

Grupo de Investigación

MECÁNICA DE SÓLIDOS Y ESTRUCTURAS



Tesis Doctoral

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA ELASTODINÁMICO EN DOMINIOS 2.5D

Autora:

M. ESTHER PUERTAS GARCÍA

Director:

RAFAEL GALLEGO SEVILLA

Diciembre de 2013

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica

Universidad de Granada



ugr

Universidad
de Granada

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: M. Esther Puertas García
D.L.: GR 1047-2014
ISBN: 978-84-9028-953-2

Universidad de Granada

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica

Campus de Fuentenueva, s/n

El doctorando MARÍA ESTHER PUERTAS GARCÍA y el director de la tesis RAFAEL GALLEGO SEVILLA. Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección del director de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, Diciembre de 2013.

Director de la Tesis

Doctorando

Fdo.: RAFAEL GALLEGO SEVILLA

M^a ESTHER PUERTAS GARCÍA

*A Rafa
y a mis pequeños Esther y Rafa*

Prólogo

La presente Tesis titulada *Resolución Numérica del Problema Elastodinámico en Dominios 2.5D* se enmarca en la línea de investigación que el Grupo Mecánica de Sólidos y Estructuras del Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica de la Universidad de Granada desarrolla. Se trata de una tesis que interpreta la respuesta que generan unas acciones. Como ese progreso tan natural ha sido la evolución del trabajo que se presenta. Quiero agradecer a Rafael Gallego que fuese el promotor que inició la acción, podría decir que fue mi Director aunque su ayuda, apoyo y consejo lo acercan más a la posición de un amigo incondicional. A Inas H. Faris y Miguel Ángel Riveiro por ser mis compañeros de viaje, auxilio y apoyo de una de esas travesías que marcan impronta y que es imposible culminarlas en solitario.

A Fernando Martínez por todos los datos del Análisis Espectral de Ondas Superficiales que amablemente me ha cedido y toda la voluntad que ha dedicado para enseñarme a entender los aspectos.

A todos mis compañeros. Soy afortunada porque se han interesado durante los progresos, se han solidarizado en los momentos más oscuros y su apoyo ha hecho fuerte mi impulso.

A Pedro Galvín, José Domínguez y Alfonso Corz por compartir generosamente los resultados experimentales de su trabajo para que pudiese avanzar y perfeccionar esta Tesis.

A mi familia. No hay nada que pueda decir acerca de lo que es inexpresable.

María Esther Puertas García

Granada

Diciembre de 2013

Resumen

En esta Tesis se presenta un modelo numérico para la predicción de las vibraciones inducidas por cargas fijas o móviles en medios en los que la geometría permanece invariante en una dirección aunque las cargas no lo sean, es lo que se conoce como problema 2.5D.

Para el estudio de propagación de ondas en medios 2.5D se ha desarrollado un programa en código FORTRAN que permite obtener la respuesta en medios fluidos y viscoelásticos con amortiguamiento histerético utilizando el Método de los Elementos de Contorno. Asimismo se presenta una solución analítica para la respuesta de un semiespacio tridimensional homogéneo con una carga puntual armónica en el tiempo y se estudia el comportamiento asintótico de dicha solución para diferentes estados comparando los resultados con soluciones fundamentales existentes. Tanto las expresiones de la Solución Fundamental como el código desarrollado se han validado con otros resultados obtenidos de referencias bibliográfica.

Las características del modelo desarrollado aprovecha las características principales del problema ingenieril al tiempo que modela los fenómenos ondulatorios más relevantes presentando una relación óptima entre coste computacional y precisión en el cálculo.

El modelo se ha validado experimentalmente comparando con dos ensayos muy empleados en ingeniería civil, tales como el Análisis Espectral de Ondas Superficiales en morteros y el ensayo para la obtención de la función de respuesta en terrenos. Los resultados obtenidos muestran la validez del modelo numérico desarrollado puesto que describe el problema físico al mismo tiempo que permite obtener resultados con una exactitud aceptable.

Índice general

Resumen	I
Lista de figuras	v
Lista de tablas	x
1 Introducción	1
1.1 Motivación del estudio	2
1.2 Objetivos	4
1.3 Organización del documento	5
2 Antecedentes	7
2.1 Principios básicos de la propagación de ondas	8
2.2 Métodos analíticos	12
2.3 Métodos numéricos para la resolución de problemas de propagación de ondas	16
3 El problema dinámico 2.5D	23
3.1 Introducción	23
3.2 Ecuaciones dinámicas para fluidos	23
3.3 Solución Fundamental para fluidos 2.5D	26
3.4 Ecuaciones básicas de la Elastodinámica	28
3.5 Solución Fundamental elastodinámica 2.5D.	29
3.5.1 Aproximación a la solución estática	33
3.5.2 Términos Singulares de la Solución Fundamental	33
4 Función de Green para un semiespacio viscoelástico 2.5D	37
4.1 Introducción	37
4.2 Planteamiento del problema.	37
4.3 Evaluación de la integrales para la Transformada Inversa de Fourier	43
4.4 Validación de la función de Green.	46
4.5 Comportamiento asintótico de la Solución Fundamental	50
4.6 Integración espacial de la Solución Fundamental	55
5 El Método de los Elementos de Contorno para problemas dinámicos 2.5D	59
5.1 Introducción	59
5.2 Formulación Integral para fluidos en medios 2.5D	60
5.3 Formulación Integral para el problema elastodinámico 2.5D	61

5.4	Discretización empleando funciones de forma cuadráticas	61
5.4.1	Evaluación de términos singulares	64
5.5	Cargas concentradas	65
5.6	Múltiples regiones	66
5.7	Puntos internos.	67
5.8	Ejemplos numéricos	67
5.8.1	Resolución de problemas de potencial en 2.5D.	68
5.8.2	Resolución de problemas elastodinámicos bidimensionales . .71	
5.8.3	Validación del programa UPECE para el caso elastodinámico 2.5D empleando soluciones analíticas	73
5.8.4	Validación de la Solución Fundamental para el semiespacio 2.5D empleando el Método de los Elementos de Contorno	77
5.8.5	Carga móvil en el espacio.	80
5.8.6	Carga móvil en un semiespacio.	80
5.8.7	Carga móvil en un semiespacio estratificado.	83
5.8.8	Carga móvil en semiespacio con zanja.	86
6	Aplicaciones prácticas del modelo	93
6.1	Análisis Espectral de Ondas Superficiales	93
6.1.1	Aplicabilidad del Método de los Elementos de Contorno 2.5D al estudio de morteros	95
6.1.2	Efecto de la existencia de heterogeneidades. Estudio de un mor- tero bicapa y tricapa.	101
6.1.3	Hormigón	102
6.2	Obtención de la Función de Respuesta en Frecuencia en suelos desti- nados a ferrocarril	110
7	Conclusiones y desarrollo futuro	117
7.1	Resumen del trabajo realizado.	117
7.2	Aportaciones originales	118
7.3	Conclusiones	118
7.4	Líneas de investigación propuestas	119
A	Antecedentes matemáticos	121
A.1	Funciones especiales.	121
A.2	Transformada de Fourier.	123
B	Solución del problema de la esquina mediante elementos con colocación no estándar	125
C	Soluciones Fundamentales	127
C.1	Solución Fundamental para el problema elastostático	127

C.2 Resolución del problema de una carga móvil mediante el Método de los Elementos de Contorno 2.5D	130
D Problemas analíticos empleados en la validación	133
D.1 Problema de potencial 2.5D	133
D.2 Problema elastodinámico 2.5D	134
E Metodologías en los ensayos y equipos empleados	137
E.1 Ensayos para el Análisis Espectral de Ondas Superficiales	137
E.2 Ensayo de propagación de ondas en el terreno	146
F UPECE	149
G Lista de Símbolos	153
H Acrónimos	155
Bibliografía	157

Índice de figuras

1.1	Esquema de propagación de ondas en el suelo originadas desde un túnel	2
1.2	Problema 2.5D	3
2.1	Propagación de ondas P, S y R	9
2.2	Amplitud vertical y horizontal de las ondas de Rayleigh en función de la profundidad, coeficiente de Poisson y longitud de onda [1]	10
2.3	Relación entre la respuesta en el tiempo y el espectro de frecuencias	12
3.1	Dominio 2.5D	26
3.2	Desplazamientos en un punto R para una carga en dirección y	32
3.3	Aproximación de la SF dinámica a la estática para los desplazamientos.	34
3.4	Aproximación de la SF dinámica a la estática para las componentes del tensor de tensiones.	35
4.1	Semiespacio bajo carga puntual	38
4.2	Comparación de reciprocidad	47
4.3	Validación del teorema de reciprocidad	48
4.4	Desplazamiento en la superficie de un semiespacio en la vertical de un impacto en el interior	48
4.5	Desplazamiento vertical en un punto de la superficie del terreno	49
4.6	Desplazamientos sobre $y = 1$ para una carga aplicada en el origen para el espacio completo	51
4.7	Desplazamientos en la superficie y en la línea $y = -h$ para un semiespacio elastostático	53
4.8	Tensiones en la superficie y en la línea $y = -h$ para un semiespacio elastostático	54
5.1	Discretización del contorno Γ de un problema 2.5D	62
5.2	Técnica de regularización para las integrales singulares	65
5.3	Modelo heterogéneo	67

5.4	Desplazamiento normal y presión en función de la frecuencia y del número de onda	69
5.5	Modelo para la validación de problemas de potencial	70
5.6	Desplazamiento normal y presión en un medio fluido	70
5.7	Modelo para la validación del programa en 2D	71
5.8	Desplazamiento vertical en la parte superior de la placa.	72
5.9	Desplazamiento vertical en el eje de simetría de la placa.	72
5.10	Modelo simple de validación para el caso $k_z = 0$	73
5.11	Desplazamiento vertical en el extremo libre de la viga.	74
5.12	Modelo para validación del código 2.5D	74
5.13	Tensión en el centro del contorno superior	75
5.14	Componente Real e Imaginaria de la tensión t_y en el centro del contorno inferior para $\omega = 10. - 0.05 i$ rad/s	76
5.15	Componente Real e Imaginaria de la tensión t_z en el centro del contorno inferior para $k_z = 0.4$ rad/m	76
5.16	Modelo para validación del código 2.5D basado en la Solución Fundamental	77
5.17	Desplazamientos para un problema analítico basado en la SF	78
5.18	Tensiones para un problema analítico basado en la Solución Fundamental	79
5.19	Desplazamientos en un semiespacio: Comparación MEC vs. SF	81
5.20	Tensiones en un semiespacio: Comparación MEC vs. SF	82
5.21	Esquema para el ejemplo de validación del espacio completo con túnel	83
5.22	Desplazamientos en la parte superior de un túnel	84
5.23	Desplazamientos en superficie para una carga móvil en el interior de un semiespacio	85
5.24	Esquema para el ejemplo de validación de un semiespacio con carga móvil en un túnel	85
5.25	Desplazamientos en superficie para una carga móvil en la base de un túnel	86
5.26	Desplazamientos verticales en la superficie de un semiespacio. Efecto de la velocidad de carga.	87
5.27	Desplazamiento vertical en una recta paralela a la línea de acción de la carga. Efecto de la velocidad de la fuerza.	88
5.28	Desplazamientos verticales en función del tiempo en un punto de la superficie de un semiespacio sometido a una carga móvil	89
5.29	Modelo para la validación de un semiespacio estratificado	89

5.30 Desplazamientos en superficie en un semiespacio estratificado . . . 90

5.31 Modelo para el estudio de propagación de ondas considerando una zanja 91

5.32 Comparación del desplazamiento en la superficie de un semiespacio ante la existencia de una zanja 92

6.1 Esquema experimental del ensayo AEOS 94

6.2 Configuración del ensayo para el mortero unicapa 96

6.3 Modelo de Elementos de contorno empleado para la simulación numérica del ensayo 96

6.4 Fuerza aplicada en la superficie del mortero 97

6.5 Sensibilidad respecto al amortiguamiento 98

6.6 Sensibilidad respecto al módulo de elasticidad transversal 99

6.7 Comparación resultados numéricos y experimentales para el mortero unicapa 100

6.8 Modelos ensayados de morteros bicapa y tricapa 101

6.9 Modelos MEC para los morteros bicapa y tricapa 103

6.10 Amplitud y fase desenrollada de la fuerza aplicada en la superficie de los mortero bicapa y tricapa 104

6.12 Comparación resultados numéricos y experimentales para el mortero bicapa 105

6.13 Comparación resultados numéricos y experimentales para el mortero tricapa 106

6.14 Ensayo en bloque de hormigón 107

6.15 Modelo MEC para el bloque de hormigón 108

6.16 Fuerza aplicada en la superficie del hormigón 108

6.17 Aceleración obtenida en dos puntos para el hormigón 109

6.18 Desplazamiento vertical en superficie debido a una carga armónica 112

6.19 Esquema de ubicación de acelerómetros en la zona de ensayos . . 113

6.20 Fuerza aplicada en la superficie del terreno 113

6.21 Modelo empleado para la resolución mediante el MEC 114

6.22 Respuesta en aceleraciones para un impacto 115

A.1 Funciones de Hankel con argumento real 122

B.1 Problema de esquina. 126

B.2 Desplazamiento en el contorno superior en función de la posición del nodo de colocación no-estándar. 126

C.1	Sistema de Referencia empleado en la obtención de la Solución Fundamental presentada en [135]	131
C.2	Desplazamientos calculados con la SF para el espacio completo y la SF contenida en [135]	132
E.1	Captura de datos en el ensayo AEOS	137
E.2	Fuerza aplicada en la superficie de los morteros ensayados	140
E.3	Transformada de Fourier de la Fuerza aplicada en la superficie de los morteros ensayados	141
E.4	Respuesta en los acelerómetros para los morteros ensayados	142
E.5	Transformada de la respuesta en los acelerómetros para los morteros ensayados	143
E.6	Fuerza aplicada en la superficie del bloque de hormigón	144
E.7	Respuesta en los acelerómetros para el hormigón ensayado en el dominio del tiempo	144
E.8	Respuesta en los acelerómetros para el hormigón ensayado en el dominio de la frecuencia	145
E.9	Localización ensayos	146
E.10	Perfil litológico de la zona de ensayos	147
E.11	Fuerza aplicada en la superficie del terreno	148
E.12	Respuesta en el acelerómetro para el ensayo de propagación de ondas en el terreno	148
F.1	Esquema de generación de archivos del programa UPECE	149

Índice de tablas

2.1	Valores aproximados para las propiedades de suelos en la propagación de ondas [116]	11
2.2	Métodos empleado en problemas de propagación de ondas	16
4.1	Propiedades del material del semiespacio	47
5.1	Propiedades del material del semiespacio estratificado	89
6.1	Parámetros Elásticos para la losa de mortero (a 24 días)	96
6.2	Parámetros Elásticos para la losas de mortero bicapa	102
6.3	Parámetros Elásticos para la losas de mortero tricapa	102
6.4	Parámetros Elásticos del modelo de hormigón	108
6.5	Parámetros Elásticos del suelo	114
E.1	Características de los equipos empleados en el ensayo Análisis Espectral de Ondas Superficiales	139
E.2	Medios empleados para el ensayo de propagación de ondas en el terreno	147
F.2	Estructura del programa	150
F.4	Módulos del programa UPECE	151
F.6	Archivo de entrada de datos del programa UPECE	152

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la *propagación de ondas* en sólidos ha tenido un avance significativo en las últimas décadas. La principal razón para este avance está en la gran importancia que tiene en numerosos campos de aplicación tales como ingeniería sísmica, vibraciones inducidas por tráfico y vibraciones inducidas por maquinaria. Las demandas crecientes de calidad de vida y medioambientales, exigen predecir con rigor las vibraciones provocadas y comprobar la calidad de estructuras existentes.

Desde el punto de vista físico-mecánico, se trata de un problema difícil en los que las técnicas numéricas más utilizadas tales como el Método de los Elementos Finitos son poco adecuadas. Dada la naturaleza del problema es necesario incorporar todos los parámetros relevantes, la definición geométrica precisa de los elementos que atraviesan las ondas, las características mecánicas de los materiales, así como las cargas que se transmiten al terreno entre otros, incluidos en un modelo realista que permita el análisis acoplado de todas las variables.

La técnica más versátil para analizar el problema planteado y que ha sido utilizada con éxito en aplicaciones similares es el Método de los Elementos de Contorno (MEC). La ventaja principal de este método es la incorporación implícita de las condiciones de radiación de las ondas elásticas, lo que implica que pueden modelarse dominios infinitos o semi-infinitos mallando únicamente el contorno de dicho dominio. Para la aplicación del MEC a un problema dado es necesario conocer la función de Green o Solución Fundamental. Existe una amplia literatura donde se proponen Soluciones Fundamentales para múltiples problemas dinámicos, algunas de éstas se describen en el capítulo siguiente.

Esta Tesis constituye una aportación al estudio de vibraciones inducidas por cargas dinámicas, fijas o móviles en medios en los que la geometría es invariante en una de las dimensiones, denominados 2.5D. (fig. 1.1).

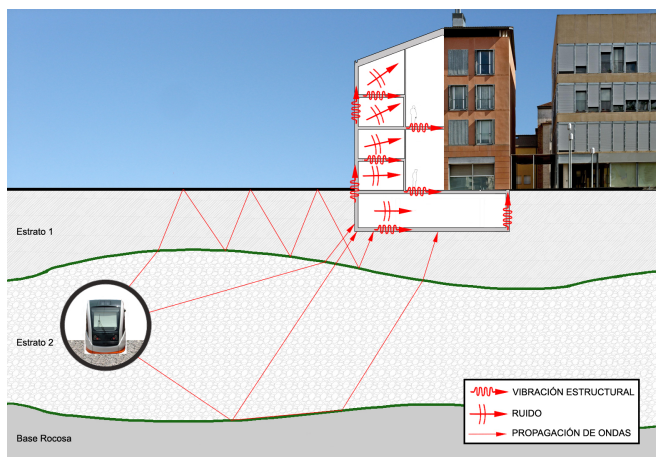


Figura 1.1: Esquema de propagación de ondas en el suelo originadas desde un túnel

1.1. Motivación del estudio

En el capítulo siguiente se puede observar que existen numerosos métodos para el análisis de propagación de ondas. Dependiendo del tipo específico de problema, un modelo analítico simple puede ser más adecuado puesto que sólo se tienen en consideración las variables esenciales del problema y no se requieren métodos numéricos más complejos.

Para el análisis de problemas complejos, en los que la geometría o comportamiento del material no permiten obtener una solución analítica del mismo, se puede aplicar el Método de los Elementos de Contorno. En el caso de problemas en los que interactúe un medio con una estructura es más útil utilizar la combinación de los métodos de los elementos de contorno y de los elementos finitos.

Los modelos bidimensionales recogen algunas de las características básicas del problema pero no tienen en cuenta la naturaleza básicamente tridimensional del proceso dinámico de generación, propagación, reflexión y difracción de ondas elásticas que se produce. Un modelo 3D completo proporcionará una óptima aproximación, será más versátil y capaz de representar geometrías y estados de carga complejos, aunque a cambio el incremento en el coste computacional es elevado. La alternativa que se ha desarrollado, aprovecha las características principales del problema ingenieril analizado al tiempo

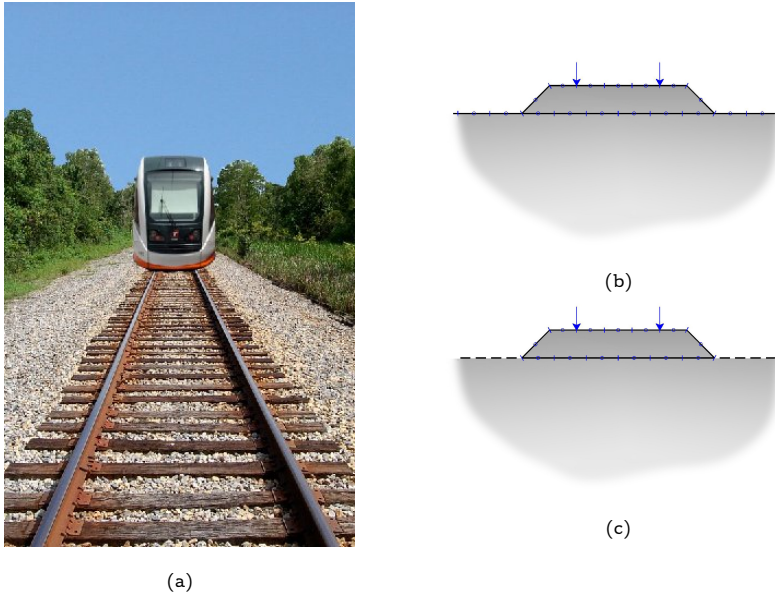


Figura 1.2: (a) Problema 2.5D; (b) Modelo empleando el Método de los Elementos de Contorno utilizando la Solución Fundamental 2.5D; (c) Modelo empleando el Método de los Elementos de Contorno utilizando la Solución Fundamental para un semiespacio 2.5D

que modela los fenómenos ondulatorios más relevantes que se producen. En muchos casos, teniendo en cuenta que la geometría analizada es bidimensional pero que las cargas no lo son, el problema puede estudiarse realizando un desarrollo de Fourier de las cargas en el eje en el que la geometría es invariante, dando lugar a lo que se denomina problema 2.5D (figura 1.2).

Por otra parte, la formulación del Método de los Elementos de Contorno en el dominio de la frecuencia presenta la ventaja de que el consumo de memoria en el cálculo es mucho menor que en el dominio del tiempo y se obtienen resultados muy aceptables [10].

El fin de este estudio es presentar técnicas que puedan emplearse en el análisis de problemas de propagación de ondas en medios 2.5D utilizando el Método de los Elementos de Contorno, contemplando todas las etapas necesarias en el desarrollo del método, desde la obtención de la Solución Fundamental para un semiespacio con amortiguamiento hasta la implementación y validación del programa creado. Finalmente se aplica esta técnica a problemas reales.

1.2. Objetivos

Los objetivos que se pretenden alcanzar con el desarrollo de esta Tesis Doctoral se han adaptado a las necesidades surgidas durante la propia ejecución de los trabajos y se describen a continuación.

El principal objetivo es desarrollar una herramienta computacional para el estudio de propagación de ondas en medios 2.5D. Para ello se parte de una revisión bibliográfica exhaustiva del tema con el fin de conocer el estado de conocimiento en el ámbito del estudio de vibraciones en elastodinámica y resumir y presentar los métodos existentes hasta la fecha. Para la formulación e implementación del Método de los Elementos de Contorno en 2.5D se comenzó con el estudio de un problema más sencillo, el problema de potencial, particularizando para el caso de fluidos. Posteriormente se generalizó el procedimiento desarrollado a problemas elastodinámicos. Se desarrolló un software específico que fue validado numéricamente y se aplicó éste para modelizar dos problemas del área de la ingeniería civil, el Análisis Espectral de Ondas Superficiales y la predicción de vibraciones en suelos destinados a ferrocarril.

Las aportaciones originales del contenido de esta Tesis se enumeran a continuación:

1. Obtención de la Solución Fundamental para un semiespacio elástico con amortiguamiento histerético en el espacio 2.5D.
2. Estudio del comportamiento asintótico de la Solución Fundamental del semiespacio, obteniendo las expresiones de la Solución Fundamental transformada en dos de las tres componentes cartesianas para el espacio completo y la función de Green para el semiespacio elastostático en el dominio transformado.
3. Resolución del problema de carga móvil 2.5D empleando el Método de los Elementos de Contorno para cargas fijas.
4. Implementación de un software multiregión permitiendo regiones sólidas y/o líquidas.
5. Estudio de la propagación de ondas en suelos destinados a ferrocarril utilizando software 2.5D.
6. Análisis de la aplicabilidad del Análisis Espectral de Ondas Superficiales en morteros y hormigones empleando metodologías 2.5D, incluyen-

do un estudio de sensibilidad de la respuesta frente a las propiedades dinámicas del material.

7. Comparación con resultados experimentales.

1.3. Organización del documento

El contenido de este documento se puede agrupar en tres partes principales, la primera que contiene los dos capítulos iniciales consiste en la presentación del tema de investigación y revisión del estado del conocimiento. En los cuatro capítulos siguientes se procede a la presentación de la formulación empleada y a la obtención de resultados. El capítulo final contiene el resumen de los trabajos efectuados y las conclusiones recabadas.

La organización de cada capítulo se resume a continuación:

Capítulo 2. Antecedentes. Se presenta una revisión del Estado del Arte en el que se resume brevemente la evolución seguida en el estudio de propagación de ondas en sólidos, comenzando con la descripción de los conceptos básicos. Se incluye también una síntesis de los principales métodos empleados en el estudio de propagación de ondas, así como una aproximación a los modelos 2.5D y sus aplicaciones.

Capítulo 3. El Problema Dinámico 2.5D. Se describe la obtención de la Solución Fundamental para el problema de potencial en medios 2.5D y para el caso de medios elastodinámicos con amortiguamiento histerético. En ambos casos se obtienen también las componentes de singularidad de las funciones de Green para su posterior uso en el cálculo de integrales singulares en el Método de los Elementos de Contorno.

Capítulo 4. Función de Green en un semiespacio viscoelástico 2.5D. El procedimiento seguido para la obtención de la Solución Fundamental en el espacio 2.5D ha permitido obtener la Solución Fundamental para el semiespacio. En este capítulo se desarrolla la metodología seguida para la obtención de la solución y se estudia el comportamiento asintótico de la misma, así como se coteja su validez comparando las expresiones obtenidas con otras existentes y con datos experimentales.

Capítulo 5. El Método de los Elementos de Contorno para problemas dinámicos 2.5D. Se describe la implementación de las soluciones desarrolladas en el Método de los Elementos de Contorno para problemas 2.5D. Partiendo de la formulación integral del problema, se define la discretización empleando funciones de forma cuadráticas, exponiendo la solución del problema de esquina y la evaluación de términos singulares. Asimismo se detallan las soluciones adoptadas cuando aparecen cargas concentradas, existen cargas

móviles o múltiples regiones. El capítulo finaliza con la presentación de diversos ejemplos numéricos que han servido para la validación del programa desarrollado.

Capítulo 6. Aplicaciones prácticas del modelo. El modelo numérico ha sido validado con ensayos experimentales. Se han considerado dos aplicaciones empleadas en ingeniería civil, tales como el Análisis Espectral de Ondas Superficiales y el estudio de propagación de ondas en suelos destinados a ferrocarril.

Capítulo 7. Conclusiones y desarrollo futuro. En el último capítulo de esta Tesis se presenta un resumen del trabajo realizado, incidiendo en las aportaciones originales y las conclusiones que se extraen del resultado. El capítulo concluye con las líneas de investigación más interesantes que mejoran los estudios desarrollados.

Anexos. El documento finaliza con 6 anexos que permiten completar el estudio realizado. El primer anexo describe los conceptos matemáticos principales, definiendo las funciones especiales y las transformadas de Fourier empleadas en las soluciones desarrolladas. El anexo B muestra cómo se ha solucionado el problema de esquina en la aplicación del Método de los Elementos de Contorno. El anexo C describe diferentes Soluciones Fundamentales empleadas en la validación del programa, mientras en el anexo D se presentan las soluciones analíticas utilizadas en la validación del software desarrollado. En el anexo E se muestran los equipos empleados y los datos obtenidos en la realización de los ensayos que han servido para demostrar la aplicabilidad de esta técnica. Por último, el anexo F resume brevemente el programa desarrollado para el cálculo de la respuesta en problemas 2.5D.

Antecedentes

El estudio de propagación de ondas o la respuesta a las vibraciones se ha basado principalmente en que éstas pueden afectar negativamente el desarrollo de las actividades humanas ya que éstas dependen directamente de su magnitud, frecuencia y duración [154]. De ahí que los principales estudios estén desarrollados en el contexto de propagación de ondas en el suelo. Si bien, el problema también puede ser empleado en otros estudios, uno de ellos es la propagación de ondas en hormigón. Las estructuras de hormigón son muy empleadas debido a su bajo coste y a la larga vida útil que presentan comparado con la ejecución con otros materiales. Los ensayos no destructivos (métodos acústicos, ultrasonidos, impact-echo, Análisis Espectral de Ondas Superficiales) se suelen utilizar para medir propiedades del hormigón o detectar defectos. La gran ventaja de estos métodos es que la estructura sólo debe estar accesible en un lado. Pero la naturaleza heterogénea del hormigón provoca que existan limitaciones en los ensayos. Para que estos estudios sean eficientes es necesaria la combinación con una técnica numérica que permita demostrar que el método es aplicable.

El rango de frecuencias significativas para la propagación de ondas en el suelo se sitúa entre los 15Hz y los 200Hz [156]. Frecuencias mayores se atenúan rápidamente con la distancia y el amortiguamiento del material, mientras que frecuencias menores son imperceptibles para el humano [67]. Para otros estudios, como en los ensayos no destructivos, el rango de frecuencias que afecta a la respuesta es más amplio.

Existen diversos estudios que recogen revisiones de modelos y medidas de vibraciones. Todas las referencias encontradas se basan en la propagación de ondas en suelos. La primera referencia, se presenta en el año 76 con un estudio del estado del arte de la propagación de ondas [72]. En [77] se realiza una revisión de la propagación de vibraciones enfatizando en las generadas por el paso de trenes. Una revisión más general que estudia los avances en la propagación de ondas generadas por vehículos y ferrocarril se encuentra en [78]. Los avances en el estudio de vibraciones generadas por el paso de trenes en túneles se pueden obtener en [159] y [46]. Más reciente es la revisión

sobre atenuación de vibraciones presentada en [29].

2.1. Principios básicos de la propagación de ondas

Los primeros estudios de propagación de ondas son atribuidos a *Lord Rayleigh* en 1885 [126] y a *Lamb* [100]. En ellos se describen la existencia de dos tipos de ondas que pueden propagarse libremente en el suelo, son las ondas P y S (fig. 2.1).

Las ondas P, también se conocen como ondas dilatacionales u ondas de presión, y son ondas que se propagan en la dirección de propagación. Las ondas S son las ondas transversales u ondas de cortante y son aquellas se mueven en dirección perpendicular a la de propagación. Este tipo de ondas se suele descomponer en sus componente vertical (SV) y horizontal (SH) [38].

En un semiespacio, ambos tipos de ondas se combinan en superficie en las denominadas ondas de Rayleigh o de superficie, que llevan asociado un movimiento elíptico en el plano perpendicular a la dirección de propagación (fig. 2.1). La amplitud de onda es máxima justo debajo de la superficie y decrece rápidamente con la profundidad, dependiendo del coeficiente de Poisson y la longitud de onda (fig. 2.2)

Estos tres tipos de ondas se reciben en tres tiempos diferentes. Las ondas P son las primeras en recibirse con una velocidad c_p , les siguen las ondas S, con velocidad c_s y por último, llegan las ondas de Rayleigh con mayor amplitud y velocidad c_R . La distribución de energía para un semiespacio elástico excitado por una carga vertical oscilatoria normal a la superficie es del 67 % de la energía total correspondiente a ondas de Rayleigh, el 26 % a corresponde a ondas S y el 7 % restante a las ondas P [112].

Posteriormente se encuentran los trabajos de *Love* y *Stoneley* en los que descubren un nuevo tipo de ondas al que denominan con sus nombres. Las ondas de Love se propagan en la superficie libre de un semiespacio produciéndose el movimiento de las partículas hacia afuera de la dirección del plano. Las ondas de Stoneley se producen en la interfase entre dos capas de material con diferentes propiedades [49, 66].

En los problemas de propagación de ondas, el medio suele modelizarse mediante un material viscoelástico. La propiedades elásticas del material que caracterizan el medio son las constantes de Lamé μ y λ , cuya relación con el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν son las siguientes,

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.1.1)$$

La velocidad de ondas P, c_p y S, c_s se relacionan con las constantes de Lamé

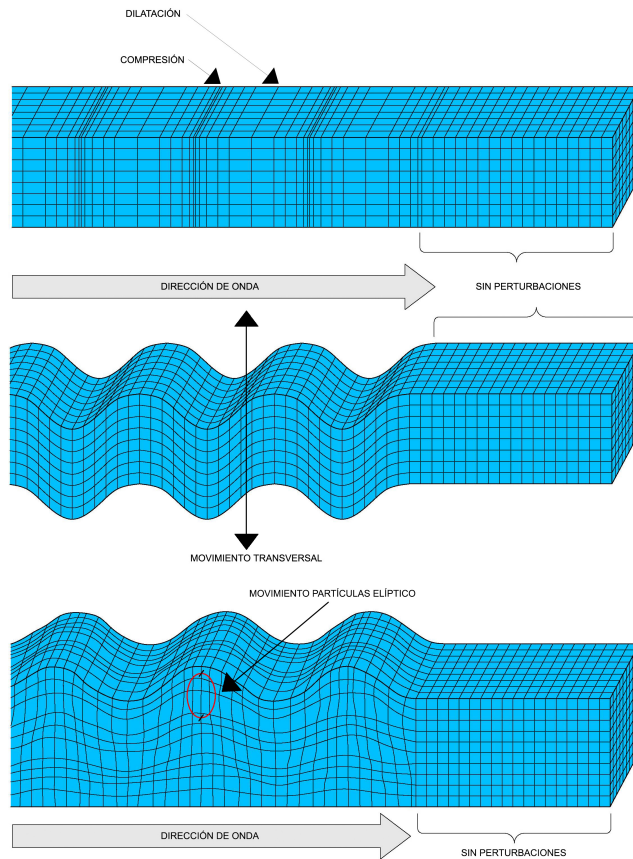


Figura 2.1: Propagación de ondas P, S y R

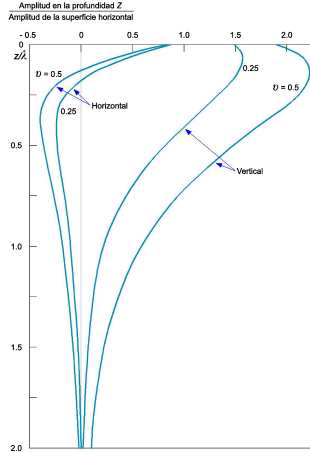


Figura 2.2: Amplitud vertical y horizontal de las ondas de Rayleigh en función de la profundidad, coeficiente de Poisson y longitud de onda [1]

y la densidad ρ ,

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.1.2)$$

Conocida la velocidad de las ondas S, se puede determinar la velocidad de las ondas de Rayleigh [4] mediante la relación

$$c_R = \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} c_S \quad (2.1.3)$$

siendo ν el coeficiente de Poisson, cuyo valor varía entre 0 y 0.5. Obteniéndose que la velocidad de las ondas de R oscila entre $0.862c_S$ y $0.955c_S$. Las ondas de Raileigh no se propagan dentro del medio, la velocidad descende con la profundidad de tal modo que en una profundidad en torno a 1 o 2 veces la longitud de onda la velocidad es inapreciable.

Cuando la onda se propaga en un medio, se produce una pérdida de energía y, como consecuencia, la onda se atenúa. Así, la amplitud de onda decrece con la distancia. La atenuación de las ondas se produce por amortiguamiento geométrico y amortiguamiento del material.

El amortiguamiento geométrico se produce con la propagación de las ondas y depende del tipo de onda. Así, ondas que se propagan con frente de ondas semiesférico, la amplitud A , decrece proporcionalmente con la distancia a la fuente $1/r$. Las ondas de superficie que se propagan con frentes de onda

Tabla 2.1
Valores aproximados para las propiedades de suelos en la propagación de ondas [116]

Tipo	Velocidad c_p (m/s)	Amortiguamiento ζ	Densidad ρ (kg/m ³)
Roca	3500	0.01	2650
Arena, grava	600	0.1	1600
Suelo arcilloso	1500	0.1 – 0.2	1700

cilíndricos, decrecen en amplitud con $1/r^2$. La amplitud de las ondas R, se atenúan en menor medida respecto a los otros tipos, \sqrt{r} [38].

Los dos modelos más empleados en modelos analíticos y numéricos para el amortiguamiento del material, son el amortiguamiento viscoso y el amortiguamiento histerético [79]. El amortiguamiento viscoso consiste en la aplicación de una fuerza de amortiguamiento que depende linealmente de la frecuencia con el factor $-i\omega$. En el amortiguamiento histerético, la disipación de la energía mecánica es independiente de la frecuencia. En ambos modelos, la fuerza de amortiguamiento está desfasada el valor π respecto a la velocidad de las partículas. Así, en ambos modelos, la parte real de la rigidez es independiente de la frecuencia e igual a la rigidez estática.

El amortiguamiento se incluye empleando el principio de correspondencia [25, 35], que establece que la respuesta en frecuencias de un sistema amortiguado se puede obtener a partir del problema elástico considerando el módulo de elasticidad de forma compleja. Las constantes de Lamé se pueden escribir,

$$\mu = \mu_{\mathfrak{R}} (1 + 2i\zeta \operatorname{sgn}(\omega)) \quad \lambda = \lambda_{\mathfrak{R}} (1 + 2i\zeta \operatorname{sgn}(\omega)) \quad (2.1.4)$$

donde $\mu_{\mathfrak{R}}$ and $\lambda_{\mathfrak{R}}$ son las constantes de Lamé del material.

El estudio de la propagación de ondas se puede realizar en el dominio del tiempo o de la frecuencia. En la figura 2.3 se muestra la diferencia entre la representación de la respuesta en ambos dominios. La relación entre ambos se puede establecer empleando la *Transformada de Fourier* [118].

Existen múltiples técnicas que se han propuesto para simular la propagación de ondas en medios elásticos. A continuación se describen algunas de éstas. Las soluciones analíticas (sección 2.2) aunque son el método más rápido y fácil de calcular la respuesta para la propagación de ondas, sólo se conocen para problemas simples. Por ello se han desarrollado técnicas numéricas para

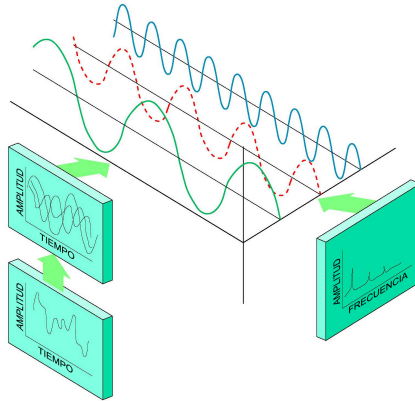


Figura 2.3: Relación entre la respuesta en el tiempo y el espectro de frecuencias

la obtención de resultados en problemas más complejos (sección 2.3), entre las que destacan el Método de los Elementos de Contorno, el Método de las Diferencias Finitas, el Método de los Elementos Finitos y otros métodos semianalíticos.

2.2. Métodos analíticos

La aplicación de métodos numéricos para la propagación de ondas requieren el empleo de Soluciones Fundamentales (SF) para obtener resultados válidos compatibles con un tiempo de cálculo óptimo. Estas soluciones fundamentales son soluciones analíticas a los problemas de propagación de ondas. Un estudio que recoge los principales avances en la obtención de soluciones fundamentales se presenta en [93].

Para el caso de cargas estáticas, los primeros estudios para el cálculo de la solución fueron presentados por *Lord Kelvin* [149] para un espacio infinito sometido a una carga estática puntual. *Boussineq* [26] obtuvo la solución para el problema de una carga estática normal a la superficie de un semiespacio y *Cerruti* [32] propuso la solución para un semiespacio sometido a una carga tangencial en la superficie.

Existen múltiples estudios que analizan la generación de movimientos de superficie [100, 30, 33, 4, 47] pero el número de ellos que desarrolla el caso de movimientos bajo la superficie es limitado. *Eason* [45] consideró una carga normal a la superficie puntual o distribuida con forma circular. El proble-

ma es axisimétrico y se realizan transformadas integrales para su resolución. Los desplazamientos se obtienen mediante integrales finitas que se resuelven numéricamente en puntos interiores del semiespacio para el caso de la carga puntual o en puntos sobre el eje de simetría para la carga distribuida. Gakenheimer [54] obtuvo la Solución Fundamental para una carga perpendicular a la superficie dentro del semiespacio en forma integral. Johnson [83] obtuvo la Solución Fundamental para el problema tridimensional de una carga puntual en un semiespacio empleando el método Cagniard-de Hoop.

Años después, Pilant [122] obtuvo la Solución Fundamental para una carga lineal aplicada en la superficie de un semiplano elástico obteniendo los desplazamientos en un punto interior o viceversa, el estudio se realizó en el dominio del tiempo y empleando el método Cagniard-De Hoop.

El problema de una carga concentrada actuando en el interior de un semiespacio elástico homogéneo tridimensional fue estudiado en primer lugar por Mindlin [113] bajo condiciones estáticas. Obtuvo la solución analítica para un medio isótropo empleando el principio de superposición a partir de la solución de Kelvin. Sin embargo, el cálculo del núcleo de esta Solución Fundamental es tediosa. En [39] se realiza una solución diferente al mismo problema empleando el método de las imágenes. Posteriormente, en [114] se reconsidera el problema y se resuelve empleando los potenciales de Papkovitch.

Garvin [61] desarrolló la solución para una fuerza lineal que actúa en una cavidad infinitesimal localizada bajo la superficie libre. Empleó la transformada de Laplace para obtener la solución en dominios bidimensionales.

Kobayashi [99] obtuvo la Solución Fundamental para un semiespacio basada en la del espacio completo en el dominio de la frecuencia, para ello empleó la transformada de Laplace. Al mismo tiempo, Luco y Apsel [104] emplearon una formulación en el dominio de la frecuencia para obtener la respuesta dinámica tridimensional en un semiespacio estratificado debido a una carga en su interior. La respuesta se obtiene como suma de integrales semi-infinitas respecto al número de onda obtenido tras realizar una serie de Fourier respecto al acimut.

Pak [119] estudió analíticamente la Solución Fundamental para un semiespacio isótropo sometido a una fuerza interna armónica en el tiempo empleando el método de los potenciales de desplazamiento.

Banerjee y Mamoon [15] obtuvieron la solución para un semiespacio sometido a una fuerza periódica empleando la técnica desarrollada en [68] para obtener la Solución Fundamental transitoria a una carga aplicada. Para estos se

emplean los métodos de síntesis y superposición en el espacio transformado de Laplace y en el dominio de la frecuencia.

Lieb y Sudret [102] presentaron un algoritmo numérico para el cálculo de la respuesta de un semiespacio sometido a cualquier tipo de cargas superficiales pero bajo ciertas condiciones existe una solución analítica al problema en el dominio transformado empleando Fourier.

Tadeu [147] formuló la solución analítica para la respuesta de un espacio homogéneo tridimensional sujeto a una carga armónica senoidal (problema 2.5D). Una extensión de este modelo para semiespacios se obtuvo en [146]. La Solución Fundamental del semiespacio se escribe como suma de la Solución Fundamental para el espacio completo más términos de superficie, que a su vez, se descomponen en dos partes, una correspondiente a la solución del método de las imágenes más otra obtenida de la metodología propuesta en [98]. Posteriormente, en [12] presentaron una solución analítica al cálculo de desplazamientos tridimensionales en un estrato elástico sólido y plano con contorno rígido cuando es sometido a unas cargas lineales armónicas y senoidales verticales.

Georgiadis et al. [65, 63] desarrollaron un procedimiento de transformación integral para obtener la Solución Fundamental en elastodinámica tridimensional. La técnica empleada para la resolución consistió en el empleo de la transformada de Radon y la teoría de distribución de elementos.

Degrande et al. [40] revisaron el método directo de la rigidez para el cálculo de la propagación de ondas armónicas y transitorias en un medio estratificado horizontalmente. Desarrollado al principio de los ochenta por Kausel y Roësset, este método es una herramienta utilizada usualmente para el cálculo de las funciones de Green en un medio estratificado. Se basa en la superposición de ondas armónicas planas en el dominio de la frecuencia, siendo muy apropiado para la propagación de ondas elásticas. Las funciones de Green se emplean con la formulación de elementos de contorno para calcular la impedancia dinámica del suelo en una formulación de subdominio para la interacción suelo-estructura.

Park [121] presentó una solución mixta en el dominio del tiempo y transformada en el espacio para un semiplano sujeto a una carga armónica antiplana en la superficie.

El problema de la propagación de ondas cuando la carga es móvil también ha sido ampliamente estudiado. La primera referencia se encuentra en [138] donde Sneddon estudió el caso de una carga lineal moviéndose con velocidad subsónica constante en un semiespacio bidimensional. En [36] investigaron

los casos para cargas lineales transónicas y supersónicas empleando la descomposición de Helmholtz, solución que fue corregida en [64] para el caso transónico. Eason [45] obtuvo la Solución Fundamental para una carga móvil en la superficie de un semiespacio homogéneo e isótropo. Fryba [53] analizó la respuesta de un medio elástico sin contorno sujeto a una carga puntual móvil usando la técnica de la transformada integral triple de Fourier, obteniendo la solución para los tres tipos de cargas considerados. Posteriormente, Ungar utilizó esta solución junto al método Cagniard para resolver el problema de una carga móvil en el interior de un semiespacio estratificado.

De Barros y Luco [17] investigaron la respuesta de un semiespacio viscoelástico estratificado con una carga móvil lineal y constante, utilizando el método anteriormente propuesto en [104]. Gunaratne y Sanders [69] estudiaron la respuesta de un medio elástico estratificado con una carga móvil repartida empleando una aproximación de la rigidez de las capas y del amortiguamiento viscoso.

Jones et al. [87] estudiaron teóricamente la propagación de ondas a través de una superficie de un semiespacio elástico, debido al movimiento de una carga vertical, armónica y rectangular. Las soluciones transformadas se obtienen empleando la transformada doble de Fourier.

Suiker et al. [141, 142] estudiaron la propagación de ondas de superficie en un semiespacio elástico estratificado, consistente en una capa superior granular elástica sobre un estrato elástico clásico. Para el análisis se consideran las propiedades de continuidad del segundo gradiente para la capa superior y para la inferior, las propiedades de continuidad de Cosserat. Posteriormente, en [143, 144] estudiaron la propagación de ondas en una capa compuesta por partículas discretas.

En [101] se estudia teóricamente la transmisión de vibraciones sobre una superficie de terreno, sometida a una carga móvil distribuida, armónica y vertical a alta velocidad. El problema planteado es en dos dimensiones y el interior del terreno se modeliza como un semiespacio elástico. Las soluciones transformadas se obtienen mediante la transformada de Fourier.

Verruijt y Cornejo [151] estudiaron el problema de una carga móvil puntual en un semiespacio elástico con amortiguamiento histerético. El método emplea la transformada de Fourier. La solución dada consiste en una generalización de la dada por [36].

La solución analítica para un cilindro infinito sometido a cargas armónicas estacionarias o moviéndose en la dirección del eje del cilindro fue desarrollada por Sheng [135]. Esta solución permite obtener las funciones de Green para

el espacio completo en el denominado espacio 2.5D.

Iovane et al. [80] consideraron los problemas de fuerzas concentradas que se mueven con velocidad constante y oscilan con frecuencia cíclica en un medio bidimensional, elástico, anisótropo, homogéneo y sin contorno. Empleando técnicas que usan la transformada integral de Fourier y estableciendo las propiedades de las ondas, obtienen la representación explícita del tensor de Green elastodinámico para todos los tipos de movimiento como suma de integrales sobre el intervalo finito.

2.3. Métodos numéricos para la resolución de problemas de propagación de ondas

Desde mediados de los 70, el empleo de computadoras como herramienta de cálculo ha permitido una gran evolución en el estudio de problemas complejos. En la actualidad es posible resolver problemas de propagación de ondas bajo condiciones realísticas, pero los tiempos de cálculo pueden ser excesivos.

La complejidad de las ecuaciones a resolver para problemas de vibraciones implican la utilización de técnicas numéricas para su resolución. Los métodos más empleados se pueden agrupar en modelos continuos, modelos discontinuos y modelos híbridos (tabla 2.2).

Entre las técnicas más empleadas en la propagación de ondas, destacan el Método de las Diferencias Finitas, el Método de los Elementos Finitos, el Método de los Elementos de Contorno y otros métodos semianalíticos. Para problemas con dominios finitos, los métodos de los elementos finitos y de diferencias finitas son los más empleados, mientras que en problemas sin contorno se suele utilizar el Método de los Elementos de Contorno, ya que el

Tabla 2.2
Métodos empleado en problemas de propagación de ondas

Tipo	Modelos
Continuos	Método de las Diferencias Finitas(MDF)
	Método de los Elementos Finitos(MEF)
	Método de los Elementos de Contorno(MEC)
Discontinuos	Método de los elementos discretos
	Método de redes de fractura discretos
Híbridos	Combinación MEF/MEC
	Combinación MEF/MDF

resto de métodos requiere el empleo de contornos artificiales. Asimismo, el Método de los Elementos de Contorno genera matrices con menor dimensión que el Método de los Elementos Finitos con el consiguiente menor tiempo de cálculo.

Método de las Diferencias Finitas

El Método de las Diferencias Finitas (MDF) consiste en resolver las ecuaciones de movimiento para un medio continuo en unos nodos específicos, utilizando diferencias finitas en la expresión de las derivadas.

Las ecuaciones diferenciales se escriben en función de los desplazamientos o tensiones de los nodos de la malla. Cerca de los contornos es necesario que la forma en diferencias finitas satisfaga tanto las ecuaciones de movimiento como las condiciones de contorno. Esto implica que este método sea muy restrictivo [19].

Las primeras referencias del Método de las Diferencias Finitas en el estudio de propagación de ondas se encuentran en [152, 153], donde se describe cómo obtener la respuesta en un medio heterogéneo empleando este método. El Método de las Diferencias Finitas se presenta desarrollado para sólidos viscoelásticos en [24], aplicado para la propagación de ondas sísmicas en [115] y para espacios elásticos estratificados [148]. Recientemente se ha aplicado en el análisis de las vibraciones generadas por el paso de trenes de alta velocidad [90] y en las vibraciones en puentes debido al paso de trenes [81].

Método de los Elementos Finitos

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es la método numérico más utilizado. Se puede aplicar a modelos con geometría o comportamiento complejos, pero requiere la discretización de la geometría completa en pequeños elementos finitos en los que se cumplen las ecuaciones del modelo. La resolución se reduce al empleo de una matriz algebraica que contiene la información para todos los elementos con el consiguiente coste computacional.

Asimismo, aunque es válido para geometrías complejas, no se obtienen soluciones válidas para modelos semi-infinitos [19]. Los primeros modelos semi-infinitos consideraban contornos artificiales alejados del punto de aplicación de la carga pero este artificio no es válido para problemas dinámicos puesto que se reflejan ondas que originan resultados erróneos [37]. Este inconveniente se salvó empleando condiciones de contorno especiales que simulaban una capa infinita. Lysmer et al. [105] fueron los primeros en desarrollar este tipo de contorno mediante la inclusión de propiedades viscosas que fue mejorado posteriormente [157]. También desarrollan un segundo tipo de contorno

absorbente en el que se requiere transformar el problema en el dominio de la frecuencia y del espacio [106]. En [75] se desarrolla un tipo de condiciones de radiación para la propagación de ondas tanto en medios bi- como tri-dimensionales estables para cualquier valor de velocidad de ondas.

Este método se ha extendido a medios anisótropos [128], medios poroelásticos [42], problemas tridimensionales [133] y análisis en el dominio del tiempo [121].

Método de los Elementos de Contorno

El Método de los Elementos de Contorno (MEC) es la forma discreta del Método de las Ecuaciones Integrales de Contorno. Un detallado desarrollo del mismo dentro desde sus orígenes puede obtenerse en [23, 22, 62]. El Método de los Elementos de Contorno se ha aplicado en numerosos campos de la ingeniería, que van desde el electromagnetismo [27], problemas de difusión del calor, mecánica de fluidos y acústica [158] y elastodinámica [44].

La base del MEC es el empleo de las denominadas Solución Fundamental o Funciones de Green, que son propias para un problema dado. La integración se lleva a cabo en el contorno del dominio para encontrar la respuesta en cada punto, bien dada en tensiones o desplazamientos. En el caso elastostático, se emplea la generalización de la relación de Maxwell para dos o tres dimensiones, denotadas por el teorema de *Betti-Rayleigh* [28]. La relación análoga para elastodinámica se atribuye a *Graffi* para dominios cerrados y a *Wheeler* y *Sternberg* para dominios abiertos e infinitos [44]. Cuando la relación de reciprocidad se establece en el contorno antes que en el interior del dominio, la ecuación integral es la Identidad de Somigliana.

El Método de los Elementos de Contorno Directo se aplica en los problemas elastodinámicos, donde las variables son las magnitudes físicas del problema, tales como tensiones y desplazamientos en el contorno y se procede a una discretización directa de la Identidad de Somigliana. Si se emplea una formulación referida a variables ficticias, tales como potenciales, se emplea el Método de los Elementos de Contorno Indirecto, que ha sido ampliamente utilizado a problemas de ingeniería sísmica [145].

Este método puede ser formulado en el dominio de la frecuencia para el análisis de excitaciones armónicas. El número de elementos depende de la frecuencia de excitación por lo que para modelizar la respuesta a altas frecuencias el coste computacional es elevado al aumentar considerablemente el número de elementos.

En el caso de repuesta transitoria, es necesaria una formulación en el dominio

del tiempo [56]. Las necesidades de memoria para un cálculo en el dominio del tiempo son elevadas, es por ello que esta solución no se ha sido ampliamente empleada, si bien en los últimos años ha destacado su auge [125, 31, 59, 129] debido a los avances en el campo computacional.

Principalmente, se han empleado soluciones en las que se emplean dominios transformados según las transformadas de Fourier o Laplace, obteniendo la respuesta en el tiempo realizando posteriormente la transformada inversa [140]. Entre las técnicas que emplean transformadas para obtener la respuesta en un dominio, destacan las denominadas 2.5D, en las que se realiza la transformada en una de las dimensiones. Dentro del Método de los Elementos de Contorno se encuentran referencias en dominios 2.5D para la interacción suelo-estructura [82], medios poroelásticos [103] y medios anisótropos [127]. La formulación de las ecuaciones del MEC presentan múltiples ventajas respecto al MEF y MDF cuando se consideran problemas infinitos o semi-infinitos. Esto es debido a que las funciones de Green satisfacen la condición de radiación de Sommerfeld [4]. No es necesario el empleo de contornos artificiales puesto que no se reflejan ondas ficticias, de ahí que sea ampliamente utilizado en el caso de propagación de ondas. Los elementos de contorno estándar emplean una formulación integral sobre el contorno de las ecuaciones para el espacio completo, reduciendo la dimensión del problema de tal forma que únicamente hay que discretizar el contorno del sólido [21, 44].

Combinación del Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno

Diversos autores han empleado el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno combinados. Esta metodología permite aprovechar las ventajas de ambos métodos, la facilidad de modelización de una geometría compleja empleando elementos finitos y la facilidad de simulación de vibraciones en medios infinitos o semi-infinitos mediante los elementos de contorno. Andersen y Jones [9] comparan el empleo de modelos en bi- y tri-dimensionales empleando ambos modelos y concluyen que mientras los modelos bidimensionales necesitan un menor esfuerzo computacional sólo son cuantitativamente más ventajosos cuando se simulan cambios estructurales, mientras que los modelos tridimensionales se asemejan más a la realidad pero requieren un mayor esfuerzo computacional.

En el dominio del tiempo, esta combinación se ha desarrollado por Von Estorf y Kausel [48]. En el dominio de la frecuencia se encuentra el modelo empleado por Auersch y Schmid [14].

La obtención de la respuesta tridimensional con un menor esfuerzo computacional se obtiene empleando métodos 2.5D, en los que se resuelve el problema en el dominio de la frecuencia y transformado en el espacio. Sheng [134] presenta este modelo para la propagación de ondas para trenes de superficie y subterráneos, concluyendo que un modelo 2.5D requiere 200 veces menos tiempo de cálculo de uno similar tridimensional.

Degrande et al. [41] emplean la transformada de Floquet para caracterizar las homogeneidades a lo largo de túneles de ferrocarril para formular el problema combinando ambos métodos. La ventaja que establecen los autores respecto al método 2.5D estándar es que no se puede considerar el efecto de las traviesas. Este método ha sido muy empleado en los últimos años por diversos autores [70, 71, 7, 60].

Métodos semianalíticos

Los métodos semianalíticos tienen la ventaja de reducir el tiempo de cálculo ya que integran soluciones analíticas dentro del algoritmo numérico. Dentro de los métodos semianalíticos que actualmente más se emplean en la propagación de ondas se encuentran los métodos descritos a continuación.

Método *Thin Layer*

Este método fue desarrollado por Waas [155]. Consiste en discretizar un sólido semi-infinito en dirección vertical, en un número finito de capas delgadas en las que se supone que el desplazamiento a lo largo de la capa varía linealmente. Kausel et al. lo desarrollaron para cargas distribuidas [96], cargas dinámicas interiores [94], cargas estáticas en un semiespacio estratificado [97], hiperelementos con dos contornos verticales [95] y plantearon el problema en coordenadas cilíndricas [92].

Recientemente este método se ha mejorado. Los desplazamientos del sólido se calculan en el dominio transformado frecuencia-número de onda mediante la discretización del sólido en capas delgadas y aproximando los desplazamientos entre los contornos con funciones de forma polinómicas [131].

Método *layer-transfer-matrix*

Este método se ha aplicado a medios semi-infinitos con interfases y superficies horizontales. Se obtiene una solución semianalítica realizando una transformada triple de Fourier en las coordenadas horizontales y el tiempo. La relación para desplazamientos y tensiones entre capas se obtiene empleando una matriz de transferencia [150]. Se ha estudiado ampliamente en la Universidad de Southampton, destacando, entre otras las referencias [136, 87, 86]

El método *Pipe-in-Pipe*

Este método semianalítico tridimensional fue desarrollado por Forrest y Hunt [51, 52] para el cálculo de propagación de ondas en un espacio generadas por el paso de trenes subterráneos. El túnel se modeliza empleando la teoría de láminas delgadas y el suelo empleando la teoría elástica del continuo. Las ecuaciones del modelo se emplean en el dominio de la frecuencia y empleando la Transformada Discreta de Fourier para la dimensión en el eje del túnel.

Métodos empíricos

Los modelos de predicción de vibraciones empíricos se basan en los resultados obtenidos mediante ensayos, si bien la eficacia de éstos se limita a la predicción de vibraciones en modelos con condiciones similares.

Madshus [107] empleó un modelo semi-empírico para predecir el sonido transmitido desde trenes de alta velocidad a viviendas cercanas, así como Melke [110] formuló otro método semi-empírico para predecir el sonido en edificios provocados por el paso de trenes en túneles. Un estudio empírico, obtenido a partir de los datos recogidos por el tren de alta velocidad de Londres se recoge en [76].

El problema dinámico

2.5D

3.1.Introducción

En este capítulo se describe el problema dinámico en 2.5D. Se parte del problema de potencial aplicado al estudio de fluidos ideales (sección 3.2), si bien la solución desarrollada permite modelizar diferentes campos de interés ingenieril, tales como transferencia de calor, torsión con alabeo, filtración freática, presión hidrodinámica en superficies móviles, electrostática, conducción eléctrica, magnetostática, elasticidad antiplana o campo gravitatorio. La descripción de las ecuaciones que rigen la dinámica de fluidos origina el desarrollo de las ecuaciones que permiten obtener la Solución Fundamental para fluidos en medios 2.5D (sección 3.3). Además de su interés práctico, dado el carácter escalar del problema es un problema muy adecuado para implementar todas las ideas básicas del Método de los Elementos de Contorno, paso previo al estudio del problema elastodinámico 2.5D.

3.2.Ecuaciones dinámicas para fluidos

Los fluidos se caracterizan por carecer de rigidez transversal. Para describir el movimiento de un fluido se considera la *Hipótesis del Continuo*, para la que se supone que todas las propiedades del fluido se representan por funciones continuas. Las leyes fundamentales que rigen los fluidos son la ley de conservación de la masa, la ley de conservación de la cantidad de movimiento, la ley de conservación de la energía y la ley de variación de entropía o segunda ley de la termodinámica [18, 84].

Ley de conservación de la masa

Es la ley que describe el fenómeno de transporte de partículas. El flujo de masa que pasa a través de una superficie cerrada debe ser igual a la disminución de la masa de fluido que contiene en su interior, por unidad de tiempo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.2.1)$$

siendo $\rho(\mathbf{x}, t)$ la densidad y $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ la velocidad.

Ley de conservación de la cantidad de movimiento

El comportamiento dinámico de los fluidos se describe mediante la ley de conservación de la cantidad de movimiento o segunda ley de Newton que establece que la cantidad de movimiento de un sistema permanece constante si no hay fuerzas que actúen en él.

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.2)$$

donde $\mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t)$ es la fuerza debida a campos externos y $\mathbf{f}_c(\mathbf{x}, t)$ la fuerza de contacto característica de los fluidos. En dicha fuerza se distinguen una componente de presión

$$\mathbf{f}_p = -\nabla p \quad (3.2.3)$$

obtenidas por *Bernoulli* y *Euler* y una fuerza viscosa de la forma

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) = \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (3.2.4)$$

que fue propuesta por *Navier* y mejorada por *Stokes* y donde $p(\mathbf{x}, t)$ es la presión y λ y μ describen la viscosidad del fluido.

Sustituyendo las ecuaciones 3.2.3 y 3.2.4 en la ecuación 3.2.2 se obtiene

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.5)$$

El sistema formado por la Ley de Conservación de la Masa y la Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento contiene cuatro ecuaciones y cinco variables, la densidad ρ , las tres componentes de la velocidad \mathbf{v} y la presión. Es indeterminado y es necesaria la intervención de nuevas leyes de comportamiento en las que interviene el balance de energía.

Las Ecuaciones de Euler: Fluidos perfectos

Para analizar el problema se realizan las siguientes simplificaciones.

Fluidos Incompresibles

Un fluido es incompresible si la densidad de cada partícula del fluido permanece relativamente constante al desplazarse a través del campo de flujo, es decir, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$. Considerando que la densidad es constante en el espacio y que no varía en el tiempo y sustituyendo en la ecuación 3.2.1 se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.2.6)$$

Ecuaciones de Euler. Fluidos ideales

Euler supuso que los fluidos pueden ser sometidos a presión pero no a esfuerzos cortantes, o lo que es lo mismo, $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_p = -\nabla p$. La ecuación dinámica se reduce

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla p = \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.7)$$

Considerando esta ecuación junto a la condición de incompresibilidad 3.2.6 se obtiene un sistema cuyas incógnitas son \mathbf{v} y p .

Las Ecuaciones de Navier-Stokes: Fluidos viscosos

El modelo de Navier-Stokes permite considerar el arrastre lateral que los fluidos perfectos no contemplan.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t) - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.2.8)$$

Propagación de ondas en fluidos

Para pequeñas perturbaciones, las variables pueden ser linearizadas, obteniendo su expresión como suma de un valor inicial y un incremento. Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones de Navier-Stokes (ec. 3.2.8) y la ley de conservación de la masa (ec. 3.2.1) y despreciando los términos de segundo orden, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \end{aligned}$$

Combinando ambas ecuaciones,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \nabla^2 p \quad (3.2.9)$$

Definiendo la celeridad como la raíz del cociente entre la presión y la densidad $c^2 = p/\rho$ se obtiene la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.2.10)$$

Esta ecuación permite definir la propagación de la presión en un medio fluido no viscoso para pequeñas perturbaciones. Análogamente se puede obtener la relación para las velocidades.

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \quad (3.2.11)$$

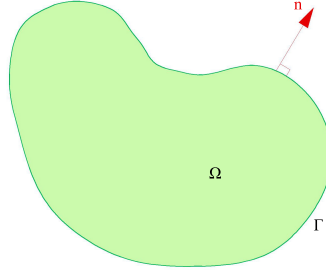


Figura 3.1: Dominio 2.5D Ω con contorno Γ . El problema es invariante en la dirección perpendicular a la figura

3.3. Solución Fundamental para fluidos 2.5D

Se considera un medio fluido Ω , invariante en una de las dimensiones (sea z) limitado por un contorno Γ (figura 3.1). El fluido está sometido a una carga externa unitaria armónica en dirección z aplicada en el origen de coordenadas

$$f_e(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}) e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (3.3.1)$$

Aplicando la transformada de Fourier [124] en las ecuaciones 3.2.10 en la coordenada z y en el tiempo,

$$G(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}) e^{-i(\omega t - k_z z)} dz dt \quad (3.3.2)$$

donde $\mathbf{X} = (x, y, k_z)$ son las coordenadas en el dominio transformado, k_z es el número de onda en la dirección z y ω es la frecuencia. Se obtiene la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + k_f^2 P = 0 \quad (3.3.3)$$

donde $k_f^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$. La solución en coordenadas cilíndricas a dicha ecuación es de la forma:

$$P(r, k_z, \omega) = C_1 H_0^{(1)}(k_f r) + C_2 H_0^{(2)}(k_f r) \quad (3.3.4)$$

El producto $H_0^{(1)}(k_f r) e^{i\omega t}$ representa ondas circulares hacia el origen y $H_0^{(2)}(k_f r) e^{i\omega t}$ hacia afuera. Como no hay fuentes en el infinito, no hay ondas hacia el origen y, por tanto, $C_1 = 0$. Es lo que se conoce como condición de radiación.

La constante C_2 se determina imponiendo las condiciones de equilibrio en el origen, integrando en una región circular pequeña. Partiendo de la expresión

de la ecuación de ondas suponiendo que hay una fuente de presión en la región de intensidad $\frac{1}{c^2} b(\mathbf{x}, t)$ en el punto \mathbf{x}

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} b(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (3.3.5)$$

Así, se obtiene la ecuación correspondiente a un fluido en un medio 2.5D en el dominio de la frecuencia:

$$\nabla^2 P + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) P + \frac{1}{c^2} B = 0 \quad (3.3.6)$$

La solución a esta ecuación (3.3.6) se puede obtener integrando en un dominio Ω .

$$\int_{\Omega} \nabla^2 P \, d\Omega + k_f^2 \int_{\Omega} P \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x}) \, d\Omega = 0 \quad (3.3.7)$$

La primera integral se resuelve aplicando el teorema de la divergencia y teniendo en cuenta las relaciones entre las funciones de Hankel [3] obteniendo:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 P \, d\Omega = -2\pi C_2 k_f r H_1^{(2)}(k_f r)$$

La segunda integral es nula y la tercera es la unidad. Por tanto, se obtiene la constante C_2 cuando $r \rightarrow 0$

$$C_2 = \frac{1}{4i\rho\omega^2}$$

Sustituyendo en la expresión dada para la presión se tiene

$$P(\mathbf{x}, k_z, \omega) = \frac{1}{4i\rho\omega^2} H_0^{(2)}(k_f r) \quad (3.3.8)$$

Las condiciones de contorno se establecen tanto en presiones P en una parte del contorno Γ_1 como en desplazamiento normal U_n en el resto del contorno Γ_2 . La relación entre ambas variables es:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -i\rho\omega V_n = \rho\omega^2 U_n \quad (3.3.9)$$

donde ρ es la densidad, V_n es la velocidad del fluido normal al contorno y U_n el desplazamiento en la dirección normal n .

Sustituyendo la expresión de la presión (3.3.8) y despejando se obtiene el desplazamiento normal

$$U_n(\mathbf{x}, k_z, \omega) = \frac{ik_f}{4} \frac{\partial r}{\partial n} H_1^{(2)}(k_f r) \quad (3.3.10)$$

Las expresiones (3.3.8) y (3.3.10) forman la Solución Fundamental de un fluido en el espacio 2.5D y en el dominio de la frecuencia.

Singularidad de la Solución Fundamental

Para aplicar esta Solución Fundamental en el Método de los Elementos de Contorno es necesario determinar el tipo de singularidad de la solución, aspecto muy importante cuando el punto de aplicación de la carga o el punto de colocación estén sobre el elemento de integración. Esta solución sólo tiene un término singular, de tipo logarítmico para la presión. Este término se obtiene tras realizar el desarrollo en serie de Taylor de la Solución Fundamental respecto de r .

$$p^S = -\frac{1}{2\pi} \log(r) \quad (3.3.11)$$

que coincide con Solución Fundamental estática bidimensional para el problema de potencial [120].

3.4. Ecuaciones básicas de la Elastodinámica

Las ecuaciones básicas del problema elastodinámico tridimensional para un medio isótropo [4, 47], son las siguientes:

Ecuaciones de equilibrio en el dominio:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.4.1)$$

Relaciones cinemáticas:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.4.2)$$

Ecuaciones constitutivas o ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (3.4.3)$$

Equilibrio en el contorno:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.4.4)$$

siendo $\sigma_{ij}(\mathbf{x}; t)$ el tensor de tensiones en cualquier punto; $u_i(\mathbf{x}; t)$ el vector de desplazamientos; $\epsilon_{ij}(\mathbf{x}; t)$ el tensor de deformaciones; $t_i(\mathbf{y}; t)$ el vector de tensiones en un punto \mathbf{y} del contorno Γ ; $b_i(\mathbf{x}; t)$ son las cargas de dominio aplicadas. Las constantes ρ , λ y μ son la densidad y constantes elásticas de Lamé del medio, respectivamente.

Sustituyendo las relaciones cinemáticas 3.4.2 y las ecuaciones constitutivas 3.4.3 en las ecuaciones de equilibrio 3.4.1, se obtienen las ecuaciones de Navier, que permiten obtener la respuesta elástica de un espacio homogéneo e isótropo tridimensional,

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.4.5)$$

Escrito en forma vectorial,

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (3.4.6)$$

3.5.Solución Fundamental elastodinámica 2.5D

Se considera un medio elástico, homogéneo e isótropo Ω , invariante en una de las dimensiones con contorno Γ (fig. 3.1).

Aplicando la transformada de Fourier [124] en las ecuaciones de Navier 3.4.5 en la coordenada z y en el tiempo,

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}) e^{-i(\omega t - k_z z)} dz dt \quad (3.5.1)$$

donde $\mathbf{X} = (x, y, k_z)$ son las coordenadas en el dominio transformado, k_z es el número de onda en la dirección z y ω es la frecuencia, se obtienen las ecuaciones para la elastodinámica 2.5D

$$\mu \nabla_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{U}(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) + \mathbf{F} = -\rho \omega^2 \mathbf{U}(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) \quad (3.5.2)$$

siendo $\nabla_{\mathbf{k}}$ el operador ∇ en el dominio transformado, que viene dado por,

$$\nabla_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, -ik_z \right)$$

Solución Fundamental para el Campo de Desplazamientos

La función de Green para los desplazamientos $U_i^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})$ es la componente i -ésima del desplazamiento, obtenido al resolver la ecuación 3.5.2 para una carga puntual unitaria armónica aplicada en el origen en la dirección l .

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac.

Aplicando el método de los potenciales [43], se puede expresar el desplazamiento

$$U_i^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = \frac{\partial^2 (\Phi - \Psi)}{\partial x_i \partial x_l} + \delta_{il} \nabla_{\mathbf{k}}^2 \Psi$$

y se obtienen las siguientes ecuaciones de Helmholtz para cada una de las direcciones l de la carga,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})}{\partial y^2} + \kappa_{\alpha}^2 \Phi(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= -\frac{iH_0^{(2)}(-ik_z r)}{4\rho c_p} \\ \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})}{\partial y^2} + \kappa_{\beta}^2 \Psi(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= -\frac{iH_0^{(2)}(-ik_z r)}{4\rho c_s} \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

donde $\kappa_{\alpha} = \sqrt{k_p^2 - k_z^2}$; $\kappa_{\beta} = \sqrt{k_s^2 - k_z^2}$; $k_p = \frac{\omega}{c_p}$ y $k_s = \frac{\omega}{c_s}$ son los números de

onda para las ondas P y S, respectivamente; $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ y $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ son las velocidades de onda P y S del material y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia al origen sobre el plano.

Resolviendo las ecuaciones, considerando la condición de radiación y que la solución debe ser finita para $r \rightarrow 0$, se obtiene la expresión para los potenciales:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= \frac{i}{4\rho\omega^2} \left(H_0^{(2)}(\kappa_\alpha r) - H_0^{(2)}(-ik_z r) \right) \\ \Psi(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= \frac{i}{4\rho\omega^2} \left(H_0^{(2)}(\kappa_\beta r) - H_0^{(2)}(-ik_z r) \right)\end{aligned}\quad (3.5.4)$$

Sustituyendo los potenciales en la descomposición dada para los desplazamientos, se obtienen las funciones de Green de los desplazamientos en un medio 2.5D,

$$\begin{aligned}U_i^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= -\frac{i}{4\rho\omega^2} \left(\delta_{il} k_s^2 H_0^{(2)}(\kappa_\beta r) - \frac{1}{r} \delta_{il} \left(k_\beta H_1^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha H_1^{(2)}(\kappa_\alpha r) \right) \right. \\ &\quad \left. + r_{,l} r_{,j} \left(\kappa_\beta^2 H_2^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha^2 H_2^{(2)}(\kappa_\alpha r) \right) \right)\end{aligned}\quad (3.5.5)$$

Solución Fundamental para el Campo de Tensiones

La Función de Green para el campo de tensiones en el dominio de la frecuencia para el espacio 2.5D, $\Sigma_{ij}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})$, se obtienen a sustituyendo la Función de Green para el campo de desplazamientos 3.5.5 en las ecuaciones 3.4.2 y 3.4.3 formuladas para el dominio transformado.

$$\Sigma_{ij}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = \lambda \Delta^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) \quad (3.5.6)$$

donde $\Delta = E_{kk}$ es la dilatación, E_{ij} el tensor de deformaciones y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Se obtiene

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij}^l &= -\frac{i}{4\rho\omega^2} \left(\delta_{ij} r_{,l} + \frac{1}{2} \left((\delta_{il} - \delta_{jl})^2 r_{,j} + (\delta_{jl} - \delta_{il})^2 r_{,i} \right) \right) (\lambda \delta_{ij} \Xi + 2\mu \Upsilon) \\ \Sigma_{zz}^l &= -\frac{i}{4\rho\omega^2} r_{,l} \left(\lambda \Xi + 2\mu k_z^2 \left(\kappa_\beta H_1^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha H_1^{(2)}(\kappa_\alpha r) \right) \right) \\ \Sigma_{jz}^l &= \Sigma_{zj}^l = \Sigma_{jl}^z = \\ &\quad \frac{1}{2\rho\omega^2} \mu k_z \left(\delta_{jl} \left(\frac{1}{r} \left(\kappa_\beta H_1^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha H_1^{(2)}(\kappa_\alpha r) \right) - \frac{1}{2} k_s^2 H_0^{(2)}(\kappa_\beta r) \right) \right. \\ &\quad \left. - r_{,j} r_{,l} \left(\kappa_\beta^2 H_2^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha^2 H_2^{(2)}(\kappa_\alpha r) \right) \right)\end{aligned}\quad (3.5.7)$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij}^z &= \frac{1}{4\rho\omega^2}k_z \left(\lambda\Lambda + 2\mu \left(\frac{1}{r} \left(\kappa_\beta H_1^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - \kappa_\alpha H_1^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r_{,j}r_{,i} \left(\kappa_\beta^2 H_2^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - \kappa_\alpha^2 H_2^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) \right) \right) \\ \Sigma_{zz}^z &= \frac{1}{4\rho\omega^2}k_z \left(\lambda\Lambda + 2\mu \left(k_z^2 \left(H_0^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - H_0^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) - k_s^2 H_0^{(2)}(\kappa_{\beta r}) \right) \right)\end{aligned}$$

donde los índices i, j y l toman los valores x y/o y .

En estas ecuaciones se han definido los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned}\Xi &= k_z^2 \left(\kappa_\beta H_1^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - \kappa_\alpha H_1^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) + \frac{4}{r} \left(\kappa_\beta^2 H_2^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - \kappa_\alpha^2 H_2^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) \\ &\quad - \left(\kappa_\beta^3 H_3^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - \kappa_\alpha^3 H_3^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) - k_s^2 \kappa_\beta H_1^{(2)}(\kappa_{\beta r}) \\ \Upsilon &= \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r} \delta_{il} \delta_{jl} \right) \left(\kappa_\beta^2 H_2^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - \kappa_\alpha^2 H_2^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) \\ &\quad - r_{,i}r_{,j} \left(\left(\kappa_\beta^3 H_3^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - \kappa_\alpha^3 H_3^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) - \frac{1}{2} (\delta_{il} + \delta_{jl}) k_s^2 \kappa_\beta H_1^{(2)}(\kappa_{\beta r}) \right) \\ \Lambda &= k_z^2 \left(H_0^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - H_0^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) + \frac{2}{r} \left(\kappa_\beta H_1^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - \kappa_\alpha H_1^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) \\ &\quad - \left(\kappa_\beta^2 H_2^{(2)}(\kappa_{\beta r}) - \kappa_\alpha^2 H_2^{(2)}(\kappa_{\alpha r}) \right) - k_s^2 H_0^{(2)}(\kappa_{\beta r})\end{aligned}$$

Función de Green para el vector tensión

La función de Green para el vector tensión respecto un contorno en el espacio 2.5D, $T_i^1(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})$, se obtiene al realizar el producto escalar entre la función de Green dada para el tensor de tensiones 3.5.7 y el vector normal al contorno, $n_i(\mathbf{X})$.

$$T_i^1(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = \Sigma_{ij}^1(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) n_i(\mathbf{X}) \quad (3.5.8)$$

Para la validación de las expresiones descritas para los desplazamientos o funciones de Green, se comparan los resultados obtenidos con los presentados en [147]. Se considera una carga puntual armónica en el origen de coordenadas en la dirección del eje y en un medio homogéneo y cuyas propiedades son $c_p = 4208.0$ m/s, $c_s = 2656.0$ m/s, $\rho = 2140.0$ kg/m³ y $\eta = 0.1$, siendo este último coeficiente, el correspondiente al amortiguamiento que se incluye en la frecuencia $\omega_c = \omega - i\eta$. En la figura 3.2 se representan los desplazamientos en el punto R de coordenadas $x = 5.0$, $y = 4.0$ para frecuencias comprendidas entre 62.832 rad/s y 8042.477 rad/s para un número de onda $k_z = 0.5$ rad/m y para números de onda entre 0 rad/m y 3.5 rad/m para una frecuencia de 5026.54 rad/s.

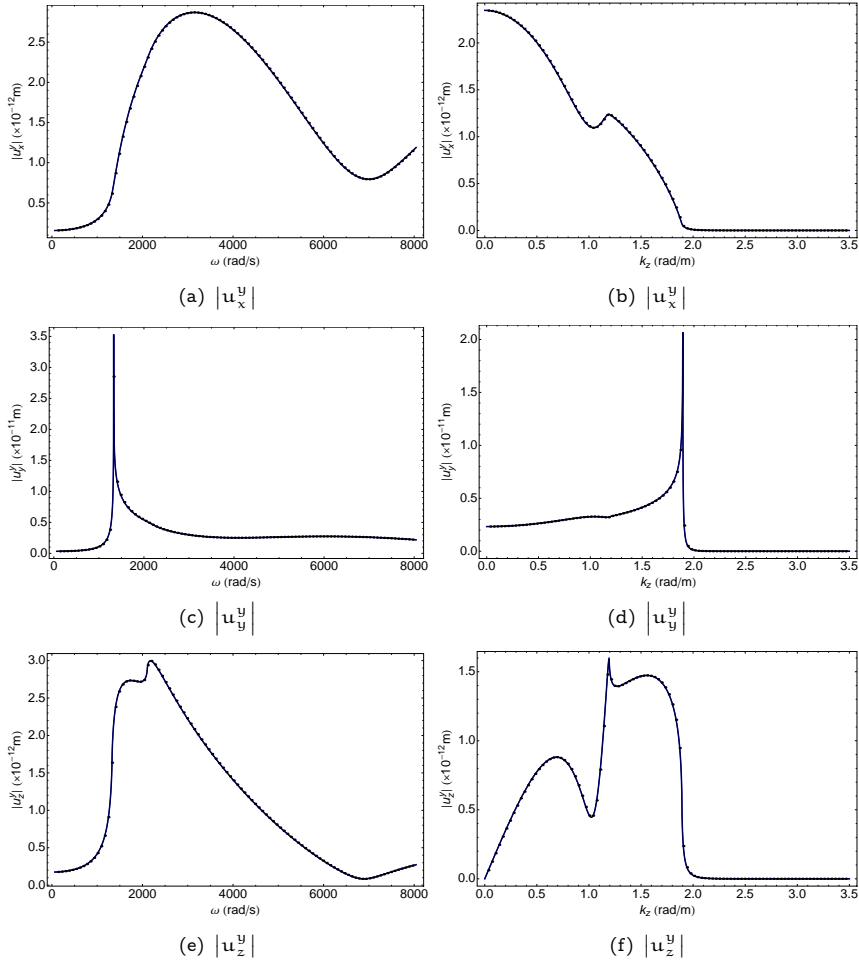


Figura 3.2: Amplitud del desplazamiento en el punto (5,4) para una carga en dirección y . En la parte izquierda se representan los desplazamientos para un intervalo de frecuencias $[62.832 - 8042.477]$ rad/s para el número de onda $k_z = 0.5$ rad/m. En la parte derecha se representa la amplitud de desplazamientos para un intervalo de números de onda $[0 - 3.5]$ rad/m para una frecuencia de 5026.54 rad/s. En todos los casos se representa con línea continua la Solución Fundamental y con puntos los resultados dados por [147]

3.5.1. Aproximación a la solución estática

Para analizar la validez de la solución para bajas frecuencias, se ha desarrollado e implementado el caso elastostático en 2.5D, cuya formulación se resume en el Anexo C.

En las figuras 3.3 y 3.4 se representa la Solución Fundamental para el caso elastodinámico en función de la frecuencia (amplitud y fase desenrollada en línea continua) y el valor obtenido para la Solución Fundamental elastostática 2.5D (punto). Puede comprobarse cómo la solución elastodinámica converge a la solución estática. Los resultados se han obtenido en el punto de coordenadas ($x = 3$ m, $y = 4$ m) para un número de onda en z , $k_z = 0.4$ rad/m en un espacio de características $\mu = 10^6$ N/m², $\nu = 0.25$, $\rho = 2140$ kg/m³, $\zeta = 0.05$.

3.5.2. Términos Singulares de la Solución Fundamental

En el Método de los Elementos de Contorno aparecen integrales impropias debido a la singularidad de la solución. Para evitar errores numéricos se ha empleado en la implementación la técnica de regularización, consistente en eliminar la singularidad y reducir la integral resultante a un caso que se compute analíticamente.

Para obtener la singularidad de la solución se ha realizado un desarrollo en serie de Taylor [3] de la Solución Fundamental para el campo de desplazamientos 3.5.5 y el vector tensión 3.5.8. Despreciando los términos de orden superior a 1 se obtiene la Solución Estática para el caso bidimensional, tanto en desplazamientos 3.5.9 como para el vector tensión 3.5.10. En todos los casos i, l pueden tomar el valor x, y .

$$\begin{aligned} u_i^l(\mathbf{X}; \mathbf{0}) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} (r_{,i}r_{,l} - (3-4\nu)\log(r)) \\ u_z^z(\mathbf{X}; \mathbf{0}) &= -\frac{1}{2\pi\mu} \log(r) \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

$$u_x^x(\mathbf{X}; \mathbf{0}) = u_x^z(\mathbf{X}; \mathbf{0}) = u_y^z(\mathbf{X}; \mathbf{0}) = u_y^z(\mathbf{X}; \mathbf{0})$$

$$\begin{aligned} t_i^l(\mathbf{X}; \mathbf{0}) &= -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left((1-2\nu) \left(\delta_{il} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i}n_l - r_{,l}n_i \right) + 2r_{,i}r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} \right) \\ t_z^z(\mathbf{X}; \mathbf{0}) &= t_z^i(\mathbf{X}; \mathbf{0}) = \frac{i(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} k_z n_i \log(r) \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

$$t_z^z(\mathbf{X}; \mathbf{0}) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

De las expresiones anteriores (ecuaciones 3.5.9 y 3.5.10) se pueden extraer

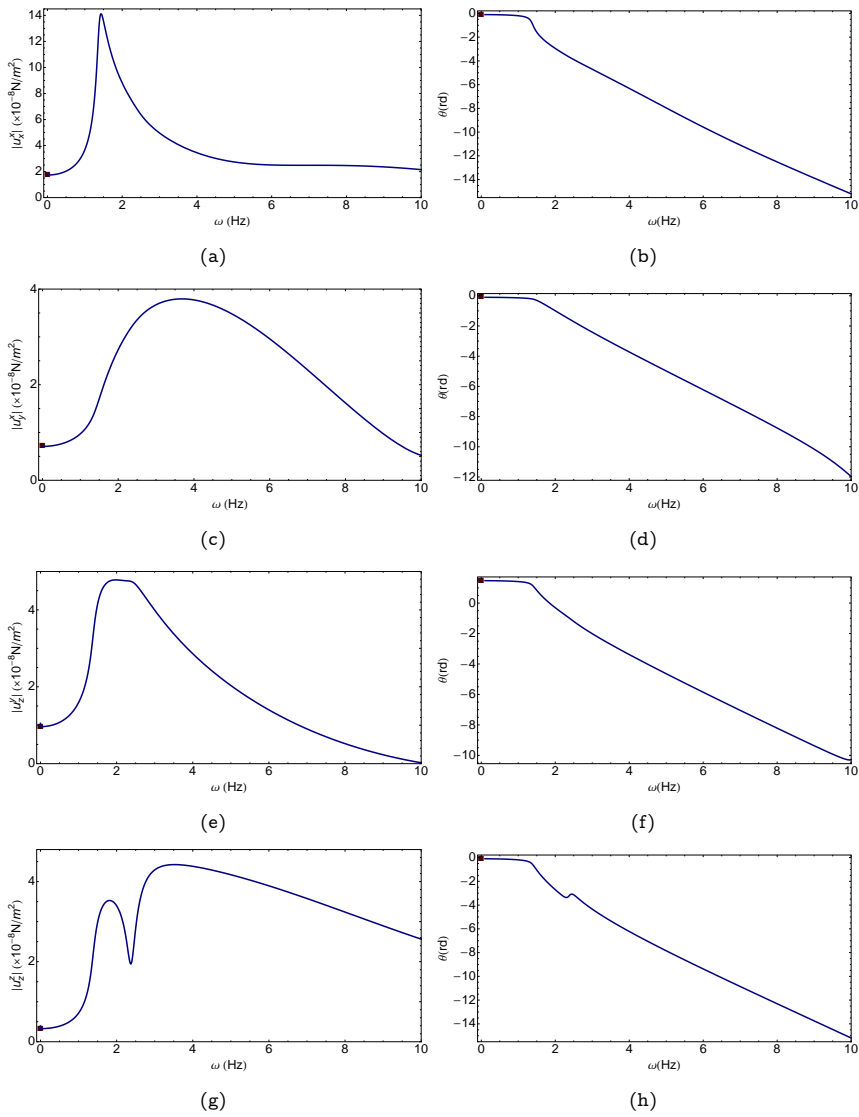


Figura 3.3: Aproximación de la Solución Fundamental dinámica a la estática para los desplazamientos: (a-b) u_x^d ; (c-d) u_y^d ; (e-f) u_z^d ; (g-h) u_z^d . En todos los casos, amplitud a la izquierda y fase desenrollada a la derecha. La SF elastodinámica en línea continua y SF elastostática representada por un punto

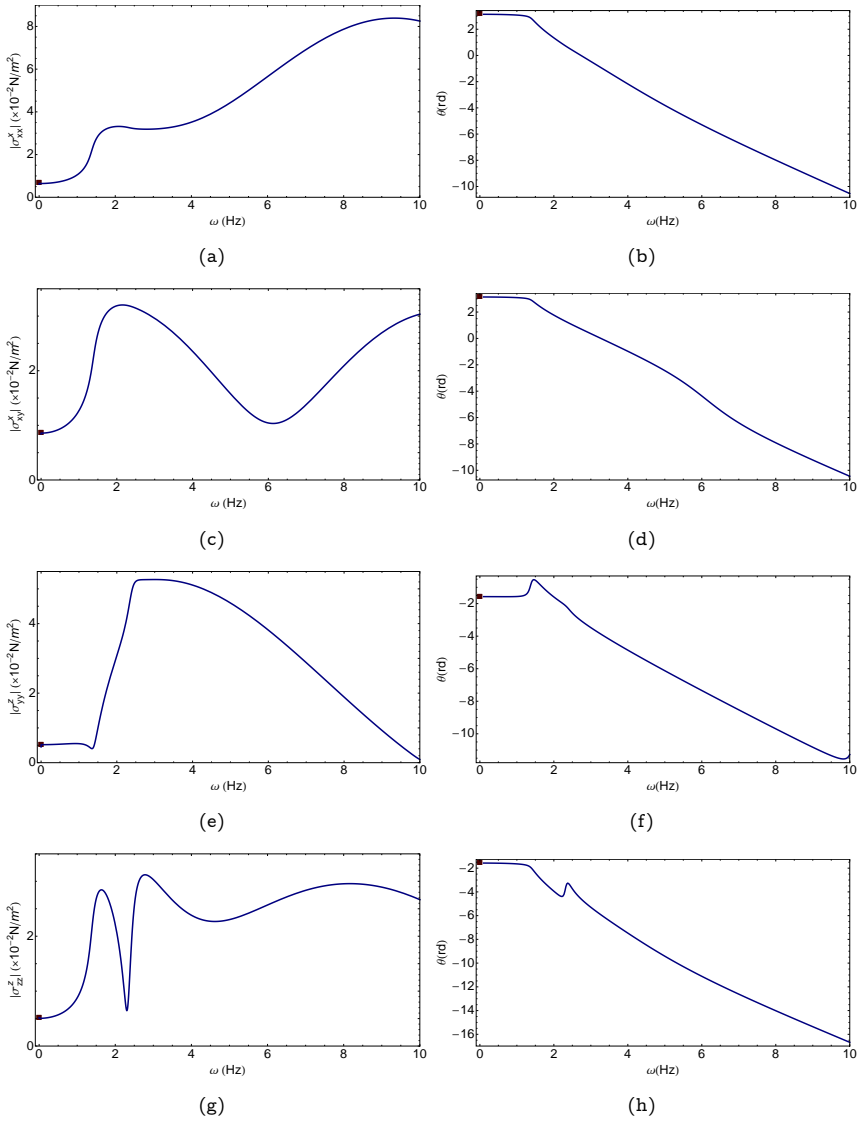


Figura 3.4: Aproximación de la Solución Fundamental dinámica para las componentes del tensor de tensiones: (a-b) σ_{xx}^x ; (c-d) σ_{xy}^x ; (e-f) σ_{yy}^z ; (g-h) σ_{zz}^z . En todos los casos, amplitud a la izquierda y fase desenrollada a la derecha. La SF elastodinámica en línea continua y SF elastostática representada por un punto

los términos que implican singularidad.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x^x &= \tilde{u}_y^y = -\frac{(3-4\nu)}{8\pi\mu(1-\nu)} \log(r) \\ \tilde{u}_z^z &= -\frac{1}{2\pi\mu} \log(r) \\ \tilde{t}_i^l &= -\frac{1-2\nu}{4\pi r(1-\nu)} (r_{,i}n_l - r_{,l}n_i) \quad \text{para } (i \neq l) = x, y \text{ o } y \\ \tilde{t}_z^l &= \tilde{t}_i^z = -\frac{i(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} k_z n_i \log(r) \quad \text{para } l = x, y\end{aligned}\tag{3.5.11}$$

Función de Green para un semiespacio viscoelástico

2.5D

4.1. Introducción

En este capítulo se presenta la solución analítica para la respuesta de semiespacio tridimensional sometido a una carga armónica puntual incluyendo el amortiguamiento. Esta expresión tiene gran importancia en formulación de problemas elastodinámicos tridimensionales en un semiespacio empleada como Solución Fundamental en la aplicación del Método de los Elementos de Contorno. Las expresiones se obtienen empleando los potenciales de desplazamientos [4].

La Solución Fundamental para el semiespacio se calcula asumiendo condiciones de tensiones libres en el contorno de la superficie, equilibrio de tensiones en el punto de aplicación de la carga y continuidad de desplazamientos y condiciones de radiación.

Las expresiones son validadas comparando las expresiones obtenidas con un modelo resuelto mediante el Método de los Elementos de Contorno empleando la solución para el espacio completo, donde la superficie es discretizada (sección 5.8.4). Así mismo la solución obtenida es comparada con resultados experimentales descritos en la literatura. Por último se estudia el comportamiento asintótico de la solución, estudiando límites en distancia, frecuencia y número de onda y comparando con soluciones fundamentales existentes.

4.2. Planteamiento del problema

La figura 4.1 representa $\Omega = \{(x, y, z) \mid -\infty < y < h\}$, un semiespacio limitado por la superficie superior $S = (x, y, z) \mid y = h$ en el sistema de referencia Cartesiano $\{\mathbf{O}; x, y, z\}$. El dominio tiene aplicada una carga puntual en el punto \mathbf{O}

$$f_i(\mathbf{x}, t) = \delta_{i1} \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \quad (4.2.1)$$

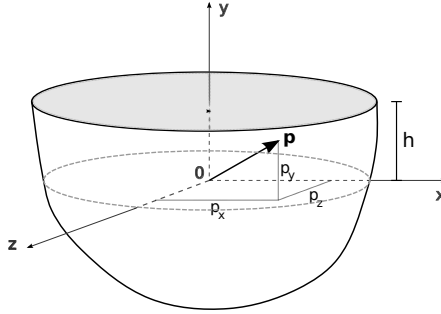


Figura 4.1: Semiespacio bajo carga puntual

donde δ_{il} es la delta de Kronecker y $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac en el tiempo o el espacio.

Para resolver la ecuación de Navier 3.4.5 se define la siguiente transformada de Fourier en el tiempo y en el espacio,

$$G(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}) e^{-i(\omega t - k_x x - k_z z)} dx dz dt \quad (4.2.2)$$

donde $\mathbf{X} = (k_x, y, k_z)$ son las coordenadas en el dominio transformado, k_x y k_z son los números de onda en las direcciones x y z , respectivamente y ω es la frecuencia.

La transformada inversa correspondiente está determinada por la siguiente expresión

$$g(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} dk_x dk_z d\omega \quad (4.2.3)$$

Aplicando la transformada de Fourier definida a las ecuaciones de Navier 3.4.5, se obtiene la ecuación a resolver:

$$\mu \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{U}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{U}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) + \mathbf{F}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = -\rho \omega^2 \mathbf{U}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) \quad (4.2.4)$$

donde el superíndice se refiere a una carga puntual en la dirección l . La carga puntual en el dominio transformado es de la forma

$$\mathbf{F}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{il} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t) e^{-i(\omega t - k_x x - k_z z)} dx dz dt = \delta_{il} \delta(y) \quad (4.2.5)$$

y $\nabla_{\mathbf{k}}$ es el operador ∇ en el dominio transformado, que viene dado por,

$$\nabla_{\mathbf{k}} = \left(-ik_x, \frac{d}{dy}, -ik_z \right)$$

Para considerar un comportamiento visco-elástico del material se ha adoptado el modelo Kelvin-Voigt, definiendo en la ecuación 4.2.4 las propiedades del material de tipo complejo [35] (ec. 2.1.4). Para resolver esta ecuación, el vector de desplazamientos $\mathbf{U}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})$ se descompone en la suma de potenciales escalar y vectorial [44],

$$\mathbf{U}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = \nabla_{\mathbf{k}} \Phi^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) + \nabla_{\mathbf{k}} \times \Psi^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) \quad (4.2.6)$$

Aplicando la divergencia y rotacional a la ecuación 4.2.4 se obtienen las ecuaciones para cada potencial,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})}{\partial y^2} + (k_p^2 - k_r^2) \Phi^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})}{\partial y^2} + (k_s^2 - k_r^2) \Psi^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

donde $k_r^2 = k_x^2 + k_z^2$, $k_p = \frac{\omega}{c_p}$ y $k_s = \frac{\omega}{c_s}$ son los números de onda para las ondas P y S, respectivamente, y $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ y $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ son las velocidades de onda P y S del material.

La solución general a estas cuatro ecuaciones diferenciales se pueden escribir de la forma

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= c_{1\alpha} e^{k_\alpha y} + c_{2\alpha} e^{-k_\alpha y} \\ \Psi(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= c_{1\beta} e^{k_\beta y} + c_{2\beta} e^{-k_\beta y} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

donde $k_\alpha = \sqrt{k_r^2 - k_p^2}$ y $k_\beta = \sqrt{k_r^2 - k_s^2}$. La solución depende de 8 constantes de integración c_{ij} , donde $i = 1, 2$ y $j = \alpha, \beta$ ¹. Estas constantes se obtienen aplicando las condiciones de contorno, radiación y continuidad, que se describen a continuación.

Cálculo de las constantes de integración

Al considerar la carga puntual aplicada en $y = 0$, se produce una discontinuidad en las tensiones. Las constantes difieren en la parte superior ($y > 0$) y la parte inferior de la región ($y < 0$). En consecuencia, existen 16 constantes de integración, 8 para $y > 0$ (que se denotan por c_{ij}^+) y otras 8 para $y < 0$ (c_{ij}^-). Todas estas constantes se calculan considerando las ecuaciones siguientes:

¹ Hay que tener en cuenta que para $j = \beta$, $c_{i\beta}$ es un vector con 3 componentes

1. Condición de tensiones libre en la superficie $y = h$.
2. Condición de radiación en $y \rightarrow -\infty$.
3. Continuidad de desplazamientos en $y \rightarrow 0^\pm$
4. Equilibrio de tensiones en $y \rightarrow 0^\pm$

Se obtienen restricciones adicionales a partir de la condición de Miklovitz [111] $\nabla \cdot \Psi = 0$ que se define en el dominio transformado

$$-ik_x \Psi_x + \frac{d\Psi_y}{dy} - ik_z \Psi_z = 0 \quad (4.2.9)$$

Todas estas condiciones se describen detalladamente a continuación.

Condición de tensiones libre en la superficie $y = h$

Considerando el sistema de referencia cartesiano dado en la figura 4.1, las condiciones de contorno en la superficie vienen determinadas por,

$$\begin{aligned} \Sigma_{xy}^l \Big|_{y=h} &= 0 \\ \Sigma_{yy}^l \Big|_{y=h} &= 0 \\ \Sigma_{yz}^l \Big|_{y=h} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

donde Σ_{ij}^l es el tensor de tensiones de la solución fundamental. Éste es un conjunto de 3 ecuaciones para las 8 incógnitas c_{ij}^+ , por lo que es necesario establecer 13 condiciones más.

Condición de radiación en $y \rightarrow -\infty$

Las condiciones de radiación implican que no existen ondas que se generan en el infinito. Los términos e^{-yA} que aparecen para $y < 0$ representan este tipo de ondas y, por tanto, las cuatro constantes correspondientes $c_{2\alpha}^-$ y $c_{2\beta}^-$ desaparecen. Tras establecer estas condiciones, faltan 9 ecuaciones para resolver el problema.

Continuidad de desplazamientos en $y \rightarrow 0^\pm$

En el punto de aplicación de la carga ($y = 0$) debe haber continuidad de desplazamientos. Esta condición permite definir tres ecuaciones,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} U_x^l &= \lim_{y \rightarrow 0^-} U_x^l \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} U_y^l &= \lim_{y \rightarrow 0^-} U_y^l \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} U_z^l &= \lim_{y \rightarrow 0^-} U_z^l \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Quedan 6 ecuaciones por definir.

Equilibrio de tensiones en $y \rightarrow 0^\pm$

El equilibrio de tensiones en el punto de aplicación de la carga implica un salto en el tensor de tensiones en $y = 0$ debido a la carga puntual aplicada.

$$\begin{aligned} \Sigma_{xy}^l \Big|_{y=0^+} - \Sigma_{xy}^l \Big|_{y=0^-} &= -\delta_{lx} \\ \Sigma_{yy}^l \Big|_{y=0^+} - \Sigma_{yy}^l \Big|_{y=0^-} &= -\delta_{ly} \\ \Sigma_{yz}^l \Big|_{y=0^+} - \Sigma_{yz}^l \Big|_{y=0^-} &= -\delta_{lz} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Condición de Miklovitz

Por último, la condición de Miklovitz (ec. 4.2.9) se aplica tanto para las condiciones superiores ($y > 0$) e inferiores ($y < 0$). Para la parte superior, se obtienen dos ecuaciones, quedando los coeficientes de $e^{-k_\beta y}$ y $e^{k_\beta y}$ anulados. Para la parte inferior, sólo una ecuación es necesaria, ya que el coeficiente que multiplica $e^{k_\beta y}$ ha sido eliminado por las condiciones de radiación.

Solución Fundamental para el campo de desplazamientos

Resolviendo las 16 ecuaciones consideradas por las condiciones anteriores se obtienen las constantes de integración. Sustituyendo éstas en las expresiones de los potenciales definidos en la descomposición dada por la ecuación 4.2.6, se obtiene la función de Green en desplazamientos para el semiespacio considerado.

$$\begin{aligned} U_i^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= \frac{1}{2\rho\omega^2} \left\{ k_i k_l \frac{1}{k_\alpha} \left(e^{-k_\alpha |y|} - e^{k_\alpha y} \left(k_\alpha \varphi + e^{-2hk_\alpha \chi} \right) \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{k_\beta} \left(e^{-k_\beta |y|} + e^{k_\beta y} \left(k_\beta \varphi + e^{-2hk_\beta (\chi - \eta)} \right) \right) \\ &\quad \left. + \delta_{il} \frac{k_s^2}{k_\beta} \left(e^{-k_\beta |y|} + e^{k_\beta (-2h+y)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

donde los índices i y l toman los valores x y/o z .

$$\begin{aligned} U_i^i(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= \frac{ik_i}{2\rho\omega^2} \left\{ -\text{sign}(y) e^{-k_\alpha |y|} - e^{k_\alpha y} \left(k_\alpha \varphi + e^{-2hk_\alpha \chi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{sign}(y) e^{-k_\beta |y|} - e^{k_\beta y} \left(\frac{k_r^2}{k_\beta} \varphi + e^{-2hk_\beta \chi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

donde $i = x, z$.

$$\begin{aligned} U_i^y(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) &= \frac{ik_i}{2\rho\omega^2} \left\{ -\text{sign}(y) e^{-k_\alpha |y|} + e^{k_\alpha y} \left(\frac{k_r^2}{k_\beta} \varphi + e^{-2hk_\alpha \chi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{sign}(y) e^{-k_\beta |y|} + e^{k_\beta y} \left(k_\alpha \varphi + e^{-2hk_\beta \chi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

siendo $i = x, z$. Por último,

$$U_y^i(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = \frac{1}{2\rho\omega^2} \left\{ -k_\alpha \left(e^{-k_\alpha|y|} + e^{k_\alpha y} \left(\frac{k_r^2}{k_\beta} \varphi + e^{-2hk_\alpha\chi} \right) \right) + \frac{k_r^2}{k_\beta} \left(e^{-k_\beta|y|} - e^{k_\beta y} \left(k_\alpha \varphi + e^{-2hk_\beta\chi} \right) \right) \right\} \quad (4.2.16)$$

En estas ecuaciones se han definido los siguientes parámetros,

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{4k_\beta \left(-2k_r^2 + k_s^2 \right)}{\left(-2k_r^2 + k_s^2 \right)^2 - 4k_r^2 k_\alpha k_\beta} e^{-h(k_\alpha + k_\beta)} \\ \chi &= \frac{\left(-2k_r^2 + k_s^2 \right)^2 + 4k_r^2 k_\alpha k_\beta}{\left(-2k_r^2 + k_s^2 \right)^2 - 4k_r^2 k_\alpha k_\beta} \\ \eta &= \frac{8k_\alpha k_\beta k_s^2}{\left(-2k_r^2 + k_s^2 \right)^2 - 4k_r^2 k_\alpha k_\beta} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Solución Fundamental para el campo de tensiones

La función de Green para las tensiones, $\Sigma_{ij}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})$ se obtiene sustituyendo la función de Green obtenida para el campo de desplazamientos definida por las ecuaciones 4.2.20 a 4.2.23 en la ley de Hooke formulada en el espacio transformado. El tensor de tensiones puede expresarse en función de la dilatación $\Delta = E_{kk}$ y del tensor de deformaciones E_{ij} ,

$$\Sigma_{ij}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) = \lambda \Delta^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}^l(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0}) \quad (4.2.18)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y las expresiones para las deformaciones son,

$$\begin{aligned} \Delta^l &= -ik_x U_x^l + \frac{dU_y^l}{dy} - ik_z U_z^l \\ E_{xx}^l &= -ik_x U_x^l \\ E_{yy}^l &= \frac{dU_y^l}{dy} \\ E_{zz}^l &= -ik_z U_z^l \\ E_{xy}^l &= \frac{1}{2} \left(\frac{dU_x^l}{dy} - ik_x U_y^l \right) \\ E_{xz}^l &= -\frac{i}{2} \left(k_z U_x^l + k_x U_z^l \right) \\ E_{yz}^l &= \frac{1}{2} \left(-ik_z U_y^l + \frac{dU_z^l}{dy} \right) \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Se han suprimido las coordenadas $(\mathbf{X}, \omega; \mathbf{0})$ para una mayor claridad de la formulación. Para obtener las expresiones 4.2.18 son necesarias las derivadas del campo de desplazamientos respecto a la coordenada y

$$\begin{aligned} \frac{dU_i^l}{dy} = \frac{1}{2\rho\omega^2} \left\{ -k_i k_l \left(\text{sign}(y) e^{-k_\alpha |y|} + e^{k_\alpha y} \left(k_\alpha \varphi + e^{-2hk_\alpha \chi} \right) \right) \right. \\ \left. + \text{sign}(y) e^{-k_\beta |y|} - e^{k_\beta y} \left(k_\beta \varphi + e^{-2hk_\beta (\chi - \eta)} \right) \right. \\ \left. - \delta_{il} k_s^2 \left(\text{sign}(y) e^{-k_\beta |y|} - e^{k_\beta (-2h+y)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

donde los índices i y l toman los valores x y/o z .

$$\begin{aligned} \frac{dU_y^l}{dy} = \frac{ik_l}{2\rho\omega^2} \left\{ k_\alpha \left(e^{-k_\alpha |y|} - e^{k_\alpha y} \left(k_\alpha \varphi + e^{-2hk_\alpha \chi} \right) \right) \right. \\ \left. - k_\beta \left(e^{-k_\beta |y|} + e^{k_\beta y} \left(\frac{k_r^2}{k_\beta} \varphi + e^{-2hk_\beta \chi} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

donde $i = x, z$.

$$\begin{aligned} \frac{dU_l^y}{dy} = \frac{ik_l}{2\rho\omega^2} \left\{ k_\alpha \left(e^{-k_\alpha |y|} + e^{k_\alpha y} \left(\frac{k_r^2}{k_\beta} \varphi + e^{-2hk_\alpha \chi} \right) \right) \right. \\ \left. - k_\beta \left(e^{-k_\beta |y|} - e^{k_\beta y} \left(k_\alpha \varphi + e^{-2hk_\beta \chi} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

siendo $i = x, z$. Por último,

$$\begin{aligned} \frac{dU_y^y}{dy} = \frac{1}{2\rho\omega^2} \left\{ k_\alpha^2 \left(\text{sign}(y) e^{-k_\alpha |y|} - e^{k_\alpha y} \left(\frac{k_r^2}{k_\beta} \varphi + e^{-2hk_\alpha \chi} \right) \right) \right. \\ \left. - k_r^2 \left(\text{sign}(y) e^{-k_\beta |y|} + e^{k_\beta y} \left(k_\alpha \varphi + e^{-2hk_\beta \chi} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

donde φ, χ y η son las constantes anteriormente definidas en la ecuación 4.2.17.

4.3. Evaluación de la integrales para la Transformada Inversa de Fourier

Para obtener la Solución Fundamental dinámica en un semiespacio 2.5D (x, y, k_z, ω) es necesario realizar la transformada inversa de Fourier para el número de onda k_x , realizando la siguiente integral en la dimensión x para las funciones de Green

$$\tilde{f}(x, y, k_z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, y, k_z, \omega) e^{-ik_x x} dk_x \quad (4.3.1)$$

Esta integral se puede calcular de forma analítica en algunos de los térmi-

nos de la Solución Fundamental, obteniendo la expresión para los desplazamientos en el espacio 2.5D como suma de una expresión analítica y una representación integral

$$\begin{aligned}
u_x^x &= \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ -\frac{\kappa_\alpha}{r} H_1^{(2)}(\kappa_\alpha r) + r_{,x} r_{,x} \kappa_\alpha^2 H_2^{(2)}(\kappa_\alpha r) \right. \\
&\quad + \left(1 - \kappa_s^2\right) H_0^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_s^2 H_0^{(2)}\left(\kappa_\beta \sqrt{x^2 + (2h - y)^2}\right) \\
&\quad \left. + 2i(I_1 + I_2 + I_{3\beta} + I_4) \right\} \\
u_z^z &= \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ -\kappa_z^2 H_0^{(2)}(\kappa_\alpha r) + \left(1 - \kappa_s^2\right) H_0^{(2)}(\kappa_\beta r) \right. \\
&\quad - \kappa_s^2 H_0^{(2)}\left(\kappa_\beta \sqrt{x^2 + (2h - y)^2}\right) \\
&\quad \left. + 2i\left(\kappa_z^2(I_{3\alpha} + I_5) + I_{3\beta} + I_4\right) \right\} \\
u_x^z &= u_z^x = \frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ -\kappa_z r_{,x} \kappa_\alpha H_1^{(2)}(\kappa_\alpha r) + i H_0^{(2)}(\kappa_\beta r) \right. \\
&\quad \left. - 2(I_6 + I_7 + I_{3\beta} + I_4) \right\} \\
u_y^x &= \frac{-i}{4\rho\omega^2} \left\{ r_{,x} r_{,y} \text{sign}(y) \left(\kappa_\beta^2 H_2^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha^2 H_2^{(2)}(\kappa_\alpha r)\right) \right. \\
&\quad \left. + 2(I_{8\alpha} + I_{9\alpha} + I_{11\beta} + I_{9\beta}) \right\} \tag{4.3.2} \\
u_x^y &= \frac{-i}{4\rho\omega^2} \left\{ r_{,x} r_{,y} \text{sign}(y) \left(\kappa_\beta^2 H_2^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha^2 H_2^{(2)}(\kappa_\alpha r)\right) \right. \\
&\quad \left. - 2(I_{11\alpha} + I_{9\alpha} + I_{8\beta} + I_{9\beta}) \right\} \\
u_y^z &= \frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ r_{,y} \text{sign}(y) \left(\kappa_\beta H_1^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha H_1^{(2)}(\kappa_\alpha r)\right) \right. \\
&\quad \left. - 2i(I_{8\alpha} + I_{9\alpha} + I_{11\beta} + I_{9\beta}) \right\} \\
u_z^y &= \frac{\kappa_z}{4\rho\omega^2} \left\{ r_{,y} \text{sign}(y) \left(\kappa_\beta H_1^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha H_1^{(2)}(\kappa_\alpha r)\right) \right. \\
&\quad \left. + 2i(I_{10\alpha} + I_{9\alpha} + I_{8\beta} + I_{9\beta}) \right\} \\
u_y^y &= \frac{-i}{4\rho\omega^2} \left\{ -\frac{1}{r} \left(\kappa_\beta H_1^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha H_1^{(2)}(\kappa_\alpha r)\right) \right. \\
&\quad + r_{,y} r_{,y} \left(\kappa_\beta^2 H_2^{(2)}(\kappa_\beta r) - \kappa_\alpha^2 H_2^{(2)}(\kappa_\alpha r)\right) \\
&\quad \left. + \kappa_s^2 H_0^{(2)}(\kappa_\beta r) - 2i(I_{10\alpha} + I_{9\alpha} + I_{11\beta} + I_{10\beta}) \right\}
\end{aligned}$$

siendo

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_x^2 \varphi e^{\kappa_\alpha y} e^{-i\kappa_x x} d\kappa_x$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x^2}{k_\alpha} \chi e^{-k_\alpha(2h-y)} e^{-ik_x x} dk_x \\
 I_{3l} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi e^{k_1 y} e^{-ik_x x} dk_x \\
 I_4 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_\beta} (\chi - \eta) e^{-k_\alpha(2h-y)} e^{-ik_x x} dk_x \\
 I_5 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_\alpha} \chi e^{-k_\alpha(2h-y)} e^{-ik_x x} dk_x \\
 I_6 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x \varphi e^{k_\alpha y} e^{-ik_x x} dk_x \\
 I_7 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x}{k_\alpha} \chi e^{-k_\alpha(2h-y)} e^{-ik_x x} dk_x \\
 I_{8l} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_\alpha \varphi e^{k_1 y} e^{-ik_x x} dk_x \\
 I_{9l} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi e^{-k_1(2h-y)} e^{-ik_x x} dk_x \\
 I_{10l} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_r^2}{k_\beta} \varphi e^{k_1 y} e^{-ik_x x} dk_x \\
 I_{11l} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\alpha k_r^2}{k_\beta} \varphi e^{k_1 y} e^{-ik_x x} dk_x
 \end{aligned}$$

donde $l = \{\alpha, \beta\}$.

Las integrales que no se puede obtener de forma analítica I_l , se pueden aproximar numéricamente,

$$\tilde{f}(s\Delta x, y, k_z, \omega) = \frac{\Delta k_x}{2\pi} \sum_{r=0}^{N_x-1} F(r\Delta k_x, y, k_z, \omega) e^{-2\pi i \frac{r s}{N_x}} \quad (4.3.3)$$

donde $s = 1, \dots, N_x$; Δk_x es el incremento en el número de onda k_x ; N_x es el número total de puntos necesarios para poder realizar eficientemente la transformada inversa y $\Delta x = \frac{2\pi}{(N_x - 1)\Delta k_x}$. Para acelerar el tiempo de cálculo se emplea al algoritmo correspondiente a la Transformada Rápida de Fourier. De modo análogo, es necesario realizar la doble transformada inversa de Fourier para las variables k_x and k_z para obtener la SF en el semiespacio 3D. Su expresión analítica viene dada por,

$$f(x, y, z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, y, k_z, \omega) e^{-i(k_x x + k_z z)} dk_x dk_z \quad (4.3.4)$$

donde es necesaria una aproximación discreta para su cálculo mediante la expresión

$$\tilde{f}_{s_x s_z}(x_{s_x}, y, z_{s_z}, \omega) =$$

$$\frac{\Delta k_x \Delta k_z}{(2\pi)^2} \sum_{r_x=1}^{N_x} \sum_{r_z=1}^{N_z} F_{r_x r_z} (k_x, r_x, y, k_z, r_z, \omega) e^{-2\pi i \frac{(r_x-1)(s_x-1)}{N_x}} e^{-2\pi i \frac{(r_z-1)(s_z-1)}{N_z}} \tag{4.3.5}$$

siendo Δk_x y Δk_z los incrementos de números de onda para k_x y k_z , y del mismo modo, N_x y N_z son los números totales de puntos en los dominios k_x y k_z , respectivamente.

Para aplicar estas funciones de Green transformadas en formulaciones de elementos de contorno, es necesario calcularlas exactamente en todos los casos incluyendo aquellos en los que la carga está en la interfase y/o cuando los puntos de la carga y donde se calcula coinciden. La función de Green es singular en los dominios (x, y, z, ω) y (x, y, k_z, ω) pero es regular en el dominio (k_x, y, k_z, ω) .

4.4. Validación de la función de Green

La solución obtenida se ha validado mediante los procedimientos siguientes:

1. Ejemplos basados en el *teorema de reciprocidad* para los desplazamientos. Se validan las propiedades básicas de la Solución Fundamental empleando únicamente la teoría desarrollada en este procedimiento.
2. Validación numérica empleando el programa de elementos de contorno (UPECE) con la Solución Fundamental para el espacio completo siendo necesaria la discretización de la superficie (sección 5.8.4).
3. Comparación utilizando otros resultados existentes en la literatura [135].
4. La solución es comparada con resultados experimentales (sección 6.2).

Teorema de Reciprocidad

El campo de desplazamientos elastodinámico correspondiente a cualquier solución fundamental debe satisfacer la siguiente identidad,

$$u_i^j(x, y, \omega) = u_j^i(y, x, \omega) \tag{4.4.1}$$

denominada *Teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos* [16], donde x y y son las posiciones de los puntos receptor y emisor, respectivamente. El superíndice denota la dirección de la fuerza y el subíndice indica la componente cartesiana del desplazamiento.

La figura 4.2 representa la comparación de reciprocidad $u_z^x = u_x^z$. Se considera un semiespacio con coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, densidad $\rho = 2242 \text{ kg/m}^3$, módulo de rigidez $\mu = 1.43488 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ y coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.005$. La figura 4.3 representa las partes real e imaginaria

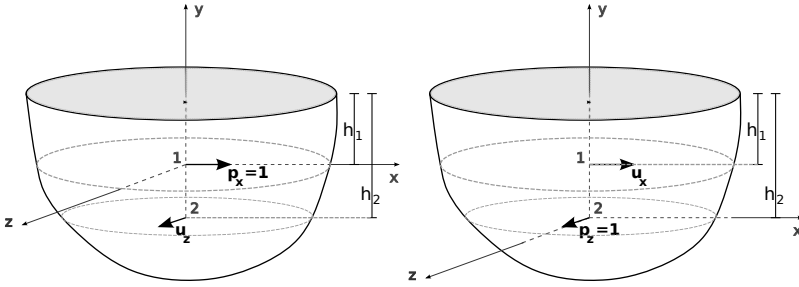


Figura 4.2: Comparación de reciprocidad

Tabla 4.1
Propiedades del material del semiespacio

Módulo de elasticidad	$E (\times 10^6 \text{N/m}^2)$	1770
Coefficiente de Poisson	(ν)	0.4
Densidad	$\rho (\text{kg/m}^3)$	1700
Amortiguamiento	ζ	0.075
Velocidad Ondas P	$c_p (\text{m/s})$	1500
Velocidad Ondas S	$c_s (\text{m/s})$	610

para dos soluciones recíprocas. Las soluciones se han calculado para dos frecuencias ($\omega = 50 \text{ Hz}$ en fig. 4.3(a) y $\omega = 200 \text{ Hz}$ en fig. 4.3(b)) en un intervalo de número de onda $k_x = (-2, 2) \text{ rad/m}$ y $k_z = 0.25 \text{ rad/m}$. La partes real e imaginaria de u_z^x están representadas en línea continua y discontinua, respectivamente. En este caso, la carga está situada a una profundidad $h_1 = 6 \text{ m}$ y se calculan los desplazamientos en $h_2 = 2 \text{ m}$. Los desplazamientos u_x^z en $h_1 = 2 \text{ m}$ para las mismas frecuencias y números de onda para una carga situada en $h_2 = 6 \text{ m}$ se muestran en el mismo gráfico, correspondiendo el símbolo \blacksquare con la parte real y \square con la parte imaginaria. Puede observarse que el ajuste entre ambas es perfecto.

Validación numérica empleando otros resultados existentes en la literatura

Se ha validado la solución con otras obtenidas en la literatura. Para ello se ha considerado un semiespacio sometido a una carga unitaria armónica actuando en la superficie. Las propiedades del terreno se recogen en la tabla 4.1.

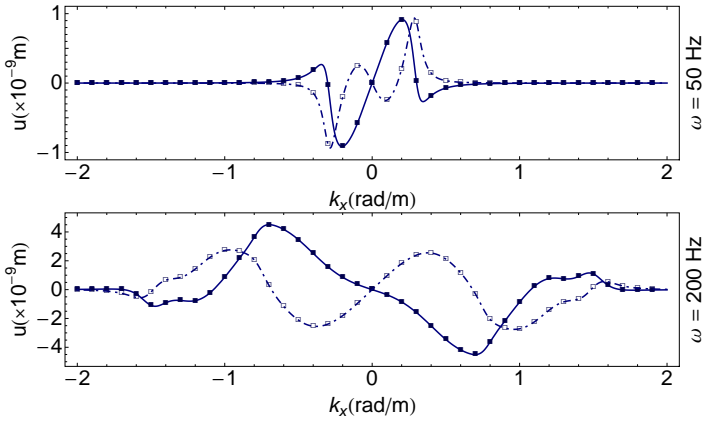


Figura 4.3: Validación del teorema de reciprocidad. Parte real (línea continua) e imaginaria (líneas discontinua) de u_z^x ; parte real (■) e imaginaria (□) de u_x^x

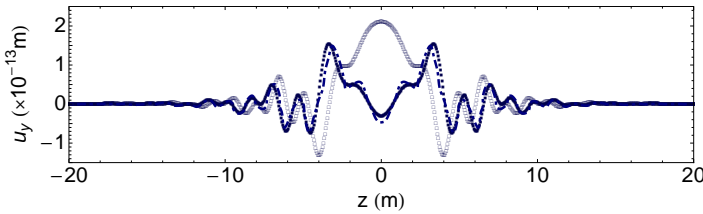


Figura 4.4: Desplazamiento vertical sobre la línea ($x = 0$ m, $y = -5$ m) debido a una carga vertical unitaria armónica de 500 Hz aplicada en la superficie de un semiespacio. (Parte real (■) y parte imaginaria (□). En línea discontinua la solución dada por [135])

Para la obtención de los desplazamientos se han empleado 2048 puntos con un incremento en el número de onda de $0.05 \cdot 2\pi$ rad/m. La figura 4.4 representa el desplazamiento vertical a una profundidad de 5 m en la vertical de la fuerza para un semiespacio en el que actúa una carga vertical unitaria armónica de frecuencia 500 Hz en la superficie. En la figura 4.5(a) se representa el desplazamiento vertical en superficie a una distancia de 20 m de la carga para una frecuencia de 250 Hz. Las figuras 4.5(b) y 4.5(c) representan la parte real e imaginaria de los desplazamientos en superficie, respectivamente.

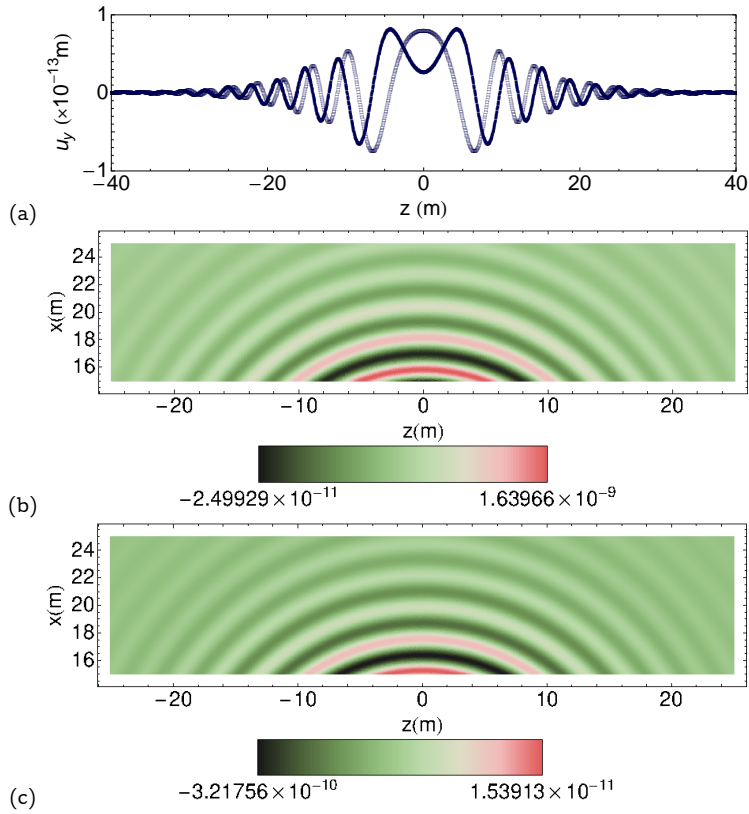


Figura 4.5: Desplazamiento vertical debido a una carga vertical unitaria armónica de 250 Hz aplicada en la superficie de un semiespacio ($x = 0$ m, $y = 0$ m, $z = 0$ m): (a) Parte real (■) e imaginaria (□) sobre la recta ($x = 20$ m, $y = 0$ m) (En línea discontinua la solución dada por [135]); (b) Parte real en superficie; (c) Parte imaginaria en superficie

4.5. Comportamiento asintótico de la Solución Fundamental

Es muy útil obtener el comportamiento de la función de Green para dos casos particulares: (i) el límite cuando la profundidad de la carga es grande y (ii) el límite cuando la frecuencia de excitación es cero. El primer límite proporciona la Solución Fundamental para el espacio completo en el dominio transformado (k_x, y, k_z, ω) , mientras que el segundo límite conduce a la Solución Fundamental elastostática del semiespacio en el dominio transformado.

Otras Soluciones Fundamentales pueden obtenerse fácilmente, tales como:

1. Considerando $h \rightarrow \infty$ y $\omega \rightarrow 0$ se obtiene la SF armónica del espacio completo.
2. El límite $k_z \rightarrow 0$ proporciona la SF dinámica armónica para el espacio bidimensional en el dominio transformado (k_x, y) .
3. Combinación de superposiciones diferentes de estos límites permiten obtener otras Soluciones Fundamentales útiles en el dominio transformado.

En las secciones siguientes se muestran las expresiones más útiles.

Solución Fundamental para el espacio completo en el dominio transformado

Considerando $h \rightarrow \infty$, las expresiones 4.2.20 a 4.2.23 conducen a las siguientes,

$$\begin{aligned}
 U_i^l &= \frac{1}{2\rho\omega^2} \left[k_i k_l \left(\frac{1}{k_\alpha} e^{-k_\alpha y} - \frac{1}{k_\beta} e^{-k_\beta y} \right) + \delta_{il} \frac{k_s^2}{k_\beta} e^{-k_\beta y} \right] \quad \{i, l\} = x, z \\
 U_y^i &= U_i^y = \frac{ik_i}{2\rho\omega^2} \left[-e^{-k_\alpha y} + e^{-k_\beta y} \right] \quad i = x, z \\
 U_y^y &= \frac{1}{2\rho\omega^2} \left[-k_\alpha e^{-k_\alpha y} + \frac{k_r^2}{k_\beta} e^{-k_\beta y} \right]
 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

que se corresponden con la Solución Fundamental del espacio 3D en el dominio transformado (k_x, y, k_z, ω) .

A partir de estas ecuaciones se puede obtener fácilmente la Solución Fundamental para espacio 2.5D realizando la transformada inversa para el número de onda k_x . En la figura 4.6 se presentan algunos resultados calculando la transformada inversa de la solución fundamental en k_x (línea de puntos)

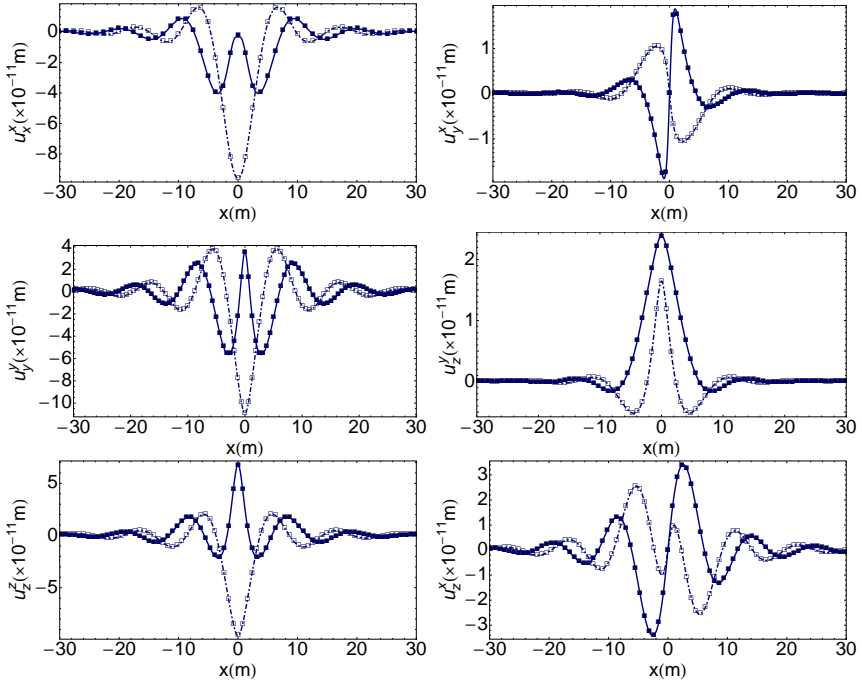


Figura 4.6: Componentes real (línea continua y ■) e imaginaria (línea discontinua y □) del desplazamiento sobre la línea $y = 1$ debido a una carga armónica unitaria $\omega = 100$ Hz aplicada en el origen obtenida a partir de la Solución Fundamental 2.5D para el espacio completo (líneas) y calculada mediante la transformada inversa de Fourier en k_x de la SF transformada (puntos); en todos los casos $k_z = 0.5$)

comparada con la expresión de la SF (línea continua) obtenida directamente de las ecuaciones de la elastodinámica 2.5D (sección 3.5). Las propiedades del medio en el que se realiza este ejemplo son: $\nu = 0.3$, $\rho = 2242 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.43488 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ y $\zeta = 0.005$. Para realizar la transformada inversa se han empleado $N_x = 256$ puntos.

Solución Fundamental para el semiespacio elastostático en el dominio transformado

Considerando el límite $\omega \rightarrow 0$ en las expresiones de los desplazamientos dados por las ecuaciones Ecuación 4.2.20 a Ecuación 4.2.23 se obtienen las

siguientes expresiones,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_i^l &= \frac{1}{8\mu k_r (1-\nu)} [k_i k_l \chi \\
 &\quad + \delta_{il} 4(1-\nu) (e^{-k_r |y|} + e^{k_r (-2h+y)})] \quad \{i, l\} = x, z \\
 \mathbf{U}_y^i &= \frac{ik_i}{8\mu k_r (1-\nu)} \left[e^{-k_r |y|} y \right. \\
 &\quad \left. + e^{k_r (-2h+y)} \left(-\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{k_r} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + y(3-4\nu) + 2hk_r (h-y) \right) \right] \quad i = x, z \\
 \mathbf{U}_i^y &= \frac{ik_i}{8\mu k_r (1-\nu)} \left[e^{-k_r |y|} y \right. \\
 &\quad \left. + e^{k_r (-2h+y)} \left(\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{k_r} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + y(3-4\nu) - 2hk_r (h-y) \right) \right] \quad i = x, z \\
 \mathbf{U}_y^y &= \frac{1}{8\mu k_r (1-\nu)} \left[e^{-k_r |y|} (3-4\nu + \text{sign}(y) k_r y) \right. \\
 &\quad \left. + e^{k_r (-2h+y)} (5-4\nu(3-2\nu) \right. \\
 &\quad \left. - k_r (-2h+y)(3-4\nu) + 2hk_r^2 (h-y) \right]
 \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \chi &= -\frac{e^{-k_r |y|}}{k_r^2} (1 + k_r |y|) \\
 &\quad + \frac{e^{k_r (-2h+y)}}{k_r^2} \left(1 - 8\nu(1-\nu) + (y-2h)(3-4\nu) k_r + 2h(h-y) k_r^2 \right)
 \end{aligned}$$

que corresponden a la Solución Fundamental de Midlin en el dominio transformado (k_x, y, k_z) [113].

Ambas soluciones se comparan en las figuras 4.7 y 4.8 para un espacio elástico con las propiedades siguientes: $\nu = 0.3$, densidad $\rho = 2242 \text{ kg/m}^3$, módulo de rigidez transversal $\mu = 1.43488 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$. La doble transformada inversa se ha realizado con una malla de $N_x \times N_z = 256 \times 256$ puntos.

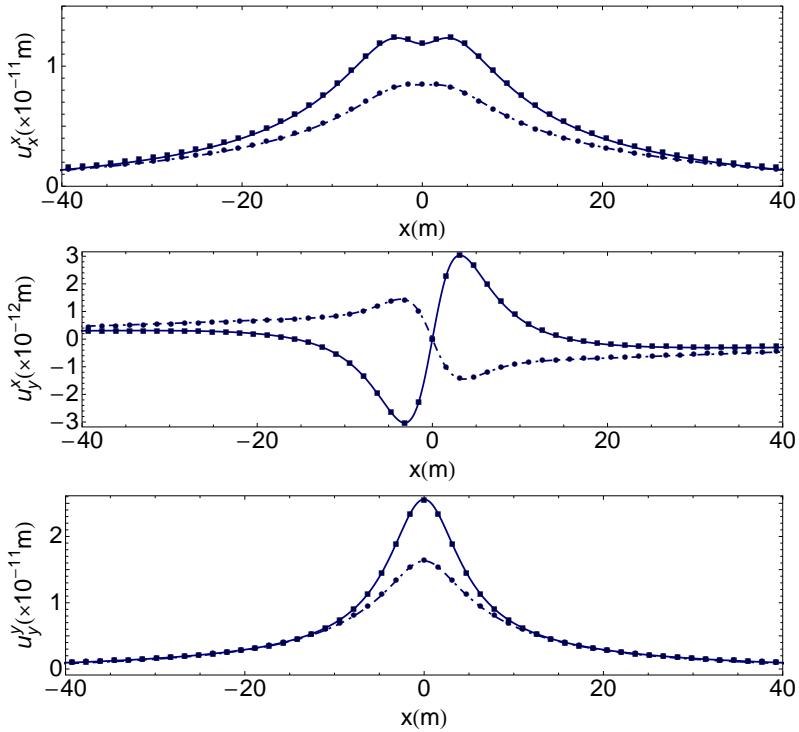


Figura 4.7: Desplazamientos en la superficie (línea continua y ■) y sobre la línea $y = -h$ (línea discontinua y □) debido a una carga unitaria aplicada en el origen obtenida con la Solución Fundamental de Mindlin (líneas) [113] y calculada mediante la transformada de la Solución Fundamental (puntos)

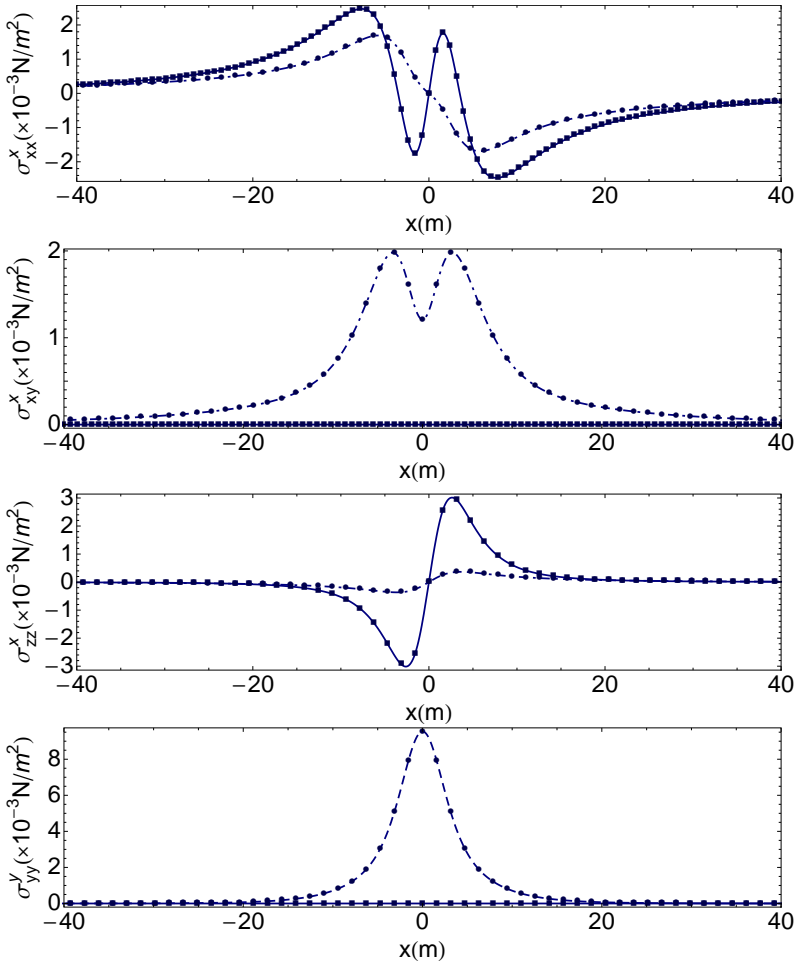


Figura 4.8: Tensiones en la superficie (línea continua y ■) y sobre la línea $y = -h$ (línea discontinua y □) debido a una carga unitaria aplicada en el origen obtenida con la Solución Fundamental de Mindlin (líneas) [113] y calculada mediante la transformada de la Solución Fundamental (puntos)

4.6. Integración espacial de la Solución Fundamental

Para aplicar esta Solución Fundamental en el código del Método de los Elementos de Contorno, es importante determinar el tipo de integración a abordar, y particularmente, el caso singular, como es el caso en el que el punto de aplicación de la carga o el punto de colocación esté sobre el elemento de integración. En este caso, los desplazamientos y tensiones de la Solución Fundamental son singulares en coordenadas físicas (x, y, z) , (r^{-1}) y (r^{-2}) , respectivamente, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia entre el punto de colocación y observación. Si sólo se realiza una transformada en las coordenadas físicas, (x, y, k_z) o (k_x, y, z) , la Solución Fundamental en desplazamientos y tensiones sigue siendo singular, $(\log r)$ y (r^{-1}) , respectivamente, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ o $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Sin embargo, la Solución Fundamental en el dominio (k_x, y, k_z) no es singular cuando $y \rightarrow 0$.

Para integrar la Solución Fundamental para resolver un problema dinámico 2.5D en un semiespacio, es evidente que el esfuerzo en la discretización se reduce empleando la Solución Fundamental del semiespacio, o lo que es lo mismo, el cálculo de la Solución Fundamental es computacionalmente más costoso para la Solución Fundamental en el espacio completo. Así, considerando la siguiente integral elemental singular,

$$I = \int_{\Gamma_e} F^{H-S}(k_x, y, z, \omega) \phi_e(y, z) d\Gamma_e \quad (4.6.1)$$

donde $F^{H-S}(k_x, y, z)$ es alguna de las componentes de la Solución Fundamental para el semiespacio en desplazamientos o tensiones y $\phi(y, z)$ es una función de forma regular.

Existen dos técnicas para resolver las integrales singulares:

1. Regularización mediante la sustracción de una Solución Fundamental más simple.
2. Cambio en el orden de integración.

Regularización mediante la sustracción de una Solución Fundamental más simple

Para regularizar la Solución Fundamental del semiespacio se pueden emplear diferentes Soluciones Fundamentales dependiendo de las integrales singulares programadas. Por ejemplo, si se ha implementado la Solución Fundamental para un código dinámico 2.5D que emplea la SF para el espacio completo,

se pueden emplear las expresiones siguientes,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma_e} F^{H-S}(k_x, y, z, \omega) \phi_e(y, z) d\Gamma_e \\ &= \int_{\Gamma_e} F^{F-S}(k_x, y, z, \omega) \phi_e(y, z) d\Gamma_e + \int_{\Gamma_e} \Delta F(k_x, y, z, \omega) \phi_e(y, z) d\Gamma_e \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

donde $\Delta F(k_x, y, z, \omega) = F^{H-S}(k_x, y, z, \omega) - F^{F-S}(k_x, y, z, \omega)$ es regular cuando $r \rightarrow 0$ y puede calcularse,

$$\begin{aligned} \Delta F(k_x, y, z, \omega) &= \\ \frac{\Delta k_z}{2\pi} \sum_{n_z=1}^{N_z} &\left(F^{H-S}(k_x, y, n_z \Delta k_z, \omega) - F^{F-S}(k_x, y, n_z \Delta k_z, \omega) \right) e^{2\pi i(z-1)\Delta k_z \frac{n_z-1}{N_z}} \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Las expresiones de $F^{H-S}(k_x, y, n_z \Delta k_z, \omega)$ y $F^{F-S}(k_x, y, n_z \Delta k_z, \omega)$ vienen dadas en las ecuaciones Ecuación 4.2.20 a Ecuación 4.2.23, y Ecuación 4.5.1, respectivamente, en el caso de los desplazamientos de la Solución Fundamental.

Otra forma de regularizar se tiene si partimos de un código 2.5D elastostático que emplea la Solución Fundamental del semiespacio (Mindlin) y en el que se utilizarían las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma_e} F^{H-S}(k_x, y, z, \omega) \phi_e(y, z) d\Gamma_e \\ &= \int_{\Gamma_e} F^{Mindlin}(k_x, y, z, \omega) \phi_e(y, z) d\Gamma_e + \int_{\Gamma_e} \Delta F(k_x, y, z, \omega) \phi_e(y, z) d\Gamma_e \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

donde $\Delta F(k_x, y, z, \omega) = F^{H-S}(k_x, y, z, \omega) - F^{Mindlin}(k_x, y, z, \omega)$ es regular para $r \rightarrow 0$. Se puede calcular entonces,

$$\begin{aligned} \Delta F(k_x, y, z, \omega) &= \\ \frac{\Delta k_z}{2\pi} \sum_{n_z=1}^{N_z} &\left(F^{H-S}(k_x, y, n_z \Delta k_z, \omega) - F^{Mindlin}(k_x, y, n_z \Delta k_z, \omega) \right) e^{2\pi i(z-1)\Delta k_z \frac{n_z-1}{N_z}} \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Las expresiones $F^{H-S}(k_x, y, n_z \Delta k_z, \omega)$ están determinadas por las ecuaciones 4.2.20 a 4.2.23, mientras que $F^{Mindlin}(k_x, y, n_z \Delta k_z, \omega)$ está definida en las ecuaciones 4.5.2.

Cambio en el orden de integración

Dependiendo del tipo de problema considerado pueden ser necesarias la realización de una o dos integraciones para la transformada inversa en el cálculo

de la Solución Fundamental. Considerando el caso de un problema dinámico armónico 2.5D, $F^{H-S}(k_x, y, z, \omega)$ viene dada por,

$$F^{H-S}(k_x, y, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, y, k_z, \omega) e^{ik_z z} dk_z \quad (4.6.6)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma_e} F^{H-S}(k_x, y, z, \omega) \phi_e(y, z) d\Gamma_e(y, z) \\ &= \int_{\Gamma_e} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, y, k_z, \omega) e^{ik_z z} dk_z \right\} d\Gamma_e(y, z) \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Se puede cambiar el orden de integración entre Γ_e y k_z ,

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{\Gamma_e} F(k_x, y, k_z, \omega) e^{ik_z z} d\Gamma_e(y, z) \right\} dk_z \quad (4.6.8)$$

La ventaja de esta aproximación es que mientras $F^{H-S}(k_x, y, z, \omega)$ es singular, $F(k_x, y, k_z, \omega) e^{ik_z z}$ es regular y su integral puede calcularse directamente mediante la cuadratura de Gauss.

Discretizando la transformada inversa de Fourier, el valor de I viene determinado por,

$$I = \frac{\Delta k_z}{2\pi} \sum_{n_z=1}^{N_z} \left\{ \int_{\Gamma_e} F(k_x, y, n_z \Delta k_z, \omega) e^{2\pi i(z-1)\Delta k_z \frac{n_z-1}{N_z}} d\Gamma_e(y, z) \right\} \quad (4.6.9)$$

El Método de los Elementos de Contorno para problemas dinámicos 2.5D

5.1. Introducción

Uno de los principales objetivos de esta tesis es proporcionar una herramienta de cálculo que permita resolver de forma sencilla problemas de propagación de ondas para medios en 2.5D. La teoría presentada en este capítulo se ha implementado en código FORTRAN, obteniendo el programa denominado UPECE (anexo F). Este programa permite calcular la respuesta en múltiples problemas, ejemplo de ello es el capítulo 6, dedicado a aplicaciones del método desarrollado.

Este capítulo comienza con la descripción de la Formulación Integral para problemas de potencial, particularizado para el caso de fluidos en medios 2.5D (sección 5.2). Dado el carácter escalar del problema, es muy adecuado para implementar todas las ideas básicas del Método de los Elementos de Contorno, paso previo al estudio del problema elastodinámico 2.5D.

La formulación integral para medios elastodinámicos se describe en la sección 5.3. En la sección 5.4 se presenta la formulación para el Método de los Elementos de Contorno en medios elastodinámicos 2.5D, con especial incidencia en el cálculo de integrales singulares, aplicación de cargas puntuales, cargas móviles y multiregiones.

Los ejemplos numéricos descritos en este capítulo permiten validar el programa comparando con otras técnicas numéricas. La sección comienza con la validación del problema de potencial para dos ejemplos numéricos con solución analítica (sección 5.8.1). En la sección 5.8.2 se comprueba la validez del método para problemas bidimensionales, comparando la solución con la obtenida con el programa de elementos de contorno QUADPLEH [44].

La sección 5.8.3 recoge que la solución obtenida mediante el Método de los Elementos de Contorno 2.5D es válida para cualquier número de onda al comparar con dos soluciones obtenidas analíticamente.

La Solución Fundamental desarrollada para el semiespacio viscoelástico 2.5D (capítulo 4) se ha validado con el programa de elementos de contorno en la sección 5.8.4. Tras el estudio de propagación de ondas debidas a cargas armónicas fijas, se estudia la validez de este desarrollo para el caso de cargas puntuales móviles, tal y como se ha propuesto en la sección C.2. Se presenta un estudio de la propagación de ondas en un semiespacio en función de la velocidad de la carga y se obtiene la respuesta en el tiempo para un carga móvil en un semiespacio, validada con la solución obtenida en [58]. Por último, se analiza la respuesta en un semiespacio sometido a una carga móvil analizando el efecto multiregión.

5.2. Formulación Integral para fluidos en medios 2.5D

Considerando un medio fluido homogéneo Ω sometido a unas cargas lineales armónicas con número de onda k_z . La ecuación integral sobre el contorno para el problema de potencial se puede expresar

$$c(\mathbf{y}) P(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} U_n^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}) P(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} P^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}) U_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} P^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}) B(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (5.2.1)$$

siendo $\mathbf{y} \in \Gamma$ y el término libre, $c(\mathbf{y})$ toma los valores 0, si \mathbf{y} es un punto del exterior del dominio Ω , 1 si \mathbf{y} es un punto del interior del dominio Ω y 1/2 si \mathbf{y} es un punto del contorno y éste es suave. En esta ecuación $U_n^*(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ (ec. 3.3.10) es el desplazamiento normal en el punto \mathbf{x} sobre el contorno Γ , provocado por una carga unitaria en el punto \mathbf{y} ; $P^*(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ (ec. 3.3.8) es la presión debida a una carga unitaria en \mathbf{x} ; $P(\mathbf{x})$ es la presión en \mathbf{x} y $U_n(\mathbf{x})$ es el desplazamiento normal para \mathbf{x} ; $B(\mathbf{x})$ son las fuerzas de volumen en \mathbf{x} . La resolución de esta ecuación integral requiere una discretización del contorno, obteniendo así una suma de integrales a lo largo de cada elemento. El procedimiento a seguir para obtener la formulación del Método de los Elementos de Contorno es análogo al que se indica en este capítulo para el problema elastodinámico (sección 5.4).

5.3. Formulación Integral para el problema elastodinámico 2.5D

El Teorema de Reciprocidad establece la igualdad de trabajos virtuales recíprocos entre el estado real y cualquier otro definido sobre el mismo dominio, con el mismo material [44]. Considerando uno de ellos el correspondiente a la Solución Fundamental para el espacio completo 2.5D, se obtiene la ecuación integral para un estado elastodinámico armónico en 2.5D

$$c_i^j(\mathbf{Y}) u_i(\mathbf{Y}) + \int_{\Gamma} T_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) u_i(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \int_{\Gamma} U_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) T_i(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) + \int_{\Omega} U_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) F_i(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \quad (5.3.1)$$

donde $i, j = 1, 2$ se corresponden con las direcciones coordenadas x e y en las que define la geometría e $i, j = 3$ se refiere a la dirección z ; $T_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ y $U_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ (ecs. 3.5.5 y 3.5.7) son las tensiones y desplazamientos de la Solución Fundamental sobre el contorno i , provocadas por una carga unitaria aplicada en el punto de colocación \mathbf{Y} ; $T_i(\mathbf{X})$ y $U_i(\mathbf{X})$ son las tensiones y desplazamientos en la dirección i en el punto \mathbf{X} . El tensor $c_i^j(\mathbf{Y})$ depende únicamente de la geometría del contorno Γ en el punto \mathbf{Y} . Su valor es igual a $\delta_{ij}/2$ cuando el contorno es suave en \mathbf{Y} .

Esta ecuación es conocida como Identidad de Somigliana y es la base del Método de los Elementos de Contorno.

5.4. Discretización empleando funciones de forma cuadráticas

La resolución numérica de la ecuación 5.4.1 requiere una discretización del contorno Γ (fig. 5.1). Se obtiene así una suma de integrales sobre los N_e elementos considerados

$$c_i^j(\mathbf{Y}) u_i(\mathbf{Y}) + \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} T_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) u_i(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} U_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) T_i(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) + B_i(\mathbf{Y}) \quad (5.4.1)$$

La interpolación de la geometría permite parametrizar el contorno y transformar las integrales de forma homogénea. Los elementos de geometría cuadrática se definen a partir de 3 nodos geométricos, $\mathbf{x}_i^e, \mathbf{x}_m^e, \mathbf{x}_f^e$, de modo de la geometría se define

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{x}_i^e \phi_1(\xi) + \mathbf{x}_m^e \phi_2(\xi) + \mathbf{x}_f^e \phi_3(\xi) \quad (5.4.2)$$

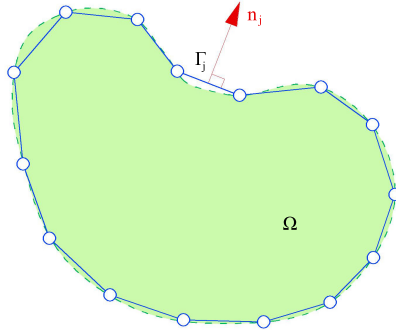


Figura 5.1: Discretización del contorno Γ de un problema 2.5D en N_e elementos

siendo ξ la coordenada natural y ϕ_i las funciones de interpolación

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad \phi_2(\xi) = 1 - \xi^2 \quad \phi_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (5.4.3)$$

Esta ecuación transforma cualquier segmento en el intervalo $(-1, 1)$, siendo el jacobiano de la transformación,

$$J_e(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (5.4.4)$$

Utilizando esta transformación las integrales del contorno pasan a evaluarse en coordenadas naturales.

Los campos de desplazamientos y tensiones también se interpolan en cada elemento empleando funciones de forma cuadráticas. La elección de este tipo de funciones es la más adecuada en los problemas de propagación de ondas frente al empleo de funciones de forma constantes ¹ o lineales, ya que la convergencia para estas últimas es muy lenta en este tipo de problemas [8].

$$U(\xi) = \phi_1(\xi) U_1 + \phi_2(\xi) U_2 + \phi_3(\xi) U_3 \quad (5.4.5)$$

siendo $U(\xi)$ una variable cualquiera en los elementos (presión, desplazamiento, tensión, etc.). Esta aproximación permite transformar las integrales

¹En el desarrollo de este trabajo se ha implementado también la interpolación empleado elementos constantes como un método más para validación del procedimiento.

de contorno en,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} U_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) T_i(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &= H_e(\mathbf{Y}) U_i^e \\ \int_{\Gamma_e} T_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) U_i(\mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) &= G_e(\mathbf{Y}) T_i^e \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

siendo U_i^e y T_i^e el desplazamiento y tensión en dirección i para los nodos del elemento e , respectivamente. Además,

$$\begin{aligned} H_e(\mathbf{y}) &= \int_{-1}^1 \mathbf{U}(\mathbf{X}(\xi); \mathbf{Y}) \mathbf{\Phi}(\xi) J_e d\xi \\ G_e(\mathbf{y}) &= \int_{-1}^1 \mathbf{T}(\mathbf{X}(\xi); \mathbf{Y}) \mathbf{\Phi}(\xi) J_e d\xi \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{\Phi}$ una matriz que recoge las funciones polinómicas de interpolación. La ecuación integral queda de la forma

$$\begin{aligned} c_i^j(\mathbf{Y}) U_i(\mathbf{Y}) + \sum_{e=1}^{N_e} H_i^e(\mathbf{Y}) U_i^e = \\ \sum_{e=1}^{N_e} G_i^e(\mathbf{X}) T_i^e + \int_{\Omega} U_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) F_i(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Las ecuaciones para cada nodo de colocación en el dominio de los elementos de contorno puede ensamblarse, obteniendo un sistema de ecuaciones a resolver que, expresado en forma matricial es el siguiente,

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{T} + \mathbf{B} \quad (5.4.8)$$

siendo \mathbf{H} y \mathbf{G} matrices $N \times N$ de coeficientes conocidos, y \mathbf{U} y \mathbf{T} vectores $N \times 1$ que contienen los desplazamientos y tensiones en los nodos del contorno. Teniendo en cuenta que en cada punto del contorno y cada dirección, o bien son conocidas las tensiones, o bien son conocidos los desplazamientos, trasladamos las incógnitas a la izquierda de la ecuación y los datos a la derecha. El sistema de ecuaciones 5.4.8 se puede escribir

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (5.4.9)$$

siendo \mathbf{A} la matriz del sistema, formada por columnas de las matrices originales \mathbf{H} y \mathbf{G} ; \mathbf{x} contiene las incógnitas en cada nodo del contorno, y \mathbf{f} es el vector de términos independientes, obtenido sumando los productos de los valores de desplazamientos y/o tensiones conocidos en el contorno por las columnas correspondientes de las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} , respectivamente, más los términos de fuerzas volumétricas \mathbf{B} .

El cálculo de los coeficientes de influencia \mathbf{H} y \mathbf{G} implica realizar integrales del tipo

$$\begin{aligned} h_{ijkm} &= \int_{\Gamma_e} T_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}_k) \Phi_m d\Gamma_e \\ g_{ijkm} &= \int_{\Gamma_e} U_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}_k) \Phi_m d\Gamma_e \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Cuando el punto de colocación \mathbf{Y}_k no se encuentra en el elemento de integración, las funciones T_i^j y U_i^j son regulares y, por tanto, la integración se puede resolver mediante integración numérica empleando cuadratura de Gauss. En el caso en el que el nodo de colocación esté sobre el elemento de integración, existen singularidades en las integrales por las funciones de Green. Las integrales correspondientes a términos singulares se obtienen siguiendo lo desarrollado a continuación.

5.4.1. Evaluación de términos singulares

Un análisis de las singularidades que presenta la función de Green para el caso elastodinámico en el espacio completo 2.5D permite escribir estas las expresiones de la forma (sección 3.5.2),

$$\begin{aligned} U_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) &= U_i^{j(S)}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + U_i^{j(R)}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\ T_i^j(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) &= T_i^{j(S)}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + T_i^{j(R)}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

donde el superíndice (S) indica que se trata de una parte singular, y el superíndice (R), que es regular.

Tras el análisis de las soluciones fundamentales implementadas (3.3.10 y 3.5.11), las únicas singularidades que aparecen son las de tipo $1/r$ y $\log r$. La técnica de regularización para cada una de las singularidades es la desarrollada en [57] y se describe a continuación.

Integrales de tipo logarítmico

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \log(r) \phi(\xi) d\Gamma_e &= \\ \int_{\Gamma_e} \log(r) \left(\phi(\xi) - \phi(\xi_c) \left| \frac{dr}{d\Gamma_e} \right| \right) d\Gamma_e &+ \phi(\xi_c) [r_i(\log r_i - 1) + r_f(\log r_f - 1)] \end{aligned}$$

donde Γ_e es el contorno de integración; $\phi(\xi)$ es la función de forma, o función de interpolación; r_i y r_f la distancia entre el punto de colocación y los extremos inicial y final del elemento, respectivamente (figura 5.2).

Integrales de tipo $n_j \log(r)$

$$\int_{\Gamma_k} n_j \log(r) \phi(r) d\Gamma_k =$$

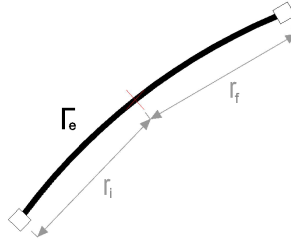


Figura 5.2: Técnica de regularización para las integrales singulares

$$\int_{\Gamma_k} \log(r) \left(n_j \phi(r) - N_j \phi(r_c) \left| \frac{dr}{d\Gamma_k} \right| \right) d\Gamma_k + N_j \phi(r_c) \log \frac{r_f}{r_i} \quad (5.4.12)$$

siendo n_j una cualquiera de las componentes de la normal en la dirección j en el punto x y N_j la componente l -ésima de la normal en el punto de colocación y .

Integrales de tipo $\frac{1}{r}$ Puesto que

$$r_{,i} n_j - r_{,j} n_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \pm \frac{dr}{d\Gamma_e} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.4.13)$$

El integrando singular es siempre de la forma $\frac{1}{r} \frac{dr}{d\Gamma_e}$, cuya integral puede calcularse con la siguiente descomposición,

$$\int_{\Gamma_e} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\Gamma_e} \phi(\xi) d\Gamma_e = \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\Gamma_e} (\phi(\xi) - \phi(\xi_c)) d\Gamma_e + \phi(\xi_c) \log \frac{r_f}{r_i} \quad (5.4.14)$$

En todos los casos el primer sumando se resuelve numéricamente mediante la regla de Gauss y el segundo proviene de una integral que puede realizarse analíticamente.

5.5. Cargas concentradas

El caso particular de que exista una carga concentrada se ha analizado considerando las propiedades de la Delta de Dirac. En este caso

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = F \delta(\mathbf{X} - \mathbf{Z})$$

siendo \mathbf{Z} un punto del interior del dominio Ω .

$$\mathbf{B}(\mathbf{Y}) = \int_{\Omega} \mathbf{U}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \mathbf{F}(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) = \mathbf{F}\mathbf{U}(\mathbf{Z}; \mathbf{Y}) \quad (5.5.1)$$

La integral de volumen se reduce a calcular la Solución Fundamental en el punto de aplicación de la carga \mathbf{Z} desde el nodo de colocación.

5.6. Múltiples regiones

En las secciones anteriores, la formulación se ha dado para un único dominio Ω . El empleo se restringe al análisis de medios homogéneos. Para permitir la consideración de medios no homogéneos se procedió al ensamblaje de múltiples dominios. Las matrices del sistema para cada subregión se construyen siguiendo las pautas proporcionadas en los apartados anteriores. A partir de éstas se puede obtener el sistema de ecuaciones imponiendo las condiciones de equilibrio y de compatibilidad en la interfase. En el proceso de ensamblaje se ha procedido a trabajar con las variables en la dirección normal y tangencial al contorno interfase, ya que facilita el ensamblaje cuando las subregiones son de diferente naturaleza. Así, para un dominio constituido por dos regiones sólidas (figura 5.3), el sistema de ecuaciones quedaría:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_1^I & \mathbf{H}_2^I & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2^{II} & \mathbf{H}_3^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^I \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^I & \mathbf{G}_2^I & 0 \\ 0 & -\mathbf{G}_2^{II} & \mathbf{G}_3^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1^I \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3^{II} \end{pmatrix} \quad (5.6.1)$$

donde se han impuesto en la interfase las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2^I &= \mathbf{U}_2^{II} = \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{T}_2^I &= -\mathbf{T}_2^{II} = \mathbf{T}_2 \end{aligned}$$

siendo el superíndice el parámetro que indica la subregión y el subíndice indica el contorno.

Cuando existen subregiones sólidas y líquidas en contacto, el número de incógnitas para cada subregión es diferente pero se puede establecer la compatibilidad de movimientos en el contorno interfase considerando que el movimiento normal es igual para ambos medios. El equilibrio de tensiones se define imponiendo que la presión en el líquido es igual a la tracción normal en el contorno y que la tensión tangencial en la interfase es inexistente [109]. Considerando las subregiones Ω_I sólida y la subregión Ω_{II} líquida en la

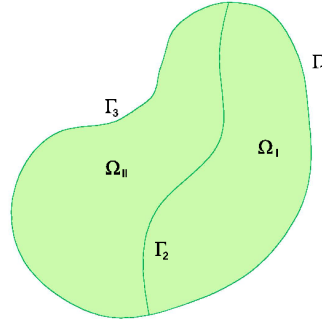


Figura 5.3: Modelo heterogéneo

figura 5.3, el sistema global es de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_1^I & \mathbf{H}_2^I & -\mathbf{G}_2^{I,II} & 0 \\ 0 & -\mathbf{G}_2^{II,I} & \mathbf{H}_2^{II} & \mathbf{H}_3^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^I \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^I & 0 \\ 0 & -\mathbf{G}_3^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1^I \\ \mathbf{U}_{n_3}^{II} \end{pmatrix} \quad (5.6.2)$$

donde $\mathbf{G}_2^I \mathbf{T}_2^I = \mathbf{G}_2^{I,II} \mathbf{P}_2$ y $\mathbf{G}_2^{II} \mathbf{U}_{n_2}^{II} = \mathbf{G}_2^{II,I} \mathbf{U}_2$

5.7. Puntos internos

Conocida la solución, el cálculo del desplazamiento en cualquier punto del dominio puede hacerse mediante la ecuación 5.4.7.

$$u_i(\mathbf{Z}) = \sum_{e=1}^{N_e} (G_i^e(\mathbf{Z}) T_i^e - H_i^e(\mathbf{Z}) U_i^e) + B_i(\mathbf{Z}) \quad (5.7.1)$$

siendo \mathbf{Z} un punto del interior del dominio Ω . Los integrandos de los coeficientes de influencia y la integral para las fuerzas de volumen son regulares y se calculan mediante cuadratura de Gauss. Si bien cuando el punto \mathbf{Z} se encuentra cerca del contorno aparece *cuasi-singularidad*, optando por aumentar el número de puntos de Gauss, tal y como se ha descrito previamente en la sección B.

5.8. Ejemplos numéricos

En esta sección se estudia la propagación de ondas en medios 2.5D. Se recogen parte de los problemas numéricos que han servido entre otros para la validación del programa y se realiza un estudio numérico de la propagación

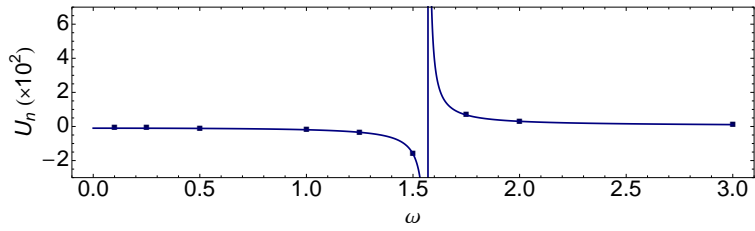
de ondas provocada por cargas móviles.

5.8.1. Resolución de problemas de potencial en 2.5D

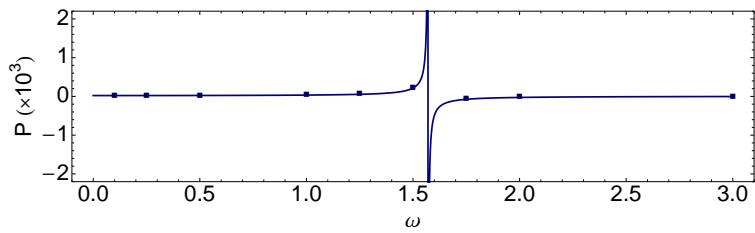
Los ejemplos numéricos presentados para el problema de potencial son ejemplos que han servido para la validación del programa. El primero consiste en un ejemplo sencillo que se puede resolver de forma analítica. Mientras que el segundo ejemplo emplea la propia Solución Fundamental para la validación, estableciendo como condiciones de contorno los valores de ésta.

Se considera un dominio 2.5D, Ω , de forma cuadrada de 2m de lado que contiene un fluido de características $c_f = 5 \text{ m/s}$, y $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Este dominio tiene impedido el flujo en los contornos laterales, la condición de contorno en el lado superior es $U_n = 10 \text{ m}$ y en el contorno inferior la presión del fluido es de $P = 2 \text{ N/m}^2$. En la figura 5.4 se representan los resultados en desplazamientos normales o presiones en función de la frecuencia para un número de onda constante $k_z = 0$, es decir, para el caso bidimensional. También se representa la respuesta en función del número de onda para una frecuencia constante $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Para la obtención de resultados, se han empleado 3 elementos cuadráticos por contorno. En ambos casos se compara los resultados con los obtenidos de forma analítica (Anexo D).

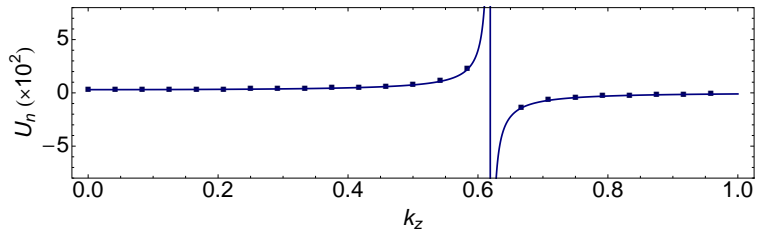
El segundo ejemplo que se describe para validar los problemas de potencial particularizados para el caso de fluidos, consiste en resolver un problema con solución analítica conocida, la propia Solución Fundamental. Se estudia la respuesta en un medio rectangular (figura 5.5) de características $c_f = 5 \text{ m/s}$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\zeta = 0.05$ para una frecuencia $\omega = 100 \text{ rad/s}$ y un número de onda $k_z = 5 \text{ rad/m}$. Las condiciones de contorno del problema son las correspondientes a la Solución Fundamental en presiones para el contorno inferior y en desplazamientos normales en el resto de contornos, para una carga unitaria aplicada en el punto de coordenadas $(x = 1 \text{ m}, y = -2 \text{ m})$. En la figura 5.6 se presentan los resultados obtenidos para los contornos inferior y superior calculados de forma analítica y con el programa de elementos de contorno UPECE empleando elementos cuadráticos (línea de puntos de forma cuadrada) y elementos constantes (línea de puntos). Para la discretización con elementos cuadráticos se han empleado 40 elementos para los contornos Γ_1 y Γ_3 y 20 elementos para los contornos Γ_2 y Γ_4 . El cálculo empleando elementos constantes se ha realizado con 80 elementos para los contornos Γ_1 y Γ_3 y 40 elementos para los contornos Γ_2 y Γ_4 .



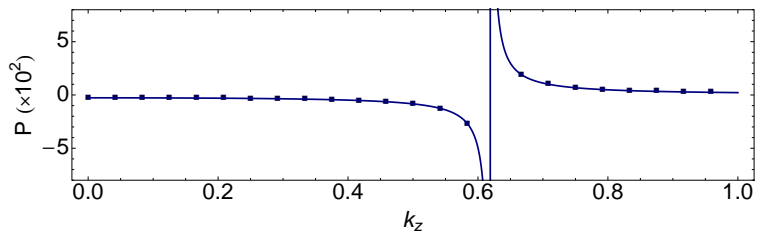
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.4: (a) y (c): Desplazamiento en el contorno inferior, (b) y (d) Presión en el contorno superior. Resultados para $k_z = 0$, (a) y (b) y para $\omega = 2$ rad/s, (c) y (d). (Solución analítica representada en línea continua y solución mediante el Método de los Elementos de Contorno con ■)

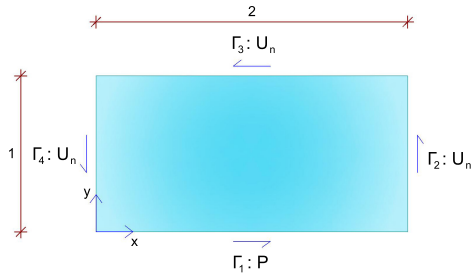


Figura 5.5: Modelo para la validación de problemas de potencial

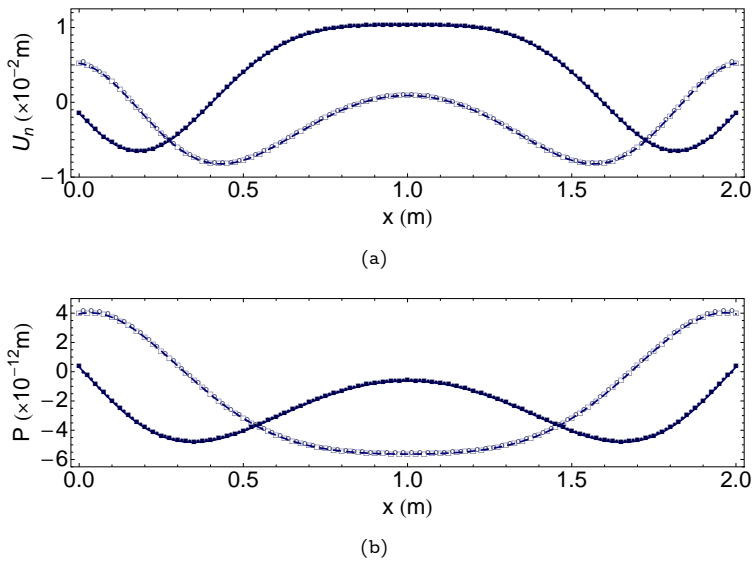


Figura 5.6: (a) Desplazamiento normal en el contorno inferior; (b) Presión en el contorno superior. En ambos casos se representa la solución analítica (línea), la solución obtenida con el programa de elementos de contorno UPECE empleando elementos cuadráticos (■) y empleando elementos constantes (●). Parte real en línea continua y parte imaginaria en línea discontinua

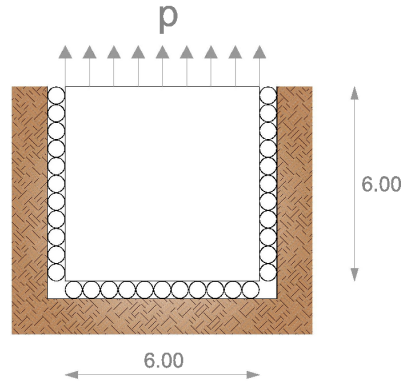


Figura 5.7: Modelo simple para la validación del programa en 2D

5.8.2. Resolución de problemas elastodinámicos bidimensionales

Para la validación del programa en el caso bidimensional, se ha utilizado el programa QUADPLEH [44] que resuelve problemas 2D para elastodinámica armónica. Para ello, se ha comparado con los resultados del programa UPECE para el caso en el que $k_z = 0$, ya que para este valor el problema 2.5D se reduce al 2D. Se han estudiado dos problemas con solución analítica.

El primer problema para la validación consiste en un medio que tiene impedido el desplazamiento normal en tres de sus cuatro contornos, estando el cuarto sometido a una tensión uniforme, $p = 100 \text{ N/m}^2$ (figura 5.7). En la figura 5.8 se representan los desplazamientos en la parte superior de la pieza para frecuencias comprendidas entre los 10 y 140 rad/s. La solución obtenida por el programa de elementos de contorno UPECE (■) se ha validado con la solución analítica del problema (línea continua), con la solución obtenida por el programa QUADPLEH (●) y además se ha representado la solución obtenida con el programa de elementos de contorno desarrollado empleando funciones de forma constantes (◇).

Para validar la implementación en el programa del cálculo para puntos internos (sección 5.7) se ha representado el desplazamiento vertical en la recta vertical que pasa por el centro de la placa (figura 5.9). Los resultados obtenidos se comparan con la solución analítica y los resultados obtenidos con el programa QUADPLEH.

El segundo caso analizado para la validación consiste en una viga con un extremo sometido a un desplazamiento vertical armónico unidad (figura 5.10). Las propiedades de la viga son $\mu = 0.8 \cdot 10^{11}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$. Para el modelo de elementos de contorno se han considerado 5 elementos cuadrá-

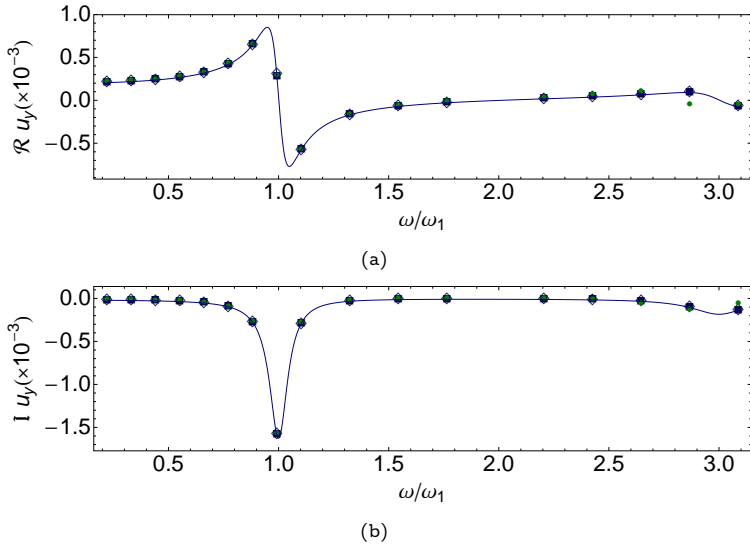


Figura 5.8: Desplazamiento vertical en la parte superior de la placa, calculado mediante su solución analítica (línea continua) y los programas de elementos de contorno QUADPLEH (●) y UPECE con elementos cuadráticos (■) y UPECE con elementos constantes (◇). (a) Parte real; (b) Parte imaginaria

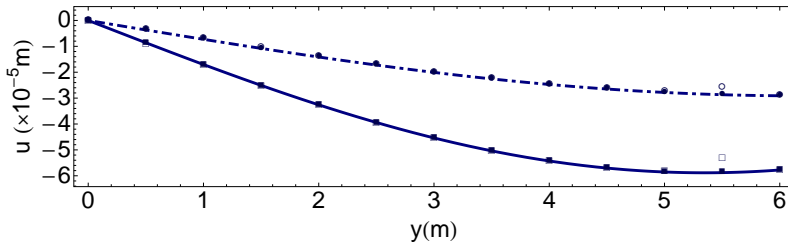


Figura 5.9: Desplazamiento vertical en el eje de simetría de la placa, calculado mediante su solución analítica (línea) y los programas de elementos de contorno QUADPLEH (●) y UPECE con elementos cuadráticos (■). Parte real en línea continua y parte imaginaria en discontinua

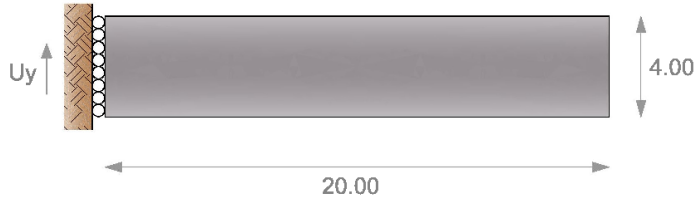


Figura 5.10: Modelo simple de validación para el caso $k_z = 0$.

ticos en los contornos superior e inferior de la viga y 1 en los contornos laterales. En todo caso se desprecia el amortiguamiento. En la figura 5.11 se presenta el desplazamiento vertical en el extremo libre de la viga para distintas frecuencias, que están expresadas como cociente entre la primera frecuencia natural del sistema. Se representan los resultados obtenidos mediante la solución analítica (línea continua), los obtenidos con el programa de elementos de contorno QUADPLEH (●) y los resultados obtenidos con UPECE con elementos cuadráticos (■).

5.8.3. Validación del programa UPECE para el caso elastodinámico 2.5D empleando soluciones analíticas

Una vez verificado el programa para el caso bidimensional ($k_z = 0$) se ha validado para problemas 2.5D en los que el número de onda no es nulo ($k_z \neq 0$), presentando a continuación los resultados obtenidos para dos de las técnicas empleadas.

La primera consiste en comprobar los resultados con los obtenidos analíticamente (Anexo D) para distintos valores de k_z . Para ello se estudia una región sólida formada por cuatro contornos y que tiene las condiciones de borde especificadas en la figura 5.12. Se considera un sólido de propiedades elásticas $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.25$, $\mu = 10^6 \text{ N/m}^2$. Se han representado la forma de la tensiones t_y y t_z en el centro del contorno superior para distintos valores del número de onda k_z y de la frecuencia ω considerando el problema sin amortiguamiento y comparando con las solución obtenida de forma analítica (figura 5.13).

En la figura 5.14 se muestra el valor de la tensión vertical t_y en el centro del lado inferior para una frecuencia $\omega = 100 - 0.05i \text{ rad/s}$, en función del valor

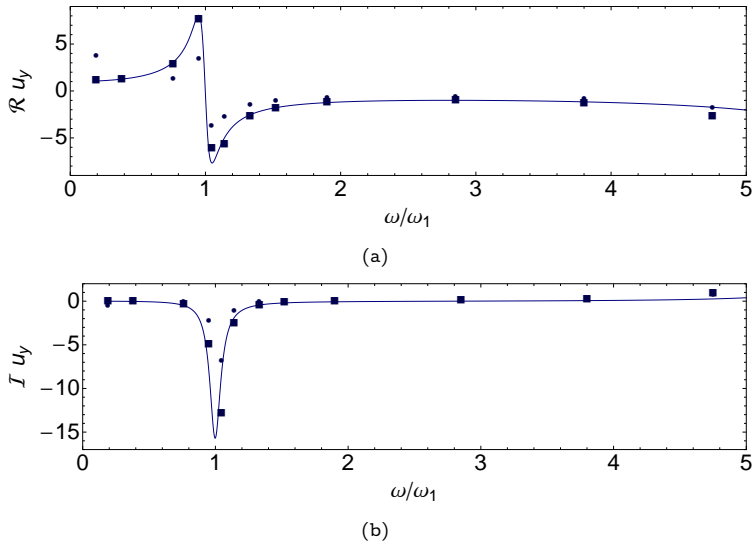


Figura 5.11: Desplazamiento vertical en el extremo libre de la viga, calculado mediante los programas de elementos de contorno QUADPLEH (●) y UPECE (■) y la solución analítica (línea). (a) Parte real; (b) Parte imaginaria.

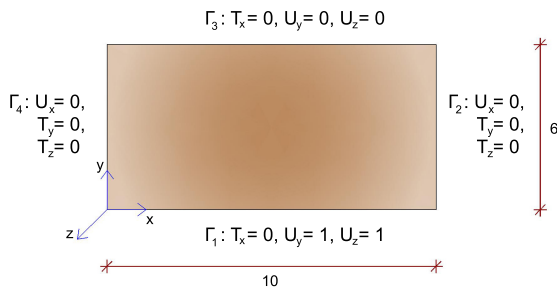


Figura 5.12: Modelo para validación del código 2.5D

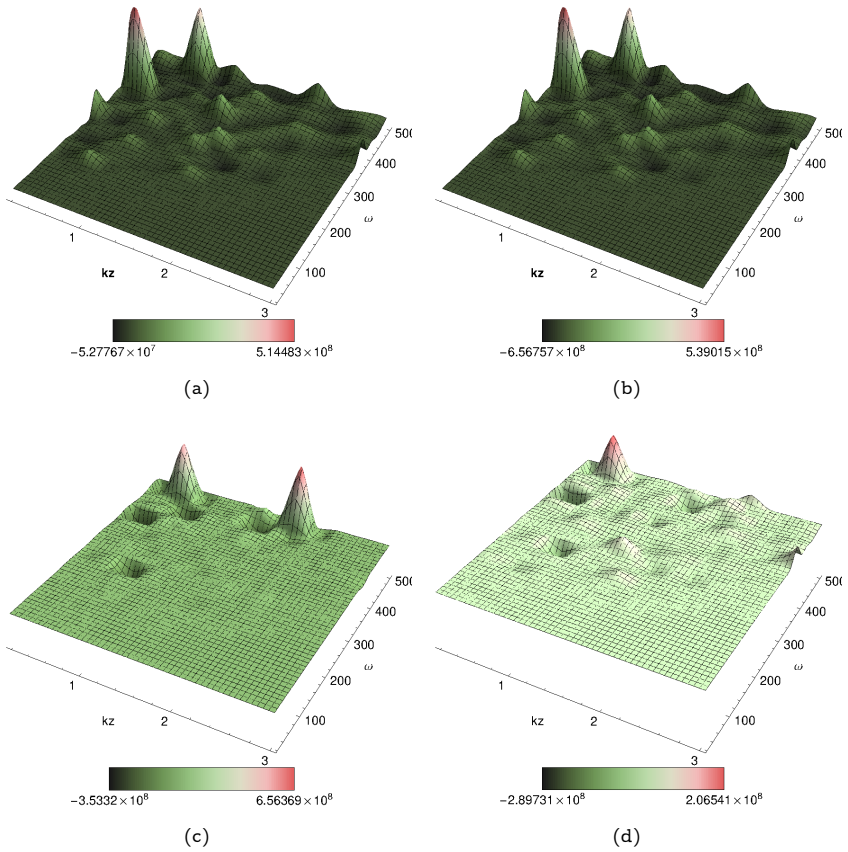


Figura 5.13: Tensión en el centro del contorno superior para un rango de frecuencias y números de onda: (a) Parte real de t_y ; (b) Parte imaginaria de t_y ; (c) Parte real de t_z ; (d) Parte imaginaria de t_z .

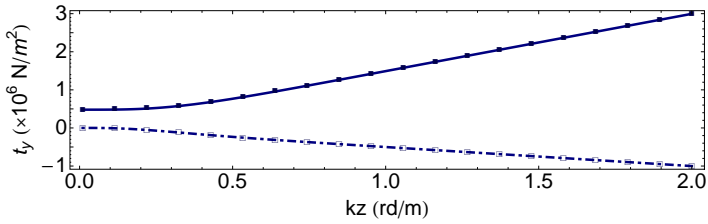


Figura 5.14: Componente Real e Imaginaria de la tensión t_y en el centro del contorno inferior para $\omega = 10. - 0.05i$ rad/s en función del número de onda k_z . Solución analítica en línea continua (parte real) y discontinua (parte imaginaria). Solución obtenida con UPECE con puntos (■ y □)

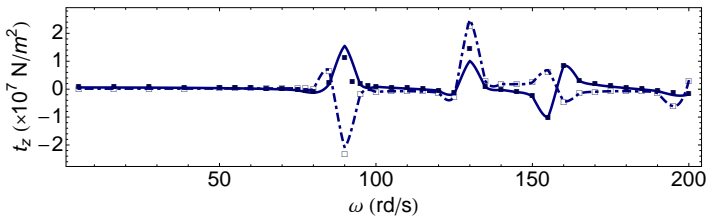


Figura 5.15: Componente Real e Imaginaria de la tensión t_z en el centro del contorno inferior para $k_z = 0.4$ rad/m en función de la frecuencia ω . Solución analítica en línea continua (parte real) y discontinua (parte imaginaria). Solución obtenida con UPECE con puntos (■ y □)

del número de onda k_z . Como puede observarse el acuerdo entre la solución analítica y la numérica es excelente.

Del mismo modo, en la figura 5.15 se muestra el valor de la tensión vertical t_z en el centro del lado inferior para un número de onda $k_z = 0.4$ rad/m en función del valor de la frecuencia ω .

El segundo ejemplo de validación consiste el resolver un problema cuya solución analítica sea conocida, pero más compleja que la anterior. Para ello se ha empleado la propia Solución Fundamental, pero calculados sus valores sobre un dominio finito. Si la carga está aplicada fuera de esta dominio finito, la Solución Fundamental es solución del problema elastodinámico del dominio finito para cargas nulas.

Para ello se ha aplicado una carga puntual armónica en la dirección x en el punto $(-4., 1.)$ exterior a un dominio rectangular considerado (figura 5.16). Los valores obtenidos con la Solución Fundamental, desplazamientos o ten-

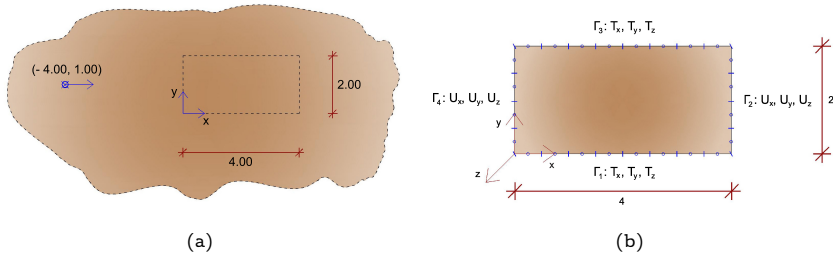


Figura 5.16: Modelo para validación del código 2.5D basado en la Solución Fundamental: (a) Esquema de cálculo de la Solución Fundamental para obtener las condiciones de contorno; (b) Modelo para el cálculo con el Método de los Elementos de Contorno

siones, se utilizan como condiciones de contorno para el programa UPECE, que devuelve como resultado el correspondiente valor de desplazamiento o tensión. Estos valores calculados han de coincidir con los correspondientes calculados con la Solución Fundamental.

En la figuras 5.17 y 5.18 se representa la Solución Fundamental mediante una línea continua, mientras los resultados obtenidos por el programa UPECE están representados mediante puntos (■ para elementos cuadráticos y ● para elementos constantes).

5.8.4. Validación de la Solución Fundamental para el semiespacio 2.5D empleando el Método de los Elementos de Contorno

Las expresiones obtenidas para la Solución Fundamental de un semiespacio viscoelástico se han validado mediante el cálculo de la respuesta generada por una carga armónica en la dirección z en un semiespacio. Los resultados se han obtenido a partir del código generado en la elaboración de esta tesis empleando la Solución Fundamental del espacio completo descrita en la sección 3.5.

Se considera un semiespacio con coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, densidad $\rho = 2242 \text{ kg/m}^3$, módulo de rigidez $\mu = 1.43488 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ y coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.005$. Las figuras 5.19 y 5.20 representan las componentes real e imaginaria para el desplazamiento y tensiones, respectivamente, en la superficie del semiespacio 2.5D para un número de onda $k_z = 0.50$ y frecuencias 50 Hz y 200 Hz, calculadas mediante el programa de elementos de contorno y la Solución Fundamental propuesta en este trabajo. La solución calculada mediante el programa de elementos de contorno se representa

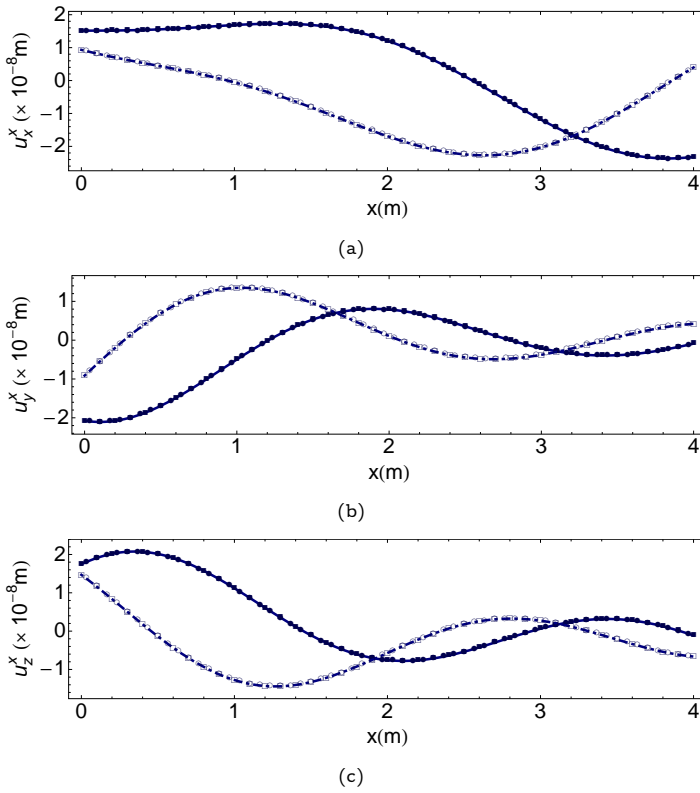
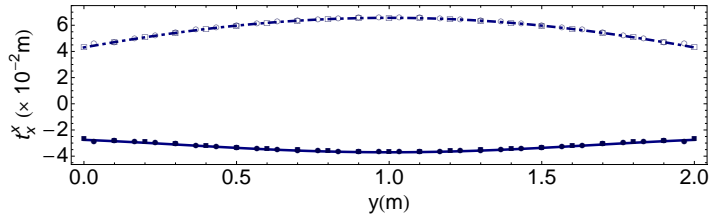
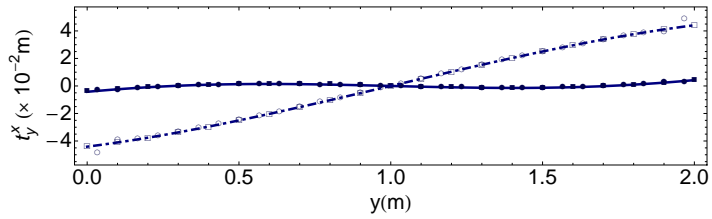


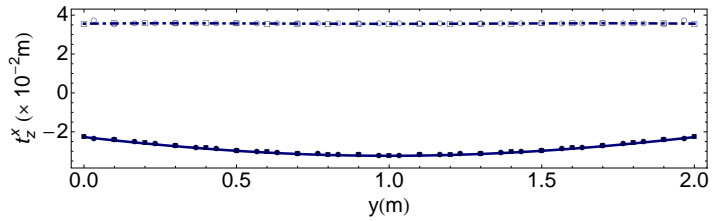
Figura 5.17: Desplazamientos en el contorno inferior: (a) u_x ; (b) u_y ; (c) u_z (Parte real en línea continua y parte imaginaria en línea discontinua para la solución analítica, solución obtenida mediante el Método de los Elementos de Contorno con elementos constantes (\bullet) y solución obtenida mediante el Método de los Elementos de Contorno con elementos cuadráticos (\blacksquare)).



(a)



(b)



(c)

Figura 5.18: Tensiones en el contorno izquierdo: (a) t_x ; (b) t_y ; (c) t_z (Parte real en línea continua y parte imaginaria en línea discontinua para la solución analítica, solución obtenida mediante el Método de los Elementos de Contorno con elementos constantes (\bullet) y solución obtenida mediante el Método de los Elementos de Contorno con elementos cuadráticos (\blacksquare)).

mediante líneas, siendo la parte real continua y la componente imaginaria discontinua. Ha sido necesaria una discretización de la superficie de 200 elementos cuadráticos en un contorno de longitud 300 m. La transformada inversa de la Solución Fundamental se ha realizado con $N_x = 256$ puntos y un incremento en el número de onda $\Delta k_x = 0.078125$ rad/m en las expresiones dadas en las ecuaciones 4.2.20 a 4.2.23 y las tensiones obtenidas por la ecuación 4.2.18.

5.8.5. Carga móvil en el espacio

El primer ejemplo numérico presentado para el caso de una carga móvil consiste en el cálculo de la respuesta del espacio completo conteniendo un túnel circular. La solución se compara con la obtenida en [137] (figura 5.21). Los parámetros del material son los descritos en la tabla 4.1. En la figura 5.22 se representan los desplazamientos en un punto R, situado en el punto más alto del túnel, debido a la acción de una carga unitaria horizontal armónica de 40 Hz moviéndose a 100 m/s sobre la recta ($x = 5$ m, $y = 0$ m). Para su resolución se han empleado 30 elementos cuadráticos para la modelización del túnel y la transformada inversa respecto a k_z se ha realizado empleando 2048 puntos con un incremento en el número de onda igual a $0.0025 \cdot 2 \cdot \pi$ (rad/m).

5.8.6. Carga móvil en un semiespacio

Se considera un semiespacio viscoelástico, con los parámetros para el material dados en la tabla 4.1. La solución se ha validado con los resultados presentados en [137] para a una carga puntual unitaria armónica moviéndose a 100 m/s en dirección z . La figura 5.23(a) presenta el desplazamiento vertical para una carga de 40 Hz aplicada a una profundidad de 3 m. En la figura 5.23(b) se representan los resultados para una carga de 200 Hz aplicada a una profundidad de 20 m. Para el cálculo no es necesaria discretización puesto que la Solución Fundamental del semiespacio permite obtener directamente la respuesta. Por último, la figura 5.25 recoge los desplazamientos verticales en superficie cuando la carga móvil de 40 Hz se sitúa en la base de un túnel circular (figura 5.24). Se han empleado 160 elementos cuadráticos para discretizar la superficie y 20 elementos cuadráticos para modelizar el túnel. Para la obtención de resultados en el espacio se han necesitado 1024 puntos con un incremento en el número de onda igual a $0.0025 \cdot 2\pi$ (rad/m).

A continuación se estudian los movimientos ocasionados en la superficie de un semiespacio viscoelástico provocados por el paso de una carga armóni-

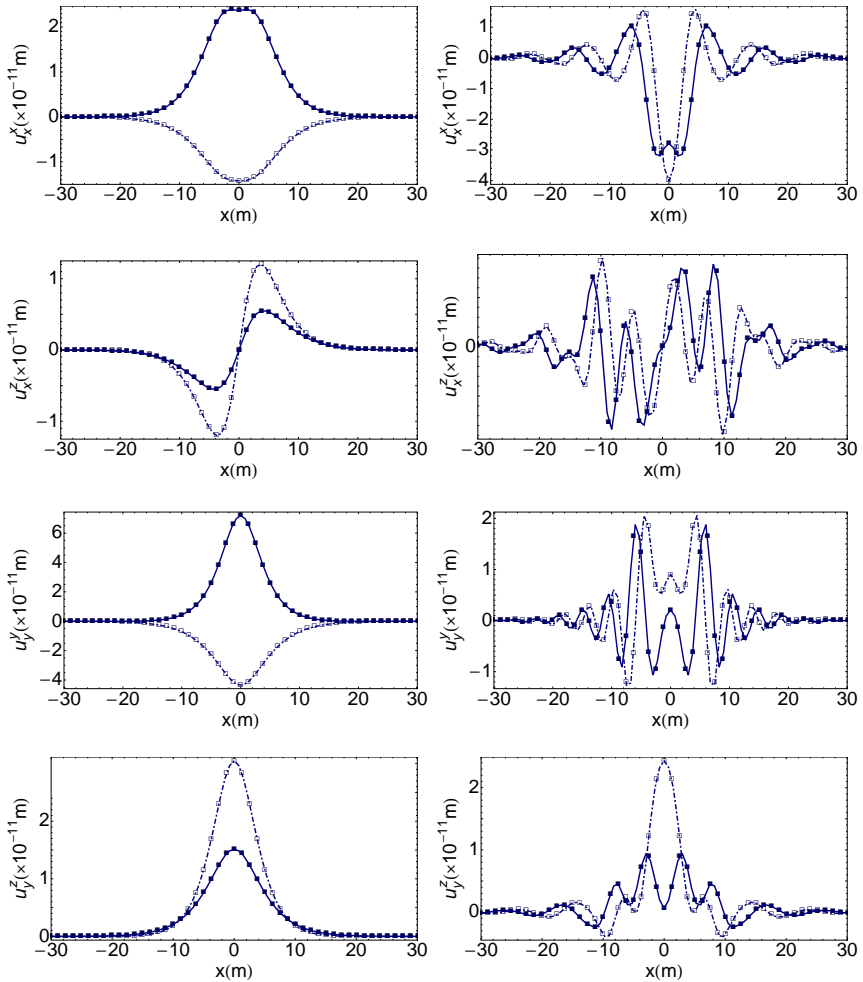


Figura 5.19: Partes real (línea continua o ■) e imaginaria (línea discontinua o □) para los desplazamientos sobre la línea ($y = 5$) debido a una carga unitaria y armónica de 50 Hz (izquierda) y 200 Hz (derecha) aplicada en el origen, obtenida mediante el MEC (líneas) y calculada mediante la transformada inversa de Fourier en k_x de la Solución Fundamental (cuadrados); número de onda $k_z = 0.5$ rad/m en todos los casos

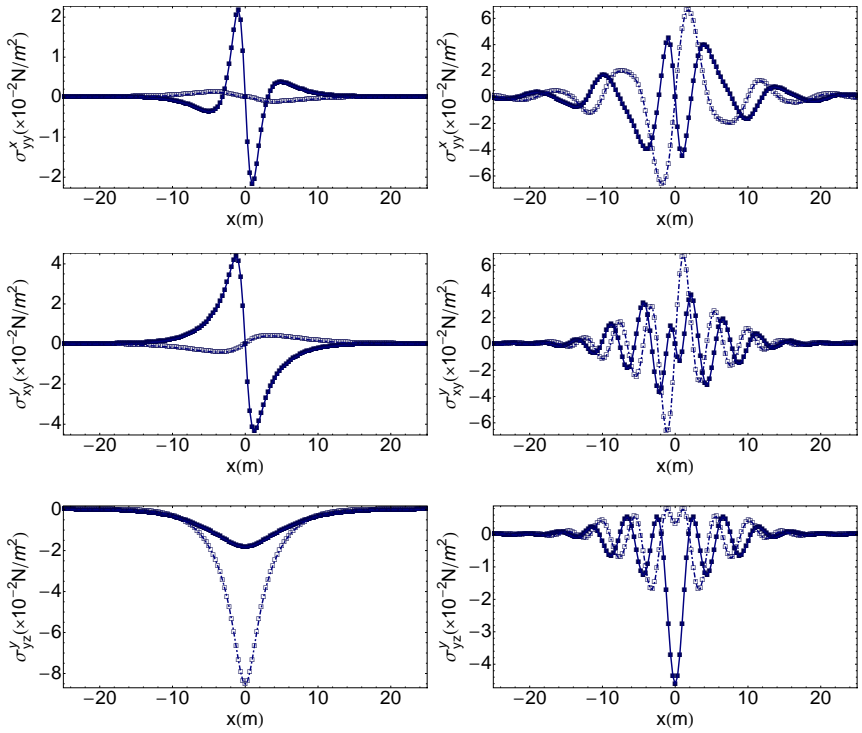


Figura 5.20: Partes real (línea continua o ■) e imaginaria (línea discontinua o □) para las tensiones sobre la línea ($y = 2$) debido a una carga unitaria y armónica de 50 Hz (izquierda) y 200 Hz (derecha) aplicada en el origen, obtenida mediante el MEC (líneas) y calculada mediante la transformada inversa de Fourier en k_x de la Solución Fundamental (cuadrados); número de onda $k_z = 0.5 \text{ rad/m}$ en todos los casos

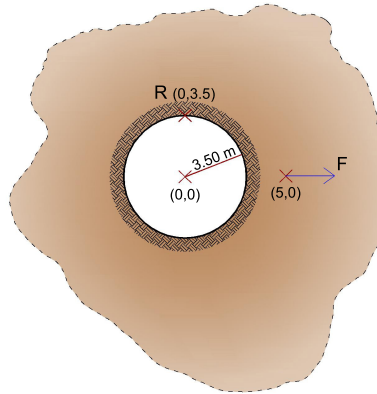


Figura 5.21: Esquema para el ejemplo de validación del espacio completo con túnel

ca puntual desplazándose a velocidad constante en superficie, sobre el eje z . Las propiedades del terreno son $c_p = 238.24$ m/s, $c_s = 127.34$ m/s y $\rho = 1850$ kg/m³. El estudio se realiza para cuatro velocidades de la carga correspondientes a $0 < c < c_R$, $c_R < c < c_s$, $c_s < c < c_p$ y $c_p < c$, para una frecuencia de $\omega = 50$ Hz. En la figura 5.26 se representa la parte real del desplazamiento en superficie y en la figura 5.27 se ha representado el módulo del desplazamiento en la recta paralela a 1 m de la línea de acción de la carga para las cuatro velocidades consideradas.

Se puede observar en en ambas figuras cómo los desplazamientos son doblemente simétricos para velocidades pequeñas y cómo se produce una onda de choque cuando aumenta la velocidad [160] siendo más acusado cuando la velocidad es superior.

Por último se comparan los resultados con los obtenidos por [58] en el dominio del tiempo. El modelo consiste en un semiespacio con las propiedades siguientes: $c_p = 238.24$ m/s, $c_s = 127.34$ m/s y $\rho = 1850$ kg/m³. En la figura 5.28 se representan los desplazamientos para un punto situado a 6.25 m del eje de la carga (eje z) que circula a una velocidad de 50 m/s

5.8.7. Carga móvil en un semiespacio estratificado

Definir el suelo como un semiespacio es una idealización ya que, en la práctica, es mucho más complejo. Normalmente la densidad aumenta con la pro-

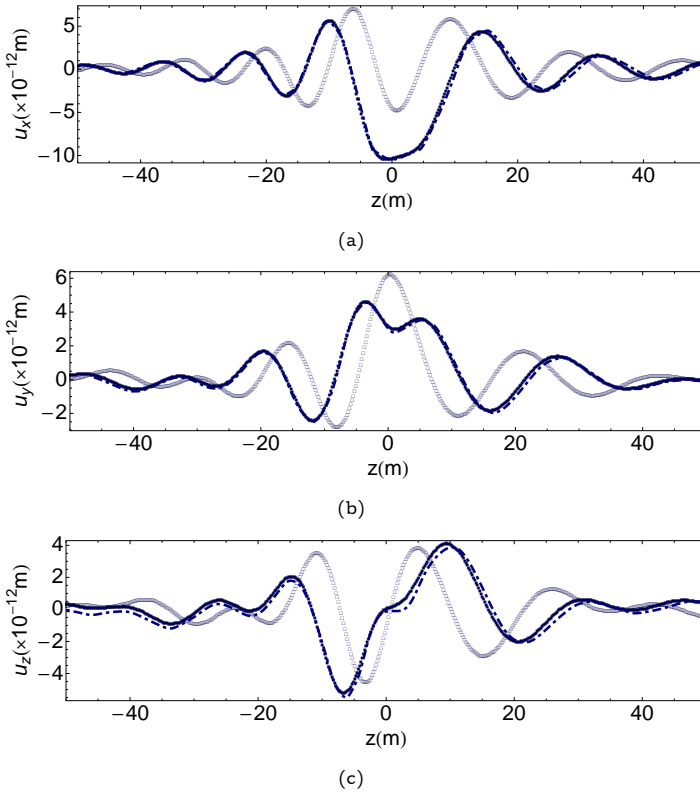


Figura 5.22: Desplazamientos en la parte superior del túnel ($x = 0$ m, $y = 3.5$ m) debido a una carga horizontal armónica de 40 Hz moviéndose a 100 m/s sobre la recta ($x = 5$ m, $y = 0$ m): (a) u_x ; (b) u_y ; (c) u_z . En todos los casos se representa la parte real e imaginaria por puntos para los resultados del programa y con línea discontinua los resultados presentados en [137]

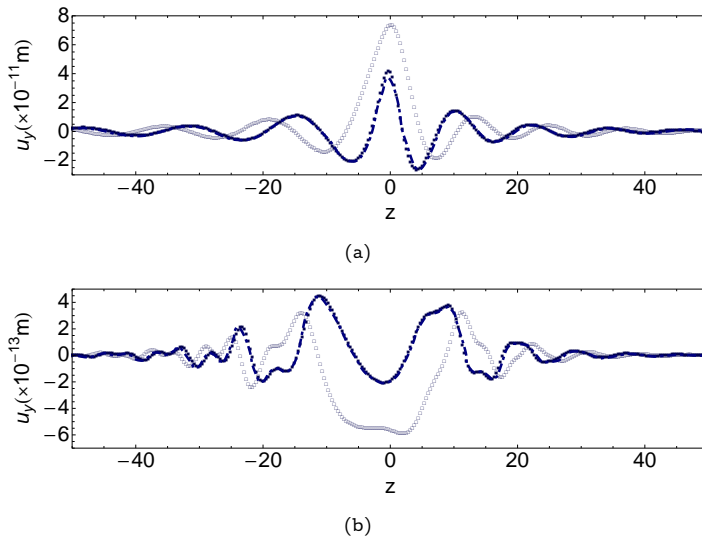


Figura 5.23: Desplazamientos en superficie sobre la vertical de una carga unitaria armónica vertical que se desplaza a 100 m/s en dirección z . (a) carga de 40 Hz a 3 m de profundidad; (b) carga de 200 Hz a 20 m de profundidad. (Parte real ■ e imaginaria □ para los resultados del programa y con línea discontinua los resultados presentados en [137])

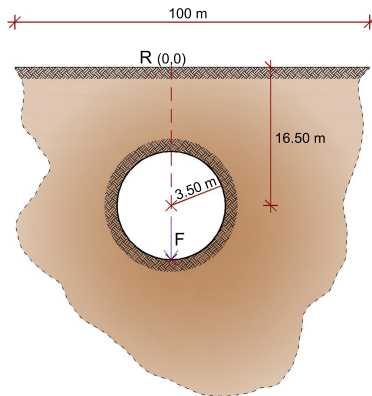


Figura 5.24: Esquema para el ejemplo de validación de un semiespacio con carga móvil en un túnel

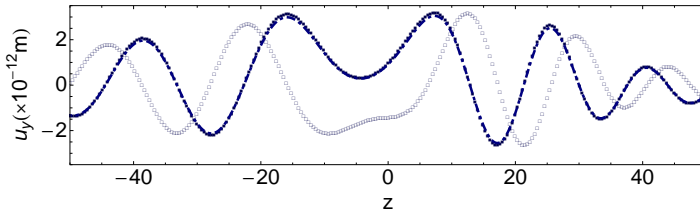


Figura 5.25: Desplazamientos en superficie sobre la vertical de una carga unitaria armónica vertical de 40 Hz que se desplaza a 100 m/s en dirección z aplicada en la base de un túnel. (Parte real \blacksquare e imaginaria \square para los resultados del programa y con línea discontinua los resultados presentados en [137])

fundidad, lo que origina refracción de las ondas. Además, se suelen presentar diferentes estratos que originan múltiples reflexiones y refracciones de ondas en las interfases [13]. Por ello se ha estudiado el efecto de la estratificación de un medio en la respuesta mediante el análisis de la respuesta de un semiespacio sometido a una carga puntual.

Se considera un semiespacio con las características recogidas en la tabla 5.1 sometido a una carga vertical unitaria de 50 que se mueve a 50 m/s a 20 m de profundidad en dirección z (figura 5.29). Se presenta la respuesta en superficie en la figura 5.30 comparando la solución obtenida mediante el Método de los Elementos de Contorno considerando dos estratos y la solución si sólo se considera un único estrato con las propiedades del estrato 2. Así como se compara la respuesta con la dada en [137]. Para la obtención de resultados empleando el Método de los Elementos de Contorno se ha discretizado la superficie del semiespacio y el contorno interfase empleando 100 elementos cuadráticos para cada uno. La respuesta en el espacio se ha obtenido realizando la transformada inversa de Fourier en la coordenada z empleando 1024 puntos con un incremento de número de onda de $0.0025 \cdot 2 \cdot \pi$.

5.8.8. Carga móvil en semiespacio con zanja

La propagación de vibraciones generadas por máquinas, vehículos pueden ser molestas para los habitantes y pueden provocar fallos en las estructuras cercanas. La mayor parte de la energía generada, se propaga mediante las ondas de Rayleigh. Estas vibraciones suelen oscilar entre 4 – 50 Hz y pueden provocar que estructuras cercanas entren en resonancia en sus modos verticales [85].

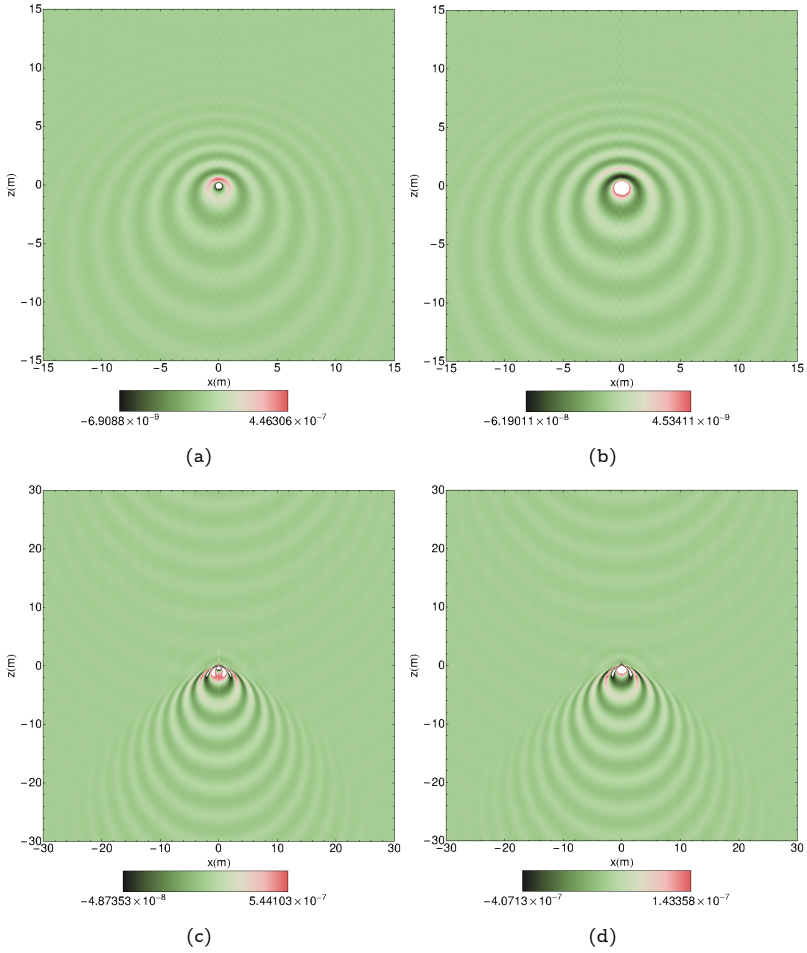


Figura 5.26: Desplazamientos verticales en la superficie de un suelo sometido a una carga vertical unitaria armónica de 50 Hz desplazándose con velocidad constante sobre el eje z : Parte real (a) e imaginaria (b) para una velocidad de $c = 50 \text{ m/s} < c_R$; Parte real (c) e imaginaria (d) para una velocidad de $c_R < c = 122 \text{ m/s} < c_S$;

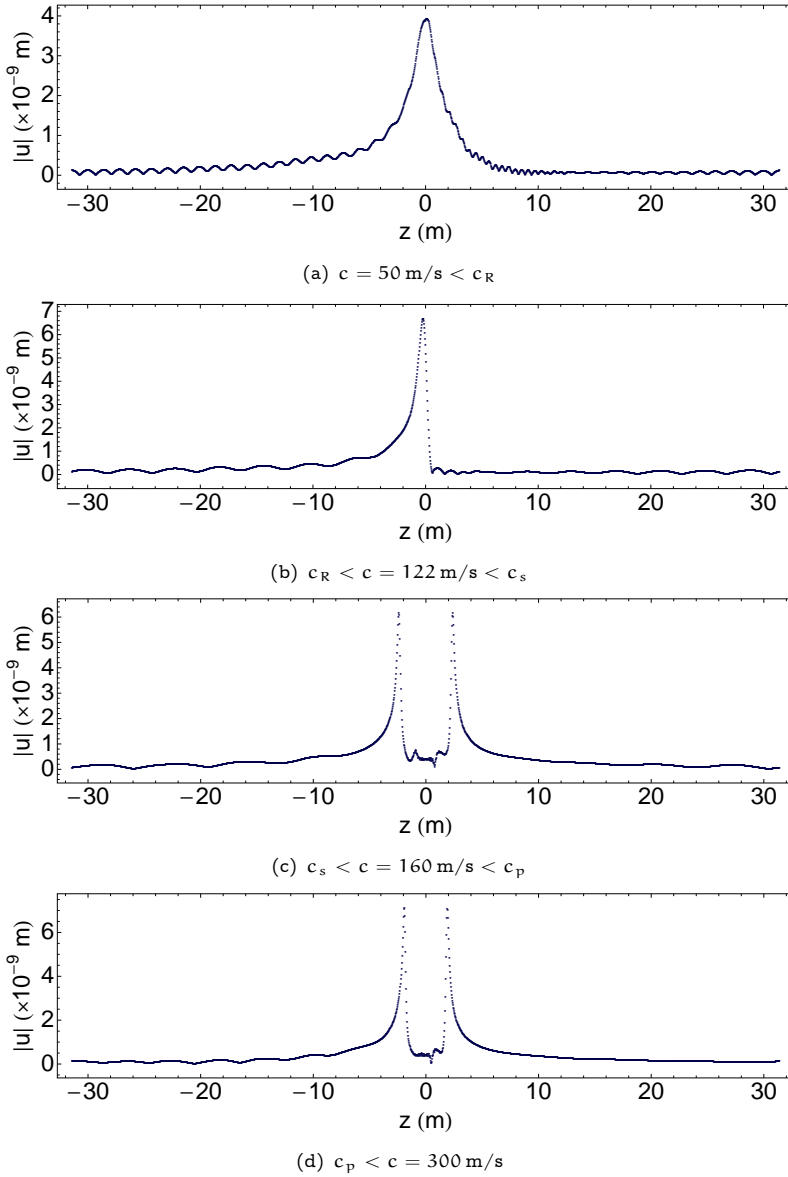


Figura 5.27: Desplazamiento vertical en una recta paralela a la línea de acción de una carga vertical unitaria armónica de 50 Hz desplazándose con velocidad constante sobre el eje z en función de la velocidad de la carga: (a) $c = 50 \text{ m/s} < c_R$; (b) $c_R < c = 122 \text{ m/s} < c_s$; (c) $c_s < c = 160 \text{ m/s} < c_p$; (d) $c_p < c = 250 \text{ m/s}$

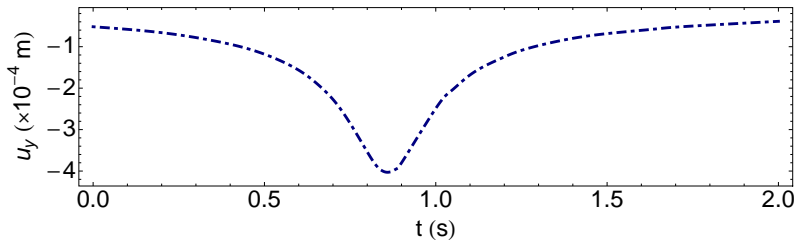


Figura 5.28: Desplazamiento vertical a 6.25 m del eje de paso de una carga móvil de 50 m/s sobre la superficie de un semiespacio. (Resultados de [58] en línea continua y línea de puntos los resultados obtenidos con el programa de elementos de contorno desarrollado)

Tabla 5.1
Propiedades del material del semiespacio estratificado

		Estrato 1	Estrato 2
Módulo de elasticidad	$E (\times 10^6 \text{N/m}^2)$	157	1062.8
Coefficiente de Poisson	(ν)	0.18	0.253
Densidad	$\rho (\text{kg/m}^3)$	1517	1759
Amortiguamiento	ζ	0.05	0.05
Velocidad Ondas P	$c_p (\text{m/s})$	336	854
Velocidad Ondas S	$c_s (\text{m/s})$	210	491

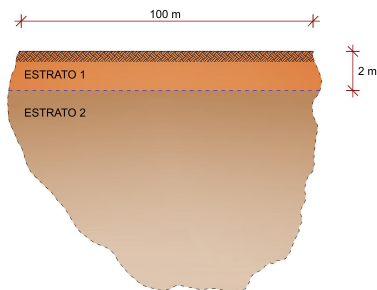


Figura 5.29: Modelo para la validación de un semiespacio estratificado

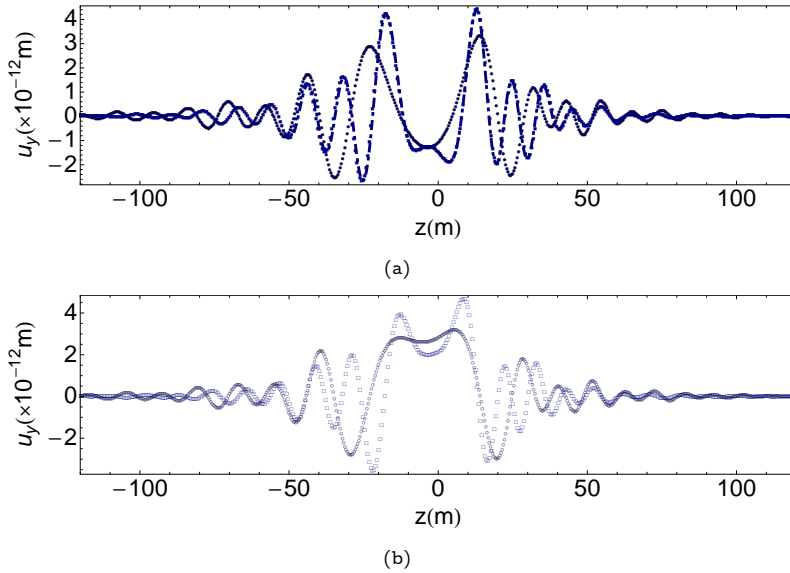


Figura 5.30: Desplazamiento vertical sobre el eje z , en la superficie en un semiespacio debido a una carga móvil circulando a 50 m/s a 20 m de profundidad. Se comparan los resultados obtenidos con el Método de los Elementos de Contorno 2.5D considerando la estratificación del semiespacio (\square) con los resultados dados por [137] (línea discontinua) y suponiendo el semiespacio constituido por un único material (\circ): (a) Parte Real; (b) Parte Imaginaria

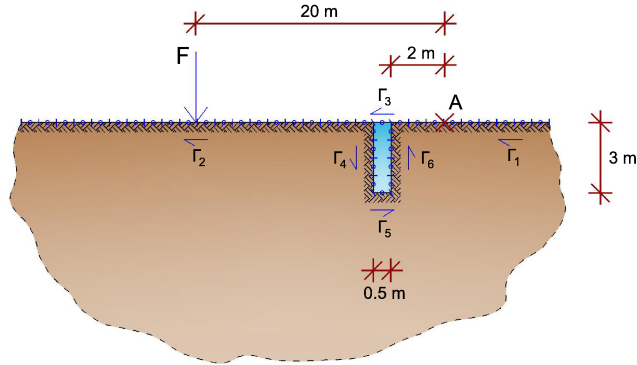


Figura 5.31: Modelo para el estudio de propagación de ondas considerando una zanja

Generalmente es posible prevenir esos efectos adversos disponiendo barreras para la propagación de ondas. Existen múltiples estudios sobre la mitigación de la propagación de ondas tanto empleando el Método de los Elementos de Contorno como el Método de los Elementos Finitos y considerando tanto zanjas abiertas como rellenas o introduciendo pilotes. Algunos de estos estudios se encuentran en [91, 5, 89]. En este ejemplo numérico se analiza la diferencia en la respuesta al disponer una zanja rellena de fluido. Se considera un semiespacio de propiedades las recogidas en la tabla 4.1 sobre el que circula una carga unitaria a 50 m/s. En el semiespacio se sitúa una zanja de dimensiones 0.5×2.0 m rellena de un fluido cuyas propiedades son $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $c_f = 5 \text{ m/s}$. En la figura 5.32 se comparan los resultados obtenidos empleando la Solución Fundamental del semiespacio, es decir, despreciando el efecto de la zanja y los resultados obtenidos con el Método de los Elementos de Contorno 2.5D para el modelo representado en la figura 5.31. Para la obtención de la transformada inversa del semiespacio ha sido necesaria una malla de 512×512 puntos con un incremento en el número de onda igual a 0.09765 rad/m. Para la obtención de los resultados obtenidos con el Método de los Elementos de Contorno 2.5D considerando la existencia de la zanja rellena de agua han sido necesarios 180 elementos cuadráticos correspondientes a 6 – 8 longitudes de onda de Rayleigh. Se puede observar cómo se produce una reducción en la respuesta al disponer la zanja.

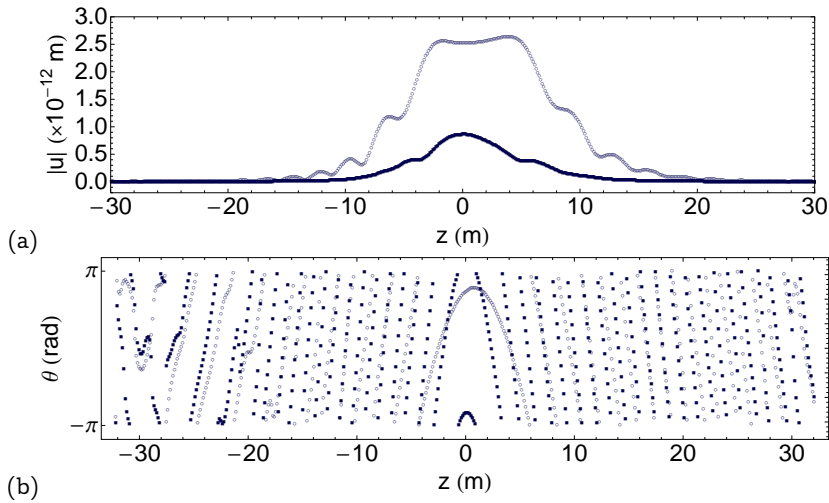


Figura 5.32: Desplazamiento vertical en la superficie del semiespacio a una distancia de 20 m de la carga unitaria móvil de 50 Hz desplazándose sobre el eje z a una velocidad de 50 m/s. Calculado empleando la Solución Fundamental para el semiespacio despreciando el efecto de la zanja (\square) y mediante el Método de los Elementos de Contorno (\blacksquare) considerando el efecto de la zanja rellena de fluido. Se presenta el módulo del desplazamiento (a) y la fase (b)

Aplicaciones prácticas del modelo

La metodología numérica propuesta en este trabajo se valida experimentalmente mediante dos ensayos muy empleados en ingeniería civil, tales como el Análisis Espectral de Ondas Superficiales y el estudio de propagación de ondas en el terreno para la obtención de la función de respuesta en frecuencia en suelos destinados a ferrocarril.

6.1. Análisis Espectral de Ondas Superficiales

Una aplicación de la propagación de ondas en medios 2.5D consiste en la modelización de la generación de ondas en estructuras de hormigón mediante la técnica denominada Análisis Espectral de Ondas Superficiales (AEOS). La introducción del modelo numérico en la técnica Análisis Espectral de Ondas Superficiales permitiría el desarrollo de una nueva metodología para evaluar la integridad del hormigón durante las etapas de construcción o en la vida útil de la estructura. Una inspección visual sólo provee información en superficie y para controlar la calidad de nuevas estructuras o verificar el estado de deterioro de estructuras existentes es necesario el empleo de técnicas no destructivas, siendo más eficiente el uso de procesos realizados in-situ. Existen múltiples técnicas desarrolladas en evaluación no destructiva, muchas de éstas han sido utilizadas en el estudio de las propiedades y verificación de la calidad de estructuras de hormigón con diferente éxito [108].

La técnica AEOS fue originalmente empleada para la obtención de las propiedades elásticas de suelos en geotecnia [88, 117], posteriormente se empleó para determinar el espesor y rigideces de las capas de pavimentos [74]. Las principales ventajas de este método y porqué se ha seleccionado para su combinación con metodologías 2.5D son:

1. Sólo se requiere emplear medidas en la superficie de la estructura por lo que el empleo de un modelo numérico sencillo puede reducir significativamente los tiempos de obtención de resultados.

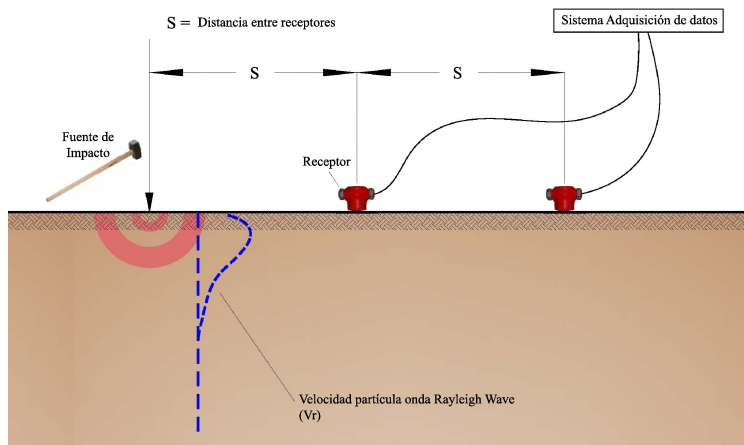


Figura 6.1: Esquema experimental del ensayo AEOS

2. Al originar el impacto, la energía se genera principalmente en forma de ondas de superficie.
3. El amortiguamiento geométrico debido a ondas superficiales es menor que el originado en el interior por lo que su alcance es menor.
4. Se obtienen las propiedades del medio sin necesidad de conocer los espesores de capas.

El método permite obtener las velocidades de fase de las ondas superficiales en función de la frecuencia. Se requiere una capa de material cuyo espesor sea superior al doble de longitud de onda. Las velocidades de ondas de Rayleigh se han evaluado a partir de las técnicas desarrolladas en [20]. Se analiza en un rango de frecuencias las aceleraciones provocadas por el impacto de un martillo, siendo recogida en dos receptores (Figura 6.1). El posterior análisis que permite obtener la curva de dispersión se divide en tres pasos:

1. Calcular la longitud de onda para cada frecuencia como la distancia entre dos máximos consecutivos.
2. Calcular la velocidad de fase para cada frecuencia como el producto de la frecuencia por la longitud de onda.
3. Construir la curva de dispersión que relaciona la velocidad de fase para cada frecuencia.

El objetivo de esta sección es realizar un modelo numérico aplicando tecnología el Método de los Elementos de Contorno 2.5D que permita relacionar los datos numéricos con los capturados en los receptores. El Método de los Elementos de Contorno ha sido previamente utilizado en la modelización de ensayos no destructivos en hormigón [6], si bien, no se han encontrado referencias en la utilización de este método numérico en 2.5D.

Este procedimiento es el paso previo a la realización de un problema inverso en el que se pueden obtener las propiedades del material a partir de la respuesta del modelo, incluyendo en el análisis el estudio de aparición de defectos internos [132].

Para la validación del ensayo, se han empleado los resultados obtenidos dentro del proyecto financiado por el Programa de Fondos Tecnológicos del Centro para el Desarrollo Tecnológico Industrial (CDTI) para la financiación de proyectos I+D+i, mediante el proyecto denominado *Tecnología para el control del curado del hormigón en la construcción de infraestructuras (T3IC)*, que han sido publicados en [139]. Una breve descripción de los trabajos experimentales realizados y el material empleado se recoge en el anexo E.

Esta sección comienza analizando la respuesta para un mortero empleando el Método de los Elementos de Contorno y se realiza un análisis de sensibilidad de la respuesta frente a los parámetros del material. Posteriormente se estudia la influencia de la aparición de diversas capas o la existencia de defectos para terminar con el análisis de la respuesta en un bloque de hormigón.

6.1.1. Aplicabilidad del Método de los Elementos de Contorno 2.5D al estudio de morteros

El principal objetivo de esta sección es comprobar la aplicabilidad de la metodología desarrollada al estudio de propagación de ondas en morteros. En primer lugar se ha procedido a realizar un modelo numérico que simule los datos obtenidos en un ensayo. El ensayo se realizó sobre un bloque rectangular de mortero de dimensiones $40 \times 40 \times 10$ cm (fig. 6.2) y propiedades elásticas las recogidas en la tabla 6.1. El coeficiente de amortiguamiento histerético se ha elegido igual al 20 %, valor óptimo para definir el comportamiento del hormigón [50]. El bloque se sometió a un impacto y se midió la respuesta en dos receptores situados a 6 cm y 12 cm del punto de impacto. Los dos acelerómetros se situaron centrados en la losa (fig. 6.4). En la figura 6.3 se muestra el modelo, constituido por cuatro contornos que generan una región rectangular de dimensiones 40×10 cm. Se han empleado 100 elementos cua-

Tabla 6.1
Parámetros Elásticos para la losa de mortero (a 24 días)

Dosificación del mortero	a/c 0.6; f/c 3.25
Resistencia a compresión	50.35 MPa
Densidad	2360 kg/m ³
Velocidad ondas P	3730 m/s
Velocidad ondas R	2290 m/s
Módulo Elasticidad	28.67 GPa
Módulo Rigidez	11.85 GPa
Coefficiente de Poisson	0.21

Figura 6.2: Configuración del ensayo para el mortero unipa. Los acelerómetros se disponen centrados en la losa a una distancia de 6 cm entre ambos. El golpe se realiza a 6 cm de uno de los acelerómetros

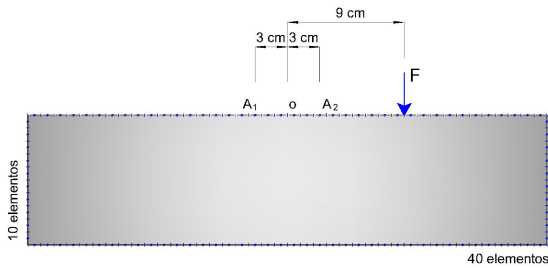
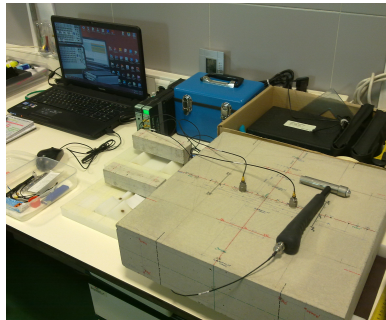


Figura 6.3: Modelo de Elementos de contorno empleado para la simulación numérica del ensayo

dráticos, necesarios para obtener respuestas válidas a altas frecuencias y para obtener la solución en el espacio se ha realizado la Transformada Inversa de Fourier en la dimensión z utilizando 1024 puntos con un intervalo para el número de onda de 0.125 rad/m.

Posteriormente se ha procedido a identificar si los parámetros necesarios en

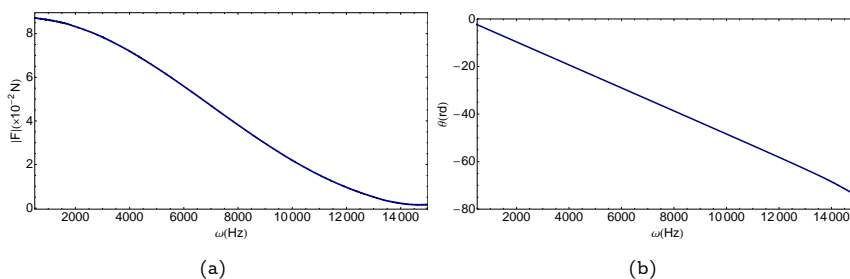


Figura 6.4: Fuerza aplicada en la superficie del mortero en el dominio de la frecuencia: (a) Amplitud y (b) Fase desenrollada

la definición del modelo tienen gran incidencia en la respuesta. Para estudiar esta influencia se ha comparado la respuesta en función de la frecuencia obtenida mediante la modelización numérica del ensayo con la solución analítica calculada para el semiespacio 2.5D (capítulo 4) empleando como referencia los datos de ensayo y desviando éstos. Se ha analizado la influencia de las propiedades dinámicas del sólido, concretamente, del módulo de elasticidad transversal y del coeficiente de amortiguamiento histerético. El módulo de elasticidad se ha variado entre -20% y 20% el valor de referencia, valores que, con la densidad del material 2360 kg/m^3 , corresponden a una variación de la velocidad de ondas P entre 3308 m/s y 4051 m/s . El coeficiente de amortiguamiento histerético se ha variado entre los valores del 10% y 30% . En las figuras 6.5 y 6.6 se representan los resultados obtenidos con el modelo numérico empleando del Método de los Elementos de Contorno a distancias 6 cm y 12 cm del punto de aplicación de la fuerza junto a los calculados analíticamente utilizando la transformada inversa de la Solución Fundamental del semiespacio 2.5D para obtener los resultados en el dominio del espacio. Para la transformada inversa se ha requerido una malla de 1024×1024 puntos con un incremento en el número de onda de 0.05 rad/m en las coordenadas x y z . Puede observarse cómo cambios en los datos de referencia implican cambios en la amplitud de los resultados.

La figura 6.7 recoge los resultados obtenidos de forma experimental (línea continua) y la solución obtenida mediante el modelo numérico (línea de puntos). Se han representado la amplitud de la aceleración y la diferencia de fase respecto a la fase de la fuerza. Puede apreciarse cómo al patrón de respuesta para la fase se genera correctamente. Las diferencias en la amplitud

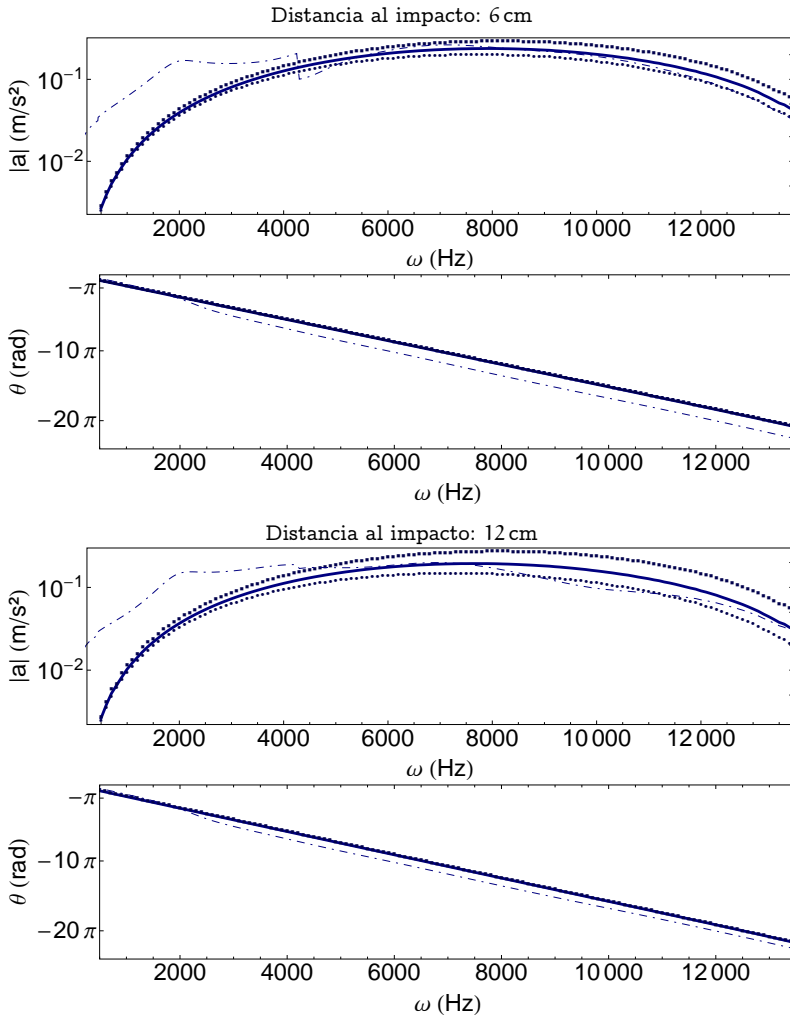


Figura 6.5: Sensibilidad respecto al amortiguamiento: Amplitud y fase desenrollada de la aceleración. Resultados obtenidos con el MEC en línea discontinua, resultados obtenidos mediante la SF empleando los datos de referencia en línea continua, resultados obtenidos para un amortiguamiento del 30 % (●) y para un valor del amortiguamiento del 15 % (■)

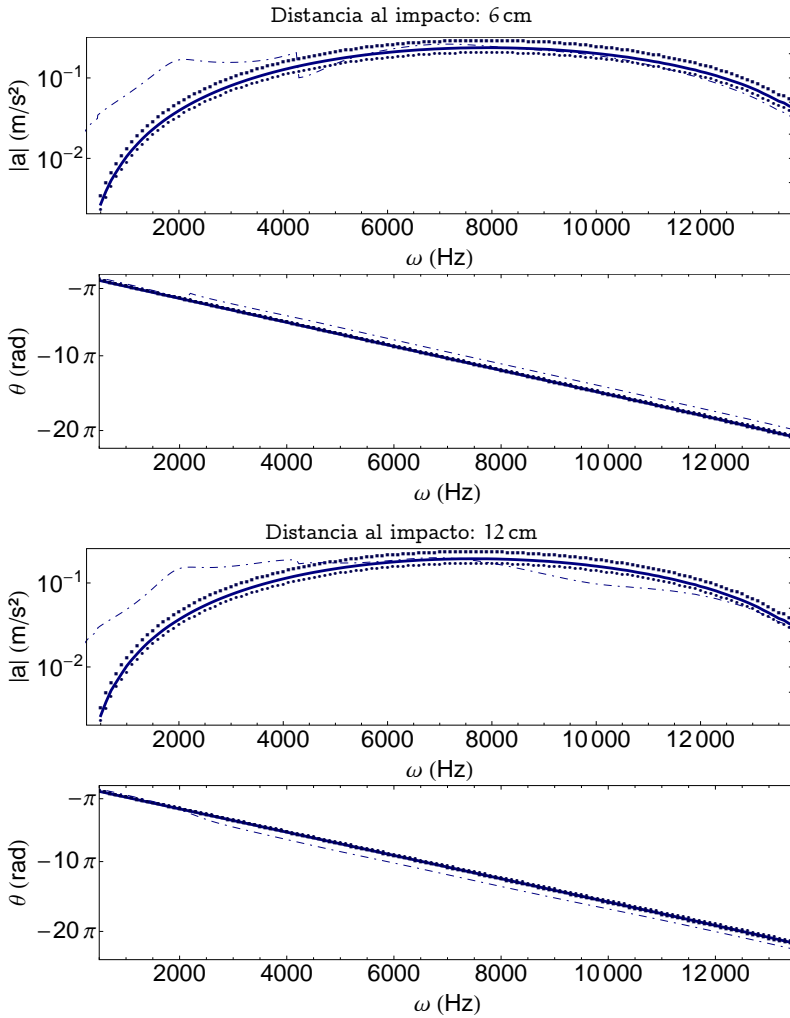


Figura 6.6: Sensibilidad respecto al módulo de elasticidad transversal: Amplitud y fase desenrollada de la aceleración. Resultados obtenidos con el MEC en línea discontinua, resultados obtenidos mediante la SF empleando los datos de referencia en línea continua, resultados obtenidos disminuyendo el valor de referencia un 20 % (•) y para un aumento del valor de referencia de 20 % (■)

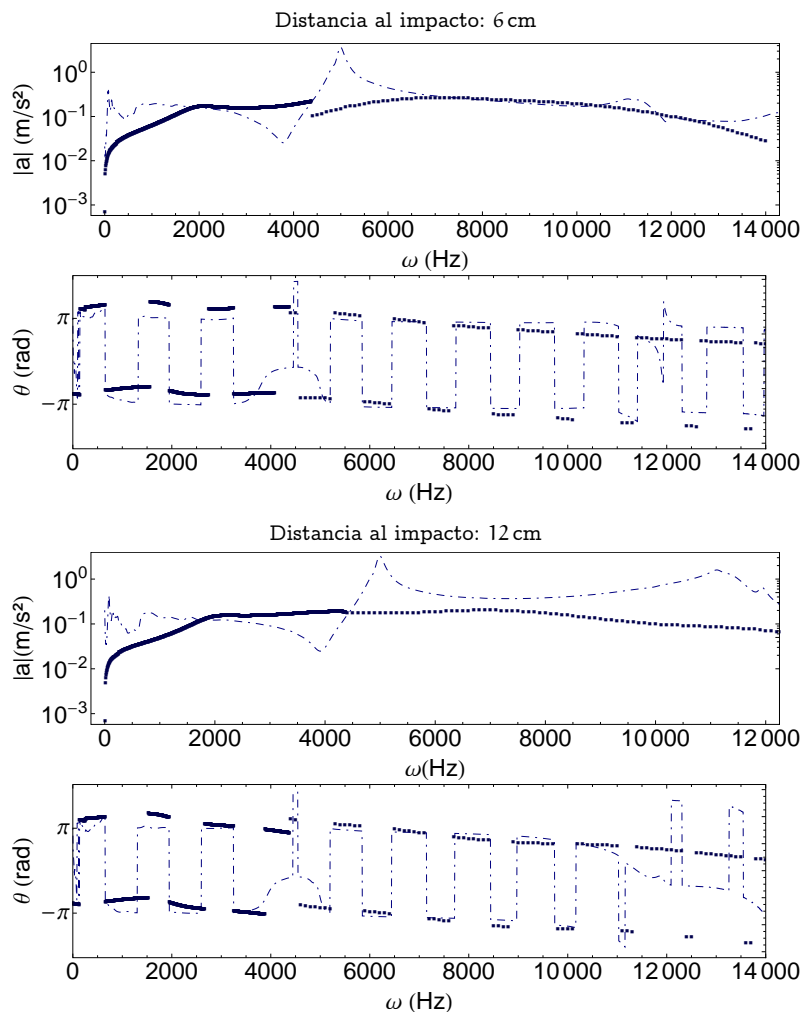


Figura 6.7: Amplitud y fase para la aceleración obtenida a 6 cm y a 12 cm del punto de impacto para el mortero unicapa. En todos los casos se representa la solución obtenida experimentalmente mediante línea discontinua y la solución numérica con línea de puntos (■)

son debidas al efecto de los contornos que no se consideran en el cálculo 2.5D, puede apreciarse cómo el ajuste es mayor para puntos cercanos al impacto. Si bien, la forma se sigue de forma aceptable consiguiendo un mayor ajuste para altas frecuencias.

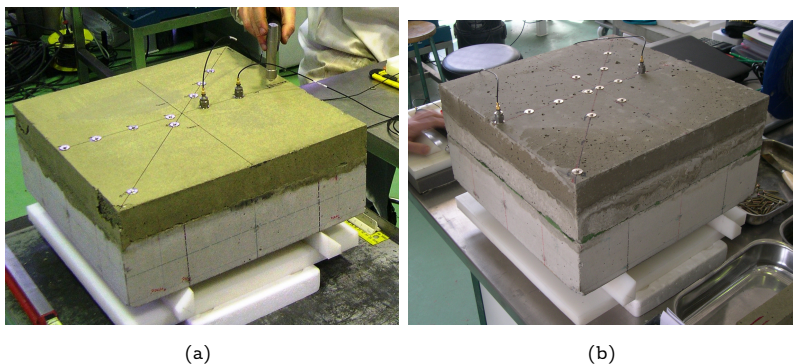


Figura 6.8: Ensayo de laboratorio en morteros: (a) bicapa y (b) tricapa

6.1.2. Efecto de la existencia de heterogeneidades. Estudio de un mortero bicapa y tricapa

Se ha analizado la influencia de heterogeneidades en el material mediante el estudio de la respuesta en dos morteros fabricados con dos y tres características diferentes (figura 6.8).

Las propiedades de ambos especímenes se recogen en las tablas 6.2 y 6.3. En la figura 6.12 se representa la respuesta en dos puntos situados a 6 cm y 12 cm del punto de impacto; obtenida en el ensayo de laboratorio (línea discontinua) y mediante el modelo numérico desarrollado empleando el Método de los Elementos de Contorno 2.5D (■). Tras la realización del ensayo se pudo comprobar la existencia de defectos en la interfase de las dos capas del modelo bicapa (figura 6.11). Se ha modelizado numéricamente este defecto separando los contornos para la dos capas en la zona central de la interfase, considerando una longitud del defecto de 8 cm. En la figura 6.12 se representa la respuesta en los puntos de medida bajo este supuesto mediante una línea de puntos (●). Puede observarse la diferencia de amplitud entre ambos modelos numéricos aumenta al acercar el punto de medida al defecto. El modelo numérico empleado para los ensayos bicapa y tricapa se representa en la figura 6.9. Se ha realizado una discretización empleando entre 6 y 8 elementos cuadráticos por longitud de onda correspondiente a la obtención de respuesta para altas frecuencias. La solución en el espacio se ha obtenido considerando 1024 puntos en el cálculo de la transformada inversa, con un incremento en el número de onda de 0.125 rad/m. La figura 6.13 representa

Tabla 6.2
Parámetros Elásticos para la losas de mortero bicapa

	Capa inferior	Capa superior
Espesor (cm)	10	5
Edad	57 días	17 horas
Dosificación del mortero: a/c; f/c	0.6; 3.25	0.5; 2.25
Resistencia a compresión (MPa)	54.06	12.30
Densidad (kg/m ³)	2237	2207
Velocidad ondas P (m/s)	4060.88	2659.95
Velocidad ondas R (m/s)	2297.55	1542.62
Módulo Elasticidad dinámico (GPa)	33.84	14.813
Módulo Elasticidad estático (GPa)	28.72	9.925
Módulo Rigidez dinámico (GPa)	13.48	6.452
Coefficiente de Poisson	0.18	0.15

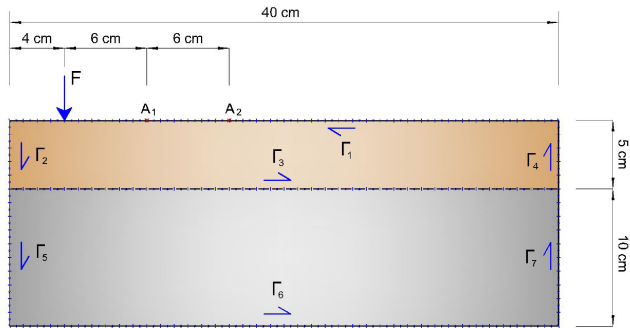
Tabla 6.3
Parámetros Elásticos para la losas de mortero tricapa

	Capa inferior	Capa media	Capa superior
Espesor (cm)	10	5	5
Dosificación del mortero: a/c; f/c	0.6; 3.25	0.5; 2.25	0.4; 2.70
Resistencia a compresión (MPa)	51.97	39.60	52.88
Densidad (kg/m ³)	2613	2238	
Velocidad ondas P (m/s)	3730	3627	
Velocidad ondas R (m/s)	2290	2282	2267
Módulo Elasticidad (GPa)	28.67	22.11	29.36
Módulo Rigidez (GPa)	11.85	9.53	
Coefficiente de Poisson	0.21	0.16	

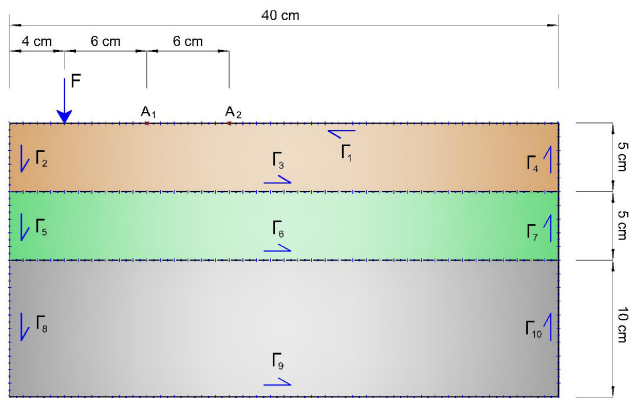
los resultados obtenidos en el ensayo y mediante el modelo numérico. La transformada inversa se ha realizado con las mismas características que las descritas para el modelo bicapa.

6.1.3. Hormigón

En esta sección se analiza la aplicabilidad de este procedimiento en el estudio de la respuesta en un material completamente heterogéneo como es el hormigón. Para ello se ha comparado la respuesta experimental en un ensayo realizado en un bloque de hormigón (fig. 6.14) con la solución numérica



(a) Mortero bicapa



(b) Mortero tricapa

Figura 6.9: Modelo empleado con el Método de los Elementos de Contorno para los morteros

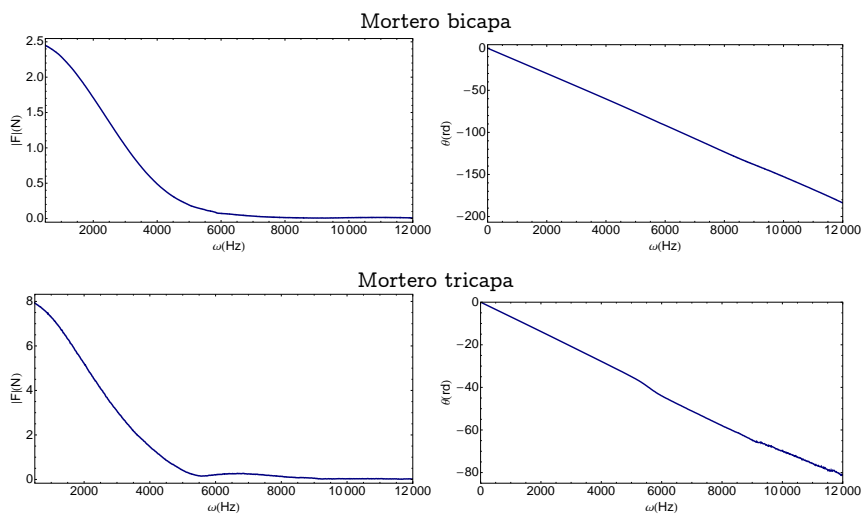


Figura 6.10: Amplitud (izquierda) y fase desenrollada (derecha) de la fuerza aplicada en la superficie de los morteros bicapa y tricapa

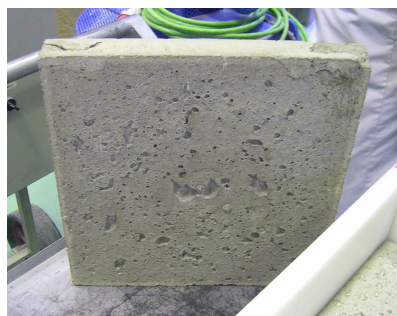


Figura 6.11: Defecto en la interfase del mortero bicapa

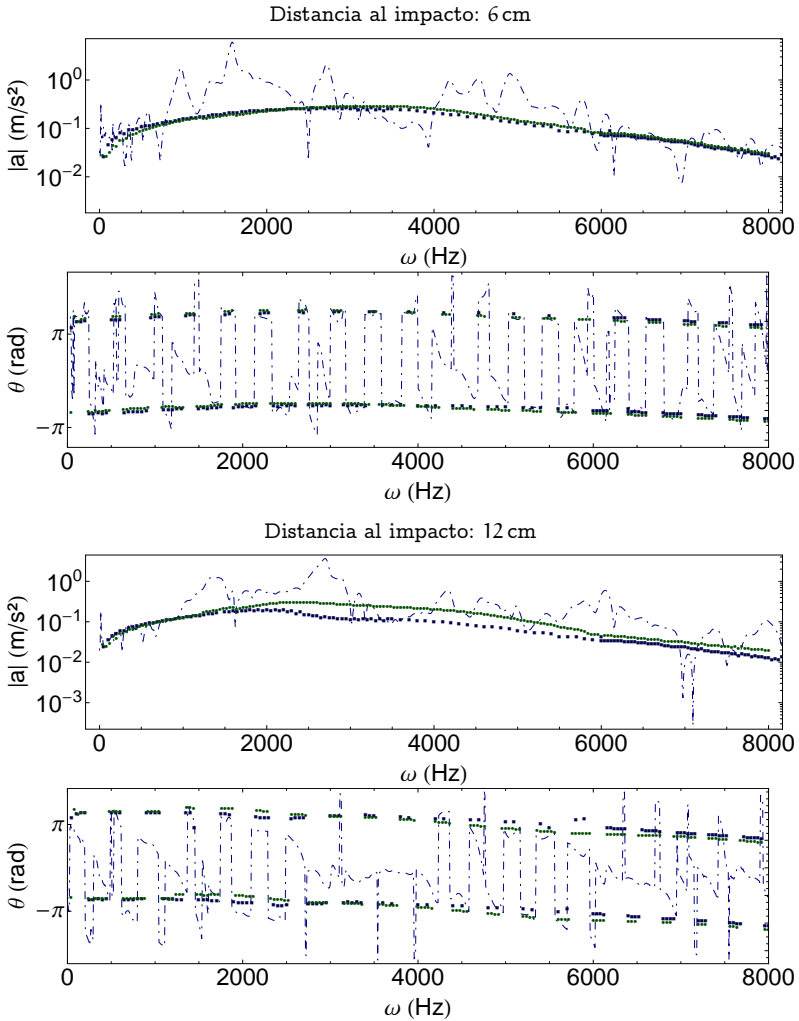


Figura 6.12: Amplitud y fase para la aceleración obtenida a 6 cm y a 12 cm del punto de impacto para el mortero bicapa. En todos los casos se representa la solución obtenida experimentalmente mediante línea discontinua y la solución numérica con puntos

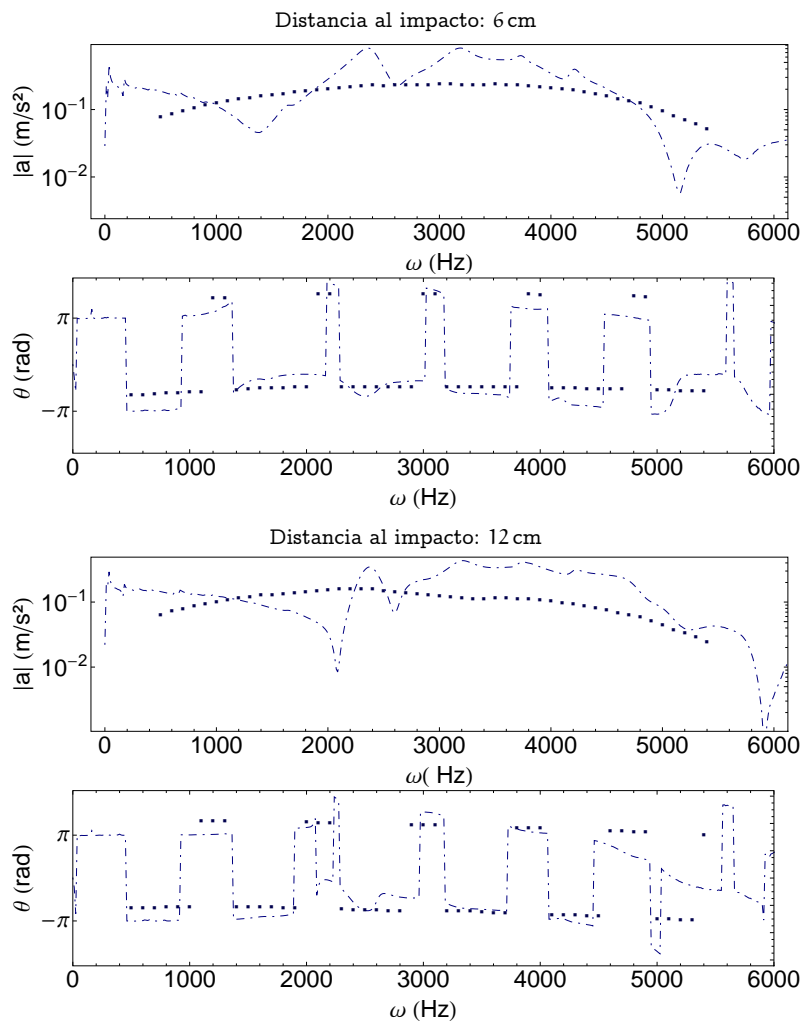


Figura 6.13: Amplitud y fase para la aceleración obtenida a 6cm y a 12cm del punto de impacto para el mortero tricapa. En todos los casos se representa la solución obtenida experimentalmente mediante línea discontinua y la solución numérica con puntos



Figura 6.14: Ensayo de laboratorio en bloque de hormigón

obtenida tras crear un Modelo de Elementos de Contorno 2.5D que permita describir el problema.

El ensayo se realizó sobre un bloque de hormigón HA30/B/15/IIa, fabricado con cemento CEMI/52.5R–SR de $1 \times 1 \times 1$ m de dimensiones, cuyas propiedades elásticas se recogen en la tabla 6.4. El bloque fue sometido a una carga en superficie (figura 6.16) y se midió la respuesta en dos puntos situados a 20 cm y 40 cm del impacto. En la figura 6.17 se presentan los resultados obtenidos en el ensayo y los obtenidos con el Método de los Elementos de Contorno 2.5D en el dominio de la frecuencia. Para la obtención de los valores numéricos se ha empleado una malla de 500 elementos cuadráticos que suponen una longitud tal que 6 elementos cubren una longitud de onda de Rayleigh para las frecuencias más altas (fig. 6.15). La transformada inversa realizada para el cálculo de la respuesta en el espacio se ha realizado empleando 512 puntos, con un intervalo en el número de onda de 0.5859 rad/m. Puede observarse cómo se pierde la continuidad de la respuesta con el aumento de la heterogeneidad del material.

Figura 6.15: Modelo numérico para cálculo mediante el Método de los Elementos de Contorno 2.5D del bloque de hormigón

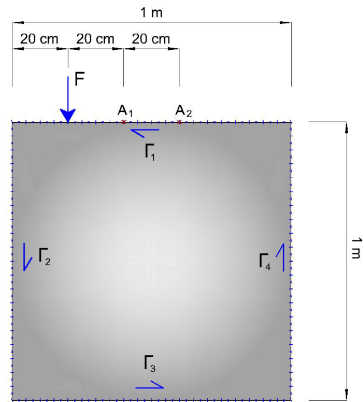


Tabla 6.4
Parámetros Elásticos del modelo de hormigón a la edad de 24h

Dosificación del hormigón	
$c/c : 1; a/c : 0.43; f/c : 2.19; g/c : 3.01; ad/c : 0.8$	
Resistencia a compresión	15.24MPa
Densidad	2498kg/m ³
Velocidad ondas P	3280.94m/s
Velocidad ondas R	1865.53m/s
Módulo Elasticidad dinámico	24.84GPa
Módulo Elasticidad estático	19.13GPa
Módulo Rigidez dinámico	11.95GPa
Coefficiente de Poisson	0.18

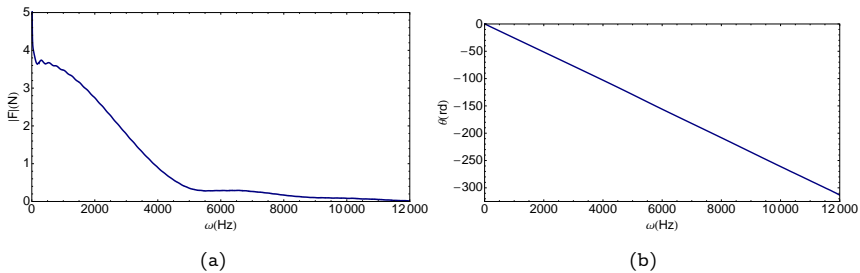


Figura 6.16: Amplitud (a) y fase (b) de la fuerza aplicada en la superficie del hormigón

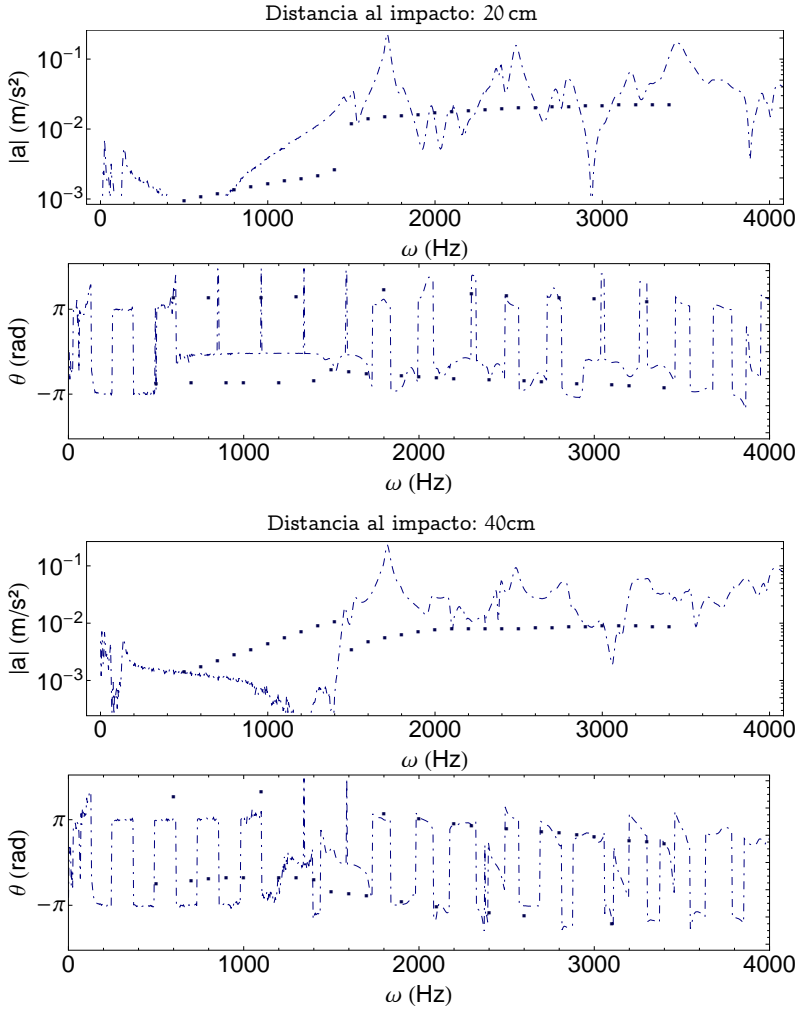


Figura 6.17: Amplitud y diferencia de fase de la aceleración obtenida a 20 cm y 40 cm del punto de impacto. En ambos casos se representan la solución obtenida experimentalmente (línea discontinua) y la solución numérica obtenida con el Método de los Elementos de Contorno 2.5D (puntos)

6.2. Obtención de la Función de Respuesta en Frecuencia en suelos destinados a ferrocarril

Las líneas ferroviarias y tranviarias se diseñan sobre la base de la experiencia obtenida en realizaciones previas. El desarrollo de ferrocarriles de alta velocidad ha dado lugar, sin embargo, a nuevos problemas de diseño para los cuales las experiencias anteriores no proporcionan metodologías cuantitativamente fiables de análisis y diseño. Uno de tales problemas es la acción dinámica que el paso de un TAV provoca en estructuras aledañas. Igualmente, las demandas crecientes de calidad de vida y medioambientales, exigen predecir con precisión elevada las vibraciones que el paso de tranvías provoca en los edificios aledaños.

Actualmente, la predicción de vibraciones asociadas a proyectos de futuras líneas de ferrocarril es un campo que está en desarrollo, ya que es un fenómeno complejo que es difícil de modelizar y predecir con exactitud. No existe un único método, si bien entre los más aceptados está el desarrollado por la FTA (Federal Transit Administration) [73], basado en ensayos específicos de propagación de vibraciones.

El procedimiento se basa en emplear un función de medida denominada función de transferencia que relaciona la fuerza existente y la velocidad de vibración obtenida en la superficie del terreno a partir de la toma de medidas a diferentes distancias de un golpe dado en el suelo [2]. La función depende de la frecuencia y la distancia a la fuente y define las características de propagación entre dos puntos. Esta función se mide en un sistema existente y se emplea para normalizar los datos de vibraciones y así eliminar los efectos derivados de las propiedades del terreno. La vibración normalizada se relaciona con la densidad de fuerza o fuerza de excitación. La densidad de fuerza se puede combinar con la función de transferencia medida para el desarrollo de nuevos proyectos o estimar futuras vibraciones.

El principal objetivo de esta sección es comparar los resultados para la función de respuesta de una fuente puntual obtenidos experimentalmente (anexo E) con los resultados numéricos obtenidos con el software desarrollado durante la ejecución de esta Tesis. Sirva ello de base para la utilización del método predictivo recogido en la norma americana para predecir vibraciones. La principal ventaja de este procedimiento es la mejora en el coste de la evaluación de vibraciones puesto que la mayoría de resultados pueden obtenerse de forma numérica, reduciendo de forma considerable el número de mediciones necesarias.

Se han validado los resultados obtenidos numéricamente con dos ensayos. El primero consiste en la aplicación de una carga armónica en el terreno, obteniendo la respuesta en varios puntos distanciados de la carga. El segundo ensayo consiste en aplicar un impacto sobre el terreno y medir la respuesta a cierta distancia.

Respuesta para a una carga armónica

Los datos registrados en el ensayo desarrollado en [59] consistente en medir las aceleraciones de vibración ocasionadas en la superficie de un suelo oscilado armónicamente por un excitador electromagnético han servido para la validación experimental la Solución Fundamental desarrollada en el capítulo 4. Asimismo, permiten demostrar la aplicabilidad de este método en suelos.

El ensayo consistió en colocar un excitador que oscilaba armónicamente con una frecuencia $\omega = 10$ Hz. Se dispusieron tres acelerómetros en la superficie del suelo a 1.0 m, 1.5 m y 2.0 m de distancia del excitados para medir los desplazamientos verticales en dichos puntos. La amplitud de la fuerza aplicada (402 N) se obtuvo a partir de la masa y aceleración del excitador. El suelo tiene una densidad de $\rho = 1850$ kg/m³. La velocidad de las ondas de superficie $c_R = 166.7$ m/s se obtuvo tras varias medidas en los acelerómetros. El coeficiente de Poisson se estimó en $\nu = 0.2$, proporcionando los valores de las velocidades de onda P y S, $c_p = 299.62$ m/s y $c_s = 183.47$ m/s, respectivamente.

La figura 6.18 muestra el desplazamiento medido por los acelerómetros y calculado mediante la triple transformada inversa de Fourier (ecuación 4.2.3 de la Solución Fundamental). Se puede observar que la Solución Fundamental reproduce con bastante exactitud la respuesta en la superficie del sólido para diferentes puntos, si bien cabe destacar que la discrepancia de los resultados con la distancia puede ser originada debido al ajuste del amortiguamiento, de ahí que aumenten las diferencias al ser mayor la distancia al punto de aplicación. Por otra parte, la forma de la curva experimental contiene posibles reflexiones debido a que el terreno puede presentar heterogeneidades.

Respuesta para un impacto

El segundo ensayo empleado para estudiar la validez de la metodología 2.5D en la obtención de la respuesta en suelos consistió en efectuar un impacto con un peso en caída libre sobre una célula de carga originando una fuerza de impacto sobre el suelo de la forma representada en la figura 6.20. La

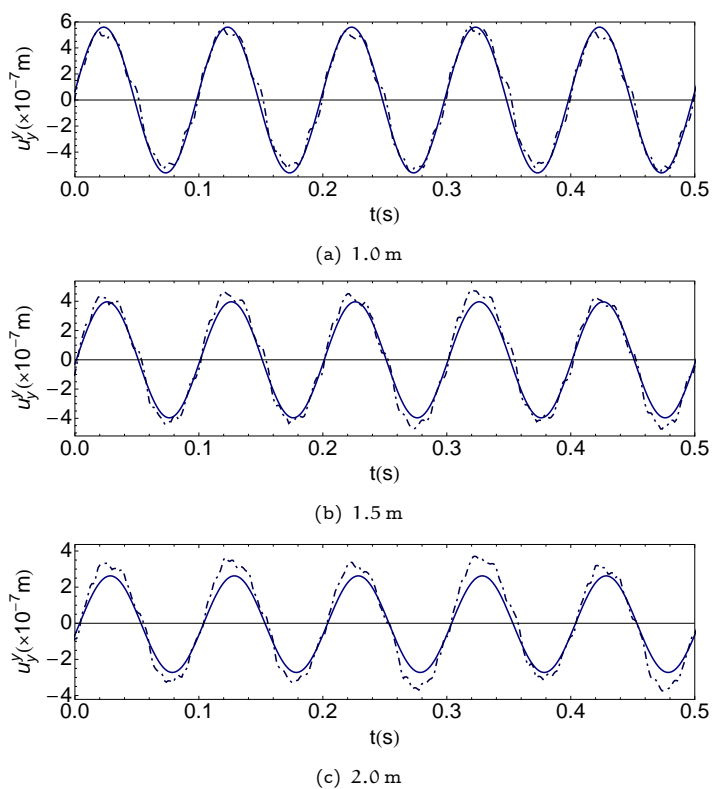


Figura 6.18: Desplazamiento vertical debido a una carga armónica de 402 N y 10 Hz aplicada en la superficie de un semiespacio, obtenida mediante datos experimentales (línea discontinua) y calculada mediante la transformada inversa de Fourier de la Solución Fundamental (línea continua) para tres distancias respecto del punto de impacto

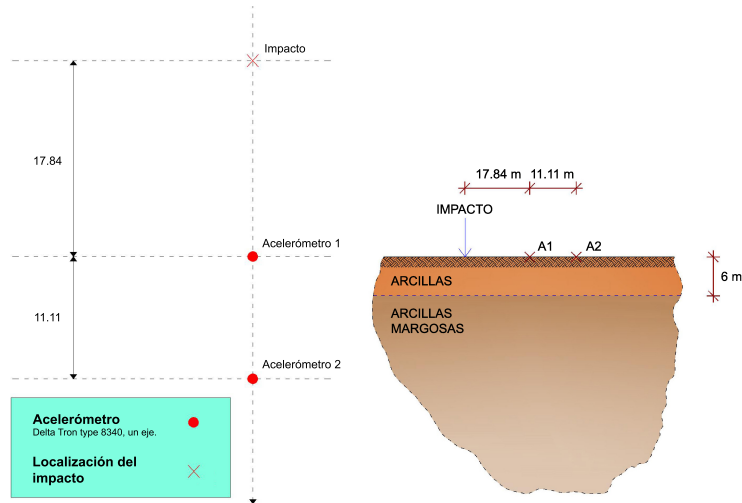


Figura 6.19: Esquema de ubicación de acelerómetros en la zona de ensayos

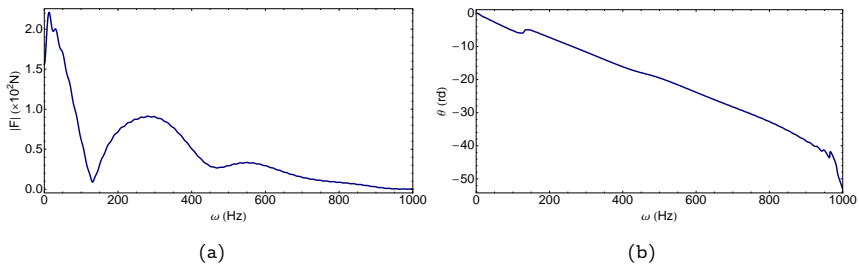


Figura 6.20: (a) Amplitud y (b) fase desenrollada de la fuerza aplicada en la superficie del terreno

respuesta se midió en dos acelerómetros alineados con la fuente y ubicados a una distancia de 17.84 m y 28.95 m del punto de aplicación de la carga (fig. 6.19).

El ensayo se ha validado con un modelo numérico empleando el Método de los Elementos de Contorno 2.5D. El suelo se ha modelizado mediante dos estratos (fig. 6.21), cuyas características se describen en la tabla 6.5. Ha sido necesaria una malla de 400 elementos cuadráticos, 200 elementos para

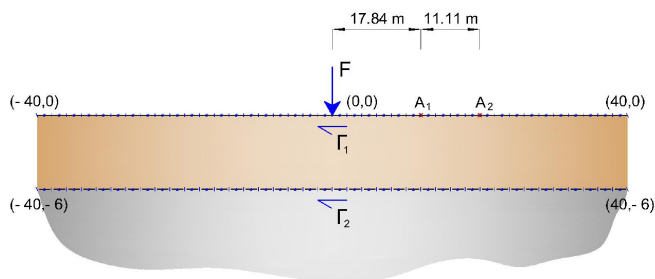


Figura 6.21: Modelo empleado para la resolución mediante el Método de los Elementos de Contorno

Tabla 6.5
Parámetros Elásticos del suelo

	Arcillas	Arcillas margosas
Densidad (kg/m^3)	1690	1660
Velocidad ondas P (m/s)	395	1849
Velocidad ondas S (m/s)	250	600
Módulo Elasticidad Transversal ($\times 10^8 \text{N/m}^2$)	1.056	5.976
Coefficiente de Poisson	0.165	0.441
Coefficiente de amortiguamiento	0.05	0.05

cada uno de los contornos. Para la obtención de la transformada inversa que permite obtener los resultados en el espacio, se han empleado 512 puntos con un incremento en el número de onda de 0.117 rad/m.

En la figura 6.22 se presentan los resultados experimentales junto a los resultados numéricos. Cabe destacar cómo el modelo numérico aproxima con bastante exactitud el ensayo.

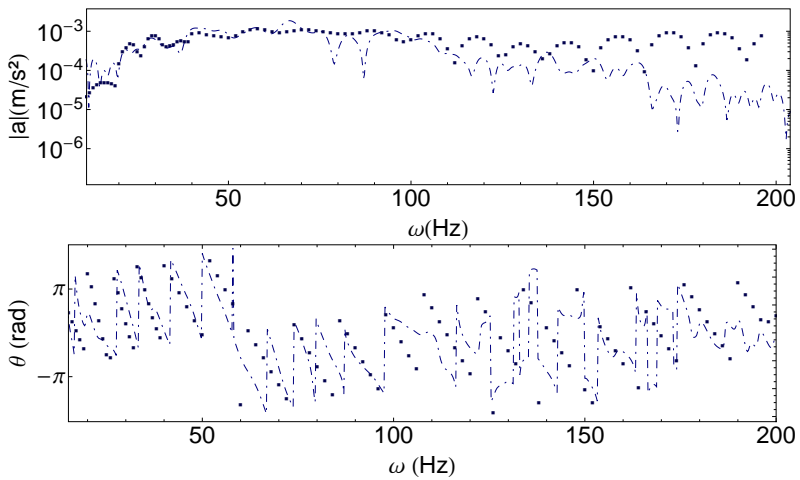


Figura 6.22: Amplitud y diferencia de fase de la aceleración obtenida a 17.84 m y 28.95 m del punto de impacto. En ambos casos se representa la respuesta experimental mediante línea continua y la solución obtenida numéricamente empleando el MEC con puntos

Conclusiones y desarrollo futuro

En este último capítulo se resume el trabajo desarrollado en la elaboración de esta Tesis y se enumeran las conclusiones más relevantes. Asimismo se destacan las tareas realizadas que han constituido aportaciones originales e innovadoras. Finalmente, se plantean posibles líneas de trabajo que podrían completar y ampliar algunos aspectos de interés relativos al estudio de propagación de ondas en problemas 2.5D.

7.1. Resumen del trabajo realizado

De acuerdo con los objetivos planteados en el capítulo primero, las tareas desarrolladas durante la realización de la Tesis Doctoral han sido las siguientes:

- Estudio del Estado del Arte en la propagación de ondas, centrado en el la metodología 2.5D y en el empleo del Método de los Elementos de Contorno. Se recoge una breve síntesis de la evolución desde sus orígenes y de los avances experimentados en las últimas décadas.
- Desarrollo de la metodología 2.5D mediante la creación de un software específico que analiza el problema de potencial 2.5D empleando el Método de los Elementos de Contorno.
- Ampliación del código mediante la implementación de la solución elastodinámica 2.5D, incluyendo el estudio de múltiples regiones y cargas móviles.
- Validación del programa empleando soluciones analíticas y otros resultados numéricos.
- Cálculo de la Solución Fundamental para un semiespacio viscoelástico sometido a una carga armónica empleando el método de los potenciales de los desplazamientos y realizando transformada de Fourier en el espacio. Estudio del comportamiento asintótico de la solución y validación mediante resultados obtenidos de referencias bibliográficas.

- Aplicación de la metodología propuesta al Análisis Espectral de Ondas Superficiales para morteros comparando el modelo numérico con la respuesta experimental.
- Estudio de la aplicación de la metodología 2.5D a la propagación de ondas en suelos mediante la comparación del modelo numérico propuesto con resultados experimentales.

7.2. Aportaciones originales

Entre las tareas realizadas para la obtención de este trabajo, caben destacar las siguientes aportaciones originales:

- Se ha desarrollado un software específico empleando en Método de los Elementos de Contorno 2.5D para el análisis de múltiples regiones y permitiendo el análisis de la respuesta ante la aplicación de una carga móvil empleando la Solución Fundamental para el espacio completo.
- Se ha obtenido de forma analítica la respuesta para un semiespacio viscoelástico debido a cargas armónicas.
- Se ha desarrollado un procedimiento que posee la suficiente generalización como para ser útil en una gran variedad de problemas.
- Se ha aplicado la tecnología 2.5D al Análisis Espectral de Ondas Superficiales para morteros.
- Se ha estudiado la propagación de ondas en suelos mediante tecnología 2.5D.

7.3. Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un método de estudio de la propagación de ondas en medios 2.5D, en los que la geometría es invariante en una de las dimensiones aunque las cargas no lo son. Las principales conclusiones obtenidas des estudio se resumen a continuación:

- Se ha obtenido la Solución Fundamental muy útil en variedad de problemas de propagación de ondas. Esta solución no tiene singularidad y puede ser empleada tanto para cargas en superficie como en el interior del semiespacio. Esta solución puede tiene comportamiento asintótico que permite obtener la Solución Fundamental para el espacio completo y elastostática en el dominio transformado.
- Un modelo sencillo del MEC basado en el empleo de la SF en un semiespacio viscoelástico con amortiguamiento histerético permite caracte-

rizar el comportamiento de un material heterogéneo con una precisión aceptable.

- La dispersión de de las ondas puede proporcionar información sobre la existencia de defectos internos o inclusiones de partículas en la matriz del mortero, es necesario en ese caso un modelo teórico de ajuste de la curva de dispersión que pueda considerar estos defectos.

7.4. Líneas de investigación propuestas

Las principales líneas de investigación propuestas tras la realización de este trabajo y que se ajustan a la línea de investigación seguida por el grupo de investigación *Mecánica de Sólidos y Estructuras* se resumen en las siguientes:

1. Estudio de la optimización del cálculo debido a que las necesidades computacionales aumentan considerablemente para altas frecuencias.
2. Aplicación de la metodología desarrollada en un problema inverso que permita la detección de defectos o propiedades del material conociendo la respuesta.
3. Generalización de la Solución Fundamental para obtener la Solución Fundamental de placas 3D o en un medio estratificado.
4. Ampliación del software desarrollado mediante la implementación de modelos poroviscoelásticos, es decir, incorporando el efecto, positivo o negativo, que pueda tener el nivel freático en el patrón de propagación y amortiguación de ondas.

Antecedentes matemáticos

En este anexo se presenta un escueto resumen de los principales conceptos matemáticos desarrollados con algunas referencias. El objeto de este capítulo es servir de breve guía para aproximar algunos aspectos mencionados en el desarrollo de esta tesis. Se presentan las funciones especiales que aparecen en los desarrollos físico-matemáticos y se describen las transformadas de Fourier empleadas en el cálculo.

A.1. Funciones especiales

Exponencial compleja

La función exponencial compleja es una función analítica definida en el plano complejo z . Coincide con la función exponencial para argumentos reales. Se define:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y \quad (\text{A.1.1})$$

donde $z = x + iy$ y $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718281828\dots$ es el número de Euler.

Algunas propiedades de la función exponencial son:

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{z_1 + z_2} \\ e^{z_1} / e^{z_2} &= e^{z_1 - z_2} \\ |e^z| &= e^x \\ e^{z+2\pi i} &= e^z \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

De estas propiedades se concluye que e^z no tiene ceros y es periódica con período $2\pi i$.

Funciones de Bessel y Hankel

Las funciones de Bessel son funciones especiales que aparecen en múltiples problemas físicos. La ecuación diferencial de Bessel se define [3]

$$z^2 \frac{d^2 W(z)}{dz^2} + \frac{dW(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) W(z) = 0 \quad (\text{A.1.3})$$

donde $\nu \in \mathbb{C}$. Soluciones independientes de esta ecuación son las funciones de Bessel de primer $J_\nu(z)$ y segunda especie $Y_\nu(z)$.

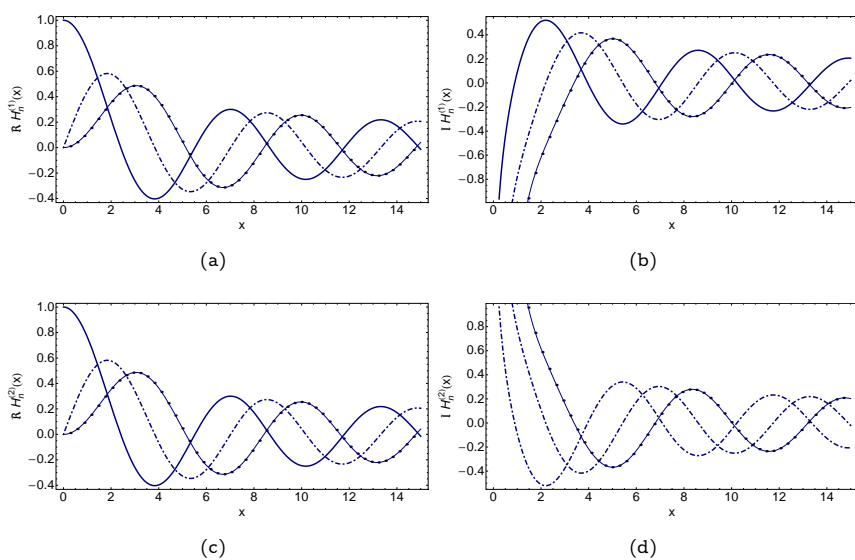


Figura A.1: Funciones de Hankel con argumento real (Parte real (izquierda) y parte imaginaria (derecha): $n = 0$ línea continua; $n = 1$ línea discontinua; $n = 2$ línea de puntos)

Las funciones de Hankel de primer orden $H_v^{(1)}(z)$ y de segundo orden $H_v^{(2)}(z)$ también conocidas como funciones de Bessel de tercera especie (fig. A.1), también son soluciones independientes de la ecuación diferencial A.1.3. Estas funciones se relacionan con las funciones de Bessel de primera y segunda especie mediante la siguiente relación:

$$\begin{aligned} H_v^{(1)}(z) &= J_v(z) + iY_v(z) \\ H_v^{(2)}(z) &= J_v(z) - iY_v(z) \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

La ecuación

$$z^2 \frac{d^2 W(z)}{dz^2} + \frac{dW(z)}{dz} - (z^2 + v^2) W(z) = 0 \quad (\text{A.1.5})$$

se conoce como ecuación diferencial de Bessel modificada puesto que sólo cambia en un signo la ecuación A.1.3. Realizando el cambio de variable $t = iz$ se obtiene que la solución será de la forma $c_1 J_v(iz) + c_2 Y_v(iz)$. Esta solución se puede escribir como combinación lineal de las denominadas funciones de Bessel modificadas:

$$I_v(z) = i^{-v} J_v(iz) \quad (\text{A.1.6})$$

$$K_v(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-v}(z) - I_v(z)}{\sin v\pi} \quad (\text{A.1.7})$$

A.2. Transformada de Fourier

Para el desarrollo de este trabajo se han utilizado transformadas de Fourier [161] del tipo

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.2.1})$$

para el paso del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Y del tipo

$$G(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ik_x x} dx \quad (\text{A.2.2})$$

para obtener la solución en el dominio transformado en el espacio, tanto para la coordenada x , como para la coordenada z .

La evaluación de la transformada inversa de Fourier en una dimensión permite obtener la solución en el tiempo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.2.3})$$

y del mismo modo, en el espacio

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k_x) e^{-ik_x x} dk_x \quad (\text{A.2.4})$$

La expresión discreta [118] para realizar el cálculo de forma numérica es

$$\tilde{f}(x, y, z, t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{\omega=1}^N F(x, y, z, \omega) e^{-i \frac{2\pi(t-1)(\omega-1)}{N}} \quad (\text{A.2.5})$$

donde $\Delta\omega$ es el incremento de frecuencia y N el número de puntos necesarios para realizar la transformada inversa. De forma análoga se obtiene la transformada inversa discreta para el dominio transformado en el espacio,

$$\tilde{g}(x, y, z, \omega) = \frac{\Delta k_x}{2\pi} \sum_{k_x=1}^N G(k_x, y, z, \omega) e^{i \frac{2\pi(x-1)(k_x-1)}{N}} \quad (\text{A.2.6})$$

siendo Δk_x el incremento de número de onda y N el número de puntos.

ApéndiceB

Solución del problema de la esquina mediante elementos con colocación no estándar

Se han considerado aquellos casos en los que la relación entre la mínima distancia entre el punto de colocación y los nodos del elemento y la pseudo-longitud del elemento sean inferiores a una tolerancia (se ha tomado 0.05), considerando que existe *cuasi-singularidad* que puede afectar a la precisión en el cálculo de las integrales, optando por duplicar el número de puntos de Gauss para evitar errores.

El cálculo correcto de las integrales cuasi-singulares tiene una influencia notable en los resultados. Estas integrales provienen de la técnica de duplicación de nodos utilizada para resolver el problema de la esquina (figura B.1). El modelo que se analizó para explorar la colocación óptima de los nodos duplicados consiste en la pieza cuadrada estudiada en la sección 5.8.2, que tiene impedido el desplazamiento normal en tres de sus cuatro contornos, estando el cuarto sometido a una tensión uniforme, $p = 100 \text{ N/m}^2$ (figura 5.7). Los resultados mostrados en los gráficos en la figura B.2 corresponden al desplazamiento vertical en el extremo libre para distintos valores del parámetro ζ , para $k_z = 0$, comparando con la solución analítica (línea continua) y la obtenida con el programa QUADPLEH (línea discontinua). Las propiedades elásticas de material son $\mu = 10^6 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.5$, $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$, $\zeta = 0.05$. Para su resolución se han empleado 4 elementos cuadráticos por contorno.

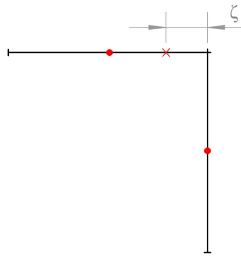
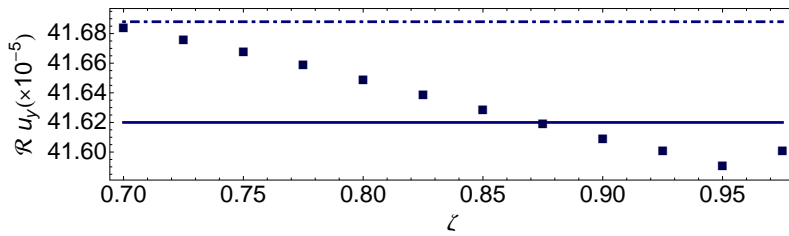
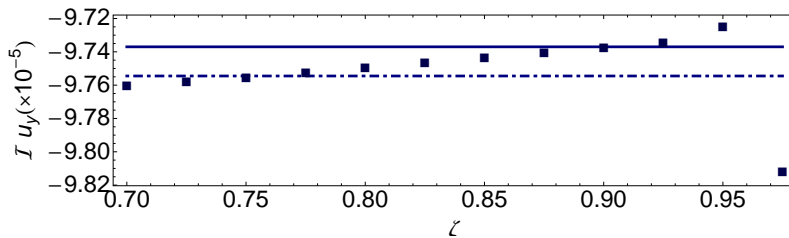


Figura B.1: Problema de esquina. Técnica de colocación no estándar



(a)



(b)

Figura B.2: Desplazamiento en el contorno superior en función de la posición del nodo de colocación no-estándar: (a) Parte real de u_y en el contorno superior; (b) Parte imaginaria de u_y en el contorno superior. La solución analítica está representada en línea continua, la solución dada por el programa QUADPLEH se representa en línea discontinua y el valor obtenido con el programa UPECE con línea de puntos.

Soluciones Fundamentales

En este anexo se recogen las Soluciones Fundamentales elastostática en 2.5D [55] y la correspondiente a un espacio 2.5D en el que circula una carga móvil en la dirección en la que la geometría es invariante (z).

C.1. Solución Fundamental para el problema elastostático

Sustituyendo la relación cinemática en las ecuaciones de Lamé y aplicando la ecuación de equilibrio se obtienen las ecuaciones de Navier-Cauchy:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij} + u_{i,jj} + \frac{1}{\mu} b_i = 0 \quad (\text{C.1.1})$$

La solución fundamental en el caso 2.5D es la debida a una carga,

$$b_i(\mathbf{x}) = \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{-ik_z z} \quad (\text{C.1.2})$$

siendo \mathbf{y} el punto de colocación en el plano $x - y$.

Para obtener dicha solución fundamental se emplea la representación del desplazamiento en función del vector de Galerkin:

$$u_i = G_{i,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{k,ik} \quad (\text{C.1.3})$$

reduce la ecuación de Navier a

$$G_{i,kkj} + \frac{1}{\mu} b_i = 0 \quad (\text{C.1.4})$$

o lo que es lo mismo,

$$\nabla^4 G_i + \frac{1}{\mu} b_i = 0 \quad (\text{C.1.5})$$

Dada la forma de la carga, el vector de Galerkin será

$$G_i^{(m)} = G(\mathbf{r}) e^{-ik_z z} \delta_{im} \quad (\text{C.1.6})$$

de modo $G(\mathbf{r})$ cumplirá la ecuación,

$$\nabla^4 \left(G e^{-ik_z z} \right) + \frac{1}{\mu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{-ik_z z} = 0 \quad (\text{C.1.7})$$

siendo,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{C.1.8})$$

Entonces,

$$\nabla^2 \left(G e^{-ik_z z} \right) = \left(\nabla_r^2 G - k_z^2 G \right) e^{-ik_z z} \quad (\text{C.1.9})$$

siendo

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (\text{C.1.10})$$

Y por tanto,

$$\nabla^4 \left(G e^{-ik_z z} \right) = \nabla^2 \left\{ \left(\nabla_r^2 G - k_z^2 G \right) e^{-ik_z z} \right\} \quad (\text{C.1.11})$$

y por lo tanto, G ha de cumplir la ecuación,

$$\nabla_r^2 \left(\nabla_r^2 G - k_z^2 G \right) - k_z^2 \left(\nabla_r^2 G - k_z^2 G \right) + \frac{1}{\mu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (\text{C.1.12})$$

Llamando $H(r) = \left(\nabla_r^2 - k_z^2 \right) G$ se tiene:

$$\left(\nabla_r^2 - k_z^2 \right) H(r) + \frac{1}{\mu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (\text{C.1.13})$$

La solución a esta ecuación homogénea es una combinación lineal de las funciones de Bessel modificadas:

$$H(r) = C_1 K_0(k_z r) + C_2 I_0(k_z r) \quad (\text{C.1.14})$$

Como la función de Bessel $I_0(k_z r)$ es regular, se toma $C_2 = 0$.

La constante C_1 se determina imponiendo las condiciones de equilibrio en el origen, integrando en una región circular pequeña.

$$\int_{\Omega} \left(\nabla_r^2 - k_z^2 \right) H(r) d\Omega + \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega = 0 \quad (\text{C.1.15})$$

obteniendo:

$$H(r) = \frac{1}{2\pi\mu} K_0(k_z r) \quad (\text{C.1.16})$$

La nueva ecuación a resolver es de la forma:

$$\left(\nabla_r^2 - k_z^2 \right) G(r) = H(r) \quad (\text{C.1.17})$$

Para resolver esta ecuación se emplea el método de variación de las constantes. Es decir, se buscan soluciones de la forma $C_1(r) K_0(k_z r) + C_2(r) I_0(k_z r)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial se llega al sistema:

$$\begin{aligned} C_1' K_0(k_z r) + C_2' I_0(k_z r) &= 0 \\ C_1 K_0'(k_z r) + C_2 I_0'(k_z r) &= H(r) \end{aligned} \quad (\text{C.1.18})$$

Despejando se obtienen C'_1 y C'_2 :

$$C'_1(r) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & I_0(k_z r) \\ H(r) & I'_0(k_z r) \end{vmatrix}}{W(K_0(k_z r), I_0(k_z r))} \quad C'_2(r) = \frac{\begin{vmatrix} K_0(k_z r) & 0 \\ K'_0(k_z r) & H(r) \end{vmatrix}}{W(K_0(k_z r), I_0(k_z r))} \quad (\text{C.1.19})$$

siendo:

$$W(K_0(k_z r), I_0(k_z r)) = \begin{vmatrix} K_0(k_z r) & I_0(k_z r) \\ K'_0(k_z r) & I'_0(k_z r) \end{vmatrix} = \frac{1}{r}$$

y se integra para obtener las constantes C_1 y C_2 . Obteniendo así la solución de la forma:

$$G(r) = -\frac{r}{4\pi\mu k_z} K_1(k_z r) \quad (\text{C.1.20})$$

Desplazamientos

Los desplazamientos se obtienen sustituyendo la función $G(r)$ anteriormente obtenida en el vector de Galerkin.

$$\begin{aligned} U_\alpha^{(\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [(3-4\nu)K_0(z) \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} r_{,\beta} z K_1(z)] \\ U_\alpha^{(3)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= U_3^{(\alpha)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{iz}{8\pi\mu(1-\nu)} r_{,\alpha} K_0(z) \\ U_3^{(3)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [4(1-\nu)K_0(z) - z K_1(z)] \end{aligned} \quad (\text{C.1.21})$$

para $\alpha, \beta = 1, 2$, siendo $z = k_z r$.

Se puede demostrar que cuando k_z tiende a cero la solución converge hacia la estática en dos dimensiones.

Tensiones

Conocidos los desplazamientos, puede obtenerse el tensor de tensiones, mediante,

$$\Sigma_{ij}^{(m)} = 2\mu \Xi_{ij}^{(m)} + \lambda \Xi_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \quad (\text{C.1.22})$$

siendo,

$$\Xi_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^{(m)} + U_{j,i}^{(m)}) \quad (\text{C.1.23})$$

el tensor de deformaciones de la solución fundamental.

A partir del tensor de tensiones se obtienen las tracciones, o vector de tensiones en el contorno de normal n_k , mediante equilibrio en el contorno,

$$T_i^{(m)} = \Sigma_{i\alpha}^{(m)} n_\alpha \quad (\text{C.1.24})$$

siendo $\alpha = 1, 2$ ya que $n_3 = 0$ al ser la geometría bidimensional.

Siguiendo este proceso se obtiene,

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha}^{(\beta)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left((1-2\nu)zK_1(z) \delta_{ij} + r_{,\alpha}r_{,\beta}z^2K_2(z) \right) \right. \\
 &\quad \left. + (1-2\nu)(n_{\beta}r_{,\alpha} - n_{\alpha}r_{,\beta})zK_1(z) \right\} \\
 T_{\alpha}^{(3)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= -\frac{ik_z}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} r_{,\alpha}zK_1(z) - (1-2\nu)n_{\alpha}K_0(z) \right] \\
 T_3^{(\alpha)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= -\frac{ik_z}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} r_{,\alpha}zK_1(z) + (1-2\nu)n_{\alpha}K_0(z) \right] \\
 T_3^{(3)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= -\frac{k_z}{4\pi(1-\nu)} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} [zK_0(z) - 2(1-\nu)K_1(z)]
 \end{aligned} \tag{C.1.25}$$

siendo $z = k_z r$.

Valores singulares de los desplazamientos y tensiones de la Solución Fundamental

Tomando desarrollo en serie de los desplazamientos y tensiones obtenidos para $r \rightarrow 0$ (o $k_z \rightarrow 0$) se obtienen las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha}^{(\beta)s}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\delta_{\alpha\beta} \log \frac{1}{r} + r_{,\alpha}r_{,\beta} \right] \\
 U_{\alpha}^{(3)s}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= U_3^{(\alpha)s}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{i}{8\pi\mu(1-\nu)} r_{,\alpha}z \log \frac{1}{z} \\
 U_3^{(3)s}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \frac{1}{2\pi\mu} \log \frac{1}{z}
 \end{aligned} \tag{C.1.26}$$

y

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha}^{(\beta)s}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,\alpha}r_{,\beta}] \right. \\
 &\quad \left. + (1-2\nu)(n_{\beta}r_{,\alpha} - n_{\alpha}r_{,\beta}) \right\} \\
 T_{\alpha}^{(3)s}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \frac{ik_z(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} n_{\alpha} \log \frac{1}{z} \\
 T_3^{(\alpha)s}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= -\frac{ik_z(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} n_{\alpha} \log \frac{1}{z} \\
 T_3^{(3)s}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}
 \end{aligned} \tag{C.1.27}$$

C.2. Resolución del problema de una carga móvil mediante el Método de los Elementos de Contorno 2.5D

El problema de una carga móvil en un semiespacio ha sido ampliamente estudiado en los últimos años [11] debido a su gran aplicación en multitud

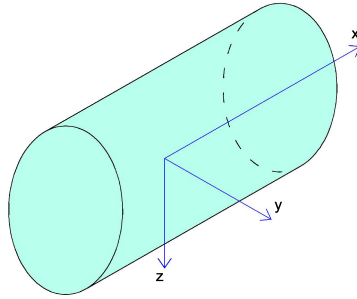


Figura C.1: Sistema de Referencia empleado en la obtención de la Solución Fundamental presentada en [135]

de problemas de propagación de ondas como el paso de vehículos o trenes. El cálculo de la Solución Fundamental para el espacio completo 2.5D se realiza para una carga de la forma $f(x, y, z; t) = \delta(x) \delta(y) e^{-i(\omega t - k_z z)}$. Si se considera la carga desplazándose a velocidad constante c en el eje z , la expresión para la misma será de la forma $f(x, y, z; t) = \delta(x) \delta(y) \delta(z - ct)$. Aplicando doble transformada de Fourier para el tiempo y la coordenada z a la carga móvil se obtiene:

$$\mathbf{F}(x, y, k_z; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(y) e^{-i((\omega - k_z c)t - k_z z)} dt dz \quad (\text{C.2.1})$$

Por tanto, la Solución Fundamental para una carga que se desplaza con velocidad constante en el eje z en un problema 2.5D es la solución obtenida para el espacio completo considerando una frecuencia de valor $\Omega = \omega - k_z c$. Se ha comprobado que la Solución Fundamental para el espacio completo considerando este valor de la frecuencia es la correspondiente a una carga móvil desplazándose con velocidad constante en dirección z , comparándola con la Solución Fundamental obtenida en [135]. Esta Solución Fundamental también se ha empleado para la validación de algunos de los ejemplos numéricos contenidos en la sección 5.8. En la figura C.1 se representa el sistema de referencia empleado para la obtención de esta solución. Puede apreciarse la diferencia con el sistema de referencia utilizado en el desarrollo de esta Tesis, que implica cambio en el signo en algunos resultados.

Se ha considerado un medio de propiedades $\mu = 1.4336 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.3012$, $\rho = 2242 \text{ kg/m}^3$, $\zeta = 0.05$. El medio está sometido a una carga unitaria armónica, circulando a velocidad constante $c = 55.55 \text{ m/s}$ sobre el eje

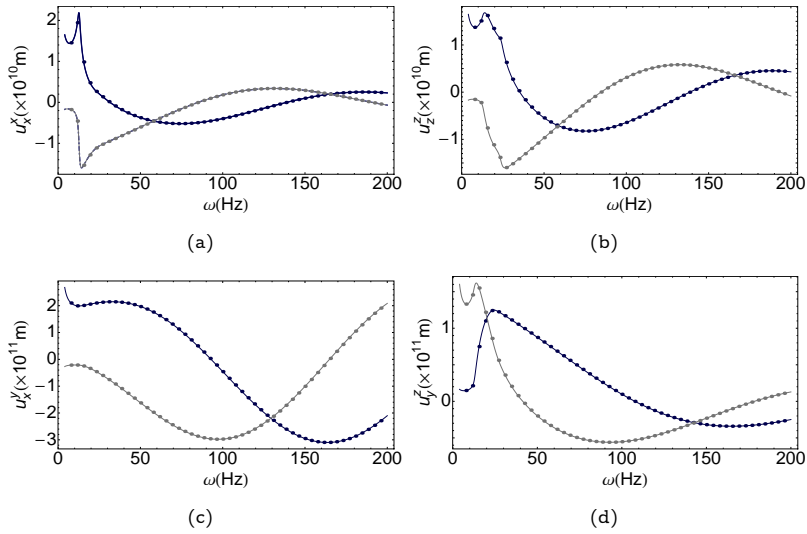


Figura C.2: Desplazamientos calculados con la SF para el espacio completo (línea) y la SF contenida en [135] (puntos): (a) u_x^x ; (b) u_z^z ; (c) u_x^y ; (d) u_y^z . En todos los casos, parte real en línea continua y parte imaginaria en línea discontinua).

z. En la figura C.2 se comparan los resultados obtenidos en desplazamientos en el punto de coordenadas (2, 3) para un número de onda $k_z = 0.1$ rad/m con ambos métodos.

Problemas analíticos empleados en la validación

Este anexo recoge las soluciones analíticas a dos de los problemas empleados en la validación del programa desarrollado durante la ejecución de esta Tesis. En ambos casos se plantea el problema en 2.5D y se eligen las condiciones tal que la solución dependa únicamente de una variable.

D.1. Problema de potencial 2.5D

Uno de los ejemplos que se ha empleado para la validación del Método de los Elementos de Contorno para los problemas de potencial en 2.5D ha consistido en un medio fluido de forma cuadrada de lado L con flujo nulo en los contornos laterales, de tal forma que se puede resolver analíticamente. Para ello, se parte de las ecuaciones para el problema de potencial 3.2.10 y se realiza la transformada de Fourier en el tiempo y en la coordenada z . Como el problema es simétrico respecto al eje y , la presión sólo dependerá de esta variable, siendo la ecuación a resolver

$$\frac{d^2 p}{dy^2} + k_f^2 p = 0 \quad (D.1.1)$$

siendo $k_f^2 = \frac{\omega^2}{c_f^2} - k_z^2$

La solución será de la forma

$$p(y) = c_1 \cos(k_f y) + c_2 \sin(k_f y) \quad (D.1.2)$$

Las constantes c_1 y c_2 se obtienen tras imponer las condiciones de desplazamiento normal en el contorno superior ($y = L$) igual a U_3 y la presión en el contorno inferior ($y = 0$) igual a p_1 .

$$\begin{aligned} p(y) &= p_1 \cos(k_f y) + \left(\frac{U_3 \rho \omega^2}{k_f} + p_1 \sin(k_f y) \right) \frac{\sin(k_f y)}{\cos(k_f L)} \quad (D.1.3) \\ u_n(y) &= \frac{k_f}{\rho \omega^2} \left(-p_1 \sin(k_f L) + \frac{\cos(k_f y)}{\cos(k_f L)} \left(\frac{U_3 \rho \omega^2}{k_f} + p_1 \sin(k_f L) \right) \right) \end{aligned}$$

D.2. Problema elastodinámico 2.5D

El Método de los Elementos de Contorno para un espacio elástico 2.5D se ha validado comparando la solución dada por el programa con la solución analítica obtenida para un medio cuadrado de dimensión $L \times L$ sometido a una tensión vertical $P(\omega, k_z)$ armónica respecto a z en su contorno superior. El medio tiene impedido el desplazamiento horizontal en los contornos laterales y el desplazamiento vertical en el contorno inferior.

La solución analítica se ha calculado a partir de las ecuaciones de la elastodinámica (ec. 3.4.5). Se ha realizado la transformada de Fourier correspondiente en el tiempo y en el espacio, obteniendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_p^2 U_{1,11} + c_s^2 U_{1,22} + (c_p^2 - c_s^2) (U_{2,12} - ik_z U_{3,1}) + (\omega^2 - c_s^2 k_z^2) U_1 &= 0 \\ c_p^2 U_{2,22} + c_s^2 U_{2,11} + (c_p^2 - c_s^2) (U_{1,21} - ik_z U_{3,2}) + (\omega^2 - c_s^2 k_z^2) U_2 &= 0 \quad (D.2.1) \\ c_s^2 (U_{3,11} + U_{3,22}) - ik_z (c_p^2 - c_s^2) (U_{1,1} + U_{2,2}) + (\omega^2 - c_p^2 k_z^2) U_3 &= 0 \end{aligned}$$

donde $U_i = U_i(\omega, k_z)$ son los desplazamientos en el espacio transformado.

Teniendo en cuenta que el problema es simétrico respecto al eje x_2 en el plano Ox_1x_2 , el desplazamiento $U_1(\omega, k_z) = 0$ y todas las derivadas respecto a esta coordenada serán nulas, quedando así el sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned} U_{2,22} - ik_z (1 - \kappa) U_{3,2} + \kappa k_\beta^2 U_2 &= 0 \quad (D.2.2) \\ U_{3,22} - ik_z \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) U_{2,2} + \frac{k_\alpha^2}{\kappa} U_3 &= 0 \end{aligned}$$

siendo: $k_p = \frac{\omega}{c_p}$, $k_s = \frac{\omega}{c_s}$, $\kappa = \frac{k_p^2}{k_s^2}$, $k_\alpha^2 = k_p^2 - k_z^2$ y $k_\beta^2 = k_s^2 - k_z^2$.

El sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es homogéneo con coeficientes constantes. La solución será de la forma:

$$\begin{aligned} U_2(x_2, \omega, k_z) &= C_1 e^{-ik_\alpha x_2} + C_2 e^{ik_\alpha x_2} + C_3 e^{-ik_\beta x_2} + C_4 e^{ik_\beta x_2} \quad (D.2.3) \\ U_3(x_2, \omega, k_z) &= C_1 \frac{k_z}{k_\alpha} e^{-ik_\alpha x_2} - C_2 \frac{k_z}{k_\alpha} e^{ik_\alpha x_2} - C_3 \frac{k_\beta}{k_z} e^{-ik_\beta x_2} + C_4 \frac{k_\beta}{k_z} e^{ik_\beta x_2} \end{aligned}$$

Las constantes C_i se obtienen al aplicar las condiciones de contorno del problema: desplazamiento vertical en el contorno Γ_1 y tensiones en la dirección z en los contornos Γ_1 y Γ_3 nulos, así como la tensión t_2 en el contorno Γ_3 tiene el valor P .

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\omega k_\alpha e^{ik_\alpha L}}{\nu} \left[- \left(1 + e^{2ik_\beta L} - 2e^{2i(k_\alpha + k_\beta)L} \right) k_z^2 + \left(-1 + e^{2ik_\beta L} \right) k_\alpha k_\beta \right] \\ C_2 &= \frac{\omega k_\alpha}{\nu} \left[-2e^{ik_\beta L} k_z^2 + e^{ik_\alpha L} \left(k_z^2 - k_\alpha k_\beta \right) + e^{i(k_\alpha + 2k_\beta)L} \left(k_z^2 + k_\alpha k_\beta \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \frac{\bar{\omega} k_z^2 e^{ik_\beta L}}{k_\beta v} \left[(-1 + e^{2ik_\alpha L}) k_z^2 - (1 + e^{2ik_\alpha L} - 2e^{i(k_\alpha + k_\beta)L}) k_\alpha k_\beta \right] \\
 C_4 &= \frac{\bar{\omega} k_z^2}{k_\beta v} \left[-2e^{ik_\alpha L} k_\alpha k_\beta + e^{ik_\beta L} (-k_z^2 + k_\alpha k_\beta) + e^{i(2k_\alpha + k_\beta)L} (k_z^2 + k_\alpha k_\beta) \right]
 \end{aligned}
 \tag{D.2.4}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} &= \frac{iP}{\rho \omega^2} \\
 v &= (-1 + e^{2ik_\alpha L}) (1 + e^{2ik_\beta L}) k_z^2 + (1 + e^{2ik_\alpha L}) (-1 + e^{2ik_\beta L}) k_\alpha k_\beta
 \end{aligned}$$

ApéndiceE

Metodologías en los ensayos y equipos empleados

E.1. Ensayos para el Análisis Espectral de Ondas Superficiales

El principal objetivo del ensayo es obtener la curva de dispersión que relaciona la velocidad de fase para cada frecuencia aplicado a morteros y hormigones. Las propiedades de los materiales empleados se han recogido en las tablas 6.1, 6.2 y 6.4.

Los instrumentos empleados en el ensayo AEOS consistieron en un martillo para el impacto, un transductor de los registros temporales registrados, dos receptores (acelerómetros) y un medio para recoger la señal y analizar los datos (fig. E.1), dispuestos tal y como se ha representado en el esquema 6.1.

Las ondas de Rayleigh provocadas por el impacto deben recoger un amplio rango de frecuencias y sus amplitudes han de superar el ruido de fondo ampliamente [74]. El rango de frecuencias es función del tiempo de contacto

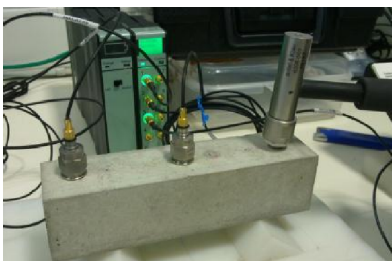


Figura E.1: Captura de datos en el ensayo AEOS

entre el martillo y el espécimen [130]. Tiempos cortos originan ondas de altas frecuencias que se propagarán con mayor profundidad en el interior. Si bien, el impacto se ha seleccionado considerando el espesor de la pieza, la distancia entre los receptores y la profundidad que se quería alcanzar. El rango de frecuencias estudiadas es entre 10 y 20 kHz [34]

La disposición de los receptores se siguió según las indicaciones contenidas en [74] que sugería que la distancia entre los dos receptores debe ser menor que el doble de una longitud de onda y mayor que el triple de una longitud de onda.

El procedimiento seguido para la obtención de los resultados presentados se resume en los siguientes:

1. Para la adquisición de datos se configuró el equipo captador de vibraciones *Lan XI* de Brüel&Kjaer y el software comercial para análisis de señales *PULSE v.16*. Se generó una fuerza sobre el espécimen con un martillo de impactos calibrado de punta de acero de 12 mm de diámetro.
2. Se recogieron los registros temporales de cada acelerómetro. El ensayo se realizó en zona carente de ruidos externos y el acoplamiento de los receptores en la superficie del mortero y hormigón se realizó mediante placas adheridas con adhesivo, garantizando la ausencia de ruido y distorsión. Si bien, para evitar el efecto *leakage* se procedió a un procesamiento de la señal mediante funciones ventana tipo Hanning.
3. Una vez procesados los registros en el dominio del tiempo, se transformaron al dominio de la frecuencia.

Las características de los equipos utilizados se describen en la tabla E.1.

Asimismo se determinaron los parámetros elásticos de los materiales empleados mediante las siguientes técnicas:

- UNE-EN 196/1. Ensayo de resistencia a rotura en prensa a flexión/compresión, para la obtención de la resistencia mecánica.
- Norma TS500, Código ACI318 y Norma EN1992/1. Para la obtención del módulo de elasticidad al relacionarlo con la resistencia a compresión.

Tabla E.1

Características de los equipos empleados en el ensayo Análisis Espectral de Ondas Superficiales

Dos acelerómetros monoaxiales de electrónica integrada marca Brüel&Kjaer modelo 4514 – B – 001



De titanio, con TEDS, 12 mm de diámetro, cabeza hexagonal h.23 mm, sensibilidad 100 mV/g, sensibilidad transversal < 5 %, conector superior, amplitud de respuesta de 1 a 10000 Hz, rango de medición máx. 50(g) pico, peso 8.7 gr, base aislada y cable de pantalla simple coaxial, 10 – 32 UNF (M) a SMB (F), de 2 m, rango de temperatura –51°C a 105°C. Impedancia de salida 100 Ω

Un módulo de batería marca Brüel&Kjaer modelo 2831 – A para PULSE LAN XI



Incluyendo cargador alimentador ZG – 0469 y adaptador ZH – 0686, carga directa y panel frontal de conexiones con leds modelo BNC : UA – 2107 – 120. Cable SBM a BCN, 1 m, max. +85°C. Incluye adaptador JJ – 0081 BNC hembra-BNC macho

Un módulo analizador PULSE LAN XI marca Brüel&Kjaer modelo 3053 – B – 120



Con capacidad hasta 12 canales con entradas CCLD hasta frecuencia 25.6 kHz, 7 horas de autonomía de batería, temperatura máxima +80°C, conector RJ45, peso 750 gr, filtro paso-alto, precisión amplitud 0.01 dB, filtro anti-aliasing

Un martillo de impactos marca Brüel&Kjaer modelo 8204



Voltaje sensibilidad 22.7 mV/N, fuerza 220 N – 890 N, cabezal 2 g, voltaje salida ± 5 V, longitud 22 mm, mango de fibra de vidrio, conector 10–32UNF, punta de acero

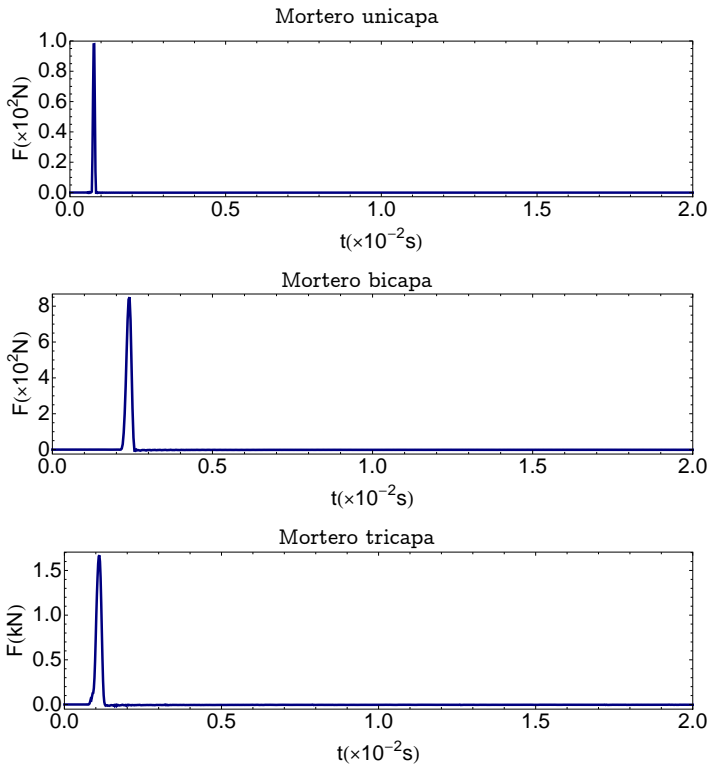


Figura E.2: Fuerza aplicada en la superficie de los morteros ensayados

- ASTM C1383. Medida de la velocidad de ondas P.
- ASTM C215-02, ASTM E1876-09, UNE-EN ISO 12680-1. Medida de las frecuencias fundamentales transversales para la obtención de del módulo dinámico de elasticidad, el coeficiente de Poisson y el módulo de rigidez transversal.

En la figuras E.2 y E.3 se representan los datos obtenidos en el ensayo para la fuerza de impacto, tanto en el tiempo como transformados al dominio de la frecuencia. Las figuras E.4 y E.5 contienen los resultados obtenidos en los dos acelerómetros, situados a 6 cm y 12 cm del impacto.

El último ensayo que se ha modelizado numéricamente consiste en un bloque de hormigón de 1 m^3 sometido a una carga puntual (fig. E.6 y se ha obtenido la respuesta en dos puntos situados a 20 cm y 40 cm del impacto. Los datos del material se han resumido en la tabla 6.4. Las figuras E.7 y E.8 recogen

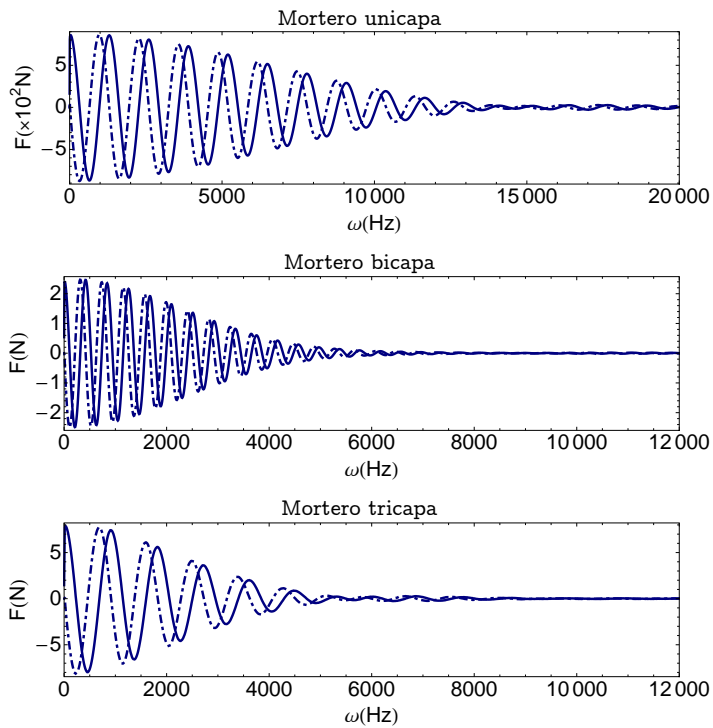


Figura E.3: Transformada de Fourier de la Fuerza aplicada en la superficie de los morteros ensayados. Parte Real en línea continua y parte imaginaria en línea discontinua

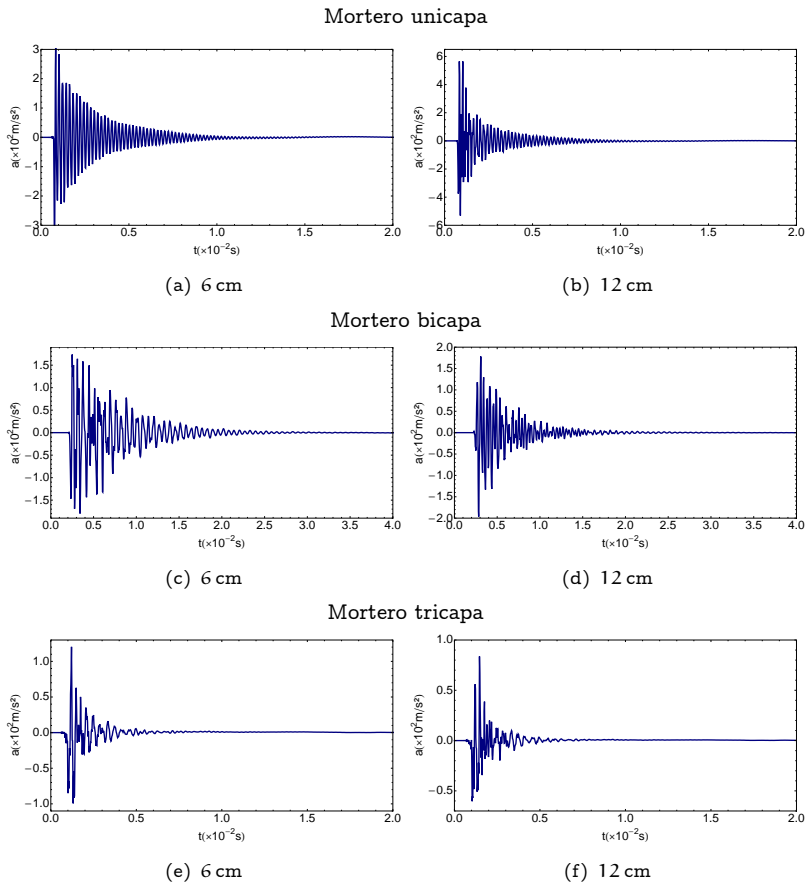


Figura E.4: Respuesta obtenida en dos acelerómetros para los morteros ensayados

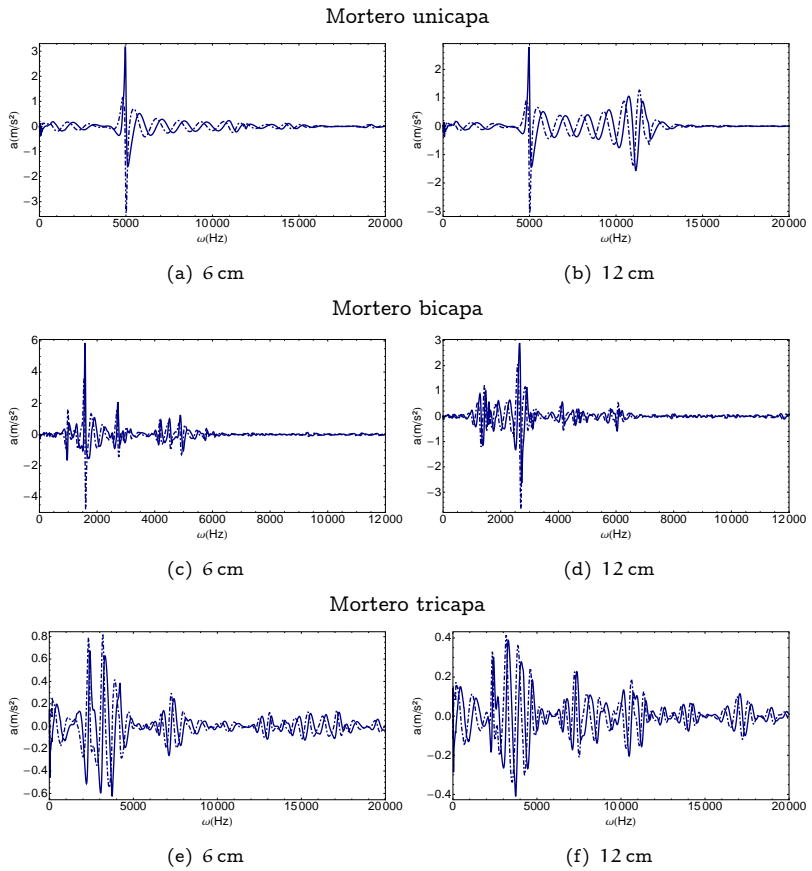


Figura E.5: Transformada de la Respuesta obtenida en los acelerómetros para los morteros. En todos los casos parte Real en línea continua y parte imaginaria en línea discontinua

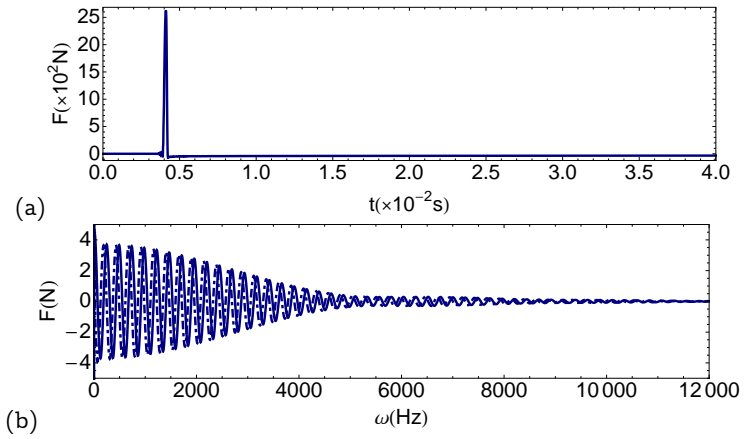


Figura E.6: Fuerza aplicada en la superficie del bloque de hormigón. (a) En el dominio del tiempo; (b) En el dominio de la frecuencia (Parte Real en línea continua y parte imaginaria en línea discontinua)

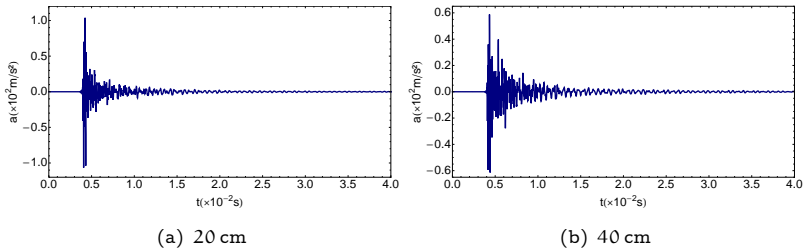


Figura E.7: Respuesta obtenida en los dos acelerómetros para el bloque de hormigón. Aceleraciones en el dominio del tiempo para el acelerómetro situado a 20 cm del impacto (izquierda) y para el acelerómetro colocado a 40 cm de la fuente (derecha)

las aceleraciones obtenidas en ambos acelerómetros y la transformada de Fourier de dicha aceleración.

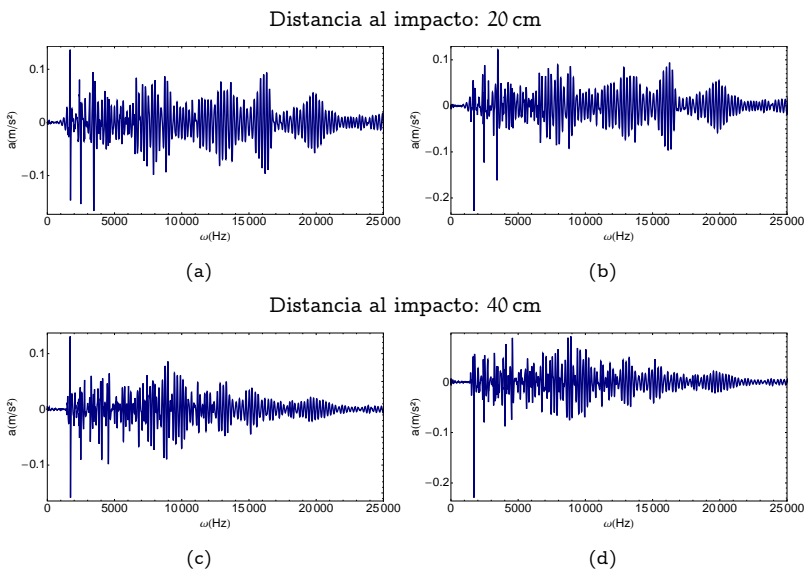


Figura E.8: Respuesta obtenida en los dos acelerómetros para el bloque de hormigón. Parte real en la parte izquierda y parte imaginaria a la derecha

E.2. Ensayo de propagación de ondas en el terreno

La realización de las mediciones para el impacto sobre el terreno se efectuó en el término municipal de Estepona, 72 km al suroeste de la ciudad de Málaga, España (fig. E.9). La zona posee una cota de 18 m sobre el nivel del mar y se eligió una zona con orografía prácticamente horizontal y libre de construcciones que pudieran interferir en la respuesta.

Perteneciente a la Cordillera Bética, esta zona está limitada al norte con el Macizo Ibérico y con la Cordillera Ibérica y queda limitada hacia el sur con el litoral atlántico y mediterráneo. En la figura E.10 se presenta el perfil litológico de la zona de estudio.

El ensayo consistió en efectuar un impacto con un peso en caída libre sobre una célula de carga y recoger las aceleraciones verticales del terreno en dos acelerómetros alineados con la fuente, tal y como se ha representado en la figura 6.19 [123]. Las características de los medios empleados se describen en la tabla E.2.

En la figura E.11 se representan los datos obtenidos en el ensayo para la fuerza de impacto, tanto en el tiempo como transformados al dominio de la frecuencia. Para la obtención de la transformada de Fourier ha sido necesaria la aplicación de una ventana que elimine los datos de rebote de la fuerza. La figura E.12 contiene los resultados obtenidos en un acelerómetro situado a 17.84 m del impacto.

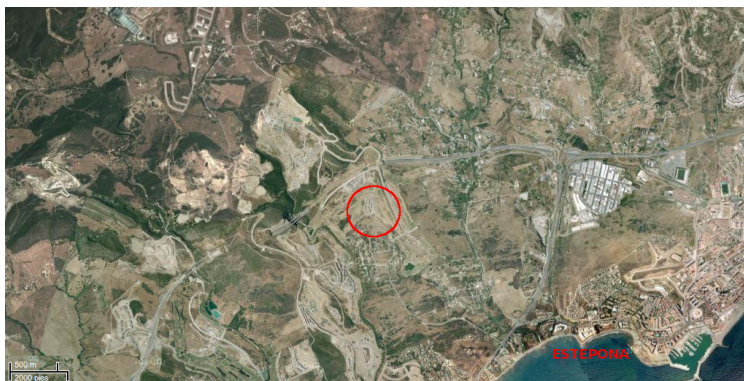


Figura E.9: Localización ensayos

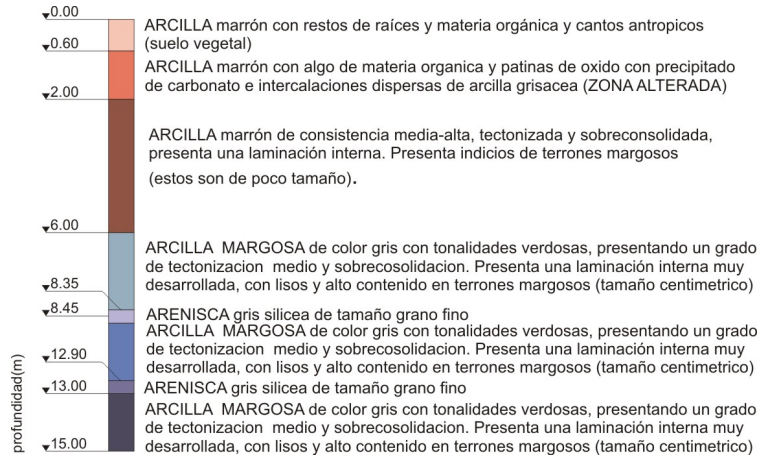


Figura E.10: Perfil litológico de la zona de ensayos

Tabla E.2

Medios empleados para el ensayo de propagación de ondas en el terreno

Célula de carga marca Brüel&Kjaer



La sensibilidad de referencia es de 0.2298 mV/N a 22°C. El rango de compresión que mide es de 22000 N y la máxima fuerza de compresión 66700 N.

Acelerómetros marca Brüel&Kjaer modelo 8340



La sensibilidad de referencia es de 1052 mV/ms⁻² (a 159.2 Hz, 20 ms⁻² RMS, 4 mA y 23.1°C) y un rango de medida de ±4.9 m/s⁻².

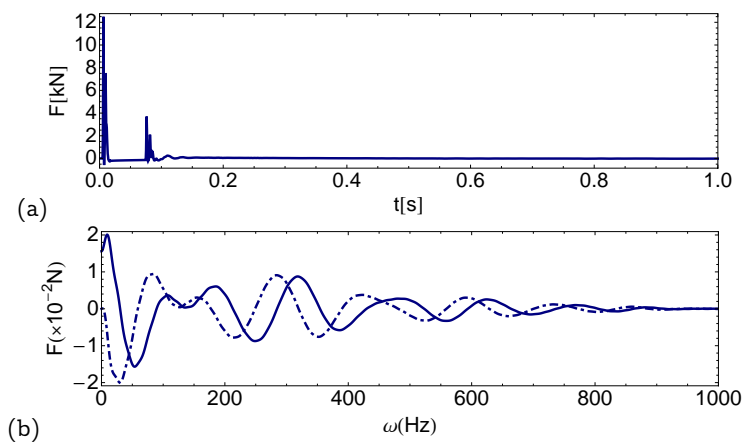


Figura E.11: Fuerza aplicada en la superficie del terreno: (a) en el dominio del tiempo; (b) en el dominio de la frecuencia (Parte Real (línea continua) y Parte Imaginaria (línea discontinua))

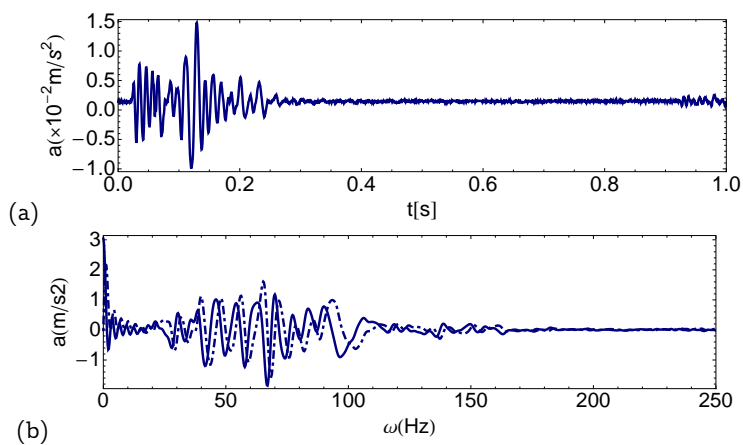


Figura E.12: Respuesta en el acelerómetro para el ensayo de propagación de ondas en el terreno: (a) en el dominio del tiempo y (b) en el dominio de la frecuencia (Parte Real (línea continua) y Parte Imaginaria (línea discontinua))

ApéndiceF

UPECE

UPECE es el programa de elementos de contorno desarrollado durante los trabajos de esta Tesis que permite calcular la propagación de ondas en medios fluidos y viscoelásticos con geometría plana o invariante en una coordenada y sometidos a cargas armónicas. Se ha implementado en código FORTRAN.

El programa permite la consideración de varios subdominios en un modelo. El cálculo se realiza en el dominio de la frecuencia y transformado en el espacio según la dirección invariante. Los resultados se pueden obtener en el dominio transformado o realizar la antitransformada tanto en el espacio como en el tiempo.

Este anexo describe sucintamente la estructura del programa. En la figura F.1 se presenta un esquema de los archivos con los que trabaja el programa. La tabla F.2 recoge la estructura del programa, que se ha dividido en los módulos que se describen en la tabla F.4. Por último, se presenta un archivo de entrada de datos en la tabla F.6.

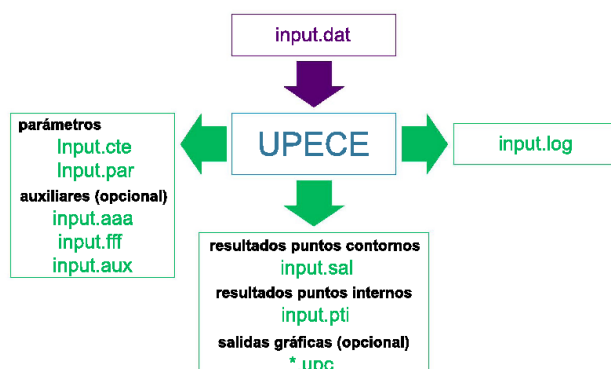


Figura F.1: Esquema de generación de archivos del programa UPECE

Tabla F.2
Estructura del programa

UPECE

```

INICIO
LECTURA. Lectura de parámetros de entrada
  INICIALIZACIÓN de variables
  TIPO DE PROBLEMA. Dinámico-estático-carga móvil
    2.5D-2D

FRECUENCIAS
NÚMEROS DE ONDA
VELOCIDAD (para la carga móvil)
MATERIALES. Propiedades
SUBREGIONES. Sólido-Agua
CONTORNOS. Lineal-Punto a punto-Arco-Círculo-Elipse
  Elementos cuadráticos-constantes
PUNTOS FIJOS
PUNTOS INTERNOS
CARGAS. Cargas puntuales y campos incidentes
SALIDA. Escritura de resultados
FUNCION. Funciones definidas por el usuario
IFFT. Transformada inversa en el tiempo o el espacio
PARAMETROS MEC
PARA CADA VELOCIDAD
  PARA CADA FRECUENCIA
    PARA CADA NÚMERO DE ONDA
      CONDICIONES DE CONTORNO
        PARA CADA SUBREGIÓN
          PARA CADA CONTORNO en el que se integra
            ¿Es EXTERIOR o INTERFASE?
              PARA CADA ELEMENTO DEL CONTORNO
                PARA CADA NODO de colocación
                  ¿Es SINGULAR?
                    SI. Cálculo integral y término libre
                    NO. ¿Es QUASI-SINGULAR?
                      SI. Duplica el n° puntos Gauss
                      NO. Integral regular
                        MONTAJE en HC y GC para el contorno
                          CÁLCULO TÉRMINOS ADICIONALES DE F
                            MONTAJE HC Y GC en A y F
                              PUNTOS FIJOS
                                RESOLVER A·X=F
                                  ESCRITURA DE RESULTADOS
                                    PUNTOS INTERNOS
                                      CÁLCULO TRANSFORMADA INVERSA EN EL ESPACIO
                                        CÁLCULO TRANSFORMADA INVERSA EN EL TIEMPO
                                          FIN

```

Tabla F.4
Módulos del programa UPECE

UPECE
Es el módulo principal del programa, contiene la inicialización de variables y llamada a las distintas subrutinas que conforman el programa.
parametros
Contiene la definición de todos los parámetros empleados en el programa, así como la definición del tipo de variables de uso general.
lectura
Es el módulo que permite la lectura de los datos contenidos en el archivo de entrada del programa.
calculo
Módulo que contiene las subrutinas necesarias para el cálculo de parámetros, condiciones de contorno, matrices del sistema y resolución del sistema de ecuaciones.
integrales
En este módulo se recogen todas las subrutinas de integración, tanto integrales singulares como mediante la cuadratura de Gauss. También recoge la subrutina para el cálculo de variables en puntos internos.
soluciones
Archivo que integra todas las subrutinas para el cálculo de soluciones fundamentales: Solución Fundamental para problemas de potencial 2.5D, Solución Fundamental para los problemas elastodinámico 2D y 2.5D y Solución Fundamental para el problema elastostático 2.5D.
funciones
Este módulo contiene las subrutinas necesarias para el cálculo de los nodos de colocación y para la definición de funciones que pueden ser empleadas en la introducción de condiciones de contorno y definición de frecuencias y números de onda en el cálculo.
cargas
Módulo creado para la definición de subrutinas que recogen las subrutinas de cálculo de cargas.
fft
Módulo que contiene las subrutinas necesarias para el cálculo de la transformada inversa de Fourier en el espacio o en el tiempo.
salidares
Archivo que contiene las subrutinas para la presentación de resultados.

Tabla F.6
 Archivo de entrada de datos del programa UPECE

```

ENSAYO - ESTEPONA

TIPO_DE_PROBLEMA
DIN
25D
\TIPO_DE_PROBLEMA

MATERIALES
% num, nu, ge, rho, zeta
  1, 0.165, 105625000, 1690.0, 0.05
  2, 0.441, 597600000, 1660.0, 0.05
\MATERIALES

SUBREGIONES
% num, tipo, nummat, ncont, consub(ncont)
  1, S, 1, 2, 1,-2
  2, S, 2, 1, 2
\SUBREGIONES

CONTORNOS
%num,nec,geo,tipoel, k1, val1, numfunc1
1 101 'LIN' 'QUA' 1 (0.0,0.0) 0 1 (0.0,0.0) 0 1 (0.0,0.0) 0
40., 0., -40., 0., 1
2 100 'LIN' 'QUA'
40., -6., -40., -6., 1
\CONTORNOS

FRECUENCIAS
INT, 10
188.496,245.044
\FRECUENCIAS

NUMEROS_DE_ONDA
INT, 257
0.0, 29.8828
INT, 255
-30, -0.117188
\NUMEROS_DE_ONDA

CARGAS
%Carga puntual PTL
%numsubre, tipo
1, PTL
% Coordenadas del punto de aplicación de la carga: xp, yp
0.0, -0.001
% Amplitud del campo: dx, dy, dz
0.0, -1.0, 0.0
\CARGAS

IFFT
% espacio, incremento n° onda
S, 0.117188
% Nodo, desplazamiento uy
NOD,uy
% nodo_inicial, nodo_final, incremento
29, 57, 28
\IFFT

```

ApéndiceG

Lista de Símbolos

Símbolo	Descripción	
c	Velocidad de carga móvil	[m/s]
c_p	Velocidad de las ondas P	[m/s]
c_R	Velocidad de las ondas de Rayleigh	[m/s]
c_s	Velocidad de las ondas S	[m/s]
E	Módulo de elasticidad o módulo de Young	[N/m ²]
f	Fuerza	[N]
F	Fuerza en el dominio transformado	[N]
$H_n^{(1)}()$	Función de Hankel 1 de orden n	
$H_n^{(2)}()$	Función de Hankel 2 de orden n	
i	Número imaginario	
k_p	Número de onda de las ondas P	[rad/m]
k_s	Número de onda de las ondas S	[rad/m]
k_x	Número de onda en la coordenada x	[rad/m]
k_z	Número de onda en la coordenada z	[rad/m]
r	Coordenada radial	[m]
t	Tiempo	[s]
\mathbf{T}	Vector tensión	[N/m ²]
\mathbf{u}	Vector desplazamientos	[m]
\mathbf{U}	Vector desplazamientos en el dominio transformado	[m]
x	Coordenada espacial en dirección x	[m]
\mathbf{x}	Vector coordenadas	[m]
\mathbf{X}	Vector coordenadas en el dominio transformado	[m]
y	Coordenada espacial en dirección y	[m]
z	Coordenada espacial en dirección z	[m]
δ_{ij}	Delta de Kronecker	
$\delta(\cdot)$	Función delta de Dirac	
e	Deformación	
λ, μ	Constantes de Lamé	[N/m ²]

Λ	Contorno del dominio Ω	
∇	Laplaciano en coordenadas cartesianas	
$\nabla_{\mathbf{k}}$	Operador ∇ en el dominio transformado	
ν	Coefficiente de Poisson	
ω	Frecuencia	[Hz]
Ω	Dominio	
ρ	Densidad	[kg/m ³]
σ	Tensión	[N/m ²]
Σ	Tensión en el dominio transformado	[N/m ²]
ξ	Amortiguamiento histerético	
ζ	Coordenada local	

ApéndiceH

Acrónimos

Acrónimos	Descripción
AEOS	Análisis Espectral de Ondas Superficiales (<i>Spectral Analysis of Surfaces Waves [SASW]</i>)
MDF	Método de las Diferencias Finitas
MEC	Método de los Elementos de Contorno
MEF	Método de los Elementos Finitos
SF	Solución Fundamental
TDF	Transformada Discreta de Fourier

Bibliografía

- [1] *Vibrationer i jord och berg*. Hanboken Bugg, Stockholm, 1985.
- [2] AASHTO R 8-96. Standard practice for evaluation of transportation-related earthborne vibrations, 2009.
- [3] M. Abramowitz and A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1970.
- [4] J. D. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1973.
- [5] M. Adam and O. von Estorff. Reduction of train-induced building vibrations by using open and filled trenches. *Computers and Structures*, 83:11–24, 2005.
- [6] N. Alver and M. Ohtsu. BEM analysis of dynamic behavior of concrete in impact-echo test. *Construction and Building Materials*, 21:519–526, 2007.
- [7] P. Alves Costa, R. Calcada, and A. Silva Cardoso. Track-ground vibrations induced by railway traffic: In-situ measurements and validation of a 2.5d fem-bem model. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 32(1):111 – 128, 2012.
- [8] L. Andersen and C. J. C. Jones. Three-dimensional elastodynamic analysis using multiple boundary element domains. Technical Report 867, Institute of Sound and Vibration Research, 2001.
- [9] L. Andersen and C. J. C. Jones. Coupled boundary and finite element analysis of vibration from railway tunnels - a comparison of two- and three-dimensional models. *Journal of Sound and Vibration*, 293:611–625, 2006.
- [10] L. Andersen and S. R. K. Nielsen. Green's functions for the elastodynamic response to a moving harmonic point force. In *Proceedings of the 15th Nordic Seminar on Computational Mechanics*, pages 263–266, Aalborg, Denmark, 18-19 October 2002.

- [11] L. Andersen and S. R. K. Nielsen. Boundary element analysis of the steady-state response of an elastic half-space to a moving force on its surface. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27:23–38, 2003.
- [12] J. Antonio and A. Tadeu. 3D seismic response of a limited valley via BEM using 2.5D analytical Green's functions for an infinite free-rigid layer. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22:659–673, 2002.
- [13] L. Auersch. Wave propagation in layered soils: Theoretical solution in wavenumber. *Journal of Sound and Vibration*, 173(2):233–264, 1994.
- [14] L. Auersch and G. Schmid. A simple boundary element formulation and its application to wavefield excited soil-structure interaction. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 19(7):931–947, 1990.
- [15] P. K. Banerjee and S. M. Mamoon. A fundamental solution due to a periodic point force in the interior of an elastic halfspace. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 19:91–105, 1990.
- [16] J.R. Barber and F.A. Sturla. Application of the reciprocal theorem to some problems for the elastic half-space. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(1):17–25, 1992.
- [17] F. C. P. De Barros and J. E. Luco. Response of a layered viscoelastic half-space to a moving point load. *Wave Motion*, 19:189–210, 1994.
- [18] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [19] K. J. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [20] J.A. Bay and K.H. Stokoe. Field determination of stiffness and integrity of pcc members using the sasw method. In *Proceedings of nondestructive evaluation of civil structures and materials conference*, pages 71–86. University of Colorado, 1990.
- [21] A. Becker. *The boundary element method in engineering: a complete course*. McGraw-Hill, London, U.K., 1992.

- [22] D. E. Beskos. Boundary element methods in dynamic analysis. part ii (1986–1996). *Journal of Applied Mechanics*, 50(3):149–197, 1997.
- [23] D.E. Beskos. Boundary element methods in dynamic analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 40(1):1–23, 1987.
- [24] J. Blanch, H. Robertsson, and W. Symes. Viscoelastic finite difference modeling. Technical Report TR93-04, Computational and Applied Mathematics Department, Rice University, Texas, 1993.
- [25] D. Bland. *The Theory of Linear Viscoelasticity*. Academic Press, New York, 1980.
- [26] J. Boussinesq. *Application des Potentiels à L'Étude de L'Équilibre et due Mouvement des Solides Élastiques*. Gauthier- Villars, Paris, 1885.
- [27] C. A. Brebbia. *Electromagnetic Applications*, volume 6 of *Topics in Boundary Element Research*. Springer, 1989.
- [28] C. A. Brebbia and J. Domínguez. *Boundary Elements. An Introductory Course*. CMP, McGraw Hill, Southampton, Boston, 1992.
- [29] M. Buosanti, F. Cirianni, G. Leonardi, A. Santini, and F. Scopelliti. Mitigation of railway traffic inducen vibrations: the influence of barriers in elastic half-space. *Advances in Acoustics and Vibration*, page 7, 2009.
- [30] L. Cagniard. *Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressive*. Gauthier-Villard, Paris, 1939.
- [31] J.A.M. Carrer and W.J. Mansur. A time-domain Boundary Element formulation with fundamental solution generated by Heaviside function source: Initial conditions contribution. *Electronical Journal of Boundary Elements*, BETEQ 2001(1):20–30, 2002.
- [32] V. Cerruti. Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo per alcune speciali condizioni ai limiti roma. *Acc. inc. Rend.*, (4):785, 1888.
- [33] C. C. Chao, H. H. Bleich, and J. Sackman. Surface waves in an elastic half space. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 28:300–302, 1961.

- [34] Y.S. Cho and F.B. Lin. Nondestructive determination of in-place concrete strength using spectral analysis of surface waves. In *Proceedings of nondestructive evaluation of civil structures and materials conference*, pages 381–393. University of Colorado, 1996.
- [35] R. Christensen. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. Academic Press, New York, 1971.
- [36] J. Cole and J. Huth. Stresses produced in a half plane by moving loads. *Journal of Applied Mechanics*, 25:433–436, 1958.
- [37] C. Constantino. Finite element approach to stress wave problem. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 93:153–176, 1967.
- [38] B. M. Das. *Principles of soil dynamics*. PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1993.
- [39] W. R. Dean, H. W. Parsons, and I. N. Sneddon. A type of stress distribution on the surface of a semi-infinite elastic solid. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 40:5–18, 1944.
- [40] G. Degrande. Wave propagation in the soil: theoretical background and application to traffic induced vibrations. In H. Grundmann, editor, *Proceedings of the 5th European Conference on Structural Dynamics: Eurodyn 2002*, pages 27–40, Munich, Germany, September, 2–5 2002.
- [41] G. Degrande, D. Clouteau, R. Othman, M. Arnst, H. Chebli, R. Klein, P. Chatterjee, and B. Janssens. A numerical model for ground-borne vibrations from underground railway traffic based on a periodic finite element-boundary element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 293:645–666, 2006.
- [42] G. Degrande and G. De Roeck. An absorbing boundary condition for wave propagation in saturated poroelastic media. part i. formulation and efficiency evaluation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 12:411–421, 1993.
- [43] J. Dominguez and R. Abascal. On fundamental solutions for the boundary integral equations method in static and dynamic elasticity. *Engineering Analysis*, 1:128–134, 1984.

- [44] J. Domínguez. *Boundary Elements in Dynamics*. Elsevier, CMP, Southampton, Boston, 1993.
- [45] G. Eason. The displacements produced in an elastic halfspace by a suddenly applied surface force. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2(4):299–326, 1966.
- [46] A. Eitzenberger. Train-induced vibrations in tunnels. A review. Technical Report 06, Luleå University of Technology, 2008.
- [47] A. C. Eringen and S. S. Suhubi. *Elastodynamics*, volume II. Academic Press, 1975.
- [48] O. Von Estorff and E. Kausel. Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18(7):1065–1075, 1989.
- [49] W. Ewing, W. Jardetzky, and F. Press. *Elastic waves in layered media*. McGraw-Hill Education, 1957.
- [50] M.N. Fardis and T.B. Panagiotakos. Hysteretic damping of reinforced concrete elements. In *Eleventh World Conference on Earthquake Engineering*, number 464, 1996.
- [51] J. A. Forrest and H. Hunt. Ground vibration generated by trains in underground tunnels. *Journal of Sound and Vibration*, 294:706–736, 2006.
- [52] J. A. Forrest and H. Hunt. A three-dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 294:678–705, 2006.
- [53] L. Fryba. *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads, Mechanics of Structural Systems*. Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherlands, 3rd edition, 1999. [1st edition, 1972.
- [54] D. C. Gakenheimer. Numerical results for lamb's point load problem. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 37:522–524, 1970.
- [55] R. Gallego. Fundamental solution for 2.5d elastostatic problem. Personal Communication, August 2006.

- [56] R. Gallego and J. Domínguez. A unified formulation of two existing time-domain boundary element approaches. *Communications in Applied Numerical Methods*, 6:17–25, 1990.
- [57] R. Gallego and J. Domínguez. Hypersingular bem for transient elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(10):1681–1705, 1996.
- [58] P. Galvín. *Análisis numérico y experimental de las vibraciones ocasionadas por el paso de trenes de alta velocidad en el suelo y en estructuras cercanas a la vía*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, abril 2007.
- [59] P. Galvín and J. Domínguez. Analysis of ground motion due to moving surface loads induced by high-speed trains. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31:931–941, 2007.
- [60] P. Galvín and A. Romero. 3d non-linear time domain fem-bem approach to soil-structure interaction problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(3):501–512, 2013.
- [61] W. W. Garvin. Exact transient solution of the buried line source problem. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 234(1199):528–541, March 1956.
- [62] L. Gaul, M. Kögl, and M. Wagner. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course with Advanced Topics*. Springer-Verlag, 2003.
- [63] H. G. Georgiadis and G. Lykotrafitis. A method based on the Radon transform for three-dimensional elastodynamic problems of moving loads. *Journal of Elasticity*, 65(1–3):87–129, 2001.
- [64] H.G. Georgiadis and J.R. Barber. Steady-state transonic motion of a line load over an elastic half-space: The corrected Cole/Huth solution. *Journal of Applied Mechanics*, 60:772–774, 1993.
- [65] H.G. Georgiadis, D. Vamvatsikos, and I. Vardoulakis. Numerical implementation of the integral-transform solution to lamb’s point-load problem. *Computational Mechanics*, 24:90–99, 1999.
- [66] K. F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Publications, New York, NY, USA, 1973.

- [67] R. Greer and C. Manning. Vibration isolation for railways. *Acoustics Bulletin*, 23(3):13–17, 1998.
- [68] F. Guan, I. D. Moore, and C. C. Spyarakos. Two dimensional transient fundamental solution due to suddenly applied load in a half-space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 17:269–277, 1998.
- [69] M. Gunaratne and O. Sanders. Response of a layered elastic medium to a moving strip load. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 20:191–208, 1996.
- [70] S. Gupta, W. Liu, G. Degrande, G. Lombaert, and W. Liu. Prediction of vibrations induced by underground railway traffic in Beijing. *Journal of Sound and Vibration*, 310(3):608–630, 2008.
- [71] S. Gupta, G. Lombaert, and G. Degrande. Experimental validation of a numerical model for subway induced vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 321:786–812, 2009.
- [72] T. G. Gutowski and C. L. Dym. Propagation of ground vibration: A review. *Journal of Sound and Vibration*, 49(2):179–193, 1976.
- [73] Carl E. Hanson, Jason C. Ross, and David A. Towers. High-speed ground transportation noise and vibration impact assessment. Technical Report DOT/FRA/ORD-12/15, U.S. Department of Transportation. Federal Railroad Administration, September 2012.
- [74] J. S. Heisey, K. H. Stokoe, and A. H. Meyer. Moduli of pavement systems from spectral analysis of surface waves. *Transportation Research Record*, 852:22–31, 1982.
- [75] R.L. Higdon. Radiation boundary conditions for elastic wave propagation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27(4):831–869, 1989.
- [76] R. A. Hood, J. Greer, M. Breslin, and P. R. Williams. The calculation and assessment of ground-borne noise and perceptible vibration from trains in tunnels. *Journal of Sound and Vibration*, 193(1):215–225, 1996.
- [77] H. Hung and Y. Yang. A review of researches on ground-borne vibrations with emphasis on those induced by trains. In *Proceedings of the National Science Council, Republic of China. Part A: Physical Science and Engineering*, volume 25, pages 1–16, 2001.

- [78] H. Hunt and M. F. M. Hussein. *Ground-borne vibration transmission from road and rail systems: prediction and control*, chapter 123. Handbook of noise and vibration control. John Wiley & Sons, New York, 2007.
- [79] H.E.M. Hunt. *Measurement and modeling of traffic-induced vibration*. PhD thesis, University of Cambridge, 1988.
- [80] G. Iovane, A.V. Nasedkin, and M. Ciarletta. Fundamental solutions in plane problem for anisotropic elastic medium under moving oscillating source. In *Advanced Problems in Mechanics*, St. Petesburg, Russia, June 22-July 2 2003.
- [81] J. Jau. Response of a train moving on multi-span railway bridges undergoing ground settlement. *Engineering Structures*, 31:2115–2122, 2009.
- [82] P. Jean, C. Guigou, and M. Villot. A 2.5d bem model for ground-structure interaction. *Building Acoustics*, 11(3):157–173, 2004. cited By (since 1996)8.
- [83] L. R. Johnson. Green's function for lamb's problem. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 37(1):99–131, 1974.
- [84] R. W. Johnson. *The Handbook of Fluid Dynamics*. CRC Press, Springer, 1998.
- [85] C. J. C. Jones and J. R. Block. Prediction of ground vibration from freight trains. *Journal of Sound and Vibration*, 193(1):205–213, May 1996.
- [86] C.J C. Jones, X.Sheng, and M.Petyt. Simulations of ground vibration from a moving harmonic load on a railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 231(3):739–751, March 2000.
- [87] D.V. Jones, D. Le Houedec, A. T. Peplow, and M. Petyt. Ground vibration in the vicinity of a moving harmonic rectangular load on a half-space. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 17(1):153–166, 1998.
- [88] R. Jones. Surface wave technique for measuring the elastic properties and thickness of roads: Theoretical development. *British Journal of Applied Physics*, 13(1):21–29, 1962.

- [89] S.H. Ju and H.C. Li. 3d analyses of open trench barriers filled with water.
- [90] M. Katou, T. Matsuoka, O. Yoshioka, Y. Sanada, and T. Miyoshi. Numerical simulation study of ground vibrations using forces from wheels of a running high- speed train. *Journal of Sound and Vibration*, 318:830–849, 2008.
- [91] S.E. Kattis, D. Polyzos, and D.E. Beskos. Modelling of pile wave barriers by effective trenches and their screening effectiveness. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 18(1):1–10, 1999.
- [92] E. Kausel. An explicit solution for the green functions for dynamic loads in layered media. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 82:29505, May 1981.
- [93] E. Kausel. *Fundamental Solutions in Elastodynamic. A Compendium*. Cambridge University Press, 2006.
- [94] E. Kausel and R. Peek. Dynamic loads in the interior of a layered stratum: an explicit solution. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72:1459–1481, 1982.
- [95] E. Kausel and J. Roësset. Semianalytic hyperelement for layered strata. *Journal of the engineering mechanics division, ASCE*, 103:569–588, 1977.
- [96] E. Kausel and J. Roësset. Stiffness matrices for layered soils. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 71:1743–1761, 1981.
- [97] E. Kausel and S. Seale. Static loads in layered halfspaces. *Journal of Applied Mechanics*, 54:403–408, 1987.
- [98] H. Kawase and K. Aki. A study on the response of a soft basin for incident s, p and rayleigh waves with special reference to the long duratin observed in mexico city. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 79(5):1361–1382, 1989.
- [99] T. Kobayashi. Some problems of the boundary integral equation method in elastodynamics. In C. A. Brebbia, editor, *Boundary Elements V*, pages 775–784, Berlin, 1983. Springer.

- [100] H. Lamb. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, (203):1–42, 1904.
- [101] G. Lefeuvre-Mesgouez, D. Le-Houédec, and A. T. Pepelow. Ground vibration in the vicinity of a high-speed moving harmonic strip load. *Journal of Sound and Vibration*, 231(5):1289–1309, 2000.
- [102] M. Lieb and B. Sudret. A fast algorithm for soil dynamics calculations by Wavelet decomposition. *Archives of Applied Mechanics*, 68(3–4):147–157, April 1998.
- [103] J.F. Lu, D.S. Jeng, and S. Williams. A 2.5-d dynamic model for a saturated porous medium. part ii: Boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*, 45(2):359–377, 2008.
- [104] J.E. Luco and R.J. Apsel. On the green's functions for a layered halfspace. part i. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73(4):909–929, 1983.
- [105] J. Lysmer and R. Kuhlemeyer. Finite dynamic model for infinite media. *Journal of the engineering mechanics division, ASCE*, 95:859–877, 1969.
- [106] J. Lysmer and G. Waas. Shear waves in plane infinite structures. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 98:85–105, 1972.
- [107] C. Madshus, B. Bessason, and L. Hårvik. Prediction model for low frequency vibrations from high speed railways on soft ground. *Journal of Sound and Vibration*, 193(1):195–203, 1996.
- [108] V.M. Malhatra and N.J. Carino. *CRC handbook on nondestructive testing of concrete*. CRC Press, Inc., 1991.
- [109] F. Medina. *Análisis de la respuesta sísmica de presas incluyendo efectos de interacción suelo-agua-estructura*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 1987.
- [110] J. Melke. Noise and vibration from underground railway lines: proposal for a prediction procedure. *Journal of Sound and Vibration*, 120(2):391–406, 1988.

- [111] J. Miklovitz. *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*. North-Holland, 1978.
- [112] G. F. Miller and H. Pursey. The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid. *Proceedings of Royal Society. A*, 223(1155):521–541, 1954.
- [113] R. D. Mindlin. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physycs*, 7:195–202, 1936.
- [114] R. D. Mindlin. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. Technical Report 8, Columbia University, New York, May 1953.
- [115] P. Moczo, J. Kristek, and E. Bystrický. Efficiency and optimization of the 3-d finite-difference modeling of seismic ground motion. *Journal of Computational Acoustics*, 9(2):593–609, 2001.
- [116] E.E. Ungar nad E.K. Bender. Vibrations produced in buildings by passage of subway trains; parameter estimation for preliminary design. In *Proceeding of de 4th International Conferences on Noise Control Engineering, INTER-NOISE 75*, pages 491–498, 1975.
- [117] S. Nazarian, K. H. Stokoe, and W. R. Hudson. Use of spectral-analysis-of-surface waves method for determination of moduli and thickness pf pavement systems. 930:38–45, 1983.
- [118] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, and J.R. Buck. *Tratamiento de señales en tiempo discreto*. Pearson, Prentice Hall, 1999.
- [119] R. Y. S. Pak. Asymmetric wave propagation in an elastic half-space by a method of potentials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 54(1):121–126, 1987.
- [120] F. Paris and J. Cañas. *Boundary Element Method. Fundamentals and Applications*. Oxford University Press, Inc., New York, 1997.
- [121] J. Park and E. Kausel. Impulse response of elastic half-space in the wave number-time domain. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(10):1211–1222, 2004.
- [122] W. L. Pilant. *Elastic waves in the earth*, volume 11 of *Developments in Solid Earth Geophysics*. Elsevier, Amsterdam, 1979.

- [123] M. Ramos Quirós. Estudio comparativo entre el modelo numérico y el experimental de la función de respuesta en frecuencia en un suelo destinado a traza de ferrocarril. Master's thesis, Universidad de Granada, 2011.
- [124] M. Rahman. *Applications of Fourier Transforms to Generalized Functions*. WIT Press, 2011.
- [125] K. M. Rasmussen. *Stress Wave Propagation in Soils Modeled by the Boundary Element Method*. PhD thesis, Aalborg University, Denmark, November 1999.
- [126] Lord Rayleigh. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 17:4–11, 1885.
- [127] G. Rieckh, W. Kreuzer, H. Waubke, and P. Balazs. A 2.5D-Fourier-BEM model for vibrations in a tunnel running through layered anisotropic soil. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36:960–967, 2012.
- [128] S. Rokhlin and L. Wang. Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media: stiffness matrix method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112(3):822–834, 2002.
- [129] A. Romero, P. Galvín, and J. Domínguez. A time domain analysis of train induced vibrations. *Earthquakes and Structures*, 3(3):822–834, 2012.
- [130] M. Sansalone and W.B. Streett. The use of the impact-echo method and field instrument for nondestructive testing of concrete structures. In *Proceedings of the Internacional Symposium on Nondestructive Testing in Civil Engineering*, Berlin, Germany, September 1995.
- [131] M. Schevenels, G. Lombaert, G. Degrande, D. Degrauwe, and B. Schoors. The green's functions of a vertically inhomogeneous soil with a random dynamic shear modulus. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 22(1):100–111, 2007.
- [132] M. Schevenels, G. Lombaert, G. Degrande, and S. François. A probabilistic assessment of resolution in the sasw test and its impact on the prediction of ground vibrations. *Geophysical Journal International*, 172(1):262–275, 2008.

- [133] J. Schlue. Finite element matrices for seismic surface waves in three-dimensional structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 69(5):1425–1437, 1979.
- [134] X. Sheng and C. J. C. Jones. Prediction of ground vibration from trains using the wavenumber finite and boundary element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3-5):575–586, 2006.
- [135] X. Sheng, C. J. C. Jones, and D. J. Thompson. Moving Green’s functions for a layered circular cylinder of infinite length. Technical Report 885, ISVR Technical Memorandum, University of Southampton, 2002.
- [136] X. Sheng, C.J.C. Jones, and M. Petyt. The fourier transformed stationary and moving dynamic flexibility matrices of a layered ground. Technical Report 837, ISVR Technical Memorandum, University of Southampton, 1999.
- [137] X. Sheng, C.J.C. Jones, and D.J. Thompson. Modelling ground vibration from rail traffic using the Discrete Wavenumber Finite and Boundary Element Methods. Technical Report 899, ISVR Technical Memorandum, University of Southampton, 2002.
- [138] I.N. Sneddon. Stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infite solid. *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*, 1(1):57–62, 1952.
- [139] F. Martínez Soto. Análisis experimental de la curva de dispersión de velocidades de ondas superficiales en morteros a edad temprana. Master’s thesis, Universidad de Granada, 2011.
- [140] A. A. Stamos and D. E. Beskos. Dynamic analysis of large 3-d underground structures by the bem. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 24:917–934, 1995.
- [141] A.S.J. Suiker, C.S. Chang, R. De Borst, and C. Esveld. Surface waves in a stratified half space with enhanced continuum properties. Part 1: Formulation of the boundary value problem. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 18(5):749–768, September 1999.
- [142] A.S.J. Suiker, C.S. Chang, R. De Borst, and C. Esveld. Surface waves in a stratified half space with enhanced continuum properties. Part 2:

- Analysis in the wave characteristics in regard to high-speed railway tracks. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 18(5):769–784, September 1999.
- [143] A.S.J. Suiker, A.V. Metrikine, and R. De Borst. Dynamic behavior of a layer of discrete particles. Part 1: Analysis of body waves and eigen modes. *Journal of Sound and Vibration*, 240(1):1–18, 2001.
- [144] A.S.J. Suiker, A.V. Metrikine, and R. De Borst. Dynamic behavior of a layer of discrete particles. Part 2: Response to a uniformly moving, harmonically vibrating load. *Journal of Sound and Vibration*, 240(1):19–39, 2001.
- [145] F. J. Sánchez-Sesma and E. Rosenblueth. Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident sh waves. *Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, 7:441–450, 1979.
- [146] A. Tadeu, J. António, and L. Godinho. Green's functions for two-and-a-half-dimensional elastodynamic problems in a half space. *Computational Mechanics*, 27:484–491, 2001.
- [147] A. Tadeu and E. Kausel. Green's functions for two-and-a-half-dimensional elastodynamic problems. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(10):1093–1097, October 2000.
- [148] M. Tadi. Finite difference methods for elastic wave propagation in layered media. *Journal of Computational Acoustics*, 12(2):257–276, 2004.
- [149] W. S. Thompson. Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid. *Cambridge and Dublin Math. J.*, February 1848.
- [150] W.T. Thomson. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, 21:89, 1950.
- [151] A. Verruijt and C. Cornejo-Córdova. Moving loads on an elastic half-plane with hysteretic damping. *Journal of Applied Mechanics*, 68:915–922, November 2001.
- [152] J. Virieux. SH-wave propagation in heterogeneous media. Velocity stress finite difference method. *Geophysics*, 49(11):1933–1942, 1984.

- [153] J. Virieux. P-SV wave propagation in heterogeneous media. Velocity stress finite difference method. *Geophysics*, 51(4):889–901, 1986.
- [154] H. E. von Gierke and A. J. Brammer. *Harris' Shock and Vibration Handbook (5th Edition)*, chapter Chapter 42: Effects of Shock and Vibration on Humans. McGraw-Hill, 2002.
- [155] G. Waas. *Linear two-dimensional analysis of soil dynamics problems in semi-infinite layered media*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1972.
- [156] J. Walker and M. Chan. Human response to structurally radiated noise due to underground railway operations. *Journal of Sound and Vibration*, 193(1):49–63, 1996.
- [157] W. White, S. Valliappan, and I. Lee. Unified boundary for finite dynamic models. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 103:949–964, 1977.
- [158] L. C. Wrobel. *The Boundary Element Method, Volume 1, Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*. Wiley, 2002.
- [159] Y.B. Yang and L.C. Hsu. A review of researches on ground-borne vibrations due to moving trains via underground tunnels. *Advances in Structural Engineering*, 9(3):377–392, 2006.
- [160] Y.B Yang, H.H Hung, and D.W Chang. Train-induced wave propagation in layered soils using finite/infinite element simulation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 23(4):263–278, 2003.
- [161] D. Zill, W.S. Wright, and M.R. Cullen. *Advanced Engineering Mathematics*. Jones and Barlett Publishers, 2011.