DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

La Tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación.

TESIS DOCTORAL

Francisco Ruiz López

GRANADA 2000

[redacted]

DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

La Tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación.

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de los Doctores Luis Rico Romero y Moisés Coriat Benarroch que presenta el licenciado en Ciencias Matemáticas Francisco Ruiz López para optar al grado de Doctor.

Fdo.: Francisco Ruiz López

VºBº El Director

Fdo.: Luis Rico Romero

VºBº El Director

Fdo.: Moisés Coriat Benarroch

Esta tesis doctoral ha sido realizada en el seno del grupo de investigación Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico FQM 193 de la Dirección General de Universidades e Investigación de la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía.

Agradecimientos

Quiero dejar constancia de mi agradecimiento a las siguientes personas:

A los doctores Luis Rico y Moisés Coriat, que me han prestado su guía y soporte, conjugando con sabiduría la dirección de esta tesis con la amistad que nos une.

A María José González López por su ayuda y apoyo en la última parte del trabajo, y especialmente en los procedimientos realizados con el programa Maple V.

A los miembros del grupo de Pensamiento Numérico por haber encontrado en el seminario un foro de discusión para mejorar esta tesis, y en especial a Isidoro Segovia por la elaboración de un programa informático.

A Pablo Flores y a los compañeros del Departamento de Didáctica de la Matemática que me han escuchado, sugerido y animado en este trabajo.

A mis compañeros latinoamericanos que investigan en este departamento, por las muestras de apoyo recibidas.

A los alumnos de tercer curso de Magisterio que participaron en el estudio.

A Concepción Portero, testigo fiel y paciente de los desvelos sufridos

A todos los familiares y amigos que con su afecto me animaron a seguir.

Quiero tener un especial recuerdo y homenaje para mi compañero Mauricio Castro, desaparecido en trágicas circunstancias, que con su especial sensibilidad me escuchó y animó.

A la grata memoria de mi padre.

A mi querida madre María.

A Natalia y Patricia.

A mis hermanos.

A Conchi.

INDICE

CAPITULO 1: contexto y campo de estudio

1.1 Antecedentes 1
1.2 Descripción del trabajo 3
  1.2.1 Descriptores y términos clave 6
1.3 Acotación del problema 7
1.4 Marco teórico 8
1.5 Marco metodológico 8

CAPITULO 2: Área problemática

2.1 Ubicación del estudio 13
2.2 Pensamiento Numérico 16
  2.2.1 Caracterización del estudio realizado 19
2.3 Sentido Numérico 20
2.4 Sobre la noción de representación 21
  2.4.1 Sistemas de representación 23
  2.4.2 Representaciones internas y externas 24
  2.4.3 Tipos de representaciones 25
  2.4.4 Representaciones en la Tabla-100 26
2.5 Comprensión y sistemas de representación 27
2.6 Patrones Numéricos 30
2.7 Visualización 31
2.8 Tablas Numéricas 35
2.9 Estructuras aditivas y la Tabla-100 37
2.10 Formación Inicial de Profesores e Innovación Curricular 40
2.11 Estudio matemático 42
2.12 Revisión de antecedentes y estado de la cuestión 43
  2.12.1 Balance de la búsqueda 46
  2.12.2 Trabajos destacables 50
2.13 Racionalidad del estudio 53
2.14 Delimitación del problema 57
2.15 Objetivos generales e hipótesis 59

CAPITULO 3: Marco metodológico

3.1 Introducción 63
3.2 Diseño de la investigación. 64
3.3 Secuencia de trabajo en el proceso de investigación 67
3.4 Características de la investigación 68
3.5 Sujetos participantes 70
3.6 Plan metodológico 71
3.7 Selección de tareas 75
3.7.1 Exploraciones previas 75
3.7.2 Tareas de la primera fase de investigación 77
3.7.3 Tareas de la segunda fase 78
3.8 Recogida de información y temporalización 79

CAPITULO 4: Estudio empírico: tareas de contexto

4.1 Presentación y objetivos 83
4.1.1 Objetivos generales 84
4.2 Primera sesión: Divisibilidad y operaciones aritméticas 85
4.2.1 Descripción general y objetivos 85
4.2.1.1 Objetivos la sesión 86
4.2.2 Actividades de la sesión 86
4.2.2.1 Tarea inicial: construcción de la tabla coloreada 86
4.2.2.2 Tareas propuestas 90
4.2.3 Características de las tareas 91
4.2.4 Criterios para valorar y clasificar las respuestas 92
4.2.5 Resultados generales en G70 94
4.2.6 Análisis de los resultados en G70 97
4.2.7 Conceptualización de las operaciones 102
4.2.8 Consideraciones sobre los resultados 110
4.3 Segunda sesión: Divisibilidad y patrones. 113
4.3.1 Descripción general y objetivos 113
4.3.1.1 Objetivos de la sesión 113
4.3.2 Actividades de la sesión. Tareas propuestas 113
4.3.3 Criterios para valorar y clasificar las respuestas 115
4.3.4 Resultados generales en G70 116
4.3.5 Análisis de resultados: G70; G3; G1 119
4.3.6 Consideraciones sobre los resultados 123
4.4 Tercera sesión: Divisibilidad y geoplano (I). 125
4.4.1 Descripción general y objetivos 125
4.4.1.1 Objetivos de la sesión 125

4.4.2 Actividades de la sesión. Tareas propuestas 126
4.4.3 Resultados generales sobre construcción y cálculo del área de paralelogramos en G70 128
4.4.3.1. Dibujo y cálculo del área del paralelogramo 128
4.4.3.2. Estrategias para el cálculo del área del paralelogramo 129
4.4.3.3 Tipos de paralelogramos construidos uniendo 4 múltiplos consecutivos de un número k 132
4.4.3.4 Regla enunciada por los alumnos 133
4.4.4 Resultados generales sobre construcción y cálculo del área de paralelogramos en G3 133
4.4.5 Resultados generales sobre construcción y cálculo del área de paralelogramos en G1 136
4.4.6 Resultados generales sobre las tareas de carácter dinámico en G70 137
4.4.6.1 Resultados de las transformaciones 137
4.4.6.2 Análisis de las regularidades encontradas 138
4.4.6.3 Invariantes detectadas en las isometrías 140
4.4.7 Resultados generales sobre las tareas de carácter dinámico en G3 y G1 141
4.4.8 Consideraciones sobre los resultados.:G70; G3; G1 141
4.5 Cuarta sesión: Divisibilidad y geoplano (II) 144
4.5.1 Descripción general y objetivos 144
4.5.1.1 Objetivos de la sesión 144
4.5.2 Actividades de la sesión. Tareas propuestas 144
4.5.3 Criterios para clasificar las respuestas a la tarea 4.1. 146
4.5.4 Resultados generales para la tarea 4.1 en G70 146
4.5.5 Resultados generales para la tarea 4.2 en G70 150
4.5.6 Resultados en G3 y G1 153
4.5.7 Consideraciones sobre los resultados. G70; G3; G1 155
4.6 Conclusiones generales sobre las tareas de contexto 156
4.7 Situaciones y cuestiones más significativas surgidas en G3 y G1 158
4.8 Análisis final y decisiones tomadas tras la primera fase de investigación 159

CAPITULO 5: Segunda fase: operadores aditivos en la Tabla-100

5.1 Presentación y objetivos 161
5.1.1 Objetivos parciales 162
5.1.2 Esquema para presentar las sesiones de trabajo 163
5.2 Primera sesión 163
5.2.1 Descripción general y objetivos 163
5.2.2 Tareas propuestas 164
5.2.3 Resultados de la Tarea 1.1 166
5.2.4 Resultados de la Tarea 1.2 172
5.2.5 Resultados de la Tarea 1.3 177
5.2.6 Resultados de la Tarea 1.4 182
5.2.7 Resultados de la Tarea 1.5a 187
5.2.8 Resultados de la Tarea 1.5b 189
5.2.9 Resultados de la Tarea 1.6 190
5.2.10 Resultados de la Tarea 1.7 193
5.2.11 Resultados de la Tarea 1.8 194
5.2.12 Resultados de la Tarea 1.9 197
5.2.13 Consideraciones generales sobre los resultados de la sesión 199
5.2.14 Balance entre los objetivos planteados y logros alcanzados 202
5.3 Segunda sesión 203
5.3.1 Descripción general y objetivos 203
5.3.2 Tareas propuestas en la sesión 204
5.3.3 Resultados de la tarea 2.1 206
5.3.4 Resultados de la tarea 2.2 208
5.3.5 Resultados de la tarea 2.3 210
5.3.6 Resultados de la tarea 2.4 213
5.3.7 Resultados de la tarea 2.5 215
5.3.8 Resultados de la tarea 2.6 220
5.3.9 Resultados de la tarea 2.7 228
5.3.10 Consideraciones generales sobre los resultados de la sesión 232
5.3.11 Balance entre los objetivos planteados y logros alcanzados 233
5.4 Tercera sesión 234
5.4.1 Descripción general y objetivos 234
5.4.2 Tareas propuestas en la sesión 235
5.4.3 Resultados de la tarea 3.1 238
5.4.4 Resultados de la tarea 3.2 243

5.4.5 Resultados de la tarea 3.3 246
5.4.6 Resultados de la tarea 3.4 249
5.4.7 Resultados de la tarea 3.5a 250
5.4.8 Resultados de la tarea 3.5b 252
5.4.9 Resultados de la tarea 3.6 254
5.4.10 Resultados de la tarea 3.7 257
5.4.11 Resultados de la tarea 3.8 259
5.4.12 Resultados de la tarea 3.9 260
5.4.13 Consideraciones generales sobre los resultados de la sesión 267
5.4.14 Balance entre los objetivos planteados y logros alcanzados 268
5.5 Consideraciones globales sobre el estudio empírico con "las cadenas" 269
5.6 Situaciones y cuestiones significativas surgidas en G3 y G1 271
5.7 Reflexiones finales sobre el estudio empírico. Necesidad de un estudio teórico matemático 272

CAPITULO 6: Estudio teórico-matemático de la Tabla-100 y las cadenas

6.1 La Tabla-100 275
6.1.1 Caracterización de la Tabla-100 277
6.2 Operaciones aditivas en T_{100} 280
6.2.1 Cadenas fijas 280
6.2.2 Expresiones aritméticas de los recorridos 281
6.2.3 Expresión aritmética reducida 283
6.2.4 Expresión polinómica de una cadena fija 284
6.2.5 Operadores aditivos en T_{100} 285
6.2.6 Equivalencia de cadenas fijas 286
6.2.7 Cadenas libres 288
6.2.8 Representantes canónicos de las cadenas libres 288
6.3 Representaciones de los operadores aditivos 289
6.3.1. Expresión decimal 289
6.3.2 Expresión funcional 289
6.3.3 Máquina de Dienes 289
6.3.4 Cadena libre 290
6.4. Límites de la Tabla-100 292
6.4.1 Extensión de T_{100} a la Tabla-Z 293
6.4.1.1 Estructura algebráica de T_Z 294

6.4.2 La Tabla-100 como conjunto cociente 295
6.5 Grupo abeliano de los operadores aditivos en T_{100} 299
6.5.1 Composición de cadenas fijas 300
6.5.2 Suma de cadenas libres 301
6.5.3 Propiedades de la suma de cadenas libres 303
6.5.4 Grupo abeliano de las cadenas libres 306
6.5.5 Isomorfismo entre representaciones de los operadores aditivos 307
6.6 Transformaciones geométricas de las cadenas libres 309
6.6.1 Isometrías en la Tabla-100 309
6.6.2 Efecto de las isometrías sobre las cadenas fijas 313
6.6.3 Composición de isometrías 318
6.6.4 Grupo de isometrías en T_{100} sobre cadenas fijas 320
6.6.4.1 Subgrupos 321
6.6.5 Compatibilidad de las isometrías en T_{100} con la relación de equivalencia 327
6.6.6 Efecto aritmético de las isometrías en T_{100} sobre los representantes canónicos de las cadenas libres 334
6.6.6.1 Isometrías que no transforman representantes canónicos en representantes canónicos 334
6.6.6.2 Isometrías que transforman representantes canónicos en representantes canónicos 335
6.6.6.3 El grupo de Klein (S , ∘) de las isometrías que conservan las cadenas simples mínimas 336
6.7 Estudio de la Tabla-100 estructurada en k-columnas 338
6.7.1 La Tabla-100 de k columnas 338
6.7.2 Operadores aditivos en la Tabla-100 de k columnas 339
6.7.3 Cadena asociada al operador [±ab] en la tabla $T_{100(k}$ 340
6.7.3.1 Cadena libre asociada a un operador en $T_{100(k}$ 341
6.7.3.2 Determinación del representante canónico en $T_{100(k}$ 341
6.7.4 Transformaciones geométricas y operadores invariantes 348
6.7.4.1 Reflexión vertical R_v 348
6.7.4.2 Reflexión horizontal R_h 349
6.7.4.3 Reflexión oblicua R_{-45} 350
6.7.4.4 Reflexión oblicua R_{+45} 352
6.7.4.5 Giros y traslaciones 353
6.7.4.6 Resumen del estudio 354
6.8 Congruencias y patrones rectilíneos en T_{100} 356
6.8.1 Interés y objetivos del estudio de los patrones rectilíneos en las tablas (m, k) 357

6.8.2 Patrones rectilíneos en las tablas (m, k) 360
6.8.2.1 Congruencias y clasificaciones en T_{100} 360
6.8.2.2 Rectas y puntos alineados en las tablas (m, 10) 361
6.8.2.3 Ecuaciones paramétricas de las rectas en las tablas (m, 10) 365
6.8.2.4 El conjunto P(m, k) de los patrones rectilíneos en las tablas (m, k) 371
6.8.2.5 Patrones rectilíneos determinados por dos puntos 372
6.8.2.6 Patrones rectilíneos y cadenas 373
6.8.2.7 Operadores aditivos y patrones rectilíneos 374
6.8.2.8 Relaciones entre Patrones, Cadenas y Operadores en las tablas (m, k) 375
6.8.3 Regularidades visuales y aritméticas en las tablas (m, k) 378
6.8.3.1 Expresiones aritméticas de regularidades visuales en las tablas (m, k) 380
6.8.3.2 Expresiones aritméticas de regularidades en las tablas (m, k) relacionadas con la simetría de las cadenas generadoras de los patrones para un módulo m fijo y el número de columnas k=2, 3, ... 385
6.8.3.2.1 Tablas simétricas respecto de una tabla de la forma (m, $\dot{m}$) 386
6.8.3.2.2 Tablas simétricas respecto de la línea divisoria entre dos tablas consecutivas 388
6.8.3.2.3 Tablas autosimétricas 390
6.8.3.2.4 Expresión general para tablas simétricas 391

CAPÍTULO 7: Conclusiones

7.1 Introducción 397
7. 2 Consecución de los objetivos 398
7.2.1 Primer objetivo 399
7.2.2 Segundo objetivo 400
7.2.3 Tercer objetivo 402
7. 3 Hallazgos 402
7.3.1 Hallazgos en las tareas de contexto 402
7.3.2 Hallazgos en el estudio de las cadenas 404
7. 4 Dificultades detectadas más importantes 406
7.4.1 Dificultades en la primera fase 407
7.4.2 Dificultades en la segunda fase 407

7.5 Confirmación de la hipótesis 409
7.6 Conclusiones del estudio teórico 410
7.6.1 Aspectos sobre la Tabla-100 410
7.6.2 Caracterización de las cadenas 411
7.6.3 Estructura del conjunto de las cadenas libres 411
7.6.4 Isometrías aplicadas a las cadenas libres 412
7.6.5 Estudio de las cadenas en la Tabla-100 de k columnas 413
7.6.6 Aspectos relacionados con la aplicación de las cadenas al estudio de los patrones rectilíneos en las tablas $T_{100(k}$ 414
7.7 Aportaciones y del trabajo líneas de trabajo abiertas en la investigación 415

BIBLIOGRAFÍA 417

ANEXO 1.1: Selección inicial de aspectos básicos y actividades que se pueden plantear en torno a las tablas numéricas y la Tabla-100 427

ANEXO 3.1: Características y preguntas sobre la Tabla-100 433

ANEXO 3.2: Ideas previas sobre tablas numéricas y la Tabla-100 439

ANEXO 3.3: Patrones numéricos en la Tabla-100 441

ANEXO 3.4: Patrones, cadenas y transformaciones en la Tabla-100 445

ANEXO 3.5: Encuesta sobre las actividades realizadas con la Tabla-100 en G70,G3 y G1 449

ANEXO 4.1: Sesiones de trabajo con G70: tareas de contexto 461

ANEXO 4.2: Sesiones de trabajo con G3: tareas de contexto 537

ANEXO 4.3: Sesiones de trabajo con G1: tareas de contexto 563

ANEXO 5.1: Sesiones de trabajo con G3: cadenas y operadores aditivos 595

ANEXO 5.2: Sesiones de trabajo con G1: cadenas y operadores aditivos 619

ANEXO 6.1: Programa en Q-Basic para obtener las tablas (m, k) 647

ANEXO 6.2: Procedimientos realizados con MAPLE V para el estudio de las tablas (m, k) 649

CAPITULO 1

CONTEXTO Y CAMPO DE ESTUDIO

1.1 Antecedentes

La elección del tema de investigación que presentamos en esta memoria viene determinada por dos factores principales. En primer lugar se encuentra nuestra labor docente, que se desarrolla en el campo de la Formación Inicial de Profesores. En segundo lugar, nuestro interés permanente por mostrar el carácter interdisciplinar de los conocimientos matemáticos y por destacar las relaciones y conexiones entre los distintos campos de las matemáticas. Así, en nuestro trabajo como formadores de profesores de matemáticas, tratamos de buscar conexiones con otras disciplinas (Arte, Naturaleza, Música, y otras) mediante utilización de diversos materiales y recursos procedentes de esas materias. Citamos seguidamente algunos trabajos previos por haber contribuido a determinar el tema de investigación y constituir antecedentes del estudio que se presenta en esta memoria.

* Diversos estudios y experiencias llevadas a cabo en el aula con estudiantes de Magisterio en torno a la obra del artista holandés M.C. Escher para la enseñanza de la geometría, durante los cursos académicos 1989 y 1990, desembocaron en la celebración de dos eventos significativos, que sirvieron para pro-

fundizar en las conexiones entre arte y matemáticas. Bajo el título "*M.C. Escher: entre la Geometría y el Arte*" coordiné la primera exposición de grabados originales de Escher en España y, simultáneamente, un *Congreso de Arte y Matemáticas*. Ambos se celebraron en Granada, en mayo de 1990, organizados por el Departamento de Didáctica de la Matemática, en colaboración con la Facultad de Bellas Artes, en la Universidad de Granada. En la exposición se utilizaron materiales didácticos confeccionados con ayuda de nuestros alumnos, mediante los cuales los visitantes podían reconocer o interpretar elementos matemáticos significativos que se hallan presentes en las obras expuestas.

* En el Congreso de Arte y Matemáticas antes mencionado, presenté la ponencia *Arte y Matemáticas en la Escuela*, en la que exponía trabajos realizados con estudiantes de Magisterio. Estos trabajos consistían en utilizar elementos matemáticos para realizar diseños artísticos, tales como grupos de clases residuales (Zn, +) y transformaciones geométricas. En estos trabajos aparecían algunas tablas numéricas como objeto de estudio didáctico y matemático.

* *La simetría en la obra de M.C. Escher*, artículo publicado en los catálogos de la Exposición "M.C. Escher, entre la Geometría y el Arte" (Universidad de Granada, 1990), y de una edición posterior celebrada en el Museo de Arte Contemporáneo de Madrid y organizada por la Facultad de Bellas Artes de la Universidad Complutense de Madrid en julio de 1990.

* *The teaching of Geometry connected with our world*. Comunicación presentada en el 42° International Commission For The Study And Improvement Of Mathematics Teaching (CIEAEM-42) celebrado en Szczyrk (Polonia) en Julio de 1990. En esta comunicación se aborda la conexión de la enseñanza de la Geometría con el mundo real, la Naturaleza y el Arte.

* *Las teselaciones tipo Escher en relación con la enseñanza de la Geometría y el uso de los ordenadores*. Comunicación presentada en el Congrés de Bellas Arts "*L'Art en la Cultura Contemporania*", organizado por la Facultad de Bellas Artes de la Universidad de Barcelona en Junio de 1991.

* *Creatividad y Matemáticas*. Curso impartido en los Centros de Profesores de Almería y el Ejido (Almería) y recogido en la publicación "*Matemáticas*

Recreativas, su aplicación en el aula", del Centro de Profesores de Almería en 1991.

* *Una buena razón para la enseñanza de la Geometría*, artículo publicado en el número 8 de la Revista de Educación de la Universidad de Granada (pp. 129-139, 1994-95).

* *Matemáticas en las páginas amarillas*. Comunicación presentada en las "*I Jornadas de Investigación en el Aula*", organizadas por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y celebradas en Granada en Noviembre de 1995.

Como miembro del grupo andaluz de investigación *Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico* (FQM 193), comparto el interés del grupo por abordar el análisis de conceptos matemáticos y el estudio de su comprensión y de las dificultades conexas, desde una diversidad de sistemas de representación. Con anterioridad al inicio de este trabajo se defendieron las tesis doctorales *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales* (Castro, 1994) e *Introducción del Número Real en la Educación Secundaria* (Romero, 1995), que han tenido influencia en el presente estudio. El marco teórico y la metodología de investigación de estas tesis sirvieron como punto de partida para abordar nuestra tarea.

Estos antecedentes muestran el interés mantenido en un campo de trabajo, en el cual surge la idea general de abordar un estudio exploratorio sobre tablas numéricas, desde la perspectiva de diversos sistemas de representación que contemplen y mejoren la visualización de patrones numéricos.

1.2 Descripción del trabajo

Hecha la delimitación inicial del tema de trabajo, con objeto de precisar nuestra tarea procedimos a diversas actuaciones.

En primer lugar, realizamos una revisión bibliográfica para orientarnos sobre los estudios ya realizados, que detallamos en el capítulo 2. Encontramos 30 artículos de revistas de profesores con experiencias puntuales en el aula (especificados en la tabla 2.3 del capítulo 2), si bien no hallamos artículos de investigación que abordasen el tema elegido.

En segundo lugar, procedimos a una selección de las tablas numéricas utilizadas en el ámbito escolar, revisando manuales escolares y libros de texto. Entre ellas destacan las tablas de los 100 primeros números naturales, tablas de sumar, tablas de restar, tablas de multiplicar y tabla de números combinatorios o Triángulo de Pascal, entre otras.

También realizamos un primer análisis y clasificación de actividades que podríamos plantear en torno a dichas tablas, y en especial a la Tabla-100, que resumimos en el Anexo 1.1.

En tercer lugar, durante el curso 1994/95, planteamos cuestiones generales sobre tablas numéricas a tres grupos de estudiantes: de primer y tercer curso de la Diplomatura de Magisterio y de quinto curso de la Licenciatura de Matemáticas (Anexos 3.1 a 3.4). Obtuvimos así un primer núcleo de información que permitió obtener una idea sobre el interés que suscitan las tablas numéricas y las dificultades que encuentran los estudiantes con estas actividades.

Como consecuencia de los diversos ensayos realizados, y ante la diversidad y riqueza de actividades y cuestiones que se pueden plantear en torno a las tablas seleccionadas, en el curso 1995/96 tomamos una serie de decisiones, entre ellas:

* estudiar relaciones entre aritmética y geometría en tablas numéricas, destacando nuevas conexiones internas entre conceptos así como el interés formativo y didáctico de estas relaciones;

* restringir el estudio a la tabla de los 100 primeros números naturales; esta tabla (cuya descripción detallada se hace en el capítulo 6 de esta memoria) la denominamos Tabla-100 y la simbolizamos con la notación T_{100};

* trabajar con un grupo natural de estudiantes para profesor del tercer curso de la especialidad de Ciencias de la Diplomatura de Magisterio, plan 1971;

* diseñar un material para poner en práctica con los estudiantes mencionados una innovación curricular centrada en estas ideas, acotada en el tiempo e incluida en el horario lectivo de un curso académico;

* profundizar en las dificultades detectadas en el grupo de estudiantes para profesor con un estudio de caso complementario;

* estructurar el conocimiento matemático escolar generado por la consideración de nuevas relaciones entre conceptos matemáticos y analizar sus posibilidades didácticas.

De este modo realizamos una primera delimitación del problema de investigación.

Esta primera identificación del problema, lleva a plantearnos cuál es el ámbito de actuación del trabajo. Consideramos que:

"la Didáctica de la Matemática se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, así como de proporcionar fundamentación teórica y sostener los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos, se consideran tres ámbitos generales de actuación de la Didáctica de la Matemática:

Diseño, desarrollo y evaluación del currículum de matemáticas.

Conocimiento profesional y formación del profesor de matemáticas.

Fundamentación epistémica y desarrollo teórico de la disciplina." (Rico y Sierra, 1999)

Podemos contemplar el presente trabajo plenamente incluido en el primer ámbito de investigación, ya que se trata de una ***propuesta de innovación curricular y del análisis de su viabilidad y potencialidades***.

Por otra parte, se trata de un ***estudio exploratorio en el seno de un programa de formación inicial de profesores de primaria y primer ciclo de secundaria***. Hemos tratado de aprovechar nuestra propia experiencia docente y atender a los objetivos del grupo de investigación Pensamiento Numérico relativos a la formación inicial de profesores en matemáticas y su didáctica. Por esto decidimos realizar una investigación en el aula con un grupo de estudiantes de tercer curso de la Diplomatura de Magisterio. Esto sitúa este trabajo también dentro del segundo ámbito de investigación mencionado.

Finalmente, la necesidad de estructurar el conocimiento matemático escolar generado por la consideración de nuevas relaciones deriva en un tratamiento formal y un estudio conceptual teórico-matemático, que surge de necesidades detectadas en el estudio empírico, lo cual conecta esta investigación con el tercer ámbito.

Así pues, nuestra investigación conecta con los tres ámbitos generales de actuación de la Didáctica de la Matemática considerados.

1.2.1 Descriptores y términos clave

Enumeramos los principales **descriptores y términos clave** que identifican el trabajo, atendiendo a los ámbitos de actuación mencionados:

En relación con la innovación curricular:

Actividades en la Tabla-100.

Conexión entre Geometría y Números.

Sistemas de Representación.

Visualización de Patrones Numéricos.

Investigación en el aula.

En relación con la formación de profesores:

Diseño de tareas para el aprendizaje de los profesores en formación inicial.

Conocimiento formal y representacional de los estudiantes de Magisterio de la especialidad de Ciencias Físico Naturales sobre matemáticas.

En relación con la fundamentación teórico- matemática:

Estructura matemática de la Tabla-100.

Representaciones gráficas de los operadores aditivos en la Tabla-100.

Estudio aritmético geométrico de los operadores aditivos en la Tabla-100.

1.3 Acotación del problema

Iniciamos la exploración de patrones numéricos en la Tabla-100 planteando diversos interrogantes generales:

* ¿Qué potencialidades matemáticas y didácticas puede ofrecer la utilización de T_{100} como herramienta para explicitar conexiones entre la aritmética y la geometría en un programa de formación inicial de profesores?

* ¿Mediante qué representaciones gráficas se visualizan algunos conceptos aritméticos en el seno de T_{100}?

* ¿Qué dificultades de tipo didáctico y matemático entrañaría la consideración de T_{100} como base para el desarrollo de actividades aritméticas y geométricas?

* ¿Cómo serían acogidas este tipo de actividades por los estudiantes de tercer curso de Magisterio al incluirlas en el programa oficial de una asignatura de matemáticas de su plan de estudios?

Es indudable la importancia que la enseñanza de la aritmética y la geometría tienen en la educación primaria y secundaria, donde cada vez se presta más atención a las conexiones entre estas dos ramas de la matemática. En otros países (especialmente los anglosajones) es frecuente utilizar la Tabla-100 como herramienta para proponer actividades que destaquen ciertas relaciones y propiedades aritméticas y geométricas así como las conexiones entre ambas familias de relaciones. Las representaciones gráficas de conceptos aritméticos son un ejemplo de conexión entre lo geométrico y lo aritmético. En estas circunstancias resultó conveniente, en principio, indagar sobre las posibilidades de la Tabla-100 para plantear a futuros profesores de primaria y primer ciclo de secundaria cuestiones y tareas con las que poner de manifiesto estas conexiones y explorar otras representaciones geométricas para conceptos aritméticos.

Enunciamos de manera global el **propósito** que se pretendía alcanzar al inicio de nuestra investigación:

Estudiar las potencialidades didácticas y matemáticas que puede ofrecer la Tabla-100 como herramienta para explicitar conexiones entre aritmética y geometría y propiciar nuevas representaciones geométricas de conceptos aritméticos en un programa de formación inicial de profesores.

1.4 Marco teórico

Las tesis ya mencionadas de Castro (1994) y Romero (1995) han proporcionado una fundamentación adecuada para nuestro trabajo. También la tesis denominada *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*, Gairín (1999), ha contribuido a este estudio. Las tres se enmarcan en la línea de Pensamiento Numérico, abordan el estudio de una innovación curricular, investigan en torno a los sistemas de representación y siguen una metodología de Investigación Acción. Compartimos con el trabajo de Castro (1994) el marco general de las relaciones entre geometría y números y con el de Gairín (1999) el hecho de realizar el estudio empírico en un curso de formación inicial de profesores, en un grupo natural de alumnos donde el profesor tiene también el papel de investigador.

Asumimos como marco teórico general el propio del grupo de Pensamiento Numérico, desarrollado en numerosos artículos y tesis doctorales, del cual encontramos una síntesis en Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria (Rico y otros, 1997; pp. 282-293). Queremos destacar la fuerte conexión de nuestra tarea con las nociones de Sentido Numérico (Wirtz, 1974; Howden, 1989-a; Greeno, 1991) y sistema de representación (Kaput, 1992; Duval, 1993; Rico, 1997).

En el Capítulo 2 desarrollamos con mayor extensión los aspectos correspondientes al marco teórico.

1.5 Marco metodológico

Nuestro estudio empírico se realiza con tres grupos de estudiantes, que marcan tres momentos en su realización. Cada sesión de trabajo la realizamos en primer lugar con un grupo de 70 alumnos de tercer curso de magisterio a los que presentamos una serie de actividades y tareas que concretan la innovación curricular y se centran sobre las relaciones y representaciones en estudio. Recogemos las diferentes interpretaciones que realizan los estudiantes y las dificultades de las tareas; también se detectan y corrigen las lagunas en la planificación. El material recogido, básicamente, es material escrito y consiste en las respuestas de los estudiantes a las distintas tareas propuestas. El marco metodológico seguido en esta fase es el de la investigación en el aula (Hopkins, 1989).

En segundo lugar tratamos de observar con detalle las interpretaciones y dificultades que los estudiantes encuentran sobre los conceptos en estudio. Trabajamos la misma sesión con un grupo de 3 alumnos, también de tercer curso de Magisterio y que no pertenecen al grupo anterior, a los que presentamos la misma secuencia de tareas con las modificaciones pertinentes derivadas de la sesión con el grupo de aula. Se trata de un estudio de casos, mediante entrevista semiestructurada, cuyas sesiones se graban en vídeo y/o audio; también se conservan las producciones y respuestas escritas de los alumnos a las tareas planteadas. En este punto nuestro interés se centra en estudiar los argumentos de los estudiantes para interpretar los conceptos y resolver los problemas planteados; también estamos interesados en profundizar sobre las dificultades surgidas en el grupo más numeroso de la fase anterior.

En tercer lugar realizamos el estudio de un caso, donde trabajamos con una estudiante de tercer curso de magisterio sobre las mismas actividades que en los grupos precedentes. Seguimos la técnica de entrevista y nos proponemos obtener información más precisa sobre algunas cuestiones y dificultades surgidas en los grupos anteriores, con el fin de estudiarlas con más detalle.

Dividimos en dos bloques, básicamente, las actividades propuestas. Estos dos bloques van a establecer las dos fases en que se estructura el trabajo de campo. En la primera fase de sesiones se presentan las actividades del primer bloque, que constituyen un contexto de trabajo rico en situaciones para relacionar la geometría y la aritmética en el seno de la Tabla-100. En la segunda fase se presenta el segundo bloque de actividades, que se centran en unas representaciones gráficas específicas en dicha tabla para los operadores aditivos, figuras geométricas planas que llamamos ***cadenas***, que estimulan el pensamiento visual.

Para realizar este estudio asumimos las categorías de interacción en el aula establecidas en la tesis de Castro (1994, pp. 94-97) y en la tesis de Romero (1995, pp. 107-111). En principio nuestro esfuerzo se centra en elaborar unas categorías de contenido y unas categorías de comprensión del contenido adecuadas.

La complejidad de situaciones matemáticas en relación con la Tabla-100 y con las representaciones geométricas de los operadores aditivos, se puso de manifiesto en las dificultades surgidas para elaborar esas categorías y, como consecuencia, no resultó posible efectuar un análisis exhaustivo y riguroso de toda la información recogida. Surge entonces la necesidad de llevar a cabo un estudio teórico, de fundamentación matemática, que formalice y proporcione una estructura a la Tabla-100 y a las cadenas; de este modo se abordan ciertos conceptos y variables no tenidos en cuenta en la elaboración de las actividades propuestas anteriormente a los estudiantes.

Surge así la necesidad de llevar a cabo un estudio teórico, que se convierte en un eje central de nuestra investigación. Son ambos estudios, el empírico y el teórico, los que pueden propiciar, posteriormente, una propuesta fundada de innovación curricular para la formación inicial de profesores de matemáticas.

El marco metodológico del estudio se desarrolla con detalle en el Capítulo 3.

Aun cuando en un momento dado el foco de la investigación se desplaza del estudio empírico al teórico, no hay que olvidar que éste segundo surge del primero, es el detonante que pone de manifiesto la necesidad de abordar el estudio teórico. Por ello encontramos necesario hacer un estudio descriptivo detallado de los principales resultados obtenidos tanto en las actividades que hemos llamado de contexto como en las actividades específicas en torno a las representaciones geométricas de los operadores aditivos en la Tabla-100 llamadas cadenas. Dicho estudio se presenta en los Capítulos 4 y 5.

El estudio teórico se presenta en el Capítulo 6, donde se detalla:

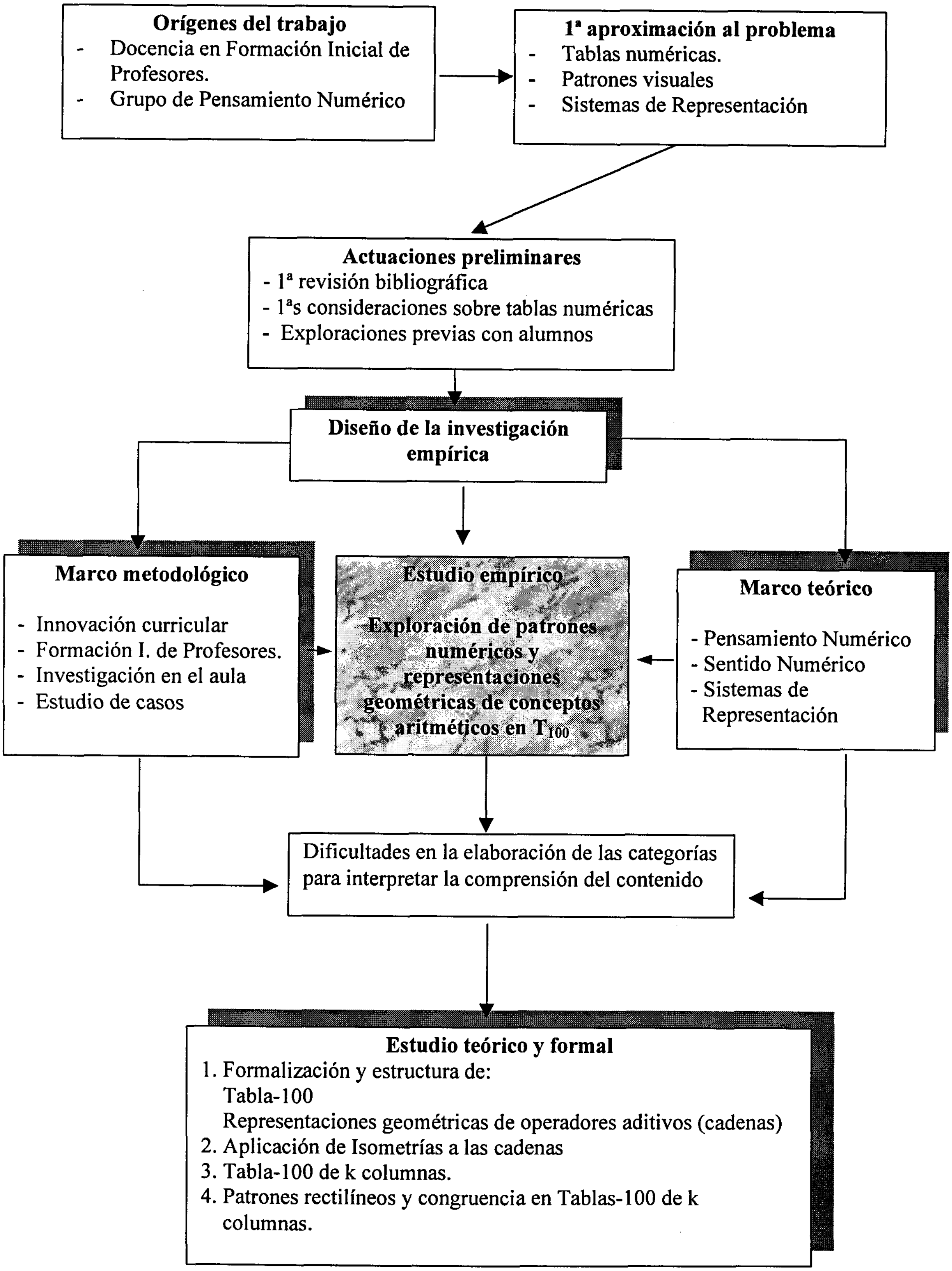
1. La formalización y estructura matemática de T_{100} y de las representaciones de operadores aditivos en la tabla.

2. El efecto de determinadas isometrías sobre las cadenas y sus operadores asociados.

3. Extensión del estudio a las tablas-100 de k columnas, conectándolas con los sistemas de numeración en base k.

4. Aplicación de las nuevas representaciones al estudio de los patrones rectilíneos que se producen en las clases de congruencia módulo **m** en las tablas de **k** columnas.

Resumimos lo que hemos dicho en los apartados anteriores mediante el esquema 1.1:


Orígenes del trabajo
- Docencia en Formación Inicial de Profesores.
- Grupo de Pensamiento Numérico
1ª aproximación al problema
- Tablas numéricas.
- Patrones visuales
- Sistemas de Representación
Actuaciones preliminares
- 1ª revisión bibliográfica
- 1ªs consideraciones sobre tablas numéricas
- Exploraciones previas con alumnos
Diseño de la investigación empírica
Marco metodológico
- Innovación curricular
- Formación I. de Profesores.
- Investigación en el aula
- Estudio de casos
Estudio empírico
Exploración de patrones numéricos y representaciones geométricas de conceptos aritméticos en T_{100}
Marco teórico
- Pensamiento Numérico
- Sentido Numérico
- Sistemas de Representación
Dificultades en la elaboración de las categorías para interpretar la comprensión del contenido
Estudio teórico y formal
1. Formalización y estructura de:
Tabla-100
Representaciones geométricas de operadores aditivos (cadenas)
2. Aplicación de Isometrías a las cadenas
3. Tabla-100 de k columnas.
4. Patrones rectilíneos y congruencia en Tablas-100 de k columnas.

Esquema 1.1

CAPITULO 2

AREA PROBLEMÁTICA

2.1 Ubicación del estudio

Con el fin de precisar el área problemática en que nos movemos y delimitar el marco teórico en el que tiene lugar este trabajo nos proponemos explicitar sus conexiones con diversos campos de la educación matemática.

El objeto de estudio central en esta investigación es la tabla numérica que hemos denominado anteriormente Tabla-100. En principio hemos tomado esta tabla como simple recurso didáctico utilizado en el medio escolar para indagar sobre aspectos aritméticos, principalmente, y, en menor medida, sobre aspectos geométricos. Al ser nuestro propósito profundizar este estudio con un grupo de profesores en formación, desde la perspectiva de los sistemas de representación y la visualización de patrones numéricos, la Tabla-100 también se ha considerado como un geoplano de 10x10 puntos en forma de cuadrícula, con el fin de dar soporte a la consideración geométrica de determinadas transformaciones aritméticas que surgen en el estudio. Finalmente, en el transcurso de la investigación, se ha visto la necesidad de contemplar la Tabla-100 desde un punto de vista teórico y formal, estudiando su estructura y tratando los problemas derivados de su consideración como un plano finito discreto. Son pues diversas las perspectivas con las que llevamos a cabo el estudio de la Tabla-100.

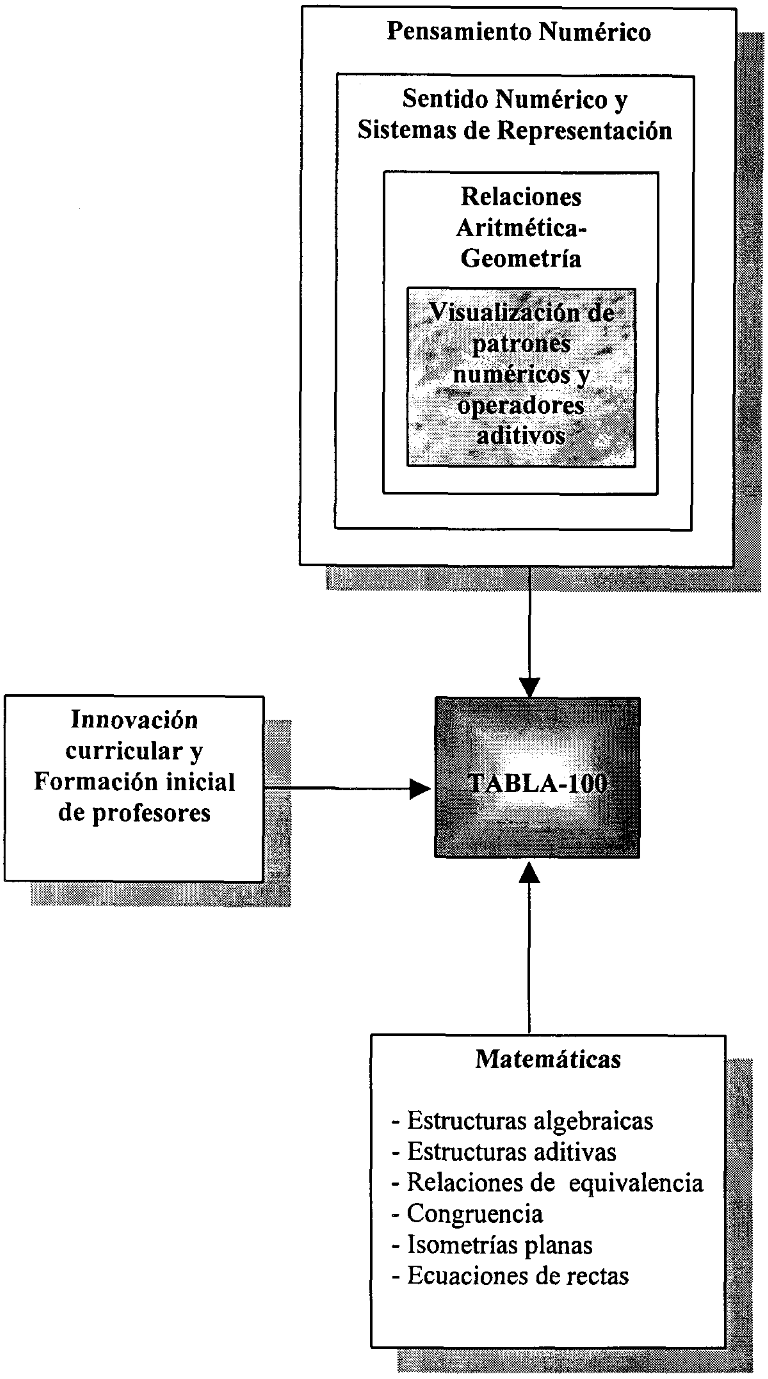
Por ello, nuestro problema lo abordamos desde tres principales focos de atención:

Primero: este estudio lo insertamos, por una parte, en el marco global del grupo de investigación *Pensamiento Numérico* que, a su vez, comprende diversas áreas de interés, como son el *Sentido Numérico* y los *Sistemas de Representación*, entre otras. A partir de este marco buscamos una base teórica adecuada para el encuadre de nuestro problema. Una especificidad del trabajo es su interés prioritario por estudiar las *relaciones entre la Aritmética y la Geometría,* con la atención puesta en ***visualizar patrones numéricos y operadores aditivos en la Tabla-100***.

Segundo: otro foco de atención de este estudio está en la *Formación Inicial de Profesores y la Innovación Curricular*. Nuestro estudio empírico lo hemos llevado a cabo con un grupo de profesores de primaria en formación, como una *investigación en el aula* orientada por una propuesta de innovación.

Tercero: debido al trabajo realizado sobre la Tabla-100 y sobre las representaciones de los operadores aditivos en esa tabla, ha sido necesario contemplar el problema desde una perspectiva teórica. Este ha sido nuestro tercer foco de interés: sistematizar y formalizar los conceptos matemáticos y las propiedades trabajadas. Desempeñan un papel primordial las *estructuras aditivas y sus representaciones geométricas,* cuyo estudio llevamos a cabo en su aspecto matemático formal como *estructuras algebraicas*. Otras herramientas matemáticas básicas utilizadas en nuestro trabajo han sido las *relaciones de equivalencia,* en especial las *congruencias*, *las isometrías planas* y las *ecuaciones de rectas en el plano*.

Desarrollamos a continuación las variadas conexiones entre los distintos campos mencionados y esta investigación, que resumimos en el esquema 2.1:


Pensamiento Numérico
Sentido Numérico y Sistemas de Representación
Relaciones Aritmética-Geometría
Visualización de patrones numéricos y operadores aditivos
Innovación curricular y Formación inicial de profesores
TABLA-100
Matemáticas
- Estructuras algebraicas
- Estructuras aditivas
- Relaciones de equivalencia
- Congruencia
- Isometrías planas
- Ecuaciones de rectas

Esquema 2.1

2.2 Pensamiento Numérico

Se denomina *Pensamiento Numérico* a una línea de estudio e investigación en Didáctica de la Matemática que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos, tanto en el medio escolar como social. El campo general en el que se desenvuelve la investigación en Pensamiento Numérico comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico, 1997-b).

Entre los objetivos de la línea de investigación Pensamiento Numérico están:

- El estudio coordinado de los diversos *sistemas de representación*, válidos para expresar, comprender y comunicar los conceptos y relaciones de una misma estructura numérica.

- La organización, sistematización y desarrollo de diferentes *actividades cognitivas* que surgen y encuentran un modo de expresión y tratamiento en el marco de una estructura numérica.

- Los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de *fenómenos, cuestiones y problemas* que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica. (Castro, 1994, p. 1).

El modelo de análisis que se propone en esta línea de trabajo consta de:

- Unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados, que en nuestro trabajo son la Tabla-100 y sus componentes aritméticos y geométricos.

- Unos modos de uso de los *sistemas simbólicos*: funciones cognitivas (buscar patrones, expresar geométricamente propiedades y relaciones aritméticas, relacionar propiedades geométricas y aritméticas, conjeturar nuevas propiedades, verificarlas, etc.)

- Un *campo de actuación*: fenómenos, cuestiones y problemas (la Tabla-100 y el estudio de relaciones aritméticas con las que se enfrentan los estudiantes en el medio escolar).

El marco conceptual en que se sitúa el grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM 193)* tiene unas bases diversificadas:

(a) Parte de la construcción del conocimiento matemático como un fenómeno social y cultural, de importancia para la sociedad tecnológica actual;

(b) Establece como campo de reflexión para sus investigaciones el ámbito matemático que comienza en la aritmética escolar con las nociones básicas del número, avanza por los sistemas numéricos superiores y continúa con el estudio sistemático de las relaciones numéricas con que se abordan la teoría de números, la iniciación a los procesos infinitos y el estudio de estructuras;

(c) Tiene una orientación esencialmente curricular.

(d) Se ocupa del estudio de los errores y dificultades en la comprensión de los escolares.

(e) Está comprometido con la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas de todos los niveles (Rico, 1996, pp. 27-29).

En Pensamiento Numérico se pueden identificar varias orientaciones de investigación diferentes que, en la práctica educativa, interactuan y operan conjuntamente. Destacamos tres de ellas:

La primera se interesa por el aprendizaje numérico y aborda cuestiones como:

- las relaciones entre la experiencia y la formación de los conceptos;

- la comprensión de los conceptos y propiedades aritméticas y su conexión con los sistemas de representación utilizados;

- la adquisición de automatismos, procedimientos y destrezas.

La segunda está centrada en los estudios sobre la enseñanza de los conceptos numéricos, y atiende a cuestiones como:

- naturaleza, características, relaciones, estructura y organización del currículo escolar sobre números, aritmética, estructuras y relaciones numéricas.

- la formación científica y didáctica del Profesor de Matemáticas, en particular para la enseñanza de la numeración, el cálculo y otros conceptos numéricos.

La tercera se centra en las conexiones entre enseñanza y aprendizaje y está ligada a la práctica; atiende cuestiones del tipo:

- métodos y técnicas para provocar, de manera diversificada, aprendizajes óptimos sobre números, aritmética, estructuras y relaciones numéricas.

- recursos y medios necesarios para dichos aprendizajes.

- adecuación de los diseños curriculares sobre números, aritmética y estructuras numéricas a los intereses, necesidades y capacidades de los alumnos. (González, 1995, pp. 43-44).

El marco teórico sobre el que se apoya el campo de Pensamiento Numérico ha tenido en cuenta las nociones de representación y sistemas de representación, tratadas por Janvier et al. (1987) y Kaput (1987, 1992), el análisis semiótico de Duval (1993), los trabajos de Hiebert et al. sobre conocimiento matemático y comprensión (1986, 1992) y la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990).

El marco básico de nuestra investigación está en la línea de Pensamiento Numérico. Su contenido principal es la ***Tabla-100***, objeto matemático que posee una estructura numérica propia, básicamente de carácter aditivo. Sobre la tabla consideramos las ***cadenas*** o representaciones geométricas de los operadores aditivos, que visualizan diversas nociones aritméticas y mediante las que tratamos de enriquecer su comprensión.

De acuerdo con este marco teórico, el grupo de Pensamiento Numérico ha llevado a cabo varios trabajos de investigación. Hasta el momento, los tópicos sobre los que se han centrado estos trabajos han sido:

- Resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

- Sentido numérico: razonamiento inductivo numérico y estimación.

- Pensamiento numérico avanzado: procesos infinitos y término general de una sucesión.

- Estructuras numéricas. Representación, comprensión y aprendizaje de distintos sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales y reales).

- Formación inicial de profesores de matemáticas de primaria.

Las tesis doctorales realizadas y defendidas por los miembros del grupo de investigación de Pensamiento Numérico se pueden agrupar en:

(a) trabajos de innovación curricular,

(b) estudios sobre evaluación,

(c) investigaciones basadas sobre el análisis didáctico.

2.2.1 Caracterización del estudio realizado

La investigación que presentamos en esta memoria es un ***trabajo de innovación curricular de tipo exploratorio***, que trabaja con varios de los tópicos abordados en tesis anteriores: sentido numérico, sistemas de representación, comprensión y aprendizaje de sistemas numéricos y formación inicial de profesores de matemáticas de primaria.

Conceptos y características diferenciales propios de esta investigación son:

- La formalización matemática de la Tabla-100.

- El estudio matemático de las cadenas, que son las representaciones gráficas de los operadores aditivos en la tabla.

- El estudio de los operadores aditivos en la Tabla-100 (con extensión al conjunto de los enteros Z), considerados como aplicaciones:

f_k: $Z \rightarrow Z$, tal que $\forall$ $x \in Z$, $f_k(x) = x + k$, siendo k un elemento fijo de Z, que se representan geométricamente a modo de poliminós.

- Las relaciones que se establecen entre las representaciones de tipo aritmético y geométrico para los operadores aditivos.

Dentro del grupo Pensamiento Numérico este trabajo se relaciona con el sentido numérico y los sistemas de representación, y está fuertemente implicado con las relaciones entre Aritmética y Geometría y, más en concreto, con la visualización de patrones numéricos y operadores aditivos. Pasamos a comentar algunas de las principales relaciones mencionadas.

2.3 Sentido Numérico

En el transcurso de esta investigación se propone a un grupo de estudiantes para profesor de primaria una serie de tareas aritméticas no convencionales relativas a la búsqueda y reconocimiento de patrones numéricos. Estas tareas, su planteamiento y resolución, tienen que ver con el llamado sentido numérico, concepto utilizado en los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Evaluación Matemática (N.C.T.M., 1991), que en el Informe Cockcroft (1985) figura como "*sentido del número*" y al que Wirtz (1974) se refiere como "*simpatía por los números*".

No existe una caracterización del sentido numérico que sea universalmente aceptada, sin embargo podemos asumir la visión global que proporciona Howden:

El sentido numérico puede ser descrito como una buena intuición sobre los números y sus relaciones. Se desarrolla gradualmente como consecuencia de explorar números, visualizándolos en una variedad de contextos, y relacionándolos de maneras que no están limitadas por algoritmos tradicionales (1989-a, p. 11).

Existe un mayor acuerdo para establecer los aspectos de los que se ocupa el sentido numérico. Greeno (1991, p. 170) interpreta a éste como un conjunto de habilidades para construir y razonar dentro de modelos mentales, destacando las capacidades para la computación mental flexible, estimación numérica y razonamiento cuantitativo. Para Thompson y Rathmell el sentido numérico implica el desarrollo de la comprensión de:

1. Significados y relaciones numéricas.
2. Magnitud relativa de números.

3. Efectos producidos por los números utilizados como operadores con otros números.

4. Referentes numéricos para cantidades y medidas utilizadas en situaciones de la vida cotidiana (1989, p. 2).

Según Hope (1989, p. 12) el sentido numérico está en conexión con la habilidad para producir estimaciones razonables, determinar errores aritméticos, elegir un procedimiento de cálculo eficaz y reconocer patrones numéricos. Este último aspecto es considerado también por Greeno (1991, p. 174) que incluye la construcción y reconocimiento de patrones numéricos como actividades que exploran relaciones entre números y cantidades.

Una de las conjeturas que orientan este trabajo sostiene que las actividades en torno a la Tabla-100 realizadas por los estudiantes favorecen el enriquecimiento de su sentido numérico al trabajar con diversas visualizaciones de conceptos aritméticos por medio de representaciones geométricas, detectar patrones y establecer nuevas relaciones entre números, que no están limitadas por los algoritmos tradicionales.

Existe también una fuerte conexión entre este trabajo y la consideración de las Matemáticas vista como *ciencia de los patrones*, ya que las actividades propuestas a nuestros estudiantes están elaboradas con este enfoque. Abundaremos más en este sentido en un apartado específico dedicado a patrones numéricos.

2.4 Sobre la noción de representación

La idea de *representación* y, más concretamente, la de *sistema de representación*, es objeto de atención especial dentro del grupo de Pensamiento Numérico ya que constituye una herramienta útil para estudiar la comprensión de las matemáticas por parte de las personas y los procesos de aprendizaje matemático. En este caso nos referimos a las representaciones utilizadas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Autores como Janvier (1987); Janvier, Girardon y Morand (1993); Douady (1980, 1986); Hiebert y Carpenter (1992); Kaput (1992); y Duval (1993, 1995) han realizado contribuciones notables en este terreno. Rico (1997-a) incluye las representaciones como uno de los organizadores del currículo de matemáticas, es decir, como uno de los modos de aportar significación a las matemáticas escolares.

Siguiendo a Restivo, para la sociología del conocimiento las representaciones matemáticas son construcciones sociales. En este sentido los conceptos numéricos son herramientas culturales y reflejan visiones del mundo. Mediante los números se controlan y regulan multitud de relaciones cuantitativas y cualitativas del medio social; el reconocimiento e interpretación de patrones y regularidades muestra una estrategia compleja del pensamiento matemático cuyo desarrollo, lamentablemente, está ausente de nuestra práctica escolar cotidiana (Restivo, 1992, pp. 99-128).

Para la filosofía de la mente representar es un modo de atribuir significado, Dancing y Sosa (1993). Así se entiende cuando establecen que el término *representación* se refiere a *cualquier cosa que puede evaluarse semánticamente*, siendo el *"contenido" aquello que en una representación la hace semánticamente evaluable*. Así, de un enunciado, se dice que tiene como contenido una proposición o condición de verdad; de un término, se dice que tiene un concepto como contenido; de una gráfica, que expresa una relación adecuada entre sus componentes. Para el caso de las matemáticas las expresiones simbólicas, los enunciados, los diagramas, los gráficos y otras notaciones usuales son representaciones ya que hacen presentes determinadas nociones y conceptos con significado establecido, que se puede evaluar (Castro et al., 1997).

En un sentido más cercano a nuestro estudio, consideramos representación como la acción o efecto de representar, y tomamos como significado de representar:

> figurar, imaginar o hacer presente una cosa,
> simbolizar, ser imagen o símbolo de una cosa (Cuervo, 1998; pp. 186-192)[1]

podemos establecer que:

> las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan y hacen presentes los conceptos y procedimientos ma-

[1] R.J. Cuervo (1998) Diccionario de Construcción y Régimen de la Lengua Castellana. Tomo Octavo. Barcelona: Herder.

temáticos así como sus características y propiedades más relevantes (Castro y Castro, 1997, p. 96).

2.4.1 Sistemas de representación

Diversos autores coinciden en que el conjunto de signos, símbolos y reglas para expresar o representar una estructura matemática ha de ser de carácter *sistémico*, y hablan de *sistema matemático de signos* (Kieran y Filloy, 1989), *sistemas de notación* (Kaput, 1992) o *sistemas de registros semióticos* (Duval, 1993) para referirse bajo distintos términos al carácter sistémico de las representaciones. Nosotros empleamos el término *sistemas de representación* para referirnos a los modos de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas, mediante unos signos, unas reglas y unos enunciados. Asumimos que los sistemas de representación expresan diversas facetas de los sistemas numéricos, entendiendo a éstos como

> un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotados de unas operaciones o modos de componer esos números y de unas relaciones, mediante las que se comparan dichos entes (Feferman, 1989).

En cualquier dominio conceptual, y tal es el caso de las matemáticas, las representaciones convencionales contextualizadas (signos dotados arbitrariamente de sentido) hacen presentes a los conceptos. Pero las matemáticas no se pueden reducir a unos sistemas estructurados de codificación mediante signos o gráficas. El modo específico de representar en matemáticas permite manipular y procesar esas representaciones de manera que los distintos modos de manipulación expresen, a su vez, diversas propiedades y relaciones estructurales entre los conceptos e ideas representados. Las representaciones matemáticas conllevan un modo dinámico de procesamiento, que las dota de una potencia incuestionable.

Si bien la representación de un concepto matemático consiste en hacerlo presente mediante unos signos específicos, convencionales y contextualizados, con unas reglas sintácticas de procesamiento, dicha representación con sus reglas no agota el concepto sino que sólo pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes. Característica distintiva de los conceptos y estructuras matemáticas es la necesidad de emplear diversas representaciones distintas para captarlos en toda su complejidad, como han puesto de manifiesto distintas investigaciones (Janvier, 1987; Kaput, 1987; Golding, 1993). Duval (1995) sostiene la existencia de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático y establece que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como lo son los objetos comúnmente llamados físicos. Esto lleva a la necesidad de considerar las relaciones entre los diversos sistemas de representación para un mismo concepto. Janvier habla de *traducción* (translations) entre distintos sistemas, mientras que Duval se refiere a estas relaciones con el término *conversión*.

De esta reflexión nos interesa destacar como parte relevante del marco conceptual de nuestro estudio las nociones de sistema de representación, procesamiento dentro de un sistema, pluralidad de sistemas y conexiones entre los diferentes sistemas de un mismo concepto.

2.4.2 Representaciones internas y externas

Desde un planteamiento mentalista hay una dicotomía relevante en la noción de representación, que viene dada por el dualismo subyacente al mentalismo, y que lleva a distinguir entre representaciones internas y representaciones externas del conocimiento. Hiebert y Carpenter (1992) expresan esta idea cuando indican que hay que distinguir entre los dibujos, símbolos y expresiones que realizamos para comunicar nuestras reflexiones sobre conceptos matemáticos (*representaciones externas*) y las *representaciones internas* que debemos hacer cuando pensamos y razonamos sobre ideas matemáticas, de manera que la mente tenga posibilidad de operar con tales representaciones.

Con diferentes matices, diversos autores aceptan esta distinción. Así, Kaput (1992) considera un *mundo de operaciones mentales y un mundo de operaciones físicas*, mientras que Duval (1993) postula la existencia del *mundo de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas*, y sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas. La diversificación de representaciones para un mismo concepto, aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y, por tanto, su comprensión sobre ese objeto o concepto. La comprensión de un concepto matemático, está íntimamente relacionada con el dominio y la coordinación de sus diferentes sistemas de representación.

En la práctica no consideramos esencial para la educación matemática esta distinción analítica entre representaciones internas y representaciones externas y, por tanto, tampoco es esencial en este trabajo, si bien hablaremos de ambos tipos de representaciones. Para ello tendremos en cuenta que establecemos conjeturas sobre las representaciones internas de un sujeto (que no son observables sensu estricto) y estudiamos el conocimiento de ese sujeto sobre un concepto a partir de las representaciones externas que elabora y proporciona sobre ese concepto. Por otra parte, las representaciones externas convencionales actúan como estímulo para los sujetos en sus procesos de interiorización y construcción de nuevas estructuras mentales ya que permiten expresar sus ideas sobre los conceptos en estudio.

Asumimos la unificación terminológica que realizan Romero y Rico (1999, p. 120) refiriéndose a las representaciones como sistemas de representación para aludir a su carácter sistémico y a su carácter de representaciones de conceptos matemáticos, englobando dentro de los sistemas de representación interna el mundo de las estructuras mentales y las conceptualizaciones de los objetos matemáticos, y dentro de las representaciones externas los sistemas de notación convencionales.

2.4.3 Tipos de representaciones

Dentro de los modos convencionales de representación es usual distinguir dos grandes familias de sistemas: *representaciones simbólicas* y *representaciones gráficas*. Entre las primeras se encuentran las representaciones de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento. Los sistemas de representación gráficos recogen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación (Castro y Castro, 1997, p. 101).

No hay duda del papel que desempeña una buena gestión de estos sistemas de representación en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, habiendo aumentado recientemente el interés por su estudio. Este hecho se refleja, por una parte, en la proliferación de dibujos, esquemas y figuras en general que acompañan a los libros de texto, como representaciones de conceptos matemáticos y, por otra, en las investigaciones que estudian el papel que juegan las representaciones gráficas en el razonamiento de los estudiantes. Una de las conclusiones más reiteradas en estos estudios muestra que el trabajo con representaciones gráficas incrementa con la visualización las herramientas de comprensión de los escolares, mejorando su capacidad de razonamiento y les ayuda en su proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos (Castro y Castro, 1997, p. 102).

2.4.4 Representaciones en la Tabla-100

El estudio exploratorio que efectuamos sobre visualización de patrones numéricos en la Tabla-100 tiene como objetivo central *encontrar diversas representaciones de los operadores aditivos* en dicha tabla. Se han elaborado básicamente dos tipos de representaciones:

(a). **De carácter simbólico**: las llamamos ***expresiones aritméticas y expresiones aritméticas reducidas,*** que son concatenaciones de números naturales, afectados de los signos + y – como subíndices o superíndices, que indican los diferentes desplazamientos efectuados sobre la tabla para realizar una operación aditiva.

(b). **De tipo gráfico**: las denominamos ***cadenas***, son geométricas y constituyen yuxtaposiciones de celdillas cuadradas con un lado común, en las que se distingue una celdilla origen y otra final.

Abordaremos con detalle un estudio sistemático de estas representaciones en el Capítulo 6. La tabla 2.1 muestra un ejemplo de cada una de estas representaciones correspondientes al operador aditivo +36.

Estas representaciones destacan facetas del operador aditivo distintas de aquellas que muestran las representaciones convencionales (expresión numérica, expresión funcional, máquina de Dienes (1976)). Este es el caso tanto de las *ex-*

presiones aritméticas y aritméticas reducidas, en las que se especifican las componentes decenas y unidades, como de las ***cadenas*** en las que se visualizan geométricamente dichas componentes. La existencia de diversas representaciones para este concepto, junto con las ya conocidas, permiten realizar "*traducciones*" entre ellas.

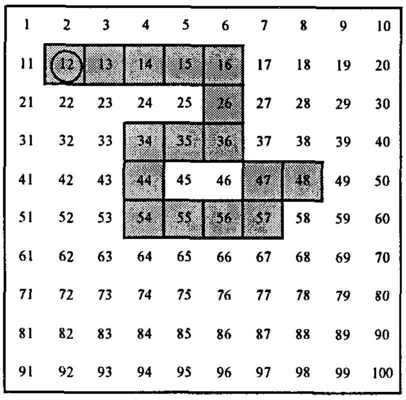
Operador aditivo	Representación visual	Expresión aritmética	Expresión aritmética reducida
+36		$\mathbf{4_+2^+2_-2^+3_+1^-1_+}$	$\overset{+}{3}\ 6_+$

Tabla 2.1: Representación geométrica (**cadena**) del operador aditivo **+36** cuya **expresión aritmética** es $\mathbf{4_+2^+2_-2^+3_+1^-1_+}$ y su **expresión aritmética reducida** es $\mathbf{\overset{+}{3}\ 6_+}$

La Tabla-100 compuesta por el conjunto de los números naturales 1 a 100, la cuadrícula y el geoplano, constituye una representación de un objeto matemático, cuya descripción detallada haremos en el capítulo 6.

2.5 Comprensión y sistemas de representación

La noción de *comprensión*, utilizada con frecuencia en trabajos recientes de investigación en educación matemática con orientación cognitiva, es un concepto importante en este estudio. Así lo hemos puesto de manifiesto en los apartados anteriores, cuando hemos considerado que los sistemas de representación son una herramienta útil para estudiar la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes. Cuando hablamos de *comprender* nos referimos a *una forma de ver o entender las cosas y al modo de estructurar u organizar nuestro conocimiento sobre algo.*

¿Qué entendemos por comprensión? ¿qué es comprender un concepto matemático? ¿mediante qué manifestaciones observables podemos asegurar que se ha producido la compresión de un concepto por parte de un sujeto? ¿se pueden distinguir distintos niveles de comprensión?

Investigadores que han trabajado la noción de comprensión desde la educación matemática tienen una interpretación cercana a la nuestra:

"comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema adecuado" Skemp (1980, p. 50).

Este autor concibe la comprensión como un proceso complejo que evoluciona gradualmente, un proceso que partiendo de la intuición puede transformarse en un conocimiento estructurado.

Nos referimos a la noción de comprensión en este estudio para estudiar el modo en que se produce y manifiesta el aprendizaje de unos estudiantes sobre unos conceptos (operadores aditivos en la Tabla-100) cuando los estudiantes se enfrentan a unas determinadas tareas estructuradas. Por ello es necesario precisar con mayor detalle la noción de comprensión, dado el interés general que esta noción tiene en nuestra investigación. No es objetivo de nuestro trabajo hacer un resumen detallado de las teorías cognitivas que han trabajado sobre la comprensión en matemáticas, pero sí parece oportuno aclarar en qué sentido se utiliza este término.

Diversos especialistas en cognición matemática han orientado sus investigaciones a establecer diversos tipos de conocimientos matemáticos y al modo en que los estudiantes incorporan y hacen propios esos conocimientos:

> "El conocimiento conceptual se caracteriza como conocimiento que es rico en relaciones. Puede pensarse como una membrana conectada de conocimientos, una red en la que las relaciones de conexión son tan importantes como las piezas discretas de información. Las relaciones saturan los hechos y proposiciones individuales de modo que todas las piezas de información están conectadas a alguna red. De hecho, una unidad de conocimiento no puede ser una pieza aislada de información; por definición es una parte del conocimiento conceptual sólo si su poseedor reconoce su relación con otras piezas de información" (Hiebert y Lefevre, 1986; pp.3-4).

Esta posición cognitiva asume que el conocimiento se representa internamente, y que esas representaciones internas están estructuradas. La comprensión de un concepto consiste entonces en el modo y grado de integración en la estructura de conocimientos de un sujeto:

> "Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si forma parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes" (Hiebert y Carpenter, 1992; p. 67)

Por tanto, podremos afirmar que se ha producido la compresión de un concepto por parte de un sujeto cuando éste manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimientos, es decir, que puede establecer relaciones entre el nuevo concepto y nociones ya conocidas y derivar nuevo conocimiento procedente de esta integración. En este sentido, distintos grados de estructuración podrán caracterizar diversos niveles de comprensión en los estudiantes. Las nuevas relaciones y el enriquecimiento de relaciones antiguas son las que ponen de manifiesto los fenómenos y grados de comprensión.

Si el objetivo de una innovación curricular es:

> "favorecer la comprensión de los alumnos, y ésta comprensión viene dada por el incremento en el número de conexiones en las redes de representaciones internas y la consistencia de las mismas, parece claro que una forma de lograrlo es favoreciendo las conexiones entre los elementos de los sistemas de representación externos de un concepto, tanto dentro de un mismo sistema, como entre sistemas diferentes" (Romero, 1977; p.77).

Los fenómenos de comprensión tienen especial interés cuando trabajamos con diferentes sistemas de representación para un mismo concepto o estructura y con las relaciones de conversión, o traducción, entre esos sistemas, y así lo han puesto de manifiesto diversas investigaciones realizadas en el grupo de investigación Pensamiento Numérico (Castro, 1994; González, 1995;Romero, 1997; Gairín , 1999).

Con nuestro trabajo pretendemos ampliar la red de relaciones que sostiene el conocimiento sobre los operadores aditivos. Como se verá en los capítulos 4 y 5, los estudiantes pueden relacionar los aspectos que le proporcionan las nuevas representaciones con los conocimientos previos que poseen sobre la estructura aditiva, ya que al utilizar las cadenas y algunas isometrías planas se ofrece una visión geométrica del operador aditivo que puede ser integrada en la red de conocimiento que posee el alumno sobre la estructura aditiva.

2.6 Patrones Numéricos

El término *patrón* ocupa también un papel destacado en este estudio, y lo tomamos de la palabra inglesa *pattern*. Entre las traducciones que el diccionario ofrece del término inglés pattern encontramos las de *modelo y patrón*. Adoptamos el vocablo patrón como término de referencia y le atribuimos un sentido de regularidad que se forma a partir de un núcleo generador.

Esta noción ocupa hoy día un lugar central en las matemáticas. Así, gran parte de los matemáticos están de acuerdo en concebir la matemática como *"la ciencia o el estudio de los patrones"* (Devlin, 1994, pp. 1-3). De acuerdo con Stevens (1986, p. 3) los diseños que ofrece la Naturaleza son restringidos, y tales limitaciones son las que confieren armonía y belleza al mundo natural. Para Stewart (1995) vivimos en un Universo de patrones. El instinto del científico es tratar de comprender el mundo natural, y el del matemático es estructurar ese proceso buscando la regla, la norma, la estructura, es decir, el patrón.

La actividad matemática se centra fundamentalmente en estudiar y crear patrones en los números, en las formas, en el movimiento, etc. pudiendo ser estos patrones reales o imaginarios, visuales o mentales, estáticos o dinámicos, cualitativos o cuantitativos (Devlin, 1994; Steen, 1988). Sin embargo, Stewart (1995) recuerda que en realidad las figuras matemáticas se reducen a números, que es el modo como las computadoras manejan los gráficos.

La utilización de los patrones en la enseñanza y, más concretamente, en la enseñanza de las matemáticas es de suma importancia, toda vez que los patrones y regularidades aparecen en el mundo que nos rodea así como en el mundo de las matemáticas.

Los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Evaluación Matemática (N.C.T.M., 1991) propugnan el estudio de patrones y relaciones ya que ayudan a los alumnos a desarrollar sus capacidades matemáticas y favorecen su apreciación de la belleza de las matemáticas. El trabajo con patrones en los primeros niveles educativos se puede desarrollar de muy diversos modos, como es reconociendo colecciones que presentan alguna semejanza o bien reconociendo y ordenando secuencias de objetos de acuerdo con una regularidad.

En algunos casos es necesario un prolongado y tedioso trabajo de cálculo para poder detectar ciertos patrones en una tabla numérica, como ocurre en el Triángulo de Pascal. El uso de las nuevas tecnologías facilita el descubrimiento y la creación de patrones de manera efectiva y rápida, siendo aconsejable en el ámbito escolar la utilización de calculadoras y computadoras de manera imaginativa para explorar, descubrir y desarrollar conceptos matemáticos (N.C.T.M., 1991).

Tampoco debemos olvidar el efecto beneficioso que el uso de patrones aporta en el desarrollo de la creatividad y la expresión verbal ya que reconocer y obtener patrones geométricos favorece el desarrollo de recursos artísticos en los niños y, a medida que comentan las observaciones que han efectuado, mejora su capacidad para comunicar ideas matemáticas (Ajose, 1991-a, p. 43).

La utilidad del estudio de patrones para trabajos de innovación curricular fue puesta de manifiesto en las investigaciones de Castro (1994) y Ortiz (1997), realizadas en el grupo de Pensamiento Numérico.

El estudio de patrones también desempeña un papel importante en este trabajo ya que es primordial el reconocimiento de patrones numéricos en la Tabla-100 para la realización diversas actividades, especialmente en las tareas que llamamos de contexto destinadas a crear un ambiente de trabajo para relacionar Aritmética y Geometría, de las que nos ocupamos en el capítulo 4.

2.7 Visualización

Dado que nuestra investigación se ocupa de manera general sobre las relaciones entre aritmética y geometría, este trabajo constituye un campo de interés para la visualización y podemos hacer algunas consideraciones desde esta perspectiva.

La noción de visualización o pensamiento visual está fuertemente ligada a la capacidad de formación de imágenes mentales. Las personas recibimos información a través de los sentidos, especialmente el auditivo y el visual. Los medios utilizados con mayor frecuencia en la emisión, transmisión y recepción de conocimiento matemático son los enunciados verbales y las representaciones gráficas o simbólicas. Hablamos de visualización cuando en una representación predominan las imágenes y componentes gráficos (Castro y Castro, 1997, p. 95).

Diversos psicólogos y educadores matemáticos se han interesado en el estudio de la visualización en relación con las matemáticas y el proceso de su aprendizaje. En general, hay consenso entre investigadores y especialistas en que el desarrollo de las capacidades que caracterizan el pensamiento visual proporciona a los alumnos nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas. Castro (1994) realiza una revisión sobre el estado de la cuestión acerca de la visualización en la enseñanza de las matemáticas y en las investigaciones, y sostiene que

> "la visualización es importante para la educación puesto que la comprensión alcanzada mediante elementos visuales y simbólicos se complementan, por ello mismo el aprendizaje debe lograrse integrando información que utilice ambos tipos de códigos" (p. 41).

Veamos algunas de estas aportaciones. Lean y Clements (1981) distinguen tres categorías de individuos respecto a su dimensión visual-verbal:

* Los *visualizadores*, que usan habitualmente imágenes visuales en la resolución de problemas.

* Los *verbalizadores*, en los que predominan el uso de códigos verbales en lugar de imágenes o notaciones pictóricas.

* Los que no tienen una preferencia clara sobre una u otra forma de procesar.

Algunas investigaciones citadas constatan que la mayor parte de los escolares pertenecen al grupo de los verbalizadores y muy pocos al grupo de los visualizadores. Eisemberg y Dreyfus (1986, p.153) destacan el hecho de que los estudiantes tienden a inclinarse por un método analítico más que visual en el proceso de información matemática.

Los trabajos de Mandy, Dik, Monk, Swan y Vinner, referenciados por Zimmerman y Cuningham (1991), concluyen que los alumnos tienen una alta tendencia a pensar algebraicamente más que visualmente, incluso cuando se les fuerza a utilizar un proceso visual. Zimmerman explica este hecho aludiendo a razones tales como: el proceso visual es más difícil que el analítico, lo visual se considera menos sólido para la enseñanza o lo visual no es matemático, según algunos matemáticos, profesores de matemáticas e incluso alumnos.

Paivio (citado en Castro, 1994) sostiene que los sistemas analítico-verbal y verbal-simbólico están presentes en toda tarea de pensamiento, pero la proporción de uno y otro sistema varía con las tareas y los individuos. Este autor señala también algunas variables que influyen en el uso de imágenes visuales por un sujeto al realizar una determinada tarea, tales como: las características de la tarea, el grado de instrucción en el uso de imágenes visuales y las características de los sujetos. Siguiendo el planteamiento de Paivio, los escolares se pueden distinguir según su habilidad, preferencia y necesidad para usar imágenes visuales en el aprendizaje y resolución de problemas matemáticos.

Zimmerman y Cuningham (1991) utilizan el término "*pensamiento visual*" para referirse a aquellos aspectos del pensamiento matemático que se pueden expresar por medio de imágenes visuales, y lo definen como

> "el proceso de formar imágenes, ya sea mentalmente o dibujadas en un soporte material y usar tales imágenes de forma efectiva para descubrir y entender las matemáticas" (p. 127).

Estos autores sostienen que al mejorar la educación visual en matemáticas aumenta la intuición y se proporciona al sujeto una mayor capacidad de entendimiento. Distinguen cinco categorías en la visualización que consideran objetivos de aprendizaje:

- Objetivos básicos.
- Objetivos funcionales.
- Objetivos generales.
- Objetivos relacionados específicamente con el cálculo.
- Objetivos de alto nivel.

Destacamos algunos de estos objetivos relacionados con nuestro estudio.

Entre los objetivos básicos se encuentran: entender el álgebra y la geometría como lenguajes alternativos y complementarios para expresar las mismas ideas matemáticas; entender la información matemática implícita en una representación gráfica y extraer información de un diagrama.

Como objetivos funcionales se contemplan la capacidad para identificar los conceptos que están representados en un diagrama y usarlos para realizar demostraciones y resolver problemas.

Los objetivos generales son aspectos de la visualización que tienen amplia aplicación en distintas áreas de las matemáticas. Señalamos los siguientes: reconocer y explicar simetrías, entender y reconocer patrones y entender transformaciones geométricas.

Otte (1986) señala que los conceptos teóricos no son cosas que se puedan comunicar como un bloque y que el pensamiento teórico exige visualizaciones además de reglas, a fin de poder imaginar las formas de las relaciones y los objetos. Asimismo afirma que en la matemática escolar ***hay dos sistemas de representación***, el ***aritmético*** (con los números naturales como punto absoluto de referencia) y el ***geométrico*** (para la visualización en el plano y el espacio), y ambos son esenciales. Para él, el mundo visual-geométrico de representación contiene dos aspectos que llama algorítmico y visualización ideográfica que se corresponden en la terminología lingüística con comprensión literal y metafórica.

Para Ben-Chaim (1989) la visualización tiene especial importancia en los procesos de razonamiento inductivo y deductivo. Determinar una conjetura a partir de un patrón y generalizarla es una componente propia del razonamiento inductivo.

En nuestro trabajo tratamos de poner en juego procesos de razonamiento inductivo-deductivo en el sentido de Ben-Chaim. Para ello proponemos a los estudiantes tareas para que identifiquen y enuncien propiedades matemáticas. La visualización está presente en nuestro estudio cuando proponemos a los estudiantes que coloreen números de la Tabla-100 utilizando criterios de divisibilidad, para:

* Encontrar regularidades y patrones numéricos.

* Realizar dibujos y figuras uniendo puntos del geoplano para averiguar relaciones numéricas en dichos polígonos.

* Efectuar y estudiar representaciones simbólicas y gráficas de los operadores aditivos y establecer conexiones entre ellas.

* Someter a las representaciones gráficas anteriores a algunas isometrías planas sencillas y estudiar el efecto visual-geométrico y el efecto aritmético de dichas transformaciones.

2.8 Tablas Numéricas

Las tablas de datos son "utensilios" de uso generalizado. Los matemáticos, físicos, químicos, economistas, ingenieros, etc. utilizan las tablas numéricas como herramienta en sus trabajos. Echeverría (1994, p. 1) señala la escasa atención que los filósofos de la ciencia han prestado a estos instrumentos científicos a pesar de que sus funciones mnemónicas, computacionales y heurísticas han sido extremadamente importantes, citando como ejemplo la tabla periódica de los elementos químicos de Mendeleiev y analizando en profundidad el caso de las tablas de logaritmos.

Los libros escolares utilizan a menudo representaciones simbólicas y gráficas que complementan a las expresiones verbales escritas. Entre otras representaciones figuran las tablas numéricas como material didáctico con el que se abordan conceptos y propiedades aritméticas. Litwiller y Duncan (1980, 1986) proponen actividades variadas sobre tablas numéricas como la tabla de sumar, la tabla de restar, la tabla de multiplicar y la Tabla-100. También utilizan las tablas de los calendarios, que pueden ser consideradas como una versión reducida de Tabla-100 de 7 columnas y que finalizan en el número 31.

Se han usado también otras tablas, como el triángulo de Pascal, con el fin de obtener y estudiar patrones numéricos, útiles para descubrir y generalizar propiedades matemáticas, que en muchos casos cuenta con ayuda de calculadoras gráficas y computadoras (Lund, 1979; Long, 1983; Eng y Casey, 1983; Wolfram, 1984; Seymour, 1986).

Aunque efectuamos una selección de actividades en torno a las tablas numéricas anteriores, el objeto central de nuestra investigación es la Tabla-100.

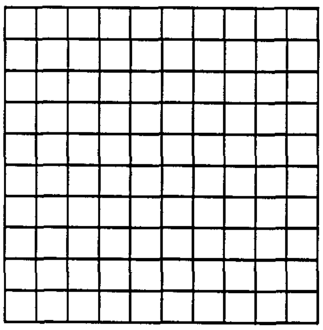
Bajo el término *configuraciones gráficas de datos*, Sanz (1994) estudia en libros escolares de diversas editoriales representaciones que son mezcla de expresión verbal, gráfica y simbólica. Estas configuraciones gráficas de datos se caracterizan por integrar formas expresivas correspondientes a representaciones visuales que aparecen, en general, como elementos gráficos y tienen una lectura visual además de su posible lectura verbal.

Entre las configuraciones gráficas de datos citadas por Sanz (series, gráficas, tablas de datos, tablas de operaciones, recuadros, cuadrados mágicos, rejillas, etc.) destacamos algunas de ellas, que están relacionadas con la presente investigación:

- *Cuadrícula:* disposición en filas y columnas de cuadrados iguales.

- *Cuadro numérico básico:* cuadrícula en cuyas celdas se sitúan los números 0 al 99.

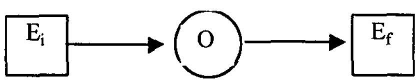
- *Máquina de calcular:* esquemas con recuadros en los que se sitúan números y símbolos de operaciones aritméticas (Figura II-2).



Cuadrícula

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Cuadro numérico básico



E_I = estado incial
O = operador
E_f = estado final

Máquina de calcular

Figura 2.1

La *cuadrícula* es un componente de la Tabla-100 y constituye, junto con el geoplano 10x10, su componente geométrica. Los elementos de la cuadrícula son las celdillas, con las que se construirán las representaciones geométricas de los operadores aditivos, que visualizarán esta noción, y que denominamos *cadenas*.

El *cuadro numérico básico* es la parte numérica de la Tabla-100, con la salvedad de que en nuestra investigación utilizamos los números 1 a 100, en lugar del 0 a 99.

Las *máquinas de calcular* son representaciones de operadores. Existen diversos modelos, y algunas se utilizan para comprobar propiedades aritméticas. En el presente trabajo estudiamos las *cadenas* como representaciones geométricas de los operadores aditivos, y que pueden considerarse como *máquinas de sumar y restar*.

Es objeto de nuestro trabajo integrar en el currículo de la asignatura de matemáticas de los estudiantes del tercer curso de la diplomatura de Magisterio una serie de tareas con patrones numéricos en la Tabla-100, bajo el epígrafe de "Números y Geometría", que permita crear un contexto que favorezca el trabajo sobre las relaciones entre aritmética y geometría.

La Tabla-100, considerada como objeto de uso escolar, no presenta dificultad para su aceptación. Pero al realizar representaciones sobre la tabla e intepretarlas en términos matemáticos resulta necesario un estudio más detallado de sus componentes, ya que no sólo se manejan números sino que éstos están vinculados a los puntos de un geoplano 10x10 y, además, se realizan transformaciones geométricas sobre la cuadrícula. Esta formalización y estudio matemático de la Tabla-100 se especifica en el capítulo 6.

2.9 Estructuras aditivas y la Tabla-100

Buena parte de nuestro trabajo está en relación con la estructura aditiva en las dos vertientes, matemática y didáctica.

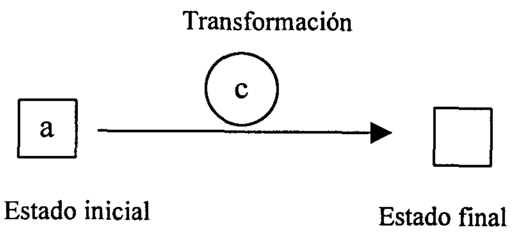
1. Desde un punto de vista matemático la estructura aritmética que predomina en la Tabla-100 es la estructura aditiva, ya que cada número de la tabla se puede relacionar con los que le rodean mediante la suma y la resta de unidades y decenas. En nuestra investigación, nos ocupamos de las representaciones geométricas de operadores *aditivos* en la Tabla-100.

2. Desde un enfoque didáctico, la estructura aditiva ha sido objeto de estudio por numerosos autores, principalmente a través del análisis de los *problemas aritméticos verbales (PAEV) de estructura aditiva*, que son aquellos problemas cuya resolución conlleva solamente sumas y restas; su estudio quedó separado de los problemas de estructura multiplicativa en los inicios de los años ochenta y constituye un campo de investigación con entidad propia.

El currículo de matemáticas presta especial importancia a los problemas aritméticos verbales, en general, como medio para facilitar al alumno conexiones entre la Aritmética y aplicaciones del mundo real. En particular también se ocupa de la estructura aditiva ya que, como afirma Vergnaud (1982), en ella subyace una gran parte de las matemáticas que se desarrolla a lo largo de un extenso periodo de tiempo.

Castro, Rico y Gil (1992), en una revisión de investigaciones previas, analizan cuatro enfoques de investigación sobre problemas aritméticos de enunciado verbal. También la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática dedicó en 1997 un seminario a debatir los enfoques de investigación sobre problemas aritméticos aditivos (Rico y Sierra, 1998)

Una de las líneas de investigación conocidas sobre problemas aditivos es la denominada *cálculo relacional,* cuyo impulsor es Gerard Vergnaud (Vergnaud y Duran, 1976, p. 128). Vergnaud realiza una clasificación exhaustiva, englobando tipos de problemas que consideran clases más amplias de números como los números enteros, abarcando de esta forma un campo conceptual más amplio. En su marco teórico es destacable la distinción que hace entre *estado* (medida) y *operador* (transformación), utilizando para ello diversos símbolos con los que representa las relaciones básicas en el enunciado de un problema. Así, para indicar un número natural emplea un recuadro, para representar un número dirigido emplea un círculo, y para una transformación emplea una flecha (Figura 2.2).



$\boxed{a}$ = número natural

$\text{(}\pm a\text{)}$ = número relativo

+ = adición de número natural y número natural

+ = adición de un número natural y un número dirigido

+ = adición de números dirigidos

Figura 2.2

Vergnaud distingue tres tipos de signos para la adición, que utiliza para distinguir sumas según el tipo de números.

La tabla 2.2 recoge esquemáticamente algunas categorías de problemas, que podemos relacionar con nuestra investigación:

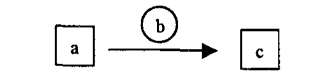
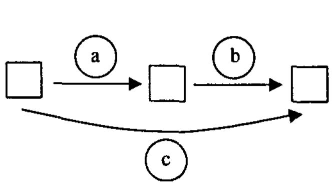
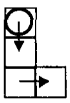
Categoría	Descripción	Diagrama	Ejemplo	Ecuación
2ª	Estado-Transformación-Estado (ETE)		Tenía 10 canicas y he perdido 4, ahora tengo 6.	10+(-4)=13
4ª	Transformación-Transformación-Transformación (TTT)		Al jugar una partida gané 5 canicas. En la siguiente partida pierdo 3. En total he ganado 2.	(+5)**+** (-3)=(+2)

Tabla 2.2

En el presente trabajo las cadenas, que son figuras geométricas del tipo:

 , pueden jugar el papel de las transformaciones, en el sentido de Vergnaud, ya que son representaciones de operadores aditivos en la Tabla-100.

Los estados son los números de la tabla. De esta forma se amplían las situaciones problemáticas y las categorías en las que intervienen transformaciones y números dirigidos.

2.10 Formación Inicial de Profesores e Innovación Curricular

A comienzos de este capítulo hemos señalado que el segundo foco de atención de este estudio está en la Formación Inicial de Profesores y la Innovación Curricular. Nuestro estudio empírico lo hemos llevado a cabo con un grupo de profesores de primaria en formación de tercer año de la Diplomatura de Magisterio (Plan 1971; Especialidad de Ciencias Físico Naturales), como investigación en el aula orientada por una propuesta de innovación curricular.

Planteamos unas tareas a realizar por los estudiantes en el ámbito de las relaciones entre Aritmética y Geometría, orientadas como una investigación matemática en clase en el sentido dado por Ponte et al. (1997). En términos generales esto significa que los alumnos, a partir de tareas matemáticas diseñadas y propuestas por el profesor, desarrollan actividades indagatorias con el fin de descubrir y enunciar regularidades, elaboran procesos, utilizan estrategias para plantear conjeturas, etc. Ponte et al. (1997) considera que este tipo de investigación matemática tiene una clara fundamentación en las nuevas perspectivas constructivistas de la filosofía de las matemáticas (Davis and Hersh, 1980; Ernest, 1991; Lakatos, 1976; Tymoczkco, 1986). En general, los educadores están de acuerdo en que el aprendizaje matemático se logra, básicamente, haciendo matemáticas. Y *hacer matemáticas es, principalmente, hacer investigaciones matemáticas*. (Poincaré, 1908/1974/1987, citado en Abrantes et al., 1996).

Para realizar investigaciones matemáticas en clase es necesario plantear preguntas motivadoras y crear situaciones en las que el estudiante pueda descubrir, enunciar y demostrar propiedades. La tarea del descubrimiento matemático también contribuye a incrementar la autoestima del alumno y pone de manifiesto el carácter de proceso que tiene el quehacer matemático.

De acuerdo con Oliveira, sostenemos que, desde un punto de vista educativo, la investigación matemática en clase:

(a) estimula el tipo de implicación que se requiere del estudiante para el aprendizaje significativo.

(b) proporciona múltiples puntos de acceso a estudiantes de distintos niveles o capacidades.

(c) estimula un modo holístico de pensamiento, relacionando muchos tópicos, condición básica para el razonamiento matemático significativo.

(d) es indispensable para proporcionar una visión completa de las matemáticas, ya que es parte esencial de la actividad matemática (Oliveira et al. 1997, citado en Ponte et al., 1997).

Al igual que ocurre con otras tareas utilizadas en educación matemática, como la *resolución de problemas, la modelización y los proyectos*, las investigaciones matemáticas requieren del estudiante alguna dosis de creatividad y ponen al alumno frente a una actividad parecida a la que desarrolla el matemático.

Existen trabajos sobre investigación matemática en clase que se ocupan de aspectos de Formación de Profesores, como son la forma de presentar las actividades a los alumnos y el apoyo que hay que ofrecerles, el modo de promover las discusiones en clase, la vía para evaluar a los estudiantes y las competencias que se requieren del profesor para dirigir estas actividades (Ponte et al., 1997).

Mason (1991) destaca algunos rasgos propios de un profesor que realice este tipo de investigación en su clase:

a) tener visión creativa de las matemáticas, no por medio de definiciones memorísticas y obtención de respuestas correctas, sino a través de cuestionar, pensar, corregir y confirmar.

b) tener una buena aptitud para llevar a cabo investigaciones matemáticas, sintiéndose cómodo al enfrentarse a situaciones complejas e impredecibles.

c) valorar un tipo distinto de objetivos curriculares, como un completo abanico de competencias, más allá del dominio de la computación y hechos matemáticos básicos.

d) desarrollar su creatividad curricular para concebir y adaptar tareas adecuadas para los estudiantes.

e) asumir una perspectiva sobre la enseñanza de los estudiantes basada en la actividad, interacción y reflexión.

f) dirigir una clase con una dinámica distinta de la usual, sin guiar demasiado a los estudiantes ni prescindir por completo de dicha guía.

En nuestro trabajo centramos nuestra atención en actividades de investigación matemática en el aula que contextualizamos en la Tabla-100, con el fin de que los alumnos reflexionen sobre cuestiones que probablemente deban abordar en su quehacer profesional futuro.

Para llevar a cabo dicha experimentación elegimos como método de trabajo la Investigación en el aula, forma de trabajo que permite encajar el hecho de que el profesor del grupo natural de estudiantes sea también el investigador, como es nuestro caso.

2.11 Estudio matemático

Durante la realización de la parte experimental de nuestra investigación surge la necesidad de realizar un estudio teórico y formal sobre la Tabla-100 y las cadenas como representaciones geométricas de operadores aditivos. Utilizamos herramientas básicas de las matemáticas para:

1. Formalizar matemáticamente la Tabla-100, considerando su estructura aditiva y los tres componentes básicos siguientes: el conjunto de los números 1 a 100, el geoplano 10x10 y la cuadrícula.

2. Construir las cadenas libres en la Tabla-100 como clases de equivalencia de cadenas fijas, que son figuras geométricas orientadas, formadas mediante la concatenación celdillas de la cuadrícula con un lado común.

3. Asociar una expresión aritmética a cada cadena (fija y libre), así como una expresión polinómica cuya expresión en base 10 es el operador que la cadena representa.

4. Resolver los problemas planteados en los bordes de la Tabla-100 en relación con las cadenas.

5. Realizar una extensión de la Tabla-100 a la tabla T_Z o disposición tabular de los números en 10 columnas, y estudiar su estructura algebraica.

6. Dotar al conjunto de las cadenas libres de una ley de composición interna y constatar su estructura de grupo abeliano.

7. Estudiar el efecto geométrico y aritmético que producen algunas isometrías planas sobre las cadenas y sus operadores aditivos asociados.

8. Realizar composiciones de isometrías y constatar la estructura de grupo del conjunto de dichas isometrías, así como especificar los subgrupos obtenidos.

9. Extender los estudios anteriores a la Tabla-100 de k columnas, utilizando para ello los sistemas de numeración en base k.

10. Introducir en la Tabla-100 la relación de congruencia y estudiar los patrones rectilíneos que se producen al cambiar el módulo de congruencia y el número de columnas de la tabla, definiendo rectas en la Tabla-100 y utilizando para ello la idea de cadena como pendiente de una recta.

11. Establecer relaciones entre los patrones rectilíneos, las cadenas y los operadores aditivos.

12. Expresar en términos de aritmética modular las regularidades visuales encontradas en la Tabla100.

13. Obtener características de estos patrones rectilíneos (pendientes, tramos de las rectas, etc.) por medio de procedimientos realizados con el programa informático Maple V.

Estos apartados se tratarán con detalle en el capítulo 6, dedicado al estudio teórico y formal de la Tabla-100 y de los operadores aditivos en dicha tabla.

2.12 Revisión de antecedentes y estado de la cuestión

En una primera búsqueda de bibliografía sobre patrones en tablas numéricas incluimos otras tablas además de la Tabla-100, tales como la tabla de sumar, restar, multiplicar, calendarios, Triángulo de Pascal, etc. Aunque pusimos especial interés en la búsqueda de artículos de investigación sobre el tema, no encontramos antecedentes sobre él, salvo algunos artículos que lo abordan tangencialmente. En cambio si localizamos diversas publicaciones en revistas de profesores que ofrecen actividades escolares para reconocer y utilizar patrones numéricos con el fin de descubrir y asimilar diversas propiedades aritméticas.

Para efectuar la búsqueda de antecedentes sobre el área problemática de nuestro trabajo comenzamos con los fondos bibliográficos de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Las revistas consultadas, hasta el curso 95/96 en que se empezó el estudio empírico con estudiantes, fueron:

- Arithmetic Teacher (vol. 27: 1979-80; 1984; vol 35: 1987/88; y 1989 a 1994)
- Bulletin de L'APMEP (1977 a 1985)
- Educational Studies in Mathematics (1993 a 1995)
- Enseñanza de las ciencias (1988 a 1995)
- Epsilon (1985 a 1995)
- Historia Matemática (1986 a 1995)
- Investigación y Ciencia (1994 y 95)
- Journal for Reserarch in Mathematic Education (1970 a 1995)
- Journal of Mathematical Behaviour (1985 a 1995)
- Journal of Mathematical Psycology (1987)
- L'Enseignement Mathématique (1988 a 1995)
- Le Scienze la Matematica e il loro insegnamento (1990 a 1993)
- Math Ecole (1987 a 1995)
- Mathematic Teacher (1955 a 1993)
- Mathematic Teaching (1985 a 1995 (números 150, 151 y 152))
- Mathematica e Pedagogía (Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas) 1956-57-58 a 1963; 1970 a 1974.
- Mathematical Spectrum (1990 a 1994)

- Mathematics and Computer Education (1988 a 1995)
- Mathematics in the School (1987 a 1995)
- Mathématique et Pédagogie (1976 a 1995)
- Micro Math (1987 a 1995)
- Parábola (1988 a 1993)
- Petit c (1988 a 1994)
- Plot (1988 a 1994)
- Recherches en Didactique Mathématiques (1981 a 1986)
- School, Science and Mathematics (1991 a 1995)
- Suma (1988 a 1995)
- Teaching Children Mathematics (antes Arithmetic Teacher: 1994 y 1995)
- The Australian Mathematics Teacher (1988 a 1993)
- The Mathematical Gazette (1986 a Marzo de 1995)
- Uno (1994 y 1995)

Para tratar de completar la lista de artículos encontrados se efectuaron dos búsquedas: en la base de datos ERIC en 1995 (Cd-Rom de la Biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Educación) y en 1999 a través de Internet.

Los términos clave de búsqueda y los resultados fueron los siguientes:

1. Pattern recognition (Abstract): 157 items.
2. Pattern recognition (Abstract) and Mathematics Education (keywords): 24 items.
3. Number pattern (Abstract) and Mathematics Education (keywords): 47 items.
4. Hundred chart (Abstract) and Mathematics Education (keywords): 3 items.

5. Visualization (Abstract) and Number Pattern (keywords): 6 items.
6. Numerical table (Abstract) and Mathematics education (keywords): 4 items.
7. Geometry and Arithmetic (Abstract) and Mathematics Education (keywords): 125 items.
8. Patterns and Numerical and Mathematics Education (keywords): 65 items.

2.12.1 Balance de la búsqueda

Después de seleccionar y clasificar esta información, obtuvimos en total 170 items que consideramos de interés para nuestro trabajo, de los cuales 79 se refieren al Triángulo de Pascal, 40 a las tablas de sumar, restar y multiplicar y 30 corresponden a actividades en torno a la Tabla-100.

Recogemos en la tabla 2.3 un resumen de la información sobre la Tabla-100, ordenada por orden cronológico, en la que destacamos, además de los datos identificativos (autor y fecha), el tipo de actividades que se plantean, los conceptos aritméticos y algebraicos que implican dichas actividades así como los elementos de tipo geométrico que están involucradas en las mismas.

Datos identificativos	Actividades	Conceptos aritméticos y algebraicos	Conceptos geométricos
Swallow, K. P. (1955)	Construcción del factorgrama (cilindro numérico con los números primos menores que N). T_{100} de 6 columnas	Divisibilidad	Cilindro, hélices
Roseman, L. (1978)	Colorear la T_{100} con criterios de divisibilidad.	Operaciones aritméticas, divisibilidad	
Litwiller D. & Duncan, R. (1978)	Descubrir y verificar propiedades aritméticas (patrones).	Productos y diferencias de números en los vértices de cuadrados Generalizaciones y demostraciones	Cuadrados
Jacobson, M.H. y Tabler, M.B. (1980)	Encontrar patrones numéricos en el calendario.	Contar, divisibilidad, operaciones aditivas, cálculo de medias.	
Litwiller D. & Duncan, R. (1980)	Encontrar regularidades y patrones numéricos en T_{100}, tablas de sumar, restar y multiplicar.	Operaciones y relaciones entre números de las filas, columnas, diagonales, figuras geométricas. Razones y proporciones. Divisibilidad. Sucesiones. Generalizaciones	Cuadrados Paralelogramos Diagonales Vértices Número central
Eperson, D.B. (1981)	Utilizar patrones en T_{100} de 6 columnas y extensiones de ella a más de 100 números para encontrar números primos.	Divisibilidad	
Robold, A. (1982)	Analizar relaciones numéricas por medio de coloración de patrones.	Divisibilidad, productos,	
Horak, V. y Horak, W. (1982)	Asociar números a las celdillas de T_{100} Encontrar patrones numéricos (en escalera, en fila, etc.) y regularidades. Localizar los múltiplos de un número. Tareas en T_{100} y tablas de sumar y multiplicar	Numeración, paridad de números, divisibilidad, operaciones aditivas y multiplicativas. Comprobar igualdades	
Hatch, G. (1984)	Encontrar y completar patrones numéricos. T_{100} (varias columnas), tabla de multiplicar, calendarios.	Operaciones aditivas con números en tablas.	Cuadrados de números.
Roseman, L. (1985)	Colorear T_{100} con criterios de divisibilidad.	Operaciones aritméticas, divisibilidad	
Easterday, K. y Clothiaux, C. (1985)	Utilizar los desplazamientos por T_{100} para realizar multiplicaciones.	Multiplicación.	
Litwiller D. & Duncan, R. (1986)	Encontrar, explorar y generalizar patrones numéricos.	Cocientes entre números que forman un polígono.	Cuadrado, paralelogramo, triángulo, vértices.
Reys, R y Reys, B. (1986)	Actividades de cálculo mental en T_{100}	Contar y visualizar números, en T_{100}	

Datos identificativos	Actividades	Conceptos aritméticos y algebraicos	Conceptos geométricos
Vogel Boyd, B. (1987)	Reconocer patrones numéricos	Operaciones aditivas, divisibilidad.	
Cook, M. (1988)	Colorear números pares e impares y encontrar frecuencias.	Contar, calcular medias y porcentajes.	
Howden, H. (1989-a)	Reconocer patrones numéricos	Divisibilidad, productos	
Howden, H. (1989-b)	Utilizar los patrones numéricos en T_{100} y T_{100} de 9 columnas para introducir: gráficas de funciones, ecuaciones lineales, factorización, pendiente de una recta, etc.	Divisibilidad, funciones lineales, numeración.	
Cook, M. (1989)	Identificar números en T_{100} y familiarizarse con términos tales como: número primo, múltiplo, cuadrado, el anterior, el siguiente, mayor que, ...	Operaciones aditivas, divisibilidad.	Figuras que se obtienen sombreando celdillas en T_{100}
Povey, H. (1990)	Destacar múltiplos de un número con programas de ordenador. T_{100} de k columnas, tablas con números en espiral, tablas triangulares, poligonales, etc.	Divisibilidad	Figuras poligonales con números.
Feinberg, M. (1990)	Colorear números pares e impares. Contar de n e n y encontrar patrones.Utilizar patrones para la suma y resta de números.	Operaciones aditivas en T_{100} Completar secuencias numéricas.	
Eperson, D.B. (1991)	Encontrar patrones en T_{100} con los múltiplos de un número	Divisibilidad.	Simetría de figuras que se obtienen sombreando celdillas en T_{100} de k columnas.
Smith, J. (1991)	Encontrar propiedades con los números dentro de una figura geométrica en T_{100} que se conserven al trasladar dicha figura por la tabla.	Comprobar y generalizar propiedades aritmética y algebraicas.	Figuras geométricas planas realizadas con cuadrados en T_{100}
Ajose, S. (1991-a)	Reconocer y describir patrones numéricos en T_{100}	Operaciones aditivas y cálculo de medias aritméticas con números de T_{100} Completar series numéricas.	Cuadrados con vértices en los números de T_{100}
Ajose, S. (1991-b)	Reconocer y describir patrones numéricos en T_{100} y T_Z (extensión a Z). Usar variables para expresar relaciones matemáticas.	Operaciones con los números de T_{100} formando letras. Verificar igualdades.	Figuras en forma de letras con los números de T_{100}
French, D. (1992)	Encontrar números figurados en T_{100}	Comprobar igualdades entre expresiones de números figurados.	

Datos identificativos	Actividades	Conceptos aritméticos y algebraicos	Conceptos geométricos
Vertes, B. (1992)	Encontrar patrones geométricos entre los múltiplos de un número. Calcular las áreas de los paralelogramos que forman los múltiplos de 7	Divisibilidad	Medida de áreas Estrategias de cálculo de medida
Burn, B. (1993)	Demostrar analíticamente el valor de las áreas de los paralelogramos que se forman uniendo múltiplos de 7.	Divisibilidad, ecuaciones de rectas y sistemas de coordenadas.	Cálculo de áreas de paralelogramos.
Tapson, F (1995)	Comprobar propiedades aritméticas con los números que forman un cuadrado en T_{100}	Operaciones aritméticas	Cuadrado
Thornton, C. et al.(1995)	Utilizar T_{100} para realizar cálculos aditivos sencillos. Identificar aritméticamente los desplazamientos sobre T_{100}	Operaciones de sumar y restar.	
Ponte, J. P. (1997)	Encontrar relaciones entre los números de T_{100} de 4 columnas.	Operaciones aritméticas, divisibilidad, potenciación.	Polígonos cuyos vértices están en los números de la tabla.

Tabla 2.3

El contenido de estas publicaciones ha sido útil a la hora de organizar tareas para crear un clima de trabajo en torno a la Tabla-100 que favorezca una visión de la aritmética en conexión con la geometría, considerando aspectos aritméticos conocidos desde la perspectiva geométrica que proporciona la tabla vista como plano discreto.

Constatamos el escaso número de trabajos de investigación encontrados en nuestras búsquedas para poner de manifiesto o estudiar el grado de comprensión, por parte de estudiantes de cualquier edad sobre conceptos aritméticos al realizar tareas en la Tabla-100. Los items hallados son, en su mayoría, artículos sobre experiencias en el aula, con aportación de fichas de trabajo que contienen actividades escolares. Por otra parte, dichas actividades están publicadas en revistas británicas y americanas, principalmente, no habiéndose encontrado actividades parecidas en publicaciones de ámbito español.

Las tablas Tabla-100 sobre las que se desarrollan las actividades están constituidas por los números 1 a 100, si bien en algunos casos se trabaja con tablas que comienzan en 0 y termina en 99. En la gran mayoría de los casos el número de columnas de las tablas es de 10, salvo cuando se plantean actividades sobre calendarios (7 columnas) (Jacobson, 1980) o cuando se trata de dar una caracterización de los números primos en el que las tablas tienen 4 ó 6 columnas (Eperson, 1981). Asimismo Howden (1989-b) utiliza tablas de 9 columnas y Ponte et al. (1997) realiza su estudio sobre una tabla de 4 columnas.

Todos los autores, implícita o explícitamente, parten del supuesto de que la realización de actividades de reconocimiento y estudio de patrones numéricos es útil para mejorar la comprensión de conceptos aritméticos, y consideran, como Litwiller y Duncan (1980), que las matemáticas deben ser entendidas como el estudio de los patrones, siendo las generalizaciones consecuencia de encontrar y establecer dichos patrones.

2.12.2 Trabajos destacables

Resaltamos brevemente aquellos trabajos que, por sus características, han tenido mayor influencia en nuestra investigación:

Primero. Litwiller y Duncan (1980) publican un libro, editado por la N.C.T.M., con una selección de actividades en el seno de las tablas de sumar, restar, multiplicar y la Tabla-100 con el fin de descubrir patrones numéricos.

Las tareas propuestas están dirigidas a estudiantes de secundaria, concebidas como complemento de las actividades regulares del programa, y plantean la posibilidad de demostraciones por parte de los alumnos cuando dominen las destrezas algebraicas suficientes. Proponen el uso de la calculadora como herramienta de apoyo para realizar los cálculos numéricos y proporcionan las tablas de sumar, restar, multiplicar y Tabla-100 generalizadas con el fin de abordar pruebas de propiedades. Algunas de las actividades propuestas en este libro las utilizamos para realizar las experiencias preliminares con estudiantes.

Segundo. En un sentido parecido, aunque más amplio, Ajose (1991) propone tareas para alumnos de primaria, con extensión de la tabla a números negativos y variando el número de columnas. Además, contempla la disposición de los números de la tabla en forma espiral. Considera números de la tabla que forman ciertas figuras como las letras H, N, X, O, etc. y elabora actividades aritméticas con ellas.

Tercero. Vertes (1992) presenta que al marcar los múltiplos de 7 en la Tabla100 se forman paralelogramos que tienen 7 unidades cuadradas de área; utiliza este hecho para analizar estrategias de cálculo de dichas áreas por los escolares.

Cuarto. Burn (1993) retoma el artículo de Vertes y desarrolla una demostración analítica de la propiedad anterior, haciendo para ello una extensión de la Tabla-100 al conjunto Z de los enteros, eligiendo un sistema de coordenadas conveniente.

Quinto. Thornton, Jones y Neal (1995) utilizan la Tabla-100 como herramienta de cálculo para realizar sumas sencillas, aprovechando para ello el significado aritmético que tienen los distintos desplazamientos que se pueden efectuar en la tabla: hacia abajo/ arriba (sumar/ restar decenas) y hacia la derecha/ izquierda (sumar/ restar unidades).

Sexto. La visualización de patrones numéricos en la Tabla-100, como son los patrones en columna o en diagonal, puede suponer una ayuda a los alumnos para realizar sumas y substracciones sencillas con números. Un ejemplo de las actividades que plantea Feinberg (1990) es la de reconocer la diagonal descrita por *"bajar un lugar y desplazarse a la izquierda un lugar"* como el patrón correspondiente a *"sumar 9"*. Este patrón lo aplica posteriormente en la obtención de sumas y restas de cualquier número con el 9.

Séptimo. Reys y Reys (1986) plantean actividades de cálculo mental en la Tabla-100 (comenzando en 0 y terminando en 99) en un sentido parecido al anterior, para reconocer propiedades del tipo *"las unidades dentro de una misma columna son iguales"*, o situar los números en relación con los que le rodean, lo que le lleva a realizar mentalmente desplazamientos por la tabla a partir de un número dado.

Octavo. Una de las mayores utilidades de la Tabla-100, a nuestro juicio, es la de plantear técnicas de cálculo diferentes a los algoritmos usuales aprovechando la estructura plana de dicha tabla (Easterday y Clothiaux, 1985). En este sentido nos parece especialmente útil la coloración de la Tabla-100 con criterios de divisibilidad, mediante los cuales los números que hay en ella se distinguen con un distintivo coloreado según sean múltiplos de un determinado número. Con la tabla coloreada que propone Roseman (1978 y 1985) se pide a los estudiantes que identifiquen números primos, que encuentren factores comunes en distintos números y que efectúen multiplicaciones y divisiones apoyándose en los colores asignados a los números. De esta forma aparece de manera natural la multiplicación como sumas de sumandos iguales, y la división como restas de substraendos iguales.

Noveno. El reconocimiento de patrones en torno a los múltiplos de un número es utilizado por Howden (1989-b) para introducir las gráficas de funciones lineales del tipo f(x) = kx, así como el concepto de pendiente de una recta, los números primos y la factorización de números compuestos. Según Howden estas actividades se deben utilizar para conseguir relacionar aspectos conceptuales y procedimentales de un problema, si bien se debe revisar el currículo y los papeles de los profesores y alumnos, donde los profesores deben guiar, escuchar, preguntar, discutir, clarificar y crear un entorno en el que los estudiantes exploren, investiguen, validen, discutan, representen y construyan matemáticas.

Décimo. Ponte et al. (1997) realizan estudios con alumnos de primaria trabajando tareas cuyo objeto es reconocer patrones numéricos, así como proponer y probar conjeturas en la Tabla-100 de 4 columnas que comienza en 0.

Undécimo. En algunos trabajos se propicia el uso de programas informáticos para detectar patrones en la Tabla-100 cuando se disponen los números de la tabla en forma espiral, triangular o hexagonal. Povey (1990) utiliza el software "Engram" para determinar los patrones que forman los números primos o los múltiplos de determinados números en las tablas anteriores.

La Tabla-100 es un material didáctico utilizado en la enseñanza de la aritmética escolar con diversos propósitos. Citamos, entre otros:

- Reconocer y describir patrones numéricos, enunciando y probando informalmente conjeturas (Ajose, 1991, p.43).

- Fomentar el cálculo mental (Reys y Reys, 1986, p. 24).

- Mejorar la comprensión del sistema numérico y de las operaciones de sumar y restar (Feinberg, 1990, p. 38; Horak y Horak, 1982, p. 10).

- Establecer propiedades aritméticas entre los números situados dentro de una determinada figura geométrica con vértices en los números de la tabla (Smith, 1991, p. 13; Litwiller y Duncan, 1980).

- Trabajar conceptos relacionados con la divisibilidad (Eperson, 1981, pp. 33-35; Howden, 1989-b; Roseman, 1978, 1985).

- Mostrar maneras distintas de presentar teoremas (Movshovitz-Hadar, 1988, pp. 12-30).

- Realizar operaciones aditivas sencillas (Thornton et al. 1995, pp. 480-483)

- Encontrar patrones que se forman con los múltiplos de un número, y emplearlos para introducir gráficas de funciones del tipo f(x) = ax, abordando conceptos como los de número primo y número compuesto, factorización de un número, ecuaciones lineales, pendiente de una recta y transformaciones geométricas. (Howden, 1989-b).

2.13 Racionalidad del estudio

La escasez de investigaciones previas sobre el tema tratado en esta memoria, por una parte, y, por otra, la falta de tradición en el uso de tablas numéricas para identificar y estudiar patrones aritméticos en el medio escolar español, han sido elementos motivadores para emprender este trabajo.

Desde el punto de vista del ***contenido*** el interés de nuestro estudio se centra, en primer lugar, en ***explorar las potencialidades de la Tabla-100 para delimitar, identificar y estudiar patrones numéricos***. El hecho de situar los números 1 a 100 en forma de tabla o conjunto de puntos discretos sobre una trama ortogonal, otorga un significado aritmético a los recorridos realizados sobre la tabla, como sumar o restar unidades y decenas al número de partida. La consideración de la Tabla-100 como un plano geométrico discreto favorece una revisión de las operaciones aritméticas elementales, obteniendo un enfoque dinámico en un contexto geométrico.

En segundo lugar, esta perspectiva propicia estudiar ***diferentes representaciones para los operadores aditivos*** en la tabla, tanto de tipo simbólico como de tipo visual o geométrico. A las primera les llamamos expresiones aritméticas del operador, y están constituidas por secuencias de números afectados de un signo + ó – (según se trate de sumar o restar) y escritos como subíndice o superíndice (según se trate de unidades o decenas). Las representaciones geométricas, que llamamos cadenas, están construidas por medio de celdillas cuadradas con un lado común. De esta forma un operador aditivo queda representado geométricamente por una cadena y numéricamente por una expresión aritmética. Tratamos de construir de manera coherente dichas representaciones y estudiarlas desde un punto de vista matemático y didáctico:

a) Desde una ***perspectiva matemática*** nos proponemos ***formalizar el grupo abeliano de los operadores aditivos*** utilizando ambos sistemas de representación, tanto las expresiones aritméticas como las cadenas. Es decir, tratamos de verificar que, en ambos casos, se trata de sistemas de representación adecuados para los operadores aditivos y no de simples dibujos o codificaciones.

Al considerar las cadenas como figuras geométricas en un plano discreto, se tiene la oportunidad de aplicar la noción de transformación geométrica a un operador; las relaciones entre ambos sistemas de representación permiten interpretar el resultado aritmético producido por una isometría sobre un operador y dotarlo de significado.

b) Desde una perspectiva ***didáctica*** tratamos de ***establecer conexiones*** entre las representaciones anteriores que ayuden a su comprensión, así como establecer vínculos con las representaciones usuales conocidas, como son las expresiones numéricas en base 10, la expresión polinómica, la funcional y la máquina de Dienes.

Esta investigación tiene como ***ámbitos de actuación***, la ***innovación curricular*** y la ***formación inicial de profesores de educación primaria***. Aunque la Tabla-100 es, principalmente, una herramienta didáctica utilizada en el medio escolar, entendemos que este artefacto tiene también cabida en la formación inicial de profesores sobre la Didáctica de la Matemática. Como formadores de futuros maestros debemos proporcionar a nuestros estudiantes los medios adecuados para que razonen sobre matemáticas, se comuniquen matemáticamente y comprendan mejor la naturaleza de las matemáticas, objetivos estos que aparecen tanto en la L.O.G.S.E. (M.E.C., 1990) como en documentos sobre tendencias de las matemáticas escolares (N.C.T.M., 1991).

Con la propuesta didáctica que planteamos a los profesores en formación pretendemos, sobre todo, indagar las posibilidades de la Tabla-100 en los aspectos señalados anteriormente. No obstante, no hay que olvidar que las tareas que se han diseñado están insertas en el currículo de una asignatura de matemáticas y, por tanto, se han concebido con intencionalidad formativa. Así, señalamos los siguientes objetivos:

- Favorecer la interconexión en matemáticas, estableciendo relaciones sistemáticas entre aritmética y geometría.

- Propiciar la reflexión, el razonamiento y la reconsideración sobre el sentido de las operaciones aritméticas básicas, desde un enfoque geométrico y dinámico.

- Fomentar el pensamiento visual por medio de la identificación de patrones numéricos, en conexión con la divisibilidad y la figuras geométricas.

- Potenciar la creatividad mediante producción de representaciones geométricas para conceptos aritméticos conocidos y aplicación de transformaciones geométricas a esas representaciones, considerando la Tabla-100 como plano geométrico discreto.

- Explorar y establecer conjeturas en torno a propiedades y medidas de polígonos dibujados en la Tabla-100.

Estos objetivos están ligados con la capacidad para relacionar, reflexionar, visualizar, explorar, identificar y conjeturar, básicamente en relación con el sentido numérico de los futuros profesores de primaria.

Por otra parte, las dificultades y aspectos de índole matemática que puedan surgir en el estudio de la Tabla-100 con los enfoques anteriormente expuestos, necesitan para su estudio de una cierta madurez y un nivel de conocimiento científico que, sin llegar a ser excesivamente especializado, no podríamos encontrar fácilmente en el medio escolar. El grado de madurez y los conocimientos matemáticos que tienen los estudiantes para profesor, junto con la experiencia del equipo investigador en este terreno, hacen que el ámbito de formación inicial de profesores elegido para esta investigación sea adecuado.

Aunque no abordamos el conocimiento profesional de nuestros estudiantes en esta investigación, podríamos pensar que los futuros maestros, al enfrentarse a situaciones novedosas sobre conceptos aritméticos sencillos desde una óptica distinta, como la visual-geométrica, enriquecen su sentido numérico y adquieren una visión más amplia de la aritmética lo que, a la postre, influirá en su quehacer profesional.

Por lo que se refiere a la ***opción metodológica***, la finalidad exploratoria de esta investigación demanda un marco interpretativo y una metodología cualitativa.

En su diseño hemos considerado dos tipos de estudio, uno empírico y otro teórico y formal, conectados entre sí de manera el segundo deriva su necesidad del primero.

Para llevar a cabo el estudio empírico hemos realizado una adaptación de la metodología de Investigación en el Aula, que se presenta en el capítulo 3.

El trabajo de campo se ha llevado a cabo en tres momentos, con tres diferentes grupos de trabajo. Un primer grupo de 70 estudiantes para profesor, con el que se pone en práctica la planificación realizada, y se observan y recogen las primeras informaciones. El material recogido consiste en las respuestas por escrito a una serie de tareas propuestas. Se analizan y clasifican los distintos tipos de respuestas, dando lugar a los primeros datos con los que se detectan las dificultades de los estudiantes para profesor.

Un segundo grupo, de 3 alumnos no pertenecientes al grupo anterior, permite analizar las mismas tareas observando las interrelaciones entre los tres miembros del grupo, sus procesos de razonamiento y las respuestas aportadas a las tareas propuestas. El material recogido consiste en las producciones escritas de estos estudiantes y en las grabaciones de las sesiones de trabajo, llevadas a cabo con la técnica de entrevistas semiestructuradas.

Por último, se realiza el estudio con una alumna, a la que se proponen las mismas tareas y con la que se pretende indagar más profundamente sobre algunos aspectos concretos de la propuesta didáctica por medio de entrevistas semiestructuradas.

Pretendemos utilizar unas categorías de interacción didáctica para analizar las relaciones profesor-alumno, unas categorías de contenido para analizar las relaciones profesor-disciplina, y unas categorías de comprensión del contenido para analizar las relaciones alumno-disciplina.

Como detallaremos más adelante (Capítulo 5), las dificultades surgidas en la delimitación de las categorías de comprensión del contenido hacen que, en la fase de reflexión, consideremos necesario llevar a cabo un estudio del tópico "operadores aditivos en la Tabla-100", como condición imprescindible para continuar este estudio en un futuro próximo con garantías de tener los componentes necesarios para su realización.

2.14 Delimitación del problema

Los puntos tratados anteriormente en este capítulo proporcionan un marco teórico de referencia y delimitan el problema de investigación objeto de esta memoria. Como se ha indicado, la escasez de estudios previos de investigación sobre *representaciones geométricas en tablas numéricas* dificulta la delimitación inicial del problema, toda vez que esta circunstancia hace que el campo de trabajo esté muy abierto.

Por ello, nuestro objetivo principal en los comienzos del estudio, éste es ***explorar la tabla de los cien primeros números***.

Esta amplia idea se va concretando conforme tratamos de responder a diversos interrogantes:

- ¿Qué tipos de patrones numéricos podemos encontrar en la Tabla-100?

- ¿Qué conceptos aritméticos y geométricos están implicados en dichos patrones?

- ¿Qué representaciones geométricas podemos encontrar para algunos de los conceptos aritméticos anteriores?

- ¿Qué tipo de tareas podemos utilizar para crear un ambiente adecuado con el fin de estudiar esas posibles representaciones?

- ¿Qué grado de aceptación por parte de nuestro estudiantes tienen este tipo de actividades?

- ¿Qué aportaciones pueden proporcionar esas tareas en relación con el sentido numérico de los estudiantes implicados?

Para buscar respuestas a estas preguntas, situamos nuestro trabajo dentro de los estudios de innovación curricular, y lo organizamos bajo **dos focos de atención:**

Primero: un ***estudio empírico***, realizado con estudiantes de tercer curso de la diplomatura de Magisterio organizados en tres grupos distintos, llevado a cabo mediante una metodología de Investigación en el Aula.

Para implementar la innovación curricular hemos propuesto ***dos bloques de actividades*** diferenciadas:

a. Un primer bloque de tareas, que tiene por objeto crear un ***contexto*** o un clima de trabajo en torno a ***relaciones entre aritmética y geometría***.

b. El segundo bloque de actividades, que se centra en el ***estudio de las representaciones geométricas de los operadores aditivos***.

Este estudio se sostiene sobre una propuesta curricular y se centra en las relaciones e interacciones entre los componentes del triángulo didáctico Profesor – Alumno – Contenido:

Mediante las relaciones de comunicación profesor-alumno se presentan las tareas seleccionadas y se producen aclaraciones pertinentes en torno a algunas de ellas.

Las relaciones del alumno con el conocimiento matemático se ponen de manifiesto por la comprensión de los procedimientos y representaciones que el estudiante realiza en torno a la Tabla-100.

- Las relaciones del profesor con el conocimiento matemático, que se ponen de manifiesto mediante la selección y planificación de manera organizada y secuenciada de las tareas con las que facilitar reflexiones, descubrimientos y conclusiones por parte de los alumnos sobre la materia tratada.

Segundo: un ***estudio teórico y formal de la Tabla-100 y de los operadores aditivos*** en dicha tabla, producto de las reflexiones y consideraciones teóricas que el profesor-investigador realiza paralelamente a la investigación empírica y que son reflejo de las relaciones del profesor con el conocimiento matemático. Este segundo foco de atención cobra un mayor protagonismo en esta memoria dados los resultados y las dificultades surgidas a lo largo del trabajo empírico y debido a la escasa fundamentación teórica disponible para sustentar las categorías de análisis de comprensión de los contenidos.

2.15 Objetivos generales e hipótesis

Para enunciar los objetivos y las hipótesis de nuestro trabajo, hacemos una recapitulación de las consideraciones expuestas anteriormente, que precisamos en los puntos siguientes:

1. La Tabla-100 es un artefacto didáctico que se ha revelado útil para plantear una gran riqueza de tareas, cuestiones y problemas tanto en el contexto aritmético como en el geométrico, que constituye un recurso adecuado para descubrir y estudiar patrones numéricos.

De las revisiones bibliográficas efectuadas se desprende la escasa utilización en el medio escolar español de tablas numéricas para la enseñanza y aprendizaje de aspectos aritméticos con un enfoque geométrico. Por ello, puede resultar novedoso y útil, tanto desde el punto de vista de contenidos como metodológico, introducir en un programa de Formación Inicial de Profesores de Primaria un conjunto de actividades en torno a la Tabla-100 con el enfoque anterior, para suscitar reflexiones por parte de los estudiantes sobre conceptos aritméticos sencillos desde la óptica que proporciona la “geometría de la Tabla-100”.

2. Dada la dimensión geométrica que proporciona la Tabla-100 a los diversos conceptos aritméticos que se pueden estudiar en ella y la variedad de patrones numéricos que se pueden detectar, parece factible encontrar representaciones aritméticas y geométricas adecuadas para alguno de estos conceptos.

Las relaciones básicas entre los números de la Tabla-100 son aditivas. Es por tanto la estructura aditiva la que predomina en dicha tabla, siendo las representaciones más fáciles de obtener las que atañen a los operadores aditivos. El material objeto de estudio brinda de esta manera una buena oportunidad para encontrar, al menos, dos sistemas de representación (aritmético y geométrico) para dichos operadores, permitiendo realizar conexiones entre ambos.

3. La Tabla-100 es una herramienta didáctica sencilla que no parece presentar mayores dificultades. No obstante, T_{100} es susceptible también de ser vista como un objeto matemático en el que se ponen de manifiesto estructuras y relaciones matemáticas. Formalizar este objeto y estudiar los problemas matemáticos derivados del hecho de concebir la tabla en cuestión como un plano finito discreto, es una tarea que se ha derivado como consecuencia de los objetivos de tipo didáctico.

Bajo estas consideraciones, reenunciamos el Objetivo General de este trabajo:

Explorar las potencialidades que encierra la Tabla-100 como medio de representación donde se pueden integrar y relacionar aspectos aritméticos y geométricos en un programa de formación inicial de profesores de primaria.

Este objetivo general se desglosa en los siguientes objetivos parciales:

1. Indagar en la comprensión que muestran los estudiantes para profesor al visualizar propiedades y relaciones numericas en la Tabla100 mediante representaciones geométricas.

2. Estudiar la viabilidad de nuevas representaciones simbólicas y geométricas para los operadores aditivos; desarrollar y establecer conexiones entre los distintos tipos de representación.

3. Realizar una propuesta didáctica en torno a la Tabla-100, integrada por un material de trabajo que facilite establecer relaciones entre aritmética y geometría por medio del estudio e identificación de patrones y relaciones numéricas.

En la línea de las consideraciones y objetivos anteriores enunciamos la hipótesis de nuestro trabajo:

La introducción de una propuesta didáctica fundada en torno a la Tabla-100 en el currículo de formación inicial de profesores, permite a estos estudiantes:

1. Establecer conexiones aritméticas desde un punto de vista geométrico e interpretar propiedades y relaciones entre aritmética y geometría.

2. Obtener nuevas representaciones para el estudio formal de los operadores aditivos.

3. Aplicar conocimientos matemáticos adquiridos con anterioridad al estudio de estas representaciones.

CAPITULO 3

MARCO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

En el capítulo anterior se ha presentado el objetivo general y las hipótesis de este trabajo. En términos generales nos proponemos ***explorar*** *las potencialidades que encierra la Tabla-100 como medio de representación donde se pueden integrar y relacionar aspectos aritméticos y geométricos en un programa de formación inicial de profesores de primaria, y en particular estudiar las representaciones de tipo geométrico para los operadores aditivos en la Tabla-100.*

Al inicio de nuestra investigación sólo contábamos con una noción intuitiva de la Tabla-100. El hecho de no existir investigaciones previas sobre las representaciones geométricas en esta tabla numérica, hizo necesario que planteáramos esta investigación de manera amplia y flexible, como estudio exploratorio, centrado en algunas cuestiones de investigación. A partir de esas cuestiones elaboramos tareas para los profesores en formación, averiguamos la variedad y frecuencia de respuestas a las tareas planteadas y señalamos los puntos problemáticos que detectan dichas tareas. Este carácter abierto del estudio lo hemos singularizado con el término explorar.

Este trabajo es un estudio de innovación curricular, realizado dentro de un programa de formación inicial de profesores de Primaria. Se trata de un estudio exploratorio enmarcado en el paradigma cualitativo, con una reflexión teórica complementaria, cuya necesidad deriva del trabajo de campo.

3.2 Diseño de la investigación

El diseño general de esta investigación podemos describirlo mediante ***etapas y fases***.

En primer lugar destacamos ***dos etapas***, diferenciadas por el tipo de estudio que se lleva a cabo en cada una de ellas.

La ***primera etapa*** consiste en un ***estudio empírico***. El trabajo de campo se lleva a cabo con tres grupos de estudiantes, profesores de Primaria en formación, los cuales establecen tres momentos en el desarrollo de las fases del estudio empírico. A estos grupos los denominamos G70, G3 y G1, respectivamente, de acuerdo con el número de participantes en cada grupo; en el apartado 3.5 se describen las características de los sujetos de estos grupos y el proceso seguido para su elección.

En esta primera etapa se distinguen ***tres fases***:

* En la ***primera fase*** se plantean unas cuestiones que se presentan a los estudiantes mediante tareas y actividades, que denominamos “de contexto”. Su finalidad está en familiarizar a los estudiantes con la Tabla-100 y en recoger las relaciones que establecen los estudiantes entre los ámbitos aritmético y geométrico.

* La ***segunda fase***, con los mismos grupos de estudiantes, se centra en:

- sistematizar las respuestas obtenidas en la primera fase,

- profundizar en el estudio de las cadenas como representaciones geométricas de los operadores aditivos en la Tabla-100,

- estudiar la comprensión de los estudiantes para profesor sobre estos conceptos.

A lo largo de estaa dos fases del estudio se trabaja en primer lugar con el grupo de 70 estudiantes, G70, se continúa con el grupo de 3 estudiantes, G3, y se concluye con el grupo de 1 estudiante, G1.

* La ***tercera fase*** consiste en un balance de los resultados obtenidos, detectando los puntos problemáticos que el trabajo de los estudiantes ha puesto de manifiesto. En esta fase se pone de relieve que el deficiente conocimiento teórico de la Tabla-100 constituye un impedimento para establecer con precisión categorías para analizar el contenido y para analizar la comprensión de este contenido. En este momento de la investigación se adopta la decisión de realizar un estudio teórico detallado sobre la Tabla-100, los operadores aditivos en T_{100} y sus representaciones geométricas. El equipo investigador decide concluir el estudio de campo y el análisis de las producciones de los alumnos e iniciar la segunda etapa de investigación con el estudio teórico.

El trabajo realizado en esta primera etapa se presenta en los capítulos 4 y 5.

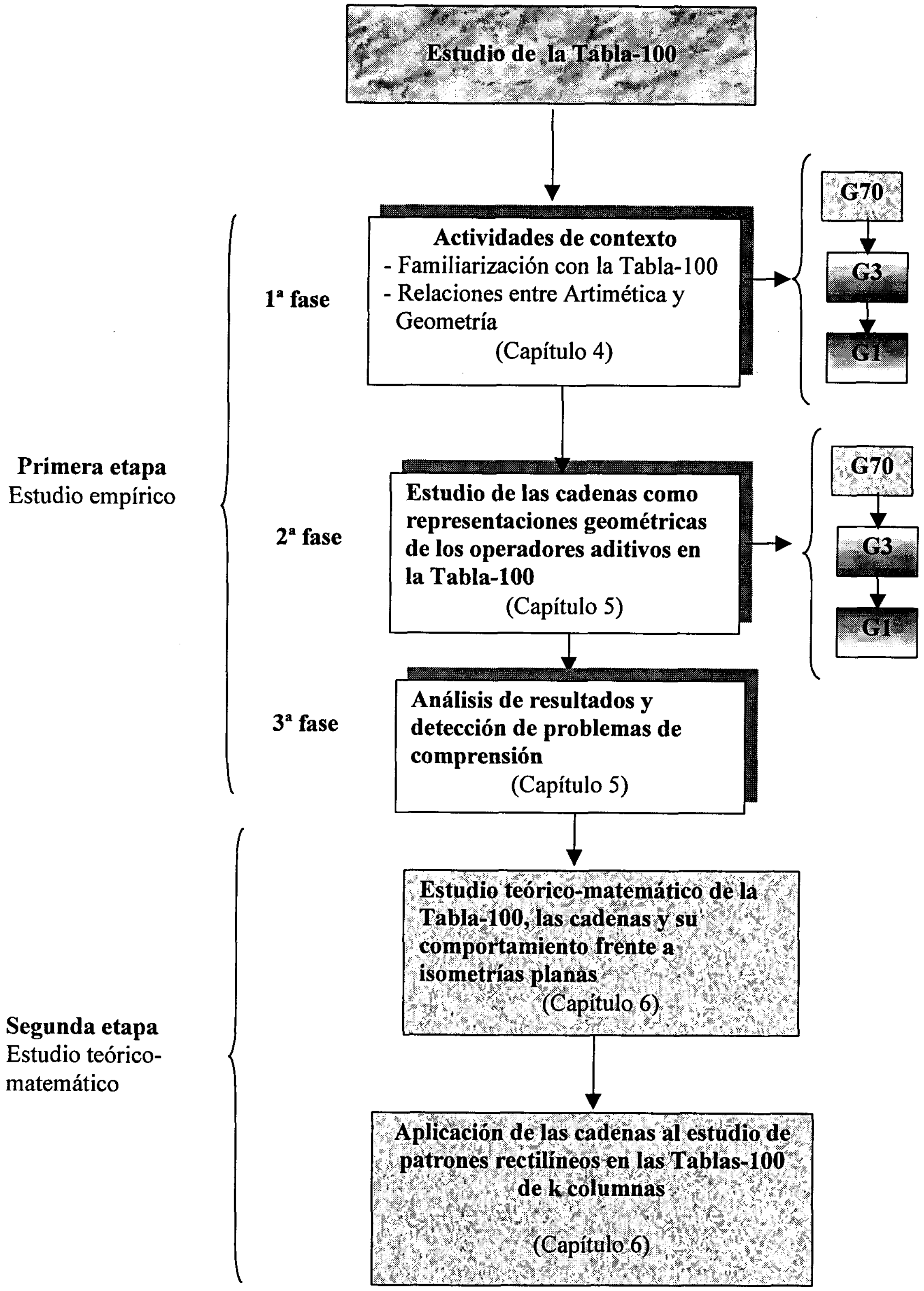
La ***segunda etapa*** consiste en la realización de un estudio teórico, formal y estructurado, sobre los contenidos matemáticos manejados en la etapa anterior. Se quiere dar respuesta a distintas interrogantes surgidas durante el trabajo de campo tanto en las fases de realización como en la de análisis posterior.

Abordamos en esta segunda etapa una formalización matemática de la Tabla-100 y de las cadenas, así como el comportamiento de éstas frente a ciertas isometrías planas. Se concluye el trabajo con la aplicación de las cadenas al estudio de los patrones rectilíneos que se visualizan en las Tablas-100 de k columnas al considerar las clases residuales módulo m.

El trabajo realizado en esta segunda etapa se presenta en el capítulo 6.

En el presente capítulo nos referimos a la metodología de investigación utilizada en la primera etapa, que corresponde a la etapa empírica del trabajo.

El esquema 3.1 resume las etapas y fases de que consta la investigación.



Esquema 3.1: Etapas y fases de la investigación

En los apartados que siguen presentamos la secuencia, metodología, participantes, tareas, recogida de información y temporalización de la primera etapa del estudio.

3.3 Secuencia de trabajo en el proceso de investigación

El investigador, que es profesor encargado de la asignatura de matemáticas del grupo G70 donde se realiza el trabajo de campo, asume la realización práctica del trabajo.

Esta doble condición de profesor e investigador permite:

En primer lugar, introducir los contenidos necesarios para este estudio en el programa de la asignatura, sin que por ello cambien sus objetivos y planteamientos.

El estudio de la Tabla-100 queda englobado dentro del tema "Geometría y Números", del programa oficial de la asignatura Matemáticas III del tercer curso de la Especialidad de Ciencias de la Diplomatura de Magisterio, Plan 1971.

En segundo lugar, elegir la metodología adecuada a la intencionalidad del trabajo. Después de la correspondiente presentación de la Tabla-100 a los estudiantes y de las aclaraciones oportunas sobre el tema, los alumnos reflexionaron sobre las propiedades de la Tabla-100 y las situaciones que pueden utilizar en su futura labor profesional mediante un proceso de descubrimiento guiado. Esta orientación constituyó un cambio metodológico en la asignatura frente a un método más pasivo al que estaban acostumbrados en cursos anteriores y en otros temas del programa.

En tercer lugar, obtener información para la investigación de manera natural y sencilla, ya que los estudiantes están habituados a la presencia del profesor-investigador en el aula.

En cuarto lugar, observar y analizar situaciones peculiares durante el desarrollo de la investigación, proporcionando las aclaraciones pertinentes a los estudiantes y tomando decisiones en el momento oportuno.

En quinto lugar, transmitir a los estudiantes inquietudes de índole profesional al ponerlos en contacto con material y tareas novedosas, propiciando una actitud crítica con su propio currículo y el de sus futuros alumnos.

Como responsables de la investigación, nuestra línea de actuación en esta etapa consiste en elaborar unos materiales curriculares adecuados a los objetivos planteados, implementarlos con una metodología apropiada y analizar las respuestas y producciones de nuestros estudiantes.

Este trabajo se desarrolla secuencialmente de la manera siguiente:

1. Elaboración de una planificación general del trabajo.

2. Preparación y redacción de material escrito, con las tareas que deberán desarrollar los estudiantes en la primera fase de la etapa.

3. Implementación en el aula del material elaborado. Para ello se llevarán a cabo sucesivamente 4 sesiones de trabajo de una duración de dos horas cada una en los grupos G70, G3 y G1, en este orden y con un intervalo aproximado de una semana entre los distintos grupos.

4. Recogida y análisis de las producciones realizadas.

5. Elaboración del material correspondiente al estudio de las *cadenas* como representaciones geométricas de operadores aditivos en la Tabla-100, para dar comienzo a la segunda fase de la primera etapa.

6. Implementación correspondiente de este material en el aula, que se realiza de forma similar a la fase anterior.

7. Recogida y análisis de las producciones realizadas.

8. Determinación de los aspectos problemáticos que deben ser tratados en un estudio teórico de la Tabla-100; detección y análisis de problemas de comprensión.

3.4 Características de la investigación

De acuerdo con la clasificación que realizan Arnal y cols. (1992; pg. 42) sobre modalidades de investigación, pasamos a enumerar aquellas características de este trabajo que mejor lo delimitan.

En relación con su **finalidad** consideramos que esta investigación es, ante todo, ***descriptiva***; nuestro objetivo se ajusta al fin que persigue este tipo de investigación, que según Cohen y Manion (1990; pg. 101) es:

> "describir, comparar, contrastar, clasificar, analizar e interpretar acontecimientos"

tratamos de contar lo ocurrido y no lo que ocurrirá. En este sentido, es objetivo general de nuestro trabajo, **describir, clasificar y analizar las potencialidades que tiene la Tabla-100 como medio de representación geométrica de conceptos aritméticos**, interpretando las respuestas que los estudiantes dan a las tareas propuestas.

En cuanto al **carácter** de la medida utilizamos, fundamentalmente, el método ***cualitativo***, ya que esta investigación está orientada al proceso y a los descubrimientos, se fundamenta en la realidad y es de tipo ***exploratorio y descriptivo***, cualidades éstas, entre otras, que recogen Cook y Reichardt (1986, pg. 29) al hablar del paradigma cualitativo de investigación.

Dado que pretendemos identificar propiedades, situaciones problemáticas, y posibilidades de representación en la Tabla-100, necesitamos incorporar una ***componente cuantitativa*** (G70) que proporcione cantidad y variedad de respuestas a las cuestiones planteadas, con el fin de observarlas posteriormente con mayor detalle (G3 y G1).

Realizamos el estudio empírico por medio de una ***triangulación***, asumiendo las pretensiones de las técnicas triangulares en las ciencias sociales que señalan Cohen y Manion (1990; pg. 331), pues éstas tratan de explicar de manera más completa la riqueza y complejidad del comportamiento humano estudiándolo desde más de un punto de vista, utilizando datos cuantitativos y cualitativos.

Nuestra investigación supone también la realización de una *triangulación en el tiempo*, ya que efectuamos un ***estudio longitudinal*** analizando datos de un mismo grupo (G70) a lo largo del tiempo, y un ***estudio transversal*** mediante el que se obtienen datos de diferentes grupos (G3 y G1) en un momento determinado y sobre las mismas cuestiones.

Por el **marco** en que tiene lugar la investigación se trata de una ***investigación de campo***, ya que se centra en el trabajo de aula estudiando un grupo natural de clase (G70), aunque complementado con otros dos (G3 y G1) pertenecientes a grupos distintos.

Por último, y dado el carácter de innovación curricular que presenta nuestro trabajo, podemos decir que la investigación realizada está ***orientada a la aplicación***, ya que aborda las posibilidades de utilización en el aula de un material didáctico, la Tabla-100, desde la perspectiva de las representaciones geométricas.

3.5 Sujetos participantes

La investigación empírica la desarrollamos con participación de tres grupos distintos de alumnos:

a. Un grupo natural de estudiantes de tercer curso de la especialidad de Ciencias Físico Naturales de Magisterio, en su último año de vigencia del plan de estudios. El número oficial de alumnos matriculados en este grupo era de 91, si bien asistían a clase con cierta regularidad unos 70 estudiantes, razón por la cual a esta población la denominamos **G70**.

b. Una selección de tres estudiantes, dos chicos y una chica, del mismo curso y características similares a los anteriores, pero pertenecientes a grupos distintos y cuyas clases eran impartidas por un profesor diferente del profesor-investigador. Estos alumnos no estaban integrados en G70. Nos referimos a este grupo bajo el nombre de **G3**.

c. El tercer grupo con el que se desarrolló el trabajo estaba constituido por una alumna, con las mismas características que los componentes de G3 pero no incluida en el mismo grupo que ellos. Denominamos a este tercer grupo **G1**.

La selección de los componentes de G3 y G1 se llevó a cabo en Diciembre de 1996 de entre 20 estudiantes de tercer curso de Magisterio (especialidad en Ciencias Físico-Naturales, plan 1971). Estos estudiantes constituían un grupo de prácticas de enseñanza del que el profesor-investigador era tutor. Después de una sesión de debate sobre la Tabla-100, se animó a los estudiantes a plantear preguntas sobre dicha tabla y a reflexionar sobre posibles actividades que se podrían proponer a los escolares con los que realizaban las prácticas.

Dicha selección se realizó entre las personas del grupo que manifestaron interés en participar, sin recibir contrapartida académica por ello. La invitación a participar en G3 y G1 la realizó el profesor-investigador sin tener conocimiento previo de las notas académicas de los estudiantes. Podemos decir que se hizo una selección teniendo en cuenta razones de disponibilidad y condiciones intencionales, ya que la elección se llevó a cabo entre los estudiantes que mostraron interés por la Tabla-100.

3.6 Plan metodológico

Aunque las especiales características de nuestra investigación han conducido a un diseño y unas estrategias de indagación propias, podemos reconocer en este estudio algunas características del método de investigación educativa conocido como ***investigación en el aula***. Hopkins (1989) entiende la investigación en el aula como una variante de investigación-acción, llevada a cabo por los profesores para perfeccionar su enseñanza, que favorece la reflexión crítica de estos profesores sobre sus destrezas, incrementa la responsabilidad sobre sus acciones y facilita la mejora de su sistema de enseñanza.

La investigación en el aula surge como alternativa al paradigma psicoestadístico en el que se ha desarrollado gran parte de la investigación educativa en épocas pasadas. Algunas de las causas, por las que este método tradicional no satisface plenamente a los profesores son señaladas por Hopkins (1989, pg. 42):

1. La dificultad que encierra obtener muestras al azar en ambientes educativos.

2. La cantidad de variables de contexto que operan en las aulas (cultura de la comunidad, personalidad del profesor, ideario del centro, etc.) y que afectan a los resultados.

3. La dificultad para establecer criterios de actuación efectiva en el aula.

Stenhouse (1979, citado en Hopkins; 1989, pg. 42) añade dos problemas más:

4. El progreso individual de los estudiantes interesa mas a los profesores que el resultado en conjunto de la clase, en contraste con el interés en la cantidad que tienen los métodos tradicionales. La investigación en el aula se interesa más por los casos que por las muestras.

5. Las interacciones profesor-alumno que producen un aprendizaje efectivo no son tanto consecuencia de un método estandarizado de enseñanza como el resultado del compromiso de profesores y alumnos en una acción que tenga sentido para ellos, y una acción significativa no puede ser normalizada por el control o la muestra.

Según Hopkins (1989), la metodología de investigación en el aula realizada por los profesores se debe ajustar a los cinco principios siguientes:

1. La función principal del profesor es la de enseñar y ningún método de investigación debe interrumpir esta tarea.

2. El método de la recopilación de datos no debe ocupar al profesor un tiempo excesivo.

3. La metodología empleada debe ser lo bastante fidedigna para permitir a los profesores formular las hipótesis con seguridad y desarrollar estrategias aplicables a la situación de sus aulas.

4. El problema objeto de la investigación emprendida por el profesor debe ser un problema atractivo para él.

5. Es necesario que los profesores-investigadores presten atención a los aspectos éticos que rodean su trabajo.

Por lo que se refiere a nuestro trabajo, las dos fases de que consta su estudio empírico se ajustan a una misma ***estrategia metodológica***, principalmente cualitativa, acompañada de un análisis de las frecuencias obtenidas por los estudiantes en los distintos ítems.

Pasamos a desglosar sus distintos apartados:

En primer lugar, se comienza trabajando con el grupo G70. Después de abordar aspectos relacionados con Geometría y Números, tales como los números figurados, el profesor realiza una presentación del trabajo a desarrollar en las sesiones siguientes, comenzando por exponer a los alumnos la Tabla-100, los objetivos perseguidos y la metodología que se seguirán en estas sesiones. Las características de las tareas realizadas en estas sesiones de trabajo se encuentran en el apartado 3.7.2 de este capítulo y, con más detalle, en el capítulo 4.

En segundo lugar, se hace entrega a los componentes de G70 del material escrito correspondiente a las tareas de la primera sesión. A la vista de su desarrollo y de los resultados obtenidos, se presentan las tareas en el grupo G3, prestando especial atención a los aspectos más conflictivos antes detectados, que determinan la observación y análisis del profesor. Este mismo proceso se traslada a G1, llevando a cabo la sesión de trabajo sobre las mismas cuestiones que en los grupos anteriores y tratando de profundizar en las dificultades de comprensión detectadas.

Concluida la primera sesión se inicia la segunda sesión con G70 con la entrega del material escrito y se repite el ciclo descrito con anterioridad, así sucesivamente hasta concluir las cuatro sesiones de trabajo planificadas. Los comentarios sobre la implementación de estas sesiones, la sistematización de las respuestas de los estudiantes y el análisis derivado, se desarrollan en el capítulo 4.

Este proceso permite, a lo largo de las cuatro sesiones de la primera fase, obtener una idea del grado de aceptación de las actividades realizadas y el interés suscitado por las mismas entre los estudiantes. Anotamos también las dificultades encontradas en la interpretación y realización de las tareas, especificando aquellos aspectos que necesitan un mayor estudio por nuestra parte.

En tercer lugar, una vez familiarizados los alumnos con la Tabla-100, utilizamos la misma dinámica de trabajo en el aula para las tres sesiones siguientes, en la segunda fase del estudio centrada sobre el trabajo con las ***cadenas*** como representaciones geométricas de los operadores aditivos en dicha tabla, objeto principal de esta investigación.

En el proceso de investigación hemos tenido en cuenta los principios mencionados anteriormente a los que, según Hopkins, las investigaciones en el aula realizada por profesores deben ajustarse. Esto es así en nuestro caso, ya que:

1. No se ha interrumpido la marcha normal de clase en ningún momento, integrándose la materia objeto de estudio en el propio programa de la asignatura.

2. La recogida de los datos ha tenido lugar, en su mayor parte, fuera del tiempo de las horas lectivas, en las sesiones con G3 y G1. Con el grupo G70 se ha trabajado sobre las producciones escritas elaboradas en clase, pero su tratamiento y sistematización se ha hecho fuera del aula.

3. La metodología utilizada ha sido flexible y ajustada a las necesidades, tanto de la investigación como de los alumnos y del propio profesor; ha permitido corregir sobre la marcha errores e incluir nuevas cuestiones a la vista del desarrollo de las sesiones.

4. El problema objeto de investigación surge de las inquietudes profesionales y personales del profesor, tal y como quedó relatado en el primer capítulo, siendo por tanto un problema de su interés.

5. La selección de los estudiantes que componen los grupos G3 y G1 se produjo después de una charla sobre el uso la Tabla-100 en la escuela, manifestando los propios estudiantes su interés por participar en esta investigación de manera voluntaria y sin contraprestación especial. Este compromiso lo han mantenido con su asistencia regular a todas las sesiones de trabajo planificadas y con el interés mostrado en llevar adelante las tareas propuestas. Nuestro deseo por mantener esta investigación en las mismas condiciones que los demás temas del programa, incluyendo la realización del correspondiente examen, justifican el hecho de no informar a los componentes del grupo G70 del carácter de investigación que presentaban estas sesiones de trabajo integradas en el tema de *Geometría y Números*. Hemos contado además con el consentimiento de los estudiantes para realizar las grabaciones en vídeo y audio de las sesiones.

3.7 Selección de tareas

3.7.1 Exploraciones previas

En los inicios de nuestro trabajo, y como punto de partida para comenzar nuestra investigación, planteamos a los estudiantes para maestro cuestiones e interrogantes generales sobre tablas numéricas. Decidimos realizar una serie de exploraciones preliminares con el fin de tener una idea del interés que podría despertar la Tabla-100 en estos estudiantes, y el tipo de actividades con las que podríamos comenzar el trabajo. Con este fin se realizaron las cuatro exploraciones siguientes durante el curso 1994/95:

Primera: Identificación de características de la Tabla-100 y preguntas que se pueden efectuar sobre ella en un contexto escolar. Esta experiencia se llevó a cabo en un grupo de Primer curso de Magisterio (especialidad de Educación Musical) (ver Anexo 3.1).

Segunda: Exploración de las ideas previas que los estudiantes de Tercero de Magisterio (especialidad de Ciencias) tienen sobre tablas numéricas, y en especial sobre la Tabla-100, así como el reconocimiento de algunas propiedades numéricas que se presentan en esta tabla (ver Anexo 3.2).

Tercera: Identificación de relaciones y patrones numéricos en la Tabla-100, con los mismos alumnos de Tercero de Magisterio (ver Anexo 3.3).

Cuarta: Identificación de patrones numéricos en las filas, columnas y diagonales de la Tabla-100; identificación de cadenas como operadores aditivos y realización de isometrías sobre dichas cadenas. Esta experiencia, cuyas actividades recogemos en el Anexo 3.4, tuvo lugar con alumnos de quinto curso de la Licenciatura de Matemáticas durante el curso 95/96.

Resumimos las experiencias anteriores en la tabla 3.1:

Fecha	Características	Grupo (Anexo)
22/11/94	**1. Características de la Tabla-100 y preguntas que se pueden hacer sobre ella** (proyección de transparencia con la Tabla-100) **2. Reconocimiento de patrones numéricos** (proyección de dos trasparencias en las hay señalados algunos patrones)	Primero de Magisterio (Ed. Musical) **Anexo 3.1**
14/3/95	**Ideas previas sobre tablas numéricas y la Tabla-100** - Qué es una tabla numérica, ejemplos y uso más frecuente. La tabla-100: - Descripción. - Características relevantes. - Semejanzas y diferencias entre filas y columnas. - Citar el dígito que más se repite y el que menos se repite. - Comparar un número con los que le rodea. - Encontrar patrones numéricos en las filas, columnas y diagonales.	Tercero de Magisterio (Ciencias). **Anexo 3.2**
28/3/95	**Patrones numéricos en la Tabla-100** - Patrones numéricos en polígonos con vértices en los números de la tabla. - Patrones con los múltiplos de un número..	Tercero de Magisterio (Ciencias). **Anexo 3.3**
14/12/95	**Patrones, cadenas y transformaciones en la Tabla-100** - Patrones numéricos en las filas, columnas, diagonales y otras líneas de la tabla. - Identificación de poliminós con operadores aditivos (cadenas) - Reflexiones y giros con las cadenas. Efecto en el operador.	Quinto de Matemáticas **Anexo 3.4**

Tabla 3.1

De manera global pudimos observar la buena acogida que tuvieron las tareas propuestas en los tres grupos de estudiantes seleccionados, obteniendo una gran variedad de respuestas a los tipos, utilidad y contexto de uso de las tablas numéricas en general y profusión de características de la Tabla-100 en particular. No obstante, constatamos que las tareas que componían la sesión denominada "*Patrones numéricos en la Tabla-100*" tenían un carácter demasiado cerrado, lo que impidió obtener la variedad de respuestas que las exploraciones anteriores habían producido, limitándose los alumnos en este caso a realizar cálculos numéricos y comprobar ciertas regularidades. Esto hizo replantear el tipo de tareas que debíamos proponer a los estudiantes y decidimos orientar nuestro trabajo, principalmente hacia el estudio de las cadenas en la Tabla-100. Fue entonces cuando realizamos la experiencia con los estudiantes de quinto curso de la licenciatura de Matemáticas, con actividades en las que proponíamos el manejo de "*cadenas*" como representaciones geométricas de operadores aditivos. La buena acogida de las actividades de esta sesión influyó en el diseño de las dos fases de nuestra investigación.

3.7.2 Tareas de la primera fase de investigación

Las tareas de esta primera fase del estudio empírico las denominamos "*de contexto*" por cuanto tratan de contextualizar las actividades referentes a las cadenas. Se distribuyen en cuatro sesiones de dos horas cada una, contabilizando un total de 34 tareas. Para la elaboración de algunas de estas tareas se han tenido en cuenta actividades de aula propuestas por Litwiller y Duncan (1978) y Roseman (1985).

Presentamos en la tabla 3.2 una breve descripción de estas tareas:

Tareas	Descripción
	1ª sesión: Divisibilidad y operaciones aritméticas
Preliminar	Colorear la Tabla-100 con criterios de divisibilidad (Tabla coloreada)
1.1a; 1.1b; 1.c	Identificar los desplazamientos por la tabla bajar/subir, derecha/izquierda en términos de operaciones aritméticas.
1.2; 1.3	Describir en lenguaje ordinario y en lenguaje matemático la utilización de los desplazamientos por la tabla para realizar la suma 24+21.
1.4a; 1.4b	Describir en lenguaje ordinario y en lenguaje matemático la utilización de los desplazamientos por la tabla para realizar la resta 36-19.
1.5	Expresar la relación entre la suma y la resta.
1.6a; 1.6b	Describir en lenguaje ordinario y en lenguaje matemático la utilización de los desplazamientos por la tabla para realizar los producto 4x7 y 7x4.
1.7	Enunciar la propiedad que se reconoce en las dos tareas anteriores
1.8a; 1.8b; 1.9	Describir los desplazamientos por la tabla para realizar los cocientes 45:3 y 47:6
1.10	Relacionar las dos operaciones producto y división.
1.11; 1.12	Describir los desplazamientos por la tabla para realizar el cálculo del m.c.d. (24, 36).
	Segunda sesión: Divisibilidad y patrones visuales
2.1; 2.2; 2.3; 2.4	Expresar en lenguaje ordinario y en lenguaje matemático regularidades numéricas en los patrones diagonales que constituyen los múltiplos de los números.
2.5	Encontrar patrones geométricos (cadenas) que unan múltiplos de un número y asociarlos al operador aditivo correspondiente.
	Tercera sesión: Divisibilidad y geoplano (I)
3.1	Calcular el área del paralelogramo que se forma uniendo 4 múltiplos consecutivos de 7.
3.2	Explicar la estrategia de cálculo del área en la tarea anterior.
3.3	Extender la tarea 3.1 a los múltiplos de 2, 3, ..., 9.
3.4	Enunciar alguna regularidad encontrada en la tarea anterior.
3.5; 3.6	Determinar el efecto que producen las reflexiones de eje horizontal y vertical, así como los giros de 90°, 270° y 180° sobre los múltiplos de 7 y expresar regularidades encontradas.
3.7	Determinar invariantes en la tarea anterior.
	Cuarta sesión: Divisibilidad y geoplano (II)
4.1	Determinar los polígonos que se obtienen al unir **n** puntos múltiplos consecutivos de 7 y

Tareas	Descripción
	calcular el área.
4.2	Expresar las regularidades encontradas en la tarea anterior.
4.3; 4.4	Realizar las tareas anteriores con los múltiplos de 2.

Tabla 3.2

3.7.3 Tareas de la segunda fase

Para estudiar el principal foco de investigación que constituye esta segunda fase, se redactaron 27 tareas originales, todas ellas relacionadas con las representaciones geométricas de los operadores aditivos que hemos denominado "cadenas". Estas tareas se distribuyeron en 3 sesiones de dos horas de duración cada una, cuyos contenidos recogemos de manera resumida en la tabla 3.3.

Tareas	Resumen de los contenidos
	Primera sesión: Elementos algebraicos del conjunto de las cadenas con la "operación suma"
1.1	Encontrar representaciones de tipo geométrico (cadenas) para expresar el operador "sumar 21" en la Tabla-100.
1.2	Encontrar cadenas para expresar el operador "restar 21" en la Tabla-100.
1.3	Encontrar una ley o criterio para "sumar" las cadenas encontradas anteriormente.
1.4	Estudiar en qué condiciones la ley anterior es una verdadera ley de composición interna.
1.5a; 1.5b	Encontrar una ley o criterio para "sumar" los operadores aditivos asociados a las cadenas anteriores.
1.6; 1.7	Encontrar la cadena y el operador asociado que sea elemento neutro para las leyes de "sumar" en los respectivos conjuntos de cadenas y operadores.
1.8; 1.9	Encontrar la cadena y el operador asociado que sea elemento simétrico de una cadena y operador dados, respectivamente.
	Segunda sesión: cadenas y transformaciones geométricas
2.1; 2.2	Someter una cadena determinada a reflexiones de eje vertical y horizontal, observando el efecto producido en el operador aditivo asociado.
2.3	Encontrar isometrías que dejen invariante al operador asociado a una cadena.
2.4	Realizar composiciones entre las reflexiones mencionadas.
2.5	Extender las tareas anteriores a reflexiones de ejes oblicuos.
2.6	Especificar el efecto producido por tales reflexiones sobre las unidades y sobre las decenas de las cadenas por separado, y encontrar cadenas que permanezcan invariantes frente a alguna de estas reflexiones.
2.7	Estudiar la influencia de la elección de cadenas distintas pero equivalentes frente a las reflexiones anteriores.
	Tercera sesión: Cadenas y representaciones simbólicas. La Tabla-100 de k columnas
3.1; 3.2; 3.3; 3.4	Encontrar representaciones simbólicas distintas de las cadenas para expresar los operadores aditivos en la Tabla-100 y utilizar dichas representaciones para aplicarlas en ejemplos de operaciones aditivas con operadores.
3.5a	Expresar con las notaciones simbólicas encontradas anteriormente el "elemento neutro" para la "suma" de operadores.
3.5b	Expresar con las notaciones simbólicas encontradas anteriormente el "elemento simétrico" de un determinado operador.
3.6	Dibujar una cadena correspondiente a un determinado operador aditivo en la Tabla-100 de 7 columnas, escribiendo la simbolización correspondiente con las notaciones anteriores.
3.7	Encontrar el operador aditivo asociado a una cadena dada en la Tabla-100 de 7 columnas.

Tareas	Resumen de los contenidos
3.8	Escribir la descomposición polinómica correspondiente a un operador asociado a una cadena en la Tabla-100 de 7 columnas.
3.9	Encontrar un sistema de representación numérica en el que se escriba con los mismo dígitos un operador asociado a una cadena en la Tabla-100 de 10 columnas que en la Tabla-100 de 7 columnas.

Tabla 3.3

3.8 Recogida de información y temporalización

Las especiales características de generalidad y flexibilidad de nuestra investigación requerían unas técnicas de recogida de información acorde con ellas, dentro del paradigma cualitativo y de acuerdo con las técnicas propuestas por la metodología de investigación en el aula.

La primera fuente de información procede de las ***respuestas por escrito*** que los estudiantes de G70 realizan a los cuestionarios presentados por el profesor-investigador. Se trata de material original estructurado, con algunas consideraciones y preguntas abiertas, hecho éste que, si bien proporciona variedad y cantidad de producciones, dificultó notablemente su organización y análisis, ya que con frecuencia los alumnos debían completar tablas para buscar regularidades.

Este material escrito se complementa con las ***notas de campo*** que el profesor-investigador recogía a la luz del desarrollo de las sesiones, anotando las dudas planteadas por los estudiantes y las aclaraciones realizadas por el profesor, principalmente en relación con la interpretación de algunas tareas.

La segunda fuente de información proviene del grupo G3. Los estudiantes recibían un material escrito similar al de G70 pero se les invitaba a dar sus respuestas oralmente, en voz alta, y a ponerse de acuerdo para encontrar una respuesta de grupo. Aunque quedaba constancia por escrito de los dibujos y esquemas que formaban parte de las respuestas de los alumnos, las sesiones se grabaron en vídeo y audio, con el fin de analizar con más detalle las intervenciones, tanto de los componentes de G3 como del profesor.

La tercera fuente de información procede de las entrevistas con G1. Las dos primeras sesiones de trabajo se grabaron con vídeo. Dado que quedaba registro por escrito de todos los dibujos y esquemas que Julia (la alumna de este grupo) realizaba y el hecho de que la mera presencia de la cámara le cohibiera, decidimos grabar las sesiones exclusivamente en audio, lo que no constituyó restricción alguna a la hora de obtener todas las producciones.

La recogida de información de la parte empírica del estudio la completamos con la realización de una ***encuesta*** a toda la población objeto de estudio, con el fin de obtener información sobre la opinión de los estudiantes sobre la utilidad e interés que estas tareas han despertado en ellos (Anexo 3.5).

La temporalización de las actividades llevadas a cabo la resumimos en la tabla 3.4:

	Sesión	Nombre	Número de tareas	Fecha G-70	Fecha G-3	Fecha G-1
1ª fase	1ª	Divisibilidad y operaciones aritméticas	18	25/1/96	1/2/96	6/2/96
	2ª	Divisibilidad y patrones	5	8/2/96	15/2/96	20/2/96
	3ª	Divisibilidad y Geoplano I	7	22/2/96	29/2/96	5/3/96
	4ª	Divisibilidad y Geoplano II	4	7/3/96	14/3/96	19/3/96
2ª fase	5ª	Elementos algebraicos del conjunto de las cadenas con la "operación suma"	10	18/4/96	23/4/96	25/4/96
	6ª	Cadenas y transformaciones geométricas	7	30/4/96	7/5/96	9/5/96
	7ª	Tercera sesión: Cadenas y representaciones simbólicas. La Tabla-100 de k columnas	10	14/5/96	21/5/96	28/5/96
Encuesta				28/5/96	28/5/96	28/5/96

Tabla 3.4

La tablas 3.5 muestra el número y porcentaje (respecto del total de 91) de estudiantes de G70 que realizan las sesiones correspondientes a las dos fases.

	Primera fase				Segunda fase		
Sesiones de trabajo	1ª sesión Div. y operac. aritméticas	2ª sesión Div. y patrones visuales	3ª sesión Div. y geoplano I	4ª sesión Div. y geoplano II	5ª sesión Cadenas y elem. algebraicos	6ª sesión Cadenas y transf. geomét.	7ª sesión Cadenas, repres. simb. y T_{100k}
Nº alumnos	63	51	50	45	68	66	50
%	69,2	56,0	54,9	49,5	74,7	72,5	54,9

Tabla 3.5

La tabla 3.6 ofrece las frecuencias absolutas (n_i) y relativas (%) de los estudiantes según el número de sesiones efectuadas, así como las correspondientes frecuencias acumuladas ascendentes y descendentes.

nº de tareas	n_i (%)	Acumul. asc. (%)	Acumul. desc. (%)
0	6 6,6	6 6,6	91 (100,0)
1	8 (8,8)	14 (15,4)	85 (93,4)
2	7 (7,7)	21 (23,1)	77 (84,6)
3	8 (8,8)	29 (31,9)	70 (76,9)
4	12 (13,2)	41 (45,1)	62 (68,1)
5	20 (22,0)	61 (67,0)	50 (54,9)
6	11 (12,1)	72 (79,1)	30 (33,0)
7	19 (20,9)	91 (100,0)	19 (20,9)

Tabla 3.6

La tabla 3.7 contiene el número y porcentaje de estudiantes que realizaron 0, 1, 2 ó 3 sesiones del estudio de las cadenas. Los datos que proporcionamos en el capítulo 5 sobre este estudio se refieren a los 43 estudiantes que realizaron las tres sesiones completas, lo que supone el 47,3% de los 91 estudiantes matriculados en el curso.

	Estudio de las cadenas Nº de sesiones			
	0	1	2	3
Nº alumnos (%)	15 (16,5)	12 (13,2)	21 (23,1)	43 (47,3)

Tabla 3.7

CAPITULO 4

ESTUDIO EMPÍRICO: TAREAS DE CONTEXTO

4.1 Presentación y objetivos

Antes de abordar directamente las representaciones geométricas de conceptos aritméticos en la Tabla-100 decidimos suscitar un ambiente o marco de trabajo con el fin de familiarizar a los estudiantes de los grupos G70, G3 y G1 con la propia Tabla-100, y propiciar la búsqueda de relaciones sencillas entre la Aritmética y la Geometría. La primera fase del trabajo de campo está dedicada a este objetivo.

Como tópico aritmético central y punto de partida se tomó la **Divisibilidad.** Con esta perspectiva aritmética trabajamos exclusivamente con los números de la tabla.

El elemento geométrico básico para establecer las conexiones con la divisibilidad es el **Geoplano**. Consideramos para ello que los puntos del geoplano están situados en el centro de cada casilla asociados a los números correspondientes de la Tabla-100. Estudiamos polígonos cuyos vértices son los puntos que están asociados a múltiplos de un determinado número, y utilizamos transformaciones geométricas sencillas como instrumento dinámico que permita encontrar relaciones entre los ámbitos aritmético y geométrico.

A tal efecto se desarrollaron cuatro sesiones de dos horas cada una, que denominamos:

1. Divisibilidad y operaciones aritméticas.

2. Divisibilidad y patrones.

3. Divisibilidad y Geoplano (I)

4. Divisibilidad y Geoplano (II)

En las dos primeras sesiones partimos de lo aritmético y tratamos de conectar conceptos aritméticos con "desplazamientos sobre la tabla" y regularidades de carácter visual-geométrico, englobando bajo esta expresión a las regularidades que ofrecen un impacto visual y adoptan formas de tipo geométrico, como son las líneas rectas y quebradas. En las dos sesiones siguientes partimos de figuras geométricas (polígonos cuyos vértices corresponden a múltiplos de un determinado número) y tratamos de obtener conexiones con lo aritmético por medio del cálculo de las áreas de dichos polígonos.

Estas pretensiones las resumimos en los siguientes

4.1.1 Objetivos generales

1. Familiarizar a los estudiantes con el uso de la Tabla-100.

2. Constatar la correspondencia que existe entre las operaciones aritméticas básicas y los desplazamientos por la tabla, dotando a aquellas de un sentido dinámico.

3. Encontrar regularidades de carácter visual-geométrico en la tabla coloreada e interpretarlas aritméticamente.

4. Establecer conexiones entre el área de un polígono y el hecho de ser sus vértices puntos del geoplano asociados a los múltiplos de un determinado número.

5. Estudiar los múltiplos de un número en la Tabla-100, desde un punto de vista dinámico, sometiéndolos a isometrías planas sencillas y observando el efecto aritmético producido.

Aunque el principal foco de investigación de este trabajo se centra en las representaciones geométricas de los operadores aditivos en la Tabla-100, que abordaremos en el próximo capítulo, creemos que es pertinente describir, al menos de manera resumida, los resultados de estas actividades que llamamos de contexto, ya que constituyen la primera fase del trabajo en el aula, punto de partida y bagaje con el que los estudiantes se enfrentarían posteriormente al estudio de dichas representaciones.

En cada una de las sesiones con los grupos G70, G3 y G1, presentamos globalmente:

- Los objetivos.

- Los contenidos o tareas propuestas.

- La valoración y clasificación de respuestas.

- Consideraciones sobre los resultados de cada sesión.

Las sesiones se han desarrollado secuencialmente en los grupos G70, G3 y G1, en este orden. Con objeto de favorecer una visión más clara de los resultados de las tareas, éstos los presentamos de manera transversal, recogiendo las respuestas que sobre cada grupo significativo de tareas ofrecen los grupos antes citados.

4.2 Primera sesión: Divisibilidad y operaciones aritméticas

4.2.1 Descripción general y objetivos

En esta primera sesión se presenta la Tabla-100 a los estudiantes. Se comienza coloreando las casillas con distintos colores y elementos (cuadrado, círculo, triángulo) según que los números en dichas celdillas sean múltiplos de un determinado número (del 2 al 9), obteniendo una tabla-100 que denominamos ***tabla coloreada.***

Proponemos a los alumnos "traducir" en términos aritméticos el significado de ***"desplazarse por la tabla hacia abajo, arriba, a la derecha y a la izquierda",*** y utilizar estos significados para reflexionar sobre las operaciones aritméticas con un enfoque dinámico, en términos de dichos desplazamientos, utilizando los criterios de coloración de la tabla.

4.2.1.1 Objetivos la sesión

1. Relacionar las operaciones aritméticas elementales con los desplazamientos en la Tabla-100.

2. Expresar en lenguaje matemático el significado de los diversos desplazamientos que el alumno efectúa en la tabla.

3. Establecer criterios para efectuar la suma, resta, multiplicación y división con dos números en la Tabla-100, utilizando el significado aritmético dado a los desplazamientos por dicha tabla.

4. Utilizar los criterios anteriores para determinar el carácter de sumas y restas repetidas que tienen la multiplicación y la división respectivamente, así como el hecho de ser éstas operaciones inversas entre sí.

5. Establecer el concepto de máximo común divisor de dos números en la tabla coloreada, buscando estrategias para su determinación mediante la exclusiva utilización de los criterios de coloración de dicha tabla.

4.2.2 Actividades de la sesión

4.2.2.1 Tarea inicial: construcción de la tabla coloreada

Se entrega a los componentes del grupo una hoja con la Tabla-100 (Fig. 4.1) preparada para ser coloreada con los siguientes criterios:

1	2	3	4	5	$\boxed{6}$	7	8	9	10
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

Fig. 4.1 (G70-1ª sesión-tarea inicial)

- Escribe en rojo los números pares.
- Colorea en verde el triángulo superior derecho en las casillas que contienen múltiplos de 3.
- Rodea con un círculo los múltiplos de 4.
- Colorea en azul el cuadrado inferior derecho en las casillas que contienen múltiplos de 5.
- Rodea con un cuadrado los múltiplos de 6.

- Rodea con un triángulo los múltiplos de 7.
- Colorea en negro el triángulo inferior izquierdo en las casillas que contienen múltiplos de 8.
- Colorea en amarillo el triángulo superior izquierdo en las casillas que contienen múltiplos de 9.

La figura 4.2 muestra la tabla, una vez coloreada con los criterios anteriores:

Tabla coloreada

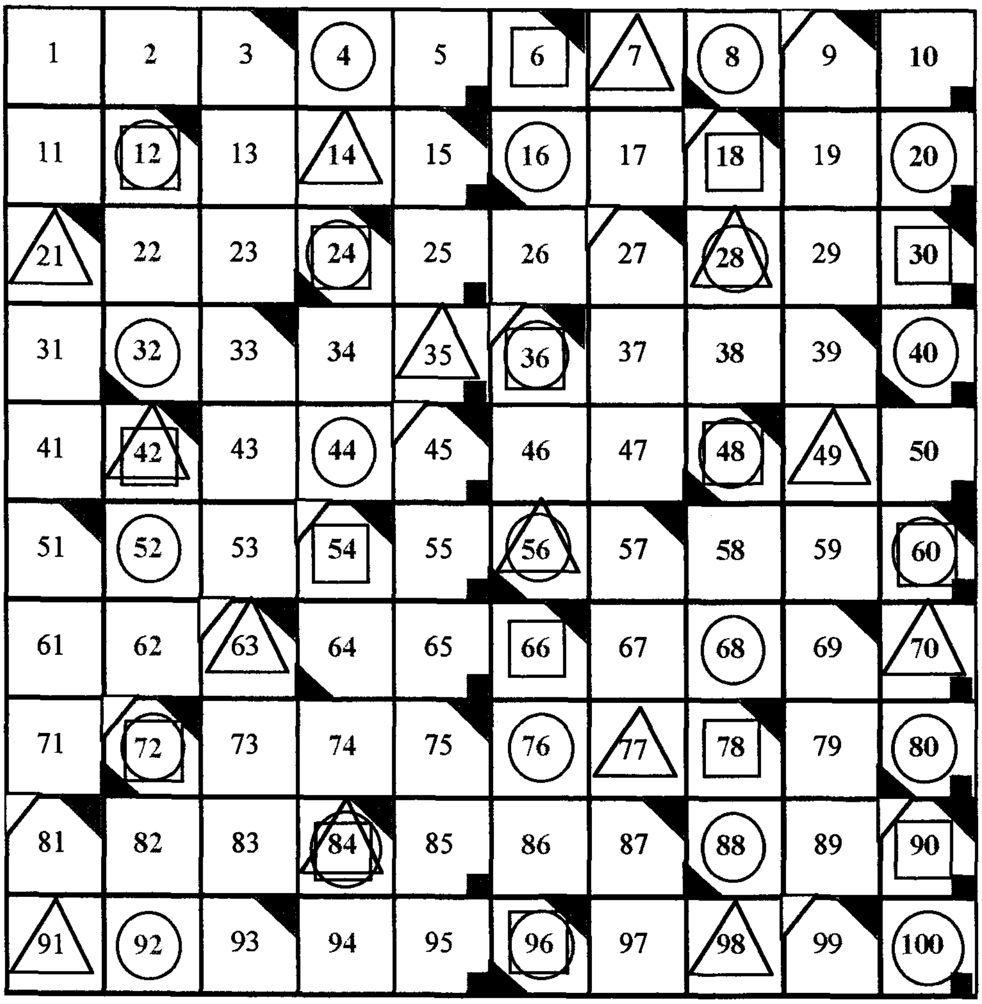


Fig. 4.2 (G70-1ª sesión-tabla coloreada)

Se pide a los estudiantes que realicen las 18 tareas siguientes utilizando solamente la tabla coloreada.

4.2.2.2 Tareas propuestas

Tarea 1.1 (T 1.1)

Explica el significado en términos de operaciones aritméticas de:

a) Bajar/subir una casilla

b) Bajar/subir k casillas

c) Ir a la izquierda/derecha 3 casillas

T 1.2 **Describe verbalmente cómo efectuarías la suma 24+21 desplazándote por la tabla.**

T 1.3 **Traduce tu frase anterior a lenguaje matemático**

T1.4a **Describe verbalmente como antes la operación resta: 36-19**

T1.4b **Expresa lo anterior en lenguaje matemático**

T 1.5 **¿Qué relación encuentras entre dichas operaciones de sumar y restar?**

T 1.6a **Expresa brevemente los desplazamientos que harías por la tabla para realizar el producto: 4 x 7 = 28**

T 1.6b **Expresa brevemente los desplazamientos que harías por la tabla para realizar el producto: 7 x 4 = 28.**

T 1.7 **Enuncia en términos de desplazamientos por la tabla coloreada y da nombre a la propiedad que interviene en el ejercicio anterior.**

T 1.8a **Explica de igual modo los pasos a dar para calcular el cociente 45:3**

T 1.8b **Explica de igual modo los pasos a dar para calcular el cociente 47:6**

T 1.9a **Relaciona tus respuestas con el algoritmo de la división 45:3**

T 1.9b **Relaciona tus respuestas con el algoritmo de la división 47:6**

T 1.10 **¿Qué relación encuentras entre estas dos operaciones producto y división?**

T 1.11 **¿Cómo determinarías el m.c.d.(24,36) usando los colores de la tabla?**

T 1.12 **Relaciona tu procedimiento empleado con el algoritmo usual.**

4.2.3 Características de las tareas

La tabla 4.1 muestra las características principales de las 18 tareas propuestas a los alumnos, atendiendo a:

- **Tipo de expresión o lenguaje** que se espera que utilice el estudiante:

(LC): Lenguaje común.

(LS): Lenguaje simbólico (aritmético-algebraico, o visual-geométrico).

(LC^LV): La tarea puede ser realizada utilizando ambos lenguajes.

- **Tipo de relación** entre ámbitos aritmético y visual-geométrico:

(AV): La tarea supone una "traducción" del ámbito aritmético al visual-geométrico.

(VA): La tarea supone una "traducción" del marco visual-geométrico al aritmético.

(VA^AV): La tarea supone una doble "traducción" en ambos sentidos entre los campos aritmético y visual-geométrico.

Relaciones	**Lenguaje**			**TOTAL**
	LC	**LS**	**LC^LS**	
VA	3 (16.7)	2 (11.1)	0	5 (27.8)
AV	9 (50.0)	0	0	9 (50.0)
VA^AV	1 (5.6)	0	3 (16.7)	4 (22.2)
TOTAL	13 (72.2)	2 (11.1)	3 (16.7)	**18**

Tabla 4.1 (G70-1ª sesión)

La tabla anterior ayuda a realizar las siguientes observaciones sobre las tareas propuestas en esta primera sesión:

1) No se propone a los estudiantes ninguna tarea que suponga una relación exclusivamente aritmética o visual-geométrica.

2) Existe un predominio claro de las tareas que suponen una "traducción" del marco aritmético al visual-geométrico (AV), lo que favorece el objetivo de buscar formas distintas de realizar operaciones aritméticas y reflexionar sobre su significado utilizando los símbolos y códigos de coloreado y desplazamientos por la tabla coloreada.

3) Hay también un mayor número de tareas que piden el uso del lenguaje común más que el simbólico, con la idea de propiciar la reflexión por parte de los estudiantes sobre el significado de ciertas operaciones aritméticas.

4) La combinación de características que más se presenta (50.0%) es la relación de lo aritmético a lo visual-geométrico (AV) expresado en lenguaje común (LC), de acuerdo con los puntos anteriores .

4.2.4 Criterios para valorar y clasificar las respuestas

Dado que uno de los objetivos generales de este foco de investigación era el de ***propiciar la constatación de la correspondencia que existe entre las operaciones aritméticas básicas y los desplazamientos por la tabla, dotando a aquellas de un sentido dinámico***, hemos sistematizado las producciones de los estudiantes del grupo G70 teniendo en cuenta los siguientes criterios:

A) Logros:

A1. Respuestas **Correctas (C)**. Hemos dado esta consideración a las respuestas que se ajustan fielmente a lo que la tarea solicita.

A2. Respuestas **Incompletas (IC)**. Nos referimos con este término a las respuestas que presentan imprecisiones o responden parcialmente a la tarea.

A3. Respuestas **Incorrectas (I)**. Recogemos en este apartado las expresiones que no responden a la tarea solicitada, son inteligibles o se desprende de ellas que el alumno no ha comprendido bien la tarea.

B) Errores

B1. **Error en el lenguaje común (ELC).** Cuando se aprecia en la respuesta una falta de uso correcto en el lenguaje.

B2. **Error en el lenguaje simbólico (ELS).** Cuando las expresiones de tipo simbólico no son correctas o bien el estudiantes responde en lenguaje común cuando la tarea lo solicita en lenguaje simbólico.

B3. **Error de concepto (EC).** Consideramos este tipo de error cuando la respuesta no responde a la tarea propuesta o responde erróneamente por causas distintas de expresión de lenguaje.

C) Representaciones

C1. **Representación aritmética (RPA).** La respuesta incluye alguna expresión simbólica de tipo aritmético o algebraico.

C2. **Representación gráfica (RPG).** El alumno ha efectuado algún dibujo, principalmente de carácter geométrico.

C3. **Uso de códigos de coloreado de la tabla (CC).** En la respuesta se mencionan los símbolos (cuadrado, círculo, triángulo) o colores utilizados en la tabla coloreada.

C4. **Desplazamientos por la tabla (DT).** En la respuesta se menciona, explícita o implícitamente, desplazamientos por la tabla coloreada, como bajar, subir, izquierda, derecha, contar casillas, etc.

D) Relaciones

D1. **Relación aritmética (RLA).** La respuesta supone que el estudiante se ha desenvuelto exclusivamente en un marco aritmético, sin hacer una "traducción" a un marco de carácter visual-geométrico.

D2. **Relación aritmético-visual (RLAV).** En la respuesta se detecta una "traducción" del marco aritmético al visual-geométrico, utilizando el significado de sumar, restar, etc. en términos de desplazamientos por la tabla y sus códigos de coloreado.

D3. **Relación visual-aritmética (RLVA).** La respuesta implica una relación del ámbito visual-geométrico al aritmético, utilizando el significado de bajar, subir, izquierda, derecha, etc. en términos aritméticos.

No se han producido respuestas que conlleven relaciones solo en el marco visual-geométrico, por lo que no hemos considerado esta categoría.

4.2.5 Resultados generales en G70

Esta primera sesión consta de 18 tareas y el número de alumnos que las realizaron fue de 63. Si del total de 1.134 respuestas posibles quitamos las 292 (25.7%) no contestadas, el número total de cuestiones respondidas por los alumnos de G70 es de 842 (74.3%).

La tabla 4.2 recoge las respuestas de los componentes de este grupo clasificadas de acuerdo con los criterios anteriores. Los porcentajes en cada celda se refieren al subtotal de la columna correspondiente, y los porcentajes de los subtotales se refieren al número total de respuestas posibles (1.134):

Tareas		Logros				Errores			Representaciones				Relaciones		
Nº	Características	C	IC	I	NC	ELC	ELS	EC	RPA	RPG	DT	CC	RLA	RL AV	RLVA
1.1a	LC VA	56 (88,9)	1 (1,6)	6 (9,5)	0 (0,0)	6 (9,5)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	63 (100)
1.1b	LC VA	48 (76,2)	0 (0,0)	13 (20,6)	2 (3,2)	10 (15,9)	0 (0,0)	3 (4,8)	2 (3,2)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	61 (96,8)
1.1c	LC VA	53 (84,1)	0 (0,0)	10 (15,9)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	10 (15,9)	2 (3,2)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	63 (100)
1.2	LC AV	59 (93,7)	0 (0,0)	4 (6,3)	0 (0,0)	2 (3,2)	0 (0,0)	2 (3,2)	0 (0,0)	0 (0,0)	62 (98,4)	6 (9,5)	0 (0,0)	61 (96,8)	0 (0,0)
1.3	LS VA	38 (60,3)	14 (22,2)	7 (11,1)	4 (6,3)	0 (0,0)	7 (11,1)	0 (0,0)	54 (85,7)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	59 (93,7)
1.4a	LC AV	49 (77,8)	0 (0,0)	14 (22,2)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	14 (22,2)	0 (0,0)	5 (7,9)	58 (92,1)	0 (0,0)	5 (7,9)	58 (92,1)	0 (0,0)
1.4b	LS VA	29 (46,0)	17 (27,0)	14 (22,2)	3 (4,8)	0 (0,0)	14 (22,2)	0 (0,0)	52 (82,5)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	60 (95,2)
1.5	LC AV	31 (49,2)	12 (19,0)	8 (12,7)	12 (19,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	5 (7,9)	0 (0,0)	0 (0,0)	46 (73,0)	0 (0,0)	7 (11,1)	39 (61,9)	0 (0,0)
1.6a	LC AV	49 (77,8)	10 (15,9)	2 (3,2)	2 (3,2)	0 (0,0)	0 (0,0)	2 (3,2)	0 (0,0)	2 (3,2)	51 (81,0)	50 (79,4)	8 (12,7)	51 (81,0)	0 (0,0)
1.6b	LC AV	50 (79,4)	8 (12,7)	2 (3,2)	3 (4,8)	0 (0,0)	0 (0,0)	2 (3,2)	0 (0,0)	1 (1,6)	52 (82,5)	53 (84,1)	7 (11,1)	53 (84,1)	0 (0,0)
1.7	LC AV	31 (49,2)	15 (23,8)	3 (4,8)	14 (22,2)	0 (0,0)	0 (0,0)	3 (4,8)	0 (0,0)	0 (0,0)	34 (54,0)	34 (54,0)	15 (23,8)	34 (54,0)	0 (0,0)

Tareas		Logros				Errores			Representaciones				Relaciones		
Nº	Caracte-rísticas	C	IC	I	NC	ELC	ELS	EC	RPA	RPG	DT	CC	RLA	RLAV	RLVA
1.8a	LC AV	8 (12,7)	12 (19,0)	22 (34,9)	21 (33,3)	0 (0,0)	0 (0,0)	22 (34,9)	0 (0,0)	0 (0,0)	42 (66,7)	21 (33,3)	0 (0,0)	42 (66,7)	0 (0,0)
1.8b	LC AV	5 (7,9)	0 (0,0)	23 (36,5)	35 (55,6)	2 (3,2)	0 (0,0)	21 (33,3)	1 (1,6)	0 (0,0)	15 (23,8)	11 (17,5)	11 (17,5)	17 (27,0)	0 (0,0)
1.9a	LC;LS; AV;VA	4 (6,3)	4 (6,3)	4 (6,3)	51 (81,0)	2 (3,2)	0 (0,0)	2 (3,2)	8 (12,7)	0 (0,0)	4 (6,3)	3 (4,8)	8 (12,7)	4 (6,3)	0 (0,0)
1.9b	LC;LS; AV;VA	3 (4,8)	8 (12,7)	3 (4,8)	49 (77,8)	1 (1,6)	0 (0,0)	2 (3,2)	9 (14,3)	0 (0,0)	3 (4,8)	5 (7,9)	8 (12,7)	3 (4,8)	0 (0,0)
1.10	LC; AV;VA	17 (27,0)	0 (0,0)	13 (20,6)	33 (52,4)	6 (9,5)	0 (0,0)	7 (11,1)	0 (0,0)	0 (0,0)	12 (19,0)	2 (3,2)	13 (20,6)	10 (15,9)	2 (3,2)
1.11	LC AV	12 (19,0)	0 (0,0)	28 (44,4)	23 (36,5)	0 (0,0)	0 (0,0)	28 (44,4)	0 (0,0)	0 (0,0)	27 (42,9)	39 (61,9)	1 (1,6)	39 (61,9)	0 (0,0)
1.12	LC;LS; AV;VA	0 (0,0)	14 (22,2)	9 (14,3)	40 (63,5)	0 (0,0)	0 (0,0)	9 (14,3)	8 (12,7)	0 (0,0)	0 (0,0)	14 (22,2)	9 (14,3)	14 (22,2)	0 (0,0)
Sub-total		542 (47,8)	115 (10,1)	185 (16,3)	292 (25,7)	29 (2,6)	21 (1,9)	132 (11,6)	136 (12,0)	8 (0,7)	406 (35,8)	238 (21,0)	92 (8,1)	425 (37,5)	308 (27,2)

Tabla 4.2 (G70-1ª sesión)

4.2.6 Análisis de los resultados en G70

Aunque para una lectura detallada de las respuestas dadas por los estudiantes a estas tareas llamadas de contexto remitimos al lector a los anexos 4.1, 4.2 y 4.3, ofrecemos en este apartado una visión global de los resultados y situaciones problemáticas correspondientes a los grupos G70, G3 y G1.

A) Logros

El gráfico de la figura 4.3 da una idea comparativa de las respuestas de los estudiantes en relación con los logros.

Si aceptamos que el número de respuestas correctas para un ítem da una idea de su dificultad, observamos que las tareas resultan más difíciles a medida que se avanza en la sesión, mientras que paralelamente crece el número de tareas no contestadas. Esto puede deberse al incremento de la dificultad de las tareas y al cansancio natural que se produce en los estudiantes a lo largo de la sesión.

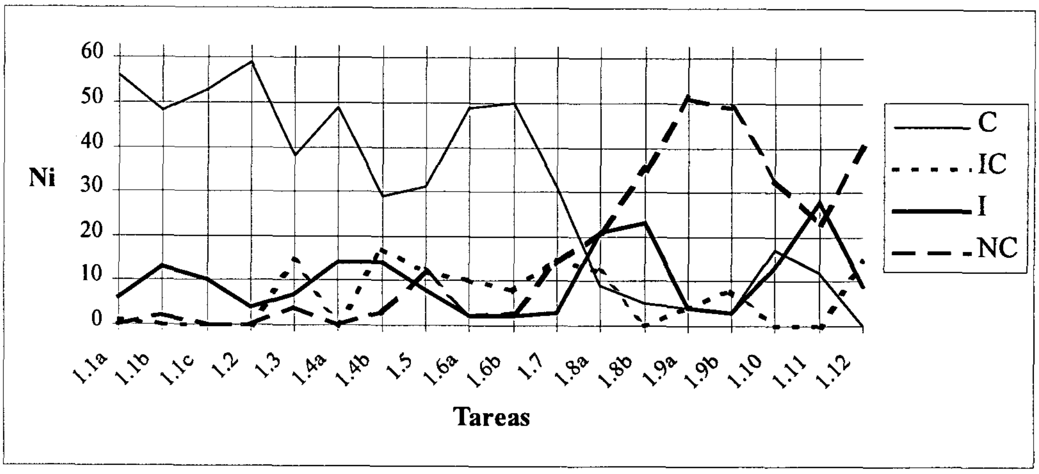


Fig. 4.3 (G70-1ª sesión): Logros

Dado el elevado índice de respuestas correctas (47.9%) en esta primera sesión, especial para las primeras tareas en las que se aborda la "traducción" de los desplazamientos por la tabla en términos aritméticos y se reflexiona acerca de las operaciones aritméticas elementales en términos de códigos de coloreado y desplazamientos por la tabla, concluimos que los estudiantes no han tenido muchas dificultades en entender y realizar dichas “traducciones” entre los marcos aritméticos y visual-geométrico.

Destacamos el bajo índice de aciertos para las tareas en las que se les pide a los estudiantes que realicen la división utilizando la tabla coloreada (tareas 1.8 y 1.9), en contraste con el alto índice de respuestas correctas para la multiplicación (77.8% y 79.4 para las tareas 1.6a y 1.6b respectivamente).

Asimismo se han obtenido bajos niveles de acierto para el cálculo del máximo común divisor de dos números (19.0% para la tarea 1.11), posiblemente debido a que para realizar esta tarea hubiera sido necesario abordar previamente otros aspectos de la divisibilidad tales como la obtención de los divisores de un número.

B) Errores

De acuerdo con el gráfico de la figura 4.4, que recoge los errores apreciados en G70, podemos corroborar las consideraciones hechas en el apartado anterior en el sentido de que los errores de concepto (EC) aumentan en las tareas 1.1c, 1.4a, 1.8a, 1.8b y 1.11 (operaciones resta, división y cálculo del m.c.d.).

Los errores en el lenguaje simbólico (ELS) se presentan en la tareas 1.3 y 1.4b donde se pide a los alumnos que escriban en lenguaje matemático las reglas dadas para sumar y restar en la tabla coloreada.

Los errores de expresión en leguaje común (ELC) se encuentran en las tareas 1.1b (*significado de subir/bajar k casillas*) y 1.10 (*relación entre producto y división en la tabla coloreada*).

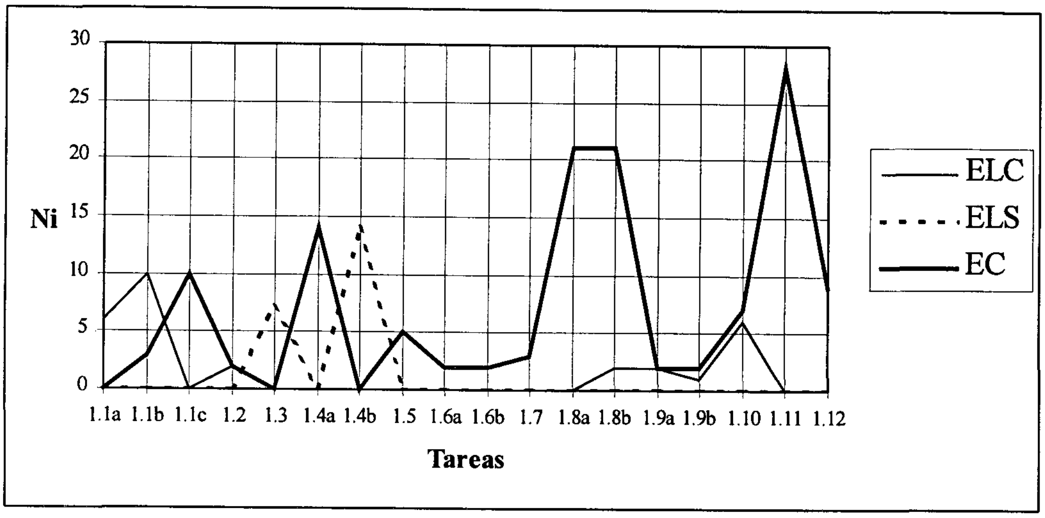


Fig. 4.4 (G70-1ª sesión): Errores.

C) Representaciones

Observamos en las gráficas de la figura 4.5 que a partir de la tarea 1.6a (tareas relativas al producto, división y m.c.d. de dos números) el uso de desplazamientos por la tabla (DT) está asociado a la utilización de los códigos de coloreado (CC), mientras que en las primeras tareas no se hace necesario el uso de dichos códigos de coloreado.

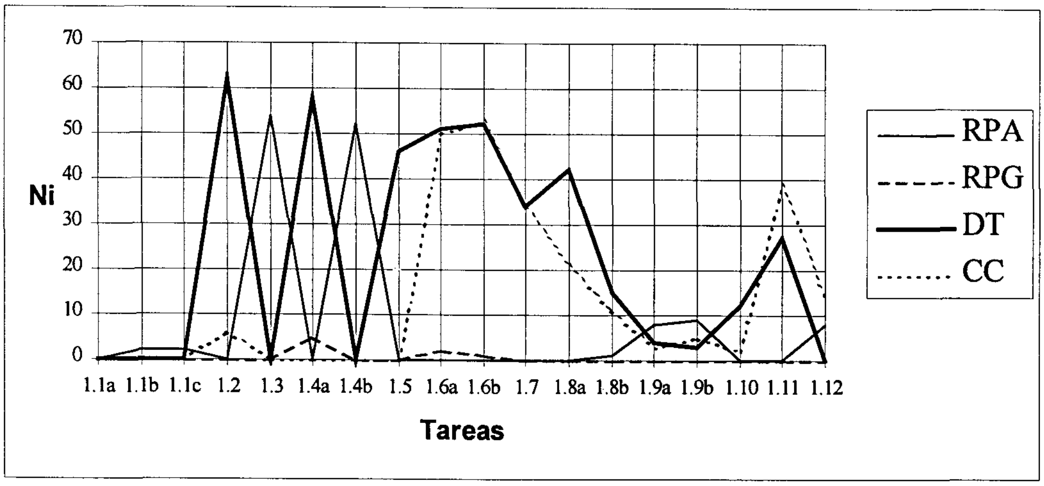


Fig. 4.5 (G70-1ª sesión): Representaciones.

Los estudiantes realizan representaciones de tipo aritmético (RPA) en la tareas 1.3 y 1.4b en las que se pide expresamente el uso de dicho lenguaje simbólico, resultando escasa la utilización del lenguaje aritmético-algebraico en las demás tareas, y casi nulo el uso de dibujos o representaciones gráficas (RPG). Observamos también que las respuestas que presentan valores altos para "desplazamientos por la tabla" (DT), se corresponden con las preguntas cuya característica es de "traducción de los aritmético a lo visual-geométrico" (AV).

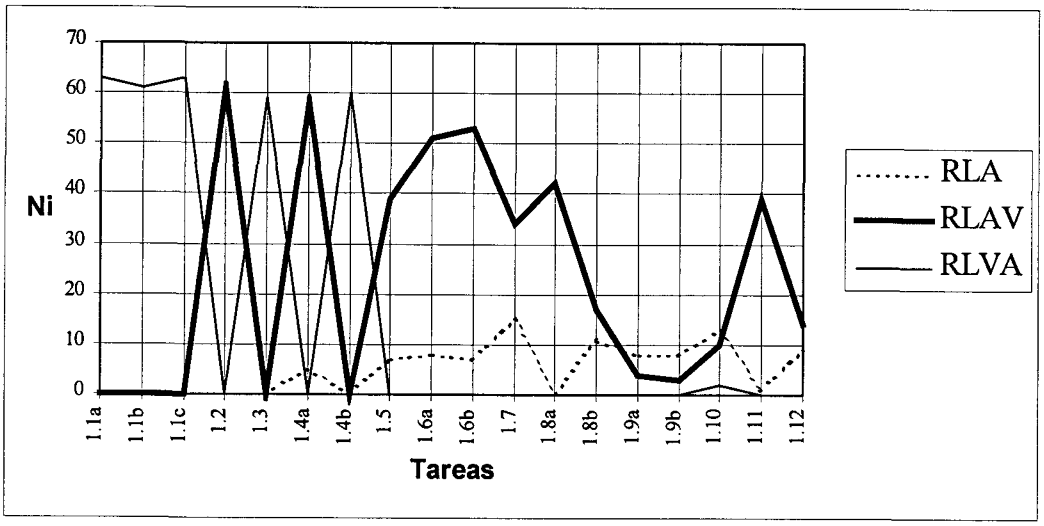


Fig. 4.6 (G70-1ª sesión): Relaciones.

D) Relaciones

La figura 4.6 muestra una gráfica de las relaciones que los estudiantes establecen en sus respuestas. Observamos que no existe coincidencia entre relaciones entre el ámbito visual-geométrico y el aritmético (RLVA) con relaciones entre el ámbito aritmético y el visual-geométrico (RLAV), y cuando se produce una de ellas no se produce la otra. Asimismo es de destacar el escaso número de respuestas que suponen una relación exclusivamente aritmética, lo que indica que la mayoría de los alumnos han efectuado algún tipo de "traducción" entre los marcos aritmético y visual-geométrico.

De las dos figuras 4.5 y 4.6 se desprende la relación existente entre "desplazamientos por la tabla" (DT) y "relaciones aritmético-visuales" (RLAV), junto con la característica de la tarea de "traducción de lo aritmético a lo visual-geométrico" (AV).

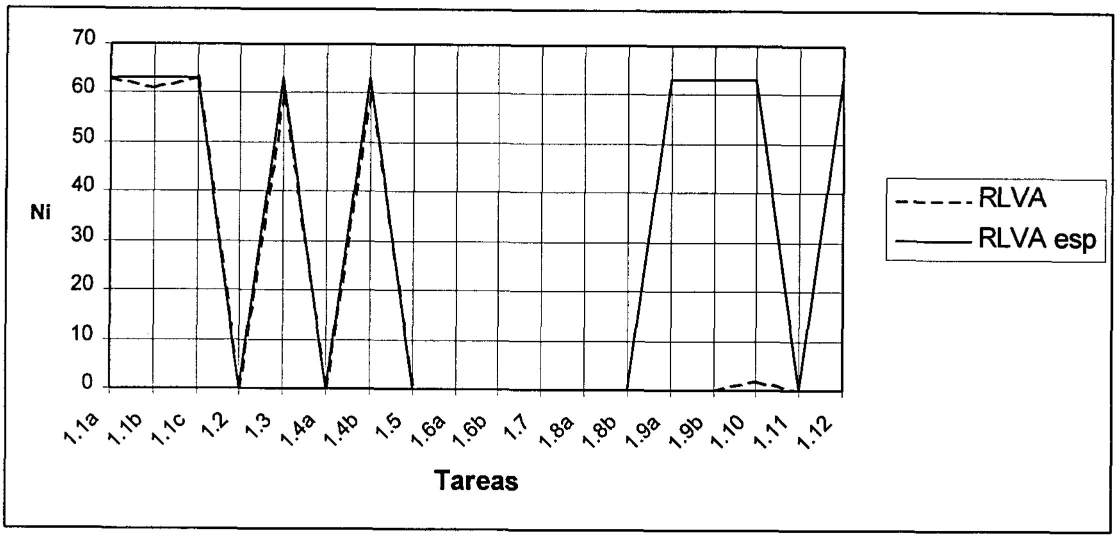


Fig. 4.6bis (G70-1ª sesión): Relaciones visuales-aritméticas esperadas y realizadas

Si comparamos los gráficos de la figura 4.6 bis en los que se recogen las relaciones visuales-aritméticas esperadas en cada uno de los ítems (RLVA esp), con las relaciones visuales-aritméticas efectuadas por alumnos (RLVA), podemos observar que existe una buena coincidencia entre estas relaciones excepto en los ítems 1.9a, 1.9b, 1.10 y 1.12, que tienen que ver con la división y el máximo común divisor.

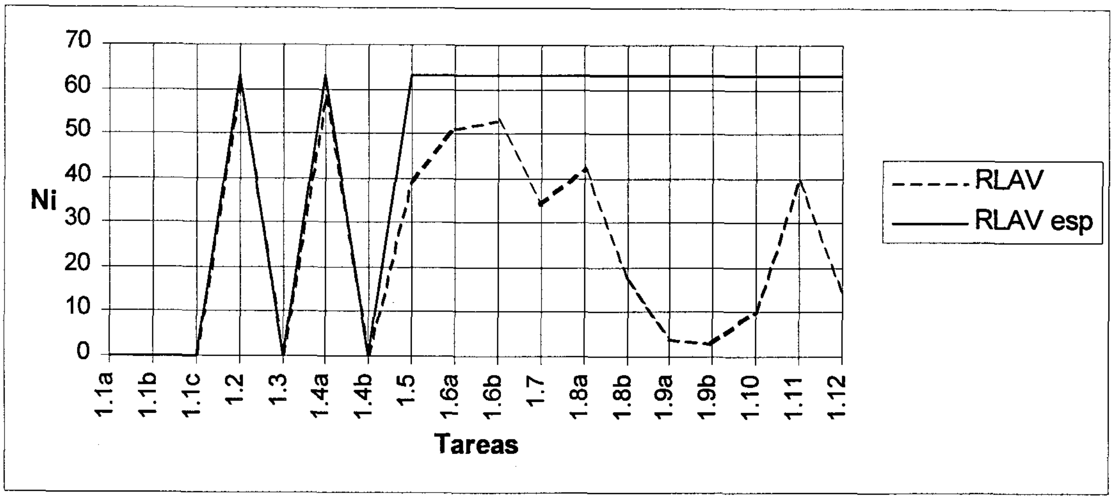


Fig. 4.7 (G70-1ª sesión): Relaciones aritméticas-visuales esperadas y realizadas

Las gráficas de la figura 4.7 muestran un mejor ajuste entre las relaciones aritmético-visuales esperadas (RLAV esp) y las relaciones aritmético-visuales realizadas por los estudiantes (RLAV), si bien éstas son también menores en las tareas relativas a la división.

4.2.7 Conceptualización de las operaciones

Realizamos un breve recorrido por las respuestas más significativas dadas por los grupos G70, G3 y G1 en relación con las operaciones de tipo aritmético utilizando la tabla coloreada. Estas respuestas las presentamos de manera transversal (cada operación analizada para los tres grupos), con el fin de ofrecer una visión global de los principales aspectos obtenidos en cada una de las operaciones.

Suma

Utilizando la tabla coloreada, los estudiantes encuentran otras formas de realizar sumas distintas de las habituales (Tarea 1.2).

G70

En G70 se aprecian tres tipos de respuestas correctas (Tabla 4.3):

A) Utiliza desplazamientos y considera decenas y unidades

(Ej. Situados en 24, bajar 2 casillas y a la derecha 1).

B) Utiliza desplazamientos y considera solamente unidades

(Ej. Situados en el 24, nos desplazamos 21 unidades a la derecha)

C) Utiliza desplazamientos y criterios de coloreado

(Ej. Desde el 24 adelanto 7 triángulos verdes)

Existe una amplia variedad de maneras de realizar sumas utilizando los códigos de coloreado de la tabla. Esta actividad no presenta dificultad alguna para nuestro alumnos, dado el alto índice de respuestas correctas (93.7%).

	Respuestas	Caracte-rísticas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Utiliza desplazamientos y considera decenas y unidades**	DT RLAV		59 (93.7)
	A_1) Situados en 24, bajar 2 casillas y a la derecha 1.		24 (38.1)	
	A_2) Desde uno de ellos, bajamos tantas casillas como decenas y a la derecha tantas casillas como unidades del otro sumando.		13 (20.6)	
	A_3) Sumamos las decenas (bajar) y luego las unidades (derecha)		2 (3.2)	
	B) Utiliza desplazamientos y considera solamente unidades	DT RLAV		
	B1) Situados en el 24, nos desplazamos 21 unidades a la derecha.		12 (19.0)	
	B2) Desde el 21, nos movemos 24 unidades a la derecha		3 (4.8)	
	C) Utiliza desplazamientos y criterios de coloreado	DT;CC RLAV		
	C1) Desde el 24 adelanto 7 triángulos verdes		3 (4.8)	
	C2) Como los dos son múltiplos de 3, adelanto 7 casillas verdes.		2 (3.2)	
Incorrectas	D) Nos movemos en forma de L	ELC;DT RLAV	2 (3.2)	4 (6.3)
	E) Sumo las unidades, y da 5, que es azul; sumo las decenas (da 4). Miro en la fila del 4 y columna del 5. Da el 45.	EC; CC	1 (1,6)	
	F) Del 24 me desplazo 3 lugares a la izquierda y sumo el 21	EC; DT	1 (1,6)	
Total				63

Tabla 4.3 (G70-1ª sesión)

G3

Los componentes de este grupo dan la respuesta A de la tabla anterior, que es la que podemos considerar la más económica y sencilla:

(P) Entonces, ¿Cómo haríais 24+21? Verbalmente.
(PD) **Sumar 20 y luego 1 ¿no?**
(P) Eso en la tabla ¿Como sería?
(PD) **Bajar dos lugares y uno a la derecha.**

G1

Julia proporciona la misma respuesta que en G3.

Resta

En los tres grupos se determinan, sin mayor dificultad, formas distintas de realizar restas entre dos números, de manera análoga a la suma (Tarea 1.4a).

G70

Este grupo ofrece respuestas para la resta similares a la suma cambiando las palabras "bajar" por "subir" y "derecha" por "izquierda", si bien el porcentaje de aciertos baja al 77.8%.

G3

Los alumnos de G3 proporcionan dos procedimientos para restar 19 unidades:

(P) ¿Cómo haríamos para restar 36 - 19?
(D) **Para restar subiríamos una fila**
(Domingo escribe: 36 - 1x10) **y ahora a la izquierda 9 unidades**
(Domingo escribe: 36 - 1x10 - 9)
(P) Bien: 36-19
(PD) **Se podría hacer también subiendo 2 decenas y luego sumar 1.**
(D) (Domingo escribe: 36 -2x10 +1.

G1

En la entrevista, se aprecia el proceso que experimenta Julia hasta descubrir la equivalencia entre "subir 1, izquierda 9" y "subir 2, derecha 1", llegando a confundir *restar 19* con *restar 21*:

(P) ¿Cómo haríamos 36 menos 19?
(J) Partiendo del 36, 19. **Pues sería subiendo 2 cuadros para arriba y uno para la izquierda.**
(P) Y ahí ¿Qué es lo que has hecho?
(J) Otra L. ¡Ah no, 19! **Subo uno y 1 a la izquierda**. No, espera!
(P) Vamos a ver, tranquila. Vamos por partes. Si subimos uno, restamos 10, y..
(J) Ahora restamos 9.
(P) ¿Cómo restamos 9?
(J) **9 cuadros para la izquierda.**
(P) 1, 2, 3, ... y 9 (El profesor señala 9 casillas a la izquierda del 26).
(J) Sería lo mismo. Del 36 hemos pasado al 17. También sería... es verdad, para la derecha.
(P) Sería subir 2...
(J) Y sumar 1 (derecha 1).
(P) Que es lo mismo que subir 1, izquierda 9. Eso aritméticamente ¿Qué es? (silencio).
(P) Hemos visto dos posibilidades. a) "Subir 1, izquierda 9" ¿Cómo lo traduces?

(J) Subir es restar 10, y a la izquierda restar 9.
(P) Y la opción b)
(J) **Subir 2, derecha 1**. Sería 36 -20 y sumar 1.

Relación entre suma y resta

G70

Un 68.2% de los estudiantes de este grupo pone de manifiesto el carácter de operaciones inversas que tienen la suma y la resta señalando el carácter de movimientos opuestos de bajar/subir y derecha/izquierda (Tarea 1.5).

Algunas respuestas significativas en G70 son:

Sumar es bajar y a la derecha, y restar es subir y a la izquierda.

Son movimientos opuestos.

Son simétricos en la tabla.

G3

El hecho de ser la suma y resta operaciones inversas es señalada también en este grupo:

(P) ¿Qué relación se pone de manifiesto entre la suma y la resta con este lenguaje de bajar, subir, etc.? Estamos empleando bajar, subir, derecha, izquierda, que se corresponde con ...
(DL) Sumar decenas, restar decenas, sumar unidades, restar unidades.
(P) ¿Qué os sugiere esto?
(PD) Orden.
(P) ¿En qué sentido? ¿De ordenar los números?
(PD) Los números están ordenados, ya.
(P) ¿Qué más cosas? Lo contrario de subir ¿Qué es?
(D) **¿Que las operaciones de sumar y restar son operaciones inversas?**

G1

Julia tampoco encuentra dificultad en este punto:

(P) ¿Qué relación hay entre las dos operaciones y las palabras de subir y bajar?
(J) **Son operaciones contrarias**. Subes es una operación y si bajas es la operación contraria. Lo mismo que para derecha e izquierda.

Multiplicación

G70

En relación con la multiplicación (tarea 1.6a) existen dos tipos de respuestas que utilizan códigos de coloreado:

a. Aparece la multiplicación como suma de sumandos iguales, como es el caso de la siguiente respuesta para efectuar 4x7, siendo el código del 4 el círculo y el del 7 el triángulo:

A partir del 4 contamos 7 círculos.

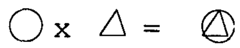
Esta respuesta se cita de manera aritmética por otros alumnos:

Sumar 7 veces 4 a partir de 1.

b. Se busca la primera casilla con coincidencia de "atributos" del 4 y del 7. (Esta regla no es válida cuando los números no son primos entre sí, como ponen de manifiesto los componentes de G3):

Nos desplazamos a la derecha hasta el número que contenga los símbolos que identifican a los dos factores, el círculo y el triángulo.

Esta misma respuesta se da por otros alumnos por medio de dibujos:



G3

En este grupo, además del carácter de sumas reiteradas para la multiplicación, queda patente la propiedad conmutativa del producto y que la validez de la respuesta b en G70 es solamente para números primos entre sí:

(P) Vamos con el producto ¿Cómo haríais en la tabla 7x4?
(D) **Cogeríamos el 7 e iríamos aumentando 4 veces 7.**
(P) ¿Pero cómo lo haríamos con la tabla (los atributos)?
(D) El triángulo que hace número 4.
(P) O sea, ¿El cuarto triángulo? ¿Contando el 7?
(D) Contando el 7. Tendríamos: 7, 14, 21, 28
(P) Escribe en la pizarra su traducción en lenguaje aritmético.
(D) **(Domingo escribe 7+7+7+7).**
(P) ¿Alguna otra forma de hacerlo?
(PD) **4x7; igual, como se cumple la conmutativa.**
(P) **¿Cómo se haría 4 x 7?**
(D) **Se cogería el 4 y nos movemos 7 veces, 7 círculos.**
(P) Escríbelo aritméticamente.
(D) **(Domingo escribe 4+4+4+4+4+4+4** (7 veces)
(P) ¿Alguna otra manera de hacerlo?
(D) **El primer número donde aparezca el círculo y el triángulo juntos.**

(P) Y eso ¿Por qué? Lo que obtenemos es un número que es múltiplo de 7 y de 4, pero... **¿Será eso válido para todos? ¿Cómo son 7 y 4 entre sí?** (PD) **Primos relativos** (P) Y si cogemos dos números que no sean primos entre sí? Por ejemplo 4 y 6. 4x6 es 24. **¿24 es el primer número que es círculo y cuadrado?** (DL) **No. El primero es 12, que no es 4 x 6.** (P) **La regla esa es válida para ...** **(PD) Para los números primos entre sí.**

G1

Julia pone el énfasis en la multiplicación como sumas reiteradas:

(P) Vamos con la multiplicación. 4x7 ¿Cómo lo hacemos? (...) (J) **Sería contar, a partir del 4, 7 cuadrados.** (P) ¿Cuadrados? (J) 7 **círculos.** (P) ¿Y por qué 7 círculos a partir del 4? (J) Hombre, también se puede hacer a partir del 7, contando 4. (P) ¿4 qué? (J) 4 triangulicos. El símbolo que tenga. (P) ¿Cómo has llegado a la conclusión de que 4 x 7 es contar 7 círculos a partir del 4? (J) **Se supone que (el niño) sabe la relación de la multiplicación con la suma.**

Julia enuncia la propiedad conmutativa del producto en función de la propiedad conmutativa de la suma:

(P) ¿Y qué propiedad se pone de manifiesto ahí? (J) **La conmutativa.** (P) ¿Me la podrías decir? Pero no enunciarla técnicamente, sino en este lenguaje de tabla. (J) O sea, nada de decir que el orden de los factores no altera el producto. (P) No. En el lenguaje este que estamos utilizando. Primero me has dicho que puedes hacer, situados en el 4 contar 7 círculos; o bien, situados en el 7 contar 4 triángulos. ¿Es igual las dos cosas? (J) Sí. (P) Pues dímelo. (J) **Pues que da igual sumar 4 veces 7 que 7 veces 4.**

División

G70

Cuando se plantea una división exacta (Tarea 1.8a) los alumnos utilizan dos métodos de cálculo correctos (12.7%):

a. Se utilizan criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla:

Contaría los triángulos verdes que hay desde el 3 al 45.

b. Se utilizan solamente desplazamientos por la tabla sin hacer mención a los criterios de coloreado:

A partir del 45 empiezo a contar de 3 en 3 hacia la izquierda, y cuento las veces que lo he hecho.

Cuando se trata de una división inexacta (Tarea 1.8b), el número de respuestas correctas desciende a un 7.9% y en todas ellas se utilizan criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla:

Desde el 47 subo al 6 y cuento 7 cuadrados. Desde el 47 al primer cuadradito que nos encontramos, (el 42) hay 5 números, que es el resto.

G3

Los componentes de G3 realizan la división 56:7 mediante restas sucesivas, si bien Domingo no tiene muy claro cuándo termina el proceso de restar:

(D) **Tomamos 56 y vas restándole 56 -7-7-7 y al final el número de veces que aparezca el 7 es el cociente.**
(P) ¿Hasta cuándo estamos quitando 7?
(D) Hasta que lleguemos a 7.
(P) Vamos a repartir los 56 caramelos. Quitamos 7 para Pepito, estos otros 7 para Juanita, y así ¿Hasta cuándo? ¿Hasta que queden 7 en la bolsa? ¿Los queremos repartir todos?
(DL) **Hasta que no quede ninguno.**

Se identifica correctamente el resto cuando la división no es exacta:

(P) **¿Y si hacemos 60:7?**
(PD) Sería igual, contando los triángulos que aparecen, pero la división no es exacta. **Hay un resto.**
(P) ¿Cómo resolvemos eso?
(PD) Contando las casillas que hay hasta 60. **El resto sería los números hasta el 56 y el cociente como antes.**

G1

Julia utiliza también los códigos de coloreado y las restas sucesivas para realizar la división. En principio la alumna concibe la división como "repartir". Al emplear la palabra "agrupar" (sugerida por el profesor) Julia señala que podemos hacer grupos de 7 en 7 fijándonos en el triángulo (código del 7 en la tabla coloreada).

(P) Vamos con la división. ¿Cómo haríamos 35:7 por ejemplo, sin utilizar la regla de dividir?
(J) Sé el resultado, y ya solo me fijo en eso.
(P) **¿Qué significa dividir?**
(J) **Repartir.**
(P) ¿Qué más?. Otros verbos. ¿Para repartir qué hay que hacer?

(J) No se me ocurre nada. (silencio) (P) Pues por ejemplo **agrupar**... ¿Cómo aplicamos el verbo agrupar, a esta tabla? En realidad es lo contrario de multiplicar ¿no? (J) Es que como sé que es 35... (P) ¿Te resulta un problema saber el resultado? **Pues 36:7.** (J) **Hacer grupos de 7. Nos fijamos en los que tienen el triangulico. Pues contando hacia atrás.** (P) ¿Cómo? (J) Divides 35 entre 7 hasta llegar a 7. (P) ¿O hasta llegar a 0? (J) Si es hasta 0 no te sale.

Julia tampoco tiene claro cuándo termina el proceso de restas sucesivas:

(continúa el párrafo anterior) (P) Vamos a suponer que cada caramelo tiene un número. El 1°, el 2°,... el 7°; ya tenemos un paquete, y así. ¿Y si contamos hacia adelante, nos daría igual? (J) No. Tendría que dar un número menor. (P) Sí, pero a la hora de hacer paquetes. Los 7 primeros para Juan, etc. (J) Pero ahí estás agrupando. **Ah! es verdad. Sería igual que la multiplicación. Haces grupos de 7 hasta que llegues al número que quieres dividir.** (P) Hasta que no me quede ninguno. (J) Haces grupos de 7. (P) ¿Y eso cómo? (J) **Contando triangulicos, hasta que llegues al número que estás dividiendo.**

Julia establece el resto de la división inexacta:

(P) **¿Y hacer 38:7?** (J) **Sería lo mismo... pero como no es múltiplo de 7. Sería empezar a contar hasta el triángulo que más se acerque al 38.** (P) Y luego, hasta llegar a 38 ¿Qué hacemos? (J) Pues eso. (P) Tenemos los caramelos en la mesa y repartimos. ¿Qué pasa? (J) **Que sobran 3.** (P) Y eso ¿Qué es? (J) **El resto.**

Relación entre multiplicación y división

G70

El porcentaje de alumnos que pone de manifiesto que la multiplicación y división son operaciones inversas (29%) es sensiblemente menor que en el caso de la suma y resta. Además, la mitad de los estudiantes no responden a esta tarea (Tarea 1.10). El tipo de respuestas es similar a las dadas para la suma y resta:

Son simétricas. Subir es dividir y bajar es multiplicar.

Al multiplicar se cuenta hacia abajo aquellas casillas que tienen el mismo símbolo, y dividir es al contrario.

El producto es añadir partes iguales y la división restar partes iguales.

G3 y G1

En ambos grupos queda de manifiesto esta relación entre multiplicación y división, ya que se han concebido como sumas y restas sucesivas, respectivamente.

Cálculo del m.c.d. de dos números

G70

Solo el 19.0% responden de manera correcta:

Buscando la casilla más pequeña que contenga los colores comunes al 24 y 36.

Cuando en la tarea siguiente se pide que se relacione la respuesta dada anteriormente con el algoritmo usual para el cálculo del m.c.d. (tarea 1.12) no surgen respuestas que señalen tal relación, por lo que podemos conjeturar que los alumnos han encontrado la solución por métodos tradicionales y posteriormente han buscado un criterio para aplicarlo en la tabla coloreada.

G3 y G1

Tanto en G3 como en G1 no se llega a ninguna respuesta satisfactoria, lo que creemos que, antes de realizar esta tarea, hubiera sido conveniente abordar procedimientos para el cálculo de los divisores de un número en la tabla coloreada.

4.2.8 Consideraciones sobre los resultados

De acuerdo con los objetivos planteados en esta primera sesión, sintetizamos en la tabla 4.3bis las principales conclusiones que obtenemos del análisis de las respuestas:

G70

Objetivos	Consideraciones
1. Relacionar las operaciones aritméticas elementales con los desplazamientos en la Tabla-100.	Los alumnos no presentan problemas para establecer estas relaciones a la vista del alto índice de respuestas correctas de las tareas correspondientes.
2. Expresar en lenguaje matemático el significado de los diversos desplazamientos que los alumnos efectúan en la Tabla-100.	La mayoría de los estudiantes escriben una expresión aritmética adecuada que refleja los desplazamientos por la tabla coloreada.
3. Establecer criterios para efectuar la suma, resta, multiplicación y división con dos números en la Tabla-100, utilizando el significado aritmético dado a los desplazamientos por dicha tabla.	Resultan más fáciles de identificar la suma y la resta en la tabla coloreada que la multiplicación y la división, y ésta es más difícil de identificar que el producto. Cuando la división es inexacta hay la mitad de acierto que cuando es exacta.
4. Utilizar los criterios anteriores para determinar el carácter de sumas y restas repetidas que tienen la multiplicación y la división respectivamente, así como el hecho de ser éstas operaciones inversas entre sí.	Aparece con mayor frecuencia la multiplicación como de sumas reiteradas que la división como restas reiteradas. El carácter de operaciones inversas surge con más facilidad para la suma y resta que para el producto y división.
5. Establecer el concepto de máximo común divisor de dos números en la tabla coloreada, buscando estrategias para su determinación mediante exclusiva utilización de los criterios de coloreado de dicha tabla.	No se ha encontrado ninguna forma para el cálculo del m.c.d. de dos números. Es conveniente realizar tareas previas sobre el cálculo de los divisores de un número en la tabla coloreada.

Tabla 4.3 bis (G70-1ª sesión)

G3

Los componentes de este grupo realizan las tareas de esta primera sesión de manera satisfactoria de acuerdo con los objetivos planteados. No obstante expresan cierta duda en el proceso de restas reiteradas para interpretar la división, sin tener claro si hay que restar hasta agotar el dividendo o hasta llegar al divisor. No encuentran ninguna forma de calcular el m.c.d. de dos números distintas del algoritmo usual aritmético.

Se advierte en estos estudiantes cierta facilidad a la hora de comprender las preguntas y responder con prontitud a ellas, así como el gran interés que despiertan en ellos este tipo de tareas. Apreciamos seguridad en el manejo de las herramientas aritmético-algebraicas.

G1

Julia obtiene unos resultados similares a los de G3. Aunque parece tener menor preparación matemática que sus compañeros de G3 y duda a la hora de responder en varias ocasiones, Julia muestra gran interés por las tareas propuestas y se advierte en ella un predominio de la intuición y capacidad de visualización sobre el manejo de las herramientas aritmético-algebraicas.

4.3 Segunda sesión: Divisibilidad y patrones

4.3.1 Descripción general y objetivos

Una vez familiarizados con la tabla coloreada y establecidas formas para realizar operaciones aritméticas básicas utilizando los criterios de coloreado de la tabla, aprovechamos el propio proceso de coloración para identificar patrones de tipo visual y atribuirles el carácter de operador aditivo. Asimismo, tratamos de obtener regularidades numéricas de los múltiplos de un número en relación con la posición que ocupan en las diagonales constituidas por dichos múltiplos .

Para esta sesión establecemos los siguientes

4.3.1.1 Objetivos de la sesión

1. Buscar regularidades numéricas entre los múltiplos de un número k (k = 2, 3, ...9), que constituyen patrones rectilíneos en forma diagonal, teniendo en cuenta la orientación de la diagonal y la posición que ocupan en ella dichos múltiplos.

2. Identificar patrones visuales producidos por los múltiplos de un número y su interpretación aritmética como operador aditivo.

4.3.2 Actividades de la sesión. Tareas propuestas

Tarea 2.1 (T 2.1)

En la tabla coloreada hemos observado cómo los distintos múltiplos (los colores, círculos y triángulos) se disponen siguiendo determinados patrones. Los múltiplos de 2, los de 5 y los de 10 se disponen en columnas, los de 3, 4, 6, etc. en diagonales.

Consideremos las diagonales que van en la dirección y sentido (↙) , de modo que la primera diagonal coloreada en verde sería {3, 12, 21}. Asignemos a cada número el par (d, p), donde **d** es el lugar que ocupa la diagonal de entre las de su color en la tabla (1ª, 2ª, 3ª, etc.), y **p** la posición que ocupa el número dentro de esa diagonal. Así el 36 como múltiplo de 3 viene dado por el par (3, 4) porque es el 4º término de la 3ª diagonal (en verde), pero considerado como múltiplo de 6 le corresponde el par (3, 2) porque es el 2º término de la 3ª diagonal (números recuadrados).

Consideremos también las otras diagonales (↘) y adoptemos igual notación. Empezando por la derecha, la primera diagonal de los múltiplos de 3 (en verde) estaría formada sólo por el 9; la segunda sería {6, 18, 30}, etc..

Completa la tabla siguiente:

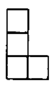
3x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘	4 x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘	6 x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘
3x1=3	(1,1)	(3,1)	4x1=4	(1,1)	(2,1)	6x1=6	(1,1)	(1,1)
3x2=6	(2,1)	(2,1)	4x2=8	(2,1)	(1,1)	6x2=12	(1,1)	(2,1)
3x3=9			4x3=12			6x3=18		
	(2,3)		4x4=16		(2,2)	6x4=24		
	(3,2)	(2,2)	4x8=32				(2,3)	
3x9=27			4x10=					(3,2)

Tabla 4.4 (G70-2ª sesión)

T 2.2 **Expresa en lenguaje ordinario las regularidades que encuentres en la tabla anterior.**

T 2.3 **Expresa las regularidades que encuentres en la tabla anterior usando símbolos matemáticos.**

T 2.4 **¿Podrías extender la/s regla/s que has encontrado a los múltiplos de otros números, como el 7, el 8 y el 9?**

T 2.5 Además de los patrones en columna o en diagonal podemos movernos por los múltiplos de un número según el movimiento del caballo de ajedrez, por ejemplo. Situados en el 7 podemos pasar con ese movimiento al 28, y de ahí al 49, etc. Este patrón tendría la forma  y lo podríamos interpretar como el operador "sumar/restar 21".

Completa la tabla siguiente buscando patrones para los múltiplos de 3, 4, 5, ..., indicando si el patrón es de tipo diagonal, columna, etc. y escribiendo el operador que le corresponde a cada uno de los patrones:

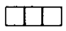
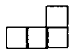
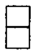
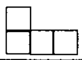
k	Patrón	Operador	k	Patrón	Operador	k	Patrón	Operador
2		2	5			8		
		10-2=8						
		10						
		10+2=12						
3			6			9		
4			7					

Tabla 4.5 (G70-2ª sesión)

El anexo 4.1 recoge con detalle los resultados esta sesión. Comentamos en este capítulo las respuestas correspondientes a la tarea 2.5, que pueden tener influencia en el estudio posterior de las representaciones visuales de los operadores aditivos.

4.3.3 Criterios para valorar y clasificar las respuestas

Clasificamos los patrones encontrados para los múltiplos de 3, 4, ...,9 atendiendo a los siguientes criterios:

A) Logros

- **Correcto (C)**: si el patrón se corresponde adecuadamente con el operador aditivo asignado.

- **Incorrecto (I)**: si el patrón no se corresponde adecuadamente con el operador aditivo asignado.

B) Tipo de patrón

Indicamos en la tabla 4.6 la orientación y notación del patrón, las celdillas que lo componen, y el operador asociado:

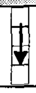
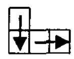
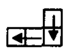
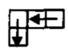
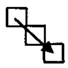
Tipo de patrón	Notación	Descripción	Ejemplo	
			Dibujo	Operador
Bajar	(B) (↓)	Tiene solamente decenas		[30]
Derecha	(D) (→)	tiene solamente unidades		[3]
Bajar, Derecha	(BD) ↓→)	Tiene decenas y unidades, en ese orden.		[12]
Derecha, Bajar	(DB) (→↓)	Tiene unidades y decenas, en ese orden.		[12]
Bajar, Izquierda	(BI) (←↓)	Tiene decenas y unidades, en ese orden.		[8]
Izquierda, Bajar	(IB) (←↓)	Tiene unidades y decenas, en ese orden.		[8]
Diagonal izquierda	(DI) (↙)	Tiene solamente tramos oblicuos.		[9]
Diagonal Derecha	(DD) (↘)	Tiene solamente tramos oblicuos.		[22]

Tabla 4.6 (G70-2ª sesión)

4.3.4 Resultados generales en G70

Tipos de patrones

Sintetizamos las tablas de resultados que se encuentran en el anexo 4.1 mediante la tabla 4.7, donde figuran las frecuencias absolutas de los patrones obtenidos por los estudiantes para los múltiplos de k, y entre paréntesis, las frecuencias relativas correspondientes en % en relación con el subtotal que figura en la columna a la que pertenece la celdilla.

Los % de los subtotales están calculados en relación con el número total (555) de patrones realizados.

Tipo de patrón		m3		m4		m5		m6		m7		m8		m9		Subtotal		Total
		C	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C	I	
B	↓	17 (13,6)	5 (4,0)	27 (22,3)	6 (5,0)	44 (71,0)	0 (0,0)	22 (28,2)	5 (6,4)	10 (15,9)	2 (3,2)	14 (21,5)	13 (20,0)	0 (0,0)	8 (19,5)	134 (24,1)	39 (7,0)	173 (31,2)
D	→	6 (4,8)	6 (4,8)	8 (6,6)	6 (5,0)	9 (14,5)	6 (9,7)	0 (0,0)	3 (3,8)	1 (1,6)	2 (3,2)	0 (0,0)	5 (7,7)	0 (0,0)	2 (4,9)	24 (4,3)	30 (5,4)	54 (9,7)
BD	↓→	51 (40,8)	4 (3,2)	36 (29,8)	0 (0,0)	1 (1,6)	2 (3,2)	30 (38,5)	3 (3,8)	21 (33,3)	5 (7,9)	0 (0,0)	8 (12,3)	0 (0,0)	4 (9,8)	139 (25,0)	26 (4,7)	165 (29,7)
DB	→↓	8 (6,4)	0 (0,0)	11 (9,1)	1 (0,8)	0 (0,0)	0 (0,0)	3 (3,8)	1 (1,3)	5 (7,9)	1 (1,6)	0 (0,0)	3 (4,6)	0 (0,0)	0 (0,0)	27 (4,9)	6 (1,1)	33 (5,9)
BI	↓←	8 (6,4)	2 (1,6)	16 (13,2)	1 (0,8)	0 (0,0)	0 (0,0)	4 (5,1)	1 (1,3)	11 (17,5)	0 (0,0)	17 (26,2)	0 (0,0)	10 (24,4)	0 (0,0)	66 (11,9)	4 (0,7)	70 (12,6)
IB	←↓	5 (4,0)	0 (0,0)	5 (4,1)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	4 (5,1)	2 (2,6)	5 (7,9)	0 (0,0)	4 (6,2)	1 (1,5)	5 (12,2)	0 (0,0)	28 (5,0)	3 (0,5)	31 (5,6)
DI	↙	10 (8,0)	0 (0,0)	4 (3,3)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	12 (29,3)	0 (0,0)	26 (4,7)	0 (0,0)	26 (4,7)
DD	↘	0 (0,0)	3 (2,4)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	3 (0,5)	3 (0,5)
Subtotal		105 (19)	20 (4)	107 (19)	14 (3)	54 (10)	8 (1)	63 (11)	15 (3)	53 (10)	10 (2)	35 (6)	30 (5)	27 (5)	14 (3)	444 (80)	111 (20)	**555 (100)**
Total		125 (22.5)		121 (21.8)		62 (11.2)		78 (14.1)		63 (11.4)		65 (11.7)		41 (7.4)		**555 (100)**		

Tabla 4.7 (G70-2ª sesión)

4.3.5 Análisis de resultados

G70

Con los gráficos que realizamos a partir de la tabla anterior, realizamos las siguientes observaciones:

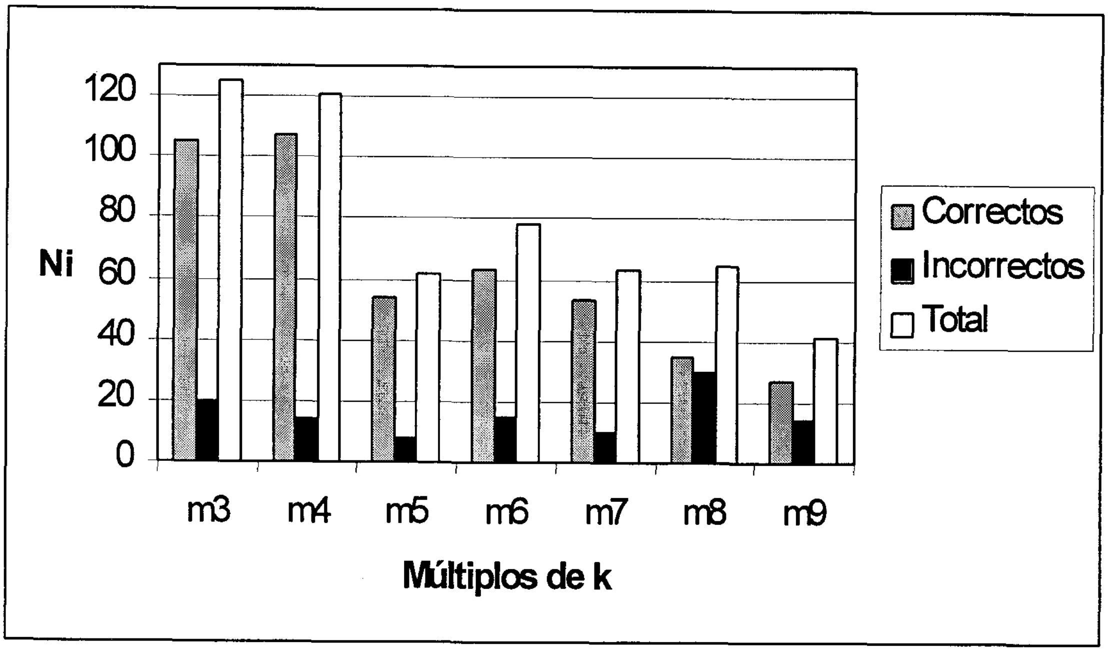


Fig. 4.8 (G70-2ª sesión)

De acuerdo con el gráfico de la figura 4.8, que recoge los patrones totales clasificados en correctos e incorrectos:

1. La mayor concentración de patrones se da para los múltiplos de 3 y de 4, siendo la distribución de patrones más homogénea para el resto de múltiplos.

2. La mayoría de los patrones son correctos, presentándose el número mayor de patrones incorrectos para los múltiplos de 8.

En relación con el gráfico de la figura 4.9, que recoge los patrones correctos clasificados por su orientación:

3. Hay más variedad de patrones para los múltiplos de 3, 4 y 7 que para el resto.

4. Existe un claro predominio de los patrones de la forma "bajar, derecha" (BD), sobre los demás, excepto para los múltiplos de 5, que se disponen en forma de columna y son de la forma "bajar" (B).

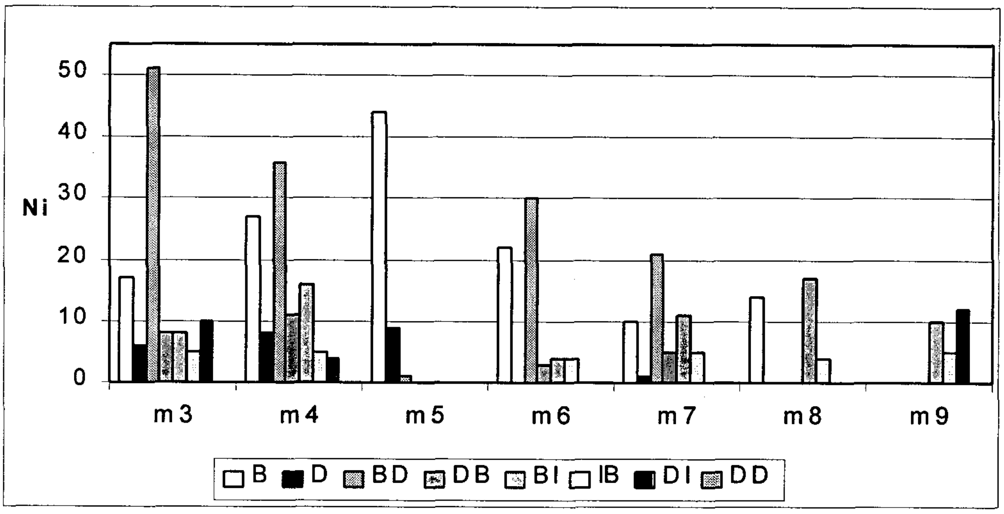
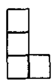


Fig. 4.9 (G70-2ª sesión)

Este hecho puede ser atribuido:

- A una tendencia natural de visualizar los patrones por parte de los estudiantes, ya que el modo habitual de lectura y escritura es de arriba-abajo y de izquierda-derecha.

- A la influencia que puede haber tenido la redacción de las tareas, como es el caso de la tarea 2.5 en que figura como ejemplo el patrón .

- Al hecho de asociar cada patrón a un operador aditivo y éste se escribe habitualmente en forma de "decenas, unidades", en este orden. Este es precisamente el criterio que utilizamos a la hora de elegir una cadena como representante canónico de la clase a la que pertenece, respetar ese orden y que tenga el menor número de casillas, como detallaremos en el capítulo 6.

Atendiendo al gráfico de la figura 4.10 que muestra solamente los patrones en forma de L (bajar/subir, derecha/izquierda: BD, DB, BI, IB:

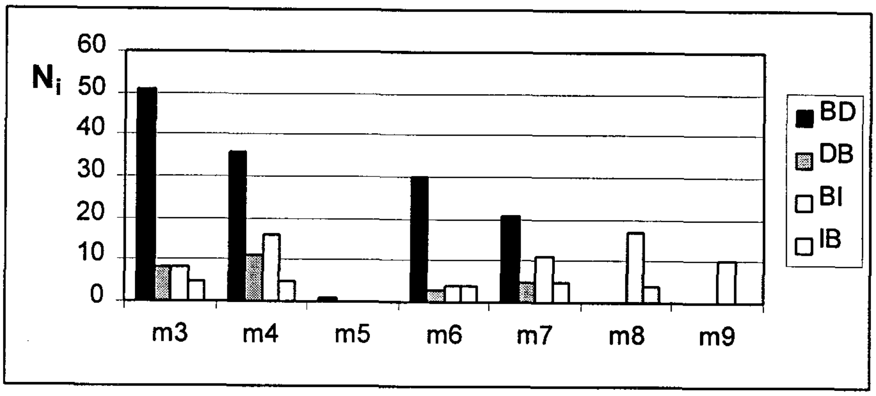


Fig. 4.10 (G70-2ª sesión)

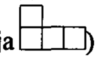
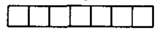
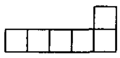
5. Observamos un predominio de patrones de la forma *"decenas, unidades"*, en ese orden, sobre aquellos en que primero se expresan las unidades y luego las decenas. Así por ejemplo hay más patrones de la forma *"bajar, derecha"* (BD, representado con trazo continuo grueso) que de *"derecha, bajar"* (DB, en trazo punteado grueso), y aunque en menor escala, hay más patrones de la forma *"bajar, izquierda"* (BI, en trazo continuo delgado) que de *"izquierda, bajar"* (IB, en trazo punteado delgado).

6. Solamente existe un 4.7 % de patrones correctos en forma diagonal, correspondientes a los múltiplos de 3, 4 y 9.

7. En los resultados finales (tabla 4.7), el patrón con mayor porcentaje global es *"bajar"* (B) seguido de *"bajar, derecha"* (BD), con resultados correctos muy similares.

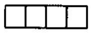
G3

Las conversaciones correspondientes a G3 (anexo 4.2) ponen de manifiesto la variedad y cantidad de patrones visuales que surgen al analizar los múltiplos de un número en la tabla coloreada, así como el operador aditivo que se atribuye a cada patrón visual. Se observa la riqueza de situaciones que proporciona el trabajar a la vez con figuras geométricas (cadenas) y con conceptos aritméticos (operador aditivo asociado a la cadena). Tal es el caso de la equivalencia de algunas cadenas en relación con el operador aditivo:

(El profesor pregunta por los patrones correspondientes a los múltiplos de 6)
(P) ¿Y los de 6, que están en un cuadrado?
(DL) Bajar 1 y sumar 2. (Dolores dibuja )
(P) Otro. ¿En forma de columna?
(DL) Bajar 3.(Dolores dibuja )
(P) ¿Qué le pasa a la fila? Si me sitúo en el 6 ¿Cómo llego hasta el 12?
(DL) Pues derecha 6. (Dolores dibuja ).
(P) Pero **derecha 6 es lo mismo que...**
(DL) y (PD) **Bajar 1, izquierda 4.**(Pedro señala )

G1

En la conversación con Julia también se pone de manifiesto la variedad de patrones que encuentra y su interpretación como operadores aditivos. No obstante se advierte cierta confusión en el número de casillas que compone el patrón. Para obtener el operador asociado a un patrón hay que contar el número de desplazamientos por la tabla en sentido vertical y horizontal, a partir de la casilla inicial. Julia duda si contabilizar esta casilla inicial como una unidad o decena:

(P) Si partimos del 3 y le sumas 6 ¿A dónde te vas?
(J) **¿El 3 se cuenta? Eso es lo que me está haciendo el follón.**
(P) Tú te sitúas en el 3 y al 3 le sumas 6. Uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis.
(J) Es que llevo todo el rato contando el 3.
(P) Bueno, el 3 lo cuentas a la hora de ponerlo en su casilla. A la hora de poner el patrón.
(J) Entonces el 6 (Julia se refiere a la cadena que comienza en 3 y termina en el 6), que sería 3 nada más (Julia señala del 3 al 6)
(P) Ese ¿Qué operador sería?
(J) Más 3. ¿Lo pongo también?
(P) Como operador fila.
(J) **(Julia dibuja** **)**
(P) Ya tenemos el 3, el 9. ¿Qué ocurriría con el 6?
(J) ¿Cómo que qué ocurriría?
(P) Sí, **el operador "sumar 6" ¿Cuál sería?**
(J) Otra fila.
(P) **¿Cuántas casillas tendría?**
(J) 7.

Ante la pregunta del profesor de si la cadena correspondiente al 12 se puede poner como la suma de las cadenas correspondientes a 3 y 9, Julia realiza (con cierta ayuda del profesor) una composición de cadenas que encierra cierta dificultad de visualización, ya que ambas se superponen en un tramo. Este aspecto de composición de cadenas se tratará posteriormente con más detalle en el estudio de los operadores aditivos en la Tabla-100:

(P) (...) El siguiente el 12 ( ) ¿Se puede poner como combinación del 3 y el 9?
(J) **¿Se pueden poner unos encima de otros?**
(P) Se pueden poner de forma que el final de uno coincida con el principio de otro. Son como cadenas.
(J) **Que solo coincida un cuadrado ¿no?**
(P) Claro. El final de uno con el principio del otro. Vamos a ir añadiendo. El 12 ( ) se puede poner como el 9 ( ) más el 3 ( ).
(J) **Pero si solo coincide con 1, te sobraría para acá (Julia señala del 12 hacia la derecha).**
(El profesor le da una hoja con tablas cien y le pide que componga o sume patrones).
(P) Rodea el 3, y coloca el patrón 9. Llegamos al 12. Ahora al 12 le añadimos (aplicamos) el patrón 3. **(Julia realiza la figura A4.3-1).**

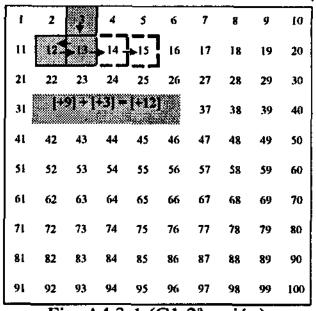


Fig. A4.3-1 (G1-2ª sesión)

(J) **Entonces coincidirían 2 cuadrados ¿no?**
(P) Lo importante es que el final de una cadena coincida con el principio de la otra. Aunque se superpongan, no pasa nada. Esta L ( ) se puede poner como esta L ( ) más esta fila ( ) ¿Y eso cómo lo podríamos escribir?
(J) **(Julia escribe: patrón 12 = +9 +3.**

4.3.6 Consideraciones sobre los resultados

Realizamos en la tabla 4.7 bis un balance de los logros alcanzados en G70 de acuerdo con los objetivos propuestos en esta sesión.

Objetivos	Consideraciones
1. Buscar regularidades numéricas entre los múltiplos de un número k (k = 2, 3, ...9), que constituyen patrones rectilíneos en forma diagonal, teniendo en cuenta la orientación de la diagonal y la posición que ocupan dichos múltiplos dentro de la propia diagonal.	A juzgar por el índice de respuestas correctas (20.8% para la tarea 2.2) se puede concluir que no se entendió correctamente la actividad y/o dicha tarea no dio el juego esperado.
2. Identificar patrones visuales producidos por los múltiplos de un número y su interpretación aritmética como operador aditivo.	Los estudiantes identifican con facilidad patrones visuales correspondientes a múltiplos de un número en la tabla coloreada, y asignan correctamente el operador aditivo asociado a dichos patrones.

Tabla 4.7 bis

G3

En general, las consideraciones sobre G70 son extrapolables a G3 y G1. En este grupo surge la equivalencia que existe entre algunas cadenas, en el sentido de que existen cadenas distintas que representan el mismo operador aditivo.

G1

En la conversación con Julia se observa además el problema que plantea el hecho de que a la hora de asociarle un operador aditivo a la cadena, hay que contar "*desplazamientos*" y no "*celdas*". Por este motivo la cadena correspondiente a *"sumar 3"* es □□□□ con 4 celdas, y no 3 como Julia entiende en principio.

4.4 Tercera sesión: Divisibilidad y geoplano (I)

4.4.1 Descripción general y objetivos

En esta sesión de trabajo consideramos la Tabla-100 como un geoplano de 10x10 puntos asociados a cada número de la tabla. Las actividades en este caso son de tipo geométrico, si bien existe una relación con lo aritmético a través de la divisibilidad. Nos proponemos unir puntos asociados a múltiplos de un número k, y ver la relación que podemos establecer entre el área de los polígonos así formados y el número k. Queremos también proporcionar un carácter dinámico a los números de la tabla-100, sometiendo dicha tabla a isometrías sencillas (reflexiones y giros) y estudiar el efecto producido sobre los múltiplos de k.

Nuestro propósito para esta sesión se especifica con más detalle en los siguientes

4.4.1.1 Objetivos de la sesión

1. Identificar y dibujar paralelogramos que se forman al unir cuatro múltiplos de un número.

2. Observar estrategias de cálculo de áreas de los paralelogramos que emplean los alumnos en el geoplano 10x10.

3. Relacionar el área de los paralelogramos que se forman al unir cuatro múltiplos de k con el número k.

4. Someter a los múltiplos de un número a algunas isometrías planas (reflexión vertical, reflexión horizontal y giros de 90°, 180° y 270°), y observar el efecto producido.

5. Buscar múltiplos de un número que queden invariantes mediante alguna de las isometrías anteriores.

4.4.2 Actividades de la sesión. Tareas propuestas

Tarea 3.1 (T 3.1)

Une con segmentos los números 14, 21, 28 y 35, en la tabla-100 de la figura 4.11, de manera que se forme un paralelogramo y calcula su área.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 4.11 (G70-3ª sesión)

T 3.2

Utiliza el geoplano de la figura 4.12 para explicar el procedimiento que has utilizado para calcular el área del paralelogramo anterior.

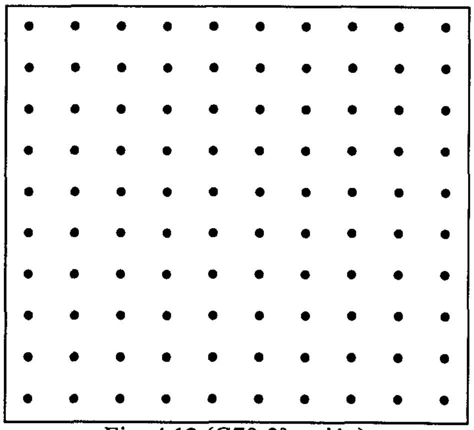


Fig. 4.12 (G70-3ª sesión)

T 3.3

¿Cuál sería el área de los paralelogramos formados con los múltiplos de 2, de 3, de 4,...de k? Ayúdate de las tablas-100 de las figuras 4.13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 4.13 (G70-3ª sesión)

T 3.4. **¿Qué regla podrías enunciar?**

T 3.5. Si sobre la tabla-100 colocamos una transparencia con unos cuadrados que coinciden sobre los múltiplos de 7 (figura 4.14)

					R_v				
1	2	3	4	5	6	$\boxed{7}$	8	9	10
11	12	13	$\boxed{14}$	15	16	17	18	19	20
$\boxed{21}$	22	23	24	25	26	27	$\boxed{28}$	29	30
31	32	33	34	$\boxed{35}$	36	37	38	39	40
41	$\boxed{42}$	43	44	45	46	47	48	$\boxed{49}$	50 R_h
51	52	53	54	55	$\boxed{56}$	57	58	59	60
61	62	$\boxed{63}$	64	65	66	67	68	69	$\boxed{70}$
71	72	73	74	75	76	$\boxed{77}$	78	79	80
81	82	83	$\boxed{84}$	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	$\boxed{98}$	99	100

Fig. 4.14 (G70-3ª sesión)

a. ¿Qué números señalarán los cuadrados de la transparencia si a ésta le damos la vuelta a lo largo del eje vertical, realizando así una reflexión (R_v)?

b. Repite la tarea anterior considerando la reflexión (R_h) según el eje horizontal, y los giros G_{90}, G_{180} y G_{270} de centro el punto de corte de ambos ejes y ángulos 90°, 180° y 270° respectivamente.

Escribe tus respuestas en la tabla 4.8. Escribe en la columna correspondiente a $R_v(k)$ el número que se obtiene al someter k (k = múltiplo de 7) a la reflexión R_v. Completa análogamente las restantes columnas de la tabla.

k	$R_v(k)$	$R_h(k)$	$G_{90}(k)$	$G_{180}(k)$	$G_{270}(k)$
7	4	97	70	94	
14	17	84	39	87	
21					
28					
35					
42					
49					
56					
63					
70					

Tabla 4.8 (G70-3ª sesión)

T 3.6.

Expresa las regularidades que encuentres en la tabla que has completado.

Tarea 3.7.

¿Existe algún número k cuyos múltiplos sigan siendo múltiplos de k al someterlos a alguna de las isometrías planas anteriores?

4.4.3 Resultados generales sobre construcción y cálculo del área de paralelogramos en G70

En los anexos 4.1, 4.2 y 4.3 recogemos con detalle las respuestas de los componentes de los grupos G70, G3 y G1 respectivamente. Destacamos aquí las respuestas más significativas correspondientes a las tareas 3.1 a 3.4.

4.4.3.1. Dibujo y cálculo del área del paralelogramo (Tarea 3.1)

La totalidad de los estudiantes dibujan correctamente el paralelogramo que se obtiene al unir los números 14, 21, 28 y 35 y dan como resultado para el área de dicho paralelogramo 7 unidades (Fig. 4.14 bis).

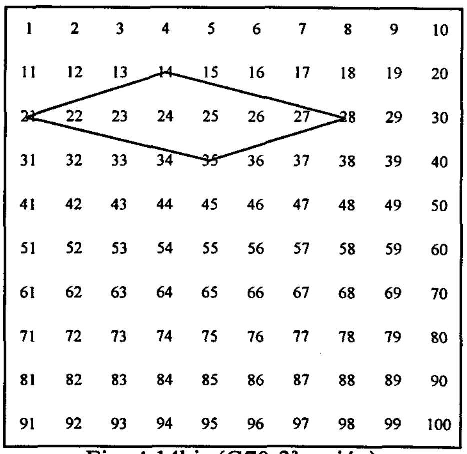


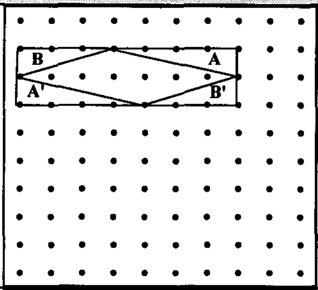
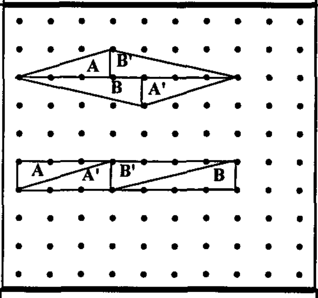
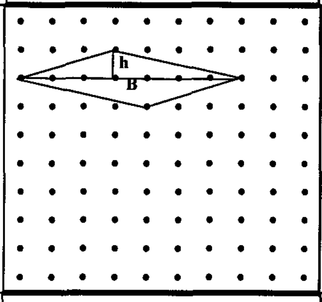
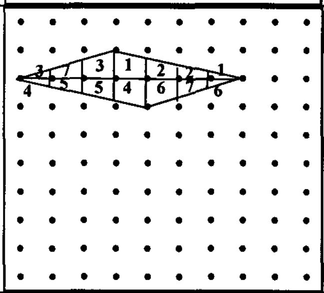
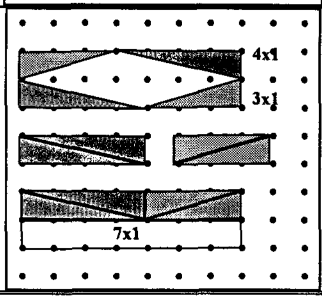
Fig. 4.14bis (G70-3ª sesión)

4.4.3.2. Estrategias para el cálculo del área del paralelogramo (Tarea 3.2)

Las estrategias correctas para el cálculo del área del paralelogramo anterior quedan recogidas en la tabla 4.9. Existen siete estrategias distintas. Solamente hay dos respuestas incorrectas (tabla 4.10), cuyas causas son:

- Error en la fórmula de cálculo del área (Respuesta I)

- Dibujo del paralelogramo incorrecto.

Respuestas correctas	Ilustración	n_i (%)
A) $A_{paralelogramo} = A_{rectángulo} - A_{4\ triángulos}$ El área de los triángulos es bxh/2: A=A'= 4x1/2=2; B=B'= 3x1/2=1'5; A+A'+B+B'= 7; $A_{rectángulo}$ = bxh= 7x2= 14; $A_{paralelogramo}$ = 14-7 = 7;		15 (31.3)
B) Suma de las áreas de los triángulos rectángulos en que se descompone el paralelogramo.		12 (25.0)
C) El paralelogramo queda dividido en dos triángulos unidos por sus bases, de altura 1 y base 7.		7 (14.6)
D) Divide el paralelogramo en regiones y las agrupa de manera que cada dos regiones (las que tienen el mismo número) miden una unidad cuadrada.		6 (12.5)
E) Con 4 triángulos rectángulos iguales dos a dos y áreas 4 y 3, forma un rectángulo que encierra el paralelogramo. Reorganizando los triángulos los comprueba que ocupan medio rectángulo de área 14. El paralelogramos tiene entonces área 7.		3 (6.3)

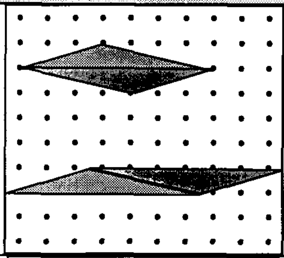
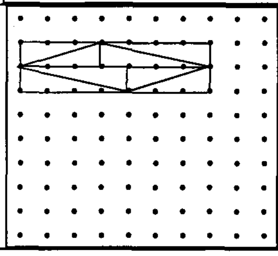
Respuestas correctas	Ilustración	n_i (%)
F) Transforma el paralelogramo en otro paralelogramo de igual área cuya base (horizontal) es la diagonal mayor del paralelogramo de partida y altura a unidad. Para colocarlo en el geoplano le falta una unidad.		2 (4.2)
H) Construye el menor rectángulo que contiene al paralelogramo, calcula su área y la divide por 2.		1 (2.1)
Subtotal		46 (95.8)

Tabla 4.9 (G70-3ª sesión)

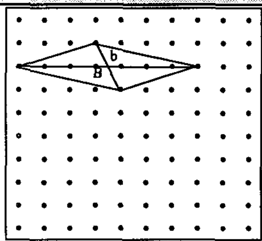
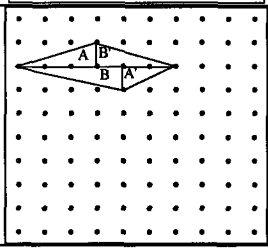
Respuestas incorrectas	Ilustración	n_i (%)
I) A = Bxb/2 = 14/2 = 7 (Fórmula errónea, cálculo de **b** erróneo y resultado correcto)		1 (2.1)
J) Descompone el paralelogramo (incorrecto) en 4 triángulos: dos de 1x3/2=6/2; uno de 5x1/2=5/2 y uno de 1x3/2=3/2; realiza la suma: 6/2 + 5/2 + 3/2 =14/2 = 7 (La figura incorrecta induce cálculos incorrectos y resultado correcto).		1 (2.1)
Subtotal		2 (4.2)
Total de respuestas		48

Tabla 4.10 (G70-3ª sesión)

4.4.3.3 Tipos de paralelogramos construidos uniendo 4 múltiplos consecutivos de un número k (Tarea 3.3)

Las respuestas, clasificadas según el tipo de paralelogramo y el número k cuyos múltiplos se unen (**mk**, con k=2, 3, ...,9), las presentamos en la tabla 4.11, donde los % de cada celdilla se refieren al subtotal de su columna, y los % de los subtotales se refieren al total de respuestas (136):

Tipo de paralelogramo	m2	m3	m4	m5	m6	m7	m8	m9	Subtotal (%)
Rectángulo	38 (86,4)	0 (0,0)	3 (10,0)	7 (87,5)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	48 (35,3)
Cuadrado	1 (2,3)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	1 (0,7)
Rombóide	5 (11,4)	43 (100)	27 (90,0)	1 (12,5)	7 (100)	2 (100)	1 (100)	1 (100)	87 (64,0)
Subtotal	44 (32.4)	43 (31.6)	30 (22.1)	8 (5.9)	7 (5.1)	2 (1.5)	1 (0.7)	1 (0.7)	**136 (100)**

Tabla 4.11 (G70-3ª sesión)

El diagrama de barras de la figura 4.15 muestra que el rombóide es el paralelogramo más frecuente para todos los múltiplos de k, excepto para los múltiplos de 2 y múltiplos de 5, donde se presenta más el rectángulo.

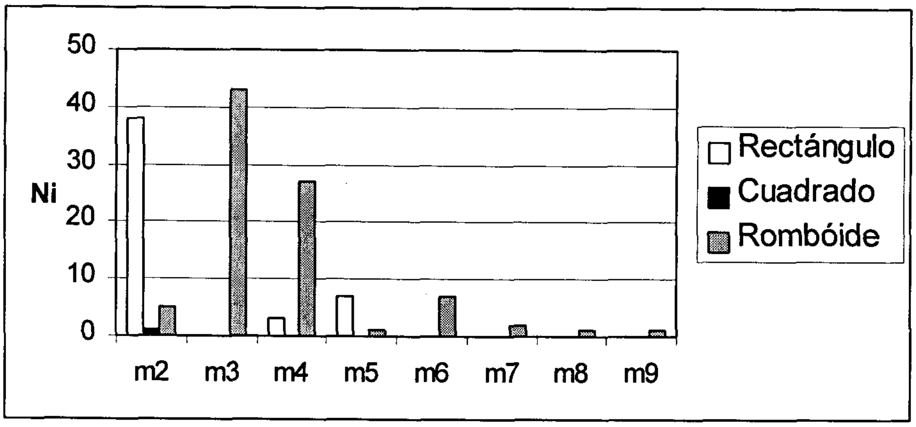


Figura 4.15 (G70-3ª sesión)

4.4.3.4 Regla enunciada por los alumnos (Tarea 3.4)

Todos los alumnos enuncian una regla en la que mencionan, con distintas palabras, que ***"el área de los paralelogramos que se obtienen uniendo múltiplos de un número es múltiplo de ese número"***.

4.4.4 Resultados generales sobre construcción y cálculo del área de paralelogramos en G3

En las sesiones de trabajo con G3 y G1 se aprecia con más detalle cómo se enfrentan los alumnos al cálculo del área del paralelogramo en cuestión utilizando únicamente las herramientas que ofrece el geoplano y el que los vértices del paralelogramo son múltiplos de 7.

Se pone de manifiesto la incomodidad que sienten los estudiantes de G3 por el hecho de que la base del paralelogramo no es horizontal, y tratan de girar la figura mentalmente para conseguir que el polígono tenga una base horizontal. Los alumnos utilizan papel de calco para realizar sus averiguaciones, aunque pronto se advierte que éste no es un procedimiento exacto.

En este proceso visual, los componentes de G3 atribuyen la longitud de la hipotenusa a un cateto de un triángulo rectángulo, si bien posteriormente utilizan el teorema de Pitágoras correctamente:

(DL) **Yo pensaba poner la base derecha.**
(P) Vamos a intentarlo.
(Dolores calca el paralelogramo y lo coloca sobre el geoplano).
(DL) **La base es 5 y la altura 2. El área sería 10.**
(P) ¿Sale la base exacta?
(DL) Sí.
(P) ¿Seguro? Bueno este método ha sido... no ha sido muy preciso ¿no?
(DL) Sí.
(P) ¿Y otro método?
(DL) Sí, por ejemplo contamos así, 1, 2, 3, no, (fig. A4.2-2), la mitad sería 1,5. Bueno aquí no.
(P) Bueno, **la base,** te ha salido antes 5 ¿no? **¿Habría una manera de comprobar que es 5?**. Porque lo hemos hecho a la ligera. Para quedarnos tranquilos. Sabemos la distancia entre los puntos ¿no?
(PD) Sí. (Pedro calca de nuevo) **Tiene pinta de ser algo superior a 5. Claro porque para que se cumpla el teorema de Pitágoras, si tomamos este triángulo (Pedro se refiere al triángulo rectángulo formado por 35, 21 y 31 en la figura A4.2-2) es la hipotenusa. Este cateto es 4 y el otro 1.**
(P) ¿Cuánto vale la hipotenusa?

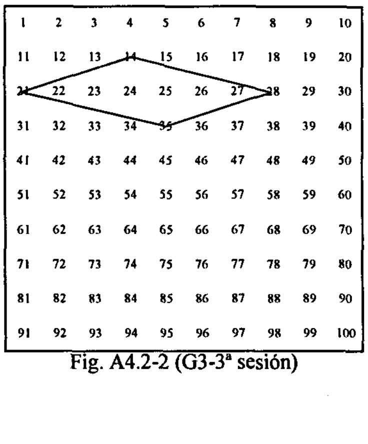


Fig. A4.2-2 (G3-3ª sesión)

(D) 5, porque si la hipotenusa es la raíz cuadrada de los catetos al cuadrado, como son raíz de 25. No. No, sería 17. Entonces no es 5.

Domingo señala un nuevo procedimiento para el cálculo del área que no surgió en G70, y razona utilizando trapecios:

(D) A mí se me ocurre, en todo el contorno del paralelogramo si lo ponemos como un rectángulo, entonces el área sería la mitad de la del rectángulo, y el área sería 7. (Fig. A4.2-3)
(P) ¿Por qué dices la mitad? Si queréis calcar, podéis hacerlo. Con la misma idea de meter el paralelogramo dentro del rectángulo, ¿habría alguna forma de probar que el área es la mitad?
(D) Vamos a ver. **Se supone que estos dos trapecios son iguales (ABEF=BCDE. fig. A4.2-3).**
(P) ¿Por qué son iguales?
(D) Porque, bueno, sí se puede calcular el área bien. **Sabemos la base mayor, la base menor y la altura....y tienen todo igual. Y luego el paralelogramo, las dos partes son iguales, y por analogía sería la mitad.**

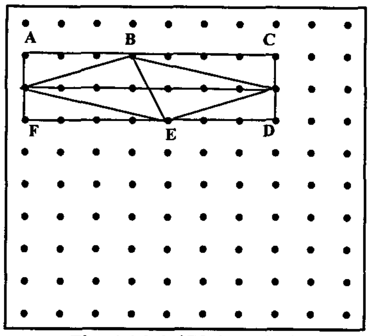


Fig. A4.2-3 (G3-3ª sesión)

Dolores propone otro procedimiento que es similar a la respuesta B de G70. En este grupo surge por primera vez un polígono al unir 4 múltiplos de 7 que no es un paralelogramo. Se trata de un triángulo. Se hace necesario comprobar que tres puntos están alineados, y para ello comienzan empleando una regla, pero posteriormente Domingo utiliza el hecho de que dichos puntos están asociados a múltiplos de 7 y éstos formaban un patrón rectilíneo diagonal en la tabla coloreada:

(P) Bueno, esto lo hemos hecho con el 7, 14, 21 y 28, pero no sabemos si tomando otros va a salir. ¿Por qué no probamos con otros múltiplos de 7 a ver si sale la misma área.
(D) **Por ejemplo el 28, 35, 42 y 49** (Fig. A4.2-5)
(PD) **En este caso no sale paralelogramo.**
(P) ¿Qué sale?
(PD) Una especie de trapezoide. **Casi triángulo.**
(P) Vamos a ver si es triángulo o no. Vamos a pasar aquí al geoplano. (Fig. A4.2-5).
(PD) **Parece que poniendo una regla si pasa por ese punto.**
(P) ¿Habría una manera de comprobarlo, para quedarnos tranquilos?
(DL) **El área es 14. No, 7 también.**
(P) No ha salido paralelogramo, pero el área ha sido la misma. ¿Habría alguna manera de ver si ese punto (el 35) pertenece al segmento (que une el 42 con el 28)?
(D) Están los 3 números en la misma diagonal ¿no? Entonces, como los patrones eran diagonales...

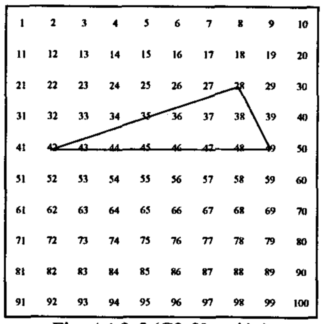


Fig. A4.2-5 (G3-3ª sesión)

Aparece también por primera vez un trapezoide al unir 4 múltiplos de 7, aunque los componentes del grupo no lo identifican como tal y tienen problemas para el cálculo del área. Ante las dificultades que tienen los alumnos para calcular el área del polígono, el profesor propone unas realizar tareas para encontrar la fórmula de Pick que facilita el cálculo del área de un polígono en un geoplano en función del número de puntos que son interiores al polígono y de los que están en los lados del polígono:

(DL) 42, 35, 56, 91 (fig. A4.2-8) **Sale como una cometa.**
(P) Geométricamente no sería una cometa ¿no? **¿Cómo calculamos el área de eso?**
(PD) **Haciendo triángulos.**
(P) ¿Nos podemos ayudar del triángulo anterior?
(PD) 91-35, parece que divide a esto en dos triángulos. Como cada triángulo es 7. El paralelogramo tendrá...
(DL) 14.
(D) **Parece que no son iguales ¿no?**
(PD) Sí, parece que sí.
(D) No.
(P) Los patrones diagonales (en un sentido y otro) no eran iguales. (D) **La base es la misma.** Yo creo que sí son iguales.

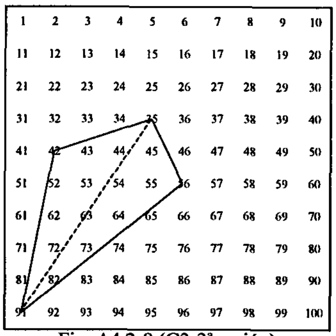


Fig. A4.2-8 (G3-3ª sesión)

(P) Este lado (42-35) y éste (35-66) ... ¿Son iguales?.
(D) Es verdad.
(P) Por lo menos idénticos no son. (Loli empieza a calcar)
(P) ¿Y si calcamos?
(DL) **Altura 2.**
(P) **Pero calcando ¿no?** Parece que tenemos problemas para calcular de una forma rápida el área de un polígono. ¿Qué os parece si tratamos de buscar una fórmula que nos de el área del polígono en función de los puntos que hay dentro del polígono y sobre el polígono? Vamos a interrumpir esta actividad y os voy a dar otra hoja para que deduzcáis vosotros mismos esa fórmula.

4.4.5 Resultados generales sobre construcción y cálculo de áreas de paralelogramos en G1

En la sesión con Julia surge la necesidad de comprobar si las diagonales que forman los múltiplos de 7 son perpendiculares entre sí o no, para determinar si cierto cuadrilátero es un rectángulo:

(P) ¿Y esa figura, cuál sería?
(J) **Un rectángulo.** (dibujo A de la Fig. A4.3-3)
(P) ¿Por qué un rectángulo?
(J) **Son paralelos dos a dos.**
(P) ¿Esta mesa sería un rectángulo? Porque son paralelos dos a dos y por alguna cosa más.
(J) **Forman ángulos de 90º.**
(P) ¿Esos ángulos serían de 90º? (el profesor señala el dibujo A de la figura A4.3-3)
(J) **No.**
(P) Se ve bastante claro, pero ¿Me lo podrías argumentar?
(J) Jolín, eso ya es demasiado!
(P) Pinta esto mismo aquí, en el geoplano.

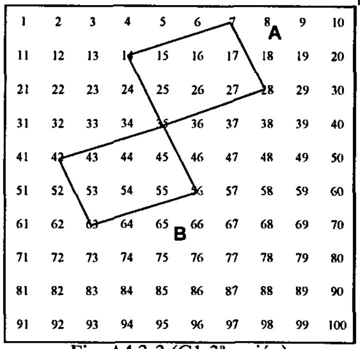


Fig. A4.3-3 (G1-3ª sesión)

(J) (Julia dibuja el cuadrilátero ACFD de la figura A4.3-4).
(P) Si te pido que me convenzas de que eso no es un rectángulo...
(J) **A mí es que me parece que esos ángulos (CAD y ADF) son rectos.**
(P) **¿Y cómo podríamos estar seguros de que son rectos?** Porque lo que sí sabemos es que éste y éste son perpendiculares en el geoplano. (El profesor señala fila y columna donde está el punto A).
(P) Una fila con una columna son perpendiculares ¿no? ¿Cómo sabemos si este ángulo es 90º?
(J) Pues yo qué sé!
(P) ¿Habría alguna manera de verlo? Vamos a retintarlo. Lo que sí es seguro que es un ángulo recto ¿Qué es?
(J) Este (BAE).
(P) Este ángulo vale 90º. ¿Y éste? (CAD).

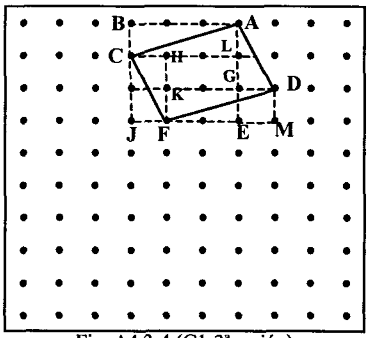


Fig. A4.3-4 (G1-3ª sesión)

(J) Hombre, **se supone estos son iguales (BAC = EAD)** y no son lo mismo.
(P) No son lo mismo a simple vista, pero como la vista engaña. ¿Cómo lo podríamos averiguar? Está claro que si no son iguales, entonces éste (CAD) no es 90º ¿No?
(J) Sí.
(P) Has visto como sí sabes? **¿Cuál te parece más grande de los dos?**
(J) Este (DAE). Está claro.
(P) ¿A ver por qué?
(J) ¿Que por qué me parece?
(P) No. Que te lo parece está claro. Hay que ver por qué lo es.
(J) **Se supone que no tenemos transportador, ni nada más.**
(P) No. Solo esto (el geoplano).
(J) Pues no lo sé. (silencio).
(P) Tomamos este punto (A) y bajamos, 2 y a la derecha 1 (llegamos a D). Y aquí hacemos lo mismo (desde A) uno y dos y abajo uno. No se forma el mismo ángulo. ¿No?
(J) Es verdad.

4.4.6 Resultados generales sobre las tareas de carácter dinámico en G70

En relación con las tareas de carácter dinámico (T 3.5 a T 3.7) en las que se les pide a los estudiantes que realicen transformaciones geométricas sencillas con los múltiplos de 7, los resultados más significativos son:

4.4.6.1 Resultados de las transformaciones (Tarea 3.5)

En esta tarea se pide a los estudiantes que realicen las reflexiones R_v y R_h y los giros G_{90}, G_{180} y G_{270} con los múltiplos de 7, y que rellenen una tabla, que una vez completada correctamente da lugar a la tabla 4.12:

k	$R_v(k)$	$R_h(k)$	$G_{90}(k)$	$G_{180}(k)$	$G_{270}(k)$
7	4	97	70	94	31
14	17	84	39	87	62
21	30	71	8	80	93
28	23	78	78	73	23
35	36	65	47	66	54
42	49	52	16	59	85
49	42	59	86	52	15
56	55	46	55	45	46
63	68	33	24	38	77
70	61	40	94	31	7

Tabla 4.12 (G70-3ª sesión)

Presentamos en la tabla 4.13 las respuestas de los estudiantes para cada transformación. Se ha considerado una columna de la tabla anterior como incorrecta si presenta más de 3 errores:

	$R_v(k)$	$R_h(k)$	$G_{90}(k)$	$G_{180}(k)$	$G_{270}(k)$
Correcto	45 (93.8)	42 (87.5)	46 (95.8)	46 (92.0)	46 (96%)
Incorrecto	2 (4.2)	5 (10.4)	1 (2.1)	1 (2.1)	1 (2.1)
No contesta	1 (2.1)	1 (2.1)	1 (2.1)	1 (2.1)	1 (2.1)
Total	**48**	**48**	**48**	**48**	**48**

Tabla 4.13 (G70-3ª sesión)

Observamos que existe un alto número de respuestas correctas y que no hay diferencias significativas entre las respuestas para las distintas transformaciones.

4.4.6.2 Análisis de las regularidades encontradas (Tarea 3.6)

Las regularidades (97 en total) que encuentran los estudiantes de G70 en la tabla 4.12 las clasificamos según sean correctas (92.8%) o incorrectas (7.2%) y atendiendo al tipo de regularidad que enuncian.

Se detectan cinco tipos de regularidades correctas que se encuentran en la tabla 4.13 bis:

Respuestas correctas	n_i (%)	Total (%)
A) Secuencias numéricas y orden en las columnas		
A_1) La columna de $\mathbf{G_{180}(k)}$ va disminuyendo de 7 en 7. (Si 94=K_n; entonces K_n-7 = K_{n+1}; K_{n+1}-7= K_{n+2}; ...)	20 (20.6)	46 (47.4)
A_2) La secuencia en la columna $\mathbf{R_v(k)}$ se forma sumando +13, +13, -7, y así sucesivamente.	8 (8.2)	
A_3) La secuencia en la columna $\mathbf{R_h(k)}$ se forma sumando -13, -13, +7, y así sucesivamente.	7 (7.2)	
A_4) La secuencia en la columna $\mathbf{G_{270}(k)}$ se forma sumando +31, +31, -70, y así sucesivamente.	6 (6.2)	
A_5) La secuencia en la columna $\mathbf{G_{90}(k)}$ se forma sumando -31, -31, +70, y así sucesivamente.	2 (2.1)	
A_6) Las columnas **k** y $\mathbf{G_{180}(k)}$ son ascendentes o descendentes, pero en las $\mathbf{R_v(k)}$ y $\mathbf{R_h(k)}$ no hay orden.	2 (2.1)	
A_7) Los números de $\mathbf{G_{180}(k)}$ están ordenados de mayor a menor.	1 (1.0)	
B) Relaciones entre las distintas columnas		
B_1) El último número de $\mathbf{G_{180}(k)}$. (el 31) es igual que el primero de $\mathbf{G_{270}(k)}$.	6 (6.2)	36 (37.1)
B_2) El último número de $\mathbf{G_{90}(k)}$ (el 94) es igual que el primero de $\mathbf{G_{180}(k)}$.	5 (5.2)	
B_3) El último número de $\mathbf{G_{270}(k)}$ (el 7) es igual que el primero de k.	5 (5.2)	
B_4) La 1ª y 3ª columna tienen igual las unidades.	5 (5.2)	
B_5) 42= **Rv(49)**; 49= **Rv(42)**; $\mathbf{R_h}$(42)= $\mathbf{G_{180}(k)}$ (49); $\mathbf{R_h}$ (49)= $\mathbf{G_{180}(k)}$ (42);	5 (5.2)	
B_6) El último número de la 1ª columna (el 70) es igual al primero de la columna $\mathbf{G_{90}(k)}$.	5 (5.2)	
B_7) Las terminaciones de la 2ª y 5ª columnas son iguales.	3 (3.1)	
B_8) Sumando los números de las columnas de dos en dos, nos da siempre 101: $\mathbf{R_v(k)} + \mathbf{R_h(k)}$ = 101; $\mathbf{G_{90}(k)} + \mathbf{G_{270}(k)}$ = 101; $\mathbf{k} + \mathbf{G_{180}(k)}$ = 101.	1 (1.0)	
B_9) Si sumamos los números de las columnas $\mathbf{R_v(k)}$ y k el resultado termina en 1.	1 (1.0)	

<table>
<tr><th>Respuestas correctas</th><th>n_i
(%)</th><th>Total
(%)</th></tr>
<tr><td>C) Relaciones numéricas en las columnas y filas</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C_1) En la columna G_{90}(k) se cumple lo siguiente:
1°+3°=4° (70+8=78); 2°+6°=8° (39+16=55)
2°+3°=5° (39+8=47); 5°+5°=10° (47+47=94)</td><td>4
(4.1)</td><td>4
(4.1)</td></tr>
<tr><td>D) Simetrías en las columnas</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D_1) Tomando en la tabla como eje la línea horizontal que pasa entre el 42 y el 49 (Fig. 1), los simétricos suman lo siguiente:
En R_v(k) suman 91 (49+92=36+55=...= 91);
En R_h(k) suman 111 (52+59=65+46=...=111);
En G_{90}(k) suman 102 (16+86= 47+55=...=102);
En G_{180}(k) suman 111; (59+52=66+45=...= 111);
En G_{270}(k)suman 100; (85+15=54+46=...= 100);
En k suman 91; (42+49=35+56=...= 91);
<table>
<tr><th>k</th><th>R_v(k)</th><th>R_h(k)</th><th>G_{90}(k)</th><th>G_{180}(k)</th><th>G_{270}(k)</th></tr>
<tr><td>7</td><td>4</td><td>97</td><td>70</td><td>94</td><td>31</td></tr>
<tr><td>14</td><td>17</td><td>84</td><td>39</td><td>87</td><td>62</td></tr>
<tr><td>21</td><td>30</td><td>71</td><td>8</td><td>80</td><td>93</td></tr>
<tr><td>28</td><td>23</td><td>78</td><td>78</td><td>73</td><td>23</td></tr>
<tr><td>35</td><td>36</td><td>65</td><td>47</td><td>66</td><td>54</td></tr>
<tr><td>42</td><td>49</td><td>52</td><td>16</td><td>59</td><td>85</td></tr>
<tr><td>49</td><td>42</td><td>59</td><td>86</td><td>52</td><td>15</td></tr>
<tr><td>56</td><td>55</td><td>46</td><td>55</td><td>45</td><td>46</td></tr>
<tr><td>63</td><td>68</td><td>33</td><td>24</td><td>38</td><td>77</td></tr>
<tr><td>70</td><td>61</td><td>40</td><td>94</td><td>31</td><td>7</td></tr>
</table>
Eje
Fig. 1</td><td>3
(3.1)</td><td>3
(3.1)</td></tr>
<tr><td>E) Reglas de obtención de los números transformados</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>E_1) Para obtener los transformados de los múltiplos de 7 hago lo siguiente:
Por ejemplo, para el 7 en R_v(k), cuento 7 de derecha a izquierda en la primera fila; para el 14 cuento 4 en la fila del 11.
En R_h(k), cuento 7 de izquierda a derecha en la fila del 91;
En G_{90}(k)cuento 7 de arriba abajo en la columna del 10.
En G_{180}(k)cuento 7 de derecha a izquierda en la fila del 91.
En G_{270}(k)cuento 7 de arriba abajo en la columna del 91.</td><td>1
(1.0)</td><td>1
(1.0)</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td>90</td></tr>
</table>

Tabla 4.13 bis (G70-3ª sesión)

Existen 7 respuestas incorrectas (7.2%), debiéndose en su mayoría a errores de apreciación.

4.4.6.3 Invariantes detectadas en las isometrías (T 3.7)

Los invariantes que encuentran los estudiantes de G70 frente las isometrías estudiadas se recogen en la tabla 4.14. La mayoría de estos invariantes se refieren a los múltiplos de 2, de 5 y de 10 frente a la reflexión de eje horizontal (R_h).

	Respuestas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	A) R_h(múltiplo de 2) = múltiplo de 2.	25 (36.8)	58 (85.3)
	B) R_h(múltiplo de 5) = múltiplo de 5	19 (27.9)	
	C) R_h(múltiplo de 10) = múltiplo de 10.	9 (13.2)	
	D) El 1 es el único número que lo cumple para todas las isometrías, ya que todos los números son múltiplos de 1. I(múltiplo de 1) = múltiplo de 1.	5 (7.4)	
Incorrectas	E) No. Los números cambian por las isometrías.	7 (10.3)	10 (14.7)
	F) Dan ejemplos de algunos invariantes, como: $R_v(21) = 30$ = múltiplo de 3 $R_v(42) = 49$ = múltiplo de 3 (Incorrecto) $R_v(49) = 42$ = múltiplo de 3 (Incorrecto) $R_h(14) = 84$ = múltiplo de 7 $R_h(28) = 78$ = múltiplo de 2 $R_h(63) = 33$ = múltiplo de 3	2 (2.9)	
	G) R_h(múltiplo de 3) = múltiplo de 3.	1 (1.5)	
Total			68

Tabla 4.14 (G70-3ª sesión)

4.4.7 Resultados generales sobre las tareas de carácter dinámico en G3 y G1

En G3 no se abordó esta tarea, ya que la dinámica de la sesión derivó hacia la búsqueda de la fórmula de Pick para el cálculo de áreas de polígonos situados en un geoplano.

Julia identifica los múltiplos de 2 y de 5 como invariantes frente a la reflexión horizontal (R_h), si bien, al realizar visualmente algunas transformaciones, confunde el giro de 180° con la reflexión horizontal.

4.4.8 Consideraciones sobre los resultados: G70, G3 y G1

Recogemos en la tabla 4.14 bis un balance de los logros alcanzados en G70 de acuerdo con los objetivos propuestos en esta sesión:

Objetivos	Consideraciones
1. Identificar y dibujar paralelogramos que se forman al unir cuatro múltiplos de un número.	Los alumnos no tienen dificultad en identificar y dibujar los paralelogramos uniendo múltiplos de k, obteniendo el rombóide y el rectángulo como paralelogramos más frecuentes.
2. Observar estrategias de cálculo de áreas de los paralelogramos que emplean los alumnos en el geoplano 10x10.	Se detectan 7 estrategias correctas distintas de cálculo del área del paralelogramo situado en el geoplano. El 95.8% de las respuestas son correctas.
3. Relacionar el área de los paralelogramos que se forman al unir cuatro múltiplos de k con el número k.	Todos los alumnos mencionan que *"el área de los paralelogramos que se obtienen uniendo múltiplos de un número es múltiplo de ese número"*.
4. Someter los múltiplos de un número a algunas isometrías planas (reflexión vertical, reflexión horizontal y giros de 90°, 180° y 270°), y observar el efecto producido.	Más del 90% de los componentes del grupo realizan correctamente las transformaciones con los múltiplos de 7, y enuncian 5 tipos distintos de regularidades correctas.
5. Buscar múltiplos de un número que queden invariantes mediante alguna de las isometrías anteriores.	El 85.3% de las respuestas dadas son correctas y se refieren principalmente a la invariancia de los múltiplos de 2, de 5 y de 10 frente a la reflexión de eje horizontal (R_h).

Tabla 4.14bis (G70-3ª sesión)

G3

En este grupo se ponen de manifiesto detalles que surgen en el proceso para encontrar formas de cálculo de áreas, como es el hecho de "calcar" el paralelogramo para colocarlo con la base de manera horizontal en el geoplano. Aparece además una estrategia distinta para el cálculo del área.

Como detalle de relación entre lo aritmético y lo geométrico, en esta sesión, los estudiantes se apoyan en el hecho de que tres múltiplos de 7 pertenecen al mismo patrón diagonal para concluir que dichos números están alineados.

Al unir cuatro múltiplos de 7 aparecen dos polígonos que no son paralelogramos (triángulo y trapecio).

G1

En esta sesión surge la necesidad de comprobar la perpendicularidad de dos segmentos para resolver si un paralelogramo es o no rectángulo.

A la hora de realizar transformaciones con los múltiplos de k, Julia confunde G_{180} con R_h, y determina que los múltiplos de 2 y de 5 son invariantes frente a R_h.

4.5 Cuarta sesión: Divisibilidad y geoplano (II)

4.5.1 Descripción general y objetivos

Las tareas planteadas en esta sesión tienen un marcado carácter geométrico, y se centran básicamente en el cálculo de áreas de los polígonos que se obtienen al unir múltiplos consecutivos de un número k, a fin de obtener algún tipo de relación entre el área, el número de puntos que se unen y el número k.

Con el fin de tener un método rápido de cálculo de áreas de polígonos, con anterioridad a esta sesión, los estudiantes de G70, G3 y G1 realizaron unas sencillas actividades guiadas con objeto de obtener la fórmula de Pick, que proporciona el área de un polígono simple en un geoplano, en función del número de puntos que hay en el interior y sobre los lados del polígono. Dado que esta sesión fue meramente instrumental omitimos los detalles de la misma, si bien hay que decir que todos los estudiantes obtuvieron dicha fórmula sin dificultad.

4.5.1.1 Objetivos de la sesión

1. Estudiar el tipo de polígonos que se pueden obtener en la tabla-100, considerada como un geoplano, cuando se unen múltiplos consecutivos de un número k.

2. Calcular las áreas de dichos polígonos utilizando la fórmula de Pick.

3. Encontrar alguna expresión aritmética que relacione el área del polígono, el número de puntos que se unen en el geoplano y el número k.

4.5.2 Actividades de la sesión. Tareas propuestas

A los estudiantes se les entrega una hoja con las tareas que deben realizar, así como diversas tablas-100 donde deben realizar sus dibujos.

Tarea 4.1 (T 4.1)

Uniendo múltiplos consecutivos de un determinado número, podemos obtener diversos polígonos. Por ejemplo, al unir 7, 14, 21 y 28 (que son múltiplos consecutivos de 7) obtenemos el triángulo **A** de la figura 4.16. Si unimos 35, 49, 56 y 42 obtenemos el paralelogramo **B**. En ambos casos el área es 7. Tratamos de buscar otros polígonos que se forman al unir múltiplos consecutivos de un número, y determinar su área. Completa la tabla 4.15 ayudándote de las tablas-100 que hay en las hojas auxiliares. Identifica cada dibujo con una letra y el número de la tabla-100 en la que se encuentra:

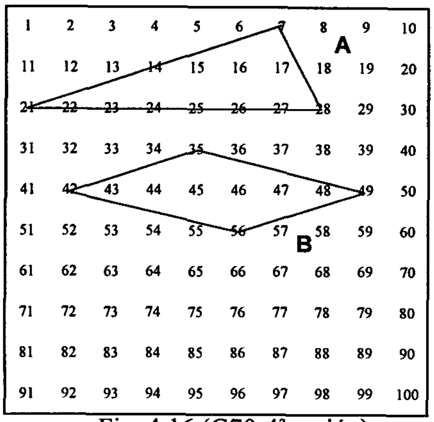


Fig. 4.16 (G70-4ª sesión)

Polígonos que resultan al unir múltiplos consecutivos de 7:

Nº de puntos a unir	Polígono	Números que se unen	Area del polígono	Esquema del polígono	Tabla y letra del dibujo
3					
4	Triángulo	7, 14, 21, 28	7		G70-4.1A
4	Paralelogramo	35, 42, 49, 56	7		G70-4.1B

Tabla 4.15 (G70-4ª sesión)

T 4.2

Expresa las regularidades que observes en la tabla de la tarea anterior.

4.5.3 Criterios para clasificar las respuestas a la tarea 4.1

Clasificamos las respuestas correspondientes a la tarea 4.1 como sigue:

- Respuestas totalmente correctas:

A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos.

- Respuestas incorrectas:

B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.

C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.

D) Area y nombre de polígono incorrectos.

E) El dibujo es incorrecto por unir múltiplos no consecutivos de 7.

La tabla 4.16 resume los tipos de respuestas obtenidos (C=Correcto; I=Incorrecto):

Tipo de respuesta		Area	Nombre	Dibujo
Correctas	A	C	C	C
Incorrectas	B	C	I	C
	C	I	C	C
	D	I	I	C
	E	C	C	I

Tabla 4.16 (G70-4ª sesión)

4.5.4 Resultados generales para la tarea 4.1 en G70

Los anexos 4.1, 4.2 y 4.3 recogen con detalle los resultados de esta sesión para los grupos G70, G3 y G1 respectivamente. Destacamos y comentamos en este apartado los aspectos más relevantes.

Tabla de resultados

En la tabla 4.17 se encuentran las frecuencias absolutas y relativas (entre paréntesis) de los tipos de respuestas obtenidos en G70 al unir múltiplos consecutivos de 7. Los % en cada casilla se refieren a los subtotales de su fila, mientras que los % de los subtotales está referidos al número total de respuestas (218).

Tipo de respuestas

Nº de puntos	A	B	C	D	E	Subtotal
3	45 (91,8)	1 (2,0)	1 (2,0)	0 (0,0)	2 (4.1,0)	49 (22,5)
4	2 (66,7)	0 (0,0)	1 (33,3)	0 (0,0)	0 (0,0)	3 (1,38)
5	32 (71,1)	2 (4,4)	4 (8,9)	7 (15,6)	0 (0,0)	45 (20,6)
6	26 (48,1)	18 (33,3)	7 (13,0)	3 (5,6)	0 (0,0)	54 (24,8)
7	26 (59,1)	5 (11,4)	4 (9,1)	9 (20,5)	0 (0,0)	44 (20,2)
8	14 (60,9)	6 (26,1)	2 (8,7)	1 (4,3)	0 (0,0)	23 (10,6)
Subtotal	145 (66,5)	32 (14,7)	19 (8,7)	20 (9,2)	2 (0,9)	218 (100)

Tabla 4.17 (G70-4ª sesión)

Gráficos de las frecuencias absolutas y relativas

El gráfico de la figura 4.17 muestra las frecuencias absolutas de los tipos de respuestas y el gráfico de la figura 4.18 recoge sus frecuencias relativas. Destacamos los siguientes aspectos:

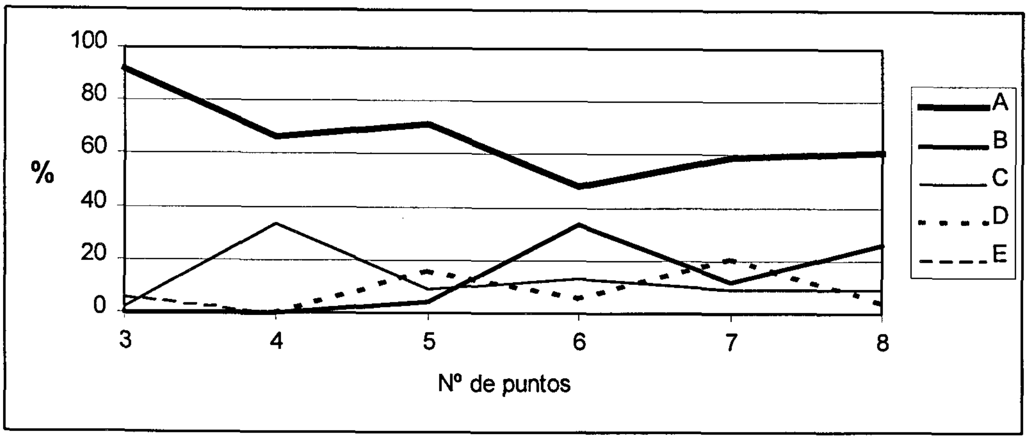


Fig. 4.17 (G70-4ª sesión)

1. Existe un claro predominio de **respuestas totalmente correctas** (tipo A), especialmente cuando se unen 3 puntos.

2. Los **errores en el cálculo del área** del polígono (tipos C y D) se producen en mayor medida al unir 5, 6 y 7 múltiplos consecutivos de 7.

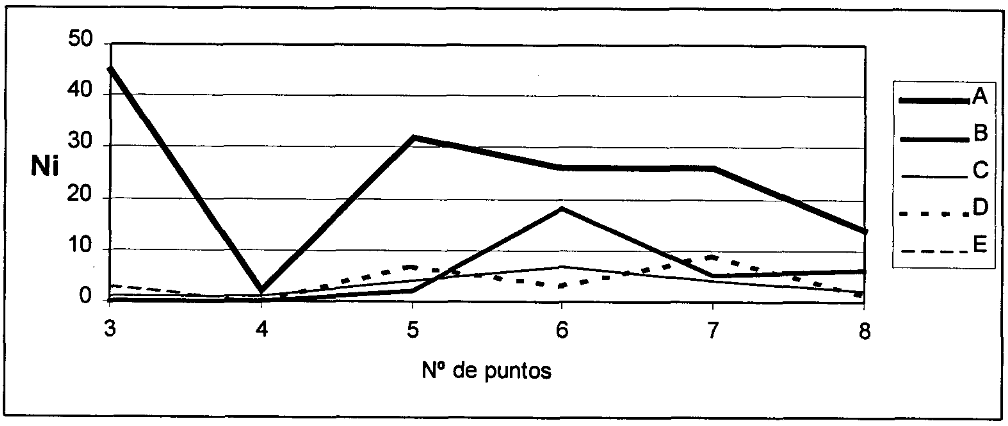


Fig. 4.18 (G70-4ª sesión)

3. Los **errores en los nombres** asignados a los polígonos están recogidos en la tabla 4.18, en la que figuran las frecuencias absolutas y las frecuencias relativas al número total de respuestas (entre paréntesis) (N=218)[1].

Nº de puntos que se unen	**Polígono dibujado**	**Nombre asignado al polígono**	**n_i (%)**	**Total**
5	Trapecio	Paralelogramo	7 (15.2)	9 (4.1)
		Pentágono	2 (0.9)	
6	Paralelogramo	Rectángulo	20 (9.2)	21 (9.6)
		Trapecio	1 (0.5)	
7	Trapecio	Paralelogramo	2 (0.9)	4 (1.8)
		Trapezoide	1 (0.5)	
		Pentágono	1 (0.4)	
	Polígono cóncavo	sin nombre	8 (3.7)	10 (4.6)
		Paralelogramo	1 (0.5)	
		Pentágono irregular	1 (0.5)	
8	Polígono cóncavo	sin nombre	2 (0.9)	2 (0.9)
TOTAL				**46 (21.1)**

Tabla 4.18 (G70-4ª sesión)

Se deduce de esta tabla que el mayor número de errores se produce cuando se unen 6 y 7 múltiplos consecutivos de 7. Los errores más frecuentes consisten en la confusión existente entre los nombres de los trapecios, paralelogramos y rectángulos.

[1] Con el nombre de "paralelogramo" nos referimos a los paralelogramos que no son rectángulos, cuadrados o rombos, es decir a los rombóides.

La tabla 4.19 recoge los **tipos de polígonos dibujados** por los estudiantes en esta actividad:

Tipos de polígonos

Nº de puntos	Segmento	Triángulo	Paralelogramo	Trapecio	Pol.cóncavo	Subtotal
3	4 (8,16)	45 (91,8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	49 (22,5)
4	0 (0)	2 (66,7)	1 (33,3)	0 (0)	0 (0)	3 (1,38)
5	0 (0)	5 (11,1)	0 (0)	39 (86,7)	1 (2,22)	45 (20,6)
6	0 (0)	0 (0)	46 (85,2)	7 (13)	1 (1,85)	54 (24,8)
7	0 (0)	0 (0)	0 (0)	15 (34,1)	29 (65,9)	44 (20,2)
8	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	23 (100)	23 (10,6)
Subtotal	4 (1,83)	52 (23,9)	47 (21,6)	61 (28)	54 (24,8)	**218 (100)**

Tabla 4.19 (G70-4ª sesión)

Sobre el diagrama de barras de las figuras 4.19 y 4.20, que muestran las frecuencias absolutas y relativas, respectivamente, de la tabla anterior, podemos destacar los siguientes aspectos:

1. Los triángulos se obtienen al unir 3, 4 y 5 múltiplos consecutivos de 7.

2. Los paralelogramos se obtienen mayormente al unir 6 múltiplos consecutivos de 7.

3. Los polígonos cóncavos se obtienen al unir 7 y 8 múltiplos consecutivos de 7.

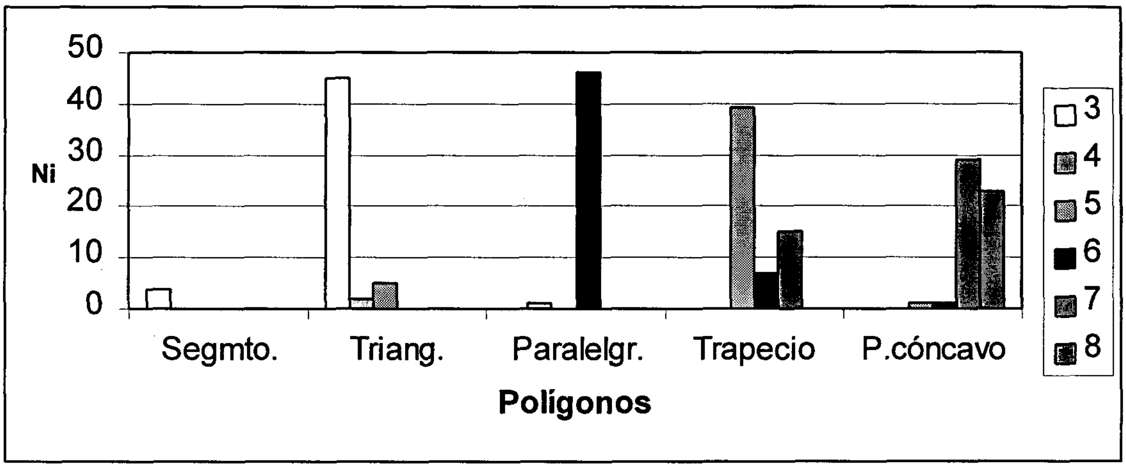


Fig. 4.19 (G70-4ª sesión)

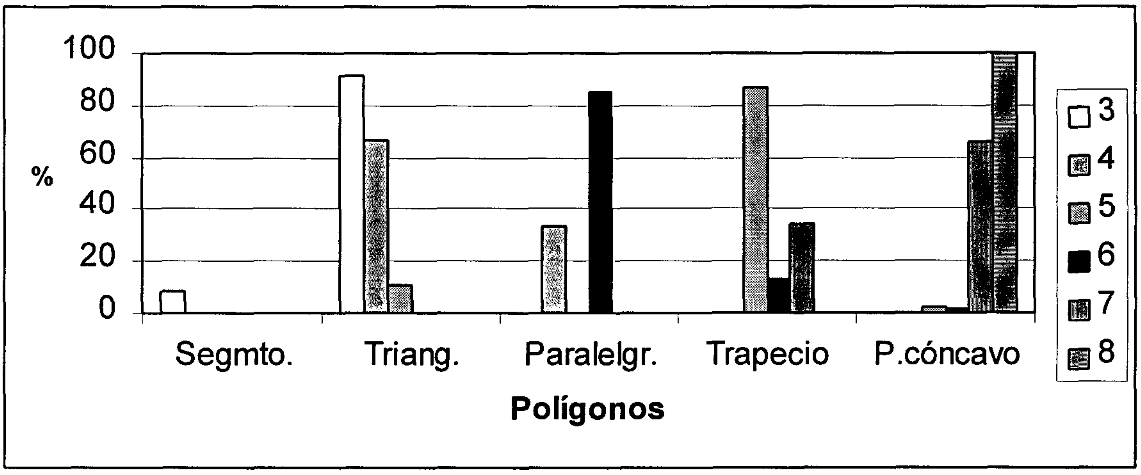


Fig. 4.20 (G70-4ª sesión)

4.5.5 Resultados generales para la tarea 4.2 en G70

La tarea 4.2 consiste en encontrar regularidades y relaciones entre el número de puntos que se unen para formar el polígono, el área de dicho polígono y el número 7.

Tabla de respuestas

Recogemos las respuestas en la tabla 4.20:

	Respuestas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Características del área**		46 (92.0)
	A_1) El área del polígono va aumentando en 3,5 unidades (7/2) cuando aumentamos en uno el número de puntos.	20 (40.0)	
	A_2) $\boxed{A = \frac{(p-2)x7}{2} = \frac{7}{2}\,x(p-2)}$ p = número de puntos a unir.	9 (18.0)	
	A_3) El área del polígono no depende de la forma sino del número de puntos que unimos.	7 (14.0)	
	A_4) El área del polígono es múltiplo de 3,5.	5 (10.0)	
	A_5) Al aumentar el número de puntos que unimos, aumenta el área.	2 (4.0)	
	A_6) $\boxed{A = I + \frac{F}{2} - 1}$ I=puntos interiores al polígono F=Puntos frontera (sobre los lados del polígono). (Fórmula de Pick)	1 (2.0)	
	B) Características del polígono		
	B_1) Al unir 7 o más puntos obtenemos polígonos irregulares.	1 (2.0)	
	B_2) Se repiten las figuras al sumar 7 decenas o bajar 7 lugares	1 (2.0)	
Incompletas	B_3) El área de los polígonos que se forman uniendo múltiplos consecutivos de 7, es un múltiplo de 7. (Nota: hay que añadir para p=2n)	2 (4.0)	2 (4.0)
Incorrectas	B_4) A partir de 6 puntos a unir, el polígono es cóncavo. (Nota: ver contraejemplo en fig.7-A)	1 (2.0)	2 (4.0)
	B_5) Al unir de 3 a 6 puntos, obtenemos polígonos regulares.	1 (2.0)	
Total			**50**

Tabla 4.20 (G70-4ª sesión)

Comentarios

Observamos el alto porcentaje de regularidades correctas (92.0%), entre las que destaca la fórmula encontrada por 9 estudiantes (18.0%) que proporciona un método para encontrar el área del polígono dibujado:

$$\boxed{A = \frac{(p-2)x7}{2} = \frac{7}{2}\,x(p-2)}$$

donde p es el número de puntos (asociados a múltiplos consecutivos de 7) que se unen para formar el polígono. Esta fórmula es cierta excepto cuando se obtienen tres puntos alineados, reduciéndose el dibujo a un segmento de área cero. Por ello hay que imponer que $p>3$, aunque ningún alumno ha tenido en cuenta este aspecto.

Un 50% de los estudiantes señalan que el área aumenta en módulos de 7/2 (respuestas A_1 y A_3) aunque no lo relacionan con el número de puntos que se unen.

Las tareas 4.3 y 4.4 consisten en repetir las mismas actividades anteriores pero uniendo múltiplos consecutivos de 2.

Aunque globalmente los resultados son similares, destacamos las siguientes diferencias:

1. Al unir múltiplos consecutivos de 7 el número de respuestas correctas disminuye significativamente cuando se unen 4 puntos. En cambio, cuando se unen múltiplos consecutivos de 2, el número de respuestas correctas disminuye significativamente al unir 5 puntos.

2. En la tarea 4.3 existe un mayor número de respuestas incorrectas de tipo E, al formar polígonos uniendo múltiplos de 2 que no son consecutivos.

3. Existe mayor variedad en el tipo de polígonos para esta tarea 4.3, apareciendo polígonos como rectángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y heptágonos convexos que no aparecían en la tarea 4.1.

4.5.6 Resultados en G3 y G1

G3

Los componentes de este grupo no tienen muchos problemas con el cálculo de áreas ni con el nombre de los polígonos, excepto alguna confusión entre paralelogramo y trapecio en uno de los componentes del grupo. Asimismo obtienen la misma fórmula para el cálculo del área en función del número de puntos p que se unen y el número 7, y señalan el aumento del área en módulos de 7/2.

En este grupo se extienden las tareas 4.1 y 4.2 a múltiplos de 2 y de 3 y se generaliza la fórmula anterior a:

$$\boxed{A = \frac{k}{2} x(n - 2)}$$

donde n es el número de puntos que son múltiplos consecutivos de k que se unen para formar el polígono.

G1

En la sesión con Julia se presenta la duda de si un cierto paralelogramo es o no un rectángulo. Julia lo resuelve utilizando los puntos del geoplano y los desplazamientos "bajar, avanzar, derecha":

(J) Sí. ¿Hacemos con 6? **Sale un rectángulo.** (Fig. A4.3-11)
(P) Vamos a ver. **¿Son los cuatro ángulos rectos?**
(J) A mí me parece que sí.
(P) Convénceme!
(J) Eso ya es más difícil.
(P) Hemos visto antes algo parecido ¿no?
(J) Ah. Este ángulo es 90° (Julia indica el ángulo formado por 3, 7, 37).
(P) **¿Cómo podemos saber si este ángulo (el formado por 21, 7, 28) es recto?**
(J) **Si éste (37, 7, 28) y éste (3, 7, 14) fueran iguales, sí sería ángulo recto ¿no?**
(P) ¿Y tú qué crees?
(J) **Pues que no. Porque éste (37, 7, 28) baja 2 y 1 a la derecha y el otro (3, 7, 14) avanza 3 y baja 1.**

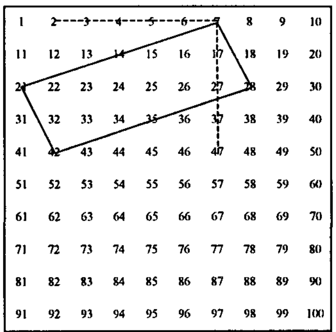


Fig. A4.3-11 (G1-4ª sesión)

Julia manifiesta que el área de los polígonos depende solamente del número de puntos que se unan, y que en este caso aumenta de 3.5 en 3.5.

La tarea se extiende para unir múltiplos consecutivos de 4 y de 5. Se obtiene por primera vez polígonos que no son simples, que presentan puntos dobles, lo que obliga a reconsiderar el tipo de polígonos a los que son aplicables la fórmula de Pick:

(J) **No. Me sale un triángulo... Me va a salir una cosa muy rara.** 16, 20, 24 y 28. (Fig. A4.3-16).
(P) ¿Qué te ha salido?
(J) Yo qué sé! Una cosa muy rara. **Dos triángulos...**
(P) O un cuadrilátero cuyos lados se cortan. **¿Y el área?**
(J) **Cuatro**, sale.
(P) Esto es la primera vez que sale.
(J) ¿Ah, sí?
(P) Te lo has inventado tú.
(P) ¿Seguro que sale 4? **¿Cuántos puntos interiores hay?**
(J) **Ah, ninguno. Sale uno!**
(P) Bueno vamos a hacer otro ¿Uniendo 4 puntos saldrá alguna cosa más?
(J) No.

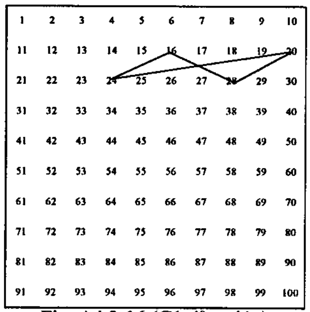


Fig. A4.3-16 (G1-4ª sesión)

(P) **Pasamos a 5 puntos.**
(J) Ya me he ido otra vez al difícil.
(P) No te preocupes.
(J) 16, 20, 24, 28, 32 (Fig. A4.3-17)
(P) Es lo que me decías el otro día, que siempre te ibas a lo más difícil ¿no?
(J) Siempre.
(P) **¿Qué polígono es?**
(J) Pues como no sea como uno de estos (Julia se refiere al polígono anterior).
(P) ¿Un polígono cóncavo? Bueno cóncavo y algo más. **¿Y el área?**
(J) **4.5.** Los de fuera partido por dos, me sale 4.5. Ah, no 3,5 me sale. 4.5 menos uno. 11 entre dos a 5.5; menos uno, a 4.5.
(P) **¿Podemos hacerlo por otro procedimiento?** Es que el 24 pertenece a los dos triángulos.
(J) ¿Hacemos uno por un lado, otro por el otro y luego los sumamos?
(P) Sí. Podemos considerarlo como dos triángulos o bien como un polígono cóncavo un poco especial.
Este triángulo sería 1, 2, 3, 4, 5, 6 entre dos, 3; menos uno, 2. Aquí sale algo curioso.
(J) **Es que entonces habría que contarlo dos veces.** (Julia se refiere al punto doble 24) Se supone que pasa dos veces. Si lo contamos dos veces sería, 12 entre dos, menos uno; 5. Vamos a ver. Por la otra fórmula (de Pick) sale... 1, 2, ... 11 y 12.
Seis, menos uno; 5. **Contándolo dos veces sale, 5. Y contándolo una vez saldría 4.5. Y de la otra manera (contando como dos triángulos) sale 4.**

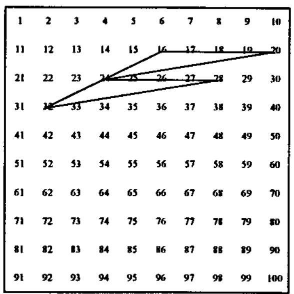


Fig. A4.3-17 (G1-4ª sesión)

(P) Ahora el problema es que la suma de las áreas de los dos triángulos debería dar igual que la del polígono, por la fórmula de Pick.
(J) Entonces lo deberíamos contar dos veces.
(P) El área, está claro que tiene que ser 4. Dos y dos. Y por la fórmula de Pick, ...
(J) **Falta este triangulillo (20, 24, 28) que sería 2 y tendríamos el 6.**
(P) La fórmula también es válida para polígonos cóncavos. (silencio).
Sí, espera. Lo que creo que pasa es que **la fórmula no es válida para polígonos con puntos dobles**, y éste (el 24) es un punto doble. Lo miraré y te lo digo el próximo día.

Julia llega a la conclusión de que el área de los polígonos que se forman uniendo **n** múltiplos consecutivos de **k** aumenta de k/2 en k/2 y escribe la correspondiente fórmula: $\boxed{A = \frac{k}{2} x(n - 2)}$.

4.5.7 Consideraciones sobre los resultados

Recogemos en la tabla 4.21 un balance entre los logros alcanzados en esta sesión en G70 de acuerdo con los objetivos planteados

Objetivos	Consideraciones
1. Estudiar el tipo de polígonos que se pueden obtener en la tabla-100, considerada como un geoplano, cuando se unen múltiplos consecutivos de un número k.	Los polígonos obtenidos por orden de frecuencia son: trapecios, polígonos cóncavos, triángulos y paralelogramos.
2. Calcular las áreas de dichos polígonos utilizando la fórmula de Pick.	El 17.9% de las respuestas contienen errores en el cálculo de áreas, siendo estos errores más frecuentes al unir 5, 6 y 7 múltiplos consecutivos de 7.
3. Encontrar alguna expresión aritmética que relacione el área del polígono, el número de puntos que se unen en el geoplano y el número k.	El 90.0% de los estudiantes encuentran regularidades a la hora de calcular el área del polígono, y un 18.0% escriben una fórmula general para el cálculo de dicha área en función del número p de múltiplos consecutivos de un número k: $\boxed{A = \frac{(p-2)x7}{2} = \frac{7}{2} x(p-2)}$

Tabla 4.21 (G70-4ª sesión)

G3 y G1

En esta sesión se pone de manifiesto el dominio de las herramientas aritméticas y geométricas básicas por parte de los componentes de G3, ya que no surgen problemas significativos en la realización de las tareas, destacando la obtención de una fórmula general para el cálculo del área de polígonos que se obtienen al unir n múltiplos consecutivos de k:

$$\boxed{A = \frac{k}{2} x(n - 2)}$$

En la sesión con Julia, con el fin de determinar si un paralelogramo es o no un rectángulo, surge la necesidad de comprobar que los patrones diagonales (en ambas direcciones) que configuran los múltiplos de 7 no son perpendiculares. Además de encontrar una regularidad en el cálculo del área, surgen polígonos que no son simples, a los que no es aplicable la fórmula de Pick.

4.6 Conclusiones generales sobre las tareas de contexto

Si tenemos en cuenta los objetivos generales para ese bloque de tareas que hemos llamado de contexto, podemos concluir que dichos objetivos se han conseguido de manera satisfactoria, ya que en términos generales los estudiantes han tomado contacto con la Tabla-100 y explorado variadas cuestiones que le permitieron poner en contacto lo aritmético con lo geométrico partiendo de situaciones y conceptos sencillos conocidos por ellos previamente.

Resumimos en la tabla 4.22 nuestras conclusiones para cada uno de los objetivos generales propuestos:

Objetivos generales	Conclusiones
1. Familiarizar a los estudiantes con el uso de la Tabla-100.	Este objetivo ha quedado plenamente conseguido ya que los estudiantes de los tres grupos han utilizado la Tabla-100 para reconsiderar las operaciones aritméticas con la faceta dinámica que le proporciona dicha tabla, encontrar patrones numéricos y visuales, así como establecer conexiones entre divisibilidad y polígonos en el geoplano.
2. Constatar la correspondencia que existe entre las operaciones aritméticas básicas y los desplazamientos por la tabla, dotando a aquellas de un sentido dinámico.	Los estudiantes han identificado las operaciones aritméticas con los desplazamientos por la Tabla-100 y códigos de coloreado, si bien aparecen más dificultades en el producto y división que en la suma y resta.
3. Encontrar regularidades de tipo visual en la tabla coloreada e interpretarlas aritméticamente.	Se han identificado sin dificultad patrones de tipo visual entre los múltiplos de un número asignándole una interpretación aritmética como operador aditivo. Surge por primera vez la idea de "***cadena***" como representación visual del operador aditivo, que será objeto de estudio principal de esta investigación.
4. Establecer conexiones entre el área de un polígono y el hecho de ser sus vértices puntos del geoplano asociados a los múltiplos de un determinado número k.	Se hallan relaciones entre las áreas de los polígonos así formados y el número k, encontrándose una fórmula que relaciona el área del polígono, el número de puntos que se unen y el número k. Surgen, además estrategias para calcular áreas de polígonos en el geoplano y se resuelven dudas de tipo geométrico (puntos alineados, paralelismo, ángulos rectos, etc.) con las ayudas de tipo aritmético que ofrece la Tabla-100.
5. Estudiar desde un punto de vista dinámico a los múltiplos de un número en la Tabla-100, sometiéndolos a isometrías planas sencillas observando el efecto aritmético producido.	Se introduce un elemento más de tipo dinámico en un contexto aritmético, siendo éste un primer contacto con el estudio posterior de las "***cadenas***" bajo la óptica de las isometrías planas y su efecto sobre el operador aditivo asociado.

Tabla 4.22 (G70)

4.7 Situaciones y cuestiones más significativas surgidas en G3 y G1

Los grupos G3 y G1 han posibilitado detectar detalles y situaciones problemáticas surgidas en el transcurso de la realización de las tareas, que no son fácilmente detectables en las sesiones con G70. Estas son, entre otras:

- Expresión de la equivalencia entre ciertos movimientos en la tabla, como el caso de "subir 1, izquierda 9" y "subir 2, derecha 1" puesto de manifiesto en G1.

- Constatación de la equivalencia de algunas cadenas en relación con el operador aditivo asociado a ellas, como señalan los componentes de G3.

- Matizaciones sobre algunas respuestas dadas en G70, como es el caso de la restricción que se pone en G3 a la validez de una estrategia para efectuar el producto de dos números en la tabla coloreada, consistente en *"encontrar el primer número donde aparezca el círculo y el triángulo juntos"*. En G3 señalan que *esto es válido solamente para números primos entre sí.*

- La importancia del uso de ciertas palabras para indicar operaciones aritméticas, como es el caso de la palabra "repartir" asociada a la división, como sugiere Julia en G1. Al considerar la palabra "agrupar", Julia encuentra una estrategia para dividir, *"haciendo grupos de 7 en 7 fijándonos en el triángulo (código del 7 en la tabla coloreada)"*.

- La confusión que produce en algunos estudiantes el hecho de que para encontrar el operador asociado a una cadena hay que contar el número de desplazamientos por la tabla en sentido vertical y horizontal, a partir de la casilla inicial, como es el caso de Julia en G1 que duda si contabilizar la casilla inicial como una unidad o decena.

- Algunas variables que se deben considerar a la hora de calcular el área de un paralelogramo en un geoplano, como es el caso de la incomodidad que sienten los estudiantes de G3 por el hecho de que la base del paralelogramo no es horizontal, tratando de girar la figura utilizando el calco para conseguir el objetivo. Se detecta en este proceso el error cometido atribuyendo la longitud de la hipotenusa a un cateto de un triángulo rectángulo.

- La aparición de polígonos que no surgen en G70, como es el caso del triángulo que se obtiene en G3 al unir 4 múltiplos de 7.

- El uso de criterios aritméticos que posibilita la tabla coloreada para resolver dudas de tipo geométrico, como cuando en G3 necesitan comprobar que tres puntos están alineados, utilizando el hecho de que dichos puntos están asociados a múltiplos de 7 y éstos forman un patrón rectilíneo diagonal en la tabla coloreada.

- El uso de desplazamientos por la tabla para resolver dudas de tipo geométrico, como cuando Julia en G1 trata de comprobar si las diagonales que forman los múltiplos de 7 son perpendiculares entre sí o no, para determinar si cierto cuadrilátero es un rectángulo. Julia lo resuelve contando los lugares que avanza y los que se desplaza a la derecha a partir de un vértice del polígono.

- La consideración de nuevos polígonos que no aparecen en G70, como cuando Julia dibuja polígonos con puntos dobles, a los que es aplicable la fórmula de Pick para el cálculo del área.

En general, podemos constatar un mejor manejo de las herramientas aritméticas y geométricas por parte de los componentes de G3, que quedan compensados por el interés, la intuición y la capacidad de visualización que demuestra Julia en G1.

4.8 Análisis final y decisiones tomadas tras la primera fase de investigación

Las dos primeras sesiones han conectado más directamente con los patrones de carácter visual-geométrico o cadenas. De hecho, en la segunda sesión, los estudiantes identifican muchos de estos patrones y los asocian a operadores aditivos correspondientes.

En la tercera sesión se toma un primer contacto con las transformaciones geométricas aplicadas a los múltiplos de un número. Estas tareas sugieren la posibilidad de estudiar el efecto que producen algunas isometrías sobre las cadenas antes mencionadas.

Aunque las tareas de la cuarta sesión no están directamente relacionadas con las cadenas, sino con los polígonos que se forman al unir **n** múltiplos consecutivos de un número **k**, los estudiantes, a través de estas tareas, establecen nuevas conexiones entre aritmética y geometría al encontrar una expresión para el área de dichos polígonos en función de **n** y **k**.

A la vista de las cuestiones tratadas en estas cuatro sesiones y de los resultados obtenidos, decidimos focalizar la segunda fase de la investigación (capítulo 5) en el estudio empírico de las cadenas como representaciones geométricas de los operadores aditivos, tratando de profundizar en aspectos tales como el efecto de algunas isometrías sobre dichos operadores, posible estructura algebraica del conjunto de las cadenas con la operación de la "suma", y la consideración de dichas cadenas en la Tabla-100 de k columnas.

Estos aspectos relacionados con las cadenas serán objeto de un estudio empírico más detallado en el capítulo 5, y se realizará su estudio teórico en el capítulo 6.

CAPITULO 5

Segunda fase: operadores aditivos en la Tabla-100

5.1 Presentación y objetivos

En el capítulo anterior hemos presentado los resultados más significativos de las tareas que hemos llamado de contexto, con el objeto de que los estudiantes encuentren relaciones entre aspectos aritméticos y geométricos en la Tabla-100. En el transcurso de estas actividades los estudiantes han explorado la riqueza de situaciones que esta tabla proporciona y, en el proceso de búsqueda de regularidades y patrones en torno a los múltiplos de un número, ha surgido la idea de "***cadena***" como una representación geométrica de los operadores aditivos en la Tabla-100, que es objeto de estudio de este trabajo de investigación.

Esta noción ha dado lugar a nueva fase en el estudio empírico. Para trabajar con los profesores en formación sobre estos conceptos hemos diseñado una serie de tareas; con ellas pretendemos mostrar la potencialidad de las nuevas representaciones y explorar la comprensión de los alumnos mediante su empleo.

En este capítulo ofrecemos los resultados de las tareas correspondientes al estudio de las cadenas con los profesores de primaria en formación. Presentamos las actividades a estos alumnos como una continuación de las anteriores, y las distribuimos en tres sesiones de dos horas de duración cada una. Estas sesiones tratan sobre:

Primera: Elementos algebraicos del conjunto de las cadenas con la "operación suma".

Segunda: Cadenas y transformaciones geométricas.

Tercera: Representaciones simbólicas de los operadores aditivos. Las cadenas en la Tabla-100 de k columnas.

Dada la falta de investigaciones anteriores sobre este campo, las tareas desarrolladas tienen un doble propósito: por una parte pretendemos observar la mayor o menor aceptación que los estudiantes deparan al estudio de las ***cadenas*** consideradas como representaciones geométricas de operadores aditivos, y por otra queremos detectar las dificultades y situaciones problemáticas que surgen en el mencionado estudio. Esta fase del estudio está focalizada en el objetivo general de la investigación, que enunciamos en el apartado 2.15 y que resumimos así: ***indagar acerca de las posibilidades de la Tabla-100 como medio de representación geométrica para los operadores aditivos en dicha tabla.***

Este objetivo global lo desarrollamos en los siguientes

5.1.1 Objetivos parciales

Para llevar a cabo esta fase del estudio consideramos varios objetivos parciales:

1. Proporcionar nuevas representaciones de tipo geométrico para los operadores aditivos en la Tabla-100.

2. Utilizar las cadenas para estudiar la posible estructura algebraica del conjunto de los operadores aditivos con la "suma".

3. Estudiar el efecto sobre los operadores aditivos asociados a las cadenas cuando éstas se someten a isometrías sencillas.

4. Encontrar representaciones de tipo simbólico para los operadores aditivos.

5. Extender el estudio de las cadenas al considerarlas en la Tabla-100 de k columnas.

5.1.2 Esquema para presentar las sesiones de trabajo

En cada una de las sesiones con los grupos G70, G3 y G1, presentamos globalmente:

- Los objetivos.

- Los contenidos o tareas propuestas.

- La valoración y clasificación de respuestas.

- Consideraciones sobre los resultados de cada sesión.

Aunque hemos recogido todos los resultados de los estudiantes asistentes a cada sesión, solamente analizamos y presentamos en este capítulo las respuestas de los 43 alumnos que asistieron a las tres sesiones de que se compone este bloque de tareas.

Las sesiones se han desarrollado secuencialmente en los grupos G70, G3 y G1, en este orden. No obstante, con el fin de favorecer una lectura más cómoda de los resultados de las tareas, éstos los presentamos transversalmente, es decir, presentando para cada tarea las respuestas que ofrecen sucesivamente los grupos antes citados.

5.2 Primera sesión

El contenido de esta primera sesión se centra en el estudio de las cadenas con la "operación suma".

5.2.1 Descripción general y objetivos

Una vez que ha surgido la idea de cadena para expresar de manera geométrica un operador aditivo, pretendemos en esta sesión encontrar cadenas equivalentes para representar el mismo operador aditivo y constatar el paralelismo existente entre las cadenas y los objetos aritméticos a los que representan, así como poner de manifiesto, mediante la utilización de las cadenas, algunas propiedades de la estructura del grupo de los operadores aditivos con la operación “suma de operadores”.

Este objetivo lo especificamos con más detalle en los siguientes

Objetivos de la sesión

1. Encontrar distintos tipos de cadenas asociadas a los operadores aditivos en la Tabla-100.

2. Encontrar criterios para “sumar” o componer cadenas (denotados con el símbolo *) que estén de acuerdo con la “suma” de los operadores aditivos asociados y estudiar si dichos criterios son o no leyes de composición interna.

3. Determinar la existencia de alguna cadena que desempeñe el papel de ***elemento neutro*** para la “suma o composición” de dichas cadenas.

4. Reconocer la cadena que desempeñe el papel de elemento simétrico de una cadena dada respecto de la operación anterior *.

5.2.2 Tareas propuestas

Esta primera sesión se compone de 10 tareas que son:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12 ↓	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22 ↓	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32 →	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 5.1 (G70 sesión 1ª-tarea1)

Tarea 1. 1 (T 1.1)

La figura G70-1.1 es un patrón que, colocado sobre la Tabla-100, realiza la operación "sumar 21". Si lo aplicamos al 12, por ejemplo, obtenemos: 12 + 21 = 33.

Dibuja, en la misma tabla de la figura anterior otros tres patrones que realicen la misma operación, "sumar 21", aplicados a

cualquier número de la tabla.

T 1.2 **Dibuja en la misma tabla de la figura 5.1 un patrón que realice la operación "restar 21".** Al conjunto de este tipo de patrones, que tienen una casilla origen y otra final, en forma de "cadena", le llamaremos el conjunto de las Cadenas, y lo notaremos por C.

T 1.3 A todas las cadenas que realizan la operación "sumar 21" las consideramos equivalentes y a ese conjunto de cadenas lo llamamos operador +21, que notamos como [+21]. De la misma manera notamos [-21] al operador -21, que es el conjunto de todas las cadenas que realizan la operación "restar 21". Al conjunto de todos estos operadores aditivos le denominamos con la letra O. Tenemos de esta manera asociado a cada cadena un operador aditivo, que para la cadena de la figura 5.1 es el [+21].

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 5.2 (G70-sesión 1ª-tarea 3)

Tratamos ahora de encontrar una ley de composición para las cadenas (que notaremos *) y otra para los operadores asociados a ellas (que notaremos $\oplus$).

a) Inventa y explica brevemente un criterio (una ley *) válido para la composición de dos cadenas.

b) Ilústralo con un ejemplo en la tabla de la figura 5.2

T 1.4 **Indica en qué condiciones esa ley * sería una ley de composición interna.**

T 1.5a **Explica cuál sería la ley ($\oplus$) para los correspondientes operadores asociados. Pon un ejemplo.**

T 1.5b **¿Sería ésta $\oplus$ una ley de composición interna?**

T 1.6 **¿Existe alguna cadena que sea elemento neutro para *?**

En caso afirmativo escribe cuál sería e ilústralo con un ejemplo.

T 1.7 **¿Existe algún operador que sea elemento neutro para ⊕?**

En caso afirmativo escríbelo e ilústralo con un ejemplo.

T 1.8 **En caso afirmativo en las preguntas anteriores. ¿Tendría la cadena de la figura 5.1 su simétrico respecto de la ley * que has definido? En el caso de ser así, dibújalo y compruébalo.**

T 1.9 **¿Cuál sería el correspondiente simétrico del operador?**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12 ↓	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22 ↓	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32 →	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 5.1 (G70-sesión 1ª-tarea)1

Para cada una de las tareas realizadas especificamos los siguientes apartados:

- Enunciado de la tarea.
- Criterios de clasificación de las respuestas
- Tabla de resultados en G70.
- Comentarios a los resultados de G70.
- Aspectos destacables en G3 y G1.

5.2.3 Resultados de la tarea 1. 1

Pretendemos presentar a los estudiantes un tipo de representación geométrica (que en principio llamamos patrón, y que en adelante llamaremos *cadenas*) con el objeto de que ellos dibujen otras representaciones de tipo geométrico asociadas al mismo operador.

Enunciado

La figura 5.1 es un patrón que, colocado sobre la Tabla-100, realiza la operación "sumar 21". Si lo aplicamos al 12, por ejemplo, obtenemos:

$$12 + 21 = 33.$$

Dibuja, en la misma tabla de la figura anterior otros tres patrones que realicen la misma operación, "sumar 21", aplicados a cualquier número de la tabla.

Resultados en G70 de la tarea 1.1

Criterios de clasificación de las respuestas

Las 116 respuestas de los alumnos las clasificamos atendiendo a las características encontradas:

- Señalar el origen y final.

- Poseer todos los ángulos múltiplos de 90º (ausencia de tramos oblicuos).

- Tener el mínimo número de casillas. (esta característica viene especificada mediante el símbolo * en la tabla de respuestas correspondiente).

- Representar correctamente al operador [+21].

Tablas de resultados

La tablas G5.1-a y 5.1-b recogen los resultados de los estudiantes de G70 siguiendo esta clasificación.

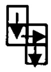
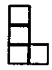
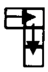
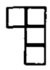
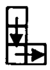
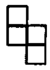
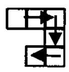
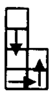
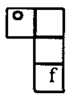
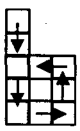
	Cadenas con origen y final		**Cadenas sin origen y final**	
	Figura	n_i (%)	Figura	n_i (%)
Cadenas con ángulos múltiplos de 90º	*A) 	30 **(25.9)**	*LL) 	5 **(4.3)**
	*B) 	28 **(24.1)**	*M) 	3 **(2.6)**
	*C) 	22 **(19.0)**	*N) 	2 **(1.7)**
	D) 	14 **(12.1)**		
	E) 	1 **(0.9)**		
	F) 	1 **(0.9)**		
	*G) 	1 **(0.9)**		
	H) 	1 **(0.9)**		
Total		98 **(84.5)**		10 **(8.6)**

Tabla 5.1a (G70-sesión 1ª-tarea 1): Cadenas con ángulos rectos que representan "sumar 21".

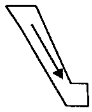
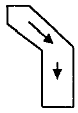
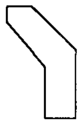
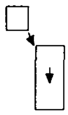
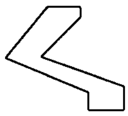
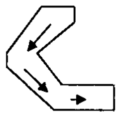
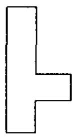
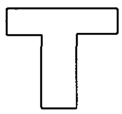
	Cadenas con origen y final		Cadenas sin origen y final	
Cadenas con ángulos no múltiplos de 90°	 *I)	1 (0.9)		
	 *J)	1 (0.9)	 *O)	1 (0.9)
	 *K)	1 (0.9)	 *P)	1 (0.9)
	 L)	1 (0.9)		
Total		4 (3.4)		2 (1.7)
Figuras que no corresponden al operador [+21]			 Q)	1 (0.9)
			 R)	1 (0.9)
Total				2 (1.7)
Número total de respuestas				**116**

Tabla 5.1b (G70-sesión 1ª-tarea 1): Cadenas con ángulos no rectos que representan "sumar 21".

Presentación global de las cadenas obtenidas para representar "sumar 21" en la Tabla-100

Las figuras 5.3, 5.4 y 5.5, muestran las representaciones realizadas por los alumnos contextualizadas en la Tabla-100 y acompañadas con sus respectivas frecuencias en %.

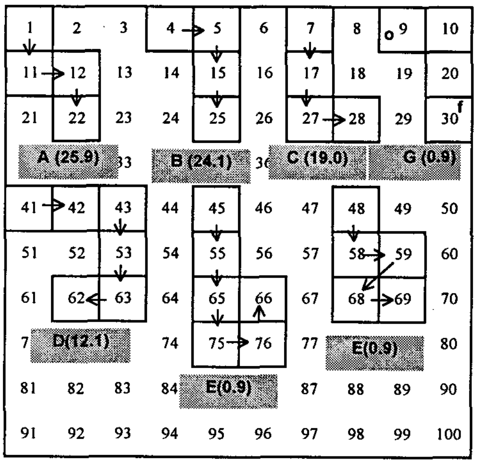


Fig. 5.3 (G70-sesión 1ª-tarea1)

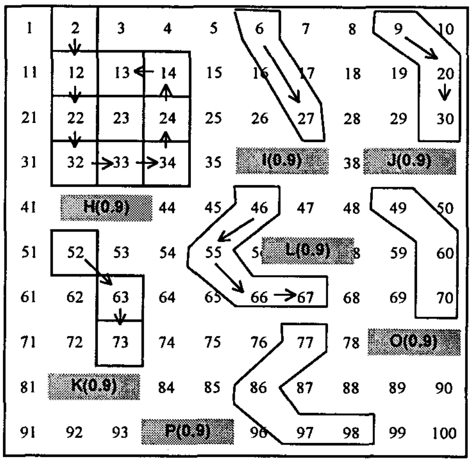


Fig. 5.4 (G70-sesión 1ª-tarea1)

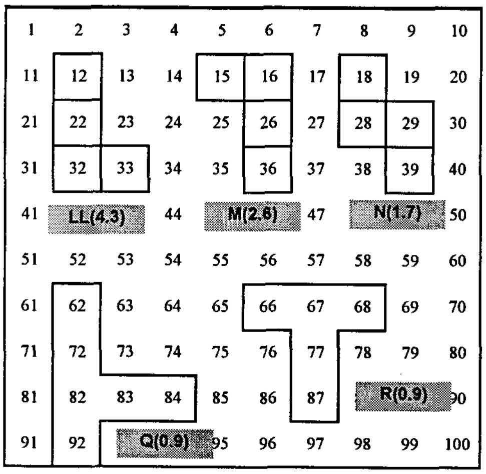


Fig. 5.5 (G70-sesión 1ª-tarea1)

Comentarios

Destacamos las 81 ***cadenas con origen y final, ángulos múltiplos de 90º (con tramos horizontales y verticales) y con mínimo número de casillas***, que suponen el 69.8% .

Solamente un 5.1% (3.4% con origen y final y 1.7% sin origen y final) son representaciones ***con caminos oblicuos.*** Solamente 2 representaciones (1.7%) no están bien construidas, al no estar determinados su celdilla origen y final.

De los datos se desprende que los estudiantes han captado adecuadamente el tipo de representación gráfica que llamamos cadenas y han realizado una gran variedad de ellas. El 78.4% de las representaciones son ***cadenas simples míni-mas*** (cadenas con un solo tramo vertical y horizontal y con menor número de casillas).

Aspectos destacables de la tarea 1.1 en G3 y G1

G3

Aunque la cadena que se le presenta a los componentes de G3 está orientada mediante flechas (igual que en el grupo G70), todas las representaciones realizadas en esta sesión son cadenas sin orientar y con ángulos que son múltiplos de 90º (Fig. A5.1-3).

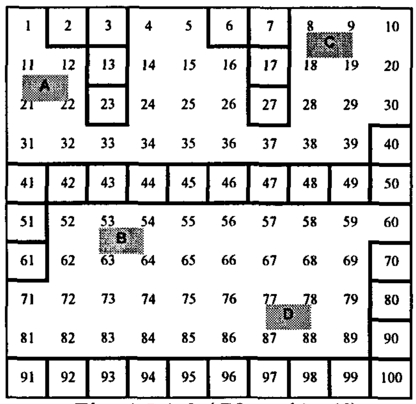


Fig. A5.1-3 (G3-sesión 1ª)

En cuanto a las representaciones obtenidas destacamos una nueva cadena que no aparece en G70, que consiste en retroceder una decena de unidades para alcanzar el borde izquierdo cuando se ha comenzado en el borde derecho (Cadena B de la Fig. A5.1-3)

Surge en este grupo el carácter de "aplicación" que tiene el operador aditivo así como el papel de "dominio" o "conjunto origen" que juega el conjunto de los números de la Tabla-100:

(P) Entonces el operador [+21] ¿Cómo se puede considerar?
(D) **Como una aplicación.**
(P) Claro, **a x lo transforma en ...**
(D) **En x+21.**
(P) (El profesor escribe x → x+21)
Entonces, dentro de lo que son las funciones y las aplicaciones **¿Qué papel desempeñarían estos números de la tabla?**
(D) **Como conjunto.**
(P) ¿Qué conjunto?
(PD) Sería el **origen**.

G1

La mayoría de las representaciones que realiza Julia son cadenas con ángulos múltiplos de 90° y sin especificar el origen y final. No obstante, Julia dibuja una figura que tiene un tramo oblicuo (Figura A5.2-2).

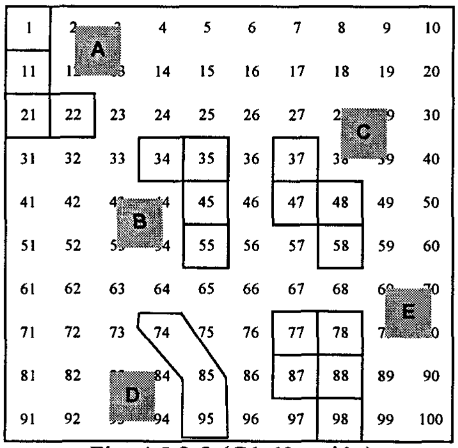


Fig. A5.2-2 (G1-1ª sesión)

A modo de comentario final sobre esta tarea destacamos que aunque en cualquier caso queda clara la idea de cadena en los estudiantes, estos se fijan más en la forma y las celdillas que la componen que en su orientación mediante flechas.

5.2.4 Resultados de la tarea 1.2

Establecemos el conjunto de las cadenas y tratamos de que los alumnos encuentren formas de obtener cadenas para el operador "restar" a partir de las que encontraron anteriormente para "sumar".

Enunciado

Dibuja en la misma tabla de la figura 5.1 un patrón que realice la operación "restar 21". Al conjunto de este tipo de patrones, que tienen una casilla origen y otra final, en forma de "cadena", le llamaremos el conjunto de las Cadenas, y lo notaremos por C.

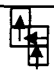
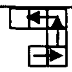
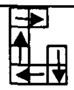
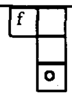
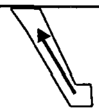
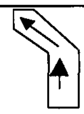
Criterios de clasificación de las respuestas

Conservamos los mismos criterios que en la tarea anterior.

Resultados de la tera 1.2 en G70

Tabla de resultados

La tabla 5.2 recoge las respuestas de los estudiantes en este grupo:

	Cadenas con origen y final		**Cadenas sin origen y final**	
	Figura	n_i (%)	Figura	n_i (%)
Cadenas con ángulos múltiplos de 90°	*A) 	29 (50.9)		
	*B) 	12 (21.1)		
	*C) 	6 (10.5)		
	D) 	2 (3.5)		
	E) 	2 (3.5)		
	*F) 	1 (1.8)		
Total		52 (91.2)		
Cadenas con ángulos no múltiplos de 90°	*G) 	2 (3.5)		
	*H) 	1 (1.8)		
Total		3 (5.3)		

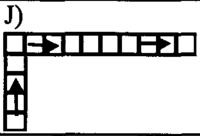
Figuras que no corres-ponden al operador [-21]			I) 	1 (1.8)
	J) 	1 (1.8)		
Total		1 (1.8)		1 (1.8)
Número total de respuestas				**57**

Tabla 5.2 (G70-1ª sesión-tarea 2): Cadenas que representan "restar 21".

Presentación global de las cadenas obtenidas para representar "restar 21" en la Tabla-100

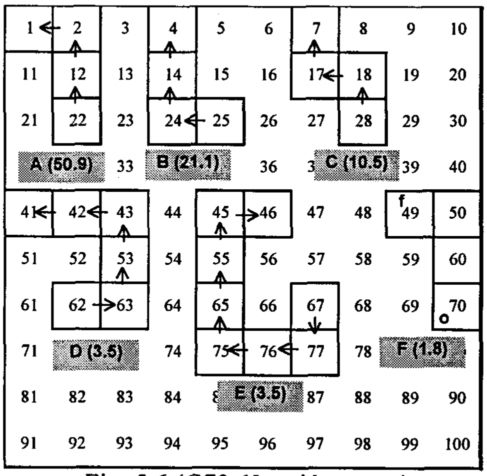


Fig. 5.6 (G70-1ª sesión-tarea)

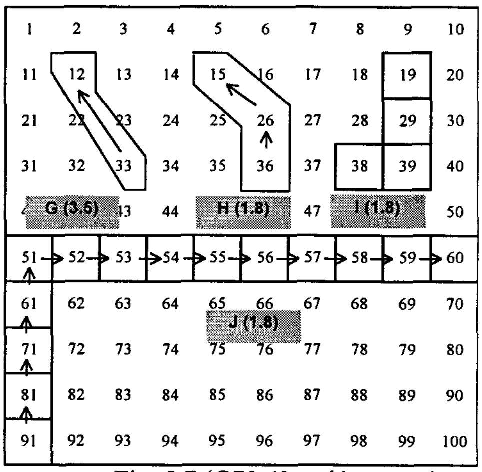


Fig. 5.7 (G70-1ª sesión-tarea)

Comentarios

Se produce la mitad de respuestas que para el operador positivo, así como menos variedad de representaciones y solamente una cadena sin orientar que además no se corresponde con el operador [-21].

Más de la mitad de los estudiantes muestran sus preferencias por la cadena que responden al criterio "subir, izquierda", dando en primer lugar las decenas y luego las unidades.

Existe también una gran mayoría (84.2%) que elige cadenas con menor número de casillas.

Solamente hay 3 representaciones con caminos oblicuos.

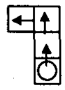
Aspectos destacables de la terea 1.2 en G3 y G1

G3

La palabra "simétrico" aparece aquí bajo dos acepciones, algebraica y geométrica. Desde el punto de vista algebraico, considerando el grupo de los operadores aditivos con la suma, el *elemento simétrico* del operador [+21] es el [–21]. Por otra parte, la cadena asociada a [+21] es , que expresamos como "bajar 2, derecha 1". Si esta cadena la sometemos a una reflexión de eje vertical se obtiene como *imagen simétrica* la cadena , que la describimos como "derecha 1, subir 2". El operador aditivo asociado a ella es [–19] y no el operador [–21] como señala Domingo en esta sesión. Este error, que posiblemente se haya debido a no incluir las flechas que dan orientación a las cadenas, hace reflexionar a sus compañeros: Pedro corrige el operador y Dolores dibuja otra cadena correcta y orientada mediante flechas, señala mediante un círculo la casilla inicial y elige como orden de los desplazamientos el de "decenas, unidades":

(P) Hay que dibujar un patrón que signifique **"restar 21".** Hay que usar un criterio que sea coherente. (PD) Depende del inicio. (**Domingo dibuja la figura** uniendo el 14 con el 33). (P) Tú has dibujado uno que es "bajar 2, y en lugar de "derecha 1" has hecho izquierda 1", ¿Y ese patrón cuál es? (D) Ah!, eso es verdad. (P) El patrón que has dibujado, **¿Qué representa?** (D) **Según, si tomas como origen el 33 sería restar.**

(P) Restar ¿Cuánto?
(D) **21.**
(PD) **Sería 19.**

(DL) Este mismo (Dolores señala ), pero tomando como origen el 33. **(Dolores dibuja , tomando el 33 como origen y lo rodea con un círculo. Dolores dibuja en esta ocasión las flechas para indicar el sentido del recorrido).**

G1

Julia señala que para restar hay que cambiar de sentido las flechas en la cadena correspondiente a "sumar", conservando la forma de la cadena, lo que supone alterar el orden de "decenas, unidades" por el de "unidades, decenas":

(P) Ahora dibuja una que sea "restar 21". Yo te he dado un criterio para sumar 21. Dame tú un criterio para restar 21.
(Julia hace la cadena A de la figura A5.2-3).
(J) **Me sale la misma L.**
(P) Del 1 al 22. En este caso, ¿Cuál sería el origen?
(J) El 22.
(P) **¿Cómo pondrías las flechas?**
(J) **Para arriba.** (Julia dibuja las flechas en ese momento).
(P) ¿Habría alguna otra manera para indicar "restar 21"?.
(J) Pues no lo sé. (Julia realiza la cadena B de la figura A5.2-3).

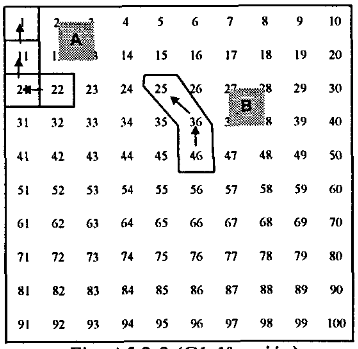


Fig. A5.2-3 (G1-1ª sesión)

5.2.5 Resultados de la tarea 1.3

Introducimos en esta tarea la equivalencia de cadenas y la noción de operador asociado a cada cadena. Definimos también el conjunto de operadores aditivos. Pedimos a los estudiantes criterios para componer cadenas y sumar operadores, y que realicen un ejemplo.

Enunciado

A todas las cadenas que realizan la operación "sumar 21" las consideramos equivalentes y a ese conjunto de cadenas lo llamamos operador +21, que notamos como [+21]. De la misma manera notamos [-21] al operador -21, que es el conjunto de todas las cadenas que realizan la operación "restar 21". Al conjunto de todos estos operadores aditivos le denominamos con la letra O. Tenemos de esta manera asociado a cada cadena un operador aditivo, que para la cadena de la figura 5.1 es el [+21].

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 5.8 (G70-1ª sesión-tarea 3)

Tratamos ahora de encontrar una ley de composición para las cadenas (que notaremos *) y otra para los operadores asociados a ellas (que notaremos $\oplus$).

a) Inventa y explica brevemente un criterio (una ley *) válido para la composición de dos cadenas.

b) Ilústralo con un ejemplo en la tabla de la figura 5.2

Criterios de clasificación de las respuestas

a) Los estudiantes ofrecen dos tipos de enunciados para la composición de cadenas (*):

E_1) "*Superponemos el final de una cadena con el origen de la otra*".

E_2) *"Sumamos (añadimos, juntamos) las casillas de la primera cadena con las de la segunda cadena".*

b) Clasificamos las **ilustraciones** y sus ejemplos atendiendo a las siguientes características:

Sup: Superponen la casilla final de una cadena con la original de la otra.

Yux: Yuxtaponen la casilla inicial de una cadena a continuación de la final de la otra cadena.

Opr: Especifican los correspondientes operadores en el esquema realizado.

O-F: Indican el origen y final de las cadenas.

Tipo: Tipo de ilustración gráfica realizada.

Tablas de resultados

a) Enunciado de criterios para la composición de cadenas:

Enunciados	**n_i (%)**
E_1	16 (37.2)
E_2	3 (7.0)
No contesta	24 (55.8)
Total	**43**

b) Las tablas 5.3a y 5.3b recogen los tipos de respuestas:

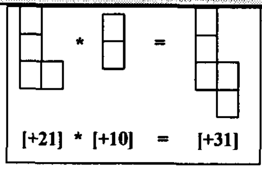
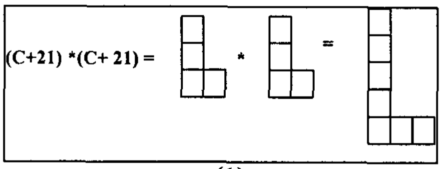
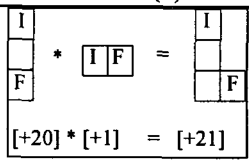
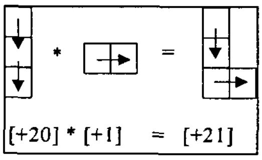
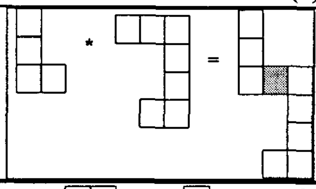
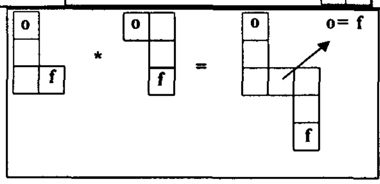
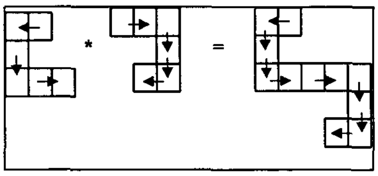
	Tipo	Sup	Yux	Opr	O-F	Figuras	n_i (%)
Correctas	A	x		x		 (18)  (1)	19 **(44.2)**
	B	x		x	x	 (3)  (3)	6 **(13.9)**
	C	x					6 **(14.0)**
	D	x			x	 (2)  (1)	3 **(7.0)**
Total		34 **(79.1)**	0	25 **(58.1)**	9 **(20.9)**		34 **(79.1)**

Tabla 5.3a (G70-1ª sesión-tarea 3): Criterios correctos para “sumar” cadenas.

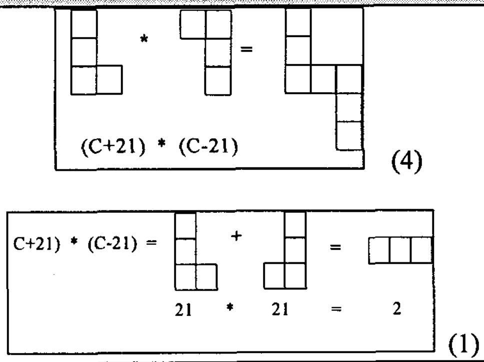
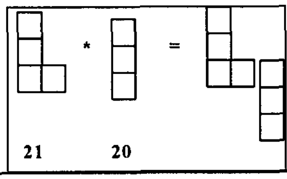
	Tipo	Sup	Yux	Opr	O-F	Figuras	n_i (%)
Incorrectas	E)	* Inco-rrec-tamen-te		x			5 **(11.6)**
	F)		x	x			4 **(9.3)**
Total		5 **(11.6)**	4 **(9.3)**	9 **(20.9)**	**0**		9 **(20.9)**
Número total de respuestas							**43**

Tabla 5.3b (G70-1ª sesión-tarea 3): Criterios incorrectos para componer (sumar) cadenas.

Comentarios

- El 79.1% de las formas de componer cadenas se han considerado correctas por ser coherentes con los operadores que representan (respuestas A, B, C y D).

- Un 58.1% del total mencionan los operadores a los que representan las cadenas (tipos A y B), mientras que el 9% orientan las cadenas con el origen y el final (tipos B y D).

- Existe un 20.9% de composiciones incorrectas (tipos E y F), debido fundamentalmente a dos factores:

a. El 20.9% realiza una yuxtaposición o agregación de celdillas, sin efectuar la superposición (tipo F).

b. El 11.6% realiza la superposición de casillas incorrectamente (tipo E), debido al hecho de utilizar cadenas correspondientes a operadores negativos y no señalar el origen y final de las cadenas.

- La tabla 5.4 recoge los símbolos utilizados por los estudiantes para referirse a los criterios de composición de las cadenas y a la suma de los correspondientes operadores:

Símbolo	Cadenas n_i (%)	Operadores n_i (%)
*	33 (76.7)	10 (23.3)
+	4 (9.3)	6 (14.0)
⊕	0	3 (7.0)
Nada	6 (14.0)	24 (55.8)
Total	43	43

Tabla 5.4 (G70-1ª sesión-tarea 3): símbolos para la composición de cadenas

La mayoría (76.7%) utiliza correctamente el símbolo * para la composición de cadenas, pero solamente un 7.0% utiliza el símbolo convenido ⊕ para la suma de operadores. El 14.0% no utilizan símbolo alguno para la composición de cadenas, y un 55.8% no utiliza símbolo para la suma de operadores.

Aspectos destacables de la tarea 1.3 en G3 y G1

G3

Los estudiantes de este grupo enuncia la ley E_1 que consiste en *superponer la casilla final de la primera cadena con la inicial de la segunda*:

(PD) Por ejemplo, sumar 3 con sumar 20. (Pedro realiza el dibujo A de la figura A5.1-4. La celdilla sombreada y doblemente recuadrada indica que ha superpuesto dos celdillas). (En realidad quiere decir sumar 2, en lugar de 3. La confusión, como en otras ocasiones proviene de que hay que tomar una cadena con 3 casillas para sumar 2)
(P) **¿Cómo lo harías?**
(PD) **En este caso, tenemos que hacer coincidir el final de la primera cadena con el principio de sumar 20.**
(P) Ajá!. Y te saldría...
(PD) Sumar 22, es la cadena resultante.
(P) **¿Qué cadena consideramos como resultante?**
(PD) **La que tiene el origen de la primera y el final de la segunda.**

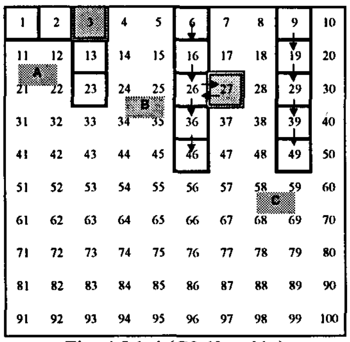


Fig. A5.1-4 (G3 1ª sesión)

G1

Julia enuncia, en primer lugar, la ley E_2 que consiste en yuxtaponer una cadena a continuación de la otra, aunque rectifica posteriormente:

(P) ¿Cómo compones esta cadena con ésta? (...)
(J) Ajá! Se la añado. (Julia realiza el dibujo C de la Fig. A5.2-4).
(P) Hasta aquí (el 79) era...
(J) El [21]. Y éste (desde el 89 al 99) el [10].
(P) Sería "derecha 1, bajar 4". Te ha salido...
(J) Sumar 41.
(P) Pues el operador [21] y el [10] te ha salido el [41]. No parece muy coherente, en el sentido de que no te ha salido la suma. La ley que te has inventado ha sido: "poner una a continuación de la otra". Entonces lo que has obtenido en este caso ha sido 10 más.
(J) Sí. Entonces se cogería el último... (Julia realiza el dibujo D de la fig. A5.2-4)
(P) Superponer...
(J) El origen del [10] con el final del [21].
(P) Entonces la ley que te has inventado sería...
(J) "Hacemos coincidir el origen de la segunda con el final de la primera".

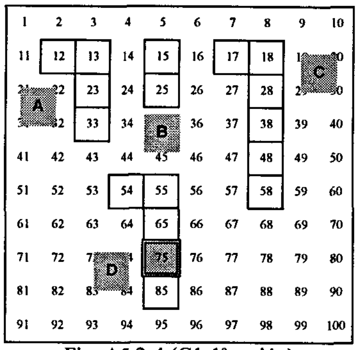


Fig. A5.2-4 (G1-1ª sesión)

5.2.6 Resultados de la tarea 1.4

Se pretende con esta tarea plantear la problemática que presentan las cadenas cuando rebasan los límites de la tabla, bien al considerar una cadena demasiado grande, al tratar de aplicarla a un número de la tabla próximo al borde o al realizar la composición de varias cadenas.

Enunciado

Indica en qué condiciones esa ley * sería una ley de composición interna.

Criterios de clasificación de las respuestas

Consideramos respuestas correctas las expresiones, bien en lenguaje ordinario o de manera gráfica, que hacen alusión al número de casillas que deben tener las cadenas para éstas no rebasen los límites de la tabla. Como incorrectas hemos considerado, entre otras, las respuestas que se refieren al número de la tabla a las que se pueden aplicar, ya que de esta respuesta se desprende una cierta confusión entre el dominio y el operador.

Resultados de la tarea 1.4 en G70

Tabla de resultados

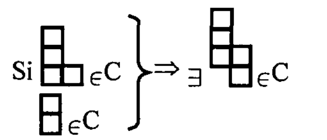
	Tipo de respuesta	n_i (%)	Total
Correctas	A) Respuestas que se refieren al tamaño máximo que deben tener las cadenas para que no se salgan de la Tabla.		23 **(53.5)**
	A_1) El resultado no debe ser mayor de100.	5 **(11.6)**	
	A_2) El número mayor de casillas en filas y columnas de la composición es 10.	4 **(9.3)**	
	A_3) La composición de los patrones no debe ser mayor que las dimensiones de la tabla.	3 **(7.0)**	
	A_4) Las dimensiones de los patrones no debe ser mayor de 5 casillas en cada fila y columna.	3 **(7.0)**	
	B) Expresión gráfica y simbólica  $\left.\begin{array}{l}[+21] \in O \\ [+10] \in O\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ [+31] \in O$	8 **(18.6)**	
Incorrectas	C) Realizan un comentario sobre el número máximo de la tabla al que se le puede aplicar la composición de cadenas que han presentado, ya que caso contrario se saldría de la tabla.	5 **(11.6)**	11 **(25.6)**
	D) Los dos patrones deben ser distintos, porque si fueran el mismo daría cero, ya que el final del primero coincide con el origen del segundo.	3 **(7.0)**	
	E) Es ley de composición interna si cumple las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro, elemento simétrico y si $x,y \in 3\ N \Rightarrow x*y \in N$	3 **(7.0)**	
	No contesta		9 **(20.9)**
	Total		**43**

Tabla 5.5 (G70-1ª sesión- tarea 4) : condiciones para que * sea una l.c.i.

Comentarios

Más de la mitad de los estudiantes señalan un número máximo que deben tener las cadenas para que se puedan componer y no salirse de los límites de la tabla. Un 11.6% alude al elemento del dominio al que se le puede aplicar la cadena. Aunque en realidad esta respuesta podría considerarse como correcta, (la composición de cadenas debe ser aplicable a cualquier elemento del dominio), la consideramos en el apartado de respuestas incorrectas por entender que el alumno no ha tenido en cuenta que las cadenas son invariantes frente a traslaciones, y en principio no influye el elemento del dominio al que se le aplique.

Aspectos destacables de la tarea 1.4 en G3 y G1

G3

Los estudiantes de este grupo parecen no entender bien la pregunta. Ante la intervención del profesor, producida por los reiterados silencios de los estudiantes, éstos expresan la condición de *"tener las cadenas el menor número de casillas"* o *"que este número no pase de 10"* para que la composición no se salga de la tabla. Posteriormente rectifican y establecen como condición que ***"la suma de ambas no pase de 10"***:

(P) Por ejemplo si queremos efectuar "sumar 30 con sumar 90" ¿Qué va a pasar?
(D) Que se sale.
(P) Que el resultado se va a salir del dominio ¿no? Entonces, **¿Qué restricciones podemos poner?**
(PD) **Tomar un representante con el menor número posible de casillas.**
(P) Sí, pero si tomamos "sumar 140", el representante menor va a tener 14 casillas. Siempre se va a salir. Una condición, efectivamente va a ser esa: tomar el representante con el menor número de casillas, pero además, ¿Qué habrá que pedir en cuanto al número de casillas?
(DL) **Que no se pase de 10.**
(P) ¿Pero si uno tiene 10 y otro 5?
(DL) **Que la suma no se pase de 10.**

G1

Julia advierte que *cuando la cadena se sale por un borde debe aparecer por el borde opuesto en la fila siguiente,* lo que supone una buena intuición por parte de Julia para resolver el problema de los límites laterales de la tabla.

(P) Eso es. Si coloco el cadena [+11] aquí en el 49, ¿La puedo componer con el [+2]?
(El profesor dibuja la cadena del [+11] de la Fig. A5.2-5A).
(J) Colocar ¿el qué? ¿Esta con ésta? Sí.
(P) ¿Cómo?
(J) Pues poniendo, por ejemplo en el origen del segundo el final del primero.
(P) **¿Puedes componer [11] con [2] aplicado al 49 sin que las cadenas se salgan de la tabla?**
(J) **Sí.**
(P) ¿Cómo?
(J) **Poniendo en el 77 el origen del segundo (Julia realiza el dibujo B de la fig. A5.2-5).**

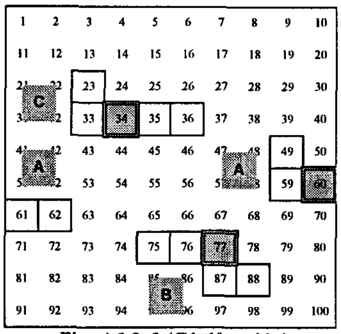


Fig. A5.2-5 (G1-1ª sesión)

(P) Bien. Has aplicado la propiedad conmutativa ¿no? Has hecho [2] ⊕ [11] en lugar de [11] ⊕ [2] ¿no?
(J) Bueno.
(P) ¿Y sin aplicar la propiedad conmutativa? Esta es la cadena [11] y ésta el [2]
(el profesor escribe [11] ⊕ [2])
¿Cómo lo harías gráficamente?
(J) Jolín! Apurándome mucho, como no sea así, de otra forma no se podría.
(Julia realiza el dibujo de la Fig. A5.2-5, continuando el cadena [2] de 3 casillas en el comienzo de la fila siguiente).

No obstante, al pedirle a Julia que dibuje un ejemplo de composición de cadenas que no se pueda realizar en la tabla, se pone de manifiesto que ella condiciona la composición de los operadores a los números de la tabla a los que se los aplica:

(P) ¿En qué caso no se podría hacer? **Pon un ejemplo en que no se pudiera hacer una composición de cadenas.**
(J) Se supone que (la tabla) no acaba en el 100.
(P) Sí, la tabla termina en el 100.
(J) Pues entonces, **que pase del 100.** (Julia realiza las cadenas A y B de la figura A5.2-6) Este, el [11] y el [3]. **[11] ⊕ [3].**
(P) Pero ese sí lo sabes hacer.
(J) **Pero si acabamos en 100...**
(P) Pero es que la cadena me la puedo llevar a otro sitio donde sí me quepa. Venga, pon un ejemplo que no se pueda hacer.
(J) **Como no sea coger la cadena [100] y sumarle otra...**

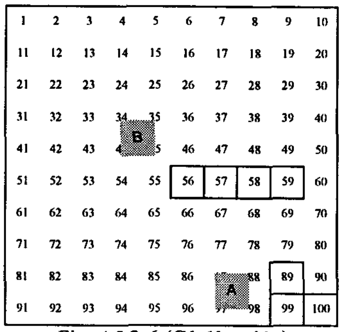


Fig. A5.2-6 (G1-1ª sesión)

En la misma sesión sesión de trabajo también se detecta el conflicto que le produce a Julia el que la cadena resultante (que corresponde al operador [+11]) finalice en el número 12. En este caso confunde el operador (cadena) con la imagen de un número:

(continúa del párrafo anterior)
(P) Ese está claro. Ese seguro que no se puede hacer, porque la pongas donde la pongas te vas a salir de la tabla. **Dime otro ejemplo que no sea tan exagerado.**
(J) ¿Tiene que ser suma?
(P) La ley * que hemos definido, que es "superponer...".
(J) Serviría por ejemplo. **Tomamos esta L** (la cadena A que empieza en el 1 y termina en el 100 de la **Fig. A5.2-7 sin sombrear), y luego coger ésta que empieza en el 2 y termina en 90 (cadena B de la Fig. A5.2-7 sombreada).**
(P) Y la composición de esas dos cadenas ¿Qué sería?
(J) Que **no se podría hacer ¿no? ¿O sí se podría?**
(P) Pero si te lo pregunto yo a ti! Esta L sería "bajar 9, derecha 9", sería el [99]. Y la otra ¿Qué operador es?
(J) El [88].

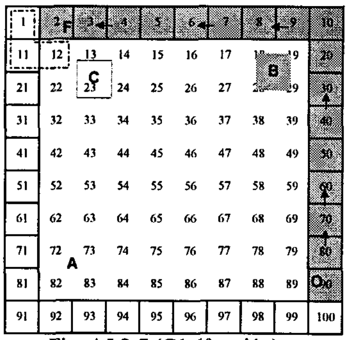


Fig. A5.2-7 (G1-1ª sesión)

(P) (El profesor escribe [99] ⊕ [88]) **¿Se podría hacer?**
(J) **Yo creo que no.**
(P) ¿Por qué?
(J) Porque para poder ponerla **te saldrías de la tabla.**
(P) Si la consideras como "sumar" nos saldríamos de la tabla.
(J) Pues eso.
(P) **En cambio restar, sí se podría hacer ¿no?**
(J) Sí.
(P) ¿Cómo lo harías? Este (el 90) es el origen y éste (el 2) es el final. (El profesor los señala en la figura 8 con una O y una F respectivamente). **¿Cómo restarías esas dos cadenas?**
(J) Pues si bajo ésta (cadena B de la figura A5.2-7) un lugar, el 90 coincide con este final (se refiere al 100).
(P) O sea, la casilla donde está ahora mismo el 90, hacerlo coincidir con el 100. ¿Y cuánto daría?
(J) 99 menos 88, ... Es que ya estoy liada con la resta.
(P) Imagínate que esta figura (cadena B de la figura A5.2-7) la tenemos hecha en una transparencia. Bajaríamos, y obtendríamos...
(J) **El 12. Tiene que dar 11.**

(P) Tiene que dar 11. ¿No da 11? **(Julia confunde el operador 11 (cadena C de la figura cadena B de la figura A5.2-7 con trazo punteado) con el estado, el número 12 de la tabla).**

Posteriormente, con otro ejemplo, Julia realiza correctamente la operación:

(P) Vamos a hacer un ejemplo más sencillo. **Al [21] famoso le vamos a restar [10]**. (El profesor dibuja la cadena del 21 que une el 22 con el 43, en la Fig. A5.2-8A, así como la cadena del 10 que une el 26 con el 36 en la Fig. A5.2-8B).

Si sumáramos, la esta cadena , la tendríamos que poner así (del 43 al 53), pero si se la restamos... ¿Cuál sería el origen ahora?
(J) El 43.
(P) Entonces **¿Cuál sería el resultado?**
(J) (Julia señala con el lápiz la cadena en L correspondiente al 11 que une el 22 con el 33 de la figura 9-A.

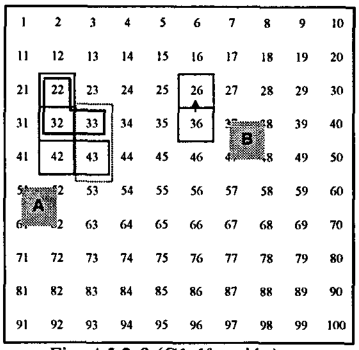


Fig. A5.2-8 (G1-1ª sesión)

(J) Es que es 22 menos 10. Es que se tendría que poner el origen en este origen. El profesor escribe [+21] ⊕ [-10]=[+11].
Claro, y efectivamente da [11] (El profesor recuadra la cadena de las casillas 22-32-33).
(J) Esta con esta nos da .
Es que yo me estaba fijando en el número. Sí sale [+11] (Julia señala la cadena C y el número 12 de la Fig. A5.2-7).

5.2.7 Resultados de la tarea 1.5a

Se pretende constatar el paralelismo entre cadenas y operadores y definir la ley para “sumar” dichos operadores.

Enunciado

Explica cuál sería la ley (⊕) para los correspondientes operadores asociados. Pon un ejemplo.

Resultados de la tarea 1.5a en G70

Tabla de resultados

	Tipo de respuesta	n_i (%)	Total
Correctas	A) Se limitan a poner ejemplos del tipo [+21] ⊕ [+21] = [+42].	14 **(23.6)**	21 **(48.8)**
	B) Se suman o restan estos operadores sumando o restando los números interiores al corchete.	6 **(14.0)**	
	C) [+12] ⊕ [+11] =[(12 + 11)] =[+23]	1 **(2.3)**	
Incorrectas	D) Que todos los números pertenezcan a N y el resultado sea < 100.	3 **(7.0)**	7 **(16.3)**
	E) El final del primero coincide con el origen del segundo.	3 **(7.0)**	
	F) Es aplicable a los números menores que 68 (68 ⊕ 42 = 100)	1 **(2.3)**	
	No contesta		15 **(34.9)**
total			**43**

Tabla 5.6 (G70-1ª sesión-tarea 5a): ley para "sumar" operadores aditivos.

Comentarios

Aunque existe un 48.8% de respuestas consideradas correctas, solamente un estudiante distingue el uso del símbolo ⊕ para sumar clases de equivalencia, del símbolo + para indicar la suma de representantes (respuesta C).

Aspectos destacables de la tarea 1.5a en G3 y G1

G3

Domingo expresa correctamente la suma de operadores utilizando términos generales:

(P) Bien. ¿Cómo escribiríamos sus correspondientes operadores? ¿Qué operador se obtiene con [+21] ⊕ [+19] ? (D) El operador [+40]. (P) Entonces **¿Cómo definimos esta "suma" ⊕?**

(Domingo escribe: **[a] ⊕ [b] = [a+b]**)

G1

A Julia le cuesta entender la pregunta, pero al final Julia acepta la respuesta del profesor, que es la misma que la de Domingo en G3:

(P) Vamos a ver ¿Cómo definirías tú esta ley con operadores?
¿Cómo definirías el operador [+21] más el operador [+10]?
(J) Quedaría el operador [+31] ¿no?
(P) **¿Qué operador sería el operador a más el operador b?**
(J) El operador [c]. **(Julia escribe [a] ⊕ [b] = [c])**
(P) Pero quién sería [c]? ¿Cuál es la ley para ⊕ ? Visualmente era "superponer la casilla origen del segundo, ..." pero en el conjunto de operadores...
(J) A la derecha 1 y bajar uno, dos, tres, ...
(P) Sí, pero esto es en el caso del operador [+21]. Pero en el caso de [a] y de [b]?
(J) Pues ya está. Cogería éste que es el de los dos juntos, sumar 1 y bajar 3.
(P) Bien, pero me lo sigues haciendo con el caso particular. ¿Entiendes la pregunta?
(J) **Es que todavía no lo entiendo. Todavía estoy dormida.**
(P) Yo tengo una cadena, que puede tener esta forma, ...
(J) Eso sí lo entiendo. Lo que no pillo es lo del [31].
(P) Esto lo has hecho con unos números concretos. **Ahora hazlo en general, con a y b.** ¿Esto ([a] ⊕ [b] = [c] =) cuánto tiene que valer? **a más b** ¿no?
(Julia escribe al final: [a] ⊕ [b] = [c]= [a+b])

5.2.8 Resultados de la tarea 1.5b

Pretendemos constatar que debido al problema de los límites de la tabla, la operación de sumar operadores en la Tabla-100, es una verdadera ley de composición interna.

Enunciado

¿Sería ésta ⊕ una ley de composición interna?

Resultados de la tarea 1.5b en G70

Tabla de resultados

	Tipo de respuesta	n_i (%)	Total
Correctas	A) No es ley de composición interna.	5 (11.6)	8 (18.6)
	B) No, porque si la suma pasa de 100 ya no es l.c.i.	2 (4.7)	
	C) Sí, si el número de casillas tanto de las unidades como de las decenas no exceden de 5.	1 (2.3)	
Incorrectas	D) Sí, ya que el resultado pertenece a los 100 primeros números naturales.	5 (11.6)	16 (37.2)
	E) Sí.	4 (9.3)	
	F) Sí, porque si $[+21] \in O \Rightarrow [+21] \oplus [+21] = [+42] \in O$	3 (7.0)	
	G) Sí, porque la suma en N es l.c.i.	3 (7.0)	
	H) Sí, para los operadores no hay restricciones.	1 (2.3)	
	No contesta		19 (44.2)
total			43

Tabla %.7 (G70-1ª sesión-tarea 5b): carácter de l.c.i. de la "suma" de operadores.

Comentarios

Solamente el 18.6% tienen en cuenta que el dominio para los operadores aditivos es la Tabla-100 y por tanto la operación $\oplus$ no es una verdadera ley de composición interna en esa tabla.

No se aborda esta cuestión en G3 y G1.

5.2.9 Resultados de la tarea 1.6

Se trata de identificar la cadena o cadenas que sean elemento neutro para el conjunto de las cadenas en la Tabla-100.

Enunciado

¿Existe alguna cadena que sea elemento neutro para *?

En caso afirmativo escribe cuál sería e ilústralo con un ejemplo.

Resultados de la tarea 1.6 en G70

Tabla de resultados

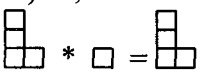
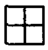
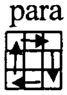
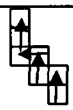
	Tipo de respuesta	**n_i (%)**	**Total**
Correctas	A) Sí, la unidad □ 	14 **(32.6)**	18 **(41.9)**
	B) Sí, una cadena cíclica que termine en ella misma: 	3 **(7.0)**	
	C) Sí, porque la cadena A actúa sobre el número original y lo modifica, y para volver a él le restamos el mismo número 	1 **(2.3)**	
Incom-pletas	D) Sí	1 **(2.3)**	1 **(2.3)**
Inco-rrectas	E) Sí, poniendo el sentido inverso 	4 **(9.3)**	5 **(11.6)**
	F) No	1 **(2.3)**	
No contesta			19 **(44.2)**
Total			**43**

Tabla 5.8 (G70- 1ª sesión-tarea 6): cadenas que representan un elemento neutro.

Comentarios

Un 32.6% de estudiantes señala que la cadena formada por una sola celdilla (la cadena con menor número de celdillas) es el elemento neutro, mientras el resto de los que responden correctamente se refieren a una cadena cerrada.

Existe un alto porcentaje (44.2%) de estudiantes que no responden a esta cuestión.

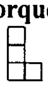
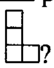
Aspectos destacables de la tarea 1.6 en G3 y G1

G3

En este grupo surgen las respuestas A y C de G70.

G1

A Julia le cuesta más interpretar la pregunta en términos de cadenas, aunque después de una breve charla señala la cadena con una sola celdilla como elemento neutro:

(P) ¿Habría alguna cadena que sirviera como elemento neutro?
(J) Con tomar dos cadenas iguales...
(P) No. Una cadena que sea elemento neutro para todos. En la suma de números naturales ¿Hay un elemento que sea el elemento neutro?
(J) Sí.
(P) ¿Cuál?
(J) El cero.
(P) Entonces, **en el conjunto de las cadenas, ¿Hay alguna cadena que haga el papel de elemento neutro?**
(J) Si se coge la misma cadena sí, porque sale la misma figura.
(P) Tomamos una cadena cualquiera,  por ejemplo. ¿Con qué otra cadena la tienes que componer para que el resultado se te quede igual ?
(J) Cojo el cadena [+21] con solo superponerla se me queda igual. ¿Pero eso no vale?
(P) Pero **¿Cómo superpones las cadenas?** El origen de la segunda debe coincidir con el final de la primera. Si el [+21] lo compones de nuevo con el [+21] te dará el [+42] ¿no?
(J) ¿No puedo mezclar la suma y la resta? Por ejemplo restarle la misma cadena.
(P) Hemos definido una ley *. Pues esa es la ley a la que nos debemos atener. Componer dos cadenas es: superponer la casilla final de la primera con la casilla original de la segunda, y ver la cadena que sale. Esa es la ley. Estamos buscando un elemento neutro, si es que hay. A lo mejor no existe, y lo estamos buscando.
(J) Una pregunta: ¿Esto (□) se puede considerar como una cadena?
(P) ¿Tiene origen y final?
(J) Sí.
(P) Tú has señalado un cuadradillo, solamente ¿no?
(J) El mismo número sería el origen y el final.

5.2.10 Resultados de la tarea 1.7

Tratamos de que los alumnos asocien a la cadena neutra el operador correspondiente.

Enunciado

¿Existe algún operador que sea elemento neutro para $\oplus$?

En caso afirmativo escríbelo e ilústralo con un ejemplo.

Resultados de la tarea 1.7 en G70

Tabla de resultados

	Tipo de respuesta	**n_i (%)**	**Total**
Correctas	A) El operador [+0] $[+21] \oplus [+0] = [+21]$	14 **(32.6)**	15 **(34.9)**
	B) $[+23] \oplus [0] = [(23 + 0)] = [+23]$	1 **(2.3)**	
Incorrectas	C) El mismo que para *, o sea	3 **(7.0)**	6 **(14.0)**
	D) El mismo pero cambiado de signo: $[+10] \oplus [-10] = [0]$ $2 \oplus 42 = 44; 44 \oplus (-42) = 2;$ $[+21] + [-21] = [0]$	2 **(4.7)**	
	E) Sí, porque el conjunto de operadores es N y sí tiene l.c.i.	1 **(2.3)**	
No contesta			22 **(51.2)**
Total			**43**

Tabla 5.9 (G70- 1ª sesión-tarea 7): elemento neutro para la suma de operadores.

Comentarios

Destacamos que la mitad de los estudiantes no contestan la pregunta.

Un estudiante distingue entre ambos símbolos $\oplus$ y + (respuesta B).

Aunque no se aborda específicamente esta pregunta en G3 y G1, Julia sí menciona al cero como elemento neutro.

5.2.11 Resultados de la tarea 1.8

Aunque en el enunciado de la tarea se mencionan las palabras "elemento simétrico", se pretende identificar la cadena que juega el papel de cadena opuesta a una cadena dada. Con ello se trata de asociar una representación geométrica para la operación inversa de "sumar".

Enunciado

En caso afirmativo en las preguntas anteriores. ¿Tendría la cadena de la figura G70-1.1 su simétrico respecto de la ley * que has definido? En el caso de ser así, dibújalo y compruébalo.

Resultados de la tarea 1.8 en G70

Tabla de resultados

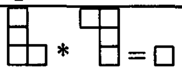
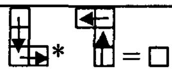
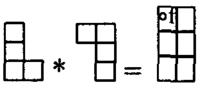
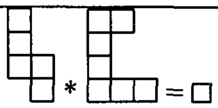
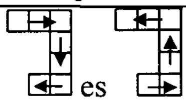
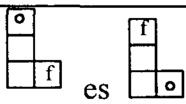
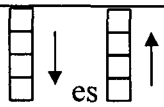
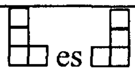
	Tipo de respuesta	n_i (%)	Total
Correctas	**A) Realizan un dibujo del simétrico y de la comprobación:**		11 (25.6)
	A_1) 	5 (11.6)	
	A_2) 	3 (7.0)	
	A_3) 	2 (4.7)	
	A_4)  [+31] [-31]	1 (2.3)	
Incompletas	**B) Solo realizan el dibujo**		4 (9.4)
	B_1) El simétrico de … es … 	1 (2.3)	
	B_2) El simétrico de … es … 	1 (2.3)	
	C) El simétrico de … es … 	2 (4.7)	
Incorrectas	D) 	4 (9.3)	5 (11.6)
	E) El simétrico de … es … 	1 (2.3)	
No contesta			23 (51.1)
Total			**43**

Tabla 5.10 (G70-1ª sesión-tarea 8): cadena opuesta para "sumar 21".

Comentarios

Un 30.3% de los estudiantes orientan las cadenas, de los que el 11.7% son respuestas consideradas correctas, y el 9.4% incompletas. Los demás entienden implícitamente la orientación de la cadena inversa.

El estudiante que da la respuesta E) ha señalado como elemento simétrico la cadena "simétrica" resultante de una reflexión de eje vertical, confundiendo en este caso ambas acepciones de la palabra simétrico: desde un punto de vista algebraico y como la imagen simétrica de una figura respecto de un eje vertical.

Destacamos que la mitad de los estudiantes no responden a esta cuestión.

Aspectos destacables de la tarea 1.8 en G3 y G1

G3

Pedro realiza completamente y correctamente la comprobación de cómo una cadena compuesta con su "simétrica" produce una cadena cerrada:

(P) **¿Habría para cada cadena una que sea su simétrica?** ¿Una cadena que compuesta con otra me dé el neutro?
(PD) Si componemos como hicimos antes, la cadena que se toma como inicio...
(P) Hazlo sobre el papel.
(PD) **Esta (Pedro dibuja la cadena) es sumar y ésta ( ) es restar. Quedaría así: (Realiza el dibujo A de la figura A5.1-5A)**
(P) Lo que te sale es un anillo. Vale. Entonces el simétrico del operador [+21] ¿Cuál va a ser?
(PD) El [-21]...

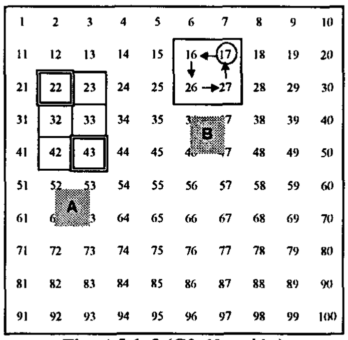


Fig. A5.1-5 (G3-1ª sesión)

G1

Julia responde que simplemente hay que cambiar el sentido de la cadena para obtener la cadena simétrica, con lo que conserva la forma de la cadena de partida:

(P) Entonces, ¿Cuál será el simétrico del [+21]?
(J) El [-21].
(P) Luego cada operador tiene su simétrico, que es el mismo pero...

(J) Con signo cambiado. (P) **Y eso con las cadenas ¿Cómo se hace?** (J) **Cambiando las flechas.**

5.2.12 Resultados de la tarea 1.9

Se quiere identificar el operador opuesto correspondiente a uno dado.

Enunciado

¿Cuál sería el correspondiente simétrico del operador?

Resultados de la tarea 1.9 en G70

Tabla de resultados

	Tipo de respuesta	n_i (%)	Total (%)
Correctas	A) [-21]	13 **(30.0)**	15 **(34.9)**
	B) [+21] $\oplus$ [-21] = [0]	2 **(4.7)**	
Incorrectas	C) +30, -30	2 **(4.7)**	2 **(4.7)**
No contesta			26 **(60.5)**
Total			**43**

Tabla 5.11 (G70-1ª sesión-tarea 9): operador opuesto de uno dado.

Comentarios

La mayoría de los alumnos que responden lo hacen correctamente, si bien existe un 60.5 de estudiantes que no realizan la tarea, posiblemente influidos por el cansancio.

Aspectos destacables de la tarea 1.9 en G3 y G1

Esta cuestión no se plantea en G3 ni en G1, aunque sí se tratan las propiedades conmutativa y asociativa para la ley * de composición de cadenas.

Propiedad conmutativa

G3

Esta cuestión no presenta problemas en este grupo:

(P) ¿Se cumpliría la propiedad conmutativa?
(D) Sí.
(P) **¿Cómo ilustraríais con un ejemplo la propiedad conmutativa?**
(Domingo realiza el dibujo A de la figura A5.1-6)
Estás haciendo [21] con [19] ¿no? ¿Qué te sale? Escribe a la derecha el resultado (Domingo hace el dibujo B de la Fig. A5.1-6).
(D) Y si lo hacemos de la otra forma (dibujo C de la Fig. A5.1-6) sale igual (Domingo señala la cadena B de la A5.1-6).

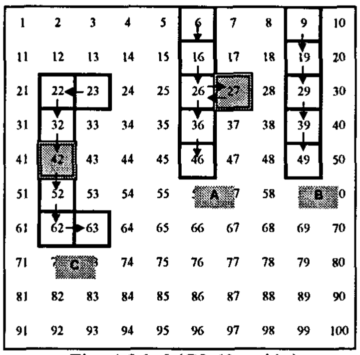


Fig. A5.1-6 (G3-1ª sesión)

La propiedad asociativa tampoco es fuente de conflicto en G3, realizando correctamente las ilustraciones gráficas pertinentes:

(P) ¿Y la propiedad asociativa, en qué consistiría? ¿Os acordáis de la propiedad asociativa?
(D) Si sumamos estos dos y luego un tercero es igual que si a esto le sumamos el [21].
(P) Vamos: [19] ⊕ [21] ⊕ [11], por ejemplo.
(Domingo realiza los dibujos A, B y C de la figura A5.1-7).
(P) Escribe lo que dice la propiedad asociativa.
(Domingo escribe: **(a*b)*c = a*(b*c)**
(P) ¿Dónde está esto (el profesor señala el paréntesis del primer miembro) en el dibujo? ¿Cuál sería el primer miembro?
(D) El [19] ⊕ [21].
(Domingo señala el dibujo A de la Fig. A5.1-7).
(P) ¿Y al resultado?
(D) Y al resultado se le suma el [11].
(P) Eso es. Y da esto (cadena C de la Fig. A5.1-7). El segundo miembro lo podemos hacer aparte. Primero hacemos...

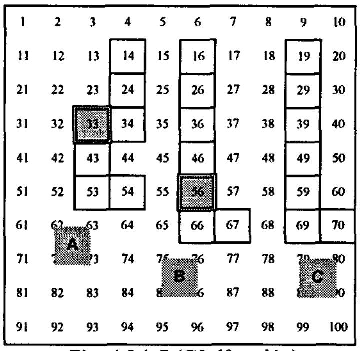


Fig. A5.1-7 (G3-1ª sesión)

(PD) [21] ⊕ [11] (dibujo B de la Fig. A5.1-8) que son [32].
(PD) El [11] es bajar uno, derecha uno.
A eso hay que aplicarle el [19].
El primer miembro (19+21) = 40 (dibujos A y B de la Fig. A5.1-7), al que hay que añadir el 11, y nos da el 31 (cadena C de la Fig. A5.1-7).
En el segundo miembro tenemos 21+11 que es 32 (dibujos A y B de la Fig. A5.1-8) y luego es 32 + 19 (dibujo B de la Fig. A5.1-8) que da igual que antes.

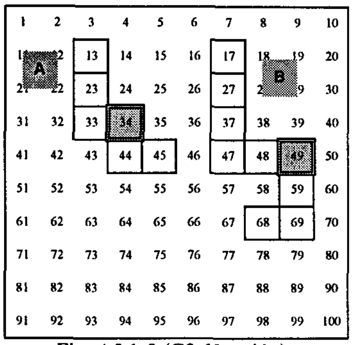


Fig. A5.1-8 (G3-1ª sesión)

G1

Julia no trabaja estas dos cuestiones aunque la sesión termina con una pregunta del profesor acerca de estas propiedades, respondiendo Julia afirmativamente.

5.2.13 Consideraciones generales sobre los resultados de la primera sesión

Del análisis de los resultados de esta sesión, en la que los estudiantes manejan las cadenas como representaciones geométricas de los operadores aditivos, se obtienen algunas situaciones problemáticas y dificultades, entre las que destacamos:

1. Orientación de las cadenas

El hecho de especificar la orientación de las cadenas tiene especial importancia, ya que su ausencia es fuente de errores a la hora de relacionar las cadenas con sus operadores asociados. En este sentido, los estudiantes de G3 y G1 ofrecen representaciones sin especificar el origen y final.

2. Yuxtaposición de cadenas y superposición de celdillas

Las cadenas tienen una celdilla más que el número de decenas o de unidades que su operador asociado indica. Por ejemplo, la cadena que representa al operador [+2] tiene 3 celdillas horizontales. Por ello, para componer dos cadenas se debe superponer la celdilla final de la primera cadena con la original de la segunda a fin de representar correctamente al operador suma o resta de ambas. Algunos estudiantes realizan la composición de cadenas por simple yuxtaposición de cadenas, situando una a continuación de la otra, error que posiblemente se deba a la intuición de que cada cadena (de un tramo, por ejemplo) tiene tantas celdillas como el número de decenas o unidades indica su operador asociado.

3. Comportamiento de las cadenas en los límites de la Tabla-100

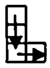
- No parece difícil de aceptar por parte de los alumnos el hecho de que una cadena que "se sale" por un borde lateral debe aparecer por el borde opuesto situada en la fila siguiente. Este importante aspecto se pone de manifiesto en la sesión con Julia.

- No queda muy claro para algunos estudiantes que el resultado de componer dos cadenas es independiente del número de la tabla al que se aplique, ya que un 25% del grupo G70 relacionan los problemas en los bordes de la tabla con el elemento del dominio al que se le puede aplicar la cadena. Esta circunstancia es aducida también por Julia como condición para * sea una ley de composición interna.

- A pesar de que más de la mitad de los estudiantes contestan correctamente a la tarea 1.4 (señalando el número máximo de celdillas que deben tener las cadenas para que * sea una ley de composición interna), solamente un 18.6% de los estudiantes no admite a ⊕ como ley de composición interna (tarea 1.5b), lo que indica que no queda perfectamente establecido el paralelismo entre el conjunto de las cadenas (C, *) y el de operadores (O, ⊕) con sus respectivos criterios de composición.

- Las dificultades en los bordes de la tabla hace que la operación * no sea una verdadera ley de composición interna, y por tanto no exista estructura de grupo. Como veremos en el próximo capítulo, para encontrar la estructura de grupo se precisa realizar una extensión de la Tabla-100 a la tabla T_Z, tabla cuyos elementos son los números enteros.

4. Distinción entre la notación para los elementos del dominio y para el operador

El hecho de que la representación geométrica del operador aditivo (cadena) tenga un carácter geométrico, permite distinguirla de la forma decimal en que se representan los elementos del dominio (los números 1 a 100). No obstante existe el riesgo de confundir el término "simétrico de una cadena" en el sentido algebraico con el sentido geométrico (simétrico según un eje de reflexión). Así la cadena simétrica u opuesta de  (operador [+21]) es  (operador [-21]), mientras que la cadena simétrica según un eje vertical de reflexión es  (operador [+19]). Esta confusión se ha producido en un estudiante de G70 y en Domingo perteneciente al grupo G3.

5.2.5. Balance entre los objetivos planteados y logros alcanzados.

La tabla 1 expresa algunas consideraciones de acuerdo con los objetivos planteados en esta sesión:

Objetivos	Consideraciones
1. Encontrar representaciones de carácter geométrico (cadenas) asociadas a los operadores aditivos en la Tabla-100.	Se ha conseguido satisfactoriamente este objetivo dado el elevado número de representaciones realizadas.
2. Encontrar criterios para componer cadenas de acuerdo con el significado de operador aditivo asociado y estudiar si dichos criterios son o no leyes de composición interna.	Los estudiantes han encontrado dos criterios de composición de cadenas, siendo el criterio correcto (*superponer la casilla final de la primera cadena con la inicial de la segunda*) el señalado por la mayoría de los alumnos. La consideración de estos criterios como l.c.i. conduce a estudiar el comportamiento de las cadenas en los bordes de la tabla y considerar una extensión a Z de la tabla.
3. Determinar la existencia de alguna representación que desempeñe el papel de elemento neutro para la composición (*) de cadenas.	Surge entre los estudiantes la idea de cadena cerrada y en particular la cadena formada por una sola celdilla como elemento neutro para *.
4. Determinar la existencia de representaciones que desempeñen el papel de elemento simétrico de una cadena dada respecto de *.	Los estudiantes proponen el criterio de cambiar el sentido de orientación de la cadena como método para encontrar el elemento simétrico.

Tabla 5.12: Balance en relación con los objetivos planteados.

5.3 Segunda sesión

El contenido de esta segunda sesión se centra en el estudio de las transformaciones geométricas sobre las cadenas.

5.3.1 Descripción general y objetivos

El carácter geométrico de las cadenas ofrece la oportunidad de estudiar el efecto geométrico y aritmético que producen algunas isometrías sencillas sobre estas representaciones, estableciendo nuevas conexiones entre objetos aritméticos (operadores aditivos) y geométricos, como son las cadenas y las isometrías planas.

Mediante las tareas planteadas en esta sesión, el estudiante debe prestar atención no solamente a la figura obtenida mediante la aplicación de una isometría a un cadena dada, sino también al nuevo significado aritmético asociado a la cadena imagen así obtenida. Se estudian también las posibles cadenas cuyo operador aditivo permanece invariante frente a alguna de estas isometrías, así como la influencia de la elección de la cadena representante de un operador para obtener su imagen mediante estas isometrías.

En definitiva, nos proponemos en esta sesión ***utilizar isometrías planas sencillas para estudiar el efecto que producen estas isometrías sobre las cadenas, tanto desde el punto de vista geométrico como desde el aritmético***, objetivo general que concretizamos en los siguientes objetivos de la sesión:

1. Realizar reflexiones de ejes vertical, horizontal y oblicuos con las cadenas y observar el efecto producido en sus correspondientes operadores aditivos asociados.

2. Estudiar el efecto geométrico producido sobre las unidades y las decenas de las cadenas cuando éstas se someten a las reflexiones anteriormente mencionadas.

3. Determinar las isometrías que dejan invariantes a los operadores asociados a las cadenas que se someten a dichas isometrías.

4. Comprobar el efecto aritmético que se produce cuando se someten cadenas distintas equivalentes (asociadas a un mismo operador), a cualquiera de las reflexiones anteriores.

5.3.2 Tareas propuestas en la sesión

En esta segunda sesión de trabajo se proponen a los estudiantes las siguientes 7 tareas:

Tarea 2.1 (T 2.1)

En la figura 5.9) hay dibujada una cadena correspondiente al operador [21], así como los ejes de reflexión, h, v, p, q.

Somete dicha cadena a una reflexión de eje vertical (v). ¿A qué operador corresponde la cadena obtenida? Podemos decir que:

"El operador [21] mediante la reflexión R_v se transforma en el operador ______"

O más esquemáticamente:

R_v ([21]) = [ ]

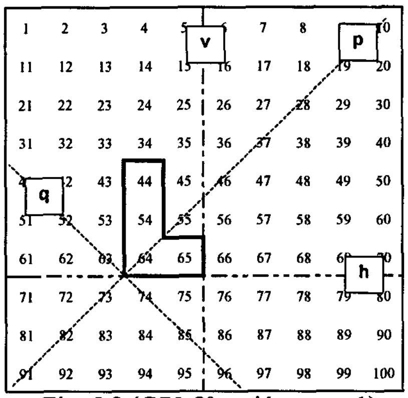


Fig. 5.9 (G70-2ª sesión-tarea 1)

T 2.2 **Aplica ahora a ambas cadenas una reflexión de eje horizontal (R_h) ¿Qué operadores obtienes?**

Completa el esquema:

R_v ([21]) = [ ]

R_v ( ) = ( )

R_h ([21]) = ( )

R_h ( ) = ( )

T 2.3 **¿Qué isometría deja invariante a alguno de los operadores anteriores?**

T 2.4 **Completa el esquema siguiente, añadiendo elementos (flechas y operadores) de manera que resuma la situación lo más esquemática y completa posible:**

$$[21] \xrightarrow{R_v} [\ \ ]$$

T 2.5 **Realiza también las reflexiones según los ejes p y q, y escribe los resultados completando la tabla 5.13. Haz en cada casilla un dibujo de la cadena resultante junto con el operador al que representa.**

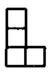
cadena/operador origen	cadena /operador imagen mediante las reflexiones			
	R_v	R_h	R_p	R_q
 [21]				
[19]				

Tabla 5.13 (G70-2ª sesión-tarea 5a)

T 2.6 **Rellena la tabla 5.14 para explicar el efecto que producen las reflexiones anteriores sobre las cadenas, especificando cómo afecta la transformación a las unidades y a las decenas. En la última fila de la tabla dibuja una cadena que quede invariante mediante cada una de las reflexiones:**

	R_v	R_h	R_p	R_q
Efecto sobre las unidades				
Efecto sobre las decenas				
Tipo de cadena que deja invariante				

Tabla 5.14 (G70-2ª sesión-tarea 6a)

T 2.7 Sabemos que cada operador puede venir representado por diversas cadenas. Dada una reflexión de las anteriores y un operador **¿Es siempre el transformado de una cadena de dicho operador otra cadena correspondiente al mismo operador? Justifica la respuesta y señala un ejemplo.**

5.3.3 Resultados de la tarea 2.1

Pretendemos con esta tarea que los alumnos realicen diversas reflexiones con las cadenas y que observen el efecto producido en sus correspondientes operadores aditivos.

Enunciado

En la figura 5.9) hay dibujada una cadena correspondiente al operador [21], así como los ejes de reflexión, h, v, p, q.

Somete dicha cadena a una reflexión de eje vertical (v). ¿A qué operador corresponde la cadena obtenida? Podemos decir que:

"El operador [21] mediante la reflexión R_v se transforma en el operador ______"

O más esquemáticamente:

R_v ([21]) = [ ]

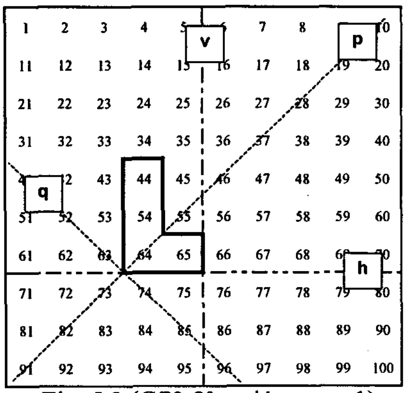


Fig. 5.9 (G70-2ª sesión-tarea 1)

Resultados de la tarea 2.1 en G70

Criterios de clasificación de respuestas

Consideramos respuestas correctas las que coinciden con la respuesta A de la tabla 5.15

Tabla de resultados

	Respuestas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	A) $R_v(21) = 19$	40 **(93.0)**	40 **(93.0)**
Incorrectas	B) $R_v(21) = 21$	1 **(2.3)**	3 **(7.0)**
	C) $R_v(21) = 12$	1 **(2.3)**	
	D) $R_v(21) = -19$	1 **(2.3)**	
Total			**43**

Tabla 5.15 (G70-2ª sesión-tarea 1): Efecto de R_v sobre "sumar 21".

Comentarios

La cadena de partida que se presenta a los alumnos (Fig. A5.1-9) no está orientada, lo que parece no tener influencia cuando se realiza una reflexión de eje vertical, ya que el 93.0% de las respuestas son correctas.

Aspectos destacables de la tarea 2.1 en G3 y G1

En las ilustraciones que se proporcionan a G3 y G1 se colocan los ejes de reflexión verticales y horizontales en dibujos distintos (Figs. A5.1-9 y A5.1-10). Además, la cadena de partida no tiene orientación, lo que provoca algunos errores a la hora determinar el operador imagen de la cadena correspondiente mediante las reflexiones.

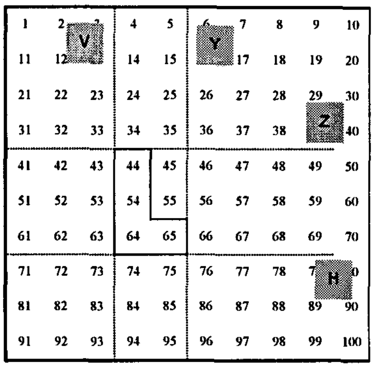


Fig. A5.1-9 (G3-2ª sesión)

No obstante, la tarea la realizan correctamente tanto en G3 como en G1, dando la misma respuesta A que en G70.

5.3.4 Resultados de la tarea 2.2

Enunciado

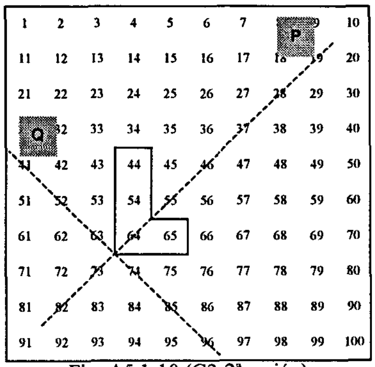


Fig. A5.1-10 (G3-2ª sesión)

Aplica ahora a ambas cadenas una reflexión de eje horizontal (R_h) ¿Qué operadores obtienes?

Completa el esquema:

R_v ([21]) = [ ]

R_v ( ) = ( )

R_h ([21]) = ( )

R_h ( ) = ( )

Resultados de la tarea 2.2 en G70

Tabla de resultados

	Respuestas	N_i (%)	Total (%)
Correctas	A) Rv([21]) = [19] Rv([19]) = [21] Rh([21]) = [-19] Rh([-19]) = [21]	7 (16.3)	7 (16.3)
Incorrectas	B) $R_h(21) = +19$	33 (76.4)	36 (83.7)
	C) $R_h(21) = -21$	1 (2.3)	
	D) $R_h(21) = 21$	1 (2.3)	
	E) $R_v(21) = -19$	1 (2.3)	
Total			43

Tabla 5.16 (G70-2ª sesión tarea 2): Efecto de R_v y R_h sobre "sumar 21".

Comentarios

El 83.7% de los estudiantes responden de manera incorrecta a esta tarea, principalmente al realizar la reflexión horizontal $R_h(21)$. El hecho de que la cadena que se le muestra a los alumnos dibujada en la figura 5.9 no tenga flechas ha originado que la mayoría de los estudiantes no han tenido en cuenta el cambio de sentido que se produce en las decenas al someter a la cadena a esta reflexión R_h.

Aspectos destacables de la tarea 2.2 en G3 y G1

G3

Los componentes de este grupo completan el esquema que se les pide sin colocar signos a los operadores:

R_v ([21]) = [19] ;	R_v ([19]) = [21]
R_h ([21]) = [19];	R_h ([19]) = [21]

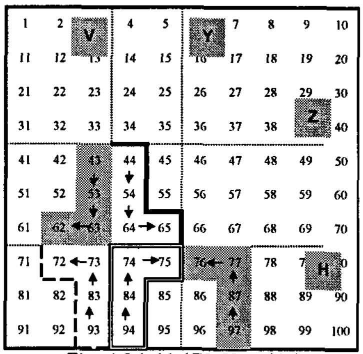


Fig. A5.1-11 (G3-2ª sesión)

Los dibujos de las cadenas imágenes que realizan los estudiantes no están orientados mediante flechas (fig. A5.1-11). Esta circunstancia queda rectificada, a instancias del profesor, en la siguiente tarea 2.3, en la que dibujan correctamente orientadas las cadenas y colocan los signos correspondientes a los operadores.

G1

A Julia le ocurre algo parecido que a sus compañeros de G3, aunque ella coloca signos en los operadores correspondientes:

R_v ([+21]) = [+19];	R_v ([+19]) = [+21]
R_h ([(+21)] = [-19];	R_h ([-19)] = [+21]

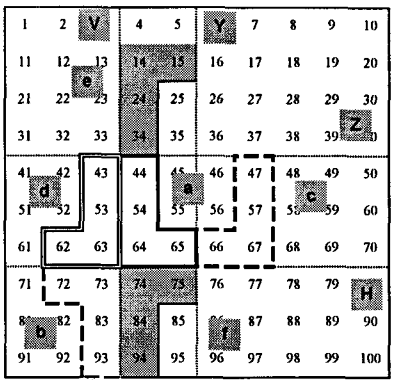


Fig. A5.2-12 (G1-2ª sesión)

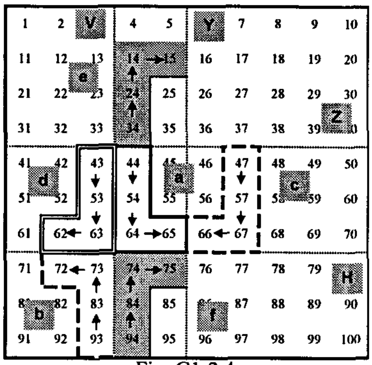


Fig. G1-2.4

Julia realiza las cadenas imágenes de la figura A5.2-12 (sin orientar). Este detalle queda corregido cuando se plantea obtener una isometría que deje invariante al operador aditivo correspondiente a una cadena. Entonces se colocan las flechas de la figura A5.2-13.

5.3.5 Resultados de la tarea 2.3

Enunciado

¿Qué isometría deja invariante a alguno de los operadores anteriores?

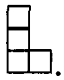
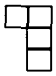
Resultados de la tarea 2.3 en G70

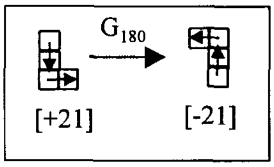
Tabla de resultados

	Respuestas	N_i (%)	Total (%)
Correctas	A) G_{360} (identidad)	6 **(14.0)**	16 **(37.2)**
	B) Traslaciones	6 **(14.0)**	
	C) G_{360} y traslaciones	4 **(9.3)**	
Incorrectas	D) G_{180} y G_{360}	14 **(32.6)**	24 **(55.8)**
	E) G_{180}	3 **(7.0)**	
	F) Reflexión	1 **(2.3)**	
	G) Ninguna	1 **(2.3)**	
	H) Todas	1 **(2.3)**	
	I) R_q	1 **(2.3)**	
	J) R_h	1 **(2.3)**	
	K) Deslizamiento	1 **(2.3)**	
	No contesta	3 **(7.0)**	3 **(7.0)**
Total			**43**

Tabla 5.17 (G70-2ª sesión-tarea 3)

Comentarios

El 39.6% de los estudiantes mencionan el G_{180} como isometría que deja invariante al operador representado por la cadena . Al someter esta cadena al giro G_{180} se obtiene , que por no tener dibujadas las flechas los alumnos pueden haber interpretado que esta cadena está orientada en el sentido "derecha 1, bajar 2", y que corresponde al operador [+21] en lugar de "subir 2, izquierda 1" correspondiente al operador [-21], según indica el siguiente esquema:



Resaltamos una vez más la importancia de orientar las cadenas, especialmente al someterlas a la acción de isometrías.

Aspectos destacables de la tarea 2.3 en G3 y G1

G3

En este grupo ocurre algo similar a G70. Los estudiantes mencionan, además de la identidad, el giro de 180º como isometría que deja invariante a las cadenas, aunque después de colocar las flechas se dan cuenta de que ese giro transforma un operador en su opuesto:

(P) Ahora **¿Qué movimiento geométrico transforma a un operador en él mismo?** ¿Lo deja invariante? De los que tenemos ahí. Si queréis usar papel vegetal, o lo veis a simple vista...?
(PD) **Un giro de 180º.**
(DL y PD) **Un giro de 360º**
(P) ¿Valen los dos?
(D) El de 360º sí.
(P) **El de 180º ¿Pasa de una cadena a ella misma? Me parece que tenemos que revisar el esquema. No hemos puesto flechas.**
(Los alumnos ponen las flechas correspondientes a las cadenas según la figura A5.1-11).
(DL) Este está mal. Es –19 (Dolores se refiere a R_h ([+21]) = [-19]).
(PD) Y este 21 es también –21. (Rectifican el esquema, quedando finalmente:
R_v ([+21]) = [+19] ; R_v ([+19]) = [+21]
R_h ([+21]) = [-19]; R_h [(-19)] = [(+21)]
(P) ¿Entonces vale **el giro de 180º?**
(D) No, **lo cambia de signo.**

G1

A Julia le cuesta comprender la pregunta y también se confunde con el giro de 180° por no colocar las flechas en las cadenas. También señala el $G_{360°}$ como respuesta:

(P) Ahora nos pregunta **¿Qué movimiento geométrico transforma a un operador en él mismo?** Una transformación geométrica que transforme un operador en él mismo, de entre los que tenemos aquí.
(J) Vamos a ver. ¿Tiene que ser uno de éstos?
(P) No, no. ¿Qué movimiento geométrico? Yo te he dado unos concretos, que son reflexiones. Puede haber otros movimientos geométricos.
(J) **Darle la vuelta.**
(P) Darle la vuelta. Vamos a ver. ¿Con cuál estás trabajando?
(J) Con estos.

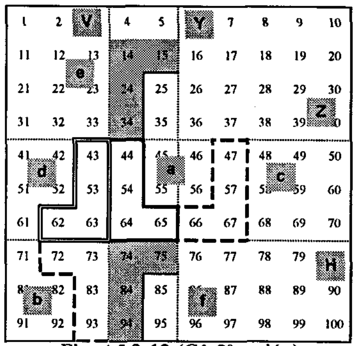


Fig. A5.2-12 (G1-2ª sesión)

(Julia señala las dos cadenas a y b de la Fig. A5.2-12), que al no tener flechas interpreta que las dos corresponden al operador [+21]).
(P) **¿Qué es darle la vuelta?**
(J) **Darle un giro. Girar hacia la derecha.**
(P) Bueno. Cuando hablamos de giros, hay que hablar de un centro de giro y un ángulo. ¿Cuál sería el centro?
(J) Ese (Julia señala la intersección de los dos ejes V y H).
(P) **¿Cuánto tendríamos que girar?**
(J) Pues si aquí es 90° ¿no? Pues otros 90°; **180°.**
(P) Muy bien. O sea que el giro de centro O y ángulo 180° transforma éste (cadena **a**) en éste (cadena **b** de la A5.2-12). **Pero ¿Son las dos cadenas del mismo operador?**
(J) Sí ¿no?
(P) Es que no hemos colocado las flechas.
(**Julia coloca flechas en las cadenas** y al final queda la figura (Fig. A5.2-13).

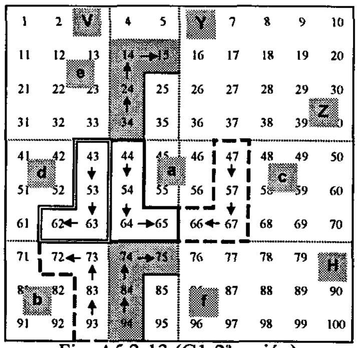


Fig. A5.2-13 (G1-2ª sesión)

(J) **Esta es [+21] y ésta es [-19]. Entonces no son la misma.**
(P) **¿El giro de 180° transforma a un operador en él mismo?**
(J) No, ahora no.
(P) ¿Hay alguna transformación que deje estas cadenas invariantes?
(J) Pues girar 360°.

5.3.6 Resultados de la tarea 2.4

Se pretende con esta tarea considerar composiciones de isometrías y establecer equivalencias entre ellas.

Enunciado

Completa el esquema siguiente, añadiendo elementos (flechas y operadores) de manera que resuma la situación lo más esquemática y completa posible:

$$[21] \xrightarrow{R_v} [\ ]$$

Criterios de clasificación de las respuestas

Consideramos el siguiente esquema como una respuesta correcta, con el diagrama completo y las isometrías correctas:

$$\begin{tikzcd}
{[+21]} \arrow[rr, leftrightarrow, "R_v"] \arrow[d, leftrightarrow, "R_h"'] \arrow[drr, leftrightarrow, "G_{180}"] & & {[+19]} \arrow[d, leftrightarrow, "R_h"] \arrow[dll, leftrightarrow, "G_{180}"'] \\
{[-19]} \arrow[rr, leftrightarrow, "R_v"'] & & {[-21]}
\end{tikzcd}$$

Distinguimos entre las respuestas que incluyen el diagrama completo o incompleto, y todas las isometrías correctas o bien existe alguna incorrecta.

Resultados de la tarea 2.4 en G70

Tabla de resultados

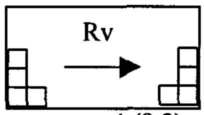
<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>Diagrama completo
n_i (%)</th><th>Diagrama incompleto
n_i (%)</th><th>Total (%)</th></tr>
<tr><td>Respuestas correctas</td><td>Todas las isometrías correctas</td><td>1 (2.3)</td><td></td><td>1
(2.3)</td></tr>
<tr><td>Respuestas incompletas</td><td>Todas las isometrías correctas</td><td></td><td>7 (16.3)</td><td>7
(16.3)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Respuestas incorrectas</td><td rowspan="5">Alguna isometría incorrecta</td><td>A) R_h (21) = +19
5 (11.6)</td><td>B) R_h (21) = +19
20 (46.5)</td><td rowspan="5">33
(76.7)</td></tr>
<tr><td></td><td>C) Solo efectúa R_v(21)=19 utilizando cadenas

4 (9.3)</td></tr>
<tr><td></td><td>D) Deslizamiento:
[21] → [21]
2 (4.7)</td></tr>
<tr><td></td><td>E) R_v(21) = -21
1 (2.3)</td></tr>
<tr><td></td><td>F) R_h(21) = -21
1 (2.3)</td></tr>
<tr><td colspan="2">No contesta</td><td></td><td></td><td>2
(4.7)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total</td><td>6 (14.0)</td><td>35 (81.4)</td><td>43</td></tr>
</table>

Tabla 5.18 (G70-2ª sesión-tarea 4): Composición de R_h y R_v

Comentarios

- El 81.4% de las respuestas corresponde a esquemas incompletos, en los que faltan las composiciones entre isometrías y se omiten los G_{180}.

- Solamente un estudiante realiza el diagrama completo con todas las isometrías correctas.

- La mayoría de los errores en las isometrías (58.1%) se producen al realizar la reflexión de eje horizontal, y son del tipo R_h (21) = +19.

- La causa de este error puede ser la falta de orientación en la cadena de partida.

Aspectos destacables de la tarea 2.4 en G3 y G1

Los estudiantes de estos grupos realizan correctamente el diagrama, con los problemas de signos mencionados anteriormente.

5.3.7 Resultados de la tarea 2.5

Enunciado

Realiza también las reflexiones según los ejes p y q, y escribe los resultados completando la tabla 5.13. Haz en cada casilla un dibujo de la cadena resultante junto con el operador al que representa.

cadena/operador origen	cadena /operador imagen mediante las reflexiones			
	R_v	R_h	R_p	R_q
[21]				
[19]				

Tabla 5.13 (G70-2ª sesión-tarea 5a)

Criterios de clasificación de las respuestas

La Tabla 5.13 completada correctamente da lugar a la Tabla 5.19. Se ha colocado con un círculo en la casilla inicial de las cadenas para indicar su orientación, aunque a los efectos de la corrección de respuestas no hemos tenido en cuenta el que la cadena no esté orientada, ya que la cadena que figura en la tarea no lo estaba.

cadena /operador origen	cadena /operador imagen mediante las reflexiones			
	R_v	R_h	R_p	R_q
[+21]	[+19]	[-19]	[-12]	[+12]
[+19]	[+21]	[-21]	[+8]	[-8]

Tabla 5.19 (G70-2ª sesión-tarea 5b)

Resultados de la tarea 2.5 en G70

Tablas de respuestas

Especificamos en tablas separadas las respuestas dadas para las cadenas, para los transformados de los operadores aditivos asociados a las mismas y las cadenas realizadas para representar el operador [19]. Indicamos mediante las letras C e I si las respuestas son correctas o incorrectas respectivamente, y entre paréntesis el % de las respuestas.

Respuestas para el operador

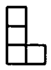
Cadena/ operador origen	Operadores imagen mediante las reflexiones			
	R_v	R_h	R_p	R_q
 [21]	C: 37**(86.0)** I: 1 **(2.3)**	C: 7 **(16.3)** I: 31 **(72.1)**	C: 5 **(11.6)** I: 33 **(76.7)**	C: 33 **(76.7)** I: 5 **(11.6)**
[19]	C: 36 **(83.7)** I: 2 **(4.7)**	C: 6 **(14)** I: 32 **(74.4)**	C: 33 **(76.7)** I: 5 **(11.6)**	C: 5 **(11.6)** I: 33 **(76.7)**
No contesta	5 (11.6)	5 (11.6)	5 (11.6)	5 (11.6)

Tabla 5.20 (G70-2ª sesión-tarea 5c): Transformados del operador "sumar 21" mediante reflexiones.

Respuestas para las cadenas

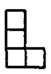
Cadena/ operador origen	Cadenas imagen mediante las reflexiones			
	R_v	R_h	R_p	R_q
 [21]	C: 39 **(90.7)** I: 2 **(4.7)**	C: 38 **(88.4)** I: 3 **(7.0)**	C: 36 **(83.7)** I: 5 **(11.6)**	C: 31 **(72.1)** I: 10 **(23.3)**
C: 40 **(93.0)** Sin figura: 1 **(2.3)** **[19]**	C: 38 **(88.4)** I: 3 **(7.0)**	C: 37 **(86.0)** I: 4 **(9.3)**	C: 29 **(67.4)** I: 12 **(27.9)**	C: 29 **(67.4)** I: 12 **(27.9)**
No contesta	**2 (4.7%)**	**2 (4.7%)**	**2 (4.7%)**	**2 (4.7%)**

Tabla 5.21 (G70-2ª sesión-tarea 5d): Transformados de las cadenas mediante reflexiones.

Cadenas utilizadas para representar el operador [19]

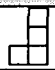
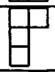
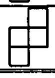
Dibujo	ni (%)
	38 (88.4%)
	1 (2.3%)
	1 (2.3%)

Tabla 5.22 (G70-2ª sesión-tarea 5d)

Comentarios

En relación con los transformados de los operadores observamos mayor índice de errores en las casillas correspondientes a operadores negativos que en las que se refieren a operadores positivos, lo que puede estar motivado por la falta de orientación en la cadena de origen.

En cuanto a las cadenas transformadas se observa un aumento de los errores en las reflexiones de ejes oblicuos R_p y R_q.

Aspectos destacables de la tarea 2.5 en G3 y G1

G3

Los estudiantes utilizan papel vegetal para realizar la tarea, tienen en cuenta el sentido de las cadenas y rellenan correctamente la tabla. También, establecen que R_q transforma las decenas en unidades y las unidades en decenas:

(P) Seguimos con la cadena del [+21]. ¿Cuál sería el reflejado mediante el eje Q y mediante el eje P? Si queréis pintarlo aparte, manipular, ... lo que queráis.
(P) Primero lo hacemos respecto de Q.
(PD) **Sale [+12]** ¿no? (Fig. A5.1-13)
(DL) [+12] también.
(P) ¿Entonces respecto de R_Q sale [+12]?
(D) Sí.
(P) ¿Qué forma tiene?
(D) **Derecha 2, bajar 1.**
(P) Podemos colocar el circulillo en la casilla inicial para no equivocarnos.
(Los alumnos van rellenando la tabla A5.2-2).
(P) ¿Y eso por qué sale así?
(DL) **Lo que está horizontal pasa a vertical y lo vertical a horizontal.**

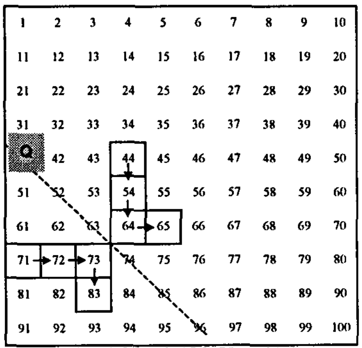


Fig. A5.1-13 (G3-2ª sesión)

(P) **Y sin hacerlo con papel vegetal** ¿Cómo podríamos justificarlo, sabiendo que los ejes forman 45°con la horizontal?
(PD) **Mirando las distancias** ¿no?
(P) ¿Qué distancias?

(PD) La del 44 al eje tiene que ser la misma que la del 71, en este caso (A5.1-13).

Patrón/ operador origen	Patrón/operador imagen mediante las reflexiones					
	R_v	R_h	R_y	R_z	R_p	R_q
[+21]	[+19]	[-19]	[+19]	[-19]	[-12]	[+12]
[+19]	[+21]	[-21]	[+21]	[-21]	[+8]	[-8]

Tabla A5.1-3 (G3-2ª sesión): Transformados mediante reflexiones de la cadena y operador correspondiente a "sumar 21".

A veces se producen errores en relación con la orientación de las cadenas:

(P) ¿Y con respecto a P? ¿Qué forma tiene?
(D) **Bajar 1, derecha 2.**
(P) Vamos a fijarnos bien en el sentido.
(silencio)
(PD) **Izquierda 2, subir 1**. (Fig. A5.1-14)

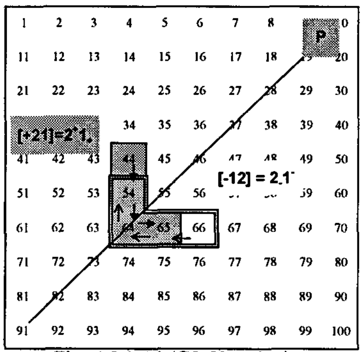


Fig. A5.1-14 (G3-2ª sesión)
Rp([+21]) = [-12]
[+21] = cadena sombreada
[-12] = cadena con doble línea.

Se menciona la traslación como composición de dos reflexiones de ejes paralelos:

(P) Entonces vamos a completar la tabla A5.1-1. El [+21] mediante la reflexión vertical ha pasado al [+19].
Si en lugar de ser respecto del eje V es con respecto el eje Y que es paralelo, ...
(PD) **Seguiría dando [+19].**
(P) ¿Por qué?
(PD) **Lo que hace es una traslación.**

G1

Julia realiza las actividades utilizando un método de calco y sin tener en cuenta la orientación de la cadena inicial, lo que ocasiona errores en las respuestas en relación con los operadores. Este hecho se lo advierte el profesor posteriormente:

(...) Julia comienza con R_q
(J) Esto quedaría por aquí. (Figuras A5.2-17 y A5.2-18) **(Julia ha utilizado el método de retintar la silueta y doblar el papel por el eje.)**
(...)
(P) Vamos a ver si podemos ir escribiendo algo en esta tabla (tabla A5.2-1). Esta cadena, **el [21]**, es el origen ¿no?
(J) Sí
(P) Que **con respecto a R_v ha pasado a ser el [19], y con respecto a R_h?**
(J) **El [19] también.** (Julia no ha tenido en cuenta la orientación).
(...)
(P) Respecto a R_p ¿Qué pasa?
(J) **Sale el [12].** (Julia realiza la figura A5.2-18, sin flechas, y va completando la tabla A5.2-2).

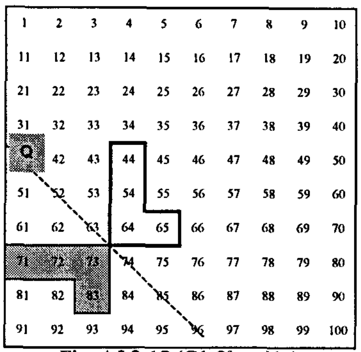


Fig. A5.2-17 (G1-2ª sesión)

Cadena/ operador origen	Cadena/operador imagen mediante las reflexiones					
	R_v	R_h	R_y	R_z	R_p	R_q
[21]	[19]	[19]	[19]	[19]	[12]	[12]
[19]	[21]	[21]	[21]	[21]	[8]	[8]

Tabla A5.2-2 (G1-2ª sesión)

(P) **Y con respecto a R_q ...**
(J) Derecha 2, bajar 1 (Fig. A5.2-17).
(P) Ahora tomamos el operador [19] y hacemos igual.
(J) [21] con el R_v, R_h y R_y.
(P) ¿Con respecto a R_p y R_q?
(J) Sale el [8].
(P) **Bueno, ha sido teniendo solamente en cuenta la forma, sin poner flechas.**
(J) Ah, bueno, otra vez.

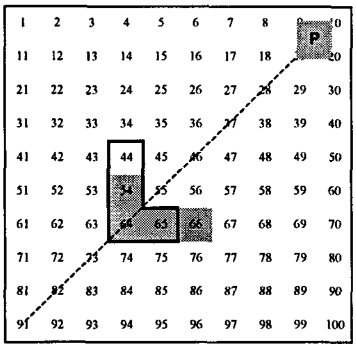


Fig. A5.2-18 (G1-2ª sesión)
Cadena original con trazo grueso.
Cadena imagen sombreada sin trazo.

5.3.8 Resultados de la tarea 2.6

Se pretende ver el efecto aritmético que produce la isometría sobre las decenas y sobre las unidades de una cadena separadamente, así como detectar cadenas cuyo operador aditivo quede invariante frente a alguna de estas isometrías.

Enunciado

Rellena la tabla 5.14 para explicar el efecto que producen las reflexiones anteriores sobre las cadenas, especificando cómo afecta la transformación a las unidades y a las decenas. En la última fila de la tabla dibuja una cadena que quede invariante mediante cada una de las reflexiones.

	R_v	R_h	R_p	R_q
Efecto sobre las unidades				
Efecto sobre las decenas				
Tipo de cadena que deja invariante				

Tabla 5.14 (G70-2ª sesión-tarea 6a)

Criterios de clasificación de las respuestas

La tabla 5.14 correctamente completada da lugar a la tabla 5.23:

	R_v	R_h	R_p	R_q
Efecto sobre las unidades	Cambian de sentido $u \to -u$	Se conservan $u \to u$	Pasan a menos decenas $u \to -d$	Pasan a decenas $u \to d$
Efecto sobre las decenas	Se conservan $d \to d$	Cambian de sentido $d \to -d$	Pasan a menos unidades $d \to -u$	Pasan a unidades $d \to u$
Tipo de cadena que deja invariante	Cadena columna	Cadena fila	Cadenas del tipo con igual nº de decenas que unidades	Cadenas del tipo con igual nº de decenas que unidades

Tabla 5.23 (G70-2ª sesión-tarea 6b)

Resultados de la tarea 2.6 en G70

Tabla de resultados

Las tablas 5.24 y 5.25 muestran los resultados obtenidos en G70, donde notamos mediante las letras: C=Correctas; I=Incorrectas; PC=Parcialmente correctas ; NC=No Contesta; escribimos entre paréntesis el % de respuestas a continuación de la frecuencia absoluta.

	R_v	R_h	R_p	R_q
Efecto sobre las unidades	**C: 16 (37.2)** A) Cambia el signo (el sentido). Pasa de sumar a restar. (16) **I: 24 (55.8)** B) Suma o resta un nº (16) C) Quedan igual (8) **NC: 3 (7.0)**	**C: 16 (37.2)** A) Quedan igual (16) **I: 22 (51.2)** B) Suma o resta un nº (14) C) Cambia el signo (8) **NC: 5 (11.6)**	**C: 1 (2.3)** A) Pasan a decenas y cambian de signo (1) **PC: 13 (30.2)** B) Unidades pasan a decenas (11) C) Cambian de signo (2) **I: 22 (51.2)** D) Suma o resta un nº. (20) E) No cambian (2) **NC: 7 (16.3)**	**C: 13 (30.2)** A) Unidades pasan a decenas (13) **I: 24 (55.8)** B) Suma o resta un nº. (17) C) Cambia de signo (4) D) No cambian (3) **NC: 6 (14.0)**
Efecto sobre las decenas	**C: 19 (44.2)** A) No cambian (19) **I: 13 (30.2)** B) Suma ó resta 1ó 2 decenas (11) C) Cambia el sentido (2) **NC: 11 (25.6)**	**C: 5 (11.6)** A) Cambia el sentido (5) **I: 24 (55.8)** B) Suma un nº de decenas (13) C) No cambian (11) **NC: 14 (32.6)**	**C: 1 (2.3)** A) Pasan a unidades y cambian de signo (1) **PC: 12** B) Decenas pasan a unidades (10) C)Cambia el sentido (2) **I: 13 (30.2)** D) Suma o resta 1 decena (12) E) No cambia el sentido (1) **NC: 17 (39.5)**	**C: 11 (25.6)** A) Decenas pasan a unidades (11) **PC: 1 (2.3)** B) No cambia el sentido (1) **I: 15 (34.9)** C) Suma o resta 1 decena (15) **NC: 16 (37.2)**

Tabla 5.24 (G70-2ª sesión-tarea 6c)

	R_v	R_h	R_p	R_q
Tipo de cadena que deja invariante	**C: 28 (65.1)**	**C: 27 (62.8)**	**C: 9 (20.9)**	**C: 19 (44.2)**
	A) (25)	A) (23)	A) (3)	A) (9)
	B) cadena cerrada (2)	B) (2)	B) (2)	B) (3)
	C) (1)	C) (1)	C) (2)	C) (3)
		D) (1)	D) (2)	D) (2)
				E) (1)
				F) (1)
	I: 3 (7.0)	**I: 4 (9.3)**	**I: 17 (39.5)**	**I: 10 (23.3)**
	D) (1)	E) (4)	E) (7)	G) (7)
	E) (1)		F) (6)	H) (1)
	F) (1)		G) (1)	I) (1)
			H) (1)	J) (1)
			I) (1)	
			J) (1)	
	NC: 12 (27.9)	**NC: 12 (27.9)**	**NC: 17 (39.5)**	**NC: 14 (32.6)**

Tabla 5.25 (G70-2ª sesión-tarea 6d)

Comentarios

Los estudiantes que realizan la respuestas tipo B (*"Suma o resta un número"*), se limitan a realizar un ejemplo y a señalar el efecto de la reflexión sobre unidades y decenas, indicando el número de ellas que suman o restan.

De los datos de la tabla 5.24 se deduce que los estudiantes manejan mejor las reflexiones R_v y R_h, en relación con el efecto que producen sobre las decenas y unidades de las cadenas. Se obtienen % similares en ambas reflexiones para el efecto sobre las unidades (37.2 %). En cambio, al estudiar el efecto sobre las decenas, existen un menor acierto en R_h (11.6%) (cambia el signo) que para R_v (44.2%) (permanece invariante).

Resultados ligeramente inferiores (30.2%) se obtienen para el efecto que produce R_q sobre las unidades, y para las decenas (25.6%) ya que no interviene el signo. en cambio el índice de aciertos baja considerablemente (2.3%) cuando se trata de R_p, en el que el signo se ve afectado.

Resultados similares se producen observando la tabla 5.25 para analizar el tipo de cadenas que permanecen invariantes frente a estas reflexiones. Se obtienen índices de acierto altos cuando se trata de las reflexiones R_v y R_h (65.1% y 62.8% respectivamente). Este grado de acierto baja al 44.2% para R_p y se reduce al 20.9% para el caso de R_q.

Estos resultados confirman de nuevo la importancia que tiene el hecho de orientar las cadenas (colocando flechas) especialmente para las reflexiones R_p y R_q, ya que R_p permuta unidades por decenas y además cambia de sentido, mientras que R_q solo permuta unidades por decenas sin cambiar el sentido. Así por ejemplo:

$R_p($$)$ =  Cambia la forma de la cadena pero conserva el sentido de las flechas. En términos de operadores esto es: $R_p([+9]) = [+9]$

$R_q($$)$ =  Conserva la forma de la cadena pero cambia el sentido de las flechas, por lo que en términos de operadores esto es: $R_p([+9]) = [-9]$.

Aspectos destacables de la tarea 2.6 en G3 y G1

G3

Las apreciaciones anteriores en G70 quedan confirmadas en G3 en cuanto la mayor dificultad que presentan los estudiantes a la hora de analizar el efecto que producen las reflexiones de eje oblicuo R_p y R_q sobre las cadenas que cuando se consideran las reflexiones de eje horizontal o vertical R_v y R_q:

(P) Entonces vamos a completar la tabla (que recogemos en la tabla A5.1-4) **¿Qué efecto produce R_v sobre las unidades de una cadena cualquiera?** (silencio)
Por ejemplo en este caso el [+21]. ¿Que les ha pasado a las unidades?
(D) **Ha pasado de sumar a restar, y de restar a sumar.**
(P) Lo que hace es cambiar suma por resta. **¿Y las decenas?**
(D) **Las deja igual.**
(PD) Las conserva.
(P) **¿Y R_h? A las unidades...**
(D) **Al revés que R_v.**
(P) ¿Las conserva? ¿Totalmente?
(PD) Le suma 10.
(P) Por ejemplo, aquí (en el [+21]) bajar 2, derecha 1, y aquí (en la imagen) es "izquierda 1, bajar 2" . ¿Qué ha pasado?
¿En qué casos conserva las unidades?
(P) Cuando tenemos algo así sí se conserva mediante R_h, pero **cuando hay combinación de unidades y decenas, como en el [+21] ¿Qué ocurre?**
(PD) **Conserva las unidades y las cambia de sentido.**
(D) **Conserva las unidades sin cambiar de sentido.**
(PD) **Es verdad.**
(P) **¿Y las decenas? ¿Qué les pasa con la reflexión horizontal?**
(DL) **Le cambia el signo.**
(P) Las conserva en número ¿no?
(DL) Sí, pero cambia de signo.
(P) **¿Qué hace R_p con las unidades?**
(PD) Las unidades no las conserva.
(P) Con el [+21] ¿Qué ha pasado con las unidades y las decenas?
(DL) Que **las unidades han pasado a decenas y al revés.**
(P) **¿Y R_q?**
(D) Igual.
(P) ¿Y el sentido?
(PD) El sentido sí cambia.
(P) **¿En el anterior (R_p) también cambia el sentido?**
(PD) **Yo creo que no.**
(P) En R_p el [+21] ha pasado al [-12] (tabla A5.1-4). Ha cambiado el 1 por el 2. Vamos a ver. Bajar (2 casillas) ha pasado a ser izquierda (2 casillas); pero izquierda (una casilla) ha pasado a ser bajar (una casilla). **Esto supone un cambio de signo, ¿no?.**
(PD) **Sí, ésta (R_p) si cambia de signo.**

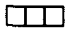
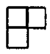
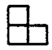
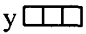
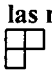
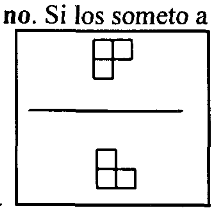
Efecto sobre	R_v	R_h	R_p	R_q
Unidades	Cambia el signo	Se conservan	Cambia unidades por decenas y el signo	cambia unidades por decenas
Decenas	Se conservan	Cambia el signo	Cambia decenas por unidades y el signo	cambia decenas por unidades
Conserva la cadena tipo				

Tabla A5.1-4 (G3-2ª sesión)

Domingo menciona la cadena elemento neutro (formada por una casilla solamente) como la cadena que queda invariante frente a R_h, y no parece presentar problemas a la hora de dibujar una cadena que quede invariante frente a dicha reflexión:

(P) Entonces hay que dibujar una cadena que se conserve mediante R_h. Una cadena que se quede igual mediante la reflexión, que siga siendo la misma.
(D) Un cuadrado.
(P) Bien, al cero lo transforma en el cero. ¿Y otro que no sea el cero?
(D) Cualquiera que sea solo vertical, y para R_h solo horizontal. (Domingo dibuja  y )

Se presenta alguna confusión cuando el profesor pide una cadena que tenga decenas y unidades y que se conserve mediante R_h:

(P) **¿Hay alguno que combine decenas y unidades y que lo deje igual?**
(PD) Las que tengan las mismas dimensiones en horizontal que en vertical.
(P) Por ejemplo, este: 
(PD) **No, ese no.** Si los someto a R_h
(Pedro dibuja  y señala:
(PD) Si ésta (la cadena superior del dibujo) es "izquierda 1, bajar 1", sería el [+9] y se transforma en el [-11] (que es "izquierda 1, subir 1").

Para las reflexiones de ejes oblicuos los estudiantes mencionan como cadenas invariantes las que tienen forma diagonal y las que tienen igual número de decenas que de unidades:

(P) Vamos ahora a buscar una cadena que se conserve mediante una reflexión de eje oblicuo.
(PD) Eso lo hemos visto antes. **El cuadradito.**
(P) El cero. **¿Y otro que no sea el cero?**
(PD) **Como no sea que pongamos cadenas diagonales...**
(P) Pero cualquier cadena diagonal la puedes convertir en una de éstas (en forma de L) ¿no? (silencio)
¿Qué es lo que hace la reflexión? (silencio)
(P) Que cambia las unidades por las decenas. ¿Entonces?
(DL) **Que tenga las mismas unidades que decenas.**
(P) Eso es. (El profesor dibuja la fig. A5.1-17) El primero es "bajar 1, izquierda 1", que corresponde al [+9], y la imagen es "izquierda 1, bajar 1", que es lo mismo, el [+9].

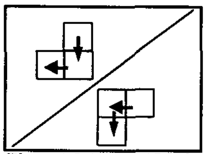


Fig. A5.1-17 (G3-2ª sesión)

G1

Julia comete diversos errores debido a la falta de orientación de las cadenas, especialmente al considerar las reflexiones R_p y R_q:

(P) **¿Y R_h qué hace con las unidades?**
(J) **Aquí se cuentan para la derecha y aquí hay que contarlas para la izquierda,** porque el origen cambia. (Una vez más el hecho de no colocar las flechas en las cadenas ocasiona errores).
(P) ¿Rp?
(J) **Las decenas.... Iguales.** (figura A5.2-18)
(P) ¿Qué le pasa a las unidades y qué le pasa a las decenas?
(J) Estas son **las unidades del primero** ( ). Que **son una.**
(P) Una. Vale.
(J) **Ah, y ahora tiene dos** ( ).
(P) **¿Y con las decenas?**

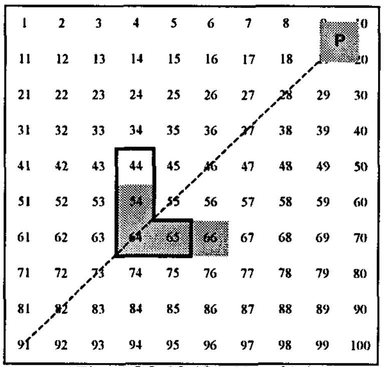
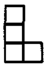
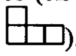


Fig. A5.2-18 (G1-2ª sesión)
Cadena original con trazo grueso.
Cadena imagen sombreada sin trazo.

(J) **Antes había dos (en**  **), y ahora solo hay una** (en la imagen ).
(P) **¿Qué pasa?**
(J) **Las unidades aumentan en uno.**
(P) ¿Y se te pongo por ejemplo ésta (Fig. A5.2-19; el profesor dibuja la cadena con trazo grueso)
(J) (Julia dibuja solamente la parte sombreada)
(P) ¿Qué ha pasado?
(J) Que aumentan las unidades.
(P) **¿Cuánto aumentan?**
(J) **Según la decenas.**
(P) A las decenas ¿Qué les pasa?
(J) Que disminuyen, según las horizontales que tengan.
(P) Eso es. **Que cambia ¿Qué?**
(J) **El orden. Las unidades a decenas y las decenas en unidades.**

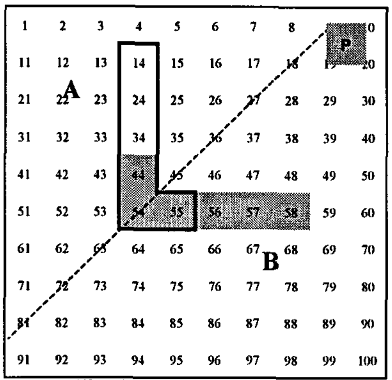
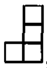


Fig. A5.2-19 (G1-2ª sesión)

(P) **¿Y el R_q?**
(J) **Pues igual.**
(P) Lo mismo ¿no? **Pero vamos a ver qué le pasa al signo.**
(J) (Julia realiza la parte sombreada de la figura A5.2-20)

(P) En el caso de , **lo que es bajar (positivo) se convierte en...**
(J) Negativo. Y lo que era "a la izquierda" se convierte en bajar. No, será subir. Cambia el orden y el signo.
(De nuevo se produce error debido a la ausencia de flechas en las cadenas).

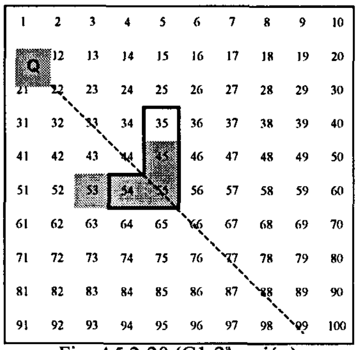


Fig. A5.2-20 (G1-2ª sesión)

En cuanto a las cadenas que permanecen invariantes mediante reflexiones no parece tener problemas con R_h y R_v y señala el elemento neutro (cadena con una sola celdilla) como cadena invariante frente a R_p:

(P) Por último, vamos a dibujar una cadena que se conserve mediante R_v.
(J) Una que esté en vertical. (Julia dibuja )
(P) ¿Y en R_h?
(J) Una horizontal. (Julia dibuja )
(P) **¿Y con R_p qué cadena se podría conservar?**
(J) Si tiene sólo una unidad, se queda igual ¿no? O sea, que con solo un cuadradillo...
(P) Claro. Un cuadradillo es el cero. Lo transforma en el cero. **¿Y otro que no tenga solamente una casilla?**
(J) O sea ¿Que si es vertical que siga siendo vertical?
(P) No, que si corresponde al operador [14], que (después de la reflexión) siga siendo el [14].
(J) (silencio)
(P) ¿Qué efecto produce R_p?
(J) Que cambia las unidades por las decenas.
(P) Pues tienes que buscar una cadena que al cambiar unidades por decenas se quede igual ¿no?
(J) Sí, pero **no se me ocurre** (silencio).

(P) Las unidades, ¿Qué son, columnas o filas?
(J) Filas.
(P) ¿Y las decenas?
(J) Filas.
(P) Pues si hacemos uno que tenga igual número de casillas en la fila que en la columna...
(J) Entonces si hago esto (Julia dibuja), se queda igual.
(P) Pero esa cadena no tiene un origen o un final claro. O bien, es el cero, porque coincide la casilla inicial con la final. Dibuja una que tenga un origen y un final claros.
(J) Pues ésta (figura A5.2-21)

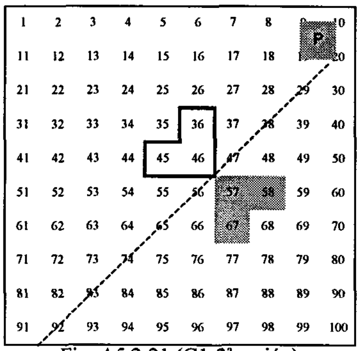


Fig. A5.2-21 (G1-2ª sesión)

La tabla A5.2-3 completada por Julia presenta errores de signo en todas las reflexiones excepto en R_v.

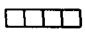
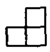
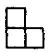
Efecto sobre	R_v	R_h	R_p	R_q
Unidades	Cambia el signo	Lo deja igual o cambia el signo	Cambia unidades por decenas	Cambia el orden y el signo
Decenas	Se conservan igual	Se conservan igual	Cambia unidades por decenas	Cambia decenas por unidades y el signo
Conserva la cadena tipo				

Tabla A5.2-3 (G1-2ª sesión)

5.3.9 Resultados de la tarea 2.7

Pretendíamos con esta tarea comprobar que el efecto aritmético de las isometrías estudiadas depende de los representantes que elijamos para cada cadena.

Enunciado

Sabemos que cada operador puede venir representado por diversas cadenas. Dada una reflexión de las anteriores y un operador **¿Es siempre el transformado de una cadena de dicho operador otra cadena correspondiente al mismo operador? Justifica la respuesta y señala un ejemplo.**

Criterios de clasificación de las respuestas

En la Tabla-100 existen dos cadenas simples con distinto número de celdillas para cada operador, como es el caso de las cadenas $C(1^{+}4_{+})$ y $C(2^{+}6_{-})$ ambas representantes del operador [+14]. Si las sometemos a una reflexión vertical R_v obtendremos respectivamente las cadenas $C(1^{+}4_{-})$ (representante del operador [+6]) y $C(2^{+}6_{+})$ que es un representante del operador [+26], distinto del anterior.

Podemos esquematizar esta situación como sigue:

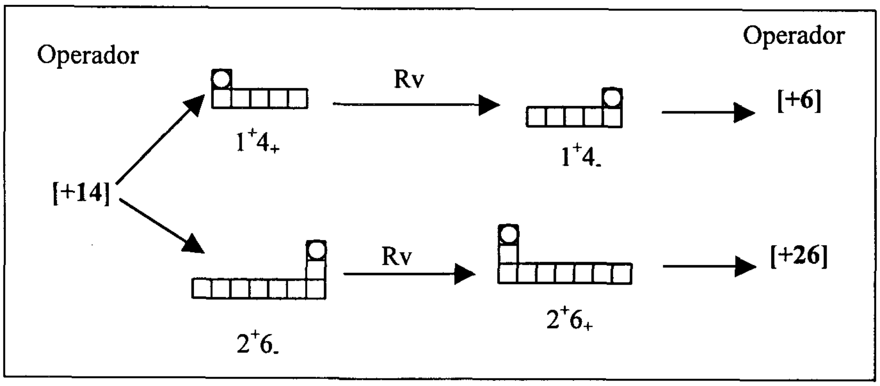


Fig. 5.10

Resultados de la tarea 2.7 en G70

Tabla de resultados

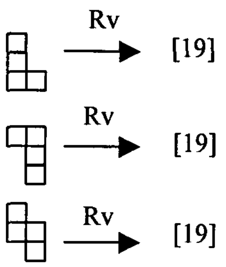
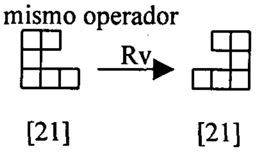
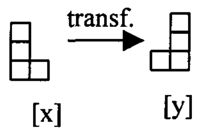
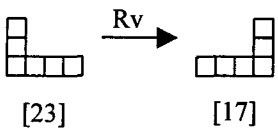
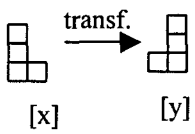
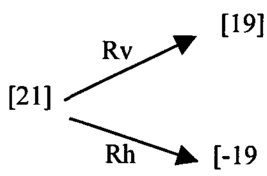
No contesta: 13 (30.2)	**SI : 16 (37.2)**	**NO : 14 (32.6)**
Justificaciones	A)  5 (11.6) B) Lo importante es el origen y final de la cadena. 4 (9.3) C) Siempre obtenemos una cadena del mismo operador  3 (7.0) D) La reflexión es una isometría y conserva las distancias. 2(4.7) E) Excepto para ejes oblicuos. 1 (2.3) F) Sí, si son simétricos. 1 (2.3)	A) Depende de la cadena y reflexión que tomemos. 6 (14.0) B) El transformado es distinto  3 (7.0) C) Sale simétrico y las unidades cambian de sentido  2 (4.7) D) Se conserva la forma pero no su valor  1 (2.3) E) $R_v(21) \neq 21$ $R_v(19) = 21$ 1 (2.3) F) el mismo operador da dos operadores distintos  1 (2.3)

Tabla 5.27 (G70-2ª sesión-tarea 7)

Comentarios

Las respuestas de la tabla 5.27 hace pensar que no se ha comprendido bien la pregunta, ya que ningún estudiante pone un ejemplo que pruebe que cadenas distintas asociadas a un mismo operador se transforman mediante una isometría en cadenas asociadas a distintos operadores. Esto se puede deber al uso exclusivo de cadenas simples (con un solo tramo vertical y/o horizontal) en los ejemplos presentados a los estudiantes. Se vislumbra la necesidad de haber tratado con más detenimiento la identificación de las diferentes cadenas que corresponden a un mismo operador aditivo.

Aspectos destacables de la tarea 2.7 en G3 y G1

G3

Tras la sesión con G3 confirmamos los comentarios anteriores, ya que se observa que estos estudiantes les cuesta comprender la pregunta, y es el propio profesor quien saca la conclusión. No obstante, Pedro identifica fácilmente representantes distintos de "sumar 4":

(P) Tomamos un operador y lo sometemos a una reflexión para que dé otro operador. ¿Depende el resultado del representante que tomemos? ¿De la forma de la figura que tomemos? (silencio).
(P) Por ejemplo, el [+4] sería ...
(PD) **Yo creo que no depende, siempre que esté en la misma clase de equivalencia.**
(P) Pues **vamos a tomar dos representantes del [+4]. Uno, el anterior, que es "derecha 4"**, y otro que tenga una forma distinta para indicar 4. (silencio).
(PD) **¿Podría ser "bajar 1, izquierda 6"?** (Pedro dibuja).
(P) De acuerdo. Los dos representan al [+4]. Si al primero lo sometemos a una reflexión horizontal, por ejemplo, sigue dando el [+4], pero si tomamos el segundo ¿Qué le pasa?
(DL) Que cambia.
(P) Entonces pasa algo fastidioso. Que **el transformado de un operador depende de los representantes elegidos.**

G1

Julia no comprende bien la pregunta. Es el profesor quien realiza prácticamente los dibujos para lograr que Julia comprenda la tarea y el que la resuelve.

5.3.10 Consideraciones sobre los resultados de la segunda sesión

En esta segunda sesión de trabajo los estudiantes han transformado las cadenas mediante algunas reflexiones sencillas, viendo el efecto producido sobre el operador asociado a dichas cadenas, así como los posibles invariantes que se pueden obtener frente a dichas reflexiones.

En esta ocasión la cadena origen que se presenta a los alumnos no tiene una orientación explícita (Fig. 5.9). Esta circunstancia no parece influir en las respuestas cuando se trata de utilizar una reflexión de eje vertical (R_v), pero sí cuando se realiza una reflexión de eje horizontal (R_h). También influye la orientación de las cadenas para:

- Encontrar una isometría que conserve el operador asociado a la cadena origen. El error de mencionar el giro G_{180} como identidad, se debió a considerar solamente el contorno de la cadena resultante y no la orientación interna.

- Estudiar el efecto que producen las isometrías sobre las decenas y sobre las unidades de las cadenas separadamente.

Por otra parte, los estudiantes no han llegado a la conclusión de que cadenas equivalentes (asociadas al mismo operador) se pueden transformar, por medio de una reflexión, en cadenas no equivalentes, como indica la figura 2.10.

Este es uno de los motivos por el que creemos que se necesita un estudio teórico-matemático más detallado sobre la aplicación de isometrías a las cadenas y su efecto aritmético sobre el operador aditivo asociado a ellas. Se precisa un mayor trabajo previo con los estudiantes sobre cadenas equivalentes, clases de equivalencia de cadenas y elección de los representantes canónicos de dichas clases de cadenas equivalentes.

5.3.11 Balance entre los objetivos planteados y logros alcanzados.

Resumimos en la tabla 2 las anteriores consideraciones en relación con los objetivos propuestos para esta sesión:

Objetivos	Consideraciones
1. Realizar reflexiones de ejes vertical, horizontal y oblicuos con las cadenas y observar el efecto producido en sus correspondientes operadores aditivos asociados.	Se ha alcanzado satisfactoriamente este objetivo desde el punto de vista geométrico, aunque bajo la óptica aritmética, los estudiantes no han especificado el signo correspondiente de los operadores asociados a las cadenas, posiblemente debido a la falta de orientación de las mismas.
2. Estudiar el efecto geométrico producido sobre las unidades y las decenas de las cadenas cuando éstas se someten a las reflexiones anteriormente mencionadas.	La falta de orientación de las cadenas ha producido errores en el sentido de avance de las unidades y decenas de las cadenas que son originadas mediante las reflexiones, especialmente mediante R_h, R_p y R_q.
3. Determinar las isometrías que dejan invariantes a los operadores asociados a las cadenas que se someten a dichas isometrías.	Los estudiantes que han considerado solamente el contorno de la cadena, sin orientación interna, han mencionado el giro G_{180} como isometría que deja invariante a los operadores asociados a las cadenas.
4. Comprobar el efecto aritmético que se produce cuando se someten cadenas distintas equivalentes (asociadas a un mismo operador), a cualquiera de las reflexiones anteriores.	No se ha cumplido este objetivo, bien por no estar clara la tarea a realizar o porque no se ha trabajado suficientemente las distintas cadenas representantes de un mismo operador.

Tabla 5.11

5.4 Tercera sesión

En esta sesión se estudian las cadenas y sus representaciones simbólicas. También se trabaja con la Tabla-100 de k columnas

5.4.1 Descripción general y objetivos

En las sesiones anteriores se han trabajado las cadenas desde un punto de vista algebraico y con la dinámica de las transformaciones geométricas. En esta sesión queremos abordar el paralelismo de las cadenas con otras formas de representación simbólica para los operadores aditivos, de modo que los estudiantes realicen diversas representaciones distintas para dichos operadores.

Por otra parte, hasta el momento hemos considerado las cadenas en el seno de la Tabla-100 de 10 columnas, en la que "bajar/subir n celdillas" tiene atribuido el significado aritmético de "sumar/restar n decenas". Queremos poner a los alumnos en situación de reflexionar sobre el efecto que produce en el significado de las cadenas cuando se cambia el número de columnas k de la Tabla-100, estableciendo en este caso conexiones con las cadenas y el sistema de numeración base k.

Desarrollamos lo anterior en los siguientes Objetivos de la sesión:

1. Encontrar formas de expresión simbólica para las cadenas en la Tabla-100 y sus operadores aditivos asociados.

2. Realizar ejemplos de suma de operadores aditivos utilizando las expresiones simbólicas anteriores.

3. Encontrar la expresión simbólica correspondiente al elemento neutro para $\oplus$ y al elemento simétrico de uno dado.

4. Determinar la forma que debe tener una cadena para que represente a un determinado operador aditivo en una tabla-100 de k columnas.

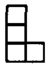
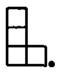
5. Estudiar el cambio de significado aritmético que experimenta una cadena cuando la situamos en una tabla-100 de k columnas.

6. Examinar el papel que juega el sistema de numeración en base k para encontrar la expresión numérica de los operadores asociados a las cadenas situadas en una tabla-100 de k columnas.

5.4.2 Tareas propuestas en la sesión

Planteamos a los estudiantes las siguientes 10 tareas:

Tarea 3.1 (T 3.1)

El operador [+21] lo hemos representado mediante la cadena  donde el sentido de lectura sería de arriba-abajo y de izquierda-derecha, y lo podríamos describir como "sumar 2 decenas y 1 unidad". Existen otras formas de representar [+21], como por ejemplo mediante el par (bajar 2, derecha 1). Podemos pensar en sustituir las palabras "bajar" y "subir" por algo más simple. **Escribe tres maneras distintas de representar el operador [+21] que no sea** **.**

T 3.2 **Elige la notación que te parezca más adecuada (sencilla, fácil de manejar, coherente, etc.) y escribe con ella varios representantes de los operadores [+19] y [-12].**

T 3.3 **Desarrolla con dicha notación las operaciones:**

i) [+19]$\oplus$[+5]
ii) [-12] $\oplus$[+8]
iii) [-12] $\oplus$ [-19]

T 3.4 **Enuncia la regla que has utilizado para realizar la operación $\oplus$ con la notación anterior.**

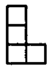
T 3.5a **Expresa y justifica con esa misma notación la propiedad de la operación $\oplus$ en el conjunto de los operadores "Existe un elemento neutro".**

T 3.5b Expresa y justifica con esa misma notación la propiedad de la operación $\oplus$ en el conjunto de los operadores "Todo elemento tiene simétrico".

T 3.6 Consideremos ahora los 100 primeros números dispuestos en una tabla de 7 columnas (Fig. 5.12). **Dibuja en dicha tabla una cadena correspondiente a [21] y escríbelo a continuación según la notación del ejercicio anterior.**

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100					

Fig. 5.12 (G70-3ª sesión-tarea 6)

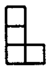
T 3.7 Considera ahora la cadena  en la tabla de la figura 5.13 **¿A qué operador representa en esa tabla?**

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100					

Fig. 5.13 (G70-3ª sesión-tarea 7)

T 3.8 En la tabla de 10x10, el operador [+21] lo podemos expresar como "2 decenas + 1 unidad", o bien 2 x 10 + 1, que en expresión polinómica en potencias de 10 sería: $21 = 1 \times 10^0 + 2 \times 10^1$

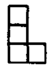
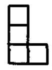
¿Cómo expresarías el operador [+21] de manera análoga en la tabla de 7 columnas?

T 3.9 **¿Encuentras algún sistema de representación numérica en el que la cadena  se pueda seguir expresando como [21] en la tabla de 7 columnas? Explícalo brevemente.**

5.4.3 Resultados de la tarea 3.1

Con esta tarea pretendemos que los estudiantes busquen representaciones de carácter simbólico, distintas de las cadenas, para los operadores aditivos, para favorecer la diversidad de representaciones para un mismo concepto.

Enunciado

El operador [+21] lo hemos representado mediante la cadena  donde el sentido de lectura sería de arriba-abajo y de izquierda-derecha, y lo podríamos describir como "sumar 2 decenas y 1 unidad". Existen otras formas de representar [+21], como por ejemplo mediante el par (bajar 2, derecha 1). Podemos pensar en sustituir las palabras "bajar" y "subir" por algo más simple. **Escribe tres maneras distintas de representar el operador [+21] que no sea** 

Resultados de la tarea 3.1 en G70

Criterios de clasificación de las respuestas

Clasificamos las 140 representaciones realizadas por los estudiantes en dos grupos: las representaciones que no son cadenas y las que sí lo son. Entre estas últimas, hemos considerado como correctas las cadenas que, aunque no están orientadas, representan adecuadamente al operador "sumar 21", ya que la cadena que figura en el texto de la tarea no está orientada.

Tablas de resultados

Representaciones en forma de cadena: n_i=60 (42.9%)

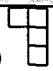
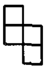
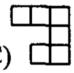
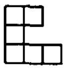
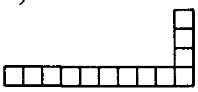
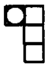
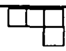
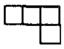
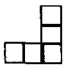
	Cadenas sin orientación	**Cadenas orientadas**
Correctas 55 (91.7)	A)  21=48.8% B)  14=32.6% C)  11=25.6% D)  5=11.6% E)  30-9=21 1=2.3%	A)  2=4.7% B)  1=2.3%
Subtotal	52 **(86.7)**	3 **(5.0)**
Incorrectas 5 **(8.3)**	A)  2=4.7% B)  2=4.7% C)  1=2.3%	
Subtotal	5 **(8.3)**	3 **(5.0)**
Número total de cadenas		60

Tabla 5.27 (G70-3ª sesión-tarea 1a)

Representaciones que no son cadenas: n_i=80 (57.1%)

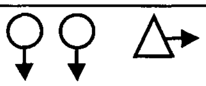
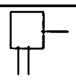
Gráficos	Pares o ternas	Expresiones matemáticas
A) □ □= * = 10 } ** | = 21 |= 1 3 (7.0)	**Uso de flechas: 22 (27.5)** A) (↓ 2, → 1) (10) A') (→ 1, ↓ 2) (6) B) (↘1, ↓ 1) (3) C) (↓↓, →) (2) D) (⊟↓, □→) (1)	A) 2x10+1 2 (4.7)
B) □ □ =5 } □□□□□ | =21 |=1 3 (7.0)	**Otros símbolos: 6 (7.5)** A) (□ □,❋) □ = decena; ❋ = unidad (1) B) (◸ ◸ , ◸) (1) C) (O 2, —O 1) (1) D) (2 ▯, 1 ▭) (1) E) (—+—, —) (1) F) (+1, -2) → ejes (X, Y) (1)	B) $2x10^1$+ $1x10^0$ 2 (4.7)
 **Diagonal del rectángulo de base 2 y altura 3** C) 3 (7.0)	**Uso de texto: 32 (40)** **Pares 18 (22.5)** A) (dcha 1, bajar 2) (7) A') (bajar 2, dcha 1) (3) B) (2 d, 1 u) (6) C) (sumar 22, restar 1) (1) D) (bajar 3, izqda. 9) (1) **Ternas 14 (17.5)** A) (bajar 1, dcha 1, bajar 1) (6) B) (izqda. 1, bajar 2, dcha 2) (6) C) (izqda. 2, bajar 2, dcha 3) (1) D) (dcha 3, bajar 1, izqda 2) (1)	C) 2 d + 1 u 1 (2.3)
D)  2 (4.7)		D) 5x4 + 1 1 (2.3)
E)  2 (4.7)		
F)  1 (2.3)		
Total: 14 (17.5)	**Total: 60 (75.0)**	**Total: 6 (7.5)**
Total de representaciones que no son cadenas		**80**

Tabla 5.28 (G70-3ª sesión-tarea1)

Comentarios

Las representaciones que son cadenas suponen un 42.9% del total de las representaciones, frente al 57.1% de las que no lo son.

Un 91.7% de las cadenas son correctas, aunque solamente el 5.0% han indicado la orientación de la figura.

Entre las representaciones que no son cadenas (tabla 5.28) detectamos las siguientes:

a. Gráficos

Existen algunas representaciones constituidas por **símbolos**, con los que construyen un sistema de numeración para indicar "sumar 21" (respuestas A y B). Otras están realizadas mediante **dibujos**, bien a modo de vectores (respuesta C) o para indicar la acción de "bajar" y "derecha" por medio de flechas o trazos rectos (D, E y F).

b. Pares o ternas

Para indicar las componentes de dichos pares y ternas los estudiantes han utilizado principalmente:

b1. Flechas

b2. Texto

b3. Otros símbolos

c. Expresiones de tipo matemático

Estas expresiones constituyen descomposiciones polinómicas del número 21.

Aspectos destacables de la tarea 3.1 en G3 y G1

G3

Las respuestas dadas por los estudiantes de este grupo son básicamente: pares con flechas, las letras d (para indicar decenas) y u (para indicar las unidades), y el par ordenado.

(PD) **Se podría hacer con flechas**, por ejemplo ¿no?
(P) Bien.
(PD) Una flecha para abajo, ...
(P) Escríbelo.
(PD) **(Pedro escribe el par (↓ 2, → 1))**
(...)
(P) Eso que ha escrito Pedro, ¿Se podría simplificar más? **¿Podríamos sustituir las flechas por otros símbolos?**
(DL) ¿Por decenas y unidades?
(P) Bien.
(DL) **(Dolores escribe (2d, 1u))**
(P) Y si es bajar o subir ¿Cómo lo expresamos? (silencio)
(P) ¿Si en lugar de [+21] ponemos [-21]?...
(DL) **Ponemos el signo de suma. (+2d, +1u).**
(P) Ya tenemos otra manera. Tienen que salir al menos 3. ¿Esto se podría simplificar más? Porque si la comparamos con la otra (↓ 2, → 1), es distinta, pero no la veo más reducida. Si vamos a tender a la simplificación ¿Cómo podrías hacer?
(DL) **Poniendo por ejemplo (1, 2).**
(P) ¿Te refieres a (2,1)?
(DL) Sí, pero poniendo primero los horizontales...
(P) Ah, primero las unidades.
(DL) **Como si estuviéramos en un diagrama de .... de X e Y** (Dolores se refiere al diagrama cartesiano).
(P) Ah, que ésta (la primera componente) sería la x y ésta (la segunda componente) sería la y.

Dolores escribe:

↔	↕
x	y
(2,	1)

(P) Esta sería la x y ésta la y. Ah, muy bien.
(PD) **Yo he pensado otra cosa. Dejar siempre la primera componente para las decenas, y poner simplemente (+2 , +1).**

G1

Julia opta por los pares utilizando números, flechas e incluso cadenas dentro del paréntesis para indicar sus componentes:

(P) Quiero que me digas tres maneras distintas para expresar [+21] que no sea la .
(J) Tampoco la L al revés ¿no?
(P) Bueno, esa ya la hemos visto. Ahora se trata de una notación que no sea de tipo geométrico. El operador [21] lo podemos expresar así y también mediante el par (bajar 2, derecha 1), y también ...
(J) Sumar 2 decenas...
(P) ¿Cómo lo escribirías?
(J) **Julia escribe (+20, +1)**
(P) Esa sería una manera. **Otra forma.**
(J) **Podría ser (↓ 2, → 1).**
(P) Otra. Siempre tendiendo a lo más simple. Después elegirás la más sencilla y con esa trabajaremos.
(J) ¿Me hace falta poner números?
(P) Pon lo que quieras.
(J) Por ejemplo (↓ , → □).
(P) Muy bien. ¿Se te ocurre **otra más simple?**
(J) **Como no sea quitando ya las flechas...**
(P) Bien.
(J) (Julia escribe (, □).

5.4.4 Resultados de la tarea 3.2

Con el fin de utilizar las nuevas representaciones pedimos a los estudiantes que escriban un operador positivo y otro negativo con las representaciones nuevas.

Enunciado

Elige la notación que te parezca más adecuada (sencilla, fácil de manejar, coherente, etc.) y escribe con ella varios representantes de los operadores [+19] y [-12].

Resultados de la tarea 3.2 en G70

Criterios de clasificación de las respuestas

Hemos considerado las respuestas como correctas cuando la representación se adecua al operador correspondiente. Distinguimos también si la representación incluye el uso de cadenas.

Tabla de resultados

La tabla 5.29 recoge las respuestas de los estudiantes de G70:

	Representación correcta		Representación incorrecta		Total	
	[+19]	[-12]	[+19]	[-12]	[+19]	[-12]
No usa cadenas	30 (69.8)	30 (69.8)	3 (7.0)	4 (9.3)	33 (76.7)	34 (79.1)
Usa cadenas	10 (23.3)	8 (18.6)	0 (0.0)	1 (2.3)	10 (23.3)	9 (20.9)
Total	40 (93.0)	38 (88.4)	3 (7.0)	5 (11.6)	43	43

Tabla 5.29 (G70-3ª sesión-tarea 2)

Comentarios

La mayoría de los alumnos (93.0% y 88.4% respectivamente para ambos operadores [+19] y [-12]) realizan correctamente la representación, si bien únicamente el 23.3% y 18.6% respectivamente utilizan cadenas. Solamente un alumno ha utilizado incorrectamente las cadenas para realizar la representación, y se da para el caso del operador negativo [-12].

Aspectos destacables de la tarea 3.2 en G3 y G1

G3

Destacamos las equivalencias que surgen entre representaciones en forma de pares. El par (1, 9) que corresponde "bajar 1, derecha 9" es equivalente al par (2, -1), que se corresponde con "bajar 2, izquierda 1":

(P) Con esa notación que hemos elegido ¿Cómo se escribe el operador [+19]?
(D) **Hay varias maneras. Una podría ser el (1, 9) y otra el (2, -1).**
(P) Muy bien. ¿Habría más maneras? (silencio)
Básicamente éstas. Se pueden poner todas las combinaciones que queramos.
¿Y el [-12]?
(DL) (-1, -2)
(D) (-2, +8)

G1

Julia no encuentra por sí sola pares equivalentes para "sumar 19", y tiene algunos problemas con la posición que ocupan las decenas.

Después de la ayuda recibida por el profesor para el operador [+19], Julia encuentra pares equivalentes para "restar 12":

(P) **¿Cómo escribirías el [-12]?**
(J) Por ejemplo, subir 10, ...**(Julia escribe (-10, -2)**
(P) Bueno, como hemos dicho que la primera componente son decenas, ...
(J) Pues **sería (-1, -2)**
(P) **¿Y otra manera?**
(J) (Julia escribe (-2, 8).

5.4.5 Resultados de la tarea 3.3

Como aplicación de las representaciones obtenidas proponemos a los estudiantes que representen tres operaciones con operadores aditivos con dichas representaciones.

Enunciado

Desarrolla con dicha notación las operaciones:

i) [+19]⊕[+5]
ii) [-12] ⊕[+8]
iii) [-12] ⊕ [-19]

Resultados de la tarea 3.3 en G70

Criterios de clasificación de las respuestas

Se han considerado operaciones incorrectas cuando los estudiantes:

A) Suman los operadores en sistema decimal y posteriormente expresan la operación en términos de la representación elegida.

Ejemplo: [+19] ⊕ [+5] = [+24] = (bajar 2, derecha 4)

B) No efectúan la operación, limitándose a escribir las representaciones de los sumandos.

Ejemplo: [+19] ⊕ [+5] = (1↓, 9→, 5→)

C) No realizan correctamente la composición de cadenas:

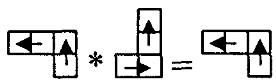
Ejemplo: [-12]⊕ [-19]= 

Tabla de resultados

	Operación correcta			Operación incorrecta			Total		
	i)	ii)	iii)	i)	ii)	iii)	i)	ii)	iii)
No usa cadenas	19 (44.2)	19 (44.2)	18 (41.9)	17 (39.5)	19 (44.2)	19 (44.2)	36 (83.7)	38 (88.4)	37 (86.0)
Usa cadenas	6 (14.0)	1 (2.3)	2 (4.7)	1 (2.3)	4 (9.3)	4 (9.3)	7 (16.3)	5 (11.6)	6 (14.0)
Total	25 (58.1)	20 (46.5)	20 (46.5)	18 (41.9)	23 (53.5)	23 (53.5)	43	43	43

Tabla 5.30 (G70-3ª sesión-tarea 3)

Comentarios

- El 58.1%, 46.5% y 46.5% de los alumnos (respectivamente para cada una de las tres operaciones) realizan las operaciones correctamente de acuerdo con la representación que ellos han elegido.

- El 14.0%, 2.3% y 4.7%, respectivamente, eligen cadenas para realizar las operaciones propuestas.

- Se advierte que el índice de errores para las operaciones ii) e iii) que incluye operadores negativos (53.5%), es ligeramente mayor que cuando ambos son positivos (41.9%).

- Detectamos en general menos errores para las tres operaciones cuando las representaciones incluyen cadenas que cuando utilizan otros símbolos.

Aspectos destacables de la tarea 3.3 en G3 y G1

G3

Los integrantes de este grupo realizan correctamente las operaciones propuestas y manejan bien distintos pares equivalentes.

(P) ¿Cómo haríamos [+19]⊕[+5] utilizando esta notación?
(D) **(1, 9) + (0, 5). También puede ser (2, -1) + (1, -5)**
(P) Ahora lo importante es ver la regla que utilizáis. **¿Cómo sumamos esas parejas?**
(D) **Pues unidades con unidades y decenas con decenas.**
(P) Sería (1+0, 9+5) **¿Cómo ponemos esto? (1,14)**
(PD) **(2,4)**
(P) 10 unidades pasarían a formar una decena. Aquí se maneja bien aquello de "me llevo una" ¿no?
(PD) Sí.
(P) **¿Y el [-12] ⊕ [+8]?**
(DL) Sería (-1, -2) + (0, +8)
(P) Y eso según la regla es...
(PD) (-1, 6)
(P) ¿Qué operador sería ese? **¿De qué otra manera podemos ponerlo?**
(D) (0, 4). No, no. **(0, - 4)**
(P) Sería el operador [- 4]. Y por último **[-12] ⊕ [-19].**
(D) **(-2, -11) o bien el (-3, -1).**

G1

Julia realiza correctamente las dos primeras operaciones utilizando pares ordenados e identifica pares equivalentes:

(P) De acuerdo. Vamos a hacer la composición de [+19] más [+5], con esta notación.
(J) Sería (Julia escribe **(1, 9) (0, 5)**)
(P) ¿Y aquí en medio, (entre los dos pares) qué pondrías?
(J) **(Julia escribe el signo +).**
(P) **¿Y cómo sumarías estas dos parejas?**
(J) Sería igual a (2 , 4).
(P) ¿Por qué te sale (2 , 4)?
(J) Unidades con unidades y decenas con decenas.
(P) 1 y 0, uno, ...
(J) He empezado por las unidades.
(P) Bueno, 9 y 5, 14.
(J) Pero con 14 hay una decena, ...
(P) Bien, por eso te sale este 2 ¿no? Hay muchas maneras de escribirlo. Pon también esta (1, 14).
(P) **¿Cómo sumarías [-12] con [+8]?**
(J) (-1, -2) + (0, 8) = ... (silencio) Un momento...
(P) Aplica la regla que has dicho.

(J) Las unidades son 6. **Sale (-1, 6).**
(P) ***¿Y otra forma de escribirlo?***
(J) Pues el (0 , - 4).

Para representar el [-19] Julia trata de visualizar la cadena correspondiente y se equivoca al escribir (-2, -1) en lugar de (-1, -9).

(P) Por último, **[-12] con [-19].**
(J) **(Julia escribe (-1, -2) + (-2, -1))**
(P) **¿Por qué escribes el [-19] como (-2, -1)?**
(J) Subo 2, que son 20, menos 1,... 19. Es subir 2, que son -20, izquierda 1, que es restar.
(P) Eso es restar 21. ¿No? Si [-12] es (-1, -2), el [-19] será (-1, -9) ¿No?
(J) También.
(P) O bien (el profesor escribe [-19] = (-1, -9) = (-2, +1)) Restar dos decenas y ...
(J) Sumar uno.
(P) **¿Cómo haríamos esa suma?**
(J) (Julia escribe y dice (-3, -1)).

5.4.6 Resultados de la tarea 3.4

Enunciado

Enuncia la regla que has utilizado para realizar la operación $\oplus$ con la notación anterior.

Resultados de la tarea 3.4 en G70

Tabla de resultados

La tabla 5.31 recoge los tipos de enunciados de la regla que dan los estudiantes y un ejemplo de cada tipo.

Tipo de enunciado	Ejemplo	n_i (%)
A) Suman las correspondientes componentes de los pares de manera usual.	*"Sumamos las flechas que van en el mismo sentido y restamos las que van en sentido opuesto".*	22 **(51.2)**
B) Realizan la "suma" en notación decimal y posteriormente escriben la representación correspondiente del resultado.	*"He calculado el operador resultante de la composición de los operadores y he dado la notación del resultado".*	8 **(18.6)**
C) Realizan agrupamientos de símbolos a modo de sistemas de numeración.	*"He utilizado la regla de agrupamiento de números en general y he utilizado el sistema de números romanos".*	4 **(9.3)**
D) Realizan la unión de cadenas superponiendo la casilla final de una con la inicial de la otra.	*"He unido los patrones poniendo o quitando cuadrados según suman o restan".*	1 **(2.3)**
No contesta		8 **(18.6)**
Total		**43**

Tabla 5.31 (G70-3ª sesión-tarea 4)

Comentarios

Existe un predominio claro de las respuestas que consisten en sumar componente a componente los términos de los pares ordenados.

Tanto en el grupo G3 como G1 los estudiantes eligen la regla que consiste en "*sumar las correspondientes componentes de los pares*".

5.4.7 Resultados de la tarea 3.5a

Pretendemos que los alumnos identifiquen el elemento neutro de la "suma de operadores" con las representaciones encontradas.

Enunciado

Expresa y justifica con esa misma notación la propiedad de la operación $\oplus$ en el conjunto de los operadores "Existe un elemento neutro".

Resultados de la tarea 3.5a en G70

Tabla de resultados

	Elemento neutro	n_i (%)	Total
Correctas	[0]	**8 (18.6)**	27 (62.8)
	$(0\leftrightarrow, 0\updownarrow)$	**3 (7.0)**	
	$(\uparrow 0, \rightarrow 0)$	**3 (7.0)**	
	0	**3 (7.0)**	
	$\Diamond = 0$	**3 (7.0)**	
	0 u	**3 (7.0)**	
	(0, 0)	**2 (4.7)**	
	$0 \rightarrow$	**1 (2.3)**	
	•	**1 (2.3)**	
Incorrectas	Existe e.n. si $\forall x \in G \Rightarrow \exists x_1 / x \oplus x_1 = x_1 \oplus x = x$	**7 (16.3)**	11 (25.6)
	No existe e.n.	**3 (7.0)**	
	Existen varios e.n. representados por ✵	**1 (2.3)**	
No contesta			**5 (11.6)**
Total			**43**

Tabla 5.32 (G70-3ª sesión-tarea 5a)

Comentarios

El 62.8% de las respuestas son correctas de acuerdo con las representaciones efectuadas. Un 16% no parece entender la pregunta, ya que se limitan a enunciar la propiedad que caracteriza al elemento neutro.

Aspectos destacables de la tarea 3.5a en G3 y G1

G3

No parece presentar dificultades para este grupo la tarea de expresar en términos de pares el elemento neutro, escribiendo una expresión general que expresa que el par (0, 0) es el elemento neutro:

(P) ¿Quién sería elemento neutro aquí y cómo lo comprobamos? ¿Gráficamente cuál era el elemento neutro? (PD) El cuadradito. (P) Será entonces un cuadradito o bien... (DL) **El (0, 0).** (P) ¿Cómo comprobamos que es efectivamente ese el elemento neutro? (D) Pues aplicando el elemento neutro con cualquier operador... **(Domingo escribe (0, 0) + (a, b) = (0+a, 0+b) = (a, b)**

G1

Con una mayor ayuda del profesor Julia consigue expresar correctamente el elemento neutro para ⊕:

(P) **¿Cuál sería el elemento neutro?** (J) Pues **el mismo operador pero con signo menos.** (P) Ese es el simétrico ¿no? (J) Ah! Entonces ¿Cuál era el neutro? **Era el que daba cero...** (P) Si tenemos un operador x, al componerlo con el neutro, nos da el mismo x. ¿Quién sería el neutro? (J) Pues eso es lo que decía yo. Ah, no. (P) En el campo gráfico era una casilla, o un anillo cerrado. Es el operador 0 ¿no? **¿Cómo lo escribirías con la notación anterior?** **(J) (Julia escribe: El. neutro = (0, 0))** (P) ¿Cómo comprobarías que éste es el elemento neutro? (J) Pues siendo la suma de estos. Por ejemplo, con el 19, ... (P) Pero hazlo en general. Si lo haces con letras valdría para todos ¿no? Con un número no sería una demostración. (J) Por ejemplo el [a] ⊕ [0] (P) Habrá que ponerlo en forma de parejas. ¿Cuál sería el a? (J) Pues el a. (P) ¿Cuántas decenas? (J) Ah. El (0, a) **(Julia escribe: [+a] ⊕ [0] = (0, a)+(0,0) = (0,a))**

5.4.8 Resultados de la tarea 3.5b

Enunciado

Expresa y justifica con esa misma notación la propiedad de la operación ⊕ en el conjunto de los operadores "Todo elemento tiene simétrico".

Resultados de la tarea 3.5b en G70

Tabla de resultados

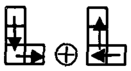
	Elemento simétrico	n_i (%)	Total
Correctas	El simétrico de (a ↑, b→) es (a ↓, b ←)	12 **(27.9)**	22 (51.2)
	[+21] ⊕[-21]=[0]	4 **(9.3)**	
		3 **(7.0)**	
	 = ¿?	2 **(4.7)**	
	Simétrico de (8 →) es (← 8)	1 **(2.3)**	
Incorrectas	$\forall x \in G \Rightarrow \exists x_2 / x \oplus x_2 = x_2 \oplus x = n$	**8 (18.6)**	12 (27.9)
	(xd + yu) + (zd + ju)=0u xd=-zd; yu =- ju; |x| = |z|; |y| = |j|	3 **(7.0)**	
	(+2, -1) ⊕ (-2, -1) = (0, 0)	1 **(2.3)**	
No contesta			9 (20.9)
Total			**43**

Tabla 5.33 (G70-3ª sesión-tarea 5b)

Comentarios

Para el elemento simétrico se obtienen resultados parecidos a la tarea anterior, aunque con un índice de aciertos (51.2%) ligeramente inferior. Destacamos la respuesta de mayor frecuencia en la que se menciona que el simétrico de (a ↑, b→) es (a ↓, b ←), aunque sorprendentemente no aparece una respuesta similar con los signos habituales de – y +, como es el par (-a, -b).

Aspectos destacables de la tarea 3.5b en G3 y G1

Los estudiantes de G3 y G1 señalan el par (-a, -b) como elemento simétrico de (a, b).

5.4.9 Resultados de la tarea 3.6

Tratamos de determinar la forma que debe tener la cadena correspondiente a un operador aditivo concreto cuando la Tabla-100 tiene 7 columnas.

Enunciado

Consideremos ahora los 100 primeros números dispuestos en una tabla de 7 columnas (Fig. 5.12). **Dibuja en dicha tabla una cadena correspondiente a [21] y escríbelo a continuación según la notación del ejercicio anterior.**

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100					

Fig. 5.12 (G70-3ª sesión-tarea 6)

Resultados de la tarea 3.6 en G70

Criterios de clasificación de las respuestas

Dado que en el enunciado de la tarea no consta el signo del operador, hemos dado por correctas aquellas representaciones que representan tanto al operador [+21] como [-21], aunque no estén orientadas.

Tablas de resultados

Los resultados los presentamos en dos tablas: la tabla 5.34 recoge las cadenas dibujadas en la tabla de 7 columnas para representar el operador [21].

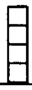
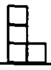
	Cadenas para [21]	n_i (%)	Total (%)
Correctas		25 (58.1)	26 (60.5)
		1 (2.3)	
Incorrectas		10 (23.3)	12 (27.9)
		1 (2.3)	
		1 (2.3)	
No contesta			5 (11.6)
Total			**43**

Tabla 5.34 (G70-3ª sesión-tarea 6.1)

La tabla 5.35 corresponde a la segunda parte de la tarea, y en ella se especifican las expresiones de la cadena según la notación que el estudiante realizó en la tarea anterior.

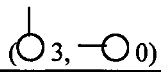
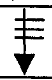
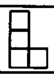
	Expresiones de las cadenas con otra notación	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctas	(↓ 3)	15 (34.9)	29 (67.4)
	(bajar 3)	9 (20.9)	
	(↓ 3, → 0)	3 (7.0)	
		1(2.3)	
		1(2.3)	
Incorrectas	(↓ 2, → 2)	1(2.3)	7 (16.3)
	bajar 4	1(2.3)	
	2d + 1u	1(2.3)	
	[+21]=[+0, -3]	1(2.3)	
	**| =21	1(2.3)	
	3d	1(2.3)	
		1(2.3)	
No contesta			7 (16.3)
Total			**43**

Tabla 5.35 (G70-3ª sesión-tarea 6.2)

Comentarios

No parece presentar mucha dificultad el cambio de forma que debe experimentar la cadena asociada a un operador aditivo cuando la tabla-100 es de 7 columnas, dado que el 60.5% de las respuestas son correctas.

En relación con la "traducción" de la cadena en cuestión a otras formas simbólicas de representación (tabla 5.35) el 67.4% de las respuestas son correctas, lo que indica que las representaciones simbólicas realizadas (principalmente mediante pares ordenados) se interpretan correctamente en la mayoría de los casos en relación con las cadenas en una tabla de 7 columnas.

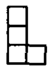
Aspectos destacables de la tarea 3.6 en G3 y G1

Los estudiantes de G3 y G1 dibujan la cadena  para representar "sumar 21". Julia elige el par (3, 0) para representar esta cadena.

5.4.10 Resultados de la tarea 3.7

Recíprocamente a la tarea anterior, planteamos ahora a los alumnos que identifiquen al operador asociado a una cadena dada en la tabla de 7 columnas.

Enunciado

Considera ahora la cadena  en la tabla de la figura 5.13 **¿A qué operador representa en esa tabla?**

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100					

Fig. 5.13 (G70-3ª sesión-tarea 7)

Resultados de la tarea 3.7 en G70

Tabla de resultados

	Operador	Ni (%)	Total
Correctas	A) [+15]	25 **(58.1)**	37 **(86.0)**
	B) [15]	9 **(20.9)**	
	C) + 15	2 **(4.7)**	
	D) [±15]	1 **(2.3)**	
Incorrectas	E) (+21)	1 **(2.3)**	1 **(2.3)**
No contesta			5 **(11.6)**
Total			**43**

Tabla 5.36 (G70-3ª sesión-tarea7)

Comentarios

Aunque existe un 11.6% de estudiantes que no responden a la tarea, el hecho de existir solamente una respuesta incorrecta, que identifica el operador asociado con el mismo que en la tabla de 10 columnas, permite concluir que no resulta difícil a estos alumnos identificar adecuadamente el significado aritmético de una cadena al cambiar el número de columnas de la tabla. Destacamos el mayor índice de acierto (86.0%) para encontrar el operador asociado a una cadena determinada que para dibujar la cadena que corresponde a un operador aditivo concreto (60.5%).

Aspectos destacables de la tarea 3.7 en G3 y G1

Los alumnos de G3 y G1 dan la misma respuesta A) que en G70, es decir "el operador 15".

4.5.11 Resultados de la tarea 3.8

Con la descomposición polinómica del operador "sumar 21" en potencias del número de columnas k, pretendemos facilitar a los estudiantes el reconocimiento (en la tarea siguiente) del sistema de numeración en base k como el sistema que permite escribir el operador aditivo asociado a una cadena independientemente del número de columnas que tenga la tabla-100.

Enunciado

En la tabla de 10x10, el operador [+21] lo podemos expresar como "2 decenas + 1 unidad", o bien 2 x 10 + 1, que en expresión polinómica en potencias de 10 sería: $21 = 1 \times 10^0 + 2 \times 10^1$

¿Cómo expresarías el operador [+21] de manera análoga en la tabla de 7 columnas?

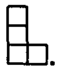
Resultados de la tarea 3.8 en G70

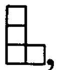
Tabla de resultados

	Respuestas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	A) $21 = 3x7^1$	8 (18.6)	13 (30.2)
	B) $21 = 0x7^0 + 3x7^1$	5 (11.6)	
Incorrectas	C) $21 = 1x7^1 + 2x7$	5 (11.6)	13 (30.2)
	D) $21 = 1x7^1 + 1x7^1 + 1x7^1$	3 (7.0)	
	E) $21 = 7x7^0 + 2x7^1$	2 (4.7)	
	F) $21 = 0x10^0 + 3x10^1$	1 (2.3)	
	G) $21 = 3x7^0 + 0x7^1$	1 (2.3)	
	H) 21	1 (2.3)	
No contesta			17 (39.5)
Total			43

Tabla 5.37 (G70-3ª sesión-tarea 8)

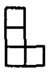
Comentarios

De los resultados de la Tabla 5.37 se desprende que el 30.2 % de los alumnos han interpretado la pregunta como una descomposición polinómica del número 21 en base 7, sin tener en cuenta que la forma que tiene la cadena que representa al operador [+21] en la nueva tabla de 7 columnas es  y no .

No se aborda esta tarea específica en los grupos G3 y G1 con la  aunque sí se hace con , que abordamos en la tarea siguiente.

5.4.12 Resultados de la tarea 3.9

Enunciado

¿Encuentras algún sistema de representación numérica en el que la cadena  se pueda seguir expresando como [21] en la tabla de 7 columnas? Explícalo brevemente.

Resultados de la tarea 3.9 en G70

Tablas de resultados

Las respuestas a la primera parte de la pregunta se recogen en la tabla 5.38, mientras que las justificaciones correspondientes están en la tabla 5.39.

Respuestas	n_i (%)
A) En base 7	10 **(23.3)**
B) No es posible	5 **(11.6)**
No contesta	28 **(65.1)**
Total	**43**

Tabla 5.38 (G70-3ª sesión-tarea 9.1)

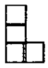
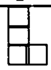
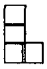
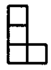
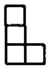
<table>
<tr><th></th><th>Justificaciones</th><th>n_i (%)</th><th>Total (%)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Correctas</td><td>A) El alumno escribe un trozo de la tabla de 7 columnas en base 7 y coloca la cadena sobre ella, afirmando que de esa manera la cadena representa a $21_{(7}$.
1 2 $\boxed{3}$ 4 5 6 10
11 12 $\boxed{13}$ 14 15 16 20
21 22 $\boxed{23}$ $\boxed{24}$ 25 26 30
31 32 33 34 35 36 40</td><td>5
(11.6)</td><td rowspan="3">7
(16.3)</td></tr>
<tr><td>B) $21_{7)} = 1x7^0 + 2x7^1 = 15$
[+21] = [15] en base 7 = </td><td>1
(2.3)</td></tr>
<tr><td>C) En base 7  sería $[21_{(7}]$ o lo que es lo mismo $[15_{(10}]$.
 se puede seguir expresando como $[21_{(7}]$ en la tabla de 7 columnas.</td><td>1
(2.3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Incorrec-tas</td><td>D) El alumno escribe un trozo de la tabla de 7 columnas en base 10 y coloca la cadena sobre ella.
1 2 $\boxed{3}$ 4 5 6 7
8 9 $\boxed{10}$ 11 12 13 14
15 16 $\boxed{17}$ $\boxed{18}$ 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28</td><td>2
(4.7)</td><td rowspan="2">3
(7.0)</td></tr>
<tr><td>E) $14 = 20_{(7}$; $15 = 21_{(7}$</td><td>1
(2.3)</td></tr>
<tr><td colspan="2">No contesta</td><td></td><td>33
(76.7)</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td></td><td>**43**</td></tr>
</table>

Tabla 5.39 (G70-3ª sesión-tarea 9b)

Comentarios

El 23.3% de los alumnos responden afirmativamente a la primera parte de la pregunta (tabla 5.38), reconociendo el sistema de numeración en base 7 con el cual la cadena  sigue representando al operador [21] en la tabla de 7 columnas. Destacamos el alto porcentaje de alumnos (65.1) que no responden a esta cuestión, posiblemente por no estar la pregunta lo suficientemente bien redactada.

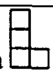
El 16.3% de las explicaciones o justificaciones a esta respuesta son correctas, destacando la respuesta A) de la tabla 5.39, ya que en ella el estudiante escribe en base 7 los números de la tabla-100 de 7 columnas, y coloca en ella la misma cadena  que transforma el $3_{(7}$ en el $24_{(7}$, y que por tanto se interpreta también como el operador $21_{(7}$.

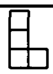
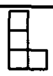
Aspectos destacables de la tarea 3.9 en G3 y G1

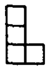
G3

Los estudiantes no comprenden bien la pregunta al principio, aunque tras la intervención del profesor resuelven la cuestión satisfactoriamente:

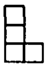
(P) Veamos una manera de representación numérica, que haga que la cadena "bajar 2, derecha 1" siga significando "dos, uno" (+21). ¿Cómo podemos modificar la notación numérica para que eso siga siendo cierto en la tabla de 7 columnas? (silencio)
(P) Eso era cierto en la tabla de 10x10. Pero en la de 7 columnas eso ya es "quince". Pero sigue siendo "bajar 2, derecha 1" ¿no? El problema con que nos encontramos es que "bajar 2, derecha 1" ya no significa 21, sino 15.
(El profesor escribe: (2, 1) = quince)
¿Cómo podemos escribir todo esto (el profesor señala la tabla) para que (2,1), que es "bajar 2, derecha 1", también se pueda escribir "dos, uno", ó [21]? El problema es que se entienda la pregunta...
(PD) Utilizando una notación como ésta **(Pedro señala la descomposición polinómica del 15 en potencias de 10).**
(P) Eso es. (silencio)

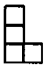
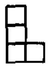
(P) Vamos a hacer un esquema. La cadena  en la tabla de 10x10 significa 21 y en la tabla de 7 columnas significa 15 ¿no?
El profesor escribe:

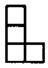
En tabla de 10 columnas	En tabla de 7 columnas
 = 21	 = 15

(D) En realidad, estaríamos en un sistema de numeración distinto ¿no? Porque antes estábamos en un sistema decimal, y ahora ya estaríamos en otro sistema, y por eso, aunque la forma sea la misma, la misma cadena, pero por eso cambia el operador, porque no estamos en el mismo sistema de numeración.
(P) Bueno, ésta es la de 10x10 y ésta la de 7 columnas. **El sistema de numeración no ha cambiado**, porque el "diez" lo sigo escribiendo 10 en ambos sitios. Lo que ha cambiado ha sido la disposición de los números ¿no? **En lugar de colocarlos de 10 en 10 los hemos colocado de 7 en 7.**
(D) Pero, si antes bajar un lugar era 10, ahora es 7.
(P) Eso.
(PD) Utilizando las potencias, en vez de base 10 que sean de base 7.
(P) Ajá! Pues a ver qué pasa si en lugar de decenas utilizamos septenas ¿no?
(PD) Sí.
(P) ¿Y eso (señalando la cadena )qué es?
(PD) Sería $2x7^1 + 1x7^0$
(P) **Que sería ...**
(PD) El [2, 1]

G1

Julia no consigue resolver la cuestión. Le cuesta trabajo entender la pregunta y no relaciona el problema con los sistemas de numeración. En esta entrevista se pone de manifiesto que es posible que la pregunta no se haya redactado con claridad suficiente, ya que Julia advierte que efectivamente la cadena  sigue representando "dos, uno", en el sentido de "bajar 2, derecha 1".

(P) Ahora, la pregunta del millón. Te la leo para ver si la entiendes. ¿Encuentras alguna manera de representación numérica...
(J) Eso ...
(P) ...de representar los números, para que esta L se siga representando por 21 en la tabla de 7 columnas?
(J) Vamos a ver. Hacerlo de esta forma...
(P) **La cadena**  en la tabla de 10x10 representa al 21 y **en la tabla de 7 columnas representa ...**
(J) Al 15.
(P) En la tabla de 7 columnas...
(J) ¿Una L que represente 21?
(P) ¿Cómo me las apaño yo para que esta  siga siendo el "dos, uno"; **No digo veintiuno, sino el "dos, uno"**, en la tabla de 7 columnas?. ¿Entiendes la pregunta?
(J) Vamos a ver. **Es que en esta tabla sigue siendo el "dos, uno".**
(P) Ah. Bien! Sigue siendo el 2, 1 en el sentido de "bajar 2 y derecha 1".
(J) **Aunque sea el operador 15.**
(P) Eso es. Y el operador es ...
(J) El quince.

El profesor matiza la pregunta. Se pretende encontrar una expresión aritmética para el operador aditivo asociado a la cadena  que situada en la tabla-100 de 7 columnas, dicho operador se escriba 21, lo que produce cierta confusión en Julia:

(P) Vamos a dar otro paso más. ¿Cómo nos las arreglamos para que el operador también sea el dos, uno (21)?
(J) **Bajando 2 y derecha 1 ¿no? ... ¿Y que sea el operador 15?**
(P) No, que sea el operador 21; "dos, uno". Que este 15 se escriba con el "dos, uno". **¿Cómo cambiamos la manera de escribir los números?**
(J) Mover estos números.
(P) Escribirlos de otra manera. El 5 lo podemos escribir: 5, o bien V, o bien IIIII, o con un garabato que nos inventemos ¿no? Antes hemos dicho que xy vale x por 10 + y por 1, porque bajar un lugar era una decena, pero aquí bajar un lugar ¿Qué es?
(J) **¿Bajar un lugar?** Sumar 10.
(P) No.
(J) No. **Sumar** 7. Vamos a ver.
(P) Ya no son decenas, son septenas ¿no? Entonces el 21, el "dos, uno" expresado como antes, sería...
(J) Bajar 2, derecha 1.
(P) Sería igual que...
(J) **Sumar 2.**
(P) **Sumar 2 ¿qué?** Antes eran dos decenas.
(J) **Pues 2 septenas.**
(P) (El profesor escribe: [+21] = (2, 1) = bajar 2, derecha 1 = sumar 2 septenas y 1 unidad) **¿Cómo escribimos 2 septenas?**
(J) **2 por 7.**
(P) Más uno...
(El profesor termina de escribir: [+21] = (2, 1) = bajar 2, derecha 1 = sumar 2 septenas y 1 unidad = + 2 x 7 + 1)
(P) O como antes habíamos dicho: $2 \times 7^1 + 1 \times 7^0$.
(J) Sí.
(P) **Ahora en lugar de hablar de decenas hablamos de ...**
(J) De septenas.
(P) ¿Te suena eso? ¿Te sugiere alguna idea?
(J) Pues no. Así en frío ... ¿A la fuerza tiene que acabar como una L?
(P) No. La cadena "bajar 2, derecha 1", que en la tabla de 10x10 significaba 21, en la de 7 columnas significa 15. ¿No?
(J) Pero que utilizando esto, el 2 x 1 en la tabla del 7 me dé 21.
(P) Te dé "dos, uno".
(J) Hombre, es que si hacemos así (**cadena C de la Fig. A5.2-26**), bajamos 1, ya son 7, nos vamos 3 a la derecha, ya tenemos 10, si bajamos otro ...No, ya bajamos más.

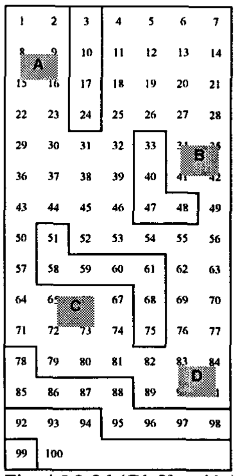


Fig. A5.2-26 (G1-3ª sesión)

(P) Dices, bajar (siete)... Es que es esto. Al bajar 21, es esta l que has hecho (cadena A de la Fig. 5.2-26).
(J) Entonces sería por aquí (cadena D de la Fig. 5.2-26).

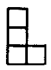
Aunque el profesor le menciona expresamente los sistemas de numeración, Julia no los relaciona con el problema. El profesor escribe los números de la tabla en base 7, y Julia no recuerda el proceso, lo que constituye un obstáculo para el objetivo de la pregunta. Al final el profesor es quien resuelve la cuestión:

(P) Aquí hemos descompuesto el número donde el protagonista es el 7.
$21 = 2 \times 7^1 + 1 \times 7^0$; 7 elevado a 1, siete elevado a 0. **¿Te recuerda algo eso? ¿De sistemas de numeración o algo de eso?**
(J) Ahora mismo, no.
(P) **Si escribimos la tabla en base 7...** (Fig. A5.2-27)
1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 que se escribe 10 en base 7 ¿no? (Tabla de la figura A5.2-27).
(J) Sería 1, y no 10.
(P) Uno, cero.
(J) Al llegar al 7 empezábamos otra vez con el 1.
(P) Pero esto sería 0 unidades y 1 septena. En base 10, sería 0 unidades y 1 decena; en base 7 será 0 unidades y 1 septena.
(J) Sí. Yo es que siempre he puesto 1 y luego he empezado por el 2.
(P) Eso es. El siguiente sería el 11. Vamos rellenando unidades. 12, 13 que no es el trece, sino el uno tres.
(J) No me acuerdo yo de eso. Sí. Luego empezaría por el 3, 31, 32, ...
(P) **Vamos a dibujar la cadena aquí. Bajar 2, derecha 1. (Fig. A5.2-27)**

1	2	3	4	5	6	10
11	12	13	14	15	16	20
21	22	23	24	25	26	30
31	32	33	34	35	36	30
41	42	43	44	45	46	50
61	62	63	64	65	66	70
71	72	73	74	75	76	80
81	82	83	84	85	86	90
.	.	.	.	.	.	.

Fig. A5.2-27(G1-1ª sesión)

(J) Espera un momento. ¿Estamos trabajando en base 7 o en la tabla de 7 columnas?
(P) Ahora ya **con las dos cosas**. Estamos en una tabla de 7 columnas pero cada número está escrito en base 7. Entonces la L famosa pasa del 3 al 24, que no sería el veinticuatro, sino el "dos, cuatro", que en base 7 sería 4 + 2x7 que es 18 (en base 10).
(El profesor escribe: $3_{(7} \rightarrow 24_{(7} = 4 + 2 \times 7 = 18$)
Además podemos poner que

 = "bajar 2, derecha 1" = (2, 1) = $[+21_{(7}]$
(J) Ah, ya lo entiendo.

5.4.13 Consideraciones generales sobre los resultados de la tercera sesión

En esta sesión de trabajo los alumnos han tenido la oportunidad de contrastar el paralelismo existente entre ambos conjuntos de cadenas y de operadores aditivos asociados a ellas, encontrando variedad de representaciones simbólicas, distintas de las cadenas, para representar los operadores aditivos asociados a ellas. Destacamos "el par ordenado" como la representación más utilizada, tanto en G70 como en G3 y G1. Estas representaciones simbólicas son manejadas correctamente en términos generales para aplicarlas a "sumas" de operadores, si bien se advierte más facilidad cuando los dos operadores son positivos.

Los estudiantes encuentran con mayor facilidad el elemento neutro de la "suma" para las representaciones referidas anteriormente que el elemento simétrico.

No se advierten dificultades significativas para interpretar las cadenas y sus operadores asociados cuando la tabla-100 se dispone en 7 columnas, si bien realizan con mayor acierto la tarea de encontrar el operador asociado a una cadena colocada en la tabla-100 de 7 columnas que la de dibujar una cadena en dicha tabla que corresponda a un operador aditivo concreto.

Menos de una cuarta parte de los estudiantes relacionan el sistema de numeración en base 7 como el sistema adecuado para mantener la correspondencia entre la forma de la cadena y la expresión numérica del operador asociado. El alto índice de alumnos que no responden a la cuestión hace sospechar que ésta no se redactó correctamente. No obstante, existe un 16.3% de estudiantes que justifican correctamente su respuesta afirmativa referente al sistema de numeración en base 7.

5.4.14 Balance entre los objetivos planteados y logros alcanzados

Resumimos en la tabla 3 las anteriores consideraciones en relación con los objetivos propuestos para esta sesión:

Objetivos	Consideraciones
1. Encontrar formas de expresión simbólica para las cadenas en la Tabla-100 y sus operadores aditivos asociados.	Se ha cumplido este objetivo satisfactoriamente ya que los estudiantes han encontrado variedad de formas de representación simbólica distintas de las cadenas.
2. Realizar ejemplos de suma de operadores aditivos utilizando las expresiones simbólicas anteriores.	La mitad de los componentes de G70 realizan correctamente la tarea, y tanto G3 como G1 lo hacen también correctamente.
3. Encontrar la expresión simbólica correspondiente al elemento neutro para $\oplus$ y al elemento simétrico de uno dado.	Los estudiantes identifican con facilidad el elemento neutro para la suma de acuerdo con la notación simbólica elegida, y en menor grado el elemento simétrico.
4. Determinar la forma que debe tener una cadena para que represente a un operador aditivo en una tabala-100 de k columnas.	Los componentes de G3 y G1 responden adecuadamente, así como la mayoría del grupo G70.
5. Estudiar el cambio de significado aritmético que experimenta una cadena cuando la situamos en una tabla-100 de k columnas.	Los alumnos responden satisfactoriamente casi en su totalidad.
6. Examinar el papel que juega el sistema de numeración en base k para encontrar la expresión numérica de los operadores asociados a las cadenas situadas en una tabla-100 de k columnas.	Los estudiantes han encontrado bastantes dificultades en relacionar el sistema de numeración en base 7 para conservar la correspondencia entre la forma de la cadena y la expresión numérica del operador asociado, si bien algunos estudiantes han llegado a escribir los números de la tabla en base 7 junto con la cadena.

Tabla 5.40

5.5 Consideraciones globales sobre el estudio empírico con "las cadenas"

Después de que surgieran en el bloque de tareas que llamamos de contexto las "cadenas" como representaciones geométricas de operadores aditivos, pretendíamos en este segundo foco de investigación profundizar en este tipo de representaciones desde tres perspectivas:

1. Explorar aspectos ***algebraicos*** del conjunto de las cadenas y de sus operadores asociados, identificando elementos como el neutro y simétrico, y estudiando las dificultades que se pueden presentar en los bordes de la tabla.

2. Estudiar el efecto que producen algunas ***transformaciones*** sencillas sobre las cadenas y sus operadores asociados, identificando aquellas cadenas cuyos operadores asociados permanecen invariantes frente a alguna de estas transformaciones.

3. Buscar otras representaciones de tipo simbólico para las cadenas y establecer paralelismos con éstas, así como estudiar el efecto que produce el cambio del número de columnas en la Tabla-100 sobre las cadenas y sus operadores correspondientes.

Cada uno de los puntos anteriores se han tratado en una sesión de trabajo con los grupos G70, G3 y G1. Un análisis global de los resultados lleva a la conclusión de que, en términos generales, los estudiantes han respondido de forma aceptable ante las tareas propuestas, apreciándose en las sesiones con G3 y G1 situaciones problemáticas que no se detectan en G70.

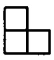
Realizamos en la tabla 5.41 un balance de los logros generales alcanzados en relación con los objetivos plateados.

Objetivos	Consideraciones
1. Proporcionar a los estudiantes una nueva representación de tipo geométrico para el operador aditivo en la Tabla-100.	Creemos que este objetivo se ha conseguido plenamente ya que los estudiantes han manejado diversas cadenas paralelamente a sus operadores asociados.
2. Estudiar la estructura algebraica del conjunto de los operadores aditivos con la ley de composición utilizando las cadenas.	Debido a los problemas que se presentan en los bordes de la tabla, el conjunto de operadores aditivos como clases de cadenas equivalentes no tiene estructura de grupo con la operación de "sumar", no obstante los estudiantes han explorado la existencia de un elemento neutro y el elemento y simétrico para dicha "suma".
3. Estudiar el efecto sobre los operadores aditivos asociados a las cadenas cuando éstas se someten a isometrías planas sencillas.	Al tratar de observar el efecto producido por las isometrías sobre las unidades y las decenas de los operadores se ha revelado como detalle importante el que las cadenas estén orientadas mediante flechas. Su ausencia ha conducido a errores en las respuestas.
4. Encontrar otras representaciones de tipo simbólico para los operadores aditivos.	Los estudiantes han encontrado gran variedad de representaciones distintas de las cadenas para representar a los operadores aditivos. Ha predominado el uso de "pares ordenados".
5. Extender el estudio de las cadenas a la Tabla-100 de k columnas.	Se ha detectado mayor facilidad para encontrar el operador asociado a una cadena colocada en la tabla de 7 columnas que para dibujar una cadena que represente a un operador determinado en dicha tabla. En cambio no resultó fácil relacionar el sistema de numeración en base 7 con este tipo de tareas.

Tabla 5.41

5.6 Situaciones y cuestiones significativas surgidas en G3 y G1

En las sesiones con G3 y G1 se han presentado situaciones problemáticas que han permitido observar aspectos relacionados con el papel que juegan las cadenas como representaciones geométricas de los operadores aditivos. Destacamos en este apartado, a modo de resumen, los más significativos:

- Diferenciación del tipo de representación efectuada para los números de la tabla (la simbolización numérica usual) y para el operador aditivo (las cadenas como representación geométrica), detectando los alumnos de G3 el papel de "conjunto origen" que juegan los números de la Tabla-100. Esta característica también genera conflicto en G1 al confundir Julia en algún momento el operador (que en este caso era  y representa al operador 11) con el estado final (que era el número 12).

- La situación confusa que origina en G3 el uso de la palabra "simétrico", ya que surgen desde dos perspectivas, la algebraica, como operador opuesto de uno dado, y la geométrica, como figura imagen de una cadena mediante una reflexión.

- El problema que plantean las cadenas en los bordes laterales de la tabla resuelta en G1 adoptando el convenio de que "*cuando una cadena sobrepasa un borde lateral de la tabla, la cadena reaparece por el lado opuesto en la fila siguiente*" (si es positivo, y en la anterior si es negativo).

- La comprobación en G3 de la propiedad asociativa de la "suma de operadores", ilustrada mediante composición de cadenas, asunto que no se aborda en G70.

- En G3 y G1 queda patente la importancia de colocar flechas en las cadenas para realizar el estudio del efecto de isometrías planas sobre los operadores asociados a dichas cadenas. La mera consideración del contorno de la cadena y la ausencia de las flechas correspondientes induce a los estudiantes a identificar el G_{180} como isometría que deja invariante al operador asociado a la cadena origen.

- El uso del papel vegetal y de calco por parte de G3 y G1 para realizar las transformaciones pertinentes.

- La mayor dificultad que presentan la realización de reflexiones de eje oblicuo R_p y R_q frente a las de eje vertical R_v y horizontal R_h.

- Se constata en G3 y G1 que la tarea 2.7 (relacionada con la influencia de la elección de la cadena origen para obtener el operador imagen correspondiente mediante una reflexión) no es comprendida por los alumnos, y se necesita más trabajo previo para identificar cadenas equivalentes de un mismo operador aditivo.

- De la misma manera se aprecia que la tarea 3.9 (en la que se pide encontrar un sistema de numeración que permita escribir de la misma forma el operador asociado a una cadena independientemente del número de columnas que tenga la tabla-100) no se comprende bien por los alumnos y se precisa mayor trabajo previo con expresiones de números en distintos sistemas de numeración.

5.7 Reflexiones finales sobre el estudio empírico. Necesidad de un estudio teórico matemático

El trabajo empírico realizado fue de tipo exploratorio y pretendía obtener información sobre las posibilidades de la Tabla-100 como medio de representación de relaciones aritméticas. Tanto el proceso de investigación como los resultados obtenidos de este estudio empírico han influido en el trabajo global de esta tesis desde dos puntos de vista:

a. Desde una perspectiva didáctica, los resultados que presentamos en este capítulo permiten identificar situaciones problemáticas en torno a la Tabla-100 y las posibilidades de ésta como medio para obtener representaciones geométricas de los operadores aditivos, como son las cadenas.

b. Desde una perspectiva teórico-matemática, el mismo proceso de experimentación efectuado con los tres grupos de estudiantes y los aspectos destacados en los apartados anteriores, han conducido paralelamente al investigador a realizar una revisión de los contenidos matemáticos que subyacen en la Tabla-100, así como efectuar una formalización de dicha tabla y abordar los problemas que se presentan en los límites de la misma. El equipo investigador decide continuar este trabajo de investigación mediante el desarrollo del estudio teórico y pospone un análisis más sistemático de la comprensión de los estudiantes para profesor sobre estos aspectos a la culminación del estudio formal.

Este estudio teórico lo completamos con la aplicación de las cadenas al estudio de los patrones rectilíneos que se visualizan cuando en la Tabla-100 se introduce la congruencia y se cambia el número de columnas de la tabla. Ambos, el estudio formal y su aplicación quedan detallados en el capítulo 6.

CAPÍTULO 6

ESTUDIO TEÓRICO-MATEMÁTICO DE LA TABLA-100 Y LAS CADENAS

En los capítulos 4 y 5 hemos ofrecido los resultados de las tareas realizadas por nuestros alumnos en torno a la Tabla-100, y hemos observado cómo dicha tabla se ha revelado como un medio útil para encontrar conexiones entre aritmética y geometría. También se han estudiado las ***cadenas*** en T_{100} como representaciones de carácter geométrico de los operadores aditivos, en donde entran en juego aspectos matemáticos relacionados con la estructura de la tabla y de las propias cadenas.

Las dificultades surgidas en el trabajo con los estudiantes, en relación con la propia naturaleza de la tabla y de las cadenas provocan la realización de un estudio teórico más detallado de los elementos implicados.

6.1 La Tabla-100

Llamamos Tabla-100 a una tabla organizada en filas y columnas con los números del 1 al 100, tal y como aparece en la figura 6.1, que constituye un sistema de representación estructurado del conjunto de los cien primeros números naturales[1]. Al elegir esta tabla como objeto de estudio, consideramos su estructu-

[1]En este documento denominamos conjunto de los cien primeros números naturales al conjunto ordenado de naturales comprendidos entre 1 y 100, sin que ello suponga rechazo de 0 como natural.

ra aditiva, y pretendemos caracterizar relaciones numéricas y geométricas así como conexiones entre unas y otras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura. 6.1: Tabla-100

Los números de cada fila (respectivamente, columna) están en progresión aritmética y se relacionan aditivamente mediante la suma o resta de unidades (respectivamente, decenas). Estas características aditivas permiten considerar operaciones sencillas sobre la tabla con un enfoque diferente al planteamiento algorítmico convencional. Así, la suma y resta de números naturales se pueden visualizar mediante desplazamientos sobre la tabla ya que desplazarse **k** posiciones a derecha/izquierda de un determinado número equivale a sumar/restar **k** unidades a ese número, y desplazarse hacia abajo/arriba equivale a sumar/restar **k** decenas al número de partida. Por ejemplo, si partiendo de 12, queremos efectuar sucesivamente las operaciones

"sumar 4, sumar 20, restar 2, sumar 23 y restar 9"

cuya expresión decimal sería +4 +20 −2 +23 −9, este proceso podemos visualizarlo mediante los desplazamientos:

"derecha 4 ; bajar 2 ; izquierda 2 ; bajar 2 y derecha 3 ;subir 1 y derecha 1", originando el recorrido correspondiente en la tabla (Figura 6.2).

De esta manera, en esta representación tabular de los cien primeros números naturales, cada número se puede contemplar como punto de un plano discreto a partir del cual se llevan a cabo determinados movimientos o transformaciones. Recíprocamente, ciertos puntos de un plano discreto se consideran vinculados a los cien primeros naturales.

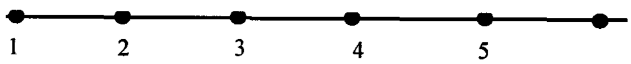
Nuestro propósito es caracterizar la tabla teniendo en cuenta esta doble estructura aritmética y geométrica, de modo que tenga sentido expresar relaciones aritméticas mediante conceptos geométricos y usar relaciones geométricas para obtener propiedades aritméticas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 6.2: Recorrido en la tabla:
12 +4 +20 -2 +23 -9 = 48

6.1.1 Caracterización de la Tabla-100

Una representación usual de los números naturales es la recta numérica, en la que los números se presentan como puntos igualmente espaciados de una semirrecta:



De acuerdo con esta representación podemos considerar diez segmentos de diez números, tomados a partir de 1, y situarlos paralelamente unos a otros, igualmente espaciados, a modo de cuadrícula o geoplano 10 x 10. Con esta organización gráfica se amplía la representación lineal a las dos dimensiones del plano y se aportan nuevos elementos geométricos para el estudio de los números.

La caracterización formal de la Tabla-100 tiene en cuenta:

a) El conjunto ordenado C de los cien primeros números naturales,

$C = \{1, 2, 3, 4, ..., 99, 100\}$

b) Un subconjunto discreto G del plano euclídeo: el geoplano 10 x 10 (Figura 6.3).

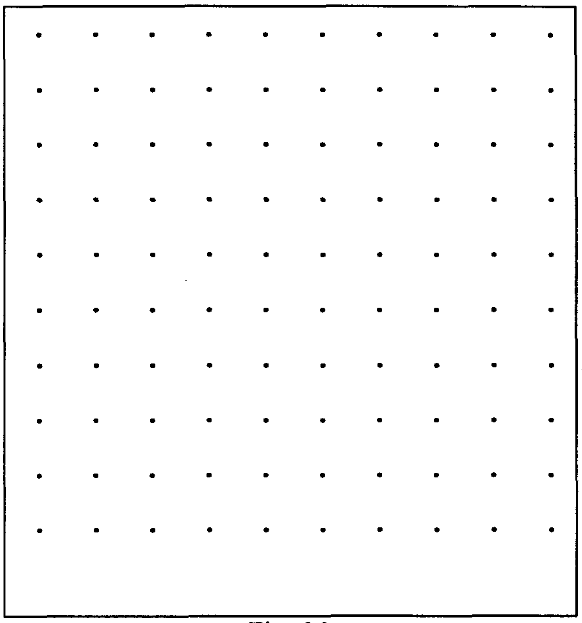


Fig. 6.3

c) La cuadrícula, o retícula cuadrada de 10x10 celdillas cuadradas (Figura 6.4).

Cada punto del geoplano G se identifica con un número del conjunto C manteniendo el orden natural según se marca en la recta numérica y por filas consecutivas, siendo cada uno de los números naturales etiqueta de un casillero o celdilla cuadrada. De esta forma la Tabla-100 se presenta como una cuadrícula con los números identificados a los puntos del geoplano G en los centros de las casillas.

Se establece así una primera caracterización de la Tabla-100, que simbolizamos $\mathbf{T_{100}}$, conjunto con las propiedades aritméticas de C y las geométricas de G y la cuadrícula; los elementos de T_{100} tienen la doble consideración de puntos y de números.

Este formato ayuda a visualizar las transformaciones en la tabla mediante recorridos formados por celdillas contiguas.

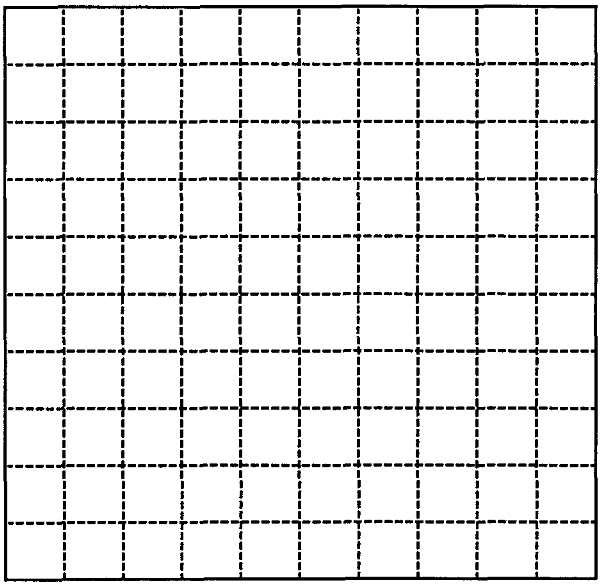


Figura 6.4: Cuadrícula

La figura 6.5 muestra T_{100} y los tres elementos básicos, a modo de estratos, que la constituyen.

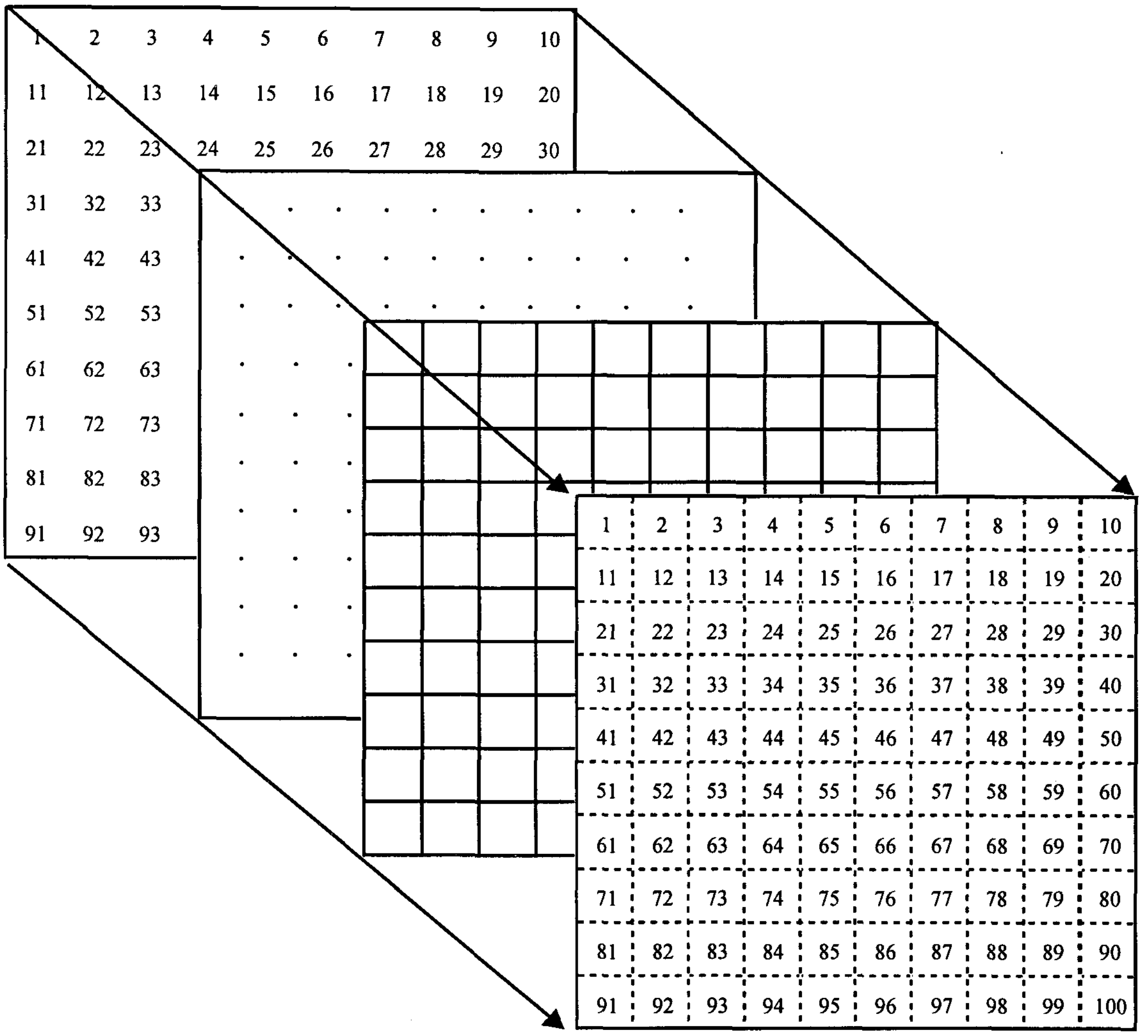


Fig. 6.5: Componentes de la Tabla-100

6.2 Operaciones aditivas en T_{100}

La doble condición de cada elemento de T_{100} como punto y como número permite considerar las operaciones y relaciones entre estos elementos al menos con dos interpretaciones diferentes: aritmética y geométrica. Pasamos a estudiar estos significados para las operaciones aditivas en la tabla T_{100}.

Una operación aditiva (suma o resta) en T_{100} se puede interpretar como algoritmo aritmético o como transformación geométrica. Por una parte consideramos la suma/ resta de dos números naturales con las reglas aritméticas usuales y, por otra, los desplazamientos a derecha/ izquierda con los que se identifican la suma/ resta de unidades y hacia abajo/ arriba para la suma/ resta de decenas. Aunque también es posible establecer desplazamientos oblicuos, éstos los consideramos resultantes de las componentes horizontales y verticales, correspondientes a las respectivas unidades y decenas.

Los desplazamientos sobre la tabla destacan el significado usual de la suma y la resta como operador (Vergnaud 1983; Fuson 1992) ya que muestran un estado o celdilla inicial, que corresponde al primer sumando o minuendo, un estado o celdilla final, que corresponde al resultado o estado final, y una transformación o recorrido por las casillas, que corresponde al segundo sumando o al sustraendo. El desplazamiento, con sus componentes vertical y horizontal así como su dirección, constituyen representaciones gráficas del operador aditivo correspondiente.

6.2.1 Cadenas fijas

Consideramos la cuadrícula como representación de T_{100} y la interpretación geométrica asignada a la suma/resta como desplazamiento dentro de la tabla. Si se marca la celdilla que corresponde al número inicial (origen), a partir de ella, es posible desplazarse hasta la celdilla que corresponde al último número (final) siguiendo varios recorridos (Figura 6.2). Cada recorrido expresa una secuencia de sumas o restas que llevan del número inicial al resultado. Las celdillas verticales y horizontales de cada tramo del recorrido indican, respectivamente, las decenas y unidades de las sucesivas sumas o restas. Los recorridos vienen dados por concatenaciones de celdillas cuadradas, cada dos con un lado común, organizado en sucesivos tramos horizontales y verticales, mediante los cuales se llega desde la casilla origen hasta la casilla final. Estos recorridos representan por tanto secuencias de sumas/restas que tienen por primer sumando/minuendo la celdilla inicial y por resultado la celdilla final. El desplazamiento muestra la secuencia de operaciones aditivas que llevan desde el primer término hasta el resultado.

Cada recorrido sobre T_{100} se describe como un encadenamiento de celdillas con un lado común, a modo de poliminó, con origen y final. Este objeto orientado representa geométricamente una secuencia de operaciones aditivas (sumas o restas) en T_{100}. En lo sucesivo lo denominamos ***cadena fija***. La figura 6.6 muestra dos convenios para indicar el orden de recorrido en las cadenas fijas: usando flechas (cadenas B y C) o bien destacando el origen con un círculo (cadena A). En algunos casos es conveniente emplear estos dos convenios simultáneamente, especialmente en aquellas cadenas cuyo recorrido no queda claro, como las que se "cruzan" consigo mismo, como es el caso de cadena D de la figura 6.6. En adelante, utilizaremos exclusivamente el círculo para marcar la casilla inicial, cuando no se preste a confusión.

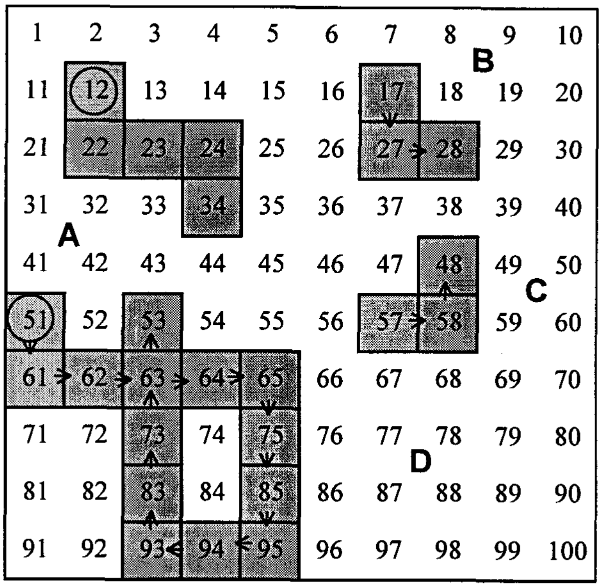


Figura 6.6: Cadenas fijas en T_{100}

6.2.2 Expresiones aritméticas de los recorridos

El recorrido que se ha presentado en la figura 6.2, se expresa mediante una cadena fija en la figura 6.7. El estado inicial, o dato de partida, establece el origen de la cadena y se indica con un círculo, lo que determina, en este caso, el sentido del recorrido. Esta cadena concreta se interpreta aritméticamente como la aplicación sucesiva, a partir de la casilla del número 12, de operaciones aditivas tales como

$$(+4), (+20), (-2), (+23), (-9)$$

Si nos centramos en los tramos horizontales y verticales de la cadena, conservamos el orden de los desplazamientos, asignamos el signo (+) al avance y el (-) al retroceso y notamos los tramos verticales mediante ($^{\text{superíndice}}$) y los tramos horizontales mediante ($_{\text{subíndice}}$), la cadena anterior viene descrita por la n-upla:

$$(4_+, 2^+, 2_-, 2^+, 3_+, 1^-, 1_+)$$

Esta notación tiene en cuenta las componentes aditivas de las cadenas fijas y distingue entre decenas y unidades: las sumas se simbolizan con el signo (+) y las restas con el signo (-); las decenas y unidades se reconocen por el uso de superíndices y subíndices, respectivamente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 6.7: Cadena $\mathbf{4_+2^+2_-2^+3_+1^-1_+}$

Prescindiendo de los paréntesis y de las comas de separación, la expresión anterior queda de la siguiente forma:

$$4_+\ 2^+\ 2_-\ 2^+\ 3_+\ 1^-\ 1_+$$

a la cual llamamos ***expresión aritmética*** del recorrido. Esta expresión indica una operación aditiva formada por una secuencia de sumas y restas.

Si analizamos la expresión aritmética $2^+6_+1^-5_+$, la propia tabla impone un cambio de fila. Por ejemplo, si partimos de la celdilla 52, llegamos a 70 antes de terminar la última suma (5_+), por lo que reanudamos la cuenta en la fila siguiente y acabamos en la casilla 73. (En el apartado 6.4 abordamos de una manera general la cuestión de los límites de la tabla).

Fijada una casilla origen, disponemos de dos representaciones diferentes para los distintos recorridos que permiten llegar a una casilla final: una geométrica, la cadena fija, y otra, numérica, la expresión aritmética. Por el propio procedimiento de construcción parece factible la existencia de una biyección entre ambas representaciones (una vez fijada la casilla inicial). Es obvio que a cada cadena fija le corresponde una expresión aritmética. Para que el recíproco sea también cierto, hay que aceptar que una cadena fija que representa un recorrido continúa en la casilla del sucesor natural de un número en T_{100}. En lo sucesivo consideramos válidas las expresiones "*cadena fija asociada a una expresión aritmética*" y "*expresión aritmética de una cadena fija*". Por representar el mismo recorrido, se trata de licencias de estilo que están justificadas.

6.2.3 Expresión aritmética reducida

Las n-uplas asociadas a las cadenas fijas se reducen a un par ordenado; para ello es suficiente sumar algebraicamente, por una parte, las componentes de las unidades y, por otra, las componentes de las decenas. Este par indica el número de casillas verticales y horizontales que es necesario recorrer para ir desde la casilla inicial a la casilla final y prescribe (arbitrariamente) un orden: en primer lugar decenas (movimiento vertical) y a continuación unidades (movimiento horizontal). Así por ejemplo la cadena $4_+ \; 2^+ \; 2_- \; 2^+ \; 3_+ \; 1^- \; 1_+$ se reduce a $3^+ \; 6_+$. Llamaremos a estas representaciones "***expresión aritmética reducida** de un recorrido*".

En general, la expresión aritmética reducida de un recorrido sobre T_{100} adopta alguna de las siguientes expresiones:

$a^+ \; b_+$ que corresponde a la expresión "sumar 10a+b".

$a^- \; b_-$ que corresponde a la expresión "sumar 10(-a)-b"

$a^+ \; b_-$ que corresponde a la expresión "sumar 10a-b"

$a^- \; b_+$ que corresponde a la expresión "sumar 10(-a)+b"

Abreviadamente, escribimos la expresión aritmética reducida de un recorrido sobre T_{100} como: $\mathbf{a}^{\pm} \; \mathbf{b}_{\pm}$

Dadas dos cadenas fijas diferentes, si coinciden tanto su casilla origen como su casilla final, ambas tienen la misma expresión aritmética reducida. Por tanto, la correspondencia entre las cadenas fijas y las expresiones aritméticas reducidas no es biunívoca; este es el caso de las cadenas

$$2^{+}\,3_{+}\,1^{-} \quad \text{y} \quad 1^{+}\,1_{+}\,1^{+}\,2_{+}\,1^{-}$$

A ambas les corresponde el par $1^{+}\,3_{+}$.

Las expresiones aritméticas reducidas se corresponden con unas cadenas fijas especialmente sencillas, a las que llamamos ***cadenas fijas simples,*** ya que están formadas como máximo, por un sólo tramo vertical y un sólo tramo horizontal, y en este orden. El tramo vertical puede estar orientado hacia abajo (a^{+}) o hacia arriba (a^{-}), y el horizontal hacia la derecha (b_{+}) o la izquierda (b_{-}), obteniéndose de esta manera las cuatro formas posibles de las cadenas fijas simples: **(bajar, derecha), (bajar, izquierda), (subir, derecha) y (subir, izquierda).**

Eventualmente, estas cadenas simples pueden tener solamente un tramo, bien vertical u horizontal, cuando una de sus componentes sea nula. Dada la celdilla origen, por cada expresión aritmética reducida hay una única cadena fija simple.

En resumen, existen ciertos recorridos sobre T_{100} cuyas representaciones son especialmente sencillas: ***la expresión aritmética reducida*** y ***la cadena fija simple.***

Esto conduce a estudiar con detalle las relaciones entre los representantes aritmético y geométrico de los recorridos.

6.2.4 Expresión polinómica de una cadena fija

Dadas la casilla inicial y una cadena fija, llamamos expresión polinómica de esta cadena a la expresión en base diez del sumando al que ésta se reduce. Así, si en la casilla 12 situamos la cadena fija "bajar 3, derecha 1" cuya expresión aritmética es $3^{+}1_{+}$, el resultado será: 12 +30+1 = 43. La cadena fija se reduce al sumando 31, expresión en base diez de 3x10+1. Otra cadena fija, como $2^{+}2_{+}1^{+}1_{-}$ se expresa también mediante el sumando 31, por lo que tiene la misma expresión polinómica que la primera.

En general, para una cadena fija cualquiera cuya expresión aritmética reducida sea $a^{\pm}b_{\pm}$ (con a y b entre 0 y 9) definimos su expresión polinómica como alguna de las siguientes expresiones:

$$10a + b; \quad 10(-a)+(-b); \quad 10(-a)+b; \quad 10a+(-b);$$

que escribimos abreviadamente como $10 \times (\pm a) \pm b$

La expresión polinómica de una cadena fija cualquiera coincide con la de la cadena fija simple que tiene el mismo origen y el mismo final.

6.2.5 Operadores aditivos en T_{100}

Cada operador aditivo sobre T_{100} admite, a partir de ahora, las siguientes representaciones:

1ª) Notación usual como operador, número con signo en base diez, que se suma algebraicamente a la casilla inicial para obtener la casilla final. La escribimos entre corchetes [+ab] o [-ab].

2ª) Cadena fija que describe un recorrido desde la casilla inicial hasta la final. En ocasiones, esta cadena fija coincide con una cadena fija simple.

3ª) Expresión aritmética reducida de la cadena fija $a^{\pm}b_{\pm}$

4ª) Expresión polinómica de la cadena fija $10 \times (\pm a) +(\pm b)$.

Las representaciones 3ª y 4ª son obviamente equivalentes entre sí. La primera y la tercera no son equivalentes, ya que se pueden encontrar diferentes expresiones aritméticas reducidas del mismo operador aditivo, como es el caso de las expresiones $1^{+}1_{-}$ y 09_{+} correspondientes ambas al operador [+9].

La tabla 6.1 ejemplifica cuatro representaciones de operadores aditivos en T_{100}:

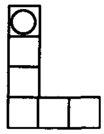
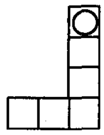
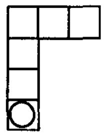
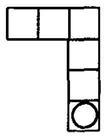
Valores de a y b	Expresión polinómica	Notación usual	Expresión aritmética	Cadena fija simple
a=3; b=2	10x3+2	+32	$3^{+}2_{+}$	
a=3; b=-2	10x3-2	+28	$3^{+}2_{-}$	
a=-3; b=2	10(-3)+2	-28	$3^{-}2_{+}$	
a=-3; b=-2	10(-3)-2	-32	$3^{-}2_{-}$	

Tabla 6.1

6.2.6 Equivalencia de cadenas fijas

Cualquier operación aditiva sobre T_{100} es resultado de una secuencia de operaciones que actúan sobre el estado inicial (primer sumando o minuendo) y tiene su expresión geométrica mediante la correspondiente cadena fija, cuyo inicio está en la casilla del estado inicial. En cualquier caso a la cadena fija le corresponde una única expresión aritmética reducida, y por tanto un único operador aditivo[2]. En cambio, para un operador dado existen diversas cadenas fijas que lo representan, no siendo biunívoca la correspondencia entre cadenas fijas y operadores aditivos en T_{100}.

[2] Esta es la versión geométrica de la propiedad que dice que *cualquier secuencia de operaciones aditivas a partir de un número se puede simplificar mediante un único operador aditivo que actúa sobre dicho número.*

La figura 6.8 muestra dos cadenas fijas distintas A y A' correspondientes al operador [+22], dos cadenas fijas B y B' correspondientes al operador [+11], y otras dos cadenas fijas C y C' correspondientes al operador [-9].

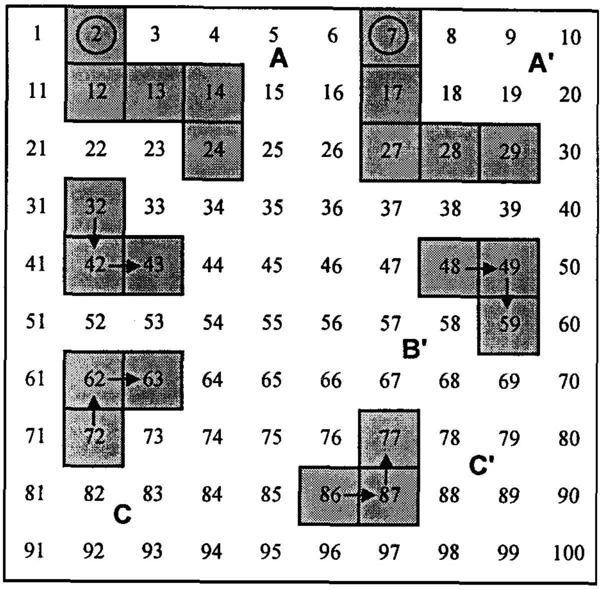


Figura 8: Pares de cadenas equivalentes.

Nos proponemos determinar un criterio de equivalencia para las cadenas que tienen idéntico significado aritmético. Para ello tenemos en cuenta las siguientes observaciones:

1. Dos cadenas fijas con el mismo origen y final son aritméticamente equivalentes, y tienen la misma expresión aritmética reducida, siendo la ***cadena simple*** su expresión geométrica más sencilla.

2. Dos cadena fijas simples, con la misma expresión aritmética reducida, aunque tengan distinto origen, corresponden al mismo operador aditivo. Este hecho supone la invariancia geométrica de dichas cadenas por traslaciones en T_{100}.

3. Cuando cadenas fijas simples distintas representan el mismo operador aditivo en T_{100}, hay una que tiene menor número de casillas que las otras[3]. Esta cadena recibe el nombre de ***cadena fija simple mínima***.

Introducimos una relación $\Re$ en el conjunto **C** de las cadenas fijas sobre T_{100} como sigue:

> *"Dos cadenas fijas cualesquiera son equivalentes si y solo si corresponden al mismo operador aditivo (la diferencia entre la casilla final e inicial en cada una de las cadenas es la misma)".*

[3] Más adelante veremos que en las tablas con número impar de columnas existen dos cadenas simples distintas con el mismo número de casillas que representan al mismo operador.

Es evidente que la relación $\mathfrak{R}$ es de equivalencia.

6.2.7 Cadenas libres

A cada una de las clases de equivalencia así obtenida la denominamos ***cadena libre***; todas las cadenas fijas de una misma clase representan el mismo operador aditivo, y recíprocamente. Las cadenas libres se identifican con el operador aditivo que corresponde a todas las cadenas fijas de dicha clase.

Esta identificación permite definir el ***conjunto de los operadores aditivos o cadenas libres*** sobre T_{100} como el conjunto cociente $\Omega = C / \mathfrak{R}$.

6.2.8 Representantes canónicos de las cadenas libres

Los representantes canónicos de las cadenas libres son ***las cadenas fijas simples mínimas.*** Se caracterizan por tener como máximo un tramo vertical y otro horizontal, destacando la casilla inicial con un círculo.

La figura 6.9 muestra representantes canónicos de algunas cadenas libres, algunos de los cuales poseen un solo tramo, vertical u horizontal.

Aunque la elección de representante canónico realizada responde a un criterio de economía de espacio, se ha tenido también en cuenta la repercusión de dicho representante en el estudio de las cadenas libres por medio de algunas transformaciones geométricas. Justificaremos con detalle esta elección en el apartado 6.6.5.

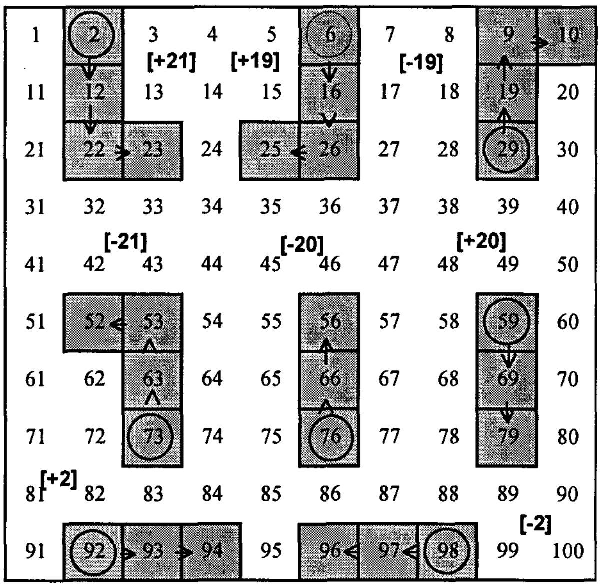


Figura 6.9: Cadenas representantes canónicos correspondientes a los operadores [+21], [-21], [+19], [-19], [+20], [-20], [+2] y [-2]

6.3. Representaciones de los operadores aditivos

Formalmente un operador aditivo sobre el conjunto Z de los números enteros es una aplicación: siendo k un elemento fijo de Z

$$f_k: Z \rightarrow Z$$

$$x \rightarrow x + k$$

Un operador aditivo es, pues, una transformación sobre Z definida mediante una operación aditiva. Los términos **x** y $\mathbf{f_k(x)}$ se llaman, respectivamente, estados inicial y final. La transformación se caracteriza biunívocamente por el sumando fijo **k**; por ello también es usual llamar *operador* al sumando fijo.

Al trabajar sobre T_{100} el sumando **k** se toma menor que 100.

Son usuales varias notaciones para representar los operadores aditivos en el conjunto Z y, por restricción, en T_{100}. Revisamos las más conocidas.

6.3.1. Expresión decimal

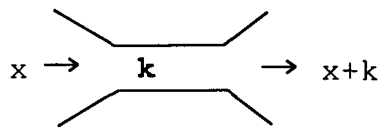
La expresión decimal de la forma **±k** es la expresión más sencilla para un operador aditivo, como por ejemplo +21 ó -15. Identifica el operador con el sumando constante que lo caracteriza. Presenta como inconveniente cierta imprecisión simbólica, ya que utiliza la misma notación para el operador que para los términos sobre los que actúa. En este caso, para distinguir los estados y el operador, a este último se le simboliza entre corchetes: [±k]

6.3.2 Expresión funcional

La notación usual para la función afín que establece un operador sobre Z es: $f_k\,(x) = x + k$

6.3.3 Máquina de Dienes

Se trata de una esquematización de la expresión funcional:



Concebida con fines didácticos, reconocemos en ella los mismos elementos que en la expresión funcional.

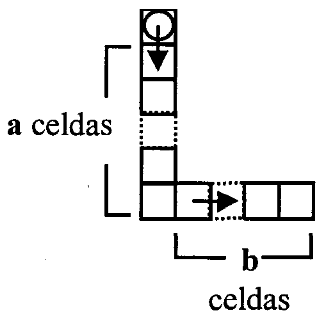
6.3.4 Cadena libre

Es una representación geométrica para la tabla T_{100} que hemos caracterizado con anterioridad. Gráficamente cada cadena libre está representada por una cadena fija o poliminó orientado en el que se conectan alternativamente tramos verticales con tramos horizontales de celdillas. El representante canónico es la ***cadena simple mínima*** que tiene, a lo sumo, un solo tramo vertical seguido de uno horizontal:

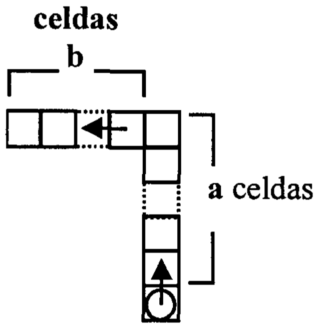
La primera celdilla u origen viene marcada por el círculo; el operador queda descompuesto en decenas (celdillas verticales, sin contar la inicial) y unidades (celdillas horizontales, sin contar la de la esquina), su dirección está señalada por las flechas; la última celdilla marca la posición del estado final.

En general, dado un operador aditivo en forma decimal [+ab], la cadena libre correspondiente es un conjunto de cadenas fijas equivalentes cuyo representante canónico (***cadena fija simple mínima***) se obtiene de la siguiente forma:

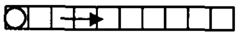
1) De la expresión decimal del operador [+ab] se pasa unívocamente a la cadena fija simple:



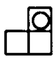
siendo **a** las decenas y **b** las unidades del operador aditivo. En el caso del operador aditivo negativo [-ab] las casillas de las decenas se orientan en sentido ascendente y las unidades se leen hacia la izquierda:



Así por ejemplo, al operador [+9] le corresponde la cadena simple



2) En la clase de equivalencia a la que pertenece dicha cadena simple, se elige la que tiene menor número de casillas. Para el caso de [+9] es



3) Dicho representante canónico lo expresamos abreviadamente utilizando su expresión aritmética reducida $C(a^s\ b_t)$, siendo $a,b \in \mathbb{N}$ y $s,t \in \{+, -\}$. En el ejemplo anterior la cadena queda expresada mediante $C(1^+\ 1_-)$ y corresponde a ***"sumar una decena y restar una unidad"***, o sea ***"sumar 9 unidades"***.

Existen pues cuatro tipos de representantes canónicos según el signo de las decenas y unidades, que expresamos abreviadamente por $C(a^+\ b_+)$, $C(a^+\ b_-)$, $C(a^-\ b_+)$ y $C(a^-\ b_-)$. Los valores de **a** y **b** tienen en esta notación únicamente significado geométrico, y son las componentes de un vector de **traslación** de la casilla inicial a la final.

La tabla 6.2 recoge un ejemplo de cada uno de los cuatro tipos de representantes canónicos que se pueden dar:

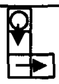
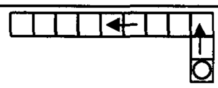
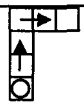
Operador en forma decimal	Expresión aritmética reducida	Cadena fija simple asociada al operador	Cadena fija simple mínima (representante canónico)	Expresión aritmética representante canónico
[+9]	$0\ 9_+$			$C(1^+\ 1_-)$
[+21]	$2^+\ 1_+$			$C(2^+\ 1_+)$
[-14]	$1^-\ 4_-$			$C(1^-\ 4_-)$
[-28]	$2^-\ 8_-$			$C(3^-\ 2_+)$

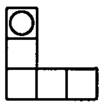
Tabla 6.2

El concepto de cadena libre es uno de los elementos claves en este estudio, y aunque es de carácter geométrico, se establece inicialmente asociado a la noción de operador aditivo.

A diferencia de la notación que hemos dado para las cadenas, la expresión aritmética reducida tiene un significado aritmético: $\overset{+}{a}\ b_+$ expresa *sumar a decenas y, a continuación, sumar b unidades*. La expresión aritmética establece un vínculo entre la notación decimal del operador y la representación mediante cadenas simples. Más adelante veremos la importancia de esta distinción cuando consideremos tablas que utilizan un número de columnas distinto de 10.

6.4 Límites de la Tabla-100

La representación geométrica de los operadores aditivos en T_{100} presenta como características interesantes la posibilidad de su estudio desde un punto de vista geométrico así como la distinción clara, en la representación, entre estado y operador. Sobre un dominio de números naturales (T_{100}) unas figuras geométricas (cadenas libres) tienen un significado aritmético (operador aditivo) ya que, situadas sobre la tabla, transforman cada elemento origen en el elemento final de la cadena. Esto es lo que ocurre con la cadena libre:



que representa al operador aditivo [+22]. Cuando la aplicamos sobre 3 le hace corresponder 25, cuando la aplicamos sobre 39 le hace corresponder 61.

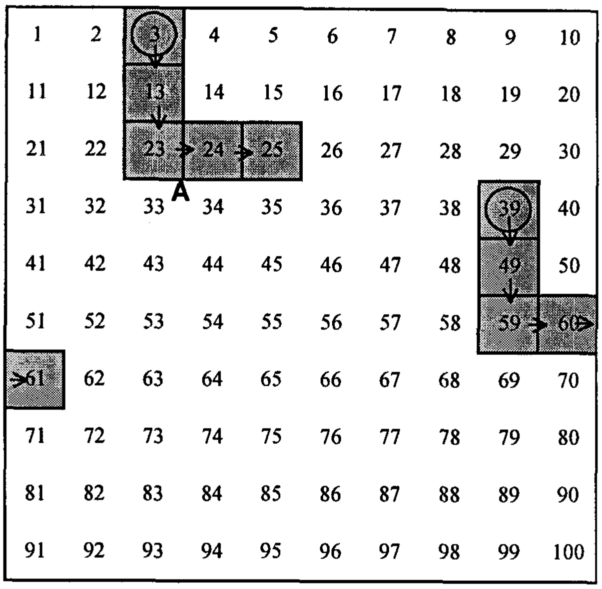


Figura 6.10: La cadena **A** hace corresponder al 39, el 61.

Vemos así (Figura 6.10) que la forma geométrica de la cadena queda fraccionada cuando ésta está próxima a los bordes de la tabla, como es el caso de la cadena A de la figura 10 al aplicarse a 39. Esto ocurre, en general, cuando al aplicar una cadena libre se produce un salto de fila. También se pueden plantear problemas al aplicar cadenas libres de manera que el estado final sea un número menor que 1 o mayor que 100, quedando elementos fuera de la tabla.

En la práctica utilizaremos cadenas libres que no presenten problemas de aplicación en el dominio T_{100} pero, a efectos de mejorar la formalización de esta representación geométrica de los operadores aditivos, abordamos los límites de la tabla mediante dos aproximaciones diferentes.

6.4.1 Extensión de T_{100} a la Tabla-Z

La Tabla-100 se puede extender indefinidamente por sus bordes superior e inferior, tal y como muestra la figura 6.11. A esta nueva tabla sin límites por la parte superior e inferior le llamamos Tabla-Z (T_Z). De este modo quedan resueltos los problemas derivados de los límites en cuanto a los bordes superior e inferior se refiere; faltan por considerar los márgenes derecho e izquierdo. En este caso consideramos que cuando una cadena rebasa estos márgenes, reaparece por el otro borde en la casilla que le corresponda, como quedó ejemplificado en la figura 9. Al solo efecto de visualizar la continuidad de la tabla en los bordes izquierdo y derecho, imaginamos la tabla enrollada cilíndricamente de manera que 11 esté a continuación de 10, 21 siga a 20, etc. Este procedimiento de considerar cilíndricamente una tabla ha sido utilizado por Witzum y otros (1994) para un estudio estadístico de secuencias equidistantes de letras en el libro del Génesis.

6.4.1.1 Estructura algebraica de T_Z

Además de la estructura de anillo que posee (Z, +, x), podemos dotar a T_Z de una estructura algebraica considerando que sus columnas constituyen clases residuales módulo 10. En el conjunto K = {$\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, ..., $\underline{10}$} de las columnas de T_Z podemos definir la suma (+) y el producto (x) de clases de la manera usual. Es evidente que al sumar o multiplicar dos elementos de estas columnas el resultado es otro elemento de alguna columna de T_Z , independientemente del representante elegido en cada columna.

.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10
-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Figura 6.11: TABLA-Z (T_Z)

De esta forma tenemos que (K, +, x) tiene estructura de Anillo abeliano. Al no haber elemento inverso para algunas clases (para las clases pares, por ejemplo), no podríamos dotarle de estructura de cuerpo.

Lo dicho anteriormente es cierto para cualquier número de columnas k de la tabla. En el caso de que k sea primo, podríamos proporcionar a (K, +, x) una estructura de cuerpo, ya que en este caso todo elemento de K (salvo la columna k) posee inverso para el producto.

6.4.2 La Tabla-100 como conjunto cociente

Si pretendemos resolver el problema del dominio de aplicación sin abandonar la Tabla-100, podemos considerar ésta como una representación del conjunto Z_{100}, conjunto cociente de Z respecto de la relación de congruencia módulo 100. Cada número de la tabla representa así a una clase residual de Z módulo 100, por ejemplo:

$\underline{24}$ = {... ,-176, -76, 24, 124, 224, ...}

Los elementos de la tabla son ahora las clases $\underline{1}$ a $\underline{100}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 6.12: Tabla de las clases residuales módulo 100.

El problema de la continuidad de las cadenas por los bordes derecho e izquierdo de la tabla tiene la misma consideración que hemos dado antes. De manera análoga ocurre con los bordes superior e inferior; la cadena que rebase el borde inferior continuará por el borde superior y recíprocamente, como indica la figura 6.13. La cadena libre **A** de la figura 6.9, operador +22, al aplicarse ahora a 86 da como resultado 8, ya que clase (86+22) = clase (8), es decir:

$$(86+22) \equiv 8 \bmod(100)$$

Esta situación es la que se visualiza en la figura 6.13.

La ventaja de trabajar con clases residuales módulo 100 es doble. Por un lado se justifica la limitación del dominio, tanto de los estados como de los operadores, a los valores comprendidos entre 1 y 100. Por otra parte, esta restricción mantiene la estructura de grupo aditivo para T_{100} y para los operadores aditivos sobre T_{100}.

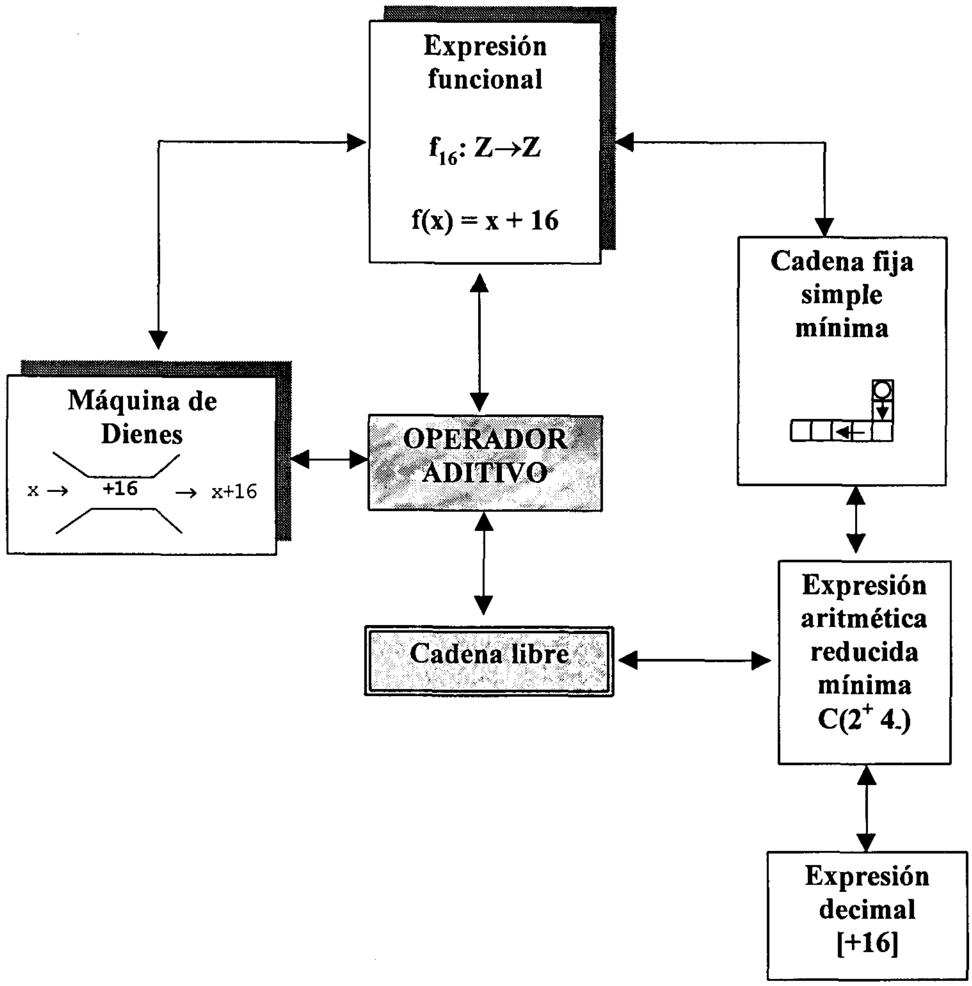
El principal inconveniente de esta consideración es de tipo didáctico, ya que trabajar con clases de equivalencia en vez de con números naturales presenta obvias dificultades de comprensión para personas sin una especial formación matemática.

En el esquema 6.1 se sitúan las representaciones del operador aditivo definidas anteriormente en relación con las representaciones existentes con anterioridad, como la expresión decimal, la expresión funcional y la máquina de Dienes.

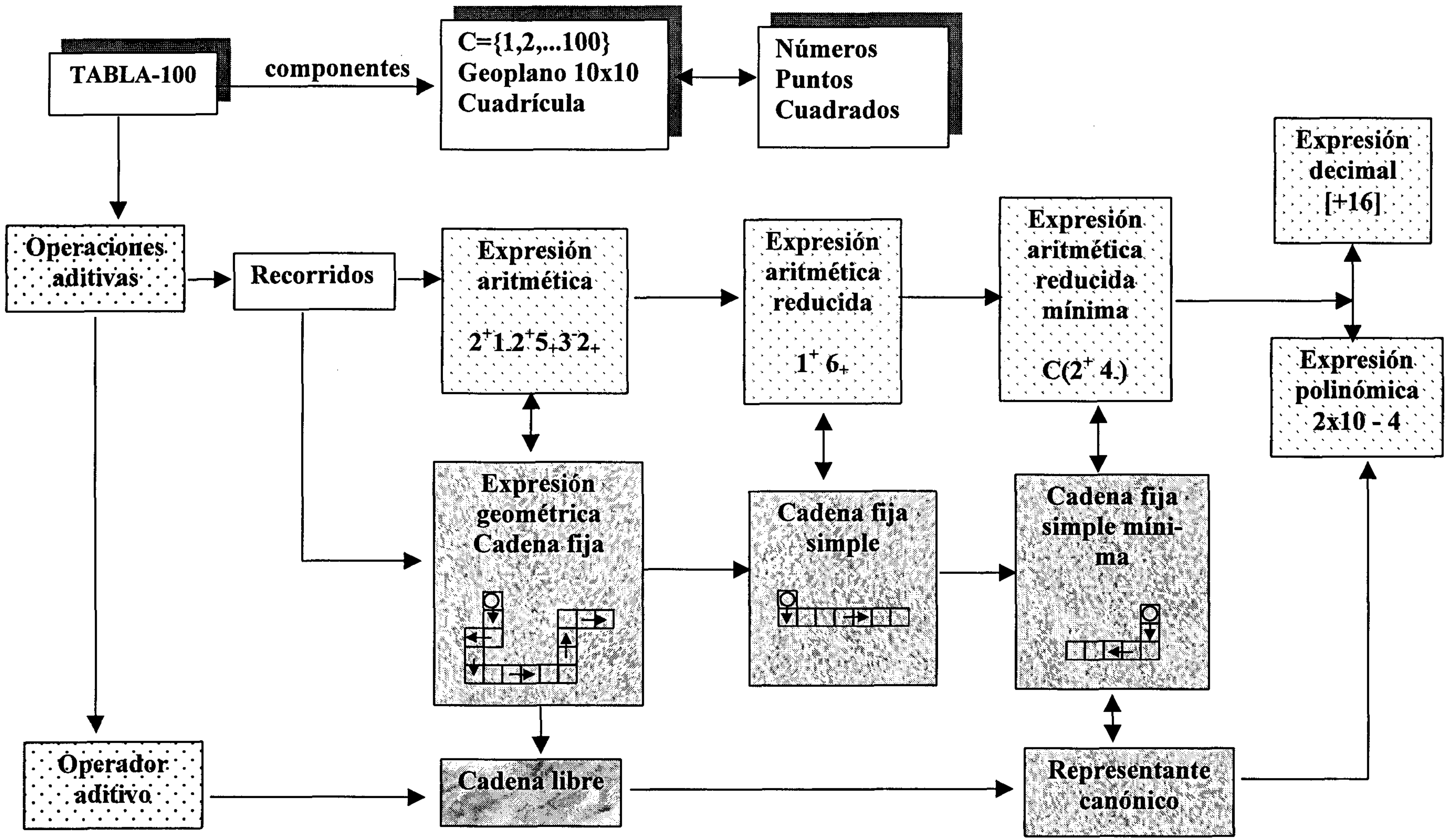
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 6.13: Límites superior e inferior en la Tabla-100.

Mediante el esquema 6.2 resumimos las principales ideas presentadas hasta ahora en torno a las representaciones de los operadores aditivos en T_{100} y sus relaciones, en el que se puede observar el paralelismo entre los dos ámbitos aritmético y visual.



Esquema 6.1: La cadena libre en relación con otras representaciones



Esquema 6.2: Expresiones aritméticas y geométricas del operador aditivo

6.5 Grupo abeliano de los operadores aditivos en T_{100}

Caracterizados los elementos aritméticos y geométricos de T_{100} nos proponemos estudiar la estructura del conjunto de los operadores aditivos en la tabla a través de su representación mediante cadenas libres con la ley de composición de operadores.

Como ya se ha indicado, son varias las formas de representar los operadores aditivos y, por ello, son varias las vías para estudiar su estructura.

Para cualquier consideración aritmética el conjunto de los operadores aditivos sobre T_{100} es cerrado respecto de la suma, tanto si consideramos su ampliación a T_Z como si lo tomamos como conjunto cociente, Z_{100}.

Si consideramos la Tabla-Z, la expresión decimal convencional de los operadores y las propiedades de la suma de números enteros, obtenemos el grupo (Z, +) como conjunto de los operadores aditivos en T_Z.

Si por el contrario consideramos el conjunto de las clases residuales módulo 100, cada operador como clase residual y la suma de clases residuales, obtenemos el grupo $(Z_{100}, +)$ como conjunto de los operadores aditivos en T_{100}.

Cuando consideramos la expresión funcional de los operadores, el conjunto:

$$\Omega = \{ f_k: Z \rightarrow Z \, / \, f_k(x) = x + k, \forall \, x \in Z, k \in Z \}$$

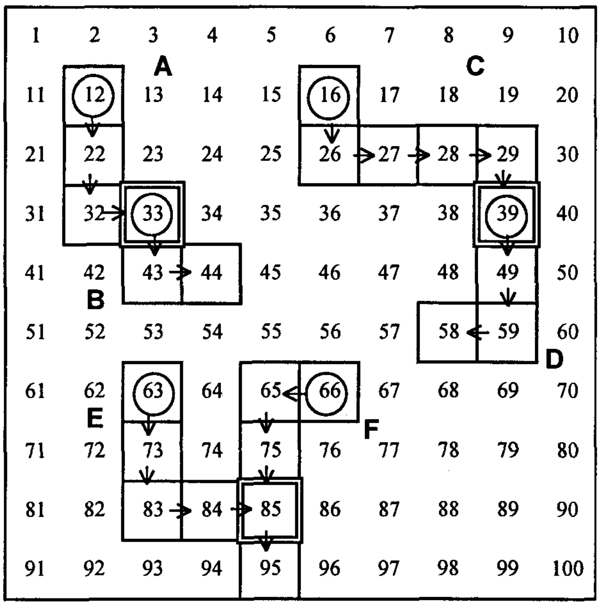
dotado de la ley de composición de funciones (∘), $(\Omega,\circ)$ tiene estructura de grupo.

Centramos ahora nuestra atención sobre las representaciones geométricas de los operadores. En este caso vamos a considerar el conjunto de operadores aditivos como conjunto de cadenas libres, $\Omega = \mathbf{C} / \mathfrak{R}$, y vamos a caracterizar su estructura por medio de la composición o suma de cadenas. Es decir, vamos a realizar un estudio del grupo de los operadores aditivos sobre T_{100} basándonos en la representación mediante cadenas libres.

6.5.1 Composición de cadenas fijas.

Dos cadenas fijas en T_{100}, A y B, se dice que son ***cadenas consecutivas*** o que ***se pueden componer***, cuando la casilla inicial de B coincide con la casilla final de A; en este caso ambas cadenas comparten una única casilla y su unión es otra cadena fija, que tiene por casilla inicial la inicial de A y por casilla final la final de B. Denotamos la composición de A y B como A*B.

La figura 6.14 muestra dos cadenas fijas consecutivas A y B; la casilla final de A es la misma que la casilla inicial de B (en este caso la celdilla 33). La celdilla común a ambas cadenas está enmarcada con doble línea; en este caso A y B se pueden componer y su unión es otra cadena. La casilla inicial de A*B es 12, la misma que la casilla inicial de A; la casilla final de A*B es 44, la misma que la final de B.



$$A*B=2^{+}1_{+}*1^{+}1_{+} = 2^{+}1_{+}\,1^{+}1_{+} = 3^{+}2_{+}$$

Figura 6.14: Composición de cadenas fijas.

La expresión aritmética de A*B se obtiene por yuxtaposición de las expresiones aritméticas de A y de B, y utilizamos el símbolo * para su composición:

$$(\overset{+}{2}\,1_{+}) * (\overset{+}{1}\,1_{+}) = \overset{+}{2}\,1_{+}\,\overset{+}{1}\,1_{+}$$

Igualmente ocurre con las cadenas fijas C y D; sin embargo las cadenas A y D no se pueden componer ya que no tienen casillas en común. Tampoco se pueden componer las cadenas E y F ya que, aunque tienen una casilla en común, no coinciden la inicial de F con la final de E.

La composición de cadenas fijas no es una ley de composición interna en el conjunto C ya que dadas dos cadenas fijas cualesquiera no tienen por qué ser consecutivas.

6.5.2 Suma de cadenas libres

Sean dos cadenas libres cualesquiera **C** y **C'**, cuyas expresiones aritméticas reducidas son $a^{\pm} b_{\pm}$ y $c^{\pm} d_{\pm}$ respectivamente. Para sumar las cadenas libres **C** y **C'** tomamos una cadena fija C_1 representante de **C** y otra cadena fija C_2 representante de **C'** de manera que C_1 y C_2 sean consecutivas. Se define la suma $\oplus$ entre las cadenas libres C y C' como:

$$\mathbf{C \oplus C'} = \text{clase}\,(C_1 * C_2)$$

En el caso de considerar la tabla Z_{100}, la expresión aritmética de **C⊕C'** es $(m)^{\pm}\,(n)_{\pm}$, siendo $0 \leq m \leq 9$, $0 \leq n \leq 9$, $[10(a+c) + (b+d)] \equiv (10m+n) \bmod(100)$. Esto hace que la suma de cadenas libres no dependa de las cadenas fijas elegidas.

La suma de cadenas libres es una ley de composición interna en el conjunto Ω de las cadenas libres cuando consideramos las tablas T_Z o Z_{100} (Figura 6.15). En cambio al considerar T_{100} existen cadenas libres cuya composición excede de los límites de la tabla.

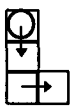
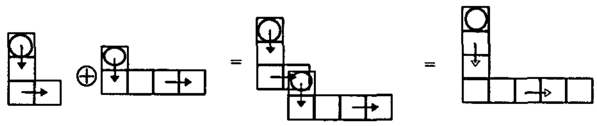
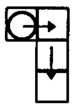
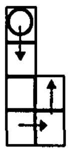
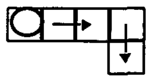
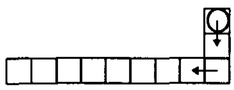
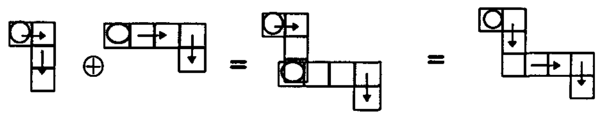
Operador	[+21]	[+13]	[+21]⊕[+13]=[+34]
	CADENAS LIBRES		
Cadena representante canónico			
Otros representantes	  . . .	  . . .	 . . .
Expresión aritmética del representante canónico	$C(2^+1_+)$	$C(1^+3_+)$	$C(2^+1_+) * C(1^+3_+) = C(2^+1_+1^+3_+) = C(3^+4_+)$
Expresiones aritméticas de otros representantes	1_+2^+ $3^+1_+1^-$ . . .	3_+1^+ 2^+7_- . . .	$1_+2^+ * 3_+1^+ = 1_+2^+3_+1^+ = 3^+4_+$ $3^+1_+1^- * 2^+7_- =3^+1_+1^-2^+7_-=4^+6_-=3^+4_+$ . . .

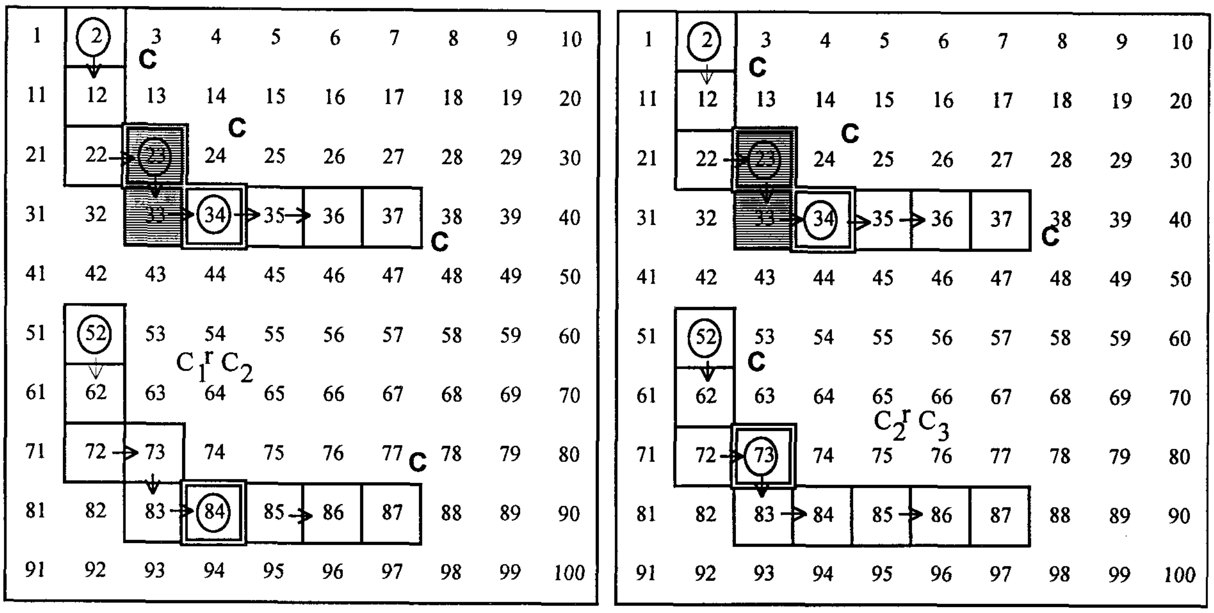
Figura 6.15: **Suma de cadenas libres** (operadores aditivos)

6.5.3 Propiedades de la suma de cadenas libres

La suma de cadenas libres tiene las siguientes propiedades:

1. Asociativa

Sean **C, C'** y **C''** tres cadenas libres cualesquiera, y sean C_1,C_2. y C_3 tres cadenas fijas representantes de **C, C'** y **C''** respectivamente, de manera que C_1 y C_2 así como C_2 y C_3 sean cadenas fijas consecutivas (La figura 6.16 muestra un ejemplo de cadenas fijas consecutivas, con la casilla común señalada con línea doble).



$(2^+ 1_+ * 1^+ 1_+) * 0^+ 3_+$
$3^+2_+ \quad * 0^+ 3_+$
3^+5_+

$2^+ 1_+ * (1^+ 1_+ * 0^+ 3_+)$
$2^+ 1_+ * \quad 1^+ 4_+$
3^+5_+

Figura 6.16: Propiedad Asociativa de la suma de cadenas libres.

Tenemos:

$(\mathbf{C} \oplus \mathbf{C'}) \oplus \mathbf{C''}$ = clase $(C_1 * C_2) \oplus$ clase (C_3) = clase $[(C_1 * C_2) * C_3]$ = clase $[C_1 * (C_2 * C_3)]$ = clase $(C_1) \oplus$ clase $(C_2 * C_3) = \mathbf{C} \oplus (\mathbf{C'} \oplus \mathbf{C''})$

Es decir:

$$(\mathbf{C} \oplus \mathbf{C'}) \oplus \mathbf{C''} = \mathbf{C} \oplus (\mathbf{C'} \oplus \mathbf{C''}),\ \forall\, \mathbf{C}, \mathbf{C'}, \mathbf{C''} \in \Omega$$

2. Conmutativa

Sean **C** y **C'** dos cadenas libres cualesquiera, y sean C_1 y C_2 dos cadenas fijas representantes de **C** y **C'** respectivamente, de manera que C_1 y C_2 sean cadenas fijas consecutivas (Figura 6.17). Tomemos también las cadenas fijas C'_1 y C'_2 representantes de **C** y **C'**, de manera que C'_2 y C'_1 sean consecutivas.

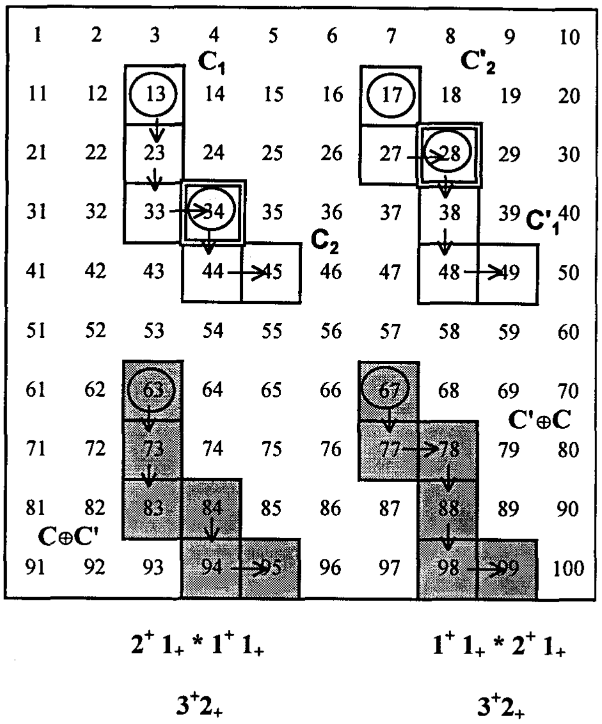


Figura 6.17: Propiedad conmutativa

Tenemos:

$\mathbf{C} \oplus \mathbf{C'}$ = clase $(C_1{*}C_2)$ = clase $(C_2{*}C_1)$ = clase $(C'_2{*}C'_1)$ = $\mathbf{C'} \oplus \mathbf{C}$

Es decir:

$$\mathbf{C} \oplus \mathbf{C'} = \mathbf{C'} \oplus \mathbf{C},\ \forall\, \mathbf{C}, \mathbf{C'} \in \Omega$$

3. Elemento Neutro

Llamamos ***cadena fija cerrada*** a aquella cuyas casillas inicial y final coinciden (Cadenas A, B y D de la figura 6.18). La cadena simple equivalente a una cadena cerrada es aquella que se reduce a una sola casilla (Cadena D de la figura 6.18). La expresión aritmética reducida de una cadena fija cerrada es **0**. Por tanto, todas las cadenas cerradas son equivalentes ya que tienen la misma expresión aritmética reducida. Llamamos ***cadena libre cerrada*** o ***cadena libre nula*** a la clase de equivalencia de todas las cadenas fijas cerradas:

N = clase (N), siendo N una cadena cerrada de **C**.

La composición de una cadena fija C_1 con una cadena cerrada N consecutiva con C_1 es:

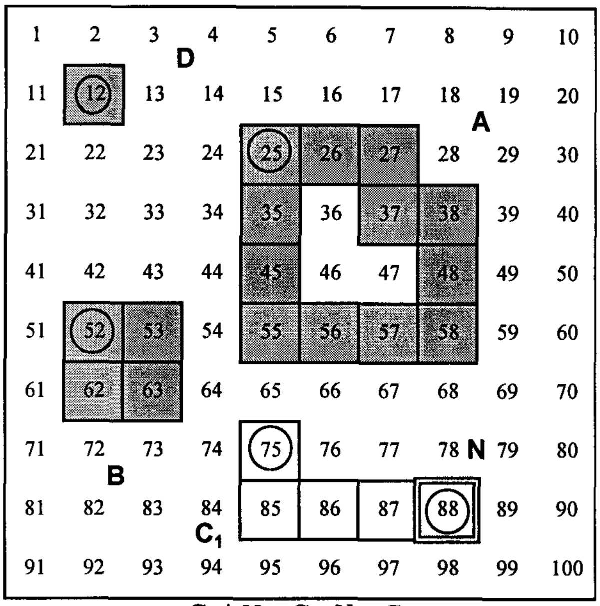
$C_1 * N = C_1$

ya que $C_1 * N$ y C_1 tienen las mismas casillas inicial y final, por definición de N.

En este caso la clase **N** es el elemento neutro para la suma de cadenas en Ω.

Tenemos:

$\mathbf{C} \oplus \mathbf{N}$ = clase (C_1) ⊕ clase (N) = clase ($C_1 * N$) = clase (C_1) = **C**



$C_1 * N = C_1 \cup N = C_1$
$1^{+}3_{+} \;*\; 0^{+}0_{+} \;=\; 1^{+}3_{+}$
Figura 6.18: Cadenas cerradas.

Es decir:

$$\mathbf{C} \oplus \mathbf{N} = \mathbf{N} \oplus \mathbf{C} = \mathbf{C},\ \forall\, \mathbf{C} \in \Omega.$$

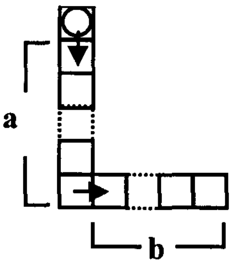
La notación de la cadena libre nula como operador es: [0]

4 Elemento Simétrico

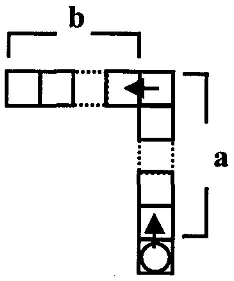
Dada una cadena fija cualquiera C llamamos ***cadena opuesta*** de C a aquella otra cadena fija C' que tiene por origen la casilla final de C y por término la casilla inicial de C. Geométricamente ambas cadenas C y C' son consecutivas y forman un circuito de celdillas, o lo que es lo mismo, la composición de ambas cadenas C * C' es una cadena fija cerrada (Figura 6.19).

Cada cadena fija C tiene varias cadenas fijas opuestas, pero si la expresión aritmética reducida de C es: $a^{\pm} b_{\pm}$ entonces la expresión aritmética reducida de sus opuestas C' es $a^{\mp} b_{\mp} = -(a^{\pm} b_{\pm})$

En este caso si C y C' son cadenas opuestas, entonces **C = clase (C)** y **C' = clase (C')** son ***cadenas libres simétricas*** para la suma de cadenas en Ω.



$C = C(a^+b_+)$



$C = C(a^-b_-)$

Tenemos:

C $\oplus$ **C'** =clase (C*C') = clase (N) = **N**

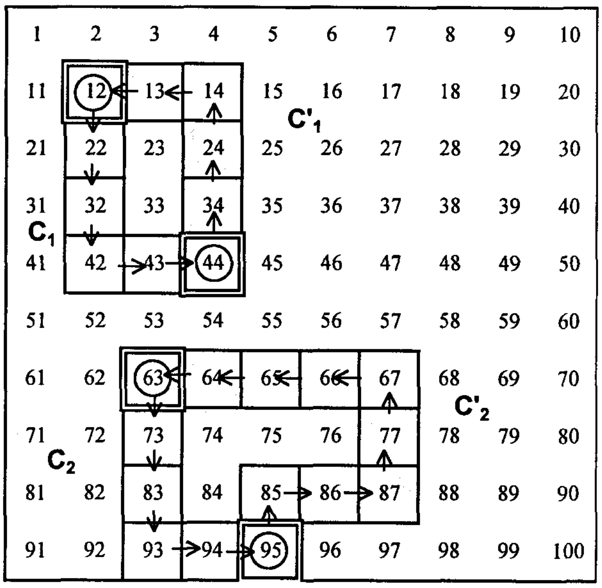
Es decir:

$\forall$ **C** $\in\Omega$, $\exists$ **C'** $\in\Omega$ tal que:

C $\oplus$ **C'** = **C'** $\oplus$ **C** = **N**

La expresión aritmética de

C * **C'** es: $a^{\pm} b_{\pm} * a^{\mp} b_{\mp} = 0^{\mp} 0_{\mp}$, que es la expresión de la cadena nula **N.**



$C_1 * C'_1 = 3^+2_+ * 3^-2_- = 0^+0_+ = N$
$C_2 * C'_2 = 3^+2_+ * 1^-2_+2^-4_- = 0^+0_+$ N
Figura 6.19: Cadenas opuestas

6.5.4 Grupo abeliano de las cadenas libres

Hemos considerado la representación geométrica de los operadores aditivos sobre T_{100} dada mediante las cadenas libres. Hemos caracterizado geométricamente la suma $\oplus$ de cadenas libres y hemos estudiado, también geométricamente las propiedades de esta ley $\oplus$, que es una ley de composición interna sobre la extensión de T_{100} a T_Z ó Z_{100}, ya que en T_{100} existen composiciones de cadenas libres que se salen de los límites de esta tabla.

De este modo hemos probado que el conjunto Ω de las cadenas libres con la operación suma (Ω, $\oplus$) tiene estructura de grupo abeliano sobre cualquiera de los conjuntos T_Z ó Z_{100}.

6.5.5 Isomorfismo entre representaciones de los operadores aditivos

Los operadores aditivos en el dominio de los números enteros tienen, como ya se ha indicado, diversas formas de representación. La manera convencional de expresar los operadores es mediante la notación usual de los números enteros. En este caso se utiliza la misma notación simbólica para el número como estado que para el número como operador. Para diferenciar un caso de otro, el número entero se encierra entre corchetes cuando representa un operador; igualmente utilizamos el signo + para sumar operadores. De esta manera distinguimos entre el número 21 y el operador [+21]. Esta notación es la convencional para referirnos al grupo aditivo (Z,+) de los operadores sobre Z.

Ya se ha indicado que, cuando se restringe el dominio a la tabla T_{100} , el grupo aditivo de los operadores sobre esta tabla es (Z_{100}, +).

En este trabajo hemos definido una nueva representación geométrica para los operadores aditivos sobre los números enteros. Para ello hemos extendido la tabla T_{100} a T_Z, y hemos establecido las cadenas libres y sus expresiones aritméticas reducidas, así como las leyes de composición para cadenas libres y expresiones aritméticas. Los conjuntos de cadenas libres y expresiones aritméticas reducidas de sus representantes canónicos, junto con las leyes de composición internas respectivas, los notamos mediante $(\Omega,\oplus)$ y $(\Omega_a,*)$ respectivamente. De este modo hemos mostrado que el conjunto de las cadenas libres, con su respectiva ley aditiva sobre T_Z , tiene estructura de grupo abeliano.

Cuando se restringe el dominio de las cadenas libres a T_{100}, a modo de restricción se mantiene la estructura de grupo abeliano para la composición de cadenas libres sobre esta tabla, para aquellas composiciones cuyo resultado no exceda de 100 ni sea inferior a 1.

Las tres formas de representación consideradas son equivalentes, lo cual se muestra por el isomorfismo que existe entre ellas (Figura 6.20).

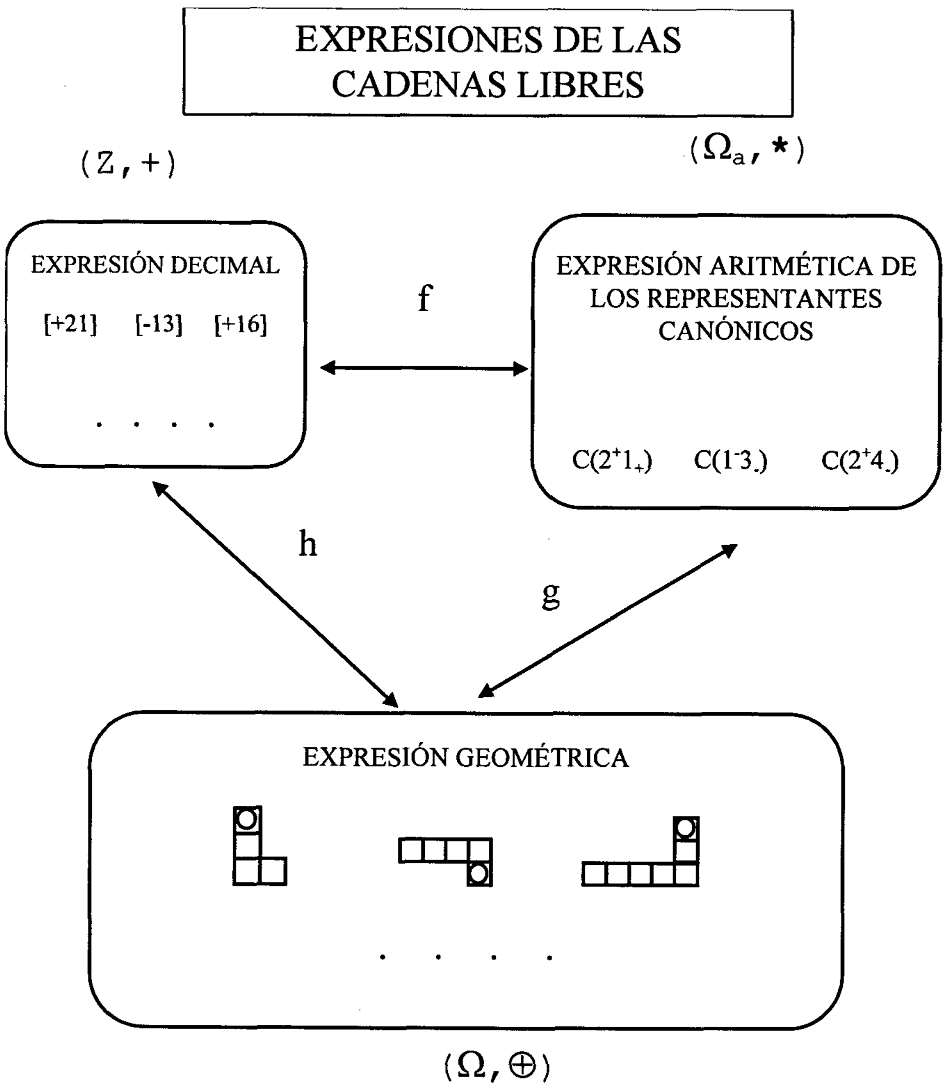


Figura 6.20: "Isomorfismos" entre distintas representaciones de operadores aditivos.

6.6 Transformaciones geométricas de las cadenas libres

Cualquier cadena fija simple sobre la T_{100} es representación geométrica de una cadena libre. Todas las cadenas fijas cuyas respectivas expresiones aritméticas reducidas coinciden representan a una misma cadena libre y, por tanto, a un mismo operador aditivo. Las cadenas libres son figuras geométricas que, como se ha establecido anteriormente, tienen interpretación aritmética; de este modo es posible conectar conceptos y propiedades geométricas y aritméticas.

Para profundizar en la consideración y tratamiento de las cadenas libres como figuras geométricas, vamos a estudiar las transformaciones producidas sobre las cadenas en T_{100} mediante algunas isometrías.

6.6.1 Isometrías en la Tabla-100

En la T_{100} pueden ser considerados tres estratos (figura 6.5), uno de carácter numérico (el conjunto C de los 100 primeros números naturales) y otros dos de tipo geométrico (el geoplano y la cuadrícula). Dado que los objetos que queremos transformar, las cadenas, son figuras geométricas sobre la cuadrícula, cuando hablamos de isometrías en T_{100} nos referimos a isometrías consideradas exclusivamente en la cuadrícula con la métrica usual del plano euclídeo (figura 6.21). Son pues, aplicaciones biyectivas de la cuadrícula en sí misma, que conservan las distancias.

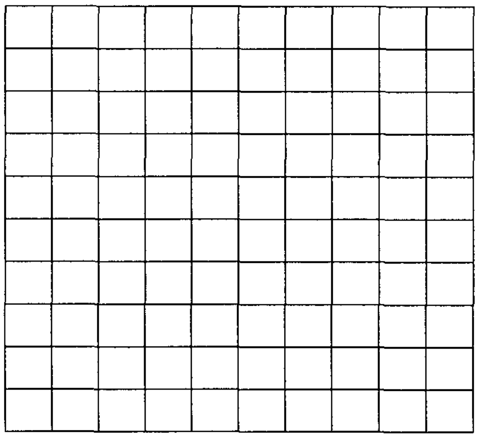


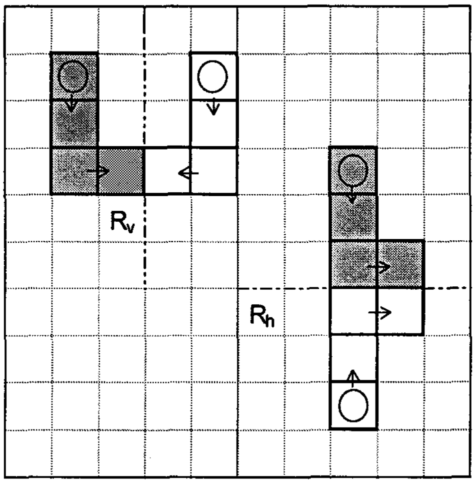
Fig. 6.21: Cuadrícula

Dadas las características geométricas de la cuadrícula, y las cadenas (formadas por celdillas cuadradas y ángulos múltiplos de 90°), en este estudio consideramos las siguientes isometrías en T_{100}:

1) Las ***reflexiones*** cuyos ejes son las líneas horizontales y verticales de la cuadrícula así como las líneas oblicuas de pendientes +45° y -45°. Estas reflexiones son:

R_v : **Reflexión de eje vertical**. El eje es una de las líneas verticales de la cuadrícula en T_{100}.

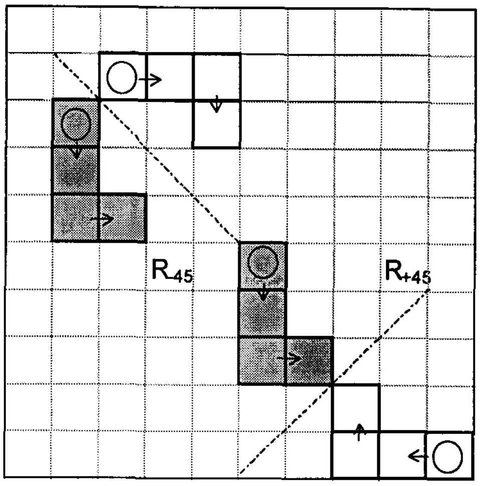
R_h : **Reflexión de eje horizontal**. El eje es una de las líneas horizontales de la cuadrícula en T_{100}.



Reflexiones R_v y R_h

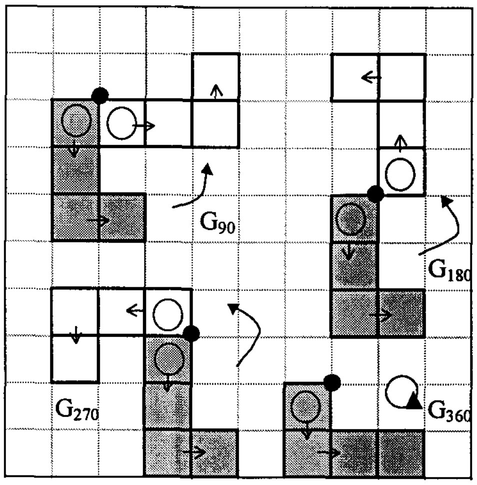
R_{-45}: **Reflexión de eje oblicuo**. El eje es paralelo a la diagonal principal de la tabla y pasa por vértices opuestos de alguna celdilla de la cuadrícula en T_{100}.

R_{+45}: **Reflexión de eje oblicuo**. El eje es paralelo a la diagonal secundaria de la tabla y pasa por vértices opuestos de alguna celdilla de la cuadrícula en T_{100}.



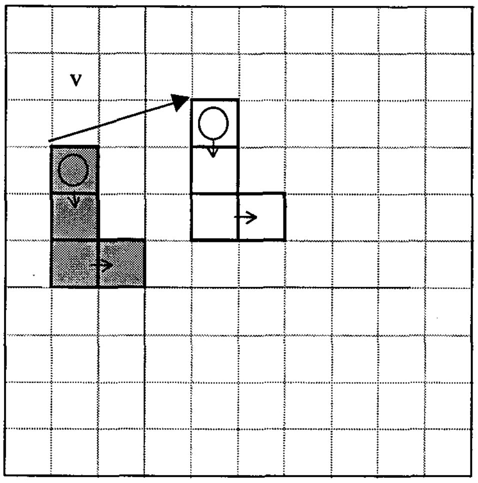
Reflexiones R_{-45} y R_{+45}

2) Los ***giros,*** de centro un vértice de una celdilla, y ángulos 90°, 180°, 270° y 360°, que notamos $\mathbf{G_{90}}$, $\mathbf{G_{180}}$, $\mathbf{G_{,270}}$ **y** $\mathbf{G_{360}}$ respectivamente. El dibujo ilustra los giros con centro el vértice superior derecho de la casilla origen:



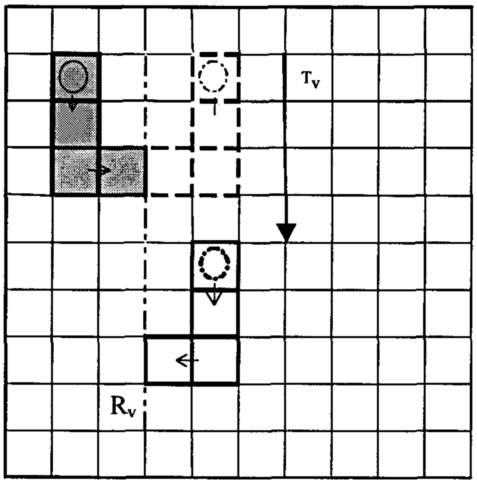
Giros G_{90}, G_{180}, G_{270}, G_{360}

3) Las ***traslaciones*** T_v cuyo vector de traslación tiene por origen y extremo puntos de la cuadrícula.



Traslación T_v

4) Los ***deslizamientos***, como composición de traslaciones y reflexiones anteriormente definidas, cuyo vector de traslación y eje de reflexión son paralelos.

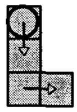


Deslizamiento

De las isometrías anteriores, estudiamos solamente las ***reflexiones*** y los ***giros***, ya que las traslaciones en T_{100} no afectan ni a la forma ni al significado aritmético de la cadena, y por ello, los deslizamientos se reducen al estudio de las reflexiones.

6.6.2 Efecto de las isometrías sobre las cadenas fijas

Si transformamos una cadena fija mediante alguna isometría en T_{100} definida anteriormente, se obtiene otra cadena fija, se produce un cambio geométrico y, por tanto, también cambia su operador asociado cuando consideramos de nuevo el estrato numérico en T_{100}.

La tabla 6.3 ejemplifica los efectos geométrico y aritmético que produce cada una de las transformaciones anteriores sobre la cadena  cuya expresión aritmética es $2^{+}1_{+}$ y su operador aditivo asociado [+21]:

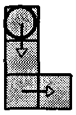
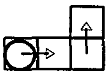
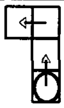
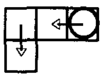
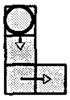
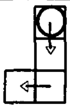
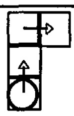
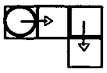
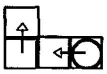
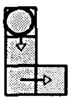
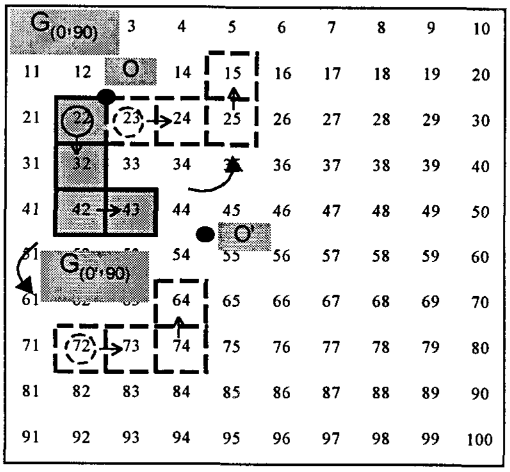
	Expresión geométrica	Expresiones aritmé-tica y polinómica	Operador asociado	Efecto de la trans-formación d=decenas u=unidades
Cadena origen sobre la que actúa la transfor-mación.		2^+1_+=2x10+1=21	[+21]	
Transformada mediante G_{90}		2_+1^-= (-1)x10+2 = -8	[-8]	d --> u u --> -d
Transformada mediante G_{180}		2^-1_-= (-2)x10-1 = -21	[-21]	d --> -d u --> -u
Transformada mediante G_{270}		2_-1^+=1x10-2= +8	[+8]	d --> -u u --> d
Transformada mediante G_{360}		2^+1_+ = 2x10+1= +21	[+21]	d --> d u --> u
Transformada mediante R_v		2^+1_- = 2x10-1= +19	[+19]	d --> d u --> -u
Transformada mediante R_h		2^-1_+= (-2)x10+1 = -19	[-19]	d --> -d u --> u
Transformada mediante R_{-45}		2_+1^+= 1x10+2= +12	[+12]	d --> u u --> d
Transformada mediante R_{+45}		2_-1^+= (-1)x10-2= -12	[-12]	d --> -u u --> -d
Transformada mediante T_v		2^+1_+ = 2x10+1= +21	[+21]	d --> d u --> u

Tabla 6.3: Efecto geométrico y aritmético de algunas isometrías sobre la cadena 2^+1_+

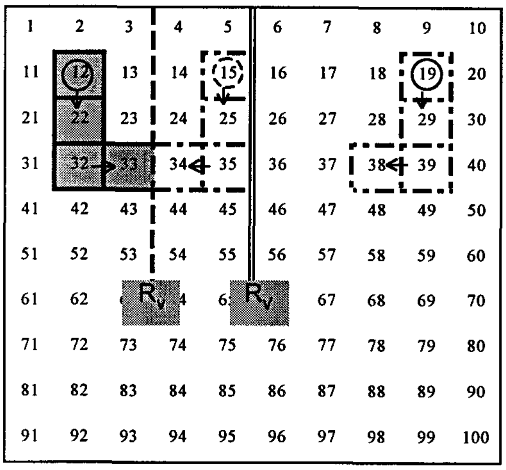
Algunas observaciones sobre la tabla anterior

Un análisis de la tabla anterior, generalizando para cualquier cadena fija, permite establecer algunas propiedades de las cadenas resultantes al ser sometidas a las isometrías en T_{100}:

1. La forma y orientación de la cadena imagen, y por tanto su operador asociado, no dependen ni del centro de giro elegido ni de la posición relativa del eje de reflexión, sino del ángulo de giro y la pendiente de dicho eje.



El efecto aritmético de los giros no depende del centro de giro.



Las cadenas transformadas de $C(2^{+}1_{+})$ mediante R_v y $R_{v'}$ tienen la misma forma y orientación: representan al mismo operador asociado.

2. El número de celdillas de la cadena resultante se conserva:

G_{90}, G_{270}, R_{-45} y R_{+45} permutan las casillas verticales por las horizontales (salvo la orientación). En cambio G_{180}, G_{360}, R_v y R_h , además conservan el número de celdillas verticales y de celdillas horizontales, aunque pueden cambiar la orientación.

3. Debido a la propiedad anterior, G_{180}, G_{360}, R_v y R_h transforman cadenas fijas simples en cadenas fijas simples, mientras que G_{90}, G_{270}, R_{-45} y R_{+45} transforman cadenas fijas simples en cadenas no simples, ya que permutan el orden "decenas, unidades".

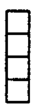
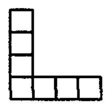
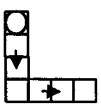
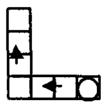
4. La forma y orientación de las cadenas, y por tanto su operador asociado, son invariantes mediante traslaciones.

5. El giro $\mathbf{G_{360}}$ deja invariante, en sentido estricto, a cualquier cadena.

6. El giro $\mathbf{G_{180}}$ transforma la cadena original $C(2^+1_+)$ en su cadena opuesta $C(2^-1_-)$, y por tanto al operador asociado [+21], en su opuesto [-21].

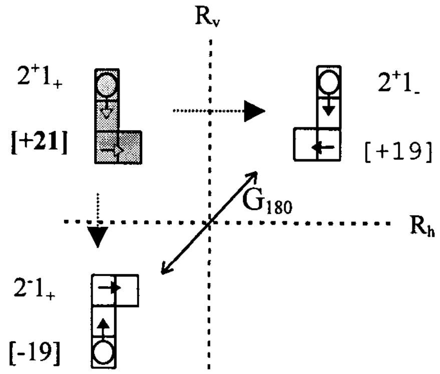
En general, $\mathbf{G_{180}}$ transforma la cadena $C(a^{\pm}b_{\pm})$ correspondiente al operador aditivo $[10(\pm a)\pm b)]$ en su cadena opuesta $C'(a^{\mp}b_{\mp})$, que corresponde al operador $[-(10(\pm a)\pm b))]$, opuesto del anterior.

7. Algunas cadenas son ***aritméticamente invariantes*** frente a algunas transformaciones:

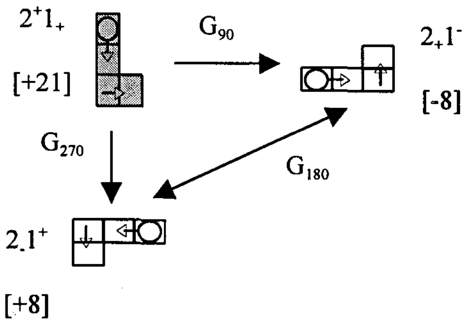
- Cualquier cadena cerrada, representante de la cadena ***elemento neutro***, es aritméticamente invariante frente a las **isometrías en $\mathbf{T_{100}}$ anteriormente definidas**.
- **Los giros**, excepto la identidad $\mathbf{G_{360}}$, dejan aritméticamente invariantes solamente a las cadenas cerradas (representantes del **elemento neutro**).
- $\mathbf{R_v}$ deja aritméticamente invariantes las cadenas que sólo tienen casillas verticales  cuya expresión aritmética es de la forma $\mathbf{a^{\pm}0}$.
- $\mathbf{R_h}$ deja aritméticamente invariantes las cadenas que sólo tienen casillas horizontales  cuya expresión aritmética es de la forma $\mathbf{0b_{\pm}}$
- $\mathbf{R_{-45}}$ deja aritméticamente invariantes las cadenas que tienen igual número de casillas horizontales que verticales,  cuya expresión aritmética es $\mathbf{a^{\pm}a_{\pm}}$
- $\mathbf{R_{+45}}$ transforma las cadenas que tienen igual número de casillas horizontales que verticales,  del tipo $\mathbf{a^{\pm}a_{\pm}}$ en sus opuestas  del

tipo, $a^{\mp}a_{\mp}$ y deja aritméticamente invariantes las cadenas de la forma $\mathbf{a^{+}a_{-}}$ y $\mathbf{a^{-}a_{+}}$, como por ejemplo $3^{+}3_{-}$ y $3^{-}3_{+}$

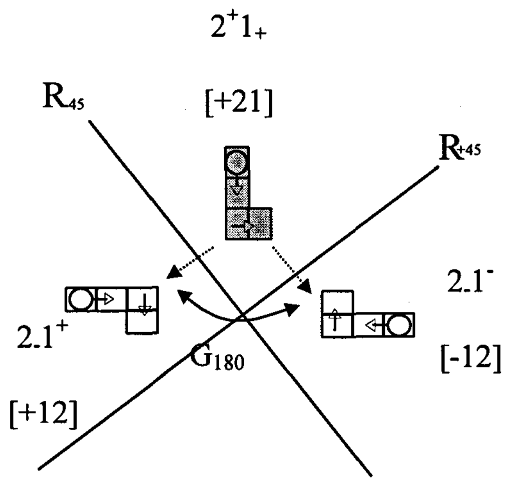
8. Las reflexiones $\mathbf{R_v}$ y $\mathbf{R_h}$ producen efectos aritméticos **opuestos** sobre cualquier cadena. Así $\mathbf{R_v}$ transforma la cadena $2^{+}1_{+}$ asociada al operador [+21] en la cadena $2^{+}1_{-}$,asociada al operador **[+19]**. En cambio R_h transforma la cadena $2^{+}1_{+}$,asociada al operador [+21] en la cadena $2^{-}1_{+}$ asociada al operador **[-19]**:



Igual ocurre con G_{90} y G_{270}

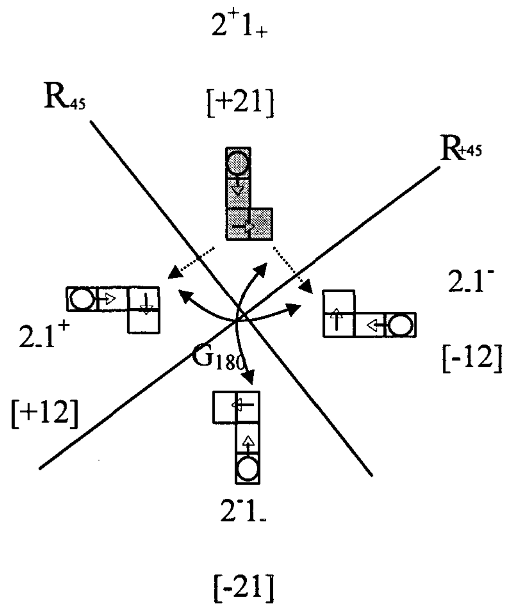


y con R_{-45} y R_{+45}



6.6.3 Composición de isometrías

Si completamos la figura anterior de manera que a la cadena (2.1^+) transformada de 2^+1_+ mediante R_{-45} la sometemos a continuación a una reflexión R_{+45}, la imagen es la cadena 2^-1_- .El mismo resultado se obtiene si sometemos a la cadena origen 2^+1_+ al giro G_{180} con centro en el punto de intersección de ambos ejes de reflexión:



Expresamos lo anterior mediante:

$$R_{-45}(2^+1_+)=2_+1^+;\ R_{+45}(2_+1^+)=2^-1_-;\ G_{180}\,(2^+1_+)=2^-1_-$$

Definiendo la composición de isometrías análogamente a como se define en el plano euclídeo, y utilizando notación similar, podemos escribir:

$$R_{-45} \circ R_{+45} = G_{180}; \text{ y también } R_v \circ R_h = G_{180}$$

Para componer dos isometrías tenemos en cuenta el efecto que produce cada una de las isometrías sobre las decenas y sobre las unidades de la cadena, tal y como muestra la tabla 3 del apartado 6.2 anterior.

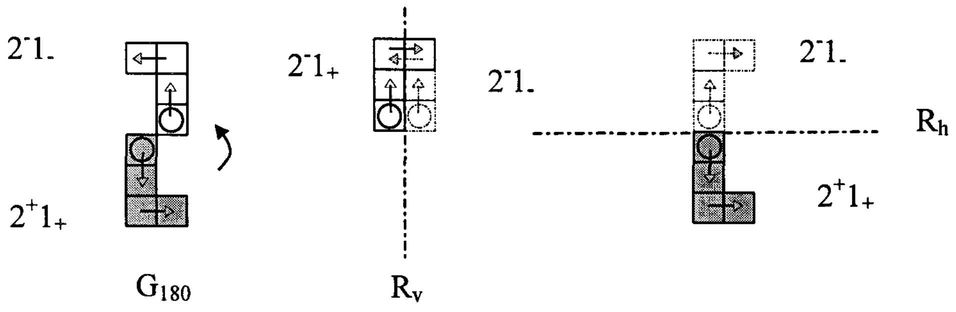
Veamos como ejemplo la composición de $R_v \circ G_{180}$ aplicado a la cadena 2^+1_+. Teniendo en cuenta que G_{180} cambia de signo tanto las unidades como las decenas y que R_v cambia de signo las unidades pero conserva las decenas, tenemos:

$$[R_v \circ G_{180}](2^+1_+) = R_v(G_{180}(2^+1_+)) = R_v(2^-1_-) = 2^-1_+$$

Esquemáticamente lo expresamos:

$$\begin{tikzcd}
(2^+1_+) \arrow[r, "\mathbf{G_{180}}"] \arrow[dr, "\mathbf{R_h}"'] & (2^-1_-) \arrow[d, "\mathbf{R_v}"] \\
 & (2^-1_+)
\end{tikzcd}$$

Una ilustración de cada una de las tres transformaciones geométricas de este ejemplo es:



La cadena libre $C(2^+1_+)$ se transforma mediante G_{180} en $C(2^-1_-)$ (parte izquierda de la figura) y ésta se transforma en $C(2^-1_+)$ mediante R_v (parte central).

El mismo resultado se obtiene si se somete a $C(2^+1_+)$ a la reflexión R_h (parte derecha).

En general, para una cadena cualquiera a^+b_+ tenemos el esquema:

$$\begin{tikzcd}
(a^+ b_+) \arrow[r, "\mathbf{G_{180}}"] \arrow[dr, "\mathbf{R_h}"'] & (a^- b_-) \arrow[d, "\mathbf{R_v}"] \\
& (a^- b_+)
\end{tikzcd}$$

Análogamente hay que interpretar todas las composiciones entre las isometrías en T_{100}.

6.6.4 Grupo de isometrías en T_{100} sobre cadenas fijas

El conjunto de isometrías consideradas anteriormente ha sido elegido con criterios de comodidad para ser aplicadas a las cadenas fijas. No obstante, la última columna de la tabla 6.3 recoge todas las posibles combinaciones de transformación de las celdillas de la cadena origen. Esto facilita la composición de isometrías para cualquier cadena fija, y hace pensar en una posible estructura de grupo para estas isometrías con la ley de composición definida anteriormente.

Consideremos el conjunto de isometrías en T_{100} que actúan sobre cadenas fijas $\mathbf{T}=\{\mathbf{G_{90}; G_{180}; G_{270}; G_{360}; R_v; R_h; R_{-45}; R_{+45}}\}$ junto con la ley de composición ($\circ$) anteriormente indicada. ***(T, $\circ$) tiene estructura de grupo***. Se trata del grupo cíclico de orden 8, ***Diedral 4.***

Construida su tabla pitagórica correspondiente, ésta resulta ser un cuadrado latino, y con ella es fácil comprobar las propiedades de grupo para ($\mathbf{T}$, $\circ$):

$\circ$	G_{360}	G_{180}	G_{270}	G_{90}	R_v	R_h	R_{-45}	R_{+45}
G_{360}	G_{360}	G_{180}	G_{270}	G_{90}	R_v	R_h	R_{-45}	R_{+45}
G_{180}	G_{180}	G_{360}	G_{90}	G_{270}	R_h	R_v	R_{+45}	R_{-45}
G_{270}	G_{270}	G_{90}	G_{180}	G_{360}	R_{-45}	R_{+45}	R_h	R_v
G_{90}	G_{90}	G_{270}	G_{360}	G_{180}	R_{+45}	R_{-45}	R_v	R_h
R_v	R_v	R_h	R_{+45}	R_{-45}	G_{360}	G_{180}	G_{90}	G_{270}
R_h	R_h	R_v	R_{-45}	R_{+45}	G_{180}	G_{360}	G_{270}	G_{90}
R_{-45}	R_{-45}	R_{+45}	R_v	R_h	G_{270}	G_{90}	G_{360}	G_{180}
R_{+45}	R_{+45}	R_{-45}	R_h	R_v	G_{90}	G_{270}	G_{180}	G_{360}

- La ley $\circ$ es ley de composición interna para **T**.
- La ley $\circ$ es asociativa para la composición de isometrías.
- El elemento neutro del grupo es G_{360}
- Todo elemento de (**T**, $\circ$) posee un único elemento simétrico.
- La ley $\circ$ no es conmutativa en **T**, si bien existe una cierta simetría parcial de la tabla respecto de la diagonal principal (celdillas sombreadas).

6.6.4.1 Subgrupos

Existen en (**T**, $\circ$) los siguientes 8 subgrupos conmutativos:

a) Un subgrupo cíclico de orden 4 conmutativo (S_1, $\circ$);

$S_1 = \{G_{360}; G_{90}; G_{180}; G_{270}\}$; generador: G_{90} ó G_{270}

b) El grupo de Klein (S_2, $\circ$); $S2 = \{G_{360}; G_{180}; R_{-45}; R_{+45}\}$.

c) El grupo de Klein (S_3, $\circ$) isomorfo al anterior.

$$S_3 = \{G_{360}; G_{180}; R_v; R_h\}.$$

d) Cada grupo de Klein posee tres subgrupos de orden 2, uno de los cuales coincide con el subgrupo de orden 2 del grupo cíclico. En total existen 5 subgrupos de orden 2 diferentes:

d.1 $(S_4 , \circ)$; $S_4 =\{G_{360}; G_{180}\}$

d.2 $(S_5 , \circ)$; $S_5 =\{G_{360}; R_v\}$

d.3 $(S_6 , \circ)$; $S_6 =\{G_{360}; R_h\}$

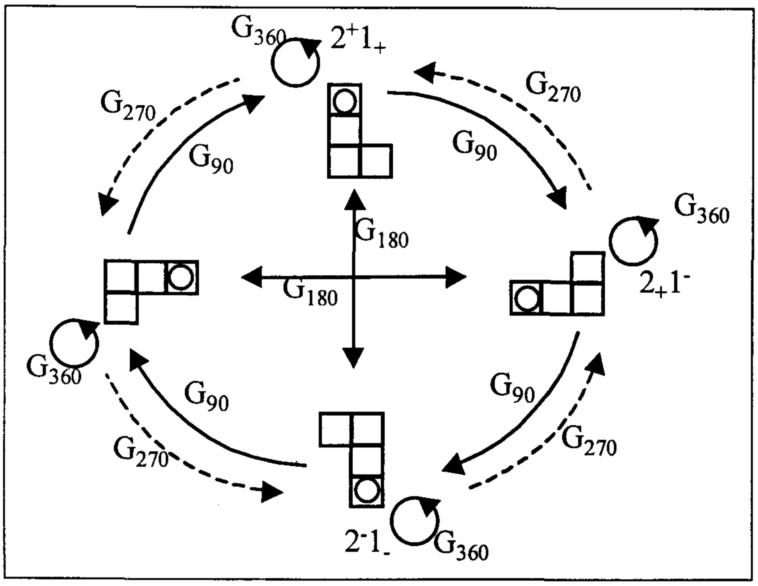
d.4 $(S_7 , \circ)$; $S_7 =\{G_{360}; R_{-45}\}$

d.5 $(S_8 , \circ)$; $S_8 =\{G_{360}; R_{+45}\}$

Ilustramos los subgrupos con su correspondiente tabla pitagórica y un diagrama de flechas, utilizando como cadena origen la que corresponde a 2^+1_+:

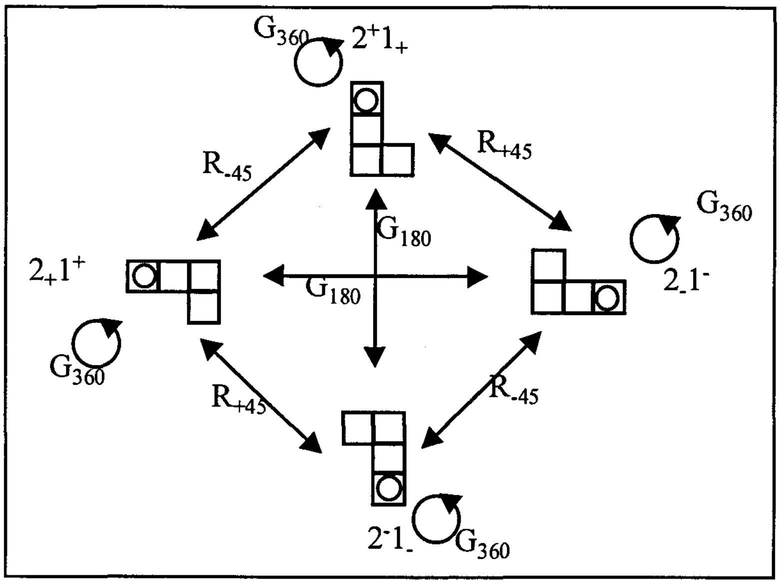
a) $(S_1, \circ)$: Grupo cíclico de orden 4:

$\circ$	G_{360}	G_{90}	G_{180}	G_{270}
G_{360}	G_{360}	G_{90}	G_{180}	G_{270}
G_{90}	G_{90}	G_{180}	G_{270}	G_{360}
G_{180}	G_{180}	G_{270}	G_{360}	G_{90}
G_{270}	G_{270}	G_{360}	G_{90}	G_{180}



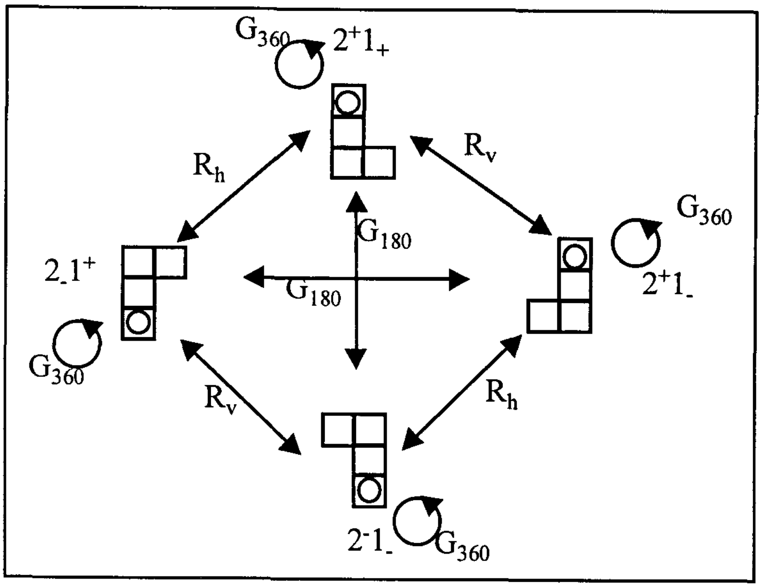
b) (S_2 , ∘): Grupo de Klein:

∘	G_{360}	G_{180}	R_{-45}	R_{+45}
G_{360}	G_{360}	G_{180}	R_{-45}	R_{+45}
G_{180}	G_{180}	G_{360}	R_{+45}	R_{-45}
R_{-45}	R_{-45}	R_{+45}	G_{360}	G_{180}
R_{+45}	R_{+45}	R_{-45}	G_{180}	G_{360}



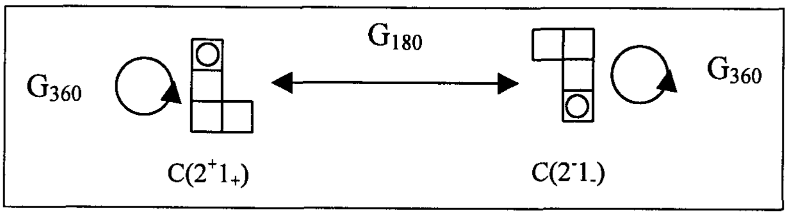
c) (S_3 , ∘): **Grupo de Klein:**

∘	**G_{360}**	**G_{180}**	**R_v**	**R_h**
G_{360}	G_{360}	G_{180}	R_v	R_h
G_{180}	G_{180}	G_{360}	R_h	R_v
R_v	R_v	R_h	G_{360}	G_{180}
R_h	R_h	R_v	G_{180}	G_{360}



d) Grupos de orden 2: $(S_4, \circ)$; $S_4 = \{G_{360}; G_{180}\}$

$\circ$	G_{360}	G_{180}
G_{360}	G_{360}	G_{180}
G_{180}	G_{180}	G_{360}



De forma análoga son los esquemas para los demás subgrupos de orden 2.

6.6.5 Compatibilidad de las isometrías en T_{100} con la relación de equivalencia. (Isometrías en T_{100} y cadenas equivalentes)

Dado que una cadena libre es una clase de equivalencia de cadenas fijas equivalentes que tienen el mismo operador aditivo asociado, es importante determinar el efecto aritmético de las isometrías cuando elegimos distintos representantes en una misma clase de equivalencia.

Primera cuestión: *El efecto aritmético de una isometría sobre una cadena fija depende exclusivamente del número total de celdillas verticales y horizontales, y no del modo como se disponen en la cadena*, ya que cada celdilla es transformada mediante la isometría en otra celdilla con su correspondiente orientación, independientemente de las otras celdillas que componen la cadena. La tabla 6.4 ilustra el caso de distintos representantes de la cadena libre $C(3^{+}2_{+})$ con 3 casillas verticales y 2 horizontales para la reflexión vertical.

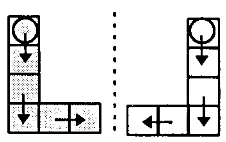
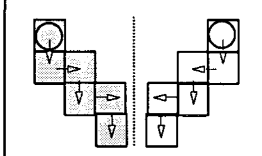
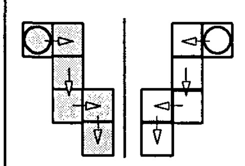
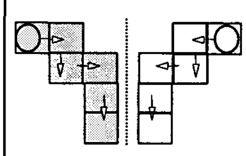
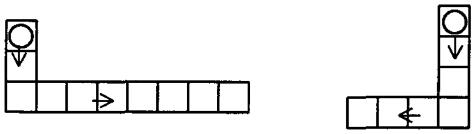
Cadenas fijas mínimas con 3 casillas verticales y 2 horizontales, correspondientes al operador [+32] y sus imágenes								
Expresiones aritméticas	$3^{+}2_{+}$	$3^{+}2_{-}$	$1^{+}1_{+}1^{+}1_{+}1^{+}$;	$1^{+}1_{-}1^{+}1_{-}1^{+}$	$1_{+}2^{+}1_{+}1^{+}$;	$1_{-}2^{+}1_{-}1^{+}$	$1_{+}1^{+}1_{+}2^{+}$;	$1_{-}1^{+}1_{-}2^{+}$
Operador asociado	**[+32]**	[+28]	**[+32]**	[+28]	**[+32]**	[+28]	**[+32]**	[+28]

Tabla 6.4: Cadenas fijas con el menor número de casillas (sombreadas) correspondientes al operador [+32] y sus transformadas (en blanco) mediante una reflexión vertical.

Segunda cuestión: **(Representante canónico)** Tratamos de justificar la elección que hicimos de las cadena simples mínimas como representantes canónicos de las cadenas libres y estudiar su comportamiento frente a las isometrías en T_{100}. Hagamos las siguientes consideraciones:

a) Desde un planteamiento geométrico, *la cadena simple es la más sencilla* de las de su clase puesto que consta, a lo sumo, de un solo tramo vertical (decenas) y un solo tramo horizontal (unidades), en este orden. Asimismo la cadena simple es la cadena fija de su clase que corresponde a la expresión aritmética reducida.

b) *Existen cadenas simples equivalentes con distinto número de casillas.* Así, la cadena simple C= $C(2^{+}7_{+})$, que tiene 9 casillas[1] admite una cadena simple equivalente que tiene un menor número de casillas: $C(3^{+}3_{-})$:



$2^{+}7_{+}$ $3^{+}3-$

En general, cuando b >5, la cadena $C(a^{\pm}b_{\pm})$ tiene otra cadena equivalente con menor número de casillas, que expresamos sintéticamente como

$$C'[(a\pm1)^{\pm}(10 - b)_{\mp}]$$

y que interpretamos de la siguiente manera:

$$a^{+}b_{+} = (a+1)^{+}(10-b)_{-}$$

$$a^{+}b_{-} = (a-1)^{+}(10-b)_{+}$$

$$a^{-}b_{+} = (a-1)^{-}(10-b)_{-}$$

$$a^{-}b_{+} = (a+1)^{+}(10-b)_{-}$$

Esta expresión sintetiza los 4 casos posibles que se ejemplifican en la tabla siguiente, según que la orientación de **a** y **b** sean de avance (+) o de retroceso (-):

---

[1] Consideramos a estos efectos que el número de casillas de la cadena $C(a^{\pm}b_{\pm})$ es a + b, si bien existe una casilla adicional que es la celdilla origen.

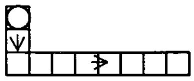
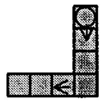
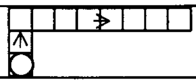
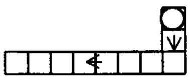
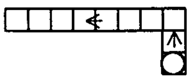
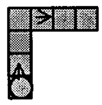
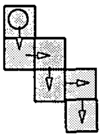
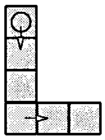
	Expresión aritmética reducida **b>5**	**Cadena equivalente con menor número de celdillas**
a +; b +	$a^{+}b_{+}$	$(a+1)^{+}(10-b)_{-}$
Ejemplo	$2^{+}7_{+}$	$(2+1)^{+}(10-7)_{-} = 3^{+}3_{-}$
Cadena simple		
Número de celdillas a+b	9	6
a -; b +	$a^{-}b_{+}$	$(a-1)^{-}(10-b)_{-}$
Ejemplo	$2^{-}7_{+}$	$(2-1)^{-}(10-7)_{-} = 1^{-}3_{-}$
Cadena simple		
Número de celdillas a+b	9	4
a +; b -	$a^{+}b_{-}$	$(a-1)^{+}(10-b)_{-}$
Ejemplo	$2^{+}7_{-}$	$(2-1)^{+}(10-7)_{+} = 1^{+}3_{+}$
Cadena simple		
Número de celdillas a+b	9	4
a -; b -	$a^{-}b_{-}$	$(a+1)^{-}(10-b)_{+}$
Ejemplo	$2^{-}7_{-}$	$(2+1)^{-}(10-7)_{+} = 3^{-}3_{+}$
Cadena simple		
Número de celdillas a+b	9	6

Tabla 6.5: Cadenas con menor número de casillas (sombreadas)

c) *Unicidad del representante con menor número de celdillas.*

Conviene no confundir las cadenas simples con las cadenas que tienen menor número de celdillas. Una cadena puede ser simple y no ser la que tiene menor número de celdillas dentro de su clase, como hemos visto en el ejemplo de la cadena C($2^{+}7_{+}$). También una cadena puede tener un número mínimo de celdillas dentro de su clase y no ser una cadena simple como es el caso de la cadena  siendo la cadena  su cadena simple equivalente con igual número de celdillas y que tomamos como representante canónico.

Además existen en cada clase de equivalencia dos cadenas con menor número de celdillas que producen formas geométricas distintas y que solamente se diferencian en el orden en que vienen expresadas las decenas y las unidades, como muestra la tabla 6.6 con un ejemplo:

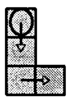
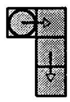
	Forma de las cadenas (decenas, unidades)	(unidades, decenas)
Cadena fija		
Movimientos	**(bajar 2, derecha 1)**	**(derecha 1, bajar 2)**
Interpretación aritmética	2 decenas + 1 unidad	1 unidad + 2 decenas
Expresión artimética	$2^{+}1_{+}$	$1_{+}2^{+}$
Expresión polinómica	2x10+1=21	1+2x10=21
Operador asociado	[+21]	[+21]

Tabla 6.6: Cadenas equivalentes que cambian el orden entre decenas y unidades.

Debido a que las transformaciones afectan a las casillas verticales y a las horizontales de manera independiente, la elección de uno de estos dos representantes, con el menor número posible de casillas, no influye en el efecto aritmético de las isometrías sobre la cadena.

d) La cadena fija simple mínima asociada a una cadena libre en T_{100} es única, ya que *dadas dos cadenas simples representantes de la misma clase, éstas no tienen igual número de casillas*.

En efecto: Sea una cadena fija simple $C(a^{\pm}b_{\pm})$. Sabemos que solo existe una cadena simple distinta equivalente a ella y que viene dada por la expresión $C'[(a\pm 1)^{\pm}(10 - b)_{\mp}]$ según el apartado b) anterior. El número total de casillas de las cadenas C y C' es, respectivamente, **a+b** y **(a±1)+(10-b)** y dichos números son distintos para cualquier valor de **a** y **b** en T_{100}, ya que para que los números de casillas de ambas cadenas C y C' coincidan, se debe cumplir

$$a+b = a\pm 1+(10-b) \Rightarrow b=11/2 \text{ ó } b=9/2$$

siendo **b** en ambos casos un número no natural. Solo en el caso de que el número de columnas de la tabla (que en T_{100} es 10) sea impar, puede ocurrir que ambas cadenas tengan igual número de casillas, como estudiaremos posteriormente.

Queda de esta manera justificada la elección de la ***cadena simple mínima*** como representante canónico de las cadenas libres en T_{100}. La figura 6.22 recoge diversas cadenas libres con distintos representantes. Los representantes canónicos quedan en la primera fila, con fondo sombreado.

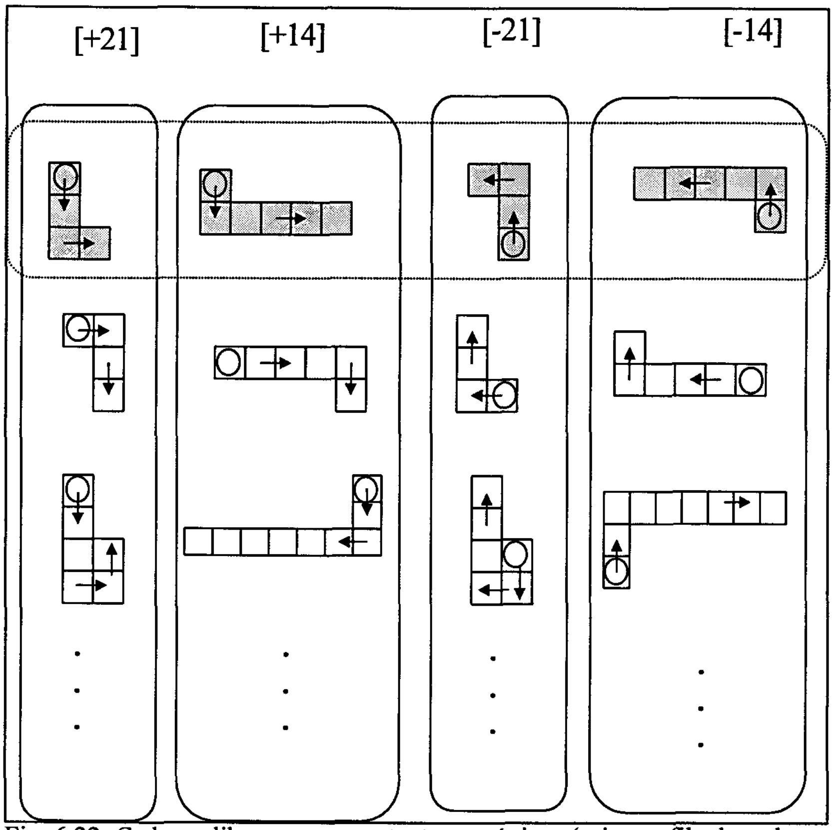


Fig. 6.22: Cadenas libres y representantes canónicos (primera fila de cadenas sombreadas).

e) ***Influencia de los representantes de la cadena libre en el efecto aritmético de las isometrías.***

El hecho de existir representantes de una misma cadena libre con diferente número de casillas verticales y horizontales (apartado (**b**) anterior), hace que el efecto aritmético de dichas isometrías dependa de la elección de dicho representante, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

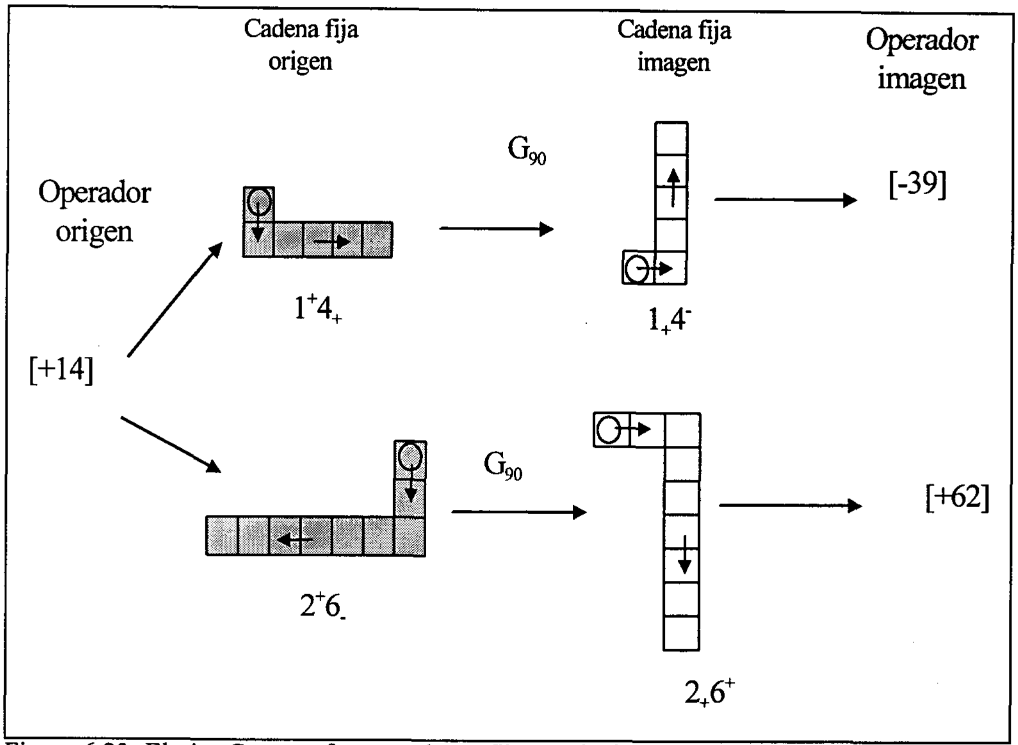


Figura 6.23: El giro G_{90} transforma cadenas fijas equivalentes en cadenas fijas no equivalentes.

La figura 6.23 pone de manifiesto que dos cadenas equivalentes ($1^{+}4_{+}$ y $2^{+}6_{-}$) se transforman mediante un giro $G_{90°}$ en cadenas ($1^{+}4_{-}$ y $2^{+}6_{+}$) que no son equivalentes, ya que corresponden a operadores aditivos diferentes ([-39] y [+62] respectivamente).

El aspecto aritmético de esta transformación sobre las cadenas $1^{+}4_{+}$ y $2^{+}6_{-}$ lo expresamos

$$G_{90}(1^{+}4_{+}) = 1_{+}4^{-} = 1+(-4)x10 = -39$$

$$G_{90}(2^{+}6-) = 2_{+}6^{+} = 2+(6)x10 = +62$$

El efecto geométrico del giro G_{90} ha sido el mismo en ambos casos (las casillas verticales se convierten en horizontales con el mismo sentido y las horizontales en verticales cambiadas de sentido), pero el significado aritmético u operador asociado, no se ha conservado al cambiar de cadena fija representante.

En general, podemos afirmar que ***el efecto aritmético de una isometría en T_{100} sobre una cadena libre depende del representante elegido para***

tal cadena libre, y por tanto las isometrías en T_{100} no son compatibles con la relación de equivalencia definida entre cadenas fijas.

No podemos entonces hablar del transformado de un operador aditivo mediante una isometría en T_{100} utilizando la cadena libre como representación geométrica de dicho operador. En cambio podemos estudiar el comportamiento de los representantes canónicos frente a las isometrías en T_{100}.

6.6.6 Efecto aritmético de las isometrías en T_{100} sobre los representantes canónicos de las cadenas libres

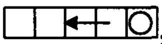
Consideremos ahora el conjunto de cadenas simples mínimas $\mathcal{C}_s$ y estudiemos el efecto aritmético que producen las isometrías sobre dichas cadenas, representantes canónicos de las cadenas libres.

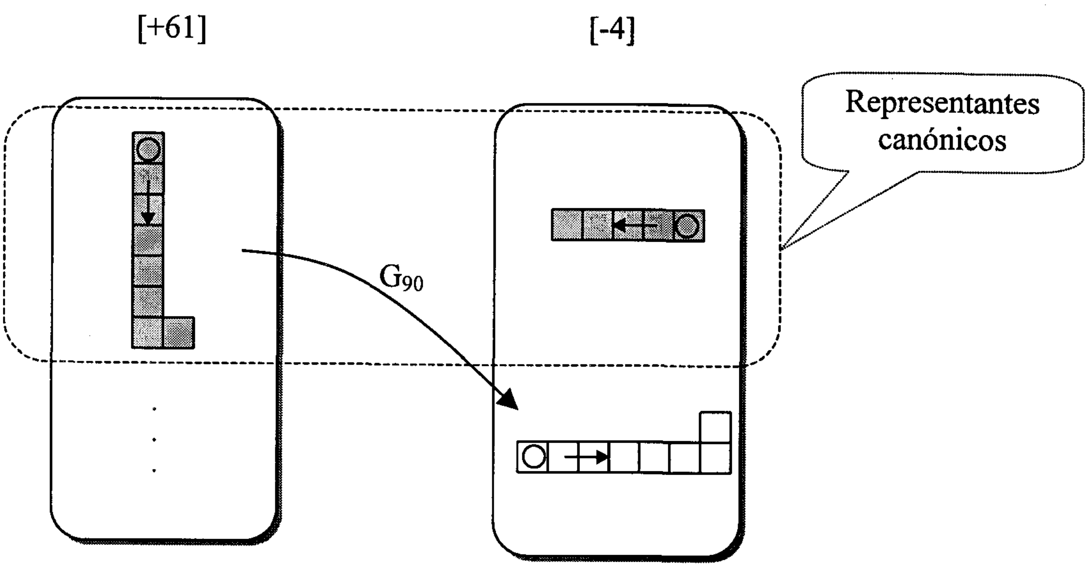
6.6.6.1 Isometrías que no transforman representantes canónicos en representantes canónicos

Existen isometrías en T_{100} que no conservan el número de celdillas verticales y horizontales de las cadenas fijas. Estas isometrías son G_{90}, G_{270}, R_{-45} y R_{+45}, y permutan el número de casillas verticales por el de horizontales (cambian decenas por unidades), alteran el orden "decenas, unidades" y cambian también la orientación de la cadena.

Si tomamos como origen una cadena simple mínima de modo que el número de casillas verticales sea mayor que 5, su cadena transformada tendrá un número de casillas horizontales mayor o igual que 5, y por lo tanto no será una cadena simple mínima. Este es el caso de la cadena $C(6^+1_+)$ sometida al giro G_{90}:

$$G_{90}\,(C(6^+1_+)) = 6_+1^-$$

La cadena transformada 6_+1^- no es una cadena simple mínima, ya que sus celdillas vienen dadas en el orden "*unidades, decenas*" y además no es la cadena de menor número de casillas dentro de su clase. El representante canónico correspondiente es $C(0\ 4_-)$ dado geométricamente mediante la figura , y corresponde al operador [-4]. La siguiente figura esquematiza este ejemplo:



El giro $\mathbf{G_{90}}$ transforma algunos representantes canónicos en cadenas que no lo son

6.6.6.2 Isometrías que transforman representantes canónicos en representantes canónicos

Las isometrías que conservan las celdillas verticales y las horizontales (salvo la orientación), transforman representantes canónicos en cadenas que siguen siendo representantes canónicos, ya que estas isometrías conservan tanto el orden "*decenas, unidades*" como su número. El conjunto de estas isometrías es $\mathbf{S} = \{G_{360}, G_{180}, R_v, R_h\}$.

Si consideramos un operador aditivo expresado mediante el representante canónico de su correspondiente cadena libre, tiene sentido entonces someter al conjunto C_s de dichos representantes canónicos al efecto de las isometrías de $\mathbf{S}$, ya que sus cadenas transformadas siguen siendo cadenas representantes canónicos. En este sentido podemos considerar el transformado de un operador aditivo en T_{100} mediante cualquiera de las isometrías de $\mathbf{S}$.

6.6.6.3 El grupo de Klein (S , ∘) de las isometrías que conservan las cadenas simples mínimas

Considerando el conjunto de isometrías **S** cuyo dominio de aplicación es el conjunto C_s de cadenas simples mínimas, y la ley de composición usual de isometrías en T_{100}, comprobamos fácilmente (como se vio en el apartado 6.6.4.1 c) que **(S , ∘)** es un grupo de Klein:

El efecto de cada isometría de **S** sobre una cadena es:

R_v cambia las unidades de signo.

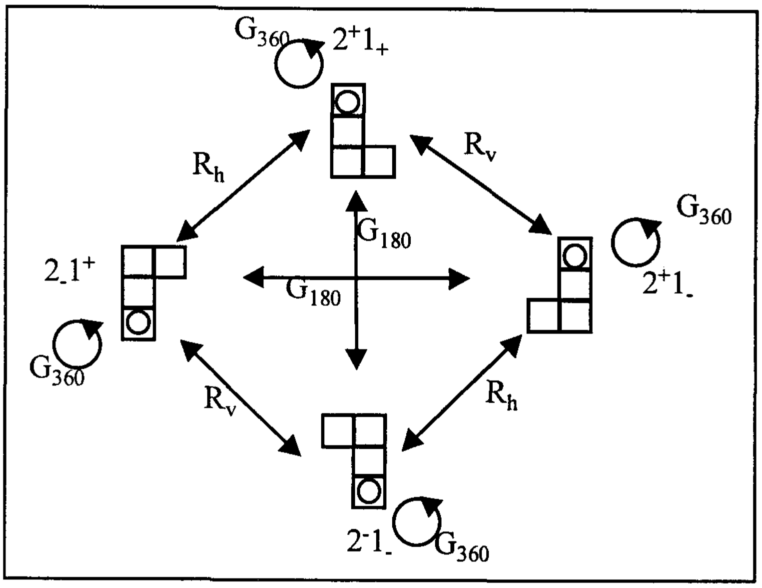
R_h cambia las decenas de signo.

G_{180} cambia las unidades y las decenas de signo.

G_{360} no cambia las unidades ni las decenas.

Representamos este grupo mediante su tabla pitagórica correspondiente y el diagrama de flechas, con la cadena $C(2^+1_+)$ como cadena origen:

∘	**G_{360}**	**G_{180}**	**R_v**	**R_h**
G_{360}	G_{360}	G_{180}	R_v	R_h
G_{180}	G_{180}	G_{360}	R_h	R_v
R_v	R_v	R_h	G_{360}	G_{180}
R_h	R_h	R_v	G_{180}	G_{360}


G_{360}
$2^{+}1_{+}$
R_h
R_v
G_{360}
G_{180}
$2_{-}1^{+}$
G_{180}
$2^{+}1_{-}$
G_{360}
R_v
R_h
$2^{-}1_{-}$
G_{360}

6.7 Estudio de la Tabla-100 estructurada en k-columnas

La identificación de las cadenas libres con los operadores aditivos está basada en un convenio mantenido hasta este momento: la Tabla-100 está organizada en 10 filas y 10 columnas; cada fila incluye una decena completa. Este convenio puede modificarse de manera que organicemos los 100 primeros números mediante una tabla con un número diferente de columnas. Por lo que se refiere a los operadores aditivos vamos a ver que esta nueva organización de una tabla equivale, en cierto modo, a un cambio de base.

Al estructurar la T_{100} en un número distinto de columnas las propiedades geométricas de las cadenas simples se destacan y se observa cómo se altera su interpretación aritmética.

6.7.1 La Tabla-100 de k columnas

La disposición de la T_{100} en 10 columnas responde a una elección arbitraria, si bien es esta configuración la que se ajusta al sistema decimal de numeración. Manteniendo el orden de los números, es posible organizarlos en otra tabla que tenga solamente k columnas, es decir, con k elementos en cada fila, como se observa en la figura 6.26, para el caso k=7.

Para simbolizar que los 100 primeros números se organizan en una tabla de k columnas empleamos la notación $T_{100(k}$ y denominamos Tabla-100 de k columnas a esta nueva representación del conjunto de los 100 primeros números.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100					

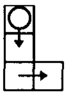
Figura 6.26: Cadena $C(2^{+}1_{+})$ en la tabla-100 de 7 columnas $T_{100(7}$

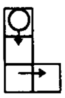
6.7.2 Operadores aditivos en la Tabla-100 de k columnas

Hemos caracterizado las cadenas libres y operadores asociados en T_{100}. Estudiamos a continuación los cambios de interpretación que se producen en cadenas libres y operadores asociados cuando pasamos de T_{100} a $T_{100(k}$.

En T_{100}, la expresión aritmética reducida $a^{\pm}b_{\pm}$ representa el operador aditivo [10x(±a) ±b] y la cadena libre correspondiente **C** es una clase de cadenas fijas cuyo representante canónico es una figura geométrica formada por **a** celdillas verticales (a partir de la celdilla inicial) descendentes/ascendentes (sumar/restar **a** decenas), seguidas de **b** casillas horizontales hacia la derecha/izquierda (sumar/restar b unidades) que denotamos C = $C(a^{\pm} b_{\pm})$ (ver punto 6.3.4).

Ahora bien, si modificamos el número de columnas y consideramos la tabla $T_{100(7}$, como en la figura 6.26, se modifica la interpretación aritmética de una cadena simple. En este caso, subir o bajar **a** casillas a partir de una celdilla dada significa restar o sumar **a** "septenas", de modo que la cadena de la figura 26 tendría como operador asociado el que viene dado por la expresión **7a+b**. De este modo, manteniendo el sentido geométrico de una cadena, se modifica su interpretación aritmética. Las cadenas $C(a^{\pm}b_{\pm})$ corresponden, en la tabla de 7 columnas, a los operadores [7x(±a) ±b].

Así, la cadena  que aparece en la figura 6.26, es la cadena $C(2^{+}1_{+})$ (la misma que para T_{100}) mientras que el operador aditivo asociado es [+(7x2+1)] = [+15].

De este modo comprobamos que se ha producido un cambio en el operador aditivo asociado a la cadena  al pasar de T_{100} a $T_{100(7}$. En T_{100} el operador aditivo es [+21], mientras que en $T_{100(7}$ el operador aditivo asociado a la misma cadena es [+15].

No obstante, si el nuevo operador aditivo [+15] lo escribimos en base 7 (que es el número de columnas de la nueva tabla), tenemos: $15 = 21_{(7}$ que coincide en notación con el significado aritmético de la cadena situada en T_{100}.

En general, una cadena libre se identifica por $C(a^{\pm}b_{\pm})$, ya que estas expresiones indican el número de celdillas de avance o retroceso correspondientes a columnas y filas, respectivamente. Esta identificación es independiente del número de columnas que tenga la tabla, es decir, la identificación es la misma para T_{100} que para cualquier tabla $T_{100(k}$. No ocurre igual con el operador aditivo asociado a la cadena [kx(±a) ±b] que depende del valor de **k**. Ahora bien, si escribimos tal operador en base **k**, su notación se conserva pero cambia su valor numérico.

La tabla 6.7 muestra, para el caso de **a** y **b** positivos, los invariantes y los cambios que se producen en un operador cuando pasamos de T_{100} a $T_{100(k}$ (Análogamente sería para los restantes valores de a y b):

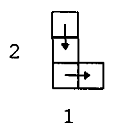
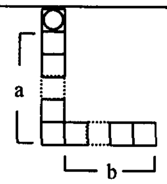
	T_{100}	$T_{100(7}$		$T_{100(k}$	
	Base 10	Base 10	Base 7	Base 10	Base k
	[+21] 2x10+1	[+15] 2x7+1	[$+21_{(7}$] 2x7+1	[2xk+1] 2xk+1	[$+21_{(k}$] 2xk+1
	[10a+b] 10a+b	[7a+b] 7a+b	[$+ab_{(7}$] 7a+b	[ka+b] ka+b	[$+ab_{(k}$] ka+b

Tabla 6.7: Cambio en el operador asociado a una cadena, al cambiar el número de columnas de la tabla.

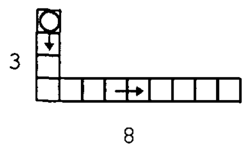
6.7.3 Cadena asociada al operador [±ab] en la tabla $T_{100(k}$

Partimos ahora de un determinado operador aditivo en la tabla T_{100}, por ejemplo [+ab]. En este caso sabemos cual es la cadena libre y la notación aritmética correspondientes en dicha tabla. Pero si pasamos a la tabla $T_{100(k}$, no disponemos de criterio directo para conocer la cadena que corresponde al operador [+ab] en la nueva tabla.

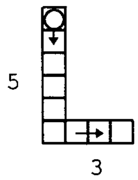
Nos proponemos determinar la cadena libre correspondiente al operador [+ab] cuando consideramos la Tabla-100 con un número **k** de columnas.

6.7.3.1 Cadena libre asociada a un operador en $T_{100(k}$

Si, por ejemplo, consideramos el operador [+38] en T_{100}, su expresión aritmética reducida es $3^{+}8_{+}$ cuya expresión geométrica es la cadena simple:



Pero al mismo operador [+38] en la tabla $T_{100(7}$, le corresponde la cadena:



cuya expresión aritmética reducida es $5^{+}3_{+}$. Estos valores quedan justificados por el cambio de base $38 = 53_{(7}$.

En general, cuando hacemos un cambio de tabla y queremos conocer la cadena libre asociada al operador [+ab] en la tabla $T_{100(k}$ es necesario realizar un cambio de base: $ab = cd_{(k}$.

La cadena libre en $T_{100(k}$ asociada al operador inicial [+ab] es la que tiene **c** celdillas verticales y **d** celdillas horizontales, y cuya notación es $C(c^{+}d_{+})$, siendo $ab = cd_{(k}$.

Igual razonamiento resulta válido para los otros valores de **a** y **b**, con las modificaciones de signos y sentidos correspondientes.

6.7.3.2 Determinación del representante canónico en $T_{100(k}$

La obtención de la expresión aritmética $\mathbf{c^{+}d_{+}}$ anterior para la cadena libre asociada al operador [+ab] es el resultado de la división por defecto del número **ab** entre el número de columnas **k** de la tabla; ab=ck+d. Igualmente se obtiene otra expresión equivalente, $(c+1)^{+}(k-d)_{-}$, si efectuamos la división por exceso, ya que:

$$(c+1)^{+}(k-d)_{-} = (c+1)k+(d-k) = ck+d$$

En general para un operador cualquiera tenemos dos expresiones aritméticas distintas para su cadena asociada en la tabla $T_{100\text{-}k}$ de **k** columnas: $\mathbf{c}^{\pm}\mathbf{d}_{\pm}$ y $(\mathbf{c}\pm\mathbf{1})^{\pm}(\mathbf{k}\mp\mathbf{d})_{\mp}$.

Para determinar su representante canónico, queda por ver cuál de las dos expresiones anteriores tiene menor número de casillas: $|\mathbf{c}|+|\mathbf{d}|$ y $|\mathbf{c}\pm\mathbf{1}|+|\mathbf{k}\mp\mathbf{d}|$ respectivamente.

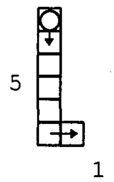
En cualquier caso tanto **c** como **d** han de ser números naturales, estando los valores absolutos de c y d limitados: $|\mathbf{c}| < \mathbf{100/k}$; $|\mathbf{d}| < k$

Distinguimos los casos en que el operador en su forma decimal **ab** sea positivo o negativo ya que, si es cero, el representante canónico tiene una sola casilla para cualquier número de columnas de la tabla:

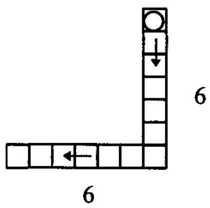
a) Para **ab>0**, como por ejemplo +36, al efectuar la división por defecto entre **k** obtenemos tanto el cociente **c** como el resto **d** positivos:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 7 \\ \hline 1 & 5 \end{array} \qquad c=5;\ d=1;\ 36=5\text{x}7+1;$$

siendo 5x7<36. La cadena que se obtiene es $C(\mathbf{5}^{+}\mathbf{1}_{+})$ cuyo número de casillas es $|\mathbf{5}|+|\mathbf{1}|=\mathbf{6}$.



La otra cadena corresponde a la expresión aritmética $(\mathbf{5+1})^{+}(\mathbf{7\text{-}1})_{-} = \mathbf{6}^{+}\mathbf{6}_{-}$



que tiene 12 casillas, y se obtiene mediante la división por exceso:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 7 \\ \hline -6 & 6 \end{array} \qquad 36=6\text{x}7\text{-}6,\ \text{siendo } 6\text{x}7>36$$

El representante canónico en este caso es la cadena $\mathbf{C(5^{+}1_{+})}$ por tener menor número de casillas.

En general, sea una cadena $C(\mathbf{c^{+}d_{+}})$ obtenida por medio de la división por defecto:

$$\begin{array}{r|l} ab & k \\ \cline{2-2} d & c \end{array} \qquad c>0;\ d>0; \quad ab=c\times k+d, \quad \text{con } c\times k<ab,$$

y otra segunda cuya expresión aritmética reducida es $\mathbf{(c+1)^{+}(k\text{-}d)_{-}}$ obtenida de la división por exceso:

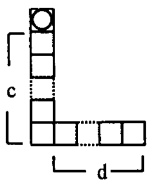
$$\begin{array}{r|l} ab & k \\ \cline{2-2} d-k & c+1 \end{array} \qquad c+1>0;\ d-k<0; \quad ab=(c+1)\times k+(d-k) \text{ siendo } (c+1)\times k>ab$$

Para averiguar cuál cadena tiene menor número de casillas debemos discutir las condiciones de la desigualdad $\mathbf{|c|+|d|} < \mathbf{|c+1|+|k\text{-}d|}$, que se reduce a $\mathbf{c+d} < \mathbf{(c+1)+(k\text{-}d)}$

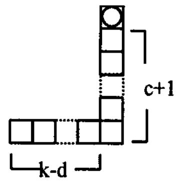
al ser $c>0$; $d>0$ y $k\text{-}d>0$, con lo que tenemos $2d<k+1 \Rightarrow \mathbf{d}<\dfrac{\mathbf{k+1}}{\mathbf{2}}$.

Si llamamos $\#(\mathbf{c^{+}d_{+}})$ al número de casillas de la cadena $C(\mathbf{c^{+}d_{+}})$, de lo anterior deducimos:

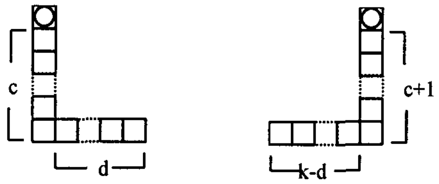
* si $\mathbf{d}<\dfrac{\mathbf{k+1}}{\mathbf{2}} \Rightarrow \#(\mathbf{c^{+}d_{+}}) < \#(\mathbf{(c+1)^{+}(k\text{-}d)_{-}})$ siendo la cadena $C(\mathbf{c^{+}d_{+}})$ el representante canónico:



* si $\mathbf{d}>\dfrac{\mathbf{k+1}}{\mathbf{2}} \Rightarrow \#(\mathbf{c^{+}d_{+}}) > \#(\mathbf{(c+1)^{+}(k\text{-}d)_{-}})$ siendo la cadena $\mathbf{C((c+1)^{+}(k\text{-}d)_{-})}$ el representante canónico:



* si $\mathbf{d = \frac{k+1}{2} \Rightarrow \#(c^+d_+) = \#((c+1)^+(k\text{-}d)_-)}$ (para lo que **k** debe ser impar), las dos cadenas tienen igual número de casillas, y podemos elegir como representante canónico cualquiera de ellas:



Con el fin de tener un solo representante canónico para cada operador, optamos por la cadena $\mathbf{C(c^+d_+)}$ que corresponde a (bajar, derecha).

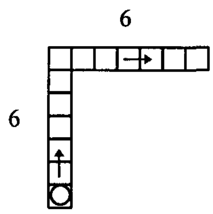
Si **k** es par no existen dos cadenas equivalentes con igual número de casillas.

b) Para **ab<0**, como por ejemplo –36, al efectuar la división por defecto entre **k** se obtiene un cociente negativo **–c** y el resto positivo **+d**:

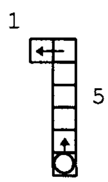
$$\begin{array}{r|l} -36 & 7 \\ \hline 6 & -6 \end{array}$$

-c = -6; d = 6; (-6)x7+6 = -36, siendo (-6)x7< -36

La cadena que se obtiene es $C(6^-6_+)$ y tiene 12 casillas:



La otra cadena equivalente tiene como expresión aritmética reducida $\mathbf{5^-1_-}$ y corresponde a



$$\begin{array}{r|l} -36 & 7 \\ \hline -1 & -5 \end{array}$$

Se obtiene de la división por exceso ya que

$$-36 = -5x7+(6-7) = -(6-1)x7 -(7-6) = (6-1)^{-} (7-6)_{-} = \mathbf{5^{-}1_{-}}$$

En general se obtiene dos cadenas:

Una cadena $\mathbf{C(c^{-}d_{+})}$ procedente de la división por defecto

$$\begin{array}{r|l} ab & k \\ \hline d & -c \end{array}$$

siendo $c>0$; $d>0$; $ab = -cxk +d$, con $cxk<ab$

La otra cadena es $\mathbf{C((c\text{-}1)^{-}\ (k\text{-}d)_{-})}$ obtenida de la división por exceso

$$\begin{array}{r|l} ab & k \\ \hline d-k & -(c-1) \end{array}$$

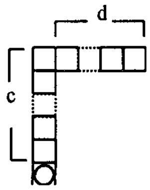
siendo $-c+1\leq0$; $d-k<0$; $ab = -(c-1)xk+(d-k)$; $-(c-1)xk>ab$.

Igual que antes, debemos discutir la expresión:

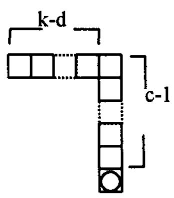
$$|-c|+|d| < |-(c-1)| + |-(k-d)|$$

que al ser $c>0$; $d>0$; $k-d>0$ se reduce a: $c+d < c-1 + k-d$, con lo que obtenemos $2d < k-1 \Rightarrow \mathbf{d<\frac{k-1}{2}}$. Por tanto:

- Si $\mathbf{d<\frac{k-1}{2}} \Rightarrow \mathbf{\#(c^{-}d_{+})} < \mathbf{\#((c\text{-}1)^{-}(k\text{-}d)_{-})}$ siendo la cadena $C(\mathbf{c^{-}d_{+}})$ el representante canónico:



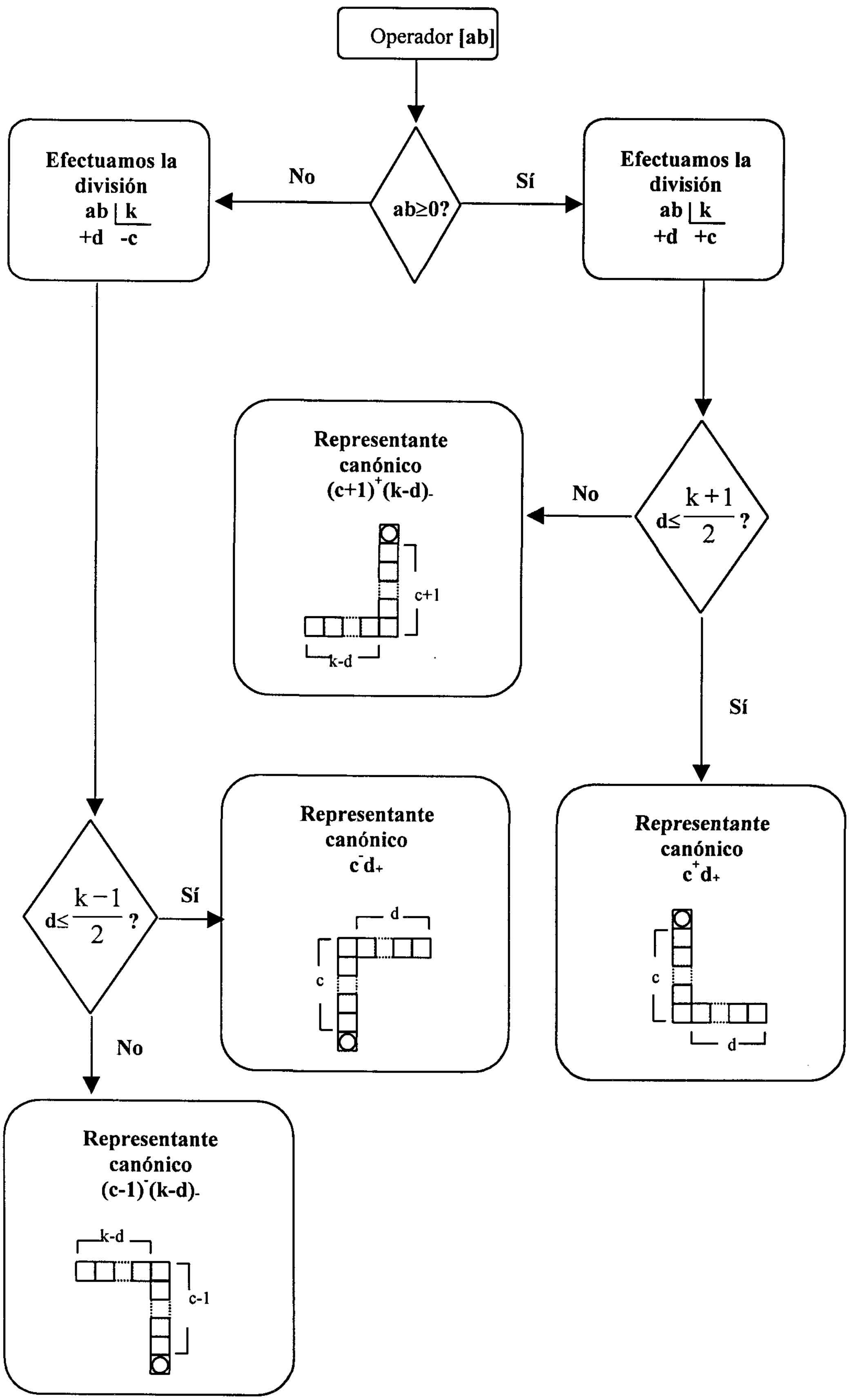
- $\mathbf{d>\frac{k-1}{2}} \Rightarrow \mathbf{\#(c^{-}d_{+})} > \mathbf{\#((c\text{-}1)^{-}(k\text{-}d)_{-})}$ siendo la cadena $\mathbf{C((c\text{-}1)^{-}(k\text{-}d)_{-})}$ el representante canónico:



- Si $\mathbf{d}=\frac{\mathbf{k-1}}{\mathbf{2}}$ (para lo cual **k** debe ser impar) $\Rightarrow$ las dos cadenas tienen igual número de casillas y podemos elegir como representante canónico cualquiera de ellas. En este caso, con el fin de tener un solo representante canónico para cada operador, optamos por la cadena **C(c^-d_+)** que corresponde al sentido de recorrido (subir, derecha).

Tenemos de este modo un criterio para determinar el representante canónico de un operador **[ab]** dado en forma decimal en la Tabla-100 de **k** columnas. Aparecen en este proceso los cuatro tipos de cadenas: (1) **"bajar, derecha"; "bajar , izquierda"; "subir, derecha" y "subir, izquierda".**

Esta caracterización de los representantes canónicos la esquematizamos con el siguiente organigrama:


Operador [ab]
ab≥0?
No
Sí
Efectuamos la división
ab | k
+d -c
Efectuamos la división
ab | k
+d +c
d≤ (k+1)/2 ?
No
Sí
Representante canónico
(c+1)+(k-d)-
c+1
k-d
Representante canónico
c+d+
c
d
d≤ (k-1)/2 ?
Sí
No
Representante canónico
c-d+
d
c
Representante canónico
(c-1)-(k-d)-
k-d
c-1

6.7. 4 Transformaciones geométricas y operadores invariantes

El problema que nos planteamos ahora es el siguiente: sea un operador [±ab], queremos averiguar qué isometrías dejan invariante a este operador en la tabla $T_{100(k}$. Es decir, para qué valores de **k** y para qué isometrías **I** la cadena libre **C** correspondiente al operador aditivo [±ab] resulta invariante respecto de la isometría **I**: **I(C) = C** en la tabla $T_{100(k}$. Para ello vamos a ir considerando diferentes casos.

En todos los ejemplos nos limitamos a estudiar el caso del operador [+ab] y su cadena libre asociada **C** en la tabla $T_{100(k}$, ya que el operador [-ab], simétrico del anterior, tiene un análisis similar basado en la cadena **C'**, simétrica de la cadena **C**.

6.7.4.1 Reflexión vertical $\mathbf{R_v}$

Sea un operador aditivo [+ab] y $\mathbf{R_v}$ la reflexión vertical considerada en el apartado 6.1. Tratamos de determinar el número **k** de columnas que debe tener la tabla $T_{100(k}$ para que la isometría $\mathbf{R_v}$ deje invariante al operador [+ab].

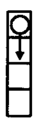
Hemos visto que las cadenas que son invariantes mediante $\mathbf{R_v}$ son de la forma $C = C(\overset{+}{c}\ 0_+)$, es decir, las que no tienen casillas horizontales. Nuestro problema consiste en determinar para qué valores de **k** el operador [+ab] tiene como representación geométrica en $T_{100(k}$ una cadena $C(\overset{+}{c}\ 0_+)$.

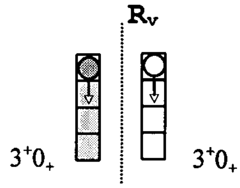
Veamos un ejemplo. Sea el operador [+21] cuya representación geométrica en $T_{100(k}$ queremos que sea la cadena $C(\overset{+}{c}\ 0_+)$; en este caso:

$$c0_{(k} = 21, \text{ o bien } c\,k = 21 \Rightarrow k = 21/c, \text{ siendo } c, k \in Z.$$

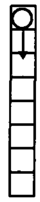
Los únicos pares de valores posibles para (c, k) son: (1, 21), (3, 7), (7, 3).

La condición para que la representación geométrica en la tabla $T_{100(k}$ del operador [+21] sea invariante mediante una simetría vertical $\mathbf{R_v}$ es que 21 sea un múltiplo de k.

La solución correspondiente a (3,7) es interpretada como que el operador [+21] tiene asociada la cadena  en $T_{100(7}$ que se expresa aritméticamente como $\mathbf{3^+0_+}$ y es invariante frente a $\mathbf{R_v}$:



La solución (1,21) indica que el operador [+21] tiene asociada la cadena  en $T_{100(21}$ cuya expresión aritmética es $1^{+}0_{+}$ y es asimismo invariante frente a $\mathbf{R_v}$.



La solución (7,3) indica que el operador [+21] tiene asociada la cadena en $T_{100(3}$ cuya expresión aritmética es $7^{+}0_{+}$ y es asimismo invariante frente a $\mathbf{R_v}$.

En general, la condición para que la representación geométrica en la tabla $T_{100(k}$ del operador [+ab] sea una cadena invariante mediante una simetría vertical R_v es que **ab** sea múltiplo de **k**.

El mismo razonamiento sirve para el operador [-ab], solo que en este caso la cadena resultante es $C(c^{-}0_{-})$, simétrica de $C(c^{+}0_{+})$.

6.7.4.2 Reflexión horizontal R_h

Las cadenas invariantes mediante una reflexión horizontal $\mathbf{R_h}$ son las de la forma $C= C\,(0^{+}d^{+})$, es decir, las que no tienen casillas verticales.

Recordamos que en la tabla $T_{100(k}$ todas las cadenas simples horizontales tienen un número de casillas $d < k$ ya que, en caso contrario, si $d \geq k$, la expresión $C\,(0^{+}d_{+})$ no corresponde a una cadena simple:

En efecto, si $d = k + n \Rightarrow C\,(0^{+}d_{+}) = C\,(1^{+}n_{+})$ siendo esta última expresión la de la cadena simple equivalente.

Nuestro problema consiste en determinar para qué valores de **k** el operador [+ab] tiene como representación geométrica en $T_{100(k}$ una cadena $C(0^{+}\,d_{+})$, con $d < k$.

Veamos un ejemplo con el operador [+21] cuya representación geométrica en $T_{100(k}$ queremos que sea la cadena $C(0^{+}d_{+})$.

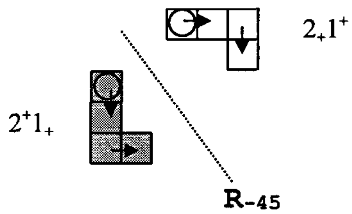
21=0xk+21; al ser positivo el operador y según el organigrama anterior, debe ser $\mathbf{d}\leq\frac{\mathbf{k+1}}{\mathbf{2}}$, o sea $21\leq\frac{k+1}{2}\Rightarrow k\geq 2x21-1=41$

En una tabla de 41 columnas o más, el operador [+21] se expresa en forma de fila y es invariante frente a una reflexión horizontal.

En general, para que el operador **[ab]** quede invariante frente a $\mathbf{R_h}$ debe ser el número k de columnas de la tabla mayor o igual que **2ab-1**.

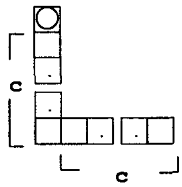
6.7.4.3 Reflexión oblicua $\mathbf{R_{-45}}$

Esta reflexión tiene su eje paralelo a la diagonal principal de la tabla. Dada una cadena reducida $C(c^{+}d_{+})$ tenemos: $R_{-45}\,[C(c^{+}d_{+})] = C(c_{+}d^{+})$, es decir la reflexión R_{-45} permuta las casillas horizontales con las verticales conservando el sentido de avance o retroceso:



La cadena transformada mediante R_{-45} no es una cadena simple, ya que su primer tramo es horizontal y el segundo vertical; ahora bien estas cadenas $C(c_{+}d^{+})$ y $C(d^{+}c_{+})$ son equivalentes. Es decir, $C(d^{+}c_{+})$ es la cadena simple transformada mediante R_{-45} de la cadena $C(c^{+}d_{+})$.

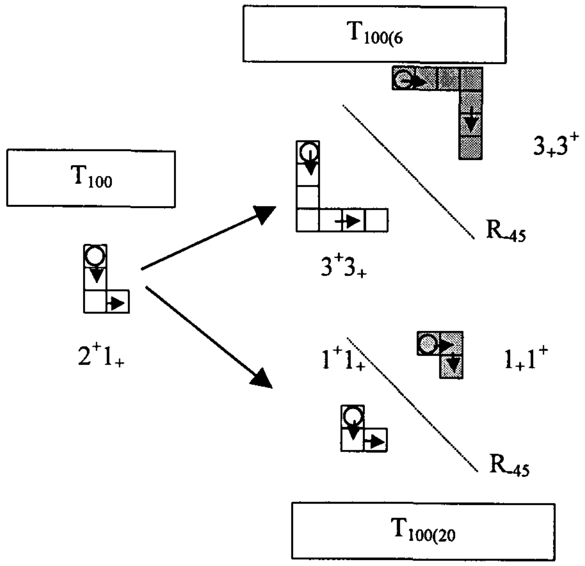
Por ello, las cadenas invariantes respecto a $\mathbf{R_{-45}}$ son aquellas cadenas simples de la forma $C(c^{+}c_{+})$, con igual número de casillas horizontales que verticales:



Otra vez nuestro problema consiste en determinar para qué valores de **k** el operador [+ab] resulta invariante respecto de la reflexión $\mathbf{R_{-45}}$, es decir tiene como representación geométrica en $T_{100(k}$ una cadena $C(c^{+}\,c_{+})$, con c < k.

Consideramos de nuevo el ejemplo del operador [+21] cuya representación geométrica en $T_{100(k}$ queremos que sea, en este caso, la cadena $C(c^{+}c_{+})$. Entonces: $cc_{(k} = c\ k + c = c\ (k+1) = 21 \Rightarrow k = \frac{21}{c} - 1$, con c>0.

Los pares de valores posibles para (c, k) son (1, 20) y (3, 6); el valor (7, 2) no es válido ya que se ha de cumplir que c < k. Es decir, el operador [+21] tiene asociada la cadena $C(1^{+}1_{+})$ en la tabla $T_{100(20}$; también dicho operador tiene asociada la cadena $C(3^{+}3_{+})$ en la tabla $T_{100(6}$; en ambos casos la cadena es invariante para la reflexión R_{45}. Este ejemplo lo esquematizamos con la siguiente figura:

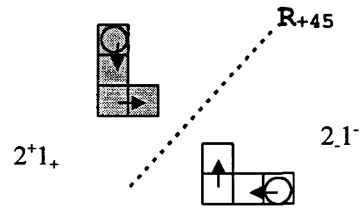


Igual resultado se obtiene al considerar el operador [-21] y la cadena del tipo $C(c^{-}c_{-})$, ya que se obtendría la expresión $(-c)k - c = -21 \Rightarrow k = \frac{21}{c} - 1$, con c>0.

En general, si consideramos el operador [+ab] y tratamos de determinar para qué valores de **k** su representación geométrica en $T_{100(k}$ es la cadena $C(c^{+}c_{+})$, se ha de cumplir: $cc_{(k} = c\ k + c = c\ (k+1) = ab$. Tenemos entonces que k $= \frac{ab}{c} - 1$, c < k, es decir, las condiciones buscadas se verifican para aquellos valores de **k** que son divisores de **ab** menos 1. Este resultado es igual el correspondiente al caso del operador [-ab] con la cadena $C(c^{-}c_{-})$.

6.7.4.4 Reflexión oblicua R_{+45}

Esta reflexión tiene su eje paralelo a la diagonal secundaria de la tabla. Dada una cadena reducida $C(c^{+}d_{+})$ tenemos: $R_{+45}\,[C(c^{+}d_{+})] = C(c_{-}d^{-})$, es decir la reflexión $\mathbf{R_{-45}}$ permuta las casillas horizontales con las verticales y las cambia de signo; tal es el caso de $R_{+45}\,[C(2^{+}1_{+})] = C(2_{-}1^{-})$ en T_{100}:

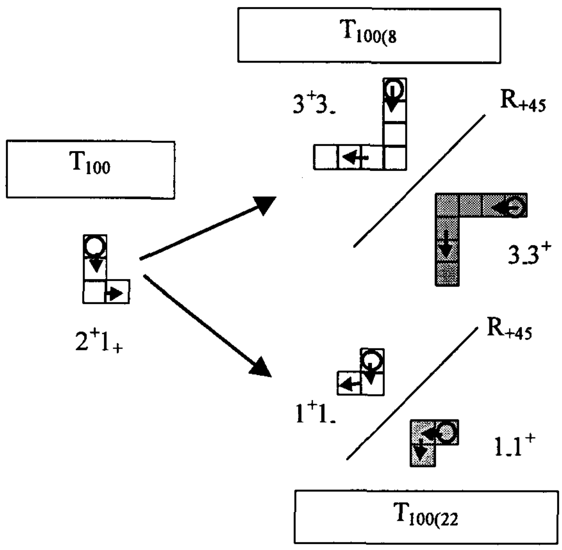


En este caso la cadena transformada tampoco es una cadena simple; la cadena simple equivalente a $C(c_{-}d^{-})$ es $C(d^{-}c_{-})$.

Por ello las cadenas invariantes respecto a $\mathbf{R_{+45}}$ son aquellas cadenas de la forma $C(c^{+}c_{-})$ o $C(c^{-}c_{+})$, con igual número de casillas horizontales que verticales, pero con distinto signo.

Nos proponemos determinar para qué valores de **k** el operador [+ab] resulta invariante respecto de la reflexión $\mathbf{R_{+45}}$, es decir, tiene como representación geométrica en $T_{100(k}$ una cadena $C(c^{+}c_{-})$, con $c < k$.

Consideramos el ejemplo del operador [+21] cuya representación geométrica en $T_{100(k}$ queremos que sea, en este caso, la cadena $C(c^{+}c_{-})$. Entonces: $c \times k - c = c\,(k-1) = 21 \Rightarrow k = \dfrac{21}{c} + 1$. Los pares de valores posibles para (c, k) son (1, 22) y (3, 8); el valor (7, 4) no es válido ya que se ha de cumplir que $c < k$. Es decir, el operador [+21] tiene asociada la cadena $C(1^{+}1_{-})$ en la tabla $\mathbf{T_{100(22}}$; también dicho operador tiene asociada la cadena $C(3^{+}3_{-})$ en la tabla $\mathbf{T_{100(8}}$; en ambos casos la cadena es invariante para la reflexión $\mathbf{R_{+45}}$ como muestra la siguiente figura:



Análogamente que en el caso anterior, este valor es igual que si tomamos el operador [-21] y la cadena del tipo $C(c^{-}c_{+})$, ya que obtendríamos la misma expresión al ser $(-c) \times k + c = -c\,(k-1) = -21 \Rightarrow k = \frac{21}{c} + 1$.

En general si consideramos el operador [+ab] y tratamos de determinar para qué valores de **k** su representación geométrica en $T_{100(k}$ es la cadena $C(\overset{+}{c}c_{-})$, se ha de cumplir: $c \times k - c = c\,(k-1) = ab$.

Tenemos entonces que $k = \frac{ab}{c} + 1$; $c < k$, es decir, las condiciones buscadas se verifican para aquellos valores de k que son divisores de **ab** más 1. Este resultado es igual para el caso del operador [-ab] con la cadena $C(c^{-}c_{+})$.

6.7.4.5 Giros y traslaciones

En relación con los giros ya hemos visto que el giro $\mathbf{G_{360}}$ deja invariante a todas las cadenas simples; los demás giros solamente mantienen invariante la cadena nula.

Igualmente, cualquier traslación mantiene invariante a todas las cadenas libres.

Es por ello que el problema de determinar los valores de **k** y las isometrías I para las que la cadena libre **C** correspondiente al operador aditivo [±ab] resulta invariante respecto de la isometría I: **I(C) = C** en la tabla $\mathbf{T_{100(k}}$, no tiene discusión especial en el caso de los giros y las traslaciones. Sea cual sea el valor de **k** una cadena libre **C** es invariante mediante el giro $\mathbf{G_{360}}$ y mediante cualquier traslación. Alternativamente, sea cual sea el valor de **k** una cadena libre **C** no nula, nunca es invariante para cualquier otro giro.

6.7.4.6 Resumen del estudio

La tabla 6.8 recoge, de forma resumida, las expresiones aritmética y geométrica de los operadores invariantes frente a las isometrías aquí consideradas, así como la relación numérica que debe haber entre el operador **[ab]** y el número de columnas de la tabla **k** para que dicho operador sea invariante frente a alguna de las isometrías consideradas:

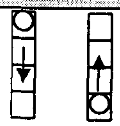
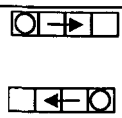
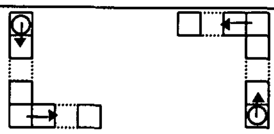
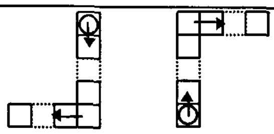
Isometría	Expresión aritmética	Expresiones geométricas	Relación entre **k** y el operador **ab**
R_v	$c^+0_\pm$ $c^-0_\pm$		ab=ck=$\dot{\mathbf{k}}$
R_h	$0^\pm d_+$ $0^\pm d_-$		$k \geq 2ab-1$
R_{-45}	c^+c_+ c^-c_-		$k = \frac{ab}{c} - 1;\ c<k$
R_{+45}	c^+c_- $c^- c_+$		$k = \frac{21}{c} + 1;\ c < k$
G_{360}	$c^\pm d_\pm$	Cualquier cadena	k>1
G_{90} G_{180} G_{270}	$0^\pm 0_\pm$		k>1
T_v	$c^\pm d_\pm$	Cualquier cadena	k>1

Tabla 6.8: Número de columnas **k** que debe tener una tabla-100 para que un operador dado [**ab**] sea invariante frente a las isometrías estudiadas.

6.8 Congruencias y patrones rectilíneos en T_{100}

Es una propiedad conocida que al sustituir en el Triángulo de Pascal cada número por su clase residual según un módulo determinado, las diversas clases se agrupan formando patrones en forma de triángulos semejantes a la disposición triangular de esa tabla.

La figura 6.25 muestra los patrones triangulares que forman las clases residuales módulo 2. Dichos triángulos están constituidos por la clase 0 (interior de los triángulos) y por la clase 1 (líneas de separación entre los triángulos).

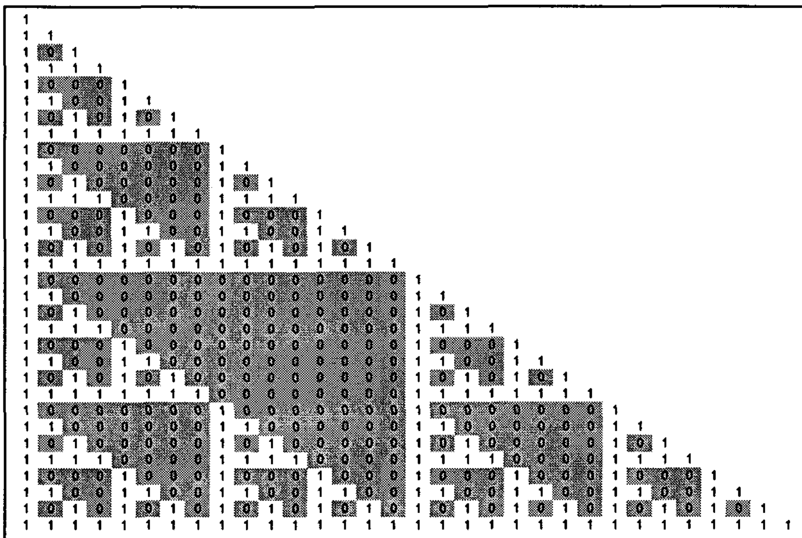


Figura 6.25: Patrones triangulares que adoptan las clases residuales módulo 2 en el Triángulo de Pascal.

En el caso de considerar un módulo mayor que 2, se obtienen otras familias de triángulos con las diferentes clases residuales.

Mediante el estudio de los patrones constituidos por las clases residuales en el Triángulo de Pascal se pueden abordar campos de las matemáticas como la divisibilidad, la congruencia y la combinatoria; la generación de estos patrones está relacionada con la obtención de fractales, y puede realizarse automáticamente por medio de programas informáticos; (Lund, 1979; Long, 1981; Eng & Casey, 1983; Wolfram, 1984; Seymour, 1986).

Adoptamos esta idea para considerar números congruentes y clases residuales sobre T_{100} y estudiar patrones rectilíneos en dicha tabla.

6.8.1 Interés y objetivos del estudio de los patrones rectilíneos en las tablas (*m, k*)

Cuando se consideran las clases residuales módulo **m** en T_{100}, los elementos de cada una de las clases de equivalencia se presentan alineados, constituyendo regularidades visuales que llamamos "***patrones rectilíneos***". La figura 6.26 muestra tres patrones rectilíneos distintos que se pueden considerar con la clase residual de 0 módulo 5 en T_{100} de 8 columnas. Estos patrones cambian al variar tanto el módulo **m** como el número **k** de columnas de la tabla. Utilizaremos la notación **(*m, k*)** para designar estas tablas.

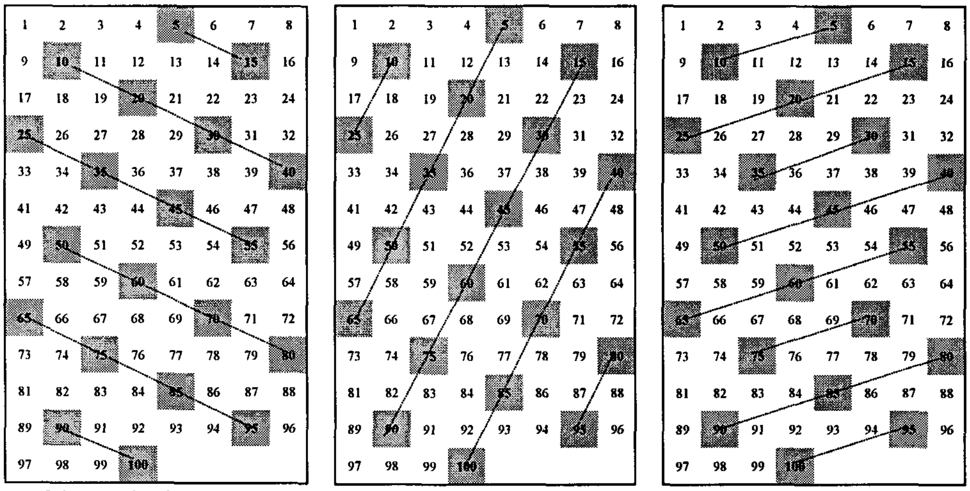


Figura 6.26: Tres patrones rectilíneos distintos formados por las clases residuales módulo 5 en la Tabla-100 de 8 columnas: tabla (5, 8).

La figura 6.27 muestra las regularidades de las tablas **(m, k)** cuando **m** y **k** varían entre 2 y 10. Se han destacado los elementos de una clase de residual, la del 1, ya que las demás clases se disponen de forma "paralela". Adjuntamos a esta figura en hoja aparte las tablas (m, k) en la que se destacan con diferentes colores los elementos de todas las clases residuales, y con un formato más amplio con el objeto de poder reconocer mejor los números que componen cada clase de equivalencia.

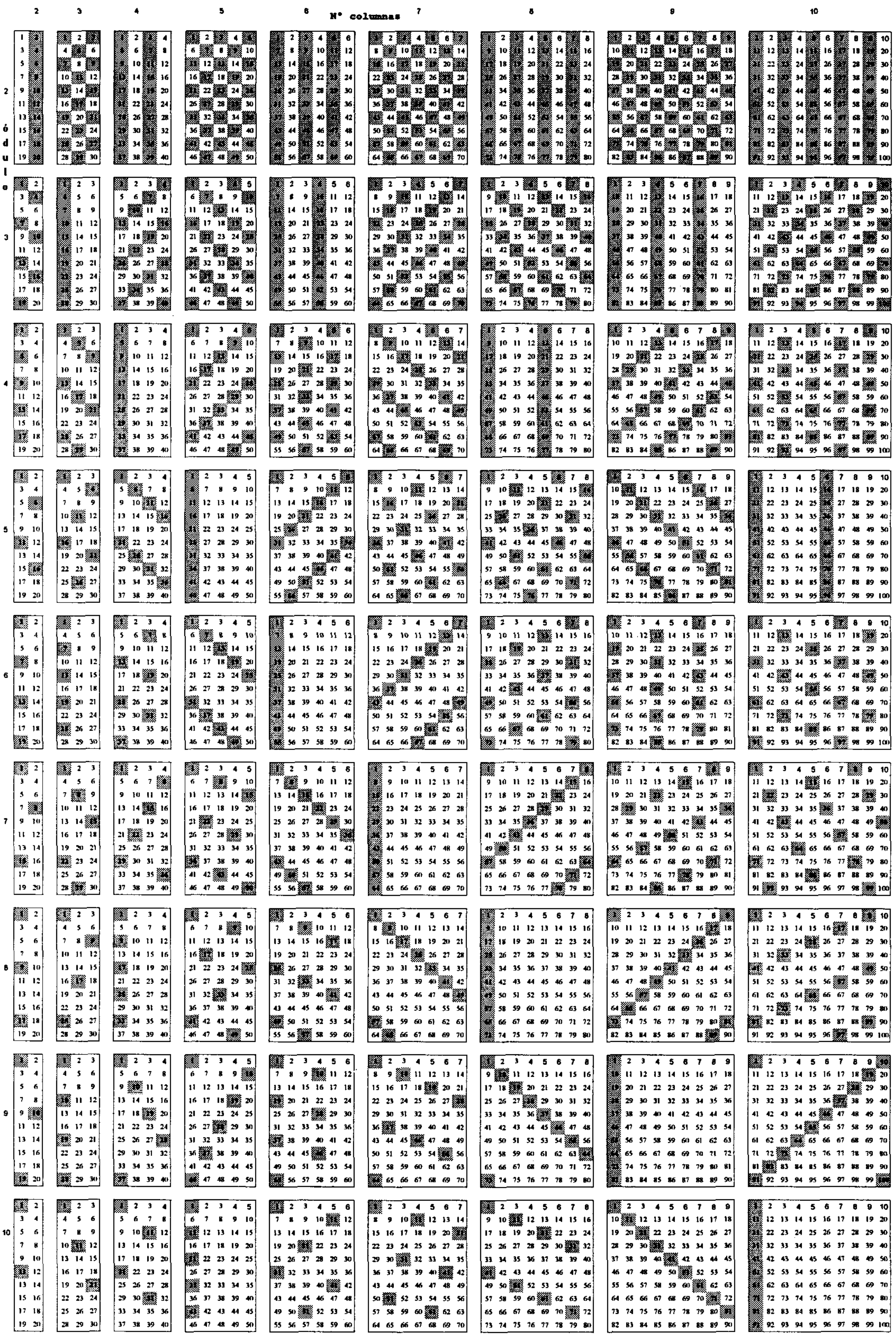
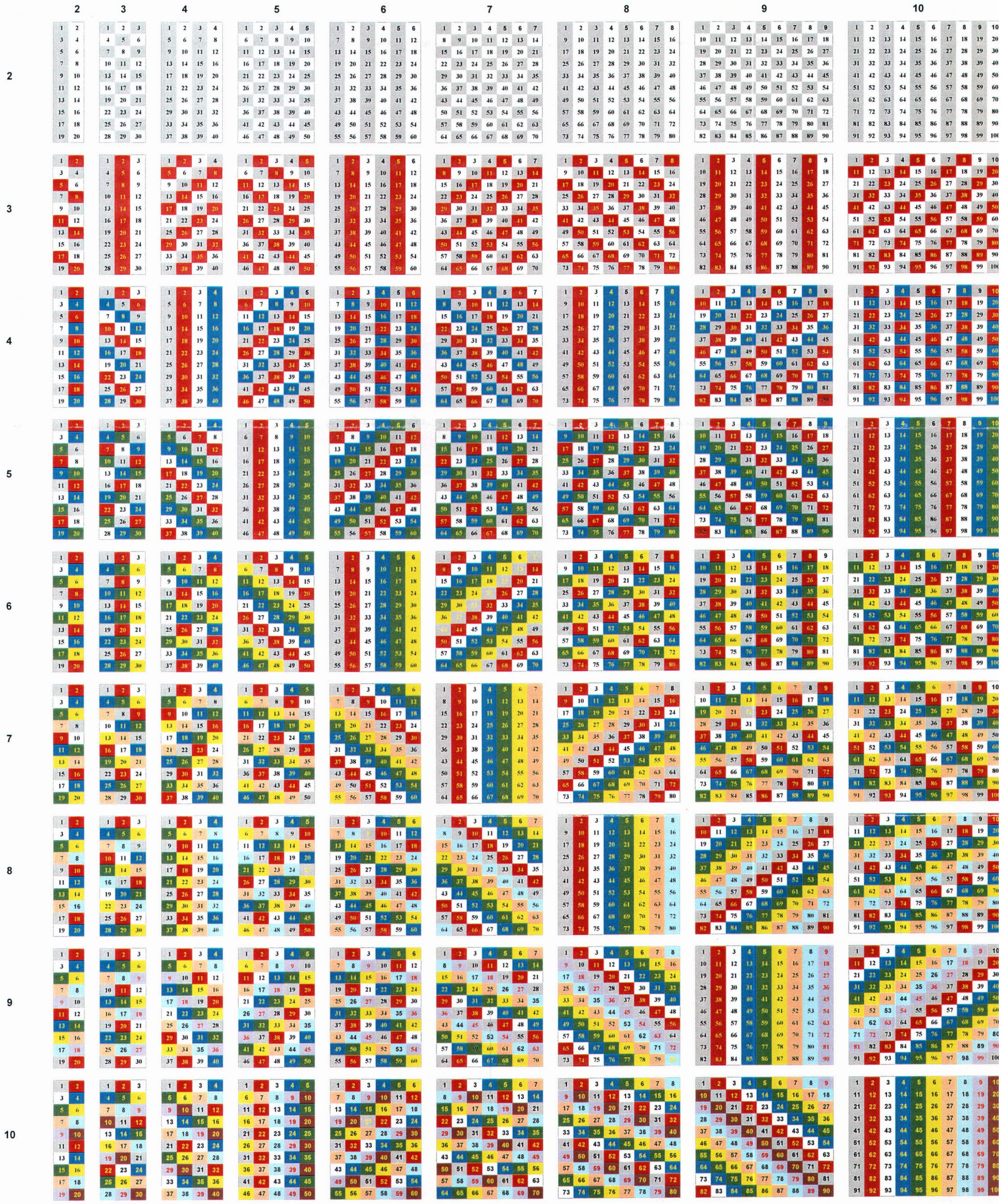


Figura 6.27: Patrones rectilíneos en las tablas (m, k)

Patrones rectilíneos en las tablas (m,k), con m=2,3,...,10; y k=2, 3,...,10

Nº columnas



Francisco Ruiz López
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nos proponemos estudiar las regularidades en las tablas **(m, k)** tanto desde un punto de vista visual-geométrico como con un enfoque analítico o funcional, buscando expresiones que reflejen propiedades con marcado carácter visual.

Tratamos de poner de manifiesto la utilidad que para este propósito tienen las cadenas simples, entendidas como representaciones geométricas de los operadores aditivos en las tablas (m, k), ya que participan de su doble condición de figuras geométricas con significado aritmético.

Mediante la observación de los patrones rectilíneos y las representaciones que utilizaremos, pretendemos:

1. Caracterizar "rectas" en T_{100} y encontrar expresiones aritméticas o ecuaciones que las representen.

2. Caracterizar los patrones rectilíneos originados en las tablas (m, k) teniendo en cuenta las rectas en T_{100}, las cadenas simples y los operadores aditivos asociados.

3. Utilizar las relaciones entre operadores aditivos y cadenas simples para establecer nuevas relaciones numéricas a través de los patrones, así como para demostrar aritméticamente propiedades observadas visualmente.

4. Encontrar criterios aritméticos para que los patrones originados en dos tablas (m, k) y (m, k') sean "simétricos" (en el sentido que se indicará).

5. Encontrar criterios aritméticos para que los patrones de una tabla (m, k) estén contenidos en los de otra tabla (m, k').

6. Utilizar recursos informáticos para obtener todos los patrones rectilíneos en cualquiera de las tablas (m, k), así como determinar los elementos que componen cada uno de los patrones.

6.8.2 Patrones rectilíneos en las tablas (m, k)

Con el fin de formalizar la idea de patrón rectilíneo, hacemos algunas consideraciones sobre diversos elementos que podemos encontrar en las tablas (m, k).

6.8. 2.1 Congruencias y clasificaciones en T_{100}

Sea $T_{100(k}$ la tabla de los cien primeros números organizada en **k** columnas y **m** el módulo respecto al cual vamos a clasificar los números de la tabla. La clasificación que se obtiene al considerar las clases residuales módulo **m** en dicha tabla la denominamos **(m, $T_{100(k)}$)**. Cuando no se produzca confusión escribiremos abreviadamente **(m, k)**, identificando de este modo la notación para la tabla con la clasificación en ella producida.

Debido a la elección de los números de la tabla, las clases se denominan:

clase(1), clase(2), clase(3), ..., clase(m-1), clase(m).

que notamos $\underline{1}$, $\underline{2}$, ..., $\underline{m-1}$, $\underline{m}$.

Si usamos el mismo color para resaltar los números congruentes entre sí módulo **m**, visualizamos mediante colores distintos las **m** clases de equivalencia resultantes. Una primera clase es la de los múltiplos de **m**, la siguiente es la de los múltiplos de **m** más 1, o clase de 1, y así hasta llegar a la clase de los múltiplos de **m** más (m-1) o clase de (m-1):

$$\underline{m}=\{\dot{m}\};\quad \underline{1}=\{\dot{m}+1\};\quad \underline{2}=\{\dot{m}+2\};\ \ldots,\ \underline{m-1}=\{\dot{m}+m-1\};$$

En el caso de la clasificación (2, 2), es decir, de la clasificación módulo 2 de $T_{100(2}$, se obtienen 2 clases de equivalencia, una formada por números pares y otra formada por números impares (Figura 6.28).

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Figura 6.28: Clasificación (2,2)

Cuando **m** aumenta también lo hacen el número de clases y el número de colores; el "sistema de colorear" genera dificultades de orden práctico para distinguir las clases, y es incómodo de gestionar. Por lo que se refiere a este documento, y mientras no sea necesario singularizar cada una de las clases, vamos a distinguir y colorear una sola clase módulo **m**; con carácter general colorearemos la clase de los múltiplos de **m**, distinguiendo el número en negrita y sombreando su celdilla correspondiente (Figura 6.27).

En los apartados siguiente, empezamos considerando las clases residuales módulo m en T_{100}, es decir las tablas (m, 10) y extenderemos los resultados a las tablas (m, k).

6.8.2.2 Rectas y puntos alineados en las tablas (m, 10)

Si observamos los puntos de una misma clase, por ejemplo los que corresponden a los múltiplos de **m**, en la clasificación **(m, k)**, vemos que estos puntos se disponen manteniendo ciertas alineaciones. Esta característica la podemos observar en la figura 6.26 para la clasificación (5, 8), en la figura 6.28 para la clasificación (2,2), y más generalmente en la figura 6.27.

En general, los múltiplos de **m** en la clasificación (m, k) no quedan alineados según una sola dirección; a veces encontramos varias posibilidades, como se observa en la figura 6.26 para la clasificación (5, 8).

Las posibilidades de elección son varias porque los puntos de una misma clase quedan distribuidos de **m** en **m**, por ello ocupan posiciones distintas en cada una de las filas de la tabla (salvo que **m** sea divisor de **k** o bien **k** sea divisor de **m**) hasta llegar a la fila que concluye en el punto **m k**. A partir de esta fila los puntos vuelven a ocupar las mismas posiciones que ya ocupaban en las filas anteriores. La distribución de los múltiplos de **m** sobre la tabla (m, k) es regular, está sometida a un ciclo.

Así lo vemos en la figura 6.26; los múltiplos de 5 están distribuidos de 5 en 5 e igual ocurre con puntos que corresponden a las demás clases residuales. Los múltiplos de 5 van ocupando posiciones distintas en las sucesivas filas hasta llegar a la fila que concluye en $5 \times 8 = 40$; a partir de esa fila las posiciones vuelven a repetirse.

Consideremos los elementos de la clase residual 4 en la tabla (4, 10). Desde el elemento 8, por ejemplo, podemos pasar a otros elementos de su misma clase de diversas formas, obteniendo conjuntos de elementos de la clase 4 alineados con 8 (Figura 6.29):

* {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96}. Este conjunto se compone de tres tramos; el salto o diferencia entre dos elementos consecutivos de este conjunto es constante e igual a 8, y visualmente podemos pasar de un elemento al siguiente mediante la cadena simple $C(1^{+} 2_{-})$.

* {8, 20, 32, 44, 56, 68, 80, 92}. También se compone de tres tramos, estando el último tramo constituido solamente por el 92. El salto es 12 y su cadena simple es $C(1^{+} 2_{+})$.

* {8, 36, 64, 92}. Consta de un solo tramo, su salto es 28 y la cadena simple correspondiente es $C(3^{+} 2_{-})$.

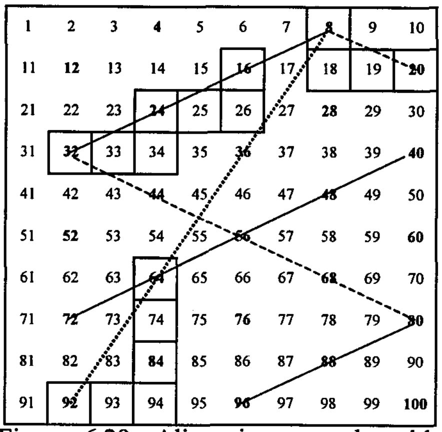


Figura 6.29: Alineaciones en la tabla (4, 10)

Observamos que en estos subconjuntos de la clase 4 la diferencia entre dos elementos consecutivos es siempre un múltiplo de 4, y que este salto lo podemos visualizar mediante una cadena simple representante de dicho operador aditivo múltiplo de 4. Tenemos pues una forma aritmética (**operador aditivo**) y otra visual (**cadena simple**) de expresar esta diferencia o salto entre los elementos consecutivos de los anteriores conjuntos.

Dado un subconjunto ordenado de elementos $\{ p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \}$ *de una clase residual en una tabla (m, 10) decimos constituye una* ***recta*** *cuando la cadena simple que permite pasar de* p_i *a* p_{i+1} *es igual que la cadena simple que permite pasar de* p_{i+1} *a* p_{i+2} *(con* $i = 1, 2, \ldots n-2$*), y en este caso decimos que dichos elementos están alineados. A dicha cadena simple le llamamos* ***cadena generadora de la recta.***

Una recta viene caracterizada por un punto P de la tabla y una cadena simple $C(\overset{+}{c}\, d_{\pm})$ generadora, que enlaza un elemento de la recta con el siguiente, y se obtiene a partir de P mediante la aplicación sucesiva de la cadena $C(\overset{+}{c}\, d_{\pm})$. Admitimos pues, la existencia de rectas que se componen a su vez de varios segmentos paralelos (Figura 6.30).

Hagamos algunas consideraciones sobre las ***características de estas rectas*** sobre las tablas (m, 10):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 6.30: Recta y cadena generadora en la tabla (4, 10)

a) Por la propia naturaleza finita y limitada de las tablas (m, 10), las rectas son conjuntos finitos discretos de puntos (asociados a números) del geoplano 10x10, cuyos límites son los de la tabla.

b) Las rectas sobre (m, 10) vienen determinadas por un punto y una cadena simple que, en este caso, proporciona la "pendiente" de la recta. También quedan determinadas dando un punto de la recta y el siguiente.

c) Según un sistema de referencia convencional, las rectas generadas por las cadenas de la forma $C(\overset{+}{c}\,d_+)$, o $C(\overset{-}{c}\,d_-)$ son rectas de pendiente negativa o decrecientes. Las rectas generadas por las cadenas de la forma $C(\overset{+}{c}\,d_-)$ o $C(\overset{-}{c}\,d_+)$ son rectas de pendiente positiva o crecientes.

Se identifica de este modo la pendiente de una recta en la tabla con su cadena generadora. De esta manera, además del operador aditivo que lleva asociado la cadena, atribuimos otro nuevo significado geométrico a la noción de cadena simple.

Consideramos que la recta definida por la cadena simple $C(\overset{+}{c}\,d_+)$ es la misma recta que la definida por la cadena $C(\overset{-}{c}\,d_-)$. Igualmente la recta definida por la cadena libre $C(\overset{+}{c}\,d_-)$ es la misma que la recta definida por la cadena libre $C(\overset{-}{c}\,d_+)$. En adelante consideraremos que las cadenas simples generadoras de rectas son de la forma $C(c^+\,d_\pm)$, con la componente vertical positiva, pudiendo ser positiva o negativa su componente horizontal, pues para estudiar las rectas sobre las tablas (m, 10) es suficiente considerar dos tipos de cadenas libres: $C(\overset{+}{c}\,d_+)$ y $C(\overset{+}{c}\,d_-)$. De este modo no asignamos un sentido de recorrido en las rectas, y representamos sus cadenas generadoras sin el círculo que indica el origen.

d) Del mismo modo que consideramos que las cadenas que rebasan un borde lateral de la tabla aparecen por el borde opuesto hasta completar su recorrido, las rectas, al llegar a un borde lateral de la tabla (m, 10), vuelven a aparecer por el lado contrario continuando el recorrido marcado por su cadena generadora. Este es el caso de la recta de la figura 30 que comienza en el 12, alcanza el 60 y continúa en 72 para finalizar en 96.

Si imaginamos la tabla enrollada en un cilindro, como se indicó en el apartado 6.4.1, los segmentos paralelos se reúnen como hélices sobre una superficie cilíndrica.

Si en lugar de considerar las tablas T_{100} hacemos la extensión a T_Z las rectas se prolongan indefinidamente.

e) Existen rectas con la misma pendiente, es decir, rectas determinadas por cadenas simples iguales que pasan por puntos distintos. En este caso decimos que ambas rectas son **paralelas**, como las dos rectas de la figura 6.31 (una de ellas punteada y la otra con trazo continuo).

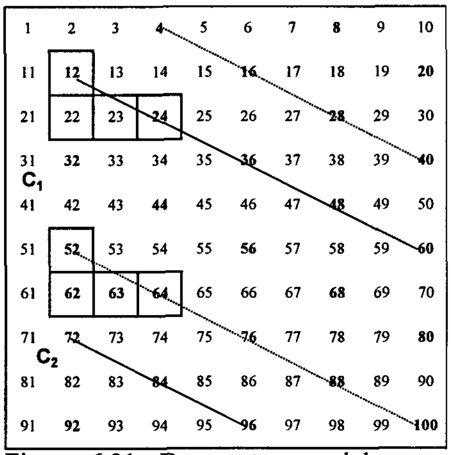


Figura 6.31: Dos rectas paralelas con cadenas generadoras iguales.

Existen rectas con pendientes distintas y con puntos comunes. En este caso decimos que las rectas se **cortan**. La figura 6.32 muestra dos rectas que se cortan en cuatro puntos: 24, 48, 72 y 96.

También existen rectas en las tablas (m, 10) con pendientes distintas y que no tienen puntos comunes, es decir, rectas que se **cruzan**. Este es el caso de la figura 6.33.

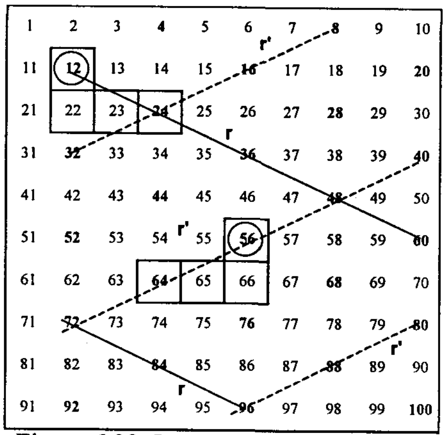


Figura 6.32: Las rectas r y r' se cortan en 4 puntos de la tabla.

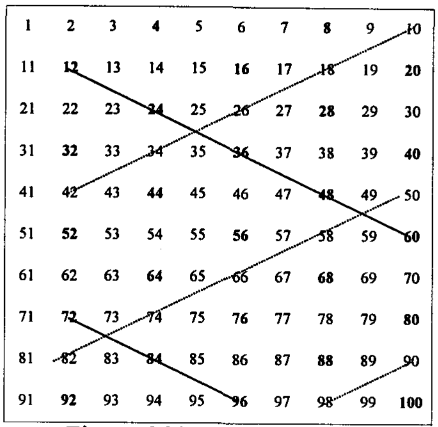


Figura 6.33: Rectas que se cruzan.

f) Podemos considerar rectas, que teniendo la misma pendiente se diferencian exclusivamente por tener el conjunto de elementos de una contenido en el de otra. Tal es el caso de las rectas definidas por las cadenas simples $C(1^+ 1_-)$ y $C(2^+ 2_-)$ (Ver tabla (3, 10) en la figura 6.27). El conjunto de puntos de la segunda recta es un subconjunto del de la primera, teniendo ésta sus elementos "más juntos". Notemos que cuanto más juntos están los elementos de una recta, menor es el número de casillas de su cadena generadora.

Llamamos **densidad** de una recta en una tabla (m, 10) ***al número de casillas que tiene su cadena generadora.***

6.8.2.3 Ecuaciones paramétricas de las *rectas* en las tablas (m, 10)

Aunque para el estudio de los patrones rectilíneos bastaría considerar a estos como familias de segmentos paralelos, (siendo entonces innecesaria esta concepción de recta compuesta de segmentos), el hecho de actuar la cadena simple $C(\overset{+}{c}\ d_{\pm})$ como cadena generadora de la recta, facilita la descripción geométrica de las alineaciones visuales observadas, e induce a considerar la existencia de rectas compuestas de segmentos paralelos en las tablas (m, 10).

Tratamos de encontrar razones aritméticas para el hecho de que las ***rectas*** a que nos referimos anteriormente se componen de distintos segmentos de igual pendiente, así como de escribir una expresión analítica o ecuación que las describa.

Para ello establecemos un sistema de coordenadas en T_{100} de acuerdo con las características de esta tabla. Convenimos en fijar el origen de coordenadas en el punto de la casilla 1, asignando a este punto las coordenadas (0,1) que tienen como primera componente la ordenada **y** (decenas) y como segunda componente la abscisa **x** (unidades) (Figura 6.34). De este modo cualquier número de la tabla proporciona las coordenadas de su punto asociado mediante sus propios dígitos, en el orden (decenas, unidades). Las coordenadas (3,8) corresponden al punto de la celdilla 38.

Eje X

Eje Y	(0,1)	(0,2)	(0,3)							(0,10)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1,1)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2,1)	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
(3,1)	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
(9,1)	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 6.34: Sistema de coordenadas en T_{100}. Las coordenadas vienen dadas por los dígitos de los números en el orden (decenas, unidades).

En este sistema los elementos P que no son múltiplos de 10 tienen por coordenadas las componentes de su escritura en base 10. El punto $P = 10P_y + P_x$ tiene por coordenadas (P_y , P_x). Los múltiplos de 10, es decir 10, 20, 30,...,100, tienen por coordenadas (0,10), (1,10), (2,10),...,(9,10), respectivamente, valores éstos (q, p) que también verifican que 10q+p coincide con el valor representado en T_{100}. En general los elementos de la tabla T_{100} vienen expresados mediante coordenadas, que son pares de enteros (y, x) con las restricciones

$$1 \leq x \leq 10; \quad 0 \leq y \leq 9 \qquad (1)$$

Con este sistema de coordenadas pretendemos describir una colección de elementos de T_{100} alineados con un elemento P de partida, siguiendo una ley de formación dada por una cadena simple $C(c^{+} d_{\pm})$, cuyo operador aditivo asociado es $10c \pm d$.

Determinemos una expresión que describa globalmente todos los elementos de la recta r', es decir una ecuación de la recta **r'**, de la figura 6.32 que pasa por la casilla 56 (de coordenadas (5,6)) cuya pendiente viene dada por la cadena simple $C(1^{+} 2_{-})$ y tiene como operador asociado +8. Utilizamos la forma paramétrica de la ecuación de una recta en el plano afín que pasa por el punto (5, 6) y cuyo vector de dirección es (1, -2):

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 6 - 2\lambda \\ y = 5 + \lambda \end{array}}$$

Dando valores enteros a λ obtenemos todo los pares (y_λ, x_λ) tales que $10y_\lambda + x_\lambda \in r'$ (Tabla 6.9).

La observación de la Tabla 6.9 proporciona básicamente dos puntos de reflexión:

1. La coordenada ***y*** aumenta de 1 en 1, mientras que la ***x*** disminuye de 2 en 2, lo que se explica por ser el operador +8 el que está asociado a la cadena simple generadora de la recta; se cumple que $1 \times 10 - 2 = 8$.

2. Las coordenadas (y, x) de los valores **10y+x** no siempre pertenecen a T_{100}.

Se han sombreado aquellas filas de la Tabla 6.9 cuyos valores no satisfacen las restricciones anteriormente mencionadas en (1) para x e y. Vemos por ejemplo que el elemento 24 se obtiene para las coordenadas y=1; x=14, y no para y=2; x=4 como le corresponde según el sistema de coordenadas elegido. Igual ocurre para los valores 8, 16 y 32, cuyas coordenadas tampoco pertenecen a T_{100}.

λ	y	x	**Casilla 10y+x**
-6	-1	18	**8**
-5	0	16	**16**
-4	1	14	**24**
-3	2	12	**32**
-2	3	10	**40**
-1	4	8	**48**
0	5	6	**56**
1	6	4	**64**
2	7	2	**72**
3	8	0	**80**
4	9	-2	**88**
5	10	-4	**96**

Tabla 6.9

Con la ecuación anterior, y verificando las restricciones sobre las coordenadas, solo obtenemos un *tramo* de la recta, el que pasa por el punto 56, compuesto por los elementos {40, 48, 56, 64, 72}. Para obtener los demás segmentos componentes de la recta, debemos repetir la ecuación para las coordenadas de alguno de los puntos por los que pasan los otros trozos de la recta, manteniendo la misma pendiente. Si elegimos los puntos (5, 6), (0, 4) y (8, 8) la recta r' queda descrita mediante las tres ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\begin{Bmatrix} x = 6 - 2\lambda \\ y = 5 + \lambda \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} x = 4 - 2\lambda \\ y = 0 + \lambda \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} x = 8 - 2\lambda \\ y = 8 + \lambda \end{Bmatrix}$$

con $0 \le x \le 10$; $1 \le y \le 9$

En general, si (P_y, P_x) son las coordenadas de uno de los elementos de la recta y las componentes de la cadena generadora son (K_y, K_x), las coordenadas del elemento "siguiente" de la recta vendrán dadas por el par ($P_y + K_y$, $P_x + K_x$,), donde K_y es un entero positivo (componente vertical de la cadena) y K_x es un entero positivo o negativo (componente horizontal de la cadena), siendo $10K_y + K_x = K$ el operador asociado a la cadena generadora.

Podríamos entonces escribir las ecuaciones paramétricas del segmento de r' en que se encuentra (P_y, P_x) del siguiente modo:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = P_x + \lambda K_x & \\ y = P_y + \lambda K_y & \text{con } 0 \le x \le 10;\ 1 \le y \le 9. \qquad (2) \end{array}}$$

El hecho es que con estas ecuaciones solamente describimos un trozo de la alineación, debiendo conocer algún punto de los otros trozos para describir toda la recta.

La Tabla 10 se obtiene de la Tabla 6.9 anterior añadiendo las dos columnas correspondientes a las coordenadas (y', x') de los valores 10y+x según el sistema de coordenadas que hemos adoptado, y que corresponden respectivamente al valor de las decenas y de las unidades de la expresión 10y+x. En esta tabla observamos que:

- Las coordenadas (0, 8) y (–1, 18) representan el mismo valor (el 8).

- Las coordenadas (0, 16), (1, 6), (-9, 7), (-19, 8) representan el mismo valor (el 16).

λ	y	x	Casilla 10y+x	y'	x'
-6	-1	18	8	0	8
-5	0	16	16	1	6
-4	1	14	24	2	4
-3	2	12	32	3	2
-2	3	10	40	3	10
-1	4	8	48	4	8
0	5	6	56	5	6
1	6	4	64	6	4
2	7	2	72	7	2
3	8	0	80	7	10
4	9	-2	88	8	8
5	10	-4	96	9	6

Tabla 6.10

En general, las coordenadas (y, x) proporcionan el mismo valor que las coordenadas (y', x'), o sea 10y+x = 10y'+x', y se cumple que

$$(y',x') = \begin{cases} (y,x) & si\ x \in [1,10] \\ (y+1,x-10) & si\ x \in [11,20] \\ (y+2,x-20) & si\ x \in [21,30] \\ \ldots & \\ (y-1,x+10) & si\ x \in [-9,0] \\ (y-2,x+20) & si\ x \in [-19,-10] \\ \ldots & \end{cases} \qquad (3)$$

Expresión que puede resumirse en:

$$\boxed{(y', x') = (y-\omega, x+10\omega), \text{ con } \omega \in Z; \qquad (4)}$$

Las coordenadas (y', x') de los elementos de la recta quedan obtenidas de las ecuaciones paramétricas anteriores (2), para un valor fijo (P_y, P_x) sin más restricciones que imponer a λ que sea tal que **10y+x** esté dentro de los límites de T_{100} , es decir comprendido entre 1 y 100, lo que equivale a $\frac{1-P}{K} \leq \lambda \leq \frac{100-P}{K}$, condición que se ha obtenido de las propias restricciones para x e y en (2).

En realidad lo que ocurre es que estamos manejando las distintas maneras de escribir un mismo número P en la forma 10y+x, es decir, las distintas soluciones enteras de la ecuación 10y+x=P, cuya expresión general es:

$$x = P_x + 10\omega;\ \ y = P_y - \omega\ ;\ \text{con } \omega \in Z. \qquad (5)$$

En resumen, tenemos la expresión

$$\boxed{\begin{array}{l} x = P_x + \lambda K_x \\ y = P_y + \lambda K_y \qquad \text{con } \frac{1-P}{K} \leq \lambda \leq \frac{100-P}{K} \qquad (6) \end{array}}$$

que proporciona las coordenadas (y, x) de los puntos generados por la cadena (K_y, K_x) a partir del punto (P_y, P_x). Si bien estas coordenadas cumplen que 10y+x está comprendido entre 1 y 100, dichas coordenadas no responden al sistema elegido, ya que no todos los pares (y, x) están en T_{100}. La expresión (4) que proporciona las coordenadas (y', x') de la recta en T_{100} corresponde a una traslación de las coordenadas (y, x) para cada valor de ω.

Geométricamente podemos interpretar esta explicación observando que, con el sistema de coordenadas establecido, T_{100} se repite indefinidamente por el plano, desplazada 10 unidades en horizontal y una en vertical.

La Figura 35 recoge esta situación para la recta r' estudiada anteriormente. La línea de trazo continuo es una representación gráfica de las ecuaciones (6), mientras que la línea punteada representa la recta r' con sus coordenadas (y', x') correspondientes a la expresión (4). La tabla central es T_{100} y corresponde al valor de ω=0. En ella están destacados los elementos de la recta r' con las coordenadas (y', x') elegidas para T_{100}.

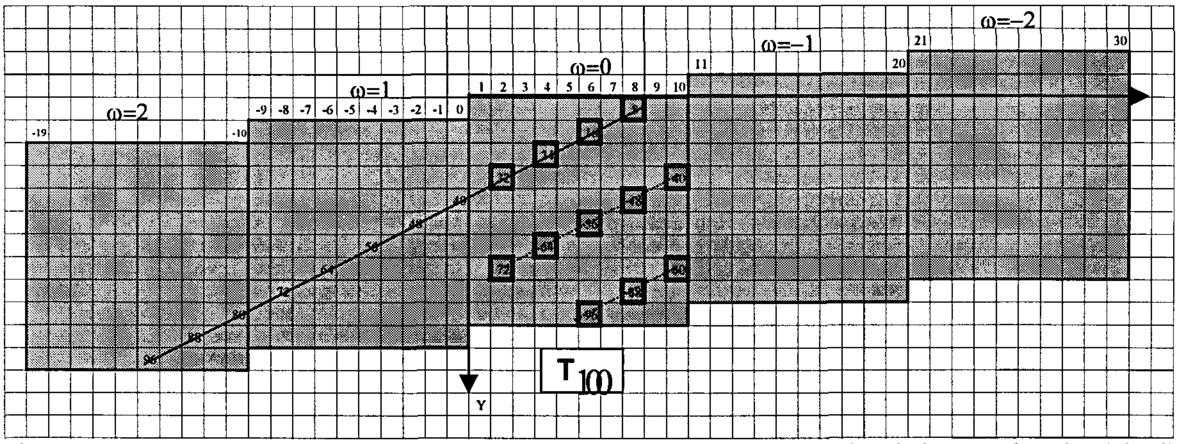


Figura 6.35: Representación gráfica de r' según la ecuación (6) (línea continua) y de las coordenadas (y', x') de los elementos de la recta r' en T_{100}.

Expresamos los dos pasos anteriores de la siguiente manera:

$$x' = P_x + K_x\lambda + 10\omega; \qquad (7)$$
$$y' = P_y + K_y\lambda - \omega;$$
$$(10\delta - 9) \leq P_x + K_x\lambda \leq 10\delta; \quad \text{con } \omega = 1 - \delta; \quad \lambda, \omega, \delta \in Z$$

El parámetro ω determina en qué tabla (figura 6.35) se encuentran los valores x e y de la recta. Cada una de estas tablas tienen unos límites para los valores x e y dados en (3).

En resumen, para describir los puntos de una recta en T_{100} originados mediante una cadena generadora (K_y , K_x) a partir de un punto (P_y, P_x), hemos obtenido las ecuaciones paramétricas (2) en el plano euclídeo y hemos efectuado la aplicación de Z^2 en T_{100} descrita por tramos en (3) y (4).

Las ecuaciones paramétricas anteriores (7) constituyen una forma analítica de describir las alineaciones en las tablas (m, 10), forma que proporciona argumentos para reflexionar de nuevo sobre la estructura visual-geométrica de $T_{100.}$ Hay que destacar el constante entrelazado entre la perspectiva aritmética-analítica y geométrica que se ha efectuado en este razonamiento.

Este proceso lo podemos extender a las tablas $T_{100(k}$ con cualquier número k de columnas, obteniendo formas analíticas de describir las alineaciones en las tablas (m, k):

$$y' = P_x + K_x\lambda + k\omega \qquad (8)$$
$$x' = P_y + K_y\lambda - \omega \quad ; \text{con } \omega \in Z$$
$$(k\delta - 9) \leq P_x + K_x\lambda \leq k\delta; \quad \text{con } \omega = 1 - \delta; \quad \lambda, \omega, \delta \in Z; \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

6.8.2.4 El conjunto P(m, k) de los patrones rectilíneos en la tabla (m, k)

Una vez determinadas las características y ecuaciones de las rectas, podemos dar una definición de patrón rectilíneo de manera más formal: un ***patrón rectilíneo*** *en una tabla (m, k) es una familia de rectas paralelas que pasan por todos los puntos de una clase residual de la tabla.* Los patrones gozarán entonces de las características de las rectas que lo forman: cadena generadora, pendiente, densidad. Al conjunto de patrones rectilíneos que se originan en una tabla (m, k) lo notamos por P(m, k).

Trataremos de justificar por qué se producen estas regularidades en las clasificaciones (m, k).

Como se ha visto, una misma clasificación (m, k) puede admitir diferentes patrones rectilíneos; los patrones rectilíneos de una clasificación también pueden variar, obteniéndose rectas con distintas pendientes.

Elegido un patrón rectilíneo para la clase de los múltiplos de **m**, cada una de las restantes clases de equivalencia y, por tanto, toda la tabla queda organizada según ese patrón. Esto es debido a que las **m** clases residuales de la clasificación (m, k) se disponen paralelamente entre ellas, es decir, cada clase se obtiene por traslación de la clase de **m** con vectores de traslación dados por los operadores aditivos [+1], [+2], ..., [+(m-1)] respectivamente. Es por ello que el estudio de los patrones rectilíneos en una clasificación se reduce al estudio de los patrones que presenta una clase residual cualquiera de la tabla, en nuestro estudio la clase de los múltiplos de **m**.

6.8.2.5 Patrones rectilíneos determinados por dos puntos

Sea la tabla (m, k), en la que destacamos los puntos que son múltiplos de **m**, es decir la clase de **m**. Sean n_1 y n_2 dos múltiplos de **m**, tales que la recta **r** determinada por ellos no contiene ningún otro múltiplo de **m** entre n_1 y n_2, es decir, n_1 y n_2 son puntos consecutivos para **r**; estos dos puntos determinan una cadena simple **C**. Hemos definido un ***patrón rectilíneo* p en (m, k)** como *el conjunto de rectas paralelas a **r***, es decir, *el conjunto de las rectas cuya pendiente viene dada por **C**.*

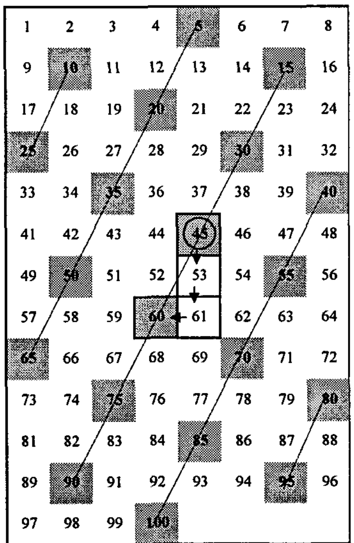


Figura 6.36: Patrón rectilíneo y cadena en la clasificación (5,8)

El patrón rectilíneo está determinado por dos números congruentes módulo **m**.

Cuando se considera un patrón **p** sobre la clasificación **(m, k)**, todos los puntos de la tabla quedan sobre una de las rectas que conforman **p**.

Ejemplo: en la figura 6.36 se presenta la clasificación (5, 8). Los puntos 45 y 60 son congruentes módulo 5; estos puntos definen una recta **r**, cuya pendiente viene dada por la cadena simple $C(2^{+}\ 1_{-})$, cuyo origen y final son 45 y 60, que son puntos consecutivos sobre **r.** El patrón **p** en este caso es el conjunto de rectas paralelas a **r**, cuya pendiente común la establece la cadena simple anterior de origen y final 45 y 60. Así se dice que **p** es el patrón rectilíneo determinado por los puntos 45 y 60.

6.8.2.6 Patrones rectilíneos y cadenas

Hemos visto en el ejemplo anterior que, al satisfacer ciertas condiciones, los números 45 y 60 determinan un patrón rectilíneo **p** en la tabla $T_{100(8}$. Estos dos números se relacionan mediante el operador $[+15] = [+17_{(8}]$. A este operador le corresponden las cadenas simples $C(2^{+}\ 1_{-})$ o $C(1^{+}\ 7_{+})$, con origen 45 y final 60, siendo la primera la de menor número de casillas o representante canónico. Todos los elementos de la recta **r** determinada por 45 y 60 se van relacionando dos a dos mediante la misma cadena $C(2^{+}\ 1_{-})$ e igualmente ocurre con los elementos de las rectas paralelas a **r**.

En general, sean dos números n_1 y n_2 congruentes módulo **m** en la tabla $T_{100(k}$:

$n_1 \equiv n_2\ (m) \Leftrightarrow n_2 = n_1 + h\ \ m$;

por tanto el operador $[+(h\ \ m)]$ relaciona a n_1 y n_2.

Puesto que estamos en la tabla $T_{100(k}$, escribimos el operador $[+(h \times m)]$ en base k: $[+(h\ \ m)] = [+\ cd_{(k}]$.

Para obtener la cadena correspondiente al operador, hemos de considerar:

$h\ \ m = c\ \ k + d$, si $d \leq k/2$;

$h\ \ m = (c + 1)\ k - (k-d)$, si $k/2<d<k$

luego la cadena determinada por n_1 y n_2 es:

$C(c^{+}\ d_{+})$, si $d \leq k/2$,

$C((c+1)^{+}\ (k-d)_{-})$, si $k/2<d<k$

Esta cadena simple aplicada a cualquier punto múltiplo de **m** da otro punto también múltiplo de **m.** Todos los puntos que se obtienen a partir de uno dado mediante la cadena obtenida anteriormente se relacionan entre sí por la congruencia módulo **m**, es decir, están en la misma clase.

Al conjunto de las cadenas simples de la forma $C(c^{+} d_{+})$ *o* $C(c^{+} d_{-})$ *con* $d< k$, *o cadenas generadoras de los patrones de la tabla (m, k), lo notamos por* $\mathcal{C}(m, k)$. *Dichas cadenas tienen como operador asociado un múltiplo positivo de m.*

6.8.2.7 Operadores aditivos y patrones rectilíneos

Sabemos que las cadenas simples constituyen una representación de los operadores aditivos en $T_{100(k}$ de modo que si la cadena en $T_{100(k}$ es $C(c^{+} d_{+})$ su operador es $[+ cd_{k)}]$ escrito en base **k**; análogamente obtenemos los operadores aditivos escritos en base **k** para las demás expresiones de las cadenas simples. Estos operadores quedan recogidos en la tabla 6.11:

Cadena simple	Operador aditivo en base k	Valor del operador
$C(c^{+} d_{+})$	$[+ cd_{k)}]$	ck+d
$C(c^{-} d_{-})$	$[- cd_{k)}]$	-ck-d
$C(c^{+} d_{-})$	$[+ (c-1)(k-d))_{k)}]$	ck-d
$C(c^{-} d_{+})$	$[- (c-1)(k-d))_{k)}]$	-ck+d

Tabla 6.11

Los operadores asociados a las cadenas **C**(m, k) son siempre positivos y múltiplos de **m**. A este conjunto de operadores lo notamos $\Omega^{+}(m, k)$.

6.8.2.8 Relaciones entre Patrones, Cadenas y Operadores en las tablas (m, k)

Entre los tres conjuntos **P** (m, k), **C** (m, k) y Ω^{+}(m, k) se establecen de manera natural las aplicaciones f, g y h, que recoge la figura 6.37, y que pasamos a estudiar.

La **correspondencia f** empareja a cada patrón de la tabla (m, k) con su cadena generadora correspondiente en **C** (m, k).

f ***es una aplicación biyectiva***, ya que:

- Todo patrón posee una cadena generadora.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}(m,k) \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathbf{f}"] \arrow[dr, "\mathbf{h}"'] & & \mathbf{C}(m,k) \arrow[dl, "\mathbf{g}"] \\ & \Omega^{+}(m,k) & \end{tikzcd}$$

Figura 6.37: Relaciones entre Patrones, cadenas y operadores en una tabla (m, k).

- Si dos patrones son iguales (en pendiente y densidad) entonces sus cadenas generadoras son también iguales.

- Si dos cadenas del conjunto **C** (m, k) son iguales, los patrones correspondientes también lo son.

- Cualquiera que sea la cadena de **C** (m, k) siempre existe un patrón de **P**(m, k) que tiene a dicha cadena como generadora del patrón.

De hecho, *un patrón rectilíneo* ***p*** *sobre la tabla* $T_{100(k}$ *es una* ***dirección*** *en esa tabla,* es decir una ***clasificación*** de los puntos de $T_{100(k}$ mediante una familia de rectas paralelas. El patrón rectilíneo lo establece la dirección de esa familia de rectas, y tal dirección coincide con la pendiente común a todas las rectas, dada por su cadena generadora. De ahí que exista una correspondencia biunívoca entre el conjunto **P** (m, k) de los patrones rectilíneos módulo **m** sobre la tabla $T_{100(k}$ y el conjunto **C** (m, k) de las cadenas simples sobre esa misma tabla, de la forma $C(\overset{+}{c}\, d_{+})$ o $C(\overset{+}{c}\, d_{-})$ con las limitaciones antes indicadas.

De este modo es posible afirmar que ***la familia de cadenas simples determina los patrones rectilíneos sobre la tabla*** $T_{100(k}$ ***y recíprocamente.***

La **correspondencia g** vincula cada cadena de **C** (m, k) con su operador asociado.

Esta correspondencia ***g es una aplicación sobreyectiva*** ya que:

- Toda cadena de **C** (m, k) tiene un único operador asociado positivo y múltiplo de **m** en el conjunto Ω^+(m, k).

- Para cualquier operador múltiplo de **m** positivo, existe siempre al menos una cadena C(c^+ $d_\pm$) del conjunto **C** (m, k) que tiene como operador asociado a dicho múltiplo de **m.** Esta cadena puede ser el representante canónico de la cadena libre que determina el operador.

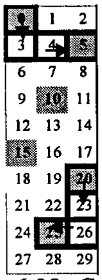


Figura 6.38: Cadenas distintas con el mismo operador en la tabla (5,3).

En cambio, ***la aplicación g no es inyectiva***, ya que para cada operador positivo [+$cd_{k)}$] encontramos dos cadenas que tienen a dicho operador asociado. Estas cadenas son C(c^+ d_+) y C($(c+1)^+$ $(k\text{-}d)_-$). Tal es el caso de la tabla (5,3) y el operador +5. Existen las cadenas simples C(1^+, 2_+) y C(2^+, 1_-) a las que corresponden el operador +5 pero generan patrones con pendientes 1/2 y -2 distintas (Figura 6.38).

Por tanto la correspondencia **h** entre los conjuntos P (m, k) y Ω^+(m, k), composición de **g** y **f,** es una aplicación sobreyectiva si bien no es inyectiva.

De lo anterior se deduce que cada patrón rectilíneo en una tabla (m, k) determina un operador aditivo en dicha tabla, que es el operador aditivo asociado a la cadena generadora del patrón. En cambio no se puede generar un único patrón rectilíneo con un operador dado, ya que éste puede estar asociado a dos cadenas simples generadoras. La figura 6.39 ofrece un esquema gráfico de estas relaciones.

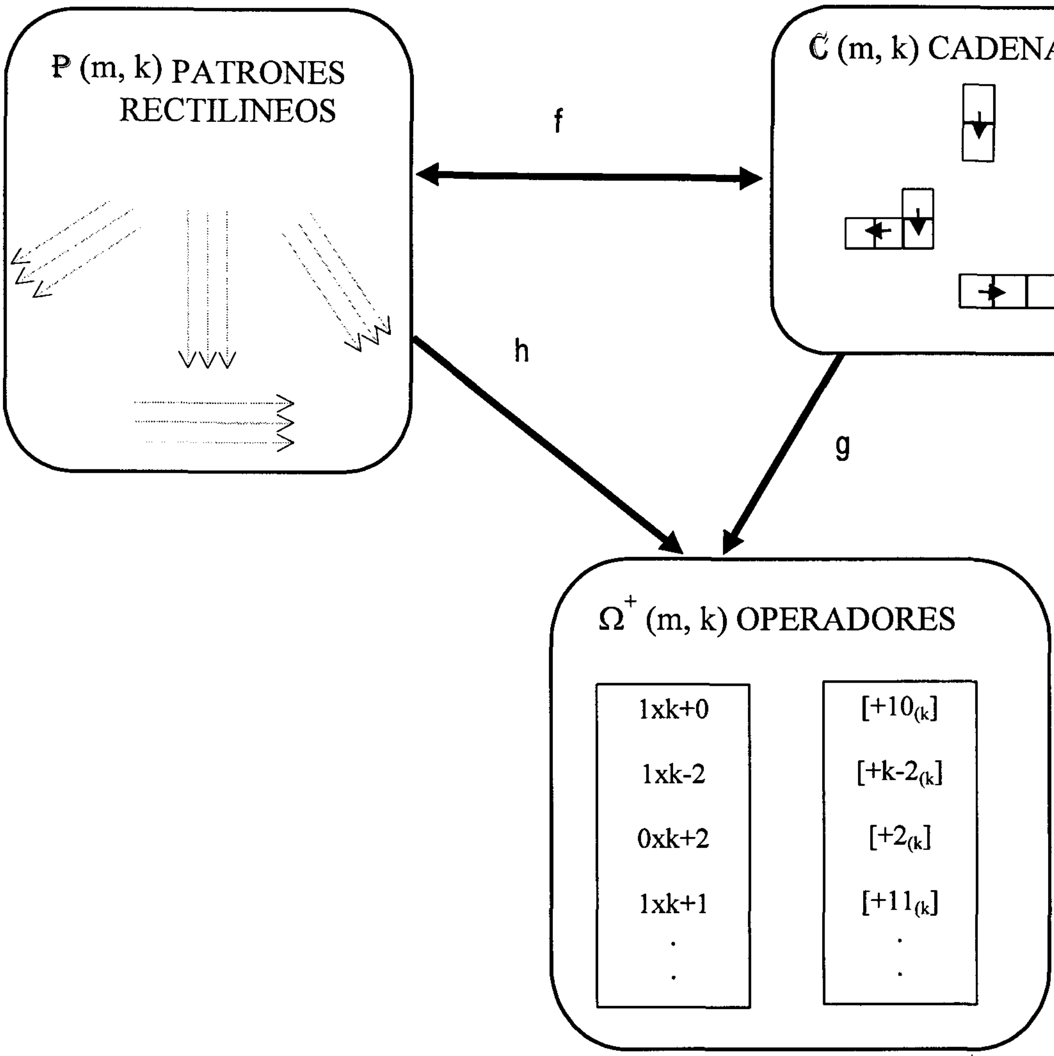


Figura 6.39: Esquema de las aplicaciones entre los conjuntos P(m,k), C(m,k) y Ω^{+}(m,k).

6.8.3 Regularidades visuales y aritméticas en las tablas (m, k)

Una vez obtenidas las diferentes relaciones entre los conjuntos de patrones, cadenas y operadores en una tabla (m, k), pretendemos formalizar en un marco aritmético, algunas propiedades de tipo visual que se pueden apreciar en el conjunto de tablas de la figura 6.27. Para ello hagamos antes unas consideraciones:

a) De acuerdo con el punto anterior 8.2, decir que *una tabla (m, k) contiene un determinado patrón rectilíneo* $p \in \mathcal{P}(m, k)$ *equivale a decir que la cadena generadora de dicho patrón es* $C(c^{+}\ d_{\pm}) \in \mathcal{C}(m, k)$, *siendo* $d<k$. *En términos de operadores aditivos, esto supone que los elementos que une dicha cadena generadora son congruentes módulo m, es decir, se cumple que* $c\,k \pm d = \dot{m}$.

Podemos escribir entonces[1] que

$$\boxed{\exists p \in \mathcal{P}(m, k) \Leftrightarrow \exists c,\ d \in N;\ d< k,\ \text{tal que}\ c\,k \pm d = \dot{m}}$$

En adelante, por comodidad de escritura, consideraremos las cadenas en general con sus componentes **c** y **d** tomadas en sentido positivo, cuando no suponga una pérdida de generalidad en el razonamiento, y las escribiremos mediante la expresión $C(c^{+}\ d_{+})$.

b) *Cada patrón está caracterizado por su* ***pendiente*** *y* ***densidad***. La cadena generadora del patrón queda perfectamente determinada por ambos parámetros, ya que la ***pendiente*** es el cociente **±d/c** y la ***densidad*** es la suma de celdillas de la cadena, es decir **c+d**. Cabe pues decir que *un patrón contiene a otro que tenga la misma pendiente y menor densidad que él*, en el sentido de que el conjunto de elementos que constituyen el segundo patrón está contenido en el conjunto de elementos que constituyen el primero. Así por ejemplo el patrón generado por la cadena $C(1^{+}\ 1_{+})$ contiene al patrón generado por $C(2^{+}\ 2_{+})$.

[1] La notación $\dot{m}$ se refiere a λm (siendo λ entero). En adelante, al escribir expresiones como $\dot{m}-a$ y $\dot{m}+a$ nos referimos al mismo múltiplo de m, es decir para el mismo valor de λ. En cambio al escribir $\dot{m}+\dot{m}=\dot{m}$, ó $c\,\dot{m}=\dot{m}$, el valor de λ cambia.

Los patrones quedan mejor resaltados cuando sus respectivas cadenas generadoras tienen menos celdillas, es decir ***cuando el número que proporciona la densidad del patrón es menor.*** Así ocurre por ejemplo con los patrones generados por las cadenas $C(1^+\ 1_+)$, $C(1^+\ 1_-)$ y $C(1^+\ 0)$, cuya densidad es 1 ó 2.

c) Hemos visto que cada operador que sea múltiplo de **m** tiene asociadas dos cadenas simples en la tabla (m, k), que son de la forma $C(c^+\ d_+)$ y $C((c+1)^+\ (k\text{-}d)_-)$, siempre que las componentes horizontales sean menores que el número de columnas, es decir cuando $d<k$. Por tanto en estas condiciones podemos afirmar que ***si una tabla (m, k) posee un patrón rectilíneo generado por una cadena simple $C(c^+\ d_+)$ también tiene al patrón rectilíneo generado por la cadena simple equivalente $C((c+1)^+\ (k\text{-}d)_-)$.***

En efecto: $C(c^+d_+) \in C(m, k) \Leftrightarrow ck+d = \dot{m} \Leftrightarrow (c+1)k\text{-}\ (k\text{-}d) = ck+k\text{-}k+d = \dot{m} \Leftrightarrow C((c+1)^+\ (k\text{-}d)_-) \in C(m, k)$

d) Si nos fijamos en las tablas (2,2), (2,4), (2,6),...(2,2h) de la figura 40, en todas ellas los elementos de una misma clase se relacionan mediante los mismos operadores, que son los múltiplos de 2, pero en cambio estas tablas no tienen los mismos patrones, ya que por ejemplo, el patrón generado por la cadena $C(1^+2_+)$ (patrón de pendiente -2) no se presenta en la tabla (2,2), debido a que el número de columnas es insuficiente para generar dicho patrón.

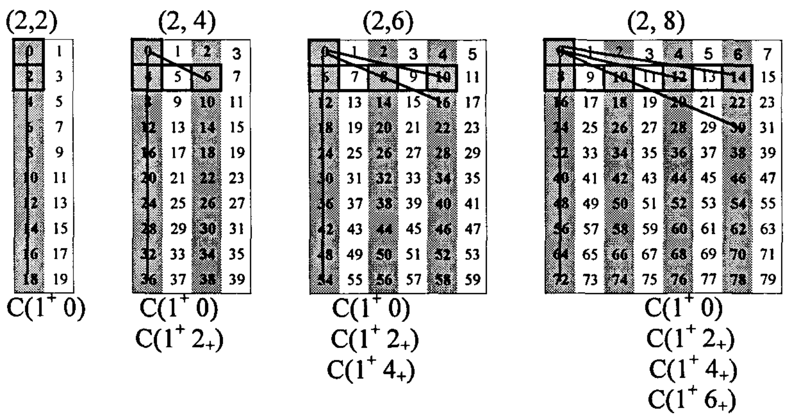


Figura 6.40: El número de patrones aumenta al aumentar el número de columnas.

Hay que considerar entonces el papel que juega el número de columnas **k** en la configuración de los patrones rectilíneos. Manteniendo el módulo **m** fijo, a medida que aumenta el número de columnas, aumenta también el número de patrones en la tabla.

Por ello, al comparar los patrones de dos tablas (m, k) y (m, k') con k'>k, no encontraremos coincidencia exacta en el conjunto de patrones rectilíneos de ambas tablas; existirá una "relación de inclusión" de los patrones de (m, k) en los de (m, k'). Si un patrón de cadena generadora $C(c^+ d_+)$ es común a ambas tablas se cumple que d<min(k, k').

6.8.3.1 Expresiones aritméticas de regularidades visuales en las tablas (m, k)

Existen numerosas regularidades visuales en las tablas (m, k) que recoge el Apéndice A. Algunas de estas regularidades pueden ser expresadas en términos aritméticos aprovechando la utilidad de las cadenas simples para describir los patrones rectilíneos, junto con la interpretación de operador aditivo que tiene asignada cada cadena.

Una primera cuestión que abordaremos es el estudio de ***cuándo dos tablas tienen patrones comunes.***

1. De acuerdo con la consideración (d) anterior, veamos que

Si dos tablas tienen un patrón común cuya componente vertical es un número c>1 primo con el módulo m, entonces tienen en común todos los patrones de la tabla de menor número de columnas.

Nos referiremos a estas tablas como ***tablas con patrones anidados.***

En efecto: sean (m, k) y (m, k') dos tablas con un patrón común generado por la cadena simple $C(c^+ d_+)$, con c>1; m.c.d.(c, m) = 1; d<k. [2]Sea $C(e^+f_+)$ la cadena generadora de otro patrón cualquiera de (m, k). Por ser $C(c^+d_+)$ cadena generadora de un patrón en (m, k) y en (m, k'), según la consideración (a) podemos escribir:

$$c\,k+d = \dot{m}$$

[2] Pondremos sin perder generalidad que k<k'.

$c\,k' + d = \dot{m}$ (11)

Restando estas dos igualdades obtenemos $c(k-k') = \lambda m \Rightarrow c$ divide a λm, pero como c es primo con m, debe dividir a λ, teniendo

$$k-k' = m\,\frac{\lambda}{c} = m\,\lambda' = \dot{m} \Rightarrow k = k' + \dot{m}$$

Como $C(e^+ f_+)$ es una cadena generadora de un patrón en (m, k) obtenemos

$e\,k + f = \dot{m} \Rightarrow e(k' + \dot{m}) + f = \dot{m} \Rightarrow ek' + f = \dot{m} \Rightarrow$ la cadena $C(e^+ f_+)$ también es generadora de un patrón en (m, k').

Si no se impone la condición de que la componente vertical sea un número distinto de la unidad primo con m, la propiedad no es cierta, ya que, por ejemplo las tablas (6, 5) y (6, 7) tienen en común el patrón de $C(3^+ 3_-)$ y en cambio no tienen todos los patrones comunes, como es el caso del patrón de $C(1^+ 1_+)$ que está en la tabla (6, 5) pero no en la tabla (6, 7), como muestra la figura 6.41.

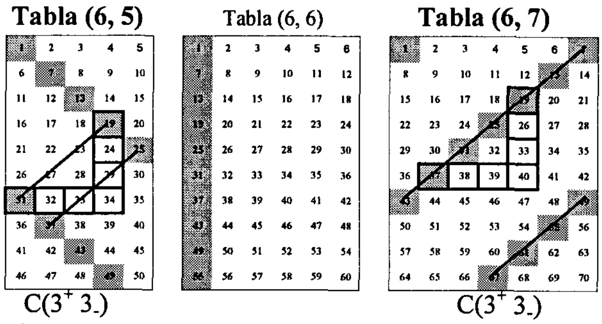


Figura 6.41: Las tablas (6, 5) y (6, 7) tienen en común el patrón de $C(3^+ 3_-)$ pero no tienen todos los patrones de (6, 5) comunes, al no ser la componente vertical 3 número primo con el módulo 6.

2. L***as tablas de la forma (m, m), que ocupan la diagonal principal en la figura 6.27, contienen al patrón generado por la cadena $C(1^+ 0_+)$.***

3. ***Las tablas en las que k es múltiplo de m, tienen también el patrón generado por la cadena $C(1^+ 0_+)$.***

4. ***En general, las tablas (m, $\dot{m}$) tienen los patrones generados por la cadena $C(c^+ d_+)$, cuando c y d son múltiplos de m.*** Esto es

$C(c^+ (\lambda m)_+) \in C(m, \dot{m})$, ya que $c\,\dot{m} + \lambda m = \dot{m}$.

5. ***Las tablas (m,k) y (m, k+m) son tablas con patrones anidados*** (tienen todos los patrones posibles en común), ya que

$C(c^+ d_+) \in C(m, k) \Leftrightarrow c\ k+d = \dot{m} \Leftrightarrow c\ k+d + c\ m = \dot{m} \Leftrightarrow c\ (k+m) + d = \dot{m} \Leftrightarrow$ $C(c^+ d_+) \in C(m, k+m)$

6. ***Si dos tablas (m, k) y (m , k'), son tales que el número de columnas de ambas k y k' son congruentes módulo m, dichas tablas son tablas con patrones anidados:***

En efecto: al ser $k \equiv k'\ (m) \Rightarrow k\text{-}k' = \dot{m} \Rightarrow k = k' + \dot{m}$ y se cumple que

$C(c^+ d_+) \in C(m, k) \Rightarrow c\ k + d = \dot{m} \Rightarrow c\ (k' + \dot{m}) + d = \dot{m} \Rightarrow c\ k' + d = \dot{m} \Rightarrow$ $C(c^+ d_+) \in C(m, k')$; la implicación recíproca es análoga.

La propiedad 5 es un corolario de la propiedad 6, ya que k y k+m son congruentes módulo m.

Una propiedad recíproca de la propiedad 6 se obtiene con la condición de que el valor de la primera componente de las cadenas generadoras de los patrones sea un número c >1 primo con el módulo **m**:

7. ***Dadas dos tablas (m, k) y (m, k'), si ambas tienen al menos un patrón generado por una cadena $C(c^+ d_+)$ tal que c>1 es primo con m, entonces los números de columnas k y k' de ambas tablas son congruentes módulo m:***

Al ser la cadena $C(c^+ d_+)$ generadora de un patrón en (m, k) y en (m, k') se cumple

$$c\ k + d = \dot{m}$$

$$c\ k' + d = \dot{m}$$

restando ambas igualdades resulta $c(k\text{-}k') = \dot{m} = m\ h$, lo que equivale a decir que **c** divide a **m h**, pero como **c** es primo con **m**, **c** divide a **h**. Así pues tenemos que

$k\text{-}k' = m\ \frac{h}{c} = \dot{m} \Rightarrow k \equiv k'\ (m)$

La condición anterior de que *c sea primo con **m*** es necesaria. Veamos un ejemplo: las tablas (6, 5) y (6, 7) son tablas que tienen al menos en común el patrón generado por $C(3^+ 3_-)$; el m.c.d.(3, 6) $\neq$ 1 y el número de columnas de ambas tablas **no** cumple que $7 \equiv 5$ (6) (Ver figura 6.27).

8. La caracterización aritmética que hemos efectuado en la consideración (a) es útil a la hora de averiguar en qué tablas (m, k) se presenta un patrón generado por una cadena $C(c^+ d_+)$, con d<k.

Vemos en la figura 6.27 que el patrón generado por la cadena $C(2^+ 1_+)$ se encuentra en la tabla (5, 2) y nos proponemos averiguar qué otras tablas (m, k) tienen este patrón. De la condición de pertenencia $C(2^+ 1_+) \in C(m, k)$ obtenemos

$$2k+1 = \dot{m} = \lambda m \Rightarrow k = \frac{\dot{m}-1}{2} = k = \frac{\lambda m - 1}{2};$$

las tablas buscadas serán de la forma $(m, \frac{\lambda m - 1}{2})$ que se obtienen para valores enteros positivos de m y λ.

En la tabla 6.12 se muestran algunas tablas que contienen el patrón generado por la cadena $C(2^+ 1_+)$.

m	**λ**	$k = \frac{\lambda m - 1}{2}$	**(m, k)**
3	3	4	(3, 4)
	5	7	(3, 7)
	7	10	(3, 10)
	9	13	(3, 13)
			$(3, 1+\dot{3})$
4	-	-	-
5	1	2	(5, 2)
	3	7	(5, 7)
	5	12	(5, 12)
	7	17	(5, 17)
			$(5, 2+\dot{5})$
...	...	...	...

Tabla 6.12

Las tablas que tienen el patrón generado por la cadena $C(1^+ 0)$ se obtienen análogamente y son de la forma $(m, \dot{m})$, es decir el conjunto de tablas que tienen el patrón "columna" es {(2, 2); (2, 4); (2, 6);... (3, 3); (3, 6); (3, 9),...}.

El patrón generado por la cadena $C(2^+ 0)$ se presenta en las tablas de la forma $(m, \frac{\dot{m}}{2})$, o sea {(2, 2); (2, 3); (2, 4);... (3, 3); (3, 6); (3, 9);...}.

El patrón generado por la cadena $C(c^+ \, 0)$ se presenta en las tablas de la forma $(m, \overset{\bullet}{\frac{m}{c}})$.

Generalizando este proceso obtenemos que

> ***Las tablas que contienen al patrón generado por la cadena $C(c^+ \, d_+)$ son de la forma $(m, \overset{\bullet}{\frac{m-d}{c}})$, con $d<\overset{\bullet}{\frac{m-d}{c}} \in N$***

Tenemos de esta forma un criterio que permite saber si un patrón generado por $C(c^+ \, d_+)$ está presente o no en una tabla (m, k), sin más que comprobar si k es de la forma $\overset{\bullet}{\frac{m-d}{c}}$, es decir si $\frac{kc+d}{m}$ es entero positivo.

Podemos comprobar, por ejemplo, si el patrón generado por la cadena $C(3^+ \, 2_+)$ se encuentra en la tabla (6, 4). De la expresión $4= \overset{\bullet}{\frac{6-2}{3}} = \frac{6\lambda-2}{3}$ deducimos el valor de $\lambda = \frac{3\times4+2}{6} = \frac{14}{6} \notin N$, por lo que concluimos que dicho patrón no se encuentra en la tabla (6, 4).

Con este criterio podemos también determinar el número de columnas **k** que debe tener una tabla con un módulo **m** conocido, para que el patrón generado por la cadena $C(c^+ \, d_+)$ se presente en dicha tabla.

Por ejemplo, tratemos de averiguar las tablas de la forma (4, k) en las que se presenta el patrón generado por $C(3^+ \, 2_+)$.

Comprobar si $k=\frac{4\lambda-2}{3} \in N$ nos lleva a resolver la ecuación diofántica

$3k - 4\lambda = 2$; además, debe cumplirse k>2; por tanto k es una de las soluciones mayores que 2 de dicha ecuación diofántica, de lo que resultan las tablas (4,6), (4,10), (4, 14),...

6.8.3.2 Expresiones aritméticas de regularidades en las tablas (m, k) relacionadas con la simetría de las cadenas generadoras de los patrones para un módulo *m* fijo y el número de columnas *k*=2, 3, ...

Al estudiar las tablas (m, k) de cualquier fila de la figura 6.27, observamos ciertas simetrías en los patrones de una tabla respecto de los patrones de otra tabla de su misma fila. Así por ejemplo, tomando como referencia la tabla (4, 8), vemos que las tablas anterior y posterior a ella tienen respectivamente los patrones generados por $C(1^{+}1_{+})$ y $C(1^{+}1_{-})$ y que pueden ser visualizados como patrones simétricos. (Figura 6.42) .

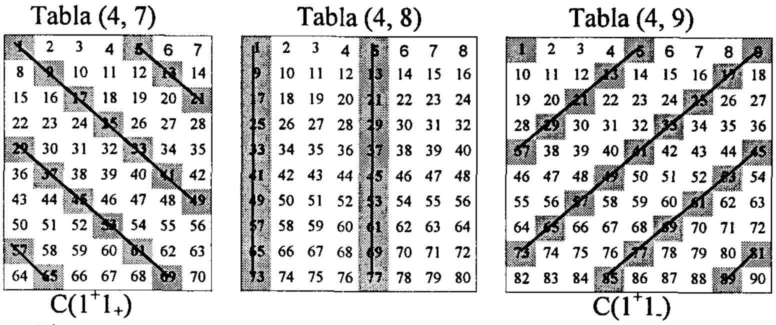


Figura 6.42: Patrones simétricos respecto al patrón de la tabla (4, 8)

Decimos que ***dos patrones son simétricos*** *si sus cadenas generadoras respectivas son de la forma* $C(c^{+}d_{+})$ *y* $C(c^{+}d_{-})$.

Decimos que ***dos tablas son simétricas*** *cuando sus patrones son simétricos en el sentido anterior, es decir cuando cualquiera que sea la cadena* $C(c^{+}d_{+})$ *generadora de un patrón en (m, k), la cadena simétrica suya* $C(c^{+}d_{-})$ *es generadora de un patrón en (m, k'), y recíprocamente; con d<min (k, k').*

Por ejemplo, las tablas (4, 7) y (4, 9) son tablas simétricas. También lo son las tablas (3, 5) – (3, 10), (3, 6) – (3, 9) y (3, 7) – (3, 8). La tabla (4, 6) es ***autosimétrica***, en el sentido de que se encuentra en la propia tabla el patrón simétrico de cualquier otro patrón. Numerosos ejemplos se pueden detectar en la figura 6.27.

Tratamos de expresar aritméticamente algunas de las regularidades en relación con la definición de simetría.

S1. ***Si una tabla tiene un patrón simétrico de otro que se presenta en una segunda tabla, y la componente vertical, c>1, de su cadena generadora es primo con el módulo m, entonces la primera tabla tiene todos los patrones simétricos de la segunda tabla,*** *con la única limitación que produce el número de columnas.*

La demostración es análoga al punto 1 del apartado 6.8.3.1.

6.8.3.2.1 Tablas simétricas respecto de una tabla de la forma $(m, \dot{m})$

S2. ***Las tablas equidistantes de cualquier tabla de la forma*** $(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}})$, *caracterizadas por tener el patrón generado por* $C(1^+ 0)$, ***son simétricas***. Esto es, si ***a*** es cualquier entero positivo tal que $\dot{m}-a>1$:

$$C(c^+d_+) \in \mathbf{C}(m, \dot{m}-a) \Leftrightarrow c(\dot{m}-a)+d=\dot{m} \Leftrightarrow -ca+d=\dot{m} \Leftrightarrow$$

$$-(ca-d)=\dot{m} \Leftrightarrow ca-d=\dot{m} \Leftrightarrow ca+c\dot{m}-d=\dot{m} \Leftrightarrow c(\dot{m}+a)-d=\dot{m} \Leftrightarrow$$

$$C(c^+d_-) \in \mathbf{C}(m, \dot{m}+a).$$

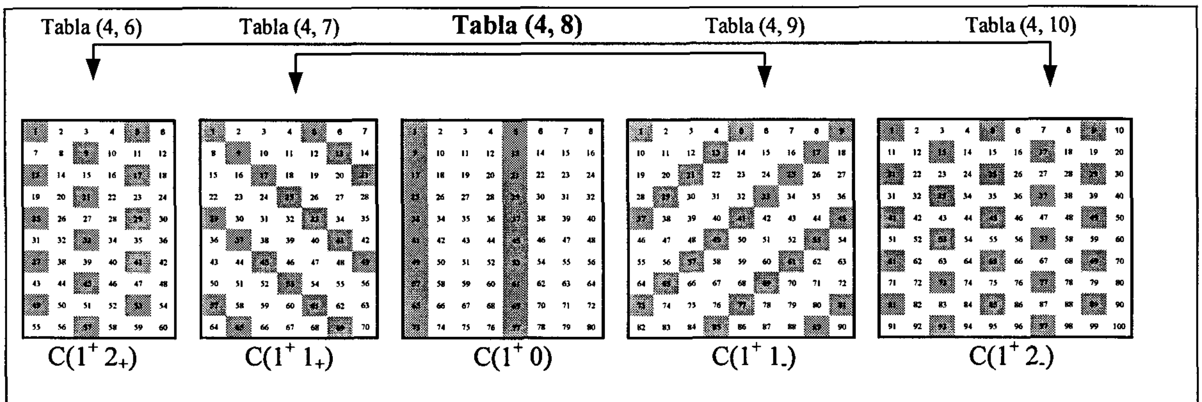


Figura 6.43: Tablas simétricas respecto de la tabla (4, 8)

Este es el caso de las tablas equidistantes de la tabla (4, 8) (que tiene el patrón “columna”). Las tablas que equidistan de ella son simétricas (Figura 6.43).

S3. ***Las tablas equidistantes de las que tienen el patrón generado por C(2^+ 0) también son simétricas.***

Recordemos que las tablas que tienen el patrón de C(2^+ 0) son de la forma (m, $\frac{\dot{m}}{2}$-a), y por ello la propiedad anterior la podemos enunciar como sigue:

$$\boxed{C(c^+d_+) \in \boldsymbol{C}(m, \tfrac{\dot{m}}{2}\text{-}a) \Leftrightarrow C(c^+d_-) \in \boldsymbol{C}(m, \tfrac{\dot{m}}{2}+a);\ con\ d < \tfrac{\dot{m}}{2}\text{-}a;}$$

Está claro que las tablas que tienen el patrón generado por C(1^+ 0) también tienen el patrón generado por C(2^+ 0), pero no es cierto el recíproco, ya que el primer patrón es más denso que el segundo. Por ejemplo la tabla (4, 6) tiene el patrón de C(2^+ 0) pero no el de C(1^+ 0). La propiedad S3 tiene especial interés en estos casos, pues si no, ya ha sido demostrado en S2.

Si una tabla (m, k) tiene el patrón generado por C(2^+ 0) y no presenta el patrón generado por C(1^+ 0), entonces m es par.

En efecto: el patrón generado por la cadena C(2^+ 0) se encuentra en las tablas de la forma (m, $\frac{\dot{m}}{2}$) = (m, $\frac{\lambda m}{2}$). Si m fuera impar $\frac{\lambda m}{2}$ no es entero para todos los valores de λ, sino solamente para cuando λ es par, es decir para λ=2α, (α entero), y en este caso tendríamos (m, $\frac{\dot{m}}{2}$) = (m, $\frac{\lambda m}{2}$) = (m, $\frac{2\alpha m}{2}$) = (m, $\dot{m}$), esto es que las tablas son de la forma (m, $\dot{m}$) que tienen patrones generados por la cadena C(1^+ 0). Por tanto, los patrones generados por C(2^+ 0) y no por C(1^+ 0) están solamente en tablas (m, k) con **m** par.

La demostración de la propiedad S3 es análoga a la S2, ya que teniendo en cuenta que hemos reducido la demostración al caso en que **m** es par, también lo será $\dot{m}$ y por tanto $\dot{m}$/2 será un múltiplo de **m**.

6.8.3.2.2 Tablas simétricas respecto de la línea divisoria entre dos tablas consecutivas

Observamos otro tipo de simetría que se da en las tablas cuando **m** es impar. Por ejemplo, las tablas (3, 7) y (3, 8) son simétricas. También lo son las tablas equidistantes de estas dos, o sea las tablas (3, 6)-(3, 9) y (3, 5)-(3, 10), etc. Decimos que estas tablas son simétricas respecto de la línea divisoria que separa las tablas (3, 7) y (3, 8) (Figura 6.44).

Tratamos de buscar una expresión general para estas tablas.

Para el caso de m = 5 las tablas a partir de las cuales se produce la simetría son (5, 2)-(5, 3); (5, 7)-(5, 8); (5, 12)-(5, 13); ... (5, 5λ+2)- (5, 5λ+3)

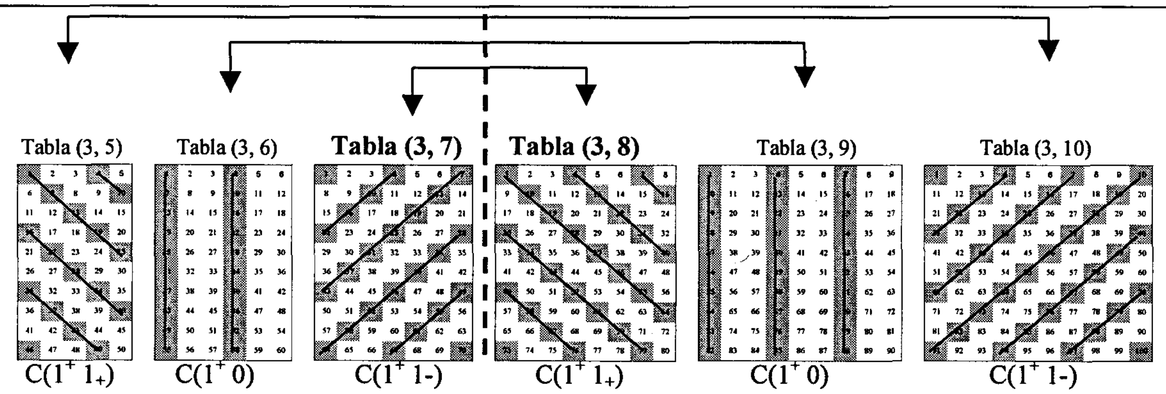


Figura 6.44: Tablas simétricas respecto de la línea divisoria entre las tablas (3, 7) y (3, 8)

La tabla 6.13 recoge un proceso inductivo para encontrar una expresión general de las columnas **k** de las tablas a partir de las cuales las tablas equidistantes de ellas son simétricas.

Dado que m es impar, lo podemos expresar como m=2n+1, con n=1, 2, ...

La primera y segunda columnas recogen los valores de n y m respectivamente, y la tercera columna proporciona los pares de tablas (m, k)-(m, k') que son simétricas:

n	m = 2n+1	Pares de tablas (m, k)-(m, k') simétricas
1	3	(3,4)-(3,5); (3,7)-(3,8); (3,10)-(3,11); ...; (3, 3λ+1)-(3, 3λ+2)
2	5	(5,2)-(5,3); (5,7)-(5,8); (5,12)-(5,13); ...; (5, 5λ+2)-(5, 5λ+3)
3	7	(7,10)-(7,11); (7,17)-(7,18); (7,24)-(7,25); ...; (7,7λ+3)-(7,7λ+4)
4	9	(9,13)-(9,14); (9,22)-(9,23); (9,31)-(9,32); ... ;(9, 9λ+4)-(9, 9λ+5)
...	...	...
n	2n+1	(m, mλ+n) – (m, mλ+n+1

Tabla 6.13

S4. ***Las tablas equidistantes del par de tablas de la forma (m, mλ+n) y (m, mλ+n+1), con λ = 0,1, 2, 3, ..; n = 1, 2, 3, ..., son simétricas.*** Esto es:

En efecto: $C(c^+ d_+) \in C(m, m\lambda+n-a) \Rightarrow c\,(m\lambda+n-a) + d = \dot{m} \Rightarrow d = \dot{m} + ca - cn$

Tenemos entonces

$c\,(m\lambda+n+1+a) - d = \dot{m} + cn - ca - d$ (sustituyendo el valor d anterior) =

$= \dot{m} + cn - ca - (\dot{m} + ca - cn) = \dot{m} + 2cn + c = \dot{m} + c(2n+1) = \dot{m} + cm = \dot{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow C(c^+ d_-) \in C(m, m\lambda+n+1+a)$

Análogamente se comprueba la implicación recíproca.

En la tabla 6.14 se especifican los pares de tablas (m, k) y (m, k') que equidistan un número **a** de lugares de dos tablas contiguas (m, k_1) y (m, k_2), que son simétricas. Los números de columnas k y k' cumplen la condición $k+k' = \dot{m}$ y sus valores vienen dados por: $k = m\lambda+n-a$; $k' = m\lambda+n+1+a$.

k_1 y k_2 representan el número de columnas de las tablas respecto a las cuales se produce la simetría, y corresponden al valor entero de la semisuma de k y k':

$$k_1 = E\left(\frac{k+k'}{2}\right) \quad y \quad k_2 = E\left(\frac{k+k'}{2}\right) + 1$$

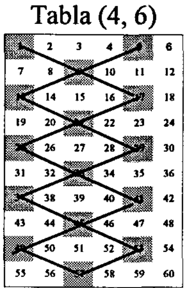
n	m 2n+1	λ	a	k	k'	k_1	k_2	Tablas simétricas (m, k) y (m, k')		Tablas centrales (m, k_1) – (m, k_2)
1	3	1	0	4	5	4	5	(3,4)	(3,5)	(3, 4) – (3, 5)
			1	3	6	4	5	(3,3)	(3,6)	
			2	2	7	4	5	(3,2)	(3,7)	
		2	0	7	8	7	8	(3,7)	(3,8)	(3, 7) - (3, 8)
			1	6	9	7	8	(3,6)	(3,9)	
			2	5	10	7	8	(3,5)	(3,10)	
			3	4	11	7	8	(3,4)	(3,11)	
		3	0	10	11	10	11	(3,10)	(3,11)	(3, 11) – (3, 10)
			1	9	12	10	11	(3,9)	(3,12)	
2	5	0	0	2	3	2	3	(5,2)	(5,3)	(5, 2) – (5, 3)
		1	0	7	8	7	8	(5,7)	(5,8)	(5, 7) – (5, 8)
			1	6	9	7	8	(5,6)	(5,9)	
			2	5	10	7	8	(5,5)	(5,10)	
			3	4	11	7	8	(5, 4)	(5, 11)	
3	7	0	0	3	4	3	4	(7, 3)	(7, 4)	(7, 3) – (7, 4)
			1	2	5	3	4	(7, 2)	(7, 5)	
		1	0	10	11	10	11	(7, 10)	(7, 11)	(7, 10) – (7, 11)
			1	9	12	10	11	(7, 9)	(7, 12)	
			2	8	13	10	11	(7, 8)	(7, 13)	
		2	0	17	18	17	18	(7, 17)	(7, 18)	(7, 17) – (7, 18)

Tabla 6.14

6.8.3.2.3 Tablas autosimétricas

En la tabla (4, 6) observamos ciertos patrones rectilíneos y todos sus simétricos, es decir la tabla (4, 6) es ***autosimétrica*** (Figura 6.45).

Tabla (4, 6)



C($1^+ 2_+$) y C($1^+ 2_-$)

Figura 6.45: Tabla autosimétrica.

S.4 ***Si una tabla (m, k) posee el patrón generado por la cadena C(2^+ 0), entonces es autosimétrica.***

En efecto: C(2^+ 0) $\in$ C(m, k) $\Rightarrow 2k = \dot{m}$,

C(c^+ d_+) $\in$ C(m, k) $\Rightarrow ck+d=\dot{m} \Rightarrow d = \dot{m}-ck$;

y tenemos que $ck-d = ck - (\dot{m}-ck) = 2ck - \dot{m} = \dot{m} - \dot{m} = \dot{m} \Rightarrow$ *C(c^+ d_-)* $\in$ C(m, k).

(La implicación recíproca es análoga).

6.8.3.2.4 Expresión general para tablas simétricas

Buscamos una expresión única que proporcione las simetrías encontradas hasta ahora, a saber, las *tablas simétricas respecto de una tabla, respecto de dos tablas contiguas y las tablas autosimétricas*. Podemos abordar el problema tratando de encontrar valores de α y β para que se cumpla:

$$\boxed{\begin{array}{c} C(c^{+} d_{+}) \in \mathbb{C}(m, \dot{m}+\alpha) \Leftrightarrow C(c^{+} d_{-}) \in \mathbb{C}(m, \dot{m}+\beta); \\ \lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots;\ d < \min(m\lambda+\alpha, m\lambda+\beta);\ \alpha;\ \beta \text{ enteros} \qquad (14) \end{array}}$$

Esta condición equivale a

$c(\dot{m}+\alpha)+d=\dot{m}$

$c(\dot{m}+\beta)-d=\dot{m}$; sumando ambas igualdades se obtiene $c(\alpha+\beta)=\dot{m}$, por lo que una posibilidad es que $\alpha+\beta=\dot{m}$.

Por tanto, podemos enunciar la siguiente propiedad:

S6. ***Una condición suficiente para que dos tablas de la forma (m, k) y (m, k') sean simétricas es que*** $k+k'=\dot{m}$

En efecto: Sean k y k' tales que $k+k'=\dot{m}$. Probemos que las tablas de la forma (m, k) y (m, k') son simétricas.

$C(c^{+} d_{+}) \in \mathbb{C}(m, k) \Rightarrow c\,k+d=\dot{m} \Rightarrow \mathbf{d}=\dot{m}-\mathbf{ck};$

$c\,k'-d = ck'-(\dot{m}-ck) = c(k+k')-\dot{m} = c\,\dot{m}-\dot{m} = \dot{m} \Rightarrow C(c^{+} d_{-}) \in \mathbb{C}(m, k');$ (La implicación recíproca es análoga).

S 7. Para probar aritméticamente que la condición anterior es también necesaria, debemos imponer que la componente vertical de la cadena sea un número c>1 primo con el módulo ***m***.

Sean dos tablas (m, k) y (m, k') simétricas, tales que un patrón generado por $C(c^{+} d_{+})$ ***y su simétrico, con c>1 y m.c.d. (c, m) = 1, en estas condiciones se cumple que*** $k+k'=\dot{m}$

El razonamiento es similar al del punto 1 del apartado 6.8.3.1.

En efecto, si las tablas (m, k) y (m, k') son simétricas podemos escribir

$ck+d=\dot{m}$

$ck' - d=\dot{m}$

sumando ambas igualdades se obtiene $c(k+k') = \lambda m \Rightarrow$ ***c*** divide a $\boldsymbol{\lambda m}$, pero como ***c*** es primo con ***m***, ***c*** debe dividir a λ, teniendo

$$k+k' = m\,\frac{\lambda}{c} = m\,\lambda' = \dot{m}$$

Destacamos el paralelismo existente entre el par de propiedades S6 y S7 anteriores con las propiedades 6 y 7 del apartado 6.8.3.1. que hace referencia a la condición de $k - k' = \dot{m}$ para que las tablas (m, k) y (m, k') sean tablas con patrones anidados.

La tablas 6.15 y 6.16 resumen los tipos de simetría que hemos considerado atendiendo a la paridad del módulo m y a la igualdad o desigualdad del número de columnas k y k'.

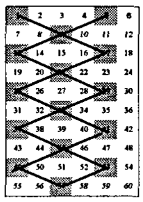
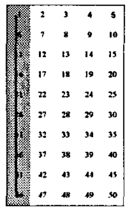
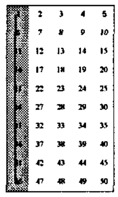
k+k' • = m	m	**Tipo de simetría**	**Ejemplos**
k=k'	par	Tablas autosimétricas, de la forma: (m, λm); λ=1, 2, 3, ...; con el patrón de $C(2^+ 0)$. O bien de la forma: (m, λm/2); λ impar; con el patrón de $C(1^+ 0)$.	Tablas (4, 6) (5, 5)   Patrones **$C(2^+ 0)$** **$C(1^+ 0)$**
	impar	Tablas autosimétricas, de la forma: (m, λm); λ=1, 2, 3, ...; con el patrón de $C(1^+ 0)$.	Tabla (5, 5)  Patrón **$C(1^+ 0)$**

Tabla 6.15

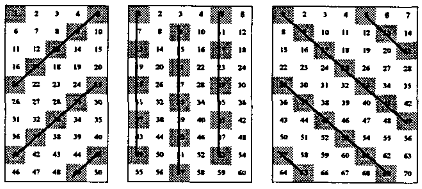
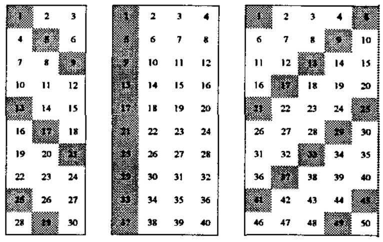
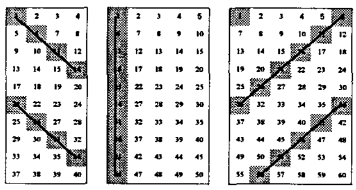
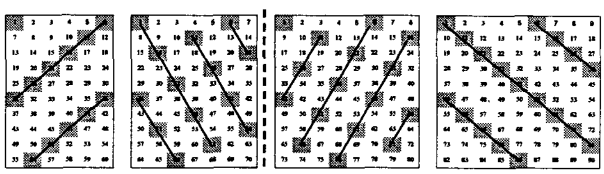
<table>
<tr><th>$k+k' = \dot{m}$</th><th>m</th><th>Tipo de simetría</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">k≠k'</td><td>par</td><td>Tablas simétricas respecto de otra tabla, que tiene la forma
(m, $\frac{k+k'}{2}$) y contiene los patrones:
C(2^+ 0) cuando $\frac{k+k'}{2} \neq \dot{m}$;
C(1^+ 0) cuando $\frac{k+k'}{2} = \dot{m}$</td><td>Tablas (4, 5) **(4, 6)** (4, 7)

Patrón **C(2^+ 0)**
Tablas (4, 3) **(4, 4)** (4, 5)

Patrón **C(1^+ 0)**</td></tr>
<tr><td rowspan="2">impar</td><td>Tablas simétricas respecto de la tabla (m, λm); λ=1, 2, 3, ...;
con el patrón de C(1^+ 0).</td><td>Tablas (5, 4) **(5, 5)** (5, 6)

Patrón **C(1^+ 0)**</td></tr>
<tr><td>Tablas simétricas respecto de la línea divisoria entre las dos tablas de las que equidistan y que tienen la forma:
$(m, E\left(\frac{k+k'}{2}\right))$ y $(m, E\left(\frac{k+k'}{2}\right)+1)$
Estas tablas se obtienen mediante la expresión más detallada
(2n+1, λ(2n+1)+n-a) y
(2n+1, λ(2n+1)+n+1+a)</td><td>Tablas
(5, 6) (5, 7) (5, 8) (5, 9)
</td></tr>
</table>

Tabla 6.16

Las relaciones anteriores permiten explicar otras regularidades sencillas que se observan en la figura 6.27, como son:

i. En todas las filas de la tabla de la figura 6.27 se presentan de manera consecutiva y cíclica los patrones de $C(1^{+}0)$, $C(1^{+}1_{-})$ y $C(1^{+}1_{+})$.

ii. Las tablas de la forma **(m, m-1)** tienen el patrón de $C(1^{+}1_{+})$.

iii. Las tablas de la forma **(m, m+1)** tienen el patrón de $C(1^{+}1_{-})$.

iv. Las tablas (2,3), (2,5), (2,7), ...,(2,2n+1),... presentan los patrones de $C(1^{+}1_{+})$ y $C(1^{+}1_{-})$.

v. Si mantenemos fijo el número de columnas k y variamos el módulo m, observamos que los patrones de las tablas (m, k) contienen a los patrones de las tablas ($\dot{m}$, k).

Finalizamos este estudio con dos complementos informáticos:

1. Un programa realizado en Q-Basic para obtener las tablas (m, k) cuando se introducen el módulo, número de filas y número de columnas, que recogemos en el Anexo 6.1.

2. Los procedimientos realizados con el programa MAPLE V para obtener:

a. Los tramos o segmentos paralelos de que se compone cada patrón y cada recta en una tabla dada.

b. El conjunto de todas las pendientes posibles que se obtienen uniendo pares de elementos de una misma clase en una tabla o conjunto de patrones posibles en una tabla.

Además de los procedimientos, acompañamos ejemplos diferentes con sus dibujos correspondientes (Anexo 6.2).

CAPÍTULO 7
CONCLUSIONES

7.1 Introducción

Concluimos esta memoria con un balance y reflexión finales sobre la investigación realizada. En este capítulo nos proponemos sintetizar el grado de consecución de los objetivos propuestos, destacar los hallazgos y dificultades encontrados y señalar temas abiertos para posibles investigaciones futuras que estudien los problemas surgidos en este trabajo.

En el capítulo 1, apartado 1.3, señalábamos como propósito global de esta investigación: "*estudiar qué potencialidades didácticas y matemáticas puede ofrecer la Tabla-100 como herramienta para explicitar conexiones entre aritmética y geometría y propiciar nuevas representaciones visuales de conceptos aritméticos en un programa de formación inicial de profesores*."

Para lograr este objetivo hemos articulado una investigación que se ha desarrollado en dos etapas. En una primera etapa hemos llevado a cabo un trabajo de investigación en el aula con estudiantes para profesor de primaria y primer ciclo de secundaria. El estudio empírico ha derivado en la necesidad de un estudio teórico, que hemos presentado como segunda etapa de esta investigación.

Somos conscientes de la amplitud y generalidad del objetivo global; esto es debido, principalmente, a la ausencia de investigaciones previas sobre la Tabla-100 y sus representaciones geométricas. Precisamente, esta investigación se ha propuesto identificar problemas y estudiar potencialidades y dificultades en torno a la Tabla-100 desde el punto de vista de las representaciones geométricas para los operadores aditivos. En su inicio, no contábamos con un marco teórico bien delimitado, ni tampoco con un conjunto de problemas específicos ya detectados y bien definidos.

Por este motivo pensamos que, aunque se abordan y resuelven algunos aspectos problemáticos surgidos en torno a la Tabla-100, especialmente en el estudio teórico desarrollado en el capítulo 6, son más los interrogantes que quedan abiertos para abordar en futuras investigaciones, especialmente desde una perspectiva didáctica.

7. 2 Consecución de los objetivos

El anterior objetivo general se ha desglosado en el apartado 2.15 de esta memoria en los siguientes objetivos parciales:

1. Indagar en la comprensión que muestran los estudiantes para profesor al visualizar propiedades y relaciones numéricas en la Tabla100 mediante representaciones geométricas.

2. Estudiar la viabilidad de nuevas representaciones simbólicas y geométricas para los operadores aditivos; desarrollar y establecer conexiones entre los distintos tipos de representación.

3. Realizar una propuesta didáctica en torno a la Tabla-100, integrada por un material de trabajo que facilite establecer relaciones entre aritmética y geometría por medio del estudio e identificación de patrones y relaciones numéricas.

7.2.1 Primer objetivo

La consecución del primer objetivo se ha realizado en la primera fase del trabajo de investigación en el aula, etapa empírica. En esta fase, a través de las distintas tareas de contexto propuestas y trabajadas, se ha puesto en contacto a los estudiantes para profesor con la Tabla-100 y con diversas conexiones entre aritmética y geometría.

Hemos podido comprobar la viabilidad del trabajo sobre la Tabla-100. En particular, los objetivos específicos y el balance de logros obtenidos en cada sesión de la primera fase se han detallando en el capítulo 4.

Los objetivos establecidos para esta fase del estudio han sido:

1. Familiarizar a los estudiantes con el uso de la Tabla-100.

2. Constatar la correspondencia que existe entre las operaciones aritméticas básicas y los desplazamientos por la tabla, dotando a aquellas de un sentido dinámico.

3. Encontrar visualmente regularidades geométricas en la tabla coloreada e interpretarlas aritméticamente.

4. Establecer conexiones entre el área de un polígono y el hecho de ser sus vértices puntos del geoplano asociados a los múltiplos de un determinado número.

5. Estudiar los múltiplos de un número en la Tabla-100, desde un punto de vista dinámico, sometiéndolos a isometrías planas sencillas y observando el efecto aritmético producido.

Como se analizó en el apartado 4.8, a partir de las actividades de los alumnos disponemos de suficientes elementos de juicio para considerar que se han cubierto los objetivos de esta fase de la investigación.

En particular, tenemos que los estudiantes:

* Han realizado y reinterpretado operaciones aritméticas basándose exclusivamente en los desplazamientos por la tabla coloreada, asignando un significado aritmético a cada desplazamiento.

* Han detectado visualmente un número significativo de regularidades geométricas (cadenas), a las que han asociado un operador aditivo.

* Han utilizado diversas estrategias para el cálculo de las áreas de polígonos formados al unir *n* múltiplos consecutivos de un número *k* en la Tabla-100, y han relacionado las áreas de los polígonos con *n* y *k*.

* Han resuelto cuestiones de tipo geométrico (puntos alineados, paralelismo, ángulos rectos, perpendicularidad entre líneas oblicuas en la tabla, etc.) utilizando recursos aritméticos que proporciona la Tabla-100 (G3 y G1).

* Han estudiando el efecto producido por algunas reflexiones sobre los múltiplos de un número en la Tabla-100, observando las regularidades encontradas.

Los estudiantes para profesor con los que hemos trabajado, han establecido conexiones entre propiedades aritméticas y geométricas mediante las tareas propuestas, han detectado dificultades, han expresado sus dudas y han tratado de resolverlas con los medios disponibles. Estos logros muestran una comprensión de la Tabla-100 y de las relaciones entre representaciones geométricas y propiedades aritméticas, al atender a las formas y propiedades geométricas en las tareas y contextos propuestos.

7.2.2 Segundo objetivo

El segundo objetivo de la investigación se ha abordado en la segunda fase del trabajo de investigación en el aula, etapa empírica. En esta fase, a través de las distintas tareas propuestas y realizadas se ha propiciado la búsqueda y estudio de nuevas formas de representación numéricas, simbólicas y geométricas, para los operadores aditivos en la Tabla-100. Los objetivos específicos y el balance de logros obtenidos en cada sesión han quedado recogidos en el capítulo 5.

Recordamos que los objetivos establecidos para esta fase del estudio (apartado 5.1.1) fueron:

1. Proporcionar representaciones de tipo geométrico para los operadores aditivos en la Tabla-100.

2. Utilizar las cadenas para estudiar la posible estructura algebraica del conjunto de los operadores aditivos con la "suma".

3. Estudiar el efecto sobre los operadores aditivos asociados a las cadenas cuando éstas se someten a isometrías sencillas.

4. Encontrar representaciones de tipo simbólico para los operadores aditivos.

5. Extender el estudio de las cadenas al considerarlas en la Tabla-100 de k columnas.

Como se analizó en el apartado 5.7, a partir de las actividades de los alumnos disponemos de elementos de juicio suficientes para considerar que se han cubierto los objetivos de esta fase de la investigación. Sostenemos esta valoración en el hecho de que un número apreciable de los estudiantes que han seguido nuestras clase:

* Han identificado las cadenas como representaciones geométricas de operadores aditivos, realizando representaciones propias y operando de manera simultánea con ellas y con los operadores que representan.

* Han encontrado una operación adecuada o criterio para "sumar" cadenas, identificando las que realizan las veces de elemento neutro y de elemento simétrico para dicha operación.

* Han observado el efecto de ciertas isometrías sobre las cadenas y sobre los operadores asociados a ellas.

* Han encontrado formas simbólicas distintas de las habituales para representar a los operadores aditivos.

* Han interpretado correctamente el cambio de significado aritmético que experimentan las cadenas cuando éstas se colocan en una Tabla-100 de k columnas.

En definitiva, los estudiantes para profesor con los que hemos trabajado han desarrollado y establecido conexiones entre los distintos tipos de representación estudiados para los operadores aditivos. De este modo queda reconocida la viabilidad de las nuevas representaciones simbólicas y geométricas.

7.2.3 Tercer objetivo

La consecución del tercer objetivo se ha trabajado, parcialmente, en la primera etapa de la investigación. Tanto en la primera como en la segunda fase de esta etapa de investigación en el aula hemos tratado de realizar una propuesta didáctica viable y completa en torno a la Tabla-100, con la cual establecer y desarrollar un entramado de conexiones entre aritmética y geometría. Sin embargo, los materiales elaborados para la etapa empírica no fueron satisfactorios, mostrando ciertas limitaciones en la caracterización formal de los conceptos y propiedades involucradas. Por ello fue necesario realizar un estudio teórico, que corresponde a la segunda etapa de esta investigación.

El estudio teórico ha proporcionado un análisis formal detallado de los conceptos y relaciones que deben configurar la propuesta didáctica mencionada. Sin embargo, no se ha llevado a cabo un estudio posterior en el aula, que haya concretado la correspondiente propuesta didáctica y evaluado su viabilidad. Este tercer objetivo participa de las dos etapas generales del estudio; algunos logros parciales han quedando recogidos en los puntos anteriores y se completan con los resultados del estudio teórico.

7. 3 Hallazgos

Por medio de las tareas realizadas por los estudiantes, la Tabla-100 se ha revelado como una herramienta útil para favorecer las conexiones entre aritmética y geometría. Los hallazgos más interesantes de este estudio están en las potencialidades observadas en cada una de las etapas y fases de la investigación.

7. 3. 1 Hallazgos en las tareas de contexto

1. Primera sesión: Divisibilidad y operaciones aritméticas.

Sobre las operaciones aritméticas consideradas en la tabla coloreada. Los estudiantes han interpretado correctamente los desplazamientos por la tabla en términos de sumar y restar unidades o decenas, y han establecido una correspondencia entre las operaciones aritméticas básicas y los desplazamientos por la tabla coloreada, ya que encontraron criterios, distintos a los algoritmos usuales, para realizar sumas, restas, productos y divisiones con la ayuda de los códigos de coloreado de la tabla en relación con la divisibilidad.

Las operaciones de sumar y restar presentan menos problemas que las de multiplicar y dividir, siendo ésta la que mayor dificultad entrañó para los estudiantes, especialmente cuando la división no era exacta. Destacamos cómo estas tareas favorecieron la consideración de la multiplicación y división como sumas y restas reiteradas, respectivamente.

Un primer hallazgo consiste en que, desde la primera sesión, los estudiantes han realizado representaciones y han establecido relaciones entre los ámbitos aritmético y geométrico en el contexto de la Tabla-100.

2. Segunda sesión: Divisibilidad y patrones.

Sobre la identificación de regularidades y patrones utilizando los múltiplos de un número. Se han identificado una considerable variedad y cantidad de patrones geométricos constituidos por los múltiplos de un número, siendo esta variedad mayor al considerar los múltiplos de 3, 4 y 7. Se ha observado una tendencia clara por parte de los estudiantes a visualizar los patrones en el sentido "bajar, derecha", en este orden, que coincide con el orden en que se nombran las decenas y unidades de un número de dos cifras, y también con el sentido habitual de lectura.

3. Tercera y cuarta sesiones: Divisibilidad y geoplano I y II

Sobre la relación entre polígonos dibujados en la Tabla-100 y la divisibilidad. La Tabla-100, considerada como geoplano, ha sido útil a la hora de establecer conexiones entre los polígonos que se forman al unir n múltiplos de un número k y la divisibilidad, ya que los estudiantes han encontrado distintas estrategias para calcular el área de paralelogramos y, además, han encontrado una fórmula que relaciona el área de los polígonos con n y k.

Para aclarar ciertas ambigüedades en torno al tipo de polígonos que se forman por este método, los estudiantes de G3 y G1 utilizan recursos aritméticos que proporciona la Tabla-100.

Mediante la realización de reflexiones sencillas sobre los múltiplos de los números se encuentran regularidades numéricas y algunos múltiplos de números que permanecen invariantes frente a dichas reflexiones en cuanto al tipo de multiplicidad.

Se trata de otro hallazgo relevante: la consideración simultánea de la Tabla-100 como conjunto numérico y como geoplano se realiza de manera natural, y permite profundizar en su estudio.

7. 3. 2 Hallazgos en el estudio de las cadenas

1. Quinta sesión: Elementos algebraicos del conjunto de las cadenas con la "operación suma".

Sobre identificación y estudio algebraico de operadores aditivos por medio de las cadenas. Destacamos la buena acogida que han dispensado los estudiantes a este tipo de cuestiones, encontrando cadenas, en su mayoría con ángulos rectos y mínimo número de casillas, para representar a los operadores aditivos. También hallaron un criterio coherente para "sumar" cadenas, superponiendo la casilla final de una de ellas con la inicial de la otra.

Para salvar el problema que presentan las cadenas situadas en los bordes de la Tabla-100, los estudiantes han impuesto restricciones para el tamaño de las cadenas con el objeto de poder ser "sumadas" en esta tabla. Julia (G1) señala la idea de que una cadena que rebasa un lateral de la tabla aparezca por el lateral opuesto en la fila correspondiente, dando así una solución de continuidad al problema.

Los componentes de G3 ponen de manifiesto el papel que juegan los números de la Tabla-100 como el "conjunto origen" de la aplicación que constituye el operador aditivo. De este modo, ***estado*** y ***operador*** quedan diferenciados en su forma de representación ya que, para el primero, se utilizan los símbolos numéricos habituales y el segundo adopta la forma geométrica de una cadena.

La cadena cerrada surge de forma natural como *elemento neutro* para la "suma". Con mayores dificultades, se señala como *cadena opuesta* la que se obtiene invirtiendo la orientación.

Los componentes de G3 utilizan con soltura las cadenas para comprobar las propiedades asociativa y conmutativa de la "suma" de operadores aditivos.

Todas estas cuestiones muestran un nuevo hallazgo: sobre la Tabla-100 se encuentran condiciones para el estudio del grupo aditivo de las cadenas libres.

2. Sexta sesión: Cadenas y transformaciones geométricas

Sobre el efecto de algunas isometrías sencillas sobre las cadenas y los operadores aditivos asociados. La Tabla-100, en su condición de geoplano, se revela como un buen medio donde realizar reflexiones sobre las cadenas, consideradas exclusivamente como figuras geométricas independientemente de su orientación. A la hora de observar el efecto producido sobre los operadores asociados la dificultad aumenta, debido en gran parte a la no inclusión de las flechas que dan orientación a las cadenas. La necesidad de considerar el carácter orientado de las cadenas queda aquí de manifiesto.

3. Séptima sesión. Primera parte: Cadenas y representaciones simbólicas

Sobre las representaciones simbólicas de los operadores aditivos. Además de las representaciones de carácter geométrico se han obtenido una amplia variedad de representaciones de tipo simbólico para representar a los operadores aditivos, que en su mayoría combinan elementos gráficos con numéricos, abundando los pares ordenados. Los estudiantes han manejado de este modo más de un sistema de representación para el mismo concepto. Esta riqueza de representaciones para los operadores aditivos es un nuevo hallazgo del estudio.

4. Séptima sesión. Segunda parte: La Tabla-100 de k columnas

Sobre la interpretación aritmética de las cadenas situadas en la Tabla-100 de k columnas. Una misma forma en un contexto diferente cambia de significado. Esta es la conclusión que se obtiene cuando los estudiantes colocan una cadena correspondiente a un operador determinado en la Tabla-100 de 7 columnas. Este cambio de columnas en la tabla favorece la observación del papel que juega el número 10 en la descomposición polinómica de un número en base decimal y ha favorecido que algunos estudiantes relacionen la forma de la cadena, la expresión numérica del operador asociado, la Tabla-100 de k columnas y el sistema de numeración en base k.

5. Encuesta final

Completamos el estudio de las potencialidades destacadas anteriormente con un resumen de la opinión de los estudiantes sobre distintos aspectos del trabajo realizado, recogida mediante una encuesta final de actitudes, que se detalla en el Anexo 3.5, y que muestra el grado de satisfacción en relación con la utilidad de las tareas realizadas para:

* Mejorar la comprensión de aspectos numéricos en relación con las operaciones aritméticas.

* Desarrollar la capacidad de visualización de regularidades numéricas y obtener una visión de los números desde otra óptica.

* Relacionar polígonos con números.

* Proporcionar una visión geométrica de la suma y la resta.

* Mejorar la idea de isometría.

* Entender mejor el comportamiento de los operadores aditivos.

7. 4 Dificultades detectadas más importantes

Aunque los logros obtenidos satisfacen las expectativas iniciales de esta investigación, son numerosas las dificultades que se han encontrado en su transcurso. Muchos de los problemas encontrados por los estudiantes para dar respuesta a las tareas planteadas tienen relación con sus propios conocimientos y habilidades personales, pero otras están provocadas por la falta de información previa de tipo didáctico y matemático que existía sobre la Tabla-100 al comienzo de la investigación. Las dificultades encontradas son, precisamente, las que mostraron la necesidad de un estudio teórico sobre la tabla y su relación con los sistemas de representación.

Citamos las dificultades más sobresalientes encontradas en el transcurso de este trabajo y que, en parte, justifican el capítulo 6 de esta memoria.

7.4.1 Dificultades en la primera fase

* En relación con las operaciones aritméticas en la tabla coloreada, los estudiantes tropiezan con mayores problemas para encontrar formas distintas del algoritmo usual para efectuar una división, especialmente cuando ésta no es exacta.

* Aunque se podría pensar que por estar la tabla coloreada con criterios de divisibilidad sería fácil en este medio encontrar el máximo común divisor de dos números utilizando esos criterios de coloreado, la realidad fue distinta, bien por la propia dificultad de la tarea o por no haber trabajado previamente aspectos relacionados con el cálculo de los divisores de un número, lo que sin duda hubiera facilitado la tarea.

* En relación con los polígonos que se dibujan en la Tabla-100, considerada como geoplano, los principales errores se encuentran en los nombres asignados a los polígonos, producidos bien por ignorancia o debido a las dudas que algunos polígonos plantean acerca de la medida de sus ángulos o el paralelismo de sus lados.

7.4.2 Dificultades en la segunda fase

* El hecho de que para encontrar el operador asociado a una cadena haya que contar los desplazamientos de una celdilla a la siguiente y no el número de celdillas, produce confusión en algunos estudiantes a la hora de buscar un criterio para "sumar" cadenas, yuxtaponiendo una a continuación de la otra en lugar de superponer la casilla final de una con la inicial de la otra.

* Aunque el problema que presentan las cadenas en los bordes laterales de la tabla es resuelto por algunos estudiantes, como Julia (G1), obligando a la cadena que desaparece por un borde a reaparecer por el borde opuesto, no queda resuelto el problema en los límites superior e inferior de la Tabla-100. Este problema hace que el conjunto de las cadenas con que han trabajado nuestros alumnos no tenga la estructura de grupo con la "suma". En este sentido se echaba en falta el estudio teórico pertinente en relación con la estructura algebraica del conjunto de los operadores aditivos.

* Existe un riesgo cierto de confusión entre las acepciones algebraica y geométrica del término "simétrico", tal y como lo pone de manifiesto algún alumno. Ahora bien, a la vista del escaso número de estudiantes que incurren en este error, más que una dificultad se puede considerar como una virtualidad de la tabla, al dar la oportunidad de abordar en clase las diferencias entre ambas interpretaciones.

* La principal causa de dificultades y fuente de errores en relación con la identificación y estudio de los correspondientes operadores aditivos asociados a una cadena, es la falta de orientación explícita de las cadenas mediante flechas. Esta limitación se pone especialmente de manifiesto cuando se trata de observar el efecto de algunas isometrías sobre los operadores en cuestión. En este sentido somos responsables de parte de los errores en las respuestas de los estudiantes, ya que hemos presentado y admitido cadenas sin orientación, y hemos convenido con los estudiantes que en estos casos le adjudicamos el signo según imaginemos las flechas en un sentido u otro.

Esta es también la causa por la cual algunos estudiantes señalan el giro de 180° como la isometría que deja invariante al operador asociado a una cadena determinada, cuando en realidad dicho giro transforma el operador de una cadena en el opuesto de la cadena original.

* Especial dificultad presenta la tarea 2.7 de esta fase, que trata de averiguar si cadenas distintas correspondientes al mismo operador se transforman mediante algunas isometrías en cadenas asimismo equivalentes. La ausencia de respuestas aceptables hace pensar en una deficiente redacción de la tarea y, especialmente, en la necesidad de trabajar con anterioridad la equivalencia de cadenas y los representantes canónicos de las clases de equivalencia. Es por ello que este aspecto ha quedado tratado con detalle en el estudio teórico del capítulo 6.

* Encontramos más dificultades de las esperadas a la hora de relacionar el sistema de numeración en base 7 con la expresión del operador de una cadena en la Tabla-100 de 7 columnas (tarea 3.9). Aunque, como en el caso de Julia (G1), las dificultades se pueden deber a la lejanía en el tiempo del estudio de los sis-

temas de numeración, pensamos que antes de abordar esta cuestión se deben trabajar con mayor intensidad las representaciones en la Tabla-100 con diferente número de columnas, realizando tareas para relacionar unas cadenas con otras en relación con los operadores asociados. Por ello se ha abordado también esta cuestión de forma teórica en el capítulo 6.

Todas estas dificultades, entre otras, influyeron de manera decisiva en el investigador para realizar el estudio que presentamos en el capítulo anterior.

7.5 Confirmación de las hipótesis

De los datos e informaciones expuestos en los apartados anteriores se puede inferir, con todas las limitaciones señaladas, que quedan confirmadas las hipótesis generales enunciadas en el apartado 2.15 de esta memoria:

La introducción de una propuesta didáctica fundada en torno a la Tabla-100 en el currículo de formación inicial de profesores, permite a estos estudiantes:

1. Establecer conexiones aritméticas desde un punto de vista geométrico e interpretar propiedades y relaciones entre aritmética y geometría.

2. Obtener nuevas representaciones para el estudio formal de los operadores aditivos.

3. Aplicar conocimientos matemáticos adquiridos con anterioridad al estudio de estas representaciones.

Esto es así, ya que:

1. Son múltiples y significativas las conexiones realizadas por los estudiantes entre aritmética y geometría.

2. Se han propuesto representaciones originales, tanto de carácter simbólico como geométrico, para los operadores aditivos en la Tabla-100; estas representaciones se han estudiado en detalle.

3. Los estudiantes han aplicado sus conocimientos matemáticos en el estudio de las representaciones mencionadas, obteniendo además una nueva visión y reconsideración de algunos de estos conocimientos. También se han puesto en

evidencia las limitaciones en el conocimiento de los estudiantes, que explican algunas de las dificultades apreciadas.

7.6 Conclusiones del estudio teórico

La Tabla-100, considerada como objeto didáctico, es un material cuyo uso en el aula no entraña mayor dificultad, habiéndose puesto de manifiesto en la primera fase de investigación su utilidad para conectar cuestiones de índole aritmética y geométrica. No obstante, al tratar de profundizar en su estructura matemática y en el comportamiento de las cadenas como objetos geométricos que representan operadores aditivos, la Tabla-100 ofrece ciertas dificultades, como se ha puesto de relieve en los capítulos 4 y 5, y en el apartado 7.4 anterior.

Destacamos en este apartado y de forma resumida las conclusiones más importantes del estudio teórico.

7.6.1 Aspectos sobre T_{100}

La Tabla-100 proporciona un soporte para las representaciones estudiadas. Al considerar en la tabla números, polígonos y cadenas necesitamos formalizar el estudio de la tabla delimitando los conceptos con los que trabajamos y que se integran en este estudio. Estos elementos son: el conjunto numérico de los 100 primeros números naturales, el geoplano y la cuadrícula.

Con el fin de dar solución a los problemas que se presentan en los límites de T_{100}, realizamos las siguientes extensiones:

* T_Z o extensión de T_{100} a todo el conjunto Z de los enteros. En esta extensión advertimos la estructura de anillo conmutativo para (K, +, x), donde los elementos del conjunto K son las 10 columnas de T_Z contempladas como clases residuales módulo 10, y las leyes internas de la suma (+) y el producto (x) se refieren a la suma y producto usuales de clases residuales.

* Z_{100} o extensión de T_{100} al conjunto cociente de Z respecto de la relación de congruencia módulo 100.

7.6.2 Caracterización de las cadenas

Construimos formalmente las cadenas como representaciones de los operadores aditivos, para lo cual definimos los siguientes términos:

* ***Cadenas fijas*** que son concatenaciones orientadas de cuadrados de la retícula con un lado común, a modo de poliminós.

* ***Expresiones aritméticas de las cadenas fijas***, que son notaciones mediante números, subíndices y superíndices, que indican los desplazamientos que realiza la cadena por la tabla.

* ***Cadenas fijas simples*** que constan solo de un tramo vertical y un tramo horizontal.

* ***Expresiones aritméticas reducidas*** que corresponden a las cadenas fijas simples, y que contienen solamente dos números.

* ***Cadenas libres*** son las clases de equivalencia de cadenas fijas que representan al mismo operador aditivo.

* ***Cadenas fijas simples mínimas*** son las cadenas simples que tienen el menor número posible de celdillas y que adoptamos como representantes canónicos de las cadenas libres.

7.6.3 Estructura del conjunto de las cadenas libres

Contemplamos las cadenas como expresiones geométricas de los operadores aditivos tomados como aplicaciones, y abordamos la comprobación de la estructura de grupo aditivo abeliano de estos operadores mediante la utilización de las cadenas. En este sentido destacamos lo siguiente:

* Para constatar la estructura de grupo abeliano de los operadores aditivos por medio de las cadenas, el dominio de aplicación de éstas debe ser la extensión T_Z en lugar de la Tabla-100, debido a los problemas que ésta presenta en sus bordes.

* Definimos la composición de cadenas superponiendo la casilla final de una con la inicial de la otra.

* El elemento neutro para esta "suma" es la ***cadena cerrada***.

* El elemento simétrico de una cadena se obtiene cambiando la orientación de la misma y conservando el orden "decenas, unidades".

* Constatamos los isomorfismos existentes entre las tres expresiones decimal, aritmética y geométrica para los operadores aditivos.

7.6.4 Isometrías aplicadas a las cadenas libres

En este sentido destacamos los siguientes puntos:

* Aplicamos un grupo de transformaciones geométricas (grupo diedral 4) a las cadenas y describimos el efecto de cada una de las isometrías del grupo sobre las unidades y decenas de sus operadores asociados, sobresaliendo entre otros los resultados siguientes:

- Las isometrías G_{180}, G_{360}, R_v y R_h transforman cadenas fijas simples en cadenas fijas simples, mientras que G_{90}, G_{270}, R_{-45} y R_{+45} transforman cadenas fijas simples en cadenas no simples.

- El giro $\mathbf{G_{180}}$ transforma la cadena original $C(a^+b_+)$ en su cadena opuesta $C(a^-b_-)$, y por tanto transforma al operador asociado [10a+b], en su opuesto [-(10a+b)].

- De la misma manera las reflexiones $\mathbf{R_v}$ y $\mathbf{R_h}$ producen efectos aritméticos **opuestos** sobre cualquier cadena.

- Describimos las características de las cadenas cuyos operadores permanecen invariantes frente a ciertas isometrías.

* Estudiamos la compatibilidad de las isometrías con la relación de equivalencia entre cadenas fijas, encontrando que:

- El efecto aritmético de una isometría sobre una cadena fija depende exclusivamente del número total de celdillas verticales y horizontales, y no del modo como se disponen en la cadena.

- La cadena fija simple mínima asociada a una cadena libre es única.

- El hecho de existir representantes de una misma cadena libre con diferente número de casillas verticales y horizontales, hace que ***el efecto aritmético de las isometrías sobre el operador asociado dependa de la elección de dicho representante***, concluyendo que ***las isometrías en T_{100} no son compatibles con la relación de equivalencia definida entre cadenas fijas***.

* Estudiamos el efecto aritmético de las isometrías sobre los representantes canónicos de las cadenas, obteniendo que:

- Las isometrías G_{90}, G_{270}, R_{-45} y R_{+45} no transforman representantes canónicos en representantes canónicos.

- El conjunto de isometrías S ={G_{360}, G_{180}, R_v, R_h}, con la composición de isometrías, constituye un grupo de Klein de isometrías que transforma representantes canónicos en representantes canónicos.

7.6.5 Estudio de las cadenas en la Tabla-100 de k columnas

Generalizamos algunos resultados obtenidos anteriormente cuando las cadenas las situamos en la tabla $T_{100(k}$ encontrando que:

* El valor numérico del operador asociado a una cadena situada en $T_{100(k}$ depende de k.

* Existe una forma única de expresar este valor numérico utilizando su expresión aritmética en base k, es decir el operador correspondiente a la cadena $C(\overset{\pm}{a} b_{\pm})$ viene expresado por [kx(±a) ±b].

* Recíprocamente, cuando hacemos un cambio de tabla y queremos conocer la cadena libre asociada al operador [+ab] en la tabla $T_{100(k}$ es necesario realizar un cambio de base: ab = $cd_{(k}$, correspondiendo a dicho operador la cadena $C(\overset{+}{c} d_{+})$.

* Podemos obtener el representante canónico de un operador dado en $T_{100(k}$ mediante unos pasos que expresamos en forma de organigrama.

* Es posible encontrar condiciones numéricas para que las isometrías que estudiamos dejen invariante a un operador determinado.

7.6.6 Estudio de los patrones rectilíneos en las tablas $T_{100(k}$

Tratamos en este apartado de expresar, en términos aritméticos, regularidades observadas en los patrones rectilíneos que se forman en las tablas (m, k) en las que se consideran clases residuales módulo **m** en las tablas $T_{100(k}$. En este sentido obtenemos:

* Una caracterización para los "*puntos alineados*".

* Una definición de "***recta***" en las tablas (m, k) por medio de la idea de "***cadena generadora de la recta***".

* Unos criterios para distinguir en dichas tablas "***rectas que se cortan, rectas paralelas y rectas que se cruzan***".

* Un *sistema de referencia* propio y unas ***ecuaciones** de las "rectas*" en las tablas (m, k).

* Una definición de ***patrón rectilíneo*** como familia de rectas paralelas.

* Unas ***aplicaciones*** entre los conjuntos de *patrones, cadenas y operadores* aditivos.

Por último, realizamos un estudio de las ***regularidades visuales*** que encontramos en las tablas (m, k) y su formalización matemática en términos de aritmética modular. Destacamos los siguientes hallazgos:

- Caracterización de un ***patrón rectilíneo*** en términos de congruencia.

- Identificación de la ***pendiente y la densidad*** de un patrón rectilíneo.

- Existencia de tablas cuyos patrones están contenidos en otras tablas (***patrones anidados***).

- Las tablas de la forma (m, $\dot{m}$) contienen los patrones generados por la cadena $C(c^+ d_+)$, cuando c y d son múltiplos de m.

- Las tablas (m, k) y (m, k+m) son tablas con patrones anidados.

- Las tablas que contienen al patrón generado por la cadena $C(c^+ d_+)$ son de la forma (m, $\overset{\bullet}{\frac{m-d}{c}}$), con d< $\overset{\bullet}{\frac{m-d}{c}} \in N$

- Establecemos criterios para caracterizar ***patrones simétricos*** y ***tablas simétricas***.

- Si una tabla tiene un patrón simétrico de otro que se presenta en una segunda tabla, y la componente vertical, c >1, de su cadena generadora es primo con el módulo m, entonces la primera tabla tiene todos los patrones simétricos de la segunda tabla, con la única limitación que produce el número de columnas.

- Las tablas equidistantes de cualquier tabla de la forma $(m, \dot{m})$, son simétricas.

- Las tablas equidistantes del par de tablas de la forma $(m, m\lambda+n)$ y $(m, m\lambda+n+1)$, con $\lambda = 0,1, 2, 3, ..$; $n = 1, 2, 3, ...$, son simétricas.

- Si una tabla (m, k) posee el patrón generado por la cadena $C(2^+ 0)$, entonces es ***autosimétrica***.

- Una condición suficiente para que dos tablas de la forma (m, k) y (m, k') sean simétricas es que $k+k' = \dot{m}$

- Sean dos tablas (m, k) y (m, k') simétricas, tales que un patrón generado por $C(c^+ d_+)$ y su simétrico, con c>1 y m.c.d. (c, m) = 1, en estas condiciones se cumple que $k+k' = \dot{m}$

7.7 Aportaciones y líneas de trabajo abiertas en la investigación

Resumimos las principales aportaciones de esta investigación ya mencionadas en este capítulo:

* Elaboración del material escrito para el trabajo de los estudiantes, si bien algunas de las cuestiones presentadas en la primera fase están basadas en el material bibliográfico consultado.

* Identificación de situaciones problemáticas detectadas en el transcurso del estudio empírico.

* Estudio teórico de la Tabla-100 y de las cadenas como representaciones geométricas de operadores aditivos.

* Aplicación de las cadenas al estudio de los patrones rectilíneos en las tablas $T_{100(k}$

La investigación que presentamos en esta memoria es de carácter exploratorio; por ello, aunque se han identificado muchas cuestiones, algunas no han podido estudiarse en profundidad y otras han quedado solo esbozadas. El trabajo realizado en el capítulo 6 de esta memoria puede contribuir con un soporte matemático fundado a futuras investigaciones del que no disponíamos al comienzo de nuestro estudio. Apuntamos algunas líneas generales de indagación, que pensamos abordar en el futuro y que han sido identificadas tras la presente investigación:

* Estudio de la comprensión que muestran estudiantes de distintos niveles educativos sobre el papel de las cadenas como representaciones de los operadores aditivos, alternativa a otras conocidas; este trabajo permitirá comprobar las capacidades de los estudiantes para realizar conversiones entre unas representaciones y otras, y detectar las posibles ventajas e inconvenientes que el carácter geométrico de las cadenas aporta al concepto de operador aditivo.

* Trabajo con estudiantes para profesores de secundaria y universidad de:

- Las estructuras algebraicas surgidas en esta investigación en torno a las cadenas en relación con las transformaciones geométricas.

- Los patrones rectilíneos en las tablas (m, k), tratando de ampliar el listado de propiedades, expuestas en esta memoria, y expresarlas en términos matemáticos formales.

- El uso de las cadenas para visualizar propiedades de la teoría de números obteniendo una dimensión geométrica-visual.

finalmente, con nuestro esfuerzo y trabajo reflejados en esta memoria, esperamos haber contribuido a clarificar todo un mundo de posibilidades didácticas y matemáticas que se vislumbra encierra el objeto que hemos llamado la Tabla-100, aportando nuestra contribución a la línea de Pensamiento Numérico.

BIBLIOGRAFIA

ABRANTES, P.; LEAL, L.C. y PONTE, J.P.; 1996. *Investigar para aprender Matemática;* APM; Lisboa

AJOSE, S. 1991-a. *Patterns in the hundred squared chart.* Part 1. The Mathematics Teacher, v. 84, nº 1. pp. 43-48

AJOSE, S. 1991-b. *Patterns in the hundred squared chart.* Part 2. The Mathematics Teacher, v. 84, nº 2. pp.119-124.

ARNAL, J.; DEL RINCON, D.; LATORRE, A. 1992. *Investigaci¢n educativa. Fundamentos y teoría.* Labor Barcelona

BEILER, A. 1966. *Recreations in Theory of numbers, The queen of Mathematics entertains.* Dover. New York.

BELL, A. 1995. *Purpose in school Algebra.* Journal of Mathematical Behavior, v. 14, nº 41, pp. 41-73

BEN-CHAIM, D.;LAPPAN, G. y HOUANG, R. 1989. *The role of visualization in the Middle School Mathematics Curriculum.* Focus on Learning Problems in Mathematics, v. 11, nº 1, pp. 49-60.

BIRD, D. 1991. *Students ability to Recognize Patterns.* School, Science and Mathematics. v. 91, pp. 255-258.

BURN, B. 1993. *Number Tables.* Mathematics Teaching. nº 144, pp. 36-37.

CARPENTER, T.P., HIEBERT, J. y MOSER J.M. 1981. *Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems.* Journal for Research in Mathematics Education, nº 12, pp. 27-39.

CARPENTER, T.P. y MOSER, J.M. 1982. *The Development of addition and subtraction problem-solving skills*, en TP. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds), **Addition and subtraction: Acognitive perspective**. pp. 9-24. Erlbaum: Hillsdale, N.J.)

CARPENTER, T.P. y MOSER T.M. 1983. *The acqusition of addition and subtraction concepts.* En R. Lesh y M. Landau (eds), **Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes**. Academic Press: New York.

CASTRO, E. 1994. *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

CASTRO, E. y CASTRO, E. 1997. *Representaciones y Modelización.* En Rico, L. (Ed.) **La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria**. ICE/HORSORI Barcelona.

CASTRO, E., RICO, L. y GIL, F. 1992. *Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos.* Enseñanaza de las Ciencias, v.10, nº 3, pp. 243-253.

CASTRO, E.; RICO, L. y ROMERO, I. 1997. *Sistemas de Representación y aprendizaje de estructuras numéricas.* Enseñanza de las Ciencias, v. 15, nº 3. pp.361-371.

COCKROFT, W. 1985. *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockroft.* MEC. Madrid.

COHEN, L. y MANION, L. 1990. *Métodos de Investigacion educativa.* La Muralla. Madrid.

COOK, M. 1988. *Even-Odd hundred chart.* Arithmetic Teacher, V.36 nº 3, 88, pp. 31-35.

COOK, M. 1989. *Happy message.* Arithmetic Teacher, V. 36 nº 6, pp. 31-35

COOK, T. D. y REICHARDT, CH.S. 1986. *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa.* Morata. Madrid.

CUERVO, R. J. 1998. *Diccionario de Construcción y Régimen de la Lengua Castellana.* Tomo VIII. Herder. Barcelona.

DANCING, J. y SOSA, E. 1993. *A Companion to Epistemology.* Basil Blackwell. Oxford.

DE CORTE, E. y VERSCHAFEL, L. 1985. *Begining first graders' initial representation of arithmetic word problems.* The Journal of Mathematical Behavior, v. 4, pp. 3-21.

DE CORTE, E. y VERSCHAFEL, L. 1987. *The effect of Semantic structure on first graders' strategies for solving additiion and subtraction word problems.* The Journal of Mathematics Education, v.18, pp. 363-381.

DEVLIN, K. 1994. *Mathematics: The Science of Patterns*. Scientific American Library. New York.

DIENES, Z.P. 1976. *Estados y operadores. Operadores aditivos*. Teide. Barcelona.

DOUADY, R. 1980. *Approches des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6-11 ans)*. Recherches en Didactique des Mathématiques, nº 11, pp. 77-110.

DOUADY, R. 1986. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Recherches en Didactique des Mathématiques. nº 7, pp. 5-31.

DUNCAN, D. R. y LITWILLER, B. H. 1982. *Products differences: the hundred square*. Mathematics in School. v. 7, nº 2, pp. 15-16.

DUNCAN, D. R. y LITWILLER, B. H. 1982. *Equal ratio patterns*. Mathematics in School. v. 13, nº4, pp. 20-21.

DUNCAN, D. R. y LITWILLER, B. H. 1986. *Calculators, quotients and number patterns*. Mathematics Teacher. Feb-86, pp. 109-118.

DUVAL, R. 1993. *Semiosis y Noesis*. Lecturas en didáctica de la Matemática. Escuela francesa. Sección de matemática educativa del CINVESTAV-IPN. México.

DUVAL, R. 1995. *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lan. Berna.

EASTERDAY, K. E. y CLOTHIAUX, C. A. 1985. *Problem-solving opportunities*. Arithmetic Teacher, v.32 nº 5, pp. 18-20.

ECHEVERRIA, J. 1994. *Semántica de las tablas matemáticas: las tablas de logaritmos como ejemplo*. (Ponencia en el Simposium: Problemas semánticos de los lenguajes científicos. Universidad de Santiago de Compostela).

EISEMBERG, T. y DREYFUS, T. 1986. *On Visual versus Analitical Thinking in Mathematics*. Proceeding of the Tenth P.M.E. London.

ENG, M. y CASEY, J. 1983. *Pascal's triangle, a serendipitous source for programming activities*. Mathematics Teacher. Dic-83, pp. 687-690.

EPERSON, D.B. 1981. *The sieve of Epersonides.* Mathematics in School, v. 10, nº 2, pp. 33-35.

FEFERMAN, S. 1989. *The Number Systems. Fundations of Algebra and Analysis.* Chealse Publishing Company. Nueva York.

FEINBERG, M.M. 1990. *Using patterns to practice basic facts.* Arithmetic Teacher, v. 37, nº 8, pp. 38-41.

FISCHBEIN, E. 1987. *Intuition in Science and Mathematics.* Reidel Publishing Company. Dordrecht.

FRENCH, D. 1992. *A number and its cube.* Mathematics in School. v. 21, nº 2.

FUSON, K. C. 1992. *Research on whole number addition and subtraction,* en Grouws, D.A. (Ed.), **Handbook on research on Mathematics teaching and learning**. McMillan Pub. New York.

GAIRIN, J.M. 1998. *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

GOLDIN, G. A. y McCLINTOCK, C. E. (eds.). 1980. *Task variables in mathematical problem solving.* The Franklin Institute Press: Philadelphia, Pensilvania.

GONZALEZ, J. L. 1995. *El Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

GREENO, J. 1991. *Number sense as situated knowing in a conceptual domain.* Journal for Research in Mathematics Education. nº 22, pp.170-218

HADAMARD, J. 1947. *Psicología de la Invención en el campo Matemático.* Espasa Calpe. Buenos Aires.

HELLER, J. I. y GREENO, J. G. 1978. *Semantic processing in aritmetic word problem solving.* Paper presentado en Midwestern Psycological Association Convention. Chicago.

HIEBERT, J. y LEFEVRE, P. 1986. *Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An introductory analysis.* En Hiebert, J. (ed.), **Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics**. Lawrence Erlbaum Associates Hillsdale, NJ.

HIEBERT, J. & CARPENTER, T. 1992. *Learning and teaching with understanding*. En Grouws, D.A. (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. MacMillan Publishing Company. New York.

HOPE, J. 1989. *Promoting Number Sense in School.* Artimetic Teacher, v. 36, nº. 6 pp. 12-16.

HOPKINS, D. 1989. *Investigación en el aula. Guía del profesor*. PPU. Barcelona.

HORAK, V. M. y HORAK, W. 1982. *The versatile hundred board.* Arithmetic Teacher, v. 30 nº 2, pp. 10-16.

HOWDEN, H. 1989-a. *Teaching Number Sense.* Artimetic Teacher, v. 36, nº. 6, pp. 6-11.

HOWDEN, H. 1989-b. *Prior experiences*. En Edwards, JR. E. L. (Ed.), **Algebra for everyone.** Virginia Dpartment of Education. Richmond, Virginia.

JACOBSON, M. H. y TABLER, M. B. 1980. *Calendar reading (cover-up, questions).* Arithmetic Teacher, v.28, nº 3, pp. 27-30.

JANVIER, C. (ed.) 1987. *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Earlbaum Associated Publishers. London.

JANVIER, C., GIRARDON, C. y MORAND, J. 1993. *Mathematics symbols and representations.* En P. Wilson (ed.), **Research Ideas for the Classroom. High School Mathematics**. pp. 79-102, NCTM. Reston, VA.

KAPUT, J. 1987. *Representation Systems and Mathematics*. En Janvier, C. (Ed.), **Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics**. LEA Hillsdale. New Jersey.

KAPUT, J. 1992. *Technology and Mathematics Education*. En Grows, D.A. (ed.), **Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning**. McMillan Publishing. New York.

KIERAN, C. y FILLOY, E. 1989. *El aprendizaje del Algebra escolar desde una perspectiva psicológica*. Enseñanza de las Ciencias. v. 7, nº 3.

KILPATRICK, J. 1978. *Variables and methodologies in research on problem solving*, en Hatfield, L. y Bradbard, D.(eds.), **Mathematical problem solving: papers from a research workshop**. ERIC/SMEAC: Columbus, Ohio.

LAKATOS, I. 1986. *Pruebas y refutaciones*. Alianza. Madrid.

LEAN, G. y CLEMENTS, M. 1981. *Spatial ability, visual imagery, and Mathematical performance*. Educational Studies in Matematic. nº 12, pp 267-299.

LITWILLER, B. H. y DUNCAN, D. R. 1980. *Activities for the maintenance of computational skills and the discovery of patterns*. N.C.T.M. Reston, Virginia.

LITWILLER, B. H. y DUNCAN, D. R. 1985. *Pentagonal patterns in the addition table.* Arithmetic Teacher, v. 32, nº 8, pp. 36-38.

LITWILLER, B. H. y DUNCAN D. R. 1986. *The extended subtraction table: a search for number patterns*. Arithmetic Teacher, v. 33 nº 9, pp. 28-31.

LONG, C.T. 1981. *Pascal's Triangle módulo p*. Fibonacci Quarterly, nº 19, pp.458-463.

LONG, C.T. 1983. *Gregory interpolation: a trick for problem solvers from out of the past*. Mathematics Teacher. Mayo-83, pp. 323-325.

LUND, CH. 1979. *Pascal's Triangle and computer Art*. Mathematics Teacher. Marzo 1979, pp. 170-184.

MASON, J. 1991. *Mathematical problem solving: Open, closed and exploratory in the UK.* ZDM, v. 92, nº 1, pp. 14-19.

MOVSHOVITZ-HADAR, N. 1988. *Stimulating presentation of Theorems followed by responsive proofs*. For the Learning of Mathematics, v. 8, nº 2, pp. 12-30.

NCTM. 1991. *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. Addenda Series. Nivel Inicial. Edición castellano S.A.E.M. Thales. Sevilla.

NESHER, P. 1982. *Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems*. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T. A. Romberg (eds), **Addition and subtraction: A cognitive perspective**, pp. 9-24 (Erlbaum: Hillsdale. N.J.

OLIVEIRA, H.; SEGURADO, I. y PONTE, J. P. 1997. *Mathematical investigation in the classroom: A collaborative project.* En Zack, V., Mousley, J. y Breen, C. (Eds.) **Developing practice: Teacher's inquiry and educational change** (pp.135-142). Centre for Studies in Mathematics, Science and Enviromental education.

ORTIZ, A. 1997. *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en educación Primaria.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

OTTE, M. 1986. *What is a text? Perspectives on Mathematics Education.* Reidel. Dordrecht.

PAIVIO, A. 1975. *Perceptual Comparisons Through the mind's eye.* Memory and Cognitions. v. 3, nº 6, pp. 635-647.

PIAGET, J. y INHELDER, B. 1975. *Génesis de las estructuras lógicas elementales.* Guadalupe. Buenos Aires.

PONTE, J. P; FERREIRA, C.; BRUNHEIRA, L.; OLIVEIRA, H. y VARANDAS, J. 1997. *Investigating mathematical investigations.* Actas del 49 CIEAEM. pp. 3-14. Setubal.

RESTIVO, V. S. 1992. *Mathematics in Society and History.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht.

REYS, R. y REYS, B. 1986. *Patterns on a hundred chart.* Arithmetic Teacher, v. 34, nº 1, p. 24.

RICO, L. 1996. *Pensamiento Numérico. Investigaciones en Matemática Educativa.* pp. 27-53. México.

RICO, L. 1997-a. *Los Organizadores del Currículo de Matemáticas.* En Rico, L. (Ed.), **La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria**. ICE/HORSORI. Barcelona.

RICO, L., CASTRO, E., CASTRO, E., CORIAT, M. y SEGOVIA, I. 1997-b. *Investigación, Diseño y Desarrollo Curricular*, en Rico, L. (ed.) **Bases Teóricas del Curriculum de Matemáticas en Educación Secundaria**. Síntesis Madrid.

RILEY, M. S, GREENO, J. G y HELLER, J. I. 1983. *Development children problem-solving ability in aritmetic,* en H. Ginsburg (ed.) The Development of Mathematical Thinking, pp. 153. Academic Press. New York.

ROMERO, I. 1995. *La Introducción del Número Real en Educación Secundaria.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

ROMERO, I. y RICO, L. 1999. *Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia did ctica en secundaria.* EMA. Investigación e innovación en educación matemática. v. 4, nº 2, pp.117-151.

ROSEMAN, L. 1978. *If you can count, you can add, subtract, multiply, and divide any amount.* Mathematics teacher, v.71, nº 10, pp. 565-566.

ROSEMAN, L. 1985. *Ten essential concepts for remediation in Mathematics.* Mathematics Teacher, v. 78 nº10, pp. 502-507.

SANZ, I. 1994. *La construcción del lenguaje matemático a través de los libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos.* Tesis doctoral. Universidad del País Vasco.

SEYMOUR, D. 1986. *Visual Patterns in Pascal's Triangle.* Dale Seymour. Palo Alto, CA.

SIERPINSKA, A. 1994. *Understanding in mathematics.* The Falmer Press. London.

SKEMP, R. 1980. *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.* Morata. Madrid.

SMITH, J. 1991. *Grid patterns.* Mathematics in School, v. 20, nº 2, p. 13.

STEEN, L.A. 1988. The Science of Patterns. Science, v. 240, nº 29, pp. 611-616.

STENHOUSE, L. 1979. *Using Research means doing research,* En Dahl et al. (eds) **Spotlight on Educational Research**. Oslo. University Press.

STEVENS, P.S. 1986. *Patrones y Pautas en la Naturaleza.* Biblioteca Científica Salvat. Barcelona.

STEWART, I. 1995. *Nature's Numbers. Discovering order and pattern in the Universe.* Weidenfeld and Nicholson. London.

SWALLOW, K. P. 1955. *The factorgram.* Mathematics Teacher, v. 48, nº1, pp. 13-17.

TAPSON, F. 1995. *Take a 100 square.* Mathematics in School. v. 24, nº 1, pp. 5-7.

THOMPSON, Ch. y RATHMELL, E. 1989. *By way of Introduction.* Artimetic Teacher, v. 36, nº. 6, pp. 2-3.

TYMOCZKCO, T. 1986. *New directions in the philosophy of mathematics.* Birkhauser. Boston.

VERGNAUD, G. 1990. *Théorie des champs conceptuels.* Recherches en Didactique des Mathématiques.

VERGNAUD, G. y DURAND, C. 1983. *Estructuras aditivas y complejidad psicogenética*, En **Psicología genética y aprendizajes escolares** (Compilación de Cesar Coll) Siglo XXI. Madrid.

VERTES, B. 1992. *One hundred squares revisited.* Mathematics Teaching, MT 140, pp. 23-25.

VOGEL VOYD, B. 1987. *Learning about odd and even numbers.* Arithmetic Teacher, v. 35, nº 3, pp. 18-21.

WIRTZ, R. 1974. *Matahematics for Everyone.* Curriculum Development Associates. Washington, D.C.

WOLFRAM, S. 1984. *Geometry of binomial coeficients.* American Mathematical Monthly. Nov-1984, pp. 566-571

ZIMMERMANN, W. y CUNNINGHAM, S. 1991. *Visualization and the nature of Mathematics.* En W. Zimmermenn y S. Cunningham (eds.), **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**. Mathematical Association of America. Washington.