Pedro Martínez Amores

ESTABILIDAD Y SOLUCIONES PERIODICAS DE UN PROBLEMA DESCRITO POR ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES DE TIPO NEUTRO.

TESIS DOCTORALES DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA 131

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES

ESTABILIDAD Y SOLUCIONES PERIODICAS DE UN PROBLEMA DESCRITO POR ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES DE TIPO NEUTRO

PEDRO MARTINEZ AMORES

Tesis doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA
1976

Im. Un. Gr. 210.1976. Dep. leg. Gr. 297.1976.

Tesis doctoral, dirigida por el Prof. Dr. Jack K. Hale, de la División de Matemáticas Aplicadas de Brown University Providence, Estados Unidos. Fue leída el día 22 de junio de 1976, ante el tribunal formado por los Profesores: Jack Hale; Valle Sánchez; Fuentes Miras; Guzmán Ozámiz y Bobillo Guerrero. Obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".

A mi madre y a la memoria de mi padre

Tabla de contenido

Introducción

El futuro estado de un sistema físico depende, en muchos casos, no sólo del estado presente sino también de su estado pasado. Las ecuaciones diferenciales funcionales son un modelo matemático para sistemas físicos en los cuales el cambio del sistema puede depender de la influencia de sus efectos hereditarios. El ejemplo mas simple de tales sistemas es dado por una ecuación diferencial en diferencias de tipo retardado

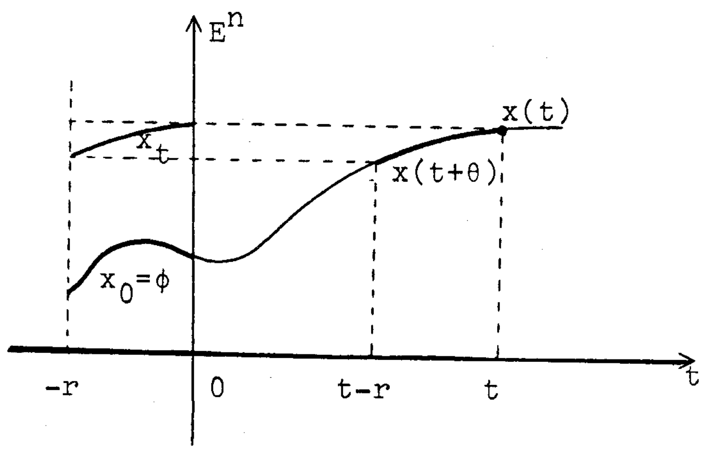
$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-r) \tag{1}$$

donde $r > 0$ es una constante y $\dot{x}$ es la derivada dx/dt. Evidentemente, si $r=0$ tenemos una ecuación diferencial ordinaria.

Un problema fundamental en el estudio de ecuaciones diferenciales funcionales es el problema de los valores iniciales. Por ejemplo, si deseamos resolver la ecuación (1) para todo $t \geqq 0$, entonces puede suceder que $t-r \leqq 0$, para algún valor de $t \geqq 0$. En este caso, $x(t-r)$ tendria que estar definida para todo $t \geqq 0$, para el cual $t-r \leqq 0$. Así, si especificamos $x(t-r)$ por una función $\phi(t-r)$ para aquellos valores de $t \geqq 0$ para los cuales $t-r \leqq 0$, esto es, por $\phi(\theta)$ con $\theta \in [-r,0]$, tendremos los datos para un problema de valores iniciales, el cual es análogo al problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Hasta hace pocos años, la mayoria de los resultados concernientes con ecuaciones diferenciales en diferencias habian sido obtenidos tratando la variable dependiente como un punto en un espacio euclideo y empleando tecnicas análogas a las usadas en ecuaciones diferenciales ordinarias. Krasovskii [26] fué el primero en tratar estos problemas en espacios de funciones, siendo continuado por J. Hale quien, junto con sus colaboradores, a llegado a ser el máximo contribuidor a la teoria de ecuaciones diferenciales funcionales.

Sea $C = C([-r,0],E^n)$ el conjunto de las funciones continuas con dominio en $[-r,0]$, $r > 0$, y rango en E^n. Supongamos que $x \in C([-r,\infty),E^n)$ y sea x_t la restriccion de x al intervalo $[t-r,t]$. Asi, para $t \geqq 0, x_t$, definida por $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-r,0]$, es el grafo de x restringido a $[t-r,t]$ y trasladado a $[-r,0]$, esto es $x_t \in C$, tal y como se explica en la figura,



Con la notación de J. Hale, una ecuación diferencial funcional se define como $\dot{x}(t) = f(t,x_t)$, donde $f\colon R \times C \to E^n$. Si f no depende de t y es lineal entonces, por el teorema de representación de Riesz, tenemos que

$$\dot{x}(t) = L(x_t) = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]x(t+\theta) \tag{2}$$

donde η es una función de variación acotada en $[-r,0]$. Observemos que (2) incluye las ecuaciones diferenciales en diferencias de tipo retardado. Por ejemplo, si definimos

$$\eta(\theta) = \begin{cases} a + b, & \theta = 0 \\ b, & \theta \in (-r,0) \\ 0, & \theta = -r \end{cases}$$

entonces, (2) es equivalente a (1).

Una generalización de las ecuaciones diferenciales funcionales son las ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro, en las que el retraso aparece tambien en la derivada. Para representar estas ecuaciones, J. Hale, creador de la teoria para este tipo de ecuaciones, utiliza la notación

$$\text{(3)} \qquad \frac{d}{dt} D(x_t) = L(x_t)$$

para una ecuación diferencial funcional lineal y autónoma de tipo neutro. Un ejemplo de estas ecuaciones, lo constituye la ecuación diferencial en diferencias de tipo neutro

$$\text{(4)} \qquad \dot{x}(t) - \dot{x}(t-r) = ax(t) + bx(t-r)$$

donde $D(x_t) = x(t) - x(t-r)$ y $L(x_t) = ax(t) + bx(t-r)$ son funcionales lineales aplicando $C \to E^n$, supuesto que $x_t \in C$. Observemos que si $\dot{x}(t-r) = 0$, tenemos una ecuación diferencial funcional.

El hecho de que la derivada de la función desconocida puede depender de los valores pasados de la función asi como de su derivada hace el problema mas complicado, cuando la existencia de de la derivada se plantea. Para tener esto en cuenta, hace falta definir una norma que dependa de la norma de $\dot{x}$. Melvin [28] resuelve este problema estudiando la ecuación en espacios de Sobolev, $W_p^1([-r,0],E^n)$, $1 \leq p < \infty$, esto es, en espacios de funciones las cuales junto con su derivada estan en $L_p([-r,0],E^n)$.

Al estudiar ecuaciones diferenciales funcionales en espacios de funciones, los argumentos usados para ecuaciones diferenciales ordinarias llegan a ser mas naturales para nuestro tipo de ecuaciones. Asi, por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial ordinaria

(5) $$\dot{x}(t) = Ax(t), \ x(0) = \bar{x}$$

donde A es una aplicación lineal del espacio E^n en si mismo.

Sabemos que la solución es dada por $T(t)\bar{x} = e^{At} \cdot \bar{x}$, donde $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$.

Puesto que $T(t+s) = e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As} = T(t) \cdot T(s)$, $t,s \geq 0$, $T(0) = I$, vemos que la solución $\{T(t), t \geq 0\}$ es un semigrupo. Es fácil probar que la familia de operadores $\{T(t), t \geq 0\}$ es un semigrupo uniformemente continuo en $[0,\infty)$. Entonces (Dunford-Schwartz [7]) existe un operador lineal, $A: E^n \rightarrow E^n$, tal que $T(t) = e^{At}$ y A es dado por $A = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{T(\varepsilon) - I}{\varepsilon}$. El operador A se llama generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$. Es sabido que las propiedades de estabilidad de las soluciones de (5) dependen de los valores propios de A.

En analogia con esto, si ϕ es una función dada en C y $x(\phi)$

es la única solución de (3) con valor inicial ϕ en cero, se define la aplicacion $T(t)\colon C \to C$, para cada t fijo, por la relación

$$T(t)\phi = x_t(\phi)$$

y se puede demostrar que $\{T(t), t \geq 0\}$ es un semigrupo fuertemente continuo en la topologia de operadores aplicando C en si mismo. Este semigrupo tendrá un generador infinitesimal A. De la situación del espectro de A dependerán las propiedades de estabilidad de las soluciones de (3). Debido a que el operador A no es compacto (caso que no ocurre en ecuaciones diferenciales funcionales del tipo retardado),este problema es mas dificil que en ecuaciones diferenciales ordinarias. No obstante, se demuestra que el espectro puntual de A coincide con las raices de la ecuación caracterisca, que para el caso de la ecuación (4) es

$$\lambda - \lambda e^{-\lambda r} - a - be^{-\lambda r} = 0.$$

Observemos que se trata de una función entera y, por tanto, tiene infinitas raices, cosa que no sucedia en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya ecuación caracteristica era un polinomio de grado n. Asi queda puesto de relieve la dificultad del estudio de ecuaciones diferenciales funcionales y la diferencia con ecuaciones diferenciales ordinarias.

En esta tesis, tratamos ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro. Los principales resultados estan relacionados con un problema de lineas de trasmisión sin perdidas, el cual es descrito por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo hiperbólico, para las cuales se define un problema mixto, esto es, se dan condiciones iniciales y en la frontera. Brayton [2] reduce este problema a un problema de condiciones iniciales para un sistema de ecuaciones diferenciales en diferencias de tipo retardado asociadas con ecuaciones en diferencias. Se ha hecho mucha investigacion sobre la cuestion de la estabilidad de este sistema.En este trabajo, intentamos aclarar, extender y completar los resultados obtenidos, asi como dar condiciones para la existencia de soluciones periodicas de tal sistema. Para hacer esto, reducimos el sistema a una ecuacion diferencial funcional de tipo neutro.

Así, en el capítulo I, tratamos la teoria general de este tipo de ecuaciones. En la sección I.1. se dan teoremas de existencia, unicidad, dependencia continua y prolongación de las soluciones con las condiciones de Caratheodory. Estos teoremas se pueden encontrar en Cruz-Hale [4], Hale [17] y Melvin [28],[29]. Aquí los damos, solamente, por completar nuestro trabajo sobre ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro. En la sección I.2. se trata la representación de las soluciones y la teoria adjunta para los casos autónomo y no autónomo. Se estudia especialmente el caso autónomo con vistas a su aplicacion al problema de lineas de trasmisión. En la sección I.3. extendemos el método de Popov para la estabilidad absoluta de las soluciones a ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro, siguiendo las lineas como lo hace Halanay [8] para ecuaciones diferenciales funcionales de tipo retardado. Esto es posible utilizando la fórmula de representación de las soluciones dada en la sección I.2.

Una vez que tenemos la base del capítulo I, podemos abordar el problema de lineas de trasmisión en el capítulo II. En la sección II.1. tratamos el problema lineal. El sistema que describe el problema se reduce a una ecuación diferencial funcional de tipo neutro, para la cual se calcula el generador infinitesimal. Después, definimos una función de Liapunov con la cual se establece la estabilidad asintótica de las soluciones. En la sección II.2. consideramos el sistema no homogeneo y derivamos para el una fórmula de variación de constantes, hallamos unas determinadas acotaciones exponenciales y comparamos los resultados con los obtenidos por Rasvan [33].En la sección II.3. se obtienen diversos teoremas para la estabilidad absoluta de las soluciones con la ayuda de la formula de variación de constantes obtenida en la seccion anterior.

El capítulo III trata sobre las soluciones periodicas del sistema lineal no homogeneo. Así, en la sección III.1. la fórmula de variación de constantes es descompuesta con ayuda de la ecuación adjunta y una cierta forma bilineal que allí definimos. Una vez que tenemos esta descomposición, damos un teorema tipo alternativa de Fredholm para la existencia de soluciones periódicas. En la sección III.2. se trata la existencia de soluciones periódicas del sistema conteniendo un pequeño parámetro. Se estudian los casos crítico y no crítico.

Desde aquí, deseo expresar mi más sincera gratitud al Professor Jack K. Hale de la División de Matematicas Aplicadas de Brown University, por su constante estímulo, su util crítica, su entusiasmo y por su paciencia. Sín su ayuda, esta tesis no hubiera sido posible. Igualmente, estoy profundamente agradecido al Catedrático José Ramón Fuentes Miras, Jefe del Departamento de Teoria de Funciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, por su dirección, sus enseñanzas, su estima y por las innumerables facilidades que a lo largo de este trabajo y siempre he recibido de él. Quiero dar las gracias al Catedrático Antonio de Castro Brzezki, Jefe del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla, por haberme introducido en el estudio de ecuaciones diferenciales funcionales y por su amabilidad y al Professor Ettore F. Infante de la División de Matemáticas Aplicadas de Brown University, por su interes hacia mí y por sus comentarios en las secciones sobre la estabilidad absoluta. No me gustaria olvidar el soporte moral de mis amigos de la Universidad de Granada. Finálmente, esta tesis ha sido posible por el Programa de Intercambio Cultural entre España y Estados Unidos, que me dotó con una beca para permanecer dos años en Brown University, Estados Unidos.

Pedro Martínez Amores

Capitulo I

TEORIA GENERAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES DE TIPO NEUTRO

I.1.- Teoria fundamental: existencia, unicidad, dependencia continua y prolongación de las soluciones.

Sea E^n el espacio euclideo de n-vectores columna de números reales ó complejos y sea $r>0$ un número real dado. $C([a,b],E^n)$ es el espacio de funciones continuas que aplican $[a,b]$ en E^n, con la norma $\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)|, \theta\in[a,b]\}$, $\phi\in C$, donde $|\phi(\theta)|$ representa la norma en E^n. $L_1([a,b],E^n)$ es el espacio de funciones integrables Lebesgue que aplican $[a,b]$ en E^n, con norma $\|\phi\| = \int_a^b|\phi(\theta)|d\theta$, $\phi\in L_1([a,b],E^n)$. $L_\infty([a,b],E^n)$ es el espacio de funciones esencialmente acotadas, con norma $\|\phi\| = \text{esen.sup}\ |\phi(\theta)|$, $\theta\in[a,b]$. $L_\infty^{loc}(A,E^n)$, $A\subset R$, representa las funciones $A\to E^n$ que son integrables Lebesgue sobre conjuntos compactos. Finalmente, $B_o([a,b],E^n)$ representará el espacio de funciones de variación acotada que aplican $[a,b]$ en E^n, con norma $\|\phi\| = \operatorname{Var}_{[a,b]}\phi$, donde $\operatorname{Var}_{[a,b]}\phi$ es la variación total de ϕ sobre $[a,b]$.

Si x es una función que pertenece a $C([a-r,b),E^n)$, a finito, entonces para cada fijo $t\in[a,b)$, el simbolo x_t denota un elemento de $C = C([-r,0],E^n)$ definido por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-r\leq\theta\leq 0$. Esto es, x_t es la restricción de x al intervalo $[t-r,t]$ y trasladada al intervalo $[-r,0]$.

Sean $g,L: R\times C\to E^n$ y definamos el operador funcional en diferencias $D(\cdot,\phi): R\times C\to E^n$ por $D(t,\phi) = \phi(0) - g(t,\phi)$. A lo largo de nuestro trabajo, supondremos que $g(t,\cdot)$ y $L(t,\cdot)$ son operadores lineales acotados que aplican C en E^n

Se define una ecuación diferencial funcional homogenea de tipo neutro por una relación de la forma

$$(1.1.1) \qquad \frac{d}{dt}D(t,x_t) = L(t,x_t).$$

Observemos que si $g \equiv 0$ entonces tenemos una ecuación diferencial funcional de tipo retardado.

Junto con la ecuación homogenea (1.1.1) consideraremos la ecuación no homogenea

$$(1.1.2) \qquad \frac{d}{dt}D(t,x_t) = L(t,x_t) + h(t)$$

donde, para un dado $s \in R$, $h \in L_1^{loc}([s,\infty),E^n)$.

Dados $s \in R$, $\phi \in C$, diremos que $x = x(s,\phi)$ es una solución de (1.1.2), con valor inicial ϕ en s, si existe un $A > 0$ tal que $x \in C([s-r,s+A),E^n)$, esto es, $x_t(\phi) \in C$, $t \in [s,s+A)$, $x_s = \phi$, $D(t,x_t)$ es continua diferenciable en $[s,s+A)$ y satisface la ecuación en $[s,s+A)$. Si $s = 0$ designaremos la solución por $x(\phi)$.

Por el teorema de representación de Riesz, los funcionales D y L pueden ser representados por las integrales de Stieltjes

$$D(t,\phi) = \phi(0) - \int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)]\phi(\theta), \quad L(t,\phi) = \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t,\theta)]\phi(\theta),$$

donde $t \in R$ y $\phi \in C$.

Las siguientes hipotesis seran mantenidas:

A) $\eta: R^2 \to E^{n^2}$, esto es, $\eta(\cdot,\cdot)$ es una matriz $n\times n$ de funciones valoradas, que es medible en $(t,\theta)\in R\times R$ y normalizada de la forma

$$\eta(t,\theta) = 0 \text{ para } \theta \geqq 0,\ \eta(t,\theta) = \eta(t,-r) \text{ para } \theta \leqq -r.$$

Observemos que $\eta(t,s-t) = 0$ para $s \geqq t$ y $\eta(t,s-t) = \eta(t,-r)$ para $s \leqq t-r$.

Además, supongamos que $\eta(t,\theta)$ es de variación acotada en θ, para cada t, con $\operatorname{Var}_{[-r,0]} \eta(t,\cdot) \leqq m(t)$, donde $m(t)$ es localmente integrable, es decir, $m\in L_1^{loc}$, y $\eta(t,\theta)$ es continua a la izquierda en θ sobre $(-r,0)$.

B) $\mu: R^2 \to E^{n^2}$, esto es, $\mu(\cdot,\cdot)$ es una matriz $n\times n$ de funciones valoradas que es medible Borel en $(t,\theta)\in R^2$ y normalizada de la forma

$$\mu(t,\theta) = 0 \text{ para } \theta \geqq 0,\ \mu(t,\theta) = \mu(t,-r) \text{ para } \theta \leqq -r.$$

Suponemos que $\mu(t,\theta)$ es de variación acotada en θ, uniformemente en t, continua a la izquierda en θ en $(-r,0)$ y tal que la aplicación $t \to g(t,\phi) = \int_{-r}^{0} [d_\theta\mu(t,\theta)]\phi(\theta)$, para cada $\phi\in C$, es continua en $t\in R$. Por tanto, $g(t,\phi)$ es continua en t y ϕ.

C) μ es una medida uniformemente no atómica en cero, es decir, existe una función γ, continua, no decreciente en $[0,\infty)$ tal que $\gamma(0) = 0$ y $\operatorname{Var}_{[-\varepsilon,0]} \mu(t,\cdot) \leqq \gamma(\varepsilon)$, $t\in R$, $\varepsilon\in[0,r]$.

Observemos que, entonces, $\mu(t,\cdot)$ es continua en 0,pues

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{0} [d_\theta\mu(t,\theta)]\phi(\theta)\right| \leqq \gamma(\varepsilon)\cdot\|\phi\| \quad \text{y por tanto} \quad \left|\int_{-\varepsilon}^{0} d_\theta\mu(t,\theta)\right| \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Cuando $L: R\times C \to E^n$ es un funcional continuo, el problema de los valores iniciales

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t) = L(t,x_t), \quad t\in[s,s+A) \qquad (1.1.3)$$
$$x_s = \phi$$

es equivalente a resolver la ecuación integral

$$D(t,x_t) = D(s,\phi) + \int_s^t L(\sigma,x_\sigma)d\sigma, \ t\in[s,s+A) \qquad (1.1.4)$$
$$x_s = \phi.$$

En efecto, si $x_t(\phi)$ es una solución del problema (1.1.3),integrando entre los limites s y t, obtenemos (1.1.4). Reciprocamente, si $x_t(\phi)$ es una solución de (1.1.4), haciendo $t = s$, obtenemos $D(s,x_s) = D(s,\phi)$. Además, $D(t,x_t)$ es continua, puesto que toda integral es una función continua de su límite superior. Por tanto, $L(t,x_t)$ es continua. De (1.1.4) se deduce que $D(t,x_t)$ es diferenciable y satisface (1.1.3).

La ecuación (1.1.4) es mas útil para una clase más general de funcionales L si no se requiere que $D(t,x_t)$ tenga una primera derivada continua. Nuestro fín es generalizar a ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro las condiciones de Caratheodory para ecuaciones diferenciales ordinarias. Nuestras demostraciones siguen a las dadas por Cruz-Hale [4] y Hale [17].

Supongamos que U es un conjunto abierto de $R\times C$. Una función $L: U\to E^n$ se dice que satisface la condición de Caratheodory sobre U, si $L(t,\phi)$ es medible en t, para cada fijo ϕ, continua en ϕ para cada fijo t y para todo fijo (t,ϕ) existe un entorno $V(t,\phi)$ y una función integrable Lebesgue m tal que

$$|L(\sigma,\psi)| \leq m(\sigma), \quad (\sigma,\psi) \in V(t,\phi)$$

Si $L: U \to E^n$ es continua, automaticamente, satisface la condición de Caratheodory sobre U.

Si L satisface la condición de Caratheodory sobre U, $(s,\phi) \in U$, decimos que una función $x = x(s,\phi)$ es una solución de (1.1.4) a través de (s,ϕ) si existe un $A > 0$ tal que $x \in C([s-r,s+A), E^n)$, $x_s = \phi$, $t \in [s,s+A)$ y $D(t,x_t)$ satisface (1.1.3) en $[s,s+A)$, excepto en un conjunto de Lebesgue de medida cero.

Observemos que la hipótesis A) hecha sobre η satisface la condición de Caratheodory.

Nos disponemos ahora a probar teoremas de existencia, unicidad, dependencia continua y prolongación de las soluciones para el caso donde L satisface la condición de Caratheodory. Para ello,necesitamos algunos teoremas del punto fijo los cuales pueden ser encontrados en Cruz-Hale [4].

Definición. Sea X un espacio de Banach. Una función continua $T: \Gamma \subset X \to X$, definida sobre un conjunto $\Gamma \subset X$, es completamente continua si transforma conjuntos acotados en conjuntos precompactos, es decir, de clausura compacta.

Teorema. (Schauder) Si $T: \Gamma \to \Gamma$ es completamente continua y Γ es un conjunto convexo, acotado y cerrado de un espacio de Banach X, entonces T tiene un punto fijo.

Teorema. (Krasnoselskii) Supongamos que Γ es un conjunto convexo, acotado y cerrado de un espacio de Banach X. Si $T: \Gamma \to X$ es una contraccion, $S: \Gamma \to X$ es completamente continua y $T(\Gamma) + S(\Gamma) = \{Tx+Sy,\ x,y \in \Gamma\} \subset \Gamma$, entonces T+S tiene un punto fijo en Γ.

El próximo teorema nos dice que si S y T dependen continuamente de ciertos parámetros, entonces todo punto fijo, que sea único, de T+S tambien depende continuamente de esos parámetros.

Teorema. Sean T_k, S_k dos sucesiones de funciones que satisfacen las hipotesis del teorema anterior, asi como T y S. Supongamos que la constante de contracción de T_k no depende de k, que $\bigcup_{k \geq 1} S_k(\Gamma)$ es precompacto y que $S_k \to S$, $T_k \to T$ siendo la convergencia uniforme en conjuntos compactos. Tambien, supongamos que T+S tiene un unico punto fijo x_o. Entonces, si x_k es una sucesión de puntos fijos de T_k+S_k, tenemos que $x_k \to x_o$.

Teorema. (Existencia) Supongamos el problema de valores iniciales (1.1.4) con las hipotesis A),B) y C). Sea U un conjunto abierto de $R \times C$, entonces para todo $(s,\phi) \in U$ existe un entorno V de (s,ϕ) y $\alpha > 0$ tales que para todo $(\tau,\psi) \in V$ existe una solución de (1.1.4) que pasa por (τ,ψ) y esta definida en $[\tau,\tau+\alpha]$.

Demostracion: Para toda $\psi \in C$, definamos $\tilde{\psi} \in C([-r,\infty), E^n)$ por $\tilde{\psi}(\theta) = \psi(\theta), \theta \leq 0$ y $\tilde{\psi}(\theta) = \psi(0), \theta \geq 0$. Observemos que $x \in C([\tau-r, \tau+\alpha), E^n)$ es una solución de la ecuación que pasa por (τ,ψ) si y solamente si la función z definida por $z(t) = x(\tau+t)-\tilde{\psi}(t)$, $-r \leq t \leq \alpha$ satisface:

$$D(\tau+t,z_t) = -D(\tau+t,\tilde{\psi}_t) + D(\tau,\psi) + \int_0^t L(\tau+\sigma,\tilde{\psi}_\sigma+z_\sigma)d\sigma, \quad t\in[0,\alpha]$$

$z_0 = 0.$

Puesto que $D(t,\psi) = \psi(0) - g(t,\psi)$, la igualdad anterior se puede escribir de la forma:

$$z(t) = g(\tau+t,z_t) + D(\tau,\psi) - D(\tau+t,\tilde{\psi}_t) + \int_0^t L(\tau+\sigma,\tilde{\psi}_\sigma+z_\sigma)d\sigma$$

Consideremos el conjunto $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ definido por

$$\mathscr{A}(\alpha,\beta) = \{\xi\in C([-r,\alpha],E^n)/\xi_0 = 0, \ |\xi_t| \leq \beta, \ t\in[0,\alpha]\}.$$

Este conjunto es cerrado,acotado y convexo (Hale [12]). Definamos ahora las transformaciones T, S, que aplican $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ en $C([-r,\alpha],E^n)$, de la siguiente forma:

$$(Tz)(t) = 0, \quad t\in[-r,0]$$

$$(Tz)(t) = g(\tau+t,z_t) + D(\tau,\psi) - D(\tau+t,\tilde{\psi}_t), \quad t\in[0,\alpha]$$

$$(Sz)(t) = 0, \quad t\in[-r,0]$$

$$(Sz)(t) = \int_0^t L(\tau+\sigma,\tilde{\psi}_\sigma+z_\sigma)d\sigma, \quad t\in[0,\alpha]$$

Dividamos el resto de la demostración en tres partes:

1) Vamos a demostrar que V, α y β pueden ser escogidas de forma que T y S esten bien definidas. Como g y D son lineales en ψ para que T este bien definida es suficiente tomar V y α pequeños. Como U es abierto y $(s,\phi)\in U$, existe un $\varepsilon>0$ tal que todas las desigualdades $|\tau-s|<\varepsilon$, $|\xi-\phi|<\varepsilon$ implican $(\tau,\xi)\in U$. Sea $\int_0^t m(\sigma)\,d\sigma = M(t)$ $t\in[0,\alpha]$ y elijamos M tal que $|M(t)|\leqq M$. Por la condición de Caratheodory, elegimos ε de tal forma que $\left|\int_0^t L(\tau,\psi)d\tau\right|\leqq M$ y $(\tau,\psi)\in V(s,\phi)$ Como ϕ es uniformemente continua, existe $\alpha>0, \alpha\leqq\varepsilon/2$ tal que $|\phi(\sigma+h)-\phi(\sigma)|\leqq\varepsilon/3$, $\forall h$ con $|h|\leqq\alpha$. Vamos ahora a comprobar que si $|\phi-\psi|\leqq\varepsilon/3$ entonces $|\tilde{\psi}_\sigma-\phi|\leqq 2/3\varepsilon$, $\sigma\in[0,\alpha]$

En efecto, como

$$(\tilde{\psi}_\sigma-\phi)(\theta) = \begin{cases} \psi(\sigma+\theta)-\phi(\theta), & \text{si } \sigma+\theta\leqq 0 \\ \psi(0)-\phi(\theta), & \text{si } -\sigma\leqq\theta\leqq\sigma \quad (|\theta|\leqq\sigma) \end{cases}$$

Ahora,

$$|\psi(\sigma+\theta)-\phi(\theta)|\leqq|\psi(\sigma+\theta)-\phi(\sigma+\theta)| + |\phi(\sigma+\theta)-\phi(\theta)|\leqq\frac{2\varepsilon}{3}, \text{ si } \sigma+\theta\leqq 0, \sigma\in[0,\alpha]$$

$$|\psi(0)-\phi(\theta)|\leqq|\psi(0)-\phi(0)| + |\phi(0)-\phi(\theta)|\leqq\frac{2\varepsilon}{3}, \text{ si } 0\leqq\sigma+\theta, |\theta|\leqq\sigma\leqq\alpha$$

lo que prueba nuestra afirmación.

Finalmente, tomemos $\beta\leqq\varepsilon/3$, entonces si $|\phi-\psi|\leqq\varepsilon/3$, $|s-\tau|\leqq\varepsilon/2$ y $z\in\mathcal{A}(\alpha,\beta)$ obtenemos que

$$|\tau+\sigma-s|\leqq|\tau-s| + \sigma\leqq\varepsilon/2 + \alpha\leqq\varepsilon$$

$$|\tilde{\psi}_\sigma+z_\sigma-\phi|\leqq|\tilde{\psi}_\sigma-\phi| + |z_\sigma|\leqq\frac{2\varepsilon}{3} + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

de lo cual concluimos que T y S estan bien definidas.

2) α y β se pueden elegir de forma que $Tx+Sy \in \mathcal{A}(\alpha,\beta)$, $\forall (x,y) \in \mathcal{A}(\alpha,\beta) \times \mathcal{A}(\alpha,\beta)$.

En efecto, como la función $(\sigma,\psi) \to \tilde{\psi}_\sigma$ es continua, la función $(\tau,t,\psi) \to D(\tau,\psi) - D(\tau+t,\tilde{\psi}_t)$ tambien es continua y se anula en $(\sigma,0,\phi)$. Por tanto, existen $\alpha,\delta \leqq \varepsilon/2$ tales que:

$$|D(\tau,\psi)-D(\tau+t,\tilde{\psi}_t)| \leqq \varepsilon/12, \quad t\in [0,\alpha] \text{ cuando } |\psi-\phi| \leqq \delta, \ |\tau-s| \leqq \delta$$

Tambien

$$|g(\tau+t,x_t)| = \left| \int_{-t}^{0} [d_\theta \mu(\tau+t,\theta)]\, x(t+\theta) \right| \leqq \gamma(\tau+t)\|x_t\| \leqq \varepsilon/12, \quad t \in [0,\alpha]$$

para α pequeño, puesto que γ es continua en cero.

Por tanto, $|Tx| \leqq \varepsilon/6$. Igualmente $|Sy| \leqq M\alpha \leqq \varepsilon/6$ si $\alpha \leqq \varepsilon/6M$. Luego $|Tx+Sy| \leqq \varepsilon/3$ y por tanto $Tx+Sy \in \mathcal{A}(\alpha,\beta)$ con lo cual queda verificada una de las hipótesis del teorema de Krasnoselskii.

3) α y V se pueden elegir de forma que T sea una contracción $\forall (\tau,\psi) \in V$.

En efecto, para $x,y \in \mathcal{A}(\alpha,\beta)$, $(Tx-Ty)(t) = \begin{cases} 0, & t \leqq 0 \\ g(\tau+t,\ x_t-y_t), & t \geqq 0 \end{cases}$

Asi, $|(Tx)(t)-(Ty)(t)| \leqq \gamma(t,\tau+t)\|x-y\|$ y como γ es continua podemos elegir $\gamma(t,\tau+t) < 1$ para un α suficientemente pequeño.

Finalmente, S es completamente continuo pues

$$|(Sy)(t)-(Sy)(t')| = \left|\int_{t'}^{t} L(\tau+\sigma, \psi_\sigma + y_\sigma)d\sigma\right| \leq M(t)-M(t'), \ \forall t,t' \in [0,\alpha]$$

Puesto que M es continua en $[0,\alpha]$, es uniformemente continua y por tanto, el conjunto $S(\mathscr{A}(\alpha,\beta))$ es equicontinuo en $C([-r,\alpha],E^n)$. Tambien está uniformemente acotado. Por tanto $S(\mathscr{A}(\alpha,\beta))$ es precompacto.

Vemos pues, que los operadores T y S satisfacen todas las hipótesis de Krasnoselskii y concluimos afirmando que T+S tiene un punto fijo en $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ que coincide con las soluciones de (1.1.4) que pasan por (τ,ψ).

<u>Teorema</u>.(Unicidad) Supongamos el problema de valores iniciales (1.1.4) con las hipótesis A), B) y C). Sea U un conjunto abierto de R×C y supongamos que para cada conjunto compacto W en U existe una función integrable $k_W(t)$ tal que

$$|L(\sigma,x_\sigma)-L(\sigma,y_\sigma)| \leq k_W(t)\cdot\|x_\sigma - y_\sigma\|, \quad (\sigma,x_\sigma),(\sigma,y_\sigma)\in W.$$

Entonces, $\forall(s,\phi)\in W$ existe una única solución de (1.1.4) que pasa por (s,ϕ).

<u>Demostración</u>: Sean x,y dos soluciones definidas en $[s,s+\alpha]$ con $x_s = \phi = y_s$. Entonces, procediendo como en el teorema anterior, podemos escribir

$$x(t)-y(t) = g(t,x_t-y_t) + \int_s^t [L(\sigma,x_\sigma)- L(\sigma,y_\sigma)]d\sigma, \ t\in [s,s+\alpha].$$

Sea $K(t) = \int_s^t k_{\mathscr{A}(\alpha,\beta)}(\sigma)\cdot d\sigma$, donde $k_{\mathscr{A}(\alpha,\beta)}(t)$ representa la constante de

Lipschitz en el conjunto compacto $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$. Entonces

$$|x(t)-y(t)| \leq \gamma(t-s,t)\cdot\|x_t - y_t\| + K(t)\alpha\,\|x_t - y_t\|.$$

Elijamos α tal que $\gamma(t-s,s)+K(t)\alpha<1$, $\forall t\in[s,s+\alpha]$. Esto implica que $x(t) = y(t)$ y asi tenemos la unicidad local. La unicidad global se prueba como en ecuaciones diferenciales ordinarias.

<u>Teorema</u>. (Dependencia continua de las soluciones) Consideremos una sucesión de ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro $(E_k)\frac{d}{dt} D_k(t,x_t) = L_k(t,x_t)$, $k = 1,2,\ldots$ y la ecuación del mismo tipo $(E)\frac{d}{dt}D(t,x) = L(t,x)$. Sea U un conjunto abierto de $R\times C$ y D,D_k, L,L_k: $U\to E^n$. Sea (s_k,ϕ_k) una sucesión de elementos de U y $(s,\phi)\in U$.

Hagamos las siguientes hipótesis:

1) Todos los L_k y L deben satisfacer la condicion de Caratheodory, $L_k(s,\psi)\to L(s,\phi)$ cuando, $k\to\infty$ y $(s,\psi)\to(s,\phi)$, $D_k(s,\phi)\to D(s,\phi)$ cuando $k\to\infty$, $\forall(s,\phi)\in U$ uniformemente en conjuntos compactos de U.

2) $\operatorname{Var}_{[-\sigma,0]}\mu_k(t,\cdot)\to 0$ cuando $\sigma\to 0$ uniformemente en conjuntos compactos, esto es, μ_k es uniformemente no atómica en cero.

3) $(s_k,\phi_k)\to(s,\phi)$ cuando $k\to\infty$.

4) Para todo conjunto compacto W en U, existe un entorno abierto V(W) de W y una función integrable Lebesgue M tal que las funciones L_k y L satisfacen

$$|L_k(\sigma,\psi)| \leq M(\sigma),\quad |L(\sigma,\psi)| \leq M(\sigma),\quad (\sigma,\psi)\in V(W),\quad k = 1,2,\ldots.$$

5) La solución x de (E) que pasa por (s,ϕ) es única y está definida en $[s-r,b]$.

Entonces, existe un entero k_0 tal que x_k, para $k \geq k_0$, puede ser definida en $[s_k-r,b]$ y $x_k(t) \to x(t)$ uniformemente en $[s-r,b]$. Puesto que x_k puede no estar definida en $[s-r,b]$, por $x_k \to x$ uniformemente, entendemos que $\forall\varepsilon > 0$, existe un $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 0$ tal que $x_k(t)$, $k \geq k_0$, está definida en $[s-r-\varepsilon,b]$ y $x_k(t) \to x_0(t)$ uniformemente para $t \in [s-r-\varepsilon,b]$.

<u>Demostración</u> : Vamos a efectuar la demostración de forma que se verifiquen las hipótesis del teorema siguiente al de Krasnoselskii. Para ello vamos a reconstruir las tres partes del teorema de existencia y verificar que existe k_0 tal que α y β pueden ser elegidos los mismos para todo $k \geq k_0$.

Respecto a la parte 1) no hay nada que verificar puesto que los argumentos utilizados solo dependen de las condiciones iniciales y no de la ecuación.

Para verificar la parte 2) observemos que la existencia de α y k_0 tales que

$$|D_k(s_k,\phi_k)-D_k(s_k+t,\tilde{\phi}_{kt})| \leq \varepsilon/12, \quad t \in [0,\alpha], \quad k \geq k_0$$

se deduce del hecho: si una sucesión de funciones $h_k(t)$ converge a una función continua $h(t)$, uniformemente en conjuntos compactos y $h(0) = 0$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\alpha, k_0$ tales que $|h_k(t)| \leq \varepsilon/12$, $\forall t \in [0,\alpha]$

Tambien

$$|g_k(s_k+t,\ x_t)| \leq \left|\int_{-t}^{0}[d_\theta \mu_k(s_k+t,\theta)]x(t+\theta)\right| \leq \gamma_k(t,s_k+t)\cdot\|x_t\| \leq \varepsilon/12$$

para $k \geq k_0$, $t \in [0,\alpha]$, para ciertos k_0 y α debido a que la convergencia de γ_k es uniforme en conjuntos compactos.

Igualmente $|S_k y| \leqq M\alpha \leqq \varepsilon/6$ si $\alpha \leqq \varepsilon/6M$. Asi $|T_k x+S_k y| \leqq \varepsilon/3$ y por tanto $T_k x+S_k y \in \mathcal{A}(\alpha,\beta)$.

Finalmente, la parte 3) se deduce de

$$|T_k x(t)-T_k y(t)| \leq \gamma(t,s_k+t)\|x-y\| \text{ si } k \text{ es grande y } \alpha \text{ es pequeño.}$$

Para aplicar el teorema siguiente al de Krasnoselskii, sólo queda por verificar que $\bigcup S_k(\mathcal{A}(\alpha,\beta))$ es precompacto, pero esto se deduce del hecho

$$\left|\int_{t'}^{t} L_k(s+\sigma,\tilde{\psi}_\sigma+y_\sigma)d\sigma\right| \leq M(t)-M(t') \text{ que nos dice } S_k(\mathcal{A}(\alpha,\beta))$$

es precompacto y la unión de precompactos es otro precompacto.

Aplicando el mencionado teorema, la demostración queda terminada, para pequeños intervalos de tiempo. La globalización de este resultado se hace a traves de un argumento de compacidad que es el mismo que se utiliza en ecuaciones diferenciales ordinarias. Este teorema sobre la dependencia continua de las soluciones respecto a los parámetros y condiciones sólo se cumple cuando el retraso es constante. El caso cuando el retraso es variable ha sido estudiado por Melvin [28], [29]. Una demostración mucho mas general y que incluye los casos anteriores, se puede encontrar en Hale [16].

Definición. Sean x y $\hat{x}$ dos soluciones del problema de valores iniciales (1.1.4) con las hipótesis A), B) y C), definidas en $[s-r,a)$ y $[s-r,b)$. Decimos que $\hat{x}$ es una prolongación de x si $b>a$ y $x(t) = \hat{x}(t)$ para $t<a$. La solución x es no prolongable si no admite una prolongación, esto es, si $[-r,a)$ es el intervalo maximal de existencia de la solución x. La existencia de soluciones no prolongables se deduce del lema de Zorn.

Teorema.(Prolongación de las soluciones) Sea $x(t)$ una solucion no prolongable del problema de valores iniciales(1.1.4), definida para $t\in[s-r,b)$. Sea U un conjunto abierto de $R\times C$ y $W\subset U$ cerrado y acotado. Supongamos que $D(t,\cdot)$ está definido en $[s,b)$. Entonces, existe un $\bar{t}\in[s,b)$ tal que $(\bar{t},x_{\bar{t}})\notin W$.

Demostración: Puesto que W esta acotado, podemos suponer $b<\infty$. Para demostrar el teorema es suficiente probar que si $(t,x_t)\in W$ $t\in[\sigma,b)$ entonces $\lim_{t\to b^-} x(t)$ existe, pues entonces x puede ser prolongada a $[\sigma,b]$ definiendo $x(b) = \phi(0)$. Puesto que entonces $(b,x_b)\in U$ se puede definir una solución de (1.1.4) que pasa por este punto y a la derecha de b. Esto contradecirá la hipótesis de no prolongabilidad de x.

Puesto que $D(t,x_t) = x(t)-g(t,x_t)$. Llamemos $D(t,x_t) = h(t)$ y vemos que h es uniformemente continua en $[s,b)$, pues su derivada está acotada. (Hipótesis A).

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} x(t)-x(\tau) &= g(t,x_t)-g(\tau,x_\tau) + h(t)-h(\tau) \\ &= g(t,x_t)-g(b,x_t) + g(b,x_t-x_\tau) + g(b,x_\tau)-g(\tau,x_\tau) + h(t)-h(\tau) \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\sigma_0 > 0$ tal que $\left|\int_{-\sigma_0}^{0^-} d_\theta\mu(t,\theta)\phi(\theta)\right| \leqq \gamma(\sigma_0,t)\|\phi\| \leqq \varepsilon\|\phi\|$

para $t\in[s,b]$. Llamando $\pi_{\sigma_0}(t,\phi) = \int_{-\sigma_0}^{0^-} d_\theta\mu(t,\theta)\phi(\theta)$, como $\|x_t\| \leqq M$ vemos que los términos

$\pi_{\sigma_0}(t,x_t)$, $\pi_{\sigma_0}(b,x_t)$, $\pi_{\sigma_0}(b,x_\tau)$, $\pi_{\sigma_0}(\tau,x_\tau)$ estan dominados por $\varepsilon\cdot M$,

igualmente $|\pi_{\sigma_0}(b,x_t-x_\tau)| \leqq 2\varepsilon M$. Para ese σ_0, consideremos

g: $[s,b]\times C([-r,-\sigma_0],E^n)\to E^n$ definida por

$g(t,\bar{\phi}) = \int_{-r}^{-\sigma_0} [d_\theta\mu(t,\theta)]\bar{\phi}(\theta)$. Es claro que el conjunto $\{\bar{x}_\sigma, \sigma\in[s,b]\}$

donde $\bar{x}_\sigma$ es la restricción de x_σ al intervalo $[-r,-\sigma_0]$, es compacto porque la función $x(\sigma)$ es uniformemente continua en $[s,b-\sigma_0]$. Por tanto existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$|g(t,\bar{x}_t)-g(b,\bar{x}_t)| \leqq \varepsilon |g(b,\bar{x}_t-\bar{x}_\tau)| \leqq \varepsilon$ y

$|g(\tau,\bar{x}_\tau)-g(b,\bar{x}_\tau)| \leqq \varepsilon$ cuando $b-\delta \leqq t$, $\tau \leqq b$, pues $g(t,\bar{\phi})$ es uniformemente continua en el compacto $[s,b]\times\{\bar{x}_\sigma, \sigma\in[s,b]\}$.

Finalmente, elijamos δ de forma que $|h(t)-h(\tau)| \leqq \varepsilon$, para $b-\delta \leqq t$, $\tau \leqq b$.

Entonces tenemos que

$|x(t)-x(\tau)| \leqq 6\varepsilon M+4\varepsilon$ lo cual implica que $\lim_{t\to b^-} x(t)$ existe.

I.2.- Representación de las soluciones y teoria adjunta: Caso no autónomo. Solución semigrupo, teoria adjunta y propiedades: Caso autónomo

Consideremos el problema de los valores iniciales

$$
(1.2.1) \qquad \begin{aligned} & x_s = \phi \\ & \frac{d}{dt} D(t,x_t) = L(t,x_t) + h(t) \end{aligned}
$$

bajo todas las hipótesis hechas en la sección anterior.

Si $x(s,\phi,h)$ es la solución de (1.2.1) con valor inicial ϕ en s, entonces la linealidad de L y unicidad de las soluciones de (1.2.1) implica

$$x(s,\phi,h) = x(s,\phi,0) + x(s,0,h)$$

donde $x(s,\phi,0)$ representa la solución de la ecuación homogenea y $x(s,\cdot,0)(t), t \geq s$ es un operador lineal y continuo C en E^n. $x(s,0,h)$ representa la solución de la ecuación no homogenea y $x(s,0,\cdot)(t)$ es un operador lineal continuo que aplica $L_1^{loc}([s,t],E^n) \to E^n$. El hecho de que $x(s,\phi,0)(t)$ y $x(s,0,h)(t)$ son continuos para cada fijo t y continuos en t,s para $s \leq t < \infty$ significa que nosotros podemos escribir

$$x_t(s,\phi,0) = T(t,s)\phi, \qquad x_t(s,0,h) = K(t,s)h$$

definiendo de esta forma dos familias de operadores lineales que son continuas en la topologia fuerte de operadores

$$T(t,s): C \to C, \qquad K(t,s): \ L_1^{loc}([s,t],E^n) \to C, \qquad t \geqq s.$$

Observemos que $K(t,s)h$ depende de la restricción $h|[s,t]$. (Continuidad en la topologia fuerte de operadores significa $\|T(t+\Delta t,s+\Delta s)\phi - T(t,s)\phi\| \to 0$ cuando $\Delta t, \Delta s \to 0$, $t \geqq s$)

Por unicidad tenemos

$$T(t,t) = I, \quad T(t,s)T(s,\sigma) = T(t,\sigma), \ \sigma \leqq s \leqq t$$

(1.2.2)

$$K(s,s) = 0, \quad T(t,s)K(s,\sigma)h = K(t,\sigma)h - K(t,s)h, \quad \sigma \leqq s \leqq t$$

El siguiente teorema de representación de las soluciones de (1.2.1) se puede encontrar en Henry [22].

Teorema. Sea $x = x(s,\phi,h)$ la solución de (1.2.1) en $[s,\infty)$ tal que $x_s = \phi \in C$, bajo las hipótesis A), B) y C). Entonces para $t \geqq s$

$$(1.2.3) \quad x(t) = Y(s,t)D(s,\phi) - \int_{-r}^{0^-} [d_\beta Y(s+\beta,t)]\phi(\beta) + \int_s^t Y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha$$

donde $Y(s,t)$ es la $n \times n$ matriz de funciones valoradas definida por

$$Y(s,t) = 0 \text{ si } s > t, \quad Y(t,t) = I$$

(1.2.4)

$$Y(s,t) = I + \int_s^{t^+} [d\alpha Y(\alpha,t)]\mu(\alpha,s-\alpha) - \int_s^t Y(\alpha,t)\eta(\alpha,s-\alpha)d\alpha, \quad s < t$$

Ademas, Y(s,t) es continua a la izquierda en s y

$$\operatorname*{Var}_{[s,t]} Y(\cdot,t) < \infty, \qquad \forall s \leqq t$$

Todas las integrales se entienden en el sentido de Lebesgue-Stieltjes. Observemos que x(t) puede ser escrita

$$(1.2.5) \qquad x(t) = Y(s,t)D(s,\phi) + \int_{-r}^{0-} d_\beta\Big\{-\int_s^{t^+} [d_\alpha Y(\alpha,t)]\mu(\alpha,s+\beta-\alpha) + \int_s^t Y(\alpha,t)\eta(\alpha,s+\beta-\alpha)d\alpha\Big\}\phi(\beta) + \int_s^t Y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha, \quad t \geqq s.$$

La matriz Y(s,t) se puede considerar como matriz fundamental de (1.2.1). En efecto, para las condiciones iniciales (s,0) se deduce de (1.2.5) que

$$x(t) = \int_s^t Y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha$$

Por el teorema 2 en Hale-Meyer [19], tenemos que

$$x(t) = \int_s^t X(t,\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

esto implica que X(t,s) = Y(s,t) a.e. en s.
Aqui X(t,s) es tal que $X(t,\cdot) \in L_\infty([s,t],E^{n^2})$ y para cada t

$X(t,s) = \dfrac{\partial W(t,s)}{\partial s}$ a.e., donde W(t,s) es la unica solución de $W_s(\cdot,s) = 0$

$$W(t,s) = \int_{-r}^{0} [d_\theta\mu(t,\theta)]W(t+\theta,s) + \int_s^t \int_{-r}^{0} [d_\theta\eta(\xi,\theta)]W(\theta+\xi,s)d\xi - (t-s)I, \quad s \leq t$$

Si derivamos con respecto a s bajo el signo integral y teniendo en cuenta que para $s > t$ $W(t,s) = 0$, obtenemos

$$X(t,s) = I + \int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)]X(t+\theta,s) + \int_{s}^{t} \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(\xi,\theta)]X(\theta+\xi,s)d\xi$$

y por tanto

$$Y(s,t) = I + \int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)]Y(s,t+\theta) + \int_{s}^{t} \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(\xi,\theta)]Y(s,\theta+\xi)d\xi$$

Comparando esta última ecuación con la forma integrada de la ecuación (1.2.1) con $h \equiv 0$

$$x(t) = D(s,x_s) + g(t,x_t) + \int_{s}^{t} L(\xi,x_\xi)d\xi$$

$$= D(s,x_s) + \int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)]x(t+\theta) + \int_{s}^{t} \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(\xi,\theta)]x(\xi+\theta)d\xi$$

podemos ver que es correcto considerar $Y(s,t)$ como matriz fundamental de (1.2.1)

A la misma conclusión podemos llegar de la siguiente forma: Sea $X(t,s)$ la matriz fundamental de (1.2.1) como una función de t para $t > s$ y $X(t,s) = 0$, $t < s$, $X(s,s) = I$.

Por la fórmula de representación (1.2.5) tenemos que las filas $x_i(t)$ de $X(t,s)$ son de la forma

$$x_i(t) = x_i(s)Y(s,t), \qquad t > s$$

Por tanto, tenemos que $X(t,s) = X(s,s)Y(s,t)$ ó $X(t,s) = Y(s,t)$, $t > s$. De las definiciones de Y y X para $s \geq t$ vemos que $X(t,s) = Y(s,t)$, $\forall s$. Asi la representación de las soluciones tiene la forma

$$(1.2.6)\quad x(t) = X(t,s)D(s,\phi) + \int_{-r}^{0-} d_\beta\Big\{-\int_s^{t^+} [d_\alpha X(t,\alpha)]\mu(\alpha,s+\beta-\alpha)$$
$$+ \int_s^t X(t,\alpha)\eta(\alpha,s+\beta-\alpha)d\alpha\Big\}\phi(\beta) + \int_s^t X(t,\alpha)h(\alpha)d\alpha,\ t \geq s.$$

Para poder discutir los operadores adjuntos de $T(t,s)$ y $K(t,s)$ es esencial que la aplicación $(s,t) \to Y(s,t)$ sea medible Borel. Esto se necesita para usar Y como una medida en un teorema del tipo de Fubini para poder intercambiar el orden de integración. Henry [22] demuestra que si la función μ no tiene parte singular entonces la función Y definida por (1.2.4) es medible Borel. Recordemos (ver Riesz-Nagy [34]) que toda función de variación acotada se puede descomponer en tres sumandos:
a) una función escalonada con un conjunto de discontinuidades numerables, b) una función absolutamente continua, y c) una función singular, esto es, una función continua de variación acotada cuya derivada es cero a.e. Por tanto, si μ puede ser escrita

$$\int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)]\phi(\theta) = \int_{-r}^{0} A(t,\xi)\phi(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\phi(-w_k)$$

donde $0 \leq w_k \leq r$ y $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(t)| + \int_{-r}^{0} |A(t,\xi)|d\varepsilon < \infty$

entonces Y es medible Borel. En lo sucesivo supondremos que μ no tiene parte singular.

Sea B_0 el espacio de Banach de las funciones de variación acotada $\psi: [-r,0] \to E^n$ (n-vectores fila) que son continuas a la izquierda en $(-r,0)$ y se anulan en 0, con norma $\|\psi\| = \operatorname{Var}_{[-r,0]} \psi$.

Como es bien conocido (Teorema de representación de Riesz), B_0 puede ser identificado con el espacio conjugado de C, por medio del apareamiento

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{-r}^{0} [d\psi(\theta)]\phi(\theta), \qquad \psi \in B_0, \qquad \phi \in C.$$

Recordemos que la solución de (1.2.1), $x(s,\phi,h)$ puede ser escrita de la forma

$$x_t(s,\phi,h) = T(t,s)\phi + K(t,s)h$$

donde $T(t,s): C \to C$, $K(t,s): L_1^{loc}([s,t],E^n) \to C$ son operadores lineales y continuos con $T(s,s) = I$ y $K(s,s) = 0$.

Por tanto, podemos considerar los adjuntos de $T(t,s)$ y $K(t,s)$ como operadores sobre B_0. Asi, por definición,

$$T^*(s,t): B_0 \to B_0, \qquad K^*(s,t): B_0 \to L_\infty([s,t],E^{n^*})$$

donde

$$\langle T^*(s,t)\psi, \phi \rangle = \langle \psi, T(t,s)\phi \rangle$$

$$\int_s^t (K^*(s,t)\psi)(\sigma)h(\sigma)d\sigma = \langle \psi, K(t,s)\phi \rangle \quad .$$

cuando $\phi \in C$, $\psi \in B_o$, $h \in L_1^{loc}([s,t],E^n)$, $t \geq s$.

Consideremos ahora la ecuación adjunta de (1.2.1) con $h \equiv 0$,

$$(1.2.7) \qquad \frac{d}{ds}[z(s) - \int_s^\infty [dz(\alpha)]\mu(\alpha,s-\alpha) + \int_s^\infty z(\alpha)\eta(\alpha,s-\alpha)] = 0,$$

ó bien

$$z(s) - \int_s^\infty [dz(\alpha)]\mu(\alpha,s-\alpha) + \int_s^\infty z(\alpha)\eta(\alpha,s-\alpha) = \text{constante}$$

donde μ y η estan normalizadas como en las hipótesis A) y B).

<u>Teorema</u>. Para todo $t \in R$, $\psi \in B_o$, existe una única $z\colon R \to E^{n*}$ de variación acotada en intervalos finitos, que se anula en $[t,\infty)$, satisface (1.2.7) en $(-\infty,t-r]$ y tal que $z_t = \psi$.

Si esta solución es $z = z(t,\psi)$, definiendo

$$z_s(\theta) = z(s+\theta), \qquad \theta \in [-r,0)$$
$$z_s(\theta) = 0, \qquad \theta = 0$$

se deduce que $z_s(t,\psi) \in B_o$, $z_s(t,\psi) = \tilde{T}(s,t)z_t = \tilde{T}(s,t)\psi$, $s \leq t$, donde $\tilde{T}(s,t)\colon B_o \to B_o$ es un operador lineal acotado en B_o.

La demostración de este teorema puede ser encontrada en Henry [22].

Si observamos las ecuaciones (1.2.7) y (1.2.4), vemos que son de la misma forma, teniendo en cuenta la normalizacion de μ y η.

El principal resultado, por el que se relaciona el operador adjunto $T^*(s,t)$ de $T(t,s)$ con la solución operador $\tilde{T}(s,t)$ de la ecuación adjunta (1.2.7) es debido a Henry [21]. En efecto, Henry prueba lo siguiente:

$$\text{Para } s \leqq t$$

$$T^*(s,t) = (I+\Omega(s))\tilde{T}(s,t)(I+\Omega(t))^{-1} \tag{1.2.8}$$

donde $\Omega(\sigma)$: $B_0 \to B_0$ es un operador cuasi-nilpotente definido por

$$(\Omega(\sigma)\psi)(\theta) = -\int_\theta^0 [d\psi(\beta)]\mu(\sigma+\beta,\theta-\beta) + \int_\theta^0 \psi(\beta)\eta(\sigma+\beta,\theta-\beta)d\beta \tag{1.2.9}$$

$$\theta \in [-r,0)$$

$$(\Omega(\sigma)\psi)(0) = 0$$

para $\sigma \in R$, $\psi \in B_0$.

El hecho de que $\Omega(\sigma)$ es cuasi-nilpotente es debido a que es un operador de Volterra y entonces todo numero complejo $z \neq 0$ pertenece al conjunto resolvente (Riesz-Nagy, p. 419). Puesto que un operador T es cuasi-nilpotente si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = 0$ entonces T es cuasi-nilpotente si y solo si $\sigma(T) = \{0\}$.

Como un corolario, Henry, tambien, demuestra que el adjunto $K^*(s,t)$ de $K(t,s)$ satisface

$$(K^*(s,t)\psi)(\xi) = -(T^*(\xi,t)\psi)(0^-), \qquad \psi \in B_0, \quad \xi \in [s,t]$$

Finalmente definamos la forma bilineal

$$(1.2.10) \qquad [\psi|\phi]_t = \langle (I+\Omega(t))\psi,\phi\rangle, \quad \psi \in B_0, \qquad \phi \in C.$$

Usando (1.2.8), tenemos

$$\begin{aligned}[\psi|T(t,s)\phi]_t &= \langle (I+\Omega(t))\psi, T(t,s)\phi\rangle \\ &= \langle T^*(s,t)(I+\Omega(t))\psi,\phi\rangle \\ &= \langle (I+\Omega(t))\tilde{T}(s,t)\psi,\phi\rangle \\ &= [\tilde{T}(s,t)\psi|\phi]_s, \qquad t \geq s\end{aligned}$$

Otros autores utilizan otra forma bilineal. Esto lo veremos en el caso autónomo.

Para ecuaciones autónomas, el estudio de la anterior teoria adjunta se puede tratar con mas detalle. Aqui damos una exposición condensada de la teoria de ecuaciones diferenciales funcionales lineales,autonomas de tipo neutro. Seguimos a Hale-Meyer [19] y Henry [21] e intentamos aclarar algunos resultados.

Consideremos la ecuación (1.1.1) con L y g ó equivalentemente, con las medidas μ y η independientes de t. Puesto que se trata del caso autónomo, no es restricción tomar el tiempo inicial s = 0. Entonces el problema de los valores iniciales es

$$(1.2.11) \qquad \begin{aligned} &x_0 = \phi \\ &\frac{d}{dt} D(x_t) = L(x_t), \quad t \geq 0\end{aligned}$$

donde

$$D(\phi) = \phi(0) - \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\phi(\theta), \qquad L(\phi) = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\phi(\theta), \qquad \phi \in C$$

μ y η son matrices de funciones valoradas de variación acotada que se anulan en $\theta = 0$ y son continuas a al izquierda en $(-r,0)$. Ademas μ es continua en 0. Anteriormente, hemos visto que si $\phi \in C$ y $x(s,\phi)$ es la única solución de (1.1.1), entonces tenemos

$$x_t(s,\phi) = T(t,s)\phi$$

donde $T(t,s)\colon C \to C$ es una familia de operadores continuos en la topologia fuerte de operadores.

Puesto que, ahora estamos considerando el caso autónomo podemos escribir $T(t,s) = T(t-s,0)$, $t \geqq s$ (por unicidad).

Sea $T(t) = T(t,0)$, $t \geqq 0$. Asi $T(t)\colon C \to C$ está definido por $T(t)\phi = x_t(\phi)$. Tambien por (1.2.2), tenemos

$$T(o) = I, \qquad T(t)T(s) = T(t+s), \qquad t,s \geqq 0$$

y por tanto, $\{T(t),\ t \geqq 0\}$ es un semigrupo de operadores continuos en la topologia fuerte de operadores que aplican $C \to C$. De esta forma, podemos definir el generador infinitesimal A del semigrupo $\{T(t), t \geqq 0\}$ como

$$A\phi = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} [T(t)\phi - \phi]$$

cuando este límite existe en la topología normada de C. Entonces, puede ser demostrado que el generador infinitesimal y su dominio $\mathcal{D}(A)$ son dados por

$$
\begin{aligned}
&A\phi(\theta) = \frac{d}{d\theta}\phi(\theta) = \dot{\phi}(\theta), \qquad -r \leqq \theta \leqq 0 \\
(1.2.12) \qquad &\mathcal{D}(A) = \{\phi \in C/\ \dot{\phi} \in C, \quad \dot{\phi}(o) = g(\dot{\phi}) + L(\phi)\} \\
&\qquad\quad = \{\phi \in C/\ \phi \in C^1, \quad D(\dot{\phi}) = L(\phi)\}
\end{aligned}
$$

Ademas, A es un operador cerrado, $\mathcal{D}(A)$ es denso en C y para $\phi \in \mathcal{D}(A)$ se verifica

$$\frac{d}{dt} T(t)\phi = T(t)A\phi = AT(t)\phi$$

Ahora, procederemos a analizar el espectro de A. Para ello recordemos las siguientes definiciones: Sea A un operador lineal que aplica un espacio de Banach X en sí mismo.

El conjunto resolvente $\rho(A)$ es definido como el conjunto de numeros complejos λ para los cuales el operador resolvente $R(\lambda,A) = (\lambda I-A)^{-1}$ existe como un operador acotado denso en X. El complemento de $\rho(A)$ en el plano complejo es llamado el espectro de A, $\sigma(A)$. El espectro puntual, $\sigma_p(A)$, consiste de aquellos λ en $\sigma(A)$ para los cuales $R(\lambda,A)$ no existe. Los elementos de $\sigma_p(A)$ son llamados valores propios de A. A cada valor propio corresponde un vector propio de A, dado por aquellos $\phi \in X$, $\phi \neq 0$ tales que $(\lambda I-A)\phi = 0$.

El espectro continuo, $\sigma_C(A)$, está formado por aquellos λ para los cuales $R(\lambda,A)$ existe pero no está acotado y con dominio denso en X. Finalmente el espectro residual $\sigma_R(A)$, es el conjunto de aquellos λ para los cuales $R(\lambda,A)$ existe pero su dominio no es denso en X.

El espacio nulo de A, $\mathscr{N}(A)$, es el conjunto de todos los $\phi \in X$ tales que $A\phi = 0$. Para un dado $\lambda \in \sigma(A)$, el subespacio propio generalizado de λ es definido como el mas pequeño subespacio cerrado de X conteniendo los subespacios $\mathscr{N}(\lambda I-A)^k$, $k = 1,2,\ldots$ y es denotado por $\mathscr{M}_\lambda(A)$.

Nuestro fin es determinar la naturaleza de los espectros $\sigma(A)$ y $\sigma(T(t))$. Puesto que el operador $T(t)$ no es conocido, esperamos discutir la mayoria de las propiedades de $T(t)$ usando las propiedades de su generador infinitesimal A, dado por (1.2.12).

Podemos calcular el operador resolvente $R(\lambda,A) = (\lambda I-A)^{-1}$ integrando la ecuación diferencial ordinaria $(\lambda I-A)\phi = \psi$. En efecto la constante λ pertenecerá a $\rho(A)$ si y solo si esta ecuación tiene una solución $\phi \in \mathscr{D}(A)$, $\forall \psi \in C$ y la solución depende continuamente de ψ.

La ecuación $(\lambda I-A)\phi = \psi$ es

$$\lambda\phi(\theta) - \dot{\phi}(\theta) = \psi(\theta), \qquad -r \leqq \theta \leqq 0$$

y la solución es dada por

$$R(\lambda,A)\psi(\theta) = \phi(\theta) = e^{\lambda\theta}b + \int_\theta^0 e^{\lambda(\theta-\xi)}\psi(\xi)d\xi$$

donde $b \in R^n$ y es dado por

$$(1.2.13) \quad \Delta(\lambda)b = D(\psi) + \int_{-r}^{0} \lambda d\mu(\theta) \int_{\theta}^{0} e^{\lambda(\theta-\xi)}\psi(\xi)d\xi + $$
$$+ \int_{-r}^{0} d\eta(\theta) \int_{\theta}^{0} e^{\lambda(\theta-\xi)}\psi(\xi)d\xi$$

$$(1.2.14) \quad \Delta(\lambda) = \lambda D(e^{\lambda\cdot})-L(e^{\lambda\cdot}) = \lambda I-\lambda \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta}d\mu(\theta) - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta}d\eta(\theta)$$

el quasi-polinomio caracteristico asociado a la ecuación (1.2.11). Asi, si $\det\Delta(\lambda) \neq 0$, la ecuación $(\lambda I-A)\phi = \psi$ tiene una solución para todo $\psi \in C$. Esto es, $\{\lambda/\det\Delta(\lambda) \neq 0\} \subset \rho(A)$.

Si $\det \Delta(\lambda) = 0$ entonces existe una solución no nula para $\psi = 0$, esto es, $\lambda \in \sigma_P(A)$. Asi $\sigma(A) = \sigma_P(A)$.

Como hemos visto, si λ es tal que $\det\Delta(\lambda) = 0$ y b es tal que $\Delta(\lambda)b = 0$, entonces $e^{\lambda\theta}b$ es un vector propio de A y todo vector propio es de esta forma.

Si cada punto λ en $\sigma(A)$ es un cero de multiplicidad finita m de $\det\Delta(\lambda)$, entonces es un polo de orden no mas grande que m del operador resolvente. Se deduce (ver A. Taylor [35], p. 305) que

$$\mathcal{N}(\lambda-A)^k = \mathcal{N}(\lambda-A)^m, \quad \mathcal{R}(\lambda-A)^k = \mathcal{R}(\lambda-A)^m \quad \text{para todo } k \geq m, \text{ y}$$
$$C = \mathcal{N}(\lambda-A)^m \oplus \mathcal{R}(\lambda-A)^m$$

La ecuación $(\lambda-A)^m\phi = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria de orden m con coeficientes constantes que, junto con el requerimiento $\phi\in\mathscr{D}(\lambda-A)^m$, no puede tener mas que m.n soluciones linealmente independientes. Por tanto $\mathscr{N}(\lambda-A)^m$ es finito-dimensional. Levinger ha demostrado que $\dim\mathscr{N}(\lambda-A)^m = m$ (ver Hale [11], p. 110)

Asi pues, el subespacio propio generalizado correspondiente a λ es

$$\mathscr{M}_\lambda(A) = \mathscr{N}(\lambda-A)^m$$

ademas, T(t) es completamente reducido (A. Taylor [35], p.268) por $\mathscr{M}_\lambda(A)$ y $\mathscr{R}(\lambda-A)^m$, esto es, $\mathscr{M}_\lambda(A)$ y $\mathscr{R}(\lambda-A)^m$ son invariantes bajo T(t):

$$T(t)\mathscr{M}_\lambda(A)\subset\mathscr{M}_\lambda(A), \qquad T(t)\mathscr{R}(\lambda-A)^m\subset\mathscr{R}(\lambda-A)^m$$

y la proyección P_λ sobre $\mathscr{M}_\lambda(A)$ a lo largo de $\mathscr{R}(\lambda-A)^m$ es

$$P_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu-\lambda|=\delta}(\mu-A)^{-1}d\mu = \operatorname*{Res}_{\mu=\lambda}\ (\mu-A)^{-1}$$

Sea Φ_λ un m-vector fila cuyos elementos forman una base para $\mathscr{M}_\lambda(A)$. Puesto que T(t) y A conmutan, se tiene $A\mathscr{M}_\lambda(A)\subseteq\mathscr{M}_\lambda(A)$. Entonces existe una m.m matriz de numeros complejos B_λ tal que $A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$. Se deduce que $(\lambda-A)^m\Phi_\lambda = 0 = \Phi_\lambda(\lambda-B_\lambda)^m$ asi que $\sigma(B_\lambda) = \{\lambda\}$.

De la definicion de A y de $A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B$ se deduce que

$$\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda\theta}.$$

Tambien, $\frac{d}{dt} T(t)\Phi_\lambda = T(t)A\Phi_\lambda = T(t)\Phi_\lambda B_\lambda$ y por tanto

$$T(t)\Phi_\lambda = \Phi_\lambda e^{B_\lambda t}, \quad t \geq 0$$
$$[T(t)\Phi_\lambda](\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda(t+\theta)}, \quad t \geq 0, \quad \theta \in [-r,0]$$

Esta relación nos permite afirmar que la ecuación (1.2.11) sobre el subespacio propio generalizado $\mathcal{M}_\lambda(A)$, tiene la misma estructura que una ecuación diferencial ordinaria.

Todo lo que hemos dicho puede ser obtenido para todo conjunto finito $\Lambda \subseteq \sigma(A)$. En efecto, sea $\Phi_\Lambda = (\Phi_{\lambda_1}, \ldots .\Phi_{\lambda_p})$ $B_\Lambda =$ $= \operatorname{diag}(B_{\lambda_1}, \ldots B_{\lambda_p})$ donde Φ_{λ_i} es una base para $\mathcal{M}_{\lambda_i}(A)$ y B_{λ_i} es la matriz definida por $A\Phi_{\lambda_i} = \Phi_{\lambda_i} B_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots p$. Para todo vector a de la misma dimensión que Φ_Λ, la solución $T(t)\Phi_\Lambda a$ de (1.2.11) con valor inicial $\Phi_\Lambda a$ en $t = 0$, es dada por la relación

$$T(t)\Phi_\Lambda a = \Phi_\Lambda e^{B_\lambda t} a, \quad \Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(0)e^{B_\lambda \theta}, \ \theta \in [-r,0]$$

Ademas existe un subespacio Q_Λ de C, tal que $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$ $t \geq 0$

$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$, $P_\Lambda = \{\phi \in C \mid \phi = \Phi_\Lambda a$ para algun vector fijo $a\}$, esto es, $P =$ conjt. generado por $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda(A)$.

La obtención del conjunto finito Λ es extremadamente dificil. Para ecuaciones retardadas esto no es problema, puesto que $T(t)$ es compacto y entonces el conjunto $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \operatorname{Re}\lambda \geq \beta\}$ es finito para todo numero real dado β. (Ver Hale [11], p. 114).

Para ecuaciones neutras, si nosotros hacemos la hipótesis de que el operador en diferencias D sea estable (ver siguiente sección) entonces es demostrado (Cruz-Hale, lema 3-5,[5]) que $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A)/\mathrm{Re}\lambda \geqq \beta\}$ es finito. En un estupendo artículo Henry [20] ha obtenido la descomposición anterior para un conjunto infinito de valores propios. Tambien demuestra que si $\mathrm{Re}\sigma(A) \leqq -\delta < 0$ entonces existen $\alpha > 0$, $k > 1$, tal que $\|T(t)\| \leqq ke^{-\alpha t}$, con lo cual obtiene un importante resultado de estabilidad exponencial.

Para hacer todo esto, es necesario un conocimiento de $\sigma(T(t))$. Como es conocido por la teoria de semigrupos (Hille-Phillips, [24]) el espectro puntual $\sigma_P(T(t)) = e^{\sigma_P(A)t}$, mas posiblemente cero. Puesto que A no tiene espectro residual, $\sigma_R(T(t)) = \phi$. Asi el problema es determinar $\sigma_C(T(t))$. Para ecuaciones retardadas esto no es problema, puesto que es conocido que $T(t)$ es compacto, el espectro continuo si existe es $\{0\}$. En ecuaciones neutras $T(t)$ no es compacto. Para resolver el problema, Henry recurre a la ecuación en diferencias

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x(t-w_k), \qquad t \geqq 0$$

ó

$$D_o x_t = 0$$

donde, $0 < w_k \leqq r$, $\sum |A_k| < \infty$, $D_o(\phi) = \phi(0) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi(-w_k)$, $\phi \in C$

Recordar que

$$\int_{-r}^{0} d\mu(\theta)\phi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\phi(-w_k) + \int_{-r}^{0} A(\theta)\phi(\theta)$$

la suma de una función salto y una función absolutamente continua. Esta función define un semigrupo de operadores $\{T_o(t),\ t \geq 0\}$ que es continuo en la topología fuerte de operadores sobre $C_o = C \cap \mathcal{N}(D_o)$. El espectro de $T_o(t)$ entonces se localiza. Usando un teorema de Hale [9], se puede demostrar que $T(t)$ y $T_o(t)$ difieren en un operador compacto y por tanto la adición de este operador compacto no cambia el espectro continuo. Asi se llega al conocimiento y localización del espectro de $T(t)$.

Ahora vamos a obtener la caracterización del subespacio complementario Q_Λ por medio del operador "adjunto" de A respecto a una cierta forma bilineal. Nosotros seguimos de nuevo a Hale-Meyer [19] con el fin de comparar mas tarde sus resultados con los obtenidos por Henry [21] y tratar de aclarar y relacionarlos en lo posible.

Sea $C^* = C([0,r],E^{n*})$. Para toda $\psi \in C^*$, $\phi \in C$ definamos

$$(1.2.15) \quad (\psi,\phi) = \psi(0)D\phi + \int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0} \dot{\psi}(\theta-\xi)[d\mu(\theta)]\phi(\xi)d\xi + \int_{-r}^{0}\int_{\theta}^{0} \psi(\theta-\xi)[d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi.$$

Esta forma bilineal apareció ya en la fórmula (1.2.14). Nosotros usamos esta forma bilineal para intentar determinar un operador A_1^* con dominio denso en C^* tal que

$$(1.2.16) \qquad (\psi, A\phi) = (A_1^* \psi, \phi) \quad \text{para} \quad \phi \in \mathscr{D}(A), \quad \psi \in \mathscr{D}(A_1^*).$$

Si ψ tiene primera derivada continua y desarrollando $(\psi, A\phi)$ entonces, despues de usar la integración por partes (Ver Hale [11] p. 105), se tiene la igualdad (1.2.16) si A_1^* y su dominio son defidos por

$$(A_1^*\psi)(s) = -\dot{\psi}(s), \qquad 0 \leqq s \leqq r$$

$$\mathscr{D}(A_1^*) = \left\{ \psi \in C^* / \dot{\psi} \in C^*, -\dot{\psi}(0) = -\int_{-r}^{0} \dot{\psi}(-\theta)d\mu(\theta) + \int_{-r}^{0} \psi(-\theta)d\eta(\theta) \right\}$$

Despues de esto, tomaremos (1.2.16) como la relación que define A_1^* como el "adjunto" de A respecto a la forma bilineal (1.2.15).

Para todo $\psi \in C^*$, consideremos la ecuación

$$(1.2.17) \quad \dot{y}(s) = \int_{-r}^{0} \dot{y}(s-\theta)d\mu(\theta) - \int_{-r}^{0} y(s-\theta)d\eta(\theta), \qquad s \leqq 0$$

$$y(s) = \psi(s), \qquad 0 \leqq s \leqq r$$

Si $y^s \in C^*$ definida por $y^s(\xi) = y(s+\xi)$, $0 \leqq \xi \leqq r$ y representamos la solución de (1.2.17) por $y(\psi)$, entonces la familia de operadores $\{T_1^*(s), s \leqq 0\}$ definida por $y^s(\psi) = T_1^*(s)\psi$, $s \leqq 0$ es un semigrupo continuo en la topología fuerte de operadores para el cual $-A_1^*$ es el generador infinitesimal.

La ecuación (1.2.17) se dice ser la ecuación adjunta de (1.2.11).

Si $y(\psi)$, $\psi\in\mathscr{D}(A_1^*)$ es una solución de (1.2.17) en $(-\infty,\sigma+r]$ y $x(\phi)$ es una solución de (1.2.11) en $[w-r,\infty)$ donde $\sigma>w$, entonces

$$(1.2.18)\qquad (y^t,x^t) = \text{constante},\quad \forall t\in[w,\sigma]$$

Otra interesante propiedad es

$$\frac{dT_1^*(s)\psi}{ds} = -A_1^*\cdot T_1^*(s)\psi = -T_1^*(s)A_1^*\psi,\ \forall\psi\in\mathscr{D}(A_1^*)$$

Un número complejo $\lambda\in\sigma_P(A_1^*)$ si y sólo si, $\psi(\theta) = e^{-\lambda\theta}b$ donde b es un vector no nulo satisfaciendo $b\Delta(\lambda) = 0$, esto es, $\det\Delta(\lambda) = 0$. Por tanto

$$\lambda\in\sigma(A) \Leftrightarrow \lambda\in\sigma(A_1^*)$$

De forma análoga a todo lo anterior, se tiene $\sigma(A_1^*) = \sigma_P(A_1^*)$ y el subespacio propio generalizado $\mathscr{M}_\lambda(A_1^*)$ es finito dimensional. Igualmente, se puede probar que una condición necesaria y suficiente para que $(\lambda I-A)^k\alpha = \phi$, $\phi\in C$ tenga una solución α en C, ó equivalentemente que $\phi\in\mathscr{R}(\lambda-A)^k$ es que $(\psi,\phi) = 0, \forall\psi\in\mathscr{N}(\lambda-A_1^*)^k$. Ademas se tiene $\dim\mathscr{N}(\lambda I-A)^k = \dim\mathscr{N}(\lambda I-A_1^*)^k$, $\forall k$.

Finalmente, damos la descomposición de C para $\lambda\in\sigma(A)$. Sea Ψ_λ y Φ_λ dos bases de $\mathscr{M}_\lambda(A_1^*)$ y $\mathscr{M}_\lambda(A)$ y sea $(\Psi_\lambda,\Phi_\lambda)$. Entonces

$$C = P_\lambda + Q_\lambda$$
$$Q_\lambda = \{\phi\in C/(\Psi_\lambda,\phi) = 0\}$$
$$P_\lambda = \{\phi\in C/\phi = \Phi_\lambda(\Psi_\lambda,\phi)\}$$

Análoga descomposición puede ser obtenida para un conjunto finito $\Lambda \subseteq \sigma(A)$.

Observemos que C^* tambien puede ser descompuesto de una forma igual a la anterior para obtener

$$C^* = \mathcal{N}(\lambda I - A_1^*)^m \oplus \mathcal{R}(\lambda - A_1^*)^m$$

Ahora vamos a ver los resultados que se obtienen considerando la verdadera teoria adjunta expuesta anteriormente.

En el caso autónomo, la ecuación (1.2.7) toma la forma

$$(1.2.19) \quad y(s) - \int_s^\infty [dy(\alpha)]\mu(s-\alpha) + \int_s^\infty y(\alpha)\eta(s-\alpha) = \text{constante}$$

donde μ y η son continuas a la izquierda en $(-r,0)$, se anulan en $[0,\infty)$ y son iguales a sus valores en $\theta = -r$ en $(-\infty,-r]$. Con estas condiciones de normalización, la ecuación (1.2.19) coincide con la ecuación (1.2.17).

Sea B_o el espacio de Banach de las funciones de variación acotada ψ: $[-r,0] \to E^{n*}$ (n-vectores fila) que son continuas a la izquierda en $(-r,0)$ y $\psi(0) = 0$. Recordemos que B_o puede ser identificado con el espacio conjugado de C con el apareamiento

$$\langle \psi,\phi \rangle = \int_{-r}^{0} [d\psi(\theta)]\phi(\theta), \; \psi \in B_o, \; \phi \in C.$$

Usando este apareamiento, podemos considerar el verdadero adjunto $T^*(t)$ de $T(t)$ donde $T^*(t)$: $B_o \to B_o$, definido por

$$\langle T^*(t)\psi,\phi\rangle = \langle \psi, T(t)\phi\rangle, \quad \psi \in B_o, \quad \phi \in C, \quad t \geqq 0.$$

De la teoría general de operadores adjuntos sabemos que si $T(t)$, $T(s)$: $C \to C$ entonces se verifica

$$(T(t)\cdot T(s))^* = T(s)^* T(t)^*$$

Puesto que $\{T(t), t \geqq 0\}$ es un semigrupo, entonces $T(t).T(s) = T(t+s)$ $\Rightarrow T^*(s)\cdot T^*(t) = T^*(s+t)$.
$T(0) = I \Rightarrow T^*(0) = I^*$ la identidad en B_o, y esto implica que $\{T^*(t), t \geqq 0\}$ es un semigrupo de operadores en B_o.

Por otro lado, por el teorema de la pagina 30 tenemos que la solución operador (1.2.19) es dada por

$$y_s(\psi) = \tilde{T}(s-t,0)\psi \qquad \text{para } s \leqq t$$
$$y_s(\psi) = \tilde{T}(s)\psi \qquad \text{para } s \leqq 0$$

definiendo asi un semigrupo de operadores $\{\tilde{T}(s), s \leqq 0\}$ sobre B_o.

La fórmula (1.2.8) es en el caso autónomo

$$T^*(t) = (I+\Omega)\tilde{T}(-t)(I+\Omega)^{-1} \tag{1.2.20}$$

donde Ω: $B_o \to B_o$ es el operador quasi-nilpotente definido por

$$(1.2.21)\quad \Omega\psi(\theta) = -\int_{\theta}^{0} [d\psi(\beta)]\mu(\theta-\beta) + \int_{\theta}^{0} \psi(\beta)\eta(\theta-\beta)d\beta, \quad -r \leqq \theta \leqq 0,$$
$$\psi \in B_0.$$

Desafortunadamente, el semigrupo adjunto no es continuo en la topología fuerte de operadores, pues la aplicación $T(t) \to T^*(t)$ no conserva necesariamente la continuidad en t. (Ver Yosida [36] VII, proposicion 1 p. 195). Para que el semigrupo adjunto fuese continuo en la topología fuerte de operadores sería necesario que el espacio C sea reflexivo (Ver Hille-Phillips, cap XIV), pero éste no es nuestro caso, puesto que $C^{**} = B_0^*$, que es mas grande que el espacio C. (Ver Riesz-Nag [34], cap 87, p. 211).

Tampoco $T^*(t)$ es continuo en la topología débil de operadores, puesto que de serlo, entonces sería continuo en la topología fuerte de operadores. Una contradicción (ver Yosida [36], cap IX, p. 233, y Hille-Phillips [24], cap X, p. 306).

Sin embargo, si definimos la convergencia en B_0, en el sentido de la topología $\mathscr{T}(B_0, C)$, la cual nosotros representaremos, por w*-topología, como

$$\psi_n \xrightarrow{w^*} \psi \text{ en } B_0 \text{ cuando } \langle \psi_n, \phi \rangle \to \langle \psi, \phi \rangle \quad \phi \in C$$

entonces la teoría anterior está muy relacionada.

Se puede demostrar que $T^*(\cdot)$ es w*-continua en C, por tanto, según (1.2.20), $\tilde{T}(\cdot)$ es w*-continua en B_0.

Es conocido (ver Riesz-Nag, cap. 55) que $\psi_n \to \psi$ en B_0 si y sólo si $\psi_n(\theta)\to\psi(\theta)$ en $\theta = 0,-r$ y para un conjunto denso en $(-r,0)$ y $\operatorname*{Var}_{[-r,0]}\psi_n$ es acotado cuando $n\to\infty$.

Por tanto definimos el w*-generador infinitesimal

$$-\tilde{A}\psi = w^* - \lim_{s\to 0^-} \frac{1}{s}[\tilde{T}(s)\psi-\psi]$$

con el $\mathscr{D}(\tilde{A})$ formado por el conjunto de $\psi\in B_o$ para las cuales el w*-límite existe.

Entonces, puede ser probado que $\psi\in\mathscr{D}(\tilde{A})$ si y sólo si, ψ es absolutamente continua en $[-r,0)$ con $\dot{\psi}\in B_o$. $\dot{\psi}$ representa la derivada a la izquierda.

Para $\psi\in\mathscr{D}(\tilde{A})$, tenemos que $\tilde{A}\psi\in B_o$ definido por

$$\tilde{A}\psi(\theta) = -\dot{\psi}(\theta),\ \theta\in(-r,0]$$

$$\tilde{A}\psi(-r) = -\int_{-r}^{0}\dot{\psi}(-r-\theta)d\mu(\theta) + \int_{-r}^{0}\psi(-r-\theta)d\eta(\theta)$$

Observemos que $\tilde{A}$ es cerrado, pero $\mathscr{D}(\tilde{A})$ no es denso en B_o. En efecto, $\overline{\mathscr{D}(\tilde{A})}$ es el espacio de las funciones absolutamente continuas que aplican $[-r,0]\to E^{n*}$ (ver Hille-Phillips, p. 534, Dunford-Schwart [7] cap. IV.12)

Henry [21] prueba ésto utilizando la forma bilineal definida en (1.2.10) y que en el caso autónomo es de la forma

$$[\psi|\phi] = \langle(I+\Omega)\psi,\phi\rangle,\quad \psi\in B_o,\quad \phi\in C.$$

Usando (1.2.20) tenemos

$$[\psi|T(t)\phi] = \langle (I+\Omega)\psi, T(t)\phi \rangle$$
$$= \langle T^*(t)(I+\Omega)\psi, \phi \rangle$$
$$= \langle (I+\Omega)\tilde{T}(-t)\psi, \phi \rangle$$
$$= [\tilde{T}(-t)\psi|\phi], \qquad t \geqq 0$$

Entonces, define $\tilde{A}$ como el adjunto de A respecto a la forma bilineal $[\cdot|\cdot]$, esto es, $[\tilde{A}\psi|\phi] = [\psi|A\phi]$.

Así $\quad [\tilde{A}\phi|\phi] = \langle (I+\Omega)\tilde{A}\psi, \phi \rangle = \langle (I+\Omega)\psi, A\phi \rangle = \langle A^*(I+\Omega)\psi, \phi \rangle$

donde A^* es el adjunto de A respecto al apareamiento $[\cdot|\cdot]$, y esto implica que

$$(I+\Omega)\tilde{A} = A^*(I+\Omega)$$

es decir $\qquad A^* = (I+\Omega)\tilde{A}(I+\Omega)^{-1}$

Asi tenemos que A^* es semejante a $\tilde{A}$ (recordar que Ω es un operador quasi-nilpotente, $\sigma(\Omega) = \{0\}$) y por tanto $\sigma(A^*) = \sigma(\tilde{A})$.

Pero por un teorema de Phillips $\sigma(A) = \sigma(A^*)$ (ver Dunfor-Schwartz [7], p. 568).

En resumen, $\sigma(A) = \sigma(\tilde{A}) = \sigma(A^*) = \sigma_p(A) = \{\lambda | \det\Delta(\lambda) = 0\}$ y $\sigma_p(\tilde{T}(-t)) = \sigma_p(T^*(t)) = \sigma_p(T(t)) = e^{t\sigma_p(\tilde{A})^P}$, mas posiblemente cero.

En lo anterior, se han establecido algunas propiedades del semigrupo adjunto $T^*(t)$. Ahora vamos a dar algunos resultados sobre este semigrupo que generalizan los de Henry [23].

Teorema. Si A es el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$, $\tilde{A}$ es el w*-generador infinitesimal del semigrupo $\{\tilde{T}(s), s \leq 0\}$, entonces $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$ si y sólo si ψ es absolutamente continua en $[-r,0)$, con $\dot{\psi} \in B$ y $\psi(0) = 0$. $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(\tilde{A})$. Ademas para $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$, tenemos

$$A^*\psi(0) = 0, \qquad A^*\psi(-r) = -\psi(0^-)\eta(-r)$$

$$A^*\psi(\theta) = -\dot{\psi}(\theta) + \psi(0^-)[\dot{\mu}(\theta) - \eta(\theta)], \ \theta \in (-r,0)$$

Demostración: Supongamos que $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$ y sea $A^*\psi = \alpha \in B_0$. Entonces, para toda $\phi \in \mathcal{D}(A)$, $\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A^*\psi, \phi \rangle = \langle \alpha, \phi \rangle$. Como $\phi \in \mathcal{D}(A)$, ϕ es continua diferenciable y $D(\dot{\phi}) = L(\phi)$, es decir

$$\dot{\phi}(0) = \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\dot{\phi}(\theta) + \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\phi(\theta).$$

Por tanto, las igualdades anteriores se pueden escribir

$$\langle \psi, \dot{\phi} \rangle = \langle \alpha, \phi \rangle = \int_{-r}^{0} [d\alpha(\theta)]\phi(\theta) = \alpha(0)\phi(0) - \alpha(-r)\phi(-r) - \int_{-r}^{0} \alpha(\theta)\dot{\phi}(\theta)d\theta$$

$$= -\alpha(-r)\phi(-r) - \int_{-r}^{0} \alpha(\theta)\dot{\phi}(\theta)d\theta$$

ya que $A^*\psi(0) = 0 = \alpha(0)$.

Definamos la función

$$\beta(\theta) = \psi(\theta) + \int_{-r}^{\theta} \alpha(\xi)d\xi, \quad \theta\in[-r,0)$$

$$\beta(0) = \beta(0^-)$$

Calculemos la integral $\int_{-r}^{0} [d\beta(\theta)]\dot{\phi}(\theta)$ para $\phi\in\mathscr{D}(A)$. Teniendo en cuenta que β es continua en 0, mientras que ψ presenta un salto en 0, es decir, ψ pasa de $\psi(0^-)$ a $\psi(0) = 0$, obtendremos

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{0} [d\beta(\theta)]\dot{\phi}(\theta) &= \psi(0^-)\dot{\phi}(0) + \int_{-r}^{0} [d\psi(\theta)]\dot{\phi}(\theta) + \int_{-r}^{0} [d\int_{-r}^{\theta} \alpha(\xi)d\xi]\dot{\phi}(\theta)\\ &= \psi(0^-)\dot{\phi}(0) + \int_{-r}^{0} [d\psi(\theta)\dot{\phi}(\theta) + \int_{-r}^{0} \alpha(\theta)\dot{\phi}(\theta)d\theta\\ &= \psi(0^-)\dot{\phi}(0) + \langle\psi,\dot{\phi}\rangle - \alpha(-r)\phi(-r) - \langle\alpha,\phi\rangle\\ &= \psi(0^-)\dot{\phi}(0) - \alpha(-r)\phi(-r)\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{0} [d\beta(\theta)]\dot{\phi}(\theta) &= -\alpha(-r)\phi(-r)+\psi(0^-)\left[\int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\dot{\phi}(\theta) + \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\phi(\theta)\right]\\ &= -\alpha(-r)\phi(-r)+\psi(0^-)\left[\int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\dot{\phi}(\theta) - \right.\\ &\qquad \left. -\eta(-r)\phi(-r) - \int_{-r}^{0} \eta(\theta)\dot{\phi}(\theta)d\theta\right]\end{aligned}$$

Asi obtendremos

$$\int_{-r}^{0} \{ d\beta(\theta)+\psi(0^-)[-d\mu(\theta)+\eta(\theta)d\theta]\}\dot{\phi}(\theta) = -[\alpha(-r)+\psi(0^-)\eta(-r)]\phi(-r)$$

que es una ecuación que tiene lugar para toda $\phi\in\mathcal{D}(\Lambda)$.

Como $\dot{\phi}\in C$ y $\phi(-r)\in E^n$ pueden variar independientemente, los dos miembros de la igualdad anterior deben ser cero. Esto es,

$$\alpha(-r) = -\psi(0^-)\eta(-r)$$

$$\int_{-r}^{0} \{ d\beta(\theta)+\psi(0^-)[-d\mu(\theta)+\eta(\theta)d\theta]\}\dot{\phi}(\theta) = 0$$

Puesto que esta última igualdad se verifica $\forall\phi\in\mathcal{D}(A)$, tenemos

$$d\beta(\theta)+\psi(0^-)[-d\mu(\theta)+\eta(\theta)d\theta] = 0$$

De aqui obtenemos que

$$\beta(\theta) = -\psi(0^-) \int_{-r}^{\theta} [-d\mu(\xi)+\eta(\xi)d\xi]$$

y por tanto, β es una integral indefinida, lo cual implica que es absolutamente continua. Esto implica que ψ tambien es absolutamente continua.

Tambien, tenemos que

$$d\beta(\theta) = -\psi(0^-)[-d\mu(\theta)+\eta(\theta)d\theta] = \psi(0^-)[\dot{\mu}(\theta)-\eta(\theta)]d\theta$$

De la definición de β se tiene

$$\dot{\psi}(\theta)+\alpha(\theta) = \psi(0^-)[\dot{\mu}(\theta)-\eta(\theta)], \quad \text{a.e. en } (-r,0)$$

Esto nos dice que $\dot{\psi} \in B_o$.

Igualmente, obtenemos que

$$\alpha(\theta) = -\dot{\psi}(\theta)+\psi(0^-)[\dot{\mu}(\theta)-\eta(\theta)], \quad \text{a.e. en } (-r,0)$$

Como $\alpha = A^*\psi$, resulta

$$A^*\psi(\theta) = -\dot{\psi}(\theta)+\psi(0^-)[\dot{\mu}(\theta)-\eta(\theta)], \quad \text{a.e. en } (-r,0)$$

y tambien

$$A^*\psi(0) = 0, \qquad A^*\psi(-r) = -\psi(0^-)\eta(-r)$$

Asi hemos probado que $\psi \in \mathscr{D}(A^*)$ con $\psi(0) = 0$, implica que ψ es absolutamente continua y $\dot{\psi} \in B_o$.

Reciprocamente, si ψ es una tal función, entonces, definiendo $\alpha \in B_o$ como en las ecuaciones anteriores, se deduce que $\langle \alpha,\phi \rangle = \langle \psi,A\phi \rangle$, $\forall \phi \in \mathscr{D}(A)$ y por tanto, $\psi \in \mathscr{D}(A^*)$, $\alpha = A^*\psi$.

De todo lo anterior se tiene que $\mathscr{D}(A^*) = \mathscr{D}(A)$.

Consideremos las llamadas aproximaciones de Yosida $A_h = \frac{1}{h}[T(h)-I]$ para $h > 0$. Entonces para $\psi \in \mathscr{D}(A^*)$, $\phi \in \mathscr{D}(A)$, tenemos tomando límites cuando $h \to 0^+$:

$$\langle A_h^* \psi, \phi \rangle = \langle \psi, A_h \phi \rangle \to \langle \psi, A\phi \rangle = \langle A^* \psi, \phi \rangle$$

y

$$\langle \frac{1}{h}[T^*(t+h)\psi - T^*(t)\psi], \phi \rangle = \langle \frac{1}{h}[T^*(t)[T^*(h)-I]\psi, \phi \rangle$$

$$= \langle T^*(t)\psi, A_h \phi \rangle = \langle A_h^* \psi, T(t)\phi \rangle \to$$

$$\to \langle A^* \psi, T(t)\phi \rangle = T^*(t)\psi, A\phi \rangle$$

De aqui vemos que $T^*(t) : \mathscr{D}(A^*) \to \mathscr{D}(A^*)$ y $T^*(t)A^*\psi = A^*T^*(t)\psi$ para $\psi \in \mathscr{D}(A^*)$.

Tambien sabemos que para $\psi \in \mathscr{D}(A^*)$, $\phi \in \mathscr{D}(A)$, $\langle T^*(t)\psi, \phi \rangle$ es continuamente diferenciable para $t \geqq 0$ con

$$\frac{d}{dt} \langle T^*(t)\psi, \phi \rangle = \langle T^*(t)A^*\psi, \phi \rangle$$

De la ecuación adjunta (1.2.19) es claro que si $\psi \in \mathscr{D}(\tilde{A})$, entonces la solución $(\tilde{T}(-t)\psi)(\theta)$ es absolutamente continua como una función de $t \geqq 0$ y fijado θ. Consecuentemente, por las propiedades de Ω, $(T^*(t)\psi)(\theta)$ es absolutamente continua en $t \geqq 0$ para cada θ. Se deduce entonces que si $\psi \in \mathscr{D}(A^*)$

$$\frac{\partial}{\partial t}[(T^*(t)\psi)(\theta)] = (A^*T^*(t)\psi)(\theta) \quad \text{a.e.} \quad t \geqq 0.$$

Observemos que hasta ahora no hemos dicho nada acerca de que A^* sea el generador infinitesimal del semigrupo $\{T^*(t), t \geq 0\}$. Veamos las condiciones que habremos de imponer para que podamos hablar de un generador infinitesimal.

Hemos visto que $T(t)$: $C \to C$ es un semigrupo continuo de operadores en la topología fuerte y que $T^*(t)$: $B_0 \to B_0$ es tambien otro semigrupo. Sin embargo, el semigrupo $T^*(t)$ no es continuo en la topología fuerte de operadores, puesto que C no es reflexivo.

Para evitar esta dificultad, se puede tomar el semigrupo adjunto como la restricción de $T^*(t)$ a un subespacio $B_0^+ \subset B_0$ que sea el dominio mas grande en el cual $T^*(t)$ sea continuo en la topología fuerte. El generador infinitesimal del semigrupo A^+, será la maxima restricción de A^* con dominio y rango B_0^+.

Para ser mas precisos, sea $B_0^+ = \overline{\mathscr{D}(A^*)}$ y $T^+(t) = T^*(t)|B_0^+$. El siguiente resultado puede ser encontrado en Phillips [32]:

Si $T(t)$ es un semigrupo continuo en la topología fuerte, entonces $T^+(t)$ es tambien un semigrupo continuo en la topología fuerte de operadores, definido en B_0^+. Ademas si A^+ es el generador infinitesimal de $T^+(t)$, entonces

$$\mathscr{D}(A^+) = \{ \phi \in \mathscr{D}(A^*) \,|\, A^*\phi \in B_0^+ \} \quad \text{y} \quad A^+ = A^*|\mathscr{D}(A^+)$$

A este semigrupo continuo $T^+(t)$ le corresponderá otro semigrupo continuo en la topología fuerte $\{T_1^*(t), t \geq 0\}$ por medio de la transformación

$$T^+(t) = (I+\Omega)T_1^*(-t)(I+\Omega), \quad t \geq 0.$$

Este semigrupo $\{T_1^*(s), s \leq 0\}$ es el considerado por Hale-Meyer, en el estadio de su teoria "adjunta". Por tanto el semigrupo $\{T_1^*(t), t \leq o\}$ de Hale-Meyer es el semigrupo $\{\tilde{T}(t), t \leq 0\}$ con las correspondientes restricciones.

Quedan asi relacionadas, ambas teorias adjuntas.

I.3. Estabilidad: Método de Liapunov. Generalización del método de Popov a ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro.

En esta exposición, de la teoria de estabilidad en ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro, seguimos el artículo de Cruz-Hale [6].

Consideremos la ecuación diferencial funcional autónoma de tipo neutro

$$(1.3.1) \qquad \frac{d}{dt} D(x_t) = L(x_t), \quad t \geq 0, \quad x_o = \phi$$

donde $D(\phi) = \phi(0)-g(\phi)$, $g\colon C \to E^n$ es lineal y continua, $L\colon C \to E^n$ es continua, lineal y transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Sea el operador D definido anteriormente y $H \in C([0,\infty),E^n)$. Consideremos la ecuación en diferencias

$$(1.3.2) \qquad \begin{aligned} D(x_t) &= D(\phi) + H(t) - H(0), \quad t \geq 0 \\ x_o &= \phi \end{aligned}$$

<u>Definición</u> . Sea $\mathscr{A}$ un subconjunto de $C = C([o,\infty),E^n)$. Se dice que el operador D es estable con respecto a $\mathscr{A}$ si existen dos constantes K y M que para todo $\phi \in C$ y $H \in \mathscr{A}$ la solución $x(\phi,H)$ de (1.3.2) cumple

$$\|x_t(\phi,H)\| \leq K\|\phi\| + M \sup_{o \leq u \leq t} |H(u) - H(0)|, \quad t \geq 0$$

Los siguientes lemas se pueden encontrar en el artículo de

Cruz-Hale. Las demostraciones no las damos por ser demasiado largas.

Lema. Sea la ecuación diferencial en diferencias de tipo neutro

$$\frac{d}{dt}[x(t)-\sum_{k=1}^{N} A_k x(t-\tau_k)] = L(x_t)$$

donde cada A_k es un n×n matriz y $0<\tau_k \leqq r$. Definamos el operador funcional en diferencias

$$D(\phi) = \phi(0) - \sum_{k=1}^{N} A_k \phi(-\tau_k), \quad \phi \in C$$

Si existe un $\delta > 0$ tal que todas las raices de la ecuación

$$\det[I-\sum_{k=1}^{N} A_k \rho^{-\tau_k}] = 0$$

tienen módulo menor o igual que $1-\delta$, entonces D es estable respecto a C. Esto es equivalente a decir, si existe un $\delta > 0$ tal que todas las raices de la ecuación

$$\det[I-\sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\lambda\tau_k}] = 0$$

cumplen $\mathrm{Re}\lambda \leqq -\delta$, entonces D es estable respecto a C.

Cruz-Hale demuestran este teorema cuando el cociente $\frac{\tau_j}{\tau_k}$ es racional. Cuando este cociente es irracional la demostraciòn es mas complicada y ha sido obtenida por Henry [20].

Un ejemplo de operador estable es $D(\phi) = \phi(0)-A\phi(-r)$, donde A es una $n\times n$ matriz cuyo radio espectral es menor que uno. Igualmente observemos que $D(\phi) = \phi(0)$ corresponde a una ecuación diferencial funcional de tipo retardado ($A\equiv 0$) y siempre es estable.

Lema. Consideremos la ecuación funcional en diferencias

(1.3.3)
$$\begin{aligned} &D(x_t) = 0, \quad t \geqq 0 \\ &x_0 = \phi, \quad D(\phi) = 0, \quad \phi \in C. \end{aligned}$$

Si D es estable respecto a C entonces, existen dos constantes K y $\alpha > 0$ tal que para todo $\phi \in C$, la solución de esta ecuación cumple

$$\| x_t(\phi) \| \leqq K e^{-\alpha t} \| \phi \|, \quad t \geqq 0$$

Observemos que si $x(\phi)$ es una solución de (1.3.3), podemos escribir

$$x_t(\phi) = T_0(t)\phi, \quad t \geqq 0$$

definiendo asi, un semigrupo continuo en la topología fuerte de operadores $\{T_0(t), t \geqq 0\}$. Sea a_D el orden de este semigrupo, esto es

$$a_D = \inf\{a \in R \mid \exists K \text{ tal que } \|T_0(t)\| \leqq K e^{at}, \ t \geqq 0\}$$

Del lema anterior, se deduce que D es estable si $a_D < 0$.

Teorema. El operador D es estable si y sólo si, existen dos constantes $a > 0$, $b > 0$, tales que $h \in C$, toda solución $x(\phi,h)$ de la ecuación

$$D(x_t) = h(t), \quad x_o = \phi, \quad t \geqq 0$$

satisface

$$\|x_t(\phi,h)\| \leqq be^{-at}\|\phi\| + b \sup_{0 \leqq u \leqq t} |h(u)|$$

Consideremos la ecuación

$$\frac{d}{dt} D(x_t) = L(x_t) \tag{1.3.4}$$

con valor inicial ϕ en σ, esto es, $x_\sigma = \phi$.

Definiciones. Se dice que la solución $x = 0$ de (1.3.4) es estable si $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon,\sigma) > 0$ tal que $\|\phi\| < \delta$ implica $\|x_t(\sigma,\phi)\| < \varepsilon$ $t \geqq \sigma$. La solución $x = 0$ es uniformente estable si es estable y δ puede ser tomado independientemente de σ. La solución $x = 0$ se dice ser asintoticamente estable si es estable y existe un $b = b(\sigma) > 0$ tal que $\|\phi\| < b$ implica $\|x_t(\sigma,\phi)\| \to 0$ cuando $t \to \infty$. La solución $x = 0$ se dice ser uniforme asintoticamente estable si si es uniformemente estable, si b en la definición de estabilidad asintótica puede ser tomado independiente de σ y si para todo $\eta > 0$, existe $T(\eta) > 0$ tal que $\|\phi\| < b$ implica $\|x_t(\sigma,\phi)\| \leq \eta$ para $t \geq \sigma+T(\eta)$. La solución x = o se dice ser <u>exponencial asintóticamente estable</u> si existen dos constantes $K > 0$, $\alpha>0$ tales que $\|x_t(\sigma,\phi)\| \leq Ke^{-\alpha(t-\sigma)}\|\phi\|$, $t \geq \sigma$.

Para ciertos sistemas lineales, la estabilidad uniforme asintóticamente es equivalente a la estabilidad exponencial asintóticamente. La demostración de esta equivalencia es la misma que en ecuaciones diferenciales ordinarias (ver Hale [12], p. 84 ó Halanay [8], p. 346).

Sin embargo, en ecuaciones diferenciales funcionales autónomas de tipo neutro no ocurre lo mismo que en ecuaciones diferenciales ordinarias o retardadas autónomas en las cuales la estabilidad (estabilidad asintótica) implica la estabilidad uniforme (estabilidad uniforme asintóticamente). Brumley [3] ha dado un ejemplo donde la solución es asintóticamente estable pero no es exponencial asintóticamente estable y por tanto, no es uniforme asintóticamente estable. No obstante, si D es estable, entonces la estabilidad asintótica es equivalente a la estabilidad asintótica uniformemente (ver Hale y Cruz [18], Cruz-Hale [6])

<u>Definición</u>. Si $V: C \to R$ es continua, se define $\dot{V}(\phi)$ (derivada de V a lo largo de las soluciones de (1.3.1)) como

$$\dot{V}(\phi) = \dot{V}_{(1.3.1)}(\phi) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}[V(x_h(\phi)) - V(\phi)], \quad x_o(\phi) = \phi.$$

<u>Definición</u>. Si $x(\phi)$ es una solución de (1.3.1), la órbita $\gamma^+(\phi)$ de $x(\phi)$ que pasa por el punto $\phi \in C$, se define como

$$\gamma^+(\phi) = \bigcup_{t \geqq 0} x_t(\phi)$$

<u>Teorema</u>. Sea D estable y $D(x_t)$ acotado para $t \geqq 0$. Si $x(\phi)$ es una solución de (1.3.1) entonces la órbita $\bigcup_{t \geqq 0} x_t(\phi)$ es precompacta, esto es, tiene clausura compacta.

<u>Demostración</u>: Puesto que $D(x_t) = D(\phi) + \int_o^t L(x_s)ds$ y $D(x_t)$ es acotado, se deduce que $\int_o^t L(x_s)ds$ es acotada. Como D es estable se deduce que x_t está acotada para $t \geqq 0$. Puesto que L transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados, existe una constante N tal que $|L(x_t)| < N$, $t \geqq 0$.

Para todo $\tau \geqq 0$ y $t \geqq 0$ podemos escribir

$$D(x_{t+\tau}) = D(x_\tau) + \int_\tau^{t+\tau} L(x_s)ds$$

$$D(x_t) = D(\phi) + \int_o^t L(x_s)ds$$

de donde

$$D(x_{t+\tau}-x_t) = D(x_\tau-\phi) + \int_\tau^{t+\tau} L(x_s)ds - \int_o^t L(x_s)ds$$

Por la definición de operador D estable podemos escribir

$$\| x_{t+\tau} - x_t \| \leqq K \| x_\tau - \phi \| + M2N\tau$$

Como $x_o = \phi$ y la función x_t es continua, $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\| x_\tau - \phi \| < \varepsilon/2K$, $2\tau N < \varepsilon/2M$ para $0 \leqq \tau \leqq \delta$.

Por tanto, $\| x_{t+\tau} - x_t \| < \varepsilon$ para $0 \leqq \tau \leqq \delta$, $t \geqq 0$ que nos dice que la función x_t es uniformemente continua en t para $t \in [0, \infty)$. Este hecho, junto con el de que x_t es uniformemente acotada para $t \geqq 0$ implica por el teorema de Ascoli-Arzela que $\bigcup_{t \geqq 0} x_t(\phi)$ es precompacto.

Definición . El conjunto ω-límite $\omega(\gamma^+(\phi))$ de una órbita $\gamma^+(\phi)$ se define como

$$\omega(\gamma^+(\phi)) = \bigcap_{\tau > 0} \left(\overline{\bigcup_{t \geqq \tau} x_t(\phi)} \right)$$

esto es, un elemento $\psi \in C$ se dice que pertenece a $\omega(\gamma^+(\phi))$ si existe una sucesión de numeros $t_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ tal que $x_{t_k}(\phi) \to \psi$ cuando $k \to \infty$.

Definición. Un subconjunto Γ de C se dice que es invariante para la ecuación (1.3.1) si, para cada $\phi \in \Gamma$, se puede encontrar una solución x definida sobre R, $x_o = \phi$, $x_t \in \Gamma$, $t \in R$.

Lema. Si D es estable y $D(x_t)$ es acotado para $t \geqq 0$, entonces $\omega(\gamma^+(\phi))$ es no vacio, compacto, conexo e invariante.

Para la demostración, ver Cruz-Hale [5].

Definición. Una función $V: C \to R$ se dice que es una función de Liapunov sobre un conjunto G, si V es continua sobre $\bar{G}$ y $\dot{V} \leqq 0$ en G.

Sean $S = \{ \phi \in \bar{G} / \dot{V}(\phi) = 0 \}$ y Γ el mayor conjunto en S que es invariante para la ecuación (1.3.1)

Teorema. Sea D estable y V una función de Liapunov sobre G. Si $x(\phi)$ es una solución de (1.3.1) que permanece en G y $D(x_t)$ es acotado para $t \geqq 0$, entonces $x_t(\phi) \to \Gamma$ cuando $t \to \infty$.

Demostración: Sea $A_n = \overline{\bigcup_{t \geqq n} x_t(\phi)}$. Como A_n es compacto y $A_n \supset A_{n+1}$ entonces $x_t(\phi) \to A$, donde $A = \bigcap_{n \geqq 0} A_n = \omega(\gamma^+(\phi))$ que es invariante y está contenido en $\bar{G}$.

Por tanto, para probar el teorema, es suficiente con probar que si $\psi \in \omega(\gamma^+(\phi))$ entonces $\dot{V}(\psi) = 0$ ó lo que es lo mismo, que $V(x_t(\psi))$ es constante.

Observemos que $V(x_t(\phi))$ es decreciente y acotada y por tanto existe $\lim_{t \to \infty} V(x_t(\phi))$. Sea ℓ este límite. Entonces

$$V(x_t(\psi)) = V[x_t(\lim_{k \to \infty} x_{t_k}(\phi))] = \lim_{k \to \infty} V(x_{t+t_k}(\phi)) = \ell.$$

Corolario. Sea D estable y V una función de Liapunov en $G = G_l = \{ \phi \in C / V(\phi) < \ell \}$. Si existe una constante $K = K(l)$ tal que

$\phi \in G_1$ implica $|D_\phi| < K$, entonces toda solución $x_t(\phi)$ con $\phi \in G_1$ tiende a Γ cuando $t \to \infty$.

Demostración: Para aplicar el teorema anterior, basta con probar que $x_t \in G$ y $D(x_t)$ es acotado para $t \geq 0$.

Puesto que $\dot{V} \leq 0 \Rightarrow V(x_t) \leq V(\phi) < \ell$, luego $x_t \in G$ para $t \geq 0$. Tambien $|Dx_t| < K$ para todo $t \geq 0$.

Si conocemos que la solución $x = 0$ de (1.3.2) es estable, entonces puede ser probado que la estabilidad se conserva bajo perturbaciones de los coeficientes. Lo mismo es verdad con respecto a perturbaciones en los retrasos del miembro de la derecha de (1.3.2). Sin embargo, la conservación de la estabilidad con respecto a perturbaciones en los retrasos en el operador funcional en diferencias D, definido por (1.3.3) es mucho mas dificil.

Definición. Se dice que el operador D es estable localmente en los retrasos si existen intervalos I_k (con puntos interiores) conteniendo a τ_k, $k = 1,\ldots.N$, tal que D es estable para cada $\tau'_k \in I_k$.

Para el caso de una ecuación escalar, Melvin [30] ha demostrado que D es estable localmente en los retrasos si y sólo si

$$\sum_{k=1}^{N} |A_k| < 1.$$

Para el caso matricial, D es estable si

$$\sum_{k=1}^{N} \sup_{|x|=1} |A_k x| < 1.$$

Para el caso matricial, la ecuación característica de (1.3.3) es

$$(1.3.5) \qquad 1 = \sum_{j=1}^{P} a_j e^{-\lambda \sum_{k=1}^{N} n_{jk}\tau_k}$$

donde cada n_{jk} es entero no negativo.

Definición. Se dice que D es estable localmente en los retrasos si $\exists \delta > 0$ e intervalos I_k tales que $\forall \tau_k \in I_k$, las raices de (1.3.5) satisfacen $Re\lambda < -\delta$. Decimos que D es estable globalmente en los retrasos si $\forall \tau_k$, $\exists \delta > 0$ tal que las raices de (1.3.5) satisfacen $Re\lambda < -\delta$.

Hale [15] ha demostrado lo siguiente:

El operador D es estable localmente en los retrasos si y solamente si es estable globalmente en los retrasos.

Vamos ahora a dar una generalización del método de Popov para ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro.

Supongamos que un sistema físico es gobernado por la ecuación (1.3.1) y que el sistema es asintóticamente estable. Durante el funcionamiento del sistema físico pueden surgir perturbaciones que ocasionen desviaciones de la solucion x = 0. Entonces, para mantener el sistema cerca del origen y hacer que la solución trivial tienda a cero mas rápidamente que en el sistema que tenemos (incontrolado) nosotros añadimos un control externo (sistema controlado). Esto es hecho matemáticamente de la siguiente forma:

Reemplazamos el sistema (1.3.1) por

$$\frac{d}{dt}(Dx_t) = L(x_t) + b\cdot f(\sigma), \tag{1.3.6}$$

donde b es un n-vector constante, f es una función escalar que depende del estado del sistema y $\sigma = (c,x)$, el producto escalar en E^n, donde c es un n-vector columna constante.

$\sigma(t)$ es llamada la señal de control feedback y $f(\sigma)$ es la llamada función característica del mecanismo que efectua el control y normalmente, es no lineal.

Nosotros supondremos que f pertenece a la clase $\mathscr{S}$ de funciones características admisibles satisfaciendo las siguientes hipótesis:

1) $f \in L_1^{loc},(-\infty,\infty)$

2) $h_1\sigma^2 \leq \sigma f(\sigma) \leq h_2\sigma_2^2 \qquad 0 < h_1 \leq h_2 < h$

La segunda hipótesis, llamada la condición de sector implica que $f(0) = 0$, h_1 y h_2 dependen de f pero h es el mismo para toda la clase.

El problema consiste en determinar las condiciones suficientes respecto a los coeficientes que aparecen en el sistema tales que para toda función característica admisible f en la clase $\mathscr{S}$, toda solución del sistema (1.3.2) tienda a cero cuando $t\to\infty$. El sistema se dice, entonces, que es absolutamente estable.

La solución x = 0 del sistema se dice que es asintóticamente estable en grande (o estabilidad completa) si es asintóticamente estable para arbitrarias condiciones iniciales, esto es, si la región de estabilidad asintótica es todo el espacio C, o lo que es lo mismo, si toda solución es asintóticamente estable. Por tanto el sistema es absolutamente estable si la solución x = 0 es asintóticamente estable en grande para toda función f de la clase $\mathcal{S}$.

Para ecuaciones diferenciales ordinarias este problema fué estudiado por A. Lurie en 1.935 usando funciones de Liapunov. El estudio de Lurie tuvo éxito y en algunos casos da muy buena información sobre el dominio de estabilidad. Sin embargo, tiene el inconveniente, como sabemos, que la elección de una apropiada función de Liapunov es un arte y el criterio de estabilidad depende de la función de Liapunov elegida.

En 1.958-59, V. Popov descubrió un nuevo método para estudiar el problema. Ademas, Popov probó que si existe una función de Liapunov de la forma usada por Lurie y otros, entonces las condiciones de su método son satisfechas. Es claro, que el método de Popov no es peor que el método de las funciones de Liapunov y cuando los resultados de Popov fueron conocidos esto supuso un menor uso de las funciones de Liapunov en el estudio de la estabilidad absoluta. Pero esto no es todo; algunos años mas tarde Yakubovic, Kalman y el mismo Popov probaron un teorema tal que si las condiciones del método de Popov son satisfechas entonces, existe una función de Liapunov de la forma considerada. Esto significa que las condiciones de Popov equivalen a la mejor elección de la función de Liapunov.

Aquí nosotros establecemos el método de Popov para ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro siguiendo muy de cerca la forma en que lo hace Halanay [8] cap. 4.6. para ecuaciones diferenciales funcionales retardadas.

Para el estudio de la estabilidad absoluta hay que tener en cuenta que las soluciones del sistema lineal se aproximen exponencialmente a cero.

En la demostración de sus teoremas, Halanay hace la hipótesis de que la solución del sistema lineal sea asintóticamente estable. Esto es asi, porque en ecuaciones diferenciales funcionales autónomas de tipo retardado, la estabilidad asintótica implica la estabilidad asintótica uniformemente que, como sabemos, es equivalente a la estabilidad asintótica exponencialmente. Sin embargo, esto no ocurre en ecuaciones diferenciales funcionales autónomas de tipo neutro ya que la estabilidad asintótica no implica la estabilidad asintótica uniformemente. Pero si nosotros hacemos la hipótesis de que D sea estable, entonces si se verifica la implicación anterior, y por tanto, tendremos la estabilidad asintótica exponencialmente.

Por la fórmula de representación de las soluciones (1.2.6) se deduce que la solución de la ecuación (1.3.6) es dada por

$$x(t) = X(t)D(\phi) + \int_{-r}^{0-} d_\beta\Big\{- \int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)]\mu(\beta-\alpha) + \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\Big\}\phi(\beta) + \int_0^t X(t-\alpha)b\cdot f[\sigma(\alpha)]d\alpha \tag{1.3.7}$$

Hemos usado en esta representación el hecho de que el sistema es autónomo, esto es, μ y η son independientes de t y por tanto la matriz fundamental, que valia cero para $t<\alpha$ y era la matriz unitaria para $t = \alpha$ sólo depende de la diferencia $t-\alpha$.

Puesto que $\sigma = (c,x) = c'\cdot x$ tenemos

$$\sigma(t) = c'X(t)D(\phi) + c'\int_{-r}^{0-} d_\beta\Big\{- \int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)\mu(\beta-\alpha) + \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\Big\}\cdot\phi(\beta) + \int_0^t c'X(t-\alpha)b\cdot f[\sigma(\alpha)]d\alpha.$$

Sea

$$z(t) = c'X(t)D(\phi) + c'\int_{-r}^{0-} d_\beta\Big\{ - \int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)\mu(\beta-\alpha) + \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\Big\}\phi($$

$$k(t) = c'X(t)b$$

entonces obtenemos

$$\sigma(t) = z(t) + \int_0^t k(t-\alpha)f[\sigma(\alpha)]d\alpha \tag{1.3.8}$$

Supongamos ahora que el espectro del generador infinitesimal de la solución semigrupo está contenido en el semiplano de de la izquierda, esto es, existe un $\delta > 0$ tal que $\mathrm{Re}\,\sigma(A) \leqq -\delta < 0$, es decir, las raices de la ecuación caracteristica $\det\Delta(\lambda) = 0$, donde $\Delta(\lambda) = \lambda D(e^{\lambda\cdot}) - L(e^{\lambda\cdot})$, estan contenidas en el semiplano $(-\infty,-\delta]$.

Como ya mencionamos, la hipótesis de que el espectro del generador infinitesimal este situado en el semiplano de la izquierda implica (Henry [20]) que la solución semigrupo (equivalente a la matriz fundamental) y por tanto su derivada, tiende a cero exponencialmente cuando $t \to \infty$.

De todo esto se deduce que $z(t)$, $\frac{dz(t)}{dt}$, $k(t)$ y $\frac{dk(t)}{dt}$ tienden a cero exponencialmente. Por tanto, podemos suponer que existen constantes positivas α y K tales que

$$|z(t)| + \left|\frac{dz(t)}{dt}\right| + |k(t)| + \left|\frac{dk(t)}{dt}\right| \leqq Ke^{-\alpha t} \qquad \text{para } t \geqq 0$$

Puesto que $z(t)$ y $k(t)$ son iguales a cero para $t < 0$ (por serlo $X(t)$) sus transformadas de Fourier estan bien definidas, lo mismo que para la funcion $f(\sigma)$ por pertenecer a la clase $\mathscr{S}$.

Definamos ahora las funciones

$$f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)] & 0 \leqq t \leqq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$$\sigma_T(t) = \begin{cases} \sigma(t) & 0 \leqq t \leqq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$$z_T(t) = \begin{cases} z(t) & 0 \leqq t \leqq T \\ + \int_0^T k(t-\alpha)f[\sigma(\alpha)] & t > T \end{cases}$$

y consideremos

$$\chi(T) = \int_0^T \left\{\sigma(t)-z(t)-\frac{1}{h} f[\sigma(t)] + q\left(\frac{d\sigma(t)}{dt} - \frac{dz(t)}{dt}\right)\right\} f[\sigma(t)]d$$

$$= \int_0^\infty \left\{\sigma_T(t)-z_T(t) - \frac{1}{h} f_T[\sigma(t)] + q\left(\frac{d\sigma_T(t)}{dt} - \frac{dz_T(t)}{dt}\right)\right\} f_T(t)d$$

Ahora tomamos la transformada de Fourier, que denotamos por ~, y recordamos que la transformada de la derivada f' de f es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f'(t)dt = i\omega\tilde{f}(\omega)-f(0), \quad f',f \in L_1$$

La formula de Porseval dice que si $f_1,f_2 \in L_1 \cap L_2$ y existen definidas en $[0,\infty)$ entonces

$$\int_0^\infty f_1 \cdot f_2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\tilde{f}_1(\omega)\tilde{f}_2(\cdot\omega)d\omega$$

Asi pues, como $\sigma_T(0)-z_T(0) = 0$, tenemos

$$\chi(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{[\tilde{\sigma}_T-\tilde{z}_T - \frac{1}{h}\tilde{f}_T + qi\omega(\tilde{\sigma}_T-\tilde{z}_T)]\cdot\tilde{f}_T'\right\} d\omega$$

donde ' denota la transpuesta.

Como

$$\sigma_T(t)-z_T(t) = \int_0^t k(t-\alpha)f_T(\alpha)d\alpha$$

el teorema de convolución para la transformada de Fourier dice que

$$\tilde{\sigma}_T - \tilde{z}_T = \tilde{k}\cdot\tilde{f}_T .$$

Esto es cierto para la transformada de Laplace. Puesto que $k \equiv 0$ y $f_T \equiv 0$ para $t < 0$ tambien es cierto para la transformada de Fourier.

Entonces

$$\chi(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{[\tilde{k}\cdot\tilde{f}_T - \frac{1}{h}\tilde{f}_T + i\omega q\tilde{k}\cdot\tilde{f}_T]\ \tilde{f}_T'\right\}d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{[\tilde{k}(1+i\omega q) - \frac{1}{h}]\cdot\tilde{f}_T\cdot\tilde{f}_T'\right\}d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [\mathrm{Re}(1+i\omega q)\tilde{k} - \frac{1}{h}]|\tilde{f}_T|^2 d\omega$$

Por tanto, si $\mathrm{Re}(1+i\omega q)\tilde{k} - \frac{1}{h} \leqq 0$, entonces $\chi(T) \leqq 0$. Pero esto significa que

$$(1.3.9) \qquad \int_0^T \left\{\sigma(t) - \frac{1}{h}f[\sigma(t)] + q\frac{d\sigma(t)}{dt}\right\}f[\sigma(t)]dt \leqq$$

$$\int_0^T \left\{z(t) + q\frac{dz(t)}{dt}\right\}f[\sigma(t)]dt$$

De la condición de sector $h_1\sigma^2 \leqq \sigma f(\sigma) \leqq h_2\sigma^2$, $h_1 \leqq h_2 < h$, deducimos

$$\sigma\left(\sigma-\frac{f(\sigma)}{h}\right) = \sigma^2 - \frac{\sigma f(\sigma)}{h} \geqq \sigma^2 - \frac{h_2\sigma^2}{h} = \frac{h-h_2}{h}\,\sigma^2 \quad \text{y asi}$$

$$\sigma^2 f(\sigma)\left(\sigma - \frac{1}{h}\, f(\sigma)\right) \geqq \frac{h-h_2}{h}\,\sigma^3\cdot f(\sigma) = \frac{h-h_2}{h}\,\sigma^2(\sigma f(\sigma)) \geqq \frac{h-h_2}{h}\,\sigma^2 h_1 \sigma^2$$

y por tanto

$$f(\sigma)\left(\sigma - \frac{1}{h}\, f(\sigma)\right) \geqq \frac{h-h_2}{h}\cdot h_1\sigma^2 = h_3\sigma^2$$

Entonces de (1.3.9) resulta

$$h_3\int_0^T \sigma^2(t)dt + q\int_0^T \frac{d\sigma(t)}{dt}[f(\sigma(t))]dt \leqq \int_0^T \left\{z(t)+q\frac{dz(t)}{dt}\right\} f[\sigma(t)]dt$$

$$h_3\int_0^T \sigma^2(t)dt + q\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} f[\sigma(t)]d\sigma \leqq \int_0^T \left\{z(t)+q\frac{dz(t)}{dt}\right\} f[\sigma(t)]dt$$

Sea $\quad F(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma$

entonces obtenemos

$$(1.3.10) \quad h_3\int_0^T \sigma^2(t)dt + qF[\sigma(T)] \leqq \int_0^T \left\{z(t) + q\frac{dz(t)}{dt}\right\} f[\sigma(t)]dt + qF[\sigma(0)]$$

Sea $\sigma(T)>0$. Para $0<\sigma<\sigma(T)$ tenemos $\sigma f(\sigma)>\sigma^2 h_1$, esto es

$$f(\sigma)>\sigma h_1 \Rightarrow F(\sigma) = \int_0^{\sigma(T)} f(\sigma)d\sigma > h_1\int_0^{\sigma(T)} \sigma d\sigma = \frac{h_1}{2}\,\sigma^2(T)$$

Por tanto la desigualdad (1.3.10) se puede escribir

$$(1.3.11)\quad q\frac{h_1}{2}\,\sigma^2(T) + h_3\int_0^T \sigma^2(t)dt \leq qF[\sigma(0)] + \int_0^T \left\{z(t)+q\frac{dz(t)}{dt}\right\}\cdot$$

$$\cdot f[\sigma(t)]dt$$

Por otro lado, tenemos que

$$|z(t)| \leq K_1e^{-\alpha t}\|\phi\| , \qquad \left|\frac{dz(t)}{dt}\right| \leq K_2e^{-\alpha t}\|\phi\|$$

$$y \quad \sigma f(\sigma) \leq h_2\sigma^2 \implies |f(\sigma)| \leq h_2|\sigma|$$

y asi

$$\left|\int_0^T \left\{z(t)+q\frac{dz(t)}{dt}\right\}\cdot f[\sigma(t)]dt\right| \leq K_3 \sup_{0\leq t\leq T}|\sigma(t)|\cdot\|\phi\|\cdot\int_0^T e^{-\alpha t}dt$$

De esta forma y de la desigualdad (1.3.11) obtenemos

$$(1.3.14)\quad \frac{q\cdot h_1}{2}\,\sigma^2(T) + h_3\int_0^T \sigma^2(t)dt \leq qF[\sigma(0)] + K_4\cdot\|\phi\|\cdot \sup_{0\leq t\leq T}|\sigma(t)|$$

Puesto que $\sigma^2(t) \geq 0$, tambien tenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{q\cdot h_1}{2}\,\sigma^2(T) \leq qF[\sigma(0)] + K_4\cdot\|\phi\|\cdot \sup_{0\leq t\leq T}|\sigma(t)|$$

Como la desigualdad ha sido establecida para todo T, podemos escribir

$$\frac{qh_1}{2} \sup_{0 \leqq t \leqq T} \sigma^2(t) \leqq qF[\sigma(0)] + K_4 \cdot \|\phi\| \cdot \sup_{0 \leqq t \leqq T} |\sigma(t)|$$

pero $\left(\sup_{0 \leqq t \leqq T} |\sigma(t)|\right)^2 \leqq \sup_{0 \leqq t \leqq T} \sigma^2(t)$ y entonces

$$\frac{qh_1}{2} \left(\sup_{0 \leqq t \leqq T} |\sigma(t)|\right)^2 \leqq qF[\sigma(0)] + K_4 \|\phi\| \cdot \sup_{0 \leqq t \leqq T} |\sigma(t)|$$

$$\frac{qh_1}{2} \left(\sup_{0 \leqq t \leqq T} |\sigma(t)|\right)^2 - K_4 \|\phi\| \cdot \sup_{0 \leqq t \leqq T} |\sigma(t)| - qF[\sigma(0)] \leqq 0$$

Considerando la última fórmula como una inecuación de 2º grado en $\sup_{0 \leqq t \leqq T} |\sigma(t)|$, tenemos

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} |\sigma(t)| \leqq \frac{K_4 \|\phi\| + \sqrt{K_4^2 \|\phi\|^2 + 2q^2 h_1 F[\sigma(0)]}}{q \cdot h_1}$$

y por tanto $|\sigma(t)| \leqq K_5 \cdot |\phi|$

Ahora, teniendo en cuenta la representación de la solución (1.3.7) tenemos que $|x(t)| \leqq K_6 \|\phi\|$

De la fórmula (1.3.8), es decir, de $\sigma(t) = z(t) + \int_0^t k(t-\alpha) f[\sigma(\alpha)] d\alpha$ y del hecho de que $\left|\frac{dz(t)}{dt}\right| \leqq K_2 e^{-\alpha t} \|\phi\|$ deducimos que

$$\left|\frac{d\sigma(t)}{dt}\right| \leqq K_7 \|\phi\|$$

y por tanto, de (1.3.14) tenemos que

$$\int_0^T \sigma^2(t)dt \leq K_8 \|\phi\|$$

Esto implica (ver Halanay [8], p. 167-168) que $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0$. Por tanto $\lim_{t\to\infty} f[\sigma(t)] = 0$.

De aqui deducimos, por la formula (1.3.8) que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

Asi hemos obtenido el siguiente

Teorema. 1.3.1. Supongamos el sistema (1.3.6), si el espectro del generador infinitesimal A de la ecuación homogenea está contenido en el semiplano de la izquierda o equivalentemente, si D es estable y la solución trivial del sistema homogeneo es asintóticamente estable y si existe un $q > 0$ tal que

$$\mathrm{Re}(1+i\omega q)\tilde{k} - \frac{1}{h} \leq 0, \text{ donde } \tilde{k} = c'\tilde{X}b$$

entonces la solución cero del sistema (1.3.6) es asintóticamente estable en grande para toda función f de la clase $\mathcal{S}$. Es decir, el sistema es absolutamente estable, es decir, toda solución tiende a cero cuando $t \to \infty$.

De la misma forma, nosotros podemos estudiar el problema de estabilidad para sistemas de la forma

$$(1.3.15) \qquad \frac{d}{dt} D(x_t) = L(x_t) + bf[\sigma(t-r)], \quad \sigma = (c,x) = c'x$$

es decir cuando la señal de control aparece con retraso.

Teorema.1.3.2. Supongamos el sistema (1.3.15), si el espectro del generador infinitesimal, $\sigma(A)$, correspondiente a la ecuación homogenea, es tal que existe un $\delta > 0$ para el cual $\mathrm{Re}\,\sigma(A) \leqq -\delta < 0$, si existe un $q > 0$ tal que

$$\mathrm{Re}(1+i\omega q)e^{-i\omega r}\tilde{k}-\frac{1}{h} \quad 0, \text{ donde } \tilde{k} = c'\tilde{X}b$$

entonces el sistema es absolutamente estable.

Demostración: La fórmula de representación de las soluciones de (1.3.15) es

$$x(t) = X(t)D(\phi) + \int_{-r}^{0-} d_\beta \Big\{ - \int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)\mu(\beta-\alpha) + \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\Big\}\phi(\beta)$$
$$+ \int_0^t X(t-\alpha)bf[\sigma(\alpha-r)]d\alpha$$

Los mismos cálculos que antes conducen a

$$\sigma(t) = c'X(t)D(\phi) + c'\int_{-r}^{0-} d_\beta \Big\{ -\int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)]\mu(\beta-\alpha)$$
$$+ \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\Big\}\phi(\beta) + \int_0^t c'X(t-\alpha)bf[\sigma(\alpha-r)]d\alpha$$

por tanto

$$\sigma(t) = z(t) + \int_0^t k(t-\alpha)f[\sigma(\alpha-r)]d\alpha$$

Definamos la función

$$k_1(t) = \begin{cases} k(t-r) & t \geqq r \\ 0 & 0 \leqq t < r \end{cases} \tag{1.3.16}$$

entonces obtenemos despues de hacer $\alpha-r = s$

$$\sigma(t) = z(t) + \int_{-r}^{t-r} k(t-r-s)f[\sigma(s)]ds = z(t) + \int_{-r}^{t-r} k_1(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

$$= z(t) + \int_{-r}^{0} k_1(t-s)f[\sigma(s)]ds + \int_{0}^{t-r} k_1(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

Denotemos

$$z_1(t) = z(t) - \int_{-r}^{0} k_1(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

entonces

$$\sigma(t) = z_1(t) + \int_{0}^{t-r} k_1(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

Como para $s > t-r$ se tiene $t-s < r$, por (1.3.16), $k_1(t-s) = 0$ nosotros tenemos

$$\sigma(t) = z_1(t) + \int_0^t k_1(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

que es una ecuación integral de la misma forma que (1.3.8).

La demostración ahora continua lo mismo que antes.

Finalmente, observemos que

$$\tilde{k}_1 = \int_0^\infty e^{-i\omega t}k_1(t)dt = \int_r^\infty e^{-i\omega t}k(t-r)dt = \int_0^\infty e^{-i\omega(t+r)}k(t)dt =$$

$$= e^{-i\omega r}\int_0^\infty e^{-i\omega t}k\,(t)dt = e^{-i\omega r}\cdot\tilde{k}$$

y de aqui la conclusión del teorema.

En la práctica, el control del sistema $\frac{d}{dt}(Dy_t) = L(y_t)$ puede ser realizado de diferentes formas que corresponden a varias selecciones de la función característica (ver LaSalle-Lefschetz [27] p. 76). Una tal forma es determinar la función característica a partir de una ecuación diferencial escalar de la forma

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = f[\sigma(t)] \quad \text{donde} \quad \sigma(t) = c'y(t)-\rho\xi(t)$$

Asi, nosotros ahora consideramos el siguiente sistema controlado

$$(1.3.17)\quad \frac{d}{dt}D(y_t) = L(y_t) + b\xi(t), \qquad \frac{d\xi(t)}{dt} = f[\sigma(t)],$$

$$\sigma(t) = c'y(t)-\rho\xi(t), \quad \rho > 0$$

el cual aparece con frecuencia en la teoría de control automático.

Teorema.1.3.3. Supongamos el sistema (1.3.17) y que la función inicial tiene la segunda derivada continua. Si el espectro del generador infinitesimal $\sigma(A)$ correspondiente a la aproximación lineal de (1.3.17), esto es, correspondiente a $\frac{d}{dt} D(y_t) = L(y_t)$ está contenido en el semiplano de la izquierda, si existe una constante $q > 0$ tal que

$$\mathrm{Re}(q+\frac{1}{i\omega})c'\bar{X}b - q\cdot\rho - \frac{1}{h} \leqq 0,$$

si $\int_0^\infty f(\sigma)d\sigma = \infty$ y si $\rho > \int_0^\infty c'X(t)bdt$, entonces la solución trivial del sistema (1.3.17) es asintóticamente estable en grande para toda función f que cumple $0 \leqq \sigma f(\sigma) \leqq h\sigma^2$ (la condición de sector).

Observemos, que la hipótesis de que la función inicial tenga segunda derivada continua implica que la solución tambien lo es, excepto en los puntos $t = kr$, $k = 0,1,\ldots$ (ver Hale [11], p.5-6)

Demostración: La fórmula de representación para las soluciones de (1.3.17) es

$$y(t) = X(t)D(\phi) + \int_{-r}^{0-} d_\beta\Big\{-\int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)\mu(\beta-\alpha) + \\ + \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\Big\}\phi(\beta) + \int_0^t X(t-\alpha)b\xi(\alpha)d\alpha$$

Puesto que $\sigma(t) = c'y(t) - \rho\xi(t)$ tenemos

$$(1.3.18)\quad \sigma(t) = c'X(t)D(\phi) + c'\int_{-r}^{0-} d_\beta\Big\{-\int_0^{t^+}[d_\alpha X(t-\alpha)]\mu(\beta-\alpha) + \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\Big\}\phi(\beta) + \int_0^t c'X(t-\alpha)b\xi(\alpha)d\alpha - \rho\xi(t)$$

Sea $k_o(t) = c'X(t)b$. Por la continuidad de las soluciones, $k_o(t)$ es continua para $t \geqq 0$ y por la hipótesis hecha sobre la estabilidad exponencial se tiene $|k_o(t)| \leqq M_o e^{-\alpha t}$. Por tanto la integral $\int_t^\infty k_o(\beta)d\beta$ es convergente.

Definamos

$$k(t) = \int_t^\infty k_o(\beta)d\beta. \text{ Por tanto } |k(t)| \leqq Me^{-\alpha t}$$

Asi, la última integral en (1.3.18) verifica

$$\int_0^t c'X(t-\alpha)b\xi(\alpha)d\alpha = \int_0^t k_o(t-\alpha)\xi(\alpha)d\alpha = \int_0^t \xi(\alpha)\frac{d}{d\alpha}k(t-\alpha)d\alpha = (\text{partes})$$

$$= \xi(\alpha)k(t-\alpha)\Big|_0^t - \int_0^t k(t-\alpha)\frac{d\xi(\alpha)}{d\alpha}d\alpha$$

$$= k(0)\xi(t) - k(t)\xi(0) - \int_0^t k(t-\alpha)f[\sigma(\alpha)]d\alpha$$

Entonces (1.3.18) se puede escribir como

$$\sigma(t) = c'X(t)D(\phi) + c'\int_{-r}^{0-} d_\beta\Big\{-\int_0^{t^+}[d_\alpha X(t-\alpha)]\mu(\beta-\alpha) + \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\Big\}\phi(\beta) - k(t)\xi(0) - \int_0^t k(t-\alpha)f[\sigma(\alpha)]d\alpha - [\rho-k(0)]\xi(t)$$

Llamemos

$$z(t) = c'X(t)D(\phi) + c'\int_{-r}^{0-} d_\beta\left\{-\int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)]\mu(\beta-\alpha)^{\cdot} + \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\right\}\phi($$

$$- k(t)\xi(0)$$

$$\gamma = \rho - k(0)$$

entonces

$$\sigma(t) = z(t) - \int_0^t k(t-\alpha)f[\sigma(\alpha)]d\alpha - \gamma\xi(t) \tag{1.3.19}$$

donde $\dfrac{d\xi(t)}{dt} = f[\sigma(t)]$

Supongamos $\gamma > 0$, esto es, $\rho > k(0) = \int_0^\infty c'X(t)bdt$ y sean

$$f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)] & 0 \leqq t \leqq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$$\omega_T(t) = \begin{cases} \sigma(t)+\gamma\xi(t)-z(t) & 0 \leqq t \leqq T \\ -\int_0^T k(t-\alpha)f[\sigma(\alpha)]d\alpha & t > T \end{cases}$$

Entonces

$$\omega_T(t) = -\int_0^t k(t-\alpha)f_T[\sigma(\alpha)]d\alpha$$

Consideremos ahora la función

$$\chi(t) = \int_0^T \left\{\omega_T - \frac{f_T}{h} + q\left(\frac{d\omega_T}{dt} - \gamma f_T\right)\right\} f_T dt$$

$$= \int_0^\infty \left\{\omega_T - \frac{f_T}{h} + q\left(\frac{d\omega_T}{dt} - \gamma f_T\right)\right\} f_T dt = \text{(tomando transformada de Fourier)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{[\tilde{\omega}_T - \frac{\tilde{f}_T}{h} + i\omega q\tilde{\omega}_T - q\gamma\tilde{f}_T]\tilde{f}'_T\right\}d\omega$$

Por el teorema de convolución, $\tilde{\omega}_T = -\tilde{k}\cdot\tilde{f}_T$ y asi

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -\left\{\mathrm{Re}(1+i\omega q)\tilde{k} + (q\gamma+\frac{1}{h})\right\}|\tilde{f}_T|^2 d\omega$$

Si $\mathrm{Re}(1+i\omega q)\tilde{k} + (q\gamma+\frac{1}{h}) \geqq 0$ entonces $\chi(t) \leqq 0$. Esto significa que

$$\int_0^T \left\{\sigma(t)+\gamma\xi(t)-z(t)-\frac{1}{h}f[\sigma(t)] + q\left(\frac{d\sigma}{dt} + \gamma\frac{d\xi}{dt} - \frac{dz}{dt} - \gamma f[\sigma(t)]\right)\right\}f[\sigma(t)]dt \leqq$$

pero $\frac{d\xi(t)}{dt} = f[\sigma(t)]$ y asi

$$\int_0^T \left\{\sigma(t)-\frac{1}{h}f[\sigma(t)]\right\}f[\sigma(t)]dt+\gamma\int_0^T \xi(t)\frac{d\xi(t)}{dt}dt + q\int_0^T f[\sigma(t)]d\sigma(t) \leqq$$

$$\int_0^T \left\{z(t)+q\frac{dz(t)}{dt}\right\}f[\sigma(t)]dt = \int_0^T (z+q\frac{dz}{dt})d\xi = \text{(partes)}$$

$$= [z(T)+q\,\frac{dz(T)}{dt}]\xi(t) - [z(0)+q\,\frac{dz(0)}{dt}]\xi(0) - \int_0^T \left(\frac{dz}{dt} + q\frac{d^2z}{dt}\right)\xi(t)dt +$$

$$+ q\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dz(t_i^-)}{dt} - \frac{dz(t_i^+)}{dt}\right)$$

donde n es determinado por aquellas $t_i = k_r$, $k = 0,1,\ldots.n$ que son menores o iguales que T.

De nuestras hipotesis se deduce (ver Datko [6a])

$$\int_0^T \left\{\sigma(t)-\frac{1}{h} f[\sigma(t)]\right\} f[\sigma(t)]dt + \frac{\gamma}{2}\xi^2(T) + q\int_0^{\sigma(T)} f(\sigma)d\sigma \leqq$$

$$\leqq M_1 + M_2 \sup_{0\leqq t\leqq T} |\xi(t)|$$

y por tanto, puesto que el resto de los términos son positivos,

$$\frac{\gamma}{2}\xi^2(T) \leqq M_1 + M_2 \sup_{0\leqq t\leqq T} |\xi(t)|$$

y, por el mismo razonamiento que en el teorema 1.3.1

$$|\xi(t)| \leqq M_3$$

Ademas

$$\int_0^T \left\{\sigma(t) - \frac{1}{h} f[\sigma(t)]\right\} f[\sigma(t)]dt + q\int_0^T f(\sigma)d\sigma \leqq M_4$$

de donde $|\sigma(t)| \leqq M_5$, si $\int_0^\infty f(\sigma)d\sigma = \infty$

De la igualdad (1.3.19) tenemos

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dz}{dt} - \int_0^t \frac{dk(t-\alpha)}{dt} f[\sigma(\alpha)]d\alpha - k(0)f[\sigma(t)] - \gamma f[\sigma(t)]$$

y por tanto $\left|\frac{d\sigma}{dt}\right| \leqq M_6$

De la convergencia de la integral $\int_0^\infty \left\{\sigma - \frac{1}{h} f(\sigma)\right\} f(\sigma) dt$ se deduce que $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0$. Por tanto, y por nuestras hipótesis

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ z(t) - \int_0^t k(t-\alpha) f[\sigma(\alpha)] d\alpha \right\} = 0$$

es decir, por (1.3.19), $\lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0$

Asi de (1.3.18) se deduce que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

Puesto que $k(t) = \int_t^\infty k_o(\beta) d\beta$, tenemos $\dot{k}(t) = -k_o(t)$ y tomando la transformada de Fourier

$i\omega\tilde{k} - k(0) = -\tilde{k}_o$, $\tilde{k} = -\frac{1}{i\omega}[\tilde{k}_o - k(0)]$ y asi la condición

$$\operatorname{Re}(1+i\omega q)\tilde{k} + q\gamma + \frac{1}{h} \geqq 0 \quad \text{llega a ser}$$

$$\operatorname{Re}\left\{(1+i\omega q)\frac{-1}{i\omega}[\tilde{k}_o - k(0)]\right\} + q[\rho - k(0)] + \frac{1}{h} \geqq 0$$

$$\operatorname{Re}\left\{(q + \frac{1}{i\omega})(-\tilde{k}_o) + k(0)q + \frac{k}{i\omega} + q\rho - qk(0) + \frac{1}{h}\right\} \geqq 0$$

$$\operatorname{Re}(q + \frac{1}{i\omega})(-\tilde{k}_o) \geqq -q\rho - \frac{1}{h} \Rightarrow \operatorname{Re}(q + \frac{1}{i\omega})\tilde{k}_o \leqq q\rho + \frac{1}{h}$$

y por tanto

$$\mathrm{Re}(q+\frac{1}{i\omega})\tilde{k}_o - q\rho - \frac{1}{h} \leqq 0 \quad \text{donde} \quad \tilde{k}_o = c'\tilde{X}b$$

El teorema está demostrado.

Finalmente, consideremos un sistema de la forma.

$$(1.3.20) \quad \frac{d}{dt}D(y_t) = L(y_t) + b\xi(t), \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = f[\sigma(t)],$$

$$\sigma = c'y + p\xi + \rho\frac{d\xi}{dt}, \quad \rho < 0$$

La fórmula de representación para las soluciones de (1.3.20) es

$$y(t) = X(t)D(\phi) + \int_{-r}^{0-} d_\beta \left\{ - \int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)\mu(\beta-\alpha) + \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\right\}\phi(\beta$$

$$+ \int_0^t X(t-\alpha)b\xi(\alpha)d\alpha$$

Por tanto

$$(1.3.21) \quad \sigma(t) = c'X(t)D(\phi) + c'\int_{-r}^{0-} d_\beta \left\{ - \int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)]\mu(\beta-\alpha) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\right\}\phi(\beta) + \int_0^t c'X(t-\alpha)b\xi(\alpha)d\alpha$$

$$+ \rho\xi(t) + \rho\frac{d\xi(t)}{dt}$$

Sea $k_o(t) = c'X(t)b$, para $t \geq 0$ $|k_o(t)| \leq M_o e^{-\alpha t}$, despues de suponer que la solución trivial de la aproximación lineal es exponencialmente estable. Asi la integral $\int_t^\infty k_o(\beta)d\beta$ es convergente y si $k_1(t) = \int_t^\infty k_o(\beta)d\beta$ entonces $|k_1(t)| \leq M_1 e^{-\alpha t}$. Analogamente la integral

$\int_t^\infty k_1(\beta)d\beta$ es convergente y por tanto la función

$k(t) = \int_t^\infty k_1(\beta)d\beta$ verifica $|k(t)| \leq Me^{-\alpha t}$

De esta forma la última integral en (1.3.21) puede ser escrita como

$$\int_o^t c'X(t-\alpha)b\xi(\alpha)d\alpha = \int_o^t k_o(t-\alpha)\xi(\alpha)d\alpha = \left\{\begin{matrix} dv=k_o(t-\alpha), & v=k_1(t-\alpha) \\ \\ u=\xi(\alpha), & du=\frac{d\xi(\alpha)}{dt}\,d\alpha \end{matrix}\right\} =$$

$$= k_1(t-\alpha)\xi(\alpha)\Big|_o^t - \int_o^t k_1(t-\alpha)\,\frac{d\xi(\alpha)}{dt}\,d\alpha$$

$$= k_1(0)\xi(t) - k_1(t)\xi(0) - \int_o^t k_1(t-\alpha)\,\frac{d\xi(\alpha)}{dt}\,d\alpha =$$

$$= \left\{\begin{matrix} dv=k_1(t-\alpha), & v=k(t-\alpha) \\ \\ u=\frac{d\xi(\alpha)}{dt}, & du=f[\sigma(\alpha)]d\alpha \end{matrix}\right\} =$$

$$= k_1(0)\xi(t) - k_1(t)\xi(0) - k(0)\frac{d\xi(t)}{dt} + k(t)\frac{d\xi(0)}{dt} +$$

$$+ \int_o^t k(t-\alpha)f[\sigma(\alpha)]d\alpha$$

Entonces (1.3.21) toma la forma

$$\sigma(t) = c'X(t)D(\phi) + c' \int_{-r}^{0-} d_\beta \Big\{ - \int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)\mu(\beta-\alpha) +$$

$$\int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\ \phi(\beta)\Big\} - k_1(t)\xi(0) + \int_0^t k(t-\alpha)f[\sigma(\alpha)]d\alpha +$$

$$+ k(t)\frac{d\xi(0)}{dt} + [p+k_1(0)]\xi(t) + [\rho-k(0)]\frac{d\xi(t)}{dt}$$

Llamemos

$$z(t) = c'X(t)D(\phi) + c' \int_{-r}^{0} d_\beta \Big\{- \int_0^{t^+} [d_\alpha X(t-\alpha)\mu(\beta-\alpha) +$$

$$+ \int_0^t X(t-\alpha)\eta(\beta-\alpha)\Big\}\phi(\beta) - k_1\xi(0) + k(t)\frac{d\xi(0)}{dt}$$

$p+k_1(0) = -\alpha$, $\rho-k(0) = -\beta$, $\frac{d\xi}{dt} = \eta$. Asi se tiene

$$(1.3.22) \quad \sigma(t) = z(t) + \int_0^t k(t-s)f[\sigma(s)]ds - \alpha\xi(t) - \beta\eta(t)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = f[\sigma]$$

De aqui podemos deducir

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dz}{dt} + \int_0^t \frac{dk(t-s)}{dt} f[\sigma(s)]ds + k(0)f[\sigma(t)] -\alpha\eta(t) - \beta f[\sigma(t)]$$

$$= \frac{dz}{dt} - \int_0^t k_1(t-s)f[\sigma(s)ds + \rho f[\sigma(t)] - \alpha\eta(t)$$

Sean

$$f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)], & 0 \leqq t \leqq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$$\omega_T(t) = \begin{cases} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{dz}{dt} - \rho f[\sigma(t)] + \alpha\eta(t) & 0 \leqq t \leqq T \\ -\int_0^T k_1(t-s)f[\sigma(s)]ds & t > T \end{cases}$$

entonces

$$\omega_T(t) = -\int_0^T k_1(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

cuya transformada de Fourier es, por el teorema de convolución $\tilde{\omega}_T = -\tilde{k}_1 \cdot \tilde{f}_T$.

Consideremos de nuevo la función

$$\chi(T) = \int_0^T \left(\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\eta - \frac{dz}{dt}\right) f[\sigma(t)]dt = \int_0^T [\omega_T(t) + \rho f_T[\sigma(t)] \cdot f_T(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}(\tilde{\omega}_T + \rho\tilde{f}_T)\tilde{f}_T' d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\rho - \mathrm{Re}\tilde{k}_1)|\tilde{f}_T|^2 d\omega$$

Si $\rho - \mathrm{Re}\tilde{k}_1 \leqq 0$, entonces $\chi(T) \leqq 0$. Esto significa que

$$\int_0^T \frac{d\sigma}{dt} f(\sigma)dt + \int_0^T \alpha \cdot \eta f(\sigma)dt \leqq \int_0^T \frac{dz}{dt} f[\sigma(t)]dt, \text{ como } \frac{d\eta(t)}{dt} = f[\sigma(t)]$$

$$\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} f(\sigma)d\sigma + \int_0^T \eta d\eta \leqq \int_0^T \frac{dz}{dt}\frac{d\eta}{dt}\, dt$$

$$\int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} f(\sigma)d\sigma + \frac{\alpha}{2}\eta^2(T) - \frac{\alpha}{2}\eta^2(0) \leqq \frac{dz(T)}{dt}\eta(T) - \frac{dz(0)}{dt}\eta(0) - $$

$$- \int_0^T \frac{d^2z}{dt^2}\eta(t)dt$$

despues de supomer que la función inicial tiene 2 derivada continua.

Por tanto

$$\int_0^{\sigma(T)} f(\sigma)d\sigma + \frac{\alpha}{2}\ \eta^2(T) \leqq M_2 + M_3 \sup_{0 \leqq t \leqq T} |\eta(t)|$$

donde la constante M_2 depende de $\eta(0)$ y de $\sigma(0)$.

Si $\alpha > 0$, esto es, $p+k_1(0) < 0$, $p+\int_0^\infty k_o(s)ds < 0$ y puesto que los otros términos son positivos, se tiene

$$|\eta(t)| \leqq M_4$$

y si $\int_0^\infty f(\sigma)d\sigma = \infty$ tambien se deduce que $|\sigma(t)| \leqq M_5$, $\left|\frac{d\sigma}{dt}\right| \leqq M_6$, $\left|\frac{d\xi}{dt}\right| \leqq M_7$, (asi se tiene la estabilidad uniforme.)

Ahora si $\rho\text{-Re}\tilde{k}_1 < 0$ y $\lim_{|\omega| \to \infty} (\rho\text{-Re}\tilde{k}_1) < 0$, entonces

$$\chi(T) < -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_T|^2 d\omega = -\varepsilon_o \int_0^T f^2[\sigma(t)]dt$$

por tanto, $\int_0^T f^2[\sigma(t)] \leqq M_8$.

Asi $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0$ y tambien $\lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} \eta(t)$

(Ver Halanay [8], cap. 2-3).

Puesto que $k_1(t) = \int_t^\infty k_o(\beta)d\beta$ se tiene $\dot{k}_1(t) = -k_o(t)$ y aplicando la transformada de Fourier

$$i\omega\tilde{k}_1 = -\tilde{k}_o + k_1(0), \quad \tilde{k}_1 = \frac{-1}{i\omega}\tilde{k}_o + \frac{k_1(0)}{i\omega}$$

puesto que el último término es imaginario, tenemos

$$\mathrm{Re}\tilde{k}_1 = -\mathrm{Re}\frac{1}{i\omega}\tilde{k}_o$$

y entonces, la condición $\rho-\mathrm{Re}\tilde{k}_1 < 0$ es

$$\rho + \mathrm{Re}\frac{1}{i\omega}\tilde{k}_o < 0$$

Asi hemos obtenido el siguiente teorema

Teorema. 1.3.4. Supongamos el sistema (1.3.20) que tiene la función inicial segunda derivada continua. Supongamos que las raices de la ecuación característica correspondiente a la aproximacion lineal de(1.3.20) están situadas en el semiplano de la izquierda .Si

$$\int_0^\infty f(\sigma)d\sigma = \infty, \quad p+\int_0^\infty k_o(s)ds < 0$$

y si $\rho+\mathrm{Re}\frac{1}{i\omega}\tilde{k}_o < 0$, donde $\tilde{k}_o(t) = c'\tilde{X}(t)b$, entonces, la solución cero del sistema (1.3.14) es asintóticamente estable en grande para toda función f con $\sigma f(\sigma) > 0$ para $\sigma \neq 0$.

Capitulo II

UN PROBLEMA DE LINEAS DE TRANSMISION DESCRITO POR ECUACIONES DIFERENCIALES DE TIPO NEUTRO.

II.1. Problema lineal. Estabilidad asintótica.

El problema de lineas de transmisión se describe por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales lineales de tipo hiperbólico para las cuales se define un problema mixto (es decir condiciones iniciales y en la frontera son dadas). Brayton [2] reduce este problema mixto a un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial en diferencias de tipo retardado asociada con una ecuación en diferencias.

Cooke-Krume obtuvieron un método sistemático para efectuar esta reducción, basado en el método de las características. Aplicando este método, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en diferencias de tipo retardado asociado con ecuaciones en diferencias se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + BJy(t-r) \\
y(t) &= E'x(t) + FJy(t-r)
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

con los valores iniciales $x(0) = a \in E^n$, $y_0 = \psi \in C([-r,0],E^n)$, esto es, $(a,\psi) \in E^n \times C = X$. Observemos que los valores iniciales son una constante en la primera coordenada, puesto que en ella no aparece el retraso, y una función ψ en la segunda coordenada.

J es la matriz $\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$ y A, B, E', (' denota la transpuesta) y F son matrices, que supondremos cuadradas. r es el vector formado con los retrasos r_n.

Una cuestión natural que surge de la observación del sistema (2.1.1) es preguntarse por cuales son las condiciones suficientes para la estabilidad asintótica del estado de equilibrio x = 0 y = 0. Usando el principio del argumento de la teoría de las funciones de variable compleja, Brayton ha investigado esta cuestión. El estudia la distribución de los ceros de la ecuación característica asociada con (2.1.1), es decir, las raices de

$$\begin{vmatrix} \lambda I-A & -BJe^{-\lambda r} \\ -E' & I-Fje^{-\lambda r} \end{vmatrix} = 0$$

Sin embargo, Rasvan [33] dice que los resultados de Brayton no son completos porque él no tiene en cuenta el operador estable definido por Cruz-Hale [6] que, como vimos, en la sección I.3. del Capítulo I, es una condición suficiente para la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro, y la ecuación (2.1.1) es de este tipo, como veremos mas adelante.

Ademas Brayton, solo estudia la ecuación homogenea (2.1.1). En la sección siguiente estudiaremos la ecuación no homogenea y obtendremos una representación de las soluciones para, a partir de ella, deducir algunas acotaciones exponenciales y obtener la estabilidad de las soluciones de la ecuación no lineal. Finalmente, usamos el método de Popov de la sección I.3. del Capítulo I para obtener la estabilidad absoluta del sistema de control asociado a (2.1.1).

En la presente sección, la teoría de estabilidad de Cruz-Hale se aplica a la ecuación (2.1.1) y obtenemos condiciones suficientes para la estabilidad asintótica de la solución trivial $x = 0$, $y = 0$.

Consideremos el sistema (2.1.1) en forma integrada, esto es,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t [Ax(s) + BJy(s-r)]ds$$

$$y(t) = E'x(t) + FJy(t-r)$$

Si introducimos un nuevo vector $z(t) = [x(t), y(t)]'$, $z_0 = [a, \psi]'$ el sistema se puede escribir de la forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix} z(t) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix} z(t-r) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_0 + \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(s) + \begin{bmatrix} 0 & BJ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(s-r) \right\} ds$$

Llamemos

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix} = K, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix} = M, \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = N, \quad \begin{bmatrix} 0 & BJ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P$$

Entonces la ecuación tiene la forma

(2.1.2) $$D(z_t) = D(z_o) + \int_o^t L(z_s)ds$$

donde

$$D(z_t) \overset{\text{def}}{=} Kz(t) - Mz(t-r), \qquad L(z_t) \overset{\text{def}}{=} Nz(t) + Pz(t-r)$$

Observemos que

$$D(z_o) = Kz(0) - Mz(-r) = \begin{bmatrix} x(0) \\ -E'x(0)+y(0)-FJy(-r) \end{bmatrix}$$

y esto debe ser igual

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_o = \begin{bmatrix} x(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, en la ecuación (2.1.1) debemos poner la condición de que los valores iniciales verifiquen

$$-E'x(0) + y(0) - FJy(-r) = 0$$

es decir,

(2.1.3) $$y(0) = E'x(0) + FJy(-r)$$

Por tanto, nuestro espacio integral debe ser

$$X_o = \{ (a,\psi) \mid \psi(0) = E'a + FJ\psi(-r) \}$$

donde, $$X_o \subset X = E^n \times C$$

Así trataremos con la ecuación

$$\text{(2.1.4)} \qquad \frac{d}{dt} D(z_t) = L(z_t), \qquad z_o = [a,\psi]' \in X_o$$

que como ya sabemos, es una ecuación diferencial funcional lineal, homogenea y autónoma de tipo neutro.

Sin embargo, surge una cuestión. Si calculamos la ecuación característica de (2.1.4) obtenemos

$$\det[\lambda(De^{\lambda\cdot}I - L(e^{\lambda\cdot}I)] = \begin{vmatrix} \lambda I-A & -BJe^{-\lambda r} \\ -E'\cdot\lambda & \lambda I-\lambda FJe^{-\lambda r} \end{vmatrix} = 0$$

que como podemos ver, no es equivalente a la ecuación característica considerada por Brayton.

Puesto que la ecuación (2.1.4) define un semigrupo $T(t)$ en X, tambien define un semigrupo $T_o(t)$ en X_o tal que $T_o(t) = T(t)|X_o$.

Si recordamos la definición de generador infinitesimal (sección I.2. Capitulo I) y observamos que de (1.2.11) se tiene

$$\dot{x}(0) = Aa + BJ\psi(-r)$$
$$\dot{\psi}(0) = E'\dot{x}(0) + FJ\dot{\psi}(-r)$$

vemos que el generador infinitesimal $\mathscr{A}$ del semigrupo $T(t)$ y su dominio $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ son dados por

$$\mathscr{A}(a,\psi) = \begin{bmatrix} c \overset{\text{def}}{=} Aa + BJ\psi(-r) \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}) = \{ (a,\psi)\in X_0 \,|\, \dot{\psi}\in C, \quad \dot{\psi}(0) = E'(Aa+BJ\psi(-r))+FJ\dot{\psi}(-r) \}$$

Observemos que $\dot{\psi}(0) = E'c + FJ\dot{\psi}(-r)$, es decir, $\dot{\psi}$ y C satisfacen (2.1.3) y por tanto, automáticamente,

$(c,\dot{\psi})\in X_0$, esto es, el rango $\mathscr{R}(\mathscr{A})\subset X_0$.

Asi $\quad \mathscr{A}:\ \mathscr{D}(\mathscr{A})\subset X_0 \longrightarrow X_0$.

De esta forma, el generador infinitesimal $\mathscr{A}_0$ del semigrupo es dado por

$$\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}\,|\,X_0$$

y su dominio es $\quad \mathscr{D}(\mathscr{A}_0) = \{ (a,\psi)\in \mathscr{D}(\mathscr{A})\cap X_0 \}$.

<u>Lema.</u> Sobre X_0 la ecuación característica correspondiente a (2.1.4) es

$$\begin{vmatrix} \lambda I-A & -BJe^{-\lambda r} \\ -E' & I-FJe^{-\lambda r} \end{vmatrix} = 0$$

Demostración: La ecuación

$$(\lambda I-\mathscr{A}_0)(a,\psi) = 0, \text{ si y solo si } \begin{cases} (\lambda I-\mathscr{A}_0)a = 0 \\ (\lambda I-\mathscr{A}_0)\psi = 0 \end{cases}$$

Por otro lado, $\mathscr{A}_0 a = Aa + BJ\psi(-r)$. Sabemos (sección I.2. capítulo I) que si la ecuación $(\lambda I-\mathscr{A}_0)\psi = 0$ tiene una solución diferente de cero, entonces esta solución es de la forma $\psi(\theta) = e^{\lambda\theta}.b$ y solo de esta forma ($e^{\lambda\theta}\cdot b$ es un vector propio de $\mathscr{A}_0$), b es un vector constante dado por $\psi(0) = b$. Como $\psi(0) = E'a + FJ\psi(-r)$, $b = E'a + FJ\psi(-r)$ y puesto que, $\psi(-r) = e^{-\lambda r}\cdot b$, tenemos

$$(\lambda I-\mathscr{A}_0)(a,\psi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda I-\mathscr{A}_0)a = 0 \\ (\lambda I-\mathscr{A}_0)\psi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda Ia-Aa-BJ\psi(-r) = 0 \\ b = E'a+FJ\psi(-r), \quad \psi(\theta) = e^{-\lambda\theta}\cdot b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda I-A)a - BJe^{-\lambda r}.b = 0 \\ -E'a + (I-FJe^{-\lambda r})b = 0 \end{cases}$$

esto es, si y solo si la ecuación

$$\begin{bmatrix} \lambda I-A & -BJe^{-\lambda r} \\ -E' & I-FJe^{-\lambda r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

tiene una solución distinta de la trivial. Pero esto es equivalente a que el determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda I-A & -BJe^{-\lambda r} \\ -E' & I-FJe^{-\lambda r} \end{vmatrix} = 0$$

Asi vemos que, sobre nuestro espacio integral X_o, la ecuación (2.1.4) tiene la misma ecuación característica que la considerada por Brayton.

Vamos ahora a dar condiciones suficientes para que la solución $z = 0$ de (2.1.4) sea asintóticamente estable.

Consideremos la función $V\colon X_o \longrightarrow R$ definida por

$$(2.1.5) \qquad V(\phi) = (D\phi)'(D\phi) + \int_{-r}^{0} \phi'(\theta)K\phi(\theta)d\theta$$

donde $\phi = z_o = [a,\psi] \in X_o$ y $D(\phi) = K\phi(0) - M\phi(-r)$, $\frac{d}{dt} D(\phi) = = L(\phi) = N\phi(0) + P\phi(-r)$

Calculemos la derivada $\dot{V}$ a lo largo de (2.1.4),

$$\dot{V}_{(2.1.4)}(\phi) = (\dot{D\phi})'.D(\phi)+(D\phi)'(\dot{D\phi})+\phi'(0)K\phi(0)-\phi'(-r)K\phi(-r)$$

$$= [N\phi(0)+P\phi(-r)]'[K\phi(0)-M\phi(-r)] + [K\phi(0)-M\phi(-r)]' \cdot[N\phi(0)+P\phi(-r)] + \phi'(0)K\phi(0) - \phi'(-r)K\phi(-r)$$

$$= [\phi'(0)N'+\phi'(-r)P'][K\phi(0)-M\phi(-r)] + [\phi'(0)K'-\phi'(-r)M']\cdot [N\phi(0)+P\phi(-r)] + \phi'(0)K\phi(0) - \phi'(-r)K\phi(-r)$$

$$\begin{aligned} &= -\phi'(0)[-N'K - K'N - K]\phi(0) \\ &\quad -\phi'(-r)[P'M + M'P + K]\phi(-r) \\ &\quad -\phi'(0)[N'M - K'P]\phi(-r) \\ &\quad -\phi'(-r)[-P'K + M'N]\phi(0) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$K = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & BJ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(2.1.4)}(\phi) = &-\phi'(0)[-N'-N-K]\phi(0) - \phi'(-r)K\phi(-r) - \phi'(0)P\phi(-r) \\ &- \phi'(-r)P'\phi(0) \end{aligned}$$

Ahora introducimos la condición que deben satisfacer los valores iniciales para estar en X_0, esto es,

$$\psi(0) = E'a + FJ\psi(-r)$$

que, en forma matricial, toma la forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \psi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ \psi(-r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \psi(-r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \psi(-r) \end{bmatrix}$$

esto es,

$$K\phi(0) = M^*\phi(-r), \quad \text{donde} \quad M^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix}$$

Por tanto, como $\phi(0) = K^{-1}M^*\phi(-r)$, $\phi'(0) = \phi'(-r)(K^{-1}M^*)'$, tenemos

$$\dot{V}_{(2.1.4)}(\phi) = -\phi'(-r)\,(K^{-1}M^*)'[-N'-N-K](K^{-1}M^*)\,\phi(-r) - \phi'(-r)K\phi(-r)$$
$$-\phi'(-r)(K^{-1}M^*)'P\phi(-r) - \phi'(-r)P'(K^{-1}M^*)\phi(-r)$$

Despues de hacer todos los cálculos indicados con las matrices llegamos a

$$(2.1.7) \quad \dot{V}_{(2.1.4)}(\phi) = -\phi'(-r)\begin{bmatrix} -A-A'-I & -EFJ \\ 0 & -(FJ)'FJ \end{bmatrix} - \phi'(-r)\begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix}\phi(-r)$$

$$-\phi'(-r)\begin{bmatrix} 0 & BJ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\phi(-r) - \phi'(-r)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (BJ)' & 0 \end{bmatrix}\phi(-r)$$

$$= -\phi'(-r)\begin{bmatrix} -A-A' & -EFJ+BJ \\ -E'+(BJ)' & -(FJ)'FJ+I \end{bmatrix}\phi(-r)$$

Sean

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -A-A' & -EFJ+BJ \\ -E'+(BJ)' & -(FJ)'FJ+I \end{bmatrix}, \qquad Q_1' = \begin{bmatrix} -A-A' & -E+BJ \\ -(FJ)'E'+(BJ)' & -(FJ)'FJ+I \end{bmatrix}$$

y definamos

$$Q = \frac{Q_1+Q_1'}{2} = \begin{bmatrix} -A-A' & \frac{-E(FJ+I)}{2} + BJ \\ \frac{-[(FJ)'+I]E'}{2} + (BJ)' & -(FJ)'FJ+I \end{bmatrix}$$

Considerando $\dot{V}_{(2.1.4)}(\phi)$ como una forma cuadrática en $\phi(-r)$, la condición de que $\dot{V}_{(2.1.4)}(\phi)$ sea definida negativa es que la matriz Q sea definida positiva.

Podemos ya dar el siguiente

<u>Teorema.2.1.1.</u> Si

1) el radio espectral $r(FJ) < 1$

2) $K + K' \geqq 0$

3) Q es definida positiva

entonces, la solución trivial $z = 0$ de (2.1.4) es asintóticamente estable.

<u>Demostración:</u> Puesto que $D(z_t) = Kz(t) - Mz(t-r)$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix} z(t) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix} z(t-r)$$

su ecuación característica es

$$\left| \begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix} - e^{-\lambda r} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} I & 0 \\ -E' & I-FJe^{-\lambda r} \end{vmatrix} = |I-FJe^{-\lambda r}| = 0 \tag{2.1.8}$$

Por la hipótesis 1) esto es, si el radio espectral de FJ es menor que 1, se deduce que el operador D es estable. Por la hipótesis 2) y teniendo en cuenta (2.1.5) se deduce que $V(\phi) \geqq (D\phi)'(D\phi)$, es decir, $V(\phi) \geq |D\phi|^2$.

De (2.1.7) obtenemos

$$\dot{V}_{(2.1.4)}(\phi) = -\phi'(-r)Q\phi(-r)$$

y por la hipótesis 3), $\dot{V}_{(2.1.4)}(\phi) \leqq -c|\phi(-r)|^2$, donde $c > 0$.

Asi, V es una función de Liapunov.

Por otro lado, de (2.1.5), se tiene $V(\phi) \leqq b^2\|\phi\|^2$, para algun $b > 0$. Vemos que para todo $a > 0$ con $\|\phi\| < a$ implica que $V(\phi) \leqq b^2a^2$ y, puesto que, $|D\phi|^2 \leqq V(\phi)$ tenemos $|D\phi| \leqq b\cdot a$. Por tanto si tomamos $l = a^2\cdot b^2$ y $K = a\cdot b$ las condiciones del corolario en la sección I.3. del capítulo I son satisfechas.

Asi, toda solución $z_t(\phi)$ de (2.1.4) con $\|\phi\| < a$ se aproxima al conjunto invariante Γ, cuando $t \to \infty$.

Si ahora probamos que $\Gamma = \{0\}$, entonces la solución será asintóticamente estable.

Puesto que $\Gamma \subset \{\phi \in \bar{G} \mid \dot{V}(\phi) = 0\}$ tenemos que $\dot{V}(\phi) \leqq -c|\phi(-r)|^2 \leqq 0$, $(c > 0)$ entonces $\Gamma \subset \{\phi \in \bar{G} | \phi = 0\}$. Esto prueba que $\Gamma = \{0\}$ y por tanto el teorema está demostrado.

<u>Corolario.</u> Supongamos que las hipótesis del teorema anterior son satisfechas. Si $\sup_{|x|=1} |(FJ)x| < 1$, entonces la solución

$z = 0$ de la ecuación (2.1.4) es asintóticamente estable y la estabilidad se conserva bajo perturbaciones en los retrasos.

Demostración: Observando (2.1.8) la condición impuesta implica que D es estable localmente en los retrasos y por tanto, tambien es estable globalmente en los retrasos.

Pudiera ocurrir que las condiciones impuestas en le teorema fuesen tan fuertes que no hubiese ninguna ecuación que las verificase. Para ver que esto no ocurre vamos a dar un ejemplo.

Ejemplo. Consideremos que el sistema es dado por las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_o & 0 \\ o & a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_o & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e_o & 0 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_o & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

entonces

$$FJ = \begin{bmatrix} f_o & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f_o \\ f_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad BJ = \begin{bmatrix} 0 & b_o \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E' = E$$

Ahora, intentaremos satisfacer las hipótesis del teorema:

1) Si $|f_o+f_1| < 1$, entonces D es estable.

En efecto,

$$D(\phi) = K\phi(0) - M\phi(-r) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix} \phi(0) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix} \phi(-r), \text{ entonces}$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix} - e^{-\lambda r} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I-FJe^{-\lambda r} \end{bmatrix} = |I-FJe^{-\lambda r}| = 0$$

implica, con $e^{-\lambda} = \rho$,

$$|I-FJ\rho^{-r}| = \begin{vmatrix} 1 & -f_o\rho^{-r} \\ -f_1\rho^{-r} & 1 \end{vmatrix} = 1-\rho^{-r}(f_o+f_1) = 0$$

esto es $\rho^r = f_o+f_1$. Por tanto, si $|f_o+f_1| < 1$ entonces todas las raices ρ tienen modulo menor que 1.

2) Si $|e_o|<1$, $|e_1| < 1$ entonces $K+K' \geqq 0$.

Tenemos que

$$K = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e_o & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -e_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad K' = \begin{bmatrix} I & -E \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_o & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -e_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K+K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_o & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -e_1 \\ -e_o & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -e_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

K+K' sera definida positiva si y solo si cada de uno de sus menores principales es positivo (Teorema de Sylvester).

Los dos menores principales son positivos.

El tercer menor principal es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -e_o \\ 0 & 1 & 0 \\ -e_o & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-e_o^2. \quad \text{Este menor sera positivo si} \quad |e_o|<1 \ (*)$$

El cuarto menor principal es

$|K+K'| = (1-e_o^2)(1-e_1^2)$, que sera positivo si $|e_o|<1$ y $|e_1|<1$ ó si $|e_o|>1$ y $|e_1|>1$. Tomamos la primera condición para que sea compatible con (*).

Asi, si $|e_o|<1$ y $|e_1|<1$ la matriz K+K' es definida positiva.

3) Si $a_o<0$, $a_1<0$, $b = \dfrac{e_o f_o}{2}$, $b_1 = \dfrac{e_1 f_1}{2}$, $|f_o|<1$, $|f_1|<1$ y $e_o^2>8|a_o|(1-f_1^2)$, entonces Q es definida positiva.

En efecto, calculemos la matriz Q

$$Q = \begin{bmatrix} -A-A' & \dfrac{-E(FJ+I)}{2} + BJ \\ \dfrac{-[(FJ)'+I]E'}{2} + (BJ)' & -(FJ)'FJ+I \end{bmatrix}$$

$$-A-A' = \begin{bmatrix} -2a_o & 0 \\ 0 & -2a_1 \end{bmatrix}, \quad FJ+I = \begin{bmatrix} 1 & f_o \\ f_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E(FJ+I) = \begin{bmatrix} e_o & e_o f_o \\ e_1 f_1 & e_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-E(FJ+I)}{2} + BJ = \begin{bmatrix} \frac{-e_o}{2} & \frac{-e_o f_o}{2} + b_o \\ \frac{-e_1 f_1}{2} + b_1 & \frac{-e_1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{-[(FJ)'+I]}{2} + (BJ)' = \begin{bmatrix} \frac{-e_o}{2} & \frac{-e_1 f_1}{2} + b_1 \\ \frac{-e_o f_o}{2} + b_o & \frac{-e_1}{2} \end{bmatrix} \qquad -(FJ)'FJ+I = \begin{bmatrix} 1-f_1^2 & 0 \\ 0 & 1-f_o^2 \end{bmatrix}$$

asi

$$Q = \begin{bmatrix} -2a_o & 0 & \frac{-e_o}{2} & \frac{-e_o f_o}{2} + b_o \\ 0 & -2a_1 & \frac{-e_1 f_1}{2} + b_1 & \frac{-e_1}{2} \\ \frac{-e_o}{2} & \frac{-e_1 f_1}{2} + b_1 & 1-f_1^2 & 0 \\ \frac{-e_o f_o}{2} + b_o & \frac{-e_1}{2} & 0 & 1-f_o^2 \end{bmatrix}$$

Q sera definida positiva si y solo si cada uno de sus menores principales es positivo. Estos menores principales son:

$Q_1 = -2a_o$. Si $a_o < 0$ entonces $Q_1 > 0$

$$Q_2 = \begin{vmatrix} -2a_o & 0 \\ 0 & -2a_1 \end{vmatrix} = 4a_o a_1.$$

Puesto que debemos tener $a_o < 0$, entonces $Q_2 > 0$ si $a_1 < 0$

$$Q_3 = \begin{vmatrix} -2a_o & 0 & \frac{-e_o}{2} \\ 0 & -2a_1 & \frac{-e_1f_1}{2}+b_1 \\ \frac{-e_o}{2} & \frac{-e_1f_1}{2}+b_1 & 1-f_1^2 \end{vmatrix} = 4a_oa_1(1-f_1^2) + 2a_1\frac{e_o^2}{4} + 2a_o(\frac{-e_1f_1}{2} + b_1)^2$$

Si $\frac{e_1f_1}{2} = b_1$, $|f_1| < 1$ y $e_o^2 > 8|a_o|(1-f_1^2)$, entonces

$Q_3 = 4a_oa_1(1-f_1^2) + 2a_1\frac{e_o^2}{4}$. Puesto que $a_o < 0$, $a_1 < 0$, si $|f_1| < 1$ el primer término es positivo y el segundo es negativo. Pero

$$Q_3 > 4a_oa_1(1-f_1^2) + 2a_1\frac{8|a_o|}{4}(1-f_1^2) = 0$$

Por tanto $Q_3 > 0$

$$Q_4 = |Q| = (1-f_o^2)[4a_oa_1(1-f_1)^2 + 2a_1\frac{e_o^2}{4} + 2a_o(\frac{-e_1f_1}{2} + b_1)^2]$$

$$- \frac{e_1}{2}\begin{vmatrix} -2a_o & \frac{-e_o}{2} & \frac{-e_of_o}{2}+b_o \\ 0 & \frac{-e_1f_1}{2}+b_1 & \frac{-e_1}{2} \\ \frac{-e_1}{2} & 1-f_1^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-(\frac{-e_of_o}{2} + b_o)\begin{vmatrix} 0 & \frac{-e_o}{2} & \frac{-e_of_o}{2}+b_o \\ -2a_1 & \frac{-e_1f_1}{2}+b_1 & \frac{-e_1}{2} \\ \frac{-e_1f_1}{2}+b_1 & 1-f_1^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1-f_o)^2[4a_oa_1(1-f_1^2) + 2a_1\frac{e_o^2}{4} + 2a_o(\frac{-e_1f_1}{2} + b_1)^2]$$

$$- \frac{e_1}{2}[- \frac{e_o^2}{4} \cdot \frac{e_1}{2} + \frac{e_o}{2}(\frac{-e_1f_1}{2} + b_1)(\frac{-e_of_o}{2} + b_o) - a_oe_1(1-f_1^2)]$$

$$- (\frac{-e_of_o}{2} + b_o)[\frac{e_oe_1}{4}(\frac{-e_1f_1}{2} + b_1) - 2a_1(1-f_1^2)(\frac{-e_of_o}{2} + b_o)$$

$$- (\frac{-e_1f_1}{2} + b_1)^2(\frac{-e_of_o}{2} + b_o)]$$

$$= (1-f_o^2)[4a_oa_1(1-f_1^2) + 2a_1\frac{e_o^2}{4} + 2a_o(\frac{-e_1f_1}{2} + b_1)^2] + \frac{e_o^2}{4} \cdot \frac{e_1^2}{4}$$

$$- \frac{e_oe_1}{4}(\frac{-e_1f_1}{2} + b_1)(\frac{-e_of_o}{2} + b_o) + \frac{a_oe_1^2}{2}(1-f_1^2) - \frac{e_oe_1}{4} \cdot$$

$$(\frac{-e_of_o}{2} + b_o)(\frac{-e_1f_1}{2} + b_1) + 2a_1(1-f_1^2)(\frac{-e_of_o}{2} + b_o)^2 + (\frac{-e_1f_1}{2} + b_1)$$

$$(\frac{-e_of_o}{2} + b_o)^2$$

Si $\frac{e_of_o}{2} = b_o$, $\frac{e_1f_1}{2} = b_1$, $|f_1|<1$, $|f_o| < 1$ y $e_o^2 > 8|a_o|(1-f_1^2)$

entonces

$$|Q| = (1-f_o^2)[4a_oa_1(1-f_1^2) + 2a_1\frac{e_o^2}{4}] + \frac{e_o^2}{4}\frac{e_1^2}{4} + \frac{a_oe_1^2}{2}(1-f_1^2)$$

Si $|f_o| < 1$, por la parte anterior, el primer término es positivo. Respecto a los otros dos sumandos, y como $a_o < 0$, tenemos

$$\frac{e_o^2}{4}\frac{e_1^2}{4} + \frac{a_oe_1^2}{2}(1-f_1^2) = \frac{e_1^2}{2}(\frac{e_o^2}{8} + a_o(1-f_1^2)) > \frac{e_1^2}{2}[\frac{8|a_o|}{8}(1-f_1^2) + a_o(1-f_1^2)] = 0$$

Asi, $|Q| > 0$

Podemos enunciar el siguiente teorema

<u>Teorema.2.1.2.</u> Sea

$$\dot{x}(t) = \Lambda x(t) + BJy(t-r)$$

$$y(t) = E'x(t) + FJy(t-r)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_o & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_o & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e_o & 0 \\ 0 & e_1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_o & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El estado de equilibrio $x = 0$, $y = 0$ es asintóticamente estable si las siguientes condiciones tienen lugar:

$a_o < 0$, $a_1 < 0$, $|f_o+f_1|<1$, $|f_o|<1$, $|f_1| < 1$, $|e_o|<1$, $|e_1|<1$, $b = \frac{e_of_o}{2}$,

$b_1 = \frac{e_1f_1}{2}$ y $e_o^2 > 8|a_o|(1-f_1^2)$

Observemos que si nosotros sustituimos las condiciones $|f_o+f_1| < 1$, $|f_o|<1$, $|f_1| < 1$ por $|f_o|+|f_1| < 1$ entonces el operador D es estable localmente en los retrasos y por tanto, es estable globalmente en los retrasos.

Por tanto tenemos el

<u>Corolario.</u> Si $a_o < 0$, $a_1 < 0$, $|f_o|+|f_1|< 1$, $|e_o|<1$, $|e_1|<1$

$b_o = \frac{e_o f_o}{2}$, $b_1 = \frac{e_1 f_1}{2}$ y $e_o^2 > 8|a_o|(1-f_1^2)$, entonces la solución $x = 0$, $y = 0$ es asintóticamente estable y la estabilidad asintótica es conservada bajo perturbaciones en los retrasos.

Como un ejemplo numérico consideremos

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{8} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{48} & 0 \\ 0 & \frac{9}{40} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

Aqui, $a_o < 0$, $a_1 < 0$, $|f_o| + |f_1| < 1$, $|e_o| < 1$, $|e_1| < 1$

$$b_o = \frac{e_o f_o}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}}{2} = \frac{1}{48}, \qquad b_1 = \frac{e_1 f_1}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}{2} = \frac{9}{40}$$

$$e_o^2 = \frac{1}{4} > 8 \left| \frac{-1}{8} \right| \left(1 - \frac{81}{100}\right) = \frac{19}{100}$$

y por tanto, la solución sera asintóticamente estable y la estabilidad es conservada bajo perturbaciones en los retrasos.

II.2. Problema no homogeneo. Fórmula de variación de constantes.

Consideremos el sistema no homogeneo correspondiente a (2.1.1)

(2.2.1)
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BJy(t-r) + f(t) \\ y(t) &= E'x(t) + FJy(t-r) + g(t) \end{aligned}$$

donde

$$f \in L_1^{loc}([0,\infty),E^n), \quad g \in C([0,\infty),E^n)$$

Este sistema es equivalente al siguiente

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BJy(t-r) + f(t)$$

$$\frac{d}{dt}\,[y(t) - E'x(t) - FJy(t-r) - g(t)] = 0$$

con la condición

(2.2.2) $$y(t) - E'x(t) - FJy(t-r) = g(t), \quad t \geq 0, \quad \forall f,g.$$

Si llamamos $z(t) = [x(t),y(t)]'$ resulta

(2.2.3) $$\frac{d}{dt}\left\{ D(z_t) - \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix} \right\} = L(z_t) + \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$D(z_t) = Kz(t) - Mz(t-r), \qquad L(z_t) = Nz(t) + Pz(t-r)$$

con K, M, N y P siendo las matrices consideradas en la sección anterior.

Por la sección anterior, sabemos que si $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ es la solución de la ecuación homogenea asociada a (2.2.3), con valores iniciales $\begin{bmatrix} a \\ \psi \end{bmatrix}$, entonces se debe verificar la condicion (2.1.3), esto es,

$$u_2(0) - E'u_1(0) - FJu_2(-r) = 0$$

es decir,

$$\psi(0) - E'a - FJ\psi(-r) = 0$$

Evidentemente, $u(a,\psi)$ es lineal en los valores iniciales. Supongamos ahora que

$$v(G) = \begin{bmatrix} v_1(G) \\ v_2(G) \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad G = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

es una solución de la ecuación no homogenea (2.2.3). Entonces la condición (2.2.2), toma la forma

$$v_2(t) - E'v_1(t) - FJv_2(t-r) = g(t), \quad t \geq 0, \quad \forall f,g$$

y en particular para t = 0

(2.2.4) $\qquad v_2(0) - E'v_1(0) - FJv_2(-r) = g(0), \qquad \forall f,g.$

Por la teoría general de sistemas lineales no homogeneos (ver Hale [11] cap. 16) sabemos que $v(G)$ es lineal y continua en G y que si z es la solución general de (2.2.3) entonces la linealidad de L y la unicidad de las soluciones de (2.2.3) implica que

$$z = u + v, \quad \text{es decir} \begin{cases} x = u_1 + v_1 \\ \\ y = u_2 + v_2 \end{cases}$$

con datos iniciales (a,ψ_1). Observemos que solo hemos cambiado el valor inicial en la segunda coordenada, pues en la primera no hay necesidad de cambiarlo ya que en ella la ecuación diferencial es ordinaria. De hecho, el segundo valor inicial tambien es el mismo que en el sistema homogeneo. En efecto, puesto que $x(0) = a = a+v_1(0)$ $\Rightarrow v_1(0) = 0$. El valor inicial $\psi_1 = \psi_1(\psi,G)$ con $G \equiv 0$ (ecuación homogenea) debe coincidir con ψ, esto es $\psi_1(\psi,0) = \psi$. Pero, ¿ qué es $\psi_1(0,G)$?. Puesto que la condición (2.2.4) toma la forma

$$\psi_1(0,G)(0) - E'\cdot 0 - FJ\psi_1(0,G)(-r) = g(0), \qquad \forall f,g$$

es decir

$$\psi_1(0,G)(0) - FJ\psi_1(0,G)(-r) = g(0), \qquad \forall f,g$$

y puesto que ψ_1 es continua en $[-r,0]$ si tomamos $\psi_1(0,G)(\theta) = y_o$, y_o = constante, $\theta \in [-r,0]$, entonces

$$y_o - FJy_o = g(0)$$

Si ponemos la condición de que el operador D sea estable, es decir, que el radio espectral $r(FJ) \leqq 1$, lo cual es equivalente a que todos los valores propios de FJ esten en el semiplano de la izquierda, entonces existe una unica $y_o(g)$, tal que

$$y_o(g) - FJy_o(g) = g(0), \qquad y_o(0) = 0$$

Asi, tenemos que $(I-FJ)^{-1}$ existe y que

$$y_o = (I-FJ)^{-1}\, g(0)$$

Ahora bien, podemos suponer que <u>g(0) = 0</u>, pues de otro modo, sea $y \longrightarrow z + (I-FJ)^{-1}\, g(0)$, esto es, $y(t) = z(t) + y_o$. Entonces (2.2.1) toma la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + FJz(t-r) + f(t) + FJ(I-FJ)^{-1}\, g(0)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= E'x(t) + FJz(t-r) + g(t) - y_o + FJy_o \\ &= E'x(t) + FJz(t-r) + g(t) - g(0) \end{aligned}$$

que es un sistema del mismo tipo, con

$$f \longrightarrow f(t) + FJ(I-FJ)^{-1}g(0)$$

$$g \longrightarrow g(t) - g(0)$$

para lo cual debemos tener $g(0) = 0$.

Por tanto, $y_o = \psi_1(0,G) = 0$ y por consiguiente, los valores iniciales son (a,ψ). A esta conclusión tambien se puede llegar si exigimos que $(a,\psi) \in X_o$, pues como $\psi(0)-E'a+\psi(-r) = g(0)$ y $\psi(0)-E'a+\psi(-r) = 0$, para $(a,\psi) \in X_o$, entonces $g(0) = 0$. Por tanto consideremos la ecuación

$$\frac{d}{dt}\left\{D(z_t) - \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}\right\} = L(z_t) + \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.5}$$

donde

$$z_o = (a,\psi) \in X_o \subset E^n\, C, \quad f \in L_1^{loc}([0,\infty),E^n),\ g \in C([0,\infty),E^n) \text{ y } g(0) =$$

Por el teorema 2.2. en Hale-Cruz [18] existe una matriz X de funciones valoradas de variación acotada en intervalos finitos, que se anula en $[-r,0)$ y tal que la solución de la ecuación no homogenea puede ser representada por

$$v(t) \int_o^t X(t-s) \begin{bmatrix} f(s) \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_o^{t^+} [d_s X(t-s)] \begin{bmatrix} 0 \\ g(s) \end{bmatrix}$$

Esta matriz X es, precisamente, la matriz fundamental de la que hablamos en la sección I.2. del capítulo I.

Puesto que, tenemos que satisfacer la condición

$$v_2(t) - E'v_1(t) - FJv_2(t-r) = g(t), \quad t \geq 0, \quad \forall f,g$$

a partir de ella vamos a obtener $v_1(t)$ y $v_2(t)$.

Sea

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_{11}(t) & X_{12}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) \end{bmatrix}$$

entonces

$$v(t) = \int_o^t \begin{bmatrix} X_{11}(t-s) & X_{12}(t-s) \\ X_{21}(t-s) & X_{22}(t-s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(s) \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$- \int_o^{t^+} d_s \begin{bmatrix} X_{11}(t-s) & X_{12}(t-s) \\ X_{21}(t-s) & X_{22}(t-s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ g(s) \end{bmatrix}$$

$$= \int_o^t \begin{bmatrix} X_{11}(t-s) \\ X_{21}(t-s) \end{bmatrix} f(s)ds - \int_o^t \begin{bmatrix} d_s X_{12}(t-s) \\ d_s X_{22}(t-s) \end{bmatrix} g(s) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

por tanto

$$v_1(t) = \int_o^t X_{11}(t-s)f(s)ds - \int_o^{t^+} [d_s X_{12}(t-s)]g(s)$$

$$v_2(t) = \int_o^t X_{21}(t-s)f(s)ds - \int_o^{t^+} [d_s X_{22}(t-s)]g(s)$$

Asi, la condición anterior toma la forma

$$\int_0^t X_{21}(t-s)f(s)ds - \int_0^{t^+} [d_s X_{22}(t-s)g(s) - E' \int_0^t X_{11}(t-s)f(s)ds +$$

$$+ E' \int_0^{t^+} [d_s X_{12}(t-s)g(s) - FJ \int_0^t X_{21}(t-s-r)f(s)ds +$$

$$+ FJ \int_0^{t^+} [d_s X_{22}(t-s-r)g(s) = g(t)$$

ó bien

$$(2.2.6) \quad \int_0^t [X_{21}(t-s) - E'X_{11}(t-s) - FJX_{21}(t-s-r)]f(s)ds$$

$$- \int_0^{t^+} d_s[X_{22}(t-s) - E'X_{12}(t-s) - FJX_{22}(t-s-r)]g(s) = g(t)$$

$$t \geqq 0, \ \forall f, g$$

Puesto que (2.2.6) es cierta para toda f y para toda g, esto es, f y g pueden variar independientemente, usando g = 0 y toda f, tenemos

$$X_{21}(t-s) - E'X_{11}(t-s) - FJX_{21}(t-s-r) = 0, \ t \geqq s$$

ó bien

$$X_{21}(t) - E'X_{11}(t) - FJX_{21}(t-r) = 0, \quad t \geqq 0$$

Si elegimos $X_{11}(0) = I$ y como $X_{21}(-r) = 0$ (ya que X se anula en $[-r,0))$, tenemos que $X_{21}(0) = E'$.

Usando en (2.2.6), $f = 0$ y toda g, tenemos

$$(2.2.7)\quad -\int_0^{t^+} d_s[X_{22}(t-s)-E'X_{12}(t-s)-FJX_{22}(t-s-r)]g(s) = g(t), \quad t \geqq 0$$

Consideremos la función de Heaviside

$$H(t-s) = \begin{cases} -I & t \geqq s \\ 0 & t < s \end{cases}$$

Entonces encontramos que

$$\int_0^{t^+} [d_s H(t-s)]g(s) = g(t)$$

puesto que

$$\int_0^{t^+} [d_s H(t-s)]g(s) = \int_0^{t} [d_s H(t-s)]g(s) + \int_t^{t^+} [d_s H(t-s)]g(s)$$

$$= [H(0^-) - H(0)]g(t) = g(t)$$

ya que $H(t-s)$ es constante con un salto en $t = s$ y $H(0^-) = 0$, $H(0) = -I$.

Asi, podemos escribir (2.2.7) en la forma

$$-\int_0^{t^+} d_s[X_{22}(t-s)-E'X_{12}(t-s)-FJX_{22}(t-s-r)+H(t-s)]g(s) = 0, \quad t \geqq$$

esto implica que

$$X_{22}(t-s) - E'X_{12}(t-s) - FJX_{22}(t-s-r) + H(t-s) = \text{constante}, \quad t \geqq s$$

ó bien

$$(2.2.8) \quad X_{22}(t) - E'X_{12}(t) - FJX_{22}(t-r) + H(t) = \text{constante}, \ t \geqq 0$$

Para $t = 0$, tenemos

$$X_{22}(0) - E'X_{12}(0) - FJX_{22}(-r) + H(0) = \text{constante}$$

Si elegimos $X_{22}(0) = I$ y $X_{12}(0) = 0$, tenemos

$$I - I = \text{constante} \ = 0$$

y por tanto, sustituyendo en (2.2.8), obtenemos

$$X_{22}(t) - E'X_{12}(t) - FJX_{22}(t-r) = I, \quad t \geqq 0$$

Por lo tanto, hemos probado el siguiente teorema de representación de las soluciones de (2.2.5)

<u>Teorema.2.2.1.</u> Sea $v(t)$ la solución de la ecuación no homogenea (2.2.5). Si el operador D es estable, entonces

$$v(t) = \int_0^t X(t-s) \begin{bmatrix} f(s) \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_0^{t^+} [d_s X(t-s)] \begin{bmatrix} 0 \\ g(s) \end{bmatrix}, \quad t \geqq 0$$

donde $X(\cdot)$ es una matriz de funciones valorada de variación acotada que se anula en $[-r,0)$ y en $t = 0$ está definida por

$$X(0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ E' & I \end{bmatrix} \quad \text{Ademas, si ponemos } X(t) = \begin{bmatrix} X_{11}(t) & X_{12}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) \end{bmatrix}$$

entonces se cumplen las siguientes fórmulas:

$$X_{21}(t) - E'X_{11}(t) - FJX_{21}(t-r) = 0, \quad t \geq 0 \tag{2.2.9}$$

$$X_{22}(t) - E'X_{12}(t) - FJX_{22}(t-r) = I, \quad t \geq 0 \tag{2.2.10}$$

Ahora vamos a probar un resultado coccerniente con acotaciones exponenciales.

<u>Teorema. 2.2.2.</u> Si

1) el operador D es estable
2) el espectro del generador infinitesimal $\mathcal{A}_0$ está contenido en el semiplano de la izquierda, es decir, $\exists \delta > 0$ tal que $\mathrm{Re}\lambda \leq -\delta < 0, \forall \lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0)$,

entonces las matrices $X_{11}(t)$, $X_{21}(t)$, $\dot{X}_{11}(t)$, $\dot{X}_{12}(t)$, $\dot{X}_{21}(t)$ y $\dot{X}_{22}(t)$ tienden a cero exponencialmente.

<u>Demostración</u>: Recordemos que el espectro del generador infinitesimal $\mathcal{A}_0$ está dado por $\sigma(\mathcal{A}_0) = \{\lambda \mid \det H(\lambda) = 0\}$ donde

$$H(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I-A & -BJe^{-\lambda r} \\ & \\ -E' & I-FJe^{-\lambda r} \end{bmatrix}$$

Puesto que $X(t)$ es la matriz fundamental, sus columnas son soluciones de la ecuación homogenea asociada a (2.2.1). Ahora bien, de las dos columnas $[X_{11}(t), X_{21}(t)]$, $[X_{12}(t), X_{22}(t)]$, solamente la primera satisface la ecuación homogenea en el espacio integral X_o, lo que no ocurre con la segunda columna, como se puede ver en las formulas (2.2.9) y (2.2.10).

Si derivamos en (2.2.10) obtenemos

$$\text{(2.2.11)} \qquad \dot{X}_{22}(t) - E'\dot{X}_{12}(t) - FJ\dot{X}_{22}(t-r) = 0, \quad t \neq kr, \quad k = 0,1,2,...$$

y entonces observamos que $\dot{X}_{12}$ y $\dot{X}_{22}$ satisfacen la condición en el espacio integral X_o.

Puesto que $X(t)$ es la matriz fundamental, tenemos

$$\text{(2.2.12)} \qquad \begin{aligned} &\dot{X}_{11}(t) = AX_{11}(t) + BJX_{21}(t-r) \\ &X_{21}(t) - E'X_{11}(t) - FJX_{21}(t-r) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{(2.2.13)} \qquad \begin{aligned} &\dot{X}_{12}(t) = AX_{12}(t) + BJX_{22}(t-r) \\ &\dot{X}_{22}(t) - E'\dot{X}_{12}(t) - FJ\dot{X}_{22}(t-r) = 0 \end{aligned}$$

De Bellman y Cooke [1], pag. 177, se deduce que los elementos de la matriz $X(t)$ satisfacen a priori acotaciones exponenciales. Entonces se puede aplicar la transformada de Laplace a (2.2.12) y (2.2.13) y obtenemos

$$\left.\begin{aligned}(\lambda I-A)\tilde{X}_{11}(\lambda) - BJe^{-\lambda r}\tilde{X}_{21}(\lambda) &= I\\ -E'\tilde{X}_{11}(\lambda) + (I-FJe^{-\lambda r})\tilde{X}_{21}(\lambda) &= 0\end{aligned}\right\} \begin{bmatrix}\lambda I-A & -BJe^{-\lambda r}\\ -E' & I-FJe^{-\lambda r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X}_{11}(\lambda)\\ \tilde{X}_{21}(\lambda)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}(\lambda I-A)\tilde{X}_{12}(\lambda) - BJe^{-\lambda r}\tilde{X}_{22}(\lambda) &= 0\\ -E'\lambda\tilde{X}_{12}(\lambda) + (I-FJ)e^{-\lambda r}\,\tilde{X}_{22}(\lambda) &= I\end{aligned}\right\} \begin{bmatrix}\lambda I-A & -BJe^{-\lambda r}\\ -E' & I-FJe^{-\lambda r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\tilde{X}_{12}(\lambda)\\ \lambda\tilde{X}_{22}(\lambda)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}$$

por tanto,

$$\begin{bmatrix}\tilde{X}_{11}(\lambda) & \lambda\tilde{X}_{12}(\lambda)\\ \tilde{X}_{21}(\lambda) & \lambda\tilde{X}_{22}(\lambda)\end{bmatrix} = H^{-1}(\lambda)$$

Como el espectro del generador infinitesimal está situado en el semiplano de la izquierda $H^{-1}(\lambda)$ existe y por tanto, por los teoremas 12.19 y 12.20 en Bellman-Cooke [1] se deduce que existe un δ', $0<\delta'<\delta$ tal que

$$|X_{11}(t)| \leq K_{11}e^{-\delta' t}, \quad |X_{21}(t)| \leq K_{21}e^{-\delta' t}, \quad |\dot{X}_{12}(t)| \leq K'_{12}e^{-\delta' t}$$

La última acotación es debida a que la transformada de de Laplace de $\dot{X}_{12}$ es $\lambda\tilde{X}_{12}$. No ocurre lo mismo con $\dot{X}_{22}$ ya que su transformada de Laplace es $\lambda\tilde{X}_{22}-I$. No obstante de (2.2.11) y de la hipótesis de que el operador D es estable se deduce que $|\dot{X}_{22}(t)| \leq$ $\leq K'_{22}e^{-\delta' t}$.

De la primera ecuación en (2.2.12) se obtiene que $|\dot{X}_{11}(t)| \leq K'_{11}e^{-\delta' t}$.

De la segunda ecuación en (2.2.12) obtenemos

$$\dot{X}_{21}(t) - E'X_{11}(t) - FJ\dot{X}_{21}(t-r) = 0$$ y puesto que D es estable

llegamos a la conclusión de que $|\dot{X}_{21}(t)| \leq K'_{21}e^{-\delta' t}$. El teorema esta demostrado.

Este mismo problema ha sido tratado por Rasvan [33], con quien deseamos comparar nuestros resultados.

Usando la ecuación adjunta, Rasvan obtiene la siguiente representación de las soluciones de la ecuación no homogenea.

$$v_1(t) = \int_0^t z_{11}(t-s)f(s)ds + \int_0^t z_{12}(t-s)g(s)ds \tag{2.2.14}$$

$$v_2(t) = \int_0^t \dot{z}_{21}(t-s)f(s)ds + \frac{d}{dt}\int_0^t z_{22}(t-s)g(s)ds \tag{2.2.15}$$

donde las matrices $z_{ij}(t)$, $(i,j = 1,2)$ son definidas por las ecuaciones

$$\dot{z}_{11}(t) = z_{11}(t)A + z_{12}(t)E'$$

$$z_{12}(t) - z_{12}(t-r)FJ - z_{11}(t-r)BJ = 0$$

$$\dot{z}_{21}(t) = z_{21}(t)A + Z_{22}(t)E'$$

$$z_{22}(t) - z_{22}(t-r)FJ - z_{21}(t-r)BJ = I$$

con los datos iniciales

$$z(\theta) = \begin{bmatrix} z_{11}(\theta) & z_{12}(\theta) \\ z_{21}(\theta) & z_{22}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \theta = 0, \; z(\theta) = 0, \; \theta \in [-r,0)$$

ó bien en forma matricial

$$(2.2.16) \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_{11}(t) & z_{12}(t) \\ \dot{z}_{21}(t) & z_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(t) & z_{12}(t) \\ z_{21}(t) & z_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ E' & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} z_{11}(t-r) & z_{12}(t-r) \\ z_{21}(t-r) & z_{22}(t-r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & BJ \\ 0 & FJ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Nosotros, usando la fórmula de variación de constantes, hemos obtenido

$$(2.2.17) \qquad v_1(t) = \int_0^t X_{11}(t-s)f(s)ds - \int_0^{t^+} [d_s X_{12}(t-s)]g(s)$$

$$(2.2.18) \qquad v_2(t) = \int_0^t X_{21}(t-s)f(s)ds - \int_0^{t^+} [d_s X_{22}(t-s)g(s)$$

donde las matrices X_{ij} $(i,j = 1,2)$ estan definidas por las ecuaciones

$$\dot{X}_{11}(t) = AX_{11}(t) + BJX_{21}(t-r)$$
$$X_{21}(t) - E'X_{11}(t) - FJX_{21}(t-r) = 0$$

$$\dot{X}_{12}(t) = AX_{12}(t) + BJX_{22}(t-r)$$
$$X_{22}(t) - E'X_{12}(t) - FJX_{22}(t-r) = 0$$

con las condiciones iniciales

$$X(\theta) = \begin{bmatrix} X_{11}(\theta) & X_{12}(\theta) \\ X_{21}(\theta) & X_{22}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ E' & I \end{bmatrix} \quad \theta = 0, \quad X(\theta) = 0, \quad \theta \in [-r,0)$$

ó bien en forma matricial

$$(2.2.19) \quad \begin{bmatrix} \dot{X}_{11}(t) & \dot{X}_{12}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ E' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11}(t) & X_{12}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & BJ \\ 0 & FJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11}(t-r) & X_{12}(t-r) \\ X_{21}(t-r) & X_{22}(t-r) \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Comparando las fórmulas (2.2.14) y (2.2.17) tenemos que

$z_{11}(t) = X_{11}(t), \quad t \geqq 0.$ Para $t = 0, \quad z_{11}(0) = I = X_{11}(0)$

Puesto que (2.2.17) se puede escribir de la forma

$$v_1(t) = \int_0^t X_{11}(t-s)f(s)ds + \int_0^{t^+} \dot{X}_{12}(t-s)g(s)ds$$

tambien tenemos que $z_{12}(t) = \dot{X}_{12}(t), \quad t \geqq 0.$ Para $t = 0$, $z_{12}(0) = \dot{X}_{12}(0)$ $= 0$

Ahora calculamos la segunda integral en (2.2.15)

$$\frac{d}{dt}\int_0^t z_{22}(t-s)g(s)ds = z_{22}(t-t)g(t) + \int_0^t [\frac{d}{dt} z_{22}(t-s)]g(s)ds =$$

$$= g(t) + \int_0^t [\frac{d}{dt} z_{22}(t-s)]g(s)ds$$

Puesto que $\frac{d}{dt} z_{22}(t-s) = -\frac{d}{dt} z_{22}(t-s)$ una integración por partes conduce a

$$\frac{d}{dt}\int_0^t z_{22}(t-s)g(s)ds = g(t) - [z_{22}(t-s)g(s)]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t z_{22}(t-s)\dot{g}(s)ds$$

$$= g(t) - g(t) + z_{22}(t)g(0) + \int_0^t z_{22}(t-s)\dot{g}(s)ds$$

$$= z_{22}(t)g(0) + \int_0^t z_{22}(t-s)\dot{g}(s)ds$$

Asi (2.2.15) llega a ser

$$(2.2.15)' \quad v_2(t) = \int_0^t \dot{z}_{21}(t-s)f(s)ds + z_{22}(t)g(0) + \int_0^t z_{22}(t-s)\dot{g}(s)ds$$

Ahora calculamos la segunda integral en (2.2.18). Integrando por partes,

$$- \int_0^{t^+} [d_s X_{22}(t-s)] g(s) = -[X_{22}(t-s)g(s)]_{s=0}^{s=t^+} + \int_0^t X_{22}(t-s)\dot{g}(s)ds$$

$$= -X_{22}(t-t^+)g(t) + X_{22}(t)g(0) + \int_0^t X_{22}(t-s)\dot{g}(s)ds$$

pero $X_{22}(t-t^+) = X_{22}(0^-) = 0$

Asi, que (2.2.18) toma la forma

$$(2.2.18)' \qquad v_2(t) = \int_0^t X_{21}(t-s)f(s) + X_{22}(t)g(0) + \int_0^t X_{22}(t-s)\dot{g}(s)ds$$

Comparando (2.2.15)' con (2.2.18)' tenemos que

$\dot{z}_{21}(t) = X_{21}(t) \quad t \geqq 0$. Para $t = 0$, $\dot{z}_{21}(0) = X_{21}(0) = E'$

Tambien, tenemos que $X_{22}(t) = z_{22}(t)$, $t \geqq 0$

De esta forma llegamos a la siguiente conclusión

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{11}(t) & z_{12}(t) \\ \dot{z}_{21}(t) & z_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_{11}(t) & \dot{X}_{12}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) \end{bmatrix} \qquad t \geqq 0$$

Observando las formulas (2.2.16) y (2.2.19) vemos que nuestra conclusión dice que nuestra matriz fundamental conmuta con las matrices de los coeficientes.

Para afirmar esta curiosa deducción nosotros ahora damos el siguiente teorema

Teorema. 2.2.3. Consideramos la ecuación $\dot{x}(t) - \dot{x}(t-r) = Ax(t) + Bx(t-r)$, donde x es un n-vector y A y B son matrices de dimensión n. Sea X(t) su matriz fundamental. Entonces se verifica que que

$$AX(t) = X(t)A \quad y \quad BX(t-r) = X(t-r)B.$$

Demostración: Consideramos la ecuación adjunta

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(t+r) = -z(t)A - z(t+r)B$$

Por el capítulo I, sabemos que, en el caso no autónomo, si X(t,s) es la matriz fundamental de la ecuación dada y que si Z(s,t) es la matriz fundamental de la ecuación adjunta, entonces

$$X(t,s) = Z(s,t)$$

Puesto que, en el caso no autónomo, X(t,s) es la matriz fundamental, verificará

$$\frac{d}{dt}\left[X(t,s) - X(t-r,s)\right] = AX(t,s) + BX(t-r,s) \tag{2.2.19}$$

Puesto que Z(s,t) es la matriz fundamental de la ecuación adjunta, verificará

$$\frac{d}{ds}\,[Z(s,t) - Z(s+r,t)] = -Z(s,t)A - Z(s+r,t)B \tag{2.2.20}$$

Puesto que $Z(s,t) = X(t,s) \rightarrow \frac{d}{ds}\,X(t,s) = \frac{d}{ds}\,Z(s,t)$

y sustituyendo en (2.2.20), tenemos

$$\frac{d}{ds}\,[X(t,s) - X(t,s+r)] = -X(t,s)A - X(t,s+r)B \tag{2.2.21}$$

Pero, en el caso autónomo, se tiene que

$X(t,s) = X(t-s)$ y $X(t,s+r) = X(t-s-r)$

y asi (2.2.19) es

$$\dot{X}(t-s) - \dot{X}(t-s-r) = AX(t-s) + BX(t-s-r) \tag{2.2.22}$$

y (2.2.21) es, teniendo en cuenta que $\frac{d}{ds}\,X(t-s) = -\dot{X}(t-s)$

$$\dot{X}(t-s) - \dot{X}(t-s-r) = +X(t-s)A + X(t-s-r)B \tag{2.2.23}$$

Comparando (2.2.22) y (2.2.23) se tiene el teorema probado.

Una forma mucho más simple de obtener el teorema 2.2.1 es la siguiente: como ya sabemos, el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BJy(t-r)$$
$$y(t) = E'x(t) + FJy(t-r)$$

$x(0) = a \in E^n$, $y_o = \psi \in C$, es equivalente a

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BJy(t-r)$$
$$\frac{d}{dt}[y(t) - E'x(t) + FJy(t-r)] = 0$$

con la condición

(2.2.24) $\quad \psi(0) - E'a - FJ\psi(-r) = 0.$

Con la notación $z(t) = [x(t), y_t]'$, este sistema se puede escribir de la forma

(2.2.25) $$\frac{d}{dt}D(z_t) = L(z_t), \quad z_o = \phi = (a,\psi) \in E^n \times C$$

donde $D(z_t) = Kz(t) - Mz(t-r)$, $L(z_t) = Nz(t) + Pz(t-r)$.

Si definimos $Kz(t) = \bar{z}(t)$ entonces (2.2.25) toma la forma

$$\frac{d}{dt}\bar{D}(\bar{z}_t) = \bar{L}(\bar{z}_t), \quad \bar{z}_o = \bar{\phi}$$

donde $\bar{D}(\bar{\phi}) = \bar{\phi}(0) - MK^{-1}\bar{\phi}(-r)$, $\bar{L}(\bar{\phi}) = NK^{-1}\bar{\phi}(0) + PK^{-1}\bar{\phi}(-r)$.

Para esta última clase de ecuaciones, enlas que el coeficiente de $\bar{\phi}(0)$ es la matriz unitaria, es bien conocido (ver, por ejemplo Hale [14], [17a]) que la matriz fundamental $\bar{X}(\cdot)$ verifica

$$\bar{X}(t) = 0, \quad t<0, \qquad \bar{X}(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad t = 0.$$

Sea $X(\cdot)$ la matriz fundamental de (2.2.25). Entonces $KX(t) = \bar{X}(t)$ y, en particular, para $t=0$

$$KX(0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ y por tanto } X(0) = K^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ E' & I \end{bmatrix}$$

Puesto que $X(t)$ es la matriz fundamental de (2.2.25) se debe verificar

$$\frac{d}{dt}[X(t) - E'X(t) - FJX(t-r)] = 0$$

es decir, $X(t) - E'X(t) - FJX(t-r) =$ constante. Como las columnas de $X(t)$ son soluciones del sistema, tenemos

$$X_{21}(t) - E'X_{11}(t) - FJX_{21}(t-r) = (\text{constante})_1$$
$$X_{22}(t) - E'X_{12}(t) - FJX_{22}(t-r) = (\text{constante})_2 .$$

Asi, para $t=0$, resulta que $(\text{constante})_1 = 0$ y $(\text{constante})_2 = I$ y llegamos a las fórmulas (2.2.9) y (2.2.10).

Ahora vamos a probar un importante resultado sobre la estabilidad exponencial de la solución nula del sistema no lineal

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BJy(t-r) + f(x(t),y_t)$$
$$y(t) = E'x(t) + FJy(t-r) + g(x(t),y_t)$$

$x(0) = a \in E^n$, $y_0 = \psi \in C$, donde f,g son funciones continuas que aplican $E^n \times C$ en E^n.

Este sistema es equivalente a

$$(2.2.26) \qquad \frac{d}{dt}\left\{D(z_t) - \begin{bmatrix} 0 \\ g(z_t) \end{bmatrix}\right\} = L(z_t) + \begin{bmatrix} f(z_t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$z_0 = \phi = (a,\psi) \in E^n \times C$, con la condición

$$(2.2.27) \qquad \psi(0) - E'a - FJ\psi(-r) - g(\phi) = 0.$$

Observemos que no exigimos que los datos iniciales (a,ψ) pertenezcan al espacio integral X_0, pues esto implicaria $g(\phi) = 0$, que carece de interes.

La solución de (2.2.26) es de la forma $z(t)=u(t)+v(t)$, donde $u(t)$ y $v(t)$ representan las soluciones de la ecuación homogenea y no homogenea, respectivamente. La fórmula de variación de constantes para (2.2.26) (ver Hale-Cruz [18], Hale [17a]) es ahora

$$(2.2.28) \qquad z(t) = u(t) + \int_0^t X(t-s)\begin{bmatrix} f(z_s) \\ 0 \end{bmatrix} ds - $$
$$- \int_0^{t^+} [d_s X(t-s)]\left(\begin{bmatrix} 0 \\ g(z_s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ g(\phi) \end{bmatrix}\right)$$
$$= u(t) + \int_0^t X(t-s)\begin{bmatrix} f(z_s) \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_0^t [d_s X(t-s)]\begin{bmatrix} 0 \\ g(z_s) \end{bmatrix} -$$
$$- X(t)\begin{bmatrix} 0 \\ g(\phi) \end{bmatrix} + X(0)\begin{bmatrix} 0 \\ g(z_t) \end{bmatrix}$$
$$= u(t) + \int_0^t X(t-s)\begin{bmatrix} f(z_s) \\ 0 \end{bmatrix} ds + \int_0^t X(t-s)\begin{bmatrix} 0 \\ dg(z_s) \end{bmatrix},$$

para $t \geq 0$. Es conveniente tener escrita la formula de variacion de constantes de otra forma. Para $t+\theta \geq 0$, tenemos

$$z(t+\theta) = u(t+\theta) + \int_0^{t+\theta} X(t+\theta-s)\begin{bmatrix} f(z_s) \\ 0 \end{bmatrix} ds + \int_0^{t+} X(t+\theta-s)\begin{bmatrix} 0 \\ dg(z_s) \end{bmatrix}$$

como $X(t+\theta-s)$ se anula para $s > t+\theta$, podemos escribir

$$z(t+\theta) = u(t+\theta) + \int_0^{t} X(t+\theta-s)\begin{bmatrix} f(z_s) \\ 0 \end{bmatrix} ds + \int_0^{t} X(t+\theta-s)\begin{bmatrix} 0 \\ dg(z_s) \end{bmatrix}, t \geq 0.$$

Usando la definición de $z_t(\theta) = z(t+\theta)$, $X_t(\theta) = X(t+\theta)$, tenemos

$$z_t(\theta) = u_t(\theta) + \int_0^{t} X_{t-s}(\theta)\begin{bmatrix} f(z_s) \\ 0 \end{bmatrix} ds + \int_0^{t} X_{t-s}(\theta)\begin{bmatrix} 0 \\ dg(z_s) \end{bmatrix}, \ t \geq 0.$$

Para simplificar, suprimimos la explicita dependencia de θ y obtenemos

$$z_t = u_t + \int_0^{t} X_{t-s}\begin{bmatrix} f(z_s) \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^{t} X_{t-s}\begin{bmatrix} 0 \\ dg(z_s) \end{bmatrix}, \ t \geq 0$$

donde se entiende que las integrales estan en el espacio euclideo. Esta es la fórmula de variación de constantes en forma funcional. Puesto que $u(\cdot)$ satisface la ecuación homogenea,podemos escribir $u_t = T(t)\phi$. Tambien $X(\cdot)$ satisface la ecuación homogenea y, por tanto, es correcto escribir $T(t)X_0 = X_t$, donde

$$X_0(\theta) = 0, \ -r \leq \theta < 0, \quad X_0(\theta) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ E' & I \end{bmatrix}, \ \theta = 0.$$

Observemos que al escribir $T(t)X_0 = X_t$ hemos extendido la definición del semigrupo $T(t)$ a funciones con una discontinuidad en $\theta = 0$. Con estas observaciones, la fórmula de variación de constantes es

$$z_t = T(t)\phi + \int_0^t T(t-s)X_o\begin{bmatrix} f(z_s) \\ 0 \end{bmatrix} ds + \int_0^t T(t-s)X_o\begin{bmatrix} 0 \\ dg(z_s) \end{bmatrix}, \quad t \geqq 0$$

ó bien

$$z_t = T(t)\phi + \int_0^t T(t-s)X_o\begin{bmatrix} f(z_s) \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_0^t [d_sT(t-s)X_o]\begin{bmatrix} 0 \\ g(z_s) \end{bmatrix} -$$

$$- X_t\begin{bmatrix} 0 \\ g(\phi) \end{bmatrix} + X_o\begin{bmatrix} 0 \\ g(z_t) \end{bmatrix}, \quad t \geqq 0 .$$

de donde se obtiene

(2.2.29) $$z_t - X_o\begin{bmatrix} 0 \\ g(z_t) \end{bmatrix} = T(t)\left(\phi - X_o\begin{bmatrix} 0 \\ g(\phi) \end{bmatrix}\right) + \int_0^t T(t-s)X_o\begin{bmatrix} f(z_s) \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$- \int_0^t [d_sT(t-s)X_o\begin{bmatrix} 0 \\ g(z_s) \end{bmatrix}, \quad t \geqq 0.$$

Sea $\Phi = [a,\Psi]' = \phi - X_o\begin{bmatrix} 0 \\ g(\phi) \end{bmatrix}$. Entonces $T(t)\phi$ es una solución de la ecuación

(2.2.30) $$\frac{d}{dt} D(z_t) = L(z_t), \quad z_o = \Phi.$$

<u>Lema 2.2.1.</u> Supongamos que $\dot{D}$ es estable y que el espectro del generador infinitesimal $\mathscr{A}_o$ del semigrupo $\{T_o(t), t \geqq 0\}$ satisface $\operatorname{Re} \sigma(\mathscr{A}_o) \leqq -\delta < 0$. Entonces la solución $T(t)\Phi$ de (2.2.30) tiende exponencialmente a cero cuando $t \to \infty$.

<u>Demostración</u>: Como $\Phi = \phi - X_o\begin{bmatrix} 0 \\ g(\phi) \end{bmatrix}$ tenemos

$$\begin{bmatrix} a \\ \Psi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \psi(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ E' & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ g(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \psi(0)-g(\phi) \end{bmatrix}.$$ Definamos

$$\Psi(\theta) = \begin{cases} \psi(\theta), & -r \leqq \theta < 0 \\ \psi(0)-g(\phi), & \theta = 0 \end{cases}$$

Vamos a probar que Φ satisface la condición (2.2.24). En efecto, $\Psi(0) - E'a - FJ\Psi(-r) = \psi(0) - g(\phi) - E'a - FJ\psi(-r) = 0$,por (2.2.27). Ahora la conclusión del lema seria immediata a partir de la teoria de semigrupos si $T(t)\Phi$ perteneciese al espacio integral X_0, pero esto no ocurre puesto que Φ tiene una discontinuidad en $\theta=0$.

Como $\Psi(0) - E'a - FJ\Psi(-r) = 0$ la ecuación (2.2.30) es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BJy(t-r) \\ y(t) &= E'x(t) + FJy(t-r) \ . \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace tenemos

$$\begin{aligned} \hat{x}(\lambda) - A\tilde{x}(\lambda) - BJe^{-\lambda r}\tilde{y}(\lambda) &= a + BJe^{-\lambda r} \int_{-r}^{0} \Psi(t)e^{-\lambda t}dt \\ \tilde{y}(\lambda) - E'\tilde{x}(\lambda) - FJe^{-\lambda r}\tilde{y}(\lambda) &= FJe^{-\lambda r} \int_{-r}^{0} \Psi(t)e^{-\lambda t}dt \end{aligned}$$

y por tanto

$$H(\lambda) \begin{bmatrix} \tilde{x}(\lambda) \\ \tilde{y}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+BJY(\lambda) \\ FJY(\lambda) \end{bmatrix}$$

donde $Y(\lambda) = e^{-\lambda r} \int_{-r}^{0} \Psi(t)e^{-\lambda t}dt$, $\quad H(\lambda) == \begin{bmatrix} I-A & -BJe^{-\lambda r} \\ -E' & I-FJe^{-\lambda r} \end{bmatrix}$

Como $\sigma(\mathscr{A}_0) = \{\lambda / \det H(\lambda) = 0\}$ esta contenido en el semiplano de la izquierda, $H^{-1}(\lambda)$ existe y tomando la inversa de la transformada de Laplace obtenemos

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \int_{\delta+i\infty}^{\delta+i\infty} H^{-1}(\lambda) \begin{bmatrix} a+BJY(\lambda) \\ FJY(\lambda) \end{bmatrix} e^{\lambda t}dt.$$

Por el teorema 12.19 en Bellman-Cooke [1] existe una constante K tal que $|x(t)|$, $|y(t)| \leq Ke^{-\delta' t}$, $0 < \delta' < \delta$. Esto prueba el lema.

La observación de la fórmula (2.2.29) sugiere el cambio de variables $z_t - X_o \begin{bmatrix} 0 \\ g(z_t) \end{bmatrix} = w_t$ que transforma funciones continuas en $[-r,0]$ en funciones con una discontinuidad en cero. Esto nos obliga a introducir algunos conceptos (ver Hale [17a]).

Supongamos que $g(\phi)$, $\phi=(a,\psi)$, no depende de $\psi(0)$ en el siguiente sentido: Para todo $b \in E^n$ y para toda sucesión $\psi_n \in C$, $\psi_n(0)=b$, que converge a $\psi \in C$ uniformemente en conjuntos compactos de $[-r,0)$, el limite de $g(a,\psi_n)$ existe cuando $n\to\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} g(a,\psi_n)=g(a,\psi)$.

Sea PC el espacio de funciones en $[-r,0]$ que son uniformemente continuas en $[-r,0)$ y que pueden ser discontinuas en cero. Con la matriz X_o definida anteriormente es claro que

$$PC = E^n \times C + \langle X_o \rangle$$

donde $\langle X_o \rangle$ es el espacio engendrado por las funciones X_o, esto es, toda $\Phi \in PC$ es dada por $\Phi=\phi+X_o c$, donde $\phi \in E^n \times C$ y $c \in E^n$. Convertimos PC en un espacio normado definiendo la norma $\|\Phi\| = \sup\limits_{\theta\in[-r,0]} |\Phi(\theta)|$

Puesto que $g(\phi)$ no depende de $\psi(0)$, la aplicación $h : E^n \times C \to PC$ definida por

$$h(\phi)(\theta) = \begin{cases} \phi(\theta), & -r \leq \theta < 0 \\ \phi(0)-X_o(0) \begin{bmatrix} 0 \\ g(\phi) \end{bmatrix}, & \theta = 0 \end{cases}$$

es un homeomorfismo. Si $w_t = h(z_t)$, $\Phi = h(\phi)$, entonces la ecuación (2.2.29) toma la forma

$$w_t = T(t)\Phi + \int_0^t T(t-s)X_o \begin{bmatrix} f(h^{-1}(w_s)) \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_0^t [d_s T(t-s)X_o] \begin{bmatrix} 0 \\ g(h^{-1}(w_s)) \end{bmatrix}$$

ó bien

$$w_t = T(t)\Phi + \int_0^t X_{t-s}\begin{bmatrix} f(h^{-1}(w_s)) \\ 0 \end{bmatrix} ds + \int_0^t \dot{X}_{t-s}\begin{bmatrix} 0 \\ g(h^{-1}(w_s)) \end{bmatrix} ds, \ t \geq 0.$$

Teorema 2.2.4. Supongamos que D es estable y que existe un $\delta > 0$ tal que Re $\sigma(\mathcal{A}_0) \leq -\delta$. Supongamos que f y g son funcionales continuos que satisfacen $f(0) = g(0) = 0$,

$$\begin{aligned} |f(\phi) - f(\phi_1)| &\leq \mu(\sigma)\| \phi - \phi_1 \| \\ |g(\phi) - g(\phi_1)| &\leq \mu(\sigma)\| \phi - \phi_1 \| \end{aligned} \qquad \text{para } \| \phi \|, \ \| \phi_1 \| \leq \sigma$$

donde $\mu(\sigma)$ es una función continua no decreciente tal que $\mu(0)=0$. Entonces la solución trivial $z=0$ de la ecuacion (2.2.26) es exponencialmente estable.

Demostración: Las hipótesis de que D es estable y de que Re $\sigma(\mathcal{A}_0) \leq -\delta < 0$ implican, por el teorema 2.2.2 y el lema 2.2.1, que se puede elegir un δ' tal que $0 < \delta' < \delta$ y que existen constantes positivas K_1, K_2, K_3, tales que

$$\|T(t)\Phi\| \leq K_1 e^{-\delta' t}\| \Phi \|, \quad \|X_{t-s}\| \leq K_2 e^{-\delta'(t-s)}, \quad \|\dot{X}_{t-s}\| \leq K_3 e^{-\delta'(t-s)}.$$

En la segunda acotación se supone que ya se ha efectuado el producto $X_{t-s}\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$. Por otro lado, puesto que $g(\phi)$ no depende de $\psi(0)$, la aplicación $h : E^n \times C \to PC$ es un homeomorfismo en un entorno de $\phi=0 \in E^n \times C$, $\Phi=0 \in PC$. Por tanto, existen constantes $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ tales que en ese entorno $\Phi = h(\phi)$ implica que $\| \Phi \| \leq k_1 \| \phi \|$, $\| \phi \| \leq k_2 \| \Phi \|$.

De esta forma, para aquellos valores $t \geq 0$ para los cuales $\|w_t\| < \sigma$ se tiene de la formula de variacion de constantes

$$\|w_t\| \leq K_1 e^{-\delta' t}\|\Phi\| + \int_0^t K_2 e^{-\delta'(t-s)}\mu(\sigma)k_2\|w_s\| ds + \int_0^t K_3 e^{-\delta'(t-s)}\mu(\sigma)k_2\|w_s\| d.$$

$$= K_1 e^{-\delta' t} \| \Phi \| + \int_0^t K_4 e^{-\delta'(t-s)} \mu(\sigma) \| w_s \| ds,$$

donde $K_4 = K_2 k_2 + K_3 k_2$. Asi se tiene

$\|w_t\| e^{\delta' t} \leq K_1 \|\Phi\| + K_4\mu(\sigma) \int_0^t e^{\delta' s} \|w_s\| ds$. Llamemos $m(t) = \|w_t\| e^{\delta' t}$

entonces $\quad m(t) \leqq K_1 \|\Phi\| + K_4\mu(\sigma) \int_0^t m(s)ds$.

Aplicando la desigualdad de Gronwall tenemos

$$m(t) \leqq K_1 \|\Phi\| e^{K_4\mu(\sigma) \int_0^t ds} = K_1 \|\Phi\| e^{K_4\mu(\sigma)t} \text{ , y por tanto}$$

$$\|w_t\| \leqq K_1 \|\Phi\| e^{-[\delta' - K_4\mu(\sigma)]t} \quad . \tag{2.2.31}$$

Como μ es continua, podemos elegir $\sigma > 0$ tal que $\delta' > K_4\mu(\sigma)$. Entonces (2.2.31) implica que $\|w_t\| < \sigma$ para todo $t \geqq 0$, supuesto que $\|\Phi\| < \sigma/K_1$. Por tanto (2.2.31) se cumple para todo $t \geqq 0$ cuando $\|\Phi\| < \sigma/K_1$. La desigualdad (2.2.31) implica que w_t tiende a cero exponencialmente cuando $t \to \infty$. Puesto que $z_t = w_t + X_0 \begin{bmatrix} 0 \\ g(h^{-1}(w_t)) \end{bmatrix}$ se tiene

$$\|z_t\| \leqq \|w_t\| + \|X_0\| \mu(\sigma) k_2 \|w_t\|$$

y por tanto z_t tiende a cero exponencialmente cuando $t \to \infty$. El teorema esta demostrado.

Una generalización del teorema 2.2.4 a ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro en una forma mas general puede ser encontrada en [18a].

II.3. Estabilidad absoluta.

Consideremos el problema de control de Rasvan

$$(2.3.1)\qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BJy(t-r) + b_1 f[\sigma(t)] \\ y(t) &= E'x(t) + FJy(t-r) + b_2 f[\sigma(t)] \end{aligned}$$

donde la señal de control feedback se define por el producto interno $\sigma = (c,x) = c'\cdot x$, c es un n-vector constante y la función característica satisface la condición de sector

$$h_1\sigma^2 \leqq \sigma f(\sigma) \leqq h_2\sigma^2, \qquad h_1 \leqq h_2 < h.$$

b_1 y b_2 son n-vectores constantes.

Nos proponemos aplicar el método de Popov al sistema (2.3.1) utilizando la generalización hecha en la sección I.3. del capítulo I, a ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro para obtener las condiciones para la estabilidad absoluta del sistema (2.3.1).

Observemos que $\sigma(0) = c'x(0) = c'a$, asi que la fórmula de variación de constantes debe ser (2.2.28), esto es,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} - X(0)\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 f[\sigma(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} - X(t)\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 f[\sigma(0)] \end{bmatrix} + $$
$$+ \int_0^t X(t-s)\begin{bmatrix} b_1 f[\sigma(s)] \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_0^t [d_s X(t-s)]\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 f[\sigma \end{bmatrix}$$

donde $u = (u_1,u_2)'$ es la solución de la ecuación homogenea y la matriz $X(\cdot)$ satisface

$$X(t) = 0, \quad t < o, \qquad X(0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ E' & I \end{bmatrix}.$$

Esta fórmula de variación de constantes se puede descomponer de la forma

$$x(t) = u_1(t) - X_{12}(t)b_2f[\sigma(0)] + \int_0^t X_{11}(t-s)b_1f[\sigma(s)]ds - \\ - \int_0^t [d_sX_{12}(t-s)]b_2f[\sigma(s)]$$

$$y(t) - b_2f[\sigma(t)] = u_2(t) - X_{22}b_2f[\sigma(0)] + \int_0^t X_{21}(t-s)b_1f[\sigma(s)]ds - \\ - \int_0^t [d_sX_{22}(t-s)]b_2f[\sigma(s)] \; .$$

Como en la sección anterior, efectuamos el cambio de variables de $E^n \times C \to PC$ definiendo $x_1(t) = x(t)$, $y_1(t) = y(t) - b_2f[\sigma(t)]$, $w_1(t) = u_1(t) - X_{12}(t)b_2f[\sigma(0)]$, $w_2(t) = u_2(t) - X_{22}(t)b_2f[\sigma(0)]$. Entonces la fórmula de variación de constantes es

$$(2.3.2) \quad x_1(t) = w_1(t) + \int_0^t X_{11}(t-s)b_1f[\sigma(s)]ds - \int_0^t [d_sX_{12}(t-s)]b_2f[\sigma(s)]$$

$$(2.3.3) \quad y_1(t) = w_2(t) + \int_0^t X_{21}(t-s)b_1f[\sigma(s)]ds - \int_0^t [d_sX_{22}(t-s)]b_2f[\sigma(s)].$$

Si el operador D es estable, esto es, si el radio espectral $r(FJ) < 1$ y existe un $\delta > 0$ tal que $\mathrm{Re}\lambda \leqq -\delta < 0$, para todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0)$, entonces por el lema 2.2.1 sabemos que $w_1(t)$ y $w_2(t)$ tienden a cero exponencialmente cuando $t \to \infty$. Igualmente, por el teorema 2.2.2, las matrices $X_{11}(t)$, $X_{21}(t)$, $\dot{X}_{12}(t)$, $\dot{X}_{22}(t)$ tienden a cero exponencialmente cuando $t \to \infty$.

Vamos a demostar que $x_1(t)$, $y_1(t)$ y $f[\sigma(t)]$ tienden a cero cuando $t \to \infty$ lo cual implicará que $x(t)$, $y(t)$ tambien se aproximan a cero cuando $t \to \infty$.

Consideremos (2.3.2). Como $\sigma(t) = c'x(t) = c'x_1(t)$ tenemos

$$\sigma(t) = c'w_1(t) + \int_0^t c'X_{11}(t-s)\ b_1 f[\sigma(s)]ds -$$

$$- \int_0^t c'[d_s X_{12}(t-s)]\ b_2 f[\sigma(s)]$$

$$= c'w_1(t) + \int_0^t c'X_{11}(t-s)\ b_1 f[\sigma(s)]ds -$$

$$+ \int_0^t c'\dot{X}_{12}(t-s)\ b_2 f[\sigma(s)]ds\ .$$

Sean $c'w_1(t) = z(t)$, $c'X_{11}(t-s)b_1 = k_{11}(t-s)$, $c'X_{12}(t-s)b_2 = k_{12}(t-s)$. Entonces

$$\sigma(t) = z(t) + \int_0^t k_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds + \tag{2.3.4}$$

$$+ \int_0^t \dot{k}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds.$$

Observemos que $z(t)$, $\frac{dz(t)}{dt}$, $k_{11}(t)$ y $\dot{k}_{12}(t)$ tienden a cero exponencialmente. Ahora definamos

$$f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)], & 0 \leqq t \leqq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$$\sigma_T(t) = \begin{cases} \sigma(t), & 0 \leqq t \leqq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$$z_T(t) = \begin{cases} z(t) & 0 \leqq t \leqq T \\ \int_0^T k_{11}(t-s)f[\sigma]ds + \int_0^T \dot{k}_{12}(t-s)f[\sigma]ds, & t > T \end{cases}$$

Asi

$$\sigma_T(t) - z_T(t) = \int_0^t k_{11}(t-s)f_T[\sigma(s)]ds + \int_0^t \dot{k}_{12}(t-s)f_T[\sigma(s)]ds \tag{2.3.5}$$

Sea

$$\chi(T) = \int_0^T \left\{ \sigma(t) - z(t) - \frac{1}{h} f[\sigma(t)] + q \left(\frac{d\sigma(t)}{dt} - \frac{dz(t)}{dt}\right)\right\} f[\sigma(t)]dt \tag{2.3.6}$$

$$= \int_0^\infty \left\{\sigma_T(t) - z_T(t) - \frac{1}{h} f_T[\sigma(t)] + q\left(\frac{d\sigma_T(t)}{dt} - \frac{dz_T(t)}{dt}\right)\right\} f_T[\sigma(t)]dt$$

Por las hipótesis hechas sobre el espectro de $\mathscr{A}_0$, podemos tomar la transformada de Fourier y obtenemos

$$\chi(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{Re}\left\{[\tilde{\sigma}_T - \tilde{z}_T - \frac{1}{h}\tilde{f}_T + qi\omega(\tilde{\sigma}_T - \tilde{z}_T)]\right\} \tilde{f}_T^{*} \cdot d\omega$$

despues de tener en cuenta que $\sigma_T(0) - z_T(0) = 0$ y el teorema de Parseval.

Aplicando el teorema de convolución a (2.3.5), tenemos

$$\tilde{\sigma}_T - \tilde{z}_T = \tilde{k}_{11}\cdot\tilde{f}_T + \tilde{\dot{k}}_{12}\cdot\tilde{f}_T = \tilde{k}_{11}\cdot\tilde{f}_T + i\omega\tilde{k}_{12}\cdot\tilde{f}_T$$

Esto es cierto para la transformada de Laplace y si suponemos que $k \equiv 0$, $f \equiv 0$, para $t<0$, tambien es cierto para la transformada de Fourier. Observemos que $k_{11}(t) = c'X_{11}(t)b_1 = 0$ y $k_{12}(t) = c'X_{12}(t)b_2 = 0$ para $t<0$. Entonces

$$\chi(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{(\tilde{k}_{11}+i\omega\tilde{k}_{12}) - \frac{1}{h} + i\omega q(\tilde{k}_{11}+i\omega\tilde{k}_{12})\right\}|\tilde{f}_T|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathrm{Re}[(1+i\omega q)(\tilde{k}_{11}+i\omega\tilde{k}_{12})] - \frac{1}{h}\right\}|\tilde{f}_T|^2 d\omega$$

Si se cumple que

$$\mathrm{Re}[(1+i\omega q)(\tilde{k}_{11}+i\omega\tilde{k}_{12})] - \frac{1}{h} \leqq 0$$

entonces $\chi(T) \leqq 0$. Esto quiere decir, por (2.3.6), que

$$\int_0^T \left\{\sigma(t) - \frac{1}{h}f[\sigma(t)] + q\frac{d\sigma(t)}{dt}\right\} f[\sigma(t)]dt \leqq \int_0^T \left\{z(t)+q\frac{dz(t)}{dt}\right\} f[\sigma(t)]dt$$

Desde aqui la demostración continua lo mismo que en el capítulo I, sección I.3. y obtenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t\to\infty} f[\sigma(t)] = 0$$

Por la fórmula (2.3.2) se deduce que $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$.

Ahora consideremos (2.3.3). Por lo anterior, tenemos que $\lim_{t\to\infty} f[\sigma(t)] = 0$. Entonces, de (2.3.3) deducimos que $\lim_{t\to\infty} y_1(t) = 0$.

Asi tenemos el siguiente

Teorema. 2.3.1. Si

i) el operador D es estable

ii) $\exists\delta > 0$ tal que $\mathrm{Re}\,\sigma(\mathcal{A}_0) \leqq -\delta < 0$

iii) $\exists q > 0$ tal que

$$\mathrm{Re}[(1+i\omega q)(\tilde{k}_{11}+i\omega\tilde{k}_{12})] - \frac{1}{h} \leqq 0$$

donde $\tilde{k}_{11} = c'\tilde{X}_{11}b_1$, $\tilde{k}_{12} = c'\tilde{X}_{12}b_2$, entonces el sistema (2.3.1) es absolutamente estable para toda función f que satisface la condición de sector, $h_1\sigma^2 \leqq \sigma f(\sigma) \leqq h_2\sigma^2$, $h_2 < h$.

Ahora vamos a comparar este resultado con el obtenido por Rasvan. Las condiciones de Rasvan son las mismas que en el teorema 2.3.1. excepto la condicion iii). Rasvan sustituye esta condicion por

$$\mathrm{Re}(1+i\omega q)\gamma(i\omega) - \frac{1}{h} \leqq 0$$

donde $\gamma(i\omega)$ es la función"transfer" del bloque lineal de (2.3.1).

Vamos a calcular $\gamma(i\omega)$. De (2.3.1) tenemos

$$i\omega\tilde{x}(i\omega) - A\tilde{x}(i\omega) - BJe^{-i\omega r}\tilde{y}(i\omega) = b_1\tilde{f}(i\omega)$$

$$-E'\tilde{x}(i\omega) + \tilde{y}(i\omega) - FJe^{-i\omega r}\tilde{y}(i\omega) = b_2\tilde{f}(i\omega)$$

Por tanto

$$\tilde{x}(i\omega) = \frac{\begin{vmatrix} Ib_1 & -BJe^{-i\omega r} \\ Ib_2 & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i\omega I-A & -BJe^{-i\omega r} \\ -E' & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}\tilde{f}(i\omega). \text{ Sea } H(i\omega) = \begin{vmatrix} i\omega I-A & -BJe^{-i\omega r} \\ -E' & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}$$

Entonces, $\tilde{\sigma}(i\omega) = c'\tilde{x}(i\omega) = c'\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 I & -BJe^{-i\omega r} \\ b_2 I & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}{H(i\omega)}\tilde{f}(i\omega)$

(2.3.7) $$\gamma(i\omega) = c'\frac{\begin{vmatrix} b_1 I & -BJe^{-i\omega r} \\ b_2 I & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}{H(i\omega)}$$

Ahora vamos a calcular $\tilde{k}_{11} + i\omega\tilde{k}_{12}$ la cual aparece en nuestro teorema. Como $\tilde{k}_{11} = c'\tilde{X}_{11}b_1$ y $\tilde{k}_{12} = c'\tilde{X}_{12}b_2$ y X_{11}, X_{21} satisfacen el sistema

$$\dot{X}_{11}(t) = AX_{11}(t) + BJX_{21}(t-r)$$

$$X_{21}(t) - E'X_{11}(t) - FJX_{21}(t-r) = 0$$

tenemos

$$(i\omega I-A)\tilde{X}_{11} - BJe^{-i\omega r}\tilde{X}_{21} = I$$

$$-E'\tilde{X}_{11} + (I-FJe^{-i\omega r})\tilde{X}_{21} = 0$$

entonces

$$\tilde{X}_{11} = \frac{\begin{vmatrix} I & -BJe^{-i\omega r} \\ 0 & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}{H(i\omega)}, \quad \tilde{k}_{11} = c' \frac{\begin{vmatrix} b_1 I & -BJe^{-i\omega r} \\ 0 & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}{H(i\omega)}$$

Como X_{12}, X_{22} satisfacen el sistema

$$\dot{X}_{12}(t) = AX_{12}(t) + BJX_{22}(t-r)$$

$$X_{22}(t) - E'X_{12}(t) - FJX_{22}(t-r) = I$$

tenemos

$$(i\omega I-A)\tilde{X}_{12} - BJe^{-i\omega r}\tilde{X}_{12} = 0$$

$$-E'\tilde{X}_{12} + (I-FJ)e^{-i\omega r}\tilde{X}_{22} = \frac{I}{i\omega}$$

entonces

$$\tilde{X}_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -BJe^{-i\omega r} \\ I & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}{H(i\omega)} \frac{1}{i\omega}, \quad i\omega\tilde{k}_{12} = c' \frac{\begin{vmatrix} 0 & -BJe^{-i\omega r} \\ b_2 I & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}{H(i\omega)}$$

Por tanto

$$(2.3.8)\qquad \tilde{k}_{11} + i\omega\tilde{k}_{12} = c' \frac{\begin{vmatrix} b_1 I & -BJe^{-i\omega r} \\ 0 & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}{H(i\omega)} +$$

$$+ c' \frac{\begin{vmatrix} 0 & -BJe^{-i\omega r} \\ b_2 I & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}{H(i\omega)} =$$

$$= c' \frac{\begin{vmatrix} b_1 I & -BJe^{-i\omega r} \\ b_2 I & I-FJe^{-i\omega r} \end{vmatrix}}{H(i\omega)} .$$

Comparando (2.3.7) con (2.3.8) obtenemos

$$(2.3.9)\qquad \gamma(i\omega) = \tilde{k}_{11} + i\omega\tilde{k}_{12}$$

y por tanto el teorema 2.3.1 y el de Rasvan son equivalentes.

Ahora consideremos el problema

$$(2.3.10)\qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BJy(t-r) + b_1 f[\sigma(t-r)] \\ y(t) &= E'x(t) + FJy(t-r) + b_2 f[\sigma(t-r)] \end{aligned}$$

donde la senal de control aparece con retraso, esta definida por $\sigma = c'x$ y la función caracteristica satisface la condición de sector.

Por la fórmula de variación de constantes, tenemos

$$(2.3.11)\qquad x_1(t) = w_1(t) + \int_0^t X_{11}(t-s) b_1 f[\sigma(s-r)]ds +$$

$$+ \int_0^t \dot{X}_{12}(t-s) b_2 f[\sigma(s-r)]ds$$

$$(2.3.12)\quad y_2(t) = w_2(t) + \int_0^t X_{21}(t-s)b_1f[\sigma(s-r)]ds + \int_0^t \dot{X}_{12}b_2f[\sigma(s-r)]ds$$

Consideremos (2.3.11). Como $\sigma(t) = c'\cdot x_1(t)$, tenemos

$$\sigma(t) = c'w_1(t) + \int_0^t c'X_{11}(t-s)b_1f[\sigma(s-r)]ds + \int_0^t c'\dot{X}_{12}b_2f[\sigma(s-r)]ds$$

Sean $c'w_1(t) = z(t)$, $c'X_{11}(t)b_1 = k_{11}(t)$, $c'X_{12}b_2 = k_{12}(t)$. Entonces

$$\sigma(t)=z(t) + \int_0^t k_{11}(t-s)f[\sigma(s-r)]ds + \int_0^t \dot{k}_{12}(t-s)f[\sigma(s-r)]ds$$

Definamos

$$(2.3.13)\quad \begin{aligned} \bar{k}_{11}(t) &= \begin{cases} k_{11}(t-r) & t \geqq r \\ 0 & 0 \leqq t < r \end{cases} \\ \bar{k}_{12}(t) &= \begin{cases} k_{12}(t-r) & t \geqq r \\ 0 & 0 \leqq t < r \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces podemos escribir

$$\sigma(t) = z(t) + \int_{-r}^{t-r} k_{11}(t-s-r)f[\sigma(s)]ds + \int_{-r}^{t-r} \dot{k}_{12}(t-s-r)f[\sigma(s)]ds$$

$$= z(t) + \int_{-r}^{t-r} \bar{k}_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds + \int_{-r}^{t-r} \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

$$= z(t) + \int_{-r}^{o} \bar{k}_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds + \int_{-r}^{o} \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

$$+ \int_{o}^{t-r} \bar{k}_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds + \int_{o}^{t-r} \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

Sea

$$\bar{z}(t) = z(t) + \int_{-r}^{o} \bar{k}_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds + \int_{-r}^{o} \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

entonces

$$(2.3.14) \quad \sigma(t) = \bar{z}(t) + \int_{o}^{t-r} \bar{k}_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds + \int_{o}^{t-r} \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

$$= \bar{z}(t) + \int_{o}^{t} \bar{k}_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds + \int_{o}^{t} \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

puesto que para $s > t-r$, es decir, para $t-s < r$ por (2.3.13) $\bar{k}_{12}(t-s) = \bar{k}_{11}(t-s) = 0$. Asi (2.3.14) tiene la misma forma que (2.3.4).

Observemos que

$$\tilde{\bar{k}}(i\omega) = \int_{o}^{\infty} e^{-i\omega t}\bar{k}_{11}(t)dt = \int_{r}^{\infty} e^{-i\omega t}k_{11}(t-r)dt = e^{-i\omega r} \int_{o}^{\infty} e^{-i\omega t}k_{11}(t)dt$$

$$= e^{-i\omega r}\tilde{k}_{11}(t).$$

De la misma forma $\tilde{\bar{k}}_{12}(i\omega) = e^{-i\omega r}\tilde{k}_{12}(i\omega)$.

Por tanto, tenemos el siguiente teorema

<u>Teorema. 2.3.2.</u> Consideremos el problema (2.3.10). Si

i) el operador D es estable

ii) $\exists\delta > 0$ tal que $\mathrm{Re}\,\sigma(\mathscr{A}_0) \leq -\delta < 0$

iii) $\exists q > 0$ tal que

$$\mathrm{Re}[(1+i\omega q)e^{-i\omega r}(\tilde{k}_{11}+i\omega\tilde{k}_{12})] - \frac{1}{h} \leq 0$$

donde $\tilde{k}_{11} = c'\tilde{X}_{11}b_1$, $\tilde{k}_{12} = c'\tilde{X}_{12}b_2$, entonces el sistema (2.3.10) es absolutamente estable.

Finalmente, consideremos el primer caso crítico, llamado tambien de control indirecto. Supongamos el problema

$$\text{(2.3.15)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BJy(t-r) + b_1\xi(t) \\ y(t) &= E'x(t) + FJy(t-r) + b_2\xi(t) \end{aligned}$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = f[\sigma(t)], \quad \sigma(t) = c'x(t) - \rho\xi(t), \quad \rho > 0$$

donde f satisface la condición de sector $0 \leq \sigma f(\sigma) \leq h\sigma^2$.

Supongamos que los datos iniciales tienen segunda derivada continua. Esto implica que la solución (2.3.15) tiene segunda derivada continua, excepto en los puntos $t = kr$, $k = 0,1,\ldots$

Por la fórmula de variación de constantes tenemos

$$\text{(2.3.16)} \qquad x_1(t) = w_1(t) + \int_0^t X_{11}(t-s)b_1\xi(s)ds + \int_0^t \dot{X}_{12}(t-s)b_2\xi(s)ds$$

$$(2.3.17)\quad y_1(t) = w_2(t) + \int_0^t X_{21}(t-s)b_2\xi(s)ds + \int_0^t \dot{X}_{22}(t-s)b_2\xi(s)ds$$

Como $\sigma(t) = c'x_1(t) - \rho\xi(t)$, tenemos

$$(2.3.18)\quad \sigma(t) = c'w_1(t) + \int_0^t c'X_{11}(t-s)b_1\xi(s)ds \; +$$

$$+ \int_0^t c'\dot{X}_{12}b_2\xi(s)ds - \rho\xi(t)$$

Sea $k_{11}(t) = c'X_{11}(t)b_1$. Observemos que para $t \geqq 0$, $|k_{11}(t)| \leqq l_o e^{-\alpha' t}$, donde l_o y α' son constantes positivas, suponiendo que D es estable y que el $\sigma(\mathcal{A}_0)$ está contenido en el semiplano de la izquierda. Por tanto $\int_t^\infty \dot{k}_{11}(\beta)d\beta$ es convergente.

Llamemos $\overline{k}_{11}(t) = \int_t^\infty k_{11}(\beta)d\beta$. Por tanto, $|\overline{k}_{11}(t)| \leqq Le^{-\alpha' t}$

De la misma forma, sea $\dot{k}_{12}(t) = c'\dot{X}_{12}(t)b_2$. Para $t \geqq 0$ tenemos que $|\dot{k}_{12}(t)| \leqq m_o e^{-\alpha' t}$ y que $\int_t^\infty \dot{k}_{12}(\beta)d\beta$ es convergente.
Llamemos $\dot{\overline{k}}_{12} = \int_t^\infty \dot{k}_{12}(\beta)d\beta$. Por tanto $|\dot{\overline{k}}_{12}(t)| \leqq Me^{-\alpha' t}$
Entonces

$$\int_0^t c'X_{11}(t-s)b_1\xi(s)ds = \int_0^t k_{11}(t-s)\xi(s)ds = \int_0^t \xi(s)\frac{d}{ds}\overline{k}_{11}(t-s)ds$$

$$= \xi(s)\overline{k}_{11}(t-s)\Big|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t \overline{k}_{11}(t-s)\frac{d\xi(s)}{ds}ds$$

$$= \overline{k}_{11}(0)\xi(t) - \overline{k}_{11}(t)\xi(0) - \int_0^t \overline{k}_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

Tambien

$$\int_0^{t^+} c'\dot{X}_{12}(t-s)b_2\xi(s)ds = \int_0^t \dot{k}_{12}(t-s)\xi(s)ds = \int_0^t \xi(s)\frac{d}{ds}\,\dot{\bar{k}}_{12}(t-s)ds$$

$$= \xi(s)\dot{\bar{k}}_{12}(t-s)\Big|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)\frac{d\xi(s)}{ds}\,ds$$

$$= \dot{\bar{k}}_{12}(0)\xi(t)-\dot{\bar{k}}_{12}(t)\xi(0)-\int_0^t \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds$$

Entonces (2.3.18) se puede escribir de la forma

$$\sigma(t) = c'w_1(t) - [\bar{k}_{11}(t)+\dot{\bar{k}}_{12}(t)]\xi(0) - \int_0^t \bar{k}_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds -$$

$$- \int_0^t \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds - [\rho - (\bar{k}_{11}(0) + \dot{\bar{k}}_{12}(0))]\xi(t)$$

Sea $z(t) = c'w_1(t) - [\bar{k}_{11}(t) + \dot{\bar{k}}_{12}(t)]\xi(0)$,
$\gamma = \rho - [\bar{k}_{11}(0) + \dot{\bar{k}}_{12}(0)]\xi(0)$, entonces tenemos

$$\sigma(t) = z(t) - \int_0^t \bar{k}_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds - \int_0^t \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds - \gamma\xi(t)$$

Supongamos que $\gamma > 0$, esto es

$$\rho > \bar{k}_{11}(0) + \dot{\bar{k}}_{12}(0) = \int_0^\infty k_{11}(t)dt + \int_0^\infty \dot{k}_{12}(t)dt$$

y definamos

$$\omega_T(t) = \begin{cases} \sigma(t)-z(t)-\gamma\xi(t) & 0 \leq t \leq T \\ -\int_0^t \bar{k}_{11}(t-s)f[\sigma(s)]ds-\int_0^t \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f[\sigma(s)]ds, & t> \end{cases}$$

$$f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)], & 0 \leqq t \leqq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Entonces

$$\omega_T(t) = -\int_0^t \bar{k}_{11}(t-s)f_T[\sigma(s)]ds - \int_0^t \dot{\bar{k}}_{12}(t-s)f_T[\sigma(s)]ds$$

Consideremos la función

$$\chi(T) = \int_0^T \left\{\omega_T - \frac{1}{h} f_T + q\left(\frac{d\omega_T}{dt} - \gamma f_T\right)\right\} f_T \cdot dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{[\tilde{\omega}_T - \frac{1}{h}\tilde{f}_T + i\omega q\tilde{\omega}_T - q\gamma\tilde{f}_T]\cdot\tilde{f}_T'\right\}d\omega$$

Por el teorema de convolución, $\tilde{\omega}_T = -\tilde{\bar{k}}_{11}\cdot\tilde{f}_T - i\omega\tilde{\bar{k}}_{12}\tilde{f}_T$. Asi

$$\chi(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -\mathrm{Re}\left\{(\tilde{\bar{k}}_{11}+i\omega\tilde{\bar{k}}_{12}) + i\omega q(\tilde{\bar{k}}_{11}+i\omega\tilde{\bar{k}}_{12}) + (q\gamma+\frac{1}{h})\right\}|\tilde{f}_T|^2 d\omega$$

Si

$$\mathrm{Re}\left\{(\tilde{\bar{k}}_{11}+i\omega\tilde{\bar{k}}_{12})(1+i\omega q) + q\gamma + \frac{1}{h}\right\} \geqq 0 \qquad (2.3.19)$$

entonces $\chi(T) \leqq 0$. Desde aqui, la demostración continua lo mismo que en el capítulo I, sección I.3. Por tanto, llegamos a la conclusión que $\lim_{t\to\infty}\sigma(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty}\xi(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty}x_1(t) = 0$.

Esto implica, por (2.3.17) que $\lim_{t\to\infty}y_1(t) = 0$.

Ahora debemos poner la condición (2.3.19) en función de $\tilde{k}_{11}$ y $\tilde{k}_{12}$.

De $\bar{k}_{11}(t) = \int_t^{\infty} k_{11}(\beta)d\beta$ tenemos $\dot{\bar{k}}_{11}(t) = -k_{11}(t)$ y $i\omega\tilde{\bar{k}}_{11}-\bar{k}_{11}(0) = -\tilde{k}_{11}$, esto es, $\tilde{\bar{k}}_{11} = -\dfrac{\tilde{k}_{11}}{i\omega} + \dfrac{\bar{k}_{11}(0)}{i\omega}$

De $\dot{\bar{k}}_{12}(t) = \int_t^{\infty} \dot{k}_{12}(\beta)d\beta$, tenemos $\ddot{\bar{k}}_{12}(t) = -\dot{\bar{k}}_{12}(t)$ y $(i\omega)^2\tilde{\bar{k}}_{12} - i\omega\bar{k}_{12}(0) - \dot{\bar{k}}_{12}(0) = -i\omega\tilde{k}_{12} + k_{12}(0)$, esto es

$$\tilde{\bar{k}}_{12} = -\frac{\tilde{k}_{12}}{i\omega} + \frac{\bar{k}_{12}(0)}{i\omega} + \frac{k_{12}(0)}{(i\omega)^2} + \frac{\dot{\bar{k}}_{12}(0)}{(i\omega)^2}$$

De $\gamma = \rho - [\bar{k}_{11}(0) + \dot{\bar{k}}_{12}(0)]$, tenemos $q\gamma = q\rho-q\bar{k}_{11}(0)-q\dot{\bar{k}}_{12}($

Entonces en (2.3.19) tenemos

$$(\tilde{\bar{k}}_{11}+i\omega\tilde{\bar{k}}_{12})(1+i\omega q) + q\gamma + \frac{1}{h}) = -\frac{\tilde{k}_{11}}{i\omega} + \frac{\bar{k}_{11}(0)}{i\omega} - q\tilde{k}_{11} + q\bar{k}_{11}(0)$$

$$+ (1+i\omega q)[-\tilde{k}_{12}+\bar{k}_{12}(0) + \frac{k_{12}(0)}{i\omega} + \frac{\dot{\bar{k}}_{12}(0)}{i\omega}] + q\rho - q\bar{k}_{11}(0)- q\dot{\bar{k}}_{12}(0)+ \frac{1}{h}$$

$$= -\tilde{k}_{11}(q+ \frac{1}{i\omega}) + \frac{\bar{k}_{11}(0)}{i\omega} + q\bar{k}_{11}(0) - \tilde{k}_{12}(1+i\omega q) + q\rho + \frac{1}{h} + \bar{k}_{12}(0) +$$

$$+ \frac{k_{12}(0)}{i\omega} + \frac{\dot{\bar{k}}_{12}(0)}{i\omega} + i\omega q\bar{k}_{12}(0) + qk_{12}(0) + q\dot{\bar{k}}_{12}(0) - q\bar{k}_{11}(0) - q\dot{\bar{k}}_{12}(0)$$

Por tanto, la parte real (fórmula (2.3.19))

$$\mathrm{Re}[(\tilde{\bar{k}}_{11}+i\omega\tilde{\bar{k}}_{12})(1+i\omega q) + q\gamma + \frac{1}{h}] = \mathrm{Re}[-\tilde{k}_{11}(q+ \frac{1}{i\omega})-\tilde{k}_{12}(1+i\omega q) + q\rho + \frac{1}{h} +$$

$$+ \bar{k}_{12}(0) + qk_{12}(0)]$$

Pero $k_{12}(0) = c'X_{12}(0)b_2 = 0$, puesto que $X_{12}(0) = 0$ y $\dot{\bar{k}}_{12}(t) = \int_t^{\infty} \dot{k}_{12}(\beta)d\beta = k_{12}(\infty) - k_{12}(t) = -k_{12}(t)$ puesto que $k_{12}(\infty) = 0$ ya que $k_{12}(t)$ tiende a cero exponencialmente.

Por tanto $\bar{k}_{12}(t) = -\int_0^t k_{12}(\beta)d\beta \Rightarrow \bar{k}_{12}(0) = 0.$
Asi la condición (2.3.19) toma la forma

$$\mathrm{Re}\left\{(q+\frac{1}{i\omega})\tilde{k}_{11} + (1+i\omega q)\tilde{k}_{12} - q\rho - \frac{1}{h}\right\} \leqq 0$$

Tenemos pues el siguiente

<u>Teorema.2.3.3.</u> Consideremos el problema (2.3.15) donde la funcion inicial tiene segunda derivada continua. Si

i) D es estable

ii) $\exists\delta > 0$ tal que $\mathrm{Re}\sigma(\mathcal{A}_0) \leqq -\delta < 0$.

iii) $\exists q > 0$ tal que

$$\mathrm{Re}\left\{(q+\frac{1}{i\omega})\tilde{k}_{11} + (1+i\omega q)\tilde{k}_{12} - q\rho - \frac{1}{h}\right\} \leqq 0$$

donde $\tilde{k}_{11} = c'\tilde{X}_{11}b_1$, $\tilde{k}_{12} = c'\tilde{X}_{12}b_2$, entonces el sistema (2.3.15) es absolutamente estable para toda función f que satisfaga la condicion de sector $0 \leqq \sigma f(\sigma) \leqq h\sigma^2$.

Capítulo III

SOLUCIONES PERIODICAS DEL PROBLEMA DE LINEAS DE TRANSMISION.

III. 1. Descomposición de la fórmula de variación de constantes. Alternativa de Fredholm para las soluciones periodicas.

Consideremos el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BJy(t-r)$$

$$y(t) = E'x(t) + FJy(t-r)$$

con los valores iniciales $x(0) = a \in E^n$, $y_o = \psi \in C([-r,0],E^n)$ ó equivalentemente

$$\frac{d}{dt} D(z_t) = L(z_t) \qquad (3.1.1)$$

donde $z(t) = [x(t),y(t)]'$, $z_o = \phi = \begin{bmatrix} a \\ \psi \end{bmatrix} \in Y_o \subset Y = E^n \times C$ con

$$Y_o = \{ (a,\psi) | \psi(0) = E'a + FJ\psi(-r) \} \qquad (3.1.2)$$

$$D(z_t) \overset{def}{=} Kz(t) - Mz(t-r), \quad L(z_t) \overset{def}{=} Nz(t) + Pz(t-r)$$

con K, M, N y P definidas como en el capítulo II, sección II.1.

Hemos cambiado la notación del espacio integral para evitar confusiones en la notación.

El sistema (3.1.1) es

$$\frac{d}{dt}[Kz(t) - Mz(t-r)] = Nz(t) + Pz(t-r)$$

ó bien

$$\frac{d}{dt}[z(t) - K^{-1}Mz(t-r)] = K^{-1}Nz(t) + K^{-1}Pz(t-r)$$

Puesto que

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -E' & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ E' & I \end{bmatrix} \qquad K^{-1}M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ E' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & FJ \end{bmatrix} = M$$

y

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ E'A & 0 \end{bmatrix} \overset{def}{=} \overline{N}, \qquad K^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 & BJ \\ 0 & E'BJ \end{bmatrix} \overset{def}{=} \overline{P}$$

Por tanto, el sistema anterior es

$$(3.1.3) \quad \frac{d}{dt}[z(t) - Mz(t-r)] = \overline{N}z(t) + \overline{P}z(t-r)$$

Definamos el sistema adjunto de (3.1.3) por

$$(3.1.4) \quad \frac{d}{dt}[w(t) - w(t+r)M] = -w(t)\overline{N} - w(t+r)\overline{P}$$

De Hale-Meyer [19] se deduce que la solución $w(\cdot)$ de (3.1.4) es diferenciable en $(-\infty,r]$. Por tanto, (3.1.4) se puede escribir de la forma

$$\dot{w}(t) - \dot{w}(t+r)M = -w(t)\bar{N} - w(t+r)\bar{P} \tag{3.1.5}$$

Si llamamos $w(t) = [v_1(t), v_2(t)]$, entonces

$$[\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t)] - [\dot{v}_1(t+r), \dot{v}_2(t+r)]M = -[v_1(t), v_2(t)]\bar{N} - [v_1(t+r), v_2(t+r)]\bar{P}$$

de donde

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &= -v_1(t) - v_2(t)E'A \\ \dot{v}_2(t) - \dot{v}_2(t+r)FJ &= -v_1(t+r)BJ - v_2(t+r)E'BJ \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Observemos que la primera ecuación de (3.1.6) es una ecuación diferencial ordinaria y determina v_1 en $[\sigma, \sigma+r]$. Asi los valores iniciales para (3.1.6) son $v_1(\sigma) = b \in E^{n^*}$ y $v_2(\sigma+\theta) = \alpha_2(\theta)$, $\alpha_2 \in C^* = C([0,r], E^{n^*})$, es decir,

$$(b, \alpha_2) \in E^{n^*} \times C^*$$

La primera ecuación en (3.1.6) es equivalente a

$$\dot{v}_1(\sigma+\theta) = -v_1(\sigma+\theta)A - v_2(\sigma+\theta)E'A, \quad v_1(\sigma) = b, \quad \theta \in [0,r].$$

Si llamamos $v_1(\sigma+\theta) = \alpha_1(\theta)$, entonces

$$\dot{\alpha}_1(\theta) = -\alpha_1(\theta)A - \alpha_2(\theta)E'A, \ \theta \in [0,r]$$

con la condición inicial $\alpha_1(0) = b$.

Para todo $\alpha = (b,\alpha_2) \in E^{n^*} \times C^*$, sea $w(\sigma,\alpha)$. La solución de (3.1.4) en $(-\infty,\sigma+r]$ con $w(\sigma,\alpha)(\sigma+\theta) = \alpha(\theta)$, $\theta \in [0,r]$

Definamos $w^t(\sigma,\alpha) \in E^{n^*} \times C^*$, $t < \sigma$, por

$$w^t(\sigma,\alpha)(\theta) = w(\sigma,\alpha)(t+\theta), \qquad \theta \in [0,r]$$

Para toda $\phi \in Y$ y para toda $\alpha \in E^{n^*} \times C^*$, definamos la siguiente forma bilineal:

$$(3.1.7) \qquad (\alpha,\phi) = \alpha(0)[\phi(0)-M\phi(-r)] - \int_{-r}^{0} \dot{\alpha}(\theta+r)M\phi(\theta)d\theta + \int_{-r}^{0} \alpha(\theta+r)\overline{P}\phi(\theta)d\theta$$

donde $\alpha = (b,\alpha_2)$, $\phi = (a,\psi)'$

<u>Lema 3.1.1.</u> Si $w(t)$ es una solución de (3.1.5) en $(-\infty,\sigma+r]$ y $z(t)$ es una solución de (3.1.3) en $[-r,\infty)$, $\sigma > 0$, entonces

$$(3.1.8) \qquad (w^t,z_t) = \text{constante}$$

para todo $t \in [0,\sigma]$.

<u>Demostración:</u> Por (3.1.7), tenemos

$$(w^t,z_t) = w(t)[\ z(t) - Mz(t-r)\ ] - \int_{t-r}^{t} \dot{w}(\theta+r)Mz(\theta)d\theta + \int_{t-r}^{t} w(\theta+r)\overline{P}z(\theta)d$$

Si derivamos con respecto a t, tenemos por (3.1.3) y (3.1.5)

$$\frac{d}{dt}(w^t, z_t) = \dot{w}(t)[z(t) - Mz(t-r)] + w(t)[\bar{N}z(t) + \bar{P}z(t-r)] - \dot{w}(t+r)Mz(t) + \dot{w}(t)Mz(t-r) + w(t+r)\bar{P}z(t) - w(t)\bar{P}z(t-r)$$

$$= \dot{w}(t)z(t) - \dot{w}(t)Mz(t-r) + w(t)\bar{N}z(t) + w(t)\bar{P}z(t-r) - \dot{w}(t+r)Mz(t) + \dot{w}(t)Mz(t-r) + w(t+r)\bar{P}z(t) - w(t)\bar{P}z(t-r)$$

$$= \dot{w}(t)z(t) + [-\dot{w}(t+r)M + w(t)\bar{N} + w(t+r)\bar{P}]z(t)$$

$$= \dot{w}(t)z(t) - \dot{w}(t)z(t) = 0$$

lo cual implica la conclusión del lema.

Consideremos ahora el sistema no homogeneo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BJy(t-r) + f(t)$$
$$y(t) = E'x(t) + FJy(t-r) + g(t)$$

donde $f, g \in C([0,\infty), E^n)$ y con valores iniciales $x(0) = a \in E^n$, $y_0 = \psi \in C$. Este sistema es equivalente a

(3.1.9) $$\frac{d}{dt}[D(z_t) - G(t)] = L(z_t) + F(t)$$

con los valores iniciales $(a,\psi) \in Y$ satisfaciendo la condición

(3.1.10) $$\psi(0) - E'a - FJ\psi(-r) = g(0)$$

y donde $F(t) = col(f(t),0)$, $G(t) = col(0,g(t))$.

El sistema (3.1.9) se puede escribir de la forma

(3.1.11) $$\frac{d}{dt}[z(t) - Mz(t-r) - K^{-1}G(t)] = \bar{N}z(t) + \bar{P}z(t-r) + K^{-1}F(t)$$

<u>Lema 3.1.2</u>. Si $w(t)$ es una solución de la ecuación adjunta (3.1.5) en $(-\infty, \sigma+r]$, $\sigma > 0$, y $z(t)$ es una solución de (3.1.11) en

$[-r,\infty)$, entonces

(3.1.12) $$\frac{d}{dt}(w^t,z_t) = w(t)K^{-1}F(t) - \dot{w}(t)K^{-1}G(t)$$

para todo $t\in[0,\sigma]$.

Demostración: De (3.1.7) se tiene

$$(w^t,z_t) = w(t)[z(t) - Mz(t-r) - K^{-1}G(t)] - \int_{t-r}^{t}\dot{w}(\theta+r)Mz(\theta)d\theta + $$
$$+\int_{t-r}^{t} w(\theta+r)\bar{P}z(\theta)d\theta$$

Teniendo en cuenta (3.1.5) y (3.1.11) y derivando con respecto a t, tenemos

$$\frac{d}{dt}(w^t,z_t) = \dot{w}(t)[z(t) - Mz(t-r) - K^{-1}G(t)] + w(t)[\bar{N}z(t) + \bar{P}z(t-r) +$$
$$K^{-1}F(t)] - \dot{w}(t+r)Mz(t) + \dot{w}(t)Mz(t-r) + w(t+r)\bar{P}z(t) -$$
$$- w(t)\bar{P}z(t-r)$$
$$= \dot{w}(t)z(t) + [-\dot{w}(t+r)M + w(t)\bar{N} + w(t+r)\bar{P}]z(t) +$$
$$+ w(t)K^{-1}F(t) - \dot{w}(t)K^{-1}G(t)$$
$$= w(t)K^{-1}F(t) - \dot{w}(t)K^{-1}G(t).$$

Teorema 3.1.1. Si el sistema (3.1.11) tiene soluciones periódicas de periodo T, entonces

$$\int_0^T w(t)K^{-1}F(t)dt - \int_0^T [dw(t)K^{-1}]G(t) = 0$$

para todas las soluciones T-periódicas w(t) del sistema adjunto (3.1.5).

Demostración: Sea z(t) una solución de (3.1.11) definida para $t\geqq -r$ y w(t) una solución de (3.1.5) definida para $t\in(-\infty,T+r]$. Para $0\leqq t\leqq T$, tenemos por (3.1.12) que

$$(w^T,z_T) = (w^o,z_o) + \int_0^T w(t)K^{-1}F(t)dt - \int_0^T [dw(t)K^{-1}]G(t).$$

Si z(t) y w(t) son T-periódicas, entonces (w^t,z_t) es tambien

T-periódica. Por tanto, $(w^T, z_T) = (w^o, z_o)$ y el teorema está probado.

Ahora vamos a proceder a obtener una descomposición de la fórmula de variación de constantes con vistas a dar un teorema tipo alternativa de Fredholm para las soluciones periódicas de (3.1.9).

La solución general de (3.1.9) es dada por la fórmula de variación de constantes (2.2.29). Por tanto la solución $\bar{z}$ de (3.1.9) que pasa por $\xi=(a,\psi)\in Y$ satisface la ecuación

$$\bar{z}_t - X_o G(t) = T(t)[\xi - X_o G(0)] + \int_0^t T(t-s)X_o F(s)ds - \\ - \int_0^t [d_s T(t-s)X_o]G(s) \tag{3.1.13}$$

donde $\bar{z}_t = \mathrm{col}(x(t), y_t)$ y $T(t) : Y + \langle X_o \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} PC \to$ (funciones en $[-r,0]$)

Como en el capitulo II, sección II.2, vamos a simplificar la fórmula (3.1.13). Para ello cambiaremos la notación en la matriz fundamental X_o.

Sea

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = [U,W]$$

donde $U = \mathrm{col}(X_{11}, X_{21})$, $W = \mathrm{col}(X_{12}, X_{22})$.

Sabemos que U y W satisfacen las fórmulas (2.2.9) y (2.2.10), respectivamente. Puesto que U satisface (2.2.9),tambien satisface la condición del espacio integral Y_o. Por tanto podemos escribir

$$T(t-s)X_o F(s) = T(t-s)U_o f(s) = T_o(t-s)U_o f(s)$$

teniendo en cuenta que $F = \mathrm{col}(f,0)$ y donde $T_o(t)$ es la restricción del semigrupo $T(t)$ a $Y_o + \langle X_o \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} (PC)_o$, esto es, hemos extendido la definición de $T_o(t)$ a funciones con una discontinuidad en cero.

Como W satisface la ecuación (2.2.10) no cumple la condición (3.1.2). Supongamos que D es estable y definamos la transformación $W \to V$, $V = \mathrm{col}(X_{12}^*, X_{22}^*)$, por $X_{12} = X_{12}^*$, $X_{22} = X_{22}^* + (I-FJ)^{-1}I$. Entonces

$$\begin{aligned} X_{22}^*(0) - E'X_{12}^*(0) - FJX_{22}^*(-r) &= X_{22}(0) - E'X_{12}(0) - FJX_{22}(-r) - \\ &\quad -(I-FJ)^{-1}I + FJ(I-FJ)^{-1} \\ &= I - (I-FJ)(I-FJ)^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Así V satisface la condición (3.1.2) del espacio integral Y_o. Por tanto y como $G = \mathrm{col}(0,g)$ se puede escribir

$$[d_sT(t-s)X_o]G(s) = [d_sT(t-s)W_o]g(s) = [d_sT_o(t-s)V_o]g(s)$$

puesto que sólo nos interesa la variación de $T(t-s)X_o$.

En (3.1.13) definamos el cambio de variables

$$\bar{z}_t - X_oG(t) = z_t, \quad \xi - X_oG(0) = \phi$$

de $Y \to PC$. Entonces

$$\phi \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} a \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ X_{22,o}g(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \psi - X_{22,o}g(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \psi - (X_{22,o}^* + (I-FJ)^{-1})g(0) \end{bmatrix}$$

Si definimos

$$\phi_1(\theta) = \begin{cases} \psi(\theta), & -r \leqq \theta < 0 \\ \psi(0) - (X_{22,o}^*(0) + (I-FJ)^{-1})g(0), & \theta = 0 \end{cases}$$

entonces ϕ satisface la condición en el espacio Y_o. En efecto,

$$\begin{aligned} \phi_1(0) - E'a - FJ\phi_1(-r) &= \psi(0) - X_{22,o}^*(0)g(0) - (I-FJ)^{-1}g(0) - E'a - \\ &\quad - FJ\psi(-r) \\ &= \psi(0) - X_{22,o}(0)g(0) + (I-FJ)^{-1}g(0) - \\ &\quad - (I-FJ)^{-1}g(0) - E'a - FJ\psi(-r) \\ &= \psi(0) - g(0) - E'a - FJ\psi(-r) = 0 \end{aligned}$$

por la condición (3.1.10).

Asi, la fórmula (3.1.13) se puede escribir de la forma

(3.1.14) $$z_t = T_0(t)\phi + \int_0^t T_0(t-s)U_0 f(s)ds - \int_0^t [d_s T_0(t-s)V_0]g(s)$$

Ahora, vamos a proceder a obtener la descomposición de la fórmula de variación de constantes con vistas a dar el teorema de alternativa de Fredholm para soluciones periodicas de (3.1.9).

De acuerdo con la teoría general expuesta en el capítulo I sección II, si el operador D es estable, entonces el conjunto $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0),\ \mathrm{Re}\lambda \geqq 0\}$ es finito y el espacio Y_0 se puede descomponer como $Y_0 = P \oplus Q$.

Si Φ es una base para los valores iniciales de todas las soluciones de la forma $p(t)e^{\lambda t}$ y Ψ es una base para las correspondientes soluciones del sistema adjunto, entonces (Ψ,Φ) es no singular y se puede tomar igual a la identidad.

Si $\phi \in (PC)_0$, $\phi = \phi^P + \phi^Q$, $\phi^P \in P$, $\phi^Q \in Q$ entonces $\phi^P = \Phi(\Psi,\phi)$.

Tambien, como sabemos por la sección II del capítulo I, $\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{B\theta}$, $T_0(t)\Phi = \Phi e^{Bt}$, $[T_0(t)\Phi](\theta) = \Phi(0)e^{B(t+\theta)}$ y $\Psi(\theta) = e^{-B\theta}\Psi(0)$, donde la matriz B está definida por la relación $\mathcal{A}_0\Phi = \Phi B$, donde $\mathcal{A}_0$ es el generador infinitesimal del semigrupo $\{T_0(t), t \geqq 0\}$ definido sobre $(PC)_0$.

Por (3.1.12), tenemos

$$(e^{-Bt}\Psi, z_t) = (\Psi,\phi) + \int_0^t e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - \int_0^t [d_s e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}]G(s)$$

y por tanto

$$(\Psi,z_t) = e^{Bt}(\Psi,\phi) + \int_0^t e^{B(t-s)}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - \int_0^t [d_s e^{B(t-s)}\Psi(0)K^{-1}]G(s).$$

Si $z_t = z_t^P + z_t^Q$, $z_t^P = \Phi(\Psi,z_t)$, entonces

$$z_t^P = \Phi e^{Bt}(\Psi,\phi) + \int_0^t \Phi e^{B(t-s)}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - \int_0^t [d_s\Phi e^{B(t-s)}\Psi(0)K^{-1}]G(s) \tag{3.1.15}$$

$$= T_o(t)\Phi(\Psi,\phi) + \int_0^t T_o(t-s)\Phi\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - \int_0^t [d_sT_o(t-s)\Phi\Psi(0)K^{-1}]G(s)$$

$$= T_o(t)\phi^P + \int_0^t T_o(t-s)U_o^Pf(s)ds - \int_0^t [d_sT_o(t-s)V_o^P]g(s)$$

donde $U_o^Pf(s) = \Phi\Psi(0)K^{-1}F(s)$ y $[d_sT_o(t-s)\Phi\Psi(0)K^{-1}]G(s) = [d_sT_o(t-s)V_o^P]g(s)$, despues de tener en cuenta las transformaciones anteriores y las formas de F y G.

Si en (3.1.15) hacemos $u(t) = (\Psi,z_t)$, esto es, $z_t^P = \Phi u(t)$, entonces

$$u(t) = e^{Bt}u(0) + \int_0^t e^{B(t-s)}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - \int_0^t [d_se^{B(t-s)}\Psi(0)K^{-1}]G(s) \tag{3.1.16a}$$

lo cual implica que

$$\dot{u}(t) = Bu(t) + \Psi(0)K^{-1}F(t) + B\Psi(0)K^{-1}G(t) \tag{3.1.16}$$

Definamos $U_o^Q = U_o - U_o^P$, $V_o^Q = V_o - V_o^P$. Entonces, de (3.1.14) y (3.1.15), obtenemos

$$z_t^Q = T_o(t)\phi^Q + \int_0^t T_o(t-s)U_o^Qf(s)ds - \int_0^t [d_sT_o(t-s)V_o^Q]g(s). \tag{3.1.17}$$

Sumarizando los resultados obtenidos, tenemos le siguiente

Teorema 3.1.2. Consideremos la ecuación (3.1.9) con D estable. Supongamos que Y_o se descompone por $\Lambda = \{ \lambda \in \sigma(\mathscr{A}_o)/\mathrm{Re}\lambda \geqq 0 \}$ de la forma $Y_o = P \oplus Q$ y que Φ es una base de P y Ψ es una base del correspondiente espacio para el sistema adjunto. Entonces la solución $z(\phi)$ de (3.1.9) satisface (3.1.15) y (3.1.17). Además, si $z_t^P = \Phi u(t)$, entonces $u(t)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria (3.1.16).

Nos proponemos ahora dar un teorema tipo alternativa de Fredholm para las soluciones periódicas de la ecuación (3.1.9) (ver Hale [11]).

Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de funciones continuas y acotadas que aplican $(-\infty,\infty)$ en E^n con la norma del supremo. Sea $\mathscr{P}_T$ el conjunto de $\mathscr{B}$ de las funciones periodicas de periodo T.

Sabemos, por la fórmula de variación de constantes, que para todo $s \in (-\infty,\infty)$ la solución z de (3.1.9), con valor inicial z_s en s, debe satisfacer

$$(3.1.18) \quad z_t = T_o(t-s)z_s + \int_s^t T_o(t-\tau)U_o f(\tau)d\tau - \int_s^t [d_\tau T_o(t-\tau)V_o]g(\tau)$$

Estamos interesados solamente en las soluciones de (3.1.18) que son acotadas en $(-\infty,\infty)$. Entonces, si D es estable se deduce de [10] que la solución es continua y continuo diferenciable. Decimos que z es una solución de (3.1.18) si z está definida y es continua en $(-\infty,\infty)$ y para todo $s \in (-\infty,\infty)$ la relación (3.1.18) se verifica.

Supongamos que D es estable. Entonces el conjunto $\Lambda = \{ \lambda \in \sigma(\mathscr{A}_o)/\mathrm{Re}\lambda \geqq 0 \}$ es finito. Supongamos que $\Lambda = \Lambda_o \cup \Lambda_1$, donde $\Lambda_o = \{\lambda \in \sigma(\mathscr{A}_o)/\mathrm{Re}\lambda = 0 \}$, $\Lambda_1 = \{ \lambda \in \sigma(\mathscr{A}_o)/\mathrm{Re}\lambda > 0 \}$. Si el espacio

$Y_o = E^n \times C$ se descompone por Λ de la forma $Y_o = P_o \oplus P_1 \oplus Q$, donde P_o y P_1 son los subespacios propios generalizados asociados con Λ_o y Λ_1, respectivamente, entonces la solución $z_t = z_t^{P_o} + z_t^{P_1} + z_t^Q$ de (3.1.18) es equivalente a

$$(3.1.19a) \quad z_t^{P_o} = T_o(t-s)z_s^{P_o} + \int_s^t T_o(t-\tau)U_o^{P_o}f(\tau)d\tau - \int_s^t [d_\tau T_o(t-\tau)V_o^{P_o}]g(\tau) \quad , \quad t \geq s$$

$$(3.1.19b) \quad z_t^{P_1} = T_o(t-s)z_s^{P_1} + \int_s^t T_o(t-\tau)U_o^{P_1}f(\tau)d\tau - \int_s^t [d_\tau T_o(t-\tau)V_o^{P_1}]g(\tau) \quad , \quad t \geq s$$

$$(3.1.19c) \quad z_t^Q = T_o(t-s)z_s^Q + \int_s^t T_o(t-\tau)U_o^Q f(\tau)d\tau - \int_s^t [d_\tau T_o(t-\tau)V_o^Q]g(\tau) \quad , \quad t \geq s$$

<u>Lema 3.1.3.</u> Supongamos que D es estable, $f,g \in \mathscr{B}$. Entonces, la ecuación (3.1.19c) tiene una única solución z_t^Q acotada en $(-\infty,\infty)$ que satisface

$$z_t^Q = \int_{-\infty}^t T_o(t-\tau)U_o^Q f(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^t [d_\tau T_o(t-\tau)V_o^Q]g(\tau)$$

Ademas, z_t^Q es una función lineal y continua en $\mathscr{B}$ en el sentido de que existe una constante $L > 0$ tal que

$$\|z_t^Q\| \leqq L(|f| + |g|) \quad t \in (-\infty,\infty)$$

Tambien, si $f,g \in \mathscr{P}_T$, entonces z_t^Q es T-periódica, esto es, $z_{t+T}^Q = z_t^Q$.

Demostración: Si z es una solución de (3.1.18) en $(-\infty,\infty)$, entonces (3.1.19c) se cumple para todo $s \in (-\infty,\infty)$. Como D es estable $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(\mathscr{A}_0)/\mathrm{Re}\lambda \geqq 0\}$ es un conjunto finito. Entonces, ver Hale [14], todos los elementos $\mu(t)$ del espectro $\sigma(T_0(t))$ con $|\mu(t)| \geqq e^{0t} = 1$ pertenecen al espectro puntual, el número de $\mu(t)$ es finito y el subespacio propio generalizado de cada $\mu(t)$ es finito dimensional. El espacio Y_0 puede ser descompuesto en $P \oplus Q$ y el espectro de $T_0(t)$ restringido a Q es $\sigma(T_0(t)) - \{\mu(t)\}$, esto es, el espectro de $T_0(t)|_Q$ está situado dentro del círculo unidad. Por tanto, existen constantes positivas K, α tales que

$$\|T_0(t)|_Q\| \leqq Ke^{-\alpha t}, \quad t \geqq 0 \quad \text{ó bien} \quad \|T_0(t)\phi^Q\| \leqq Ke^{-\alpha t}\|\phi^Q\|, \quad t \geqq 0$$

Asi, tenemos que $\|T_0(t-s)z_s^Q\| \leqq Ke^{-\alpha(t-s)}\|z_s^Q\|$, $t \geqq s$ para todo $s \in (-\infty,\infty)$. Si z_s^Q esta uniformemente acotada en s, tenemos $T_0(t-s)z_s^Q \to 0$ cuando $s \to -\infty$ y por tanto, tomando límites cuando $s \to -\infty$ en (3.1.19c) obtenemos el lema. De Cruz y Hale [5], se deduce que podemos elegir K y α tales que $\|T_0(t)U_0^Q\| \leqq Ke^{-\alpha t}$, $\|\frac{d}{d\tau}T_0(t-\tau)V_0^Q\| \leqq Ke^{-\alpha(t-\tau)}$. Entonces

$$\|z_t^Q\| \leq \int_{-\infty}^{t} Ke^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)d\tau \quad - \quad \int_{-\infty}^{t} \alpha Ke^{-\alpha(t-\tau)}g(\tau)d\tau$$

$$\leq \frac{K}{\alpha} \sup_{\tau \in (-\infty,\infty)} |f(\tau)| + K \sup_{\tau \in (-\infty,\infty)} |g(\tau)|$$

Sea $L = \max\{\frac{K}{\alpha}, K\}$, entonces $\|z_t^Q\| \leq L(|f| + |g|) \quad t \in (-\infty,\infty)$

Esto demuestra que z_t^Q esta acotada.

Si hacemos el cambio $t-\tau = -u$ obtenemos

$$z_t^Q = \int_{-\infty}^{0} T_o(-u)U_o^Q\, f(t+u)du \quad - \quad \int_{-\infty}^{0} [d_u T_o(-u)V_o^Q]g(t+u)$$

y por tanto si $f(t+T) = f(t)$ y $g(t+T) = g(t)$ tenemos que

$$z_t^Q = z_{t+T}^Q$$

<u>Lema. 3.1.4.</u> Sea D estable y $f,g \in \mathscr{B}$ la ecuación (3.1.19b) tiene úna unica solución $z_t^{P_1}$ acotada en $(-\infty,\infty)$ que satisface

$$z_t^{P_1} = \int_{\infty}^{t} T_o(t-\tau)U_o^{P_1}f(\tau)d\tau \quad - \quad \int_{\infty}^{t} [d_\tau T_o(t-\tau)V_o^{P_1}]g(\tau)$$

Además, $z_t^{P_1}$ es una función lineal y continua en $\mathscr{B}$ en el sentido de que existe una constante $L > 0$ tal que

$$\|z_t^{P_1}\| \leq L(|f| + |g|), \quad t \in (-\infty,\infty)$$

Tambien, si f, g $_T$, entonces $z_t^{P_1}$ es T-periódica.

<u>Demostración:</u> Sea Φ una base de P_1 y Ψ una base del subespacio propio de la ecuación adjunta. Sea B la matriz cuyos valores propios coinciden con Λ_1 y determinada por $\mathscr{A}_0\Phi = \Phi B$. Para toda $\phi \in PC$, sea $\phi^{P_1} = \Phi(\Psi,\phi)$, $T_0(t)\phi^{P_1} = T_0(t)\Phi(\Psi,\phi) = \Phi e^{Bt}(\Psi,\phi)$.

Haciendo las correspondientes sustituciones en (3.1.19b) se deduce que

$$\Phi(\Psi,z_t) = \Phi e^{B(t-s)}(\Psi,z_s) + \Phi\int_s^t e^{B(t-\tau)}(\Psi,U_0)f(\tau)d\tau - \Phi\int_s^t [d_\tau e^{B(t-\tau)}(\Psi,V_0)g(\tau$$

entonces

$$0 = \Phi[(\Psi,z_t) - e^{B(t-s)}(\Psi,z_s) - \int_s^t e^{B(t-\tau)}(\Psi,U_0)f(\tau)d\tau + \\ + \int_s^t [d_\tau e^{B(t-\tau)}(\Psi,V_0)]g(\tau)]$$

$$= \Phi[(\Psi,z_t) - e^{B(t-s)}(\Psi,z_s) - e^{B(t-s)}\int_s^t e^{B(s-\tau)}(\Psi,U_0)f(\tau)d\tau + \\ + e^{B(t-s)}\int_s^t [d_\tau e^{B(s-\tau)}(\Psi,V_0)]g(\tau)]$$

$$= \Phi[(\Psi,z_t) - e^{B(t-s)}(\Psi,\ z_s+\int_s^t e^{B(s-\tau)}U_0f(\tau)d\tau-\int_s^t [d_\tau e^{B(s-\tau)}V_0]g(\tau))]$$

Por tanto

$$(\Psi,z_t) = e^{B(t-s)}(\Psi,z_s+\int_s^t e^{B(s-\tau)}U_0f(\tau)d\tau-\int_s^t [d_\tau e^{B(s-\tau)}V_0]g(\tau)).$$

Como los valores propios de B tienen parte real positiva, existen constantes $K>0$, $\alpha>0$ tales que $|e^{Bt}a| > Ke^{\alpha t}|a|$, $\forall a$, $t \geq 0$. Si $z_t^{P_1}$ está acotada, entonces (Ψ,z_t) está acotada puesto que $(\Psi,z_t) = (\Psi,z_t^{P_1})$. Por tanto, si $t\to\infty$, tenemos

$$(\Psi,z_s+\int_s^t e^{B(s-\tau)}U_0f(\tau)d\tau-\int_s^t [d_\tau e^{B(s-\tau)}V_0]g(\tau)) \to 0, \text{ cuando } t\to\infty.$$

Multiplicando por Φ se tiene que

$$\Phi(\Psi,z_s) + \Phi(\Psi, \int_s^t e^{B(s-\tau)}U_0 f(\tau)d\tau - \int_s^t [d_\tau e^{B(s-\tau)}V_0]g(\tau)) \to 0$$

cuando $t \to \infty$, es decir

$$z_s^{P_1} + \Phi\int_s^\infty e^{B(s-\tau)}(\Psi,U_0)f(\tau)d\tau - \Phi\int_s^\infty [d\ e^{B(s-\tau)}(\Psi,V_0)]g(\tau) = 0$$

$$z_s^{P_1} = -\int_s^\infty T_0(s-\tau)U_0^{P_1}f(\tau)d\tau + \int_s^\infty [d_\tau T_0(s-\tau)V_0^{P_1}]g(\tau)$$

$$= \int_\infty^s T_0(s-\tau)U_0^{P_1}f(\tau)d\tau - \int_\infty^s [d_0 T_0(s-\tau)V_0^{P_1}]g(\tau), \qquad s\in(-\infty,\infty)$$

que coincide con la fórmula dada en el lema con la t sustituida por s.

De los resultados de Cruz-Hale [5] y Henry [20] se deduce que existen constantes $K>0$, $\alpha>0$ tales que $\|T_0(t-\tau)U_0^{P_1}\|$ y $\|\frac{d}{d\tau}T_0(t-\tau)V_0^{P_1}\| \leq Ke^{\alpha(t-\tau)}$, $t\leq 0$. Por tanto

$$|z_t^{P_1}| \leq \int_\infty^t Ke^{\alpha(t-\tau)}f(\tau)d\tau + \int_\infty^t \alpha Ke^{\alpha(t-\tau)}g(\tau)d\tau$$

$$\leq \frac{K}{\alpha}\sup|f(\tau)| + K\sup|g(\tau)| \leq L(|f|+|g|),\ \tau\in(-\infty,\infty).$$

Si hacemos el cambio $t-\tau=-u$, obtenemos

$$z_t^{P_1} = \int_\infty^0 T_0(-u)U_0^{P_1}f(t+u)du - \int_\infty^0 [d_u T_0(-u)V_0^{P_1}]g(t+u)$$

y, por tanto, si $f,g\in\mathscr{P}_T$ entonces $z_t^{P_1} = z_{t+T}^{P_1}$.

<u>Teorema 3.1.3.</u> Supongamos que D es estable y $f,g\in\mathscr{B}$. Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (3.1.9) tenga una solución en $\mathscr{B}$ es que la ecuación caracteristica asociada a la ecuación homogenea no tenga raices en el eje imaginario.

Ademas, la solución $\mathscr{K}(f,g)$ es única, lineal en f y g y existe una constante L tal que

$$(3.1.20) \qquad |\mathscr{K}(f,g)| \leq L(|f| + |g|)$$

Ademas, si $f,g \in \mathscr{P}_T$ entonces $\mathscr{K}(f,g) \in \mathscr{P}_T$.

Demostración: Si la ecuación característica tiene todas sus raices con parte real distinta de cero, los lemas 3.1.3 y 3.1.4 dan la condición suficiente.

Supongamos ahora que (3.1.9) tiene una solución en $\mathscr{B}$, $\forall f,g \in \mathscr{B}$, y supongamos que algunos elementos de $\sigma(\mathscr{A}_0)$ están en el eje imaginario. Descomponemos $Y_0 = P_0 \oplus P_1 \oplus Q$, y sea Φ una base de P_0, Ψ una base del subespacio propio generalizado de la ecuación adjunta asociada con Λ_0, y sea $\mathscr{A}_0\Phi = \Phi B$ donde los valores propios de B coinciden con Λ_0, esto es, tienen sus partes reales iguales a cero.

Vamos a demostrar que existen dos funciones $f,g \in \mathscr{B}$ tales que la solución de (3.1.19a)no esta acotada y por tanto tendremos una contradicción y el teorema estara demostrado. Si $z_t^{P_0} = \Phi u(t)$, esto es equivalente a demostrar que la ecuación

$$(3.1.21) \qquad \dot{u}(t) = Bu(t) + \Psi(0)K^{-1}F(t) + B\Psi(0)K^{-1}G(t)$$

tiene una solución no acotada en $(-\infty,\infty)$. Es suficiente considerar el caso en que B esta en forma canónica de Jordan y asi, considerar que Λ_o tiene un solo elemento, el cual puede ser tomado igual a cero. Por tanto, suponemos $\Lambda_o = \{0\}$. Sea a un n-vector distinto de cero tal que $aB = 0$. Entonces $a\Psi(0) \neq 0$, pues sino fuese asi, la solución no trivial de la ecuación adjunta $ae^{-B(t-\theta)}\Psi(0) = ae^{-Bt}\Psi(0)$ $\theta \in [0,r]$ deberia ser igual a cero, lo cual es imposible por unicidad.

Entonces, multiplicando (3.1.21) por a, tenemos

$$a\dot{u}(t) = a\Psi(0)K^{-1}F(t)$$

Si consideramos la funcion $F(t) = (a\Psi(0)K^{-1})'$ entonces $a\dot{u}(t) = |a\Psi(0)K^{-1}|$ la cual tiene una solución no acotada cuando $t \to \infty$. Asi (3.1.21) tiene una solución no acotada para estas funciones particulares f,g. Esto completa la demostración del teorema.

Teorema. 3.1.4. (Alternativa de Fredholm). Supongamos D estable y $f.g \in \mathscr{P}_T$. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (3.1.9) con valor inicial $z_o = \phi$ tenga una solucion en $\mathscr{P}_T$ es que

$$\int_0^T w(t)K^{-1}F(t)dt - \int_0^T [d\,w(t)K^{-1}]G(t) = 0$$

para todas las soluciones T-periodicas w(t) de la ecuación adjunta (3.1.5)

Demostración: Por el teorema anterior es evidente que sólo necesitamos considerar la ecuación (3.1.19a) con valor inicial $z_0 = \phi$, es decir,

$$z_t^{P_0} = T_0(t)\phi^{P_0} + \int_0^t T_0(t-\tau)U_0^{P_0}f(\tau)d\tau - \int_0^t [d_\tau T_0(t-\tau)V_0^{P_0}]g(\tau).$$

Con la misma notación que en el teorema anterior, esta ecuación es equivalente a (3.1.16), la cual es la misma que (3.1.16a)

$$u(t) = e^{Bt}u(0) + \int_0^t e^{B(t-\tau)}\Psi(0)K^{-1}F(\tau)d\tau - \int_0^t [d_\tau e^{B(t-\tau)}\Psi(0)K^{-1}]G(\tau).$$

Como $e^{Bt}u(0)$ es T-periódica (los valores propios de B tienen parte real igual a cero) en orden a que u(t) sea periódica es necesario y suficiente que

$$\int_0^t e^{B(t-\tau)}\Psi(0)K^{-1}F(\tau)d\tau - \int_0^t [d_\tau e^{B(t-\tau)}\Psi(0)K^{-1}]G(\tau)$$

sea T-periódica, esto es, requerimos que

$$\int_0^T e^{-B\tau}\Psi(0)K^{-1}F(\tau)d\tau - \int_0^T [d_\tau e^{-B\tau}\Psi(0)K^{-1}]G(\tau) = 0.$$

Como $\Psi(\tau) = e^{-B\tau}\Psi(0)$, esta última ecuación es equivalente a

$$\int_0^T \Psi(\tau)K^{-1}F(\tau)d\tau - \int_0^T [d_\tau\Psi(\tau)K^{-1}]G(\tau) = 0.$$

Puesto que Ψ es una base para las soluciones de la ecuación adjunta, se deduce que $z_t^{P_0}$ es T-periódica si y solo si

$$\int_0^T w(\tau)K^{-1}F(\tau)d\tau - \int_0^T [dw(\tau)K^{-1}]G(\tau) = 0$$

para todas las soluciones T-periódicas w(t) de la ecuación adjunta.

III.2. Sistema periódico con un pequeño parámetro: Casos no crítico y crítico.

Consideremos el sistema

$$(3.2.1)\quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BJy(t-r) + f(t,x(t),y_t,\varepsilon) \\ y(t) &= E'x(t) + FJy(t-r) + g(t,x(t),y_t,\varepsilon) \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $x(0)=a\in E^n$, $y_0=\psi\in C$, donde f y g son continuas en $(t,x(t),y_t,\varepsilon)$ y ε es un pequeño parámetro real. Supongamos que la ecuación caracteristica correspondiente a la ecuación homogenea no tiene raices con parte real igual a cero. Con la condición $\psi(0) - E'a - FJ\psi(-r) = g(0,a,\psi,\varepsilon)$ el sistema (3.2.1) es equivalente a

$$(3.2.2)\quad \frac{d}{dt}[D(w_t) - G(t,w_t,\varepsilon)] = L(w_t) + F(t,w_t,\varepsilon), \quad w_0 = \xi\in Y$$

donde $w_t=(x(t),y_t)$, D,L definidos como antes y $G(t,w_t,\varepsilon) = \mathrm{col}(0,g(t,w_t,\varepsilon))$, $F(t,w_t,\varepsilon) = \mathrm{col}(f(t,w_t,\varepsilon),0)$.

Si los valores propios de la matriz FJ tienen módulo menor que uno, entonces $\Lambda = \{\lambda\in\sigma(\mathcal{A}_0)/\mathrm{Re}\lambda > 0\}$ es finito. Si $g(t,w_t,\varepsilon)$ no depende de $\psi(0)$ en el sentido explicado en el capitulo II, sección II.2, la aplicación $h: Y\rightarrow PC$, definida por $w_t-X_0G(t,w_t,\varepsilon) = z_t$, $\xi-X_0G(0,\xi,\varepsilon) = \phi$, $h(w_t) = z_t$, $h(\xi) = \phi$, es un homeomorfismo. Con las observaciones hechas en la sección anterior, si el espacio Y_0 se descompone por Λ de la forma $P\oplus Q$, entonces la solución de (3.2.1) cumple

$$(3.2.3)\quad \dot{u}(t) = Bu(t) + \Psi(0)K^{-1}F(t,h^{-1}(z_t),\varepsilon) + B\Psi(0)K^{-1}G(t,h^{-1}(z_t),\varepsilon)$$

$$(3.2.4)\quad z_t^Q = T_0(t)\phi^Q + \int_0^t T_0(t-s)U_0^Q f(s,h^{-1}(z_s),\varepsilon)ds - \int_0^t [d_sT_0(t-s)V_0^Q]g(s,h^{-1}(z_s),\varepsilon)$$

donde $z_t = z_t^P + z_t^Q$, $z_t^P = \Phi u(t)$, B es una matriz cuyos valores propios coinciden con Λ, $T_o(t)$ es el semigrupo definido en $(PC)_o$ y Φ,Ψ, U_o^Q, V_o^Q definidas en la seccion anterior.

Sea $\mathscr{P}_T$ el conjunto de funciones continuas y acotadas que aplican $(-\infty,\infty)$ en E^n tales que si $x\in\mathscr{P}_T$, $x(t+T) = x(t)$, $\mathscr{P}_T\subset\mathscr{B}$.

Supongamos $\Omega(\rho,\sigma)=\{\phi\in(PC)_0/\|\phi\|\leqq\rho,\ |\varepsilon|\leqq\sigma\}$, $\eta(\rho,\sigma)$, $M(\sigma)$, $\rho\geqq 0$, $\sigma\geqq 0$ son funciones continuas no decrecientes en ambas variables, con $\eta(0,0) = 0$, $M(0) = 0$ y sea

$$\mathscr{L}ip(\eta,M) = \{q\colon R\times\Omega(\rho_o,\varepsilon_o)\to(PC)_0\ q \text{ continua},\ |q(t,0,\varepsilon)|\leqq M(|\varepsilon|),$$

$$|q(t,\phi_1,\varepsilon) - q(t,\phi,\varepsilon)|\leqq\eta(\rho,\sigma)\|\phi_1-\phi\|,\quad\forall(t,\phi_1,\varepsilon),\ (t,\phi,\varepsilon)\in R\times\Omega(\rho,\sigma)$$

$$\text{con}\quad 0\leqq\rho\leqq\rho_o,\qquad 0<\sigma<\varepsilon_o\}.$$

Observemos que $q\in\mathscr{L}ip(\eta,M)$ implica que $q(\cdot,\phi,\varepsilon)$ esta acotada y es continua en $(-\infty,\infty)$, esto es, $q\in\mathscr{B}$ pues

$$|q(t,\phi,\varepsilon)|\leqq|q(t,\phi,\varepsilon) - q(t,0,\varepsilon)| + |q(t,0,\varepsilon)|\leqq\eta(\rho,\sigma)\|\phi\|+ M(|\varepsilon|)$$

para todo $q(t,\phi,\varepsilon)\in R\times\Omega(\rho,\sigma)$. Tambien $q(t,0,0) = 0$

<u>Teorema. 3.2.1.</u> Supongamos D estable, $\Lambda = \{\lambda\in\sigma(\mathscr{A}_o)/\mathrm{Re}\lambda>0\}$, $f,g\in\mathscr{P}_T\cap\mathscr{L}ip(\eta,M)$. Entonces, existen dos constantes $\rho_1>0$, $\varepsilon_1>0$ y una funcion $z_t^*(\varepsilon)$ continua en ε para $0\leqq|\varepsilon|\leqq\varepsilon_1$ con $z_t^*(0) = 0$

$z_t^*(\varepsilon) \in \mathscr{P}_T$ $\|z_t^*(\varepsilon)\| \leq \rho_1$, tal que $z_t^*(\varepsilon)$ es una solución de (3.2.1) y es la única solución de (3.2.1) en $\mathscr{P}_T$ que tiene norma menor ó igual que ρ_1.

<u>Demostración:</u> Sea ρ_1 dado de tal forma que $0 < \rho_1 \leq \rho_o$ y definamos $\mathscr{P}_{T,\rho_1} = \{ z_t \in \mathscr{P}_T, \|z_t\| \leq \rho_1 \}$. Asi, $\mathscr{P}_{T,\rho_1}$ es un subconjunto cerrado y acotado del espacio de Banach $\mathscr{P}_T$.

Observemos que si $z_t \in \mathscr{P}_{T,\rho_1}$ entonces las funciones $f(\cdot, h^{-1}(z.), \varepsilon), g(\cdot, h^{-1}(z.), \varepsilon) \in \mathscr{P}_T$. Como la ecuación característica no tiene raices reales en el eje imaginario, podemos definir la transformación

$$\mathscr{F} z_t = \mathscr{K}(f.g)$$

donde $z_t \in \mathscr{P}_{T,\rho_1}$ y $\mathscr{K}$ es la aplicación lineal definida en el teorema 3.1.3.

Asi, $\mathscr{F}: \mathscr{P}_{T,\rho_1} \to \mathscr{P}_T$. Vamos a demostrar que $\mathscr{F}$ aplica $\mathscr{P}_{T,\rho_1}$ en si mismo y que es una contración. Por tanto, existirá un único punto fijo en $\mathscr{P}_{T,\rho_1}$ que coincidirá con la solución de (3.2.1) que pertenece a $\mathscr{P}_{T,\rho_1}$.

Como h es un homeomorfismo, en un entorno de cero existe una constante $k > 0$ tal que $\|h^{-1}(z_t)\| \leq k \|z_t\|$. Puesto que $f, g \in \mathscr{L}ip(\eta, M)$ tenemos que

$$\begin{aligned} |f(t,h^{-1}(z_t),\varepsilon)| &\leq |f(t,h^{-1}(z_t),\varepsilon) - f(t,0,\varepsilon)| + |f(t,0,\varepsilon)| \\ &\leq \eta(\rho_1,\varepsilon_1)\|z_t\|k + M(\varepsilon_1) \end{aligned}$$

y lo mismo ocurre para la g cuando $(t,z_t,\varepsilon)\in R\times\Omega(\rho_1,\varepsilon_1)$

Sea L la constante definida por la relación (3.1.20) en el teorema 3.1.3. y elijamos $\rho_1\leqq\rho_o$ y $\varepsilon_1\leqq\varepsilon_o$ positivas y tan pequeñas que

$$2L[\eta(\rho_1,\varepsilon_1)\rho_1 k + M(\varepsilon_1)]\leqq\rho_1$$

Para esta elección de ρ_1 y ε_1, se deduce de (3.1.20) que para $f,g\in\mathscr{L}ip(\eta,M)$

$$(3.2.5)\quad \|\mathscr{F}z_t\|\leqq L(|f| + |g|)\leqq 2L[\eta(\rho_1,\varepsilon_1)\|z_t\|k + M(\varepsilon_1)]$$

$$\leqq 2L[\eta(\rho_1,\varepsilon_1)\rho_1 k + M(\varepsilon_1)]\leqq\rho_1$$

y por tanto $\mathscr{F}\colon \mathscr{P}_{T,\rho_1}\longrightarrow\mathscr{P}_{T,\rho_1}$.

Ahora, vamos a probar la propiedad contractil de $\mathscr{F}$, esto es, que para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño, existe un $\lambda<1$ tal que $\forall z_t, z_t'\in\mathscr{P}_{T,\rho_1}$ se tiene

$$(3.2.6)\qquad \|\mathscr{F}z_t - \mathscr{F}z_t'\|\leqq\lambda\|z_t - z_t'\|$$

Por (3.2.5) tenemos

$$\|\mathscr{F}z_t - \mathscr{F}z_t'\|\leqq 2L\eta(\rho_1,\varepsilon_1)\|z_t - z_t'\|\ k$$

Como $2L\eta(\rho_1,\varepsilon_1)k \leq \dfrac{\rho_1 - 2LM(\varepsilon_1)}{\rho_1} < 1$, si tomamos $\lambda = 2L\eta(\rho_1,\varepsilon_1)k$ la desigualdad (3.2.6) quedará verificada para $0 \leqq |\varepsilon| \leqq \varepsilon_1$. Por tanto $\mathscr{F}$ es una contraccion en $\mathscr{P}_{T,\rho_1}$ y existe un único punto fijo $z_t^*(\varepsilon)$ de $\mathscr{F}$ en $\mathscr{P}_{T.\rho_1}$, es decir, $\mathscr{F}z_t^*(\varepsilon) = z_t^*(\varepsilon)$. Puesto que f, $g \in \mathscr{L}ip(\eta,M)$, resulta que son continuas. De esta forma, de la continuidad de $\mathscr{F}$ y de la propiedad contractil, se deduce que $z_t^*(\varepsilon)$ es continua en ε, $0 \leqq |\varepsilon| \leqq \varepsilon_1$.

Para completar la demostración, sólo tenemos que ver que $z_t^*(0) = 0$, pero esto es evidente puesto que, para $\varepsilon = 0$, $z_t \equiv 0$ es una solución de (3.2.1) y como el punto fijo es único, debe ser $z_t^*(0) = 0$.

Caso crítico

Nos proponemos ahora dar condiciones para la existencia de soluciones T-periódicas de la ecuación (3.2.1) cuando existen raices de la ecuación caracteristica correspondiente a la ecuación homogenea con parte real igual a cero. Supongamos que D es estable, que el espacio Y_0 se descompone por $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(\mathscr{A}_0)/\mathrm{Re}\lambda = 0\}$ de la forma $P \oplus Q$ y que la dimensión p de P es igual a la suma de las multiplicidades de las raices con parte real igual a cero (divisores elementales simples).

Vamos a aplicar a la ecuación (3.2.1) el método de Cesari y Hale, desarrollado para ecuaciones diferenciales ordinarias (Hale [13]), siguiendo la extensión de Perelló a ecuaciones diferenciales funcionales de tipo retardado.

Para facilitar el estudio de la ecuación (3.2.1) vamos a dar un lema para la ecuación

$$(3.2.7) \qquad \frac{d}{dt}[D(w_t) - G(t)] = L(w_t)+F(t), \quad w_0 = \xi = (a,\psi)\in Y$$

con la condición $\psi(0) - E'a - FJ\psi(-r) = g(0)$, donde $G = \mathrm{col}(0,g)$, $F = \mathrm{col}(f,0)$ y $f,\ g\in\mathscr{P}_T$. Con las observaciones hechas al principio de esta sección, la solución de (3.2.7) es equivalente a

$$(3.2.8) \qquad \dot{u}(t) = Bu(t) + \Psi(0)K^{-1}F(t) + B\Psi(0)K^{-1}G(t)$$

$$(3.2.9) \qquad z_t^Q = T_0(t)\phi^Q + \int_0^t T_0(t-s)U_0^Q f(s)ds - \int_0^t [d_sT_0(t-s)V_0^Q]g(s)$$

donde B es una matriz cuyos valores propios coinciden con Λ.

<u>Lema3.2.1.</u> Si D es estable y $f,\ g\in\mathscr{P}_T$, entonces una condición necesaria y suficiente para que la solución

$$(3.2.10) \qquad z_t^* = T_0(t)\phi + \int_0^t T_0(t-s)U_0 f(s)ds - \int_0^t [d_sT_0(t-s)V_0]g(s)$$

de (3.2.7) sea T-periódica, es que

$$(3.2.11) \qquad \int_0^T T_0(-s)U_0^P f(s)ds - \int_0^T [d_sT_0(-s)V_0^P]g(s) = 0.$$

En este caso, para todo $b\in E^p$ existe una única $z^*(b,f,g)$ dada por (3.2.10) y tal que

$$(3.2.12) \qquad \frac{1}{T}\int_0^T e^{-Bs}u_1^*(b,f,g)(s)ds - \frac{1}{T}\int_0^T[d_se^{-Bs}]u_2^*(b,f,g)(s) = b$$

donde u_1^* y u_2^* corresponden a las columnas de u obtenidas al efectuar el producto por F y G, respectivamente, según el razonamiento hecho para la obtención de la fórmula (3.1.14).

Además $z_t^*(b,F,G) - T_0(t)\Phi(I+B)^{-1}b$ es un funcional continuo y lineal en f y g en el espacio de las funciones T-periódicas que cumplen (3.2.11).

<u>Demostración:</u> Observemos que $(I+B)^{-1}$ existe por la hipótesis hecha sobre los elementos de Λ. Sabemos, por el teorema 3.1.2, que la condición (3.2.11) es equivalente a

$$\int_0^T e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - \int_0^T [d_s e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}]G(s) = 0.$$

Como $e^{-Bs}\Psi(0) = \Psi(s)$ es una base para las soluciones T-periódicas de la ecuación adjunta, el teorema de la alternativa de Fredholm nos dice que esta condición es necesaria y suficiente para la existencia de una solución T-periódica de (3.2.7).

Si (3.2.11) se cumple, entonces $u^*(b.F,G)(t) = (e^{-Bt} + Be^{-Bt})^{-1}(b + r(t))$. En efecto, como (3.2.8) es equivalente a (3.1.16a), tenemos

$$u^*(b,F,G)(t) = e^{Bt}\Big(u^*(0) + \int_0^t e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - \int_0^t [d_s e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}]G(s)\Big).$$

Puesto que $e^{Bt} = e^{Bt}(I+B)^{-1}(I+B) = (e^{-Bt} + Be^{-Bt})^{-1}(I+B)$, resulta

$$\begin{aligned} u^*(b,F,G)(t) = (e^{-Bt}+Be^{-Bt})^{-1}(I+B)\Big\{ & u^*(0) + \int_0^t e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - \\ & - \int_0^t [d_s e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}]G(s) - \frac{1}{T}\int_0^T\!\!\int_0^\tau e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds\,d\tau + \\ & + \frac{1}{T}\int_0^T\!\!\int_0^\tau [d_s e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}]G(s)d\tau + \frac{1}{T}\int_0^T\!\!\int_0^\tau e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}\cdot \\ & \cdot F(s)ds\,d\tau - \frac{1}{T}\int_0^T\!\!\int_0^\tau [d_s e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}]G(s)d\tau\Big\} \\ = (e^{-Bt}+Be^{-Bt})^{-1}(b+r(t)) \;, & \end{aligned}$$

donde

$$b = (I+B)(u^*(0) + \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\tau \left\{ e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - [d_s e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}]G(s)\right\} d\tau)$$

$$r(t) = (I+B)(\int_0^t \left\{ e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - [d_s e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}]G(s)\right\} -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\tau \left\{ e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}F(s)ds - [d_s e^{-Bs}\Psi(0)K^{-1}]G(s)\right\} d\tau).$$

Por tanto $b = (e^{-Bt}+Be^{-Bt})u^*(b,F,G)(t) - r(t)$. Entonces

$$b = \frac{1}{T}\int_0^T bds = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-Bs}u^*(b,F,G)(s)ds + \frac{1}{T}\int_0^T Be^{-Bs}u^*(b,F,G)(s)ds -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T r(s)ds.$$ De la relación que define $r(t)$ se deduce que $\frac{1}{T}\int_0^T r(s)ds = 0$ y como la primera integral en $u^*(b,F,G)$ corresponde a la columna $u_1^*(b,f,g)$ y la segunda integral a la columna $u_2^*(b,f,g)$, resulta que

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{-Bs}u_1^*(b,f,g)(s)ds - \frac{1}{T}\int_0^T [d_s e^{-Bs}]u_2^*(b,f,g)(s) = b$$

que es (3.2.12). Evidentemente, $u^*(b,F,G)(t) - e^{Bt}(I+B)^{-1}b = e^{Bt}(I+B)^{-1}r(t)$ es una función continua y lineal en f, g. Igualmente, por el lema 3.1.3, se deduce que la solución z_t^{*Q} de (3.2.9) está unicamente definida y es continua y lineal en f,g. Como

$$z_t^*(b,F,G) - T_o(t)\Phi(I+B)^{-1}b = \Phi u^*(b,F,G) + z_t^{*Q} - \Phi e^{Bt}(I+B)^{-1}b$$

$$= \Phi[u^*(b,F,G) - e^{Bt}(I+B)^{-1}b] + z_t^{*Q}$$

obtenemos que $z_t^*(b,F,G) - T_o(t)\Phi(I+B)^{-1}b$ es continua y lineal en f,g y el lema está demostrado.

Consideremos ya la ecuación (3.2.1) cuando existen raices de la ecuación caracteristica en el eje imaginario de forma que la suma de las multiplicidades de estas raices sea igual a la dimensión de P.

Sea $\Sigma_T = \{ \gamma: R \to (PC)_0 \ / \ \gamma$ es continua y T-periódica$\}$ con la norma del supremo. Para toda $\gamma \in \Sigma_T$, $t \in R$, tenemos $\gamma(t) = \gamma(t+T) = \gamma_t = \gamma_{t+T}$. Hemos representado por γ_t el valor de γ en t. Esta notación es significante puesto que $(PC)_0$ es el espacio de las funciones definidas en $[-r,0]$. Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, definimos el operador proyección $\mathcal{O}: \Sigma_T \to \Sigma_T$ de la forma

$$(\mathcal{O}\gamma)_t = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi e^{B(t-s)}(\Psi, \gamma_{1,s})ds - \frac{1}{T}\int_0^T [d_s \Phi e^{B(t-s)}(\Psi, \gamma_{2,s})]$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T T_o(t-s)\gamma^P_{1,s}\,ds - \frac{1}{T}\int_0^T [d_s T_o(t-s)\gamma^P_{2,s}]$$

Para toda β, ρ_1, $0<\beta<1$, $0 \leqq \rho_0 \leqq \rho_1$ y para todo $b \in E^p$ que cumpla $\|e^{B\cdot}b\| \leqq \beta\rho_1$ definamos el conjunto

$$\Sigma_{T,\rho_1,b} = \{ \gamma \in \Sigma_T \ / \ (\mathcal{O}\gamma)_t = \Phi e^{Bt}b, \ \|\gamma\| \leqq \rho_1 \}.$$

Asi $\Sigma_{T,\rho_1,b}$ es un subconjunto cerrado y acotado del espacio de Banach Σ_T.

<u>Lema 3.2.2.</u> Supongamos D estable y $f,g \in \mathcal{P}_T \cap \mathcal{L}ip(\eta,M)$ en la ecuación (3.2.1). Entonces existen dos constantes, $\rho_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, tales que para todo $b \in E^p$ con $\|\Phi e^{B\cdot}b\| \leqq \beta\rho_1$ existe una única $\gamma = \gamma(b,\varepsilon)$ en $\Sigma_{T,\rho_1,b}$ que cumple

$$(3.2.13)\quad \gamma_t = T_o(t)\phi + \int_0^t T_o(t-s)\Big\{ U_o f(s,h^{-1}(\gamma_s),\varepsilon) - \frac{1}{T}\int_0^T T_o(s-\tau)U_o^P f(\tau,h^{-1}(\gamma_\tau),\varepsilon)d\tau \Big\} ds - \int_0^t d_s T_o(t-s)\cdot \Big\{ V_o g(s,h^{-1}(\gamma_s),\varepsilon) - \frac{1}{T}\int_0^T [d_\tau T_o(s-\tau)V_o^P] g(\tau,h^{-1}(\gamma_\tau),\varepsilon)\Big\}$$

para toda ε con $0 \leqq |\varepsilon| \leqq \varepsilon_1$. Ademas $\gamma(b,\varepsilon)$ es continua en $(b.\varepsilon)$.

Demostración: Para facilitar la notación, llamemos

$$\gamma_{1,s} = U_o f(s,h^{-1}(\gamma_s),\varepsilon) - \frac{1}{T}\int_0^T T_o(s-\tau)U_o^P f(\tau,h^{-1}(\gamma_\tau),\varepsilon)d\tau$$

$$\gamma_{2,s} = V_o g(s,h^{-1}(\gamma_s),\varepsilon) - \frac{1}{T}\int_0^T [d_\tau T_o(s-\tau)V_o^P]g(\tau,h^{-1}(\gamma_\tau),\varepsilon).$$

Asi (3.2.13) se puede escribir

$$(3.2.14)\quad \gamma_t = T_o(t)\phi + \int_0^t T_o(t-s)\gamma_{1,s}\,ds - \int_0^t [d_s T_o(t-s)\gamma_{2,s}]$$

que es de la misma forma que (3.2.10) con $U_o f(s)$ y $V_o g(s)$ sustituidas por $\gamma_{1,s}$ y $\gamma_{2,s}$, respectivamente. Entonces

$$\frac{1}{T}\int_0^T T_o(-s)\gamma_{1,s}^P\,ds - \frac{1}{T}\int_0^T [d_s T_o(-s)\gamma_{2,s}^P] = \frac{1}{T}\int_0^T T_o(-s)U_o^P\cdot$$
$$f(s,h^{-1}(\gamma_s),\varepsilon)ds - \frac{1}{T}\int_0^T T_o(-s)\frac{1}{T}\int_0^T T_o(s-\tau)U_o^P f(\tau,h^{-1}(\gamma_\tau),\varepsilon)d\tau ds -$$
$$- \frac{1}{T}\int_0^T [d_s T_o(-s)V_o^P]g(s,h^{-1}(\gamma_s),\varepsilon) + \frac{1}{T}\int_0^T d_s T_o(-s)\frac{1}{T}\int_0^T [d_\tau T_o(s-\tau)V_o^P]\cdot$$
$$\cdot g(\tau,h^{-1}(\gamma_\tau),\varepsilon)=0,$$

despues de introducir $T_o(-s)$ en la segunda integral de las integrales dobles y tener encuenta que $\frac{1}{T}\int_0^T a ds = a$.

Por tanto podemos aplicar el lema 3.2.1 y llegamos a la conclusión de que para cada $b \in E^n$ existe una única $\gamma^*(b,\varepsilon) \in \Sigma_T$ que satisface (3.2.14).

Definamos ahora el operador $\mathscr{F}(b,\varepsilon)\colon \Sigma_{T,\rho_1,b} \longrightarrow \Sigma_T$ de la forma $\mathscr{F}(b,\varepsilon)\gamma = \gamma^*(b,\varepsilon)$, $\gamma \in \Sigma_{T,\rho_1,b}$. Vamos a demostrar que $\mathscr{F}(b,\varepsilon)$ aplica $\Sigma_{T,\rho_1,b}$ en si mismo y que es una contracción. Entonces existirá un único punto fijo de $\mathscr{F}(b,\varepsilon)$ en $\Sigma_{T,\rho_1,b}$ que coincidirá con la solución de (3.2.13). Como

$$(\mathcal{O}\mathcal{F}(b,\varepsilon)\gamma)_t = (\mathcal{O}\gamma^*(b,\varepsilon))_t = \frac{1}{T}\int_0^T T_o(t-s)\gamma^{*P}_{1,s}\,ds - \frac{1}{T}\int_0^T [d_s T_o(t-s)\gamma^{*P}_{2,s}]$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T T_o(t-s)\Phi u_1^*\,ds - \frac{1}{T}\int_0^T [d_s T_o(t-s)\Phi u_2^*]$$

$$= \Phi e^{Bt}\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{-Bs}u_1^*\,ds - \frac{1}{T}\int_0^T [d_s e^{-Bs}u_2^*] \right)$$

resulta $(\mathcal{O}\mathcal{F}(b,\varepsilon)\gamma)_t = \Phi e^{Bt}b$, después de aplicar (3.2.12).

Por el lema 3.2.1, la fórmula (3.2.13) y estimaciones análogas a las realizadas en el caso no critico, se tiene

$$\|\mathcal{F}(b,\varepsilon)\gamma - \Phi e^{Bt}(I+B)^{-1}b\| \leqq 4L[\eta(\rho_1,\varepsilon_1)k\rho_1 + M(\varepsilon_1)],\ \rho_1 \leqq \rho_0,\ \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_0$$

Entonces

$$(3.2.15)\quad \|\mathcal{F}(b,\varepsilon)\gamma\| \leqq \|\Phi e^{Bt}(I+B)^{-1}b\| + 4L[\eta(\rho_1,\varepsilon_1)k\rho_1 + M(\varepsilon_1)]$$

$$\leqq \beta\rho_1 k_1 + 4L[\eta(\rho_1,\varepsilon_1)k\rho_1 + M(\varepsilon_1)].$$

Eligiendo ρ_1 y ε_1 tan pequeños que

$$4L[\eta(\rho_1,\varepsilon_1)k\rho_1 + M(\varepsilon_1)] \leqq \rho_1 - \beta\rho_1 k_1$$

obtenemos que $\|\mathcal{F}(b,\varepsilon)\gamma\| \leqq \rho_1$, lo cual nos dice que $\mathcal{F}(b,\varepsilon)\colon \Sigma_{T,\rho_1,b} \to \Sigma_{T,\rho_1,b}$. Ahora vamos a probar que $\mathcal{F}(b,\varepsilon)$ es una contracción. De (3.2.15) deducimos que, para $\gamma,\ \gamma' \in \Sigma_{T,\rho_1,b}$,

$$\|\mathcal{F}(b,\varepsilon)\gamma - \mathcal{F}(b,\varepsilon)\gamma'\| \leqq 4L\eta(\rho_1,\varepsilon_1)k\|\gamma-\gamma'\|\ .$$

Como $4L\eta(\rho_1,\varepsilon_1)k \leqq \dfrac{\rho_1-\beta\rho_1 k_1-4LM(\varepsilon_1)}{\rho_1} = \lambda < 1$, tenemos que $\|\mathcal{F}(b,\varepsilon)\gamma - \mathcal{F}(b,\varepsilon)\gamma'\| \leqq \lambda\,\|\gamma-\gamma'\|$, $0 \leqq |\varepsilon| \leqq \varepsilon_1$. Por tanto $\mathcal{F}(b,\varepsilon)$ es una contracción en $\Sigma_{T,\rho_1,b}$ tal que $\mathcal{F}(b,\varepsilon)\gamma(b,\varepsilon) = \gamma(b,\varepsilon)$.

De la continuidad de $\mathscr{F}$ y de la propiedad contractil se deduce que $\gamma(b,\varepsilon)$ es continua en (b,ε).

Teorema 3.2.2. Si para (b,ε) cumpliendo las hipótesis del lema 3.2.2, la solución $\gamma(b,\varepsilon)$ de (3.2.13) cumple las relaciones

$$
(3.2.16)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T T_o(s-\tau)U_o^P f(\tau,h^{-1}(\gamma_\tau),\varepsilon)d\tau = 0\\
&\frac{1}{T}\int_0^T [d_\tau T_o(s-\tau)V_o^P]g(\tau,h^{-1}(\gamma_\tau),\varepsilon) = 0
\end{aligned}
$$

entonces la funcion $z_t(b,\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \gamma_t(b,\varepsilon)$, $t\in(-\infty,\infty)$, es una solución T-periódica de (3.2.1) y, reciprocamente, si $\bar{z}_t(b,\varepsilon)$ es una solución T-periódica de (3.2.1) en $\Sigma_{T,\rho_1,b}$ entonces $z_t(b,\varepsilon) = \bar{z}_t(b,\varepsilon)$, $b\in E^p$, $0\leq|\varepsilon|\leq\varepsilon_1$.

Demostración: La primera parte del teorema es evidente con observar la fórmula (3.2.13). La segunda parte se deduce de que $\bar{z}_t(b,\varepsilon)$ satisface (3.2.1) y tambien ha de satisfacer (3.2.13,16). Por la unicidad de las soluciones en $\Sigma_{T,\rho_1,b}$ se completa la demostración del teorema.

Las ecuaciones (3.2.16) se conocen con el nombre de "ecuaciones de bifurcación" de (3.2.1). Observemos que el caso no crítico es una consecuencia del caso crítico, pues si suponemos que Λ es vacio, es decir, no existen raices en el eje imaginario, entonces el unico elemento de P es cero y, por tanto, la relación (3.2.16) siempre se verifica. Consecuentemente, existe una unica solución T-periódica $z_t(\varepsilon)$ que depende continuamente de ε y $z_t(0) = 0$, esto es, cero es la única solución de la ecuación homogenea.

Bibliografia.

[1] Bellman R. y K. Cooke. Differential-Difference Equations. Academic Press, 1.963

[2] Brayton R.K. Small-signal stability criterion for electrical networks containing lossless transmision lines I.B.M. J. Res Develop. 12 (1.968), 431-440

[3] Brumley W.E. On the asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations of neutral type. J. Differential Eqns. 7 (1.970), 175- 188.

[4] Cruz M.A. y J.K. Hale. Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems. Annaly di Math. Pura Appl. 85 (1.970), 63-82.

[5] Cruz M.A. y J.K. Hale. Exponential estimates and the saddle point for neutral functional differential equations. J. Math. Ana. Appl. 34 (1.971), 267-288.

[6] Cruz M.A. y J.K. Hale. Stability of functional differential equations of neutral type. J. Differential Eqns. 7 (1.970), 334-355.

[6a] Datko R. The absolute stability of some nonlinear differential-difference equations. (Sin publicar).

[7] Dunford N. y J.T. Schwartz. Linear Operators, Part I. Interscience, 1.957.

[8] Halanay A. Differential equations: stability, oscillations, time lags. Academic Press, 1.966.

[9] Hale J.K. A class of neutral equations with the fixed point property. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 67 (1.970), 136-137.

[10] Hale J.K. Functional differential equations of neutral type. Presentado en el International Symposium on Dynamical Systems celebrado en Brown University, Agosto 12-16 1.974 (Sin publicar).

[11] Hale J.K. Functional Differential Equations. Appl. Math. Sci. Vol. 3 Springer-Verlag, 1.971.

[12] Hale J.K. Ordinary Differential Equations. Wiley-Interscience, 1.969.

[13] Hale J.K. Oscillations in Nonlinear Systems. McGraw-Hill, 1.963.

[14] Hale J.K. Oscillations in neutral functional differential equations. Nonlinear Mechanics, C.I.M.E. Junio, 1.972.

[15] Hale J.K. Parametric stability in difference equations. Se publicará en Boll. Un. Math. Italia.

[16] Hale J.K. Continuous dependence of fixed points of condensing maps. J. Math. Ana. Appl. 46 (1.974), 388-394.

[17] Hale J.K. Forward and backward continuation for neutral differential equations. J. Differential Eqns. 9 (1.971), 168-181.

[17a] Hale J.K. Critical cases for neutral functional differential equations. J. Differential Eqns. 10 (1.971), 59-82.

[18] Hale J.K. y M.A. Cruz. Asymptotic behavior of neutral functional differential equations. Arch. Rat. Mech. Anal. 34 (1.969), 331-353.

[18a] Hale J.K. y P. Martinez-Amores. Stability in neutral equations. Se publicará en J. Math. Ana. Appl.

[19] Hale J.K. y K.Meyer. A class of functional differential equations of neutral type. Memoirs Am. Math. Soc. No. 76, (1.967)

[20] Henry D. Linear autonomous neutral functional differential equations. J. Differential Eqns. 15 (1.974), 106-128.

[21] Henry D. Adjoint theory and boundary value problems for neutral differential equations. (Sin publicar).

[22] Henry D. Linear F.D.E.'s of neutral type in the space of continuous functions: representation of solutions and the adjoint theory. (Sin publicar).

[23] Henry D. Linear F.D.E.'s : adjoint and boundary value problems. Ph.D. Thesis. Brown University, Providence, 1.969.

[24] Hille E. y R.S. Phillips. Functional Analysis and Semigroups. Amer. Math. Soc. Colloquium Public. Vol. 31, 1.957.

[25] Infante E.F. y M. Slemrod. Asymptotic stability for linear systems of differential-difference equations of neutral type and their discrete analogues. J. Math. Ana. Appl. 38 (1.972), 399-415.

[26] Krasovskii N. Stability of motion. Stanford Unv. Press. 1.963

[27] LaSalle J.P. y S. Lefschetz. Stability by Liapunov's direct Method with applications. Academic Press, 1.961.

[28] Melvin W.R. A class of neutral functional differential equations J. Differential Eqns. 12 (1.972), 524-534.

[29] Melvin W.R. Some extensions of the Krasnoselskii fixed point theorems. J. Differential Eqns. 11 (1.972), 335-348.

[30] Melvin W.R. Stability properties of functional differential equations. J. Math. Ana. Appl. 48 (1.974), 749-763.

[31] Perelló C. Periodic solutions of differential equations with time lag containing a small parameter. J. Differential Eqns. 4 (1.968), 160-175.

[32] Phillips R.S. The adjoint semigroup. Pocific J. Math. 5 (1.955), 269-283.

[33] Rasvan V. Absolute stability of a class of control systems describes by functional differential equations of neutral type. Equations Differentielles et Fontionelles Nonlinearies. Herman 1.973, 381-396.

[34] Riesz F. y B. Nagy. Lecons d'anlyse fontionalle. Gauthiers-Villars, 1.975.

[35] Taylor A. Introduction to functional analysis. Wiley, 1.958.

[36] Yosida K. Functional analysis. Springer-Verlag, 1.974.