GARCIA
DE
MATEMAT.

1

ELEMENTOS

DE ARITMÉTICA, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA.

SU AUTOR

DON JUAN JUSTO GARCÍA,
Presbítero, Catedrático de Matemáticas de la universidad de Salamanca, y Diputado á las Córtes de los años 20 y 21.

QUINTA IMPRESION.

TOMO PRIMERO.

MADRID
POR IBARRA, IMPRESOR DE CAMARA DE S. M.
1821.

Véndese en la librería de Brun frente á las gradas de S. Felipe.

PRÓLOGO.

En el año de 1782 se publicó la primera impresion de estos elementos formados para la instruccion preliminar de los alumnos que han de dedicarse á otras ciencias. La precision de haberlos de estudiar en el corto espacio de 8 meses escasos que dura el año escolástico, me obligó á redactarlos con la mayor concision y no menor órden en la demostracion de las verdades fundamentales de los muchos ramos que abrazan sus tres partes aritmética, álgebra y geometría. Este trabajo hecho sin original por aquel tiempo en nuestra lengua, tuvo un suceso muy superior á mis esperanzas: y habiéndose adoptado para la enseñanza en los establecimientos que desde aquella época *se fueron multiplicando en la peninsula; fue necesario repetir su impresion hasta cuatro veces. En todas ellas procuré perfeccionarlo, y añadí á lo puro elementar artículos á que pudieron estenderse los mas adelantados y afectos á estos utiles conocimientos. En este largo intervalo se han ido publicando diferentes elementos matemáticos por sugetos á los que me considero muy inferior en saber; pero sin tratar de graduar el mérito respectivo de sus producciones y de la mia; solo diré que los mejores elementos para formar un buen matemático, un ingeniero, un artillero, un marino... podrían ser muy poco á proposito para dar á un filósofo, á un teólogo, á un jurista y á un médico las luces oportunas para las ciencias á que se destinan, y habituarlos á discurrir con tino y exactitud. Para conseguir este objeto en tan corto tiempo se han formado los mios, y cuarenta años de un buen suceso acreditan no haber sido inútiles mis tareas. Estas reflexiones me han movido á no dejar de hacer esta quinta impresion en vista de haberse apurado la cuarta. No obstante la presura de mis ocupaciones, me he esforzado á darla mayor estension y la perfeccion que me ha sido posible, exigiendo para ello de algunos amigos el auxilio de sus consejos. Ojalá estos ú otros mejores que ellos sirvan á propagar las luces que ofrecerá el cultivo de estas ciencias tan útiles como necesarias á la prosperidad de la nacion! estos son y han sido siempre mis deseos puros y desinteresados.*

NOTA. *Un número colocado entre un paréntesis, denota que la demostracion ó esplicacion de lo que allí se dice, se halla en el párrafo señalado con aquel número.*

El 2.º tomo se está imprimiendo, y no hará falta á los que en este curso estudien el 1.º

RESUMEN HISTÓRICO

DEL ORIGEN, PROGRESOS Y ESTADO ACTUAL DE LAS MATEMÁTICAS PURAS.

ARITMÉTICA.

Dejando á los críticos ociosos adivinar cuales fueron las ciencias ante diluvianas, los conocimientos matemáticos de Henoc, y de los hijos de Set, que no tienen el menor apoyo en la historia; y pasando en silencio lo que con mas elocuencia que solidez ha querido persuadirnos el sabio Bailli del saber de un antiquísimo pueblo de la Atlantide; no podemos dudar que la idea de los números, y el mecanismo de sus combinaciones ha debido comenzar con los hombres; para cuyo trato, comercio y primeras necesidades eran indispensables.

No es tan fácil congeturar los progresos, y la perfeccion que con el uso y el tiempo pudo adquirir la aritmética; siendo cierto que los historiadores no hablan de ella hasta pocos siglos antes de nuestra era cristiana. Lo único que sabemos y admiramos en aquellos remotos tiempos, es que todos los pueblos, á escepcion de los chinos y de una nacion de Tracia de que habla Aristóteles, se han convenido en adoptar el sistema de contar de diez en diez que ha llegado hasta nosotros: al que pudo dar origen el número diez de nuestros dedos, á donde es obvio y natural á todos el recurrir para evacuar sus cuentas.

Este ingenioso sistema de numeracion, que hace la base de nuestra aritmética, ha sido familiar á los árabes mucho tiempo antes de haber penetrado á nuestro suelo. Pero parece que el honor de su invencion se debe á los indianos, de quienes dice Alsephadi autor árabe, que se gloriaban de la invencion del modo de calcular y del juego del aljedrez: lo que confirma Aben-Ragel, autor tambien árabe del siglo XIII.

En esto mismo estriba la opinion de los que atribuyen á los indianos el origen de la aritmética, contra Platon y Aristágoras que le ponen en Egypto, y contra Estrabon, Porfirio y Proclo que hacen este honor á los fenicios, los primeros y mayores comerciantes del Universo. Sea de esto lo que se quiera, lo cierto es, que hasta Pytágoras, que nació en el año 589 ántes de Jesucristo, no se halla el menor indicio de que la aritmética se hubiese cultivado. Con efecto, este filosófo célebre de vuelta de Egypto, á donde habia ido á instruirse, y huyendo de

Samos su patria que encontró tiranizada; fundó en Italia la escuela llamada *Italica*, en la que enseñó toda clase de conocimientos sin escluir la aritmética que, entre varias virtudes misteriosas que, se dice, atribuyó á los números y sus combinaciones, enriqueció con la tabla de multiplicacion llamada *pytagórica*, y con muchas otras de sus primeras verdades.

A sus discípulos debió la aritmética muchos progresos; pues en tiempo de Platon y Euclides, tres siglos antes de la era cristiana, se conocian ya ademas de las primeras reglas, la estraccion de las raices cuadrada y cúbica, y aun las proporciones. Aristóteles en diferentes pasages de sus obras hace frecuentes alusiones y llamadas á las doctrinas aritméticas, que dan á entender que eran bastante conocidas y comunes entre los griegos sus lectores.

Hasta 113 años antes de Jesucristo, en que floreció Arquimédes, no se conoce invencion particular en la aritmética: pero este filósofo cultivó y acaso inventó la utilísima teoría de las progresiones, demostrando en su *Psamnite* ó *de número arenæ*, entre otras cosas, que el término quingentésimo de una progresion décupla de granos de arena, llenaria el hueco que entonces se imaginaba haber entre las estrellas fijas y la tierra.

A Eratóstenes se debe la primera invencion de la aritmética instrumental, que fué un tablero ó tabla de números impares con la añadidura de divisores comunes y compuestos, para distinguir los números primeros y simples de los compuestos: operacion ingeniosa y aun sublime para aquellos tiempos, que mereció ser anotada en el siglo pasado por Juan Fello arzobispo de Oxford, y mas recientemente por el docto matemático Pell. A todos los referidos se aventajó Nicómaco llamado el *aritmético* por antonomasia, que se hizo célebre por sus comentos, ilustraciones, traducciones y compendios de cuanto se sabia entre los griegos de aritmética: y entre otras investigaciones curiosas sobre los números pares é impares, primeros y segundos, simples y compuestos, inventó los números polígonos, ó suma de una progresion que comienza con 1, y cuyas unidades forman diferentes figuras geométricas.

Aquí correspondia hablar de Diofante, el Leibniz ó Newton de los antiguos en esta materia; pero como sus profundas investigaciones aritméticas dieron origen al algebra, reservamos para la historia de esta ciencia el hablar del sobresaliente mérito de este filósofo, que se puede llamar el último de los griegos que ha dado luces á la aritmética, si se esceptuan algunos trozos de las Colecciones matemáticas de Pappo en que se refieren las doctrinas aritméticas de los antiguos.

No adelantaron mas los latinos, que no tuvieron mejor obra aritmética que la de Boecio, que es en parte compendio y en parte traduccion de la de Nicómaco. Despues de éste, ninguno merece nombre de aritmético sino el célebre Beda, que á principios del siglo VIII trató de los números, y resolvió algunas de sus cuestiones: de manera que pudo dar luz para conjeturar despues de tantos siglos los conocimientos aritméticos de los antiguos. Tambien esplicó la *Datilonomia* ó arte de contar por las situaciones é inflexîones de los dedos; ilustrado despues por el Nebricense, Wover y otros modernos.

A los árabes, únicos depositarios de los conocimientos matemáticos, mas que á los latinos, ha debido la aritmética sus mayores progresos. Son infinitos sus escritos en esta materia: Thebit ben-Corah que trató de los números polígonos, de los que se multiplican al infinito, y de la proporcion compuesta, Abi Abdalla Moamad llamado el *aritmético*, Aben Barza el *calculador* son los mas célebres: y en sus obras aparece una suma destreza en el manejo de los números, un conocimiento fino de sus relaciones, diferentes doctrinas acerca de sus propiedades, y nuevos métodos para resolver problemas: entre ellos *la regla de falsa posicion simple y compuesta*, que prueban su profundo saber en aritmética.

Nada merece mas el reconocimiento que les debemos en esta parte, que el habernos comunicado las cifras numerales y el modo de usarlas. Los hebreos, egypcios, griegos y demas naciones asiáticas, como tambien los latinos representaban los números con las letras de su alfabeto; cuyo uso embarazoso en las operaciones aritméticas, hacía á esta ciencia imperfectísima, y como balbuciente: pero las cifras, signos y figuras numéricas que debemos á los árabes, así como el método seguro de manejarlas facilita de manera las operaciones mas dificiles, que ha dado un nuevo ser y una nueva vida á esta ciencia. La época incierta en que los árabes adquirieron este método de los indianos, se puede probablemente colocar á principios del siglo VIII; pues sabemos que Alkindi en el siglo IX escribió ya de la aritmética indiana, y en el siguiente dió Almogetahi un tratado mas difuso *del arte de los números indianos*, y otro Alkarabisi *del modo de contar de los indios*: como tambien que á principios del XI examinó el célebre Alhasan los principios del modo de contar de los indianos.

De los árabes tomaron los españoles el uso de aquellas cifras, y Burriel hablando de una traduccion de Tolomeo del año de 1136, dice que es uno de los escritos mas antiguos en que se descubren las notas arábigas: las cuales añade, se usan en casi todas las obras

matemáticas de aquella edad, pero no en los libros ó instrumentos, ni aun en las mismas cuentas, en que se continuaba el uso de los números castellanos que eran los romanos con muy poca variacion.

En el siglo X aprendió en España Girberto, despues Papa con el nombre de Silvestre II, la aritmética que comunicó á las Galias, segun dice Malesburi en su historia de Inglatera lib. 2: y Gerardo Aurelio en sus cartas hace mencion de un libro de multiplicacion y division de los números que escribió el español Josef que él buscaba con ansia. Aun se conserva el libro del Abaco que publicó en 1102 el célebre Leonardo Fibonacci de Pisa, que cultivó con ardor la aritmética en Africa á donde su padre le habia llevado empleado en una aduana. Este códice puede ser mirado como obra magistral, y abraza tambien la aritmética algébrica.

En el siglo XIII se distinguieron en aritmética Jordan Nemorario y Juan de Sacro Bosco, célebre tambien por su tratado de Esfera; y á fines del XIV y principios del XV hicieron papel en esta parte varios griegos modernos, especialmente Manuel Moscópulo que inventó la formacion del *Cuadrado mágico*, compuesto de números dispuestos de manera que la columna diagonal y vertical hacen una misma suma. Tiene varios usos y propiedades que en diferentes épocas han cultivado y ampliado despues Meziriac, Stifell, Frenicle, Poignard, la Hire, Sauveur y otros. Al mismo tiempo florecian en Italia diferentes aritméticos entre los que merece ser nombrado Lucas Pacciol de Borgo de San Sepolcro, que escribió la primera obra aritmética que se ha dado á la prensa con el título *Suma de aritmetica, geometría, proporciones y proporcionalidad*: en la cual aprovechándose de los escritos anteriores, redujo á mejor método, y abrevió las cuestiones aritméticas, y dió mas á conocer el álgebra; subministrando luces á los Tartaglias y Cardanos con que adelantaron tanto despues.

El cálculo de las partes decimales, del que se cree autor á Juan Muller ó Regiomontano, natural de Konisberg en Franconia, adelantó los límites de la aritmética y animó el ardor con que la cultivaron Stifels, Pelletier Maurolico, Vieta y muchos otros. Pero lo que estendió prodigiosamente su utilidad causando una feliz revolucion en la geometría, trigonometría y astronomia, fué la invencion de los logarítmos que á principios del siglo XVII hizo el escoces Juan Népero, baron de Merchiston, mudando con ella la multiplicacion en adicion, la division en resta, la estraccion de raices y elevacion á potencias en division y multiplicacion: dando por este medio una suma facilidad á los cálculos mas dificiles y escabrosos. Brigio su

docto discípulo y profesor de matemáticas en Oxford, mejoró este hallazgo publicado con el título de *Mirifici logaritmorum canonis descriptio*, en su *Aritmética logarítmica* impresa en 1624: en donde se encuentran tablas de los logarítmos de los números naturales desde 1 hasta 20000, y desde 90000 hasta 101000, pero falleció antes de haber acabado otra tabla de los logarítmos de los senos, de grados y centenas de grado del cuadrante, que concluyó Enrique Gelibrando en 1630 en su *Trigonometría británica.* Despues publicaron sus tablas Keplero, Benjamin Ursino, Adriano Ulak, &c. las de Gardiner se tienen por las mas correctas: lo son bastante las de Sherwin impresas en Londres en 8.º en 1705: y en 1795 acaba de publicarlas en París muy completas Francisco Callet en dos vol. 8.º de marca.

Tambien Neper nos dió en su *Rabdologia* la descripcion de una máquina que por medio de ciertas rayas y laminitas ingeniosamente combinadas presenta cualquiera multiplicacion ó division sin trabajo del calculador, que Roussain ofreció mejorada á la academia de las ciencias en 1770. De este género de inventos se debe uno á Pascal, aunque mas dificil y complicado, de un uso mas universal; otro mas sencillo á Leibniz presentado en 1673 á la academia de Londres. En 1666 habia ya inventado otra maquina Moreland, y en este siglo l'Epine Boitissendeau y otros se ocuparon en este trabajo, que al cabo se ha abandonado como de poca utilidad.

Pascal inventó despues el *Triángulo aritmético*, por el cual con un número que pone en su punta se forman sucesivamente todos los números figurados, se determinan las razones de los de dos casillas cualesquiera, y las diferentes sumas de los números de una misma fila: al mismo tiempo que trabajaba Fermat en las propiedades de los números figurados, que adelantaron despues Eulero y la Grange; y Frenicle en los cuadrados mágicos, en los triángulos rectángulos, numéricos, y abreviacion de las combinaciones, desatando todo género de problemas por medio de su *método de las esclusiones* que se imprimió despues.

El aprecio que los pytagóricos hacian del *Tetractis* ó número cuatro, dió motivo á Wigel profesor de matemáticas en Ginebra, á imaginar una aritmética cuaternaria usando solo de los números 1, 2, 3, 0, y contando con períodos de cuatro en lugar de nuestros períodos de diez, que publicó en dos obras sobre la *Tetractis pytagórica* hácia el año de 1670: en el cual sistema, que parece ser el de los traces de que habla Aristóteles, cree encontrar mas ventajas que en el décuplo.

Con este motivo trabajó Leibniz su *Diadica* ó aritmética binaria en que para mayor comodidad en los cálculos usa solo del 1 y cero: asegurando que es mas á propósito que la decimal para hacer progresos: por decontado este pensamiento que Leibniz comunicó al Padre Bouvet, sirvió á este misionero para esplicar los antiquísimos caracteres chinos que no habian podido entender los mismos nacionales. Al tiempo que Leibniz ofrecia su invencion en 1702 á la academia de las ciencias, pensó Lagni, Profesor de Hidografia en Rochefort, introducir la aritmética binaria para evitar algunos inconvenientes de los logaritmos; pues con ella se reducen tambien á adicion y sustraccion, la division y multiplicacion: y Dagincourt en una memoria sobre este asunto, hace ver que en el sistema binario se encuentran con suma facilidad las leyes de las progresiones. Pero sin embargo de estas ventajas, y de las que cree Leibniz se seguirian, de contar hasta doce, ó hasta diez y seis; se han tenido por de mayor consideracion los inconvenientes que acarrearian estas novedades, y hasta ahora no ha habido quien vuelva á promover estas ideas.

En esta época se ocupaban los ingleses en las mas sublimes y útiles teorias. Wallis publicó su *Aritmética de los infinitos*, en la que se reducen á suma exâcta las mas largas é intrincadas series de números. *La fraccion continua* de Brounker, cuyos escelentes usos han manifestado despues Euler y la Grange, las series infinitas que tanto han cultivado despues Mercator y Barrow con muchas otras útiles producciones, todos son frutos de la preciosa obra de Wallis. Despues de la cual apareció la sublime *Aritmética universal* de Newton, que abraza ya en números, ya en cifras algébricas cuanto pertenece á cuentas y cálculo, y forma un cuerpo perfecto del arte de calcular.

Finalmente, á fines del siglo XVII se hicieron aplicaciones de la aritmética á diferentes asuntos que estendieron no poco su dominio. Pascal, Sauveur y Huygens la aplicaron á las combinaciones de los juegos de suerte; Leibniz á la jurisprudencia y á la moral, determinando la usura, ó el fruto del dinero que podria cobrarse en ciertas circunstancias. Petri redujo á cálculo el número de habitantes de una nacion, las mercaderias que pueden consumir, la labor que pueden hacer, la cultura, el comercio, navegacion y cuanto puede interesar al Gobierno: formando una aritmética política, que fué como el ensayo del arte de conjeturar, que tomó despues aumento con los progresos del álgebra, de que vamos á hablar: omitiendo los trabajos menudos de ilustres matemáticos, que no se han desdeñado de cultivar la aritmética, cuya enumeracion harian esceder los límites estrechos que nos hemos propuesto en esta ligera historia de la aritmética.

ÁLGEBRA.

El Álgebra, que de método particular de la aritmética, ha llegado á ser ciencia principal que abraza la aritmética y geometría; debió su orígen al griego Diofante que en sus *cuestiones aritméticas* publicadas en el siglo IV, manejaba ya las ecuaciones de 1.er grado, y ofrecia la solucion de las de 2.° que debia de poseer. Se han perdido muchas obras de este filósofo, lo mismo que el Comentario que del álgebra hizo la tan sabia como desgraciada Hipacia, hija del filósoso Teon, muerta desastradamente en un tumulto del pueblo de Alejandria que la creia mágica, y cómplice en las desavenencias entre San Cirilo y el gobernador Orestes. Los árabes cultivaron con ardor el álgebra, cuyo nombre *aljavar ó almucabala* que equivale á *restitucion*, seguramente es árabigo. La primer obra algébrica que se debe á los árabes, la publicó en el principio del siglo VIII Moamah ben-Musa, y contiene ya la solucion de las ecuaciones de 2.° grado. A ella se siguieron las de Thebit ben-Corah, Omar ben-Ibraim de quien cita Montucla un códice con el título de *Algebra de las ecuaciones cúbicas*, Ahmad Altajeb discípulo del sabio Alkindi, Ebn Albanna de Granada, Kosein, Jahia, Tejoddin, y otras muchas.

Se ignora quienes fueron los primeros que trageron á nuestro pais estos conocimientos: se cree que Leonardo de Pisa los tomó de los árabes, y que la obra citada de Lucas del Borgo publicada en 1494, fué la primera que apareció de álgebra que él llama *arte mayor*, y se conoció tambien con el nombre de *ciencia de la cosa*, y aunque en ella no se pasa de las ecuaciones de 2.° grado, la aprovecharon tambien los italianos, y que Scipion del Ferro Boloñes encontró muy luego la solucion de uno de los casos de las ecuaciones del 3.er grado, que comunicó á su discípulo Antonio del Fiore. Viéndose este en términos de resolver problemas hasta entonces insolubles, desafió á Nicolas, natural de Brescia, conocido con el nombre de Tartaglia ó tartamudo, de un golpe que recibió en la cabeza. Este aventurero dotado de un talento singular para las matemáticas, aceptó el desafio; y habiendo descubierto una regla general para resolver los problemas propuestos, confundio á Fiore proponiéndole otros que no supo resolver.

Tartaglia cediendo á las instancias de Cardano le comunicó su invencion despues de haberle exîgido el juramento de no revelarla: pero este faltó á su promesa y publicó el secreto en 1545 en su *Arte magna* dándose por autor del invento, y disculpándose con Tartaglia á quien costó la vida esta in-

fidelidad, con la perfeccion que habia dado á su método. Con efecto, ademas de haberlo demostrado con una facilidad y elegancia que no hubiera podido darle su autor poco culto, le amplió y estendió á todos los casos, dando fórmulas que despues han tomado su nombre, y descubriendo el primero el caso *irreductible*, cuya dificultad aun no se ha superado. Luis Ferrari, discípulo de Cardano, encontró la solucion de las ecuaciones de 4° grado, que publicó é ilustró Rafael Bombelli en 1579, y á quien atribuye Gua la gloria de haber manejado el primero las cuantidades radicales, demostrando que el caso irreductible incluye una raiz real que consiguió encontrar en algunos casos.

Todas las naciones tuvieron á mediados del siglo XVI ilustres matemáticos que cultivaron y adelantaron á porfia los conocimientos algébricos. Ademas de los alemanes Rudolphs y Stifels, los franceses Pelletier y Buteon, el holandes Stevin recomendado y estimado aun posteriormente; florecia en España el célebre Nuñez, llamado Nonio, cuyos métodos seguidos entónces, se ven citados aun hoy por Bachet, Dechales, y otros escritores. Pero todos deben ceder al ilustre magistrado Francisco Vieta, nacido en Fontenais en 1540 y muerto en 1603, cuyos trabajos hacen época en la historia del álgebra, y cuyo genio profundo abrió nuevos caminos seguidos despues por matemáticos de primer órden. A él se debe una mas fácil y cómoda preparacion de las ecuaciones, sus diferentes trasformaciones y usos diversos que tienen, el modo de conocer la relacion de los coeficientes y raices de las ecuaciones comparadas entre si por medio de los signos, la formacion de las ecuaciones por sus raices simples positivas, su resolucion numérica por aproxîmacion, la construccion de las de 3.^{er} grado con el auxilio de dos medias proporcionales, la descomposicion de las ecuaciones de 4.° grado por las de 3.°; pero sobre todo se le debe el feliz pensamiento de representar con letras las cantidades conocidas y desconocidas, ahorrando el embarazo que causaba la multitud de signos y números de que hasta entónces se habia usado, y haciendo generales las soluciones que ántes eran por lo comun de casos particulares.

Mejoró esta invencion el ingles Harriot sustituyendo letras minúsculas á las mayúsculas de que usó Vieta, y simplificando el modo de espresar con ellas las multiplicaciones. El mismo empleó el primero las raices negativas en las ecuaciones, ideando tambien el colocar todos sus términos en un miembro y cero en el otro: y halló que las ecuaciones superiores se componen de ecuaciones simples, con otros inventos que le hacen acreedor al reconocimiento público. Por este

tiempo se distinguiéron tambien Ougtred, Girard, Anderson y otros, que ilustraron con sus trabajos el álgebra.

La teoría de Diofante sobre las ecuaciones indeterminadas habia comenzado á fomentarse en el siglo XIV por el griego Planudes, y despues en el XVI Xilandro tradujo en latin los libros que habian quedado de Diofante, cuya doctrina comentaron y añadieron posteriormente Van-Ceulen, Stevin, Bombelli, Vieta y algunos otros. Pero Bachet de Meziriac la puso á mejor luz, y añadió un método general para resolver en números enteros todas las ecuaciones de 1.^{er} grado de dos ó mas incognitas, sin que ninguno hubiese adelantado mas hasta Fermat que encontró nuevos métodos que mereciéron despues la atencion de Frenicle, Euler, La Grange, Beguellin, Billi y otros insignes matemáticos que han empleado sus doctas tareas en ilustrarlos y estenderlos.

En 1629 habia ya salido á la luz pública *La nueva invencion en el álgebra* del holandes Alberto Girard, en la que, ademas de finas observaciones sobre las raices negativas de las ecuaciones de 3.^{er} grado, se apuntaban en confuso algunos otros descubrimientos que estaba reservado á Descartes el aclararlos y perfeccionarlos. Este genio creador en todo género nació en 1596, y apenas dió su atencion á las matemáticas, cuando se ocupó en desenvolver la espresion de los polinomios, y el cálculo de los signos y esponentes de las potencias: fué el primero tambien que hizo de las raices negativas el uso debido, esplicó su naturaleza, y manifestó sus ventajas, que no habian alcanzado Harriot y Girard: determinó por medio de los signos el número de raices positivas y negativas de una ecuacion cuando no hay imaginarias, y los límites de las que no pueden encontrarse exâctas. *La analisis cartesiana* ó método de las indeterminadas para las ecuaciones de 4.º grado, acredita bastante el mérito de este grande hombre; pero *el álgebra cartesiana*, aplicada al análisis de las cuantidades finitas supera todos sus inventos, y hace ver cuan superior fué á todos los que le precedieron.

El ya citado Thebit ben-Chorah, Leonardo de Pisa, Regiomontano y Tartaglia habian hecho ya algunas aplicaciones del cálculo á la geometría; pero dando á las líneas valores numéricos. Vieta aunque se valió de las letras para este objeto, se puede decir que sus construcciones geométricas no eran mas que un ligero ensayo con que resolvia problemas que sin este auxilio se desataban con facilidad; mas Descartes redujo á arte esta aplicacion, formó por sí el método, dió las reglas, y por el pequeño artificio de esta aplicacion á las líneas rectas, se elevó á las dificiles teorías de las líneas curvas, haciendo de la geometría, ántes una ciencia mezquina y casi práctica, una ciencia sublime y utilísima. Una y otra, la geometría y el álgebra mudaron de semblante con esta aplicacion, cuya invencion ha merecido á su autor el glorioso nombre de conquistador de las matemáticas, que desde esta época han recibido prodigiosos adelantamientos en todos sus ramos.

Entre los que añadiéron é ilustraron la invencion de Descartes, se han distinguido Beaune, autor del método sobre los límites de las ecuaciones, que adoptó y mejoró despues Newton; Hudde á quien se debe la reduccion de las ecuaciones, y el método de los máxîmos y mínimos; Schooten, Sluse, Craig, Witt, Rabuel y Jacobo Bernoulli; Wallis por su álgebra y mucho mas por su escelente aritmética de los infinitos, Brounket por su fraccion continua, Barrow, y Mercator merecen ser nombrados entre los insignes que cultivaron el álgebra en el siglo XVIII: pues la adelantaron en términos que al parecer, nada quedaba que descubrir en materia de cálculo.

En estas circunstancias se presentó el inmortal Newton, principe de todos los matemáticos: sus elegantes reglas de los divisores racionales de las ecuaciones, de los límites de sus raices, los escelentes métodos de aproximarlas cuanto se quiera, de aplicar las fracciones al cálculo de los esponentes, y de reducir las cuantidades fraccionarias á series infinitas; su famoso teorema del binomio que lleva su nombre, y la aplicacion de estos inventos á la cuadratura y rectificacion de las curvas, y á la solucion de los problemas geométricos mas árduos y dificiles con otros mil hallazgos en todas las partes de las matemáticas y de la física, espuestos en su *Analisis de las ecuaciones infinitas*, en su *Aritmética universal* y en otros escritos breves, pero profundos y completos; le darán sin disputa la palma sobre cuantos han cultivado estas materias. Y sinembargo, todos ellos como que desaparecen comparados con su luminoso descubrimiento del *cálculo infinitesimal*, de que hablarémos despues, y prueba lo elevado y sublime de su alma sobre la de los otros mortales.

La naturaleza á veces hace ostension de su fecundidad, y en esta edad feliz para las ciencias, al lado de Newton que honraba la Inglaterra, produjo á su digno émulo Leibniz gloria de la Alemania. Casi tan profundo como Newton, era mas universal en sus conocimientos. Filósofo, jurisperíto, teólogo, anticuario, historiador, filólogo y matemático, no hubo ciencia que no ilustrase con sus meditaciones y trabajos, y en especial el álgebra. Sin hablar de su nuevo género de ecuaciones *esponenciales*, y de un método general para

encontrar las raices de todas las ecuaciones, sin hablar de su ingenioso método para el caso irreductible, de sus sutiles especulaciones sobre los logarítmos de las cuantidades negativas, ni de otros muchos inventos dignos del aprecio de los matemáticos; basta para inmortalizar su nombre la invencion del *cálculo infinitesimal* por diferente camino que Newton, con quien le puso á nivel.

Hasta entonces no se habian considerado sino las relaciones finitas de las curvas; y estos dos grandes ingenios se elevaron á la investigacion de las razones de las infinitésimas ó elementos de que se componen. Newton y Leibniz examinaron las relaciones entre las variaciones instantaneas ó insensibles incrementos ó decrementos de las líneas variables, por las que se conocen las propiedades de las curvas, y las sugetaron al cálculo algébrico. Leibniz dió á estos incrementos y decrementos el nombre de *diferencias infinitas*, las considera como infinitésimas de las cuantidades finitas que se pueden omitir en su cálculo sin peligro de error: admite diferentes órdenes de infinitésimas, despreciando tambien las de órden inferior en concurrencia de las superiores. Y Newton sin la idea de partes infinitas, considera las cuantidades matemáticas como engendradas por el movimiento: llama *fluxiones* las velocidades variables con que son producidas, busca sus relaciones, y forma de ellas diferentes órdenes. Este método, el mismo que el de los infinitésimos, se apoya en principios exactos, y no necesita de la ficcion hipotética de las partes infinitésimas. Las diferencias del uno son las fluxiones del otro; y ambos conducen sin peligro de error á un mismo resultado: á la manera, como dice Maclaurin, de dos que para sacar exacta una cuenta, el uno omite ciertos artículos como de ninguna importancia, y el otro los deja por no pertenecer á aquella cuenta. El cálculo infinitesimal comprende el *diferencial* que desciende del finito al infinitésimo, y el *integral* que asciende del infinitésimo al finito: el uno descompone las cuantidades, y el otro las restablece: asi como el cálculo de las fluxiones abraza el método *directo* que es el diferencial, y el *inverso* que equivale al integral.

El nuevo cálculo escitó diferentes disputas. Los ingleses acusaron á Leibniz de plagio, atribuyendo á su Newton todo el honor de la invencion; pero Leibniz tuvo ardientes defensores que consiguiéron se le hiciese justicia. Con efecto, él le publicó primero en las Actas de Leipsik, le adoptaron desde luego los Bernoullis y despues toda la Europa: de suerte que hoy se tiene por casi averiguado que uno y otro le inventaron sin habérsele comunicado.

Despues se ha disputado vivamente sobre

la exactitud de los principios en que apoya Leibniz su invencion. El célebre algebrista Rolle desechando las cuantidades infinitesimas, acusaba su cálculo de que inducia á error por faltarle la exactitud geométrica; y Niewentiz aunque admitia las infinitésimas, impugnaba las de órden inferior: pero Leibniz, Bernoulli y Erman desvaneciéron estos escrúpulos, haciendo ver cuán conformes eran los resultados de estas suposiciones á los que daba la mas rigurosa geometría. Á principios del siglo se renovaron estas disputas entre la academia de París y la real sociedad de Londres; y el mismo secretario de la Academia, el elegante é ingenioso Fontenelle no contribuyó poco á disiparlas. Despues el sabio Maclaurin ha puesto en claro toda la metafísica del cálculo infinitesimal; sin embargo de que Cousin aun se queja de que se haya introducido en álgebra y geometría la nueva idea del movimiento con las fluxiones de Newton, y ha procurado lo mismo que d'Alembert, evitar este escrúpulo, usando si de las palabras infinito infinitésimo, pero fijando á ellas la idea de límites de las cuantidades.

Los dos ilustres hermanos Juan y Jacobo Bernoulli comenzaron desde luego á hacer un uso frecuente del nuevo cálculo en la resolucion de los problemas mas árduos. Jacobo dió de él dos ensayos en las Actas de Leipsik, y Juan lo enriqueció con su nuevo cálculo *es-*

ponencial, y escribió lecciones del diferencial é integral, de donde las han aprendido su acerrimo defensor y promovedor Varignon, el sabio Marques de l'Hospital y casi todos los demas algebristas célebres. Euler, los Riccatis, d'Alembert, La Grange y otros han enriquecido el método leibniciano con nuevos ramos y preciosos descubrimientos. En nuestros dias uno de los descendientes de los Bernoullis, y despues de él Caluso con mas empeño y estension de conocimientos, han querido introducir el cálculo newtoniano como mas exacto y filosófico que el leibniciano, haciéndolo mas fácil y breve, y acomodando á él todos los nuevos descubrimientos: pero hasta el presente aun está por decidir de qué parte están las ventajas.

La teoría de las series á la que en cierto modo debió su orígen el cálculo infinitesimal, tomó nuevos grados de esplendor con los trabajos que sobre ella hicieron todos los analistas del siglo XVIII; y con ellos se adelantó igualmente el cálculo de las probabilidades: en que sobre los inventos de Pascal, Huygens, Leibniz y Petty, se dedicó Montmort á tratar á fondo del analisis de los juegos de banda, tresillo, tritac... y le siguiéron los Bernoullis, Moivre que publicó una obra original y clásica sobre los juegos de suerte, Simpson, Deparcieux, Euler, d'Alembert, La Grange, La Place, Condorcet, Fontana, Lorgna &c. todos los cuales trabajaron en inventar nuevos métodos y diferentes formulas para sugetar al cálculo la fortuna y el azar.

Seria obra muy larga y agena de nuestro plan teger el elogio de ilustres matemáticos que en el siglo XVIII trabajaron á porfia en perfeccionar el álgebra. Bástenos insinuar que la Inglaterra se gloría de los Allejo, Tailor, Cotes, Sterling, Campbell, Maclaurin, que publicaron en las Transaciones filosóficas de la real sociedad de Lóndres nuevos inventos y finas especulaciones analíticas; del célebre ciego Saunderson y del profundo Simpson, cuyas obras ilustran la Europa, y son al mismo tiempo un testimonio clásico del ardor con que aquella nacion ha promovido tan útiles estudios. La Francia cuenta á Varignon, Rolle autor del método de las *Cascadas*, á Lagni, Prestet, Reigneau que hicieron señalados servicios al mundo literario. La Alemania á Goldbach, Mayer, Erman, Cramer y Wolfio; y la Italia á Jacobo Riccati, Fagnani, Gabriel Manfredi y Grandi acreedores todos por sus trabajos analíticos al reconocimiento de la posteridad.

Vemos pues, en la última mitad del siglo XVIII llevada el álgebra á un grado sumo de perfeccion, y hecha el mas apto como el mas útil instrumento para adelantar todas las demas ciencias por Nicolas y Daniel Bernoulli, émulos de su padre Juan y de su tio Jacobo; por Nicole, por el insigne Clairaut, por el ilustre Euler, ingenio tan original como vasto en todas las ciencias exâctas que ha enriquecido con sus escelentes é inmensas obras, que se pueden considerar como el cuerpo de doctrina mas completo que tenemos en este género; por el célebre d'Alembert, inventor del cálculo de las diferencias parciales, del método de los coeficientes indeterminados, reduccion de las cuantidades imaginarias á espresiones mas sencillas, y cálculo de las funciones racionales é irracionales; por Vicente Riccati, que se puede llamar el verdadero padre del álgebra sublime en Italia por su *Tratado de las séries* y sus *Instituciones analíticas*; por los insignes La Grange, autor del cálculo de las variaciones y de un nuevo método para las séries recurrentes, y La Place, dignos émulos de los Euleros y d'Alemberts: sin que deban omitirse los Condorcets, Cousins, Bossuts que honran la Francia, y los Fontanas, Lorgnas y otros muchos talentos que se distinguen en Italia y Alemania.

GEOMETRÍA.

Aunque se ignora en donde tuvo orígen esta ciencia, es bastante verosimil que fuese en Egypto, en donde se hacian tantos diques,

canales, y famosas fábricas que exigian conocimientos geométricos: y si creemos á Heródoto, su invencion se debe á Lot ú Osiris con el motivo de la division de tierras que el rey Sesostris le mandó hacer entre sus vasallos. Pero los pocos progresos que bajo su enseñanza hicieron los griegos, son una prueba decisiva de la escasez de luces de los Egypcios en este particular. Con efecto, el rey Amasis se admira de ver á Tales médir la altura de una pirámide por medio de la sombra de su baston, y su invencion de formar el triángulo rectángulo en el semicírculo. La propiedad que encontró Pytágoras de la hipotenusa del triángulo rectángulo, les llenó de gozo, y les movió como dice Laercio, á decretar sacrificios á las Musas. En la escuela que fundó Tales en la Jonia, se distinguió entre sus discípulos Anaximandro; mientras que Pytágoras y los de la suya en Italia hacian sus delicias en echar los primeros fundamentos de la geometría, sin cuyos conocimientos eran escluidos de ella. Laercio hace á Demócrito autor de varias obras geométricas en que trata del contacto del círculo, de la esfera, de las líneas irracionales, y de otros muchos puntos que prueban los progresos que entonces se hacian en esta materia.

Es casi imposible en tanta oscuridad de noticias seguir la historia de los que hicieron Arquitas, Euclides Póntico, Hipocrátes Chio, Filolao, Platon y tantos otros antiguos matemáticos. A este último se atribuye la invencion del método analítico ó de resolucion: y se puede decir que atendidas las sublimes especulaciones en que se ocupaban los geómetras de aquellos siglos; se habian descubierto ya en ellos casi todas las proposiciones que hacen hoy los elementos de esta ciencia. Efectivamente, Plutarco nos dice que Anaxágoras trabajaba en la cárcel en la cuadratura del círculo, problema que ha ocupado á los geómetras hasta nuestros dias, y cuyo empeño por encontrarla, ha producido notables adelantamientos; y Aristóteles cita tres diferentes cuadraturas encontradas por Hipócrates Chio, Brison y Antifonte. El primero halló con este motivo la cuadratura de la *lúnula* que tomó su nombre, y Dinostrates inventó para el mismo obgeto la *cuadratriz* que se llama de Dinostrates.

La duplicacion del cubo ocupó muy luego á aquellos geómetras: y el citado Hipócrates fué el primero que conoció que para resolverlo, era menester encontrar dos medias proporcionales entre el lado del cubo y su duplo. Platon formó un instrumento con que lo resolvió mecánicamente. Eudoxîo inventó ciertas curvas para resolverlo: pero hasta Arquitas Tarentino no se desató con exactitud, si hemos de creer á Laercio y á Platon. Sin embargo á Eudoxîo, y á su discípulo Menecmo se atribuye la invencion de las secciones cónicas, y en su tiempo se tenian ya las primeras nociones de los *lugares geométricos*, con cuya invencion se honraron despues Descartes y Sluse. Ello es que por entónces se escribieron los cinco libros de lugares sólidos de Aristeo, donde tomó Euclides alejandrino la doctrina de sus libros de los cónicos. Tambien se puede ver en Pappo los medios ingeniosos que se habian inventado para resolver el problema de la triseccion del ángulo, valiéndose de la hipérbola y de la concoide: lo que prueba que los antiguos tuvieron en estas materias mas conocimientos de lo que comunmente se cree. Y así no es estraño que Teofrasto y despues con mas estension Eudemo escribiesen una historia de la geometria: tan estensos eran ya sus progresos.

Faltaba sinembargo la disposicion metódica de estos descubrimientos: y esto es lo que suplió casi tres siglos ántes de Jesucristo el esclarecido Euclides, quien ademas de sus *porísmos* que recomienda Pappo; ordenó y encadenó maravillosamente todas las verdades geométricas averiguadas hasta su tiempo, inventando tambien otras que forman el libro 5.º de los trece de que constan sus Elementos: sin incluir el 14.º y 15.º que son de Hipsiclo, ni los dos restantes que en 1593 añadió M. Candalle que tratan de los cuerpos regulares. Esta obra que ha sido la piedra angular de la gometría, ha tenido inumerables comentadores, Teon Alejandrino, Proclo, muchos de los árabes, y despues ha sido traducida y comentada en nuestros tiempos por los mas ilustres geómetras.

Mientras que ademas de Euclides, cultivaban la geometría muchos de los discípulos de la escuela alejandrina, entre ellos Eratóstenes, talento universal que trabajó con utilidad sobre el analisis y la duplicacion del cubo; florecia en Siracúsa Arquimédes, que fué el prodigio de su siglo. El encontró la razon del diámetro á la circunferencia del círculo que ninguno hasta él se habia atrevido á tentar, inscribiendo y circunscribiendo polígonos al círculo; dando las primeras ideas que al cabo han producido la sublime invencion del cálculo infinitesimal: midió la esfera y el cilindro, las conoides y esferoides, cuadró la parábola y encontró las propiedades de la espiral, curva inventada por su amigo Conon de Samos, con otros muchos ingeniosos y útiles inventos, en que resplandece no ménos su profundo talento y sagacidad, que una escrupulosa exactitud y severidad en sus demostraciones. Este hombre insigne fué muerto por un soldado romano en la toma de Siracúsa por Marcelo 212 años ántes de Jesucristo.

Apolonio, natural de Pérgamo en Panfilia, fué en la geometría sublime lo que Arquimédes habia sido en la elemental. Sin hablar de diferentes obras suyas de que Pappo

nos ha conservado estractos, la *de los cónicos* hará inmortal su nombre: pues se puede decir que cuanto se ha escrito despues de secciones cónicas, se encuentra en el geómetra griego: y pasma ver ya en su 6.° y 7.° libro entre otras invenciones y miras profundas, investigaciones sobre los máximos y mínimos y sobre las evolutas. Pappo, Hipacia, Eustocio.... comentaron esta obra que ha servido de elementos á la geometría compuesta. Regiomontano nos comunicó sus cuatro primeros libros en 1537, y los cuatro restantes no pareciéron hasta que en 1661 los publicó con notas el ilustre Borelli. Hallei los dió á luz mas completos en 1710.

Despues de estos dos insignes geómetras floreció Nicomédes, inventor de la concoide, curva de que se valió para duplicar el cubo, y de la que Newton usó despues en varias de sus especulaciones geométricas; floreciéron Gémino, Filon, Eron, Teodosio autor de los Esféricos, obra recomendable en geometría y astronomía; Menelao, que escribió de los triángulos esféricos, Diocles que inventó la cisoide, que perfeccionó Newton, y finalmente Pappo que hácia el siglo IV de nuestra era recogió y puso á buena luz los descubrimientos de los griegos que le habian precedido: despues del cual podemos decir que se estinguió la casta de los geómetras, y en mucho tiempo no se volvió á hablar de geometría.

Los romanos dieron á esta ciencia poquísima atencion, y hasta los árabes casi no se encuentran quienes la cultivasen. Pero estos, no solo la conservaron traduciendo y comentando los escritos griegos; sino que la adelantaron considerablemente, aunque no sea sino por su invencion del uso de los senos en lugar de las cuerdas, por el que se consiguió una suma sencillez y comodidad en las operaciones trigonométricas. Los que entre ellos adquirieron mayor fama de geómetras son Hassen, Abu-Giafar, Tabit-ben-Corah, Alkindi, Moamad, hijo de Musa, Giaber-ben-Aphlah, del que hay en el Escorial un libro *de las esferas*, Abdelaziz, Massudo y otros muchos.

De los árabes aprendieron la geometría Gerberto, Campano y Abelardo, restauradores de esta ciencia en ocidente; pero fueron muy lentos sus progresos como lo muestran las obras rústicas y mezquinas de Jordan Nemorario y Juan de Sacrobosco publicadas hácia la mitad del siglo XIII Y se puede decir que Purbac y su discípulo Regiomontano fueron en el siglo XV los primeros que la comenzaron á adelantar. El primero trabajó sobre la geometría práctica, é inventó el *cuadrado geométrico* para medir distancias: y el segundo perfeccionó el uso de los cálculos trigonométricos, introduciendo en ellos las tangentes, y formando tabla de ellas.

Desde entónces comenzaron á estenderse las luces, y adquirió nuevas riquezas la geometría. Se vió en Italia á Tartaglia, á Federico Comandino que tradujo muchas obras de los antiguos, y se ocupo en los centros de gravedad; á Maurolíco, versado en la geometría trascendente, que consideró las secciones cónicas en el sólido, y halló muchas de sus propiedades, entre ellas las de las tangentes y asíntotas de la hipérbola. En Francia se vió á Pelletier que disputó con el P. Clavio sobre el ángulo del contacto en el círculo; á M. Candalle arzobispo de Burdeos, y á Vieta que superior á todos, construyó nuevas tablas de senos por medio de fórmulas analíticas, determinando la razon de los arcos múltiples, y generalizó mas la aplicacion del álgebra á la geometría, enseñando á construir ecuaciones hasta de 3.^{er} grado, á las que redujo la duplicacion del cubo y triseccion del ángulo. Se vió en Portugal á Pedro Nuñez que halló un ingeniosísimo modo de subdividir las partes de cualquier instrumento que algunos quieren atribuir á Pedro Vernier, resolvió el problema dificil de hallar el menor crepúsculo, y trabajó sobre la *Loxodromia*, curva que traza un navío siguiendo el rumbo que corta todos los meridianos bajo un mismo ángulo. Se vió en el País Bajo á Mecio, Adriano Romano, Luis Vanceulén, que todos cultivaron la cuadratura del círculo, que encontraron muy próxima, en Alemania á Werner que escribió sobre el analísis antiguo; á Birge inventor de la *plancheta*, á Gemma Frisio de la *pantómetra* instrumentos de geometría práctica; á Clavio ilustre por sus obras matemáticas, y á muchos otros que se esmeraban á porfia en el cultivo de la geometría.

Esta fermentacion produjo los mejores efectos. Lucas Valerio había publicado ya su sábio libro *de centro gravitatis solidorum*, en donde ademas de un nuevo modo de cuadrar la parábola, determina el centro de gravedad en los conoides y esferoides: y el holandés Snelio había aplicado su *Ciclométrico* á averiguar la relacion del diámetro á la circunferencia; cuando comenzó á amanecer una nueva aurora á la geometría que la hizo mudar de semblante. Keplero catedrático de matemáticas en Rostoc, aunque dedicado á la astronomía, honró la geometría con su *Stereometría doliorum*, prenunciando ya el método de los infinitos. En ella considerando el círculo compuesto de infinitos triángulos, al cono de infinitas pirámides.... consigue resolver muchos problemas de los antiguos con suma facilidad, y desata otros nuevos; formando diferentes sólidos con la rotacion de las secciones cónicas al rededor de cualquier línea. Al año siguiente de la muerte de Keplero verificada en 1631, publicó el P. la Faille su tratado *de centro gravitatis partium circuli, et elipsis*, que mejoró el P. Guldin compendiándola y formando una teoría mas general sobre el centro de gravedad de las figuras planas, líneas curvas y sólidos, y desatando problemas que Keplero dejó por resolver.

Ya en 1629 había inventado el milanes Buenaventura Cavalieri una geometría que apareció con el título de *los indivisibles*. Llama así á los elementos ó partes de que considera formados los cuerpos; imaginando al sólido dividido en infinitas superficies, la superficie en infinitas lineas.... proporcionando por este medio la solucion de nuevos problemas hasta entónces ignorada, y facilitando la de otros resueltos antes por medios mas dificiles y complicados. Valiéronle estos descubrimientos una cátedra en Bolonia sin mas exámen; en cuyo destino tuvo ocasion de aumentarlos. Galileo, Viviani y muchos otros abrazaron este método que amplió y defendió de sus contrarios Estéban de los Angeles. Pero quien le aprovechó mas fué Torricelli aplicándole á nuevos problemas, encontrando una nueva cuadratura de la parábola, la medida del sólido hiperbólico, y lo que le hizo mas célebre, la dimension de la cicloide.

Roverbal se quejó de que se le hubiese arrebatado la gloria de esta invencion, que parece poseía ya, y que habia conseguido por un método semejante al de los indivisibles; pero que había tenido oculto. Sus injustas quejas no disminuyeron en nada el mérito que le grangearon sus trabajos geométricos. Ademas del referido método, el de las tangentes llamado *de los movimientos compuestos*, y el que encontró para determinar los centros de oscilacion mas exácto que el de Descartes; inventó ciertas curvas con que cuadró las parábolas, y otros diferentes espacios infinitos.

Pero ni él, ni sus predecesores pueden compararse con el ilustre Descartes y su contemporáneo Fermat. Miéntras que se distinguían en Italia Borelli ilustrador de los antiguos geómetras, y Viviani célebre por sus doctas *Divinaciones sobre los lugares sólidos de Aristeo* y el 5.º libro de los *Cónicos de Apolonio*; descollaba entre todos Descartes inmortalizando su nombre con la aplicacion del cálculo á la geometría. Los rasgos y propiedades de las curvas espresadas clara y elegantemente en una ecuacion, nuevos métodos para resolver los problemas planos, adelantamientos notables en la doctrina de los antiguos sobre los lugares geométricos, fórmula general para las ecuaciones de las secciones conicas en cualquiera posicion que se consideren, invencion de nuevas curvas llamadas *óvalos de Cartesio*, elevacion al grado de geométricas de otras curvas que pasa-

ban por mecánicas, método general para determinar las tangentes aplicable á las cuestiones mas árduas; todos estos y otros muchos preciosos hallazgos fueron en manos de Descartes los frutos de su feliz invencion, que le han merecido el justo título de uno de los mayores geómetras del mundo. Las impugnaciones que de algunos de estos métodos hizo Fermat, le hicieron bien poco fabor; sin embargo de que sus descubrimientos sobre los máximos y mínimos, tangentes de las curvas, construccion de los lugares sólidos, medida de muchas curvas, que redujo ingeniosamente al círculo é hipérbola, con otras invenciones, le merecieron un lugar distinguido al lado de Dercartes.

Los discípulos de este grande hombre hicieron progresos notables con el nuevo método que tubo famosos comentadores, que se pueden ver en la *Geometría de Descrátes*, que publicó Schooten en 1695, quien tambien enseñó á tratar las secciones cónicas por un movimiento continuo. Beaune, Hudde, Wit y señaladamente Rabuel se distinguieron en este particular. Hudde, Sluse, Huighens hicieron mas fáciles y espedítos los métodos de las tangentes, y de los máximos y mínimos, y Craig inventó nuevas fórmulas para la construccion de los lugares geométricos, quitándolas el embarazo que tenían las de Descartes.

El flamenco Gregorio de San Vicente se había ocupado por espacio de 25 años en la averiguacion de la cuadratura del círculo; y aunque se alucinó creyendo haberla encontrado, hizo con este motivo importantes servicios á la geometría. Halló la conformidad de la espiral con la parábola, que es una espiral desenvuelta, con muchas de sus propiedades; las de la cuadratriz, de que compuso un tomo que se quemó en la toma de Praga por los saxones; comparó la hipérbola con la parábola, la uña cilíndrica con la esfera, y sobre todo encontró que los espacios de la hipérbola entre las asíntotas crecen aritméticamente, creciendo las abscisas geométricamente: ademas de nuevos métodos para cuadrar la parábola é hipérbola, y medir nuevos cuerpos no medidos hasta entonces, con otros muchos descubrimientos.

El holandés Huighens impugnó la cuadratura de Gregorio, y se le deben, entre otras cosas, las razones próximas del círculo, la dimension de las superficies curvas de los conoides y esferoides, un método para reducir á cuadratura la rectificacion de las curvas, la medida de la cisóide, la anatomía que hizo de la logarítmica, varios inventos acerca de las tangentes, areas, sólidos, centros de gravedad, y una teoría sobre las evolutas.

La Inglaterra competía en esta materia

con las demas naciones. El profundo Wallis con su aritmética de los infinitos se puso en estado de medir figuras á que no habían llegado otros geómetras, y sugetar á exactitud geométrica muchos objetos que habían resistido hasta entonces á sus esfuerzos. Resolvió facilmente los problemas sobre la cicloide que con tanto enfasis proponía en Francia Pascal. Mercator sacó de los mismos principios su *logaritmo tecnia* con que cuadraba la hipérbola y sacaba la construccion de los logarítmos: y sus ingeniosas operaciones para la cuadratura del círculo produgeron el método de las *interpolaciones* usadas con frecuencia en la geometría, y dieron origen á la fraccion continua de Brounker, y á su serie infinita para espresar el area de las hipérbolas: y á ellos se debe el binomio newtoniano, y en alguna manera el principio del hallazgo del cálculo infinitésimal. Barrow esparcía tambien en sus *Lecciones* profundas públicadas en 1666, útiles descubrimientos sobre la dimension y propiedades de las curvas, y daba un método sobre las tangentes que abría el camino para llegar al cálculo diferencial; al mismo tiempo que el famoso Gregori descubría teoremas ingeniosos para rectificar curvas, trasformar y cuadrar figuras curvilineas, y demostraba la imposibilidad de cuadrar el círculo, impugnada por Huygens, buscaba su mas inmediata aproximacion y sus propiedades análogas con la hipérbola, espresaba el area del círculo con una serie infinita, y la cuadratura de la parábola de Mercator por un método nuevo.

Parece que la geometría no podía llegar á mas alto grado de perfeccion atendidos los portentosos progresos que en todos sus ramos habían hecho tantos talentos; pero el sublime de Newton halló aun mucho que adelantar á todos sus predecesores á quienes superaba en invencion, exâctitud en demostrar y superior destreza en cálcular. Desde luego sacó de la doctrina de Nicomedes sobre la concoide el método de formar las ecuaciones de 3.º y 4.º grado, perfeccionó el modo de describir la cicloide, y resolvió un problema de Apolonio con una elegancia tan superior á la de Descartes que le acreditó sin disputa, maestro y dueño de la antigua geometría. Antes que Mercator publicase su serie infinita para cuadrar la parábola, poseía ya un método que se estendía á cuadrar todas las curvas tanto mecánicas como geométricas, á su rectificacion, á los centros de gravedad, á los sólidos de revolucion, y á sus superficies.

Pero lo que le abrió los senos mas ocultos de la geometría, y le allanó los mas dificultosos problemas, fué su *Cálculo de las fluxîones.* Con él obtuvo el pleno dominio sobre todos los registros de la mas fina geometría que necesitaba para levantar la gran máquina del sistema del universo, que estableció en su inmortal obra de *Los principios matemáticos.* Rectificar curvas, medir areas, determinar tangentes, encontrar los maximos y mínimos, fijar los puntos de inflexîon, manejar libremente todas las líneas y figuras de que se sirve la naturaleza, combinar sus diferentes fuerzas segun todas sus direcciones; todo se hizo fácil á Newton con el auxîlio de dicho cálculo.

Ya digimos que Leibniz habia hecho, aunque por diferente camino, el mismo descubrimiento que Newton; pero no sacó de él todo el fruto de que era capaz: y aunque con su auxîlio resolvió cuantos problemas se le propusiéron, ocupado en mil otros obgetos, se complacia en esparcir la semilla dejando á otros el coger los frutos.

Entretanto hacía prodigios el nuevo cálculo en manos de los Bernoullis, Hospital, Varignon y muchos otros. Jacobo rectificaba y cuadraba la espiral logarítmica y la loxôdromica, desenvolvia todas las propiedades de la espiral, de las curvas que la producen y que son producidas por ella, establecia su profunda teoría de las curvas que giran al rededor de sí mismas con otros mil inventos. Juan se engolfaba en las abstrusas especulaciones de los isoperímetros, del sólido de la mayor resistencia, de las trayectorias, de los centros de oscilacion. Varignon averiguaba las leyes del movimiento compuesto, de las fuerzas centrales que suponen la geometría mas fina y recóndita: Tschirnausen cultivaba las famosas causticas que corrigió la Hire, Lagni creaba una ciencia nueva en su *Goniometria* de donde deducia una trigonometría mas sencilla y cómoda que la comun, y adelantaba la ciclometría llevando la cuadratura del círculo á una asombrosa exâctitud. Tailor, Maclaurin y Simpson ilustraban y perfecionaban la teoría de las curvas con la delicadeza de sus cálculos y operaciones geométricas.

De la escuela del ilustre Juan Bernoulli saliéron sus tres hijos Nicolas, Daniel y Juan, salió Hermam, Maupertuis, Clairaut, Euler; y aun d'Alembert confiesa deber toda su ciencia á sus profundas y luminosas producciones: y desde entonces comenzó la geometría á subir al alto punto de perfeccion á que en el dia se ve elevada.

El examen de las oscilaciones del péndulo, de la figura de la tierra, y la discusion del problema de los tres cuerpos condugeron á Clairaut á determinar nuevas curvas, y á descubrir nuevas verdades geométricas. La Hidrodinánica de Daniel Bernoulli, su ingeniosa demostracion del principio de la composicion de las fuerzas con otras muchas producciones, le hicieron internar en las mas finas

especulaciones geométricas y analíticas, y fraguarse nuevos métodos desconocidos hasta entónces. No se deben menores descubrimientos á d'Alembert, La Grange.... y sobre todos á Euler. Todas las ciencias matemáticas han tomado en manos de este grande hombre nuevo aspecto. Se le ve esparcir nuevas luces sobre la rectificacion de las secciones cónicas, cuadratura de las curvas superiores, de las superficies de los conos oblicuos; enriquecer la ingeniosa invencion de Fagnani que determinó los arcos de elipse é hipérbola de una diferencia igual á una cuantidad dada; estender y perfeccionar los métodos que Juan Bernoulli, Nicole y Maupertuis habian propuesto para encontrar curvas rectificables bajo de la superficie de la esfera. El cálculo de las diferencias finitas apenas indicado por Tailor y Nicole, y el de las diferencias parciales que inventó d'Alembert, deben á Euler su perfeccion, y la utilísima aplicacion que de ellos se ha hecho despues á los puntos mas sutiles de la geometría. El estendió la teoría de los isoperímetros, inventó el cálculo de los senos y cosenos, la teoría general de las superficies curvas, y la de los radios osculadores. Finalmente, ha perfeccionado los métodos sobre las trayectórias, el sólido de la menor resistencia, y se puede decir que no hay asunto en geometría que no le haya debido alguna perfeccion.

Boscowik, La Grange, d'Alembert, Condorcet, la Place y otros muchos ilustres matemáticos han contribuido por su parte, y muchos se ocupan hoy en perfeccionar mas tantos ramos inventados ya, cuyo conjunto hace de la geometría una de las ciencias mas vastas y mas útiles entre todas las naturales.

Concluiremos esta historia haciendo mencion de los últimos pasos que ha dado la geometría á esfuerzos de los célebres matemáticos Luis la Grange, Gaspar Monge y otros, que la han presentado á un nuevo y ventajoso aspecto en los últimos cuarenta años. Hasta entonces dicha ciencia solo habia considerado sus figuras trazadas sobre un plano, y á los sólidos siempre rodeados de planos. Pero como la mayor parte de los problemas de mecánica y demas ciencias aplicadas exigen que las líneas rectas, sólidos, y las muchas curvas formadas por la interseccion de estos, se les considere en su posicion real, esto es, colocadas en el espacio; es indispensable que para poder determinar las propiedades de estas curvas y cuerpos engendrados, se refieran sus puntos á planos dados de posicion por medio de *normales* bajadas de estos puntos á dichos planos. Los pies de estas perpendiculares forman la *proyeccion* de cada punto de las líneas y superficies curvas dadas, y la serie de estas proyecciones sobre cada plano forma asímismo líneas rectas ó curvas.

La Grange fué el primero que inventó métodos generales analíticos para encontrar la naturaleza de estas proyecciones curvas por medio de las *ecuaciones* de las líneas y superficies propuestas; y al contrario, para conocer las propiedades de dichas líneas y superficies, dándose las ecuaciones de sus proyecciones. Así creó *la geometría analítica* que viene á ser una aplicacion de la analísis á toda especie de figuras y dimensiones; de suerte que la geometría elemental queda ya reducida á un caso particular de considerar la estension en general.

El geometra Monge ha generalizado y perfeccionado dicho ramo presentando nuevas y elegantes relaciones entre las coordenadas de las superficies curvas, desenvolviendo las diversas maneras de concebir su generacion, y demostrando por este medio multitud de propiedades nuevas y muy curiosas, ademas de haber hecho una clasificacion de las superficies curvas. Aplicó tambien de un modo feliz dicha geometría á *las artes de construccion* en piedra ó madera. Y como estas presentan todo género de superficies planas y curvas, su construccion exige la formacion de su *trazo* en un plano orizontal ó vertical: y este trazo ó diseño no es mas que el conjunto de las proyecciones de todos los puntos de las superficies de que se compone la obra. Así que Monge y antes que él La Croix han reducido á principios generales y de una manera elemental y sintética las proyecciones de las diversas líneas, superficies y sólidos sobre un plano cualquiera, y por este medio han simplificado y generalizado los diferentes procedimientos aislados que emplean los artistas y constructores para la formacion de sus planos. Y como la teoría general de las proyecciones sirve de base para trazar y describir todos los puntos y líneas de un diseño, Monge la ha dado el nombre de *geometría descriptiva*.

Finalmente deben tambien á este ilustre sabio la geometría y demas ciencias matemáticas mayores progresos y nuevos grados de perfeccion con su *cálculo de las variaciones* y su *teoría de las funciones*, disipando la oscuridad que reynaba en los principios y aplicacion del cálculo infinitesimal descubierto por Newton y Leibniz: pues lo redujo á la análisis de las cuantidades finitas, esto es, á la simple *evolucion* de estas *series*. Así que la teoría y lecciones de las *funciones* analíticas de la Grange, su mecanica analítica y la mecanica celeste de la Place se pueden mirar con razon como los mayores esfuerzos del ingenio humano en matemáticas, y los principales libros que debe meditar todo el que aspire á adquirir algun nombre en estas ciencias sublimes.

INTRODUCCION.

1 Se conocen generalmente con el nombre de *matemáticas* diferentes ramos de ciencias cuyo obgeto es la *cuantidad*; esto es, todo aquello que es susceptible de aumento ó diminucion por grados distintos capaces de sujetarse á cálculo. Cuando las cuantidades se consideran en los seres fisicos y reales, las ciencias que tratan de ellas, se llaman *matemáticas mistas*: la *dinámica* por egemplo trata del movimiento, peso y equilibrio de los cuerpos, la *hidrodinámica* de los de los fluidos, la *optica* calcula los fenómenos de la luz, la *astronomia* los de los astros... Pero si se considera la cuantidad en general, abstraida ó separada por el pensamiento de los seres, toman el nombre de *matemáticas puras*.

2 Estas que son la *aritmética*, *álgebra y geometría*, tratan las dos primeras de la cuantidad numérica y la otra de la mensurable ó de la estension. Para formar un juicio completo y fundado de estas últimas ciencias que son el obgeto de estos Elementos, daremos una idea clara, fundamental y luminosa de lo que es *cuantidad y estension*, para encadenar con ella las principales verdades de dichas ciencias; suponiendo en la esplicacion la nocion de varios términos y operaciones cuya significacion ha de constar despues en el cur-

so de la obra, y que en el entretanto podrá suplir el maestro á los discípulos del modo que mejor le parezca.

3 Cuando el hombre empieza á reflexîonar sobre sí, percibe desde luego su existencia; y aunque le supongamos ignorante de que hay cuerpos estraños que obran en él, distinguirá los diferentes modos de sentirse bien ó mal al esperimentar las simples sensaciones de los colores, olores, sabores, sonidos y tactos. En este estado de pura sensibilidad gozará ó sufrirá, deseará gozar de las sensaciones agradables, y evitar las desagradables. Se agitará pues y moverá vagamente sus miembros, aunque ignore lo que es movimiento y que tiene cuerpo y miembros. Si deseando por egemplo, prolongar una sensacion del tacto, encuentra su mano un obstáculo que se lo estorba, conocerá despues de algunos conatos que lo que resiste á su voluntad, debe ser una cosa distinta de su virtud senciente; y á consecuencia de repetidas esperiencias, valiéndose de los demas sentidos, descubrirá su cuerpo, sus miembros diferentes y los demas seres estraños, reconociéndolos por las diversas propiedades que le muestran.

4 Entre estas las generales de mobilidad, inercia, impenetrabilidad, atraccion, masa... no pueden concebirse existentes sin los cuerpos á que pertenecen, sin ellos carecen de

toda virtud propia, y solo se estudian examinando los efectos que producen en los cuerpos. Luego su historia hace parte de la de los cuerpos, y nunca pueden ser obgeto de una ciencia abstracta. La *estension* es propiedad mas general que las mencionadas, pues se estiende no solo á los cuerpos, sino al *vacío* que puede ser recorrido por el movimiento. Por esta única relacion que hace de él un ser existente capaz de causarnos una sensacion; concebimos en él sin absurdo puntos, líneas, superficies, y aun los mal llamados sólidos con las tres dimensiones capaces de forma y de divisibilidad en partes, distintas las unas de las otras que pueden ser recorridas por el movimiento. De consiguiente las medidas, combinaciones, relaciones y consecuencias que de ellas se pueden sacar, podrán ser obgeto de la ciencia de la estension, ciencia abstracta que se conoce con el nombre de *geometría*.

5 La *duracion* y la *cuantidad* son aun mas generales que las anteriores, como que pertenecen á todos los seres físicos é intelectuales; al espacio, á nuestras mas simples afecciones y percepciones que no pueden concebirse sin duracion. No suponen ninguna de las otras propiedades, mas estas no pueden existir sin ellas. Pero como todas las modificaciones de la duracion se reducen á ser *mas ó menos*; cuanto de ellas se pueda dis-

currir, es obgeto de la ciencia de la *cuantidad*. Luego esta es el elemento mas universal de todas nuestras ideas que no se puede separar de ninguna de ellas sin aniquilarlas, que las acompaña aun despues de las abstracciones mas multiplicadas, y la única que puede existir en nuestro pensamiento sin mezcla de otra. En suma, es la idea de la *existencia evaluada* y nada mas, elemento necesario de todas las demas y la única capaz de existir por sí sola.

6 Es pues dicha idea la mas propia para ser obgeto de una ciencia exacta, y como elemento universal y necesario de todas las ideas, ninguna puede ser estraña á sus combinaciones. Por eso las verdades de la ciencia de la cuantidad hacen parte de todos los ramos de nuestros conocimientos: y siendo ella una propiedad abstracta ó separada de toda otra, sus modos y efectos no deben examinarse en los seres á que pertenecen ni hacer parte de su historia. En este estado de abstraccion absoluta no puede tener la cuantidad otro modo que á sí misma, ni considerarse bajo de otra relacion que la de aumento ó diminucion: esto es, dicha ciencia espresará con notas la cuantidad, distinguirá y comparará sus diferentes grados, y los calculará descubriendo las combinaciones á que pueden dar lugar sus diferentes estados de determinada é indeterminada, conocida ó desconocida, fija ó variable, positiva, negativa y aun

imaginaria. Así sucede, y no es otra cosa la ciencia de la cuantidad abstracta, la cual nace de este modo en nuestra inteligencia.

7 En el exámen de las cualidades de los cuerpos ó de las sensaciones que nos causan, modificamos cada uno de sus nombres con un adjetivo llamándole *pesado*, *duro*, *rojo*, *voluminoso*... y si sin mudar de naturaleza, mudan de intensidad, decimos que son mas ó menos *duros*, *pesados*, *rojos*, *voluminosos*... juntando á las ideas de estas cualidades la de cuantidad. Observando despues que un cuerpo es distinto y separado de otro sin division de partes que formen seres diversos; hacemos un nuevo adjetivo que esprese esta circunstancia, llamándole solo, aislado, único, *uno*... Si á este cuerpo se junta otro distinto sin confundirse ni mezclarse con él; no podemos decir que es *uno mas uno de lo que era*, porque esta cualidad de *uno* es absoluta en ambos, y no admite mas ni menos, sino que diremos que es uno aumentado de uno, ó *uno mas uno*. Si se le junta otro tercero al modo que el segundo, resultará uno mas uno mas uno; y lo mismo se podrá decir de un cuarto, de un quinto... formando de cada uno de ellos una sola combinacion, y aplicando á cada una un nombre que represente los obgetos reunidos. A todas estas combinaciones ó reuniones de objetos semejantes damos el nombre general de *números*.

8 A la idea representada por el adjetivo *uno* debemos la de la *unidad*; y para fijar los diferentes compuestos de *uno* repetido muchas veces, se han creado los nombres de *dos* en lugar de uno mas uno, de *tres* en vez de uno mas uno mas uno, así como de *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*. Estos nombres concretados á los seres reales son verdaderos adjetivos: mas luego que se han considerado en abstracto como compuestos de unidades, se han convertido en nombres sustantivos que se han llamado *numerales* ó de número. En *tres cuerpos ó cuerpos tres*; el *tres* es un verdadero adjetivo; pero el número *tres* sin nombre á que se refiera, es un verdadero sustantivo que representa tres unidades, ó tres grados de la cuantidad abstracta ó no aplicada á un ser. Lo mismo debe entenderse de cualquier otro de los números de cuya formacion hablaremos en su lugar.

9 La exatitud de la ciencia de la cuantidad estriba en esta única condicion, *que los diferentes grados de cuantidad espresados por los adjetivos, esten todos á igual distancia unos de otros, y que todos sean iguales al grado ó porcion de cuantidad espresado por el adjetivo uno del que emanan.* Sin esta condicion no seria determinada ó lo seria imperfectamente la significacion de los diferentes adjetivos, y no podrian compararse los unos

á los otros con precision sino de un modo vago; en cuyo caso no podria haber deducciones legítimas, y de consiguiente no habria ciencia ó seria la mas confusa é inexacta. Mas con dicha condicion el significado de los adjetivos ó la espresion compendiada del valor de los diferentes multiples del adjetivo *uno*, destino y causa única de su creacion, seria perfectamente exacta.

10 De esta idea principal, matriz de todas las demas, se deduce: 1.° que todas las indagaciones y combinaciones que se hagan con los diferentes adjetivos de cuantidad, son necesaria y absolutamente verdaderas respecto de cualquier ser al que se aplique el adjetivo *uno*; pues estriban todas en sus relaciones con él, y en las proporciones que tienen con su valor. De lo que resulta que pudiéndose el *uno* abstraer de todo ser, y considerársele como nombre de cierta porcion de cuantidad cualquiera que sea, se podrá tomar como un *sustantivo* lo mismo que á todos sus derivados, sin aplicacion precisa á ningun ser particular.

11 2.° Que en este caso todas las especulaciones y combinaciones existen solo en nuestra imaginacion, y para volverlas á trasportar al mundo real y positivo, basta dejar de tomar el adjetivo *uno* sustantivamente, y juntarle como adjetivo al ser especial y particular que es su primer destino: y fi-

jado el valor de la unidad, quedan rigurosamente determinados los de todos sus multiples, sus relaciones y combinaciones.

12 3.º Que reunido y fijado el adjetivo *uno* á un ser conocido y determinado, ya no se puede comparar ni combinar dicho ser sino con otros semejantes é iguales á él. Podremos decir un guindo mas un guindo son dos guindos, pero no un guindo y un peral son dos ni guindos ni perales que no se pueden sumar. Podré afirmar que un guindo y un peral son dos arboles, pero entoces no comparo las ideas de guindo y de peral sino la de arbol: y aun siendo cierto que un guindo mas un guindo son dos guindos respecto de la idea especifica de guindo, no lo es respecto de las ideas individuales: pues podria ser el uno mayor que el otro, tener mas ó menos fruto &c. De consiguiente para poder aplicar á una clase de seres ó ideas las especulaciones y combinaciones de una cuantidad abstracta, han de ser dichos seres tales que pueda separarse y fijarse en ellos una cuantidad determinada y precisa que sirva de unidad; de cuya ventaja gozan aquellos seres que admiten divisiones claras, permanentes y palpables en todos tiempos y casos.

13 Por estas observaciones se vé 1.º en qué consiste la ciencia de la cuantidad; y por qué es susceptible de una completa certi-

dumbre: 2.º porqué las diferentes ideas son mas ó menos capaces de que se les apliquen las combinaciones de esta ciencia: pues las especulaciones que se hacen con ellas, son mas ó menos claras, luminosas y ciertas segun el grado en que gocen de la ventaja mencionada como lo veremos en la estension. Todo lo cual nace de que nuestro modo de proceder en la indagacion de la verdad es siempre el mismo en todos los ramos de nuestros conocimientos.

14 Los signos de las lenguas vulgares con que se razona en esta ciencia, serían insuficientes para aquellas operaciones que son impracticables de memoria, sin los signos particulares que se han creado para abreviar y reunir las ideas conduciéndolas con pasos seguros á un resultado cierto sin necesidad de atender á cada uno de por sí. En los números por egemplo, su colocacion diferente decide de su valor; y asi se puede obrar con 2 y 3 como con 20 y 30, 200 y 300... De este modo se conducen los razonamientos en la ciencia de la cuantidad á un grado estremo de complicacion sin el menor riesgo de estraviarse. En estas operaciones se pueden calcular las ideas con números y letras, no solo sin aplicar estos signos á los seres reales, sino sin dar atencion á su valor absoluto como cuantidades.

15 Así se practica con la lengua arit-

mética y con la literal ó algébrica continuacion suya, calculando *a*, *b*, *c*... sin pensar en lo que pueden valer en números; con la seguridad de que se sustituirán sus valores cuando se quiera, y la certeza de que todas las combinaciones que se hayan hecho, son siempre exactas con cualesquiera valores, con tal que guarden entre sí las mismas proporciones. La sola indicacion de estas observaciones basta para mostrar cual es la naturaleza de la diferencia y semejanza que hay entre esta ciencia y las demas: y para convenir en qué la prodigiosa certidumbre y progresos de ella se deben á la superioridad de sus signos, y se funda en la perfecta precision y pocas variaciones de sus ideas. No es otra cosa la ciencia de la cuantidad, asi nace y progresa, tales son sus relaciones con las demas ciencias, y tales las causas por las que es mas aplicable á unas que á otras.

16 Respecto de la *estension* cuya idea se forma por el movimiento de un cuerpo que recorre las partes distintas existentes las unas fuera de las otras y de consiguiente impenetrables, de otro cuerpo estraño; es fácil conocer que si se toma por unidad cierta porcion de estension en longitud, y se aplica sucesivamente á otros cualesquiera, se podrán determinar ó medir las relaciones de longitud que tienen entre sí por medio de los números ó signos de cuantidad. Esta longitud que viene á ser la línea fisica, determina los límites ó la forma de los cuerpos; de la que resultan las ideas exactas de superficie y de solidez fisicas y reales. De aqui se deduce que la *línea fisica* es la traza ó huella que deja un cuerpo que se mueve sobre otro, y el *punto* el estremo de ella: de cuyas ideas resultan las de cuerpo en movimiento, cuerpo recorrido, sólido, seccion, volumen, forma, superficie con las que conviene familiarizarse, así como con sus muchas aplicaciones y combinaciones, antes de pasar á considerar dichas ideas en un sentido abstracto.

17 Entonces se verá en ellas que la propiedad de no poder ser recorrido y circunscripto un cuerpo sino por medio de movimientos sucesivos y proporcionales; conviene igualmente al ser real y resistente que al *vacío* ó á la *nada*, en donde pueden tambien moverse nuestros miembros: de consiguiente dicha propiedad realiza la nada con el nombre de *espacio* por esta única relacion que tiene con nosotros. Es pues el *espacio* obgeto de la geometria abstracta con mas razon que lo es la estension real de los cuerpos; sinembargo de que conviene mucho que preceda siempre la concreta á la abstracta. La singular é inapreciable propiedad de la *estension* de ser susceptible de medidas distintas y constantes, existe en los cuerpos y no en nuestra sensibilidad; la que se le manifiesta indirectamente

por medio del movimiento y resistencia necesaria para recorrerla. No es una de nuestras afecciones simples sino el modo de ser de los cuerpos con la propiedad de resistir á nuestros movimientos cuando se continuan. Esta constituye la cuantidad de su existencia que consiste en el número de partes capaces de producir en nosotros el sentimiento de dicha resistencia; y tomando por unidad cualquier número de ellas, podremos medir la cuantidad de todas.... Las demas propiedades de los cuerpos como lo *sabroso*, *colorado*, *oloroso*, *pesado...* son modificaciones de nuestra sensibilidad, y no existen en otra parte, ni sus masas admiten divisiones precisas y permanentes.

18 Esta ventaja de la estension la hace capaz de ser representada por escalas menores que el natural, que aunque diferentes en tamaño, no alteran sus relaciones, por ser proporcionales. Esto la hace adaptable á la serie de los números por los que pueden espresarse con exactitud todas sus subdivisiones. Dicha circunstancia y la anterior son causa de que la estension de los cuerpos forme un sistema de multitud de verdades seguras, por poderse combinar sus efectos bajo de todas las relaciones, y calcularse hasta las últimas consecuencias sin temor de alteracion ni confusion. El vacío ó estension abstracta carece de esta ventaja porque no nos da el

sentimiento de resistencia, y ni puede tomarse por unidad una porcion suya para medirle. Como solo existe en nuestra sensibilidad, y no en sí mismo, no puede servir de typo permanente; y así solo se puede medir aplicándole una cuantidad dada de estension concreta y corporal que sirve de unidad constante; y de este modo se hace susceptible de medidas, cálculos y especulaciones como la estension concreta.

19 Supuestas estas observaciones esenciales en las que conviene insistir, espliquemos lo que es *lugar* ó el sitio que ocupa el punto de un cuerpo en la estension concreta ó corporal con relacion á la situacion de los demas puntos. Esta relacion sea en el lleno ó en el vacío consiste en la *distancia* ó número de partes estendidas que hay que recorrer para ir del uno á los otros, y en la *direccion* ó camino que se ha de seguir para andar esta distancia: pues con estos dos datos quedará bien determinado el lugar del punto. Por las operaciones prácticas y sencillas que esplicaremos en la geometría, se verá que aunque cada uno de estos elementos pueden convenir á muchos puntos, determinados los dos, solo pueden aplicarse á solo un punto; sin embargo de que hay casos en que conocido un punto, queda determinado el otro. El apreciar las relaciones de distancia y compararlas despues con otras de la misma especie, no

ofrece la menor dificultad: pues basta aplicar la unidad de medida á cada una de las dos que han de medirse, y comparar despues los resultados ó las veces que cabe en ellas.

20 Mas respecto de la *direccion* que nos es conocida por los dos puntos que determinan cada una de las líneas, no hay medio absoluto de valuarlas, y es preciso comparar cada una á las otras, y ver en cuanto y el cómo se diferencian: veamos como esto se ha conseguido. Entre las diferentes figuras triangulares, cuadriláteras, pentágonas, exágonas &c., que pueden trazarse sobre un plano, la que encierra espacio con menos lados, es el triángulo; y si son dos los lados, queda formado un ángulo del que resulta una figura imperfecta, cuyo espacio encerrado es indeterminado y por circunscribir, que por lo mismo no se puede medir. Solo podrá considerarse en ella la mayor ó menor separacion de los lados; y como cada uno es la espresion de relacion de su direccion del vértice á otro punto, y su separacion es la diferencia de las dos direcciones; habrá que buscar un medio de medir con exactitud esta diferencia para poder comparar la una á la otra y todas las imaginables entre sí.

21 Esto se consigue midiendo exactamente los ángulos por medio de los arcos del círculo, segun se esplica en la geometría; pues valuado de este modo el ángulo, queda conocida la diferencia de las dos relaciones de direccion. Con este arbitrio y el de referir á una cuantidad de distancia dada todas las distancias posibles, se tiene cuanto se necesita para determinar todas las posiciones asignables, y apreciar todos los fenómenos de la estension de los cuerpos y del espacio vacío. En este exámen detallado de las ideas de *lugar*, *distancia y direccion* que componen la de *situacion*, la cual hace que un punto sea un *lugar*; se ve ya con claridad lo que es un *ángulo* que es lo único que hay que considerar en una figura, y por qué medio se mide la relacion que espresan sus lados.

22 Y pues que segun estos principios la línea física es la traza de un cuerpo que se mueve de un lugar á otro, la línea abstracta será la espresion de la relacion de direccion que hay entre dos lugares, y no puede ser otra cosa que esta relacion. De aqui es que una línea siempre es recta, y el nombre de *línea recta* es un pleonasmo; pues solo hay una relacion entre dos puntos, y si muda de direccion ya es otra línea. Cuando una línea muda sensiblemente de direccion, se llama *quebrada*: y si no se puede determinar el momento en que la muda, se dice que es una *línea curva*, espresion elíptica, que equivale á *una serie de pequeñas líneas diferentes, cuyo principio y fin no discernimos, ni es posible*

distinguir los vértices de los ángulos que forman entre sí. Por eso un cuerpo que gira al rededor de un centro, está siempre pronto á seguir la tangente que es la prolongacion de la direccion de la línea que sigue el movimiento que actualmente tiene, y que seguiría si las fuerzas perturbatrices que obran sobre él, no le hicieran mudar á cada instante de direccion. Y así la direccion de una curva no se determina con menos de tres puntos: porque componiéndose á lo menos de dos líneas, es indispensable ademas de dos puntos que determine la una, otro á lo menos que determine la otra.

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA.

23 En cualquiera coleccion de cosas semejantes, cuyo valor se trate de averiguar, es indispensable tomar para unidad una porcion fija y determinada de ellas, para espresar despues cuantas de estas porciones contiene dicha coleccion. Y así la *unidad* será una de las muchas partes iguales que forman una coleccion. En treinta y cuatro maravedises que componen un real, un *maravedí* es la unidad que se toma para valuar el real. *Número* se llama cualquiera porcion de estas unidades, que será *concreto* si se aplica á los seres reales, y *abstracto* si prescinde de ellos. Si es cabal el número de las unidades, se denomina *entero*, como *siete*, *treinta*, *doscientos....* si solo son parte ó partes de unidad como un *medio*, tres *quintos...* se llama *quebrado*; y número *misto* si al entero acompaña algun quebrado, como *tres y dos tercios*. A todos tres géneros se les aplica el nombre de *cuantidad numerable*, la cual es el obgeto de que trata la *Aritmética*, ciencia que examina las propiedades de los números, y arte que da reglas para ajustar con ellos todo género de cuentas. La dividiremos en elemental y superior; y reservando hablar de esta para cuando hayamos establecido los principios del álgebra que facilita la

inteligencia de su doctrina, esplicaremos la otra en los cuatro artículos siguientes.

ARTICULO I.

De la numeracion.

24 Con las ideas de la unidad, del número y de la cuantidad aplicadas á sus diferentes é infinitas especies, se percibirá fácilmente el artificio del sistema de la *numeracion*, por el que se consigue espresar todos los números posibles y conocer su valor. A este fin se han creado nombres para las diferentes clases de números, y con solas diez notas unánimente adoptadas y que se tomaron de los árabes, se representa cualquier cuantidad numérica de la magnitud que se quiera. Los nombres de los primeros números que como los demas se forman de la adicion sucesiva de *uno*, son con las notas, caracteres, cifras ó guarismos que las representan. . . . .

0	1	2	3	4	5	6	7
cero,	*uno,*	*dos,*	*tres,*	*cuatro,*	*cinco,*	*seis,*	*siete,*

8	9
ocho,	*nueve.*

Esta clase primera de unidades simples ó absolutas ó números *dígitos* se escriben solas ó en el último lugar cuando las acompañan otras. El *cero* ó nada se coloca en cualquiera de los sitios vacios de unidades de la especie perteneciente al sitio.

25 De nueve y una ó *diez unidades* se forma una unidad de segunda clase que con el nombre dieces ó *decenas* se espresan con las mismas notas puestas en el segundo lugar así...

10	20	30	40
diez,	*veinte,*	*treinta,*	*cuarenta,*

50	60	70	80	90
cincuenta,	*sesenta,*	*setenta,*	*ochenta,*	*noventa.*

A 10 siguen 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 con los nombres propios los cinco primeros *once*, *doce*, *trece*, *catorce*, *quince*, y los restantes *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*, *diez y nueve*, espresando la decena y unidades que contiene... Asi como se nombran los demas intermedios *ventiuno* (21), *ventiocho* (28), *treinta y cuatro* (34), *cuarenta y seis* (46), *cincuenta y cinco* (55), *ochenta y siete* (87)... hasta *noventa y nueve* (99).

26 A este sigue noventa y nueve y uno que con el nombre de *ciento*, forma una unidad de tercera clase diez veces mayor que la de segunda, y que la representan las mismas cifras puestas en tercer lugar segun se vé......

100	200	300	400
ciento,	*doscientos,*	*trescientos,*	*cuatrocientos,*

500	600	700	800
quinientos,	*seiscientos,*	*setecientos,*	*ochocientos,*

900
novecientos.

En los intermedios entre 100 y 200, 200 y 300... se escriben y nombran los números significativos, y se ponen ceros en los siguientes que no tienen decenas ó unidades. En 569 el 5 vale cinco centenas, que con las seis decenas y nueve unidades componen el número *quinientos sesenta y nueve*; en 803 ú *ochocientos tres* no hay decenas, y en 960 ó *novecientos sesenta* no hay unidades.

27 Despues de *novecientos noventa y nueve* (999) último número de la tercera clase, comienza la cuarta con novecientos noventa y nueve y uno que es *mil*, y equivale á diez centenas. Véanse representados con los mismos caractéres colocados en el cuarto lugar....

1000 2000 3000 4000 5000
mil, *dosmil*, *tresmil*, *cuatromil*, *cincomil*,
6000 7000 8000 9000
seismil, *sietemil*, *ochomil*, *nuevemil*.

En los intermedios se leen ademas las centenas decenas y unidades de que constan: (7080) significa *siete mil y ochenta*, (1101) *mil ciento y uno*, (6304) *seis mil tres cientos y cuatro* (9999) *nueve mil novecientos noventa y nueve*.

28 Este y uno mas compone *diez mil*, unidad de las de quinta clase diez veces mayores que las anteriores, y que pertenecen al quinto lugar: se llaman *decenas de millar*, y las principales son. . . . .

10000 20000 30000 40000
diez mil, *veinte mil*, *treinta mil*, *cuarenta mil*,

50000 60000 70000
cincuenta mil, *sesenta mil*, *setenta mil*,
80000 90000
ochenta mil, *noventa mil*.

Los intermedios se leen por partes al modo que las anteriores. En el número (11056) el primer 1 vale diez mil, el segundo mil, el 5 cinco decenas, el 6 seis unidades, y todo él *once mil cincuenta y seis*: en (70305) el 7 son setenta mil, el 3 tres centenas y el 5 unidades, y todo *setenta mil trescientos y cinco*... y el último de esta clase 99999 *noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve*.

29 Si á este se añade *uno*, resulta *cien mil*, unidad de sesta clase que vale diez de las de la quinta, y se denomina *centena de millar*. Las principales son. . . . .

100000 200000 300000
cien mil, *doscientos mil*, *trescientos mil*,
400000 500000 600000
cuatrocientos mil, *quinientos mil*, *seiscientos mil*,
700000 800000 900000
setecientos mil, *ochocientos mil*, *novecientos mil*,

y á los intermedios se les aplican los nombres de cada cifra segun el sitio que ocupan: de suerte que en el número (835007), el 8 vale ocho centenas de millar ú ochocientos mil, el 3 tres decenas de millar ó treinta mil, el 5 cinco millares ó cinco mil, el primer cero ninguna centena, el segundo ninguna decena, y el 7 siete unidades; todo lo cual compone ochocientos mil, treinta mil, cinco mil y siete; ó mas breve, *ochocientos treinta y cinco mil y siete.* El número (936174) se lee *novecientos treinta y seis mil, ciento setenta y cuatro* : y (508020) *quinientos ocho mil y veinte.*

Con este mismo órden de hacer de cada diez uno, se graduaron los números de los seis sitios siguientes, y se le dieron los mismos nombres que á los seis de que acabamos de hablar, con sola la añadidura de la palabra *cuento* ó *millon*; es decir, que las cifras del 7.º sitio son unidades de cuento, las del 8.º decenas de cuento, las del 9.º centenas de cuento, las del 10.º millares de cuento, las del 11.º decenas de millar de cuento, las del 12.º centenas de millar de cuento: por egemplo, 30456320029 son *treinta mil cuatrocientos, cincuenta y seis cuentos, trescientos veinte mil, veinte y nueve.*

Las cifras que se escriben en los seis sitios siguientes, el 13.º 14.º 15.º 16.º 17.º 18.º tienen el mismo aumento de valor, y los mismos nombres con la diferencia de ser *bicuentos* ó *billones*. Las de los seis lugares siguientes son *tricuentos* ó *trillones*, las de los otros seis *cuadricuentos* ó *cuadrillones*, y así interminablemente.

30 Luego para leer un número de muchas cifras, convendrá dividirle de seis en seis comenzando por la derecha, y de este modo

será facil dar á cada una su propio nombre y valor. Si se diese el número 299838^3, 525088^2, 555848^1, 592312, que espresa las libras que puede pesar el globo de la tierra bajo de ciertas suposiciones; despues de dividirlo conforme se ve, se leerá así, *doscientos noventa y nueve mil ochocientos treinta y ocho tricuentos, quinientos veinte y cinco mil ochenta y ocho bicuentos, quinientos cincuenta y cinco mil ochocientos cuarenta y ocho cuentos, quinientos noventa y dos mil trescientos y doce unidades absolutas.*

31 Para escribir con prontitud y acierto cualquier número que se nos ofrezca por grande que sea; se verá desde luego el período á que sube, si al de las unidades ó al de los millones, billones, trillones &c. se colocarán en el sitio correspondiente de cada período cada una de las cuantidades dadas ó cero si no las hay, y resultará la espresion del número. Si se ha de escribir la cuantidad *mil setecientos tres billones, quinientos sesenta mil ochocientos cuarenta y ocho millones, treinta mil dos cientos cincuenta y nueve unidades*; veo inmediatamente que este número que sube el tercer período de billones; debe constar de diez y seis guarísmos, seis de las unidades, otras seis de los millones y cuatro de los billones. Estos son 1703, los de los millones 560848 y 030259 los de las unidades; luego todo él debe ser 1703,560848,030259.

32 Se ve pues, que un número se hace diez veces mayor por cada lugar que se le adelanta ácia la izquierda; es decir, que cada unidad de una cifra cualquiera vale diez unidades de la que se le sigue ácia la derecha: pues una decena vale diez unidades, una centena diez decenas, un millar diez centenas, y así de las demas.

ARTICULO II.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Adicion.

33 El *sumar* los números enteros, que se reduce á juntar en uno solo todos los que se dan para sumar, es muy facil cuando no pasan de 9: pues sin reglas se sabe que 4 y 8 suman 12, 7 y 9 son 16 &c.

Para sumar los números de mas cifras, 1.° *se escriben de manera que las unidades de los unos caigan bajo de las de los otros, las decenas bajo de las decenas, las centenas, millares y demas partes bajo de sus correspondientes.* 2.° *Despues se suman todas las unidades, y se escribe la suma bajo de una raya que se tira para evitar confusion: se suman igualmente las decenas, y se pone su suma junto á la de las unidades; y lo mismo se practica con las centenas, millares &c. advirtiendo que si alguna de dichas sumas contiene decenas y unidades, se escriben estas bajo de la coluna que se suma, ó cero si hubiese solo decenas, y las decenas se juntan con las notas de la coluna inmediata.* De este modo resultará la suma que se busca, ó un número que contendrá todas las unidades, decenas, centenas &c. de los que se han dado para sumar.

Si se nos preguntase el número de años que han pasado desde la creacion del mundo hasta nuestros dias; diriamos....

Egemplo I.

Desde la creacion al diluvio pasaron	1656
Desde este á la vocacion de Abrahan	427
Desde esta al paso del mar Bermejo	430
Á la edificacion del templo de Jerusalen	581
De este al principio del Imperio de Cyro	479
Desde Cyro hasta la era de Seleúcides	224
Desde esta hasta la era cristiana	312
Desde Jesucristo hasta nuestros dias	1821
Suma.....	5930

Escritos los números con el órden que se ve, sumo las unidades, y para escribirlo en cifra usaré del signo + que quiere decir *mas*, y del = que significa *igual á.* En lugar pues, de decir 6 y 7 suman 13, y 1 son 14, &c. diré mas breve $6+7=13, +1=14, +$

$9 = 23, + 4 = 27, + 2 = 29, + 1 = 30$: y por cuanto en 30 hay tres decenas y ninguna unidad, pongo 0 bajo de las unidades, y junto las 3 con las decenas así; $3 + 5 = 8, + 2 = 10, + 3 = 13, + 8 = 21, + 7 = 28, + 2 = 30, + 2 = 32, + 1 = 33$, que son tres decenas y tres unidades; con que escribiré 3 bajo de la coluna que sumo, y llevaré 3 á la siguiente; $3 + 6 = 9, + 4 = 13, + 4 = 17, + 5 = 22, + 4 = 26, + 2 = 28, + 3 = 31, + 8 = 39$; escribo 9 y llevo 3 : $3 + 1 = 4, + 1 = 5$; escribo el 5, y tendré que desde el principio del mundo hasta el presente han pasado 5930 años.

34 Los otros egemplos se ponen para egercitarse en esta operacion. Y se ha de advertir que cuando en ellos ó en otros se quiera examinar si ha habido alguna equivocacion; se podrán volver á sumar los números comenzando por abajo: pues si sale la misma suma, es suficiente *prueba* de que está bien hecha la suma.

II.

Se han de sumar.	805104
	34921
	4395210
Suma. . . .	5235235

III.

	908991
	59876
	3004007
	937805
Suma. . .	4910679

Sustraccion.

35 *Restar* un número de otro es averiguar la diferencia que hay entre los dos: restar por egemplo 7 de 9 es encontrar el número 2 en que el 9 escede á 7. Esto se espresa mas brevemente así; $9 - 7 = 2$, y se lee *nueve menos siete es igual á dos*: $10 - 6 = 4$ quiere decir *diez menos seis es igual á cuatro.*

Los números de una cifra se restan facilísimamente. Para restar los que tienen mas; 1.º *se escribe el menor que se llama* sustrahendo, *bajo del mayor* ó minuendo, *con la correspondencia de unidades, decenas, centenas &c.* 2.º *Se resta la cifra inferior de las unidades, de la superior, y se escribe debajo la diferencia.* 3.º *Cuando las dos cifras son iguales se escribe cero, y si la inferior es mayor que la superior; se añaden á esta* 10, *tomando para ello una unidad de la nota anterior, que quedará con una unidad menos, y se egecuta despues la resta. En el caso de ser cero la nota ó notas antecedentes, se toma la unidad de la primera que no lo sea; y entónces en cada cero queda un* 9, *como se verá en el egemplo* 1.º

4.º *Lo mismo que con las unidades se egecuta con las decenas, centenas &c. y en habiendo sacado la diferencia de todas las partes de los dos números, se tendrá forzosamente la de dichos números que se busca.*

Egemplo I.

De.	98004639
Se ha de restar.	438552
Diferencia. .	97566087

II.

De.	56003120
Restando. . . .	1968502
Quedan. . .	54034618

III.

De	15300000
Restando. . .	8500076
Quedan. . . .	6799924

Un egército de 438552 soldados logró de los despojos de una batalla 98004639 doblones; se dió á cada soldado un doblon, y se pregunta cuántos quedaron. Despues de haber escrito los números como muestra el 1.er egemplo; comenzaré diciendo, restando 2 de 9 quedan 7, ó 9—2=7, que escribo bajo de la raya: y porque de 3 no se pueden restar 5, tomaré 1 del 6; y juntando con 3, 10 que vale, tendré 13; de donde quitando 5, quedan 8, que pongo debajo junto á 7: 5—5=0 que escribiré seguido al 8. De 4 tampoco puedo restar 8, con que tomo 10 de una unidad de 8 que vale 1000 de las del 4 (32), y restando de 14, 8 pondré debajo 6 que quedan. Como los 1000 que vale la unidad del 8 se compone de 990+10, habiendo tomado el 10 quedarán 990 ó 99 en lugar de los dos ceros: y así diré 9—3=6, 9—4=5: escribo estas restas, y despues 7 y 9 de donde nada hay que restar, y tendré

97566087, número de doblones que quedan. En los demas egemplos no habrá en que tropezar, bien entendido este.

36 Como el residuo ó diferencia es el esceso que el número mayor lleva al menor, es claro que en añadiéndoselo al menor, ha de resultar el mayor. Si 8 escede á 6 en 2, 2 y 6 han de componer 8: luego siempre que sumando la diferencia con el sustrahendo resulte el minuendo, estará bien hecha la resta: que es la *prueba* de la exactitud de la sustraccion. Se vé pues que si se considera al minuendo como un compuesto de dos números de los que se conoce el uno, se podrá encontrar el otro por medio de la sustraccion. Si 46 por egemplo, es uno de los números de que se compone 100, se hallará el otro 54, restando 46 de 100.

Multiplicacion.

37 *Multiplicar* un número 8 por 2 es *duplicar* ó tomar dos veces al 8: el 16 que resulta, se llama *producto*, el 8 *multiplicando*, el 2 *multiplicador*, el 8 y el 2 *factores* de 16. Multiplicar 8 por 3 es *triplicar* ó tomar tres veces á 8, multiplicar 7 por 6 es tomar seis veces á 7; y en general multiplicar un número por otro es tomar al multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador, ó es sumar un número con él mismo cierto número de veces: y el producto será

siempre *multiple* de los dos factores. De consiguiente si el multiplicador es 1, saldrá de producto el mismo multiplicando; y si el multiplicador es cero, será tambien cero el producto.

38 Pues que el multiplicador sirve solo de indicar las veces que se ha tomar al multiplicando, deberá ser el producto de la misma especie que el multiplicando. Y cuando el multiplicador sea un número que esprese cierta especie de cosas, como si se hubiese de averiguar el importe de 6 varas á 9 reales cada vara; para multiplicar 9 por 6 habrá que desnudar al 6 del concepto de varas, que le hace *concreto*, considerándole únicamente como si representase 6 unidades, es decir, que el multiplicador es esencialmente un número *abstracto*.

39 El signo × colocado entre dos números indica que el uno se ha de multiplicar por el otro: 4×6 espresa la multiplicacion que se debe hacer del 4 por el 6, de la que resulta $4\times6=24$; que se lee 4 *multiplicado por* 6 *es igual á* 24: y un punto entre dos números da por hecha la multiplicacion; y así 2.6 es lo mismo que si se escribiera 12: y 2.6×3 equivale á $12\times3=36$.

40 Para la práctica de la multiplicacion es indispensable tener prontos y bien sabidos los productos de los primeros números, que se encontrarán en la tabla siguiente que se atri-

buye á Pytágoras. Para su formacion se escriben

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

A

IIII
IIII
IIII
IIII
IIII
IIII

B

IIIII
IIIII
IIIII
IIIII

seguidos orizontalmente los nueve números primeros, y añadiendo á cada uno de ellos nueve veces sucesivas el mismo número, se colocan los productos bajo de él en una coluna vertical. De esta construccion resulta que para encontrar cualquiera de dichos productos el de 7 por 9 por egemplo, se busca el 7 en la primera línea y el 9 en la primera coluna vertical, y el producto 63 se hallará en la casa en que concurren las dos.

41 Por el exámen de dichos productos en la tabla se hecha de ver que debe ser uno mismo el de 7×9 y el de 9×7; y en general que *en cualquier órden que se efectue la multiplicacion de dos ó mas factores, ha de ser uno*

mismo el producto: por lo mismo será indiferente tomar al multiplicando por multiplicador, y al contrario á este por aquel. Por los dos cuadros A, B aparece palpablemente en 4×5 que 4 ó IIII tomado cinco veces es igual á 5 ó IIIII tomado cuatro veces, sin mas diferencia que su diversa posicion. Tambien es indiferente en 4×5×2 comenzar la multiplicacion por el 4, el 5 ó el 2; pues sacado el producto 4.5 ó 5.4 que es 20, saldrá lo mismo multiplicando 20×2 ó 2×20. Y como esto no penda del mayor ó menor número de unidades, se verificará en cualesquiera números, aunque sean muchos mas los factores.

42 *Cuando el multiplicador tiene una sola cifra, se multiplican por ella todas las del multiplicando comenzando por las unidades, y se escribe debajo cada producto si es de una sola cifra, y si es de dos, se junta la de las decenas con el producto siguiente que son decenas* (32).

Egemplo I.

Multiplicando	90785
Multiplicador	6
Producto	544710

Para saber las arrobas de agua que en 6 dias arroja el caño de un pilar que cada dia echa 90785 arrobas; colocaré 6 bajo de 90785, y diré 6 veces 5 son 30, ó mas breve 6×5=30, escribo por bajo cero, y guardo las 2 decenas para juntarlas con las dece-

nas del producto siguiente: 6×8=48 y las 3 son 51; escribo 1 y reservo 5: 6×7=42, + 5=47, pongo 7 y guardo 4: 6×0=0, en cuyo lugar pondré 4 que llevaba: 6×9=54, pongo 4 y despues 5: y tendré que en 6 dias arroja el caño 544710 arrobas de agua.

43 *Si el multiplicador tiene mas notas, se practica con cada una lo que con la primera, cuidando de empezar á escribir cada producto bajo de la cifra que multiplica, y de sumar despues todos los productos que resulten.*

II.

Multiplicando	80340091
Multiplicador	705
Producto por 5	401700455
Producto por 0	00000000
Producto por 7	562380637
Producto total	56639764155

Si se pidiese el valor de 80340091 arrobas á razon de 705 mrs. cada una; escritos los dos números como se vé, multiplicaré como en el egemplo anterior todas las cifras 8, 0, 3, 4, 0, 0, 9, 1 por la primera 5: multiplicaré despues las mismas cifras por cero escribiendo el primer producto 1×0=0 bajo del cero que multiplica, esto es, en el segundo sitio: pasaré luego á multiplicar las dichas cifras por 7 poniendo su primer producto $1\times7=7$ en el 3.^{er} lugar; y sumando despues los tres productos, resultará el total 56639764155 maravedises que importan 80340091 arrobas.

El número de minutos que componen 10 años, 4 meses y 20 dias, se averigua reduciendo 1.° 10 años á 3650 dias, producto de 10 multiplicado por 365 dias que tiene el año; y 4 meses á 120 dias producto de 4×30, dias de un mes: 2.° sumando 3650, 120, y 20 dias, y multiplicando por último la suma 3790 por $24\times60=1440$, número de minutos que tiene un dia: de que resultan 5457600, minutos que se piden.

44 Es muy fácil convencerse de que las reglas dadas para multiplicar conducen á encontrar con exactitud los productos que se desean: pues si en el 1.^{er} egemplo se multiplican por 6 las unidades, decenas, centenas, &c. de 90785, los productos parciales sumados y colocados en los sitios correspondientes á su valor, la

III.

```
   3790
   1440
-------
  ....0
 15160
15160
3790
-------
5457600
```

IV.

```
     57498
     30009
----------
    517482
172494...
----------
1725457482
```

V.

```
    85000
    35000
---------
   425
  255
---------
2975000000
```


suma 544710 de ellos ha de ser el multiplicando 90785 tomado 6 veces. Asímismo en el 3.^{er} egemplo en el que el multiplicador 1440 que equivale á $1000+400+40$, si se multiplica el 4 por el 9, que es 40 por 90, su producto 3600 debe comenzar á escribirse bajo del 4, atendido su valor. Otro tanto sucede con $400\times90=36000$, cuyo último cero corresponde al sitio de las centenas ó bajo del 4; y como el $1000\times90=90000$, el último cero deberá escribirse en el 4.° sitio bajo del 1.

45 Como todo número multiplicado por 1 produce el mismo número; si se multiplica por 10 ha de producir un número diez veces mayor ó *décuplo*, es decir, el dicho número con un cero. Si se multiplica por 100, dará un número cien veces mayor ó *céntuplo*, á saber, el número con dos ceros: multiplicado por 1000, resultará un número mil veces mayor ó dicho número con tres ceros &c. Luego *la multiplicacion de un número cualquiera por* 10, 100, 1000, 10000 &c. *se efectúa poniendo á continuacion del multiplicando tantos ceros como haya en el multiplicador*: y así $78\times10=780$, $78\times100=7800$, $78\times1000=78000$ &c. Tambien se escusa la multiplicacion por los ceros que haya en el multiplicador que no dan producto alguno, como lo hemos hecho en el eg. 4.° bien que el producto por 3 debe colocarse bajo del 3. Lo mismo se

practica con los ceros que haya al fin del multiplicando y multiplicador, segun se vé en el egemplo 5.º en el que multiplicando solo las notas significativas 85 y 35, se añaden á su producto 2975 los seis ceros de los dos.

46 Para ver si está bien hecha la multiplicacion, se repite la operacion tomando al multiplicador por multiplicando y á este por multiplicador; pues el producto debe ser el mismo.

Division ó particion.

47 Para averiguar las veces que un número cualquiera 2 se puede restar de otro 8, ó las veces que se contiene en 8; habria que hacer cuatro restas, y muchas mas si los números fueran mayores. Para conseguir esto con mas facilidad se inventó la *Division*, operacion inversa de la multiplicacion, *por la que se averigua las veces que un número que se llama* divisor, *se contiene en otro que es el* dividendo. Lo que resulta se llama *cociente*, número abstracto en el cual solo se consideran otras tantas unidades cuantas son las veces que el divisor cabe en el dividendo. Luego si se multiplica el divisor por el cociente, el producto debe ser el dividendo; esto es, si 4 cabe en 8, 2 veces; 2 veces el 4 ha de componer 8. Cualquiera cantidad 7 dividida por sí, dará 1 de cociente, y dividida por 1 dará el mismo 7. La *division* puede mirarse como el medio de

encontrar uno de los factores del dividendo dándose conocido el otro: ó como la operacion por la que se averigua el número de partes iguales contenidas en el dividendo que hayan de repartirse entre cierto número de personas; por lo cual suele llamarse *particion*.

48 *Para practicar la division, escrito el divisor al lado del dividendo* 1.º, *se toman de la izquierda de este las cifras que basten á contener al divisor, y averiguando por la tabla pytagórica qué número de veces le contienen, se escribe á parte por cociente.*

2º *Se multiplica este cociente por el divisor, y restando el producto de las cifras separadas, se junta a la resta la nota que se les sigue, para tener un nuevo dividendo.*

3º *Vuélvase á ver las veces que contiene al divisor, y escríbase en el cociente junto á la otra la nota que salga; la cual se multiplica por el divisor y su producto se resta del dividendo.*

4º *A lo que sobra se añade la nota siguiente, y despues todas las demas, practicando lo que llevamos dicho siempre que se baje alguna; á no ser que el divisor no quepa en el dividendo, en cuyo caso nada mas se hace que poner cero en el cociente.*

Egemplo I

Dividendo	24,528	7 *Divisor*
	21	3504 *Cociente*
	35	
	35	
	0028	
	28	
	00	

Para averiguar el número de varas que han importado 24528 pesos á razon de 7 pesos la vara, ó las veces que 7 cabe en 24528; escribo á su lado el 7, y como no cabe en la primera cifra 2, diré 7 en 24 cabe 3 veces, y escribo 3 en el cociente: multiplico despues 3 por el divisor 7, y restando el producto 21 de 24 me quedan 3. Junto á 3 el 5 que sigue á 24, y digo 7 en 35 cabe 5 veces justas, que escribiré junto á 3 en el cociente. Bajo la cifra siguiente 2, y como no contiene á 7, pongo cero en el cociente, y bajo el 8: 28 contiene á 7, 4 veces justas que escribo junto al cero; y tendré que 7 cabe en 24528, 3504 veces, número de varas que se busca. Y como digimos (47) que el divisor multiplicado por el cociente, debe dar el dividendo; será la prueba de estar bien hecha esta division, que $3504 \times 7 = 24528$.

II

206,72	34
204	608
272	
272	
0	

Si se pidiese el número de reales que componen 20672 maravedises, ó las veces que 34 mrs. que hacen un real, caben en 20672; por no caber 34 en 2 ni en 20, diré 34 en 206 cabe 7 veces que escribo en el cociente, multiplico 34 por 6, y restando su producto 204 de 206, quedan 2, al que juntaré la nota siguiente 7: y como 34 no cabe en 27, pongo cero en el cociente, bajo el 2, y dividiendo 272 entre 34, encontraré 8 sin resta: de consiguiente 20672 mrs. equivalen á 608 reales. Efectivamente, $608 \times 34 = 20672$.

49 Cuando el divisor tiene muchas cifras, es dificil conocer las veces que cabe en el dividendo: para facilitarlo se examina las veces que la 1ª cifra del uno cabe en la 1ª del otro, y si se contiene las mismas veces que la 2ª en la 2ª, la 3ª en la 3ª &c. se pone por cociente; advirtiendo que si el dividendo tiene una nota mas que el divisor, se toman las dos primeras por primera, y lo que sobra entra con la segunda, la sobra de esta con la tercera &c.

50 Si sucede que el producto del cociente por el divisor es mayor que el dividendo, es señal que no le cabe á tanto, y el cociente se debe disminuir; y al contrario,

si resulta de resta cantidad igual ó mayor que el divisor, le tocará á mas y se debe aumentar. Si partiendo en el eg. anterior 206 por 34, le hubiera puesto á 7, habria conocido en el produto de 34 por 7 que es 238 mayor que 206, que 34 no cabe 7 veces en 206, sino 6: si le hubiera puesto á 5; como $5\times34=170$, restados de 206 dan de residuo 36 cuantidad mayor que 34; veria que cabia otra vez mas.

III

Habiendo de repartir 9639475 rs. entre 2789 personas; en lugar de averiguar las veces que 2789 caben en 9639, veré cuantas veces la 1.ª cifra 2 cabe en la 1.ª 9, y aunque son 4 y sobra, como la 2.ª 7 no cabe 4 veces en la 2.ª 6, que con el sobrante 1 compone 16, pondré solo 3 en el cociente. Multiplico y resto y me resultan con el 4 que bajo, 12724. Examino ahora cuantas veces 2 cabe en 12, que se toma por 1.ª cifra por haber una mas que en el divisor, y aunque cabe 6 veces no se le puede poner mas que á 4, porque la 2.ª cifra 7 solo cabe una vez en la 2.ª del dividen-

$$
\begin{array}{r|l}
9639,475 & 2789 \\
\underline{8367} & \overline{3456\frac{691}{2789}} \\
12724 & \\
\underline{11156} & \\
15687 & \\
\underline{13945} & \\
17425 & \\
\underline{16734} & \\
691 &
\end{array}
$$

do. Hecha la multiplicacion y la resta, añado al residuo 1568 el 7, y parto 15 entre 2, y como la 2.ª cifra 7 no cabe ni aun 6 veces en la otra 2.ª escribo 5 de cociente; multiplico y resto y pongo al residuo la última cifra 5: y porque el 7 no cabe ni 7 veces en la 2.ª del dividendo, pongole 6, y tendré de último residuo 691.

51 Esta y cualquiera otra resta de la division que no es cabal, se escribe al lado del cociente sobre una raya con el divisor por bajo asi, $3456\frac{691}{2789}$: lo cual significa que el 691 está partido por 2789: porque una raya puesta entre dos números indica que el de arriba esta dividido por el de abajo: $\frac{60}{20}$ quiere decir 60 *partido por* 20; $\frac{365}{15}$ es lo mismo que 365 *partido por* 15 &c. Los que se hayan egercitado en esta operacion, podrán abreviarla escusando escribir el producto que se ha de restar y haciendo sucesivamente por partes la multiplicacion y la restas como les enseñara el maestro.

52 Nótese que nunca puede pasar de 9 la nota del cociente; pues sean unidades, decenas, centenas &c. nunca puede haber mas que 9 en cada lugar. En efecto, si á la mayor resta que es 1 menos que el divisor, se le junta 9 que es la mayor cifra que puede bajarse, falta 1 todavia para que el divisor quepa 10 veces en el dividendo que resulta: 19 entre 2 por eg. 199 entre 20, 239 entre 24 &c. nunca les cabe á 10.

53 Para sacar la *mitad* de un número, se le divide por 2, para sacar el *tercio* por 3; para sacar el *cuarto* se parte por 4 &c. El tercio de 15 es $\frac{15}{3}=5$: el séptimo de 42 es $\frac{42}{7}=6$: el octavo de 96 es $\frac{96}{8}=12$ &c.

54 Supuesto que un número cualquiera 8 partido por 1 dá de cociente el mismo 8, 6 partido por 1 da 6 &c; es claro, que cuando el divisor de un número es 10, será el cociente el dicho número, separándole su última cifra, que será la resta de la division; pues á causa del cero no alcazan á partirse por el 1. El cociente de 16578 partido por 10, será $1657\frac{8}{10}$. Cuando el divisor es 100, son dos las cifras que hay que separar, las que no pueden partirse por 1 con los dos ceros: y será el cociente de dicho número partido por 100, $165\frac{78}{100}$. Si se hubiese de partir por 1000, saldria $16\frac{578}{1000}$ de cociente, separando tres cifras por los tres ceros. Generalmente *la division de un número partido por* 10, 100, 1000 &c. *se hace separando de la derecha del dividendo tantas cifras como ceros hay en el divisor, poniéndolas sobre una raya con el divisor debajo, y con las que quedan á la izquierda componen el cociente.*

Y asi cuando al fin de un divisor hubiese ceros, se separarán de la derecha del dividendo otras tantas cifras, que se añadirán á lo que quede despues de practicar la division. En 675469 que se ha de dividir por 5400,

separo 69 y dividiendo 6754 entre 54, tendré 125 de cociente con 4 de sobra: es decir, que les toca á $125\frac{469}{5400}$.

55 *Si un dividendo y divisor cualesquiera se multiplican ambos por un mismo número, darán sus productos el mismo cociente que ántes de haberse multiplicado*; pues repitiéndose ámbos un mismo número de veces, no debe alterarse el cociente. Por eso 20 partido por 4, y 20×6 partido por 4×6 dan un mismo cociente 5. Igualmente *si el dividendo y divisor se parten ámbos por un mismo número, los resultados deben dar el mismo cociente que ántes de haberse partido*; pues ámbos se disminuyen el mismo número de veces: y así de 20 partido por 4 resulta el mismo cociente 5 que de $\frac{20}{2}$ dividido por $\frac{4}{2}$.

56 De lo dicho se infiere que si al fin de dividendo y divisor hubiese algunos ceros, se puede abreviar la division quitando de ambas partes igual número de ellos. Si se tubiese que dividir 6400 por 400 se dividirá 64 por 4, y el cociente 16 será el de 6400 por 400; pues haberles quitado los dos ceros es haberlos partido ambos por 100 (54).

57 La demostracion del método de dividir consta de las mismas reglas; pues por ellas se averigua las veces que el divisor cabe en cada una de las partes del dividendo, en las que convendra considerarle descompuesto. La prueba se hace como digimos ya (47), cui-

dando de añadir al producto del divisor por el cociente cualquier sobrante que resulte cuando la division no es cabal. Si en los números del 3.[r] egemplo se multiplica el divisor 2789 por el cociente 3456, y al producto 9638784 se añade 691 que sobró, saldrá el dividendo 9639475.

Divisores de los números

58 Llamamos aquí *divisor* de un número á cualquiera de sus múltiplesá que le divide sin resta; como 4 que divide á 12, y 5 á 15. Para encontrar todos los divisores de un número, 2310 por eg. se le divide por 2, y el cociente 1155 que ya no puede volverse á partir justamente por 2, se divide por 3: el resultado 385 pártolo por 5, y dividiendo el cociente 77 por 7, tendré 11 que le partiré por el mismo 11 para sacar el último cociente 1.

Multiplico ahora de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro y de cinco en cinco los divisores simples 2, 3, 5, 7, 11, que me han servido, así: $2\times3=6$, $2\times5=10$, $2\times7=14$, $2\times11=22$; $3\times5=15$, $3\times7=21$, $3\times11=33$; $5\times7=35$, $5\times11=55$, $7\times11=77$: $2\times3\times5=30$, $2\times3\times7=42$, $2\times3\times11=66$; $2\times5\times7=70$, $2\times5\times11=110$; $2\times7\times11=154$; $3\times5\times7=105$, $3\times5\times11=165$; $3\times7\,11=231$, $5\times7\times11=385$: $2\times3\times5\times7=210$, $2\times3\times5\times11=33c$, $2\times3\times7\times11=462$, $2\times5\times7\times11=770$; $3\times5\times7\times11=1155$ y $2\times3\times5\times7\times11=2310$. Junto ahora los divisores que han resultado con 1 y con los que había, y tendré todos los del número, que son 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 21, 22, 30, 33, 35, 42, 55, 66, 70, 77, 105, 110, 154, 165, 210, 231, 330, 385, 462, 770, 1155, 2310.

59 Para encontrar *la comun medida*, ó el mayor *divisor comun* de dos números, esto es, el mayor número que los divida sin resta; »se »divide el mayor por el menor, y si sobra »algo se divide el menor por el sobrante; si »vuelve á sobrar, se parte el primer residuo »por el segundo, y si aun sobra, se continúa »dividiendo siempre por el último residuo el »anterior sin atender al cociente; y si se llega á una division cabal, el número que en »ella haya sido divisor, será el que se busca; pero si sobra 1 en la última division, »no tienen divisor comun los dos números y »se llaman *números primeros*.

Si se pidiese el divisor comun de 341 y 502; partiré este por 341 y despues 341 por 161 que sobran, sin hacer caso del cociente: el residuo es 19 que ha de ser divisor de 161; y porque aun restan 9, parto 19 por 9, y como me sobra 1; concluyo que 341, y 502 no tienen divisor comun. Si se pidiese el de 438 y 102, dividiré el 1.° por el 2.° y este despues por 30 que sobran, partiré 30 primer residuo por el 2.° 12, y últimamente el

12 por la resta 6; y como la division es cabal, será 6 divisor comun de 438 y 102.

Ultimamente el mayor divisor de 1729 y 1235 se encontrará dividiendo uno por otro, y despues 1235 por la resta 494; de esta division sobran 247 que ha de ser divisor de 494, y saliendo cabal la particion, será 247 comun divisor de 1729 y 1235. Efectivamente, por dividir 247 á 494, divide tambien á $494 \times 2 + 247 = 1235$ número menor, y de consiguiente al mayor 1729 que se compone de $1235 + 494$; luego es el divisor comun: por otra parte es el mayor, porque si hubiera otro mayor que 247, que los dividiese, dividiría tambien á 247 menor que él, lo cual no puede ser.

60 Cuando hay que buscar el divisor comun de tres números, se busca el de dos, y despues el de este y del tercer número. Se halla por eg. el divisor de 140, 70 y 56, buscando primero el de 140 y 56 que es 28, y despues el de 28 y 70 que es 14, el cual lo será de 140, 70 y 56. Lo mismo se practica cuando los números son cuatro, cinco ó mas.

61 A veces se conocen sin trabajo los divisores de un número. Por egemplo, será divisible por 2 siempre que su último guarismo es par. Cuando su nota última es 5, es divisible por 5; y por 5 y 10 cuando termina en cero. Ultimamente, si sumando como unidades simples las cifras de un número, resulta cuantidad divisible por 3 ó por 9, dicho número es divisible por 3 ó por 9. Asi sucede en 21 cuyas cifras $2+1$ suman 3, y por tanto es divisible por 3; 80211 los es tambien, porque sus cifras 8, 2, 1, 1, suman 12 que es partible por 3. Finalmente, 60345 se puede dividir cabalmente por 3 ó por 9, porque $6+3+4+5$ suman 18, cuantidad divisible por 3 y por 9.

ARTÍCULO III

DE LOS QUEBRADOS

62 Para apreciar ó medir las cosas en los usos de la vida social, se han adoptado á arbitrio diferentes unidades en los pesos, medidas y monedas, con cuyos nombres espresamos su valor ó magnitud. Así graduamos por eg. el tamaño de una estension en unidades de *vara*; y si estas no resultan cabales, acudimos á medias, cuartas, pulgadas &c. unidades menores que muestran exactamente la estension que se mide. Las medias, cuartas, pulgadas... son partes ó quebrados de la *vara* unidad concreta á que se refieren. A este modo considerando el 1 unidad abstracta, como principal, vienen á ser partes ó quebrados suyos las infinitas divisiones que de

ella pueden hacerse, y se trata de fijar generalmente su valor con nombres, y de dar reglas que nos guien para calcularlas. Será pues un *quebrado el número que espresa una ó muchas de las partes en que se puede concebir dividida la unidad.* Si se divide en dos partes, se llaman *medios*; si se divide en tres, se llaman *tercios*, si en cuatro *cuartos*, si en cinco *quintos*, si en seis *sestos*; *y séptimos, octavos, novenos, décimos*, si se divide en siete, ocho, nueve, diez partes. De 10 en adelante, se llaman *onzavos* si la unidad se divide en once partes, *dozavos*, si se divide en doce, *trezavos*, si se divide en trece.... *veintavos, veinticuatravos, cienavos, milavos, millonavos*, si se divide en 20, 24, 100, 1000, 1,000000 partes.

63 Si la unidad se divide en tres partes y quiero espresar dos, se escriben así $\frac{2}{3}$; y se lee *dos tercios*, ó dos partes de la unidad hecha tres partes: si dividida la unidad en siete partes, se quieren representar tres de ellas se escribe $\frac{3}{7}$ que son *tres séptimos*, ó tres partes de la unidad hecha siete. Por la misma razon $\frac{5}{8}$ son *cinco octavos* ó cinco partes de la unidad dividida en ocho partes: y $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{26}{100}$, $\frac{74}{4032}$, &c. se leen *un medio, siete décimos, veinte y seis cienavos, setenta y cuatro cuatro mil treinta y dosavos.*

64 Se ve pues, que un quebrado se escribe con dos números entre una raya: el de

encima se llama *numerador*, é indica el número de partes que contiene el quebrado; y el inferior se llama *denominador*, y denomina el número de partes en que se divide la unidad. De consiguiente el denominador da nombre al quebrado, y espresa la especie y tamaño de sus partes; pues serán tanto mayores ó menores segun que la unidad se divida en mas ó menos partes. Al numerador y denominador llamaremos *términos del quebrado.*

65 Tambien se puede poner á cualquier número entero 8 en forma de quebrado, poniéndole 1 por denominador así $\frac{8}{1}$. Pero si se quiere reducir el 8 á determinada especie de quebrado, por eg. á *quintos*; como cada unidad tiene cinco quintos, se multiplicará 8 por 5, y se tendrá $\frac{40}{5}$ á que equivale 8; para reducir 11 á *séptimos*, multiplicaré 11 por 7, y saldrá $\frac{77}{7} = 11$. En general para reducir un número entero á determinada especie de quebrado, *se multiplicará el entero por el denominador de la especie, y se pondrá bajo del producto el denominador.* Si acompaña al entero algun quebrado, como si se ha de reducir $10\frac{5}{8}$ á un solo quebrado, se reduce primero el entero 10 á $\frac{80}{8}$, y añadiendo despues los $\frac{5}{8}$, tendré $\frac{85}{8} = 10\frac{5}{8}$: $28\frac{6}{11}$ es lo mismo que $\frac{314}{11}$, multiplicando 28 por 11, y añadiendo al producto $\frac{6}{11}$

66 Los quebrados $\frac{77}{7}$, $\frac{85}{8}$, $\frac{314}{11}$... que son

mayores que 1, y lo mismo $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{7}{7}, \frac{20}{20}$.... que cada uno de ellos vale 1 (62), se llaman *quebrados impropios* á diferencia de los propios como $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, cuyo numerador es menor que el denominador. De los quebrados impropios se sacan las unidades que contienen por la operacion contraria á la que los formó (65), *dividiendo su numerador por el denominador*: y así partiendo 77 por 7, resultan 11 á que equivale $\frac{77}{7}$; $\frac{85}{8}$ es lo mismo que $10\frac{5}{8}$, dividiendo 85 por 8; y $\frac{314}{11}$ lo mismo que $28\frac{6}{11}$.

67 Siendo el denominador la unidad dividida en cierto número de partes, y el numerador el número de estas que contiene el quebrado, será este el cociente del numerador dividido por el denominador (51 y 65): y como un cociente no se altera por multiplicar dividendo y divisor por un mismo número (55); tampoco *se mudará el valor de un quebrado aunque se multipliquen ó partan sus dos términos por un mismo número.* Si se multiplican 2 y 5 de $\frac{2}{5}$ por 10, el producto $\frac{20}{50}$ valdrá lo mismo que $\frac{2}{5}$: y si se dividen 20 y 50 de $\frac{20}{50}$ por 5, el cociente $\frac{4}{10}$, equivale a $\frac{20}{50}$, y á $\frac{2}{5}$. Por esta regla se tendrá multiplicando sucesivamente por 2, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}=\frac{16}{32}$ &c. pues lo mismo es una parte de real por eg. dividido en dos partes, que dos partes de real hecho cuatro, que cuatro partes de real dividido en

ocho partes. Multiplicando por 3, será $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{18}{27}=\frac{54}{81}$ &c. multiplicando por 4, $\frac{5}{7}=\frac{20}{28}=\frac{80}{112}=\frac{320}{448}$ &c. Por lo que se ve que hay quebrados de números grandes que equivalen á otros de números pequeños mas fáciles de manejar, y á los que conviene reducirlos para hacer los cálculos mas sencillos.

66 De consiguiente si dado un quebrado, se pide otro de igual valor y mas sencillo; se buscará el divisor comun de su numerador y denominador (57), y dividiéndolos ambos por él, será el cociente el quebrado reducido. Hayase de reducir á espresion mas sencilla el quebrado $\frac{1235}{1729}$: busco primero el divisor comun de 1729 y 1235 que es 247 (57), y dividiendo por él ambos términos tendré de cociente $\frac{5}{7}=\frac{1235}{1729}$.

67 Pero sin acudir á esta operacion pesada de buscar el divisor comun, se pueden reducir muchos quebrados, dividiendo sus dos términos por 2, todas las veces que se pueda hacer sin resta: cuando ya no se puede, se dividen por 3, por 5, por 7, por 9 &c. Para reducir por este método á menores términos el quebrado $\frac{648}{1080}$; dividiré por 2 su numerador y denominador, y tendré $\frac{324}{540}$: repetiré aun dos veces la division por 2, y me resultará $\frac{81}{135}$, cuyos dos términos partiré por 9 por no poderse ya por el 2: el cociente es $\frac{9}{15}$, que me da por último $\frac{3}{5}$, dividiendo por 3, el 9 y el 15.

De dos quebrados de un mismo denominador ó de partes de una misma especie como $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{8}$ es mayor $\frac{5}{8}$ que tiene mas partes ó mayor numerador. Al contrario, de dos quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{3}$ de igual numerador ó de igual número de partes, es mayor $\frac{2}{3}$ que tiene menor denominador cuyas partes son mayores. En siendo los numeradores y denominadores diferentes, hay que reducirlos á un mismo denominador para conocer cual es mayor.

68 Cuando dos quebrados de diferentes denominadores se quieren reducir á otros de igual valor y de un mismo denominador; *se multiplican numerador y denominador de cada quebrado por el denominador del otro.* Para reducir $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{9}$ á un mismo denominador, multiplicaré 3 y 4 de $\frac{3}{4}$ por 9, así $\frac{3\text{x}9}{4\text{x}9}=\frac{27}{36}$; y despues 2 y 9 de $\frac{2}{9}$ por 4, $\frac{2\text{x}4}{9\text{x}4}=\frac{8}{36}$, y resultan los nuevos quebrados $\frac{27}{36}$, $\frac{8}{36}$ iguales á $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{9}$ (65), y de un mismo denominador ó de una misma especie de partes.

Cuando los quebrados que se han de reducir son tres ó mas, *se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los otros quebrados.* En los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$; se multiplican 1 y 2 de $\frac{1}{2}$ por el producto $5\text{x}7=35$ de los denominadores de $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$; esto es, $\frac{1\text{x}35}{2\text{x}35}=\frac{35}{70}$: despues se

multiplican, 3 y 5 de $\frac{3}{5}$ por el producto $2\text{x}7=14$ de los denominadores de $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$ así, $\frac{3\text{x}14}{5\text{x}14}=\frac{42}{70}$: y por último el 4 y 7 de $\frac{4}{7}$ se multiplican por $2\text{x}5=10$ producto de los denominadores de $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$, de que resulta $\frac{4\text{x}10}{7\text{x}10}=\frac{40}{70}$: y quedan los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ reducidos á sus iguales $\frac{35}{70}$, $\frac{42}{70}$, $\frac{40}{70}$ de un mismo denominador.

Sumar, restar, multiplicar y partir quebrados.

69 Para sumar los quebrados *se hacen de una misma especie ó de un mismo denominador si le tienen diverso, se suman los numeradores, y se pone á la suma el denominador comun.* La suma de $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}$ es, sumando 3 y 2, $\frac{5}{5}=1$: la de $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{7}$ que reducidos á un mismo denominador son $\frac{14}{21}$ y $\frac{9}{21}$, es $\frac{23}{21}$: la de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$ esto es de $\frac{40}{80}$, $\frac{60}{80}$, $\frac{56}{80}$ es $\frac{156}{80}=1\frac{76}{80}$ (64): ultimamente $13\frac{1}{6}$ y $2\frac{5}{8}$, ó $13\frac{8}{48}$ y $2\frac{30}{48}$ suman $15\frac{38}{48}=15\frac{19}{24}$ (66).

70 Para restar los quebrados, *hechos de una misma especie ó de un mismo denominador sino lo son, se restan los numeradores, y se pone al residuo el denominador comun.* La diferencia de $\frac{7}{9}$ y $\frac{3}{9}$ es $\frac{4}{9}$, restando de 7, 3, y

poniendo al residuo 4 el denominador 9: la de $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ que reducidos son $\frac{6}{8}$ y $\frac{4}{8}$; es $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$: la de $5\frac{2}{3}$ y $4\frac{1}{6}$, esto es, de $5\frac{12}{18}$ y $4\frac{3}{18}$, es $1\frac{9}{18}=1\frac{1}{2}$.

Para restar $\frac{2}{3}$ de 5 se toma de 5, 1, y reducido á $\frac{3}{3}$ (64), se resta de $4\frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$ y quedan $4\frac{1}{3}$. Si se ha de restar de $7\frac{2}{9}$, $\frac{5}{6}$, por ser $\frac{5}{6}$ mayor que $\frac{2}{9}$, se toma 1 de 7, y juntando $\frac{9}{9}$ que vale, con $\frac{2}{9}$; habrá que restar $\frac{5}{6}$ de $6\frac{11}{9}$, que dan de diferencia $6\frac{21}{54}=6\frac{7}{18}$. Del mismo modo se hallará que restando de $10\frac{3}{8}$, $4\frac{6}{7}$, esto es, de $9\frac{11}{8}$, $4\frac{6}{7}$; resultan $5\frac{29}{56}$.

71 Un quebrado cualquiera $\frac{2}{5}$ se hará tres veces mayor ó se multiplicará por 3, haciendo 3 veces mayor el número 2 de sus partes, ó multiplicando por 3 su numerador 2; de que resulta $\frac{2\times3}{5}=\frac{6}{5}$: para hacerle 8 veces mayor ó multiplicarle por 8, multiplicaré 2 por 8 así: $\frac{2\times8}{5}=\frac{16}{5}$: *luego un quebrado se multiplica por un número entero ó un entero por un quebrado, multiplicando por el entero el numerador sin tocar al denominador*; de suerte que $\frac{3}{7}\times4=\frac{12}{7}$, $\frac{5}{100}\times11=\frac{55}{100}$ &c.

72 Por el contrario, para dividir un quebrado $\frac{6}{5}$ por un entero 3, se debe partir por él el numerador, y será el cociente $\frac{2}{5}$; y para que se pueda dividir cuando el cociente no es exacto, como en la division de $\frac{5}{7}$ por 4, mul-

tiplicaré numerador y denominador por 4, y convertido $\frac{5}{7}$ en $\frac{5\times4}{7\times4}$, partiré despues el numerador por 4, y tendré el cociente $\frac{5}{7\times4}$. De lo que se infiere *que para dividir un quebrado por un entero, se multiplica por el denominador dejando intacto al numerador*: $\frac{7}{9}$ partidos por 6 son $\frac{7}{9\times6}=\frac{7}{54}$: $\frac{5}{10}$ partidos por 8 son $\frac{5}{80}$.

73 Luego si habiendo de multiplicar un quebrado $\frac{3}{5}$ por otro $\frac{4}{7}$, multiplico $\frac{3}{5}$ por 4 que es 7 veces mayor que $\frac{4}{7}$, el produto $\frac{3\times4}{5}$ habrá que dividirle por 7 multiplicando por 7 su denominador 5, para sacar el verdadero $\frac{3\times4}{5\times7}=\frac{12}{35}$: y de consiguiente *se multiplicarán dos quebrados entre sí, multiplicando sus numeradores y despues sus denominadores para tener el numerador y denominador del producto*: $\frac{3}{9}$ por eg. multiplicado por $\frac{5}{7}$ producirá $\frac{3\times5}{7\times9}=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$: $\frac{8}{10}\times\frac{12}{20}=\frac{96}{200}$: $6\frac{2}{3}\times3\frac{1}{5}$ $3\frac{8}{5}$, ó $\frac{20}{3}\times\frac{16}{5}=\frac{320}{15}=21\frac{9}{15}=21\frac{1}{3}$.

74 Si se hubiese de partir $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, los reduciré á $\frac{10}{15}$ y $\frac{12}{15}$ de un mismo denominador, y será su cociente el de sus numeradores $\frac{10}{12}$ (65): y como estos resultan en dicha reduccion de multiplicar en cruz los términos

de los quebrados, esto es, el 2 por el 5, y el 3 por el 4; tendremos *que dos quebrados se parten multiplicando sus términos en cruz*; es decir, el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, cuidando de poner el 1.r producto por numerador y el 2.º por denominador del cociente.

El de $\frac{1}{2}$ dividido por $\frac{3}{7}$, es multiplicando 1 por 7 y 2 por 3, $\frac{7}{6}$: el de $\frac{6}{11}$ partido por $\frac{7}{9}$ es $\frac{6 \times 9}{11 \times 7} = \frac{54}{77}$: últimamente el de $6\frac{3}{8}$ dividido por $4\frac{1}{4}$ ó de $\frac{51}{8}$ por $\frac{17}{4}$, es $\frac{204}{136}$. Para dividir un entero por un quebrado, se pone al entero 1 por denominador, y se divide después: 6 ó $\frac{6}{1}$ divididos por $\frac{2}{3}$, dan $\frac{18}{2} = 9$.

75 Si se pidiese reducir un quebrado $\frac{3}{5}$ á otro igual que tenga un denominador dado 10; multiplicaré el numerador 3 por 10, y al producto 30 dividido por el denominador 5 que dá 6, pondré 10 por denominador, y resultará el quebrado $\frac{6}{10}$ con el denominador 10, y del mismo valor que $\frac{3}{5}$: pues se ha multiplicado su numerador y denominador por un mismo número 10 (65). Cuando el producto del numerador por el número dado no se puede dividir exâctamente, es impracticable la operacion. Si se hubiese de reducir el quebrado $\frac{2}{3}$ á otro con un denominador 7, resultaría $\frac{14}{\frac{3}{7}}$

76 Por esta operacion se averigua el valor de un quebrado cualquiera; por egemplo $\frac{3}{4}$ de hora en minutos: pues multiplicando el numerador 3 por 60, número de minutos que hacen una hora, y dividiendo el producto 180 por el denominador 4, tendré 45 minutos: lo cual viene á ser reducir el quebrado $\frac{3}{4}$ á otro igual $\frac{45}{60}$ con el denominador 60. Para averiguar los reales á que equivalen $\frac{3}{5}$ de peso, multiplicaré 3 por 15 número de reales de un peso, y su producto 45 dividido por 5, dará 9 reales, por el valor de $\frac{3}{5}$ de peso.

77 Si se considera á un quebrado dividido en cualquiera número de partes iguales, una ó muchas de estas partes serán *un quebrado de quebrado*: como $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{4}$, que son dos partes de $\frac{5}{4}$ dividido en tres partes. Y como para dividir $\frac{5}{4}$ por 3 se multiplica 4 por 3 (72), y para tomar el cociente $\frac{5}{12}$ dos veces, hay que multiplicar 5 por 2 (71); serán $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{4}$, $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$: es decir, *que un quebrado de quebrado se reduce á quebrado sencillo, multiplicando entre sí los quebrados de que se compone.*

Y así $\frac{1}{2}$ *de* $\frac{4}{7}$, será $\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{14}$: $\frac{6}{5}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{3}$, que quiere decir, *seis quintas partes de los dos tercios de un tercio*, será $\frac{6}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{45}$. De esta misma naturaleza es el quebrado $\frac{1}{6}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* 7, y equivale á $\frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{18}$. Cuando en los cálculos ocurre algun quebrado de quebrado, se le reduce á sencillo.

QUEBRADOS DECIMALES.

78 Abrevia notablemente el cálculo de los quebrados el egecutarlo con los que se llaman *decimales*, que son aquellos que tienen por denominador 10, 100, 1000, &c. La facilidad de calcular estos quebrados nace de que cada una de sus cifras es 10 veces mayor que la siguiente como en los números enteros: y por eso se escriben como ellos sin denominador, el cual se colige del sitio que ocupan las cifras de su numerador, cuyo orden es el siguiente.

79 Despues de una coma que separa las decimales de los enteros, ó de un cero si no los hay, tienen su lugar las *décimas*, partes diez veces menores que las unidades, y cuyo denominador es 10. En el 2.º lugar se ponen las *centimas*, que son diez veces menores que las décimas, y cuyo denominador es 100. En el 3.r lugar las *milimas*, diez veces menores que las *centimas*, y con el denominador 1000. En el 4.º las *diez milimas*: en el 5.º las *cien milimas*: en el 6.º las *millonesimas*: en el 7.º las *diez millonésimas* &c. continuando asi cada clase de partes diez veces menor que la anterior.

80 En la cantidad decimal 54,965, el 9 que la coma separa del entero 54, son 9 décimas ó $\frac{9}{10}$; el 6, seis centimas ó $\frac{6}{100}$, y el 5, $\frac{5}{1000}$: y como $\frac{9}{10}$ son $\frac{900}{1000}$ (65), y $\frac{6}{100}$ son $\frac{60}{1000}$, se leerá dicho número 54 *unidades y novecientas sesenta y cinco milimas*; y si los enteros se reducen tambien á milimas, se tendrá $54,965 = 54\frac{965}{1000} = \frac{54965}{1000}$. En 1, 08, que son *un entero y ocho centimas*, manifiesta el cero que no hay décimas: 0,0307 espresan *trescientas y siete diez milimas*.

81 De lo dicho se infiere lo 1.º que los decimales se leen como si fueran enteros, añadiendo al fin el nombre de la especie de la última cifra, que se puede encontrar recorriéndolas todas desde la coma diciendo, *decimas*, *centimas*, *milimas* &c. Pero para leerlas y escribirlas; es mas facil valerse de esta importante advertencia, que se colige de lo que llevamos dicho, *que todo quebrado decimal tiene por denominador á 1 con tantos ceros, como notas decimales hay en su numerador*. Y asi 0,0340087, que debe tener por denominador á 1 con siete ceros, se leerá *trescientas cuarenta mil ochenta y siete diez millonésimas*: y para escribir *trescientas mil novecientas y dos diez millonésimas*, cuyo denominador ha de tener ocho ceros, deberé poner dos ceros antes de las seis cifras 300902 del numerador para que resulte 0,00302092, que es el quebrado pedido.

82 Lo 2.º que los decimales no mudan de valor aunque se añadan ó quiten ceros á su derecha; porque como $\frac{5}{10}$ por egemplo, es

lo mismo que $\frac{50}{100}$, que $\frac{500}{1000}$ &c. (65); será poniéndolos sin denominador, 0,5 lo mismo que 0,50 y que 0,500 &c.

83 El reducir un quebrado comun á decimal viene á ser averiguar el valor de un quebrado en décimas, céntimas &c, conforme digimos (76): y como cada unidad tiene diez décimas, cada décima diez céntimas, y asi de las demas, se efectuará la reduccion multiplicando el numerador y todas las demas restas por 10, y dividiendo el producto por el denominador.

Para reducir $\frac{1}{4}$ á quebrado decimal, multiplicaré 1 por 10, y dividiendo por 4, tendré el cociente 2 que serán décimas: volveré á multiplicar por 10, 2 que sobraron, y á partir 20 por 4, y juntando el cociente cabal 5 centimas al 2, tendré $0,25=\frac{1}{4}$. Como las restas de las divisiones son quebrados, se reducen de este modo á decimales, como se puede ver (88) en el eg. 1.º

84 Los quebrados cuya última cifra de denominador sea 1, 3, 7, 9 números que no tienen factores comunes con 10, 100, 1000 &c. ni con sus productos, no se pueden reducir exactamente á decimales: como $\frac{4}{9}$ que es 0,44444 &c. donde dividiendo 40 por 9, les cabe á 4 y sobran siempre 4: y $\frac{3}{7}$ que equivale á 0,428571428571142 &c. cuyas seis primeras cifras vuelven á salir si se continúa la reduccion. En estos casos y en los demas en que se usa de decimales, basta tomar las tres primeras cifras del quebrado, y las cuatro ó cinco primeras si el cálculo pide mucha exactitud, despreciando las demas por de poca entidad. En el quebrado 0,39574 se pueden despreciar en un cálculo regular sin error sensible, el 7 y 4, usando solo del quebrado 0,395. Pero conviene advertir que cuando la primera de las cifras que se desprecian pasa de 5, se añade 1 á la última de las que quedan; y así en el quebrado propuesto en lugar de 0,395 se ha de tomar 0,396, que se acerca mas á 0,39574 que 0,395: en el quebrado 0,70654 podremos tomar 0,706 ó 0,707.

85 Como en la reduccion de un quebrado comun á decimal el residuo que resulta de cada division parcial ha de ser menor que el divisor, vuelven á aparecer unos mismos residuos en habiendo efectuado mas divisiones que números hay de estos, y de consiguiente unos mismos dividendos y cocientes en el mismo orden. De aqui resultan fracciones decimales de una, dos, tres y mas cifras llamadas *períodos* que se repiten al infinito, tales son las fracciones $\frac{1}{3}=0,3333...$ $\frac{3}{11}=0,272727...$ $\frac{5}{7}=0,714285714285....$ El quebrado $\frac{1}{9}$ equivale á 0,1111.... $\frac{1}{99}$ á 0,010101.... $\frac{1}{999}$ á 0,001001001, por hacerse en estas la division de 10, 100, 1000... por 9.

De aqui podemos sacar el medio de encontrar el quebrado comun que corresponde al periodico: pues si 0,1111 $=\frac{1}{9}$, 0,3333 será 0,1111 tomado tres veces y equivaldrá á $\frac{3}{9}$: dos decimales de dos cifras se podrán comparar con $\frac{1}{99}$, los de tres con $\frac{1}{999}$, y así de los demas. Luego la fraccion irreductible 0,324324 se formará de la $\frac{1}{999}=0{,}001001\ldots$ multiplicada por 324 y partida por 999, ó será $\frac{324}{999}$. En general *el quebrado comun equivalente al periódico tiene por numerador las cifras del período, y por denominador tantos 9 como cifras hay en dicho período.* En los casos en que antes de comenzar el período hay algunas otras cifras, se hace dicha operacion sin contar con ellas, y el resultado sumado con las cifras omitidas es el quebrado que se busca. En 0,324141, se saca el quebrado $\frac{41}{99}$ á que equivale 0,004141, y sumando con él $\frac{32}{100}$ que se omitió resulta $\frac{3209}{9900}=0{,}324141$. Por esta regla 0,9999 será $\frac{9}{9}=1$, sinembargo á dicha fraccion interminable siempre le faltará algo para igualar á 1, pues á 0,9 le falta $\frac{1}{10}$, á 0,99, $\frac{1}{100}$; á 0,999 $\frac{1}{1000}$ &c. esto quiere decir que *la unidad es el límite de la fraccion interminable* 0,99999... *sin poder igualarse exactamente á ella.*

Sumar, restar, multiplicar y partir quebrados decimales.

86 Estos quebrados se suman por las mismas reglas que los números enteros, como se vé en el egemplo; y se restan como los enteros; pero conviene hacer igual el número de decimales en minuendo y subtrahendo, añadiendo ceros al que tenga menos (82). En el primer egemplo se han añadido dos ceros al minuendo, y en el segundo cuatro al entero 683.

Se han de sumar	305,0078
	2,98
	34,069
	0,0015
	342,0585

I

De.	8,4600
Restando. . . .	3,0543
Quedan. . . .	5,4057

II

De.	683,0000
Restando. .	16,6402
Quedan. . .	666,3598

87 *Las decimales se multiplican como si fuesen enteros, y despues se separan de la derecha del producto con la coma para decimales tantas cifras como notas decimales hay en multiplicando y multiplicador*: y si en dicho producto no hay tantas, se añaden á su izquierda con ceros las que faltan.

Si se pidiese el importe de 4,8 *varas*

á razon de 35,67 *reales* cada vara; despues de haber multiplicado 3567 por 48 considerandolos sin coma, se separan de la derecha del producto 171216 las tres cifras 216 para decimales, por tener dos el multiplicando y una el multiplicador.

La razon es porque $35,67\times4,8$ es lo mismo que $\frac{3567}{100}\times\frac{48}{10}=\frac{171216}{1000}=171,216$: la cual demostracion es facil aplicar á otro cualquier eg. Como en el 2.° hay que separar seis cifras, y 714 tiene solo tres, se añaden á su izquierda tres ceros. En el 3.r eg. se averigua el valor de 0,554 de peso en reales, multiplicando 0,554 por 15, número de reales de un peso: de que resultan 8 rs. y 0,31 de real. Si se multiplica 0,31 por 34, tendré 10½ mrs. poco mas.

I

Multiplicando	35,67
Multiplicador	4,8
	28536
	14268
Producto	171,216

II

Multiplicando	0,034
Multiplicador	0,021
	34
	68
Producto..	0,000714

III

0,554
15
2770
554
8,310

Si se comienza la multiplicacion por la primera cifra de la izquierda como en el eg. 4.° se tiene en el producto por 3 el mayor valor,

el que á veces suele bastar al obgeto para el que se multipl ica.

Tambien se conoce al momento el número de cifras del producto total, que es siete del de 3, y cuatro lugares que han de ganar ácia la derecha las otras cuatro notas 4, 2, 7, 6, que componen once; de las cuales las dos cifras primeras 28 con nueve ceros ó 28000000000 compone la mayor cuantidad.

Si en el eg. dicho se hubieran querido solo cinco notas decimales; sacado el 1.er producto por 3, se restan de 8 número de notas decimales que debe haber en el producto total, 4 número de lugares que han de ganar las 4, 2, 7, 6, cifras del multiplicador, y la resta 4 es el sitio del 1.er producto parcial en el que se ha de colocar la coma, y por él se ha de tirar una línea vertical. Conocido el lugar de las unidades, se saca el producto por 4, y su última cifra terminará las cinco decimales que se piden. En

IV

	934,525
	34,276
3...	2803575
4..	3738100
2...	1869050
7...	6541675
6...	5607150
	32031,778900

		934,525
		34276
3..	280	3575
4..	37	38100
2..	1	86905
7..		65416
6..		5607
	320,	31178

el producto por 2 se comienza diciendo $2\times 2 = 4$; pero como 2×5 hubiera producido 10, se añade una decena á 4. La multiplicacion de 7 empieza desde 5, y á $7\times 5 = 35$ se añade 1 que dá $7\times 2 = 14$; y en la de 6 se juntan 3 que vienen de 6×5 á 6×4. Se ve pues que á cada producto parcial se suprime una cifra que conviene señalar, contando solo con las decenas que pueda producir.

88 Para dividir estos quebrados, *se hacen dividendo y divisor de una misma especie*, esto es, de un mismo número de notas decimales, poniendo ceros al que tenga menos (82), y *quedará reducida la operacion á dividirlos como enteros.* Porque hechos de una misma especie debe caber el divisor en el dividendo las mismas veces que si fueran enteros. Si la division no es exacta, se reduce á decimal el quebrado que resulte.

En el 1.^{r} egemplo se dividen 171,216 reales importe de 4,8 varas, añadiendo á este divisor dos ceros para que tenga como el dividendo tres cifras decimales; y resulta de cociente no haciendo cuenta con la coma, 35 y $\frac{3216}{4800}$, quebrado comun que reducido á decimal (83), es 0, 67 que con 35 compone el valor de la vara 35, 67.

En el 2.° eg. se averigua la parte decimal que son de peso 8, 31 reales, dividiéndolos por 15, número de reales de un peso: para lo cual se añaden dos ceros á 15; y como entonces no cabe el divisor en el dividendo, se tiene de cociente $\frac{831}{1500}$, que reducido á decimales es 0,554, parte de peso que se busca.

I

```
171,216 | 4,800
14400     35,67
 27216
 24000
  32160
  28800
  33600
  33600
      0
```

II

```
8,310 | 1500
7500    0,554
 8100
 7500
  6000
  6000
     0
```

Si se hubiera preguntado qué parte decimal son de peso 6 rs. y 26 mrs.; se reducirian primero á 230 mrs. que son $\frac{230}{510}$ de peso, por equivaler este á 510 mrs.; y hecho decimal este quebrado, resultaria $\frac{230}{510} = 0,4509$, parte pedida con poca diferencia.

89 Cuando el divisor es un número entero, como 8 por el que se hayan de partir 547,36; se dividen por 8 los enteros, y encontrado el cociente 68 unidades, se reducen á centimas las 3 unidades que sobran, y sumando 300 que componen con 36, se divide la suma 336 por 8: el cociente es 42, y así el total de la division será 68,42.

Nótese finalmente que el adelantar ó retrasar la coma de uno, dos, tres... lugares de un decimal; es hacerle diez, cien, mil &c. veces menor ó mayor que era: pues es dividirle ó multiplicarle por 10, 100, 1000 &c. Efectivamente 3604,157 es diez, cien, mil veces mayor respectivamente que 360,4157, 36,04157, 3,604157; y menor que 36041,57, 360415,7 y 3604157. En la division podrá hacerse una simplificacion análoga á la que se esplicó al fin de la multiplicacion.

ARTICULO IV

NUMEROS COMPLEJOS

90 En las reglas dadas hasta aquí hemos considerado las unidades en abstracto y prescindiendo de las especies á que puedan pertenecer; ahora vamos á darlas para calcular las diferentes unidades de peso, dinero, medidas de longitud, de duracion, de áridos y liquidos que nos sirven en la sociedad, cuyos nom-

bres y valores usuales entre nosotros especialmente en Castilla, son los siguientes:

Medidas de dinero

doblon	peso	real	maravedí
1 =	4 =	60 =	2040
	1 =	15 =	510
		1 =	34

Medidas de tiempo

dia	hora	minuto	segundo
1 =	24 =	1440 =	86400
	1 =	60 =	3600
		1 =	60

Medidas de áridos

caiz	fanega	celemin	cuartillo	ochavo	ochavillo
1 =	12 =	144 =	576 =	2304 =	9216
	1 =	12 =	48 =	192 =	778
		1 =	4 =	16 =	64
			1 =	4 =	16
				1 =	4

Medidas de capacidad ó de líquidos

cantara ó arroba	azumbre	cuartillo	copa
1 =	8 =	32 =	128
	1 =	4 =	16
		1 =	4

Medidas de longitud

vara	pie	pulgada	línea	punto
1 =	3 =	36 =	432 =	5184
	1 =	12 =	144 =	1728
		1 =	12 =	144
			1 =	12

Medidas de peso

quintal	arroba	libra	onza	adarme	grano
1 =	4 =	100 =	1600 =	25600 =	921600
	1 =	25 =	400 =	6400 =	230400
		1 =	16 =	256 =	9216
			1 =	16 =	576
				1 =	36

Nótese que en nuestros cuerpos militares facultativos se hace uso de la *toesa*, antigua medida francesa equivalente á 6 pies de rey dividido en 12 pulgadas y esta en 12 líneas: 6 pies de rey equivalen á 7 castellanos.

Sumar, restar, multiplicar y partir los números complejos

91 *Para sumar estos números se escriben en colunas sus diferentes especies, se suman todas empezando por la inferior, sacando de la suma de cada una las unidades que componga de la especie superior inmediata: con la que se juntan, poniendo bajo de la coluna lo que sobre, ó cero si nada sobra.*

Se han de sumar

dias	horas	minutos
4032	3	54'
316. .	18 . . .	15
1003. .	28 . . .	39
45. .	2 . . .	20
5398 *d.*	5 *h.* . . .	8' *m.*

La suma 128 de la primera coluna del eg. contiene 2 *h.* y 8 *m.*, pongo estos por bajo; junto 2 *h.* con las de la segunda coluna que suman 53 *h.* de las que escribo 5 que sobran, sacando 48 que componen 2 *d.*, sumo estas con los de la última coluna y tendré la suma que se pide.

92 *En la resta se escriben los dos números con la correspondencia en las especies, y comenzando por las menores, se resta el número inferior del superior juntando á este cuando es menor, una unidad de la especie inmediata.* Sacada en el 1.^{r} eg. la diferencia 4 de los *mrs.*, se añade á los 12 *rs.* de donde no se pueden restar 14 en la 2.ª coluna, 1 *pe.* hecho *rs.* y restando de 27 *rs.* que resultan, los 14, tendré 13; y despues se pasará á restar 585 de 648'.

I

De	648' *pe.*	12. *rs.*	19 *mrs.*
Rest.^{do}	585	14......	15
Quedan	62 *pe..*	13 *rs.*	4 *mrs.*

II

De	104' *v..*	0 *P....*	5 *p.*
Rest.^{do}	84.......	2......	10
Quedan	19........	0.........	7

93 La multiplicacion de los números complejos puede hacerse reduciendo multiplicando y multiplicador á quebrados de la especie superior, y multiplicándolos despues segun dejamos dicho (73). Si se pidiese por eg. el

importe de 4 *v.* y 2 *P.* á razon de 8 *rs.* y 4 *mrs.* la vara; reduciré 4 *v.* 2 *P.* á 14 *P.* que son $\frac{14}{3}$ de vara; y 8 *rs.* 4 *mrs.* á 276 *mrs.* que son $\frac{276}{34}$ de real: multiplicaré despues $\frac{276}{34}$ por $\frac{14}{3}$, y el producto $\frac{3864}{102}$ que equivale á 37 *rs.* y 30 *mrs.* será el importe que se pide. El cual se saca tambien reduciendo los dos números á 8,117 *rs.* y 4,666 *var.*; pues su producto 37, 873022 es el mismo que el anterior con poca diferencia.

94 Busquemos ahora por otro método mas breve y cómodo el número de *varas* que tiene *un círculo* maximo de nuestro globo, esto es, una línea que le rodee todo, en la suposicion de que cada grado de los 360 en que se divide, tiene 57295 *v.* 8 *p.* 4 *líneas.* Comienzo á multiplicar 360 por 4, y el producto 1440 *lín.* reducido á pulgadas dará 120. Multiplico despues 360 por 8 *p.* y tendré 2880 *p* que con las 120 son 3000, ó 83 *v.* y 1 P. multiplico últimamente 57295 por 360, y añadiendo al producto 20626200, 83 *v.* y 1 P. tendré que el círculo máximo de la tierra tiene 20626283 *v.* y 1 P. *Luego un número complejo se multiplica por otro incomplejo ó de una sola especie, multiplicando sucesivamente por este todas las especies del primero comenzando por la menor y reduciendo su producto á la superior.*

95 Cuando ambos son complejos, como si se pidiese el importe de 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.*

á razon de 3 *Pe.* 8 *rs.* y 15 *mrs.* la vara; reducido este valor á 1817 *mrs.* y dividido por 36, número de pulgadas que tiene una vara, será el cociente $\frac{1817}{36}$ el valor de una pulgada: multiplíquese este valor por el número de pulgadas que tiene el multiplicador 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* que son 606, y el producto 30586 $\frac{1}{6}$ *mrs.* que hacen 59 *pe.* 14 *rs.* y 26$\frac{1}{6}$ *mrs.* será el que se busca.

Luego para multiplicar dos números complejos, se ha de dividir el multiplicando reducido á sus menores partes, por el número de especies inferiores del multiplicador que hacen una superior, y multiplicar despues el cociente por dicho multiplicador reducido á su menor especie. El producto resulta en especies inferiores del multiplicando, que habrá que reducir á superiores como en el egemplo anterior.

96 Se previene 1.º que en los casos en que los dos números son de especies diferentes, se toma por multiplicando al que sea de la misma especie con el producto: como se practicó en el egemplo, en el que se tomó por multiplicando á los pesos, reales y maravedises. 2.º Que cuando se han de multiplicar números que espresen ambos medidas de longitud, como 3 *v.* 1 P. y 2 *p.* por 2 *v.* 2 P. y 6 *p.* se reducen uno y otro á 122 *p.* y 102 *p.* que es su menor especie, y multiplicando despuees 122 por 102, su producto 12444 *p.* es el que se busca, y es-

presa una superficie como veremos en la geometría.

$$\begin{array}{rl} & 12\ rs.\ 28\ mrs. \\ & 30\ v.\ 1\ P.\ 8\ p. \\ \hline 30\ V.\times 12\ rs. \ldots & 360.rs.\ \ 00\ mrs. \\ 30\ V.\times 28\ mrs. \ldots & 24 \ldots\ldots\ 24 \\ 1\ P.+8\ p.\times 12\ rs.+28\ mrs. & 7 \ldots\ldots\ 4\frac{2}{9} \\ \hline & 391\ rs.\ \ 28\frac{2}{9}mrs. \end{array}$$

En el antecedente eg. en que es crecido el número 30 *v.* de las especies superiores del multiplicador, se abrevia la operacion multiplicando por él solo todo el multiplicando; de que resulta 30×12 *rs.* $=360$ *rs.* 30×28 *mrs.* $=840$ *mrs.* $=24$ *rs.* y 24 *mrs.* multiplicando despues por la regla anterior 12 *rs.* y 28 *mrs.* por 1 *P.* y 8 *p.* que produce 7 *rs.* y $4\frac{2}{9}$ *mrs.* y sacando la suma de las tres partidas, queda el producto total 391 *rs.* y $28\frac{2}{9}$ *mrs.*

95 *Para dividir un número complejo por un incomplejo; se dividen por él sucesivamente todas las especies del complejo: y cuando hay alguna resta se reduce á la especie inferior inmediata.* Para averiguar el valor de una arroba, en el supuesto de que 68 arrobas han costado 864 *pe.* 12 *rs.* y 13 *mrs.* partiré primero 864 por 68; y tendré de cociente 12 *pe.* con 48 de resta, que reducidos á

reales y juntos con 12, componen 732 *rs.* partolos por 68 y salen 10 *rs.* con 52 de residuo: reduzcolos á *mrs.* juntolos con 13, y dividiendo la suma 1781 por 68; tendré $26\frac{13}{68}$ *mrs.*: luego 12 *pe.* 10 *rs.* y $26\frac{13}{68}$ *mrs.* es el valor de la arroba.

98 Supongamos ahora que 12 *v.* 1. P. y 7. *p.* han costado $225\frac{1}{2}$ *pe.* y que se pide el valor de la vara. Averiguo primero el número de varas que hay en el divisor 12 *v.* 1 *P.* y 7 *p.* reduciéndolo á 451 *p.* y partiéndolo por 36, número de pulgadas de una vara; parto despues por $\frac{451}{36}$, número de varas que resultan, el dividendo $225\frac{1}{2}$; y tendré de cociente 18 *p.*, valor de cada vara.

Asimismo si 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* han costado 59 *pe.* 14 *rs.* y $20\frac{1}{6}$ *mrs.* y se pide el valor de la vara; averiguaré primero el número de varas del divisor 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* ó de 606 *p.* dividiéndole por 36: partiré despues 59 *pe.* 14 *rs.* $20\frac{1}{6}$ *mrs.* ó $\frac{183517}{6}$ de *mrs.* por $\frac{606}{36}$, número de varas, y tendré de cociente 1817 *mrs.* ó 3 *pe.* 8 *rs.* y 15 *mrs.* valor de la vara.

Sacarémos pues la regla general siguiente para dividir un número incomplejo por otro complejo, ó un complejo por otro complejo. *Partase el divisor reducido á su menor especie, por el número de estas que hacen una superior, y dividiendo despues por lo que resulte, al dividendo reducido tambien á* *sus menores partes, saldrá el cociente deseado.*

99 Tambien se pueden dividir los complejos reduciendo divisor y dividendo á quebrados, como se dijo en la multiplicacion, y dividiendo despues (93). El cociente de 37 *rs.* y 30 *mrs.* partidos por 4 *v.* y 2 *P.* que vienen á ser $\frac{1288}{34}$, $\frac{14}{3}$; es, dividiendo estos dos quebrados, $\frac{3864}{476}$: que equivale á 8 *rs.* y 4 *mrs.* el cual se pudo tambien sacar reduciendo dichas dos cuantidades á decimales, y dividiéndolas despues.

100 Los complejos de una misma especie, como 16 *pe.* 2 *rs.* 2 *mrs.* y 3 *pe.* 3 *rs.* 14 *mrs.* se dividen reduciendo ambos á su menor especie, y dividiendo despues 8230 *mrs.* y 1646 *mrs.* que resulta; el cociente 5 indica las veces que el uno cabe en el otro, que es á lo que se reduce este caso de la division.

ELEMENTOS

DE ÁLGEBRA.

CAPITULO II

101 *Resolver un problema sobre las cuantidades* viene á ser encontrar una desconocida que se pide con ciertas condiciones dadas. Para conseguirlo se examina la conexion ó relaciones que tienen los datos con la incognita, y se practican despues las operaciones necesarias para que de ellas resulte conocida. Asi se ha egecutado en la aritmética; pero á veces solo se ha conseguido por medio de tanteos, á veces no se ha logrado exacta, y ni durante la operacion ni en el resultado aparece traza alguna del camino que se ha seguido para descubrirla. Aun el fruto de todo este trabajo es solo la solucion del caso particular de que se trata, y es indispensable repetirlo siempre que se varíen los números. Al contrario, en el álgebra las soluciones son generales para todos los casos; pues en lugar de los números se vale de cuantidades generales é indeterminadas espresadas con las letras *a. b. c...* del alfabeto, queda ademas en el cálculo trazado el camino

que ha conducido al resultado, y sustituyendo en él cualesquiera números en lugar de las letras, se consigue la solucion del caso que se desea. El uso que ademas se hace de ciertos signos conduce á resolver los problemas mas complicados, y á sacar de las soluciones reglas y métodos para facilitar todo género de operaciones.

Véase en un egemplo sencillo la muestra y la esplicacion de lo que acabamos de decir. Si se nos pidiesen dos números que sumen 20, y se diferencien en 8; suponiendo que el número menor de los dos fuese x, debería ser el mayor x con la diferencia 8, ó $x+8$: y pues que la suma de los dos ha de componer 20, sumando x con $x+8$ resultaría 20, y será $x+x+8=20$ ó $2x+8=20$. Restando 8 de estas dos cuantidades iguales, queda $2x+8-8=20-8$, ó $2x=12$, donde se ve que la mitad de $2x$ ó x ha de ser 6 número menor. Si á este se añade 8 se tendrá 14 número mayor, el que con 8 suma 20, y se diferencia de 6 en 8.

Supongamos ahora que la suma de los dos números sea a y su diferencia b, siendo x el menor será $x+b$ el mayor, y la suma de los dos $x+x+b=a$, ó $2x+b=a$. Restando b de ambos, resulta $2x+b-b=a-b$ ó $2x=a-b$, y sacando la mitad de los dos, $x=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, número menor; el mayor debe ser añadiéndole b, $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+b$, ó $\frac{1}{2}a$

$+\frac{1}{2}b$ poniendo $\frac{1}{2}b$ en lugar de $-\frac{1}{2}b+b$. La suma de los dos $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$ es $\frac{2}{2}a$ ó a, quitando $\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}b$; y su diferencia $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, quitando $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a$, — es $\frac{2b}{2}$ ó b. La espresion de los dos números $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$ es una regla general para sacarlos de pronto en cualquier caso en el que se nos dé su suma y su diferencia. Si por eg. suman 100 y su diferencia es 30, será el mayor $50+15$ ó 65, y el menor $50-15$ ó 35.

ARTICULO I.

Cálculo de las cuantidades algébricas.

102 Cada una de las cuantidades a, bc, dmn se llama *incomplexâ*, *término* y *monomio*: la que tiene dos términos como $a+b$, $dt+c$, *binomio*; *trinomio* la que tiene tres, y en general *complexâ* y *polinomio* la que consta de muchos.

103 Los signos $+$ $-$ que hasta ahora hemos considerado con respecto á la adicion y sustraccion, significan tambien en las cuantidades algébricas el sentido en que se han de tomar: las que tienen el $-$ que se llaman *negativas*, se toman en sentido contrario á las *positivas* que tienen el $+$, ó estan al principio sin signo: de manera que si $+a$ con el signo $+$ representa el caudal de una persona, $-a$ representará igual cuantidad de

deuda: si b es el camino que se ha corrido ácia el oriente, $-b$ será el corrido ácia el ocidente; si d es el valor de una fuerza que obra de derecha á izquierda, $-d$ será la misma fuerza obrando de la izquierda ácia la derecha.

104 En lugar de aa se escribe para abreviar a^2, en lugar de bbb se pone b^3, en lugar de $cccc$, c^4; ahorrando con los números 2, 3, 4, que se llaman *esponentes*, la repeticion de las letras: en a, bc, dtm, es el esponente 1: a^3c^2 equivale á $aaacc$; y b^2ed^4 á $bbedddd$.

105 Tambien se escribe en lugar de $ab+ab$, $2ab$; en vez de $2ab+ab$, $3ab$; en lugar de $2ab+3ab$, $5ab$. Á los números 2, 3, 5, llamamos *coeficientes*, y espresan las veces que se ha de tomar la cuantidad ab á la que preceden; es decir que la multiplican. El coeficiente de ab, m, ede &c. es 1.

Asímismo, en lugar de $-b-b$ se escribe mas breve $-2b$; en vez de $-3bc-4bc$ se pone $-7bc$: en general los términos que tienen unas mismas letras y esponentes que se llaman *semejantes*, se reducen á uno solo *sumando sus coeficientes, si tienen un mismo signo; y cuando los signos son diferentes como en* 3ab—ab, *se restan los coeficientes* 3 *y* 1, *y á la diferencia* 2ab *se le pone el signo* + *del término mayor* 3ab.

Los términos b^2c-4b^2c se reducen á $-3b^2c$, restando 1 de 4, y poniendo á la diferencia

el signo — de la cuantidad mayor $-4b^2c$: tambien $3c^2d+5ab^3+2c^2d-ab^3$ equivale á $5c^2d+4ab^3$, sumando 3 y 2, y restando 1 de 5. Ultimamente $ab^2-5cd-a^2b-2cd+7b^2d-cd-3b^2d$, se reduce sumando los coeficientes $-5-2-1$, y restando 3 de 7, á $ab^2-8cd-a^2b+4b^2d$: ab^2 y a^2b no son semejantes. Los términos $a-a$, $-2cd^2+2cd^2$, $3b^3c-3b^3c$ y demas semejantes iguales y de signos contrarios se reducen á cero.

Adicion y Sustraccion

106 Estas cuantidades se suman *poniéndolas unas despues de otras con sus propios signos, y reduciendo las que haya semejantes.* La suma de a y b es $a+b$; la de c^2d, ab y $-3c^2d$ es $c^2d+ab-3c^2d$ ó $ab-2c^2d$, reduciendo c^2d y $-3c^2d$.

107 Para restarlas *se escribe el minuendo, y junto á él el sustrahendo mudando los signos de sus términos el* + *en* —, *y el* — *en* +. La cuantidad b se resta de a escribiendo $a-b$: para restar de ab, $c-d$ pondré $ab-c+d$: asímismo la diferencia entre $6cd-a^2b^2d$ y $3cd-4a^2b^2d-ax$, es $6cd-a^2b^2d-3cd+4a^2b^2d+ax$, que se reduce á $3cd+3a^2b^2d+ax$.

Se mudan en sus contrarios los signos del sustrahendo; porque asi como la diferencia entre 10 y 8 es 10 disminuido de 8 ó 10 — 8; asi tambien la diferencia entre la cuantidad a y b, será a disminuido de b ó $a-b$. Pero como entre uno que tiene 10 doblones y otro que debe 8, cuyo haber es -8, (103), hay de diferencia $10+8$: tambien entre a y $b-c$ es la diferencia $a-b+c$: pues si se añade á las dos una misma cantidad c, lo que no altera su diferencia, la suma es $a+c$, y $b-c+c$ ó b: hágase la resta, y resultará $a-b+c$.

108 De lo cual y de lo dicho en la suma se infiere que las cantidades negativas disminuyen las positivas cuando se suman con ellas, y las aumentan cuando se restan. Con efecto, añadir deudas es disminuir caudal, y quitarlas es aumentarle: asi no se debe equivocar el sumar con añadir y el restar con disminuir.

Multiplicacion

109 Para practicar esta operacion con las cuantidades monomias, *se multiplican sus coeficientes, se juntan despues todas las letras, y si las hay semejantes se escribe una sola con la suma de sus esponentes* (104); *últimamente, se pone al producto el signo* + *si los factores tienen ambos un mismo signo, y el* — *si le tienen diverso.*

El producto de $+a \times +b$ ó $+a \times b$ es $+ab$: el de $+a^2b \times ac^3d$ es a^2bac^3d, ó a^3bc^3d, escribiendo una vez la a y sobre ella la suma 3 de

sus esponentes, lo cual indica que la a es tres veces factor. Para multiplicar $+2ab$ por $-3ac$, diré $+\times-$ da $-$, (usamos de + y — en lugar de *cuantidad positiva* y *negativa*): 2×3 es 6, y juntando las letras, tendré de producto $-6abac$ ó $-6a^2bc$ que consta de cuatro factores. Tambien sacaré el producto de $-3a^2b^3c \times -6bcx$; multiplicando — por — que da +, despues 3 por 6 que es 18, y juntando las letras, de que resulta $18a^2b^4c^2x$ con nueve factores; y últimamente $-5m^2q \times 4amq^2$, produce $-20am^3q^3$.

110 Esta regla que se percibe facilmente por lo que toca á los coeficientes, ha sido en cuanto á juntar las letras una mera convencion de los matemáticos. Por lo que toca á los signos es evidente que multiplicar una cuantidad positiva $+a$ ó negativa $-b$ por otra positiva 3, es tomar $+a$ ó $-b$ tres veces: luego en el 1.er caso será el producto $+3a$, y en el 2.º $3b$, es decir, $+\times+=+$, y $-\times+=-$. Asimismo, multiplicar $+a$ cuantidad positiva ó $-b$ negativa por -3, es tomar $+a$ ó $-b$ tres veces, pero al contrario de como se tomarian si el multiplicador fuera $+3$; luego si en este caso serian los productos $+3a$, $-3b$, deben ser en el presente $-3a$ y $+3b$: y $+\times-=-$, $-\times-=+$ conforme lo digimos en la regla. Si en lugar de 3 de que hemos usado para mayor claridad; ponemos c, quedará la demostracion mas general.

111 *Un polinomio se multiplica por un monomio, multiplicando por este todos los términos del primero.* En el 1.r eg. se multiplican por $-4a^2bc$ los tres términos de $3bc^2-5a^3b-b^2c$.

I

$3bc^2-5a^3b-b^2c$. *Multiplicando*
$-4a^2bc$............ *Multiplicador*

$-12a^2b^2c^3+20a^5b^2c+4a^2b^3c^2$ *Producto.*

112 *Cuando ambos son polinomios, se multiplican como en los números todos los términos del multiplicando por cada término del multiplicador*: y aunque es indiferente comenzar por la izquierda ó por la derecha, esto último es lo mas comun, cuidando de que ninguno se omita.

II

$5m-tb+4a^2$ *Multiplicando*
$3d^2-cn$ *Multiplicador*

$15d^2m-3bd^2t+12a^2a^2$
$-5cmn+bcnt-4a^2cn$

$15d^2m-3bd^2t+12a^2d^2-5cmn+bcnt\ 4a^2cn$ *Prod.*

III

$3bc^2-5a^2b-b^2d$........*Multiplicando*
$2bc^2-3a^2b+4b^2d$.......*Multiplicador*

1.r *Prod.to* $6b^2c^4-10a^2b^2c^2-2b^3c^2d$
2.o.......................$-9a^2b^2c^2+15a^4b^2+3a^2b^3d$
3.o....................................... $12b^3c^2d-2c\,a^2b^3d-4b^4d^2$.

Total $6b^2c^4-19a^2b^2c^2+10b^3c^2d+15a^4b^2-17a^2b^3d-4b^4d^2$

En el 2.o eg. se multiplica como en el 1.o todo el multiplicando por $3d^2$, y luego se multiplica del mismo modo por $-cn$, sumando despues los dos productos que resultan. Y esto mismo se egecuta en el 3.r eg. con sola la diferencia de que se reducen en la suma algunos términos semejantes.

113 Suele no ser necesario efectuar la multiplicacion, y entonces se indica incluyendo en un paréntesis ó bajo de una raya los factores polinomios: $\overline{a+b}\times c$ ó $(a+b)c$ espresan el producto de $a+b$ multiplicado por c: y $(a+b)(c-bd+3)$ ó $\overline{a+b}\times\overline{c-bd+3}$; el de $a+b$ y $c-bd+3$. Conviene advertir que los términos del producto ó resultado de una multiplicacion de cuantidades algébricas debe constar cada uno de tantos factores cuantos hay en el multiplicando y multiplicador: lo cual indica el *grado* de la cuantidad, que será de 1.o 2.o 3.o 4.o... grado segun se componga de uno,

dos, tres, cuatro... factores. Llamaremos *homogéneos* los polinomios ó complexos cuyos términos son todos de un mismo grado ó tienen igual número de factores.

114 Considerando la operacion de *partir* reducida á *buscar uno de los factores de un producto dado, cuando se conoce el otro factor*; es evidente que si $4a^3bc$ multiplicado por $3a^2b$ da de producto $12a^5b^2c$; dividiendo $12a^5b^2c$ por $3a^2b$, ha de ser su cociente $4a^3bc$ (47). Para esto se saca $\frac{12}{3}=4$, y se quitan a^2b que hay comunes en dividendo y divisor, asi como en la multiplicacion se juntaron a^3bc con a^2b, y resulta $4a^3bc$ de cociente: asímismo para partir $6a^2bc$ por $4dc$, se reduce $\frac{6}{4}$ á $\frac{3}{2}$, y quitando c comun, queda de cociente el quebrado $\frac{3a^2b}{2d}$: últimamente, el cociente de $5cd$ dividido por $15a^2c^2d$ debe ser $\frac{1}{3a^2c}$, reduciendo $\frac{5}{15}$ á $\frac{1}{3}$, quitando de ambas partes cd comun, y poniendo 1 en el numerador que queda sin números y letras.

Luego generalmente las cuantidades monomias se dividen 1.° haciendo de dividendo y divisor un quebrado, que se reduce á enteros ó á términos mas sencillos cuando se puede. 2.° Quitando las letras comunes á denominador y numerador, poniendo en este 1 si queda sin letras y números. 3.° Como el cociente multiplicado por el divisor ha de dar el dividendo, si este y el divisor tienen un mismo signo, se pone al cociente el +, y — cuando le tienen diverso.

El cociente de a partido por b es $\frac{a}{b}$, que no admite reduccion: el de $8a^3bd$ partido por $-4a^2d$; es $\frac{8a^2bd}{-4a^2d}$, que se reduce así; + partido por — es —, 8 partido por 4 es 2; quito a^2d comun á los dos términos, y resulta por último $-2b$. El cociente de $3m^2$ partido por $15a^2m^4$ es $\frac{3m^2}{15a^2m^4}$, que reduciendo $\frac{3}{15}$ á $\frac{1}{5}$, y quitando m^2 comun; queda en $\frac{1}{5a^2m^2}$: el de $-2a^3b^2x$ dividido por $-6ab^3m$ que es $\frac{-2a^3b^2x}{-6ab^3m}$, se reduce haciendo $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, y quitando ab^2 comun, á $\frac{a^2x}{3bm}$: á este y al anterior se ha puesto el signo + por tener un mismo signo dividendo y divisor. Ultimamente $\frac{-2n^2x}{2nx}$ se reduce á $-n$.

115 Las cuantidades que se quitan por comunes á dividendo y divisor, forman siempre un quebrado igual á 1 (61), que multiplica á lo restante del cociente, cuya omision no varía su valor antes le simplifica: $\frac{a^2b^2c}{a^2b}$ por eg. es

lo mismo que $\frac{a^2b}{a^2b}\times bc$, que se reduce á $1\times bc$ ó á bc, por ser $\frac{a^2b}{a^2b}=1$.

116 Cuando dichas letras comunes son semejantes como sucede en $\frac{a^4}{a^3}$, el quitar a^3 que hay comun, es lo mismo que restar del esponente 4 del dividendo el 3 esponente del divisor, para que resulte el cociente $a^{4-3}=a$. Tambien se saca el de $\frac{a^3b^2}{a^2b}$ que es ab, así, $a^{3-2}b^{2-1}=ab$ &c. Sacando de esta manera el cociente de $\frac{a^m}{a^m}$ resulta $a^{m-m}=a^0$; y como $\frac{a^m}{a^m}$ es 1 (61); será $a^0=1$, esto es, *será* 1 *toda cuantidad cuyo esponente es cero*: de suerte que $b^0=1$, $d^0c^0=1$, $(a+cd-b^2)^0=1$.

117 Asímismo si se resta en $\frac{a}{a^4}$, 4 de 1 (116), sale de cociente $a^{1-4}=a^{-3}$; y como $\frac{a}{a^4}$ es $\frac{1}{a^3}$ quitando a comun; será lo mismo a^{-3} que $\frac{1}{a^3}$. Haciendo la resta en $\frac{a^m}{a^{2m}}$ se tiene $a^{m-2m}=a^{-m}$, quítese en $\frac{a^m}{a^{2m}}$ que es $\frac{a^m}{a^m\,a^m}$ (109), a^m comun, y quedará $\frac{1}{a^m}$: luego a^{-m} es lo mismo que $\frac{1}{a^m}$: es decir, *una cuantidad con esponente negativo equivale á* 1 *dividido por dicha cuantidad con el mismo esponente positivo*. De lo cual se deduce el modo de trasladar una cuantidad del uno al otro término de un quebrado quedando el mismo; pues basta mudar el signo á su esponente: $\frac{bd}{a^4c}$ por eg. es lo mismo que $bda^{-4}c^{-1}$: $\frac{c^3d^2}{cd^3}$ equivale á $c^{3-1}d^{2-3}=c^2d^{-1}$ &c.

118 Para dividir el polinomio $15m^2n^2-9mn+3n$ por el monomio $3n$; se dividen por él sucesivamente los tres términos del dividendo como se ve en el 1.r egemplo.

Egemplo I

$$
\begin{array}{l|l}
\textit{Div.}\quad 15m^2n^2-9mn+3n & 3n\ \textit{Divisor} \\
\hline
\underline{-15m^2n^2} & 5m^2n-3m+1\ \textit{Coc.} \\
\quad 0 \quad -9mn+3n & \\
\qquad\ \ \underline{+9mn} & \\
\qquad\ \ 0+3n & \\
\qquad\quad \underline{-3n} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

119 En la division de los polinomios se observa el mismo orden que en la de los números, con la advertencia de que aunque es indiferente el sitio que ocupen los términos, se deben *ordenar* para facilitar la operacion;

esto es, colocar tanto los del dividendo como los del divisor con relacion á una misma letra que se halle en todos ó los mas de ellos, poniendo primero en ambos aquel que contenga el mayor esponente de dicha letra, segundo aquel en que se halle con el mayor esponente de los que quedan, y asi de los demas, ordenando con relacion á otra letra aquellos en que no se halle la primera, y contando por un solo termino todos aquellos en que la letra tenga un mismo esponente. Para dividir por B la cuantidad A del 2.° eg. ordenados sus términos con respecto á la letra a, diré; $2a^4$ partido por $2a^2$ es reduciendo, a^2 que pondré en el cociente; multiplico por él el divisor, y mudando los signos al producto C para restarle del dividendo; tendré reduciendo los términos semejantes, el residuo D, que prosigo partiendo asi: $-10a^3b$ partido por $2a^2$, es reduciendo $-5ab$, que pongo tambien en el cociente; multiplico por él el divisor, resto el producto E de D, y reduciendo D y E, tendre de diferencia F, que dividiré últimamente, diciendo, $12a^2b^2$ partido por $2a^2$ es $6b^2$, por quien multiplicaré el divisor, y restando su producto G de F resulta cero y $a-5ab+6b^2$ de cociente.

Egemplo II

A $2a^4-13a^3b+31a^2b^2-38ab^3+24b^4$ | B $2a^2-3ab+4b^2$ *Div.*

C $-2a^4+3a^3b-4a^2b^2$ | $a^2-5ab+6b^2$ *Coc.*

D... $-10a^3b+27a^2b^2-38ab^3+24b^4$

E... $+10a^3b-15a^2b^2+20ab^3$

F............ $+12a^2b^2-18ab^3+24b^4$

G.......... $-12a^2b^2+18ab^3-24b^4$

0

Egemplo III

Dividendo x^4-z^4 | $x-z$ *Divisor*

$-x^4+x^3z$ | $x^3+x^2z+xz^2+z^3$

x^3z-z^4

$-x^3z+x^2z^2$

$x^2z^2-z^4$

$-x^2z^2+xz^3$

xz^3-z^4

$-xz^3+z^4$

0

Egemplo IV

Dividendo... 1 | $1-a$ *Divisor*

| $1+a+a^2+a^3+$ &c.

$-1+a$

a

$-a+a^2$

a^2

$-a^2+a^3$

a^3 &c.

En el 3.r egemplo se parte x^4 por x, se multiplica el cociente x por el divisor y restando su producto del dividendo, resulta $x^4-z^4-x^4+x^3z$ que se reduce á x^3z-z^4, que se continúa partiendo del mismo modo. Las cuantidades del 4.º egemplo no tienen cociente exacto y se puede continuar su division hasta el infinito.

ARTICULO II

Quebrados literales.

120 Los quebrados literales se calculan por las mismas reglas que los numéricos. Una cuantidad cualquiera a por eg., se reduce á $\frac{2a}{2}$ multiplicando por el denominador 2 (4'): si se multiplica por m se reduce á $\frac{am}{m}$: y á $\frac{abc}{bc}$, $\frac{ab+ad}{b+d}$ multiplicándola por bc, y por $b+d$. Luego si á todos estos quebrados se quitan las letras comunes á su numerador y denominador, se reducirán á a: $\frac{am}{m}$ es a quitando m comun, y $\frac{ab+ad}{b+d}=\frac{a(b+d)}{b+d}=a$, quitando de ambos términos $b+d$.

121 Un entero con un quebrado $b+\frac{a}{2}$ se reduce multiplicando b por 2 (63), á $\frac{2b+a}{2}$: $\frac{3a^2}{m}-1$ es multiplicando -1 por m, $\frac{3a^2-m}{m}$ y $3a+\frac{cd}{t-c}$ equivale á $\frac{3at-3ac+cd}{t-c}$, multiplicando $3a$ por $t-c$. Al contrario, $\frac{ac-b}{c}$ se reduce dividiendo por c el numerador, á $a-\frac{b}{c}$: y $\frac{2cd-2d^2-a+b}{c-d}$ es, partiendo por $c-d$, $2d-\frac{a+b}{c-d}$.

122 Los quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{2}$, $\frac{dt}{b^2}$ se reducen á un mismo denominador multiplicando a y b por el producto $2b^2$ de los otros denominadores, c y 2 por b^3, dt y b^2 por $2b$: y resultan $\frac{2ab^2}{2b^3}$, $\frac{b^3c}{2b^3}$, $\frac{2bdt}{2b^3}$: $\frac{a-b}{1+t}$ y $\frac{3-c^2d}{a+b}$ se reducen multiplicando por $a+b$ los términos del 1.r quebrado, y por $1+t$ los del 2.º, á $\frac{a^2-b^2}{a+b+at+bt}$, y $\frac{3+3t-c^2d-c^2dt}{a+b+at+bt}$. Los quebrados $\frac{3a}{nt}$, $\frac{b}{cn}$ que tienen un factor comun n en sus denominadores, se reducen á $\frac{3ac}{cnt}$, $\frac{bt}{cnt}$ de un mismo denominador, solo con multiplicar los dos términos del 1.r quebrado por c y los del 2.º por t.

123 La suma de $\frac{4ab}{5}$ y $\frac{ab}{4}$ es reducién-

dolos á $\frac{16ab}{20}$ y $\frac{5ab}{20}$ de un mismo denominador, sumando sus numeradores y poniendo á la suma el denominador comun, $\frac{21ab}{20} = ab + \frac{ab}{20}$. Del mismo modo se encuentra la suma de $\frac{3ax}{4m^2}$ y $\frac{4c^2}{x}$ que es $\frac{3ax^2+16c^2m^2}{4m^2x}$: y la de $\frac{ab}{z}$ y 1, que es $\frac{ab+z}{z}$.

124 Si se restan los numeradores de $\frac{4ab}{5}$ y $\frac{ab}{4}$, despues de hacerlos de un mismo denominador, y se pone al residuo el denominador comun; será $\frac{11ab}{20}$ la diferencia: la de $\frac{3cd}{4b^2}$ y $\frac{5}{2b}$ ó de $\frac{6bcd}{8b^3}$ y $\frac{20b^2}{8b^3}$, es $\frac{6bcd-20b^2}{8b^3} = \frac{3cd-10b}{4b^2}$: y la de $\frac{ab}{z}$ y 1 es $\frac{ab-z}{z}$.

125 El producto de $\frac{3c}{b^2} \times \frac{4d^2}{c}$ es, multiplicando numeradores y denominadores $\frac{12cd^2}{b^2c} = \frac{12d^2}{b^2}$: el de $\left(\frac{3a^2-b}{c^2-1}\right) \times \frac{2}{5}$ es $\frac{6a^2-2b}{5c^2-5}$ y el de $3b \times \frac{cd}{4a^2}$ es $\frac{3bcd}{4a^2}$, multiplicando $3b$ por el numerador.

126 Ultimamente, multiplicando en cruz los términos de los quebrados $\frac{ab}{m}$ y $\frac{cd}{3}$, saldrá su cociente $\frac{3ab}{cdm}$: el de $\frac{2-a}{t}$ partido por $\frac{3}{c-b}$, es $\frac{2c-2b-ac+ab}{3t}$: el de $\frac{7x^2-t}{a-b}$ dividido por $6h$, es $\frac{7x^2-t}{6ah-6bh}$, multiplicando $a-b$ por $6h$: y el de $4m^2$ partido por $\frac{3}{4}$, será $\frac{16m^2}{3} = 5m^2 + \frac{m^2}{3}$.

Para mayor egercicio de estas reglas conviene dividir cuantidades cuyo cociente es infinito, y se compone de quebrados: como la del presente egemplo, en el que despues de haber sacado el 1.^r término del cociente $\frac{a}{b}$, y multiplicado por él el divisor; se resta del dividendo a su producto $a + \frac{ad}{b}$. El residuo es $-\frac{ad}{b}$, que dividido por b, da $\frac{ad}{b^2}$ 2.º término del cociente; con el que se practica lo que con el antecedente, continuando la operacion hasta conocer el órden que guardan dichos términos: en el presente caso cada uno se forma del anterior multiplicado por $\frac{d}{b}$, y alternan los signos + y —.

$$
\begin{array}{l|l}
a\ldots \textit{Divid.} & b + d \textit{ Divis.} \\
\hline
-a - \dfrac{ad}{b} & \dfrac{a}{b} - \dfrac{ad}{b^2} + \dfrac{ad^2}{b^2} + \dfrac{ad^3}{b^4} \textit{ Coc.} \\
\hline
- \dfrac{ad}{b} & \\
+ \dfrac{ad}{b} + \dfrac{ad^2}{b^2} & \\
\hline
\quad - \dfrac{ad^2}{b^2} \text{ \&c.} &
\end{array}
$$

127 El divisor comun de las cuantidades literales se encuentra por el mismo método que el de los números; pero antes de la operacion se deben ordenar los términos de las cuantidades conforme digimos en la division (119), y suprimir en cada una de ellas cualquier divisor comun que no lo sea de la otra. Tambien en el discurso de la operacion se puede multiplicar el dividendo ó divisor por cualquiera cuantidad que no sea factor ó divisor de la otra: y mudar si conviene, los signos de todos los términos de cualquiera de ellas. Ninguna de estas operaciones altera el divisor comun de las cuantidades; pues ab^2c, y bcn tienen el mismo divisor comun bc que ab^2cm, producto de ab^2c por m, y que b^2c cociente de ab^2c partido por a.

Si se pidiese, por egemplo, el divisor comun de $a^2-3ab+2b^2$, y $a^2-ab-2b^2$, dividiré la 1.ª cuantidad por la 2.ª y tendré el cociente 1, y la resta $-2ab+4b^2$: parto ahora

$a^2-ab-2b^2$ por $-2ab+4b^2$, ó por $-a+2b$ quitando su divisor comun $2b$ que no lo es del dividendo: el cociente es exacto, y de consiguiente $-a+2b$ es el divisor comun de las cuantidades propuestas.

Para encontrar el mayor divisor comun de $5a^3-18a^2b+11ab^2-6b^3$, y $7a^2-23ab+6b^2$; hay que multiplicar antes la primera cuantidad por 7 para que $5a^3$ dé un cociente cabal. Partiré pues $35a^3-126a^2b+77ab^2-42b^3$ por $7a^2-23ab+6b^2$: el cociente es $5a$, y la resta $-11a^2b+47ab^2-42b^3$, en la que suprimiré b comun á todos sus términos, y que no lo es á los del divisor: multiplico este por 7 para que la division sea exacta, y partiendo $-77a^2+329ab-294b^2$ por $7a^2-23ab+6b^2$; tendré el cociente -11, y $76ab-228b^2$ de residuo. Ahora debo dividir $7a^2-23ab+6b^2$ que ha hecho de divisor hasta aqui, por $76ab-228b^2$, multiplicando antes el dividendo por 76 para que pueda hacerse la division; pero como 76 es factor del divisor, le reduciré antes á $a-3b$; y pues dividiendo por él $7a^2-23ab+6b^2$, nada queda; concluyo que $a-3b$ es el comun divisor que busco.

Á veces es menester para poder encontrar el comun divisor, ordenar las dos cuantidades con relacion á otra letra diferente de aquella respecto de la cual se han ordenado, ya sea en el principio, ya en el discurso de la operacion;

128 Para demostrar generalmente este método, supongo que se trate de encontrar el divisor comun de A y B: si partiendo A por B resulta el cociente q, y el residuo m, será $A=Bq+m$. Dividase B por m, y sea el cociente p, y la resta r; tendremos $B=mp+r$. Finalmente, si partiendo la primera resta m por la segunda r, resulta un cociente exacto n; será $m=rn$: y r el mayor divisor comun de A y B. En efecto, si r divide exactamente á mp, múltiplo de m, y de consiguiente á $mp+r=B$: por la misma razon dividirá á Bq, y á $Bq+m=A$: luego r es el divisor comun de A y B. Por otra parte es el mayor; pues si A y B pudiesen tener un divisor comun x mayor que r; dividiendo x á B, dividiria á su parte Bq: y dividiendo á A y á Bq, dividiria tambien á m. Partiria pues á mp: y como ha de dividir á B y á su parte mp, deberia partir tambien la otra parte r, lo que es imposible si x es mayor que r, luego r es el mayor divisor comun de A y B.

Fracciones continuas.

129 Tratemos de espresar el valor próximo del quebrado $\frac{100000}{314159}$. Parto sus dos términos por el numerador 100000, tendré $\left(\frac{1}{3\frac{14159}{100000}}\right)$: divido ahora los dos términos del quebrado $\frac{14159}{100000}$ por su numerador 14159;

saldrá $\frac{1}{7\frac{887}{14159}}$: vuelvo á partir por 887 el numerador y denominador del nuevo quebrado, y será el cociente $\frac{1}{15\frac{855}{887}}$, divido otra vez por 855 los dos términos de $\frac{855}{887}$, y me resultara $\frac{1}{1\frac{32}{855}}$, que podré continuar partiendo. Junto ahora todos los cocientes anteriores, y tendré que el quebrado $\frac{100000}{314159}$ equivale á.................................... $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+1+\text{\&c.}}}}$

espresion que se llama *fraccion continua.*

Su 1.r término despreciando los demas, es $\frac{1}{3}$: los dos primeros componen $\frac{1}{3+\frac{1}{7}}=\frac{1}{\frac{22}{7}}=\frac{7}{22}$: los tres $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}}$ son $\frac{1}{3+\frac{105}{15}}=\frac{105}{330}$, &c. y los quebrados $\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{105}{330}$ &c. espresan el valor próximo de $\frac{100000}{314159}$: el 1.º es mayor, el 2.º menor, el 3º mayor, el 4.º menor &c. acercándose cada vez mas al verdadero, segun que se toma el denominador mayor ó menor que el que debiera ser.

En general el quebrado $\frac{a}{b}$ se resuelve en la fraccion continua... $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\&c.}}}}$ dividiendo los dos términos de cada quebrado por el numerador, y suponiendo que el 1.r cociente sea a, el 2.o b, el 3.o c &c.

ARTICULO III

Formacion de las Potencias y estraccion de las Raices

130 Si una cuantidad cualquiera a se multiplica por si, el producto $a\times a = a^2$, se llama *cuadrado*, ó potencia segunda de a: (podremos llamar potencia primera al producto de $a\times 1$ que es la misma a). Si el cuadrado a^2 se multiplica por a, su producto $a^2\times a = a^3$ se llama *cubo* ó potencia tercera de a. Si se vuelve á multiplicar por a el cubo a^3, resulta $a^3\times a = a^4$, potencia cuarta de a: a^4 multiplicando por a, da su potencia quinta a^5: y $a^5\times a$ da a^6, su potencia sesta: a^7 es la séptima de a... a^m su potencia m, y a^{2t} su potencia $2t$. Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.... m, $2t$ espresan el grado de la potencia, y se llaman *sus esponentes*: 2 del cuadrado, 3 del cubo... m de la potencia m.... Asimismo 7×7 da 49 cuadrado de 7: 49×7 produce su cubo 343: $343\times 7 = 2401$ es su

cuarta potencia. Ultimamente, multiplicando $3b^2c$ por $3b^2c$ se tendrá su cuadrado $9b^4c^2$; este multiplicado por $3b^2c$ produce su cubo $9b^4c^2\times 3b^2c = 27b^6c^3$; y $27b^6c^3\times 3b^2c = 81b^8c^4$ es su potencia cuarta.

131 La cuantidad a que sirvió de multiplicador, se llama *raiz* cuadrada de a^2, cúbica de a^3, cuarta de a^4.... y raiz m de a^m: y los números 2, 3, 4.... m espresan el grado de la raiz. Tambien 7 es raiz cuadrada de 49, cúbica de 343, cuarta de 2401: $3b^2c$ es raiz cuadrada de $9b^4c^2$, cúbica de $27b^6c^3$ &c.

132 Tendremos pues que una cuantidad se sube al cuadrado multiplicándola por sí una vez: se sube al cubo multiplicando dos veces por la cuantidad: á la cuarta potencia multiplicando tres veces.... y en general *se sube cualquier cuantidad á cualquier potencia multiplicando por la cuantidad tantas veces ménos una como unidades tiene el esponente de la potencia*.

133 Como en el cuadrado de un monomio cualquiera b^2 es b dos veces factor, en el cubo b^3 tres veces, en su potencia cuarta b^4 cuatro, y en su potencia m que es b^m, m de veces, se podrán elevar mas fácilmente á sus potencias las cuantidades algébricas monomias *multiplicando sus esponentes por los de las potencias*, elevando los coeficientes por la regla general (132).

134 Cuando los monomios son positivos

lo son tambien todas sus potencias, y se les pone el signo +; pero si son negativos serán positivas sus potencias pares 2.ª 4.ª 6.ª 8.ª.... 2^{ma}, y negativas las impares 3.ª 5.ª 7.ª 9.ª.... 3^{ma}: y asi se les ha de dar el signo —: como se colige de la regla de la multiplicacion.

El cuadrado de ab^2 es $a^{1.2}b^{2.2}=a^2b^4$: el cubo de $-3c^2d$ es $-3\times-3\times-3\times c^{2.3}d^{1.3}=-27c^6d^3$, la quinta potencia de $2b^3dt^2$ es $32b^{3.5}d^{1.5}t^{2.5}=32b^{15}d^5t^{10}$; y generalmente la potencia m de tc^2 es $t^{1.m}c^{2.m}=t^m c^{2m}$.

135 Los quebrados se elevan á sus potencias subiendo á ellas por las reglas dadas su numerador y denominador. El cuadrado de $\frac{7}{9}$ es $\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{49}{81}$: la cuarta potencia de $\frac{3}{5}$ es $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{81}{625}$: el cubo de $\frac{2cb^3}{3m^2}$ es $\frac{8c^3b^9}{27m^6}$ y la potencia n de $\frac{ab^2}{c^5}$ es $\frac{a^n b^{2n}}{c^{5n}}$

136 Luego para sacar la raiz de una potencia cualquiera monomia, *se dividirá el esponente de la cuantidad por el de la raiz*; *esto es, por el número que espresa su grado.*

137 En los quebrados se saca la raiz, sacándola de sus dos términos; y si la cuantidad tiene coeficiente, se saca de él la raiz por las reglas que daremos despues.

De a^2b^4 por eg. se estraerá la raiz cuadrada dividiendo los esponentes 2 y 4 por el del cuadrado que es 2, y se tendrá $a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{4}{2}}$

$=ab^2$: la raiz cúbica de $\frac{8a^3b^6}{c^3}$ es, sacando la de 8 que es 2, y dividiendo los esponentes 3 y 6 por el 3 de la potencia $\frac{2a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}}{c^{\frac{3}{3}}}=\frac{2ab^2}{c}$: la cuarta de $\frac{b^4}{16}$ es $\frac{b}{2}$: la raiz m de $\frac{a^m b^{2m}}{t^{3m}}$ es $\frac{ab^2}{t^3}$.

138 Se pone el signo + á la raiz de la potencia positiva si es impar; pero si es par se le dan á la raiz los dos signos ±; pues una potencia par positiva a^2 ó vendrá de $a\times a$, ó de $-a\times-a$ que ambos producen a^2. Si es impar y negativa la potencia, se pone á la raiz el signo —. La raiz par de una potencia negativa es imposible; pues toda potencia par es positiva. Todo esto se colige de las reglas de la multiplicacion de los signos.

139 Cuando dividiendo el esponente de la cuantidad por el de la raiz no resulta cociente exâcto, como sucede sacando la raiz cúbica de b^5 que es $b^{\frac{5}{3}}$; se deja en fraccion el esponente, y representa una raiz qne está por sacar: b^5 se llama cubo imperfecto, porque no hay raiz que multiplicada por si dos veces produzca b^5: 3 es cuadrado imperfecto, porque no hay cuantidad que multiplicada por sí produzca 3. Estas raices que se llaman *irracionales*, se suelen espresar po-

niendo las potencias bajo del signo $\sqrt{\ }$, que se llama *radical*, y entre sus palos el número que indique el grado de la raiz. $\sqrt[2]{3}$ ó $\sqrt{3}$ representa la *raiz cuadrada de* 3: $\sqrt[3]{b^5}$ *la raiz, cúbica de* b^5; $\sqrt[4]{\frac{cd^2}{3a^3}}$ espresa la raiz cuarta de $\frac{cd^2}{3a^3}$: y en general $\sqrt[m]{\frac{a^n}{b^t}}$ la raiz m de $\frac{a^n}{b^t}$

140 Tendremos pues, que la raiz n de a^m podrá espresarse de una de estas dos maneras $a^{\frac{m}{n}}$ ó $\sqrt[n]{a^m}$: y diremos en general, *que una cantidad con un esponente fraccionario, equivale á un radical cuyo esponente es el denominador del quebrado, y el numerador esponente de la cantidad.* De suerte que $a^{\frac{1}{3}}$ será lo mismo que $\sqrt[3]{a}$, $b^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{b^3}$, $a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^3b^5}$. Al contrario, $\sqrt[4]{cd^3} = c^{\frac{1}{4}} d^{\frac{3}{4}}$: $\sqrt[n]{\frac{a^t}{b^r}} = \frac{a^{\frac{t}{n}}}{b^{\frac{r}{n}}}$

141 Los polinomios se elevan á sus potencias por la regla general (132). Por eg. si se multiplica $a+b$ por $a+b$, resultará su cuadrado $a^2+2ab+b^2$: este mul-

tiplicado por $a+b$ dará su cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$: este vuelto á multiplicar por $a+b$ da su cuarta potencia $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ &c. Si se multiplica $2cd^2-\frac{3}{5}+am^2$ por si, dará su cuadrado $4c^2d^4-\frac{12cd^2}{5}+\frac{9}{25}+4acd^2m^2-\frac{6am^2}{5}+a^2m^4$. Muchas veces que no son necesarios los términos de las potencias, nos contentamos con indicarlas: $(a+b)^2$ representa el cuadrado de $a+b$: $(a+b)^3$ su cubo: $(d^2-b)^4$ la cuarta potencia de d^2-b.... $(d^2-b)^m$ su potencia m.

142 Las potencias de $a+b$ que acabamos de sacar por la regla general nos pueden servir para facilitar esta práctica, que es bastante molesta especialmente en las cuantidades de muchos términos. Con efecto, el cuadrado de cualquiera cuantidad algébrica ó numérica, monomia ó polinomia, con quebrados ó sin ellos, debe constar de los mismos términos que el de la cuantidad general $a+b$, que las representa todas. Consideremos pues, este binomio dividido en dos partes, a primera y b segunda, y veremos que su cuadrado $a^2+2ab+b^2$ se compone de a² *cuadrado de la primera parte*, 2ab *duplo de la primera* a *multiplicado por la segunda* b, *y de* b² *cuadrado de la segunda* b. Luego si dividimos cualquiera cuantidad $3bc+nt$ en dos partes, $3bc$ primera y nt segunda, tendremos su cuadra-

do $9b^2c^2+6bcnt+n^2t^2$, sin multiplicarla por sí, sacando el cuadrado de la 1.ª $3bc$ que es $9b^2c^2$; despues el duplo de la 1.ª $3bc$ multiplicado por la 2.ª nt, que es $2\times 3bc\times nt = 6bcnt$; y por último el cuadrado n^2t^2 de la 2.ª nt. Cuando el signo de una de las partes es $+$ y el otro $-$, sale negativo el 2.º término del cuadrado: como se ve en el de $\frac{5a}{b} - r$, que es $\frac{25a^2}{b^2} - \frac{10ar}{b} + r^2$.

Para sacar el cuadrado del trinomio $cd+m-\frac{1}{2}$, se le divide en las dos partes $cd+m$ 1.ª y $-\frac{1}{2}$ 2.ª y será su 1.er término $(cd+m)^2$, esto es $c^2d^2+2cdm+m^2$: el 2.º $2\times(cd+m)\times -\frac{1}{2}$, que se reduce á $-cd-m$: y el 3.º $(-\frac{1}{2})^2$, que es $\frac{1}{4}$: luego todo el cuadrado será $c^2d^2+2cdm+m^2-cd-m+\frac{1}{4}$. Con igual facilidad se saca el cuadrado de una cuantidad que tenga cuatro, cinco ó mas términos, dividiéndola en dos partes, de las que convendrá sea el último la 2.ª parte, y todos los demas 1.ª procediendo despues como se ha visto en el antecedente egemplo.

143 Luego si se nos pidiese la raiz cuadrada de $a^2+2ab+b^2$ cuadrado general; debiendo ser su 1.r término a^2, cuadrado de la 1.ª parte de la raiz, será esta a, raiz cuadrada de a^2. En el 2.º término $2ab$ que se presenta quitado el 1.º a^2, debe encontrarse la 2.ª parte multiplicada por el duplo de la 1.ª: luego si dicho 2.º término $2ab$ se parte por $2a$, duplo de la 1.ª parte a, el cociente b será la 2.ª parte de la raiz, con tal que haya ademas en la cuantidad propuesta el cuadrado b^2 de esta 2.ª parte, como con efecto le hay: luego $a+b$ es la raiz que se pide.

Si se hubiese pedido la raiz de la cuantidad $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$; sacada la raiz $a+b$ de $a^2+2ab+b^2$ que considerarémos ahora como primer término del cuadrado; se dividirá el 2.º $2ac+2bc$ por el duplo $2a+2b$ de la raiz hallada, y el cociente c es la 2.ª parte; pues se encuentra ademas el 3.r término c^2 cuadrado de c.

144 Luego en general, para estraer la raiz cuadrada de cualquiera cuantidad polinomia ordenada: 1.º *se saca la raiz cuadrada de su primer término, se pone á parte y se resta su cuadrado de la cuantidad.*

2.º *Se divide el residuo por el duplo de la raiz hallada, que es la 1.ª parte, y el cociente será la 2.ª y se concluye restando de la cuantidad el producto del divisor por el cociente y el cuadrado de dicho cociente.*

3.º *Si sobra algo, se volverá á partir por el duplo de las dos partes halladas, que se toman por 1.ª, restando del dividendo el producto que resulte del cociente por el divisor, junto con el cuadrado de dicho cociente: y asi se continúa si vuelve á sobrar.*

Veanse practicadas estas reglas en el siguiente eg. en donde para sacar la raiz

A....$x^4-2bx^3+b^2x^2-2a^2x^2+2a^2bx+a^4$ | x^2-bx-a^2 *Raiz.*

$-x^4$ | $2x^2$ 1.er *Div.*

B..$-2bx^3+b^2x^2-2a^2x^2+2a^2bx+a^4$ | $-bx$ *Cociente.*

$+2bx^3-b^2x^2$

C..$-2a^2x^2+2a^2bx+a^4$ | $2x^2-2bx$ 2.° *Div.*

$+2a^2x^2-2a^2bx-a^4$ | $-a^2$ *Cociente.*

0

cuadrada de la cuantidad A, se saca de su primer término x^4, y x^2 que resulta, será su 1.ª parte, que se pone á un lado, y su cuadrado x^4 se resta de la cuantidad. El residuo B se divide por $2x^2$ duplo de la 1.ª parte hallada, y$-bx$ que sale de cociente, es la 2.ª parte de la raiz. Multiplíquese este cociente por el divisor, y el producto$-2bx^3$ junto con el cuadrado b^2x^2 de dicho cociente se resta de la cuantidad.

De la resta resulta el residuo C que se divide por $2x^2-2bx$, duplo de x^2-bx que se toma ahora por 1.ª parte: despues se multiplica el cociente$-a^2$ por el divisor, y se resta el producto$-2a^2x^2+2a^2bx$, añadido del cuadrado a^4 del mismo cociente, de la cuantidad C: y pues que nada sobra, concluyo que x^2-bx-a^2 es la raiz cuadrada de la cuantidad A. Si quiero certificarme de que es así, subo esta raiz al cuadrado y me resultará dicha cuantidad A.

145 Por estas mismas reglas se estrae la

raiz cuadrada en los números; pero es preciso tener bien sabidos los siguientes cuadrados de los números primeros.

Raices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	&c.
Cuadr.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	&c.

En ellos se ve 1.° que ningun número cuya última cifra sea 2, 3, 7, 8 podrá ser cuadrado perfecto: lo 2.° que el cuadrado de los números de una cifra ó que anteceden á 10, no puede llegar á 100, es decir, no puede pasar de dos cifras: los cuadrados de los que anteceden á 100, no pueden tener mas que cuatro cifras... En general, ningun cuadrado puede tener mas cifras que el duplo de las que conste su raiz; aunque podrá tener ménos como se ve en 4, 169, 10201, cuadrados de 2, 13, 101. De consiguiente si comenzando por la derecha se divide el número cuadrado de dos en dos cifras, el número de divisiones será el de las cifras que ha de tener la raiz, la 1.ª division tiene una cifra cuando es impar el número de las que hay en el cuadrado.

146 Todo constará de los egemplos: en los que se baja una division cada vez que se ha de partir , y no se cuenta en la particion con la última de las dos cifras, que se reserva para restar de ella el cuadrado de la 2.ª parte de la raiz: advirtiendo ademas, que

cuando el divisor no cabe en el dividendo, se pone cero en la raiz y se bajan las dos cifras que se siguen.

Egemplo I

```
33,64    |58 Raiz
25
———
 864     |10 Divisor
 80        8 Cociente
———
 64
 64
———
  0
```

Para sacar la raiz cuadrada del núm.º 3364 que dividiré de dos en dos notas, comenzando por la derecha; saco de la 1.ª division 33 la raiz cuadrada que es 5, contentándome con la próxima menor porque no la tiene exâcta: póngola á parte, y restando su cuadrado 25 de 33, me quedan 8 de residuo. Á 8 se junta la division inmediata 64, se toma de 864 que componen, el 86 por dividendo, y debiendo ser 10, duplo de la 1.ª parte hallada el divisor, saldrá de cociente 8. Multiplico por él el divisor, y resto el producto 80 del dividendo, y restando por último de 64 que quedan, el cuadrado 64 del cociente 8, me resultará cero, y será 58 la raiz cuadrada de 3364. En prueba de lo cual 58 subido al cuadrado produce $58 \times 58 = 3364$.


```
33,64    | 58
25
———
864      | 10~~8~~
864         8
———
  0
```

147 Hemos restado primero el producto 80 del divisor por el cociente, y despues su cuadrado 64, porque juntándolos no se confundiese su valor, que por el diverso lugar que deben ocupar, no compone la suma $80 + 64 = 144$ sino 864. Pero para abreviar la operacion, convendrá siempre juntar el cociente al divisor, y sacar de una vez los dos productos; pues multiplicando 8 por 8 saldrá su cuadrado, y 8 por 10 dará el producto del cociente por el divisor.

En el 2.º egemplo sacada de 8 la raiz; restado su cuadrado 4 de 8, y bajada la division 45; se partirá 44 entre 4 duplo de 2; se juntará al divisor el 9 que sale de cociente, y multiplicando por él 49 que componen,

Egemplo II

```
8,45,64,64        |2908 Raiz
4
————
                  |4~~9~~ 1.r Divisor
44,5
441                9
————              |580~~8~~ 2.º Divisor
0046,46,4          8
  46 46 4
————
00000
```

se restará el producto 441 de 445. Puesto el 9 en la raiz, se junta la 2.ª division 64 al residuo 4; y como en el dividendo 46 no cabe el divisor 58, duplo de 29 raiz hallada; se pondrá cero en la raiz, y se bajará la última division 64. Divídase 4646 entre 580, duplo de 290 que se toma por 1.ª parte; júntese el cociente 8 al divisor 580, y multiplicando 5808 por 8, y restando su producto de 46464; se tendrá cero de residuo, y será 2908 raiz cuadrada de 8456464. En efecto, $2908 \times 2908 = 8456464$.

148 Si concluida la operacion con los dos últimos guarismos, resulta algun residuo, es prueba de que el número propuesto es cuadrado imperfecto, y de consiguiente no tiene raiz exacta. Para sacarla tan proxima como se quiera; se añaden dos ceros á la resta y á las demas que vayan resultando, y serán decimales las cifras que salgan de la operacion, que es la misma en cada dos ceros que en cada dos de los números anteriores.

Despues de haber encontrado en el 3.r egemplo 5424 raiz próxima del número propuesto, añadiré dos ceros á 208 que sobran, y duplicando á 5424, tendré 10848 por 4.º divisor, el dividendo correspondiente es 2080, el cociente cero, que debe ser la primera de las notas decimales. Añado á 20800 otros dos ceros, y tendré que dividir 208000 entre 108480, pongo en la raiz el cociente 1, 2.ª nota decimal; júntolo al divisor, y hecha la

multiplicacion y resta, añadiré al residuo 995199 otros dos ceros; dividido despues 9951990 por el duplo de la raiz hallada, y poniendo en el 3.r lugar de decimales el cociente 9, continuaré si es menester, la operacion que no tiene fin.

Egemplo III

29,41,99,84	*Raiz* 5424,019
25	
441	104 1.r *Divisor*
416	4
2599	1082 2.º
2164	2
43584	10844 3.º
43376	4
2080,00,0	1084801 4.º y 5.º
1084 80 1	1
9951990,0	10848029 6.º
9763226 1	9
188763 9 &c.	

149 Cuando el numerador y denominador de un quebrado son cuadrados perfectos, se saca de dichos términos la raiz, y se tiene la del quebrado. Sacando la raiz cuadrada 4 de 16, y la de 49 que es 7, se tendrá la de $\frac{16}{49}$ que es $\frac{4}{7}$: la de $\frac{9}{25}$ es $\frac{3}{5}$: la de $\frac{a^2}{b^2}$ es $\frac{a}{b}$:

la de $\frac{c^4}{4b^6}$ es $\frac{c^2}{2b^3}$: y la de $\frac{25a^2b^6}{81c^2d^4}$ es $\frac{5ab^3}{9cd^2}$

150 En los números, si solo el denominador es cuadrado perfecto, como sucede en $\frac{3}{9}$, se saca en decimales la raiz próxima 1,732 del numerador 3 por las reglas precedentes, dividiéndola por 3 raiz exacta del denominador, se tendrá $\frac{1732}{3}=0,577$ raiz próxima del quebrado. Para hacer que el denominador sea cuadrado perfecto si no lo es, se multiplican los dos términos del quebrado por dicho denominador. Si se pide la raiz próxima de $\frac{5}{6}$, le reduciré ántes á $\frac{5.6}{6.6}$ ó $\frac{30}{36}$, sacaré despues la raiz próxima de 30 que es 5,477, la dividiré por 6 raiz exacta de 36, y tendré 0,913 raiz proxima de $\frac{5}{6}$.

Si se pidiese la raiz cuadrada de un entero y un quebrado, $5\frac{1}{4}$ por eg.; se convertirá en $\frac{21}{4}$, y se sacará despues dicha raiz como acabamos de decir. Pero será mejor reducir $5\frac{1}{4}$ á la cuantidad decimal 5,250000, á la que se han añadido cuatro ceros para sacar por las reglas dadas su raiz proxima 2,291 con tres cifras decimales.

151 Vengamos ya á la potencia cúbica, cuya formacion se ha de facilitar por medio del cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ de $a+b$; que se compone del cubo a^3 de la 1.ª parte a, de $3a^2b$ triplo del cuadrado de la 1.ª parte multiplicado por la 2.ª, de $3ab^2$ triplo de la

1.ª parte multiplicado por el cuadrado de la 2.ª y de b^3 cubo de la 2.ª Con efecto, si dado el binomio $3bc+nt$ para elevarle al cubo, considero á $3bc$ como 1.ª, parte y á nt como 2.ª; deberá ser el 1.er término $27b^3c^3$ cubo de $3bc$: el 2.° $27b^2c^2\times nt=27b^2c^2nt$ triplo del cuadrado de $3bc$ que es $27b^2c^2$ multiplicado por la 2.ª parte nt: el 3.° $9bcn^2t^2$ triplo de la 1.ª $9bc$ multiplicado por n^2t^2 cuadrado de la 2.ª: y el 4.° n^3t^3 cubo de la 2.ª: y la potencia cúbica de $3bc+nt$ será $27b^3c^3+27b^2c^2nt+9bcn^2t^2+n^3t^3$.

Para sacar el cubo del trinomio $cd+m-\frac{1}{2}$, se toma á $cd+m$ por 1.ª parte, y á $-\frac{1}{2}$ por 2.ª, y procediendo como en el egemplo anterior, se tendrá $(cd+m-\frac{1}{2})^3=(cd+m)^3+3\times(c^2d^2+2cdm+m^2)\times-\frac{1}{2}+3\times(cd+m)\times\frac{1}{4}+(-\frac{1}{2})^3$, que viene á ser, efectuando las operaciones indicadas, $c^3d^3+3c^2d^2m+3cdm^2+$

$$m^3-\frac{3c^2d^2}{2}-3cdm-\frac{3m^2}{2}+\frac{3cd}{4}+\frac{3m}{4}-\frac{1}{8}.$$

Cuando la cuantidad tiene mas terminos, se toma siempre el último por 2.ª parte y á los demas por 1.ª, y se procede del mismo modo.

152 Luego si se pidiese la raiz cúbica del cubo general $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; sacaria de su 1.er término a^3 cubo de la 1.ª parte, la raiz cúbica a, y esta seria la 1.ª parte de la raiz pedida. La 2.ª que es b, debo

encontrarla en el 2.° término $3a^2b$, dividiéndole por $3a^2$ triplo del cuadrado de la 1.ª a encontrada. Y como ademas de estos términos se encuentran $3ab^2$ triplo de la 1.ª multiplicado por el cuadrado de la 2.ª, y b^3 cubo de esta 2.ª, que son todos los que debe tener un cubo completo; concluyo que el dado lo es, y su raiz cúbica $a+b$.

Si se hubiese dado el cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a^2+2ab+b^2)\times c+3(a+b)\times c^2+c^3$ para estraer su raiz cúbica; sacada como acabamos de decir la de $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ que es $a+b$, tomaré este binomio por 1.ª parte, y dividiendo por $3(a^2+2ab+b^2)$ triplo de su cuadrado los términos siguientes, tendré c de cociente y 2.ª parte de la raiz; pues se encuentran despues de los términos divididos, $3(a+b)c^2$ triplo de la 1.ª multiplicado por el cuadrado de la 2.ª y c^3 cubo de la 2.ª

153 Por consiguiente para estraer la raiz cúbica de cualquier cuantidad polinomia ordenada; 1.° *se saca la raiz cúbica de su primer término que será la 1.ª parte, se escribe á un lado, y se resta su cubo de dicho primer termino.*

2.° *Se divide el residuo por el triplo del cuadrado de la 1.ª parte hallada, y el cociente será la segunda.*

3.° *Se multiplica el cociente por el divisor, y el producto sumado con el triplo de la 1.ª parte multiplicado por el cuadrado de la 2.ª,*

y con el cubo de esta 2.ª se restan de la cuantidad.

4.° *Si sobra algo, se vuelve á partir por el triplo del cuadrado de lo que haya en la raiz, que se toma por 1.ª parte, y el cociente es la nueva 2.ª parte; réstense de la cuantidad los tres productos que digimos en la regla 3.ª continuese del mismo modo si aun volviese á sobrar, y se tendrá la raiz que se busca.*

Egemplo.

$$\begin{array}{lr}
\text{A.}\,a^6+6a^5d+21a^4d^2+44a^3d^3+63a^2d^4+54ad+27d^6 & \\
-a^6 & |\,a^2+2ad+3d \ \textit{Raiz} \\
\hline
\text{B.......}\,6a^5d+21a^4d^2+44a^3d^3+63a^2d^4+54ad^5+27d^6 & \\
\text{C.....}\,-6a^5d-12a^4d^2-8a^3d^3 & |\,3a^4 \ \textit{Divis.} \\
\hline
 & 2ad \ \textit{Cociente} \\
\text{D.......}\,9a^4d^2+36a^3d^3+63a^2d^4+54ad^5+27d^6 & \\
 & \text{2.° } \textit{Divis.}\,|\,3a^4+12a^3d+12a^2d^2 \\
\hline
 & 3d^2 \ \textit{Cociente} \\
-9a^4d^2-36a^3d^3-63a^2d^4-54ad^5-27d^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Para sacar la raiz cúbica de la cuantidad A, sacaré la de su 1.r término a^6 que es a^2: póngola á parte, y resto su cubo a^6 de la cuantidad. Divido el residuo B por $3a^4$, triplo del cuadrado de la 1.ª parte hallada a^2, y tendré de cociente $2ad$: multiplícole por el divisor, y añadiendo al producto $6a^5d$, el triplo de la 1.ª a^2 multiplicado por el cuadrado de la 2.ª $4a^2d^2$, que es $3\times a^2\times 4a^2d^2=$

$12a^4d^2$, y $8a^3d^3$ cubo de la 2.ª $2ad$, lo restaré de B; y tendré de residuo D. Este se ha de dividir por $3a^4+12a^3d+12a^2d^2$ triplo de $a^4+4a^3d+4a^2d^2$ cuadrado de a^2+2ad que se toma por 1.ª parte: el cociente es $3d^2$; con que tendré que restar por último, de D los tres productos $9a^4d^2+36a^3d^3+36a^2d^4$ del divisor por el cociente, $27a^2d^4+54ad^5$ triplo de la 1.ª a^2+2ad multiplicado por $9d^4$ cuadrado de la 2.ª $3d^2$, y $27d^6$ cubo de la 2.ª; y como nada sobra; será $a^2+2ad+3d^2$ raiz cúbica de la cantidad A. Para cuya prueba subiré dicha raiz al cubo y me saldrá A.

154 Para la estraccion de esta raiz en los números, observense los cubos de los números primeros que son.................................

Raiz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	&c.
Cubos.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	&c.

En ellos como en los cuadrados, igualmente que en las demas potencias crecen rápidamente los valores de las cuantidades mayores que la unidad, y decrecen con rapidez ó se acercan á cero los valores de los quebrados menores que la unidad. Véanse por eg. las ocho primeras potencias de 8 y de $\frac{1}{8}$.

8,64,512,4096,32768,262144,2097152,16777216

$\frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \frac{1}{512}, \frac{1}{4096}, \frac{1}{32768}, \frac{1}{262144}, \frac{1}{2097152}, \frac{1}{16777216}$

En cuanto a los cubos se vé que los números de una cifra, que son los que anteceden á 10; han de ser menores que su cubo 1000, es decir que no pueden llegar á cuatro cifras: asimismo los cubos de los de dos cifras, ó de los que anteceden á 100, que han de ser menores que su cubo 1000000, no pueden llegar á siete cifras: y en general, que ningun número puede tener en su cubo mas que el tiplo del número de cifras de que conste su raiz. Y por consiguiente, si se divide un cubo comenzando por la derecha de tres en tres cifras, el número de divisiones será el de las cifras que debe haber en su raiz: bien que la primera division de la izquierda podrá tener una ó dos; porque no todos los números tienen por cubo el triplo de las cifras de que constan, como se ve en 8 cubo de 2, y en 27 y 64 cubos de 3 y 4.

155 En lo demas las reglas de la estraccion de la raiz cúbica son unas mismas para los números y para las letras, en observando lo 1.º que para cada division se baja una clase de tres números, de los que se reservan dos para restar de ellos los dos productos que se añaden al del divisor por el cociente; advirtiendo que este se escribe bajo del dividendo, el segundo termina en la segunda cifra de la clase, y el tercero en la tercera: 2.º que para dividir no se cuenta con las dos últimas cifras: 3.º que cuando el divisor no cabe en el dividendo, se pone cero en la raiz y se baja otra clase.

Egemplo I

	32,768	32 *Raiz*
	27	
	57,68	27 *Div.*
Producto del divisor por el cociente.	54	2 *Coc.*
Triplo de la 1.ª p.te por el cuad.do de la 2.ª	36	
Cubo de la 2.ª	8	
	5768	
	0	

Dividase el número 32687 como se ve en el egmplo, para estraer de él la raiz cúbica: se saca la de 32 que por no tenerla exacta, se toma su próxima menor 3, y restando su cubo 27 de 32, quedan 5 que con 768 que se le juntan, son 5768. De aquí se toma por dividendo á 57, y como el divisor debe ser 27, triplo de 9 cuadrado de la 1.ª parte; será 2 el cociente, y 2.ª parte de la raiz. Sumo ahora los productos 2×27=54 del divisor por el cociente, 3×3×4 triplo de la 1.ª 3 por el cuadrado de la 2.ª 2; y 8 cubo de la 2.ª dispuestos como se dijo (155) y se ve en el eg.: y restando su suma de 5768; tendré cero, y de consiguiente será 32 la raiz cúbica de 32768.

Fgemplo II

68,067,239,787	4083 *Raiz*
64	
40,672,29	4800 1.° *y* 2.° *Divisor*
38 400	8 *Cociente*
7680	
512	
39 173 12	
1499277,87	499392 3.° *Divisor*
1498176	3 *Cociente*
11016	
27	
149927787	
0	

En el 2.° eg. sacada la raiz cúbica 4 de 68, y restado su cubo 64 de 68, se juntan al residuo 4 los tres números 067: y porque en el dividendo 40 no cabe el divisor 48, triplo del cuadrado de la 1.ª parte 4, se pone cero en la raiz; y bajada la division siguiente 239, se parte 40672 por 4800, triplo del cuadrado de 40. Sacado el cociente 8, se resta de 4067239,3917312 suma de los tres productos 38400 del divisor por el cociente, 7680 triplo de la 1.ª por el cuadrado de la 2.ª y 512 cubo de la 2.ª Añadiendo al residuo 149927 la última division

787 y partiendo 1499277 por 499392 triplo del cuadrado de 408, se tendrá el último cociente 3, y cero de residuo, restando la suma de los tres productos acostumbrados que muestra el egemplo. Luego la raiz que se busca, es 4083: como se puede comprobar subiéndola al cubo.

156 En los cubos imperfectos en los cuales sobra algo; despues de haber bajado la última clase, ya que no se pueda lograr exacta la raiz, se aproxima en decimales añadiendo á cada residuo tres ceros, y continuando la estraccion por las mismas reglas.

Asi se egecuta en el 3.r egemplo, en el que despues de haber encontrado la raiz 27, añadiré tres ceros á la resta 2107, y dividiendo 21070 por 2187 triplo del cuadrado de 27, tendré 9 por cociente y 1.a cifra de decimales: resto de 2107000 los tres productos 19683,6561,729 del divisor por el cociente, del triplo de la 1.a por el cuadrado de la 2.a, y del cubo de la 2.a: y añadiendo al residuo 72361 otros tres ceros, volveré á partir 723610 por el 3.r divisor. El cociente 3 es la 2.a cifra de decimales, con la que se practica lo que con las demas, y se continúa si se quiere la operacion.

Egemplo III

21,790	27,93 *Raiz*
8	
137,90	12 1.r *Divisor*
84	7 *Cociente*
294	
343	
11683	
21070,00	2187 2.o *Divisor*
19683	9 *Cociente*
6561	
729	
2034639	
723610,00	233523 3.r *Div.*
700569	3 *Cociente*
7533	
27	
70132257	
2228743 &c.	

157 La raiz cúbica se saca de los quebrados cuyos dos términos son cubos perfectos, estrayéndola de los dos. La de $\frac{8}{27}$ es $\frac{2}{3}$; por ser 2 la de 8 y 3 la de 27: la de $\frac{64}{125}$ es $\frac{4}{5}$; la de $\frac{8a^3b^6}{216}$ es $\frac{2ab^2}{6}$. Cuando en los números solo el denominador tiene raiz exacta; se saca la proxima del numerador (156), y dividiendola por la exacta del denominador

resulta la del quebrado. En $\frac{3}{27}$ por egemplo, se saca la raiz cúbica proxima del numerador 3 que es 1,443, y partiéndola por 3 raiz exacta de 27, será la próxima de $\frac{3}{27}$, $\frac{1,443}{3}=$ 0,481. Para hacer al denominador cubo perfecto cuando no lo es, se multiplican los dos términos del quebrado por el cuadrado del denominador; $\frac{2}{3}$ por egemplo, se reduce á $\frac{2\times9}{3\times9}=\frac{18}{27}$, cuyo denominador 27 es cubo perfecto.

158 Si se pidiese la raiz cubica de un entero y quebrado, $6\frac{3}{8}$ por eg., se reducirá á $\frac{51}{8}$, y sacando la raiz proxima de 51, y la exacta de 8, será la de $6\frac{3}{8}$, $\frac{3,708}{2}=1,854$. Pero es mas facil reducir $6\frac{3}{8}$ á la cuantidad decimal 6,375000000, y sacar por las reglas dadas dicha raiz proxima 1,854; cuidando de que la cuantidad tenga siempre un número de cifras decimales triplo de las que se quieran en su raiz.

159 Muchas veces nos contentamos con indicar las raices imperfectas, sean cuadradas, sean cúbicas, con el signo $\sqrt{}$; $\sqrt[2]{\frac{2}{5}}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{ad^2}}$ representan *la raiz cuadrada de* $\frac{2}{5}$ y *la cúbica de* $\frac{a}{ad^2}$: en la cuadrada se suele omitir el 2.

160 Del mismo modo que en el cubo y el cuadrado se facilita la formacion de la potencia 4.ª con la de $a+b$ que es $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; que se compone de la 4^a potencia de la 1.ª parte a; del cuádruplo del cubo de la 1.ª multiplicado por la 2.ª b, del sestuplo del cuadrado de la 1.ª multiplicado por el cuadrado de la 2.ª, del cuádruplo de la 1.ª multiplicado por el cubo de la 2.ª y de la 4.ª potencia de la 2.ª; dividiendo en dos partes la cuantidad que se dé para elevarla á su 4.ª potencia, y poniendo sucesivamente los términos que acabamos de decir.

161 Igualmente sacaremos de dicha potencia general el modo de estraer la raiz 4.ª; pues sus términos manifiestan que la 1ª parte a de la raiz debe ser la raiz 4.ª del 1.º a^4; como tambien que la 2.ª parte b, que se encuentra en el 2.º término $4a^3b$ multiplicada por el cuádruplo del cubo de la 1.ª parte hallada a; se deberá buscar dividiendo por dicha cuantidad $4a^3$, el residuo que quede de restar la 4.ª potencia de la 1.ª parte hallada. Y que deberán encontrarse en la cuantidad para ser potencia 4.ª de $a+b$, $6a^2b^2$ sestuplo del cuadrado de la 1.ª multiplicado por el cuadrado de la 2.ª, $4ab^3$ cuádruplo de la 1.ª multiplicado por el cubo de la 2ª y b^4 4ª potencia de la 2ª b. Ultimamente, se prevendria en los números dividirlos de cuatro en cuatro notas, usar de una de es-

tas divisiones en cada operacion, no contando con las tres últimas cifras para dividendo, poner cero cuando este no contenga al divisor, y todo lo demas que dejamos advertido en la estraccion de la raiz cuadrada y cúbica.

162 Si se observan los términos de las potencias anteriores, se verá que el esponente de a en el 1.^{er} término es el que indica el grado de la potencia, y en los demas va disminuyendo de 1. El esponente de b es siempre 1 en el 2.° término, y en los siguientes va creciendo de una unidad hasta llegar en el último al grado de la potencia; de suerte que los términos de la potencia 6.^{a} no contando con los coeficientes son $a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6$. Advirtiendo que cuando una de las partes b es negativa, son negativos los términos impares en que se encuentra b, b^3, b^5 &c.

En cuanto á los coeficientes, el del 1.° es siempre 1, el del 2.° es el 1er esponente de a dividido por el 1.° de b, el del 3.° el producto de los dos primeros esponentes de a dividido por el producto de los dos primeros esponentes de b: el del 4.° el producto de los tres primeros esponentes de a dividido por el producto de los tres primeros de b; y así de los demas. Los de dicha potencia sesta por eg. erán $1, \frac{6}{1}, \frac{6.5}{1.2}, \frac{6.5.4}{1.2.3}, \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}, \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5},$

$\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}=1$: y toda la potencia con letras y coeficientes será $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

163 Finalmente, si se nos pidiese una potencia general, v. gr. la potencia m de $a+b$, serian sus términos sin coeficientes $a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+a^{m-3}b^3+a^{m-4}b^4+$ &c. hasta el infinito: y los coeficientes solos $\frac{m}{1}$, $\frac{m.m-1}{1.2}$, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$, $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$ &c. y toda la potencia m de $a+b$ ó $(a+b)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3+$ &c. Y como $a^{m-1}=\frac{a^m}{a}$, $a^{m-2}=\frac{a^m}{a^2}$ &c. se podrá mudar en esta $a^m+\frac{ma^mb}{1.a}+\frac{m.m-1\ a^mb^2}{1.2.a^2}+\frac{m.m-1.m-2\,a^mb^3}{1.2.3.a^3}+$ &c.

164 Por medio de esta fórmula que inventó el inmortal Newton, y de cuya construccion tratarémos adelante; es muy facil elevar una cuantidad á cualquiera potencia dividiéndola en dos partes que se igualan á a y b, suponiendo m la potencia que se pide, y poniendo en lugar de los términos de la formula los valores que les corresponden.

165 Pero su principal utilidad está en la

facilidad con que se sacan por ella las raices próximas de las potencias imperfectas, de que pondrémos algun otro egemplo en enseñando á manejar las cuantidades radicales, que suelen intervenir en dichos cálculos.

ARTICULO IV

Cálculo de las cuantidades Radicales

166 Cuando una cuantidad se ha transformado segun dejamos dicho (140), en otra igual que no tiene el signo $\sqrt{\ }$, se puede sumar, restar, multiplicar, partir, subir á sus potencias y extraer de ella cualquiera raiz por las mismas reglas que hemos dado para las cuantidades algébricas.

Y asi $\sqrt{a}$ y $\sqrt[3]{a^2}$ transformados en $a^{\frac{1}{2}}$ y $a^{\frac{2}{3}}$, suman $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{2}{3}}$: se diferencian en $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{2}}$: su producto es $a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$ sumando sus esponentes (109): su cociente es $a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}}$ restando los esponentes (116): su cuadrado $a^{\frac{1}{2}.2} = a^{\frac{2}{2}} = a$, y $a^{\frac{2}{3}.2} = a^{\frac{4}{3}}$; y su raiz cúbica $a^{\frac{1}{2.3}} = a^{\frac{1}{6}}$, y $a^{\frac{2}{2.3}} = a^{\frac{2}{9}}$. La suma $b^{\frac{t}{n}}$ y $b^{\frac{r}{m}}$ es $b^{\frac{t}{n}} + b^{\frac{r}{m}}$, su diferencia $b^{\frac{t}{n}} -$

$b^{\frac{r}{m}}$, su producto $b^{\frac{t}{n}} b^{\frac{r}{m}} = b^{\frac{tm+nr}{nm}}$, su cociente $b^{\frac{tm-nr}{nm}}$: su potencia h, $b^{\frac{th}{n}}$ y $b^{\frac{rh}{m}}$, y su raiz q, $b^{\frac{t}{nq}}$ y $b^{\frac{r}{mq}}$.

Tambien $a^{\frac{2}{5}} + b^{-\frac{3}{4}}$ es la suma de $a^{\frac{2}{5}}$ y $b^{-\frac{3}{4}}$: $a^{\frac{2}{5}} - b^{-\frac{3}{4}}$ su diferencia: $a^{\frac{2}{5}} . b^{-\frac{3}{4}} = \ldots\ldots$ $\dfrac{a^{\frac{2}{5}}}{b^{\frac{3}{4}}}$ su producto: y $\dfrac{a^{\frac{2}{5}}}{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{3}{4}}$ su cociente: su potencia p, $a^{\frac{2p}{5}}$, $b^{\frac{3p}{4}}$; y su raiz q, $a^{\frac{2}{5q}}$, $b^{\frac{-3}{4q}}$

167 Como los términos que forman el esponente quebrado de estas cuantidades son los esponentes del radical y de las cuantidades; siempre que estos puedan dividirse por un mismo número, quedará mas sencillo el radical. $\sqrt[4]{b^2}$ por eg. que es $b^{\frac{2}{4}} = b^{\frac{1}{2}}$, equivale á $\sqrt{b}$, dividiendo 4 y 2 por 2: $\sqrt[6]{a^{15}} = a^{\frac{15}{6}} = a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$, dividiendo por 3. Y por lo mismo la raiz 4.ª de a^8 se podrá sacar estrayendo dos veces la cuadrada; por ser $\sqrt[4]{a^8} = \sqrt{a^4} = a^2$: la raiz 6.ª de b^{12} sacando la

cúbica y despues la cuadrada; pues $\sqrt[6]{b^{12}} = \sqrt[2]{b^4} = b^2$. En general, la estraccion de cualquier raiz se podrá dividir en las operaciones de raices inferiores que indiquen los factores de sus esponentes. La 8.ª por eg. sacando tres veces la cuadrada, ó primero la 4.ª y despues la cuadrada; por ser $8 = 2\times2\times2 = 4\times2$.

168 Asímismo siempre que de alguno de los factores de la cuantidad radical pueda estraerse la raiz; se la podrá poner antes del signo $\sqrt{\ }$ á manera de coeficiente, y como tal multiplicará toda la cuantidad sin haber variado su valor, y haciéndola mas sencilla.

Con efecto, la cuantidad $\sqrt[3]{a^3b^6c} = \sqrt[3]{c\times a^3b^6}$, sacando del factor a^3b^6 la raiz cúbica ab^2, se reducirá á $ab^2\sqrt[3]{c}$; porque $\sqrt[3]{a^3b^6c} = a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}c^{\frac{1}{3}} = ab^2\sqrt[3]{c}$.

Si en $\sqrt{(m^3n+8m^2n^2+16mn^3)}$ descompongo la cuantidad en los dos factores $(m^2+8mn+16n^2)\times mn$, y saco la raiz cuadrada del 1.º que es $m+4n$, y la pongo por coeficiente al radical, quedará reducido á $(m+4n)\sqrt{mn}$: (por coeficiente de un radical entendemos aqui toda la cuantidad que le multiplica).

$2\sqrt{\left(\frac{27a^2b^5+x^2-45a^2b^4}{4}\right)}$, que se descompone en $2\sqrt{(3bx^2-5t)}\,\frac{9a^2b^4}{4}$ equivale, sacando de

$\frac{9a^2b^4}{4}$ la raiz $\frac{3ab^2}{2}$, y multiplicándola por el coeficiente 2, á $3ab^2\sqrt{(3bx^2-5t)}$.

167 De consiguiente cuando se quiera meter bajo del signo $\sqrt{\ }$ alguna cuantidad que le anteceda como coeficiente, se deberá subir antes á la potencia que indique el radical, y multiplicar por ella despues las cuantidades que haya bajo de dicho signo, ó partirlas si estaba dividiendo.

Para meter bajo del signo radical $3a$ en $3a\sqrt{bc}$, le subiré á su cuadrado $9a^2$, y multiplicándole por bc, tendré $3a\sqrt{bc} = \sqrt{9a^2bc}$. $\frac{3}{c}\sqrt[3]{\left(\frac{c-n}{d+3}\right)}$ es lo mismo que $\sqrt[3]{\left(\frac{27c-27n}{c^3d+3c^3}\right)}$, multiplicando $\frac{c-n}{d+3}$ por $\frac{27}{c^3}$: últimamente, .. $\frac{2}{c-d}\sqrt{(a-2d)}$ equivale á $\sqrt{\left(\frac{4a-8d}{c^2-2cd+cd^2}\right)}$.

168 Luego un radical $a\sqrt[n]{\frac{b}{c}}$ podrá multiplicarse ó partirse por una cuantidad cualquiera m así, $am\sqrt[n]{\frac{b}{cm^n}}$ sin variar de valor; pues $a\sqrt[n]{\frac{b}{c}} = \frac{am}{m}\sqrt[n]{\frac{b}{c}} = am\sqrt[n]{\frac{b}{cm^n}}$: y nos podremos valer de este medio para reducir á entero cualquier quebrado que esté antes ó den-

tro de un radical: por eg. $b\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = b\sqrt[n]{ac^{-1}} =$ $b\sqrt[n]{ac^{-1}\times\frac{c^n}{c^n}} = b\sqrt[n]{\frac{ac^{n-1}}{c^n}} = \frac{b}{c}\sqrt[n]{ac^{n-1}}$.

169 Si se transforman las cuantidades generales $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ de diferentes esponentes en sus iguales $a^{\frac{1}{m}}$ y $b^{\frac{1}{n}}$, ó en $a^{\frac{n}{mn}}$ y $b^{\frac{m}{mn}}$ reduciendo los quebrados á un mismo denominador; se tendrá, volviéndolas al radical, $\sqrt[mn]{a^n}$, $\sqrt[mn]{b^m}$ que tienen ya un mismo esponente mn. Luego *para reducir dos radicales á un mismo esponente, se han de multiplicar los esponentes entre sí, y subir despues la cuantidad de cada radical al esponente que indique el otro.*

Para reducir $\sqrt[2]{8}$ y $\sqrt[3]{5}$ á un mismo esponente, se multiplican 2 por 3, se sube el 8 al cubo, y el 5 al cuadrado, y resultan $\sqrt[2.3]{8^3}$, $\sqrt[2.3]{5^2}$, esto es, $\sqrt[6]{512}$ y $\sqrt[6]{25}$: $\sqrt[4]{\frac{6ab}{}}$ y $\sqrt[5]{\frac{2bt}{3a}}$ se reducen á $\sqrt[4.5]{\left(\frac{6ab}{c}\right)^5}$ y $\sqrt[4.5]{\left(\frac{2bt}{3a}\right)^4}$ ó $\sqrt[20]{\frac{7776a^5b^5}{c^5}}$ y $\sqrt[20]{\frac{16b^4a^4}{81a^4}}$ Ultimamente $\sqrt[2]{\left(\frac{c-d}{4}\right)}$ y $\sqrt[3]{\left(\frac{2+d}{a-n}\right)}$ hechos de un mismo

esponente, son $\sqrt[2.3]{\left(\frac{c-d}{4}\right)^3}$ y $\sqrt[2.3]{\left(\frac{2+d}{a-n}\right)^2}$ ó $\sqrt[6]{\left(\frac{c^3d-3c^2+3cd^2-d^3}{64}\right)}$ y $\sqrt[6]{\left(\frac{4+4d+d^2}{a^2-2an+n^2}\right)}$

Cuando haya tres ó mas radicales que reducir, se multiplican entre sí todos los esponentes, y se eleva la cuantidad de cada radical á la potencia indicada por el producto de los esponentes de los otros: $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{\frac{bc}{2}}$ y $\sqrt[4]{\frac{x^2c}{m}}$ se reducen á $\sqrt[2.12]{(ab)^{12}}$, $\sqrt[3.8]{\left(\frac{bc}{2}\right)^8}$, $\sqrt[4.6]{\left(\frac{x^2c}{m}\right)^6}$, que son $\sqrt[24]{a^{12}b^{12}}$, $\sqrt[24]{\frac{b^8e^8}{256}}$ y $\sqrt[24]{\frac{x^{12}c^5}{m^6}}$.

170 Esto supuesto, *las cuantidades radicales se suman escribiéndolas con sus propios signos: se restan mudando en sus contrarios los signos del sustrahendo y reduciendo las que haya semejantes, es decir, las de un mismo esponente, y de una misma cuantidad bajo del signo* $\sqrt{}$.

La suma de $\sqrt{(c-d)}$ y $\sqrt[3]{\frac{6b^5}{5}}$, es $\sqrt{(c-d)} + \sqrt[3]{\frac{6b^5}{5}}$: y su diferencia $\sqrt{(c-d)} - \sqrt[3]{\frac{6b^5}{5}}$: la suma de $5b\sqrt[3]{(x+a)}$ y $-4\sqrt[5]{bc^2}$, es $5b\sqrt[5]{(x+a)}-4\sqrt[5]{bc^2}$, y su diferencia $5b\sqrt[5]{(x+a)}+4\sqrt[5]{bc^2}$: la suma de $5bc^2\sqrt[3]{8}$, y $6bc^2\sqrt[3]{8}$ es reduciendo, $11bc^2\sqrt[3]{8}$: la de $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ y $\frac{3}{5}\sqrt[3]{4}$ es reduciendo tambien, $\frac{19}{15}\sqrt[3]{4}$: haciendo la misma reduccion se hallará que la diferencia de $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+b)}$ y $\frac{2}{b}\sqrt[4]{(a+b)}$ es $\frac{ab-4}{2b}\sqrt[4]{(a+b)}$. Ultimamente, la suma de $7c\sqrt{a}$ y $\sqrt{36ac^2}=6c\sqrt{a}$ (168), es $13c\sqrt{a}$: y la diferencia de $\sqrt[3]{(a^4+2a^3b)}$ y $\sqrt[3]{(8ab^3+16b^4)}$ que se reducen á $a\sqrt[3]{(a+2b)}$ y $2b\sqrt[3]{(a+2b)}$ es, restando sus coeficientes, $(a-2b)\sqrt[3]{(a+2b)}$.

171 *Para multiplicar los radicales se hacen de un mismo esponente si no lo son, y se multiplican las cuantidades que están antes y bajo del signo* $\sqrt{}$. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ se multiplica por $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}$ reduciéndolos á $\frac{2}{3}\sqrt[6]{27}$ y $\frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{a^2}{9}}$, de un mismo esponente, y multiplicando despues $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{2}$ y 27 por $\frac{a^2}{9}$; de que resulta $\frac{2}{6}\sqrt[6]{\frac{27a^2}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt[6]{3a^2}$. El producto de......... $5\sqrt{(c+d)}$ por $6a\sqrt{(c+d)}$, es $30a\sqrt{(c+d)^2}=30a(c+d)$: y generalmente el de $n\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ por $\frac{c}{a}\sqrt[m]{\frac{t}{z}}$ es $\frac{cn}{d}\sqrt[m]{\frac{at}{bz}}$. El producto de $\frac{3cd^2}{4}$ cuantidad racional, por $\sqrt[3]{(\frac{b}{3}-d)}$, es.......... $\frac{3cd^2}{4}\sqrt[3]{(\frac{b}{3}-d)}$.

172 *Tambien se parten dichos radicales haciéndolos de un mismo esponente y dividiendo despues las cuantidades que están antes y bajo del signo* $\sqrt{}$. De suerte que el cociente de $\frac{3}{4}\sqrt{b}$ partido por $7a\sqrt[4]{\frac{c}{d}}$ ó de $\frac{3}{4}\sqrt[8]{b^4}$ y $7a\sqrt[8]{\frac{c^2}{d^2}}$ es, dividiendo $\frac{3}{4}$ por $7a$, y b^4 por $\frac{c2}{d^2}$, $\frac{3}{28a}\sqrt[8]{\frac{b^4d^2}{c^2}}=\frac{3}{28a}\sqrt[4]{\frac{b^2d}{c}}$. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}\,(c+d)$ partido por $\frac{a^2}{4}\sqrt[3]{\frac{2-c}{3}}$, da $\frac{8}{3a^2}\sqrt[3]{(\frac{9c+9d}{2-c})}$. Un radical $2c\sqrt{(t-2)}$ se divide por una cuantidad racional $7b^2\,n$ escribiéndolas así $\frac{2c\sqrt{(t--2)}}{7b^2-n}$: y si el denominador se quiere meter bajo del radical, se egecuta segun lo dejamos enseñado (167): $\sqrt{(c^2x^2-c^2b^2)}$ partido por $x-b$ es

$$\frac{\sqrt{(c^2x^2-c^2b^2)}}{x-b}=\frac{c\sqrt{(x^2-b^2)}}{x-b}=$$

$$c\sqrt{(\frac{(x^2-b^2)}{(x-b)^2})}=c\sqrt{(\frac{(x+b)(x-b)}{(x-b)^2})}=c\sqrt{\frac{x+b}{(x-b)}}.$$

173 *Los radicales se suben á las potencias, subiendo primero sus coeficientes y dividiendo despues sus esponentes por los de las potencias cuando dan cociente exacto; pues sino, es mejor subir á dichas potencias las cuantidades que están bajo del signo* $\sqrt{}$. El cuadrado de $\sqrt[4]{2a}$ es $\sqrt[\frac{4}{2}]{2a}=$

$\sqrt[6]{2a}$: el cubo de $2\sqrt[3]{\left(\frac{a-3}{2}\right)}$ es $8\sqrt[2]{\left(\frac{a-3}{2}\right)}$: pero la potencia n de $c\sqrt[3]{ab^2}$, en lugar de escribirla así, $c^n \overset{3}{\overset{n}{\sqrt{\vphantom{b}}}}\, ab^2$ se representa mejor asi, $c^n\sqrt[3]{a^n b^{2n}}$.

174 *Para estraer las raices de dichas cuantidades se multiplican sus esponentes por los de las raices, despues de haberlas sacado de los coeficientes que las tengan exactas, ó haber metido bajo del radical los que no.* La raiz cuadrada de $9\sqrt{bc}$ es $3\sqrt[2.2]{bc} = 3\sqrt[4]{bc}$: la cúbica de $\frac{2}{5}\sqrt{(t-a)}$ que se reduce á $\sqrt{\frac{4(t-a)}{25}}$, por no tener $\frac{2}{5}$ raiz cúbica; es $\sqrt[2.3]{\frac{4(t-a)}{25}} = \sqrt[6]{\frac{4(t-a)}{25}}$: y en general la raiz n de $\sqrt{\frac{a}{b}}$ es $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}}$

175 El que quiera razon de las reglas que acabamos de prescribir, trasforme las cuantidades radicales en sus iguales con esponentes quebrados, y la encontrará al instante. Y adviertase que observando dichas reglas y el método que se ha seguido con las cuantidades polinomias, será fácil calcular cualesquiera espresiones que consten de dos ó mas términos radicales.

176 Digimos (138) que era imposible

ó *imaginaria* la raiz par de una cuantidad negativa $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-ab^4}$.... porque toda raiz positiva ó negativa produce positivas todas sus potencias pares, $a \times a = a^2$, $-a \times -a = a^2$: $b \times b \times b \times b = b^4$, y $-b \times -b \times -b \times -b = b^4$. Estas que son verdaderas cuantidades, pues $-a^2$ nace de $a \times -a$, $-b^4$ de $b^2 \times -b^2$; ocurren con frecuencia en los cálculos para manifestar cuándo es imposible una cosa; y se calculan por las mismas reglas que acabamos de dar. Pero por cuanto pueden ocurrir algunas dudas cuando se multiplican ó parten, añadirémos aquí algunos egemplos. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ es $\sqrt{(-a \times -a)} = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = -a$, que es de quien aqui se formó a^2. Y nótese que $(-a)^2$ cuadrado de $-a$, es diferente de $-a^2 = a \times -a$. $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = -\sqrt{bc}$: porque $\sqrt{-b}$ es lo mismo que $\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$, y $\sqrt{-c}$ lo mismo que $\sqrt{c} \times \sqrt{-1}$: luego $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c}$ será $\sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$, ó $\sqrt{bc} \times \sqrt{(-1)^2}$ que es $-\sqrt{bc}$. Por la misma razon $\sqrt{-b}$ partido por $\sqrt{-c}$ ó $\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$ partido por $\sqrt{c} \times \sqrt{-1}$, es $\sqrt{\frac{-1.b}{-1.c}} = \sqrt{\frac{b}{c}}$. Así como la raiz cuadrada de a puede ser $\sqrt{a}$ ó $-\sqrt{a}$: pues $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$, y $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = -\sqrt{a^2} = a$; así tambien $\sqrt{-a}$ y $-\sqrt{-a}$ son raices cuadradas de $-a$; pues..... $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = +\sqrt{(-a)^2} = -a$, y $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +\sqrt{(-a)^2} = +-a = -a$ (103). Si $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -\sqrt{(-a)^2} = --a = a$; será el producto de las imaginarias una cuantidad real, si se multiplican en número par, y tienen bajo del signo $\sqrt{}$ una misma cuantidad. Esto sucede tambien cuando se multiplican dos binomios que tengan una misma cuantidad imaginaria con signos contrarios, como $(a\text{-}\sqrt{\ b})\times(a+\sqrt{-b})$ que es $aa+a\sqrt{-b}-a\sqrt{-b}+b=a^2+b$.

177 Volviendo ya á la fórmula de Newton $a^m+ma^{m-1}b+\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2+$ &c. Supongamos su 1.^r término $a^m=A$, será el 2.° $ma^{m-1}b=\frac{ma^m b}{a}=\frac{mAb}{a}$; si este se llama B, será el 3.° $\frac{m.m-1a^{m-2}b^2}{1.2}=\frac{m.m-1a^mb^2}{1.2a^2}=\frac{(m-1)Bb}{2a}$: llamando á este C, será el 4.° $\frac{m.m-1.m-2a^{m-3}b^3}{1.2.3}=\frac{m.m-1.m-2a^m b^3}{1.2.3.a^3}=\frac{(m-2)Cb}{1\times2\times3\times a}$: y continuando de esta manera quedará la fórmula reducida á esta, mucho mas sencilla, $a^m+\frac{mAb}{a}+\frac{(m-1)Bb}{2a}+\frac{(m-2Cb}{3a}+\frac{(m-3)Db}{4a}+\frac{(m-4)Eb}{5a}$ &c. en la que cada término se forma del anterior multiplicado por $\frac{b}{a}$ y por uno de los coeficientes m, $\frac{m-1}{2}$,

$\frac{m-2}{3}$ &c. Todo esto se demostrará mas adelante.

Consideremos ahora que estraer la raiz cuadrada de una cuantidad, es subirla á la potencia $\frac{1}{2}$, estraer la raiz cúbica, subirla á la potencia $\frac{1}{3}$; y estraer la raiz n subirla á la potencia $\frac{1}{n}$: de consiguiente si para sacar el valor $\sqrt{(b^2+c^2)}$, ó de $(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$, supongo $b^2=a$, $c^2=b$, y $\frac{1}{2}=m$; y substituyo estos valores en la fórmula, tendré $a^m=(b^2)^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{2}{2}}=b$: $\frac{mAb}{a}=\frac{1}{2}\times b\times\frac{c^2}{b^2}=\frac{c^2}{2b}$: $\frac{(m-1)Bb}{2a}=-\frac{1}{4}\times\frac{c^2}{2b}\times\frac{c^2}{b^2}=-\frac{c^4}{8b^3}$: y haciendo igual substitucion en los demas términos, resultará $\sqrt{(b^2+c^2)}=(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}=b+\frac{c^2}{2b}-\frac{c^4}{8b^3}+\frac{c^6}{16b^5}-\frac{5c^8}{128b^7}+\frac{7c^{10}}{256b^9}-$ &c. Del mismo modo se hallará $\sqrt{(b^2-c^2)}=(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}=b-\frac{c^2}{2b}-\frac{c^4}{8b^3}$ &c.

Con igual facilidad se encontrará el valor $\sqrt[3]{(b^2\pm c^2)}$, $\sqrt[4]{(b^2\pm c^2)}$ &c. y se aplicará á la estraccion de la raiz cúbica, cuarta &c. próxima de cualquier cuantidad, del modo que vamos á aplicar el valor de $\sqrt{(b^2+c^2)}$ á sacar la raiz cuadrada próxima de 6.

Divídase en dos partes 4 y 2, de las cuales la 1.ª ha de ser cuadrado perfecto, pongase en la espresion $b+\frac{c^2}{2b}-\frac{c^4}{8b^3}+$ &c. 4 en lugar de b^2, y 2 en lugar de c^2 y se tendrá $\sqrt{(b^2+c^2)}=\sqrt{(4+2)}=\sqrt{6}=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{5}{1024}+$ &c. Los dos primeros términos 2 y $\frac{1}{2}$ componen $\frac{5}{2}$, cuyo cuadrado $\frac{25}{4}$ escede á 6 en un $\frac{1}{4}$: luego si se supone $\frac{25}{4}=b^2$ y $c^2=-\frac{1}{4}$ se tendrá substituyendo estos valores en la fórmula, $\sqrt{(b^2-c^2)}=\sqrt{(\frac{25}{4}-\frac{1}{4})}=\sqrt{6}=\frac{5}{2}-\frac{1}{20}=\frac{49}{20}$, valor muy próximo de $\sqrt{6}$ y que se pueda aproximar aun mas. Haciendo $8=9-1$, y suponiendo $b^2=9$, $c^2=1$; se tendrá la raiz de 8, calculando los tres primeros términos, $\frac{611}{216}=3-\frac{37}{216}$ que es bastante próxima.

ARTICULO V.

Razones, proporciones y progresiones.

178 *La comparacion de una cuantidad cualquiera* 8 *con otra de la misma especie* 12 *para ver lo que la una escede á la otra*, se llama *razon aritmética*; la diferencia $12-8=4$ que resulta de esta comparacion, *esponente de la razon*, el 8 que se compara *antecedente*, el 12 á quien se compara *consecuente*, y los dos *términos de la relacion*. La razon aritmética de 7 á 15, que se escribe así, 7.15, es

$15-7=8$, y la de b á d o $b.d$, es $b-d$ ó $d-b$.

179 Como la diferencia sumada con el término menor debe componer el mayor, y restada del mayor ha de dar el menor; se tendrá en la razon 8.12, $8=12-4$, y en 7.15, $15=7+8$; luego en la razon general $a.b$, si el esponente es d, será $a=b+d$, si a es mayor que b, y $a=b-d$ si es menor. Será pues $a=b\pm d$: es decir, que *el antecedente de cualquiera razon aritmética, es igual al consecuente mas ó menos la diferencia.*

180 Las razones serán mayores, menores ó iguales segun que sean mayores, menores ó iguales sus esponentes: y como no se muda la diferencia de dos cuantidades por que se añada ó quite á ambas una misma cuantidad; tampoco variará el valor de las razones aritméticas porque se añada ó quite al antecedente y consecuente una misma cuantidad. La razon de 5.9 es la misma que la de $5+3.9+3$; $5-3.9-3$; porque todas tienen el mismo esponente 4: y en general $a.b$ tiene la misma razon que $a\pm m.b\pm m$, cuyo esponente es en ambos casos $a-b$.

181 Cuando comparamos dos razones aritméticas iguales $3.7,5.9$ diciendo de 3 á 7 hay la misma diferencia que de 5 á 9, ó 3 *es aritméticamente á* 7 *como* 5 *á* 9; formamos una *proporcion aritmética*, que se escribe así, $3.7:5.9$; $a.b:c.d$ quiere decir a *es aritméticamente á b como c á d.* El 1.º y 4.º

términos de la proporcion se llaman *estremos*, y el 2.º y 3.º *medios*. Las proporciones en las que los medios son iguales como $3.5:5.7$, $a.b:b.c$ se llaman *continuas*, y se escriben asi, $\div 3.5.7$, $\div a.b.c$; el término repetido se llama *medio aritmético proporcional*.

182 En toda proporcion aritmética *la suma de los términos estremos es siempre igual á la de los medios*: y aunque es facil verificarlo en cualquiera proporcion como en $3.7:5.9$, donde $3+9=7+5=12$; lo demostrarémos generalmente en la proporcion general $a.b:c.d$. Suponiendo que el esponente de sus dos razones sea m, será (179) $a=b\mp m$, y $c=d\mp m$; pongamos ahora en la proporcion en lugar de a y c sus iguales $b\mp m$, $d\mp m$, y se convertirá en esta $b\mp m.b:d\mp m.d$, en la que la suma de los estremos y la de los medios es $b\mp m+d$.

183 Luego 1.º en la proporcion continua será la suma de los estremos igual al duplo del término medio, esto es, en $\div 3.5.7$, $3+7=2\times 5$: y en $\div a.b.c$, $a+c=2b$: *y el término medio de una proporcion aritmética continua será la mitad de la suma de los estremos*, ó $5=\frac{3+7}{2}$, y $b=\frac{a+c}{2}$. De consiguiente si dadas dos cuantidades 6, 14 se me pidiese un medio aritmético para formar con las tres una proporcion continua; sumaria 6 y 14; y 10 mitad de la suma 20,

será el medio, y la proporcion $\div 6.10.14$.

184 2.º Si dados tres términos de una proporcion aritmética, se pide el otro, "si »es uno de los estremos, se restará de la »suma de los medios el otro estremo, y si »es uno de los medios, restando el otro de »la suma de los estremos, saldrá el término »que se busca." Si dados $3.7:8....$ se nos pidiese el 4.º, restaremos de $7+8=15$ el 1.º 3, y la diferencia 12 completará la proporcion, que será $3.7:8.12$: el 2.º 7 se hubiera sacado restando de $3+12=15$, el 3.º 8.

185 Una serie de razones aritméticas continuas $3.5:5.7:7.9:9.11:11.13$.&c., ó abreviando $\div 3.5.7.9.11.13$.&c. forma una *progresion aritmética*, que es *una serie de términos que restados cada uno del inmediato dan una misma diferencia, y por eso se llaman equidiferentes*. Los que median entre el 1.º y el último se llaman *medios proporcionales aritméticos*. Cuando hay que añadir sucesivamente la diferencia á cada término para sacar el siguiente; los términos aumentan, y la progresion se llama *crescente*, como $\div 3.3+2.5+2.7+2$. &c. Si la diferencia se ha de restar de cada termino para formar el siguiente, menguan, y se llama *decrescente*: como en $\div 20.20-3.17-3.14$ 3 &c. Como con solo invertir los términos se puede la decrescente hacer crescente, hablarémos de esta solamente.

186 Tendremos pues, que llamando a el 1.^{r} término de una progresion aritmética y d la diferencia, será el 2.^{o} término $a+d$ el 3.^{o} $a+2d$, el 4.^{o} $a+3d$.... y el último siendo n el número de ellos, $a+(n-1)d$: y será $\div a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.\, a+3d \,.\, a+4d ...$ $a+(n-1)d$, una progresion aritmética general. En ella se ve que el 2.^{o} término es el 1.^{o} y la diferencia, el 3.^{o} el 1.^{o} y dos diferencias, el 4.^{o} el 1.^{o} y tres diferencias, y cualquier término será el 1.^{o} y tantas diferencias como términos le anteceden. Luego de una progresion cuyo 1.^{r} termino es 3 y la diferencia 2, se podrá sacar el término 10.^{mo} tomando el primero 3 y nueve diferencias; esto es, $3+2\times9=21$: el término 20mo será $3+19\times2=41$.

187 Si del último término de una progresion quitamos el 1.^{o} y el residuo que son las diferencias, lo dividimos por el número de las que hay, es decir, por el número de términos de la progresion menos uno; saldrá de cociente la diferencia de los términos. Asi se ve en $a+(n-1)d$ último término de la progresion general, donde restando a y dividiendo $(n-1)d$ por $n-1$, resulta la diferencia d.

188 Luego si dadas dos cuantidades 2 y 32, se me pidiesen cinco medios aritméticos para formar con ellos una progresion aritmética de siete términos; restaria del último término 32 el primero 2, y dividiendo el residuo 30 por 6, número de términos de la progresion menos uno, ó número de medios que se piden mas uno; me saldria la diferencia 5, que añadida al 1.^{r} término 2, al 2.^{o} y á los demas, me dará los cinco medios $2+5$, $7+5$, $12+5$, $17+5$, $22+5$; que juntos á 2 y 32 componen la progresion $\div 2.7.12.17.22.27.32$.

"En general, para hallar un número
»cualquiera de medios aritméticos entre dos
»cuantidades dadas; se resta la menor de la
»mayor, y se divide el residuo por el nú-
»mero de medios mas uno: el cociente es la
»diferencia de los términos, que añadida al
»2.^{o} da el 3.^{o} añadida á este da el 4.^{o} y asi
»de los demas." Para interpolar entre 3 y 7 seis medios aritméticos; divido la diferencia 4 entre 3 y 7, por 7 número de medios mas uno; y añadiendo el cociente $\frac{4}{7}$, que es la diferencia de la progresion, á 3, y sucesivamente á los demas, tendré los seis medios $3\frac{4}{7}$, $4\frac{1}{7}$, $4\frac{5}{7}$, $5\frac{2}{7}$, $5\frac{6}{7}$, $6\frac{3}{7}$, y la progresion $\div 3.\,3\frac{4}{7}.\,4\frac{1}{7}.\,4\frac{5}{7}.\,5\frac{2}{7}.\,5\frac{6}{7}.\,6\frac{3}{7}.\,7$.

189 Si tomamos una progresion aritmética de cualquier número de términos v. gr. de siete, el 1.^{o} y el 7.^{o} componen dos primeros y seis diferencias, y de lo mismo constan el 2.^{o} y 6.^{o}, el 3.^{o} y 5.^{o} y el duplo del 4.^{o} como se ve en la progresion general $\div a.$ $a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d,a+6d$, donde

cada dos términos de los dichos suman $2a+6d$, "Luego en toda progresion aritmética la su-„ma de los términos estremos es igual á la de „cada dos términos igualmente distantes de „los estremos, ó al duplo del término medio „si el número de terminos es impar." Con efecto, en la progresion $\div 3.5.7.9.11.13.15.17\ldots$ cada dos de dichos términos suman 20.

190 De aquí se infiere que todos los términos de esta progresion sumarán cuatro veces 20 que son 80: y generalmente que la *suma de todos los términos de una progresion aritmética será la suma de los estremos multiplicada por la mitad del número de términos.* Para sumar los 99 términos de la progresion $\div 1.2.3.4.5\ldots$ hasta 99 de los números naturales; sumaré 1 y 99, y multiplicando 100 por $\frac{99}{2}$, mitad del número de términos; tendré $\frac{9900}{2}=4950$, suma que se busca.

El número de campanadas que da el relox en 12 horas, ó la suma de la progresion $\div 1.2.3\ldots12$, es $(1+12)\times\frac{12}{2}=78$. El número de pasos que daría el que cogiese cien naranjas colocadas la 1.ª á un paso de un cesto, y las otras un paso cada una de las demas, habiéndolas de echar una á una en el cesto; esto es, la suma de la progresion $\div 2.4$ hasta 200, sería $(200+2)\times\frac{100}{2}=10100$ pasos.

191 Hablemos ya de la *razon geométrica*

en la que *se compara una cuantidad cualquiera* 3, *que es el antecedente con un consecuente* 12, *para ver las veces que la una cabe en la otra*: el cociente $\frac{12}{3}=4$, es el *esponente de la razon* de 3 á 12 que se escribe así, $3:12$; $a:b$ representa la razon geométrica de a á b, cuyo esponente es $\frac{b}{a}$. En cualquiera de ellas el esponente ó cociente multiplicado por el antecedente que supondremos en lo sucesivo que es el divisor, debe producir el consecuente que será el dividendo (47). En la razon $3:12$, $3\times4=12$; y si suponemos que el esponente $\frac{a}{b}$ de la razon $a:b$ es q, será $aq=b$, y $a:b$ será lo mismo que $a:aq$.

192 Las razones se valúan por sus esponentes; de suerte que siendo estos iguales, lo serán las razones: y no variando de valor un cociente porque se multipliquen ó partan el dividendo y divisor por una misma cuantidad (55); tampoco se *variará el valor de una razon geométrica porque se multipliquen ó partan su antecedente y consecuente por una misma cuantidad.* Y así será una misma la razon de $6:18$ que la de $6\times2:18\times2$, y que la de $\frac{6}{2}:\frac{18}{2}$, que tienen todas por esponente á 3. Generalmente, $a:b$, $a\times m:b\times m$, $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$ son tres razones iguales que tienen un mismo esponente $\frac{b}{a}$.

193 La razon se llama *dupla* cuando el antecedente cabe dos veces en el consecuente, como la de 2:4; $3a:6a$: *tripla*, cuando cabe tres veces, como la de $a.3a$: *cuádrupla*, cuando cabe cuatro veces: y entonces las razones de 4:2, $6a:3a$ se llaman *subdruplas*, la de $3a:a$ *subtripla*, &c.: á la de 2:3 llaman *sesquiáltera*. *Razon irracional* es aquella cuyo valor no puede ser espresado en números enteros ó quebrados, como la de $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$: cualquier otra es *racional*, y aun muchas de las que contienen inconmensurables, como la de $2\sqrt{6}$: $3\sqrt{6}$ cuyo esponente es $\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=\frac{3}{2}$.

194 El producto de dos ó mas razones, multiplicando entre sí los antecedentes y consecuentes, se llama *razon compuesta*: 2×5: 3×7, ó 10:21 es compuesta de las dos 2:3, 5:7, $amt:bcd$ se compone de las tres $a:b, m:c, t:d$. Si las razones componentes son iguales y son dos, la compuesta que resulta, se llama *duplicada* como 4:9, producto de las dos iguales 2:3, 2:3; 3:12 que se compone de las dos iguales 1:2, 3:6. La compuesta de tres razones iguales se llama *triplicada* como 48:162, compuesta de las tres iguales 2:3, 4:6, 6:9 &c. Al contrario, las razones componentes están en razon *subduplicada*, *subtriplicada*.... de sus productos. Como la razon de los cuadrados $a^2:b^2$ se compone de las dos $a:b$, $a:b$ de sus raices; la de los cubos $a^3:b^3$ de las tres $a:b$, $a:b$, $a:b$; estarán los cuadrados en razon duplicada, los cubos triplicada... de sus raices; y estas en razon subduplicada, subtriplicada de sus cuadrados y cubos.

195 »La comparacion de dos razones »iguales geométricas 2:3, 6:9 por eg. forma una *proporcion geométrica*, que se escribe así, 2:3::6:9, y quiere decir, la misma razon geométrica hay de 2 á 3 que de 6 á 9, ó 2 *es á* 3 *geométricamente como* 6 á 9; $a:b::c:d$ se lee así, *a es á b geométricamente como c es á d*. Tambien se llama *continua* la proporcion geométrica que tiene los términos medios iguales, como 2:6::6:18; $a:b::b:d$ que se escriben así $\div$ 2:6:18,....$\div a:b:d$; y el término repetido 6 y *b* se llama *medio proporcional geométrico*.

196 *En toda proporcion geométrica es el producto de los términos estremos igual al producto de los medios.* Esta utilísima propiedad que se puede probar en cualquiera proporcion númerica 2:3::6:9, donde $2\times9=3\times6=18$; se demuestra generalmente en la proporcion $a:b::c:d$, suponiendo que sea q el esponente de las dos razones $a:b, c:d$, en cuyo caso será (191) $b=aq$, y $d=cq$, pónganse aq y cq en la proporcion en lugar de c y d, y se convertirá en esta $a: aq :: c: cq$, en la que el producto de estremos y medios es acq.

197 En la proporcion continua es el producto de los estremos igual al cuadrado del término medio. En $\div$ 2: 4: 8 se tiene $2+8=$

$(4)^2=16$; y en $\div a:b:c$, $b^2=a\times c$: de consiguiente, si se saca la raiz de estas dos cuantidades iguales resultará $b=\sqrt{a\times c}$: es decir, *el término medio de una proporcion geométrica es igual á la raiz cuadrada del producto de los estremos.*

198 Como cada proporcion geométrica da dos productos iguales; tambien de dos productos iguales se podrá formar una proporcion geométrica. Si de la proporcion $a:b::c:d$ sacamos $ad=bc$ (196), tambien de $ad=bc$ sacarémos $a:b::c:d$; pero se deben disponer los factores de suerte que los del un producto formen los estremos, y los del otro los medios de la proporcion. Si se tubiese por eg. $3ab=am^2$; será $3a:a::m^2:b$, ó $3b:m::am:a$... donde el producto de estremos y medios es $3ab=am^2$. De $mn-an=bd-d$ ó $(m-a)n=(b-1)d$, se saca $m-a:b-1::d:n$. En $1-a^2=b^2d$ ó $(1-a)(1+a)=b^2d$ se tiene $1-a:b^2d::1:1+a$: y últimamente, $a^2-b^2=1$ da la proporcion $\div a+b:1:a-b$.

199 Aquí se ve que pueden variar de sitio los términos de una proporcion, sin dejar de ser proporcionales. Si $a:b::c:d$; tambien será $a:c::b:d$; lo que se llama comparar *alternando*: ó *invirtiendo*, $b:a::d:c$; ó *componiendo*, $a+b:b::c+d:d$; $a:a+b::c:c+d$; ó *dividiendo*, $a:a-b::c:c-d$, $a-b:b::c-d:d$; ó *componiendo y dividiendo*, $a+b:a-b::c+d:c-d$ &c. En todas estas y otras proporciones

que se pueden formar, el producto de estremos y medios se reduce á $ad=bc$.

200 Si se multiplican ó parten los términos correspondientes de dos ó mas proporciones, los productos ó cocientes serán tambien porporcionales. Si $a:b::c:d$ y $m:n::t:r$, será $am:bn::ct:dr$, y $\frac{a}{m}:\frac{b}{u}::\frac{c}{t}:\frac{d}{r}$: porque siendo en las dos prorporciones el producto de estremos y medios igual; será $ad=bc$ y $mr=nt$: luego serán tambien $admr=bcnt$, y $\frac{ad}{mr}=\frac{bc}{nt}$; y como estos son los productos de estremos y medios de $am:bn::ct:dr$, $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{t}:\frac{d}{r}$, serán proporcionales sus términos (198).

201 Multiplicadas dos proporciones iguales á $a:b::c:d$, darían de producto sus cuadrados $a^2:b^2::c^2:d^2$; tres sus cubos $a^3:b^3::c^3:d^3$ &c. luego si cuatro cuantidades son propocionales, lo serán tambien sus cuadrados, cubos y demas potencias, y lo mismo sus raices; de suerte que si $a:b::c:d$ será generalmente $a^m:b^m::c^m:d^m$ y $a^{\frac{1}{m}}:b^{\frac{1}{m}}::c^{\frac{1}{m}}:d^{\frac{1}{m}}$ ó $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}::\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$.

202 "En cualquier número de razones »iguales geométricas $a:b$, $c:d$, $e:f$ $g:h$ &c. »estan siempre en proporcion la suma de to»dos los antecedentes á la de los consecuen»tes como un antecedente á su consecuente,

»ó como cualquier número de antecedentes »á igual número de consecuentes." Siendo las razones iguales, deberán tener un mismo esponente: llamémosle q, y será (191), $b=aq$, $d=cq$, $f=eq$, $h=gq$, y las razones se mudarán en estas $a:aq$, $c:cq$, $e:eq$, $g:gq$... En las que se tiene $a+c+e+g:aq+cq+eq+gq::a:aq::a+c:aq+cq::a+c+e:aq+cq+eq$: pues todas estas razones tienen un mismo esponente q.

203 Si se comparan los trabajadores de una obra con los jornales que ganan, diciendo, si tres obreros ganan 40 rs. 6 obreros ganarán 80 rs. la proporcion 3*obrs*: 6*obrs*:: 40*rs*. 80*rs*. en la que el 1.^{r} término es al 2.^{o} como el 3.^{o} al 4.^{o}, se llama *directa*; pues al paso que sea mayor ó menor el número de obreros, será mayor ó menor el de los reales: lo cual se llama *ir de mas á mas, ó de menos á menos.*

204 Pero si se compara el número de obreros con el de los dias que emplean en hacer una obra, así; si 3 obreros gastan 80 dias en hacer una obra, 6 obreros tardarán en ella 40 dias, la porporcion 3 *obrs*: 6 *obrs*:: 80*d*: 40*d*; se llama *indirecta*, *inversa* ó *recíproca*; porque mientras mas obreros hay, menos dias tardarán; es decir, que va *de mas á menos* ó *de menos á mas*; y hay que mudar de sitio á uno de los términos para que la proporcion 3:6::40:80 quede directa. Dicese pues, que *los jornales estan en razon directa de los obreros, y estos en razon inversa de los dias.*

205 Si se multiplican ó parten los cuatro términos de una proporcion geométrica por cualquier cuantidad 2,3,4..m, resultan productos, ó cocientes proporcionales; pues ni la multiplicacion ni la division altera el valor de las razones (191): si fuese pues $a:b::c:d$; será $2a:2b::2c:2d$; $3a:3b::3c:3d$......$ma:mb::mc:md$; $\frac{a}{2}:\frac{b}{2}::\frac{c}{2}:\frac{d}{2}$; $\frac{a}{3}:\frac{b}{3}::\frac{c}{3}:\frac{d}{3}$; $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$; y cualesquiera cuantidades estarán en la misma razon que sus duplos, triplos, cuádruplos &c. y en la misma que sus mitades, tercios, cuartos &c.

206 De esta última proposicion se infiere que *dos quebrados* $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ *de un mismo denominador están en la misma razon que sus numeradores*; pues dividiendo por m los términos de la razon $a:b$, resulta $a:b::\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$. Pero si los quebrados tubiesen un mismo numerador *estarán en razon inversa de los donominadores*; es decir, que el 1.^{r} quebrado es al 2.^{o} como el 2.^{o} denominador es al 1.^{o}, ó $\frac{a}{m}:\frac{a}{n}::n:m$. Porque la razon $\frac{a}{m}:\frac{a}{n}$ es la misma que $\frac{an}{mn}:\frac{an}{mn}$ reduciéndola á un mismo deno-

minador; esta es como la de sus numeradores $an:am$, y esta como $n:m$, dividiendo por a ambos términos.

207 Si dados los tres términos de una proporcion geométrica 2:9::4.... se me pidiese el 4.°; consideraré el producto de los medios 9×4 ó 36 como si fuese el de los estremos (96), y dividiéndole por 2 que es uno de ellos, tendré el otro $\frac{36}{2}=18$ que completa la proporcion 2:9::4:18. Para encontrar el 2.° dados los demas 2..::4:18; se toma el producto 2×18 de los estremos, como si fuese el de los medios, y dividiéndolo por el un medio 4, dará el otro $\frac{36}{4}=9$ que se busca. En general *el producto de los estremos de una proporcion dividido por el un medio, y el producto de los medios dividido por uno de los estremos debe dar el otro término.*

Usos de las proporciones geométricas.

Reglas de tres simple, de tara, de seguro, de avería, de trueque, de ganancia ó pérdida.

208 Este método de encontrar cualquiera de los términos de una proporcion geométrica conocidos los otros tres, tiene un uso universal en todos los ramos de matemáticas, y proporciona la solucion de infinidad de cuestiones curiosas, utiles y necesarias en el trato y comercio de la sociedad. De ellas vamos á

tratar, enseñando la práctica de las que se llaman *Reglas de tres*, y de las demas que á ellas se reducen, por medio de algunos egemplos: en los que para hacer mas sencilla su solucion, los reduciremos todos á encontrar el 4.° término de la proporcion dividiendo el producto del 1.° y 3.° por el 1.°

Egemp. 1.° *Un navio que ha caminado con igual viento 875 leguas en 6 dias ¿cuantas caminará en 4 dias con las mismas circunstancias?* Como en menos dias se caminan menos leguas irá la proporcion de menos á menos, y será directa: luego sus términos conocidos se colocarán así, 6 *d*: 4*d*:: 875 *leg*.... y el 4.° se encontrará multiplicando los medios 4×875, y dividiendo el producto 3500 por el 1.° 6: de que resulta $\frac{4\cdot875}{6}=\frac{3500}{6}=583\frac{1}{3}$, número de leguas que se busca.

2.° *Si 36 V. de tapia 2 P. y 3. p. cuestan 60dob. 2rs. 4mrs. ¿cuánto costarán 48 V. 1 P. 4 p.* Como á proporcion de las varas aumenta su importe; será la proporcion directa, y los términos reduciéndolos á su menor especie, serán 1323*p*: 1744*p*:: 122472 *mrs*.... donde multiplicando el 2.° por el 3.° y partiendo el producto 213591168 por el 1.° será el 4.° término reducido, 79 *dob.* 8 *rs.* y $12\frac{756}{1323}$ *mrs.*

3.° *¿En cuantos dias abrirán 20 hombres un foso de las mismas dimensiones, que 16* *hombres abrieron en* 8 *dias?* Mas hombres han de tardar ménos dias; con que la proporcion será indirecta, y así en lugar de poner 16 *homb*: 20*h*:: 8 *dias*... pondrémos (204) 20 *h*: 16 *h*:: 8*d*... multiplico 16 por 8, y parto el producto 128 por 20, y tendré 6 *dias*, 9 *hor*. y 36.′

4.° *Presta A á B* 100 *dob. por 6 meses con condicion de hacer otro tanto B con A; pero llegando el caso, B no puede darle mas que* 75 *dob. se pregunta cuánto mas tiempo podrá retenerlos para compensar con la tardanza lo que falta de la cuantidad.* Mientras ménos doblones le dió, mas tiempo puede tardar en volverselos; luego la proporcion es indirecta, y debe colocarse así, 75 : 100 :: 6... donde multiplicando 100 por 6, y dividiendo el producto por 75, resultan 8 meses.

5.° *En una plaza cercada que espera socorro á los* 30 *dias, hay solo víveres para* 20 *dias; y se pregunta á qué se debe reducir la racion de cada dia.* Si representamos por 1 la racion que se da á cada uno al dia; será la proporcion 20 *d*: 30 *d*:: 1..., y como la racion debe ser tanto menor cuantos mas dias haya que esperar; será indirecta, y se trocará en esta 30*d* : 20 *d* : : 1... donde resultan $\frac{20.1}{30} = \frac{2}{3}$, á que se debe reducir la racion.

209 6.° *Un mercader que compra* 16 *cajones de azucar que pesan* 4000 *lib. ¿cuántas*

ha de pagar en limpio rebajando el 12 *por* 100 *por el peso de los cajones?* En este caso de la regla de *tara* se hace 100 + 12 : 100 :: 4000: al 4.° término, que es $3571\frac{48}{112}$ *peso* neto que debe pagar. En la de *Seguro* para averiguar lo que deberia pagar á quien se obligase á responder de los peligros del trasporte de dicha azucar por un 12 por 100; se diria 100: 12::4000:480. Al contrario, si los géneros valuados en 4000 *pe.* hubieran padecido *avería* regulada en 12 por 100; se hubiera hecho tambien 100 : 12::4000 : 480 *pe.* y esta cuantidad se deberia descontar de los 4000 *pe.*

210 7.° *Si una vara de paño vale en dinero* 80 *rs. y trocado por terciopelo* 88*rs; el terciopelo que vale á* 96 *rs, á cuánto debe subir en el trueque?* Para resolver esta pregunta de la regla que llaman de *barata* ó *trueque*, haré la proporcion 80 : 88 : : 96: $\frac{96.88}{80}$, y tendré 105*rs* y $20\frac{3}{5}$*mrs*, valor del terciopelo trocado.

8.° *La libra de chocolate vale en dinero* 8 *rs. y en trueque* $8\frac{1}{2}$; *¿á cuánto ha de subir el café que vale al contado* 16 *rs., pagándose la* 4.ª *parte en dinero?* Rebajada la 4.ª parte de los dos precios $8\frac{1}{2}$ y 8, quedan 6 *rs.* 12 *mrs.* y 6*rs.* despues de lo cual diré, si 6 *rs.* montan á 6*rs* y 12*mrs*, 16 *rs.* á cuánto subirán? saco el 4.° término, y tendré 16 *rs.*y 32 *mrs.*

9.° Regla de *ganancia. Uno vendió en* 3615 *pe. un género que le habia costado* 2500 *pe.* ¿*cuánto ganó por* 100? Resto 2500 de 3615, y pues quedan 1115; diré, 2500 dió 1115, 100 qué dará? y sacaré por 4.° término 44 *pe.* y 9 *rs.*

10.° *Un género que vale á* 8 *rs. la libra* ¿*á cómo se ha de vender para ganar* 10 *por* 100? Sumo 10 con 100, y digo despues, 100 dan 110, 8 qué dará? y tendré 8 *rs.* y 27 *mrs.*

211 11.° *A compra á* B *en géneros importe de* 1000 *rs. fiados por un año, y* B *le ofrece descontar un* 10 *por* 100, *si se los paga de contado; se pregunta cuánto debe darle?*

En esta pregunta, que incluye la regla que llaman de *descuento*, hay que buscar una cuantidad que puesta á ganancias á 10 por 100, produzca en un año 1000. Digo pues, si 100+10 ó 110 vienen de 100, 1000 de cuanto vendrá? esto es, 110:100::1000:.....

$$\frac{1000.100}{110}=909\tfrac{1}{11}r,$$ número de reales que debe dar *A* á *B*. Si se hubiera dicho 100 quedan en 90, 1000 en cuántos quedarán? hubieran salido 900; pero como 900 puestos á ganancias á 10 por 100, solo produce 990 por la proporcion 100:110::900:990; no es esto lo que se pide.

12.° *A un mercader que debe* 1000 *rs. pagaderos dentro de un año, se le rebajan* 5 *por* 100 *pagando de contado* ¿*cuánto deberá* *dar pagando á los* 4 *meses*? Rebajándose 5 por 100 por adelantar la paga 1 año; se rebajará $3\frac{1}{3}$ por adelantarla 8 meses, haciendo 12 *meses*: 8::5:$3\frac{1}{3}$; con que si $103\frac{1}{3}$ vienen de 100, 1000 vendrán de $967\frac{23}{31}$ *rs.* que debe dar.

La espresion de ganar ó perder 3, 4, 5, 6, 10... por 100, se indica en el comercio así 3, 4, 5, 6, 10... por $\frac{o}{o}$. En las escrituras de redencion ó subrogacion de censos, en lugar de 5 ó 4 ó 3 por 100, se usa de las espresiones veinte mil al millar; veinte y cinco mil al millar, treinta y tres mil y un tercio al millar; que equivalen á cada 20 reditua 1, cada 25 reditua 1, cada $33\frac{1}{3}$ reditua 1. Como cuando se ganan 2, 4, 5, 10... por 100, indican las razones 2:100, 4:100, 5:100, 10:100 que se toma de las $\frac{1}{50}$, $\frac{4}{100}$ ó $\frac{1}{25}$, $\frac{5}{100}$ ó $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{10}$; bastará sacar del capital $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{10}$... para tener la ganancia ó la pérdida.

Regla de tres compuesta, y Regla conjunta.

212 Cuando en la pregunta intervienen mas términos que los cuatro, se llama *compuesta* la regla de tres; y se reduce á simple formando una razon compuesta de la multiplicacion de todas las razones (194) menos la del término incognito, despues de haber comparado con esta cada una de las demas para convertir en directas las que sean indirectas.

Eg. 1.° *Si* 20 *homb. hacen* 160 *v. de obra* *en* 15 *dias* ¿30 *homb. en* 12 *dias cuantas harán*? Comparo la 1.ª razon diciendo: si 20 *homb.* hacen 160 *v.* 30 *h.* harán mas, y la proporcion será directa: digo despues para comparar la razon de los dias, si en 15 *d* se hacen 160 *v.* en 12 *d.* se harán ménos, y tambien será la proporcion directa: formo pues de las dos razones 20*h*: 30*h.* 15*d.* 12*d.* la compuesta 20×15:30×12 ó 300:360, considerando que el trabajo de 20 *h.* en 15 *d.* es el mismo que el de 1 *h.* en 300 *d.* y tendré la proporcion sencilla 300:360:: 160 *v.* á 192 *v.* que resultan de multiplicar 360 por 160 y dividir el producto por 300. Siempre que el 1.º y 2.º terminos de la proporcion puedan dividirse por un mismo número como en 300: 360 que son divisibles por 60, se debe hacer la division para que quede 5: 6 mucho mas sencilla y del mismo valor (192).

2.º *Un jornalero trabajando 7 horas al dia gana en 40 dias 100 pesos ¿cuantos dias necesita para ganar 150 trabajando 10 horas cada dia?* Comparo las razones asi: trabajando 7 horas al dia se necesitan 40 dias para cierta ganancia; trabajando 10 horas al dia se necesitarán ménos dias: luego la proporcion es indirecta, y en lugar de 7 *hor*: 10 *hor.* se deberá poner 10: 7. La otra proporcion es directa; pues si se ganan 100 *pes.* en 40*d.* 150*pe.* se ganaran en mas *d.* Formo pues, la razon 100×10: 150×7 compuesta

de 10:7 y 100:150, y despues la proporcion 100×10: 150×7::40.... es decir, 1000: 1050:: 40: ó reduciendo la 1.ª razon, 20:21::40... ó últimamente 2:21::4:42, número de dias, que salen multiplicando 4 por 21 y dividiendo 84 por 2.

213 A esta regla pertenecen la que se llama *Conjunta*, por la que dados diferentes géneros con sus precios, ó diferentes medidas, monedas, pesos con sus valores, se averigua el de cierta porcion de cualquiera de ellos.

3.º *Seis libras de azucar valen 7 lib. de miel, 5 lib. de miel 4 v. de cinta, 10 v. de cinta 40 nueces de especia, y 7 nueces 10 rs. ¿cuantos reales valdrán 3 lib. de azucar?* En lugar de las cuatro proporciones siguientes

6 *lib. az*: 7 *lib. de miel* :: 3 *l. az*: $3\frac{1}{2}$ *miel*,
5 *l. miel*: 4 *v. cint.*:: $3\frac{1}{2}$ *miel*: $2\frac{4}{5}$ *v. cint.*
10 *v. cint*: 40 *nuec*:: $2\frac{4}{5}$ *v. cint*: $11\frac{1}{6}$ *nuec.*
7 *nuec*: 10 *rs* :: $11\frac{1}{5}$ *nuec*: 16 *rs.*

por las que se averigua lo que se pide; formo de las cuatro razones 6:7, 5:4, 10:40, y 7:10 la razon compuesta 6×5×10×7:7×4×40×10, y despues la proporcion 6×5×10×7:7×4×40×10::

3 *lib*: $\frac{7.4.40.10.3}{6.5.10.7}$, donde de una vez se encuentran 16 *rs.* valor de 3 lib. de azucar, quitando en el 4.º término para abreviar el cálculo los factores comunes 7 y 10.

4.º *Si 3 lib. tornesas de Francia valen*

32 *dineros esterlines de Inglaterra*, 240 *de estos dineros* 408 *dineros gros de Holanda*, 50 *de estos* 190 *mrs. ¿ cuantos mrs. valdrán* 60 *libras tornesas?* Formo la proporcion

$$3\times240\times50:32\times408\times190::60:\frac{32.408.190.60}{3.240.50},$$ y

tendré $4134\frac{2}{5}$ *mrs.* á que equivalen las 60 lib. tornesas.

Regla de compañías.

214 Por la regla de tres se divide tambien una cuantidad en partes que tengan entre sí cualquier razon: y porque esta operacion se suele aplicar á repartir entre los que componen alguna junta de comercio, las pérdidas ó ganancias á proporcion de lo que cada uno ha puesto en el fondo ó principal; se llama *regla de compañías.* Esplicarémosla en los egemplos siguientes.

1.° *De tres que se juntan á comerciar el* 1.° *pone* 250 *pes. el* 2.° 300 *y el* 3.° 330: *ganaron* 20000 *rs. y se quiere saber cuanto toca á cada uno.*

Cada asociado debe percibir á correspondencia de lo que puso; con que habrá que dividir el número 20000 en tres partes, que tengan la misma razon que los números 250, 300, 330. Para esto, sumados dichos números diré, 880 suma de lo que pusieron, es á 20000 que ganaron; como lo que cada uno

puso á lo que ganó, que viene á ser la proporcion demostrada ya (208). Hago pues, las reglas de tres que aparecen, y me resultarán las tres ganancias, advirtiendo que en

$$11:250::250:\frac{250.250}{11}=5681\tfrac{9}{11}$$

$$11:250::300:\frac{300.250}{11}=6818\tfrac{2}{11}$$

$$11:260::330:\frac{330.250}{11}=7500$$

Suma................. 20000.

la operacion se reduce la razon 880: 20000 á su igual y mas sencilla 11:250.

Si se divide 20000 por 880 se tendrán $22\frac{8}{11}$ por la ganancia que corresponde á un peso, y esta multiplicada sucesivamente por 250, 300, 330 dará mas brevemente la de cada comerciante, fundándose en la regla de tres 1 *pe.* da $22\frac{8}{11}$, 250 *pe.* darán &c.

2.° *Dos hicieron compañía por* 6 *años: el* 1.° *puso* 150 *dob. por el dicho tiempo, el* 2.° *puso* 310, *y al fin del año* 3.° *quitó* 140; *pero al comenzar el* 6.° *añadió* 100. *Perdieron* 5000, *y se pregunta lo que toca á cada uno de pérdida.*

En estos casos en donde hay diferencia de tiempo, se multiplica lo que cada uno pone por el número de años que lo tiene puesto, y asi queda reducido el caso al anterior. Con efecto, los 150 *dob.* que el 1.° tubo ganando todos los 6 años, equivalen á 150×6= 900 *dob.* que se empleasen un año: y como el 2.° tubo empleados 310 los tres primeros años, 170 los dos siguientes, y 270 el último año; sumaré 310×3, 170×2 y 270, y será 1540 la puesta del 2.° Divido despues 5000 por 2440 suma de 900+1540, y el cociente $2\frac{3}{61}$ perdida de 1 *dob.* multiplicado por 900 y despues por 1540 dará para el 1.° $1844\frac{16}{61}$ de perdida, y para el 2.° $3155\frac{45}{61}$, que ambas componen 5000.

3.° *Se pide dividir un batallon de 600 hombres en tres partes tales que la 1.ª sea á la 2.ª como 2: 3, y la 1.ª á la 3.ª como 4 :5.* Este caso tiene de particular que se piden tres partes y se dan cuatro números, porque la 1.ª está espresada con los dos 2 y 4. Para reducirlos á uno, coloco las dos razones asi, $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{4}$; y reduciéndolas á un mismo denominador serán $\frac{12}{8}$, $\frac{10}{8}$ ó 8: 12 y 8: 10 de un mismo valor y con solos tres números 8, 10, 12 en cuya razon se han de dividir los 600 soldados. Sumo pues 8, 10 y 12, divido 600 por la suma 30, y multiplicando el cociente 20 por 8, 10 y 12, tendré 160, 200 y 240 que son las partes que se piden.

Regla de aligacion

215 La regla de aligacion enseña el modo de hallar el precio medio de cualesquiera cosas que se mezclan, ó la porcion que se ha de tomar de cada uno de los ingredientes que

componen cierta mezcla. Vease su práctica en los egemplos siguientes.

1.° *Si se mezclasen 30 cántaros de vino de 19 rs. con 10 cántaros de á 23 rs. y se quisiese saber qué precio debe tener cada uno de los 40 cántaros mezclados*; sacaré 1.° lo que valen los 30 á 19 *rs.* y los 10 á 23, y sumando 30×19=570, con 10×23=230, será el valor de todos los cántaros mezclados 800 *rs*: divídolos entre el número 40 de cántaros; y saldrá cada uno con 20 *rs.* de valor, que es el precio medio: luego *este debe ser siempre el cociente del importe ó valor de la mezcla dividido por el número de especies mezcladas.*

2.° *Un labrador tiene trigo de á 30 rs. la fanega, y trigo de á 35; y quiere saber cuánto ha de mezclar de cada especie para que le resulte de 32 rs.*

Para que el trigo de á 30 *rs.* suba en calidad hasta 32; hay que mejorarle en dos grados, que se le deberán subir echándole trigo de á 35: al contrario los tres grados en que el trigo de á 35 escede al de 32, se le deberán rebajar con el trigo inferior de á 30: luego las diferencias que hay entre el precio medio y los estremos serán los números que espresen la razon en que se han de mezclar los ingredientes que han de componer la mezcla. Tomo pues, la diferencia de 30 á 32 y póngola frente de 35, y frente del 30 la diferencia entre 32 y 35, y

	30,3
Precio medio	32
	35,2

tendré que á cada 3 fanegas de á 30 *rs.* se deben mezclar 2 de á 35 para componer trigo de á 32.

Cuando hay mas de dos especies, como si con trigo de á 26, 30 y 35 *rs.* se pidiese hacer trigo de á 32; despues de haber tomado las diferencias de 35 y 30 á 32, se tomarán las de 28 y 35 á 32, poniendo la 1.ª frente de 32 35 y la 2.ª frente del 28; como se ve en el egemplo:

$$35..2+4=6$$
$$30..3$$
$$28..3$$

y diremos que á cada 6 fanegas de á 35 se meclan 3 de á 28 y tres de á 30 para que resulte trigo de á 32. Lo mismo se practicaria con cuatro, cinco ó mas especies: es decir, que de cada vez se deben tomar dos especies una mayor y otra menor que la media, y restarlas de ella, colocando la diferencia de cada especie frente de la otra.

Es preciso advertir que el número de fanegas que ha de componer la mezcla no se limita á los solos números que salen de diferencia, sino que se pueden mezclar todos los que tengan la misma razon que ellos. En el 1.er egemplo se puede hacer trigo de á 32 mezclando, no solo 3 fanegas de á 30 y 2 de á 35, sino cualesquiera números que esten en la razon de 3: 2. Si se tubiese por eg. 68 fanegas de trigo de á 35 y se pidiese, cuántas

se le han de mezclar de á 30: haria la siguiente regla de tres; *á cada 2 fanegas de á 35 se mezclan 3 de á 30, á 68 cuántas se han de mezclar?* esto es, $2:3::68:\frac{204}{2}=102$, que son las fanegas que se buscan.

Ultimamente, si queriendo hacer una mezcla de 120 fanegas de á 32 *rs.* con trigo de á 30 y 35, quisiese saber cuántas habia de mezclar de cada especie; tendria que dividir 120 en razon de 3:2, y me resultarian 72 fanegas de 30, y 48 de 35 *rs.*

$$3+2:120::\begin{cases}3:\frac{120.3}{5}=72\\[4pt] 2:\frac{120.2}{5}=48\end{cases}$$

Regla de falsa posicion sencilla y doble.

216 Por la regla de *falsa posicion* se encuentra un número incognito por medio de otro *supuesto*, conforme se ve en los siguientes egemplos.

1.º *Se pide un número cuyo tercio, cuarto y quinto sume* 376. Si supongo que sea 60, cuyo tercio 20, cuarto 15 y quinto 12 suman 47: haré con esta suma con 60 y 376 esta regla de tres, $47:376::60:\frac{376.60}{47}=480$: es decir, *47 tercio, cuarto y quinto de 60, es á 376 tercio, cuarto y quinto del número que busco; como 60 es á* 480: número cuyo tercio 160, cuarto 120 y quinto 96 compone 376.

2.º *El libro que un impresor imprime en 30 dias, otro en 25 y otro en 20, se pregunta en cuántos lo imprimirán todos juntos.* Supongo que sea en 1 dia; y pues el 1.º imprime en este tiempo $\frac{1}{30}$ del libro, el 2.º $\frac{1}{25}$, y el 3.º $\frac{1}{20}$; todos juntos imprimirán en 1 dia la suma de $\frac{1}{30}+\frac{1}{25}+\frac{1}{20}$, que es $\frac{1850}{15000}=\frac{37}{300}$. Digo pues, *si* $\frac{37}{300}$ *del libro se imprime en un dia*, $\frac{300}{300}$ que es todo el libro, *en cuantos se imprimirá?* esto es, $\frac{37}{300}:\frac{300}{300}$ ó $37:300::1:\frac{300}{37}=8\frac{4}{37}$ *dias.*

Cuando no alcanza á satisfacer la pregunta una suposicion, se hacen dos, y se llama la regla de *falsa posicion doble*, como se verá en los casos siguientes.

1.º *Se quieren dividir 300 dob. entre tres, de manera que al 2.º toque el duplo del 1.º y 10 mas, y al 3.º tanto como á los dos menos 4.* Si supongo que se den al 1.º 20, tocarán al 2.º $2\times20+10=50$, y al 3.º $20+50-4=66$: y como las tres partes $20+50+66$ suman solo 136 en lugar de 300, salen de equivocacion 164, que señalo con el signo —: (si la suma hubiera pasado de 300, hubiera notado el esceso con el signo +).

$20 — 164$
$40 — 44$

Supongo ahora que la parte del 1.º sea 40; serán $80+10=90$ la del 2.º, y $40+90-4=126$ la del 3.º, la suma de las tres $40+90+126$ es 256: y el error -44.

Multiplico ahora cada número supuesto por el error del otro, y restando el un producto $20\times44=880$ del otro $40\times164=6560$,

dividiré la diferencia 5680 por la diferencia 120 de los errores y tendré de cociente $47\frac{1}{3}$ parte del 1.º De consiguiente, la del 2.º es $94\frac{2}{3}+10=104\frac{2}{3}$, y la del 3.º $47\frac{1}{3}+104\frac{2}{3}-4=148$. Con efecto, $47\frac{1}{3}+104\frac{2}{3}+148$ componen 300. Cuando los errores tienen diferente signo, despues de multiplicar cada número por el error del otro, se suman los productos y se divide la suma por la de los errores.

217 Para demostrar generalmente el metodo de practicar esta regla, sean a y b los números supuestos, c y d sus errores y m el número que se busca: y como los errores son tanto menores ó mayores cuanto es menor ó mayor la diferencia entre el número supuesto y el verdadero serán proporcionales los errores c, d á las diferencias $m-a$, $m-b$, entre los números supuestos y el verdadero, esto es, será $c:d::m-a:m-b$: *y dividiendo*, (199), $c-d:d::m-a-m+b:m-b$, ó $c-d:d::b-a:m-b=\frac{bd-ad}{c-d}$, multiplicando el 2.º término por el 3.º y partiendo por el 1.º Si á este valor de $m-b$ se añade b, se tendrá el de m que será $\frac{bd-ad}{c-d}+b=\frac{bd-ad+bc-bd}{c-d}=\frac{bc-ad}{c-d}$ que es la diferencia entre los productos de cada número supuesto por el error del otro dividida por la diferencia de los errores. Estos se han supuesto del mismo signo: pero

si se lo mudamos á uno, y ponemos d en lugar de $+d$ en la espresion $\frac{bc-ad}{c-d}$; se convertirá en esta $\frac{bc+ad}{c+d}$, que es la suma de dichos productos partida por la de los errores, conforme lo dejamos dicho.

2.º *Si 24 varas de lienzo y 35 de tela han costado 752 rs. y cada vara de tela ha costado doble de cada vara de lienzo: á ¿cómo han costado el lienzo y la tela?*

Si supongo 6*rs.* por el precio de cada vara de lienzo, será 12 el de cada vara de tela; las 24 varas de lienzo importan 144 y las 35 de tela 420, que componen 564: luego el 1.er error es -188. Si supongo 9 *rs.* por la vara de lienzo, será 18 la de tela, 216 *rs.* el importe de las primeras, 630 el de las otras, y la suma de todas 846; luego el segundo error será $+94$. Sumo pues, (por tener distintos signos los errores) los productos 6×94 y 9×188 de cada número supuesto por el error del otro, y partiendo la suma 2256 por 282 suma de los errores, tendré de cociente 8, que es el precio de cada vara de lienzo; luego el de cada vara de tela es $2\times8=16$. En efecto, las 24 varas de lienzo á 8 *rs.* ó 192 junto con 560 importe de las 35 de tela á 16 *rs.*, componen 752 *rs.*

3.º *De dos jugadores el mas diestro ha puesto 12 rs. contra 8 cada juego; despues de*

10 juegos el otro le paga 20 rs. ¿cuántos juegos ganó el 1.º?

Si hubiera ganado 5, serian otros 5 los que ganó el otro, á quien le hubiera tenido que dar 20 *rs.* luego el error es -40: si hubiera ganado 6, ganando el otro 4 hubieran quedado en paz, y es el error -20. Resto ahora los dos productos 5×20 y 6×40 de cada número supuesto por el error del otro (por tener los errores un mismo signo) y partiendo la diferencia 140 por 20 diferencia de los errores, tendré de cociente 7, que son los juegos que ganó el 1.º

Progresiones geométricas.

218 Una serie de razones geométricas continuas 2:4::4:8::8:16::16:32 &c. forman una *progresion geométrica*, que se escribe así $\div$ 2:4:8:16:32... y *es una serie de términos que divididos cada uno por el anterior dan una misma cuantidad de cociente.* Los que median entre el primero y último se llaman *medios proprocionales geométricos.* Tambien se llama *crescente* ó *decrescente* segun que los términos aumentan ó van menguando, ó segun que el esponente es mayor ó menor que la unidad: $\div$2:4:8:16:32 &c. es crescente, y $\div$32:16:8:4:2 &c. decrescente. Hablaremos en lo sucesivo de la 1.ª puesto que á ella se reduce la otra con solo invertir

los términos, y que por consiguiente debe tener unas mismas propiedades.

219 Si suponemos que sea a el 1.^{r} término de una progresion geométrica y q el cociente ó esponente de la progresion, será el 2.° $a\times q=aq$, el 3.° $aq\times q=aq^2$, el 4.° $aq^2\times q=aq^3$, el 5.° aq^4.... es decir que cada término se compondrá del 1.° multiplicado por el cociente elevado á una potencia del mismo grado que el número de términos que le antecede. El 8.° por eg. será en la progresion propuesta $a\times q^7=aq^7$.... el término n al que anteceden $n-1$ de términos, será $a\times q^{n-1}$: y toda la progresion $\div\div\ a: aq: aq^2: aq^3: aq^4..... aq^{n-1}$. Luego el término 10.^{mo} de la progresion $\div\div\ 3:6:12:24$... cuyo esponente es 2, será $3\times2^9=3\times512=1536$. Si suponemos que sea 1 el 1.^{r} término a de la progresion general, se reducirá á esta $\div\div\ 1: q:q^2:q^3: q^4:q^5.....q^{n-1}$, que representa las potencias sucesivas de q; y nos muestra 1.° que dichas potencias de cualquiera cuantidad forman una progresion geométrica: 2.° que toda serie de términos cuyos esponentes forman una progresion aritmética, están en progresion geométrica.

220 Si el último término aq^{n-1} de la progresion general $\div\div a:aq:aq^2....aq^{n-1}$ se divide por el 1.° a, se tendrá de cociente q^{n-1}, esponente elevado á la potencia $n-1$, número de términos de la progresion menos

uno, de donde sacando la raiz $n-1$ resulta $\sqrt[n-1]{q^{n-1}}=q$, esponente de la progresion. De consiguiente, si dadas dos cuantidades a, aq^8 se pidiese buscar entre ellas un número cualquiera siete de medios geométricos; dividiré, considerándolas como el 1.° y último términos de una progresion de nueve términos, la mayor aq^8 por la menor a, y sacando de su cociente q^8 la raiz 8.^{a}, indicada por el número de términos menos uno ó de medios mas uno; tendré q, que será el cociente ó esponente de la progresion. Multiplícole por a, y tendré aq 1.^{r} medio, vuelvo á multiplicar por q este y los que vayan saliendo: y tendré los demas aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6, aq^7, y será toda la progresion $\div\div\ a:aq:aq^2: aq^3:aq^4: aq^5: aq^6: aq^7: aq^8$.

Si se pidiese entre 4 y 972 cuatro medios geométricos; se dividirá el último término 972 por el 1.° 4, y sacando de su cociente 243 la raiz 5.^{a} se tendrá 3 esponente de la progresion; por el que se multiplicará el 4 y los que vayan saliendo: serán pues 12, 36, 108, 324 los cuatro medios geométricos, y toda la progresion $\div\div\ 4:12:36:108:324:972$.

221 Segun lo que dejamos demostrado (192), en la progresion general $\div\div a: aq: aq^2: aq^3$..... entre a^2 y a^2q^2 cuadrados del 1.° y 2.° términos, hay el mismo cociente q^2, que entre a y aq^2 1.° y 3.° términos: luego en

cualquier progresion geométrica el 1.^{r} término es al 3.° como el cuadrado del 1.° al del 2.° ó $a:aq^2::a^2:a^2q^2$. Por la misma razon es el 1.^{r} término al 4.° como el cubo del 1.° al cubo del 2.° pues en $a:aq^3::a^3:a^3q^3$ tienen las razones un mismo esponente q^3. Esto quiere decir, que en cualquier progresion geométrica la razon del 1.^{r} término al 3.° es duplicada de la que tiene al 2.° la que tiene al 4.° es triplicada de la del 1.° al 2.°: la qué tiene al 5.° cuadruplicada &c.

222 Si tomamos cualquier número de términos por egemplo siete de una progresion geométrica, el producto del 1.° y el 7.°, el del 2.° y 6.°, el del 3.° y 5.° y el cuadrado del 4.° ha de ser uno mismo; pues en todos será el cuadrado del 1.° multiplicado por la 6.ª potencia del cociente. Veamoslo en la progresion general ∹ $a: aq: aq^2: aq^3: aq^4$ $aq^5: aq^6$, donde $a\times aq^6$, $aq\times aq^5$, $aq^2\times aq^4$, y $aq^3\times aq^3$ componen un mismo producto a^2q^6. Si tomamos la progresion ∹ 3:6:12:24:48:96, hallaremos tambien que 3×96, 6×48, y 12×24 producen 288. Luego en cualquier progresion geométrica *el producto de los términos estremos es igual al de dos cualesquiera términos igualmente distantes de los estremos, ó al cuadrado del término medio si el número de términos es impar.*

223 Siendo una progresion geométrica cualquiera ∹ 2:4:8:16:32 &c. una serie de

razones continuas 2:4::4:8::8:16::16:32 &c. serán antecedentes todos sus términos ménos el último, y consecuentes todos menos el 1.°; de suerte que si llamamos s la suma de todos los términos de una progresion geométrica, a el 1.°, aq el 2.° y b el último; será $s-b$ la suma de todos los antecedentes, y $s-a$ la de todos los consecuentes: y siendo (202) la suma de todos los antecedentes de una serie de razones, á la de los consecuentes como un antecedente á su consecuente; esto es, $s-b: s-a::a: aq$, ó $aq: a:: s-a: s-b$; será dividiendo (199), $aq-a:a::s-a-s+b:s-b$; que se reduce á $aq-a:a::b-a:s-b$. Si multiplico el 2.° por el 3.° y parto por el 1.^{r} termino de esta proporcion, será el último $s-b=\frac{ab-a^2}{aq-a}=\frac{b-a}{q-1}$, suma de todos los términos de una progresion geométrica menos el último b: añadoselo, y tendré por último $s=\frac{b-a}{q-1}+b=\frac{bq-a}{q-1}$: luego *dicha suma es el producto de su último término por el cociente ménos el 1.°, partido por el cociente disminuido de* 1. Si se pidiese la suma de todos los términos de la progresion general ∹ $a:aq:aq^2:aq^3\ldots.. aq^{n-1}$; multiplicaria aq^{n-1} por q, restaria de su producto aq^n, a, y dividiendo la diferencia aq_n-a por $q-1$, seria $\frac{aq_n-a}{q-1}$ la suma pedida.

La espresion $s=\frac{bq-a}{q-1}$ se muda, haciendo $q-1=n$, ó $q=n+1$, y poniendo en ella por q su valor $n+1$; en $s=b+\frac{b-a}{n}$: en donde si $q=2$, $s=b+b\cdot a$: si $q=3$, $s=b+\frac{1}{2}(b-a)$: si $q=4$, $s=b+\frac{1}{3}(b-a)$ &c. es decir, que la suma de los términos de una progresion geométrica dupla ó cuyo esponente es 2, es el último término mas la diferencia entre el 1.º y último: en la tripla es el último término con la mitad de la diferencia entre el 1.º y último: en la cuádrupla es el último término y la tercera parte de la diferencia entre el 1.º y último &c.

Si se pidiese el precio de un caballo ajustado de modo que por el 1.r clavo de los 32 de sus cuatro herraduras se pague un maravedí, por el 2.º 2 mrs, por el 3.º 4, y asi de los demas duplicando siempre; habrá que averiguar la suma de la progresion geométrica $\div\!\!\div$ 1 : 2 : 4 &c. de 32 términos: para lo cual sacaré su último término que es (219) $1\times 2^{32.1}=2^{31}=2147483648$, y poniéndole en lugar de b; y por a y q sus valores 1 y 2 en la espresion $s=\frac{bq-a}{q-1}$, tendré $s=\frac{2147483648.2-1}{2-1}=4294967295$, suma de los 32 términos y valor del caballo en *mrs* que componen 126322567 *rs. y medio.*

224 La progresion decrescente se hace crescente para sumar sus términos por este mismo método: y como cuando decrece al infinito, podemós considerar el último término como cero; será en tal caso el 1.r término $a=o$, y la espresion $s=\frac{bq-a}{q-1}$ se mudará en esta $s=\frac{bq-o}{q-1}=$. Luego cuando $q=2$, será $s=2b$: si $q=3$, $s=\frac{3b}{2}=b+\frac{b}{2}$: si $q=4$, $s=\frac{4b}{3}=b+\frac{b}{3}$ &c.

La suma de la progresion $\div\!\!\div\ \frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}\ldots$ ó $\div\!\!\div\ 0\ldots\ \frac{1}{16}:\frac{1}{8}:\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$, es, poniendo por a cero, $\frac{1}{2}$ por b, y 2 en lugar de q; $s=\frac{\frac{1}{2}.2-0}{2-1}=1$. Tambien suma 1 la progresion $\div\!\!\div\ \frac{2}{3}:\frac{2}{9}:\frac{2}{27}$ &c. y en general todas las que tienen esta forma $\div\!\!\div\ \frac{n}{n+1}:\frac{n}{(n+1)^2}:\frac{n}{(n+1)^3}$ &c.

Si se pidiesen las leguas que ha de andar un navio para alcanzar á otro la mitad menos veloz, que le lleva de ventaja 40 leguas; sumaria los términos de la progresion infinita $\div\!\!\div$ 40 : 20 : 10 : 5 : $2\frac{1}{2}$: $1\frac{1}{4}$ &c. y serian $s=\frac{40.2-0}{2-1}=80$, las leguas que se piden.

Para saber cuándo se vuelven á juntar el minutero y la mano de un relox puestos á andar desde las 12, se suman los términos de la progresion $\div 1 : \frac{1}{12} : \frac{1}{144}$ &c. y hallarémos que se juntan á la 1 y $\frac{1}{11}$. Despues se vuelven á juntar á las $2\frac{2}{11}$, $3\frac{3}{11}$ &c. que resultan sumando las correspondientes progresiones.

Permutaciones y Combinaciones.

225 Se entiende por *permutacion* el número de situaciones diferentes que se pueden dar á cualquier número de cosas. Si consideramos por egemplo, las letras del alfabeto, una letra a no puede tener mas posicion que 1: otra letra mas b puede ponerse ántes y despues de a, lo que da las dos permutaciones ab, ba, ó 1×2: una 3.ª letra c puede ocupar tres lugares en cada una de las dos permutaciones: al principio, en medio y al fin: esto es, las seis posiciones cab, acb, abc, cba, bca, bac, ó $2\times3=6=1\times2\times3$. Una 4.ª letra d podrá ocupar cuatro sitios diferentes en cada una de estas seis situaciones; es decir, que cuatro letras dan 24 permutaciones, ó $6\times4=1\times2\times3\times4$. Por esta misma cuenta cinco letras darán 120 permutaciones ó $24\times5=1\times2\times3\times4\times5$: en general, n de letras darán $1\times2\times3\times4\ldots\times n$ permutaciones. Por la cual regla se averiguará que 12 personas podrán sentarse á una mesa de $1\times2\times3\times4\ldots\times12 = 479001600$ situaciones diferentes: y necesitarian 15 años y 69 dias para recorrerlas

todas, tardando un segundo de tiempo en cada disposicion.

Cuando hay cosas semejantes entre las que se permutan; a, a por eg. no tienen mas posicion que $1=\frac{1.2}{2.1}$. Cuando en tres cosas hay dos iguales como en a, b, b, no hay mas permutaciones que estas abb, bba, bab, que son $3=\frac{1.2.3}{2.1}$. Si de cuatro hay dos iguales, las permutaciones son $\frac{1.2.3.4}{2.1}=12$; si hay tres, son $\frac{1.2.3.4}{3.2.1}$. Si de cinco hay dos, ó tres, ó cuatro iguales, se tendrá en el 1.^r^ caso $\frac{1.2.3.4.5}{2.1}$, en el 2.º $\frac{1.2.3.4.5}{3.2.1}$ y en el 3.º $\frac{1.2.3.4.5}{4.3.2.1}$. De donde es facil sacar el número de permutaciones para cualquier caso: como si hubiese seis cosas y tres fueren iguales entre sí y otras dos entre sí, serán sus permutaciones $\frac{1.2.3.4.5.6}{3.2.1.2.1}$ &c. En general, siendo a, b, c &c. el número de cosas semejantes entre sí será la espresion de sus permutaciones $\frac{1.2.3\ldots a.1.2.3\ldots\ldots b.1.2.3\ldots\ldots c.1.2.3.}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a+b+c)}$

226 Hablemos ahora de las *combinaciones* ó del número de veces que se pueden tomar muchas cosas de una en una, de dos

en dos, de tres en tres &c. y valiéndonos de las 25 letras veamos cuántas palabras de una letra, de dos, de tres hasta de 25 se podrán formar con ellas. Bien se ve desde luego que con 25 letras solo se pueden formar 25 palabras de una letra. Si se juntan despues cada letra con todas las 25, se formarán $25\times25=625$ palabras de dos letras. Si á cada una de estas se juntan sucesivamente cada una de las 25, resultarán $25\times25\times25=15625$ palabras de tres letras; y continuando de esta manera se verá que el número de todas las palabras posibles que se pueden formar con las 25 letras de una, de dos, de tres &c. letras, es la suma de los términos de esta progresion geométrica $25, 25^2, 25^3, 25^4$, hasta 25^{25}, y lo mismo se dirá de cualquier otro número de letras ó de cosas.

En este número de combinaciones se repite algunas veces una misma letra. Para encontrar el número de las palabras que se pueden formar con las 25 letras, sin que en ellas se repita alguna; supuesto que de una letra se forman solo 25; se ha de notar que juntando cada letra con las demas que son 24, resultan 25×24 palabras de dos letras en las que ninguna se repite. Asimismo, cada una de estas combinaciones de dos letras no se puede juntar sin repeticion con mas que con 23 que quedan; luego será el número de palabras con tres letras sin repeticion $25\times24\times23$. El de las de

cuatro letras sin repetir ninguna debe ser por igual razon $25\times24\times23\times22$; y últimamente el de todas las palabras que se buscan, será la suma de la serie $25, 25\times24, 25\times24\times23, 25\times24\times23\times22$ hasta el último producto de 25 factores desde 25 hasta 1: diciéndose otro tanto de cualquier otro número que se pidiese.

Pero aun estas palabras incluyen unas mismas letras bien que diferentemente colocadas como *ab*, *ba*; y pueden pedirse palabras enteramente diferentes, escluyendo las letras repetidas aunque con diversa colocacion. En este caso tambien son 25 las palabras de una letra: en las de dos cada letra se repite dos veces como *ab*, *ba* cuando *a* se combina con *b*, y la *b* con la *a*; y así el número de combinaciones diferentes será la mitad del que se encontró; esto es, sera $\frac{25.24.}{2}$ Cada una de estas combinaciones se ha de juntar con las demas letras que serán 23 para que ninguna se repita, y formar $\frac{25.24.23}{2}$ palabras de tres letras, pero en ellas de cada tres letras *a*, *b*, *c* por eg. hay tres combinaciones *abc*, *acb*, *bac* que salen juntando *ab* con *c*, *ac* con *b* y *bc* con *a*, que deben reducirse á una desechando las otras: luego el número antecedente se debe partir por 3 para sacar el que se busca $\frac{25.24.23}{2.3}$. Siguiendo el mismo método hallaremos... $\frac{25.24.23.22}{2.3.4}$ por el número de las combinaciones de cuatro en cuatro, y así de los demas. De suerte que el número de *ternos* diferentes que se pueden formar con 90 números es $\frac{90.89.88}{2.3}$ $=\frac{704880}{6}=117480$.

Logaritmos

227 Como en toda progresion geométrica $\div q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4 \ldots$ &c. la suma de los esponentes 3 y 4 de dos cualesquiera términos q^3, q^4 equivale á su producto $q^3 \times q^4 = q^7$ la diferencia $7-4=3$ corresponde á q^3 cociente de q^7 partido por q^4, el producto 12 del esponente 3 por 4, á q^{12} 4.ª potencia de q^3, y q^3 raiz 4.ª de q^{12} tiene por esponente 3, cociente de 12 dividido por 4; pensaron los matemáticos calculando los números por medio de sus esponentes, reducir el multiplicar á sumar, el partir á restar, el subir á las potencias á multiplicar, y á una mera division la estraccion de las raices.

Para esto eran necesarias dos cosas: la una hacer que todos los números fuesen terminos de la progresion geométrica, y la otra buscar á cada uno su esponente. Con efecto, se han hecho listas ó tablas en que á los

números 1, 2, 3 &c. hasta 10000 y aun hasta 20000, se les han puesto enfrente sus esponentes: y por ellos se encuentran fácilmente los de números mayores. A estos esponentes que son los términos de una progresion aritmética que corresponden á otros que están en progresion geométrica, se ha dado el nombre de *logaritmos*, y á la lista de estos números *tabla de logaritmos*: de suerte que *el logaritmo de un número es el esponente de la potencia á la que se ha de elevar la base para producir el número*.

228 Para que formemos alguna idea del modo con que se han construido estas tablas, es de saber, que entre las diferentes progresiones aritméticas y geométricas que se pudieron escoger para este efecto, adoptaron los matemáticos las dos siguientes. . . .

$$\begin{array}{l} \textit{Geométrica} \\ \\ \textit{Aritmética} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : \&c. \\ \text{ó} \div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \; \&c. \\ \div \; 0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \; \&c. \end{array} \right.$$

de manera que cero es el esponente ó logarítmo de 1; 1 es logarítmo de 10, que es la *base*, 2 de 100 &c. Los logarítmos de los números 2, 3, 4 &c. que hay entre 1 y 10, los que median entre 10 y 100, entre 100 y 1000 &c. se encontraron de la manera con que vamos á sacar el de 9.

Búsquese para esto un medio geométrico proporcional entre 1 y 10, y otro aritmético entre 0 y 1 (188 y 220), añadiendo ántes ceros de decimales á estos números para sacarlos con mas exactitud y escusar los quebrados comunes. El medio aritmético es 0,500000 que será logarítmo del geométrico que es 3,162277. Búsquese otro medio geométrico entre este y 10,000000, y otro aritmético entre 0,5000000 y 1,000000; y se tendrán los dos 5,623413 y 0,750000: este tambien es logarítmo de aquel que todavía está distante de 9. Con efecto hasta el medio geométrico veinte y seis no sale el 9,000000 cuyo logarítmo es el 26.to medio aritmético 0,954242. Sacados con igual trabajo los logarítmos de 2, 3, 5, 7, 11, 13 y demas intermedios que no tienen factores; se sacaron por ellos los otros con mas facilidad. El de 4 por eg. por ser 2×2, sumando consigo el logarítmo de 2; el de 6=2×3, sumando el de 2 y el de 3; el de 9, cuadrado de 3, multiplicando por 2 el logarítmo de 3: el de 15=3×5, sumando los logarítmos de 3 y 5; el de 64 cubo de 8, multiplicando por 3 el logarítmo de 8 &c. pero se han inventado despues métodos mas espedítos de hallar los logarítmos, que esplicarémos en otro lugar.

229 La cifra que precede á las decimales de un logarítmo, se llama su *característica*: en 0,000000 logarítmo de 1, es cero la característica; en 1,000000 logarítmo de 10, es 1; en 2,000000 logarítmo de 100, es 2 &c. y de consiguiente consta siempre la característica de tantas unidades menos una como notas tiene el número al que corresponde: 3,423901 es logarítmo de 2654 número de 4 cifras, una mas que su característica 3.

230 En vista de lo dicho (227), si en lugar de multiplicar dos números sumamos sus logarítmos, deberá esta suma corresponder en las tablas al producto de dichos números. Y al contrario, la diferencia de dos logarítmos estará frente del cociente de sus números correspondientes. Asímismo, la potencia de un número debe corresponder al producto de su logarítmo por el esponente de la potencia; y cualquiera raiz al cociente de dicho logarítmo por el esponente correspondiente.

231 Véamos ahora cómo se encuentran los logarítmos de los números que no están en las tablas, y como dados los logarítmos, se buscan sus números; en advirtiendo que como los logarítmos de 10, 100, 1000 &c. son 1,000000, 2,000000, 3,000000 &c. se podrán sumar ó restar de cualquier logarítmo con solo añadir ó restar de su catacterística 1, 2, 3 &c. unidades; y como esta suma ó resta equivale á multiplicar ó partir los números de dichos logarítmos; será lo mismo *añadir 1, 2, 3 &c. unidades á la característica de un logarítmo que multiplicar por 10,*

100, 1000 *&c. el número que corresponde al logarítmo*: y al contrario, *restar* 1, 2, 3, *&c. unidades de la característica de un logarítmo será partir su número correspondiente por* 10, 100, 1000 *&c.*

232 Esto supuesto, para encontrar el logarítmo de un entero con un quebrado $6\frac{3}{5}$ por eg. se le reducirá á $\frac{33}{5}$, se resta á de 1,518514 logarítmo de 33, 0,698970 logarítmo de 5, y el residuo 0,819544 será el logarítmo de $\frac{33}{5}$ ó de $6\frac{3}{5}$. Porque siendo $\frac{33}{5}$ cociente de 33 partido por 5, deberá ser su logarítmo la diferencia entre los logarítmos del dividendo 33 y el divisor 5 (228). En un quebrado propio $\frac{5}{33}$ en donde es mayor el logarítmo del denominador, se resta de él el logarítmo del denominador, y la diferencia — 0,819544 con el signo — es el logarítmo de $\frac{5}{33}$. Efectivamente, siendo cero el logarítmo de 1, deben ser negativos los logarítmos de los quebrados propios que son menores que 1: de lo cual nos convencerémos mas, continuando ácia la izquierda las progresiones aritmética y geométrica ya citadas como aquí se ve. . . . .

Geometríca $\div$ &c. 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 10^{-0} : 10^{1} : 10^{2} : 10^{3} : 10^{4} &c. ó $\div$ &c. $\frac{1}{1000}$: $\frac{1}{100}$: $\frac{1}{10}$: 1 : 10 : 100 : 1000 10000 &c.

Aritmética $\div$ — 3. — 2. — 1. 0. 1. 2. 3. 4. &c.

233 Si dado el número 964357 mayor que los de las tablas, si piediese su logarítmo; le separaré de la derecha dos notas, reduciéndole á 9643,57 número 100 veces menor que el propuesto (89), y que está entre los de la tabla. Busco en ella los logarítmos 3,984212 y 3,984257 de 9643 y 9644, y tomando su diferencia 45 diré; *si por* 1 *de diferencia entre* 9643 *y* 9644, *salen* 45 *de diferencia entre sus logarítmos*; *por* 0,57 *de diferencia entre* 9643 *y* 9644,57.... *¿cuál debe ser la de sus logarítmos?* Saco de la proporcion 1 : 45 :: 0,57...... el 4.° término z5,65 ó 26 solamente despreciando las demas decimales, parte de logarítmo que corresponde al quebrado 0,57; y juntándola con el logarítmo de 9643, tendré 3,984238 logarítmo de 9643,57: añado 2 á su característica (230) y 5,984238 que resulta por último, será el logarítmo de 964357.

Si se diese el número 8706000 para buscarle logarítmo; se tomará en la tabla el de 8706 que es 3,939819, y con 3 unidades mas en su característica por los tres ceros separados, será 6,939819 logarítmo de 8706000. Cuando el número tiene cifras decimales, se busca su logaritmo como si fuera entero, y despues se quitan de su característica tantas unidades como notas decimales tiene el número.

234 Si dado un logarítmo cualquiera 8,

986772, se pide el número que le corresponde; se le quitarán á su característica 8 cinco unidades para poderle hallar en la tabla: y pues que 3,986772 que queda, se encuentra en ella frente del número 9700: este añadido de cinco ceros por las unidades que se quitaron á la característica, es decir, 970000000 será el número que corresponde al logarítmo propuesto 8,986772.

Dado el logarítmo 6,722348 para buscar su número; despues de quitar 3 unidades á la característica 6, no se encuentran en la tabla mas que los primeros guarísmos, y viene á caer entre los logarítmos 3,722387 de 5277 y 3,722305 de 5276: es decir, que el logarítmo 3,722348 corresponde á 5276 y un quebrado. Para hallarle, se toma la diferencia 82 entre los logarítmos de 5276 y 5277, y despues la 43 que hay entre el logarítmo 3,722348 y el de 5276; y se dice, *si* 82 *diferencia entre los logarítmos de* 5276 *y* 5277, *da* 1 *de diferencia entre los números ¿que diferencia dará entre los números,* 43 *diferencia entre el logarítmo* 3,722348 *y el de* 5276: esto es, $82:1::43:\frac{43}{82}$. Junto este quebrado á 5276; y $5276\frac{48}{82}$ será con corta diferencia el número que corresponde á 3,722348: luego á 6,722348 corresponderá $5276000\frac{43000}{82}=5276524,39$, número mil veces mayor que el anterior. Las diferencias que hemos supuesto proporcionales, lo son

solo próximamente y sin error sensible.

235 Para encontrar el quebrado que corresponde á un logarítmo negativo como —0,953430; le sumaré con uno de los logarítmos de 10, 100, 1000 &c. segun el número de decimales que se quiera en el quebrado, sea con 3,000000 logarítmo de 1000; y tendré $3,000000—0,953430=2,046570$; que buscado en la tabla corresponde á 111: pártolo por 1000, por el 3 que añadí á la característica de su logarítmo, y el cociente 0,111 será el quebrado que se busca.

Véamos en algunos egemplos las ventajas de los logarítmos: y sea el 1.° hallar el cociente de 6758 partido por 3015 con diferencia de menos de una milima. Saco de las tablas de logarítmos los de 6758 y 3015 que son 3,829818 y 3,479287, y restando éste del 1.°, tendré 0,350531. Esta diferencia que está entre los logarítmos de 2 y 3, buscada en las tablas con tres unidades mas en su característica, corresponde próximamente al número 2241, mil veces mayor que el verdadero (230): luego si separo de su derecha tres notas (154), tendré el cociente que busco 2,241 tan próximo que no le falta una milima.

2.° Para estraer la raiz 6.ª de 20, próxima hasta las milimas; dividiré por 6 su logarítmo 1,301030, y buscando el cociente 0,216838 en las tablas con tres unidades mas en su característica, se verá que corresponde próximamente á 1647: y de consiguiente será 1,647 la raiz 6.ª próxima de 20.

3.° Si se pidiese la raiz 8.ª del cuadrado de 3796; se multiplicará su logarítmo 3,579326 por 2, y dividiendo por 8 el producto 7,158652, que es el logarítmo del cuadrado de 3796; se tendrá de cociente 0,894831, que con tres unidades en su característica corresponde próximamente á 7849: luego la raiz 8.ª que se busca, es 7,849.

4.° Encontremos ahora cuatro medios geométricos entre $2\frac{2}{3}$ y $5\frac{3}{4}$. En lugar de sacar el esponente de la progresion partiendo $5\frac{3}{4}$ por $2\frac{2}{3}$, y estraer del cociente la raiz quinta (220); se restará de 0,759668 logarítmo de $5\frac{3}{4}$, 0,425969 logarítmo de $2\frac{2}{3}$; y dividiendo por 5 la diferencia 0,333699, saldrá de cociente 0,066739, logarítmo del esponente de la progresion. Búsquese el número que le coresponde en las tablas con una característica de 4 unidades, y separándole cuatro cifras de su derecha; se tendrá 1,1661, esponente próximo de la progresion. Multiplíquense por él $2\frac{2}{3}$ y los demas que vayan resultando, y saldrán los cuatro medios, 30,109; 3,626; 4,228 y 4,931. Tambien pudieron encontrarse añadiendo sucesivamente al logarítmo 0,425969 de $2\frac{2}{3}$ el del esponente, el de su duplo, triplo y cuádruplo; pues así resultan 0,492708;... 0,559447;0,626186;0,692925 logarítmos de los cuatro medios, que se buscarán en las tablas.

Del Complemento aritmético

234 Los matemáticos han logrado convertir en suma la operacion de restar un número de otro; por eg. 6 de 8, añadiendo al 8, 4 diferencia entre 6 y 10, y quitando de la suma 12, 10 que resultan demas, por el 6 que no se restó y 4 que se añadió. Si para restar por este método 36 de 68, se suma 68 con 64, diferencia entre 36 y 100, y de la suma 132 se quitan 100 que componen 36 que no se restó y 64 que se añadieron, quedará la resta verdadera 32.

"Esta diferencia que va de un número »á 1 con tantos ceros como cifras tiene »el número", se llama *complemento aritmético*, y se encuentra facilísimamente por ser ceros los guarismos del minuendo. El complemento aritmético de 870372 por eg. que es 129628, se saca restando este número de 1000000, ó cada una de las cifras 8,7,0,3,7 de 9, y la última 2 de 10.

Log. 675....	2,829304
Log. 952....	2,978637
*complemento aritm.*co.... *Log.* 527....	7,278189
*complemento aritm.*co.... *Log.* 377....	7,423659
	20,509789

235 Si para aplicar esta abreviacion á los logarítmos, queremos sacar el producto próximo de los quebrados $\frac{675}{527}$, $\frac{952}{377}$; en lugar de restar la suma de los logarítmos de los denominadores 527, 377 de la de los numeradores 675, 952 (73 y 230); añadiremos á los logarítmos de 675 y 952 el complemento aritmético de los logarítmos de 527 y 377, y quitando de la suma 20,000000 que hay demas por los logarítmos de 527 y 377 que no se restaron, y sus complementos que se añadieron; será 0,509789 que queda, el logarítmo del producto de los quebrados; que buscado en las tablas corresponde próximamente á 3,234. Tambien se sacará el 4.º término de una regla de tres, sumando con los logarítmos del 2.º y 3.r términos el complemento aritmético del 1.º y buscando en las tablas el número que corresponde á la suma disminuida de 10,000000.

236 Si se saca el logarítmo de un quebrado $\frac{5}{8}$ añadiendo á 0,698970 logaritmo de 5 el complemento 9,096910 de 8; se tendrá 9,795880 logarítmo de $\frac{5}{8}$, que queda negativo si se le quita 10,000000 que tiene demas. Pero se facilitará mucho el cálculo de logarítmo de los quebrados no quitándoles el complemento ó complementos que incluyan, hasta haber concluido todas las operaciones que pida dicho cálculo: estendiendo esta observacion á los decimales que se de-

ben considerar con su denominador como si fueran quebrados comunes.

237 Si dado un logarítmo con algunos complementos demas, se pidiese el número que le corresponde; se rebajarán primero los complementos, si se puede, y se hará despues lo que dejamos dicho (232). Pero si el logarítmo es menor que los complementos que hay que restar, como si se pidiese el número á que corresponde el logarítmo 8,732235 que tiene 10,000000 demas; se rebajarán 5,000000, y buscando el residuo 3,732235 en las tablas, se separarán de la derecha del número 5398 á que corresponde, cinco notas para decimales por las 5 unidades que quedaron demas en su característica: y será 0,05398 el número que se busca.

238 Cuando se multiplican estos logarítmos, se ha de cuidar de rebajar del producto los complementos que se aumentan. Si se multiplica por 2 un logarítmo con un complemento resultará un producto con dos complementos, ó con 20 unidades demas en la característica: si se multiplica por 3, serán tres los complementos del producto &c.

239 En la division de estos logarítmos se hace que el dividendo tenga demas tantos complementos como unidades tiene el divisor; pues de esa suerte resultará el cociente con un solo complemento. Para sacar la raiz cúbica de $\frac{276}{547}$, cuyo logarítmo con un com-

plemento es 9,702922; le añadiré ántes dos complementos; y dividiendo por 3 el logarítmo 29,702922 que resulta; tendré 9,900974 logarítmo de la raiz, que si se busca con 10 unidades de esceso en su característica, corresponde por lo que llevamos dicho (230) á 0,7961.

ARTÍCULO VI

De las ecuaciones y de la resolucion de los problemas

240 Se da propiamente el nombre de *analisis* á esta parte del álgebra que enseña á *resolver los problemas*; esto es, á encontrar una ó mas cuantidades desconocidas con ciertas condiciones por medio de otras conocidas que se llaman los *datos* del problema, y son unas señas por donde se viene en conocimiento de lo que se busca.

Para resolver un problema 1.° hay que hacerse cargo de lo que en èl se pide, y de las señas que se dan para encontrarlo. 2.° Se supone que la cuantidad que se vá á buscar que llamaremos la *incognita*, sea una de las últimas letras x, y, u, z.... del abecedario; y mirándola como conocida, se espresa con signos algébricos la conexîon ó relaciones que con ella tienen las demas cuantidades que intervienen en el problema, haciendo para verificar las condiciones que incluye, los mismos razonamientos y combinaciones que se harian con la incognita, si se conociese.

3.° De estas operaciones resultarán diferentes espresiones de suma, resta, division, multiplicacion, potencias ó raices de las cuantidades conocidas mezcladas con la incognita, entre las que se han de buscar dos iguales para formar con ellas y el signo $=$ lo que llamamos *ecuacion*, por cuyo medio se averigua el valor de la incognita, practicando las reglas que daremos en esplicando mejor lo que es ecuacion.

241 Si suponemos que la cuantidad x valga 6, $x+8$ serán 14; y la espresion $x+8=14$ será una ecuacion. Suponiendo iguales á $ax-c^2$ y $m+c$, será $ax-c^2=m+c$ otra ecuacion. Cada una se compone de dos partes ó miembros; al 1.° le forman las cuantidades $x+8$ y $ax-c^2$ que están á la izquierda del signo $=$; y 14, $m+c$ componen el 2.° Cuando el mayor esponente de la incognita es 1, se llama ecuacion de 1.r *grado*, cuando es 2, de 2.°, si es 3 de 3.°, y así de las demas $b^2-x+c^3x=3+a^2x$ es ecuacion de 1.r grado: $a^2-y^2=c-by$ de 2.° $z^3-m=t-cz^2$ de 3.° &c.

Como la incognita en una ecuacion ó está sumada ó restada con las cuantidades conocidas, ó multiplicada ó partida por ellas; no se llega á averiguar su valor hasta haberla dejado sola en uno de los miembros de la ecuacion quedando en el otro solo cuantidades conocidas: entonces se dice que la incognita está *despejada*.

242 *Para separarla de las cuantidades sumadas y restadas, se pasan estas del miembro donde están al otro con el signo contrario.* Si en la ecuacion $ab+x-c=8$ se pasa al 2.° miembro ab y $-c$ mudándoles los signos, se tendrá $x=8-ab+c$ donde ya x está despejada, sin perjuicio de la igualdad; pues haber pasado $ab-c$ mudados sus signos, es haber añadido á los dos miembros iguales de la ecuacion la cuantidad $-ab+c$ así, $ab+x-c-ab+c=8-ab+c$, que se reduce á $x=8-ab+c$ lo cual no puede alterar su igualdad.

Por esta operacion, que se llama *trasposicion*, se hacen positivos cualesquiera términos negativos, y al contrario: y así con mudar al 2.° miembro el término $-x$ de la ecuacion $a^2-x-2=d^2-m$, se reduce á esta $a^2-2=d^2-m+x$, donde pasando d^2-m al 1.^{r} miembro con signos contrarios, resulta $a^2-2d^2+m=x$ en donde está x despejada. De consiguiente, si se mudan los signos á todos los términos de una ecuacion, se conserva siempre la igualdad de sus dos miembros.

243 *Para separar la incognita de cualquiera cuantidad que la multiplique, se parten ambos miembros de la ecuacion por ella si consta de un solo término, y si tiene muchos, por la suma de todos ellos.* Si en la ecuacion $a-b^2z=t$, se dividen todos los

términos por $-b^2$ multiplicador de z, resultará $-\frac{a}{b^2}+\frac{b^2z}{b^2}=\frac{t}{b^2}$; esto es, $-\frac{a}{b^2}+z=-\frac{t}{b^2}$, ó $z=\frac{a}{b^2}-\frac{t}{b^2}$, pasando $-\frac{a}{b^2}$ al 2.° miembro. Para quitar los multiplicadores a y $-b^2$ de x en la ecuacion $ax+2-b^2x=c$ dividiré sus dos miembros por su suma $a-b^2$ y tendré $\frac{ax-b^2x}{a-b^2}+\frac{2}{a-b^2}=\frac{c}{a-b^2}$, que se reduce á esta $x+\frac{2}{a-b^2}=\frac{c}{a-b^2}$, y de consiguiente $x=\frac{c-2}{a-b^2}$.

244 *Cuando una ó mas cuantidades dividen la incognita, se multiplican los términos de la ecuacion por cada divisor, y quedará desembarazada de ellos dicha incognita sin perjuicio de la igualdad.* Sean $\frac{x}{b}-2=a\cdot c^2$; si se multiplica toda la ecuacion por b que parte á x, se tendrá $\frac{bx}{b}-2b=ab-bc^2$, ó $x-2b=ab-bc^2$, con x libre de b. En la ecuacion $t+\frac{z}{2}=a^2-\frac{z}{c}$, quedará z sin divisores, multiplicando todos sus términos primero por 2, lo que da $2t+z=2a^2-\frac{2z}{c}$; y despues por c, de que resulta $2ct+cz=2a^2c-2z$. Para quitar los divisores de una vez se multiplica

toda la ecuacion por el producto de todos ellos. Multiplicando en la ecuacion anterior por $2\times c$ ó $2c$, se tiene $2ct+\frac{2cz}{2}=2a^2c-\frac{2cz}{2}$; que se reduce á $2ct+cz=2a^2c-2z$. Ultimamente, si en la ecuacion $\frac{3-y}{c}+n=\frac{2y}{a-2}+ab$, se multiplican sus dos miembros por $ac-2c$ producto de los divisores c y $a-2$; se tendrá despues de haber hecho las reducciones regulares, $3a-ay-6+2y+acn-2cn=2cy+a^2bc-2abc$.

245 Supuestas estas reglas, si se nos mandase despejar una incognita en una ecuacion de 1.^{r} grado; lo 1.° *se quita cualquiera cuantidad que haya comun en todos los términos de la ecuacion dividiéndolos por ella.* 2.° *se quitan por la multiplicacion todos los quebrados donde se halle la incognita.* 3.° *Valiéndose de la trasposicion, se ponen en uno de los miembros de la ecuacion todos los términos en que se halle la incognita, y en el otro los que no.* 4.° *Se dividen ambos miembros por las cuantidades que multiplican la incognita, y seguramente se habrá despejado, á no ser que quede bajo de algun signo radical.*

246 En este caso *se deja sola en un miembro la cuantidad radical, despues se suben ambos á la potencia indicada por el radical, y quedará la incognita desembarazada de este vínculo.* En $ab+\sqrt{x}=m$, ó $\sqrt{x}=m-ab$, se suben ambos miembros al cuadrado, y resul-

ta $x=(m-ab)^2$. Si se diese $\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{ax-x}{3}\right)}-\frac{3}{5}=b$ 6 $\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{ax-x}{3}\right)}=b+\frac{3}{5}$; se subirán al cubo los dos miembros, y se tendrá $\frac{ax-x}{3}=(b+\frac{3}{5})^3$: multiplíquese por 3 y pártase despues por $a-1$, y saldrá por último $x=\frac{3(b+\frac{3}{5})^3}{a-1}$.

Hayase de despejar x en la ecuacion $\frac{a^2x}{4}-5ax+\frac{ad}{2}-a=am^3-\frac{ax}{d}$, que parto desde luego por a comun á todos sus términos. En $\frac{ax}{4}-5x+\frac{d}{2}-1=m^3-\frac{x}{d}$ que resulta, multiplico por el producto $4d$ de los divisores de x, y saldrá reduciendo, $adx-20dx+2d^2-4d=4dm^3-4x$. Pongo ahora en el 1.^{r} miembro los términos que tienen x, y en el 2.° los que no, y tendré $adx-20dx+4x=4dm^3-2d^2+4d$: parto últimamente ambos miembros por $ad-20d+4$ multiplicador de x, y será reduciendo, $x=\frac{4dm^3-2d^2+4d}{ad-20d+4}$, donde x está ya despejada.

247 Vamos á poner en práctica estas reglas y las que dimos para resolver los problemas, resolviendo algunos que deben servir de modélo para cuantos se pueden proponer; en la inteligencia de que llegar derechamente á formar la ecuacion por la que se

resuelve un problema propuesto, ademas de la esperiencia, es mas obra del talento y tino de cada uno que fruto de las reglas, que siendo vagas y generales, no es tan facil acomodar á los casos particulares.

Problema 1.° "Manda uno en su testa»mento dividir 50000 pesos que tiene de »hacienda entre tres sobrinos; de modo que »al mayor toquen 300 mas que al mediano, »y á este 200 mas que al último; y se desea »saber cuanto se debe dar á cada uno."

En este problema se pide dividir el número 50000 en tres partes tales que la mayor esceda en 300 á la mediana, y esta en 200 á la última: es decir, que la menor con 200 componga la del mediano, y ésta con 300 la mayor. Luego si dando por conocida la mas pequeña, la llamo x; será la mediana x con 200 ó $x+200$, y la mayor $x+200+300$. Para que esto sea cierto, ha de componer 50000 la suma de dichas tres partes: sumo pues x, $x+200$, $x+200+300$, é igualando la suma $3x+700$ á 50000; tendré la ecuacion $3x+700=50000$: en la que mudando al 2.° miembro 700 y partiendo $3x=50000-700$ por 3 que multiplica á x, saldrá $x=\frac{50000-700}{3}=\frac{49300}{3}=16433\frac{1}{3}$ que es el valor de la parte menor x. Será pues, la mediana $x+200$, $16433\frac{1}{3}+200=16633\frac{1}{3}$, y la mayor $x+200+300$, $16433\frac{1}{3}+200+300=16933\frac{1}{3}$.

Con efecto, dichas tres partes suman 50000, y sus diferencias son 200 y 300 como lo pide el problema.

2.° *Sale A de Madrid caminando 8 leguas cada dia, y á los seis dias sale B en su alcance caminando 11 leguas ¿en cuantos dias le alcanzará?*

Si suponemos que le alcance en z dias, habrá andado en este tiempo tantas 11 leguas como dias, ó z veces 11 que son $11z$; en estos mismos dias andará A z veces 8 ó $8z$, que con las 48 leguas de 6 dias á 8 leguas que sacó de ventaja al otro, componen $48+8z$. Cuando le alcance B deben ambos haber andado igual número de leguas; luego serán iguales $11z$ y $8z+48$, y se tendrá la ecuacion $11z=8z+48$: donde $11z-8z=48$, ó $3z=48$, y $z=\frac{48}{3}=16$, número de dias en que B anduvo $16\times11=176$ leguas, las mismas que $48+16\times8=176$ que anduvo A.

Sean l, l' las leguas que andaban los dos cada dia, d el número de dias que se anticipó A, y z los que tardó en alcanzarle: serán lz las leguas que anduvo A, dl las que sacó de ventaja, y $l'z$ las que corrió B. Y como estas deben ser iguales á $lz+dl$ que anduvo A; formaremos la ecuacion $lz+dl=l'z$ ó $l'z-lz=dl$, ó $z(l'-l)=dl$, que da por último $z=\frac{dl}{l'-l}$; es decir, que B *alcanza á* A *en* *los dias que resultan partiendo el número de leg. anticipadas por la diferencia de las que andan los dos.* En esta resolucion general se advierte que el número de las leg. que anda B, ha de ser mayor que las que ande A: pues si es igual, la ecuacion $z=\frac{dl}{l'-l}$ se reduce á $z=\frac{dl}{o}$, y si es mayor en una cuantidad b, será $z=\frac{dl}{-b}$, valores imposible el 1.° é inaplicable al problema el 2.°

248 Cuando en lugar de números se ponen letras en el cálculo de los problemas, su resolucion es general, como la antecedente, y abraza todos los casos posibles en aquella materia. Con este motivo advertiremos que es fácil y conveniente conseguir una resolucion general como la anterior en cualquier problema, si en lugar de los números que en él se den, usamos de letras; cuidando de espresar las cuantidades generales con las que le sean mas análogas, representando, por eg. el tiempo con la letra t, la velocidad con v, uno de sus grados con 1, dos con 2... el duplo de una cuantidad que se haya supuesto a, con $2a$, sus dos tercios con $\frac{2a}{3}$, su diferencia con otra b, con $a\cdot b$, su producto con ab &c. Tambien la resolucion general de un problema por medio de las letras ofrece la ventaja de poder encontrar cualquiera de las cuantidades que intervienen en el problema si es desconocida, y se dan conocidas las demas, sin mas labor que el despejarla en la ecuacion. En el problema anterior dado el número de dias en que A encontró á B, pudo haberse averiguado sucesivamente el valor de l, l', d, suponiendo conocidas las demas.

3.° *Si saliendo un posta de Madrid para Barcelona distante cien leg. andando $3\frac{1}{2}$ leg. por hora, sale otro al mismo tiempo de Barcelona para Madrid corriendo $2\frac{1}{2}$ leg. cada hora, y se pregunta en que punto ó á qué distancia de dichos pueblos se encontrarán;* supondremos las $100=a$, $3\frac{1}{2}=b$, $2\frac{1}{2}=c$; y haciendo x el número de leg. corridas por el 1.er posta hasta que encontró al 2.° serán las que corrió este en el mismo tiempo $a-x$. Habiendo salido á un tiempo, es claro que corrieron durante un mismo número de horas: y como este debe resultar partiendo el número total de leg. que cada correo ha andado por las que anda cada hora; serán las horas empleadas por el 1.° $\frac{x}{b}$, y las que empleó el 2.° $\frac{a-x}{c}$. Será pues $\frac{x}{b}=\frac{a-x}{c}$, en la que multiplicando por bc, resulta $cx=ab-bx$, $bx+cx=ab$, y $x=\frac{ab}{b+c}$ leg. corridas por el 1.er posta.

Las que andubo el 2.° serán $a-x=a-\frac{ab}{b+c}$ que se reduce á $\frac{ac}{b+c}$: y las dos $\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{b+c}$ componen $\frac{ab+ac}{b+c}=\frac{a(b+c)}{b+c}=a$. Sustituyendo ahora en lugar de a, b, c, los valores 100, $3\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, hallarémos que el 1.er posta habia andado $\frac{100\times3\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}}=\frac{350}{6}=58\frac{1}{3}$ *leg.* cuando encontró al 2.° y este $\frac{100\times2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}}=\frac{250}{6}=41\frac{2}{3}$ *leg.* que sumadas componen 100.

4.° *Quiere Pedro traer á su taller cierto número de obreros, y examinando su caudal, halla que si da á cada uno 12 doblones al mes, le faltan 6 para pagarlos, y dándoles 10 doblones le sobran 4 ¿ cuántos eran los obreros, y cuántos doblones tenia?*

Sea y el número de obreros: pagados á 12 doblones importan $12\times y$ ó $12y$, cuantidad que escede en 6 al caudal de Pedro; el cual por lo tanto será $12y-6$. Pagados á 10 importan $10y$ que con 4 componen dicho caudal, que tambien será $10y+4$. Iguálense ahora estas dos espresiones, y se tendrá $12y-6=10y+4$, ó $12y-10y=6+4$, esto es, $2y=10$, ó $y=5$, número de obreros. Serán pues los doblones $12y-6=12\times5-6=54$, ó $10y+4=10\times5+4=54$.

Si se hubiera supuesto x el número de

doblones; con $x+6$ se hubieran pagado á 12 doblones los obreros, cuyo número sería..... $\frac{x+6}{12}$. Con $x-4$ se pagaban á 10, y por lo mismo $\frac{x-4}{10}$ es tambien el número de obreros. Será pues, $\frac{x-4}{10}=\frac{x+6}{12}$: donde quitando los quebrados resulta $12x-48=10x+60$, $12x-10x=60+48$, ó $2x=108$, y $x=54$.

Sea ahora en general x el número de obreros, a el mayor precio, b el menor, c lo que falta para pagar al precio subido, y d lo que sobra pagando al precio inferior. Segun lo que digimos en la 1.ª resolucion $ax-c$ y $bx+d$ espresan el número de doblones, y por eso $ax-c=bx+d$, $ax-bx=c+d$, y $x=\frac{c+d}{a-b}$; y será el número de obreros *la falta y la sobra* $c+d$ *partida por la diferencia* a—b *de los precios*: el número de doblones se saca poniendo en $ax-c$, ó en $bx+d$ el valor de x: poniéndole en $ax-c$, es $a\times\left(\frac{c+d}{a-b}\right)-c=\frac{ac+ad-ac+bc}{a-b}=\frac{ad+bc}{a-b}$.

5.° *Un galgo á 100 varas de una liebre ¿ cuándo la alcanzará, en la suposicion de que el perro anda 3 varas, mientras la liebre anda 2?*

Supongamos que la liebre anda x *v.* ántes de ser cogida: andará el perro $100+x$: y como estas dos distancias están en razon de 2 á 3, será $2:3::x:100+x$: luego (196) $3x=200+2x$ ó $x=200$. Si hubiera sido $m:n$ la razon de las distancias, hubiera resultado suponiendo $100=a$, $m:n::x:a+x$, y $nx=am+mx$, $nx-mx=am$, y $x=\frac{am}{n-m}$.

6.º *Uno dejó en su testamento á su hijo mayor* 100 *doblones y el décimo de lo restante de su hacienda, al* 2.º 200 *doblones y el décimo de lo que quedase, al* 3.º 300 *con el décimo de lo restante, al* 4.º 400 *con el décimo... continuando de esta suerte hasta el último, á quien deja el sobrante de las partes de sus hermanos: egecutado el testamento salieron todos con partes iguales ¿cuántos eran los hijos, cuánto la hacienda, y cuánto cupo á cada uno?*

Llamemos los 100 doblones a, y supongamos x la hacienda. Quitando 100 doblones ó a de la hacienda x para el 1.r hijo, queda $x-a$, cuyo décimo $\frac{x-a}{10}$ junto con a compondrá su parte $a+\frac{x-a}{10}$ que se reduce á $\frac{9a+x}{10}$. Quitando de la haciendo x esta cantidad y 200 doblones ó $2a$ para el 2.º hijo, queda reducida á $x-\frac{9a-x}{10}-2a=\frac{9x-29a}{10}$: el

décimo de esta cuantidad es $\frac{9x-29a}{100}$, y sumado con $2a$ compone $2a+\frac{9x-29a}{100}$ ó........ $\frac{171a+9x}{100}$ parte del 2.º hijo. Como todas las partes deben ser iguales, formaré de las dos halladas la ecuacion $\frac{9a+x}{10}=\frac{171a+9x}{100}$, donde multiplicando por 100, resulta $90a+10x=171a+9x$, ó $10x-9x=171a-90a$, y por último $x=81a=81\times100=8100$ valor de la hacienda: que dividida por una de las partes $\frac{9a+x}{10}=\frac{900+8100}{10}=900$, da $\frac{8100}{900}=9$, número de los hijos.

7.º *Tres comerciantes emplean* 1500 *doblones en un negocio ¿cuál debe ser su ganancia para que al fin del año toquen á cada uno* 398 *doblones?*

Si se supone la ganancia x, resultarán $1500+x$ al fin del año: y pues que debe tocar de esto á cada uno de los tres 398, será $\frac{1500+x}{3}=398$, $1500+x=1194$, y de consiguiente $x=1194-1500=-306$. Este valor negativo significa que hubo pérdida y no ganancia en el empleo, y de consiguiente que el problema está mal propuesto. Efectivamente, si de 1500 se quita la pérdida 306, y se divide entre los tres el residuo 1194, tocarán 398 doblones á cada uno.

8.° *Se pide un método que abrevie la práctica de la regla de falsa posicion doble* (216). Supongamos y lo que se ha de añadir ó quitar al número supuesto para que salga el verdadero x; sea d la menor equivocacion y b el número del cual resulta, dejando las demas suposiciones (217) invariables. Si b es menor que x, será $y+b=x=\frac{bc-ad}{c-d}$, y $y=\frac{bc-ad}{c-d}-b=\frac{bd-ad}{c-d}=\frac{(b-a)d}{c-d}$...... Suponiendo á b mayor que x hubiera salido $b-y=x=\frac{bc-ad}{c-d}$, donde $y=\frac{(a-b)d}{c-d}$.

Esto quiere decir que si se multiplica por el menor error la diferencia de los números supuestos, y el producto se parte por la diferencia de los errores cuando tienen un mismo signo, ó por su suma si le tienen diverso; saldrá de cociente lo que se ha de añadir al número supuesto, si es menor que el verdadero, ó lo que se ha de quitar si es mayor, para que resulte el verdadero.

Si en el 1.° de los egemplos que allí pusimos, se multiplica 3 diferencia entre los números supuestos 6 y 9, por el menor error 94, y se parte el producto 282 por la suma de los errores 282; se tendrá 1 de cociente, que restado de 9, da el número verdadero 8. En el 2.° egemplo multiplicando por el menor error 20, 1 diferencia entre 5 y 6, y

partiendo el producto por 20 diferencia de los errores; sale tambien 1, que añadido á 6 da el número verdadero 7.

Los problemas siguientes servirán de egercicio á los principiantes: y aunque se deja á su habilidad el modo de resolverlos, añadimos la solucion para que les sirva de guia.

9.° *A y B se pusieron á jugar con igual número de pesos:* A *perdió* 12, B 57, *y quedaron á* A *cuatro veces mas pesos que á* B: *¿cuántos tenian?* Resp. 72 *pes.*

10.° *Pactó un jornalero perezoso recibir* 12 *rs. y de comer el dia que trabajase, y pagar el dia que no* 6 *rs. al amo por la comida. Echaron cuentas á los* 30 *dias y quedaron en paz ¿cuántos dias trabajó? Resp. trabajó* 10 *dias y holgó* 20.

11.° *Hurtaron dos* 60 *dob. y habiendo reñido al repartirlos, arrebató cada uno lo que pudo: puestos en paz, dió el* 1.° *al* 2.° $\frac{1}{4}$ *de lo que cogió, y el* 2.° *al* 1.° $\frac{1}{3}$ *y quedaron con partes iguales ¿cuánto arrebató cada uno? Resp. el* 1.° 24 *y el* 2.° 36.

12.° *Uno dejó en su testamento la mitad de su hacienda á su hijo mayor, al* 2.° $\frac{5}{18}$ *de dicha hacienda,* $\frac{1}{5}$ *á su hija y* 1200 *pes. para sufragios. ¿Qué hacienda tenía? Resp.* 54000 *pes.*

13.° *Cuál es el número qui partido por* 3, *es escedido de* 20 *en lo que* 30 *escede al dicho número? Resp.* 15.

Problemas con mas de una incognita.

249 Cuando hay que averiguar en un problema, dos, tres ó mas incognitas; debe haber en él otros tantos datos ó condiciones que abran camino para formar igual número de ecuaciones de las que se sacará el valor de las incognitas por las reglas siguientes.

250 *Si hubiese dos ecuaciones con dos incognitas, se despeja una de ellas en ambas, y con los dos valores que resultan, se forma una ecuacion, que solo tendrá una incognita: déspegese esta, y sustituyendo su valor en cualquiera de las dos ecuaciones en que se despejó la 1.ª resultará tambien averiguado lo que vale.*

Probl. 14.° *Dos amanuenses han trasladado 280 pliegos entre ambos, el uno A trabajando 5 dias, y el otro B trabajando 8. Los mismos han copiado 288 pliegos trabajando A 7 dias y B 6 ¿cuántos pliegos escribe cada uno al dia?*

Si supongo x los pliegos que copia A, y z los que copia B; serán $5\times x$ ó $5x$ los pliegos que de los 280 copió A en 5 dias, y $8z$ los que copió B en 8 dias: y de consiguiente será $5x+8z=280$. Por lo mismo serán $7x$ los pliegos que de los 288 habrá escrito A, y $6z$ los de B; y será $7x+6z=288$. Despejo x en ambas ecuaciones, y tendré en la 1.ª

$x=\frac{280-8z}{5}$, y en la 2.ª $x=\frac{288-6z}{7}$. Igualo ahora estos dos valores de x, y resultará la ecuacion $\frac{280-8z}{5}=\frac{288-6z}{7}$, con una sola incognita z; que despejada da $z=20$. Sustituido este valor en lugar de z en una de las dos ecuaciones en que se despejó x, v. gr. en la 1.ª $x=\frac{280-8z}{5}$; la reduce á $x=\frac{280-8\times20}{5}$, esto es á $x=24$. Diré, pues, que de los 280 pliegos copió A $24\times5=120$, y B $20\times8=160$: y de los 288 A trasladó 168, y B 120.

Si hubieramos supuesto $280=a$, $5=b$, $8=c$, $288=d$, $7=e$, $6=f$: serian las ecuaciones $bx+cz=a$, $ex+fz=d$. Despejando x, sale $x=\frac{a-cz}{b}$, $x=\frac{d-fz}{e}$: igualando estos valores, $\frac{a-cz}{b}=\frac{d-fz}{e}$ resulta $z=\frac{bd-ae}{bf-ce}$: y poniendo este valor en la ecuacion $x=\frac{a-cz}{b}$, tendremos por último $x=\frac{a-c\left(\frac{bd-ae}{bf-ce}\right)}{b}$, que se reduce á $x=\frac{af-cd}{bf-ec}$

15.° *En una mezcla de oro y plata que tiene 8 pulgadas cúbicas de volumen, y pesa 5 libras ú 80 onzas, se quiere saber* *cuantas pulgadas hay de oro, y cuantas de plata, en la inteligencia de que cada pulgada cúbica de oro pesa* $12\frac{2}{3}$ *onzas, y la de plata* $6\frac{8}{9}$ *onzas.*

Si se supone x el número de pulgadas de oro de la mezcla, y z el de las de plata, será $x+z=8$, 1.ª ecuación. El peso del oro á razon de $12\frac{2}{3}$ cada pulgada, compone $12\frac{2}{3}\times x$ ó $\frac{38x}{3}$; y el de la plata á $6\frac{8}{9}$ cada pulgada, $6\frac{8}{9}\times z$ ó $\frac{62z}{9}$: y como toda la mezcla pesa 80 onz. se tendrá la 2.ª ecuacion $\frac{38x}{3}+\frac{62z}{9}=80$. Despejese x en las dos, y será en la 1.º $x=8-z$, y en la 2.ª $x=\frac{720-62z}{114}$. Será pues, $\frac{720-62z}{114}=8-z$; de donde se saca $z=3\frac{9}{13}$: luego $x=8-z=8-3\frac{9}{13}=4\frac{4}{13}$. Estos dos valores ademas de sumar 8; si se multiplican $3\frac{9}{13}$ por $\frac{62}{9}$, y $4\frac{4}{13}$ por $\frac{38}{3}$, producirán 80 onzas.

Si se supone a el volumen de la mezcla, b lo que pesa, c el peso de cada pulgada del un metal, y d el del otro; serán $x+z=a$, y $cx+dz=b$ las dos ecuaciones; en las que $x=a-z$, $x=\frac{b-dz}{c}$. Hágase ahora $a-z=\frac{b-dz}{c}$, y será $z=\frac{ac-b}{c-d}$: y sustituyendo este

valor en $x=a-z$, será $x=a-$........... $\frac{ac+b}{c-d}=\frac{b-ad}{c-d}$: valores generales para toda especie de mezcla.

251 Cuando hay tres ecuaciones con tres incognitas x, z, y, por eg. se despejará cualquiera de ellas, x en las tres ecuaciones, é igualando el valor mas sencillo de x á los otros dos, resultarán dos ecuaciones con las dos incognitas z, y, que se despejan como acabamos de decir. Conocidas z, y, se conocerá x sustituyendo en una de las tres ecuaciones en que se despejó, los valores de z, y. Si hubiese cuatro ó mas ecuaciones con otras tantas incognitas, se despeja una en todas, se igualan sus valores, para tener una ecuacion y una incognita menos; y se continúa así hasta llegar á una sola ecuacion con una sola incognita, haciendo despues las sustituciones correspondientes.

Prob. 16.º *Un General divide su tropa en tres trozos y les ofrece de agasajo, si toman una plaza que va á sitiar, 2703 dob. de los que han de percibir 3 dob. cada uno de los soldados del trozo que entre primero en ella, y los restantes se han de repartir igualmente entre los soldados de los demas trozos. Hállase pues, que si el 1.r trozo entra primero, toca á cada uno de los soldados de los demas á doblon y medio: si entra primero el 2.º caben los demas á doblon,* *y si entra el 3.° tocan á 45 rs. ó $\frac{3}{4}$ de doblon á los otros: se pregunta el número de soldados de cada trozo.*

Supongamos x el número de soldados del 1.^r trozo, z el de los del 2.° y el de los del 3.° y llamemos 2703 a. Si entra el 1.^r trozo primero, son $3x$ los doblones que perciben sus soldados, y como toca doblon y medio á los demas, consumirán $1\frac{1}{2}(z+y)$ ó $\frac{3z+3y}{2}$ que con $3x$ compondrán 2703 ó a; luego la 1.ª ecuacion será $3x+\frac{3z+3y}{2}=a$. Si entra primero el 2.° trozo, consumen sus soldados $3z$; y los demas que tocan á doblon, $x+y$, y la 2.ª ecuacion es $3z+x+y=a$. Entrando el 3.° primero, son $3y$ los doblones que se reparten á sus soldados, y $\frac{3x+3z}{4}$ los demas; y la 3.ª ecuacion es $3y+\frac{3x+3z}{4}=a$.

Despejando ahora x en las tres, resulta $x=\frac{2a-3z-3y}{6}$, $x=a-3z-y$, $x=$............ $\frac{4a-12y-3z}{3}$. Igualese el 2.° valor, que es el mas sencillo, á cada uno de los otros, y se tendrá despejando z en las dos ecuaciones, $a-3z-y=\frac{2a-3z-3y}{6}$, $a-3z-y=$.... $\frac{4a-12y-3z}{3}$ que resultan; $z=\frac{4a-3y}{15}$, $z=\frac{9y-a}{6}$. Fórmese por último, de estos dos valores la ecuacion $\frac{4a-3y}{15}=\frac{9y-a}{6}$; de la que se saca $y=\frac{39a}{153}=\frac{39\times2703}{153}=686$, soldados del 3.^r trozo. Póngase este valor en la ecuacion $z=\frac{9y-a}{6}$, y saldrá $z=\frac{9\times689-2703}{6}=583$, soldados del 2.° trozo. Sustituyanse últimamente los dos valores de z, y en la ecuacion $x=a-3z-y$; y será $x=2703-3\times583-689=265$, soldados del 1.^r trozo. En efecto, si se hace la prueba, se verá que $3\times265+\frac{3}{2}(689+583)=2703$, $3\times583+265+689=2703$, y finalmente $3\times689+\frac{3}{4}(265+583)=2703$.

Los siguientes problemas servirán de egercicio á los jóvenes.

17.° *Si al valor de una de dos alajas que uno tiene, se añaden 150, resulta un valor triplo de la otra; y si al precio de esta se añaden los 150, iguala á la 1.ª ¿Cuánto vale cada una? Resp. La 1.ª 300 y la otra 150.*

18. *¿Qué números suman 570, de los cuales $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ del 1.° igualen á $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$ del 2.°? Resp.* 264, y 306.

19.° *Cuarenta y nueve personas comen*

una merienda que importa 40 pe. Cada hombre paga 4. pe. cada muger 3 y cada niño $\frac{1}{5}$, *¿cuántos hombres, mugeres y niños hay, en el supuesto de que este último número es cuadruplo del de los otros dos añadidos de 4? Resp. 5 homb. 4 mug. y 40 niños.*

20. *Tres se ponen á jugar, y á la primera partida perdió el 1.º igual cuantidad que los otros tenian: á la 2.ª perdió el 2.º otro tanto cuanto tenían el 1.º y 3.º En la 3.ª partida perdió el 3.º tambien cuantidad igual á la de los otros dos: y al fin del juego salió cada uno de los tres con 24 pe. con cuanto se puso á jugar cada uno? Resp. el 1.º con 39, el 2.º con 21 y el 3.º con 12 pesos.*

252 Este método aunque claro y sencillo, conduce á cálculos largos y embarazosos; y para escusarlos se ha recurrido á diferentes medios de abreviarlos, de los que esplicaremos el siguiente que es bastante general y espedíto. Las ecuaciones generales $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$ que representan dos cualesquiera ecuaciones con dos incognitas, en las que a, b, a', b' espresan la suma de los coeficientes respectivos de x, y; c, c' las de las cuantidades conocidas de ambas; dan en virtud de las reglas anteriores los valores $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$, $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$. Si se multiplican por b' los dos miembros de la 1.ª ecuacion, y por b los de la 2.ª y se resta el 2.º

producto del 1.ª resulta $(ab'-ba')x=cb'-bc'$, de la que se saca $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$, con una sola incognita. Del mismo modo se hubiera sacado el valor de $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$, multiplicando la 1.ª ecuacion por a', la 2.ª por a, y restando despues los dos productos. Estos dos valores de x, y son fórmulas generales por las que se sacan los de dos ecuaciones cualesquiera con dos incognitas, sustituyendo en ellas los valores correspondientes á a, a', b, b', c, c'.

253 Para sacar iguales fórmulas correspondientes á tres cualesquiera ecuaciones con tres incognitas; se toman las tres ecuaciones generales $ax+by+cz=d$, $a'x+b'y+c'z=d'$, $a''x+b''y+c''z=d''$, cuyos valores sacados por el método ordinario son $x=$ ....

$$\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},\ y=$$
$$\frac{ad'c''-ac'c''+ca'd'-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},\ z=$$
$$\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+ba'd''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Multiplicando los miembros de la 1.ª ecuacion por el producto de los coeficientes a, a' de x en la 2.ª y 3.ª, los de la 2.ª ecuacion por el producto aa' que tiene x en la 1.ª y 3.ª, y los de la 3.ª por aa' producto de los de x en la 1.ª y 2.ª; resultará x con un mismo coeficiente $aa'a''$ en todos tres, y restando sucesivamente una de ellas de las otras dos, resultarán dos ecuaciones con solas dos incognitas y, z. Del mismo modo se eliminará una de las dos; y se sacará por fin el valor de la que quede en la última ecuacion, observando el mismo órden cuando son cuatro cinco ó mas las ecuaciones é incognitas. Téngase presente que cuando los coeficientes de una misma incognita son iguales, se escusa la multiplicacion para hacer la resta; y la multiplicacion solo debe hacerse con los factores que no sean comunes á los didiversos coeficientes.

Bezout ha dado reglas para sacar los numeradores y denominadores sin necesidad de cálculo por medio de las combinaciones de las letras; y la Place las ha demostrado en una memoria presentada á la academia de las ciencias de Paris en el año de 1772, 2.ª parte pag. 294.

Problemas indeterminados.

254 Los problemas resueltos hasta aquí se llaman *determinados*, porque tienen tantas incognitas como condiciones. Cuando estas son mas que las incognitas, se llama el problema *mas que determinado*, y sucede frecuentemente que las que hay demas, ó son inútiles ú oponiéndose unas á otras hacen el problema imposible.

Pídense por egemplo, dos números x, z,

cuya suma sea 8, su diferencia 2, y su producto 12. De las tres ecuaciones $x+z=8$, $x-z=2$, $xz=12$, que resultan, la 2.ª da $x=z+2$, y sustituyendo este valor en la 1.ª se tiene $z+2+z=8$, ó $z=3$: puesto este valor en la 2.ª resulta $x=5$. Pongase ahora el producto 3×5 en lugar de xy en la 3.ª ecuacion, y la reducirá á $15=12$, consecuencia falsa que muestra que el problema es imposible.

255 Si la tercera condicion del problema hubiera pedido que el producto fuese 15; hubiera sido la 3.ª ecuacion $xy=15$: y sacando de las dos primeras ecuaciones $x=5$, $z=3$, sustituyendo el producto de estos dos números en lugar de xy en la 3.ª ecuacion; hubiera resultado $15=15$: ecuacion que se llama *idéntica*, por tener unas mismas cuantidades en ambos miembros, y que confirma la inutilidad de la 3.ª condicion para el problema.

En general, cuando despues de haber llenado las condiciones de un problema, resulta una ecuacion idéntica, es prueba de que á todas las cuantidades de la clase de que habla el problema, conviene la propiedad que en él se propone. Si se pidiese un número x de cuyo duplo restando 1, y del duplo de la resta quitando 2, partiendo despues el residuo por 4, resultase el número $x-1$; se hubiera tenido $\frac{4x-4}{4}=x-1$, donde $x-1=$

$x-1$: ecuacion idéntica que muestra, que conviene á cualquier número la propiedad espresada en el problema.

256 Llamamos á un problema *indeterminado* cuando hay en él mas incognitas que condiciones ó que ecuaciones: *si se piden dos números* x, z *tales que restando el 2.º del 1.º sea la diferencia el duplo del 1.º ménos 6*; se tendria una sola ecuacion $x-z=2x-6$ con dos incognitas. En este caso se despeja una de ellas $x=6-z$, y dando á arbitrio diferentes valores á z, se tienen otros tantos valores de x. Si se hace $z=0$, será $x=6$; si $z=1$, $x=6-1=5$; si $z=20$, será $x=6-20=-14$ &c. hasta el infinito.

257 Cuando en estos problemas se exige que los valores de x, z sean números enteros y positivos, se ciñe á pocas el infinito número de sus soluciones, y queda el problema medio determinado; ó *semideterminado*: el anterior por eg. no admite mas que las siete soluciones siguientes...

$z=0$, $z=1$, $z=2$, $z=3$, $z=4$, $z=5$, $z=6$,
$x=6$, $x=5$, $x=4$, $x=3$, $x=2$, $x=1$, $x=0$.

El método que observamos en los problemas que siguen nos puede servir de regla para los demas que ocurran.

1.º *Cierto número de varas de paño á 21 rs. y de tela á 31 importan 1770 rs. ¿ cuántas hay de cada cosa en números enteros ?*

Siendo x el número de varas de paño y z el de las de tela, tendremos $21x+31z=1770$, y despejando la incognita x que tiene menor coeficiente será dividiendo por 21, $x=\frac{1770-31z}{21}=84-z+\frac{6-10z}{21}$. Como esta cuantidad ha de ser número entero, lo será tambien $\frac{6-10z}{21}$ ó $\frac{10z-6}{21}$. Llamemos, pues e, e', e'' un entero, y tendremos $\frac{10z-6}{21}=e$, y $z=\frac{21e+6}{10}=2e+\frac{e+6}{10}$. Tambien $\frac{e+6}{10}=e'$ número entero, y de consiguiente $e=10e'-6$. Este valor que ya no tiene quebrado, sustituido en la ecuacion $z=\frac{21e+6}{10}$ la reduce á $z=21e'-12$: y éste puesto en $x=\frac{1770-31z}{21}$, da $x=102-31e'$.

Aunque de las dos ecuaciones $z=21e'-12$, $x=102-31e'$ me dice la 1.ª que saldrá número entero y positivo sustituyendo por e' cualquier cuantidad que no sea cero; por la 2.ª veo que el valor de e' ha de ser tal que $31e'$ sea menor que 102, ó e' menor que $\frac{102}{31}=3\frac{9}{31}$: luego el problema tiene solo tres soluciones, la 1.ª haciendo $e'=1$, en cuyo caso $x=71$, $z=9$, el importe de las varas de paño 1491, y 279 el de las de tela. La 2.ª haciendo $e'=2$, y entonces $x=$

40, $z=30$, el valor del paño 840, y el de la tela 930. Y la 3ª haciendo $e'=3$, en cuyo caso $x=9$, $z=51$, el importe del paño 189, y el de la tela 1581.

2.º *Con 41 piezas de á 24, 19 y 10 rs. cada una se quiere hacer un compuesto que valga 741 rs. y se pide el número de piezas de cada especie.*

Si son x, z, y respectivamente los números de piezas de cada especie, será $x+z+y=41$, y $24x+19z+10y=741$. En estas dos ecuaciones se tiene $x=41-z-y$, $x=\ldots\ldots \frac{741-19z-10y}{24}$, y de consiguiente $41-z-y=\frac{741-19z-10y}{24}$, y $z=\frac{243-14y}{5}=48-2y+\frac{3-4y}{5}$. Hagase ahora $\frac{3-4y}{5}=e$, será $y=\frac{3-5e}{4}=-e+\frac{3-e}{4}$: y suponiendo $\frac{3-e}{4}=e'$, será $e'=3-4e'$. Puesto este valor en $y=\frac{3-5e}{4}$ resulta $y=5e'-3$: y en $z=\frac{243-14y}{5}$ sustituyendo el de y, sale $z=57-14e'$: y puestos los de z, y, en $x=41-z-y$, se tiene por último $x=9e'-13$.

Concluyo pues, de las tres ecuaciones $x=9e'-13$, $z=57-14e'$, $y=5e'-3$ que para tener soluciones en números enteros y positivos, e' ha de ser tal 1.º que $9e'$ sea

mayor que 13, ó e' mayor que $\frac{13}{9}$; 2.ª que $14e'$ ha de ser menor que 57 ó e' menor que $\frac{57}{14}=4\frac{1}{14}$: 3.ª que $5e'$ sea mayor que 3, ó e' mayor que $\frac{3}{5}$. Luego solo puedo dar á e' los tres valores 2, 3, 4, que dan las tres soluciones siguientes del problema, $x=5$, $z=29$, $y=7$: $x=14$, $z=15$, $y=12$: $x=23$, $z=1$, $y=17$.

3.º *Entre dos tienen 100 dob. la parte del 1.º contada siete á siete, y la del 2.º ocho á ocho dan de resta 7; ¿cuanto tiene cada uno?*

Sea $7z+7$ la parte del 1.º y $8x+7$ la del 2.º será $7z+8x+14=100$, y $z=\frac{86-8x}{7}=12-x+\frac{2-x}{7}$. Hago $\frac{2-x}{7}$ ó $\frac{x-2}{7}=e$, y tendré $x=7e+2$, y de consiguiente $z=\frac{86-8x}{7}=10-8e$; ecuacion donde solo se puede poner por e cero y 1: y así de solos dos modos se puede desatar el problema. Si $e=0$, sale $z=10$, y $x=2$, la parte del 1.º $7z+7=77$, y la del 2.º $8x+7=23$. Si $e=1$, $z=2$, $x=9$, $7z+7=21$, y $8x+7=79$.

4.º *Hallar dos números cuadrados cuya suma sea a, número entero y positivo.*

Si se suponen dichos números x^2, z^2; se tendrá $x^2+z^2=a$, y $x=\sqrt{(a-z^2)}$: es decir, que el problema no será posible 1.º si z^2 es mayor que a y lo mismo x^2; pues si $a=17$, y $z=5$, $\sqrt{(a-z^2)}$ se reduce á $\sqrt{-8}$, cuantidad imaginaria ó imposible: lo 2.° si $a-z^2$ no es un cuadrado perfecto; pues si $a=17$, $z=3$, $\sqrt{(a-z^2)}=\sqrt{8}$ no desata la cuestion por no ser 8 cuadrado perfecto; con que si $a=17$, solo es posible haciendo $z=1$, en cuyo caso $\sqrt{(a-z^2)}=\sqrt{16}=4$, y suponiendo $z=4$; pues entonces $\sqrt{(a-z^2=)}\sqrt{1}=1$.

5.° *Hallar dos cuadrados que se diferencien en a cuantidad entera y positiva.*

Si llamamos x la suma de las raices de los dos números y z la diferencia, serán los números (101), $\frac{x+z}{2}$, $\frac{x-z}{2}$: la diferencia de sus cuadrados es $\frac{x^2+2xz+z^2-x^2+2x-z^2}{4}$, que se reduce á xz: luego $xz=a$; y la diferencia dada es siempre el producto de la suma de las raices de los números multiplicados por la diferencia.

Sea $a=60$, y como sus factores son 1×60, 2×30, 3×20, 4×15, 5×12, 6×10; tendrá el problema seis soluciones, bien que solo con 2 y 30, 6 y 10 números pares, resultan números enteros. Si $x=30$, $z=2$, $\frac{x+z}{2}=16$, $\frac{x-2}{2}=14$, sus cuadrados son 256 y 196 que se diferencian en 60. Si $x=10$, $z=6$....... $\frac{x+z}{2}=8$, $\frac{x-z}{2}=2$, y sus cuadrados 64 y 4 tambien se diferencian en 60.

Ecuaciones de segundo grado

258 Cuando estas ecuaciones son *completas* ó no tienen mas términos con la incognita que el de su cuadrado; se resuelven dejando en un miembro este término solo, sin coeficiente, y con signo positivo, y sacando despues la raiz de ambos miembros. En la ecuacion $a=c^2-dx^2$, se pasa al 1.r miembro $-dx^2$, y el a al 2.° se le quita el coeficiente d, y queda $x^2=\frac{c^2-a}{d}$: despues se saca de ambos miembros la raiz cuadrada, y resulta $x=\pm\sqrt{(\frac{c^2-a}{d})}$. Con los signos $\pm$ del radical se espresan las dos raices positiva y negativa que tiene el cuadrado $\frac{c^2-a}{d}$ (138), el cual es producto de $\sqrt{(\frac{c^2-a}{d})}\times\sqrt{(\frac{c^2-a}{d})}$ ó de $-\sqrt{(\frac{c^2-a}{d})}\times-\sqrt{(\frac{c^2-a}{d})}$. Si la ecuacion hubiera sido $az-3b=c+bz^2$, ó $az^2-bz^2=c+3b$; divididos ambos miembros por $a\text{-}b$, y sacando la raiz del resultado $z^2=\frac{c+3b}{a-b}$, se tiene.......

$$z=\pm\sqrt{(\frac{c+3b}{a-b})}.$$

259 Cuando hay uno, dos ó mas tér-

minos con la incognita ademas de su cuadrado, como en $x^2+2ax=b$; puestos todos en un miembro se vé que á x^2+2ax cuadrado de la 1.ª parte x, y duplo de la 1.ª multiplicado por la 2.ª a, falta el cuadrado de la 2.ª parte para ser cuadrado completo: luego habrá que añadirle para que lo sea, el cuadrado a^2 de a, mitad de $2a$ que multiplica á x, el cual se añadirá tambien al 2.° miembro para que se conserve la igualdad. Resultará pues, la ecuacion $x^2+2ax+a^2=b+a^2$, de cuyos dos miembros sacando la raiz cuadrada, se tiene $x+a=\pm\sqrt{(b+a^2)}$ ó $x=-a\pm\sqrt{(b+a^2)}$.

260 Estas ecuaciones se llaman *incompletas*; y se resuelven generalmente *poniendo primero en un miembro los términos donde se halle la incognita, dejando positivo al del cuadrado, y con* 1 *de coeficiente: se añade despues á ambos miembros el cuadrado de la mitad de la cuantidad ó cuantidades que multiplican la incognita, y se saca por último la raiz de dichos miembros.*

En la ecuacion $cx-bd=dx-ax^2$, que dispuesta así, $ax^2+cx-dx=bd$, y dividiéndola por a, se reduce á esta $x^2+\frac{(c-d)x}{a}=\frac{bd}{a}$; añado á sus dos miembros $(\frac{c-d}{2a})^2$ cuadrado de la mitad de $\frac{c-d}{a}$ que multiplica á x; y tendré $x^2+\frac{cx-dx}{a}+(\frac{c-d}{2a})^2=\frac{bd}{a}+(\frac{c-d}{2a})^2$, cuyo 1.er miembro es cuadrado completo: saco la raiz de ambos, y como resulta $x+\frac{c-d}{2a}=\pm\sqrt{(\frac{bd}{a}+(\frac{c-d}{2a})^2)}$; será por último $x=-\frac{c-d}{2a}\pm\sqrt{(\frac{bd}{a}+(\frac{c-d}{2a})^2)}$.

Si se hubiese dado la ecuacion $4z^2-8c=4z-\frac{cz}{a}-4b$, que ordenada y dividida por 4, es $z^2+\frac{cz}{4a}-z=2c-b$; se hubiera completado añadiendo el cuadrado de la mitad $\frac{c-4a}{8a}$ de $\frac{c}{4a}-1$ que multiplica á z; el resultado es $z^2+\frac{cz}{4a}-+(\frac{c-4a}{8a})^2=2c-b+(\frac{c-4a}{8a})^2$; de donde sacando la raiz, se tiene $z+\frac{c}{8a}-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{(2c-b+(\frac{c-4a}{8a})^2)}$, y últimamente $z=\frac{1}{2}-\frac{c}{8a}\pm\sqrt{(2c-b+(\frac{c-4a}{8a})^2)}$.

260 Todas estas ecuaciones y cualesquiera otras de 2.° grado las representa la ecuacion general $x^2+px=q$, que por las reglas dadas se trasforma en $x^2+px+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2$, y de la que se saca $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$, esto es $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$, y $x=\frac{1}{2}p-\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$. En ella al estraer la raiz, resulta positiva la

2.ª parte $\frac{1}{2}p$ del binomio, y negativa trasladada al 2.° miembro; y será $x+p$ la raiz. Esta hubiera sido $x-p$ en la ecuacion $x^2-px=q$; de la que se hubiera sacado $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{}(q+\frac{1}{4}p^2)$: y tanto en un caso como en el otro, resultarán valores reales de x, aunque el radical sea inconmensurable, siempre que q sea menor que $\frac{1}{4}p^2$. Pero si q fuese mayor que $\frac{1}{4}p^2$ y negativa, el radical $\sqrt{}(\frac{1}{4}p^2-q)$ será cuantidad imaginaria, resultado de operaciones impracticables, y símbolo ó simulacro de cuantidades que no existen, que al mismo tiempo que muestra lo absurdo de la condicion de un problema, indica en el cálculo el modo de corregirla.

Un egemplo aclarará esta importante observacion sobre las imaginarias. *Se pide dividir un número p en dos partes cuyo producto sea q.* Si x es una de las partes, $q-x$ será la otra, y la ecuacion $px-x^2=-q$, ó mudando todos los signos $x^2-px=q$. En ella es $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{}(\frac{1}{4}p^2-q)$. Si $p=10$ y $q=21$, se tiene $x=5\pm\sqrt{}(25-21)=5\pm2$, esto es, $x=7$ y $x=3$. Cuando $x=7$, $10-7=3$, y si $x=3$, $10-3=7$: luego las dos soluciones se reducen á una. Supóngase ahora $p=12$ y $q=45$; la ecuacion seria en este caso $12x-x^2=45$, y de ella se sacaria $x=6\pm\sqrt{}(36-45)=6\pm\sqrt{}-9$. Este resultado que indica lo absurdo del problema, pudo ya presumirse de la ecuacion $12x-x^2=45$; pues siendo en ella mayor $q=45$

que $\frac{1}{4}p^2=36$, el residuo espresado por $\frac{1}{4}p^2-q$, debia ser negativo. Tambien se ve que si en vez de la ecuacion $12x-x^2=45$, hubiese resultado de la propuesta del problema $x^2\pm12x=45$, se habria sacado de ella $x=6\pm\sqrt{}81=6\pm9$ sin cuantidad imaginaria.

Suponiendo d la diferencia de las dos partes en que ha de dividirse p; será (101) $\frac{1}{2}(p+d)$ la mayor, $\frac{1}{2}(p-d)$ la menor, y $\frac{q^2}{4}-\frac{d^2}{4}$ su producto. En esta última espresion, cualquiera valor que se dé á d el producto de las dos partes debe ser siempre menor que el cuadrado $\frac{1}{4}p^2$ de la mitad del número p, pues si es cero la diferencia d las dos partes serán iguales, y su producto $\frac{1}{4}p^2$. Luego si es absurdo suponer mayor dicho producto, todo razonamiento fundado en esta falsedad, ha de producir consecuencias absurdas, cual ha sido el resultado de las operaciones algébricas, que nos da á conocer que es falso lo que buscabamos.

Apliquemos ahora todas las reglas dadas á la resolucion de diferentes problemas tanto de álgebra como de aritmética superior, previniendo para lo sucesivo que el nombre de *raices* que daremos á los valores de una ecuacion, no se toma en el sentido que le hemos dado (131); sino porque multiplicadas con la incognita á manera de binomio, producen la ecuacion de las que se llaman raices.

Prob. 1.º *Un agente de comercio recibe para el giro de cada comerciante tantas veces 15 dob. como asociados hay. Su ganancia que es tantas veces dos 2 dob. por 100 como mercaderes hay, multiplicada por* $\frac{2}{15}$ *da de producto el número justo de los mercaderes: ¿cuántos son?*

Suponiendo x el número de mercaderes, será $15x$ lo que cada uno pone, y la suma de todos $15x\times x$ ó $15x^2$: la ganancia debe ser $\frac{2x}{100}\times 15x^2=\frac{30x^3}{100}$ ó $\frac{3x^3}{10}$; y multiplicándola por $\frac{2}{15}$ dará el número x: esto es, $\frac{3x^3}{10}\times\frac{2}{15}=x$, ó $\frac{6x^3}{150}=x$, y $6x^3=150x$. Pártase por $6x$ y saldrá $x^2=25$: luego $x=\pm\sqrt{25}=5$ número de mercaderes. Será pues, $5\times 15=75$ lo que cada uno ponia; todo el fondo $75\times 5=375$: y la ganancia $37\frac{1}{2}$.

2.º *Uno empleó 1000 rs. en corderos pagando cada uno á tal precio, que con el mismo dinero pudo haber comprado 5 mas, si se los hubieran dado 2 rs. mas baratos, y le hubieran sobrado 10 rs. ¿cuántos corderos compró, y qué le costó cada uno?*

Siendo x el número de corderos, será $\frac{1000}{x}$ el precio de cada uno: habiendo comprado 5 mas, hubiera costado cada cordero

$\frac{1000-10}{x+5}=\frac{990}{x+5}$. Y pues este precio es menor que el otro en 2 rs., se tendrá $\frac{990}{x+5}-2=\frac{1000}{x}$. Quítense los quebrados y reduzcase, y saldrá $x^2=2500$, y de consiguiente $x=50$, número de corderos, cuyo precio es $\frac{1000}{50}=20$.

3.º *De unos amigos que se juntaron en un café se marcharon dos cuando se trató de pagar 144 rs. que hicieron de coste: y así tocó á cada uno de los que quedaron, 6 rs. mas ¿cuantos eran?*

Suponiendo x su número, será $\frac{144}{x}$ lo que cada uno debia pagar, y $\frac{144}{x-2}$ lo que efectivamente pagó, idos los dos: y pues esta cuantidad es mayor que la primera en 6 rs. tendré $\frac{144}{x-2}-6=\frac{144}{x}$, esto es, (quitando los quebrados y reduciendo), $x^2-2x=48$: añado á ambos miembros 1, cuadrado de la mitad del coeficiente de x, y será $x^2-2x+1=48+1$, de donde sacando la raiz, sale $x-1=\pm\sqrt{49}$, y $x=1\pm 7$. De aqui resultan 8 y -6 por valores de x, y de ellos el 8 es el número de amigos que satisface la cuestion; pues $\frac{144}{8}=18$ parte que debia cada uno de los 8, es menor en 6 que $\frac{144}{8-2}=24$, parte que tocó á los 6, que quedaron.

El otro valor - 6 confirma lo que dejamos dicho de las cuantidades negativas, pues resuelve el problema en un caso contrario al que se propone, esto es, en el supuesto de que se hubieran llegado dos mas á comer y pagar, adeudando 6 rs. ménos cada uno. Con efecto, la ecuacion hubiera sido $\frac{144}{x} = \frac{144}{x+2}+6$, de donde se saca $x=-1\pm7$, esto es, $x=6$, y $x=-8$.

4.° *Salen a un mismo tiempo dos de un pueblo para otro distante* a *de leguas; el* 1.° *anda cada dia* c *leguas mas que el* 2.° *y llega* b *dias ántes que el otro, ¿cuántos dias tarda cada uno, y cuántas leguas anda al dia?*

Siendo y las leguas que anda el 1.° cada dia, serán $\frac{a}{y}$ los dias que tardó, $y-c$ las leguas que anda el 2.° y $\frac{a}{y-c}$ los dias que tardó: y puesto que los dias se diferencian en b; se tendrá $\frac{a}{y}=\frac{a}{y-c}-b$; ó $y^2-cy=\frac{ac}{b}$. Completese el cuadrado añadiendo $\frac{c^2}{4}$, y se tendrá $y^2-cy+\frac{c}{4}=\frac{ac}{b}+\frac{c^2}{4}$: de donde sacando la

raiz, resulta $y=\frac{c}{2}\pm\sqrt{(\frac{ac}{b}+\frac{c^2}{4})}$.

Sea $a=99$ leguas, $c=2$, y $b=2$: será $y=\frac{c}{2}\pm\sqrt{(\frac{ac}{b}+\frac{c^2}{4})}=\frac{2}{2}\pm\sqrt{\frac{99.2}{2}+\frac{4}{4}})=1\pm\sqrt{100}=1\pm10$: con que serán 11 las leguas que anda el 1.° y $\frac{99}{11}=9$ los dias que tardó: 9 las que anda el 2.° y $\frac{99}{9}=11$ los dias del viage. Suponiendo $a=90$, $b=1$, $c=1$, se tiene $y=10$, leguas del 1.° y 9 los dias que tardó; el 2.° anda entonces 9 leguas y tarda 10 dias.

250 5.° *Dadas tres de las cinco cosas principales que se consideran en una progresion, á saber primero y último término, suma de todos los términos, número de ellos y su esponente, se pide averiguar las otras dos.* En la progresion aritmética se tomarán las dos ecuaciones $b=a+d(n-1)$, $s=(a+b)\frac{n}{2}$ encontradas (186 y 190): y considerando cómo incognitas las dos cuantidades que se pidan; se despejarán en ellas por las reglas dadas (247 y sig.).

Supongo *que saliendo dos á un tiempo de dos lugares opuestos que distan* 630 *leguas, caminando el uno* 1 *legua el* 1.^{r} *dia,* 3 *el* 2.°, *el* 5 3.°, *aumentando en los demas en progresion aritmética, y caminando el otro por dia con arreglo á los números de la progresion,* 2, 3, 4 *&c. se pregunte qué* *dia se encontrarán, y las leguas que anda cada uno.*

Como las dos progresiones concurren á acercar los caminantes, se deberán sumar, y se tendrá la nueva progresion $\div$ 3. 6. 9. 12 &c. cuya suma s ha de ser 630, $a=3$ y $d=3$, y habrá que buscar el número de términos n. Despejando b en las dos ecuaciones se tiene $b=a+dn-d, b=\frac{2s-an}{n}$: iguálense estos valores, y resultará la ecuacion $a+dn-d=\frac{2s-an}{n}$, que se reduce á $n^2+\frac{2an}{d}n=-\frac{2s}{d}$: resuélvase por las reglas dadas, y será $n=\frac{1}{2}-\frac{a}{d}\pm\surd(\frac{2s}{d}+(\frac{a}{d}-\frac{1}{2})^2)$. Sustituyo ahora los valores de a, s, y d, y tendré $n=-\frac{1}{2}\pm\surd\frac{1681}{4}=20$, número de dias que tardan en encontrarse los viajantes.

Para encontrar las leguas que andubo cada uno, hay que sumar 20 términos de las dos progresiones $\div$ 1. 3. 5. &c. $\div$ 2. 3. 4 &c. En la 1.ª despues de haber sacado $b=a+d(n-1)=1+2(20-1)=39$; sale $s=(a+b)\frac{n}{2}=(1+39)10=400$, leg. que andubo el 1.º: y en la 2.ª donde $b=a+d(n-1)=2+1(20-1)=21$; es $s=(a+b)\frac{n}{2}=(2+21)10=230$, leg. del 2.º

251 En la progresion geométrica se ha-

ce de las equaciones $b=aq^{n-1}$, $s=\frac{bq-a}{q-1}$ sacadas (219 y 223), el mismo uso que de las dos de la aritmética.

Un sirviente infiel saca de un frasco donde hay 20 cuartillos de buen vino, uno cada dia, y lo reemplaza con otro de agua: al cabo de 4 dias ¿cuanto vino quedará en el frasco?

En el 1.ʳ dia quedan $20-1=19$ c.llos En el 2.º quedan $19\frac{19}{20}=\frac{19\times20-19}{20}=\frac{19(19+1)}{20}\frac{19}{19}=\frac{19\times19}{20}=\frac{19^2}{20}=$. En el 3.º quedan $\frac{19^2}{20}-\frac{20}{20}=\frac{9^2}{20}-\frac{19^2}{20^2}=\frac{19^2\times20-19^2}{20^2}=\frac{19^2(19+1)-19}{20^2}=\frac{19^3}{20^2}$; luego la progresion $\div\!\!\div$ $19:\frac{19^2}{20}:\frac{19^3}{20^2}$ &c. espresa el vino que va quedando cada dia. De consiguiente si en la ecuacion $b=aq^{n-1}$ se sustituye en lugar de a, 19; por q, $\frac{19}{20}$; y 4 en lugar de n, será $b=19(\frac{19}{20})^3=\frac{19^4}{20^3}=\frac{130321}{8000}=16\frac{2321}{8000}$, porcion de vino que queda despues del 4.º dia.

Si se quisiere saber en cuantos dias quedaría igual porcion de agua que de vino; sería $a=19$, $q=\frac{19}{20}$, y $b=10$: luego en lugar de $b=aq^{n-1}$ ó $bq=aq^n$, se tendria $10\times\frac{19}{20}=19(\frac{19}{20})^n$, que se reduce dividiendo por 19, á $\frac{1}{2}=(\frac{19}{20})^n$, ecuacion que directamente no se puede resolver, por no poderse despejar n

sino subiendo $\frac{19}{20}$ á sus potencias hasta componer $\frac{1}{2}$. Pero por los logarítmos se tiene (227) $nL(\frac{19}{20})=L\frac{1}{2}$; y $n=\frac{L\frac{1}{2}}{L\frac{19}{20}}=13\frac{114368}{222764}$

261 Prob. 6.° *se pide esplicar los fundamentos y la práctica de la regla de interés.*

Se llama *interés* la ganancia que se saca del dinero prestado, dado á censo ó puesto á comercio: será *simple* cuando gana solo la cuantidad ó principal empleado, é interés *doble* ó compuesto cuando las ganancias se juntan al principal para producir ganancias.

1.° *Dado un capital, el tiempo que está puesto á ganancias, y lo que se ha de pagar por cada* 100; *hayase de encontrar lo que se debe al cabo de dicho tiempo.*

Si llamamos p el capital, t el tiempo, r el interés que da un real cada año, y s la suma que se busca; diremos, *si un real da r de interés en un año ¿cuantos dará el principal* p? ó $1:r::p:pr$: y será pr lo que produce p de interés cada año: digase despues *si en* 1 *año* p *da* pr *¿en t de años cuanto dará?* ó $1:pr::t:prt$. Luego prt son los intereses que da p en el tiempo t: júntense con el principal p, y saldrá la suma que se pide ó $s=p+prt$. Despéjense en esta ecuacion p, r, y t; y se tendrá $p=\frac{s}{1+rt}$, $r=\frac{s-p}{pt}$, $t=\frac{s-p}{pr}$; en donde conociendo tres de las cuatro cuantidades p, r, t, s, será facil averiguar la otra.

Supongamos que un usurero ha prestado 15600 rs. *con la condicion de recibir* 8 rs. *de cada* 100 *de ganancia cada año, esto es, á* 8 *por* $\frac{o}{o}$; *y que se pregunta, cuanto debe percibir al fin de* 5 *años por capital é intereses.*

En este caso $p=15600$, $t=5$; y r se encontrará diciendo, 100 *reales dan* 8, 1 *real cuanto dará*? ó $100:8::1:\frac{8}{100}=$.... 0,08: será pues, $s=p+prt=15600+15600\times5\times0{,}08=21840$ rs. suma que debe percibir. Si dada esta suma pagada por 5 años à 8 por 100, se pidiese el capital que la ha producido; se tendria $p=\frac{s}{1+rt}=\frac{21840}{1+5\times0{,}8}=15600$. Del mismo modo se encontrarán las otras dos cuantidades.

2.° *Uno que paga de renta cada año* a *deja de pagarla* t *de años con la condicion de dar* r *de interés por cada real de dinero atrasado: ¿cuanto debe al cabo de* t *de años?*

Al fin de 1.^r año no debe interés, por no haber renta atrasada; al fin del 2.° año debe el interés ar de una renta a atrasada, pues si 1 real da r, a produce ar; al cabo del 3.^r año debe $2ar$ de intereses, al cabo del 4.° $3ar$.... y al fin del año t, $(t-1)ar$. Todos estos intereses forman la progresion aritmética $\div$ 0. ar. $2ar$. $3ar$..... $(t—)ar$, cuya suma es $\frac{atr(t-1)}{2}$ (223): juntesele el número at de rentas caidas en t años, y será $s=\frac{atr(t-1)}{2}+at=\frac{atr(t-1)+2at}{2}$ $=(\frac{r(t-1)+2}{2})\times at$, lo que se debe al cabo de t años por rentas é intereses. Despejando a, t y r en esta ecuacion, se tiene $a=\frac{2s}{r(t-1)+2t}$, $t=\frac{r-2}{2r}\pm\sqrt{(\frac{2s}{ar}+(\frac{2-r}{2r})^2)}$, $r=\frac{2s-2at}{at(t-1)}$.

Uno que paga 100 *dob. cada año deja de pagarlos* 8 *años; con la condicion de dar al cabo de este tiempo las ocho rentas con los intereses á razon de* 5 *por* 100 *¿cuánto debe pagar?*

Sustituyendo los valores en $s=(\frac{r(t-1)+2}{2})\times at$, sale $s=(\frac{0,05\times 7+2}{2})\times 800=940$. Si se diese esta suma en pago de 100 dob. retenidos 8 años, y se pidiese el interés que ha producido cada 100; se tendrá $r=\frac{2s-2at}{at(t-1)}=\frac{1880-1600}{800\times 7}$ $=0,05$; y si 1 real da 0,05; 100 rs. darán 5, interés que se busca.

3.° *Dado un capital, el interés anual, y el número de años que está ganando, hallar cuánto monta el capital y las ganancias á interés compuesto.*

Sea a el capital, t el tiempo, y r el interés de 1 real; será 1 *real*$+r$ que llamarémos R, lo que se deberá al cabo de un año

por 1 real y su interés. En el 2.° año entra ganando como principal 1 *real*$+r$ ó R, con que diciendo, 1 *da* R, R *¿cuánto dará?* se tendrá R^2 al fin del 2.° año por capital y ganancias: del mismo modo se hallará R^3 por lo que se debe al fin del 3.^r año... y al cabo del año t, R^t. Diráse despues, *si uno da* R^t, a *que dará* ó $1:R^t::a:aR^t$; luego a produce de principal y ganancias al cabo de t años aR^t: y será $s=aR^t$, $a=\frac{s}{R^t}$, $R=\sqrt[t]{\frac{s}{a}}$, y $t=\frac{Ls-La}{LR}$.

Si se pregunta la suma que producen 20000 *pes. á* 5 *por* 100 *al cabo de* 6 *años, entrando á ganancias el interés*; se tendrá $a=20000$, $t=6$, $r=0,05$, $R=1,05$: y de consiguiente $s=aR^t=20000\times(1,05)^6=20000\times 1,3401=$ 26802 *pes.*

4.° *Dada una renta que se paga cada año, los años que deja de pagarse, y el interés; hallar lo que se debe al fin de dicho tiempo por los atrasos y ganancias á interés compuesto.*

Sea a la renta anual, t el tiempo que deja de pagarse, r el interés de 1 *real*, $1+r$ ó R un real y su interés, y s la suma. Al fin del 1.^r año se debe solo la renta a: al fin del 2.° se debe la renta a de este año, y la renta é interes del 1.° que es aR; porque si 1 *da* R, *a dará* aR: con que se debe $a+aR$:

al fin del 3.° por la misma cuenta se debe $a+aR+aR^2$; pues si 1 da R, $a+aR$ dará $aR+aR^2$, que con la renta del 3.^{r} año compone $a+aR+aR^2$: al fin del 4.° se deberá $a+aR+aR^2+aR^3$.... y al cabo del año t, $a+aR+aR^2+aR^3+\ldots\ldots aR^{t-1}$, esto es, ... $a(1+R+R^2+R^3+\ldots R^{t-1})$. La suma de esta progresion geométrica es (223)............... $\frac{R\times R^{t-1}-1}{R-1}=\frac{R^t-1}{r}$: luego la deuda que se busca, será $s=\frac{R^t-1}{r}\times a$: de donde tambien se saca $a=\frac{rs}{R^t-1}$, $R=\sqrt[t]{(\frac{rs}{a}+1)}$, y $t=\frac{L(rs+a)-La}{LR}$.

Si la renta anual es 2400 pes. *y se retiene* 8 *años con condicion de pagar* 4 *por* 100 *á interés compuesto*; se tendrá $s=\frac{R^t-1}{r}\times a=\frac{(1{,}04)^8-1}{0{,}04}\times 2400=22140$ *pes.* cuantidad que se pide.

162 De los dos valores que tiene toda incognita de 2.° grado, hemos contado solo con el que satisface derechamente la cuestion: porque el otro, ó no pertenece á ella, ó la resuelve en diferentes circunstancias. Sin embargo, hay casos en que dichos dos valores resuelven el problema de dos maneras diferentes; y uno de ellos es el siguiente.

7.° *Uno vendió un caballo en* 24 *dob.*

perdiendo en la venta tanto por 100 *como le habia costado ¿ en cuanto lo compró ?*

Si llamamos x lo que le costó ó lo que perdió por 100; dirémos, *si de* 100 *quedan* $100-x$, de x importe del caballo, *quedarán* $\frac{(100-x)\times x}{100}$: y como esto ha de componer 24; tendrémos $24=\frac{(100-x)\times x}{100}$, ó $x^2-100x=-2400$, donde $x=50\pm 10$, esto es, $x=60$, y $x=40$, valores que resuelven ambos el problema.

263 Tambien se resuelven como las de 2.° grado las ecuaciones de esta forma.... $x^{2s}\pm px^s=q$: es decir, las que tienen solos dos términos con la incognita, y el esponente del uno es duplo del esponente del otro: como $x^4+ax^2=b$, $x^6+cx^3=t$ &c.

Si en la ecuacion general $x^{2s}+px^s=q$ supongo $x^s=z$, se convierte en $z^2+pz=q$ en la que completando el cuadrado, es $z^2+pz+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2$. Saco la raiz y me resulta $z+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$ ó $z=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$ Pongo x^s en lugar de z, y saco la raiz s, y tendré $x=\sqrt[s]{(\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)})}$. Llamo a, *á* para mayor claridad á dichos dos valores; y se reducirán á $x=\sqrt[s]{a}$, $x=\sqrt[s]{a}$. Si el esponente s es par, los dos valores vienen á ser por los signos $\pm$ que deben tener los radicales, los cuatro siguientes $x=+\sqrt{a}$, $x=+\sqrt{a'}$; $=x-\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a'}$, que deben ser todos reales si las cuantidades a, a' son positivas, é imaginarias si son negativas; y si una de las dos a, a' es positiva y la otra negativa, serán reales los dos valores y los otros dos imaginarios. Si en la ecuacion $x^4+ax^2=b$, se completa el cuadrado, y se saca la raiz del resultado $x^4+ax^2+\frac{1}{4}a^2=b+\frac{1}{4}a^2$; se tiene $x^2+\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}a^2)}$, ó $x^2=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}a^2)}$. Saquese ahora la raiz cuadrada, y será $x=\pm\sqrt{(-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}a^2)})}$, cuyo valor encierra los cuatro valores ó raices de que acabamos de hablar.

Estraccion de las raices parte racionales y parte inconmensurables

264 La ecuacion general $x^{2s}+px^s=q$ resuelta conforme acabamos de enseñar, da $x=\sqrt[s]{(-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)})}$: espresion que muchas veces puede reducirse á otra mas sencilla estrayendo de ella la raiz como vamos á decir. Séa 1.° $s=2$, y tratemos de estraer la raiz cuadrada de $\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$. Supongamos este binomio $m+\sqrt{n}$, y que su raiz cuadrada sea $\sqrt{x}+\sqrt{y}$: será $\sqrt{(m+\sqrt{n})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$; y cuadrando, $m+\sqrt{n}=x+y+2\sqrt{xy}$. Igualemos, como es natural, las cuantidades racionales entre si, y lo mismo las radicales; será $x+y=m$, y $2\sqrt{xy}=\sqrt{n}$. Cua-

drando ahora ambas ecuaciones, y restando despues la 2.ª de la 1.ª; se tendrá $x^2-2xy+y^2=m^2-n$, donde sacando la raiz es $x-y=\sqrt{(m^2-n)}$: luego x, y serán conmensurables cuando m^2-n sea un cuadrado. Si esta última ecuacion se suma con la anterior $x+y=m$, resulta $2x=m+\sqrt{(m^2-n)}$, ó $x=\frac{1}{2}m+\ldots\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}$. Restando dichas ecuaciones se tiene $2y=m-\sqrt{(m^2-n)}$, y $y=\frac{1}{2}m-\ldots\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}$. Será pues, $\sqrt{(m+\sqrt{n})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}+\sqrt{(\frac{1}{2}m-\ldots\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}$; y por la misma razon $\sqrt{(m-\sqrt{n})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}-\sqrt{(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}$

Si se pidiesen dos números cuyo producto es 105, *y la suma de sus cuadrados* 274; seria $xy=105$, $x^2+y^2=274$: la 1.ª ecuacion da $y=\frac{105}{x}$, cuyo valor sustituido en la 2.ª, la convierte en esta $x+\frac{(105)^2}{x^2}=274$, y $x^4+(105)^2=274\,x^2$, ó $x^4.\ 274x^2=-(105)^2$: de donde se saca $x^2=137\pm\sqrt{7744}$, y $x=\sqrt{(137\pm\sqrt{7744})}$.

Aqui es $m=137$, $\sqrt{n}=\sqrt{7744}$, $n=7744$: $\sqrt{(m^2-n)}=\sqrt{(18769-7744)}=\sqrt{11025}=105$: de consiguiente $\sqrt{(m\pm\sqrt{n})}=\sqrt{(137\pm\sqrt{7744})}=\sqrt{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}\pm\sqrt{(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}=\sqrt{\frac{1}{2}(137+105)})\pm\sqrt{\frac{1}{2}(137-105)})=11\pm4$: y x valdrá 15 o 7. En el primer caso es $y=7$, y en el segundo $y=15$:

luego 15 y 7 son los números que se piden.

Para sacar la raiz del binomio $7+\sqrt{48}$; en donde $m=7$, $n=48$; se tiene $\sqrt{(m^2-n)}=1$: y sustituyendo estos valores en la fórmula; resulta $\sqrt{(7+\sqrt{48})}=\sqrt{(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})}+\sqrt{(\frac{7}{2}-\frac{1}{2})}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$.

En el binomio $4+2\sqrt{3}$, que se reduce á $4+\sqrt{12}$; es $m=4$, $n=12$, $\sqrt{(m^2\ n)}=12$: y sustituyendo, resulta $\sqrt{(4+2\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$ ó $-1-\sqrt{3}$. En $2\sqrt{-1}$, que no tiene parte racional, es $m=0$, $n=-4$, y $\sqrt{(m^2-n)}=2$: luego $\sqrt{2\sqrt{\ }\ 1}=1+\sqrt{-1}$.

264 Supongamos ahora $s=3$, y la cantidad $\sqrt[3]{(m+\sqrt{n})}$ podrá tener una raiz de esta forma $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{t}$: (no se supone $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, porque esta tendria dos radicales cuadrados en su cubo). Será pues, $\sqrt[3]{(m+\sqrt{n})}=(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{t}$, y subiendo al cubo, $m+\sqrt{n}=x^3t+3x^2t\sqrt{y}+3xty+ty\sqrt{y}$. Igualando entre sí los términos racionales, y los irracionales de ambas partes, resulta $m=x^3t+3xty$, $\sqrt{n}=(3x^2t+ty)\sqrt{y}$: cuadrando las dos, y restando del primer resultado $m^2=x^6t^2+6x^4t^2y+9x^2t^2y^2$, el segundo $n=9x^4t^2y+6x^2t^2y^2+t^2y^3$; se tiene $m^2-n=x^6t^2-3x^4t^2y+3x^2t^2y^2-t^2y^3$; ó multiplicando por t, $t(m^2-n)=x^6t^3\ 3x^4t^3y+3x^2t^3y^2-t^3y^3$: saquese la raiz cúbica de ambos miembros y resulta $\sqrt[3]{t(m^2-n)}=x^2t-ty$ ó $\frac{\sqrt[3]{(m^2-n)t}}{t}=$ —

$x^2\ y$. Luego para que $x^2\ y$ sea racional, ó para que $m+\sqrt{n}$ tenga raiz cúbica exacta, es menester que $(m^2\ n)t$ sea cubo perfecto: para lo cual sirve la indeterminada t, que se supone 1 cuando $m^2\ n$ es cubo exacto, y cuando no lo es, se le da el valor conveniente para que lo sea.

Supongamos para abreviar $\frac{\sqrt[3]{(m^2\ n)t}}{t}=a$: será $x^2-y=a$, y de consiguiente $y=x^2-a$. Puesto este valor en la ecuacion $m=x^3t+3xty$, la reduce á $4tx^3\ 3atx\ m=0$, en la cual se sacará el valor de x por medio de sus divisores conmensurables, que los tendrá siempre que x, y puedan ser racionales, ó siempre que la cantidad propuesta tenga alguna raiz de la forma $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{t}$.

Sirva de 1.er eg. la cantidad $\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})}$, en la cual $m=20$, $\sqrt{n}=14\sqrt{2}$, y de consiguiente $m^2=400$, y $n=392$: luego $m^2-n=8$, que es cubo perfecto, y por lo mismo $t=1$. Tendremos pues, $\frac{\sqrt[3]{(m^2-n)t}}{t}=\sqrt[3]{8}=a$; y la ecuacion $4tx^3-3atx\ m=0$, se mudará en $4x^3-6x-20=0$, cuyo divisor es $x-2$: luego $x=2$, $y=x^2-a=4-2=2$, y $\sqrt[3]{(2+14\sqrt{2})}=2+\sqrt{2}$.

Sea el 2.º eg. $\sqrt[3]{52+30\sqrt{3})}$, en el que $m=52$, $\sqrt{n}=30\sqrt{3}$, y de consiguiente $m^2 \cdot n=4$: luego para que $\sqrt[3]{(m^2-n)t}$ sea cubo perfecto, es menester suponer $t=2$, y entonces $\frac{\sqrt[3]{(m^2-n)t}}{t}$ se reduce á $\frac{\sqrt[3]{8}}{2}=1$, y la ecuacion $4tx^3-3atx-m=0$ viene á ser $8x^3-6x-52=0$. Su divisor conmensurable es $x-2$: y como la ecuacion $y=x^2-a$ da $y=3$; será $\sqrt[3]{(52+30\sqrt{3})}=2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3}$. Siguiendo este método, que se aplica igualmente á los radicales que contienen cuantidades imaginarias; se podrán sacar fórmulas para la estraccion de las raices superiores á las de tercer grado.

Ecuaciones superiores

265 Aunque hasta ahora no han conseguido los matemáticos encontrar métodos generales completos para resolver las ecuaciones superiores al 1.° y 2.° grado; sus trabajos en esta dificil y vasta materia ofrecen apreciables frutos, no solo para la solucion de muchas ecuaciones numéricas de grados superiores, y aproximacion de las raices de otras; sino que han puesto en claro las propiedades que tienen todas, con no poco provecho de las ciencias físicas y matemáticas. Nosotros

para no esceder los límites de estos elementos absteniéndonos de entrar en las largas y áridas teorías que arredrarían á los principiantes, nos reduciremos á dar en este ramo las ideas fundamentales que al mismo tiempo que les sirvan para las demas ciencias, les proporcionen las luces necesarias á los que deseen mayor instruccion en este punto leyendo las obras que lo tratan de propósito.

Hemos visto que la incognita tiene un valor ó una raiz en las ecuaciones de 1.er grado, dos en las de 2.° y es de discurrir que deberá tener tres en las de 3.°, cuatro en las de 4.° ..... y m en las de grado m. Esto vamos á ver reflexionando sobre las ecuaciones de todos grados, al mismo tiempo que hagamos observaciones que nos conduzcan á su resolucion: suponiendo pasados al 1.er miembro de la ecuacion todos los términos del 2.° lo cual le convierte en cero. Luego todo valor dado á la incognita que reduzca la ecuacion á cero, deberá ser una de sus raices.

Sean a y b los valores ó raices de x; de suerte que sea $x=a$, $x=b$, ó $x-a=0$, $x-b=0$: si multiplicamos $x-a$ por $x-b$ resultará. . . . . $x^2 \left.\begin{matrix}-a\\-b\end{matrix}\right\}x+ab=0$: ecuacion de 2.° grado, cuyas raices ó valores de x son a y b: y en la que partiendo por $x-a=0$, sale $x-b=0$, y al contrario.

Si se multiplican entre si $x-a=0$, $x-b$

$=0$, $x-c=0$; resulta la ecuacion de 3.er grado. . . . . . .

$$x^3 \left.\begin{matrix}-a\\-b\\-c\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}+ac\\+bc\\+ab\end{matrix}\right\} x - abc=0:$$

en la que a,b,c son los tres valores de x; y que puede resolverse en tres factores de 1.er grado ó en dos, uno de 1.º y otro de 2.º grado.

Ultimamente, la ecuacion de 4.º grado formada de $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, tiene cuatro raices, y se puede re-

$$\ldots x^4 \left|\begin{matrix}-a\\-b\\-c\\-d\end{matrix}\right| x^3 \left|\begin{matrix}+ab\\+ac\\+bc\\+ad\\+bd\\+cd\end{matrix}\right| x^2 \left|\begin{matrix}-abc\\-abd\\-acd\\-bcd\end{matrix}\right| x+abcd=0:$$

solver en cuatro factores de 1.er grado ó en dos de 2.º ó en uno de 3.º y otro de 1.º

266 Observando los términos de estas ecuaciones, ó de otras cualesquiera mas elevadas, se ve en primer lugar, que el 1.º es la incognita elevada á una potencia igual al número de sus raices; y que en los demas términos va disminuyendo de una unidad. El coeficiente del 2.º término es la suma de todas las raices mudado el signo: el coeficiente del 3.º es la suma de los productos de todas las raices tomadas dos á dos (225): el del 4.º la suma de los productos de dichas raices tomadas tres á tres, y asi de los siguientes hasta el último que es producto de todas las raices.

267 2.º En dichas ecuaciones en que todas las raices son positivas, alternan los signos + y —: y si hubiesen sido negativas, multiplicando $(x+a)$ $(x+b)$ $(x+c)$ &c. todos los términos hubieran tenido unos mismos signos. Luego en toda ecuacion de raices reales hay tantas raices positivas como alternativas de signos + y —; y tantas negativas como repeticiones de un mismo signo. De consiguiente para convertir las raices positivas de una ecuacion en negativas y al contrario basta mudar los signos de los términos pares 2.º 4.º 6.º &c.

268 Esta regla falla en las raices imaginarias: la ecuacion $x^3+px^2+3p^2x-q=0$, por eg., que debe tener una raiz positiva y dos negativas por una mutacion de signos y dos sucesiones, si se multiplica por $x-2p=0$, que es otra raiz positiva, deberia producir una ecuacion con dos positivas y dos negativas: y sin embargo el producto $x^4-px^3+p^2x^2-(6p^3-q)x+2pq=0$, atendidos los signos, espresa las cuatro raices positivas: luego las raices que en la primera ecuacion aparecian negativas, y en la segunda positivas, son imaginarias.

269 3.º Pues que el coeficiente del 2.º término de una ecuacion es la suma de sus raices (266); siempre que falte dicho término, tendrá la ecuacion raices positivas y negativas, y la suma de las unas será igual á la de las otras.

4.º Asimismo habrá á lo menos una raiz igual á cero en la ecuacion que no tenga último término: pues es este el producto de todas las raices (266): y asi la ecuacion $x^3+5x^2-3x=0$ puede dividirse por $x=0$.

270 Supongamos ahora que todas las raices de una ecuacion sean iguales á b, y que el número de ellas sea m: deberá ser su 1.er término x^{m-1} el 2.º x^{m-1} con el coeficiente mb, que es la suma de todas sus raices, esto es, mbx^{m-1}; el 3.er término ha de ser x^{m-2} multiplicado por la suma de todos los productos de las raices tomadas dos á dos: y como cada producto es b^2, y el número de ellos ha de ser $m\times\frac{m-1}{2}$ (226); será dicho término $\frac{m\times m-1}{2}$ b^2x^{m-2}. En el 4.º término ha de multiplicar á x^{m-3} la suma de los productos b^3 de las raices tomadas tres á tres, que es $\frac{m\times m-2\times m-2}{1\times 2\times 3}$; será pues $\frac{m\times m-1\times -2}{1\times 2\times 3}b^3x^{m-3}$.. y así hasta el último, que ha de ser b^m producto de todas las raices. Luego dicha ecuacion $(x-b)^m=0$ será $x^m+\frac{m}{1}bx^{m-1}+\frac{m\times m-1}{1\times 2}b^2x^{m-2}+\frac{m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3}b^3$ $x^{m-3}+$&c. $+b^m=0$. Esta espresion es justamente la fórmula del binomio de Newton, cuya formacion ofrecimos esplicar (164): y en la que debe llevarse entendido que todas las espresiones x a, x^2 a^2, x^3-a^3...x^m—a^m son

exactamente divisibles por $x-a$, siendo m un número entero y positivo.

271 Volviendo á las ecuaciones, veamos cómo se trasforma la siguiente $x^3+\frac{ax^2}{b}+\frac{c2}{d}+\frac{e}{t}=0$ en otra que no tenga quebrados. Para esto harémos $x=\frac{y}{bdt}$, y sustituyendo este valor en la ecuacion propuesta, tendrémos $\frac{y^3}{b^3d^3t^3}+\frac{ay^2}{b^3d^2t^2}+\frac{cy}{bdt^2}+\frac{e}{t}=0$, en donde multiplicando por $b^3d^3t^3$ resulta $y^3+adty^2+b^2cd^2t^2y+b^3d^3t^2e=0$: ecuacion que no tiene fracciones, y en la cual averiguadas las raices de y, se tendrán las de x partiéndolas por bdt.

272 Tambien facilita la resolucion de las ecuaciones el quitarlas su 2.º término. Tomemos para este efecto la ecuacion general $y^m\pm ay^{m-1}\pm by^{m-2}\pm$&c. $=0$: supongamos $y=x+t$ siendo t de tal valor que haga desaparecer el 2.º término. Sustituyase $x+t$ en la ecuacion general, y se mudará en la siguiente...

$$\left.\begin{array}{l} x^m+mtx^{m-1}+\frac{m\times m-1}{2}t^2x^{m-2}+\&c. \\ \pm\, ax^{m-1}\pm(m-1)\,atx^{m-2}\pm\&c. \\ \pm\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; bx^{m-2} \end{array}\right\}=0$$

Para que en ella sea cero el 2.º término, deberá ser $mtx^{m-1}\pm ax^{m-1}=0$, ó $mt=\pm a$, y

$t = \pm \frac{a}{m}$: luego *desaparecerá el 2.º término de una ecuacion suponiendo su incognita igual á otra menos ó mas el coeficiente de su 2.º término dividido por el esponente del 1.º restándole cuando es positivo, y sumándole si es negativo.*

Si se tuviese la ecuacion $y^3+by^2+cy+d=0$; se hará $y=x-\frac{b}{3}$; y será la ecuacion trasformada, $x^3+(c-\frac{b^2}{3})x+\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d=0$ sin 2.º término. La ecuacion $x^4-2x^3-4=0$ se trasforma, haciendo $x=y+\frac{2}{4}$, en $y^4-\frac{3}{2}y^2-y-\frac{67}{16}=0$. Podria igualmente quitarse el 3.º 4.º &c. términos de una ecuacion; pero como entonces resultan radicales en la trasformada, embaraza este arbitrio en lugar de facilitar la operacion.

Resolucion de las ecuaciones de tercer grado.

273 Tratemos ya de resolver una ecuacion de 3.r grado, que supondrémos sin 2.º término: y sea $x^3+px+q=0$. Si hacemos $x=u+z$; se convertirá en esta $u^3+3u^2z+3uz^2+z^3+pu+pz+q=0$: en la que sea u ó z tal que $u^3+z^3+q=0$, y de consiguiente $3u^2z+3uz^2+pu+pz=0$, que da partiendo por $u+z$, $3uz+p=0$, y $u=-\frac{p}{3z}$.

Sustituido este valor de u en $u^3+z^3+q=0$, la muda en $z^3-\frac{p^3}{27z^3}+q=0$, ó $z^6+qz^3=\frac{1}{27}p^3$ ecuacion de 6.º grado que resuelta por el método de las de 2.º (262) da $z^3=-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$: y de consiguiente $z=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}))}$.......... Puesto este valor en la ecuacion $u^3+z^3+q=0$, ó $u=\sqrt[3]{(-z^3-q)}$, se tiene $u=$........ $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q^2\pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}$: luego $u+z=x=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}$ á que se reducen los dos casos de $+$ y $-$.

Para sacar los otros dos valores de x, hay que dividir la ecuacion $x^3+px+q=0$ por el que acabamos de encontrar. Supondremos pues, para simplificar la operacion, $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}=m$, y $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}=n$; será $x=m+n$, $mn=-\frac{1}{3}p$, $m^3+n^3=-q$, y de consiguiente $p=-3mn$, y $q=-m^3-n^3$. Sustituidos estos valores en la ecuacion $x^3+px+q=0$, queda reducida á $x^3-3mnx-m^3-n^3=0$; que dividida por su factor $x=m+n$ ó $x-m-n=0$, produce $x^2+(m+n)x+m^2+n^2-mn=0$: ecuacion de 2.º grado en la que $x=-\frac{1}{2}(m+n\pm\frac{1}{2}(m-n)\times\sqrt{-3}$. Luego las tres raices de la propuesta son $x=m+n$, $x=\frac{1}{2}(m+n)+\frac{1}{2}(m-n)\sqrt{-3}$, $x=\cdot\frac{1}{2}$

$(m+n)-\frac{1}{2}(m-n)\sqrt{-3}$: en donde solo falta poner en lugar de m, n sus valores.

274 La primera raiz $m+n$ es real, y las otras dos imaginarias cuando m y n son cuantidades reales, ó cuando es real $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$: lo que se verifica 1.° cuando p es positiva; 2.° cuando en el caso de ser negativa ó de ser la ecuacion $x^3-px\pm q=0$, es $\frac{1}{4}q^2$ mayor que $\frac{1}{27}p^3$. Veamos lo que sucede si $\frac{1}{4}q^2$ es menor que $-\frac{1}{27}p^3$.

275 En este caso suponiendo para hacer el cálculo mas sencillo, $r=\frac{1}{2}q$, y $\sqrt{(-\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=t\sqrt{-1}$, las tres raices se mudan en $x=\sqrt[3]{(-r+t\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(-r-t\sqrt{-1})}$,

$x=-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{(-r+t\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(-r-t\sqrt{-1})})+\frac{1}{2}\sqrt{-3}(\sqrt[3]{(-r+t\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(-r-t\sqrt{-1})})$,

$x=-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{(-r+t\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(+r-t\sqrt{-1})})-\frac{1}{2}\sqrt{-3}(\sqrt[3]{(-r+t\sqrt{-1})}-\sqrt[3]{(-r-t\sqrt{-1})})$.

Reduzcanse á serie $\sqrt[3]{(r\pm t\sqrt{-1})}=(r\pm t\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ (140 y 177); y será $(-r+t\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-r^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}\times t\sqrt{-1}-\frac{1}{9}r^{\frac{2}{3}}t^2-\frac{5}{81}r^{-\frac{8}{3}}t^3\sqrt{-1}+\frac{10}{243}r^{-\frac{11}{3}}t^4+\frac{22}{729}r^{\frac{14}{3}}t^5\sqrt{-1}-$&c.

y $(-r-t\sqrt{-1})^{-\frac{1}{3}}=-r^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}t\sqrt{-1}-\frac{1}{9}r^{-\frac{5}{3}}t^2+\frac{5}{81}r^{\frac{8}{3}}t^3\sqrt{-1}-\frac{10}{243}r^{-\frac{11}{3}}t^4-\frac{22}{729}r^{\frac{14}{3}}t^5\sqrt{-1}-$&c.

Sumo ahora estas dos series, y será el 1.er valor $x=2r^{\frac{1}{3}}(1+\frac{t^2}{9r^2}-\frac{10t^4}{243r^4}+\ldots\ldots\frac{154t^6}{6561r^6}-$ &c.) poniendo al principio $2r^{\frac{1}{3}}$ comun á todos los términos. En los otros valores restando la segunda serie de la primera, despues de haberlas multiplicado por $\sqrt{3}$, resulta $x=r^{\frac{1}{3}}(1+\frac{t}{9r^2}-\frac{10t^4}{243r^4}+\frac{154t^6}{6561r^6}-$ &c.$)-\frac{t\sqrt{3}}{3r^{\frac{2}{3}}}(1-\frac{5t^2}{27r^2}+\frac{22t^4}{243r^4}-$ &c.$)$ y $x=r^{\frac{1}{3}}(1+\frac{t^2}{9r^2}-\frac{10t^4}{243r^4}+\frac{154t^6}{6561r^6}-$&c$)+\frac{t\sqrt{3}}{3r^{\frac{2}{3}}}(1-\frac{5t^2}{27r^2}+\frac{22t^4}{243r^4}-$ &c.$)$: valores en cuyos términos no hay cuantidades imaginarias.

Luego cuando $\frac{1}{27}p^3$ es negativo y mayor que $\frac{1}{4}q^2$, los tres valores de x son reales: aunque hasta ahora no se ha encontrado método alguno para espresarlos exactamente, y por eso se ha dado á este caso el nombre de *irreductible*. De consiguiente cualquiera ecuacion de 3.er grado tiene siempre una raiz que se puede espresar exactamente, y dos imaginarias cuando p es positivo, ó cuando siendo negativo, $\frac{1}{27}p^3$ es menor que $\frac{1}{4}q^2$. Al contrario, si en el caso de ser p negativo, fuese $\frac{1}{27}p^3$ mayor que $\frac{1}{4}q^2$, todas las tres raices seran reales, pero no se podrán espresar sino por séries infinitas.

Si se pidiese un número de cuyo cubo restando el producto de dicho número por 36, *resultan* 91; tendriamos la ecuacion $x^3-36x=91$: en la que $\frac{1}{4}q^2=\frac{8281}{4}$ es mayor que $\frac{1}{27}p^3=-1728=-\frac{6912}{4}$: luego tendrá una raiz real, y dos imaginarias. La primera se saca sustituyendo en la formula $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{7}p^3)})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q-\frac{1}{4}\sqrt{q^2+\frac{1}{27}p^3})}$ los valores de p y q; pues resulta

$$\sqrt[3]{(\frac{91+37}{2})}+\sqrt[3]{(\frac{91-37}{2})}=4+3=7$$

que satisface la pregunta. Las imaginarias son faciles de encontrar. Cuando la ecuacion dada tiene 2.º término, se comienza su resolucion haciéndole desaparecer (272): y averiguado el valor de la nueva incognita, se saca despues el de la primera.

275 Si en el caso irreductible el valor real de x es un número entero; deberá ser $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ un cubo perfecto, cuya raiz constará de una parte real que llamo m, y de otra imaginaria que supongo n. Será pues $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}$ $=m+n$, y $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}$ $=m-n$: y la suma de las dos o $x=m+n+m-n=2m$: y en este caso se tendrá el valor exacto de x duplicando la parte real de la raiz cúbica de $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$.

En la ecuacion $x^3-39x-70=0$ por

eg., en donde $p=-39$, $q=-70$; se tiene $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=35+18\sqrt{-3}$; y siendo las tres raices cúbicas de esta cuantidad $-1+2\sqrt{-3}$, $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-3}$, cuyas partes reales son -1, $\frac{7}{2}$ y $-\frac{5}{2}$; serán las tres raices de x en la ecuacion propuesta -2, 7, y -5.

Finalmente, en la ecuacion $x^3-17x\ 4=0$, se tiene $p=-17$, $q=-4$; y $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)}$ se reduce á $2+\frac{31}{3}\sqrt{\ \frac{5}{3}}$, cuyas raices cúbicas son $-2+\sqrt{-\frac{5}{3}}$, $1+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{(\frac{41}{12}+\sqrt{5})}$, $1-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{(-\frac{41}{12}-\sqrt{5})}$: luego las raices de la ecuacion son -4, $2+\sqrt{5}$ y $2-\sqrt{5}$.

Resolucion de las ecuaciones de 4.º grado

276 Hayase de resolver la ecuacion general $x^4+px^2+qx+r=0$ á que puede reducirse cualquier otra despues de habérsele quitado su 2.º término. Para esto, consideremosla formada de las dos ecuaciones de 2.º grado $x^2+sx+t=0$, $x^2-sx+u=0$, en las que s, t, u son indeterminadas, y su forma és tal que multiplicadas producen una ecuacion sin 2.º termino. En efecto, el producto es $x^4+(t-s^2+u)x^2+(su\ st)x+tu=0$, que comparada término por término con la general, da $p=t-s^2+u$, $q=su-st$, y $r=tu$. De la 1.ª sale $t+u=s^2+p$: y de la 2.ª $t\,u=-\frac{q}{s}$; luego (101)

$t=\frac{s^2+p}{2}-\frac{q}{2s}$, y $u=\frac{s^2+p}{2}+\frac{q}{2s}$. Sustituidos estos valores en $r=tu$, resulta $r=\frac{(s^2+p)^2}{4}-\frac{q^2}{4s^2}$, ó $s^6+2ps^4+(p^2-4r)s^2-q^2=0$, ecuacion de 6.º grado que se reduce á 3.º haciendo $s^2=z$; pues se muda en $z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$, que se llama *la reducida*: y por la que se averigua el valor de s.

Ponganse ahora los valores de t, u en las ecuaciones $x^2+sx+t=0$, $x^2-sx+u=0$; y tendrémos $x^2+sx+\frac{s^2+p}{2}-\frac{q}{2s}=0$, $x^2-sx+\frac{s^2+p}{2}+\frac{q}{2s}=0$, cuyas raices $x=-\frac{1}{2}s\pm\sqrt{(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2s})}$, y $x=\frac{1}{2}s\pm$.................. $\sqrt{(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2s})}$, que se pueden espresar todas por la fórmula $x=\pm\frac{1}{2}s\pm\sqrt{(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2s})}$; dan los cuatro valores siguientes de x.. $x=\frac{1}{2}s+\sqrt{(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2s})}$, $x=\frac{1}{2}s-\sqrt{(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2s})}$, $x=-\frac{1}{2}s+\sqrt{(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2s})}$, $x=-\frac{1}{2}s-\sqrt{(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2s})}$: en los que sustituyendo el valor de s, se tienen finalmente los de la ecuacion $x^4+px^2+qx+r=0$.

277 Supongamos para abreviar, $m=\frac{1}{2}s$ $n=\sqrt{(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2s})}$, $f=\sqrt{(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2s})}$; y serán las cuatro raices $x=m+n$, $x=m-n$, $x=-m+f$, $x=-m-f$: ó $x-m-n=0$, $x-m+n=0$, $x+m-f=0$, $x+m+f=0$: multipliquense entre sí, y producirán la ecuacion $x^4-(2m^2n^2f^2)x^2+(2mf^2-2mn^2)x+m^4-m^2n^2-m^2f^2+n^2f^2$: que comparada con la general $x^4+px^2+qx+r=0$, da $p=-2m^2-n^2-f^2$, $q=2mf^2-2mn^2$, $r=m^4-m^2n^2-m^2f^2+n^2f^2$: ponganse estos valores en la reducida $s^6+2ps^4+(p^2-4r)s^2-q^2=0$, y la trasformará en...................

$$\left.\begin{array}{r} s^6-4m^2\\ -2n^2\\ -2f^2 \end{array}\right| \begin{array}{r} +8m^2n^2\\ s^4+8m^2f^2\\ +\quad n^4\\ -2n^2f^2\\ +\quad f^4 \end{array} \left| \begin{array}{r} +8m^2n^2f^2\\ -4m^2n^4\\ s^2-4m^2f^4 \end{array}\right| =0$$

y como los tres factores de esta ecuacion son s^2-4m^2, $s^2-n^2-2nf-f^2$, $s^2-n^2+2nf-f^2$; se infiere...

Lo 1.º que la reducida considerada como equacion de 3.er grado no tiene mas que una raiz real siempre que n y f son imaginarias, es decir, cuando $x^4+px^2+qx+r=0$ tiene dos raices iguales y dos imaginarias: y como en este caso la reducida tiene solucion exacta; la tendrá tambien la propuesta.

2.º Que si n, f son ambas reales ó imaginarias, ó si la ecuacion general tiene sus cuatro raices reales ó imaginarias; entonces la reducida considerada como de 3.er grado, está en el caso irreductible, y tiene sus tres raices reales: y si estas son positivas, las cuatro de la propuesta serán reales: porque entonces $2m$, $m+f$, $n-f$ son cuantidades reales. Si llamamos M la 1.a, N la 2.a y P la 3.a; será $2n=N+P$, y $2f=N-P$; luego $2m+2n=M+N+P$, $2m-2n=M-N-P$, $-2m+2f=N-P-M$, $-2m-2f=P-N-M$: y pues estos son los cuatro valores de x; serán reales.

Pero si la reducida solo tiene positiva una de estas raices; serán imaginarias todas las de la propuesta. En efecto, sea s^2-4m^2 la unica raiz positiva de la reducida; tendremos $2m=M$ cuantidad positiva; $n+f=N\sqrt{-1}$, y $n-f=P\sqrt{-1}$: de consiguiente $n=\frac{1}{2}P\sqrt{-1}\pm\frac{1}{2}N\sqrt{-1}$, y $f=\frac{1}{2}N\sqrt{-1}\pm\frac{1}{2}P\sqrt{-1}$, cuantidades que hacen parte de los cuatro valores, que por lo mismo serán imaginarios. Lo mismo hubiera resultado en la suposicion de ser positiva cualquiera de las otras dos raices: y asi se ve que la resolucion de las ecuaciones de 4.o grado está sujeta al mismo inconveniente del caso irreductible que las de 3.o

Si se nos pidiesen las raices de la ecuacion $x^4-3x^2-42x-40=0$; tendriamos $p=-3$, $q=-42$, $r=-40$: y seria la

reducida $s^6-6s^4+169s^2-1764=0$, que se muda haciendo $s^2=2+z$ (272), en $z^3+157z-1442=0$. Esta tiene dos raices imaginarias, y la real $z=7$: luego $s=\pm\sqrt{z+2}=\pm3$. Sustituyendo uno de estos valores en la formula general $x=\pm\frac{1}{2}s\pm\sqrt{(-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{2}p\pm\frac{q}{2s})}$; resultan las cuatro raices $x=-1$, $x=4$, $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-31}$ de la ecuacion propuesta.

278 Cuando las cuatro raices de la ecuacion de 4.o grado son reales, se encuentran facilmente, siempre que alguno de los valores de la reducida es un número entero, valiéndose del método esplicado (276) para hallar las raices irreductibles de una ecuacion de 3.er grado, cuando alguna de ellas es un número entero.

Pídense, por eg., las raices de la ecuacion $x^4-25x^2+60x-36=0$. En este caso $p=-25$, $q=60$, $r=-36$, y la reducida es $s^6-50s^4+769s^2-3600=0$. Hagase $s^2=\frac{z+50}{3}$ (272), y no $z+\frac{50}{3}$ para evitar quebrados: y se convertirá en $z^4-579z-1150=0$, cuyas raices son (273), $z=25$, $z=-2$, $z=-23$: de consiguiente $\pm\sqrt{(\frac{z+50}{3})}=s=\pm5$, ±4, ±3. Cualquiera de estos valores sustituido en la fórmula $x = \pm \frac{1}{2} s \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2s}\right)}$ da los cuatro valores $x=3$, $x=2$, $x=1$, $x=6$ que se piden.

279 Como una ecuacion de 4.º grado es el producto de cuatro factores de 1.º v. gr. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, y este producto es divisible por seis factores de 2.º grado, á saber, por $(x+a)(x+b)$, $(x+a)(x+c)$, $(x+a)(x+d)$, $(x+b)(x+c)$, $(x+b)(x+d)$, $(x+c)(x+d)$ que tienen todos un 2.º término, cuyo coeficiente es representado generalmente por s; es claro que s debe tener seis factores diferentes, y la ecuacion de s ascender á 6.º grado.

Asimismo faltando á la ecuacion propuesta el 2.º término, si uno de los valores de s es g, debe ser otro $-g$, y s^2g^2, será uno de sus factores. Por igual razon, si h, $-h$, i, $-i$ son los otros cuatro valores de s, deberán ser s^2-h^2, s^2-i^2 del número de sus factores; y de consiguiente, ademas de ser la ecuacion de 6.º grado, deberán ser pares todas las potencias de s como lo son en efecto.

Resolucion de las ecuaciones superiores al 4.º grado

280 La teoría de las ecuaciones superiores al 3.º y 4.º grado sufre aun mayores dificultades, á pesar de los esfuerzos inútiles

que han hecho los mayores talentos para encontrar métodos generales para resolverlas. Nosotros vamos á dar una idea de aquellos de que se han valido; y se verá por las muchas escepciones y dificultades á que están espuestos, cuánto dista de su perfeccion este ramo importante del analísis.

281 1.er *Método*. Este que se llama *de los divisores*, se funda en la propiedad que tiene el último termino de una eqnacion de ser el producto de todas sus raices (266): pues si dicho término se resuelve en todos sus divisores; deberán hallarse entre ellos las raices de la ecuacion, si las tiene conmensurables: y deberán ser aquellos que sustituidos en ella con + ó — en lugar de la incognita, la reduzca á cero.

Si se pidiesen por eg. las raices de la ecuacion $x^3+8x^2+17x-10=0$; sacaré todos los divisores de 10 (56), que son 1, 2, 5, 10, y dividiendo la ecuacion por $x+1$, $x-1$, $x+2$, $x-2$ &c. tendré un cociente exacto con los divisores $x-1$, $x-2$, $x-5$ que serán las raices que busco. Pero es mas breve sustituir en la ecuacion ±1, $\pm2 \pm5$, ±10 en lugar de x; y 1, 2, 5 darán cero en prueba de que son sus raices.

282 Este método que se estiende á las ecuaciones de todos grados, cuando sus raices no son inconmensurables; tiene el inconveniente de necesitar muchos tanteos cuando

en el último término hay muchos divisores. Para evitarle, supongamos que sea a uno de los divisores del último término que con x forma el factor $x+a$ de una ecuacion. Es evidente que si en ella se supone sucesivamente $x=1$, $x=0$, $x=-1$; han de ser divisibles los resultados por $1+a$, por a, y por $-1+a$ á que se reduce el factor en virtud de estas suposiciones. Notese que $1+a$, a, $-1+a$ están en progresion aritmética: y que él resultado de la suposicion $x=0$ es el último término de la ecuacion, cuyo divisor es a. Luego para que éste forme con x el factor de la ecuacion, debe tener entre los divisores de los otros resultados números que estén con él en progresion aritmética; y si se encuentran muchos con estas señas se conocerá facilmente los que se deben escluir haciendo $x=2$, y viendo cuales son las progresiones que no continúan por los divisores del resultado: obrando igualmente si es menester escluir mas.

Sírvanos de eg. la ecuacion $x^3+3x^2+8x+10=0$; en la que suponiendo $x=1$, $x=0$, $x=-1$, me resultan 6, 10, 20: saco los divisores de estos números y colocados del modo siguiente. . . . .

Suposic.	*Result*	*Divisores.*	*Progresion.*	
$x=1$	6	1, 2, 3, 6,	3	6
$x=0$	10	1, 2, 5, 10,	2	5
$x=-1$	20	1, 2, 4, 5, 10, 20,	1	4

tendré dos progresiones que me dan 2 y 5 por valores de a: pero como suponiendo $x=2$ que reduce la ecuacion á 14, solo hay entre sus divisores 1, 2, 7, 14, el 7 que continúe la segunda progresion; concluyo que el $x+5$ es unico factor de la ecuacion. Con efecto, dividiendo $x^3+3x^2-8x+10$ por $x+5$, resulta el cociente exacto $x^2-2x+2=0$; cuyas raices son $x=1\pm\sqrt{-1}$. Por el mismo método se hallará que las raices conmensurables de la ecuacion $x^3-3x^2-46x-72=0$, son $x=9$, $x=-2$, $x=-4$.

283 Para encontrar los factores conmensurables de 2.º grado de una ecuacion; si $x^2+bx+c=0$ es uno de ellos, y suponemos sucesivamente en dicha ecuacion ó cuantidad dada $x=2$, $x=1$, $x=0$, $x=-1$, $x=-2$, los resultados á que la reducen, han de ser divisibles por $4+2b+c$, por $1+b+c$, por c, por $-1-b+c$, y por $4-2b+c$, en que se convierte el factor.

Habrá pues, entre los divisores del resultado $x=2$ alguno que represente $4+2b+c$, y si de cada uno de ellos tomados con + y - se resta 4, alguna de las restas representará $2b+c$.

Asimismo habrá entre los divisores del resultado $x=1$ alguno que represente $1+b+c$: y si se quita 1 de cada divisor con +y-, algun residuo deberá ser $b+c$. Entre los divisores del último término á que se reduce la ecuacion en la suposicion de $x=0$, alguno equivaldrá á c: y entre los del resultado de $x=-1$ representados por $1-b+c$; debe encontrarse $-b+c$: quitando 1 á todos sus divisores tomados con + y —: así como se debe hallar $-2b+c$ entre los que resultan de $x=-2$, despues de quitar 4 á cada uno de sus divisores con +y—.

Las cuantidades $2b+c$, $b+c$, c, $-b+c$, $-2b+c$ están en progresion aritmética: de consiguiente en la serie de los números que los representan, se deberán tomar los que estén en progresion aritmética: y el que en ellos corresponda á la suposicion $x=0$; será el valor de c; como tambien será $b+c$ el de la suposicion $x=1$: luego si del 1.° se resta c, quedará el valor de b, y se habrá determinado el factor $x^2+bx+c=0$.

Apliquemos el método á un eg., advirtiendo que si resultan muchas progresiones, se verá cuales se deben escluir por una nueva suposicion $x=3$, ó -3, restando de cada divisor del resultado tomado en +y—, 9 cuadrado de 3, y observando las progresiones que no se continuan con los números que resulten.

Sea $x^4-3x^2-12x+5=0$ la ecuacion, cuyos factores de 2.° grado se han de buscar; para lo cual procedo como se vé. . . . .

Supos.	*Res.*	*Divisores.*
$x=2$	15	1.3. 5.15.
$x=1$	9	1.3. 9.
$x=0$	5	1.5.
$x=-1$	15	1.3. 5.15.
$x=-2$	33	1.3.11.33.

Residuos.	*Progresiones.*			
-19-9-7-5-3-1,1,11	-3	1	-5	11
-10-4-2,0,2,8	-4	0	-2	8
-5-1,1,5	-5	-1	1	5
-16-6-4-2,0,2,4,14	-6	-2	4	2
-37-15-7-5-3-1,7,19	-7	-3	7	-1

La 1.ª coluna contiene las suposiciones, la 2.ª los resultados, la 3.ª sus divisores: la 4.ª los residuos, cuya primera línea se forma así; $-15-4=-19$, $-5-4=-9$, $-3-4=-7$, $-1-4=-5$: ahora se han tomado los divisores con—, tomados con +dan $1-4=-3$, $3-4=-1$, $5-4=1$, $15-4=11$. Las últimas colunas contienen las progresiones.

Comparando ahora los residuos que corresponden á la suposicion $x=0$ con los superiores é inferiores, se verá que -5 es medio proporcional aritmético entre -4 y -3 que están en las líneas de encima y -6, -7 que están en las debajo: escribo pues esta progresion, que es la única que se encuentra, comparando -5 con los demas residuos. Paso despues á -1 que me da una progresion, cuya diferencia es 1, y otra con la diferencia 3: y finalmente con el -5 encuentro otra con la diferencia 3.

Y como las cuatro progresiones no pueden ser todas útiles: pues los cuatro números -5, -1, 1 y 5 no producen 5 (266); haré otra suposicion $x=3$, cuyo resultado 23 tiene por divisores á 1 y 23; de los que restando 9 cuadrado de 3, salen los residuos -32, -10, -8, y 14, entre los cuales -8 y 14 continuan las dos últimas progresiones, y faltan -2 y 2 que debian continuar las otras dos. Tomaré pues, en la penúltima -1 que corresponde á $x=0$ para representar á c, y -2 que corresponde á $x=1$, será $b+c$; luego b será -3 : y el 1.^{er} factor por el que se ha de dividir la ecuacion, será $x+3$ $x+1=0$; y como resulta el cociente cabal $x^2-3x+5=0$ concluyo que estos dos son los factores de 2.^{o} grado de la ecuacion propuesta.

274 2.º *Método.* Este se reduce á encontrar las ecuaciones inferiores que producen una ecuacion superior cualquiera, cuando esto sea posible. Sea por eg. la ecuacion general $x^m+amx^{m-1}+bx^{m-2}+h=0$ la que se trate de dividir sin resta por una ecuacion del grado n. Para lo cual supongo que la propuesta es el producto de las dos siguientes $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+T=0$, y $x^{m-n}+px^{m\,n-2-1}+qx^{m-n-2}+$ &c... $+t=0$, cuyos coeficientes son todos indeterminados. Del producto de estas dos ecuaciones resultará otra del grado m, cuyos términos comparados con los de la propuesta, darán las ecuaciones suficientes para determinar las cuantidades A, B, C &c. p, q, t &c. y por último reduciendo estas ecuaciones á una que contenga solo alguna de las indeterminadas A, B &c. p, q &c. faltará solamente buscar los divisores conmensurables de esta ecuacion (que los debe tener por ser numeros enteros todos sus coeficientes), para determinar el valor de dichos coeficientes, y hacer determinadas las ecauciones que componen.

Propongamonos examinar si la ecuacion $x^4-x^3+2x^2-x+15=0$; puede descomponerse en otras dos de 2.^{o} grado, que supondrémos sean $x^2+px+q=0$, $x^2+mx+n=0$. Su producto $x^4+(p+m)x^3+(q+mp+n)x^2+(mq+np)x+nq=0$ comparado con la ecuacion propuesta, da $p+m=1$, $q+mp+n=2$, $mq+np=-1$, $nq=15$: ecuaciones que vienen á parar en la siguiente $q^6-2q^5-16q^4+44q^3-240q^2-450q+3375=0$; cuyos divisores conmensurables son $q-3$ y $q-5$. Luego podremos suponer $q=3$ ó $q=5$; y de consiguiente será $n=5$ ó 3, $p=-2$ ó 3, $m=3$ ó -2: y los dos factores de la ecuacion propuesta serán $x^2-2x+3=0$, $x^2+3x+5=0$.

285 Demostremos la importante verdad que hemos supuesto, y en la que se funda este método; á saber, *que en toda ecuacion,*

cuyo 1.er *termino tiene á* 1 *por coeficiente y los de los demas lo mismo que las cuantidades conocidas son números enteros, ninguna de sus raices pueda ser una fraccion: sino que todos serán números enteros ó inconmensurables.* Si en la ecuacion general $x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}...+Tx+V=0$, sustituimos á x una fraccion irredutible $\frac{a}{b}$ que si es raiz suya la ha de reducir á cero (282); tendremos $\frac{a^n}{b^n}+\frac{Pa^{n-1}}{b^{n-1}}+\frac{Qa^{n-2}}{b^{n-2}}...+T\frac{a}{b}+V=0$, que se trasforma multiplicando todos sus términos por b^n, en $a^n+Pa^{n-1}b+Qa^{n-2}b^2...+Pab^{n-1}+Vb^n=0$, que viene á ser $a^n+b\,(Pa^{n-1}+Qa^{n-2}b...\ T\text{-}ab^{n-2}+Vb^{n-1})=0$: cuyo 1.r miembro se compone de dos partes $a^n+b(Pa^{n-1}+Qa^{n-2}b...$ espresadas con números enteros, y la otra $Tab^{n-2}+Vb^{n-1}$ que es divisible por b. La 1.a no lo es, supuesto que $\frac{a}{b}$ es irreductible, ó que a y b no tienen divisor comun: luego es imposible que las dos sean iguales como debian serlo, para reducirse á cero, y de consiguiente que pueda ser raiz suya.

286 3.er *Método* En este, que sirve para encontrar el valor proximo de las raices que no se ha podido sacar exacto; se suponen conocidos dos números entre los que se encuentre la raiz, y despues se procede como vamos á ver en el eg. siguiente en que se quiere

averigar uno de los valores proximos de x en la ecuacion $x^3-5x+6=0$.

Sustituyanse en ella 0, 1, 2, 3 &c. en lugar de x: y como los resultados son todos positivos que van creciendo, se sustituirán 0, -1, -2, -3, y se tendrá 6, 10, 8, -6 de resultados: de que colijo que una de las raices se halla entre -2 y -3, que han dado 8 y -6 de diferentes signos. Sumando ahora 2 y -3 y tomando la mitad, se tendrá un medio aritmético entre los dos, que es -2,5 que puesto por x en la ecuacion, la reduce á 2,875 cuantidad positiva, que circunscribe la raiz á los nùmeros $-2{,}5$ y -3. Tomando entre ellos otro medio $-2{,}7$ y sustituyéndolo en la ecuacion, resulta la cuantidad negativa $-0{,}183$: que manifiesta que la raiz está entre $-2{,}5$ y $-2{,}7$ que dan resultados de diferentes signos, y el valor de x estará muy cerca de $-2{,}6$ medio entre los dos.

Encontrado este número tan proximo á x; supongo que sea z la fraccion que le falta para igualarsele, de suerte que sea $x=-2{,}6+z$: sustituyo esta cuantidad en la ecuacion en lugar de x, y la reducirá despreciando z^2 y z^3 que son valores muy pequeños, á $(-2{,}6)^3+3(-2{,}6)^2\times z-5(-2{,}6)-5z+6=0$, esto es, á $15.28z+1.424=0$; de donde se saca $z=-\frac{1,424}{15,28}=-0{,}09$: y $x=-2,\ 6+z=-2,\ 6-$

$0{,}09=-2{,}69$ valor próximo que se busca.

Si se quiere aproximar mas, supongo $x=-2{,}69+t$, y la sustitucion de esta cuantidad en lugar de x, me dará $t=0{,}000904$: de suerte que será $x=-2{,}689096$ que se puede acercar aun cuanto se quiera. Si se divide ahora la ecuacion por este valor de x, resultará otra de grado inferior, cuyas raices próximas será facil encontrar.

288 Cuando sustituyendo por x en la ecuacion los números comprendidos entre cero y su último término, no varian de signo sus resultados, es señal de que contiene raices iguales ó imaginarias, ó parte reales y parte imaginarias en número par: pues teniendo las iguales esta forma $(x-a)^2(x-b)^2=0$, $(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2=0$; sus resultados siempre deben ser positivos: y las imaginarias que no pueden estar entre números reales, tampoco pueden producir cuantidades de diferentes signos. Vease el modo de determinar las raices iguales.

289 Si se multiplica cada uno de los términos de una ecuacion de raices iguales por el esponente que tiene la incognita en aquel término, y se disminuye el esponente del producto de una unidad: se tendrá una nueva ecuacion, cuyo comun divisor con la primera contendrá las raices iguales que se buscan, bien que disminuidas de una unidad. La demostracion de esta regla cuando todas las

raices son iguales, se saca de la ecuacion general $x^m+max^{m-1}+(\frac{m\times m-1}{2})a^2x^{m-2}+\&c.+a^m=0$, en la cual multiplicando cada término por el esponente de x (contando con que en el último el esponente de x es cero), resulta $mx^m+(m\times m-1)ax^{m-1}+(\frac{1}{2}(m\times m-1\times m-2)a^2x^{m-2}+a^m\ \&c.=0$, que dividida por mx, da $x^{m-1}+(m-1)ax^{m-2}+\frac{1}{2}(m-1\times m-2)a^2x^{m-3}+\&c.=0$, la cual equivale al binomio $(x+a)^{m-1}=0$, y cuyo comun divisor con la propuesta $(x+a)^m=0$, es $(x+a)^{m-1}$: luego la regla es evidente cuando todas las raices son iguales.

Si solo lo son dos á dos como en la ecuacion $(x+a)^m(x+b)^m=0$; se multiplicarán uno por otro los dos binomios, y multiplicando cada término de la ecuacion que resulta, por el esponente respectivo de x, produciran $m(x+a)^{m-1}(x+b)^n+n(x+b)^{n-1}\times(x+a)^m=0$, cuyo comun divisor con la propuesta es $(x+a)^{m-1}(x+b)^{n-1}=0$.

Busquemos ya las raices iguales de la ecuacion $x^4-4x^3-2x^2+12x+9=0$. Multiplicando cada término por el esponente de x, resulta $4x^4-12x^3-4x^2+12x=0$, y dividiendo por $4x$, sale $x^3-3x^2-x+3=0$. El comun divisor de esta ecuacion y de la propuesta es (127)x^2-2x-3 producto de $x-3$ por $x+1$: luego las raices iguales de la ecuacion $x^4-4x^3-2x^2+12x+9=0$ son $(x-3)^2$ y $(x+1)^2$.

Las de la ecuacion $x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4=0$, se encuentran multiplicando por los esponentes respectivos, y dividiendo despues por $6x$, que da $x^5-4x^3-2x^2+3x+2=0$, cuyo comun divisor con la propuesta es $x^4+x^3-3x^2-5x-2$, ó $(x+1)^3(x-2)$: serán pues las raices iguales que se buscan, $(x+1)^4$ y $(x+2)^2$.

290 En cuanto á las raices imaginarias, se ha demostrado por D'Alembert en las memorias de la academia de Berlin año de 1746, que todas pueden reducirse á esta forma $x=a+b\sqrt{-1}$, siendo a y b cuantidades positivas ó negativas: como tambien que si $a+b\sqrt{-1}$ es una de las raices, será la otra $a-b\sqrt{-1}$; y de consiguiente que solo las ecuaciones de grado par pueden tener todas sus raices imaginarias. Luego estas se podrán descomponer en factores de 2.° grado de esta forma $(x-a-b\sqrt{-1})$, $(x-a+b\sqrt{-1})$, cuyo producto es $x^2-2ax+a^2+b^2$: y cuando la ecuacion tenga todas sus raices imaginarias, se procurará descomponer en factores de 2.° grado (284), por cuyo medio se tendrán las raices de la ecuacion.

FIN DEL TOMO I.

INDICE

de las materias contenidas en este primer tomo

Prólogo. I
Resumen historico del origen, progresos y estado actual de las matemáticas puras... Aritmética. I
Algebra. 13
Geometría. 26
Introduccion. 47

CAPITULO I

Elementos de Aritmética. 63

ARTICULO I

De la numeracion. 64

ARTICULO II

Cálculo de los números enteros. Adicion. . 70
Sustraccion 73
Multiplicacion. 75
Division ó particion. 82
Divisores de los números. 90

ARTICULO III

De los quebrados. 93
Sumar, restar, multiplicar y partir quebrados. 99
Quebrados decimales. 104
Sumar, restar, multiplicar y partir quebrados decimales. 109

ARTICULO IV

Números complejos. 114
Sumar, restar, multiplicar y partir los números complejos. 116

CAPITULO II

Elementos de Algebra. 123

ARTICULO I

Cálculo de las cuantidades Algébricas. . . 125
Adicion y sustraccion. 127
Multiplicacion 128
Division. 132

ARTICULO II

Quebrados literales. 138
Fracciones contínuas. 144

ARTICULO III

Formacion de las potencias y estraccion de las raices. 146

ARTICULO IV

Cálculo de las cuantidades radicales. . . 174

ARTICULO V

Razones, proporciones y progresiones. . . 186
Usos de las proporciones geométricas. . . 200
Reglas de tres simple, de tara, de seguro, de avería, de trueque, de ganancia ó pérdida. . . . . Id
Regla de tres compuesta, y regla conjunta. 205
Regla de compañías. 208
Regla de aligacion. 210
Regla de falsa posicion sencilla y doble. . . 213
Progresiones geométricas. 217
Permutaciones y combinaciones. 224
Logaritmos. 228
Del complemento aritmético. 237

ARTICULO VI

De las ecuaciones, y de la resolucion de los problemas. 240

Problemas con mas de una incognita . . . 256
Problemas indeterminados. 264
Ecuaciones de segundo grado. 271
Estraccion de las raices parte racionales, y parte inconmensurables 288
Ecuaciones superiores. 292
Resolucion de las ecuaciones de 3.er *grado*. 298
Resolucion de las ecuaciones de 4.° *grado*. 303
Resolucion de las ecuaciones superiores al 4.° *grado*. 308

Erratas esenciales del primer Tomo, que se deben corregir antes de leerle.

Pág.	*Lín.*	*Dice*	*Diga*
37	20	Descrates	Descartes
63	2	falta capítulo I	
65	3	una ó	una ó de
69	25	el	al tercer
90	10	multiplesá	múltiples,ó al
Id.	28	$3\times711=$	$3\times7\times11=$
93	5	los	lo
95	9	mas ó menos	menos ó mas
97	11 y 15	(57)	(59)
98	3	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{8}$
99	18	(64)	(66 *pág.* 95)
Id.	20	(66)	(67 *pág.* 97)
100	6	(64)	(65)
101	19	$\times3\frac{1}{5}3\frac{8}{5}$	$3\frac{1}{5}$
Id.	pen.	(65)	(67 *pág.* 96)
106	22	de	del
109	7	342,0585	342,0583
126	19	*ede*	*cde*
133	5	$8a^3bd$	$8a^2bd$
166	10	32687	32768
167	5	,29	,39
Id.	11, 12 y 13	*el 6 del 1.r número debe caer bajo del 8 del dividendo y el 7 del 2.° y 3.° de los otros dos bajo del 7.*	
175	6	$\frac{3}{4}$	$b-\frac{3}{4}$

Pág.	*Lín.*	*Dice.*	*Diga.*
Id.	8	$b^{\frac{-3}{,q}}$	$b^{\frac{-3}{4q}}$
177.	15.	$+cd^2$	d^2
178.	17.	$\underline{\sqrt[4]{6ab}}$	$\sqrt[4]{\frac{6ab}{c}}$
186.	11.	pueda	puede
194.	6.	subdrupla	subdupla
195.	27.	$a:aq::cq$	$a:aq::c:cq$
216.	1 . , . . .	d	$-d$
233.	2	piediese	pidiese