I NEINIM
PETITS

ANALYSE

DES

INFINIMENT PETITS.

ANALYSE

DES

INFINIMENT PETITS.

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS

Par M. le Marquis DE L'HÔPITAL,

Suivie d'un nouveau Commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage.

Par l'Auteur du Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des Leçons de Mathématique de M. l'Abbé de la Caille.

A AVIGNON,
Chez la Veuve GIRARD & FRANÇOIS SEGUIN, Impr. Libraires, près la Place St. Didier.

Se trouve à Paris,

Chez
JEAN DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.
CHARLES SAILLANT, Libraire, rue S. Jean de Beauvais.
C. JOSEPH PANCKOUCKE, Libraire, rue, & à côté de la Comédie Françoise.
DURAND *Neveu*, Libraire, rue S. Jacques.

M. DCC. LXVIII.
AVEC APPROBATION ET PERMISSION.

PRÉFACE

DE L'ÉDITEUR,

*Où l'on trouvera ce qu'on doit penſer de l'*Analyſe des Infiniment Petits , *& des divers Commentaires qui en ont été faits.*

IL eſt des hommes dont le nom ſeul fait l'éloge. M. le Marquis de l'*Hôpital* eſt de ce nombre ; auſſi , en offrant au Public la troiſieme édition du *Traité des Infiniment Petits* , ne nous jetterons-nous point dans le panégyrique de l'Auteur. Pour donner ſeulement en deux mots l'idée la plus étendue de ce rare & profond Génie , nous ferons remarquer qu'il a vécu dans un ſiécle où les Mathématiciens ſe propoſoient , par maniere de défi , les problêmes les plus embrouillés , & qu'il ne ſe trouvoit dans le monde que M. M. *Nevvton*, *Leibnitz*, les deux *Bernoully*, *Huyghens*, & M. le Marquis de l'*Hôpital* qui fuſſent en état d'en donner la ſolution. Nous ajouterons que, lorſque M. *Huyghens* voulut s'adonner au calcul differentiel, il s'adreſſa à M. le Marquis de l'*Hôpital*, ſous la conduite de qui il fit les progrès les plus ſurprenants dans la Géométrie ſublime. La route que cet habile Maître lui fraya, nous la trouvons dans l'*Analyſe des Infiniment Petits*; auſſi cet Ouvrage, que le monde ſçavant regardera toujours comme un chef-d'œuvre, eſt-il le ſeul livre que l'on puiſſe mettre avec ſuccès entre les mains de ceux qui ont appris tout ce que l'on comprend dans ce ſiécle éclairé ſous le nom d'*élémens de Geométrie & d'Algébre*. Je ne diſſimulerai pas cependant qu'on a reproché à M. le Marquis de l'*Hôpital* de n'avoir écrit que pour les Sçavans, tellement rompus dans le calcul, qu'ils

entendent tout à demi mot. Ce fut pour mettre ſon Ouvrage à la portée des Commençans ordinaires, que M. *Crouzas* nous en donna, en 1721, le Commentaire en un volume *in*-4°., précédé de deux amples diſcours, dont l'un eſt ſur la nature des *Infiniment Petits*, & l'autre ſur le *Calcul des Puiſſances*. A peine ſon Commentaire vit-il le jour, qu'il s'empreſſa d'en envoyer un exemplaire à M. *Jean Bernoully*. Ce Sçavant l'examina; & après y avoir découvert des bévues qu'on pardonneroit à peine à un écolier, il lui dit en propres termes (*a*) qu'il auroit mieux fait de lui envoyer ſon Commentaire en manuſcrit, avant que de le faire imprimer; qu'il y auroit fait des remarques qui n'auroient pas été inutiles : il ajouta qu'il auroit dû changer pluſieurs de ſes manieres de commenter, & leur donner un

(*a*) *Les Œuvres de Jean Bernoully*, Tom. 4. pag. 160. & ſuiv.

autre tour, de peur que les ignorans ne prennent ſes explications dans un mauvais ſens, & ne cherchent par là l'occaſion de décrier l'*Analyſe des Infiniment Petits*.

Ce n'eſt pas là la ſeule critique qu'ait eu à eſſuyer le Commentaire de M. *Crouzas*. M. *Saurin*, Membre de l'Académie Royale des Sciences, démontre dans les Mémoires de cette célébre Compagnie (a) que le Commentateur eſt un guide dangereux dans la grande & difficile queſtion *de Maximis & Minimis*, & il l'exhorte à retoucher ſon Ouvrage dans une ſeconde édition. Le cas qu'a fait le Public de la premiere, a diſpenſé l'Auteur de nous en donner une ſeconde.

A peine le Commentaire de M. *Crouzas* commençoit-il à paroître, que la mort nous enleva le célébre *Varignon*. Ce grand Géométre, l'ami intime de M. le Marquis de l'*Hôpital*,

(a) *Année* 1723, *pag.* 234 & *ſuiv.*

avoit lu l'*Analyſe des Infiniment Petits* avec l'attention la plus réfléchie. On lui trouva parmi ſes papiers un manuſcrit contenant non-ſeulement des explications des endroits les plus obſcurs & les plus difficiles de ce Traité, mais encore des Additions conſidérables, des Propoſitions nouvelles, des Problêmes ajoutés à ceux de M. le Marquis de l'*Hôpital*, des Régles, des Conſtructions, des Méthodes differentes, &c. Ce précieux manuſcrit fut donné au Public en l'année 1725 en un volume *in*-4°., ſous le titre d'*Eclairciſſements ſur l'Analyſe des Infiniment Petits*. Cet Ouvrage, tout excellent qu'il eſt, ne peut guere être mis entre les mains d'un Commençant; M. *Varignon* n'y éclaircit pour l'ordinaire que les points qui ont été capables de l'arrêter lui-même. D'ailleurs cet Ouvrage poſthume a été imprimé avec ſi peu d'exactitude, qu'il ſeroit preſque plus difficile de corriger les fautes dont il fourmille, que de lire ſans Commentaire l'*Analyſe des Infiniment Petits*.

L'Ouvrage de M. le Marquis de l'*Hôpital* doit ſe trouver comme néceſſairement dans la bibliothéque de tous les Mathématiciens. Les Sçavants en ont beſoin pour le conſulter, & pour ſe rappeller en peu de mots des propoſitions très compliquées, qu'il n'eſt que trop facile d'oublier. Les Commençans doivent en faire leur étude journaliere, lorſqu'ils veulent paſſer de la Géométrie ordinaire à la Géométrie ſublime : on ne peut ſe regarder comme Mathématicien, que lorſqu'on a lu avec goût l'*Analyſe des Infiniment Petits*.

Il nous paroît que l'édition que nous en donnons, ne peut manquer d'être favorablement accueillie. Les Sçavants, qui n'ont beſoin que du texte de l'Auteur, le trouveront au commencement du Volume, imprimé avec l'exactitude la plus ſcrupuleuſe. Les Notes que nous y avons ajoutées, & qui ne ſont qu'indiquées dans le corps de l'Ouvrage, aideront les Commençans à ſe paſſer de guide dans la route

épineuſe du calcul differentiel. Ces Notes ſont au nombre de cinquante-cinq. Les quatre premieres ſont pour la premiere ſection du Traité des *Infiniment Petits*. Les 21 ſuivantes ſervent de commentaire à la ſeconde ſection. L'importante queſtion *de Maximis & Minimis* que M. le Marquis de l'*Hôpital* a traitée dans ſa troiſieme ſection, eſt éclaircie par 12 Notes conſidérables. Un pareil nombre de Notes eſt deſtiné à commenter la matiere de la quatrieme ſection, c'eſt-à-dire, les *différences des différences*, & les ſept exemples qui y ont rapport. Enfin ce qu'il y a de difficile dans les ſix dernieres ſections ſe trouve expliqué dans les ſix dernieres Notes. Mais ce ne ſont là que des généralités, & il eſt néceſſaire d'entrer ici dans un détail beaucoup plus circonſtancié.

La premiere ſection de l'*Analyſe des Infiniment Petits* préſente, il eſt vrai, les régles du calcul differentiel ; mais elle les préſente d'une maniere ſi conciſe, qu'il eſt preſque impoſſible qu'un homme qui les lit pour la premiere fois, apprenne, ſans le ſecours d'un habile Maître, à differentier des produits compliqués, des quantités fractionnaires, des nombres affectés d'un ou pluſieurs ſignes radicaux, &c. Nous eſpérons qu'on nous ſçaura quelque gré d'avoir donné à ces régles, dans nos quatre premieres Notes, une étendue ſuffiſante, & de les avoir miſes à la portée de ceux qui ne ſçavent que les régles du calcul ordinaire.

M. le Marquis de l'*Hôpital* ſuppoſe dans ſa ſeconde ſection que le Lecteur ſe rappelle parfaitement, non-ſeulement les équations de toutes les eſpèces de *ſections coniques*, de quelque genre qu'elles ſoient; mais celles encore de la *cycloide*, de la *ſpirale*, de la *conchoide*, de la *ciſſoide*, de la *quadratrice*, de la *logarithmique ordinaire* & *ſpirale* &c. Nous avons cru rendre un véritable ſervice au commun des Lecteurs, en leur donnant une idée nette des courbes que nous venons de nommer, & en leur rappellant les

démonſtrations ſur leſquelles ſont fondées les équations qui les diſtinguent les unes des autres. C'eſt-là ce qu'il y a de plus intéreſſant dans les 21 Notes qui forment le commentaire de la ſeconde ſection.

Des 12 Notes que nous avons faites pour éclaircir la queſtion *de Maximis & Minimis*, celles qui ſont analogues aux articles 49, 58, 59 & 61, je veux dire, les Notes 28^{e}, 35^{e}, 36^{e} & 37^{e}, nous paroiſſent les plus importantes. En liſant la Note 28^{e}, on ſe convaincra de plus en plus qu'il eſt bien rare qu'il faille ſe jetter dans l'infini, pour trouver le *Maximum* ou le *Minimum* d'une courbe dont l'équation eſt donnée. M. le Marquis de l'*Hôpital* ne s'y eſt jetté qu'une fois dans tout le cours de ſa troiſieme ſection, c'eſt à l'article 49; & la Note qui ſert de commentaire à cet article, prouve qu'il pouvoit arriver à ſon même réſultat, en allant par le chemin ordinaire.

La Note 35^{e}, nous paroit prouver que M. le Marquis de l'*Hôpital* n'a pas toujours pris le chemin le plus court, pour parvenir à la ſolution des problêmes qu'il propoſe. Quoiqu'il ne ſoit pas néceſſaire d'avoir recours à l'interſection du cercle & de l'hyperbole, pour réſoudre le problême qui fait la matiere de l'article 58, cependant nous avons cru devoir chercher le grand axe de la courbe dont l'équation eſt donnée dans cet article. Quelque critique, dans un moment de mauvaiſe humeur, auroit pu ſe croire en droit de nous reprocher que nous ne rejettions la méthode propoſée, que pour nous épargner la peine de conſtruire une hyperbole ſur une équation trouvée.

L'article 59 contient une équation du quatrieme degré. Nous avons calculé cette longue équation, & nous l'avons transformée en quelqu'une de celles qui ſe trouvent dans tous les livres élémentaires d'Algébre qui traitent des degrés ſupérieurs. Ces transformations ont fait la matiere de la 36^e^ Note.

Enfin la 37^e^ Note a rapport à l'article 61, dans lequel on propoſe de

trouver le jour du plus petit crépuſcule, l'élévation du pole étant donnée. Comme nous ſçavions que les M. M. *Bernoully* avoient reſté plus de cinq ans (*a*) à réſoudre ce fameux problême, nous n'avons rien oublié pour donner à cette Note toute la perfection dont elle étoit ſuſceptible.

Juſqu'à préſent M. le Marquis de l'*Hôpital* n'a employé que le calcul des *différences premieres*. Il fait dans les ſept dernieres ſections de ſon Ouvrage grand uſage des *différences des différences*; auſſi n'a-t-il pas manqué d'aſſigner les régles de ce calcul au commencement de ſa quatrieme ſection. Nous avons donné aſſez d'étendue à notre 40^e^ Note, pour mettre ces régles dans le plus grand jour. Nous prions le Lecteur de l'examiner avec ſoin, & d'appliquer à différents cas particuliers la formule générale qui ſert à trouver la *différence ſeconde* d'une quantité quelconque élevée à une puiſſance quelconque. Nous

(*a*) *Œuvres de Jean Bernoully*, *Tom.* I. *pag.* 64.

le prions encore de faire une attention ſpéciale aux Notes 41, 45 & 48. La premiere nous paroit néceſſaire pour l'intelligence de l'article 66, où l'on propoſe le problême qui conſiſte à *déterminer le point d'inflexion ou de rebrouſſement dans une courbe dont la nature eſt donnée*. Dans la ſeconde nous démontrons que la marque que donne M. le Marquis de l'*Hôpital* pour trouver le point de *rebrouſſement*, n'eſt rien moins qu'une marque ſûre : c'eſt M. *Varignon* qui nous a fourni cette démonſtration. Enfin la troiſieme apprend à calculer les équations du cinquieme degré ; l'article 73 auquel cette Note a rapport, fournit une équation de cette eſpèce. Voilà ce que nous avons fait, pour mettre à la portée des Commençans ordinaires les quatre premieres ſections du Traité de l'*Analyſe des Infiniment Petits*. Nous ſommes perſuadés que quiconque nous aura ſuivi juſqu'à préſent, ſera en état de lire preſque ſans commentaire le reſte de l'Ouvrage. Auſſi n'avons-nous fait que 6 Notes pour les ſix dernieres

ſections. L'on comprend que nous n'avons pas oublié dans ces Notes les *développées*, & les *cauſtiques* par réflexion & par refraction ; ce ſont là des courbes de la derniere importance.

Quoique nous ayons droit de regarder comme un ouvrage qui nous appartienne en propre, les additions dont nous venons de rendre compte au Public ; nous nous ferons cependant un devoir de publier que la lecture des *éclairciſſemens* de M. *Varignon* nous a fait naître la plupart des idées que nous avons mis en œuvre ; & nous ajouterons que nous avons profité de quelques bons endroits qui ſe trouvent dans le *commentaire* de M. *Crouzas*. (*a*)

Mais quelles connoiſſances faut-il

(*a*) *Cet Auteur, quoiqu'il n'ait pas réuſſi à commenter M. le Marquis de l'Hôpital, auroit dû être traité avec un peu plus de ménagement par M.M. Bernoully & Saurin. Ses Traités de Géometrie & d'Algebre ne paſſent pas pour mauvais ; & ce fut ſon mérite reel qui lui procura en différens tems les chaires de Philoſophie de Groningue & de Lauſanne, une place d'Aſſocié étranger à l'Académie Royale des Sciences de Paris, & la charge de Gouverneur du Prince Frederic de Heſſe Caſſel, neveu du Roi de Suéde.*

avoir acquiſes pour lire avec ſuccès l'*Analyſe des Infiniment Petits* ? point d'autres que celles qui ſont renfermées dans les Traités élémentaires de Mathématiques. Ces Traités comprennent l'Arithmétique ordinaire & algébrique pouſſée juſqu'au calcul des radicaux, aux progreſſions & proportions, à la formation & à la ſommation des ſuites : l'Analyſe ou la ſcience des équations de toute ſorte de degrés : la Géométrie ſpéculative & pratique : la Trigonométrie au moins rectiligne, en y comprenant la maniere de calculer les logarithmes non-ſeulement des ſinus, tangentes & ſécantes, mais ceux encore des nombres entiers & rompus : enfin le Traité des ſections coniques. Toutes ces connoiſſances ſe trouvent réunies dans les élémens d'Algébre & de Géométrie de M. l'Abbé *de la Caille*, & dans le commentaire que nous en avons ſous le titre : de *Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des leçons de Mathématique* du même Auteur. Ce n'eſt qu'après la lecture de ces deux Ouvra-

ges, que je voudrois qu'on s'adonnât au calcul différentiel. Tout bon eſprit ſera alors en état d'y faire, avec les ſecours que nous lui fourniſſons, les plus ſenſibles progrès.

Les *Infiniment Petits* de M. le Marquis de l'*Hôpital* ont déja eu deux éditions, l'une en 1696, & l'autre en 1715. Celle-là fut faite ſous les yeux de l'Auteur avec toute l'exactitude imaginable. Les 14 fautes qui s'y ſont gliſſées ne peuvent induire le Lecteur en aucune erreur ; elles ſont indiquées à la fin du Volume. Pour l'édition de 1715, elle a été dirigée par un homme qui n'avoit pas apparemment les premieres idées de l'Algébre. L'on y trouve les fautes les plus groſſieres & les plus propres à déconcerter un Commençant. Je pourrois en indiquer un très grand nombre ; je me contenterai d'avertir ceux qui ſe la ſont procurée, que les *expoſants* qui devroient être négatifs, n'y ont pour l'ordinaire aucun ſigne, ce qui les met dans la claſſe des *expoſants* poſitifs. Il ſuffit d'avoir la moindre idée de calcul, pour ſentir combien un pareil *qui pro quo* eſt à craindre dans un livre d'Algébre. L'une & l'autre de ces éditions forment une brochure *in*-4°. de 181 *pages*, *ſur caractere S. Auguſtin.* L'on a fait la troiſieme édition ſur le même caractere. Mais le peu de matiere que fournit le texte de l'Auteur, & le deſir que l'on a eu de procurer, à peu de frais, à tous les Mathématiciens un Ouvrage dont la néceſſité eſt univerſellement reconnue, nous ont fait préférer le *format in*-8°. à l'ancien *format*. C'eſt rendre un véritable ſervice au Public, que de lui préſenter à un prix très-modique, en un volume d'environ 500 pages, orné d'un grand nombre de planches en taille douce, l'*Analyſe des Infiniment Petits*, & le *commentaire* des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage immortel. L'Imprimeur a ſujet d'eſpérer que l'on ſera content de la partie typographique. Il n'a rien épargné, pour que la beauté de l'édition répondît à la beauté des choſes que le Livre renferme.

PRÉFACE

PRÉFACE
DE L'AUTEUR.

L'ANALYSE qu'on explique dans cet Ouvrage, ſuppoſe la commune; mais elle en eſt fort différente. L'Analyſe ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénétre juſques dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies; elle découvre les rapports de ces différences, & par-là elle fait connoître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits ſont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyſe s'étend au-delà de l'infini : car elle ne ſe borne pas aux différences infiniment petites; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troiſiemes, quatriemes, & ainſi de ſuite, ſans trouver jamais de terme qui la puiſſe arrêter. De ſorte qu'elle n'embraſſe pas ſeulement l'infini; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis.

Une Analyse de cette nature pouvoit seule nous conduire jusqu'aux véritables principes des lignes courbes. Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés, & ne différant entr'elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entr'eux; il n'appartient qu'à l'Analyse des infiniment petits de déterminer la position de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment, c'est-à-dire les tangentes de ces courbes, leurs perpendiculaires, leurs points d'infléxion ou de rebroussement, les rayons qui s'y réfléchissent, ceux qui s'y rompent, &c.

Les polygones inscrits ou circonscrits aux courbes, qui par la multiplication infinie de leurs côtés, se confondent enfin avec elles, ont été pris de tout temps pour les courbes mêmes. Mais on en étoit demeuré là : ce n'est que depuis la découverte de l'Analyse dont il s'agit ici, que l'on a bien senti l'étendue & la fécondité de cette idée.

Ce que nous avons des Anciens sur ces matieres, principalement d'*Archimede*, est assurément digne d'admiration. Mais outre qu'ils n'ont touché qu'à fort peu de courbes, qu'ils n'y ont même touché que légérement; ce ne sont presque par tout que propositions particulieres & sans ordre, qui ne font appercevoir aucune méthode réguliere & suivie. Ce n'est pas cependant qu'on leur en puisse faire un reproche légitime : ils ont eu besoin d'une extrême force de génie (*a*) pour percer à travers tant d'obscurités, & pour entrer les premiers dans des païs entierement inconnus. S'ils n'ont pas été loin, s'ils ont marché par de longs circuits; du moins, quoi qu'en dise (*b*) *Viette*, ils ne se sont point égarés : & plus les chemins qu'ils

(*a*) *Archimedis de lineis spiralibus tractatum cùm bis terque legissem, totasque animi vires intendissem, ut subtilissimarum demonstrationum de spiralium tangentibus artificium adsequerer; nusquam tamen, ingenuè fatebor, ab earum contemplatione ita certus recessi, quin scrupulus animo semper hæreret, vim illius demonstrationis me non percepisse totam, &c.* Bullialdus Præf. de lineis spiralibus.

(*b*) *Si verè Archimedes, fallaciter conclusit Euclides, &c.* Supl. Geom.

ont tenus étoient difficiles & épineux, plus ils ſont admirables de ne s'y pas être perdus. En un mot il ne paroît pas que les Anciens en ayent pu faire davantage pour leur temps: ils ont fait ce que nos bons eſprits auroient fait en leur place; & s'ils étoient à la nôtre, il eſt à croire qu'ils auroient les mêmes vûes que nous. Tout cela eſt une ſuite de l'égalité naturelle des eſprits & de la ſucceſſion néceſſaire des découvertes.

Ainſi il n'eſt pas ſurprenant que les Anciens n'ayent pas été plus loin; mais on ne ſçauroit aſſez s'étonner que de grands hommes, & ſans doute d'auſſi grands hommes que les Anciens, en ſoient ſi long-temps demeurés là; & que par une admiration preſque ſuperſtitieuſe pour leurs ouvrages, ils ſe ſoient contentés de les lire & de les commenter, ſans ſe permettre d'autre uſage de leurs lumieres, que ce qu'il en falloit pour les ſuivre; ſans oſer commettre le crime de penſer quelquefois par eux-mêmes, & de porter leur vûe au-delà de ce que les Anciens avoient découvert. De cette maniere bien des gens

travailloient, ils écrivoient, les Livres ſe multiplioient, & cependant rien n'avançoit: tous les travaux de pluſieurs ſiécles n'ont abouti qu'à remplir le monde de reſpectueux commentaires & de traductions répetées d'originaux ſouvent aſſez mépriſables.

Tel fut l'état des Mathématiques, & ſur-tout de la Philoſophie, juſqu'à M. *Deſcartes*. Ce grand homme pouſſé par ſon génie & par la ſupériorité qu'il ſe ſentoit, quitta les Anciens pour ne ſuivre que cette même raiſon que les Anciens avoient ſuivie; & cette heureuſe hardieſſe, qui fut traitée de révolte, nous valut une infinité de vûes nouvelles & utiles ſur la Phyſique & ſur la Géometrie. Alors on ouvrit les yeux, & l'on s'aviſa de penſer.

Pour ne parler que des Mathématiques, dont il eſt ſeulement ici queſtion, M. *Deſcartes* commença où les Anciens avoient fini, & il débuta par la ſolution d'un Problême où *Pappus* dit (*a*) qu'ils étoient tous demeurés. On ſçait juſqu'où

(*a*) *Collect. Mathem. Lib. 7. initio.*

il a porté l'Analyse & la Géométrie, & combien l'alliage qu'il en a fait, rend facile la solution d'une infinité de Problêmes qui paroissoient impénétrables avant lui. Mais comme il s'appliquoit principalement à la résolution des égalités, il ne fit d'attention aux courbes, qu'autant qu'elles lui pouvoient servir à en trouver les racines: de sorte que l'Analyse ordinaire lui suffisant pour cela, il ne s'avisa point d'en chercher d'autre. Il n'a pourtant pas laissé de s'en servir heureusement dans la recherche des tangentes; & la méthode qu'il découvrit pour cela lui parut si belle, qu'il ne fit point difficulté de dire, (a) que *ce Problême étoit le plus utile & le plus général, non-seulement qu'il sçût, mais même qu'il eût jamais désiré de sçavoir en Géométrie.*

Comme la Géométrie de M. *Descartes* avoit mis la construction des Problêmes par la résolution des égalités fort à la mode, & qu'elle avoit donné de grandes ouvertures pour cela; la plupart des Géometres s'y appliquerent, ils y firent aussi

(a) *Geomet. Liv.* 2.

de nouvelles découvertes, qui s'augmentent & se perfectionnent encore tous les jours.

Pour M. *Pascal*, il tourna ses vues de tout un autre côté: il examina les courbes en elles-mêmes, & sous la forme de polygone; il rechercha les longueurs de quelques-unes, l'espace qu'elles renferment, le solide que ces espaces décrivent, les centres de gravité des unes & des autres, &c. Et par la considération seule de leurs élémens, c'est-à-dire des infiniment petits, il découvrit des Méthodes générales & d'autant plus surprenantes, qu'il ne paroît y être arrivé qu'à force de tête & sans Analyse.

Peu de temps après la publication de la Méthode de M. *Descartes* pour les tangentes, M. *de Fermat* en trouva aussi une, que M. *Descartes* a enfin avoué (a) lui-même être plus simple en bien des rencontres que la sienne. Il est pourtant vrai qu'elle n'étoit pas encore aussi simple que M. *Barrovv* l'a rendue depuis en considérant de plus près

(a) *Lett.* 71, *Tom.* 3.

la nature des polygones, qui présente naturellement à l'esprit un petit triangle fait d'une particule de courbe, comprise entre deux appliquées infiniment proches, de la différence de ces deux appliquées, & de celle des coupées correspondantes; & ce triangle est semblable à celui qui se doit former de la tangente, de l'appliquée, & de la soutangente: de sorte que par une simple Analogie cette derniere Méthode épargne tout le calcul que demande celle de M. *Descartes*, & que cette Méthode, elle-même, demandoit auparavant.

M. *Barrovv* (*a*) n'en demeura pas là, il inventa aussi une espece de calcul propre à cette Méthode; mais il lui falloit, aussi-bien que dans celle de M. *Descartes*, ôter les fractions, & faire évanouir tous les signes radicaux pour s'en servir.

Au défaut de ce calcul est survenu celui du célébre (*b*) M. *Leibnitz*; & ce sçavant Géométre a commencé où M. *Barrovv*, & les autres avoient fini. Son calcul l'a mené dans des pays jusqu'ici inconnus;

(*a*) *Lect. Geomet. pag.* 80.
(*b*) *Acta Erud. Lipf. an.* 1684. *pag.* 467.

& il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. M[rs]. *Bernoulli* ont été les premiers qui se sont apperçus de la beauté de ce calcul: ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de surmonter des difficultés qu'on n'auroit jamais osé tenter auparavant.

L'étendue de ce calcul est immense: il convient aux courbes mécaniques, comme aux géométriques; les signes radicaux lui sont indifférens; & même souvent commodes; il s'étend à tant d'indéterminées qu'on voudra; la comparaison des infiniment petits de tous les genres lui est également facile. Et de là naissent une infinité de découvertes surprenantes par rapport aux tangentes tant courbes que droites, aux questions *De maximis & minimis*, aux points d'infléxion & de rebroussement des courbes, aux développées, aux caustiques par réfléxion ou par réfraction, &c. comme on le verra dans cet Ouvrage.

Je le divise en dix Sections. La premiere contient les principes du calcul des différences. La seconde fait voir de quelle maniere l'on s'en doit ſervir pour trouver les tangentes de toutes ſortes de courbes, quelque nombre d'indéterminées qu'il y ait dans l'équation qui les exprime, quoique M. *Craige* (a) n'ait pas crû qu'il pût s'étendre juſqu'aux courbes mécaniques ou tranſcendantes. La troiſieme, comment il ſert à réſoudre toutes les queſtions *De maximis & minimis*. La quatrieme, comment il donne les points d'infléxion & de rebrouſſement des courbes. La cinquieme en découvre l'uſage pour trouver les développées de M. *Hugens*, dans toutes ſortes de courbes. La ſixieme & la ſeptieme font voir comment il donne les cauſtiques, tant par réfléxion que par réfraction, dont l'illuſtre M. *Tſchirnhaus* eſt l'inventeur, & pour toutes ſortes de courbes encore. La huitieme en fait voir encore l'uſage pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données, de poſition, droites ou courbes. La neuvieme contient la ſolution de quelques Problêmes qui dépendent des découvertes

(a) *De figurarum curvilinearum quadraturis, part. 2.*

précédentes. Et la dixieme conſiſte dans une nouvelle maniere de ſe ſervir du calcul des différences pour les courbes géométriques: d'où l'on déduit la Méthode de M[rs] *Deſcartes* & *Hudde*, laquelle ne convient qu'à ces ſortes de courbes.

Il eſt à remarquer que dans les Sections 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, il n'y a que très-peu de propoſitions; mais elles ſont toutes générales, & comme autant de Méthodes dont il eſt aiſé de faire l'application à tant de propoſitions particulieres qu'on voudra: je la fais ſeulement ſur quelques exemples choiſis, perſuadé qu'en fait de Mathématique il n'y a à profiter que dans les Méthodes, & que les Livres qui ne conſiſtent qu'en détail ou en propoſitions particulieres, ne ſont bons qu'à faire perdre du temps à ceux qui les font, & à ceux qui les liſent. Auſſi n'ai-je ajouté les Problêmes de la Section neuvieme, que parce qu'ils paſſent pour curieux, & qu'ils ſont très-univerſels. Dans la dixieme Section ce ne ſont encore que des Méthodes que le calcul des différences donne à la maniere de M[rs] *Deſcartes* & *Hudde*; & ſi elles ſont ſi limitées, on voit par toutes les précédentes que ce n'eſt pas un défaut de ce calcul, mais de la Méthode Cartéſienne à laquelle on l'aſſujettit. Au contraire rien ne prouve mieux l'uſage immenſe de ce calcul, que toute cette varieté de Méthodes; & pour peu d'attention qu'on y faſſe, l'on verra qu'il tire tout ce qu'on peut tirer de celle de Mrs *Deſcartes* & *Hudde*, & que la preuve univerſelle qu'il donne de l'uſage qu'on y fait des progreſſions arithmétiques, ne laiſſe plus rien à ſouhaiter pour l'infaillibilité de cette derniere Méthode.

J'avois deſſein d'y ajouter encore une Section pour faire ſentir auſſi le merveilleux uſage de ce calcul dans la Phyſique, juſqu'à quel point de préciſion il la peut porter, & combien les Mécaniques en peuvent retirer d'utilité. Mais une maladie m'en a empêché: Le Public n'y perdra pourtant rien, & il l'aura quelque jour même avec uſure.

Dans tout cela il n'y a encore que la premiere partie du calcul de M. *Leibnitz*, laquelle conſiſte à deſcendre des grandeurs

entiéres à leurs différences infiniment petites, & à comparer entr'eux ces infiniment petits de quelque genre qu'ils ſoient: c'eſt ce qu'on appelle *Calcul différentiel*. Pour l'autre partie, qu'on appelle *Calcul intégral*, & qui conſiſte à remonter de ces infiniment petits aux grandeurs ou aux touts dont ils ſont les différences, c'eſt-à-dire, à en trouver les ſommes, j'avois auſſi deſſein de le donner. Mais M. *Leibnitz* m'ayant écrit qu'il y travailloit dans un Traité qu'il intitule *De Scientiâ infiniti*, je n'ai eu garde de priver le Public d'un ſi bel Ouvrage qui doit renfermer tout ce qu'il y a de plus curieux pour la Méthode inverſe des tangentes, pour les rectifications des courbes, pour la quadrature des eſpaces qu'elles renferment, pour celles des ſurfaces des corps qu'elles décrivent, pour la dimenſion de ces corps, pour la découverte des centres de gravité, &c. Je ne rends même ceci public, que parce qu'il m'en a prié par ſes Lettres, & que je le crois néceſſaire pour préparer les eſprits à comprendre tout ce qu'on pourra découvrir dans la ſuite ſur ces matières.

Au reſte je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de M[rs] *Bernoulli*, ſur-tout à celles du jeune préſentement Profeſſeur à Groningue. Je me ſuis ſervi ſans façon de leurs découvertes & de celles de M. *Leibnitz*. C'eſt pourquoi je conſens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laiſſer.

C'eſt encore une juſtice dûe au ſçavant M. *Nevvton*, & que M. *Leibnitz* lui a rendue (*a*) lui-même: Qu'il avoit auſſi trouvé quelque choſe de ſemblable au calcul différentiel, comme il paroît par l'excellent Livre intitulé, *Philoſophiæ naturalis principia Mathematica*, qu'il nous donna en 1687, lequel eſt preſque tout de ce calcul. Mais la Caractériſtique de M. *Leibnitz* rend le ſien beaucoup plus facile & plus expéditif; outre qu'elle eſt d'un ſecours merveilleux en bien des rencontres.

Comme l'on imprimoit la derniere feuille de ce Traité, le Livre de M. *Nieuvventiit* m'eſt tombé entre les mains. Son titre, *Analyſis infinitorum*, m'a donné

(*a*) *Journal des Sçavans du 30 Août 1694.*

la curioſité de le parcourir : mais j'ai trouvé qu'il étoit fort différent de celui-ci ; car outre que cet Auteur ne ſe ſert point de la Caractériſtique de M. *Leibnitz*, il rejette abſolument les différences ſecondes, troiſiemes, &c. Comme j'ai bâti la meilleure partie de cet Ouvrage ſur ce fondement, je me croirois obligé de répondre à ſes objections, & de faire voir combien elles ſont peu ſolides, ſi M. *Leibnitz* n'y avoit déja pleinement ſatisfait dans les Actes (*a*) de Leypſick. D'ailleurs les deux demandes ou ſuppoſitions que j'ai faites au commencement de ce Traité, & ſur leſquelles ſeules il eſt appuyé, me paroiſſent ſi évidentes, que je ne crois pas qu'elles puiſſent laiſſer aucun doute dans l'eſprit des Lecteurs attentifs. Je les aurois même pu démontrer facilement à la maniere des Anciens, ſi je ne me fuſſe propoſé d'être court ſur les choſes qui ſont déja connues, & de m'attacher principalement à celles qui ſont nouvelles.

(*a*) *Acta Erud. an. 1695. pag. 310 & 369.*

ANALYSE DES INFINIMENT PETITS.

DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION I.

Où l'on donne les Regles de ce Calcul.

DÉFINITION I.

ON appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *conſtantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainſi dans une parabole les appliquées & les coupées ſont des quantités variables, au lieu que le paramétre eſt une quantité conſtante.

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la *Différence*. Soit, par exemple, une ligne courbe quelconque AMB, (*Fig.* 1. *Pl.* 1.) qui ait pour axe ou diamétre la ligne AC, & pour une de ses appliquées la droite PM ; & soit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on méne MR parallele à AC ; les cordes AM, A*m* ; & qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS : P*p* sera la différence de AP ; R*m* celle de PM ; S*m* celle de AM, & M*m* celle de l'arc AM. De même le petit triangle MA*m* qui a pour base l'arc M*m*, sera la différence du segment AM ; & le petit espace MP*pm*, celle de l'espace compris par les droites AP, PM, & par l'arc AM.

COROLLAIRE.

1. Il est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero : ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caractéristique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre ; & pour éviter la confusion, cette note* d *n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables* AP, x ; PM, y ; AM, z ; *l'arc* AM, u ; *l'espace mixtiligne* AMP, s ; *& le segment* AM, t : dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle du petit arc* Mm, ds *celle du petit espace* MPpm, *& dt celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne différent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande, par exemple, qu'on puisse prendre A*p* pour AP, *pm* pour PM, l'espace A*pm* pour l'espace APM, le petit espace MP*pm* pour le petit rectangle MP*p*R, le petit secteur AM*m* pour le petit triangle AMS, l'angle *p*A*m* pour l'angle PAM, &c. (*Consultez la Note premiere.*)

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande, par exemple, que la portion de courbe *Mm*, & l'arc de cercle MS, puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, ensorte que

le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

AVERTISSEMENT.

On suppose ordinairement dans la suite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables ; & au contraire que les premieres* a, b, c, *&c. marquent des quantités constantes : de sorte que* x *devenant* x + dx ; y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* (*Art.* 1.) *Et* a, b, c, *&c. demeurent les mêmes* a, b, c, &c.

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

4. PRENDRE *la différence de plusieurs quantités ajoutées ensemble, ou soustraites les unes des autres.*

Soit $a + x + y - z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite, c'est-à-dire qu'elle devienne $x + dx$; y deviendra alors $y + dy$; & z, $z + dz$; pour la constante a, (*Art.* 1.) elle demeurera la même a : de sorte que la quantité proposée $a + x + y - z$ deviendra $a + x + dx + y + dy - z - dz$; & sa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, sera $dx + dy - dz$. Il en est ainsi des autres ; ce qui donne cette regle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoutées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes,

on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy est $ydx + xdy$. Car y devient $y + dy$, lorsque x devient $x + dx$; & partant xy devient alors $xy + ydx + xdy + dxdy$, qui est le produit de $x + dx$ par $y + dy$, & sa différence sera $ydx + xdy + dxdy$, c'est-à-dire (*Art.* 2.) $ydx + xdy$, puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy ; car si l'on divise, par exemple, ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la premiere.

2°. La différence de xyz est $yzdx + xzdy + xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $ydx + xdy$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx + xzdy$) plus le produit de la différence dz de la seconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$) ; & partant la différence de xyz sera $yzdx + xzdy + xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ est $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Ce qui se prouve comme dans le cas précédent, en regardant le produit xyz comme une seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette régle.

RÉGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de ax est $xo + adx$, c'est-à-dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ est $bdx - ydx - ady - xdy$. (*Consultez la note seconde.*)

PROPOSITION III.

PROBLÉME.

6. PRENDRE *la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Car supposant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantités variables x & yz doivent toujours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est-à-dire, leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant (*Art.* 5.) on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette régle.

REGLE III.

Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le quarré du dénominateur.

Ainsi la différence de $\frac{a}{x}$ sera $\frac{-adx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ sera $\frac{adx}{aa+2ax+xx}$. (*Consultez la note troisieme.*)

PROPOSITION IV.

PROBLÉME.

7. PRENDRE *la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.*

Il est nécessaire afin de donner une régle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposants.

Si l'on propose une progression géométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x, & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposans formeront une progression arithmétique.

Prog. géom. $1, x, xx, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.
Prog. arith. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, &c.

Et si l'on continue la progression géométrique au dessous de l'unité, & l'arithmétique au dessous de zero, les termes de celle-ci seront les exposans de ceux ausquels ils répondent dans l'autre.

Ainsi -1 est l'exposant de $\frac{1}{x}$, -2 celui de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. géom. $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, &c.

Prog. arith. $1, 0, -1, -2, -3, -4$, &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression géométrique, il faudra pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmétique.

Ainsi $\sqrt{x}$ aura pour exposant $\frac{1}{2}$: $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$: $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$: $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$: $\frac{1}{\sqrt[5]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$: $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$: &c. de sorte que ces expressions $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ & $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ & $x^{-\frac{3}{2}}$, &c. ne signifient que la même chose.

Prog. géom. $1, \sqrt{x}, x$. $1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x$. $1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x$.

Prog. arith. $0, \frac{1}{2}, 1$. $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1. = \frac{5}{5}$

Prog. géom. $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{xx}$. $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}, \frac{1}{xx}$. $\frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x^7}}, \frac{1}{x^4}$.

Prog. arith. $-1, -\frac{3}{2}, -2$. $-1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -2$. $-3, -\frac{7}{2}, -4$.

Où l'on voit que de même que $\sqrt{x}$ est moyenne géométrique entre 1 & x, de même aussi $\frac{1}{2}$ est moyenne arithmétique entre leurs exposans zero & 1 : & de même que $\sqrt[3]{x}$ est la premiere des deux moyennes géométriquement proportionnelles entre 1 & x, de même aussi $\frac{1}{3}$ est la premiere des deux moyennes arithmétiquement proportionnelles entre leurs exposans zero & 1 : & il en est ainsi des au-

tres. Or il suit de la nature de ces deux progressions.

1°. Que la somme des exposans de deux termes quelconques de la progression géométrique sera l'exposant du terme qui en est le produit. Ainsi x^{4+3} où x^7 est le produit de x^3 par x^4, & $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{5}{6}}$ est le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ où $x^{-\frac{2}{15}}$ est le produit de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{5}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{2}{3}}$ est le produit de $x^{\frac{1}{3}}$ par lui-même, c'est-à-dire son quarré, & x^{+2+2+2} où x^6 est le produit de x^2 par x^2 par x^2, c'est-à-dire son cube, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ où $x^{-\frac{4}{3}}$ est la quatrieme puissance de $x^{-\frac{1}{3}}$, & il en est ainsi des autres puissances. D'où il est évident que le double, le triple, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression géométrique est l'exposant du quarré, du cube, &c. de ce terme ; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression géométrique sera l'exposant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2°. Que la différence des exposans de deux termes quelconques de la progression géométrique sera l'exposant du quotient de la division de ces termes. Ainsi $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ sera l'exposant du quotient de la division de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{12}}$ sera l'exposant du quotient de la division de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$; où l'on voit que c'est la même chose de multiplier $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{-\frac{1}{4}}$ que de diviser $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$. Il en est ainsi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différens cas.

Premier cas, lorsque la puissance est parfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre entier. La différence de xx est $2xdx$, de x^3 est $3xxdx$, de x^4 est $4x^3dx$, &c. Car le quarré de x n'étant autre chose que le produit de x par x, sa différence (*Art.* 5.) sera $xdx+xdx$, c'est-à-dire $2xdx$. De même le cube de x n'étant autre chose que le produit de x par x par x, sa différence (*Art.* 5.) sera $xxdx+xxdx+xxdx$, c'est-à-dire $3xxdx$; & comme il en est ainsi des puissances à l'infini, il s'ensuit que si l'on suppose que m marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de x^m sera $mx^{m-1}dx$.

Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ sera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorsque la puissance est imparfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre rompu. Soit proposé de prendre la différence de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un nombre rompu quelconque) on supposera $x^{\frac{m}{n}} = z$, & en élevant chaque membre à la puissance n on aura $x^m = z^n$, & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx$

$= nz^{n-1}dz$, & $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$, ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, en mettant à la place de nz^{n-1} sa valeur $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de $x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ sera $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$. Ce qui donne cette régle générale.

REGLE IV.

Pour les Puissances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence.

Ainsi si l'on suppose que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, soit positif, soit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m sera toujours $mx^{m-1}dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay-xx$, c'est-à-dire de $\overline{ay-xx}^3$, est $3\times\overline{ay-xx}^2\times ady-2xdx$ $=3a^3yydy-6aaxxydy+3ax^4dy-6aayyxdx+12ayx^3dx-6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy+yy}$ ou de $\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}\times\overline{xy+yy}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{ydx+xdy+2ydy}$, ou $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$.

Celle de $\sqrt{a^4+axyy}$ ou de $\overline{a^4+axyy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}\times\overline{a^4+axyy}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{ayypx+2axydy}$, ou $\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$.

Celle de $\sqrt[3]{ax+xx}$, ou de $\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$, eſt $\frac{1}{3}\times\overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}}\times\overline{adx+2xdx}$, ou $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^2}}$.

La différence de $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$ ou de $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}\times\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{adx+2xdx+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}}$, ou $\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}\times2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$.

La différence de $\frac{\sqrt[3]{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ ſera ſelon cette régle (*Art.* 7. 6.) & celle des fractions . . . . .

$$\frac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^2}}\times\sqrt{xy+yy}\ \frac{-ydx-xdy-2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}\times\sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}.$$

(*Conſultez la note quatrieme.*)

REMARQUE.

8. Il eſt à propos de bien remarquer que l'on a toujours ſuppoſé en prenant les différences, qu'une des variables x croiſſant, les autres y, z, &c. croiſſoient auſſi ; c'eſt-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y, z, &c. devenoient $y+dy$, $z+dz$, &c. C'eſt pourquoi s'il arrive que quelques-unes diminuent pendant que les autres croiſſent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on ſuppoſe croître ; & changer par conſéquent les ſignes des termes où les différences de celles qui diminuent ſe rencontrent. Ainſi ſi l'on ſuppoſe que les x croiſſant, les y & les z diminuent, c'eſt-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y & les z deviennent $y-dy$ & $z-dz$, & que l'on veuille prendre la différence du produit xyz ; il faudra changer dans la différence $xydz+xzdy+yzdx$ trouvée (*Art.* 5.), les ſignes des termes où dy & dz ſe rencontrent : ce qui donne $yzdx-xydz-xzdy$ pour la différence cherchée.

SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DÉFINITION.

SI l'on prolonge un des petits côtés M*m* (*Fig.* 2. *Pl.* 1.) du poligone qui compose (*Art.* 3.) une ligne courbe ; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la *Tangente* de la courbe au point M ou *m*. (*Consultez la Note cinquieme.*)

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

9. SOIT *une ligne courbe* AM (*Fig.* 3. *Pl.* 1.) *telle que la relation de la coupée* AP *à l'appliquée* PM, *soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP, & supposé que la droite MT qui rencontre le diamètre au point T, soit la tangente cherchée ; on concevra une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, avec une petite droite MR parallele à AP. Et en nommant les données AP, x ; PM, y ; (donc Pp ou MR $= dx$, & R$m = dy$.) les triangles semblables mRM & MPT donneront mR (dy). RM (dx) : : MP (y). PT $= \frac{ydx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes

qui seront tous affectés par dy, laquelle étant multipliée par y & divisée par dy, donnera une valeur de la soutangente PT en termes entierement connus & délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée MT. (*Consultez la Note sixieme.*)

REMARQUE.

10. LORSQUE le point T (*Fig.* 4. *Pl.* 1.) tombe du côté opposé au point A origine des x, il est clair que x croissant, y diminue, & qu'il faut changer par conséquent (*Art.* 8.) dans la différence de l'équation donnée les signes de tous les termes où dy se rencontre : autrement la valeur de dx en dy seroit négative ; & partant aussi celle de PT $(\frac{ydx}{dy})$. Il est mieux cependant, pour ne se point embarrasser, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on a prescrites (*Sect.* 1.) sans y rien changer ; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur PT soit positive, il s'ensuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine de x, comme l'on a supposé en faisant le calcul : & au contraire si elle est négative, il le faudra prendre du côté opposé. Ceci s'éclaircira par les exemples suivans.

EXEMPLE I.

11. 1°. SI l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM, (*Fig.* 3. *Pl.* 1.) la courbe AM sera une parabole qui aura pour paramétre la droite donnée a, & l'on aura en pre-

nant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & PT $(\frac{ydx}{dy}) = \frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy ſa valeur ax. D'où il ſuit que ſi l'on prend PT double de AP, & qu'on méne la droite MT, elle ſera tangente au point M. Ce qui étoit propoſé.

2°. Soit l'équation $aa = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les aſymptotes. (*Fig.* 4. *Pl.* 1.) On aura en prenant les différences $xdy + ydx = 0$, & partant PT $(\frac{ydx}{dy}) = -x$. D'où il ſuit que ſi l'on prend PT = PA du côté oppoſé au point A, & qu'on méne la droite MT, elle ſera la tangente en M.

3°. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini, lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorſqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les différences $my^{m-1}dy = dx$, & partant PT $(\frac{ydx}{dy}) = my^m = mx$ en mettant pour y^m ſa valeur x.

Si $m = \frac{3}{2}$, l'équation ſera $y^3 = axx$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la ſoutangente PT $= \frac{3}{2}x$. Si $m = -2$, l'équation ſera $a^3 = xyy$ qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la ſoutangente PT $= -2x$. Il en eſt ainſi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point A origine des x, il faut chercher quelle doit être la raiſon de dx à dy en ce point ; car il eſt viſible que cette raiſon étant connue, l'angle

gle que la tangente fait avec l'axe ou le diamètre ſera auſſi déterminé. On a dans cet exemple $dx \,.\, dy :: my^{m-1} \,.\, 1$. D'où l'on voit que y étant zero en A, la raiſon de dy à dx doit y être infiniment grande lorſque m ſurpaſſe 1, & infiniment petite lorſqu'elle eſt moindre : c'eſt-à-dire que la tangente en A doit être parallele aux appliquées dans le premier cas, & ſe confondre avec le diamètre dans le ſecond. (*Conſultez la Note ſeptieme.*)

EXEMPLE II.

12. SOIT une ligne courbe AMB (*Fig.* 5. *Pl.* 1.) telle que AP × PB $(x \times \overline{a-x})$. $\overline{PM}^2$ (yy) :: AB (a). AD (b). Donc $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, & en prenant les différences, $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, d'où l'on tire PT $(\frac{ydx}{dy}) = \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ ſa valeur $ax - xx$; & PT $-$ AP ou AT $= \frac{ax}{a - 2x}$. (*Voyez la note* 8.)

Suppoſant à préſent que $\overline{AP}^3 \times \overline{PB}^2$ $(x^3 \times \overline{a-x}^2)$. $\overline{PM}^5$ (y^5) :: AB (a). AD (b), on aura $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a-x}^2$; & en prenant les différences $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2adx + 2xdx} \times x^3$, d'où l'on tire $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a-x}^2}{3xx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2a+2x} \times x^3} = \frac{5x \times \overline{a-x}}{3a - 3x - 2x}$

ou $\frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$ & $AT = \frac{2ax}{3a - 5x}$. (*Voyez la Note* 8.)

Et généralement si l'on veut que m marque l'exposant de la puissance de AP, & n celui de la puissance de PB, on aura $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a - x}^n$ qui est une équation générale pour toutes les ellipses à l'infini, dont la différence est $\frac{\overline{m + n}ay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a - x}^n - \overline{na - x}^{n-1}dx \times x^m$, d'où l'on tire (en mettant pour $\frac{ay^{m+n}}{b}$ sa valeur $x^m \times \overline{a - x}^n$) PT $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ $= \frac{\overline{m + nx}^m \times \overline{a - x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a - x}^n - \overline{na - x}^{n-1} \times x^m} = \frac{\overline{m + nx} \times \overline{a - x}}{ma - x - nx}$, ou $PT = \frac{\overline{m + n} \times \overline{ax - xx}}{ma - \overline{m - nx}}$, & $AT = \frac{nax}{ma - \overline{m - nx}}$, (*Voyez la Note* 8.)

EXEMPLE III.

13. LES mêmes choses étant posées que dans l'exemple précédent, excepté que l'on suppose ici que le point B (*Fig.* 6. *Pl.* 1.) tombe de l'autre côté du point A par rapport au point P, on aura l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a + x}^n$ qui exprime la nature de toutes les hyperboles considérées par rapport à leurs diamètres. D'où l'on tirera comme ci-dessus $PT = \frac{\overline{m + n} \times \overline{ax + xx}}{ma + \overline{m + nx}}$ & AT $\frac{nax}{ma + \overline{m + nx}}$. (*Voyez la Note* 9. *num.* 1.)

Maintenant si l'on suppose que AP soit infiniment grande, la tangente TM ne rencontrera la courbe qu'à une distance infinie, c'est-à-dire, qu'elle en deviendra l'asymptote CE; & l'on aura en ce cas AT $\left(\frac{nax}{ma + \overline{m + nx}}\right) = \frac{n}{m + n}a$ $= AC$; puisque a étant infiniment moindre que x, le terme ma sera nul par rapport à $\overline{m + nx}$. Par la même raison en ce cas l'équation à la courbe deviendra $ay^{m+n} = bx^{m+n}$. Ainsi en faisant, pour abréger, $m + n = p$, & en extrayant de part & d'autre la racine p, on aura $y\sqrt[p]{a} = x\sqrt[p]{b}$, dont la différence est $dy\sqrt[p]{a} = dx\sqrt[p]{b}$: de sorte qu'en menant AE parallele aux appliquées, & en concevant un petit triangle au point où l'asymptote CE rencontre la courbe, on formera cette proportion $dx \,.\, dy$, ou $\sqrt[p]{a} \,.\, \sqrt[p]{b} :: AC\,(\frac{n}{p}a)$. $AE = \frac{n}{p}\sqrt[p]{ba^{p-1}}$. Or les valeurs de CA & AE étant ainsi déterminées, on menera la droite indéfinie CE qui sera l'asymptote cherchée.

Si $m = 1$ & $n = 1$, la courbe sera l'hyperbole ordinaire, & on aura $AC = \frac{1}{2}a$, & AE $= \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, c'est-à-dire à la moitié du diamètre conjugué, ce que l'on sçait d'ailleurs être conforme à la vérité. (*Voyez la Note* 9. *num.* 2. *& suivants.*)

EXEMPLE IV.

14. SOIT l'équation $y^3 - x^3 = axy$ ($AP = x$, $PM = y$, a est une ligne droite donnée) & que

cette équation exprime la nature de la courbe AM, (*Fig.* 6. *Pl.* 1.) ſa différence ſera $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$. Donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$, & AT $(\frac{ydx}{dy} - x) = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay} = \frac{axy}{3xx + ay}$ en mettant pour $3y^3 - 3x^3$ ſa valeur $3axy$. (*Voyez la Note* 10. *queſt.* 1. 2.)

Maintenant ſi l'on ſuppoſe que AP & PM ſoient chacune infiniment grande, la tangente TM deviendra l'aſymptote CE, & les droites AT, AS deviendront AC, AE qui déterminent la poſition de l'aſymptote. Or AT que j'appelle $t = \frac{axy}{3xx + ay}$, d'où l'on tire $y = \frac{3txx}{ax - at} = \frac{3tx}{a}$ lorſque AT devient AC, parce qu'alors at eſt nulle par rapport à ax. Mettant donc cette valeur $\frac{3tx}{a}$ à la place de y dans $y^3 - x^3 = axy$, on aura $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3txx$, d'où l'on tire (en effaçant le terme $3a^3txx$, parce que x étant infinie, il eſt nul par rapport aux deux autres $27t^3x^3$ & a^3x^3) AC $(t) = \frac{1}{3}a$. De même AS $(y - \frac{xdy}{dx})$ que j'appelle $s = \frac{axy}{3yy - ax}$, d'où l'on tire $x = \frac{3syy}{ay + as} = \frac{3sy}{a}$, parce que y étant infinie par rapport à s, le terme as ſera nul par rapport au terme ay; & en mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, on trouvera AE $(s) = \frac{1}{3}a$. D'où il ſuit que ſi

l'on prend les lignes AC, AE égales chacune à $\frac{1}{3}a$, & qu'on mene la droite indéfinie CE, elle ſera l'aſymptote de la courbe AM. (*Conſultez la Note dixieme, queſt.* 3. *& ſuiv.*).

On ſe réglera ſur ces deux derniers exemples pour trouver les aſymptotes des autres lignes courbes.

PROPOSITION II.

Probléme.

15. Si *l'on ſuppoſe dans la propoſition précédente que les coupées* AP (Fig. 7. Pl. 1.) *ſoient des portions d'une ligne courbe dont l'on ſçache mener les tangentes* PT, *& qu'il faille du point donné* M *ſur la courbe* AM *mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP avec la tangente PT, & ſuppoſé que la droite MT qui la rencontre en T, ſoit la tangente cherchée; on imaginera une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, & une petite droite MR parallele à PT: & en nommant les données AP, x; PM, y; on aura comme auparavant Pp ou MR $= dx$, R$m = dy$, & les triangles ſemblables mRM & MPT donneront mR (dy). RM (dx) :: MP (y). PT $= \frac{ydx}{dy}$. On achevera enſuite le reſte par le moyen de l'équation qui exprime la relation des coupées AP (x) aux appliquées PM (y), comme l'on a vû dans les exemples qui précédent, & comme l'on verra encore dans ceux qui ſuivent. (*Conſultez la Note* 11.)

EXEMPLE I.

16. Soit $\frac{yy}{x} = \frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$, dont la différence eſt $\frac{2xydy - yydx}{xx} = \frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{xydy}{a\sqrt{aa+yy}}$: on aura en réduiſant cette égalité à une proportion $dy . dx (MP . PT) :: \frac{\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{yy}{xx} . \frac{2xy}{xx} - \frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}$. Et partant le rapport de la donnée MP à la ſoutangente cherchée PT, ſera exprimé en termes entièrement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit propoſé.

EXEMPLE II.

17. Soit $x = \frac{ay}{b}$, dont la différence eſt $dx = \frac{ady}{b}$: on aura PT $(\frac{ydx}{dy}) = \frac{ay}{b} = x$. Si l'on ſuppoſe que la ligne courbe APB ſoit un demi-cercle, & que les appliquées MP, étant prolongées en Q, ſoient perpendiculaires ſur le diamètre AB ; la courbe AMC ſera une demi-roulette ou cycloïde : ſimple lorſque $b = a$; allongée, lorſqu'elle eſt plus grande ; & accourcie, lorſqu'elle eſt moindre. (*Conſultez la Note* 12.)

COROLLAIRE.

18. Si la roulette étant ſimple, l'on méne la corde AP ; je dis qu'elle ſera parallele à la tangente MT. Car le triangle MPT étant alors iſoſcele, l'angle externe TPQ ſera double de

l'interne oppoſé TMQ. Or l'angle APQ eſt égal à l'angle APT, puiſque l'un & l'autre a pour meſure la moitié de l'arc AP ; & partant il eſt la moitié de l'angle TPQ. Les angles TMQ, APQ ſeront donc égaux entr'eux ; & par conſéquent les lignes MT, AP ſeront paralleles. (*Conſultez la Note douzieme.*)

PROPOSITION III.

PROBLÉME.

19. Soit *une ligne courbe quelconque* AP *qui ait* (Fig. 7. Pl. 1.) *pour diamètre la droite* KNAQ, *& dont l'on ſçache mener les tangentes* PK ; *ſoit de plus une autre courbe* AM, *telle que menant, comme on voudra, l'appliquée* MQ *qui coupe la premiere courbe au point* P, *la relation de l'arc* AP *à l'appliquée* MQ *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *mener la tangente* MN.

Ayant nommé les connues PK, t ; KQ, s ; l'arc AP, x ; MQ, y ; l'on aura (en concevant une autre appliquée mq infiniment proche de MQ, & en tirant PO, MS paralleles à AQ) $Pp = dx$, $mS = dy$; & à cauſe des triangles ſemblables KPQ & PpO, mSM & MQN, l'on aura PK (t) . KQ (s) :: Pp (dx) . PO ou MS $= \frac{sdx}{t}$. Et mS (dy) . SM $(\frac{sdx}{t})$ :: MQ (y) . QN $= \frac{sydx}{tdy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de

dx en termes qui seront tous affectés par dy; & partant si l'on substitue cette valeur à la place de dx dans $\frac{sydx}{tdy}$, les dy se détruiront, & la valeur de la soutangente cherchée QN sera exprimée en termes tous connus. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION IV.

PROBLÉME.

20. SOIENT *deux lignes courbes* AQC, BCN (*Fig. 8. Pl. 1.*) *qui ayent pour diamétre la droite* TEABF, *& dont l'on sçache mener les tangentes* QE, NF; *soit de plus une autre ligne courbe* MC *telle que la relation des appliquées* MP, QP, NP, *soit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *sur cette derniere courbe lui mener la tangente* MT.

Ayant imaginé aux points Q, M, N, les petits triangles Qoq, MRm, NSn, & nommé les connues PE, s; PF, t; PQ, x; PM, y; PN, z; l'on aura $oq = dx$, $Rm = dy$, $Sn, = -dz$, (*Art.* 8.) parce que x & y croissant, z diminue. Et à cause des triangles semblables QPE & qoQ, NPF & nSN, MPT & mRM; l'on aura QP (x). PE (s) : : qo (dx). oQ ou MR ou SN $= \frac{sdx}{x}$. Et NP (z). PF (t) : : nS $(-dz)$. SN $= \frac{-tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$ (d'où l'on tire $dz = \frac{-szdx}{tx}$). Et mR (dy). RM

$(\frac{sdx}{x})$: : MP (y). PT $= \frac{sydx}{xdy}$. Or si l'on met dans la différence de l'équation donnée, à la place de dz, sa valeur $-\frac{szdx}{tx}$, on trouvera une valeur de dx en dy, laquelle étant substituée dans $\frac{sydx}{xdy}$, les dy se détruiront, & la valeur de la soutangente PT sera exprimée en termes tous connus.

EXEMPLE.

21. SOIT $yy = xz$, dont la différence est $2ydy = zdx + xdz = \frac{tzdx - szdx}{t}$, en mettant pour dz sa valeur négative $-\frac{szdx}{tx}$, d'où l'on tire $dx = \frac{2tydy}{tz - sz}$; & partant PT, $(\frac{sydx}{xdy}) = \frac{2styy}{txz - sxz} = \frac{2st}{t - s}$, en mettant pour yy sa valeur xz.

Soit maintenant l'équation générale $y^{m+n} = x^m z^n$, dont la différence est $\overline{m+n}\,y^{m+n-1}dy = mz^n x^{m-1}dx + nx^m z^{n-1}dz = \frac{mtz^n x^{m-1}dx - nsz^n x^{m-1}dx}{t}$, en mettant pour dz sa valeur $\frac{-szdx}{tx}$, d'où l'on tire PT $(\frac{sydx}{xdy}) = \frac{\overline{mst + nst}\,y^{m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m} = \frac{mst + nst}{mt - ns}$, en mettant pour y^{m+n} sa valeur $x^m z^n$.

On peut remarquer que si les courbes AQC, BCN devenoient des lignes droites, la courbe MC seroit alors une des Sections coniques à l'infini ; ſçavoir une Ellipſe lorſque l'appliquée CD, qui part du point de rencontre C, tombe entre les extrêmités A, B ; une Hyperbole, lorſqu'elle tombe de part ou d'autre ; & enfin une Parabole, lorſque l'une des extrêmités A ou B eſt infiniment éloignée de l'autre, c'eſt-à-dire, lorſqu'une des lignes droites CA ou CB eſt parallele au diamétre AB. (*Conſultez la Note treizieme.*)

PROPOSITION V.

PROBLÉME.

22. SOIT *une ligne courbe* APB (*Fig. 9. Pl. 1.*) *qui ait un commencement fixe & invariable au point* A, *& dont l'on ſçache méner les tangentes* PH ; *ſoit hors de cette ligne un autre point fixe* F, *& une autre ligne courbe* CMD *telle qu'ayant méné la droite quelconque* FMP, *la relation de ſa partie* FM *à la portion de courbe* AP *ſoit exprimée par telle équation qu'on voudra. On propoſe de méner du point donné* M *la tangente* MT.

Ayant méné ſur FP la perpendiculaire FH qui rencontre la tangente donnée PH au point H, & la cherchée MT au point T ; imaginé une droite $FRmOp$ qui faſſe avec FP un angle infiniment petit ; & décrit du centre F les petits arcs de cercle PO, MR ; le petit triangle pOP ſera ſemblable au triangle rectangle PFH ; car les angles HPF, HpF ſont (*Art.* 2.) égaux, puiſqu'ils ne différent entr'eux que de l'angle PFp que l'on ſuppoſe infiniment petit ; & de plus l'angle pOP eſt droit, puiſque la tangente en O (qui n'eſt autre choſe que la continuation du petit arc PO conſidéré comme une droite) eſt perpendiculaire ſur le rayon FO. Par la même raiſon les triangles mRM, MFT ſeront ſemblables. Or il eſt clair que les petits triangles ou ſecteurs FPO & FMR ſont ſemblables. Si donc l'on nomme les connues PH, t ; HF, s ; FM, y ; FP, z ; & l'arc AP, x ; on aura PH (t) . HF (s) : : Pp (dx) . PO $= \frac{sdx}{t}$. Et FP (z) . FM (y) : : PO $(\frac{sdx}{t})$. MR $= \frac{ysdx}{tz}$. Et mR (dy) . RM $(\frac{sydx}{tz})$: : FM (y) . FT $= \frac{syydx}{tzdy}$. Et on achevera le reſte par le moyen de la différence de l'équation donnée. (*Conſultez la Note quatorzieme.*)

EXEMPLE.

23. SI l'on veut que la courbe APB (*Fig. 10. Pl. 1.*) ſoit un cercle qui ait pour centre le point fixe F ; il eſt clair que la tangente PH devient parallele & égale à la ſoutangente FH, à cauſe que HP ſera auſſi perpendiculaire à PF ; & qu'ainſi l'on aura en ce cas FT $= \frac{yydx}{zdy} = \frac{yydx}{ady}$, en nommant la droite FP (z), a ; parce qu'elle devient conſtante de variable qu'elle étoit auparavant. Cela poſé, ſi l'on nomme la circonférence entiere, ou une de ſes portions déterminées b ; & que l'on faſſe $b . x : : a . y$; la courbe CMD, qui eſt en ce cas FMD, ſera la Spirale d'*Archimede*, & l'on aura $y = \frac{ax}{b}$ qui a pour ſa

différence $dy = \frac{adx}{b}$, d'où l'on tire $ydx = \frac{bydy}{a}$ $= xdy$ en mettant pour y sa valeur $\frac{ax}{b}$; & partant FT $(\frac{yydx}{ady}) = \frac{xy}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit décrit du centre F & du rayon FM, l'arc de cercle MQ, terminé en Q par le rayon FA qui joint les points fixes A, F; soit pris FT égale à l'arc MQ: je dis que la droite MT sera tangente en M. Car à cause des secteurs semblables FPA, FMQ, l'on aura FP (a). FM (y) : : AP (x). MQ $= \frac{yx}{a} =$ FT.

Si l'on fait en général $b \,.\, x :: a^m \,.\, y^m$, (l'exposant m désigne un nombre entier ou rompu tel que l'on veut) la courbe FMD sera une des spirales à l'infini, & l'on aura $y^m = \frac{a^m x}{b}$, qui a pour sa différence $my^{m-1}dy = \frac{a^m dx}{b}$, d'où l'on tire ydx $= \frac{mby^m dy}{a^m} = mxdy$, en mettant pour y^m sa valeur $\frac{a^m x}{b}$; & partant FT $(\frac{yydx}{ady}) = \frac{mxy}{a} = m$ $\times$ MQ.

PROPOSITION VI.

PROBLÉME.

24. SOIT *une ligne courbe* APB (*Fig.* 11. *Pl.* 1.) *dont l'on sçache mener les tangentes* PH, *& un point fixe* F *hors de cette ligne; soit une autre*

ligne courbe CMD *telle que menant comme on voudra, la droite* FPM, *la relation de* FP *à* FM *soit exprimée par une équation quelconque. Il faut du point donné* M *mener la tangente* MT.

Ayant mené la droite FHT perpendiculaire sur FM, & imaginé comme dans la proposition précédente les petits triangles POp, MRm semblables aux triangles HFP, TFM, on nommera les connues FH, s; FP, x; FM, y; & l'on aura PF (x). FH (s) : : pO (dx). OP $= \frac{sdx}{x}$. Et FP (x). FM (y) : : OP $(\frac{sdx}{x})$. RM $= \frac{sydx}{xx}$. Et mR (dy). RM $(\frac{sydx}{xx})$: : FM (y). FT $= \frac{syydx}{xxdy}$. On achevera ensuite le reste par le moyen de la différence de l'équation donnée. (*Consultez la Note quinzieme.*)

EXEMPLE.

25. SI l'on veut que la courbe APB soit une ligne droite PH, & que l'équation qui exprime la relation de FP à FM soit $y - x = a$, c'est-à-dire, que PM soit toujours égale à la même droite donnée a; l'on aura pour différence $dy = dx$; & partant FT $(\frac{syydx}{xxdy}) = \frac{syy}{xx}$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée ME parallele à PH, & MT parallele à FE; je dis qu'elle sera tangente en M.

Car FP (x). FH (s) : : FM (y). FE $= \frac{sy}{x}$. Et

$FP(x) . FE (\frac{sy}{x}) :: FM(y) . FT = \frac{syy}{xx}$. Il est clair que la courbe CMD est la Conchoïde de *Nicomede*, dont l'asymptote est la droite PM, & le pole est le point fixe F.

PROPOSITION VII.

PROBLÉME.

26. SOIT *une ligne courbe* ARM (*Fig.* 12. *Pl.* 1.) *dont l'on sçache mener les tangentes* MH, *& qui ait pour diamètre la droite* EPAHT; *soit hors de ce diamètre un point fixe* F, *d'où parte une ligne droite indéfinie* FPSM *qui coupe le diamètre en* P *& la courbe en* M. *Si l'on conçoit maintenant que la droite* FPM, *en tournant autour du point* F, *fasse mouvoir le plan* PAM *toujours parallélement à soi-même le long de la ligne droite* ET *immobile & indéfinie, ensorte que la distance* PA *demeure par tout la même; il est clair que l'intersection continuelle* M *des lignes* FM, AM *décrira dans ce mouvement une ligne courbe* CMD. *On propose de mener d'un point donné* M *sur cette courbe la tangente* MT.

Ayant imaginé que le plan PAM soit parvenu dans la situation infiniment proche *pam*, & tiré la ligne *m*RS parallele à AP; il est clair par la génération que $Pp = Aa = Rm$; & partant que $RS = Sm - Pp$. Or nommant les connues FP ou F*p*, x; FM ou F*m*, y; PH, s; MH, t; & la différence P*p*, dz; les triangles semblables FP*p* & FS*m*, MPH & MSR,

MHT & MR*m*, donneront $Fp(x) . Fm(y) :: Pp(dz) . Sm = \frac{ydz}{x}$ (donc $SR = \frac{ydz - xdz}{x}$).

Et $PH(s) . HM(t) :: SR (\frac{ydz - xdz}{x}) . RM = \frac{tydz - txdz}{sx}$. Et $MR (\frac{tydz - txdz}{sx}) . Rm (dz) :: MH(t) . HT = \frac{sx}{y - x}$. Donc si l'on mene FE parallele à MH, & qu'on prenne $HT = PE$; la ligne MT sera la tangente cherchée.

Si la ligne AM étoit une ligne droite; la courbe CMD seroit une Hyperbole qui auroit pour une de ses asymptotes la ligne ET. Et si elle étoit un cercle qui eût son centre au point P; la courbe CMD seroit la Conchoïde de *Nicomede*, qui auroit pour asymptote la ligne ET, & pour pole le point F. Mais si elle étoit une parabole; la courbe CMD seroit la compagne de la Paraboloïde de *Descartes* (*Geom. Liv.* 3.), qui se décriroit en même-tems audessous de la droite ET par l'intersection de FP avec l'autre moitié de la Parabole. (*Consultez la Note seizieme.*)

PROPOSITION VIII.

PROBLÉME.

27. SOIT *une ligne courbe* AN (*Fig.* 13. *Pl.* 1.) *qui ait pour diamètre la ligne droite* AP, *avec un point fixe* F *hors de ces lignes; soit une autre ligne courbe* CMD *telle que menant comme l'on voudra, la droite* FMPN, *la relation de ses*

parties FN, FP, FM *soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de tirer du point donné* M *la tangente* MT.

Soit menée par le point F la ligne HK perpendiculaire à FN, qui rencontre en K le diamètre AP, & en H la tangente donnée NH; soient décrits du centre F & des intervalles FN, FP, FM de petits arcs de cercle NQ, Po, MR terminés par la droite Fn que l'on conçoit faire avec FN un angle infiniment petit. Cela posé.

Si l'on nomme les connues FK, s; FH, t; FP, x; FM, y; FN, z; les triangles semblables PFK & poP, FMR & FPo & FNQ, HFN & NQn, mRM & MFT donneront PF (x). FK (s) :: po (dx). oP $= \frac{sdx}{x}$. Et FP (x). FM (y) :: Po $(\frac{sdx}{x})$. MR $\frac{sydx}{xx}$. Et FP (x). FN (z) :: Po $(\frac{sdx}{x})$. NQ $= \frac{szdx}{xx}$. Et HF (t). FN (z) :: NQ $(\frac{szdx}{xx}$. Qn $(-dz) = \frac{szzdx}{txx}$. Et mR (dy). RM $(\frac{sydx}{xx})$ :: FM (y). FT $= \frac{syydx}{xxdy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dy en dx & dz, dans laquelle mettant à la place de dz sa valeur négative $\frac{-szzdx}{txx}$, parce que x croissant, z diminue; tous les termes seront

affectés

affectés par dx; de sorte que cette valeur étant enfin substituée dans $\frac{syydx}{xxdy}$, les dx se détruiront. Et partant la valeur de FT sera exprimée en termes connus & délivrés des différences.

Si l'on supposoit que la ligne droite AP fut une ligne courbe, & qu'on menât la tangente PK, on trouveroit toujours pour FT la même valeur, & le raisonnement demeureroit le même. (*Consultez la Note dix-septieme.*)

EXEMPLE.

28. SUPPOSONS que la ligne courbe AN (*Fig.* 14. *Pl.* 1.) soit un cercle qui passe par le point F (tellement situé à l'égard du diamétre AP que la ligne FB perpendiculaire à ce diamétre passe par le centre G de ce cercle), & que PM soit toujours égale à PN; il est clair que la courbe CMD, qui devient en ce cas FMA, sera la Cissoïde de *Diocles*, & que l'on aura pour équation $z + y = 2x$, dont la différence est $dy = 2dx - dz = \frac{2txxdx + szzdx}{txx}$ en mettant pour dz sa valeur $-\frac{szzdx}{txx}$ trouvée ci-dessus (*Art.* 27.). Et partant FT $(\frac{syydx}{xxdy}) = \frac{styy}{2txx + szz}$.

Si le point donné M tomboit sur le point A, les lignes FM, FN, FP seroient égales chacune à FA, comme aussi les droites FK, FH;

& partant on auroit en ce cas FT $= \frac{x^4}{3x^3} = \frac{1}{3}x$, c'eſt-à-dire que ſi l'on prend FT $= \frac{1}{3}$ AF, & qu'on mene la ligne AT, elle ſera tangente en A.

On peut encore trouver les tangentes de la Ciſſoïde par le moyen de la premiere Propoſition, en menant les perpendiculaires NE, ML ſur le diamétre FB, & cherchant l'équation qui exprime le rapport de la coupée FL à l'appliquée LM; ce qui ſe fait ainſi. Ayant nommé les connues FB, $2a$; FL ou BE, x; LM, y; les triangles ſemblables FEN, FLM, & la proprieté du cercle donneront FL (x). LM (y) : : FE . EN : : EN $(\sqrt{2ax - xx})$. EB (x). D'où l'on tire $yy = \frac{x^3}{2a - x}$, dont la différence eſt $2ydy = \frac{6axxdx - 2x^3dx}{\overline{2a - x}^2}$. Et partant LO (*Art.* 9.) $\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{yy \times \overline{2a - x}^2}{3axx - x^3} = \frac{2ax - xx}{3a - x}$, en mettant pour yy ſa valeur $\frac{x^3}{2a - x}$.

PROPOSITION IX.

PROBLÉME.

29. SOIENT *deux lignes courbes* ANB, CPD, *& une ligne droite* FKT, (*Fig.* 15. *Pl.* 1.) *ſur leſquelles ſoient marqués des points fixes* A, C, F; *ſoit de plus une autre ligne courbe* EMG *telle qu'ayant mené par un de ſes points quelconques* M *la droite* FMN, *&* MP *parallele à* FK; *la rélation de l'arc* AN *à l'arc* CP *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *ſur la courbe* EG *mener la tangente* MT.

Ayant mené par le point cherché T la ligne TH parallele à FM, & par le point donné M les droites MRK, MOH paralleles aux tangentes en P & en N, on tirera FmOn infiniment proche de FMN, & mRp parallele à MP.

Cela poſé, ſi l'on nomme les connues FM, s; FN, t; MK, u; CP x; AN, y; (donc Pp ou MR $= dx$, N$n = dy$) les triangles ſemblables FNn & FMO, MOm & MHT, MRm & MKT donneront FN (t). FM (s) : : Nn (dy). MO $= \frac{sdy}{t}$. Et MR (dx). MO $\left(\frac{sdy}{t}\right)$: : MK (u). MH $= \frac{sudy}{tdx}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée l'on aura une valeur de dy en termes qui ſeront tous affectés par dx, laquelle étant ſubſtituée dans $\frac{sudy}{tdx}$, les dx ſe détruiront; & partant la valeur de MH ſera exprimée en termes entièrement connus. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit mené MH parallele à la touchante en N & égale à la valeur que l'on vient de trouver : ſoit tirée HT parallele à FM, qui rencontre en T la droite FK, par où & par le point donné M ſoit menée la tangente cherchée MT. (*Conſultez la Note dix-huitieme.*)

EXEMPLE.

30. Si l'on veut que la courbe ANB (*Fig.* 16. *Pl.* 1.) soit un quart de cercle qui ait pour centre le point fixe F; que la courbe CPD soit le rayon APF perpendiculaire sur la droite FKGQTB, & que l'arc AN (y) soit toujours à la droite AP (x), comme le quart de cercle ANB (b) au rayon AF (a); la courbe EMG deviendra la quadratrice AMG de *Dinostrate*, & l'on aura MH $\left(\frac{sudy}{tdx}\right) = \frac{asdy - sxdy}{adx}$, puisque FP ou MK ($u$) $= a - x$, & FN (t) $= a$. Mais l'analogie supposée donne $ay = bx$, & $ady = bdx$. Mettant donc dans la valeur de MH à la place de x & de dy leurs valeurs $\frac{ay}{b}$ & $\frac{bdx}{a}$, on trouvera MH $= \frac{bs - ys}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée MH perpendiculaire sur FM, & égale à l'arc MQ décrit du centre F, & soit tirée HT parallele à FM; je dis que la ligne MT sera tangente en M. Car à cause des secteurs semblables FNB, FMQ, l'on aura FN (a). FM (s) :: NB ($b - y$). MQ $= \frac{bs - sy}{a}$.

COROLLAIRE.

31. Si l'on veut déterminer le point G où la quadratrice AMG rencontre le rayon FB, (*Fig.* 17. *Pl.* 1.) on imaginera un autre rayon Fgb infiniment proche de FGB; & en menant gf

parallele à FB, la propriété de la quadratrice & les triangles semblables FBb, gfF rectangles en B & en f, donneront AB . AF :: Bb . Ff :: FB ou AF . gf ou FG. D'où l'on voit que si l'on prend une troisieme proportionnelle au quart de cercle AB & au rayon AF, elle sera égale à FG, c'est-à-dire que FG $= \frac{aa}{b}$. Ce qui donne lieu d'abréger la construction des tangentes.

Car menant TE parallele à MH, (*Fig.* 16. *Pl.* 1.) les triangles semblables FMK, FTE donneront MK ($a - x$) . MF (s) :: ET ou MH $\left(\frac{bs - sy}{a}\right)$. FT $= \frac{bss - yss}{aa - ax} = \frac{bss}{aa}$. En mettant pour x sa valeur $\frac{ay}{b}$, & divisant ensuite le tout par $b - y$; d'où il est clair que la ligne FT est troisieme proportionnelle à FG & à FM. (*Consultez la Note dix-neuvieme.*)

PROPOSITION X.

PROBLÉME.

32. Soit *une ligne courbe* AMB (*Fig.* 18. *Pl.* 2.) *telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques* M *aux foyers* F, G, H, *&c. les droites* MF, MG, MH, *&c. leur relation soit exprimée par une équation quelconque : & soit proposé de mener du point donné* M *la perpendiculaire* MP *sur la tangente en ce point.*

Ayant pris sur la courbe AB l'arc Mm infiniment petit, & mené les droites FRm, GmS,

HmO, on décrira des centres F, G, H les petits arcs de cercles MR, MS, MO; ensuite du centre M & d'un intervalle quelconque on décrira de même le cercle CDE qui coupe les lignes MF, MG, MH aux points C, D, E, d'où l'on abaissera sur MP les perpendiculaires CL, DK, EI. Cette préparation étant faite, je remarque

1°. Que les triangles rectangles MRm, MLC sont semblables; car en ôtant des angles droits LMm, RMC l'angle commun LMR, les restes RMm, LMC seront égaux, & de plus ils sont rectangles en R & L. On prouvera de même que les triangles rectangles MSm & MKD, MOm & MIE sont semblables. Partant, puisque l'hypothenuse Mm est commune aux petits triangles MRm, MSm, MOm, & que les hypothenuses MC, MD, ME des triangles MLC, MKD, MIE sont égales entr'elles; il s'ensuit que les perpendiculaires CL, DK, EI ont le même rapport entr'elles que les différences Rm, Sm, Om.

2°. Que les lignes, qui partent des foyers situés du même côté de la perpendiculaire MP, croissent pendant que les autres diminuent, ou au contraire. Comme dans la figure 18. FM croît de sa différence Rm, pendant que les autres GM, HM diminuent de leurs Sm, Om.

Si l'on suppose à présent, pour fixer ses idées, que l'équation qui exprime la relation des droites FM (x), GM (y), HM (z), soit $ax + xy - zz = o$, dont la différence est $adx + ydx + xdy - 2zdz = o$; Il est évident que la tangente en

M (qui n'est autre chose que la continuation du petit côté Mm du poligone que l'on conçoit (*Art.* 3.) composer la courbe AMB) doit être tellement placée qu'en menant d'un de ses points quelconques m des paralleles mR, mS, mO aux droites FM, GM, HM, terminées en R, S, O par des perpendiculaires MR, MS, MO à ces mêmes droites, on ait toujours l'équation $\overline{a+y} \times Rm + x \times Sm - 2z \times Om = o$: ou (ce qui revient au même, en mettant à la place de Rm, Sm, Om leurs proportionnelles CL, DK, EI) que la perpendiculaire MP à la courbe doit être placée, ensorte que $\overline{a+y} \times CL + x \times DK - 2z \times EI = o$. Ce qui donne cette construction.

Que l'on conçoive que le point C (*Fig.* 18. 19. *Pl.* 2.) soit chargé du poids $a+y$ qui multiplie la différence dx de la droite FM sur laquelle il est situé, & de même le point D du poids x, & le point E pris de l'autre côté de M par rapport au foyer H (parce que le terme $-2zdz$ est négatif) du poids $2z$. Je dis que la droite MP qui passe par le commun centre de pesanteur des poids supposés en C, D, E, sera la perpendiculaire requise. Car il est clair par les principes de la Mécanique, que toute ligne droite, qui passe par le centre de pesanteur de plusieurs poids, les sépare, ensorte que les poids d'une part multipliés chacun par sa distance de cette droite, sont précisément égaux aux poids de l'autre part multipliés aussi chacun par sa distance de cette même droite. Donc posant le cas que x croisſant, y & z croiſſent auſſi, c'eſt-à-dire, que les foyers F, G, H (*Fig.* 19. *Pl.* 2.) tombent du même côté de MP, comme l'on ſuppoſe toujours en prenant la différence de l'équation donnée ſelon les regles preſcrites; il s'enſuit que la ligne MP laiſſera d'une part les poids en C & D, & de l'autre le poids en E, & qu'ainſi l'on aura $\overline{a+y} \times CL + x \times DK - 2z \times EI = o$, qui étoit l'équation à conſtruire.

Or je dis maintenant que puiſque la conſtruction eſt bonne dans ce cas, elle le ſera auſſi dans tous les autres; car ſuppoſant, par exemple, que le point M change de ſituation dans la courbe, enſorte que x croiſſant, y & z diminuent, c'eſt-à-dire, que les foyers G, H (*Fig.* 18. *Pl.* 2.) paſſent de l'autre côté de MP, il s'enſuit 1°. (*Art.* 8.) Qu'il faut changer dans la différence de l'équation donnée les ſignes des termes affectés par dy, dz, ou par leurs proportionnelles DK, EI; de ſorte que l'équation à conſtruire ſera dans ce nouveau cas $\overline{a+y} \times CL - x \times DK + 2z \times EI = o$. 2°. Que les poids en D & E changeront de côté par rapport à MP; & qu'ainſi l'on aura par la propriété du centre de peſanteur $\overline{a+y} \times CL - x \times DK + 2z \times EI = o$, qui eſt l'équation à conſtruire. Et comme cela arrive toujours dans tous les cas poſſibles, il s'enſuit, &c.

Il eſt évident que le même raiſonnement ſubſiſtera toujours, tel que ſoit le nombre des foyers, & telle que puiſſe être l'équation donnée; de ſorte que l'on peut énoncer ainſi la conſtruction générale.

Soit priſe la différence de l'équation donnée dont je ſuppoſe que l'un des membres ſoit zero, & ſoit décrit à diſcrétion du centre M un cercle CDE qui coupe les droites MF, MG, MH aux points C, D, E, dans leſquels ſoient conçus des poids qui ayent entr'eux le même rapport que les quantités qui multiplient les différences des lignes ſur leſquelles ils ſont ſitués. Je dis que la ligne MP qui paſſe par leur commun centre de peſanteur, ſera la perpendiculaire requiſe. Il eſt à remarquer que ſi l'un des poids eſt négatif dans la différence de l'équation donnée, il le faut concevoir de l'autre côté du point M par rapport au foyer.

Si l'on veut que les foyers F, G, H (*Fig.* 20. *Pl.* 2.) ſoient des lignes droites ou courbes ſur qui les droites MF, MG, MH tombent à angles droits, la même conſtruction aura toujours lieu. Car menant du point m pris infiniment près de M les perpendiculaires mf, mg, mh ſur les foyers, & du point M les petites perpendiculaires MR, MS, MO ſur ces lignes; il eſt clair que Rm ſera la différence de MF, puiſque les droites MF, Rf étant perpendiculaires entre les paralleles Ff, MR, elles ſeront égales, & de même que Sm eſt la différence de MG, & Om celle de MH; & on prouvera enſuite tout le reſte comme ci-deſſus.

On peut encore concevoir que les foyers F, G, H (*Fig.* 21. *Pl.* 2.) ſoient tous ou en partie des lignes courbes qui ayent des commencemens fixes & invariables aux points F, G, H, & que la ligne courbe AMB soit telle qu'ayant mené, par exemple, d'un de ses points quelconques M les tangentes MV, MX & la droite MG; la relation des lignes mixtilignes FVM, HXM & de la droite GM soit exprimée par une équation quelconque. Car ayant mené du point m pris infiniment près de M la tangente mu, il est clair qu'elle rencontrera l'autre tangente au point V (puisqu'elle n'est que la continuation du petit arc Vu considéré comme une petite droite); & partant que si l'on décrit du centre V le petit arc de cercle MR; Rm sera la différence de la ligne mixtiligne FVM qui devient FVuRm. Et tout le reste se démontrera comme ci-devant. (*Consultez la Note 20*).

M. Tschirnhaus *a donné la premiere idée de ce Problême dans son Livre de la Medecine de l'esprit; M.* Fatio *en a trouvé ensuite une solution très-ingénieuse qu'il a fait insérer dans les Journaux d'Hollande : mais la maniere dont ils l'ont conçu, n'est qu'un cas particulier de la construction générale que je viens de donner.*

EXEMPLE I.

33. SOIT $axx+byy+czz-f^3=o$ (les droites a, b, c, f sont données) dont la différence est $axdx+bydy+czdz=o$. C'est pourquoi concevant en C (*Fig.* 22. *Pl.* 2.) le poids ax, en D le poids by, & en E le poids cz, c'est-à-dire, des poids qui soient entr'eux comme ces rectangles; la ligne MP qui passe par leur commun

centre de pesanteur, sera perpendiculaire à la courbe au point M.

Mais si l'on mene FO parallele à CL, & que l'on prenne le rayon MC pour l'unité, les triangles semblables MCL, MFO donneront FO $=x\times$CL; & de même menant GR parallele à DK, & HS parallele à EI, on trouvera que GR $=y\times$DK & HS $=z\times$EI; de sorte qu'en imaginant aux foyers F, G, H les poids a, b, c; la ligne MP, qui passe par le centre de pesanteur des poids ax, by, cz supposés en C, D, E, passera aussi par le centre de pesanteur de ces nouveaux poids. Or ce centre est un point fixe, puisque les poids en F, G, H, sçavoir a, b, c, sont des droites constantes qui demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que se trouve le point M. D'où il suit que la courbe AMB doit être telle que toutes ses perpendiculaires se coupent dans le même point, c'est-à-dire, qu'elle sera un cercle qui aura pour centre ce point. Voici donc une propriété très-remarquable du cercle que l'on peut énoncer ainsi.

S'il y a sur un même plan autant de poids a, b, c, &c. que l'on voudra, situés en F, G, H, &c. & que l'on décrive de leur commun centre de pesanteur un cercle AMB; je dis qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M, les droites MF, MG, MH, &c. la somme de leurs quarrés multipliés chacun par le poids qui lui répond, sera toujours égale à une même quantité.

EXEMPLE II.

34. SOIT la courbe AMB (*Fig.* 23. *Pl.* 2.) telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M au foyer F qui est un point fixe, la droite MF, & au foyer G qui est une ligne droite la perpendiculaire MG; le rapport de MF à MG soit toujours le même, que de la donnée a à la donnée b.

Ayant nommé FM, x; MG, y; on aura $x . y :: a . b$, & partant $ay = bx$ dont la différence est $ady - bdx = 0$. C'est pourquoi concevant en C pris au-delà de M par rapport à F le poids b, & en D (à pareille distance de M) le poids a, & menant par leur centre commun de pesanteur la ligne MP, elle sera la perpendiculaire requise.

Il est clair par le principe de la balance, que si l'on divise la corde CD au point P, ensorte que CP . DP :: $a . b$; le point P, sera le centre commun de pesanteur des poids supposés en C & D.

La courbe AMB est une section conique; sçavoir une Parabole lorsque $a = b$, une Hyperbole lorsque a surpasse b, & enfin une Ellipse lorsqu'il est moindre. (*Consultez la Note* 21.)

EXEMPLE III.

35. SI après avoir attaché les extrêmités d'un fil FZVMGMXYH (*Fig.* 24. *Pl.* 2.) en F & en H, & avoir fiché une petite pointe en G, on fait tendre également ce fil par le moyen d'un

stile placé en M, ensorte que les parties FZV, HYX soient roulées autour des courbes qui ont leur origine en F & H, que la partie MG soit double, c'est-à-dire, qu'elle soit repliée en G, & que les choses demeurant en cet état l'on fasse mouvoir le stile M; il est clair qu'il décrira une courbe AMB. Il est question de mener d'un point donné M sur cette courbe la perpendiculaire MP, la position du fil qui sert à la décrire étant donnée en ce point.

Je remarque que les parties droites MV, MX du fil sont toujours tangentes en V & X, & que si l'on nomme les lignes mixtilignes FZVM, x; HYXM, z; la droite MG, y; & une ligne droite prise égale à la longueur du fil, a; l'on aura toujours $x + 2y + z = a$: d'où je connois que la courbe AMB est comprise dans la construction générale. C'est pourquoi prenant la différence $dx + 2dy + dz = 0$, & concevant en C le poids 1, en D le poids 2, & en E le poids 1; je dis que la ligne MP, qui passe par le centre commun de pesanteur de ces poids, sera la perpendiculaire requise.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

36. SOIENT *deux lignes quelconques* APB, EQF (*Fig.* 25. *Pl.* 2.) *dont l'on sçache mener les tangentes* PG, QH; *& soit une ligne droite* PQ *sur laquelle soit marqué un point* M. *Si l'on conçoit que les extrêmités* P, Q *de cette droite*

glissent le long des lignes AB, EF, *il est clair que le point* M *décrira dans ce mouvement une ligne courbe* CD. *Il est question de mener d'un point donné* M *sur cette courbe la tangente* MT.

Ayant imaginé que la droite mobile PMQ soit parvenue dans la situation infiniment proche pmq, on tirera les petites droites PO, MR, QS perpendiculaires sur PQ, ce qui formera les petits triangles rectangles pOP, mRM, qSQ; & ayant pris PK égale à MQ, on menera la droite HKG perpendiculaire sur PQ, & l'on prolongera OP en T, où je suppose qu'elle rencontre la tangente cherchée MT. Cela posé, il est clair que les petites droites Op, Rm, Sq seront égales entr'elles, puisque par la construction PM & MQ sont par tout les mêmes.

Ayant nommé les connues PM ou KQ, a; MQ ou PK, b; KG, f; KH, g; & la petite droite Op ou Rm ou Sq, dy; les triangles semblables PKG & pOP, QKH & qSQ donneront PK (b). KG (f) :: $pO\,(dy)$. OP $= \frac{fdy}{b}$. Et QK (a). KH (g) :: $qS\,(dy)$. SQ $= \frac{gdy}{a}$. Or l'on sçait par la Géométrie commune que MR $= \frac{OP \times NQ + QS \times PM}{PQ} = \frac{fdy + gdy}{a+b}$. Ainsi les triangles semblables mRM, MPT donneront $mR\,(dy)$. RM $\left(\frac{fdy+gdy}{a+b}\right)$ :: MP (a). PT $= \frac{af+ag}{a+b}$. Ce qu'il falloit trouver. (*Consultez la Note vingt-deuxieme.*)

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

37. SOIENT *deux lignes quelconques* BN, FQ (*Fig.* 26. *Pl.* 2.) *qui ayent pour axes les droites* BC, ED *qui s'entre-coupent à angles droits au point* A; *& soit une ligne courbe* LM *telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques* M *les droites* MGQ, MPN *parallele à* AB, AE; *la relation des espaces* EGQF (*le point* E *est un point fixe donné sur la droite* AE, *& la ligne* EF *est parallele à* AC) APND, *& les droites* AP, PM, PN, GQ, *soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de mener d'un point donné* M *sur la courbe* LM, *la tangente* MT.

Ayant nommé les données & variables AP ou GM, x; PM ou AG, y; PN, u; GQ, z; l'espace EGQF, s; l'espace APND, t; & les soutangentes données PH, a; GK, b; l'on aura Pp ou NS ou MR $= dx$, Gg ou Rm ou OQ $= -dy$; $Sn = -du = \frac{udx}{a}$, à cause des triangles semblables HPN, NSn; $Oq = dz = -\frac{zdy}{b}$, NP$pn = dt = udx$, & QG$gq = ds = -zdy$; où l'on doit observer que les valeurs de Rm & Sn sont négatives, parce que AP (x) croissant, PM (y) & PN (u) diminuent. Cela posé, on prendra la différence de l'équation donnée, dans laquelle on mettra à la place de dt, ds, du, dz leurs valeurs udx, $-zdy$, $-\frac{udx}{a}$, $-\frac{zdy}{b}$; ce qui donnera une nouvelle équation qui exprimera le rapport cherché de dy à dx, ou de MP à PT.

EXEMPLE I.

38. SOIT $s + zz = t + ux$, on aura en prenant les différences $ds + 2zdz = dt + udx + xdu$, & mettant à la place de ds, dt, dz, du leurs valeurs, on trouvera $-zdy - \frac{2zzdy}{b} = 2udx - \frac{uxdx}{a}$, d'où l'on tire PT $\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2ayzz + aybz}{bux - 2abu}$.

EXEMPLE II.

39. SOIT $s = t$, donc $ds = dt$, c'est-à-dire, $-zdy = udx$, & partant PT $\left(\frac{ydx}{dy}\right) = -\frac{yz}{u}$. Or comme cette quantité est négative, il s'ensuit (*Art.* 10.) que l'on doit prendre le point T du côté opposé au point A origine des x. Si l'on suppose que la ligne FQ soit une hyperbole qui ait pour asymptotes les droites AC, AE, ensorte que GQ $(z) = \frac{ce}{y}$, & que la ligne BND soit une droite parallele à AB, de maniere que PN (u) soit par tout égale à la droite donnée c; il est clair que la courbe LM a pour asymptote la droite AB, & que sa soutangente PT $\left(-\frac{yz}{u}\right) = -c$: c'est-à-dire qu'elle demeure par tout la même.

La courbe LM est appellée dans ce cas *Logarithmique.* (*Consultez la Note vingt-troisieme.*)

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME.

40. SOIENT *deux lignes quelconques* BN, FQ (*Fig.* 27. *Pl.* 2.) *qui ayent pour axe la même droite* BA, *sur laquelle soient marqués deux points fixes* A, E; *soit une troisieme ligne courbe* LM *telle qu'ayant mené par un de ses points quelconques* M *la droite* AN, *décrit du centre* A *l'arc de cercle* MG, *& tiré* GQ *parallele à* EF, *perpendiculaire sur* AB; *la relation des espaces* EGQF (s), ANB (t), *& des droites* AM *ou* AG (y), AN (z), GQ (u), *soit exprimée par une équation quelconque. Il faut mener d'un point donné* M *sur la courbe* LM *la tangente* MT.

Après avoir mené la droite ATH perpendiculaire sur AMN, soit imaginé une autre droite Amn infiniment proche de AMN, un autre arc mg, une autre perpendiculaire gq, & décrit du centre A le petit arc NS : on nommera les soutangentes données AH, a; GK, b; & on aura Rm ou G$g = dy$, S$n = dz$; les triangles semblables HAN & NSn, KGQ & QOq, donneront aussi SN $= \frac{adz}{z}$, O$q = -du = \frac{udy}{b}$, GQ$qg = -ds = udy$, ANn ou AN $\times \frac{1}{2}$ NS $= -dt = \frac{1}{2}adz$. On mettra toutes ces valeurs dans la différence de l'équation donnée, & l'on en formera une nouvelle, d'où l'on tirera une valeur de dz en dy. Or à cause des secteurs & des triangles semblables ANS & AMR, mRM & MAT, on trouve AN (z). AM (y) : : NS ($\frac{adz}{z}$). MR $= \frac{aydz}{zz}$. Et mR (dy). RM ($\frac{aydz}{zz}$) : : AM (y). AT $= \frac{ayydz}{zzdy}$. Si donc l'on met dans cette formule à la place de dz sa valeur en dy, les différences se détruiront, & la valeur de la soutangente cherchée AT sera exprimée en termes entiérement connus. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

41. SOIT $uy - s = zz - t$, dont la différence est $udy + ydu - ds = 2zdz - dt$, ce qui donne (après la substitution faite) $dz = \frac{4budy - 2uydy}{4bz + ab}$; & en mettant cette valeur dans $\frac{ayydz}{zzdy}$, on trouve AT $= \frac{4abuyy - 2auy^3}{4bz^3 + abzz}$.

EXEMPLE II.

42. SOIT $s = 2t$, donc $ds = 2dt$, c'est-à-dire, $-udy = -adz$, ou $dz = \frac{udy}{a}$; & partant AT ($\frac{ayydz}{zzdy}$) $= \frac{uyy}{zz}$.

Si la ligne BN est un cercle qui ait pour centre le point A, & pour rayon la droite AB $=$ AN $= c$, & que FQ soit une hyperbole, telle que GQ (u) $= \frac{ff}{y}$; il est clair que la courbe LM fait une

infinité de retours autour du centre A, avant que d'y parvenir (puisque lespace FEGQ devient infini, lorsque le point G tombe en A), & que AT $= \frac{ffy}{cc}$. D'où l'on voit que la raison de AM à AT est constante; & partant que l'angle AMT est est par tout le même.

La courbe LM est appellée en ce cas *Logarithmique spirale. (Consultez la Note vingt-quatrieme.)*

PROPOSITION XIV.

PROBLÉME.

43. SOIENT *sur un même plan deux courbes quelconques* AMD, BMC *(Fig. 28. Pl. 2.) qui se touchent en un point* M, *& soit sur le plan de la courbe* BMC *un point fixe* L. *Si l'on conçoit à present que la courbe* BMC *roule sur la courbe* AMD *en s'y appliquant continuellement, ensorte que les parties révolues* AM, BM *soient toujours égales entr'elles; il est visible que le plan* BMC *emportant le point* L, *ce point décrira dans ce mouvement une espèce de roulette* ILK. *Cela posé, je dis que si l'on mene dans chaque différente position de la courbe* BMC *(du point décrivant* L *au point touchant* M*) la droite* LM; *elle sera perpendiculaire à la courbe* ILK.

Car imaginant sur les deux courbes AMD, BMC deux parties *Mm*, *Mm* égales entr'elles & infiniment petites, on les pourra considérer *(Art. 3.)* comme deux petites droites qui font au point M un angle infiniment petit. Or afin que le petit côté Mm de la courbe ou poligone BMC tombe sur le petit côté Mm du poligone AMD, il faut que le point L décrive autour du point touchant M comme centre un petit arc Ll. Il est donc évident que ce petit arc sera partie de la courbe ILK; & par conséquent que la droite ML, qui lui est perpendiculaire, sera aussi perpendiculaire sur la courbe ILK au point L. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XV.

PROBLÉME.

44. SOIT *un angle rectiligne quelconque* MLN, (*Fig.* 29. *Pl.* 2.) *dont les côtés* LM, LN *touchent deux courbes quelconques* AM, BN. *Si l'on fait glisser ces côtés autour de ces courbes, ensorte qu'ils les touchent continuellement; il est clair que le sommet* L *décrira dans ce mouvement une courbe* ILK. *Il est question de mener une perpendiculaire* LC *sur cette courbe, la position de l'angle* MLN *étant donnée.*

Soit décrit un cercle qui passe par le sommet L, & par les points touchans M, N; soit menée par le centre C de ce cercle la droite CL: je dis qu'elle sera perpendiculaire à la courbe ILK.

Car considérant les courbes AM, BN comme des poligones d'une infinité de côtés, tels que Mm, Nn; il est évident que si l'on fait glisser les côtés LM, LN, de l'angle rectiligne MLN, qu'on suppose demeurer toujours le même, autour des points fixes M, N, (on considére les tangentes

LM, LN comme la continuation des petits côtés Mf, Ng) jusqu'à ce que le côté LM de l'angle tombe sur le petit côté Mm du poligone AM & l'autre côté LN sur le petit côté Nn du poligone BN; le sommet L décrira une petite partie Ll de l'arc de cercle MLN, puisque par la construction cet arc est capable de l'angle donné MLN. Cette petite partie Ll sera donc commune à la courbe ILK; & par conséquent la droite CL, qui lui est perpendiculaire, sera aussi perpendiculaire sur cette courbe au point L. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

PROBLÉME.

45. SOIT ABCD (*Fig.* 32. *Pl.* 3.) *une corde parfaitement fléxible à laquelle soient attachés différens poids* A, B, C, &c. *qui ayent entr'eux tels intervalles* AB, BC, &c. *que l'on voudra. Si l'on traîne cette corde sur un plan horizontal par l'extrêmité* D, *le long d'une courbe donnée* DP; *il est clair que ces poids se disposeront, ensorte qu'ils feront tendre la corde, & qu'ils décriront ensuite des courbes* AM, BN, CO, &c. *On demande la maniere d'en tirer les tangentes, la position de la corde* ABCD *étant donnée avec la grandeur des poids.*

Dans le premier instant que l'extrêmité D avance vers P, les poids A, B, C, décrivent ou tendent à décrire autant de petits côtés Aa, Bb, Cc des poligones qui composent les courbes

AM, BN, CO ; & par conséquent il ne faut pour en mener les tangentes AB, BG, CK, que déterminer la direction des poids, A, B, C dans ce premier instant, c'est-à-dire, la position des droites qu'ils tendent à décrire. Pour la trouver, je remarque

1°. Que le poids A est tiré dans ce premier instant suivant la direction AB ; & comme il n'y a aucun obstacle qui s'oppose à cette direction, puisqu'il ne traîne après lui aucun poids, il la doit suivre ; & partant la droite AB sera la tangente en A de la courbe AM.

2°. Que le poids B est tiré suivant la direction BC ; mais parce qu'il traîne après lui le poids A qui n'est pas dans cette direction, & qui doit par conséquent y apporter quelque changement, le poids B n'aura pas sa direction suivant BC, mais suivant une autre droite BG, dont il faut trouver la position. Ce que je fais ainsi.

Je décris sur BC comme diagonale le rectangle EF, dont le côté BF est sur AB prolongée ; & supposant que la force avec laquelle le poids B est tiré suivant BC, s'exprime par BC, il est visible par les regles de la Mécanique, que cette force BC se peut partager en deux autres BE & BF, c'est-à-dire, que le poids B étant tiré suivant la direction BC par la force BC, c'est la même chose que s'il étoit tiré en même tems par la force BE suivant la direction BE, & par la force BF suivant la direction BF. Or le poids A ne s'oppose point à la direction BE, puisqu'elle lui est perpendiculaire ; & par conséquent la force BE suivant cette direction demeure toute entiere : mais il s'oppose avec toute sa pesanteur à la direction BF. Afin donc que le poids B avec la force BF vainque la résistance du poids A, il faut que cette force se distribue dans ces poids à proportion de leurs masses ou grandeurs : c'est pourquoi si l'on divise EC au point G, ensorte que CG soit à GE comme le poids A au poids B ; il est clair que EG exprimera la force restante avec laquelle le poids B tend à se mouvoir suivant la direction BF, après avoir vaincu la résistance du poids A. Il est donc évident que le poids B est tiré en même tems par la force BE suivant la direction BE, & par la force EG suivant la direction BF ou EC ; & partant qu'il tendra à aller par BG avec la force BG : c'est-à-dire, que BG sera sa direction, & par conséquent tangente en B de la courbe BN.

3°. Pour avoir la tangente CK, je forme sur CD comme diagonale le rectangle HI, dont le côté CI est sur BC prolongée ; & je vois que le poids B ne résiste point à la force CH avec laquelle le poids C est tiré suivant la direction CH, mais bien à la force CI avec laquelle il est tiré suivant la direction CI, & de plus que le poids A résiste aussi à cette force. Pour sçavoir de combien, je tire AL perpendiculaire sur CB prolongée du côté de B, & je remarque que si AB exprime la force avec laquelle le poids A est tiré suivant la direction AB, BL exprimera celle avec laquelle ce même poids A eſt tiré ſuivant la direction BC ; de ſorte que le poids C avec la force CI doit vaincre le poids entier B, & de plus une partie du poids A qui eſt à ce poids A comme BL eſt à BA, ou BF à BC. Si donc l'on fait $B + \frac{A \times BF}{BC} \cdot C :: DK \cdot KH$, il eſt clair que CK ſera la direction du poids C, & par conſéquent la tangente en C de la troiſieme courbe CO.

Si le nombre des courbes étoit plus grand, on trouveroit de la même maniere la tangente de la quatrieme, cinquieme, &c. Et ſi l'on vouloit avoir les tangentes des courbes décrites par les points moyens entre les poids, on les trouveroit par l'art. 36. (*Voyez la Note* 25.).

SECTION III.

Uſage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où ſe réduiſent les queſtions De maximis & minimis.

DÉFINITION I.

SOIT une ligne courbe MDM (*Fig.* 30. 31. 33. 34. *Pl.* 2. & 3.) dont les appliquées PM, ED, PM ſoient paralleles entr'elles, & qui ſoit telle que la coupée AP croiſſant continuellement, l'appliquée PM croiſſe auſſi jusqu'à un certain point E, après lequel elle diminue ; ou au contraire qu'elle diminue juſqu'à un certain point E, après lequel elle croiſſe. Cela poſé.

La ligne ED ſera nommée *la plus grande* ou *la moindre* appliquée.

DÉFINITION II.

Si l'on propoſe une quantité telle que PM, qui ſoit compoſée d'une ou de pluſieurs indéterminées telles que AP, laquelle AP croiſſant continuellement, cette quantité PM croiſſe auſſi juſqu'à un certain point E, après lequel elle diminue, ou au contraire ; & qu'il faille trouver pour AP, une valeur AE telle que la quantité ED qui en eſt compoſée, ſoit plus grande ou moindre que toute autre quantité PM ſemblablement formée de AP. Cela s'appelle une queſtion *De maximis & minimis*.

PROPOSITION GÉNÉRALE.

46. *La nature de la ligne courbe* MDM *étant donnée ; trouver pour* AP *une valeur* AE *telle que l'appliquée* ED *soit la plus grande ou la moindre de ses semblables* PM.

Lorsque AP croissant, PM croît aussi ; il est évident (*Art.* 8. 10.) que sa différence Rm sera positive par rapport à celle de AP ; & qu'au contraire lorsque PM diminue, la coupée AP croissant toujours, sa différence sera négative. Or toute quantité qui croît ou diminue continuellement, ne peut devenir de positive négative, qu'elle ne passe par l'infini ou par le zero ; sçavoir par le zero lorsqu'elle va d'abord en diminuant, & par l'infini lorsqu'elle va d'abord en augmentant. D'où il suit que la différence d'une quantité qui exprime un *plus grand* ou un *moindre*, doit être égale à zero ou à l'infini. Or la nature de la courbe MDM étant donnée, on trouvera (*Sect.* 1. *ou* 2.) une valeur de Rm, laquelle étant égalée d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira à découvrir la valeur cherchée de AE dans l'une ou l'autre de ces suppositions.

REMARQUE.

47. La tangente en D (*Fig.* 30. 31. *Pl.* 2.) est parallele à l'axe AB, lorsque la différence Rm devient nulle dans ce point ; mais lorsqu'elle devient infinie, la tangente se confond avec l'appliquée ED. (*Fig.* 33. 34. *Pl.* 3.) D'où l'on voit que la raison de mR à RM, qui exprime celle de l'appliquée à la soutangente, est nulle ou infinie sous le point D.

On conçoit aisément qu'une quantité, qui diminue continuellement, ne peut devenir de positive négative sans passer par le zero ; mais on ne voit pas avec la même évidence que lorsqu'elle augmente, elle doive passer par l'infini. C'est pourquoi pour aider l'imagination, soient entendues des tangentes aux points M, D, M ; (*Fig.* 30. 31. *Pl.* 2.) il est clair dans les courbes où la tangente en D est parallele à l'axe AB, que la soutangente PT augmente continuellement à mesure que les points M, P, approchent des points D, E ; & que le point M tombant en D, elle devient infinie ; & qu'enfin lorsque AP surpasse AE, la soutangente PT devient (*Art.* 10.) négative de positive qu'elle étoit, ou au contraire. (*Consultez la Note* 26.)

EXEMPLE I.

48. Supposons que $x^3 + y^3 = axy$ (AP $= x$, PM $= y$, AB $= a$) (*Fig.* 35. *Pl.* 3.) exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences $3xxdx + 3yydy = axdy + aydx$, & $dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax} = o$, lorsque le point P tombe sur le point cherché E, d'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$; & substituant cette valeur à la place de y dans l'équation $x^3 + y^3 = axy$, on trouve pour

AE une valeur $x = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{2}$ telle que l'appliquée ED sera plus grande que toutes ses semblables PM. (*Consultez la Note vingt-septieme.*)

EXEMPLE II.

49. SOIT $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$, l'équation qui exprime la nature de la courbe MDM. (*Fig.* 33. *Pl.* 3.) On aura en prenant les différences, $dy = -\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ que j'égale d'abord à zero; mais parce que cette supposition me donne $-2dx\sqrt[3]{a} = o$ qui ne peut faire connoître la valeur de AE, j'égale ensuite $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ à l'infini, ce qui me donne $3\sqrt[3]{a-x} = o$; d'où l'on tire $x = a$, qui est la valeur cherchée de AE. (*Consultez le Note vingt-huitieme.*)

EXEMPLE III.

50. SOIT une demie roulette accourcie AMF, (*Fig.* 36. *Pl.* 3.) dont la base BF est moindre que la demi-circonférence ANB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E sur le diamètre AB, en sorte que l'appliquée ED soit la plus grande qu'il est possible.

Ayant mené à discrétion l'appliquée PM qui coupe le demi-cercle en N, on concevra à l'ordinaire aux points M, N, les petits triangles MRm, NSn, & nommant les indéterminées AP, x; PN, z; l'arc AN, u; & les données ANB, a;

BF, b; CA ou CN, c; l'on aura par la propriété de la roulette ANB (a). BF (b) :: AN (u). NM $= \frac{bu}{a}$. Donc PM $= z + \frac{bu}{a}$, & sa différence R$m = \frac{adz + bdu}{a} = o$ lorsque le point P tombe au point cherché E. Or les triangles rectangles NSn, NPC sont semblables; car si l'on ôte des angles droits CNn, PNS l'angle commun CNS, les restes SNn, PNC seront égaux. Et partant CN (c). CP ($c - x$) :: Nn (du). Sn (dz) $= \frac{cdu - xdu}{c}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz dans $adz + bdu = o$, on trouvera $\frac{acdu - axdu + bcdu}{c} = o$, d'où l'on tirera x (qui est en ce cas AE) $= c + \frac{bc}{a}$.

Il est donc évident que si l'on prend CE du côté de B quatrieme proportionnelle à la demi-circonférence ANB, à la base BF, & au rayon CB, le point E sera celui qu'on cherche. (*Consultez la Note vingt-neuvieme.*)

EXEMPLE IV.

51. COUPER la ligne donnée AB (*Fig.* 35. *Pl.* 3.) en un point E, ensorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere.

Ayant nommé l'inconue AE, x; & la donnée AB, a; on aura $\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3$, qui doit être un *plus grand*. C'eſt pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée MP (y) à la coupée AP (x) ſoit exprimée par l'équation $y = \frac{axx - x^3}{aa}$, & on cherchera un point E tel que l'appliqueé ED ſoit la plus grande de toutes ſes ſemblables PM; ce qui donne $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = o$, d'où l'on tire AE ($x$) $= \frac{2}{3}a$.

Si l'on veut en général que $x^m \times \overline{a-x}^n$ ſoit un *plus grand* (*m* & *n* peuvent marquer tels nombres qu'on voudra), il faudra que la différence de ce produit ſoit égale à zero ou à l'infini, ce qui donne $mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m = o$, d'où en diviſant par $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}dx$, l'on tire $am - mx - nx = o$, & AE (x) $= \frac{m}{m+n}a$.

Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura AE $= 2a$, & il faudra alors énoncer le Problême ainſi.

Prolonger la ligne donnée AB (*Fig. 37. Pl. 3.*) du côté de B en un point E, enſorte que la quantité $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ ſoit *un moindre*, & non pas un *plus grand*; car l'équation à la courbe MDM ſera $\frac{xx}{x-a} = y$, dans laquelle ſi l'on ſuppoſe $x = a$, l'appliquée PM qui devient BC ſera $\frac{aa}{o}$, c'eſt-à-dire, infinie; & ſuppoſant x infinie, l'on aura $y = x$, c'eſt-à-dire, que l'appliquée ſera auſſi infinie.

Si $m = 1$, & $n = -2$, l'on aura AE $= -a$; d'où il ſuit que l'on doit énoncer le Problême alors en cette ſorte.

Prolonger la droite donnée AB (*Fig. 38. Pl. 3.*) du côté de A en un point E, enſorte que la quantité $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ ſoit plus grande que toute autre quantité ſemblable $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$. (*Conſultez la Note trentieme.*)

EXEMPLE V.

52. LA ligne droite AB (*Fig. 39. Pl. 3.*) étant diviſée en trois parties AC, CF, FB, il faut couper ſa partie du milieu CF au point E, enſorte que le rapport du rectangle AE×EB au rectangle CE×EF ſoit moindre que tout autre rapport formé de la même maniere.

Ayant nommé les données AC, a; CF, b; CB, c; & l'inconnue CE, x; l'on aura AE $= a + x$, EB $= c - x$, EF $= b - x$, & partant le rapport de AE × EB à CE × EF ſera $\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$ qui doit être *un moindre*. C'eſt pourquoi ſi l'on imagine une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée CP (x) ſoit exprimée par l'équation $y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx}$, la queſtion ſe réduit à trouver pour x une valeur CE telle que l'appliquée E D ſoit la moindre de toutes ſes ſemblables P M. On formera donc (en prenant les différences, & diviſant enſuite par adx) l'égalité $cxx - axx - bxx + 2acx - abc = 0$, dont l'une des racines réſout la queſtion.

Si $c = a + b$, l'on aura $x = \frac{1}{2} b$. (*Conſultez la Note trente-unieme.*)

Exemple VI.

53. Entre tous les Cones qui peuvent être inſcrits dans une ſphére déterminer celui qui a la plus grande ſurface convexe.

La queſtion ſe réduit à déterminer ſur le diamètre AB du demi-cercle AFB (*Fig.* 40. *Pl.* 3.) le point E; enſorte qu'ayant mené la perpendiculaire EF, & joint AF, le rectangle $AF \times FE$ ſoit le plus grand de tous ſes ſemblables $AN \times NP$. Car ſi l'on conçoit que le demi-cercle AFB faſſe une révolution entiere autour du diamètre AB, il eſt clair qu'il décrira une ſphére, & que les triangles rectangles A E F, A P N décriront des cones inſcrits dans cetre ſphére, dont les ſurfaces convexes décrites par les cordes AF, AN, ſeront entr'elles comme les rectangles $AF \times FE$, $AN \times NP$.

Soit donc l'inconnue A E $= x$, la donnée AB $= a$, on aura par la propriété du cercle AF $= \sqrt{ax}$, EF $= \sqrt{ax - xx}$; & partant $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ qui doit être un *plus grand.* C'eſt pourquoi on imaginera une ligne courbe M D M telle que la relation de l'appliqueé P M (y) à la coupée A P (x) ſoit exprimée par l'équation $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; & l'on cherchera le point E, enſorte que l'appliquée E D ſoit plus grande que toutes ſes ſemblables P M. On aura donc en prenant la différence $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$; d'où l'on tire A E ($x$) $= \frac{2}{3} a$. (*Conſultez la Note trente-deuxieme.*)

Exemple VII.

54. On demande entre tous les Parallélepipédes égaux à un cube donné a^3, & qui ont pour un de leurs côtés la droite donnée b, celui qui a la moindre ſuperficie.

Nommant x un des deux côtés que l'on cherche, l'autre ſera $\frac{a^3}{bx}$; & prenant les plans alternatifs des trois côtés b, x, $\frac{a^3}{bx}$ du parallélepipéde, leur ſomme ſçavoir $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ ſera la moitié de ſa ſuperficie qui doit être *un moindre.* C'eſt pourquoi concevant à l'ordinaire une ligne courbe qui ait pour équation $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$, l'on trouvera en prenant la différence $\frac{bdx}{a} - \frac{aadx}{xx} = 0$, d'où l'on tire $xx = \frac{a^3}{b}$, & $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; de ſorte que les trois côtés du parallélepipéde qui ſatisfait à la queſtion, ſeront le premier b, le ſecond $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$,

& le troisieme $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. D'où l'on voit que les deux côtés que l'on cherchoit, sont égaux entr'eux. (*Consultez la Note trente-troisieme.*)

EXEMPLE VIII.

55. On demande présentement entre tous les Parallélepipédes qui sont égaux à un cube donné a^3, celui qui a la moindre superficie.

Nommant x un des côtés inconnus, il est clair par l'exemple précédent, que les deux autres côtés seront chacun $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$; & partant la somme des plans alternatifs qui est la moitié de la superficie, sera $\frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3 x}$ qui doit être *un moindre*. C'est pourquoi sa différence $-\frac{a^3 dx}{xx} + \frac{a^3 dx}{\sqrt{a^3 x}} = o$, d'où l'on tire $x = a$; & par conséquent les deux autres côtés seront aussi chacun $= a$; de sorte que le cube même donné satisfait à la question.

EXEMPLE IX.

56. La ligne AEB (*Fig.* 41. *Pl.* 3.) étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ses points quelconques P deux droites CP (u), PF (z); soit donnée une quantité composée de ces indéterminées u & z, & de telles autres droites données a, b, &c. qu'on voudra. On demande qu'elle doit être la position des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en est composée,

soit plus grande ou moindre que cette quantité, lorsqu'elle est composée des droites CP, PF.

Supposons que les lignes CE, EF ayent la position requise; & ayant joint CF, concevons une ligne courbe DM, telle qu'ayant mené à discrétion PQM perpendiculaire sur CF, l'appliquée QM exprime la quantité donnée : il est clair que le point P tombant au point E, l'appliquée QM qui devient OD, doit être la moindre ou la plus grande de toutes ses semblables. Il faudra donc que sa différence soit alors égale à zero ou à l'infini : c'est pourquoi si la quantité donnée est, par exemple, $au + zz$, l'on aura $adu + 2zdz = o$, & par conséquent $du . - dz :: 2z . a$. D'où l'on voit déja que dz doit être négative par rapport à du; c'est-à-dire, que la position des droites CE, EF doit être telle que u croissant, z diminue.

Maintenant si l'on mene EG perpendiculaire à la ligne AEB, & d'un de ses points quelconques G les perpendiculaires GL, GI sur CE, EF; & qu'ayant tiré par le point e pris infiniment près de E, les droites C Ke, FeH, on décrive des centres C, F les petits arcs de cercle EK, EH : on formera les triangles rectangles ELG & EKe, EIG & EHe, qui seront semblables entr'eux; car si l'on ôte des angles droits GEe, LEK le même angle LEe, les restes LEG, KEe seront égaux; on prouvera de même que les angles IEG, HEe seront égaux. On aura donc GL . GI

$::$ Ke (du). He ($-dz$) $::$ $2z \cdot a$. D'où il ſuit que la poſition des droites CE, EF doit être telle qu'ayant mené la perpendiculaire EG ſur la ligne AEB; le ſinus GL de l'angle GEC ſoit au ſinus GI de l'angle GEF, comme les quantités qui multiplient dz ſont à celles qui multiplient du. Ce qu'il falloit trouver. (*Conſultez la Note trente-quatrieme.*).

COROLLAIRE.

57. SI l'on veut à préſent que la droite CE ſoit donnée de poſition & de grandeur, que la droite EF le ſoit de grandeur ſeulement, & qu'il faille trouver ſa poſition, il eſt clair que l'angle GEC étant donné, ſon ſinus GL le ſera auſſi, & par conſéquent le ſinus GI de l'angle cherché GEF. Donc ſi l'on décrit un cercle du diamètre EG, & que l'on porte la valeur de GI ſur ſa circonférence de G en I; la droite EF qui paſſe par le point I aura la poſition requiſe.

Soit $au + bz$ la quantité donnée; on trouvera $GI = \frac{a \times GL}{b}$; d'où l'on voit que quelque longueur qu'on donne à EC & à EF, la poſition de cette derniere ſera toujours la même, puiſqu'elles n'entrent point dans la valeur de GI, qui par conſéquent ne change point. Si $a = b$, il eſt clair que la poſition de EF doit être ſur CE prolongée du côté de E; puiſque GL $=$ GI, lorſque les points C, F tombent de part & d'autre de la

ligne AEB: mais lorſqu'ils tombent du même côté, l'angle FEG (*Fig.* 42. *Pl.* 3.) doit être pris égal à l'angle CEG.

EXEMPLE X.

58. LE cercle AEB (*Fig.* 42. *Pl.* 3.) étant donné de poſition avec les points C, F hors de ce cercle; trouver ſur ſa circonférence le point E tel que la ſomme des droites CE, EF ſoit la moindre qu'il eſt poſſible.

Suppoſant que le point E ſoit celui que l'on cherche; & menant par le centre O la ligne OEG, il eſt clair qu'elle ſera perpendiculaire ſur la circonférence AEB; & partant (*Art.* 57.) que les angles FEG, CEG ſeront égaux entr'eux. Si donc l'on mene EH, enſorte que l'angle EHO ſoit égal à l'angle CEO, & de même EK, enſorte que l'angle EKO ſoit égal à l'angle FEO, & les paralleles ED, EL à OF, OC; on formera les triangles ſemblables OCE & OEH, OFE & OEK, HDE & KLE; & en nommant les connues OE ou OA ou OB, a; OC, b; OF, c; & les inconnues OD ou LE, x; DE ou OL, y; l'on aura $OH = \frac{aa}{b}$, $OK = \frac{aa}{c}$, & HD ($x - \frac{aa}{b}$). DE (y) $::$ KL ($y - \frac{aa}{c}$). LE (x). Donc $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$, qui eſt une équation à une hyperbole que l'on conſtruira facilement, & qui coupera le cercle au point cherché E.

(*Consultez la Note trente-cinquieme-*)

EXEMPLE XI.

59. Un voyageur partant du lieu C (*Fig* 43. *Pl.* 3.) pour aller au lieu F, doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite A E B. On suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté C l'espace a dans le temps c, & dans l'autre du côté de F l'espace b dans le même tems c : on demande par quel point E de la droite A E B il doit passer, afin qu'il employe le moins de tems qu'il est possible pour parvenir de C en F. Si l'on fait $a \,.\, CE(u) :: c \,.\, \frac{cu}{a}$. Et $b \,.\, EF\ (z) :: c \,.\, \frac{cz}{b}$. Il est clair que $\frac{cu}{a}$ exprime le temps que le voyageur employe à parcourir la droite C E, & de même que $\frac{cz}{b}$ exprime celui qu'il employe à parcourir EF ; de sorte que $\frac{cu}{a} + \frac{cz}{b}$ doit être un *moindre*. D'où il suit (*Art.* 56.) qu'ayant mené E G perpendiculaire sur la ligne A B ; le sinus de l'angle G E C doit être au sinus de l'angle GEF, comme a est à b.

Cela posé, si l'on décrit du point cherché E, comme centre, de l'intervalle EC, le cercle CGH, & qu'on mene sur la droite A E B les perpendiculaires C A, HD, F B, & sur C E, E F les perpendiculaires GL, GI ; l'on aura $a \,.\, b :: GL \,.\, GI$. Or $GL = AE$, & $GI = ED$, parce que les triangles rectangles G E L & E C A, G E I

& E H D sont égaux & semblables entr'eux, comme il est facile à prouver. C'est pourquoi si l'on nomme l'inconnue A E, x ; on trouvera $ED = \frac{bx}{a}$: & nommant les connues A B, f ; A C, g ; B F, h ; les triangles semblables E B F, E D H donneront $EB\,(f-x) \,.\, BF\,(h) :: ED\,\left(\frac{bx}{a}\right) \,.\, DH = \frac{bhx}{af-ax}$. Mais à cause des triangles rectangles E D H, E A C, qui ont leurs hypothenuses E H, E C égales, l'on aura $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$, c'est-à-dire, en termes analytiques, $\frac{bbxx}{aa} + \frac{bbhhxx}{aaff - 2aafx + aaxx} = xx + gg$: De sorte que ôtant les fractions, & ordonnant ensuite l'égalité, il viendra

$$\begin{array}{llllll} aax^4 & -\,2aafx^3 & +\,aaffxx & -\,2aafggx & +\,aaffgg & = 0. \\ -\,bb & +\,2bbf & +\,aagg & & & \\ & & -\,bbff & & & \\ & & -\,bbhh & & & \end{array}$$

On peut encore trouver cette équation de la maniere qui suit, sans avoir recours à l'exemple 9.

Ayant nommé comme auparavant les connues AB, f ; A C, g ; B F, h ; & l'inconnue AE, x ; on fera $a \,.\, CE\,(\sqrt{gg+xx}) :: c \,.\, \frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite CE. Et de même $b \,.\, EF\,(\sqrt{ff-2fx+xx+hh}) :: c \,.\, \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite EF. Ce qui fera $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}+\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}=$ à un *moindre* ; & partant sa différence $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}}+\frac{cxdx-cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}=o$; d'où l'on tire, en divisant par cdx & en ôtant les incommensurables, la même égalité que ci-devant, dont l'une des racines fournira pour A E la valeur qu'on cherche. (*Consultez la Note trente-sixieme.*)

Exemple XII.

60. Soit une poulie F (*Fig.* 44. *Pl.* 3.) qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D suspendu par la corde DFB qui passe au-dessus de la poulie F, & qui est attachée en B, ensorte que les points C, B sont situés dans la même ligne horizontale CB. On suppose que la poulie & les cordes n'ayent aucune pesanteur ; & l'on demande en quel endroit le plomb D, ou la poulie F doit s'arrêter.

Il est clair par les principes de la Mécanique que le plomb D descendra le plus bas qu'il lui sera possible, au-dessous de l'horizontale CB ; d'où il suit que la ligne à plomb DFE doit être un *plus grand*. C'est pourquoi nommant les données CF, a ; DFB, b ; CB, c ; & l'inconnue CE, x ; l'on aura EF $=\sqrt{aa-xx}$, FB $=\sqrt{aa+cc-2cx}$, & DFE $=b-\sqrt{aa+cc-2cx}+\sqrt{aa-xx}$ qui doit être un *plus grand* ; & partant sa différence $\frac{cdx}{\sqrt{aa+cc-2cx}}-\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}=o$, d'où l'on tire $2cx^3-2ccxx-aaxx+aacc=o$, & divisant par $x-c$, il vient $2cxx-aax-aac=o$, dont l'une des racines fournit pour CE une valeur telle que la perpendiculaire FD passe par la poulie F & le plomb D, lorsqu'ils sont en repos.

On pourroit encore résoudre cette question d'une autre maniere que voici.

Nommant EF, y ; BF, z ; l'on aura $b-z+y=$ à un *plus grand* ; & partant $dy=dz$. Or il est clair que la poulie F décrit le cercle CFA autour du point C comme centre ; & partant si du point f pris infiniment près de F, l'on mene fR parallele à CB, & fS perpendiculaire sur BF, l'on aura FR $=dy$, & FS $=dz$. Elles seront donc égales entr'elles ; & par conséquent les petits triangles rectangles FRf, FSf, qui ont de plus l'hypothénuse Ff commune, seront égaux & semblables ; d'où l'on voit que l'angle RFf est égal à l'angle SFf, c'est-à-dire, que le point F doit être tellement situé dans la circonférence FA, que les angles faits par les droites EF, FB sur les tangentes en F, soient égaux entr'eux : ou bien (ce qui revient au même) que les angles BFC, DFC soient égaux.

Cela posé, si l'on mene FH, ensorte que l'angle FHC soit égal à l'angle CFB ou CFD ; les triangles CBF, CFH seront semblables ; comme aussi les triangles réctangles ECF, EFH, puisque l'angle CFE eſt égal à l'angle FHE, étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux FHC, CFD; & par conſéquent on aura $CH = \frac{aa}{c}$, & $HE\,(x - \frac{aa}{c}) \,.\, EF\,(y) :: EF\,(y) \,.\, EC\,(x)$. Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la propriété du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

Exemple XIII.

61. L'élévation du pole étant donnée, trouver le jour du plus petit crépuſcule.

Soit C (*Fig.* 45. *Pl.* 3.) le centre de la ſphére; APTOBHQ le méridien; HD*d*O l'horiſon; QE*e*T le cercle crépuſculaire parallele à l'horiſon; AMNB l'équateur; FEDG la portion du parallele à l'équateur, que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuſcule, renfermée entre les plans de l'horiſon & du cercle crépuſculaire; P le pole auſtral; PEM, PDN des quarts de cercles de déclinaiſon. L'arc HQ ou OT du méridien compris entre l'horiſon & le cercle crépuſculaire, & l'arc OP de l'élévation du pole ſont donnés; & par conſéquent leurs ſinus droits CI ou FL ou QX, & OV. L'on cherche le ſinus CK de l'arc EM ou DN de la déclinaiſon du Soleil, lorſqu'il décrit le parallele ED.

S'imaginant une autre portion *fedg* d'un parallele à l'équateur, infiniment proche de FEDG, avec les quarts de cercle P*em*, P*dn*; il eſt clair que le tems que le Soleil

employe à parcourir l'arc ED, devant être un *moindre*, la différence de l'arc MN qui en eſt la meſure, & qui devient *mn* lorſque ED devient *ed*, doit être nulle; d'où il ſuit que les petits arcs M*m*, N*n*, & par conſéquent les petits arcs R*e*, S*d*, ſeront égaux entr'eux. Or les arcs RE, SD étant renfermés entre les mêmes paralleles ED, *ed*, ſont auſſi égaux, & les angles en S & en R ſont droits. Donc les petits triangles rectangles ER*e*, DS*d* (que l'on conſidére comme rectilignes (*Art.* 3.) à cauſe de l'infinie petiteſſe de leurs côtés), ſeront égaux & ſemblables; & par conſéquent les hypothénuſes E*e*, D*d* ſeront auſſi égales entr'elles.

Cela poſé, les droites DG, EF, *dg*, *ef* commune ſections des plans FEDG, *fedg* paralleles à l'équateur, avec l'horizon & le cercle crépuſculaire, ſeront perpendiculaires ſur les diamètres HO, QT, puiſque les plans de tous ces cercles ſeront perpendiculaires chacun ſur le plan du méridien; & les petites droites G*g*, F*f* ſeront égales entr'elles, puiſque les droites FG, *fg* ſont paralleles. Donc $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ ou $fe - FE$. Or il eſt clair par ce que l'on a démontré dans l'article 50. que ſi l'on mene à diſcrétion dans un demi-cercle deux appliquées infiniment proches, le petit arc qu'elles renferment, ſera à leur différence, comme le rayon eſt à la coupée depuis le centre, ce qui donne ici (à cauſe des cercles HDO, QET) CO.CG

: : Dd ou Ee . DG — dg ou fe — FE : : IQ . IF : : CO + IQ ou OX . CG + IF ou GL. Mais à cauſe des triangles rectangles ſemblables CVO, CKG, FLG, l'on aura CO . CG : : OV . GK. Et GK . GL : : CK . FL ou QX. Donc OV . CK : : OX . XQ : : XQ . XH par la propriété du cercle : c'eſt-à-dire, que ſi l'on prend QX pour le rayon ou ſinus total dans le triangle rectangle QXH, dont l'angle HQX eſt de 9 degrés, parce que les Aſtronomes font l'arc HQ de 18 degrés, l'on aura comme le ſinus total eſt à la tangente de 9 degrés, de même le ſinus de l'élevation du pole eſt au ſinus de la déclinaiſon auſtrale du Soleil dans le tems du plus petit crépuſcule. D'où il ſuit que ſi l'on ôte 0.8002875 du logarithme du ſinus de l'élevation du pole ; le reſte ſera le logarithme du ſinus cherché. Ce qu'il falloit trouver. (*Conſultez la Note trente-ſeptieme.*)

SECTION IV.

Uſage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebrouſſement.

COMME l'on ſe ſervira dans la ſuite des différences ſecondes, troiſiemes, &c. il eſt néceſſaire d'en donner une idée avant que d'aller plus loin.

DÉFINITION I.

La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement, eſt appellée la *différence de la différence* de cette quantité, ou bien ſa *différence ſeconde*. Ainſi ſi l'on imagine une troiſieme appliquée nq (*Fig.* 46. *Pl.* 3.) infiniment proche de la ſeconde mp, & qu'on mene mS parallele à AB, & mH parallele à RS ; on appellera Hn la *différence de la différence* Rm, ou bien la *différence ſeconde* de PM.

De même ſi l'on imagine une quatrieme appliquée of infiniment proche de la troiſieme nq, & qu'on mene nT parallele à AB, & nL parallele à ST ; on appellera la différence des petites droites Hn, Lo, la *différence de la différence ſeconde*, ou bien la *différence troiſieme* de PM. Et ainſi des autres. (*Voyez la Note* 38.)

AVERTISSEMENT.

On marquera dans la suite chaque différence par un nombre de d *qui en exprime l'ordre ou le genre. Par exemple, on marquera par* dd *la différence seconde ou du second genre; par* ddd, *la différence troisieme ou du troisieme genre; par* dddd, *la différence quatrieme ou du quatrieme genre, & de même des autres. Ainsi* ddy *exprimera* Hn; dddy, Lo — Hn *ou* Hn — Lo, *&c.*

Quant aux puissances de ces différences, on les marquera par des chiffres postérieurs mis au-dessus, comme l'on fait ordinairement celles des grandeurs entieres. Par exemple, le quarré, ou le cube de dy *sera* dy^2, *ou* dy^3; *le quarré, ou le cube de* ddy *sera* ddy^2, *ou* ddy^3; *celui de* dddy *sera* $dddy^2$, *ou* $dddy^3$; *celui de* ddddy *sera* $ddddy^2$, *ou* $ddddy^3$, *&c.* (*Voyez la Note* 39.)

COROLLAIRE I.

62. SI l'on nomme chacune des coupées AP, A*p*, A*q*, A*f*, *x*; chacune des appliquées PM, *pm*, *qn*, *fo*, *y*; & chacune des portions courbes AM, A*m*, A*n*, A*o*, *u*; il est clair que *dx* exprimera les différences P*p*, *pq*, *qf* des coupées; *dy* les différences R*m*, S*n*, T*o* des appliquées; & *du* les différences M*m*, *mn*, *no* des portions de la courbe AMD. Or afin de prendre, par exemple, la différence seconde H*n* de la variable PM, il faut imaginer sur l'axe deux petites parties P*p*, *pq*, & sur la courbe deux autres M*m*, *mn* pour avoir les deux différences R*m*, S*n*; & partant si l'on suppose que les petites parties P*p*, *pq* soient égales entr'elles; il est clair que *dx* sera constante par rapport à *dy* & à *du*, puisque P*p* qui devient *pq* demeure la même pendant que R*m* qui devient S*n*, & M*m* qui devient *mn*, varient. On pourroit supposer que les petites parties de la courbe M*m*, *mn* seroient égales entr'elles, & alors *du* seroit constante par rapport à *dx* & à *dy*; & enfin si l'on supposoit que R*m* & S*n* fussent égales, *dy* seroit constante par rapport à *dx* & à *du*, & sa différence H*n* (*ddy*) seroit nulle.

De même pour prendre la différence troisieme de PM, ou la différence de la différence seconde H*n*; il faut imaginer sur l'axe trois petites parties P*p*, *pq*, *qf*; sur la courbe trois autres M*m*, *mn*, *no*; & sur les appliquées aussi trois autres R*m*, S*n*, T*o*, & alors on aura *dx* ou *du* ou *dy* pour constante, selon qu'on supposera que les petites parties P*p*, *pq*, *qf*, ou M*m*, *mn*, *no*, ou R*m*, S*n*, T*o* sont égales entr'elles. Il en est de même des différences quatriemes, cinquiemes, &c.

Tout ceci se doit aussi entendre des courbes AMD, (*Fig.* 47. *Pl.* 3.) dont les appliquées BM, B*m*, B*n* partent toutes d'un point fixe B; car pour avoir, par exemple, la différence seconde de BM, il faut imaginer deux autres appliquées B*m*, B*n* qui fassent des angles MB*m*,

mBn infiniment petits, & ayant décrit du centre B les petits arcs de cercle MR, mS; la différence des petites droites Rm, Sn, sera la différence seconde de BM; & l'on pourra prendre pour constants les petits arcs MR, mS, ou les petites portions de la courbe Mm, mn, ou enfin les petites droites Rm, Sn. Il en va de même pour les différences troisiemes, quatriemes, &c. de l'appliquée BM.

REMARQUE.

63. ON doit bien remarquer, 1°. Qu'il y a différens ordres d'infiniment petits : que Rm, (*Fig.* 46. *Pl.* 3.) par exemple, est infiniment petite par rapport à PM, & infiniment grande par rapport à Hn; de même que l'espace $MPpm$ est infiniment petit par rapport à l'espace APM, & infiniment grand par rapport au triangle MRm.

2°. Que la différence entiere Pf est encore infiniment petite par rapport à AP; parce que toute quantité qui est la somme d'un nombre fini de quantités infiniment petites, telles que Pp, pq, qf par rapport à une autre AP, demeure toujours infiniment petite par rapport à cette même quantité : & qu'afin qu'elle devienne du même ordre, il faut que le nombre des quantités de l'ordre inférieur qui la compose, soit infini.

COROLLAIRE II.

64. ON peut marquer en cette sorte les différences secondes dans toutes les suppositions possibles.

1°.

1°. Dans les courbes où les appliquées mR, nS sont paralleles entr'elles, (*Fig.* 48. 49. *Pl.* 3.) on prolongera la petite droite Mm en H où elle rencontre l'appliquée Sn; & ayant décrit du centre m, de l'intervalle mn, l'arc nk, on tirera les petites droites nl, li, kcg dont la premiere soit parallele à mS, & les deux autres à Sn. Cela posé, si l'on veut que dx soit constante, c'est-à-dire, que MR soit égale à mS; il est clair que le triangle mSH est semblable & égal au triangle MRm, & qu'ainsi Hn est ddy, c'est-à-dire, la différence de Rm & Sn; & $Hk = ddu$. Mais si l'on suppose que du soit constante, c'est-à-dire, que $Mm = mn$ ou à mk; il est évident alors que le triangle mgk est semblable & égal au triangle MRm, & qu'ainsi $kc = ddy$, & Sg ou $cn = ddx$. Enfin si l'on prend dy pour constante, c'est-à-dire, $mR = nS$, il s'ensuit que le triangle mil est égal & semblable au triangle MRm; & qu'ainsi iS ou $nl = ddx$, & $lk = ddu$.

2°. Dans les courbes dont les appliquées BM, Bm, Bn partent du même point B, (*Fig.* 50. 51. *Pl.* 3.) l'on décrira du centre B les arcs MR, mS, que l'on regardera (*Art.* 3.) comme de petites droites perpendiculaires sur Bm, Bn; & ayant prolongé Mm en E, & décrit du centre m, de l'intervalle mn, le petit arc nkE; on fera l'angle $EmH = mBn$, & l'on tirera les petites droites nl, li, kcg dont la premiere soit parallele à mS, & les deux autres à Sn. Cela posé, à cause du triangle BSm rectangle en S, l'angle $BmS + mBn$, ou $+ EmH$ vaut un droit, & partant l'angle BmE vaut un droit $+ SmH$; il vaut aussi le droit $MRm + RMm$, puisqu'il est externe au triangle RMm. Donc l'angle $SmH = RMm$.

Il suit de ceci, 1°. Que si l'on veut que dx soit constante, c'est-à-dire que les petits arcs MR, mS soient égaux entr'eux, le triangle SmH sera semblable & égal au triangle RMm, & qu'ainsi $Hn = ddy$, & $Hk = ddu$. 2°. Que si l'on prend du pour constante, le triangle gmk sera semblable & égal au triangle RMm, & qu'ainsi kc exprimera ddy, & Sg ou cn, ddx. Enfin, 3°. Que si l'on prend dy pour constante, les triangles iml, RMm seront égaux & semblables; & qu'ainsi iS ou $ln = ddx$, & $lk = ddu$.

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

65. PRENDRE *la différence d'une quantité composée de différences quelconques.*

On prendra pour constante la différence que l'on voudra, & traitant les autres comme des quantités variables, on se servira des régles prescrites dans la Section premiere.

La différence de $\frac{ydy}{dx}$, en prenant dx pour constante, sera $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$, & $\frac{dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$ en prenant dy pour constante.

Celle de $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, en prenant dx pour constante, sera $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, le tout divisé par dx, c'est-à-dire $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & en prenant dy pour constante, elle sera $dzdx\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdx^2ddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - zddx\sqrt{dx^2 + dy^2}$, le tout divisé par dx^2, c. à d. $\frac{dzdx^3 + dzdxdy^2 - zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

La différence de $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, en prenant dx pour constante, sera $\overline{dy^2 + yddy}\sqrt{dx^2 + dy^2} - \frac{ydy^2ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; le tout divisé par $dx^2 + dy^2$, c'est-à-dire, $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy}{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & en prenant dy pour constante, elle sera $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 - ydydxddx}{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

La différence de $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ ou $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, en prenant dx pour constante, sera $\frac{-3dxdyddy^2 \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

Mais il faut observer que dans ce dernier cas il n'est pas libre de prendre dy pour constante, car dans cette supposition sa différence ddy seroit nulle, & par conséquent elle ne devroit pas se rencontrer dans la quantité proposée. (*Consultez la Note* 40.)

F 2

DÉFINITION II.

Lorſqu'une ligne courbe AFK (*Fig.* 52. 53. 54. 55. *Pl.* 3. 4.) eſt en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe B; le point F qui ſépare la partie concave de la convexe, & qui par conſéquent eſt la fin de l'une & le commencement de l'autre, eſt appellé point d'*infléxion*, lorſque la courbe étant parvenue en F continue ſon chemin vers le même côté: & point de *rebrouſſement*, lors qu'elle rebrouſſe chemin du côté de ſon origine.

PROPOSITION II.

PROBLÉME GÉNÉRAL.

66. *La nature de la ligne courbe* AFK *étant donnée, déterminer le point d'infléxion ou de rebrouſſement* F.

Suppoſons en premier lieu que la ligne courbe AFK (*Fig.* 52. 53. *Pl.* 3. 4.) ait pour diamétre une ligne droite AB, & que ſes appliquées PM, EF, &c. ſoient toutes paralleles entr'elles. Si l'on mene par le point F, l'appliquée FE avec la tangente FL; & par un point quelconque M de la partie AF, une appliquée MP avec une tangente MT: il eſt clair,

1°. Dans les courbes qui ont un point d'infléxion, que la coupée AP croiſſant continuellement, la partie AT du diamétre, interceptée entre l'origine des x & la rencontre de la tangente, croît auſſi juſqu'à ce que le point P tombe en E, après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AT qui répond à l'appliquée en P, doit devenir un *plus grand* AL, lorſque le point P tombe ſur le point cherché E.

2°. Dans celles qui ont un point de rebrouſſement, que la partie AT croiſſant continuellement, la coupée AP croît auſſi juſqu'à ce que le point T tombe en L, après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AP qui répond à AT, doit devenir un *plus grand* AE, lorſque le point T tombe en L.

Or ſi l'on nomme AE, x; EF, y; l'on aura AL $= \frac{ydx}{dy} - x$, dont la différence, qui eſt $\frac{dy^2dx - ydxddy}{dy^2} - dx$ (en ſuppoſant dx conſtante), étant diviſée par dx différence de AE, doit être (*Art.* 47.) nulle ou infinie; ce qui donne $-\frac{yddy}{dy^2} = o$, ou à l'infini: de ſorte que multipliant par dy^2, & diviſant par $-y$, il vient $ddy = o$, ou à l'infini; ce qui ſervira dans la ſuite de formule générale pour trouver le point d'infléxion ou de rebrouſſement F. Car la nature de la courbe AFK étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx; & prenant la différence de cette valeur, en ſuppoſant dx conſtante, on trouvera une valeur de ddy en dx^2, laquelle étant égalée d'abord à zero, & enſuite à l'infini, ſervira dans l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions à trouver pour AE une valeur, telle que l'appliquée EF aille couper la courbe AFK au point d'infléxion ou de rebrouſſement F.

L'origine A des x peut être tellement située que $AL = x - \frac{ydx}{dy}$, au lieu de $\frac{ydx}{dy} - x$, & que AL ou AE soit *un moindre* au lieu d'être un *plus grand* : mais comme la conséquence est toujours la même, & que cela ne peut faire aucune difficulté, je ne m'y arrêterai pas. Il est à remarquer que AL ne peut jamais être $= x + \frac{ydx}{dy}$, car lorsque le point T tombe de l'autre côté du point P, par rapport à l'origine A des x, la valeur de $\frac{ydx}{dy}$ sera négative suivant l'article 10, & par conséquent celle de $-\frac{ydx}{dy}$ sera positive, de sorte qu'on aura encore en ce cas $AE + EL$. ou $AL = x - \frac{ydx}{dy}$.

La même chose se peut encore trouver de cette autre manière. Il est clair qu'en prenant dx pour constante, & supposant que l'appliquée y augmente, Sn (*Fig.* 48. 49. *Pl.* 3.) est moindre que SH ou que Rm dans la partie concave, & plus grande dans la convexe. D'où l'on voit que la valeur de Hn (ddy) doit devenir de positive négative sous le point d'infléxion ou de rebroussement F; & partant (*Art.* 47.) qu'elle y doit être ou nulle ou infinie.

Supposons en second lieu que la courbe AFK (*Fig* 54. 55. *Pl.* 4.) ait pour appliquées les droites BM, BF, BM, qui partent toutes d'un même point B. Si l'on mene telle appliquée BM (*Fig.* 56. 57. *Pl.* 4.) qu'on voudra, avec une

tangente MT qui rencontre BT perpendiculaire à BM au point T ; & qu'ayant pris le point m infiniment près de M, l'on tire l'appliquée Bm, la tangente mt, & la perpendiculaire Bt sur Bm, qui rencontre MT en O ; il est visible (en supposant que l'appliquée BM, qui devient Bm, augmente) que dans la partie concave, Bt surpasse BO, & qu'au contraire elle est moindre dans la partie convexe ; de sorte que sous le point d'infléxion ou de rebroussement F, la valeur de Ot doit devenir de positive négative.

Cela posé, si l'on décrit du centre B (*Fig.* 56. *Pl.* 4.) les petits arcs de cercle MR, TH, on formera les triangles semblables mRM, MBT, THO, & les petits secteurs semblables BMR, BTH. Nommant donc BM, y ; MR, dx ; l'on aura $mR\ (dy) . RM\ (dx) :: BM\ (y) . BT = \frac{ydx}{dy} :: MR\ (dx) . TH = \frac{dx^2}{dy} :: TH\ (\frac{dx^2}{dy}) . HO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or si l'on prend la différence de BT $(\frac{ydx}{dy})$ en supposant dx constante, il vient $Bt - BT$ ou $Ht = \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$; & partant $OH + Ht$ ou $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$. D'où il suit en multipliant par dy^2, & divisant par dx, que la valeur de $dx^2 + dy^2 - yddy$ sera nulle ou infinie sous le point d'infléxion ou de rebroussement F. Or la nature de la ligne AFK (*Fig.* 54. 55. *Pl.* 4.) étant donnée, l'on aura des valeurs de dy en dx,

& de ddy en dx^2, lesquelles étant substituées dans $dx^2 + dy^2 - yddy$, formeront une quantité, qui étant égalée d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira à trouver pour BF une valeur telle que décrivant du centre B, & de ce rayon un cercle, il coupera la courbe AFK au point d'infléxion ou de rebroussement F. Ce qui étoit proposé

Pour trouver encore la même chose d'une autre manière, il faut considérer que dans la partie concave, l'angle BmE (*Fig.* 50. 51. *Pl.* 3.) surpasse l'angle Bmn, & qu'au contraire dans la convexe il est moindre; & partant que l'angle BmE − Bmn ou Emn, (*Fig.* 50. *Pl.* 3.) c'est-à-dire, l'arc En qui en est la mesure, devient de positif négatif sous le point cherché F. Or prenant dx pour constante, les triangles rectangles semblables HmS, Hnk, donneront Hm (du) . mS (dx) : : Hn ($-ddy$) . $nk = -\frac{dxddy}{du}$. où l'on doit observer que la valeur de Hn est négative, parce que Bm (y) croissant, Rm (dy) diminue. Mais à cause des secteurs semblables BmS, mEk, l'on aura Bm (y) . mS (dx) : : mE (du) . E$k = \frac{dxdu}{y}$, & partant Ek + kn ou E$n = \frac{dxdu^2 - ydxddy}{ydu}$. D'où il suit en multipliant par ydu, & divisant par dx, que $du^2 - yddy$ ou $dx^2 + dy^2 - yddy$ doit devenir de positive, négative sous le point cherché F. (*Fig.* 54. 55. *Pl.* 4.)

Si l'on suppose que y devienne infinie, les termes dx^2 & dy^2 seront nuls par rapport au terme $yddy$; & par conséquent la formule $dx^2 + dy^2 - yddy = o$, ou à l'infini, se changera en cette autre $-yddy = o$, ou à l'infini, c'est-à-dire, en divisant par $-y$, $ddy = o$, ou à l'infini, qui est la formule du premier cas. Ce qui doit aussi arriver, puisque les appliquées BM, BF, BM deviennent alors paralleles. (*Consultez la Note quarante-unieme.*)

COROLLAIRE.

67. LORSQUE $ddy = o$, il est clair que la différence de AL (*Fig.* 52. *Pl.* 3.) doit être nulle par rapport à celle de AE; & partant que les deux tangentes infiniment proches FL, fL doivent tomber l'une sur l'autre, en ne faisant qu'une seule ligne droite fFL. Mais lorsque $ddy =$ à l'infini, la différence de AL (*Fig.* 53. *Pl.* 4.) doit être infiniment grande par rapport à celle de AE, ou (ce qui est la même chose) la différence de AE est infiniment petite par rapport à celle de AL; & par conséquent l'on peut mener par le même point F deux tangentes FL, Fl, qui fassent entr'elles un angle infiniment petit, LFl.

De même lorsque $dx^2 + dy^2 - yddy = o$, il est visible que Ot (*Fig.* 56. 57. *Pl.* 4.) doit devenir nulle par rapport à MR; & qu'ainsi les deux tangentes infiniment proches MT, mt, doivent tomber l'une sur l'autre, lorsque le point M devient un point d'infléxion ou de rebroussement: mais au contraire lorsque $dx^2 + dy^2 - yddy =$ à l'infini, Ot doit être infinie par rapport à MR, ou (ce qui est la même chose) MR infiniment petite par rapport à Ot ; & par conséquent le point m doit tomber sur le point M, c'est-à-dire, qu'on peut mener par le même point M deux tangentes qui fassent entr'elles un angle infiniment petit, lorsque ce point devient un point d'infléxion ou de rebroussement.

Il est évident que la tangente au point d'infléxion ou de rebroussement F, étant prolongée, touche & coupe la courbe AFK dans ce même point. (*Consultez la Note quarante-deuxieme.*)

EXEMPLE I.

68. SOIT une ligne courbe AFK (*Fig.* 58. *Pl.* 4.) qui ait pour diamétre la ligne droite AB, & qui soit telle que la relation de la coupée AE (x) à l'appliquée EF (y), soit exprimée par l'équation $axx = xxy + aay$. Il s'agit de trouver pour AE une valeur, telle que l'appliquée EF rencontre la courbe AFK au point d'infléxion F.

L'équation à la courbe est $y = \frac{axx}{xx + aa}$; & partant $dy = \frac{2a^3xdx}{\overline{xx+aa}^2}$, & prenant la différence de cette quantité, en supposant dx constante, & l'égalant ensuite à zero, on trouve $\frac{2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 - 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx+aa}}{\overline{xx+aa}^4} = o$; ce qui multiplié par $\overline{xx+aa}^4$, & divisé par $2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}$, donne $xx + aa - 4xx = o$, d'où l'on tire AE $(x) = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si l'on met à la place de xx sa valeur $\frac{1}{3}aa$ dans l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx+aa}$, on trouve EF $(y) = \frac{1}{4}a$; de sorte qu'on peut déterminer le point d'infléxion F, sans supposer que la courbe AFK soit décrite.

Si l'on mene AC parallele aux appliquées EF, & égale à la droite donnée a, & qu'on tire CG parallele à AB, elle sera asymptote de la courbe AFK. Car si l'on suppose x infinie, on pourra prendre xx pour $xx + aa$; & partant l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx+aa}$ se changera en celle-ci $y = a$. (*Consultez la Note quarante-troisieme.*)

EXEMPLE II.

69. SOIT $y - a = \overline{x-a}^{\frac{2}{3}}$. Donc $dy = \frac{2}{3}\overline{x-a}^{-\frac{1}{3}}dx$, & $ddy = -\frac{2}{9}\overline{x-a}^{-\frac{4}{3}}dx^2 = \frac{-2dx^2}{9\sqrt[3]{\overline{x-a}^4}}$, en prenant dx pour constante. Or si l'on suppose cette fraction égale à zero, on trouve $-2dx^2 = o$; ce qui ne faisant rien connoître, il la faut supposer infiniment grande ; & par conséquent son dénominateur $9\sqrt[3]{\overline{x-a}^4}$ infiniment petit ou zero. D'où l'inconnue AE $(x) = a$. (*Consultez la Note quarante-quatrieme.*)

EXEMPLE III.

70. SOIT une demi roulette allongée AFK (*Fig.* 59. *Pl.* 4.) dont la base BK surpasse la demi-circonférence ADB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il s'agit de déterminer sur le diamétre AB, le point E, ensorte que l'appliquée EF aille rencontrer la roulette au point d'infléxion F.

Ayant nommé les connues ADB, a; BK, b; AB, $2c$; & les inconnues AE, x; ED, z; l'arc AD, u; EF, y; l'on aura par la propriété de la roulette $y = z + \frac{bu}{a}$; & partant $dy = dz + \frac{bdu}{a}$. Or par la proprieté du cercle l'on aura $z = \sqrt{2cx - xx}$, $dz = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{2cx - xx}}$, & $du (\sqrt{dx^2 + dz^2}) = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$. Donc mettant pour dz & du leurs valeurs, on trouve $dy = \frac{acdx - axdx + bcdx}{a\sqrt{2cx - xx}}$, dont la différence (en prenant dx pour constante) donne $\frac{\overline{bcx - acc - bcc} \times dx^2}{\overline{2cx - xx} \times \sqrt{2cx - xx}} = 0$; d'où l'on tire

$$AE\,(x) = c + \frac{ac}{b}, \ \& \ CE = \frac{ac}{b}.$$

Il est clair qu'afin qu'il y ait un point d'infléxion F, il faut que b surpasse a; car s'il étoit moindre, CE surpasseroit CB. (*Consultez la Note quarante-cinquieme.*)

EXEMPLE IV.

71. ON demande le point d'infléxion F (*Fig.* 60. *Pl.* 4.) de la Conchoïde AFK de *Nicomede*, laquelle a pour pole le point P, & pour asymptote la droite BC. Sa propriété est telle, qu'ayant mené du pole P à un de ses points quelconques F la droite PF, qui rencontre l'asymptote BC en D; la partie DF est toujours égale à une même droite donnée a.

Ayant mené PA perpendiculaire, & FE parallele à BC, on nommera les connues AB ou FD, a; BP, b; & les inconnues BE, x; EF, y; & tirant DL parallele à BA, les triangles semblables DLF, PEF donneront DL (x). LF $(\sqrt{aa - xx})$ :: PE $(b + x)$. EF (y) $= \frac{\overline{b + x}\sqrt{aa - xx}}{x}$. dont la différence est $dy = \frac{x^3 dx + aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$. Si donc on prend la différence de cette quantité, & qu'on l'égale à zero, on formera l'égalité $\frac{\overline{2a^4b - aax^3 - 3aabxx} \times dx^2}{\overline{aax^3 - x^5} \times \sqrt{aa - xx}} = 0$, qui se réduit à $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$, dont l'une des racines fournit pour BE la valeur cherchée.

Si $a = b$, l'équation précédente se changera en cette autre $x^3 + 3axx - 2a^3 = 0$, laquelle étant divisée par $x + a$, donne $xx + 2ax - 2aa = 0$; & partant BE $(x) = -a + \sqrt{3aa}$.

Autrement.

En prenant pour appliquées les lignes P F qui partent du pole P, & en se servant de la formule (*Art.* 66.) $yddy = dx^2 + dy^2$, dans laquelle dx a été supposée constante. Ayant imaginé une autre appliquée Pf qui fasse avec PF l'angle FPf infiniment petit, & décrit du centre P les petits arcs FG, DH, on nommera les connues AB, a; BP, b; & les inconnues PF, y; PD, z; & l'on aura par la propriété de la conchoïde $y = z + a$, ce qui donne $dy = dz$. Or à cause du triangle rectangle DBP, DB $= \sqrt{zz - bb}$; & à cause des triangles semblables DBP & dHD, PDH & PFG, l'on aura DB $(\sqrt{zz-bb})$. BP (b) : : dH (dz). HD $= \frac{bdz}{\sqrt{zz-bb}}$. Et PD (z). PF $(z+a)$: : HD $\left(\frac{bdz}{\sqrt{zz-bb}}\right)$. FG $(dx) = \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{zz-bb}}$. D'où l'on tire dz ou $dy = \frac{zdx\sqrt{zz-bb}}{bz+ab}$, dont la différence est (en supposant dx constante) $ddy =$

$$\frac{\overline{bz^3 + 2abzz - ab^3} \times dzdx}{\overline{bz+ab}^2\sqrt{zz-bb}} = \frac{\overline{bz^4 + 2abz^3 - ab^3z} \times dx^2}{\overline{bz+ab}^3}$$

en mettant pour dz sa valeur. Donc si l'on substitue dans la formule générale (*Art.* 66.) $yddy = dx^2 + dy^2$ à la place de y sa valeur $z + a$, & de dy & ddy les valeurs que l'on vient de trouver en dx & dx^2; on formera cette équation

$$\frac{\overline{z^4 + 2az^3 - abbz} \times dx^2}{\overline{bz+ab}^2} = \frac{\overline{z^4 + 2abbz + aabb} \times dx^2}{\overline{bz+ab}^2}$$

qui se réduit à $2z^3 - 3bbz - abb = 0$, dont l'une des racines augmentée de a fournit la valeur de l'inconnue PF.

Si $a = b$, l'on aura $2z^3 - 3aaz - a^3 = 0$, qui étant divisée par par $z + a$, donne $zz - az - \frac{aa}{2} = 0$, dont la résolution fournit PF $(z+a) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{3a + a\sqrt{3}}{2}$. (*Consultez la Note* 46.)

EXEMPLE V.

72. SOIT une autre espece de Conchoïde AFK, (*Fig.* 60. *Pl.* 4.) telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques F au pole P la droite PF qui coupe l'asymptote BC en D, le rectangle PD × DF soit toujours égal au même rectangle PB × BA. On demande le point d'infléxion F.

Si l'on nomme les inconnues BE, x; EF, y; & les connues AB, a; BP, b; on aura PD × DF $= ab$; & les paralleles BD, EF donneront PD × DF (ab). PB × BE (bx) : : $\overline{PF}^2$ $(bb + 2bx + xx + yy)$. $\overline{PE}^2$ $(bb + 2bx + xx)$. Donc $bbx + 2bxx + x^3 + yyx = abb + 2abx + axx$, ou $yy = \frac{abb + 2abx + axx - bbx - 2bxx - x^3}{x}$, &

$y = \overline{b+x}\,\frac{\sqrt{a-x}}{x} = \sqrt{ax - xx} + b\,\frac{\sqrt{a-x}}{x}$, dont la différence donne $dy = \frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$;

& prenant encore la différence, on forme l'égalité $\frac{\overline{3aab - aax - 4abx} \times dx^2}{\overline{4ax - 4x^2} \times \sqrt{ax - x^2}} = o$, qui se réduit à $x = \frac{3ab}{a + 4b}$ valeur de l'inconnue BE.

Si l'on fait $\frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax - xx}}$ valeur de dy égal à zero, l'on aura $xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab = o$, dont les deux racines $\frac{a + \sqrt{aa - 8ab}}{4}$ & $\frac{a - \sqrt{aa - 8ab}}{4}$ fournissent, lorsque a surpasse $8b$, deux valeurs BH & BL, telles que l'appliquée HM (*Fig.* 61. *Pl.* 4.) est moindre que ses voisines, & l'appliquée LN plus grande, c'est-à-dire, que les tangentes en M & N seront paralleles à l'axe AB; & alors le point E tombera entre les points H & L.

Mais lorsque $a = 8b$, les lignes BH, BE, BL (*Fig.* 62. *Pl.* 4.) seront égales chacune à $\frac{1}{4}a$; & alors la tangente au point d'infléxion F sera parallele à l'axe AB. Et enfin lorsque a est moindre que $8b$, les deux racines seront imaginaires; & par conséquent il n'y aura aucune tangente qui puisse être parallele à l'axe.

On pourroit encore résoudre cette question en prenant pour appliquées les lignes PF, P*f*, (*Fig.* 60. *Pl.* 4.) qui partent du pole P, & en se servant de la formule $yddy = dx^2 + dy^2$, comme l'on a fait dans l'exemple précédent. (*Consultez la Note* 47.)

EXEMPLE

EXEMPLE VI.

73. SOIT un cercle AED (*Fig.* 63. *Pl.* 4.) qui ait pour centre le point B, avec une ligne courbe AFK, telle qu'ayant mené à discrétion le rayon BFE, le quarré de FE soit égal au rectangle de l'arc AE par une droite donnée b. Il faut déterminer dans cette courbe le point d'infléxion F.

Ayant nommé l'arc AE, z; le rayon BA ou BE, a; & l'appliquée BF, y; on aura $bz = aa - 2ay + yy$, & (en prenant les différences) $\frac{2ydy - 2ady}{b} = dz = Ee$. Or à cause des secteurs semblables BEe, BFG, on fera BE (a). BF (y) :: Ee ($\frac{2ydy - 2ady}{b}$). FG (dx) $= \frac{2yydy - 2aydy}{ab}$. dont la différence, en supposant dx constante, donne $4ydy^2 - 2ady^2 + 2yyddy - 2ayddy = o$; & partant $yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a}$. Si donc on substitue à la place de dx^2 & $yddy$ leurs valeurs en dy^2 dans la formule générale (*Art.* 66.) $yddy = dx^2 + dy^2$, on formera l'équation $\frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a} = \frac{4y^4dy^2 - 8ay^3dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2}{aabb}$ qui se réduit à $4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^3yy + 3aabby - 2a^3bb = o$, dont la résolution fournira pour BF la valeur cherchée.

Il est évident que la courbe AFK, que l'on peut appeller une *Spirale parabolique*, doit avoir

G

un point d'infléxion F. Car la circonférence AED ne différant pas d'abord ſenſiblement de la tangente en A, il ſuit de la nature de la parabole qu'elle doit d'abord être concave vers cette tangente, & qu'enſuite la courbure de la circonférence autour de ſon centre devenant ſenſible, elle doit devenir concave vers le centre. (*Conſultez la Note quarante-huitieme.*)

EXEMPLE VII.

74. SOIT une ligne courbe AFK (*Fig. 64. Pl. 4*) qui ait pour axe la droite AB, dont la proprieté ſoit telle qu'ayant mené une tangente quelconque FB qui rencontre AB au point B, la partie interceptée AB ſoit toujours à la tangente BF en raiſon donnée de m à n. Il eſt queſtion de déterminer le point de rebrouſſement F.

Ayant nommé les inconnues & variables AE, x; EF, y; l'on aura EB $= -\frac{ydx}{dy}$ (parce que x croiſſant, y diminue), FB $= \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$. Or par la proprieté de la courbe, AE + EB ou AB $\left(\frac{xdy - ydx}{dy}\right)$. BF $\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\right)$: : m . n. Donc $m\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{nxdy}{y} - ndx$, & ſa différence donne $\frac{mdyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{-nydxdy + nxyddy - nxdy^2}{yy}$ en ſuppoſant dx conſtante & négative; d'où l'on tire $ddy = \frac{-nydxdy - nxdy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{myydy - nxy\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Maintenant

ſi l'on fait cette fraction égale à zero, on trouvera $-ydx - xdy = o$; ce qui ne fait rien connoître. C'eſt pourquoi il faut ſuppoſer cette fraction égale à l'infini, c'eſt-à-dire, ſon dénominateur égal à zero; ce qui donne $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{mydy}{nx} = \frac{nxdy - nydx}{my}$ à cauſe de l'équation à la courbe; d'où l'on tire $dx = \frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$. Or quarrant chaque membre de l'équation $mydy = nx\sqrt{dx^2+dy^2}$; on trouve encore $dx = \frac{dy\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$. d'où l'on tire enfin $y\sqrt{mm-nn} = nx$; ce qui donne cette conſtruction.

Soit décrit du diametre AD $= m$, un demi-cercle AID; & ayant pris la corde DI $= n$, ſoit tirée l'indéfinie AI. Je dis qu'elle rencontrera la courbe AFK au point de rebrouſſement F.

Car ayant mené IH perpendiculaire à AB, les triangles rectangles ſemblables DIA, IHA, FEA donneront DI (n). IA ($\sqrt{mm-nn}$) : : IH . HA : : FE (y). EA (x). & partant $y\sqrt{mm-nn} = nx$ qui étoit le lieu à conſtruire.

Il eſt clair que BF eſt parallele à DI, puiſque AB . BF : : AD (m). DI (n). d'où il ſuit que l'angle AFB eſt droit; & partant que les lignes AB, BF, BE ſont en proportion continue.

On peut trouver cette même proprieté ſans aucun calcul, ſi l'on imagine (*Art.* 67.) au même point de rebrouſſement F deux tangentes FB, Fb qui fassent entr'elles un angle BFb infiniment petit. Car décrivant du centre F le petit arc BL, on aura $m \,.\, n :: Ab \,.\, bF :: AB \,.\, BF :: Ab - AB$ ou $Bb \,.\, bF - BF$ ou $bL :: BF \,.\, BE$. à cause des triangles rectangles semblables BbL, FBE. Donc ; &c.

Si $m = n$, il est évident que la droite AF deviendra perpendiculaire sur l'axe AB ; & qu'ainsi la tangente FB sera parallele à cet axe ; ce que l'on sçait d'ailleurs devoir arriver, puisqu'en ce cas la courbe AF doit être un demi-cercle qui ait son diametre perpendiculaire sur l'axe AB. Mais si m étoit moindre que n, il est évident qu'il n'y auroit aucun point de rebroussement, parce qu'alors l'équation $y\sqrt{mm - nn} = nx$ renfermeroit une contradiction. (*Consultez la Note quarante-neuvieme.*)

SECTION V.

Usage du calcul des différences pour trouver les Dévelopées.

DÉFINITION.

SI l'on conçoit qu'une ligne courbe quelconque DBF (*Fig.* 65. *Pl.* 4.) concave vers le même côté, soit enveloppée ou entourée d'un fil ABDF, dont l'une des extrêmités soit fixe en F, & l'autre soit tendue le long de la tangente BA, & que l'on fasse mouvoir l'extrêmité A en la tenant toujours tendue & en développant continuellement la courbe BDF ; il est clair que l'extrêmité A de ce fil décrira dans ce mouvement une ligne courbe AHK.

Cela posé, la courbe BDF sera nommée la *Dévelopée* de la courbe AHK.

Les parties droites AB, HD, KF du fil ABDF seront nommées les *rayons de la dévelopée.*

COROLLAIRE I.

75. DE ce que la longueur du fil ABDF demeure toujours la même, il suit que la portion de courbe BD est égale à la différence des rayons DH, BA qui partent de ses extrêmités ; de même la portion DF sera égale à la différence des rayons FK, DH ; & la courbe entiére BDF à la différence des rayons FK, BA. D'où l'on voit que si

le rayon B A de la courbe étoit nul, c'eſt-à-dire, que ſi l'extrêmité A du fil tomboit ſur l'origine B de la courbe B D F, alors les rayons de la dévelopée D H, F K ſeroient égaux aux portions BD, B D F de la courbe B D F.

Corollaire II.

76. Si l'on conſidére la courbe B D F (*Fig.* 66. *Pl.* 4) comme un poligone B C D E F d'une infinité de côtés; il eſt clair que l'extrêmité A du fil A B C D E F décrit le petit arc A G qui a pour centre le point C, jusqu'à ce que le rayon C G ne faſſe plus qu'une ligne droite avec le petit côté C D voiſin de C B; & de même qu'elle décrit le petit arc G H qui a pour centre le point D, jusqu'à ce que le rayon D H ne faſſe plus qu'une droite avec le petit côté D E; & ainſi de ſuite juſqu'à ce que la courbe B C D E F ſoit entiérement développée. La courbe AHK peut être donc conſidérée comme l'aſſemblage d'une infinité de petits arcs de cercle A G, G H, H I, I K, &c. qui ont pour centre les points C, D, E, F, &c. D'où il ſuit.

1°. Que les rayons de la dévelopée la touchent continuellement comme D H en D, K F en F, &c. Et qu'ils ſont tous perpendiculaires à la courbe A H K qu'ils décrivent, comme D H en H, FK en K, &c. Car D H, par exemple, eſt perpendiculaire ſur le petit arc G H & ſur le petit arc H I, puiſqu'elle paſſe par leurs centres D, E. D'où l'on voit, 1°. que la dévelopée B D F (*Fig.* 65. *Pl.* 4) termine l'eſpace où tombent toutes les perpendiculaires à la courbe A H K. 2°. Que ſi l'on prolonge un rayon quelconque H D qui coupe le rayon A B en R, juſqu'à ce qu'il rencontre un autre rayon quelconque K F en S, l'on pourra toujours mener de tous les points de la partie RS deux perpendiculaires ſur la courbe A H K, excepté du point touchant D duquel on n'en peut mener qu'une ſeule, ſçavoir D H. Car il eſt clair que l'interſection R des rayons A B, D H parcourt tous les points de la partie R S, pendant que le rayon A B décrit par ſon extrêmité A la ligne A H K ſur laquelle il eſt continuellement perpendiculaire: & que les rayons A B, H D ne ſe confondent que lorſque l'interſection R tombe ſur le point touchant D.

2°. Que ſi l'on prolonge les petits arcs H G (*Fig.* 66. *Pl.* 4) en *l*, I H en *m*, K I en *n*, &c. vers l'origine A du dévelopement, chaque petit arc comme I H touchera en dehors ſon voiſin HG, parce que les rayons C A, D G, E H, F I vont toujours en augmentant, à meſure que les petits arcs qui compoſent la courbe A H K, s'éloignent du point A. Par la même raiſon ſi l'on prolonge les petits arcs A G en *o*, GH en *p*, HI en *q*, vers le côté oppoſé au point A; chaque petit arc comme H I touchera en deſſous ſon voiſin I K. Or puiſque les points H & I, D & E peuvent être conſidérés comme tombant l'un ſur l'autre à cauſe de l'infinie petiteſſe tant de l'arc H I, que du côté DE; il s'enſuit que ſi l'on décrit d'un point quelconque moyen D de la dévelopée BDF comme centre, & de ſon rayon DH un cercle *m*H*p*, il touchera en dehors la partie HA qui tombera toute entiere au dedans de ce cercle, & en dedans l'autre partie HK qui tombera toute entiére au dehors de ce même cercle : c'eſt-à-dire, qu'il touchera & coupera la courbe AHK au même point H, de même que la tangente au point d'infléxion coupe la courbe dans ce point.

3°. Le rayon HD du petit arc HG, ne différant des rayons CG, EH des arcs voiſins GA, HI, que d'une quantité infiniment petite CD ou DE; il s'enſuit que pour peu qu'on diminue le rayon DH, il ſera moindre que CG, & qu'ainſi ſon cercle touchera en deſſous la partie HA; & qu'au contraire pour peu qu'on l'augmente, il ſurpaſſera HE, & qu'ainſi ſon cercle touchera en dehors la partie HK : de ſorte que le cercle *m*H*p* eſt le plus petit de tous ceux qui touchent en dehors la partie HA, & au contraire le plus grand de tous ceux qui touchent en dedans la partie HK : c'eſt-à-dire, qu'entre ce cercle & la courbe on n'en peut faire paſſer aucun autre.

4°. Comme la courbure des cercles augmente à proportion que leurs rayons diminuent, il s'enſuit que la courbure du petit arc HI ſera à la courbure du petit arc AG réciproquement comme le rayon BA ou CA de ce dernier eſt à ſon rayon DH ou EH : c'eſt-à-dire, que la courbure en H de la courbe AHK ſera à ſa courbure en A, comme le rayon BA au rayon DH; & de même que la

courbure en K eſt à la courbure en H, comme le rayon DH eſt au rayon FK. D'où l'on voit que la courbure de la ligne AHK diminue continuellement à meſure que la ligne BDF ſe développe; de ſorte qu'au point A, où commence le dévelopement, elle eſt la plus grande qu'il eſt poſſible; & au point K, où je ſuppoſe qu'il ceſſe, la plus petite

5°. Que les points de la dévelopée ne ſont autre choſe que le concours des perpendiculaires menées par les extrêmités des petits arcs qui compoſent la courbe AHK. Par exemple, le point D où E eſt le concours des perpendiculaires HD, IE du petit arc HI; de ſorte que ſi la courbe AHK eſt donnée avec la poſition d'une de ſes perpendiculaires HD, pour trouver le point D ou E, où elle touche la dévelopée, il ne faut que chercher le point de concours des perpendiculaires infiniment proches HD, IE : c'eſt ce qu'on va enſeigner dans le Problême qui ſuit.

PROPOSITION I.

Probléme Général.

77. La *nature de la ligne courbe* AMD (*Fig.* 67. *Pl.* 4.) *étant donnée avec une de ſes perpendiculaires quelconque* MC; *déterminer la longueur du rayon* MC *de ſa dévelopée, c'eſt-à-dire, le concours des perpendiculaires infiniment proches* MC, mC.

Suppoſons en premier lieu que la ligne courbe AMD ait pour axe la ligne droite AB ſur laquelle les appliquées PM ſoient perpendiculaires.

On imaginera une autre appliquée mp, qui sera infiniment proche de MP, puisque le point m est supposé infiniment près de M. On menera par le point de concours C une parallele CE à l'axe AB, laquelle rencontre les appliquées MP, mp aux points E, e. Enfin menant MR parallele à AB, on formera les triangles rectangles semblables MRm, MEC; car les angles EMR, CMm étant droits, & l'angle CMR leur étant commun, l'angle EMC sera égal à l'angle RMm.

Si donc l'on nomme les données AP, x; PM, y; l'inconnue ME, z; l'on aura Ee ou Pp ou MR $= dx$, R$m = dy = dz$, M$m = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; & MR (dx). Mm ($\sqrt{dx^2 + dy^2}$) : : ME (z). MC $= \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. Or le point C étant le centre du petit arc Mm, son rayon CM qui devient Cm lorsque EM augmente de sa différence Rm, demeure le même. Sa différence sera donc nulle : ce qui donne (en supposant dx constante) $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$; d'où l'on tire ME ($z$) $= \frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyddy} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ en mettant pour dz sa valeur dy.

Supposons en second lieu que les appliquées BM, Bm (*Fig.* 68. *Pl.* 4.) partent toutes d'un même point B. Ayant mené du point cherché C sur les appliquées, que je suppose infiniment proches, les perpendiculaires CE, Ce, & décrit du centre B le petit arc MR; on formera les triangles rectangles semblables RMm & EMC, BMR, BEG & CeG. C'est pourquoi nommant BM, y; ME, z; MR, dx; on aura R$m = dy$, M$m = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, CE ou Ce $= \frac{zdy}{dx}$, & MC $= \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. On trouvera ensuite, comme dans le premier cas, $z = \frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyddy}$. Or BM ($y$). C$e$ ($\frac{zdy}{dx}$) : : MR (dx). G$e = \frac{zdy}{y}$. & me — ME ou Rm — Ge $= dz = \frac{ydy - zdy}{y}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz, l'on aura ME (z) $= \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$.

Si l'on suppose que y soit infinie, les termes dx^2 & dy^2 seront nuls par rapport à $yddy$; & par conséquent cette derniere formule se changera en celle du cas précédent. Ce qui doit aussi arriver; puisque les appliquées deviennent alors paralleles entr'elles, & que l'arc MR devient une droite perpendiculaire sur les appliquées.

Maintenant la nature de la courbe AMD étant donnée, on trouvera des valeurs de dy^2 & ddy en dx^2, ou de dx^2 & ddy en dy^2, lesquelles étant substituées dans les formules précédentes, donneront pour ME une valeur délivrée des différences, & entierement connue. Et menant EC perpendiculaire sur ME, elle ira couper MC perpendiculaire à la courbe, au point cherché C. Ce qui étoit proposé.

COROLLAIRE I.

78. A cauſe des triangles rectangles ſemblables MRm & MEC, (*Fig.* 67. 68. *Pl.* 4.) l'on aura dans le premier cas $MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$, & dans le ſecond cas $MC = \frac{\overline{ydx^2+ydy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^3+dxdy^2-ydxddy}$.

REMARQUE.

79. Il y a encore pluſieurs autres maniéres de trouver les rayons de la développée. J'en mettrai ici une partie, afin de donner différentes ouvertures à ceux qui ne poſſedent pas encore ce calcul.

Premier cas pour les courbes dont les appliquées ſont perpendiculaires à l'axe.

Premiere manière. Soit prolongée MR en G où elle rencontre la perpendiculaire mC. (*Fig.* 67. *Pl.* 4.) Les angles droits MRm, MmG donneront $RG = \frac{dy^2}{dx}$; & par conſéquent $MG = \frac{dx^2+dy^2}{dx}$. Or à cauſe des triangles ſemblables MRm, MPQ (les points Q, q marquent les interſections des perpendiculaires infiniment proches MC, mC avec l'axe AB) il vient $MQ = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, $PQ = \frac{ydy}{dx}$; & partant $AQ = x + \frac{ydy}{dx}$, dont la différence donne (en prenant dx pour conſtante) $Qq = dx + \frac{dy^2+yddy}{dx}$; & à cauſe des triangles ſemblables CMG, CQq, l'on aura $MG - Qq \left(\frac{-yddy}{dx}\right) . MG \left(\frac{dx^2+dy^2}{dx}\right) :: MQ \left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\right) . MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Seconde manière. Ayant décrit du centre C le petit arc QO, les petits triangles rectangles QOq, MRm ſeront ſemblables, puiſque Mm, QO & MR, Qq ſont paralleles; & partant $Mm \left(\sqrt{dx^2+dy^2}\right) . MR\,(dx) :: Qq \left(\frac{dx^2+dy^2+yddy}{dx}\right) . QO = \frac{dx^2+dy^2+yddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or les ſecteurs ſemblables CMm, CQO donnent $Mm - QO \left(\frac{-yddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) . Mm \left(\sqrt{dx^2+dy^2}\right) :: MQ \left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\right) . MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Troiſieme manière. Menant les tangentes infiniment proches MT, mt, on aura PT — AP ou $AT = \frac{ydx}{dy} - x$, dont la différence donne $Tt = -\frac{ydxddy}{dy^2}$; & décrivant du centre m le petit arc TF, on formera le triangle rectangle FTt ſemblable à RmM, car les angles FtT, RMm ou PTM ſont égaux, ne différant entr'eux que de l'angle Tmt qui eſt infiniment petit ; ce qui donne Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$). mR (dy) : : Tt ($-\frac{ydxddy}{dy^2}$). $TF = \frac{-ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or les ſecteurs TmF, MCm ſont ſemblables, car l'angle $Tmt + MmC$ vaut un droit, & l'angle $MmC + MCm$ vaut auſſi un droit à cauſe du triangle CMm conſideré comme rectangle en M. Donc TF ($-\frac{ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}$). Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$) : : Tm ou TM ($\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$). $MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Quatrieme manière. On marquera (*Art.* 64.) les différences ſecondes en prenant dx pour conſtante ; & les triangles rectangles ſemblables HmS, Hnk (*Fig.* 69. *Pl.* 4.) donneront Hm ou Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$). mS ou MR (dx) : : Hn ($-ddy$). $nk = -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or l'angle kmn eſt égal à celui que font entr'elles les tangentes aux points M, m ; & partant comme l'on vient de prouver, égal à l'angle MCm ; d'où il ſuit que les ſecteurs nmk, MCm ſont ſemblables, & qu'ainſi nk ($-\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$). mk ou (*Art.* 2.) Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$) : : Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$). $MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$. On prend mH ou Mm pour mk, parce qu'elles ne diffèrent entr'elles que de la petite droite Hk infiniment moindre qu'elles ; de même que Hn eſt infiniment moindre que Rm ou Sn.

Second cas pour les courbes dont les appliquées partent d'un même point fixe.

Premiere manière. Ayant mené du point fixe B (*Fig.* 68. *Pl.* 4.) les perpendiculaires BF, Bf ſur les rayons infiniment proches CM, Cm ; les triangles rectangles mMR, BMF, qui ſont ſemblables (puiſqu'ajoutant aux angles mMR, BMF le même angle FMR, ils compoſent chacun un angle droit), donneront MF ou $MH = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, & $BF = \frac{ydy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, dont la différence (en prenant dx pour conſtante) eſt $Bf - BF$ ou $Hf = \frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy}{\overline{dx^2+dy^2} \times \sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or à cauſe des ſecteurs ſemblables CMm, CHf, on forme cette proportion $Mm - Hf$. Mm : : MH. MC, & partant $MC = \frac{ydx^2 + ydy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$.

Seconde manière. On marquera (*Art.* 64.) les différences ſecondes en ſuppoſant dx conſtante ; & les ſecteurs ſemblables BmS, mEk (*Fig.* 70. *Pl.* 4.) donneront Bm (y). mS (dx) : : mE ($\sqrt{dx^2+dy^2}$). $Ek = \frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$. Or à cauſe des triangles rectangles ſemblables HmS, Hnk, l'on aura Hm ou Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$). mS ou MR (dx) : : Hn ($-ddy$). $nk = -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Et partant $En = \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{y\sqrt{dx^2+dy^2}}$; & prenant une troisieme proportionnelle à En, Em ou Mm', les secteurs semblables Emn, MCm donneront pour MC la même valeur qu'auparavant.

Si l'on nomme Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$), du; & qu'on prenne dy pour constante, au lieu de dx, on trouvera dans le premier cas $MC = \frac{du^3}{dyadx}$, & dans le second $MC = \frac{ydu^3}{dxdu^2 + yddx}$. Et enfin si l'on prend du pour constante, il vient dans le premier cas $MC = \frac{dxdu}{-ddy}$ ou $\frac{dydu}{ddx}$ (parce que la différence de $dx^2 + dy^2 = du^2$ est $dxddx + dyddy = o$, & qu'ainsi $\frac{dx}{-ddy} = \frac{dy}{ddx}$); & dans le second, $MC = \frac{ydxdu}{dx^2 - yddy}$ ou $\frac{ydydu}{dxdy + yddx}$.

COROLLAIRE. II.

80. COMME l'on ne trouve pour ME ou MC (*Fig.* 72. *Pl.* 4.) qu'une seule valeur, il s'ensuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une seule dévelopée BCG.

COROLLAIRE III.

81. SI la valeur de ME (*Fig.* 67. 68. *Pl.* 4.) $\left(\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}\right)$ ou $\left(\frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2+dy^2-yddy}\right)$ est positive, il faudra prendre le point E du même côté de l'axe AB ou du point B, comme l'on a supposé en faisant le calcul; d'où l'on voit que la courbe sera alors concave vers cet axe ou ce point. Mais si

si la valeur de ME est négative, il faudra prendre le point E du côté opposé; d'où l'on voit que la courbe sera alors convexe. De sorte qu'au point d'infléxion ou de rebroussement qui sépare la partie concave de la convexe, la valeur de ME doit devenir de positive négative; & partant les perpendiculaires infiniment proches ou contigues doivent devenir de convergentes divergentes. Or cela ne se peut faire qu'en deux maniéres. Car ou elles vont en croissant, à mesure qu'elles approchent du point d'infléxion ou de rebroussement; & il faudra pour lors qu'elles deviennent paralleles, c'est-à-dire, que le rayon de la développée soit infini: ou elles vont en diminuant; & il faudra nécessairement alors qu'elles tombent l'une sur l'autre, c'est-à-dire, que le rayon de la développée soit zero. Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que l'on a démontré dans la séction précédente.

REMARQUE.

82. COMME l'on a cru jusqu'ici que le rayon de la développée étoit toujours infiniment grand au point d'infléxion, il est à propos de faire voir qu'il y a, pour ainsi dire, une infinité de genres de courbes qui ont toutes dans leur point d'infléxion le rayon de la développée égal à zero; au lieu qu'il n'y en a qu'un seul genre dans lequel ce rayon soit infini.

Soit BAC (*Fig.* 71. *Pl.* 4.) une des courbes qui ont dans leur point d'infléxion A le rayon de la développée infini. Si l'on développe les parties

BA, AC, en commençant au point A; il eſt clair qu'on formera une ligne courbe DAE qui aura auſſi un point d'infléxion dans le même point A, mais dont le rayon de la développée en ce point ſera égal à zero. Et ſi l'on formoit de la même ſorte une troiſiéme courbe par le dévelopement de la ſeconde DAE, & une quatriéme par le dévelopement de la troiſiéme, & ainſi de ſuite à l'infini; il eſt clair que le rayon de la développée dans le point d'infléxion A de toutes ces courbes, ſeroit toujours égal à zero. Donc &c.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

83. TROUVER *dans les courbes* AMD, (*Fig.* 72. *Pl.* 4.) *où l'axe* AB *fait avec la tangente en* A *un angle droit, le point* B *où cet axe touche la développée* BCG.

Si l'on ſuppoſe que le point M devienne infiniment près du ſommet A, il eſt clair que la perpendiculaire MQ rencontrera l'axe au point cherché B; d'où il ſuit que ſi l'on cherche en général la valeur de PQ $\left(\frac{ydy}{dx}\right)$ en x ou en y, & qu'on faſſe enſuite x ou $y = o$, on déterminera le point P à tomber ſur le point A, & le point Q ſur le point cherché B; c'eſt-à-dire, que PQ deviendra alors égale à la cherchée AB. Ceci s'éclaircira par les exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

84. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 72. *Pl.* 4.) une Parabole qui ait pour parametre la droite donnée a. L'équation à la parabole eſt $ax = yy$, dont la différence donne $dy = \frac{adx}{2y} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$; & prenant la différence de cette derniere équation, en ſuppoſant dx conſtante, on trouve $ddy = \frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$. Subſtituant enfin ces valeurs à la place de dy & de ddy dans la formule $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on aura (*Art.* 77.) ME $= \frac{\overline{a + 4x}\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe, la ligne TE parallele à MC; je dis qu'elle rencontre MP prolongée au point cherché E. Car les angles droits MPT, MTE donnent MP $(\sqrt{ax})$. PT $(2x)$ :: PT $(2x)$. PE $= \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; & par conſéquent MP $+$ PE $= \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

De plus à cauſe des triangles rectangles MPQ, MEC, l'on aura PM $(\sqrt{ax})$. PQ $(\frac{1}{2}a)$ :: ME $\left(\sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}\right)$. EC ou PK $= \frac{1}{2}a + 2x$. & partant QK $= 2x$. Ce qui donne cette nouvelle conſtruction.

Soit prise QK double de AP, ou (ce qui revient au même) soit prise PK égale à TQ, & soit menée KC parallele à PM. Elle rencontrera la perpendiculaire MC en un point C qui sera à la développée BCG.

Autre maniere. $yy = ax$, & $2ydy = adx$ dont la différence (en supposant dx constante) donne $2dy^2 + 2yddy = 0$; d'où l'on tire $-ddy = \frac{dy^2}{y}$. Et mettant cette valeur dans la formule $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on trouve (*Art.* 77.) $ME = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dy^2}$; & partant EC ou $PK = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dydx} = \frac{ydy}{dx} + \frac{ydx}{dy} = PQ + PT$ ou TQ. Ce qui donne les mêmes constructions qu'auparavant. Car $MP . PT :: dy . dx :: PT \left(\frac{ydx}{dy}\right) . PE = \frac{ydx^2}{dy^2} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

Pour trouver à présent le point B où l'axe AB touche la développée BCG. On a $PQ \left(\frac{ydy}{dx}\right) = \frac{1}{2}a$. Or comme cette quantité est constante, elle demeurera toujours la même en quelque endroit que se trouve le point M. Et ainsi, lorsqu'il tombe sur le sommet A, l'on aura encore PQ qui devient en ce cas $AB = \frac{1}{2}a$.

Pour trouver la nature de la développée BCG à la maniere de *Descartes*. On nommera la coupée BK, u; l'appliquée KC ou PE, t; d'où l'on

aura $CK(t) = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ & $AP + PK - AB(u) = 3x$; mettant donc pour x sa valeur $\frac{1}{3}u$ dans l'équation $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, l'on en formera une nouvelle $27att = 16u^3$ qui exprimera la relation de BK à KC. D'où l'on voit que la développée BCG de la parabole ordinaire est une seconde parabole cubique dont le paramétre est égal à $\frac{27}{16}$ du paramétre de la parabole donnée.

Il est visible que la développée CBC (*Fig.* 73. *Pl.* 4.) de la parabole commune entiere MAM a deux parties CB, BC qui ont leurs convexités opposées l'une à l'autre, de sorte qu'elles forment en B un point de rebroussement.

AVERTISSEMENT.

On entend par courbes geométriques AMD, BCG (*Fig.* 72. *Pl.* 4.) *celles dont la relation des coupées* AP, BK *aux appliquées* PM, KC, *se peut exprimer par une équation où il ne se rencontre point de différences; & on prend pour* geométrique *tout ce qu'on peut faire par le moyen de ces lignes. L'on suppose ici que les coupées & les appliquées soient des lignes droites.*

COROLLAIRE.

85. LORSQUE la courbe donnée AMD est geométrique, il est clair que l'on pourra toujours trouver (comme dans cet exemple) une équation qui exprime la nature de sa développée BCG; & qu'ainsi cette développée sera aussi geo-

métrique. Mais je dis de plus qu'elle ſera rectifiable, c'eſt-à-dire, qu'on pourra trouver geometriquement des lignes droites égales à une de ſes portions quelconque BC; car il eſt évident (*Art.* 75.) que l'on déterminera avec le ſecours de la ligne AMD, qui eſt geométrique, ſur la tangente CM de la portion BC, un point M tel que la droite CM ne différera de la portion BC que d'une droite donnée AB.

EXEMPLE II.

86. SOIT la courbe donnée MDM (*Fig.* 74. *Pl.* 4.) une hyperbole entre ſes aſymptotes, qui ait pour équation $aa=xy$.

On aura $\frac{aa}{y}=x$, $\frac{-aady}{yy}=dx$, & ſuppoſant dx conſtante, (*Art.* 1.) $\frac{-aayyddy+2aaydy^2}{y^4}=0$; d'où l'on tire $ddy=\frac{2dy^2}{y}$; & mettant cette valeur dans $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, il vient (*Art.* 77.) $ME=\frac{ydx^2+ydy^2}{-2dy^2}$: de ſorte que EC ou $PK=-\frac{ydy}{2dx}-\frac{ydx}{2dy}$. Ce qui donne ces conſtructions.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'aſymptote AB, la ligne TS parallele à MC & qui rencontre MP prolongée en S; ſoit priſe ME égale à la moitié de MS de l'autre côté de l'aſymptote (que l'on regarde ici comme l'axe) parce que ſa valeur eſt négative; ou bien ſoit priſe PK égale à la moitié de TQ du même côté du point T: je dis que ſi l'on mene EC parallele, ou KC perpendiculaire à l'axe, elles couperont la droite MC au point cherché C. Car il eſt clair que $MS=\frac{ydx^2+ydy^2}{dy^2}$, & que $TQ=\frac{ydy}{dx}+\frac{ydx}{dy}$.

Si l'on fait quelque attention ſur la figure de l'hyperbole MDM, on verra que ſa développée CLC doit avoir un point de rebrouſſement L, de même que la développée de la parabole. Pour le déterminer je remarque que le rayon DL de la développée eſt plus petit que tout autre rayon MC; d'où il ſuit que la différence de ſon expreſſion (*Art.* 78.) $\frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$ ou $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ ſera (*Sect.* 3.) nulle ou infinie. Ce qui donne, en prenant toujours dx pour conſtante, $\frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dxdddy\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}=0$ ou ∞; d'où en diviſant par $\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}$, & multipliant enſuite par $dxddy^2$, on tire cette équation $dx^2dddy+dy^2dddy-3dyddy^2=0$ ou ∞, qui ſervira à trouver pour x une valeur AH, telle que menant l'appliquée HD & le rayon DL de la développée, le point L ſera le point de rebrouſſement cherché.

On a dans cet exemple $y=\frac{aa}{x}$, $dy=\frac{-aadx}{xx}$,

$ddy = \frac{2aadx^2}{x^3}$, $dddy = \frac{-6aadx^3}{x^4}$. C'eſt pourquoi mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve AH (x) $= a$. D'où il ſuit que le point D eſt le ſommet de l'hyperbole, & que les lignes AD, DL ne ſont qu'une même droite AL qui en eſt l'axe.

EXEMPLE III.

87. SOIT l'equation générale $y^m = x$ (*Fig.* 72. 74. *Pl.* 4.) qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini, lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier on rompu, & de toutes les hyperboles, l'orſqu'il marque un nombre négatif.

On aura $my^{m-1}dy = dx$ dont la différence donne, en prenant dx pour conſtante, $\overline{mm - m}y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$; & en diviſant par my^{m-1}, il vient $-ddy = \frac{\overline{m-1}dy^2}{y}$; d'où mettant cette valeur dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on tirera (*Art.* 77.) ME $= \frac{ydx^2 + ydy^2}{\overline{m-1}dy^2}$; & partant EC ou PK $= \frac{ydy}{\overline{m-1}dx} + \frac{ydx}{\overline{m-1}dy}$. Ce qui donne ces conſtructions générales.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe AP, la ligne TS parallele à MC & qui rencontre MP prolongée au point S; ſoit

priſe ME $= \frac{1}{m-1}$ MS, ou bien ſoit priſe PK $= \frac{1}{m-1}$ TQ: il eſt clair que ſi l'on mene par le point E une parallele, ou par le point K une perpendiculaire à l'axe, elles rencontreront MC au point cherché C.

Si m eſt négatif, comme il arrive dans les hyperboles, la valeur de ME (*Fig.* 74. *Pl.* 4.) ſera négative; & par conſéquent elles ſeront convexes vers leur axe qui ſera alors une aſymptote. Mais dans les paraboles où m eſt poſitif, il peut arriver deux cas. Car ou m (*Fig.* 75. *Pl.* 4.) ſera moindre que 1, & alors elles ſeront convexes du côté de leur axe, qui ſera une tangente au ſommet: ou m (*Fig.* 72. *Pl.* 4.) ſurpaſſe 1, & alors elles ſeront concaves vers leur axe qui ſera perpendiculaire au ſommet.

Pour trouver dans ce dernier cas le point B où l'axe AB touche la développée. On a PQ $\left(\frac{ydy}{dx}\right) = \frac{y^{2-m}}{m}$; ce qui donne trois différens cas. Car ou $m = 2$, ce qui n'arrive que dans la parabole ordinaire, & alors l'expoſant de y étant nul, cette inconnue s'évanouit; & par conſéquent AB $= \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, à la moitié du parametre. Ou m eſt moindre que 2, & alors l'expoſant de y étant poſitif, elle ſe trouvera dans le numérateur, ce qui rend (en l'égalant (*Art.* 83.) à zero) la fraction nulle: c'eſt-à-dire, que le point B tombe en ce cas ſur le point A, comme dans la ſeconde parabole cubique $axx = y^3$. Ou enfin m (*Fig.* 76. *Pl.* 4.) ſurpaſſe 2, & alors l'expoſant de y étant négatif, elle ſera dans le dénominateur, ce qui rend (lorſqu'elle devient zero) la fraction infinie: c'eſt-à-dire, que le point B eſt infiniment éloigné du point A, ou (ce qui eſt la même choſe) que l'axe AB eſt aſymptote de la développée, comme dans la premiere parabole cubique $aax = y^3$. On peut remarquer dans ce dernier cas que la développée CLO (*Fig.* 77. *Pl.* 4.) de la demi-parabole ADM a un point de rebrouſſement L; de ſorte que par le dévelopement de la partie LO continuée à l'infini, le point D ne décrit que la portion déterminée DA; au lieu que par le dévelopement de l'autre partie LC continuée auſſi à l'infini, il décrit la portion infinie DM.

On déterminera le point L de même que dans l'hyperbole. Soit par exemple $aax = y^3$, ou $y = x^{\frac{1}{3}}$, on aura $dy = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx$, $ddy = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} dx^2$, $dddy = \frac{10}{27} x^{-\frac{8}{3}} dx^3$; & ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2 = 0$, on trouvera (*Art.* 86.) AH $(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{91125}}$ Il en eſt ainſi des autres.

REMARQUE.

88. En ſuppoſant que m ſurpaſſe 1, afin que les paraboles ſoient toujours concaves du côté de leur axe, il peut arriver differens cas. Car ſi le numérateur de la fraction marquée par m eſt pair, & le

dénominateur impair; toutes les paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une poſition ſemblable à celle de la parabole ordinaire. (*Fig.* 73. *Pl.* 4.) Mais ſi le numérateur & le dénominateur ſont chacun impair; elles ont une poſition renverſée de part & d'autre de leur axe, enſorte que leur ſommet A (*Fig.* 77. *Pl.* 4. eſt un point d'inflexion, comme la premiere parabole cubique $x = y^{\frac{3}{1}}$ ou $aax = y^3$. Enfin ſi le numérateur étant impair, le dénominateur eſt pair; elles ont une poſition renverſée du même côté de leur axe, enſorte que leur ſommet A (*Fig.* 76. *Pl.* 4.) eſt un point de rebrouſſement, comme la ſeconde parabole cubique $x = y^{\frac{3}{2}}$ ou $axx = y^3$. Tout cela ſuit de ce qu'une puiſſance paire ne peut pas avoir une valeur négative. Cela poſé, il eſt évident,

1°. Que dans le point d'inflexion A, (*Fig.* 77. *Pl.* 4.) le rayon de la développée peut être infiniment grand, comme dans $aax = y^3$, ou infiniment petit, comme dans $aax^3 = y^5$.

2°. Que dans le point de rebrouſſement A, (*Fig.* 76. *Pl.* 4.) le rayon de la développée peut être ou infini comme dans $a^3xx = y^5$, ou zero comme dans $axx = y^3$.

3°. Qu'il ne s'enſuit pas (*Fig.* 73. *Pl.* 4.) de ce que le rayon de la développée eſt infini ou zero, que les courbes ayent alors un point d'inflexion ou de rebrouſſement. Car dans $a^3 x = y^4$ il eſt infini, dans $ax^3 = y^4$ il eſt nul; & cependant ces paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une position semblable à celle de la parabole ordinaire.

EXEMPLE IV.

89. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 78. 79. *Pl.* 4 & 5.) une hyperbole ou une ellipse qui ait pour axe AH (a), & pour parametre AF (b).

On aura par la propriété de ces lignes $y = \sqrt{\frac{abx \mp bxx}{\sqrt{a}}}$, $dy = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{aabx \mp abxx}}$, & $ddy = \frac{-a^3bbdx^2}{4aabx \mp 4abxx\sqrt{aabx \mp abxx}}$. Si donc l'on met ces valeurs dans $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ expression générale de (*Art.* 78.) MC, on trouvera dans ces deux courbes $MC = \frac{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}{2a^3bb} \times \frac{\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a^3bb} = \frac{4MQ^3}{bb}$, puisque de part & d'autre MQ $\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right) = \frac{\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a}$. Ce qui donne cette construction qui sert aussi pour la parabole.

Soit prise MC quadruple de la quatriéme continuellement proportionnelle au parametre AF & à la perpendiculaire MQ terminée par l'axe; le point C sera à la développée.

Si l'on fait $x = o$, on aura (*Art.* 83.) AB $= \frac{1}{2}b$. Et si l'on fait dans l'ellipse $x = \frac{1}{2}a$, on trouvera DG (*Fig.* 79. *Pl.* 5.) $= \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, c'est-à-dire, égal à la moitié du parametre du petit axe. D'où l'on voit que dans l'ellipse la développée BCG se termine en un point G du petit axe DO, où elle forme un point de rebroussement; au lieu que dans la parabole & l'hyperbole elle s'étend à l'infini.

Si $a = b$ dans l'ellipse, il vient MC $= \frac{1}{2}a$; d'où il suit que tous les rayons de la développée sont égaux entr'eux, & qu'elle ne sera par conséquent qu'un point: c'est-à-dire, que l'ellipse devient en ce cas un cercle qui a pour développée son centre. Ce que l'on sçait d'ailleurs être véritable.

EXEMPLE V.

90. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 80. *Pl.* 5.) une logarithmique ordinaire, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ces points quelconque M la perpendiculaire MP sur l'asymptote KP, & la tangente MT; la soutangente PT soit toujours égale à la même droite donnée a.

On a donc PT $\left(\frac{ydx}{dy}\right) = a$, d'où l'on tire $dy = \frac{ydx}{a}$, dont la différence donne, en prenant dx pour constante, $ddy = \frac{dydx}{a} = \frac{ydx^2}{aa}$; & mettant ces valeurs dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on trouve (*Art.* 77.) $ME = \frac{-aa - yy}{y}$; & partant EC ou PK $=$

$\frac{-aa-yy}{a}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit priſe PK égale à TQ du même côté de T, parce que ſa valeur eſt négative ; & ſoit menée KC parallele à PM : je dis qu'elle rencontrera la perpendiculaire MC au point cherché C. Car $TQ = \frac{aa+yy}{a}$.

Si l'on veut que le point M ſoit celui de la plus grande courbure, on ſe ſervira de la formule $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$, que l'on a trouvée (*Art.* 86.) dans l'exemple ſecond ; & mettant pour dy, ddy, $dddy$, leurs valeurs $\frac{ydx}{a}$, $\frac{ydx^2}{aa}$, $\frac{ydx^3}{a^3}$, on trouvera PM (y) $a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Il eſt clair, en prenant dx pour conſtante, que les appliquées y ſont entr'elles comme leurs différences dy ou $\frac{ydx}{a}$; d'où il ſuit qu'elles ſont auſſi une progreſſion géométrique. Car ſi l'on conçoit que l'aſymptote ou l'axe PK ſoit diviſé en un nombre infini de petites parties égales Pp ou MR, pf ou mS, fg ou nH, &c. compriſes entre les appliquées PM, pm, fn, go, &c. l'on aura PM . pm :: Rm . Sn :: PM + Rm ou pm . pm + Sn ou fn. On prouve de même que pm . fn :: fn . go, & ainſi de ſuite. Les appliquées PM, pm, fn, go, &c. feront donc entr'elles une progreſſion géométrique.

EXEMPLE VI.

91. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 81. *Pl.* 5.) une logarithmique ſpirale, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconque M au point fixe A, qui en eſt le centre, la droite MA & la tangente MT ; l'angle AMT ſoit par tout le même.

L'angle AMT ou AmM étant conſtant, la raiſon de mR (dy) à RM (dx) ſera auſſi conſtante. Il faut donc que la différence de $\frac{dy}{dx}$ ſoit nulle ; ce qui donne (en ſuppoſant dx conſtante) $ddy = 0$. C'eſt pourquoi effaçant le terme $yddy$ dans $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$ expreſſion (*Art.* 77.) générale de ME, lorſque les appliquées partent toutes d'un même point, on trouve ME $= y$, c'eſt-à-dire, ME = AM. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée AC perpendiculaire ſur AM, & qui rencontre en C la droite MC perpendiculaire à la courbe ; le point C ſera à la dévelopée ACB.

Les angles AMT, ACM ſont égaux, puiſqu'étant joints l'un & l'autre au même angle AMC ils font un angle droit. La développée ACG ſera donc la même logarithmique ſpirale que la donnée AMD, & elle n'en différera que par ſa poſition.

Si l'on ſuppoſe que le point C de la développée ACG étant donné, il faille déterminer la longueur CM de ſon rayon en ce point, qui (*Art.* 75.)

est égal à la portion AC qui fait une infinité de retours avant que de parvenir en A ; il est clair qu'il n'y a qu'à mener AM perpendiculaire sur AC. De sorte que si l'on mene AT perpendiculaire sur AM, la tangente MT sera aussi égale à la portion AM de la logarithmique spirale donnée AMD.

Si l'on conçoit une infinité d'appliquées AM, Am, An, Ao, &c. qui fassent entr'elles des angles infiniment petits & égaux ; il est clair que les triangles MAm, mAn, nAo, &c. seront semblables, puisque les angles en A sont égaux, & que par la proprieté de la logarithmique, les angles en m, n, o, &c. le sont aussi. Et partant AM. Am :: Am. An. Et Am. An :: An. Ao. & ainsi de suite. D'où l'on voit que les appliquées AM, Am, An, Ao, &c. sont une progression geométrique, lorsqu'elles font entr'elles des angles égaux.

EXEMPLE. VII.

92. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 82. *Pl.* 5.) une des spirales à l'infini, formée dans le secteur BAD avec une proprieté telle qu'ayant mené un rayon quelconque AMP, & ayant nommé l'arc entier BPD, b; sa partie BP, z; le rayon AB ou AP, a; & sa partie AM, y; on ait cette proportion $b. z :: a^m. y^m$.

L'équation à la spirale AMD est $y^m = \frac{a^m z}{b}$, dont la différence donne $my^{m-1}dy = \frac{a^m dz}{b}$. Or à

cause

cause des secteurs semblables AMR, APp, l'on aura AM (y). AP (a) :: MR (dx). Pp (dz) $= \frac{adx}{y}$. Mettant donc cette valeur à la place de dz dans l'équation que l'on vient de trouver, on aura $my^m dy = \frac{a^{m+1}dx}{b}$ dont la différence (en prenant dx pour constante) est $mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = 0$; d'où en divisant par my^{m-1}, l'on tire $-yddy = mdy^2$; & partant ME (*Art.* 77.) $\left(\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}\right) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + \overline{m+1}\,dy^2}$; ce qui donne cette construction.

Soit menée par le centre A la droite TAQ perpendiculaire sur AM, & qui rencontre en T la tangente MT, & en Q la perpendiculaire MQ ; soit fait TA + $\overline{m+1}$ AQ. TQ :: MA. ME. Je dis que menant EC parallele à TQ, elle ira rencontrer MQ en un point C qui sera à la développée.

Car à cause des paralleles MRG, TAQ, l'on aura MR (dx) + $\overline{m+1}$ RG $\left(\frac{dy^2}{dx}\right)$. MG $\left(dx + \frac{dy^2}{dx}\right)$ :: TA + $\overline{m+1}$ AQ. TQ :: AM (y). ME $= \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + \overline{m+1}\,dy^2}$.

EXEMPLE. VIII.

93. SOIT AMD (*Fig.* 83. *Pl.* 5.) une demi-roulette simple, dont la base BD est égale à la demi-circonférence BEA du cercle générateur.

Ayant nommé AP, x; PM, y; l'arc AE, u; & le diametre AB, $2a$; l'on aura par la proprieté du cercle $PE = \sqrt{2ax - xx}$; & par celle de la roulette $y = u + \sqrt{2ax - xx}$, dont la différence donne $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ ou $dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, en mettant pour du sa valeur $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; en supposant dx constante, $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$; & en mettant ces valeurs dans $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, il vient (*Art.* 78.) MC $= 2\sqrt{4aa - 2ax}$, c'est-à-dire, 2BE ou 2MG.

Si l'on fait $x = o$, l'on aura $AN = 4a$ pour rayon de la développée dans le sommet A. Mais si l'on fait $x = 2a$, on trouvera que le rayon de la développée au point D devient nul ou zero; d'où l'on voit que la développée a son origine en D, & qu'elle se termine en N, ensorte que BN = BA.

Pour sçavoir la nature de cette développée, il n'y a qu'à achever le rectangle BS, décrire le demi-cercle DIS qui a pour diametre DS, & mener DI parallele à MC ou à BE. Cela fait, il est clair que l'angle BDI est égal à l'angle EBD; & par conséquent que les arcs DI, BE sont égaux entr'eux; d'où il suit que leurs cordes DI, BE ou GC sont aussi égales. Si donc l'on tire IC, elle sera égale & parallele à DG, qui par la génération de la roulette est égale à l'arc BE ou DI; & partant la développée DCN est une demi-roulette qui a pour base la droite NS égale à la demi-circonférence DIS de son cercle générateur: c'est-à-dire, que c'est la demi-roulette même AMDB, posée dans une situation renversée.

COROLLAIRE.

94. Il est clair (*Art.* 75.) que la portion de roulette DC est double de sa tangente CG, ou de la corde correspondante DI. Et la demi-roulette DCN double du diametre BN ou DS de son cercle générateur.

AUTRE SOLUTION.

95. On peut encore trouver la longueur du rayon MC sans aucun calcul, en cette sorte. Ayant imaginé une autre perpendiculaire mC infiniment proche de la premiere, une autre parallele me, une autre corde Be, & décrit des centres, C, B les petits arcs GH, EF, on formera les triangles rectangles GHg, EFe qui seront égaux & semblables; car Gg = Ee, puisque BG ou ME est égale à l'arc AE, & de même Bg ou me est égal à l'arc Ae; de plus Hg ou mg — MG = Fe ou Be — BE; GH sera donc égal à EF. Or les perpendiculaires MC, mC, étant paralleles aux cordes EB, eB, l'angle MCm sera égal à l'angle EBe. Donc puisque les arcs GH, EF, qui mesurent ces angles, sont

égaux, il s'enſuit que leurs rayons CG, BE ſeront auſſi égaux; & partant que MC doit être priſe double de MG ou de BE.

LEMME.

96. *S'il y a un nombre quelconque de quantités* a, b, c, d, e, *&c. ſoit que ce nombre ſoit fini ou infini, ſoit que ces quantités ſoient des lignes, ou des ſurfaces, ou des ſolides; la ſomme* $a - b + b - c + c - d + d - e$, *&c. de toutes leurs différences eſt égale à la plus grande* a, *moins la plus petite* e, *ou ſimplement à la plus grande, lorſque la plus petite eſt zero.* Ce qui eſt viſible.

COROLLAIRE I.

97. Les ſecteurs CM*m*, CGH, étant ſemblables, il eſt clair que M*m* eſt double de GH ou de ſon égale EF; & comme cela arrive toujours en quelque endroit que l'on ſuppoſe le point M, il s'enſuit que la ſomme de tous les petits arcs M*m*, c'eſt à dire, la portion A*m* de la demi-roulette AMD, eſt double de la ſomme de tous les petits arcs EF. Or le petit arc EF fait partie de la corde AE perpendiculaire ſur BE, & eſt la différence des cordes AE, A*e*, parce que la petite droite *e*F perpendiculaire ſur A*e* peut être conſiderée comme un petit arc décrit du centre A; & partant la ſomme de tous les petits arcs EF dans l'arc AZE ſera la ſomme des différences de toutes les cordes AE, A*e*, &c. dans cet arc, c'eſt-à-dire, par le Lemme qu'elle ſera égale à la corde AE. Il eſt donc évident

que la portion AM de la demi-roulette AMD eſt double de la corde correſpondante AE.

COROLLAIRE II.

98. L'ESPACE MG*gm* (*Art.* 2.) ou le trapéze $MGHm = \frac{1}{2}Mm + \frac{1}{2}GH \times MG = \frac{1}{2}EF \times BE$, c'eſt-à-dire, qu'il eſt triple du triangle EBF ou EB*e*; d'où il ſuit que l'eſpace MGBA, ſomme de tous ces trapézes, eſt triple de l'eſpace circulaire BEZA, ſomme de tous ces triangles.

COROLLAIRE III.

99. NOMMANT BP, *z*; l'arc AZE ou EM ou BG, *u*; & le rayon KA, *a*; l'on aura le parallelélogramme $MGBE = uz$. Or l'eſpace de la roulette $MGBA = 3BEZA = 3EKB + \frac{1}{2}au$; & partant l'eſpace AMEB renfermé par la portion de roulette AM, la parallele ME, la corde BE & le diamètre AB, eſt $= 3EKB + \frac{1}{2}au - uz$. D'où il ſuit que ſi l'on prend BP $(z) = \frac{1}{2}a$, l'eſpace AMEB ſera triple du triangle correſpondant EKB; & aura par conſéquent ſa quadrature indépendante de celle du cercle. Ce que M. *Hugens* a remarqué le premier. Voici encore une autre ſorte d'eſpace qui a la même propriété.

Si l'on retranche de l'eſpace AMEB le ſegment BEZA, il reſtera l'eſpace $AZEM = 2EKB + au - uz$; d'où l'on voit que ſi le point P tombe au centre K, l'eſpace AZEM ſera égal au quarré du rayon. Il eſt évident qu'entre tous les eſpaces AMEB & AZEM, il n'y a que les deux que l'on vient de déterminer qui ayent leur quadrature absolue indépendante de celle du cercle.

EXEMPLE IX.

100. SOIT la demi-roulette AMD (*Fig.* 84. *Pl.* 5.) décrite par la révolution du demi-cercle AEB autour d'un autre cercle immobile BGD; & qu'il faille déterminer sur la perpendiculaire MG donnée de position, le point où elle touche la développée.

Pour se servir des formules générales il faudroit prendre pour les appliquées de la courbe AMD, des lignes droites perpendiculaires sur l'axe OA, & chercher ensuite une équation qui exprimât la rélation des coupees aux appliquées, ou de leurs différences. Mais comme le calcul en seroit fort pénible, il vaut beaucoup mieux dans ces sortes de rencontres en tenter la solution en se servant de la génération même.

Lorsque le demi-cercle AEB est parvenu dans la position MGB dans laquelle il touche en G la base BD; & que le point décrivant A tombe sur le point M de la demi-roulette AMD : il est clair,

1°. Que l'arc GM est égal à l'arc GD, comme aussi l'arc GB du cercle mobile à larc GB du cercle immobile.

2°. Que MG est (*Art.* 43.) perpendiculaire sur la courbe; car considérant la demi-circonférence MGB ou AEB, & la base BGD comme l'assemblage d'une infinité de petites droites égales chacune à sa corréspondante, il est manifeste que la demi-roulette AMD sera l'assemblage d'une infinité de petits arcs qui auront pour centre successivement tous les points touchans G, & qui seront décrits chacun par le même point M ou A.

3°. Que si l'on décrit du centre O du cercle immobile l'arc concentrique ME; les arcs MG, EB du cercle mobile seront égaux entr'eux, aussi-bien que leurs cordes MG, EB, & les angles OGM, OBE. Car les droites OK, OK, qui joignent les centres des deux cercles sont égales, puisqu'elles passent par les points touchans B, G; c'est pourquoi menant les rayons OM, OE, & KE, on formera les triangles OKM, OKE égaux & semblables. L'angle OKM étant donc égal à l'angle OKE; les arcs MG, BE des demi-cercles égaux MGB, BEA, qui mesurent ces angles, seront égaux, comme aussi leurs cordes MG, EB; d'où il suit que les angles OGM, OBE le seront aussi.

Cela posé, soit entendue une autre perpendiculaire mC (*Fig.* 85. *Pl.* 5.) infiniment proche de la premiere, un autre arc concentrique me, & une autre corde Be; soient décrits des centres C, B, les petits arcs GH, EF. Les triangles rectangles GHg, EFe seront égaux & semblables; car Gg ou Dg — DG = Ee ou à l'arc Be — l'arc BE, de plus Hg ou mg — MG = Fe ou à Be — BE. Le petit arc GH sera donc égal au petit arc EF; d'où il suit que l'angle GCH est à l'angle EBF, comme BE est à CG. Ainsi toute la difficulté se réduit à trouver le rapport de ces angles. Ce qui se fait en cette sorte.

Ayant mené les rayons OG, Og, KE, Ke, & nommé OG ou OB, b; KE ou KB ou KA, a; il est clair que l'angle $EBe = OBe - OBE = Ogm - OGM =$ (en menant GL, GV paralleles à Cm, Og) $LGM - OGV = GCH - GOg$. On aura donc l'angle $GCH = GOg + EBF$. Or les arcs Gg, Ee étant égaux, l'on aura aussi $GOg . EKe$ ou $2EBF :: KE (a) . OG (b)$; & partant l'angle $GOg = \frac{2a}{b} EBF$, & $GCH = \frac{2a+b}{b} EBF$. Donc $GCH . EBF$ ou $BE . CG :: \frac{2a+b}{b} . 1$. & partant l'inconnue $CG = \frac{b}{2a+b} BE$ ou MG. Ce qui donne cette construction.

Soit fait OA (*Fig.* 86. *Pl.* 5.) $(2a+b) . OB (b) :: MG . GC$; le point C sera à la développée.

Il est clair 1°. Que cette développée commence au point D, & qu'elle y touche la base BGD; puisque l'arc GM devient en ce point infiniment petit. 2°. Qu'elle se termine au point N, ensorte que $OA . OB :: AB . BN :: OA - AB$ ou $OB . OB - BN$ ou ON; c'est-à-dire, que OA, OB, ON sont continuellement proportionnelles. 3°. Si l'on décrit à présent le cercle NSQ du centre O, je dis que la développée DCN est formée par la révolution du cercle mobile GCS, qui a pour diametre GS ou BN, autour de l'immobile NSQ: c'est-à-dire, qu'elle est une demi-roulette semblable à la proposée, ou de même espece (parce que les diametres AB, BN des cercles mobiles ont entr'eux le même rapport que les rayons OB, ON des cercles immobiles), & posée dans une situation renversée, ensorte que son sommet est en D. Pour le prouver, supposons que les diametres des cercles mobiles se trouvent sur la droite OT menée à discrétion du centre O; elle passera par les points touchans S, G; & faisant AB ou $TG . BN$ ou $GS :: MG . GC$, le point C sera à la développée, & de plus à la circonférence du cercle GCS; car l'angle GMT étant droit, l'angle GCS le sera aussi. Or à cause des angles égaux MGT, CGS, l'arc TM ou GB est à l'arc CS, comme le diametre GT au diametre $GS :: OG . OS :: GB . NS$; & partant les arcs CS, SN sont égaux. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

101. IL est clair (*Art.* 75.) que la portion de roulette DC est égale à la droite CM; & partant que DC est à sa tangente $CG :: AB + BN . BN :: OB + ON . ON$; c'est-à-dire, comme la somme des diametres des deux cercles générateurs, ou des cercles mobile & immobile, est au rayon du cercle immobile. Cette verité se dé-

couvre encore de la maniére qui ſuit. A cauſe des triangles ſemblables CMm, CGH, (*Fig.* 85. *Pl.* 5.) l'on aura $Mm . GH$ ou $EF :: MC . GC :: OA + OB$ ($2a + 2b$). OB (b). D'où il ſuit (comme dans l'art. 97.) que la portion de roulette AM eſt à la corde correſpondante AE, comme la ſomme des diamètres du cercle générateur & de la baſe, eſt au rayon de la baſe.

COROLLAIRE II.

102. LE trapéze $MGHm$ (*Fig.* 85. *Pl.* 5.) $= \overline{\frac{1}{2}GH + \frac{1}{2}Mm} \times MG$. Or CG ($\frac{b}{2a+b} MG$). CM ($\frac{2a+2b}{2a+b} MG$) $:: GH . Mm = \frac{2a+2b}{b} GH$. Donc puiſque $GH = EF$, & $MG = EB$, l'on aura $MGHm = \frac{2a+3b}{2b} EF \times EB$: c'eſt-à-dire, que le trapéze $MGHm$ ſera toujours au triangle correſpondant $EBF :: 2a + 3b . b$.

D'où il ſuit que l'eſpace MGBA renfermé par MG, AB perpendiculaires à la roulette, par l'arc BG & par la portion de roulette MA, eſt au ſegment de cercle correſpondant $BEZA :: 2a + 3b . b$.

COROLLAIRE III.

103. IL eſt viſible que la quadrature indéfinie de la roulette dépend de la quadrature du cercle; mais ſi l'on prend OQ (*Fig.* 87. *Pl.* 5.) moyenne proportionnelle entre OK, OA, & qu'on décrive de ce rayon l'arc QEM; je dis que l'eſ-

pace ABEM renfermé par le diamètre AB, la corde BE, l'arc EM, & par la portion de roulette AM, eſt au triangle $EKB :: 2a + 3b . b$. Car nommant l'arc AE ou GB; u; le rayon OQ, z; l'on aura OB (b) . OQ (z) $:: GB$ (u) . RQ ou $ME = \frac{uz}{b}$. Et partant l'eſpace RGBQ ou MGBE, c'eſt-à-dire, $\overline{\frac{1}{2}GB + \frac{1}{2}RQ} \times BQ = \frac{zzu - bbu}{2b}$. Or (*Art.* 102.) l'eſpace de la roulette $MGBA = \frac{2a+3b}{b} \times BEZA = \frac{2a+3b}{b} \times EKB + \frac{2a+3b}{b} \times KEZA$ ($\frac{au}{2}$). Si donc l'on retranche le précédent eſpace de celui-ci, il reſtera $ABEM = \frac{2aau + 3abu + bbu - zzu}{2b} + \frac{2a+3b}{b} \times EKB = \frac{2a+3b}{b} EKB$, puiſque par la conſtruction $zz = 2aa + 3ab + bb$. D'où l'on voit que cet eſpace a ſa quadrature indépendante de celle du cercle, & qu'il eſt le ſeul parmi tous ſes ſemblables.

En voici encore un autre qui a la même proprieté. Si l'on retranche de l'eſpace ABEM le ſegment BEZA ($\frac{1}{2}au + EKB$,) il reſtera l'eſpace $AZEM = \frac{2aau + 2abu + bbu - zzu}{2b} + \frac{2a+2b}{b} EKB = \frac{2a+2b}{b} EKB$ en faiſant $zz = 2aa + 2ab + bb$: c'eſt-à-dire, que ſi l'on diviſe la demi-circonférence en deux également au point E, l'eſpace AZEM sera au double du triangle EKB, c'est-à-dire, au quarré du rayon :: OK $(a+b)$. OB (b).

Corollaire IV.

104. Si le cercle mobile AEB (*Fig.* 88. *Pl.* 5.) roule au dedans de l'immobile BGD, son diamètre AB devient négatif, de positif qu'il étoit auparavant ; & partant il faut changer de signes les termes où il se rencontre avec une dimension impaire. D'où il suit, 1°. Que si l'on mene à discrétion la perpendiculaire MG à la roulette, & que l'on fasse OA $(b-2a)$. OB (b) :: MG . GC . le point C sera (*Art.* 100.) à la développée DCN décrite par la révolution du cercle qui a pour diamètre BN, au dedans de la circonférence NS concentrique à BD. 2°. Que si l'on décrit du centre O l'arc ME, la portion de roulette AM sera (*Art.* 101.) à la corde AE :: $2b-2a.b$. 3°. Que l'espace MGBA est (*Art* 102.) au segment BEZA :: $3b-2a.b$. 4°. Que si l'on prend $OQ=\sqrt{2aa-3ab+bb}$, c'est-à-dire, moyenne proportionnelle entre OK, OA ; l'espace ABEM renfermé par la portion de roulette AM, l'arc ME, la corde EB, & le diamètre AB, sera (*Art.* 103.) au triangle EKB :: $3b-2a.b$. Mais que si l'on fait OQ ou $OE=\sqrt{2aa-2ab+bb}$, c'est à-dire, que l'arc AE soit le quart de la circonférence ; l'espace AZEM renfermé par la portion AM de roulette & par les deux arcs ME, AE, sera (*Ibid.*) au triangle EKB qui est en ce cas là moitié du quarré du rayon :: $2b-2a.b$.

Corollaire V.

105. Si l'on conçoit que le rayon OB (*Fig.* 86. *Pl.* 5.) du cercle immobile devienne infini, l'arc BGD deviendra une ligne droite, & la courbe AMD deviendra la roulette ordinaire. Or comme dans ce cas le diamètre AB du cercle mobile est nul par rapport à celui de l'immobile ; il s'ensuit, 1°. Que MG . GC :: $b.b$. Puisque $b\pm 2a=b$, c'est-à-dire, que $MG=GC$; & partant que si l'on prend $BN=AB$, & qu'on mene la droite NS parallele à BD, la développée DCN sera formée par la révolution du cercle, qui a pour diamètre BN, sur la base NS. 2°. Que la portion de roulette AM (*Fig.* 85. 88. *Pl.* 5.) est à la corde correspondante AE :: $2b.b$. 3°. Que l'espace MGBA est au segment BEZA :: $3b.b$. 4°. Puisque BQ (*Fig.* 87. 88. *Pl.* 5.) ou $\pm OQ \mp OB$, que j'appelle x, est $=\mp b\pm\sqrt{2aa\pm 3ab+bb}$, d'où l'on tire (en ôtant les incommensurables) $xx\pm 2bx=2aa\pm 3ab$; l'on aura $x=\frac{3}{2}a$, en effaçant les termes où b ne se rencontre point, parce qu'ils sont nuls par rapport aux autres. C'est-à-dire, que si l'on prend dans la roulette ordinaire $BP=\frac{3}{4}$ AB, & qu'on mene la droite PEM (*Fig.* 83. *Pl.* 5.) parallele à la base BD ; l'espace AMEB sera triple du triangle EKB. On trouvera en opérant de la même maniére, que si le point P tombe au centre K, l'espace AZEM

renfermé par la portion de roulette AM, la droite ME, & l'arc AE, sera égal au quarré du rayon. Ce que l'on a déja démontré ci-devant art. 99.

REMARQUE.

106. COMME les arcs DG, GM (*Fig.* 84. *Pl.* 5.) sont toujours égaux entr'eux, il s'ensuit que l'angle DOG est aussi toujours à l'angle GKM :: GK. OG. C'est pourquoi l'origine D de la roulette DMA, les rayons OG, GK des cercles générateurs, & le point touchant G étant donnés, si l'on veut déterminer dans cette position le point M qui décrit la roulette, il ne faut que tirer le rayon KM, ensorte que l'angle GKM soit à l'angle donné DOG :: OG. GK. Or je dis maintenant que cela se peut toujours faire géométriquement, lorsque le rapport de ces rayons se peut exprimer par nombres ; & partant que la roulette DMA est alors géométrique.

Car supposant, par exemple, que OG. GK :: 13. 5 ; il est clair que l'angle MKG doit contenir deux fois l'angle donné DOG, & de plus $\frac{3}{5}$ de cet angle. Toute difficulté se réduit donc à diviser l'angle DOG en cinq parties égales. Or c'est une chose connue par les Geométres, qu'on peut toujours diviser géométriquement un angle ou un arc donné en tant de parties égales qu'on voudra ; puisqu'on arrive toujours à quelque équation qui ne renferme que des lignes droites. Donc, &c.

Je dis de plus que la roulette DMA est mécanique, ou ce qui est la même chose, qu'on ne peut déterminer géométriquement ses points M, lorsque la raison de OG à KG ne se peut exprimer par nombres, c'est-à-dire, lorsqu'elle est sourde.

Car (*Fig.* 89. *Pl.* 5.) toute ligne, soit mécanique soit géométrique, ou rentre en elle-même ou s'étend à l'infini ; puisqu'on peut toujours en continuer la génération. Si donc le cercle mobile ABC décrit par son point A dans sa premiere révolution la roulette ADE, cette roulette ne sera pas encore finie, & continuant toujours de rouler il décrira la seconde EFG, puis la troisiéme GHI, & ainsi de suite jusqu'à ce que le point décrivant A retombe après plusieurs révolutions dans le même point d'où il étoit parti. Et pour lors si on recommence à faire rouler le cercle mobile ABC, il décrira derechef la même ligne courbe, de sorte que toutes ces roulettes prises ensemble ne composent qu'une seule courbe ADEFGHI, &c. Or les rayons des cercles générateurs étant incommensurables, leurs circonférences le seront aussi ; & par conséquent le point décrivant A du cercle mobile ABC ne pourra jamais retomber dans le point A de l'immobile, d'où il étoit parti, si grand que puisse être le nombre des révolutions. Il y aura donc une infinité de roulettes qui ne formeront cependans qu'une même ligne courbe ADEFGHI, &c. Maintenant si l'on mene au travers du cercle immobile une ligne droite indéfinie, il est clair qu'elle coupera la courbe continuée à l'infini en une infinité de points. Or comme l'équation qui exprime la nature d'une ligne géometrique doit avoir au moins autant de dimensions que cette ligne peut être coupée en de differens points par une droite; il s'ensuit que l'équation qui exprimeroit la nature de cette courbe auroit une infinité de dimensions. Ce qui ne pouvant être, on voit évidemment que la courbe doit être mécanique ou transcendente.

PROPOSITION III.

PROBLÉME.

107. LA *ligne courbe* BFC (*Fig.* 90. *Pl.* 5.) *étant donnée, trouver une infinité de lignes* AM, BN, EFO, *dont elle soit la développée commune.*

Si l'on développe la courbe BFC en commençant par le point A, il est clair que tous les points A, B, F, du fil ABFC décriront dans ce mouvement des lignes courbes AM, BN, FO, qui auront toutes pour développée commune la courbe donnée BFC. Mais il faut observer que la ligne FO n'ayant pour développée que la partie FC, son origine n'est pas en F; & que pour la trouver, il faut développer la partie restante BF, en commençant au point F, pour décrire la portion EF de la courbe EFO dont l'origine est en E, & qui a pour développée la courbe entiére BFC.

Si l'on veut trouver les points M, N, O sans se servir du fil ABFC, il n'y a qu'à prendre sur une tangente quelconque CM, autre que BA, les parties CM, CN, CO égales à ABFC, BFC, FC.

COROLLAIRE.

108. IL est évident, 1°. Que les courbes AM, BN, EFO sont d'une nature très-différente entr'elles; puisque la courbe AM a dans son sommet A le rayon de sa développée égal à AB, au lieu que celui de la courbe BN est nul. Il est visible aussi par la figure même de la courbe EFO qu'elle est très differente des courbes AM, BN.

2°. Que les courbes AM, BN, EFO ne sont géometriques que lorsque la donnée BFC est géometrique & de plus rectifiable. Car si elle n'est pas géometrique, en prenant BK pour la coupée, on ne trouvera point géometriquement l'appliquée KC: & si elle n'est pas rectifiable, ayant mené la tangente CM, on ne pourra déterminer géometriquement les points M, N, O des courbes AM, BN, EFO; puisqu'on ne peut trouver géometriquement des lignes droites égales à la ligne courbe BFC, & à ses portions BF, FC.

REMARQUE.

109. SI l'on développe une ligne courbe BAC (*Fig.* 91. *Pl.* 5.) qui ait un point d'infléxion en A, en commençant par le point D, autre que le point d'infléxion; on formera par le développe-

ment de la partie BAD la partie DEF; & par celui de la partie DC, la partie restante DG: de sorte que FEDG sera la courbe entiere formée par le développement de BAC. Or il est visible que cette courbe rebrousse chemin aux points D & E, avec cette différence qu'au point de rebroussement D les parties DE, DG ont leur convexité opposée l'une à l'autre; au lieu qu'au point E les parties DE, EF sont concaves vers le même côté. On a enseigné dans la section précédente à trouver les points de rebroussement tels que D : il est question maintenant de déterminer les points E, qu'on peut appeller points de rebroussement de la seconde sorte, & que personne, que je sçache, n'a encore consideré.

Pour en venir à bout, on menera à discrétion sur la partie DE deux perpendiculaires MN, *mn*, terminées par la développée aux points N, *n*, par lesquels on tirera deux autres perpendiculaires NH, *n*H sur les premieres NM, *nm*; ce qui formera deux petits secteurs MN*m*, NH*n* qui seront semblables, puisque les angles MN*m*, NH*n* sont égaux. On aura donc N*n* : M*m* :: NH . NM. Or dans le point d'infléxion A le rayon NH devient (*Art.* 81.) infini ou zero; & le rayon MN, qui devient AE, demeure d'une grandeur finie. Il faut donc qu'au point de rebroussement E de la seconde sorte, la raison de la différence N*n* du rayon MN de la développée, à la différence M*m* de la courbe, devienne ou infiniment grande ou infiniment petite. Et partant puisque (*Art.* 86.) N*n*

$= \frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$, & M*m* $= \sqrt{dx^2+dy^2}$, l'on aura $\frac{dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2}{dxddy^2} = 0$ ou ∞; & multipliant par $dxddy^2$, on trouvera la formule $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$ ou ∞, qui servira à déterminer les points de rebroussement de la seconde sorte.

On peut encore concevoir qu'une rebroussante DEF (*Fig.* 92. 93. *Pl.* 5.) ou HDEFG de la seconde sorte, ait pour développée une autre rebroussante BAC de la seconde sorte, telle que son point de rebroussement A réponde au point de rebroussement E, c'est-à-dire, qu'il soit situé sur le rayon de la développée qui part du point E. Or il est clair dans cette supposition, que le rayon EA de la développée sera toujours un *plus petit* ou un *plus grand*; & partant que la différence de $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ expression générale (*Art.* 78.) des rayons de la développée, doit être nulle ou infinie au point cherché E; ce qui donne la même formule qu'auparavant : de sorte qu'elle est générale pour trouver les points de rebroussement de la seconde sorte. (*Consultez pour toute cette Section la Note cinquantieme.*

SECTION VI.

Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réfléxion.

DÉFINITION.

SI l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD, (*Fig.* 94. 95. *Pl.* 5.) qui partent d'un point lumineux B, se réfléchissent à la rencontre d'une ligne courbe AMD, ensorte que les angles de réfléxion soient égaux aux angles d'incidence; la ligne HFN, que touchent les rayons réfléchis ou leur prolongement AH, MF, DN, est appellée *Caustique par réfléxion.*

COROLLAIRE I.

110 SI l'on prolonge HA en I, (*Fig.* 94. *Pl.* 5.) de sorte que AI = AB, & que l'on développe la caustique HFN en commençant au point I; on décrira la courbe ILK, telle que la tangente FL sera (*Art.* 75.) continuellement égale à la portion FH de la caustique, plus à la droite HI. Et si l'on conçoit deux rayons incident & réfléchi B*m*, *m*F infiniment près de BM, MF, & qu'ayant prolongé F*m* en *l*, on décrive des centres F, B les petits arcs MO, MR: on formera les petits triangles rectangles MO*m*, MR*m*, qui seront semblables & égaux; car puisque l'angle O*m*M = F*m*D = R*m*M, & que de plus l'hypotenuse M*m* est commune, les petits côtés

O*m*, R*m* seront égaux entr'eux. Or puisque O*m* est la différence de LM, & R*m* celle de BM, & que cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point M; il s'ensuit que ML — IA ou AH + HF — MF somme (*Art.* 96.) de toutes les différences O*m* dans la portion de courbe AM, est = BM — BA somme (*Art.* 96.) de toutes les différences R*m* dans la même portion AM. Donc la portion HF de la caustique HFN sera égale à BM — BA + MF — AH.

Il peut arriver différens cas, selon que le rayon incident BA est plus grand ou moindre que BM, & que le réfléchi AH développe ou enveloppe la portion HF pour parvenir en MF: mais l'on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la différence des rayons incidens est égale à la différence des rayons réfléchis, en joignant à l'un d'eux la portion de la caustique qu'il développe, avant que de tomber sur l'autre. Par exemple, BM — BA (*Fig.* 95. *Pl.* 5.) = MF + FH — AH; d'où l'on tire FH = BM — BA + AH — MF.

Si l'on décrit du centre B l'arc de cercle A*p*; (*Fig.* 94. 95. *Pl.* 5.) il est clair que *p*M sera la différence des rayons incidens BM, BA. Et si l'on suppose que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD; (*Fig.* 96. *Pl.* 5.) les rayons incidens BA, BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire sur ces rayons.

COROLLAIRE. II.

111. SI l'on conçoit que la figure BAMD (*Fig.* 94. *Pl.* 5.) ſoit renverſée ſur le même plan, enſorte que le point B tombe ſur le point I, & qu'ainſi la tangente en A de la courbe AMD dans ſa premiere ſituation, la touche encore dans cette nouvelle; & qu'on faſſe rouler la courbe aMd ſur AMD, c'eſt-à-dire, ſur elle-même, enſorte que les portions aM, AM ſoient toujours égales: je dis le point B décrira dans ce mouvement une eſpece de roulette ILK qui aura pour développée la cauſtique HFN.

Car il ſuit de la génération, 1°. Que la ligne LM tirée du point décrivant L au point touchant M ſera (*Art.* 43.) perpendiculaire à la courbe ILK. 2°. Que La ou $IA = BA$, & $LM = BM$. 3°. Que les angles faits par les droites ML, BM ſur la tangente commune en M ſont égaux; & partant que ſi l'on prolonge LM en F, le rayon MF ſera le réfléchi de l'incident BM. D'où l'on voit que la perpendiculaire LF touche la cauſtique HFN: & comme cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point L, il s'enſuit que la courbe ILK eſt formée par le développement de la cauſtique HFN, plus la droite HI.

Il ſuit de ceci que la portion FH ou $FL - HI = BM + MF - BA - AH$. Ce que l'on vient de démontrer d'une autre manière dans le Corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

112. SI la tangente DN devient infiniment proche de la tangente FM; il eſt clair que le point touchant N, & celui d'interſection V ſe confondront avec l'autre point touchant F: de ſorte que pour trouver le point F où le rayon réfléchi MF touche la cauſtique HFN, il ne faut que chercher le point de concours des rayons réfléchis infiniment proches MF, mF. Et en effet, ſi l'on imagine une infinité de rayons d'incidence infiniment proches les uns des autres, on verra naître par les interſections des réfléchis un poligone d'une infinité de côtés dont l'aſſemblage compoſera la cauſtique HFN.

PROPOSITION I.

PROBLÉME GÉNÉRAL.

113. LA *nature de la courbe* AMD, (*Fig.* 97. *Pl.* 5.) *le point lumineux* B, *& le rayon incident* BM *étant donnés; trouver ſur le réfléchi* MF *donné de poſition, le point* F *où il touche la cauſtique.*

Ayant trouvé par la ſection précédente la longueur MC du rayon de la développeé au point M, & pris l'arc Mm infiniment petit, on tirera les droites Bm, Cm, Fm; on décrira des centres B, F les petits arcs MR, MO; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg ſur les rayons incidens & réfléchis; enſuite on nommera les données BM, y; ME ou MG, a.

Cela posé, on prouvera, comme dans le Corollaire premier (*Art.* 110.), que les triangles MRm, MOm sont semblables & égaux; & qu'ainsi $MR = MO$. Or à cause de l'égalité des angles d'incidence & de réflexion, l'on a aussi $CE = CG$, $Ce = Cg$; & partant $CE - Ce$ ou $EQ = CG - Cg$ ou SG. Donc à cause des triangles semblables BMR & BEQ, FMO & FGS, l'on aura $BM + BE\ (2y - a) \cdot BM\ (y) :: MR + EQ$ ou $MO + GS \cdot MR$ ou $MO :: MG\ (a)$. $MF = \frac{ay}{2y-a}$.

Si le point lumineux B tomboit de l'autre côté du point E par rapport au point M, ou (ce qui est la même chose) si la courbe AMD étoit convexe vers le point lumineux B; y deviendroit négative de positive qu'elle étoit, & l'on auroit par conséquent $MF = \frac{-ay}{-2y-a}$ ou $\frac{ay}{2y+a}$.

Si l'on suppose que y devienne infinie, c'est-à-dire, que le point B (*Fig.* 96. *Pl.* 5.) soit infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidens seront paralleles entr'eux, & l'on aura $MF = \frac{1}{2}a$, parce que a est nulle par rapport à $2y$.

Corollaire I.

114. Comme l'on ne trouve pour MF (*Fig.* 94. 95. *Pl.* 5.) qu'une seule valeur dans laquelle entre le rayon de la développée; il s'ensuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une seule caustique HFN par réfléxion, puisqu'elle (*Art.* 80.) n'a qu'une seule développée.

Corollaire. II.

115. Lorsque AMD (*Fig.* 97. *Pl.* 5.) est géometrique, il est clair (*Art* 85.) que sa développée l'est aussi, c'est-à-dire, que l'on trouve géométriquement tous les points C. D'où il suit que tous les points F de sa caustique seront aussi déterminés géométriquement, c'est-à-dire, que la caustique HFN (*Fig.* 94. 95.) sera géométrique. Mais je dis de plus, que cette caustique sera toujours rectifiable; puisqu'il est évident (*Art.* 110. que l'on peut trouver avec le secours de la courbe AMD, qu'on suppose géométrique, des lignes droites égales à une de ses portions quelconques.

Corollaire III.

116. Si la courbe AMD (*Fig.* 97. *Pl.* 5.) est convexe vers le point lumineux B; la valeur de MF ($\frac{ay}{2y+a}$) sera toujours positive; & il faudra prendre par conséquent le point F du côté du point C, par rapport au point M, comme l'on a supposé en faisant le calcul. D'où l'on voit que les rayons réfléchis infiniment proches seront divergens.

Mais si la courbe AMD est concave vers le point lumineux B, la valeur de MF ($\frac{ay}{2y-a}$) sera positive lorsque y surpasse $\frac{1}{2}a$, négative lorsqu'il est moindre, & infinie lorsqu'il est égal. D'où il suit que si l'on décrit un cercle qui ait pour diametre la moitié du rayon MC de la développée, les rayons réfléchis infiniment proches seront convergens lorsque le point lumineux B tombe au dehors de sa circonférence, divergens lorsqu'il tombe au dedans, & enfin paralleles lorsqu'il tombe dessus.

COROLLAIRE IV.

117. Si le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M, l'on aura ME $(a) = o$; & partant MF $= o$. Or comme le rayon réfléchi est alors dans la direction de l'incident, & que la nature de la caustique consiste à toucher tous les rayons réfléchis; il s'ensuit qu'elle touchera aussi le rayon incident BM au point M: c'est-à-dire, que la caustique & la donnée auront la même tangente dans le point M qui leur sera commun.

Si le rayon MC de la développée est nul, on aura encore ME $(a) = o$; & partant MF $= o$. D'où l'on voit que la donnée & la caustique font entr'elles dans le point M qui leur est commun, un angle égal à l'angle d'incidence.

Si le rayon CM de la développée est infini, le petit arc Mm deviendra une ligne droite, & l'on aura MF $= \mp y$; puisque ME (a) étant infinie, y sera nul par rapport à a. Or comme cette valeur est négative lorsque le point B tombe du côté du point C par rapport à la ligne AMD, & positive lorsqu'il tombe du côté opposé; il s'ensuit que les rayons réfléchis infiniment proches seront toujours divergens lorsque la ligne AMD est droite.

COROLLAIRE V.

118. Il est évident que deux quelconques des trois points B, C, F, étant donnés, on trouvera facilement le troisieme.

Soit, 1°, la courbe AMD (*Fig.* 98. *Pl.* 5.) une parabole qui ait pour foyer le point lumineux B. Il est clair par les élémens des sections coniques, que tous les rayons réfléchis seront paralleles à l'axe; & partant que MF sera toujours infinie en quelque endroit que l'on suppose le point M. On aura donc $a = 2y$: d'où il suit que si l'on prend ME double de MB, qu'on mene la perpendiculaire EC; elle ira couper MC perpendiculaire à la courbe AMD, en un point C qui sera à la développée de cette courbe.

Soit, 2°, la courbe AMD (*Fig.* 99. *Pl.* 5.) une ellipse qui ait pour un de ses foyers le point lumineux B. Il est encore clair que tous les rayons réfléchis MF se rencontreront dans un même point F qui sera l'autre foyer. Et si l'on nomme MF, z; l'on aura (*Art.* 113.) $z = \frac{ay}{2y-a}$; d'où l'on tire la cherchée ME $(a) = \frac{2yz}{y+z}$. Mais si la courbe AMD est une hyperbole, le foyer F tombera de l'autre côté; & partant MF (z) deviendra négative: d'où il suit qu'on aura alors ME $(a) = \frac{-2yz}{y-z}$ ou $\frac{2yz}{z-y}$. Ce qui donne cette construction qui sert aussi pour l'ellipse.

Soit prise M E (*Fig.* 99. *Pl.* 5. *Fig.* 100. *Pl.* 6.) quatrieme proportionnelle au demi-axe traversant, & aux rayons incident & réfléchi ; soit menée la perpendiculaire E C : elle ira couper la ligne M C perpendiculaire à la section, en un point C qui sera à la développée.

EXEMPLE I.

119. SOIT la courbe A M D (*Fig.* 101. *Pl.* 6.) une parabole, dont les rayons incidens P M soient perpendiculaires sur son axe A P. Il faut trouver sur les réfléchis M F les points F où ils touchent la caustique A F K.

Il est clair que si l'on mene le rayon M C de la développée, & qu'on tire la perpendiculaire C G sur le rayon réfléchi M F, il faudra (*Art.* 113.) prendre M F égale à la moitié de M G. Mais cette construction se peut abréger, en considerant que si l'on mene M N parallele à l'axe A P, & la droite M L au foyer L; les angles L M P, F M N seront égaux, puisque par la proprieté de la parabole L M Q = Q M N, & par la supposition P M Q = Q M F. Si donc l'on ajoute de part & d'autre le même angle P M F, l'angle L M F sera égal à l'angle P M N, c'est-à-dire, droit. Or l'on vient de démontrer (*Art.* 118. *num.* 1.) que L H perpendiculaire sur M L rencontre le rayon M C de la développée en son milieu H. Si donc l'on mene M F parallele & égale à L H, elle sera un des rayons réfléchis, & touchera en F la caustique A F K. Ce qu'il falloit trouver.

Si l'on suppose que le rayon réfléchi M F soit parallele à l'axe A P, il est évident que le point F de la caustique sera le plus éloigné qu'il est possible de l'axe A P, puisque la tangente en ce point sera parallele à l'axe. Afin donc de déterminer ce point dans toutes les caustiques, telles que A F K, formées par des rayons incidens perpendiculaires à l'axe de la courbe donnée, il n'y a qu'à considérer que M P doit être alors égale à P Q. Ce qui donne $dy = dx$. Soit $ax = yy$, on aura $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}} = dx$, d'où l'on tire A P $(x) = \frac{1}{4}a$: c'est-à-dire, que si le point P tombe au foyer L, le rayon réfléchi M F sera parallele à l'axe. Ce qui est d'ailleurs visible ; puisque dans ce cas M P se confondant avec L M, il faut aussi que M F se confonde avec M N, & L H avec L Q. D'où l'on voit que M F est alors égale à M L ; & partant que si l'on mene F R perpendiculaire sur l'axe, on aura A R ou A L + M F $= \frac{3}{4}a$. On voit aussi que la portion A F de la caustique est égale en ce cas au paramètre, puisqu'elle est toujours (*Art.* 110.) égale à P M + M F.

Pour déterminer le point K où la caustique A F K rencontre l'axe A P, il faut chercher la valeur de M O, & l'égaler à celle de M F ; car il est visible que le point F tombant en K, les lignes M F, M O deviennent égales entr'elles. Nommant donc l'inconnue M O, t ; l'angle P M O coupé en deux également par M Q perpendiculaire à la courbe, donnera M P (y). M O (t)

:: PQ $(\frac{ydy}{dx})$. $OQ = \frac{tdy}{dx}$. Et partant $OP = \frac{tdy+ydy}{dx} = \sqrt{tt-yy}$, à cause du triangle rectangle MPO; & divisant de part & d'autre par $t+y$, on trouve $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{t-y}{t+y}}$, d'où l'on tire $MO\ (t) = \frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2} = MF\ (\frac{1}{2}a) = \frac{dx^2+dy^2}{-2ddy}$, puisque (*Art.* 77.) $ME\ (a) = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$. Ce qui donne $dy^2 - 2yddy = dx^2$ qui servira à trouver le point P, tel que menant le rayon incident PM & le réflêchi MF, ce dernier touche la caustique AFK au point K où elle rencontre l'axe AP.

On a dans la parabole $y = x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$, $ddy = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}dx^2$; & mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve $\frac{1}{4}x^{-1}dx^2 + \frac{1}{2}x^{-1}dx^2 = dx^2$; d'où l'on tire $AP\ (x) = \frac{3}{4}$ du paramètre.

Pour trouver la nature de la caustique AFK à la maniere de *Descartes*, il faut chercher une équation qui exprime la relation de la coupée AR (u), à l'appliquée RF (z); ce qui se fait en cette sorte. Puisque $MO\ (t) = \frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2}$, l'on aura $PO\ (\frac{tdy+ydy}{dx}) = \frac{2ydxdy}{dx^2-dy^2}$; & à cause des triangles semblables MPO, MSF, on

formera ces proportions $MO\ (\frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2})$. $MF\ (\frac{dx^2+dy^2}{-2ddy})$ ou $-2yddy . dx^2 - dy^2$ :: $MP\ (y)$. $MS\ (y-z) = \frac{dx^2-dy^2}{-2ddy}$ :: $PO\ (\frac{2ydxdy}{dx^2-dy^2})$. SF ou $PR\ (u-x) = \frac{dxdy}{-ddy}$. On aura donc ces deux équations $z = y + \frac{dy^2-dx^2}{-2ddy}$, & $u = x + \frac{dxdy}{-ddy}$, qui serviront avec celle de la courbe donnée à en former une nouvelle où x & y ne se trouveront plus, & qui exprimera par conséquent la relation de AR (u) à FR (z).

Lorsque la courbe AMD est une parabole, comme l'on a supposé dans cet exemple, on trouvera $z = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}$, ou (en quarrant chaque membre) $\frac{9}{4}x - 6xx + 4x^3 = zz$, & $u = 3x$; d'où l'on tire l'équation cherchée $azz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{3}{4}aau$ qui exprime la nature de la caustique AFK. On peut remarquer que PR est toujours double de AP, puisque $AR\ (u) = 3x$; ce qui fournit encore une nouvelle maniere de déterminer sur le rayon réflêchi MF le point cherché F.

EXEMPLE II.

120. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 102. *Pl.* 6.) un demi-cercle qui ait pour diamètre la ligne AD, & pour centre le point C; soient les rayons incidens PM perpendiculaires sur AD.

Comme la développée du cercle ſe réunit en un ſeul point qui en eſt le centre, il s'enſuit (*Art.* 113.) que ſi l'on coupe le rayon CM en deux également au point H, & qu'on mene HF perpendiculaire ſur le rayon réfléchi MF, il coupera ce rayon en un point F, où il touche la cauſtique AFK. Il eſt clair que le rayon réfléchi MF eſt égal à la moitié de l'incident PM; d'où il ſuit, 1°. Que le point P tombant en C, le point F tombe en K, milieu de CB. 2°. Que la portion AF eſt triple de MF, & la cauſtique AFK triple de BK. On voit auſſi que ſi l'on fait l'angle ACM demi-droit, le rayon réfléchi MF ſera parallele à AC; & partant que le point F ſera plus élevé au deſſus du diamètre AD, que tout autre point de la cauſtique.

Le cercle qui a pour diamètre MH, paſſe par le point F; puiſque l'angle HFM eſt droit. Et ſi l'on décrit du centre C & du rayon CK ou CH, moitié de CM, le cercle KHG; l'arc HF ſera égal à l'arc HK: car l'angle CMF étant égal à CMP ou HCK, les arcs $\frac{1}{2}$HF, HK qui meſurent ces angles dans les cercles MFH, KHG, ſeront entr'eux comme les rayons $\frac{1}{2}$MH, HC de ces cercles. D'où l'on voit que la cauſtique AFK eſt une roulette formée par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG, dont l'origine eſt en K, & le ſommet en A.

EXEMPLE III.

121. Soit la courbe AMD (*Fig.* 103. *Pl.* 6.) un cercle qui ait pour diamètre la ligne AD, & pour centre le point C; ſoit le point lumineux A, d'où partent tous les rayons incidens AM, l'une des extrêmités de ce diamètre.

Si l'on mene du centre C ſur le rayon incident AM la perpendiculaire CE: il eſt clair par la propriété du cercle, que le point E coupe en deux parties égales la corde AM; & qu'ainſi ME $(a) = \frac{1}{2}y$. On aura donc MF $\left(\frac{ay}{2y-a}\right) = \frac{1}{3}y$: c'eſt-à-dire, qu'il faut prendre le rayon réfléchi MF égal au tiers de l'incident AM. D'où l'on voit que DK $= \frac{1}{3}$ AD, CK $= \frac{1}{3}$ CD, & que (*Art.* 110.) la cauſtique AFK $= \frac{4}{3}$ AD, de même que ſa portion AF $= \frac{4}{3}$ AM. Si l'on prend AM $=$ AC, le rayon réfléchi MF ſera parallele au diamètre AD; & par conſéquent le point F ſera le plus élevé qu'il ſoit poſſible au-deſſus de ce diamètre.

Si l'on prend CH $= \frac{1}{3}$ CM, & qu'on tire HF perpendiculaire ſur MF; le point F ſera à la cauſtique: car menant HL perpendiculaire ſur AM, il eſt clair que ML $= \frac{2}{3}$ME $= \frac{1}{3}$AM, puiſque MH $= \frac{2}{3}$ CM. Le cercle qui a pour diamètre MH, paſſera donc par le point F de la cauſtique; & ſi l'on décrit un autre cercle KHG du centre C, & du rayon CK ou CH, il lui ſera égal, & l'arc HK ſera égal à l'arc HF;

car dans le triangle isoscele CMA l'angle externe KCH = 2CMA = AMF ; & partant les arcs HK, HF mesures de ces angles dans des cercles égaux, seront aussi égaux. D'où il suit que la caustique AFK est encore une roulette décrite par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG, dont l'origine est en K, & le sommet en A.

On pourroit encore prouver ceci de cette autre manière. Si l'on décrit une roulette par la révolution d'un cercle égal au cercle AMD autour de celui-ci, en commençant au point A; l'on a démontré dans la Corollaire second (*Art.* 111.) qu'elle aura pour développée la caustique AFK. Or (*Art.* 100.) cette développée est une roulette de même espece, c'est-à-dire, que les diamètres des cercles générateurs en seront égaux; & on déterminera le point K en prenant CK troisiéme proportionnelle à CD + DA & à CD, c'est-à-dire, égale à $\frac{1}{3}$ CD. Donc, &c.

Exemple. IV.

122. Soit la courbe AMD (*Fig.* 104. *Pl.* 6.) une demi-roulette ordinaire décrite par la révolution du demi-cercle NGM sur la droite BD, dont le sommet est en A, & l'origine en D; soient les rayons incidens KM paralleles à l'axe AB.

Puisque (*Art.* 95.) MG est égale à la moitié du rayon de la développée, il s'ensuit (*Art.* 113.) que si l'on mene GF perpendiculaire sur le rayon

réfléchi MF, le point F sera à la caustique DFB. D'où l'on voit que MF doit être prise égale à KM.

Si l'on mene du centre H du cercle générateur MGN au point touchant G, & au point décrivant M, les rayons HG, HM; il est clair que HG sera perpendiculaire sur BD, & que l'angle GMH = MGH = GMK : d'où l'on voit que le rayon réfléchi MF passe par le centre H. Or le cercle qui a pour diamètre GH, passe aussi par le point F, puisque l'angle GFH est droit. Donc les arcs GN, $\frac{1}{2}$ GF, mesures du même angle GHN, seront entr'eux comme les diamètres MN, GH de leurs cercles; & partant l'arc GF = GN = GB. Il est donc évident que la caustique DFB est une roulette décrite par la révolution entiere du cercle GFH sur la droite BD.

Exemple V.

123. Soit encore la courbe AMD (*Fig.* 105. *Pl.* 6.) une demi-roulette ordinaire, dont la base BD est égale à la demi-circonférence ANB du cercle générateur. Et soient à présent les rayons incidens PM paralleles à la base BD.

Si l'on mene GQ perpendiculaire sur PM, les triangles rectangles GQM, BPN seront égaux & semblables; & partant MQ = PN. D'où l'on voit (*Art.* 95. 113.) qu'il faut prendre MF égale à l'appliquée correspondante PN dans le demi-cercle générateur ANB.

Afin que le point F soit le plus éloigné qu'il est possible de l'axe AB, il faut que la tangente MF en ce point soit parallele à cet axe. L'angle PMF sera donc alors droit, sa moitié PMG ou PNB demi-droit ; & partant le point P tombera dans le centre du cercle AND.

C'est une chose digne de remarque, que le point P approchant ensuite continuellement de l'extrêmité B, le point F approche aussi de l'axe AB jusqu'à un certain point K, après quoi il s'en éloigne jusqu'en D ; de sorte que la caustique AFKFD a un point de rebroussement en K.

Pour le déterminer, je remarque (*Art.* 110. 111.) que la portion AF $=$ PM $+$ MF, la portion AFK $=$ HL $+$ LK, & la portion KF de la partie KFD, est $=$ HL $+$ LK $-$ PM $-$ MF : d'où l'on voit que HL $+$ LK doit être un *plus grand*. C'est pourquoi nommant AH, x ; HI, y ; l'arc AI, u ; l'on aura HL $+$ LK $= u + 2y$, dont la différence donne $du + 2dy = o$, & $\frac{adx}{y} + 2dy = o$, en mettant pour du sa valeur $\frac{adx}{y}$: d'où l'on tire $adx = -2ydy = 2xdx - 2adx$ à cause du cercle ; & partant AH $(x) = \frac{3}{2}a$.

Corollaire.

124. L'espace AFM ou AFKFM renfermé par les portions de courbes AF ou AFKF, AM, & par le rayon réfléchi MF, est égal à la moitié de l'espace circulaire APN. Car sa différence, qui est le secteur FMO, est égale à la moitié du rectangle PpSN, différence de

l'espace APN ; puisque les triangles rectangles MOm, MRm étant égaux & semblables, MO sera égale à MR ou NS ou Pp, & que de plus MF $=$ PN.

Exemple VI.

125. Soit la courbe AMD (*Fig.* 106. *Pl.* 6.) une demi-roulette formée par la révolution du cercle MGN autour de son égal AGK, dont l'origine est en A, & le sommet en D ; soient les rayons incidens AM qui partent tous du point A. La ligne BH qui joint les centres des deux cercles générateurs, passe continuellement par le point touchant G, & les arcs GM, GA comme aussi leurs cordes, sont toujours égaux ; ainsi l'angle HGM $=$ BGA, & l'angle GMA $=$ GAM. Or l'angle HGM $+$ BGA $=$ GMA $+$ GAM ; puisqu'ajoutant de part & d'autre le même angle AGM, on en forme deux droits. Donc l'angle HGM sera toujours égal à l'angle GMA ; & partant aussi à l'angle de réfléxion GMF : d'où il suit que MF passe toujours par le centre H du cercle mobile.

Maintenant si l'on mene les perpendiculaires CE, GO sur le rayon incident AM : il est clair que MO $=$ OA, & que OE $= \frac{1}{3}$ OM ; puisque (*Art.* 100.) le point C étant à la développée, GC $= \frac{1}{3}$ GM. On aura donc ME $= \frac{2}{3}$ AM, c'est-à-dire, $a = \frac{2}{3}y$; & par conséquent MF $\left(\frac{ay}{2y-a}\right) = \frac{1}{2}y$: d'où l'on voit que si l'on mene GF perpendiculaire sur MF, le point F sera à la caustique AFK.

Le cercle qui a pour diamètre GH, passe par le point F; & les arcs GM, ½ GF, mesures du même angle GHM, étant entr'eux comme les diamètres MN, GH de leurs cercles, l'arc GF sera égal à l'arc GM, & par conséquent à larc GA. D'où il est évident que la caustique AFK est une roulette décrite par la révolution du cercle mobile HFG autour de l'immobile AGK.

COROLLAIRE.

126. Si l'on décrit un cercle qui ait pour centre le point B, & pour rayon une droite égale à BH ou AK; & qu'il y ait une infinilé de droites paralleles à BD qui tombent sur sa circonférence: il est visible (*Art.* 120.) qu'elles formeront en se réfléchissant la même caustique AFK.

EXEMPLE VII.

127. Soit la courbe AMD (*Fig.* 107. *Pl.* 6.) une logarithmique spirale, avec les rayons incidens AM qui partent tous du centre A.

Si l'on mene par l'extrêmité C du rayon de la développée la droite CA perpendiculaire sur le rayon incident AM, elle rencontrera (*Art.* 91.) dans le centre A. C'est pourquoi AM (y) $= a$; & partant MF ($\frac{ay}{2y-a}$) $= y$. Le triangle AMF sera donc isoscele; & comme les angles d'incidence & de réfléxion AMT, FMS sont égaux entr'eux, il s'ensuit que l'angle AFM est égal à l'angle AMT. D'où il est clair que la caustique

AFK sera une logarithmique spirale qui ne differera de la proposée AMD que par sa position.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

128. La *caustique* HF (*Fig.* 108. *Pl.* 6.) *par réfléxion étant donnée avec le point lumineux* B; *trouver une infinité de courbes, telles que* AM, *dont elle soit caustique par réfléxion.*

Ayant pris à discrétion sur une tangente quelconque HA le point A pour un des points de la courbe cherchée AM; on décrira du centre B, de l'intervalle BA, l'arc de cercle AP, & d'un autre intervalle quelconque BM, un autre arc de cercle. Et ayant pris $AH + HE = BM - BA$ ou PM, on développera la caustique HF en commençant au point E; & l'on décrira dans ce mouvement une ligne courbe EM qui coupera l'arc de cercle décrit du rayon BM, en un point M qui sera (*Art.* 110.) à la courbe AM. Car par construction $PM + MF = AH + HF$.

Ou bien ayant attaché un fil BMF par ses extrêmités en B & en F, on fera tendre ce fil par le moyen d'un stile placé en M, que l'on fera mouvoir, ensorte que l'on enveloppera par la partie MF de ce fil la caustique HF; il est clair que ce stile décrira dans ce mouvement la courbe cherchée MA.

AUTRE SOLUTION.

129. AYANT tiré à discrétion une tangente FM autre que HA, on cherchera sur elle un point M, telle que BM + MF = BA + AH + HF. Ce qui se fera en cette sorte.

Soit prise FK = BA + AH + HF, & divisant BK par le milieu en G, soit tirée la perpendiculaire GM : elle rencontrera la tangente FM au point cherché M. Car BM = MK.

Si le point B (*Fig.* 109. *Pl.* 6.) étoit infiniment éloigné de la courbe AM, c'est-à-dire, que les rayons incidens BA, BM fussent paralleles à une ligne droite donnée de position; la premiere construction auroit toujours lieu, en considérant que les arcs de cercles décrits du centre B deviennent des lignes droites perpendiculaires sur les rayons incidens. Mais cette derniere deviendroit inutile; c'est pourquoi il faudroit lui substituer celle qui suit.

Soit prise FK = AH + HF. Ayant trouvé le point M tel que MP parallele à AB perpendiculaire sur AP, soit égale à MK : il est clair (*Art.* 110.) que ce point sera à la courbe cherchée AM; puisque PM + MF = AH + HF. Or cela se fait ainsi.

Soit menée KG perpendiculaire sur AP; & ayant pris KO = KG, soient tirées KP parallele à OG, & PM parallele à GK : je dis que le point M sera celui qu'on cherche. Car à cause des triangles semblables GKO, PMK, l'on aura PM = MK; puisque GK = KO.

Si la caustique HF se réunissoit en un point, la courbe AM deviendroit une section conique.

COROLLAIRE I.

130. IL est clair que la courbe qui passe par tous les points K, est formée par le développement de la courbe HF en commençant en A, & qu'elle change de nature à mesure que le point A change de place sur la tangente AH. Donc puisque les courbes AM naissent toutes de ces courbes par la même construction, qui est géométrique; il s'ensuit (*Art.* 108.) qu'elles sont d'une nature différente entr'elles, & qu'elles ne sont géométriques que lorsque la caustique HF est géométrique & rectifiable.

COROLLAIRE II.

131. UNE ligne courbe DN (*Fig.* 110. *Pl.* 6.) étant donnée avec un point lumineux C; trouver une infinité de lignes telles que AM, ensorte que les rayons réfléchis DA, NM se réunissent en un point donné B, après s'être réfléchis de nouveau à la rencontre de ces lignes AM.

Si l'on imagine que la courbe HF soit la caustique de la donnée DN, formée par le point lumineux C; il est clair que cette ligne HF doit être aussi la caustique de la courbe AM ayant pour point lumineux le point donné B; de sorte que FK = BA + AH + HF, & NK = BA + AH + HF + FN = BA + AD + DC

— CN, puiſque (*Art.* 110.) HD + DC = HF + FN + NC. Ce qui donne cette conſtruction.

Ayant pris à diſcrétion ſur un rayon réfléchi quelconque le point A pour un des points de la courbe cherchée AM, on prendra ſur un autre rayon réfléchi NM, tel qu'on voudra, la partie NK = BA + AD + DC — CN; & l'on trouvera le point cherché M comme ci-deſſus, art. 129. (*Conſultez la Note cinquante-unieme.*)

SECTION VII.

Uſage du Calcul des différences pour trouver les Cauſtiques par réfraction.

DÉFINITION.

SI l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD, (*Fig.* 111. *Pl.* 6.) qui partent d'un même point lumineux B, ſe rompent à la rencontre d'une ligne courbe AMD, en s'approchant ou s'éloignant de ſes perpendiculaires MC, enſorte que les ſinus CE des angles d'incidence CME, ſoient toujours aux ſinus CG des angles de réfraction CMG, en même raiſon donnée de *m* à *n*; la ligne courbe HFN que touchent tous les rayons rompus ou leurs prolongemens AH, MF, DN (*Fig.* 112. *Pl.* 6.) eſt appellée *Cauſtique par réfraction.*

COROLLAIRE.

132. SI l'on enveloppe la cauſtique HFN en commençant au point A, l'on décrira la courbe ALK telle que la tangente LF plus la portion FH de la cauſtique ſera continuellement égale à la même droite AH. Et ſi l'on conçoit une autre tangente F*ml* infiniment proche de FML, avec un autre rayon d'incidence B*m*, & qu'on décrive des centres F, B, les petits arcs MO, MR: on formera deux petits triangles rectangles MR*m*,

MOm qui seront semblables aux deux autres MEC, MGC, chacun à chacun; puisque si l'on ôte des angles droits RME, CMm le même angle EMm, les angles restans RMm, EMC seront égaux; & de même si l'on ôte des angles droits GMO, CMm le même angle GMm, les restans OMm, GMC seront égaux. C'est pourquoi Rm . Om : : CE . CG : : m . n. Or puisque Rm est la différence de BM, & Om celle de LM; il s'ensuit (*Art.* 96.) que BM — BA somme de toutes les différences Rm dans la portion de courbe AM, est à ML ou AH — MF — FH somme de toutes les différences Om dans la même portion AM, comme m est à n; & partant que la portion $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM$.

Il peut arriver différens cas, selon que le rayon incident BA est plus grand ou moindre que BM, & que le rompu AH enveloppe ou développe la portion HF: mais on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la différence des rayons incidens est à la différence des rayons rompus (en joignant à l'un d'eux la portion de la caustique qu'il développe avant que de tomber sur l'autre) comme m est à n. Par exemple, (*Fig.* 112. *Pl.* 6.) $BA - BM . AH - MF - FH : : m . n$. d'où l'on tire $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA$.

Si l'on décrit du centre B (*Fig.* 111. *Pl.* 6.) l'arc de cercle AP; il est clair que PM sera la

différence des rayons incidens BM, BA. Et si l'on suppose que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD, les rayons incidens BA, BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire sur ces rayons.

PROPOSITION I.

PROBLÊME GÉNÉRAL.

133. L*a nature de la courbe* AMD, (*Fig.* 111. *Pl.* 6.) *le point lumineux* B, *& le rayon incident* BM *étant donnés; trouver sur le rayon rompu* MF *donné de position, le point* F *où il touche la caustique par réfraction.*

Ayant trouvé (*Sect.* 5.) la longueur MC du rayon de la développée au point donné M, & pris l'arc Mm infiniment petit, on tirera les droites Bm, Cm, Fm; on décrira des centres B, F, les petits arcs MR, MO; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg sur les rayons incidens & rompus; & l'on nommera les données BM, y; ME, a; MG, b; & le petit arc MR, dx. Cela posé,

Les triangles rectangles semblables MEC & MRm, MGC & MOm, BMR & BQe, donneront $ME (a) . MG (b) : : MR (dx) . MO = \frac{bdx}{a}$. Et $BM (y) . BQ$ ou $BE (y+a) : : MR (dx) . Qe = \frac{adx + ydx}{y}$. Or par la propriété de la réfraction $Ce . Cg : : CE . CG : : m . n$. Et partant $m . n :: Ce - CE$ ou $Qe \left(\frac{adx + ydx}{y}\right)$. $Cg - CG$ ou $Sg = \frac{andx + nydx}{my}$. Donc à cause des triangles rectangles semblables FMO & FSg, l'on aura $MO - Sg \left(\frac{bmydx - anydx - aandx}{amy}\right)$. $MO\left(\frac{bdx}{a}\right) :: MS$ ou $MG (b) . MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$. Ce qui donne cette construction.

Soit fait vers CM (*Fig.* 113. *Pl.* 6.) l'angle $ECH = GCM$, & soit prise vers B, $MK = \frac{aa}{y}$. Je dis que si l'on fait $HK . HE :: MG . MF$. le point F sera à la caustique par réfraction.

Car à cause des triangles semblables CGM, CEH, l'on aura $CG . CE :: n . m :: MG (b)$. $EH = \frac{bm}{n}$. D'où l'on tire $HE - ME$ ou $HM = \frac{bm - an}{n}$, $HM - MK$ ou $HK = \frac{bmy - any - aan}{ny}$; & partant $HK \left(\frac{bmy - any - aan}{ny}\right) . HE \left(\frac{bm}{n}\right) ::$ $MG (b) . MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$.

Il est clair que si la valeur de HK est négative, celle de MF le sera aussi : d'où il suit que le point M tombe entre les points G, F, lorsque le point H se trouve entre les points K, E.

Si le point lumineux B (*Fig.* 111. 113. *Pl.* 6.) tomboit du côté du point E, ou (ce qui est la même chose) si la courbe AMD étoit concave du côté du point lumineux B; y deviendroit négative de positive qu'elle étoit auparavant, & l'on auroit par conséquent $MF = \frac{-bbmy}{-bmy + any - aan}$ ou $\frac{bbmy}{bmy - any + aan}$. Et la construction demeureroit la même.

Si l'on suppose que y devienne infinie : c'est-à-dire, que le point lumineux B soit infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidens seront paralleles entr'eux, & l'on aura $MF = \frac{bbm}{bm - an}$, parce que le terme aan sera nul par rapport aux deux autres bmy, any; & comme MK $\left(\frac{aa}{y}\right)$ s'évanouit alors, il n'y aura qu'à faire $HM . HE :: MG . MF$.

COROLLAIRE I.

134. On démontrera, de même que dans les caustiques par réfléxion, (*Art.* 114. 115.) qu'une ligne courbe AMD n'a qu'une seule caustique par réfraction, la raison de m à n étant donnée; laquelle caustique est toujours géométrique & rectifiable, lorsque la courbe proposée AMD est géométrique

COROLLAIRE II.

135. Si le point E tombe de l'autre côté de la perpendiculaire MC par rapport au point G, & que CE soit égale à CG; il est clair que la caustique par réfraction se changera en caustique par

réfléxion. En effet on aura MF $\left(\frac{bbmy}{bmy - any + aan}\right) = \frac{ay}{2y \mp a}$; puisque $m = n$, & que a devient négative de positive qu'elle étoit, & de plus égale à b. Ce qui s'accorde avec ce qu'on a démontré dans la section précédente.

Si m est infinie par rapport à n; il est clair que le rayon rompu MF tombera sur la perpendiculaire CM : de sorte que la caustique par réfraction deviendra la développée. En effet on aura MF $= b$, qui devient en ce cas MC : c'est-à-dire, que le point F tombera sur le point C, qui est à la développée.

Corollaire III.

136. Si la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B, & que la valeur de MF $\left(\frac{bbmy}{bmy - any - aan}\right)$ soit positive; il est clair qu'il faudra prendre le point F du même côté du point G, par rapport au point M, comme on l'a supposé en faisant le calcul : & qu'au contraire si elle est négative, il le faudra prendre du côté opposé. Il en est de même lorsque la courbe AMD est concave vers le point B; mais il faut observer qu'on aura pour lors MF $= \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$. D'où il suit que les rayons rompus infiniment proches sont convergens, lorsque la valeur de MF est positive dans le premier cas, & négative dans le second; & qu'au contraire ils sont divergens lorsqu'elle

est négative dans le premier cas, & positive dans le second. Cela posé; il est évident,

1°. Que si la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B, & que m soit moindre que n; ou que si elle est concave vers ce point, & que m surpasse n : les rayons rompus infiniment proches seront toujours divergens.

2°. Que si la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B, & que m surpasse n; ou que si elle est concave vers ce point, & que m soit moindre que n : les rayons rompus infiniment proches seront convergens, lorsque MK $\left(\frac{aa}{y}\right)$ est moindre que MH $\left(\frac{bm}{n} - a \text{ ou } a - \frac{bm}{n}\right)$; divergens, lorsqu'elle est plus grande; & paralleles, lorsqu'elle est égale. Or comme MK $= o$, lorsque les rayons incidens sont paralleles, il s'ensuit qu'en ce cas les rayons rompus infiniment proches seront toujours convergens.

Corollaire IV.

137. Si le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M, l'on aura ME $(a) = o$; & partant MF $= b$. Ce qui fait voir que le point F tombe alors sur le point G.

Si le rayon incident BM est perpendiculaire à la courbe AMD, les droites ME (a) & MG (b) deviendront égales chacune au rayon CM de la développée; puisqu'elles se confondent avec lui. On aura donc MF $= \frac{bmy}{my - ny \mp bn}$, qui devient $\frac{bm}{m-n}$ lorſque les rayons incidens ſont paralleles entr'eux.

Si le rayon rompu MF touche la courbe AMD au point M, l'on aura MG (b) $= o$. D'où l'on voit que la cauſtique touche alors la courbe donnée au point M.

Si le rayon CM de la développée eſt nul ; les droites ME (a), MG (b) ſeront auſſi égales à zero ; & par conſéquent les termes aan, $bbmy$ ſont nuls par rapport aux autres bmy, any. D'où il ſuit que MF $= o$; & qu'ainſi la cauſtique a le point M commun avec la courbe donnée.

Si le rayon CM de la développée eſt infini ; les droites ME (a), MG (b) ſeront auſſi infinies ; & par conſéquent les termes bmy, any ſeront nuls par rapport aux autres aan, $bbmy$: de ſorte qu'on aura MF $= \frac{bbmy}{\mp aan}$. Or (*Art.* 133.) comme cette quantité eſt négative, lorſque l'on ſuppoſe que le point F tombe de l'autre côté du point B par rapport à la ligne AMD, & qu'au contraire elle eſt poſitive lorſqu'on ſuppoſe qu'il tombe du même côté ; il s'enſuit (*Art.* 136.) que l'on doit prendre le point F du même côté du point B, c'eſt-à-dire, que les rayons rompus infiniment proches ſont divergens. Il eſt évident que le petit arc M*m* devient alors une ligne droite, & que la conſtruction précédente n'a plus de lieu. On peut lui ſubſtituer celle-ci, qui ſervira à déterminer les points des cauſtiques par réfraction, lorſque la ligne AMD eſt droite.

Ayant mené BO (*Fig.* 114. *Pl.* 6.) perpendiculaire ſur le rayon incident BM, & qui rencontre en O la droite MC perpendiculaire ſur AD ; on tirera OL perpendiculaire ſur le rayon rompu MG ; & ayant fait l'angle BOH égal à l'angle LOM, on fera BM . BH :: ML . MF. Je dis que le point F ſera à la cauſtique par réfraction.

Car les triangles rectangles MEC & MBO, MGC & MLO ſeront toujours ſemblables de quelque grandeur que l'on ſuppoſe CM ; & partant lorſqu'elle devient infinie, l'on aura encore ME(a) . MG(b) :: BM(y) . ML $= \frac{by}{a}$. Et à cauſe des triangles ſemblables OLM, OBH, l'on aura auſſi OL . OB ($n . m$) :: ML ($\frac{by}{a}$) . BH $= \frac{bmy}{an}$. D'où l'on voit que BM(y) . BH ($\frac{bmy}{an}$) :: ML $\frac{by}{a}$. MF ($\frac{bbmy}{aan}$).

COROLLAIRE V.

138. Il eſt clair que deux quelconques des trois points B, C, F, étant donnés, on peut facilement trouver le troiſiéme.

EXEMPLE I.

139. Soit la courbe AMD (*Fig.* 115. *Pl.* 6.) un quart de cercle qui ait pour centre le point C ; ſoient les rayons incidens BA, BM, BD paralleles entr'eux, & perpendiculaires ſur CD ; ſoit

enfin la raiſon de m à n, comme 3 à 2, qui eſt celle que ſouffrent les rayons de lumiere en paſſant de l'air dans le verre. Puiſque la développée du cercle AMD ſe réunit en un point C qui en eſt le centre, il s'enſuit que ſi l'on décrit une demi-circonférence MEC qui ait pour diamètre le rayon CM, & qu'on prenne la corde $CG = \frac{2}{3}CE$; la ligne MG ſera le rayon rompu, ſur lequel on déterminera le point F, comme l'on a enſeigné ci-devant art. 133.

Pour trouver le point H où le rayon incident BA perpendiculaire ſur AMD touche la cauſtique par réfraction, l'on aura (*Art.* 137.) $AH \left(\frac{bm}{m-n}\right) = 3b = 3CA$. Et ſi l'on décrit une demi-circonférence CND qui ait pour diamètre le rayon CD, & qu'on prenne la corde $CN = \frac{2}{3}CD$; il eſt clair (*Art.* 137.) que le point N ſera à la cauſtique par réfraction, puiſque le rayon incident BD touche le cercle AMD au point D.

Si l'on mene AP parallele à CD; il eſt viſible (*Art.* 132.) que la portion $FH = AH - MF - \frac{2}{3}PM$: de ſorte que la cauſtique entiere $HFN = \frac{7}{3}CA - DN = \frac{7 - \sqrt{5}}{3}CA$.

Si le quart de cercle AMD (*Fig.* 116. *Pl.* 6.) eſt concave vers les rayons incidens BM, & que la raiſon de m à n ſoit de 2 à 3; on prendra ſur la demi-circonférence CEM qui a pour diamètre le rayon CM, la corde $CG = \frac{3}{2}CE$, & on tirera le rayon rompu MG ſur lequel on

déterminera le point F par la conſtruction générale art. 133.

On aura (*Art.* 137.) $AH \left(\frac{bm}{m-n}\right) = -2b$, c'eſt-à-dire, que AH ſera du côté (*Art.* 136.) de la convexité du quart de cercle AMD, & double du rayon AC. Et ſi l'on ſuppoſe que CG ou $\frac{3}{2}CE$ ſoit égale à CM; il eſt manifeſte que le rayon rompu MF touchera le cercle AMD en M, puiſqu'alors le point G ſe confondra avec le point M. D'où il ſuit que ſi l'on prend $CE = \frac{2}{3}CD$, le point M tombera au point N où la cauſtique HFN (*Art.* 137.) touche le quart de cercle AMD. Mais lorſque CE ſurpaſſe $\frac{2}{3}CD$, les rayons incidens BM ne pourront plus ſe rompre, c'eſt-à-dire, paſſer du verre dans l'air; puiſqu'il eſt impoſſible que CG perpendiculaire ſur le rayon rompu MG, ſoit plus grande que CM: de ſorte que tous les rayons qui tomberont ſur la partie ND ſe réfléchiront.

Si l'on mene AP parallele à CD; il eſt clair (*Art.* 132.) que la portion $FH = AH - MF + \frac{3}{2}PM$: de ſorte que menant NK parallele à CD, la cauſtique entiere $HFN = 2CA + \frac{3}{2}AK = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}CA$.

EXEMPLE II.

140. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 117. *Pl.* 6.) une logarithmique ſpirale qui ait pour centre le point A, duquel partent tous les rayons incidens AM.

Il eſt clair (*Art.* 91.) que le point E tombe ſur le point A, c'eſt-à-dire, que $a = y$. Si donc l'on met à la place de a ſa valeur y dans $\frac{bbmy}{bmy - any + aan}$ valeur (*Art.* 133.) de MF lorſque la courbe eſt concave du côté du point lumineux; on aura $MF = b$; d'où l'on voit que le point F tombe ſur le point G.

Si l'on mene la droite AG, & la tangente MT; l'angle AGO complément à deux droits de l'angle AGM, ſera égal à l'angle AMT. Car le cercle qui a pour diamètre la ligne CM, paſſant par les points A & G, les angles AGO, AMT ont chacun pour meſure la moitié du même arc AM. Il eſt donc évident que la cauſtique AGN eſt la même logarithmique ſpirale que la donnée AMD, & qu'elle n'en différe que par ſa poſition.

PROPOSITION II.

Problême.

141. La *cauſtique* HF (*Fig.* 118. *Pl.* 6.) *par réfraction étant donnée avec ſon point lumineux* B *& la raiſon de* m *à* n; *trouver une infinité de courbes telles que* AM, *dont elle ſoit cauſtique par réfraction.*

Ayant pris à diſcrétion ſur une tangente quelconque HA, le point A pour un des points de la courbe AM, on décrira du centre B & de l'intervalle BA l'arc de cercle AP, & d'un autre intervalle quelconque BM un autre arc de cercle;

& ayant pris $AE = \frac{n}{m} PM$, on décrira en enveloppant la cauſtique HF une ligne courbe EM, qui coupera l'arc de cercle décrit de l'intervalle BM, en un point M qui ſera à la courbe cherchée. Car (*Art.* 132.) $PM . AE$ ou $ML :: m . n$.

Autre solution.

142. On cherchera ſur une tangente quelconque FM, autre que HA, le point M tel que $HF + FM + \frac{n}{m} BM = HA + \frac{n}{m} BA$. C'eſt pourquoi ſi l'on prend $FK = \frac{n}{m} BA + AH - FH$, & qu'on trouve ſur FK un point M tel que $MK = \frac{n}{m} BM$, il ſera (*Art.* 132.) celui qu'on cherche. Or cela ſe peut faire en décrivant une ligne courbe GM (*Fig.* 119. *Pl.* 6.) telle que menant d'un de ſes points quelconque M aux points donnés B, K, les droites MB, MK, elles ayent toujours entr'elles un même rapport que m à n. Il n'eſt donc queſtion que de trouver la nature de ce lieu,

Soit pour cet effet menée MR perpendiculaire ſur BK, & nommée la donnée BK, a; & les indéterminées BR, x; RM, y. Les triangles rectangles BRM, KRM donneront $BM = \sqrt{xx + yy}$, & $KM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$: de ſorte que pour remplir la condition du Problême, l'on aura $\sqrt{xx + yy} . \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} :: m . n$. D'où l'on tire $yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx$, qui eſt un lieu au cercle que l'on construira ainsi.

Soit prise $BG = \frac{am}{m+n}$, & $BQ = \frac{am}{m-n}$, & soit décrit du diamètre GQ la demi-circonférence GMQ : je dis qu'elle sera le lieu requis. Car ayant QR ou $BQ - BR = \frac{am}{m-n} - x$, & RG ou $BR - BG = x - \frac{am}{m+n}$; la propriété du cercle, qui donne $QR \times RG = \overline{RM}^2$, donnera en termes analytiques $yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx$.

Si les rayons incidens BA, BM (*Fig.* 120. *Pl.* 6.) sont paralleles à une droite donnée de position, la premiere solution aura toujours lieu ; mais celle-ci deviendra inutile, & on pourra lui substituer la suivante.

Soit prise $FL = AH - HF$; & ayant mené LG parallele à AB & perpendiculaire sur AP, on prendra $LO = \frac{n}{m} LG$, & on tirera LP parallele à GO, & PM parallele à GL. Il est clair (*Art.* 132.) que le point M sera celui qu'on cherche ; car puisque $LO = \frac{n}{m} LG$, $ML = \frac{n}{m} PM$.

Si la caustique FH par réfraction, se réunit en un point ; les courbes AM deviennent les Ovales de *Descartes*, qui ont fait tant de bruit parmi les Géometres.

COROLLAIRE I.

143. ON démontre de même que dans les caustiques par réfléxion, (*Art.* 130.) que les courbes AM sont de nature différente entr'elles, & qu'elles ne sont géométriques que lorsque la caustique HF par réfraction est géométrique & rectifiable.

COROLLAIRE II.

144. UNE ligne courbe AM (*Fig.* 121. *Pl.* 7.) étant donnée avec le point lumineux B, & la raison de *m* à *n* ; trouver une infinité de lignes telles que DN, ensorte que les rayons rompus MN se rompent de nouveau à la rencontre de ces lignes DN pour se réunir en un point donné C.

Si l'on imagine que la ligne courbe HF soit la caustique par réfraction de la courbe donnée AM, formée par le point lumineux B ; il est clair que cette même ligne HF doit être aussi la caustique par réfraction de la courbe cherchée DN, ayant pour point lumineux le point donné C. C'est pourquoi (*Art.* 132.) $\frac{n}{m} BA + AH = \frac{n}{m} BM + MF + FH$, & $NF + FH - \frac{n}{m} NC = HD - \frac{n}{m} DC$; & partant $\frac{n}{m} BA + AH = \frac{n}{m} BM + MN + HD - \frac{n}{m} DC + \frac{n}{m} NC$; & transposant à l'ordinaire, $\frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM + \frac{n}{m} DC + AD = MN + \frac{n}{m} NC$. Ce qui donne cette construction.

Ayant pris à discrétion sur un rayon rompu quelconque AH le point D pour un de ceux de la courbe cherchée DN, on prendra sur un autre rayon rompu quelconque MF la partie $MK = \frac{n}{m}BA - \frac{n}{m}BM + \frac{n}{m}DC + AD$; & ayant trouvé, comme ci-dessus (*Art.* 142.), le point N tel que $NK = \frac{n}{m}NC$, il est clair (*Art.* 132.) qu'il sera à la courbe DN.

Corollaire Général.

Pour les trois Sections précédentes.

145. Il est manifeste (*Art.* 80. 85. 107. 108. 114. 115. 128. 129. 134. 143.) qu'une ligne courbe n'a qu'une seule développée, qu'une seule caustique par réfléxion, & qu'un seule par réfraction, le point lumineux & le rapport des sinus étant donnés, lesquelles lignes sont toujours géométriques & rectifiables lorsque cette courbe est géométrique. Au lieu qu'une même ligne courbe peut être la développée, & l'une & l'autre caustique dans le même rapport des sinus, & dans la même position du point lumineux, commune à une infinité de lignes très différentes entr'elles, & qui ne sont géométriques que lorsque cette courbe est géométrique & rectifiable (*Consultez la Note cinquante-deuxieme.*)

SECTION VIII.

Usage du Calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes.

PROPOSITION I.

Probléme.

146. Soit *donnée une ligne quelconque* AMB, (*Fig.* 122. *Pl.* 7.) *qui ait pour axe la droite* AP ; *soient de plus entendues une infinité de paraboles* AMC, AmC, *qui passent toutes par le point* A, *& qui ayent pour axes les appliquées* PM, pm. *Il faut trouver la ligne courbe qui touche toutes ces Paraboles.*

Il est clair que le point touchant de chaque parabole AMC est le point d'intersection C où la parabole AmC, qui en est infiniment proche, la coupe. Cela posé, & ayant mené CK parallele à MP, soient nommées les données AP, x; PM, y; & les inconnues AK, u; KC, z. On aura par la propriété de la parabole, $\overline{AP}^2\,(xx).\ \overline{PK}^2\,(uu - 2ux + xx) :: MP\,(y).\ MP - CK\,(y - z)$. Ce qui donne $zxx = 2uxy - uuy$, qui est l'équation commune à toutes les paraboles, telles que AMC. Or je remarque que les inconnues AK (u) & KC (z) demeurent les mêmes, pendant que les données AP (x)

& PM (y) varient en devenant Ap & pm; & qu'il n'arrive que KC (z) demeure la même, que lorsque le point C est celui d'intersection : car il est visible que par tout ailleurs la droite KC coupera les deux paraboles AMC, AmC en deux différens points, & qu'elle aura par conséquent deux valeurs qui répondront à la même de AK. C'est pourquoi si l'on traite u & z comme constantes, en prenant la différence de l'équation que l'on vient de trouver, on déterminera le point C à être celui d'intersection. On aura donc $2zxdx = 2uxdy + 2uydx - uudy$: d'où l'on tire l'inconnue AK (u) $= \frac{2xxdy - 2yxdx}{xdy - 2ydx}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{2uxy - uuy}{xx}$; & la nature de la courbe AMB étant donnée, on trouvera une valeur de dy en dx, laquelle étant substituée dans la valeur de AK, cette inconnue sera enfin exprimée en termes entiérement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit proposé.

Si au lieu des paraboles AMC, on proposoit d'autres lignes droites ou courbes dont la position fût déterminée, on résoudroit toujours le Problême à peu près de la même maniere : & c'est ce que l'on verra dans les Propositions suivantes.

Exemple.

147. Que l'équation $xx = 4ay - 4yy$ exprime la nature de la courbe AMB : elle sera une demi-ellipse qui aura pour petit axe, la droite AB

$= a$ perpendiculaire sur AP, & dont le grand axe sera double du petit.

On trouve $xdx = 2ady - 4ydy$; & partant AK ($\frac{2xxdy - 2xydx}{xdy - 2ydx}$) $= \frac{ax}{y} = u$. D'où il suit que si l'on prend AK quatrieme proportionnelle à MP, PA, AB, & qu'on mene KC perpendiculaire sur AK ; elle ira couper la parabole AMC au point cherché C.

Pour avoir la nature de la courbe qui touche toutes les paraboles, ou qui passe par tous les points C ainsi trouvés, on cherchera l'équation qui exprime la rélation de AK (u) à KC (z) en cette sorte. Mettant à la place de u sa valeur $\frac{ax}{y}$ dans $zxx = 2uxy - uuy$, l'on en tire $y = \frac{aa}{2a - z}$; & partant x ou $\frac{uy}{a} = \frac{au}{2a - z}$. Si donc l'on met ces valeurs à la place de x & y dans $xx = 4ay - 4yy$, on formera l'équation $uu = 4aa - 4az$ où x & y ne se rencontrent plus, & qui exprime la rélation de AK à KC. D'où l'on voit que la courbe cherchée est une parabole qui a pour axe la ligne BA, pour sommet le point B, pour foyer le point A, & dont le paramétre par conséquent est quadruple de AB.

On vient de trouver $y = \frac{aa}{2a - z}$, d'où l'on tire KC (z) $= \frac{2ay - aa}{y}$. Or comme cette valeur est positive lorsque $2y$ surpasse a, négative lorsqu'il est moindre, & nulle lorsqu'il lui est égal : il s'enſuit que le point touchant C tombe au-deſſus de AP dans le premier cas, comme l'on avoit ſuppoſé en faiſant le calcul; au deſſous dans le ſecond, & enfin ſur AP dans le troiſieme.

Si l'on mene la droite AC qui coupe MP en G; je dis que $MG = BQ$, & que le point G eſt le foyer de la parabole AMC. Car 1°. AK ($\frac{ax}{y}$). KC ($\frac{2ay - aa}{y}$) : : AP (x). $PG = 2y - a$. & partant $MG = a - y = BQ$. 2°. Le paramètre de la parabole AMC, eſt $= 4a - 4y$ en mettant pour xx ſa valeur $4ay - 4yy$; & partant MG ($a - y$) eſt la quatrieme partie du paramètre: d'où l'on voit que le point G eſt le foyer de la parabole; & qu'ainſi l'angle BAC doit être diviſé en deux également par la tangente en A.

Il ſuit de ce que le paramètre de la parabole AMC eſt quadruple de BQ, que le ſommet M tombant en A, le paramètre ſera quadruple de AB, & qu'ainſi la parabole, qui a pour ſommet le point A, eſt aſymptotique de celle qui paſſe par tous les points C.

Comme la parabole BC touche toutes les paraboles telles que AMC; il eſt clair que toutes ces paraboles couperont la ligne déterminée AC en des points qui ſeront plus proches du point A que le point C. Or l'on démontre dans la Baliſtique (en ſuppoſant que AK ſoit horizontale) que toutes les paraboles, telles que AMC, marquent le chemin que décrivent en l'air des Bombes qui ſeroient jettées par un Mortier placé en A dans toutes les élévations poſſibles avec la même force. D'où il ſuit que ſi l'on mene une droite qui diviſe par le milieu l'angle BAC; elle marquera la poſition que doit avoir le Mortier, afin que la Bombe qu'il jette, tombe ſur le plan AC donné de poſition, en un point C plus éloigné du Mortier, qu'en toute autre élévation.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

148. SOIT *donnée une courbe quelconque* AM, (*Fig.* 123. *Pl.* 7.) *qui ait pour axe la droite* AP; *trouver une autre courbe* BC *telle qu'ayant mené à diſcrétion l'appliquée* PM, *& la perpendiculaire* PC *à cette courbe, ces deux lignes* PM, PC *ſoient toujours égales entr'elles.*

Si l'on conçoit une infinité de cercles décrits des centres P, p, & des rayons PC, pC égaux à PM, pm; il eſt clair que la courbe cherchée BC doit toucher tous ces cercles, & que le point touchant C de chaque cercle eſt le point d'interſection où le cercle qui en eſt infiniment proche, le coupe. Cela poſé, ſoit menée CK perpendiculaire ſur AP; ſoient nommées les données & variables AP, x; PM ou PC, y; les inconnues & conſtantes AK, u; KC, z; & l'on aura par la propriété du cercle $\overline{PC}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KC}^2$, c'eſt-à-dire, en termes analytiques $yy = xx - 2ux + uu + zz$, qui eſt l'équation commune à tous ces cercles, dont la différence eſt $2ydy = 2xdx -$

$2udx$: d'où l'on tire PK $(x-u)=\frac{ydy}{dx}$; ce qui donne cette construction générale.

Soit menée MQ perpendiculaire à la courbe AM ; & ayant pris PK = PQ, soit tirée KC parallele à PM : je dis qu'elle rencontrera le cercle décrit du centre P & du rayon PC = PM au point C, où il touche la courbe cherchée BC. Ce qui est évident ; puisque $PQ=\frac{ydy}{dx}$.

On peut encore trouver la valeur de PK de cette autre manière.

Ayant mené PO perpendiculaire sur Cp, les triangles rectangles pOP, PKC seront semblables ; & partant Pp (dx). Op (dy) : : PC (y). $PK=\frac{ydy}{dx}$.

Lorsque PQ = PM, il est clair que le cercle décrit du rayon PC, touchera KC au point K ; de sorte que le point touchant C se confondra avec le point K, & tombera par conséquent sur l'axe.

Mais lorsque PQ surpassera PM, le cercle décrit du rayon PC ne pourra toucher la courbe BC ; puisqu'il ne pourra rencontrer la droite KC en aucun point.

EXEMPLE.

149. SOIT la courbe donnée AM, (*Fig.* 123. *Pl.* 7.) une parabole qui ait pour équation $ax=yy$. On aura PQ ou PK $(x-u)=\frac{1}{2}a$; & par conséquent $x=\frac{1}{2}a+u$, & $yy=\frac{1}{4}aa+zz$ à cause du triangle rectangle PKC. Or si l'on met ces valeurs dans $ax=yy$, on formera l'équation $\frac{1}{2}aa+au=\frac{1}{4}aa+zz$ ou $\frac{1}{4}aa+au=zz$, qui exprime la nature de la courbe BC. D'où il est clair que cette courbe est la même parabole que AM ; puisqu'elles ont l'une & l'autre le même paramètre a ; & que son sommet B est éloigné du sommet A de la distance $BA=\frac{1}{4}a$.

PROPOSITION III.

PROBLÉME.

150. SOIT *donnée une ligne courbe quelconque* AM, (*Fig.* 124. *Pl.* 7.) *qui ait pour diamètre la droite* AP, *& dont les appliquées* PM, pm *soient paralleles à la droite* AQ *donnée de position ; & ayant mené* MQ, mq *paralleles à* AP, *soient tirées les droites* PQC, pqC. *On demande la courbe* AC *qui a pour tangentes toutes ces droites : ou, ce qui est la même chose, il s'agit de déterminer sur chaque droite* PQC *le point touchant* C.

Ayant imaginé une autre tangente pqC infiniment proche de PQC, & mené CK parallele à AQ, on nommera les données & variables AP, x ; PM ou AQ, y ; les inconnues & constantes AK, u ; KC, z ; & les triangles semblables PAQ, PKC donneront AP (x). AQ (y) : : PK $(x+u)$. KC $(z)=y+\frac{uy}{x}$. qui est l'équation commune à toutes les droites, telles que KC. Sa différence est $dy+\frac{uxdy-uydx}{xx}=0$, d'où l'on tire AK ($u$) $= \frac{xxdy}{ydx - xdy}$. Ce qui donne cette conſtruction générale.

Soit menée la tangente MT, & ſoit priſe AK troiſieme proportionnelle à AT, AP : je dis que ſi l'on mene KC parallele à AQ, elle ira couper la droite PQC au point cherché C.

Car AT ($\frac{ydx - xdy}{dy}$) . AP (x) : : AP (x) . AK $= \frac{xxdy}{ydx - xdy}$.

Exemple I.

151. Soit la courbe donnée AM, (*Fig.* 124. *Pl.* 7.) une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura AT = AP ; d'où il ſuit que AK (u) $= x$, c'eſt-à-dire, que le point K tombe ſur le point T. Si l'on veut à préſent avoir une équation qui exprime la rélation de AK(u) à KC (z) ; on trouvera KC (z) $= 2y$, puiſque l'on vient de trouver que PK eſt double de AP. Mettant donc à la place de x & y leurs valeurs u & $\frac{1}{2}z$ dans $ax = yy$, on aura $4au = zz$: d'où l'on voit que la courbe AC eſt une parabole qui a pour ſommet le point A, & pour paramétre une ligne quadruple du paramètre de la parabole AM.

Exemple II.

152. Soit la courbe donnée AM, (*Fig.* 125. *Pl.* 7.) un quart de cercle BMD qui ait pour centre le point A, & pour rayon la ligne AB ou AD, que j'appelle a. Il eſt clair que PQ eſt toujours égale au rayon AM ou AB, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt par-tout la même : de ſorte que l'on peut concevoir que ſes extrêmités P, Q gliſſent le long des côtés BA, AD de l'angle droit BAD. On aura AK (u) $= \frac{x^3}{aa}$, puiſque AT $= \frac{aa}{x}$; & les paralleles KC, AQ donneront AP (x) . PQ (a) : : AK ($\frac{x^3}{aa}$) QC $= \frac{xx}{a}$. D'où l'on voit que pour avoir le point touchant C, il n'y a qu'à prendre QC troiſieme proportionnelle à PQ & AP. Si l'on cherche l'équation qui exprime la nature de la courbe BCD, on trouvera celle-ci,

$$\begin{array}{llll} u^6 - 3aau^4 & + 3a^4uu & - a^6 & = 0 \\ \quad + 3zz & + 21aazz & + 3a^4zz & \\ & + 3z^4 & - 3aaz^4 & \\ & & + z^6 & \end{array}$$

Corollaire I.

153. Si l'on veut chercher le rapport de la portion DC de la courbe BCD à ſa tangente CP, l'on imaginera une autre tangente cp infiniment proche de CP ; & ayant décrit du centre C le petit arc PO, l'on aura $cp - CP$ ou $Op - Cc = -\frac{2xdx}{a}$, pour la différence de CP $= \frac{aa - xx}{a}$: d'où l'on tire $Cc = OP + \frac{2xdx}{a}$. Or à cauſe des triangles rectangles ſemblables QPA, PpO, l'on aura PQ (a) . AP (x) : : Pp (dx) . OP $= \frac{xdx}{a}$.

& partant $Cc = \frac{3xdx}{a} = DC - Dc$. Il eſt donc manifeſte qu'en quelque endroit que l'on prenne le point C, l'on aura toujours $DC - Dc \left(\frac{3xdx}{a}\right)$. $CP - cp \left(\frac{2xdx}{a}\right) :: 3 . 2$. D'où il ſuit que la ſomme de toutes les différences $DC - Dc$ qui répondent à la droite PD, c'eſt-à-dire, (*Art.* 96.) la portion DC de la courbe BCD, eſt à la ſomme de toutes les différences $CP - cp$ qui répondent à la même droite PD, c'eſt-à-dire (*Art.* 96.) à la tangente CP :: 3 . 2. Et de même que la courbe entiére BCD eſt à ſa tangente BA :: 3 . 2.

Corollaire II.

154. Si l'on développe la courbe BCD en commençant par le point D, on formera la ligne courbe DNF telle que CN . CP :: 3 . 2. puiſque CN eſt toujours égale à la portion DC de la courbe BCD. D'où il ſuit que les ſecteurs ſemblables CN*n*, CPO ſont entr'eux :: 9 . 4. & partant que l'eſpace DCN renfermé par les courbes DC, DN, & par la droite CN qui eſt tangente en C, & perpendiculaire en N, eſt à l'eſpace DCP renfermé par la courbe DC, & par les deux tangentes DP, CP, comme 9. à 4.

Corollaire III.

155. Le centre de peſanteur du ſecteur CN*n* doit être ſitué ſur l'arc PO; puiſque $CP = \frac{2}{3}CN$. Et comme cet arc eſt infiniment petit, il s'enſuit que ce centre doit être ſur la droite AD; & partant que le centre de peſanteur des eſpaces DCN, BDF qui ſont compoſés de tous ces ſecteurs, doit être ſur cette droite AD: de ſorte que ſi l'on décrivoit de l'autre côté de BF une figure toute pareille à BDF, le centre de peſanteur de la figure entiére ſeroit au point A.

Corollaire IV.

156. A cauſe des triangles rectangles ſemblables PQA, *p*PO, l'on aura $PQ\ (a) . AQ$ ou $PM\ (\sqrt{aa - xx}) :: Pp\ (dx) . PO = \frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}$. Et à cauſe des ſecteurs ſemblables CPO, CN*n*, l'on aura auſſi $CP . CN$, ou $2 . 3 :: PO\left(\frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}\right)$. $Nn = \frac{3dx\sqrt{aa-xx}}{2a}$. Or le rectangle $MP \times Pp$, c'eſt-à-dire, (*Art.* 2.) le petit eſpace circulaire $MPpm = dx\sqrt{aa-xx}$. On aura donc $AB \times Nn = \frac{3}{2} MPpm$: d'où il ſuit que la portion ND de la courbe DNF étant multipliée par le rayon AB, eſt ſeſquialtére du ſegment circulaire DMP, & que la courbe entiére DNF eſt égale aux trois quarts de BMD, quatrieme partie de la circonférence du cercle.

PROPOSITION IV.

Probléme.

157. Soit *donnée une courbe quelconque* AM, (*Fig.* 126. *Pl.* 7.) *qui ait pour axe la droite*

AP; *& soient entendues une infinité de perpendiculaires* MC, mC *à cette courbe. On demande la courbe qui a pour tangentes toutes ces perpendiculaires : ou ce qui est la même chose, il faut trouver sur chaque perpendiculaire* MC *le point touchant* C.

Ayant imaginé une autre perpendiculaire m C infiniment proche de MC, avec une appliquée MP, l'on menera par le point d'intersection C les droites CK perpendiculaire, & CE parallele à l'axe: ayant ensuite nommé les données & variables AP, x; PM, y; les inconnues & constantes AK, u; KC, z; l'on aura PQ $= \frac{ydy}{dx}$, PK ou CE $= u - x$, ME $= y + z$; & les triangles rectangles semblables MPQ, MEC donneront MP (y). PQ $(\frac{ydy}{dx})$ :: ME $(y+z)$. EC $(u-x) = \frac{ydy + zdy}{dx}$. qui est une équation commune à toutes les perpendiculaires telles que MC, & dont la différence (en supposant dx constante) donne $-dx = \frac{ydy + dy^2 + zddy}{dx}$: d'où l'on tire ME $(z+y) = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Or la nature de la courbe AM étant donnée, l'on aura des valeurs de dy^2 & ddy en dx^2, lesquelles étant substituées dans $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, donneront pour ME une valeur entiérement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit proposé.

Il est évident que la courbe qui passe par tous les points C, est la développée de la courbe AM; & comme l'on en a traité exprès dans la Section cinquiéme, il seroit inutile d'en donner ici des exemples nouveaux.

PROPOSITION V.

PROBLÉME.

158. DEUX *lignes quelconques* AM, BN (*Fig.* 127. *Pl.* 7.) *étant données avec une ligne droite* MN *qui demeure toujours la même; on suppose que les extrêmités* M, N *de cette ligne glissent continuellement le long des deux autres, & l'on demande la courbe qu'elle touche toujours dans ce mouvement.*

Ayant mené les tangentes MT, NT, & imaginé une autre droite mn infiniment proche de MN, & qui la coupe par conséquent au point C où elle touche la courbe dont il s'agit de déterminer les points. Il est clair que la droite MN, pour parvenir en mn, a parcouru par ses extrêmités les petites portions Mm, Nn des lignes AM, BN, lesquelles sont communes à cause de leur infinie petitesse, aux tangentes TM, TN: de sorte que l'on peut concevoir que la ligne MN pour parvenir dans la situation infiniment proche mn, ait glissé le long des droites TM, TN données de position.

Cela bien entendu, soient menées sur NT les perpendiculaires MP, CK; soient nommées les données & variables TP, x; PM, y; les inconnues & constantes TK, u; KC, z; & la donnée MN qui demeure par-tout la même, a. Le triangle rectangle MPN donnera PN $= \sqrt{aa - yy}$; & à cause des triangles semblables NPM, NKC, l'on aura NP $(\sqrt{aa-yy})$. PM (y) :: NK $(u - x - \sqrt{aa-yy})$. KC $(z) = \frac{uy - xy}{\sqrt{aa-yy}} - y$, dont la différence donne $aaudy - aaxdy - aaydx + y^3dx = \overline{aady - yydy}\sqrt{aa-yy}$: d'où en faisant $\sqrt{aa-yy} = m$ pour abréger, l'on tire PK $(u-x)$ $= \frac{m^3dy + mmydx}{aady} = \frac{m^3 + mmx}{aa}$ en mettant pour ydx sa valeur xdy, à cause des triangles semblables mRM, MPT; & partant MC $= \frac{mm + mx}{a}$: ce qui donne cette construction.

Soit menée TE perpendiculaire sur MN, & soit prise MC = NE : je dis que le point C sera celui qu'on cherche. Car à cause des triangles rectangles semblables MNP, TNE, l'on aura MN (a). NP (m) :: NT $(m+x)$. NE ou MC $= \frac{mm + mx}{a}$.

Autre maniére. Ayant mené TE perpendiculaire sur MN, & décrit du centre C les petits arcs MS, NO, on nommera les données NE, r; ET, s; MN, a; & l'inconnue CM, t. On aura Sm ou O$n = dt$; & les triangles rectangles semblables MET & mSM, NET & nON, CMS & CNO donneront ME $(r - a)$. ET

(s) :: mS (dt). SM $= \frac{sdt}{r-a}$. Et NE (r). ET (s) :: nO (dt). ON $= \frac{sdt}{r}$. *Et* MS $-$ NO $(\frac{asdt}{rr - ar})$. MS $(\frac{sdt}{r-a})$ :: MN (a). MC $(t) = r$. Ce qui donne la même construction que ci-dessus.

Si l'on suppose que les lignes AM, BN soient des droites qui fassent entr'elles un angle droit; il est visible que la courbe cherchée est la même que celle de l'art. 152.

PROPOSITION VI.

PROBLÉME.

159. SOIENT *données trois lignes quelconques* L, M, N; (*Fig.* 128. *Pl.* 7.) *& soient entendues de chacun des points* L, l *de la ligne* L *deux tangentes* LM *&* LN, lm *&* ln, *aux deux courbes* M *&* N, *une à chacune. On demande la quatriéme courbe* C, *qui ait pour tangentes toutes les droites* MN, mn *qui joignent les points touchans des courbes* M, N.

Ayant tiré la tangente LE, & mené par un de ses points quelconque E les perpendiculaires EF, EG sur les deux autres tangentes ML, NL, on concevra que le point l soit infiniment près du point L; on tirera les petites droites LH, LK perpendiculaires sur ml, nl; comme aussi les perpendiculaires MP, mP, NQ, nQ sur les tangentes ML, ml, NL, nl, lesquelles perpendiculaires s'entrecoupent aux points P &

Q. Tout cela formera les triangles rectangles semblables EFL, & LHl, EGL & LKl; comme aussi les triangles LMH & MPm, LnK & NQn rectangles en H & m, K & N, qui seront semblables entr'eux, puisque les angles LMH, MPm étant joints l'un ou l'autre au même angle PMm, font un droit. On prouvera de même, que les angles LnK, NQn sont égaux entr'eux.

Cela posé, on nommera le petit côté Mm du polygone qui compose la courbe M, du; & les données EF, m; EG, n; MN ou mn, a; ML ou ml, b; NL ou nl, c; MP ou mP, f; NQ ou nQ, g (je prens ici les droites MP, NQ pour données, parce que la nature des courbes M, N étant donnée par la supposition, on les pourra toujours trouver (*Art.* 78.); & l'on aura, 1°. $MP\,(f) . ML\,(b) :: Mm\,(du) . LH = \frac{bdu}{f}$. 2°. $EF\,(m) . EG\,(n) :: LH\,(\frac{bdu}{f}) . LK = \frac{bndu}{mf}$. 3°. LN ou $Ln\,(c) . nQ\,(g) :: LK\,(\frac{bndu}{mf}) . nN = \frac{bgndu}{cfm}$. 4°. (menant MR parallele à NL ou nl) $ml\,(b) . ln\,(c) :: mM\,(du) . MR = \frac{cdu}{b}$. 5°. $MR + Nn\,(\frac{cdu}{b} + \frac{bgndu}{cfm}) . MR\,(\frac{cdu}{b}) :: MN\,(a) . MC = \frac{accfm}{ccfm + bbgn}$. Ce qu'il falloit trouver.

Si la tangente EL tomboit sur la tangente ML, il est clair que EF (m) deviendroit nulle ou zero; & partant que le point cherché C tomberoit sur le point M. De même si la tangente EL se confondoit avec la tangente LN, alors EG (n) deviendroit nulle, & l'on auroit par conséquent MC $= a$: d'où l'on voit que le point cherché C tomberoit aussi sur le point N. Et enfin si la tangente EL tomboit dans l'angle GLI; en ce cas EG (n) deviendroit négative: ce qui donneroit alors $MC = \frac{accfm}{ccfm - bbgn}$; & le point cherché C ne tomberoit plus entre les points M & N, mais de part ou d'autre.

EXEMPLE I.

160. SUPPOSONS que les courbes M & N (*Fig.* 129. *Pl.* 7.) ne fassent qu'un cercle. Il est clair en ce cas que $b = c$, & $f = g$; ce qui donne MC $= \frac{am}{m + n}$, d'où l'on voit qu'il ne faut alors que couper la droite MN en raison donnée de m à n pour avoir le point cherché C; c'est-à-dire, ensorte que $MC . NC :: m . n$.

EXEMPLE II.

161. SUPPOSONS que les courbes M & N soient une Section conique quelconque. La construction générale se peut changer en cette autre qui est beaucoup plus simple, si l'on fait attention à une proprieté des Sections coniques, que l'on trouve démontrée dans les Livres qui en traitent: sçavoir que si l'on mene de chacun des points L, l d'une ligne droite EL deux tangentes LM

& L N, lm & ln à une Section conique; toutes les droites M N, mn qui joignent les points touchans, se couperont dans le même point C, par lequel passe le diamètre A C, dont les ordonnées sont paralleles à la droite E L. Car il suit de là, que pour avoir le point C, il ne faut que mener un diamètre qui ait ses ordonnées paralleles à la tangente E L.

Il est évident que dans le cercle, le diamètre doit être perpendiculaire sur la tangente E L; c'est-à-dire, qu'en menant de son centre A une perpendiculaire A B sur cette tangente, elle coupera la droite M N au point cherché C.

REMARQUE.

162. On peut par le moyen de ce Problême (*Fig.* 128. *Pl.* 7.) résoudre celui-ci qui dépend de la Méthode des Tangentes.

Les trois courbes C, M, N, étant données, on fera rouler une ligne droite M N autour de la courbe C, ensorte qu'elle la touche continuellement; on tirera par les points M, N, où elle coupe les courbes M & N, les tangentes M L, N L qui s'entrecoupent en un point L, lequel décrit dans ce mouvement une quatriéme courbe L l. Il s'agit de tirer la tangente L E de cette courbe, la position des droites M N, M L, N L étant donnée avec le point touchant C.

Car il est visible que ce Problême n'est que l'inverse du précédent, & qu'ici M C est donnée: ce qu'on cherche, c'est la raison de E F, E G, qui

détermine la position de la tangente E L. C'est pourquoi si l'on nomme la donnée M C, h; l'on aura $\frac{accfm}{ccfm+bbgn}=h$: d'où l'on tire $m=\frac{bbghn}{accf-ccfh}$; & par conséquent la tangente L E doit être tellement située dans l'angle donné M L G, que si l'on mene d'un de ses points quelconque E les perpendiculaires E F, E G sur les côtés de cet angle, elles soient toujours entr'elles en raison donnée de $bbgh$ à $accf-ccfh$. Or cela se fait en menant M D parallele à N L, & égale à $\frac{b^3gh}{accf-ccfh}$.

Il est évident (*Art.* 161.) que si les deux courbes M & N (*Fig.* 129. *Pl.* 7.) ne font qu'une Section conique, il ne faudra que tirer la tangente L E parallele aux ordonnées du diamètre qui passe par le point C. (*Consultez la Note* 53^e^.)

SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

163. SOIT *une ligne courbe* AMD (*Fig.* 130. *Pl.* 7.) (AP $=x$, PM $=y$, AB $=a$) *telle que la valeur de l'appliquée* y *soit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorsque* $x=a$, *c'est-à-dire, lorsque le point* P *tombe sur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD.

Soient entendues deux lignes courbes ANB, COB, qui ayent pour axe commun la ligne AB, & qui soient telles que l'appliquée PN exprime le numérateur, & l'appliquée PO le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les PM : de sorte que PM $=\frac{AB \times PN}{PO}$. Il est clair que ces deux courbes se rencontreront au point B; puisque par la supposition PN & PO deviennent chacune zero, lorsque le point P tombe en B. Cela posé, si l'on imagine une appliquée bd infiniment proche de BD, & qui rencontre les lignes courbes ANB, COB aux points f, g; l'on aura bd

$=\frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle (*Art.* 2.) ne différe pas de BD. Il n'est donc question que de trouver le rapport de bg à bf. Or il est visible que la coupée AP devenant AB, les appliquées PN, PO deviennent nulles, & que AP devenant Ab, elles deviennent bf, bg. D'où il suit que ces appliquées, elles mêmes bf, bg, sont la différence des appliquées en B & b par rapport aux courbes ANB, COB; & partant que si l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la divise par la différence du dénominateur, après avoir fait $x=a$ $=$ Ab ou AB, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée bd ou BD. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE. I.

164. SOIT $y=\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{aax}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$. Il est clair que lorsque $x=a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'est pourquoi l'on prendra la différence $\frac{a^3dx-2x^3dx}{\sqrt{2a^3x-x^4}}-\frac{aadx}{3\sqrt[3]{axx}}$ du numérateur, & on la divisera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, après avoir fait $x=a$, c'est-à-dire, qu'on divisera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.

EXEMPLE II.

165. SOIT $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$, lorsque $x = a$.

On pourroit résoudre cet exemple sans avoir besoin du calcul des differences, en cette sorte.

Ayant ôté les incommensurables, on aura $aaxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0$, qui étant divisé par $x - a$, se réduit à $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$; & substituant a pour x, il vient comme auparavant $y = 2a$.

LEMME.

166. SOIT *une ligne courbe quelconque* BCG, (*Fig.* 131. *Pl.* 7.) *avec une ligne droite* AE *qui la touche au point* B, *& sur laquelle soient marqués à discrétion deux points fixes* A, E. *Si l'on fait rouler cette droite autour de la courbe, ensorte qu'elle la touche continuellement; il est clair que les points fixes* A, E *décriront dans ce mouvement deux courbes* AMD, ENH. *Si l'on mene à présent* DL *parallele à* AB, *& qui fasse par conséquent avec* DK (*sur laquelle je suppose la droite* AE *lorsqu'elle touche la courbe* BCG *en* G) *l'angle* KDL *égal à l'angle* AOD *fait par les tangentes en* B, G; *& que l'on décrive comme on voudra, du centre* D *l'arc* KFL.

Je dis que DK . KFL : : AE . AMD ± ENH. *sçavoir* + *lorsque le point touchant tombe toujours entre les points décrivans, &* — *lorsqu'il les laisse toujours du même côté.*

Car

Car supposant que la droite AE en roulant autour de la courbe BCG soit parvenue dans les positions MCN, mCn infiniment proches l'une de l'autre, & menant les rayons DF, Df paralleles à CM, Cm: il est clair que les secteurs DFf, CMm, CNn seront semblables; & qu'ainsi DF. Ff : : CM. Mm : : CN. Nn : : CM ± CN ou AE. Mm ± Nn. Or comme cela arrivera toujours en quelqu'endroit que se trouve le point touchant C, il s'ensuit que le rayon DK est à l'arc KFL, somme de tous les petits arcs Ff : : AE. AMD ± ENH, somme de tous les petis arcs Mm ± Nn. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

167. IL est visible que les courbes AMD, ENH sont formées par le développement de la même courbe BCG; & qu'ainsi la droite AE est toujours perpendiculaire sur ces deux courbes dans toutes les positions où elle se rencontre; de sorte que leur distance est par-tout la même; ce qui est la propriété des lignes paralleles. D'où l'on voit qu'une ligne courbe AMD étant donnée, on peut trouver une infinité de points de la courbe ENH sans avoir besoin de sa développée BCG, en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à cette courbe, & les prenant toutes égales à la droite AE.

COROLLAIRE II.

168. Si la courbe BCG a ses deux moitiés BC, CG entiérement semblables & égales, & que l'on prenne les droites BA, GH égales entr'elles; il est clair que les courbes AMD, ENH seront semblables & égales, ensorte qu'elles ne differeront que par leur position. D'où il suit que la courbe AMD sera à l'arc de cercle KFL :: $\frac{1}{2}$ AE. DK. c'est-à-dire, en raison donnée.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

169. Soient *deux courbes quelconques* AEV, BCG, (*Fig.* 132. *Pl.* 7.) *avec une troisieme* AMD, *telle qu'ayant décrit par le développement de la courbe* BCG *une portion de courbe* EM, *la rélation des portions de courbes* AE, EM, *& des rayons de la développée* EC, MG *soit exprimée par une équation quelconque donnée. On propose de mener d'un point donné* M *sur la courbe* AMD *la tangente* MT.

Ayant imaginé une autre portion de courbe *em* infiniment proche de EM, & les rayons de la développée C*e*F, G*m*R; Soit, 1°. CH perpendiculaire sur CE, & qui rencontre en H la tangente EH de la courbe AEV. 2°. ML parallele à CE, & qui rencontre en L l'arc GL décrit du centre M & du rayon MG. 3°. GT perpendiculaire sur MG, & qui rencontre en T la tangente cherchée MT.

On nommera ensuite les données AE, x; EM, y; CE, u; GM, z; CH, s; EH, t; l'arc GL, r: d'où l'on aura $Ee = dx$, Fe ou $Rm = du = dz$; & les triangles rectangles semblables eFE, ECH donneront CE (u). CH (s) :: Fe (dz). FE $= \frac{sdz}{u}$. Et CE (u). EH (t) :: Fe (dz). Ee (dx) $= \frac{tdz}{u}$. Or par le Lemme (*Art.* 166.) RF $- me = \frac{rdz}{z}$; & partant RM ($\overline{RF - me}, + \overline{me - ME} + \overline{ME - MF}$) $= \frac{rdz}{z} + dy + \frac{sdz}{u}$. Donc à cause des triangles rectangles semblables mRM, MGT, l'on aura mR (dz). RM ($\frac{rdz}{z} + \frac{sdz}{u} + dy$) :: MG ($z$). GT $= r + \frac{sz}{u} + \frac{zdy}{dz}$. Mais si l'on met dans la difference de l'équation donnée à la place de du & dx leurs valeurs dz & $\frac{tdz}{u}$, l'on trouvera une valeur de dy en dz, laquelle étant substituée dans $\frac{zdy}{dz}$, il viendra pour la soutangente cherchée GT une valeur entiérement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit proposé.

Si l'on ſuppoſe que la courbe BCG (*Fig.* 133. *Pl.* 7.) ſe réuniſſe en un point O; il eſt viſible que la portion de courbe ME (y) ſe change en un arc de cercle égal à l'arc GL (r), & que les rayons CE (u), GM (z) de la développée deviennent égaux entr'eux : de ſorte que GT, qui devient en ce cas OT, ſe trouvera $= y + s + \frac{zdy}{dz}$.

EXEMPLE.

170. SOIT $y = \frac{xz}{a}$; les différences donneront dy (*Fig.* 133. *Pl.* 7.) $= \frac{zdx - xdz}{a}$ (on prend (*Art.* 8.) $-xdz$ au lieu de $+xdz$; parce que x & y croiſſant, z diminue) $= \frac{tdz - xdz}{a}$, en mettant pour dx ſa valeur $\frac{tdz}{z}$; & partant OT $(y + s + \frac{zdy}{dz}) = y + s + \frac{tz - xz}{a} = \frac{as + tz}{a}$, en mettant pour $\frac{xz}{a}$ ſa valeur y.

REMARQUE.

171. SI le point O tombe ſur l'axe AB, (*Fig.* 134. *Pl.* 7.) & que la courbe AEV ſoit un demi-cercle; la courbe AMD ſera une demi-roulette, formée par la révolution d'un demi-cercle BSN autour d'un arc égal BGN d'un cercle décrit du centre O, & dont le point générateur A tombera dehors, dedans, ou ſur la circonférence du demi-cercle mobile BSN, ſelon que la donnée a ſera plus grande, moindre, ou égale à OV. Pour le prouver, & déterminer en même temps le point B.

Je ſuppoſe ce qui eſt en queſtion, ſçavoir que la courbe AMD eſt une demi-roulette, formée par la révolution du demi-cercle BSN, qui a pour centre le point K centre du demi-cercle AEV, autour de l'arc BGN décrit du centre O; & concevant que ce demi-cercle BSN s'arrête dans la ſituation BGN, telle que le point décrivant A tombe ſur le point M, je mene par les centres des cercles générateurs la droite OK qui paſſe par conſéquent par le point touchant G; & tirant KSE, j'obſerve que les triangles OKE, OKM ſont égaux & ſemblables, puiſque leurs trois côtés ſont égaux chacun à chacun. D'où il ſuit 1°. Que les angles extrêmes MOK, EOK ſont égaux; & qu'ainſi les angles MOE, GOB le ſont auſſi : ce qui donne GB. ME :: OB. OE. 2°. Que les angles MKO. EKO ſont encore égaux; & qu'ainſi les arcs GN, BS, qui les meſurent, le ſont auſſi : la même choſe ſe doit dire de leurs complémens GB, SN, à deux droits; puiſqu'ils appartiennent à des cercles égaux. Or par la génération de la roulette, l'arc GB du cercle mobile eſt égal à l'arc GB de l'immobile. J'aurai donc SN. ME :: OB. OE. Cela poſé, Je nomme les données OV, b; KV ou KA, c; & l'inconnue KB, u. J'ai $OB = b + c - u$; & les secteurs semblables KEA, KSN me donnent $KE\ (c) . KS\ (u) :: AE\ (x) . SN = \frac{ux}{c}$. Et partant $OB\ (b + c - u) . OE\ (z) :: SN\ (\frac{ux}{c}) . EM\ (y) = \frac{uxz}{bc + cc - cu} = \frac{xz}{a}$. D'où je tire $KB\ (u) = \frac{bc + cc}{a + c}$. Il est donc évident que si l'on prend $KB = \frac{bc + cc}{a + c}$, & qu'on décrive des centres K & O le demi-cercle BSN & l'arc BGN; la courbe AMD sera une demi-roulette d'écrite par la révolution du demi-cercle BSN, autour de l'arc BGN, & dont le point décrivant A tombe dehors, dedans, ou sur la circonférence de ce cercle, selon que KV (c) est plus grand, moindre, ou égal à $KB\ (\frac{bc + cc}{a + c})$, c'est-à-dire, selon que a est plus grand, moindre, ou égal à OV (b).

Corollaire. I.

172. Il est clair que $EM\ (y) . AE\ (x) :: KB \times OE\ (uz) . OB \times KV\ (bc + cc - uc)$. Or si l'on suppose que OB devienne infinie; la droite OE le sera aussi, & deviendra parallele à OB, puisqu'elle ne la rencontrera jamais; les arcs concentriques BGN, EM deviendront des droites paralleles entr'elles, & perpendiculaires sur OB, OE: & alors la droite EM sera

à l'arc AE :: KB . KV. parce que les droites infinies OE, OB ne différant entr'elles que d'une grandeur finie, doivent être regardées comme égales.

Corollaire. II.

173. De ce que les angles MKO, EKO sont égaux, il suit que les triangles MKG, EKB seront égaux & semblables; & qu'ainsi les droites MG, EB sont égales entr'elles. D'où l'on voit (*Art.* 43.) que pour mener d'un point donné M sur la roulette, la perpendiculaire MG, il n'y a qu'à décrire du centre O l'arc ME, & du centre M de l'intervalle EB un arc de cercle qui coupera la base BGN en un point G, par où & par le point donné M l'on tirera la perpendiculaire requise.

Corollaire III.

174. Un point G étant donné sur la circonférence du demi-cercle mobile BGN; si l'on veut trouver le point M de la roulette sur lequel tombe le point décrivant A, lorsque le point donné G touche la base, il ne faut que prendre l'arc SN égal à l'arc BG, & ayant tiré le rayon KS qui rencontre en E la circonférence AEV, décrire du centre O l'arc EM. Car il est évident que cet arc coupera la roulette au point cherché M.

PROPOSITION III.

PROBLÊME.

175. *Soit une demi-roulette* AMD (*Fig.* 135. 136. *Pl.* 7.) *décrite par la révolution du demi-cercle* BGN *autour d'un arc égal* BGN *d'un autre cercle, enforte que les parties révolues* BG, BG *soient toujours égales entr'elles; soit le point décrivant* M *pris sur le diametre* BN *dehors, dedans, ou sur la circonférence mobile* BGN. *On demande le point* M *de la plus grande largeur de la demi-roulette par rapport à son axe* OA.

Supposant que le point M soit celui qu'on cherche, il est clair (*Art.* 47.) que la tangente en M doit être parallele à l'axe OA; & qu'ainsi la perpendiculaire MC à la roulette, doit-être aussi perpendiculaire sur l'axe qu'elle rencontre au point P. Cela posé, si l'on mene OK par les centres des cercles générateurs, elle passera par le point touchant G; & si l'on tire KL perpendiculaire sur MG, on formera les angles égaux GKL, GOB; & partant l'arc IG qui est le double de la mesure de l'angle GKL, sera à l'arc GB mesure de l'angle GOB, comme le diamétre BN est au rayon OB. D'où il suit que pour déterminer sur le demi-cercle BGN le point G, où il touche l'arc qui lui sert de base lorsque le point décrivant M tombe sur celui de la plus grande largeur; il faut couper le demi-cercle BGN en un point G, enforte qu'ayant tiré par le point donné M la corde IG, l'arc IG soit à l'arc BG en raison donnée de BN à

OB. La question se réduit donc à un Problême de la géométrie commune qui se peut toujours résoudre géométriquement, lorsque la raison donnée est de nombre à nombre; mais avec le secours des lignes dont l'équation est plus ou moins élevée, selon que la raison est plus ou moins composée.

Si l'on suppose que le rayon OB devienne infini, comme il arrive lorsque la base BGN devient une ligne droite; il s'ensuit que l'arc IG sera infiniment petit par rapport à l'arc GB. D'où l'on voit que la sécante MIG devient alors la tangente MT, lorsque le point décrivant M tombe au dehors du cercle mobile; & qu'il ne peut y avoir de point de plus grande largeur, lorsqu'il tombe au dedans.

Lorsque le point M tombe sur la circonférence en N, il ne faut que diviser la demi-circonférence BGN en raison donnée de BN à OB au point G. Car le point G ainsi trouvé, sera celui où le cercle mobile BGN touche la base, lorsque le point décrivant tombe sur le point cherché.

LEMME II.

176. *En tout triangle* BAC, (*Fig.* 137. *Pl.* 7.) *dont les angles* ABC, ACB, *&* CAD *complément à deux droits de l'angle obtus* BAC, *sont infiniment petits; je dis que ces angles ont même rapport entr'eux que les côtés* AC, AB, BC, *ausquels ils sont opposés.*

Car si l'on circonscrit un cercle autour du triangle BAC, les arcs AC, AB, BAC, qui mesurent les doubles de ces angles, seront infiniment petits, & ne différeront (*Art.* 3.) point par conséquent de leurs cordes ou soutendantes.

Si les côtés AC, AB, BC du triangle BAC, ne sont pas infiniment petits, mais qu'ils ayent une grandeur finie : il s'ensuit que le cercle circonscrit doit être infiniment grand ; puisque les arcs AC, AB, BAC, qui ont une grandeur finie, doivent être infiniment petits par rapport à ce cercle, étant les mesures d'angles infiniment petits.

PROPOSITION IV.

PROBLÉME.

177. LES *mêmes choses étant posées ; il faut déterminer sur chaque perpendiculaire* MG, (*Fig.* 135. 136. *Pl.* 7.) *le point* C *où elle touche la développée de la roulette.*

Ayant imaginé une autre perpendiculaire *mg* infiniment proche de MG, & qui la coupe par conséquent au point cherché C, on tirera la droite G*m* ; & ayant pris sur la circonférence du cercle mobile le petit arc G*g* égal à l'arc G*g* de l'immobile, on menera les droites M*g*, I*g*, K*g*, O*g*. Cela posé, si l'on regarde les petits arcs G*g*, G*g* comme de petites droites perpendiculaires sur les rayons K*g*, O*g*, il est clair que le petit arc G*g* du cercle mobile tombant sur l'arc G*g* de l'immobile, le point décrivant M tombera sur *m*, ensorte que le triangle GM*g* se confondra

avec le triangle G*mg*. D'où l'on voit que l'angle MG*m* est égal à l'angle $gGg = GKg + GOg$; puisqu'ajoutant de part & d'autre les mêmes angles KG*g*, OG*g*, l'on en compose deux droits.

Or nommant les données OG, *b* ; KG, *a* ; GM ou G*m*, *m* ; GI ou I*g*, *n* ; l'on trouve, *Premierement* OG . KG : : GK*g* . GO*g*. Et OG (b) . OG + GK ou OK ($b + a$) : : GK*g* . GK*g* + GO*g* ou MG*m* $= \frac{a+b}{b}$ GK*g*. 2°. (*Ar.* 176.) I*g*. MI : : GM*g*. M*g*I. Et I*g* ± MI ou MG (m). I*g*. (n) : : GM*g* ± M*g*I ou GI*g* ou $\frac{1}{2}$ GK*g*. GM*g* ou G*mg* $= \frac{n}{2m}$ GK*g*. 3°. (*Ibid*) L'angle MC*m* ou MG*m* — G*mg* $(\overline{\frac{a+b}{b} - \frac{n}{2m} GKg})$. G*mg* $(\frac{n}{2m} GKg)$: : G*m* (m) . GC $= \frac{bmn}{2am + 2bm - bn}$. Et par conséquent le rayon cherché MC de la développée sera $= \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$.

Si l'on suppose que le rayon OG (b) du cercle immobile devienne infini, sa circonférence deviendra une ligne droite ; & en effaçant les termes $2amm$, $2am$, parce qu'ils sont nuls par rapport aux autres $2bmm$, $2bm - bn$, l'on aura $MC = \frac{2mm}{2m - n}$.

COROLLAIRE I.

178. DE ce que l'angle MG*m* $= \frac{a+b}{b}$ GK*g*, & de ce que les arcs de différens cercles sont

entr'eux en raison composée des rayons & des angles qu'ils mesurent; il suit que $Gg . Mm :: KG \times GKg . MG \times \frac{a+b}{b} GKg$. Et par conséquent aussi que $KG \times Mm = \frac{a+b}{b} MG \times Gg$; ou (ce qui est la même chose) que $KG \times Mm . MG \times Gg ::$ OK $(a+b)$. OG (b). qui est une raison constante. D'où l'on voit que la dimension de la portion AM de la demi-roulette AMD, dépend de la somme des $MG \times Gg$ dans l'arc GB; & c'est ce que M. *Pascal* a démontré à l'égard des roulettes qui ont pour bases des lignes droites.

M. *Varignon* est tombé dans cette même propriété par une voie très-différente de celle-ci.

COROLLAIRE II.

179. LORSQUE le point décrivant M. (*Fig.* 135. *Pl.* 7.) tombe hors de la circonférence du cercle mobile, il arrive nécessairement l'un des trois cas suivans. Car menant la tangente MT, le point touchant G tombera 1°. Sur l'arc TB, comme l'on a supposé dans la figure en faisant le calcul; & alors MC $(\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn})$ surpassera toujours MG (m). 2°. Sur le point touchant T; & l'on aura pour lors MC $(\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn}) = m$, puisque IG (n) s'évanouit. 3°. Sur l'arc TN, & alors la valeur de GI (n) devenant négative de positive qu'elle étoit, l'on aura MC $= \frac{2amm+2bmm}{2am+2bm+bn}$: de sorte que MC sera moindre

que MG (m), & toujours positif. D'où il est évident que dans tous ces cas, la valeur du rayon MC de la développée est toujours positive.

COROLLAIRE III.

180. LORSQUE le point décrivant M (*Fig.* 136. *Pl.* 7.) tombe au dedans de la circonférence du cercle mobile, on a toujours MC $= \frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn}$; & il peut arriver que bn surpasse $2am+2bm$, & qu'ainsi la valeur du rayon MC de la développée soit négative: d'où l'on voit que lorsqu'elle cesse d'être positive pour devenir négative, comme il arrive (*Art.* 81.) lorsque le point M devient un point d'inflexion, il faut nécessairement alors que $bn = 2am+2bm$; & partant que $MI \times MG (mn - mm) = \frac{2amm+bmm}{b}$. Or si l'on nomme la donnée KM, c; l'on aura par la propriété du cercle $MI \times MG (\frac{2amm+bmm}{b}) = BM \times MN (aa - cc)$, ce qui donne l'inconnue MG $(m) = \sqrt{\frac{aab-bcc}{2a+b}}$. Donc si l'on décrit du point donné M comme centre, & de l'intervalle MG $= \sqrt{\frac{aab-bcc}{2a+b}}$, un cercle; il coupera le cercle mobile en un point G, où il touchera le cercle immobile qui lui sert de base, lorsque le point décrivant M tombera sur le point d'inflexion F.

Si l'on mene MR perpendiculaire sur BN; il est clair que cette MG $(\sqrt{\frac{aab-bcc}{2a+b}})$ sera moindre que MR ($\sqrt{aa - cc}$), & qu'elle lui doit être égale lorſque b devient infinie, c'eſt-à-dire, lorſque la baſe de la roulette devient une ligne droite.

Il eſt à remarquer, qu'afin que le cercle décrit du rayon MG coupe le cercle mobile, il faut que MG ſurpaſſe MN, c'eſt-à-dire, que $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ ſurpaſſe $a - c$; & qu'ainſi KM (c) ſurpaſſe $\frac{aa}{a+b}$. D'où il eſt manifeſte qu'afin qu'il y ait un point d'inflexion dans la roulette AMD, il faut que KM ſoit moindre que KN, & plus grande que $\frac{aa}{a+b}$.

Lemme. III.

181. Soient *deux triangles* ABb, CDd (*Fig.* 138. *Pl.* 8.) *qui ayent chacun un de leurs côtés* Bb, Dd *infiniment petit par rapport aux autres : je dis que le triangle* ABb *eſt au triangle* CDd *en raiſon compoſée de l'angle* BAb *à l'angle* DCd, & *du quarré du côté* AB *ou* Ab *au quarré du côté* CD *ou* Cd.

Car ſi l'on décrit des centres A, C, & des intervalles AB, CD, les arcs de cercle BE, DF; il eſt clair (*Art.* 2.) que les triangles ABb, CDd ne différeront point des ſecteurs de cercles ABE, CDF. Donc, &c.

Si les côtés AB, CD ſont égaux, les triangles ABb, CDd ſeront entr'eux comme leurs angles BAb, DCd.

PROPOSITION V.

Problême.

182. Les *mêmes choſes étant toujours poſées; on demande la quadrature de l'eſpace* MGBA, (*Fig.* 135. *Pl.* 7.) *renfermé par les perpendiculaires* MG, BA *à la roulette, par l'arc* GB, & *par la portion* AM *de la demi-roulette* AMD, *en ſuppoſant la quadrature du cercle.*

L'angle GMg ($\frac{n}{2m}$ GKg) eſt à l'angle MGm ($\frac{a+b}{b}$GKg), comme (*Art.* 181.) le petit triangle MGg qui a pour baſe l'arc Gg du cercle mobile, au petit triangle ou ſecteur GMm; & partant le ſecteur GMm $= \frac{2m}{n}$ MG$g \times \frac{a+b}{b} = \frac{2a+2b}{b} \times$ MG$g + \frac{2ap+2bp}{bn} \times$ MGg en nommant MI, p, & mettant pour m ſa valeur $p+n$. Or (*Art.* 181.) le petit triangle ou ſecteur KGg eſt au petit triangle MGg en raiſon compoſée du quarré de KG au quarré de MG, & de l'angle GKg à l'angle GMg; c'eſt-à-dire :: $aa \times$ GKg. $mm \times \frac{n}{2m}$ GKg. & partant le petit triangle MGg $= \frac{mn}{2aa}$ KGg. Mettant donc cette valeur à la place du triangle MGg dans $\frac{2ap+2bp}{bn}$ MGg, l'on aura le ſecteur GMm $= \frac{2a+2b}{b}$ MGg +

$\frac{\overline{a+b}\times pm}{aab}$ KGg. Mais à cauſe du cercle, GM $\times$ MI (pm) $=$ BM $\times$ MN ($cc - aa$) qui eſt une quantité conſtante, & qui demeure toujours la même en quelqu'endroit que ſe trouve le point décrivant M; & par conſéquent GMm + MGg ou mGg, c'eſt-à-dire, le petit eſpace de la roulette GMmg $= \frac{2a+3b}{b}$ MGg + $\frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}$ KGg. Donc puiſque GMmg eſt la différence de l'eſpace de la roulette MGBA, & MGg, celle de l'eſpace circulaire MGB, renfermé par les droites MG, MB, & par l'arc GB, & que de plus le petit ſecteur KGg eſt la différence du ſecteur KGB; il s'enſuit (*Art.* 96.) que l'eſpace de la roulette MGBA $= \frac{2a+3b}{b}$ MGB + $\frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}$ KGB. Ce qu'il falloit trouver.

Lorſque le point décrivant M (*Fig.* 139. *Pl.* 8.) tombe hors la circonférence BGN du cercle mobile, & que le point touchant G tombe ſur l'arc NT; il eſt viſible (*Art.* 180.) que les perpendiculaires MG, mg s'entrecoupent en un point C, & qu'on a pour lors $m = p - n$. D'où il ſuit que le petit ſecteur GMm $= -\frac{2a-2b}{b}$ MGg + $\frac{2ap+2bp}{bn}$ MGg $= -\frac{2a-2b}{b}$ MGg + $\frac{amp+bmp}{aab}$ KGg, en mettant comme auparavant pour le petit triangle MGg ſa valeur $\frac{mn}{2aa}$ KGg; & partant que GMm — MGg ou mGg, c'eſt-à-dire MCm — GCg $= -\frac{2a-3b}{b}$ MGg + $\frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}$ KGg, en mettant pour pm ſa valeur $cc - aa$. Or ſuppoſant que TH ſoit la poſition de la tangente TM du cercle mobile, lorſque ſon point T touche la baſe au point T; il eſt clair que MCm — GCg $=$ MGTH — mgTH, c'eſt-à-dire, la différence de l'eſpace MGTH, & que MGg eſt celle de MGT, de même que KGg celle de KGT. Donc (*Art.* 96.) l'eſpace MGTH $= -\frac{2a-3b}{b}$ MGT + $\frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}$ KGT. Mais, comme l'on vient de prouver, l'eſpace HTBA $= \frac{2a+3b}{b}$ MTB + $\frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}$ KTB. Et partant on aura toujours & dans tous les cas l'eſpace MGBA (MGTH + HTBA) $= \frac{2a+3b}{b}$ $\overline{\text{MTB} - \text{MGT}}$ ou MGB + $\frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}$ $\overline{\text{KGT} + \text{KTB}}$ ou KGB.

Donc l'eſpace entier DNBA (*Fig.* 135. *Pl.* 7.) renfermé par les deux perpendiculaires à la roulette DN, BA, par l'arc de cercle BGN, & par la demi-roulette AMD, eſt $= \overline{\frac{2a+3b}{b} + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}}$ $\times$ KNGB; puiſque le ſecteur KGB & l'eſpace circulaire MGB deviennent chacun le demi-cercle KNGB, lorſque le point touchant G tombe au point N.

Lorsque le point décrivant M (*Fig.* 136. *Pl.* 7.) tombe au dedans du cercle mobile, il faut mettre $aa - cc$ à la place de $cc - aa$ dans les formules précédentes ; parce qu'alors $BM \times MN = aa - cc$.

Si l'on fait $c = a$, l'on aura la quadrature des roulettes qui ont leur point décrivant sur la circonférence du cercle mobile ; & si l'on suppose b infinie, l'on aura la quadrature de celles qui ont pour bases les lignes droites.

Autre solution.

183. On décrit du rayon OD (*Fig.* 140. *Pl.* 7.) l'arc DV, & des diamètres AV, BN les demi-cercles AEV, BSN ; & ayant décrit à discrétion du centre O l'arc EM renfermé entre le demi-cercle AEV & la demi-roulette AMD, l'on mene l'appliquée EP. Il s'agit de trouver la quadrature de l'espace AEM compris entre les arcs AE, EM, & la portion AM de la demi-roulette AMD.

Pour cela, soit un autre arc *em* concentrique & infiniment proche de EM, une autre appliquée *ep*, une autre O*e* qui rencontre l'arc ME prolongé (s'il est nécessaire) au point F. Soient nommées les variables OE, z ; VP, u ; l'arc AE, x ; & comme auparavant les constantes OB, b ; KB ou KN, a ; KV ou KA, c : l'on aura F*e* $= dz$, $Pp = du$, $OP = a + b - c + u$, $\overline{PE}^2 = 2cu - uu$, l'arc EM (*Art.* 172.) $= \frac{axz}{bc}$; & partant le rectangle fait de l'arc EM par la petite droite F*e*, c'est-à-dire (*Art.* 2.) le petit espace EM*me* $= \frac{axzdz}{bc}$. Or à cause du triangle rectangle OPE ; $zz = aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc + 2au + 2bu$, dont la différence donne $zdz = adu + bdu$. Mettant donc cette valeur à la place de zdz dans $\frac{axzdz}{bc}$, l'on aura le petit espace

$$EMme = \frac{aaxdu + abxdu}{bc}.$$

Maintenant si l'on décrit la demi-roulette AHT par la révolution du demi-cercle AEV sur la droite VT perpendiculaire à VA, & qu'on prolonge les appliquées PE, *pe* jusqu'à ce qu'elles la rencontrent aux points H, *h* : il est clair (*Art.* 172.) que $EH \times Pp$, c'est à-dire, le petit espace EH*he* $= xdu$; & qu'ainsi EM*me* $\left(\frac{aaxdu + abxdu}{bc}\right)$. EH*he* (xdu) :: $aa + ab \,.\, bc$. qui est une raison constante. Or puisque cela arrive toujours en quelqu'endroit que se trouve l'arc EM, il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces EM*me*, c'est-à-dire l'espace AEM, est à la somme de tous les petits espaces EH*he*, c'est-à dire, à l'espace AEH :: $aa + ab \,.\, bc$. Mais l'on a (*Art.* 99.) la quadrature de l'espace AEH dépendamment de celle du cercle ; & partant aussi celle de l'espace cherché AEM.

Ceci se peut aussi démontrer sans aucun calcul, comme j'ai fait voir dans les Actes de Leypsic au mois d'Août de l'année 1695.

On peut encore trouver la quadrature de l'espace AEH sans avoir recours à l'art. 99. Car si l'on acheve les rectangles PQ, pq, l'on aura Qq ou HR. Pp ou Rh : : EP. PA ou HQ. puisque (*Art.* 18.) la tangente en H est parallele à la corde AE; & partant $HQ \times Qq = EP \times Pp$, c'est-à-dire, que les petits espaces $HQqh$, $EPpe$ sont toujours égaux entr'eux. D'où il suit que l'espace AHQ renfermé par les perpendiculaires AQ, QH, & par la portion AH de la demi-roulette AHT, est égal à l'espace APE renfermé par les perpendiculaires AP, PE, & par l'arc AE. L'espace AEH sera donc égal au rectangle PQ moins le double de l'espace circulaire APE; c'est-à dire, au rectangle fait de PE par KA plus ou moins le rectangle fait de KP par l'arc AE, selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du centre. Et par conséquent l'espace cherché AEM $= \frac{aa + ab}{bc} \overline{PE \times KA \pm KP \times AE}$.

Corollaire I.

184. Lorsque le point P tombe en K, le rectangle $KP \times AE$ s'évanouit, & le rectangle $PE \times KA$ devient égal au quarré de KA : d'où l'on voit que l'espace AEM est alors $= \frac{aac + abc}{b}$; & par conséquent il est quarrable absolument & indépendamment de la quadrature du cercle.

Corollaire II.

185. Si l'on ajoute à l'espace AEM le secteur AKE, l'espace AKEM renfermé par les rayons AK, KE, par l'arc EM, & par la portion AM de la demi-roulette AMD, se trouve (lorsque le point P tombe au dessus du centre K) $= \frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aau - 2abu}{2bc} AE + \frac{aa + ab}{bc}$ $PE \times KA$; & partant si l'on prend VP (u) $\frac{2aac + 2abc + bcc}{2aa + 2ab}$ (ce qui rend nulle la valeur de $\frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aau - 2abu}{2bc} AE$), l'on aura l'espace AKEM $= \frac{aa + ab}{bc}$ $PE \times KA$. D'où l'on voit que sa quadrature est encore indépendante de celle du cercle.

Il est visible qu'entre tous les espaces AEM & AKEM, il ne peut y avoir que les deux que l'on vient de marquer, dont la quadrature soit absolue.

Avertissement.

Tout ce que l'on vient de démontrer à l'égard des roulettes extérieures se doit aussi entendre des intérieures, c'est-à-dire, de celles dont le cercle mobile roule au dedans de l'immobile; en observant que les rayons KB (a), KV (c) *deviennent négatifs de positifs qu'ils étoient. C'est pourquoi il faudra changer dans les formules précédentes, les signes des termes où* a *&* c *se rencontrent avec une dimension impaire.*

REMARQUE.

186. Il y a certaines courbes qui paroiſſent avoir un point d'inflexion, & qui cependant n'en ont point ; ce que je crois à propos d'expliquer par un exemple, car cela pourroit faire quelque difficulté.

Soit la courbe géometrique NDN (*Fig.* 141. *Pl.* 7.), dont la nature eſt exprimée par l'équation $z = \frac{xx - aa}{\sqrt{2xx - aa}}$ ($AP = x$, $PN = z$), dans laquelle il eſt clair 1°. Que x étant égale à a ; PN (z) s'évanouit. 2° Que x ſurpaſſant a, la valeur de z eſt poſitive ; & qu'au contraire lorſqu'il eſt moindre, elle eſt négative. 3°. Que lorſque $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, la valeur de PN eſt infinie. D'où l'on voit que la courbe NDN paſſe de part & d'autre de ſon axe en le coupant en un point D tel que $AD = a$; & qu'elle a pour aſymptote la perpendiculaire BG menée par le point B tel que $AB = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$.

Si l'on décrit à préſent une autre courbe EDF, enſorte qu'ayant mené à diſcrétion la perpendiculaire MPN, le rectangle fait de l'appliquée PM par la conſtante AD, ſoit toujours égal à l'eſpace correſpondant DPN ; il eſt viſible qu'en nommant PM, y ; & prenant les différences, l'on aura $AD \times Rm$ (ady) $= NPpn$ ou $NP \times Pp$ ($\frac{xxdx - aadx}{\sqrt{2xx - aa}}$) ; & partant Rm (dy). Pp ou RM (dx) :: PN. AD. D'où il ſuit que la courbe EDF touche l'aſymptote BG prolongée de l'autre côté de B en un point E, & l'axe AP au point D ; & qu'ainſi elle doit avoir un point d'infléxion en D. Cependant on trouve (*Art.* 78.) $-\frac{x^3}{2aa}$ pour la valeur du rayon de ſa développée, laquelle eſt toujours négative, & devient égale à $-\frac{1}{2}a$ lorſque le point M tombe en D : d'où l'on doit conclure (*Art.* 81.) que la courbe qui paſſe par tous les points M eſt toujours convexe vers l'axe AP, & qu'elle n'a pas de point d'infléxion en D. Comment donc accorder tout cela ? En voici le dénouement.

Si l'on prend PM du même côté que PN, on formera une autre courbe GDH qui ſera toute pareille à EDF, & qui en doit faire partie ; puiſque ſa génération eſt la même. Cela étant ainſi, l'on doit penſer que les parties qui compoſent la courbe entiére ne ſont pas EDF, GDH comme l'on s'étoit imaginé, mais bien EDH, GDF qui ſe touchent au point D ; car tout s'accorde parfaitement dans cette derniere ſuppoſition. Ceci ſe confirme encore par cet exemple.

Soit la courbe DMG (*Fig.* 142. *Pl.* 7.), qui ait pour équation $y^4 = x^4 + aaxx - b^4$ ($AP = x$, $PM = y$). Il ſuit de cette équation que la courbe entiére a deux parties EDH, GDF oppoſées l'une à l'autre comme l'hyperbole ordinaire, enſorte que leur diſtance DD ou $2AD = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}$.

Si l'on ſuppoſe que b s'évanouiſſe, la diſtance DD (*Fig.* 143. *Pl.* 7.) s'évanouira auſſi ; & partant les deux parties EDH, GDF ſe toucheront au point D : de ſorte qu'on pourroit penſer à préſent que cette courbe a un point d'inflexion ou de rebrouſſement en D, ſelon qu'on imagineroit que ſes parties ſeroient EDF, GDH ou EDG, HDF. Mais l'on ſe détromperoit aiſément, en cherchant le rayon de la développée ; car l'on trouveroit qu'il ſeroit toujours poſitif, & qu'il deviendroit égal à $\frac{1}{2}a$ dans le point D.

On peut remarquer en paſſant, (*Fig.* 141. *Pl.* 7.) que la quadrature de l'eſpace DPN dépend de celle de l'hyperbole : ou (ce qui revient au même) de la rectification de la parabole ; & que la portion de courbe DMF ſatisfait au Problême propoſé par M. *Bernoulli* dans le Tome ſecond des Supplémens des Actes de Leipſic, page 291. (*Conſultez la Note* 54e.)

SECTION X.

Nouvelle maniére de ſe ſervir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la Méthode de Mrs. Deſcartes & Hudde.

DÉFINITION.

SOIT une ligne courbe ADB (*Fig.* 144. 145. 146. *Pl.* 8.) telle que les paralleles KMN à ſon diamètre AB la rencontrent en deux points M, N ; & ſoit entendue la partie interceptée MN ou PQ devenir infiniment petite. Elle ſera nommée alors la *Différenee* de la coupée AP, ou KM.

COROLLAIRE I.

187. LORSQUE la partie MN ou PQ devient infiniment petite ; il eſt clair que les coupées AP, AQ deviennent égales chacune à AE, & que les points M, N ſe réuniſſent en un point D : enſorte que l'appliquée ED eſt la plus grande ou la moindre de toutes ſes ſemblables PM, NQ.

COROLLAIRE II.

188. IL eſt clair qu'entre toutes les coupées AP, il n'y a que AE qui ait une différence ; parce qu'il n'y a qu'en ce cas où PQ devienne infiniment petite.

COROLLAIRE III.

189. SI l'on nomme les indéterminées AP ou KM, x; PM ou AK, y; il est évident que AK (y) demeurant la même, il doit y avoir deux valeurs différentes de x, sçavoir KM, KN ou AP, AQ. C'est pourquoi il faut que l'équation qui exprime la nature de la courbe ADB soit délivrée d'incommensurables, afin que la même inconnue x qui en marque les racines (car on regarde y comme connue) puisse avoir différentes valeurs. Ce qu'il faut observer dans la suite.

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

190. LA *nature de la courbe géométrique* ADB *étant donnée ; déterminer la plus grande ou la moindre de ses appliquées* ED.

Si l'on prend la différence de l'équation qui exprime la nature de la courbe, en traitant y comme constante, & x comme variable ; il est clair (*Art.* 188.) qu'on formera une nouvelle équation qui aura pour une de ses racines x, une valeur AE, telle que l'appliquée ED sera la plus grande ou la moindre de toutes ses semblables.

Soit, par exemple, $x^3 + y^3 = axy$, dont la différence, en traitant x comme variable, & y comme constante, donne $3xxdx = aydx$; & partant $y = \frac{3xx}{a}$. Si l'on substitue cette valeur à la place de y dans l'équation à la courbe $x^3 + y^3 = axy$; l'on aura pour x une valeur AE $= \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$, telle que l'appliquée ED sera la plus grande de toutes ses semblables, de même qu'on l'a déja trouvé art. 48.

Il est évident que l'on détermine de même non-seulement les points D, lorsque les appliquées ED sont perpendiculaires ou tangentes de la courbe ADB ; mais aussi lorsqu'elles sont obliques sur la courbe, c'est-à-dire, lorsque les points D sont des points de rebroussement de la premiere ou seconde sorte. D'où l'on voit que cette nouvelle maniere de considérer les différences dans les courbes géométriques est plus simple & moins embarrassante en quelques rencontres, que la (*Sect.* 3.) premiere.

REMARQUE.

191. ON peut remarquer dans les courbes rebroussantes, que les PM (*Fig.* 146. *Pl.* 8.) paralleles à AK ; les rencontrent en deux points M, O, de même que les KM paralleles AP, sont en M, N : de sorte que AP (x) demeurant la même, y a deux différentes valeurs PM, PO. C'est pourquoi l'on peut traiter x comme constante, & y comme variable, en prenant la différence de l'équation qui exprime la nature de cette courbe. D'où l'on voit que si l'on traite x & y comme variables, en prenant cette diffé-

rence, il faudra que tous les termes qui multiplient dx d'une part, & tous ceux qui multiplient dy d'une autre part, ſoient égaux à zero. Mais il faut bien prendre garde que dx & dy marquent ici les différences de deux appliquées qui partent d'un même point, & non pas (comme ci-devant Sect. 3.) la différence de deux appliquées infiniment proches.

COROLLAIRE.

192. SI après avoir ordonné l'équation qui exprime la nature de la courbe dans laquelle il n'y a que l'inconnue x de variable, l'on en prend la différence; il eſt clair 1°. Qu'on ne fait autre choſe que de multiplier chaque terme par l'expoſant de la puiſſance de x, & par la différence dx, & le diviſer enſuite par x. 2°. Que cette diviſion par x, auſſi-bien que la multiplication par dx, peut être négligée, parce qu'elle eſt la même dans tous les termes. 3°. Que les expoſans des puiſſances de x ſont une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt l'expoſant de ſa plus grande puiſſance, & le dernier eſt zero, car on ſuppoſe qu'on ait marqué par une étoile les termes qui peuvent manquer dans l'équation.

Soit, par exemple, $x^3 * - ayx + y^3 = o$. Si l'on multiplie chaque terme par ceux de la progreſſion arithmétique 3, 2, 1, o; l'on formera l'équation nouvelle $3x^3 - ayx = o$.

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & * & -\,ayx & +\,y^3 & = o. \\ 3, & 2, & 1, & o. & \\ \hline 3x^3 & * & -\,ayx & * & = o. \end{array}$$

D'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$, de même que l'on auroit trouvé en prenant la différence à la maniére accoutumée.

Cela ſuppoſé, je dis qu'au lieu de la progreſſion arithmétique 3, 2, 1, o, l'on peut ſe ſervir de telle autre progreſſion arithmétique qu'on voudra: $m+3, m+2, m+1, m+0$, ou m (l'on déſigne par m un nombre quelconque entier ou rompu, poſitif ou négatif). Car multipliant $x^3 * - ayx + y^3 = o$ par x^m, l'on aura $x^{m+3} *$, &c. $= o$, dont les termes doivent être être multipliés par ceux de la progreſſion $m+3$, $m+2$, $m+1$, m. chacun par ſon correſpondant pour en avoir la différence.

$$\begin{array}{cccc} x^{m+3} & * & -\,ayx^{m+1} & +\,y^3x^m = o. \\ m+3, & m+2 & m+1, & m. \\ \hline \overline{m+3}\,x^{m+3} & * & -\,\overline{m+1}\,ayx^{m+1} & +\,my^3x^m = o. \end{array}$$

Ce qui donnera $\overline{m+3}\,x^{m+3} - \overline{m+1}\,ayx^{m+1} + my^3x^m = o$; & en diviſant par x^m, il viendra $\overline{m+3}\,x^3 - \overline{m+1}\,ayx + my^3 = o$, comme l'on auroit trouvé d'abord en multipliant ſimplement l'égalité propoſée par la progreſſion $m+3$, $m+2$, $m+1$, m.

Si $m = -3$, la progreſſion ſera $o, -1, -2, -3$; & l'équation ſera $2ayx - 3y^3 = o$. Si $m = -1$, la progreſſion ſera $2, 1, o, -1$; & l'équation $2x^3 - y^3 = o$.

On peut changer de ſignes tous les termes de la progreſſion, c'eſt-à-dire, qu'au lieu de o, -1, -2, -3, & 2, 1, o, -1, l'on peut prendre o, 1, 2, 3, & -2, -1, o, 1; parce qu'on ne fait par là que changer de ſignes tous les termes de la nouvelle équation qui doit être égalée à zero. Et en effet, au lieu de $2ayx - 3y^3 = o$, $2x^3 - y^3 = o$, l'on auroit $-2ayx + 3y^3 = o$, $-2x^3 + y^3 = o$; ce qui eſt la même choſe.

Or il eſt viſible que ce que l'on vient de démontrer à l'égard de cet exemple, s'appliquera de même maniére à tous les autres. D'où il ſuit que ſi après avoir ordonné une équation qui doit avoir deux racines egales entr'elles, l'on en multiplie les termes par ceux d'une progreſſion arithmétique arbitraire, l'on formera une nouvelle équation qui renfermera entre ſes racines une des deux égales de la premiére. Par la même raiſon, ſi cette nouvelle équation doit avoir encore deux racines égales, & qu'on la multiplie par une progreſſion arithmétique, l'on en formera une troiſieme qui aura entre ſes racines une des deux égales de la ſeconde; & ainſi de ſuite. De ſorte que ſi l'on multiplie une équation qui doit avoir trois racines égales, par le produit de deux progreſſions arithmétiques, l'on en formera une nouvelle qui aura entre ſes racines une des trois égales de la premiere; & de même ſi l'équation doit avoir quatre racines égales, il la faudra multiplier par le produit de trois progreſſions arithmétiques; ſi cinq, par le produit de quatre, &c.

C'eſt là préciſément en quoi conſiſte la Méthode de M. *Hudde*.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

193. D'un *point donné* T (*Fig.* 147. *Pl.* 8.) *ſur le diamètre* AB, *ou du point donné* H *ſur* AH *parallele aux appliquées; mener la tangente* THM.

Ayant mené par le point touchant M l'appliquée MP, & nommé AT, s; AH, t; dont l'une ou l'autre eſt donnée; & les inconnues AP, x; PM, y: les triangles ſemblables TAH, TPM donneront $y = \frac{st + tx}{s}$, $x = \frac{sy - st}{t}$; & mettant ces valeurs à la place de y ou de x dans l'équation donnée, qui exprime la nature de la courbe AMD, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne ſe rencontrera plus.

Si l'on mene à préſent une ligne droite TD qui coupe la droite AH en G, & la courbe AMD en deux points N, D, deſquels l'on abbaiſſe les appliquées NQ, DB; il eſt évident que t exprimant AG dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB, ou NQ, DB, leſquelles deviennent égales entr'elles, ſçavoir à la cherchée AP ou PM lorſque t exprime AH, c'eſt-à-dire, lorſque la ſécante TDN devient la tangente TM. D'où il ſuit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'eſt pourquoi on la multipliera par une progreſſion arithmétique arbitraire; ce que l'on réiterera, s'il est nécessaire, en multipliant de nouveau cette même équation par une autre progression arithmétique quelconque, afin que par la comparaison des équations qui en résultent, l'on en puisse trouver une qui ne renferme que l'inconnue x ou y, avec la donnée s ou t. L'exemple qui suit éclaircira suffisamment cette Méthode.

EXEMPLE.

194. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD. Si l'on met à la place de x sa valeur $\frac{sy - st}{t}$, l'on aura tyy, &c. qui doit avoir deux racines égales.

$$\begin{array}{l} tyy - asy + ast = o. \\ 1, \quad o, -1. \\ \hline tyy \quad * \quad - ast = o. \end{array}$$

C'est pourquoi multipliant par ordre ces termes par ceux de la progression arithmétique $1, o, -1$, l'on trouvera $as = yy = ax$; & partant AP (x) $= s$. D'où l'on voit qu'en prenant AP = AT; & menant l'appliquée PM, la ligne TM sera tangente en M. Mais si au lieu de AT (s), c'est AH (t) qui est donnée, l'on multipliera la même équation tyy, &c. par cette autre progression $o, 1, 2$, & l'on aura la cherchée PM (y) $= 2t$.

On auroit trouvé la même construction en mettant pour y sa valeur $\frac{st + tx}{s}$ dans $ax = yy$. Car il vient $ttxx$, &c. dont les termes multipliés par $1, o,$

$1, o, -1$, donnent $xx = ss$; & par conséquent AP (x) $= s$.

COROLLAIRE.

195. SI l'on veut à présent que le point touchant M soit donné, & qu'il faille trouver le point T ou H, dans lequel la tangente MT rencontre le diamètre AB ou la parallele AH aux appliquées; il n'y a qu'à regarder dans la derniere équation, qui exprime la valeur de l'inconnue x ou y par rapport à la donnée s ou t, cette derniere comme l'inconnue, & x ou y comme connue.

PROPOSITION III.

PROBLÉME.

196. LA *nature de la courbe géométrique* AFD (*Fig.* 148. *Pl.* 8.) *étant donnée; déterminer son point d'infléxion* F.

Ayant mené par le point cherché F, l'appliquée FE avec la tangente FL, par le point A (origine des x) la parallele AK aux appliquées, & nommé les inconnues LA, s; AK, t; AE, x; EF, y: les triangles semblables LAK, LEF donneront encore $y = \frac{st + tx}{s}$, & $x = \frac{sy - st}{t}$; de sorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus, de même que dans la proposition précédente.

Si l'on mene à présent une ligne droite TD qui coupe la droite AK en H, qui touche la courbe AFD en M, & la coupe en D, d'où l'on abaisse les appliquées MP, DB : il est évident 1°. Que s exprimant AT ; & t, AH ; l'équation que l'on vient de trouver, doit avoir deux racines égales, sçavoir (*Art.* 193.) chacune à AP ou à PM selon qu'on a fait évanouir y ou x, & une autre AB, ou BD. 2°. Que s exprimant AL ; & t, AK ; le point touchant M se réunit avec le point d'intersection D dans le point cherché F : puisque (*Art.* 67.) la tangente LF doit toucher & couper la courbe dans le point d'infléxion F ; & qu'ainsi les valeurs AP, AB de x, ou PM, BD de y deviennent égales entr'elles, sçavoir, l'une & l'autre à la cherchée AE ou EF. D'où il suit que cette équation doit avoir trois racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par le produit de deux progressions arithmétiques arbitraires ; ce que l'on réiterera, s'il est nécessaire, en la multipliant de même par un autre produit de deux progressions arithmétiques quelconques, afin que par la comparaison des équations qui en résultent, l'on puisse faire évanouir les inconnues s & t.

EXEMPLE.

197. SOIT $ayy = xyy + aax$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AFD. Si l'on met à la place de x sa valeur $\frac{sy - st}{t}$, on formera l'équation $sy^3 - styy - atyy$, &c.

$$
\begin{array}{lllll}
sy^3 & -\,styy & +\,aasy & -\,aast & = o. \\
 & -\,at & & & \\
1, & o, & -1, & -2. & \\
3, & 2, & 1, & o. & \\
\hline
3sy^3 & * & -\,aasy & * & = o.
\end{array}
$$

qui étant multipliée par $3, o, -1, o$, produit des deux progressions arithmétiques $1, o, -1, -2$, & $3, 2, 1, o$, donne $yy = \frac{1}{3}aa$; & mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, l'on trouve l'inconnue AE $(x) = \frac{1}{4}a$. Ce qui revient à l'art. 68.

AUTRE SOLUTION.

198. ON peut encore résoudre ce Problême en remarquant que du même point L ou K (*Fig.* 149. 150. *Pl.* 8.) on ne peut mener qu'une seule tangente LF ou KF ; parce qu'elle touche en dehors la partie concave AF, & en dedans la convexe FD ; au lieu que de tout autre point T ou H, pris sur AL ou AK entre A & L ou A & K, l'on peut mener deux tangentes TM, TD ou HM, HD, l'une de la partie concave, & l'autre de la convexe : de sorte qu'on peut considérer le point d'infléxion F comme la réunion des deux points touchans M & D. Si donc l'on suppose que AT (s) ou AH (t) soit donnée, & qu'on cherche (*Art.* 194.) la valeur de x ou y par rapport à s ou t ; l'on aura une équation qui aura deux racines AP, AB, ou PM, BD qui deviennent égales chacune à la cherchée AE ou EF,

lorsque s exprime AL & t, AK. C'est pourquoi l'on multipliera cette équation par une progression arithmétique arbitraire, &c.

EXEMPLE.

199. SOIT comme ci-dessus, $ayy = xyy + aax$; l'on aura encore $sy^3 - styy - atyy + aasy - aast = o$, qui étant multipliée par la progression arithmétique $1, o, -1, -2$, donne $y^3 * - aay - 2aat = o$, dans laquelle s ne se rencontre plus, & qui a deux racines inégales, sçavoir PM, BD, lorsque t exprime AH, & deux égales chacune à la cherchée EF lorsque t exprime AK. C'est pourquoi multipliant de nouveau cette derniére équation par la progression arithmétique $3, 2, 1, o$, l'on aura $3yy - aa = o$; & partant EF $(y) = \sqrt{\tfrac{1}{3}aa}$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION IV.

PROBLÉME.

200. MENER *d'un point donné* C (*Fig.* 151. *Pl.* 8.) *hors une ligne courbe* AMD *une perpendiculaire* CM *à cette courbe.*

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK sur le diamètre AB, & décrit du centre C de l'intervalle CM un cercle; il est clair qu'il touchera la courbe AMD au point M. Nommant ensuite les inconnues AP, x; PM, y; CM, r; & les connues AK, s; KC t: l'on aura PK ou CE $= s - x$, ME $= y + t$; & à cause du triangle rectangle MEC, $y = -t + \sqrt{rr - ss + 2sx - xx}$, ou

$x = s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$: de sorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus.

Si l'on décrit à présent du même centre C un autre cercle qui coupe la courbe en deux points N, D, d'où l'on abaisse les perpendiculaires NQ, DB; il est évident que r exprimant le rayon CN ou CD dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB ou NQ, DB qui deviennent égales entr'elles, sçavoir à la cherchée AP ou PM, lorsque r exprime le rayon CM. D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera, &c.

EXEMPLE.

201. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, dans laquelle mettant pour x sa valeur $s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$, l'on aura $as - yy = a\sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$: de sorte qu'en quarrant chaque membre, & ordonnant ensuite l'équation, l'on trouvera y^4, &c. qui doit avoir deux racines égales lorsque y exprime la cherchée PM.

$$\begin{array}{llllll}
y^4 & * & -2asyy & +2aaty & +aass & = o. \\
 & & +aa & & -aarr & \\
 & & & & +aatt & \\
4, & 3, & 2, & 1, & o. & \\
\hline
4y^4 & * & -4asyy & +2aaty & * & = o. \\
 & & +2aa & & &
\end{array}$$

C'eſt pourquoi on la multipliera par la progreſſion arithmétique 4, 3, 2, 1, o, ce qui donnera $4y^3 - 4asy + 2aay + 2aat = o$, dont la réſolution fournira pour y la valeur cherchée MP.

Si le point donné C tomboit ſur le diamètre AB (*Fig.* 152. *Pl.* 8.); l'on auroit alors $t = o$, & il faudroit effacer par conſéquent tous les termes où t ſe rencontre; ce qui donneroit $4as - 2aa = 4yy = 4ax$, en mettant pour yy ſa valeur ax. D'où l'on tireroit $x = s - \frac{1}{2}a$; c'eſt-à-dire, que ſi l'on prend CP égale à la moitié du paramètre, & qu'ayant tiré l'appliquée PM perpendiculaire ſur AB, l'on mene la droite CM, elle ſera perpendiculaire ſur la courbe AMD.

Corollaire.

202. Si l'on veut à préſent que le point M (*Fig.* 152. *Pl.* 8.) ſoit donné, & que le point C ſoit celui qu'on cherche; il faudra dans la derniere équation qui exprime la valeur de AC (s) par rapport à AP (x) ou PM (y), regarder ces dernieres comme connues, & l'autre comme l'inconnue.

Définition II.

Si d'un rayon quelconque de la développée l'on décrit un cercle, il ſera nommé *cercle baiſant*.

Le point où ce cercle touche ou baiſe la courbe, eſt appellé *point baiſant*.

Proposition V.

Problême.

203. *La nature de la courbe* AMD (*Fig.* 153. *Pl.* 8.) *étant donnée avec un de ſes points quelconques* M; *trouver le centre* C *du cercle qui la baiſe en ce point* M.

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK ſur l'axe, & nommé les lignes par les mêmes lettres que dans le Problême précédent; l'on arrivera à la même équation dans laquelle il faut obſerver que la lettre x ou y, que l'on y regarde comme l'inconnue, marque ici une grandeur donnée; & qu'au contraire s, t, que l'on y regarde comme connues, ſont en effet ici les inconnues auſſi bien que r.

Cela poſé, il eſt clair 1°. Que le point cherché C ſera ſitué ſur la perpendiculaire MG à la courbe. 2°. Que l'on pourra toujours décrire un cercle qui touchera la courbe en M, & la coupera au moins en deux points (dont je ſuppoſe que le plus proche eſt D, d'où l'on abaiſſera la perpendiculaire DB); puiſque l'on peut toujours trouver un cercle qui coupe une ligne courbe quelconque, autre qu'un cercle, au moins en quatre points, & que le point touchant M n'équivaut qu'à deux interſections. 3°. Que plus ſon centre G approche du point cherché C, plus auſſi le point d'interſection D approche du point touchant M: de ſorte que le point G tombant ſur le point C, le point D ſe réunit avec le point M ; puiſque (*Art.* 76.) le cercle décrit du rayon CM, doit toucher & couper la courbe au même point M. D'où l'on voit que s exprimant AF, & t, FG, l'équation doit avoir deux racines égales, ſçavoir (*Art.* 200.) chacune à AP ou PM ſelon qu'on a fait évanouir y ou x, & une autre AB ou BD qui devient auſſi égale à AP ou PM, lorſque s & t expriment les cherchées AK, KC ; & qu'ainſi cette équation doit avoir trois racines égales.

EXEMPLE.

204. **S**OIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, & l'on trouvera (*Art.* 201,) y^4, &c. qui étant multipliée par 8, 3, o, -1, o, produit des deux progreſſions arithmétiques 4, 3, 2, 1, o, & 2, 1, o, -1, -2 donne $8y^4 = 2aaty$.

$$\begin{array}{cccccc}
y^4 & * & -\,2asyy & +\,2aaty & +\,aass & = o. \\
 & & +\,aa & & -\,aarr & \\
 & & & & +\,aatt & \\
4, & 3, & 2, & 1, & o. & \\
2, & 1, & o, & -1, & -2. & \\
\hline
8y^4 & * & * & -\,2aaty & * & = o.
\end{array}$$

D'où l'on tire la cherchée KC ou PE $(t) = \frac{4y^3}{aa}$.

Si l'on veut avoir une équation qui exprime la nature de la courbe qui paſſe par tous les points C, l'on multipliera encore y^4, &c. par o, 3, 4, 3, o, produit des deux progreſſions 4, 3, 2, 1, o, & o, 1, 2, 3, 4 ; & l'on trouvera $8asy$

$-\,4aay = 6aat$: d'où, en ſuppoſant pour abréger $s - \frac{1}{2}a = u$, l'on tirera $y = \frac{3at}{4u}$, & $4y^3 = \frac{27a^3t^3}{16u^3} = aat$; & partant $16u^3 = 27att$. D'où il ſuit que la courbe qui paſſe par tous les points C, eſt une ſeconde parabole cubique, dont le paramètre $= \frac{27a}{16}$, & dont le ſommet eſt éloigné de celui de la parabole propoſée de $\frac{1}{2}a$; parce que $u = s - \frac{1}{2}a$.

Lorſque la poſition des parties de la courbe, voiſines du point donné M, eſt entierement ſemblable de part & d'autre de ce point, comme il arrive lorſque la courbure y eſt la plus grande ou la moindre ; il s'enſuit que l'une des interſections du cercle touchant ne peut ſe réunir avec le point touchant, que l'autre ne s'y réuniſſe en même temps : de ſorte que l'équation doit avoir alors quatre racines égales. En effet, ſi l'on multiplie y^4, &c. par 24, 6, o, o, o, produit des trois progreſſions arithmétiques 4, 3, 2, 1, o, & 3, 2, 1, o, -1, & 2, 1, o, -1, -2 ; l'on aura $24y^4 = o$: ce qui fait voir que le point M doit tomber ſur le ſommet A de la parabole, afin que la poſition des parties voiſines de la courbe ſoit ſemblable de part & d'autre.

AUTRE SOLUTION.

205. **O**N peut encore (*Fig.* 154. *Pl.* 8.) réſoudre ce Problême en ſe ſouvenant que l'on a démontré dans l'article 76 qu'on ne peut mener du point cherché C qu'une ſeule perpendiculaire

CM à la courbe AMD; au lieu qu'il y a une infinité d'autres points G ſur cette perpendiculaire MC, d'où l'on peut mener deux perpendiculaires MG, GD à la courbe. Si donc on ſuppoſe que le point G ſoit donné, & que l'on cherche (*Art.* 200.) la valeur de x ou y par rapport aux données s & t; il eſt viſible que cette équation doit avoir deux racines inégales, ſçavoir AP, AB ou PM, BD qui deviennent égales entr'elles lorſque le point G tombe ſur le point cherché C. C'eſt pourquoi l'on multipliera cette équation par une progreſſion arithmétique quelconque, &c.

Exemple.

206. Soit comme ci-deſſus $ax = yy$; & l'on aura (*Art.* 201.) $4y^3$, &c.

$$\begin{array}{l} 4y^3 \; * \; - 4asy + 2aat = 0. \\ \qquad\quad + 2aa \\ \;\; 2, \;\; 1, \quad 0, \; -1. \\ \hline 8y^3 \; * \quad * \; - 2aat = 0. \end{array}$$

qui étant multipliée par la progreſſion arithmétique $2, 1, 0, -1$, donne comme (*Art.* 204.) auparavant $t = \frac{4y^3}{aa}$.

Corollaire.

207. Il eſt évident qu'on peut (*Fig.* 153. 154. *Pl.* 8.) conſidérer le point baiſant comme (*Art.* 203.) la réunion d'un point touchant avec un point d'interſection du même cercle; ou bien comme (*Art.* 205.) la réunion de deux points

touchans de deux cercles différens & concentriques: de même que le point d'infléxion peut être regardé (*Art.* 196.) comme la réunion d'un point touchant avec un point d'interſection de la même droite, ou (*Art.* 198.) comme la réunion de deux points touchans de deux différentes droites qui partent d'un même point.

PROPOSITION VI.

Problême.

208. Trouver *une équation qui exprime la nature de la cauſtique* AFGK, (*Fig.* 155. *Pl.* 8.) *formée dans le quart de cercle* CAMNB, *par les rayons réfléchis* MH, NL, *&c. dont les incidens* PM, QN, *&c. ſont paralleles à* CB.

Je remarque, 1°. Que ſi l'on prolonge les rayons réfléchis MF, NG, qui touchent la cauſtique en F, G, juſqu'à ce qu'ils rencontrent le rayon CB aux points H, L; l'on aura MH égale à CH, & NL égale à CL. Car l'angle CMH = CMP = MCH; & de même l'angle CNL = CNQ = NCL.

2°. Que d'un point donné F ſur la cauſtique AFK, l'on ne peut mener qu'une ſeule droite MH qui ſoit égale à CH; au lieu que d'un point donné D entre le quart de cercle AMB & la cauſtique AFK, l'on peut mener deux lignes MH, NL telles que MH = CH & NL = CL. Car on ne peut mener du point F qu'une ſeule tangente MH; au lieu que du point D, on en peut mener deux MH, NL. Ceci bien entendu

Soit propoſé de mener d'un point donné D la droite MH, enforte qu'elle foit égale à la partie CH, qu'elle détermine fur le rayon CB.

Ayant mené MP, DO paralleles à CB, & MS parallele à CA, foient nommées les données CO ou RS, u; OD, z; AC ou CB, a; & les inconnues CP ou MS, x; PM ou CS, y; CH ou MH, r. Le triangle rectangle MSH donnera $rr = rr - 2ry + yy + xx$: d'où l'on tire CH $(r) = \frac{xx + yy}{2y}$. De plus les triangles femblables MRD, MSH donneront MR $(x - u)$. MS (x) : : RD $(z - y)$. SH $= \frac{zx - xy}{x - u}$. & partant CS+SH ou CH $= \frac{zx - uy}{x - u} = \frac{xx + yy}{2y} = \frac{aa}{2y}$ en mettant pour $xx + yy$ fa valeur aa. D'où l'on forme (en multipliant en croix) l'équation $aax - aau = 2zxy - 2uyy$; & mettant pour yy fa valeur $aa - xx$, il vient $2zxy = aax + aau - 2uxx$: quarrant enfuite chaque membre pour ôter les incommenfurables, & mettant encore pour yy fa valeur $aa - xx$, l'on aura enfin

$$\begin{array}{l} 4uux^4 - 4aaux^3 - 4aauuxx + 2a^4ux + a^4uu = 0. \\ 4zz \qquad\qquad\qquad\quad - 4aazz \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + a^4 \end{array}$$

Or il eft clair que u exprimant CO; & z, OD; cette égalité doit avoir deux racines inégales, fçavoir CP, CQ: & qu'au contraire u exprimant CE; & z, EF; CQ devient égale à CP, de forte qu'elle a pour lors deux racines égales. C'eft pourquoi fi l'on multiplie fes termes par ceux des deux progreffions arithmétiques 4, 3, 2, 1, o, & o, 1, 2, 3, 4, l'on formera deux égalités nouvelles par le moyen

defquelles on trouvera, après avoir fait évanouir l'inconnue x, cette équation.

$$\begin{array}{l} 64z^6 - 48aaz^4 + 12a^4zz - a^6 = 0, \\ \qquad + 192uu - 96aauu - 15a^4uu \\ \qquad\qquad + 192u^4 - 48aau^4 \\ \qquad\qquad\qquad + 64u^6 \end{array}$$

qui exprime la rélation de la coupée CE (u) à l'appliquée EF (z). Ce qu'il falloit trouver.

On peut déterminer le point touchant F en fe fervant de la méthode expliquée dans la huitieme Section. Car fi l'on imagine un autre rayon incident pm infiniment proche de PM; il eft clair que le réfléchi mh coupera MH au point cherché F, par lequel ayant tiré FE parallele à PM, l'on nommera CE, u; EF, z; CP, x; PM, y; CM, a: & l'on trouvera comme ci-deffus $\frac{aax + aau - 2uxx}{xy} = 2z$. Or il eft vifible que CM, CE, EF demeurent les mêmes pendant que CP & PM varient. C'eft pourquoi l'on prendra la différence de cette équation en traitant a, u, z, comme conftantes, & x, y, comme variables; ce qui donnera $2uyxxdx + aauydx - aaxxdy - aauxdy + 2ux^3dy = 0$, dans laquelle mettant pour dx fa valeur $-\frac{ydy}{x}$ (que l'on trouve en prenant la différence de $yy = aa - xx$), & enfuite pour yy fa valeur $aa - xx$, il vient enfin CE $(u) = \frac{x^3}{aa}$.

Si l'on fuppofe que la courbe AMB ne foit plus un quart de cercle, mais une autre courbe quelconque qui ait pour rayon de fa développée au point M la droite MC ; il est clair (*Art.* 76.) que sa petite portion Mm peut être regardée comme un arc de cercle décrit du centre C. D'où il suit que si l'on mene par ce centre la perpendiculaire CP sur le rayon incident PM, & qu'ayant pris $CE = \frac{x^3}{aa}$ ($CP = x$, $CM = a$) l'on tire EF parallele à PM; elle ira couper le rayon réfléchi M H au point F, où il touche la caustique A F K.

Si l'on tire par tous les points M, m d'une ligne courbe quelconque AMB, des lignes droites MC, mC à un point fixe C de son axe AC, & d'autres droites MH, mh terminées par la perpendiculaire CB à l'axe, ensorte que l'angle $CMH = MCH$, & $Cmh = mCh$; & qu'il faille trouver sur chaque M H le point F où elle touche la courbe A F K, formée par les intersections continuelles de ces droites MH, mh. On trouvera comme auparavant $CH = \frac{xx + yy}{2y} = \frac{zx - uy}{x - u}$: d'où l'on tire : $\frac{x^3 + uyy + xyy - uxx}{xy} = 2z$, dont la différence (en traitant u, z comme constantes, & x, y comme variables) donne $2x^3ydx - uxxydx - x^4dy + ux^3dy + xxyydy + uxyydy - uy^3dx = 0$; & partant la cherchée C E (u) $= \frac{2x^3ydx - x^4dy + xxyydy}{xxydx - x^3dy + y^3dx - xyydy}$. Or la nature de la ligne AMB étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx, laquelle étant substituée dans l'expression de CE, cette expression sera délivrée des différences & entiérement connue.

PROPOSITION VII.

PROBLÉME.

209. **S**OIT *une ligne droite indéfinie* AO (*Fig.* 156. *Pl.* 8.) *qui ait un commencement fixe au point* A; *soit entendue une infinité de paraboles* BFD, CDG *qui ayent pour axe commun la droite* AO, *& pour paramètres les droites* AB, AC *interceptées entre le point fixe* A, *& leurs sommets* B, C. *On demande la nature de la ligne* AFG *qui touche toutes ces paraboles.*

Je remarque d'abord que deux quelconques de ces paraboles BFD, CDG se couperont en un point D situé entre la ligne AFG & l'axe A O ; que AC devenant égal à AB, le point d'intersection D tombe sur le point touchant F. Ceci bien entendu,

Soit proposé de mener par le point donné D une parabole qui ait la propriété marquée. Si l'on mene l'appliqueé DO, & qu'on nomme les données AO, u; OD, z; & l'inconnue AB, x; la propriété de la parabole donnera $AB \times BO$ ($ux - xx$) $= \overline{DO}^2$ (zz) ; & ordonnant l'égalité, l'on aura $xx - ux + zz = 0$. Or il est évident que u exprimant AO ; & z, OD ; cette égalité a deux racines inégales, sçavoir AB, CA : & qu'au contraire u exprimant AE ; & z, EF ; AC devient égale à A B, c'est-à-dire, qu'elle a pour lors deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithmétique 1, o, -1 : ce qui donne $x = z$; & substituant cette valeur à la place de x, il vient l'équation $u = 2z$ qui doit exprimer la nature de la ligne AFG. D'où l'on voit que A F G est une ligne droite faisant avec AO l'angle FAO tel que AE est double de EF.

Si l'on veut résoudre cette question en général, de quelque degré que puissent être les paraboles BFD, CDG; on se servira de la Méthode expliquée dans la Section huitieme, en cette sorte. Nommant AE, u; EF, z; AB, x; l'on aura $\overline{u-x}^m \times x^n = z^{m+n}$ qui exprime en général la nature de la parabole BF, dont la différence donne (en traitant u & z comme constantes, & x comme variable) $-m \times \overline{u-x}^{m-1} dx \times x^n + n x^{n-1} dx \times \overline{u-x}^m = 0$; & divisant par $\overline{u-x}^{m-1} dx \times x^{n-1}$, il vient $-mx + nu - nx = 0$: d'où l'on tire $x = \frac{n}{m+n}u$; & partant $u - x = \frac{m}{m+n}u$. Mettant donc ces valeurs à la place de $u-x$, & de x dans l'équation générale; & faisant (pour abréger) $\frac{m}{m+n} = p$, $\frac{n}{m+n} = q$, $m+n = r$, l'on aura $z = u\sqrt[r]{p^m q^n}$. D'où l'on l'on voit que la ligne AFG est toujours droite, si composées que puissent être les paraboles, n'y ayant que la raison de AE à EF qui change.

On voit clairement par ce que l'on vient d'expliquer dans cette Section, de quelle maniere l'on doit se servir de la Méthode de Mr. Descartes & Hudde pour résoudre ces sortes de questions lorsque les Courbes sont Géométriques. Mais l'on voit aussi en même temps qu'elle n'est pas comparable à celle de M. Leibnits, que j'ai taché d'expliquer à fond dans ce Traité: puisque cette derniere donne des résolutions générales, où l'autre n'en fournit que de particulieres; qu'elle s'étend aux lignes transcendantes, & qu'il n'est point nécessaire d'ôter les incommensurables: ce qui seroit très souvent impraticable.

COMMENTAIRE

COMMENTAIRE

Des articles les plus difficiles de l'Analyse des Infiniment Petits.

La Préface que nous avons mise à la tête de l'Analyse des Infiniment Petits, *nous dispense de donner ici une idée générale du Commentaire que nous mettons à la suite de cet admirable Traité. Ce Commentaire n'est pas distingué des Notes suivantes.*

NOTE I.

LA demande, ou plutôt la supposition de l'*article* 2. *pag.* 3. que les Commençans n'accordent qu'avec peine, ne contient rien dans le fond qui ne soit bien raisonnable.

En effet, l'on regarde comme infiniment exactes les opérations des Géométres & des Astronomes; ils font cependant tous les jours des omissions beaucoup plus considérables que celles des Algébristes. Lorsqu'un Géométre, *par exemple*, prend la hauteur d'une montagne, fait-il attention à un grain de sable que le vent enléve de dessus son sommet? Lorsque les Astronomes nous parlent des étoiles fixes, ne négligent-ils pas le diamètre de la Terre dont la valeur est d'environ trois mille lieues? Lorsqu'ils calculent les éclipses de Lune, ne regardent-ils pas la Terre comme sphérique,

& par conséquent ont-ils égard aux maisons, aux tours, aux montagnes qui se trouvent sur sa surface ? Or tout cela est beaucoup moins à négliger que dx, puisqu'il faut un nombre infini de dx, pour faire x ; donc le calcul différentiel est dans le fond le plus sûr des calculs ; donc la demande de l'*article* 2. ne contient rien que de raisonnable. Toutes ces comparaisons sont tirées du Cours de Mathématique de Wolf, *Tom.* 1. *pag.* 418.

NOTE II.

L'ARTICLE 5. *pag.* 5. a besoin d'un Commentaire dans toutes les formes. On convient que la différence de xy est $ydx + xdy + dxdy$; mais on ajoute qu'on peut sans erreur sensible omettre dans la pratique $dxdy$. L'on a raison ; en voici la démonstration la plus rigoureuse. Pour la mettre à la portée de tout le monde, reprenons les choses d'un peu loin.

1°. Toute grandeur infinie se marque par quelqu'un des caracteres ∞, ∞^2, ∞^3 &c.

2°. Le premier de ces caractéres marque un infini du premier ordre, le second un infini du second ordre, le troisieme un infini du troisieme ordre &c.

3°. Un infini du second ordre est infiniment plus grand qu'un infini du premier ordre, & ainsi d'un infini du troisieme ordre par rapport à un infini du second.

4°. Une quantité infinie ne peut pas être augmentée par l'addition d'aucune quantité finie,

ni diminuée par la soustraction d'aucune quantité finie. Ainsi $\infty + 1 = \infty$; de même $\infty - 4 = \infty$. Ce que l'on a dit de l'infini par rapport au fini, on doit le dire de l'infini d'un ordre supérieur vis-à-vis l'infini d'un ordre inférieur. Ainsi $\infty^2 + \infty = \infty^2$; de même $\infty^3 - \infty^2 = \infty^3$. *Voyez-en la preuve dans la note précédente.*

5°. Toute grandeur infiniment petite est représentée par une fraction dont le numérateur est un fini & le dénominateur un infini. Ainsi $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$ &c. sont des fractions qui représentent des grandeurs infiniment petites du premier, du second & du troisieme ordre. Une grandeur infiniment petite est encore représentée par une fraction dont le numérateur est un infini d'un ordre inférieur à celui du dénominateur. Ainsi $\frac{\infty}{\infty^2}$ représente une grandeur infiniment petite. En effet, $\frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$.

6°. Un infiniment petit du second ordre représente une grandeur infiniment plus petite qu'un infiniment petit du premier ordre, & ainsi des autres à l'infini.

7°. Une quantité infiniment petite n'est rien par rapport à une quantité finie. Ainsi $1 + \frac{1}{\infty} = 1$; $1 - \frac{1}{\infty} = 1$. De même un infiniment petit du second ordre n'est rien vis-à-vis un infiniment petit du premier ordre. Ainsi $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Vous en trouverez la preuve dans la *note précédente*.

8°. xy est le produit de x multipliant y.

9°. $xy + ydx + xdy + dxdy$ est le produit de $x + dx$ multipliant $y + dy$, c'est-à-dire, est le produit de x augmenté d'une quantité infiniment petite, par y qui se trouve aussi augmenté d'une quantité infiniment petite; donc $ydx + xdy + dxdy$ est la différence de xy.

10°. $dxdy$ est une quantité infiniment petite du second ordre par rapport à $ydx + xdy$ qu'on doit regarder comme des quantités infiniment petites du premier ordre. En effet, prenons le rectangle ABCD ou xy, *Fig.* 157. *Pl.* 8. Augmentons sa base CD ou y de la quantité infiniment petite Dn ou dy, & sa hauteur BD ou x de la hauteur infiniment petite Dp ou dx; il est évident que le rectangle infiniment petit Bm Dn ou xdy, & le rectangle infiniment petit CD op ou ydx sont des rectangles infiniment plus grands que le rectangle Dnpr ou $dxdy$, parce que chacun des deux premiers est le produit d'une quantité finie par une quantité infiniment petite, au lieu que le second est le produit de deux quantités infinimeut petites; donc $dxdy$ est une quantité infiniment plus petite que ydx ou que xdy; donc on peut sans erreur sensible la négliger dans la pratique; donc si la différence de xy est $ydx + xdy + dxdy$, elle sera $ydx + xdy$.

11°. Il est donc vrai que la différence d'un produit composé de deux quantités contient la différence de la premiere quantité multipliée par la seconde, + la différence de la seconde quantité multipliée par la premiere. Il n'est pas moins vrai que la différence d'un produit composé de trois quantités se trouve en multipliant le produit des quantités posées de deux en deux par la différence de la troisieme. La différence, *par exemple*, de xyz est $yzdx + xzdy + xydz$; en voici la démonstration.

Je fais $xy = u$; donc la différence de u sera la même que la différence de xy; donc $ydx + xdy = du$.

De plus $xy = u$, donc $xyz = uz$; donc la différence de xyz sera la même que la différence de uz; donc la différence de xyz est $zdu + udz$. Mais $zdu = yzdx + xzdy$, parce que $du = ydx + xdy$; & $udz = xydz$, parce que $xy = u$; donc $zdu + udz = yzdx + xzdy + xydz$; donc si la différence de xyz est $zdu + udz$, elle sera par-là même $yzdx + xzdy + xydz$; donc la différence d'un produit composé de trois quantités se trouve en multipliant le produit des quantités posées de deux en deux par la différence de la troisieme. Par là même raison l'on aura la différence d'un produit composé de 4 quantités, en multipliant le produit des quantités posées de trois en trois par la différence de la quatrieme. La différence du produit $uxyz$ est donc $xyzdu + uyzdx + uxzdy + uxydz$. En général la différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres eſt égale à la ſomme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres. M. de l'Hôpital avance, *par exemple*, que la différence de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ eſt $bdx - ady - ydx - xdy$. Il a raiſon. En effet, $\overline{a+x} \times \overline{b-y} = ab + bx - ay - xy$. Mais ab n'ayant point de différence, celle de ce dernier produit eſt évidemment $bdx - ady - ydx - xdy$, donc &c.

NOTE III.

M. le Marquis de l'Hôpital aſſure, à l'*article* 6. *pag.* 6. que $\frac{ydx - xdy}{yy}$ eſt la différence de $\frac{x}{y}$. Pour le démontrer, je fais $\frac{x}{y} = z$; & j'avance que dans cette hipothéſe l'on aura $dz = \frac{ydx - xdy}{yy}$, donc l'on aura par là même $\frac{ydx - xdy}{yy}$ pour la différence de la fraction $\frac{x}{y}$. Le calcul ſuivant en ſera la preuve évidente.

1. $\frac{x}{y} = z$ par hypothéſe.
2. $x = yz$
3. $dx = zdy + ydz$
4. $ydz = dx - zdy$
5. $dz = \frac{dx}{y} - \frac{zdy}{y}$
6. $dz = \frac{dx}{y} - zd$

7. $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xd}{y}$
8. $dz = \frac{ydx - xdy}{yy}$

EXPLICATION.

1°. La premiere équation eſt une pure ſuppoſition, qu'on ne peut accorder, qu'en accordant que la ſeconde équation eſt inconteſtable.

2°. La troiſieme équation eſt fondée ſur ce principe; ſi $x = yz$, donc la différence de x ſera égale à la différence de yz.

3°. La quatrieme équation a été formée par les régles ordinaires, c'eſt-à-dire, en tranſportant dans l'autre membre de l'équation la quantité $+ zdy$, après l'avoir affectée du ſigne $-$.

4°. En diviſant par y la quatrieme équation, l'on a eu la cinquieme équation, & en ôtant dans celle-ci les lettres qui ſe détruiſent, l'on a eu la ſixieme équation.

5°. Pour trouver la ſeptieme équation, l'on a ſubſtitué dans le ſecond membre de la ſixieme à z ſa valeur $\frac{x}{y}$.

6°. La huitieme équation eſt la même que la ſeptieme, aux yeux de quiconque ſçait les premiers éléments de l'Algébre; donc ſi celle-ci eſt bonne, celle-là le ſera auſſi; donc la différence d'une fraction eſt égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, — au produit de la différence du dénominateur par le numérateur, le tout diviſé par le quarré du dénominateur ; donc la différence de $\frac{a}{x}$ eſt $\frac{-adx}{xx}$, parce que le numérateur a n'a point de différence ; donc la différence de $\frac{x}{a+x}$ eſt $\frac{adx+xdx-xdx}{aa+2ax+xx}$ $= \frac{adx}{aa+2ax+xx}$.

NOTE IV.

L'ARTICLE 7, *page 7*, demande une foule d'éclairciſſements ; ils ſeront renfermés dans les réponſes aux queſtions ſuivantes.

Premiere Queſtion. Comment pourroit-on prouver que -1 eſt l'expoſant de $\frac{1}{x}$?

Réponſe. $x^{-1} = \frac{1}{x}$. En effet $x^{-1} \times x^2 = x^{2-1} = x$; donc x eſt le produit du multiplicande x^2 par le multiplicateur x^{-1} ; donc $\frac{x}{x^2} = x^{-1}$, parce que la diviſion du produit par le multiplicande donne pour quotient le multiplicateur. Mais $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$; donc $x^{-1} = \frac{1}{x}$; donc en général une quantité élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre entier négatif, n'eſt autre que l'unité diviſée par la puiſſance poſitive de cette quantité ; donc $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; donc $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ &c.

Seconde Queſtion. Eſt-il vrai que $\sqrt[2]{x}$ ait pour expoſant $\frac{1}{2}$?

Réponſe. Cela eſt vrai, & en voici la preuve. $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$; mais $x^{\frac{1}{2}}$ a pour expoſant $\frac{1}{2}$, donc $\sqrt[2]{x}$ a pour expoſant $\frac{1}{2}$. Il s'agit donc de démontrer que $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$. La choſe n'eſt pas difficile. Voici comment il faut s'y prendre.

$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$; donc $x^{\frac{1}{2}}$ eſt la racine quarrée de x. Mais $\sqrt[2]{x}$ eſt la racine quarrée de x ; donc $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$; donc en général une quantité quelconque élevée à une puiſſance fractionnaire n'eſt autre choſe que la racine d'une puiſſance dont l'expoſant eſt le numérateur de la fraction, & le dénominateur eſt l'expoſant de la racine ; donc $\sqrt[3]{x^1} = x^{\frac{1}{3}}$; donc $\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$.

Troiſieme Queſtion. A quoi équivaut $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$?

Réponſe. $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$. Je le démontre. $\sqrt[2]{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ (*queſtion* 2^e.) ; donc $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Mais $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$ (*queſtion* 1re.) donc $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$; donc $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = x^{-\frac{5}{3}}$; donc $\frac{1}{\sqrt[2]{x^7}} = x^{-\frac{7}{2}}$.

Quatrieme Queſtion. Eſt-il vrai que 1, $\sqrt{x}$, x forment une progreſſion géométrique ?

Réponse. Il est évident que $1 : \sqrt[2]{x} :: \sqrt[2]{x} : x$; car $1 \times x = x$, & $\sqrt[2]{x} \times \sqrt[2]{x} = x$; donc $1, \sqrt[2]{x}, x$ sont trois termes en progression géométrique.

Leurs trois exposants $o, \frac{1}{2}, 1$ forment une progression arithmétique; car $o + 1 = 1$, & $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$.

Corollaire I. $1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x$ sont en progression géométrique. En effet, $1 : x^{\frac{1}{3}} :: x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{3}}$, car $1 \times x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$, & $x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$. De plus $x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{3}} :: x^{\frac{2}{3}} : x^1$, car $x^{\frac{1}{3}} \times x^1 = x^{1+\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$, & $x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$; donc $1, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}, x$, ou $1, \sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{xx}, x$ sont en progression géométrique.

Pour leurs exposants $o, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$; ils sont en progression arithmétique. En voici la preuve. $o \cdot \frac{1}{3} : \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$, puisque la somme des extrêmes $o + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, & que la somme des moyennes $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. De plus $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} : \frac{2}{3} \cdot 1$, puisque $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$, & que $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$; donc les exposants $o, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ sont en progression arithmétique.

Corollaire II. Par la même raison, $1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x$, ou, $1, x^{\frac{1}{5}}, x^{\frac{2}{5}}, x^{\frac{3}{5}}, x^{\frac{4}{5}}, x$ sont en progression géométrique; & leurs exposants $o, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$ ou $\frac{5}{5}$ sont en progression arithmétique.

Cinquieme Question. $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}, \frac{1}{xx}$ sont-ils en progression géométrique?

Réponse. $x^{-1}, x^{-\frac{3}{2}}, x^{-2}$ sont en progression géométrique; car $x^{-1} \times x^{-2} = x^{-3}$, & $x^{-\frac{3}{2}} \times x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{6}{2}} = x^{-3}$; donc x^{-1}, $x^{-\frac{3}{2}}, x^{-2}$ ou $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}, \frac{1}{xx}$ sont en progression géométrique.

Il n'est pas nécessaire de faire remarquer que leurs exposants $-1, -\frac{3}{2}, -2$ sont en progression arithmétique; la chose saute aux yeux. Il en est de même des autres progressions géométriques & arithmétiques que propose M. le Marquis de l'Hôpital; elles se présentent à tout Commençant qui sçait délivrer une quantité quelconque de son signe radical, en lui donnant un exposant fractionnaire.

Sixieme Question. Comment peut-on démontrer que $2xdx$ est la différence de xx.

Réponse. xx est le produit de x par x. La différence d'un produit composé de deux quantités contient (*Note* 2e.) la différence de la premiere quantité multipliée par la seconde, + la différence de la seconde quantité multipliée par la premiere; donc la différence de xx est $xdx + xdx = 2xdx$.

L'on prouvera par la même *note* que la différence de x^3 est $3x^2dx$; que celle de x^4 est $4x^3dx$; & qu'en général la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence. En nommant donc m un exposant quelconque entier positif, l'on dira que la différence de x^m est $mx^{m-1}dx$. De même en nommant $\frac{m}{n}$ un exposant quelconque fractionnaire positif, l'on aura $\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$, ou $\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}dx$, pour la différence de $x^{\frac{m}{n}}$. Enfin en prenant $-m$ pour un exposant quelconque entier négatif, & $-\frac{m}{n}$ pour un exposant quelconque fractionnaire négatif, l'on aura $-mx^{-m-1}dx$ pour la différence de x^{-m}, & $-\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m-n}{n}}dx$ pour la différence de $x^{-\frac{m}{n}}$.

Septieme Question. Comment peut-on démontrer que $-mx^{-m-1}dx = \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}$?

Réponse. Pour démontrer que $-mx^{-m-1}dx = \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}$, multiplions les deux membres de cette équation par x^{2m}, nous aurons $-mx^{-m+2m-1}dx = -mx^{m-1}dx$, ou $-mx^{m-1}dx = -mx^{m-1}dx$; donc, après la multiplication, les deux produits se sont trouvés égaux; donc les deux multiplicandes l'étoient avant la multiplication. Mais les deux multiplicandes étoient les

deux membres de l'équation $-mx^{-m-1}dx = \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}$; donc ces deux membres étoient réellement égaux.

L'on prouvera de la même maniere que $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$; donc en général la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence. Concluez de là qu'il n'est pas nécessaire de faire $x^{\frac{m}{n}} = z$, pour trouver la différence d'une puissance quelconque imparfaite.

Huitieme Question. Quelle est la différence du cube de $ay - xx$?

Réponse. La différence demandée est $3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$, parce que le cube de $ay - xx$ est $a^3y^3 - 3aayyx^2 + 3ayx^4 - x^6$. En effet, la différence de a^3y^3 est $3a^3yydy$ (*question* 6.) La différence de $-3aayyxx$ est $-6aaxxydy - 6aayyxdx$ (même question). La différence de $+3ayx^4$ est $+3ax^4dy + 12ayx^3dx$ (même question). Enfin la différence de $-x^6$ est $-6x^5dx$, (même question); donc la différence assignée est la véritable différence du cube de $ay - xx$.

Neuvieme Question. Quelle est la différence du radical $\sqrt{xy+yy}$?

Réponse. La différence demandée est $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$. En voici la démonstration. Pour la mettre à la portée de tout le monde, je fais $\sqrt{xy+yy}=u$. Cela supposé, voici comment je raisonne.

1°. $u=\sqrt{xy+yy}$; donc la différence de u sera la même que la différence de $\sqrt{xy+yy}$.

2°. $u=\sqrt{xy+yy}$; donc $uu=xy+yy$; donc la différence de uu sera la même que la différence de $xy+yy$; donc $2udu=ydx+xdy+2ydy$.

3°. $2udu=ydx+xdy+2ydy$; donc $du=\frac{ydx+xdy+2ydy}{2u}$; donc $du=\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$, parce que $u=\sqrt{xy+yy}$; donc dans l'hypothése proposée la différence de u est $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$. Mais dans cette même hypothése la différence de u est la même que la différence de $\sqrt{xy+yy}$; donc la différence de $\sqrt{xy+yy}$ est $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$.

Corollaire I. En faisant $\sqrt{a^4+axyy}=u$, vous trouverez par le même calcul que la différence de ce radical est $\frac{a^4+ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$.

Corollaire II. En faisant $\sqrt[3]{ax+xx}=u$, l'on trouvera que la différence de ce radical est $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx^2}}$; en voici la preuve la plus détaillée.

1°. $u=\sqrt[3]{ax+xx}$; donc $u=\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$ (question 2e.); donc $uu=\overline{ax+xx}^{\frac{2}{3}}$; donc $uu=\sqrt[3]{ax+xx^2}$ (même question).

2°. $u=\sqrt[3]{ax+xx}$; donc $uuu=ax+xx$; donc $3uudu=adx+2xdx$ (question 6e.)

3°. $3uudu=adx+2xdx$; donc $du=\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx^2}}$, parce que $uu=\sqrt[3]{ax+xx^2}$ (num. 1.); mais la différence du radical $\sqrt[3]{ax+xx}$ est la même que celle de u; donc elle sera $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx^2}}$.

Dixieme Question. Quelle est la différence du radical $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$.

Réponse. La différence demandée est

$$\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}\times 2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}.$$

Pour le démontrer, faisons $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}=u$; & voyons ce que vaudra du dans cette hypothése.

1°. $u=\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$; donc $uu=ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}$; donc $2udu=adx+2xdx+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$; donc du sera égal à $adx+2xdx$ divisé par $2u$ + à $\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$ divisé par $2u$ ou par $2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$.

2°. $adx + 2xdx$ divisé par $2u = \frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}$.

3°. $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$ divisé par $2u$ est égal, par les régles de la division des fractions à $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2u}$ $= \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}$;

donc $du = \frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}} + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}$; donc le problême à été résolu.

Corollaire. La différence que M. le Marquis de l'Hôpital assigne à la fraction $\frac{\sqrt[3]{ax + xx}}{\sqrt{xy + yy}}$, ne paroîtra pas embrouillée à ceux qui se rappelleront ce qui suit.

1°. La différence du numérateur $\sqrt[3]{ax + xx}$ est $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{ax + xx^2}}$ (*Cor. II. de la question* 9).

2°. La différence de $\sqrt{xy + yy}$ est $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$ (*question* 9).

3°. Le quarré de $\sqrt{xy + yy}$ est $xy + yy$.

4°. La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, — au produit de la différence du dénominateur par le numérateur, le tout divisé par le quarré du dénominateur (*Note* 3); donc la différence de la fraction proposée est égale à la différence du numérateur $\sqrt[3]{ax + xx}$ multipliée par le dénominateur $\sqrt{xy + yy}$, — à la différence du dénominateur $\sqrt{xy + yy}$ multipliée par le numérateur $\sqrt[3]{ax + xx}$; le tout divisé par $xy + yy$, quarré du dénominateur $\sqrt{xy + yy}$; donc la fraction proposée n'a pas d'autre différence que celle que lui a assignée M. le Marquis de l'Hôpital à la fin de l'article 7. pag. 12.

NOTE V.

Dans toute la Section seconde M. le Marquis de l'Hôpital se sert du calcul différentiel pour trouver les tangentes de toutes sortes de lignes courbes. Il suppose que le Lecteur a étudié avec attention tout ce qui regarde les sections coniques ; nous le supposons aussi. Malgré cela cependant nous allons lui rappeller en peu de mots les principales propriétés du Cercle, de la Parabole, de l'Ellipse & de l'Hyperbole. Cette espéce d'abrégé du Traité des sections coniques est absolument nécessaire pour rendre intelligible la plupart des problêmes & des exemples que contient cette seconde section.

1°. Si l'on coupe le cone ABC, *Fig.* 158. *Pl.* 8, parallélement à sa base circulaire AIKC,

& plus haut ou plus bas à volonté ; l'on aura un cercle LTH, d'autant plus grand ou d'autant plus petit, que la ſection ſera faite plus près ou plus loin de la baſe du cone. La propriété de cette courbe eſt que le quarré d'une ordonnée quelconque DF, *Fig.* 159. *Pl.* 8, eſt toujours égal au produit des coupées ou abſciſſes correſpondantes AF, FB. Nommons donc DFy, AB$2a$, AFx ; l'on aura AC ou CBa, FB $= 2a - x$; & l'équation ſera $DF^2 = AF \times FB$, ou $yy = 2ax - xx$; c'eſt là l'équation au cercle, en prenant le ſommet A pour l'origine des x ou des abſciſſes. Si l'on prenoit le centre C pour l'origine des abſciſſes, c'eſt-à-dire, ſi l'on faiſoit CF $= x$; l'on auroit AF $= a - x$, FB $= a + x$; & l'équation précédente ſe changeroit en celle-ci, $yy = aa - xx$.

2°. Si l'on coupe le cone ABC, *Fig.* 158. *Pl.* 8, obliquement à ſa baſe & parallélement à un de ſes côtés AB ; l'on aura la parabole IGK. Une parabole quelconque MSm, *Fig.* 160. *Pl.* 8, a pour ſommet le point S ; pour foyer, le point F ; pour grand axe, SP ; pour ordonnées au grand axe, les lignes PM, FN, pR ; pour coupées ou abſciſſes correſpondantes, les lignes SP, SF, Sp ; pour paramètre, une ligne quelconque égale à la double ordonnée Nn qui paſſe par le foyer F. La propriété de cette courbe, c'eſt que le quarré d'une ordonnée eſt égal au produit de l'abſciſſe correſpondante & du paramètre ; ainſi $PM^2 = SP \times Nn$. Nommons donc y une ordonnée quelconque ; nommons x ſon abſciſſe correſpondante, & p le paramètre ; l'on aura pour équation à la parabole $yy = px$.

3°. L'on a dans la parabole MSm l'équation $PM^2 = PS \times Nn$; l'on a encore dans la même parabole $pR^2 = pS \times Nn$; donc l'on aura $PM^2 : pR^2 :: PS \times Nn : pS \times Nn$; mais le paramètre nN eſt une quantité conſtante ; donc l'on aura $PM^2 : pR^2 :: PS : pS$; donc dans une parabole quelconque les quarrés des ordonnées ſont entr'eux comme leurs abſciſſes.

4°. L'on a dans la parabole $yy = px$; donc ſi $p = 1$, l'équation deviendra $yy = 1x = x$.

5°. L'on a dans la parabole $yy = px$; donc x croiſſant, y doit croitre auſſi, parce que p eſt une quantité invariable. Mais les x peuvent croitre à l'infini, parce que le grand axe de la parabole peut être prolongé à l'infini ; donc les y peuvent croitre à l'infini ; donc la parabole ira toujours en augmentant, & ne ſe fermera jamais.

6°. Si l'on coupe le cone ABC, *Fig.* 158. *Pl.* 8, obliquement à ſa baſe & à ſes deux côtés, de maniere que la ſection coupe les deux côtés du cone ; l'on aura une ellipſe DMN. Une ellipſe quelconque, *par exemple*, l'ellipſe ABED, *Fig.* 161. *Pl.* 8, a pour grand axe, AB ; pour petit axe, ED ; pour foyer, F, f ; pour centre de figure, C ; pour ordonnée, PM, pm ; pour abſciſſes correſpondantes à l'ordonnée PM, les lignes AP, PB ; pour abſciſſes correſpondantes à pm, les lignes Ap, pB ; pour paramètre du grand axe, la double ordonnée Nn qui passe par le foyer F. Dans cette espéce de courbe, l'on a toujours la proportion suivante, le quarré d'une ordonnée quelconque est au produit de ses abscisses correspondantes, comme le paramètre est au grand axe, ou $PM^2 : AP \times PB :: Nn : AB$. Nommons donc AB, $2a$; ED, $2b$; Nn, p; PM, y; AP, x; l'on aura $PB = 2a - x$, & la proportion précédente se changera en celle-ci, $yy : 2ax - xx :: p : 2a$; donc $2ayy = 2apx - pxx$; donc $yy = \frac{2apx - pxx}{2a}$; donc $yy = px - \frac{pxx}{2a}$; & c'est-là l'équation au paramètre de l'ellipse, en prenant l'un des sommets A pour l'origine des abscisses.

7°. Si l'on avoit pris l'origine des abscisses au centre C, *c'est-à-dire*, si l'on avoit $CP = x$, l'on auroit eu $AP = a - x$, & $PB = a + x$. La proportion précédente se seroit donc changée en celle-ci; $yy : aa - xx :: p : 2a$; donc $2ayy = aap - pxx$: donc $yy = \frac{aap - pxx}{2a}$; donc $yy = \frac{1}{2}ap - \frac{pxx}{2a}$; & c'est-là l'équation au paramètre de l'ellipse, en prenant les abscisses depuis le centre C.

8°. $2ayy = aap - pxx$; donc $\frac{2ayy}{p} = aa - xx$; donc x augmentant, le second membre $aa - xx$ doit diminuer. Le second membre ne peut pas diminuer, sans que le premier membre $\frac{2ayy}{p}$ diminue. Mais dans ce premier membre, il n'y a que y

qui puisse diminuer, parce que le grand axe $2a$ & le paramètre p sont des quantités constantes; donc dans l'ellipse x augmentant, y doit diminuer. Mais x ne peut augmenter que jusqu'à un certain point, parce que le grand axe de cette courbe est déterminé; donc l'ellipse se fermera dans les deux points où les x ne seront plus susceptibles d'augmentation; donc elle se fermera aux deux sommets A & B.

9°. L'on a dans l'ellipse $PM^2 : AP \times PB :: Nn : AB$; l'on a encore $pm^2 : Ap \times pB :: Nn : AB$ (*num.* 6); donc l'on aura $PM^2 : AP \times PB :: pm^2 : Ap \times pB$; donc $PM^2 : pm^2 :: AP \times PB : Ap \times pB$; donc dans l'ellipse les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes.

10°. Il est encore démontré dans tous les Traités des Sections coniques, que dans toute ellipse le quarré d'une ordonnée quelconque est au produit des abscisses correspondantes, comme le quarré du demi-petit axe est au quarré du demi-grand axe; donc l'on aura, en prenant l'origine des abscisses à l'un des sommets, la proportion suivante; $yy : 2ax - xx :: bb : aa$; donc $aayy = 2abbx - bbxx$; donc $yy = \frac{2abbx - bbxx}{aa}$; donc $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$; & c'est-là l'équation aux axes de l'ellipse, en prenant l'origine des abscisses à l'un des sommets.

11°. Dans toute ellipse le quarré d'une ordonnée quelconque est au produit des abscisses correspondantes, comme le quarré du demi-petit axe eſt au quarré du demi-grand axe; donc, en prenant l'origine des abſciſſes au centre C, l'on aura $yy : aa - xx :: bb : aa$; donc $aayy = aabb - bbxx$; donc $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$; donc $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$; & c'eſt-là l'équation aux axes de l'ellipſe, en prenant le centre de la courbe pour l'origine des abſciſſes.

12°. Il eſt enfin démontré dans tous les Traités des Sections coniques que dans une ellipſe quelconque le grand axe eſt au petit axe, comme le petit axe eſt au paramètre.

13°. Si l'on coupe le cone ABC, (*Fig.* 158. *Pl.* 8), obliquement à ſa baſe, & aux deux côtés du cone, de maniere que la Section prolongée en haut, aille couper un des côtés AB, auſſi prolongé; l'on aura l'hyperbole FHE, dont le grand axe ſera HR, à l'extrêmité duquel on pourra former une ſeconde hyperbole égale à celle dont nous venons de parler, afin d'avoir deux hyperboles oppoſées ſur un même axe HR. L'hyperbole nAM, (*Fig.* 162. *Pl.* 8), a pour axe principal, AB; pour petit axe, DE; pour foyers, F, f, pour centre commun aux deux hyperboles oppoſées, le point C; pour ordonnée, PM, à laquelle correſpondent les abſciſſes AP, BP; pour paramètre du grand axe, la double ordonnée Nn qui paſſe par le foyer F. Faiſons donc $AB = 2a$, AC ou $CB = a$, $DE = 2b$, DC ou $CE = b$, $Nn = p$, $PM = y$, $AP = x$, l'on aura $BP = 2a + x$. Dans

cette eſpéce de courbe l'on a toujours la proportion ſuivante, le quarré d'une ordonnée quelconque eſt au produit des abſciſſes correſpondantes, comme le paramètre eſt à l'axe principal; donc $PM^2 : AP \times BP :: Nn : AB$; donc $yy : 2ax + xx :: p : 2a$; donc $2ayy = 2apx + pxx$; donc $yy = \frac{2apx + pxx}{2a}$; donc $yy = px + \frac{pxx}{2a}$; & c'eſt-là l'équation au paramètre de l'hyperbole, en comptant les abſciſſes depuis le ſommet.

14°. A quelques ſignes près, l'équation eſt la même pour l'ellipſe & pour l'hyperbole. En effet, l'équation commune à ces deux courbes eſt $yy = px \mp \frac{pxx}{2a}$. Dans les doubles ſignes le ſupérieur eſt pour l'ellipſe, & l'inférieur pour l'hyperbole.

15°. En comptant les abſciſſes depuis le centre C, c'eſt-à-dire, en nommant CP, x; l'on aura $AP = x - a$, & $BP = x + a$. Dans cette hypothéſe le produit des abſciſſes correſpondantes ſera $xx - aa$; & la proportion de *num.* 13. ſe changera en celle-ci, $yy : xx - aa :: p : 2a$; donc $2ayy = pxx - aap$: donc $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$; & c'eſt-là l'équation au paramètre de l'hyperbole, en comptant les abſciſſes depuis le centre C.

16°. A cauſe des quantités conſtantes $2a$ & p, les quarrés des ordonnées PM, pm ſont entr'eux comme les produits de leurs abſciſſes correſpondantes. Le calcul eſt le même que celui que nous avons fait pour l'ellipſe, *num.* 9.

17°. L'hyperbole va toujours en s'élargiſſant, & elle ne doit jamais ſe fermer. En effet, dans l'équation $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$, x augmentant, y doit auſſi augmenter, parce que les quantités repréſentées par a & par p ſont des quantités invariables. Mais x peut augmenter à l'infini, parce qu'on peut prolonger AP à l'infini; donc y peut augmenter à l'infini; donc les ordonnées à l'hyperbole repréſentées par y, vont toujours en augmentant à meſure qu'elles s'éloignent du ſommet A; donc l'hyperbole va toujours en s'élargiſſant; donc elle ne doit jamais ſe fermer.

18°. Dans l'hyperbole équilatere $2a = p$; donc l'équation générale $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$ ſe réduit pour l'hyperbole équilatére à $yy = xx - aa$; ce qui donne $x - a : y :: y : x + a$; donc dans cette eſpéce de courbe l'ordonnée eſt moyenne proportionnelle entre les abſciſſes correſpondantes.

19°. Dans l'hyperbole comme dans l'ellipſe, $2a : 2b :: 2b : p$, c'eſt-à-dire, le paramètre eſt une troiſieme proportionnelle au grand & au petit axe.

20°. Les lignes Qq, Gg, (*Fig.* 162. *Pl.* 8.) qui ſe coupent au centre C, & dont la premiere eſt paralléle à la ligne AE, & la ſeconde à la ligne AD, ſont les aſſymptotes des deux hyperboles oppoſées nAM, mMB. Il eſt démontré dans tous les Traités des Sections coniques que le rectangle ſous l'ordonnée hn & l'abſciſſe Ch eſt égal au quarré de AH. Faiſons donc $hn = y$, $Ch = x$, & $AH = a$;

nous aurons $xy = aa$, & c'eſt-là l'équation de l'hyperbole rapportée à ſes aſſymptotes.

21°. Tout ce que nous avons dit juſqu'à préſent doit s'entendre des Sections coniques ordinaires, c'eſt-à-dire, des Sections coniques tirées d'un cone qui a pour baſe un cercle ordinaire. L'on trouvera *num.* 1. ce qu'il faut entendre par cercle ordinaire.

22°. Les Sections coniques d'un genre ſupérieur ſont tirées d'un cone qui a pour baſe un cercle d'un genre ſupérieur, c'eſt-à-dire, une courbe dont les ordonnées & les abſciſſes fourniſſent une équation d'un plus haut degré que celle que donnent les ordonnées & les abſciſſes d'un cercle ordinaire.

23°. Suppoſons que le cone ABC, (*Fig.* 158. *Pl.* 8), ait pour baſe une courbe dans laquelle le cube de PQ ſoit égal au produit du quarré de AQ multiplié par QC; ce cone donnera les Sections ſuivantes.

La parabole qui en ſera tirée, aura pour équation $y^3 = p^1 x^2$.

L'ellipſe tirée de ce même cone aura pour équation $y^3 = px^2 - \frac{px^3}{2a}$, ou $2ay^3 = 2apx^2 - px^3$; ce qui ſe réduit à la proportion ſuivante, $y^3 : x^2 \times (2a - x^1) :: p : 2a$.

L'équation à l'hyperbole tirée de ce même cone ſera $y^3 = px^2 + \frac{px^3}{2a}$, ou $2ay^3 = 2apx^2 + px^3$; ce qui donne la proportion ſuivante, $y^3 : x^2 \times (2a + x^1) :: p : 2a$.

24°. L'équation à la parabole cubique étant $y^3 = p^1x^2$, elle sera sera par là même $y^{1+2} = p^1x^2$, & elle sera en général pour toute parabole d'un genre supérieur $y^{m+n} = p^mx^n$. De même l'équation du *num.* 23. se changera, pour l'ellipse & pour l'hyperbole, en l'équation générale $y^{m+n} = px^n \mp \frac{px^{m+n}}{2a}$.

25°. Il faut donc que dans l'équation générale appliquable aux ellipses & aux hyperboles d'un genre supérieur, l'exposant de y soit égal à la somme des exposants des deux abscisses correspondantes à l'ordonnée y. Il faut encore que dans l'équation générale appliquable à une parabole quelconque d'un genre supérieur, l'exposant de y soit égal à la somme des exposants de l'abscisse correspondante & du paramètre. Aussi l'équation $y^3 = p^2x^1$ est-elle autant l'équation à une parabole cubique que $y^3 = p^1x^2$; parce que l'une & l'autre donnent l'équation générale $y^{m+n} = p^mx^n$.

26°. Tout ce que nous avons avancé dans cette *Note*, est dévelopé & démontré dans tout Traité des Sections coniques. On peut consulter celui que nous avons donné dans la troisiéme édition de notre petit Dictionnaire de Physique en 2 volumes *in*-8°, imprimé à Avignon chez la Veuve GIRARD en l'année 1767. On peut encore consulter le Traité des Sections coniques de l'Abbé de la Caille, & le Commentaire que nous avons donné de ce Traité dans notre *Guide des jeunes Mathématiciens*, imprimé à Avignon chez la même Veuve GIRARD en l'année 1765.

NOTE VI.

LES deux questions suivantes jetteront un grand jour sur l'*article* 9, *page* 14.

Premiere Question. Comment peut-on démontrer que les triangles *m*RM, MPT, (*Fig.* 3. *Pl.* 1.) sont semblables?

Réponse. Les deux triangles *m*RM, MPT ont d'abord un angle droit chacun, l'un en R, l'autre en P. Ils ont ensuite l'angle T égal à l'angle M, parce que le côté infiniment petit M*m* étant confondu avec la ligne MT prolongée, & cette ligne coupant les deux paralleles TP, MR; il est impossible que l'angle extérieur M ne soit pas égal à l'angle intérieur T; donc les deux triangles *m*RM, MPT sont équiangles; donc ils sont semblables; donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels.

Seconde Question. Comment la connoissance de la soutangente PT, (*Fig.* 3. *Pl.* 1.), peut-elle conduire à la connoissance de la tangente MT.

Réponse. En connoissant la longueur de la soutangente PT, l'on a le point T auquel doit aboutir la tangente demandée. Le point M d'où cette tangente doit partir, est donné de position; donc en connoissant la longueur de la soutangente PT, l'on a les deux points extrêmes de la tangente MT; donc la connoissance de la soutangente PT conduit nécessairement à la connoissance de la tangente MT, parce que d'un point quelconque à un point quelconque on peut toujours tirer une ligne droite. Pour trouver donc facilement une tangente quelconque MT, il ne s'agit que de ſçavoir manier la formule générale $\frac{ydx}{dy} = PT$, en différenciant l'équation de la courbe à laquelle on veut tirer une tangente.

NOTE VII.

L'on apprend dans l'*article* 11, *pag.* 15. à tirer des tangentes à des paraboles & à des hyperboles de tous les genres. Il s'agit d'abord de tirer une tangente à une courbe dont l'équation eſt $ax = yy$. Cette courbe eſt évidemment (*Note* 5. *num.* 2.) une parabole ordinaire dont y eſt une ordonnée quelconque, x l'abſciſſe correſpondante, & a le paramètre. En différentiant l'équation $ax = yy$, l'on trouve tout de ſuite que dans cette courbe $dx = \frac{2ydy}{a}$. La ſoutangente PT eſt dans toutes les courbes égale à $\frac{ydx}{dy}$. Mais dans la parabole ordinaire $dx = \frac{2ydy}{a}$; donc dans la parabole ordinaire l'on aura $PT = \frac{2yydy}{ady} = \frac{2yy}{a}$. Dans cette même parabole l'on a $yy = ax$; donc $\frac{2yy}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x$; donc dans la parabole ordinaire la ſoutangente $PT = 2x = 2AP$, (*Fig.* 3. *Pl.* 1); c'eſt-là le *num.* 1. de l'*article* 11.

Le *num.* 2. du même *article* apprend à tirer une tangente à une courbe dont l'équation eſt $aa = xy$. C'eſt-là (*Note* 5, *num.* 20.) l'équation de l'hy-

perbole ordinaire rapportée à ſes aſſymptotes. Cette équation différentiée devient, à cauſe de la conſtante a, $ydx + xdy = 0$; donc $ydx = -xdy$; donc $dx = -\frac{xdy}{y}$. La ſoutangente PT eſt dans toutes les courbes égale à $\frac{ydx}{dy}$; donc l'on aura dans l'hyperbole ordinaire $PT = -\frac{xydy}{ydy} = -x$; donc en prenant $PT = PA$, (*Fig.* 4. *Pl.* 1), & en plaçant PT du côté oppoſé au point A, l'on aura la longueur de la ſoutangente à laquelle répond la tangente MT. Il n'eſt pas néceſſaire de faire remarquer que le point A eſt le point d'interſection des deux aſſymptotes de l'hyperbole repréſentée par la figure 4 de la planche 1. Il eſt encore moins néceſſaire de faire remarquer que les Géométres ſont convenus de déſigner les poſitions oppoſées des lignes par les ſignes + & —. Si $PT = +x$, lorſque le point T eſt au deſſus du point A, c'eſt-à-dire, au deſſus du point de l'origine des x; l'on aura $PT = -x$, lorſque le point T ſera au deſſous du point A. Ce ſont là des connoiſſances que l'on doit ſuppoſer dans tout homme qui entreprend de lire un Traité auſſi difficile que celui des *Infiniment Petits.*

Le *num.* 3 de l'*article* 11. demande un long Commentaire. Pour le rendre plus clair, nous allons le renfermer dans les réponſes aux queſtions ſuivantes.

Premiere Queſtion. De quelle eſpéce de parabole parle-t-on au *num.* 3 de l'*article* 11.

Réponse. M. le Marquis de l'Hôpital parle, au *num*. 3. de l'*article* 11, des paraboles d'un genre supérieur, puisqu'il a parlé des paraboles ordinaires, au *num*. 1 du même article.

Seconde Question. Pourquoi, dans l'équation générale $y^m = x$, M. le Marquis de l'Hôpital ne fait-il pas mention du paramètre de la courbe?

Réponse. Parce qu'il suppose ce paramètre $= 1$. Or $1x = x$: & comme toutes les puissances de 1 donnent 1; si $p = 1$, l'on aura $px = x$, $p^2x = x$, $p^3x = x$ &c.

Troisieme Question. Comment l'équation générale $y^m = x$ peut-elle convenir aux paraboles d'un genre supérieur, puisque nous avons assuré (*num*. 24 & 25 de la *Note* 5.) que ces courbes avoient pour équation générale $y^{m+n} = p^m x^n$, ou $y^{m+n} = p^n x^m$.

Réponse. 1°. Nous verrons dans la réponse à la question 5e., que lorsque l'exposant m est un nombre fractionnaire positif plus grand que l'unité, l'équation $y^m = x$ équivaut à l'équation générale $y^{m+n} = p^m x^n$.

2°. L'équation $y^m = x$ équivaudra à l'équation $y^{m+n} = p^n x^m$, si l'on suppose que l'exposant m que donne à y M. Le Marquis de l'Hôpital, est égal à l'exposant de x qui est 1, + à l'exposant du paramètre qui multiplie x. En effet, supposons $m = 3$; l'équation $y^m = x$ deviendra $y^3 = 1^2 x^1$, c'est-à-dire, le cube d'une ordonnée quelconque est égal au produit de l'abscisse correspondante par le quarré du paramètre égal

à l'unité; ce qui est en effet l'équation à une espéce de paraboles cubiques.

Quatrieme Question. La valeur générale de la soutangente PT étant $\frac{ydx}{dy}$, comment peut-il se faire que PT devienne $= mx$ dans les courbes dont l'équation est $y^m = x$.

Réponse. Le calcul suivant va servir de solution à cette question. $y^m = x$, donc la différence de y^m sera égale à la différence de x, donc $my^{m-1}dy = dx$; donc en faisant entrer la nouvelle valeur de dx dans la formule générale $\frac{ydx}{dy}$, l'on aura $PT = \frac{y \times my^{m-1}dy}{dy} = my^m$. Mais $y^m = x$, *par hypothése*, donc $my^m = mx$; donc $PT = mx$.

Cinquieme Question. Comment l'équation $y^{\frac{3}{2}} = x$, peut-elle devenir $y^3 = axx$?

Réponse. Elle le devient par le calcul suivant. $y^{\frac{3}{2}} = x$, donc $\sqrt[2]{y^3} = x$ (*Note* 4e. *question* 2.) donc $y^3 = xx$; donc $y^3 = 1xx$; donc, en faisant le paramètre $1 = a$, l'on aura $y^3 = axx$; donc $y^{1+2} = a^1 x^2$; donc $y^{m+n} = a^m x^n$.

L'on trouvera par la même méthode que $y^{\frac{4}{3}} = x$, devient $y^4 = axxx$. En effet, $y^{\frac{4}{3}} = x$, donc $\sqrt[3]{y^4} = x$, donc $y^4 = xxx$; donc $y^4 = 1xxx$, donc $y^4 = axxx$, donc $y^{1+3} = a^1 x^3$, donc $y^{m+n} = a^m x^n$, donc nous avons eu raison d'asſurer dans la réponſe à la troiſieme queſtion, que lorſque l'expoſant m eſt un nombre fractionnaire poſitif plus grand que l'unité, l'équation $y^m = x$ équivaut à l'équation générale $y^{m+n} = p^m x^n$.

Sixieme Queſtion. Comment peut-on prouver que $y^{-2} = x$ donne l'équation $a^3 = xyy$, laquelle équation convient à l'hyperbole cubique rapportée à ſes aſſymptotes?

Réponſe. 1°. Il faut ſe rappeller que $aa = xy$ eſt l'équation à l'hyperbole ordinaire rapportée à ſes aſſymptotes (*Note* 5e. *num.* 20.)

2°. $y^{-2} = x$, donc $\frac{1}{y^2} = x$ (*Note* 4e. *queſtion* 1.) donc $1 = xyy$; mais dans le cas préſent $1 = a^3$, puiſqu'on ne peut pas avoir $aa = xy$, ſans avoir $a^3 = xyy$, donc $y^{-2} = x$ équivaut à $xyy = a^3$.

Septieme Queſtion. D'où eſt tirée la proportion $dx : dy :: my^{m-1} : 1$?

Réponſe. Cette proportion eſt tirée de l'équation $my^{m-1}dy = dx$. En effet, vous aurez cette équation, en multipliant d'un côté les extrêmes, de l'autre les moyennes de la proportion donnée.

Huitieme Queſtion. Pourquoi, en ſuppoſant $y = o$, la raiſon de dy à dx eſt-elle infiniment grande, lorſque m ſurpaſſe 1?

Réponſe. Lorſque m ſurpaſſe 1, l'expoſant $m - 1$ eſt un expoſant poſitif. Si $y = o$, & que $m - 1$ ſoit un expoſant poſitif, le terme my^{m-1} devient o; donc la proportion $dx : dy :: my^{m-1} : 1$ devient $dx : dy :: o : 1$, ou $dy : dx :: 1 : o$. Mais

Mais 1 eſt infiniment plus grand que o, donc dy eſt infiniment plus grand que dx; donc, en ſuppoſant $y = o$, la raiſon de dy à dx eſt infiniment grande, lorſque m ſurpaſſe 1.

Neuvieme Queſtion. Pourquoi, en ſuppoſant $y = o$, la raiſon de dy à dx eſt-elle infiniment petite, lorſque m eſt moindre que 1?

Réponſe. Lorſque m eſt moindre que 1, l'expoſant $m - 1$ eſt un expoſant négatif. Suppoſons $m = \frac{1}{2}$, l'expoſant $m - 1$ ſera $-\frac{1}{2}$, & le terme my^{m-1} ſe changera en $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}}$ (*Note* 4e. *queſt.* 1.) Suppoſons maintenant $y = o$, le terme $\frac{1}{\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}}$ ſera $\frac{1}{o}$; donc en ſuppoſant $y = o$, & m moindre que 1, le terme my^{m-1} deviendra $\frac{1}{o}$, & la proportion $dx : dy :: my^{m-1} : 1$ ſe changera en celle-ci $dx : dy :: \frac{1}{o} : 1$, ou $dy : dx :: 1 : \frac{1}{o}$. Mais 1 eſt infiniment plus petit que $\frac{1}{o}$, parce que o eſt contenu une infinité de fois dans 1; donc, en ſuppoſant $y = o$, la raiſon de dy à dx eſt infiniment petite, lorſque m eſt moindre que 1.

NOTE VIII.

LA formule générale $PT = \frac{ydx}{dy}$ s'applique dans l'*article* 12, *pag.* 17, à des ellipſes de tous les genres. La premiere ellipſe à laquelle on l'applique, eſt une ellipſe ordinaire (*Note* 5. *num.* 6), puiſqu'on ſuppoſe que la courbe AMB, (*Fig.* 5.

Pl. 1), est telle que le rectangle sous les abscisses AP, PB est au quarré de l'ordonnée PM, comme le grand axe AB est au paramètre AD; ce qui donne l'équation $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, en faisant le grand axe $AB = a$, & le paramètre $AD = b$. Cette équation différentiée devient $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$; donc $dx = \frac{2aydy}{ab - 2bx}$. Mettons cette nouvelle valeur de dx dans la formule générale $PT = \frac{ydx}{dy}$, l'on trouvera $PT = \frac{2ayydy}{\overline{ab - 2bx} \times dy} = \frac{2ayy}{ab - 2bx}$. Mais l'équation de l'ellipse AMB donne $\frac{ayy}{b} = ax - xx$; donc $\frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$; donc $PT = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$. Mais $AT = PT - AP = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x} - x = \frac{2ax - 2xx - ax + 2xx}{a - 2x} = \frac{ax}{a - 2x}$; donc $AT = \frac{AB \times AP}{AB - 2AP}$.

L'on apprend ensuite dans le même *article* 12 à tirer une tangente à une ellipse d'un genre supérieur. L'ellipse qu'on suppose est telle, que le cube de $AP \times$ le quarré de PB est à la cinquieme puissance de PM, comme le diamètre AB est au paramètre AD; ce qui donne l'équation $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a - x}^2$, ou $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{aa - 2ax + xx}$, ou enfin $\frac{ay^5}{b} = aax^3 - 2ax^4 + x^5$. Cette équation différentiée devient $\frac{5ay^4dy}{b} = 3aaxxdx - 8ax^3dx + 5x^4dx$; donc $dx = \frac{5ay^4dy}{3aabx^2 - 8abx^3 + 5bx^4}$. Faisons entrer la nouvelle valeur de dx dans la formule générale $PT = \frac{ydx}{dy}$; nous aurons $\frac{5ay^5dy}{(3aabx^2 - 8abx^3 + 5bx^4) \times dy} = \frac{5ay^5}{3aabx^2 - 8abx^3 + 5bx^4} = PT$. Mais $\frac{ay^5}{b} = aax^3 - 2ax^4 + x^5$; donc en substituant cette nouvelle valeur, l'on aura $PT = \frac{5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5}{3aax^2 - 8ax^3 + 5x^4}$; & en divisant le numérateur & le dénominateur de cette derniere fraction par $axx - x^3$, l'on aura pour quotient $PT = \frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$. Mais $AT = PT - AP = \frac{5ax - 5xx}{3a - 5x} - x = \frac{5ax - 5xx - 3ax + 5xx}{3a - 5x} = \frac{2ax}{3a - 5x}$; donc dans l'ellipse dont il s'agit, l'on aura $AT = \frac{2AB \times AP}{3AB - 5AP}$.

L'on pourroit demander ici de prouver que le numérateur $5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5$ divisé par $axx - x^3$ donne pour quotient $5ax - 5xx$. La preuve se présente d'elle-même. Multipliez le diviseur $axx - x^3$ par $5ax - 5xx$, vous aurez pour produit le dividende $5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5$; donc le numérateur $5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5$ divisé par $axx - x^3$ donne pour quotient $5ax - 5xx$.

L'on prouvera de la même maniere que le dénominateur $3aax^2 - 8ax^3 + 5x^4$ divisé par $axx - x^3$ donne pour quotient $3a - 5x$.

M. le Marquis de l'Hôpital termine l'*article* 12 par une formule générale appliquable à toutes les ellipses d'un genre supérieur. Cette formule générale est (*Note* 5, *num.* 23, 24, 25). $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$. Tout ce qui peut arrêter un Commençant dans le calcul de cette formule, est éclairci dans les questions suivantes.

Premiere Question. Quelle est la division qui a donné le quotient $\frac{\overline{m+nx}\times\overline{a-x}}{ma-x-nx}$ tiré de la fraction

$$\frac{\overline{m+nx}^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1}\times\overline{a-x}^n - \overline{na-x}^{n-1}\times x^m}.$$

Réponse. 1°. Le numérateur de la fraction d'où ce quotient est tiré, est $\overline{m+nx}^m \times \overline{a-x}^n$. La quantité $\overline{m+nx}^m$ a été divisée par x^{m-1}. En effet $\overline{m+nx}^m$ divisé par x^{m-1} donne $\overline{m+nx}^{m-m+1} = \overline{m+nx}^1 = \overline{m+nx}$. Pour la quantité $\overline{a-x}^n$, elle a été divisée par $\overline{a-x}^{n-1}$, puisque $\overline{a-x}^n$ divisé par $\overline{a-x}^{n-1} = \overline{a-x}^{n-n+1} = \overline{a-x}^1 = a-x$.

2°. Le dénominateur de la fraction qui a donné le quotient dont on parle, est $mx^{m-1}\times\overline{a-x}^n - \overline{na-x}^{n-1}\times x^m$. Ce dénominateur est comme composé de deux parties ; la premiere est $mx^{m-1}\times\overline{a-x}^n$. La premiere quantité de cette premiere partie, c'est-à-dire, mx^{m-1} a été divisée par x^{m-1},

ce qui a donné m pour quotient. La seconde quantité de cette même partie a été divisée par $\overline{a-x}^{n-1}$; ce qui a donné pour quotient, comme ci-dessus, $a-x$. Aussi le quotient total de cette premiere partie est-il $m\times\overline{a-x} = \overline{ma-x}$.

La seconde partie du dénominateur en question est $-\overline{na-x}^{n-1}\times x^m$. L'on a divisé $-\overline{na-x}^{n-1}$ par $\overline{a-x}^{n-1}$, & l'on a eu pour quotient $-n$. L'on a ensuite divisé x^m par x^{m-1}, & l'on a eu, comme ci-dessus, pour quotient $x^1 = x$. Aussi le quotient total de cette seconde partie est-il $-n\times x = -nx$.

3°. Si $PT = \frac{\overline{m+nx}\times\overline{a-x}}{ma-x-nx}$; l'on aura évidemment $PT = \frac{\overline{m+n}\times\overline{ax-xx}}{ma-mx-nx} = \frac{\overline{m+n}\times\overline{ax-xx}}{ma-m-nx}$.

Seconde Question. Comment a-t-on trouvé $AT = \frac{nax}{ma-m-nx}$?

Réponse. $AT = PT - AP = \frac{\overline{m+n}\times\overline{ax-xx}}{ma-m-nx}$

$$- x = \frac{\overline{m+n}\,ax - \overline{m-n}\,xx}{ma-m-nx} - x$$

$$= \frac{\overline{m+n}\,ax - \overline{m-n}\,xx - max + \overline{m+n}\,xx}{ma-m-nx}$$

$= \frac{nax}{ma-m-nx}$; à cause des quantités qui se détruisent dans le numérateur.

Corollaire. Toutes les opérations que nous venons de faire dans cette *Note* 8 prouvent qu'il est plus facile de manier une équation qui a des chiffres pour *expoſants*, que d'en manier une dont les expoſants ſont des lettres.

NOTE IX.

L'ARTICLE 13, *pag.* 18 eſt pour l'hyperbole, ce que l'*article précédent* a été pour l'ellipſe. Voici quelques remarques qui ſerviront à l'éclaircir.

1°. La lecture de la *Note* 5ᵉ, convaincra tout homme qui eſt au fait des Sections coniques, que l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$ eſt une équation générale à toute hyperbole dont on fait le grand axe AB, (*Fig.* 6. *Pl.* 1), $= a$, & le paramètre $= b$. Cette équation maniée comme celle de l'ellipſe dont elle ne diffère que par les ſignes, ſert à trouver les tangentes finies de l'hyperbole.

2°. L'aſymptote eſt la tangente infinie de l'hyperbole, c'eſt-à-dire, la tangente d'une hyperbole qu'on ſuppoſe s'être élargie à l'infini. La ligne CE, *par exemple*, ne peut être regardée comme tangente de l'hyperbole AM, (*Fig.* 6. *Pl.* 1), qu'autant qu'on ſuppoſera infinies l'abſciſſe AP $= x$, & l'ordonnée PM $= y$. Dans cette hypothéſe l'équation $\frac{nax}{ma + m + nx}$ devient d'abord $\frac{nax}{m + nx}$, parce que ma eſt infiniment petit vis-à-vis $m + nx$ (*Note* 2, *num.* 4). Mais $\frac{nax}{m + nx} = \frac{n}{m+n} a$; donc dans cette hypothéſe AT devient $\frac{n}{m+n} a$.

Mais en conſidérant CE comme tangente, AT devient AC; donc en conſidérant CE comme tangente, l'on aura $AC = \frac{n}{m+n} a$.

3°. Par la même raiſon l'équation générale $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$ deviendra, à cauſe du terme infiniment petit a vis-à-vis le terme infiniment grand x, $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times x^n$, ou $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m+n}$ ou enfin $ay^{m+n} = bx^{m+n}$.

4°. Si l'on fait $m + n = p$, l'on aura $ay^p = bx^p$.

5°. Si l'on extrait la racine p des deux membres de cette derniere équation, l'on aura $\sqrt[p]{ay^p} = \sqrt[p]{bx^p}$ ou $y\sqrt[p]{a} = x\sqrt[p]{b}$; donc $dy\sqrt[p]{a} = dx\sqrt[p]{b}$, parce que les conſtantes $\sqrt[p]{a}$ & $\sqrt[p]{b}$ n'ont point de différence; donc $dx : dy :: \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b}$.

6°. En ſuppoſant la ligne CE prolongée à l'infini, on concevra au point où l'aſymptote CE rencontrera l'hyperbole AM, un triangle infiniment petit qui ſera ſemblable au triangle CAE, c'eſt-à-dire, qui ſera vis-à-vis le triangle CAE, ce que le triangle infiniment petit MRm, (*Fig.* 3. *Pl.* 1), eſt vis-à-vis le triangle TPM. L'on pourra donc dire du triangle infiniment petit idéal MRm & du triangle fini CAE, que ces deux triangles ont leurs côtés homologues proportionnels; donc MR : mR :: CA : AE; donc $dx : dy$ :: CA : AE. Mais (*num.* 5) $dx : dy :: \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b}$;

donc $\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} :: CA : AE$. Mais (*num.* 2) CA $= \frac{n}{m+n} a = \frac{n}{p} a$; donc $\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} :: \frac{n}{p} a : AE$;

donc $AE = \frac{\frac{n}{p} a \times \sqrt[p]{b}}{\sqrt[p]{a}}$; donc $AE = \frac{\frac{n}{p} \sqrt[p]{ba^p}}{\sqrt[p]{a}}$;

donc $AE = \frac{n}{p} \sqrt[p]{ba^{p-1}}$; donc connoissant CA, il sera très facile de trouver AE, & de tirer par les points C & E l'asymptote CE.

7°. Dans l'hyperbole ordinaire où $m = 1$ & $n = 1$, la formule $AC = \frac{n}{m+n} a = \frac{n}{p} a$ devient $AC = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} AB$, c'est-à-dire, l'asymptote doit partir du centre du grand axe AB.

8°. Dans l'hyperbole ordinaire, la formule $AE = \frac{n}{p} \sqrt[p]{ba^{p-1}} = \frac{n}{m+n} \sqrt[m+n]{ba^{m+n-1}}$ devient $AE = \frac{1}{2} \sqrt[2]{ba^{1+1-1}} = \frac{1}{2} \sqrt{ba}$.

9°. Dans l'hyperbole dont il s'agit ici, l'on a fait le grand axe $= a$ & le paramètre $= b$; donc le petit axe sera $= \sqrt{ab}$, parce que dans l'hyperbole le grand axe : au petit axe : : le petit axe : au paramètre (*Note* 5. *num.* 19); donc en faisant le petit axe $= c$, l'on aura $a : c :: c : b$; donc $cc = ab$; donc $c = \sqrt{ab}$; donc si $AE = \frac{1}{2} \sqrt{ab}$, il faudra que la ligne A E par l'extrêmité de laquelle passera l'asymptote CE, soit égale à la moitié du petit axe de l'hyperbole donnée.

NOTE X.

L'on suppose dans l'*article* 14, *pag.* 19 une courbe quelconque AM, (*Fig.* 6. *Pl.* 1.) dont l'équation soit $y^3 - x^3 = axy$; l'on apprend dans cet article à tirer à cette courbe des tangentes finies & infinies, les réponses aux questions suivantes le mettront à la portée de tout le monde.

Premiere Question. Comment a-t-on trouvé $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$.

Réponse. La différence de l'équation donnée étant $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$, l'on aura $3yydy - axdy = 3xxdx + aydx$; donc $dx = \frac{3yydy - axdy}{3xx + ay}$. Mettons cette nouvelle valeur de dx dans l'équation $PT = \frac{ydx}{dy}$, nous aurons $PT = \frac{3y^3dy - axydy}{3xx + ay \times dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$.

Seconde Question. Comment a-t-on trouvé $AT = \frac{axy}{3xx + ay}$?

Réponse. $AT = PT - AP = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay} - x = \frac{3y^3 - axy - 3xxx - axy}{3xx + ay} = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay}$. Mais $3y^3 - 3x^3 = 3axy$, puisque *par hypothèse* $y^3 - x^3 = axy$; donc l'on aura $\frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay} = \frac{3axy - 2axy}{3xx + ay} = \frac{axy}{3xx + ay} = AT$. Voilà pour les tangentes finies.

Troisieme Question. En faisant $t = \frac{axy}{3xx + ay}$, comment a-t-on trouvé $y = \frac{3tx}{a}$?

Réponse. Le calcul suivant le fera toucher au doigt. $t = \frac{axy}{3xx + ay}$; donc $3txx + aty = axy$; donc $3txx = axy - aty$; donc $y = \frac{3txx}{ax - at}$. Mais en supposant x infini, l'on a $ax - at = ax$ (*Note* 2, *num.* 4); donc dans cette hypothése l'on aura $y = \frac{3txx}{ax} = \frac{3tx}{a}$.

Quatrieme Question. Comment a-t-on trouvé $AC = t = \frac{1}{3}a$?

Réponse. On l'a trouvé par le calcul suivant. Par hypothése l'on a $y^3 - x^3 = axy$. Mais $y = \frac{3tx}{a}$, donc l'on aura $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = \frac{3atxx}{a}$; donc $\frac{27t^3x^3 - a^3x^3}{a^3} = 3txx$; donc $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3txx$; donc $27t^3x^3 - 3a^3txx = a^3x^3$. Mais à cause de l'infini du troisieme ordre x^3, l'on aura $27t^3x^3 - 3a^3txx = 27t^3x^3$ (*Note* 2. *num.* 4.); donc $27t^3x^3 = a^3x^3$; donc $3tx = ax$, parce que les deux racines cubiques de deux cubes égaux sont égales; donc $3t = a$; donc $t = \frac{a}{3} = \frac{1}{3}a$; donc le point d'où doit partir l'asymptote CE est trouvé, puisque AC doit être le tiers de la ligne donnée a.

Cinquieme Question. Comment a-t-on trouvé $AS = y - \frac{xdy}{dx}$?

Réponse. Au point où l'asymptote CE, (*Fig.* 6. *Pl.* 1), touchera la courbe. Imaginez, comme dans la *Note précédente*, *num.* 6, un triangle infiniment petit MRm dont les deux côtés dx & dy seront en proportion avec les deux côtés AT & AS du triangle TAS. Mais $AT = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$; donc l'on pourra dire $dx : dy :: \frac{ydx - xdy}{dy} : AS$; donc $AS \times dx = \frac{\overline{ydx - xdy} \times dy}{dy}$; donc $AS \times dx = ydx - xdy$; donc $AS = \frac{ydx - xdy}{dx} = y - \frac{xdy}{dx}$.

Sixieme Question. Comment a-t-on trouvé $AS = s = \frac{axy}{3yy - ax}$?

Réponse. 1°. L'on a trouvé (*quest.* 1. *de cette note*) $3yydy - axdy = 3xxdx + aydx$; donc $dy = \frac{3xxdx + aydx}{3yy - ax}$.

2°. $AS = y - \frac{xdy}{dx}$ (*question précédente*) donc $AS = y - \frac{x}{dx} \times dy = y - \frac{x}{dx} \times \frac{3xxdx + aydx}{3yy - ax} = y - \frac{3x^3dx - axydx}{\overline{3yy - ax} \times dx} = y - \frac{3x^3 - axy}{3yy - ax}$

$= \frac{3y^3 - axy - 3x^3 - axy}{3yy - ax} = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3yy - ax}$.

3°. *Par hypothése*, $y^3 - x^3 = axy$; donc $3y^3 - 3x^3 = 3axy$; donc si AS $= \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3yy - ax}$, l'on aura AS $= \frac{3axy - 2axy}{3yy - ax} = \frac{axy}{3yy - ax}$; donc en faisant AS $= s$, l'on aura $s = \frac{axy}{3yy - ax}$.

Septieme Question. Comment a-t-on trouvé $s = \frac{1}{3} a$?

Réponse. 1°. $s = \frac{axy}{3yy - ax}$; donc $3syy - asx = axy$; donc $axy + asx = 3syy$; donc $x = \frac{3syy}{ay + as}$.

2°. En supposant y infini, l'on aura $ay + as = ay$ (*Note* 2. *num.* 4.) donc $x = \frac{3syy}{ay} = \frac{3sy}{a}$.

3°. L'équation à la courbe en question est $y^3 - x^3 = axy$? donc elle sera $y^3 - \frac{27s^3y^3}{a^3} = 3syy$; donc $a^3y^3 - 27s^3y^3 = 3a^3syy$; donc $a^3y^3 = 27s^3y^3 + 3a^3syy$. Mais à côté de l'infini du troisieme ordre y^3, le terme $3a^3syy$ devient nul (*Note* 2. *num.* 4); donc l'on aura $27s^3y^3 = a^3y^3$; donc l'on aura par l'extraction de la racine cubique, $3sy = ay$; donc $3s = \frac{ay}{y}$; donc $3s = a$; donc $s = \frac{a}{3}$; donc $s = \frac{1}{3}a$; donc lorsque AS devient AE, l'on aura AE $= \frac{1}{3}a$; donc en prenant les lignes AC, AE égales chacune au tiers de la ligne donnée a, & en menant par les points C & E la ligne indéfinie CE, l'on aura l'asymptote de la courbe AM.

Remarque. C'est ainsi qu'il faut lire les autres propositions de ce Livre, si l'on veut en saisir toute la beauté & toute l'utilité. Dans les Notes suivantes nous nous occuperons moins à faire des calculs, qu'à donner une idée nette de certaines courbes dont M. le Marquis de l'Hôpital suppose que son Lecteur a une connoissance parfaite. Ces courbes sont la cycloide, la spirale, la conchoide, la cissoide, la logarithmique, &c, &c. Par là nous rendrons un véritable service aux Commençans qui ne sçauroient trop s'exercer à trouver, sans le secours d'autrui, la marche que notre incomparable Auteur a suivie, pour arriver à telle ou telle équation.

NOTE XI.

AVANT que de lire l'*article* 15, *pag.* 21, il est nécessaire de se former une idée nette de la *Cycloide* que l'on appelle quelquefois *Roulete*, & quelquefois *Trochoide*. C'est une courbe produite par une entiere révolution d'un globe ou d'un cercle sur une ligne droite. Imaginez-vous donc un cercle qui roule sur une ligne droite, *par exemple*, sur une ligne horizontale. Lorsque tous les points de sa circonférence se seront exactement appliqué sur cette ligne, il aura décrit une courbe à laquelle on a donné le nom de *Cycloide*. Le P. Mersenne s'est apperçu le premier que le clou de l'une des roues d'une charéte décrivoit dans l'air une *Cycloide*, parce qu'il étoit animé de deux mouvements simultanés, l'un en avant en ligne droite, l'autre circulaire autour de l'essieu de la roue. Cette découverte fut faite en 1615. La *Figure* 7 de la *Planche* 1 représente une demi-cycloide. Sa demi-circonférence CMA a été produite par la révolution de la demi-circonférence circulaire APB sur la ligne CB. Cette ligne CB, nécessairement égale à la demi-circonférence APB, s'appelle la *base* de la demi-cycloide CMA. Elle a pour *axe* le diamètre AB du cercle *générateur*, c'est-à-dire, du cercle par la révolution duquel elle a été produite; pour *sommet*, le point A; & pour *tangente* au point M, la ligne MT parallele à la corde AP. Il est démontré que le contour de la cycloide est quadruple du diamètre de son cercle générateur; l'on a donc la courbe CMA double du diamétre AB. Il est encore démontré que si d'un point quelconque M de la cycloide CMA, on mene une ligne quelconque MPQ parallele à la base CB, & qui coupe en un point quelconque P le cercle générateur APB décrit sur l'axe AB, il est démontré, dis-je, que l'arc de cercle AP qui dans cette occasion prend le nom de *coupée*, est égal à la droite MP que l'on regarde comme l'*appliquée* correspondante de la *coupée* dont nous venons de parler. Il est enfin démontré que la corde AP de la *coupée* AP est parallele à la ligne MT tangente au point M de la cycloide CMA, & que cette même ligne MT a pour soutangente la ligne PT tangente du cercle au point P. Toutes ces vérités sont démontrées dans tous

les Traités complets de Méchanique, & nommément dans celui de M. l'Abbé de la Caille, *pag.* 180. *art.* 515 *& suiv.* Rien donc n'est plus facile que de trouver l'équation à la cycloide. Nommons pour cela x la coupée AP, y l'appliquée MP, b la base CB, & a la demi-circonférence APB; nous aurons $x : y :: a : b$, parce que $x = y$, & $a = b$; donc $bx = ay$; donc $x = \frac{ay}{b}$; & c'est là l'équation à la cycloide simple, dont il est question dans cette seconde proposition; & en général dans toute cycloide la circonférence du cercle générateur est à la base, comme la coupée est à l'appliquée.

NOTE XII.

QUOIQU'IL ne s'agisse dans les *articles* 17 & 18, *pag.* 22 que de la cycloide simple, il est bon cependant de sçavoir ce qu'il faut entendre par *cycloide allongée*, & par *cycloide accourcie*. Dans la premiere la base est plus longue, & dans la seconde elle est plus courte que la circonférence du cercle générateur. Voyez-en la formation physique dans l'endroit de la Méchanique de M. l'Abbé de la Caille que nous avons indiqué dans la Note précédente. Ce qu'il faut remarquer ici avec attention, c'est que dans la cycloide simple l'on a nécessairement MP = PT, (*Fig.* 7, *Pl.* 1), parce que MP $= y$, & que PT $= \frac{ay}{b}$ devient $= y$ dans cette courbe, à cause de $a = b$. M. le Marquis de l'Hôpital a donc raiſon de dire (*art.* 18) que dans la cycloide ſimple le triangle MPT eſt iſoſcéle. Il a encore raiſon de dire que l'angle APQ, eſt meſuré par la moitié de l'arc AP, parce que ſi le cercle APB étoit fini, l'angle APQ inſiſteroit ſur un arc de cercle égal à l'arc AP.

NOTE XIII.

L'ARTICLE 21, *page* 25 préſente deux difficultés. L'on dit 1°. que puiſque PT eſt $\frac{sydx}{xdy}$, il ſera $\frac{\overline{mst+nsty}^{\,m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m}$. Cette valeur ne coutera preſque rien à trouver, ſi l'on prend garde que l'équation $m+ny^{m+n-1}dy = \frac{mtz^n x^{m-1}dx - nsz^n x^{m-1}dx}{t}$ donne naturellement $dx = \frac{mt+nty^{m+n-1}dy}{mtz^n x^{m-1} - nsz^n x^{m-1}}$. L'on fera entrer cette valeur de dx dans $\frac{sydx}{xdy}$, & l'on trouvera à l'inſtant ce que l'on cherche.

La ſeconde difficulté que préſente l'*article* 21 eſt beaucoup plus conſidérable. M. le Marquis de l'Hôpital y avance que ſi les courbes AQC, BCN, (*Fig.* 8, *Pl.* 1), devenoient des lignes droites, la courbe MC, ſeroit alors une des Sections coniques à l'infini. M. Varignon a rendu cette remarque ſenſible par les Figures 163 & 164 de la Pl. 8. ſur leſquelles il faut continuellement avoir les yeux. Soit, *dit-il*, un triangle quelconque rectiligne ECF, dont C ſoit le ſommet, EF la baſe, & CE, FC les deux côtés, leſquels repréſentent les deux courbes AQC, BCN dont ils étoient auparavant les tangentes. Des points N d'un des côtés CF, pris & prolongé à diſcrétion, ſoient autant de NP paralléles à CD, leſquelles rencontrent la baſe EF en P, & l'autre côté en Q. Soit pris enſuite ſur ces NP un point M, tel que l'on ait partout $\overline{PQ}^m : \overline{PM}^m :: \overline{PM}^n : \overline{PN}^n$, je dis que la courbe MMC ſera une des ſections coniques à l'infini. Il n'eſt pas néceſſaire de faire remarquer que m & n repréſentent des expoſants quelconques.

Dém. A cauſe des paralléles PN, CD, l'on aura PQ : CD :: EP : ED, & PN : CD :: PF : DF; donc $\overline{PQ}^m : \overline{CD}^m :: \overline{EP}^m : \overline{ED}^m$, & $\overline{PN}^n : \overline{CD}^n :: \overline{PF}^n : \overline{DF}^n$; donc, en multipliant par ordre, l'on aura $\overline{PQ}^m \times \overline{PN}^n : \overline{CD}^{m+n} :: \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n : \overline{ED}^m \times \overline{DF}^n$. Mais, *par hypothéſe*, $\overline{PQ}^m : \overline{PM}^m :: \overline{PM}^n : \overline{PN}^n$; donc $\overline{PQ}^m \times \overline{PN}^n = \overline{PM}^{m+n}$; donc la cinquieme des proportions précédentes ſe changera en celle-ci, $\overline{PM}^{m+n} : \overline{CD}^{m+n} :: \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n : \overline{ED}^m \times \overline{DF}^n$.

Suppoſons maintenant $m = 1$, & $n = 1$, l'on aura $PM^2 : CD^2 :: EP \times PF : ED \times DF$, c'eſt-à-dire, le quarré de l'ordonnée PM : au quarré de l'ordonnée CD :: le rectangle ſous les abſciſſes qui correſpondent à l'ordonnée PM : au rectangle qui correſpondent à l'ordonnée CD; ce qui eſt le lieu à l'ellipſe & à l'hyperbole ordinaires (*Note* 5, *num.* 9 & 16); donc $\overline{PM}^{m+n} : \overline{CD}^{m+n} :: \overline{EP}^{m} \times \overline{PF}^{n} : \overline{ED}^{m} \times \overline{DF}^{n}$ eſt le lieu à l'ellipſe & à l'hyperbole de quelque genre qu'elles ſoient; donc ſi les courbes AQC, BCN, *Fig.* 8. *Pl.* 1. deviennent des lignes droites, la courbe MC ſera alors une des ſections coniques à l'infini, ſçavoir une ellipſe, lorſque l'appliquée CD, qui part du point de rencontre C, tombe entre les extrêmités A, B, & une hyperbole, lorſqu'elle tombe de part ou d'autre.

Enfin, M. le Marquis de l'Hôpital aſſure que ſi les courbes AQC, BCN deviennent des lignes droites, & que l'une des deux, *par exemple*, AQC ſoit paralléle au diamètre AB, la courbe MC ſera une parabole, parce que dans cette courbe les diamètres ſont paralléles à l'axe, & que la courbe AQC transformée en ligne droite, deviendra diamètre de la courbe MC qui aura AB pour axe.

NOTE XIV.

LA Propoſition 5, *pag.* 26 ſuppoſe la connoiſſance de la ſpirale d'Archiméde dont voici la conſtruction & l'équation. Diviſez la circonférence ABCD, *Fig.* 165. *Pl.* 8, en un certain nombre de parties égales, *par exemple*, en 4. Faites-en de même pour ſon rayon aA. Imaginez-vous enſuite que le rayon aA parcourt en 4 inſtants égaux la

circonférence ABCD, tandis que dans le même tems le centre a monte de a en A. Il eſt évident que par ce double mouvement ce centre décrira la premiere ſpirale a, b, c, d, A. La ſeconde AghiF ſera décrite de la même maniere. Le centre a devra monter juſqu'au point F, tandis que le rayon aF parcoura la circonférence FGHI.

Pour avoir l'équation à la premiere ſpirale, nommons b la circonférence ABCD, a ſon rayon aA, & ſuppoſons que le rayon aA parcoure l'arc AC, tandis que le centre a parcourt $a\text{N} = ac$. Dans cette ſuppoſition nous aurons l'arc AC pour abſciſſe, & ac pour ſon appliquée correſpondante. Si l'on appelle cette abſciſſe x, & ſon appliquée correſpondante y; l'on dira la circonférence ABCD parcourue en 4 inſtants égaux : au rayon aA parcouru dans ce même tems :: l'abſciſſe AC parcourue, *par exemple*, en 2 inſtants : à l'appliquée $a\text{N} = ac$ parcourue auſſi dans 2 inſtants, c'eſt-à-dire, $b : a :: x : y$, donc $by = ax$, donc $y = \frac{ax}{b}$, & c'eſt là l'équation à la ſpirale d'Archiméde. Deſcartes prétend dans le livre 2 de ſa Géometrie que cette courbe n'eſt que mécanique. Voyez la diſcuſſion de ce point de Mathématique dans la vie littéraire de ce grand Homme, *pag.* 301 & *ſuivantes*; elle forme le premier volume de notre *Traité de paix entre Deſcartes & Newton*, 3 *vol. in-*12 imprimé à Avignon chez la Veuve GIRARD en l'année 1763.

NOTE XV.

LA Proposition 6, *pag.* 28 suppose la connoissance de la conchoide de Nicoméde; aussi allons nous en faire la description, & assigner ensuite l'équation de cette courbe. Imaginez-vous donc les lignes droites indéfinies AP, CBc, *Fig.* 166. *Pl.* 8, qui se coupent à angles droits au point B. Sur la premiere vous déterminerez AB & BP; & après avoir pris le point P pour point fixe, vous ferez tourner autour de cette espéce de pole la ligne BA, de telle sorte qu'elle passe toujours sur la *directrice* CBc. Dans toutes les positions que AP aura vis-à-vis CBc, vous couperez au dessus & au dessous de CBc les lignes CD, C*d*, *c*D, *cd* égales à BA. La courbe qui joindra les points D, D sera la conchoide supérieure; & celle qui joindra les points *d*, *d* sera la conchoide inférieure. Si l'on nomme BA, a; PD, y; PC, x; l'on aura nécessairement $PD - PC = DC$, donc $PD - PC = BA$, donc $y - x = a$; & c'est-là l'équation à la conchoide de Nicoméde.

NOTE XVI.

L'ARTICLE 26, *page* 30 peut absolument se passer de commentaire. Si cependant l'on se trouvoit arrêté sur la fin de cet article, l'on pourroit consulter, non pas le livre 3, mais la section 4 de la partie 1 du livre 2 de la Géométrie de Descartes commentée par le P. Rabuel Jésuite, & imprimée en un vol. *in*-4°. en 1730 à Lyon chez Duplain. Au reste la Paraboloide dont parle M. le Marquis de l'Hôpital, n'est pas le solide que les Géométres appellent *conoide paraboloide*, c'est une ligne courbe du troisieme degré formée par l'intersection continuelle d'une ligne droite & d'une parabole ordinaire. *Voyez Descartes & son Commentateur à l'endroit cité.*

NOTE XVII.

POUR comprendre sans peine la proposition 8, *pag.* 31, il faut se former auparavant une idée de la cissoide de Dioclés représentée par la figure 14 de la planche 1. En voici la formation. L'on me donne le demi-cercle BAF avec la tangente infinie B*b*. Du point F, je tire jusqu'à la tangente B*b* prolongée à volonté, les lignes F*b*, FA que je continue mentalement jusqu'en V, FR que je continue mentalement jusqu'en *r* &c. Parmi les lignes tirées du point F à la tangente B*b*, je fais ensorte qu'il y en ait une, comme FA, qui passe par le milieu A de la demi-circonférence BAF. Sur la ligne F*b*, je prens $FM = bN$. Sur la ligne FA prolongée mentalement jusqu'en V, je prens $FA = AV$. Sur la ligne FR prolongée mentalement jusqu'en *r*, je prens $Ft = Rr$; la courbe qui passera par les points F, M, A, *t* sera la cissoide de Dioclés. Dans cette courbe l'on a $FM = bN$, & par conséquent $Fb = FN + FM$. L'on a encore $FP = Pb$, & par conséquent $Fb = 2FP$. Mais

$Fb = FN + FM$, donc $FN + FM = 2FP$. Nommons donc avec M. de l'Hôpital $FM\, y$, $FN\, z$, $FP\, x$, l'on aura $y + z = 2x$; & c'est-là l'équation à la ciſſoide.

NOTE XVIII.

La connoiſſance de la quadratrice de Dinoſtrate eſt néceſſaire pour l'intelligence parfaite de la Propoſition 9e. *pag.* 34. Pour en ſaiſir facilement la formation, imaginez-vous que tandis que le rayon AF, *Fig.* 17. *Pl.* 1, parcourt par un mouvement uniforme le quart de cercle AB, la tangente AH va parallélement à elle-même le long du même rayon AF, de telle ſorte que lorſque le rayon AF ſe trouve avoir parcouru le quart, la moitié, les trois quarts de la circonférence AB, la tangente AH a parcouru le quart, la moitié, les trois quarts du rayon AF; la courbe AMG qui paſſera par tous les points d'interſections du rayon AF & de la tangente AH, s'appelle *quadratrice*. Dinoſtrate ſon inventeur s'en ſervit pour trouver la quadrature approchée du cercle. Pour avoir l'équation à cette courbe, nommons b le quart de cercle AB, a le rayon AF, y une partie quelconque de la circonférence AB parcourue par le rayon AF, x une partie quelconque du rayon AF parcourue par la tangente AH, nous aurons *par conſtruction* $b : a :: y : x$, donc $ay = bx$, donc $y = \frac{bx}{a}$, *équation à la quadratrice.*

NOTE XIX.

L'ARTICLE 31, *pag.* 36 a beſoin de deux éclairciſſements; on les trouvera dans les réponſes aux queſtions ſuivantes.

Queſtion 1. En mettant pour x ſa valeur $\frac{ay}{b}$, & en diviſant enſuite le tout par $b - y$; comment a-t-on trouvé $\frac{bss - yss}{aa - ax} = \frac{bss}{aa}$?

Réponſe. 1°. En ſuppoſant $x = \frac{ay}{b}$, l'on aura

$$aa - ax = aa - \frac{aay}{b} = \frac{aab - aay}{b}.$$

2°. $aa - ax = \frac{aab - aay}{b}$; donc $\frac{bss - yss}{aa - ax}$ ſera égal à $bss - yss$ diviſé par $\frac{aab - aay}{b}$.

3°. $bss - yss$ diviſé par $\frac{aab - aay}{b}$ donne évidemment $\frac{bbss - byss}{aab - aay}$.

4°. Diviſez par $b - y$ le numérateur & le dénominateur de cette derniere fraction, vous aurez $\frac{bss}{aa}$.

Seconde Queſtion. En ſuppoſant $FT = \frac{bss}{aa}$, comment peut-on prouver que FT eſt troiſieme proportionnelle à $FG = \frac{aa}{b}$, & à $FM = s$?

Réponse. La troisieme proportionnelle aux quantités $\frac{aa}{b}$ & s est $\frac{bss}{aa}$, puisque $\frac{aa}{b} : s :: s : \frac{bss}{aa}$; donc &c.

NOTE XX.

LES remarques suivantes ne seront pas inutiles pour l'intelligence de l'article 32, *pag.* 37.

1°. On peut regarder mR, *Fig.* 18. *Pl.* 2, comme paralléle à MF, parce que l'angle MFR est est supposé infiniment petit, & par conséquent sensiblement nul. Par la même raison les lignes mS & mO peuvent être regardées comme paralléles, l'une à MG & l'autre à MH.

2°. Le centre commun de gravité des poids appliqués en C, D, E, que j'appellerai les poids C, D, E, est le point autour duquel ces poids étant suspendus comme autour du point fixe d'un levier quelconque, resteroient dans un parfait équilibre.

3°. Pour trouver le centre commun de gravité des poids C, D, E, je cherche d'abord celui des poids D & E par la régle suivante; la somme des poids D & E : à la longueur de la ligne qui marque la distance de leurs centres : : le poids D : à la distance du poids E au centre commun de gravité que je cherche, & que je nomme x. Cette premiere opération faite, je rassemble mentalement les poids D & E à leur centre commun de gravité x; & pour trouver le centre commun de gravité des trois corps donnés, je dis, la somme des poids C, D, E : à la longueur de la ligne qui marque la distance du point x au centre du poids C : : le poids C : à la distance du point x au centre commun de gravité des poids C, D, E. Ce centre se trouvera dans la ligne MP à laquelle sont perpendiculaires les lignes CL, KD, IE; & comme la tangente au point M est paralléle aux lignes CL, KD, IE, il s'ensuit que MP est perpendiculaire à la tangente au point M; donc la perpendiculaire que l'on cherche pour la solution du problême proposé, est celle qui passe par le centre commun de gravité des poids C, D, E.

NOTE XXI.

DES lignes a, b dont il est parlé sur la fin de l'*article* 34, *pag.* 44, l'une b est tirée d'un point quelconque de la courbe perpendiculairement à la *directrice*, l'autre a est tirée du même point au *foyer*. Or il est évident que dans la parabole a est égal à b, que dans l'ellipse a est moindre, & que dans l'hyperbole a est plus grand que b.

NOTE XXII.

M. le Marquis de l'Hôpital assure à la fin de l'*article* 36, *page* 45, que MR, *Fig.* 25. *Pl.* 2, est égal à $\frac{OP \times MQ + QS \times PM}{PQ}$. Pour le faire toucher au doigt, il auroit dû tirer la ligne OV, paralléle à QP; il a été absolument nécessaire, pour nous rendre intelligible, d'ajouter cette ligne OV à la figure 25. Cela une fois fait, voici comment je raisonne.

1°. A cause des triangles semblables OVS, OLR, l'on a OV : OL :: VS : LR; l'on a donc PQ : PM :: VS : LR. Mais VS = QS − QV = QS − OP; donc PQ : PM :: QS − OP : LR; donc $LR = \frac{PM \times \overline{QS - OP}}{PQ}$.

2°. MR = LR + OP; donc $MR = \frac{PM \times \overline{QS - OP} + PQ \times OP}{PQ}$.

3°. PQ = PM + MQ; donc $MR = \frac{PM \times \overline{QS - OP} + OP \times \overline{PM + MQ}}{PQ}$; donc l'on aura, en ôtant les quantités qui se détruisent $MR = \frac{PM \times QS + OP \times MQ}{PQ}$. Prenez garde à la faute qui se trouve à la page 46; elle est marquée dans l'*errata*.

NOTE XXIII.

POUR mettre à la portée de tout le monde l'*article* 39, *pag.* 48, il est nécessaire de faire connoître la *logarithmique* représentée par la *Figure* 80 *de la Planche* 5. C'est une courbe dont les abscisses sont les logarithmes des ordonnées, c'est-à-dire, c'est une courbe dont les abscisses suivent la proportion arithmétique, & les ordonnées la proportion géométrique. En voici la description. Sur la ligne KQ qu'on pourra prolonger à volonté, élevez les deux perpendiculaires PM, *fn*. Coupez P*f* en deux parties égales au point *p*. Elevez à ce point la perpendiculaire *pm* qui soit moyenne proportionnelle aux lignes PM & *fn*. Prenez *fg* = *pf*. Elevez au point *g* la perpendiculaire *go* qui soit troisieme proportionnelle aux lignes *pm*, *fn*; la courbe que vous tirerez par les points M, *m*, *n*, *o* sera une portion de la *logarithmique*. En effet, tandis que les ordonnées PM, *pm*, *fn*, *go* gardent la proportion géométrique continue, les abscisses correspondantes P*p*, P*f*, P*g* gardent la proportion arithmétique continue; donc P*p* peut être regardé comme le logarithme de *pm*; P*f* comme le logarithme de *fn*; P*g* comme le logarithme de *go*, &c. Dans cette courbe, il est vrai, la ligne PM n'a point de logarithme; mais dans le fait elle ne doit en avoir aucun, puisqu'elle est prise pour l'*unité*, & que le logarithme de l'*unité* est *o*.

Ce qu'il faut bien remarquer, c'est que dans toute *logarithmique* les soutangentes sont égales, *par exemple*, les soutangentes *pb*, *fe*, &c. sont égales. Cela vient de ce que P*p*, *pf*, &c. sont des quantités égales entr'elles, de même que M*m*, *mn*, &c. Voilà pourquoi M. le Marquis de l'Hôpital annonce que lorsque la soutangente demeurera par tout la même, la courbe LM, (*Fig.* 26. *Pl.* 2.) sera *logarithmique*.

NOTE XXIV.

COMME l'*article* 40, *page* 49 sera appliqué à la *logarithmique spirale*, il est nécessaire de donner ici la deſcription de cette courbe. Diviſez le quart de cercle BGD, (*Fig.* 87. *Pl.* 5.) en un nombre quelconque de parties égales B*b*, *b*G, G*g*, *g*D. Sur les rayons O*b*, OG, O*g*, prenez les parties ON, O*n*, O*r* en proportion continue; les points N, *n*, *r* appartiendront à la *logarithmique ſpirale*. Cette courbe a pour appliquées les lignes ON, O*n*, O*r*, ou ſi l'on veut, *b*N, G*n*, *gr* qui ſont en proportion géométrique continue, & pour abſciſſes correſpondantes les arcs B*b*, BG, B*g* qui ſont en proportion arithmétique continue. Auſſi peut-on regarder celles-ci comme les logarithmes de celles-là.

C'eſt dans l'article 42 que ſe fait l'application de l'artitle 40 à la logarithmique ſpirale. L'on y ſuppoſe que la courbe FQ (*Fig.* 27. *Pl.* 2.) eſt une hyperbole dont AB eſt l'une des aſſymptotes. Nous avons déja fait remarquer dans la *Note* 5. *num.* 20. que AG×GQ eſt un rectangle égal à un quarré conſtant que M. de l'Hôpital nomme ici ff; donc $uy = ff$; donc GQ $(u) = \frac{ff}{y}$; donc, en ſuppoſant le point G au point A, l'on aura GQ $= \frac{ff}{o} = \infty$; auſſi GQ devient-elle alors ſeconde aſſymptote de l'hyperbole FQ. L'eſpace FEGQ eſt donc regardé comme infini à cauſe de ſon côté infini GQ.

Lorſque AG devient $= o$, l'on a AM $(y) = o$; donc $uy = ff$, devient $ff = o$, & par la même AT $(\frac{ffy}{cc})$ devient $\frac{o}{cc} = o$; donc lorſque

le point M de la courbe ML eſt arrivé au centre du cercle BN, c'eſt-à-dire, lorſque AM $= o$, l'on a AT $= o$. D'où l'on voit que la raiſon de AM à AT eſt conſtante; ce qui eſt une propriété de la logarithmique ſpirale. Tout ceci s'éclaircira encore plus par la lecture de l'*article* 91, *pag* 127, où l'on verra que AM : AT :: AC : CM, (*Fig.* 81. *Pl.* 5.) Nous remarquerons en finiſſant cette Note, que l'on donne quelquefois le nom d'*axe* à la ligne des abſciſſes; ce n'eſt qu'en ce ſens que l'on peut regarder l'aſſymptote AB (*Fig.* 27. *Pl.* 2.) comme axe de l'hyperbole FQ.

NOTE XXV.

COMME la maniere dont M. le Marquis de l'Hôpital tire dans la propoſition 16 les tangentes des courbes AM, BN, CO, (*Fig.* 32. *Pl.* 3.) n'a aucun rapport avec ce qu'il a dit dans toute ſa ſeconde Section ſur la méthode de trouver par le calcul différentiel les tangentes de toutes ſortes de lignes courbes, nous ne donnerons aucun commentaire de cette propoſition qui dans le fond nous paroit ici aſſez déplacée. Nous remarquerons cependant que c'eſt par ſon inertie que le poids A s'oppoſe à la direction BF du poids B. Nous remarquerons encore que ce qu'on a dit du poids A par rapport au poids B, doit ſe dire des poids A & B par rapport au poid C; car A eſt ſenſiblement égal à la fraction $\frac{A \times BF}{BC}$.

NOTE XXVI.

La régle générale dont on se sert, lorsqu'on veut trouver le *maximum* ou le *minimum* d'une courbe, est celle-ci : *Dans le point où la quantité est devenue la plus grande, son accroissement est devenu nul, & dans le point où elle est devenue la plus petite, son décroissement est aussi devenu nul. D'où il suit qu'ayant différentié l'équation qui exprime la quantité dont il s'agit, ou qui convient à la courbe dont il s'agit, il faut faire* $=0$ *la différentielle de la variable qui va en croissant, puis en décroissant; ou en décroissant, puis en croissant; & l'équation différentiée pouvant être réduite par ce moyen à des termes finis, elle exprimera le* maximum, *ou le* minimum *qu'on cherche.*

Pour trouver, *par exemple*, la plus grande ordonnée au grand axe AB de l'ellipse ADB (*Fig.* 30. *Pl.* 2.) nommons $2a$, le grand axe AB; $2b$, le petit axe, & par conséquent b, le demi-petit axe DE; nommons y, une ordonnée quelconque au grand axe; & x, son abscisse correspondante. Cela supposé, voici comment je raisonne.

1°. L'équation à l'ellipse est $aayy = 2abbx - bbxx$ (*Note* 5. *num.* 10).

2°. Cette équation différentiée devient $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$.

3°. Comme l'ordonnée qu'on cherche, est supposée arrivée à son *maximum*, elle aura à ce point sa différentielle $dy = o$, donc $2aay \times dy = 2aay \times o$; donc $2aaydy = o$; donc $2abbdx - 2bbxdx = o$; donc $2abbdx = 2bbxdx$; donc, en divisant tout par $2bbdx$, l'on aura $a = x$; donc lorsque dans l'ellipse l'abscisse x devient a, l'ordonnée correspondante y est arrivée à son *maximum*; donc lorsque dans l'ellipse l'abscisse devient la moitié du grand axe, l'ordonnée correspondante est arrivée à son *maximum*. Mais le demi-petit axe DE a pour abscisse correspondante AE, moitié du grand axe AB; donc dans une ellipse quelconque la moitié du petit axe est la plus grande ordonnée à l'axe principal.

Voilà comment il faut opérer, lorsqu'on veut trouver le *maximum* ou le *minimum* d'une courbe quelconque dont l'équation est donnée. Voici ce que veut dire M. le Marquis de l'Hôpital, lorsqu'il assure qu'il y a des occasions où une quantité ne peut pas devenir de positive négative, sans passer par l'infini. Toutes les tangentes TM, *par exemple*, tirées jusqu'au point D exclusivement (*Fig.* 30. *Pl.* 2.) ont des soutangentes TP qui vont toujours en augmentant jusqu'au point E, & qui jusqu'à ce point sont regardées comme des quantités positives. Au point D la tangente TM devient infinie, & sa soutangente TP qui lui est paralléle, suit nécessairement le même sort. Après le point D, les tangentes TM & les soutangentes TP vont toujours en diminuant, & celles-ci sont regardées comme des quantités négatives, puisqu'elles changent de côté; donc il y a des occasions où une quantité finie ne peut pas devenir de poſitive négative, ſans paſſer par l'infini. Ce que nous avons dit de la figure 30 par rapport au *maximum* DE, ſe vérifie dans la figure 31 par rapport au *minimum* DE.

Il y a des occaſions où la tangente ſe confond avec l'ordonnée, c'eſt-à-dire, où la tangente devient la prolongation de l'ordonnée, comme au point D de la figure 33 de la planche 3, auquel il ſeroit impoſſible de tirer une tangente, ſans qu'elle ne fît une même ligne avec le *minimum* DE. Alors la différentielle R*m* devient infinie. Mais avant que de devenir infinie, elle avoit été poſitive, & après être devenue infinie, elle eſt négative, parce qu'elle change de côté; donc il y a des occaſions où une quantité infiniment petite ne peut pas devenir de poſitive négative, ſans paſſer par l'infini. La figure 34 de la planche 3, prête à un raiſonnement ſemblable; tout le monde voit que la tangente au point D ſe confondroit avec le *maximum* DE. Mais ce ſont là des raiſonnemens qu'il ne faut pas pouſſer trop loin, de peur de ſe perdre dans une métaphyſique inintelligible. Contentons-nous de différentier l'équation donnée; de faire la différentielle $= o$; & ſoyons aſſuré que ſi la courbe à laquelle appartient l'équation donnée, a un *maximum* ou un *minimum*, nous le trouverons par cette méthode. Je dis, ſi la courbe dont il s'agit, a un *maximum* ou un *minimum*, parce que les courbes dont les appliquées croiſſent juſqu'à l'infini, n'ont point de *maximum*, & celles dont les appliquées décroiſſent

croiſſent juſqu'à o, n'ont point de *minimum*.

NOTE XXVII.

COMME l'*article* 48, *pag.* 59, contient le premier des 13 exemples auxquels M. le Marquis de l'Hôpital a appliqué la méthode de *Maximis & Minimis*, nous allons en donner le calcul, ſans omettre la moindre des équations. Le voici; il n'a beſoin d'aucune explication.

$$x^3 + y^3 = axy$$
$$3xxdx + 3yydy = aydx + axdy$$
$$3xxdx - aydx = axdy - 3yydy$$
$$3xxdx - aydx = ax \times o - 3yy \times o$$
$$3xxdx - aydx = o$$
$$3xxdx = aydx$$
$$3xx = ay$$
$$\frac{3xx}{a} = y$$

Mettons la nouvelle valeur de y dans l'équation $x^3 + y^3 = axy$, nous aurons

$$x^3 + \frac{27x^6}{a^3} = \frac{3ax^3}{a}$$
$$x^3 + \frac{27x^6}{a^3} = 3x^3$$
$$\frac{27x^6}{a^3} = 2x^3$$
$$27x^6 = 2a^3x^3$$
$$3x^2 = \sqrt[3]{2a^3x^3}$$
$$3x^2 = ax\sqrt[3]{2}$$
$$3x = a\sqrt[3]{2}$$
$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

NOTE XXVIII.

L'ARTICLE 49, *pag.* 60 a beſoin du Commentaire ſuivant. Pour trouver AE $= a$, il n'étoit pas néceſſaire de ſe jetter dans l'infini ; il falloit élever au cube les 2 membres de l'équation donnée, & opérer par la méthode ordinaire en la maniere ſuivante :

$$y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$$

$$y - a = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{aa - 2ax + xx}$$

$$y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a \times \overline{aa - 2ax + xx}.$$

$$y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a^3 - 2aax + axx$$

En différenciant cette derniere équation, l'on aura

$$3yydy - 6aydy + 3aady = -2aadx + 2axdx$$

$$3yy \times o - 6ay \times o + 3aa \times o = -2aadx + 2axdx$$

$$o = -2aadx + 2axdx$$

$$2aadx = 2axdx$$

$$adx = xdx$$

$$a = x$$

NOTE XXIX.

L'ARTICLE 50, *pag.* 60 ne peut paroitre obſcur, qu'à ceux qui ne connoitroient pas la nature, ou les proprietés de la roulette ; nous les avons expliquées dans les notes 11 & 12.

NOTE XXX.

L'ON comprendra l'*article* 51, *pag.* 61, ſi l'on fait attention aux remarques ſuivantes.

1°. $\overline{a - x}^{n-1}$ multiplié par $\overline{a - x}$ donne évidemment pour produit $\overline{a - x}^{n}$, parce que $\overline{a - x}^{n-1}$ multiplié par $\overline{a - x}$, c'eſt $\overline{a - x}^{n-1}$ élevé d'un degré ; donc $\overline{a - x}^{n}$ diviſé par $\overline{a - x}^{n-1}$ doit donner pour quotient $a - x$, parce que le produit diviſé par le multiplicande eſt toujours égal au multiplicateur.

2°. Par la même raiſon x^m diviſé par x^{m-1} doit donner pour quotient x, car x^{m-1} multiplié par x donne pour produit x^m.

3°. En ſuppoſant x infinie, l'on aura $\frac{xx}{x-a} = \frac{xx}{x}$ (*Note* 2. *num.* 4) ; donc en ſuppoſant x infinie, l'on aura $y = \frac{xx}{x}$, & par conſéquent $y = x$.

NOTE XXXI.

L'ARTICLE 52, *pag.* 63, eſt terminé par une équation du ſecond degré qui demande les éclairciſſements ſuivants.

1°. $cxx - axx - bxx = xx \times \overline{c - a - b}$; donc en faiſant $c - a - b = e$, l'on aura $exx = cxx - axx - bxx$; & l'équation qui termine l'article 52 ſe changera en celle-ci $exx + 2acx = abc$.

2°. $exx + 2acx = abc$, donc $xx + \frac{2ac}{e}x = \frac{abc}{e}$.

3°. Cette derniere équation maniée à la maniere ordinaire, donnera $x = \sqrt{\frac{abc}{e} + \frac{aacc}{ee}} - \frac{ac}{e}$.

4°. Si $c = a + b$, l'on aura $c - a - b = o$, &

par conséquent $cxx - axx - bxx = o$; donc l'équation qui termine l'article 52 deviendra $2acx = abc$; donc $2x = b$; donc $x = \frac{1}{2} b$.

NOTE XXXII.

VOICI ce qui peut arrêter un commençant dans la lecture de l'*article* 53, *pag.* 64.

1°. Le cone que décrira le triangle rectangle AEF, *Fig.* 40. *Pl.* 3, aura pour base le cercle dont le rayon sera l'ordonnée FE, & pour hauteur la ligne EA. De même le cone que décrira le triangle rectangle APN, aura pour base le cercle dont le rayon sera l'ordonnée NP, & pour hauteur la ligne AP. Voyez la formation du cone dans les élémens de Géométrie de M. l'Abbé de la Caille, *art.* 658 de l'édition de 1764.

2°. Par la propriété du cercle, l'on aura AE : EF :: EF : EB ; donc $EF^2 = ax - xx$; donc $EF = \sqrt{ax - xx}$.

3°. $AF^2 = EF^2 + AE^2$; donc $AF^2 = ax - xx + xx$; donc $AF^2 = ax$; donc $AF = \sqrt{ax}$.

4°. La fraction qui termine l'article 53 ne peut pas être $= o$, sans que l'on ait son numérateur $2axdx - 3xxdx = o$; l'on aura donc alors $2axdx = 3xxdx$; donc $2ax = 3xx$; donc $2a = 3x$; donc $x = \frac{2}{3} a$.

NOTE XXXIII.

UN parallélepipéde est un solide terminé par six surfaces rectangles, dont les deux opposées sont égales & paralléles ; & un cube est un so-

lide terminé par six quarrés égaux, qui sont tous à angles droits l'un sur l'autre. Tout cube est donc un parallélepipéde, mais tout parallélepipéde n'est pas un cube. Il s'agit maintenant de bien se convaincre que si $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$, l'on aura $\frac{a^3}{bx} = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; en voici la démonstration.

1°. $xx = \frac{a^3}{b}$.

2°. Le quarré de $\frac{a^3}{bx}$ est $\frac{a^6}{bbxx}$; donc $\frac{a^6}{bbxx} = \frac{a^6 b}{a^3 bb} = \frac{a^3}{b}$; donc si le quarré de $\frac{a^3}{bx}$ est $\frac{a^3}{b}$, l'on aura $\frac{a^3}{bx} = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$.

NOTE XXXIV.

DANS le triangle rectangle GIE, *Fig.* 41. *Pl.* 3, si l'on prend l'hypothénuse GE pour sinus total, le côté GI deviendra le sinus droit de l'angle GEI. Par la même raison dans le triangle rectangle GLE, l'on ne peut pas prendre GE pour sinus total, sans avoir GL pour sinus droit de l'angle GEL, & de son supplément GEC ; ce sont là les premiers éléments de la Trigonométrie rectiligne.

NOTE XXXV.

L'ARTICLE 58, *pag.* 69 me paroit traité avec moins d'exactitude que les autres ; & les preuves que j'ai à en apporter, ne sont par malheur que trop démonstratives.

1°. L'angle FEG étant égal à l'angle CEG, *Fig.* 42, *Pl.* 3; les angles en G étant droits, & le côté GE étant commun aux deux triangles FGE & CGE; il falloit faire ces deux triangles égaux en tout ſens : c'eſt là une inadvertance qui choque la vue d'un lecteur exact & attentif.

2°. En ſuppoſant que l'angle FEG doive être égal à l'angle CEG, le problême eſt très facile à réſoudre. Le point E que l'on cherche, ſera celui par lequel paſſera le rayon du cercle AEB qui, après avoir été prolongé, ira couper perpendiculairement la ligne CF, c'eſt-à-dire, la ligne qui joint les deux points donnés C, F. Il ne ſera pas donc néceſſaire de chercher ce point par l'interſection du cercle & de l'hyperbole.

3°. La ligne $OB = a$, & la ligne $OC = b$, ne ſont pas les données a & b dont on parle dans les articles 56 & 57. En effet l'angle FEG n'eſt égal à l'angle CEG, que lorſque $a = b$. Mais OB n'eſt pas égal à OC dans l'*article* 58, & cependant dans cet article on ſuppoſe l'angle FEG égal à l'angle CEG; donc &c.

4°. Quoiqu'il me paroiſſe fort inutile de réſoudre le problême de l'*article* 58 par l'interſection du cercle & de l'hyperbole, nous remarquerons cependant que $yy - xx - \frac{aay}{c} + \frac{aax}{b} = o$ eſt un lieu à une hyperbole équilatére, dont le grand axe feroit $2\sqrt{\frac{a^4}{4bb} - \frac{a^4}{4cc}}$. On trouvera ce grand axe en comparant, par la méthode ordinaire, l'équation donnée avec la formule générale qui ſe

trouve dans le Traité des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, *pag.* 234, ou avec celle qui ſe trouve dans le premier Tome du Cours de Mathématique de Wolf, *pag.* 382. Or le grand axe d'une hyperbole équilatére étant donné, la conſtruction de l'hyperbole ſe préſente d'elle même, parce que dans cette courbe le grand axe, le petit axe & le paramètre ont la même valeur.

NOTE XXXVI.

L'ÉTAT de la queſtion de l'*article* 59, *pag.* 70, eſt très mal énoncé. Auſſi les remarques ſuivantes nous paroiſſent-elles abſolument néceſſaires.

1°. a & b ne marquent pas les eſpaces parcourus dans un tems quelconque c, mais la nature des différents terreins qu'il faut parcourir en deça & en delà de la ligne AB. En effet puiſqu'on ſuppoſe le tems c égal, ou plutôt conſtant de part & d'autre, & que l'on ſuppoſe inégaux les eſpaces parcourus CE & EF, on ne peut pas ſuppoſer que la nature du terrein ſoit par tout la même.

2°. En examinant attentivement la *Fig.* 43 de la *Pl.* 3, vous vous convaincrez qu'en prenant CE pour ſinus total dans le triangle rectangle CAE, & GE pour ſinus total dans le triangle rectangle GLE, AE & GL deviennent les ſinus droits de deux angles égaux; donc AE = GL. De même en prenant GE pour ſinus total dans le triangle GIE, & EH pour ſinus total dans le triangle EDH, GI & ED deviendront les finus droits de deux angles égaux ; donc GI = ED.

3°. Pour trouver la valeur de x, l'on opérera fur l'équation propofée fuivant les regles marquées dans tous les livres élémentaires d'algébre ; nous avons droit de fuppofer qu'on ne lit pas les Infiniment Petits de M. le Marquis de l'Hôpital, fans avoir appris auparavant à manier une équation du quatrieme degré.

4°. Pour manier plus facilement l'équation propofée, vous ferez $aa - bb = m$; $-2aaf + 2bbf = n$; $+aaff + aagg - bbff - bbhh = p$; $-2aafgg = -q$; $aaffgg = r$; & l'équation propofée fe transformera en celle-ci, $mx^4 + nx^3 + px^2 - qx + r = o$; donc $x^4 + \frac{n}{m}x^3 + \frac{p}{m}x^2 - \frac{q}{m}x + \frac{r}{m} = o$,

Pour opérer plus facilement fur cette équation transformée, faites $\frac{n}{m} = a$, $\frac{p}{m} = b$, $\frac{q}{m} = c$, $\frac{r}{m} = d$, vous aurez $x^4 + ax^3 + bx^2 - cx + d = o$.

5°. Vous ferez évanouir le fecond terme de cette derniere équation, en faifant $x = z - \frac{1}{4}a$, parce que *fi dans une équation fupérieure, le fecond terme eft pofitif, l'on augmente la racine* x *d'une quantité fractionnaire qui ait pour numérateur le coëfficient du fecond terme, & pour dénominateur l'expofant du premier terme de l'équation donnée ; l'on a par ce moyen une équation transformée dont le fecond terme eft évanoui.*

6°. Vous chercherez la nouvelle valeur de l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 - cx + d = o$, en fuppofant $x = z - \frac{1}{4}a$; vous trouverez une nouvelle équation dans laquelle le fecond terme fera évanoui.

7°. Pour réduire cette nouvelle équation aux termes les plus fimples, vous appellerez f les différents coefficients de zz ; vous appellerez g les différents coéfficients de z ; vous appellerez enfin h l'affemblage des connues qui forment le dernier terme de l'équation ; & vous aurez $z^4 * + fz^2 + gz + h = o$.

8°. Vous opérerez fur cette équation du quatrieme degré, comme ont fait en pareille occafion Wolf dans fon cours de Mathématique, *Tom.* 1. *pag.* 336 ; Clairaut dans fes Éléments d'Algébre, *pag.* 287 ; Rabuel dans fon commentaire fur la géométrie de Defcartes, *pag.* 473. Tout homme qui entreprend l'étude des infiniment petits doit, ou avoir lu les livres que nous venons de citer, ou être en état de les lire fans y rencontrer prefque aucune difficulté.

NOTE XXXVII.

LES remarques fuivantes jetteront un grand jour fur l'*article* 61. *pag.* 74.

1°. L'on ne doit pas entreprendre la lecture de l'article 61, fans s'être auparavant formé une idée nette de la fphére.

2°. Le crépufcule eft un jour imparfait que l'on a quelque tems avant le lever, & quelque tems après le coucher du Soleil. Voici la caufe phyfique de ce phénoméne. Lorfque le Soleil n'eft pas enfoncé ſous notre horizon au deſſous de 18 degrés, pluſieurs rayons de lumiere rencontrent des couches aſſez denſes de l'athmoſphére terreſtre. Quelques-uns s'y briſent aſſez, pour que leur réfraction les détermine à ſe porter vers la terre. Quelques autres (& c'eſt le grand nombre) s'y briſent aſſez pour pouvoir ſe rendre dans des couches compoſées de particules capables de les réflechir ſur la ſurface de la terre; donc nous devons avoir un jour imparfait, lorſque le Soleil n'eſt pas enfoncé au deſſous de notre horizon de 18 degrés. Au reſte lorſqu'on parle d'un enfoncement de 18 degrés, on entend 18 degrés pris ſur un cercle vertical, c'eſt-à-dire, ſur un grand cercle que l'on imagine paſſer par le zénith, & couper perpendiculairement l'horizon. C'eſt pourquoi les habitans de la zone torride ont des crépuſcules fort courts, parce que les cercles que parcourt le Soleil étant preſque perpendiculaires à leur horizon, cet aſtre gagne fort vite le 18e. degré de ſon abaiſſement.

3°. La ligne CK (fig. 45. pl. 3) n'eſt pas préciſément le ſinus de l'arc EM, mais elle eſt égale à ce ſinus. Pour s'en convaincre, il faut chercher ſur une ſphére le ſinus de l'arc de la déclinaiſon du Soleil pour tel ou tel jour. Vous trouverez qu'il eſt égal à la partie du diamétre du cercle de déclinaiſon, interceptée entre le centre de la ſphére & le diamétre du paralléle que décrit ce jour là le Soleil. Mais CK eſt la partie du diamétre du cercle de la déclinaiſon du Soleil, interceptée entre le centre C de la ſphére, & la ligne FG, diamétre du paralléle que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuſcule; donc la ligne CK eſt égale au ſinus de l'arc de la déclinaiſon du Soleil, le jour du plus petit crépuſcule.

4°. Un des points les plus importants de la démonſtration de l'article 61 eſt que Dd ſoit égal à Ee, & que la différence entre GD, gd ſoit égale à la différence entre FE & fe. Or toutes ces égalités ſont néceſſaires dans une figure où l'on a tiré les quarts de cercle Pem & Pdn infiniment proches des quarts de cercle PEM & PDN, & dans laquelle l'on ſuppoſe le plan $fedg$ paralléle au plan $FEDG$, & infiniment près de ce plan.

5°. Par l'article 50, l'on a ces 2 proportions, $CO : CG :: Dd$: à la différence entre DG & dg; & $IQ : IF :: Ee$: à la différence entre FE & fe; donc $CO : CG :: IQ : IF$; donc $CO : CG :: CO + IQ : CG + IF$; donc $CO : CG :: OX : GL$. Mais à cauſe des triangles rectangles ſemblables CVO, CKG, FLG, l'on a $CO : CG :: OV : GK$; donc $OV : GK :: OX : GL$; donc $OV : OX :: GK : GL$. Mais $GK : GL :: CK : FL$ ou QX; donc $OV : OX :: CK : QX$; donc $OV : CK :: OX : QX :: QX : XH$; donc $OV : CK :: QX : XH$; donc $QX : XH :: OV : CK$; donc le ſinus total : à la tangente de 9 degrés :: le ſinus de l'élévation du pole : au ſinus de la déclinaiſon auſtrale du Soleil dans le tems du plus petit crépuſcule; & voila le problême réſolu.

6°. Il eſt démontré dans tous les élémens de

Trigonométrie que le rayon ou ſinus total : à la tangente :: la cotangente : au rayon ; donc la cotangente de 9 degrés : au rayon, que l'on ſuppoſe $= 1$, :: le ſinus de l'élévation du pole : au ſinus de la déclinaiſon ; donc ſi l'on ôte du logarithme du ſinus de l'élévation du pole le logarithme de la cotangente de 9 degrés, le reſte ſera le logarithme du ſinus cherché, parce que le logarithme de $1 = o$. Il n'eſt pas néceſſaire de faire remarquer que dans ſon calcul M. le Marquis de l'Hôpital s'eſt ſervi de Tables qui donnent o pour caractériſtique aux logarithmes dont la caractériſtique eſt 10 dans les tables ordinaires.

NOTE XXXVIII.

Il ſuit évidemment de la définition 1 qu'apporte M. le Marquis de l'Hôpital au commencement de la Section IV, que Sn (*Fig.* 46, *Pl.* 3,) eſt la *différence* de la *différence* mR, ou la *différence ſeconde* de PM. C'eſt cependant Hn qui eſt la *différence ſeconde* de PM, comme notre Auteur en convient. Je voudrois donc dire que la *différence ſeconde* de PM n'eſt autre choſe que la différence qui ſe trouve entre la *différence premiere* mR, & ſon augmentation Sn ; & qu'en général une *différence ſeconde quelconque* n'eſt autre choſe que la différence qui ſe trouve entre la *différence premiere* & ſon *augmentation* ou *diminution* ſuivante. En effet $Hn = mR - Sn$.

Il ſuit encore de la même définition que oT devroit être la différence troiſieme de PM. Cependant M. le Marquis de l'Hôpital nous avertit que la *différence* troiſieme de PM n'eſt autre choſe que la différence qui ſe trouve entre Hn & Lo. La différence troiſieme de PM eſt donc la différence qui ſe trouve entre ſa différence ſeconde Hn, & une ligne quelconque Lo dont les propriétés ſont 1. d'être paralléle à Hn, 2. d'être extérieure à la courbe AMD, 3. d'être terminée par la ligne nL paralléle à ST. Il ſeroit bien difficile de donner une définition claire de la différence troiſieme conſidérée en général.

NOTE XXXIX.

L'AVERTISSEMENT qui ſuit la définition 1 de la Section IV, fait toujours quelque peine aux commençans. Ils s'imaginent que $dy \times dy$ doit donner $ddyy$ ou d^2y^2, & que par conſéquent le quarré de dy doit être d^2y^2, & non pas dy^2 ; ſon cube, d^3y^3, & non pas dy^3 &c. C'eſt là une erreur dont il eſt facile de ſe guerir, lorſqu'on fait attention que dy eſt une quantité très ſimple, & non pas une quantité compoſée de d multipliant y. Par la même raiſon le quarré de ddy ſera ddy^2, ſon cube ddy^3 &c.

NOTE XL.

POUR comprendre l'article 65, il faut ſe rappeller les régles que M. le Marquis de l'Hôpital a données à l'article 6, & les calculs qu'il a faits ſur la fin de l'article 7. Il faut encore ſe rappeller ce que nous avons dit nous-mêmes dans les notes 3 & 4. Comme il s'agit cependant de mettre au fait les commençans du calcul des différences secondes, troisiemes &c. nous allons commenter l'article 65 avec toute l'étendue dont il pourra être susceptible; notre commentaire sera renfermé dans les réponses aux questions suivantes.

Premiere Question. Comment peut-on prouver, qu'en prenant dx pour constante, la différence de $\frac{ydy}{dx}$ est $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$?

Réponse. 1°. La différence de ydy est $dy \times dy + yddy = dy^2 + yddy$.

2°. La différence de la fraction $\frac{ydy}{dx}$, en supposant que dx est une grandeur constante, est $\frac{dx \times dy^2 + dx \times yddy}{dx \times dx} = \frac{dy^2 + yddy}{dx}$; donc &c.

Seconde Question. Comment peut-on prouver que la différence de $\frac{ydy}{dx}$ est $\frac{dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$, en prenant dy pour une quantité constante?

Réponse. 1°. Quoique dy soit constante, y est variable; la différence de ydy est donc $dy \times dy = dy^2$.

2°. La différence de dx est ddx.

3°. La différence de la fraction $\frac{ydy}{dx}$, en supposant dy constante, est $\frac{dx \times dy^2 - ydy \times ddx}{dx \times dx} = \frac{dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$; donc &c.

Troisieme Question. Comment peut-on prouver que la différence de $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ est $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, en prenant dx pour une quantité constante.

Réponse. 1°. La différence de z multipliée par $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ & divisée par dx est $\frac{dx \times dz \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx \times dx} = \frac{dz\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$.

2°. La différence de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, en supposant dx constant, est $\frac{2dyddy}{2\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; donc la différence de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ multipliée par z & divisée par dx sera $\frac{dx \times z \times dyddy}{dx^2 \times \sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

3°. Pour avoir la différence de la fraction $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, il faut joindre les différences trouvées *num.* 1 & 2; donc la différence de la fraction proposée sera $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, le tout divisé par dx.

4°. $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dz \times dx^2 + dy^2 + zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, parce que $\sqrt{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx^2 + dy^2$; donc la différence de la fraction $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$ sera $\frac{dz \times \overline{dx^2+dy^2} + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}$

$= \frac{dzdx^2+dzdy^2+zdyddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

Quatrieme Question. Comment peut-on prouver qu'en prenant *dy* pour constante, l'on aura $\frac{dzdx^3+dzdxdy^2-zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$ pour la différence de $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$.

Réponse. 1°. La différence de z multipliée par $\sqrt{dx^2+dy^2} = dz\sqrt{dx^2+dy^2}$.

2°. En supposant *dy* constant, la différence de $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{2dxddx}{2\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dxddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$; donc cette même différence multipliée par z sera $\frac{zdxddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$; donc la différence totale de $z\sqrt{dx^2+dy^2}$ sera $dz\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{zdxddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$

$= \frac{dz\times\overline{dx^2+dy^2}+zdxddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dzdx^2+dzdy^2+zdxddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

3°. La question seroit résolue, si on ne demandoit que la différence de $z\sqrt{dx^2+dy^2}$. Mais on demande la différence de $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, dans laquelle fraction on suppose *dx* variable. Qu'on se rappelle les régles qu'il faut suivre, lorsqu'il s'agit de différencier une fraction, & l'on

l'on trouvera que la différence de la fraction proposée, est $\frac{dx\times\overline{dzdx^2+dzdy^2+zdxddx}}{\sqrt{dx^2+dy^2}} - ddx \times z\sqrt{dx^2+dy^2}$, le tout divisé par $dx^2 =$

$\frac{dx\times\overline{dzdx^2+dzdy^2+zdxddx} - ddx\times\overline{zdx^2+zdy^2}}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}} =$

$\frac{dzdx^3+dzdxdy^2+zdx^2ddx-zdx^2ddx-zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

4°. Otons les quantités qui se détruisent, nous aurons évidemment $\frac{dzdx^3+dzdxdy^2-zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$ pour la différence de la fraction $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$.

Cinquieme Question. Comment peut-on prouver qu'en prenant *dx* pour constant, la différence de $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ doit être $\frac{dx^2dy^2+dy^4+ydx^2ddy}{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}$?

Réponse. 1°. La différence de la quantité *ydy*, solitairement prise, est dy^2+yddy.

2°. La différence de $\sqrt{dx^2+dy^2}$, est $\frac{dyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, en prenant *dx* pour constant.

3°. La différence de *ydy*, considéré comme numérateur d'une fraction, est $\overline{dy^2+yddy}\times\sqrt{dx^2+dy^2}$ $-\frac{ydy\times dyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, le tout divisé par dx^2+dy^2, quarré de $\sqrt{dx^2+dy^2}$; donc cette différence sera

$\frac{\overline{dy^2+yddy}\times\overline{dx^2+dy^2} - ydy^2ddy}{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dx^2dy^2+dy^4+ydx^2ddy}{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}$, à cauſe des quantités qui ſe détruiſent ; ce ſont $+ydy^2ddy$ & $-ydy^2ddy$.

4°. On prouvera par un calcul ſemblable qu'en prenant dy pour conſtant, la différence de $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ſera $\frac{dx^2dy^2+dy^4-ydydxddx}{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

Sixieme Queſtion. Comment peut-on prouver que $\frac{\overline{dx_2+dy}\sqrt{\overline{dx^2+dy}}}{-dxddy}$ eſt égal à $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$?

Réponſe. 1°. $\overline{dx^2+dy^2} = \overline{dx^2+dy^2}^{1} = \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{2}{2}}$.

2°. $\sqrt{\overline{dx^2+dy^2}} = \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}$; donc la fraction propoſée devient $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{2}{2}}\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}}{-dxddy} = \frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$.

Septieme Queſt. Comment peut-on prouver qu'en prenant dx pour conſtant, la différence de $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$

eſt $\frac{-3dxdyddy^2\times\overline{dx^2+dy}^{\frac{1}{2}}+dxdddy\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

Réponſe. 1°. En prenant dx pour conſtant, & en conſidérant $\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}$ comme une quantité iſolée, ſa différence eſt $\frac{3}{2}\times 2dyddy\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}-1}$ $= 3dyddy\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}$.

2°. En prenant dx pour conſtant, & en conſidérant $-dxddy$ comme une quantité iſolée, ſa différence eſt $-dxdddy$.

3°. En conſidérant ces deux quantités comme formant une fraction, leur différence ſera

$$\frac{-dxddy\times 3dyddy\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dxdddy\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$$

$$=\frac{-3dxdyddy^2\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dxdddy\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}.$$

Huitieme Queſtion. Comment peut-on trouver la différence ſeconde d'une quantité quelconque, élevée à une puiſſance quelconque ; *par exemple*, quelle eſt la différence ſeconde de x^m, ou la différence premiere de $mx^{m-1}dx$?

Réponſe. La différence demandée eſt $mm-mx^{m-2}dx^2+mx^{m-1}ddx$. En voici la démonſtration. Faiſons $x^{m-1}=y$, & $dx=z$.

1°. Puiſque $x^{m-1}=y$, l'on aura $dy=m-1x^{m-2}dx$, parce que dans cette hypothéſe la différence de y doit être égale à la différence de x^{m-1}.

2°. Puiſque $dx=z$ & $x^{m-1}=y$; donc $x^{m-1}dx=yz$; donc $mx^{m-1}dx=myz$; donc la différence de $mx^{m-1}dx$ eſt égale à la différence du produit myz, dans lequel m eſt une quantité conſtante qui n'a point de différence.

3°. La différence de myz eſt $mzdy+mydz$.

4°. Mettons à la place de z ſa valeur dx, à la place de dy ſa valeur $m-1x^{m-2}dx$, & à la place de y ſa valeur x^{m-1}, nous aurons $mzdy=mdx\times m-1x^{m-2}dx=mm-mx^{m-2}dx^2$, parce que $m\times m-1=mm-m$, & que $dx\times dx=dx^2$; nous aurons encore $mydz=mx^{m-1}ddx$; donc $mzdy+mydz=mm-mx^{m-2}dx^2+mx^{m-1}ddx$.

Mais le premier membre de cette derniere équation est évidemment la différence du produit myz, donc le second membre de la même équation sera évidemment la différence de $mx^{m-1}dx$, ou la différence seconde de x^m, parce que (*num.* 2) $myz = mx^{m-1}dx$.

Corollaire. La différence seconde de x^m est une véritable formule pour quiconque prend garde que m vaut 2, lorsque la grandeur qu'on veut différencier, est élevée au quarré ; que m vaut 3, lorsqu'il s'agit du cube, &c. La différence seconde de x^3 sera donc $9-3x^{3-2}dx^2 + 3x^{3-1}ddx = 6xdx^2 + 3x^2ddx$; celle de x^2 sera $4-2x^{2-2}dx^2 + 2x^{2-1}ddx = 2x^0dx^2 + 2xddx = 2dx^2 + 2xddx$, parce que $x^0 = 1$, celle de x^4 sera $16-4x^{4-2}dx^2 + 4x^{4-1}ddx = 12x^2dx^2 + 4x^3ddx$, &c.

NOTE XLI.

VOICI comment on met en pratique les régles marquées dans l'*art.* 66, *pag.* 84. Pour trouver le point d'infléxion ou celui de rebroussement d'une courbe dont on a l'équation, 1°. L'on prend les différences premieres de l'équation proposée, & l'on met dans un membre dy seule, & les autres quantités dans le second membre. Si l'on a, *par exemple*, l'équation $axx = xxy + aay$, l'on fera $y = \frac{axx}{xx+aa}$, & par conséquent $dy = \frac{2ax^3dx + 2a^3xdx - 2ax^3dx}{\overline{xx+aa}^2} = \frac{2a^3xdx}{\overline{xx+aa}^2}$; & voilà ce qu'on nomme la seconde équation.

2°. Il faut différencier cette seconde équation, en regardant dx comme constante, & l'on aura

$$ddy = \frac{2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 - 8a^3x^4dx^2 - 8a^5xxdx^2}{\overline{xx+aa}^4} = \frac{2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 - 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx+aa}}{\overline{xx+aa}^4}.$$

3°. $ddy = o$; donc la fraction qui répond à ddy sera $= o$; mais dans cette fraction, ce n'est pas le dénominateur $\overline{xx+aa}^4$ qui est $= o$, car cette fraction seroit infinie ; donc ce sera son numérateur qui sera $= o$; donc l'on aura $2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 - 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx+aa} = o$; donc $2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 = 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx+aa}$; donc, en divisant tout par $2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}$, l'on aura $xx + aa = 4xx$; donc $3xx = aa$; donc $xx = \frac{aa}{3}$; donc $x = \sqrt{\frac{aa}{3}}$; donc $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$. C'est ainsi qu'on opére, lorsque l'on fait $ddy = o$.

4°. Lorsque $ddy = o$ ne mene à rien, l'on fait alors $ddy = \infty$; & l'on calcule de la maniere qui suit. L'on vous donne, *par exemple*, l'équation $y - a = \overline{x-a}^{\frac{3}{5}}$. Vous aurez d'abord $dy = \frac{3}{5}\overline{x-a}^{\frac{3}{5}-1}dx = \frac{3}{5}\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}}dx$. Vous différentierez cette seconde équation, & vous aurez, en prenant dx pour constante, $ddy = -\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}-1}dx \times dx = -\frac{6}{25}\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}dx^2 = \frac{-6dx^2}{25\sqrt[5]{\overline{x-a}^7}}$, parce que

$\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}$ eſt évidemment égal à la fraction $\frac{1}{\overline{x-a}^{\frac{7}{5}}}$, & que cette fraction n'eſt pas différente de $\frac{1}{\sqrt[5]{\overline{x-a}^7}}$.

5°. En ſuppoſant $ddy = o$, l'on trouve $-6dx^2 = o$. Mais cela ne mene à rien, donc il faut ſuppoſer $ddy = \infty$.

6°. En ſuppoſant $ddy = \infty$, l'on aura le dénominateur de la fraction qui lui répond $= o$; l'on aura donc $25\sqrt[5]{\overline{x-a}^7} = o$; donc $x - a = o$; donc $x = a$.

7°. Lorſque $ddy = o$, l'on a le numérateur de la fraction qui lui répond $= o$; & lorſque $ddy = \infty$, l'on a le dénominateur de la même fraction $= o$. C'eſt-là une régle qu'il ne faut jamais oublier.

8°. Voici comment M. Varignon démontre que lorſque la différence de AL (*Fig.* 52. *Pl.* 3, & *Fig.* 53 *Pl.* 4) eſt $-\frac{yddy}{dy^2} = o$, elle eſt néceſſairement $ddy = o$. Dans la fraction $-\frac{yddy}{dy^2}$, ce n'eſt pas dy^2 qui eſt o, car cette fraction ſeroit infinie; ce n'eſt pas non plus $+y$ ou $-y$, car ce ſont des quantités réelles; c'eſt donc ddy. Le même Auteur paroit d'abord convenir avec M. le Marquis de l'Hôpital que, pour avoir le point d'infléxion, il faut faire $ddy = o$, & que pour avoir le point de rebrouſſement, il faut faire $ddy = \infty$; nous examinerons cette régle dans la Note 45e.

9°. Voici une occaſion où AL devient $x - \frac{ydx}{dy}$, au lieu d'être $\frac{ydx}{dy} - x$. La ſoutangente LM (*Fig.* 63. *Pl.* 4) eſt ſuivant la coutume $\frac{ydx}{dy}$; l'abſciſſe AM eſt x; donc $AL = AM - LM$ ſera par la même $x - \frac{ydx}{dy}$. Juſqu'à préſent M. le Marquis de l'Hôpital n'a parlé que des courbes dont les appliquées ſont paralléles entr'elles. La régle que je vais commenter regarde les courbes dont les appliquées partent d'un même point; cette régle eſt $yddy = dx^2 + dy^2$.

10°. Pour comprendre cette régle, il faut d'abord bien ſe convaincre qu'à cauſe des angles infiniment petits HBT & MBm (*Fig.* 56. *Pl.* 4), BT peut être regardée comme paralléle à BH, & BM à Bm. L'on verra alors du premier coup d'œil que les triangles rectangles MRm, MBT, THO ſont équiangles. Il faut encore bien ſe convaincre que MR : TH : : TH : HO; M. Crouzas nous en donne la démonſtration en cette maniere. A cauſe des triangles ſemblables mRM, HOT, l'on a mR : MR : : TH : HO, ou, $dy : dx : : \frac{dx^2}{dy}$: HO $= \frac{dx^3}{dy^2}$. Mais dans la proportion MR : TH : : TH : HO, l'on trouve HO $= \frac{dx^3}{dy^2}$; donc cette proportion n'a rien d'imaginaire. Enfin il faut ſe rappeller que lorſque Ot s'évanouit, comme il arrive au point d'infléxion ou de rebrouſſement, l'on a

$\frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{dy^2} = o$; l'on a donc alors $\frac{ydxddy}{dy^2} = \frac{dx^3 + dxdy^2}{dy^2}$; donc $ydxddy = dx^3 + dxdy^2$ à cause du dénominateur commun; donc, en divisant tout par dx, l'on aura $yddy = dx^2 + dy^2$. Nous ferons remarquer dans les Notes suivantes l'usage qu'il faut faire de cette équation.

NOTE XLII.

L'ARTICLE 67, *pag.* 89 nous prouve que M. le Marquis de l'Hôpital pensoit que dans les courbes dont les appliquées sont parallèles, il falloit faire $ddy = o$, pour avoir le point d'infléxion; & $ddy = \infty$, pour avoir le point de rebroussement. Ce même Auteur pensoit encore que pour les courbes dont les appliquées partent d'un même point, l'on a au point d'infléxion $dx^2 + dy^2 - yddy = o$, & au point de rebroussement $dx^2 + dy^2 - yddy = \infty$. Nous allons voir dans les Notes suivantes ce qu'il faut penser de ces régles générales.

NOTE XLIII.

LES équations de l'*article* 68, *pag.* 90 ont été calculées dans la *Note* 41, *num.* 1. 2. 3.

NOTE XLIV.

LES équations de l'*article* 69, *pag.* 91 ont été calculées dans la *Note* 41, *num.* 4. 5. 6.

NOTE XLV.

POUR comprendre l'*article* 70, *pag.* 92, il faut d'abord relire les Notes 11 & 12. Cette lecture vous convaincra que la demi-circonférence ADB (*Fig.* 59. *Pl.* 4.) : à la demi-base BK :: la coupée AD : à l'appliquée DF, donc $DF = \frac{bu}{a}$. Mais $DF = EF - ED = y - z$; donc $y - z = \frac{bu}{a}$, donc $y = z + \frac{bu}{a}$.

Il faut ensuite former mentalement un triangle des *différences infiniment petites* de AE, de ED & de AD; & l'on verra que la *différence* de AD deviendra la base d'un triangle rectangle qui aura pour ses deux côtés les *différences* de AE & de ED; donc $du^2 = dx^2 + dz^2$; donc $du = \sqrt{dx^2 + dz^2}$. Ainsi à l'article 70, $du\ (\sqrt{dx^2 + dz^2})$ signifie $du = \sqrt{dx^2 + dz^2}$, & non pas $du \times \sqrt{dx^2 + dz^2}$.

Il faut enfin bien se convaincre que si $du = \sqrt{dx^2 + dz^2}$, l'on aura $du = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$. En voici le calcul: $dz^2 = \frac{c^2dx^2 - 2cxdx^2 + x^2dx^2}{2cx - xx}$; donc $dz^2 + dx^2 = \frac{c^2dx^2 - 2cxdx^2 + x^2dx^2}{2cx - xx} + dx^2$; & en mettant dx^2 sous le dénominateur $2cx - xx$, & ôtant ensuite les quantités qui se détruisent, l'on trouvera $dz^2 + dx^2 = \frac{c^2dx^2}{2cx - xx}$; donc

$\sqrt{dz^2 + dx^2} = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$; donc $du = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$. Le reste de l'*article* 70 n'a besoin d'aucun éclaircissement particulier.

C'est ici que M. Varignon a remarqué qu'en faisant $ddy = \infty$, l'on avoit par là même $\overline{2cx - xx} \times \sqrt{2cx - xx} = 0$; donc $2cx \times \sqrt{2cx - xx} = xx \times \sqrt{2cx - xx}$; donc $2cx = xx$; donc $2c = x$. Il conclut de-là que $ddy = \infty$, n'est pas une marque sûre du point de rebroussement, puisque la roulette allongée n'est pas une courbe rebroussée. M. Varignon a raison, & M. de l'Hôpital n'a pas tort. Pour les accorder ensemble, il me paroit qu'il faut présenter ainsi la régle générale : $ddy = \infty$ *est une marque sûre du point de rebroussement, lorsque* ddy $= 0$ *n'a donné aucune valeur. Mais* ddy $= \infty$ *n'est pas une marque de rebroussement, lorsque* ddy $= 0$ *a donné quelque chose.* Or dans le cas présent $ddy = 0$ a donné $x = c + \frac{ac}{b}$; donc dans le cas présent $ddy = \infty$ peut donner une valeur de x, sans indiquer cependant aucun rebroussement dans la roulette allongée.

NOTE XLVI.

AVANT que de lire l'*article* 71, *pag.* 93, il faudra relire auparavant la Note 15 dans laquelle se trouve expliquée la nature de la conchoide. Vous chercherez ensuite la *différence* de $\frac{\overline{b + x}\sqrt{aa - xx}}{x}$; vous trouverez $\frac{-x^3dx - aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$.

M. le Marquis de l'Hôpital la suppose telle, puisqu'il lui assigne pour *différence seconde* $\frac{\overline{2a^4b - aax^3 - 3aabxx} \times dx^2}{\overline{aax^3 - x^5} \times \sqrt{aa - xx}}$. C'est donc ou une inattention, ou une faute d'impression qui a fait donner le signe + à un numérateur dont les deux termes doivent être affectés du signe —. Cette *seconde différence* vous donnera l'équation incompléte du troisieme degré $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$. Pour mettre cette équation en état d'être calculée, vous ferez évanouir le second terme, en supposant *par la régle ordinaire* $x = y - b$, & vous aurez pour votre équation transformée $y^3 - 3bby + 2b^3 - 2aab$. Vous ferez $-3bb = -p$, & $+2b^3 - 2aab = -q$, & vous aurez $y^3 - py - q = 0$, équation du troisieme degré qui se trouve calculée dans tous les Livres élémentaires d'algébre, & nommément dans *notre Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des leçons élémentaires de M. l'Abbé de la Caille*, *pag.* 32 *& suivantes.*

La seconde maniere dont M. le Marquis de l'Hôpital résout le même problême, apprend à un Commençant à se servir de la formule $yddy = dx^2 + dy^2$. Les calculs ne demandent qu'un peu d'attention, & l'on parvient comme naturellement à l'équation du 3^e degré $2z^3 - 3bbz - abb = 0$. Cette équation se change en celle-ci, $z^3 - \frac{3bb}{2}z - \frac{abb}{2} = 0$. Vous faites $-\frac{3bb}{2} = -p$, & $-\frac{abb}{2} = -q$, & vous avez $z^3 - pz - q = 0$, équation du troisieme degré que tout Commençant sçait résoudre.

NOTE XLVII.

L'ARTICLE 72, *pag.* 95 a besoin, pour être compris, des remarques suivantes.

1°. $y = b + x\sqrt{\frac{a-x}{x}}$; donc $y = b \times \sqrt{\frac{a-x}{x}} + x \times \sqrt{\frac{a-x}{x}}$. Mais $x \times \sqrt{\frac{a-x}{x}} = \sqrt{\frac{axx-x^3}{x}} = \sqrt{ax-xx}$; donc $y = b\sqrt{\frac{a-x}{x}} + \sqrt{ax-xx}$.

2°. Pour trouver facilement la *différence* de cette derniere valeur de y, souvenez-vous d'abord que $b\sqrt{\frac{a-x}{x}} = \sqrt{\frac{abb-bbx}{\sqrt{x}}}$, parce que le dénominateur x est aussi bien affecté du signe radical, que le numérateur $a-x$. Souvenez-vous ensuite que la différence de $\sqrt{\frac{abb-bbx}{\sqrt{x}}}$ est $\frac{-bbdx\times\sqrt{x}}{2\sqrt{abb-bbx}}\ \frac{-dx\times\sqrt{abb-bbx}}{2\sqrt{x}}$, le tout divisé par x. Réduisez ces deux fractions à un même dénominateur, & ôtez les quantités qui se détruisent, vous aurez $\frac{-2abbdx}{2\sqrt{x}\times2\sqrt{abb-bbx}}$, le tout divisé par x. Vous aurez donc $\frac{-2abbdx}{4x\sqrt{abbx-bbxx}}$. Mais cette der-

niere fraction est égale à $\frac{-abbdx}{2bx\sqrt{ax-xx}} = \frac{-abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$; donc la différence de $b\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ est $\frac{-abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$.

3°. Ajoutez à cette *différence* celle de $\sqrt{ax-xx}$, c'est-à-dire $\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}} = \frac{axdx-2xxdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$; & vous trouverez, aux signes près, la même chose que M. le Marquis de l'Hôpital, c'est-à-dire, $\frac{axdx-2xxdx-abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$. Ce n'est qu'en conservant ces derniers signes, que vous parviendrez à la *seconde différence*, telle qu'elle est marquée dans *l'Analyse des Infiniment Petits*. Aussi ne voyons-nous pas pourquoi M. le Marquis de l'Hôpital n'a pas conservé les signes qui se présentoient naturellement. C'est ici le lieu de relever une faute qui s'est glissée dans les deux éditions, & qu'il est difficile de regarder comme une faute d'impression. M. le Marquis de l'Hôpital divisa d'abord $\overline{3aab-aax-4abx}\times dx^2$ par $\overline{4ax-4x^3}\times\sqrt{ax-x^2}$; & il avertit à la fin de son Ouvrage qu'il le falloit diviser par $4ax-4x^2$. Il ne faut faire ni l'un ni l'autre. Le vrai diviseur est $4axx-4x^3$, parce que le quarré de $2x\sqrt{ax-xx}$ est évidemment $4ax^3-4x^4$, & non pas $4axx-4x^3$, comme l'assure M. Crouzas. Mais la faute que nous relevons ici, ne peut conduire dans aucune erreur, puisque c'est le numérateur de la fraction que l'on fait $=0$. Nous aurions pu la corriger dans cette troisieme édition. Mais nous nous sommes fait une loi inviolable de ne rien changer au texte de M. le Marquis de l'Hôpital.

NOTE XLVIII.

L'ARTICLE 73, *pag.* 97 est terminé par une équation du cinquieme degré. L'on n'a qu'à exprimer en chiffres les valeurs de a & de b; & alors cette équation ne sera pas bien difficile à résoudre. Si l'on suppose, *par exemple*, $a=2$, & $b=2$, l'équation proposée se changera en celle-ci, $y^5-6y^4+12y^3-8y^2+12y-16=0$; & cette équation se résoudra par la seconde des méthodes que donne M. l'Abbé de le Caille dans ses Elémens de Mathématique, *pag.* 89 & 90, parce que dans cette supposition y est égal à un nombre entier joint à une fraction.

NOTE XLIX.

L'ARTICLE 74, *pag.* 98 a besoin des trois éclaircissemens suivants.

1°. $FB=\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$; en voici le calcul. A cause du triangle rectangle FEB, *Fig.* 64. *Pl.* 4, l'on a $FB^2=EF^2+EB^2$; donc $FB^2=yy+\frac{yydx^2}{dy^2}=\frac{yydy^2+yydx^2}{dy^2}=\frac{yy\times\overline{dx^2+dy^2}}{dy^2}$; donc $FB=\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$.

2°. A cause de l'équation à la courbe, l'on aura

$\frac{mydy}{nx}=\frac{nxdy-nydx}{my}$. En effet, l'équation à la courbe donne $m:n::xdy-ydx:y\sqrt{dx^2+dy^2}$; donc $my\sqrt{dx^2+dy^2}=nxdy-nydx$; donc $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{nxdy-nydx}{my}$. Mais $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{mydy}{nx}$; donc $\frac{mydy}{nx}=\frac{nxdy-nydx}{my}$.

3°. Pour trouver $y\sqrt{mm-nn}=nx$, voici les opérations qu'il faut faire. 1°. Divisez par dy l'équation $\frac{dy\sqrt{mmyy-nnxx}}{nx}=\frac{nnxxdy-mmyydy}{nnxy}$, vous aurez $\frac{\sqrt{mmyy-nnxx}}{nx}=\frac{nnxx-mmyy}{nnxy}$.
2°. Multipliez cette derniere équation par nx, & ôtez les quantités qui se détruisent, vous aurez $\sqrt{mmyy-nnxx}=\frac{nnxx-mmyy}{ny}$; donc $ny\sqrt{mmyy-nnxx}=nnxx-mmyy$; donc $\sqrt{m^2n^2y^4-n^4x^2y^2}=nnxx-mmyy$; donc $-n^4x^2y^2+m^2n^2y^4=\overline{nnxx-mmyy}^2$; donc, en divisant tout par, $n^2x^2-m^2y^2$, l'on aura $-n^2y^2=n^2x^2-m^2y^2$; donc $y^2\times\overline{mm-nn}=nnxx$; donc $y\sqrt{mm-nn}=nx$.

Remarque. Ceux qui nous ont suivi jusqu'à présent, sont en état de lire sans guide, à quelques points près, les 6 dernieres Sections de l'Analyse des Infiniment Petits. Ce sont ces quelques points que l'on trouvera éclaircis dans les 6 Notes suivantes.

NOTE L.

La Section 5e, contient 34 articles. Ceux qui se rappellent nos notes 5, 7, 11, 12, 23, 24 & 40, ne peuvent être arrêtés que dans la lecture des articles 77, 79, 84, 86, 87, 89, 90, 93, 101, 103, 105, & 109. Voici l'explication de ce qu'il y a de plus difficile dans ces 12 articles.

1°. L'on assure sur la fin de l'article 77 que $z = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$. Pour trouver cette valeur, il faut manier suivant les régles ordinaires l'équation $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-dyddy} \times \frac{ydy - zdy}{y}$.

2°. Pour trouver, au commencement de l'article 79, la valeur de RG (*Fig.* 67, *Pl.* 4), l'on dira, MR : *m*R : : *m*R : RG.

3°. La valeur de PT (*Fig.* 72. *Pl.* 4) est en général $\frac{ydx}{dy}$. Cette valeur devient $2x$ dans la parabole dont il s'agit à l'article 84, parce que dans cette parabole l'on a $x = \frac{yy}{a}$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$. Dans cette même parabole l'on a $PQ = \frac{1}{2}a$, parce qu'on a démontré (article 79) que $PQ = \frac{ydy}{dx}$.

4°. En lisant l'article 86, l'on pourra demander comment se sont trouvées les valeurs de EC, de MS & de TQ (*Fig.* 74, *Pl.* 4). L'on aura la valeur de EC, en imaginant, suivant la coutume, un

un triangle infiniment petit dont les deux côtés soient dx, dy, & qui soit équiangle au triangle MEC. L'on dira alors $dx : dy$: : ME : EC.

Pour avoir la valeur de MS, vous direz, à cause de l'angle droit MTS, MP : PT : : PT : PS.

Enfin pour avoir la valeur de TQ, vous direz, à cause de l'angle droit TMQ, PT : PM : : PM : PQ. Il n'est pas nécessaire d'avertir que $PM = y$, & $PT = \frac{ydx}{dy}$.

5°. L'article 87 auroit besoin d'un éclaircissement qui eut rapport à la *différence seconde* de y^m, si cette *différence seconde* n'eut pas été calculée sur la fin de la 40e. note. Il y a encore sur la fin de cet article une phrase dont le sens ne se présente pas tout de suite. La voici. *Ou* m *est moindre que* 2, *& alors l'exposant de* y *étant positif, elle se trouvera dans le numérateur*, &c. Pour que cette phrase & quelques autres suivantes ayent la clarté requise dans les ouvrages de Mathématiques, il faut dire : *l'appliquée* y *se trouvera dans le numérateur*, &c.

6°. L'ellipse dont il s'agit a l'article 89, a évidemment pour petit axe $\sqrt{ab}$, parce que son grand axe est a, & le paramétre de ce grand axe est b. Pour avoir le paramétre de $\sqrt{ab}$, il faut dire, $\sqrt{ab} : a : : a$: au paramétre du petit axe ; donc le paramétre du petit axe est $\frac{aa}{\sqrt{ab}} = \frac{aa\sqrt{ab}}{\sqrt{ab} \times \sqrt{ab}} = \frac{aa\sqrt{ab}}{ab} = \frac{a\sqrt{ab}}{b}$.

7°. Pour trouver, à l'article 90, la valeur de EC, vous direz d'abord PT (a) : PM (y) : : PM (y) : PQ $= \frac{yy}{a}$. Vous direz ensuite PM : PQ : : ME : EC.

8°. L'article 93 a besoin des éclaircissemens suivans. 1°. Pour trouver $du = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, il faut imaginer proche du point E, *Fig.* 83. *Pl.* 5, un triangle rectangle infiniment petit, semblable au triangle rectangle EPK, dont le côté dx, *différence de* AP, & la base du, *différence de l'arc* AE, soient homologues à EP & EK. L'on dira alors EP $(\sqrt{2ax - xx}$: EK (a) : : dx : du. 2°. Pour trouver $dy = dx \frac{\sqrt{2a - x}}{\sqrt{x}}$, l'on a divisé par $\sqrt{2a - x}$ le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$. 3°. On aura la valeur de BE en faisant $BE^2 = AB^2 - AE^2$. 4°. C'est au point A qu'on a $x = o$; & c'est au point B qu'on trouve $x = 2a$.

9°. Pour comprendre la derniere conséquence de l'article 101, il faut se rappeller que la portion de la roulette AM n'est que la somme des arcs infiniment petits Mm, & que la corde AE n'est que la somme des EF.

10°. On avance, à l'article 103, que l'espace RGBQ (*Fig.* 87, *Pl.* 5) est égal à l'espace MGBE. L'on a raison, puisqu'on a démontré dans la figure 84 de la même planche que l'arc MR = l'arc EQ,

par la même que l'angle MOK = l'angle EOK.

Pour trouver, à la fin du même article, $zz = 2aa + 2ab + bb$, il faut que l'arc MEQ, (*Fig.* 87, *Pl.* 5) coupe en 2 parties égales le demi-cercle AEB au point E. Alors l'angle EKO sera droit; & en tirant le rayon OE = OQ = z, l'on aura $OE^2 = EK^2 + OK^2$; donc $zz = aa + aa + 2ab + bb$; donc $zz = 2aa + 2ab + bb$.

11°. Pour trouver, à l'article 105, $x = \frac{3}{2} a$, il faut se rappeller que xx étant nul vis-à-vis $2bx$, & $2aa$ vis-à-vis $3ab$, il reste $2bx = 3ab$, & par conséquent $x = \frac{3}{2} a$. Il faut encore se rappeller qu'en faisant BP $= \frac{3}{4}$ AB, l'on fait par là même $x = \frac{3}{2} a$, parce que BP $= x$, & AB $= 2a$.

12°. Pour peu qu'on réfléchisse sur la figure 91 citée à l'article 109, l'on verra que la courbe DE est formée par le développement de la convexité AD; la courbe EF par le développement de la convexité AB; & la courbe DG par le développement de la convexité DC.

NOTE LI.

IL y a dans la sixieme section quelques articles qui nous ont paru mériter quelques éclaircissements. Ce sont les articles 110, 113, 118, 119, 120, 121, 123 & 125.

1°. L'angle de réfléxion FmD (*Fig.* 94. *Pl.* 5, *art.* 110) est égal à l'angle d'incidence BmM, & par conséquent à l'angle RmM.

2°. *L'article* 113 est un des plus importants du Traité des Infiniment Petits. Il sert à démontrer que l'image d'un objet vû par le moyen d'un miroir, ne paroit pas toujours au point de concours de la cathéte d'incidence & du rayon réfléchi; cela n'est exactement vrai que pour les miroirs plans; pour les autres il souffre bien des exceptions. Soit, *par exemple*, le miroir concave AMD, (*Fig.* 97, *Pl.* 5). Soient les deux rayons de lumiere infiniment près l'un de l'autre BM, Bm envoyés par le point B sur la concavité de ce miroir, & réunis au point F après la réfléxion. Il est évident que ces deux rayons donneront, après leur réfléxion, l'image de l'objet B au point F; s'ils la donnoient ailleurs, *par exemple*, à leur point de concours avec la cathéte d'incidence, l'on auroit deux images de l'objet B; donc &c. Ce que l'on peut auancer en général pour toute sorte de miroirs, c'est que le lieu de l'image est toujours au point F où deux rayons incidents infiniment proches l'un de l'autre BM, Bm viennent se couper après la réfléxion.

3°. L'on assure (*art.* 118) que lorsque MF est infini, l'on a $ME = 2MB$ (*Fig.* 98 *Pl.* 5) ou $a = 2y$. L'on a raison. La valeur de MF est (*art.* 113) $= \frac{ay}{2y-a}$. Lorsque MF est infini, l'on a $MF = \frac{ay}{o}$; donc dans ce cas l'on a $2y - a = o$; donc $2y = a$. Pour trouver la proportion indiquée à la fin de ce même article, il faut dire, la moitié du grand axe : au rayon incident : : le rayon réfléchi : ME. Or par là même que les rayons

incident & réfléchi sont donnés, le grand axe l'est aussi. Car dans la figure 99 de la planche 5, l'on a $AD = BM + MF$; & dans la figure 100 de la planche 6, l'on a $Aa = MF - MB$, parce que les rayons incidens & réfléchi sont tirés des deux foyers à un même point de la courbe elliptique ou hyperbolique.

4°. L'article 119 a besoin des éclaircissemens suivans. L'on demande 1°. Pourquoi $MF = \frac{1}{2}MG$, lorsque les rayons incidens PM sont perpendiculaires sur l'axe AP, (*Fig.* 101 *Pl.* 6.). L'on répond que lorsque les rayons incidens PM sont perpendiculaires sur l'axe AP, ils sont par là même paralléles entr'eux; & puisqu'àlors l'on a eu (*art.* 113) $MF = \frac{1}{2}MG$; l'on doit avoir (*art.* 119), en faisant la même supposition, $MF = \frac{1}{2}MG$.

L'on demande 2°. Si la construction abrégée dont parle M. le Marquis de l'Hôpital, est préférable à celle qu'il donne d'abord. L'on peut répondre hardiment que non. Cette construction n'est bonne que pour ceux qui voudroient s'épargner la peine de chercher le rayon de la développée de la parabole. Ce rayon se trouve très-facilement par l'article 84.

L'on demande 3°. Pourquoi, lorsque le rayon réfléchi est paralléle à l'axe, l'on a $MP = PQ$ (*Fig.* 101. *Pl.* 6.). Pour répondre à cette question, l'on n'a qu'à démontrer que dans la même figure l'on a $ML = LQ$. En effet l'angle QMA = l'angle QMD, puisque ce sont les deux angles droits formés par le rayon MC de la développée avec la courbe AMD. De plus, l'angle d'incidence AML eſt égal à l'angle de réfléxion NMD ; donc l'angle reſtant LMQ eſt égal à l'angle reſtant QMN. Mais à cauſe des paralléles MN, AO, l'on a LQM = QMN ; donc LMQ = LQM ; donc les angles ſur la baſe MQ ſont égaux ; donc ML = LQ. Pour trouver $dy = dx$, il faut imaginer au point M un triangle infiniment petit, ſemblable au triangle iſoſcéle MLQ dont les 2 côtés dy, dx ſoient homologues aux deux côtés ML, LQ.

L'on demande 4°. comment $\sqrt{tt - yy}$ diviſé par $t + y$ donne $\frac{\sqrt{t - y}}{\sqrt{t + y}}$. L'on répond que $\frac{\sqrt{tt - yy}}{t + y} = \frac{\sqrt{\overline{t - y} \times \overline{t + y}}}{\sqrt{\overline{t + y} \times \overline{t + y}}} = \frac{\sqrt{t - y}}{\sqrt{t + y}}$. Il n'eſt pas néceſſaire de faire remarquer que l'on trouve $dy^2 - 2yddy = dx^2$, en maniant ſuivant les régles ordinaires l'équation $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy}$. Il n'eſt pas plus néceſſaire de faire remarquer que l'équation $zz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}uu + \frac{3}{4}u$ que l'on trouve ſur la fin de l'article 119, n'eſt pas différente de l'équation $azz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{3}{4}aau$, parce que $a = 1$. Ce n'eſt que par la loi des homogénes qui exige que tous les termes de l'équation ayent les mêmes dimenſions, que l'on a fait entrer tantôt a, & tantôt aa dans l'équation primitive.

5°. Pour comprendre l'article 120, on fera attention à ce qui ſuit. 1°. Une perpendiculaire tirée du point C ſur le rayon MF prolongé (*Fig.* 102, *Pl.* 6) couperoit ce rayon réfléchi dans un point où il ſeroit égal à la ligne appellée a à l'article 113, comme il eſt aiſé de s'en convaincre en examinant la figure 97 de la planche 5 ; donc une perpendiculaire tirée du milieu de MC ſur le rayon réfléchi MF rencontrera ce rayon dans un point où il ſera égal à $\frac{1}{2}a$, c'eſt-à-dire, le rencontrera au point F ; car MF $= \frac{1}{2}a$, lorſque les rayons incidens PM ſont perpendiculaires ſur l'axe, comme nous venons de le remarquer au *num.* précédent de cette note. 2°. Si MF $= \frac{1}{2}a$, l'on aura MF $= \frac{1}{2}$ MP, parce que la ligne MP de la figure 102 repréſente la ligne ME ou la ligne a de la figure 97. 3°. Pour ſe convaincre que la cauſtique AF eſt triple de MF, il faut ſe rappeller que AF (*art.* 110) = PM + MF. Or PM = 2MF ; donc AF = 3MF. 4°. Si l'angle ACM ou PCM eſt de 45°, l'angle d'incidence PMC ſera de 45° ; donc l'angle de réfléxion CMF ſera de 45°. ; donc l'angle total PMF ſera droit, & par conſéquent MF ſera paralléle à AC.

6°. On peut demander en liſant l'article 121, pourquoi KD $= \frac{1}{3}$ AD (*Fig.* 103, *Pl.* 6). Pour répondre à cette queſtion, on fera remarquer que lorſque AD eſt le rayon incident, alors DK eſt le rayon réfléchi. Or de même que MF eſt $\frac{1}{3}$ AM, de même DK eſt $\frac{1}{3}$ AD. On peut encore demander pourquoi MF eſt paralléle à AD, lorſque AM eſt égal à AC. L'on répondra que lorſque AM = AC, alors le triangle ACM eſt équilateral ; donc chacun de ſes angles vaut 60 degrés ; donc l'angle de réfléxion C M F néceſſairement égal à l'angle d'incidence A M C, vaudra 60 degrés ; donc les angles alternes ACM, CMF feront égaux ; donc les lignes A D, M F feront paralléles.

7°. L'article 122 n'a beſoin d'aucun commentaire. Il n'en eſt pas ainſi de l'article 123. En le liſant, on ſe ſouviendra d'abord que MG, (*Fig.* 105. *Pl.* 6) eſt une partie du rayon de la développée, laquelle partie eſt paralléle & égale à NB, & que pour trouver MF = MQ = PN, il faut imaginer une perpendiculaire tirée du point G au point F, pour avoir le triangle rectangle MFG égal au triangle rectangle MQG, à cauſe du côté commun MG & de l'angle de réfléxion GMF égal à l'angle d'incidence GMP. On ſe ſouviendra enſuite que ſi le rayon incident PM partoit du centre C du cercle ANB, l'on auroit l'angle d'incidence PMG de 45 degrés, à cauſe du triangle rectangle iſoſcéle BPN. On ſe ſouviendra encore que, par la nature de la roulette, l'on a LI = AI, & que pour trouver $du = \frac{adx}{y}$, il faut imaginer prés du point I un triangle rectangle infiniment petit, ſemblable au triangle rectangle CHI, dont la *différence* de AI & la *différence* de IH feront en proportion avec CI & IH. L'on aura donc $du : dx :: a : y$; donc $du = \frac{adx}{y}$. L'on ſe ſouviendra enfin que la nature du cercle donne AH : IH :: IH : HB, ou, $yy = 2ax - xx$; donc $2ydy$

$= 2adx - 2xdx$; donc $-2ydy = 2xdx - 2adx$. Les defauts de proportion qui ſe trouvent dans la figure 105, ſe corrigent d'eux-mêmes, & ne ſçauroient induire dans aucune erreur.

8°. L'article 124 ſe préſente de lui-même. Pour comprendre facilement l'article 125, il faut relire l'article 100 dans lequel $GC = \frac{b}{2a+b}$ MG. A l'article 125 l'on a $b = a$ à cauſe de l'égalité des cercles mobile & immobile ; l'on aura donc GC $= \frac{b}{3b}$ MG, ou GC $= \frac{1}{3}$ MG (*Fig.* 106. *Pl.* 6).

Les autres articles de la 6e. ſection ne ſont ni aſſez intéreſſants, ni aſſez difficiles pour mériter un commentaire.

NOTE LII.

DANS la ſection 7e. M. le Marquis de l'Hôpital ſe ſert du calcul des *différences* pour trouver les cauſtiques par réfraction. Il ſuppoſe que celui qui en entreprend la lecture, eſt au fait de ce qui arrive à la lumiere, lorſqu'elle traverſe les verres convexes & concaves. Nous le ſuppoſerons auſſi dans cette note. Ce qui nous engage à ſupprimer une pareille diſſertation, c'eſt que nous avons déja traité cette matiere aux articles de notre Dictionnaire de Phyſique qui commencent par les mots *Réfraction*, *Dioptrique*, *Lunette*, *Microſcope & Teleſcope*. Cette note ne roulera donc que ſur les articles 135, 136, 137, 139, 141, 142 & 144 ; ce ſont les ſeuls qui ayent beſoin de quelques éclairciſſements.

1°. Pour comprendre la fin de l'article 135, vous remarquerez ce qui ſuit. 1°. m eſt infinie par rapport à n, lorſque $n = o$ 2°. L'on a $n = o$, lorſqu'il n'y a point de réfraction, c'eſt-à-dire, lorſque le rayon incident B M (*Fig.* 111, *Pl.* 6) eſt perpendiculaire à la courbe AMD. 3°. Lorſque le rayon incident B M eſt perpendiculaire à la courbe AMD, il doit, après avoir traverſé cette courbe, ſe confondre avec MC, perpendiculaire à A M D. 4°. Lorſque m eſt infinie par rapport à n, l'on a $MF = b$, parce que la formule $MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$ devient évidemment $MF = \frac{bbmy}{bmy} = b$.

2°. M. le Marquis de l'Hôpital ſuppoſe que celui qui lira l'article 136, a préſent à l'eſprit ce qui arrive à un rayon de lumiere qui paſſe obliquement, tantôt d'un milieu plus rare dans un milieu plus denſe, tantôt d'un milieu plus denſe dans un milieu plus rare. Dans le premier cas m eſt plus grand que n; dans le ſecond c'eſt n qui eſt plus grand que m.

3°. En liſant l'article 137, vous-vous ſouviendrez de ce qui ſuit. 1°. Lorſque les rayons incidens B M (y) ſont paralléles entr'eux, alors ils ſont infinis; donc la formule $MF = \frac{bmy}{my - ny \mp bn}$ devient, à cauſe du terme infiniment petit $\mp bn$, $MF = \frac{bmy}{my - ny} = \frac{bm}{m - n}$. 2°. Lorſque les droites a & b ſont infinies, alors les termes bmy, any ſont nuls par rapport aux termes aan, $bbmy$, parce que ceux-ci ſont des infinis du ſecond genre, & ceux-là ne ſont que des infinis du premier genre.

4°. L'article 139 demande, pour être compris, les remarques ſuivantes. 1°. Dans la figure 115 DN eſt par rapport à BD ce que dans la figure 111 MG (b) eſt par rapport à B M. 2°. La cauſtique entiere $HFN = AH - DN - \frac{2}{3}AC$. Mais $AH = 3AC$, donc $HFN = 3AC - \frac{2}{3}AC - DN = \frac{9}{3}AC - \frac{2}{3}AC - DN = \frac{7}{3}AC - DN$. Mais $DN^2 = CD^2 - CN^2 = CD^2 - \frac{4}{9}CD^2$, puiſque par hypothéſe $CN = \frac{2}{3}CD$; donc $DN^2 = AC^2 - \frac{4}{9}AC^2$; donc $DN^2 = \frac{5}{9}AC^2$; donc $DN = \sqrt{\frac{5}{9}AC^2}$; donc $DN = \frac{1}{3}AC\sqrt{5}$; donc ſi l'on a $HFN = \frac{7}{3}AC - DN$, l'on aura par là même $HFN = \frac{7}{3}AC - \frac{1}{3}AC\sqrt{5} = \frac{7 - \sqrt{5}}{3}AC$. Tout ce calcul ſe rapporte à la cauſtique HFN de la figure 115. 3°. Pour ce qui regarde la cauſtique HFN de la figure 116, vous trouverez $HFN = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}AC$, en vous rappellant que $NK = \frac{2}{3}AC$, & que la cauſtique $HFN = 2AC + \frac{3}{2}AK$. En effet, $CK^2 = CN^2 - NK^2 = AC^2 - NK^2 = AC^2 - \frac{4}{9}AC^2 = \frac{5}{9}AC^2$; donc $CK = \sqrt{\frac{5}{9}AC^2}$; donc $CK = \frac{1}{3}AC\sqrt{5}$. Mais $AK = AC - CK$, donc $AK = AC - \frac{1}{3}AC\sqrt{5}$, donc $\frac{3}{2}AK = \frac{3}{2}AC - \frac{3}{6}AC\sqrt{5} = \frac{3}{2}AC - \frac{1}{2}AC\sqrt{5}$. Mais la cauſtique $HFN = 2CA + \frac{3}{2}AK$; donc $HFN = \frac{4}{2}AC + \frac{3}{2}AC - \frac{1}{2}AC\sqrt{5} = \frac{7}{2}AC - \frac{1}{2}AC\sqrt{5} = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}AC$.

5°. L'article 141 ſuppoſe que l'on a préſent à l'eſprit l'article 132. Il ſuit de ce dernier article que BM — BA : LM : : $m : n$. Mais l'on a dans la figure 118 PM = BM — BA, & AE = LM ; l'on aura donc PM : AE : : $m : n$.

6°. A la fin de l'article 142, il est parlé des ovales de Descartes. Cette matiere est traitée dans la section seconde du livre 2 de sa Géométrie. Voyez-en le Commentaire qu'en a fait le P. Rabuel Jésuite, *pag.* 340 *& suivantes.*

7°. Pour comprendre la bonté de l'équation $NF + FH - \frac{n}{m} NC = HD - \frac{n}{m} DC$ de l'article 144, il faut la transformer en celle-ci, $FH = HD - NF + \frac{n}{m} NC - \frac{n}{m} DC$, & se rappeller ensuite l'équation de l'article 132, où l'on lit $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA$. Il faut encore avoir en même tems sous les yeux les figures 121 & 112, parce que HD est pour la figure 121 ce qu'est AH pour la figure 112. Il en est de même de NF, $\frac{n}{m} NC$, $\frac{n}{m} DC$; ils sont dans la figure 121 ce que sont dans la figure 112 MF, $\frac{n}{m} BM$, $\frac{n}{m} BA$.

NOTE LIII.

LA Section 8e. contient 11 articles qu'il est nécessaire de commenter ; ce sont les articles 147, 148, 151, 152, 155, 156, 158, 159, 160, 161 & 162.

1°. L'article 147 est très-difficile ; en voici le

commentaire. 1°. L'équation $xx = 4ay - 4yy$ est un lieu au petit axe AB de la demi-ellipse AMB, *Fig.* 122. *Pl.* 7. Ce petit axe a pour paramétre $4a$, parce que le petit axe : au grand axe : : le grand axe : au paramétre du petit axe. L'équation a ce même petit axe est la suivante, $AP^2 : AQ \times BQ$: : le paramétre du petit axe : au petit axe ; donc $xx : ay - yy : : 4a : a$; ce qui donne évidemment $xx = 4ay - 4yy$. Relisez la note 5e. 2°. Pour trouver $AK = \frac{ax}{y}$, il faut d'abord tirer de l'équation $xx = 4ay - 4yy$ la valeur de $2xx = 8ay - 8yy$; il faut ensuite conclure que $dy = \frac{xdx}{2a - 4y}$ par là même que $xdx = 2ady - 4ydy$. Cela fait vous introduirez ces nouvelles valeurs dans l'équation $AK = \frac{2xxdy - 2xydx}{xdy - 2ydx}$, & vous trouverez après un très-grand nombre d'équations & de transformations $AK = \frac{ax}{y}$. 3°. La parabole qui a pour sommet le point A est asymptotique de celle qui passe par tous les points C, parce que toutes ces paraboles ont, avec le même paramétre 4AB, differents sommets sur le même axe ; donc leurs différentes branches s'approcheront continuellement, sans pouvoir jamais se toucher.

2°. L'article 148 ne demande que cette seule remarque : l'on trouvera PQ (*Fig.* 123. *Pl.* 7.) = $\frac{ydy}{dx}$, en imaginant au point M un triangle infiniment petit, semblable au triangle MPQ dont les deux côtés dx, dy seront homologues à PM, PQ. Il n'est pas nécessaire d'avertir que dans ce même article l'on a $PC^2 = KC^2 + PK^2$ par la 47e. proposition du livre 1 des élémens d'Euclide, & non pas par la propriété du cercle.

3°. M. le Marquis de l'Hôpital a supposé dans son article 151 que l'on avoit présent à l'esprit l'article 11.

4°. A l'article 152 l'on a AT (*Fig.* 125. *Pl.* 7) $= \frac{aa}{x}$, parce que l'on a évidemment AP : AM :: AM : AT, ou $x : a :: a : AT = \frac{aa}{x}$. Mais (*art.* 150) AT : AP :: AP : AK, ou $\frac{aa}{x} : x :: x : AK$; donc $AK = \frac{x^3}{aa}$. L'équation que l'on trouve à la fin de cet article prouve que la courbe BCD est une courbe du troisieme genre. M. Varignon est parvenu d'une maniere plus simple à une équation qui prouve la même vérité. Voici comment il raisonne : Puisque $QC = \frac{xx}{a}$, l'on aura $CP = a - \frac{xx}{a}$. Ainsi QP (a) : QA (y) :: CP $(a - \frac{xx}{a})$: CK (z); donc $az = \frac{aay - xxy}{a}$; donc $aaz = aay - xxy$ donc $a^4z^2 = a^4y^2 - 2a^2x^2y^2 + x^4y^2$. Mais le cercle BMD donne $AP \times PT = PM^2$, ou, $a^2 - x^2 = y^2$; donc $a^4z^2 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6$; donc $\sqrt[3]{a^4z^2} = a^2 - x^2$. Mais $u = \frac{x^3}{aa}$, donc $x^3 = aau$, donc $x = \sqrt[3]{aau}$; donc $xx = \sqrt[3]{a^4uu}$; donc $\sqrt[3]{a^4z^2} = a^2 - \sqrt[3]{a^4uu}$; donc $a\sqrt[3]{az^2} = aa - a\sqrt[3]{au^2}$; donc $\sqrt[3]{az^2} = a - \sqrt[3]{au^2}$; donc l'équation de la courbe BCD prouve que c'est ici une courbe du troisieme genre.

5°. La proposition énoncée par l'article 155 est démontrée dans tous les Traités de Méchanique, & nommément dans celui de M. l'Abbé de la Caille, *art.* 364, *pag.* 113.

6°. Le mot *sesquialtere* pourroit embarrasser un Commençant. Etre sesquialtere, c'est avoir la moitié en sus; a sera sesquialtere de b, si l'on peut dire, $a = \frac{3}{2} b$. Si la portion ND de la courbe DNF (*Fig.* 125. *Pl.* 7.) étant multipliée par le rayon AB est sesquialtere du segment circulaire DMP, il s'ensuit que la courbe entiere DNF est égale aux trois quarts de BMD, quatrieme partie de la circonférence du cercle. En voici la démonstration, elle est de M. Crouzas. $DNF \times AB$ est trois moitié de l'espace BADMB. Mais l'espace $BADMB = AB \times \frac{DMB}{2}$, donc $DNF \times AB = \frac{3}{2} AB \times \frac{DMB}{2} = \frac{3}{4}$ ABDMB; donc $DNF = \frac{3}{4}$ DMB. Ces deux remarques ont été nécessaires pour l'intelligence de l'article 156.

7°. L'article 158 présente deux points qu'il faut nécessairement expliquer. 1°. Pour suivre M. le Marquis de l'Hôpital, lorsqu'il parle de la différence de $\frac{uy - xy}{\sqrt{aa - xx}} - y$, il faut se rappeller qu'après avoir cherché cette différence par les régles ordinaires, il parvient à une fraction dont il fait le numérateur $= o$. 2°. Après avoir trouvé $PK = \frac{m^3 + mmx}{aa}$, il faudra chercher MC (*Fig.* 127. *Pl.* 7) $= \frac{mm + mx}{a}$. Pour le trouver, il faudra se souvenir que $NK = PK - PN = \frac{m^3 + mmx}{aa} - m = \frac{m^3 + mmx - aam}{aa}$. Il faudra faire ensuite la proportion suivante; PN (m): MN (a) : : NK ($\frac{m^3 + mmx - aam}{aa}$) : $NC = \frac{am^3 + ammx - a^3m}{aam} = \frac{mm + mx - aa}{a}$. Mais MC $= MN + NC = a + \frac{mm + mx - aa}{a}$; donc MC $= \frac{mm + mx}{a}$.

8°. Prenez garde, en lisant l'article 159, que les lignes LM, *lm* (*Fig.* 128. *Pl.* 7) peuvent être considérées comme paralléles, parce qu'elles forment un angle infiniment petit. Il en est de même de plusieurs autres lignes qui se trouvent dans cette figure.

9°. L'on aura la valeur de MC énoncée dans l'article 160, en disant $m + n : m : : MC + CN$ (a) : MC.

10°. Avant que de lire l'article 161 du Traité des Infiniment Petits, il ne seroit pas mal de lire les articles 155 & 156 du Traité des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital.

11°. Dans l'article 162 l'on ne peut pas tirer MD paralléle à LN (*Fig.* 128. *Pl.* 7.) sans avoir MD : ML : : EF : EG; en voici la preuve. Si les lignes MD & LN sont paralléles, l'on aura l'angle MDL égal à son alterne ELG. Cela supposé, voici comment je raisonne : EF : EG : : le sinus de l'angle ELF : au sinus de l'angle ELG. Mais MD : ML : : le sinus de l'angle DLM, ou ELF : au sinus de l'angle MDL ou ELG; donc si MD & LN sont paralléles, l'on aura MD : ML : : EF : EG : : $bbgh : accf - ccfh$; donc MD : ML (b) : : $bbgh : accf - ccfh$; donc $MD = \frac{b^3gh}{accf - ccfh}$; donc par là même que MD sera paralléle à LN, l'on aura $MD = \frac{b^3gh}{accf - ccfh}$.

NOTE LIV.

La plupart des articles de la section neuvieme que nous avons éclaircis, ne pouvoient gueres se passer de commentaire. Le Lecteur n'en sera que trop convaincu, en jettant les yeux sur les *numero* 6, 8, 9 & 10 de cette note.

1°. L'équation que donne la supposition de l'article 163 est $PM = \frac{PN}{PO}$ (fig. 130. pl. 7). Il s'ensuit de là que lorsque M. le Marquis de l'Hôpital dit que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$, il prend évidemment la constante AB pour l'unité.

2°. Dans les articles 164 & 165 M. le Marquis de l'Hôpital différencie le numérateur de chaque fraction, en le considérant non pas comme numérateur, mais comme une quantité isolée. Il tient la même conduite vis-à-vis le dénominateur.

3°. Pour comprendre la fin de l'article 169, il faut relire la fin de l'article 89.

4°. C'est par l'article 170 que l'on fait à l'article 171 $y = \frac{xz}{a}$.

5°. La proportion de l'article 178 n'est bonne, que parce qu'on considére l'arc infiniment petit Mm (fig. 135, 136, pl. 7) comme la mesure de l'angle MGm. Or on a droit de le considérer ainsi, puisqu'il seroit confondu avec un arc de cercle infiniment petit Mm qui auroit pour rayon GM, pour centre le point G, & qui par là même seroit la mesure de l'angle MGm.

6°. L'on a, à l'article 180, $MI \times MG = BM \times MN$, (fig. 136. pl. 7) parce qu'il est démontré dans tous les élémens de Géométrie que, deux lignes qui se coupent dans un cercle, se coupent en raison réciproque.

S'il s'agit de prouver dans ce même article qu'au point d'infléxion F, la ligne MR est plus grande que la ligne MG, il faudra d'abord supposer pour un moment que $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}} = \sqrt{aa - cc}$.

Cette supposition vous donnera $a = c$, ou KN = KM; ce qui est impossible. Il faudra ensuite supposer que $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ est plus grande que $\sqrt{aa - cc}$; cette seconde supposition donnera c plus grand que a, ou KM plus grand que KN; ce qui est encore impossible; donc au point d'inflexion F l'on aura MG moindre que MR. Enfin l'on ne peut pas supposer, ainsi qu'on l'assure sur la fin de l'article 180, que $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ soit plus grand que $a - c$, sans avoir KM (c) plus grand que $\frac{aa}{a + b}$. La preuve en est renfermée dans le calcul suivant. Il n'est pas nécessaire d'avertir que le signe $>$ signifie *plus grand*.

$$\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}} > a - c \text{ par hypothése.}$$

$$\frac{aab - bcc}{2a + b} > aa - 2ac + cc$$

$$aab - bcc > 2a^3 - 4aac + 2acc + aab - 2abc + bcc$$

$$0 > 2a^3 - 4aac + 2acc - 2abc + 2bcc.$$

Cette derniere équation signifie que les quantités $4aac$ & $2abc$ affectées du signe $-$ surpassent les quantités $2a^3$, $2acc$ & $2bcc$ affectées du signe $+$. Reprenons ce calcul.

$$4aac + 2abc > 2a^3 + 2acc + 2bcc$$

$$2aac + abc > a^3 + acc + bcc$$

$$aac + abc > a^3 - aac + acc + bcc$$

$$aac + abc - acc - bcc > a^3 - aac.$$

Divisons ces deux quantités par $a + b$, nous aurons

$$ac - cc > \frac{a^3 - aac}{a + b}$$

$$\overline{a - c} \times c > \frac{aa \times \overline{a - c}}{a + b}$$

$$c > \frac{aa}{a + b}$$

Donc si l'on suppose $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ plus grand que $a - c$, l'on trouvera c plus grand que $\frac{aa}{a + b}$.

7°. L'on peut demander en lisant l'article 182, pourquoi $GMm + MGg$ (fig. 135. pl. 7) $= \frac{2a + 3b}{b} MGg + \frac{\overline{a + b} \times \overline{cc - aa}}{aab} KGg$. L'on répondra que $GMm + MGg = \frac{2a + 2b}{b} MGg + MGg + \frac{\overline{a + b} \times \overline{cc - aa}}{aab} KGg = \frac{2a + 2b}{b} MGg + \frac{b}{b} MGg + \frac{\overline{a + b} \times \overline{cc - aa}}{aab} KGg$, parce que $\frac{b}{b} = 1$, & que $MGg = 1MGg$. Mais $\frac{2a + 2b}{b} MGg + \frac{b}{b} MGg = \frac{2a + 3b}{b} MGg$; donc &c.

8°. L'article 183 présente une autre solution du problême de l'article 182. Il se comprend à la premiere lecture, lorsqu'on se rappelle que, par la propriété du cercle, PE^2 (fig. 140. pl. 7) $= AP \times PV = 2cu - uu$; & que $EM(y) = \frac{xz}{a}$ (art. 171), $= \frac{axz}{aa}$, devient par là même $\frac{axz}{bc}$,

parce que $OB(b) : KB(a) :: KB(a) : AK(c)$; donc $aa = bc$; donc si l'on a $EM = \frac{axz}{aa}$, l'on aura $EM = \frac{axz}{bc}$.

L'on assure à la fin du même article 183 que par là même que l'espace $AEH =$ au rectangle PQ, moins le double de l'espace circulaire APE, l'on aura $AEH = PE \times KA + KP \times AE$. Le calcul suivant va mettre cette vérité dans tout son jour.

Je nomme AK, a; KP, b; PE, c; EH, ou l'arc AE, d. Cela fait, voici comment je raisonne : le rectangle $PQ = \overline{AK + KP} \times \overline{PE + EH} = \overline{a + b} \times \overline{c + d} = ac + bc + ad + bd$.

L'espace circulaire $APE = AK \times \frac{1}{2} AE + KP \times \frac{1}{2} PE = \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2}$; donc $2APE = ad + bc$; donc le rectangle $PQ - 2APE = ac + bc + ad + bd - ad - bc = ac + bd$. Mais $PE \times AK + KP \times AE = ac + bd$. Donc si l'espace AEH est égal au rectangle PQ, moins le double de l'espace circulaire APE, il sera par là même égal à $PE \times KA + KP \times AE$. L'on a supposé dans ce calcul que le point P tomboit au dessous de K; car lorsqu'il tombe au dessus, l'on a $AEH = PE \times KA - KP \times AE$.

9°. Pour comprendre l'article 185, voici ce qu'il faut se rappeller. 1°. L'espace $AEM = \frac{aa + ab}{bc} \overline{PE \times KA} + \frac{aa + ab}{bc} \overline{- KP \times AE}$. Mais $KP = KV - VP = u - c$; donc $- KP = c - u$;

donc $\frac{aa+ab}{bc} - \overline{KP \times AE} = \frac{aac+abc-aau-abu}{bc} \times$ AE. 2°. Le secteur $AKE = \frac{AK}{2} \times AE = \frac{c}{2} \times$ AE. 3°. L'espace AEM + le secteur AKE $=$ $\frac{aa+ab}{bc} \overline{PE \times KA} + \frac{aac+abc-aau-abu}{bc}$ AE $+ \frac{c}{2} \times AE$; donc l'on aura l'espace AEM + le secteur $AKE = \frac{aa+ab}{bc} \overline{PE \times KA} +$ $\frac{2aac+2abc-2aau-2abu+bcc}{2bc}$ AE. 4°. On ne peut pas faire dans ce même article 185, $u = \frac{2aac+2abc+bcc}{2aa+2ab}$ sans faire $2aau + 2abu = 2aac + 2abc + bcc$, & par conséquent sans rendre nulle la valeur $\frac{2aac+2abc+bcc-2aau-2abu}{2bc}$ AE.

10°. Le dernier article de la neuvieme section, c'est-à-dire, l'article 186 présente quelques difficultés que nous allons éclaircir en peu de mots. 1°. Si $x = \sqrt{\tfrac{1}{2}aa}$, l'on aura $xx = \frac{1}{2}aa$, & $2xx = aa$; donc en faisant $x = \sqrt{\tfrac{1}{2}aa}$, le dénominateur de la fraction $\frac{xx-aa}{\sqrt{2xx-aa}}$ deviendra o, ce qui est une marque de l'infini. 2°. Lorsque le point M (*Fig.* 141. *Pl.* 7.) tombe en D, l'on a $AM = AD$, ou $x = a$; donc l'on a $-\frac{x^3}{2aa} = -\frac{a^3}{2aa} = -\frac{1}{2}a$. 3°. Pour tirer de l'équation $y^4 = x^4 + aaxx - b^4$ la valeur de DD ou 2AD (*Fig.* 142. *Pl.* 7), M. le Marquis de l'Hôpital a fait $PM = o$, parce que dans cette supposition l'on a $AD = x$. Il a ensuite cherché la valeur de x, en maniant suivant les régles ordinaires, l'équation $x^4 + aaxx - b^4 = o$; & il a trouvé $x = \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^4+4b^4}}$, & par conséquent 2AD ou $2x = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4+4b^4}}$.

NOTE LV.

La dixieme section est sans contredit la moins importante de toutes. Elle n'apprend que ce que sçavent tous les Mathématiciens, c'est-à-dire, que par le calcul des *différences* on résout beaucoup plus facilement que par toute autre méthode, les problêmes proposés dans les neuf sections précédentes. Pour se convaincre de cette vérité, il ne sera pas nécessaire de lire les 22 *articles* qui composent la dixieme section; on pourra se contenter de la lecture de l'*article* 208; on verra combien compliquée est l'équation que donnent les méthodes qui ne sont pas fondées sur le calcul différentiel, dont M. le Marquis de l'Hôpital nous a donné les régles avec autant de clarté, que de précision dans son *Analyse des Infiniment Petits.*

TABLE.

FIN.

Fautes à corriger.

Page 6 ligne 20 $\frac{x}{x}$ *lisez* $\frac{x}{y}$.

page 12 ligne 4 *ayypx* *lisez* *ayydx*. Ces deux fautes ne sont que dans quelques exemplaires.

page 38 ligne 20 de *lisez* des

page 46 ligne 24 NQ *lisez* MQ

page 65 ligne 20 $x \times$ *lisez* xx

page 133 ligne 23 sorre *lisez* sorte

page 195 ligne 7 QC *lisez* .QC

page 297 ligne 19 $a \times y$ *lisez* axy

page 338 ligne 7 *lisez* $\frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{- dxddy}$

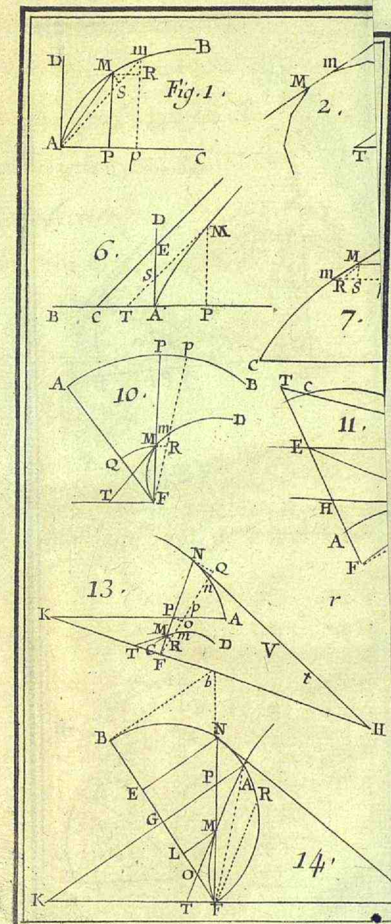
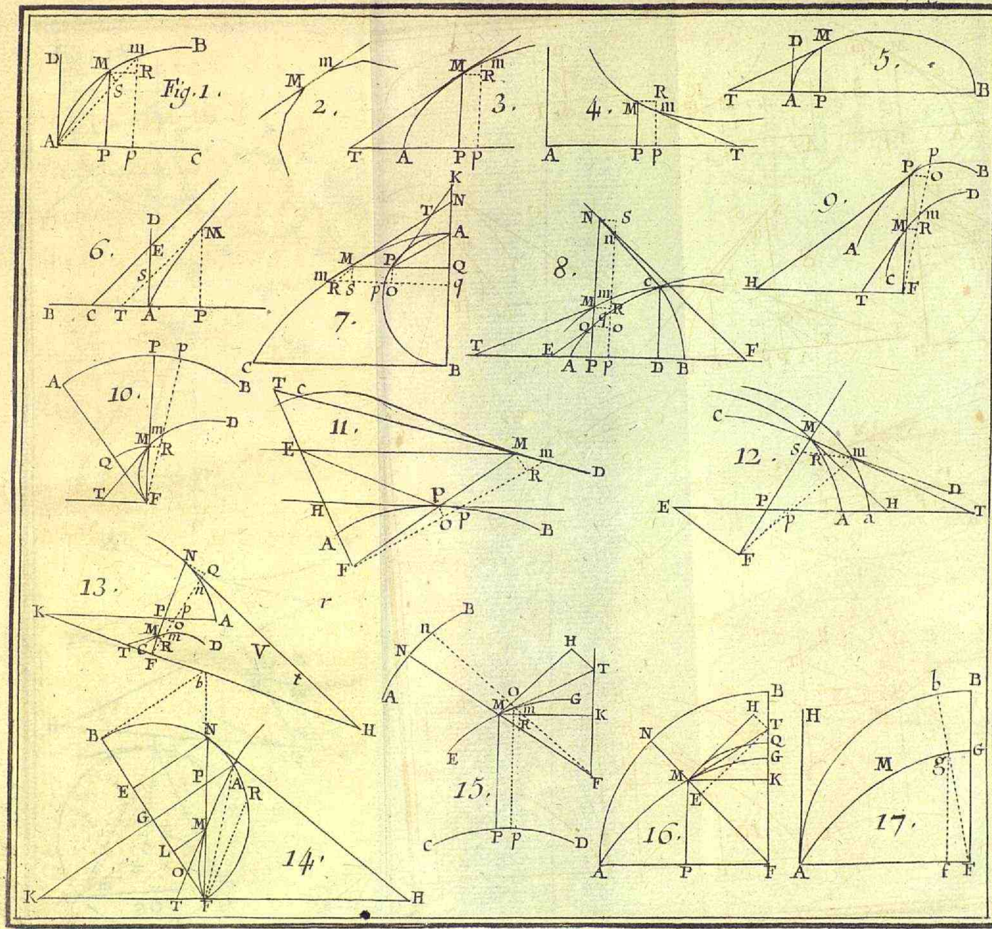


Planche I.



Faure Sculpsit.

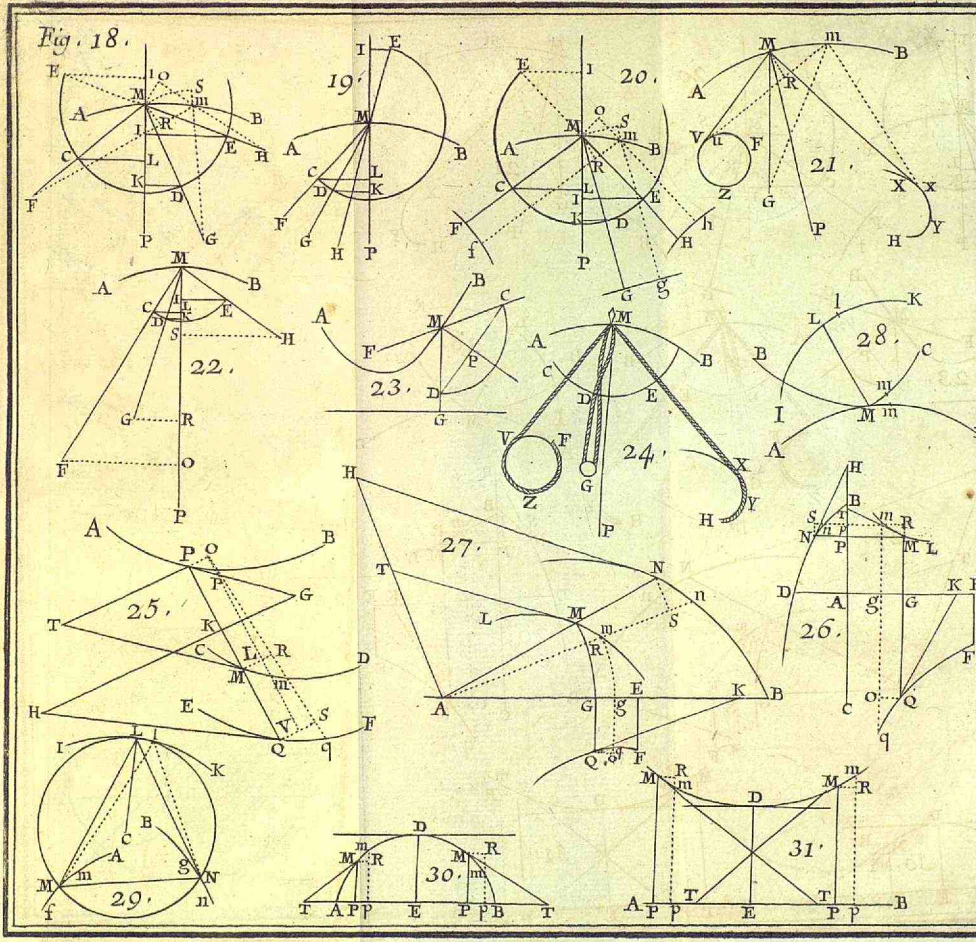


Fig. 18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.

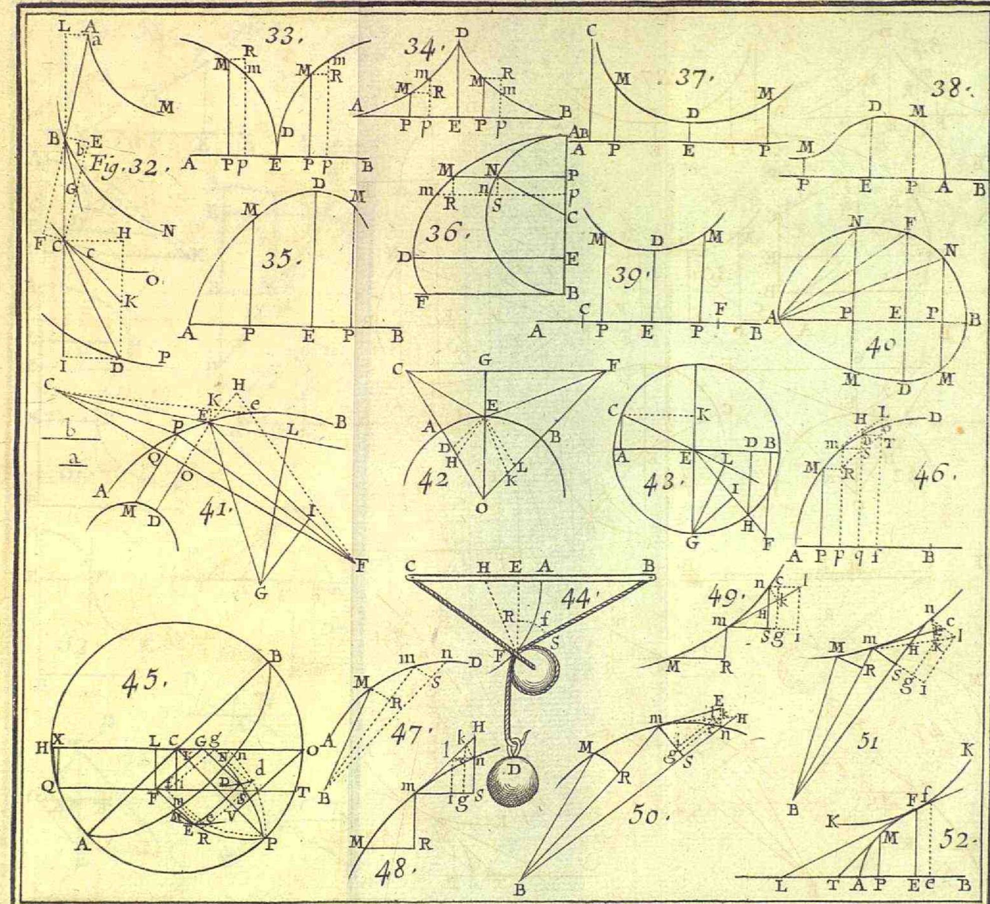
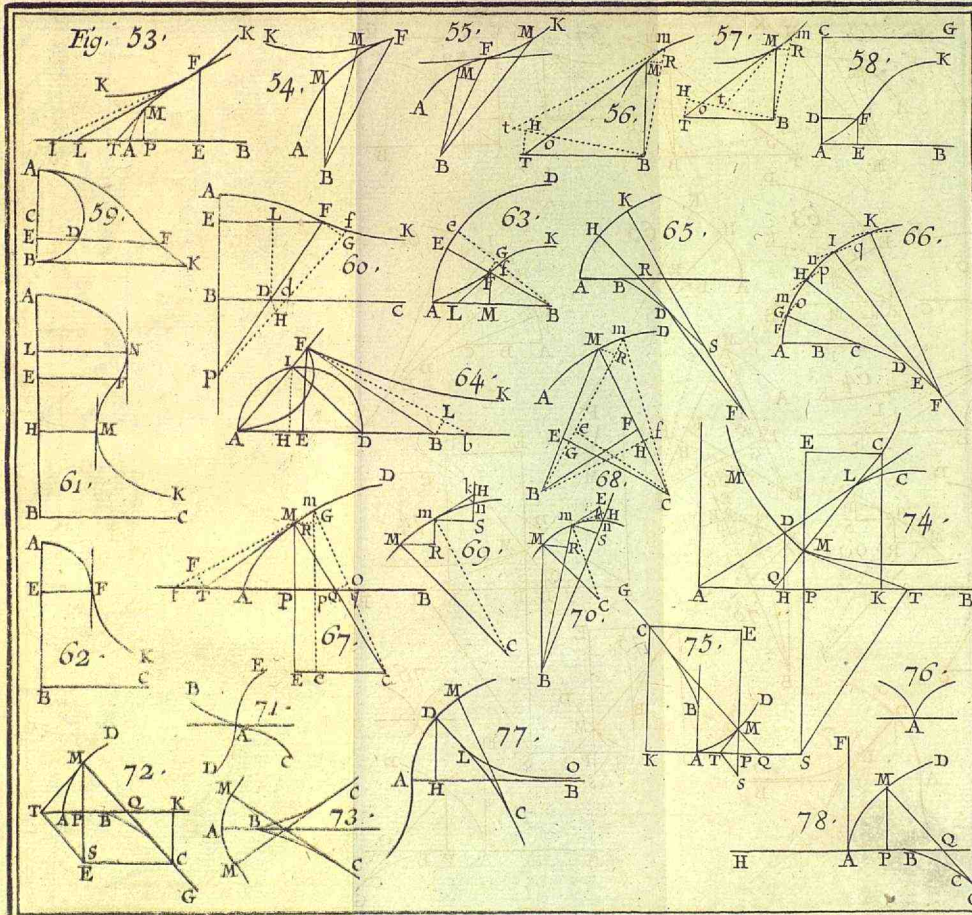


Fig. 32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.



Faure Sculpsit.

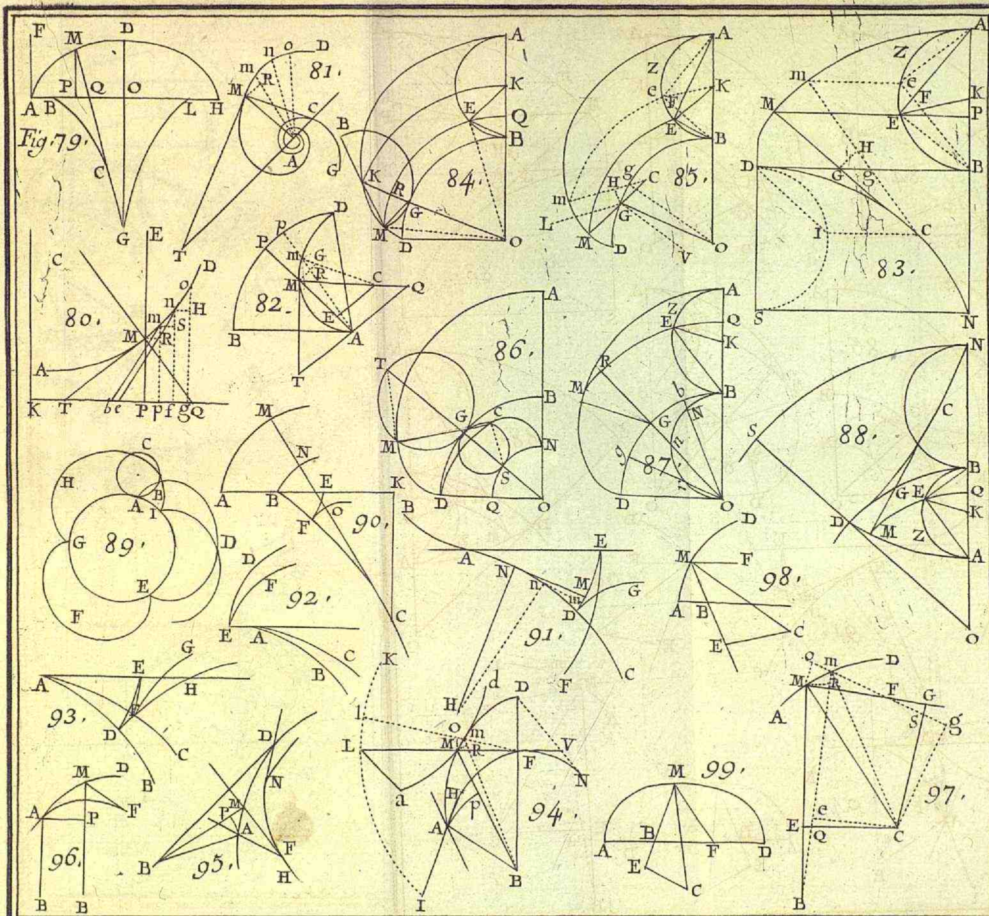
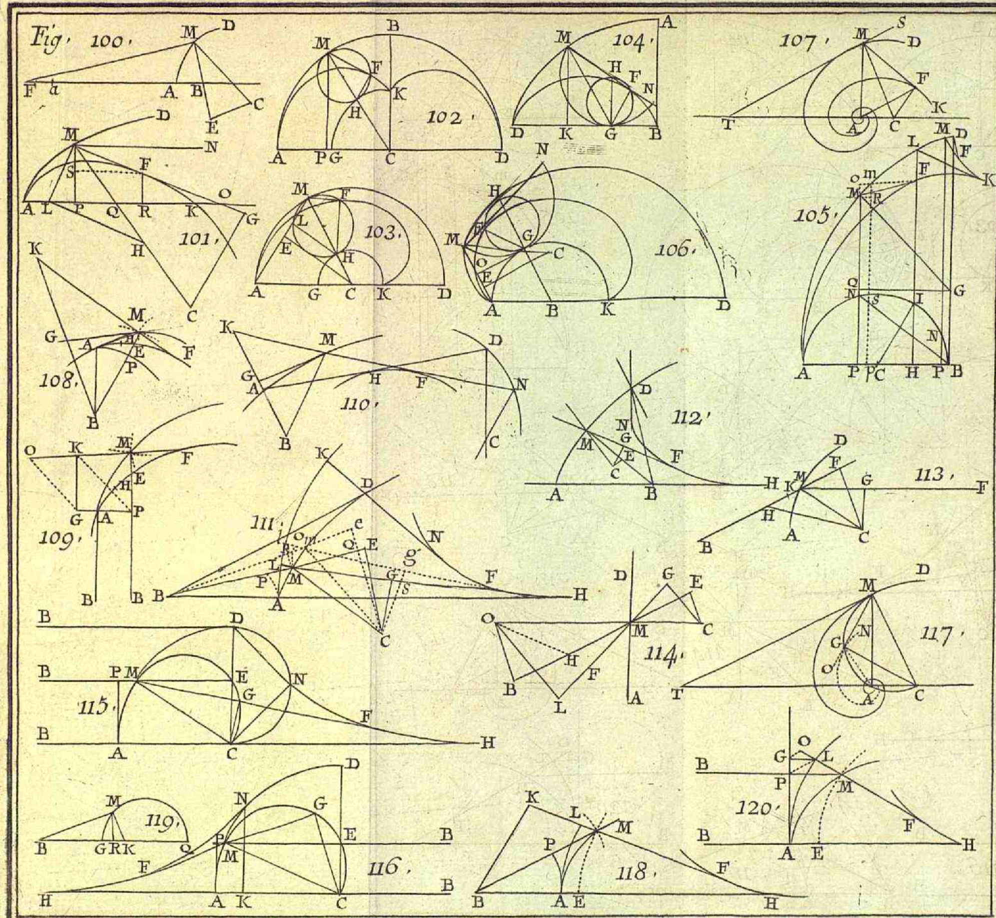
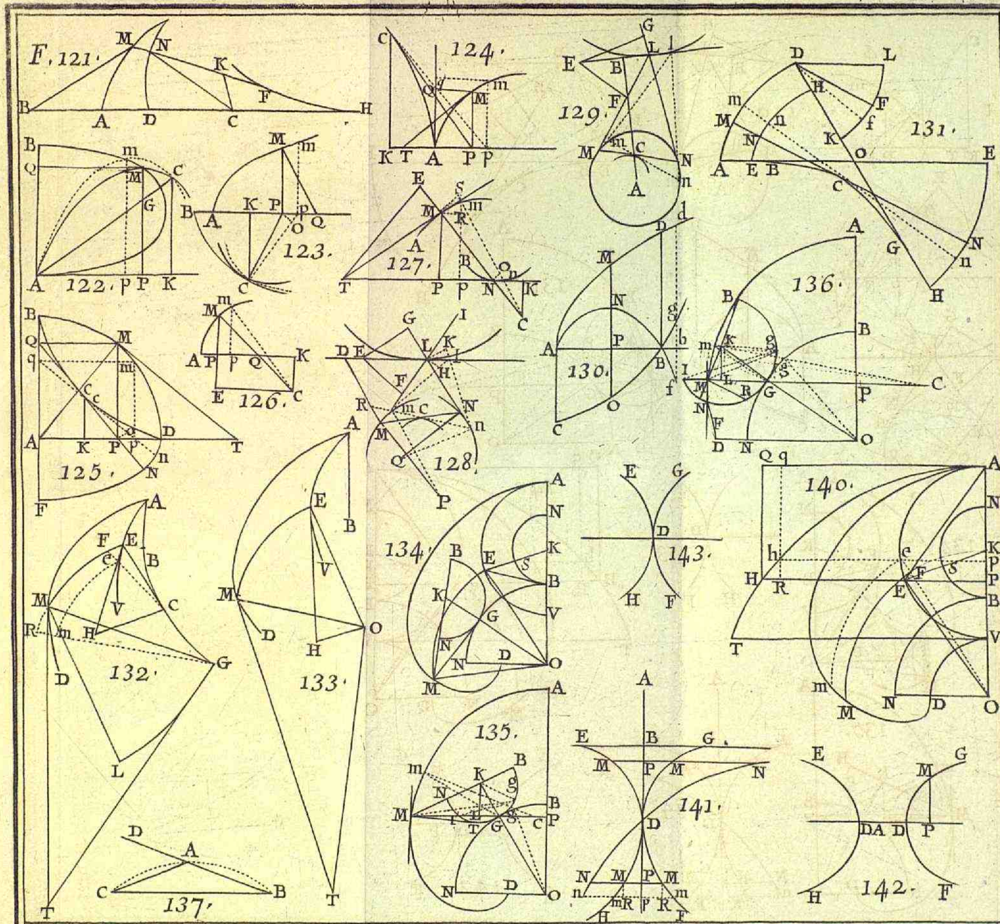
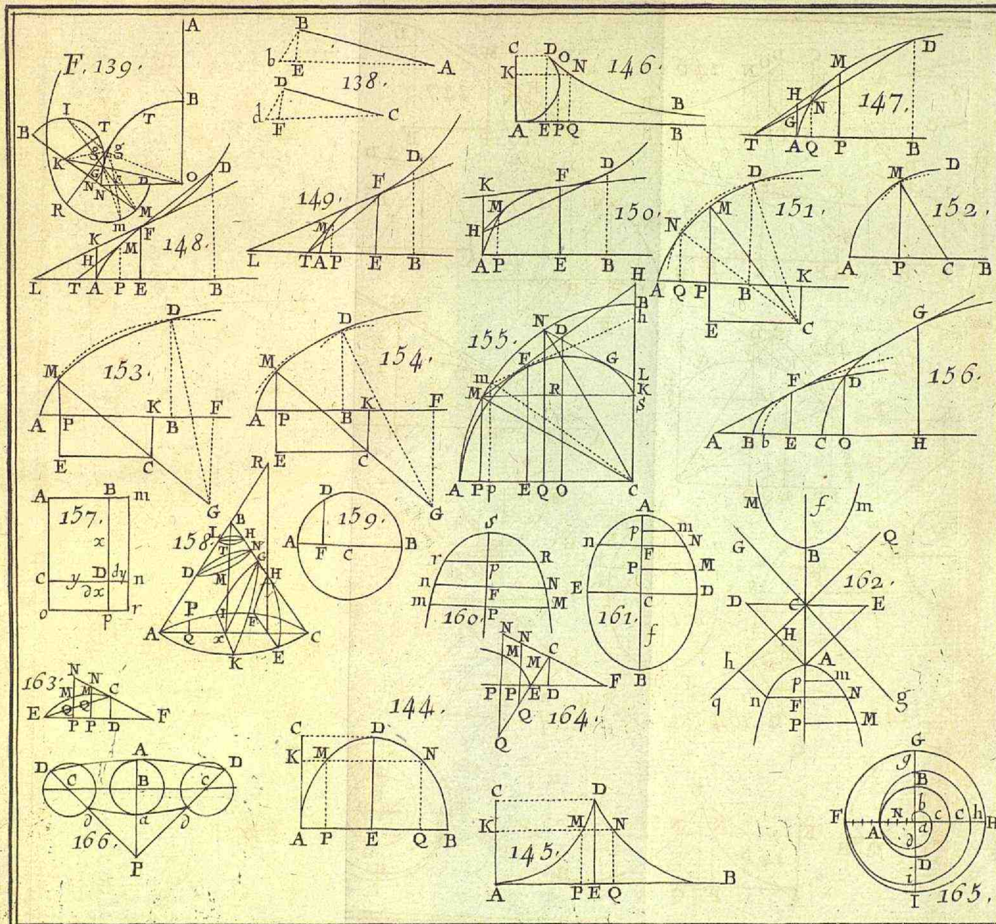


Fig. 79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.



Faure Sculpsit.


F. 121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
140.
141.
142.
143.


F. 139.
138.
146.
147.
148.
149.
150.
151.
152.
153.
154.
155.
156.
157.
158.
159.
160.
161.
162.
163.
164.
144.
145.
166.
165.