gobierno de la capa límite (*Eq.C.1-C.2*) y condiciones de contorno asociadas pueden expresarse a primer orden de la forma siguiente,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial y} + \nu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \quad (\text{C.17})$$

$$(u_1, v_1) = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (\text{C.18})$$

$$(u_{d,1}, v_{d,1}) \rightarrow 0 \quad \text{at } z \rightarrow -h + \delta \quad (\text{C.19})$$

A segundo orden, el sistema de ecuaciones a resolver es,

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial v_1}{\partial Y_1} \right) = 0 \quad (\text{C.20})$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial T_1} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial X_1} \right) + \left(\nu_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) - \sum_{i=1}^2 \left(u_1^i \frac{\partial u_1}{\partial \xi^i} \right) - w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial T_1} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial Y_1} \right) + \left(\nu_0 \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) - \sum_{i=1}^2 \left(v_1^i \frac{\partial v_1}{\partial \xi^i} \right) - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \quad (\text{C.22})$$

$$(u_2, v_2) = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (\text{C.23})$$

$$(u_{d,2}, v_{d,2}) \rightarrow 0 \quad \text{at } z \rightarrow -h + \delta \quad (\text{C.24})$$

donde se ha hecho uso del modelo de la viscosidad independiente de la profundidad.

C.2.1 Solución de primer orden

Caso $m = 0$

Las ecuaciones de gobierno de primer orden (Eq.C.15-C.17) se reducen en este caso a,

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial x} + \frac{\partial v_{10}}{\partial y} + \frac{\partial w_{10}}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.25})$$

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{10}}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial z^2} \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{10}}{\partial y} + \nu_0 \frac{\partial^2 v_{10}}{\partial z^2} \quad (\text{C.27})$$

Teniendo en cuenta que $P_{10} = 0$, y que $u_{10}^j = u_{10}^j(X_1, Y_1, T_1)$ se obtiene que en este caso $\tau_{10} = 0$ y por tanto, la solución potencial del problema es $(u_{10}, v_{10}, w_{10}) = (0, 0, 0)$. De igual forma, para el caso reflejado, $(u_{10}^R, v_{10}^R, w_{10}^R) = (0, 0, 0)$.

Caso $m = 1$

En función de la velocidad de déficit, $u_{d,11}^j = u_{11}^j - V_\infty^j$, las ecuaciones de gobierno de un tren modulado progresivo pueden escribirse como,

$$ik_x u_{d,11} + ik_y v_{d,11} + \frac{\partial w_{d,11}}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.28})$$

$$-i\omega u_{d,11} = \nu_0 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial z^2} \quad (\text{C.29})$$

$$-i\omega v_{d,11} = \nu_0 \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial z^2} \quad (\text{C.30})$$

La solución más general de las ecuaciones Eq.C.29-C.30 es, $u_{d,11}^j = A^j \exp(i\beta z) + B^j \exp(-i\beta z)$. Haciendo uso de las condiciones de contorno, se tiene finalmente que

$$u_{d,11}^j = -V_\infty^j \exp(i\beta z) \quad (C.31)$$

donde,

$$\beta = \frac{1+i}{\delta_1} \quad (C.32)$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2\nu_0}{\omega}} \quad (C.33)$$

Nótese que, $u_{11}^j = V_\infty^j [1 - \exp(i\beta z)]$ y que, de acuerdo a la solución obtenida para la región exterior en el caso progresivo,

$$V_\infty^j = [(U_{11})_\infty, (V_{11})_\infty] = \left[\frac{-k_x g A_{11}}{2\omega \cosh(kh)}, \frac{-k_y g A_{11}}{2\omega \cosh(kh)} \right] \quad (C.34)$$

Teniendo en cuenta la solución Eq.C.31, la ecuación de conservación de masa Eq.C.28 permite obtener la expresión del campo de velocidades vertical como,

$$w_{11} = \left(\frac{k_x (U_{11})_\infty + k_y (V_{11})_\infty}{\beta} \right) [\exp(i\beta z) - 1] \quad (C.35)$$

De forma equivalente, en el caso parcialmente reflejante, se tiene que

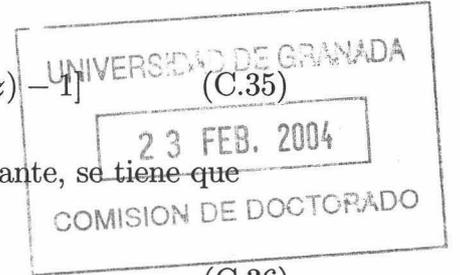
$$u_{d,11}^{R,j} = -V_\infty^{R,j} \exp(i\beta z) \quad (C.36)$$

y

$$w_{11}^R = \left(\frac{-k_x (U_{11}^R)_\infty + k_y (V_{11}^R)_\infty}{\beta} \right) [\exp(i\beta z) - 1] \quad (C.37)$$

donde ahora,

$$V_\infty^{R,j} = (U_\infty^R, V_\infty^R) = \left(\frac{k_x g K_R B_{11}}{2\omega \cosh(kh)}, \frac{-k_y g K_R B_{11}}{2\omega \cosh(kh)} \right) \quad (C.38)$$



C.2.2 Solución a segundo orden

En el caso más general, el campo de velocidades a segundo orden $u_{d,2}^j = (u_{d,2}^{j,I} + u_{d,2}^{j,R} + u_{d,2}^{j,IR})$ tiene la siguiente estructura,

$$u_2^{j,I} = u_{20}^{j,I} + \left\{ u_{21}^{j,I} \exp(i\varphi) + c.c. \right\} + \left\{ u_{22}^{j,I} \exp(2i\varphi) + c.c. \right\} \quad (C.39)$$

$$u_2^{j,R} = u_{20}^{j,R} + \left\{ u_{21}^{j,R} \exp(i\varphi^R) + c.c. \right\} + \left\{ u_{22}^{j,R} \exp(2i\varphi^R) + c.c. \right\} \quad (C.40)$$

y

$$u_{d,2}^{j,IR} = \left\{ u_{d,20}^{j,IR} \exp[i(\varphi - \varphi^R)] + c.c. \right\} + \left\{ u_{d,22}^{j,IR} \exp[i(\varphi + \varphi^R)] + c.c. \right\} \quad (C.41)$$

En esta *Tesis*, la atención está puesta en el cálculo de cantidades segundo orden promediadas en las escalas de tiempo de la onda corta y del grupo (ej. velocidad de transporte de masa y streaming). Por tanto, sólo resultan ser necesarios los términos $u_{20}^{j,I}$, $u_{20}^{j,R}$ y $u_{d,20}^{j,IR}$. A continuación, se calculan sus expresiones analíticas.

Contribución del tren incidente incidente

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial P_{20}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u_{20}^{j,I}}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial^2 u_{10}^{j,I}}{\partial z^2} = 0$ y haciendo uso de las soluciones de primer orden de la velocidad de déficit en la capa límite, se tiene la ecuación de conservación de momento transversal (dirección x) para u_{20}^I ,

$$\nu_{20} \frac{\partial^2 u_{20}^I}{\partial z^2} = T_1 + T_2 + T_3 \quad (C.42)$$

donde,

$$T_1 = \{-ik_y v_{11} u_{1,-1} + c.c.\} \quad (C.43)$$

$$T_2 = \left\{ w_{11} \frac{\partial u_{1,-1}}{\partial z} + c.c. \right\} \quad (C.44)$$

$$T_3 = - \left\{ \nu_{11} \frac{\partial^2 u_{1,-1}}{\partial z^2} + c.c. \right\} \quad (C.45)$$

Nótese que el modelo de viscosidad utilizado (ver Eq.C.14), introduce al orden $n = 2$ con $m = 0$, términos de tipo difusivo (ver Eq.C.45) del campo de velocidades $u_{1,\pm 1}$ inducido por el tren de onda corta incidente. Después de un poco de álgebra se tiene que,

$$\begin{aligned} \nu_{20} \frac{\partial^2 u_{20}^I}{\partial z^2} = & \{T_{10} \exp [i(\beta - \beta^*) z] + c.c.\} + \\ & \{T_{20} (\exp [i(\beta - \beta^*) z] - \exp [-i\beta^* z]) + c.c.\} + \\ & \{T_{30} \exp [-i\beta^* z] + c.c.\} \end{aligned} \quad (C.46)$$

donde ahora,

$$T_{10} = -ik_y (V_{11})_\infty (U_{1-1})_\infty \quad (C.47)$$

$$T_{20} = i\beta^* (U_{1-1})_\infty \left[\frac{k_x (U_{11})_\infty + k_y (V_{11})_\infty}{\beta} \right] \quad (C.48)$$

$$T_{30} = -\nu_{11} (\beta^*)^2 (U_{1-1})_\infty \quad (C.49)$$

La ecuación diferencial Eq.C.46 con las siguientes condiciones de contorno,

$$u_{20}^I = -(U_{20})_\infty \quad \text{at } z = -h \quad (C.50)$$

$$u_{20}^I \rightarrow 0 \quad \text{at } z \rightarrow -h + \delta \quad (C.51)$$

da lugar a la siguiente solución,

$$u_{20}^I = \left\{ \left[\Gamma_1 \frac{(T_{10} + T_{20})}{\nu_0} + \Gamma_2 \frac{(-T_{20} + T_{30})}{\nu_0} \right] + c.c. \right\} + \Theta_{20}^I \quad (C.52)$$

con,

$$\Gamma_1 = \frac{-\exp [i(\beta - \beta^*) z]}{(\beta - \beta^*)^2} \quad (C.53)$$

$$\Gamma_2 = \frac{-\exp[-i\beta^* z]}{(\beta^*)^2} \quad (\text{C.54})$$

y donde Θ_{20}^I es la constante de integración que permite satisfacer la condición de contorno Eq.C.50. Su expresión es,

$$\Theta_{20}^I = -(U_{20})_\infty + \left\{ \left[\frac{(T_{10} + T_{20})}{\nu_0 (\beta - \beta^*)^2} + \frac{(-T_{20} + T_{30})}{\nu_0 (\beta^*)^2} \right] + c.c. \right\} \quad (\text{C.55})$$

Contribución del tren reflejado

De forma similar al caso incidente, la contribución u_{20}^R puede expresarse,

$$u_{20}^R = \left\{ \left[\Gamma_1 \frac{(T_{10}^R + T_{20}^R)}{\nu_0} + \Gamma_2 \frac{(-T_{20}^R + T_{30}^R)}{\nu_0} \right] + c.c. \right\} + \Theta_{20}^R \quad (\text{C.56})$$

donde ahora,

$$T_{10}^R = -ik_y (V_{11}^R)_\infty (U_{1-1}^R)_\infty \quad (\text{C.57})$$

$$T_{20}^R = i\beta^* (U_{1-1}^R)_\infty \left[\frac{-k_x (U_{11}^R)_\infty + k_y (V_{11}^R)_\infty}{\beta} \right] \quad (\text{C.58})$$

$$T_{30}^R = -\nu_{11} (U_{1-1}^R)_\infty (\beta^*)^2 \quad (\text{C.59})$$

y

$$\Theta_{20}^R = -(U_{20}^R)_\infty + \left\{ \left[\frac{(T_{10}^R + T_{20}^R)}{\nu_0 (\beta - \beta^*)^2} + \frac{(-T_{20}^R + T_{30}^R)}{\nu_0 (\beta^*)^2} \right] + c.c. \right\} \quad (\text{C.60})$$

Contribución del término de interacción

De las ecuaciones Eq.C.21 y Eq.C.22, se obtiene que en caso de reflexión parcial existe una contribución al campo de velocidades horizontal de segundo orden $w_{d,2}^{j,IR}$ que resulta de la interacción de los trenes de onda corta incidente y reflejado.

$w_{d,2}^{j,IR}$ obedece la siguiente ecuación diferencial,

$$\nu_2 \frac{\partial^2 w_2^{j,IR}}{\partial z^2} = Q_2^{j,IR} - D_2^{j,IR}$$

donde,

$$Q_2^{j,IR} = \sum_{i=1}^2 \left(u_1^i \frac{\partial w_1^{j,R}}{\partial \xi^i} + u_1^{i,R} \frac{\partial w_1^j}{\partial \xi^i} \right) + \left(w_1 \frac{\partial w_1^{j,R}}{\partial z} + w_1^R \frac{\partial w_1^j}{\partial z} \right)$$

y

$$D_2^{j,IR} = \nu_1 \frac{\partial^2 w_1^{j,R}}{\partial z^2} + \nu_1^R \frac{\partial^2 w_1^j}{\partial z^2}$$

con $(u_1^1, u_1^2) = (u_1, v_1)$, $(u_1^{1,R}, u_1^{2,R}) = (u_1^R, v_1^R)$ y $(\xi^1, \xi^2) = (x, y)$.

A partir del campo de velocidades a primer orden descrito en la Sección anterior y con un poco de álgebra, se puede comprobar que los términos $D_2^{j,IR}$, $Q_2^{j,IR}$ tienen la siguiente estructura,

$$Q_2^{j,IR} = \left\{ Q_{20}^{j,IR} \exp [i (\varphi - \varphi^R)] + c.c. \right\} + \left\{ Q_{22}^{j,IR} \exp [i (\varphi + \varphi^R)] + c.c. \right\}$$

$$D_2^{j,IR} = \left\{ D_{20}^{j,IR} \exp [i (\varphi - \varphi^R)] + c.c. \right\} + \left\{ D_{22}^{j,IR} \exp [i (\varphi + \varphi^R)] + c.c. \right\}$$

y por tanto la velocidad $w_{d,2}^{j,IR}$ puede expresarse como,

$$w_{d,2}^{j,IR} = \left\{ w_{d,20}^{j,IR} \exp [i (\varphi - \varphi^R)] + c.c. \right\} + \left\{ w_{d,22}^{j,IR} \exp [i (\varphi + \varphi^R)] + c.c. \right\} \quad (C.61)$$

Nótese que $(\varphi - \varphi^R) = 2ik_x x$ y $(\varphi + \varphi^R) = 2i(k_y y - \omega t)$.

En esta *Tesis*, se pone la atención en el cálculo de cantidades promediadas temporalmente. Por tanto, sólo el cálculo de la contribución $u_{d,20}^{j,IR}$ es necesaria para describir dichas cantidades hasta segundo orden. A continuación se presenta la expresión analítica de $u_{d,20}^{j,IR}$ para el caso de viscosidad de remolino con coeficientes ν_{nm} constantes.

La ecuación diferencial de $u_{d,20}^{IR}$ es,

$$\nu_{20} \frac{\partial^2 u_{20}^{IR}}{\partial z^2} = Q_{20}^{IR} - D_{20}^{IR}$$

donde,

$$\begin{aligned} Q_{20}^{IR} &= \nu_{11} \frac{\partial^2 u_{1,-1}^R}{\partial z^2} + \nu_{1,-1}^R \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial z^2} \\ &= Q_{20,a}^{IR} \exp(-i\beta^* z) + Q_{20,b}^{IR} \exp(i\beta z) \end{aligned}$$

con

$$Q_{20,a}^{IR} = \frac{\nu_{11}}{(\beta^*)^2} (U_{1,-1}^R)_\infty$$

y

$$Q_{20,b}^{IR} = \frac{\nu_{1,-1}}{\beta^2} (U_{1,1})_\infty$$

Aquí, se ha hecho uso de que $\nu_{1,-1}^R = \nu_{1,-1}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} D_{20}^{IR} &= -ik_y (v_{11} u_{1,-1}^R - v_{1,-1}^R u_{11}) + \left(w_{11} \frac{\partial^2 u_{1,-1}^R}{\partial z^2} + w_{1,-1}^R \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial z^2} \right) \\ &= (D_{20,a}^{IR} + D_{20,b}^{IR} + D_{20,c}^{IR}) \exp[i(\beta - \beta^*)z] - D_{20,b}^{IR} \exp(-i\beta^* z) - D_{20,c}^{IR} \exp(i\beta z) \end{aligned}$$

con

$$D_{20,a}^{IR} = -ik_y \left[(V_{1,1})_\infty (U_{1,-1}^R)_\infty - (V_{1,-1}^R)_\infty (U_{11})_\infty \right]$$

$$D_{20,b}^{IR} = \frac{(U_{1,-1}^R)_\infty}{(\beta^*)^2} \left(\frac{k_x (U_{11})_\infty + k_y (V_{11})_\infty}{\beta} \right)$$

$$D_{20,c}^{IR} = \frac{(U_{11})_\infty}{\beta^2} \left(\frac{-k_x (U_{1,-1}^R)_\infty + k_y (V_{1,-1}^R)_\infty}{\beta^*} \right)$$

Apéndice D

Modelo de respuesta del barco (en inglés)

The ship response to environmental agents (i.e. wind waves, currents, wind,) is, in general, a stochastic, non-linear and dynamic phenomena difficult to model. Evidence of that is the continuous effort for developing sophisticated tools for their modelization either based on experimental data or numerical simulations. However, our intention is not to give a very accurately description of the vessel response to climate agents (in particular, to wind waves), but rather to illustrate the probabilistic model proposed. Consequently, we have selected a very simple ship response model under wind waves.

The model assumes all the ship motions uncoupled and a linear approximation of the frequency response of the ship in regular waves. From these assumptions and a second order stationary equation of motion, an analytical expression of the the stationary spectral density functions of the ship displacements are defined. In this Appendix, we resume briefly the basics of the model. A detailed description can be found in classical references as Price and Bishop (1974) and Vossers (1962). The standard notation and sign conventions used are shown in the *Fig.I5.-1*.

If we designate $\zeta_i(t)$ as any of the vertical ship response to a wave excitation force of type $F_i(\omega_e) = \bar{F}_i \exp(i\omega_e t)$ at the encounter frequency $\omega_e = \omega - \frac{\omega^2 U}{g} \cos \chi$, the ship equation of motion for this degree of freedom can be defined as:

$$M_i \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial t^2} + N_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + B_i \zeta_i = \bar{F}_i \exp(i\omega_e t)$$

where M_i , N_i and B_i are, respectively, the time independent mass, damping and restoring force terms. These terms are functions of: the ship geometry, local manuevring conditions (i.e. ship velocity, Froude number,) and local

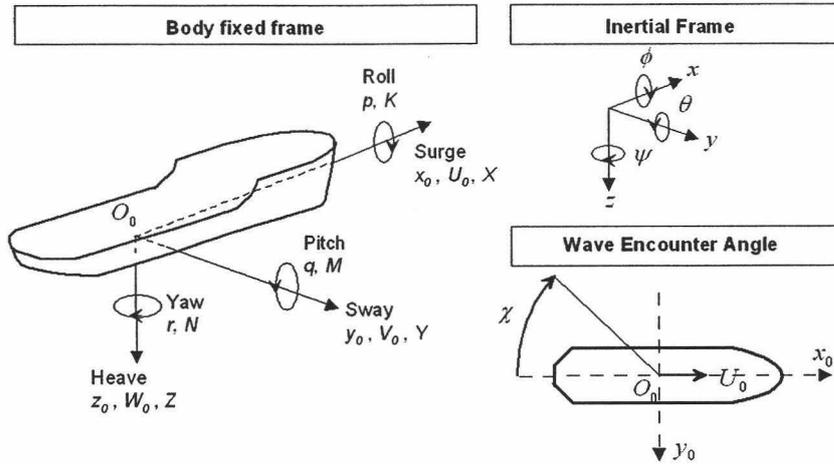


Figura D.1: Coordinate system and main parameters used for ship motion description.

wave spectrum. For their calculation in each subset, we have made use of the Strip theory (Vossers, 1962) assuming the approximation of slender vessels, two dimensional flow in transverse planes at each section of ship and a small relation between the wavelength and the ship length.

The solution of the Eq. II.1, can be written as:

$$\zeta_i = \left(\frac{\bar{F}_i}{M_i} \right) H_i(\omega_e) \exp(i\omega_e t - \beta_i)$$

where:

$H_i(\omega_e)$ is the transference function of the motion ζ_i with the following structure,

$$H_i(\omega_e) = \frac{\omega_i^2}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega_e^2)^2 - (v_i \omega_e)^2}}$$

in which:

$\omega_i = \sqrt{\frac{B_i}{M_i}}$ is the natural frequency of $\zeta_i(t)$ motion, and

$v_i = \frac{N_i}{2\sqrt{B_i M_i}}$ is defined as its dimensionless damping coefficient.

The phase shift β_i of the ship movement (see Eq. II.2) is defined as:

$$\beta_i = \tan^{-1} \left(\frac{2M_i(\omega_e/\omega_i)}{1 - (\omega_e/\omega_i)^2} \right)$$

For a wave spectrum $\Phi_{ww}(\omega)$, the spectral density distribution of the ζ_i motion can be calculated making use of the linearity of the model as, ζ_i

$$\Psi_{ii}(\omega_e) = E[\zeta_i^2] = |H_i(\omega_e)|^2 \Phi_{ww}(\omega_e)$$

where, making use of the conservation of energy law,

$$\Phi_{ww}(\omega_e) = \frac{\Phi_{ww}(\omega)}{|1 - (2\omega U/g) \cos \chi|}$$

Following the previous procedure, the spectral density distribution of the total vertical displacement $z_r(t)$ at any position $\vec{r} = (x, y)$ (from the origin) can be evaluated as follow:

$$\Psi_{rr}(\omega_e) = E[z_r^2] = |H_r(\omega_e)|^2 \Phi_{ww}(\omega_e)$$

where:

$$|H_r(\omega_e)|^2 = |H_z(\omega_e)|^2 + x^2 |H_\theta(\omega_e)|^2 + y^2 |H_\phi(\omega_e)|^2 - 2 [H_z(\omega_e)]^R + 2x [H_\theta(\omega_e)]^R + 2y [H_\phi(\omega_e)]^R$$

In the last expression, $H_z(\omega_e)$, $H_\theta(\omega_e)$ and $H_\phi(\omega_e)$ are, respectively, the heave, pitch and roll transference functions. The superscript R refers to the real part.

Equivalent relations can be found for the horizontal ship motions surge, sway and yaw. This model can be considered equivalent to the known as Response Amplitude Operators (*RAO*) in which the relationship between ship motion and wave height versus regular wave frequency is directly given.



Apéndice E

Modelos de propagación de oleaje sobre fondo variable y dominios complejos

E.1 Introducción

Desde el punto de vista ingenieril, la aplicación de los conceptos desarrollados en el *Capítulo 2*, implica resolver el problema de la propagación débilmente no lineal de ondas cortas moduladas en dominios complejos, fondo variable así como su interacción con estructuras costeras típicamente localizadas en profundidades intermedias y/o reducidas.

Entre los modelos existentes cabe destacar los siguientes:

- Aquellos que son capaces de modelar el comportamiento altamente no lineal de las ondas largas en profundidades reducidas, como por ejemplo los basados en la Teoría de Airy. Su validez está condicionada a ondas largas siempre que la dispersión sea despreciable.
- Aquellos que consideran ondas débilmente no lineales propagándose en profundidades intermedias, lo que permite utilizar teoría de perturbaciones. Tres tipos de modelos de propagación no lineales pueden ser distinguidos:

Una revisión en profundidad de distintos modelos existentes puede encontrarse en *Dingemans, 1997*.

En este trabajo, el modelo presentado se basa en la Teoría de Stokes. En primera aproximación, esta reduce a la teoría de ondas de pequeña amplitud y dentro de la misma, la aproximación de pendiente suave (Mild Slope)

permite simular la mayor parte de las transformaciones del oleaje en su propagación desde profundidades indefinidas a intermedias, i.e. asomeramiento, refracción, reflexión, difracción, resonancia y disipación de energía inducida por la fricción con el fondo y la rotura. La ecuación MSP se considera una primera aproximación al problema.

Los objetivos fundamentales que se han perseguido han sido:

1. abordar los problemas computacionales que aparecen en la propagación de ondas cortas sobre dominios complejos. Estas son: implementación eficiente de condiciones de contorno, solución del problema de mal condicionamiento del sistema en la propagación de ondas de corto periodo y reducción del tiempo de cálculo requerido para aplicar el modelo a grandes dominios.
2. dar una primera solución a sistemas reales. Teniendo en cuenta que *Darymple et al.* (1991) y *Losada et al.* (1996) encontraron que para el caso de estructuras verticales porosas sumergidas y emergidas con $kh < 1.5$, el error relativo entre la teoría lineal y la solución no lineal es menor que el 5% este tipo de soluciones puede considerarse teniendo en cuenta que *Silva et al.* (2002b) encontró que este error puede ser mayor dependiendo de la geometría de la estructura y su permeabilidad.

En este *Apéndice* se introduce la ecuación Mild Slope modificada y se resumen las variaciones existentes de la misma. Seguidamente, se abordan algunos de los problemas numéricos que supone su resolución.

E.2 Aproximación de pendiente suave

La ecuación básica Mild Slope permite modelar la transformación de oleaje lineal sobre un fondo de pendiente suave y fue originariamente obtenida por *Berkhoff* (1973) y posteriormente por *Smith & Sprinks* (1975) sobre fondo impermeable. *Booij* (1983) probó que su validez está limitada a pendientes inferiores a 1 : 3. Su extensión a pendientes mayores en la que también se incluyen modos evanescentes fue desarrollada por *Massel* (1993), *Chamberlain & Porter* (1995) and *Porter & Staziker* (1995). Recientemente se ha extendido a oleaje irregular *Lee et al.* (2003) para la ecuación dependiente del tiempo.

A continuación presentamos la deducción de la ecuación Mild Slope modificada a partir de la ecuación de continuidad. La deducción de la misma a partir de principios variacionales puede encontrarse en *Dingemans* (1997). También se discuten: la inclusión de términos de disipación de energía por

fricción de fondo y rotura y la modelación de las condiciones de contorno en su forma elíptica.

E.2.1 Dedución de la ecuación Mild Slope

Asumiendo un fluido homogéneo, incompresible y un flujo irrotacional sobre un fondo impermeable de profundidad variable $h(x, y)$ donde (x, y) representan las coordenadas horizontales (ver Fig.E.1).

Seguindo a *Silva et al.*(xxx), en un dominio 3D la ecuación mild slope puede deducirse a partir de la ecuación de continuidad expresada en términos del potencial de velocidades Φ ,

$$\nabla_h^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad -h(x, y) \leq z \leq 0$$

donde $\nabla_h = (\partial \backslash \partial x, \partial \backslash \partial y)$ es el vector gradiente horizontal.

La condición mixta de superficie libre puede ser obtenida a partir de la condición dinámica y cinemáticas linealizadas para fondo variable,

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad z = 0$$

donde t es el tiempo y g , la aceleración de la gravedad.

La condición de fondo impermeable en $z = -h$ puede escribirse como,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nabla_h h \nabla_h \Phi = 0 \quad z = -h$$

Expresando el potencial de velocidades como $\Phi = \text{Re} \{ \varphi(x, y, t) f(z) \}$ donde Re representa la parte real del argumento y φ es la amplitud compleja de la superficie libre. Admitiendo la misma dependencia con la profundidad que en el caso de profundidad constante $\nabla_h h = 0$ de forma que,

$$f(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}$$

y teniendo en cuenta que la ecuación de dispersión está dada por,

$$\frac{\omega^2}{g} = kh \tanh kh$$

donde $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia angular del oleaje monocromático.

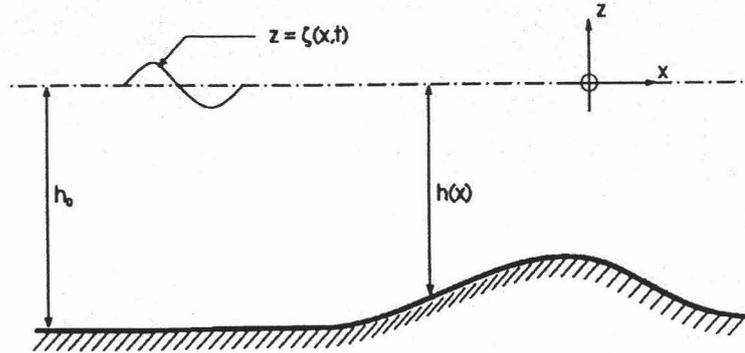


Figura E.1: Sistema de coordenadas empleado para la deducción de la ecuación de ondas Mild Slope

Siguiendo a *Smith and Sprinks* (1975) y aplicando la segunda identidad de Green a $f(z)$ y Φ ,

$$\int_{-h}^0 f \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} dz - \int_{-h}^0 \Phi \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz - \left[f \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{-h}^0 = 0$$

Se obtiene la expresión de la ecuación Mild Slope modificada y dependiente del tiempo,

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \varphi) + k^2 \varphi I_1 + \varphi \left[r(h) - \frac{\omega^2}{g} \right] = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

donde:

$$r(h) = I_2 \nabla_h^2 h + (\nabla_h h)^2 \left(\frac{\partial I_2}{\partial h} - I_3 \right)$$

$$\text{y } I_1 = \int_{-h}^0 f^2 dz, \quad I_2 = \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \quad \text{y} \quad I_3 = \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial f}{\partial h} \right)^2 dz.$$

Asumiendo una variación armónica del potencial de velocidades,

$$\varphi(x, y, t) = \phi(x, y) \exp(-i\omega t)$$

se obtiene la ecuación Mild Slope modificada estacionaria,

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \phi) + k^2 \phi I_1 + \phi r(h) = 0$$

En el caso de profundidad constante, la ecuación anterior se transforma en la bien conocida ecuación de Helmholtz: $\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$.

La inclusión de modos evanescentes y campos de velocidad cuasi estacionarios en la ecuación puede encontrarse en *Dingemans* (1997) en el que se discute su formulación a partir del principio variacional.

E.2.2 Mecanismos de pérdida de energía en la ecuación Mild Slope

La inclusión de términos disipativos debidos a la fricción del fondo y rotura puede realizarse de una forma similar a la propuesta por *Dingemans* (1997) y *Kirby & Darymple* (1994),

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \phi) + (k^2 + i\omega D) \phi I_1 + \phi r(h) = 0 \quad (\text{E.1})$$

donde D es el factor de disipación resultante de la suma de dos tipos de disipación: rotura f_D y fricción del fondo f_B . Puede expresarse como, $D = f_D + f_B$.

El coeficiente de disipación f_D puede estimarse mediante alguno de los modelos existentes en función del número de Iribarren I_r . Por ejemplo, *Dally et al.* (1984), *Battjes & Janssen* (1978), *Losada et al.* (1986). Siguiendo a *Sawaragi* (1995), el criterio de rotura deberá elegirse en función de las condiciones hidrodinámicas (oleaje progresivo, estacionario o parcialmente estacionario) y la profundidad. Entre otros pueden mencionarse los criterios propuestos por *Michell* (1983) y *Miche* (1944) para oleaje progresivo, los criterios de *Penny & Price* (1952) y *Wiegel* (1964) para oleaje estacionario y el criterio de *Iwata & Kiyono* (1985) en el que se tiene en cuenta el coeficiente de reflexión. Una descripción detallada de estos criterios y su comportamiento en un modelo Mild Slope unidimensional puede encontrarse en *Medgenber* (2002).

Por otro lado, asumiendo que la capa límite de fondo tiene caracter turbulento, el coeficiente de fricción por fondo puede calcularse utilizando el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach C_f como

$$f_B = \frac{4}{3\pi} \frac{a\omega^2 C_f}{ng \sinh^3 kh}$$

donde a representa la amplitud del oleaje y n

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh kh} \right)$$

Otros posibles modelos de fricción fueron propuestos por *Jonhsson* (1980) para capas límite turbulenta sobre fondo rugoso y sobre fondo suave. Un resumen de la implementación de distintos mecanismos de disipación en la ecuación Mild Slope puede encontrarse en *Dingemans* (1997, Part 1).

E.2.3 Condiciones de contorno

En este apartado sólo consideramos las condiciones de contorno necesarias para la resolución de la ecuación Mild Slope en su forma elíptica. Consisten en la descripción del potencial de velocidades, el flujo o una relación entre las mismas en todos los contornos del dominio considerado.

Se pueden distinguir las siguientes condiciones de contorno:

1. **Condiciones de tipo exterior** (open boundaries, i.e., permiten la entrada del oleaje incidente y la radiación del saliente). Simulan el contorno virtual que divide nuestro sistema de la acción exterior y deberían recoger los términos de radiación y carga del oleaje. La formulación exacta de la condición de radiación viene dada por la ecuación de Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_{rad}}{\partial r} - ik\phi_{rad} \right) = 0 \quad (\text{E.2})$$

La solución a esta ecuación no lineal sólo es conocida para algunos casos de geometría sencillos. En general es necesario aproximarla mediante algún otro operador. Se ha tratado de buscar aproximaciones a la ecuación (2.15) que no presenten reflexiones espúreas. Las aproximaciones estudiadas han sido las formuladas por *Behrendt* (1979), la aproximación parabólica propuesta por *Feng* (1983), *Kirby* (1986a, xxx?), el método minimax propuesto por *Kirby* (1989) y la formulación del operador no lineal de *Higdon* (1987). La primera, basada en la expansión de la solución exterior en series de las funciones de Bessel de orden cero y uno, requiere de la imposición de profundidad constante en el contorno, por lo que sólo es aceptable en problemas de difracción. La solución "cuasi-exacta" propuesta por *Behrendt*, basada en la expansión de la solución exterior en función de funciones de Bessel, implica asumir profundidad constante en el contorno exterior lo que tampoco es válido en la mayoría de los dominios considerados. Se he utilizado el método minimax que minimiza el error dentro de un rango de ángulos de incidencia. *Kirby* (1986a, 1989) con una apertura grande centrada entorno a la incidencia normal (apertura 70° , centrada en 0°).

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - ik\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2} \phi = f \quad \text{en } \partial B \quad (\text{E.3})$$

1. **Condiciones de reflexión parcial** en estructuras costeras, descritas mediante una condición de tipo Neuman del flujo que utiliza como parámetro el coeficiente de reflexión K_r .

2. **Condiciones de transmisión parcial o total** en estructuras costeras permeables o contornos abiertos. Las condiciones de absorción parcial viene dada por la ecuación

$$\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{c}{\cos \theta^i} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \text{ en } \partial B \quad (\text{E.4})$$

donde ∂B representa el contorno y α es el coeficiente de absorción, generalmente complejo, comprendido entre los valores $0 < |\alpha| \leq 1$. Haciendo uso de la dependencia armónica en el tiempo del potencial de velocidades $\frac{\partial \phi}{\partial t} = i\omega \phi$ obtenemos la expresión no lineal del operador

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - ik\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2} \phi = 0 \text{ en } \partial B \quad (\text{E.5})$$

Desarrollando el término no lineal en serie de Taylor, podemos obtener la expresión de primer y segundo orden en el operador de la condición de contorno absorbente en la forma: $\frac{\partial \phi}{\partial x} + ik\alpha \phi = 0$ con $R_1^p = \frac{\cos \theta^i - \alpha}{\cos \theta^i + \alpha}$ para la expresión de primer orden y, $ik \frac{\partial \phi}{\partial n} - \alpha k^2 \phi - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = 0$ con $R_2^p = \frac{(\alpha \cos \theta^i)^2 - 2\alpha \cos \theta^i + \alpha^2}{(\alpha \cos \theta^i)^2 + 2\alpha \cos \theta^i + \alpha^2}$ para el segundo orden. El caso de condición de absorción total corresponde el caso totalmente reflejante corresponde con $\alpha = 0$ y coeficiente de reflexión igual a la unidad.

E.3 Resolución numérica

E.3.1 Método de elementos finitos

La implementación numérica y resolución de la forma elíptica de la ecuación Mild Slope puede hacerse mediante su discretización en diferencias finitas o elementos finitos (*Zienkiewick & Taylor, 1977*). En este trabajo el modelo implementado es la ecuación modificada Mild Slope con términos de disipación (Eq. E.1). El método empleado para su resolución standard: elementos finitos sobre mallas no estructuradas con elementos triangulares lineales. Y pueden encontrarse numerosos detalles sobre su implementación y resultados obtenidos en la literatura. Sin embargo, existen dos situaciones en las que el método de puede dar lugar a problemas numéricos

- problemas de convergencia en la propagación de ondas de muy corto periodo, debido a que conforme el número de onda crece, el error numérico de la solución puede crecer infinitamente debido a la dependencia del error numérico de la solución con el número de onda y posible mal condicionamiento de la matriz .

- tiempo de cálculo excesivo o lenta convergencia a la solución del sistema lineal en sistemas con un gran número de grados de libertad o mal condicionados. La solución del sistema lineal obtenido puede realizarse mediante métodos directos (ej., eliminación gaussiana) o indirectos (ej., gradiente conjugado, gradiente biconjugado). Una revisión de estos métodos puede encontrarse en *Maa et al.* (2002), *Panchang et al.* (1983), *Oliveira & Anastasiou* (1998), La eficiencia computacional de los más representativos ha sido analizado por *Fortes* (2001) en función del número de onda y las dimensiones del sistema lineal a resolver. Para todos ellos, se observa el aumento de los requerimientos de CPU y memoria con el número de grados de libertad.

Para intentar dar una solución a estos problemas, en los siguientes apartados se describe el método de partición de la unidad aplicado a problemas de difracción. Además, se explican técnicas de integración eficientes para su implementación numérica basada en la expansión del integrando en polinomios de Chevyshev (AEH). Finalmente, se discute el problema de mal condicionamiento del sistema lineal obtenido y se propone un solver indirecto que garantiza la convergencia a la solución y mejora del coste computacional del problema.

E.4 El Método de Partición de la Unidad aplicado a problemas de difracción y refracción de onda corta.

La difracción de ondas monocromáticas está gobernada por la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{E.6})$$

donde ϕ es el potencial de velocidades y k el número de ondas. Las condiciones de borde correspondientes pueden ser escritas en forma unificada basándose en las variables características e introducidas bajo la hipótesis de la periodicidad de la solución. En este caso, se asume que las cantidades

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \pm c \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{E.7})$$

se conservan en la dirección incidente (c es la velocidad de la onda). Para la onda incidente las condiciones de contorno prescritas en Γ_I quedan:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + ik\alpha\phi \cos \beta = 2i\phi_I \cos \beta \quad \text{en } \Gamma_I \quad (\text{E.8})$$

donde β es el ángulo entre las direcciones de incidencia y normal saliente al contorno y ϕ_r es la función de la onda incidente prescrita. La condición para bordes absorbentes Γ_a (de forma parcial o total) y bordes totalmente reflectivos Γ_r , pueden obtenerse fácilmente de la condición anterior. Estas condiciones son respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + ik\alpha\phi = 0 \quad \text{en } \Gamma_a \quad (\text{E.9})$$

y

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_r \quad (\text{E.10})$$

siendo α el coeficiente de reflexión.

La solución numérica de la ecuación de Helmholtz para PUFEM es definida a continuación. El potencial $\tilde{\phi}$ aproximado puede ser construido como:

$$\tilde{\phi} = \varphi_i q^l b_i^l \quad (\text{E.11})$$

donde φ_i son las funciones que forman la partición de la unidad de forma que la condición $\sum_i \varphi_i = 1$ se cumple para todos los puntos del dominio. Las funciones q^l son llamadas "funciones extrínsecas" y los coeficientes b_i^l son los coeficientes asociados a los nodos y a las funciones del espacio de aproximación "externo".

Por la aplicación del método Galerkin la forma débil puede ser escrita como:

$$a(v, \tilde{\phi}) = a(\varphi_j q^m, \varphi_i q^l b_i^l) = 0 \quad (\text{E.12})$$

donde:

$$a(v, \phi) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi d\Omega - k^2 \int_{\Omega} v \phi d\Omega - \int_{\Gamma} v \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{E.13})$$

y $(i, j = 1, \dots, N)$, $(l, m = 1, \dots, M)$ siendo el número N total de puntos, M el número total de funciones extrínsecas elegidas y ν las funciones de peso. Dos espacios han sido propuestos en el PUFEM original para las funciones locales: polinomios armónicos generalizados para la ecuación de Helmholtz y ondas planas. Aquí se han adoptado las ondas planas por su sencilla implementación y mejores propiedades de convergencia. Para problemas bi-dimensionales pueden ser escritas como:

$$q^l = \exp \{ ik (x \cos \theta^l + y \sin \theta^l) \} \quad (\text{E.14})$$

que representa una onda plana que se propaga en la dirección dada por el ángulo θ^l . Estas ondas pueden definirse de forma local (elemento por elemento) o de forma global.

Para el caso de refracción de ondas monocromáticas, la ecuación a modelar es la ecuación de Berkhoff [10, 11],

$$\nabla (cc_g \nabla \phi) + \frac{c_g}{c} \omega^2 \phi = 0 \quad (\text{E.15})$$

donde c es la celeridad $c = L/T$, c_g es la velocidad de grupo $c_g = c \tanh(kh)$, k es el número de onda local y h es la profundidad, T es el periodo constante asociado a la variación temporal de las ondas armónicas.

Assumiendo una aproximación local del número de onda a las características de la profundidad en cada nodo k_i , la aproximación PUFEM de la ecuación de Berkhoff puede ser construida de la forma:

$$\tilde{\phi} = \varphi_i q^l b_i^l \quad (\text{E.16})$$

donde las funciones externas están representadas por ondas planas de diferente dirección de propagación y longitud de onda

$$q_i^l = \exp \{ ik_i (x \cos \theta^l + y \sin \theta^l) \} \quad (\text{E.17})$$

E.4.1 Técnicas de integración optimizadas para el problema de partición de la unidad aplicado a problemas de difracción

Para el caso de difracción, las integrales provenientes de la ecuación (5.6) son del tipo:

$$I = \int_{\Omega} P(x, y) \exp \{ ik (x \cos \theta^l + y \sin \theta^l) \} \exp \{ ik (x \cos \theta^m + y \sin \theta^m) \} \quad (\text{E.18})$$

donde $P(x, y)$ es un polinomio. Si se realiza una rotación local en el sistema de coordenadas con un ángulo $\alpha = \frac{1}{2} (\theta^l + \theta^m)$ la integral anterior queda reducida a:

$$I = \int_{\Omega} H(\xi, \eta) \exp [ik_0 \xi] d\xi d\eta \quad (\text{E.19})$$

donde $H(\xi, \eta)$ es un polinomio del mismo grado que $P(x, y)$ y k_0 es el número de ondas equivalente en el nuevo sistema de referencia dado por:

$$k_0 = 2k \cos \left(\frac{\theta^l - \theta^m}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta^l + \theta^m}{2} \right) \quad (\text{E.20})$$

La dirección ξ se define por la dirección de incidencia α . La parte oscilatoria a lo largo de la coordenada η (perpendicular a la dirección de incidencia) es eliminada con el consiguiente ahorro en el número de operaciones, permitiendo una fácil aplicación de métodos de integración adaptados a integrandos oscilatorios del tipo de la ecuación (9). Para estudiar una forma eficiente de integración de la forma simplificada se ha comparado un método "ad hoc" para integrales oscilatorias (basado en las series de Chebyshev (AEH)) con el método habitual de integración numérica Gauss-Legendre. La integración de:

$$\int_{-1}^{+1} \xi^r \exp(ik\xi) d\xi \quad (\text{E.21})$$

mediante el método AEH viene dada por:

$$I = \sum_{l=0}^r \frac{r!}{(r-l)! k^{l+1}} \left\{ \sin\left(k\xi + \frac{l\pi}{2}\right) - \cos\left(k\xi + \frac{l\pi}{2}\right) \right\}_{-1}^{+1} \quad (\text{E.22})$$

Esta fórmula puede ser interpretada como un caso especial de la fórmula de Clenshaw-Curtis en la que la función del integrando es un polinomio para la cual la solución exacta puede ser obtenida con un número finito de términos.

Para la prueba de comparación realizada, se han elegido $H(\xi, \eta)$ como polinomios de tercer grado (máximo grado alcanzado por los polinomios obtenidos usando funciones de forma lineales asumidas en este trabajo). Las longitudes de onda relativas (longitud de onda / elemento) varían desde (0.01) para el caso de ondas largas hasta (900) para ondas de alta frecuencia.

Los resultados se muestran en la Figura 5.3, donde el número de operaciones necesarias ha sido representado en función de la longitud de onda relativa para los dos métodos con un error relativo de 10^{-12} . El método AEH requiere una cantidad adicional de operaciones para bajas frecuencias con el fin de evitar la indeterminación generada por el factor dependiente de la longitud de onda. Para este caso, debería reemplazarse la ecuación (7.10) por el desarrollo en Taylor del término oscilante de la integral. Sin embargo es evidente que para el rango de ondas largas debería utilizarse el método de la cuadratura de Gauss mientras que la integración exacta es preferible para frecuencias medias y altas, siendo ésta la estrategia seguida en el modelo desarrollado en este trabajo.

La extensión de la metodología propuesta para el caso de refracción conlleva las siguiente condición para la transformación unitaria asociada a cada

nodo para el siguiente tipo de integrandos oscilatorios:

$$I = \int_{\Omega} P_k(x, y) \exp\{ik_i(x \cos \theta_j + y \cos \theta_j)\} \exp\{ik_n(x \cos \theta_m + y \cos \theta_m)\} dx dy \quad (\text{E.23})$$

En este caso las condiciones asociadas a la transformación quedan como sigue:

$$A \sin \gamma - B \cos \gamma = 0 \quad (\text{E.24})$$

donde: $A = \cos \beta \cos \theta_j + \sin \beta \cos \theta_m$ y $B = \cos \beta \sin \theta_j + \sin \beta \cos \theta_m$

Haciendo uso de esta relación, el integrando oscilatorio queda de la forma:

$$I = \int_{\Omega} P_k(x, y) q_j^i q_m^n d\Omega = \int_{\Omega} P_k(\xi, \eta) \exp\{ik_{tot}\xi\} J_{acob} d\xi d\eta \quad (\text{E.25})$$

donde $J = \det \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} = 1$ (transformación unitaria), y el "número de onda efectivo" es para los problemas de refracción:

$$k_{tot} = k_0 [\cos \beta \{\cos \theta_j \cos \gamma + \sin \theta_j \sin \gamma\} + \sin \beta \{\cos \theta_m \cos \gamma + \sin \theta_m \sin \gamma\}] \quad (\text{E.26})$$

El método AEH es aplicado entonces al cálculo de integrandos unidimensionales de la forma:

$$I = \int_{-1}^{+1} \xi^r \exp\{i\omega\xi\} d\xi \quad (\text{E.27})$$

que son desarrollados, al igual que en el caso de la difracción en términos de polinomios de Chebyshev para $\omega \geq 1$ y en términos de una expansión de Taylor para $\omega < 1$.

E.4.2 Validación del modelo

El modelo PUFEM se ha validado para difracción en el caso de incidencia normal sobre un cilindro reflejante de radio a . Los casos estudiados corresponden a las siguientes longitudes de onda $k.a = 1, 1.5$ y 3.5 . La base de ondas planas asociada a cada nodo tiene 64 funciones distribuidas de forma equiespaciada en todas las direcciones del plano.

Los resultados obtenidos para el caso $k.a = 3.5$ se muestran en la Fig.E.3. En las figuras (a) y (b) se comparan entre la malla de elementos finitos y la malla PUFEM que ha sido necesario emplear para obtener un mismo error

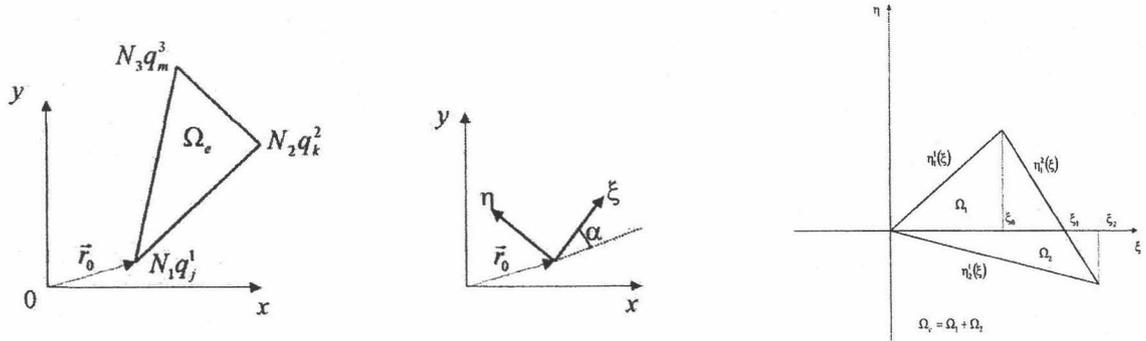


Figura E.2: Esquema de transformación de coordenadas empleada para método de integración AEH

L_2 en la solución. Este error se ha calculado a partir de la solución analítica conocida del problema. Para difracción se observa un ahorro notable en el coste computacional con las técnicas numéricas de integración y el solver propuesto. Los resultados indican además el correcto funcionamiento de las condiciones de contorno de tipo Higdon modeladas.

La inclusión de la refracción supone un aumento considerable de los grados de libertad necesarios para resolver el problema. Hasta el momento, no se ha conseguido ningún método de selección a priori de las funciones externas asociadas a cada nodo en casos de profundidad variable que permita reducir este número de grados de libertad y haga que el método sea computacionalmente competitivo frente al tradicional MEF.

E.5 Solver optimizado para problemas de onda corta: GBCStab Generalizado

El sistema obtenido por el PUFEM está formado en general por matrices mal condicionadas. Conforme aumenta el número de funciones extrínsecas, el sistema tiende a ser linealmente dependiente (debido al error de redondeo), en particular para el rango de mayores longitudes de onda, y a perder la típica estructura de banda del MEF.

De igual forma, un mal condicionamiento implica la necesidad de aumentar el orden en las normas del residuo para la convergencia, de manera que se

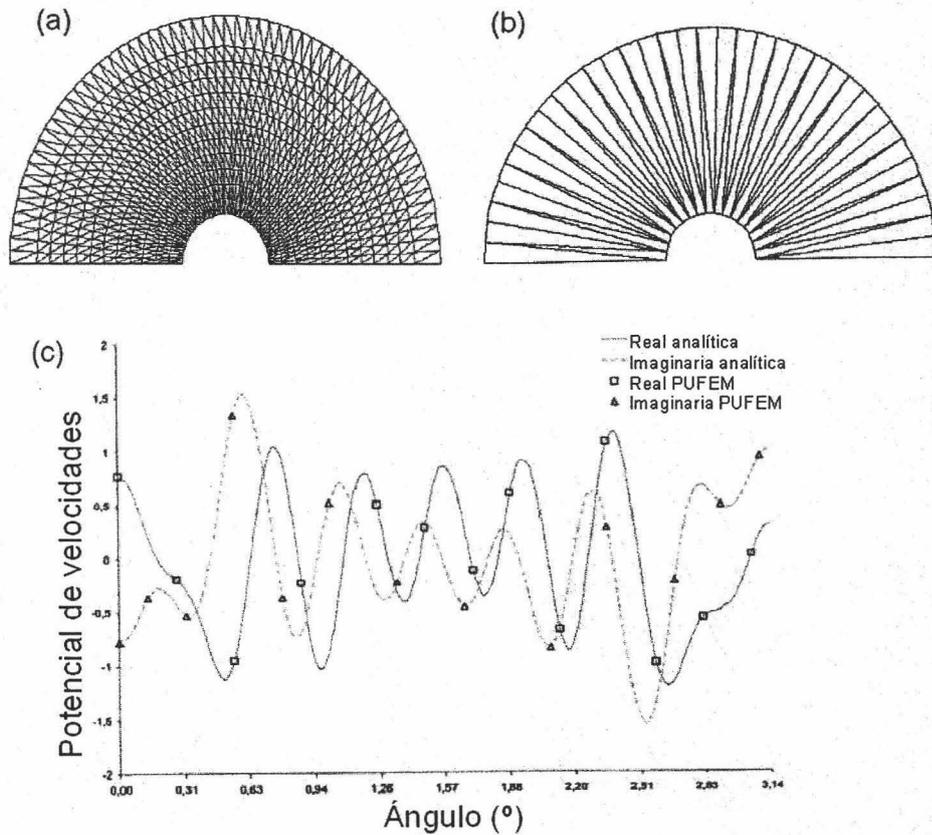


Figura E.3: Validación del método de partición de la unidad en problemas de difracción. (a) Malla de elementos finitos con resolución 10 elementos por longitud de onda, (b) malla PUFEM empleada, (c) Comparación entre solución numérica y solución analítica ($T=8s$, $H=1m.$, $h=10m.$).

alcance el error deseado en la solución. Un solver útil para estas situaciones es el basado en el método del Gradiente Conjugado Generalizado para matrices hermíticas (no definidas positivas). Aquí la condición de hermiticidad se obtiene resolviendo el sistema lineal premultiplicado por la matriz de coeficientes conjugada de A : A^* . El sistema lineal es ahora: $A^*Ab = A^*f$ donde b representa las incógnitas y f los términos provenientes de las condiciones de borde. Cuando el límite en el error de redondeo no permite alcanzar la tolerancia adecuada para el error de la solución, el condicionamiento de la matriz puede ser mejorado imponiendo el carácter definido positivo dentro de la precisión utilizada en la forma: $(A^*A + \gamma I)b = A^*f$ donde γ es una constante del orden del límite de redondeo. Esta situación se encontró en el caso extremo de un número muy grande de funciones extrínsecas (más de 66 por nodo para un cálculo en doble precisión) y bajas frecuencias.

La validez del método se ha estudiado para un problema de un dominio cuadrangular mallado mediante elementos lineales triangulares con un total de 16 nodos y 64 funciones extrínsecas asociadas a los nodos (una condición severa para ondas largas e intermedias), con una tolerancia en la norma del residuo relativo de $3 \cdot 10^{-11}$. En el contorno izquierdo se ha prescrito una onda de incidencia normal (por medio de la condición (5.2)) mientras que en el resto se han impuesto condiciones normales absorbentes (5.3).

En la *Fig.E.4* se muestra la norma del residuo en términos del número de iteraciones para números de onda que varían desde 0.5 (ondas largas) a 264 (ondas muy cortas).

Se observa que la peor condición de convergencia se encuentra para longitudes de onda intermedias (32). Cuando el número de ondas es mayor que este orden, la convergencia se mejora suavemente debido a que la influencia de la matriz de masa en la estructura del sistema global comienza a ser importante. Sin embargo en el rango de la media frecuencia la dependencia del número de iteraciones con el número de onda es relativamente menor. El error obtenido en la solución (L_2) para los cinco números de onda ilustrados en la *Fig.E.4* (0.5, 16, 32, 132, 264) son respectivamente: 10^{-7} , 10^{-4} , 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6} .

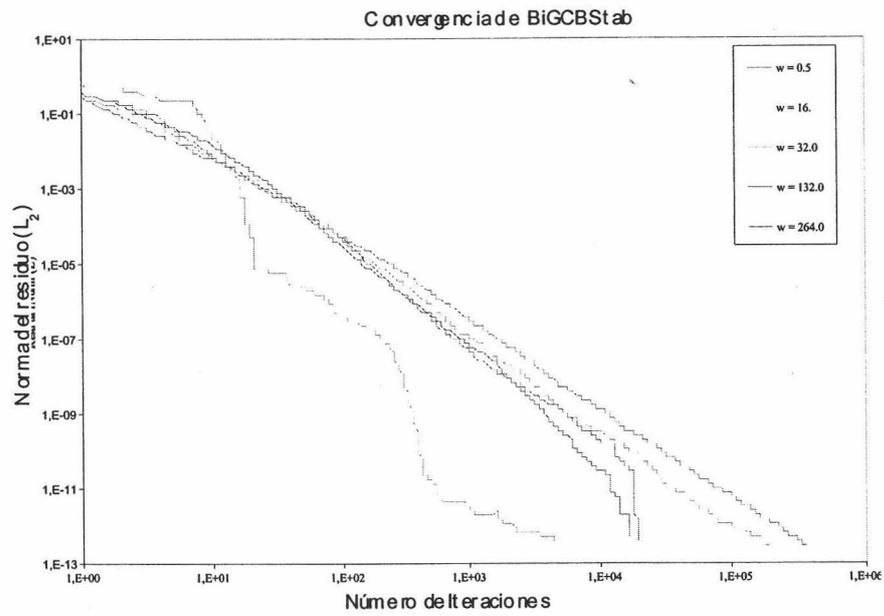


Figura E.4: Convergencia del método GBCStab Generalizado en función de la frecuencia.

Bibliografía

- [1] Abramowitz, M., 1970. Handbook of Mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables.
- [2] Alaylioglu, A., Evans, G. and Hyslop, J., 1974. The use of Chebyshev series for the evaluation of oscillatory integrals. *Comp. Journal*, 19, 3, pp. 258-267.
- [3] Bailard, J.A., 1981. An energetic total load sediment transport model for a plane sloping beach. *Journal of Geophysical Research* 86, pp. 10938-10954.
- [4] Baquerizo, A., Losada, M.A. and Smith, J.M, 1998. Wave Reflection from Beaches: A predictive model, *Journal of Coastal Research*, 14, 1, pp. 291-298.
- [5] Baquerizo A., Losada, M.A. 1998. Longitudinal current induced by oblique waves along coastal structures. *Coastal Engineering* 35, pp. 211-230 .
- [6] Baquerizo A., Losada, M.A. (1998 b). Sediment Transport Around a Mound Breakwater: the Toe Erosion Problem. *Proceeding of Coastal Engineering*, pp. 1720-1729.
- [7] Behrendt, 1985. Hibrid Formulation for Elliptic Waves Models. PhD Disertation, Technical University of Denmark.
- [8] Belytschko, T., Krongauz, J., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P. Meshless methods: an overview and recent developments. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 139, pp. 3-47.
- [9] Benjamin, J.R. and Cornell, C.A., 1970. Probability, statistics, and decision for civiel engineers. McGraw-Hill. ISBN: 968-451-050-0.

- [10] Berkhof J.C.W., 1976. Mathematical models for simple harmonic linear water waves in diffraction and refraction. Delft Hydraulics Lab., pp. 163.
- [11] Berkhoff, J.C.W., Booij, N. and Radder, A.C., 1982. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear waves. Coastal Eng., 6, pp. 255-279.
- [12] Biesel, F. 1952. Equations générales au second ordre de la houle irrégulière, Houille Blanche, 7, pp. 372-376.
- [13] Blondeaux, P., 2001. Mechanics of Coastal forms. Annu. Rev. Fluid Mech. 33, pp. 339-70
- [14] Blondeaux, P.; Brocchini, M. and Vittori, G., 2002. Sea waves and mass transport on a sloping beach. Proc. R. Soc. Lond. A., 458, pp. 2053-2082.
- [15] Booij, N., 1983. A note on the accuracy of the mild slope equation. J. Fluid Mech. 291, pp. 393-407.
- [16] Bowen, A.J., 1980. Simple models of nearshore sedimentation; beach profiles and longshore bars. Geological survey of Canada., Paper 80 - 10, pp.1-11.
- [17] Bowen, M.K. and McIver, P., 2002. Diffraction by a Gap in an Infinite Permeable Breakwater. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, January / February.
- [18] Briggs, J.B., Borgman, L.E. and Bratteland, E., 2003. Probability assessment for deep-draft navigation channel design. Coastal Engineering, 48, pp. 29-50.
- [19] Caballería, M., 2000. Self-organization in the nearshore: shear waves, transverse and crescentic bars. PhD Thesis. Univ. Politec. Catalunya.
- [20] Calvete, D., 1999. Phd. Dissertation. Morphological Instability Models: Shoreface-connected Sand Ridges. Universidad Autónoma de Cataluña.
- [21] Canuto C., Hussaini M.Y, Quarteroni A. and Zang A. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin.
- [22] Carter, T.J., Liu, P.L.F., and Mei, C.C., 1973. Mass transport by waves and offshore sand bedforms. J. Waterways, Harbours Coastal Eng. Div. ASCE 99, pp. 165-184.

- [23] Castillo, E., Losada, M.A., Mínguez, R., Castillo, C. and Baquerizo, A., 2003. An optimal engineering design method that combines safety factors and failure probabilities: Application to rubble mound breakwaters. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE (in press).
- [24] Chen, J-Y et al, 1999. Generalizations and modifications of the GMRES iterative method. *Numerical Algorithms* 21, pp. 119-146
- [25] Darymple, R., Losada, M.A., and Martin, P.A., 1991. Reflection and transmission from porous structures under oblique attack. *J.Fluid. Mechanics*, 224, pp. 625-644.
- [26] Dean, R.G. and Dalrymple, R.A., 1991. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. Advanced Series on Ocean Engineering, Vol.2. World Scientific.
- [27] Dingemans M.W., 1997. *Water wave propagation over uneven bottoms. Part 1: Linear wave propagation*. Advanced Series on Ocean Engineering, 13. Word Scientific.
- [28] Ditlevsen, O and Madsen, H.O., 1996. *Structural reliability methods*. Wiley, Chichester, N.Y.
- [29] Duarte, C. and Oden, J. T., 1996. An h-p adaptive method using clouds. TICAM Report 96-07, The University of Texas at Austin.
- [30] Dyer, K.R. and Huntley, D.A., 1999. The origin, classification and modelling of sand banks and ridges. *Continental Shelf Research* 19, pp. 1285-1330.
- [31] Elgar, S., and Guza, R.T., 1985. Observations of bispectra of shoaling surface gravity waves. *J. Fluid. Mech.*, 161m, pp. 425-448.
- [32] Elgar, S., Herbers, T.H.C., Okihiro, M., Oltman-Shay, J. and Guza, R.R.G. 1992. Observations of infragravity waves. *J. Geophys. Res.*,
- [33] Evans, G., 1995. *Practical Numerical Analysis*. J. Wiley.
- [34] Foda, M.A., 2003. Role of Wave pressure in bedload sediment transport. *J.Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE. pp. 243-249.

- [35] Fredsoe, J. and Deigaard, R., 1992. Mechanics of coastal sediment transport. Advanced Series on Ocean Engineering, Vol. 3. Word Scientific.
- [36] Fredsoe, J., Andersen K.H. and Sumer B.M., 1999. Wave plus current over a ripple-covered bed. Coastal Engineering 38, pp. 177-221.
- [37] Givoli, D., 1991. Non - reflecting Boundary Conditions. Journal of Computational Physics, 94, 1, pp. 345-361.
- [38] Givoli D., 1991. Non reflecting Boundary Conditions: A review article, Journal of Computational Physics, 94, 1.
- [39] Govaere, G., Silva, R., 2001. Directional wave transformation with a cylindrical permeable pile. In: Waves 2001ASCE, San Francisco, pp.1763-1772.
- [40] Graves-Morris, P.R., 2002. The breakdowns of BiCGStab, Numerical Algorithms, 29, pp. 97-105.
- [41] Gray, W.O., Waters, J., Blume, A. and Landsburg, C., 2001 (May). Channel design and vessel manoeuvrability - Next steps. International Workshop on Channel Design & Vessel maneuverability.
- [42] Güngördü, Ö. and Kirby, J.T., 2001. Evolution of coupled hydrodynamic and bed instabilities. Research Report No. CACR-01-04. Center for Applied Coastal Research. University of Delaware, Delaware (USA).
- [43] Hasselmann, K. 1962. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum, 1. General theory. J. Fluid Mech., 12, pp. 481-500.
- [44] Haver, S. and T. Moan, 1983. On some uncertainties related to the short term stochastic modelling of ocean waves. Applied Ocean Research, 5, 2, pp. 93-108.
- [45] Higdon, R.L., 1989 Absorbing Boundary Conditions for Difference Approximations to the Multi-Dimensional Wave Equation. Mathematics of Computation, 47, 126, pp. 1435-1450.
- [46] Hoffmans, G.J.C.M. and Verhij, H.J., 1997. Scour Manual. Ed. Balke-ma, ISBN: 90-5410-673-5
- [47] Huang, K., 1963. Statistical Mechanics. Wiley & Sons, p. 493.

- [48] Hunt, J. N. and B. Johns, 1963. Current induced by tides and gravity waves. *Tellus* 15, pp. 343-351.
- [49] Ihlenburg F., 1998. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*. Springer-Verlag, New York.
- [50] Ihlenburg F. and Babuska I., 1995. Finite element solution to the Helmholtz equation with high wavenumber. Part I: the h-version of the FEM. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 30, pp. 9-37.
- [51] Ihlenburg F. and Babuska I., 1997. Finite element solution to the Helmholtz equation with high wavenumber. Part II: the h-p version of the FEM. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 34, pp. 315-358
- [52] Jebsen, J. and Papakonstantinou, V., 1997. Evaluation of the physical risk of grounding. PhD Thesis, Ocean Engineering Department, MIT, Cambridge, Massachusetts.
- [53] Joshi, P.B., 1982. Hydromechanics of tidal jets. *Tidal Jets Hydromechanics*. A.M. ASCE / August, WN3, pp. 239-245.
- [54] Kirby, J.T., 1983. Propagation of weakly-nonlinear surface water waves in regions with varying depth and currents. Technical Report num.14. University of Delaware, Newark, Delaware.
- [55] Kirby, J.T., 1986. Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves. *J. Geophys. Res.*, 91, pp. 933-952.
- [56] Kirby, J.T., 1989. A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations. *Coastal Engineering*, 13, pp. 211-218.
- [57] Kirby, J.T., Darymple, R.A., 1984. Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves. *Coastal Eng.*, 9, pp. 545-561.
- [58] Laghrouch O., Bettet P. and Astley, R.J., 2000 (to be published). Modelling of short wave diffraction problems using approximation system of plane waves. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*
- [59] Li, B., 1994. A generalised conjugate gradient model for the mild slope equation. *Coast. Engin.*, 23, pp. 215-225.
- [60] Li, B., Reeve, D.E. and Fleming, C.A., 1993. Numerical solution of the elliptic mild-slope equation for irregular wave propagation. *Coastal Engineering*, 20, pp. 80-100.

- [61] Linton, C., Evans, D., 1990. The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders. *J. Fluid Mechanics*, 215, pp. 549-569.
- [62] List, J.H., 1986. Wave groupiness as a source of nearshore long waves. *Proc. Int. Coastal Eng. Conf.*, 20th, pp. 497-511.
- [63] Lee, C., Kim, G., Suh, K.-D., 2003. Extended mild slope equation for random waves.
- [64] Lewis, E.V. Ed., 1988. *Principles of Naval Architecture vol III: Motions in waves and controllability*. 3rd. Ed. Society of Naval Architects and Marine Engineers, New York.
- [65] Longuet-Higgins, M.S., 1962. The distribution of intervals between a stationary random function. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, 254, pp. 557-599.
- [66] Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W., 1962. Radiation shear stress and mass transport in gravity waves with applications to surf-beats. *Journal of Fluid Mechanics* 13, pp. 481-504.
- [67] Losada, M.A., Losada, I.J. and Roldán, A.J., 1993. Propagation of oblique incident modulated waves past rigid vertical thin barriers.
- [68] Maa, J.P.-Y., Hsu T.-W. and Lee, D.-Y., 2002. The RIDE model: an enhanced computer program for wave transformation. *Ocean Engineering*, Vol. 29, pp. 1441-1458.
- [69] Madsen, H.D., Krenk, S. and Lind, N.C., 1986. *Methods of structural safety*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- [70] Massel S.R., 1993. Extended refraction-diffraction equation for surface waves. *Coastal Engineering*, 19, pp. 97-126.
- [71] McIver, P., 2000. Water-wave propagation through an infinite array of cylindrical structures. *J. Fluid Mechanics*, 424, pp.101-125.
- [72] McIver P., 1999. Water - Wave Diffraction by thin porous breakwater. *Journal of waterway, port, coastal and ocean engineering*, March/April.
- [73] Meadows, G.A., Shuchman, R.A., and Lyden, J.D. 1982. Analsis of remotely sensed long-period wave motions. *J. Geophys. Res.* 87 (C8), pp. 5731-5740.

- [74] Megdenber, J. 2002. Simulation of wave breaking dissipation in a finite-element model based on the mild slope equation. Diplomarbeit, Universidad de Granada-Universitat Karlsruhe.
- [75] Mei, C.C., 1986. The applied dynamics of ocean surface waves. Advanced Series on Ocean Engineering, 1. World Scientific.
- [76] Mei, C.C. and Foda, M.A. 1981. Wave induced response in a fluid filled poro-elastic solid with a free surface; a boundary-layer theory. Geophys. J.R. astron. Soc., 66, pp. 597-631.
- [77] Melenk J.M., 1995. On generalized finite element method. PhD dissertation. University of Maryland at College Park.
- [78] Moyano, Sánchez, E, J., Díaz, J.L, Losada, M.A., and Villalobos, M. 2003. Desarrollo de un modelo probabilística para el diseño, gestión y explotación en tiempo real del tráfico marítimo en canales de navegación de acceso a puertos y zonas de atraque. VII Jornadas Españolas de Ingeniería de Costas y Puertos. Almería Spain (in Spanish).
- [79] Moyano, J.M., Sánchez, E., Gómez, M., Carretero, J.C., Díaz, J.L. and Losada, M.A., 2003. A wave climate prediction system for the real time management of the Gijon harbor. 29th Int. Conf., of Coastal Engineering 2004 Lisboa, Portugal. (accepted).
- [80] Munk, W.H., 1949. Surf beats, Eos Trans. AGU, 30(6), pp. 849-854.
- [81] Myrhaug D. and Slaattelid, O.H., 1989. Combined wave and current boundary layer model for fixed, rough seabeds. Ocean Engineering, Vol 16, num. 2, pp. 119-142.
- [82] Newland, D.E., 1975. An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis. 1st. Ed. Longman Group Limited, London.
- [83] Ochi, M.K. and Sahinoglou, I.I., 1989. Stochastic characteristics of wave groups in radom seas, Part I. Applied Ocean Research, 11, 1, pp. 39-50.
- [84] Okihiro, M., Guza, R.T. and Seymour, R.J. 1992. Bound infragravity waves. J. Geophysical Research, Vol. 97, No. C7, pp. 11.453-11.469.
- [85] Ortiz, P. and Sánchez, E. 2001. An improved partition of unity finite element model for diffraction problems. Int. J. Numer. Meth. Engng.: 50, pp. 1025-1048.

- [86] Ortiz, P. and Sánchez, E. 2001. Diffraction-Refraction problems with a partition of unity finite element model. Proceeding of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS-2001). Swansea, U.K.
- [87] Panchang, V., Chen, W., Xu, B., and Demirbilek, Z., 2000. Exterior Bathymetric Effects in Elliptic Harbor Wave Models. *Journal of Waterway, Ports and Ocean Engineering*, 126, 2, pp. 234-245.
- [88] Péchon, P. and Teisson, C., 1996. Numerical modelling of Bed evolution Behind a Detached Breakwater. *Coastal Engineering*, pp. 2050-2057.
- [89] Price, W.C. and Bishop, R.E.D., 1974. Probabilistic theory of ship dynamics. Chapman and Hall, London.
- [90] Rhee, K.P. and S.H. Kim, 2000. A modelling of frequency-dependent vertical ship motions in irregular waves. Proc. 3rd. International Conference for High Performance Marine Vehicles (HPMV 2000).
- [91] Roldán, A.J., 1992. Sobre la transformación de un tren de ondas lineal, no lineal y modulado por un medio discontinuo. Ph.D. thesis. University of Cantabria, Spain (in Spanish).
- [92] ROM 0.0, 2001. General Procedure and requirements in the design of harbor and maritime structures, Part I. Ministerio de Fomento, Spain.
- [93] ROM 3.1.99, 2000. Recomendaciones para obras marítimas. Proyecto de la Configuración marítima de los puertos, canales de acceso y áreas de flotación. Puertos del Estado. Spain (in Spanish).
- [94] Russell, C.H. and Osorio, J.D.C., 1985. An experimental investigation of drift profiles in a closed channel. *Coastal Engineering*.
- [95] Sánchez, E., 2002. Modelo lineal de difracción y refracción de ondas y ejemplos de aplicación en el diseño y planificación de infraestructuras portuarias. Universidad de Granada. ISBN: 84-688-0503-3 (in Spanish)
- [96] Sánchez, E. and Losada, M.A. 2002. Influence of wave reflection on the navigation conditions as a factor of breakwater design. Proceeding of 28th ICCE 2002 Cardiff U.K.: Vol II, pp. 2312-2319.
- [97] Sánchez, E. and Losada, M.A., 2003. Real time management of entrance channels. Part I: a probabilistic model *Coastal Engineering* (submitted to).

- [98] Sánchez, E. and Losada, M.A., 2003. Real time management of entrance channels. Part II: an application case Coastal Engineering (submitted to).
- [99] Sánchez, E. and Losada, M.A. 2003. Evolución del fondo frente a un dique reflejante. VII Jornadas Españolas de Ingeniería de Costas y Puertos. Almería, Spain.(in Spanish)
- [100] Sánchez, E. and Losada, M.A. 2003. Large scale bedforms and sediment transport in front of cliffs. 29th Int. Conf., of Coastal Engineering 2004. Lisboa, Portugal. (accepted)
- [101] Sánchez, E. and Losada, M.A. 2003. Modelo probabilista para la gestión en tiempo real de canales de navegación de acceso a puertos, ROM 0.0: Canales de Navegación. Serie EROM .Ed. Universidad de Valencia, Distribución: Puertos del Estado, (in press).
- [102] Sánchez, E. and Losada, M.A. (approx. Dec 2003). Wave Boundary Layer under modulated gravity waves. Journal of Fluid Mechanics (in prep.).
- [103] Sánchez, E. and Losada, M.A. (approx. Dec 2003). Morphology induced by modulated gravity waves in front of breakwaters. Journal of Waterways, Ports, Coastal and Ocean Engineering (ASCE).
- [104] Sánchez, E. and Ortiz, P. 2000. Short waves diffraction problems with a partition of unity finite element model. Proceeding of European Congress on Computational Methos in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS-2000). Barcelona, Spain.
- [105] Sánchez, E and Ortiz, P. 2000. El método de partición de la unidad en difracción de ondas cortas: una implementación eficiente. Congreso Nacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Sevilla Spain.
- [106] Sánchez, E. and Ortiz, P. 2001. An efficient integration procedure for the partition of unity method in diffraction-refraction wave problems. Proceeding of European Congress on Computational Methos in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS-2001). Swansea, U.K.
- [107] Sawaragi T., 1995. Coastal Engineering-Waves, Beaches, Wave-Structure Interactions, Elsevier.
- [108] Schäffer, H.A., 1990. Infragravity water waves induced by short-wave groups. PhD Thesis. Institute of hydrodynamic and hydraulic engineering. Tech. Univ of Denmark. DK-2800 Lyngby. Series Paper No. 50.



- [109] Silva, R., Salles, P., and Govaere, G. 2002. Extended solution for waves travelling over rapidly changing porous bottom. *Ocean Engineering* (in press).
- [110] Silva, R., Salles, P., and Palacio, A., 2002. Linear waves propagating over a rapidly varying finite porous bed. *Coastal Engineering*, 44, pp. 239-260.
- [111] Solem, R.R., 1980. Probabilistic model of groundings and collisions. *Proceedings of Automation of Safety in Shipping and Offshore Petroleum Operations*, Trondheim, Norway.
- [112] Stiassnie, M. and Peregrine, D.H., 1980. Shoaling of finite-amplitude surface waves on water of slowly-varying depth. *J. Fluid Mech.* 97, pp. 783-805.
- [113] Stoer J. and Bulirsch R., 1992. *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed. Springer
- [114] Styles R and Glenn S. M., 2002. Modeling bottom roughness in the presence of wave-generated ripples. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 107, No. C8, 10.1029/2001JC000864.
- [115] Sumer, B.M. and Fredsoe, J., 2000. Experimental study of 2D scour and its protection at a rubble-mound breakwater. *Coastal Engineering*, 40, pp. 59 - 87.
- [116] Symonds, G., Huntley, D.A. and Bowen, A.J., 1982. Two dimensional surf beat: long wave generation by a time varying breakpoint. *J. Geophys. Res.*, 87 (C1), pp. 492-498.
- [117] Tucker, M.J., 1950. Surf beats: sea waves of 1 to 5 minutes period. *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* 202. pp. 565-573.
- [118] Turpin, F.M., Benmoussa, C. and Mei, C.C., 1983. Effects of slowly varying depth and current on the evolution of a Stokes wave packet. *J. Fluid Mech.* 132, pp. 1-23.
- [119] Van Amerongen, J., 1982. Adaptive steering of ships - A model reference approach to improved manoeuvring and economic course keeping. PhD thesis. Delft University of Technology, The Netherlands.
- [120] Van der Talk, C. and De Jong, J.H., 1996. Safety management assessment ranking tool (SMART). *Port Technology*. Ed. 10th, Section

- 1: Port & Terminal Management, 17 - 21. Alfonso, M., Lopez, J.D, Ruiz, M.I., and Alvarez, E., 2002. Puertos del Estado Network: Oceanographic information in real time. Actas de la III asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica (in Spanish).
- [121] Van Rijn, LC., 1998. Principles of Coastal Morphology. Amsterdam: Aqua. pp. 736.
- [122] Vossers, I.G., 1962. Behaviour of ships in waves. Ed. W.P.A. van Lammeren M.R.I.N.A. Vol II, C
- [123] Xie, S.L., 1981. Scouring patterns in front of vertical breakwaters and their influence on the stability of the foundations of the breakwaters. Delf University of Technology, Delft.
- [124] Xu, B., Panchang, V. and Demirbilek, Z., 1996. Exterior Reflections in Elliptic Harbour Wave Models. Journal of Waterway, Ports and Ocean Engineering, 122, 3, 127-142.
- [125] Zienkiewicz O.C., 1977. The finite element method. McGraw-Hill, Maidenhead, England